



HAL
open science

Réduction du bruit quantique de la lumière par une cavité bistable

Laurent Hilico

► **To cite this version:**

Laurent Hilico. Réduction du bruit quantique de la lumière par une cavité bistable. Physique Atomique [physics.atom-ph]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 1992. Français. NNT: . tel-00011884

HAL Id: tel-00011884

<https://theses.hal.science/tel-00011884>

Submitted on 9 Mar 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**DEPARTEMENT DE PHYSIQUE DE L'ECOLE
NORMALE SUPERIEURE**



Thèse de doctorat de l'Université Pierre et Marie Curie. Paris VI

Spécialité : Physique Quantique

présentée par

Laurent HILICO

Pour obtenir le titre de Docteur de l'université Pierre et Marie Curie

Sujet :

**REDUCTION DU BRUIT QUANTIQUE DE LA LUMIERE PAR
UNE CAVITE BISTABLE**

Soutenue le 22 Septembre 1992 devant le jury composé de :

M. S. HAROCHE (Président)

M. A. DUCASSE

Mme E. GIACOBINO

M. P. GRANGIER

M. L. LUGIATO

M. C. SALOMON

Remerciements

Ce travail a été effectué au laboratoire de Spectroscopie Hertzienne de l'Ecole Normale Supérieure et de l'Université Pierre et Marie Curie. Je remercie Jacques Dupont-Roc, directeur du laboratoire, Bernard Cagnac et Gilbert Grynberg de m'avoir accueilli à Jussieu.

Elisabeth Giacobino et Claude Fabre ont dirigé ce travail. Je tiens à les remercier pour le climat de liberté, de confiance et d'intelligence qui règne dans le groupe d'optique quantique qu'ils dirigent, et pour l'aide efficace qu'ils m'ont apportée au cours de ces trois années.

Je tiens aussi à remercier les autres membres du groupe : Serge Reynaud, Jean-Michel Courty et Antoine Heidmann pour leurs aides théoriques et expérimentales, ainsi que Thierry Debuisschert, Jerome Mertz, Christian Richy et Astrid Lambrecht.

Un grand merci aux membres des autres groupes du laboratoire, et tout particulièrement à François Biraben, Michel Pinard et Philippe Verkerk pour leur aide et leur disponibilité lors de la mise en place de l'expérience, à Delphine Grison et Christophe Salomon pour leur connaissance du piège magnéto-optique, et à l'équipe de Jean-Louis Oudar au CNET qui m'a accueilli quelques semaines.

Je remercie également Serge Haroche, André Ducasse, Philippe Grangier, Luigi Lugiato et Christophe Salomon qui ont accepté de participer au jury.

Enfin, je tiens à remercier le personnel technique : Francis Tréhin, Guy Flory, Jean Quilbeuf, Marc Thommé, Bernard Rodriguez, Ali Mezia, Bernard Clergeaud, Gérard Brener et Jean-Claude Bernard qui assurent la logistique des expériences. Je remercie aussi chaleureusement les secrétaires Marie-Noëlle Ollivier et Blandine Moutiers auxquelles la frappe et les corrections de ce mémoire doivent tout, ainsi que Mlle Gazan et M. Manceau qui en ont assuré le tirage et la reliure.

Ma bourse de thèse a été payée par la DRET et l'Ecole polytechnique. Je remercie ces deux institutions ainsi que Mme Guibert qui a géré mon dossier. Ce travail de recherche a été et est soutenu par le programme Ultimatech (contrat P 03010).

Table des matières

Introduction.....	1
I. Bruit quantique	5
1 Les fluctuations de la lumière	5
a. Introduction	5
b. L'origine quantique.....	5
c. Modèle de faisceau lumineux.....	6
d. Détection des fluctuations de la lumière.....	7
2 Cadre théorique	10
a. Position du problème.....	10
b. Contrainte sur les commutateurs	11
c. Une solution : théorie entrée-sortie et linéarisation	11
d. Exemples	12
e. Relation entre la compression des fluctuations et la stabilité du système	17
f. Lien avec les autres méthodes de calcul.....	17
g. Conclusion	19
3 Appendice A : Notations.....	20
a. Vecteurs et matrices d'opérateurs.....	20
b. Transformation de Fourier.....	21
4 Appendice B : "champ quasi-monomode"	21
II. De l'effet Kerr idéal aux atomes	23
1 Introduction	23
2 Modèle de la cavité à effet Kerr	23
a. Les équations d'évolution du champ	24
b. Discussion des spectres de bruit	27
c. Conditions sur la non-linéarité et l'absorption	30
d. Evaluation des possibilités expérimentales	31
3 Les limitations de ce modèle.....	38
a. Effets des modes transverses.....	39
b. Effet d'un temps de réponse de la non-linéarité.....	40
c. Appendice C- Couplage entre modes gaussiens	42
4 Utilisation d'une non linéarité d'ordre 2 : l'OPO dégénéré	46
a. L'oscillateur paramétrique optique dégénéré	46
b. Etat stationnaire et analyse linéaire de stabilité	47
c. Transformation des fluctuations	51
d. Spectres de bruit du champ pompe sortant	53

e. Conclusion.....	56
5 Conclusion.....	57
III. Bistabilité optique avec des atomes à deux niveaux.....	59
1 Introduction.....	59
2 Les hypothèses du modèle.....	60
a. Hypothèses sur les atomes et les champs.....	60
b. Couplage atomes-champ.....	60
3 Relation entrée-sortie pour le milieu atomique.....	60
a. Equation de Heisenberg.....	61
b. Réponse linéaire.....	63
c. Transformation canonique des fluctuations du champ.....	65
d. Conservation des relations de commutation.....	65
4 Fluctuations quantiques dans la bistabilité optique.....	67
a. Point de vue entrée-sortie.....	67
b. Article “Linear input-output method for quantum fluctuations in optical bistability with two level atoms”.....	68
c. Solutions stationnaires.....	96
d. Stabilité des solutions stationnaires.....	99
e. Comparaison avec d’autres théories standard.....	101
5 Théorie générale des fluctuations quantiques dans la bistabilité optique.....	102
a. Présentation de l’article.....	102
b. Tiré à part de l’article.....	104
c. Conclusions.....	110
6 Ordres de grandeur.....	110
a. Liens entre les paramètres théoriques et l’expérience.....	110
b. Absorption et non-linéarité.....	111
c. Evaluation des paramètres dans le cas du césium.....	112
d. Conclusion.....	113
IV. Expérience avec une cavité optique contenant des atomes froids.....	115
1 Pourquoi le césium dans un piège magnéto-optique ?.....	115
a. Les avantages du césium froid.....	115
b. Le césium est-il un atome à deux niveaux ?.....	116
2 Montage expérimental.....	117
a. Principe du piège magnéto-optique.....	117
b. Le montage expérimental, solutions techniques retenues.....	119
c. Caractéristiques du piège.....	126
3 Le laser à atomes froids.....	128
a. Présentation.....	128

b.	Article :“Operation of a cold-atom laser in a magneto-optical trap” .	129
c.	Conjugaison de phase dans les atomes froids.....	133
d.	Conclusions	134
4	Bistabilité optique avec des atomes froids.....	134
a.	Introduction	134
b.	La cavité optique bistable	136
c.	Bistabilité	138
d.	Comparaison avec la théorie des atomes à deux niveaux	150
5	Conclusion	155
V.	Etude expérimentale des fluctuations quantiques dans la bistabilité optique.....	157
1	Introduction	157
2	La détection des fluctuations de la lumière.....	158
a.	Difficultés de la détection du bruit d’intensité de la lumière	158
b.	Les autres sources de bruit électronique	159
c.	Utilisation d’un amplificateur tension-tension.....	160
d.	Amplificateur courant-tension.....	162
e.	Résultats	165
f.	Conclusions	168
3	Mesure du bruit d’intensité de la lumière réfléchié par la cavité bistable	169
a.	Calibration du bruit quantique standard.....	169
b.	Résultats expérimentaux préliminaires	171
c.	Conclusions	175
	Conclusion.....	177
	Références	179

Introduction

Les mesures en optique sont parmi les plus précises qu'on sache réaliser. En effet, grâce aux lasers, il est possible d'obtenir des faisceaux lumineux continus d'intensité très stable et ayant une grande longueur de cohérence, permettant d'effectuer des mesures très sensibles, par absorption, ou par interférométrie. Cependant, ces mesures ne sont jamais exemptes de bruit. Ce bruit ne provient pas seulement des dispositifs électroniques utilisés pour amplifier les signaux détectés, mais provient de la lumière elle-même. L'électrodynamique quantique montre que le champ électrique est décrit par deux opérateurs correspondant aux deux composantes de quadrature du champ électromagnétique classique. Ces deux opérateurs ne commutent pas et satisfont une inégalité de Heisenberg : le produit de leurs variances est supérieur à une limite finie non nulle. La conséquence de la nature quantique du champ électromagnétique est qu'il n'est pas possible de réaliser un état du champ tel que le champ électrique soit parfaitement déterminé, tout comme il n'est pas possible de connaître simultanément la position et l'impulsion d'une particule matérielle. En revanche, la souplesse de la mécanique quantique permet d'imaginer et de réaliser des états du champ où l'une des deux quadratures est déterminée avec une précision meilleure que la limite quantique standard, et l'autre avec une précision moins bonne. De tels états sont appelés états comprimés du champ. Les références suivantes sont des articles de revue consacrés aux problèmes de la réduction du bruit quantique de la lumière [Yamamoto 90] [Reynaud 92] [Houches 90, Kimble].

Le bruit de la lumière peut s'interpréter de plusieurs manières. La première utilise une description corpusculaire de la lumière, en termes de photons, et attribue l'origine du bruit d'intensité standard d'un faisceau lumineux à l'arrivée des photons sur le photodétecteur à des instants aléatoires. La réduction du bruit d'intensité s'interprète alors en termes de réarrangement temporel des photons. Cette interprétation a donné son nom au bruit d'intensité d'un faisceau lumineux : le bruit de grenaille ou shot noise. Une autre interprétation fructueuse du bruit de la lumière consiste à la décrire par un champ classique fluctuant, y compris dans le cas où l'intensité moyenne du champ est nulle (fluctuations du vide).

Les états comprimés peuvent avoir des applications : par exemple un champ comprimé en intensité permet de mesurer des signaux d'absorption plus faibles qu'avec un champ au shot noise, et permet d'améliorer le rapport signal sur bruit de la mesure. Ce procédé est intéressant lorsqu'il n'est pas possible d'augmenter ce rapport signal sur bruit en augmentant l'intensité du faisceau ou le temps de mesure, comme dans le cas de milieux très dilués, ou de milieux ayant un seuil de dommage très bas. Un champ comprimé en phase trouvera des applications dans les mesures interférométriques de très grande sensibilité, comme par exemple la détection des ondes gravitationnelles.

De nombreuses propositions et depuis peu quelques réalisations existent pour générer des champs comprimés. Elles se répartissent en deux catégories. Tout d'abord, les méthodes actives

qui génèrent un champ électromagnétique dont les fluctuations d'une des composantes de quadrature sont comprimées. Par exemple, il est possible en alimentant une diode laser de grand rendement quantique avec un courant très peu fluctuant filtré par une résistance refroidie à la température de l'hélium liquide, d'obtenir un faisceau laser dont les fluctuations d'intensité sont comprimées de près de 90% sur une très large bande de fréquence. Il est aussi possible de créer à l'aide d'un oscillateur paramétrique optique deux faisceaux laser jumeaux dont les corrélations d'intensité sont presque dix fois meilleures que la limite quantique standard. Ces corrélations ont été utilisées pour produire, par asservissement électronique de l'intensité d'un des faisceaux jumeaux sur l'autre, un faisceau dont le bruit d'intensité est réduit de 25% autour d'une fréquence d'analyse donnée.

La seconde idée consiste à transformer le champ laser issu d'un laser traditionnel, dont le bruit correspond idéalement au bruit quantique standard, en un champ comprimé à l'aide d'un dispositif passif, sans pertes ni gain pour le champ. Nous montrons au chapitre II, que l'utilisation d'une cavité non linéaire et bistable contenant un milieu Kerr (c'est à dire un milieu dont l'indice de réfraction est proportionnel à l'intensité qui le traverse) est un système passif susceptible de comprimer les fluctuations lorsqu'elle est utilisée au voisinage d'un point tournant de la bistabilité. L'utilisation d'une non-linéarité non résonnante permet d'envisager des applications pour des faisceaux d'intensité et de longueur d'onde variées. Cependant, l'étude des milieux non linéaires disponibles à ce jour montre que les ordres de grandeur des non-linéarités d'ordre trois ne sont pas favorables à la réalisation expérimentale d'un bistable réducteur de bruit. Nous sommes donc amenés à envisager d'autres types de non-linéarités plus fortes, provenant de mécanismes physiques variés, qui ne sont plus idéales, et qui peuvent introduire du bruit sur le faisceau lumineux avec lequel elles interagissent. Nous montrons que la non-linéarité la plus prometteuse est celle d'une assemblée d'atomes à deux niveaux immobiles excités au voisinage de résonance.

Le chapitre III est consacré à l'étude détaillée des propriétés de bruit de la lumière réfléchie par une cavité optique contenant des atomes à deux niveaux. Cette étude utilise un formalisme entrée-sortie général introduit au chapitre I, permettant de calculer la modification des fluctuations du champ par la cavité, et de tenir compte du bruit propre apporté par le milieu non linéaire. Plus précisément, nous montrons que les fluctuations du champ rayonné par les atomes peuvent être séparées en deux contributions : un terme dû à la réponse des atomes aux fluctuations du champ incident, et un terme lié à l'émission spontanée. Nous montrons que, même si la non-linéarité d'atomes à deux niveaux est différente de celle d'un effet Kerr pur (elle est résonnante), elle est un excellent candidat pour la réduction du bruit quantique de la lumière en particulier si on utilise une cavité dont la largeur en fréquence est grande devant celle de la transition atomique.

Une telle non-linéarité a déjà été utilisée dans plusieurs expériences en plaçant des cavités optiques autour de jets atomiques. Elle a permis l'observation de réduction de bruit, mais cette réduction reste inférieure aux prévisions théoriques en particulier à cause de l'effet Doppler et de la durée finie de l'interaction entre les atomes et le rayonnement (temps de transit). L'invention du piège magnéto-optique sur jet en 1987 [Raab 87], puis en cellule en 1990 [Monroe 90], qui

permet d'obtenir des nuages d'atomes immobiles et de densité comparable à celle des jets atomiques a relancé l'intérêt des non-linéarités atomiques quasi-résonnantes. C'est dans ce contexte que nous avons décidé la construction d'un piège magnéto-optique contenant du césium autour duquel nous avons placé un résonateur optique de finesse environ 50. L'étude de la réduction du bruit de la lumière dans la bistabilité optique passe tout d'abord par l'étude de la bistabilité optique. L'étude de notre résonateur non linéaire nous a permis dans un premier temps d'observer la première oscillation d'un laser à atomes froids qui pourrait se révéler très intéressant pour l'optique quantique. Par la suite nous avons étudié la bistabilité optique pour des écarts à résonance du champ très variés, et avons aussi observé les instabilités prévues par la théorie de la bistabilité optique avec des atomes à deux niveaux. Nous avons déduit des courbes expérimentales les caractéristiques de notre cavité non linéaire. La comparaison avec le modèle théorique montre que les régimes qui nous sont accessibles sont favorables à l'observation de la réduction de bruit quantique.

Le chapitre V détaille les méthodes permettant de mesurer le bruit quantique de la lumière sur des intensités lumineuses faibles. Nous y proposons deux systèmes de photodétection, dont l'un très performant. Nous présentons ensuite les résultats préliminaires que nous avons obtenu et discutons les améliorations à apporter au montage expérimental.

I. Bruit quantique

1 Les fluctuations de la lumière

a. Introduction

Le but de ce chapitre est de rappeler brièvement l'origine des fluctuations quantiques de la lumière et d'indiquer comment elles apparaissent dans les diverses mesures couramment effectuées en optique, détection d'intensité, mesures homodynes ou hétérodyne (§1) et nous précisons à cette occasion les notations utilisées dans ce mémoire.

Au §2, nous présentons le cadre général du formalisme que nous employons, fondé sur une méthode "d'entrée-sortie". A titre d'introduction aux techniques qui permettent de manipuler le bruit quantique nous donnons quelques exemples de systèmes linéaires et non linéaires simples, et nous établissons certaines propriétés générales vérifiées par ces systèmes.

b. L'origine quantique

Le champ électromagnétique peut être décomposé en modes, correspondant à des ondes planes progressives caractérisées par un vecteur d'onde \vec{k} , et une polarisation $\vec{\epsilon}$. Pour le champ électromagnétique libre, ces modes évoluent comme des oscillateurs harmoniques indépendants. En mécanique quantique, on peut associer à un mode des opérateurs de création et d'annihilation hermitiques conjugués a^+ et a vérifiant la relation de commutation :

$$[a, a^+] = 1 \quad (\text{I.1})$$

L'opérateur champ électrique s'exprime alors comme une somme sur tous les modes d'une combinaison des opérateurs a et a^+ associés à ces modes. L'amplitude du champ électrique correspondant à un mode donné peut s'écrire :

$$\mathbf{E}(t) + \mathbf{E}^+(t) \quad (\text{I.2})$$

avec
$$\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_0 i a e^{-i\omega t} \quad \text{et} \quad \mathbf{E}^+(t) = \mathbf{E}_0 (-i) a^+ e^{i\omega t} \quad (\text{I.3})$$

Le commutateur de $\mathbf{E}(t)$ et de $\mathbf{E}^+(t)$ vaut :

$$[\mathbf{E}(t), \mathbf{E}^+(t)] = \mathbf{E}_0^2 \quad (\text{I.4})$$

Le champ peut aussi se décomposer sous la forme :

$$\mathbf{E}_1(t) + \mathbf{E}_2(t) \quad (\text{I.5})$$

avec
$$\mathbf{E}_1(t) = \mathbf{E}_0 i (a - a^+) \cos \omega t \quad \text{et} \quad \mathbf{E}_2(t) = \mathbf{E}_0 (a + a^+) \sin \omega t \quad (\text{I.6})$$

Les opérateurs $\mathbf{E}_1(t)$ et $\mathbf{E}_2(t)$ vérifient :

$$[\mathbf{E}_1(t), \mathbf{E}_2(t)] = 2i\mathbf{E}_0^2 \quad (\text{I.7})$$

\mathbf{E}_0 correspond au champ dû à un seul photon.

Puisque les deux composantes de quadrature \mathbf{E}_1 et \mathbf{E}_2 du champ ne commutent pas, les dispersions sur \mathbf{E}_1 et \mathbf{E}_2 vérifient, pour tout état du rayonnement, une inégalité de Heisenberg :

$$\Delta\mathbf{E}_1 \Delta\mathbf{E}_2 \geq \mathbf{E}_0^2 \quad (\text{I.8})$$

où
$$\Delta\mathbf{E}_j^2 = \langle (\mathbf{E}_j - \langle \mathbf{E}_j \rangle)^2 \rangle \quad (\text{I.9})$$

L'incertitude sur la valeur des composantes de quadrature du champ constitue le bruit quantique de la lumière, qui limite la précision des mesures en optique.

Si le champ électromagnétique est dans l'état vide, la valeur moyenne du champ électrique est nulle, mais les variances de \mathbf{E}_1 et \mathbf{E}_2 ne le sont pas et vérifient :

$$\Delta\mathbf{E}_1 = \Delta\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_0 \quad (\text{I.10})$$

Ces fluctuations sont appelées fluctuations du vide.

Si le champ est représenté par un état cohérent (c'est à dire un état propre de l'opérateur a) [Glauber 63], les variances de \mathbf{E}_1 et \mathbf{E}_2 vérifient cette même relation.

c. Modèle de faisceau lumineux

L'état du champ électromagnétique peut être décrit par un vecteur appartenant à l'espace vectoriel obtenu par produit tensoriel des espaces vectoriels correspondant à chaque mode du champ. Cependant, en optique quantique, on s'intéresse à des faisceaux lumineux, le plus souvent issus de lasers, qu'on peut décrire dans une approximation quasi-monomode : on ne considère qu'une seule polarisation et qu'une seule direction de propagation où les modes sont caractérisés par leur seule fréquence. On note s la section du faisceau.

Sous ces hypothèses, le champ électrique peut être écrit, comme les sommes de ses composantes de fréquences positives et de fréquences négatives (Appendice B équation (I.84)) :

$$\mathbf{E}(t) + \mathbf{E}^+(t) \quad (\text{I.11a})$$

avec
$$\mathbf{E}(t) = \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi} \mathbf{E}_\omega i a_\omega e^{-i\omega t} \quad \text{et} \quad \mathbf{E}^+(t) = \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi} \mathbf{E}_\omega (-i) a_\omega^+ e^{+i\omega t} \quad (\text{I.11b})$$

Le coefficient \mathbf{E}_ω dépend lentement de la fréquence comme $\omega^{1/2}$ et vaut :

$$\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 c s}} \quad (\text{I.12})$$

Le champ considéré étant quasi-monomode de fréquence ω_L , seul le mode de fréquence ω_L est occupé, les modes voisins étant dans l'état vide ou très peu occupés. La valeur moyenne du champ \mathbf{E} est monochromatique :

$$\langle \mathbf{E}(t) \rangle = \mathbf{E}_{\omega_L} i \langle a_{\omega_L} \rangle e^{-i\omega_L t} \quad \text{et} \quad \langle \mathbf{E}^+(t) \rangle = \mathbf{E}_{\omega_L} (-i) \langle a_{\omega_L}^+ \rangle e^{+i\omega_L t} \quad (\text{I.13})$$

En optique, la fréquence ω_L est très élevée ($\approx 10^{15}$ Hz), et on s'intéresse à des fluctuations de fréquence basse ($\leq 10^9$ Hz), donc faisant intervenir des modes de fréquence proches de ω_L : on pourra alors négliger la dépendance en fréquence de \mathbf{E}_ω et prendre $\mathbf{E}_\omega \cong \mathbf{E}_{\omega_L}$. Afin d'éliminer

les $e^{i\omega t}$, on décrira le faisceau lumineux dans le référentiel tournant par des champs $E(t)$ et $E^+(t)$ normalisés définis par :

$$E(t) = \frac{\mathbf{E}(t)}{\mathbf{E}_{\omega_L}} e^{i\omega_L t} \quad \text{et} \quad E^+(t) = \frac{\mathbf{E}^+(t)}{\mathbf{E}_{\omega_L}} e^{-i\omega_L t} \quad (\text{I.14})$$

Les champs $E(t)$ et $E^+(t)$ s'écrivent alors, sous forme de transformées de Fourier :

$$E(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} E(\omega) e^{-i\omega t} \quad \text{et} \quad E^+(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} E^+(\omega) e^{-i\omega t} \quad (\text{I.15})$$

$E(\omega)$ et $E^+(\omega)$ vérifient :

$$E(\omega) = i a_{\omega_L + \omega} \quad , \quad E^+(\omega) = -i a_{\omega_L - \omega} \quad \text{et} \quad E(\omega)^+ = E^+(-\omega) \quad (\text{I.16})$$

et les relations de commutation :

$$[E(\omega), E^+(\omega')] = 2\pi \delta(\omega + \omega') \quad \text{et} \quad [E(\omega), E(\omega')] = 0 \quad (\text{I.18})$$

Notons que par suite du passage dans le référentiel tournant, les fréquences ω et ω' dans les équations (I-15 à 18) sont maintenant les écarts à la fréquence moyenne ω_L , c'est à dire les fréquences d'analyse qui nous intéresseront pour les fluctuations.

On a bien entendu, si $|0\rangle$ représente le vide de rayonnement :

$$E(\omega)|0\rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle 0|E^+(\omega) = 0 \quad (\text{I.19})$$

La valeur moyenne du champ E est maintenant indépendante du temps. La normalisation introduite par l'équation (I.14) est choisie par commodité pour ce chapitre. Grâce à elle, le module carré de la valeur moyenne du champ représente le flux numérique de photons du faisceau lumineux décrit.

d. Détection des fluctuations de la lumière

La mesure des fluctuations de la lumière s'effectue à l'aide de photodétecteurs (photodiodes ou photomultiplicateurs), qui délivrent un signal $I(t)$ proportionnel à l'intensité lumineuse reçue [Cohen-Tannoudji 88, Complément A-II].

$$I(t) = E^+(t) E(t) \quad (\text{I.20})$$

Compte tenu du très grand flux de photons dans un faisceau lumineux intense, ses fluctuations sont toujours faibles en valeur relative. On considèrera donc que les fluctuations δE du champ E sont petites devant sa valeur moyenne, ce qui permettra d'utiliser des approximations linéaires dans les calculs sur ces fluctuations. Les fluctuations de $E(t)$ sont définies par :

$$\delta E(t) = E(t) - \langle E \rangle \quad (\text{I.21})$$

Dans l'approximation linéaire, les fluctuations d'intensité sont données par :

$$\delta I(t) = I(t) - \langle I(t) \rangle = \langle E \rangle \delta E^+(t) + \langle E^+ \rangle \delta E(t) \quad (\text{I.22})$$

i. Bruit d'intensité

Il est possible d'analyser expérimentalement les fluctuations de l'intensité à l'aide d'un analyseur de spectre. Ces fluctuations sont alors caractérisées par leur densité spectrale normalisée $S_I(\omega)$.

$$S_I(\omega) = \frac{\langle |\delta I(\omega)|^2 \rangle}{\langle I \rangle} \quad (I.23)$$

où $\delta I(\omega)$ est la transformée de Fourier de $\delta I(t)$.

Nous allons montrer que l'expression de $S_I(\omega)$ fait intervenir, outre les valeurs moyennes des champs, quatre fonctions de corrélation de δE et δE^+ . Afin de simplifier les formules, on introduit des notations matricielles, définies dans l'appendice A de ce chapitre. On peut alors exprimer $S_I(\omega)$ sous la forme :

$$S_I(\omega) = \frac{I}{\langle E \rangle^2} \langle [E]^+ \rangle V(\omega) \langle [E] \rangle \quad (I.24)$$

où :

$$V(\omega) = \begin{pmatrix} \langle \delta E(\omega) \delta E(\omega)^+ \rangle & \langle \delta E(\omega) (\delta E^+(\omega))^+ \rangle \\ \langle \delta E^+(\omega) \delta E(\omega)^+ \rangle & \langle \delta E^+(\omega) (\delta E^+(\omega))^+ \rangle \end{pmatrix} \quad (I.25)$$

soit encore :

$$V(\omega) = \begin{pmatrix} \langle \delta E(\omega) \delta E^+(-\omega) \rangle & \langle \delta E(\omega) \delta E(-\omega) \rangle \\ \langle \delta E^+(\omega) \delta E^+(-\omega) \rangle & \langle \delta E^+(\omega) \delta E(-\omega) \rangle \end{pmatrix} \quad (I.26)$$

La matrice V est appelée matrice des corrélations du champ. Remarquons que ces fonctions de corrélation ne sont définies ni dans l'ordre normal, ni antinormal, ni antisymétrique pour les opérateurs δE et δE^+ . Compte tenu des propriétés des transformées de Fourier (appendice A), la matrice V a la forme générale :

$$V(\omega) = \begin{pmatrix} A(\omega) & B(\omega) + i C(\omega) \\ B(\omega) - i C(\omega) & D(\omega) \end{pmatrix} \quad (I.27)$$

où A, B, C et D sont quatre fonctions réelles.

Il faut remarquer que $S_I(\omega)$ est invariant dans un déphasage du champ donc par propagation, alors que ni la matrice V ni la valeur moyenne du champ ne le sont.

ii. Bruit sur une composante de quadrature quelconque : mesure hétérodyne

La méthode de détection précédente ne permet de mesurer que le bruit d'intensité sur le faisceau détecté. On ne peut alors remonter qu'à une combinaison particulière des fonctions de corrélation du champ. Il est cependant possible d'obtenir d'autres informations sur la matrice V_M des corrélations du champ à mesurer, en s'aidant d'un faisceau plus intense, de même fréquence ω_L que celle du faisceau à mesurer : un oscillateur local.

Pour cela, on mélange le faisceau à mesurer E_M à l'oscillateur local E_L sur une lame séparatrice 50 %, et on mesure le bruit sur la différence des intensités des faisceaux résultants E_1 et E_2 .

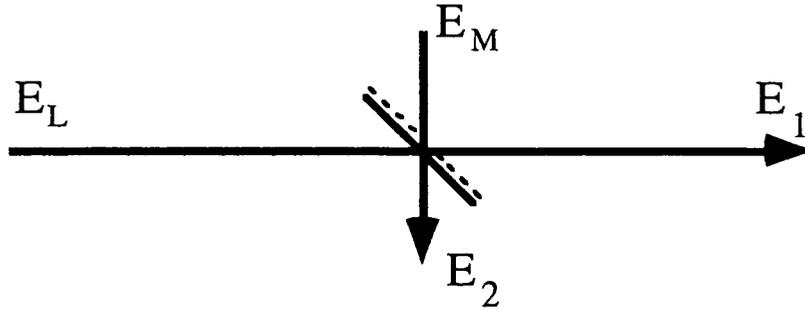


Figure 1.1

Les composantes de fréquence positive des champs E_1 et E_2 valent :

$$E_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (E_M + E_L) \quad \text{et} \quad E_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (E_M - E_L) \quad (\text{I.28})$$

On en déduit aisément les intensités I_1 et I_2 des champs E_1 et E_2

Dans l'approximation linéaire et en utilisant le fait que l'oscillateur local est beaucoup plus intense que le faisceau à mesurer, les fluctuations de la différence des intensités I_1 et I_2 a pour expression :

$$\delta(I_1 - I_2) = \left(\langle E_L^+ \rangle, \langle E_L \rangle \right) \begin{pmatrix} \delta E_M(t) \\ \delta E_M^+(t) \end{pmatrix} \quad (\text{I.29})$$

Cette formule est très semblable à celle donnant les fluctuations d'intensité d'un faisceau lumineux (I.22). Dans ce premier cas les fluctuations de l'intensité peuvent être vues comme le mélange hétérodyne du champ moyen et de ses fluctuations. Dans le cas présent, le signal de bruit (I.29) correspond au mélange hétérodyne du champ moyen de l'oscillateur local et des fluctuations du champ à mesurer. Il dépend explicitement de la phase relative de l'oscillateur local et du faisceau à mesurer au niveau de la lame séparatrice. La mesure de la densité spectrale de bruit de ce signal donne accès au bruit sur la composante de quadrature θ noté $S_\theta(\omega)$ et défini par :

$$S_\theta(\omega) = \left(e^{i\theta}, e^{-i\theta} \right) V_M(\omega) \begin{pmatrix} e^{-i\theta} \\ e^{i\theta} \end{pmatrix} \quad (\text{I.30})$$

où
$$e^{i\theta} = \langle E_L^+ \rangle / |\langle E_L \rangle| \quad (\text{I.31})$$

La composante de quadrature θ est l'opérateur $E_\theta = e^{i\theta} E + e^{-i\theta} E^+$.

iii. Le bruit quantique standard ou shot noise

Le bruit quantique standard ou shot noise est le bruit d'un faisceau lumineux monomode décrit par un état cohérent : plus précisément, l'état du champ est un état cohérent dans le mode de fréquence ω_L et dans l'état vide pour les autres modes. En utilisant les relations de commutation (I.18), on obtient pour un état cohérent, et donc aussi pour l'état vide :

$$V(\omega) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{I.32})$$

On en déduit :

$$S_I(\omega) = 1 \quad \text{et} \quad S_\theta(\omega) = 1 \quad (\text{I.33})$$

La matrice $V(\omega)$ ne dépend pas de la fréquence : le shot noise est un bruit blanc. Le bruit ne dépend pas non plus de la composante de quadrature θ .

Puisque la densité spectrale normalisée vaut 1, la puissance de bruit du shot noise est proportionnelle à l'intensité du faisceau détecté (I.23).

iv. Champ comprimé et bruit optimum

Un champ est dit comprimé ou "squeeze" si une de ses composantes de quadrature possède des fluctuations dont une des composantes de fréquence a un bruit inférieur au bruit quantique standard, c'est à dire s'il existe θ et ω tels que $S_\theta(\omega) < 1$. Pour un état comprimé, on peut parler du bruit optimum S_{opt} défini par :

$$S_{opt}(\omega) = \min_{\theta \in [0, 2\pi]} S_\theta(\omega) \quad (\text{I.34})$$

En utilisant la forme générale de la matrice des corrélations (I.27), on obtient :

$$S_{opt}(\omega) = A(\omega) + D(\omega) - 2\sqrt{B(\omega)^2 + C(\omega)^2} \quad (\text{I.35})$$

Ce bruit minimum peut être mesuré par la détection hétérodyne décrite plus haut, en faisant varier θ donc la phase relative du champ à mesurer et de l'oscillateur local.

2 – Cadre théorique

Dans ce paragraphe, on s'intéresse aux méthodes possibles de calcul des propriétés de bruit d'un faisceau lumineux. Dans la mesure où le faisceau lumineux issu d'un laser continu correspond le plus souvent à un état proche d'un état cohérent, on peut se poser le problème de la transformation d'un état cohérent en état comprimé. Il est donc important de savoir comment se transforment les fonctions de corrélation d'un champ lors d'une interaction pour savoir si cette interaction est susceptible de comprimer les fluctuations du champ.

a. Position du problème

Une fonction de corrélation telle que les composantes de la matrice V_λ , est une valeur moyenne d'un produit d'opérateurs pris à deux instants différents (ou pris pour deux fréquences) qu'il nous faudra calculer à partir de l'équation d'évolution à un temps de la mécanique quantique (l'équation de Schrödinger) et des "conditions initiales" sur les fonctions de corrélation, données par les relations de commutation d'un champ libre (I.18).

Par ailleurs, la plupart des interactions qu'un faisceau lumineux peut subir ne sont pas aisément décrites par un hamiltonien. Par exemple, l'action d'une lame partiellement absorbante n'est pas hamiltonienne dans le sens où l'énergie du faisceau transmis est inférieure à celle du faisceau incident. Les interactions résonnantes avec un milieu atomique, gazeux ou solide font intervenir des variables dynamiques autres que celles du champ. Ces variables sont susceptibles d'introduire des fluctuations supplémentaires, dont il faut tenir compte.

De plus, une interaction en un seul passage ne suffit pas à modifier notablement les propriétés de bruit d'un faisceau lumineux car les processus non linéaires utilisés sont en général très faibles. Il faut alors utiliser une cavité optique contenant le milieu actif, afin de recycler la lumière et d'augmenter les couplages par effet de surtension. On doit donc utiliser une approche permettant de calculer la modification des fonctions de corrélation d'un faisceau lumineux dans son interaction avec un système complexe, composé de sous-systèmes plus simples : miroirs, propagation, milieux non linéaires...

b. Contrainte sur les commutateurs

La mécanique quantique conduit à une quantification du champ électromagnétique où les relations de commutation du champ libre sont données par les formules (I.18).

Considérons un faisceau lumineux incident (champ E^{in}) sur un système S quelconque avec lequel il interagit pour se transformer en un faisceau émergent (champ E^{out}). (Figure I.2)

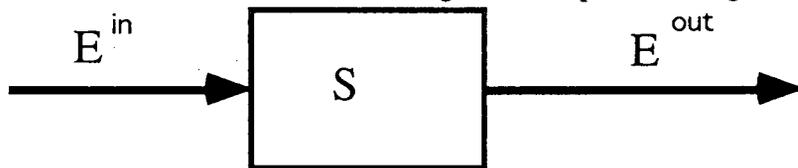


Figure I.2

Avant et après l'interaction, la lumière se propage librement : les deux champs E^{in} et E^{out} sont des champs libres. Ils vérifient donc nécessairement les mêmes relations de commutation : celles d'un champ libre.

Cette contrainte impose donc une condition très forte sur les transformations d'un champ lors d'une interaction : elles doivent préserver les relations de commutation du champ libre.

c. Une solution : théorie entrée-sortie et linéarisation

La méthode d'entrée-sortie consiste à décomposer le système complexe S avec lequel le champ interagit en sous-systèmes S_j , qui interagissent avec un ou plusieurs champs. Elle repose sur les hypothèses suivantes :

- Les fluctuations des champs intenses entrants ou sortants sont faibles devant leurs valeurs moyennes. Cette hypothèse justifiera les linéarisations.
- Chaque sous-système du système complexe provoque une petite modification des fluctuations des champs qui le traverse.
- La dynamique propre de chaque sous-système, ne dépend pas des caractéristiques des fluctuations du champ incident ou émergent de ce sous-système.

Ces trois hypothèses seront vérifiées dans les cas qui seront traités dans les chapitres II et III. Cependant, la troisième hypothèse n'est pas toujours vérifiée : en effet, on peut imaginer et réaliser expérimentalement des cavités, telles que la relaxation des atomes (c'est-à-dire leur dynamique propre) soit contrôlée par la structure des modes de la cavité [Houches 82], et par l'état du champ micro-onde dans la cavité [Courty 89 et 89a]. On peut cependant étendre la théorie entrée-sortie

des fluctuations à ce cas [Courty 90]. Cette possibilité est brièvement discutée à la fin du chapitre III.

L'hypothèse d'indépendance des sous-systèmes permet de considérer le ou les champs sortants d'un sous-système comme des champs libres, c'est-à-dire comme des champs entrants pour les autres sous-systèmes.

Les hypothèses de "petites fluctuations" et de petites modifications des fluctuations permettent de se limiter à une transformation linéaire des fluctuations par un sous-système : si $[\delta E^{(j)in}]$ et $[\delta E^{(j)out}]$ sont les champs entrant sur le sous-système S_j , on écrira :

$$[\delta E^{(j)out}(\omega)] = (I + T^{(j)}(\omega))[\delta E^{(j)in}(\omega)] + [F^{(j)}(\omega)] \quad (I.36)$$

où $T^{(j)}(\omega)$ est une matrice qui décrit la modification des fluctuations par le sous-système j et $F^{(j)}(\omega)$ les éventuelles fluctuations qu'il ajoute. La transformation linéaire est écrite dans l'espace de Fourier (des fréquences), ce qui permet de prendre en compte les effets de retard. Une telle transformation de champs entrant en champs sortant doit bien sûr conserver les relations de commutation car les champs $E^{(j)in}$ et $E^{(j)out}$ sont libres. Cette transformation est appelée transformation canonique des champs.

La méthode d'entrée-sortie décrite par des transformations linéaires canoniques conduit donc à un système d'équations linéaires dans le domaine des fréquences, reliant les fluctuations du champ E^{in} incident sur le système S et celles du champ émergent E^{out} à celles des différents champs entrant et sortant des sous-systèmes S_j , $E^{(j)in}$ et $E^{(j)out}$. Il suffit ensuite d'éliminer algébriquement les champs intermédiaires $E^{(j)}$ pour obtenir une expression des fluctuations sortant du système S en fonction des fluctuations entrantes et des fluctuations propres des sous-systèmes S_j .

A ce stade, il ne faut pas oublier que nous ne sommes pas seulement intéressés par la transformation des fluctuations du champ incident, mais aussi par la transformation de leurs fonctions de corrélation. Les fonctions de corrélation des champs entrant sont des données du problème. La transformation donnée par la relation (I.36) ne permettra de passer des fluctuations aux corrélations de $E^{(j)out}$ que si les fluctuations ajoutées $F^{(j)}$ sont indépendantes des fluctuations de $E^{(j)in}$, et que si les fonctions de corrélation de $F^{(j)}$ sont connues.

d. Exemples

Nous allons donner maintenant explicitement les transformations canoniques correspondant à quelques interactions courantes telles que la propagation libre du faisceau, ou l'action d'un miroir ou d'une lame partiellement réfléchissante, puis nous résoudrons le système d'équations obtenu dans le cas d'une cavité optique contenant un milieu quelconque, mais modélisable par une transformation canonique.

i. Propagation libre

On considère ici la propagation libre du faisceau lumineux sur une distance l , avec la célérité c . Le champ entrant est le champ au point d'abscisse $z=0$, et le champ sortant le champ au point d'abscisse

$z=l$. L'effet de la propagation est un retard de l/c du champ sortant par rapport au champ entrant. En utilisant l'expression I-11b du champ électrique, on peut écrire :

$$\mathbf{E}^{out}(t) = \mathbf{E}^{in}(t - l/c) \quad (I.37)$$

Compte tenu de la relation (I.14) définissant les champs normalisés E^{in} et E^{out} , on déduit la transformation due à la propagation, valable pour les champs moyens comme pour les fluctuations :

$$[E^{out}(\omega)] = \varphi(\omega) [E^{in}(\omega)] \quad \text{où} \quad \varphi(\omega) = \begin{pmatrix} e^{i\phi + i\omega l/c} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi + i\omega l/c} \end{pmatrix} \quad (I.38)$$

avec $\phi = \omega_L l / c$, où ω_L est la fréquence centrale du champ.

ii. Miroir ou lame partiellement réfléchissante

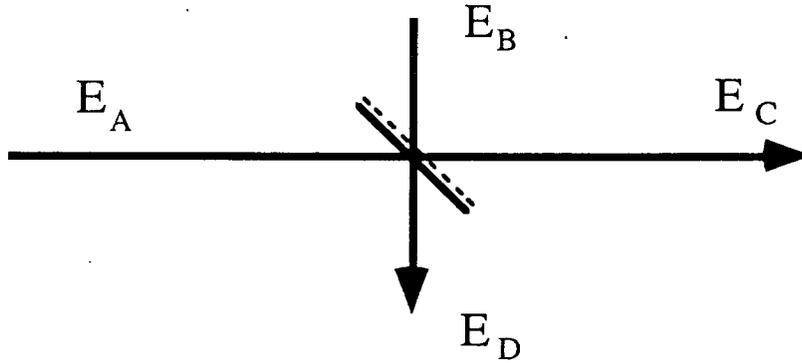


Figure 1.3

Une lame est un système comportant deux entrées et deux sorties (les deux faces de la lame), représenté sur la figure 3 et modélisé par un coefficient de transmission t et un coefficient de réflexion r supposés réels pour simplifier. On note E_A et E_B les deux champs entrants, E_C et E_D les deux champs sortants. La transformation des champs est donnée par :

$$\begin{cases} E_C = t E_A + r E_B \\ E_D = -r E_A + t E_B \end{cases} \quad (I.39)$$

Le signe - dans la deuxième équation et la relation $r^2 + t^2 = 1$ assurent la conservation de l'énergie transmise et réfléchi par la lame. Les transformations canoniques des fluctuations sont données par :

$$[\delta E_C(\omega)] = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} [\delta E_A(\omega)] + \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} [\delta E_B(\omega)] \quad (I.40)$$

$$[\delta E_D(\omega)] = \begin{pmatrix} -r & 0 \\ 0 & -r \end{pmatrix} [\delta E_A(\omega)] + \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} [\delta E_B(\omega)] \quad (I.41)$$

Dans l'hypothèse où le champ E_A a une valeur moyenne non nulle et où le champ E_B est dans l'état vide, le premier terme de ces équations décrit la transformation des fluctuations, et le deuxième le bruit ajouté par les fluctuations du vide entrant par la deuxième face de la lame.

Il est élémentaire de vérifier que les transformations de ces deux premiers exemples conservent les relations de commutation, donc sont canoniques.

iii. Cas d'une cavité de grande finesse

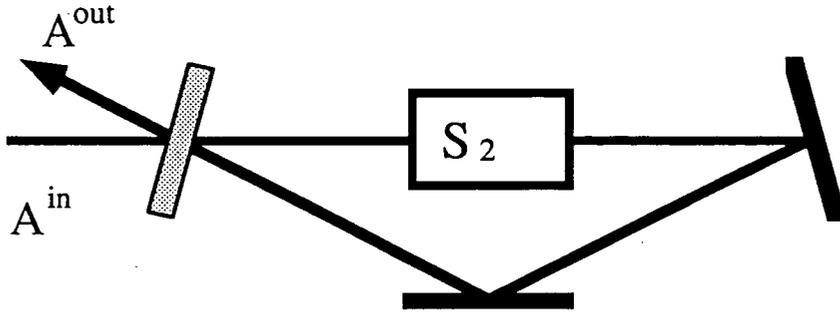


Figure 1.4 : Cavité optique en anneau contenant un milieu non-linéaire

On peut obtenir une forme très générale pour la transformation des fluctuations par une cavité optique en anneau de grande finesse ayant un ou plusieurs miroirs de couplage et contenant un milieu non linéaire quelconque. On va traiter le cas le plus simple d'une cavité à un seul miroir de couplage, et d'un seul champ incident. On note A^{in} le champ entrant sur le système, et A^{out} le champ sortant (figure (I-4)). Cette cavité peut être décomposée en trois sous-systèmes (figure (I-5)) :

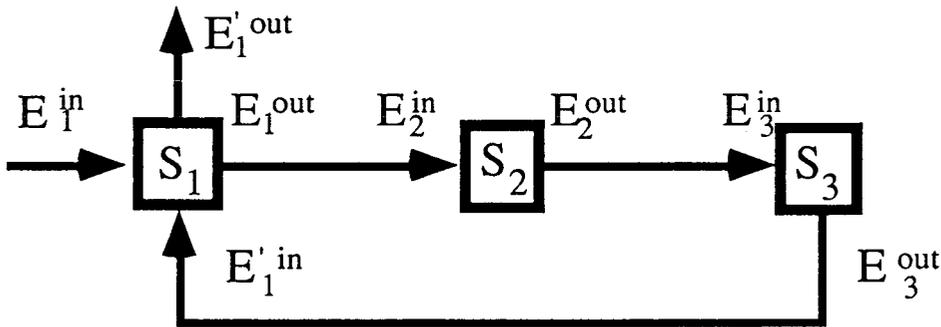


Figure 1.5 : Décomposition de la cavité de la figure 1.4 en sous-systèmes.

S_1 : miroir de couplage, caractérisé par les coefficients de réflexion et de transmission r et t . Il y a deux champs entrants l'un venant de l'extérieur de la cavité E_1^{in} , l'autre venant de l'intérieur, E_1^{in} , et deux champs sortants l'un réfléchi vers l'intérieur de la cavité E_1^{out} et l'autre transmis vers l'extérieur E_1^{out} .

S_2 : milieu non linéaire caractérisé par une matrice T_2 et un bruit ajouté F_2 . Le champ entrant est noté E_2^{in} , le champ sortant E_2^{out} .

S_3 : Propagation du champ dans la cavité de longueur l . On note $\tau = l/c$, $\phi = \omega_L \tau$. Le champ entrant est E_3^{in} , le champ sortant E_3^{out} .

Les transformations des fluctuations sur le miroir de couplage s'écrivent :

$$[\delta E_1^{out}] = t [\delta E_1^{in}] + r [\delta E_1^{in}] \quad (I.41)$$

$$[\delta E_1^{out}] = -r [\delta E_1^{in}] + t [\delta E_1^{in}] \quad (I.42)$$

Le milieu non-linéaire est modélisé par :

$$[\delta E_2^{out}(\omega)] = (1+T_2)[\delta E_2^{in}(\omega)] + [F_2(\omega)] \quad (I.43)$$

La propagation du champ donne d'après la formule (I.38):

$$[\delta E_3^{out}(\omega)] = \varphi(\omega)[\delta E_3^{in}(\omega)] \quad (I.44)$$

Les champs entrants et sortants sont reliés par :

$$E_1^{in} = A^{in} \quad , \quad A^{out} = E_1^{out} \quad (I.45)$$

$$E_2^{in} = E_1^{out} \quad , \quad E_3^{in} = E_2^{out} \quad , \quad E_1^{in} = E_3^{out} \quad (I.46)$$

Il est possible de résoudre ce système d'équations linéaires pour obtenir :

$$\left\{ \varphi(\omega)^{-1} - r(1+T_2) \right\} [\delta A^{out}(\omega)] = \left\{ -r \varphi(\omega)^{-1} + (1+T_2) \right\} [\delta A^{in}(\omega)] + t[F_2(\omega)] \quad (I.49)$$

Un des rôles du résonateur optique est d'augmenter les effets non linéaires par effet de surtension de la cavité. C'est pourquoi on choisit une cavité de grande finesse. Dans ces conditions, on peut écrire :

$$r = 1 - \gamma_{cav} \quad , \quad t^2 \cong 2\gamma_{cav} \quad , \quad \text{avec } \gamma_{cav} \ll 1 \quad (I.50)$$

On suppose ensuite que la fréquence du champ est proche d'une des fréquences propres de la cavité ω_{cav} . On définit l'écart ϕ_0 entre la fréquence du laser et la résonance de la cavité en posant :

$$\phi = \omega_{cav}\tau - \phi_0 \quad \text{où } e^{i\omega_{cav}\tau} = 1 \quad \text{et } |\phi_0| \ll 1 \quad (I.51)$$

On se restreint à des fréquences ω telles que $\omega\tau \ll 1$. Tous les calculs ultérieurs seront faits à l'ordre le plus bas en $\omega\tau$, ϕ_0 et γ_{cav} . On a alors :

$$\varphi(\omega) = 1 - i\phi_0 \varepsilon + i\omega\tau \quad \text{avec } \varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (I.52)$$

et on obtient une relation entrée-sortie pour les champs, donnée par :

$$\boxed{(\gamma_{cav} + i\phi_0 \varepsilon - i\omega\tau - T_2)[\delta A^{out}(\omega)] = (\gamma_{cav} - i\phi_0 \varepsilon + i\omega\tau + T_2)[\delta A^{in}(\omega)] + t[F_2(\omega)]} \quad (I.53)$$

On introduit alors une matrice de transfert $\mu(\omega)$, dépendant de la fréquence, définie par :

$$\mu(\omega)^{-1} = \frac{1}{2\gamma_{cav}} (\gamma_{cav} + i\phi_0 \varepsilon - i\omega\tau - T_2) \quad (I.54)$$

et on en déduit les fluctuations des champs sortants en fonction de celles des champs entrants :

$$[\delta A^{out}(\omega)] = (\mu(\omega) - 1)[\delta A^{in}(\omega)] + \frac{\mu(\omega)}{t}[F_2(\omega)] \quad (I.55)$$

La méthode d'entrée-sortie linéarisée nous a permis d'obtenir une relation linéaire donnant les fluctuations du champ sortant du système en fonction des fluctuations du champ entrant (qui sont supposées connues) et de termes de bruit ajoutés, indépendants du bruit du champ entrant, et

connus (dès l'instant où on connaît les transformations canoniques liées aux différents sous-systèmes du système S).

La matrice de drift $\mu(\omega)$ décrit l'effet des éléments contenus dans la cavité, hormis l'interférence entre les deux champs entrant du miroir de couplage qui donne le terme (-1) de l'équation (I.55), car $r \equiv 1$. La fonction $\mu(\omega)$ est donc la fonction de transfert des éléments de la cavité.

Le second terme de (I.55) est un terme source de fluctuations qui apparaissent explicitement comme les fluctuations émises par le sous-système S_2 et filtrées par la fonction de transfert $\mu(\omega)$ de la cavité.

De la transformation des fluctuations (I.55), on obtient la transformation des fonctions de corrélation dont la définition est :

$$V^{in}(\omega) = \left\langle [\delta A^{in}(\omega)] [\delta A^{in}(\omega)]^+ \right\rangle \quad \text{et} \quad V^{out}(\omega) = \left\langle [\delta A^{out}(\omega)] [\delta A^{out}(\omega)]^+ \right\rangle \quad (\text{I.56})$$

En utilisant l'équation (I.55) et l'indépendance des fluctuations provenant du champ entrant et du sous-système S_2 , la transformation des fonctions de corrélation prend la forme très générale :

$$V^{out}(\omega) = V^{in}(\omega) + \mu(\omega) D(\omega) \mu(\omega)^+ \quad (\text{I.57})$$

La matrice D dite de diffusion, contient l'ensemble des sources de bruit vues de l'intérieur de la cavité : le bruit ajouté par le sous-système S_2 , caractérisé par la matrice $\sigma_2(\omega)$ et le bruit entrant, caractérisé par $V^{in}(\omega)$ et filtré par la cavité.

$$D(\omega) = V^{in}(\omega) - V^{in}(\omega) (\mu(\omega)^+)^{-1} - (\mu(\omega))^{-1} V^{in}(\omega) + \frac{\sigma_2(\omega)}{t^2} \quad (\text{I.58})$$

avec
$$\sigma_2(\omega) = \left\langle [F_2(\omega)] [F_2(\omega)]^+ \right\rangle \quad (\text{I.59})$$

$\sigma_2(\omega)$ est la matrice des fonctions de corrélation du bruit ajouté $F_2(\omega)$.

iv. Cavité de grande finesse et état cohérent incident

L'expression de $D(\omega)$ se simplifie beaucoup dans le cas où le champ entrant est un état cohérent.

En effet, on peut écrire :

$$V^{in}(\omega) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{(1 + \varepsilon)}{2} \quad (\text{I.60})$$

En reportant (I.54) dans (I.58), on obtient l'expression de la matrice de diffusion :

$$D(\omega) = \frac{1}{4\gamma_{cav}} \left\{ (1 + \varepsilon) T_2^+(\omega) + T_2(\omega) (1 + \varepsilon) + 2\sigma_2(\omega) \right\} \quad (\text{I.61})$$

L'expression de D montre que la matrice de diffusion ne dépend pas que du bruit ajouté $\sigma_2(\omega)$: un système non linéaire non bruyant [Reynaud 89], [Fabre 89] donne une matrice de diffusion non nulle. La formule (I.57) montre que la matrice D caractérise la capacité du système à modifier les fonctions de corrélation du champ entrant.

v. Cas d'un système linéaire

Un système est dit linéaire s'il effectue une transformation linéaire sur les champs (et non plus sur leurs fluctuations). C'est le cas d'un miroir, ou de la propagation dans le vide ou dans un milieu linéaire. La conservation de l'énergie des champs impose que la matrice qui définit cette transformation linéaire est unitaire. Cette même matrice définit la transformation canonique des fluctuations. Or, une matrice unitaire peut s'écrire e^{iH} où H est hermitienne, soit $I + iH$ si H est une matrice de petite norme.

En remplaçant T_2 par iH dans (I.61), on déduit qu'un système linéaire non bruyant ne peut en aucun cas comprimer les fluctuations d'un champ décrit par un état cohérent car dans ce cas on a $D(\omega) = 0$ et donc $V^{out}(\omega) = V^{in}(\omega)$.

e. Relation entre la compression des fluctuations et la stabilité du système

Dans le cas où le système non linéaire utilisé pour comprimer les fluctuations du rayonnement n'ajoute pas de bruit propre, les propriétés de compression des fluctuations de rayonnement sont étroitement corrélées aux propriétés de stabilité du système. En effet, dans ce cas, la relation entrée-sortie pour les fluctuations s'écrit :

$$[\delta E^{out}(\omega)] = (\mu(\omega) - I) [\delta E^{in}(\omega)] \quad (\text{I.62})$$

La conservation des relations de commutation impose alors que le déterminant de la matrice $\mu(\omega) - I$ soit égal à 1. Cette matrice possède donc deux valeurs propres de module quelconque, mais dont le produit vaut 1. Un tel système est susceptible de comprimer efficacement les fluctuations d'une des composantes de quadrature du champ si on l'utilise dans des conditions où une des valeurs propres est petite en module. Les fluctuations sur l'autre quadrature propre seront donc amplifiées. La limite d'un squeezing parfait sera obtenue pour une divergence des fluctuations conjuguées, c'est à dire au seuil d'apparition d'une instabilité du système.

f. Lien avec les autres méthodes de calcul

Le calcul des fluctuations quantiques de la lumière sortant d'une cavité contenant un milieu non-linéaire peut se faire de plusieurs façons. Il existe à ce jour plusieurs types de méthode : celle qui vient d'être présentée, une méthode dite "semi-classique" et des méthodes dites "quantiques". Les méthodes "quantiques" s'appliquent aux non-linéarités paramétriques, c'est à dire qui ne font intervenir que les degrés de liberté du champ, et aux non-linéarités résonantes, faisant intervenir d'autres variables dynamiques comme par exemple les populations et les cohérences d'une transition atomique [Drummond 80] [Gardiner 83]. Ces méthodes partent de l'écriture d'un hamiltonien effectif décrivant l'évolution du champ dans la cavité non-linéaire : ce hamiltonien prend en compte l'amortissement dû aux pertes de la cavité, la non-linéarité et le couplage avec le champ incident sur la cavité via le miroir d'entrée. De ce hamiltonien, on déduit l'équation d'évolution d'une fonction de distribution du champ dans la cavité. Cette équation est généralement une équation de type Fokker-Planck. On lui associe ensuite une équation de

Langevin pour des variables complexes stochastiques représentant le champ intracavité. Il s'agit d'une équation d'évolution généralement non-linéaire et contenant des "forces de Langevin", c'est à dire des termes sources de bruit, de valeur moyenne nulle. La forme de ces termes de bruit et leur interprétation physique dépendent de la représentation choisie pour définir la fonction de distribution (ordre normal, antinormal ou symétrique). L'équation de Langevin est linéarisée autour d'une de ses solutions stationnaires, ce qui permet de déterminer l'évolution des fluctuations du champ intra-cavité. Les trois calculs correspondant aux trois ordres usuels conduisent aux mêmes résultats. Les calculs effectués avec la distribution de Wigner (ordre symétrique) conduisent à des équations de Langevin où les termes de bruit s'interprètent aisément : dans le cas d'une interaction paramétrique, la seule source de bruit est constituée par les fluctuations quantiques du champ incident sur la cavité. On peut montrer que la méthode "semi-classique" est équivalente à la méthode quantique appliquée à la représentation de Wigner [Reynaud 89a].

La méthode "semi-classique" ne s'applique qu'aux non-linéarités paramétriques, où seuls des degrés de liberté du champ interviennent. Elle repose sur l'écriture des équations d'évolution classiques du ou des champs dans la cavité. Ces champs évoluent sous l'action des éléments de la cavité (pertes sur les miroirs, déphasage, non-linéarité) et des champs incident sur la cavité auxquels ils sont couplés par les miroirs. Ces champs sources sont représentés par des champs classiques fluctuants dont les fluctuations simulent les fluctuations quantiques d'un état cohérent en représentation de Wigner : les fonctions de corrélation des champs sources sont égales aux fonctions de corrélation dans l'ordre symétrique d'un champ quantique dans un état cohérent. L'équation d'évolution classique est ensuite linéarisée autour du point de fonctionnement calculé par les équations classiques sans les termes sources fluctuants, pour donner une équation d'évolution des fluctuations des champs dans la cavité.

Une fois l'équation d'évolution linéaire des fluctuations obtenue par l'une ou l'autre de ces méthodes, on calcule à l'aide d'une transformée de Fourier les composantes de fréquence des fluctuations des champs intra-cavité en fonction de celles des sources de bruit du système. Les fluctuations intra-cavité sont ensuite reliées aux fluctuations des champs sortant de la cavité par une relation entrée sortie de la forme (I.42):

$$\delta A^{out}(\omega) = -r \delta A^{in}(\omega) + t \delta E(\omega) \quad (I.63)$$

où δE est le champ intracavité, δA^{in} et δA^{out} les champs incident et sortant.

On ne sait pas démontrer que les différentes méthodes de calcul sont équivalentes dans le cas général. On peut cependant retenir quelques résultats :

La méthode "semi-classique" est équivalente à la méthode "quantique" utilisant la distribution de Wigner lorsque le hamiltonien d'interaction est quadratique en champ, et donc dans tous les cas où on linéarise les équations d'évolution.

La méthode entrée-sortie pour les opérateurs de champ donne les mêmes résultats que la méthode semi-classique pour les interactions paramétriques et, comme nous le verrons au

chapitre III, donne les mêmes résultats analytiques que la méthode “quantique” utilisant l’ordre normal lorsque le milieu non-linéaire est composé d’atomes à deux niveaux ou à trois niveaux.

g. Conclusion

Le formalisme entrée-sortie pour les fluctuations quantiques permet donc de dégager quelques résultats généraux très simples sur les grandes classes de systèmes optiques que l’on peut faire interagir sur le champ lumineux. Les fluctuations de champ sortant d’un système proviennent de la transformation des fluctuations des champs entrants, transformation qui comporte éventuellement une compression, et de fluctuations propres, ajoutées par le système. Ce formalisme sera utilisé dans les chapitres suivants pour calculer le spectre des fluctuations de la lumière sortant d’une cavité, dans le cas où elle contient un milieu non linéaire paramétrique (effet Kerr et oscillateur paramétrique optique) au chapitre II, et dans le cas où le milieu non-linéaire est une assemblée d’atomes à deux niveaux, au chapitre III.

3 Appendice A : Notations

La théorie entrée-sortie des fluctuations des opérateurs de champ est commodément écrite sous forme matricielle, puisqu'elle est linéaire. Cet appendice donne la définition des vecteurs d'opérateurs, leurs propriétés de conjugaison hermitique et leurs propriétés vis à vis de la transformation de Fourier.

a. Vecteurs et matrices d'opérateurs

La notation $[X]$ désigne un vecteur colonne dont les composantes sont les opérateurs X et X^+ :

$$[X] = \begin{pmatrix} X \\ X^+ \end{pmatrix} \quad (\text{I.64})$$

On peut étendre cette notation au cas d'un ensemble de N opérateurs X_i sous la forme :

$$[X] = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_1^+ \\ \dots \\ X_i \\ X_i^+ \\ \dots \end{pmatrix} \quad (\text{I.65})$$

L'adjoint $[X]^+$ d'un vecteur $[X]$ est le vecteur ligne de composantes :

$$[X]^+ = (X^+ \quad X) \quad (\text{I.66})$$

A partir de deux vecteurs $[X]$ et $[Y]$, on peut construire une matrice M définie par :

$$M = [X][Y]^+ \quad (\text{I.67})$$

La valeur moyenne de cette matrice contient les fonctions de corrélation des opérateurs X et Y .

Le plus souvent, les opérateurs formant les vecteurs ne commutent pas : il faut donc tenir compte de l'ordre de ces vecteurs. On peut ensuite définir le commutateur de deux vecteurs, comme la matrice contenant les commutateurs des composantes des deux vecteurs :

$$[[X], [Y]^+] = \begin{pmatrix} [X, Y^+] & [X, Y] \\ [X^+, Y^+] & [X^+, Y] \end{pmatrix} \quad (\text{I.68})$$

De manière générale, on peut démontrer la relation :

$$[[X], [Y]^+] = [X][Y]^+ - \eta([Y][X]^+)^t \eta \quad \text{avec} \quad \eta = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{I.69})$$

ou encore
$$[[X], [Y]^+] = [X][Y]^+ - ([Y]^+[X]^t)^t \quad (\text{I.70})$$

où t désigne la transposition des matrices. Ces deux dernières relations montrent que la transposée d'un produit de matrices d'opérateurs n'est pas le produit des transposées dans l'ordre inverse, car les opérateurs ne commutent généralement pas entre eux.

Avec ces notations, les relations de commutation d'un champ libre E (I.18) s'écrivent :

$$\left[[E(\omega)], [E(\omega')]^+ \right] = [E(\omega)] [E(\omega')]^+ - \eta \left([E(\omega')] [E(\omega)]^+ \right)^t \eta = 2\pi \delta(\omega + \omega') \varepsilon \quad (\text{I.71})$$

avec
$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{I.72})$$

b. Transformation de Fourier

La transformée de Fourier d'une fonction ou d'un opérateur dépendant du temps $f(t)$ est notée $f(\omega)$ et est définie par les relations :

$$f(\omega) = \int f(t) e^{i\omega t} dt \quad \text{et} \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int f(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (\text{I.73})$$

La transformée de Fourier d'un opérateur vérifie donc les relations :

$$X(\omega)^+ = X^+(-\omega) \quad (\text{I.74})$$

4 Appendice B : "champ quasi-monomode"

La décomposition du champ électromagnétique en ondes planes repérées par un vecteur d'onde \vec{k} et une polarisation $\vec{\varepsilon}$ s'écrit [Cohen-Tannoudji 87, II.C.5] :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \sum_{\vec{\varepsilon}} \left(i \sqrt{\frac{\hbar \omega}{2\varepsilon_0}} \vec{\varepsilon} a_{\vec{k}, \vec{\varepsilon}}(t) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} + c.c \right) \quad (\text{I.75})$$

où les opérateurs de création et d'annihilation vérifient les relations de commutation :

$$\left[a_{\vec{k}, \vec{\varepsilon}}, a_{\vec{k}', \vec{\varepsilon}'}^+ \right] = \delta_{\vec{\varepsilon}, \vec{\varepsilon}'} (2\pi)^3 \delta(\vec{k} - \vec{k}') \quad (\text{I.76})$$

$$\left[a_{\vec{k}, \vec{\varepsilon}}, a_{\vec{k}, \vec{\varepsilon}} \right] = 0 \quad (\text{I.77})$$

La présence du terme $(2\pi)^3$ dans le commutateur vient de la définition de la transformée de Fourier que nous utilisons et qui diffère de celle de la référence citée. Dans la formule (I.75), le champ électrique est décomposé sur toutes les ondes planes et toutes les polarisations possibles.

Le but de cet appendice est d'obtenir une expression plus simple du champ électrique permettant de modéliser un faisceau lumineux. Par faisceau lumineux, nous entendons un champ électromagnétique de polarisation $\vec{\varepsilon}$ donnée, qui se propage le long d'un axe Oz, dans une direction $\vec{\kappa}$, et qui a une section transversale finie et notée s . Nous recherchons l'expression de ce champ électrique quasi-monomode sous la forme d'une superposition des ondes planes de direction et sens $\vec{\kappa}$. ($\vec{\kappa}$ est le vecteur unitaire de l'axe Oz). En notant $\mathcal{E}(z, t)$ la partie de fréquences positives de ce champ et $\mathcal{E}(z, t)^+$ celle de fréquences négatives, on peut écrire :

$$\mathbf{E}(z,t) = \int_0^\infty \frac{dk}{2\pi} \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0}} i b_k(t) e^{-ikz} \quad \text{et} \quad \mathbf{E}(z,t)^+ = \int_0^\infty \frac{dk}{2\pi} \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0}} (-i) b_k^+(t) e^{ikz} \quad (\text{I.78})$$

Ce champ ne dépend que de la coordonnée d'espace z . Les opérateurs b et b^+ sont des opérateurs d'annihilation et de création dont nous allons établir les relations de commutation. Pour cela, nous allons écrire que le flux d'énergie calculé avec le modèle quasi-monomode du champ coïncide avec le flux d'énergie du vrai champ moyenné sur un plan P_z orthogonal à l'axe Oz. (s est la surface du faisceau).

$$(\mathbf{E}(z,t) + \mathbf{E}(z,t)^+)^2 = \frac{1}{s} \int_{P_z} d^2\vec{r} \vec{\mathbf{E}}(\vec{r},t)^2 \quad (\text{I.79})$$

Le développement de l'égalité précédente montre que les opérateurs b et b^+ doivent vérifier :

$$2\pi \delta(k_x) 2\pi \delta(k_y) s b_k b_{k'}^+ = a_{k\vec{r},\vec{e}} a_{k'\vec{r},\vec{e}}^+ \quad (\text{I.80a})$$

$$2\pi \delta(k_x) 2\pi \delta(k_y) s b_k b_{k'} = a_{k\vec{r},\vec{e}} a_{k'\vec{r},\vec{e}} \quad (\text{I.80b})$$

On en déduit les relations de commutation des opérateurs b et b^+ à partir des relations (I.76,77) :

$$[b_k, b_{k'}^+] = \frac{2\pi}{s} \delta(k - k') \quad \text{et} \quad [b_k, b_{k'}] = 0 \quad (\text{I.81})$$

On introduit alors les opérateurs a_ω et a_ω^+ définis par :

$$a_\omega = \sqrt{\frac{s}{c}} b_k \quad \text{et} \quad a_\omega^+ = \sqrt{\frac{s}{c}} b_k^+ \quad \text{où} \quad \omega = ck \quad (\text{I.82})$$

Ils vérifient les relations de commutation :

$$[a_\omega, a_{\omega'}^+] = 2\pi \delta(\omega - \omega') \quad \text{et} \quad [a_\omega, a_{\omega'}] = 0 \quad (\text{I.83})$$

Dans l'approximation quasi-monomode d'un faisceau lumineux, on néglige les effets de propagation dans les milieux que la lumière traverse. On peut donc décrire le champ par son amplitude au point $z=0$. Dans ce cas, les parties de fréquence positives et négatives du champ électrique quasi monomode s'écrivent :

$$\mathbf{E}(t) = \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi} \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 s c}} i a_\omega(t) \quad \text{et} \quad \mathbf{E}(t)^+ = \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi} \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 s c}} (-i) a_\omega^+(t) \quad (\text{I.84})$$

Nous obtenons la formule (I.11b) annoncée au paragraphe I1c).

II. De l'effet Kerr idéal aux atomes

1 Introduction

Nous avons vu au chapitre précédent qu'un milieu optique linéaire dans une cavité ne permettait pas de modifier les fluctuations du champ entrant dans la cavité. De fait, toutes les expériences de compression du bruit quantique reposant sur des méthodes uniquement optiques utilisent des effets non linéaires du second ou du troisième ordre. Nous étudions dans ce chapitre deux types de systèmes qui sont susceptibles de comprimer les fluctuations du champ entrant dans une cavité, en modifiant très peu sa valeur moyenne. Il s'agit de deux effets paramétriques, accompagnés éventuellement de pertes linéaires. L'un est l'effet Kerr (§1), le second est la conversion paramétrique dans une cavité dont seule sort l'onde pompe.

Pour chacun de ces effets, nous rappelons les propriétés stationnaires du champ interagissant avec la cavité, et en particulier son comportement bistable [Lugiato 84] [Gibbs 85]. Nous analysons ensuite les fluctuations des champs autour de leur valeur stationnaire [Lugiato 82], et montrons que les fluctuations du champ sortant de la cavité [Collet 84] sont fortement comprimées lorsque la cavité est utilisée au voisinage d'un seuil d'instabilité [Collet 85] [Raizen 87] [Xiao 87]. L'étude des propriétés de bruit avec le modèle à effet Kerr nous donne un critère de qualité permettant de comparer les caractéristiques des milieux non linéaires disponibles à celles requises pour l'obtention de la bistabilité optique et l'observation de la réduction du bruit quantique.

2 Modèle de la cavité à effet Kerr

L'effet Kerr Optique est une des non-linéarités les plus simples : c'est une non-linéarité du troisième ordre complètement dégénérée, qui ne fait intervenir qu'un seul mode du champ, et dont l'effet est de donner à l'indice de réfraction une contribution proportionnelle à l'intensité du champ. Un faisceau lumineux traversant un milieu Kerr subit donc un déphasage proportionnel à son intensité. Mathématiquement, un milieu à effet Kerr est modélisé par la relation entrée-sortie :

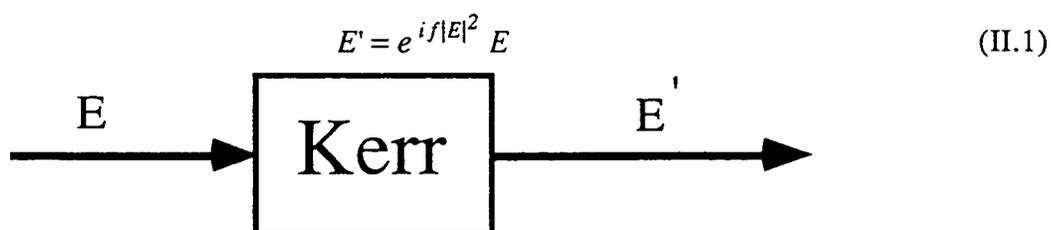


Figure II.1

Le coefficient de proportionnalité f est relié à la partie réelle de la susceptibilité non linéaire d'ordre 3 du milieu $\chi^{(3)}$ par :

$$f = \frac{k \chi^{(3)} l}{2} \quad (II.2)$$

où k est le module du vecteur d'onde du champ, et l la longueur du milieu. L'équation (II.1) peut se déduire de l'équation de propagation du champ électromagnétique lorsqu'on introduit un terme de polarisation non linéaire avec une polarisabilité proportionnelle à l'intensité du champ.

a. Les équations d'évolution du champ

On considère une cavité en anneau (figure II.2) composée d'un miroir de couplage M de transmission et réflexion t et r , et d'un milieu à effet Kerr décrit par la relation (II.1). Le milieu non linéaire ou la cavité peuvent présenter des pertes linéaires (absorption, diffusion) que nous modélisons par un second miroir de couplage M' , de transmission et réflexion t' et r' . Pour une cavité de grande finesse, on introduit les quantités γ_{cav} et γ' définies par :

$$r = 1 - \gamma_{cav} \quad , \quad r' = 1 - \gamma' \quad , \quad \gamma_{cav} \approx \frac{t^2}{2} \quad , \quad \gamma' \approx \frac{t'^2}{2} \quad (II.3)$$

On note A^{in} et E'' les champs entrant sur le miroir M , A^{out} et E les champs sortant du miroir, E est aussi le champ entrant dans le milieu Kerr, E' est le champ qui en ressort. A la dissipation due au second miroir de couplage sont liées des fluctuations notées A_{in}' , qui sont les fluctuations du champ vide entrant par la deuxième face du miroir M' . La phase linéaire due à la propagation sur un tour de cavité est décrite par un déphasage ϕ_0 .

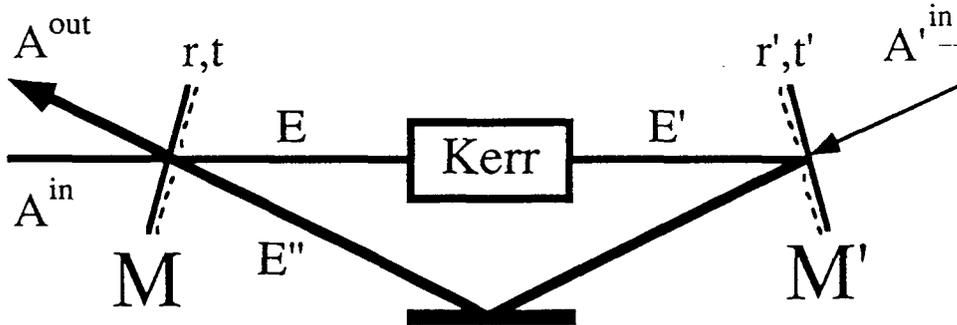


Figure II.2

Dans la limite de la cavité de grande finesse, les équations reliant les champs sont :

$$\left. \begin{aligned} E &= t A^{in} + r E'' \\ A^{out} &= -r A^{in} + t E'' \\ E'' &= r' E' e^{i\phi_0} + t A'^{in} \end{aligned} \right\} \quad (II.4)$$

$$E' = e^{i f |E|^2} E \quad (II.5)$$

i. Equations pour les valeurs moyennes

Une cavité contenant un milieu à effet Kerr possède un régime stationnaire bistable : pour certaines valeurs des paramètres γ_{cav} , γ' et $\langle A^{in} \rangle$ il existe plusieurs solutions stables possibles pour l'intensité $\langle |E|^2 \rangle$ du champ à l'intérieur de la cavité. Ces solutions sont données par l'équation

d'état du système, c'est à dire l'équation reliant les valeurs moyennes. Dans la limite d'une cavité de grande finesse au voisinage d'une de ses résonances, on déduit l'équation d'état des relations (II.4), en supposant que l'effet non linéaire est faible :

$$\sqrt{2\gamma_{cav}} \langle A^{in} \rangle = \langle E \rangle \left\{ (\gamma_{cav} + \gamma') + i(\phi_0 + f\langle E \rangle^2) \right\} \quad (II.6)$$

On a utilisé le fait que la valeur moyenne du champ du vide entrant par la seconde face du miroir M' est nulle. Les équations (II.4 et II.6) donnent le champ sortant :

$$t \langle A^{out} \rangle = \left(\gamma_{cav} - \gamma' - i(\phi_0 + f\langle E \rangle^2) \right) \langle E \rangle \quad (II.7)$$

Avant d'étudier les solutions de l'équation d'état (II.6), nous introduisons les notations suivantes :

$$K = f\langle E \rangle^2, \quad g = \frac{f}{\epsilon_0 c s}, \quad P = s \epsilon_0 c \langle A^{in} \rangle^2 \quad (II.8)$$

où ϵ_0 est la permittivité du vide c la vitesse de la lumière et s la surface du faisceau incident sur la cavité. L'équation (II.6) devient :

$$2\gamma_{cav} g P = |K| \left\{ (\gamma_{cav} + \gamma')^2 + (\phi_0 + |K|)^2 \right\} \quad (II.9)$$

Les courbes de bistabilité (Puissance incidente P en fonction de la puissance intérieure normalisée $|K|$) sont des courbes du troisième degré, dont la pente est définie par :

$$p = \frac{\partial(2\gamma_{cav} g P)}{\partial |K|} = (\gamma_{cav} + \gamma')^2 + \phi_0^2 + 4|K|\phi_0 + 3|K|^2 \quad (II.10)$$

Suivant les valeurs du paramètre ϕ_0 , trois formes de courbes sont possibles. Elles sont montrées sur la figure II.3, dans les coordonnées usuelles $|K|$ en fonction de P :

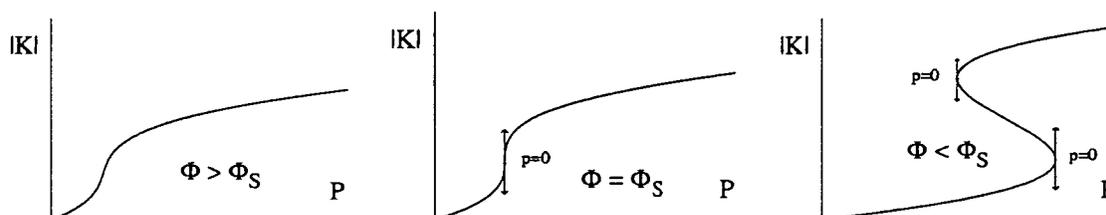


Figure II.3 : Allure des courbes de bistabilité. $\gamma_{cav} = 0,04$, $\gamma' = 0,01$ et $g = 10^{-5}$.

L'étude de l'annulation de la pente p conduit aux résultats illustrés par la figure II.3 : si le déphasage ϕ_0 est inférieur à un déphasage seuil ϕ_S , la pente p ne s'annule jamais et la puissance intérieure $|K|$ ne peut prendre qu'une valeur pour une puissance incidente donnée. La relation entre ces deux puissances est simplement non linéaire. Si le déphasage est égal au déphasage seuil, la pente p s'annule pour une valeur seuil de la puissance incidente P_S . $|K|$ reste une fonction à une seule valeur de P . Lorsque le déphasage est inférieur au déphasage seuil, la pente p s'annule pour deux valeurs de la puissance incidente supérieures à P_S . Entre ces deux valeurs, l'équation d'état (II.9) admet trois solutions. Deux de pente positive et une de pente négative. Cette dernière est instable. La puissance intracavité admet donc deux solutions stables pour une même puissance

incidente : on a un phénomène de bistabilité. Les points où la pente s'annule sont appelés points tournants de la bistabilité. Le déphasage seuil et la puissance seuil sont donnés par :

$$\phi_S = -\sqrt{3}(\gamma_{cav} + \gamma') \quad (\text{II.11})$$

$$2\gamma_{cav}g P_S = \frac{8}{9}\sqrt{3}(\gamma_{cav} + \gamma')^3 \quad (\text{II.12})$$

Le lieu des points où la pente de la courbe de bistabilité p s'annule, dans le plan (ϕ_0, P) délimite la zone de bistabilité de la cavité à effet Kerr. Il est donné sur la figure II.4 par la relation (II.9) où :

$$|K| = \frac{(-2\phi_0 \pm \sqrt{\Delta'})}{3} \quad \text{avec} \quad \Delta' = \phi_0^2 - 3(\gamma_{cav} + \gamma')^2 \quad (\text{II.13})$$

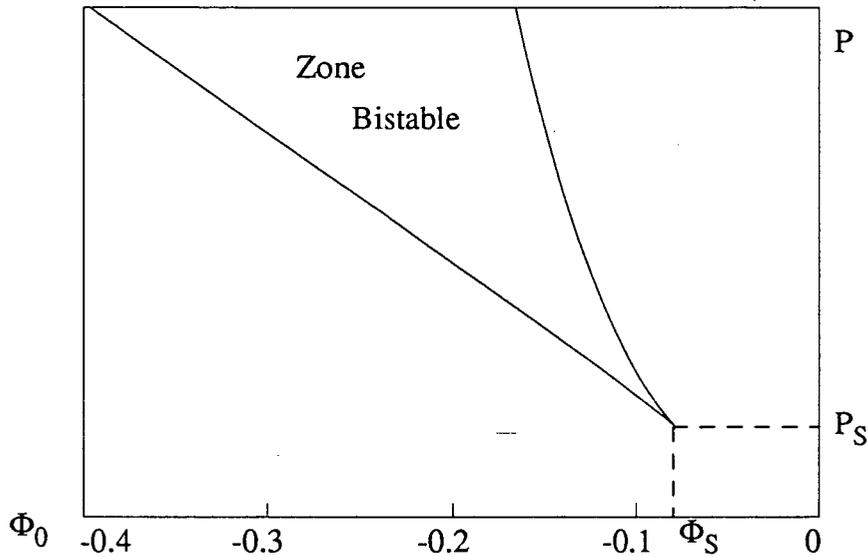


Figure II.4 : Zone dans le plan puissance incidente P - déphasage linéaire ϕ_0 , où la cavité a un comportement bistable. $\gamma_{cav} = 0,04$, $\gamma' = 0,005$.

ii. Transformation des fluctuations

Les équations (II.4) étant des équations linéaires, elles sont aussi valables pour les fluctuations $\delta E, \delta E', \delta E'', \delta A^{in}, \delta A^{out}$ des champs. Comme on l'a vu au chapitre I, ces équations conservent les relations de commutation des champs libres.

La transformation canonique des fluctuations par le milieu Kerr se déduit de (II.5), en linéarisant la transformation autour d'un point de fonctionnement repéré par K . On obtient, en utilisant les notations matricielles introduites dans l'appendice A du chapitre I :

$$[\delta E'] = \begin{pmatrix} e^{i|K|}(1+i|K|) & e^{i|K|}iK \\ e^{-i|K|}(-iK^*) & e^{-i|K|}(1-i|K|) \end{pmatrix} [\delta E] \quad (\text{II.14})$$

Les relations de commutation sont conservées car le déterminant de cette matrice vaut 1.

On peut alors calculer la transformation entrée-sortie des fluctuations. En supposant que le déphasage non linéaire $|K|$ est petit devant 1, on obtient :

$$\begin{aligned} \left\{ \gamma_{cav} + \gamma' - i\omega\tau + i\varepsilon\phi_0 + i\varepsilon[\phi_{NL}] \right\} \left[\delta A^{out}(\omega) \right] = \\ \left\{ \gamma_{cav} - \gamma' - i\omega\tau + i\varepsilon\phi_0 - i\varepsilon[\phi_{NL}] \right\} \left[\delta A^{in}(\omega) \right] + 2\sqrt{\gamma_{cav}\gamma'} \left[\delta A_{in}(\omega) \right] \end{aligned} \quad (II.15)$$

où

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad [\phi_{NL}] = \begin{pmatrix} 2|K| & K \\ K^* & 2|K| \end{pmatrix} \quad (II.16)$$

En utilisant (I.54 et 57), on en déduit la matrice de drift $\mu_K(\omega)$ et la matrice de diffusion $D_K(\omega)$:

$$\mu_K(\omega)^{-1} = \frac{1}{2\gamma_{cav}} \left(\gamma_{cav} + \gamma' - i\omega\tau + i\varepsilon\phi_0 + i\varepsilon[\phi_{NL}] \right) \quad (II.17)$$

$$D_K(\omega) = \frac{i}{2\gamma_{cav}} \begin{pmatrix} 0 & K \\ K^* & 0 \end{pmatrix} \quad (II.18)$$

On peut maintenant calculer la matrice des fonctions de corrélation du champ sortant de la cavité en utilisant les formules générales (I.24, I.30 et I.57) établies au chapitre I. Nous donnons ici à titre d'exemple l'expression du spectre de bruit d'intensité [Reynaud 89] qu'on obtient à partir des relations (I.24 et 57) et (II.7) :

$$S_I(\omega) = 1 + \frac{N_a}{D} \quad (II.19)$$

avec

$$N_a = \frac{8\gamma_{cav}(\phi_0 + |K|)|K| \left\{ (\gamma_{cav} - \gamma')^2 (\omega\tau)^2 + 2\gamma'p - 4\gamma'^2 (\gamma_{cav} + \gamma') \right\}}{(\gamma_{cav} - \gamma')^2 + (\phi_0 + |K|)^2} \quad (II.20)$$

$$D = 4(\gamma_{cav} + \gamma')^2 (\omega\tau)^2 + ((\omega\tau)^2 - p)^2 \quad (II.21)$$

b. Discussion des spectres de bruit

i. Bruit optimum

Les spectres de réduction optimale du bruit du champ sortant de la cavité sont calculés à l'aide des formules I.34, II.17 et II.18. De tels spectres sont représentés sur la figure (II.5a). On observe que le bruit est réduit dans une bande passante de l'ordre de la largeur de la cavité, la meilleure réduction de bruit étant obtenue à fréquence nulle. En l'absence de pertes intra-cavité, la réduction de bruit est d'autant meilleure que le point de fonctionnement est proche d'un des points tournant de la bistabilité (figure II-5a). Lorsqu'il y a des pertes, la réduction optimale diminue d'un facteur $\gamma_{cav} / (\gamma_{cav} + \gamma')$ (figure II-5b).

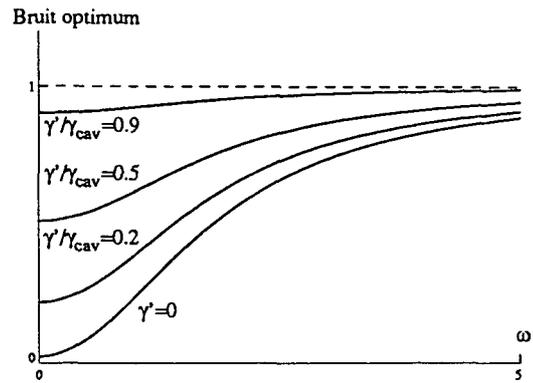
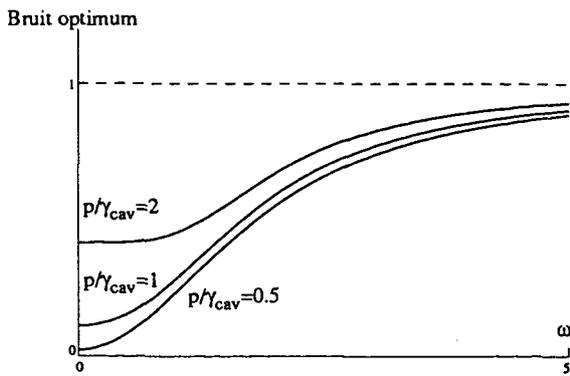


Figure II-5a : $\phi_0 = -2 \gamma_{cav}, \gamma' = 0$

Figure II-5b : $\phi_0 = -2 \gamma_{cav}, p = 0,5 \gamma_{cav}$.

Les figures II-5a et II-5b présentent des spectres de bruit optimum tracés pour différentes pentes p (II-5a) et différentes pertes intracavité γ' (II-5b).

ii. Bruit d'Intensité

Lorsque la cavité fonctionne au voisinage d'un point tournant de la bistabilité (pente p petite), le bruit d'intensité du champ sortant de la cavité est réduit sur une plage de fréquences comprises entre l'inverse du temps de ralentissement critique et la largeur de la cavité (figure II-5c). En effet une cavité ne peut pas modifier des fluctuations ayant un temps caractéristique plus court que le temps de stockage de la lumière dans la cavité. Par ailleurs, le bruit d'intensité à fréquence nulle ne peut être réduit si la cavité n'a pas de pertes intérieures car sur un intervalle de temps long, tous les photons entrant dans la cavité finissent par en ressortir. L'échelle de fréquence de ce phénomène est l'inverse du temps caractéristique d'évolution du champ dans la cavité au voisinage du seuil de bistabilité, qui est appelé temps de ralentissement critique [Gibbs 85].

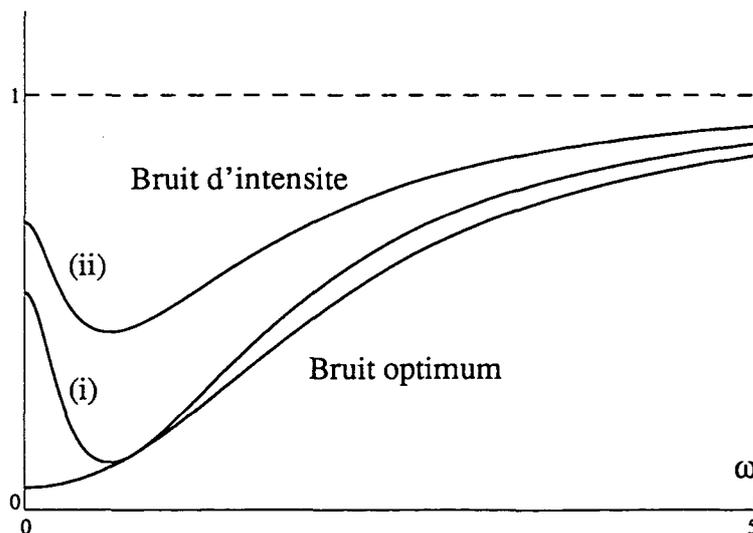


Figure II-5c : Bruit optimum et bruit d'intensité. (i) branche basse de la courbe de bistabilité, (ii) branche haute. $\phi_0 = -3, p = 0,5, \gamma' / (\gamma' + \gamma_{cav}) = 0,04$.

Des pertes intracavité γ autorisent une redistribution des photons entre le miroir d'entrée-sortie de la cavité M et le miroir M' modélisant ces pertes : une réduction du bruit d'intensité à fréquence nulle devient possible. Cependant si les pertes γ sont trop importantes devant γ_{cav} , toute réduction de bruit disparaît. (figure II.5b).

Comme le montrent les formules (II.20 et II.21), la réduction du bruit d'intensité est maximale pour une fréquence d'analyse telle que $\omega\tau \approx p^{1/2}$. Elle vaut alors $p / 4 \gamma_{cav}^2$. Lorsque le point de fonctionnement appartient à la zone de bistabilité (figure II-4), la réduction du bruit d'intensité dépend de la solution choisie.

Les figures II-5d et II-5e représentent la réduction de bruit d'intensité pour une fréquence d'analyse donnée, en fonction de la puissance du champ incident sur la cavité et en fonction du déphasage linéaire du champ dans la cavité. Ces courbes correspondent à des courbes accessibles aux expériences. Elles montrent que la réduction de bruit d'intensité dépend beaucoup du déphasage ϕ_0 .

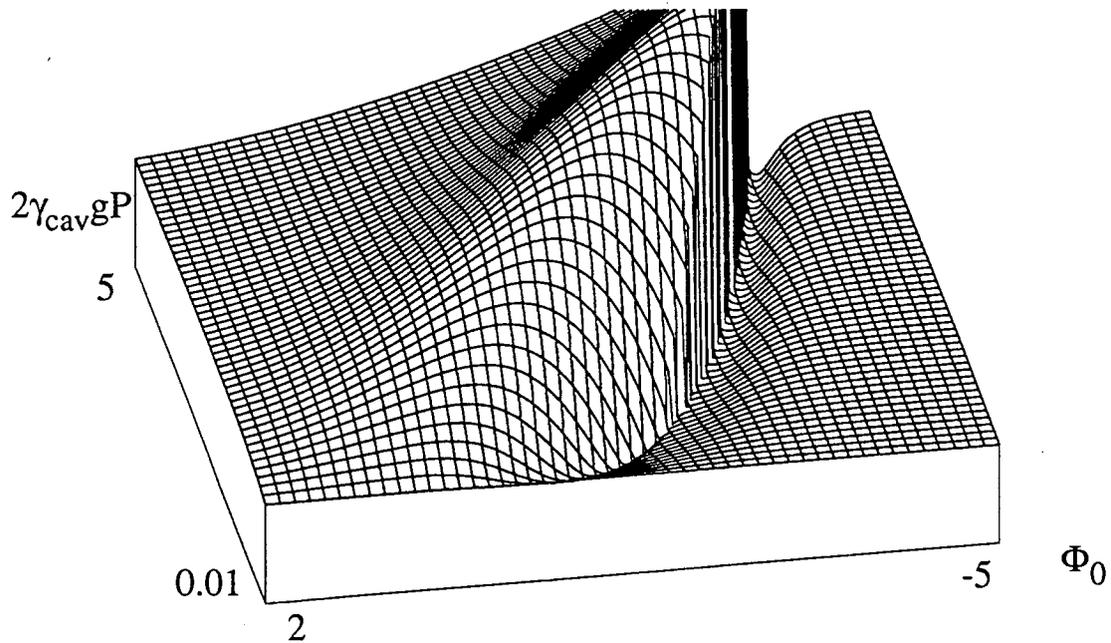


Figure II.5d : Bruit d'intensité en fonction du déphasage ϕ_0 et de la puissance incidente sur la cavité P , pour la branche basse de la courbe de bistabilité. $\gamma/\gamma_{cav} = 0,1$, $\omega\tau/\gamma_{cav} = 2$.

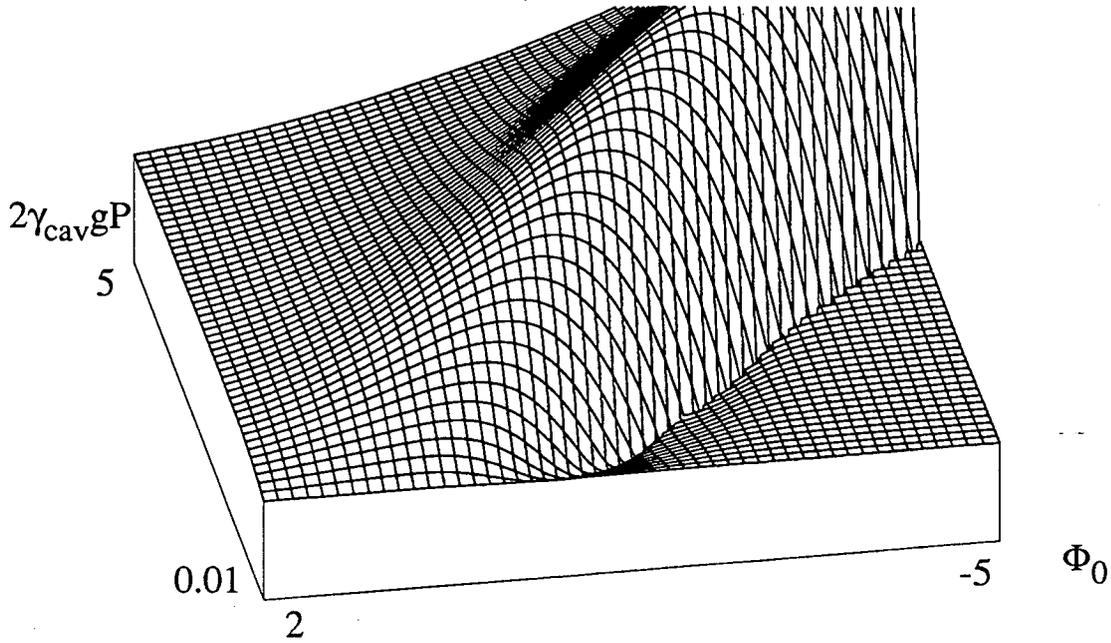


Figure II.5e : Même spectre que sur la figure II-5d, pour la branche haute de la courbe de bistabilité.

III. Conclusion

Finalement, une cavité bistable contenant un milieu à effet Kerr peut réduire substantiellement le bruit quantique sur une composante de quadrature du champ, en particulier l'amplitude. La réduction de bruit subsiste en présence de pertes intra-cavité faibles. Ce dispositif est donc un bon candidat pour la réalisation d'une cavité optique "mangeuse de bruit".

c. Conditions sur la non-linéarité et l'absorption

Dans la perspective de la réalisation expérimentale d'une cavité bistable pour la réduction du bruit quantique, il est important de connaître l'ordre de grandeur des non-linéarités nécessaires, et des pertes γ' admissibles. On peut obtenir une estimation de la non-linéarité à partir soit de la condition d'existence de la bistabilité donnée par l'annulation de la pente p , soit de la condition de réduction du bruit d'intensité à fréquence nulle, donnée par $N_a(0)=0$. Ces deux équations s'écrivent respectivement, à l'aide de II.10 et II.20 :

$$(\phi_0 + |K|)^2 + 2(\phi_0 + |K|)|K| + (\gamma + \gamma')^2 = 0 \quad (\text{II.22})$$

et

$$(\phi_0 + |K|)^2 + 2(\phi_0 + |K|)|K| + (\gamma + \gamma')(\gamma - \gamma') = 0 \quad (\text{II.23})$$

Dans le cas d'une cavité de grande finesse, γ' est très petit devant γ , ces deux équations sont donc identiques. On retient la première des deux. Le calcul de la puissance minimale conduisant à l'annulation de la pente p est identique au calcul de la puissance seuil (II.12). La bistabilité existe si la puissance incidente sur la cavité vérifie :

$$2\gamma_{cav} g P \geq \frac{8}{9} \sqrt{3} (\gamma_{cav} + \gamma')^3 \quad (\text{II.24})$$

En remplaçant g , puis f par leur valeur, et puisque $\gamma' \ll \gamma_{cav}$, la condition précédente conduit à :

$$\frac{l}{\epsilon_0 c} \frac{kl}{S} \chi^{(3)} P \geq \frac{8}{9} \sqrt{3} (\gamma_{cav})^2 \quad (\text{II.25})$$

où k est le vecteur d'onde, l la longueur du milieu, S la surface du faisceau lumineux, P la puissance du faisceau incident. Dans cette dernière relation, l et S ne sont pas indépendants : le plus souvent, on ne peut pas considérer que la section S du faisceau reste constante sur une longueur l arbitrairement grande. On ne peut donc pas augmenter beaucoup l'effet non linéaire en allongeant le milieu. Dans le cas d'un faisceau de géométrie gaussienne [Kogelnik 65], il est raisonnable de supposer que l'optimum se produit lorsque le milieu a une longueur comparable à la longueur de Rayleigh du faisceau gaussien. (Cet argument n'est pas valable pour les milieux où la propagation est guidée). Dans le cas que nous considérons, le rapport l/S vaut :

$$\frac{l}{S} = 2 \frac{\pi w_0^2 / \lambda}{\pi w_0^2} = \frac{k}{\pi} \quad (\text{II.26})$$

L'inégalité (II.25), et l'hypothèse $\gamma' \ll \gamma_{cav}$ conduisent alors à une contrainte sur la non-linéarité $\chi^{(3)}$ et les pertes γ' :

$$\frac{\chi^{(3)}}{(\gamma')^2} \gg \frac{8\sqrt{3}}{9} \pi \frac{\epsilon_0}{k^2} \frac{l}{P} \quad (\text{II.27})$$

L'examen des spectres de la figure II.5b montre que la réduction de bruit n'est pas notablement détériorée lorsque γ' / γ reste inférieur à 0,1. Nous obtenons ainsi un critère pratique d'évaluation des milieux non-linéaires, où le signe très supérieur \gg signifie supérieur d'environ 2 ordres de grandeur.

d. Evaluation des possibilités expérimentales

i. Caractéristiques des différents milieux non linéaires

Les propriétés des milieux non linéaires disponibles doivent être confrontées au critère que nous venons d'établir. Dans la littérature, on trouve des mesures ou des estimations des non-linéarités de nombreux milieux, ainsi que la valeur de leur coefficient d'absorption α , exprimé en cm^{-1} . On peut donc porter sur un graphique la position de ces milieux, avec le coefficient d'absorption en abscisse, et le coefficient $\chi^{(3)}$ en ordonnée. Sur la figure (II.6) où les coordonnées sont logarithmiques le coefficient d'absorption augmente de gauche à droite, et le coefficient $\chi^{(3)}$ diminue de bas en haut. Les milieux non linéaires sont donc d'autant meilleurs pour la réduction du bruit de la lumière qu'ils sont situés en bas et à gauche du graphique.

On porte sur ce même graphique des droites délimitant les propriétés requises par la formule (II.27). Les pertes par absorption γ' sont liées au coefficient α d'absorption par $\gamma' = \alpha l$ où l est la

longueur du milieu. Ces droites sont tracées pour une longueur d'onde de 1 micron. Leurs équations sont :

$$\text{Log}_{10} \chi^{(3)} = 2 \text{Log}_{10} \alpha - 13 - \text{Log}_{10} P + 2 \text{Log}_{10} l \quad (\text{II.28})$$

où P est exprimé en Watt et l en mètres.

On porte sur ce même graphique les points correspondant à la non-linéarité et aux pertes d'un nuage d'atomes à deux niveaux immobiles et excités loin de résonance, dont les ordres de grandeur correspondent au césium. Les coefficients α et $\chi^{(3)}$ d'un tel nuage d'atomes sont donnés au chapitre III par (III.88 et 94) :

$$\alpha_{at} = n 3\pi \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^2 \frac{I}{1+\delta^2} \quad (\text{II.29})$$

$$\chi_{at}^{(3)} = n 36 \pi^2 \frac{\epsilon_0}{\hbar\gamma} \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^6 \frac{\delta}{(1+\delta^2)^2} \quad (\text{II.30})$$

λ est la longueur d'onde de la résonance atomique

δ le désaccord atomique de la lumière utilisée

n est la densité du nuage d'atomes

γ est la demi largeur naturelle de la transition atomique

Le désaccord à résonance est un paramètre variant entre 10 et 1000 largeurs naturelles. Compte tenu de la valeur de la largeur naturelle ($3,3 \cdot 10^7 \text{ s}^{-1}$), on a, si la densité n est comptée en atomes par mètre-cube :

$$\text{Log}_{10} \alpha_{at} = -13,4 + \text{Log}_{10}(n) - 2 \text{Log}_{10} \left(\frac{\delta}{\gamma}\right) \quad (\text{II.31})$$

$$\text{Log}_{10} \chi_{at}^{(3)} = -23,5 + \text{Log}_{10}(n) - 3 \text{Log}_{10} \frac{\delta}{\gamma} \quad (\text{II.32})$$

Lorsque δ varie, on obtient, en coordonnées logarithmiques, une courbe de pente 3/2, dont l'ordonnée à l'origine dépend de la densité n .

Le tableau (II.1) donne les caractéristiques de quelques matériaux non linéaires rencontrés dans la littérature. Les valeurs des coefficients non linéaires d'ordre trois ($\chi^{(3)}$) sont des ordres de grandeur. En effet, la définition de ce coefficient n'est pas souvent précisée par les auteurs : selon que le champ électrique est défini comme la partie réelle, ou 2 fois la partie réelle de son amplitude complexe [Yariv 84] [Shen 84], le coefficient $\chi^{(3)}$ varie d'un facteur 4. De plus, les mesures des coefficients non linéaires sont souvent faites par mélange à quatre ondes non dégénéré, et la relation entre un $\chi^{(3)}$ non dégénéré et complètement dégénéré dépend aussi des auteurs,... qui là non plus ne précisent pas toujours la convention qu'ils adoptent.

Le cas du KDP est un peu différent car la valeur retenue de $\chi^{(3)}$ est issue d'un ordre de grandeur des coefficients électrooptiques quadratiques de ce cristal qui correspondent au changement d'indice du cristal lorsqu'on lui applique une tension électrique (ou un champ très basse fréquence, à l'échelle d'une fréquence lumineuse). Dans la mesure où ce changement d'indice ne dépend pas

de la fréquence, de 0 à plusieurs dizaines de GHz, on extrapole cette valeur jusqu'aux fréquences optiques, ce qui pourrait ne pas donner une valeur correcte. Cependant, en l'absence de mesure, c'est la valeur que nous adopterons.

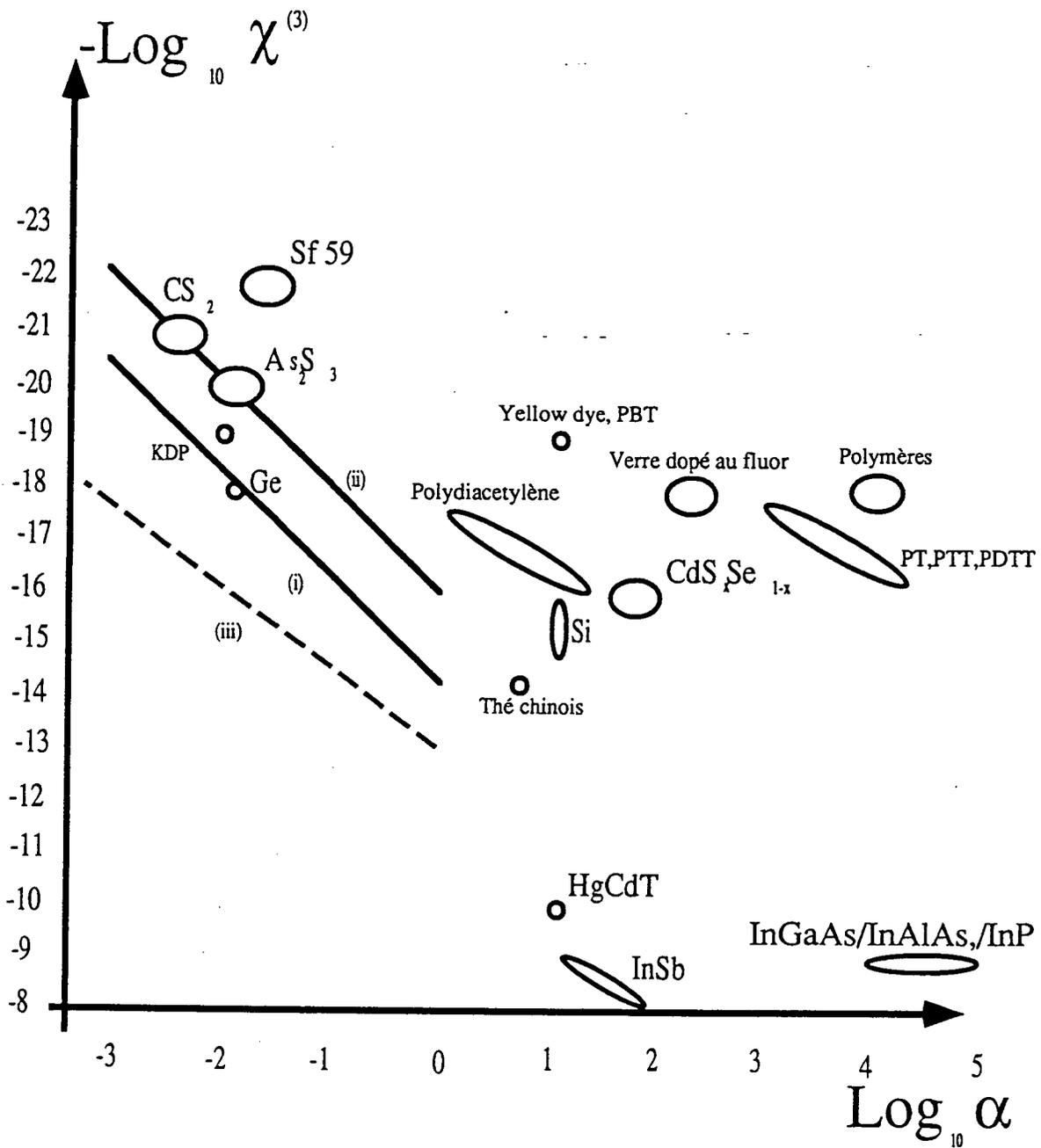


Figure II-6 : Graphique portant en abscisse le coefficient d'absorption et en ordonnée le coefficient non linéaire d'ordre 3 pour différents matériaux. Les droites (i) et (ii) délimitent la condition requise par la relation II.28 pour $P = 10 \text{ mW}$ et $l = 1 \text{ cm}$ (i), $P = 1 \text{ W}$ et $l = 1 \text{ cm}$ (ii). La droite en pointillé (iii) correspond à un ensemble d'atomes à deux niveaux de densité 10^{13} /cm^3 (ordre de grandeur du césium).

Matériau	Long onde en μm	Absorption en cm^{-1}	Non linéarité en $(\text{m/V})^2$	Temps de réponse en s	Epaisseur du milieu en cm	Référence
KDP		10^{-2}	10^{-19}			
Sf 59	1.06	$10^{-1}, 10^{-2}$	10^{-22}	10^{-9}	1	1 et 3
CS ₂	1.06	$10^{-2}, 10^{-3}$	10^{-21}	10^{-12}	1	2
AS ₂ S ₃	1.06	10^{-2}	10^{-20}		1	3
CdS _x Se _{1-x}	0.514	75	10^{-16}		0,2	4
Fluor.doped boric acid glass	0.46	238	10^{-18}	10^{-9}	0,01	5
Polymeres	0.532	10^4	10^{-18} ou -19	$< 6 \cdot 10^{-12}$	10^{-4}	6
Polydiacétylène (P.T.S.)	0.6515 0.7015	50 % 2 %	10^{-16} $7 \cdot 10^{-18}$	10^{-12}	films	7
P.T.S.	2.62, 1.89		$10^{-21}, 10^{-18}$			8
Phalocyanines			10^{-16}	10^{-12}	films	9
Chlorophénols	1.06		$6 \cdot 10^{-20}$	10^{-10}	0,2	10
PT, PTT	0.532	$4.8 \cdot 10^4$	$7 \cdot 10^{-17}$	10^{-12}	films μm	11
PDTT.	1.064	$< 3 \%$	10^{-19}			
Yellow dye	0.532	50 %	10^{-19}		0,1	12
Thé chinois	0.6328	10^1	10^{-15}	10^{-1}		13
Ge, Si	10	10^{-2}	$10^{-18}/10^{-20}$			14
Si	1.06	10	$10^{-15}/10^{-16}$			15
InSb	10.6	$10..100$	$10^{-15}/10^{-16}$	10^{-12}		16
Matériau	Long onde en μm	Absorption en cm^{-1}	Non linéarité en $(\text{m/V})^2$	Temps de réponse en s	Epaisseur du milieu en cm	Référence

Tableau II.1 :

HgCdT	10,6	10	10-10			
InGaAs/InAlAs/ InP	0.6/0.8	10 ⁴ /10 ⁵	10 ⁻⁹		µm	17
P.B.T.	0.585, 0.604	10	10-19		films	18
Mélanges critiques	0,514		10-16	10-3	1	19
SiO ₂	visible et I.R.	10 ⁻⁷	10-23	10-15	10 ⁴	

REFERENCES :

- 1 : Optics Letters **10**, 5, Mai 1985
2 : Optics Communications **51**, 6, 1984
3 : Applied Physics Letters **54**, 14, 1989
4 : Applied Physics Letters **48**, 18, 1986 ; JOSA.B. 5, 8, Août 1988
5 : Physical Review A **34**, 3, Septembre 1986
1968
6 : Journal of Applied Physics **65**, 12, Juin 1989
7 : Applied Physics Letters **47**, 456, 1985
8 : Physical Review Letters **36**, p.956, 1976
22,p1239,1987
9 : Pas de référence
1986
- 10 : Physica **147** C, 332-335, 1987
11 : Optics Letters **14**, 23, 1989
12 : Pas de référence
13 : Optics Letters **14**, 13, Juillet 1989
14 : Applied Physics Letters **12**, p.191, Mars
1968
15 : Applied Physics Letters **35**, 6, 1979
16 : JOSA.B. 6, 4, 1989
17 : Revue de Physique Appliquée
18 : Applied Physics Letters **48**, p.1187,
JOSA.B.2,p1155 1985
19 : P.R.A **39**, 5268 (1989)

II. Classification des milieux non linéaires

L'ensemble des milieux non linéaires existants peut être séparé en quatre catégories : deux catégories de milieux non résonnants, et deux de milieux résonnants [Hilico 92b].

Les milieux transparents rapides : Lorsque le champ incident sur un milieu a une fréquence très éloignée de toute résonance optique, il n'y a pas d'échange d'énergie entre le champ et le milieu. Le champ électrique oscillant crée une polarisation macroscopique oscillant en phase qui interfère avec le champ incident pour donner un déphasage. Le temps de réponse de ces déphasages est extrêmement court, dans le domaine de la femto-seconde, et les non-linéarités, comme l'absorption sont extrêmement faibles ($\alpha = 10^{-7}$ et $\chi^3 = 10^{-23} \text{ (V/m)}^2$ pour la silice). Cette valeur est en dehors de notre graphique (figure II-6). L'obtention de grands déphasages non linéaires nécessite des puissances très importantes ou de grandes longueurs d'interaction. Une solution consiste à utiliser des fibres optiques en silice. Cependant dans un tel milieu, le squeezing est souvent masqué par la diffusion Brillouin par les ondes acoustiques guidées dans la fibre (GAWBS). Des effets de réduction de bruit sur des impulsions lumineuses ont récemment été observés [Rosenbluh 91] [Bergman 91]. Une autre solution est d'utiliser une cavité optique de très haute finesse afin d'obtenir une grande puissance intracavité. Cela est possible à l'aide par exemple d'un résonateur monolithique en silice, compte tenu des très faibles pertes de ce matériau pour les longueurs d'onde visibles et proches infrarouge.

Les milieux transparents plus lents : Il existe des milieux transparents ayant de relativement fortes non-linéarités, qui trouvent leur origine dans la modification d'un équilibre thermique sous l'action de la lumière. C'est le cas du sulfure de carbone (CS_2) où le processus est une réorientation de dipôles moléculaires désordonnés le long du champ électrique, ou pour les micro-émulsions [Jean-Jean 89] ou les suspensions de microbilles où la lumière induit des changements de densité. Ces derniers matériaux ont des temps de réponse très longs (de l'ordre de la milliseconde) qui réduisent la bande passante des effets non linéaires recherchés. De plus, le couplage du matériau à un bain thermique, responsable de la non-linéarité va aussi amener de l'excès de bruit, que nous cherchons à éviter pour les applications à la compression des fluctuations de la lumière.

Les milieux absorbants : Certains milieux absorbent la lumière et stockent l'énergie sous forme d'excitation du milieu : création d'un plasma électrons-trous dans les semi-conducteurs, avec un temps de réponse de l'ordre de la picoseconde, diffusion de charges électriques dans les milieux photoréfractifs [Gunter 89], avec des temps caractéristiques, de l'ordre de la micro ou de la milliseconde. Ce stockage d'énergie modifie les propriétés optiques des matériaux. De plus, les propriétés optiques de ces milieux ne dépendent pas que de l'intensité instantanée du champ, mais aussi de son histoire (effet cumulatif). On obtient ainsi de très fortes non-linéarités, qui peuvent trouver des applications pour le traitement du signal. En ce qui concerne le bruit quantique, ces non-linéarités sont peu favorables car elles trouvent leur origine dans les populations non cohérentes produites par l'absorption de la lumière. Ce processus dissipatif ne peut qu'introduire de l'excès de bruit, et limiter les applications à la réduction du bruit quantique. Notons qu'il est

possible de réaliser des cavités optiques monolithiques bistables utilisant la grande non-linéarité d'une structure à puits quantiques [Sfez 91].

Les milieux presque résonnants : Ce sont les milieux pour lesquels la fréquence du champ électromagnétique est proche d'une résonance (semi-conducteurs) ou d'une transition (atomique, ionique ou moléculaire). La saturation de la transition par la lumière conduit à une réponse non linéaire de la polarisation macroscopique du milieu. Le temps de réponse de ces milieux est de l'ordre de l'inverse du désaccord entre la fréquence du champ, et celle de la transition. Si on est loin de résonance, on peut avoir une réponse très rapide. Si on se rapproche de résonance, on augmente la non-linéarité, mais on augmente corrélativement l'absorption dans le milieu. Les couplages responsables de la relaxation du milieu (relaxation radiative pour les transitions atomique ou moléculaires, relaxation thermique pour les matériaux solides via les modes de vibration) provoquent un déphasage aléatoire de la polarisation macroscopique induite dans le milieu, qui apporte de l'excès de bruit au champ interagissant avec le milieu. Au chapitre III, le modèle de l'atome à deux niveaux permettra d'étayer quantitativement cet argument.

iii. conclusion

L'analyse du graphique de la figure II-6 montre que les non-linéarités paramétriques ne sont utilisables qu'avec de très grandes longueurs d'interaction (fibres optiques), ou avec des champs laser très intenses (impulsions). La position de la courbe correspondant à la non-linéarité atomique quasi-résonnante montre qu'une assemblée d'atomes à deux niveaux immobiles est un très bon candidat pour la bistabilité optique et la réduction de bruit. Ce constat et l'invention du piège magnéto-optique permettant d'obtenir un nuage d'atomes immobiles ont suscité la partie expérimentale de ce travail de recherche.

3 Les limitations de ce modèle

Dans le paragraphe précédent, on a traité le cas d'un milieu Kerr idéal, représenté par un coefficient $\chi^{(3)}$ réel et instantané dont l'effet sur le champ est un déphasage non linéaire; on tenait aussi compte de pertes linéaires γ . Ce modèle néglige donc toute la dynamique de la non-linéarité, c'est à dire suppose qu'elle est très rapide devant le temps de stockage du champ dans la cavité (τ/γ_{cav}), et qu'elle n'introduit pas de bruit propre. Or de nombreuses non-linéarités ont des temps de réponse relativement longs ainsi que des dynamiques complexes. D'autre part, la relation (II.1) qui décrit phénoménologiquement l'effet Kerr suppose que le mode du champ n'est pas modifié géométriquement par le milieu non linéaire. Cela est vrai si les modes du champ sont des ondes planes. Or dans une expérience, les faisceaux utilisés ne sont pas des ondes planes, mais des modes gaussiens. Il est donc important de connaître les effets géométriques et les effets de retard, c'est à dire l'effet d'une dépendance spatio temporelle de la non-linéarité utilisée. Le cas général étant très compliqué, on traitera séparément les deux aspects : j'envisagerai tout d'abord les effets géométriques dans l'approximation paraxiale, puis j'étudierai les effets temporels en introduisant un temps de réponse pour la non-linéarité.

a. Effets des modes transverses

La décomposition en modes du champ électromagnétique n'est pas unique, et il existe une base de modes très bien adaptée du point de vue géométrique à la description des faisceaux lumineux issus des sources laser : ce sont les modes gaussiens. Ils peuvent être introduits de deux manières. Tout d'abord, ces modes peuvent être vus comme les modes propres du champ électromagnétique confiné dans une cavité optique construite avec des miroirs sphériques. Une cavité optique possède un ensemble de modes propres (ou modes transverses), caractérisés par un nombre réel positif w_0 , appelé waist correspondant à l'étendue transversale minimale du mode fondamental de la cavité. Par ailleurs, ces modes gaussiens peuvent être introduits comme les modes propres de propagation du champ électromagnétique dans l'approximation paraxiale (ou encore de l'optique géométrique). A chaque fréquence du champ, on associe un ensemble de modes (les modes gaussiens). C'est un ensemble de modes, deux à deux orthogonaux, formant une base de l'espace des fonctions, au même titre que les ondes planes. Il est donc possible de quantifier le champ électromagnétique par la procédure de quantification canonique [Cohen-Tannoudji 87], en introduisant des opérateurs de création et d'annihilation de modes gaussiens, satisfaisant les mêmes relations de commutation que ceux associés aux ondes planes.

La théorie entrée-sortie exposée au chapitre I s'applique donc au cas où les modes représentent des modes gaussiens, plutôt que des ondes planes. Un miroir, la propagation libre ou des pertes linéaires conduisent aux mêmes transformation canoniques des champs. Par contre un milieu Kerr n'est plus simplement décrit par un déphasage non linéaire. En effet, comme on le montre dans l'appendice C, la polarisation non linéaire d'ordre 3 créée dans un milieu Kerr par un mode gaussien de waist w_0 a un waist $w_0/3$. Le champ rayonné par cette polarisation a aussi un waist $w_0/3$, et donc se décompose sur l'ensemble des modes Gaussiens de waist w_0 . On fait l'hypothèse que la cavité contenant le milieu Kerr est éclairée dans son mode fondamental, et que seul ce mode est résonnant. On montre dans l'Appendice C, en étudiant la propagation dans le milieu Kerr, que ce mode fondamental subit non seulement un déphasage non linéaire, noté $|K|$, mais aussi des pertes $\dot{\gamma}_g$ dues au transfert d'énergie vers les autres modes transverses de la cavité (c'est le phénomène d'auto-focalisation ou d'auto-défocalisation). On trouve que ces pertes sont données par :

$$\dot{\gamma}_g = \frac{K^2}{6} \quad (\text{II.33})$$

Aux pertes $\dot{\gamma}_g$ sont associées des fluctuations. De la même manière que le mode fondamental est diffusé vers les autres modes transverses par le couplage non linéaire, les fluctuations du vide de ces modes transverses sont diffusées vers le mode fondamental, et avec la même efficacité. Comme précédemment, on peut modéliser ces pertes d'origine non linéaire, par un miroir de coefficient de transmission linéaire t_g tel que $t_g^2 = 2\dot{\gamma}_g$, qui laisse passer les fluctuations du vide de rayonnement.

Dans les conditions de fonctionnement de la cavité bistable $|K|$ et γ_{cav} sont du même ordre de grandeur, et petits devant 1, les pertes d'origine géométrique γ_g restent faibles devant γ_{cav} , et ne détruiront pas les effets de compression des fluctuations de la lumière.

b. Effet d'un temps de réponse de la non-linéarité

Le but de ce paragraphe est de montrer que la prise en compte correcte de la dynamique d'une non-linéarité nécessite un modèle précis pour les mécanismes de cette non-linéarité, car s'il est aisé de décrire l'effet d'un temps de réponse de la non-linéarité et de voir qu'il ne peut que réduire la bande passante des fréquences où la cavité bistable réduit les fluctuations de la lumière, il n'est pas possible de décrire entièrement les fluctuations associées à l'amortissement de la non-linéarité dans un modèle général.

Considérons une cavité contenant un milieu dont la phase non linéaire ne répond pas instantanément à l'intensité du champ, mais avec une constante de temps τ/Γ . On choisit délibérément un modèle très simplifié ne contenant aucun détail sur le mécanisme de la non-linéarité, de manière à tester ses conclusions et ses limitations. La phase non linéaire ϕ_2 créée dans le milieu satisfait par hypothèse :

$$\tau \frac{\partial \phi_2}{\partial t} = -\Gamma(\phi_2 - f|E|^2) + f(t) \quad (\text{II.34})$$

$f(t)$ est une force de Langevin de valeur moyenne nulle.

Les notations sont celles du paragraphe II 2, mais ici il n'y a pas de pertes ($\gamma' = 0$). On écrit les relations entrée-sortie des champs dans le domaine temporel :

$$[A^{out}] = t[E] - r[A^{in}] \quad (\text{II.35})$$

$$\tau \frac{\partial}{\partial t} [E] = -(\gamma_{cav} + i\varepsilon\phi_0 + i\varepsilon\phi_2)[E] + t[A^{in}] \quad (\text{II.36})$$

Le régime stationnaire de ce système est identique à celui de la cavité bistable à effet Kerr instantané. La valeur moyenne de ϕ_2 est $|K|$. La transformation entrée-sortie des fluctuations s'écrit, en éliminant la variable ϕ_2

$$\begin{cases} \gamma_{cav} + i\omega\tau + i\varepsilon(\phi_0 + |K|) + \lambda(\omega)\varepsilon \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{cases} [\delta A^{out}(\omega)] = \\ \begin{cases} \gamma_{cav} - i\omega\tau - i\varepsilon(\phi_0 + |K|) - \lambda(\omega)\varepsilon \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{cases} [\delta A^{in}(\omega)] - \frac{1}{t} F(\omega) \quad (\text{II.37})$$

avec
$$\lambda(\omega) = \frac{i\Gamma|K|}{i\omega\tau + \Gamma} \quad v(\omega) = \frac{i\langle E \rangle}{i\omega\tau + \Gamma} \quad F(\omega) = v(\omega) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} f(\omega)$$

où $f(\omega)$ est la transformée de Fourier de $f(t)$ et $\langle E \rangle$ la valeur stationnaire de E prise réelle.

D'après (I.57), la matrice des corrélations du champ sortant est donnée par :

$$V^{out}(\omega) = V^{in}(\omega) + \mu(\omega)D(\omega)\mu(\omega)^+ \quad (\text{II.38})$$

où

$$\mu(\omega)^{-1} = \frac{1}{2\gamma_{cav}} \left(\gamma_{cav} + i\omega\tau - i\varepsilon(\phi_0 + |K|) + \lambda(\omega) \varepsilon \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right) \quad (\text{II.39})$$

$$D(\omega) = \frac{1}{2\gamma_{cav}} \left\{ \begin{pmatrix} (\lambda(\omega) + \lambda(\omega)^*) & -\lambda(\omega)^* \\ -\lambda(\omega) & 0 \end{pmatrix} + F(\omega)F(\omega)^+ \right\} \quad (\text{II.40})$$

Il reste une inconnue dans ces résultats : la fonction de corrélation de la force de Langevin $d(\omega) = \langle |f(\omega)|^2 \rangle$. Comme nous allons le voir cette fonction de corrélation n'est pas déterminée par la conservation des relations de commutation (I.18 et 71) :

$$\left[[A^{out}(\omega)], [A^{out}(-\omega)]^+ \right] = \left[[A^{in}(\omega)], [A^{in}(-\omega)]^+ \right] = \varepsilon \quad (\text{II.41})$$

En utilisant la relation (I.71) de l'appendice A, l'identité $\eta \mu(\omega)^+ \eta = \mu(-\omega)$ et le fait que δA^{in} et f commutent, on obtient :

$$\left[[A^{out}(\omega)], [A^{out}(\omega)]^+ \right] = (\mu(\omega) - I) \left[[A^{in}(\omega)], [A^{in}(-\omega)]^+ \right] (\mu(-\omega) - I)^+ + \mu(\omega) F(\omega) F(-\omega)^+ \mu(-\omega)^+ \quad (\text{II.42})$$

$$\left[[A^{out}(\omega)], [A^{out}(\omega)]^+ \right] = \varepsilon - \mu(\omega) \left\{ \left(\frac{\lambda(\omega) - \lambda(-\omega)^*}{2\gamma_{cav}} + \frac{\nu(\omega)\nu(-\omega)^*}{2\gamma_{cav}} f(\omega)f(-\omega)^* \right) \begin{pmatrix} 1 & -I \\ -I & 1 \end{pmatrix} \right\} \mu(-\omega)^+ \quad (\text{II.43})$$

Le second terme du second membre de cette dernière équation doit être nul, ce qui impose la relation suivante :

$$\langle f(\omega)f(-\omega)^* \rangle = -2i\Gamma(i\omega\tau + \Gamma) \quad (\text{II.44})$$

Cette équation n'est pas suffisante pour déterminer $d(\omega) = \langle f(\omega)f(-\omega) \rangle$.

La description complète d'un indice non linéaire retardé et de ses fluctuations nécessite donc un modèle précis de la non-linéarité, et des forces de Langevin $f(t)$. En effet, la polarisation non linéaire est couplée à d'autres variables dynamiques sujettes à des fluctuations aléatoires. Ces fluctuations proviennent du couplage avec des réservoirs qui dépendent du système considéré. Par exemple, dans certains milieux, la non-linéarité provient de la modification d'un équilibre thermodynamique sous l'influence du champ lumineux : réorientation de dipôles moléculaires dans le sulfure de carbone (CS_2), ou modification de la densité pour les suspension de microsphères ou les microémulsions. Un autre exemple, qui a l'avantage de conduire à des calculs simples [Hilico 92b] est celui d'une cavité optique dont l'un des miroirs est mobile et qui a la dynamique d'un oscillateur harmonique amorti. L'amortissement de mouvement du miroir, et les fluctuations de la longueur de la cavité, donc de la phase ϕ_2 sont décrits par un modèle de mouvement Brownien, qui permet de caractériser entièrement les fonctions de corrélation de la force de Langevin agissant sur la phase ϕ_2 .

Les figures (II.7a) et (II.7b) sont des spectres de réduction de bruit optimum. La première montre que l'existence d'un temps de réponse fini diminue la bande passante de la réduction de bruit. La seconde montre le bruit ajouté dans le cas où d est supposé indépendant de la fréquence, et où la non-linéarité est plus rapide que la cavité. Dès que d est supérieur à $500 \gamma_{cav}^2$, on voit que la réduction de bruit disparaît.

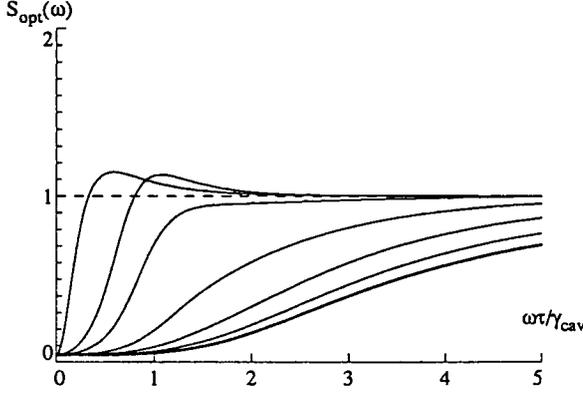


Figure II.7a : $\phi_0 = -2, |K| = 2,2$
 $\Gamma/\gamma_{cav} = 0.1, 0.5, 1, 2.5, 5, 10$

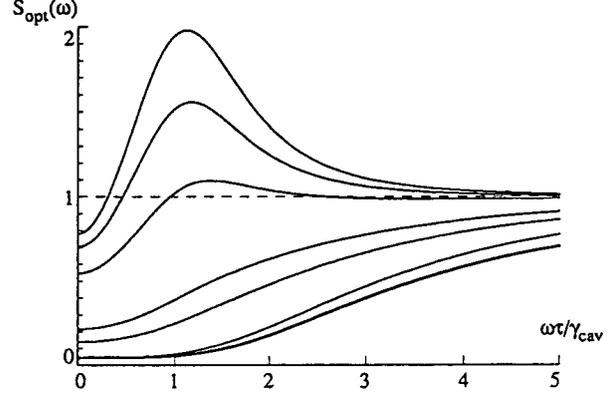


Figure II.7b : $\phi_0 = -2, |K| = 2,2, \Gamma/\gamma_{cav} = 10$
 $d/\gamma_{cav}^2 = 0, 50, 100, 500, 1000, 1500$

c. Appendice C- Couplage entre modes gaussiens

Le but de cet appendice est d'établir la formule II.33. L'ensemble des formules et méthodes de calcul utilisées ici proviennent de l'article [Kogelnik 65] et du livre [Abramowitz 65, page 785]

i. Modes Gaussiens

Un faisceau lumineux issu d'une cavité laser se propage le long d'un axe, noté Oz. On note x et y les coordonnées cartésiennes dans un plan orthogonal à cet axe. L'équation de propagation du champ le long de Oz, dans l'approximation paraxiale s'écrit :

$$\Delta_{\perp} E(\mathbf{r}) + 2ik \frac{\partial E}{\partial z}(\mathbf{r}) = 0 \quad \text{avec} \quad \Delta_{\perp} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (\text{II.45})$$

où le champ électrique est $E(\mathbf{r}, t) e^{-i(kz - \omega t)}$.

Les fonctions propres de l'opérateur $\Delta_{\perp} + 2ik \frac{\partial}{\partial z}$ sont appelés modes gaussiens, et ont pour expression :

$$G^{n,m}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \frac{1}{\sqrt{2^m m!}} H_n\left(\frac{\sqrt{2}x}{w(z)}\right) H_m\left(\frac{\sqrt{2}y}{w(z)}\right) e^{i\phi_{n,m}(z)} e^{-\frac{(x^2+y^2)}{w^2(z)}\left(\frac{1}{w^2(z)} + \frac{ik}{2Rz}\right)} \quad (\text{II.46})$$

où H_n est un polynôme de Hermite. La normalisation des $G^{n,m}$ est telle que :

$$\int dx dy G^{n,m}(\mathbf{r}) G^{p,q}(\mathbf{r})^* = \delta_{n,p} \delta_{m,q} \frac{\pi w_0^2}{2} \quad (\text{II.47})$$

Les fonctions $w(z)$, $R(z)$ et $\phi_{n,m}(z)$ sont :

$$w(z)^2 = \left(1 + \left(\frac{\lambda z}{\pi w_0^2} \right)^2 \right) \quad R(z) = z \left(1 + \left(\frac{\pi w_0^2}{\lambda z} \right)^2 \right) \quad \Phi_{n,m}(z) = (l+n+m) \operatorname{arctg} \left(\frac{\lambda z}{\pi w_0^2} \right) \quad (\text{II.48})$$

où λ est la longueur d'onde du champ et w_0 le waist de la cavité.

ii. Propagation dans le milieu Kerr

On note l la longueur du milieu Kerr, et $\chi^{(3)}$ son coefficient non linéaire. On ajoute à l'équation de propagation (II.45) un terme de polarisation non linéaire Kerr :

$$\Delta_{\perp} E + 2i k \frac{\partial}{\partial z} E = -k^2 \chi^{(3)} |E|^2 E \quad (\text{II.49})$$

On cherche une solution de cette équation en termes de modes gaussiens, sous la forme :

$$E(\mathbf{r}) = \sum_{m,n} \alpha_{m,n}(z) G^{m,n}(\mathbf{r}) \quad (\text{II.50})$$

En reportant cette expression de E dans l'équation de propagation, en multipliant par $G^{i,j}(\mathbf{r})^*$ et en intégrant sur x et y on obtient les équations de propagation des amplitudes

$$\frac{\pi w_0}{2} 2i k \frac{\partial}{\partial z} \alpha_{i,j}(z) = -k^2 \chi^{(3)} \sum_{m,n,o,p,q,r} \alpha_{m,n}(z) \alpha_{o,p}(z)^* \alpha_{q,r}(z) g^{mnopqrij}(z) \quad (\text{II.51})$$

$$\text{où} \quad g^{mnopqrij}(z) = \int dx dy G^{m,n}(\mathbf{r}) G^{o,p}(\mathbf{r})^* G^{q,r}(\mathbf{r}) G^{i,j}(\mathbf{r})^* \quad (\text{II.52})$$

Comme on suppose que le milieu Kerr est éclairé dans le mode gaussien fondamental ($G^{0,0}$), le coefficient α_{00} est très supérieur aux autres amplitudes α_{ij} . On obtient alors en se limitant au terme prépondérant les équations d'évolution :

$$\frac{\partial}{\partial z} \alpha_{ij}(z) = i \frac{k \chi^{(3)}}{2} |\alpha_{00}(z)|^2 \alpha_{00}(z) \frac{g^{000000ij}}{\frac{\pi w_0^2}{2}} \quad (\text{II.53})$$

Cette approximation implique que $|\alpha_{00}(z)|$ est constant, c'est-à-dire que le mode fondamental est peu atténué dans le milieu Kerr. L'effet du milieu Kerr sur le mode (0,0) est alors un déphasage non linéaire K valant :

$$K = \frac{k \chi^{(3)} |\alpha_{00}|^2 l}{4} \quad (\text{II.54})$$

L'équation d'évolution de α_{ij} s'intègre alors aisément et en utilisant le fait que K est toujours petit devant 1 dans la pratique, et l'hypothèse $\alpha_{ij}(0)=0$ pour $(i,j) \neq (0,0)$; on obtient :

$$|\alpha_{ij}(l)| = K \alpha_{00} C_{ij} \quad \text{où} \quad C_{ij} = \frac{4}{\pi w_0^2} g^{000000ij}(z=0) \quad (\text{II.55})$$

Le taux de transfert d'énergie du mode 0,0 vers le mode i,j est donc $K^2 (C_{i,j})^2$. On en déduit les pertes t_g subies par le mode 0,0 :

$$t_g^2 = \left(\sum_{i,j} C_{ij}^2 - C_{00}^2 \right) K^2 \quad (\text{II.56})$$

Les calculs ci-dessous conduisent à $t_g^2 = \frac{K^2}{3}$ soit $\gamma_g = \frac{K^2}{6}$.

La fin de cet appendice donne les principaux éléments du calcul de t_g^2 . Il faut tout d'abord calculer les coefficients $g^{m,n,o,p,q,r,i,j}(z)$, donnés par l'intégrale (II.52). Le calcul de cette intégrale s'effectue en séparant les variables x et y , et fait intervenir l'intégrale du produit de quatre polynômes de Hermite.

$$h^{moqs}(z) = \int H_m\left(\frac{\sqrt{2}x}{w(z)}\right) H_o\left(\frac{\sqrt{2}x}{w(z)}\right) H_q\left(\frac{\sqrt{2}x}{w(z)}\right) H_s\left(\frac{\sqrt{2}x}{w(z)}\right) e^{\frac{-4x^2}{w(z)^2}} dx \quad (II.57)$$

$$h^{moqs}(z) = \frac{w(z)}{\sqrt{2}} \int H_m(u) H_o(u) H_q(u) H_s(u) e^{-2u^2} du \quad (II.58)$$

On introduit la fonction génératrice des polynômes de Hermite :

$$g(u, \sigma) = \sum_n \frac{1}{n!} H^n(u) \sigma^n = e^{2u\sigma - \sigma^2} \quad (II.59)$$

$$H_n(u) = \frac{\partial^n}{\partial \sigma^n} g(u, \sigma) \Big|_{\sigma=0} \quad (II.60)$$

puis la fonction génératrice :

$$f(u, \sigma, \zeta, \tau, \nu) = g(u, \sigma) g(u, \zeta) g(u, \tau) g(u, \nu) = e^{2u(\sigma+\zeta+\tau+\nu) - \sigma^2 - \zeta^2 - \tau^2 - \nu^2} \quad (II.61)$$

qui vérifie :

$$H_m(u) H_o(u) H_q(u) H_s(u) = \frac{\partial^{m+o+q+s}}{\partial \sigma^m \partial \zeta^o \partial \tau^q \partial \nu^s} f(u, \sigma, \zeta, \tau, \nu) \Big|_{\sigma=\zeta=\tau=\nu=0} \quad (II.62)$$

$$\int du f(u, \sigma, \zeta, \tau, \nu) e^{-2u^2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{(\sigma+\zeta+\tau+\nu)^2/2 - \sigma^2 - \zeta^2 - \tau^2 - \nu^2} \quad (II.63)$$

Les formules (II.62 et 63) permettent d'obtenir des expressions formelles de $h^{moqs}(z)$ sous forme de dérivées partielles. On obtient en particulier les coefficients dont on a besoin :

$$h^{000i}(z=0) = \frac{w_0}{\sqrt{2}} \frac{\partial^i}{\partial \nu^i} \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{(\sigma+\zeta+\tau+\nu)^2/2 - \sigma^2 - \zeta^2 - \tau^2 - \nu^2} \right) \Big|_{\sigma=\zeta=\tau=\nu=0} \quad (II.64)$$

soit

$$h^{000i} = 0 \text{ si } i \text{ est impair}$$

$$h^{0002i} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{1}{2}\right)^i \frac{(2i)!}{i!}$$

et on en déduit

$$\begin{cases} C_{ij} = 0 & \text{si } i \text{ ou } j \text{ est impair} \\ C_{2i2j} = \frac{(-1)^{i+j}}{2^{2i} 2^{2j}} \frac{\sqrt{2i!}}{i!} \frac{\sqrt{2j!}}{j!} \end{cases}$$

En reportant les expressions de C_{ij} dans celle de t_g^2 , on obtient :

$$t_g^2 = K^2 \{A^2 - I\} \text{ avec } A = \sum_i \frac{2i!}{(i!)^2} \frac{I}{2^{4i}} = \sum_i \frac{I}{2^{2i}} \frac{(i-1/2)!}{i!(-1/2)!} \quad (\text{II.65})$$

On reconnaît là le développement en série de $(1+u)^\alpha$ avec $u=-1/4$ et $\alpha=-1/2$, d'où $A = \sqrt{4/3}$ et :

$$t_g^2 = \frac{K^2}{3} \quad (\text{II.66})$$

Nous obtenons la formule (II.33) annoncée au paragraphe 3a).

4 Utilisation d'une non linéarité d'ordre 2 : l'OPO dégénéré

L'étude des milieux non-linéaires d'ordre trois montre qu'il est difficile de trouver des milieux ayant à la fois une grande non linéarité, une faible absorption et un temps de réponse court, et qu'il est nécessaire de sortir du cadre de la cavité à effet Kerr paramétrique pour obtenir une cavité susceptible de réduire efficacement les fluctuations de la lumière. Il existe cependant des non-linéarités très importantes et rapides, accompagnées d'une très faible absorption : les non-linéarités du second ordre dans les cristaux non centro-symétriques, qui sont à l'origine du doublage de fréquence et du processus inverse, la conversion paramétrique [Shen 84].

Du point de vue théorique, ces non-linéarités peuvent être décrites par un effet paramétrique couplant plusieurs modes du champ : le champ pompe et son second harmonique dans le cas du doublage de fréquence, le champ pompe et deux champs signaux de fréquence inférieure appelés sous harmoniques dans le cas de la génération paramétrique. Ces deux champs ne sont pas toujours dégénérés, ils peuvent avoir des polarisations différentes ou des fréquences différentes, la somme des fréquences devant être égale à celle du champ pompe. Même si cet effet paramétrique met en jeu deux ou trois modes du champ, il est possible de réaliser une cavité contenant un cristal non linéaire n'interagissant du point de vue entrée-sortie qu'avec un seul mode du champ : il suffit pour cela d'enfermer les sous-harmoniques (ou l'harmonique) du champ entrant à l'intérieur de la cavité, à l'aide de miroirs parfaitement réfléchissants pour ces (ou cette) fréquence. Comme on va le voir, on transforme ainsi le $\chi^{(2)}$ du matériau non linéaire en " $\chi^{(3)}$ effectif" pour le champ entrant dans la cavité.

a. L'oscillateur paramétrique optique dégénéré

Dans ce paragraphe, l'idée évoquée ci-dessus va être développée dans le cas d'un oscillateur paramétrique qui émet le sous-harmonique du champ pompe. Ce type de dispositif fait l'objet de nombreuses études théoriques et expérimentales [Fabre 90] [Sizman 90] [Pereira 88]. C'est sur la réduction du bruit quantique sur le champ pompe sortant que nous allons nous concentrer ici.

Nous nous limitons au cas d'un oscillateur paramétrique optique (OPO) dégénéré en fréquence et en polarisation. Il n'y a donc qu'un seul mode sous-harmonique, d'amplitude α_1 , du champ pompe d'amplitude α_0 . Compte tenu des faibles pertes par absorption des cristaux doubleurs, on modélise l'OPO dégénéré par une cavité ayant un seul miroir de couplage, de transmission et réflexion t_0 et r_0 pour le champ pompe, t_1 et r_1 , pour le sous-harmonique. On note $\gamma_0 = 1 - r_0$ et $\gamma_1 = 1 - r_1$. On supposera ensuite que $\gamma_1 \ll \gamma_0$, puisqu'on souhaite enfermer le sous-harmonique dans la cavité. On note τ le temps de parcours de la cavité, $\gamma_0 \Delta_0$ et $\gamma_1 \Delta_1$ les déphasages accumulés par les champs α_0 et α_1 sur un tour de cavité, et q le coefficient de couplage non linéaire entre les deux modes.

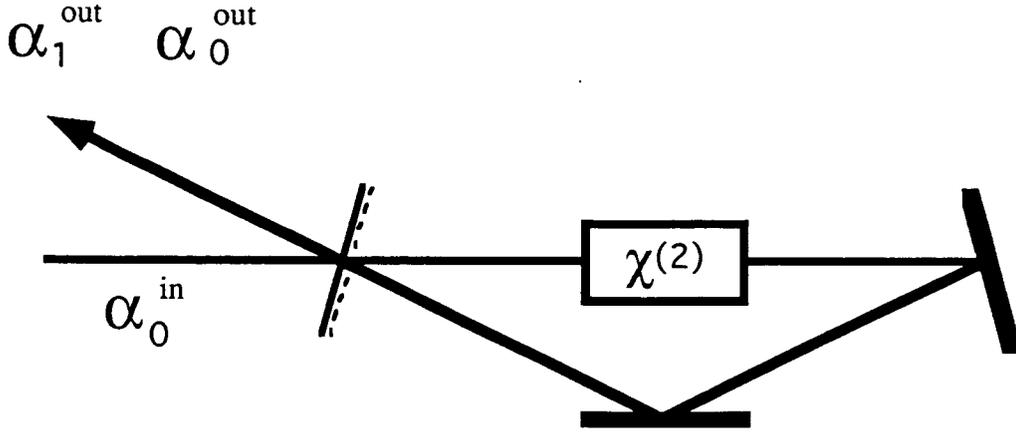


Figure II-8

La théorie semi-classique fournit les équations d'évolution des amplitudes des champs :

$$\tau \frac{d}{dt} \alpha_1(t) = -\gamma_1(1+i\Delta_1)\alpha_1(t) + q\alpha_1(t)^* \alpha_0(t) + t_1 \alpha_1^{in}(t) \quad (\text{II.67})$$

$$\tau \frac{d}{dt} \alpha_0 = -\gamma_0(1+i\Delta_0)\alpha_0(t) - q \frac{\alpha_1(t)\alpha_1(t)}{2} + t_0 \alpha_0^{in}(t) \quad (\text{II.68})$$

où α_0^{in} et α_1^{in} sont les champs entrant dans la cavité.

α_0^{in} a une valeur moyenne non nulle (champ pompe), α_1^{in} a une valeur moyenne nulle, et correspond aux fluctuations du vide.

Les champs pompe entrants et sortants sont liés par :

$$\alpha_0^{out} = -\alpha_0^{in} + t_0 \alpha_0 \quad (\text{II.69})$$

En notant α_i la valeur moyenne et $\delta\alpha_i(t)$ les fluctuations de $\alpha_i(t)$, on obtient la transformation des fluctuations des champs en linéarisant les équations (II.67, 68 et 69) :

$$\tau \frac{d}{dt} [\delta\alpha(t)] = -A [\delta\alpha(t)] + T [\delta\alpha^{in}(t)] \quad (\text{II.70})$$

$$\text{et } [\delta\alpha^{out}(t)] = -[\delta\alpha^{in}(t)] + T [\delta\alpha(t)] \quad (\text{II.71})$$

où $[\delta\alpha]$ désigne le vecteur de composante $\delta\alpha_1, \delta\alpha_1^*, \delta\alpha_0, \delta\alpha_0^*$

$$T = \begin{pmatrix} t_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t_0 \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} \gamma_1(1+i\Delta_1) & -q\alpha_0 & -q\alpha_1^* & 0 \\ -q\alpha_0^* & \gamma_1(1-i\Delta_1) & 0 & -q\alpha_1 \\ q\alpha_1 & 0 & \gamma_0(1+i\Delta_0) & 0 \\ 0 & q\alpha_1^* & 0 & \gamma_0(1-i\Delta_0) \end{pmatrix} \quad (\text{II.72})$$

Ces équations vont nous permettre de calculer le bruit du champ pompe sortant de l'oscillateur paramétrique optique dégénéré dans ses divers régimes de fonctionnement.

b. Etat stationnaire et analyse linéaire de stabilité

Les équations d'évolution (II.67 et 68) montrent que si le champ $\alpha_i(t)$ est nul, donc si l'OPO n'oscille pas, le champ pompe subit une transformation linéaire, qui ne pourra avoir aucun effet de réduction des fluctuations quantiques de la lumière. Dans la suite on ne s'intéresse donc qu'aux

conditions où α_I est non nul, conditions que nous allons préciser. On choisit alors α_I comme référence de phase en le supposant réel positif (ce choix n'est en rien restrictif grâce à l'invariance du problème par translation dans le temps).

On introduit les quantités :

$$\begin{aligned} A_I &= \frac{q \alpha_I}{\sqrt{2\gamma_0 \gamma_I}} & A_p &= \frac{t_0 q \alpha_0^{in}}{\gamma_0 \gamma_I} \\ I_I &= A_I^2 & I_p &= |A_p|^2 \end{aligned} \quad (\text{II.73})$$

et
$$\gamma = \gamma_I / \gamma_0 \quad (\text{II.74})$$

Les relations entre champs moyens sont dans ce cas :

$$q \alpha_0 = \gamma_I (1 + i\Delta_I) \quad (\text{II.75})$$

$$q t_0 \alpha_0^{in} = \gamma_0 \gamma_I ((1 + i\Delta_0)(1 + i\Delta_I) + I_I) \quad (\text{II.76})$$

$$q t_0 \alpha_0^{out} = -\gamma_0 \gamma_I ((1 + i\Delta_0)(1 + i\Delta_I) + I_I) + 2\gamma_0 \gamma_I (1 + i\Delta_I) \quad (\text{II.77})$$

On remarquera que l'amplitude du champ pompe dans la cavité α_0 ne dépend pas de l'amplitude du champ pompe incident sur la cavité. Dès que la cavité oscille, l'amplitude du champ pompe dans la cavité est fixe, tandis que celle du champ sous-harmonique croît avec le champ pompe incident. Les intensités I_I et I_p du champ sous-harmonique dans la cavité et du champ pompe incident sur la cavité sont liées par l'équation :

$$I_I^2 + 2I_I(1 - \Delta_0 \Delta_I) + (1 + \Delta_0^2)(1 + \Delta_I^2) - I_p = 0 \quad (\text{II.78})$$

L'OPO n'oscille que si l'équation du second degré en I_I admet au moins une solution positive : cela restreint l'espace des paramètres $(\Delta_0, \Delta_I, I_p)$ convenables. L'analyse des conditions où cette équation admet une ou deux racines réelles positives conduit à distinguer trois cas :

- 1) pas de solution si $I_p < 1$; la condition correspondant à $I_p = 1$ est le seuil minimal d'oscillation de l'OPO
- 2) 1 solution si $I_p \geq 1$ et $(1 + \Delta_0^2)(1 + \Delta_I^2) \leq I_p$
- 3) 2 solutions si $I_p \geq 4$, $\Delta_0 \Delta_I \geq 1$: $(\Delta_0 + \Delta_I)^2 \leq I_p \leq (1 + \Delta_0^2)(1 + \Delta_I^2)$

La figure (2.9) montre les zones d'existence d'une ou deux solutions réelles dans le plan (Δ_0, Δ_I) , pour différentes valeurs de I_p . Ces zones sont délimitées par les courbes d'équation :

$$(\Delta_0 + \Delta_I)^2 = I_p \quad (\text{II.79})$$

$$\Delta_0 \Delta_I = 1 \quad (\text{II.80})$$

$$(1 + \Delta_0^2)(1 + \Delta_I^2) = I_p \quad (\text{II.81})$$

La figure (2.10) représente la courbe I_I en fonction de I_p pour deux couples (Δ_0, Δ_I) .

La stabilité des solutions stationnaires obtenues s'étudie par "l'analyse linéaire de stabilité". On suppose qu'on écarte le système de sa position stationnaire d'une quantité $[\delta\alpha]$, et on étudie

l'évolution temporelle des fluctuations $[\delta\alpha]$, en oubliant les termes sources de fluctuations. Cette évolution est donnée par :

$$\tau \frac{d}{dt} [\delta\alpha(t)] = -A [\delta\alpha(t)] \quad (\text{II.82})$$

Le point de fonctionnement autour duquel on a linéarisé est stable si les valeurs propres de la matrice A ont une partie réelle positive. Cette condition sur les coefficients du polynôme caractéristique de la matrice A, appelée "Critère de Routh-Hurwitz" [Marsden 49], s'écrit :

$$\begin{cases} c_1 \geq 0 & c_2 \geq 0 & c_3 \geq 0 & (a) \\ c_4 \geq 0 & & & (b) \\ c_1 c_2 - c_3 \geq 0 & & & (c) \\ c_3 (c_1 c_2 - c_3) - c_1^2 c_4 \geq 0 & & & (d) \end{cases} \quad (\text{II.83})$$

où
$$c_1 = 2(\gamma_0 + \gamma_1) \quad (\text{II.84})$$

$$c_2 = \gamma_0 (\gamma_0 (I + \Delta_0^2) + 4\gamma_1 (I + I_1)) \quad (\text{II.85})$$

$$c_3 = 2\gamma_0 \gamma_1 \{ \gamma_0 (I + \Delta_0^2) + 2(\gamma_0 + \gamma_1) I_1 \} \quad (\text{II.86})$$

$$c_4 = 4\gamma_0^2 \gamma_1^2 I_1 (I_1 + I - \Delta_0 \Delta_1) \quad (\text{II.87})$$

Les trois premières conditions (a) et la condition (c) sont toujours vérifiées. La condition (b) s'écrit aussi $dI_p/dI_1 \geq 0$. Elle indique que les points de fonctionnement où la pente de la courbe I_1 en fonction de I_p est négative sont instables. En particulier, lorsqu'il existe deux solutions positives pour I_1 , l'une d'elle (la plus petite) est située sur la branche de la parabole dont la pente est négative : cette solution est instable. En revanche, pour les mêmes paramètres, la solution $I_1=0$ est stable [Fabre 90]. On a donc bistabilité entre deux valeurs de l'intensité du sous-harmonique, l'une nulle, l'autre non nulle. La condition (d) montre que la solution stationnaire devient instable dans les conditions suivantes :

$$I_1 > I_{1c} \quad , \quad I_{1c} = - \frac{(I + \Delta_0^2) \{ I + \Delta_0^2 + 4\gamma(I + \gamma) \}}{2(I + \gamma)^2 \{ I + \Delta_0^2 + 2\gamma(I + \Delta_0 \Delta_1) \}} \quad (\text{II.88})$$

et
$$\Delta_0 \Delta_1 < - \left(I + \frac{I + \Delta_0^2}{2\gamma} \right) \leq 0 \quad (\text{II.89})$$

Cette dernière inéquation délimite un domaine dans le plan (Δ_0, Δ_1) représenté par les courbes en pointillé sur la figure 2-9b, dans le cas $\gamma=1$ et $\gamma=0,5$. La dépendance en γ des conditions II.88 et II.89 montre que dans le cas qui nous intéresse où γ est petit devant 1, les solutions stationnaires où l'OPO oscille n'existent plus avant de devenir instables. Le signe de la condition sur $\Delta_0 \Delta_1$ montre que les instabilités n'existent pas dans le domaine où on a bistabilité.

Les figures II-9a et II-9b représentent, dans le plan (Δ_0, Δ_1) , le lieu des points où l'OPO oscille.

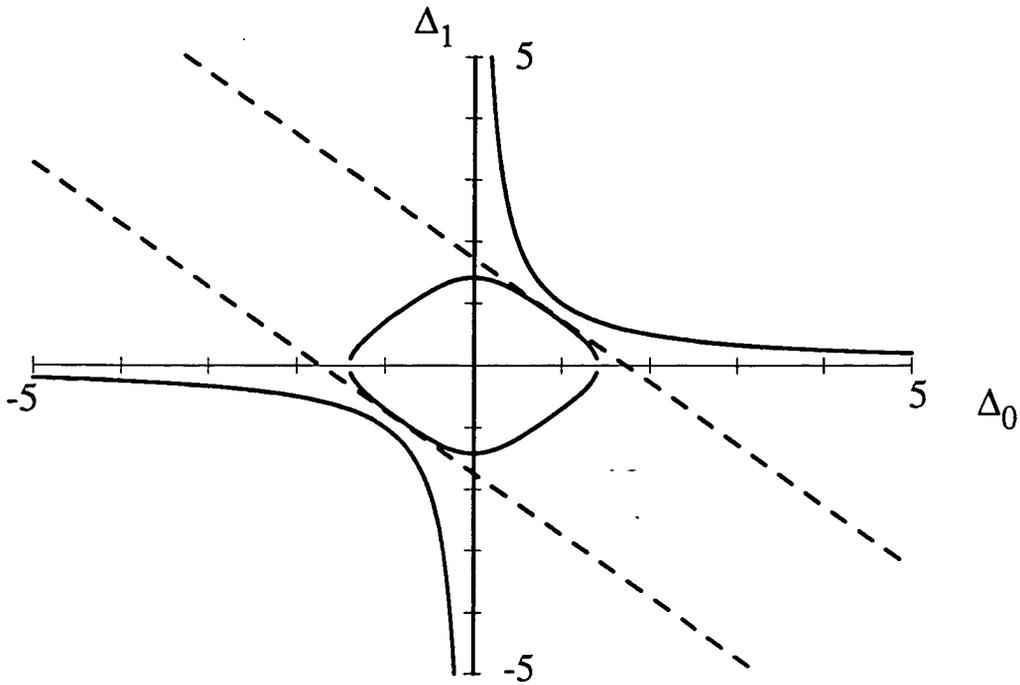


Figure II-9a : Zone, dans le plan (Δ_0, Δ_1) , où l'OPO oscille tracée pour $I_p = 3$.

La figure II-9a est tracée pour $I_p = 3$. Les deux droites en tirets correspondent à la condition II.79 et les deux hyperboles à II.80. L'équation II.81 indique que l'opo oscille lorsque les paramètres Δ_0 et Δ_1 sont à l'intérieur du domaine délimité par la quartique. L'allure de ce graphique est valable pour I_p compris entre 1 et 4. Pour de telles valeurs, il n'y a ni bistabilité ni instabilités.

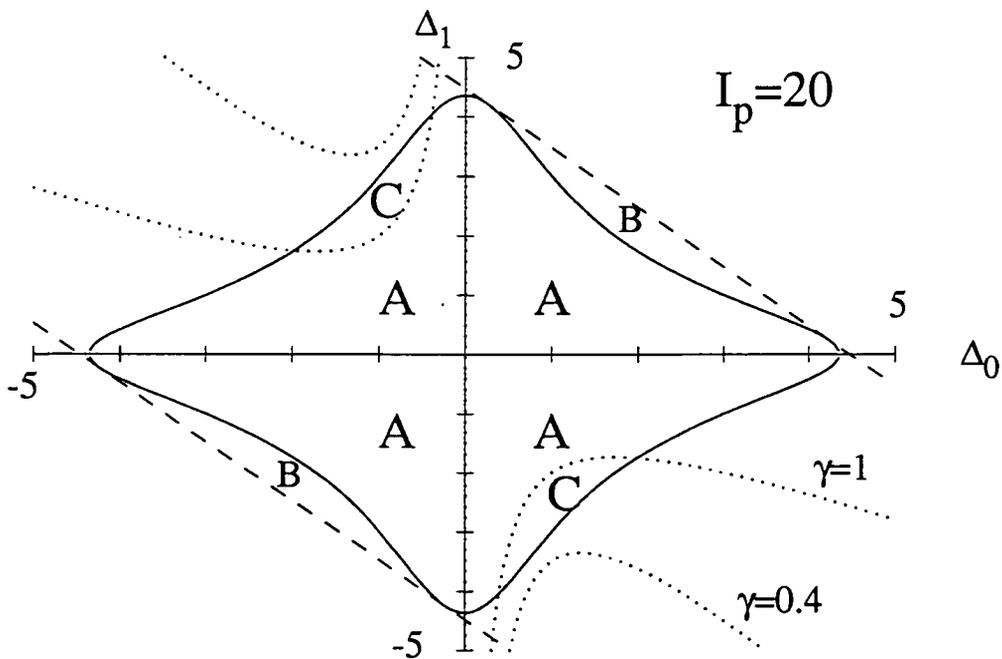


Figure II-9b : Zone, dans le plan (Δ_0, Δ_1) , où l'OPO oscille, tracée pour $I_p = 20$.

La figure II-9b est tracée pour $I_p = 20$. Lorsque les paramètres Δ_0 et Δ_1 sont à l'intérieur du domaine délimité par la quartique (Zone A), l'OPO oscille et la puissance du sous harmonique à l'intérieur ne prend qu'une seule valeur (pas de bistabilité). Cette valeur devient instable si les paramètres sont dans la zone C ou C' délimitée par les pointillés correspondant à la condition II.88. Lorsque les paramètres Δ_0 et Δ_1 sont dans la zone B comprise entre la quartique et les deux droites en tirets, la puissance du champ sous harmonique dans la cavité est bistable. L'allure de cette figure est valable pour I_p supérieur à 4.

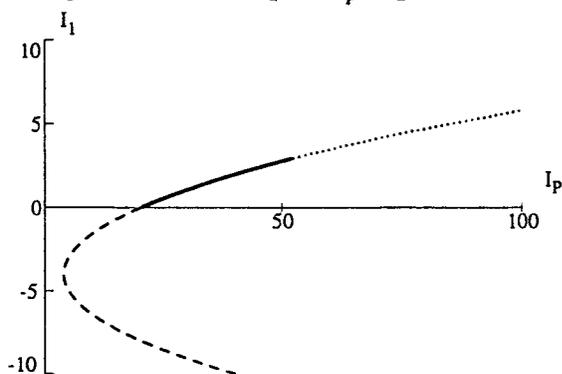


Figure II-10a : $\Delta_0 = -1, \Delta_1 = 3, \gamma = 0,7$

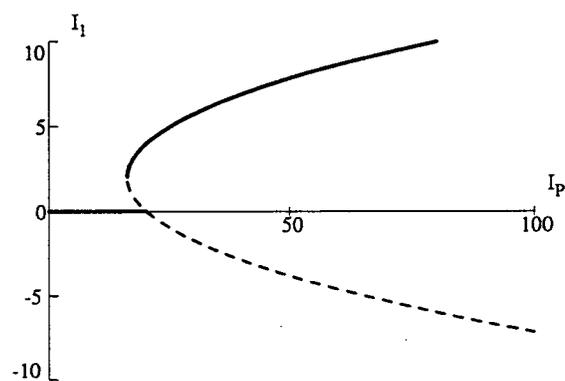


Figure II-10b : $\Delta_0 = 1, \Delta_1 = 3, \gamma = 0,7$

Les figures II-10a et II-10b sont les courbes donnant la puissance I_1 du sous-harmonique dans la cavité en fonction de la puissance pompe I_p . Les portions de parabole et de droite en trait continu indiquent les solutions stables, celles en trait tireté les solutions instables ou négatives de l'équation (II.78). La figure (a) est tracée dans des conditions où des instabilités peuvent exister ($\Delta_0 = -1, \Delta_1 = 3$) (partie en pointillé de la courbe), et la figure (b) dans le cas où il existe de la bistabilité, ($\Delta_0 = 1, \Delta_1 = 3$).

c. Transformation des fluctuations

A partir des relations (II.70 et 71), on peut obtenir la relation entrée-sortie des fluctuations du vecteur à quatre composantes $[\alpha]$, et en déduire les fonctions de corrélation des champs sortants α_0^{out} et α_1^{out} ainsi que leurs corrélations croisées [Fabre 90]. On s'intéresse ici au cas où la cavité a pour le champ sous-harmonique une finesse bien meilleure que pour le champ pompe. On cherche à connaître le comportement effectif de la cavité vue par le champ pompe. Il est possible d'obtenir une relation entrée-sortie pour le champ pompe seul en projetant sur le sous espace correspondant à ce mode pompe l'équation (II.70) donnant les composantes de Fourier des fluctuations de $[\alpha(t)]$:

$$[\delta\alpha(\omega)] = (i\omega\tau + A)^{-1} T [\delta\alpha^{in}(\omega)] \quad (II.90)$$

Pour cela, on introduit les projecteurs orthogonaux P_0 et P_1 vérifiant :

$$P_0 P_1 = P_1 P_0 = 0 \quad P_0 + P_1 = I \quad P_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{II.91})$$

Et on en déduit les fluctuations du champ pompe :

$$[\delta\alpha_0(\omega)] = P_0 [\delta\alpha(\omega)] = t_0 P_0 (i\Omega + A)^{-1} P_0 [\delta\alpha_{in}^0(\omega)] + t_1 P_0 (i\Omega + A)^{-1} P_1 [\delta\alpha_{in}^1(\omega)] \quad (\text{II.92})$$

où
$$[\delta\alpha_0^{in}] = P_0 [\delta\alpha^{in}] \quad [\delta\alpha_{in}^1] = P_1 [\delta\alpha^{in}] \quad (\text{II.93})$$

Pour une matrice M 4x4 inversible, on peut montrer [Cohen-Tannoudji 88, III.B.2] que :

$$P_0 M^{-1} P_0 = \left(P_0 M P_0 - P_0 M P_1 (P_1 M P_1)^{-1} P_1 M P_0 \right)^{-1} \quad (\text{II.94})$$

$$P_0 M^{-1} P_1 = - \left(P_0 M^{-1} P_0 \right) P_0 M P_1 (P_1 M P_1)^{-1} \quad (\text{II.95})$$

et
$$\left(P_0 M^{-1} P_0 \right)^{-1} \left(P_0 M^{-1} P_1 \right) = - P_0 M P_1 (P_1 M P_1)^{-1} \quad (\text{II.96})$$

En appliquant ces formules avec $M=i\Omega+A$, on obtient :

$$\begin{aligned} & \left(i\omega\tau + P_0 A P_0 - P_0 A P_1 (P_1 (i\Omega + A) P_1)^{-1} P_1 A P_0 \right) [\delta\alpha_0(\omega)] = \\ & t_0 [\delta\alpha_0^{in}(\omega)] - t_1 P_0 A P_1 (P_1 (i\Omega + A) P_1)^{-1} [\delta\alpha_{in}^1(\omega)] \end{aligned} \quad (\text{II.97})$$

Compte tenu des positions respectives des opérateurs P_0 et P_1 dans cette dernière formule, il est possible de considérer toutes les matrices $P_i A P_j$ comme des matrices 2x2 notées A_{ij} et de redéfinir $[\delta\alpha_0]$ et $[\delta\alpha_1]$ comme des vecteurs de dimension 2.

En utilisant la relation entre les champs entrants et sortants sur le miroir de couplage (II.69), on obtient la relation entrée-sortie recherchée :

$$\begin{aligned} & (\gamma_0 + i\varepsilon\Delta_0 + i\omega\tau + H(\omega)) [\delta\alpha_0^{out}(\omega)] = \\ & (\gamma_0 - i\varepsilon\Delta_0 - i\omega\tau - H(\omega)) [\delta\alpha_0^{in}(\omega)] - t_0 t_1 H(\omega) A_{10}^{-1} [\delta\alpha_{in}^1(\omega)] \end{aligned} \quad (\text{II.98})$$

avec
$$H(\omega) = -A_{01} (i\Omega + A_1)^{-1} A_{10} \quad \text{et} \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{II.99})$$

Les termes $\gamma_0 + i\varepsilon\Delta_0 + i\omega\tau$ décrivent l'effet de déphasage et d'amortissement de la cavité. La matrice H décrit la transformation effective subie par les fluctuations du champ pompe. Le deuxième terme du second membre est un terme de bruit supplémentaire, correspondant aux fluctuations du vide pour le sous-harmonique transformées par la cavité en bruit sur le champ pompe sortant. Ce bruit disparaît dans la limite où le sous-harmonique est enfermé dans la cavité ($t_1=0$).

Avec les paramètres réduits (II.73 et 74), la matrice H s'écrit :

$$H(\omega) = \frac{2\gamma_0 \gamma_1 I_1}{\omega\tau(2i\gamma_1 - \omega\tau)} \begin{pmatrix} \gamma_1 - i(\gamma_1 \Delta_1 - \omega\tau) & \gamma_1 + i\gamma_1 \Delta_1 \\ \gamma_1 - i\gamma_1 \Delta_1 & \gamma_1 + i(\gamma_1 \Delta_1 + \omega\tau) \end{pmatrix} \quad (\text{II.100})$$

La matrice de susceptibilité $H(\omega)$ ne ressemble pas à celle de l'effet Kerr donnée par la formule (II.16). En effet cette dernière ne dépend que de l'intensité intracavité et ne dépend pas de la fréquence, puisque l'effet Kerr est supposé instantané.

La matrice H a une structure plus complexe. Tout d'abord, elle contient des termes réels traduisant des pertes pour le mode pompe via les fuites du sous-harmonique à travers le miroir de couplage. Ces termes s'annulent si on enferme le mode α_I dans la cavité ($\gamma_I=0$). Les termes imaginaires de H décrivent un effet d'indice non linéaire. Cet effet ne dépend pas de l'intensité intracavité du mode pompe α_0 , mais de l'intensité du sous-harmonique I_I , qui est une fonction (formule.(II.78)) de l'intensité pompe incidente I_p . Ces effets ne sont pas instantanés, et ont un temps de réponse fini $\tau/2\gamma_I$ donné par la dépendance en $1/(2i\gamma_I-\omega\tau)$ de la matrice H , correspondant au temps d'amortissement de l'intensité sub-harmonique dans la cavité. Ce temps de réponse fini limite la bande passante des effets de compression des fluctuations du champ pompe (figure 2-11), et la détruit complètement dans la limite $\gamma_I \rightarrow 0$.

Un fait surprenant est la divergence de $H(\omega)$ lorsque ω tend vers 0. Cette divergence provient de la caractéristique particulière de l'OPO : lorsque l'OPO oscille, l'amplitude moyenne α_0 du mode pompe dans la cavité ne dépend que de Δ_I ; donc si on change le point de fonctionnement de l'OPO en changeant l'intensité du champ pompe α_0^{in} , l'amplitude moyenne α_0 ne change pas. En d'autres termes, la réponse à fréquence nulle de l'amplitude α_0 aux variations de l'amplitude α_0^{in} est nulle donc la susceptibilité inverse, donnée par $H(0)$ est infinie. La divergence de H en $\omega=0$ n'est pas gênante, car elle ne correspond pas à des grandeurs physiques mesurables directement, et elle n'intervient que de manière intermédiaire dans les calculs. En effet, il est possible de mesurer les variations de α_0 en fonction des seules variations de α_0^{in} , mais, expérimentalement, il est impossible de faire le contraire puisque l'amplitude α_0 ne peut pas être commandée indépendamment des autres paramètres de l'OPO. Du point de vue théorique, les quantités intéressantes sont les fonctions de transfert des fluctuations des champs α_0^{in} et α_I^{in} vers le champ α_0^{out} , et ces quantités qui se déduisent de l'équation (II.98), ont une limite finie à fréquence nulle :

$$[\delta\alpha_0^{out}(\omega)] = (\mu(\omega)-1)[\delta\alpha_0^{in}(\omega)] + \sqrt{2I_I}\gamma_I\mu(\omega)H(\omega)[\delta\alpha_I^{in}(\omega)] \quad (\text{II.101})$$

où
$$\mu(\omega)^{-1} = \frac{\gamma_0 + i\varepsilon\Delta_0 + i\omega\tau + H(\omega)}{2\gamma_0} \quad (\text{II.102})$$

En particulier, la matrice des corrélations $V_0^{out}(\omega)$ du champ sortant α_0^{out} n'a pas de singularité pour $\omega=0$. Le calcul de $V_0^{out}(\omega)$ ne pose pas de problème et conduit aux formules données dans l'article [Fabre 90].

d. Spectres de bruit du champ pompe sortant

Les figures suivantes présentent des spectres de bruit optimum S_{opt} et de bruit d'intensité S_{int} en fonction des paramètres Δ_0 , Δ_I , $\omega\tau/\gamma_0$ et I_p et γ . Le bruit optimum est calculé à partir de $V_0^{out}(\omega)$ et

des relations (I.30 et I.34), le bruit d'intensité à partir de $V_0^{out}(\omega)$ et de la relation entre champs moyens (II.77).

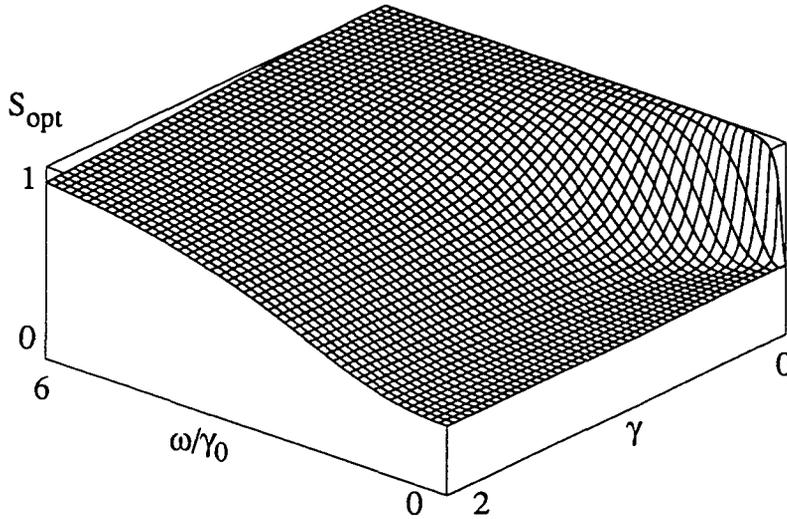


Figure II-11: Bruit minimum S_{opt} en fonction de la fréquence normalisée $\omega\tau/\gamma_0$ et de γ , pour $\Delta_0=0$, $\Delta_1=2$, $I_p=15$. On y voit clairement la diminution de la bande passante de la réduction de bruit lorsque la finesse pour le sous-harmonique donc le temps de réponse où la non linéarité effective augmente ($\gamma = \gamma_1/\gamma_0 \rightarrow 0$).

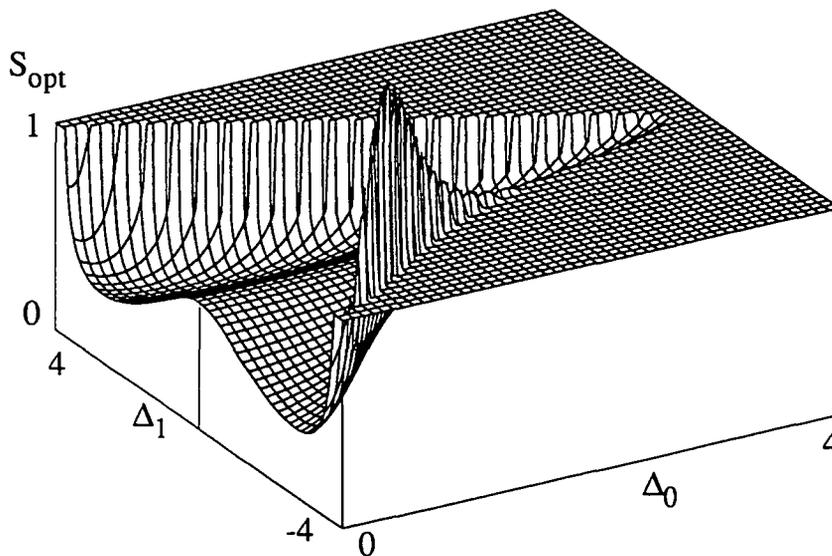


Figure II-12 : Réduction optimale du bruit. $\omega\tau = \gamma_0/2$, $I_p=15$, $\gamma=1$.

La figure II-12 représente la réduction optimale de bruit S_{opt} en fonction des deux désaccords Δ_0 et Δ_1 , pour $\omega\tau = \gamma_0/2$, $I_p=15$, $\gamma=1$. Lorsque l'OPO n'oscille pas (voir figure II.9), la cavité ne modifie pas les fluctuations du champ pompe, et $S_{opt}=1$. Pour les valeurs de Δ_0 et Δ_1 où l'OPO oscille le bruit optimum est inférieur à 1, sauf lorsque le point de fonctionnement s'approche de la

zone d'instabilité, où le champ pompe sortant est très bruyant. Pour les autres points de fonctionnement y compris ceux proches de la zone de bistabilité (délimitée par le "mur" dans la partie $\Delta_0 \geq 0, \Delta_1 \geq 0$), le bruit optimum est réduit : il existe donc une composante de quadrature du champ sortant comprimé.

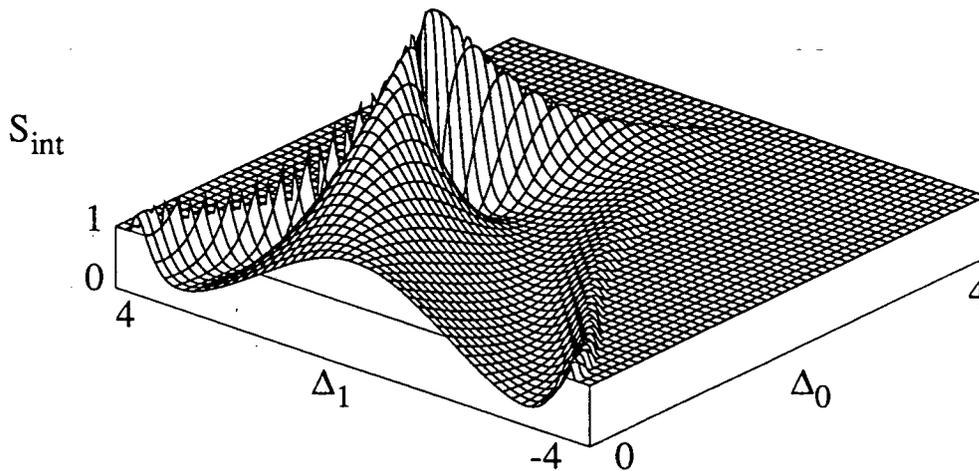


Figure 2-13 : Bruit d'intensité du champ pompe sortant de l'OPO. $\omega\tau/\gamma_0=0,2$, $I_p=15$, $\gamma=0,1$.

La figure 2.13 représente le bruit d'intensité du mode pompe sortant de la cavité, en fonction de Δ_0 et Δ_1 , pour une fréquence d'analyse petite $\omega\tau/\gamma_0=0,2$, une grande finesse pour le sous-harmonique $\gamma=0,1$ et pour une intensité pompe $I_p=15$. Lorsque l'OPO oscille au voisinage du seuil, il y a de l'excès de bruit sur l'intensité du mode pompe sortant de la cavité. Dans la partie $\Delta_0\Delta_1 \geq 0$, l'existence de la bistabilité conduit à un fort excès de bruit, alors que dans la partie $\Delta_0 \Delta_1 \leq 0$, où il n'existe qu'une seule solution stable, cet excès de bruit est beaucoup plus faible. Cela est dû au fait que les points de fonctionnement de la cavité de cette région sont très éloignés de la zone d'instabilité de l'OPO puisqu'on a choisi $\gamma=0,1$.

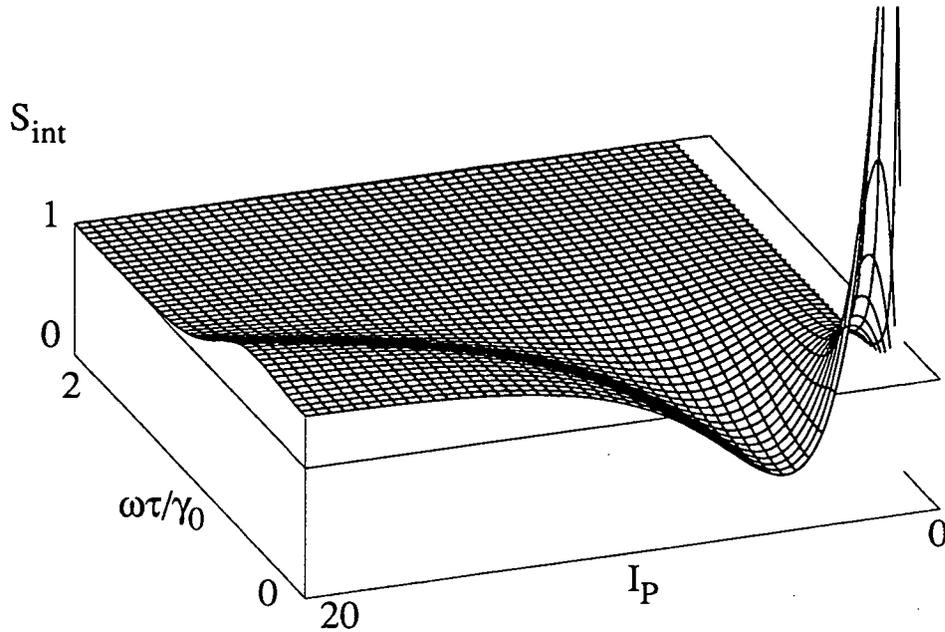


Figure 2-14 : Bruit d'intensité du champ pompe sortant de l'OPO. $\Delta_0=0$, $\Delta_1=-1$, $\gamma=0,1$.

La figure 2.14 représente le bruit d'intensité sur le champ pompe sortant de la cavité, en fonction de la fréquence d'analyse normalisée $\omega\tau/\gamma_0$ et de l'intensité du champ pompe I_p , pour $\Delta_0=0$, $\Delta_1=-1$, $\gamma=0,1$. Pour I_p , proche du seuil d'oscillation, on a un fort excès de bruit à basse fréquence, puis l'allure du spectre ne dépend plus beaucoup de I_p .

e. Conclusion

Cette étude montre qu'un oscillateur paramétrique optique avec une très grande finesse pour les champs sous-harmonique est un bon candidat pour la réalisation d'une cavité "mangeuse de bruit". La bande passante de réduction de bruit est donnée par la largeur de la cavité pour les champs sous-harmoniques. Cette largeur sera d'autant plus grande que la longueur de la cavité sera plus petite. Par ailleurs, la réduction du bruit quantique est très sensible aux pertes subies par les champs dans la cavité. Ces pertes proviennent de l'absorption dans le cristal (milieu non-linéaire) et des réflexions sur les faces d'entrée de ce cristal. La réalisation d'une cavité mangeuse de bruit de ce type est en cours dans notre groupe. Il s'agit d'un oscillateur hémilithique composé d'un cristal de KTP et d'un miroir très réfléchissant pour la pompe (532 nm) et les sous-harmoniques (1060 nm). Une des faces du cristal est traitée anti-reflet pour ces deux longueurs d'onde et l'autre sert de miroir d'entrée-sortie pour la cavité. (traitement de grande réflectivité pour 1060 nm et 10% pour la pompe). Cet oscillateur paramétrique optique a un seuil d'oscillation inférieur à 10 mW. Ce résultat est très encourageant et permettra de réaliser une cavité non-linéaire "mangeuse de bruit".

5 Conclusion

A partir de l'étude du modèle simple de la cavité non linéaire contenant un milieu à effet Kerr, nous avons établi un critère de qualité pour les différents matériaux non linéaires possibles pour la réalisation d'une cavité mangeuse de bruit. Ce critère montre clairement qu'une assemblée d'atomes immobiles tels qu'on peut en réaliser à l'aide d'un piège magnéto-optique est un des meilleurs candidats envisageables, d'une part parce que ce milieu présente une non-linéarité très grande et rapide, et d'autre part parce que ce milieu possède des modèles théoriques aptes à décrire précisément le bruit qu'il ajoute qui permettent de déterminer ses conditions d'utilisation les plus favorables.

Le paragraphe 4 de ce chapitre mentionne l'utilisation possible de la non-linéarité effective d'un oscillateur paramétrique optique pour le champ pompe pour réaliser une cavité réduisant le bruit quantique de la lumière. L'étude expérimentale de ce système est actuellement en cours dans notre équipe.

III. Bistabilité optique avec des atomes à deux niveaux

1 Introduction

On a vu l'intérêt des atomes comme milieu non linéaire. Cependant, l'analyse du chapitre précédent assimilait les atomes à un milieu paramétrique à pertes linéaires et à réponse instantanée. Il est possible de faire un calcul plus précis dans le cas d'atomes à deux niveaux. L'objet de ce chapitre est le calcul des spectres de bruit de la lumière sortant d'une cavité contenant des atomes à deux niveaux, pour un point de fonctionnement donné de la cavité. Dans un premier temps, nous présentons le calcul des spectres de bruit (paragraphe 1, 2, 3 et 4), puis nous discutons brièvement l'état stationnaire du système (paragraphe 4 c et d).

Le calcul des spectres de bruit est tout d'abord fait à l'aide du formalisme entrée-sortie présenté au chapitre I. Pour ce faire nous commençons par établir la relation entrée-sortie pour l'interaction d'un champ laser avec une assemblée d'atomes à deux niveaux immobiles et indépendants. Nous sommes amenés à utiliser la théorie de la réponse linéaire, et nous montrons que l'ensemble des fonctions atomiques impliquées dans les calculs peuvent se déduire des équations de Bloch optiques en utilisant le théorème de régression quantique.

Ensuite, nous présentons, sous la forme d'un article [Hilico 92a], le calcul détaillé des spectres de bruit. Cet article contient les résultats analytiques complets de nos calculs. Il donne en particulier les spectres de bruit d'intensité sur le champ sortant de la cavité. La comparaison avec l'effet sur les fluctuations quantiques d'un milieu Kerr dans une cavité (exposé au chapitre II) montre dans quelles limites les atomes se comportent comme ce dernier.

Le paragraphe 5 de ce chapitre présente l'article fondateur de la méthode entrée-sortie appliquée aux atomes, dans un cadre plus général, s'appliquant à des atomes ayant plus de deux niveaux interagissant avec un ou plusieurs modes du champ électromagnétique.

En ce qui concerne la bistabilité optique, nous décrivons rapidement l'état stationnaire du champ dans la cavité et donnons les courbes de bistabilité sous une forme pouvant être directement comparée aux expériences (4d). Ensuite nous montrons que le formalisme entrée-sortie permet de caractériser la stabilité des solutions stationnaires autour desquelles nous calculons les spectres de bruit (4e).

Dans tout le chapitre III, les opérateurs ou les fonctions dépendant du temps seront notés avec un chapeau : par exemple $\hat{x}(t)$. Leur transformée de Fourier sera notée sans chapeau :

$$x(\omega) = \int dt e^{i\omega t} \hat{x}(t) \quad (\text{III.1})$$

2 Les hypothèses du modèle

a. Hypothèses sur les atomes et les champs

Dans sa version la plus générale, notre théorie décrit l'interaction d'un ou de plusieurs champs laser intenses interagissant avec un milieu atomique placé dans un résonateur optique. Les atomes sont supposés immobiles et indépendants : la dynamique d'un atome ne dépend pas de la présence des autres atomes. Ce modèle correspond à un milieu dilué et optiquement mince.

De plus, les résonateurs optiques envisagés sont des cavités en anneau, avec une seule direction et un seul sens de propagation pour les champs. Puisque le milieu atomique est optiquement mince, on peut décrire les champs laser dans l'approximation quasi-monomode du chapitre I.

b. Couplage atomes-champ

Le champ électromagnétique est décomposé en deux parties distinctes : d'une part, les champs quasi-monomodes intenses résonnants dans la cavité optique, responsables de l'excitation des résonances atomiques, et d'autre part les autres modes du champ électromagnétique, qui sont dans l'état vide et qui sont responsables de la relaxation du dipôle atomique. Le couplage entre les atomes et les champs est décrit par un hamiltonien dipolaire électrique dans l'approximation du champ tournant [Cohen-Tannoudji 88, V.A.3]. L'interaction avec les modes vides n'intervient pas explicitement dans le calcul : la relaxation et les fluctuations qu'ils induisent sont pris en compte à l'aide des équations de Bloch optiques et le théorème de régression quantique.

L'approximation quasi-monomode pour les champs et l'hypothèse d'indépendance des atomes permet d'éliminer toute dépendance spatiale du problème. Les contributions des différents atomes au champ rayonné sont parfaitement accordées en phase, et tout se passe comme si tous les atomes étaient au même endroit.

3 Relation entrée-sortie pour le milieu atomique

Dans ce paragraphe, nous allons établir la relation entrée-sortie correspondant à l'interaction d'un champ laser et d'un milieu atomique. Afin que les calculs soient le plus simple possible, nous nous limitons au cas d'un seul champ laser \mathcal{E} et d'un atome à deux niveaux. Le niveau fondamental est noté $|g\rangle$ et le niveau excité $|e\rangle$. Le dipôle atomique est écrit en représentation de Heisenberg :

$$d(\hat{\mathbf{S}}(t) + \hat{\mathbf{S}}^+(t)) \quad \text{où} \quad \hat{\mathbf{S}}(t) = |g\rangle\langle e| \quad \text{et} \quad \hat{\mathbf{S}}^+(t) = |e\rangle\langle g| \quad (\text{III.2})$$

d est la valeur moyenne supposée réelle de l'opérateur dipolaire électrique entre les états $|g\rangle$ et $|e\rangle$.

Les deux opérateurs $\hat{\mathbf{S}}$ et $\hat{\mathbf{S}}^+$ sont sans dimension. Le champ laser est décrit dans l'approximation quasi monomode par ses composantes de fréquences positives et négatives $\hat{\mathbf{E}}(t)$ et $\hat{\mathbf{E}}^+(t)$ équation I.11b :

$$\hat{\mathbf{E}}(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} \mathbf{E}_\omega i \hat{a}_\omega(t) \quad (\text{III.3})$$

On note ω_L la fréquence centrale du champ, comme au chapitre I.

Le hamiltonien du système atome+champ s'écrit $H = H_0 + H_R + H_I$ où H_0 est le hamiltonien atomique, H_R le hamiltonien du rayonnement et H_I le hamiltonien d'interaction :

$$H_0 = \hbar\omega_0 |e\rangle\langle e|, \quad H_R = \int \frac{d\omega}{2\pi} \hbar\omega \hat{a}_\omega^+ \hat{a}_\omega \quad \text{et} \quad H_I = -d \left(\hat{\mathbf{E}} \hat{\mathbf{S}}^+ + \hat{\mathbf{E}}^+ \hat{\mathbf{S}} \right) \quad (\text{III.4})$$

a. Equation de Heisenberg

La relation entrée-sortie pour le champ dans son interaction avec un atome s'obtient en calculant le champ rayonné par les atomes, selon la procédure décrite dans la référence [Cohen-Tannoudji 79-80]. On écrit tout d'abord l'équation de Heisenberg pour l'opérateur a_ω :

$$\frac{d}{dt} \hat{a}_\omega(t) = -i\omega \hat{a}_\omega(t) + d \frac{\mathbf{E}_\omega}{\hbar} \hat{\mathbf{S}}(t) \quad (\text{III.5})$$

On intègre cette équation entre deux instants t et t_0 pour déterminer $\hat{a}_\omega(t)$ qu'on reporte dans l'expression (III.3) de $\hat{\mathbf{E}}(t)$ pour obtenir :

$$\hat{\mathbf{E}}(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} \mathbf{E}_\omega i \hat{a}_\omega(t_0) e^{-i\omega(t-t_0)} + i \int_0^{t-t_0} d\tau \left\{ \int \frac{d\omega}{2\pi} d \frac{\mathbf{E}_\omega^2}{\hbar} e^{-i\omega\tau} \right\} \hat{\mathbf{S}}(t-\tau) \quad (\text{III.6})$$

Dans cette expression, le champ $\hat{\mathbf{E}}(t)$ apparaît comme la somme de deux contributions : le premier terme appelé "champ du vide" correspond à l'évolution libre des opérateurs \hat{a}_ω entre les instants t_0 et t . Le second terme appelé "champ des sources" est le champ rayonné par les atomes. C'est une fonction retardée du dipôle atomique normalisé $\hat{\mathbf{S}}$.

L'instant t_0 introduit lors de l'intégration nous permet de définir précisément les champs entrant et sortant en considérant que le milieu atomique "diffuse" le champ entrant en champ sortant. On appelle champ entrant et on note $\hat{\mathbf{E}}^{in}(t)$ le "champ du vide" à la limite $t_0 \rightarrow -\infty$ (c'est à dire avant l'interaction) et champ sortant, noté $\hat{\mathbf{E}}^{out}(t)$ le "champ du vide" pour $t_0 \rightarrow +\infty$. On a donc :

$$\hat{\mathbf{E}}(t) = \hat{\mathbf{E}}^{in}(t) + i \int_0^\infty d\tau \left\{ \int \frac{d\omega}{2\pi} d \frac{\mathbf{E}_\omega^2}{\hbar} e^{-i\omega\tau} \right\} \hat{\mathbf{S}}(t-\tau) \quad (\text{III.7})$$

$$\hat{\mathbf{E}}(t) = \hat{\mathbf{E}}^{out}(t) + i \int_0^{-\infty} d\tau \left\{ \int \frac{d\omega}{2\pi} d \frac{\mathbf{E}_\omega^2}{\hbar} e^{-i\omega\tau} \right\} \hat{\mathbf{S}}(t-\tau) \quad (\text{III.8})$$

On en déduit la relation entrée-sortie :

$$\hat{\mathbf{E}}^{out}(t) = \hat{\mathbf{E}}^{in}(t) + i \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \left\{ \int \frac{d\omega}{2\pi} d \frac{\mathbf{E}_\omega^2}{\hbar} e^{-i\omega\tau} \right\} \hat{\mathbf{S}}(t-\tau) \quad (\text{III.9})$$

Le second terme est le produit de convolution du dipôle atomique par la fonction de réponse $\hat{\mathbf{R}}(t)$:

$$\hat{\mathbf{R}}(\tau) = \int \frac{d\omega}{2\pi} d \frac{\mathbf{E}_\omega^2}{\hbar} e^{-i\omega\tau} \quad (\text{III.10})$$

Le champ laser incident étant monochromatique de fréquence ω_L , on introduit les opérateurs dans le référentiel tournant :

$$\hat{E}(t) = \frac{\hat{\mathbf{E}}(t)}{\mathbf{E}_{\omega_L}} e^{i\omega_L t} \quad , \quad \hat{S}(t) = \hat{\mathbf{S}}(t) e^{i\omega_L t} \quad \text{et} \quad \hat{R}(\tau) = \frac{\hat{\mathbf{R}}(\tau)}{\mathbf{E}_{\omega_L}} e^{i\omega_L \tau} \quad (\text{III.11})$$

Dans l'espace des fréquences, en notant Ω la fréquence d'analyse, les champs entrant E^{in} et sortant E^{out} vérifient :

$$E^{in}(\Omega) = E^{out}(\Omega) + iR(\Omega) S(\Omega) \quad (\text{III.12})$$

$$\text{avec } R(\Omega) = \frac{1}{\mathbf{E}_{\omega_L}} \int d\tau e^{i\Omega\tau} \int \frac{d\omega}{2\pi} d \frac{\mathbf{E}_{\omega}^2}{\hbar} e^{i(\omega_L - \omega)\tau} = d \sqrt{\frac{\omega_L}{2\varepsilon_0 \hbar s c}} \frac{\omega_L + \Omega}{\omega_L} \quad (\text{III.13})$$

Dans la suite, on ne s'intéresse, comme on l'a vu au chapitre I, qu'à des fréquences Ω très petites devant ω_L . Dans ce cas, on pose :

$$g = R(\Omega = 0) = d \sqrt{\frac{\omega_L}{2\varepsilon_0 \hbar s c}} \quad (\text{III.14})$$

Pour les faibles fréquences $R(\Omega)$ est une constante : ceci correspond à une fonction de réponse instantanée dans la formule (III.6); cette dernière devient :

$$\boxed{\hat{E}^{out}(t) = \hat{E}^{in}(t) + i g \hat{S}(t)} \quad (\text{III.15})$$

Nous avons établi une relation entrée-sortie pour le champ interagissant avec le milieu atomique. A ce stade, on peut faire deux remarques :

- On obtient de la même manière la relation entrée-sortie pour l'opérateur adjoint $\hat{\mathbf{E}}^+$.

$$\hat{E}^{+out}(t) = \hat{E}^{+in}(t) - i g \hat{S}^+(t) \quad (\text{III.16})$$

En utilisant les notations matricielles définies au chapitre I (appendice A), on peut écrire la relation entrée-sortie dans l'espace des fréquences sous la forme :

$$[\hat{E}^{out}(\Omega)] = [\hat{E}^{in}(\Omega)] + i g \varepsilon [\hat{S}(\Omega)] \quad (\text{III.17})$$

où ε est la matrice définie par $\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

- La relation entrée-sortie a été établie pour l'interaction avec un seul atome. Il est aisé de généraliser cette formule au cas où le champ interagit avec N atomes indépendants : il suffit de sommer les contributions de chaque atome repéré par un indice j pour obtenir :

$$[\hat{E}^{out}(\Omega)] = [\hat{E}^{in}(\Omega)] + i g \varepsilon \sum_{j=1}^n [\hat{S}_j(\Omega)] \quad (\text{III.18})$$

Cette simple sommation suppose un accord en phase parfait des contributions des différents atome.

b. Réponse linéaire

Nous allons maintenant nous intéresser aux fluctuations des opérateurs champ et dipôle. Pour nous conformer aux notations de l'article joint, nous abandonnons ici la notation Ω pour les fréquences d'analyse et reprenons la notation ω comme aux chapitres I et II. De la relation entrée-sortie (III.17), on déduit la transformation des fluctuations du champ par simple linéarisation :

$$\delta E^{out}(\omega) = \delta E^{in}(\omega) + i g \delta S(\omega) \quad (III.19)$$

$\delta S(\omega)$ est la transformée des fluctuations du dipôle. La relation entrée-sortie obtenue n'est pas suffisante pour obtenir la transformation canonique (au sens du chapitre I (I.36)) des fluctuations du champ dans son interaction avec le milieu atomique. En effet, dans la formule (III.19), les fluctuations du dipôle n'ont aucune raison d'être indépendantes des fluctuations du champ E^{in} puisque c'est ce champ qui excite la résonance des atomes. En fait, ces fluctuations ont deux origines : d'une part, l'opérateur dipôle d'un atome fluctue car il est excité par le champ incident fluctuant E^{in} . D'autre part, un dipôle atomique excité par un champ constant $\langle E^{in} \rangle$ fluctue car il est couplé au réservoir des modes responsables de la relaxation et de l'émission spontanée.

Dans la mesure où les fluctuations de E^{in} sont petites devant sa valeur moyenne, nous allons montrer que les fluctuations du dipôle s'expriment en fonction de celles du champ E^{in} à l'aide d'une relation linéaire entre composantes de fréquence des fluctuations :

$$\begin{pmatrix} \delta S(\omega) \\ \delta S^+(\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta S(\omega)_{EM} \\ \delta S^+(\omega)_{EM} \end{pmatrix} + g \chi(\omega) \begin{pmatrix} \delta E^{in}(\omega) \\ \delta E^{in+}(\omega) \end{pmatrix} \quad (III.20)$$

$\delta S(\omega)_{EM}$ et $\delta S^+(\omega)_{EM}$ représentent les fluctuations dues à l'émission spontanée, c'est à dire les fluctuations du dipole lorsque le champ E^{in} ne fluctue pas.

$\chi(\omega)$ est une matrice de susceptibilité indiquant comment le dipôle répond aux fluctuations δE^{in} .

La relation est matricielle car les fluctuations du champ entrant ont deux composantes à la fréquence ω , $\delta E^{in}(\omega)$ et $\delta E^{in+}(\omega)$.

Dans la suite de ce paragraphe, nous allons établir la formule de réponse linéaire en considérant que l'atome en présence du champ moyen $\langle E^{in} \rangle$ est soumis à une petite perturbation constituée par les fluctuations $\delta \hat{E}^{in}$ du champ \hat{E}^{in} .

1. Equations de Bloch optiques

La dynamique du système atome+champ moyen couplé au réservoir de modes est décrite par les équations de Bloch optiques. Dans le cas d'un atome à deux niveaux, ces équations prennent la forme :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \langle \hat{S}(t) \rangle \\ \langle \hat{S}^+(t) \rangle \\ \langle \hat{\pi}_g(t) \rangle \\ \langle \hat{\pi}_e(t) \rangle \end{pmatrix} = -\gamma B \begin{pmatrix} \langle \hat{S}(t) \rangle \\ \langle \hat{S}^+(t) \rangle \\ \langle \hat{\pi}_g(t) \rangle \\ \langle \hat{\pi}_e(t) \rangle \end{pmatrix} \quad (III.21)$$

où γ est la largeur naturelle du niveau excité, $\hat{\pi}_g$ et $\hat{\pi}_e$ les populations atomiques et B la matrice de Bloch, donnée par la formule (57) de l'article inséré au paragraphe 4 b). Ces équations, et la

condition $\langle \hat{\pi}_g \rangle + \langle \hat{\pi}_e \rangle = I$ permettent de calculer les valeurs moyennes des populations et des cohérences atomiques. Ces calculs ne sont pas linéarisés, ils sont exacts.

Les équations de Bloch et le théorème de régression quantique [Cohen-Tannoudji 88] permettent de calculer les fonctions de corrélation des fluctuations du dipôle dues à l'émission spontanée. Le calcul complet de ces fonctions est décrit dans la partie VII de l'article inséré au paragraphe 4 b). Ces fonctions de corrélation sont contenues dans la matrice $\sigma(\omega)$:

$$\sigma(\omega) = \left\langle \left[\delta S(\omega)_{EM} \right] \left[\delta S(-\omega)_{EM} \right]^+ \right\rangle \quad (\text{III.22a})$$

transformée de Fourier de :

$$\hat{\sigma}(\tau) = \left\langle \left[\delta \hat{S}(\tau)_{EM} \right] \left[\delta \hat{S}(0)_{EM} \right]^+ \right\rangle \quad (\text{III.22b})$$

ii. Formule de réponse linéaire

La partie des fluctuations du dipôle corrélée aux fluctuations du champ E^{in} (second terme de l'équation III.20) est calculée par la théorie de la réponse linéaire généralisée développée dans sa thèse par Jean-Michel Courty [Courty 90]. Cette théorie appliquée à notre cas particulier montre que le dipôle d'un atome excité par un champ moyen $\langle E^{in} \rangle$ et soumis à une perturbation due aux fluctuations de E^{in} décrite par le hamiltonien

$$H_{pert} = -\hbar g \left(\delta \hat{E}^{in} \hat{S}^+ + \delta \hat{E}^{in+} \hat{S} \right) \quad (\text{III.23})$$

a des fluctuations corrélées à $\delta \hat{E}^{in}$, qui sont données dans l'espace des fréquences par :

$$\begin{pmatrix} \delta S(\omega) \\ \delta S^+(\omega) \end{pmatrix} = g \chi(\omega) \begin{pmatrix} \delta E^{in}(\omega) \\ \delta E^{in+}(\omega) \end{pmatrix} \quad (\text{III.24})$$

La matrice $\chi(\omega)$ est la transformée de Fourier de la matrice des fonctions de réponse.

$$\hat{\chi}(\tau) = i \theta(\tau) \begin{pmatrix} \langle [\hat{S}(\tau), \hat{S}^+(0)] \rangle & \langle [\hat{S}(\tau), \hat{S}(0)] \rangle \\ \langle [\hat{S}^+(\tau), \hat{S}^+(0)] \rangle & \langle [\hat{S}^+(\tau), \hat{S}(0)] \rangle \end{pmatrix} \quad (\text{III.25a})$$

où les valeurs moyennes des commutateurs sont calculées dans le régime stationnaire. La matrice des susceptibilités est composée de commutateurs : on peut remplacer les opérateurs S par leurs fluctuations δS . Dans la théorie de la réponse linéaire, les valeurs moyennes donnant χ sont calculées en considérant que le système atome-champ moyen n'est pas perturbé par les fluctuations du champ E^{in} . Les fluctuations du dipôle ne sont dues qu'à l'émission spontanée. La matrice des susceptibilités peut donc aussi s'écrire :

$$\hat{\chi}(\tau) = i \theta(\tau) \begin{pmatrix} \langle [\delta \hat{S}(\tau)_{EM}, \delta \hat{S}_{EM}^+(0)] \rangle & \langle [\delta \hat{S}_{EM}(\tau), \delta \hat{S}_{EM}(0)] \rangle \\ \langle [\delta \hat{S}_{EM}^+(\tau), \delta \hat{S}_{EM}^+(0)] \rangle & \langle [\delta \hat{S}_{EM}^+(\tau), \delta \hat{S}_{EM}(0)] \rangle \end{pmatrix} \quad (\text{III.25b})$$

c. Transformation canonique des fluctuations du champ

La formule de réponse linéaire (III.20) a été établie pour l'interaction avec un atome. L'hypothèse d'indépendance des atomes permet de l'étendre au cas où le milieu non linéaire contient N atomes :

$$[\delta E^{out}(\omega)] = [\delta E^{in}(\omega)] + i g \epsilon [\delta P(\omega)] \quad (III.26)$$

où δP est la polarisation macroscopique du milieu et où S_j désigne le dipôle de l'atome numéro j .

$$\delta \hat{P} = \sum_{j=1}^N \delta \hat{S}_j$$

La formule de réponse linéaire permet de décomposer δP sous la forme d'une somme de deux contributions : $[\delta P_1(\omega)]$ due à la réponse linéaire du dipôle aux fluctuations du champ et $[\delta P_2(\omega)]$ liée à l'émission spontanée.

$$[\delta P_1(\omega)] = N \chi(\omega) [\delta E^{in}(\omega)] \quad \text{et} \quad [\delta P_2(\omega)] = \sum_{j=1}^N \delta S_j(\omega)_{EM} \quad (III.27)$$

Les susceptibilités des atomes s'ajoutent pour donner $N\chi$. Les atomes étant indépendants, leurs fonctions de corrélation s'ajoutent et on a :

$$\left\langle [\delta \hat{P}_2(\omega)] [\delta \hat{P}_2(-\omega)]^+ \right\rangle = N \sigma(\omega) \quad (III.28)$$

On obtient finalement la relation entrée-sortie pour la traversée du milieu atomique :

$$\boxed{[\delta E^{out}(\omega)] = (1 + i N g^2 \epsilon \chi(\omega)) [\delta E^{in}(\omega)] + i g \epsilon [\delta P_2(\omega)]} \quad (III.29)$$

Il reste à vérifier que cette relation entrée-sortie est une transformation canonique des fluctuations au sens du chapitre I.

d. Conservation des relations de commutation

Le but de ce paragraphe est de montrer que la transformation de la formule (III.29) conserve les relations de commutation des champs libres. Nous allons donc calculer les relations de commutation du champ sortant en fonction de celles du champ entrant, à l'aide de la relation entrée-sortie (III.29).

Nous allons établir la conservation des relations de commutation pour les valeurs moyennes des champs dans un état quelconque du système atome-champ, qui est équivalente à la conservation des relations de commutation pour les opérateurs. Nous utiliserons pour cela les relations, appelées relations fluctuation-dissipation qui existent entre χ et σ . Ces deux matrices peuvent s'exprimer à l'aide de la matrice G définie par :

$$\hat{G}(\tau) = \theta(\tau) \left\langle [\delta \hat{S}(\tau)] [\delta \hat{S}(0)]^+ \right\rangle \quad (III.30)$$

On a
$$\sigma(\omega) = G(\omega) + G(\omega)^+ \quad (III.31)$$

et
$$\chi(\omega) = i \left(G(\omega) - \eta (G(\omega)^+)^t \eta \right) \quad (\text{III.32})$$

soit encore
$$\frac{\chi(\omega) - \chi(\omega)^+}{i} = \sigma(\omega) - \eta \sigma(\omega)^+ \eta \quad (\text{III.33})$$

Cette dernière égalité est une relation entre la partie dissipative de χ et les fluctuations caractérisées par σ .

Nous avons maintenant toutes les relations nécessaires pour calculer les commutateurs du champ sortant. On note $C(\omega, \omega')$ la matrice des commutateurs d'un champ : (Appendice B).

$$C(\omega, \omega') = \left[[\delta E(\omega)], [\delta E(\omega')]^+ \right] \quad (\text{III.34})$$

$$C(\omega, \omega') = [\delta E(\omega)] [\delta E(\omega')]^+ - \left([\delta E(\omega')]^{+t} [\delta E(\omega)]^t \right)^t \quad (\text{III.35})$$

On a $C^{in}(\omega, \omega') = 2\pi \varepsilon \delta(\omega - \omega')$ par hypothèse. On calcule $\langle C^{out}(\omega, \omega') \rangle$ en reportant III.27 et III.29 dans III.35 et en utilisant l'indépendance des fluctuations δE^{in} et δP_2 . On obtient alors :

$$\begin{aligned} \langle C^{out}(\omega, \omega') \rangle &= (1 + i N g^2 \varepsilon \chi(\omega)) \langle C^{in}(\omega, \omega') \rangle (1 + i N g^2 \varepsilon \chi(\omega'))^+ \\ &+ N g^2 \varepsilon \left\langle \left[[\delta S_{EM}(\omega)], [\delta S_{EM}(\omega')]^+ \right] \right\rangle \varepsilon \end{aligned} \quad (\text{III.36})$$

La conservation des relations de commutation doit être vérifiée à tous les ordres par rapport aux fluctuations du champ. Cependant, la relation entrée-sortie (III.29) a été établie par la théorie de la réponse linéaire qui est un développement limité au 1^{er} ordre par rapport aux fluctuations du champ. (Les coefficients de la matrice $N g^2 \chi$ sont petits devant l'unité). La cohérence de la démonstration impose donc que le calcul des relations de commutation soit limité à l'ordre 1 par rapport à ces paramètres. Le premier terme de (III.36) donne alors :

$$\left\{ \varepsilon + i N g^2 \varepsilon (\chi(\omega) - \chi^+(\omega')) \varepsilon \right\} 2\pi \delta(\omega - \omega') \quad (\text{III.37})$$

Le commutateur du second terme de (III.36) se calcule en développant les transformées de Fourier : la stationnarité du problème conduit à :

$$\left\langle \left[[\delta S_{EM}(\omega)], [\delta S_{EM}(\omega')]^+ \right] \right\rangle = 2\pi \delta(\omega - \omega') \int d\tau e^{i\omega\tau} \left\langle \left[[\delta S_{EM}(\tau)], [\delta S_{EM}(0)]^+ \right] \right\rangle \quad (\text{III.38})$$

L'intégrale limitée à $\tau \geq 0$ donne $-i \chi(\omega)$ (III.25b) et l'intégrale sur les $\tau \leq 0$ donne :

$$\left(\int d\tau' e^{i\omega\tau'} \theta(\tau') \left\langle \left[[\delta S(\tau')], [\delta S(0)]^+ \right] \right\rangle \right)^+ = i \chi(\omega)^+ \quad (\text{III.39})$$

Le second terme vaut donc $-i N g^2 \varepsilon (\chi(\omega) - \chi(\omega)^+) \varepsilon$: il compense la seconde partie du premier terme, et il reste :

$$\langle C^{out}(\omega, \omega') \rangle = \langle C^{in}(\omega, \omega') \rangle = 2\pi \delta(\omega - \omega') \varepsilon \quad (\text{III.40})$$

Nous avons établi la conservation des valeurs moyennes des relations de commutation pour un état quelconque du champ lors de son interaction avec un ensemble d'atomes indépendants. Nous en déduisons la conservation des relations de commutation des opérateurs de champ.

4 Fluctuations quantiques dans la bistabilité optique

Le terme “bistabilité optique” désigne le régime de fonctionnement d’un résonateur optique contenant un milieu non-linéaire où la puissance du champ dans la cavité peut prendre plusieurs valeurs, les autres paramètres du système ayant une valeur donnée. La bistabilité optique a fait et continue de faire l’objet de nombreuses études tant en ce qui concerne les propriétés de stabilité et d’instabilités des régimes stationnaires qu’en ce qui concerne les propriétés de bruit de la lumière sortant de la cavité, et ce pour des milieux non-linéaires variés [Hilico 92a] [Collett 85] [Lugiato 82].

Nous nous intéressons ici au cas d’une cavité de grande finesse contenant des atomes à deux niveaux. L’étude du régime stationnaire de ce système et l’équation de la bistabilité sont présentés au paragraphe 4c. Nous allons maintenant nous intéresser aux propriétés de bruit.

Le calcul des spectres de bruit du champ sortant de la cavité est présenté en détail dans l’article inséré dans ce paragraphe. Cependant, la présentation ne suit pas exactement le point de vue entrée-sortie développé au chapitre I. Dans un premier temps, nous allons appliquer ce point de vue au calcul des fonctions de corrélation du champ sortant de la cavité puis nous précisons le point de vue adopté dans l’article.

a. Point de vue entrée-sortie

Le calcul de la transformation des fluctuations des opérateurs de champ dans leur interaction avec la cavité non linéaire (figure III-1) se déduit du cas général détaillé au paragraphe (I.2.d.iii), et de la transformation canonique due au milieu atomique, que nous venons d’établir (III.29).

Le champ incident sur la cavité est noté A^{in} et le champ sortant A^{out} . A'^{in} et A'^{out} désignent le champ entrant et le champ sortant vus par le milieu atomique. On note r_0 et t_0 les coefficients de réflexion et de transmission du miroir, et $\gamma_{cav}=1-r_0$.

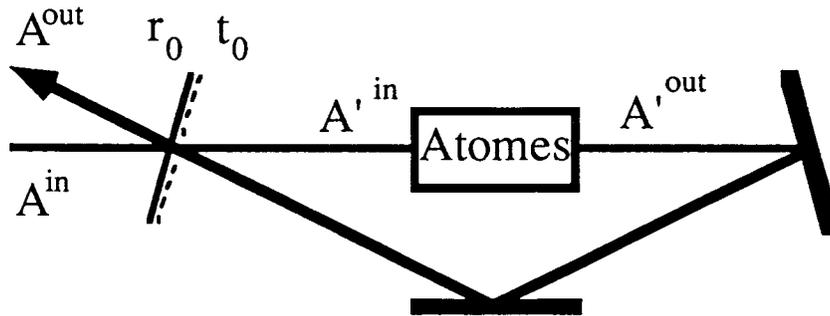


Figure III-1

En remplaçant T_2 par $iNg^2 \epsilon \chi(\omega)$ et F_2 par δP_2 dans les équations de base (I.41, 42 et 43) données au chapitre I, on obtient :

- relation sur le miroir d’entrée et propagation :

$$[A'^{in}(\omega)] = t_0 [A^{in}(\omega)] + r_0 \varphi(\omega) [A'^{out}(\omega)] \quad (\text{III.41})$$

$$[A'^{out}(\omega)] = -r_0 [A^{in}(\omega)] + t_0 \varphi(\omega) [A'^{out}(\omega)] \quad (\text{III.42})$$

où $\varphi(\omega)$ caractérise la propagation dans la cavité (I.38) :

$$\varphi(\omega) = \begin{pmatrix} e^{i\phi+i\omega\tau} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi+i\omega\tau} \end{pmatrix} \quad (\text{III.43})$$

- traversée du milieu

$$[A^{out}(\omega)] = [A^{in}(\omega)] + ig\varepsilon [P(\omega)] \quad (\text{III.44})$$

- formule de réponse linéaire :

$$[\delta P(\omega)] = [\delta P_2(\omega)] + Ng\chi(\omega) [\delta A^{in}(\omega)] \quad (\text{III.45})$$

Dans la limite d'une cavité de grande finesse et proche de résonance, ces équations conduisent à la relation entrée-sortie :

$$\begin{aligned} (\gamma_{cav} + i\varepsilon\phi_0 - i\omega\tau - iNg^2\varepsilon\chi(\omega)) [\delta A^{out}(\omega)] = \\ (\gamma_{cav} - i\varepsilon\phi_0 + i\omega\tau + iNg^2\varepsilon\chi(\omega)) [\delta A^{in}(\omega)] + t_0 [\delta P_2(\omega)] \end{aligned} \quad (\text{III.46})$$

Cette relation exprime les fluctuations du champ sortant de la cavité comme la somme de deux termes : d'une part les fluctuations du champ incident transformées par la cavité et d'autre part les fluctuations dues à l'émission spontanée.

La transformation des fonctions de corrélation s'écrit d'après (I.57) :

$$V^{out}(\omega) = V^{in}(\omega) + \mu(\omega) D(\omega) \mu(\omega)^+$$

$$\text{où} \quad \mu(\omega) = \frac{1}{2} \left(I + i\varepsilon \frac{\phi_0}{\gamma_{cav}} - \frac{i\omega\tau}{\gamma_{cav}} - i2C\gamma\varepsilon\chi(\omega) \right) \quad (\text{III.47})$$

Dans le cas où le champ entrant est dans un état cohérent, la matrice de diffusion vaut :

$$D(\omega) = \frac{C\gamma}{2} \varepsilon \left\{ i(I + \varepsilon) \chi(\omega)^+ + i\chi(\omega)(I + \varepsilon) + 2\sigma(\omega) \right\} \varepsilon \quad (\text{III.48})$$

Nous avons introduit le paramètre de bistabilité C qui est le rapport entre les pertes linéaires par absorption résonnante dans les atomes et les pertes sur le miroir d'entrée de la cavité.

$$C = \frac{1}{\gamma_{cav}} \frac{Ng^2}{2\gamma} \quad (\text{III.49})$$

Les formules III.47 et III.48 permettent de déterminer les fluctuations du champ sortant en fonction de celles du champ entrant à partir des matrices $\sigma(\omega)$ et $\chi(\omega)$, dont le calcul est donné dans l'article qui suit.

b. Article "Linear input-output method for quantum fluctuations in optical bistability with two level atoms"

i. Présentation

L'article inséré dans ce paragraphe présente le calcul de l'état stationnaire et des fluctuations dans la bistabilité optique avec des atomes à deux niveaux. En rédigeant cet article, nous n'avons pas utilisé le point de vue entrée-sortie du chapitre I, mais une approche temporelle équivalente. Le but de ce paragraphe d'introduction est de justifier l'équivalence des deux approches.

En effet, comme nous l'avons vu (III.15), les relations entre les champs sur le miroir d'entrée ou à la traversée du milieu atomique sont locales dans le temps. Dans la limite d'une cavité de grande finesse éclairée par un laser quasi-résonnant, la matrice $\varphi(\omega)$ devient :

$$\varphi(\omega) \cong I - i\varepsilon\phi_0 + i\omega\tau \quad (\text{III.49})$$

Les équations (III.41,42 et 44) ont donc une écriture simple dans l'espace des temps :

$$[\hat{A}'^{in}(t)] = t_0 [\hat{A}^{in}(t)] + r_0(I + i\varepsilon\phi_0) \hat{A}'^{out}(t) - r_0\tau \frac{\partial}{\partial t} \hat{A}'^{out}(t) \quad (\text{III.50})$$

$$[\hat{A}'^{out}(t)] = -r_0[\hat{A}^{in}(t)] + t_0(I + i\varepsilon\phi_0) \hat{A}'^{out}(t) - t_0\tau \frac{\partial}{\partial t} \hat{A}'^{out}(t) \quad (\text{III.51})$$

$$[A'^{out}(t)] = [A'^{in}(t)] + i g \varepsilon [P(t)] \quad (\text{III.52})$$

où la dérivée temporelle du champ A'^{out} provient du terme en ω pris à l'ordre le plus bas dans l'expression III.49 de $\varphi(\omega)$.

En éliminant A'^{in} dans ces équations, on obtient :

$$\tau \frac{\partial}{\partial t} [A'^{out}(t)] = -(\gamma_{cav} + i\varepsilon\phi_0) [A'^{out}(t)] + i g \varepsilon [P(t)] + t_0 [A'^{in}(t)] \quad (\text{III.53})$$

et

$$[A'^{out}(t)] = -[A'^{in}(t)] + t_0 [A'^{in}(t)] \quad (\text{III.54})$$

Dans le point de vue entrée-sortie, comme dans l'approche temporelle, on suppose que la modification du champ sur un tour de cavité est très petite. On peut dans ce cas remplacer $A'^{out}(t)$ par $A'^{in}(t)$ dans l'équation (III.53). On obtient ainsi les équations de base de l'article, numérotées (17)-(18a)-(18b). Dans l'article, elles sont obtenues en écrivant les variations du champ intra-cavité sur un tour de cavité en ajoutant le terme de perte, celui de déphasage, l'interaction avec le dipôle et le champ entrant dans la cavité. Les notations de l'article sont reliées à celles du chapitre III de ce mémoire via les deux modifications :

$$\gamma_{cav} \rightarrow \kappa \tau \quad \text{et} \quad \phi_0 \rightarrow \phi \tau \quad (\text{III.55})$$

Les équations de base permettent de calculer l'état stationnaire du champ dans la cavité et en dehors de celle-ci (section IV) et les fonctions de corrélation du champ sortant de la cavité (sections V, VI, VII).

LINEAR INPUT OUTPUT METHOD FOR QUANTUM FLUCTUATIONS IN OPTICAL BISTABILITY WITH TWO LEVEL ATOMS

L. Hilico, C. Fabre, S. Reynaud and E. Giacobino

Laboratoire de Spectroscopie Hertzienne^(*), Université Pierre et Marie Curie, BP 74, 4 place
Jussieu, 75252 Paris Cedex 05

Abstract

We use a new theoretical method to derive the modifications of the quantum fluctuations of a coherent field after it has interacted with an optical cavity containing an ensemble of two-level atoms. The fluctuations in the output field are separated into two parts : the first one is linked to the parametric transformation of the fluctuations of the incoming field by the atomic medium; the second one is associated with the resonance fluorescence of the atoms driven by the mean intracavity field and coupled with the empty modes of a bath field. We calculate the squeezing spectra and we compare them to the ones obtained with Kerr media having similar dynamic nonlinearities.

PACS : 42.50. Kb, 42.65. Pc

(*) Laboratoire de L'Ecole Normale Supérieure et de l'Université Pierre et Marie Curie, associé au Centre National de la Recherche Scientifique. This work was supported in part by the CEC ESPRIT BRA contract 3186.

LINEAR INPUT OUTPUT METHOD FOR QUANTUM FLUCTUATIONS IN OPTICAL BISTABILITY WITH TWO LEVEL ATOMS

I- Introduction

An optical cavity containing a nonlinear medium can strongly modify the fluctuations of an incoming beam, especially in the vicinity of the bistability threshold. As far as the quantum fluctuations are concerned, squeezing has been shown to occur in the output beam as first pointed out by Lugiato and Strini^[1]. Ideal squeezing is attainable when the interaction of the nonlinear medium with the field is a purely parametric one (pure $\chi^{(3)}$ medium)^[2-3-4]. In this case, it has been shown that the quantum fluctuations could be treated in a way similar to classical ones in a semiclassical input-output formalism^[4]. This kind of approach is analogous to the quantum linear input-output formalism introduced by Yurke^[5] and by Collett and Gardiner^[6]. When the nonlinear medium is made of near resonant two-level atoms, the quantum fluctuations in the output beam are affected by additional atomic fluctuations due to spontaneous emission and to other relaxation processes. The usual method consists in writing a Fokker-Planck equation for the coupled atomic and field variables and deriving an equivalent set of Langevin equations. This technique has been first applied to the two limiting cases of the "good" cavity, in which the response time of the cavity is much larger than that of the atomic medium and of the "bad" cavity, corresponding to the reverse situation. In both cases, some variables can be adiabatically eliminated^[1-7-8-9]. The full treatment, without adiabatic elimination, is more involved, but is also feasible analytically^[10-11-12-13].

An alternative method, which relies on the derivation of Langevin equations for the field only, has been introduced recently^[14]. In this treatment, the atomic fluctuations are incorporated in a linearized input output theory similar to the semiclassical one^[4]. Schematically, the fluctuations in the output field are separated into two parts having different origins. The first part is linked to the parametric transformation of the fluctuations of the incoming field by the atomic medium, treated with a linear susceptibility calculated at the working point. The second part is associated with the resonance fluorescence of the atoms driven by the mean intracavity field and coupled with the empty modes of a bath field which is assumed to be independent of the cavity. This treatment is particularly well adapted for large numbers of atoms in cavities having a geometry such that the spontaneous emission rate into the cavity mode is small compared to the total rate in free space. These assumptions are the ones which are commonly made in the previous literature, and correspond to most experiments with optical cavities.

Here, we use this method to derive the spectrum of squeezing in the output field for a single ended cavity containing a collection of motionless two-level atoms. This problem is particularly interesting inasmuch as it opens on a more general issue, that of realizing a passive device reducing the quantum fluctuations, a passive "quantum noise eater", with an optical cavity containing a material with a nonlinear index and operated near the bistability conditions^[4]. For this purpose, large $\chi^{(3)}$ coefficients are required. Since a large $\chi^{(3)}$ is usually associated with the vicinity of a resonant level or an absorption band, it is critical to have a model allowing to assess the amount of excess noise introduced by the material as compared to a pure $\chi^{(3)}$ material.

II- Notations

We consider a homogeneously broadened system of N two level atoms located in an optical cavity. We will neglect the transverse effects. The optical cavity is a single ended ring cavity, in which the round trip time is τ . The amplitude transmission coefficient of the coupling mirror is t_0 , the amplitude reflection coefficient is r_0 and the cavity is assumed to have a high finesse ($t_0 \ll 1$), so that the spatial variations of the field along the optical path can be neglected. The decay rate κ of the intracavity field is related to r_0 and t_0 by:

$$\kappa = (1 - r_0) / \tau = t_0^2 / 2\tau \quad (1)$$

The lower level of the atomic system is denoted $|g\rangle$, the upper level $|e\rangle$, the atomic transition frequency is ω_0 , the decay rate of the atomic dipole is γ , the decay rate of the upper state population is $\gamma_{||}$. We will set:

$$\gamma_{||} = 2f\gamma \quad (2)$$

where $f=1$ if the only relaxation process is spontaneous emission. The atoms are driven by a mean field whose frequency ω_L is close to a cavity mode of frequency ω_C . We define the atomic detuning parameter Δ and the cavity detuning parameter Φ by:

$$\Delta = \omega_0 - \omega_L \quad (3)$$

$$\Phi = \omega_C - \omega_L \quad (4)$$

We will also use the dimensionless detunings δ and ϕ defined by:

$$\delta = \Delta / \gamma \quad (5)$$

$$\phi = \Phi / \kappa \quad (6)$$

We will write the free field Heisenberg operator $\mathcal{E}(t)$ as

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 (e^{-i\omega_L t} \hat{A}(t) + e^{i\omega_L t} \hat{A}^\dagger(t)) \quad (7)$$

where \mathcal{E}_0 is a normalization coefficient (see below eq.(14))

$\hat{A}(t)$ and $\hat{A}^\dagger(t)$ are Heisenberg operators in the frame rotating at frequency ω_L and are defined by:

$$\hat{A}(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} A(\omega) e^{-i\omega t} \quad (8a)$$

$$\hat{A}^\dagger(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} A^\dagger(\omega) e^{-i\omega t} \quad (8b)$$

where we have assumed that all the noise frequencies ω of interest are very small compared to the optical frequency ω_L (quasi-monochromatic approximation). The Fourier components $A(\omega)$ and $A^\dagger(\omega)$ are related to the usual annihilation and creation operators by:

$$A(\omega) = i a_{\omega_L + \omega} \quad (9a)$$

$$A^\dagger(\omega) = -i a^\dagger_{\omega_L - \omega} \quad (9b)$$

and their commutation rule is:

$$[A(\omega) , A^\dagger(\omega')] = 2\pi \delta(\omega + \omega') \quad (10)$$

We will use the following hamiltonian for the atom-field system:

$$H = H_0 + H_R + H_I \quad (11)$$

H_0 and H_R are the atomic and field hamiltonians and H_I represents the atom-field coupling. In the electric dipole approximation, the contribution of each atom to H_I is the product of its dipole by the electric field at the atom's position. Assuming that the contributions of the various atoms are perfectly phase matched^[14] the atom field coupling in the rotating wave approximation is given by:

$$H_I = -\hbar g (\hat{P}^\dagger(t) \hat{A}(t) + \hat{P}(t) \hat{A}^\dagger(t)) \quad (12)$$

where g is the coupling constant:

$$g = \mathcal{E}_0 \frac{d}{\hbar} \quad (13)$$

the normalization coefficient \mathcal{E}_0 is given by:

$$\mathcal{E}_0 = \sqrt{\frac{\hbar \omega_L}{2\epsilon_0 S c}} \quad (14)$$

S is an area which is of the order of the transverse section of the light beam. The normalization has been chosen so that the quantum mean value $\langle A^\dagger(t)A(t) \rangle$ gives the photon flow in photons per second; d is the dipole matrix element between levels e and g .

The operator $\hat{P}(t)$ is the collective polarization:

$$\hat{P}(t) = \sum_{i=1}^N \hat{S}_i(t) \quad (15a)$$

$$\hat{P}^\dagger(t) = \sum_{i=1}^N \hat{S}_i^\dagger(t) \quad (15b)$$

$\hat{S}_i^\dagger(t)$ and $\hat{S}_i(t)$ are the raising and lowering operators for the i th atom in the rotating frame:

$$\hat{S}_i^\dagger(t) = |e_i\rangle \langle g_i| e^{-i\omega_L t} \quad (16a)$$

$$\hat{S}_i(t) = |g_i\rangle \langle e_i| e^{i\omega_L t} \quad (16b)$$

III- Input-output relations and equations of motion

The field $\hat{A}(t)$ inside the cavity and the fields $\hat{A}^{in}(t)$ and $\hat{A}^{out}(t)$ coming into and going out of the cavity are connected by input-output relations which are the classical reflection-transmission equation on a dielectric plate^[3,4] when the reflection coefficient r_0 is close to 1:

$$\hat{A}^{out}(t) = t_0 \hat{A}(t) - \hat{A}^{in}(t) \quad (17)$$

On the other hand, the intracavity field $\hat{A}(t)$ verify the differential equations:

$$\tau \partial_t \hat{A}(t) = -\tau (\kappa + i\Phi) \hat{A}(t) + \sqrt{2\kappa\tau} \hat{A}^{in}(t) + ig \hat{P}(t) \quad (18a)$$

$$\tau \partial_t \hat{A}^\dagger(t) = -\tau (\kappa - i\Phi) \hat{A}^\dagger(t) + \sqrt{2\kappa\tau} \hat{A}^{\dagger in}(t) - ig \hat{P}^\dagger(t) \quad (18b)$$

The first term comes from the recycling of the field in the cavity and the loss through the coupling mirror, the second one comes from the input field A^{in} , the third one is the field emitted by the atomic polarization $\hat{P}(t)$.

We will compute the quantum fluctuations of the fields in cases where they are small compared to the mean values $\alpha(t)$, $\alpha^*(t)$, $p(t)$, $p^*(t)$ of $\hat{A}(t)$, $\hat{A}^\dagger(t)$, $\hat{P}(t)$, $\hat{P}^\dagger(t)$ defined by:

$$\alpha(t) = \langle \hat{A}(t) \rangle \quad (19)$$

$$p(t) = \langle \hat{P}(t) \rangle \quad (20)$$

The equations for the fluctuation operators will be obtained by linearizing the evolution equations around the steady state mean values. We first give in the next section the mean

values for the field and for the atomic polarization neglecting the effect of the fluctuations (mean field theory)

The mean value of the polarizations $p(t)$ and $p^*(t)$ and of the populations $n_g(t)$ and $n_e(t)$ of the ground and excited states will be calculated from the usual Bloch equations:

$$\partial_t p(t) = -\gamma (1 + i\delta) p(t) - i g \alpha(t) (n_e - n_g) \quad (21a)$$

$$\partial_t p^*(t) = -\gamma (1 - i\delta) p^*(t) + i g \alpha^*(t) (n_e - n_g) \quad (21b)$$

$$\partial_t n_g(t) = 2f \gamma n_e + i (g \alpha^*(t) p(t) - g \alpha(t) p^*(t)) \quad (21c)$$

$$\partial_t n_e(t) = -2f \gamma n_e - i (g \alpha^*(t) p(t) - g \alpha(t) p^*(t)) \quad (21d)$$

As we will see below, the calculation of the field fluctuations involves the susceptibility functions and the correlation functions of the resonance fluorescence, which will also be determined from the Bloch equations.

IV- Steady state solution

The steady state mean value of the field α_0 is obtained from eqs.(18, 21):

$$\alpha_0 = [\tau\kappa (1 + i\phi)]^{-1} [\sqrt{2\kappa\tau} \alpha^{in} + i g p_0] \quad (22a)$$

$$\alpha_0^* = [\tau\kappa (1 - i\phi)]^{-1} [\sqrt{2\kappa\tau} \alpha^{in*} - i g p_0^*] \quad (22b)$$

where p_0 is given by the steady state solution of the Bloch equations.

Defining dimensionless variables β_0 and β^{in} by ^[15]

$$\beta_0 = g \alpha_0 / \gamma \quad (23)$$

$$\beta^{in} = g \alpha^{in} / \gamma \quad (24)$$

the steady state solution writes:

$$p_0 = \frac{i N \beta_0 (1 - i \delta)}{1 + \delta^2 + 2 |\beta_0|^2 / f} \quad (25)$$

$$\sqrt{\frac{2}{\kappa\tau}} \beta^{in} = \beta_0 \left[\left(1 + \frac{2 C}{1 + \delta^2 + 2 |\beta_0|^2 / f} \right) + i \left(\phi - \frac{2 C \delta}{1 + \delta^2 + 2 |\beta_0|^2 / f} \right) \right] \quad (26)$$

where C is the bistability parameter

$$C = \frac{g^2 N}{2\kappa \gamma \tau} \quad (27)$$

It can be noticed that the bistability parameter C is just the ratio of the linear absorption at resonance $g^2 N / \gamma$ to the energy transmission coefficient of the cavity $2\kappa \tau$. The field inside the cavity exhibits the well-known phenomenon of bistability: in some domain of the parameter space, the field inside the cavity can take two values for the same value of the input field. It is in the vicinity of the turning points that the fluctuations are expected to be strongly modified.

V- Equations for the quantum fluctuations

We are now going to calculate the fluctuations in the intracavity field as a function of the input fluctuations and of the fluctuations of the atomic medium. We define the fluctuation operators as:

$$\delta \hat{A}(t) = \hat{A}(t) - \alpha(t) \quad (28)$$

$$\delta \hat{P}(t) = \hat{P}(t) - p(t) \quad (29)$$

The equations for the fluctuations in the field are obtained in a straightforward manner from eqs.(17) and (18), since the latter are linear in the dynamic variables. In the frequency space, the equations for the Fourier components of the field fluctuations operators $\delta A(\omega)$ write:

$$\delta A^{\text{out}}(\omega) = \sqrt{2\kappa\tau} \delta A(\omega) - \delta A^{\text{in}}(\omega) \quad (30)$$

$$\tau (\kappa + i\Phi - i\omega) \delta A(\omega) = \sqrt{2\kappa\tau} \delta A^{\text{in}}(\omega) + i g \delta P(\omega) \quad (31)$$

$$\tau (\kappa - i\Phi - i\omega) \delta A^\dagger(\omega) = \sqrt{2\kappa\tau} \delta A^{\dagger\text{in}}(\omega) - i g \delta P^\dagger(\omega) \quad (32)$$

As mentioned earlier, the dipole fluctuations δP include two contributions, since the dipoles respond to the fluctuations of the cavity field and of the bath field. We will write:

$$\delta P(\omega) = \delta P_1(\omega) + \delta P_2(\omega) \quad (33)$$

where δP_1 describes the response to the intracavity field fluctuations, and δP_2 is due to coupling of the dipoles with the vacuum fluctuations of the bath field and is associated with spontaneous emission. We will evaluate these two terms in turn.

For the calculation of the first term, we assume a linear response of the atoms around the working point of the system which is given by a susceptibility function $\chi(\omega)$. Since the

atomic medium couples the frequency components $\delta A(\omega)$ and $\delta A^\dagger(\omega)$, it is convenient to introduce matrix notations, writing:

$$|\delta P_1(\omega)\rangle = g N [\chi(\omega)] |\delta A(\omega)\rangle \quad (34)$$

where $|\delta P_1(\omega)\rangle$ and $|\delta A(\omega)\rangle$ are column vectors of the type $|X(\omega)\rangle$:

$$|X(\omega)\rangle = \begin{bmatrix} X(\omega) \\ X^\dagger(\omega) \end{bmatrix} \quad (35)$$

The adjoint of such a vector is a line vector:

$$|X(\omega)\rangle^\dagger = [X(\omega)| = \begin{bmatrix} X^\dagger(-\omega) & X(-\omega) \end{bmatrix} \quad (36)$$

The matrix elements of the susceptibility $[\chi(\omega)]$ can be computed using the linear response theory^[16]. In the time domain, $[\hat{\chi}(t)]$ can be shown to be^[17]:

$$[\hat{\chi}(t)] = i \theta(t) \begin{bmatrix} \langle [\hat{S}(t), \hat{S}^\dagger(0)] \rangle & \langle [\hat{S}(t), \hat{S}(0)] \rangle \\ \langle [\hat{S}^\dagger(t), \hat{S}^\dagger(0)] \rangle & \langle [\hat{S}^\dagger(t), \hat{S}(0)] \rangle \end{bmatrix} \quad (37)$$

where $\langle \rangle$ is the quantum average of the considered quantity, which has to be computed for atoms submitted to a classical field equal to the steady state solution for mean field inside the cavity. The calculation of the susceptibility function will be discussed further below.

The additional fluctuations δP_2 come from the coupling of the atomic dipoles to the vacuum bath field. They can then be calculated as in the resonance fluorescence theory^[18], supposing that the fluctuations of the different dipoles are independent of one another. The term δP_2 is the sum of the contributions of the individual atomic dipoles:

$$|\delta P_2\rangle = \sum_i |\delta S_i\rangle \quad (38)$$

where the dipole fluctuation operator $[\delta S_i]$ is defined as

$$|\delta S_i\rangle = |S_i\rangle - |\langle S_i \rangle\rangle \quad (39)$$

The dipole fluctuations are characterized by their correlation functions which can be written in matrix form as:

$$[\hat{\sigma}(t)] = \begin{bmatrix} \langle \delta \hat{S}(t) \delta \hat{S}^\dagger(0) \rangle & \langle \delta \hat{S}(t) \delta \hat{S}(0) \rangle \\ \langle \delta \hat{S}^\dagger(t) \delta \hat{S}^\dagger(0) \rangle & \langle \delta \hat{S}^\dagger(t) \delta \hat{S}(0) \rangle \end{bmatrix} \quad (40)$$

In the frequency domain, the dipole fluctuations are given by:

$$\langle [\delta S(\omega)] [\delta S(\omega')] \rangle = 2\pi \delta(\omega - \omega') [\sigma(\omega)] \quad (41)$$

where $[\sigma(\omega)]$ is the Fourier transform of $[\sigma(t)]$. Since the dipoles are uncorrelated, we have:

$$\langle [\delta P_2(\omega)] [\delta P_2(\omega')] \rangle = 2\pi N \delta(\omega - \omega') [\sigma(\omega)] \quad (42)$$

In the same way as $[\chi(\omega)]$, $[\sigma(\omega)]$ can be calculated from the Bloch equations. The calculation will be exposed in section VII.

VI- Variances of the output field

To incorporate the susceptibility functions and the correlation functions in the calculation, we rewrite eqs.(31, 32) in matrix form as:

$$\tau \{ \kappa + i [\epsilon] \Phi - i\omega \} [\delta A(\omega)] = \sqrt{2\kappa\tau} [\delta A^{in}(\omega)] + i g [\epsilon] [\delta P(\omega)] \quad (43)$$

where $[\epsilon]$ is the 2x2 matrix:

$$[\epsilon] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (44)$$

Using eq.(30), eq.(43) can be expressed as:

$$\begin{aligned} \tau \{ \kappa + i [\epsilon] \Phi - i\omega \} [\delta A^{out}(\omega)] = \\ \tau \{ \kappa - i [\epsilon] \Phi + i\omega \} [\delta A^{in}(\omega)] + i \sqrt{2\kappa\tau} g [\epsilon] [\delta P(\omega)] \end{aligned} \quad (45)$$

At this point, we have to take into account the fact that the fluctuating term $[\delta P(\omega)]$ is correlated with the fluctuations of the field, as can be seen from eqs.(33) and (34). Replacing $[\delta P(\omega)]$ by these expressions and using eq.(30) again, we obtain a new expression for the fluctuations of the output field:

$$\begin{aligned} \tau \{ \kappa + i [\epsilon] \Phi - i\omega - i N (g^2/\tau) [\epsilon] [\chi(\omega)] \} [\delta A^{out}(\omega)] = \\ \tau \{ \kappa - i [\epsilon] \Phi + i\omega + i N (g^2/\tau) [\epsilon] [\chi(\omega)] \} [\delta A^{in}(\omega)] + i \sqrt{2\kappa\tau} g [\epsilon] [\delta P_2(\omega)] \end{aligned} \quad (46)$$

The fluctuations of the output field are now expressed as a function of two uncorrelated sources: the fluctuations of the input field and the fluctuations of the atomic dipoles driven by the bath modes. The matrix $N (g^2/\tau) [\epsilon] [\chi(\omega)]$ represents the modification of the phase and of the amplitude of the field fluctuations due to the atomic medium. The real part of this term causes dispersion in the same way as a transparent Kerr medium, while the imaginary part corresponds to absorption.

Comparison between eqs.(45) and (46) shows that these dispersion and absorption terms add to the linear losses and dephasing undergone by the field fluctuations in one round trip. When the driving field is very far from resonance, the imaginary part of $[\chi(\omega)]$ and the last term on the right hand side of eq.(46) can be ignored, and the effect of the atomic medium is represented by a nonlinear index, which corresponds to the Kerr limit. The limit of large detunings will be treated in section VIII.

It must be noticed that the output field fluctuations obtained here verify the same commutation relations as the output field (as shown in ref.^[14]). This comes from the fact that $[\chi(\omega)]$ and $[\sigma(\omega)]$ can be calculated from the same correlation function, as will be shown in section VII.

We can now calculate the covariances of the output field as a function of the covariances of the input field. The covariance matrix $[V(\omega)]$ is defined by:

$$\langle |\delta A(\omega)] [\delta A(\omega')] | \rangle = 2\pi \delta(\omega-\omega') [V(\omega)] \quad (47)$$

We define the drift matrix $[\mu(\omega)]$ by:

$$[\mu(\omega)] = 2\kappa \{ \kappa + i [\epsilon] \Phi - i\omega - i N (g^2/\tau) [\epsilon] [\chi(\omega)] \}^{-1} \quad (48)$$

With these notations, eq.(46) can be rewritten as:

$$|\delta A^{\text{out}}(\omega)] = \{ -1 + [\mu(\omega)] \} |\delta A^{\text{in}}(\omega)] + i (g/\sqrt{2\kappa\tau}) [\mu(\omega)] [\epsilon] |\delta P_2(\omega)] \quad (49)$$

Since $|\delta A^{\text{in}}(\omega)]$ and $|\delta P_2(\omega)]$ are independent fluctuations, the variance of the output field is obtained by adding the variances. The input-output transformation for the covariance matrices is then:

$$[V^{\text{out}}(\omega)] = \{ -1 + [\mu(\omega)] \} [V^{\text{in}}(\omega)] \{ -1 + [\mu(\omega)]^\dagger \} + [\mu(\omega)] [V^{\text{at}}(\omega)] [\mu(\omega)]^\dagger \quad (50)$$

where $[V^{\text{at}}(\omega)]$ is given by:

$$[V^{\text{at}}(\omega)] = C \gamma [\epsilon] [\sigma(\omega)] [\epsilon] \quad (51)$$

These expressions allow us to calculate the squeezing spectra in the output field for any fluctuations in the input field.

When the input field is a coherent one, its fluctuations are just the vacuum fluctuations,

$$[V^{\text{in}}(\omega)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} [1 + [\epsilon]] \quad (52)$$

Then, $[V^{\text{out}}(\omega)]$ can be written as:

$$[V^{\text{out}}(\omega)] = [V^{\text{in}}(\omega)] + [\mu(\omega)] [D(\omega)] [\mu(\omega)]^\dagger \quad (53)$$

The matrix $D(\omega)$ plays the role of a diffusion matrix. It can be written as a function of the susceptibility and noise matrices $[\chi(\omega)]$ and $[\sigma(\omega)]$:

$$D(\omega) = C (\gamma / 2) [\epsilon] \{ -i (1 + [\epsilon]) [\chi(\omega)]^\dagger + i [\chi(\omega)] (1 + [\epsilon]) + 2 [\sigma(\omega)] \} [\epsilon] \quad (54)$$

In this expression, it can be seen that the diffusion term depends only on atomic parameters, except for a scaling coefficient $1/\kappa$ contained in the bistability parameter C .

VII- Susceptibility and correlation functions

In this section, we present the calculation giving the analytical expressions of $[\sigma(\omega)]$ and $[\chi(\omega)]$. These quantities are 2×2 matrices which will be deduced from a single 4×4 correlation matrix $[G(\omega)]$ defined below. The matrix $[G(\omega)]$ will be computed from the Bloch equations (21) using the quantum regression theorem^[19].

For our present purpose, we will rewrite the Bloch equations for a single atom in matrix form as:

$$\partial_t |\hat{S}(t)\rangle = -\gamma \mathbf{B} |\hat{S}(t)\rangle \quad (55)$$

where $|\hat{S}(t)\rangle$ is the four component column vector containing the mean values of the dipole components and the population $\pi_g(t)$ and $\pi_e(t)$ of the ground and excited states:

$$|\hat{S}(t)\rangle = \begin{bmatrix} s(t) \\ s^*(t) \\ \pi_g(t) \\ \pi_e(t) \end{bmatrix} \quad (56)$$

and the Bloch matrix \mathbf{B} is:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 + i\delta & 0 & -i\beta_0 & i\beta_0 \\ 0 & 1 - i\delta & i\beta_0^* & -i\beta_0^* \\ -i\beta_0^* & i\beta_0 & 0 & -2f \\ i\beta_0^* & -i\beta_0 & 0 & 2f \end{bmatrix} \quad (57)$$

where β_0 is given by eq.(26). The steady state solutions of the Bloch equations for the atomic variables will be denoted $s_0, s_0^*, \pi_{g0}, \pi_{e0}$.

We define the 4×4 correlation matrix $[\hat{G}(t)]$ by:

$$[\hat{G}(t)] = \theta(t) \begin{bmatrix} \langle \delta \hat{S}(t) \delta \hat{S}^\dagger(0) \rangle & \langle \delta \hat{S}(t) \delta \hat{S}(0) \rangle & \langle \delta \hat{S}(t) \delta \hat{\Pi}_g(0) \rangle & \langle \delta \hat{S}(t) \delta \hat{\Pi}_e(0) \rangle \\ \langle \delta \hat{S}^\dagger(t) \delta \hat{S}^\dagger(0) \rangle & \langle \delta \hat{S}^\dagger(t) \delta \hat{S}(0) \rangle & \langle \delta \hat{S}^\dagger(t) \delta \hat{\Pi}_g(0) \rangle & \langle \delta \hat{S}^\dagger(t) \delta \hat{\Pi}_e(0) \rangle \\ \langle \delta \hat{\Pi}_g(t) \delta \hat{S}^\dagger(0) \rangle & \langle \delta \hat{\Pi}_g(t) \delta \hat{S}(0) \rangle & \langle \delta \hat{\Pi}_g(t) \delta \hat{\Pi}_g(0) \rangle & \langle \delta \hat{\Pi}_g(t) \delta \hat{\Pi}_e(0) \rangle \\ \langle \delta \hat{\Pi}_e(t) \delta \hat{S}^\dagger(0) \rangle & \langle \delta \hat{\Pi}_e(t) \delta \hat{S}(0) \rangle & \langle \delta \hat{\Pi}_e(t) \delta \hat{\Pi}_g(0) \rangle & \langle \delta \hat{\Pi}_e(t) \delta \hat{\Pi}_e(0) \rangle \end{bmatrix} \quad (58)$$

where Π_g and Π_e are the projectors on the ground and excited states.

The quantum regression^[18] theorem yields the evolution equation of the correlation function $[\hat{G}(t)]$ as:

$$\partial_t [\hat{G}(t)] = -\gamma \mathbf{B} [\hat{G}(t)] + \delta(t) [\hat{G}(0)] \quad (59)$$

The equation giving $[G(\omega)]$ is obtained from the Fourier transform of eq.(59):

$$[G(\omega)] = (\gamma \mathbf{B} - i\omega)^{-1} [\hat{G}(0)] \quad (60)$$

In eq.(0), $[\hat{G}(0)]$ is obtained from the steady state solution of the Bloch equation, with the usual relations between the components of the dipole:

$$[\hat{G}(0)] = \begin{bmatrix} \pi_{g0} & 0 & 0 & s_0 \\ 0 & \pi_{e0} & s_0^* & 0 \\ 0 & s_0 & \pi_{g0} & 0 \\ s_0^* & 0 & 0 & \pi_{e0} \end{bmatrix} - |\hat{S}(0)\rangle \langle \hat{S}(0)| \quad (61)$$

The susceptibility matrix $[\chi(\omega)]$ and the correlation matrix $[\sigma(\omega)]$ are obtained from the restriction of $[G(\omega)]$ to the subspace defined by the first two components. From the definitions (37) and (40), it can be deduced that:

$$\chi_{ij}(\omega) = i [G_{ij}(\omega) - (G_{ji}(-\omega))^*] \quad i = 1, 2 \quad (62)$$

$$\sigma_{ij}(\omega) = G_{ij}(\omega) + (G_{ji}(\omega))^* \quad i = 1, 2 \quad (63)$$

Finally the expressions for the susceptibility functions $\chi_{ij}(\omega)$ are found to be:

$$\chi_{11}(\bar{\omega}) = \frac{i(1+i\delta)}{\gamma L(\bar{\omega})} [(1-i\delta)(1-i\delta-i\bar{\omega})(2f-i\bar{\omega}) + 2i\bar{\omega}|\beta_0|^2] \quad (64a)$$

$$\chi_{12}(\bar{\omega}) = \frac{-i(1-i\delta)}{\gamma L(\bar{\omega})} [2(2-i\bar{\omega})\beta_0^2] \quad (64b)$$

$$\chi_{21}(\bar{\omega}) = \frac{i(1+i\delta)}{\gamma L(\bar{\omega})} [2(2-i\bar{\omega})\beta_0^{*2}] \quad (64c)$$

$$\chi_{22}(\bar{\omega}) = \frac{-i(1-i\delta)}{\gamma L(\bar{\omega})} [(1+i\delta)(1+i\delta-i\bar{\omega})(2f-i\bar{\omega}) + 2i\bar{\omega}|\beta_0|^2] \quad (64d)$$

where the normalized noise frequency $\bar{\omega}$ is:

$$\bar{\omega} = \omega / \gamma$$

and $L(\bar{\omega})$ is given by:

$$L(\bar{\omega}) = [(1+i\delta-i\bar{\omega})(1-i\delta-i\bar{\omega})(2f-i\bar{\omega}) + 4(1-i\bar{\omega})|\beta_0|^2] \\ \times [(1+\delta^2) + 2|\beta_0|^2/f] \quad (65)$$

On the other hand the diffusion matrix $[D(\omega)]$ is given by:

$$D_{11}(\bar{\omega}) = [(2|\beta_0|^2/f)(1-f)(4f^2+\bar{\omega}^2)(1+(\delta+\bar{\omega})^2) \\ + (8|\beta_0|^4/f)(4f+(2f-1)\bar{\omega}^2+(1-f)(2f\delta^2+(2f-1)\bar{\omega}\delta)) \\ + (16|\beta_0|^6/f)] (1/L'(\bar{\omega})) \quad (66a)$$

$$D_{12}(\bar{\omega}) = [(2\beta_0^2)(1-i\delta)(4f^2+\bar{\omega}^2)(1-i\delta+i\bar{\omega})(1-i\delta-i\bar{\omega}) \\ - (8|\beta_0|^2/f)\beta_0^2(2f(1-f)\delta(i+\delta)-\bar{\omega}^2(1+2f-if\delta)) \\ - (16|\beta_0|^4/f)\beta_0^2] (1/L'(\bar{\omega})) \quad (66b)$$

$$D_{21}(\bar{\omega}) = D_{12}(\bar{\omega})^* \quad (66c)$$

$$D_{22}(\bar{\omega}) = D_{11}(-\bar{\omega})^* \quad (66d)$$

where $L'(\bar{\omega})$ is given by:

$$L'(\bar{\omega}) = |L(\bar{\omega})|^2 / [1+\delta^2+2|\beta_0|^2/f] \quad (67)$$

The expressions for $[\chi(\omega)]$ and $[\sigma(\omega)]$ have been checked to be in agreement with expressions (28) of ref.^[6], which have been obtained with a different method. Replacing the susceptibility and the diffusion matrix by their expressions (64) and (66) in eqs.(48) and (53) gives the noise spectrum in the output field in the most general case. Rather than giving the general expressions, we will concentrate on the comparison between the pure Kerr case and the atomic case and on the interpretation of a few spectra.

VIII- Large detuning limit

When the driving field is very far from the atomic resonance, that is when the frequency detuning $\Delta = \omega_0 - \omega_L$ is large compared to the relaxation rates and to all the other frequencies involved in the problem, the expressions giving $\chi(\omega)$ and $\sigma(\omega)$ can be expanded in powers of $1/\delta$. In the expansion, we will assume that the Rabi frequency is larger than the atomic decay rate (because squeezing effects need nonlinear behaviour) :

$$\delta \gg |\beta_0| \gg 1 \quad (68)$$

The result up to third order when $f=1$ (purely radiative relaxation) is the following:

$$\begin{aligned} [\chi(\omega)] = & \frac{1}{\gamma \delta} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{\gamma \delta^2} \begin{bmatrix} \bar{\omega}+i & 0 \\ 0 & -\bar{\omega}-i \end{bmatrix} \\ & - \frac{1}{\gamma \delta^3} \begin{bmatrix} 4|\beta_0|^2 & 2\beta_0^2 \\ 2\beta_0^{*2} & 4|\beta_0|^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (69)$$

The first term on the right hand side is the linear index. The second one is due to the absorption (term in i) and to the linear dispersion of the medium (term in $\bar{\omega}$). The latter is a correction to the linear index for fluctuations having a frequency shifted by ω with respect to the driving field ω_0 . The third term gives the nonlinear index of refraction, proportional to the intracavity field intensity.

As far as the correlation matrix is concerned, there is only one term of order lower or equal to 3 in $1/\delta$:

$$[\sigma(\omega)] = \frac{2}{\gamma \delta^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (70)$$

These results can be compared with the ones obtained in the treatment of a cavity containing a Kerr medium having linear losses. The linear losses are modelled by a beamsplitter having a transmission coefficient $t'_0 = \sqrt{2\kappa'\tau}$ and which reflects the vacuum field into the cavity with a reflection coefficient $r'_0 = 1-\kappa'$. The system is then described by a linear frequency shift Φ_L , a nonlinear frequency shift K and linear losses κ' . In addition, as compared to ref^[4], we will include the linear dispersion n' of the medium, which is indispensable for the comparison between the Kerr and atomic media. Then, as derived in ref.^[4], the relation between the input and output fluctuations writes:

$$\begin{aligned}
& \tau \{ \kappa + \kappa' + i [\epsilon] \Phi_L + i [\epsilon] [\Phi_{NL}] - i\omega - i n' \omega \} | \delta A^{out}(\omega) | = \\
& = \tau \{ \kappa - \kappa' - i [\epsilon] \Phi_L - i [\epsilon] [\Phi_{NL}] + i\omega + i n' \omega \} | \delta A^{in}(\omega) | \\
& \quad + \sqrt{2\kappa\tau} \sqrt{2\kappa'\tau} | \delta A'^{in}(\omega) |
\end{aligned} \tag{71}$$

where the nonlinear frequency shift $[\Phi_{NL}]$ has the following form :

$$[\Phi_{NL}] = \begin{pmatrix} 2|K| & K \\ K^* & 2|K| \end{pmatrix} \tag{72}$$

The nonlinear frequency shift K is proportional to the square of the intracavity field. As can be seen in eq.(71), the effect of the linear dispersion term $i n' \omega$ is a rescaling of the width of the noise spectra by a factor $(1 + n')$. The fluctuations $|\delta A'^{in}(\omega)|$ are the vacuum fluctuations entering through the beamsplitter with transmission coefficient t'_0 .

One can easily verify that equation (71) is equivalent to eq.(46) when $[\chi(\omega)]$ and $[\sigma(\omega)]$ are developed up to third order in $1/\delta$, with the following identifications:

$$\kappa' \rightarrow \frac{N g^2}{\tau \delta^2 \gamma} = \frac{2 C \kappa}{\delta^2} \tag{73}$$

The coefficient κ' is then identified with the absorption rate of the material, ie the absorption per round trip time. The linear dispersion n' is identified with the linear dispersion due to the atoms:

$$n' \rightarrow \kappa' / \gamma \tag{74}$$

$$\Phi_L \rightarrow \Phi - \frac{N g^2}{\tau \gamma \delta} = \Phi - \frac{2 C \kappa}{\delta} \tag{75}$$

The contribution Φ_L takes into account the linear phase shift due to the atoms.

$$\begin{aligned}
\Phi_{NL} & \rightarrow \frac{N g^2}{\tau} \frac{1}{\gamma \delta^3} \begin{pmatrix} 4|\beta_0|^2 & 2\beta_0^2 \\ 2\beta_0^{*2} & 4|\beta_0|^2 \end{pmatrix} \\
& = 2 C \kappa \frac{1}{\delta^3} \begin{pmatrix} 4|\beta_0|^2 & 2\beta_0^2 \\ 2\beta_0^{*2} & 4|\beta_0|^2 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{76}$$

This identification is only valid at large detunings of the driving field from atomic resonance. It can be verified in fig.1 that for large values of the atomic detunings ($\delta = 1000$), the squeezing spectra are very close to the ones deduced from the Kerr medium theory (broken

lines). A more precise comparison between the Kerr medium and the two level atomic medium is given in the next section, together with a discussion of the excess noise.

X- Squeezing spectra

The squeezing spectra obtained at the output of a bistable cavity containing two-level atoms have been derived by several authors, as mentioned in the introduction. Here, we want to focus on two main points : (1) the comparison of the behaviour of the squeezing spectra of a cavity containing two level atoms with those of a cavity containing a lossy Kerr medium; (2) the evaluation of the specific contribution of the excess noise generated by the atoms. Close to resonance, an atomic medium is well known to have a high non linearity but the absorption and the noise due to the fluorescence may be large. To evaluate the excess noise due to the atomic medium, we compare squeezing spectra obtained when the detuning of the driving field from atomic resonance is varied, while keeping the non-linearity and the losses approximately constant.

A first method to do so would be to use relations (73 - 76). However, this is not the best way to compare the two media, because the linear and nonlinear contributions to the dispersion and to the absorption are not independent in the atomic case. Since the present theory is based on the calculation of the drift and diffusion matrices $[\mu(\omega)]$ and $[D(\omega)]$, it seems more appropriate to compare the two cases by identifying their drift matrices. This identification is done at zero frequency. This method will emphasize the variation of the excess noise when the detuning is varied.

From eq.(71), the drift matrix at zero frequency $[\mu_K(0)]$ corresponding to the case of a Kerr medium with linear losses is given by:

$$[\mu_K(0)] = 2\kappa \{ \kappa + \kappa' + i [\epsilon] \Phi_L + i [\epsilon] [\Phi_{NL}] \}^{-1} \quad (77)$$

Identifying the drift matrices $[\mu_K(0)]$ and $[\mu(0)]$ leads to the following equations:

$$\beta_0^2 = K \frac{\delta - i}{2\kappa'} \quad (78)$$

$$C = \frac{\kappa'}{\kappa} \frac{(1 + \delta^2 + 2 |\beta_0|^2)^2}{2 (1 + \delta^2)} \quad (79)$$

$$\Phi = \kappa' \delta + \Phi_L + 2 |K| \quad (80)$$

In addition, we identify the linear dispersions as done above:

$$n' = \kappa' / \gamma \quad (81)$$

The Kerr limit corresponds to $|\beta_0|^2 / \delta^2 \ll 1$, which implies:

$$K \ll 2 \kappa' \delta \quad (82)$$

for the Kerr parameters. The value of δ being given, we first choose a value of the internal loss rate to the coupling mirror loss coefficient κ'/κ for the Kerr cavity and a value for the nonlinear frequency shift K of the Kerr medium. We then chose a working point for the Kerr cavity close enough to a bistability turning point by fixing a slope parameter η_{bist} on the bistability curve ($\eta_{\text{bist}} = [\partial K / \partial \alpha^{\text{in}}]^{-1}$). This imposes a value of Φ_L (see eq.(29) of ref^[4]). There are, in general, two possible working points, one on the upper branch and one on the lower branch of bistability curves.

From this set of parameters for the Kerr medium, the above equations provide the parameters of the corresponding atomic medium, and we check for the stability of the solution. Since we have identified the drift matrices at zero frequency, the procedure ensures that the dynamical nonlinearities are similar for the atomic and Kerr media. We then calculate the squeezing spectra for these working points. For a quadrature component with phase θ , the squeezing spectrum is given by:

$$S_\theta(\omega) = \begin{bmatrix} e^{i\theta} & e^{-i\theta} \end{bmatrix} [V^{\text{out}}(\omega)] \begin{bmatrix} e^{-i\theta} \\ e^{i\theta} \end{bmatrix} \quad (83)$$

We will consider two kinds of spectra : the optimum squeezing spectra, and the amplitude squeezing spectra. The optimum squeezing spectrum (corresponding to the minimum noise obtained for each value of the frequency when the phase of the detected quadrature component is varied) is given by :

$$S_{\text{opt}}(\omega) = V_{11}^{\text{out}}(\omega) + V_{22}^{\text{out}}(\omega) - 2 |V_{12}^{\text{out}}(\omega)| \quad (84)$$

The elements of the covariance matrix characterizing the output field fluctuations are given by eq.(53). The amplitude squeezing spectrum is obtained from eq.(83) with θ given by:

$$e^{-i\theta} = \alpha_0^{\text{out}} / |\alpha_0^{\text{out}}| \quad (85)$$

Let us first consider the good cavity case where the cavity response time is larger than the atomic response time, which is known to be less favourable for squeezing than the bad cavity one^[7-8-9]. In fig. 1, we have considered the case $\gamma/\kappa = 10$. For large detunings ($\delta=1000$), the optimum squeezing spectrum (1.a) as well as the amplitude squeezing spectrum (1.b) are close to the respective Kerr spectra. When the detuning is decreased, the squeezing deteriorates, and for $\delta=10$, a significant excess noise is produced by the atoms all over the spectra.

The situation is quite different in the bad cavity case. Figure 2 shows the squeezing spectra for $\gamma/\kappa = 0.1$ and $\delta = 40$. Both the optimum squeezing spectra (2.a) and the amplitude squeezing spectra (2.b) are below the optimum Kerr spectrum in some frequency range. Let us note that with these parameters, we are still in the Kerr limit, as defined by eq.(82). To understand the physical processes which take place in this case, we will evaluate the effect of the two sources of noise which appear in eq.(50).

In eq.(50), the noise in the field leaving the cavity is clearly the sum of two contributions : the fluctuations of the noise of the input field modified by the atom-cavity system and the noise generated by the atoms, also filtered by the atom-cavity system. The two contributions are shown in fig. 3 for the amplitude squeezing spectrum, with the same parameters as in fig. 2. These two contributions should not be considered as representing physical fields since they do not verify separately the right commutation relations. The broken line shows the contribution of the input fluctuations. One observes a damping of these fluctuations around two frequencies, characteristic of the drift matrix $[\mu(\omega)]$. Let us notice that one of these frequencies is well outside the bandwidth of the cavity alone, and is due to the coupled dynamics of the atom-cavity system. The contribution of the atomic fluorescence, shown by the dotted line, exhibits peaks for neighbouring frequencies, as can be expected from the fact that it is filtered by the same function. The sum of these two contributions results in a significant squeezing at frequencies at which the squeezing with the equivalent Kerr medium is lower. In the very bad cavity limit ($\gamma/\kappa = 0.01$), it can be seen in fig.4 that the damping effect of the noise by the atom-cavity system is even more pronounced.

XI. Conclusion

We have shown that the fluctuations in the output field of a cavity containing an ensemble of two level atoms could be quantum mechanically treated in a linear input-output formalism, similar to the semi-classical one. The noise terms are derived only from the optical Bloch equations, and the formalism can easily be generalized to a more complicated situations, involving several driving fields, more than two levels and linear cavities. The general results, obtained as analytical expressions are in full agreement with those of previous theories.

In addition, our theory allows us to single out the contribution of the noise due to atomic fluorescence and of the fluctuations of the input field. We have compared the squeezing spectra with those of a lossy Kerr medium of equivalent non linearity. At large detunings, the spectra given by the atomic system tends to the spectra given by the Kerr medium. At smaller detunings, the atomic non linearity is such that the atom-field system can, in some frequency ranges, yield significant squeezing effects, which are larger than those given by the equivalent Kerr medium. Thus this treatment provides a better understanding of the physical

processes involved, and should be useful to guide the choice of the set of atomic parameters which provide the optimum squeezing in experiments.

Acknowledgements :

This work has been supported in part by the C.E.C. contract ESPRIT BRA 3186.

Figure captions

Figure 1

Optimum squeezing spectra $S_{\text{opt}}(\omega)$ (a) and amplitude squeezing spectra $S_I(\omega)$ (b) obtained with a collection of two level atoms in an optical cavity in the good cavity case ($\gamma/\kappa = 10$) for three values of the normalized detuning δ/γ of the driving field from the atomic resonance (curves in full line). The curve in broken line is the squeezing spectrum of the equivalent Kerr medium. The Kerr parameters are $\kappa'/\kappa = 0.1$, $K = 2.27$, $\eta_{\text{bist}} = 0.55$, $\Phi_L = -2.42$ (upper branch of the bistability curve). The atomic parameters are the following: for $\delta = 10$, $C = 54$, $|\beta_0|^2 = 114$, $\Phi = 3.12$; for $\delta = 100$, $C = 753$, $|\beta_0|^2 = 1135$, $\Phi = 12.12$; for $\delta = 1000$, $C = 52295$, $|\beta_0|^2 = 11350$, $\Phi = 102.12$

Figure 2

Optimum squeezing spectrum $S_{\text{opt}}(\omega)$ (i), amplitude squeezing spectrum $S_I(\omega)$ (ii) for an atomic medium in the bad cavity case ($\gamma/\kappa = 0.1$) when $\delta/\gamma = 40$. The curve in broken line is the optimum squeezing spectrum of the equivalent Kerr medium. The Kerr parameters are : $\kappa'/\kappa = 0.1$, $K = 2$, $\eta_{\text{bist}} = 0.1$, $\Phi_L = -5.7$ (lower branch of the bistability curve). The atomic parameters are the following: $C = 180$, $|\beta_0|^2 = 400$, $\Phi = 2.3$

Figure 3

Amplitude squeezing spectrum $S_I(\omega)$ of the atomic medium, with the same parameters as in fig. 2 (full line). The curve in broken line shows the contribution of the incoming fluctuations filtered by the atom-cavity system, the dotted line is the contribution of the atomic fluorescence noise.

Figure 4

Same curves as in fig. 3 but in the very bad cavity case ($\gamma/\kappa = 0.01$) and on the upper branch of the bistability curve ($\Phi = 5.7$).

References

- 1 L.A. LUGIATO and G. STRINI, *Opt. Commun.* **41**, 67 (1982); L.A. LUGIATO and G. STRINI, *Opt. Commun.* **41**, 374 (1982)
- 2 M.J. COLLETT and D.F. WALLS, *Phys. Rev.* **A32**, 2887 (1985)
- 3 R.M. SHELBY, M.D. LEVENSON, D.F. WALLS, A. ASPECT and G.J. MILBURN, *Phys. Rev.* **A33**, 4008 (1986)
- 4 S. REYNAUD, C. FABRE, E. GIACOBINO and A. HEIDMANN, *Phys. Rev.* **A40**, 1440 (1989)
- 5 B. YURKE, *Phys. Rev.* **A29**, 408 (1984)
- 6 M.J. COLLETT and C. GARDINER, *Phys. Rev.* **A 30**, 1386 (1984)
- 7 M.D. REID and D.F. WALLS, *Phys. Rev.* **A28**, 332 (1983); M.D. REID and D.F. WALLS, *Phys. Rev.* **A32**, 396 (1985)
- 8 D.A. HOLM and M. SARGENT III, *Phys. Rev.* **A35**, 2150 (1987)
- 9 L.A. LUGIATO, *Phys. Rev.* **A33**, 4079 (1986)
- 10 H.J. CARMICHAEL, *Phys. Rev.* **A33**, 3262 (1986)
- 11 L.A. OROZCO, M.G. RAIZEN, MIN XIAO, R.J. BRECHA, H.J. KIMBLE, *J. Opt. Soc. Am.* **B 4**, 1490 (1987)
- 12 F. CASTELLI, L.A. LUGIATO, M. VADACCHINO, *Nuovo Cimento B* **10**, 183 (1988)
- 13 M.D. REID, *Phys. Rev.* **A37**, 4792 (1988)
- 14 J.M. COURTY, P. GRANGIER, L. HILICO, S. REYNAUD, *Opt. Commun.* **83**, 251 (1991)
- 15 Let us notice that this definition differs from the one used by Lugiato and other authors by a factor $\sqrt{2}$.
- 16 H. MORI, *Progress in Theoretical Physics*, **33**, 423 (1965); R. KUBO, *Reports in Progress in Physics* **29**, 255 (1966)
- 17 J.M. COURTY, Thèse de L'Université Pierre et Marie Curie (Paris 1990, unpublished); J.M. COURTY and S. REYNAUD, to be published

- 18 B.R. MOLLOW, Progress in Optics XIX ed. E.Wolf (North Holland, Amsterdam, 1981) p.1 and ref. therein; A. HEIDMANN and S. REYNAUD, Journal de Physique 46, 1837 (1985) and ref. therein
- 19 C. COHEN-TANNOUDJI, J. DUPONT-ROC and G. GRYNBERG, "Processus d'interaction entre Photons et Atomes" (InterEditions/Editions du CNRS, Paris 1988) p 385, ["Atom-Photons interactions" (Wiley, New-York), 1991]

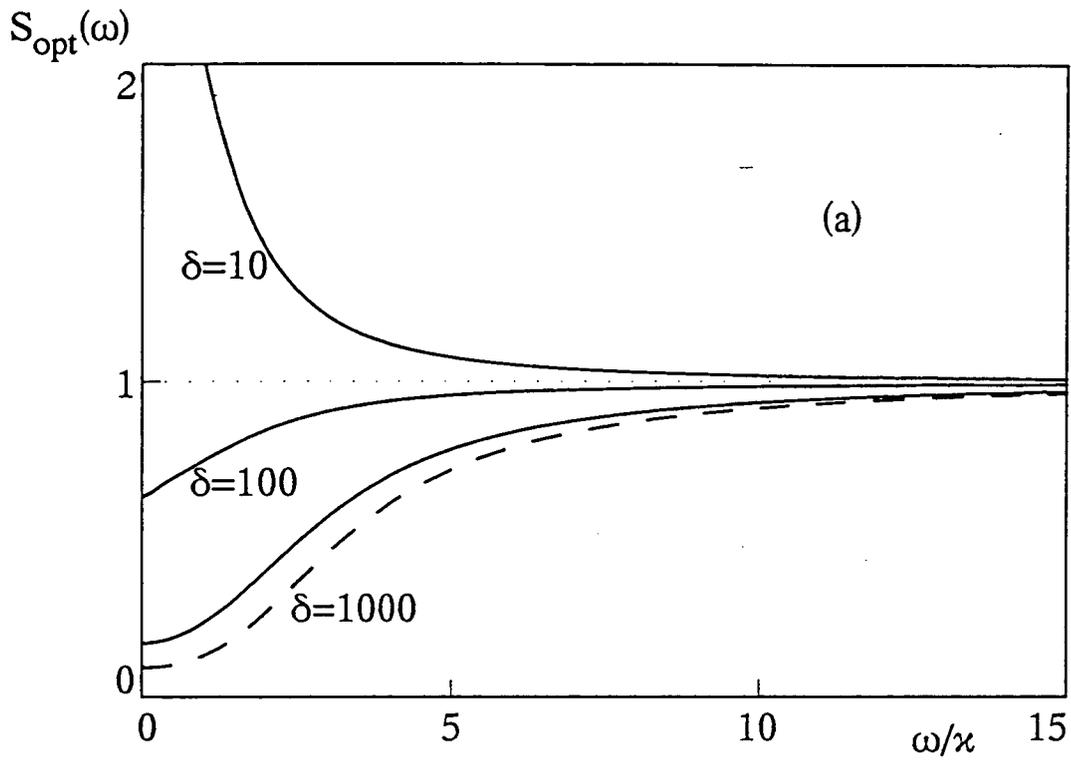


Fig 1a:

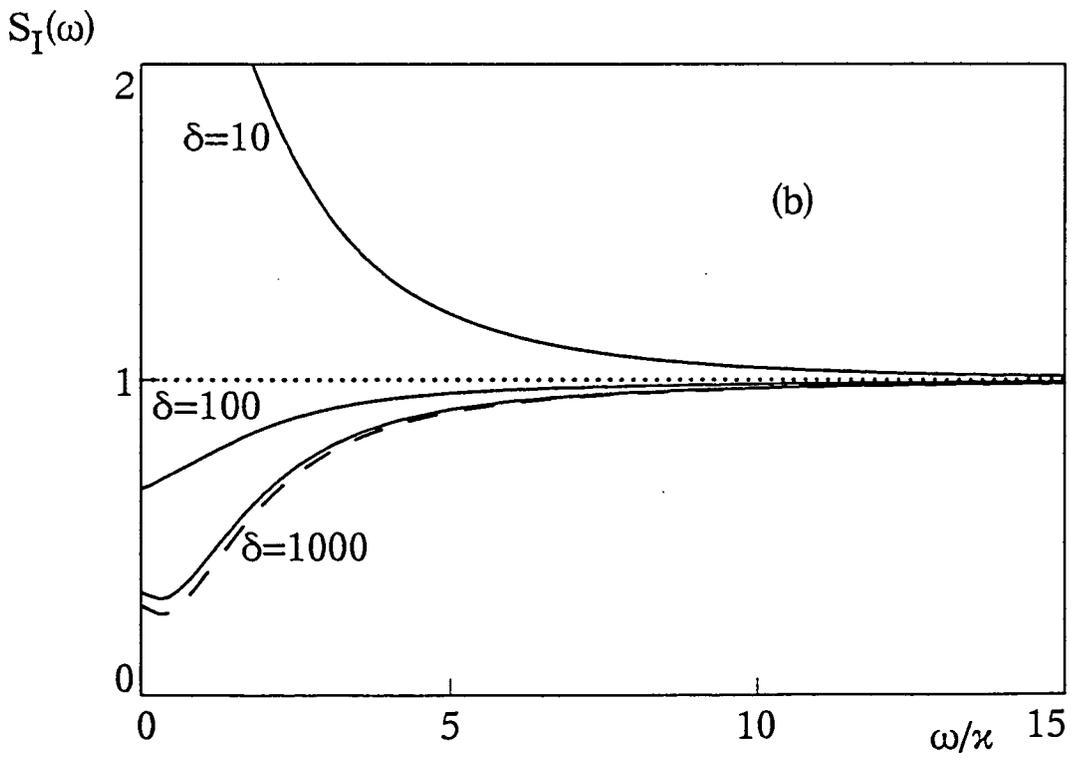


Fig 1b

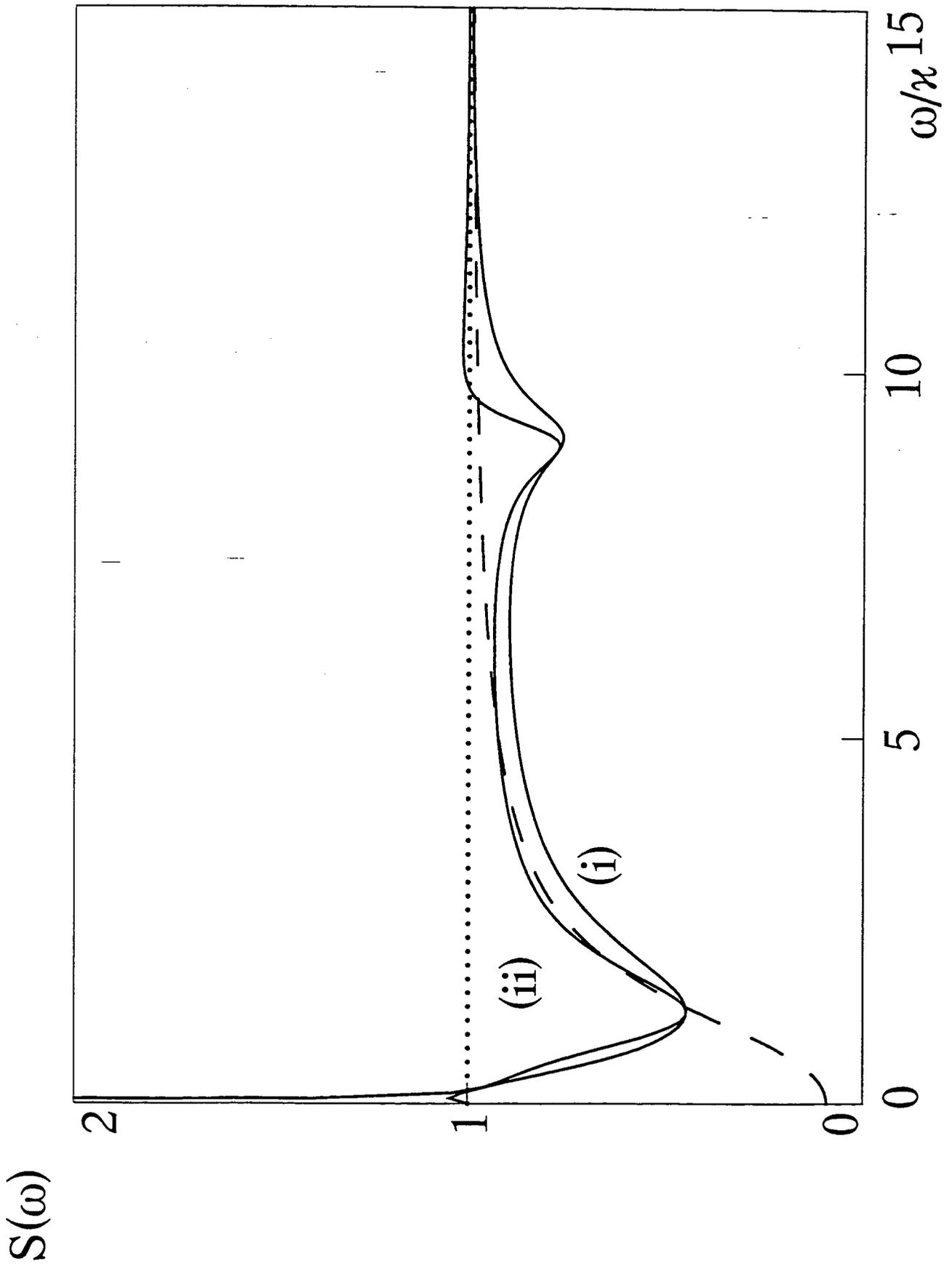


Fig 2 :

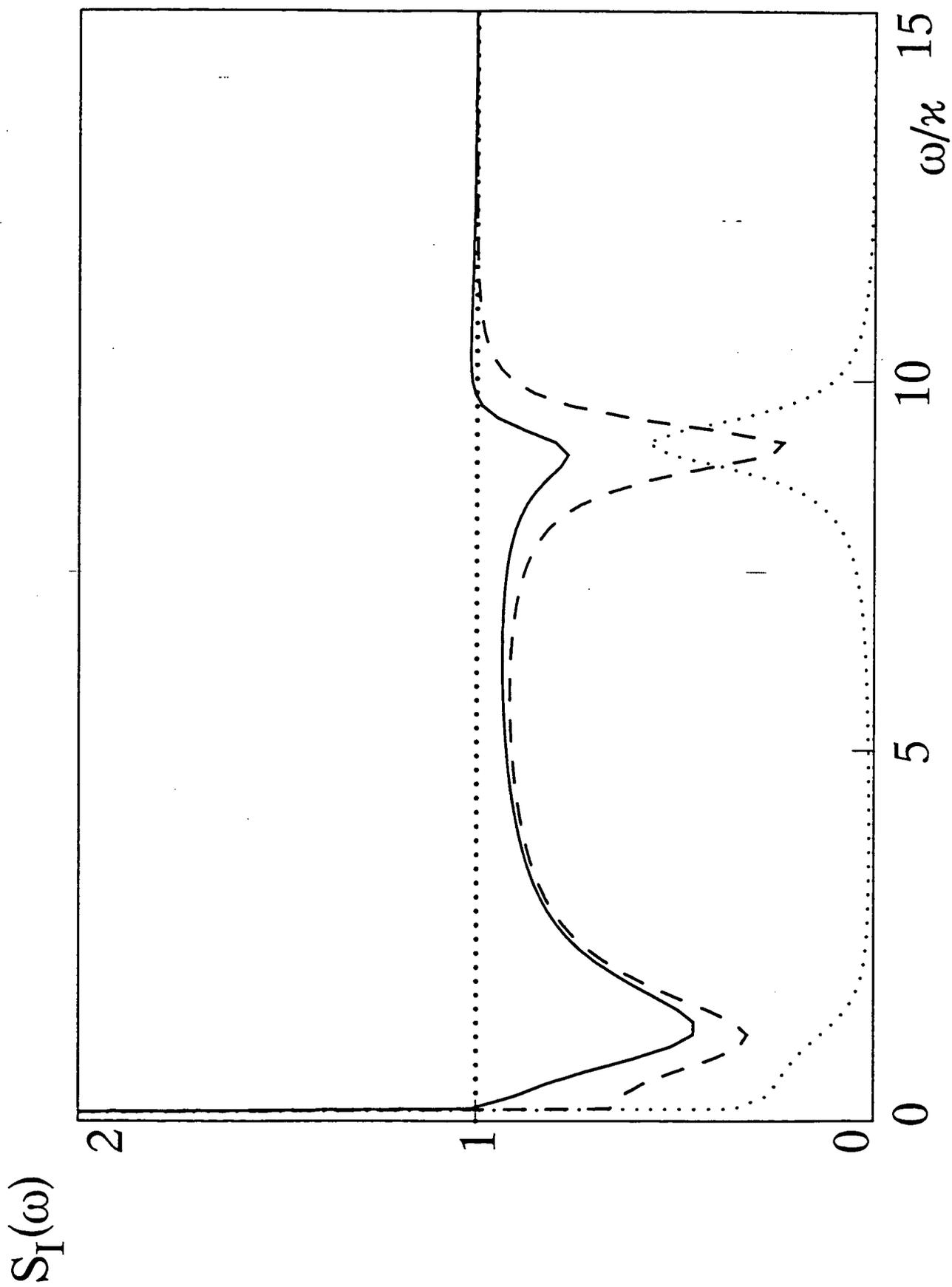


Fig 3:

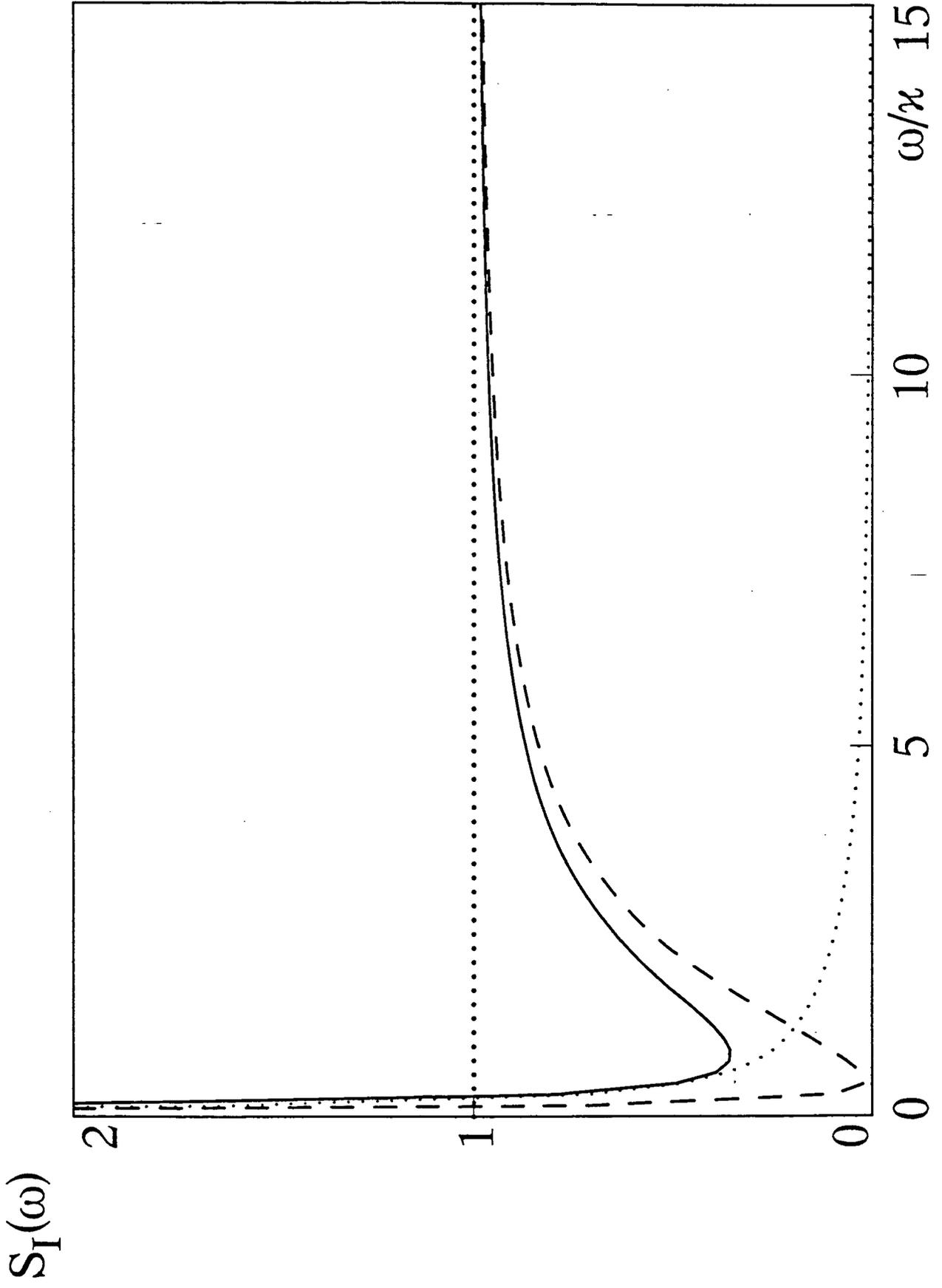


Fig 4 :

c. Solutions stationnaires

Le but de ce paragraphe est d'étudier les solutions stationnaires pour le champ dans la cavité. Nous allons reprendre dans l'article précédent la relation donnant la valeur moyenne du champ intracavité α_0 , en fonction de la valeur moyenne du champ incident sur la cavité, α_{in} . (Formules 23, 24, 26 de l'article inséré au paragraphe précédent). Nous utilisons les variables sans dimensions :

$$\beta_0 = g \frac{\alpha_0}{\gamma} \quad \text{et} \quad \beta^{in} = g \frac{\alpha^{in}}{\gamma} \quad \text{(III.56a)}$$

$$Y = 2 |\beta_0|^2 / f \quad \text{et} \quad X = \frac{2}{\kappa\tau} \frac{2}{f} |\beta^{in}|^2 \quad \text{(III.56b)}$$

f désigne la moitié du rapport du taux de relaxation des populations atomiques et du taux de relaxation des cohérences atomiques. L'équation de la bistabilité en variables réduites est :

$$X = Y \left\{ \left(1 + \frac{2C}{1 + \delta^2 + Y} \right)^2 + \left(\phi - \frac{2C\delta}{1 + \delta^2 + Y} \right)^2 \right\} \quad \text{(III.57)}$$

X et Y seront appelés intensité incidente, et intensité intérieure. Lors d'une expérience, les paramètres X , C , δ et ϕ sont imposés. L'intensité intracavité Y est alors solution d'une équation du troisième degré, qui admet, selon la valeur des paramètres (mais avec $X > 0$ et $C \geq 0$) une ou trois solutions positives. Dans ce dernier cas, la donnée des paramètres X , C , δ et ϕ ne suffit pas à déterminer la puissance intérieure Y . Le phénomène de bistabilité est possible (plusieurs solutions stables possibles pour un même choix de paramètres).

Nous allons étudier cette bistabilité en faisant varier un seul paramètre à la fois : tout d'abord l'intensité incidente X , puis le déphasage du champ dans la cavité ϕ_0 . Cette étude, comme nous le verrons au chapitre IV correspond aux expériences que nous faisons.

i. Cycles d'hystérésis de la bistabilité

La figure III-2 est une courbe représentant Y en fonction de X , pour C , ϕ_0 et δ fixés. Pour X compris entre X_1 et X_2 , il existe trois solutions pour Y . On peut montrer [Gibbs 85] que les deux solutions extrêmes correspondent à un point de fonctionnement stable, et que la solution intermédiaire est instable (partie en pointillé de la courbe, de pente négative). Le fait qu'il n'y ait qu'une solution pour X petit et pour X grand se comprend aisément. Si l'intensité incidente sur la cavité X est très faible, l'intensité intracavité Y est aussi très faible. Dans ce cas, l'équation de la bistabilité s'écrit :

$$X = Y \left\{ \left(1 + \frac{2C}{1 + \delta^2} \right)^2 + \left(\phi - \frac{2C\delta}{1 + \delta^2} \right)^2 \right\} \quad \text{(III.58)}$$

Elle n'admet qu'une seule solution. La pente à l'origine de la courbe Y en fonction de X est donnée par l'inverse de l'accolade. De la même manière, si l'intensité incidente sur la cavité est très

grande, l'intensité intracavité est très grande. Le milieu atomique est saturé. L'équation de la bistabilité s'écrit alors :

$$X = Y(1 + \phi^2) \quad (\text{III.59})$$

Elle admet une unique solution. La pente limite de la courbe Y en fonction de X pour X grand est donnée par $1 / (1 + \phi^2)$.

L'étude expérimentale des courbes de bistabilité Y en fonction de X se fait en mesurant simultanément l'intensité incidente X et l'intensité intracavité Y. La figure III-2a représente une simulation de cette mesure. Supposons que l'intensité X augmente à partir de 0. Tant que X est inférieur à X_2 , Y sera donnée par la portion stable OA de la courbe de bistabilité. Lorsque l'intensité X devient supérieure à X_2 , l'intensité intérieure Y commute de la portion OA vers la portion BC : la surtension de la cavité donnée par le rapport (Y/X) passe d'une faible à une forte valeur. Supposons maintenant que l'intensité incidente décroisse à partir de C. Tant que X reste supérieure à X_1 , l'intensité intérieure est donnée par la portion stable CD de la courbe de bistabilité. En D, on a commutation vers la portion EO, d'une forte à une faible surtension.

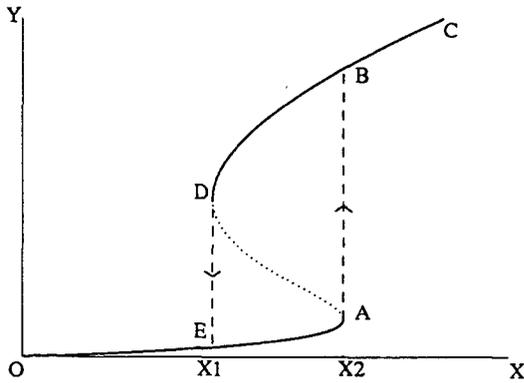


Figure III-2a

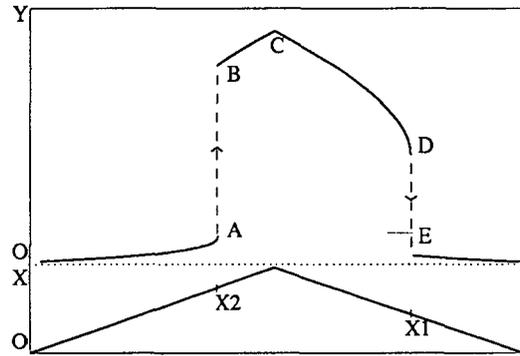


Figure III-2b

Figure III-2a et b : Courbes d'hystérésis de la bistabilité tracées avec les paramètres suivants : $C = 40$, $\phi = 2$, $\delta = 10$. X varie entre 0 et 1000, Y entre 0 et 500.

ii. Fonction d'Airy de la cavité non linéaire

Il existe une autre façon de présenter la bistabilité : on peut étudier l'intensité intracavité Y en fonction de la longueur de la cavité, c'est-à-dire en fonction du déphasage ϕ . C, δ et X restent constants. Lorsque la cavité ne contient pas d'atomes, (dans ce cas le paramètre de bistabilité C est nul), la formule (III.57) donne l'approximation Lorentzienne de la fonction d'Airy de la cavité :

$$X = Y(1 + \phi^2) \quad (\text{III.60})$$

Cette relation est valable pour $\phi \gamma_{\text{cav}} \ll 1$, c'est à dire pour $|\phi|$ de l'ordre de quelques dizaines pour une cavité de grande finesse. La courbe représentant Y en fonction de ϕ est une lorentzienne centrée en $\phi=0$.

Lorsque la cavité contient des atomes (C non nul), le pic de la cavité se déforme et peut présenter de la bistabilité et une hystérésis (Figure III-3a). La formule (III.57) montre que la courbe Y en

fonction de ϕ n'est plus symétrique autour de $\phi=0$, mais que son allure est inchangée si ϕ et δ changent de signe.

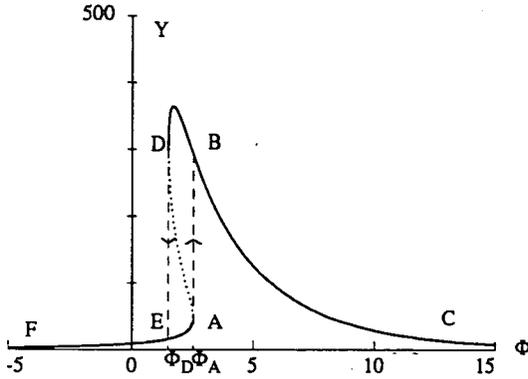


Figure III-3a

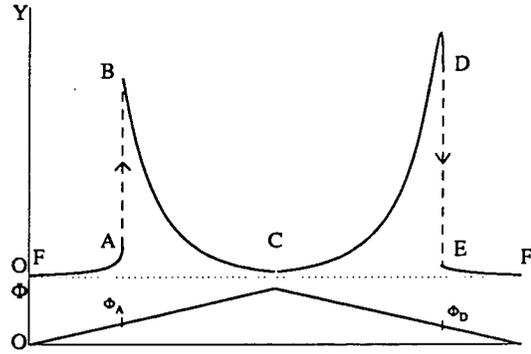


Figure III-3b

Figure III-3a et b : Fonction d'Airy de la cavité tracées avec les paramètres suivants : $C = 40$, $\Xi = 500$, $\delta = 10$. Y varie entre 0 et 500, ϕ entre -5 et 15.

La figure III-3b est une simulation de l'intensité intra-cavité Y lorsque le déphasage ϕ varie, c'est à dire lorsque la longueur de la cavité varie. Décrivons le comportement de l'intensité intérieure lorsque ϕ croît puis décroît, pour un désaccord δ positif. Supposons que ϕ croisse à partir du point F. Tant que ϕ est inférieur à ϕ_A , l'intensité intérieure est donnée par la portion FA de la courbe. Elle augmente de Y_F à Y_A . Lorsque ϕ devient supérieur à ϕ_A , l'intensité Y dans la cavité commute vers une forte valeur (point B), puis décroît vers Y_C lorsque ϕ augmente vers ϕ_C . Lorsque ϕ diminue à partir de ϕ_C à ϕ_D , l'intensité Y est donnée par la portion CD de la courbe. L'intensité Y augmente de Y_C à Y_{Max} , passe par un maximum puis diminue jusqu'à Y_D . Lorsque ϕ devient inférieur à ϕ_D , l'intensité Y commute vers une faible valeur (point E), puis diminue (portion EF de la courbe).

Lorsque le pic de la cavité est balayé d'un sens ou de l'autre, la hauteur du pic n'est pas la même car $Y_B < Y_{Max}$. Notons ici que le maximum du pic de la cavité en $Y = Y_{Max}$ admet une tangente horizontale. Cette remarque sera utilisée au chapitre IV.

iii. Effet de pertes dans la cavité

Le modèle utilisé dans l'article inséré au paragraphe III.3 suppose que le champ ne subit aucune perte dans la cavité. On peut aisément tenir compte de pertes, dues aux imperfections des miroirs par exemple, en modifiant légèrement l'équation d'évolution du champ intracavité (équation 18a). Les pertes dans la cavité peuvent être modélisées par un miroir de transmission t_p^2 . En introduisant le taux d'amortissement de la cavité due aux pertes $\kappa_p = t_p^2/2\tau$ et le taux d'amortissement total de la cavité $\kappa_{tot} = \kappa + \kappa_p$, on peut réécrire l'équation d'évolution du champ sur un tour de cavité :

$$\tau \partial_t \hat{A}(t) = -\tau(\kappa + \kappa_p + i\phi) \hat{A}(t) + \sqrt{2\kappa\tau} \hat{A}^{in}(t) + \sqrt{2\kappa_p\tau} \hat{A}_p(t) + ig\hat{P}(t) \quad (III.61)$$

où le champ \hat{A}_p est le champ du vide fluctuant associé aux pertes de la cavité. Sa valeur moyenne est nulle.

Cette dernière équation remplace la formule 18a tant pour la détermination de l'état stationnaire, que pour le calcul des fluctuations quantiques. La grande similitude entre cette équation et l'équation 18a montre que la valeur moyenne du champ intracavité dans le régime stationnaire est donnée par une relation analogue à (III.57) :

$$X = Y \left\{ \left(\frac{\kappa_{tot}}{\kappa} + \frac{2C}{I + \delta^2 + Y} \right)^2 + \left(\phi - \frac{2C\delta}{I + \delta^2 + Y} \right)^2 \right\} \quad (III.62)$$

L'existence de pertes dans la cavité ne modifie pas l'allure des courbes de bistabilité. En ce qui concerne le bruit quantique, on doit associer à ces pertes un bruit correspondant au bruit du vide (voir I.2.d.ii), qui risque de limiter les effets de réduction de bruit quantique attendus.

iv. Courbes de bistabilité pour des modes gaussiens

L'équation de la bistabilité utilisée jusqu'ici a été établie pour l'interaction d'une onde plane avec des atomes à deux niveaux, dans une cavité en anneau. Il est possible de généraliser cette formule pour des ondes Gaussiennes et pour des cavités linéaires [Drummond 81]. La formule (III.57) prend la forme :

$$X = Y \left\{ (I + C f(Y))^2 + (\phi - C \delta f(Y))^2 \right\} \quad (III.64)$$

Dans le cas d'une onde gaussienne dans une cavité linéaire :

$$f(Y) = \frac{3}{Y} \text{Ln} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{8Y}{3(I + \delta^2)}} \right\} \quad (III.65)$$

Dans le cas d'une onde gaussienne dans une cavité en anneau :

$$f(Y) = \frac{1}{Y} \text{Ln} \left\{ 1 + \frac{2Y}{I + \delta^2} \right\} \quad (III.66)$$

Cette formule ne dépend pas explicitement du waist du mode gaussien car elle suppose que la longueur du milieu atomique est petite par rapport à la longueur de Rayleigh du mode. Le waist intervient dans la normalisation des intensités X et Y.

Les expressions obtenues pour des ondes planes et des ondes gaussiennes coïncident dans la limite des faibles intensités ($Y \rightarrow 0$). Comme le montre la référence [Drummond 81], à puissance incidente X et désaccord δ égaux, la bistabilité pour les ondes gaussiennes apparaît avec des paramètres de bistabilité C plus grands qu'avec des ondes planes.

d. Stabilité des solutions stationnaires

Le calcul des fluctuations du champ sortant de la cavité suppose que les points de fonctionnement de la cavité étudiés sont stables. Il faut donc pouvoir vérifier leur stabilité. Nous allons montrer que l'analyse linéaire de stabilité autour d'un point de fonctionnement donne le résultat suivant (qui est une condition suffisante) :

Le point de fonctionnement est stable si les pôles du déterminant de la matrice $\mu(\omega)$ ont une partie imaginaire strictement négative. On en déduira qu'un point de fonctionnement est un seuil d'instabilité si en ce point il existe une fréquence ω telle que $\det(\mu(\omega)^{-1})=0$.

Nous allons maintenant établir ce critère. Des équations (43), (33), et (34) de l'article précédent, nous pouvons écrire :

$$\mu(\omega)^{-1} [\delta A(\omega)] = \sqrt{2\kappa\tau} [\delta A^{in}(\omega)] + i \sqrt{2\kappa\tau} g \varepsilon [\delta P_2(\omega)] \quad (\text{III.67})$$

Le membre de droite est un bruit provenant de l'extérieur du système (fluctuations du champ entrant et émission spontanée). Dans cette formule, la matrice 2×2 $\mu(\omega)$ apparaît comme la fonction de réponse du champ intracavité aux perturbations extérieures. Elle est caractérisée par ses valeurs propres $\lambda_1(\omega)$ et $\lambda_2(\omega)$. Nous allons voir à quelle condition cette fonction de réponse est celle d'un système dynamique linéairement stable.

Considérons d'abord un système dynamique décrit par une variable réelle unique u fonctionnant autour de la valeur u_0 , et dont la fonction de réponse est $\lambda(\omega)$. L'analyse linéaire de stabilité de ce système est l'étude de l'évolution temporelle du système après qu'on l'ait soumis à une petite perturbation instantanée de la forme $\hat{f}(t) = 2\pi \delta(t)$, autour du point de fonctionnement étudié. L'écart $\delta\hat{u} = \hat{u} - u_0$ est donné, dans l'espace des fréquences par :

$$\delta u(\omega) = \lambda(\omega) f(\omega) \quad (\text{III.68})$$

Compte tenu de la forme f , on en déduit :

$$\delta\hat{u}(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \lambda(\omega) \quad (\text{III.69})$$

L'étude de la convergence de cette intégrale donne le critère recherché. $\lambda(\omega)$ est généralement une fraction rationnelle dont les pôles sont notés ω_n et qui tend rapidement vers 0 pour $\omega \rightarrow \pm\infty$. Si tous les pôles ω_n ont une partie imaginaire strictement négative, alors le calcul de l'intégrale par la méthode des résidus donne $\delta\hat{u}(t) = 0$ pour $t < 0$ et pour $t > 0$, donne $\delta\hat{u}(t)$ sous la forme d'une somme de termes ayant les dépendances temporelles :

$$e^{\text{Im}(\omega_n)t - i\text{Re}(\omega_n)t} \quad (\text{III.70})$$

Cela montre que $\delta\hat{u}(t)$ tend vers 0 lorsque t tend vers l'infini. Le système relaxe vers son état stationnaire de départ : il est stable.

La matrice $\mu(\omega)$ contient deux fonctions de réponse $\lambda_1(\omega)$ et $\lambda_2(\omega)$. Si leurs pôles ont une partie imaginaire négative, il en est de même de ceux de $\det(\mu(\omega))$ qui vaut $\lambda_1(\omega) \times \lambda_2(\omega)$: le critère est donc établi.

La relation $\det(\mu(\omega)^{-1})=0$, définissant le contour dans l'espace des paramètres de l'ensemble des points de fonctionnement stables, est utilisée par L.Lugiato et al dans la référence [Lugiato 84].

Le raisonnement précédent donne une condition suffisante de stabilité. En fait, la localisation des pôles de $\lambda_i(\omega)$ dans le demi-plan complexe inférieur indique que $\lambda_i(\omega)$ est la transformée de Fourier d'une fonction de réponse causale, c'est à dire telle que $\hat{\lambda}_i(\tau) = 0$ pour $\tau < 0$: le système ne réagit pas avant d'avoir été excité.

Les pôles de $\mu(\omega)$ sont intéressants à un deuxième titre : en effet leur partie réelle donne les fréquences caractéristiques du système étudié. Pour ces valeurs de la fréquence, le module d'une des valeurs propres de $\mu(\omega)$ est extrémal. Les fonctions de réponse ont une résonance pour ces fréquences, plus ou moins marquée selon la valeur de la partie imaginaire du pôle considéré. La réponse du système aux perturbations extérieures est donc exaltée à ces fréquences.

e. Comparaison avec d'autres théories standard

Le calcul complet des fonctions de corrélation du champ sortant d'une cavité de grande finesse contenant des atomes à deux niveaux a été fait à l'aide d'une méthode de calcul "quantique", reposant sur l'utilisation de la représentation P-positive des champs par plusieurs auteurs [Castelli 88] [Reid 88]. L'article de M.D.Reid donne les expressions analytiques des spectres de bruit du champ sortant de la cavité, puis discute l'allure de ces spectres de bruit pour une grande variété de paramètres. Les hypothèses du calcul de M.D.Reid sont exactement les mêmes que les nôtres (cavité de grande finesse, atomes immobiles et indépendants, approximation du champ tournant), mais l'approche théorique est différente. Je n'ai pas cherché à montrer l'équivalence de nos approches théoriques dans le cas général. J'ai contrôlé leur accord dans le cas particulier traité ici (atomes à deux niveaux immobiles dans une cavité). Les résultats analytiques des deux méthodes sont identiques. Pour le vérifier, j'ai dû établir les relations entre les notations des deux articles.

L'article de M.D.Reid calcule les fonctions de corrélation de variables stochastiques α et α^* associées aux opérateurs a et a^+ . Ces fonctions de corrélation calculées dans l'ordre normal sont contenues dans la matrice :

$$S_M(\omega) = \left\langle [\delta a(\omega)] [\delta a(-\omega)]^t \right\rangle \quad (\text{III.71})$$

S_M a pour expression :

$$S_M(\omega) = (A(\omega) - i\omega)^{-1} D_M(\omega) (A(-\omega)^t + i\omega)^{-1} \quad (\text{III.72})$$

Dans notre point de vue entrée-sortie, nous utilisons les opérateurs $A=ia$ et $A^+=-ia^+$. D'après la définition de la matrice V^{out} des corrélations (I.25), et de la normalisation des opérateurs a et a^+ , on peut voir que :

$$2\kappa S_M(\omega) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} : V^{out}(\omega) : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{III.73})$$

où $: V(\omega) :$ est la matrice des fonctions de corrélation dans l'ordre normal. $: V^{out} :$ se déduit de $V^{out}(\omega)$ et des relations de commutation :

$$: V^{out}(\omega) : = V^{out}(\omega) - \frac{1+\varepsilon}{2} \quad \text{où} \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{III.74})$$

D'après les relations (I.57 et 60) on en déduit :

$$: V^{out}(\omega) : = \mu(\omega) D(\omega) \mu(\omega)^+ \quad (\text{III.75})$$

Pour contrôler que les deux théories donnent les mêmes résultats, il suffit de vérifier les relations :

$$\mu(\omega) = 2 \kappa \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} (A(\omega) - i\omega)^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{III.76})$$

$$\mu(\omega)^+ = 2 \kappa \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} (A(-\omega)^t + i\omega)^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{III.77})$$

$$D_M(\omega) = 2 \kappa \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} D(\omega) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{III.78})$$

Ces équations sont bien vérifiées. Je les ai contrôlées à l'aide d'un logiciel de calcul formel (Mathematica), en tenant compte des relations entre les notations de M.D.Reid et les nôtres :

$$\bar{\omega} = \frac{2\omega\tau}{\gamma} \quad \Delta = 2\delta \quad I = 2|\beta_0|^2 \quad (\text{III.79})$$

5 Théorie générale des fluctuations quantiques dans la bistabilité optique

a. Présentation de l'article

Chronologiquement, l'article "Quantum fluctuations in optical bistability : calculations from linear response theory", reproduit ci-dessous, précède l'article inséré au paragraphe III.4. Trois conclusions essentielles s'en dégagent. D'une part il montre qu'il est possible d'élaborer une théorie entrée-sortie du calcul des fluctuations quantiques des opérateurs de champ dans la bistabilité optique. Ensuite, cet article fait la preuve que la méthode entrée-sortie permet de traiter des configurations compliquées (atomes ayant un nombre quelconque de niveaux et plusieurs champs lasers). Enfin, l'article insiste sur le fait que la relation entrée-sortie pour les opérateurs conserve les relations de commutation des champs libres pour les champs entrant et sortant de la cavité. Cette conservation est considérée comme une justification a posteriori de la méthode.

Cette théorie a été faite à la lumière de la thèse de Jean-Michel Courty [Courty 90] dont le but était l'étude des fluctuations quantiques dans l'interaction d'un système non-linéaire avec un champ et en particulier l'étude de la relaxation et des fluctuations d'un atome en interaction avec une cavité optique contenant un champ intense. Le point de vue entrée-sortie utilisé dans l'article est donc légèrement différent de celui présenté au chapitre I. On considère d'abord que la cavité modifie la structure des champs incidents (relations 2, 3, 4), transformant les champs libres A^{in} et A^{out} en champ B^{in} et B^{out} dans la cavité dont les relations de commutation ne sont plus indépendantes de la fréquence comme celles d'un champ libre mais proportionnelles à la fonction d'Airy de la cavité. En d'autres termes, on considère que la cavité modifie la densité spectrale de couplage du champ : \mathcal{E}_ω devient $\mathcal{E}_\omega f(\omega)$ où $f(\omega)$ est défini par la relation (2) de l'article. Ces champs B^{in} interagissent avec les atomes. Les relations entrée-sortie pour le champ intracavité s'établissent de la même manière que pour des champs libres, à la différence près que le

commutateur des champs intervenant dans le calcul de la fonction de réponse $R(\Omega)$ (III.13) reflète les résonances de la cavité.

Les équations obtenues à ce stade sont très générales. Elles permettent en particulier de traiter le cas d'un atome unique dont la dynamique est modifiée par la présence de la cavité, et dépend des fonctions de corrélation du champ intracavité [Courty 89].

Dans l'article nous ne traitons pas ce cas, et nous considérons que la dynamique des atomes et en particulier leur relaxation, est déterminée par le couplage avec l'ensemble des modes du champ, et que l'influence des modes couplés à la cavité sur cette dynamique est négligeable.

b. Tiré à part de l'article

Volume 83, number 3,4

OPTICS COMMUNICATIONS

1 June 1991

Quantum fluctuations in optical bistability: calculations from linear response theory

Jean-Michel Courty ^a, Philippe Grangier ^b, Laurent Hilico ^a and Serge Reynaud ^a

^a *Laboratoire de Spectroscopie Herzienne ¹, BP 74, F75252 Paris Cedex 05, France*

^b *Institut d'Optique Théorique et Appliquée ², BP-147, F91403 Orsay Cedex, France*

Received 23 January 1991

We present a new method for computing quantum fluctuations of fields emitted by optical cavities containing atoms. The noise generation by atoms is described by atomic correlation functions. The parametric transformation of the fields by the atomic medium is described by susceptibility functions, as in linear response theory. The susceptibility functions and the correlation functions can be calculated as in the resonance fluorescence theory. The compatibility between dissipation and added fluctuations is ensured by general relations existing between these atomic functions.

1. Introduction

We present in this letter a new method for computing quantum fluctuations of fields emitted by optical cavities containing atoms. Quantum computation of these fluctuations is usually based on a coherent state representation of the fields [1]. There exists a much simpler semi classical linear input output theory [2-4] which has been shown to be equivalent to the quantum approach in the limiting case of pure parametric processes [4,5] (Kerr processes). It has been used for parametric oscillators [6] and bistable devices built on one-photon [7] or two-photon [8] Kerr nonlinearities.

For the bistable devices containing atoms excited not too far from resonance, it is important to treat properly the atomic fluctuations [9-13]. The aim of this letter is to show that this can be done in the spirit of the semi classical method. The noise generation by atoms will be described by atomic correlation functions while the parametric transformation of the fields by the atomic medium will be described by

susceptibility functions, as in linear response theory [14]. The susceptibility functions and the correlation functions can be calculated by the resonance fluorescence theory [15-19].

In this letter, we will not enter into explicit calculations of these functions which depend on the specific atomic configuration. We will assume that a stable working point has been chosen, as it is usual in theory of bistable systems [9,20], and that the atomic functions are calculated at this working point.

2. Model

The model studied in this letter consists of atoms placed inside a cavity and coupled to two reservoirs corresponding respectively to the cavity modes and to the side modes [21,22]. The interaction hamiltonian is a linear coupling between field components and dipole components. For example, when two field modes are involved and coupled to two atomic transitions, one can write:

$$H_1 = -\hbar(\hat{E}_1 \hat{S}_1^\dagger + \hat{E}_1^\dagger \hat{S}_1 + \hat{E}_2 \hat{S}_2^\dagger + \hat{E}_2^\dagger \hat{S}_2), \quad (1)$$

where E and S (resp. E^\dagger and S^\dagger) stand for the positive (resp. negative) frequency components of the

¹ Laboratoire de l'Ecole Supérieure et de l'Université Pierre et Marie Curie associé au Centre National de la Recherche Scientifique.

² Laboratoire associé au Centre National de la Recherche Scientifique.

fields and dipoles^{#1} and the indices 1 and 2 refer to the two atomic transitions; the symbol "caret" is attributed to quantities written in the time domain in the rotating wave representation. Each field is the sum of two components, a cavity field and a bath field:

$$\hat{E}_i = \hat{E}_i^{(cav)} + \hat{E}_i^{(bath)}$$

The cavity reservoir has a frequency dependence which reflects the enhancement or suppression of frequency components inside the cavity. The associated coupling spectrum reproduces an Airy function. We will consider the limit of a high finesse cavity where the Airy function is approximated by lorentzian peaks [7].

The coupling to the bath is described by a white noise. We will consider the limit where this coupling is stronger than the coupling to the cavity modes. Atomic spontaneous emission is therefore determined essentially by the bath fields $\hat{E}_i^{(bath)}$. However, our aim is to calculate the transformation of the cavity fields $\hat{E}_i^{(cav)}$, more precisely to compute the output cavity fields as functions of the input ones. As a consequence, the bath fields $\hat{E}_i^{(bath)}$, corresponding to the vacuum state, will appear only through relaxation terms or noise terms. For the sake of simplicity, we will write \hat{E}_i in place of $\hat{E}_i^{(cav)}$.

Furthermore, we will consider the limit of a low density atomic medium where the fluctuations of the different atoms may be considered independent. We will also assume that the contributions of the various atoms are perfectly phase-matched [23,24].

3. Notations

As is usual, we will put the various components of fields or dipoles in column matrices; we will write for example

^{#1} Throughout the paper, we use dimensionless times and frequencies (the unit time corresponds to one cavity roundtrip); the normalization of fields and dipoles follows from the definitions of the field commutators (4) and of the interaction hamiltonian (1) and they are also dimensionless quantities.

$$\hat{\mathcal{E}}(t) = \begin{bmatrix} \hat{E}_1(t) \\ \hat{E}_1^\dagger(t) \\ \hat{E}_2(t) \\ \hat{E}_2^\dagger(t) \end{bmatrix}$$

The field components, written here in the time domain and in the rotating wave representation, may also be expressed in the frequency domain by defining for any function or operator:

$$\hat{X}(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} X(\omega) \exp(-i\omega t),$$

$$X(\omega) = \int dt \hat{X}(t) \exp(i\omega t).$$

We get a column matrix containing the field frequency components which can be written using the properties of Fourier transforms^{#2}

$$\hat{\mathcal{E}}(\omega) = \begin{bmatrix} E_1(\omega) \\ E_1^\dagger(\omega) \\ E_2(\omega) \\ E_2^\dagger(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1(\omega) \\ E_1(-\omega)^\dagger \\ E_2(\omega) \\ E_2(-\omega)^\dagger \end{bmatrix}$$

It must be noted that we do not use any semi-classical representation of the fields. As a consequence, the elements of these matrices are operators. In order to avoid ambiguous notations, we will write $\hat{\mathcal{E}}_\alpha(t)$ ($\alpha=1-4$) the components of $\hat{\mathcal{E}}(t)$. We will denote by $\hat{\mathcal{E}}(t)^\dagger$ the row matrix containing the components:

$$\hat{\mathcal{E}}^\alpha(t) = \hat{\mathcal{E}}_\alpha(t)^\dagger$$

(hermitean conjugation applied to the enclosing matrix as well as to the enclosed operators). In the frequency domain, these relations become

$$\hat{\mathcal{E}}^\alpha(\omega) = \hat{\mathcal{E}}_\alpha(-\omega)^\dagger$$

We use these unusual notations in the part of the paper devoted to the derivation of the new linear response method. Then, we will come back to the ma-

^{#2} In the rotating wave representation, the frequencies ω are defined with respect to the mean field frequencies for each component, for α odd (resp. even), the frequency component $\hat{\mathcal{E}}_\alpha(\omega)$ of a free field (the input or the output field) is equal to an annihilation (resp. creation) operator $a_{\omega_0+\omega}$ (resp. $a_{\omega_0-\omega}^\dagger$), where ω_0 is the mean frequency associated with this component.

trix notations to write the results in a form more convenient for practical applications.

4. Fields outside and inside the cavity

We first discuss the relation between the fields inside and outside the cavity. We denote \mathcal{A}^{in} and \mathcal{A}^{out} the free fields incident and outgoing at the cavity mirror. They are different from the input and output intracavity fields \mathcal{B}^{in} and \mathcal{B}^{out} since resonant frequency components are enhanced inside the cavity while non resonant components are suppressed.

In the high finesse limit, one gets for the input fields [25]

$$\mathcal{B}_\alpha^{\text{in}}(\omega) = f_\alpha(\omega) \mathcal{A}_\alpha^{\text{in}}(\omega)$$

$$f_\alpha(\omega) = (\gamma_\alpha - i\varphi_\alpha - i\omega)^{-1} t_\alpha, \quad t_\alpha = (2\gamma_\alpha)^{1/2}, \quad (2)$$

where γ_α are the dimensionless damping rates [23], t_α the transmission amplitude coefficients, φ_α the detunings (dimensionless frequencies of the mean fields measured with respect to the closest eigenfrequency of the empty cavity for each component). The relation for the output fields can be considered as time reversed of the relation for input fields [25]

$$\mathcal{B}_\alpha^{\text{out}}(\omega) = f_\alpha(\omega)^* \mathcal{A}_\alpha^{\text{out}}(\omega). \quad (3)$$

The fields outside the cavity are defined so that they obey the standard commutation relations #2

$$[\mathcal{A}_\alpha^{\text{in}}(\omega), \mathcal{A}_\alpha^{\text{in}}(\omega')] = 2\pi\delta(\omega + \omega') \epsilon_\alpha \delta_\alpha^\beta,$$

$$\epsilon_\alpha = (-1)^{\alpha+1}, \quad (4)$$

(δ_α^β is a Kronecker symbol). It follows that the intracavity fields correspond to a lorentzian coupling spectrum:

$$[\mathcal{B}_\alpha^{\text{in}}(\omega), \mathcal{B}_\alpha^{\text{in}}(\omega')] = 2\pi\delta(\omega + \omega') |f_\alpha(\omega)|^2 \epsilon_\alpha \delta_\alpha^\beta.$$

The linear relation between the field fluctuations $\delta\mathcal{B}^{\text{out}}$ after the interaction with the atoms and the field fluctuations $\delta\mathcal{B}^{\text{in}}$ before this interaction is determined by this lorentzian coupling spectrum:

$$\delta\mathcal{B}_\alpha^{\text{out}}(\omega) = \delta\mathcal{B}_\alpha^{\text{in}}(\omega) + i|f_\alpha(\omega)|^2 \epsilon_\alpha \sum_k \delta\mathcal{S}_\alpha^{(k)}(\omega),$$

where $\delta\mathcal{S}_\alpha^{(k)}$ are the fluctuations of the dipole com-

ponent \mathcal{S}_α associated with the k th atom. We have not included any phase factor in the contributions of the various atoms since we assume a perfect phase matching between these contributions. One deduces from (2) and (3) the input output relation for the fields outside the cavity:

$$(\gamma_\alpha - i\varphi_\alpha - i\omega) \delta\mathcal{A}_\alpha^{\text{out}}(\omega) = (\gamma_\alpha + i\varphi_\alpha + i\omega) \delta\mathcal{A}_\alpha^{\text{in}}(\omega) + it_\alpha \epsilon_\alpha \sum_k \delta\mathcal{S}_\alpha^{(k)}(\omega). \quad (5)$$

At this stage, it would be possible to study the case of a single atom placed inside a cavity [22]. But we are interested in the case where the nonlinear medium contains many atoms.

5. Linear response of the dipoles to the field fluctuations

In order to solve this problem, we will use the following ansatz. First, we write the intracavity field fluctuations $\delta\mathcal{B}^{(k)}$ seen by the k th atom as the sum of the field $\delta\mathcal{B}^{\text{in}}$ and of the fields emitted by the other atoms:

$$\delta\mathcal{B}_\alpha^{(k)}(\omega) = (\gamma_\alpha - i\varphi_\alpha - i\omega)^{-1} \times \left(t_\alpha \delta\mathcal{A}_\alpha^{\text{in}}(\omega) + i\epsilon_\alpha \sum_{j \neq k} \delta\mathcal{S}_\alpha^{(j)}(\omega) \right). \quad (6)$$

Then, we use the linear response theory [26]^{#3} in order to evaluate the dipole fluctuations $\delta\mathcal{S}_\alpha^{(k)}$. Assuming this dipole responds to the intracavity field fluctuations $\delta\mathcal{B}_\alpha^{(k)}$ as if it were isolated in free space, one obtains

$$\delta\mathcal{S}_\alpha^{(k)}(\omega) = \sum_\beta \chi_\alpha^\beta(\omega) \delta\mathcal{B}_\beta^{(k)}(\omega) + \delta\mathcal{F}_\alpha^{(k)}(\omega). \quad (7)$$

The first part in eq. (7) is a linear response described by susceptibility functions $\chi_\alpha^\beta(\omega)$. These functions can be calculated as the Fourier transforms of some commutators $\hat{\chi}_\alpha^\beta(t)$, as is usual in linear response theory [14]:

$$\hat{\chi}_\alpha^\beta(t) = i\theta(t) \langle \hat{\mathcal{S}}_\alpha(t), \hat{\mathcal{S}}_\beta(0) \rangle. \quad (8)$$

^{#3} A rigorous derivation of linear response formulas for computing field fluctuations can be found in ref. [27].

This function is the same for the different atoms. Note that it may couple all the components evolving at the same frequency in the rotating wave representation. The second part in eq. (7) represents extra fluctuations introduced in the cavity fields by the k th atom. In the limiting case studied in this letter, the fluctuations of the noise operator $\delta\mathcal{F}_\alpha^{(k)}$ are given by

$$\langle \delta\mathcal{F}_\alpha^{(k)}(\omega) \delta\mathcal{F}_\alpha^{(k')}(\omega') \rangle = 2\pi \delta_k^k \delta(\omega + \omega') \sigma_\alpha^\beta(\omega).$$

The noise spectra $\sigma_\alpha^\beta(\omega)$ are the Fourier transforms of atomic correlations functions $\hat{\sigma}_\alpha^\beta(t)$:

$$\hat{\sigma}_\alpha^\beta(t) = \langle \delta\hat{\mathcal{P}}_\alpha(t) \delta\hat{\mathcal{P}}^\beta(0) \rangle. \quad (9)$$

The atomic functions $\chi_\alpha^\beta(\omega)$ and $\sigma_\alpha^\beta(\omega)$ can be computed by the resonance fluorescence theory. As we assume that atomic relaxation is determined by the coupling to the bath and therefore not modified by the cavity, the results will be the same as for atoms in free space [17-19].

One can define a "macroscopic polarisation" and a "macroscopic noise operator":

$$\delta\mathcal{P}_\alpha(\omega) = \sum_k \delta\mathcal{P}_\alpha^{(k)}(\omega), \quad (10a)$$

$$\delta\mathcal{F}_\alpha(\omega) = \sum_k \delta\mathcal{F}_\alpha^{(k)}(\omega), \quad (10b)$$

$$\langle \delta\mathcal{F}_\alpha(\omega) \delta\mathcal{F}^\beta(\omega') \rangle = 2\pi \delta(\omega + \omega') N \sigma_\alpha^\beta(\omega). \quad (10c)$$

In the limit $N \gg 1$, one derives from the relations (5), (7) and (6):

$$\begin{aligned} (\gamma_\alpha - i\varphi_\alpha - i\omega) \delta\mathcal{A}_\alpha^{\text{out}}(\omega) \\ = (\gamma_\alpha + i\varphi_\alpha + i\omega) \delta\mathcal{A}_\alpha^{\text{in}}(\omega) + i t_\alpha \epsilon_\alpha \delta\mathcal{P}_\alpha(\omega), \end{aligned} \quad (11a)$$

$$\delta\mathcal{P}_\alpha(\omega) = N \sum_\beta \chi_\alpha^\beta(\omega) \delta\mathcal{E}_\beta(\omega) + \delta\mathcal{F}_\alpha(\omega), \quad (11b)$$

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{E}_\beta(\omega) = (\gamma_\beta - i\varphi_\beta - i\omega)^{-1} \\ \times [t_\beta \delta\mathcal{A}_\beta^{\text{in}}(\omega) + i\epsilon_\beta \delta\mathcal{P}_\beta(\omega)]. \end{aligned} \quad (11c)$$

The susceptibility functions of the N atoms are coherently added while the atomic fluctuations of the N atoms are incoherently added. This is a consequence of the assumptions used in this letter: the fluctuations of two different atoms may be consid-

ered as independent in the low density limit and their contributions are simply added in the case of perfect phase matching.

6. Covariance matrices for the output fields

We now return to matrix notations. The fields \mathcal{A} and \mathcal{B} outside and inside the cavity are column matrices (see the section 3), as well as the quantities \mathcal{E} , \mathcal{P} , \mathcal{F} and \mathcal{F} . The diagonal matrices γ , T , φ and ϵ contain the coefficients γ_α , t_α , φ_α and ϵ_α :

$$\gamma^{\beta\alpha} = \gamma_\alpha \delta_\alpha^\beta, \quad T_\alpha^\beta = t_\alpha \delta_\alpha^\beta, \quad \varphi_\alpha^\beta = \varphi_\alpha \delta_\alpha^\beta, \quad \epsilon_\alpha^\beta = \epsilon_\alpha \delta_\alpha^\beta,$$

These four matrices commute and obey

$$T^2 = 2\gamma, \quad \epsilon^2 = 1.$$

The susceptibility functions $\chi_\alpha^\beta(\omega)$ and correlation functions $\sigma_\alpha^\beta(\omega)$ are the elements of square non diagonal matrices $\chi(\omega)$ and $\sigma(\omega)$.

The relations (11) may be translated to

$$\begin{aligned} (\gamma - i\varphi - i\omega) \delta\mathcal{A}^{\text{out}}(\omega) \\ = (\gamma + i\varphi + i\omega) \delta\mathcal{A}^{\text{in}}(\omega) + iT\epsilon \delta\mathcal{P}(\omega), \\ (\gamma - i\varphi - i\omega) \delta\mathcal{E}(\omega) = T\delta\mathcal{A}^{\text{in}}(\omega) + i\epsilon \delta\mathcal{P}(\omega), \\ \delta\mathcal{P}(\omega) = N\chi(\omega) \delta\mathcal{E}(\omega) + \delta\mathcal{F}(\omega). \end{aligned}$$

Straightforward algebraic transformations lead to the linear input output transformation of the field fluctuations by the whole system:

$$\begin{aligned} [\gamma - i\varphi - i\omega - i\alpha(\omega)] \delta\mathcal{A}^{\text{out}}(\omega) \\ = [\gamma + i\varphi + i\omega - i\alpha(\omega)] \delta\mathcal{A}^{\text{in}}(\omega) + iT\epsilon \delta\mathcal{F}(\omega), \end{aligned} \quad (12a)$$

$$\alpha(\omega) = N\epsilon T\chi(\omega)T^{-1}. \quad (12b)$$

This equation looks like the relation (5) but now the macroscopic effect of the atoms has been included in the cavity filter. The matrix $\alpha(\omega)$, which describes this effect, contains dispersive terms (modification of the field cavity detunings by atomic dispersion), parametric terms (parametric amplification or deamplification of the field fluctuations by the atomic nonlinearities) and dissipative terms. We show below that the dissipative terms are consistent with the added noise (last term of eq. (12a)). All these terms

are frequency dependent if the atoms are excited near resonance.

We can compute now the covariance matrices $V(\omega)$ which contain the covariances $V_{\alpha}^{\beta}(\omega)$ characterizing the fluctuations of the input or output fields:

$$\langle \delta \mathcal{A}_{\alpha}(\omega) \delta \mathcal{A}^{\beta}(\omega') \rangle = 2\pi \delta(\omega + \omega') V_{\alpha}^{\beta}(\omega).$$

The linear input output transformation (12) may be written as

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{A}^{\text{out}}(\omega) &= [-1 + \mu(\omega)] \delta \mathcal{A}^{\text{in}}(\omega) \\ &+ \mu(\omega) iT^{-1} \epsilon \delta \mathcal{F}(\omega), \\ \mu(\omega) &= [\gamma - i\phi - i\omega - i\alpha(\omega)]^{-1} 2\gamma. \end{aligned}$$

It leads to the following transformation for the covariance matrices:

$$\begin{aligned} V^{\text{out}}(\omega) &= [-1 + \mu(\omega)] V^{\text{in}}(\omega) [-1 + \mu(\omega)]^{\dagger} \\ &+ \mu(\omega) V^{\text{at}}(\omega) \mu(\omega)^{\dagger}, \\ V^{\text{at}}(\omega) &= NT^{-1} \epsilon \sigma(\omega) \epsilon T^{-1}. \end{aligned} \quad (13)$$

The output noise $V^{\text{out}}(\omega)$ is the sum of two contributions. The first stems from the input noise $V^{\text{in}}(\omega)$ processed by the optical system while the second corresponds to an extra noise $V^{\text{at}}(\omega)$ entering the system through the atoms and then filtered by the cavity.

7. Relation between fluctuations and dissipation

As discussed previously, the atomic functions $\chi(\omega)$ and $\sigma(\omega)$ can be computed by the resonance fluorescence theory. Usually, one computes from this theory the retarded correlation function $G(\omega)$ which is defined by

$$\hat{G}(t) = \theta(t) \hat{\sigma}(t).$$

The functions $\chi(\omega)$ and $\sigma(\omega)$ can then be deduced from $G(\omega)$ through

$$\begin{aligned} \sigma(\omega) &= G(\omega) + G(\omega)^{\dagger}, \\ \chi(\omega) &= i[G(\omega) - \eta G(-\omega)^* \eta], \end{aligned}$$

where G^* is obtained from G by conjugating its elements (but not transposing them) and where η is the

matrix exchanging the raising and lowering dipole components:

$$\eta = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

It follows that there exist some relations between the atomic susceptibility functions and the atomic noise spectra which are verified for any atomic system:

$$\chi(\omega) - \chi(\omega)^{\dagger} = i[\sigma(\omega) - \eta \sigma(-\omega)^* \eta]. \quad (14)$$

As $[\chi(\omega) - \chi(\omega)^{\dagger}]$ is the dissipative part of the susceptibility function, this can be considered as the fluctuation dissipation relation [14] for our problem.

The input fields obey the commutation relations (4). It is clear that the output fields obey the same relations. These relations can be written in the matrix notation:

$$V^{\text{in}}(\omega) - \eta V^{\text{in}}(-\omega)^* \eta = \epsilon, \quad (15a)$$

$$V^{\text{out}}(\omega) - \eta V^{\text{out}}(-\omega)^* \eta = \epsilon. \quad (15b)$$

Straightforward but lengthy algebraic manipulations show that the relation (15b) is a consequence of (15a) and (14). The fact that the compatibility between dissipation and fluctuations is ensured for any atomic configuration can be considered as an a posteriori justification of the method.

8. Case of a vacuum input

We finally consider the particular case where the input fields correspond to the vacuum state. In this case, our results can be compared with the results of the standard quantum approach [1] in a simple manner^{**}.

The transformation (13) of the covariance matrices can be written as

$$\begin{aligned} V^{\text{out}}(\omega) &= V^{\text{in}}(\omega) + \mu(\omega) D(\omega) \mu(\omega)^*, \\ D(\omega) &= -V^{\text{in}}(\omega) \mu(\omega)^{\dagger -1} - \mu(\omega)^{-1} V^{\text{in}}(\omega) \\ &+ V^{\text{in}}(\omega) + V^{\text{at}}(\omega). \end{aligned}$$

^{**} For comparing the various matrices, one has however to take care of the order of lines and columns which is not the same in both methods.

For a vacuum input, one has

$$V^{\text{in}}(\omega) = \frac{1}{2}(1 + \varepsilon), \quad (16a)$$

$$V^{\text{out}}(\omega) = V^{\text{in}}(\omega) + :V^{\text{out}}(\omega), \quad (16b)$$

$$:V^{\text{out}}(\omega) = \mu(\omega) D(\omega) \mu(\omega)^\dagger, \quad (16c)$$

where $:V^{\text{out}}(\omega)$ is the matrix of the normally ordered covariances. As in the standard approach, this matrix is related to a "diffusion matrix" $D(\omega)$ (the so called "drift matrix" is contained in $\mu(\omega)$).

An advantage of our approach is that it provides a compact expression for this frequency dependent diffusion matrix; $D(\omega)$ can be written as a function of the susceptibility and noise functions $\chi(\omega)$ and $\sigma(\omega)$ or directly as a function of the retarded correlation function $G(\omega)$:

$$D(\omega) = NT^{-1}\varepsilon \left[-i\frac{1}{2}(1 + \varepsilon) \chi(\omega)^\dagger + i\chi(\omega) \frac{1}{2}(1 + \varepsilon) + \sigma(\omega) \right] \varepsilon T^{-1},$$

$$D(\omega) = \Delta(\omega) + \Delta(\omega)^\dagger,$$

$$\Delta(\omega) = NT^{-1}\varepsilon \left[G(\omega) \frac{1}{2}(1 - \varepsilon) + \eta G(-\omega)^* \eta \frac{1}{2}(1 + \varepsilon) \right] \varepsilon T^{-1}.$$

9. Conclusion

It now remains to compute explicitly the atomic functions for specific atomic configurations. Forthcoming publications will give the results of such computations for bistable devices built on one-photon or two-photon nonlinearities. An interesting feature is that the results of the semiclassical theory are recovered for the Kerr limit in both cases.

Acknowledgements

Thanks are due to Claude Fabre, Elisabeth Giacobino, Antoine Heidmann, Marc-Thierry Jaekel and Luigi Lugiato for stimulating discussions. This work has been done in the frame of the EEC contract Esprit BRA 3186.

References

- [1] A representative example and some references may be found for example in: M.J. Collett and D.F. Walls, *Phys. Rev. A* 32 (1985) 2887.
- [2] B. Yurke, *Phys. Rev. A* 32 (1985) 300.
- [3] S. Reynaud, C. Fabre and E. Giacobino, *J. Opt. Soc. Am. B* 4 (1987) 1520.
- [4] S. Reynaud and A. Heidmann, *Optics Comm.* 71 (1989) 209.
- [5] C. Fabre, E. Giacobino, A. Heidmann, L. Lugiato, S. Reynaud, M. Vadacchino and Kaige Wang, *Quantum Optics* 2 (1990) 159.
- [6] C. Fabre, E. Giacobino, A. Heidmann and S. Reynaud, *J. de Physique* 40 (1989) 1209.
- [7] S. Reynaud, C. Fabre, E. Giacobino and A. Heidmann, *Phys. Rev. A* 40 (1989) 1440.
- [8] P. Grangier, J.F. Roch and S. Reynaud, *Optics Comm.* 72 (1989) 387; P. Grangier and J.F. Roch, *Quantum Optics* 1 (1989) 17.
- [9] Early works on atomic fluctuations are reviewed in: L. Lugiato, in: *Progress in Optics XXI*, ed. E. Wolf (North Holland, Amsterdam, 1984) p. 69.
- [10] M. Reid and D.F. Walls, *Phys. Rev. A* 33 (1986) 4465; *A* 34 (1986) 4929.
- [11] H.J. Carmichael, *Phys. Rev. A* 33 (1986) 3262.
- [12] L. Lugiato, *Phys. Rev. A* 33 (1986) 4079.
- [13] M. Reid, *Phys. Rev. A* 37 (1988) 4792.
- [14] R. Kubo, *Reports in Progress in Physics* 29 (1966) 255.
- [15] B.R. Mollow, *Phys. Rev.* 188 (1969) 1969.
- [16] A large list of references may be found in: B.R. Mollow, *Progress in Optics XIX*, ed. E. Wolf (North Holland, Amsterdam, 1981) p. 1.
- [17] A. Kazantzev, V.S. Smirnov, V.P. Sokolov and A.N. Tumaikin, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 81 (1981) 889; *Sov. Phys. JETP* 54 (1981) 474.
- [18] M.J. Collett, D.F. Walls and P. Zoller, *Optics Comm.* 52 (1984) 145.
- [19] A. Heidmann and S. Reynaud, *J. de Physique* 46 (1985) 1837.
- [20] H.M. Gibbs, *Optical bistability* (Academic Press, New York, 1985).
- [21] M. Lewenstein and T.W. Mossberg, *Phys. Rev. A* 38 (1988) 2048.
- [22] J.M. Courty and S. Reynaud, *Optics. Comm.* 72 (1989) 93.
- [23] P. Grangier, G. Roger, A. Aspect, A. Heidmann and S. Reynaud, *Phys. Rev. Lett.* 47 (1986) 687.
- [24] A. Heidmann and S. Reynaud, *J. Modern Optics* 34 (1987) 923.
- [25] Compare with the input output expressions in: C.W. Gardiner and M.J. Collett, *Phys. Rev. A* 31 (1985) 3761.
- [26] H. Mori, *Progress in Theoretical Physics* 33 (1965) 423.
- [27] J.M. Courty, Thèse de l'Université Pierre et Marie Curie (Paris 1990, unpublished).

c. Conclusions

L'article est écrit dans le cas où deux modes du champ interagissent avec deux composantes du dipôle. La forme du hamiltonien (relation (1)) se généralise immédiatement au cas de n modes du champ interagissant avec m composantes du dipôle, puisque dans l'approximation dipolaire électrique le couplage est linéaire. Dans tous les cas, les relations que nous utilisons conservent les relations de commutation des champs libres.

Nous disposons donc d'un outil puissant pour calculer les fluctuations quantiques de champs interagissant avec des atomes quelconques, placés dans un résonateur optique. Cette théorie a été appliquée avec succès par Philippe Grangier au cas d'atomes à trois niveaux couplés à deux modes du champ, dans le but de modéliser une mesure quantique non-destructive [Grangier 92].

6 Ordres de grandeur

Le but de ce paragraphe est d'obtenir les ordres de grandeur des paramètres introduits dans la théorie correspondant à des expériences possibles.

a. Liens entre les paramètres théoriques et l'expérience

Relions tout d'abord les paramètres réduits introduits dans l'étude de la bistabilité optique aux paramètres caractérisant un milieu atomique et un champ laser.

Un faisceau lumineux continu peut-être caractérisé par exemple par la puissance qu'il transporte P et par sa surface s . Le flux d'énergie moyen dans le faisceau, noté I vaut P/s . Dans l'approximation quasi monomode introduite au chapitre I, un faisceau lumineux est décrit par un champ \hat{A} . La normalisation de A est telle que $\langle \hat{A} \rangle^2$ représente le flux numérique de photons dans le faisceau. En notant ω_L la fréquence optique des photons, on a la relation :

$$\hbar\omega_L \langle \hat{A} \rangle^2 = P \quad (\text{III.80})$$

Le modèle de la bistabilité optique décrit l'interaction d'un champ \hat{A} avec N atomes, ce qui correspond à l'interaction d'un faisceau de surface s avec milieu atomique de densité n , sur une longueur l avec :

$$N = n s l \quad (\text{III.81})$$

Dans ce modèle la transition atomique est décrite dans le cadre de l'atome à deux niveaux. Elle est caractérisée par l'énergie de la transition $\hbar\omega_0$, le module de l'élément de matrice de l'opérateur dipôle entre les deux niveaux, noté d , et par la largeur naturelle du niveau excité, qui vaut 2γ , où γ est le taux de relaxation des cohérences atomiques. Ces trois paramètres ne sont pas indépendants puisque l'existence de la largeur naturelle est liée au couplage du dipôle atomique au champ électromagnétique dans l'état vide.

On montre que [Cohen-Tannoudji 88, p.491] :

$$2\gamma = \left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\right)^3 \frac{d^2}{3\pi\epsilon_0\hbar} \quad (\text{III.82})$$

où λ est la longueur d'onde de la transition $\lambda_0 = 2\pi c / \omega_0$.

Dans la bistabilité optique, il y a deux fréquences optiques ω_0 et ω_L très proches. On note $\delta = (\omega_0 - \omega_L)/\gamma$ le désaccord atomique. On a toujours $\gamma\delta \ll \omega_0$. On peut donc considérer que les deux longueurs d'onde associées aux deux fréquences optiques sont égales et les noter λ .

$$\lambda_0 = \frac{c}{2\pi\omega_0}, \quad \lambda_L = \frac{c}{2\pi\omega_L} \quad \text{et} \quad \lambda_0 \approx \lambda_L = \lambda \quad (\text{III.83})$$

Nous allons maintenant exprimer quelques paramètres réduits à l'aide de γ et λ . A partir des relations (III.56a), nous pouvons exprimer les paramètres réduits $|\beta^{in}|^2$ et $|\beta^0|^2$ introduits dans l'article inséré au III.4, qui sont proportionnels respectivement à l'intensité du champ incident sur la cavité I^{in} et à l'intensité du champ intracavité I_0 .

$$\text{En effet} \quad \beta^{in} = g \frac{\langle \hat{A}^{in} \rangle}{\gamma}, \quad \beta^0 = g \frac{\langle \hat{A}_0 \rangle}{\gamma} \quad \text{et} \quad g = \sqrt{\frac{\hbar\omega_L}{2\epsilon_0 s c}} \frac{d}{\hbar} = \frac{3\pi}{s} \gamma \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^2 \quad (\text{III.84})$$

$$\text{On a donc} \quad |\beta^{in}|^2 = \frac{I^{in}}{I_{sat}}, \quad |\beta^0|^2 = \frac{I_0}{I_{sat}} \quad \text{avec} \quad I_{sat} = \frac{\hbar\gamma c}{3\pi} \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^3 \quad (\text{III.85})$$

b. Absorption et non-linéarité

Au chapitre II, nous avons utilisé des expressions (II.29 et 30) donnant le coefficient d'absorption linéaire et la susceptibilité non linéaire d'ordre trois Kerr d'une assemblée d'atomes à deux niveaux. Nous allons justifier ces formules et les ordres de grandeurs obtenus. Le coefficient d'absorption linéaire α_L décrit par définition les pertes moyennes subies par un champ peu intense à la traversée d'un milieu atomique : ce coefficient est relié à la partie réelle de la susceptibilité atomique χ prise pour une fréquence ω nulle et à l'ordre 0 en $|\beta_0|^2$, on a la relation :

$$\alpha_L l = \text{Re} \left(-iNg^2 \chi_{11} (\omega = 0, |\beta_0|^2 = 0) \right) \quad (\text{III.86})$$

$$\text{soit} \quad \alpha_L l = \frac{Ng^2}{\gamma} \frac{l}{l + \delta^2} \quad (\text{III.87})$$

En utilisant l'expression de g et n , et ($\lambda_0 = \lambda_L = \lambda$), nous obtenons :

$$\alpha_L = n 3\pi \left(\frac{\lambda_0}{2\pi}\right)^2 \frac{l}{l + \delta^2} \quad (\text{III.88})$$

La formule (III.86) montre que les pertes par absorption à résonance $\alpha_L(\delta=0) l$ sont données par Ng^2/γ . Le coefficient de bistabilité C est donc bien le rapport des pertes par absorption à résonance et du coefficient de transmission de l'intensité par le miroir de couplage $2\gamma_{cav}$.

$$C = \frac{Ng^2}{2\gamma_{cav} \gamma} \quad (\text{III.89a})$$

Le paramètre de bistabilité peut s'exprimer à l'aide de facteurs indépendants du couplage entre l'atome et le champ. III 84 et III 89 donnent :

$$C = \frac{N}{2\gamma_{cav}} \frac{3\pi}{s} \left(\frac{\lambda}{2\pi} \right)^2 \quad (\text{III.89b})$$

La susceptibilité non linéaire d'ordre trois, $\chi^{(3)}$ est liée à la phase non linéaire accumulée par le champ à la traversée du milieu atomique, qui est donnée par la formule :

$$\Phi_{NL} = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\chi^{(3)}}{\epsilon_0 c} I_0 l \quad (\text{III.90})$$

où I_0 est l'intensité du champ.

Cette phase non linéaire peut se déduire de la matrice des susceptibilités atomiques, pour une fréquence d'analyse nulle et en ne conservant que le terme d'ordre 1 en $|\beta_0|^2$. Elle a pour expression :

$$\Phi_{NL} = \text{Im} \left(-iNg^2 \frac{\partial}{\partial |\beta_0|^2} \chi_{11}(\omega=0, |\beta_0|^2=0) \right) \quad (\text{III.91})$$

soit

$$\Phi_{NL} = \frac{Ng^2}{\gamma} \frac{\delta}{(1+\delta^2)^2} |\beta_0|^2 \quad (\text{III.92})$$

On utilise alors les expressions de N , g et $|\beta_0|^2$ pour obtenir :

$$\chi^{(3)} = n \frac{d^4}{\epsilon_0 \hbar^3} \frac{1}{\gamma^3} \frac{\delta}{(1+\delta^2)^2} \quad (\text{III.93})$$

$$\chi^{(3)} = n 36\pi^2 \frac{\epsilon_0}{\hbar\gamma} \left(\frac{\lambda_0}{2\pi} \right)^6 \frac{\delta}{(1+\delta^2)^2} \quad (\text{III.94})$$

c. Evaluation des paramètres dans le cas du césium

Nous calculons les grandeurs ci-dessus avec des valeurs numériques empruntées au Césium. La transition D_2 du Césium $6s_{1/2} \rightarrow 6p_{3/2}$ est caractérisée par la longueur d'onde $\lambda=852,1\text{nm}$ et la durée de vie $1/2\gamma=30\text{ ns}$ ou $2\gamma/2\pi=5,3\text{MHz}$.

Le coefficient de proportionnalité I_{sat}^{-1} entre $|\beta_0|^2$ et I_0 intervenant dans la relation (III.85) vaut :

$$\frac{3\pi}{\hbar\gamma_c} \left(\frac{\lambda}{2\pi} \right)^3 = 0,47\text{ cm}^2 / \text{mW} \quad (\text{III.95})$$

On en déduit l'intensité de saturation

$$I_{sat} = 2,1\text{mW} / \text{cm}^2 \quad (\text{III.96})$$

Numériquement, on obtient pour les coefficients α_L et χ^3 :

$$\text{Log}_{10} \alpha_L = \text{Log}_{10} n - \text{Log}_{10} (1+\delta^2) - 13 \quad (\text{III.97})$$

$$\text{Log}_{10} \chi^{(3)} = \text{Log}_{10} n + \text{Log}_{10} \frac{\delta}{(1 + \delta^2)^2} - 23 \quad (\text{III.98})$$

où n est exprimé en atomes par mètre-cube.

d. Conclusion

Les ordres de grandeur obtenus montrent qu'il est possible d'obtenir de la bistabilité avec de petits nombres d'atomes de césium, une cavité de finesse raisonnable (inférieure à 100) et des puissances optiques très faibles (III.96).

La possibilité d'obtenir de grandes non-linéarités pour de grands désaccords atomiques ($\delta > 10$) permet d'avoir de la bistabilité dans des conditions où les atomes, même s'ils ne se comportent pas comme un effet Kerr instantané, ne rajoutent pas trop de bruit à la lumière réfléchiée par la cavité. La possibilité d'utiliser une cavité de finesse faible, donc de largeur en fréquence importante rend accessible aux expériences le régime dit de "mauvaise cavité" où la largeur de la cavité est supérieure à celle de la transition atomique. Nous avons vu dans l'article inséré au paragraphe 4.b que ce régime est favorable à la compression des fluctuations de la lumière réfléchiée par la cavité. Cette conclusion a motivé l'étude expérimentale que nous présentons au chapitre suivant.

IV. Expérience avec une cavité optique contenant des atomes froids

Dans ce chapitre, après une brève discussion des qualités d'un nuage d'atomes de césium ralentis et piégés par laser pour réaliser un bistable optique capable de réduire les fluctuations quantiques de la lumière, nous décrivons en détail au paragraphe 2 le dispositif expérimental qui a été réalisé. Ensuite, nous relatons l'observation du premier laser à atomes froids et évoquons son intérêt pour l'optique quantique (paragraphe 3). Le paragraphe 4 est consacré à l'étude expérimentale de la bistabilité optique dans les atomes froids, à l'estimation des paramètres de bistabilité que nous sommes capables d'obtenir et à la comparaison de nos résultats avec le modèle des atomes à deux niveaux présenté au chapitre III.

1 Pourquoi le césium dans un piège magnéto-optique ?

a. Les avantages du césium froid

Au chapitre II, nous avons vu qu'un des meilleurs milieux non linéaires possibles pour la réalisation expérimentale d'une cavité "mangeuse de bruit" est une assemblée d'atomes à deux niveaux immobiles. Il est possible de réaliser des nuages d'atomes alcalins pratiquement immobiles à l'aide de l'action combinée de faisceaux lasers et d'un champ magnétique inhomogène qui ralentissent et piègent des atomes provenant d'un jet [Raab 87] ou, depuis 1990, d'une vapeur en cellule [Monroe 90]. L'élargissement Doppler pour ces atomes piégés est alors très inférieur à leur largeur naturelle. Nous avons donc choisi de construire un tel piège magnéto-optique contenant du césium. Il existe plusieurs raisons justifiant le choix du césium plutôt que d'un autre atome.

Tout d'abord, le césium, comme tous les alcalins, possède une transition très intense à partir de son état fondamental, qui permet un fort couplage entre les atomes et le champ électromagnétique. D'autre part, cette transition est dans le très proche infrarouge (852,12nm). Elle peut donc être excitée par un laser titane-saphir, ou des diodes laser. De plus, cette longueur d'onde correspond au domaine spectral où les photodiodes au silicium ont leur meilleur rendement. Ce point est important car la mesure des fluctuations de la lumière, et de la compression de ces fluctuations n'est possible qu'avec des photodétecteurs ayant une efficacité quantique proche de 1 (c'est à dire donnant 1 électron dans le photocourant par photon reçu).

Enfin, les propriétés des nuages d'atomes de césium piégés sont très intéressantes. Les premières expériences sur les pièges magnéto-optiques ont montré que la vitesse quadratique moyenne des atomes piégés est très faible, les vitesses les plus lentes étant atteintes dans le césium (1,5 cm/s), grâce à sa masse importante. Elles ont aussi montré que les nuages d'atomes froids peuvent avoir de grandes épaisseurs optiques (près de 100 % d'absorption à résonance) [Gibble 92].

Outre ces raisons techniques, le choix du césium dans un piège magnéto-optique a été encouragé par l'expérience acquise par Delphine Grison et Christophe Salomon sur un tel piège, au laboratoire.

b. Le césium est-il un atome à deux niveaux ?

La figure (IV-1) détaille la structure de la raie D_2 à partir de l'état fondamental du césium que nous allons utiliser. Nous allons voir dans quelle mesure il est possible de considérer que la transition $6S_{1/2} F=4 \rightarrow 6P_{3/2} F'=5$ de cette raie peut être modélisée par une transition à deux niveaux pour la description de la réduction de bruit quantique dans la bistabilité optique. Examinons tout d'abord cette transition : à l'échelle de la largeur naturelle des états excités du niveau $6P_{3/2}$ (de l'ordre de 5MHz), la transition $6S_{1/2} F=4 \rightarrow 6P_{3/2} F=5$ est isolée des autres composantes de structure hyperfine de la raie D_2 . Comme le montre la figure IV-1, cette transition est la transition ayant la plus grande énergie $\hbar\omega_0$ parmi les transitions hyperfines permises à partir du niveau $6S_{1/2} F=4$. Il est donc possible de sonder cette transition avec une fréquence laser ω_L désaccordée jusqu'à 100MHz (c'est à dire 20 largeurs naturelles) dans le rouge ($\omega_L < \omega_0$) et désaccordée d'une quantité quelconque dans le bleu, sans que le laser n'interagisse avec les autres transitions hyperfines de la raie D_2 . A ce stade, la transition du césium $6S_{1/2} F=4 \rightarrow 6P_{3/2} F'=5$ que nous allons utiliser est décrite par un système à 20 niveaux (9 dans l'état fondamental et 11 dans l'état excité), qui sont les sous-niveaux Zeeman des états $6S_{1/2} F=4$ et $6P_{3/2} F=5$.

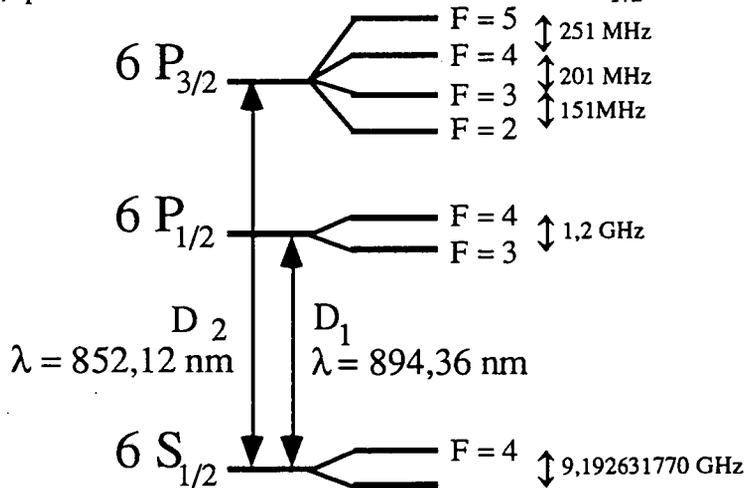


Figure IV-1 : Structure hyperfine des transitions D_1 et D_2 du césium.

Cette structure Zeeman est très importante car elle permet d'expliquer les mécanismes de ralentissement et de piégeage conduisant aux températures très basses observées dans les nuages d'atomes froids, comme nous le verrons au paragraphe 2). Lorsqu'un atome ayant une telle structure Zeeman interagit avec un champ laser, il existe des phénomènes de pompage optique entre les sous-niveaux Zeeman de l'état fondamental ou de l'état excité. Ce pompage optique est le résultat de cycles d'absorption-émission spontanée de photons par la transition : les temps caractéristiques du pompage optique Zeeman sont donc longs ou très longs devant la durée de vie de l'état excité. La dynamique d'un atome tel que le césium couplé au champ électromagnétique sur sa transition $6S_{1/2} F=4 \rightarrow 6P_{3/2} F=5$ sera très différente de celle d'un atome à deux niveaux sur

des échelles de temps comparables aux temps de pompage optique Zeeman, donc inférieures à la durée de vie de l'état excité. En revanche, pour des fréquences d'évolution supérieures ou de l'ordre de l'inverse de la durée de vie de l'état excité, il paraît raisonnable de supposer que la dynamique du césium rejoint celle d'un atome à deux niveaux.

Comme nous l'avons vu au chapitre III, des atomes placés dans une "mauvaise cavité", c'est à dire une cavité dont la largeur des résonances est supérieure à la largeur naturelle des atomes, permettent de réaliser une cavité "mangeuse de bruit". La réduction de bruit se produit pour des fréquences d'analyse comprises entre 0 et la largeur de la cavité. En utilisant une cavité optique de largeur supérieure à 5MHz, on peut penser que le modèle d'atome à deux niveaux décrira les fluctuations de la lumière sortant d'une cavité contenant des atomes de césium froids, si on se limite aux fluctuations de fréquence de l'ordre de, ou supérieures à, 5MHz.

2 Montage expérimental

a. Principe du piège magnéto-optique

Un piège magnéto-optique est un dispositif permettant de ralentir et piéger des atomes neutres à partir d'une vapeur atomique de très basse pression. Les atomes sont ralentis par trois paires d'ondes lumineuses qui se propagent selon les trois axes d'un trièdre trirectangle (Oxyz) et qui se coupent au voisinage du point O (figure IV-2). Les atomes sont piégés par l'action combinée d'un champ magnétique inhomogène et de ces ondes lumineuses. Avant de justifier la disposition précise des faisceaux lumineux et du champ magnétique, nous allons expliquer de manière qualitative le fonctionnement du piège magnéto-optique. Une étude complète du fonctionnement d'un tel piège est décrite dans la thèse de Delphine Grison [Grison 92].

i. Mécanisme de piégeage

Considérons tout d'abord une seule dimension d'espace (Oz) et un atome ayant une transition du type $F=0 \rightarrow F'=1$ (moment cinétique nul dans l'état fondamental, et 1 dans l'état excité). Le champ magnétique inhomogène a un gradient b constant selon Oz ($b \geq 0$). Les atomes sont éclairés par une paire d'ondes se propageant selon Oz. L'onde allant vers les z croissants est polarisée σ^+ et celle allant vers les z décroissants est polarisée σ^- : elles ont même hélicité. La fréquence des ondes, ω_p , est décalée vers le rouge de la fréquence ω_0 de la transition atomique : $\omega_p < \omega_0$.

Dans ces conditions, on peut montrer qu'un atome situé en un point d'abscisse z avec une vitesse v subit une force f selon Oz dépendant de z et v et pouvant être développée au voisinage de $z=0$, $v=0$ sous la forme :

$$f = -\alpha v - \beta z \quad \alpha \geq 0, \beta \geq 0 \quad (\text{IV-1})$$

Le terme $-\alpha v$ est un terme de friction et $-\beta z$ une force de rappel vers le point O. Le signe du coefficient β change si le signe de b change, ou si on échange les polarisations σ^+ et σ^- . L'équation (IV-1) montre que le mouvement de l'atome est celui d'un oscillateur harmonique

amorti ; la position d'un atome proche du point O ayant une faible vitesse v relaxe vers le point O : l'atome est piégé.

La généralisation à trois dimensions se fait en reproduisant la situation à une dimension sur les trois axes d'un trièdre Oxyz. En ce qui concerne le champ magnétique inhomogène, notons qu'il ne peut pas avoir un gradient égal dans les trois directions de l'espace car on aurait alors $\text{div } \vec{B} = 3b \neq 0$. Une solution consiste à créer un champ magnétique inhomogène par deux bobines d'axe z, parcourues par des courants I de sens contraire et placées de part et d'autre du plan $z=0$ (figure IV-2). Le champ magnétique s'annule au point O et vaut en un point de coordonnées cylindriques z et \vec{r} (IV-7) :

$$\vec{B} = b \left(z \vec{e}_z - \frac{1}{2} \vec{r} \right) \quad \text{--- (IV-2)}$$

Les gradients de champ magnétique selon O_x et O_y ont un signe opposé à celui selon O_z . Pour obtenir une force de rappel selon les directions x et y, il faut donc utiliser une polarisation σ^- dans le sens des x et y croissants, et une polarisation σ^+ dans l'autre sens. La disposition des faisceaux lumineux piégeant et du champ magnétique est représentée par la figure (IV-2).

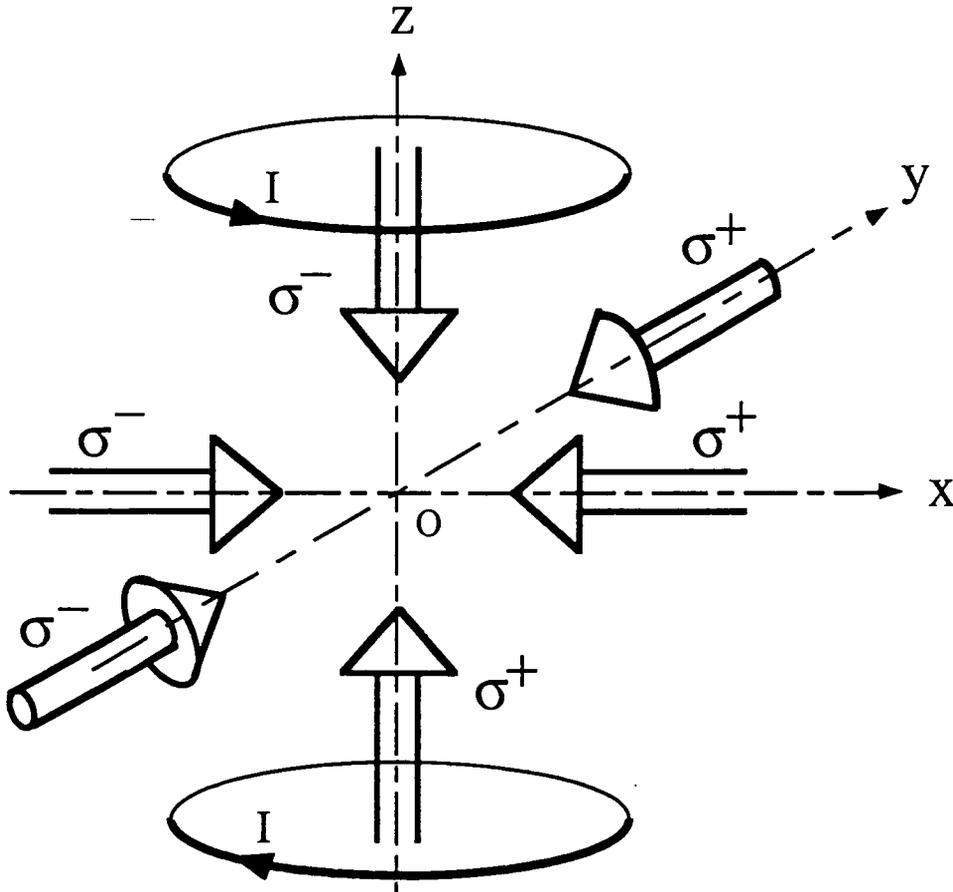


Figure IV-2 : Disposition relative des ondes piège et des bobines de champ magnétique.

ii. Régime stationnaire du piège magnéto-optique

Nous venons de décrire le mécanisme de ralentissement et de piégeage des atomes, c'est à dire le mécanisme de remplissage du piège à partir d'une vapeur atomique. L'efficacité de ce mécanisme, c'est à dire la capacité du piège à attraper des atomes éloignés du point O ou ayant une grande vitesse dépend des paramètres de l'expérience. Le nombre d'atomes piégés augmente avec le diamètre des faisceaux laser et dépend de l'écart à résonance de leur fréquence, de leur intensité, ainsi que du gradient de champ magnétique. [Clairon 92] [Gibble 92].

Cependant, le nombre d'atomes piégés n'augmente pas indéfiniment au cours du temps. Il existe des processus limitant le nombre d'atomes piégés : par exemple les collisions entre les atomes piégés et les atomes rapides de la vapeur de césium ou les autres atomes ou molécules présents dans la cellule [Sesko 89]. Ces collisions expliquent pourquoi le piège ne peut pas se remplir si la pression partielle de césium dans la cellule est trop grande (supérieure à quelques 10^{-7} torr), et pourquoi il faut travailler avec une cellule aussi propre que possible. La densité atomique dans le piège est aussi limitée par la diffusion multiple [Walker 90] : la lumière de fluorescence d'un atome du piège peut être réabsorbée par un autre atome. L'impulsion ainsi échangée entre les atomes tend à les éloigner les uns des autres.

Comme le montre la figure IV-1, le niveau fondamental du césium possède deux composantes de structure hyperfine $F=3$ et $F=4$ bien séparées (de 9,2GHz). Compte tenu de la séparation en fréquence (250 MHz) des niveaux $F' = 4$ et $F' = 5$ relativement à la largeur Doppler (500 MHz) des atomes libres dans la cellule, les faisceaux laser accordés au voisinage de la transition $6S_{1/2} F=4 \rightarrow 6P_{3/2} F'=5$ peuvent exciter le niveau $6P_{3/2} F'=4$. Les atomes peuvent alors relaxer par émission spontanée vers l'autre sous niveau hyperfin de l'état fondamental, ($6S_{1/2} F=3$) et se trouver exclus des cycles d'absorption-émission spontanée responsables du ralentissement. Il est donc nécessaire de contrebalancer ce pompage optique hyperfin par un laser accordé sur la transition $6S_{1/2} F=3 \rightarrow 6P_{3/2} F'=4$.

b. Le montage expérimental, solutions techniques retenues

Le but de mon travail expérimental est l'étude de la bistabilité optique dans une cavité contenant les atomes ralentis, et des capacités d'un tel système à réduire les fluctuations quantiques de la lumière réfléchiée par la cavité. Ce but a guidé la conception de la cellule contenant la vapeur de césium, ainsi que le choix des lasers fournissant les ondes piégeantes et le faisceau, appelé faisceau sonde dans la suite, qui permettra d'observer la bistabilité optique.

i. Les lasers

Les puissances lumineuses nécessaires pour ralentir les atomes sont faibles : 20mW suffisent si le diamètre des ondes piégeantes est de l'ordre d'un centimètre. La puissance nécessaire pour observer la bistabilité, même avec une cavité de petite finesse est très faible de l'ordre ou inférieure à $100\mu W$. Ces puissances sont accessibles à des diodes laser maintenant courantes et peu chères. En revanche, les diodes laser ont une grande largeur spectrale (qui peut être réduite par asservissement optique sur une cavité Fabry-Perot de grande finesse), et un bruit

d'intensité important (très supérieur au shot noise) sur une gamme de fréquence très large (supérieure au GHz pour une diode laser libre). Nous avons donc choisi de produire le faisceau sonde à l'aide d'un laser Titane-saphir pompé par un laser à argon ionisé. En effet le laser Titane-saphir délivre un faisceau lumineux intense accordable en fréquence dont le bruit de phase ou d'intensité correspond au bruit quantique standard pour des fréquences d'analyse supérieures à 1 ou 2 MHz.

Le laser titane-saphir a été construit au laboratoire sur le modèle de celui mis au point par F. Biraben. Il s'agit d'un laser en anneau (figure IV-3). La longueur d'onde de résonance du césium (852,123nm) est sélectionnée grâce à un filtre de Lyot à quatre lames de largeur 0,25Å, par un étalon mince, un étalon épais et enfin la cavité elle-même; les intervalles spectraux libres de ces trois éléments sont respectivement 150 GHz, 25 GHz et 170 MHz. La longueur de l'étalon épais, composé de deux prismes dont l'un est mobile grâce à une céramique piezo-électrique, est asservie en longueur de manière à optimiser la puissance de sortie du laser. La longueur de la cavité peut être balayée à l'aide d'un bilame ou de la céramique piezo-électrique PZ1 qui porte un des miroirs de la cavité. Grâce à l'asservissement de l'étalon épais, il est possible de balayer continument la fréquence du laser, sans saut de mode sur une plage d'environ 10 GHz, ce qui est suffisant pour trouver et parcourir les transitions $6S_{1/2} F=4 \rightarrow 6P_{3/2} F'=2,3,4,5$ du césium. Le sens de propagation de l'oscillation laser dans la cavité en anneau est sélectionné par une lame à effet Faraday placée dans l'entrefer d'un aimant et par un système de trois miroirs (M4 M5 M6) non coplanaires. Pour un sens de propagation, les rotations de polarisations dues à l'effet Faraday et aux miroirs M4M5M6 se compensent tandis qu'elles s'ajoutent pour l'autre sens, ce qui introduit des pertes puisque certains éléments sélectifs dans la cavité sont à incidence de Brewster pour la polarisation horizontale.

Les miroirs utilisés sont très réfléchissants entre 750 et 850 nm. Le miroir de sortie a une transmission d'environ 4 % à 852 nm. Lorsqu'il est pompé avec un laser à argon ionisé de 10 W toutes raies (vert et bleu), le laser Ti-saphir délivre au mieux 1W monomode à 852 nm et régulièrement 700mW. Cette puissance est 6 fois supérieure à celle des diodes laser Spectra Physics. Le jitter du laser est de l'ordre de 1MHz.

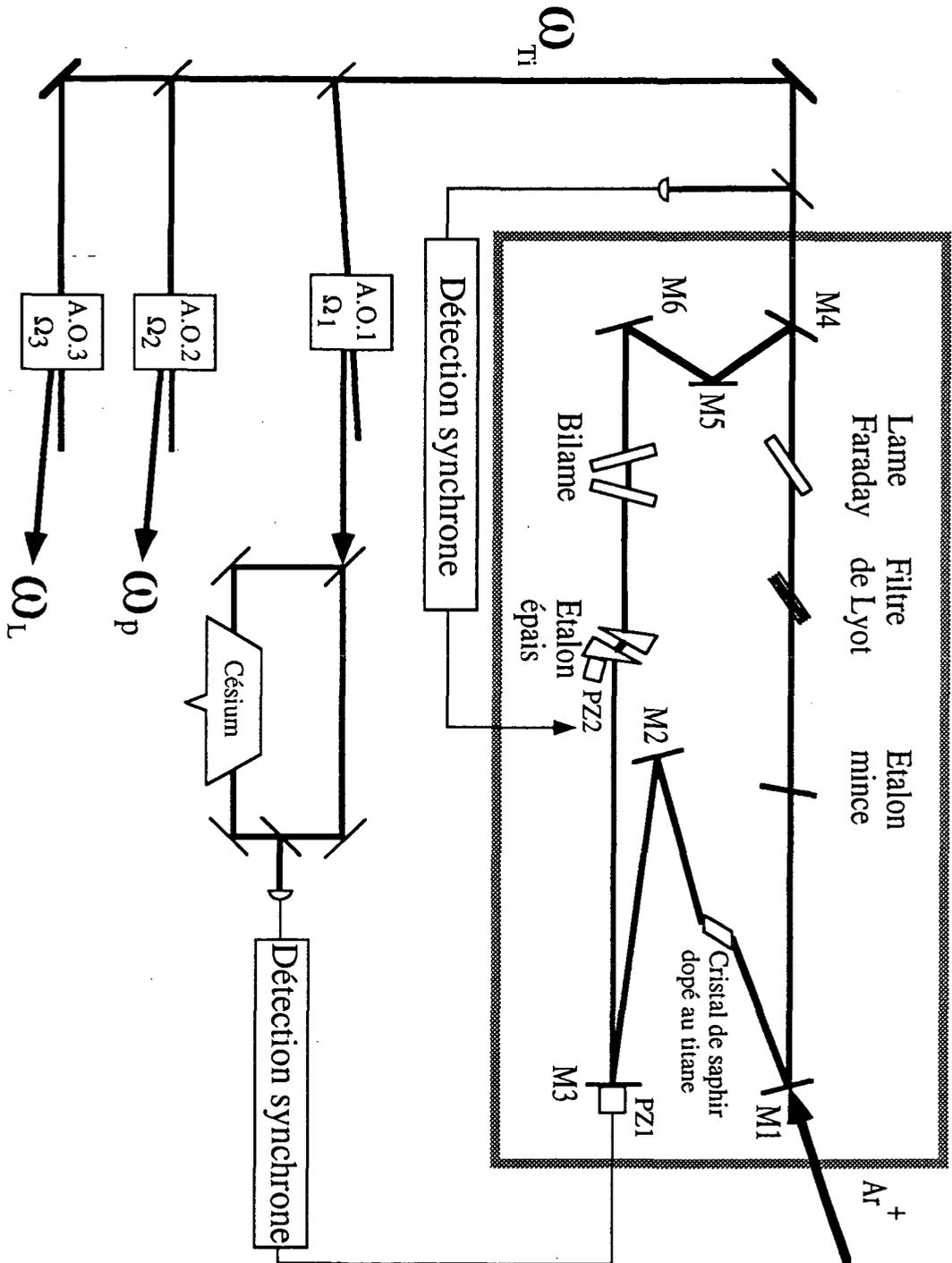


Figure IV-3 : Schéma du laser titane-saphir et de la fabrication des ondes piègeantes et de l'onde sonde.

II. Fabrication de l'onde sonde et des ondes piégeantes

La puissance du laser est environ 1000 fois supérieure à la puissance requise pour étudier la bistabilité optique. Nous utilisons donc aussi la lumière du laser Titane-Saphir pour ralentir et piéger les atomes. Les faisceaux pièges de fréquence ω_p doivent être désaccordés de 2 à 3 largeurs naturelles dans le rouge de la fréquence ω_0 de la transition $6S_{1/2} F=4 \rightarrow 6P_{3/2} F'=5$, soit $(\omega_0 - \omega_p) / 2\pi \cong 15 \text{ MHz}$. La fréquence du faisceau sonde ω_L doit être décalée dans le rouge ou dans le bleu de ω_0 , d'une quantité variable selon les conditions que nous voulons étudier. Il est possible, à l'aide de modulateurs acousto-optiques de modifier la fréquence d'une onde laser par diffraction sur une onde sonore se propageant dans un cristal. L'efficacité de diffraction peut atteindre 60 à 80 % pour une longueur d'onde de 852nm.

Les fréquences ω_p et ω_L sont produites de la manière suivante (figure IV-3) : tout d'abord, on prélève une petite partie du faisceau issu du laser Titane-saphir, et on décale sa fréquence ω_{Ti} de $\Omega_1/2\pi = 200 \text{ MHz}$ vers les basses fréquences en utilisant l'ordre -1 de diffraction du modulateur AO 1. La fréquence ainsi décalée est comparée à la fréquence ω_0 par une technique d'absorption saturée dans une cellule de césium, ce qui permet à l'aide d'une détection synchrone, d'asservir la fréquence du laser sur la valeur :

$$\omega_{Ti} = \omega_0 + \Omega_1 \quad (\text{IV-3})$$

Les faisceaux pièges de fréquence ω_p sont alors produits à partir du faisceau issu du laser par l'ordre de diffraction -1 du modulateur acousto-optique AO 2 piloté par une fréquence acoustique $\Omega_2/2\pi = 215 \text{ MHz}$. On obtient donc la fréquence piège recherchée :

$$\omega_p = \omega_{Ti} - \Omega_2 = \omega_0 + \Omega_1 - \Omega_2 \cong \omega_0 - 2\pi \times 15 \text{ MHz} \quad (\text{IV-4})$$

Après le modulateur, la puissance disponible pour le ralentissement est de l'ordre de 350mW.

La fréquence de l'onde sonde ω_L est produite de la même manière, par diffraction d'un faisceau de fréquence ω_{Ti} dans l'ordre -1 du modulateur acousto-optique AO 3 piloté par la fréquence Ω_3 . Nous disposons de 2 modulateurs AO3 permettant d'obtenir deux gammes de fréquences ω_L et donc différents désaccords $\delta/2\gamma = (\omega_L - \omega_0)/2\gamma$:

1er modulateur	$170 \leq \Omega_3/2\pi \leq 230 \text{ MHz}$	$-6 \leq (\omega_L - \omega_0)/2\gamma \leq 6$
2ème modulateur	$40 \leq \Omega_3/2\pi \leq 80 \text{ MHz}$	$24 \leq (\omega_L - \omega_0)/2\gamma \leq 32$

Le premier modulateur permet d'étudier la bistabilité optique au voisinage de la résonance atomique, le second pour de grands désaccords dans le bleu de la transition, là où le système doit se comporter comme un atome à deux niveaux.

iii. La diode laser

Comme nous l'avons vu au paragraphe a), nous devons superposer aux ondes pièges une onde accordée sur la transition $6S_{1/2} F=3 \rightarrow 6P_{3/2} F=4$ pour éviter le pompage optique des atomes vers le sous-niveau hyperfin $6S_{1/2} F=3$ de l'état fondamental du césium. Cette onde est produite par une diode laser STC libre (non asservie), stabilisée en température et alimentée par un courant très stable (provenant d'une batterie d'accumulateurs). Le courant est ajusté à la main de manière à amener la fréquence de la diode laser sur celle de la transition $F=3 \rightarrow F=4$, déterminée par absorption dans une cellule de césium.

iv. La cellule de césium

Un piège magnéto-optique ne fonctionne correctement que si la vapeur environnante est à très basse pression (inférieure à 10^{-7} torr). Or la pression de vapeur saturante du césium à température ambiante (25°C) est de $2 \cdot 10^{-6}$ torr. La cellule ne doit donc pas contenir de goutte de césium. Elle ne doit pas non plus contenir d'impuretés qui pourraient empêcher le confinement à cause des collisions : elle doit donc être pompée en permanence pour éliminer les impuretés pouvant dégazer des parois.

Le but de l'expérience est de construire une cavité optique autour des atomes froids. Dans la mesure où nous n'avons pas besoin d'une cavité de très grande finesse, nous pouvons mettre les miroirs de la cavité à l'extérieur de la cellule. Celle-ci doit donc comporter des fenêtres de très bonne qualité optique, et traitées antireflet à 852nm. De plus ces fenêtres doivent être aussi proches que possible des atomes froids pour diminuer le nombre d'atomes de césium non piégés dans le trajet du faisceau dans la cavité.

Nous avons donc choisi de construire une cellule en acier inoxydable amagnétique. Elle est représentée en coupe sur la figure IV-4. C'est un cylindre à base octogonale de 15cm de hauteur et 12cm de diamètre, dont le volume intérieur est d'environ 0,75 litre. Les ondes pièges horizontales (directions O_x et O_y) rentrent dans la cellule par des fenêtres traitées antireflet de 28mm de diamètre utile. La paire d'ondes verticales (direction O_z) rentre par de grandes fenêtres anti-reflet de 70 mm de diamètre. Cette grande ouverture permet d'observer le piège à l'aide d'une caméra C.C.D., ou d'un viseur infrarouge.

Les quatre autres faces de l'octogone portent des fenêtres de 17mm de diamètre placées au plus près du centre de la cellule. Ces fenêtres sont des disques légèrement prismatiques. En effet, des fenêtres à faces parallèles auraient pu se comporter comme des étalons Fabry-Perot à l'intérieur de la cavité que nous avons placée autour de la cellule.

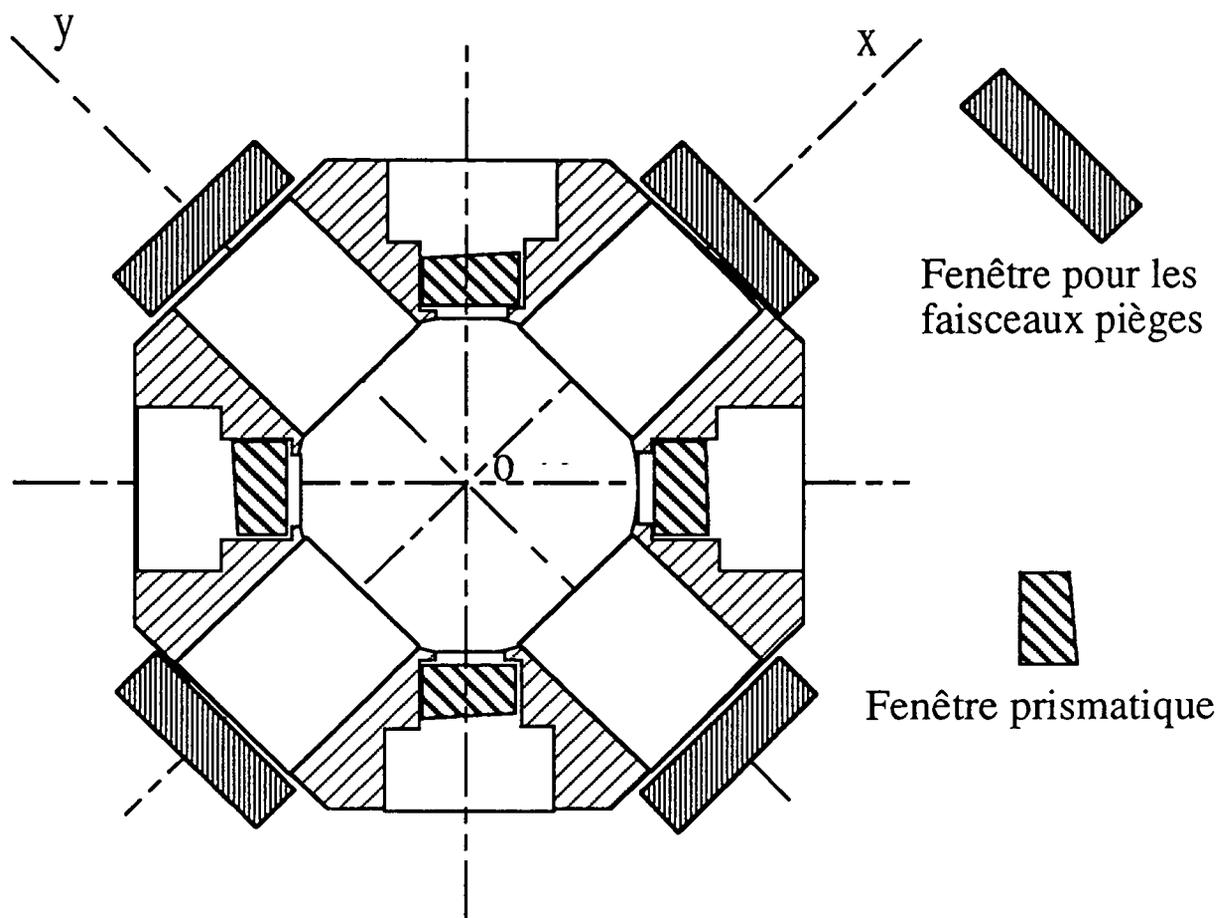


Figure IV-4 : Vue en coupe de la cellule.

Cette cellule a été réalisée dans les ateliers du laboratoire, par Jean Quilbeuf, technicien, à partir d'un cylindre (à base circulaire) d'incox. Les différentes innovations que comporte la cellule, décrites dans la suite sont dues à Francis Tréhin ingénieur au laboratoire. La grande qualité de l'usinage des surfaces au tour a permis d'utiliser des joints d'indium pour assurer l'étanchéité de la cellule au niveau des fenêtres laissant entrer les différents faisceaux lumineux nécessaires à nos expériences. L'indium est un métal qui fond aux alentours de 120°C. Les joints en indium interdisent donc l'étuvage de la cellule au-delà de 120°C. Afin d'obtenir une cellule propre et dégazant le moins possible, la cellule a subi un poli électrolytique [Poligrat] qui efface au niveau microscopique toutes les irrégularités dues à l'usinage et qui donne un état de surface très lisse, réduisant considérablement le nombre de sites disponibles pour l'adsorption de molécules.

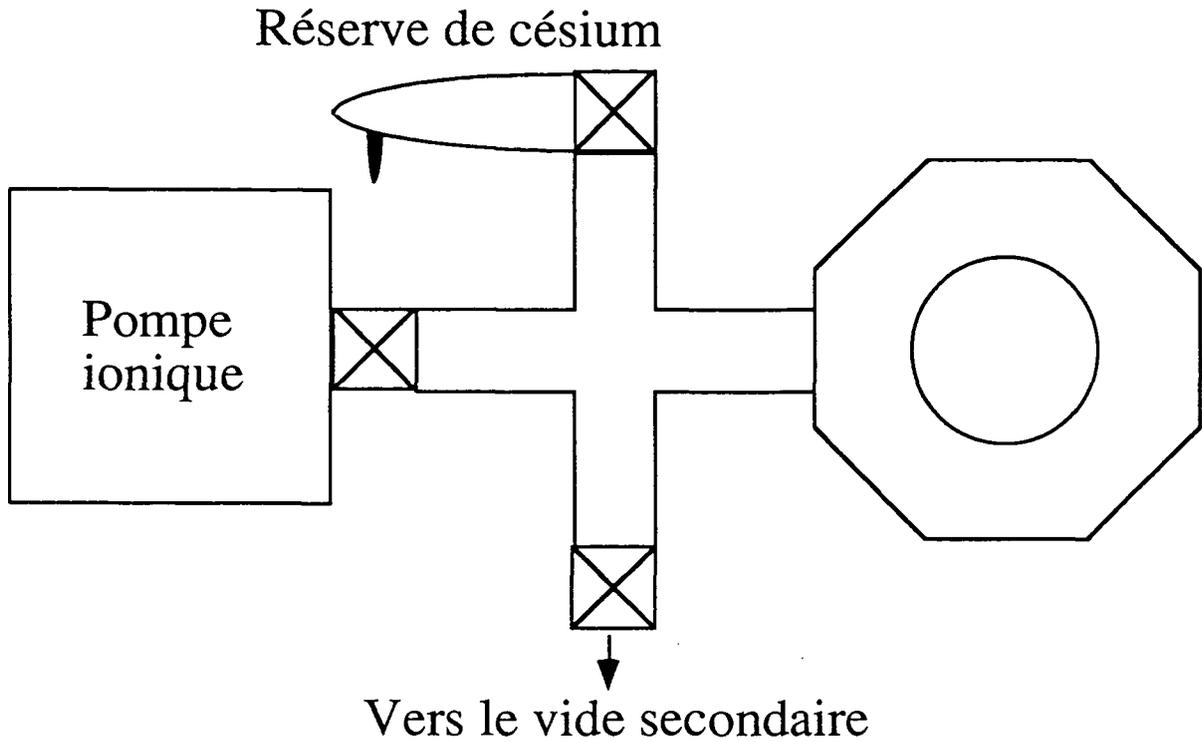


Figure IV-5 : Banc de pompage de la cellule, et réserve de césium.

Le vide dans la cellule est entretenu par une pompe ionique de débit 25l/s, amorcée après la réalisation d'un vide secondaire (environ 10^{-6} torr) à l'aide d'un banc de pompage mobile (figure IV-5). La qualité du poli électrolytique et le soin apporté à la réalisation du vide nous ont permis au terme d'environ 30 heures d'étuvage à 110°C , d'atteindre un excellent vide, inférieur à 10^{-9} torr dans la cellule, et inférieur à 10^{-10} torr au niveau de la pompe ionique. L'étuvage de la cellule était assuré par 4 résistances chauffantes noyées dans les parois de la cellule, et dissipant environ 150W.

v. Les champs magnétiques

Le champ magnétique inhomogène nécessaire au piégeage des atomes est produit par deux bobines d'axe vertical placées de part et d'autre de la cellule. Ces bobines sont distantes de $2d = 15$ cm, ont un rayon $a = 7,5$ cm et comptent chacune $N=120$ spires. Le courant parcourant les bobines est noté I . Le champ magnétique créé sur l'axe, en un point de cote z est :

$$\vec{B} = -\frac{I}{2} \mu_0 N I a^2 \left(\frac{1}{((z+d)^2 + a^2)^{3/2}} - \frac{1}{((z-d)^2 + a^2)^{3/2}} \right) \vec{e}_z \quad (\text{IV-5})$$

soit au voisinage de $z=0$, $\vec{B} = b z \vec{e}_z$ avec :

$$b = \mu_0 N I \frac{3a^2 d}{(a^2 + d^2)^{5/2}} \quad (\text{IV-6})$$

Dans le plan $z=0$ et au voisinage de 0, le champ magnétique est radial : en coordonnées cylindriques (\vec{r}, z) il s'écrit $\vec{B}(z=0, \vec{r}) = b_r \vec{r}$. L'équation de Maxwell $\text{div}\vec{B} = 0$ écrite en

$z = 0, \vec{r} = \vec{0}$ conduit à $b_r = -b/2$. Au voisinage du point 0, le champ magnétique a donc la forme annoncée (IV-2) :

$$\vec{B}(z, \vec{r}) = b \left(z \vec{e}_z - \frac{1}{2} \vec{r} \right) \quad (\text{IV-7})$$

b vaut 1,4 Gauss/cm pour $I = 1A$. Nous utilisons généralement un courant de 6A ce qui donne un gradient de champ magnétique vertical de 8,4 Gauss/cm.

Pour que le piège magnéto-optique fonctionne bien il faut que le champ magnétique total dans la cellule s'annule là où les faisceaux de ralentissement se croisent. Nous avons donc installé trois paires de bobines de Helmholtz autour de la cellule afin de pouvoir compenser les champs magnétiques parasites qui sont dus principalement à la pompe ionique (bien qu'elle soit isolée par un blindage en mu-métal) mais aussi au solénoïde du laser à Argon et à la table métallique qui supporte l'expérience.

vi. L'optique

Le faisceau sortant du modulateur acousto-optique AO 2, destiné au ralentissement des atomes a un diamètre d'environ 2mm. Il est transformé en un faisceau parallèle d'environ 3cm de diamètre à l'aide d'un télescope formé de deux lentilles. Ce faisceau est ensuite séparé en trois faisceaux d'égale intensité à l'aide de deux lames séparatrices (1/3-2/3) et (1/2-1/2). Ces faisceaux passent ensuite dans un système optique composé d'une lame demi-onde et d'un prisme polariseur permettant d'obtenir une polarisation linéaire et d'ajuster leur puissance. Une lame quart d'onde leur donne une polarisation circulaire. Les faisceaux traversent alors la cellule. Une seconde lame quart d'onde et un miroir les réfléchissent sur eux-mêmes avec la polarisation circulaire inverse. On obtient ainsi les paires d'ondes σ^+ , σ^- nécessaires au ralentissement. Le diamètre utile maximal des faisceaux dans la cellule est de 28mm. L'intensité des faisceaux piège peut atteindre 10 mW/cm² lorsque le laser titane-saphir donne 700mW.

c. Caractéristiques du piège

i. Nombre d'atomes

Nous obtenons un nuage d'atomes de césium immobiles au centre du piège et nous l'observons grâce à une caméra C.C.D. Nous avons mesuré le nombre d'atomes en mesurant la puissance de fluorescence du piège : la lumière de fluorescence est collectée à l'aide d'une lentille, sous un angle solide $\Delta\Omega/4\pi$ et est focalisée sur une photodiode d'efficacité quantique η . Le courant est transformé en tension à l'aide d'une résistance R . Le nombre de photons émis par seconde par un atome (supposé à deux niveaux) est le produit du taux d'émission spontanée 2γ par la population de l'état excité, notée Π_e et qui vaut, d'après les formules (21c), (23) et (25) de l'article inséré au chapitre III-4b :

$$\Pi_e = \frac{|\beta_0^2|}{1 + \delta^2 + 2|\beta_0^2|} \quad (\text{IV.8})$$

Pour tenir compte de la structure $F=4 \rightarrow F'=5$ de la transition du césium, il faut remplacer $|\beta_0^2|$ par $c_0^2 |\beta_0^2|$ où $c_0^2 = 0,4$ [Grison 92]. Le coefficient c_0^2 est calculé en supposant que les atomes sont également répartis entre tous les niveaux Zeeman, et en prenant la moyenne des coefficients de Clebsch-Gordan. Si N désigne le nombre d'atomes piégés, la tension U observée aux bornes de la résistance de charge de la photodiode vaut :

$$U = R \eta \hbar \omega_0 2\gamma \frac{c_0^2 |\beta_0^2|}{1 + \delta^2 + 2c_0^2 |\beta_0^2|} \frac{\Delta\Omega}{4\pi} N \quad (\text{IV.9})$$

Dans les conditions de notre expérience, on a :

$$R = 100 \text{ k}\Omega, \eta = 0,5 \text{ A/W}, 2\gamma = 2\pi \cdot 5,3 \text{ MHz}, \Delta\Omega/4\pi = 0,0025, |\beta_0|^2 = 15, \delta = -3 \quad (\text{IV.10})$$

On obtient une tension de 0,4 nV par atome. Lors des expériences de mesure du nombre d'atomes nous avons obtenu typiquement des tensions de 5 mV, correspondant à environ 10^7 atomes.

Cette technique de mesure du nombre d'atomes est assez délicate à mettre en oeuvre car la lumière de fluorescence des atomes est mêlée à de la lumière parasite venant de réflexions des faisceaux piège sur les parois métalliques de la cellule.

Nous verrons au paragraphe 4) que l'étude de la bistabilité permet de remonter au paramètre de bistabilité, donc au nombre d'atomes interagissant avec le mode de la cavité. En supposant que le mode de la cavité a une longueur de Rayleigh grande devant la dimension du piège, nous pourrions déduire de cette mesure le nombre d'atomes dans le piège. Cette deuxième méthode donne un nombre d'atomes en bon accord avec celui obtenu par la méthode de fluorescence.

II. Dimensions du piège

Le piège est visualisé à l'aide d'une caméra C.C.D. sur un écran de télévision (figure IV-6).

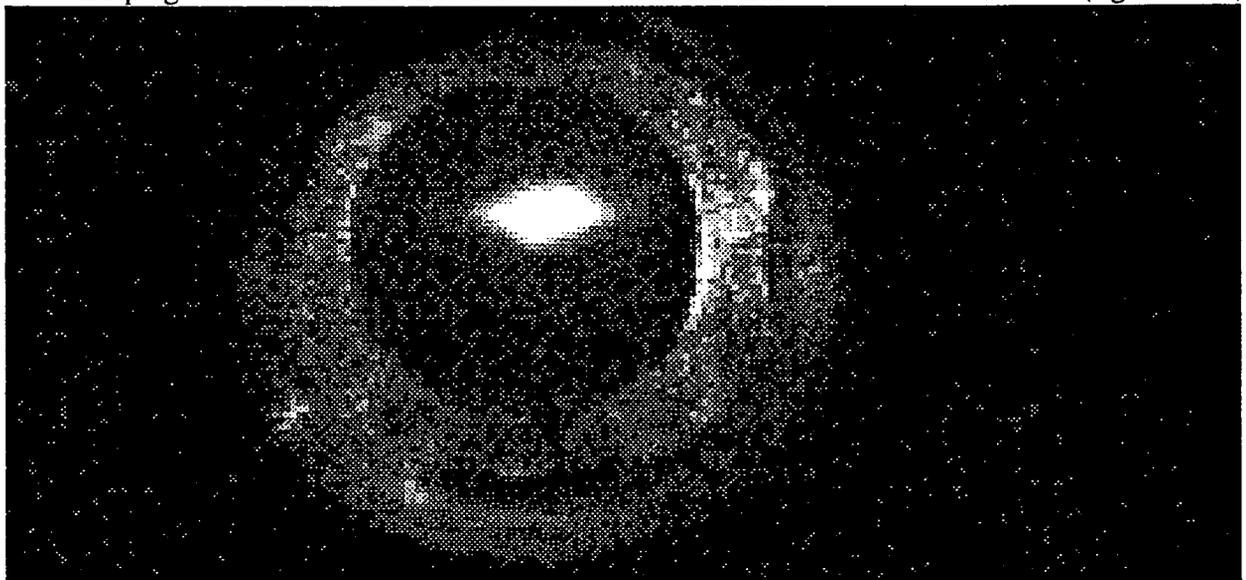


Figure IV-6 : Image du piège observé par la caméra CCD. Au centre, on a la lumière de fluorescence des atomes. Le halo blanc autour est l'image de la bride qui tient la fenêtre d'observation.

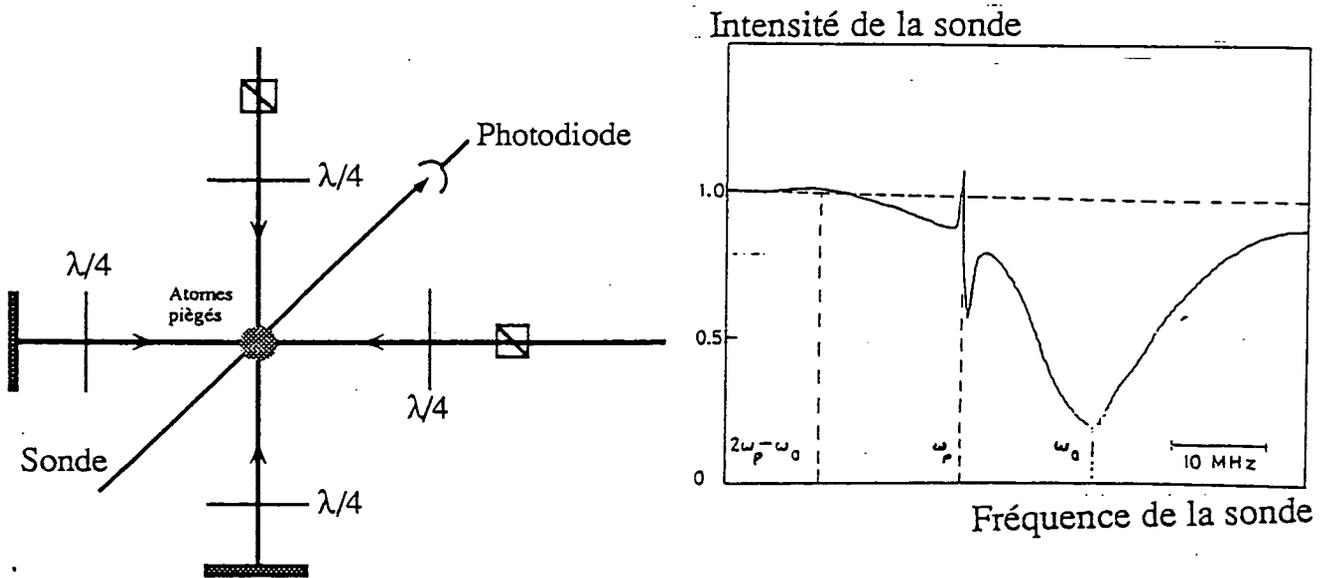
L'image présentée ne donne pas une mesure précise de la taille du nuage d'atomes piégés car la caméra CCD est saturée. Le diamètre intérieur de la bride est de 13 mm. Lorsque la caméra n'est pas saturée, nous mesurons des diamètres de l'ordre de ou inférieur au millimètre. Nous utiliserons dans la suite un diamètre de l'ordre de 0,5 mm.

3 Le laser à atomes froids

Le montage expérimental que nous venons de décrire nous a permis d'observer pour la première fois un effet laser utilisant ces atomes refroidis.

a. Présentation

Nous présentons ici un article publié dans Europhysics Letters, relatant l'observation d'une oscillation laser dans une cavité optique contenant des atomes ralentis et piégés par un piège magnéto-optique. Lorsqu'on place des miroirs de transmission 4% face à face autour du nuage d'atomes froids, on obtient une émission laser qui se produit avec une fréquence décalée de 150kHz dans le rouge de la fréquence ω_p des ondes piègeantes. Le mécanisme de gain est dû à un effet Raman stimulé entre les différents sous niveaux Zeeman de la transition $F=4 \rightarrow F'=5$ du césium, observé et interprété en 1990 dans les groupes de C.Salomon et de G Grynberg [Grison 91], [Tabosa 91] (voir figures IV-7-a et IV-7-b).



IV-7a : Dispositif expérimental utilisé pour mesurer le spectre de transmission d'une sonde faible dans un nuage d'atomes piégés. IV-7b : Spectre obtenu lorsqu'on balaie la fréquence de l'onde sonde autour de la fréquence ω_0 de résonance de la transition atomique. On observe un signal d'absorption avec la largeur naturelle de la transition et un signal de mélange à quatre onde à la fréquence $2\omega_p - \omega_0$, de même largeur. Autour de la fréquence ω_p , on observe une structure étroite due à l'effet Raman, qui présente un gain pour des fréquences inférieures à ω_p et des pertes pour des fréquences supérieures.

b. Article : "Operation of a "cold-atom laser" in a magneto-optical trap"

EUROPHYSICS LETTERS

15 April 1992

Europhys. Lett., 18 (8), pp. 685-688 (1992)

Operation of a «Cold-Atom Laser» in a Magneto-Optical Trap.

L. HILICO, C. FABRE and E. GIACOBINO

Laboratoire de Spectroscopie Hertzienne()*, Université P. et M. Curie
T. 12, 75252 Paris Cedex 05, France

(received 31 January 1992; accepted in final form 20 March 1992)

PACS. 32.80P - Optical cooling of atoms; trapping.

PACS. 42.55 - Lasing processes.

Abstract. - We have observed a laser oscillation when a cloud of magneto-optically trapped cesium atoms is inserted in an optical cavity. The laser oscillation occurs at a frequency which is detuned from the trapping beam frequency by 150 kHz. The gain mechanism is due to stimulated Raman processes recently observed in such media.

The recently developed technique of magneto-optical trapping [1-3] provides a simple way of producing dense samples of cold atoms. Because such atomic clouds strongly differ on several points from the usual gas samples (negligible Doppler and transit time broadening), they constitute new optical media with unusual characteristics, of high interest in spectroscopy, metrology, nonlinear optics and quantum optics. It has been shown by other authors [4-6] that such a system exhibits gain in a narrow frequency band close to the frequency of the trapping beams. In this paper we report the first observation of laser oscillation linked to this gain feature.

In our experiment, we prepare a cloud of cold cesium atoms using a magneto-optic trap. The set-up consists in a cesium cell, three orthogonal trapping beams generated by a Ti:sapphire laser, and an inhomogeneous magnetic field. The cell is an octagonal cylinder of electrolytically polished stainless steel, with good-quality anti-reflection-coated windows. It is connected to an ion pump and to a cesium reservoir, so that in the operating conditions the cell contains a low pressure of cesium vapour of the order of 10^{-8} Torr. Each trapping beam contains a pair of counterpropagating waves with opposite circular polarisations (σ^+ and σ^-), having an intensity of 10 mW/cm^2 and a diameter of 3 cm. The frequency of these beams, ω_T , is detuned by a few linewidths to the red side of the frequency ω_0 of the cesium transition $6S_{1/2} F = 4 \rightarrow 6P_{3/2} F' = 5$. In order to avoid optical pumping to the $6S_{1/2} F = 3$ ground state, we add to each trapping beam a beam coming from a semiconductor laser tuned to the $6S_{1/2} F = 3 \rightarrow 6P_{3/2} F' = 4$ frequency, which recycles the atoms. The inhomogeneous

(*) Unité de recherche de l'Ecole Normale Supérieure et de l'Université P. et M. Curie, associée au CNRS.

magnetic field is produced by coils in the anti-Helmoltz position and its gradient is 5 Gauss/cm in the symmetry plane of the coils and 10 Gauss/cm along their axis. We then obtain a cloud of about $2 \cdot 10^7$ cesium atoms of 2 mm in diameter. The typical temperature of the cloud is of the order of a mK, which gives a Doppler width much smaller than the natural width.

Let us now give a description of the «cold atom laser»: because the cell has good-optical-quality antireflecting windows, we were able to build a good-finesse optical cavity around the atomic cloud, with the following characteristics: it is a 50 cm long linear cavity, close to the hemi-confocal geometry, with a waist of 370 μm ; both mirrors have a 3.6% transmission and the losses due to the two windows are of the order of 1%. The resulting finesse is about 70. The cavity is in the symmetry plane of the trap, making a 45° angle with the two trapping beams that propagate in this plane. In this configuration, we have observed a laser oscillation which has the following behaviour. When the cavity length is swept by a PZT, we observe laser oscillation for several positions of the mirrors. The distance between two successive positions does not correspond to the free spectral range of the cavity, but rather corresponds to the transverse mode spacing of the cavity (which is 1/8 of the free spectral range for a hemi-confocal cavity). We have checked that these peaks were due to transverse modes by adding a diaphragm in the cavity: we obtained peaks of laser oscillation with a spacing corresponding to the free spectral range of the cavity. The output intensity was monitored with a photodiode Siemens BPW34B (about 0.65 A/W efficiency at 852 nm), reverse biased and loaded by a 500 k Ω resistor. The resulting voltage was about 20 mV, corresponding to approximately 60 nW output power.

Recent experiments [4-6] have measured the transmission spectrum of a probe beam through a sample of magneto-optically trapped atoms. They have shown that this spectrum exhibits three structures around the atomic frequency ω_0 : the usual absorption dip centred at ω_0 and the three-photon gain profile centred at $2\omega_T - \omega_0$, both having the natural width Γ of the atomic transition; the third structure is a dispersive shaped feature consisting in an extra absorption dip at a frequency slightly detuned to the blue side of ω_T and in a large gain peak (up to 20%) at a frequency slightly detuned to the red side of ω_T . The width of these two structures, of the order of 200 kHz, is much smaller than the excited-state natural width Γ , equal to 5.3 MHz. This very narrow structure has been interpreted as due to a stimulated

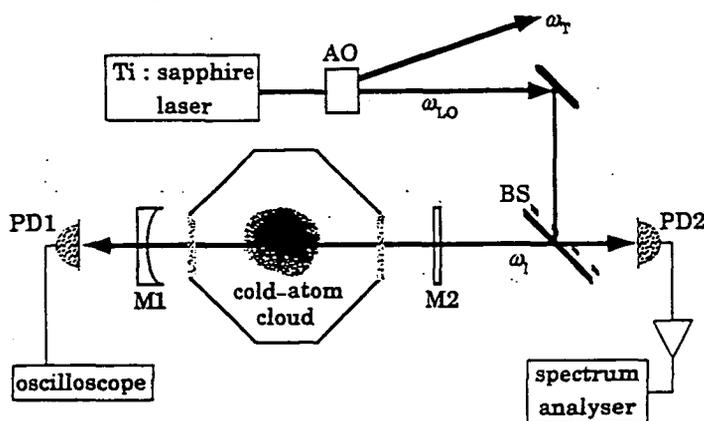


Fig. 1. - Sketch of the experimental set-up showing the octagonal cell with the cold-atom cloud, the cold-atom laser cavity and the heterodyne detection scheme. For the sake of simplicity, the trapping and repumping beams have not been represented. M1 and M2: cavity mirrors; PD1: photodiode monitoring the intensity of the laser emission (frequency ω_l); PD2: photodiode detecting the heterodyne beat between ω_{LO} and ω_l ; AO: acousto-optic modulator providing the trapping beams at ω_T and the local oscillator beam.

Raman effect between the Zeeman sublevels of the $6S_{1/2} F = 4$ ground state of the atoms [4, 5]. More precisely, according to ref. [4], the effect of the pairs of trapping beams is to induce different light shifts and to prepare different populations in the ground state of the atoms, depending on the Zeeman sublevel. Raman processes are then possible between the trapping beams and the probe beam. The Raman frequency shift is equal to the difference between the induced light shifts, and the width of the structures is of the order of the width of the ground state due to optical pumping among these Zeeman sublevels. The gain observed in these experiments allows us to explain the laser oscillation that we have obtained and its behaviour: because the gain width is very narrow as compared to the width of the cavity, the laser can oscillate only when the frequency of one of the transverse modes of the cavity coincides with the Raman gain frequency. This explains why, in contrast to ordinary lasers, the laser oscillation takes place only around definite values of the cavity length.

In order to check that the gain process of this laser corresponds to this stimulated Raman effect, we had to measure the frequency ω_1 of the laser oscillation with respect to the trapping frequency ω_T , that is to measure the beat frequency between ω_T and ω_1 . This is done in our experimental set-up as shown in fig. 1. The light from the Ti:sapphire laser, with frequency ω_{LO} , goes through an acousto-optic modulator (AO), driven with a r.f. frequency $\Omega_{AO} = 200$ MHz. The diffraction order -1 gives the trapping frequency $\omega_T = \omega_{LO} - \Omega_{AO}$, while the order 0 with frequency ω_{LO} will act as a local oscillator. The 50-50 beam splitter BS mixes the beams at frequencies ω_{LO} and ω_1 , and a second photodiode (PD2) detects the beat note $|\omega_{LO} - \omega_1| = \Omega_{AO} + \omega_T - \omega_1$. This photodiode is connected to a 50 Ω input impedance 36 dB-gain low-noise amplifier, and the signal is analysed by a spectrum analyser. The total power on PD2 is about 0.5 mW. Figure 2 shows the beat spectrum we obtained. The narrow peak *a*) corresponds to the r.f. frequency Ω_{AO} which is radiated by the acousto-optic modulator, and the broad signal on the right-hand side *b*) to the beat frequencies between ω_{LO} and ω_1 . This heterodyne detection scheme gives a good signal-to-noise ratio, since the technical noise of a Ti:sapphire laser around 200 MHz is shot noise limited. It also enables us to know the sign of $\omega_T - \omega_1$ (found to be positive) while a direct beat experiment between ω_T and ω_1 would have given only $|\omega_T - \omega_1|$. The spectrum was recorded with the spectrum analyser keeping, for each analysed frequency, the largest value obtained over a large number of frequency sweeps («Max-Hold» configuration), while the cavity length and consequently the cold atom laser frequency was slowly swept. This procedure exactly gives

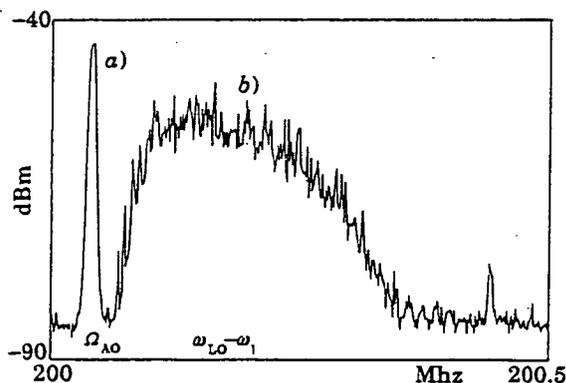


Fig. 2. - Frequency spectrum of the light emerging from the cavity shown in fig. 1, recorded using the heterodyne detection with photodiode PD2. The full horizontal scale is 0.5 MHz, and the full vertical scale is 50 dBm. *a*) r.f. pick-up radiated by the acousto-optic modulator driver (Ω_{AO}). *b*) Beat signal between ω_{LO} and ω_1 , showing the gain profile of the cold-atom laser (the small peak on the right side is due to spurious pick-up).

the gain profile of the amplifying medium. We observe a very narrow gain width of about 150 kHz, shifted by 150 kHz to the red side of ω_T . These values are in full agreement with the stimulated Raman gain characteristics [4, 5].

In conclusion, we have observed laser oscillation with cooled atoms due to a Raman gain process. This laser operates in quite an unusual regime: both the free spectral range and the width of the cavity are much broader than the gain width. This phenomenon opens new perspectives for the study of the nonlinear properties of the cold atom medium, in particular the quantum properties of Raman lasers. More generally, for probe fields detuned from the atomic resonance by a few natural linewidths, the cold atom ensembles exhibit large nonlinearities and small absorptions. One can then anticipate that they could be a favourable nonlinear medium for the purpose of squeezing the light fluctuations [7, 8], and eventually achieving a «quantum noise eater» [9, 10].

We would like to thank G. GRYNBERG, S. SALOMON and P. VERKERK for helpful discussions and collaboration, and F. TREHIN for technical assistance. This work has been supported by the ESPRIT grant BRA 3186, and the Ultimatech grant P 03010.

REFERENCES

- [1] RAAB E., PRENTISS M., CABLE A., CHU S. and PRITCHARD D., *Phys. Rev. Lett.*, 59 (1987) 2631.
- [2] WALKER T., SESKO D. and WIEMAN C., *Phys. Rev. Lett.*, 64 (1990) 48.
- [3] MONROE C., SWANN W., ROBINSON H. and WIEMAN C., *Phys. Rev. Lett.*, 65 (1990) 1571.
- [4] GRISON D., LOUNIS B., SALOMON C., COURTOIS J.-Y. and GRYNBERG G., *Europhys. Lett.*, 15 (1991) 149.
- [5] TABOSA J., CHEN G., HU Z., LEE R. and KIMBLE H., *Phys. Rev. Lett.*, 66 (1991) 3245.
- [6] GRYNBERG G., COURTOIS J. Y., VERKERK P., GRISON D., LOUNIS B. and SALOMON C., in *Proceedings of «Laser Spectroscopy X» Font Romeu 91*, edited by M. DUCLOY and E. GIACOBINO (Springer Verlag) 1992.
- [7] SLUSHER R. E., HOLLBERG L. W., YURKE B., MERTZ J. C. and VALLEY J. F., *Phys. Rev. Lett.*, 55 (1985) 2409.
- [8] RAIZEN M. G., OROZCO L. A., MIN XIAO, BOYD T. L. and KIMBLE H. J., *Phys. Rev. Lett.*, 59 (1987) 198.
- [9] REID M. D., *Phys. Rev. A*, 37 (1988) 4792; CASTELLI F., LUGIATO L. A. and VADACCHINO M., *Nuovo Cimento B*, 10 (1988) 183; OROZCO L. A., RAIZEN M. G., MIN XIAO, BRECHA R. J. and KIMBLE H. J., *J. Opt. Soc. Am. B*, 4 (1987) 1490.
- [10] REYNAUD S., FABRE C., GIACOBINO E. and HEIDMANN A., *Phys. Rev. A*, 40 (1989) 1440.

c. Conjugaison de phase dans les atomes froids

Lors de la mesure de la fréquence de l'oscillation laser, nous avons observé un signal supplémentaire dû à une onde de fréquence ω_c générée par mélange à quatre ondes entre les faisceaux piège (tenant lieu de "faisceaux pompe") et l'oscillation laser (servant de sonde) de fréquence ω_l . La fréquence ω_c vaut $\omega_c = 2\omega_p - \omega_l$. La technique de détection hétérodyne à l'aide d'un oscillateur local de fréquence différente de ω_p , ($\omega_{LO} = \omega_p + \Omega_{A0}$) où $\Omega_{A0}/2\pi = 200\text{MHz}$, nous a permis de séparer le signal dû à l'oscillation laser (de fréquence $|\omega_{LO} - \omega_l|$) de celui dû à l'onde conjuguée (de fréquence $|\omega_{LO} - \omega_c|$). En effet, le battement entre l'oscillation laser et l'oscillateur local se produit à une fréquence :

$$|\omega_{LO} - \omega_l| = |\Omega_{A0} + (\omega_p - \omega_l)| \quad (IV.11)$$

tandis que celui entre l'onde conjuguée de phase et l'oscillateur local est à :

$$|\omega_{LO} - \omega_c| = |\Omega_{A0} - (\omega_p - \omega_l)| \quad (IV.12)$$

Ainsi, les deux signaux de battement sont séparés sur l'analyseur de spectre, ce qui ne serait plus vrai si l'oscillateur local était lui même à la fréquence ω_p (cas où $\Omega_{A0} = 0$). De plus, la détection hétérodyne favorise l'observation de petits signaux comme la conjugaison de phase qui est 250 fois plus faible que l'oscillation laser (figure IV-8)

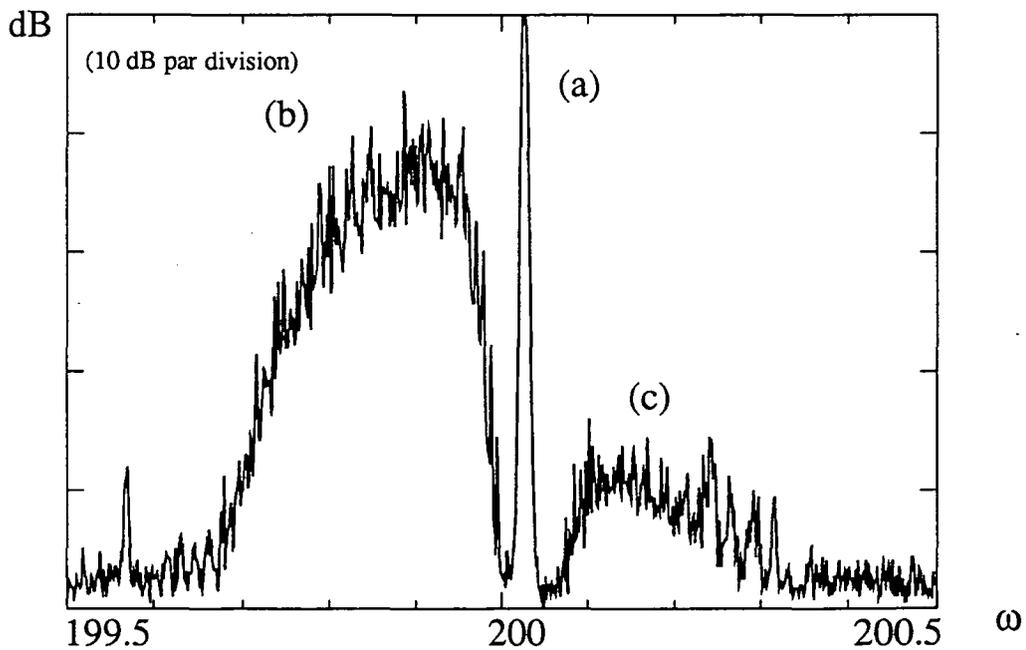


Figure IV-8 : Signal de battement entre l'oscillateur local et le laser à atomes froids (partie (b)), et entre l'oscillateur local et l'onde conjuguée en phase (partie (c)). Le pic (a) repère la fréquence ω_p des faisceaux pièges.

Cette première observation de la conjugaison de phase dans les atomes piégés a suscité l'étude approfondie du mélange à quatre ondes par Philippe Verkerk en collaboration entre les groupes de G.Grynberg et C.Cohen-Tannoudji [Verkerk 92]. Les premiers résultats de cette étude ainsi que notre résultat font l'objet d'une note aux comptes rendus de l'Académie des sciences [Hilico 92c].

d. Conclusions

Cette oscillation laser a d'intéressantes propriétés. Tout d'abord, elle a lieu dans un régime très inhabituel : en effet la largeur de la courbe de gain du laser (150kHz) est très inférieure à l'intervalle spectral libre de la cavité utilisée (300MHz) et à la largeur de la cavité (environ 4MHz) Le laser n'oscille donc que pour des longueurs bien précises de la cavité, lorsqu'une de ses fréquences propres coïncide avec les fréquences où le gain l'emporte sur les pertes.

Par ailleurs, du point de vue de l'optique quantique, il a été montré [Ritsch 92] qu'un laser dont le processus de gain est dû à l'effet Raman stimulé produit un champ dont les fluctuations quantiques sont comprimées. Pour l'instant, la très faible puissance de sortie de notre laser à atomes froids rend difficile l'étude des propriétés statistiques de la lumière qu'il émet. La théorie prévoit aussi que la largeur spectrale d'un laser Raman est très inférieure à la largeur Schawlow-Townes d'un laser de même puissance [Sargent III 74].

Pour l'étude de la bistabilité optique, il faut éviter que cette oscillation laser se produise dans la cavité. Pour cela on peut par exemple utiliser une cavité dont les pertes sont supérieures au gain par effet Raman stimulé. Un autre moyen de se débarrasser de cette oscillation est de choisir une cavité dont les modes transverses sont regroupés en trois ou quatre "paquets" (contrairement à la cavité décrite dans l'article du paragraphe b)). Dans ce cas, l'oscillation ne se produit que pour quelques longueurs, bien séparées, de la cavité. Il est alors possible d'envoyer dans la cavité une onde sonde de fréquence telle que la cavité ne soit pas simultanément résonante avec l'onde sonde et la fréquence du laser à atomes froids.

4 Bistabilité optique avec des atomes froids

a. Introduction

Depuis la première observation de la bistabilité optique dans de la vapeur de sodium [Gibbs 76], ce régime été étudié dans des conditions variées, sur des cellules contenant une vapeur atomique, ou sur des jets atomiques [Orozco 84] [Opt.Bist 88]. Nous avons observé pour la première fois de la bistabilité en utilisant des atomes froids comme milieu non-linéaire. Nous allons maintenant donner quelques ordres de grandeur indiquant qu'un nuage d'atomes froids est un milieu fortement non linéaire et nous allons comparer ses caractéristiques à celles d'une vapeur ou d'un jet atomique.

Lorsque le faisceau interagissant avec des atomes est une onde progressive, on peut caractériser la non-linéarité du milieu par la phase non linéaire accumulée par le champ au cours de son

interaction avec le milieu. Cette phase non linéaire est proportionnelle à la densité n , à la longueur l du milieu, et à sa susceptibilité non linéaire d'ordre 3. D'après la relation III.93, cette phase non linéaire est proportionnelle au produit $n l / \gamma^3$, où γ est la largeur de la transition atomique. Les valeurs de ces trois paramètres diffèrent beaucoup selon les différentes configurations expérimentales possibles. En cellule, il est possible d'avoir de grandes densités atomiques ($n \cong 10^{13} \text{ cm}^{-3}$), de grandes longueurs d'interaction ($l = 10 \text{ cm}$), mais la largeur de la transition, due à l'effet Doppler, est grande ($2\gamma/2\pi \approx 500 \text{ MHz}$ pour le césium). Sur un jet atomique, la longueur d'interaction peut atteindre le centimètre ($l = 1 \text{ cm}$), et la densité $n = 10^{11}$) atomes par centimètre-cube. La largeur Doppler est très réduite, mais reste de l'ordre de 100 MHz. Nous allons comparer ces ordres de grandeur à ceux qu'on peut obtenir avec un nuage d'atomes piégés. En supposant que le nuage contient 10^7 atomes et a un diamètre de 0,5 mm, on a une densité atomique $n \approx 1,5 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-3}$, et une longueur d'interaction $l \approx 0,5 \text{ mm}$. Ces deux paramètres sont plus faibles que pour les dispositifs précédents. Cependant, puisque les atomes sont immobiles, la largeur de la transition est la largeur naturelle, soit $2\gamma/2\pi \cong 5 \text{ MHz}$ dans le césium. Cette faible largeur permet d'obtenir de très fortes non-linéarités. En effet, les ordres de grandeur que nous avons choisis conduisent à :

$$\frac{(n l / \gamma^3)_{\text{Piège}}}{(n l / \gamma^3)_{\text{Cellule}}} = 75 \quad \text{et} \quad \frac{(n l / \gamma^3)_{\text{Piège}}}{(n l / \gamma^3)_{\text{Jet}}} = 600 \quad (\text{IV-13})$$

L'absence d'effet Doppler dans les atomes piégés est donc très intéressante car elle permet d'obtenir de fortes non linéarités en s'approchant de résonance, sans avoir trop d'absorption. De plus, elle est fondamentale pour la compression des fluctuations quantiques de la lumière, [Zhang 90] qui est très rapidement détruite par l'élargissement Doppler de la transition atomique utilisée.

b. La cavité optique bistable

i. Géométrie et caractéristiques de la cavité

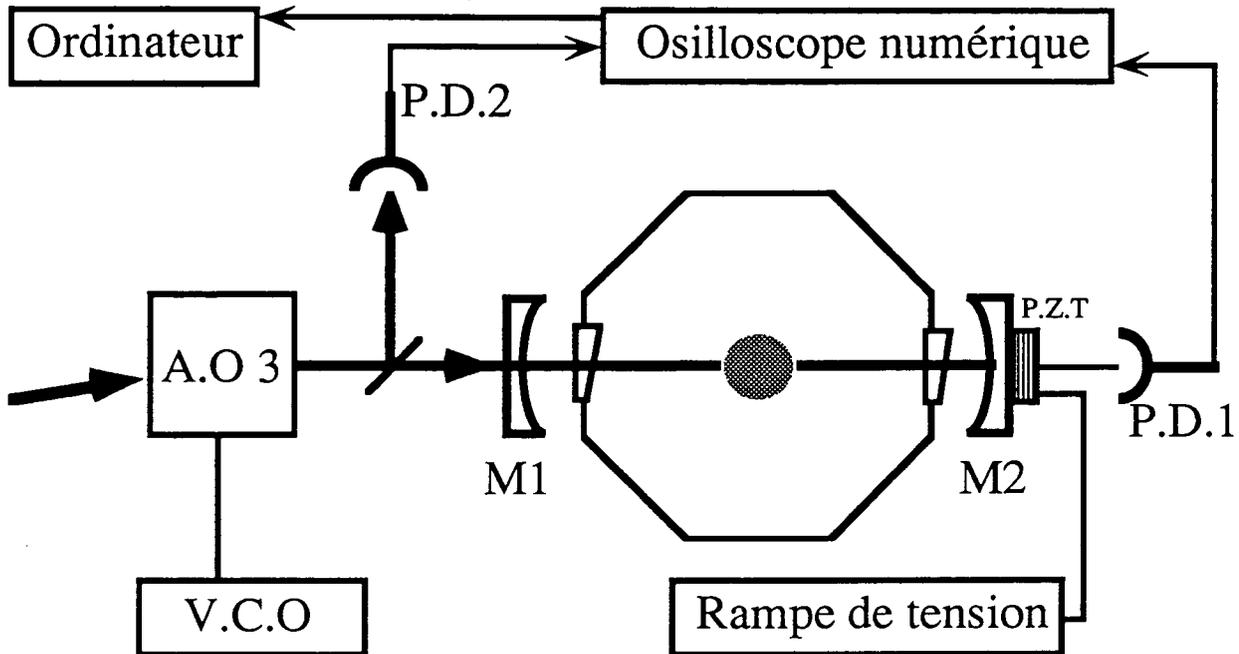


Figure IV-10 : Dispositif expérimental utilisé pour observer la bistabilité optique.

Pour observer et étudier la bistabilité optique avec les atomes froids, nous avons placé une cavité optique linéaire autour du piège (figure IV-10). Nous donnons dans ce paragraphe les principales caractéristiques de la cavité en l'absence d'atomes. Les deux miroirs M_1 et M_2 ont un rayon de courbure $R=50\text{cm}$ et sont distants de $D=25\text{cm}$. Le waist w_0 et la longueur de Rayleigh b de la cavité valent [Kogelnik 65] :

$$b = \sqrt{D(2R - D)} = 43,3 \text{ cm} \quad w_0 = \sqrt{\frac{b\lambda}{2\pi}} = 242 \mu\text{m} \quad (\text{IV.12})$$

Les modes transverses de cette cavité ont des fréquences propres espacées de $\Delta\nu$ [Kogelnik 65]

$$\Delta\nu = \frac{c}{2D} 2\pi \arctan\left(\frac{\lambda D}{2\pi w_0^2}\right) \quad (\text{IV.13})$$

où $c/2D$ est l'intervalle spectral libre de la cavité. Dans ces conditions, on a :

$$\frac{\Delta\nu}{\frac{c}{2D}} = \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{D}{\sqrt{D(2R - D)}}\right) = \frac{1}{3} \quad (\text{IV.14})$$

Les fréquences propres des modes transverses de la cavité se regroupent donc en trois "paquets".

Le miroir d'entrée M_1 a une réflectivité en intensité $r^2 = 0,95$ ce qui donne $\gamma_{cav} = (1 - r^2)/2 = 0,025$. Dans la mesure où notre but est l'étude de la réduction de bruit du champ réfléchi par la cavité, le second miroir de la cavité M_2 doit être un miroir de grande réflectivité. En effet, pour réduire le bruit quantique de la lumière, la cavité ne doit avoir qu'une seule voie d'entrée sortie [Yurke 84]. Dans notre expérience, cette réflectivité est $r'^2 = 99,8 \%$.

La transmission du miroir t'^2 vaut donc 0,2 %. Les coefficients de réflexion des miroirs ont été mesurés à l'aide d'un microwattmètre.

Les deux miroirs de la cavité sont fixés de part et d'autre de la cellule par des barres d'invar, de manière à limiter les vibrations et les dérives de longueur. La cavité contient donc deux fenêtres prismatiques traitées antireflet. Les quatre dioptres de ces fenêtres ont chacun une réflectivité en intensité d'environ 0,25 %. La valeur précise du coefficient de transmission global des fenêtres prismatiques t'' a été déduit de la finesse observée pour la cavité vide. En effet, cette finesse se calcule à partir des coefficients de transmission T et de réflexion R de la cavité Fabry Perot. Si les miroirs ont des coefficients r et t , r' et t' et les dioptres intérieurs une transmission sur un aller seul t'' , les rapports R et T entre E_r (champ réfléchi) et E_t (champ transmis) et E le champ incident sur la cavité s'expriment par :

$$T = \left| \frac{E_t}{E} \right|^2 = \frac{(t t' t'')^2}{(1 - r r' t''^2)^2 + 4 r r' t''^2 \sin^2 \phi / 2} \quad (\text{IV-15})$$

$$R = \left| \frac{E_r}{E} \right|^2 = \frac{(r - r' t''^2)^2 + 4 r r' t''^2 \sin^2 \phi / 2}{(1 - r r' t''^2)^2 + 4 r r' t''^2 \sin^2 \phi / 2} \quad (\text{IV-16})$$

où ϕ est le déphasage du champ sur un tour de cavité. On en déduit la finesse de la cavité :

$$F = \pi \frac{r r' t''^2}{1 - r r' t''^2} \quad (\text{IV-17})$$

La finesse mesurée ($F=75$) et les valeurs de r et r' conduisent à : $t''^2=0,99$. La transmission maximale et la réflexion minimale (à résonance) du Fabry Perot valent :

$$T(\phi=0) = 7,6 \quad \% \quad R(\phi=0) = 16 \quad \%$$

L'intervalle spectral libre de la cavité vaut $c/2D$ soit 600MHz. La largeur de la cavité, définie comme le rapport de l'intervalle spectral libre à la finesse de la cavité vaut 8MHz.

ii. Les champs incidents et réfléchis par la cavité

La géométrie du faisceau incident est adaptée à celle du mode fondamental TEM 00 de la cavité par une lentille de focale 30cm, placée à 1mètre de la cavité. Nous arrivons ainsi à coupler de l'ordre de 90 % de l'énergie incidente au mode fondamental de la cavité.

iii. Détection de la bistabilité

Comme nous l'avons vu au chapitre III, une cavité ayant un miroir de couplage et contenant des atomes (à deux niveaux) présente un comportement bistable : pour une intensité incidente donnée, un nombre d'atomes et une longueur de cavité donnée, il peut exister deux points de fonctionnement stables de la cavité, correspondant à deux intensités intracavité différentes. Pour observer la bistabilité, il faut donc être capable de mesurer l'intensité lumineuse à l'intérieur de la cavité. Cela est possible grâce au peu de lumière transmise par le miroir très réfléchissant M_2 . On observe alors la puissance transmise P_t , reliée à l'intensité intérieure I_0 par la relation :

$$P_t = t^2 I_0 s \quad (\text{IV-18})$$

où s est la surface du faisceau.

La lumière transmise est détectée à l'aide du photodétecteur PD 1 (figure IV-10). Ce détecteur a été conçu pour mesurer les très faibles puissances lumineuses transmises par le miroir M_2 , avec une bande passante allant du continu à environ 3MHz. La lumière est transformée en courant électrique par une photodiode Siemens SFH2030, avec une efficacité $\eta=0,5A/W$. Ce courant est transformé en tension par une résistance de charge $R_c=5k\Omega$. Cette tension est amplifiée par un amplificateur opérationnel rapide et faible bruit AH0014, de gain 51. Nous obtenons ainsi un photodétecteur dont le temps de montée est 300ns, et donnant 100mV de signal pour $0,78\mu W$ de lumière à 852nm. La puissance du faisceau incident est mesurée en prélevant une petite partie, envoyée sur le photodétecteur PD 2 (analogue au photodétecteur PD 1).

c. Bistabilité

I. Procédure expérimentale

Nous disposons maintenant d'atomes ralentis et piégés et d'une cavité optique. Pour étudier la bistabilité optique, il faut coupler ces atomes au mode de la cavité. Les miroirs formant la cavité sont tenus par des supports solidaires de la cellule, dont les cotes ont été calculées pour que le waist de la cavité se trouve (à mieux que le mm près) au centre de la cellule. Il suffit alors de former le piège au centre de la cellule : nous alignons d'abord soigneusement les trois paires de faisceaux piégeants à l'aide de diaphragmes centrés sur les trois directions Oxyz, de manière à ce que les axes de symétrie de ces faisceaux se coupent au centre de la cellule. Ensuite nous ajustons la position des bobines créant le champ magnétique inhomogène de manière à ce que le nuage d'atomes piégés se forme même avec des faisceaux ralentisseurs de petit diamètre (quelques mm), ce qui prouve que le nuage est proche du centre de la cellule.

Il existe alors un moyen simple de placer les atomes au centre de la cavité. Nous éclairons la cavité avec un faisceau sonde "intense" (de l'ordre de 10mW). Lorsque celle-ci est à résonance, elle contient un champ électromagnétique puissant, capable de chasser les atomes piégés qui sont contenus dans le mode de la cavité. Le nuage d'atomes piégés semble alors "coupé en deux" par le faisceau sonde intense. Nous centrons alors le nuage sur le faisceau sonde en le déplaçant à l'aide des champs magnétiques constants créés par les trois paires de bobines de compensation.

Dans toutes les expériences décrites dans ce paragraphe 4), les atomes sont piégés dans les conditions suivantes :

- gradient de champ magnétique : $b=8,4$ Gauss/cm
- diamètre des faisceaux piégeants : 28 mm
- désaccord des faisceaux piégeants : 3 largeurs naturelles dans le rouge de la transition du césium
- intensité des faisceaux piégeants : environ 10 mW/cm².

Le nombre d'atomes contenus dans le nuage d'atomes piégés est du même ordre de grandeur que ceux obtenus sur les autres pièges magneto-optiques, dans les mêmes conditions (de l'ordre

de quelques 10^7). Mais le paramètre important est le nombre total d'atomes interagissant avec le mode de la cavité, difficile à mesurer directement. Nous verrons au paragraphe d) comment on peut déduire ce nombre des courbes de bistabilité que nous allons maintenant présenter.

ii. Observation des pics de résonance de la cavité

Dans cette expérience, nous observons les résonances de la cavité contenant les atomes piégés lorsqu'on fait varier la longueur de la cavité. L'intensité et la fréquence de l'onde incidente sur la cavité sont constantes, ainsi que le nombre d'atomes piégés. La longueur de la cavité est balayée en appliquant une tension V en dents de scie sur la céramique piezo-électrique P.Z.T. (figure IV-10). Lorsqu'il n'y a pas d'atomes piégés on observe les courbes de résonance d'une cavité Fabry Perot (fonction d'Airy). Lorsqu'il y a des atomes piégés, ces pics sont déformés, et présentent un flanc raide (figures IV-12a et b). L'allure de ces pics dépend du signe du désaccord δ entre la fréquence atomique ω_0 et la fréquence de l'onde sonde ω_L . ($\delta = (\omega_0 - \omega_L) / \gamma$). Elle dépend aussi du sens de balayage de la longueur de la cavité. Décrivons le pic de la cavité dans le cas de la figure (IV-12a), obtenue pour un désaccord δ positif. Lorsque la tension augmente, la puissance intracavité, d'abord faible sur la portion F-A devient brutalement forte (point B), puis elle diminue jusqu'au point C. Lorsque la tension rediminue à partir de C, la puissance intracavité augmente, passe par un maximum (point M) puis rediminue jusqu'au point D où elle passe brusquement à une petite valeur (point E).

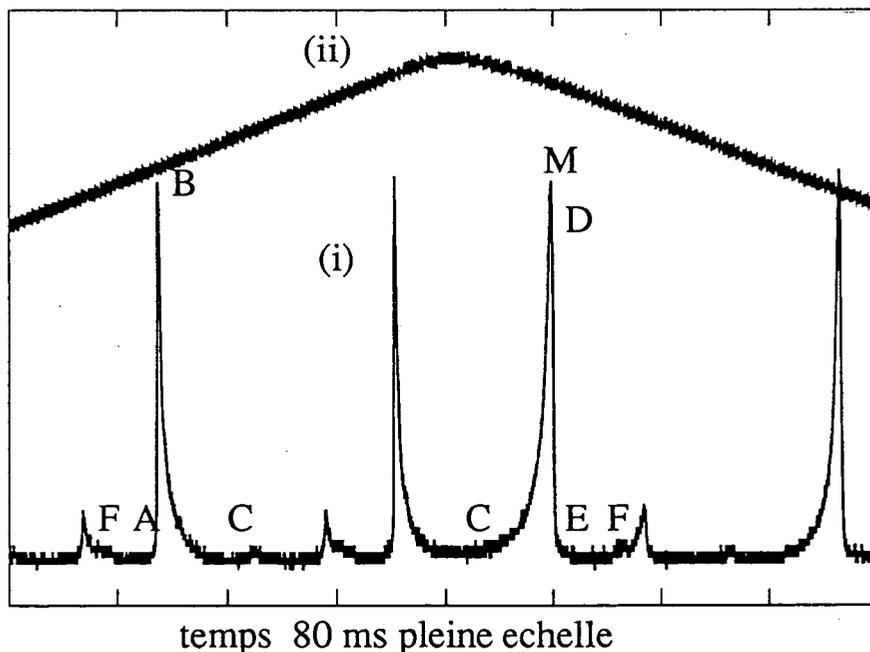


Figure IV-12a : (i): Courbe d'Airy de la cavité non-linéaire. Les petits pics correspondent à l'excitation des modes transverses de la cavité. (ii): Rampe de tension appliquée à la céramique piezo-électrique. $\delta = +11$.

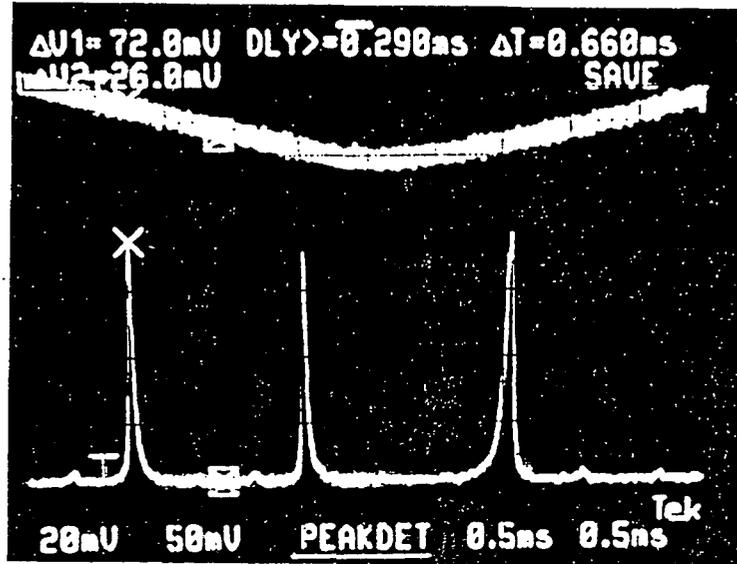


Figure IV-12b : Courbe d'Airy de la cavité non linéaire et rampe de tension sur la céramique piezo-électrique. $\delta = -11$

iii. Discussion de l'origine de la bistabilité observée

La bistabilité observée pourrait être due à différents processus que nous allons détailler plus bas. Nous montrons dans ce paragraphe que la bistabilité observée est bien due à la non-linéarité de la transition atomique. Notons tout d'abord que nous avons évité de sonder les atomes avec une fréquence ω_L trop proche de la fréquence des ondes piégeantes de fréquence ω_p . De cette manière nous écartons les effets qui pourraient être imputés au processus Raman stimulé qui existe si $\omega_L \approx \omega_p$.

Un nuage d'atomes froids est un milieu très fragile dont la structure dépend de l'environnement, et en particulier des ondes lumineuses qui l'éclairent. En effet, comme on l'a vu, une onde sonde trop intense peut transpercer ou détruire le piège. Il est donc possible d'envisager des non-linéarités provenant de modifications du nombre des atomes piégés interagissant avec le mode de la cavité.

Rappelons tout d'abord les caractéristiques de la bistabilité due à la non-linéarité de la transition atomique lorsque les atomes sont excités loin de leur résonance (ce qui est le cas dans les conditions expérimentales). Nous avons vu au chapitre III que les atomes induisent sur le champ un déphasage linéaire Φ_L proportionnel au nombre d'atomes interagissant avec le mode, donné par la relation 75 de l'article inséré en III.4.b :

$$\Phi_L = \frac{N g^2}{\gamma \gamma_{cav}} \frac{I}{\delta} \quad (\text{IV-19})$$

et un déphasage non linéaire Φ_{NL} , donné par :

$$\phi_{NL} = -\frac{N g^2}{\gamma \gamma_{cav}} \frac{4 |\beta_0|^2}{\delta^3} \quad (IV-20)$$

Cette dernière formule montre que le signe de la non-linéarité due à une transition à deux niveaux est le signe de $-1/\delta$. L'allure des courbes de bistabilité doit donc changer si le désaccord change de signe (III.4).

Nous allons maintenant décrire deux effets mécaniques possibles, et comparer la non-linéarité qu'ils induisent à celle de la transition atomique. Le premier effet mécanique peut être décrit de la manière suivante : l'existence d'atomes très froids (très lents mais pas immobiles) dans un piège magnéto-optique résulte de la compétition entre des processus qui freinent les atomes (ou qui amortissent leur impulsion) et de processus liés à l'émission spontanée qui font diffuser l'impulsion des atomes. L'ajout de l'onde stationnaire contenue dans la cavité peut modifier cet équilibre, et provoquer une modification du nombre d'atomes interagissant avec le mode de la cavité. Cette modification ΔN dépend de l'intensité I_0 de l'onde sonde, donc de β_0 , et provoque compte tenu de la formule (IV-19) un déphasage non linéaire du champ donné par :

$$\phi_{NL} = \Delta N(\beta_0) \frac{g^2}{\gamma \gamma_{cav}} \frac{1}{\delta} \quad (IV-21)$$

Dans nos expériences, la fréquence de Rabi normalisée pour l'onde sonde ($|\beta_0|$) est grande devant l'unité. Dans ce cas, l'effet de l'onde stationnaire dans la cavité est une augmentation de la diffusion, c'est à dire un chauffage des atomes froids. Les atomes ont tendance à être expulsés du mode de la cavité. On en déduit que le signe de la non-linéarité résultante est celui de $-\delta$, le même que le signe de la non-linéarité due à la transition atomique. Cependant, cette non-linéarité a un temps de réponse de l'ordre de la milliseconde (ordre de grandeur des temps d'évolution des coordonnées du centre de masse des atomes ralentis). Cette non-linéarité est beaucoup plus lente que celle due à la transition atomique, dont le temps de réponse est de l'ordre de γ^{-1} .

Le second processus envisageable est une modification du nombre d'atomes interagissant avec le mode de la cavité due aux forces dipolaires qu'exerce un champ sur un atome. On peut en effet montrer [Houches 90] qu'un atome soumis à une onde lumineuse d'intensité inhomogène est attiré vers les régions de forte intensité si le désaccord δ de l'onde est négatif (désaccord bleu), et vers celles de faible intensité pour les désaccords positifs (rouge). Le mode gaussien fondamental de notre cavité attire donc les atomes pour $\delta \leq 0$ et les repousse pour $\delta \geq 0$. Cet effet conduit à un déphasage non linéaire du champ, donné par (IV-21), avec $\Delta N(\beta_0)$, variation du nombre d'atomes dans le mode en fonction de l'intensité, qui augmente avec β_0 si $\delta \leq 0$ et diminue si $\delta \geq 0$. Le déphasage non linéaire dû aux forces dipolaires est donc négatif indépendamment du signe de δ . Une telle non-linéarité conduit à de la bistabilité où l'allure des courbes ne change pas avec le signe du désaccord δ .

Afin de nous assurer que la bistabilité que nous observons a bien les caractéristiques attendues pour une assemblée d'atomes à deux niveaux immobiles, nous allons vérifier que l'allure des courbes de bistabilité décrite en ii) correspond à ce que prédit la théorie. On voit sur les figures

IV-12 a,b et c que la dépendance avec le signe du désaccord δ est bien celle que l'on attend. Il reste à comparer les comportements en fonction de la longueur de la cavité. Les courbes théoriques (III-4c) sont tracées en fonction du paramètre ϕ proportionnel à $\omega_c - \omega_L$ où ω_c est relié à la longueur L de la cavité par la relation $\omega_c = 2\pi jc/L$ où j est un entier. L et ϕ varient en sens opposés. La longueur L de la cavité est balayée à l'aide d'une tension V appliquée sur une céramique piezo-électrique fabriquée par la société Quartz et Silice, et ayant un coefficient électrostrictif négatif : la céramique s'allonge lorsque la tension V augmente. Compte tenu de la position de la céramique par rapport aux miroirs (figure IV-10), la longueur de la cavité L augmente lorsque la céramique rétrécit, donc lorsque la tension V diminue.

La comparaison entre les courbes théoriques (Puissance intracavité en fonction de ϕ) et les courbes expérimentales (en fonction de la tension V) se fait aisément puisque ϕ augmente lorsque V augmente. Elle montre que la dépendance des courbes de bistabilité avec le désaccord δ et la longueur de la cavité correspond à celle prédite par le modèle des atomes à deux niveaux, mais pas à celle qui serait due à des effets mécaniques liés aux forces dipolaires. Par ailleurs, la figure (IV-12c) montre que les temps de commutation entre les états de basse et haute transmission de la cavité sont inférieurs à $10\mu s$, tant pour les commutations de bas en haut que de haut en bas. Ces temps sont beaucoup plus courts (au moins dix fois) que les temps caractéristiques des mouvements des atomes. La rapidité de la bistabilité observée prouve donc que la non-linéarité mise en jeu est liée à la transition atomique.

iv. Observation des cycles d'hystérésis de la bistabilité

Dans cette expérience, nous observons la bistabilité en faisant varier l'intensité incidente sur la cavité. La longueur de la cavité, le nombre d'atomes couplés au mode, et la fréquence ω_L de l'onde sonde sont constants. La mesure de la puissance transmise par la cavité, proportionnelle à l'intensité intracavité, en fonction de la puissance incidente sur la cavité nous permet d'observer les cycles d'hystérésis de la bistabilité.

Cette expérience suppose que la longueur de la cavité reste fixe pendant le temps de balayage de l'intensité. Or, spontanément principalement à cause des vibrations et des dilations thermiques lentes, la longueur de la cavité fluctue et dérive : la cavité ne reste pas longtemps au voisinage d'une résonance avec la fréquence du faisceau sonde.

L'expérience est donc réalisée en balayant très lentement la longueur de la cavité en appliquant une tension en dent de scie (de période 5 à 10 secondes) sur la céramique piezo-électrique. La résonance de la cavité est balayée en environ une demi-seconde. L'intensité de l'onde incidente sur la cavité est balayée très rapidement en modulant la puissance R.F. qui pilote le modulateur acousto-optique A.O.3. (figure IV-3). L'intensité incidente sur la cavité est mesurée en prélevant une petite partie du faisceau sonde. L'intensité intérieure est mesurée en détectant la lumière transmise par le miroir M_2 . Les deux photodétecteurs sont du type décrit au paragraphe b-iii). Les deux signaux sont observés sur un oscilloscope à échantillonnage (Tektronix 2230) . Les courbes obtenues sont ensuite transférées sur ordinateur par une liaison GPIB.

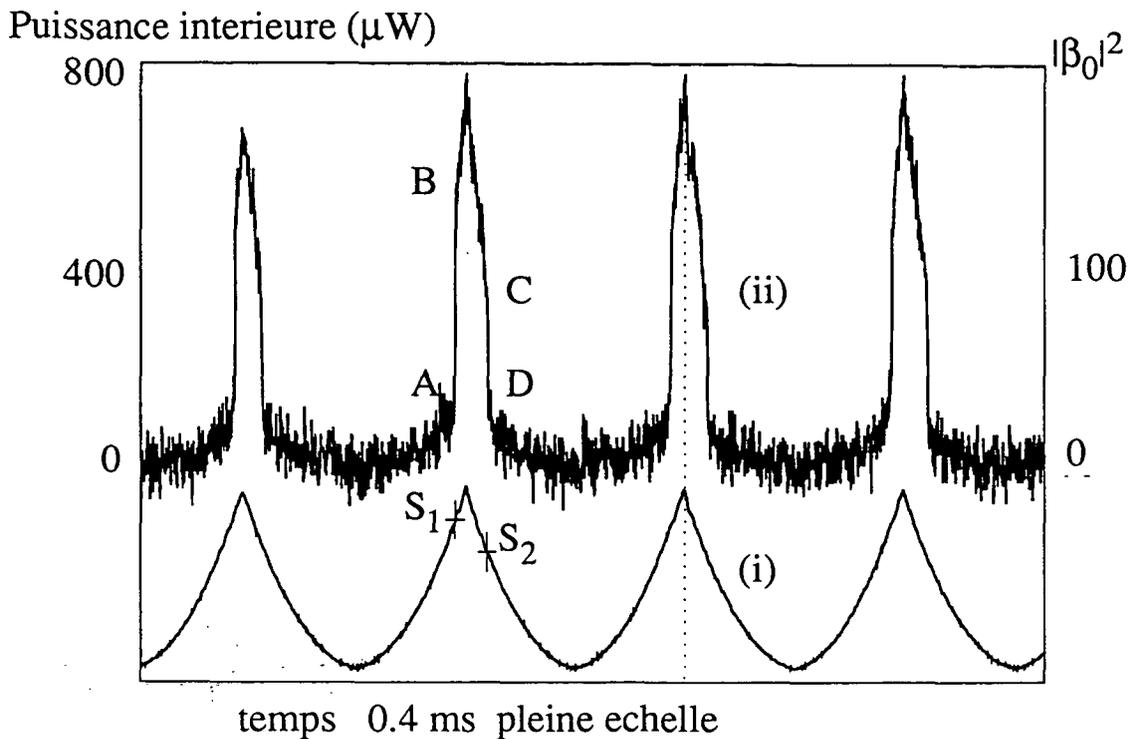


Figure IV-13 (i) : intensité incidente sur la cavité. (ii) : intensité transmise, présentant un comportement bistable. $\delta = -6,15$, $\phi = -1$, $C = 23,3$. Ces valeurs des paramètres ont été déduites du modèle ondes gaussiennes et cavité linéaire (4 d). Fréquence de balayage de l'intensité : 10 kHz.

La figure (IV-13) présente le résultat d'un enregistrement : La courbe du bas (i) correspond à l'intensité incidente, la courbe du haut (ii) à l'intensité transmise. Son motif se répète identique à lui même plusieurs fois, ce qui prouve que la cavité est immobile pendant un balayage aller-retour de l'intensité. On peut donc considérer que la longueur de la cavité est fixe pendant quelques périodes de modulation d'intensité.

La cavité a un comportement bistable : pour de faibles intensités incidentes, la transmission de la cavité est faible. Lorsque l'intensité incidente dépasse un seuil (point S_1) la transmission de la cavité commute d'une petite vers une grande valeur (points A et B). Lorsque l'intensité incidente rediminue, la transmission reste grande, jusqu'à un second seuil (points S_2 et C), inférieur au premier, où la transmission de la cavité commute vers une petite valeur (point D). L'existence des deux seuils différents correspond à l'hystérésis des courbes de bistabilité.

La procédure expérimentale utilisée pour enregistrer cette courbe et les courbes qui suivent est la suivante : puisque la longueur de la cavité est balayée lentement, la cavité est la plupart du temps hors résonance, et l'intensité transmise par la cavité est presque nulle, quelle que soit la puissance incidente. Lorsque la cavité est proche de résonance, l'intensité transmise donne un signal important. Nous avons donc choisi de déclencher l'acquisition des données par l'oscilloscope numérique sur le niveau de l'intensité transmise. Ainsi, nous n'observons sur l'écran de l'oscilloscope que les courbes de transmission pour lesquelles la cavité est au voisinage de

résonance avec la fréquence ω_L du faisceau incident, donc pour lesquelles elle a un comportement bistable.

Les figures IV-14-15 et 16 représentent la puissance intérieure à la cavité en fonction de la puissance incidente sur la cavité. Ces courbes sont obtenues soit en utilisant l'oscilloscope en mode XY, soit en traçant la courbe (ii) de la figure IV-13 en fonction de la courbe (i). (On pourrait aussi plier la figure IV-13 autour du pointillé). L'échelle verticale est donnée en microwatt. Ces valeurs sont obtenues en mesurant la tension observée sur le photodétecteur PD 1, et en utilisant son rendement ($0,78\mu\text{W}$ pour 100mV) et la transmission $t^2=0,2\%$ du miroir M_2 . En tenant compte de la surface s du faisceau et de l'intensité de saturation I_{sat} de la transition du césium, on peut graduer l'échelle verticale en unité d'intensité de saturation c'est à dire à l'aide du paramètre sans dimensions $|\beta_0|^2$. $|\beta_0|^2$ est lié à l'intensité intérieure I_0 et à la puissance intérieure P_0 par :

$$(|\beta_0|)^2 = \frac{I_0}{I_{\text{sat}}} = \frac{P_0}{s I_{\text{sat}}} \quad (\text{IV-22})$$

En prenant $I_{\text{sat}} = 2,2 \text{ mW/cm}^2$ et $s = \pi\omega_0^2 \approx 1,8 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^2$, on a $|\beta_0|^2 = 1$ pour $P_0 = 4 \mu\text{W}$

Puissance interieure

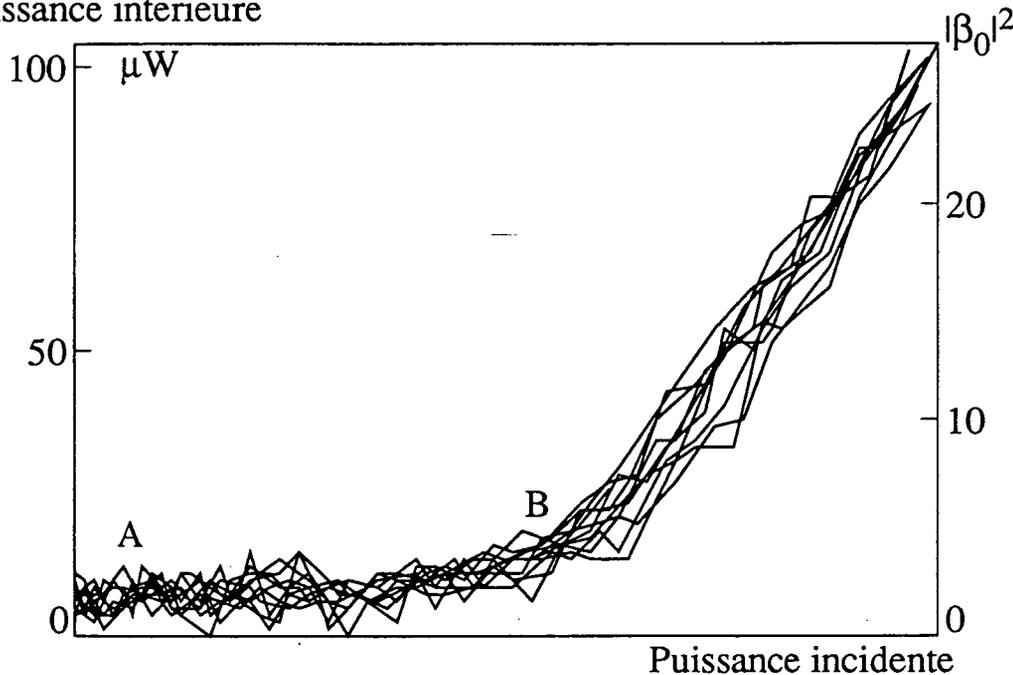


Figure IV-14 : Courbe de transmission non-linéaire de la cavité . Le champ sonde est à résonance avec la transition atomique ($\delta = 0$). La puissance incidente maximum est de l'ordre de $5 \mu\text{W}$.

Lorsque le désaccord atomique est nul ($\delta=0$), on n'observe pas de bistabilité comme le montre la courbe de la figure IV-14. Tant que l'intensité à l'intérieur de la cavité est faible, les atomes absorbent le faisceau sonde, la surtension de la cavité est mauvaise et la transmission très faible (zone AB). Lorsque l'intensité intérieure augmente, et sature le milieu atomique, ($|\beta_0|^2$ de l'ordre de quelques unités), celui-ci devient transparent, la surtension de la cavité augmente, ainsi que la transmission de la cavité. La figure IV-14 a été obtenue en numérisant les signaux pendant cinq périodes de balayage de l'intensité. Les courbes sont bien superposées, ce qui montre que la cavité

est immobile pendant le temps d'acquisition. Le bruit sur les courbes est dû à la détection qui est en limite de sensibilité, puisque la puissance maximale détectée par la photodiode sur cette courbe est $0,25\mu\text{W}$.

Puissance interieure

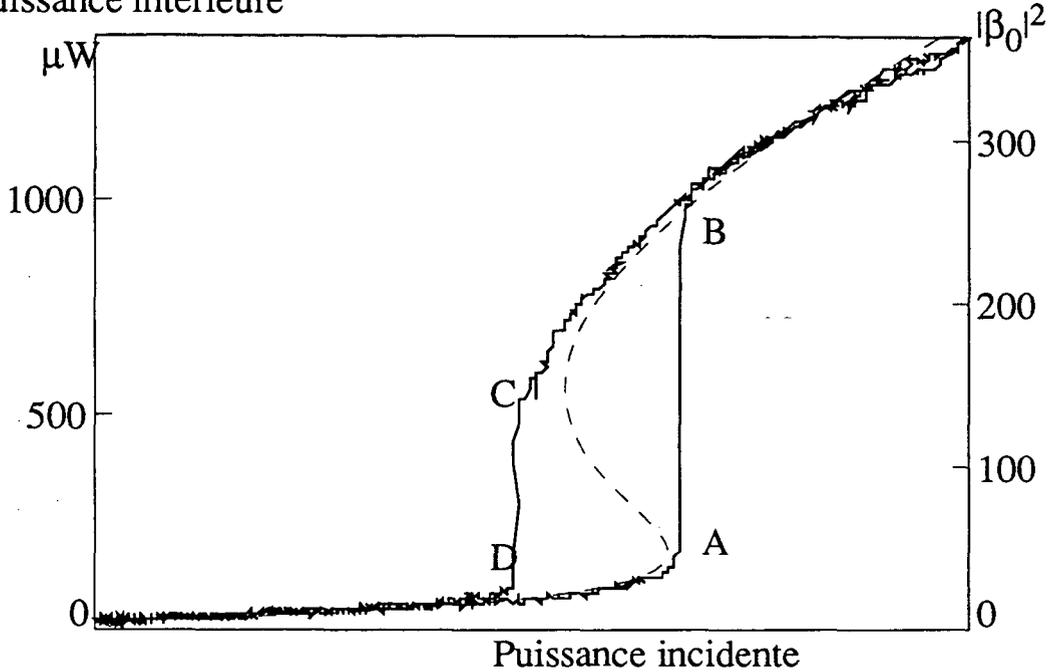


Figure IV-15 : Cycle d'hystérésis de la bistabilité. $\delta = 11,5$, $C = 33,8$, $\phi = 1$. Ces valeurs et la courbe théorique en tirets ont été calculées par le modèle de la cavité en anneau avec des ondes planes (4.d.iii). La puissance incidente varie de 0 à $30\mu\text{W}$.

La courbe de la figure IV-15 a été enregistrée pour un désaccord atomique de 30 MHz, soit 5,7 largeur naturelle du césium dans le rouge de la transition : $\delta = 11,3$. Cette courbe présente une hystérésis avec un contraste en transmission important. Le temps total d'échantillonnage est de $1000\mu\text{s}$. Il correspond à un balayage aller retour à 1kHz de l'intensité incidente. L'intervalle entre deux points consécutifs est donc de $1\mu\text{s}$ (1024 points au total). Nous en déduisons que le temps de commutation entre les points A et B est inférieur à $1\mu\text{s}$. Si on balaie l'intensité incidente plus rapidement, les temps de commutation observés sont limités par le temps de montée du photodétecteur (300 ns).

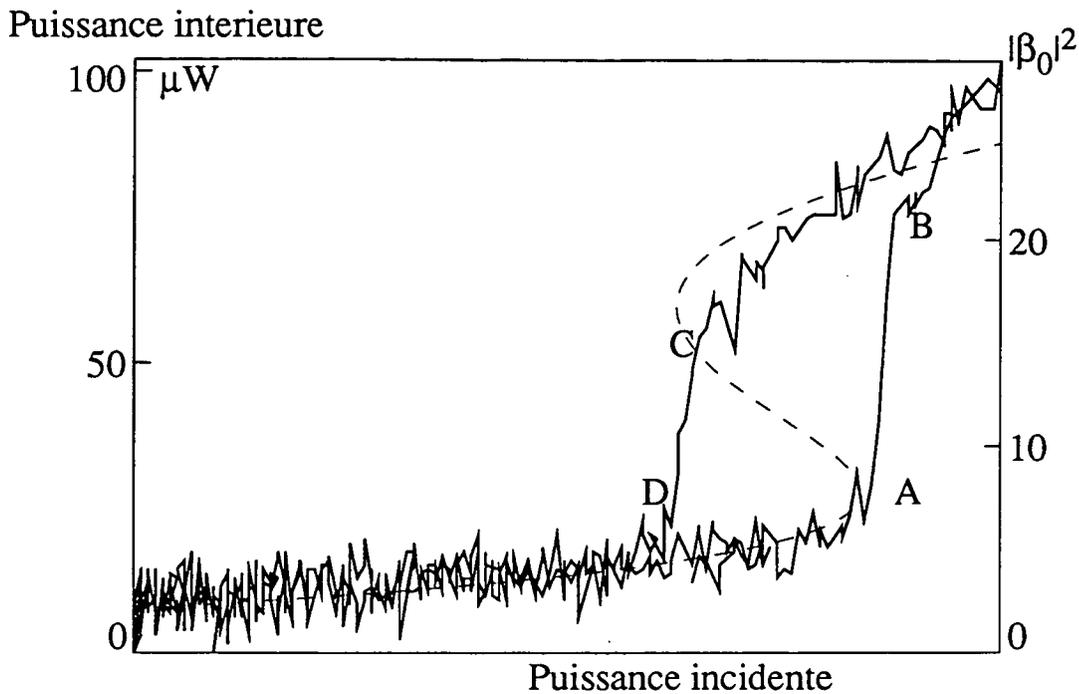


Figure IV-16 : Cycle d'hystérésis de la bistabilité. $\delta = -6,15$, $C = 52,3$, $\phi = -9,3$. Ces valeurs et la courbe théorique en tirets ont été calculées par le modèle de la cavité en anneau avec des ondes planes (4.d.iii). La puissance incidente varie de 0 à $8,4 \mu\text{W}$.

La courbe de la figure IV-16 a été enregistrée pour un désaccord atomique de $-16,3\text{MHz}$ soit 3 largeurs naturelles dans le bleu de la transition. La bistabilité est observée pour des puissances incidentes beaucoup plus faibles que dans le cas de la figure IV-16 car le mode de la cavité est couplé à un plus grand nombre d'atomes (voir tableau IV-1). La fréquence de balayage de l'intensité est 10kHz , le temps d'échantillonnage est de $100 \mu\text{s}$, et donc l'intervalle entre deux points de 100ns . Le temps de commutation entre les points A et B est de 300ns , limité par le temps de montée du photodétecteur.

v. Bistabilité pour de grands désaccords

Après l'étude de la bistabilité entre -6 et 6 largeurs naturelles ($-12 \leq \delta \leq 12$), nous avons observé de la bistabilité pour un désaccord de $23,6$ largeurs naturelles dans le bleu de la résonance atomique ($\delta \cong 47$). L'expérience est en tous points semblable à ce qui vient d'être décrit, à ceci près que le modulateur acousto-optique AO 3 a été remplacé par le second modèle (voir IV-2-b-ii). Les courbes obtenues sont représentées sur les figures IV-17 et IV-18.

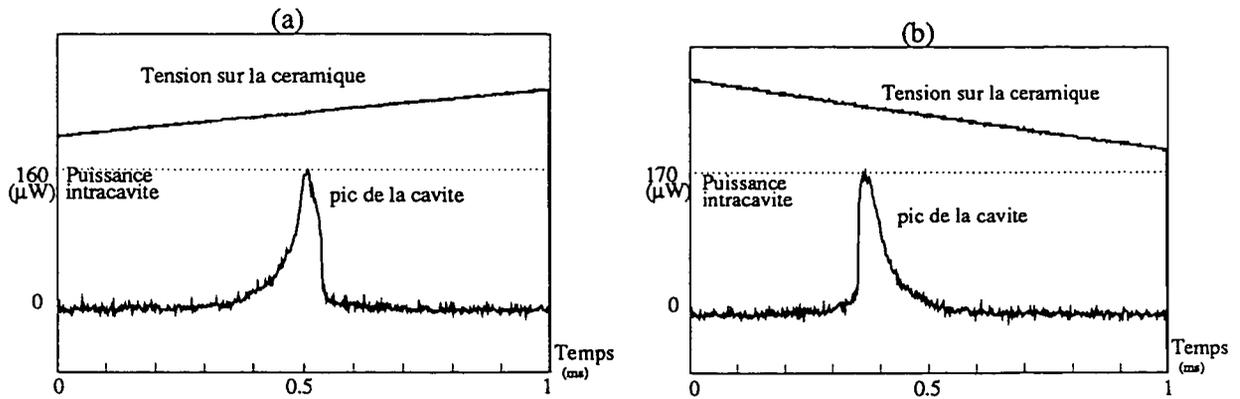


Figure IV-17a et 17b : Pics bistables de la cavité obtenus avec une tension croissante (a) ou décroissante (b). La courbe (a) passe par un maximum avant de commuter d'une forte à une faible intensité intérieure, tandis que la courbe (b) commute d'une faible à une forte intensité sans passer par le maximum de la fonction d'Airy de la cavité. $\delta = 47$.

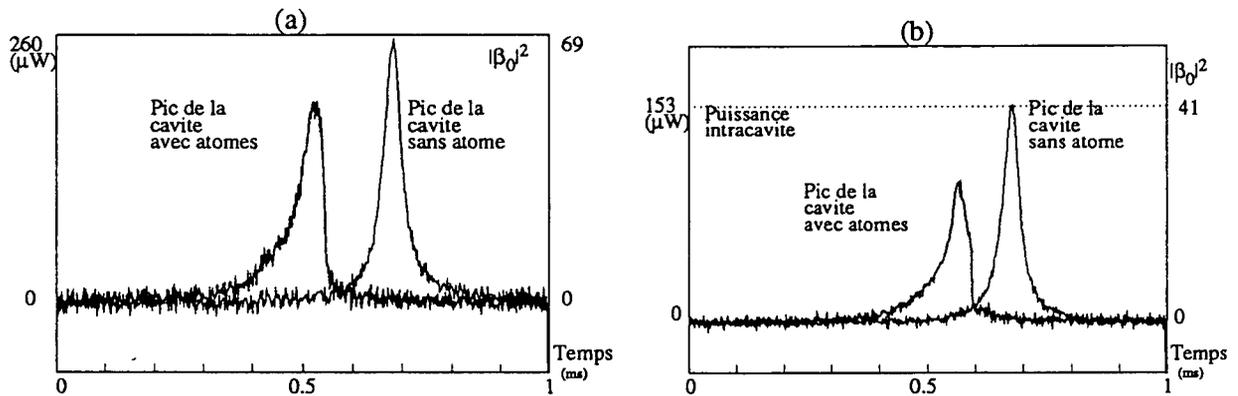


Figure IV-18a et 18b : Comparaison des pics de la cavité sans atomes et avec atomes. On note une diminution de la surtension de la cavité (qui sert à déterminer le nombre d'atomes couplés à la cavité), et un déplacement du pic dû à l'indice de réfraction du milieu atomique. En utilisant la méthode exposée au paragraphe 4.d.ii, on trouve $C = 280$ (18a). $C = 161$ (18b). $\delta = 47$.

Nous avons cherché la bistabilité pour un désaccord de 38 largeurs naturelles dans le bleu ($\delta=75,5$) en utilisant directement la lumière issue du laser titane-saphir comme onde sonde. Nous n'avons pour l'instant observé que de très faibles effets non linéaires : la présence des atomes dans la cavité déplace légèrement les pics de résonance de la cavité (effet dû à l'indice de réfraction des atomes) et les déforme un petit peu (effet non linéaire). Ces effets s'observent sur l'écran de l'oscilloscope lorsqu'on détruit brusquement le nuage d'atome, en coupant le courant créant le champ magnétique inhomogène, mais nous n'avons pas obtenu d'enregistrements probants permettant d'illustrer ces observations.

vi. Observation d'instabilités

La figure IV-19 présente une courbe d'hystérésis aux caractéristiques particulières. Elle présente un phénomène d'instabilité : lorsque la puissance incidente sur la cavité immobile augmente, nous observons une commutation entre un état de faible transmission à un état de forte transmission instable (points A et B), qui devient stable lorsque la puissance incidente continue d'augmenter. Lorsque l'intensité incidente rediminue, la transmission commute vers un état instable (point C) : la puissance sortant de la cavité oscille très rapidement (dans la gamme des MHz). Si l'intensité diminue encore, la transmission commute à nouveau vers l'état de faible transmission, stable (points D et E). On peut observer ces instabilités à intensité incidente fixe, en balayant la longueur de la cavité. La figure IV-20 représente un pic de transmission instable, et détaille l'oscillation observée. Nous avons mesuré la fréquence des oscillations qui apparaissent à l'aide d'un analyseur de spectre. Nous obtenons des fréquences variant de 0 à 10 MHz, selon le point de fonctionnement de la cavité. Les fréquences maximales observées sont de l'ordre de la largeur de la cavité, et sont supérieures à la largeur naturelle des atomes.

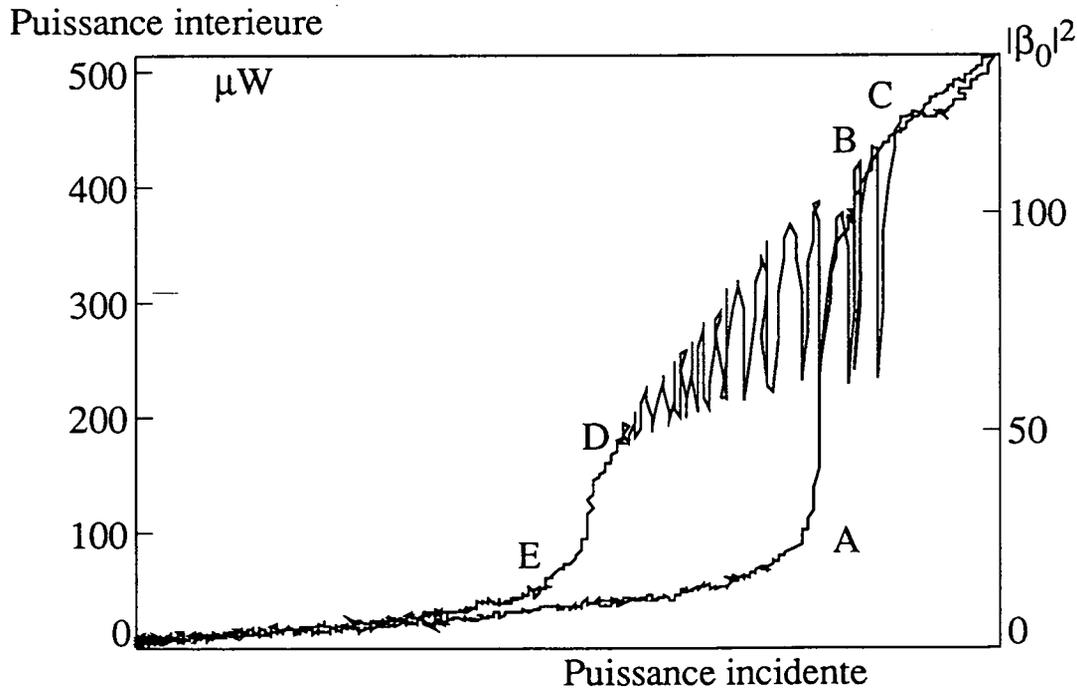


Figure IV-19 : Cycle d'hystérésis présentant une commutation vers un régime instable de la cavité. $\delta = 11$, $C = 45$, $\phi = 4,7$. Ces valeurs des paramètres ont été déduites du modèle ondes gaussienne et cavité linéaire (4.d.iii).

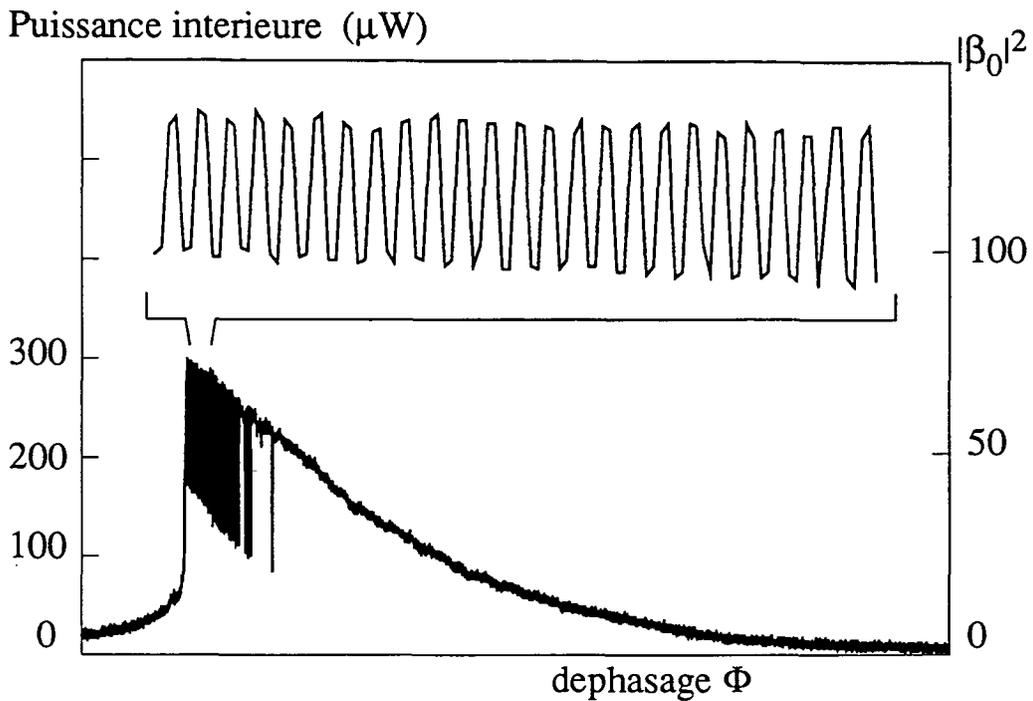


Figure IV-20 : Pic de la cavité non-linéaire enregistré à puissance incidente fixe lorsqu'on balaye la longueur de la cavité, montrant une commutation vers un régime instable. La seconde courbe détaille les oscillations de l'instabilité. La fréquence de l'instabilité est environ 500 KHz.

Les instabilités n'apparaissent que pour de relativement faibles intensités incidentes : si l'intensité incidente est trop forte, le comportement de la cavité redevient simplement bistable. Les conditions expérimentales donnant ces instabilités sont comparables à celles de la figure IV-15. Les conditions de l'enregistrement sont les suivantes : désaccord atomique rouge : $\delta=11$. Pour la figure IV-19, la durée d'échantillonnage est de $200\mu\text{s}$ avec 2048 points. Le délai entre deux points est de 100ns . On en déduit que la fréquence de l'oscillation est d'environ 1MHz. Pour la figure IV-20, les 4096 points ont été acquis en 2ms. Le délai entre deux points est de $0,5\mu\text{s}$. On en déduit que la fréquence des oscillations est d'environ 500kHz.

Ces instabilités sont celles se produisant quand le système ne vérifie plus les conditions de stabilité étudiées au paragraphe III.4.d. Leurs propriétés semblent montrer qu'elles sont du type "monomode", c'est à dire qu'elles ne font pas intervenir l'excitation d'autres modes transverses ou longitudinaux de la cavité. Elles ont été étudiées théoriquement par R.Bonifacio et L.A.Lugiato [Bonifacio 76], et observées expérimentalement [Orozco.84] et [Orozco.89] sur un jet de sodium.

vii. Discussion

Les courbes précédentes montrent la bistabilité ou la non-linéarité de la cavité contenant des atomes froids, dans diverses conditions de désaccord et d'intensité incidente. En ce qui concerne l'intensité incidente, nous avons noté le comportement suivant : si celle-ci est trop importante (mais pas trop pour ne pas détruire le piège), la bistabilité disparaît. La théorie prévoit que les

atomes sont saturés par un champ intracavité trop intense. Le milieu atomique, blanchi par le champ intracavité, n'a plus d'effet sur ce champ. En revanche, nous n'avons pas réussi à observer la disparition de la bistabilité en diminuant la puissance incidente sur la cavité pour des désaccords atomiques compris entre -6 et 6 largeurs naturelles : les pics de la cavité obtenus en balayant sa longueur, restent toujours bistables lorsqu'on diminue l'intensité incidente sur la cavité : ils disparaissent dans le bruit de fond des amplificateurs avant de cesser d'être bistables.

L'étude de la bistabilité à l'aide d'atomes froids montre que nous disposons d'un milieu non linéaire très rapide et conduisant à la bistabilité optique pour des puissances incidentes très faibles, et pour une grande variété de désaccords atomiques.

d. Comparaison avec la théorie des atomes à deux niveaux

Le but de ce paragraphe est d'établir un lien complet entre les grandeurs mesurées expérimentalement et les paramètres de la théorie. Rappelons les paramètres introduits dans la théorie de la bistabilité avec des atomes à deux niveaux :

γ : demi-largeur naturelle de la transition atomique

δ : désaccord normalisé entre la fréquence de l'onde sonde ω_L et la fréquence de la transition atomique ω_0 ($\delta = (\omega_0 - \omega_L) / \gamma$)

$|\beta_0|^2$: carré de la fréquence de rabi, proportionnel à l'intensité intracavité.

ϕ : déphasage linéaire (modulo 2π) du champ pour un tour de cavité, lorsque la cavité ne contient pas d'atomes

C : paramètre de bistabilité, proportionnel au nombre d'atomes qui interagissent avec le mode de la cavité.

Du point de vue expérimental, nous connaissons les paramètres γ , δ et $|\beta_0|^2$, comme indiqué sur les courbes expérimentales qui précèdent. En revanche, les paramètres ϕ et C ne sont pas imposés au cours d'une expérience. En effet, comme nous l'avons vu, le nombre d'atomes couplés au mode de la cavité dépend des conditions de fonctionnement du piège, et de la position relative du nuage d'atome et de la cavité. Le paramètre ϕ , lié à la longueur de la cavité ne peut pas être déterminé au cours des expériences de mesure des cycles d'hystérésis, puisque l'oscilloscope déclenche l'acquisition des données sur la puissance transmise par la cavité. Lorsqu'on observe les pics de résonance de la cavité, ϕ correspond à l'abscisse des courbes, puisque ϕ est proportionnel à la longueur de la cavité, donc fonction de la tension appliquée sur la céramique piezo-électrique. Nous allons voir maintenant comment estimer les paramètres C et ϕ à partir de nos résultats expérimentaux.

i. Première méthode

Il est possible d'obtenir une estimation du nombre N d'atomes interagissant avec le mode de la cavité à partir du nombre total d'atomes dans le piège N_p . On suppose que le nuage d'atomes est sphérique de rayon R de l'ordre du millimètre et a une densité uniforme. Le faisceau gaussien dans la cavité, au voisinage du piège, est assimilé à un cylindre de rayon égal au waist w_0 du mode, car

la longueur de Rayleigh du mode est de 43cm. Dans ces conditions le rapport des nombres d'atomes froids dans le mode de la cavité et dans le piège est égal au rapport du volume de l'intersection du mode de la cavité avec le nuage d'atomes par le volume de ce nuage :

$$\frac{N}{N_p} = \frac{\pi w_0^2 2R}{\frac{4\pi}{3} R^3} = \frac{3}{2} \left(\frac{w_0}{R} \right)^2 \quad (\text{IV-23})$$

Le paramètre de bistabilité C vaut $\frac{N g^2}{2\gamma_{tot} \gamma}$, où $\frac{g^2}{\gamma} = \frac{3\pi}{s} \left(\frac{\lambda}{2\pi} \right)^2$, (formules III-84) où s est la surface du faisceau.

En utilisant $s=\pi w_0^2$, nous obtenons une estimation C_1 de C à partir du nombre total d'atomes dans le piège :

$$C_1 = \frac{N_p}{2\gamma_{tot}} \frac{9}{8\pi^2} \left(\frac{\lambda}{R} \right)^2 \quad (\text{IV-24})$$

En utilisant les données $\lambda = 0,852 \mu\text{m}$, $\gamma_{cav} = 0,07$ et les estimations $R = 1 \text{ mm}$ et $N_p=5.10^7$, on obtient : $C_1 \approx 60$. Cette estimation du paramètre de bistabilité est peu précise car elle suppose qu'on connaisse bien la densité moyenne des atomes dans le nuage (mesure du rayon R), et que le nuage soit bien centré sur le mode de la cavité.

II. Deuxième méthode

La mesure du nombre d'atomes froids dans le nuage est faite en général de deux manières : soit en mesurant la fluorescence de l'ensemble des atomes (voir IV-2-c-i)), soit en mesurant l'épaisseur optique du nuage atomique à l'aide d'une sonde [Grison 92]. (on mesure l'absorption d'une sonde faible par les atomes). Nous allons montrer que la mesure du champ transmis par la cavité avec et sans atomes permet de mesurer cette épaisseur optique, et donne accès directement au paramètre C. Comme on l'a vu au chapitre III, l'équation normalisée de la bistabilité pour les atomes à deux niveaux prend la forme (III-65) :

$$X^{in} = Y \left\{ (1 + C f(Y))^2 + (\phi - C \delta f(Y))^2 \right\} \quad (\text{IV-25})$$

Pour une cavité en anneau avec des ondes planes et une cavité linéaire et des ondes gaussiennes, la fonction f a les expressions respectives :

$$f(Y) = \frac{2}{1 + \delta^2 + Y} \quad \text{et} \quad f(Y) = \frac{3}{Y} \ln \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{8}{3} \frac{Y}{1 + \delta^2}} \right) \quad (\text{IV-26})$$

Y est proportionnel à l'intensité intracavité et X^{in} est proportionnel à l'intensité incidente sur la cavité. Nous avons vu au chapitre III que le maximum de transmission de la cavité lorsque ϕ varie est obtenu lorsque

$$\phi - C \delta f(Y) = 0$$

Lorsque la cavité ne contient pas d'atomes, ($C=0$), le maximum d'intensité dans la cavité Y_0 , vérifie :

$$X^{in} = Y_0 \quad (IV-27)$$

Lorsque la cavité contient des atomes, le maximum Y_1 vérifie :

$$X^{in} = Y_1 (1 + C f(Y_1))^2 \quad (IV-28)$$

De la mesure de Y_0 et Y_1 , connaissant δ , on peut déduire une estimation C_2 du paramètre de bistabilité C :

$$C_2 = \left(\sqrt{\frac{Y_0}{Y_1}} - 1 \right) \frac{1}{f(Y_1)} \quad (IV-29)$$

Cette estimation de C va être appliquée aux figures IV-18a et 18b.

iii. Troisième méthode

Nous allons montrer qu'il est possible d'obtenir une estimation des paramètres ϕ et C , à partir des cycles d'hystérésis de la cavité, qui sont obtenus pour une cavité fonctionnant à ϕ , δ et C constants. Cette méthode utilise les ordonnées des points tournant de la bistabilité qu'on peut extraire des courbes d'hystérésis. Ils sont définis par l'équation :

$$\frac{dX^{in}}{dY} = 0 \quad (IV-31)$$

qui s'écrit :

$$\begin{aligned} (\phi - C \delta f(Y))^2 - 2 C \delta Y \frac{\partial f}{\partial Y} (\phi - C \delta f(Y)) \\ + (1 + C f(Y))^2 + 2 C Y \frac{\partial f}{\partial Y} (1 + C f(Y)) = 0 \end{aligned} \quad (IV-32)$$

C'est une relation du second degré en ϕ et en C . Cette relation est vérifiée pour deux valeurs Y_A et Y_C de Y , correspondant aux deux points tournants de la bistabilité. On obtient ainsi deux équations à deux inconnues, du second degré en C et ϕ (δ , Y_A et Y_C sont des données extraites des courbes d'hystérésis). La résolution numérique de ces équations donne une estimation ϕ_3 et C_3 des paramètres ϕ et C pour les cycles d'hystérésis de la bistabilité enregistrés. Nous allons maintenant appliquer cette méthode aux courbes des figures IV-13, 15, 16 et 19.

iv. Estimations du paramètre de bistabilité et du déphasage

Pour chaque courbe analysée, nous relevons l'ordonnée en μW de la puissance intérieure à la cavité aux points qui nous intéressent : les points tournant de la bistabilité pour les cycles d'hystérésis (fig.IV-13, 15, 16, 19), et les points maximum des fonctions d'Airy pour les courbes 18a et 18b. Nous en déduisons ensuite la fréquence de Rabi normalisée $|\beta_0|^2$ correspondante (III.85), puis la valeur du paramètre Y (III.87) :

$$|\beta_0|^2 = \frac{I_0}{I_{sat}} = \frac{P_0}{s I_{sat}} \quad \text{et} \quad Y = 2 |\beta_0|^2 \quad (IV-35)$$

A l'aide de la formule IV-29, nous calculons le paramètre C dans l'approximation d'onde plane en cavité linéaire et dans le cas d'ondes gaussiennes en cavité linéaire pour les expériences des figure

IV-18a et IV-18b (Tableau IV-1). Avec le système d'équations IV-32, nous calculons les paramètres C et ϕ correspondant aux figures IV-13, IV-15, IV-16 et IV-19 (Tableau IV-2). En reportant les résultats dans l'équation de la bistabilité, nous en déduisons la puissance incidente sur la cavité P^{in} , donnée par (III-56-b) :

$$X^{in} = \frac{4}{\gamma_{cav}} \frac{P^{in}}{s I_{sat}}$$

Nous utilisons les valeurs numériques : $s = 1,8 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^2$, $I_{sat} = 2,1 \text{ mW/cm}^2$ et $\gamma_{cav} = 0,07$. Le premier tableau donne les valeurs des courbes IV-13, 15, 16 et 19, et le second tableau celles des courbes IV-18a et 18b.

	Fig IV-18a	Fig IV-18b
δ	47	47
$P_0 (\mu W)$	257,4	153
$P_1 (\mu W)$	165,4	117
$ \beta_0 ^2$	43,7	31
Y_1	87,5	62
Ondes planes, cavité en anneau		
C_2	279	161
Ondes gaussiennes, cavité linéaire		
C_2	279	161

Tableau IV-1

	fig.IV-13	fig.IV-15	fig.IV-16	fig.IV-19
δ	-6,15	11,5	-6,15	11
P_A (μW)	129	190,7	20	97
P_C (μW)	344	635,6	52	$P_E = 130,4$
$ \beta_0 _A^2$	34,2	50,4	5,3	25,6
$ \beta_0 _C^2$	91	168,1	13,8	$ \beta_0 _E^2 = 34,4$
Y_A	68,4	100,9	10,6	51,4
Y_C	182	336,3	27,5	$Y_E = 69$
Ondes planes, cavité en anneau				
C_3	29,8	33,8	52,3	34,2
ϕ_3	-0,62	1	-9,27	3,25
P_{in_A} (μW)	36	20	16,7	
P_{in_C} (μW)	35	17	12,4	
Ondes gaussiennes, cavité linéaire				
C_3	23,3	44,1	97,8	45,1
ϕ_3	-1,06	2,34	-18,9	4,7
P_{in_A} (μW)	33,4	51,5		13,3
P_{in_C} (μW)	31,7	41,2		13,2

Tableau IV-2 :

v. Discussion

Les estimations du paramètre de bistabilité C données dans le tableau IV-2 sont en bon accord avec l'ordre de grandeur issu de la mesure du nombre d'atomes piégés par la méthode de fluorescence (IV.24). Pour les figures IV-13, 14, 15, 16, 19 et 20, nous obtenons des paramètres de bistabilité compris entre 30 et 50 lorsqu'ils sont calculés par le modèle de la cavité en anneau avec des ondes planes (CA.OP) et compris entre 20 et 100 lorsqu'on utilise le modèle plus réaliste de la cavité linéaire et des modes gaussiens (CL.OG). La dispersion des valeurs obtenues avec une même méthode de calcul provient non seulement des variations du nombre d'atomes dans le piège, mais aussi des variations de la position du nuage d'atomes froids par rapport au mode de la cavité. En effet le piège se forme autour du point où le champ magnétique est nul et ce point peut bouger de quelques dixièmes de millimètres au cours d'une série d'enregistrements. L'observation de la bistabilité pour de grands désaccords nécessite un plus grand nombre d'atomes que pour de faibles désaccords, et donc un meilleur réglage du piège et un meilleur couplage du nuage d'atomes à la cavité. Nous mesurons donc des coefficients de bistabilité plus importants (160 et 280) sur les figures IV-18a et IV-18b. Cette mesure permet grâce aux formules III.81 et III.89b d'estimer la densité n du nuage d'atomes froids :

$$n = \frac{2 \gamma_{cav}}{3 \pi l} \left(\frac{2 \pi}{\lambda} \right)^2 C \quad (IV.36)$$

En supposant que le nuage a un diamètre $l = 0,5$ mm, on obtient $n = 4,5 \cdot 10^{11}$ atomes par cm^3 . Les modèles (CA.OP) et (CL.OG) donnent des estimations du paramètre de bistabilité différentes, mais du même ordre de grandeur lorsqu'on utilise la troisième méthode de calcul qui utilise les points tournants de la bistabilité. Le modèle (CA.OP) donne (sauf pour la figure IV-13) une estimation plus faible que l'autre modèle, comme le laisse prévoir la théorie [Drummond 81] (voir III.4.c.iv).

Le tableau IV-1 donne les estimations des paramètres de bistabilité correspondant aux courbes enregistrées pour de grands désaccords atomiques dans le bleu de la transition ($\delta = 47$). Pour ces courbes, le paramètre δ^2 est très supérieur à l'intensité normalisée Y_1 . Dans cette limite, les deux expressions de la fonctions f données par IV-26 coïncident. Les deux modèles (CA.OP) et (CL.OG) donnent donc les mêmes valeurs pour C .

Pour les figures IV-15 et IV-16, nous avons tracé la courbe de bistabilité théorique correspondant aux paramètres calculés avec le modèle simple (CL.OP). Pour la figure IV-15, l'accord est bon, en particulier au niveau des pentes de la courbe de bistabilité pour les régimes de faible et de forte transmission. En revanche, l'accord est moins bon pour la figure IV-16 pour laquelle la localisation des points tournants de la bistabilité est plus imprécise. Pour la courbe IV-19 qui présente des instabilités, l'accord devient mauvais.

5 Conclusion

Comme le laissait prévoir la comparaison des différents milieux non linéaires vu chapitre II, nous avons montré qu'une assemblée d'atomes de césium immobiles est un milieu très non linéaire.

L'utilisation d'un piège magnéto-optique, relativement long à mettre en oeuvre, nous a fourni un nuage d'atomes presque immobiles pour lesquels l'élargissement Doppler est très faible devant la largeur naturelle de la transition. Nous avons observé un effet laser où le milieu amplificateur est l'assemblée d'atomes refroidis, et dont les propriétés statistiques sont intéressantes. Il nous reste à les étudier, en particulier en ce qui concerne le bruit quantique et la largeur spectrale.

Nous avons ensuite observé la bistabilité optique dans les atomes froids pour une large plage de valeurs du désaccord atomique et pour des intensités incidentes qui sont toujours faibles (inférieures à $100 \mu\text{W}$). Le comportement de la cavité pour des désaccords grands ($|\delta| > 6$) correspond qualitativement et quantitativement à celui prévu par le modèle de l'atome à deux niveaux. Nous avons aussi observé des instabilités comme le prévoit ce modèle. L'étude détaillée de ces instabilités et des conditions dans lesquelles elles apparaissent reste à faire et permettra de comparer la dépendance des fréquences d'oscillation mesurées en fonction des paramètres de l'expérience à celle prédite par le modèle de l'atome à deux niveaux.

Les ordres de grandeur mesurés pour le paramètre de bistabilité C et pour la puissance intracavité montrent que notre cavité bistable fonctionne dans des conditions où on attend une importante réduction du bruit de la lumière réfléchiée par la cavité, et en particulier du bruit d'intensité (voir les figures de l'article inséré au chapitre III paragraphe 4.b). Nous disposons donc d'une cavité bistable susceptible de comprimer efficacement les fluctuations de la lumière dans un domaine assez large en fréquence (jusqu'à 15 MHz).

V. Etude expérimentale des fluctuations quantiques dans la bistabilité optique

1 Introduction

Les milieux atomiques ont été utilisés pour les premières expériences de compression des fluctuations du rayonnement. La première d'entre elles [Slusher 85 et 87] générant un état du rayonnement de valeur moyenne nulle ayant des fluctuations comprimées, appelé vide squeezé, par mélange à quatre ondes sur un jet de sodium. La compression des fluctuations du rayonnement a aussi été observée sur la lumière transmise par un Fabry-Perot de grande finesse contenant un jet atomique de sodium [Raizen 87] [Grangier 91] ou de barium [Hope 91]. Ces expériences ont donné des taux de squeezing de l'ordre de 25 %, inférieurs à ceux prédits par la théorie. Une des raisons de ce désaccord peut provenir de la largeur Doppler résiduelle sur les jets atomiques. L'absence de l'effet Doppler dans les atomes froids est un avantage certain.

La compression des fluctuations quantiques de la lumière a aussi été observée avec une non-linéarité paramétrique dans une fibre de silice sans cavité [Shelby 86], mais l'effet de compression attendu a été limité par le bruit introduit par la diffusion Brillouin de la lumière sur les ondes acoustiques guidées se propageant dans la fibre. D'autres groupes de recherche essaient d'utiliser la très faible mais très rapide non-linéarité de la silice en utilisant une cavité optique monolithique courte et de très grande finesse de manière à obtenir un effet non linéaire notable avec une puissance incidente raisonnable. La non-linéarité de la silice peut aussi être utilisée pour réduire le bruit quantique sur des impulsions lumineuses brèves et intenses [Rosenbluh 91].

Une voie alternative pour réaliser une cavité "mangeuse de bruit" est comme nous l'avons vu au chapitre III, d'utiliser la non-linéarité d'une assemblée d'atomes immobiles excités loin de résonance qui s'apparente alors à un effet Kerr avec de faibles pertes et qui rajoute peu de bruit, sauf aux fréquences caractéristiques d'évolution du système. C'est celle que nous allons explorer dans ce chapitre.

Nous avons vu au chapitre IV que la cavité contenant les atomes froids est bistable pour des intensités lumineuses incidentes et réfléchies très faibles. La mesure du bruit quantique sur de telles intensités est délicate car le bruit propre du système de photodétection ne doit pas masquer le signal de bruit dû à la lumière. Nous analysons en détail les caractéristiques de bruit des composants électroniques les plus courants et les comparons au signal de bruit que nous cherchons à mesurer. Enfin, nous donnons les plans de deux systèmes de mesure du bruit quantique de la lumière, dont l'un est probablement parmi les plus sensibles qu'on puisse réaliser.

Un des principaux problèmes de la mesure du bruit quantique de la lumière est la calibration du bruit quantique standard correspondant au faisceau détecté. Nous discutons deux méthodes fiables et accessibles à notre expérience et les mettons en applications pour présenter les premiers signaux de signal de bruit (et d'excès de bruit) que nous avons obtenus.

2 La détection des fluctuations de la lumière

a. Difficultés de la détection du bruit d'intensité de la lumière

Nous avons vu au chapitre I que la mesure du bruit quantique de la lumière se ramène toujours à la mesure du bruit d'intensité d'un faisceau lumineux : si on veut mesurer le bruit sur une composante de quadrature autre que l'intensité, on utilise des techniques de mélange hétérodyne avec un oscillateur local. Par ailleurs, nous nous intéressons aux fluctuations de haute fréquence. En effet, la lumière que nous analysons a interagi avec une cavité optique, et nous attendons des modifications des propriétés de bruit de la lumière pour des fréquences de l'ordre de grandeur de la largeur de la cavité. Dans la mesure où le bruit des lasers est le plus souvent supérieur au bruit quantique standard dans le domaine des basses fréquences (inférieures à 1 MHz), nous nous intéresserons aux fréquences d'analyse comprises entre 3 et 20 MHz.

Nous détectons donc l'intensité des faisceaux lumineux que nous étudions à l'aide de photodiodes. En effet, ces composants délivrent une intensité électrique proportionnelle à la puissance lumineuse qu'ils reçoivent, avec une efficacité quantique proche d'un électron émis par photon reçu. Les fluctuations de l'intensité du faisceau se traduisent donc en fluctuations du courant débité par la photodiode.

Lorsque le faisceau lumineux est dans un état cohérent, dont le bruit d'intensité correspond au bruit quantique standard (ou shot noise), on peut montrer que les fluctuations du photocourant sont caractérisées par une densité spectrale donnée par :

$$S_I(\omega) = 2 e I \quad (\text{V.1})$$

où e est la charge de l'électron et I l'intensité moyenne du courant. C'est le bruit dû au passage des électrons à des instants aléatoires et indépendants. Il s'agit d'un bruit blanc, indépendant de la fréquence, et extrêmement petit. Pour $I=1\text{mA}$, $S_I(\omega)=3,2 \cdot 10^{-22} \text{A}^2/\text{Hz}$. Une telle densité spectrale de fluctuations ne peut pas être toujours détectée directement par un analyseur de spectre usuel : cet appareil donne la puissance de bruit du signal qu'il analyse, en fonction de la fréquence, avec une bande passante B . Si R est la résistance d'entrée de l'analyseur de spectre, la puissance du bruit P_ω à la fréquence est ω :

$$P_\omega = R B S_I(\omega)$$

En prenant $R = 50 \text{ Ohms}$ et $B = 1 \text{ MHz}$, la puissance de bruit, pour 1mA de courant est $1,6 \cdot 10^{-15} \text{ W}$ soit un niveau d'environ -120 dBm (le niveau 0 dBm correspond à une puissance de 1 mW). Ce niveau est généralement trop faible par rapport au bruit propre de l'analyseur de spectre, et ce d'autant plus qu'on souhaite mesurer les fluctuations quantiques de la lumière sur des faisceaux lumineux d'intensité inférieure au mW , pour observer des réductions de ces fluctuations quantiques. Il faut donc amplifier électroniquement les fluctuations du photocourant à l'aide d'amplificateurs rapides (bande passante de l'ordre de 1 à 20MHz) et très faible bruit, avant de les analyser.

b. Les autres sources de bruit électronique

Avant de décrire et discuter les deux principaux types d'amplificateurs qui sont utilisés (amplificateurs tension-tension, et amplificateurs courant-tension), nous allons donner les caractéristiques de bruit des composants électroniques utilisés dans les montages.

i. La photodiode

Une photodiode est une diode qui doit être polarisée par une tension continue appliquée dans le sens bloquant. Dans ces conditions elle se comporte comme un générateur de courant, avec une capacité parasite en parallèle sur le générateur : c'est la capacité de la jonction formant la diode. La valeur de cette capacité dépend de la tension de polarisation, et de la nature et de la surface du photodétecteur. Pour une photodiode P.I.N. au silicium, EGG FFD 100, polarisée par 15 Volts, la capacité vaut environ 10 pF. Lorsque la photodiode n'est pas éclairée, elle délivre un courant très faible et fluctuant : c'est le courant d'obscurité. Pour une photodiode EGG FFD 100, le courant d'obscurité vaut 100 nA et le bruit sur ce courant 10^{-14} A.Hz^{-1/2}. Ce bruit est faible devant les signaux que nous voulons mesurer. Nous le négligerons toujours.

ii. Les composants passifs (résistances, condensateurs, bobines)

- Les condensateurs et les inductances parfaits sont des composants qui ne dissipent pas d'énergie, mais qui la stockent et la restituent. A cette absence de dissipation correspond une absence de fluctuations : ces deux composants sont donc uniquement décrits par leur coefficient de capacité C ou d'inductance L.

- Une résistance parfaite est un composant dont l'impédance R est uniquement dissipative (réelle). A la dissipation décrite par la loi de Joule est associé le bruit Johnson-Nyquist : l'intensité traversant une résistance R et la tension à ses bornes sont fluctuants. Ce bruit est blanc (indépendant de la fréquence). Sa densité spectrale dépend de la température T et de la résistance R. La densité spectrale de bruit d'intensité est donnée par :

$$S_R(\omega) = \frac{4 k T}{R} \quad (\text{V.2a})$$

k est la constante de Boltzmann. Le bruit Johnson peut aussi être caractérisé par la densité spectrale des fluctuations de la tension aux bornes de la résistance. Elle est donnée par :

$$R^2 S_R(\omega) = 4 R k T \quad (\text{V.2b})$$

Du point de vue électronique, une résistance R peut être représentée soit par un dipôle d'impédance R avec un générateur de courant *i* en parallèle, soit par un dipole d'impédance R avec un générateur de tension *u* en série. Le courant *i* ou la tension *u* ont une valeur moyenne nulle, mais ont des fluctuations dont la densité spectrale est donnée par les formules V-2a et V-2b.

Pour une résistance de 1000 Ω à la température ambiante, on a $S_R = 1,6 \cdot 10^{-23}$ A²/Hz. Pour R=50 Ω, $S_R = 3,2 \cdot 10^{-22}$ A²/Hz. Ces chiffres montrent que la densité spectrale des fluctuations d'un photocourant de 1mA est égale à la densité spectrale des fluctuations de courant dues à une résistance de 50 Ω.

III. Les amplificateurs

Un amplificateur linéaire ajoute toujours du bruit au signal qu'il amplifie. Les caractéristiques de ce bruit sont données par les constructeurs, elles sont exprimées en termes de bruit ramené à l'entrée de l'amplificateur [Horowitz, chap.7]. On peut donc directement comparer la densité spectrale de bruit ramenée à l'entrée de l'amplificateur, à la densité spectrale de bruit qu'on cherche à mesurer. Le tableau (V.1) suivant donne ces densités spectrales pour les amplificateurs que nous utilisons. Pour les amplificateurs tension-tension, certains constructeurs donnent la densité spectrale de bruit en tension notée v , d'autre un critère de bruit NF (Noise Figure) en fonction de la résistance R_e d'entrée de l'amplificateur. Ce critère est donné par :

$$NF (dB) = 10 \text{ Log}_{10} \left(\frac{4kTR_e + v^2}{4kTR_e} \right) \quad (V.3)$$

Le critère de bruit mesure le bruit dû à l'amplificateur relativement au bruit de la résistance d'entrée de l'amplificateur.

Amplificateur	Données constructeur	Densité spectrale de bruit
AH0013	2 nV.Hz ^{-1/2}	2 nV.Hz ^{-1/2}
AH0014	3 nV.Hz ^{-1/2}	3 nV.Hz ^{-1/2}
SL560C	NF=1,8 dB $R_e=200 \Omega$	1,3 nV.Hz ^{-1/2}
	NF=3,5 dB $R_e=50 \Omega$	2 nV.Hz ^{-1/2}
AN312-1	1,3 pA/Hz ^{-1/2}	1,3 pA.Hz ^{-1/2}

Tableau V-1 :

c. Utilisation d'un amplificateur tension-tension

L'idée la plus simple pour mesurer les fluctuations du courant délivré par une photodiode est de les transformer en fluctuations de tension à l'aide d'une résistance de charge R_c , puis d'amplifier ces fluctuations de courant.

Les performances d'un tel système, indépendamment des caractéristiques de l'amplificateur, résultent d'un compromis entre la sensibilité et la bande passante du détecteur souhaité. En effet, la capacité parasite C_p de la photodiode et la résistance de charge R_c forment un filtre passe bas, de fréquence de coupure :

$$f_c = \frac{1}{2\pi R_c C_p} \quad (V.4)$$

Par ailleurs, les fluctuations de la lumière ne donneront un signal supérieur au bruit Johnson de la résistance de charge que pour un courant moyen I vérifiant :

$$2eI > 4 \frac{kT}{R_c} \quad (V.5)$$

Si on s'impose une bande passante $f_c=20$ MHz, avec une photodiode de capacité parasite $C_p=10$ pF, on doit utiliser une résistance de charge inférieure à :

$$R_{\max} = \frac{l}{2 \pi f_c C_p} = 800 \Omega$$

D'après (V.5) on ne pourra alors observer le signal dû aux fluctuations quantiques de la lumière que pour des courants moyens supérieurs à I_{\min} où :

$$I_{\min} = \frac{2kT}{e R_{\max}} = \frac{2kT}{e} 2\pi f_c C_p \quad (\text{V.6})$$

En prenant $C_p = 10 \text{ pF}$, $f_c = 20 \text{ MHz}$ on obtient $I_{\min} = 60 \mu\text{A}$, ce qui correspond à une puissance lumineuse d'environ $100 \mu\text{W}$. La densité spectrale de bruit de tension de la résistance R_{\max} vaut $\sqrt{4 R_{\max} k T} = 3,6 \text{ nV} / \sqrt{\text{Hz}}$. Elle est comparable au bruit ramené à l'entrée de l'amplificateur AH 0013.

Au laboratoire, Jerome Mertz [Mertz 91] a mis au point un système de photodétection utilisant l'amplificateur AH 0013 (figure V-1). Celui-ci permet de mesurer le niveau moyen du photocourant, ainsi que ses fluctuations. Le transistor bipolaire BC 109 et la diode Zener fixent le potentiel de la cathode de la photodiode. Le courant moyen délivré par la photodiode traverse le transistor, et la résistance de 100Ω . La tension aux bornes de cette résistance permet de mesurer, à l'aide de l'amplificateur opérationnel TL061 monté en suiveur, le photocourant moyen, avec une bande passante d'environ 500 kHz .

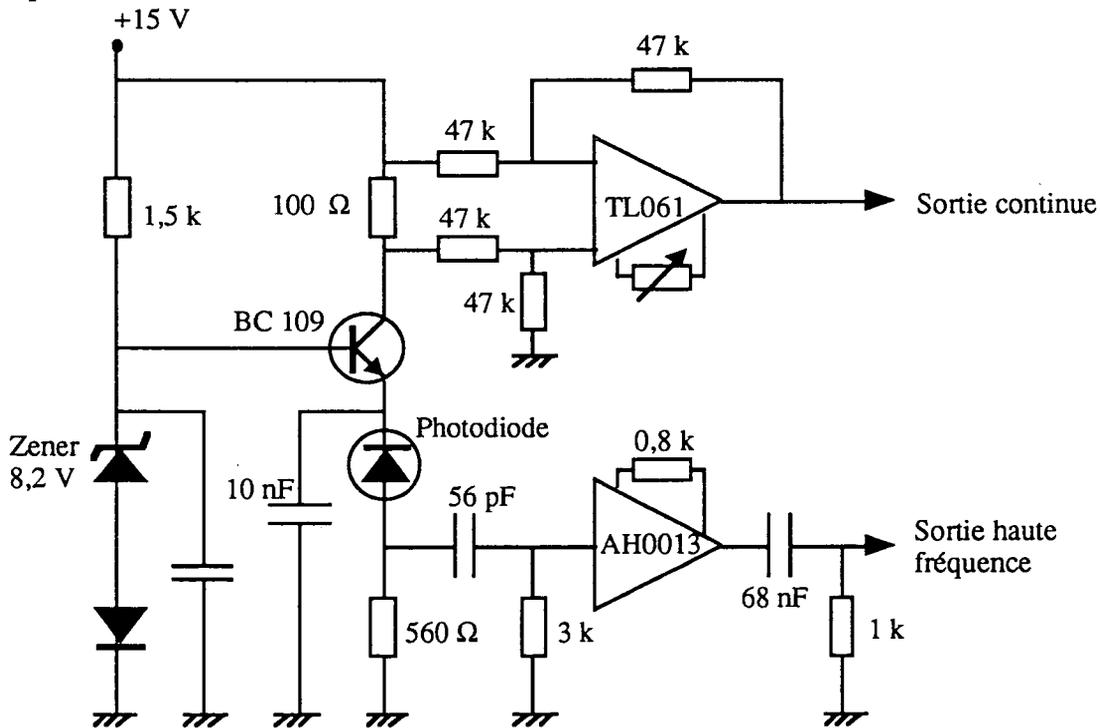


Figure V-1 : Photodétecteur faible bruit utilisant un amplificateur tension-tension.

La partie haute fréquence du photocourant est transformée en tension par la résistance de charge R_c . Cette tension est filtrée par un filtre passe-haut qui permet d'éliminer les basses fréquences qui pourraient saturer l'amplificateur. L'amplificateur AH 0013 amplifie le signal filtré, avec un gain d'environ 5 et une bande passante de 1 à 20MHz. Dans ce montage, l'amplificateur faible bruit sert d'adaptateur d'impédance entre la résistance de charge élevée ($\cong 500 \Omega$) et l'entrée faible impédance, par exemple, d'un analyseur de spectre (50Ω). La résistance de charge R_c vaut

560 Ω , ce qui permet de mesurer, avec un rapport signal sur bruit de 10, le shot-noise sur un photocourant de 0,9 mA. Ce courant correspond à des puissances lumineuses de 1,5 à 2 mW selon la longueur d'onde de la lumière et l'efficacité quantique du photodétecteur.

Ce montage est très performant pour mesurer le bruit de faisceaux lumineux pour des puissances de l'ordre du milliwatt. L'amplificateur reste linéaire pour des photocourants allant jusqu'à 5 mA. Il permet donc de mesurer le bruit quantique de la lumière pour des intensités importantes. En revanche, ce détecteur ne permet pas d'observer le bruit quantique standard sur des puissances lumineuses inférieures à quelques centaines de microwatt.

d. Amplificateur courant-tension

Dans le montage précédent la sensibilité du photodétecteur est limitée par le bruit thermique de la résistance de charge. Pour améliorer la sensibilité tout en gardant une grande bande passante, il ne faut plus utiliser de résistance de charge pour convertir les fluctuations de courant en fluctuations de tension.

Il existe une solution utilisant un amplificateur courant-tension (ou transimpédance) très faible bruit, et ayant un fort gain. L'étage d'entrée de ces amplificateurs est un transistor à effet de champ en Arséniure de Gallium très faible bruit. J'ai mis au point un tel photodétecteur avec un amplificateur transimpédance commercial Analog Device AN312-1 dont le schéma est donné figure V-2a. Nous allons commenter ce schéma électronique :

L'amplificateur AN a un gain transimpédance très élevé de 100 000 Volts par Ampère, et une bande passante de 200 Hz à 200 MHz. Avec un tel gain, la composante continue et les fluctuations basse fréquence (de 0 à quelques centaines de kiloHertz) du photocourant sont susceptibles de saturer l'amplificateur. Elles doivent être filtrées, et seules les composantes haute fréquence doivent être couplées à l'amplificateur transimpédance. Cet argument explique la présence de la capacité d'entrée C_e entre la photodiode et l'amplificateur.

La partie basse fréquence du photocourant rejoint la masse à travers une résistance de charge R . Cette résistance est un générateur de bruit, dont la puissance diminue si la résistance augmente. Il n'est cependant toujours pas possible de prendre une résistance très grande car la tension que le photocourant crée aux bornes de cette résistance a tendance à dépolariser la photodiode et à en changer le point de fonctionnement. Nous utilisons donc une inductance L en série avec la résistance de charge, chargée de couper le bruit thermique venant de la résistance R , comme nous le montrons dans la suite.

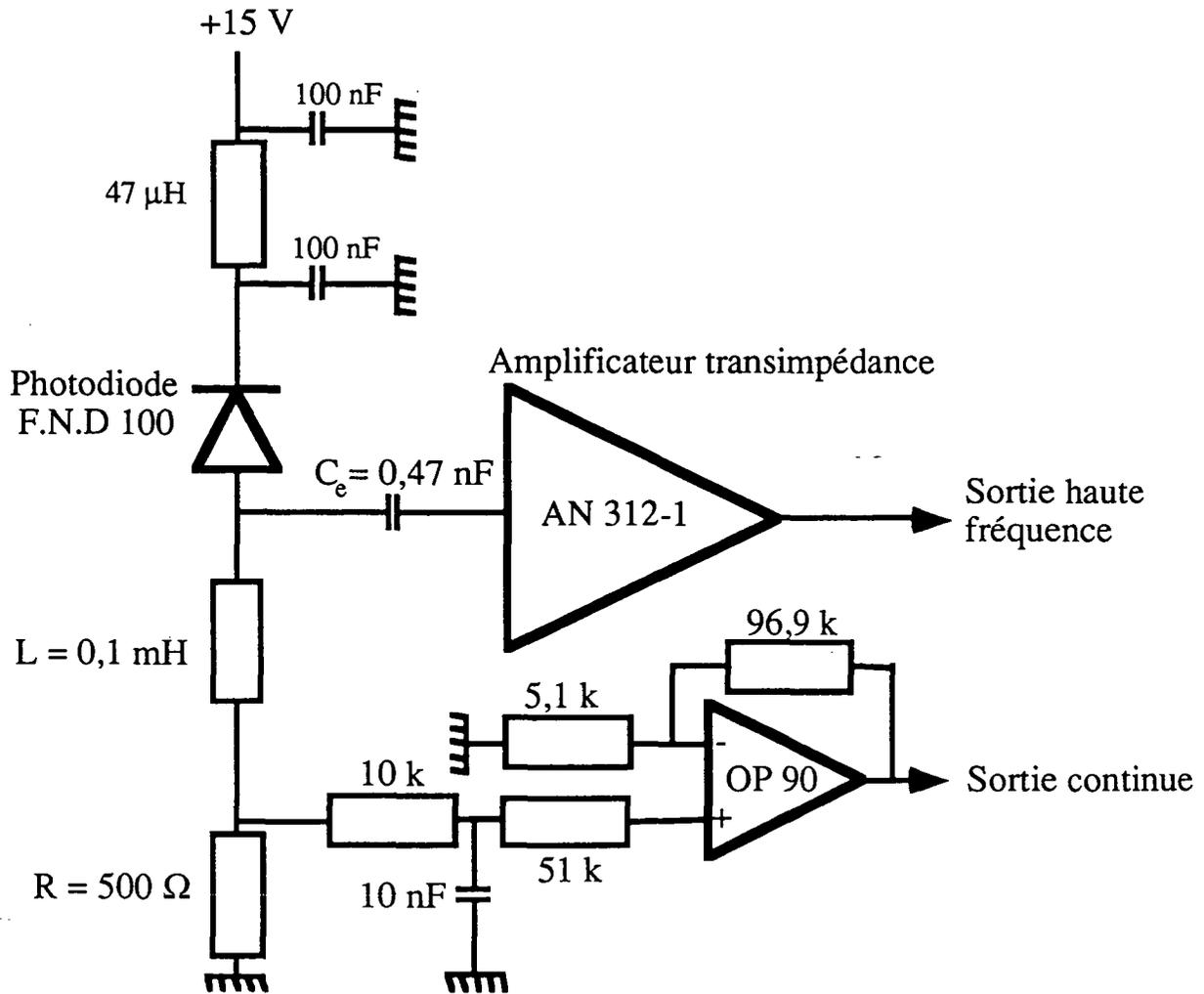


Figure V-2a : Photodétecteur faible bruit utilisant un amplificateur courant-tension.

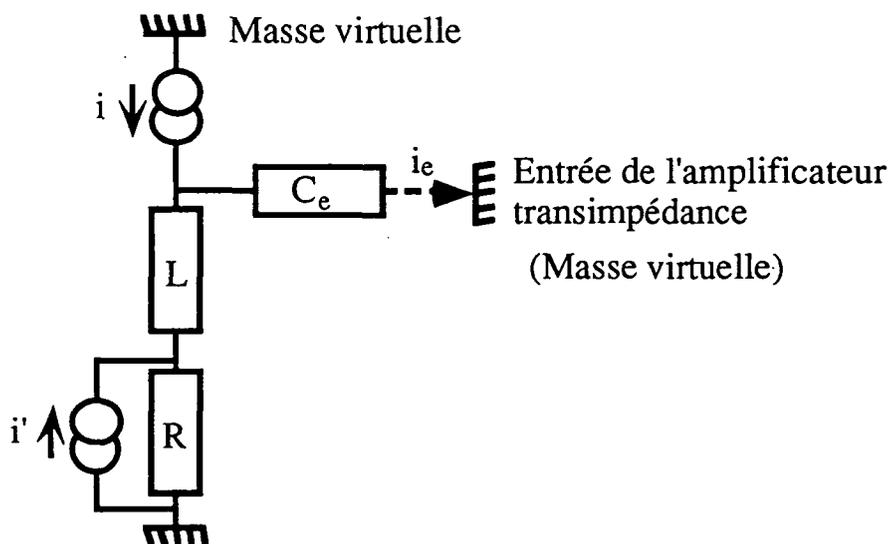


Figure V-2b : Circuit théorique de l'étage d'entrée de l'amplificateur précédent.

Nous allons maintenant justifier ces arguments à l'aide d'un modèle théorique simple, correspondant au schéma de la figure V-2b. L'entrée de l'amplificateur transimpédance est une masse virtuelle (potentiel égal au potentiel de la masse). La cathode de la photodiode qui est au potentiel constant par rapport à la masse + 15 V est également une masse virtuelle pour la partie alternative du signal. La capacité parasite de la photodiode est négligée devant la capacité C_e . La photodiode est donc représentée par un générateur de courant i correspondant au bruit du faisceau lumineux détecté. Si ce dernier est au shot-noise, le courant i a une densité spectrale S_i donnée par la formule (V.1).

$$S_i = 2 e I$$

La résistance, qui est une source de bruit est modélisée par un générateur de courant i' en parallèle sur la résistance R . La densité spectrale $S_{i'}$ du courant i' est donnée par la formule V.2a.

$$S_{i'} = 4 k T / R$$

Nous cherchons à calculer le courant d'entrée i_e dans l'amplificateur transimpédance. On obtient :

$$i_e = \frac{R + j L \omega}{R + j L \omega + \frac{1}{j C_e \omega}} i + \frac{R}{R + j L \omega + \frac{1}{j C_e \omega}} i' \quad (V.7)$$

La densité spectrale S_e du courant i_e se calcule en utilisant le fait que le shot noise et le bruit thermique de la résistance sont indépendants :

$$S_e(\omega) = \frac{R^2 + L^2 \omega^2}{R^2 + \left(L \omega - \frac{1}{C_e \omega} \right)^2} S_i + \frac{R^2}{R^2 + \left(L \omega - \frac{1}{C_e \omega} \right)^2} S_{i'} \quad (V.8)$$

Le premier terme de cette formule est le signal que nous voulons détecter, le second terme est le bruit venant de la résistance, que nous cherchons à éliminer. Notre but sera atteint si le facteur multipliant S_i est proche de 1, et si celui multipliant $S_{i'}$ est proche de 0. Ces deux facteurs présentent une fréquence de coupure ω_c vérifiant :

$$L C \omega_c^2 = 1 \quad (V.9)$$

Si la résistance R est trop faible, une résonance apparaît autour de la fréquence ω_c . Pour des basses fréquences ($\omega < \omega_c$), l'entrée ne voit ni le shot noise, ni le bruit thermique de la résistance. Pour $\omega = \omega_c$, le bruit de la résistance est entièrement transmis, et le shot noise est amplifié. Pour des fréquences hautes $\omega > \omega_c$, le bruit thermique de la résistance est rejeté, et le shot noise est entièrement transmis dans l'amplificateur transimpédance. Comme nous le souhaitons ce modèle théorique permet de justifier le montage utilisé, mais comme nous allons le voir, il n'est plus valable pour les très hautes fréquences car l'impédance des vraies inductances ne suit pas bien la loi théorique.

Dans notre montage, les valeurs de L , C_e ont été choisies pour obtenir une fréquence de coupure ω_c de l'ordre du MHz, et celle de R pour ne pas avoir de résonance trop prononcée. La plage de valeurs possibles pour L et C_e est alors restreinte : en effet, la capacité d'entrée C_e doit être très supérieure à la capacité parasite de la photodiode. L'inductance L doit être aussi faible que possible

car l'expérience prouve que les bobinages de grande inductance (L de l'ordre du milliHenry) ont une impédance $L\omega$ qui décroît avec la fréquence au-delà d'une fréquence ω_M , parfois spécifiée par les constructeurs, mais qui est de l'ordre du MégaHertz. Cette décroissance de l'impédance peut être imputée aux capacités parasites entre les spires du bobinage.

Puisque $C_p \cong 10$ pF, nous avons choisi $C_e = 470$ pF, $L = 100$ μ H et $R = 500$ Ω . Nous avons utilisé des composants C.M.S., pour leurs qualités dans le domaine des hautes fréquences. La valeur de l'inductance est spécifiée entre 0 et $\omega_M/2\pi = 7,3$ MHz.

Les parasites électriques pouvant venir de la tension de polarisation de la photodiode sont filtrés par les deux capacités de 100 nF et l'inductance de 47 μ H représentée sur la figure V-2. Avant de donner les caractéristiques expérimentales de nos détecteurs, finissons de décrire la figure V-2a. la mesure de la tension aux bornes de la résistance R permet de connaître le courant moyen délivré par la photodiode. Le gain de l'amplificateur OP.90 a été réglé pour que la sortie continue délivre 1V pour 100 μ A de photocourant. La bande passante de cet amplificateur basse fréquence est de l'ordre de 100 Hz. Elle peut être amenée à quelques dizaines de kiloHertz en changeant le filtre passe-bas et l'amplificateur opérationnel OP 90.

e. Résultats

Nous allons maintenant présenter des spectres de bruit d'intensité mesurés à l'aide des deux photodétecteurs précédents. La source de lumière est un laser à Hélium-Néon d'un demi-milliwatt, la photodiode est une Silonex NSL 530 (PIN au Silicium), qui a une surface sensible de 0,8 mm² et une capacité parasite d'environ 5 pF lorsqu'elle est polarisée par 15V. Le courant moyen délivré par la photodiode est 0,13 mA. Le spectre du signal de sortie des amplificateurs est obtenu à l'aide d'un analyseur de spectre Advantest TR 4131. La bande passante d'analyse est 10 kHz. Il n'y a pas de filtre vidéo. La figure V-3 a été enregistrée avec l'amplificateur tension-tension décrit au paragraphe c), la figure V-4b est due à l'amplificateur transimpédance décrit au d). Les courbes (i) correspondent au bruit d'origine électronique (sans lumière), les courbes (ii) au bruit électronique plus le bruit dû à la lumière.

On voit sur la figure V-3 que la sensibilité du système de photodétection est sensiblement constante, mais faible, entre 2 et 20 MHz. Pour les hautes fréquences le gain de l'amplificateur s'effondre, et son bruit propre masque le bruit dû à la lumière. Le meilleur rapport signal sur bruit est de l'ordre de 1dB, entre 5 et 10 MHz.

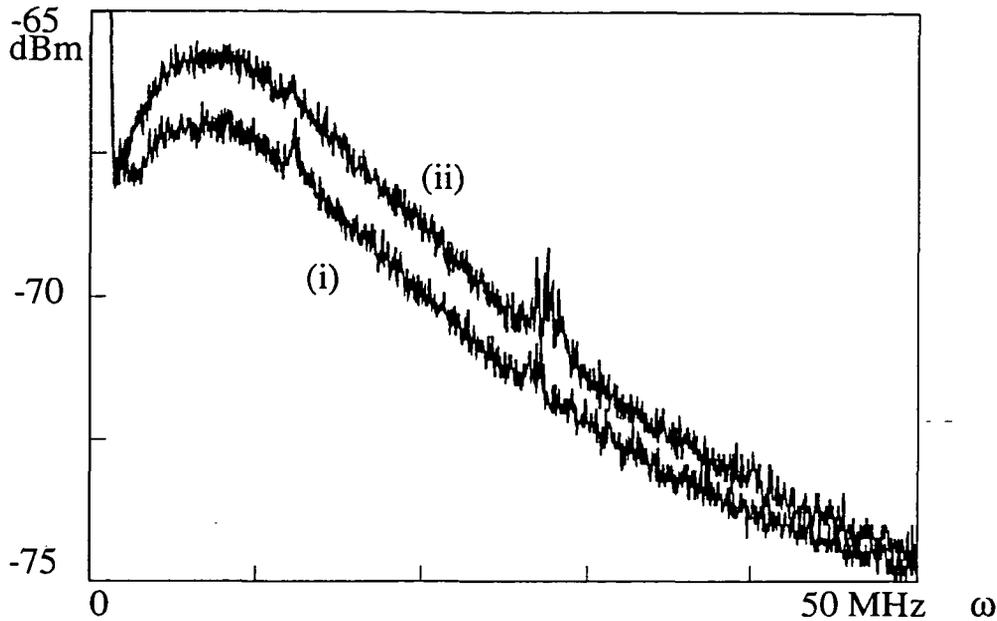


Figure V-3 : Bruit électronique (i) et shot noise (ii) mesuré avec l'amplificateur tension-tension AH0013. Courant moyen 0,13 mA. Le signal de sortie a été amplifié par un amplificateur large bande Nuclétude de gain 24 dB.

Comme le montre la figure V-4a, le système de photodétection utilisant l'amplificateur transimpédance est beaucoup plus sensible que celui utilisant l'amplificateur AH 0013 : le bruit dû à la lumière (pour 0,13 mA de photocourant moyen) est 10 dB au-dessus du bruit électronique entre 1 et 6 MHz. Pour les hautes fréquences, le bruit de la lumière rejoint le bruit électronique (qui est le bruit thermique de la résistance R), comme pour le photodétecteur utilisant l'amplificateur AH 0013.

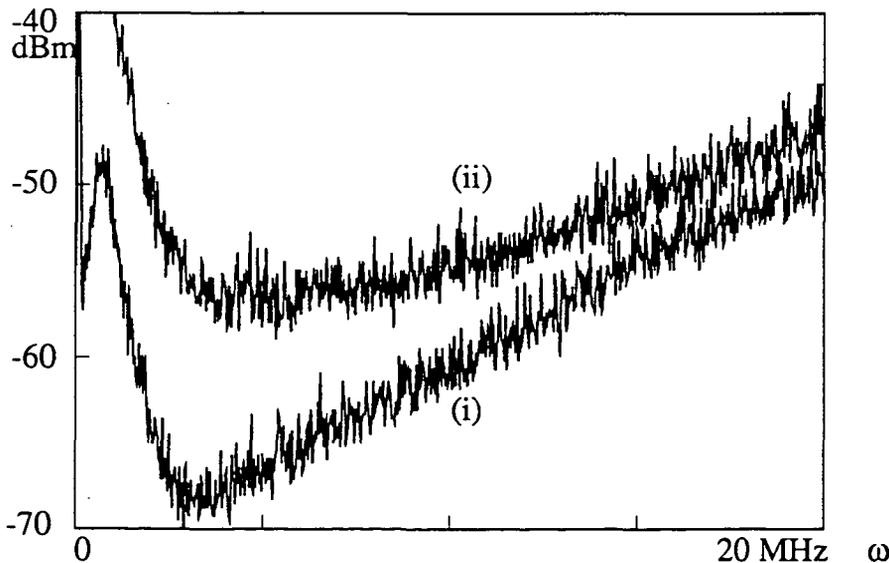


Figure V-4a : Bruit électronique (i) et shot noise (ii) mesuré avec l'amplificateur courant-tension AN 312. Courant moyen 0,13 mA

La figure V-4b montre l'effet de l'inductance sur le bruit d'origine électronique obtenu avec l'amplificateur transimpédance. La courbe (iii) est le bruit électronique sans inductance. C'est le bruit thermique de la résistance filtré par le filtre passe haut formé par la résistance R et la capacité d'entrée C_e (faire $L=0$ dans la formule V.7). Ce filtre explique la diminution de bruit pour les très basses fréquences. La courbe (i) est le bruit électronique obtenu avec le montage décrit figure V-2 avec l'inductance de $100 \mu\text{H}$. On observe une petite résonance pour $\omega_c \cong 0,7 \text{ MHz}$ puis une forte diminution du bruit électronique entre 1 et 13 MHz : le bruit thermique de la résistance est rejeté par l'inductance. Le bruit électronique remonte après 5 MHz car, comme nous l'avons dit l'impédance de la self s'effondre lorsque la fréquence augmente. La réduction du bruit électronique atteint 14 dB vers 3 MHz. Compte tenu des valeurs de L, C_e et R, on a pour $\omega = 3 \text{ MHz}$, $L \omega = 1885 \Omega$, $1/C_e \omega = 113 \Omega$. Le facteur de réduction du bruit thermique (V.8) vaut pour cette fréquence :

$$\frac{R^2}{R^2 + \left(L \omega - \frac{1}{C_e \omega} \right)^2} = 7,3 \cdot 10^{-2} \quad (\text{V.10})$$

Ce facteur correspond à une réduction de 11,3 dB, en bon accord avec l'observation, compte tenu des incertitudes sur les valeurs de L et C pour $\omega = 3 \text{ MHz}$. Pour une résistance de 243Ω on observe une réduction de 16 dB (pour 17 calculés).

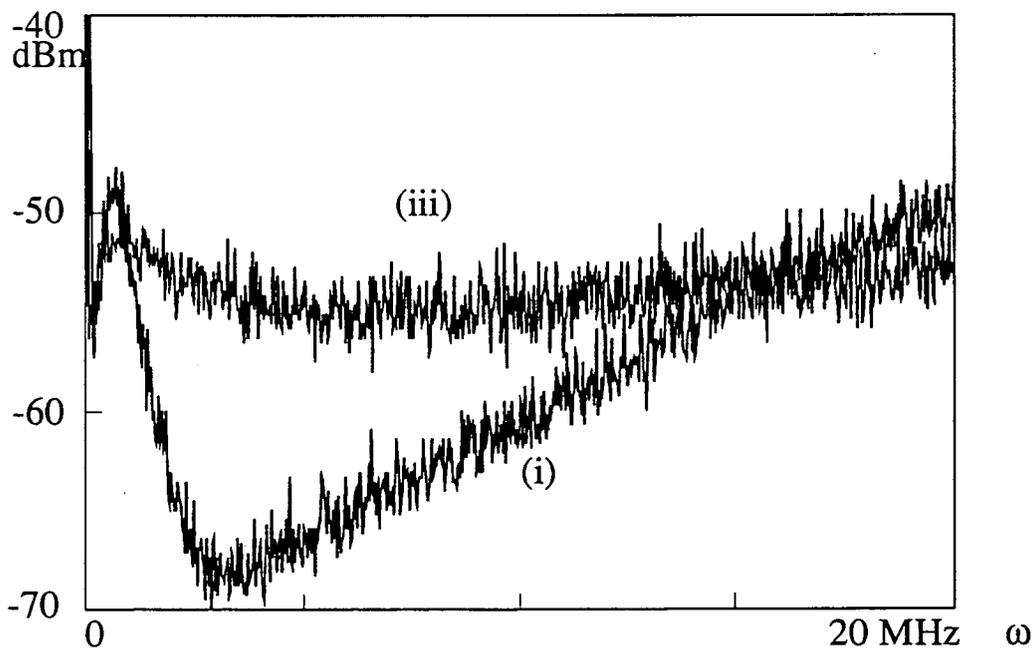


Figure V-4b : Effet de l'inductance sur le bruit thermique du photodétecteur utilisant l'amplificateur courant tension.

Notons enfin que les niveaux de bruit mesurés par l'analyseur de spectre pour les figure V-4a et V-4b sont supérieurs à ceux qu'on peut calculer à partir du gain de l'amplificateur, du bruit de la résistance et de la bande passante d'analyse. Cela est probablement dû à une erreur d'étalonnage des amplificateurs. En revanche, les niveaux de bruits relatifs entre les courbes correspondent à ce

qu'on attend : le shot noise sur 0,13 mA correspond au bruit thermique d'une résistance de 385 Ω . (Comparer les courbes V-4a (ii) et V-4b (iii))

La figure V-5 montre la linéarité de l'amplificateur transimpédance. On a tracé la puissance de bruit due à la lumière en sortie de l'amplificateur à la fréquence $\omega/2\pi = 9$ MHz, en fonction du photocourant moyen. La puissance de bruit est mesurée par un analyseur de spectre, avec une bande passante de 10 kHz, et un filtre vidéo de 10 Hz. On note que l'amplificateur transimpédance sature pour des intensités supérieures à 110 μA . Cette saturation est due au bruit basse fréquence de la lumière. En effet, le courant de saturation dépend de la fréquence de coupure du filtre LC passe haut utilisé pour séparer les composantes hautes et basses fréquence du photocourant. Si la fréquence de coupure vaut 50 kHz, (capacité $C_e = 10$ nF), le courant de saturation vaut 75 μA .

Niveau de bruit

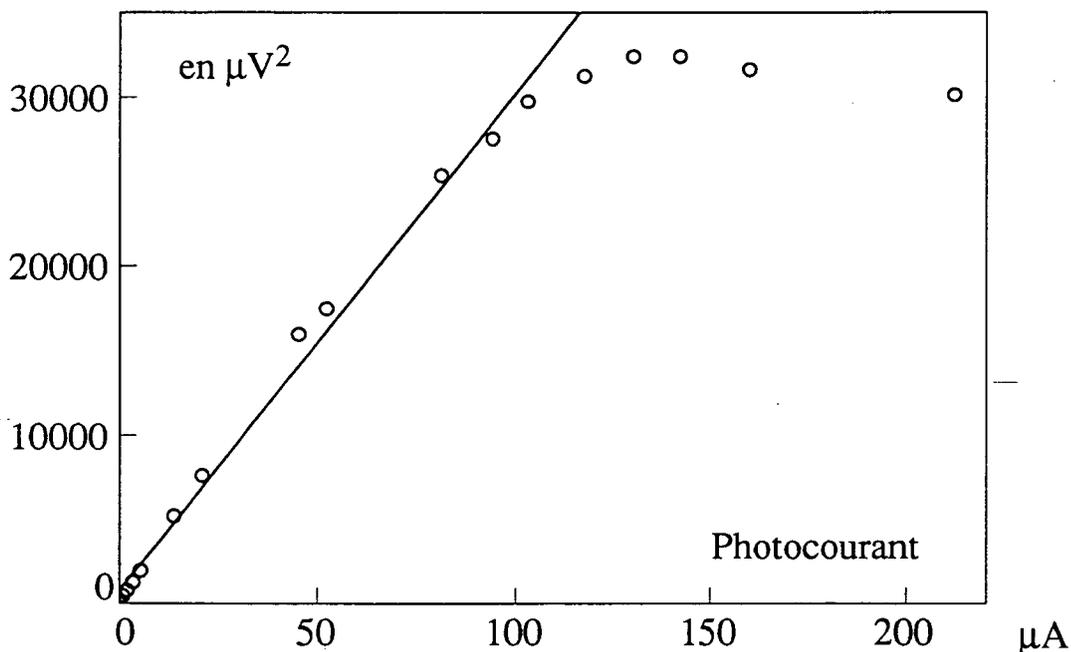


Figure V-5 : Mesure du courant moyen de saturation du photodétecteur utilisant l'amplificateur courant tension AN 312.

f. Conclusions

Les deux exemples de photodétecteurs que nous venons de décrire montrent que nous pouvons mesurer le bruit d'intensité sur un faisceau sur une large gamme de fréquences (de 1 à 20 MHz), et d'intensités (de 50 μA à plusieurs mA de photocourant moyen). Hormis la sensibilité et la bande passante, il existe un autre critère de choix entre ces amplificateurs : la possibilité d'en construire plusieurs ayant les mêmes caractéristiques. Pour ce faire, il faut apparier non seulement les composants passifs (résistances, capacités, inductances, et photodiodes), mais aussi les amplificateurs faible bruit. Vis à vis de ce critère, nos deux modèles de photodétecteurs sont à égalité : les deux amplificateurs transimpédance dont nous disposons ont le même comportement, et l'expérience prouve que parmi cinq amplificateurs AH.0013, il est possible d'en trouver deux

identiques, alors que les gains de ces amplificateurs choisis au hasard et insérés dans un même montage, peuvent différer de plusieurs décibels.

3 Mesure du bruit d'intensité de la lumière réfléchié par la cavité bistable

a. Calibration du bruit quantique standard

Le but de nos expériences est de montrer que la lumière ayant interagi avec les atomes et la cavité a des fluctuations comprimées, et en particulier que son bruit d'intensité peut être inférieur au bruit quantique standard ou shot noise. Il est donc important de pouvoir comparer les densités spectrales de bruit des faisceaux lumineux que nous mesurons à celle correspondant au shot noise. Il existe deux techniques permettant de calibrer le bruit quantique standard, que nous allons maintenant décrire.

i. Calibration à l'aide de l'intensité moyenne

Nous avons vu au chapitre I (I-23 et 33) que la densité spectrale de bruit d'un faisceau au shot noise est proportionnelle à l'intensité de ce faisceau. On peut donc calibrer le shot noise à partir de l'intensité moyenne en déterminant le facteur de proportionnalité entre l'intensité et la puissance de bruit mesurée. Pour cela il faut que les intensités moyennes détectées soient dans le domaine de linéarité des photodétecteurs (figure V-5). La densité spectrale du bruit d'intensité est mesurée à l'aide d'un analyseur de spectre. Le coefficient de proportionnalité recherché dépend des réglages de cet appareil (résolution, filtre vidéo) et des gains des amplificateurs utilisés dans les photodétecteurs. Il dépend donc de la fréquence d'analyse des fluctuations. Cette méthode ne sera fiable que si on enregistre simultanément l'intensité instantanée et le bruit d'intensité pour une fréquence d'analyse fixe. Ce n'est pas une calibration absolue, mais relative aux variations de l'intensité seulement, et pour déterminer le coefficient de proportionnalité il faut être sûr qu'on utilise un faisceau au shot noise. Nous avons utilisé cette procédure pour enregistrer les courbes V-6a et 6b.

ii. Mesure directe du shot noise

La seconde méthode de calibration consiste à mesurer simultanément le bruit d'intensité du faisceau et le shot noise correspondant. Cette technique utilise comme nous allons le montrer, une lame semi réfléchissante et deux photodétecteurs qui doivent avoir exactement les mêmes caractéristiques (Figure V-6).

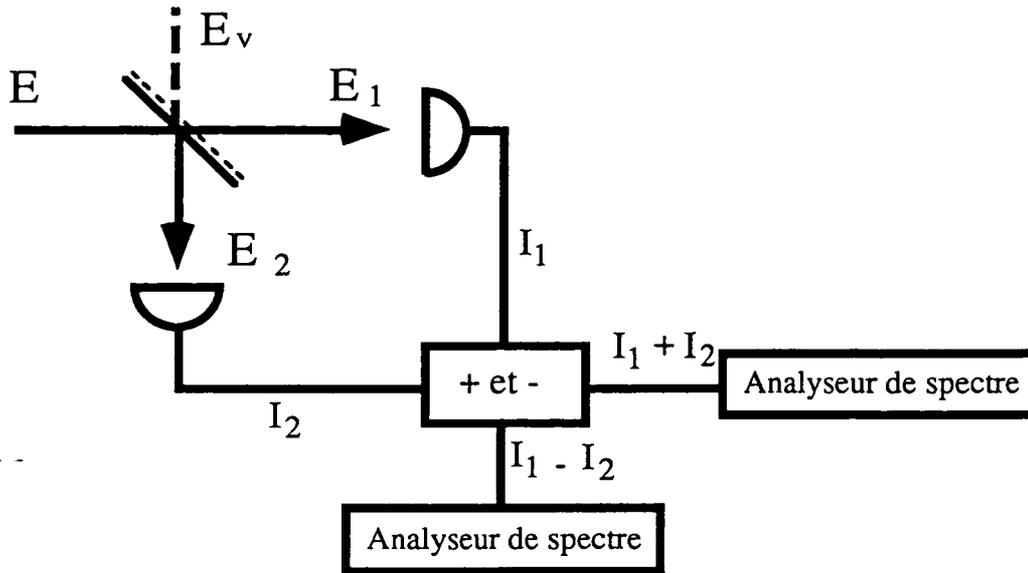


Figure V-6 : Principe de la calibration directe du bruit quantique standard.

Nous allons montrer que le bruit sur la somme des intensités des faisceaux 1 et 2 est le bruit sur le faisceau à mesurer, alors que le bruit sur la différence des intensités 1 et 2 donne le niveau du bruit quantique standard. On désigne par E l'amplitude du champ à mesurer et par E_v le champ du vide qui entre par la seconde voie de la lame semi réfléchissante (figure V-6). E_1 et E_2 désignent les champs sortants de la lame semi réfléchissante. Les champs E_1 et E_2 sont donnés par (I-28) :

$$E_1 = \frac{E + E_v}{\sqrt{2}} \quad E_2 = \frac{E - E_v}{\sqrt{2}} \quad \text{--- (V.11)}$$

Puisque la valeur moyenne du champ du vide est nulle, les fluctuations des intensités I_1 et I_2 valent :

$$\delta I_1 = \frac{\bar{E}}{2} (\delta E^* + \delta E_v^*) + \frac{\bar{E}^*}{2} (\delta E + \delta E_v) \quad \text{(V.12a)}$$

$$\delta I_2 = \frac{\bar{E}}{2} (\delta E^* - \delta E_v^*) + \frac{\bar{E}^*}{2} (\delta E - \delta E_v) \quad \text{(V.12b)}$$

où \bar{E} est la valeur moyenne du champ E .

On en déduit les fluctuations de la somme et de la différence des intensités :

$$\delta(I_1 - I_2) = \bar{E} \delta E_v^* + \bar{E}^* \delta E_v \quad \text{(V.13a)}$$

$$\delta(I_1 + I_2) = \bar{E} \delta E^* + \bar{E}^* \delta E \quad \text{(V.13b)}$$

La formule V.13b doit être comparée à (I-22) : le bruit sur $I_1 + I_2$ est le bruit d'intensité du faisceau à mesurer. La formule V.13a montre que le bruit sur $I_1 - I_2$ est le bruit qu'aurait un faisceau d'amplitude moyenne \bar{E} ayant des fluctuations égales à celles du vide. Un tel faisceau est un état cohérent, et son bruit d'intensité est le bruit quantique standard.

La mise en oeuvre de cette technique est très exigeante sur la qualité de l'électronique utilisée. Tout d'abord, elle demande deux photodétecteurs équilibrés, c'est à dire ayant exactement le même gain. Ensuite elle nécessite un dispositif électronique capable de donner la somme et la différence

des deux courants I_1 et I_2 , et enfin, deux analyseurs de spectre. Nous avons utilisé cette procédure pour enregistrer la figure V-9.

Notons cependant que lorsque le point de fonctionnement de la cavité non linéaire peut être conservé plusieurs minutes, il est possible de n'utiliser qu'un seul analyseur de spectre et d'enregistrer successivement le spectre de bruit de la lumière sortant de la cavité (en additionnant les photocourants), puis le spectre de bruit quantique standard (en les soustrayant).[Mertz 91a]

b. Résultats expérimentaux préliminaires

i. Configuration expérimentale

Nous allons maintenant décrire les premiers spectres de bruit de la lumière réfléchi par la cavité bistable que nous avons obtenus. Nous avons utilisé la cavité décrite au chapitre IV. Le désaccord atomique est $\delta \cong 47$, dans le bleu de la transition atomique. Dans la mesure où cette cavité est linéaire, le faisceau réfléchi par la cavité est exactement superposé au faisceau incident. Pour extraire le faisceau réfléchi nous utilisons un "circulateur optique" (figure V-7). Celui-ci est un isolateur optique Isowave, dont le barreau est en T.G.G. (Il a un excellent taux d'isolation (41 dB), et un taux d'extraction de 88,5 %, ce qui signifie que le barreau de T.G.G. et les prismes de Glan qui composent l'isolateur absorbent 11,5 % de la lumière qui le traverse). Comme pour les expériences de bistabilité du chapitre IV, la polarisation incidente sur la cavité est linéaire.

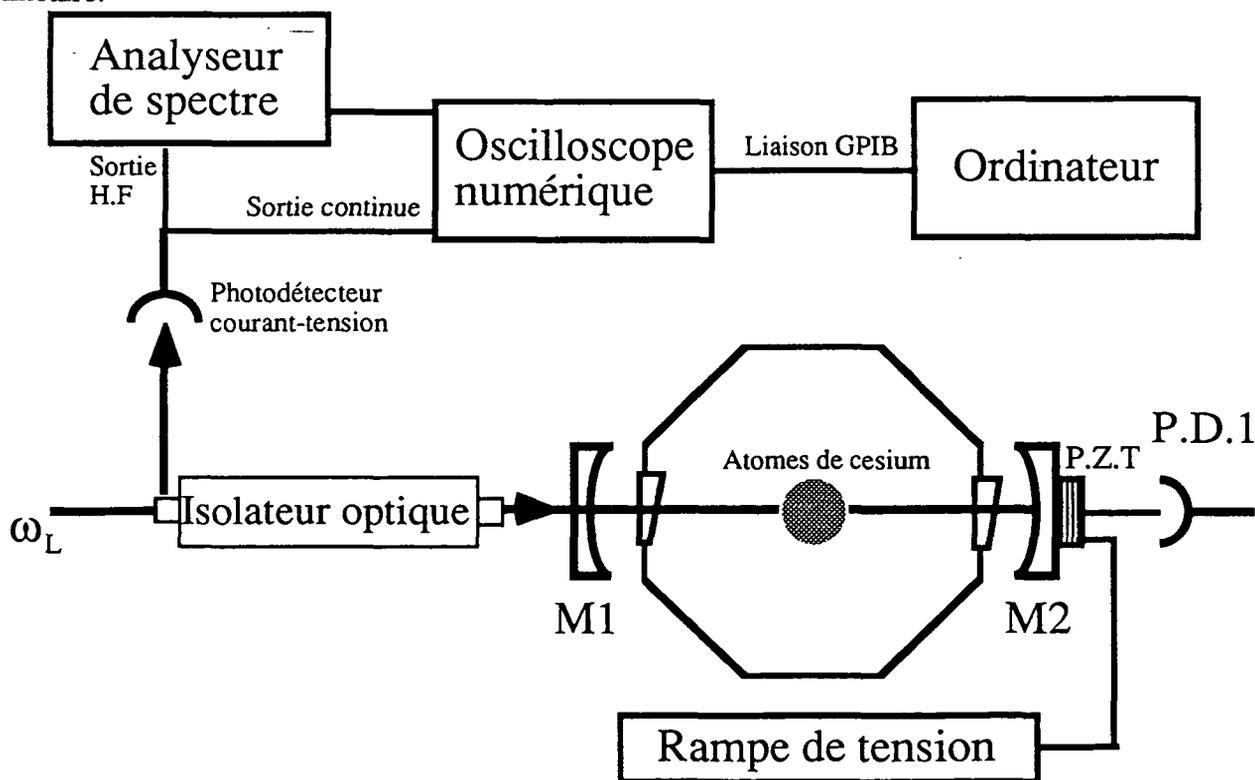


Figure V-7 : Configuration expérimentale avec la détection utilisant la calibration du shot noise avec l'intensité instantanée.

Dans la mesure où les spectres de bruit théoriques dépendent beaucoup du déphasage subit par le champ dans la cavité, nous avons choisi d'enregistrer les spectres de bruit en fonction de la longueur de la cavité pour une fréquence d'analyse ω fixe, une puissance incidente et un nombre d'atomes fixe. Nous balayons donc lentement la longueur de la cavité en appliquant une tension en dent de scie sur la céramique piezo-électrique PZT (figure V-7). La résonance de la cavité est balayée en environ une demi-seconde.

ii. L'analyseur de spectre

Les spectres de bruit sont mesurés à l'aide d'un analyseur de spectre Advantest. Le signal délivré par l'analyseur de spectre est la somme de deux contributions : le bruit dû à la lumière, et le bruit dû aux amplificateurs et aux résistances. Ces deux bruits sont indépendants et s'ajoutent en valeur quadratique moyenne. Pour obtenir le bruit dû à la lumière uniquement, nous devons enregistrer le bruit total (lumière+électronique) et la bruit électronique seul (en coupant le faisceau lumineux), puis soustraire en valeurs quadratiques ces deux bruits.

Les rapports signal sur bruit que nous obtenons (figures V-8a, 8b et 9) sont très faibles, et beaucoup plus faibles que ceux obtenus lors des tests de saturation des photodiodes (figure V-5). En effet, lors de ces mesures, l'intensité incidente sur la photodiode était constante, ce qui permettait de moyenniser la mesure de l'analyseur de spectre, à l'aide du filtre vidéo, réglé sur 10 Hz de bande passante. En revanche, lors de la mesure des spectres de bruit en fonction de la longueur de la cavité, l'intensité moyenne change, sur des intervalles de temps inférieurs à 100 ms (et très courts lors des commutations de la bistabilité). Il faut donc utiliser un filtre vidéo avec une bande passante plus large, supérieure à 1 kHz. Le bruit sur les spectres de bruit est alors très élevé. En termes électroniques, le filtre vidéo est un filtre passe bas chargé de moyenniser le signal calculé par l'analyseur de spectre. Lorsque ce signal dépend du temps, il est retardé si la fréquence de coupure du filtre passe-bas est de l'ordre de l'inverse du temps d'évolution du signal. La technique de calibration du shot noise utilisant la mesure simultanée du bruit et de l'intensité instantanée peut dans ce cas donner des résultats fantaisistes, sous forme d'excès ou de compression du bruit.

iii. Spectres de bruit calibrés par l'intensité

Sur les courbes qui suivent, l'abscisse représente la longueur de la cavité qu'on fait varier au cours du temps. La résonance de la cavité est balayée en environ une demi-seconde. La fréquence d'analyse est de 7 MHz. Le bruit quantique standard est calibré à l'aide de l'intensité instantanée du faisceau réfléchi par la cavité selon la méthode introduite au paragraphe 3.a.i.

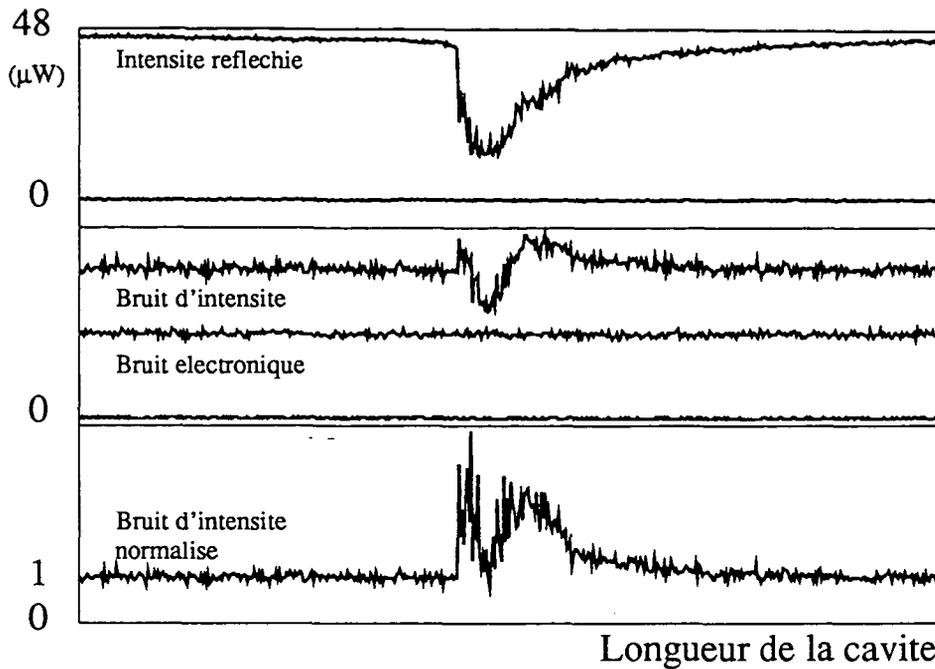


Figure V-8a : Enregistrement de l'intensité réfléchie par la cavité et du bruit à 7 MHz sur cette intensité, et calcul du bruit d'intensité normalisé. L'abscisse est la longueur de la cavité ou le déphasage ϕ . Filtre vidéo : 1 kHz. Bande passante d'analyse : 300 kHz.

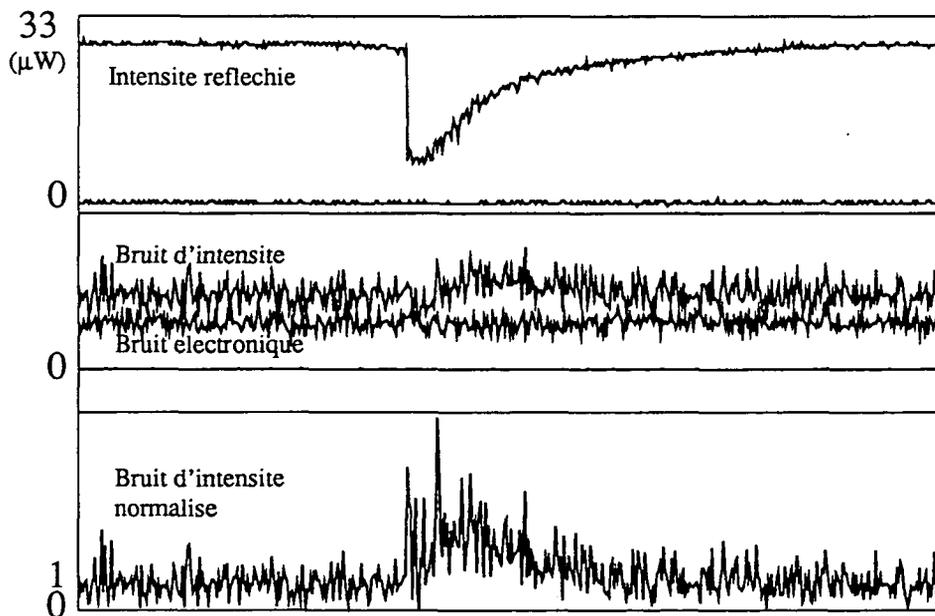


Figure V-8b : Enregistrement de l'intensité réfléchie par la cavité et du bruit à 7 MHz sur cette intensité, et calcul du bruit d'intensité normalisé. L'abscisse est la longueur de la cavité ou le déphasage ϕ . Filtre vidéo : 10 kHz. Bande passante d'analyse : 300 kHz.

Nous avons enregistré les courbes V-8a et V-8b de la manière suivante : la voie 1 de l'oscilloscope numérique (Tektronix 2230) enregistre l'intensité moyenne, la voie 2 le bruit correspondant. Nous enregistrons cinq courbes : le zéro de l'intensité moyenne (ZéroInt) (en masquant la lumière), et l'intensité moyenne (Int). Ce sont les deux courbes du cadre supérieur. Nous enregistrons le zéro de la voie 2 (ZéroBruit), le bruit électronique (BruitEl) (en masquant la lumière), et le bruit total (BruitTot) (les trois courbes du cadre central). Nous en déduisons le spectre de la puissance de bruit normalisé (courbe du cadre inférieur) par la formule :

$$\text{Bruit Normalisé} = \frac{(\text{BruitTot} - \text{Zéro Bruit})^2 - (\text{Bruit El} - \text{Zéro Bruit})^2}{\text{Int} - \text{Zéro Int}}$$

Nous observons de l'excès de bruit dû à la présence des atomes dans la cavité (cet excès de bruit disparaît lorsque nous détruisons le nuage d'atomes froids en coupant le champ magnétique inhomogène). Nous observons que l'excès de bruit est disymétrique par rapport à la résonance de la cavité, et qu'il est plus important au voisinage de la commutation de la bistabilité. Tant que la surtension de la cavité est faible, le champ incident est réfléchi par la cavité et n'interagit pas avec les atomes : son bruit est le bruit quantique standard. Le bruit quantique standard est donc calibré par les ailes des courbes. Cet argument nous permet de placer l'ordonnée unité sur le spectre de bruit normalisé. Lorsque le champ pénètre dans la cavité, il est réfléchi avec de l'excès de bruit. On constate sur les figures 8a et 8b que cet excès de bruit disparaît lorsque la cavité est à résonance : le bruit dû aux atomes ne se répercute plus sur le bruit d'intensité de la lumière réfléchie. En revanche le bruit dû aux atomes se traduit en bruit d'intensité lorsque la cavité n'est plus à résonance exacte : le bruit dû aux atomes a donc les caractéristiques d'un bruit de phase.

iv. Spectres de bruit (calibration directe du shot noise)

La figure V-9 présente la mesure du bruit d'intensité de la lumière réfléchie par la cavité bistable et la mesure simultanée du bruit quantique standard, par la méthode décrite au paragraphe 3.a.ii. La somme et la différence des intensités 1 et 2 (figure V-6) est produite par un composant passif. Nous avons mesuré un taux de réjection de 18 dB (précision de l'ordre du pourcent) pour le dispositif de mesure (lame séparatrice, photodétecteurs et boîte + et -). La somme et la différence des photocourants est analysée par deux analyseurs de spectre différents : un Advantest et un Tektronix. Ces deux appareils n'ont pas les mêmes gains : nous avons utilisé les positions non calibrées de l'oscilloscope numérique chargé d'acquérir les signaux pour compenser cette différence de gain, en nous assurant que les voies + et - donnent, sur l'oscilloscope numérique, le même bruit électronique, et le même niveau de bruit lorsque le faisceau mesuré est au shot noise. La figure V-9 montre aussi de l'excès de bruit lorsque la cavité est au voisinage de la résonance, et montre que cet excès de bruit disparaît à résonance.

Bruit (echelle lineaire)

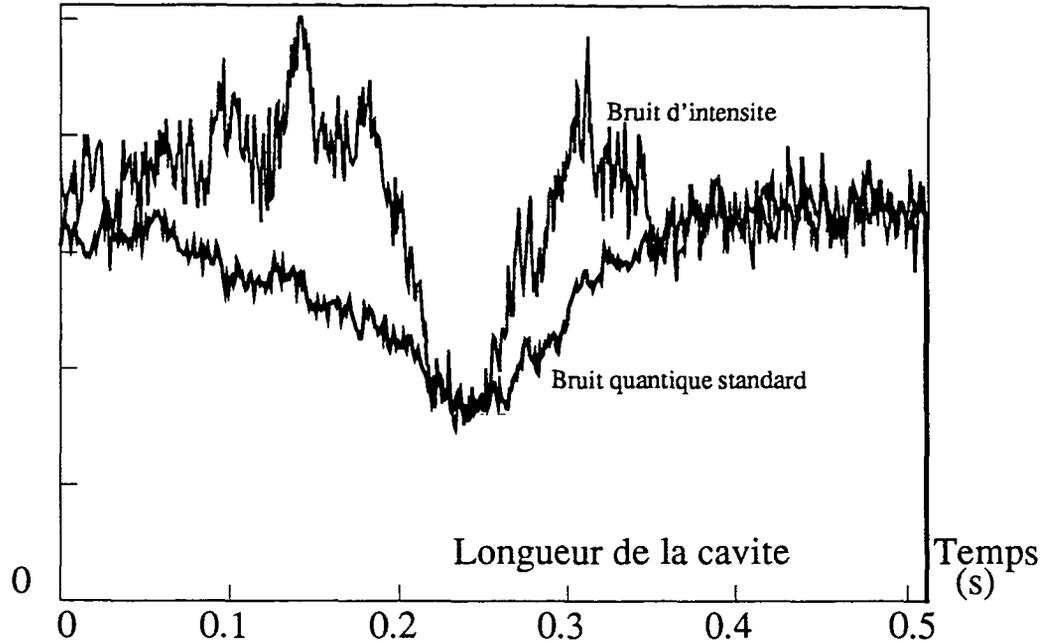


Figure V-9 : Mesure du bruit d'intensité de la lumière réfléchi par la cavité contenant les atomes froids. Le bruit quantique standard est mesuré directement.

c. Conclusions

Les courbes expérimentales que nous venons de montrer représentent bien l'ensemble des spectres que nous avons obtenus. Trois constats s'imposent.

-Tout d'abord, nous observons que le rapport signal sur bruit des spectres de bruit obtenus est faible car les intensités détectées sont faibles. Comme nous l'avons vu, il n'est pas possible d'améliorer ce rapport signal sur bruit en utilisant le filtre vidéo de l'analyseur de spectre sans augmenter trop son temps de réponse.

-Par ailleurs, les intensités incidentes que nous utilisons donnent des champs intenses dans la cavité à résonance, qui correspondent à des saturations importantes des atomes de césium. Nous devons donc diminuer l'intensité du faisceau incident sur la cavité, ce qui ne pourra que diminuer encore le rapport signal sur bruit de la mesure du bruit d'intensité du faisceau réfléchi.

-Notons enfin que les pertes de 1% dues aux quatre dioptres (traités anti-reflet) des fenêtres de la cellule contenues dans la cavité sont relativement importantes (comparées à la transmission d'environ 5% du miroir de couplage), et nuisent à la réduction du bruit quantique de la lumière réfléchi par la cavité. En effet, la compression que nous pouvons mesurer est égale à celle calculée multipliée par le rendement quantique des photodétecteurs (95%), par la transmission de l'optique de détection (85% pour l'isolateur optique), et surtout par la réflectivité de la cavité, qui est très faible autour de la résonance.

Cette première configuration expérimentale nous a permis d'observer de la bistabilité optique et d'observer de l'excès de bruit du aux atomes. Cependant, l'observation non ambiguë d'une

réduction du bruit quantique de la lumière réfléchi par la cavité bistable réclame des améliorations du dispositif expérimental dans plusieurs directions

-Tout d'abord, dans la mesure où la théorie (chapitre III) prévoit de la réduction de bruit pour une "mauvaise" cavité (cavité de largeur supérieure à celle de la transition atomique), nous pouvons augmenter la transmission du miroir de couplage de la cavité en passant par exemple de 5 à 10 %. Cette modification aura pour effet de minimiser l'effet relatif des pertes internes à la cavité. De plus, à intensité intérieure constante, nous aurons une intensité extérieure plus importante, ce qui facilitera la mesure des spectres de bruit.

-La seconde amélioration que nous pouvons apporter concerne la détection des fluctuations de la lumière. Jusqu'ici, nous nous sommes attachés à mesurer le bruit d'intensité de la lumière réfléchi par la cavité. Les faibles intensités détectées sont à l'origine des faibles rapports signal sur bruit obtenus. Nous allons donc utiliser une détection hétérodyne (I.1.c.ii) des fluctuations de la lumière en mélangeant le faisceau réfléchi par la cavité à un oscillateur local intense (puissance de l'ordre du milliwatt). Nous en attendons un meilleur rapport signal sur bruit. Une détection hétérodyne donne le bruit sur une composante de quadrature qui dépend de la phase relative entre l'oscillateur local et le faisceau à mesurer. Nous ne pourrons plus mesurer directement le bruit d'intensité mais, en faisant varier ce déphasage, nous aurons accès à la compression optimale des fluctuations.

-Il est aussi possible d'améliorer encore nos photodétecteurs. En effet, ceux-ci ont été conçus pour avoir une bande passante aussi large que possible. Il est alors difficile d'éliminer le bruit thermique de la résistance. En revanche, il est possible de concevoir des photodétecteurs extrêmement faible bruit pour une fréquence d'analyse donnée : il suffit de remplacer l'inductance L en série avec la résistance de charge (figure V-2a) par un circuit bouchon (inductance L_b en parallèle avec une capacité C_b) accordé sur la fréquence ω_b qu'on cherche à privilégier ($L_b C_b \omega_b = 1$). Le calcul des taux de branchement des bruits (formule analogue à V.8) montre qu'à la fréquence de résonance du circuit bouchon le bruit de la résistance est complètement rejeté et que le courant de la photodiode passe entièrement dans l'amplificateur courant-tension.

La mise en oeuvre de ces améliorations, conjointement à la comparaison des spectres obtenus avec les spectres théoriques, permettra de déterminer les conditions où notre cavité bistable se comportera comme une cavité "mangeuse de bruit".

Conclusion

L' idée de départ pour la réalisation d'un système optique passif capable de réduire le bruit quantique de la lumière était d'utiliser une cavité optique contenant un milieu non linéaire à effet Kerr. L'étude de ce système modèle nous a permis d'estimer les potentialités des différents milieux non linéaires pour le squeezing, et a souligné la nécessité de connaître précisément la dynamique de ces non-linéarités non idéales pour prédire s'ils sont effectivement capables de réduire le bruit de la lumière.

Nous avons ensuite développé une approche théorique nouvelle pour le calcul de la transformation des fluctuations quantiques d'un champ au cours de son interaction avec une cavité optique contenant un milieu non-linéaire quelconque, basée sur un formalisme d'entrée-sortie. Nous avons appliqué ce formalisme au cas où le milieu non linéaire est une assemblée d'atomes à deux niveaux, et montré que la cavité non linéaire ainsi obtenue peut comprimer efficacement les fluctuations du champ qui en sort.

La partie expérimentale de ce travail a d'abord consisté à fabriquer notre milieu non-linéaire à l'aide d'un piège magnéto-optique qui nous fournit un nuage d'atomes de césium presque immobiles. Notre premier résultat expérimental a été l'observation d'une oscillation laser dans les atomes froids due à un gain par effet Raman stimulé. Ce type de laser devrait présenter d'intéressantes propriétés statistiques que nous comptons étudier.

Nous avons ensuite étudié les caractéristiques de la bistabilité optique que nous attendions de notre cavité, et observé qu'elles correspondent aux prédictions du modèle de l'atome à deux niveaux. Nous avons aussi observé des instabilités prévues par ce même modèle.

La théorie prévoit que les fluctuations de la lumière réfléchie par la cavité sont comprimées lorsque celle-ci fonctionne au voisinage d'un point tournant de la bistabilité. Nous avons donc effectué des mesures de bruit préliminaires. Elles n'ont pas encore mis clairement en évidence l'effet de réduction de bruit recherché, mais elles nous ont permis de mettre au point des détecteurs extrêmement faible bruit adaptés à la mesure du bruit quantique de la lumière pour des intensités très faibles. Ces premières mesures nous ont aussi indiqué les améliorations à apporter au montage expérimental afin d'observer la réduction du bruit quantique de la lumière dans les meilleures conditions possibles.

Le piège magnéto-optique semble ouvrir des perspectives très importantes pour la production de lumière comprimée. En effet, c'est un milieu non linéaire particulièrement efficace, qu'il est possible à terme de miniaturiser en vue d'utilisations pratiques.

Références

- [Abramowitz 65] - M.Abramovitz, I.A.Steguns Eds., Dover Publications. N.Y.1965
"Handbook of mathematical functions"
- [Bergman 91] - K.Bergman, H.A.Haus, Optics Letters **16**, 663, 1991.
- [Bonifacio 76] - R.Bonifacio, L.A.Lugiato, Optics Communications **19**, 172, 1976
- [Clairon 92] - A.Clairon, P.Laurent, N.Aziz, M.Drewsen, D.Grison, B.Lounis, C.Salomon, Comptes rendus de 4th European time and frequency forum, Noordwick 1992, Ed.J.J.Hunt, et à publier.
- [Cohen 79] - C.Cohen-Tannoudji, Cours du Collège de France 1979-1980 (non publié)
- [Cohen 87] - Cohen-Tannoudji, J.Dupont-Roc, G.Grynberg, Intereditions Ed. C.N.R.S. 1987.
"Photons et atomes"
- [Cohen 88] - C.Cohen-Tannoudji, J.Dupont-Roc, G.Grynberg, Intereditions Ed. C.N.R.S. 1988.
"Processus d'interactions entre photons et atomes"
- [Collett 84] - M.J.Collett, C.W.Gardiner, Physical Review A **30**, 1386, 1984
- [Collett 85] - M.J.Collett, D.F.Walls, Physical Review A **32**, 2887, 1985
- [Courty 89] - J-M.Courty, S.Reynaud, Optics Communications **72**, (1989), p.93,
"Squeezing of a monodimensional field using a single two level atom"
- [Courty 89 a] - J-M.Courty, S.Reynaud, Europhysics Letters **10**, (1989) p.237
"Dressed population trapping for a two-level atom in a squeezed vacuum"
- [Courty 90] - J-M.Courty, *"Les fluctuations quantiques dans l'interaction d'un système non-linéaire avec un réservoir harmonique"* Thèse de Doctorat. Université Pierre et Marie Curie - 1990.
- [Courty 91] - J-M. Courty, P. Grangier, L. Hilico and S. Reynaud
Optics Communications **83**, 1991, p 251, *"Quantum fluctuations in optical bistability : calculation from linear response theory"*
- [Debuisschert 89] - T. Debuisschert, S. Reynaud, A. Heidmann, E. Giacobino and C. Fabre, Quantum Optics **1**, 1989, p 3-9.
"Observation of a large quantum noise reduction using an optical parametric oscillator"
- [Drummond 80] - P.D.Drummond, C.W.Gardiner, J.Phys. A **13**, 2353 (1980)
- [Drummond 81] - P.D.Drummond, IEEE Journal of Quantum Electronics, **17**, 1981.
"Optical Bistability in a Radially Varying Mode"
- [Fabre 89] - C.Fabre, E.Giacobino, A.Heidmann et S.Reynaud, Journal de Physique **50**, 1209, 1989, *"Noise characteristics of a non degenerate optical parametric oscillator. Application to quantum noise reduction"*

[Fabre 90] - C.Fabre, E.Giacobino, A.Heidmann, L.Lugiato, S.Reynaud, M.Vadacchino, Wang Kaige, *Quantum Optics* **2**, 1990, p.159 "*Squeezing in detuned degenerate Optical Parametric Oscillators*"

[Gardiner 83] - C.W.Gardiner "*Handbook of stochastic methods*" , Springer 1983

[Gardiner 85] - C.W.Gardiner and M.J.Collett, *Phys. Rev A* **31**, 3761, 1985.

[Gibble 92] - K.E.Gibble, S.Kasapi, S.Chu, *Optics Letters* **17**, 256, 1992.

[Gibbs 76] - H.M.Gibbs, S.L.Mc Call, T.N.C.Venkatesan, *Physical Review Letters* **36**, 1135, 1976, "*Differential gain and bistability using a sodium filled Fabry Perot interferometer*".

[Gibbs 85] - H.M.Gibbs, *Optical bistability : controlling light with light*, Academic, New-York 1985.

[Glauber 63] - R.J.Glauber, *Physical Review A* **131**, 2766, 1963, "*Coherent and Incoherent states of the radiation field*".

[Grangier 91] - P.Grangier, J-F.Roch, G.Roger, *Physical Review Letters* **66**, 1418, 1991, "*Experimental observation of back-action evading measurement of an optical intensity in a three level atomic system*".

[Grangier 92] - P.Grangier, J-M.Courty, S.Reynaud, *Optics Communication* **89**, 99, 1992, "*Characterization of non ideal quantum non demolition measurement*".

[Grison 92] - D.Grison, "*Atomes piégés et refroidis par laser à quelques micro Kelvins : un piège magnéto-optique dans une cellule de césium et quelques applications*"
Thèse de Doctorat - Université Pierre et Marie Curie - 1992

[Gunter 89] - "*Photorefractive materials and their applications II. Survey of applications.*". Ed. P.Gunter, J.P.Huignard. Springer Verlag, Berlin 1989.

[Hilico 92] - L.Hilico, C.Fabre, E.Giacobino, *Europhysics Letters* **18**, 1992, p.685 "*Operation of a "cold atom laser" in a magneto-optical trap*"

[Hilico 92 a] - L.Hilico, C.Fabre, S.Reynaud, E.Giacobino, *Phys.Rev.A.* à paraître (1992) "*Linear input output method for quantum fluctuations in optical bistability with 2 level atoms*"

[Hilico 92 b] - L.Hilico, J.M.Courty, C.Fabre, E.Giacobino, I.Abram, J.L.Oudar, *Applied Physics B* **55**, 202, 1992, "*Squeezing with $\chi^{(3)}$ materials*".

[Hilico 92 c] - L.Hilico, P.Verkerk, G.Grynberg. *CRAS* **315 II**, 1992, p. 285 "*Conjugaison de phase par des atomes de césium ultrafroids dans un piège magnéto-optique*".

[Hope 91] - D.M.Hope, H.A.Bachor, P.J.Manson, D.E.Mc Clelland, P.T.H.Fisk, "Detection of squeezing in a cavity atom system". *Comptes rendus Laser Spectroscopy*, Eds R.Ducloy, E.Giacobino, G.Camy, World Scientific 1991, 230.

[Horowitz] - Horowitz and Hill, Cambridge University Press - 1980 - "*The art of Electronics*".

[Houches 82] - "*New trends in atomic physics*", édité par G.Grynberg et R.Stora, Elsevier, 1984

[Houches 90] - Session 53, Edité par J.Dalibard et J-M.Raimond. North Holland, Amsterdam 1992 : "*Fundamental systems in quantum optics*".

[Jean-Jean 89] - B.Jean-Jean, E.Freysz, A.Ponton, A.Ducasse, B.Pouliquy, Phys.Rev.A **39**, 5268 (1989), "*Non linear Propagation of Gaussian beams in binary critical liquid mixtures*".

[Jhe 87] - W.Jhe, A.Anderson, E.A.Hinds, D.Meschede, L.Moi et S.Haroche, Physical Review Letters, **58**, 666, 1987, "*Suppression of spontaneous decay at optical frequencies : Test of vacuum-field anisotropy in confined space*".

[Kogelnik 65] - H.Kogelnik, T.Li, Applied Optics **5**, 10, 1965, "*Laser beams and resonators*"

[Lugiato 82] - L.A.Lugiato, G.Strini, Optics Communications **41**, 67, 1982 ; **41**, 374, 1982.

[Lugiato 84] - L.A.Lugiato, R.J.Horowicz, G.Strini, Phys.Rev.A.**30**, p.1366 (1984), "*Instabilities in passive and active optical systems with a gaussian transverse intensity profile*".

[Lugiato 84 a] - L.A.Lugiato in Progress in Optics XXI edited by E.Wolf, North-Holland, Amsterdam 1984, p.69

[Marsden 49] - M.Marsden, Math Survey N°3 (American Mathematical Society, New-York, 1949)

[Mertz 91] - J.Mertz, "*Réduction du bruit de photon à l'aide d'un asservissement sur des photons jumeaux produits par un oscillateur paramétrique optique*". - Thèse de Doctorat - Université Pierre et Marie Curie, 1990

[Mertz 91a] - J.Mertz, T.Debuisschert, A.Heidmann, C.Fabre, E.Giacobino, Optics Letters **16**, 1234, 1991, "*Improvements of the observed intensity correlation of O.P.O. twin beams*".

[Monroe 90] - C.Monroe, W.Swann, H.Robinson and C.Wieman, Physical Review Letters **65**, 1571, 1990, "*Very cold trapped atoms in a vapour cell*"

[Opt.Bist. 88] - J.Physique **C2**, 49, 1988, "*Optical Bistability IV*", eds. W.Firth, N.Peyghambarian, A.Tallet.

[Orozco 84] - L.A.Orozco, A.T.Rosenberger et H.J.Kimble, Physical Review Letters **53**, 2547, 1984, "*Intrinsic dynamical instabilities in optical bistability with two level atoms*".

[Orozco 89] - L.A.Orozco, H.J.Kimble, A.T.Rosenberger, L.A.Lugiato, M.L.Asquini, M.Brambilla, L.M.Narducci, Physical Review A **39**, 1235, 1989, "*Single mode instability in optical bistability*".

[Poligrat] - Poligrat Service - 71300 Montceau les mines - Tel : 85 57 55 55

[Raab 87] - E. Raab, M. Prentiss, A. Cable, S. Chu, D. Pritchard, Physical Review Letters **59**, 2631, 1987

[Raizen 87] - M.G.Raizen, L.A.Orozco, M.Xiao, T.L.Boyd, H.J.Kimble, Physical Review Letters **59**, 198, 1987

- [Reid 88] - M.D. Reid, Phys. Rev A **37**, 4792, 1988. "*Quantum theory of optical bistability without adiabatic elimination*"
- [Reynaud 89] - S. Reynaud, C. Fabre, E. Giacobino and A. Heidmann, Phys. Rev A **40**, 1140, 1989. "*Photon noise reduction by passive optical bistable systems*"
- [Reynaud 89 a] - S.Reynaud, A.Heidmann, Optics Communications **71**, (1989) p.209 "*A semi-classical linear input-output transformation for quantum fluctuations*"
- [Reynaud 90] - S.Reynaud, Annales de Physique, 1990 p.63, "*Introduction à la réduction du bruit quantique*"
- [Reynaud 92] - S.Reynaud, A.Heidmann, E.Giacobino, C.Fabre, "*Quantum fluctuations in optical systems*", Progress in Optics **30**, p.1, 1992, North Holland, Amsterdam.
- [Ritsch 92] - H.Ritsch, M.A.M.Marte, P.Zoller, Europhysics Letters **19**, 7, 1992
- [Rosenbluh 91] - M. Rosenbluh, R.M.Shelby, Physical Review Letters **66**, 153, 1991.
- [Sargent III-74] - M.Sargent III, M.O.Scully, W.E.Lamb, Laser Physics (Reading, Mass : Addison-Wesley)
- [Sesko 89] - D.Sesko, T.Walker, C.Monroe, A.Gallagher, C.Wieman, Physical Review Letters **63**, 961, 1989, "*Collisional losses from a light-force atom trap*".
- [Sfez 91] - B.Sfez, "*Bistabilité optique dans des micro-résonateurs à multipuits quantiques*", Thèse de doctorat - Université Paris-Sud Centre d'Orsay, 1991.
- [Shelby 86] - R.M.Shelby, M.D.Levenson, S.H.Perlmutter, R.G.Devoe, D.F.Walls, Physical Review Letters **57**, 691, 1986.
- [Shen 84] - Y.R.Shen, "*The principles of Nonlinear Optics*", Wiley, 1984
- [Slusher 85] - R.E.Slusher, L.W.Hollberg, B.Yurke, J.C.Mertz, J.F.Valley, Physical Review Letters **55**, 2409, 1985.
- [Slusher 87] - R.E.Slusher, B.Yurke, P.Grangier, A.Laporta, D.F.Walls, M.D.Reid, JOSA B **4**, 1453, 1987.
- [Verkerk 92] - P.Verkerk, B.Lounis, C.Salomon and C.Cohen-Tannoudji, J.Y.Courtois et G.Grynberg, Physical Review Letters **68**, 3861, 1992, "*Dynamics and spatial order of cold cesium atoms in a periodic optical*".
- [Walker 90] - T.Walker, D.Sesko, C.Wieman, Physical Review Letters **64**, 408, 1990, "*Collective behaviour of optically trapped neutral atoms*".
- [Xiao 87] - M.Xiao, H.J.Kimble, H.J.Carmichael, J.O.S.A. B **4**, 1546, 1987.
- [Yamamoto 90] - Y.Yamamoto, S.Machida, S.Saito, N.Imoto, T.Yanagawa, M.Kitagawa, G.Bjork in Progress Optics **28**, 1990, North Holland, Amsterdam.
- [Yariv 84] - A.Yariv, P.Yeh, "*Optical waves in crystals*", Wiley, 1984.
- [Yurke 84] - B.Yurke, Physical Review A **29**, 408, 1984, "*Use of cavities in squeezed states generation*".
- [Zhang 90] - W.Zhang, D.Walls, Optics Communications **79**, 497, 1990.

Abstract

The aim of this thesis is to study quantum noise reduction in the electromagnetic field, both from the theoretical and experimental point of view.

First, the calculation of noise spectra is derived using an “input-output” formalism, which describes the modification of the fluctuations of the field by the cavity and takes into account the fluctuations introduced by the non linear medium.

This formalism is applied to a cavity containing a Kerr medium. This simple model gives us a figure of merit allowing us to classify different non linear media for their use in quantum noise reduction.

A set of motionless atoms appears to be a very good medium. The detailed calculations of the noise spectra are performed within the two level atom model, using the “input-output” formalism. They confirm the conclusions of the simple model.

The experimental part of this thesis is devoted to the realisation of a magneto-optical trap which gives us a cloud of nearly motionless cesium atoms as a non linear medium. The interaction of these atoms with an optical cavity gives us two results. First, we obtain a laser oscillation due to a Raman gain in the trapped atoms. Second, we observe optical bistability and instabilities.

The last part of this thesis considers the difficulties of measuring the quantum noise of light and gives preliminary results concerning the noise in the light after having interacted with the bistable cavity.

Laurent HILICO

“Réduction du bruit quantique de la lumière par une cavité bistable”

Résumé

L’objet de cette thèse est l’étude théorique puis expérimentale de la possibilité de réduire les fluctuations d’origine quantique de la lumière, à l’aide d’une cavité optique bistable contenant un milieu non linéaire.

Le calcul des spectres du bruit de la lumière sortant d’une telle cavité optique est présenté à l’aide d’un formalisme “entrée-sortie” permettant de décrire la modification des fluctuations du champ électromagnétique par la cavité, et de tenir compte des fluctuations éventuellement ajoutées par le milieu non linéaire.

Ce formalisme est appliqué au cas où le milieu non linéaire est un effet Kerr pur. Ce modèle simple nous permet de dégager un critère pour comparer les qualités des différents milieux existants pour la réduction du bruit quantique. Un milieu composé d’atomes immobiles est de ce point de vue un bon candidat. Cependant, à cause des propriétés spécifiques liées aux résonances atomiques, il nécessite un calcul détaillé des spectres de bruit qui est fait avec le modèle à deux niveaux et le formalisme “entrée-sortie”. Ces calculs confirment la possibilité de réduire les fluctuations quantiques de la lumière avec des atomes immobiles.

La partie expérimentale de cette thèse décrit la réalisation d’un piège magnéto-optique fournissant un nuage d’atome de césium presque immobiles. L’interaction de ces atomes piégés avec une cavité optique nous a permis d’observer deux phénomènes, dont une oscillation laser due à un gain par effet Raman stimulé dans les atomes froids. L’autre phénomène est la bistabilité optique, parfois accompagnée d’instabilités, dues à la non-linéarité du milieu et à la contre-réaction optique de la cavité.

La dernière partie de ce mémoire discute les difficultés de la mesure du bruit quantique de la lumière et présente des mesures préliminaires du bruit de la lumière ayant interagi avec la cavité bistable.

Mots clefs

Optique quantique	Effet Kerr
Bruit de photons	Cesium
Bistabilité optique	Piège magnéto-optique