HAL open science

La catégorie Fquad des foncteurs de Mackey généralisés pour les formes quadratiques sur F_2

Christine Vespa

▶ To cite this version:

Christine Vespa. La catégorie Fquad des foncteurs de Mackey généralisés pour les formes quadratiques sur F_2. Mathématiques [math]. Université Paris-Nord - Paris XIII, 2005. Français. NNT : . tel-00011892

HAL Id: tel-00011892

https://theses.hal.science/tel-00011892v1

Submitted on 9 Mar 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ PARIS 13 - Institut Galilée

Laboratoire Analyse, Géométrie et Applications, UMR 7539

N° attribué par la bibliothèque
|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|

THESE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PARIS 13

Discipline : **Mathématiques**

présentée et soutenue publiquement par :

Christine VESPA

le 12 décembre 2005

La catégorie $\mathcal{F}_{quad}$ des foncteurs de Mackey généralisés pour les formes quadratiques sur $\mathbb{F}_2$

Jury

Mme	Micheline VIGUÉ	Présidente
M.	Vincent FRANJOU	Rapporteur
M.	Serge BOUC	Rapporteur
M.	Lionel SCHWARTZ	Directeur de thèse
M.	Geoffrey POWELL	Examinateur
M.	Alexander ZIMMERMANN	Examinateur

Remerciements

Mes premiers remerciements s'adressent tout naturellement à Lionel Schwartz pour avoir accepté, il y a de cela un peu plus de trois ans, de partager avec moi cette grande aventure que représente la préparation d'une thèse. Je lui suis reconnaissante de la confiance et du soutien qu'il m'a accordé. Il a su m'encourager dans mon travail et me guider dans mes recherches tout en m'apprenant à être autonome.

Je remercie les deux rapporteurs Serge Bouc et Vincent Franjou pour la lecture attentive et minutieuse de ce manuscrit qu'ils m'ont aidé à améliorer par leurs nombreuses remarques et suggestions. Je remercie également Geoffrey Powell, Micheline Vigué et Alexander Zimmermann d'avoir accepté d'être membres de mon jury.

Je tiens à adresser un remerciement particulier à Geoffrey Powell pour nos nombreuses discussions qui ont fortement enrichies mes connaissances mathématiques. Son exigence m'a poussée à donner le meilleur de moi-même dans la rédaction de cette thèse.

Je remercie le LAGA pour son accueil et, plus particulièrement, les membres de l'équipe de Topologie Algébrique. L'activité scientifique dynamique de ce laboratoire m'a permis de découvrir la richesse du monde de la recherche. Merci aussi aux thésards du LAGA pour les pauses revigorantes accompagnées de douceurs chocolatées qui ponctuaient les longues journées de travail. Je remercie, plus personnellement Aurélien, Laurent, Ruben, Sabrina et Véronique. Mes remerciements seraient incomplets si j'omettais de citer Armen et Yolande pour leur grande convivialité.

Je voudrais également remercier ici les enseignants de mathématiques rencontrés sur mon parcours d'élève puis d'étudiante qui ont contribué au renforcement de mon goût, déjà fort prononcé, pour les mathématiques. Je leur suis extrèmement reconnaissante de ne pas avoir négligé la qualité de leur enseignement sous prétexte qu'ils enseignaient en ZEP ou dans une université située de l'autre côté du périphérique.

Un grand merci à ma soeur Nicola pour son soutien sans faille dans tous les pires moments de doute et pour son écoute attentive. Merci aussi à mes parents de m'avoir transmis leur respect, presque sacré, de la connaissance.

Enfin, je remercie la catégorie $\mathcal{F}_{quad}$ qui a su éveiller ma curiosité et exciter mes sens en me révélant un à un certains de ses charmes, tout en m'en suggérant, à chaque fois, de nombreux autres.

Rien n'est jamais perdu
tant qu'il reste quelque chose à trouver.
Pierre Dac

Table des matières

I Préliminaires **15**

1 Formes quadratiques sur $\mathbb{F}_2$ **17**
1.1 Définitions . . . 17
1.2 Classification des espaces quadratiques . . . 19
1.2.1 Classification des formes quadratiques non dégénérées . . . 19
1.2.2 Invariants . . . 21
1.2.3 Classification des formes quadratiques dégénérées . . . 22
1.3 Les catégories $\mathcal{E}_q$ et $\mathcal{E}_q^{\deg}$ . . . 23
1.3.1 La catégorie $\mathcal{E}_q$ . . . 23
1.3.2 La catégorie $\mathcal{E}_q^{\deg}$ . . . 25
1.3.3 Pseudo-somme amalgamée . . . 26
1.3.4 Classes d'isométrie de $\mathcal{E}_q^{\deg}$ . . . 28
1.4 Les groupes orthogonaux . . . 29
1.4.1 Pour les formes quadratiques non dégénérées . . . 29
1.4.2 Pour les formes quadratiques dégénérées . . . 30

2 Catégories de triplets et cotriplets **31**
2.1 La catégorie $\mathrm{Sp}(\mathcal{D})$ de Bénabou . . . 31
2.1.1 Définition . . . 31
2.1.2 Propriétés de $\mathrm{Sp}(\mathcal{D})$ . . . 32
2.2 La catégorie $\mathcal{T}_q$ des triplets sur $\mathcal{E}_q$ . . . 33
2.2.1 La catégorie $\hat{\mathcal{T}}_q$ . . . 33
2.2.2 La catégorie $\mathcal{T}_q$ . . . 34
2.2.3 Propriétés de $\mathcal{T}_q$ . . . 35
2.3 La catégorie $\mathcal{S}_q$ des cotriplets à sommets dans $\mathcal{E}_q$ . . . 39
2.3.1 Définition de $\mathcal{S}_q$ . . . 39
2.3.2 Propriétés de $\mathcal{S}_q$ . . . 40
2.4 Le foncteur $\sigma : \mathcal{T}_q \to \mathcal{S}_q$ . . . 41
2.4.1 Définition . . . 41
2.4.2 Propriétés de σ . . . 42
2.4.3 Le foncteur σ est plein . . . 42
2.5 Le foncteur $\epsilon : \mathcal{T}_q \to \mathcal{E}^f$ . . . 45
2.5.1 Définition . . . 45
2.5.2 Propriété de ϵ . . . 46
2.5.3 Le foncteur ϵ est plein . . . 46

II La catégorie $\mathcal{F}_{quad}$ **49**

3 $\mathcal{F}_{quad}$: définition et premières propriétés **51**
3.1 Définition . . . 51

3.1.1 Définition en terme de catégorie de foncteurs . . . 51
3.1.2 Définition en termes de foncteurs de Mackey généralisés . . . 52
3.1.3 Équivalence entre les deux définitions . . . 53
3.2 Propriétés . . . 55
3.2.1 Dualité . . . 55
3.2.2 Le foncteur $\iota : \mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{F}_{quad}$ . . . 56

4 Les foncteurs isotropes de $\mathcal{F}_{quad}$ et la catégorie $\mathcal{F}_{iso}$ 59
4.1 Définition des foncteurs isotropes . . . 59
4.2 Définition et propriétés de la catégorie $\mathcal{F}_{iso}$ . . . 62
4.2.1 Définition . . . 62
4.2.2 Dualité . . . 63
4.2.3 Le foncteur $\kappa : \mathcal{F}_{iso} \hookrightarrow \mathcal{F}_{quad}$ . . . 64
4.3 Equivalence entre $\mathcal{F}_{iso}$ et $\mathrm{Mack}(\mathcal{E}_q^{\deg}, \mathcal{E})$ . . . 65
4.4 Les foncteurs simples de $\mathcal{F}_{iso}$ . . . 68
4.5 Les facteurs de composition des foncteurs isotropes de $\mathcal{F}_{quad}$ . . . 73
4.6 Dimensions des espaces $\mathrm{Iso}(V)$ . . . 74
4.6.1 Dimensions des espaces $\mathrm{Iso}_{(x,0)}(V)$ et $\mathrm{Iso}_{(x,1)}(V)$ . . . 74
4.6.2 Dimensions des espaces $\mathrm{Iso}_{(x,0)\perp(x,0)}(V)$, $\mathrm{Iso}_{(x,1)\perp(x,1)}(V)$, $\mathrm{Iso}_{H_0}(V)$ et $\mathrm{Iso}_{H_1}(V)$ 75

III Etude des projectifs de $\mathcal{F}_{quad}$ 77

5 Filtration des projectifs 79
5.1 Définition de la filtration . . . 79
5.2 Le foncteur $P_V^{(0)}$ . . . 80
5.2.1 Etude du foncteur $P_V^{(0)}$ . . . 80
5.2.2 Propriétés de l'idempotent e_V . . . 83
5.2.3 La catégorie $\iota(\mathcal{F})$ est une sous-catégorie épaisse de $\mathcal{F}_{quad}$ . . . 84
5.3 Le quotient $P_V/P_V^{(\dim(V)-1)}$ . . . 85

6 Les foncteurs mixtes 87
6.1 Définition des foncteurs mixtes . . . 87
6.2 Quelques généralités sur les foncteurs $\mathrm{Mix}_{D,\eta}$ tels que $\dim(D) = 1$ . . . 90
6.3 Etude du foncteur $\iota(P_{\mathbb{F}_2}^{\mathcal{F}}) \otimes \mathrm{Iso}_{(x,\alpha)}$ . . . 93
6.3.1 Lien entre les foncteurs $P_{\mathbb{F}} \otimes \mathrm{Iso}_\alpha$ et $\mathrm{Mix}_{\alpha,1}$ . . . 93
6.3.2 Filtration des foncteurs $P_{\mathbb{F}} \otimes \mathrm{Iso}_\alpha$ . . . 95
6.4 Filtration des foncteurs $\Sigma_{\alpha,1}$ . . . 97
6.5 Structure des foncteurs $\Lambda^n \otimes \mathrm{Iso}_\alpha$ . . . 99
6.5.1 Décomposition . . . 100
6.5.2 Simplicité des foncteurs L_α^n . . . 105
6.6 Les facteurs de composition des foncteurs $\mathrm{Mix}_{0,1}$ et $\mathrm{Mix}_{1,1}$ . . . 107

7 Décomposition des projectifs P_{H_0} et P_{H_1} 109
7.1 Décomposition de P_{H_0} . . . 109
7.1.1 Description explicite des sous-quotients de la filtration . . . 109
7.1.2 Scindement de la filtration pour le foncteur P_{H_0} . . . 114
7.1.3 Identification des facteurs directs . . . 115
7.2 Décomposition de P_{H_1} . . . 118
7.2.1 Description explicite des sous-quotients de la filtration . . . 118
7.2.2 Scindement de la filtration pour le foncteur P_{H_1} . . . 119
7.2.3 Identification des facteurs directs . . . 120
7.3 Conséquences des décompositions des foncteurs P_{H_0} et P_{H_1} . . . 120

7.3.1 Indécomposabilité des foncteurs $\mathrm{Mix}_{0,1}$ et $\mathrm{Mix}_{1,1}$ 120
7.3.2 Caractère projectif des premiers foncteurs isotropes 121
7.3.3 Classification des foncteurs simples S de $\mathcal{F}_{quad}$ tels que $S(H_0) \neq \{0\}$ ou $S(H_1) \neq \{0\}$ 122
7.3.4 Calculs de groupes d'extensions dans $\mathcal{F}_{quad}$ 122

IV Les foncteurs polynomiaux de $\mathcal{F}_{quad}$ 125

8 Les foncteurs polynomiaux de $\mathcal{F}_{quad}$ 127
8.1 Définition des foncteurs polynomiaux de $\mathcal{F}_{quad}$ 127
8.1.1 Les foncteurs différences de $\mathcal{F}_{quad}$ 127
8.1.2 Définition des foncteurs polynomiaux 128
8.2 Etude des foncteurs polynomiaux de $\mathcal{F}_{quad}$ 128
8.2.1 Les foncteurs polynomiaux de degré 0 de $\mathcal{F}_{quad}$ 128
8.2.2 Démonstration du théorème 8.2.1 129

A Catégories de foncteurs 131
Index des Notations 137
Index 139

Introduction

Le but de cette thèse est de construire et d'étudier des catégories de foncteurs associées aux espaces vectoriels munis de formes quadratiques non dégénérées.

Une des catégories de foncteurs qui a montré son importance au cours des dernières années est celle des foncteurs allant de la catégorie $\mathcal{E}^f$ des espaces vectoriels de dimension finie sur le corps $\mathbb{F}_p$ dans la catégorie $\mathcal{E}$ de tous les $\mathbb{F}_p$-espaces vectoriels, qu'on notera $\mathcal{F}(p)$. Une des propriétés importantes de cette catégorie découle de son utilité dans l'étude de l'homologie stabilisée des groupes linéaires dont on rappelle, dans la suite, les points fondamentaux. Une des motivations du travail présenté ici est de construire une catégorie $\mathcal{F}_{quad}$ pouvant présenter des liens avec l'homologie stable des groupes orthogonaux similaires à ceux existant entre $\mathcal{F}(p)$ et l'homologie stable des groupes linéaires.

On note $I_n : GL_n(\mathbb{F}_p) \to GL_{n+1}(\mathbb{F}_p)$ l'inclusion induite par $(\mathbb{F}_p)^n \hookrightarrow (\mathbb{F}_p)^n \oplus \mathbb{F}_p$. Un système de coefficients pour $(GL_n(\mathbb{F}_p))$ est une suite de $GL_n(\mathbb{F}_p)$-modules M_n, munie de morphismes de $GL_n(\mathbb{F}_p)$-modules

$$F_n : M_n \to I_n^* M_{n+1}$$

où $I_n^* M_{n+1}$ est le module obtenu par restriction. Un système de coefficients fournit un système de groupes d'homologie :

$$\ldots \to H_k(GL_n(\mathbb{F}_p); M_n) \to H_k(GL_{n+1}(\mathbb{F}_p); M_{n+1}) \to \ldots \tag{1}$$

pour tout entier k.

En 1980, Dwyer montre dans [Dwy80] que, sous certaines conditions sur le système de coefficients, on a stabilisation du système (1), c'est à dire qu'il existe un entier $N(k)$ tel que, pour tout entier n supérieur à $N(k)$, le morphisme $H_k(GL_n(\mathbb{F}_p); M_n) \to H_k(GL_{n+1}(\mathbb{F}_p); M_{n+1})$ est un isomorphisme.

Une manière naturelle d'obtenir un système de coefficients pour les groupes $GL_n(\mathbb{F}_p)$ est de considérer un objet de $\mathcal{F}(p)$ évalué sur chacun des espaces $\mathbb{F}_p^n$. Pour pouvoir considérer le cas particulier de l'objet de $\mathcal{F}(p)$ qui associe à l'espace vectoriel $\mathbb{F}_p^n$ l'espace vectoriel $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(P(\mathbb{F}_p^n), Q(\mathbb{F}_p^n))$ où P et Q sont deux objets de $\mathcal{F}(p)$, il est indispensable d'avoir des rétractions aux inclusions $\mathbb{F}_p^n \hookrightarrow \mathbb{F}_p^{n+1}$. Pour ce système de coefficients, on obtient le morphisme :

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}(p)}(P, Q) \to \mathrm{Ext}^*_{\mathbb{F}_p[GL_n(\mathbb{F}_p)]}(P(\mathbb{F}_p^n), Q(\mathbb{F}_p^n)) = H^*(GL_n(\mathbb{F}_p), \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(P(\mathbb{F}_p^n), Q(\mathbb{F}_p^n)))$$

induit par le foncteur d'évaluation sur $\mathbb{F}_p^n$. Par la version cohomologique du théorème de Dwyer, on obtient que les groupes $\mathrm{Ext}^*_{\mathbb{F}_p[GL_n(\mathbb{F}_p)]}(P(\mathbb{F}_p^n), Q(\mathbb{F}_p^n))$ se stabilisent pour des foncteurs P et Q finis, c'est à dire admettant une série de composition finie dont les sous-quotients sont simples. On note $\mathrm{Ext}^*_{\mathbb{F}_p[GL(\mathbb{F}_p)]}(P, Q)$ la limite. En 1999, Suslin montre dans l'annexe de [FFSS99] que pour tous foncteurs finis P et Q de $\mathcal{F}(p)$, l'application naturelle

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}(p)}(P, Q) \to \mathrm{Ext}^*_{\mathbb{F}_p[GL(\mathbb{F}_p)]}(P, Q)$$

est un isomorphisme. Ainsi, la détermination de certains groupes de cohomologie stable sont ramenés à des calculs d'algèbre homologique dans la catégorie $\mathcal{F}(p)$ dans laquelle on possède des outils puissants pour effectuer de tels calculs.

D'autres applications de la catégorie $\mathcal{F}_{quad}$ peuvent également être envisagées. En effet, rappelons que la catégorie $\mathcal{F}(p)$ est reliée à plusieurs domaines de l'algèbre, dont plusieurs exemples sont étudiés dans [FFPS03]. On s'attend donc à pouvoir transposer un certain nombre de ces applications au cas orthogonal. Par exemple, la relation entre la catégorie $\mathcal{F}(p)$ et les modules instables sur l'algèbre de Steenrod est très importante. Une des manières de relier la catégorie $\mathcal{F}(p)$ à l'algèbre de Steenrod, adoptée par Kuhn dans [Kuh94a], est de regarder les $\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}(p)}(\Gamma^*, \Gamma^*)$ où Γ^n désigne la n-ième puissance divisée. A ce jour, nous n'avons pas d'analogue orthogonal de l'algèbre de Steenrod reliée à la catégorie $\mathcal{F}_{quad}$ mais, une piste allant dans ce sens sera l'étude de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_{quad}}(\iota(\Gamma^*) \otimes \mathrm{Iso}_V, \iota(\Gamma^*) \otimes \mathrm{Iso}_V)$ où les foncteurs Iso_V de $\mathcal{F}_{quad}$ et le foncteur $\iota : \mathcal{F}(2) \to \mathcal{F}_{quad}$ sont introduits plus loin dans l'introduction.

Bien que les techniques développées dans cette thèse puissent également s'appliquer au cas des corps $\mathbb{F}_p$ pour p impair, nous avons choisi de nous placer sur le corps $\mathbb{F}_2$ où la situation est plus riche. En effet, contrairement à ce qui se passe en caractéristique différente de 2, la classification des formes quadratiques sur le corps $\mathbb{F}_2$ n'est pas équivalente à celle des formes bilinéaires symétriques et la forme associée est toujours alternée. De plus, seuls les espaces de dimension paire peuvent être non dégénérés et, pour une dimension paire donnée, on a deux espaces non dégénérés qui ne sont pas équivalents et qui sont distingués par l'invariant de Arf. Rappellons également que la cas de la caractéristique 2 est d'une importance particulière en topologie.

Afin de construire la catégorie $\mathcal{F}_{quad}$, on considère au chapitre 1 la catégorie $\mathcal{E}_q$ des espaces quadratiques non dégénérés sur $\mathbb{F}_2$, dont les objets joueront, vis à vis de $\mathcal{F}_{quad}$, le rôle des espaces vectoriels de dimension finie dans la définition de $\mathcal{F}(2)$ rappelée précédemment. On constate que tous les morphismes de $\mathcal{E}_q$ sont des monomorphismes ; par conséquent, afin de pouvoir considérer des systèmes de coefficients du même type que ceux considérés pour $\mathcal{F}(2)$, à savoir $(\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(P(V), Q(V)))$ où V est un objet de $\mathcal{E}_q$, il est nécessaire de rajouter formellement les projections orthogonales à cette catégorie. Pour cela, on s'inspire de la construction de la catégorie des "spans" $\mathrm{Sp}(\mathcal{C})$ d'une catégorie $\mathcal{C}$ munie de sommes amalgamées, introduite par Bénabou dans [Bén67] et dont on rappelle la définition au chapitre 2. Dans cette construction, l'existence de sommes amalgamées est essentielle à la définition de la composition des morphismes. Or, on montre que la catégorie $\mathcal{E}_q$ ne possède pas de sommes amalgamées ce qui nous interdit d'appliquer, telle quelle, la construction de Bénabou. Pour contourner cette difficulté, on définit au chapitre 1, la notion de pseudo-somme amalgamée dans $\mathcal{E}_q$. Cette définition utilise de manière essentielle la non dégénérescence des espaces et permet de construire, au chapitre 2, la catégorie $\mathcal{T}_q$ des triplets de $\mathcal{E}_q$, qui généralise la catégorie de Bénabou. On remarquera que $\mathcal{E}_q$ ne possède pas non plus de produits fibrés, ce qui empêche l'utilisation d'une construction duale de celle donnée par Bénabou.

La catégorie $\mathcal{F}_{quad}$ est définie au chapitre 3 comme étant la catégorie des foncteurs de $\mathcal{T}_q$ dans la catégorie $\mathcal{E}$ de tous les $\mathbb{F}_2$-espaces vectoriels. Cette catégorie, par analogie avec les travaux de [TW95], est la catégorie des foncteurs de Mackey généralisés sur $\mathcal{E}_q$. On montre, dans ce même chapitre, que la catégorie $\mathcal{F}_{quad}$ est abélienne, munie d'un produit tensoriel et d'un foncteur dualité et a suffisamment de projectifs et d'injectifs. Le lemme de Yoneda fournit un ensemble de générateurs projectifs de $\mathcal{F}_{quad}$ indexés par l'ensemble $\mathcal{S}$ des représentants des classes d'isométrie des espaces quadratiques non dégénérés. Ces projectifs sont notés P_V pour un élément V de $\mathcal{S}$.

Afin d'avoir une bonne compréhension de la catégorie $\mathcal{F}_{quad}$, on cherche à classifier ses objets simples. Une première famille de foncteurs simples de $\mathcal{F}_{quad}$ est obtenue grâce au théorème suivant, qui relie la catégorie $\mathcal{F}_{quad}$ à la catégorie $\mathcal{F}(2)$.

Théorème 1. *Il existe un foncteur*

$$\iota : \ \mathcal{F}(2) \hookrightarrow \mathcal{F}_{quad}$$

vérifiant les propriétés suivantes :

1. *ι est exact ;*
2. *ι est pleinement fidèle ;*
3. *$\iota(F)$ est une sous-catégorie épaisse de $\mathcal{F}_{quad}$;*
4. *si S est un objet simple de $\mathcal{F}(2)$, $\iota(S)$ est un objet simple de $\mathcal{F}_{quad}$.*

Dans le chapitre 4, on étudie une famille particulière de foncteurs de $\mathcal{F}_{quad}$, baptisés foncteurs isotropes. L'étude de ces foncteurs nécessite l'introduction de la catégorie $\mathcal{E}_q^{\deg}$ des espaces quadratiques éventuellement dégénérés sur $\mathbb{F}_2$. Pour étudier les foncteurs isotropes, le cadre naturel est une nouvelle catégorie de foncteurs, notée $\mathcal{F}_{iso}$. Cette catégorie $\mathcal{F}_{iso}$ est reliée à la catégorie $\mathcal{F}_{quad}$ par l'existence d'un plongement fidèle $\kappa : \mathcal{F}_{iso} \to \mathcal{F}_{quad}$. La famille des foncteurs isotropes est indexée par l'ensemble $\mathcal{S}'$ des représentants des classes d'isométrie des espaces quadratiques éventuellement dégénérés et sont notés iso_V dans $\mathcal{F}_{iso}$ et $\mathrm{Iso}_V = \kappa(iso_V)$ dans $\mathcal{F}_{quad}$, pour un élément V de $\mathcal{S}'$. Le résultat essentiel de ce chapitre est la classification des foncteurs simples de $\mathcal{F}_{iso}$ énoncée dans le théorème suivant, où on note $O(V)$ le groupe orthogonal de l'espace quadratique V.

Théorème 2. *Pour V un objet de $\mathcal{E}_q^{\deg}$, le foncteur $F_V : \mathbb{F}_2[O(V)]-\mathrm{mod} \to \mathcal{F}_{iso}$ défini par $F_V(M) = iso_V \underset{\mathbb{F}_2[O(V)]}{\otimes} M$, pour M un $\mathbb{F}_2[O(V)]$-module à gauche, vérifie les propriétés suivantes :*

1. *le foncteur F_V est exact ;*
2. *si M est un $\mathbb{F}_2[O(V)]$-module simple, alors $F_V(M)$ est un objet simple de $\mathcal{F}_{iso}$.*

Comme le foncteur κ préserve les facteurs de composition, on en déduit le corollaire suivant :

Corollaire 3. *Les foncteurs isotropes de $\mathcal{F}_{quad}$ sont finis.*

Par exemple, si on considère les deux espaces quadratiques dégénérés $(x, 0)$ et $(x, 1)$, on déduit du théorème précédent et du fait que les groupes orthogonaux $O(x, 0)$ et $O(x, 1)$ sont triviaux, le résultat :

Corollaire 4. *Les foncteurs isotropes $\mathrm{Iso}_{(x,0)}$ et $\mathrm{Iso}_{(x,1)}$ sont des objets simples de $\mathcal{F}_{quad}$ qui n'appartiennent pas à $\iota(\mathcal{F}(2))$.*

En considérant les deux espaces non dégénérés de dimension deux non isométriques, H_0 et H_1, pour lesquels on a $O(H_0) = S_2$ et $O(H_1) = S_3$, on obtient :

Corollaire 5.
1. *Le foncteur Iso_{H_0} est indécomposable. On a la suite exacte courte non scindée :*

$$0 \to R_{H_0} \to \mathrm{Iso}_{H_0} \to R_{H_0} \to 0$$

où R_{H_0} est le foncteur obtenu à partir de la représentation triviale de $O(H_0)$.

2. *Le foncteur Iso_{H_1} se décompose sous la forme :*

$$\mathrm{Iso}_{H_1} = F_{H_1} \oplus S_{H_1} \oplus S_{H_1}$$

où S_{H_1} est le foncteur obtenu à partir de la représentation de Steinberg et où F_{H_1} est un foncteur indécomposable pour lequel on a la suite exacte courte non scindée :

$$0 \to R_{H_1} \to \mathrm{F}_{H_1} \to R_{H_1} \to 0$$

où R_{H_1} est le foncteur obtenu à partir de la représentation triviale de $O(H_1)$.

Une des manières classiques d'obtenir une classification des objets simples d'une catégorie est d'en décomposer les générateurs projectifs. Rappellons que, pour les catégories $\mathcal{F}(p)$, la décomposition des projectifs obtenus par le lemme de Yoneda, notés $P_V^{\mathcal{F}}$ pour V un objet de $\mathcal{E}^f$ dans le cas $p = 2$, est obtenue par l'étude des représentations des anneaux d'endomorphismes de ces foncteurs. Une des difficultés de la catégorie $\mathcal{F}_{quad}$ réside dans le fait que les anneaux d'endomorphismes des projectifs P_V et leurs représentations ne sont pas bien compris. Afin de pouvoir étudier les projectifs

de $\mathcal{F}_{quad}$, on définit, au chapitre 5, une filtration par le rang des projectifs. Pour les projectifs P_{H_0} et P_{H_1} on montre, par une étude explicite, que cette filtration se scinde. On en déduira les décompositions suivantes de ces foncteurs, où apparaissent de nouveaux foncteurs de $\mathcal{F}_{quad}$, appelés foncteurs mixtes.

Théorème 6. *1. Le foncteur projectif P_{H_0} admet la décomposition en somme directe suivante :*

$$P_{H_0} = \iota(P^{\mathcal{F}}_{\mathbb{F}_2^{\oplus 2}}) \oplus ({\mathrm{Mix}_{0,1}}^{\oplus 2} \oplus \mathrm{Mix}_{1,1}) \oplus \mathrm{Iso}_{H_0}$$

où $\mathrm{Mix}_{0,1}$ et $\mathrm{Mix}_{1,1}$ sont deux foncteurs mixtes et Iso_{H_0} est un foncteur isotrope.

2. Le foncteur projectif P_{H_1} admet la décomposition en somme directe suivante :

$$P_{H_1} = \iota(P^{\mathcal{F}}_{\mathbb{F}_2^{\oplus 2}}) \oplus {\mathrm{Mix}_{1,1}}^{\oplus 3} \oplus \mathrm{Iso}_{H_1}$$

où $\mathrm{Mix}_{1,1}$ est un foncteur mixte et Iso_{H_1} est un foncteur isotrope.

Les foncteurs mixtes ne sont ni des objets de $\mathcal{F}(2)$, ni des objets de $\mathcal{F}_{iso}$; ils font l'objet du chapitre 6. Ces foncteurs sont des sous-foncteurs du produit tensoriel du projectif $P^{\mathcal{F}}_{\mathbb{F}_2}$ de $\mathcal{F}(2)$ et d'un foncteur isotrope. La décomposition des deux foncteurs mixtes apparaissant dans le théorème précédent fait apparaître deux familles infinies de nouveaux foncteurs simples de $\mathcal{F}_{quad}$. Ce résultat met en évidence le fait que, bien qu'on ait le diagramme de catégories suivant :

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{F}(2) \arrow[d, hook, "\iota"] \\ \mathcal{F}_{iso} \arrow[r, hook, "\kappa"] & \mathcal{F}_{quad} \end{tikzcd}$$

la classe des objets de $\mathcal{F}_{quad}$ n'est pas l'union disjointe des objets de $\mathcal{F}(2)$ et de $\mathcal{F}_{iso}$. Ce diagramme illustre également le fait que $\mathcal{F}_{quad}$ généralise la catégorie $\mathcal{F}(2)$ par le biais du foncteur ι et est reliée aux groupes orthogonaux d'espaces quadratiques par le biais du foncteur κ.

Les décompositions des projectifs P_{H_0} et P_{H_1} en facteurs indécomposables fournissent plusieurs résultats importants concernant la catégorie $\mathcal{F}_{quad}$. On déduit du théorème 6 et de l'étude des foncteurs mixtes que les foncteurs isotropes de $\mathcal{F}_{iso}$ ne sont pas tous projectifs dans $\mathcal{F}_{quad}$. On a le résultat suivant :

Théorème 7. *1. La couverture projective de $\mathrm{Iso}_{(x,0)}$ (respectivement $\mathrm{Iso}_{(x,1)}$) est le foncteur $\mathrm{Mix}_{0,1}$ (respectivement $\mathrm{Mix}_{1,1}$). En particulier, les foncteurs isotropes $\mathrm{Iso}_{(x,0)}$ et $\mathrm{Iso}_{(x,1)}$ ne sont pas projectifs dans $\mathcal{F}_{quad}$.*

2. Les foncteurs isotropes Iso_{H_0} et Iso_{H_1} sont projectifs dans $\mathcal{F}_{quad}$.

On déduit de ce théorème et de la proposition 3 le résultat suivant :

Proposition 8. *La catégorie $\mathcal{F}_{quad}$ possède des objets projectifs finis non constants.*

Ce résultat est d'une grande originalité comparé aux catégories $\mathcal{F}(p)$ où les seuls foncteurs projectifs et finis sont les foncteurs constants. Une autre conséquence du théorème 6 et du corollaire 5 est la classification suivante des "petits" foncteurs simples de $\mathcal{F}_{quad}$, donnée dans le résultat suivant :

Proposition 9. *Les classes d'isomorphisme de foncteurs simples de $\mathcal{F}_{quad}$ qui sont non nuls sur au moins un des espaces H_0 ou H_1 sont :*

$$\iota(\mathbb{F}_2),\ \iota(\Lambda^1),\ \iota(\Lambda^2),\ \iota(S_{(2,1)}),\ \mathrm{Iso}_{(x,0)},\ \mathrm{Iso}_{(x,1)},\ R_{H_0},\ R_{H_1},\ S_{H_1}$$

où R_{H_0}, R_{H_1} et S_{H_1} sont les foncteurs simples introduits au corollaire 5.

Dans le dernier chapitre, après avoir étendu la définition de foncteur polynomial de la catégorie $\mathcal{F}(2)$ à la catégorie $\mathcal{F}_{quad}$, on montre le théorème suivant :

Théorème 10. *Les foncteurs finis et polynomiaux de $\mathcal{F}_{quad}$ sont dans l'image du foncteur ι : $\mathcal{F}(2) \to \mathcal{F}_{quad}$.*

La démonstration de ce théorème utilise de manière essentielle la classification donnée à la proposition 9.

Première partie

Préliminaires

Chapitre 1

Formes quadratiques sur $\mathbb{F}_2$

Cette partie a pour vocation de rappeler les résultats concernant les formes quadratiques sur le corps $\mathbb{F}_2$ qui nous seront essentiels par la suite.

Après avoir donné les définitions de base, on détermine la classification des formes quadratiques non dégénérées puis des formes dégénérées. On introduit ensuite deux catégories : celle des espaces quadratiques non dégénérés, qui n'admet ni produits fibrés, ni sommes amalgamées et celle des espaces quadratiques dégénérés, qui admet des produits fibrés, mais pas de sommes amalgamées. On définira alors la notion de pseudo-somme amalgamée aux propriétés similaires à la somme amalgamée, l'universalité en moins. On termine en mentionnant quelques résultats sur la structure des groupes orthogonaux pour les formes quadratiques non dégénérées.

Ce paragraphe s'inspire essentiellement de [Bro72] et [Pfi95] pour la classification, et de [Die71] pour les groupes orthogonaux.

1.1 Définitions

Soit V un $\mathbb{F}_2$ espace vectoriel de dimension finie.

Définition 1.1.1. Une forme quadratique sur V est une fonction $q : V \longrightarrow \mathbb{F}_2$ telle que $q(x+y) + q(x) + q(y) = B(x,y)$ est une forme bilinéaire.

Remarque 1.1.2. La définition précédente implique que $q(0) = 0$, en considérant le cas où $x = y = 0$.

Notation 1.1.3. La forme bilinéaire associée à la forme quadratique q sera notée B_q.
Un espace quadratique sera noté (V, q_V) ou (V, q) lorsqu'il sera nécessaire de spécifier la forme quadratique ; dans le cas contraire, on le notera plus simplement V.

Définition 1.1.4. La dimension de la forme quadratique q_V est la dimension de l'espace V sous-jacent.

Lemme 1.1.5. *La forme bilinéaire associée à une forme quadratique est alternée.*

Démonstration. On déduit directement de la définition précédente que $B(x,y) = B(y,x)$ et $B(x,x) = 0$. □

Définition 1.1.6. Une isométrie entre deux espaces quadratiques (V, q_V) et $(V', q_{V'})$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels $f : V \to V'$ tel que : $q_V(v) = q_{V'}(f(v))$ pour tout v dans V.

Notation 1.1.7. On écrira $(V, q_V) \simeq (V', q_{V'})$ et on dira que les deux formes sont équivalentes et que les deux espaces sont isométriques.

Définition 1.1.8. 1. Le radical d'un espace V muni d'une forme bilinéaire B est donné par :

$$Rad(V,B) = \{v \in V \mid \forall w \in V \ B(v,w) = 0\}.$$

2. Une forme bilinéaire est non singulière si $\mathrm{Rad}(V,B) = 0$.
3. Un espace quadratique (V,q) est non dégénéré si sa forme bilinéaire associée, B_q, est non singulière.
4. Un espace quadratique (V,q) est totalement isotrope si $\mathrm{Rad}(V,B_q) = V$.

Notation 1.1.9. Pour un espace quadratique (V,q), $\mathrm{Rad}(V,B_q)$ sera noté plus simplement $\mathrm{Rad}(V)$.

Lemme 1.1.10. *Si $f : (V,q_V) \to (V',q_{V'})$ est une isométrie, alors $f(\mathrm{Rad}(V)) = \mathrm{Rad}(V')$.*

Définition 1.1.11. Soient deux espaces quadratiques (V,q_V) et (W,q_W). La somme orthogonale, $(V\perp W, q_{V\perp W})$, de (V,q_V) et (W,q_W) est l'espace quadratique : $(V \oplus W, q_{V\oplus W})$ où $q_{V\oplus W}(v,w) := q_V(v) + q_W(w)$.

Proposition 1.1.12. *Si V et W sont deux espaces quadratiques non dégénérés, alors $V\perp W$ est un espace non dégénéré.*

On a le théorème suivant :

Théorème 1.1.13 (Théorème de Witt en caractéristique 2)**.** *[Pfi95]*
Si $(V,q)\perp(V_1,q_1) \simeq (V,q)\perp(V_2,q_2)$, où les trois espaces considérés sont non dégénérés, alors $(V_1,q_1) \simeq (V_2,q_2)$.

Une conséquence importante du théorème de Witt, dont on se servira dans la suite, est donnée dans le corollaire suivant.

Corollaire 1.1.14. *Soient H et H' deux sous-espaces quadratiques non dégénérés d'un espace V non dégénéré et $\underline{f} : H \to H'$ une isométrie entre ces deux sous-espaces alors, il existe une isométrie $f : V \to V$ rendant le diagramme suivant commutatif :*

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] & V \\ H \arrow[u, hook] \arrow[r, "\underline{f}"'] & H'. \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

Démonstration. D'après les hypothèses, on a les décompositions suivantes : $V \simeq H\perp H^\perp$ et $V \simeq H'\perp H'^\perp$ où $H^\perp$ (respectivement $H'^\perp$) est l'orthogonal de H (respectivement H') dans V. Comme $H \simeq H'$, on a, par le théorème de Witt, qu'il existe une isométrie $g : H^\perp \to H'^\perp$. On vérifie alors aisément que l'application :

$$\underline{f}\perp g : H\perp H^\perp \to H'\perp H'^\perp$$

satisfait aux conditions de l'énoncé. □

Enfin, on a le théorème suivant :

Théorème 1.1.15. *[Pfi95]*

1. *Tout espace quadratique (V,q_V) admet une décomposition de la forme suivante :*

$$V = U\perp \mathrm{Rad}(V)$$

   où U est non dégénéré.
2. $\mathrm{Rad}(V)$ *est une somme orthogonale d'espaces quadratiques de dimension un.*

On verra plus loin que le théorème de Witt n'est plus valable pour les formes dégénérées. En effet, pour un espace quadratique V, l'espace quadratique U du théorème précédent n'est pas unique, bien que $\mathrm{Rad}(V)$ le soit. Néanmoins, on a un résultat analogue au corollaire 1.1.14 pour les formes quadratiques dégénérées.

Théorème 1.1.16. *Soit V un espace quadratique non dégénéré, D et D' des sous-espaces quadratiques de V éventuellement dégénérés et $\underline{f} : D \to D'$ une isométrie entre ces deux sous-espaces alors, il existe une isométrie $f : V \to V$ rendant le diagramme suivant commutatif :*

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] & V \\ D \arrow[u, hook] \arrow[r, "\underline{f}"'] & D'. \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

Démonstration. Pour une démonstration de ce résultat, on consultera [Bou59] §4, théorème 1. □

Notation 1.1.17. L'espace quadratique de dimension un engendré par un x tel que $q(x) = \alpha$ sera noté : (x, α).

Remarque 1.1.18. Avec la notation précédente, le deuxième point du théorème 1.1.15 devient :

$$\mathrm{Rad}(V) \simeq \underset{i}{\perp}(x_i, \alpha_i).$$

1.2 Classification des espaces quadratiques

1.2.1 Classification des formes quadratiques non dégénérées

Le résultat principal de cette section est la proposition 1.2.10 qui donne la classification complète des formes quadratiques non dégénérées.

On rappelle la classification des formes bilinéaires alternées non singulières. Pour cela, nous avons besoin de la définition suivante :

Définition 1.2.1. Une base symplectique d'un espace muni d'une forme bilinéaire, est une base $\mathcal{B} = \{a_1, b_1, \dots a_n, b_n\}$ telle que $B(a_i, a_j) = B(b_i, b_j) = 0$ et $B(a_i, b_j) = \delta_{i,j}$.

Lemme 1.2.2. *Tout espace muni d'une forme bilinéaire alternée non singulière admet une base symplectique.*

On en déduit le lemme suivant :

Lemme 1.2.3. *Un espace muni d'une forme quadratique non dégénérée est de dimension paire.*

Dans un premier temps, on donne la classification des formes quadratiques non dégénérées de dimension deux.

Remarque 1.2.4. Pour un espace quadratique non dégénéré de dimension deux, H, les données de $q(a)$ et $q(b)$ pour une base symplectique $\{a, b\}$ de H suffisent à déterminer la forme sur tout l'espace, car, par la définition 1.1.1, on a :

$$q(a + b) = q(a) + q(b) + B(a, b) = q(a) + q(b) + 1.$$

Définition 1.2.5. L'espace H_0 est l'espace quadratique non dégénéré de dimension deux, de base $\{a_0, b_0\}$, muni de la forme quadratique q_0 suivante :

$$\begin{array}{rccc} q_0 : & H_0 & \to & \mathbb{F}_2 \\ & a_0 & \longmapsto & 0 \\ & b_0 & \longmapsto & 0 \end{array}$$

et l'espace H_1 est l'espace quadratique non dégénéré de dimension deux, de base $\{a_1, b_1\}$, muni de la forme quadratique q_1 suivante :

$$\begin{array}{rccc} q_1 : & H_1 & \to & \mathbb{F}_2 \\ & a_1 & \longmapsto & 1 \\ & b_1 & \longmapsto & 1. \end{array}$$

Remarque 1.2.6. Par la remarque 1.2.4 on a $q_0(a_0 + b_0) = 1$ et $q_1(a_1 + b_1) = 1$.

Le lemme suivant est classique.

Lemme 1.2.7. *Les formes quadratiques q_0 et q_1 ne sont pas équivalentes.*

Lemme 1.2.8. *Toute forme quadratique non dégénérée sur un espace vectoriel de dimension deux est équivalente soit à q_0 soit à q_1.*

Démonstration. Pour un espace de dimension deux muni d'une forme bilinéaire alternée non singulière B, on a d'après le lemme 1.2.2 l'existence d'une base symplectique $\{a, b\}$ telle que $B(a, b) = 1$ et $B(a, a) = B(b, b) = 0$.

Un calcul montre alors que les seules formes quadratiques compatibles avec B sont q_0 et q_1. □

Pour obtenir la classification complète des formes quadratiques non dégénérées, nous avons besoin du lemme fondamental suivant :

Lemme 1.2.9. *Les espaces $H_0 \perp H_0$ et $H_1 \perp H_1$ sont isométriques.*

Démonstration. Une base symplectique de $H_0 \perp H_0$ sera notée :

$$\mathrm{Vect}(a_0, b_0) \perp \mathrm{Vect}(a'_0, b'_0)$$

et une base de $H_1 \perp H_1$ sera notée

$$\mathrm{Vect}(a_1, b_1) \perp \mathrm{Vect}(a'_1, b'_1).$$

On a l'isométrie suivante entre $H_0 \perp H_0$ et $H_1 \perp H_1$:

$$\begin{array}{rccc} f : & H_0 \perp H_0 & \longrightarrow & H_1 \perp H_1 \\ & a_0 & \mapsto & a_1 + a'_1 \\ & b_0 & \mapsto & b_1 + a'_1 \\ & a'_0 & \mapsto & a_1 + b_1 + a'_1 + b'_1 \\ & b'_0 & \mapsto & a_1 + b_1 + b'_1 \end{array}$$

□

On obtient la classification suivante :

Proposition 1.2.10. *1. Les espaces quadratiques $H_0^{\perp m}$ et $H_0^{\perp(m-1)} \perp H_1$ ne sont pas isométriques.*

2. Soit (V, q_V) un espace quadratique de dimension $2m$, où m est un entier naturel non nul, V est isométrique soit à $H_0^{\perp m}$, soit à $H_0^{\perp(m-1)} \perp H_1$.

Démonstration. Ce résultat s'obtient en appliquant le lemme précédent et le lemme 1.2.8 et en utilisant l'invariant de Arf, dont on rappelle la définition au paragraphe suivant, pour montrer que les deux espaces $H_0^{\perp m}$ et $H_0^{\perp(m-1)} \perp H_1$ ne sont pas isométriques. □

Notation 1.2.11. Dans toute la suite, une base symplectique de $H_0^{\perp m}$ sera notée :

$$\mathrm{Vect}(a_0, b_0) \perp \mathrm{Vect}(a'_0, b'_0) \perp \mathrm{Vect}(a''_0, b''_0) \perp \mathrm{Vect}(a_0^{(3)}, b_0^{(3)}) \perp \ldots \perp \mathrm{Vect}(a_0^{(m-1)}, b_0^{(m-1)})$$

et une base de $H_0^{\perp(m-1)} \perp H_1$ sera notée

$$\mathrm{Vect}(a_0, b_0) \perp \mathrm{Vect}(a'_0, b'_0) \perp \mathrm{Vect}(a''_0, b''_0) \perp \mathrm{Vect}(a_0^{(3)}, b_0^{(3)}) \perp \ldots \perp \mathrm{Vect}(a_0^{(m-2)}, b_0^{(m-2)}) \perp \mathrm{Vect}(a_1, b_1).$$

1.2.2 Invariants

On définit dans cette section trois invariants pour les espaces quadratiques. Le premier, l'invariant de Arf, n'est défini que pour les espaces quadratiques non dégénérés et permet de distinguer, en une dimension donnée, les deux espaces obtenus à la section précédente. Les deux autres invariants sont définis pour les espaces éventuellement dégénérés et nous seront utiles dans la section suivante pour classifier les espaces quadratiques dégénérés.

Définition 1.2.12 (Invariant de Arf)**.** [Bro72] [Pfi95] Soient (V, q_V) un espace quadratique non dégénéré de dimension $2m$ et a_i, b_i avec $i = 1, \dots m$ une base symplectique de V. L'invariant de Arf est donné par :

$$\mathrm{Arf}(q) = \sum_{i=1}^{n} q(a_i)q(b_i) \in \mathbb{F}_2$$

Proposition 1.2.13. *[Pfi95] L'invariant de Arf est indépendant du choix de la base précédente.*

Proposition 1.2.14. *[Pfi95] On a* $\mathrm{Arf}(q_0) = 0$, $\mathrm{Arf}(q_1) = 1$, $\mathrm{Arf}(mq_0) = 0$ *et* $\mathrm{Arf}(q_1+(m-1)q_0) = 1$.

Par conséquent, pour une dimension donnée, l'invariant de Arf détermine complètement q, à une isométrie près.

Définition 1.2.15 (Invariants ν_0 et ν_1)**.** Soit (V, q_V) un espace quadratique éventuellement dégénéré, les invariants ν_0 et ν_1 sont donnés par :

$$\begin{aligned}\nu_0(V, q_V) &= \mathrm{Card}\{v \in (V, q_V) \mid q_V(v) = 0\} \in \mathbb{N},\\ \nu_1(V, q_V) &= \mathrm{Card}\{v \in (V, q_V) \mid q_V(v) = 1\} \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Lemme 1.2.16. *1. ν_0 et ν_1 sont invariants par isométrie.*

2. On a la relation suivante :

$$\nu_0(V) + \nu_1(V) = 2^{\dim(V)}$$

Proposition 1.2.17. *On a la relation suivante :*

$$\nu_1(V \perp W) = \nu_1(V)\nu_0(W) + \nu_0(V)\nu_1(W)$$

Démonstration. Soit $v + w$ un élément de $V \perp W$. On a la relation $q(v + w) = q(v) + q(w)$ (car $B(v, w) = 0$) dont on déduit : $q(v + w) = 1$ si et seulement si ($q(v) = 1$ et $q(w) = 0$) ou ($q(v) = 0$ et $q(w) = 1$). Il suffit alors de déterminer les cardinaux des ensembles correspondants. □

Corollaire 1.2.18. *Soit V un espace dégénéré tel que $V \simeq \mathrm{Rad}(V) \perp U$ alors*

$$\nu_1(V) = \nu_1(\mathrm{Rad}(V))\nu_0(U) + \nu_0(\mathrm{Rad}(V))\nu_1(U).$$

Proposition 1.2.19. *Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a :*

$$\nu_1(H_0^{\perp n}) = 2^{2n-1} - 2^{n-1}$$

$$\nu_1(H_0^{\perp(n-1)} \perp H_1) = 2^{2n-1} + 2^{n-1}.$$

Démonstration. Pour H_0 et H_1, on utilise directement la définition de ces espaces pour obtenir : $\nu_1(H_0) = 1$ et $\nu_1(H_1) = 3$.

Pour $H_0^{\perp n}$,

$$\begin{aligned}\nu_1(H_0^{\perp n}) &= \nu_1(H_0^{\perp(n-1)} \perp H_0)\\ &= \nu_1(H_0^{\perp(n-1)})\nu_0(H_0) + \nu_0(H_0^{\perp(n-1)})\nu_1(H_0) && \text{(par la proposition 1.2.17)}\\ &= \nu_1(H_0^{\perp(n-1)})(2^2 - \nu_1(H_0)) + (2^{2(n-1)} - \nu_1(H_0^{\perp(n-1)}))\nu_1(H_0) && \text{(par le lemme 1.2.16)}\\ &= 2\nu_1(H_0^{\perp(n-1)}) + 2^{2(n-1)} && \text{(en utilisant } \nu_1(H_0) = 1)\end{aligned}$$

On en déduit, par récurrence, la valeur de $\nu_1(H_0^{\perp n})$ donnée par l'énoncé.
Pour $\nu_1(H_0^{\perp(n-1)}\perp H_1)$ on effectue un calcul similaire qui utilise $\nu_1(H_1) = 3$.

□

On déduit de cette proposition le résultat suivant :

Proposition 1.2.20. *Soient V et V' deux espaces quadratiques non dégénérés, alors $V \simeq V'$ si et seulement si $\nu_1(V) = \nu_1(V')$.*

1.2.3 Classification des formes quadratiques dégénérées

Une des particularités de la caractéristique 2 est que la partie non dégénérée d'une forme quadratique n'est pas unique à isométrie près, en général, comme le montre l'exemple $H_0\perp(x,1) \simeq H_1\perp(x,1)$. Ainsi, le théorème de Witt (Théorème 1.1.13) n'est plus valable pour les formes dégénérées. Néanmoins, on peut donner une classification de ces formes quadratiques.

Théorème 1.2.21. *1. Soit V un espace totalement isotrope de dimension r, V est isométrique soit à $(x,0)^{\perp r}$, soit à $(x,1)^{\perp r}$.*

2. Soient $V \simeq \mathrm{Rad}(V)\perp U$ et $V \simeq \mathrm{Rad}(V)\perp U'$ deux décompositions de V. Si $\mathrm{Rad}(V) \simeq (x,0)^{\perp r}$ pour $r \geq 0$, alors $U \simeq U'$.

3. Soient U et U' deux formes non dégénérées de même dimension, alors pour tout $r > 0$, $U\perp(x,1)^{\perp r} \simeq U'\perp(x,1)^{\perp r}$.

Pour démontrer le deuxième point du théorème, nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 1.2.22. *Pour V un espace quadratique dégénéré tel que $V \simeq U\perp(x,0)^{\perp r}$, on a $\nu_1(V) = 2^r\nu_1(U)$.*

Démonstration. On a $\nu_1((x,0)^{\perp r}) = 0$. En appliquant le corollaire 1.2.18 à l'espace V on obtient : $\nu_1(V) = \nu_0(\mathrm{Rad}(V))\nu_1(U) = 2^r\nu_1(U)$. □

Démonstration du théorème.

1. On sait, d'après le théorème 1.1.15 que $\mathrm{Rad}(V)$ est une somme orthogonale d'espaces de dimension un, d'où $V \simeq \mathrm{Rad}(V) \simeq (x_1,\alpha_1)\perp(x_2,\alpha_2)\ldots(x_r,\alpha_r)$. Si pour tout i, $\alpha_i = 0$ on a $\mathrm{Rad}(V) \simeq (x,0)^{\perp r}$. S'il existe un indice i pour lequel $\alpha_i = 1$, quitte à réordonner, on peut supposer que $i = 1$ et que la décomposition précédente s'écrit sous la forme $\mathrm{Rad}(V) \simeq (x_1,1)\perp(x_2,1)\perp\ldots(x_l,1)\perp(x_{l+1},0)\perp\ldots\perp(x_r,0)$. Or, on a l'isométrie suivante :

$$f:\ (x_1,1)\perp(x_2,1)\perp\ldots(x_l,1)\perp(x_{l+1},0)\perp\ldots\perp(x_r,0) \longrightarrow (y_1,1)\perp\ldots\perp(y_r,1)$$

   pour $i = 1\ldots l$, $f(x_i) = y_i$,
   pour $i = l+1\ldots r$, $f(x_i) = y_i + x_1$.

2. On a, $\nu_1(V) = 2^r\nu_1(U)$ et $\nu_1(V) = 2^r\nu_1(U')$, par le lemme 1.2.22 dont on déduit que $\nu_1(U) = \nu_1(U')$. On conclut à l'aide de la proposition 1.2.20 que $U \simeq U'$.

3. Si $U \simeq U'$, le résultat est clair. Sinon, d'après la classification des formes quadratiques non dégénérées, on peut supposer que $U \simeq H_0^{\perp k}$ et $U' \simeq H_0^{\perp(k-1)}\perp H_1$. Il suffit de considérer le cas $r = k = 1$. On définit une isométrie f de $H_0\perp(x,1)$ sur $H_1\perp(x,1)$ de la manière suivante :
   la restriction de f à $(x,1)$ est l'identité,
   sur le facteur $H_0 \simeq \mathrm{Vect}(a_0,b_0)$, f est défini par :

$$f(a_0) = a_1 + x$$

$$f(b_0) = b_1 + x$$

   On vérifie aisément que ceci définit bien une isométrie.

□

1.3 Les catégories $\mathcal{E}_q$ et $\mathcal{E}_q^{\deg}$

1.3.1 La catégorie $\mathcal{E}_q$

Définition 1.3.1. Une application linéaire f entre deux espaces quadratiques V et W conserve la forme quadratique, si pour tout v de V, on a :

$$q_W(f(v)) = q_V(v).$$

L'application f conserve la forme bilinéaire associée si, pour tous v et w de V, on a :

$$B_{q_V}(v, w) = B_{q_W}(f(v), f(w)).$$

Définition 1.3.2. Soit $\mathcal{E}_q$ la catégorie dont les objets sont les $\mathbb{F}_2$-espaces vectoriels de dimension finie munis d'une forme quadratique non dégénérée et dont les morphismes sont les applications linéaires qui conservent la forme quadratique.

Proposition 1.3.3. *Une application de $\mathcal{E}_q$ conserve la forme bilinéaire associée à la forme quadratique.*

Démonstration. Soit $f : V \to W$ un morphisme de $\mathcal{E}_q$:

$$B_{q_W}(f(x), f(y)) = q_W(f(x)+f(y))+q_W(f(x))+q_W(f(y)) = q_V(x+y)+q_V(x)+q_V(y) = B_{q_V}(x, y)$$

La première et la troisième égalité viennent de la définition de forme quadratique sur $\mathbb{F}_2$, la deuxième provient de la conservation, par f, de la forme quadratique. □

Remarque 1.3.4. La réciproque du résultat précédent est fausse sur $\mathbb{F}_2$, contrairement à ce qui se passe dans le cas de corps de caractéristique nulle ou dans le cas de $\mathbb{F}_p$ pour p impair. En effet, les espaces H_0 et H_1 ne sont pas isométriques alors qu'ils ont la même forme bilinéaire associée.

Proposition 1.3.5. *Tout morphisme de $\mathcal{E}_q$ est un monomorphisme.*

Démonstration. Soit f un morphisme de $\mathcal{E}_q$. Supposons qu'il existe un élément v non nul, tel que $f(v) = 0$; comme q est non dégénérée, il existe un élément w vérifiant $B(v, w) = 1$. Mais on a $B(f(v), f(w)) = B(0, f(w)) = 0$ ce qui est en contradiction avec la proposition 1.3.3. Par conséquent, tout morphisme de $\mathcal{E}_q$ est une application linéaire injective, ce qui entraîne le résultat. □

Remarque 1.3.6. Soit f un élément de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}_q}(V, W)$. En notant V' l'orthogonal de $f(V)$ dans W, on a $f(V) \cap V' = \{0\}$ par un argument analogue à celui donné dans la démonstration de la proposition précédente. Par conséquent, on peut décomposer W en $f(V) \perp V'$, ce qui permet de montrer que f s'écrit de manière unique, à isométrie près, comme la composée $\alpha \circ i$ où α est une isométrie et i est l'inclusion canonique $V \hookrightarrow V \perp V'$. Les espaces V et $f(V)$ étant isométriques, on les identifiera dans la suite et on écrira, plus simplement,

$$f \ : \ V \to V \perp V'.$$

Une des différences importantes entre la catégorie $\mathcal{E}_q$ et celle des espaces vectoriels $\mathcal{E}$ est donnée par le lemme suivant :

Lemme 1.3.7. *Pour V un objet non nul de $\mathcal{E}_q$, l'application diagonale $\Delta : \ V \to V \oplus V$ définie par $\Delta(v) = (v, v)$ n'induit pas un morphisme $V \to V \perp V$ dans $\mathcal{E}_q$.*

Démonstration. D'après la classification des formes non dégénérées et la proposition 1.2.19, on a l'existence, dans tout espace V non dégénéré et non nul, d'un élément v tel que $q_V(v) = 1$. Or,

$$q_{V \perp V}(\Delta(v)) = q_{V \perp V}(v, v) = q_V(v) + q_V(v) = 0$$

□

Ce lemme aura pour conséquence importante que $\mathcal{E}_q$ n'admet pas de sommes amalgamées.

Cependant, afin de pallier l'absence d'applications diagonales dans $\mathcal{E}_q$, on pourra parfois utiliser le morphisme appelé : application trigonale, défini dans la proposition suivante.

Proposition 1.3.8. *Pour V un objet de $\mathcal{E}_q$, l'application trigonale $\Theta : V \to V \oplus V \oplus V$ définie par $\Theta(v) = (v, v, v)$ induit un morphisme $V \to V \perp V \perp V$ dans $\mathcal{E}_q$.*

Démonstration. On a l'égalité suivante :

$$q_{V\perp V\perp V}(\Theta(v)) = q_{V\perp V\perp V}(v, v, v) = q_V(v) + q_V(v) + q_V(v) = q_V(v)$$

sur $\mathbb{F}_2$. □

Proposition 1.3.9. *La catégorie $\mathcal{E}_q$ n'admet pas de produits fibrés.*

Démonstration. Ceci est une conséquence directe du fait que la partie non dégénérée d'une forme quadratique n'est pas unique.
En effet, considérons les deux éléments suivants de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}_q}(H_0 \perp H_0, H_0 \perp H_0 \perp H_0)$:

$$f : \begin{array}{ccc} H_0\perp H_0 & \longrightarrow & H_0\perp H_0\perp H_0 \\ a_0 & \mapsto & a_0 \\ b_0 & \mapsto & b_0 \\ a_0' & \mapsto & a_0' + a_0'' \\ b_0' & \mapsto & b_0' + a_0'' \end{array} \qquad \text{et} \qquad g : \begin{array}{ccc} H_0\perp H_0 & \longrightarrow & H_0\perp H_0\perp H_0 \\ a_0 & \mapsto & a_0 \\ b_0 & \mapsto & b_0 \\ a_0' & \mapsto & a_0' + b_0'' \\ b_0' & \mapsto & b_0' + b_0'' \end{array}$$

Supposons que $\mathcal{E}_q$ admette des produits fibrés et notons X le produit fibré de f et g. Comme l'objet X appartient à $\mathcal{E}_q$, il est de dimension paire.
L'espace X est de dimension au plus quatre car, pour un espace Y de dimension supérieure à quatre, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}_q}(Y, H_0 \perp H_0) = 0$.
L'espace X ne peut pas être de dimension quatre, car $f(H_0\perp H_0) \cap g(H_0\perp H_0) \simeq (\mathrm{Vect}(a_0, b_0), q_0) \perp (a_0' + b_0', 1) \simeq (\mathrm{Vect}(a_0 + a_0' + b_0', b_0 + a_0' + b_0'), q_1) \perp (a_0' + b_0', 1)$ est un espace de dimension trois.
L'espace X ne peut pas être de dimension deux, car on a les deux diagrammes commutatifs suivants :

$$\begin{tikzcd} H_0 \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "i_1"'] & H_0\perp H_0 \arrow[d, "g"] \\ H_0\perp H_0 \arrow[r, "f"'] & H_0\perp H_0\perp H_0 \end{tikzcd}$$

(où i_1 est l'inclusion dans le premier facteur)
et

$$\begin{tikzcd} H_1 \arrow[r, "i"] \arrow[d, "i"'] & H_0\perp H_0 \arrow[d, "g"] \\ H_0\perp H_0 \arrow[r, "f"'] & H_0\perp H_0\perp H_0 \end{tikzcd}$$

avec $\quad i : \begin{array}{ccc} H_1 & \longrightarrow & H_0\perp H_0 \\ a_1 & \mapsto & a_0 + a_0' + b_0' \\ b_1 & \mapsto & b_0 + a_0' + b_0'. \end{array}$

Or, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}_q}(H_0, H_1) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}_q}(H_1, H_0) = 0$ puisque ces deux espaces sont non isométriques. □

Proposition 1.3.10. *La catégorie $\mathcal{E}_q$ n'admet pas de sommes amalgamées.*

Démonstration. Raisonnons par l'absurde, considérons un espace non dégénéré et non nul V, et notons i le morphisme de $\{0\}$ dans V. Par hypothèse, on a l'existence d'une somme amalgamée, notée X, du diagramme :

$$\begin{tikzcd} \{0\} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "i"'] & V \arrow[d, "g"] \\ V \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

ce qui fournit des morphismes de V dans X.
Etant donné que le diagramme suivant est commutatif dans $\mathcal{E}_q$:

$$\begin{tikzcd} \{0\} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "i"'] & V \arrow[d, "\mathrm{Id}"] \\ V \arrow[r, "\mathrm{Id}"'] & V, \end{tikzcd}$$

on a, par l'universalité de la somme amalgamée, l'existence d'un morphisme de $\mathcal{E}_q$ de X dans V.
Or, on sait par la proposition 1.3.5, que les morphismes de $\mathcal{E}_q$ sont des monomorphismes, par conséquent, $X \simeq V$.
De plus, on a le diagramme commutatif suivant dans $\mathcal{E}_q$:

$$\begin{tikzcd} \{0\} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "i"'] & V \arrow[d, "i_1"] \\ V \arrow[r, "i_2"'] & V \perp V, \end{tikzcd}$$

dont on déduit l'existence d'un morphisme de $\mathcal{E}_q$, $f : V \to V \perp V$ rendant commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} \{0\} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "i"'] & V \arrow[d] \arrow[ddr, "i_2"] & \\ V \arrow[r] \arrow[drr, "i_1"'] & V \arrow[dr, "f"] & \\ & & V \perp V \end{tikzcd}$$

ce qui fournit une contradiction, puisque les deux triangles du diagramme précédent ne peuvent pas être commutatifs simultanément, en l'absence de l'application diagonale dans $\mathcal{E}_q$ donnée par le lemme 1.3.7. □

1.3.2 La catégorie $\mathcal{E}_q^{\deg}$

Définition 1.3.11. Soit $\mathcal{E}_q^{\deg}$ la catégorie dont les objets sont les $\mathbb{F}_2$-espaces vectoriels de dimension finie munis d'une forme quadratique (éventuellement dégénérée), et dont les morphismes sont les **monomorphismes** linéaires qui conservent la forme quadratique.

On peut donner une version du lemme 1.3.7 pour les espaces dégénérés sous la forme suivante :

Lemme 1.3.12. *Soit V un objet de $\mathcal{E}_q^{\deg}$, tel que la forme q_V est non nulle. L'application diagonale $\Delta : V \to V \perp V$ définie par $\Delta(v) = (v, v)$ n'est pas un morphisme de $\mathcal{E}_q^{\deg}$.*

Proposition 1.3.13. *La catégorie $\mathcal{E}_q^{\deg}$ admet des produits fibrés.*

Démonstration. Soient V, W et X des objets de $\mathcal{E}_q^{\deg}$, f un élément de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}_q^{\deg}}(V, X)$ et g un élément de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}_q^{\deg}}(W, X)$. On note $X_1 = f(V) \cap g(W)$. L'espace X_1 est un sous-espace quadratique de X et $f^{-1}(X_1) \simeq g^{-1}(X_1) \simeq X_1$, ce qui donne la commutativité du diagramme :

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r] \arrow[d] & W \arrow[d, "g"] \\ V \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

On vérifie aisément que X_1 définit bien le produit fibré. □

Notation 1.3.14. Dans la suite, le produit fibré sera noté : $V \underset{X}{\times} W$.

Proposition 1.3.15. *La catégorie $\mathcal{E}_q^{\deg}$ n'admet pas de sommes amalgamées.*

Démonstration. La démonstration est l'adaptation de celle de la proposition 1.3.10 au cas non dégénéré, en utilisant le lemme 1.3.12. □

Les deux catégories construites précédemment sont reliées par le résultat suivant :

Proposition 1.3.16. *La catégorie $\mathcal{E}_q$ est une sous-catégorie pleine de $\mathcal{E}_q^{\deg}$.*

1.3.3 Pseudo-somme amalgamée

Le but de cette section est de définir une manière de compléter les diagrammes du type

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & W \\ X & \end{tikzcd}$$

dans $\mathcal{E}_q$, ayant certaines propriétés similaires aux sommes amalgamées, mais ne vérifiant pas la propriété d'universalité.

Définition 1.3.17. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. On dit que $\mathcal{C}$ admet des pseudo-sommes amalgamées si, pour tout couple de morphismes de $\mathcal{C}$: $A \to B$ et $A \to C$, il existe un choix de complétion du carré suivant :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[d] \\ B \arrow[r] & B \underset{A}{\perp} C \end{tikzcd}$$

rendant ce carré commutatif, et vérifiant les axiomes suivants :

1. $B \underset{A}{\perp} C \simeq C \underset{A}{\perp} B$
2. Si $A \simeq A'$ alors $B \underset{A}{\perp} C \simeq B \underset{A'}{\perp} C$
3. Si $C \simeq C'$ alors $B \underset{A}{\perp} C \simeq B \underset{A}{\perp} C'$
4. Associativité
   $(B \underset{A}{\perp} C) \underset{D}{\perp} E \simeq B \underset{A}{\perp} (C \underset{D}{\perp} E)$

5. Unité
   $A \underset{A}{\perp} B \simeq B$
6. Compatibilité avec la composition
   Pour un morphisme $C \to C'$, $B \underset{A}{\perp} C' \simeq (B \underset{A}{\perp} C) \underset{C}{\perp} C'$
   Pour deux morphismes $B \to B'$ et $C \to C'$,
   $(B' \underset{A}{\perp} C) \underset{B \underset{A}{\perp} C}{\perp} (B \underset{A}{\perp} C') \simeq B' \underset{A}{\perp} C'$.
   Ces deux conditions correspondent à la commutativité des différents carrés du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & C' \arrow[d] \\
B \arrow[r] \arrow[d] & B \underset{A}{\perp} C \arrow[r] \arrow[d] & B \underset{A}{\perp} C' \arrow[d] \\
B' \arrow[r] & B' \underset{A}{\perp} C \arrow[r] & B' \underset{A}{\perp} C'
\end{tikzcd}$$

De plus, si $\mathcal{C}$ possède un objet initial 0, $\mathcal{C}$ est une catégorie symétrique monoïdale pour le produit suivant :

$$\mathcal{C} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$$

$$(H, K) \longrightarrow H \underset{0}{\perp} K$$

La fonctorialité découle des axiomes de compatibilité et d'unité dans $\mathcal{C}$, la symétrie découle de l'axiome 1 et la structure monoïdale de l'axiome 6.

Remarque 1.3.18. Dans le cas où la catégorie $\mathcal{C}$ est munie de sommes amalgamées, ceci revient à faire un choix de somme amalgamée pour tout diagramme $A \leftarrow X \to B$.

Proposition 1.3.19. *La catégorie $\mathcal{E}_q$ admet des pseudo-sommes amalgamées.*

Démonstration. Soient $V \xrightarrow{f} W$ et $V \xrightarrow{g} X$ deux morphismes de $\mathcal{E}_q$. Par la décomposition des morphismes de $\mathcal{E}_q$ donnée à la suite de la proposition 1.3.5 , on a :
$V \xrightarrow{f} W \simeq V \perp V'$ et $V \xrightarrow{g} X \simeq V \perp V''$.
On a alors un choix unique, à isométrie près, de complétion donné par le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & W \simeq V \perp V' \arrow[d] \\
X \simeq V \perp V'' \arrow[r] & V \perp V' \perp V'' \simeq X \underset{V}{\perp} W
\end{tikzcd}$$

On vérifie aisément que les six axiomes de la définition 1.3.17 sont satisfaits. □

Remarque 1.3.20. La peudo-somme amalgamée n'est pas universelle comme le montre l'exemple suivant :

$$\begin{tikzcd}
\{0\} \arrow[r] \arrow[d] & V \arrow[d, "\mathrm{Id}"] \\
V \arrow[r, "\mathrm{Id}"'] & V.
\end{tikzcd}$$

Ce diagramme est commutatif, or $V \underset{\{0\}}{\perp} V = V \perp V$ et $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}_q}(V \perp V, V) = \emptyset$ puisque tout morphisme de $\mathcal{E}_q$ est un monomorphisme d'après 1.3.5.

On termine cette section avec un résultat important reliant les notions de pseudo-somme amalgamée dans $\mathcal{E}_q$ et celle de produit fibré dans $\mathcal{E}_q^{\deg}$. Cette proposition jouera un rôle fondamental dans la section 2.4 et dans le chapitre 4.

Proposition 1.3.21. *Soient V, W et X des objets de $\mathcal{E}_q$ et $V \xrightarrow{f} W$, $V \xrightarrow{g} X$ deux morphismes de $\mathcal{E}_q$. On a :*

$$X \underset{X \underset{V}{\perp} W}{\times} W \simeq V$$

où $- \underset{A}{\times} -$ désigne le produit fibré dans $\mathcal{E}_q^{\deg}$ au dessus de A et $- \underset{A}{\perp} -$ désigne la pseudo-somme amalgamée dans $\mathcal{E}_q$ au dessus de A.

Démonstration. Le résultat découle facilement des définitions de pseudo-somme amalgamée dans $\mathcal{E}_q$ et de produit fibré dans ${\mathcal{E}_q}^{\deg}$. □

Remarque 1.3.22. La preuve du résultat précédent utilise de manière essentielle le fait que les morphismes de $\mathcal{E}_q^{\deg}$ sont des monomorphismes. En effet, dans une catégorie abélienne $\mathcal{A}$ munie d'un produit fibré $\times$ et d'une somme amalgamée $\oplus$, on a l'existence d'un épimorphisme de A dans $B \underset{B \underset{A}{\oplus} C}{\times} C$ pour A, B et C des objets de $\mathcal{A}$ mais cette application n'est pas un monomorphisme en général.

1.3.4 Classes d'isométrie de $\mathcal{E}_q^{\deg}$

On détermine dans cette section, le nombre de classes d'isométrie de formes quadratiques de dimension n dans $\mathrm{Obj}(\mathcal{E}_q^{\deg})$.

Proposition 1.3.23. *Le nombre de classes d'isométrie d'objets de $\mathcal{E}_q^{\deg}$ de dimension $2n$ est $3n+1$ et de dimension $2n+1$ est $3n+2$.*

Démonstration. • Pour un espace V de dimension $2n$.
On décompose V en $U \perp \mathrm{Rad}(V)$. Les espaces V et U étant de dimension paire, on en déduit que $\mathrm{Rad}(V)$ est de dimension paire.

- Si $\mathrm{Rad}(V) = 0$ (i.e. V est un espace quadratique non dégénéré), on a, d'après la proposition 1.2.10 deux espaces non isométriques, $H_0^{\perp n}$ et $H_0^{\perp(n-1)} \perp H_1$.
- Si $\dim(\mathrm{Rad}(V)) = 2k$ pour $k = 1 \dots n-1$, on déduit du théorème 1.2.21, qu'il existe trois espaces non isométriques vérifiant ces conditions :
  $\cdot H_0^{\perp(n-k)} \perp (x,0)^{\perp 2k}$
  $\cdot H_0^{\perp(n-k)} \perp (x,1)^{\perp 2k} \simeq H_0^{\perp(n-k-1)} \perp H_1 \perp (x,1)^{\perp 2k}$
  $\cdot H_0^{\perp(n-k-1)} \perp H_1 \perp (x,0)^{\perp 2k}$
- Si $\dim(\mathrm{Rad}(V)) = 2n$ (i.e. $\mathrm{Rad}(V) \simeq V$), on a, d'après le 1- du théorème 1.2.21 deux espaces non isométriques : $(x,0)^{\perp(2n)}$ et $(x,1)^{\perp(2n)}$.

On en déduit, qu'il existe $2 + 3 \times (n-1) + 2 = 3n+1$ espaces non isométriques de dimension $2n$ dans $\mathcal{E}_q^{\deg}$.

• Pour un espace V de dimension $2n+1$.
On décompose V en $U \perp \mathrm{Rad}(V)$. V étant de dimension impaire et U de dimension paire, on en déduit que $\mathrm{Rad}(V)$ est de dimension impaire.

- Si $\dim(\mathrm{Rad}(V)) = 2k+1$ pour $k = 0 \dots n-1$, on déduit du 2- du théorème 1.2.21, qu'il existe trois espaces non isométriques vérifiant ces conditions :
  $\cdot H_0^{\perp(n-k)} \perp (x,0)^{\perp(2k+1)}$
  $\cdot H_0^{\perp(n-k)} \perp (x,1)^{\perp(2k+1)} \simeq H_0^{\perp(n-k-1)} \perp H_1 \perp (x,1)^{\perp(2k+1)}$
  $\cdot H_0^{\perp(n-k-1)} \perp H_1 \perp (x,0)^{\perp(2k+1)}$

– Si $\dim(\mathrm{Rad}(V)) = 2n+1$ (i.e.$\mathrm{Rad}(V) \simeq V$), on a, d'après le 1- du théorème 1.2.21 deux espaces non isométriques : $(x,0)^{\perp(2n+1)}$ et $(x,1)^{\perp(2n+1)}$.

On en déduit, qu'il existe $3n+2$ espaces non isométriques de dimension $2n+1$ dans $\mathcal{E}_q^{\deg}$.

□

1.4 Les groupes orthogonaux

1.4.1 Pour les formes quadratiques non dégénérées

On rappelle dans ce paragraphe quelques résultats figurant dans [Die71].

Définition 1.4.1. Le groupe symplectique $Sp_n(\mathbb{F}_2)$ est l'ensemble des applications linéaires f, d'un espace de dimension n muni d'une forme bilinéaire alternée non singulière, noté (V,B), sur lui-même, qui conservent la forme bilinéaire, i.e. vérifiant :

$$B(v,w) = B(f(v), f(w))$$

pour tous v et w dans V.

Proposition 1.4.2. *L'ensemble des isométries d'un espace quadratique non dégénéré (V,q_V), de dimension n, forme un sous-groupe du groupe symplectique $Sp_n(\mathbb{F}_2)$.*

Démonstration. On déduit de la proposition 1.3.3 que toute isométrie est une transformation symplectique. □

Définition 1.4.3. Le groupe orthogonal sur $\mathbb{F}_2$ associé à la forme quadratique q_V et noté $O(q_V)$ est le groupe des isométries de (V,q_V).

Notation 1.4.4. Dans la suite, nous utiliserons la notation standard (voir la classification des groupes finis dans l'ATLAS [CCN+85]) pour désigner les groupes orthogonaux sur $\mathbb{F}_2$.
Ainsi, pour V de dimension $2n$:
- si Arf(V)=0, $O(q_V)$ sera noté O_{2n}^+ O_{2n}^+
- si Arf(V)=1, $O(q_V)$ sera noté O_{2n}^- O_{2n}^-

Les groupes orthogonaux interviennent dans l'étude de $\mathcal{E}_q$ par le biais du résultat suivant, qui est une conséquence directe de la proposition 1.3.5.

Proposition 1.4.5. *On a :*

$$\mathrm{End}_{\mathcal{E}_q}(V,q_V) = O(q_V).$$

L'ordre des groupes orthogonaux est donné par la proposition suivante :

Proposition 1.4.6. *[Die71]*

$$|Sp_{2n}(\mathbb{F}_2)| = 2^{n^2}(2^2-1)(2^4-1)\dots(2^{2n}-1)$$

$$|O_{2n}^+| = 2^{n(n-1)+1}[(2^2-1)(2^4-1)\dots(2^{2(n-1)}-1)](2^n-1)$$

$$|O_{2n}^-| = 2^{n(n-1)+1}[(2^2-1)(2^4-1)\dots(2^{2(n-1)}-1)](2^n+1).$$

Dieudonné donne dans [Die71], un système de générateurs des groupes orthogonaux différents de O_4^+.

Définition 1.4.7. Une transvection orthogonale est une isométrie t_a définie par $t_a(x) = x + \frac{B(x,a)}{q(a)}a$ pour un élément a vérifiant $q(a) \neq 0$.

Proposition 1.4.8. *[Die71] Soit V un espace quadratique non dégénéré différent de $H_0 \perp H_0$. Toute isométrie de V est un produit de transvections orthogonales.*

Voici la description des premiers groupes orthogonaux :

Proposition 1.4.9. *On a :*
$O_2^+ = O(q_{H_0}) \simeq S_2$
$O_2^- = O(q_{H_1}) \simeq S_3$
$O_4^+ = O(q_{H_0 \perp H_0}) \simeq (S_3 \times S_3) \rtimes S_2$
$O_4^- = O(q_{H_0 \perp H_1}) \simeq S_5$
$O_6^+ = O(q_{H_0 \perp H_0 \perp H_0}) \simeq S_8$
où S_n est le groupe symétrique sur n lettres.

1.4.2 Pour les formes quadratiques dégénérées

Les groupes orthogonaux pour les espaces dégénérés peuvent être définis de la même manière que dans le cas non dégénéré.

La proposition suivante donne la description de certains groupes orthogonaux dans le cas dégénéré :

Proposition 1.4.10. $O(x,0) = O(x,1) = \{\mathrm{Id}\}$
$O((x,1) \perp (x,1)) \simeq S_2$
$O((x,1)^{\perp 3}) \simeq S_4$
$O((x,0)^{\perp n}) \simeq GL_n(\mathbb{F}_2)$

Chapitre 2

Catégories de triplets et cotriplets

Dans ce chapitre, après avoir rappelé la construction de Bénabou des catégories $\mathrm{Sp}(\mathcal{D})$ (respectivement $\mathrm{CoSp}(\mathcal{D})$) associées à une catégorie $\mathcal{D}$ admettant des produits fibrés (respectivement des sommes amalgamées), on adapte cette construction au cas des catégories des espaces quadratiques $\mathcal{E}_q$ et $\mathcal{E}_q^{\deg}$. Ainsi, on définit la catégorie $\mathcal{T}_q$ qui jouera un rôle central dans la construction de la catégorie $\mathcal{F}_{quad}$ donnée au chapitre suivant et la catégorie $\mathcal{S}_q$ qui nous servira d'outil pour classifier une sous-classe importante d'objets simples de la catégorie $\mathcal{F}_{quad}$.

2.1 La catégorie $\mathrm{Sp}(\mathcal{D})$ de Bénabou

2.1.1 Définition

On rappelle dans cette section la construction donnée par Bénabou dans [Bén67] de la catégorie $\mathrm{Sp}(\mathcal{D})$ associée à une catégorie $\mathcal{D}$ convenable.

Définition 2.1.1. Soit $\mathcal{D}$ une catégorie admettant des produits fibrés. La catégorie $\mathrm{Sp}(\mathcal{D})$ est définie de la manière suivante :

1. les objets de $\mathrm{Sp}(\mathcal{D})$ sont ceux de $\mathcal{D}$;
2. soient A et B deux objets de $\mathrm{Sp}(\mathcal{D})$, $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sp}(\mathcal{D})}(A, B)$ est la classe d'équivalence des diagrammes de la forme $[A \leftarrow D \rightarrow B]$ où D est un objet de $\mathcal{D}$, pour la relation d'équivalence qui identifie les deux diagrammes $[A \leftarrow D \rightarrow B]$ et $[A \leftarrow D' \rightarrow B]$ s'il existe un isomorphisme de D sur D' rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
 & D \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[dd, "\simeq"] & \\
A & & B \\
 & D' \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

3. la composition est définie comme suit : pour des morphismes $T_1 = [A \leftarrow D \rightarrow B]$ et $T_2 = [B \leftarrow D' \rightarrow C]$, on définit
$$T_2 \circ T_1 \ = [A \leftarrow D \underset{B}{\times} D' \rightarrow C].$$

L'associativité de la composition est une conséquence de l'associativité du produit fibré et l'unité est donnée par la classe du diagramme $[A \xleftarrow{\mathrm{Id}} A \xrightarrow{\mathrm{Id}} A]$.

Notation 2.1.2. Un diagramme du type $[A \leftarrow D \rightarrow B]$ sera parfois écrit sous la forme :

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r] \arrow[d] & B \\ A & \end{tikzcd}$$

ce qui nous permettra d'obtenir la composition de deux diagrammes à partir du diagramme en escalier suivant :

$$\begin{tikzcd} D \underset{B}{\times} D' \arrow[r] \arrow[d] & D' \arrow[r] \arrow[d] & C \\ D \arrow[r] \arrow[d] & B & \\ A & & \end{tikzcd}$$

Remarque 2.1.3.
1. Nous avons conservé ici la notation originale de Bénabou, pour qui $\mathrm{Sp}(\mathcal{D})$ est la catégorie des "spans" de $\mathcal{D}$.
2. On notera les similitudes qui existent entre cette construction et la généralisation de la construction Q de Quillen donnée par Fiedorowicz et Loday dans [FL91].

Exemple 2.1.4. D'après la proposition 1.3.13, on sait que la catégorie $\mathcal{E}_q^{\mathrm{deg}}$ admet des produits fibrés. Par conséquent, la catégorie $\mathrm{Sp}(\mathcal{E}_q^{\mathrm{deg}})$ est définie.

Dualement, Bénabou donne la définition suivante :

Définition 2.1.5. Soit $\mathcal{D}$ une catégorie admettant des sommes amalgamées. La catégorie $\mathrm{CoSp}(\mathcal{D})$ est la catégorie des "cospans" de $\mathcal{D}$, qui est définie par la construction duale.

Proposition 2.1.6. *On a l'équivalence de catégories suivante :*

$$\mathrm{CoSp}(\mathcal{D}) \simeq \mathrm{Sp}(\mathcal{D}^{op}).$$

2.1.2 Propriétés de $\mathrm{Sp}(\mathcal{D})$

La première propriété de $\mathrm{Sp}(\mathcal{D})$ est l'existence de deux foncteurs de $\mathcal{D}$ dans $\mathrm{Sp}(\mathcal{D})$, l'un covariant, et l'autre contravariant.

Définition 2.1.7 (Foncteurs L et R).
1. Le foncteur $L : \mathcal{D} \rightarrow \mathrm{Sp}(\mathcal{D})$ est défini sur les objets par $L(C) = C$ et sur les morphismes par :
$$L(f) := [C \xleftarrow{\mathrm{Id}} C \xrightarrow{f} D]$$
pour C et D deux objets de $\mathcal{D}$ et f un élément de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(C, D)$.
2. Le foncteur $R : \mathcal{D}^{\mathrm{op}} \rightarrow \mathrm{Sp}(\mathcal{D})$ est défini sur les objets par $R(C) = C$ et sur les morphismes par :
$$R(f) := [D \xleftarrow{f} C \xrightarrow{\mathrm{Id}} C]$$
pour C et D deux objets de $\mathcal{D}$ et f un élément de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(C, D)$.

La fonctorialité de L et R découle des propriétés des produits fibrés.

Ces deux foncteurs nous permettent de décomposer les morphismes de $\mathrm{Sp}(\mathcal{D})$ comme l'énonce la proposition suivante.

Proposition 2.1.8 (Décomposition des morphismes)**.** *Un morphisme de* $\mathrm{Sp}(\mathcal{D})$ *représenté par le diagramme* $[A \xleftarrow{g} D \xrightarrow{h} B]$ *est obtenu par la composition suivante :*

$$[A \xleftarrow{g} D \xrightarrow{h} B] = L(h) \circ R(g).$$

Démonstration. L'énoncé découle directement de la définition de la composition et de l'identification $D \underset{D}{\times} D \simeq D$. □

Les deux foncteurs L et R définis précédemment sont reliés par un foncteur transposition de $\mathrm{Sp}(\mathcal{D})$ dont on donne la définition et les propriétés.

Définition 2.1.9 (Transposition)**.** Le foncteur transposition, $tr : \mathrm{Sp}(\mathcal{D})^{op} \to \mathrm{Sp}(\mathcal{D})$ est le foncteur défini sur les objets par $tr(D) = D$ et sur les morphismes par :

$$\mathrm{tr}(f) = \mathrm{tr}([E \leftarrow X \rightarrow D]) = [D \leftarrow X \rightarrow E],$$

pour D et E des objets de $\mathrm{Sp}(\mathcal{D})^{op}$ et f un élément de $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sp}(\mathcal{D})^{op}}(D, E)$.

Proposition 2.1.10. *1. Le foncteur transposition est involutif.*

2. Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D} \arrow[r, "L"] \arrow[dr, "R^{op}"'] & \mathrm{Sp}(\mathcal{D}) \arrow[d, "tr^{op}"] \\ & \mathrm{Sp}(\mathcal{D})^{op}. \end{tikzcd}$$

2.2 La catégorie $\mathcal{T}_q$ des triplets sur $\mathcal{E}_q$

On a vu à la section 1.3.1 que la catégorie des espaces quadratiques non dégénérés $\mathcal{E}_q$ n'admet ni produits fibrés, ni sommes amalgamées ; par conséquent, aucune des deux constructions Sp et CoSp définies à la section précédente ne sont valables pour $\mathcal{E}_q$. Cependant, nous allons généraliser la construction de Bénabou au cas de $\mathcal{E}_q$, en utilisant la notion de pseudo-somme amalgamée et en identifiant plus de morphismes.

2.2.1 La catégorie $\hat{\mathcal{T}}_q$

Dans la construction de Bénabou de la catégorie $\mathrm{CoSp}(\mathcal{D})$ pour une catégorie $\mathcal{D}$ admettant des sommes amalgamées, la propriété d'universalité de la somme amalgamée ne joue aucun rôle. On peut donc faire une construction similaire à partir des pseudo-sommes amalgamées.

Définition 2.2.1. La catégorie $\hat{\mathcal{T}}_q$ est définie de la manière suivante :

1. les objets de $\hat{\mathcal{T}}_q$ sont ceux de $\mathcal{E}_q$;
2. soient V et W deux objets de $\hat{\mathcal{T}}_q$, $\mathrm{Hom}_{\hat{\mathcal{T}}_q}(V, W)$ est la classe d'équivalence des diagrammes de la forme $[V \rightarrow X \leftarrow W]$ où X est un objet de $\mathcal{E}_q$, pour la relation d'équivalence qui identifie les deux diagrammes $[V \rightarrow X \leftarrow W]$ et $[V \rightarrow X' \leftarrow W]$ si il existe un isomorphisme de X sur X' rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dd, "\simeq"] & \\ V \arrow[ur] \arrow[dr] & & W \arrow[ul] \arrow[dl] \\ & X' & \end{tikzcd}$$

3. la composition est définie comme suit : pour $T_1 = [V \to X_1 \leftarrow W]$ et $T_2 = [W \to X_2 \leftarrow Y]$, on définit
$$T_2 \circ T_1 \ = [V \to X_1 \underset{W}{\perp} X_2 \leftarrow Y].$$

L'associativité de cette composition est une conséquence de l'associativité et de la compatibilité de la pseudo-somme amalgamée dans $\mathcal{E}_q$ et l'unité est donnée par la classe du triplet $[V \xrightarrow{\mathrm{Id}} V \xleftarrow{\mathrm{Id}} V]$, et découle de l' axiome d'unité de la pseudo-somme amalgamée dans $\mathcal{E}_q$.

Notation 2.2.2. Un diagramme du type $[V \to X \leftarrow W]$ sera appelé triplet de V dans W et sera, parfois, écrit sous la forme :

$$\begin{tikzcd} & W \arrow[d] \\ V \arrow[r] & X, \end{tikzcd}$$

ce qui nous permettra d'obtenir la composition de deux triplets à partir du diagramme en escalier suivant :

$$\begin{tikzcd} & & Y \arrow[d] \\ & W \arrow[r] \arrow[d] & X_2 \arrow[d] \\ V \arrow[r] & X_1 \arrow[r] & X_1 \underset{W}{\perp} X_2 \end{tikzcd}$$

2.2.2 La catégorie $\mathcal{T}_q$

La catégorie $\mathcal{T}_q$ est obtenue à partir de $\hat{\mathcal{T}}_q$ en identifiant certains des morphismes de $\hat{\mathcal{T}}_q$.

Définition 2.2.3. La relation $\mathcal{R}$ sur $\mathrm{Hom}_{\hat{\mathcal{T}}_q}(V, W)$ pour V et W des objets de $\hat{\mathcal{T}}_q$, est définie de la manière suivante : pour $T_1 = [V \to X_1 \leftarrow W]$ et $T_2 = [V \to X_2 \leftarrow W]$, deux éléments de $\mathrm{Hom}_{\hat{\mathcal{T}}_q}(V, W)$, $T_1 \mathcal{R} T_2$ si et seulement si il existe un morphisme α de $\mathcal{E}_q$ rendant commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} & W \arrow[d] \arrow[ddr] & \\ V \arrow[r] \arrow[drr] & X_1 \arrow[dr, "\alpha"] & \\ & & X_2 \end{tikzcd}$$

On note $\sim$ la relation d'équivalence engendrée sur $\mathrm{Hom}_{\hat{\mathcal{T}}_q}(V, W)$ par $\mathcal{R}$.

Lemme 2.2.4. *La loi de composition de $\hat{\mathcal{T}}_q$ induit une loi de composition :*

$$\circ : \ \mathrm{Hom}_{\hat{\mathcal{T}}_q}(V, W)/\sim \times \mathrm{Hom}_{\hat{\mathcal{T}}_q}(U, V)/\sim \to \mathrm{Hom}_{\hat{\mathcal{T}}_q}(U, W)/\sim .$$

Démonstration. On vérifie que, si $T_1 \mathcal{R} T_2$, alors $(T_3 \circ T_1) \mathcal{R} (T_3 \circ T_2)$ par les propriétés d'associativité et de compatibilité de la pseudo-somme amalgamée dans la catégorie $\mathcal{E}_q$, appliquées aux diagrammes :

$$\begin{tikzcd}
 & & Z \arrow[d] & \\
 & W \arrow[r] \arrow[d] \arrow[ddr] & Y \arrow[ddr] & \\
V \arrow[r] \arrow[drr] & X_1 \arrow[dr] & & \\
 & & X_2 \arrow[r] & X_2 \underset{W}{\perp} Y
\end{tikzcd}$$

et

$$\begin{tikzcd}
 & & Z \arrow[d] & \\
 & W \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d] & \\
V \arrow[r] & X_1 \arrow[r] \arrow[dr] & X_1 \underset{W}{\perp} Y \arrow[dr] & \\
 & & X_2 \arrow[r] & X_2 \underset{X_1}{\perp} (X_1 \underset{W}{\perp} Y);
\end{tikzcd}$$

de même, on montre : si $T_3 \mathcal{R} T_4$ alors $(T_1 \circ T_3)\mathcal{R}(T_1 \circ T_4)$. □

La composition des triplets étant bien définie sur les classes d'équivalence d'après le lemme précédent, on peut passer au quotient pour définir :

Définition 2.2.5. La catégorie $\mathcal{T}_q$ est la catégorie dont les objets sont ceux de $\mathcal{E}_q$, et pour deux objets V et W, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}_q}(V, W) = \mathrm{Hom}_{\hat{\mathcal{T}}_q}(V, W)/\sim$.

Par construction, les deux catégories $\hat{\mathcal{T}}_q$ et $\mathcal{T}_q$ sont reliées par la proposition suivante :

Proposition 2.2.6. *Il existe un foncteur plein et essentiellement surjectif de $\hat{\mathcal{T}}_q$ dans $\mathcal{T}_q$.*

2.2.3 Propriétés de $\mathcal{T}_q$

Remarque 2.2.7. On ne s'intéresse dans ce paragraphe qu'aux propriétés de la catégorie $\mathcal{T}_q$, qui est la catégorie essentielle permettant de définir $\mathcal{F}_{quad}$. Néanmoins, on notera que les propriétés 2.2.9, 2.2.10 et 2.2.13, qui sont les propriétés duales de celles données à la section 2.1.2, pour $\mathrm{Sp}(\mathcal{D})$, sont également valables pour $\hat{\mathcal{T}}_q$ alors que les propriétés 2.2.16 et 2.2.20 sont spécifiques à $\mathcal{T}_q$. Quant aux propriétés 2.2.14 et 2.2.22, qui utilisent des propriétés spécifiques aux espaces quadratiques, elles sont également valables pour $\hat{\mathcal{T}}_q$ sans l'être, de manière générale pour $\mathrm{Sp}(\mathcal{D})$.

Notation 2.2.8. On écrira $[V \to X \leftarrow W]$ le morphisme de $\mathcal{T}_q$ représenté par la classe du diagramme $V \to W \leftarrow W$.

Définition 2.2.9 (Foncteurs L et R). 1. Le foncteur $L : \mathcal{E}_q \to \mathcal{T}_q$ est défini sur les objets par $L(V) = V$ et sur les morphismes par :

$$L(f) := [V \xrightarrow{f} W \xleftarrow{\mathrm{Id}} W]$$

pour V et W deux objets de $\mathcal{E}_q$ et f un élément de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}_q}(V, W)$.

2. Le foncteur $R : {\mathcal{E}_q}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{T}_q$ est défini sur les objets par $R(V) = V$ et sur les morphismes par :

$$R(f) := [W \xrightarrow{\mathrm{Id}} W \xleftarrow{f} V]$$

pour V et W deux objets de $\mathcal{E}_q$ et f un élément de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}_q}(V, W)$.

La fonctorialité de L et R découle de la propriété d'unité des pseudo-sommes amalgamées de $\mathcal{E}_q$.

Ces deux foncteurs nous permettent de décomposer les morphismes de $\mathcal{T}_q$ comme l'énonce la proposition suivante.

Proposition 2.2.10 (Décomposition des morphismes)**.** *Un morphisme de $\mathcal{T}_q$ représenté par le diagramme $[V \xrightarrow{g} X \xleftarrow{h} W]$ est obtenu par la composition suivante :*

$$[V \xrightarrow{g} X \xleftarrow{h} W] = R(h) \circ L(g).$$

Démonstration. L'énoncé découle directement de la définition de la composition. □

Une conséquence de cette proposition qui nous sera très utile par la suite, est donnée dans le corollaire suivant. On rappelle que les foncteurs R et L ont été défini à la définition 2.2.9.

Corollaire 2.2.11. *Pour $\mathcal{A}$ une catégorie, une fonction d'objets $F : \mathrm{Ob}(\mathcal{T}_q) \to \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ et une fonction de flèches $F : \mathrm{Mor}_{\mathcal{T}_q}(V, W) \to \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(F(V), F(W))$ définissent un foncteur $F : \mathcal{T}_q \to \mathcal{A}$ si et seulement si :*

1. *$F \circ L : \mathcal{E}_q \to \mathcal{A}$ est un foncteur.*
2. *$F \circ R : {\mathcal{E}_q}^{op} \to \mathcal{A}$ est un foncteur.*
3. *$F(L(f)) \circ F(R(g)) = F(L(f) \circ R(g))$.*

Démonstration. En décomposant les morphismes de $\mathcal{T}_q$ grâce à la proposition 2.2.10, on obtient que $F : \mathcal{T}_q \to \mathcal{A}$ est un foncteur si et seulement si :

1. $F \circ L : \mathcal{E}_q \to \mathcal{A}$ est un foncteur.
2. $F \circ R : {\mathcal{E}_q}^{op} \to \mathcal{A}$ est un foncteur.
3. $F(L(f)) \circ F(R(g)) = F(L(f) \circ R(g))$
4. $F(R(f')) \circ F(L(g')) = F(R(f') \circ L(g'))$

or, la dernière condition est triviale par définition de la composition des morphismes de $\mathcal{T}_q$, d'où le résultat.

□

Les deux foncteurs L et R définis précédemment sont reliés par un foncteur transposition de $\mathcal{T}_q$, dont on donne la définition et les propriétés.

Définition 2.2.12 (Transposition)**.** Le foncteur transposition, $tr : {\mathcal{T}_q}^{op} \to \mathcal{T}_q$, est défini sur les objets par $tr(V) = V$ et sur les morphismes par :

$$\mathrm{tr}(f) = \mathrm{tr}([V \to X \leftarrow W]) = [W \to X \leftarrow V],$$

pour V et W des objets de ${\mathcal{T}_q}^{op}$ et f un élément de $\mathrm{Hom}_{{\mathcal{T}_q}^{op}}(W, V)$.

Proposition 2.2.13. *1. Le foncteur transposition est involutif.*

2. Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E}_q \arrow[r, "L"] \arrow[dr, "R^{op}"'] & \mathcal{T}_q \arrow[d, "tr^{op}"] \\ & {\mathcal{T}_q}^{op}. \end{tikzcd}$$

La propriété suivante nous sera très utile dans la partie III concernant les projectifs de $\mathcal{F}_{quad}$.

Proposition 2.2.14. *Pour un morphisme de $\mathcal{T}_q$ représenté par le diagramme $[V \xrightarrow{g} X \xleftarrow{h} W]$, il existe un objet W' de $\mathcal{T}_q$ et un morphisme α de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}_q}(V, W \perp W')$ tel que $[V \xrightarrow{g} X \xleftarrow{h} W] = [V \xrightarrow{\alpha} W \perp W' \xleftarrow{i_W} W]$ où i_W est l'inclusion canonique.*

Démonstration. Ce résultat découle directement de la remarque faite après la proposition 1.3.5 et de la définition de la relation d'équivalence sur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}_q}(V, W)$. □

Remarque 2.2.15. Un morphisme T de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}_q}(V, W)$ admet un représentant de la forme $[V \xrightarrow{\alpha} W \perp W' \xleftarrow{i_W} W]$, où i_W est l'inclusion canonique.

Proposition 2.2.16. *Soit $f : V \to W$ un morphisme de la catégorie $\mathcal{E}_q$, on a la relation suivante dans $\mathcal{T}_q$:*

$$R(f) \circ L(f) = [V \xrightarrow{\mathrm{Id}} V \xleftarrow{\mathrm{Id}} V] = \mathrm{Id}_V$$

c'est à dire $R(f)$ est une rétraction de $L(f)$.

Démonstration. Par définition de la composition, on a

$$[W \xrightarrow{\mathrm{Id}} W \xleftarrow{f} V] \circ [V \xrightarrow{f} W \xleftarrow{\mathrm{Id}} W] = [V \xrightarrow{f} W \xleftarrow{f} V]$$

Or, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & V \arrow[d, "\mathrm{Id}"'] \arrow[ddr, "f"] & \\
V \arrow[r, "\mathrm{Id}"'] \arrow[drr, "f"'] & V \arrow[dr, "f"] & \\
 & & W
\end{tikzcd}$$

dont on déduit l'énoncé, par définition de $\mathcal{T}_q$. □

On donne dans la suite, la définition d'un espace caractérisant un morphisme de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}_q}(V, W)$.

Définition 2.2.17. Soit $T = [V \xrightarrow{g} X \xleftarrow{h} W]$, un triplet représentant un morphisme de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}_q}(V, W)$, l'espace engendré par T est le plus petit espace quadratique D, éventuellement dégénéré, tel qu'on ait un diagramme commutatif de la forme

$$\begin{tikzcd}
 & W \arrow[d, "\beta"'] \arrow[ddr, "h"] & \\
V \arrow[r, "\alpha"] \arrow[drr, "g"'] & D \arrow[dr, "\gamma"] & \\
 & & X
\end{tikzcd}$$

où α, β et γ sont des morphismes de $\mathcal{E}_q^{\deg}$.

Notation 2.2.18. On notera $\langle\langle T \rangle\rangle$ l'espace engendré par le triplet T.

Remarque 2.2.19. Pour $T = [V \xrightarrow{g} X \xleftarrow{h} W]$, $\langle\langle T \rangle\rangle$ est isomorphe au sous-espace $g(V) + h(W)$ de X.

Proposition 2.2.20. *Soient T et T' deux triplets tels que $T = T'$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}_q}(V, W)$, alors $\langle\langle T\rangle\rangle \simeq \langle\langle T'\rangle\rangle$.*

Démonstration. Par définition de la relation d'équivalence, il suffit de démontrer que, pour deux triplets T et T', tels que $T\mathcal{R}T'$ on a $\langle\langle T\rangle\rangle \simeq \langle\langle T'\rangle\rangle$.

Par définition d'espace engendré par un triplet, on a les deux diagrammes commutatifs suivants :

$$\begin{tikzcd}
 & W \arrow[d, "\beta"'] \arrow[ddr, "h"] & \\
V \arrow[r, "\alpha"] \arrow[drr, "g"'] & \langle\langle T\rangle\rangle \arrow[dr, "\gamma"] & \\
 & & X
\end{tikzcd}$$

et

$$\begin{tikzcd}
 & W \arrow[d, "\beta'"'] \arrow[ddr, "h'"] & \\
V \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[drr, "g'"'] & \langle\langle T'\rangle\rangle \arrow[dr, "\gamma'"] & \\
 & & X'
\end{tikzcd}$$

et, par définition de la relation $\mathcal{R}$, on a l'existence d'un morphisme α de $\mathcal{E}_q$ rendant commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & W \arrow[d, "h"'] \arrow[ddr, "h'"] & \\
V \arrow[r, "g"] \arrow[drr, "g'"'] & X \arrow[dr, "\alpha"] & \\
 & & X'.
\end{tikzcd}$$

En considérant le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & W \arrow[d, "\beta"'] \arrow[ddr, "h"] \arrow[ddrr, "h'"] & & \\
V \arrow[r, "\alpha"] \arrow[drr, "g"'] \arrow[ddrrr, "g'"'] & \langle\langle T\rangle\rangle \arrow[dr, "h"] & & \\
 & & X \arrow[dr] & \\
 & & & X'
\end{tikzcd}$$

on déduit de la minimalité de $\langle\langle T'\rangle\rangle$, l'existence d'un morphisme dans $\mathcal{E}_q^{\deg}$ de $\langle\langle T'\rangle\rangle$ dans $\langle\langle T\rangle\rangle$, rendant le diagramme correspondant commutatif. Puis, par minimalité de $\langle\langle T\rangle\rangle$ pour le triplet $[V \xrightarrow{g} X \xleftarrow{h} W]$, on obtient que $\langle\langle T\rangle\rangle \simeq \langle\langle T'\rangle\rangle$.

□

Cette proposition justifie l'introduction de la notation suivante :

Notation 2.2.21. Pour un morphisme f de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}_q}(V,W)$, on notera $\langle\langle f\rangle\rangle$ la classe d'isométrie de l'espace engendré par un des triplets le représentant.

Proposition 2.2.22 (Somme orthogonale)**.** *Il existe un foncteur* $\perp\ :\ \mathcal{T}_q \times \mathcal{T}_q \to \mathcal{T}_q$ *défini sur les objets par :*

$$\perp(V,W) = V\perp W$$

et sur les morphismes par :

$$\perp([V \xrightarrow{f} X \xleftarrow{g} W],[V' \xrightarrow{f'} X' \xleftarrow{g'} W']) = [V\perp V' \xrightarrow{f\perp f'} X\perp X' \xleftarrow{g\perp g'} W\perp W']$$

Démonstration. Le point essentiel de la démonstration est de vérifier que $\perp$ est bien défini ; en effet, si T_1 et T_2 sont des triplets équivalents, pour tout triplet T on a $T_1\perp T \sim T_2\perp T$ et $T_2\perp T \sim T_1\perp T$. □

Le résultat suivant donne les propriétés du foncteur $\perp$.

Proposition 2.2.23. *Le foncteur* $\perp$ *vérifie les propriétés suivantes :*

1. $\perp$ *est symétrique, c'est à dire qu'il vérifie les relations :*

$$V\perp W \simeq W\perp V,$$

pour tous objets V *et* W *de* $\mathcal{T}_q$ *et*

$$T_1\perp T_2 \simeq T_2\perp T_1$$

pour $T_1 = [V_1 \to X_1 \leftarrow W_1]$ *et* $T_2 = [V_2 \to X_2 \leftarrow W_2]$ *deux triplets ;*

2. $\perp$ *est associatif, c'est à dire que le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{T}_q \times \mathcal{T}_q \times \mathcal{T}_q \arrow[r, "\perp\times\mathrm{Id}"] \arrow[d, "\mathrm{Id}\times\perp"'] & \mathcal{T}_q \times \mathcal{T}_q \arrow[d, "\perp"] \\
\mathcal{T}_q \times \mathcal{T}_q \arrow[r, "\perp"'] & \mathcal{T}_q;
\end{tikzcd}$$

3. *l'objet* 0 *de* $\mathcal{T}_q$ *est l'unité du foncteur* $\perp$*, c'est à dire qu'il vérifie :*

$$0\perp V = V.$$

2.3 La catégorie $\mathcal{S}_q$ des cotriplets à sommets dans $\mathcal{E}_q$

L'objectif de cette section est d'introduire une sous-catégorie de $\mathrm{Sp}(\mathcal{E}_q^{\deg})$ qui nous permettra de construire à la section 4.2 la catégorie $\mathcal{F}_{iso}$ à l'aide de laquelle on obtiendra une classification d'une sous-classe importante de foncteurs simples de la catégorie $\mathcal{F}_{quad}$.

2.3.1 Définition de $\mathcal{S}_q$

La catégorie $\mathrm{Sp}(\mathcal{E}_q^{\deg})$ a été définie au 2.1.4. En relation avec la catégorie $\mathcal{T}_q$, où seuls les espaces quadratiques non dégénérés sont considérés, il est naturel de définir la catégorie suivante :

Définition 2.3.1. La catégorie $\mathcal{S}_q$ est la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Sp}(\mathcal{E}_q^{\deg})$ dont les objets sont ceux de $\mathcal{E}_q$.

Notation 2.3.2. On appellera cotriplet de V dans W, un diagramme du type $[V \leftarrow D \to W]$ que l'on écrira, parfois, sous la forme :

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[r] \arrow[d] & W \\
V.
\end{tikzcd}$$

Remarque 2.3.3. Le point essentiel de cette définition est que l'espace D du cotriplet précédent peut être un espace dégénéré, alors que V et W ne le sont pas.

2.3.2 Propriétés de $\mathcal{S}_q$

La catégorie $\mathcal{S}_q$ étant une sous-catégorie pleine de $\mathrm{Sp}(\mathcal{E}_q^{\deg})$, certaines des propriétés énoncées au paragraphe 2.1.2 restent valables pour $\mathcal{S}_q$.

Définition 2.3.4 (Foncteurs L et R). 1. Le foncteur $L : \mathcal{E}_q \to \mathcal{S}_q$ est défini sur les objets par $L(V) = V$ et sur les morphismes par :

$$L(f) := [V \xleftarrow{\mathrm{Id}} V \xrightarrow{f} W]$$

pour V et W deux objets de $\mathcal{E}_q$ et f un élément de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}_q}(V, W)$.

2. Le foncteur $R : {\mathcal{E}_q}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{S}_q$ est défini sur les objets par $R(V) = V$ et sur les morphismes par :

$$R(f) := [W \xleftarrow{f} V \xrightarrow{\mathrm{Id}} V]$$

pour V et W deux objets de ${\mathcal{E}_q}^{\mathrm{op}}$ et f un élément de $\mathrm{Hom}_{{\mathcal{E}_q}^{\mathrm{op}}}(V, W)$.

Les deux foncteurs L et R définis précédemment sont reliés par un foncteur transposition de $\mathcal{S}_q$ dont on donne la définition et les propriétés.

Définition 2.3.5 (Transposition)**.** Le foncteur transposition, $tr : {\mathcal{S}_q}^{op} \to \mathcal{S}_q$ est défini sur les objets par $tr(V) = V$ et sur les morphismes par :

$$\mathrm{tr}(f) = \mathrm{tr}([V \leftarrow D \rightarrow W]) = [W \leftarrow D \rightarrow V],$$

pour V et W des objets de ${\mathcal{S}_q}^{op}$ et f un élément de $\mathrm{Hom}_{{\mathcal{S}_q}^{op}}(V, W)$.

Proposition 2.3.6. *1. Le foncteur transposition est involutif.*

2. Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E}_q \arrow[r, "L"] \arrow[dr, "R^{op}"'] & \mathcal{S}_q \arrow[d, "tr^{op}"] \\ & {\mathcal{S}_q}^{op} \end{tikzcd}$$

Remarque 2.3.7. La propriété 2.1.8 concernant la décomposition des morphismes n'est plus valable dans $\mathcal{S}_q$ étant donné que l'espace D du cotriplet $C = [V \leftarrow D \rightarrow W]$ peut être un espace dégénéré.

De même que pour $\mathcal{T}_q$, on montre :

Proposition 2.3.8 (Somme orthogonale)**.** *Il existe un foncteur* $\perp \ : \ \mathcal{S}_q \times \mathcal{S}_q \to \mathcal{S}_q$ *défini par :*

$$\perp(V, W) = V \perp W$$

et

$$\perp([V \xleftarrow{f} X \xrightarrow{g} W], [V' \xleftarrow{f'} X' \xrightarrow{g'} W']) = [V \perp V' \xleftarrow{f \perp f'} X \perp X' \xrightarrow{g \perp g'} W \perp W']$$

Proposition 2.3.9. *Le foncteur* $\perp$ *vérifie les propriétés suivantes :*

1. $\perp$ *est symétrique, c'est à dire qu'il vérifie les relations :*

$$V \perp W \simeq W \perp V,$$

pour tous objets V *et* W *de* $\mathcal{T}_q$ *et*

$$C_1 \perp C_2 = C_2 \perp C_1$$

pour $C_1 = [V_1 \leftarrow D_1 \rightarrow W_1]$ *et* $C_2 = [V_2 \leftarrow D_2 \rightarrow W_2]$*, deux cotriplets ;*

2. $\perp$ est associatif, c'est à dire que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S}_q \times \mathcal{S}_q \times \mathcal{S}_q \arrow[r, "\perp\times\mathrm{Id}"] \arrow[d, "\mathrm{Id}\times\perp"'] & \mathcal{S}_q \times \mathcal{S}_q \arrow[d, "\perp"] \\ \mathcal{S}_q \times \mathcal{S}_q \arrow[r, "\perp"'] & \mathcal{S}_q \end{tikzcd}$$

3. l'objet 0 de $\mathcal{S}_q$ vérifie :

$$0 \perp V = V.$$

2.4 Le foncteur $\sigma : \mathcal{T}_q \to \mathcal{S}_q$

Les propriétés formelles de $\mathcal{T}_q$ données à la section 2.2.3 et celles de $\mathcal{S}_q$ données en 2.3.2, sont très similaires. On cherche donc, dans cette section, à étudier les relations qui existent entre ces deux catégories par le biais de l'analyse du foncteur σ qu'on définit au paragraphe suivant.

2.4.1 Définition

Proposition 2.4.1. *Il existe un foncteur $\sigma :\ \mathcal{T}_q \to \mathcal{S}_q$ défini sur les objets par :*

$$\sigma(V) = V$$

pour un objet V de $\mathcal{T}_q$ et sur les morphismes par :

$$\sigma([V \to X \leftarrow W]) = [V \leftarrow V \underset{X}{\times} W \to W].$$

Remarque 2.4.2. La démonstration de ce résultat repose essentiellement sur la proposition 1.3.21 qui relie la pseudo-somme amalgamée dans $\mathcal{E}_q$ et le produit fibré dans $\mathcal{E}_q^{\deg}$.

Démonstration. On vérifie aisément, par la définition du produit fibré, que σ est défini sur les classes de morphismes de $\mathcal{T}_q$.

Vérifions que σ est bien un foncteur. D'après le corollaire 2.2.11, il suffit de vérifier les trois points suivants :

1. $\sigma \circ L : \mathcal{E}_q \to \mathcal{A}$ est un foncteur.
2. $\sigma \circ R : {\mathcal{E}_q}^{op} \to \mathcal{A}$ est un foncteur.
3. $\sigma(L(f)) \circ \sigma(R(g)) = \sigma(L(f) \circ R(g))$

Par définition du produit fibré, on a :

$$\sigma(R(g)) = \sigma([X \xrightarrow{\mathrm{Id}} X \xleftarrow{g} W]) = [X \xleftarrow{g} W \xrightarrow{\mathrm{Id}} W] \tag{2.1}$$

et

$$\sigma(L(f)) = \sigma([V \xrightarrow{f} X \xleftarrow{\mathrm{Id}} X]) = [V \xleftarrow{\mathrm{Id}} V \xrightarrow{f} X] \tag{2.2}$$

On en déduit facilement les deux premiers points à démontrer. Pour le dernier point, on a d'une part, d'après la proposition 1.3.21 :

$$\begin{aligned} \sigma([V \xrightarrow{f} X \xleftarrow{\mathrm{Id}} X] \circ [W \xrightarrow{\mathrm{Id}} W \xleftarrow{h} V]) &= \sigma([W \to W \underset{V}{\perp} X \leftarrow X]) \\ &= [W \leftarrow W \underset{W \underset{V}{\perp} X}{\times} X \to X] = [W \leftarrow V \to X] \end{aligned}$$

et, d'autre part :

$$\sigma([V \xrightarrow{f} X \xleftarrow{\mathrm{Id}} X]) \circ \sigma([W \xrightarrow{\mathrm{Id}} W \xleftarrow{h} V]) = [V \xleftarrow{\mathrm{Id}} V \xrightarrow{f} X] \circ [W \xleftarrow{h} V \xrightarrow{\mathrm{Id}} V] = [W \xleftarrow{h} V \xrightarrow{f} X]$$

d'où le résultat.

□

2.4.2 Propriétés de σ

Proposition 2.4.3 (Compatibilité avec la somme orthogonale)**.** *Soient T_1 et T_2 deux triplets de $\mathcal{T}_q$. Alors,*

$$\sigma(T_1 \perp T_2) = \sigma(T_1) \perp \sigma(T_2).$$

Démonstration. Pour $T_1 = [V_1 \to X_1 \leftarrow W_1]$ et $T_2 = [V_2 \to X_2 \leftarrow W_2]$, on a, par la propriété universelle du produit fibré

$$(V_1 \underset{X_1}{\times} W_1) \perp (V_2 \underset{X_2}{\times} W_2) = (V_1 \perp V_2) \underset{X_1 \perp X_2}{\times} (W_1 \perp W_2)$$

dont on déduit l'énoncé de la proposition. □

Proposition 2.4.4 (Commutation entre σ et le foncteur transposition)**.**
Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} {\mathcal{T}_q}^{op} \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "tr"'] & {\mathcal{S}_q}^{op} \arrow[d, "tr"] \\ \mathcal{T}_q \arrow[r, "\sigma"'] & \mathcal{S}_q \end{tikzcd}$$

Démonstration. Ceci est une conséquence directe des définitions. □

2.4.3 Le foncteur σ est plein

Pour montrer la plénitude de σ, nous aurons besoin de la proposition suivante :

Proposition 2.4.5. *Soient D un espace totalement isotrope de dimension r qui se décompose sous la forme*

$$D = (x_1, \epsilon_1) \perp \ldots \perp (x_r, \epsilon_r)$$

où $\epsilon_i \in \{0, 1\}$, H un espace quadratique non dégénéré et f un élément de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}_q^{\deg}}(D, H)$. Alors, il existe des éléments $k_1, \ldots, k_r$ de H et un espace quadratique H' non dégénéré tels que

$$H = \mathrm{Vect}(f(x_1), k_1) \perp \ldots \perp \mathrm{Vect}(f(x_r), k_r) \perp H'$$

et $B(f(x_i), k_i) = 1$ où B est la forme bilinéaire sous-jacente.

Démonstration. Pour démontrer le résultat, on effectue une récurrence sur la dimension r de l'espace D.

Pour $r = 1$, on a $f : (x_1, \epsilon_1) \to H$ et $f(x_1) = h_1$. Comme H est, par hypothèse, non dégénéré il existe un élément k_1 dans H tel que $B(h_1, k_1) = 1$. L'espace $K = \mathrm{Vect}(h_1, k_1)$ est alors un sous-espace non dégénéré de H, d'où $H = K \perp K^{\perp}$.

Supposons qu'on ait le résultat pour $r = n$. Soient $(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$ des vecteurs linéairement indépendants et $f : (x_1, \epsilon_1) \perp \ldots \perp (x_n, \epsilon_n) \perp (x_{n+1}, \epsilon_{n+1}) \to H$. Par restriction, on a

$$f \circ i : (x_1, \epsilon_1) \perp \ldots \perp (x_n, \epsilon_n) \to H$$

et par l'hypothèse de récurrence, on a l'existence de $k_1, \ldots, k_n$ dans H tels que :

$$H = (f(x_1), k_1) \perp \ldots (f(x_n), k_n) \perp H'.$$

On décompose $f(x_{n+1})$ selon cette base sous la forme

$$f(x_{n+1}) = \Sigma_{i=1}^{n} (\alpha_i f(x_i) + \beta_i k_i) + h'$$

où α_i et β_i sont des éléments de $\{0,1\}$ et h' est un élément de H'. Comme f conserve la forme quadratique et donc la forme bilinéaire associée, on a $\beta_i = B(f(x_{n+1}), f(x_i)) = B(x_{n+1}, x_i) = 0$ pour tout i. D'où

$$f(x_{n+1}) = \Sigma_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i) + h' \tag{2.3}$$

Les vecteurs $(f(x_1), \ldots, f(x_n), f(x_{n+1}))$ étant linéairement indépendants, par injectivité de f, on a $h' \neq 0$ et, comme H' est non dégénéré, il existe un élément k' de H' tel que $B(h', k') = 1$. On en déduit la décomposition suivante $H' = (h', k') \perp H''$.

Dans l'égalité 2.3, quitte à réordonner, on peut supposer que

$$\alpha_1 = \ldots = \alpha_p = 1$$

et

$$\alpha_{p+1} = \ldots = \alpha_n = 0$$

On a alors,

$$B(f(x_{n+1}), k_i) = 1 \text{ pour } i = 1, \ldots, p$$

et

$$B(f(x_{n+1}), k_i) = 0 \text{ pour } i = p+1, \ldots, n$$

Par conséquent, en décomposant H sous la forme :

$$H = (f(x_1), k_1 + k') \perp \ldots \perp (f(x_p), k_p + k') \perp (f(x_{p+1}), k_{p+1}) \perp \ldots \perp (f(x_n), k_n) \perp (f(x_{n+1}), k') \perp H''$$

on obtient le résultat.

□

Remarque 2.4.6. Dans la proposition précédente, la classe d'isométrie d'un espace $\mathrm{Vect}(f(x_i), k_i)$ n'est pas unique. Par exemple, si on considère l'espace dégénéré $D = (x, 1)$, l'espace non dégénéré $H = H_0 \perp H_1$ et f l'application $f : (x, 1) \to H_0 \perp H_1$ telle que $f(x) = a_0 + a_1$, on a, d'une part :

$$H \simeq \mathrm{Vect}(a_0 + a_1, b_0) \perp H_1$$

et d'autre part

$$H \simeq \mathrm{Vect}(a_0 + a_1, b_1) \perp H_0.$$

Proposition 2.4.7. *Le foncteur σ est plein.*

Démonstration. Il s'agit de montrer que, pour tout cotriplet $C = [V \xleftarrow{f} D \xrightarrow{g} W]$ de $\mathcal{S}_q$, il existe un triplet T de $\mathcal{T}_q$ tel que $\sigma(T) = C$.

Dans un premier temps, on décompose le cotriplet C en somme orthogonale de cotriplets plus simples. D'après le théorème 1.1.15, on peut décomposer les morphismes f et g, sous les formes suivantes :

$$f : \ D \simeq H \perp \mathrm{Rad}(D) \to H \perp D' \perp V' \simeq V$$

et

$$g : \ D \simeq H \perp \mathrm{Rad}(D) \to H \perp D'' \perp W' \simeq W$$

où D' (respectivement D'') est un des espaces non dégénérés construits dans la proposition 2.4.5 et V' (respectivement W') est l'orthogonal de $H \perp D'$ (respectivement $H \perp D''$). On en déduit :

$$C = [H \leftarrow H \to H] \perp [V' \leftarrow 0 \to W'] \perp [D' \leftarrow \mathrm{Rad}(D) \to D'']$$

D'après le lemme 1.1.15 $\mathrm{Rad}(D)$ est une somme orthogonale d'espaces de dimension un. Par conséquent,

$$[D' \leftarrow \mathrm{Rad}(D) \to D''] = \perp_i [V_i \leftarrow (x_i, \epsilon_i) \to W_i]$$

où, d'après la proposition 2.4.5, V_i et W_i sont de dimension deux, d'où

$$C = [H \leftarrow H \rightarrow H] \perp [V' \leftarrow 0 \rightarrow W'] \perp [V_1 \leftarrow (x_1, \epsilon_1) \rightarrow W_1] \perp \ldots \perp [V_r \leftarrow (x_r, \epsilon_r) \rightarrow W_r]$$

Par la proposition 2.4.3, il nous reste donc à trouver pour chacun des cotriplets C_α ci-dessus, un triplet T_α tel que $\sigma(T_\alpha) = C_\alpha$.

Or, on a

$$\sigma([H \rightarrow H \leftarrow H]) = [H \leftarrow H \rightarrow H]$$

et

$$\sigma([V \rightarrow V \perp W \leftarrow W]) = [V \leftarrow 0 \rightarrow W].$$

Pour les cotriplets $[V \leftarrow (x, \epsilon) \rightarrow W]$, il y a plusieurs cas à étudier.

Dans la cas où $\epsilon = 0$, comme $\nu_0(H_1) = 1$, on a $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}_q{}^{\deg}}((x, 0), H_1) = \emptyset$. Par conséquent, il n'y a qu'un seul type de cotriplet à considérer.

$$C_1 = [H_0 \xleftarrow{f} (x, 0) \xrightarrow{g} H_0]$$

Quitte à composer par un élément de O_2^+ , on peut supposer que $f(x) = g(x) = a_0$. On montre alors que, pour

$$T_1 = [H_0 \xrightarrow{f'} H_0 \perp H_0 \xleftarrow{g'} H_0]$$

où, f' est défini par :

$$f'(a_0) = a_0 \text{ et } f'(b_0) = b_0 + a'_0$$

et g' est défini par :

$$g'(a_0) = a_0 \text{ et } g'(b_0) = b_0 + b'_0$$

on a $\sigma(T_1) = C_1$.

Dans la cas où $\epsilon = 1$, il y a trois types de cotriplets à considérer.

Pour

$$C_2 = [H_0 \xleftarrow{f} (x, 1) \xrightarrow{g} H_0],$$

comme $\nu_1(H_0) = 1$, on a $f(x) = g(x) = a_0 + b_0$. On montre alors que pour

$$T_2 = [H_0 \xrightarrow{f'} H_0 \perp H_0 \xleftarrow{g'} H_0]$$

où, f' est défini par :

$$f'(a_0) = a_0 + a'_0 \text{ et } f'(b_0) = b_0 + a'_0$$

et g' est défini par :

$$g'(a_0) = a_0 + b'_0 \text{ et } g'(b_0) = b_0 + b'_0$$

on a $\sigma(T_2) = C_2$.

Pour

$$C_3 = [H_1 \xleftarrow{f} (x, 1) \xrightarrow{g} H_1],$$

quitte à composer par un élément de O_2^-, on peut supposer que $f(x) = g(x) = a_1$. On montre alors que, pour

$$T_3 = [H_1 \xrightarrow{f'} H_1 \perp H_0 \xleftarrow{g'} H_1]$$

où, f' est défini par :

$$f'(a_1) = a_1 \text{ et } f'(b_1) = b_1 + b_0$$

et g' est défini par :

$$g'(a_1) = a_1 \text{ et } g'(b_1) = b_1 + a_0$$

on a $\sigma(T_3) = C_3$.

Pour
$$C_4 = [H_0 \xleftarrow{f} (x,1) \xrightarrow{g} H_1],$$
on a $f(x) = a_0 + b_0$ et, quitte à composer par un élément de O_2^-, on peut supposer que $g(x) = a_1$. On montre alors que, pour
$$T_4 = [H_0 \xrightarrow{f'} H_1 \perp H_0 \xleftarrow{g'} H_1]$$
où, f' est défini par :
$$f'(a_0) = a_1 + b_1 + a_0 + b_0 \text{ et } f'(b_0) = b_1 + a_0 + b_0$$
et g' est défini par :
$$g'(a_1) = a_1 \text{ et } g'(b_1) = b_1$$
on a $\sigma(T_4) = C_4$.

Le dernier cas se déduit du précédent par transposition. □

2.5 Le foncteur $\epsilon : \mathcal{T}_q \to \mathcal{E}^f$

Afin de relier la catégorie $\mathcal{F}_{quad}$ étudiée dans cette thèse à la catégorie $\mathcal{F}$ des foncteurs de la catégorie des $\mathbb{F}_2$-espaces vectoriels de dimension finie dans la catégorie de tous les espaces vectoriels, on étudie le foncteur ϵ défini au paragraphe suivant.

Notation 2.5.1. La catégorie des $\mathbb{F}_2$-espaces vectoriels sera notée $\mathcal{E}$ et la sous-catégorie pleine de $\mathcal{E}$ dont les objets sont les espaces de dimension finie sera notée $\mathcal{E}^f$.

2.5.1 Définition

Notation 2.5.2. On note dans toute cette section, $\mathcal{O} : \mathcal{E}_q \to \mathcal{E}^f$ le foncteur qui oublie la forme quadratique.

On a vu dans la section 1.3.1, que tout élément de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}_q}(V,W)$ peut s'écrire sous la forme
$$f \ : \ V \to V \perp V' \simeq W.$$

Cette décomposition nous permet de donner la définition suivante :

Définition 2.5.3 (Inverse à gauche)**.** Soit f un élément de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}_q}(V,W)$. L'inverse à gauche de f, est l'élément de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}^f}(\mathcal{O}(W),\mathcal{O}(V))$ obtenu par projection orthogonale de $V \perp V'$ sur V.

Notation 2.5.4. L'inverse à gauche de f sera noté $f^!$.

Cette terminologie est justifiée par la proposition suivante :

Proposition 2.5.5. *Soit f un élément de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}_q}(V,W)$, on a la relation $f^! \circ f = \mathrm{Id}$.*

Proposition 2.5.6. *Il existe un foncteur $\epsilon : \ \mathcal{T}_q \to \mathcal{E}^f$ défini par : $\epsilon(V) = \mathcal{O}(V)$ et*
$$\epsilon([V \xrightarrow{f} W \xleftarrow{\mathrm{Id}} W]) = \mathcal{O}(f) \ \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}^f}(\mathcal{O}(V),\mathcal{O}(W))$$
$$\epsilon([W \xrightarrow{\mathrm{Id}} W \xleftarrow{f} V]) = f^! \ \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}^f}(\mathcal{O}(W),\mathcal{O}(V)).$$

Remarque 2.5.7. Par la proposition 2.2.10, la fonction de flèches du foncteur ϵ est entièrement déterminée par ses valeurs sur les triplets de la forme $[V \xrightarrow{f} W \xleftarrow{\mathrm{Id}} W]$ et $[W \xrightarrow{\mathrm{Id}} W \xleftarrow{f} V]$, le cas général étant obtenu par composition de triplets de ces deux types.

Démonstration. On vérifie que le foncteur ϵ est bien défini sur les classes de morphismes de $\mathcal{T}_q$.

Montrons que ϵ est bien un foncteur.

D'après le corollaire 2.2.11, il suffit de vérifier les trois points suivants :

1. $\epsilon \circ L : \mathcal{E}_q \to \mathcal{A}$ est un foncteur.
2. $\epsilon \circ R : {\mathcal{E}_q}^{op} \to \mathcal{A}$ est un foncteur.
3. $\epsilon(L(f)) \circ \epsilon(R(g)) = \epsilon(L(f) \circ R(g))$

Les deux premiers points sont clairs, par définition de $\epsilon \circ L(f)$ et $\epsilon \circ R(f)$.

Pour montrer le dernier point, on décompose les deux applications g et f sous la forme :

$$g : \ V \to V \perp V' \simeq W$$

et

$$f : \ V \to V \perp V'' \simeq X$$

on a, d'une part :

$$[V \xrightarrow{f} X \xleftarrow{\mathrm{Id}} X] \circ [W \xrightarrow{\mathrm{Id}} W \xleftarrow{g} V] = [V \perp V' \xrightarrow{i_1} V \perp V' \perp V'' \xleftarrow{i_2} V \perp V'']$$

où les deux applications sont les inclusions, d'où :

$$\epsilon([V \xrightarrow{f} X \xleftarrow{\mathrm{Id}} X] \circ [W \xrightarrow{\mathrm{Id}} W \xleftarrow{g} V] = (i_2)^! \circ i_1$$

D'autre part, on a

$$\epsilon([V \xrightarrow{f} X \xleftarrow{\mathrm{Id}} X]) \circ \epsilon([W \xrightarrow{\mathrm{Id}} W \xleftarrow{g} V]) = \mathcal{O}(f) \circ g^!$$

or, $(i_2)^! \circ i_1 = \mathcal{O}(f) \circ g^! = k$ où k est l'application de $V \perp V'$ dans $V \perp V''$ définie par $k(v, v') = (v, 0)$. □

2.5.2 Propriété de ϵ

On a la propriété suivante :

Proposition 2.5.8. *Le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{tikzcd}
{\mathcal{T}_q}^{op} \arrow[r, "\epsilon^{op}"] \arrow[d, "tr"'] & (\mathcal{E}^f)^{op} \arrow[d, "-^*"] \\
\mathcal{T}_q \arrow[r, "\epsilon"'] & \mathcal{E}^f
\end{tikzcd}$$

où $-^*$ désigne le foncteur dualité pour les espaces vectoriels.

Démonstration. Ce résultat découle des résultats classiques d'algèbre linéaire concernant la dualité sur les espaces vectoriels et du fait qu'une forme bilinéaire non dégénérée sur un espace vectoriel V détermine un isomorphisme privilégié entre V et son dual. □

2.5.3 Le foncteur ϵ est plein

Le but de ce paragraphe est de montrer la proposition suivante.

Proposition 2.5.9. *Le foncteur ϵ est plein.*

Démonstration. Soient (V, q_V) et (W, q_W) deux objets de $\mathcal{T}_q$ et $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}^f}(\epsilon(V, q_V), \epsilon(W, q_W))$ une application linéaire de V dans W, il s'agit de construire un triplet $T = [V \to X = W \perp Y \hookleftarrow W]$ tel que $\epsilon(T) = f$. L'idée de la preuve est qu'en transitant par un espace X suffisamment grand, on peut obtenir toutes les applications linéaires.

L'espace V étant non dégénéré, on sait d'après le lemme 1.2.3 que V est de dimension paire $2n$. Pour démontrer le résultat, on effectue une récurrence sur l'entier n.

Soient (V, q_V) un espace quadratique non dégénéré de dimension deux, $\{a, b\}$ une base symplectique de V et $f : V \to W$ une application linéaire. On vérifie aisément que l'application suivante :

$$\begin{array}{rccl} g_1 : & V & \to & W \perp H_1 \perp H_0 \simeq W \perp \mathrm{Vect}(\mathrm{a}_1, \mathrm{b}_1) \perp \mathrm{Vect}(\mathrm{a}_0, \mathrm{b}_0) \\ & a & \longmapsto & f(a) + (q(a) + q(f(a)))a_1 + a_0 \\ & b & \longmapsto & f(b) + (q(b) + q(f(b)))a_1 + (1 + B(f(a), f(b)))b_0 \end{array}$$

conserve la forme quadratique. Par conséquent, le triplet

$$T = [V \xrightarrow{g_1} W \perp H_1 \perp H_0 \hookleftarrow W]$$

est un morphisme de $\mathcal{T}_q$ tel que $\epsilon(T) = f$.

Pour V un espace quadratique non dégénéré de dimension $2n$, $\{a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n\}$ une base symplectique de V et $f : V \to W$ une application linéaire, on suppose construite une application

$$\begin{array}{rccc} g_n : & V & \to & W \perp Y \\ & a_1 & \longmapsto & f(a_1) + y_1 \\ & b_1 & \longmapsto & f(b_1) + z_1 \\ & \ldots & & \ldots \\ & a_n & \longmapsto & f(a_n) + y_n \\ & b_n & \longmapsto & f(b_n) + z_n \end{array}$$

où y_i et z_i, pour i allant de 1 à n, sont des éléments de Y, qui conserve la forme quadratique et vérifiant :

$$\epsilon([V \xrightarrow{g_n} W \perp Y \hookleftarrow W]) = f.$$

Soit V un espace quadratique non dégénéré de dimension $2(n+1)$, $\{a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n, a_{n+1}, b_{n+1}\}$ une base symplectique de V et $f : V \to W$ une application linéaire. Afin de définir l'application g_{n+1}, on aura besoin de l'espace suivant : $E \simeq W \perp Y \perp H_0^{\perp n} \perp H_0^{\perp n} \perp H_1 \perp H_0$, pour lequel on précise les notations :

$$E \simeq W \perp Y \perp (\perp_{i=1}^n \mathrm{Vect}(a_0^i, b_0^i)) \perp (\perp_{i=1}^n \mathrm{Vect}(A_0^i, B_0^i)) \perp \mathrm{Vect}(A_1, B_1) \perp \mathrm{Vect}(C_0, D_0).$$

On vérifie aisément que l'application suivante

$$\begin{array}{rccl} g_{n+1} : & V & \to & W \perp Y \perp H_0^{\perp n} \perp H_0^{\perp n} \perp H_1 \perp H_0 \\ & a_1 & \longmapsto & f(a_1) + y_1 + a_0^1 \\ & b_1 & \longmapsto & f(b_1) + z_1 + A_0^1 \\ & \ldots & & \ldots \\ & a_i & \longmapsto & f(a_i) + y_i + a_0^i \\ & b_i & \longmapsto & f(b_i) + z_i + A_0^i \\ & \ldots & & \ldots \\ & a_n & \longmapsto & f(a_n) + y_n + a_0^n \\ & b_n & \longmapsto & f(b_n) + z_n + A_0^n \\ & a_{n+1} & \longmapsto & f(a_{n+1}) + (q(a_{n+1}) + q(f(a_{n+1})))A_1 + C_0 + \sum_{i=1}^n B(f(a_i), f(a_{n+1}))b_0^i \\ & & & + \sum_{i=1}^n B(f(b_i), f(a_{n+1}))B_0^i \\ & b_{n+1} & \longmapsto & f(b_{n+1}) + (q(b_{n+1}) + q(f(b_{n+1})))A_1 + (1 + B(f(a_{n+1}), f(b_{n+1})))D_0 \\ & & & + \sum_{i=1}^n B(f(a_i), f(b_{n+1}))b_0^i + \sum_{i=1}^n B(f(b_i), f(b_{n+1}))B_0^i \end{array}$$

conserve la forme quadratique et on a

$$\epsilon([V \xrightarrow{g_{n+1}} W \perp Y \perp H_0^{\perp n} \perp H_0^{\perp n} \perp H_1 \perp H_0 \hookleftarrow W]) = f.$$

□

Nous aurons besoin dans la suite d'une version améliorée de ce résultat, donnée dans la proposition suivante.

Proposition 2.5.10. *Soient (V, q_V) et (W, q_W) deux objets de $\mathcal{T}_q$ et $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}^f}(\epsilon(V, q_V), \epsilon(W, q_W))$ une application linéaire de V dans W, il existe un triplet $T = [V \xrightarrow{\varphi} X = W \perp Y \xleftarrow{i} W]$ vérifiant $\varphi(V) \cap i(W) = \{0\}$ tel que $\epsilon(T) = f$.*

Démonstration. Pour démontrer ce résultat par récurrence, il suffit de remplacer les applications g_1 de la preuve précédente par l'application suivante.

$$\begin{array}{rccl} g_1' : & V & \to & W \perp H_1 \perp H_0 \perp H_0 \simeq W \perp \mathrm{Vect}(\mathrm{a}_1, \mathrm{b}_1) \perp \mathrm{Vect}(\mathrm{a}_0, \mathrm{b}_0) \perp \mathrm{Vect}(\mathrm{a}_0', \mathrm{b}_0') \\ & a & \longmapsto & f(a) + (q(a) + q(f(a)))a_1 + a_0 \\ & b & \longmapsto & f(b) + (q(b) + q(f(a)))a_1 + (1 + B(f(a), f(b)))b_0 + a_0' \end{array}$$

et, en considérant l'espace suivant, pour lequel on précise les notations :

$$W \perp W' \perp H_0^{\perp n} \perp H_0^{\perp n} \perp H_1 \perp H_0 \perp H_0$$

$$\simeq W \perp W' \perp (\perp_{i=1}^n \mathrm{Vect}(a_0^i, b_0^i)) \perp (\perp_{i=1}^n \mathrm{Vect}(A_0^i, B_0^i)) \perp \mathrm{Vect}(A_1, B_1) \perp \mathrm{Vect}(C_0, D_0) \perp \mathrm{Vect}(E_0, F_0).$$

on définit

$$\begin{array}{rccl} g_{n+1}' : & V & \to & W \perp W' \perp H_0^{\perp n} \perp H_0^{\perp n} \perp H_1 \perp H_0 \perp H_0 \\ & a_1 & \longmapsto & f(a_1) + y_1 + a_0^1 \\ & b_1 & \longmapsto & f(b_1) + z_1 + A_0^1 \\ & \dots & & \dots \\ & a_i & \longmapsto & f(a_i) + y_i + a_0^i \\ & b_i & \longmapsto & f(b_i) + z_i + A_0^i \\ & \dots & & \dots \\ & a_n & \longmapsto & f(a_n) + y_n + a_0^n \\ & b_n & \longmapsto & f(b_n) + z_n + A_0^n \\ & a_{n+1} & \longmapsto & f(a_{n+1}) + (q(a_{n+1}) + q(f(a_{n+1})))A_1 + C_0 + \sum_{i=1}^n B(f(a_i), f(a_{n+1}))b_0^i \\ & & & + \sum_{i=1}^n B(f(b_i), f(a_{n+1}))B_0^i \\ & b_{n+1} & \longmapsto & f(b_{n+1}) + (q(b_{n+1}) + q(f(b_{n+1})))A_1 + (1 + B(f(a_{n+1}), f(b_{n+1})))D_0 \\ & & & + \sum_{i=1}^n B(f(a_i), f(b_{n+1}))b_0^i + \sum_{i=1}^n B(f(b_i), f(b_{n+1}))B_0^i + E_0 \end{array}$$

□

Deuxième partie

La catégorie $\mathcal{F}_{quad}$

Chapitre 3

$\mathcal{F}_{quad}$: définition et premières propriétés

Le but de ce chapitre est de définir la catégorie $\mathcal{F}_{quad}$, qui est l'objet d'intérêt principal de cette thèse, et d'obtenir les premiers renseignements sur sa structure.

Après avoir donné deux définitions équivalentes de $\mathcal{F}_{quad}$ et avoir expliqué les liens qui existent entre ces constructions et les foncteurs de Mackey, on montre que $\mathcal{F}_{quad}$ a de bonnes propriétés ; en particulier elle est abélienne et possède suffisamment de projectifs et d'injectifs. On termine en montrant que $\mathcal{F}_{quad}$ est une généralisation de la catégorie $\mathcal{F}$ des foncteurs de la catégorie des $\mathbb{F}_2$-espaces vectoriels de dimension finie dans la catégorie de tous les espaces vectoriels.

3.1 Définition

Nous donnons, dans cette partie, deux définitions équivalentes de la catégorie $\mathcal{F}_{quad}$: la première en terme de catégorie de foncteurs et la seconde en termes de foncteurs de Mackey généralisés.

3.1.1 Définition en terme de catégorie de foncteurs

On rappelle que $\mathcal{T}_q$ est la catégorie de triplets, dont les objets sont les espaces quadratiques non dégénérés, définie au paragraphe 2.2.

Définition 3.1.1. La catégorie $\mathcal{F}_{quad}$ est la catégorie des foncteurs de $\mathcal{T}_q$ dans $\mathcal{E}$.

Exemple 3.1.2. Le foncteur ϵ défini en 2.5.6 est un objet de $\mathcal{F}_{quad}$.

Théorème 3.1.3. *1. La catégorie $\mathcal{F}_{quad}$ est abélienne, munie d'un produit tensoriel et a suffisamment de projectifs.*

2. Pour V un objet de $\mathcal{T}_q$, le foncteur $P_V = \mathbb{F}_2[\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}_q}(V, -)]$ est un objet projectif vérifiant :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_{quad}}(P_V, F) \simeq F(V)$$

pour tout foncteur F de $\mathcal{F}_{quad}$.

3. L'ensemble des foncteurs $\{P_V | V \in \mathcal{S}\}$ est un ensemble de générateurs projectifs de $\mathcal{F}_{quad}$, où $\mathcal{S}$ est un ensemble de représentants des classes d'isométrie des objets de $\mathcal{T}_q$.

Démonstration. Le premier point est une conséquence directe du résultat suivant donné par Gabriel dans [Gab62] :

Si $\mathcal{C}$ est une catégorie et $\mathcal{A}$ est une catégorie abélienne, alors $\mathrm{Fonc}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ est une catégorie abélienne.

Le produit tensoriel sur $\mathcal{F}_{quad}$ est induit par le produit tensoriel sur $\mathcal{E}$.

La structure des projectifs et l'isomorphisme naturel sont, également, des résultats classiques sur les catégories de foncteurs qui découlent du lemme de Yoneda. □

De l'existence d'un ensemble de générateurs projectifs, on déduit le résultat suivant :

Corollaire 3.1.4. *Tout objet de $\mathcal{F}_{quad}$ admet une résolution projective.*

Ceci nous permettra donc de faire de l'algèbre homologique sur $\mathcal{F}_{quad}$. Par exemple, on calculera à la section 7.3, certains groupes d'extensions entre foncteurs simples.

On termine cette section par le rappel de quelques définitions classiques.

Définition 3.1.5.
1. Un objet F non num de $\mathcal{F}_{quad}$ est simple si ses seuls sous-foncteurs sont le foncteur nul et lui-même.
2. Un objet F de $\mathcal{F}_{quad}$ est fini s'il admet une série de composition finie dont les sous-quotients sont simples.

3.1.2 Définition en termes de foncteurs de Mackey généralisés

Dans cette section, on adapte la notion habituelle de foncteur de Mackey au cas de la catégorie $\mathcal{E}_q$.

On commence par rappeler la définition classique de foncteur de Mackey donnée dans [TW95] et due, à l'origine à Dress [Dre73]. On utilisera, pour cela, la terminologie de [BDFP01] suivante :

Définition 3.1.6. Un foncteur de Janus F d'une catégorie $\mathcal{C}$ vers une catégorie $\mathcal{A}$ est la donnée d'un foncteur M_* de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{A}$ et d'un foncteur M^* de $\mathcal{C}^{op}$ vers $\mathcal{A}$ qui coïncident sur les objets.

Notation 3.1.7. On notera $M(C) := M_*(C) = M^*(C)$ cette valeur commune, pour C un objet de $\mathcal{C}$, $f_* := M_*(f)$ et $f^* := M^*(f)$ pour un morphisme f.

Définition 3.1.8. [TW95] Soient $\mathcal{C}$ une catégorie admettant des produits fibrés et $\mathcal{A}$ une catégorie admettant des produits finis. Un foncteur de Mackey M de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{A}$, est un foncteur de Janus satisfaisant les deux propriétés suivantes :

1. Pour tout diagramme cartésien dans $\mathcal{C}$:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[d, "k"] \\ A \arrow[r, "h"'] & C \end{tikzcd}$$

on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} M(P) \arrow[r, "f_*"] & M(B) \\ M(A) \arrow[u, "g^*"] \arrow[r, "h_*"'] & M(C) \arrow[u, "k^*"'] \end{tikzcd}$$

2. M_* préserve les produits finis.

Exemple 3.1.9. D'après la proposition 1.3.13, la catégorie $\mathcal{E}_q^{\deg}$ admet des produits fibrés, par conséquent, la catégorie des foncteurs de Mackey de $\mathcal{E}_q^{\deg}$ dans $\mathcal{E}$, notée $\mathrm{Mack}(\mathcal{E}_q^{\deg}, \mathcal{E})$, existe.

En se plaçant dans la catégorie opposée $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$, on peut donner une définition duale utilisant les sommes amalgamées. Pour adapter cette définition au cas de la catégorie $\mathcal{E}_q$ qui n'admet ni produits fibrés (d'après 1.3.9) ni sommes amalgamées (d'après 1.3.10), on remplace ces notions par celle de pseudo-somme amalgamée, introduite sur $\mathcal{E}_q$ au paragraphe 1.3.3, pour obtenir la définition de catégorie suivante :

Définition 3.1.10. La catégorie des foncteurs de Mackey généralisés de $\mathcal{E}_q$, $\mathrm{Mack}(\mathcal{E}_q, \mathcal{E})$ est la catégorie dont les objets sont les foncteurs de Janus de $\mathcal{E}_q$ dans $\mathcal{E}$ satisfaisant les deux conditions suivantes :

1. pour tout morphisme f de $\mathcal{E}_q$, $f^* \circ f_* = \mathrm{Id}$;
2. pour tout diagramme de pseudo-somme amalgamée dans $\mathcal{E}_q$, de la forme :

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & W \arrow[d, "k"] \\ X \arrow[r, "h"'] & X \underset{V}{\perp} W \end{tikzcd}$$

on a

$$f_* \circ g^* = k^* \circ h_*.$$

Les morphismes sont les transformations naturelles de foncteurs qui sont des transformations naturelles aussi bien pour M^* que pour M_*.

Remarque 3.1.11. Cette définition peut être vue comme étant un cas particulier de la généralisation des foncteurs de Mackey donnée par Pirashvili dans [Pir02]. Pour cela, il suffit de prendre comme ensemble de bimorphismes les diagrammes de pseudo-somme amalgamée pour avoir la condition (2) et les diagrammes du type

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\mathrm{Id}"] \arrow[d, "\mathrm{Id}"'] & V \arrow[d, "f"] \\ V \arrow[r, "f"'] & W \end{tikzcd}$$

pour avoir la condition (1).

3.1.3 Équivalence entre les deux définitions

Le but de cette section est d'adapter au cas de $\mathcal{E}_q$ le résultat suivant, donné par Lindner dans [Lin76] et où $Sp(\mathcal{C})$ est la catégorie des "spans" introduite au paragraphe 2.1 :

Théorème 3.1.12. *[Lin76] Les deux catégories* $\mathrm{Fonc}(Sp(\mathcal{C}), \mathcal{D})$ *et* $\mathrm{Mack}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ *sont équivalentes, pour* $\mathcal{C}$ *une catégorie admettant des produits fibrés et des coproduits finis.*

Exemple 3.1.13. On a l'équivalence naturelle suivante :

$$\mathrm{Fonc}(Sp({\mathcal{E}_q}^{\mathrm{deg}}), \mathcal{E}) = \mathrm{Mack}({\mathcal{E}_q}^{deg}, \mathcal{E}).$$

On énonce l'analogue du théorème 3.1.12, dans notre situation.

Théorème 3.1.14. *Les catégories* $\mathcal{F}_{quad}$ *et* $\mathrm{Mack}(\mathcal{E}_q, \mathcal{E})$ *sont équivalentes.*

Démonstration. On définit un foncteur $\mathcal{F}_{quad} \xrightarrow{S} \mathrm{Mack}(\mathcal{E}_q, \mathcal{E})$ de la manière suivante : soient F un objet de $\mathcal{F}_{quad}$, V et W des objets de $\mathcal{T}_q$, et f un élément de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}_q}(V, W)$, on pose

$$S(F)(V) = S(F)_*(V) = S(F)^*(V) = F(V)$$

et

$$f_* = S(F)_*(f) = F\left(\begin{tikzcd} & W \arrow[d, "\mathrm{Id}"] \\ V \arrow[r, "f"'] & W \end{tikzcd}\right) = F \circ L(f)$$

$$f^* = S(F)^*(f) = F\left(\begin{tikzcd} & V \arrow[d, "f"] \\ W \arrow[r, "\mathrm{Id}"'] & W \end{tikzcd}\right) = F \circ R(f)$$

où L et R sont les foncteurs définis au 2.2.9.

Ceci définit bien un foncteur de Janus. Il nous reste à vérifier que $S(F)$ satisfait aux deux conditions de $\mathrm{Mack}(\mathcal{E}_q, \mathcal{E})$.

1. On a bien $f^* \circ f_* = Id_{F(V)}$ car,

$$f^* \circ f_* = F(R(f)) \circ F(L(f)) = F(R(f) \circ L(f)) = F(\mathrm{Id}_V) = \mathrm{Id}_{F(V)}$$

par fonctorialité de F et par la proposition 2.2.16.

2. Soit

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & C \arrow[d, "k"] \\ W \arrow[r, "h"'] & W \underset{V}{\perp} C \end{tikzcd}$$

un diagramme de pseudo-somme amalgamée. On a d'une part,

$$f_* \circ g^* = F(L(f)) \circ F(R(g)) = F\left(\begin{tikzcd} & C \arrow[d, "k"] \\ W \arrow[r, "h"'] & W \underset{V}{\perp} C \end{tikzcd}\right)$$

par le diagramme de composition suivant :

$$\begin{tikzcd} & & C \arrow[d, "\mathrm{Id}"'] \\ & V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & C \arrow[d, "k"] \\ W \arrow[r, "\mathrm{Id}"'] & W \arrow[r, "h"'] & W \underset{V}{\perp} C \end{tikzcd}$$

et, d'autre part,

$$k^* \circ h_* = F(R(k)) \circ F(L(h)) = F\left(\begin{tikzcd} & C \arrow[d, "k"] \\ W \arrow[r, "h"'] & W \underset{V}{\perp} C \end{tikzcd}\right)$$

par la proposition 2.2.10.

On en déduit que $f_* \circ g^* = k^* \circ h_*$, ce qui termine la vérification de la propriété (2).

Dans le sens inverse, on définit un foncteur $\mathrm{Mack}(\mathcal{E}_q, \mathcal{E}) \xrightarrow{T} \mathcal{F}_{quad}$ de la manière suivante : soit $F = (F_*, F^*)$ un objet de $\mathrm{Mack}(\mathcal{E}_q, \mathcal{E})$, on définit

$$T(F)(V) = F(V)$$

pour V un objet de $\mathcal{T}_q$ et

$$T(F)([V \xrightarrow{\varphi} X \xleftarrow{\psi} W]) = F^*(\psi) \circ F_*(\varphi)$$

pour $[V \xrightarrow{\varphi} X \xleftarrow{\psi} W]$ un élément de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}_q}(V, W)$. La fonctorialité de T découle facilement de la fonctorialité de F_* et F^* et des deux conditions sur les foncteurs de Mackey.

On laisse le soin au lecteur de vérifier que $S \circ T = \mathrm{Id}$ et $T \circ S = \mathrm{Id}$.

□

Remarque 3.1.15. Une variante du théorème de Lindner est donnée également par Pirashvili dans [Pir02], dans le cadre plus général dans lequel il se place.

3.2 Propriétés

On donne dans cette section deux propriétés importantes de la catégorie $\mathcal{F}_{quad}$. La première concerne l'existence d'un foncteur dualité sur $\mathcal{F}_{quad}$ qui nous permet de montrer que $\mathcal{F}_{quad}$ a suffisamment d'injectifs et la seconde relie la catégorie $\mathcal{F}_{quad}$ à la catégorie $\mathcal{F}$ des foncteurs de la catégorie des $\mathbb{F}_2$-espaces vectoriels de dimension finie dans la catégorie de tous les espaces vectoriels.

3.2.1 Dualité

Définition 3.2.1. Le foncteur dualité de $\mathcal{F}_{quad}$ est le foncteur $D : {\mathcal{F}_{quad}}^{op} \to \mathcal{F}_{quad}$ défini par :

$$DF = -^* \circ F \circ tr$$

pour F un foncteur de $\mathcal{F}_{quad}$, $-^*$ le foncteur dualité de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}^{op}$ et tr le foncteur transposition de $\mathcal{T}_q$ défini au 2.2.12.

Proposition 3.2.2. *Si F est à valeurs dans les espaces vectoriels de dimensions finies, on a l'équivalence suivante*

$$DDF \simeq F.$$

Démonstration. La proposition découle facilement du fait que tr et la restriction de $-^*$ aux espaces vectoriels de dimension finie sont des foncteurs involutifs. □

Proposition 3.2.3. *Pour F et G dans $\mathcal{F}_{quad}$, on a un isomorphisme naturel :*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_{quad}}(F, DG) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_{quad}}(G, DF).$$

Démonstration. Le résultat découle facilement de la définition de D et des propriétés de dualité pour les espaces vectoriels. □

Le résultat suivant est une conséquence importante de la proposition précédente.

Théorème 3.2.4. *La catégorie $\mathcal{F}_{quad}$ a suffisamment d'injectifs.*

Démonstration. Soit $I_V = D(P_V)$, pour V un objet de $\mathcal{E}_q$, d'après la proposition précédente, on a :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_{quad}}(F, I_V) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_{quad}}(P_V, DF) = DF(V)$$

pour tout foncteur F de $\mathcal{F}_{quad}$. Par conséquent, les foncteurs I_V forment un ensemble de cogénérateurs injectifs. □

3.2.2 Le foncteur $\iota : \mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{F}_{quad}$

La proposition suivante relie la catégorie $\mathcal{F}_{quad}$ à la catégorie $\mathcal{F}$ des foncteurs de la catégorie des $\mathbb{F}_2$-espaces vectoriels de dimension finie dans la catégorie de tous les espaces vectoriels.

On rappelle que ϵ est le foncteur défini au 2.5.6.

Proposition 3.2.5. *Il existe un foncteur*

$$\iota : \mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{F}_{quad}$$

défini par $\iota(F) = F \circ \epsilon$ et vérifiant les propriétés suivantes :

1. *ι est exact ;*
2. *ι est pleinement fidèle ;*
3. *si S est un objet simple de $\mathcal{F}$, $\iota(S)$ est un objet simple de $\mathcal{F}_{quad}$.*

Le foncteur ϵ n'étant pas essentiellement surjectif, on ne peut pas appliquer telle quelle la proposition A.0.2 de l'annexe. Par conséquent, on introduit une catégorie $\mathcal{F}'$ équivalente à $\mathcal{F}$ qui nous permettra d'utiliser les résultats généraux sur les catégories de foncteurs donnés dans l'annexe.

Définition 3.2.6. La catégorie $\mathcal{E}^{f-(paire)}$ est la sous-catégorie pleine de $\mathcal{E}^f$ dont les objets sont les $\mathbb{F}_2$-espaces vectoriels de dimension paire.

Notation 3.2.7. On note $\mathcal{F}'$ la catégorie des foncteurs de $\mathcal{E}^{f-(paire)}$ dans $\mathcal{E}$.

On a le résultat suivant :

Proposition 3.2.8. *Les catégories $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ sont équivalentes.*

Démonstration. D'après la proposition 2.8 de l'article [Kuh94b] de Kuhn, les catégories abéliennes $\mathcal{F}$ et $\mathcal{M}_\infty$ sont équivalentes, où $\mathcal{M}_\infty$ désigne la catégorie des $\mathbb{F}_2[M_\infty(\mathbb{F}_2)]$-modules avec $M_\infty(\mathbb{F}_2) = \cup_{n=0}^{\infty} M_n(\mathbb{F}_2)$. Par le lemme 2.7 du même article, $\mathcal{M}_\infty \simeq \lim(\mathcal{M}_n)$, où $\mathcal{M}_n$ est la catégorie des $\mathbb{F}_2[M_n(\mathbb{F}_2)]$-modules. Par conséquent, nous avons la succession d'équivalences suivantes

$$\mathcal{F} \simeq \mathcal{M}_\infty \simeq \lim(\mathcal{M}_n(\mathbb{F}_2)) \simeq \lim(\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{F}_2)) \simeq \mathcal{F}',$$

où la dernière équivalence est obtenue par des arguments analogues à ceux utilisés pour démontrer la proposition 2.8 dans [Kuh94b], ce qui fournit le résultat.

□

Démonstration de la proposition 3.2.5. Les objets de $\mathcal{E}_q$ étant des espaces de dimension paire, le foncteur $\epsilon : \mathcal{E}_q \to \mathcal{E}^f$ se factorise à travers l'inclusion $\mathcal{E}^{f-(paire)} \hookrightarrow \mathcal{E}^f$ ce qui induit un foncteur $\epsilon' : \mathcal{E}_q \to \mathcal{E}^{f-(paire)}$ qui est plein et essentiellement surjectif. On déduit de la proposition A.0.4 que le foncteur $- \circ \epsilon' : \mathcal{F}' \to \mathcal{F}_{quad}$ est pleinement fidèle et, pour un objet simple S de $\mathcal{F}'$, $S \circ \epsilon'$ est simple dans $\mathcal{F}_{quad}$. On en déduit le résultat de l'énoncé par la proposition 3.2.8. □

On retrouve ainsi dans $\mathcal{F}_{quad}$ tous les foncteurs de $\mathcal{F}$. La catégorie $\mathcal{F}_{quad}$ peut donc être considérée comme étant une généralisation de la catégorie $\mathcal{F}$.

Notation 3.2.9. Dans la suite, par abus de notation, pour un objet F de $\mathcal{F}$, on écrira parfois F son image dans $\mathcal{F}_{quad}$, à la place de $\iota(F)$.

Il existe, sur la catégorie $\mathcal{F}$, un foncteur dualité défini par :

Définition 3.2.10 (Dualité sur $\mathcal{F}$)**.** Le foncteur dualité de $\mathcal{F}$ est le foncteur $D : \mathcal{F}^{op} \to \mathcal{F}$ défini par :

$$DF = -^* \circ F \circ -^*$$

pour F un foncteur de $\mathcal{F}$ et $-^*$ le foncteur dualité de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}^{op}$.

La proposition suivante affirme que la dualité définie sur $\mathcal{F}_{quad}$ étend celle définie sur $\mathcal{F}$.

Proposition 3.2.11. *Le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}^{op} \arrow[r, "\iota^{op}"] \arrow[d, "D"'] & {\mathcal{F}_{quad}}^{op} \arrow[d, "D"] \\
\mathcal{F} \arrow[r, "\iota"'] & \mathcal{F}_{quad}
\end{tikzcd}$$

Démonstration. Ce résultat est une conséquence directe de la commutativité du diagramme de la proposition 2.5.8. □

Chapitre 4

Les foncteurs isotropes de $\mathcal{F}_{quad}$ et la catégorie $\mathcal{F}_{iso}$

Le but de ce chapitre est de définir et d'analyser une famille de foncteurs originaux de $\mathcal{F}_{quad}$, dans le sens où ces foncteurs ne sont pas dans l'image du foncteur $\iota : \mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{F}_{quad}$ défini en 3.2.5.

Afin de classifier les facteurs de composition de ces foncteurs, baptisés foncteurs isotropes, on introduit une nouvelle catégorie de foncteurs $\mathcal{F}_{iso}$, construite à partir de la catégorie des cotriplets $\mathcal{S}_q$ définie à la section 2.3.

L'intérêt de la catégorie $\mathcal{F}_{iso}$ réside dans la classification des foncteurs simples de cette catégorie, qui est nettement plus aisée que dans la catégorie $\mathcal{F}_{quad}$, et dans l'existence d'un foncteur $\kappa : \mathcal{F}_{iso} \to \mathcal{F}_{quad}$, exact et préservant les objets simples, qui nous permettra de déduire les séries de composition des foncteurs isotropes de $\mathcal{F}_{quad}$ à partir de l'étude de $\mathcal{F}_{iso}$. Ces décompositions auront pour conséquence importante que les foncteurs isotropes sont des foncteurs finis de $\mathcal{F}_{quad}$.

4.1 Définition des foncteurs isotropes

On rappelle que les objets de $\mathcal{T}_q$ sont les espaces quadratiques non dégénérés.

Proposition 4.1.1. *Soit H un objet de $\mathcal{E}_q^{\deg}$, les conditions suivantes définissent un objet $\mathrm{Iso}_H : \mathcal{T}_q \to \mathcal{E}$ de $\mathcal{F}_{quad}$.*

1. *Sur les objets :*
$$\mathrm{Iso}_H(V) = \mathbb{F}_2[\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}_q^{\deg}}(H, V)]$$
pour V un objet de $\mathcal{T}_q$;
2. *sur les morphismes :*
$$\mathrm{Iso}_H([V \xrightarrow{k} W \xleftarrow{\mathrm{Id}} W]) = k_*$$
où, pour un générateur canonique $[h]$ de l'espace vectoriel $\mathrm{Iso}_H(V)$, k_* est défini par :
$$k_*([h]) = [k \circ h]$$
et
$$\mathrm{Iso}_H([W \xrightarrow{\mathrm{Id}} W \xleftarrow{k} V]) = k^*$$
où, k^* est défini comme suit : pour un élément $[h]$ de $\mathrm{Iso}_H(W)$, on considère le diagramme suivant dans $\mathcal{E}_q^{\deg}$
$$\begin{tikzcd} & V \arrow[d, "k"] \\ H \arrow[r, "h"'] & W \end{tikzcd}$$

– *si le produit fibré dans $\mathcal{E}_q^{\deg}$ de ce diagramme est H, autrement dit, si $h(H) \subset k(V)$, ceci fournit un unique morphisme de H dans V de $\mathcal{E}_q^{\deg}$, noté h' tel que $h = k \circ h'$.*

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "h'"] \arrow[d, "\mathrm{Id}"'] & V \arrow[d, "k"] \\ H \arrow[r, "h"'] & W \end{tikzcd}$$

Dans ce cas, on pose :

$$k^*([h]) = [h'];$$

– *sinon, on pose :*

$$k^*([h]) = 0.$$

Remarque 4.1.2. Dans la proposition précédente, pour plus de clarté, nous avons défini séparément la partie covariante et la partie contravariante des foncteurs isotropes. En utilisant la proposition 2.2.10 donnant la décomposition des morphismes de $\mathcal{T}_q$, on obtient la définition suivante :

pour un morphisme $[V \xrightarrow{f} X \xleftarrow{g} W]$ de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}_q}(V, W)$ et un élément $[h]$ de $\mathrm{Iso}_H(V)$, on considère le diagramme suivant dans $\mathcal{E}_q^{\deg}$:

$$\begin{tikzcd} & & W \arrow[d, "g"] \\ H \arrow[r, "h"'] & V \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

– si le produit fibré dans $\mathcal{E}_q^{\deg}$ de ce diagramme est H, autrement dit si $f \circ h(H) \subset g(W)$, ceci fournit un unique morphisme de H dans W de $\mathcal{E}_q^{\deg}$, noté h' tel que $f \circ h = g \circ h'$.

$$\begin{tikzcd} H \arrow[rr, "h'"] \arrow[d, "\mathrm{Id}"'] & & W \arrow[d, "g"] \\ H \arrow[r, "h"'] & V \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

Dans ce cas, on pose :

$$\mathrm{Iso}_H([V \xrightarrow{f} X \xleftarrow{g} W])([h]) = [h'];$$

– sinon, on pose :

$$\mathrm{Iso}_H([V \xrightarrow{f} X \xleftarrow{g} W])([h]) = 0.$$

Démonstration de la proposition 4.1.1. On vérifie que Iso_H est bien défini sur les morphismes de $\mathcal{T}_q$. Pour montrer que Iso_H est un objet de $\mathcal{F}_{quad}$, d'après le corollaire 2.2.11, il suffit de vérifier les points suivants :

1. $\mathrm{Iso}_H \circ L : \mathcal{E}_q \to \mathcal{A}$ est un foncteur.
2. $\mathrm{Iso}_H \circ R : {\mathcal{E}_q}^{op} \to \mathcal{A}$ est un foncteur.
3. $\mathrm{Iso}_H(L(f)) \circ \mathrm{Iso}_H(R(g)) = \mathrm{Iso}_H(L(f) \circ R(g))$.

Les deux premiers points sont clairs, par définition de k_* et k^*. Pour le dernier point, on note $[h]$ un générateur canonique de $\mathrm{Iso}_H(W, q_W)$. On a alors, d'une part :

$$\mathrm{Iso}_H([W \xrightarrow{\mathrm{Id}} W \xleftarrow{g} V]([h]) = \begin{cases} [h'] & \text{si } H \underset{W}{\times} V = H \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où h' est défini par le diagramme :

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "h'"] \arrow[d, "\mathrm{Id}"'] & V \arrow[d, "g"] \\ H \arrow[r, "h"'] & W \end{tikzcd}$$

d'où :

$$\mathrm{Iso}_H([V \xrightarrow{f} X \xleftarrow{\mathrm{Id}} X]) \circ \mathrm{Iso}_H([W \xrightarrow{\mathrm{Id}} W \xleftarrow{g} V])([h]) = \begin{cases} [f \circ h'] & \text{si } H \underset{W}{\times} V = H \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

ce qui correspond au diagramme :

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "h'"] \arrow[d, "\mathrm{Id}"'] & V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"] & X \\ H \arrow[r, "h"'] & W & \end{tikzcd}$$

d'autre part :

$$[V \xrightarrow{f} X \xleftarrow{\mathrm{Id}} X] \circ [W \xrightarrow{\mathrm{Id}} W \xleftarrow{g} V] = [W \xrightarrow{f'} W \underset{V}{\perp} X \xleftarrow{g'} X]$$

où f' et k' sont définis par le diagramme en escalier :

$$\begin{tikzcd} & & X \arrow[d, "\mathrm{Id}"] \\ & V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d, "g'"] \\ W \arrow[r, "\mathrm{Id}"'] & W \arrow[r, "f'"'] & W \underset{V}{\perp} X \end{tikzcd}$$

D'où

$$\mathrm{Iso}_H([V \xrightarrow{f} X \xleftarrow{\mathrm{Id}} X] \circ [W \xrightarrow{\mathrm{Id}} W \xleftarrow{g} V])([h]) \quad = \begin{cases} [k'] & \text{si } H \underset{W \underset{V}{\perp} X}{\times} X = H \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où k' est défini par le diagramme :

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "k'"] \arrow[d, "\mathrm{Id}"'] & X \arrow[d, "g'"] \\ H \arrow[r, "f' \circ h"'] & W \underset{V}{\perp} X \end{tikzcd}$$

Il reste à vérifier que les deux valeurs obtenues sont identiques. Pour cela, on regarde le diagramme de produit fibré précédent comme la succession de deux produits fibrés et on applique les propriétés du produit fibré et la proposition 1.3.21 reliant la pseudo-somme amalgamée dans $\mathcal{E}_q$ au produit fibré dans $\mathcal{E}_q^{\deg}$, ce qui donne le diagramme :

$$\begin{tikzcd} H \underset{W}{\times} V \arrow[r] \arrow[d] & V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"] & X \arrow[d, "g'"] \\ H \arrow[r, "h"'] & W \arrow[r, "f'"'] & W \underset{V}{\perp} X \end{tikzcd} .$$

On en déduit $H \underset{W}{\times} V = H \underset{W \underset{V}{\perp} X}{\times} X$ et, dans le cas où $H \underset{W}{\times} V = H \underset{W \underset{V}{\perp} X}{\times} X = H$, on a $k' = f \circ h'$.

□

Remarque 4.1.3. La terminologie foncteurs isotropes, découle du fait que, pour l'espace quadratique dégénéré $(x, 0)$, on a :

$$\mathrm{Iso}_{(x,0)}(V) = \mathbb{F}_2[I_V]$$

où $I_V = \{v \in V \setminus \{0\} | q(v) = 0\}$ est le cône isotrope de l'espace quadratique V.

On a vu à la remarque 4.1.2 que la définition des foncteurs isotropes repose sur le produit fibré de diagrammes du type :

$$\begin{tikzcd} & & W \arrow[d, "g"] \\ H \arrow[r, "h"'] & V \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

or, par les propriétés générales du produit fibré, ceci revient à considérer successivement les deux produits fibrés P_1 et P_2 suivants :

$$\begin{tikzcd} P_2 \arrow[r] \arrow[d] & P_1 \arrow[r, "\tilde{g}"] \arrow[d, "\tilde{f}"'] & W \arrow[d, "g"] \\ H \arrow[r, "h"'] & V \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

Ainsi, la définition des foncteurs ne dépend pas de la structure du triplet $[V \xrightarrow{f} X \xleftarrow{g} W]$ mais uniquement de celle du cotriplet $[V \xleftarrow{\tilde{f}} P_1 \xrightarrow{\tilde{g}} W]$ où P_1 est un espace dégénéré, en général.

Par conséquent, afin de déterminer les facteurs de composition des foncteurs isotropes, nous allons introduire une nouvelle catégorie de foncteurs, notée $\mathcal{F}_{iso}$, construite à partir de la catégorie de cotriplets $\mathcal{S}_q$ introduite à la section 2.3. D'après ce qui précède, cette catégorie est le cadre naturel pour étudier les foncteurs isotropes et nous verrons qu'elle a l'avantage d'avoir une structure plus simple que la catégorie $\mathcal{F}_{quad}$.

4.2 Définition et propriétés de la catégorie $\mathcal{F}_{iso}$

On introduit dans cette section la catégorie $\mathcal{F}_{iso}$, reliée à la catégorie $\mathcal{F}_{quad}$ par un foncteur pleinement fidèle $\kappa : \mathcal{F}_{iso} \to \mathcal{F}_{quad}$. Les foncteurs isotropes étant dans l'image du foncteur κ, la catégorie $\mathcal{F}_{iso}$ est la structure adaptée à l'étude de ces foncteurs.

4.2.1 Définition

On rappelle que la catégorie $\mathcal{S}_q$ est la catégorie de cotriplets introduite à la section 2.3.

Définition 4.2.1. La catégorie $\mathcal{F}_{iso}$ est la catégorie des foncteurs de $\mathcal{S}_q$ dans $\mathcal{E}$.

Théorème 4.2.2. *1. La catégorie $\mathcal{F}_{iso}$ est abélienne, tensorielle et a suffisamment de projectifs.*

2. Pour V un objet de $\mathcal{S}_q$, le foncteur $Q_V = \mathbb{F}_2[\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}_q}(V, -)]$ est un objet projectif vérifiant :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_{iso}}(Q_V, F) \simeq F(V)$$

pour tout foncteur F de $\mathcal{F}_{iso}$.

3. L'ensemble des foncteurs $\{Q_V | V \in \mathcal{S}\}$ est un ensemble de générateurs projectifs de $\mathcal{F}_{iso}$, où $\mathcal{S}$ est un ensemble de représentants des classes d'isométrie des objets de $\mathcal{S}_q$.

Démonstration. Ce théorème se démontre exactement de la même manière que le théorème 3.1.3 concernant la catégorie $\mathcal{F}_{quad}$. □

Remarque 4.2.3. Contrairement à la catégorie $\mathcal{F}_{quad}$, la catégorie $\mathcal{F}_{iso}$ ne peut pas être définie en termes de foncteurs de Janus étant donné que pour un cotriplet $C = [V \leftarrow D \rightarrow W]$ de $\mathcal{S}_q$, l'espace D est dégénéré, en général.

On construit, dans $\mathcal{F}_{iso}$ une famille de foncteurs notés iso_H et définis de manière similaire aux foncteurs isotropes Iso_H de $\mathcal{F}_{quad}$. Plus précisément, on a la proposition suivante.

Proposition 4.2.4. *Soit H un objet de $\mathcal{E}_q^{\deg}$, le foncteur $iso_H : \mathcal{S}_q \rightarrow \mathcal{E}$ défini de la manière suivante est un objet de $\mathcal{F}_{iso}$.*

1. *Sur les objets :*
$$iso_H(V) = \mathbb{F}_2[\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}_q^{\deg}}(H, V)]$$
pour V un objet de $\mathcal{S}_q$;

2. *sur les morphismes : pour un morphisme $[V \xleftarrow{\tilde{f}} D \xrightarrow{\tilde{g}} W]$ de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}_q}(V, W)$ et un générateur canonique $[h]$ de $iso_H(V)$, on considère le diagramme suivant dans $\mathcal{E}_q^{\deg}$:*

$$\begin{tikzcd} & D \arrow[r, "\tilde{g}"] \arrow[d, "\tilde{f}"] & W \\ H \arrow[r, "h"'] & V & \end{tikzcd}$$

   – *si le produit fibré dans $\mathcal{E}_q^{\deg}$ du diagramme de gauche est H, ceci fournit un unique morphisme de H dans D de $\mathcal{E}_q^{\deg}$, noté h' tel que $h = \tilde{f} \circ h'$.*

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "h'"] \arrow[d, "\mathrm{Id}"'] & D \arrow[r, "\tilde{g}"] \arrow[d, "\tilde{f}"] & W \\ H \arrow[r, "h"'] & V & \end{tikzcd}$$

   Dans ce cas, on pose :
$$iso_H([V \xleftarrow{\tilde{f}} D \xrightarrow{\tilde{g}} W]) = [\tilde{g} \circ h'];$$

   – *sinon, on pose :*
$$iso_H([V \xleftarrow{\tilde{f}} D \xrightarrow{\tilde{g}} W]) = 0.$$

Démonstration. La preuve étant très similaire à celle montrant l'appartenance des foncteurs Iso_H à la catégorie $\mathcal{F}_{quad}$, on laisse le soin au lecteur d'en vérifier les détails. □

Remarque 4.2.5. On verra dans la suite que les deux familles de foncteurs iso_H de $\mathcal{F}_{iso}$ et Iso_H de $\mathcal{F}_{quad}$ sont fortement reliées, ce qui justifiera le choix de notations similaires.

On termine cette section en donnant les propriétés de la catégorie $\mathcal{F}_{iso}$ analogues aux propriétés de la catégorie $\mathcal{F}_{quad}$ données à la section 3.2.

4.2.2 Dualité

Dans ce paragraphe, les démonstrations sont omises dans la mesure où elles sont similaires à celles données pour la catégorie $\mathcal{F}_{quad}$ à la section 3.2.1.

Définition 4.2.6. Le foncteur dualité de $\mathcal{F}_{iso}$ est le foncteur $D:\ {\mathcal{F}_{iso}}^{op} \to \mathcal{F}_{iso}$ défini par :

$$DF = -^* \circ F \circ tr$$

pour F un foncteur de $\mathcal{F}_{iso}$, $-^*$ le foncteur dualité de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}^{op}$ et tr le foncteur transposition de $\mathcal{S}_q$ défini au 2.3.5.

Proposition 4.2.7. *Si F est à valeurs dans les espaces vectoriels de dimension finie, alors*

$$DDF \simeq F.$$

Proposition 4.2.8. *Pour F et G dans $\mathcal{F}_{iso}$, on a un isomorphisme naturel :*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_{iso}}(F, DG) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_{iso}}(G, DF).$$

Le résultat suivant est une conséquence importante de la proposition précédente.

Théorème 4.2.9. *La catégorie $\mathcal{F}_{iso}$ a suffisamment d'injectifs.*

4.2.3 Le foncteur $\kappa:\ \mathcal{F}_{iso} \hookrightarrow \mathcal{F}_{quad}$

La proposition suivante relie la catégorie $\mathcal{F}_{iso}$, à la catégorie $\mathcal{F}_{quad}$ définie à la section 3.1. On rappelle que $\sigma : \mathcal{T}_q \to \mathcal{S}_q$ est le foncteur défini au 2.4.3.

Proposition 4.2.10. *Le foncteur*

$$\kappa:\ \mathcal{F}_{iso} \hookrightarrow \mathcal{F}_{quad}$$

défini par $\kappa(F) = F \circ \sigma$, vérifie les propriétés suivantes :

1. *le foncteur κ est exact ;*
2. *le foncteur κ est pleinement fidèle ;*
3. *si S est un objet simple de $\mathcal{F}_{iso}$, $\kappa(S)$ est un objet simple de $\mathcal{F}_{quad}$.*

Démonstration. Le premier point est clair.

D'après la proposition 2.4.7, le foncteur σ est plein. Par définition, ce foncteur est essentiellement surjectif, on peut donc appliquer la proposition A.0.4 donnée dans l'annexe, pour obtenir les deux derniers points. □

Le foncteur κ étant plein, la proposition suivante justifie la similarité entre les notations choisies pour les deux familles de foncteurs iso_H de $\mathcal{F}_{iso}$ et Iso_H de $\mathcal{F}_{quad}$.

Proposition 4.2.11. *Pour tout objet H de $\mathcal{E}_q^{\deg}$, on a :*

$$\kappa(iso_H) = \mathrm{Iso}_H.$$

Démonstration. Le foncteur $\kappa(iso_H) = iso_H \circ \sigma$ est défini de la manière suivante :

Sur les objets

$$\kappa(iso_H)(V) = \mathbb{F}_2[\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}_q^{\deg}}(H, V)] = \mathrm{Iso}_H(V).$$

Sur les morphismes, pour un triplet $[V \xrightarrow{f} X \xleftarrow{g} W]$ de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}_q}(V, W)$ et un élément $[h]$ de $iso_H(V)$, on considère le produit fibré D suivant dans $\mathcal{E}_q^{\deg}$:

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "\tilde{g}"'] & W \arrow[d, "g"] \\ V \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

On a $\kappa(iso_H)([V \xrightarrow{f} X \xleftarrow{g} W]) = iso_H([V \xleftarrow{\tilde{f}} D \xrightarrow{\tilde{g}} W])$.

Or, le produit fibré P_1 du diagramme de gauche :

$$\begin{tikzcd} P_1 \arrow[r] \arrow[d] & D \arrow[r, "\tilde{g}"] \arrow[d, "\tilde{f}"'] & W \\ H \arrow[r] & V & \end{tikzcd}$$

est égal au produit fibré P_2 de :

$$\begin{tikzcd} P_2 \arrow[rr] \arrow[d] & & W \arrow[d, "g"] \\ H \arrow[r] & V \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

par les propriétés générales du produit fibré, d'où

$$iso_H([V \xleftarrow{\tilde{f}} D \xrightarrow{\tilde{g}} W]) = \mathrm{Iso}_H([V \xrightarrow{f} X \xleftarrow{g} W]).$$

□

On déduit des deux propositions précédentes le résultat suivant qui justifie l'intérêt de la catégorie $\mathcal{F}_{iso}$ pour l'étude des foncteurs isotropes de $\mathcal{F}_{quad}$.

Proposition 4.2.12. *Le foncteur κ envoie les facteurs de composition du foncteur iso_H de $\mathcal{F}_{iso}$ sur les facteurs de composition du foncteur Iso_H de $\mathcal{F}_{quad}$.*

Démonstration. On déduit des points (1) et (3) de la proposition 4.2.10 que le foncteur κ préserve les facteurs de composition. Il suffit, alors, d'appliquer ce résultat aux foncteurs iso_H. □

Remarque 4.2.13. On peut montrer que les seuls foncteurs qui sont à la fois des objets de $\mathcal{F}$ et de $\mathcal{F}_{iso}$ sont les foncteurs constants.

Afin d'obtenir les facteurs de composition des foncteurs iso_H de $\mathcal{F}_{iso}$, on montre que cette catégorie est équivalente à la catégorie des foncteurs de Mackey sur $\mathcal{E}_q^{\deg}$ définie en 3.1.9.

4.3 Equivalence entre $\mathcal{F}_{iso}$ et $\mathrm{Mack}(\mathcal{E}_q^{\deg}, \mathcal{E})$

La catégorie $\mathcal{S}_q$ est définie au 2.3.1 comme étant une sous-catégorie pleine de $\mathrm{Sp}(\mathcal{E}_q^{\deg})$. On en déduit l'existence d'un foncteur λ' de $\mathrm{Mack}(\mathcal{E}_q^{\deg}, \mathcal{E})$ dans $\mathcal{F}_{iso}$.

Le but de cette section est de montrer le théorème suivant :

Théorème 4.3.1. *Il existe une équivalence naturelle :*

$$\mathcal{F}_{iso} \simeq \mathrm{Mack}(\mathcal{E}_q^{\deg}, \mathcal{E}).$$

Remarque 4.3.2. Le point fondamental de la preuve du théorème précédent est la construction d'une transformation naturelle de $\mathcal{F}_{iso}$ dans $\mathrm{Mack}(\mathcal{E}_q^{\deg}, \mathcal{E})$ qui repose sur la possibilité d'étendre un objet de $\mathcal{F}_{iso}$ aux espaces dégénérés.

Avant de démontrer le théorème, nous avons besoin de quelques résultats intermédiaires.

On commence par la définition suivante :

Définition 4.3.3. Soient V et W deux objets de $\mathcal{E}_q$, D un objet de $\mathcal{E}_q^{\deg}$, α un élément de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}_q^{\deg}}(D, V)$ et β un élément de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}_q^{\deg}}(D, W)$.

1. Le morphisme e_α de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}_q}(V,V)$ est donné par :

$$e_\alpha = [V \xleftarrow{\alpha} D \xrightarrow{\alpha} V].$$

2. Le morphisme $f_{\alpha,\beta}$ de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}_q}(V,W)$ est donné par :

$$f_{\alpha,\beta} = [V \xleftarrow{\alpha} D \xrightarrow{\beta} W].$$

La proposition suivante répertorie les propriétés des morphismes e_α et $f_{\alpha,\beta}$. On rappelle que tr est le foncteur transposition défini au 2.3.5.

Proposition 4.3.4. *Les morphismes de $\mathcal{S}_q$ définis précédemment satisfont les propriétés suivantes :*

1. *e_α est un idempotent ;*
2. *$f_{\alpha,\beta} \circ f_{\beta,\alpha} = e_\beta$;*
3. *$f_{\alpha,\beta} \circ e_\alpha = f_{\alpha,\beta}$ et $e_\beta \circ f_{\alpha,\beta} = f_{\alpha,\beta}$;*
4. *$tr(e_\alpha) = e_\alpha$ et $tr(f_{\alpha,\beta}) = f_{\beta,\alpha}$.*

Démonstration. Les trois premiers points de la proposition découlent du fait que le produit fibré dans $\mathcal{E}_q^{\deg}$ du diagramme $D \xrightarrow{\alpha} V \xleftarrow{\alpha} D$ est donné par le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "\mathrm{Id}"] \arrow[d, "\mathrm{Id}"'] & D \arrow[d, "\alpha"] \\ D \arrow[r, "\alpha"'] & V \end{tikzcd}$$

étant donné que les morphismes de $\mathcal{E}_q^{\deg}$ sont les monomorphismes linéaires.

Le quatrième point est clair par définition du foncteur transposition.

□

La proposition suivante joue un rôle central dans la démonstration du théorème.

Proposition 4.3.5. *Soient V et W deux objets de $\mathcal{E}_q$, D un objet de $\mathcal{E}_q^{\deg}$, α un élément de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}_q^{\deg}}(D,V)$, β un élément de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}_q^{\deg}}(D,W)$ et F un objet de $\mathcal{F}_{iso}$. Les morphismes $f_{\alpha,\beta}$ et $f_{\beta,\alpha}$ induisent un isomorphisme :*

$$F(e_\alpha)F(V) \simeq F(e_\beta)F(W).$$

Démonstration. Le morphisme e_α étant un idempotent de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}_q}(V,V)$ d'après le point (1) de la proposition 4.3.4, $F(e_\alpha)$ est un idempotent de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(F(V),F(V))$. Etant donné que $\mathcal{E}$ est une catégorie abélienne, on peut définir l'inclusion $i_\alpha : F(e_\alpha)F(V) \to F(V)$ et la projection $p_\alpha : F(V) \to F(e_\alpha)F(V)$ vérifiant :

$$p_\alpha \circ i_\alpha = \mathrm{Id} \tag{4.1}$$
$$i_\alpha \circ p_\alpha = F(e_\alpha). \tag{4.2}$$

De même, pour $F(e_\beta)$, on définit i_β et p_β.

On considère le morphisme de $F(e_\alpha)F(V)$ dans $F(e_\beta)F(W)$ obtenu par la composée :

$$F(e_\alpha)F(V) \xrightarrow{i_\alpha} F(V) \xrightarrow{F(f_{\alpha,\beta})} F(W) \xrightarrow{p_\beta} F(e_\beta)F(W)$$

et le morphisme de $F(e_\beta)F(W)$ dans $F(e_\alpha)F(V)$ obtenu par la composée :

$$F(e_\beta)F(W) \xrightarrow{i_\beta} F(W) \xrightarrow{F(f_{\beta,\alpha})} F(V) \xrightarrow{p_\alpha} F(e_\alpha)F(V).$$

Il nous reste à vérifier que ces deux morphismes sont inverses l'un de l'autre :

$$\begin{array}{ll}
(p_\beta \circ F(f_{\alpha,\beta}) \circ i_\alpha) \circ (p_\alpha \circ F(f_{\beta,\alpha}) \circ i_\beta) & \\
= p_\beta \circ F(f_{\alpha,\beta}) \circ (i_\alpha \circ p_\alpha) \circ F(f_{\beta,\alpha}) \circ i_\beta & \text{par associativité} \\
= p_\beta \circ F(f_{\alpha,\beta}) \circ F(e_\alpha) \circ F(f_{\beta,\alpha}) \circ i_\beta & \text{par (4.2)} \\
= p_\beta \circ F(f_{\alpha,\beta} \circ e_\alpha \circ f_{\beta,\alpha}) \circ i_\beta & \text{par fonctorialité} \\
= p_\beta \circ F(e_\beta) \circ i_\beta & \text{par les points (2) et (3) de la proposition 4.3.4} \\
= p_\beta \circ (i_\beta \circ p_\beta) \circ i_\beta & \text{par (4.2)} \\
= (p_\beta \circ i_\beta) \circ (p_\beta \circ i_\beta) & \text{par associativité} \\
= \mathrm{Id} & \text{par (4.1)}
\end{array}$$

Les indices α et β jouant des rôles symétriques, on obtient, de même :

$$(p_\alpha \circ F(f_{\beta,\alpha}) \circ i_\beta) \circ (p_\beta \circ F(f_{\alpha,\beta}) \circ i_\alpha) = \mathrm{Id}.$$

□

Afin de montrer que le foncteur $\lambda : \mathcal{F}_{iso} \to \mathrm{Mack}(\mathcal{E}_q^{\deg}, \mathcal{E})$ qu'on définit dans la démonstration du théorème 4.3.1 est bien défini sur les morphismes, nous aurons besoin du résultat technique suivant :

Proposition 4.3.6. *Soient D_1 et D_2 des objets de $\mathcal{E}_q^{\deg}$ et $C = [D_1 \xleftarrow{f_1} D \xrightarrow{f_2} D_2]$ un élément de $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sp}(\mathcal{E}_q^{\deg})}(D_1, D_2)$, V_1 et W_1 des objets de $\mathcal{E}_q$, α_1 un élément de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}_q^{\deg}}(D_1, V_1)$, β_1 un élément de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}_q^{\deg}}(D_1, W_1)$, V_2 un objet de $\mathcal{E}_q$, α_2 un élément de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}_q^{\deg}}(D_2, V_2)$ et F un objet de $\mathcal{F}_{iso}$. On note $C_{\alpha_1,\alpha_2} = [V_1 \xleftarrow{\alpha_1 \circ f_1} D \xrightarrow{\alpha_2 \circ f_2} V_2]$ l'élément de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}_q}(V_1, V_2)$ et $C_{\beta_1,\alpha_2} = [W_1 \xleftarrow{\beta_1 \circ f_1} D \xrightarrow{\alpha_2 \circ f_2} V_2]$ l'élément de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}_q}(W_1, V_2)$, on a alors le diagramme commutatif suivant :*

$$\begin{tikzcd}
F(e_{\alpha_1})F(V_1) \arrow[r, "F(C_{\alpha_1,\alpha_2})"] \arrow[d, "\simeq"'] & F(e_{\alpha_2})F(V_2) \arrow[d, "\simeq"] \\
F(e_{\beta_1})F(W_1) \arrow[r, "F(C_{\beta_1,\alpha_2})"] & F(e_{\alpha_2})F(V_2)
\end{tikzcd}.$$

Démonstration. Ce résultat se démontre par un calcul analogue à celui effectué dans la preuve de la proposition précédente. □

Remarque 4.3.7. On a un diagramme commutatif analogue en considérant les deux morphismes $C_{\alpha_1,\alpha_2} = [V_1 \xleftarrow{\alpha_1 \circ f_1} D \xrightarrow{\alpha_2 \circ f_2} V_2]$ de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}_q}(V_1, V_2)$ et $C_{\alpha_1,\beta_2} = [V_1 \xleftarrow{\alpha_1 \circ f_1} D \xrightarrow{\beta_2 \circ f_2} W_2]$ de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}_q}(V_1, W_2)$. Ce résultat peut s'obtenir à partir de la proposition précédente en utilisant le foncteur transposition.

On peut maintenant démontrer le théorème 4.3.1.

Démonstration du théorème. On définit un foncteur $\lambda : \mathcal{F}_{iso} \to \mathrm{Mack}(\mathcal{E}_q^{\deg}, \mathcal{E})$ de la manière suivante : pour $F : \mathcal{S}_q \to \mathcal{E}$ un objet de $\mathcal{F}_{iso}$, on définit $\lambda(F) : Sp(\mathcal{E}_q^{\deg}) \to \mathcal{E}$ comme suit :

Pour un objet D de $Sp(\mathcal{E}_q^{\deg})$, on choisit un espace non dégénéré V et un morphisme $\alpha : D \to V$ en faisant la convention que $\alpha = \mathrm{Id}_D$ dans le cas où D est non dégénéré. On pose :

$$\lambda(F)(D) := F(e_\alpha)F(V).$$

D'après la proposition 4.3.5, la classe d'isomorphismes de $\lambda(F)(D)$ ne dépend pas du choix de V et de α.

Pour définir $\lambda(F)$ sur les morphismes de $Sp(\mathcal{E}_q^{\deg})$, on utilise la construction faite à la proposition 4.3.6, c'est à dire, pour $C = [D_1 \xleftarrow{f_1} D \xrightarrow{f_2} D_2]$ un élément de $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sp}(\mathcal{E}_q^{\deg})}(D_1, D_2)$ on définit

$\lambda(F)(C) : \lambda(F)(D_1) \to \lambda(F)(D_2)$ par $\lambda(F)(C) = F(C_{\alpha_1,\alpha_2})$. On déduit de la commutativité du diagramme de la proposition 4.3.6 que ceci est cohérent.

Il nous reste à vérifier que λ est bien un foncteur.

Soient F un objet de $\mathcal{F}_{iso}$ et $1_F : F \to F$ la transformation naturelle identité. Pour un objet D de $Sp(\mathcal{E}_q^{\deg})$, on choisit un espace non dégénéré V et un morphisme $\alpha : D \to V$. Par naturalité de 1_F, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} F(V) \arrow[r, "F(e_\alpha)"] \arrow[d, "(1_F)_V"'] & F(V) \arrow[d, "(1_F)_V"] \\ F(V) \arrow[r, "F(e_\alpha)"] & F(V) \end{tikzcd} .$$

Ceci implique que $\lambda(1_F) = 1_{\lambda(F)}$.

Soient $\sigma : F \to G$ et $\tau : G \to H$ des morphismes de $\mathcal{F}_{iso}$. Pour un objet D de $Sp(\mathcal{E}_q^{\deg})$, on choisit un espace non dégénéré V et un morphisme $\alpha : D \to V$. Par naturalité de σ et τ, on obtient le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} F(V) \arrow[r, "F(e_\alpha)"] \arrow[d, "\sigma_V"'] & F(V) \arrow[d, "\sigma_V"] \\ G(V) \arrow[r, "G(e_\alpha)"] \arrow[d, "\tau_V"'] & G(V) \arrow[d, "\tau_V"] \\ H(V) \arrow[r, "H(e_\alpha)"] & H(V). \end{tikzcd}$$

Ceci implique que $(\lambda\tau) \circ (\lambda\sigma) = \lambda(\tau \circ \sigma)$.

On laisse le soin au lecteur de vérifier, à partir des définitions, que les foncteurs

$$\lambda : \mathcal{F}_{iso} \to \mathrm{Mack}(\mathcal{E}_q^{\deg}, \mathcal{E})$$

et

$$\lambda' : \mathrm{Mack}(\mathcal{E}_q^{\deg}, \mathcal{E}) \to \mathcal{F}_{iso}$$

induisent une équivalence de catégories.

□

4.4 Les foncteurs simples de $\mathcal{F}_{iso}$

Le but de cette section est de donner une classification des foncteurs simples de la catégorie $\mathcal{F}_{iso}$, en utilisant l'équivalence de catégories obtenue à la section précédente. On introduit la notation suivante :

Notation 4.4.1. Pour V un objet de $\mathcal{E}_q^{\deg}$, le foncteur projectif de la catégorie $\mathrm{Mack}(\mathcal{E}_q^{\deg}, \mathcal{E})$, défini par $\mathbb{F}_2[\mathrm{Hom}_{Sp(\mathcal{E}_q^{\deg})}(V, -)]$, sera noté Q_V.

L'intérêt de la catégorie $\mathrm{Mack}(\mathcal{E}_q^{\deg}, \mathcal{E})$, par rapport à la catégorie $\mathcal{F}_{iso}$, réside dans l'existence de la notion d'espace minimal définie ci-après et, surtout, à l'unicité de cet espace pour les foncteurs simples de $\mathrm{Mack}(\mathcal{E}_q^{\deg}, \mathcal{E})$ donnée par la proposition 4.4.3.

Définition 4.4.2. Un espace minimal d'un objet F de $\mathrm{Mack}(\mathcal{E}_q^{\deg}, \mathcal{E})$ est un objet V de $\mathcal{E}_q^{\deg}$, tel que $F(V) \neq 0$ et pour tout objet W de $\mathcal{E}_q^{\deg}$ non isomorphe à V et vérifiant $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}_q^{\deg}}(W, V) \neq \emptyset$, on a $F(W) = 0$.

L'existence d'un espace minimal est claire. Il suffit de considérer un espace V de dimension minimale vérifiant $F(V) \neq 0$. Les morphismes de $\mathcal{E}_q^{\deg}$ étant des monomorphismes la condition de la définition ci-dessus est vérifiée pour l'espace V.

Pour les foncteurs simples, on montre le résultat d'unicité important suivant :

Proposition 4.4.3. *Un foncteur simple de* $\mathrm{Mack}(\mathcal{E}_q^{\deg}, \mathcal{E})$ *admet un unique espace minimal.*

Démonstration. Soient V_1 et V_2 deux espaces minimaux non isométriques du foncteur S, comme $S(V_1) \neq 0$ et $S(V_2) \neq 0$, on a le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} & Q_{V_2} \arrow[d, two heads] \\ Q_{V_1} \arrow[r, two heads] & S \end{tikzcd}$$

où $Q_{V_1} = \mathbb{F}_2[\mathrm{Hom}_{Sp(\mathcal{E}_q^{\deg})}(V_1, -)]$ et $Q_{V_2} = \mathbb{F}_2[\mathrm{Hom}_{Sp(\mathcal{E}_q^{\deg})}(V_2, -)]$ sont deux foncteurs projectifs de $\mathrm{Mack}(\mathcal{E}_q^{\deg}, \mathcal{E})$ et où les flèches sont surjectives par simplicité du foncteur S.

Le foncteur Q_{V_1} étant projectif, on en déduit l'existence d'une application $\phi : Q_{V_1} \to Q_{V_2}$ non nulle, rendant le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{tikzcd} & Q_{V_2} \arrow[d, two heads] \\ Q_{V_1} \arrow[ur, "\phi"] \arrow[r, two heads] & S \end{tikzcd}$$

Comme ϕ est un élément non nul de

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Mack}(\mathcal{E}_q^{\deg}, \mathcal{E})}(Q_{V_1}, Q_{V_2}) = Q_{V_2}(V_1) = \mathbb{F}_2[\mathrm{Hom}_{Sp(\mathcal{E}_q^{\deg})}(V_2, V_1)]$$

il s'écrit sous forme :

$$\phi = \sum_i [V_2 \xleftarrow{f_i} W_i \xrightarrow{g_i} V_1]$$

Comme la composée $Q_{V_1} \xrightarrow{\phi} Q_{V_2} \to S$ est non nulle, au moins un des morphismes $[V_2 \xleftarrow{f_i} W_i \xrightarrow{g_i} V_1]$ induit un morphisme non nul de $S(V_2)$ dans $S(V_1)$. Or, d'après la proposition de décomposition des morphismes 2.1.8, on a $[V_2 \xleftarrow{f_i} W_i \xrightarrow{g_i} V_1] = [W_i \xleftarrow{\mathrm{Id}} W_i \xrightarrow{g_i} V_1] \circ [V_2 \xleftarrow{f_i} W_i \xrightarrow{\mathrm{Id}} W_i]$, par conséquent, $S(W_i)$ est non nul ainsi que le morphisme de $\mathcal{E}_q^{\deg}$, $f_i : W_i \to V_2$, ce qui contredit la minimalité de V_2, puisqu'on a supposé V_1 et V_2 non isométriques. □

Remarque 4.4.4. La proposition précédente justifie le fait qu'on parlera dans la suite de l'espace minimal d'un foncteur simple de $\mathrm{Mack}(\mathcal{E}_q^{\deg}, \mathcal{E})$ et de $\mathcal{F}_{iso}$, car cet espace est unique à isométrie près.

On a la proposition importante suivante :

Proposition 4.4.5. *Le foncteur* iso_V *de* $\mathcal{F}_{iso}$ *est quotient du foncteur* $Q_V = \mathbb{F}_2[\mathrm{Hom}_{Sp(\mathcal{E}_q^{\deg})}(V, -)]$.

Démonstration. Par le lemme de Yoneda, on a $\mathrm{Hom}(Q_V, iso_V) = iso_V(V) = \mathbb{F}_2[O(V)]$.

Pour un générateur canonique $[V \xrightarrow{f} V]$ de $iso_V(V)$ la transformation naturelle $Q_V \xrightarrow{\sigma_f} iso_V$ est surjective. En effet, on vérifie aisément qu'un générateur $[V \xrightarrow{g} W]$ de $iso_V(W)$ a pour antécédent, dans $Q_V(W)$ par σ_f, le cotriplet $[V \xleftarrow{f} V \xrightarrow{g} W]$, pour W un objet de $\mathcal{E}_q^{\deg}$. □

Notation 4.4.6. Pour l'élément $[V \xrightarrow{\mathrm{Id}} V]$ de $iso_V(V)$, on note K_V le foncteur tel que :

$$0 \to K_V \xrightarrow{i} Q_V \xrightarrow{\sigma_{\mathrm{Id}}} iso_V \to 0$$

soit une suite exacte courte.

On a le lemme évident suivant :

Lemme 4.4.7. *Pour W un objet de $\mathcal{S}_q$, $K_V(W)$ est le sous-espace vectoriel de $Q_V(W)$ engendré par les cotriplets de la forme $[V \leftarrow H \rightarrow W]$ avec $H \not\simeq V$.*

Remarque 4.4.8. Pour un objet F de $\mathcal{F}_{iso}$, on a l'existence d'un morphisme injectif :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_{iso}}(iso_V, F) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_{iso}}(Q_V, F).$$

La proposition suivante affirme que, dans le cas où F est un foncteur simple d'espace minimal V, l'application précédente est un isomorphisme.

Proposition 4.4.9. *Si S est un objet simple de $\mathcal{F}_{iso}$, d'espace minimal V, alors S est quotient du foncteur isotrope iso_V de $\mathcal{F}_{iso}$. De plus, on a :* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_{iso}}(iso_V, S) = S(V)$.

Démonstration. Soit S un objet simple de $\mathcal{F}_{iso}$, d'espace minimal V. On a $\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_{iso}}(Q_V, S) = S(V) \neq 0$ donc, par simplicité de S, ce foncteur est un quotient de Q_V. Par la proposition 4.4.5, pour un élément f fixé dans $\mathrm{Hom}(Q_V, S)$, on a le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K_V \arrow[r, "i"] & Q_V \arrow[r, two heads, "\sigma_{\mathrm{Id}}"] \arrow[d, "f"'] & iso_V \arrow[r] & 0 \\
 & & S & &
\end{tikzcd}$$

Or, pour un générateur $[V \leftarrow H \rightarrow -]$ de $K_V(-)$, avec $H \neq V$ d'après le lemme 4.4.7, on a $f \circ i([V \leftarrow H \rightarrow -]) = 0$ puisque, S étant d'espace minimal V, on a $S(H) = 0$ pour $H \neq V$.

Par conséquent on a l'existence d'un morphisme de $\mathcal{F}_{iso}$, $\tau_f : iso_V \rightarrow S$, surjectif par surjectivité de f.

En faisant varier f, on obtient :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_{iso}}(iso_V, S) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_{iso}}(Q_V, S) = S(V).$$

□

Pour obtenir l'ensemble des objets simples de $\mathcal{F}_{iso}$, il suffit donc d'obtenir les facteurs de composition des foncteurs isotropes. Avant d'énoncer le théorème fondamental permettant d'obtenir ces facteurs de composition, on fait la remarque suivante :

Remarque 4.4.10. Pour W un objet de $\mathcal{S}_q$, $iso_V(W)$ est un $\mathbb{F}_2[O(V)]$-module à droite, l'action étant obtenue par composition à la source.

Théorème 4.4.11. *Pour V un objet de $\mathcal{E}_q^{\deg}$, le foncteur $F_V : \mathbb{F}_2[O(V)]-\mathrm{mod} \rightarrow \mathcal{F}_{iso}$ défini par $F_V(M) = iso_V \underset{\mathbb{F}_2[O(V)]}{\otimes} M$, pour M un $\mathbb{F}_2[O(V)]$-module à gauche, vérifie les propriétés suivantes.*

1. *Le foncteur F_V est exact.*
2. *Si M est un $\mathbb{F}_2[O(V)]$-module simple, alors $F_V(M)$ est un objet simple de $\mathcal{F}_{iso}$.*

Démonstration de l'exactitude de F_V. Les morphismes de $\mathcal{E}_q^{\deg}$ étant les monomorphismes conservant la forme quadratique, on peut identifier le $O(V)$-ensemble à droite $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}_q^{\deg}}(V, W)$ au $O(V)$-ensemble libre $Gr_V(W) \times O(V)$ où $Gr_V(W)$ désigne la grassmanienne dans $\mathcal{E}_q^{\deg}$, c'est à dire l'ensemble des sous-espaces de W isométriques à V. Par conséquent, $iso_V(W)$ est un $O(V)$-module libre, à savoir :

$$iso_V(W) = \mathbb{F}_2[Gr_V(W)] \underset{\mathbb{F}_2}{\otimes} \mathbb{F}_2[O(V)].$$

On en déduit,

$$F_V(M)(W) = \mathbb{F}_2[Gr_V(W)] \underset{\mathbb{F}_2}{\otimes} M$$

en tant qu'espace vectoriel. Comme le foncteur

$$\mathbb{F}_2[Gr_V(W)] \underset{\mathbb{F}_2}{\otimes} - \ : \ O(V)\text{−mod} \to \mathcal{E}$$

est exact pour tout W, on en déduit que le foncteur F_V est exact. □

La démonstration du deuxième point du théorème, repose sur les deux lemmes suivants.

Lemme 4.4.12. *Si L est un sous-foncteur non nul de $F_V(M)$ pour M un $O(V)$-module simple, alors $L(V) = M$.*

Démonstration. On note $i : L \to F_V(M)$ la transformation naturelle de foncteurs. On a $i_V : L(V) \to F_V(M)(V) = M$, par conséquent, $L(V)$ est un sous-module de M. Le module M étant simple, on en déduit que $L(V)$ est soit nul soit égal à M. On montre, dans la suite, que $L(V) \neq 0$.

Le foncteur L étant non nul, il existe un objet W de $\mathcal{E}_q^{\deg}$ tel que $L(W) \neq 0$; on note w un élément non nul de $L(W)$.

On a

$$i_W(w) = \sum_i \lambda_i [V \xrightarrow{\alpha_i} W] \underset{O(V)}{\otimes} m_i$$

où on peut supposer que, pour i différent de j, $\mathrm{Im}(\alpha_i) \neq \mathrm{Im}(\alpha_j)$ étant donné que le produit tensoriel est pris au dessus du groupe orthogonal $O(V)$. L'élément $i_W(w)$ étant non nul, un des termes de la combinaison linéaire précédente est non nul ; on notera

$$[V \xrightarrow{\alpha} W] \underset{O(V)}{\otimes} m$$

un de ces termes.

En considérant le morphisme $R(\alpha) = [W \xleftarrow{\alpha} V \xrightarrow{\mathrm{Id}} V]$ de $\mathrm{Hom}_{Sp(\mathcal{E}_q^{\deg})}(W, V)$ obtenu à partir du foncteur R défini à la section 2.1.2, on obtient le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
L(W) \arrow[r, "i_W"] \arrow[d, "L(R(\alpha))"'] & F_V(M)(W) = iso_V(W) \underset{O(V)}{\otimes} M \arrow[d, "F_V(M)(L(R(\alpha)))"] \\
L(V) \arrow[r, "i_V"'] & F_V(M)(V) = iso_V(V) \underset{O(V)}{\otimes} M
\end{tikzcd}$$

Pour un morphisme $\alpha_i : V \to W$

– Si $\alpha_i = \alpha$ on a le produit fibré suivant :

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\mathrm{Id}"] \arrow[d, "\mathrm{Id}"'] & V \arrow[r, "\mathrm{Id}"] \arrow[d, "\alpha"] & V \\
V \arrow[r, "\alpha"'] & W &
\end{tikzcd}$$

dont on déduit :

$$F_V(M)(L(R(\alpha)))([V \xrightarrow{\alpha} W] \underset{O(V)}{\otimes} m) = [V \xrightarrow{\mathrm{Id}} V] \underset{O(V)}{\otimes} m'.$$

– Si $\alpha_i \neq \alpha$ on a le produit fibré suivant :

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r] \arrow[d] & V \arrow[r, "\mathrm{Id}"] \arrow[d, "\alpha"] & V \\
V \arrow[r, "\alpha_i"'] & W &
\end{tikzcd}$$

où $P \neq V$ puisque $\mathrm{Im}(\alpha_i) \neq \mathrm{Im}(\alpha)$, dont on déduit :

$$F_V(M)(L(R(\alpha)))([V \xrightarrow{\alpha_i} W] \underset{O(V)}{\otimes} m) = 0 \text{ pour } \alpha_i \neq \alpha.$$

Par conséquent,

$$F_V(M)(L(R(\alpha))) \circ i_W(w) = [V \xrightarrow{\mathrm{Id}} V] \underset{O(V)}{\otimes} m' \neq 0$$

et donc, par commutativité du diagramme on a $L(V) \neq 0$, d'où $L(V) = M$. □

Lemme 4.4.13. *Si L est un sous-foncteur de $F_V(M)$ pour M un $O(V)$-module simple, tel que $L(V) = M$, alors $L = F_V(M)$.*

Démonstration. On a le morphisme d'évaluation

$$\sigma : Q_V \otimes L(V) \to L$$

défini par :

$$\sigma_W([T] \otimes y) = L(T)(y)$$

pour W un objet de $Sp(\mathcal{E}_q^{\deg})$ et T un morphisme de $\mathrm{Hom}_{Sp(\mathcal{E}_q^{\deg})}(V, W)$ et, on déduit de la proposition 4.4.5 que $F_V(M)$ est quotient de $Q_V \otimes M$, ce qui fournit le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
Q_V \otimes L(V) \arrow[r] \arrow[d] & L \arrow[d, hook] \\
Q_V \otimes M \arrow[r, two heads] & F_V(M)
\end{tikzcd}$$

Comme $L(V) = M$, on en déduit que $Q_V \otimes L(V) \twoheadrightarrow F_V(M)$, d'où $L \twoheadrightarrow F_V(M)$ et donc $L = F_V(M)$. □

Démonstration du point 2 *du théorème.* Soit M un $O(V)$-module simple et L un sous-foncteur non nul de $F_V(M)$. D'après le lemme 4.4.12 on a $L(V) = M$ et donc par le lemme 4.4.13 $L = F_V(M)$. D'où la simplicité de $F_V(M)$. □

Remarque 4.4.14. Le deuxième point du théorème précédent est fondamental et est très particulier à la catégorie $\mathcal{F}_{iso}$. En effet, comparons cette situation avec ce qui se passe dans la catégorie $\mathcal{F}$. Dans l'article [Pow98b], Powell s'intéresse à l'adjoint à gauche, noté L_n, du foncteur d'évaluation $E_n : \mathcal{F} \to \mathcal{M}_n$ $(F \mapsto F({\mathbb{F}_2}^n))$ où $\mathcal{M}_n$ est la catégorie des $\mathrm{End}({\mathbb{F}_2}^n)$-modules à gauche . Ce foncteur L_n, défini par :

$$L_n M := \mathbb{F}_2[\mathrm{Hom}({\mathbb{F}_2}^n, -)] \underset{\mathrm{End}\ {\mathbb{F}_2}^n}{\otimes} M$$

présente de nombreuses similarités avec notre foncteur F_V, lorsqu'on se restreint aux modules M qui proviennent de représentations de $GL_n(\mathbb{F}_2)$; on notera entre entres, les similitudes existant entre la preuve du premier point du théorème et celle de la proposition 2.2.1 de [Pow98b] donnant l'exactitude de L_n. Dans cette démonstration, l'auteur fait apparaître l'ensemble des injections à la place de l'ensemble des morphismes, ce qui est à rapprocher du fait que nos catégories n'ont pour morphismes que des monomorphismes.

Cependant, les foncteurs de Weyl :

$$DJ_\lambda = L_n S_\lambda,$$

pour S_λ un GL_n-module simple, ne sont pas simples. Les foncteurs J_λ, duaux de ces foncteurs, sont le sujet central de l'article sus-cité.

Le point fondamental dans la preuve de la simplicité du foncteur L dans $\mathcal{F}_{iso}$ réside dans la démonstration du lemme 4.4.12 et plus particulièrement dans le fait que, pour deux éléments α et β de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}_q^{\deg}}(V,W)$,

$$iso_V(R(\beta))([\alpha]) \neq 0 \text{ si et seulement si } \mathrm{Im}(\alpha) \simeq \mathrm{Im}(\beta)$$

où $R(\beta) = [W \xleftarrow{\beta} V \xrightarrow{\mathrm{Id}} V]$ et $[\alpha]$ est un générateur canonique de $iso_V(W)$. Autrement dit, dans $\mathcal{F}_{iso}$, pour un élément β de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}_q^{\deg}}(V,W)$ fixé, il existe un unique générateur canonique α de $iso_V(W)$ tel que

$$iso_V(R(\beta))([\alpha]) \neq 0.$$

Afin d'illustrer la différence entre les situations de $\mathcal{F}$ et de $\mathcal{F}_{iso}$, on compare, dans la suite, ce qui se passe pour le foncteur $iso_{(x,\epsilon)}$ pour $\epsilon \in \{0,1\}$ de $\mathcal{F}_{iso}$ et pour le foncteur $\bar{P}_{\mathbb{F}_2} \simeq L_1(\Lambda^1(\mathbb{F}_2))$ de $\mathcal{F}$, où $\bar{P}_{\mathbb{F}_2}$ est le foncteur défini par $P_{\mathbb{F}_2} \simeq \bar{P}_{\mathbb{F}_2} \oplus \mathbb{F}_2$.

Dans $\mathcal{F}$, les morphismes analogues à $R(\beta)$ sont les projections $p : W \to \mathbb{F}_2$. Pour un générateur canonique $[w]$ de $P_{\mathbb{F}_2}(W)$ tel que $p([w]) \neq 0$ et un élément k du noyau de p, on a :

$$p([w+k]) = [w].$$

Par conséquent, dans $\mathcal{F}$, il existe $2^{\dim(V)-1}$ générateurs canoniques de $P_{\mathbb{F}_2}(W)$ vérifiant $p([w]) \neq 0$.

On en déduit que les éléments de $\bar{P}_{\mathbb{F}_2}(W)$ de la forme :

$$[w+w'] + [w] + [w'] + [0] = ([w+w'] + [0]) + ([w] + [0]) + ([w'] + [0])$$

engendrent un sous-foncteur propre de $\bar{P}_{\mathbb{F}_2}$.

On a le corollaire important suivant du théorème 4.4.11.

Corollaire 4.4.15. *Le foncteur F_V envoie les facteurs de composition du module $\mathbb{F}_2[O(V)]$ sur les facteurs de composition du foncteur iso_V de $\mathcal{F}_{iso}$.*

4.5 Les facteurs de composition des foncteurs isotropes de $\mathcal{F}_{quad}$

On déduit facilement de la proposition 4.2.12, le résultat analogue au corollaire 4.4.15 pour la catégorie $\mathcal{F}_{quad}$, suivant.

Proposition 4.5.1. *Le foncteur $\kappa \circ F_V$ envoie les facteurs de composition du module $\mathbb{F}_2[O(V)]$ sur les facteurs de composition du foncteur Iso_V de $\mathcal{F}_{quad}$.*

Etant donné que les groupes orthogonaux $O(V)$ sont des groupes finis, on en déduit le résultat important suivant :

Proposition 4.5.2. *Les foncteurs isotropes de $\mathcal{F}_{quad}$ sont finis.*

On termine cette section en appliquant le résultat de la proposition 4.5.1 à quelques exemples.

Proposition 4.5.3. *Les foncteurs $\mathrm{Iso}_{(x,0)}$ et $\mathrm{Iso}_{(x,1)}$ sont simples dans $\mathcal{F}_{quad}$.*

Démonstration. D'après la proposition 1.4.10, $O(x,0) = O(x,1) = \{\mathrm{Id}\}$, d'où le résultat. □

Remarque 4.5.4. Les formes quadratiques étant à valeurs dans $\mathbb{F}_2$, pour un objet W de $\mathcal{S}_q$ on a l'isomorphisme d'espaces vectoriels suivant :

$$iso_{(x,0)}(W) \oplus iso_{(x,1)}(W) \simeq \mathbb{F}_2[W \setminus \{0\}],$$

mais cette décomposition ne correspond pas à un isomorphisme de foncteurs entre $iso_{(x,0)} \oplus iso_{(x,1)} \oplus \mathbb{F}_2$ et $\iota(P^{\mathcal{F}}_{\mathbb{F}_2})$.

Proposition 4.5.5. *On rappelle que d'après les propositions 1.4.9 et 1.4.10 on a :*

$$O((x,1)\perp(x,1)) = O(q_{H_0}) = S_2$$

et

$$O((x,0)\perp(x,0)) = O(q_{H_1}) = S_3.$$

1. *Le foncteur* Iso_{H_0} *est indécomposable et a deux facteurs de composition isomorphes à* R_{H_0} *où* R_{H_0} *est le foncteur obtenu à partir de la représentation triviale de* $O(q_{H_0})$.
2. *Le foncteur* Iso_{H_1} *se décompose sous la forme :*

$$\mathrm{Iso}_{H_1} = F_{H_1} \oplus S_{H_1} \oplus S_{H_1}$$

   où F_{H_1} *est indécomposable et ses facteurs de composition sont* R_{H_1} *et* R_{H_1} *où* R_{H_1} *est le foncteur obtenu à partir de la représentation triviale de* $O(q_{H_1})$ *et* S_{H_1} *est le foncteur obtenu à partir de la représentation de Steinberg.*
3. *Le foncteur* $\mathrm{Iso}_{(x,1)\perp(x,1)}$ *est indécomposable et ses facteurs de composition sont* $R_{(x,1)\perp(x,1)}$ *et* $R_{(x,1)\perp(x,1)}$ *où* $R_{(x,1)\perp(x,1)}$ *est le foncteur obtenu à partir de la représentation triviale de* $O((x,1)\perp(x,1))$.
4. *Le foncteur* $\mathrm{Iso}_{(x,0)\perp(x,0)}$ *se décompose sous la forme :*

$$\mathrm{Iso}_{(x,0)\perp(x,0)} = F_{(x,0)\perp(x,0)} \oplus S_{(x,0)\perp(x,0)} \oplus S_{(x,0)\perp(x,0)}$$

   où $F_{(x,0)\perp(x,0)}$ *est indécomposable et ses facteurs de composition sont* $R_{(x,0)\perp(x,0)}$ *et* $R_{(x,0)\perp(x,0)}$ *où* $R_{(x,0)\perp(x,0)}$ *est le foncteur obtenu à partir de la représentation triviale de* $O((x,0)\perp(x,0))$ *et* $S_{(x,0)\perp(x,0)}$ *est le foncteur obtenu à partir de la représentation de Steinberg.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer la théorie des représentations modulaires des groupes symétriques, sur laquelle on pourra consulter [JK81], pour obtenir le résultat. □

4.6 Dimensions des espaces $\mathrm{Iso}(V)$

4.6.1 Dimensions des espaces $\mathrm{Iso}_{(x,0)}(V)$ et $\mathrm{Iso}_{(x,1)}(V)$

On rappelle qu'on a défini au 1.2.15, les invariants ν_0 et ν_1 par :

$$\nu_0(V,q_V) = \mathrm{Card}\{v \in (V,q_V) \mid q_V(v) = 0\} \in \mathbb{N},$$
$$\nu_1(V,q_V) = \mathrm{Card}\{v \in (V,q_V) \mid q_V(v) = 1\} \in \mathbb{N}.$$

On déduit de la définition des foncteurs isotropes, le lemme suivant :

Lemme 4.6.1. *Pour un objet* V *de* $\mathcal{S}_q$*, on a :*

$$\dim(iso_{(x,0)}(V)) = \nu_0(V) - 1$$

et

$$\dim(iso_{(x,1)}(V)) = \nu_1(V).$$

On ne s'intéresse dans la suite qu'aux dimensions des espaces $\mathrm{Iso}_{(x,0)}(V)$ et $\mathrm{Iso}_{(x,1)}(V)$ pour un espace quadratique V non dégénéré.

Proposition 4.6.2. *Pour un objet* V *de* $\mathcal{T}_q$ *non nul, on a les égalités suivantes :*

$$\dim(\mathrm{Iso}_{(x,0)}(V)) = \frac{1}{2}2^{\dim(V)} + (-1)^{\mathrm{Arf}(V)}\frac{1}{2}2^{\dim(V)/2} - 1$$

$$\dim(\mathrm{Iso}_{(x,1)}(V)) = \frac{1}{2}2^{\dim(V)} + (-1)^{\mathrm{Arf}(V)+1}\frac{1}{2}2^{\dim(V)/2}$$

Démonstration. Ce résultat est une conséquence directe de la proposition 1.2.19 et des lemmes 1.2.16 et 4.6.1. □

4.6.2 Dimensions des espaces $\mathrm{Iso}_{(x,0)\perp(x,0)}(V)$, $\mathrm{Iso}_{(x,1)\perp(x,1)}(V)$, $\mathrm{Iso}_{H_0}(V)$ et $\mathrm{Iso}_{H_1}(V)$

On montre dans cette section le résultat suivant.

Proposition 4.6.3. *Pour un objet V de $\mathcal{T}_q$, on a les égalités suivantes :*

$$\dim(\mathrm{Iso}_{(x,0)\perp(x,0)}(V)) = \frac{1}{8}2^{2\dim(V)} + (-1)^{\mathrm{Arf}(V)}\frac{3}{8}2^{3\dim(V)/2} - 2^{\dim(V)} + (-1)^{\mathrm{Arf}(V)}\frac{3}{2}2^{\dim(V)/2} + 2$$

$$\dim(\mathrm{Iso}_{H_0}(V)) = \frac{1}{8}2^{2\dim(V)} + (-1)^{\mathrm{Arf}(V)}\frac{1}{8}2^{3\dim(V)/2} - \frac{1}{4}2^{\dim(V)}$$

$$\dim(\mathrm{Iso}_{(x,1)\perp(x,1)}(V)) = \frac{1}{8}2^{2\dim(V)} + (-1)^{\mathrm{Arf}(V)}\frac{1}{8}2^{3\dim(V)/2} - \frac{1}{2}2^{\dim(V)} + (-1)^{\mathrm{Arf}(V)}\frac{1}{2}2^{\dim(V)/2}$$

$$\dim(\mathrm{Iso}_{H_1}(V)) = \frac{1}{8}2^{2\dim(V)} + (-1)^{\mathrm{Arf}(V)}\frac{3}{8}2^{3\dim(V)/2} + \frac{1}{4}2^{\dim(V)} \qquad \text{pour } V \not\simeq H_0$$

$$\dim(\mathrm{Iso}_{H_1}(H_0)) = 0$$

Démonstration. Soit V un objet de $\mathcal{T}_q$.

1. Dimensions des espaces $\mathrm{Iso}_{H_0}(V)$
   Soit $\mathcal{G}(\mathrm{Iso}_{H_0}(V))$ l'ensemble des générateurs canoniques de l'espace $\mathrm{Iso}_{H_0}(V)$. Le groupe orthogonal $O(V)$ agit sur l'ensemble $\mathcal{G}(\mathrm{Iso}_{H_0}(V))$ par composition. On déduit de la remarque 1.3.6 que cette action est transitive.
   (a) Pour $V \simeq H_0^{\perp n}$ avec $n \geq 0$
   On considère l'élément $[i]$ de $\mathcal{G}(\mathrm{Iso}_{H_0}(V))$ où i est l'inclusion canonique de H_0 dans le premier facteur de $H_0^{\perp n}$. On a alors
   $$\mathrm{Stab}([i]) = O(H_0^{\perp(n-1)})$$
   par conséquent,
   $$\dim(\mathrm{Iso}_{H_0}(H_0^{\perp n})) = \mathrm{Card}(\mathcal{G}(\mathrm{Iso}_{H_0}(H_0^{\perp n}))) = \mathrm{Card}(\mathrm{Orb}([i])) = \frac{|O(H_0^{\perp n})|}{|O(H_0^{\perp(n-1)})|}$$
   On utilise alors les formules donnant l'ordre des groupes orthogonaux rappellées à la proposition 1.4.6 pour obtenir le résultat de l'énoncé.
   (b) Pour $V \simeq H_0^{\perp(n-1)} \perp H_1$ avec $n \geq 2$
   On montre de la même manière que précédemment que
   $$\dim(\mathrm{Iso}_{H_0}(H_0^{\perp(n-1)} \perp H_1)) = \frac{|O(H_0^{\perp(n-1)} \perp H_1)|}{|O(H_0^{\perp(n-2)} \perp H_1)|}.$$
   (c) Pour $V \simeq H_1$
   On a
   $$\dim(\mathrm{Iso}_{H_0}(H_1)) = 0$$
   d'après le lemme 1.2.7. On vérifie alors que dans ce cas la formule de l'énoncé est encore valable.
2. Dimensions des espaces $\mathrm{Iso}_{H_1}(V)$
   On utilise le même type d'argument qu'au point précédent pour obtenir les égalités qui suivent.
   (a) Pour $V \simeq H_0$
   On a
   $$\dim(\mathrm{Iso}_{H_1}(H_0)) = 0$$
   d'après le lemme 1.2.7.

(b) Pour $V \simeq H_0^{\perp n}$ avec $n \geq 2$
On a dans ce cas
$$\dim(\mathrm{Iso}_{H_1}(H_0^{\perp n})) = \frac{|O(H_0^{\perp n})|}{|O(H_0^{\perp(n-2)})\perp H_1|}$$

(c) Pour $V \simeq H_0^{\perp(n-1)} \perp H_1$ avec $n \geq 2$
On a dans ce cas
$$\dim(\mathrm{Iso}_{H_0}(H_0^{\perp(n-1)} \perp H_1)) = \frac{|O(H_0^{\perp(n-1)} \perp H_1)|}{|O(H_0^{\perp(n-1)}|}.$$

3. Dimensions des espaces $\mathrm{Iso}_{(x,0)\perp(y,0)}(V)$
On note $\{a_0, b_0\}$ une base symplectique de H_0 et $\mathcal{G}(\mathrm{Iso}_{H_0}(V))$; $\mathcal{G}(\mathrm{Iso}_{(x,0)\perp(y,0)}(V)$ les ensembles des générateurs canoniques des espaces correspondants. On a alors :

$$\begin{array}{ll} & \mathcal{G}(\mathrm{Iso}_{H_0}(V)) \cup \mathcal{G}(\mathrm{Iso}_{(x,0)\perp(y,0)}(V)) \\ \simeq & \{(h(a_0), h(b_0)) \text{ pour } [h] \in \mathcal{G}(\mathrm{Iso}_{H_0}(V))\} \cup \{(h(x), h(y)) \text{ pour } [h] \in \mathcal{G}(\mathrm{Iso}_{(x,0)\perp(y,0)}(V))\} \\ \simeq & \{(v, v') \in V^2 \text{ tel que } q(v) = q(v') = 0 \text{ et } B(v, v') = 1\} \\ & \cup\{(v, v') \in V^2 \text{ tel que } \{v, v'\} \text{ est une famille libre, } q(v) = q(v') = 0 \text{ et } B(v, v') = 0\} \\ \simeq & \{(v, v') \in V^2 \text{ tel que } \{v, v'\} \text{ est une famille libre, et } q(v) = q(v') = 0\} \end{array}$$

On en déduit :
$$\dim(\mathrm{Iso}_{H_0}(V)) + \dim(\mathrm{Iso}_{(x,0)\perp(y,0)}(V)) = \dim(\mathrm{Iso}_{(x,0)}(V)).(\dim(\mathrm{Iso}_{(x,0)}(V)) - 1)$$

On applique les résultats de la proposition 4.6.2 pour obtenir les dimensions des espaces $\mathrm{Iso}_{(x,0)\perp(y,0)}(V)$.

4. Dimensions des espaces $\mathrm{Iso}_{(x,1)\perp(y,1)}(V)$
On montre de la même manière que précédemment que
$$\dim(\mathrm{Iso}_{H_1}(V)) + \dim(\mathrm{Iso}_{(x,1)\perp(y,1)}(V)) = \dim(\mathrm{Iso}_{(x,1)}(V)).(\dim(\mathrm{Iso}_{(x,1)}(V)) - 1)$$

□

Troisième partie

Etude des projectifs de $\mathcal{F}_{quad}$

Chapitre 5

Filtration des projectifs

On montre dans ce chapitre l'existence d'une filtration des projectifs P_V de $\mathcal{F}_{quad}$ par le rang. Cette construction fournira un outil essentiel pour obtenir, au chapitre 7, une décomposition en facteurs indécomposables des projectifs P_{H_0} et P_{H_1} de $\mathcal{F}_{quad}$.

Après avoir défini cette filtration, on en donnera quelques conséquences générales sur les projectifs P_V de $\mathcal{F}_{quad}$. On montrera que la partie de rang nul est un facteur direct de P_V et, au théorème 5.2.1, on identifiera ce foncteur. Ce résultat nous permettra de montrer au théorème 5.2.12 que $\iota(\mathcal{F})$ est une sous-catégorie épaisse de $\mathcal{F}_{quad}$. A la proposition 5.3.1, on prouvera que le quotient supérieur de cette filtration est le foncteur isotrope Iso_V.

5.1 Définition de la filtration

On rappelle qu'un morphisme de $\mathcal{T}_q$ de V dans W, où V et W sont deux espaces quadratiques non dégénérés, est donné par un triplet $[V \to X \leftarrow W]$. On a la définition suivante :

Définition 5.1.1. Un morphisme $[V \to X \leftarrow W]$ est de rang inférieur ou égal à i si son produit fibré dans $\mathcal{E}_q^{\deg}$ est un espace quadratique de dimension inférieure ou égale à i.

Notation 5.1.2. On notera $\mathrm{Hom}^{(i)}_{\mathcal{T}_q}(V, W)$ l'ensemble des morphismes de V dans W de rang inférieur ou égal à i.

On a la proposition suivante :

Proposition 5.1.3. *Pour W un objet de $\mathcal{T}_q$, le sous-espace vectoriel de $P_V(W)$ suivant :*

$$P_V^{(i)}(W) = \mathbb{F}_2[\mathrm{Hom}^{(i)}_{\mathcal{T}_q}(V, W)]$$

définit un sous-foncteur de P_V.

Démonstration. Il suffit de vérifier que pour tout morphisme $f = [W \to Y \leftarrow Z]$ de $\mathcal{T}_q$ et tout triplet $[V \to X \leftarrow W]$ de $\mathrm{Hom}^{(i)}_{\mathcal{T}_q}(V, W)$, le triplet $f \circ [V \to X \leftarrow W]$ est de rang inférieur ou égal à i.

On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
P' \arrow[rr] \arrow[d] & & Z \arrow[d] \\
P \arrow[r] \arrow[d] & W \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\
V \arrow[r] & X \arrow[r] & X \underset{W}{\perp} Y
\end{tikzcd}$$

où P et P' sont les produits fibrés et $X \underset{W}{\perp} Y$ est la pseudo-somme amalgamée, dont on déduit que

$$f([V \to X \leftarrow W]) = [V \to X \underset{W}{\perp} Y \leftarrow Z].$$

Comme $[V \to X \leftarrow W]$ est un générateur de $P_V^{(i)}(W)$, on sait que P est de dimension inférieure ou égale à i. Par conséquent, P' est de dimension inférieure ou égale à i, ce qui fournit le résultat. □

On a le lemme suivant :

Lemme 5.1.4. *Il existe une équivalence naturelle entre les deux foncteurs suivants :*

$$P_V^{(\dim(V))} \simeq P_V.$$

Démonstration. Le produit fibré D d'un triplet $[V \to X \leftarrow W]$ est un sous-espace quadratique de V ; par conséquent, tout triplet de V dans W est de rang inférieur ou égal à $\dim(V)$. □

On en déduit la proposition suivante.

Proposition 5.1.5. *Les foncteurs $P_V^{(i)}$ pour $i = 0, \ldots, \dim(V)$ définissent une filtration croissante du foncteur P_V.*

Démonstration. On a clairement l'inclusion d'espaces vectoriels :

$$P_V^{(i)}(W) \subset P_V^{(i+1)}(W)$$

pour W un objet de $\mathcal{T}_q$. Par conséquent, $P_V^{(i)}$ est un sous-foncteur de $P_V^{(i+1)}$ par la proposition 5.1.3. □

Pour un objet V de $\mathcal{T}_q$, on obtient la filtration suivante du foncteur P_V :

$$0 \subset P_V^{(0)} \subset P_V^{(1)} \subset \ldots \subset P_V^{(\dim(V)-1)} \subset P_V^{(\dim(V))} = P_V.$$

Le but des deux prochaines sections est d'étudier les deux extrémités de cette filtration, à savoir, le foncteur $P_V^{(0)}$ et le quotient $P_V / P_V^{(\dim(V)-1)}$.

Notation 5.1.6. Dans la suite, pour tout générateur de $P_V(W)$, on considérera un représentant de la forme $[V \xrightarrow{\alpha} W \perp W' \xleftarrow{i_W} W]$, où i_W est l'inclusion canonique. On rappelle qu'un tel représentant existe, d'après la proposition 2.2.14.

Remarque 5.1.7. On peut raffiner la filtration en utilisant l'ensemble partiellement ordonné des classes d'isomorphisme d'objets de $\mathcal{E}_q^{\deg}$.

5.2 Le foncteur $P_V^{(0)}$

On rappelle que le foncteur $P_{\epsilon(V)}^{\mathcal{F}}(-) = \mathbb{F}_2[\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}^f}(\epsilon(V), -)]$, où $\epsilon : \mathcal{T}_q \to \mathcal{E}^f$ est le foncteur défini à la proposition 2.5.6, est un foncteur projectif de $\mathcal{F}$.

5.2.1 Etude du foncteur $P_V^{(0)}$

Le but de cette section est de montrer le résultat suivant :

Théorème 5.2.1. *Soit V un objet de $\mathcal{T}_q$.*

1. *On a une équivalence naturelle de foncteurs :*

$$P_V^{(0)} \simeq \iota(P_{\epsilon(V)}^{\mathcal{F}})$$

où, $\iota : \mathcal{F} \to \mathcal{F}_{quad}$ est le foncteur défini à la proposition 3.2.5.

2. Le foncteur $P_V^{(0)}$ est un facteur direct de P_V.

Avant de démontrer ce résultat, on donne la caractérisation suivante des triplets de rang nul, qui nous sera utile dans la suite.

Lemme 5.2.2. *Soient V un objet de $\mathcal{T}_q$ de dimension $2n$ et $\{a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n\}$ une base symplectique de V. Un triplet $T = [V \xrightarrow{\alpha} W \perp W' \hookleftarrow W]$ est de rang nul si et seulement si*

$$\{p_{W'}(\alpha(a_1)), p_{W'}(\alpha(b_1)), \ldots, p_{W'}(\alpha(a_n)), p_{W'}(\alpha(b_n))\}$$

est une famille libre de W', où $p_{W'}$ désigne la projection orthogonale sur W'.

Le foncteur $\epsilon : \mathcal{T}_q \to \mathcal{E}^f$ défini à la proposition 2.5.6, fournit une application

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}_q}(V, W) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}^f}(\epsilon(V), \epsilon(W)) \text{ pour } V \text{ et } W \text{ deux objets de } \mathcal{T}_q$$

qui, de plus, est surjective, puisque ϵ est plein d'après la proposition 2.5.9. On en déduit une application linéaire surjective

$$P_V(W) \overset{g_W}{\twoheadrightarrow} P^{\mathcal{F}}_{\epsilon(V)}(\epsilon(W)) \quad \forall W \in \mathcal{T}_q.$$

On a le lemme suivant.

Lemme 5.2.3. *Les applications g_W définissent une transformation naturelle entre P_V et $\iota(P^{\mathcal{F}}_{\epsilon(V)})$.*

Démonstration. Soit $T = [W_1 \xrightarrow{f_1} X \xleftarrow{f_2} W_2]$ un morphisme de $\mathcal{T}_q$, il s'agit de montrer que le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
P_V(W_1) \arrow[r, "g_{W_1}"] \arrow[d, "P_V(T)"'] & \iota(P^{\mathcal{F}}_{\epsilon(V)})(W_1) \arrow[d, "\iota(P^{\mathcal{F}}_{\epsilon(V)})(T)"] \\
P_V(W_2) \arrow[r, "g_{W_2}"] & \iota(P^{\mathcal{F}}_{\epsilon(V)})(W_2)
\end{tikzcd}$$

est commutatif.

Soit $T' = [V \xrightarrow{\alpha} X' \xleftarrow{\beta} W_1]$ un générateur de $P_V(W_1)$.

On a, d'une part :

$$\iota(P^{\mathcal{F}}_{\epsilon(V)})(T) \circ g_{W_1}(T') = \iota(P^{\mathcal{F}}_{\epsilon(V)})(T)(\epsilon(T')) = \epsilon(T) \circ \epsilon(T')$$

et, d'autre part,

$$g_{W_2} \circ P_V(T)(T') = g_{W_2}(T \circ T') = \epsilon(T \circ T')$$

Or, par fonctorialité de ϵ, on a

$$\epsilon(T \circ T') = \epsilon(T) \circ \epsilon(T')$$

d'où la commutativité du diagramme. □

Le foncteur $P_V^{(0)}$ étant un sous-foncteur de P_V, les applications g_W induisent des applications

$$P_V^{(0)}(W) \xrightarrow{f_W} P^{\mathcal{F}}_{\epsilon(V)}(\epsilon(W)).$$

On déduit du lemme 5.2.3 le résultat suivant.

Lemme 5.2.4. *Les applications f_W définissent une transformation naturelle entre $P_V^{(0)}$ et $\iota(P^{\mathcal{F}}_{\epsilon(V)})$.*

Pour démontrer le théorème 5.2.1, il suffit donc de montrer la proposition qui suit.

Proposition 5.2.5. *L' application* $P_V^{(0)}(W) \xrightarrow{f_W} P^{\mathcal{F}}_{\epsilon(V)}(\epsilon(W))$ *est un isomorphisme pour* V *et* W *des objets de* $\mathcal{T}_q$.

Démonstration. 1. Surjectivité de f_W

La surjectivité de f_W est donnée par la proposition 2.5.10.

2. Injectivité de f_W

La transformation naturelle f est induite par la transformation naturelle

$$\mathrm{Hom}^{(0)}_{\mathcal{T}_q}(V,-) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}^f}(\epsilon(V),\epsilon(-))$$

en considérant les espaces vectoriels librement engendrés par ces ensembles. Donc, f est injective si et seulement si cette transformation naturelle est injective. Par conséquent, il suffit de vérifier que pour $T = [V \xrightarrow{\alpha} W\perp W' \xleftarrow{i_W} W]$ et $T' = [V \xrightarrow{\alpha'} W\perp W'' \xleftarrow{i'_W} W]$ deux générateurs de $P_V^{(0)}(W)$ tels que

$$p_W \circ \mathcal{O}(\alpha) = p'_W \circ \mathcal{O}(\alpha') \tag{5.1}$$

on a $T = T'$. Soit $\{a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n\}$ une base symplectique de V. On déduit de 5.1 que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ on a :

$$\alpha(a_i) = w_i + w'_i,\ \alpha(b_i) = x_i + x'_i \tag{5.2}$$

et

$$\alpha'(a_i) = w_i + w''_i,\ \alpha'(b_i) = x_i + x''_i \tag{5.3}$$

où $\{w'_1, x'_1, \ldots, w'_n, x'_n\}$ et $\{w''_1, x''_1, \ldots, w''_n, x''_n\}$ sont deux familles libres d'après le lemme 5.2.2, puisque les triplets sont de rang nul.

On note $\underline{W'} = \mathrm{Vect}(w'_1, x'_1, \ldots, w'_n, x'_n)$ (respectivement $\underline{W''} = \mathrm{Vect}(w''_1, x''_1, \ldots, w''_n, x''_n)$) le sous-espace quadratique éventuellement dégénéré, de W' (respectivement W'') et on définit l'application $\underline{f} : \underline{W'} \to \underline{W''}$ par $\underline{f}(w'_i) = w''_i$ et $\underline{f}(x'_i) = x''_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Etant donné que α et α' conservent la forme quadratique, on déduit des relations 5.2 et 5.3 que $\underline{f}$ conserve la forme quadratique. On peut donc appliquer le lemme 1.1.16 à l'espace non dégénéré $W'\perp W''$ qui fournit un morphisme $f : W'\perp W'' \to W'\perp W''$ de $\mathcal{E}_q$ et dont la restriction à $\underline{W'}$ coïncide avec $\underline{f}$. On en déduit la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & W \arrow[d, hook, "i_W"] \arrow[ddr, hook, bend left, "i'_W"] & \\
V \arrow[r, "\alpha"] \arrow[drr, "\alpha'"'] & W\perp(W'\perp W'') \arrow[dr, "\mathrm{Id}\perp f"] & \\
 & & W\perp(W'\perp W'')
\end{tikzcd}$$

dont on déduit l'égalité $T = T'$ étant donné que, par inclusion, on a

$$T = [V \xrightarrow{\alpha} W\perp W' \xleftarrow{i_W} W] = [V \xrightarrow{\alpha} W\perp W'\perp W'' \xleftarrow{i_W} W]$$

et

$$T' = [V \xrightarrow{\alpha'} W\perp W'' \xleftarrow{i'_W} W] = [V \xrightarrow{\alpha'} W\perp W'\perp W'' \xleftarrow{i'_W} W].$$

□

Notation 5.2.6. Dans la suite, pour V et W deux objets de $\mathcal{E}_q$, et f un morphisme de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}^f}(\epsilon(V), \epsilon(W))$, on notera t_f le triplet de $\mathrm{Hom}^{(0)}(V, W)$ qui lui correspond. Dans la suite, on notera encore t_f le générateur canonique de $P_V^{(0)}(W)$ obtenu à partir de t_f.

On déduit du point 1 du théorème 5.2.1 le corollaire suivant.

Corollaire 5.2.7. *Pour V, W et X des objets de $\mathcal{E}_q$, $f : \epsilon(W) \to \epsilon(X)$ et $g : \epsilon(V) \to \epsilon(W)$ des morphismes de $\mathcal{E}^f$, on a :*

$$t_f \circ t_g = t_{f \circ g}$$

où t_f, t_g et $t_{f\circ g}$ sont les triplets de, respectivement, $P_W^{(0)}(X)$, $P_V^{(0)}(W)$ et $P_V^{(0)}(X)$ associés aux applications linéaires : f, g et $f \circ g$.

On peut reformuler ce résultat en terme d'idempotent de l'anneau d'endomorphismes $\mathrm{End}(P_V)$, pour obtenir la proposition suivante.

Proposition 5.2.8. *Le triplet $t_{\mathrm{Id_V}}$ est un idempotent de $\mathrm{End}(P_V)$ tel que $P_V.t_{\mathrm{Id_V}} = P_V^{(0)}$.*

Démonstration. Le triplet t_{Id} est un idempotent de $\mathrm{End}(P_V)$ par le corollaire 5.2.7. On a clairement $P_V.t_{\mathrm{Id}} \subset P_V^{(0)}$ par définition de la filtration et, pour tout triplet t_f de $P_V^{(0)}$, on a $t_f = t_f \circ t_{\mathrm{Id}}$, d'où l'égalité. □

Dans la suite, afin d'alléger les notations, l'idempotent $t_{\mathrm{Id_V}}$ sera noté e_V.

5.2.2 Propriétés de l'idempotent e_V

L'idempotent e_V joue un rôle fondamental dans la démonstration du fait que $\iota(\mathcal{F})$ est une sous-catégorie épaisse de $\mathcal{F}_{quad}$, donnée à la section suivante. Pour cela, quelques résultats complémentaires concernant ces idempotents seront nécessaires. Cette section a pour vocation de donner ces propriétés.

On rappelle la proposition suivante qui résulte de la combinaison des propositions 5.2.5 et 5.2.8.

Proposition 5.2.9. *Soit V un objet de $\mathcal{T}_q$, il existe un unique endomorphisme e_V de $\mathrm{End}_{\mathcal{T}_q}(V)$ tel que :*

1. *l'endomorphisme e_V est de rang nul ;*
2. *$\epsilon(e_V) = \mathrm{Id}_{\epsilon(V)}$ où $\epsilon : \mathcal{T}_q \to \mathcal{E}^f$ est le foncteur défini à la proposition 2.5.6.*

En particulier, e_V est un idempotent de $\mathrm{End}_{\mathcal{T}_q}(V)$.

On déduit, de la proposition précédente, le corollaire :

Corollaire 5.2.10. *Pour V et W deux objets de $\mathcal{T}_q$, on a :*

$$e_{V\perp W} = e_V \perp e_W$$

où $\perp : \mathcal{T}_q \times \mathcal{T}_q \to \mathcal{T}_q$ est le foncteur somme orthogonale défini à la proposition 2.2.22.

Démonstration. On vérifie que l'endomorphisme $e_V \perp e_W$ vérifie les deux propriétés de la proposition 5.2.9.

□

On a le lemme fondamental suivant, qui nous sera utile par la suite. On rappelle que $\iota(P^{\mathcal{F}}_{\epsilon(V)}) \simeq P_V^{(0)}$ d'après le théorème 5.2.1.

Lemme 5.2.11. *Soient V et W des objets de $\mathcal{T}_q$, le foncteur ι induit un isomorphisme :*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(P^{\mathcal{F}}_{\epsilon(V)}, P^{\mathcal{F}}_{\epsilon(W)}) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_{quad}}(P_V^{(0)}, P_W^{(0)}),$$

où $\epsilon : \mathcal{T}_q \to \mathcal{E}$ est le foncteur défini à la proposition 2.5.6.

Démonstration. On a les suites d'égalités :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_{quad}}(P_V^{(0)}, P_W^{(0)}) = P_W^{(0)}(e_V)P_W^{(0)}(V) = P_W^{(0)}(V)$$
$$= \iota(P^{\mathcal{F}}_{\epsilon(W)})(V) = P^{\mathcal{F}}_{\epsilon(W)}(\epsilon(V)) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(P^{\mathcal{F}}_{\epsilon(V)}, P^{\mathcal{F}}_{\epsilon(W)})$$

□

5.2.3 La catégorie $\iota(\mathcal{F})$ est une sous-catégorie épaisse de $\mathcal{F}_{quad}$

Le but de cette section est de montrer le résultat suivant

Théorème 5.2.12. *La catégorie $\iota(\mathcal{F})$ est une sous-catégorie épaisse de $\mathcal{F}_{quad}$ où, $\iota : \mathcal{F} \to \mathcal{F}_{quad}$ est le foncteur défini à la proposition 3.2.5.*

Démonstration.

– Soit $F^{\mathcal{F}}$ un objet de $\mathcal{F}$ et

$$0 \to G \to \iota(F^{\mathcal{F}}) \to H \to 0,$$

une suite exacte courte dans $\mathcal{F}_{quad}$. En utilisant la catégorie $\mathcal{F}'$ introduite en 3.2.7 on peut appliquer le deuxième point de la proposition A.0.4, dont on déduit que : $G \simeq \iota(G^{\mathcal{F}})$ par un argument similaire à celui utilisé à la section 3.2.2. De même, on montre que $H \simeq \iota(H^{\mathcal{F}})$.

– Soient $G^{\mathcal{F}}$ et $H^{\mathcal{F}}$ deux objets de $\mathcal{F}$, on note $G = \iota(G^{\mathcal{F}})$ et $H = \iota(H^{\mathcal{F}})$. Pour une suite exacte courte

$$0 \to G \to F \to H \to 0,$$

on souhaite montrer qu'il existe un foncteur $F^{\mathcal{F}}$ de $\mathcal{F}$ vérifiant $F = \iota(F^{\mathcal{F}})$.
Soient

$$\ldots \to P_1 \to P_0 \to G^{\mathcal{F}} \to 0$$

et

$$\ldots \to Q_1 \to Q_0 \to H^{\mathcal{F}} \to 0$$

des résolutions projectives de $G^{\mathcal{F}}$ et $H^{\mathcal{F}}$ dans $\mathcal{F}$, on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & \cdots \arrow[d] & \cdots \arrow[d] & \cdots \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \iota(P_1) \arrow[r] \arrow[d] & \iota(P_1) \oplus \iota(Q_1) \arrow[r] \arrow[d] & \iota(Q_1) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \iota(P_0) \arrow[r] \arrow[d] & \iota(P_0) \oplus \iota(Q_0) \arrow[r] \arrow[d] & \iota(Q_0) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & G \arrow[r] & F \arrow[r] & H \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

dans lequel les colonnes sont des résolutions projectives dans $\mathcal{F}_{quad}$, d'après le lemme du "fer à cheval". Or, d'après le lemme 5.2.11 le morphisme $\iota(P_1) \oplus \iota(Q_1) \to \iota(P_0) \oplus \iota(Q_0)$ est induit par un morphisme de $\mathcal{F}$ noté f. On en déduit qu'il existe un diagramme commutatif, dont les lignes sont exactes :

$$\begin{tikzcd}
\iota(P_1) \oplus \iota(Q_1) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & \iota(P_0) \oplus \iota(Q_0) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & \iota(\mathrm{Coker}(f)) \arrow[r] & 0 \\
\iota(P_1) \oplus \iota(Q_1) \arrow[r] & \iota(P_0) \oplus \iota(Q_0) \arrow[r] & F \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

d'où $F \cong \iota(\mathrm{Coker}(f))$.

□

Grâce à ce théorème, on déduit de la proposition 5.2.9 et du lemme 5.2.11, la caractérisation suivante des foncteurs simples de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}_{quad}$ qui nous sera très utile dans le chapitre 8 concernant l'étude des foncteurs polynomiaux de $\mathcal{F}_{quad}$.

Proposition 5.2.13. *1. Soit F un foncteur de $\mathcal{F}_{quad}$, alors F est dans l'image du foncteur $\iota : \mathcal{F} \to \mathcal{F}_{quad}$ si et seulement si, pour tout objet V de $\mathcal{T}_q$,*

$$F(e_V)F(V) = F(V).$$

2. Soit S un foncteur simple de $\mathcal{F}_{quad}$, alors S est dans l'image du foncteur $\iota : \mathcal{F} \to \mathcal{F}_{quad}$ si et seulement s'il existe un objet W de $\mathcal{T}_q$ tel que

$$S(e_W)S(W) \neq 0.$$

Démonstration. Le sens direct du premier point découle du fait que, pour un foncteur F dans l'image du foncteur ι,

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_{quad}}(P_V^{(0)}, F) = F(e_V)F(V) = F(V).$$

Pour la réciproque, la condition $F(e_V)F(V) = F(V)$ entraîne que F est quotient d'une somme de projectifs de la forme $P_V^{(0)}$. La catégorie $\iota(\mathcal{F})$ étant épaisse dans $\mathcal{F}_{quad}$ d'après le théorème précédent, on obtient le résultat.

Pour le second point, il suffit de remarquer que, si $S(e_W)S(W) \neq 0$, on a $\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_{quad}}(P_W^{(0)}, S) \neq 0$ et donc S est un quotient de $P_W^{(0)}$ par simplicité de S. Le lemme 5.2.11 entraîne qu'il existe une correspondance bijective entre les facteurs indécomposables de $P_V^{(0)}$ et ceux de $P^{\mathcal{F}}_{\epsilon(V)}$. On en déduit que les quotients simples de $P_V^{(0)}$ proviennent de $\mathcal{F}$. Par conséquent, S est dans l'image du foncteur ι. □

5.3 Le quotient $P_V/P_V^{(\dim(V)-1)}$

Le but de cette section est de montrer le résultat suivant :

Proposition 5.3.1. *Pour V un objet de $\mathcal{T}_q$, on a une équivalence naturelle de foncteurs :*

$$P_V/P_V^{(\dim(V)-1)} \simeq \mathrm{Iso}_V.$$

Pour cela, on commence par montrer, pour la catégorie $\mathcal{F}_{quad}$, le résultat analogue à la proposition 4.4.5 dans la catégorie $\mathcal{F}_{iso}$.

Proposition 5.3.2. *Le foncteur Iso_V de $\mathcal{F}_{quad}$ est quotient du foncteur $P_V = \mathbb{F}_2[\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}_q}(V, -)]$.*

Démonstration. Par le lemme de Yoneda, on a $\mathrm{Hom}(P_V, \mathrm{Iso}_V) = \mathrm{Iso}_V(V) = \mathbb{F}_2[O(V)]$.

Pour un générateur $[V \xrightarrow{f} V]$ de $\mathrm{Iso}_V(V)$, la transformation naturelle $P_V \xrightarrow{\sigma_f} \mathrm{Iso}_V$ est surjective. En effet, on vérifie aisément qu'un générateur $[V \xrightarrow{g} W]$ de $\mathrm{Iso}_V(W)$ a pour antécédent, dans $P_V(W)$ par $(\sigma_f)_W$, le triplet $[V \xrightarrow{g \circ f^{-1}} W \xleftarrow{\mathrm{Id}} W]$. □

On montre alors le résultat formel qui suit.

Proposition 5.3.3. *Le foncteur Iso_V de $\mathcal{F}_{quad}$ est quotient du foncteur $P_V/P_V^{(\dim(V)-1)}$.*

Démonstration. Par la définition de la filtration et par la proposition précédente, on a le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P_V^{(\dim(V)-1)} \arrow[r, "i"] & P_V \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads, "\sigma_{\mathrm{Id}}"] & P_V/P_V^{(\dim(V)-1)} \arrow[r] & 0 \\
& & \mathrm{Iso}_V & &
\end{tikzcd}$$

où i est l'inclusion canonique de $P_V^{(\dim(V)-1)}$ dans P_V. Par définition de σ_{Id}, on a $\sigma_{\mathrm{Id}} \circ i = 0$, dont on déduit la transformation naturelle :

$$\tau : P_V/P_V^{(\dim(V)-1)} \to \mathrm{Iso}_V.$$

□

Nous allons montrer dans la suite que cette transformation naturelle est un isomorphisme. Pour cela, il suffit de montrer le résultat suivant.

Proposition 5.3.4. *Pour V et W deux objets de $\mathcal{T}_q$, on a un isomorphisme*

$$(P_V/P_V^{(\dim(V)-1)})(W) \simeq \mathrm{Iso}_V(W).$$

Pour démontrer ce résultat nous aurons besoin du lemme :

Lemme 5.3.5. *Pout tout générateur $T = [V \xrightarrow{f} W \perp W' \hookleftarrow W]$ de $(P_V/P_V^{(\dim(V)-1)})(W)$, on a :*

$$T = [V \xrightarrow{f} W \xleftarrow{\mathrm{Id}} W].$$

Démonstration. Par définition de la filtration, pour V et W deux objets de $\mathcal{T}_q$, l'espace $(P_V/P_V^{(\dim(V)-1)})(W)$ est engendré par les triplets du type $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}_q}^{[\dim(V)]}(V,W)]$ où $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}_q}^{[\dim(V)]}(V,W)$ désigne l'ensemble des triplets de V dans W dont le produit fibré D dans $\mathcal{E}_q^{\deg}$ est un espace quadratique de dimension égale à la dimension de V. On déduit alors de l'existence d'un monomorphisme de D dans V et de l'égalité des dimensions, que D et V sont isométriques.

Par conséquent, pour le triplet T de l'énoncé, on a, par définition du produit fibré, $f(V) \subset W$ et donc $T = [V \xrightarrow{f} W \xleftarrow{\mathrm{Id}} W]$, par la relation d'équivalence définie sur les morphismes de $\mathcal{T}_q$. □

Démonstration de la proposition 5.3.4. La transformation naturelle τ obtenue dans la démonstration de la proposition 5.3.3 définit, pour W un objet de $\mathcal{T}_q$, l'application linéaire

$$\begin{array}{rccc} \tau_W : & (P_V/P_V^{(\dim(V)-1)})(W) & \to & \mathrm{Iso}_V(W) \\ & T = [V \xrightarrow{f} W \xleftarrow{\mathrm{Id}} W] & \longmapsto & [V \xrightarrow{f} W] \end{array}$$

qui est un isomorphime d'après le lemme 5.3.5. Par conséquent, τ est une équivalence naturelle. □

Chapitre 6

Les foncteurs mixtes

On introduit dans ce chapitre une nouvelle famille de foncteurs originaux de $\mathcal{F}_{quad}$, appelés foncteurs mixtes. On étudiera en détails certains de ces foncteurs, à savoir les foncteurs $\mathrm{Mix}_{0,1}$ et $\mathrm{Mix}_{1,1}$, dont nous aurons besoin au chapitre 7 pour étudier les projectifs P_{H_0} et P_{H_1}. Nous verrons en particulier que ces foncteurs $\mathrm{Mix}_{0,1}$ et $\mathrm{Mix}_{1,1}$ sont infinis et nous en donnerons les facteurs de composition.

6.1 Définition des foncteurs mixtes

Notation 6.1.1. Dans le reste de ce chapitre, la forme bilinéaire associée à un espace quadratique V sera notée B_V.

On commence par définir l'ensemble suivant :

Définition 6.1.2. Soient D un objet de $\mathcal{E}_q^{\deg}$, η un élement du dual D^* et V un objet de $\mathcal{T}_q$, l'ensemble $M_{D,\eta}^V$ est l'ensemble des couples

$$([h], v)$$

tels que :

1. $[h]$ est un générateur canonique de $\mathrm{Iso}_D(V)$;
2. v est un élément de V tel que la forme linéaire $B_{h,v} : D \to \mathbb{F}_2$ définie par $B_{h,v}(d) = B_V(v, h(d))$ vérifie : $B_{h,v} = \eta$.

Ceci nous permet de définir les foncteurs mixtes dans la proposition suivante :

Proposition 6.1.3. *Soient D un objet de $\mathcal{E}_q^{\deg}$ et η un élement du dual D^* de l'espace sous-jacent à D, les conditions suivantes définissent un objet $\mathrm{Mix}_{D,\eta} : \mathcal{T}_q \to \mathcal{E}$ de $\mathcal{F}_{quad}$.*

1. *Sur les objets :*
$$\mathrm{Mix}_{D,\eta}(V) = \mathbb{F}_2[M_{D,\eta}^V]$$
pour V un objet de $\mathcal{T}_q$;
2. *sur les morphismes :*
pour un morphisme $[V \xrightarrow{f} X \xleftarrow{g} W]$ de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}_q}(V, W)$ et un élément $[h]$ de $\mathrm{Iso}_D(V)$, on considère le diagramme suivant dans $\mathcal{E}_q^{\deg}$:

$$\begin{tikzcd} & & W \arrow[d, "g"] \\ D \arrow[r, "h"'] & V \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

– *si le produit fibré dans $\mathcal{E}_q^{\deg}$ de ce diagramme est D, autrement dit si $f \circ h(D) \subset g(W)$, ceci fournit un unique morphisme de D dans W de $\mathcal{E}_q^{\deg}$, noté h' tel que $f \circ h = g \circ h'$.*

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "h'"] \arrow[d, "\mathrm{Id}"'] & W \arrow[d, "g"] \\ D \arrow[r, "h"'] & V \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

Dans ce cas, on pose :

$$\mathrm{Mix}_{D,\eta}([V \xrightarrow{f} X \xleftarrow{g} W])([([h], v)] = [([h'], g^! \circ f(v))]$$

où $g^!$ est l'inverse à gauche de g défini en 2.5.3 ;

– *sinon, on pose :*

$$\mathrm{Mix}_{D,\eta}([V \xrightarrow{f} X \xleftarrow{g} W])([h]) = 0.$$

Démonstration. On commence par vérifier que les foncteurs mixtes sont bien définis, c'est à dire que, dans le cas où le produit fibré du diagramme considéré dans l'énoncé est D, le couple $([h'], g^! \circ f(v))$ est un élément de $M_{D,\eta}^W$. Par construction, $[h']$ est un générateur canonique de $\mathrm{Iso}_D(W)$. Pour un élément d de D, on a :

$$B_V(v, h(d)) = B_X(f(v), f \circ h(d)).$$

Comme le produit fibré du diagramme de l'énoncé est D, on a

$$f \circ h(D) \subset g(W)$$

par conséquent

$$B_V(v, h(d)) = B_W(g^! \circ f(v), g^! \circ f \circ h(d)) = B_W(g^! \circ f(v), h'(d)).$$

D'où

$$\text{si } B_{h,v} = \eta \text{ alors } B_{h',g^! \circ f(v)} = \eta$$

en conséquence de quoi $([h'], g^! \circ f(v))$ est un élément de $M_{D,\eta}^W$.

On vérifie que $\mathrm{Mix}_{D,\eta}$ est bien défini sur les morphismes de $\mathcal{T}_q$. Pour montrer que $\mathrm{Mix}_{D,\eta}$ est un objet de $\mathcal{F}_{quad}$, d'après le corollaire 2.2.11, il suffit de vérifier les points suivants :

1. $\mathrm{Mix}_{D,\eta} \circ L : \mathcal{E}_q \to \mathcal{A}$ est un foncteur.
2. $\mathrm{Mix}_{D,\eta} \circ R : {\mathcal{E}_q}^{op} \to \mathcal{A}$ est un foncteur.
3. $\mathrm{Mix}_{D,\eta}(L(f)) \circ \mathrm{Mix}_{D,\eta}(R(g)) = \mathrm{Mix}_{D,\eta}(L(f) \circ R(g))$.

De même que pour les foncteurs isotropes, les deux premiers points sont clairs. Pour le dernier point, on note $[([h], w)]$ un générateur canonique de $\mathrm{Mix}_{D,\eta}(W, q_W)$. On a alors, d'une part :

$$\mathrm{Mix}_{D,\eta}([W \xrightarrow{\mathrm{Id}} W \xleftarrow{g} V])([([h], w)]) = \begin{cases} [([h'], g^!(w))] & \text{si } D \underset{W}{\times} V = D \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où h' est défini par le diagramme :

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "h'"] \arrow[d, "\mathrm{Id}"'] & V \arrow[d, "g"] \\ D \arrow[r, "h"'] & W \end{tikzcd}$$

d'où :

$$\mathrm{Mix}_{D,\eta}([V \xrightarrow{f} X \xleftarrow{\mathrm{Id}} X]) \circ \mathrm{Mix}_{D,\eta}([W \xrightarrow{\mathrm{Id}} W \xleftarrow{g} V])([([h],w)]) = \begin{cases} [([f\circ h'], f\circ g^{!}(w))] & \text{si } D \underset{W}{\times} V = D \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

d'autre part :

$$[V \xrightarrow{f} X \xleftarrow{\mathrm{Id}} X] \circ [W \xrightarrow{\mathrm{Id}} W \xleftarrow{g} V] = [W \xrightarrow{f'} W \underset{V}{\perp} X \xleftarrow{g'} X]$$

où f' et g' sont définis par le diagramme en escalier :

$$\begin{tikzcd}
 & & X \arrow[d, "\mathrm{Id}"] \\
 & V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d, "g'"] \\
W \arrow[r, "\mathrm{Id}"'] & W \arrow[r, "f'"'] & W \underset{V}{\perp} X
\end{tikzcd}$$

D'où

$$\mathrm{Mix}_{D,\eta}([V \xrightarrow{f} X \xleftarrow{\mathrm{Id}} X] \circ [W \xrightarrow{\mathrm{Id}} W \xleftarrow{g} V])([([h],w)]) \quad = \begin{cases} [([k'], g'^{!}\circ f'(w))] & \text{si } D \underset{W \underset{V}{\perp} X}{\times} X = D \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où k' est défini par le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "k'"] \arrow[d, "\mathrm{Id}"'] & X \arrow[d, "g'"] \\
D \arrow[r, "f'\circ h"'] & W \underset{V}{\perp} X
\end{tikzcd}$$

Il reste à vérifier que les deux valeurs obtenues sont identiques. Pour cela, on regarde le diagramme de produit fibré précédent comme la succession de deux produits fibrés et on applique les propriétés du produit fibré et la proposition 1.3.21 reliant la pseudo-somme amalgamée dans $\mathcal{E}_q$ au produit fibré dans $\mathcal{E}_q^{\deg}$, ce qui donne le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
D \underset{W}{\times} V \arrow[r, "h'"] \arrow[d, "i"'] & V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"] & X \arrow[d, "g'"] \\
D \arrow[r, "h"'] & W \arrow[r, "f'"'] & W \underset{V}{\perp} X
\end{tikzcd} .$$

où i est l'inclusion canonique. On en déduit $D \underset{W}{\times} V = D \underset{W \underset{V}{\perp} X}{\times} X$ et, dans le cas où $D \underset{W}{\times} V = D \underset{W \underset{V}{\perp} X}{\times} X = D$, on a $k' = f \circ h'$. De plus, $g'^{!} \circ f' = f \circ g^{!}$, étant donné que le foncteur $\epsilon : \mathcal{T}_q \to \mathcal{E}^f$ est un foncteur de $\mathcal{F}_{quad}$ d'après la proposition 2.5.6.

□

Remarque 6.1.4. Une première justification à l'appellation : foncteurs mixtes, choisie pour ces foncteurs, réside dans le fait que, pour un objet V de $\mathcal{T}_q$, la définition de $\mathrm{Mix}_{D,\eta}(V)$ utilise, à la fois, la structure d' espace quadratique de V, par le biais de l'espace quadratique D, mais également de celle d'espace muni d'une forme bilinéaire, par le biais de l'élément η de D^*.

Remarque 6.1.5. Dans la définition précédente des foncteurs mixtes, on n'impose pas de condition d'indépendance linéaire entre $h(D)$ et v. On peut néanmoins, construire d'autres foncteurs du même type en imposant cette condition, ce qui fournit des foncteurs quotients des foncteurs mixtes définis ci-dessus. Ces foncteurs pourront donc être utiles dans un travail ultérieur pour décomposer les foncteurs mixtes.

Dans la suite de ce chapitre, on ne s'intéressera qu'aux foncteurs $\mathrm{Mix}_{D,\eta}$, pour D un espace quadratique de dimension un.

6.2 Quelques généralités sur les foncteurs $\mathrm{Mix}_{D,\eta}$ tels que $\dim(D) = 1$

Dans le cas où l'espace quadratique D est de dimension un, l'espace dual D^* est également de dimension un et possède donc deux éléments : l'élément nul qui sera noté 0 et un élément non trivial qui sera noté 1.

On note dans le reste de ce chapitre, $\mathrm{Mix}_{\alpha,\beta}$ le foncteur $\mathrm{Mix}_{D,\eta}$ tel que $D \simeq (x, \alpha)$ et $\eta = \beta$.

D'après la définition générale des foncteurs mixtes donnée à la section précédente, il existe quatre foncteurs de $\mathcal{F}_{quad}$ tels que $\dim(D) = 1$, notés respectivement

$$\mathrm{Mix}_{0,0},\ \mathrm{Mix}_{0,1},\ \mathrm{Mix}_{1,0},\ \mathrm{Mix}_{1,1}.$$

On a le résultat suivant :

Lemme 6.2.1. *Soit V un objet de $\mathcal{T}_q$, si $[([h], v)]$ est un générateur canonique de $\mathrm{Mix}_{\alpha,\beta}(V)$, alors $[([h], v + h(x))]$ est un générateur canonique de $\mathrm{Mix}_{\alpha,\beta}(V)$, où x est le générateur de l'espace D.*

Démonstration. Ce résultat découle directement du fait que la forme bilinéaire est alternée. □

Afin de mettre en évidence cette symétrie dans l'ensemble des générateurs canoniques de $\mathrm{Mix}_{\alpha,\beta}(V)$ et de rendre plus claire une action du groupe S_2, on utilise, dans la suite, une représentation des générateurs canoniques de $\mathrm{Mix}_{\alpha,\beta}(V)$ différente de celle donnée dans la définition générale.

Définition 6.2.2. Pour $D \simeq (x, \alpha)$ et $\eta = \beta$, l'ensemble $N^V_{D,\eta}$ est l'ensemble des couples

$$(v_1, v_2)$$

de V, tels que :

1. $q(v_1 + v_2) = \alpha$;
2. $B(v_1, v_2) = \beta$.

On a le résultat suivant :

Lemme 6.2.3. *Pour $D \simeq (x, \alpha)$ et $\eta = \beta$, les ensembles $M^V_{D,\eta}$ et $N^V_{D,\eta}$ sont en bijection.*

Démonstration. On a la bijection d'ensemble suivante

$$\begin{array}{rccc} f_V : & M^V_{D,\eta} & \to & N^V_{D,\eta} \\ & ([h], v) & \mapsto & (h(x) + v, v) \end{array}$$

d'inverse

$$\begin{array}{rccc} f_V^{-1} : & N^V_{D,\eta} & \to & M^V_{D,\eta} \\ & (v_1, v_2) & \mapsto & ([k], v_2) \end{array}$$

où k est le monomorphisme de D dans V défini par $k(x) = v_1 + v_2$. □

Notation 6.2.4. Dans la suite, un générateur de $\mathrm{Mix}_{\alpha,\beta}(V)$ sera représenté par l'élément qui lui correspond par la bijection f_V.

Ainsi, le générateur $[([h], v)]$ de $\mathrm{Mix}_{\alpha,\beta}(V)$ est représenté par l'élément $[(h(x)+v, v)]$ de $\mathbb{F}_2[N^V_{D,\eta}]$ et l'élément $[([h], v + h(x))]$, qui est également un générateur canonique de $\mathrm{Mix}_{\alpha,\beta}(V)$ d'après le lemme 6.2.1, sera représenté par l'élément $[(v, v + h(x))]$.

Remarque 6.2.5. Dans le cas où $D \simeq (x, \alpha)$, le produit fibré du diagramme

$$\begin{tikzcd} & & W \arrow[d, "g"] \\ (x,\alpha) \arrow[r, "h"'] & V \arrow[r, "f"'] & X \simeq W \perp L \end{tikzcd}$$

considéré à la proposition 6.1.3, est isométrique à (x, α) si et seulement si $f \circ h(x) \in W$. Par conséquent, pour la représentation d'un générateur $[([h], v)]$ de $\mathrm{Mix}_{\alpha,\beta}(V)$ sous la forme

$$[(v_1, v_2)] := [(h(x) + v, v)],$$

la définition des foncteurs mixtes sur les morphismes est donnée par :

$$\mathrm{Mix}_{D,\eta}([V \xrightarrow{f} X \simeq W \perp L \xleftarrow{g} W])[(v_1, v_2)] = \begin{cases} [(g^! \circ f(v_1), g^! \circ f(v_2)] & \text{si } f(v_1 + v_2) \in W \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où $g^!$ est l'inverse à gauche de g défini en 2.5.3.

On a le lemme suivant :

Lemme 6.2.6. *Le groupe symétrique S_2 agit sur le foncteur* $\mathrm{Mix}_{\alpha,\beta}$.

Démonstration. Soit V un objet de $\mathcal{T}_q$, on définit l'action de $S_2 = \{\mathrm{Id}, \tau\}$ sur $\mathrm{Mix}_{\alpha,\beta}(V)$ par :

$$\tau.[(v_1, v_2)] = [(v_2, v_1)]$$

pour τ l'élément d'ordre deux de S_2 et $[(v_1, v_2)]$ un générateur canonique de $\mathrm{Mix}_{\alpha,\beta}(V)$. On vérifie que ceci définit bien une action.

Il nous reste à vérifier que les applications linéaires τ_V

$$\begin{array}{rccc} \tau_V : & \mathrm{Mix}_{\alpha,\beta}(V) & \to & \mathrm{Mix}_{\alpha,\beta}(V) \\ & [(v_1, v_2)] & \mapsto & [(v_2, v_1)] \end{array}$$

définissent une transformation naturelle, c'est à dire que pour un triplet $T = [V \xrightarrow{\varphi} W \perp L \xleftarrow{i_W} W]$, on a la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Mix}_{\alpha,\beta}(V) \arrow[r, "\tau_V"] \arrow[d, "\mathrm{Mix}_{\alpha,\beta}(T)"'] & \mathrm{Mix}_{\alpha,\beta}(V) \arrow[d, "\mathrm{Mix}_{\alpha,\beta}(T)"] \\ \mathrm{Mix}_{\alpha,\beta}(W) \arrow[r, "\tau_W"] & \mathrm{Mix}_{\alpha,\beta}(W). \end{tikzcd}$$

On a :

$$\begin{aligned} &\mathrm{Mix}_{\alpha,\beta}(T) \circ \tau_V[(v_1, v_2)] \\ &= \mathrm{Mix}_{\alpha,\beta}(T)([(v_2, v_1)]) \\ &= \begin{cases} [(p_W \circ (\varphi(v_2)), p_W \circ (\varphi(v_1))] & \text{si } \varphi(v_1 + v_2) \in W \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} &\tau_W \circ \mathrm{Mix}_{\alpha,\beta}(T)([(v_1, v_2)]) \\ &= \tau_W \begin{cases} [(p_W \circ (\varphi(v_1)), p_W \circ (\varphi(v_2))] & \text{si } \varphi(v_1 + v_2) \in W \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ &= \begin{cases} [(p_W \circ (\varphi(v_2)), p_W \circ (\varphi(v_1))] & \text{si } \varphi(v_1 + v_2) \in W \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

ce qui prouve la naturalité de τ.

□

Ce lemme nous permet de définir un foncteur de $\mathcal{F}_{quad}$ en considérant les invariants par cette action.

Définition 6.2.7. Le foncteur $\Sigma_{\alpha,\beta}$ de $\mathcal{F}_{quad}$ est obtenu en considérant les invariants de $\mathrm{Mix}_{\alpha,\beta}(V)$ par l'action du groupe symétrique S_2.

$$\begin{array}{rccc} \Sigma_{\alpha,\beta}: & \mathcal{T}_q & \to & \mathcal{E} \\ & V & \longmapsto & (\mathrm{Mix}_{\alpha,\beta}(V))^{S_2}. \end{array}$$

On s'intéressera plus particulièrement, dans la suite, aux foncteurs $\mathrm{Mix}_{0,1}$ et $\mathrm{Mix}_{1,1}$, qui sont les deux foncteurs qui apparaîtront au chapitre III dans les décompositions des projectifs P_{H_0} et P_{H_1} données au théorème 7.3.4.

On a le lemme suivant :

Lemme 6.2.8. *Soient V un objet de $\mathcal{T}_q$ et $[(v_1, v_2)]$ un générateur canonique de $\mathrm{Mix}_{\alpha,1}(V)$, alors la famille $\{v_1, v_2\}$ de V est libre.*

Démonstration. Pour une combinaison linéaire nulle de v_1 et v_2 :

$$\lambda_1.v_1 + \lambda_2.v_2 = 0,$$

on a

$$B(v_1, \lambda_1.v_1 + \lambda_2.v_2) = \lambda_2 = 0$$

et

$$B(v_2, \lambda_1.v_1 + \lambda_2.v_2) = \lambda_1 = 0$$

puisque la forme bilinéaire B est alternée. □

On en déduit la proposition suivante :

Proposition 6.2.9. *Soit V un objet de $\mathcal{T}_q$, l'action de S_2 sur l'ensemble des générateurs canoniques de $\mathrm{Mix}_{0,1}(V)$ (respectivement $\mathrm{Mix}_{1,1}(V)$) est libre.*

Démonstration. Pour un générateur $[(v_1, v_2)]$ de $\mathrm{Mix}_{\alpha,1}(V)$, comme la famille $\{v_1, v_2\}$ de V est libre d'après le lemme 6.2.8, on a $v_1 \neq v_2$, ce qui prouve que l'action de S_2 est libre.

□

Remarque 6.2.10. On déduit du lemme 6.2.8 que les deux foncteurs $\mathrm{Mix}_{\alpha,1}(V)$, coïncident avec ceux qui leur correspondent dans la famille de foncteurs évoquée à la remarque 6.1.5.

On donne le résultat général suivant concernant les actions libres du groupe S_2.

Lemme 6.2.11. *Si A est un ensemble fini muni d'une action libre de S_2 alors, il existe une suite exacte courte :*

$$0 \to \mathbb{F}_2[A]^{S_2} \to \mathbb{F}_2[A] \to \mathbb{F}_2[A]^{S_2} \to 0.$$

Démonstration. Par l'action de S_2 sur A, on a l'existence de l'inclusion canonique des invariants dans $\mathbb{F}_2[A]$:

$$\mathbb{F}_2[A]^{S_2} \overset{f}{\hookrightarrow} \mathbb{F}_2[A].$$

La norme $\mathbb{F}_2[A] \xrightarrow{1+\tau} \mathbb{F}_2[A]$ induit une application linéaire :

$$\mathbb{F}_2[A] \xrightarrow{g} \mathbb{F}_2[A]^{S_2}$$

telle que la composée

$$\mathbb{F}_2[A]^{S_2} \overset{f}{\hookrightarrow} \mathbb{F}_2[A] \xrightarrow{g} \mathbb{F}_2[A]^{S_2}$$

est triviale. On vérifie que ceci définit une suite exacte courte. □

On en déduit la proposition suivante :

Proposition 6.2.12. *Il existe une suite exacte courte*

$$0 \to \Sigma_{\alpha,1} \to \mathrm{Mix}_{\alpha,1} \to \Sigma_{\alpha,1} \to 0. \tag{6.1}$$

Démonstration. Ce résultat découle directement de la proposition 6.2.7 et du lemme 6.2.11. □

Notation 6.2.13. On notera $[\{v_1, v_2\}]$ l'image de l'élément $[(v_1, v_2)]$ de $\mathrm{Mix}_{\alpha,1}(V)$ dans $\Sigma_{\alpha,1}(V)$.

Remarque 6.2.14. La proposition 6.2.12 n'a pas d'analogue pour les foncteurs $\mathrm{Mix}_{0,0}$ et $\mathrm{Mix}_{1,0}$ car, dans ces deux cas, l'action du groupe S_2 n'est pas libre. Néanmoins, des arguments similaires s'appliquent aux foncteurs évoqués à la remarque 6.1.5 qui correspondent aux foncteurs $\mathrm{Mix}_{0,0}$ et $\mathrm{Mix}_{1,0}$.

Remarque 6.2.15. On verra à la proposition 7.3.2, que les foncteurs $\mathrm{Mix}_{0,1}$ et $\mathrm{Mix}_{1,1}$ sont indécomposables. On en déduira que la suite exacte courte (6.1) n'est pas scindée pour les foncteurs $\mathrm{Mix}_{0,1}$ et $\mathrm{Mix}_{1,1}$.

En vue d'étudier les foncteurs $\mathrm{Mix}_{\alpha,1}$ pour $\alpha \in \{0, 1\}$ on relie, à la section suivante, le foncteur $\mathrm{Mix}_{\alpha,1}$ au foncteur $\iota(P^{\mathcal{F}}_{\mathbb{F}_2}) \otimes \mathrm{Iso}_{(x,\alpha)}$.

6.3 Etude du foncteur $\iota(P^{\mathcal{F}}_{\mathbb{F}_2}) \otimes \mathrm{Iso}_{(x,\alpha)}$

Dans cette section, on montre que le foncteur $\iota(P^{\mathcal{F}}_{\mathbb{F}_2}) \otimes \mathrm{Iso}_{(x,\alpha)}$ admet un facteur direct équivalent au foncteur $\mathrm{Mix}_{\alpha,1}$ puis, on déduit de la filtration polynomiale de la catégorie $\mathcal{F}$, une filtration du foncteur $\iota(P^{\mathcal{F}}_{\mathbb{F}_2}) \otimes \mathrm{Iso}_{(x,\alpha)}$ qui nous sera utile par la suite.

Notation 6.3.1. Afin d'alléger les notations, on écrira $P_{\mathbb{F}} \otimes \mathrm{Iso}_\alpha$ à la place de $\iota(P^{\mathcal{F}}_{\mathbb{F}_2}) \otimes \mathrm{Iso}_{(x,\alpha)}$ et Iso_α à la place de $\mathrm{Iso}_{(x,\alpha)}$.

6.3.1 Lien entre les foncteurs $P_{\mathbb{F}} \otimes \mathrm{Iso}_\alpha$ et $\mathrm{Mix}_{\alpha,1}$

On commence par définir deux sous-foncteurs de $P_{\mathbb{F}} \otimes \mathrm{Iso}_\alpha$.

Lemme 6.3.2. *1. Il existe un sous-foncteur $(P_{\mathbb{F}} \otimes \mathrm{Iso}_\alpha)^1$ de $P_{\mathbb{F}} \otimes \mathrm{Iso}_\alpha$ tel que, pour V un objet de $\mathcal{T}_q$, $(P_{\mathbb{F}} \otimes \mathrm{Iso}_\alpha)^1(V)$ est l'espace vectoriel engendré par les éléments de la forme*

$$[v] \otimes [h] \qquad \text{tels que } B(v, h(x)) = 1$$

où $[v]$ est un générateur canonique de $P_{\mathbb{F}_2}(V)$ et $[h]$ est un générateur canonique de $\mathrm{Iso}_\alpha(V)$.

2. Il existe un sous-foncteur $(P_{\mathbb{F}} \otimes \mathrm{Iso}_\alpha)^0$ de $P_{\mathbb{F}} \otimes \mathrm{Iso}_\alpha$ tel que, pour V un objet de $\mathcal{T}_q$, $(P_{\mathbb{F}} \otimes \mathrm{Iso}_\alpha)^0(V)$ est l'espace vectoriel engendré par les éléments de la forme

$$[v] \otimes [h] \qquad \text{tels que } B(v, h(x)) = 0$$

où $[v]$ est un générateur canonique de $P_{\mathbb{F}_2}(V)$ et $[h]$ est un générateur canonique de $\mathrm{Iso}_\alpha(V)$.

Démonstration. 1. Soit $[v] \otimes [h]$ un générateur de $(P_{\mathbb{F}} \otimes \mathrm{Iso}_\alpha)^1(V)$ et $T = [V \xrightarrow{\varphi} W \perp L \xleftarrow{i_W} W]$ un triplet de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}_q}(V, W)$, on note P le produit fibré de

$$(x, \alpha) \xrightarrow{\varphi \circ h} W \perp L \xleftarrow{i_W} W$$

(a) Si $P = \{0\}$
On a :

$$(P_{\mathbb{F}} \otimes \mathrm{Iso})(T)([v] \otimes [h]) = 0$$

(b) Si $P = (x, \alpha)$
On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
(x,\alpha) \arrow[r, "h'"] \arrow[d, "\mathrm{Id}"'] & W \arrow[d, hook, "i_W"] \\
(x,\alpha) \arrow[r, "\varphi\circ h"'] & W\perp L
\end{tikzcd}$$

et $\varphi \circ h(x) \in W$.
Par conséquent

$$(P_{\mathbb{F}} \otimes \mathrm{Iso})(T)([v] \otimes [h]) = [p_W \circ \varphi(v)] \otimes [h']$$

avec

$$\begin{aligned}
B(v, h(x)) &= B(\varphi(v), \varphi \circ h(x)) \\
&= B(p_W \circ \varphi(v) + p_L\varphi(v), \varphi \circ h(x)) \\
&= B(p_W \circ \varphi(v), \varphi \circ h(x)) && \text{puisque } \varphi \circ h(x) \in W \\
&= B(p_W \circ \varphi(v), h'(x)) \\
&= 1
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$(P_{\mathbb{F}} \otimes \mathrm{Iso}_\alpha)(T)([v] \otimes [h]) \in (P_{\mathbb{F}} \otimes \mathrm{Iso}_\alpha)^1(W).$$

2. La preuve est similaire à la précédente, en remplaçant 1 par 0.

□

On en déduit le résultat suivant :

Proposition 6.3.3. *On a la décomposition en somme directe*

$$P_{\mathbb{F}} \otimes \mathrm{Iso}_\alpha = (P_{\mathbb{F}} \otimes \mathrm{Iso}_\alpha)^0 \oplus (P_{\mathbb{F}} \otimes \mathrm{Iso}_\alpha)^1.$$

Démonstration. Pour tout objet V de $\mathcal{T}_q$, on a la décomposition en somme directe

$$P_{\mathbb{F}} \otimes \mathrm{Iso}_\alpha(V) = (P_{\mathbb{F}} \otimes \mathrm{Iso}_\alpha)^0(V) \oplus (P_{\mathbb{F}} \otimes \mathrm{Iso}_\alpha)^1(V).$$

d'où le résultat, par le lemme 6.3.2. □

On a le lien suivant entre les foncteurs $(P_{\mathbb{F}} \otimes \mathrm{Iso}_\alpha)^1$ et $\mathrm{Mix}_{\alpha,1}$.

Lemme 6.3.4. *Il existe une transformation naturelle non nulle*

$$\theta : (P_{\mathbb{F}} \otimes \mathrm{Iso}_\alpha)^1 \to \mathrm{Mix}_{\alpha,1}.$$

Démonstration. Pour un objet V de $\mathcal{T}_q$, on montre que les applications linéaires

$$\begin{array}{rccc}
\theta_V : & (P_{\mathbb{F}} \otimes \mathrm{Iso}_\alpha)^1(V) & \to & \mathrm{Mix}_{\alpha,1}(V) \\
& [v] \otimes [h] & \longmapsto & [(v, v + h(x))]
\end{array}$$

induisent une transformation naturelle entre $(P_{\mathbb{F}} \otimes \mathrm{Iso}_\alpha)^1$ et $\mathrm{Mix}_{\alpha,1}$, c'est à dire que, pour un morphisme $T = [V \xrightarrow{\varphi} W\perp L \xleftarrow{i_W} W]$, on a la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
(P_{\mathbb{F}} \otimes \mathrm{Iso}_\alpha)^1(V) \arrow[r, "\theta_V"] \arrow[d, "(P_{\mathbb{F}}\otimes\mathrm{Iso}_\alpha)^1(T)"'] & \mathrm{Mix}_{\alpha,1}(V) \arrow[d, "\mathrm{Mix}_{\alpha,1}(T)"] \\
(P_{\mathbb{F}} \otimes \mathrm{Iso}_\alpha)^1(W) \arrow[r, "\theta_W"] & \mathrm{Mix}_{\alpha,1}(W).
\end{tikzcd}$$

On note P le produit fibré de

$$(x,\alpha) \xrightarrow{\varphi\circ h} W\perp L \xleftarrow{i_W} W$$

et dans le cas où $P \simeq (x,\alpha)$, on a :

$$\begin{tikzcd}
(x,\alpha) \arrow[r, "h'"] \arrow[d, "\mathrm{Id}"'] & W \arrow[d, hook, "i_W"] \\
(x,\alpha) \arrow[r, "\varphi\circ h"'] & W\perp L
\end{tikzcd}$$

Par définition du produit fibré, on a l'équivalence suivante :

$$P \simeq (x,\alpha) \text{ si et seulement si } \varphi\circ h(x) \in W.$$

On a :

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Mix}_{\alpha,1}(T)\circ\theta_V([v]\otimes[h]) \\
&= \mathrm{Mix}_{\alpha,1}(T)[(v, v+h(x))] \\
&= \begin{cases} [(p_W\circ(\varphi(v)), p_W\circ(\varphi(v+h(x)))] & \text{si } \varphi\circ h(x)\in W \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\theta_W\circ(P_{\mathbb{F}}\otimes\mathrm{Iso}_\alpha)^1(T)([v]\otimes[h]) &= \theta_W \begin{cases} [p_W\circ\varphi(v)]\otimes[h'] & \text{si } P\simeq(x,\alpha) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\
&= \begin{cases} [(p_W\circ(\varphi(v)), p_W\circ(\varphi(v)+h'(x))] & \text{si } P\simeq(x,\alpha) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \\
&= \begin{cases} [(p_W\circ(\varphi(v)), p_W\circ(\varphi(v)+\varphi\circ h(x))] & \text{si } P\simeq(x,\alpha) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}
\end{aligned}$$

d'où la commutativité du diagramme.

□

On a le résultat suivant.

Proposition 6.3.5. *La transformation θ définit un isomorphisme naturel entre $(P_{\mathbb{F}}\otimes\mathrm{Iso}_\alpha)^1$ et $\mathrm{Mix}_{\alpha,1}$.*

Démonstration. L'application θ_V est un isomorphisme d'inverse

$$\begin{array}{rccc}
(\theta_V)^{-1}: & (P_{\mathbb{F}}\otimes\mathrm{Iso}_\alpha)^1(V) & \to & \mathrm{Mix}_{\alpha,1}(V) \\
& [(v,w)] & \longmapsto & [v]\otimes[h]
\end{array}$$

où h est le morphisme de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}_q}((x,\alpha),V)$ tel que $h(x)=v+w$. □

6.3.2 Filtration des foncteurs $P_{\mathbb{F}}\otimes\mathrm{Iso}_\alpha$

On définit dans la suite une filtration des foncteurs $P_{\mathbb{F}}\otimes\mathrm{Iso}_\alpha$ obtenue à partir de la filtration polynomiale de la catégorie $\mathcal{F}$. On ne donne ici que les résultats essentiels pour la suite concernant les foncteurs polynomiaux de $\mathcal{F}$. Le lecteur pourra consulter [HLS93] et [Sch94] pour les généralités sur les foncteurs polynomiaux de $\mathcal{F}$ et les preuves des résultats rappelés ici.

Définition 6.3.6. Soient F un objet de $\mathcal{F}$ et d un entier naturel, le foncteur q_dF est le plus grand quotient polynomial de degré d de F.

Notation 6.3.7. On note k_dF le noyau de $F \twoheadrightarrow q_dF$.

On a le résultat suivant.

Proposition 6.3.8. *Pour d un entier naturel, les foncteurs k_dF définissent une filtration décroissante séparée du foncteur F.*

Pour le foncteur projectif $P_{\mathbb{F}}$, on a donc les suites exactes courtes :

$$0 \to k_dP_{\mathbb{F}} \to P_{\mathbb{F}} \xrightarrow{f_d} q_dP_{\mathbb{F}} \to 0. \tag{6.2}$$

On rappelle, dans la proposition suivante, la description des espaces $k_dP_{\mathbb{F}}(V)$ pour V un objet de $\mathcal{E}^f$.

Proposition 6.3.9. *L'espace vectoriel $k_dP_{\mathbb{F}}(V)$ est engendré par les éléments de la forme*

$$\sum_{z\in\mathcal{L}}[z]$$

où $\mathcal{L}$ est un espace vectoriel engendré par $d+1$ éléments de V linéairement indépendants.

On donne dans la proposition suivante les sous-quotients de la filtration du foncteur $P_{\mathbb{F}}$.

Proposition 6.3.10. *Pour tout entier d, il existe une suite exacte courte*

$$0 \to k_{d+1}P_{\mathbb{F}} \to k_dP_{\mathbb{F}} \xrightarrow{g_d} \Lambda^{d+1} \to 0. \tag{6.3}$$

où l'application g_d est définie de la manière suivante : pour V un objet de $\mathcal{E}^f$ et $\mathcal{L}$ l'espace vectoriel engendré par $d+1$ éléments $l_1,\ldots,l_{d+1}$ de V linéairement indépendants, l'image du générateur $\sum_{z\in\mathcal{L}}[z]$ de $k_dP_{\mathbb{F}}(V)$ par $(g_d)_V$ est donnée par :

$$(g_d)_V(\sum_{z\in\mathcal{L}}[z]) = l_1 \wedge \ldots \wedge l_{d+1}.$$

Par produit tensoriel avec les foncteurs Iso, la proposition 6.3.8 et les suites exactes courtes (6.2) et (6.3) fournissent le résultat suivant.

Corollaire 6.3.11. *1. Pour d un entier naturel, les foncteurs $(k_dP_{\mathbb{F}}) \otimes \mathrm{Iso}_\alpha$ définissent une filtration décroissante séparée du foncteur $P_{\mathbb{F}} \otimes \mathrm{Iso}_\alpha$.*

2. Il existe les suites exactes courtes suivantes dans $\mathcal{F}_{quad}$:

$$0 \to (k_dP_{\mathbb{F}}) \otimes \mathrm{Iso}_\alpha \to P_{\mathbb{F}} \otimes \mathrm{Iso}_\alpha \xrightarrow{f_d\otimes\mathrm{Iso}_\alpha} (q_dP_{\mathbb{F}}) \otimes \mathrm{Iso}_\alpha \to 0. \tag{6.4}$$

$$0 \to (k_{d+1}P_{\mathbb{F}}) \otimes \mathrm{Iso}_\alpha \to (k_dP_{\mathbb{F}}) \otimes \mathrm{Iso}_\alpha \xrightarrow{g_d\otimes\mathrm{Iso}_\alpha} (\Lambda^{d+1}) \otimes \mathrm{Iso}_\alpha \to 0. \tag{6.5}$$

Remarque 6.3.12. Les arguments utilisés dans cette section pour étudier les foncteurs $P_{\mathbb{F}} \otimes \mathrm{Iso}_\alpha$ se généraliseront aux foncteurs $P_{\mathbb{F}} \otimes \mathrm{Iso}_D$ pour D un objet de $\mathcal{E}^{\deg}_q$, ce qui permettra d'étudier, de manière générale, les foncteurs $\mathrm{Mix}_{D,\eta}$, dans un travail ultérieur. On verra, entre autres, que le foncteur $\mathrm{Mix}_{D,\eta}$ est un sous-foncteur de $P_{\mathbb{F}} \otimes \mathrm{Iso}_D$ et qu'on aura le scindement

$$P_{\mathbb{F}} \otimes \mathrm{Iso}_D = \oplus_{\eta\in D^*}\mathrm{Mix}_{D,\eta}.$$

Ceci fournit une deuxième justification à l'appellation foncteurs mixtes, puisque ces foncteurs sont des sous-foncteurs d'un produit tensoriel entre un objet de $\mathcal{F}$ et un objet de $\mathcal{F}_{iso}$.

6.4 Filtration des foncteurs $\Sigma_{\alpha,1}$

On définit, dans cette section, une filtration des foncteurs $\Sigma_{\alpha,1}$ qu'on reliera, par la suite, à la filtration de $P_{\mathbb{F}} \otimes \mathrm{Iso}_\alpha$ obtenue à la section précédente.

Définition 6.4.1. Soit V un objet de $\mathcal{T}_q$ et d un entier naturel, le sous-espace vectoriel $k_d\Sigma_{\alpha,1}(V)$ de $\Sigma_{\alpha,1}(V)$ est l'espace engendré par les éléments de la forme

$$\sum_{z\in\mathcal{L}}[\{x+z, y+z\}]$$

où $[\{x,y\}] \in \Sigma_{\alpha,1}(V)$ et $\mathcal{L}$ est un espace vectoriel engendré par d éléments linéairement indépendants de $\langle x+y\rangle^\perp$.

Proposition 6.4.2. *Les espaces $k_d\Sigma_{\alpha,1}(V)$, pour V un objet de $\mathcal{T}_q$, définissent un sous-foncteur de $\Sigma_{\alpha,1}$.*

Démonstration. Pour un triplet T de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}_q}(V,W)$, on vérifie, par définition de $\mathrm{Mix}_{\alpha,1}(T)$, que l'image de $k_d\Sigma_{\alpha,1}(V)$ par

$$\Sigma_{\alpha,1}(T) : k_d\Sigma_{\alpha,1}(V) \to \Sigma_{\alpha,1}(W)$$

est un sous-espace vectoriel de $k_d\Sigma_{\alpha,1}(W)$. □

Proposition 6.4.3. *Les foncteurs $k_d\Sigma_{\alpha,1}$ définissent une filtration décroissante séparée du foncteur $\Sigma_{\alpha,1}$.*

$$\ldots \subset k_d\Sigma_{\alpha,1} \subset \ldots \subset k_1\Sigma_{\alpha,1} \subset k_0\Sigma_{\alpha,1} = \Sigma_{\alpha,1}$$

Démonstration. Il suffit de montrer, pour un objet V de $\mathcal{T}_q$, l'inclusion d'espace vectoriel :

$$k_{d+1}\Sigma_{\alpha,1}(V) \subset k_d\Sigma_{\alpha,1}(V).$$

On considère un générateur de $k_{d+1}\Sigma_{\alpha,1}(V)$:

$$v = \sum_{z\in\mathcal{L}}[\{x+z, y+z\}]$$

où $[\{x,y\}] \in \Sigma_{\alpha,1}(V)$ et $\mathcal{L}$ est l'espace vectoriel engendré par $d+1$ éléments linéairement indépendants $l_1,\ldots,l_{d+1}$ de $\langle x+y\rangle^\perp$, et on considère la décomposition en somme directe suivante

$$\mathcal{L} = \langle l_1,\ldots,l_d\rangle \oplus \langle l_{d+1}\rangle = \mathcal{L}' \oplus \langle l_{d+1}\rangle.$$

En considérant séparément les éléments z de $\mathcal{L}$ de composante non nulle selon l_{d+1} et ceux de composante nulle selon l_{d+1}, on a :

$$v = \sum_{z\in\mathcal{L}'}[\{x+z, y+z\}] + \sum_{z\in\mathcal{L}'}[\{x+l_{d+1}+z, y+l_{d+1}+z\}]$$

or,

$$\sum_{z\in\mathcal{L}'}[\{x+z, y+z\}] \in k_d\Sigma_{\alpha,1}(V)$$

et

$$\sum_{z\in\mathcal{L}'}[\{x+l_{d+1}+z, y+l_{d+1}+z\}] \in k_d\Sigma_{\alpha,1}(V)$$

puisque $[\{x+l_{d+1}, y+l_{d+1}\}] \in \Sigma_{\alpha,1}(V)$. □

Dans le résultat suivant on relie la filtration des foncteurs $\Sigma_{\alpha,1}$ à la filtration de $P_{\mathbb{F}} \otimes \mathrm{Iso}_\alpha$ obtenue à partir de la filtration polynomiale au corollaire 6.3.11.

Proposition 6.4.4. *La composée*

$$k_d\Sigma_{\alpha,1} \hookrightarrow \Sigma_{\alpha,1} \hookrightarrow \mathrm{Mix}_{\alpha,1} \xrightarrow{\theta^{-1}} (P_{\mathbb{F}} \otimes \mathrm{Iso}_\alpha)^1 \hookrightarrow P_{\mathbb{F}} \otimes \mathrm{Iso}_\alpha \xrightarrow{f_d} q_d P_{\mathbb{F}} \otimes \mathrm{Iso}_\alpha$$

où θ est l'équivalence naturelle définie à la proposition 6.3.5, est nulle.

Démonstration. Soit V un objet de $\mathcal{T}_q$ et v un générateur de $k_d\Sigma_{\alpha,1}(V)$

$$v = \sum_{z\in\mathcal{L}} [\{y+z, y'+z\}]$$

où $[\{y, y'\}] \in \Sigma_{\alpha,1}(V)$ et $\mathcal{L}$ est l'espace vectoriel engendré par d éléments linéairement indépendants $l_1, \dots l_d$ de $\langle y+y'\rangle^\perp$.

Soit h l'élément de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}_q}((x,\alpha), V)$ tel que $h(x) = y + y'$, on a

$$\begin{aligned}
\theta^{-1}(v) &= \textstyle\sum_{z\in\mathcal{L}}([y+z]+[y'+z]) \otimes [h] \\
&= \textstyle\sum_{z\in\mathcal{L}}([y+z]+[z]+[y'+z]+[z]) \otimes [h] \\
&= \textstyle\sum_{z\in\mathcal{L}}([y+z]+[z]) \otimes [h] + \sum_{z\in\mathcal{L}}([y'+z]+[z]) \otimes [h] \\
&= \textstyle\sum_{z'\in\mathcal{L}\oplus\langle y\rangle}[z'] \otimes [h] + \sum_{z''\in\mathcal{L}\oplus\langle y'\rangle}[z''] \otimes [h]
\end{aligned}$$

or, d'après la proposition 6.3.9 :

$$\sum_{z'\in\mathcal{L}\oplus\langle y\rangle} [z'] \in k_d P_{\mathbb{F}}(V)$$

et

$$\sum_{z''\in\mathcal{L}\oplus\langle y'\rangle} [z''] \in k_d P_{\mathbb{F}}(V)$$

Par conséquent,

$$f_d \circ g(v) = 0.$$

□

A partir de la suite exacte courte (6.4)

$$0 \to (k_d P_{\mathbb{F}}) \otimes \mathrm{Iso}_\alpha \to (P_{\mathbb{F}}) \otimes \mathrm{Iso}_\alpha \xrightarrow{f_d \otimes \mathrm{Iso}_\alpha} (q_d P_{\mathbb{F}}) \otimes \mathrm{Iso}_\alpha \to 0.$$

on déduit le corollaire suivant.

Corollaire 6.4.5. *Il existe un monomorphisme i_d de $k_d\Sigma_{\alpha,1}$ dans $k_d P_{\mathbb{F}} \otimes \mathrm{Iso}_\alpha$.*

Il en découle le résultat suivant.

Proposition 6.4.6. *Les sous-quotients $k_d\Sigma_{\alpha,1}/k_{d+1}\Sigma_{\alpha,1}$ de la filtration du foncteur $\Sigma_{\alpha,1}$ par les foncteurs $k_d\Sigma_{\alpha,1}$ sont des sous-foncteurs de $\Lambda^{d+1} \otimes \mathrm{Iso}_\alpha$.*

Démonstration. Le résultat découle du diagramme commutatif suivant obtenu grâce au corollaire 6.4.5 et à la suite exacte courte (6.5).

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & k_{d+1}\Sigma_{\alpha,1} \arrow[r] \arrow[d, hook, "i_{d+1}"'] & k_d\Sigma_{\alpha,1} \arrow[r] \arrow[d, hook, "i_d"'] & (k_d\Sigma_{\alpha,1}/k_{d+1}\Sigma_{\alpha,1}) \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 \\
0 \arrow[r] & k_{d+1}P_{\mathbb{F}} \otimes \mathrm{Iso}_\alpha \arrow[r] & k_d P_{\mathbb{F}} \otimes \mathrm{Iso}_\alpha \arrow[r, "g_d \otimes \mathrm{Iso}_\alpha"'] & \Lambda^{d+1} \otimes \mathrm{Iso}_\alpha \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \tag{6.6}$$

□

Par conséquent, afin d'obtenir les facteurs de composition des foncteurs $\mathrm{Mix}_{\alpha,1}$ on étudiera, à la prochaine section, les foncteurs $\Lambda^n \otimes \mathrm{Iso}_\alpha$.

On termine cette section en montrant que les foncteurs $\mathrm{Mix}_{\alpha,1}$ sont infinis. Pour cela, nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 6.4.7. *Soient V un objet de $\mathcal{T}_q$ de dimension supérieure à $d+1$ tel que $\Sigma_{\alpha,1}(V) \neq \{0\}$, $[\{y, y'\}]$ un générateur canonique de $\Sigma_{\alpha,1}(V)$ et $v_1, \ldots v_d$, d éléments linéairement indépendants de $\langle y + y' \rangle^\perp$, alors :*

$$(g_d \otimes \mathrm{Iso}_\alpha) \circ i_d(\sum_{z \in \langle v_1, \ldots, v_d \rangle} [\{y + z, y' + z\}]) = v_1 \wedge \ldots \wedge v_d \wedge (y + y') \otimes [h]$$

où i_d est le monomorphisme de $k_d\Sigma_{\alpha,1}$ dans $k_dP_{\mathbb{F}} \otimes \mathrm{Iso}_\alpha$ défini au corollaire 6.4.5 et h l'élément de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}_q}((x, \alpha), V)$ tel que $h(x) = y + y'$.

Démonstration. On a, par définition de i_d et de $g_d \otimes \mathrm{Iso}_\alpha$

$$\begin{aligned}(g_d \otimes \mathrm{Iso}_\alpha) \circ i_d(\textstyle\sum_{z \in \langle v_1, \ldots, v_d \rangle} [\{y + z, y' + z\}]) &= (g_d \otimes \mathrm{Iso}_\alpha)(\textstyle\sum_{z \in \langle v_1, \ldots, v_d \rangle} ([y + z] + [y' + z]) \otimes [h]) \\ &= (v_1 \wedge \ldots \wedge v_d \wedge y + v_1 \wedge \ldots \wedge v_d \wedge y') \otimes [h] \\ &= v_1 \wedge \ldots \wedge v_d \wedge (y + y') \otimes [h]\end{aligned}$$

□

On en déduit le résultat suivant

Proposition 6.4.8. *Les foncteurs $\mathrm{Mix}_{\alpha,1}$ sont infinis.*

Démonstration. Il suffit de montrer que les quotients de la filtration de $\Sigma_{\alpha,1}$ sont non nuls. Pour un objet V de $\mathcal{T}_q$ de dimension supérieure à d, l'espace $\Sigma_{1,1}(H_0 \perp V)$ contient l'élément non nul $[\{a_0, b_0\}]$. Par conséquent, l'élément suivant de $k_d\Sigma_{1,1}(H_0 \perp V)$

$$x = \sum_{z \in \langle v_1, \ldots, v_d \rangle} [\{a_0 + z, b_0 + z\}]$$

vérifie, d'après le lemme 6.4.7,

$$(g_d \otimes \mathrm{Iso}_\alpha) \circ i_d(x) = v_1 \wedge \ldots \wedge v_d \wedge (a_0 + b_0) \otimes [h] \neq 0.$$

Par conséquent, $(g_d \otimes \mathrm{Iso}_\alpha) \circ i_d(k_d\Sigma_{1,1}) \neq \{0\}$ et par commutativité du diagramme (6.6) donné dans la preuve de la proposition 6.4.6 on a $k_d\Sigma_{1,1}/k_{d+1}\Sigma_{1,1} \neq \{0\}$.

De la même manière, en considérant l'elément

$$\sum_{z \in \langle v_1, \ldots, v_d \rangle} [\{a_0 + z, a_0 + b_0 + z\}] \in k_d\Sigma_{0,1}(H_0 \perp V)$$

on montre que $k_d\Sigma_{0,1}/k_{d+1}\Sigma_{0,1} \neq \{0\}$. □

6.5 Structure des foncteurs $\Lambda^n \otimes \mathrm{Iso}_\alpha$

D'après la proposition 6.4.6, les sous-quotients $k_d\Sigma_{\alpha,1}/k_{d+1}\Sigma_{\alpha,1}$ de la filtration du foncteur $\Sigma_{\alpha,1}$ par les foncteurs $k_d\Sigma_{\alpha,1}$ sont des sous-foncteurs de $\Lambda^{d+1} \otimes \mathrm{Iso}_\alpha$. Cette section a pour objectif d'étudier les foncteurs $\Lambda^n \otimes \mathrm{Iso}_\alpha$ en vue d'obtenir les facteurs de composition des foncteurs $\Sigma_{\alpha,1}$. Elle est divisée en deux paragraphes. Dans le premier on décompose les foncteurs $\Lambda^n \otimes \mathrm{Iso}_\alpha$ et dans le deuxième on montre que les foncteurs L^n_α obtenus au paragraphe précédent sont simples.

On rappelle qu'un générateur de $\mathrm{Iso}_\alpha(V)$ est un élément de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}_q}((x, \alpha), V)$ où $\alpha \in \{0, 1\}$ et (x, α) désigne l'espace quadratique de dimension un engendré par l'élément x tel que $q(x) = \alpha$.

6.5.1 Décomposition

Afin de pouvoir identifier les facteurs de composition du foncteur $\Lambda^n \otimes \mathrm{Iso}_\alpha$, nous définissons les morphismes de $\mathcal{F}_{quad}$ suivants.

Lemme 6.5.1. *1. Pour un objet V de $\mathcal{T}_q$, les applications linéaires*

$$\mu_V : \mathrm{Iso}_\alpha(V) \to (\Lambda^1 \otimes \mathrm{Iso}_\alpha)(V)$$

définies par :

$$\mu_V([h]) = h(x) \otimes [h]$$

pour un générateur $[h]$ de $\mathrm{Iso}_\alpha(V)$, fournissent un monomorphisme $\mu : \mathrm{Iso}_\alpha \to \Lambda^1 \otimes \mathrm{Iso}_\alpha$ de $\mathcal{F}_{quad}$.

2. Pour un objet V de $\mathcal{T}_q$, les applications linéaires

$$\nu_V : (\Lambda^1 \otimes \mathrm{Iso}_\alpha)(V) \to \mathrm{Iso}_\alpha(V)$$

définies par :

$$\nu_V(w \otimes [h]) = B(w, h(x))[h]$$

pour un générateur $[h]$ de $\mathrm{Iso}_\alpha(V)$, fournissent un épimorphisme $\nu : \Lambda^1 \otimes \mathrm{Iso}_\alpha \to \mathrm{Iso}_\alpha$ de $\mathcal{F}_{quad}$.

Démonstration. 1. Il s'agit de vérifier la commutativité du diagramme suivant, pour un morphisme $T = [V \xrightarrow{f} X \xleftarrow{g} W]$ de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}_q}(V, W)$:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Iso}_\alpha(V) \arrow[r, "\mu_V"] \arrow[d, "\mathrm{Iso}_\alpha(T)"'] & (\Lambda^1 \otimes \mathrm{Iso}_\alpha)(V) \arrow[d, "(\Lambda \otimes \mathrm{Iso}_\alpha)(T)"] \\
\mathrm{Iso}_\alpha(W) \arrow[r, "\mu_W"'] & (\Lambda^1 \otimes \mathrm{Iso}_\alpha)(W)
\end{tikzcd}$$

Pour un générateur $[h]$ de $\mathrm{Iso}_\alpha(V)$, on note P le produit fibré de

$$x \xrightarrow{f \circ h} X \xleftarrow{g} W$$

et dans le cas où $P \simeq \langle x \rangle$, on note h' le morphisme rendant le diagramme suivant commutatif.

$$\begin{tikzcd}
(x, \alpha) \arrow[rr, "h'"] \arrow[d, "\mathrm{Id}"'] & & W \arrow[d, "g"] \\
(x, \alpha) \arrow[r, "h"'] & V \arrow[r, "f"'] & X
\end{tikzcd}$$

où (x, α) désigne l'espace quadratique de dimension un engendré par un x tel que $q(x) = \alpha$ conformément à la notation 1.1.17. On a

$$\begin{aligned}
(\Lambda^1 \otimes \mathrm{Iso}_\alpha)(T) \circ \mu_V([h]) &= (\Lambda^1 \otimes \mathrm{Iso}_\alpha)(T)(h(x) \otimes [h]) \\
&= \begin{cases} g^! \circ f \circ h(x) \otimes [h'] & \text{si } P \simeq \langle x \rangle \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\mu_W \circ \mathrm{Iso}_\alpha(T)([h]) &= \mu_W \begin{cases} [h'] & \text{si } P \simeq \langle x \rangle \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \\
&= \begin{cases} h'(x) \otimes [h'] & \text{si } P \simeq \langle x \rangle \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Or, par commutativité du diagramme cartésien définissant h', on a $g \circ h' = f \circ h$ dont on déduit, par composition avec $g^!$, l'égalité : $h' = g^! \circ f \circ h$. Par conséquent, les applications μ_W définissent bien une transformation naturelle de foncteurs $\mu : \mathrm{Iso}_\alpha \to \Lambda^1 \otimes \mathrm{Iso}_\alpha$ non nulle par définition. On déduit alors de la simplicité des foncteurs Iso_α donnée à la proposition 4.5.3 que la transformation naturelle μ est un monomorphisme de $\mathcal{F}_{quad}$.

2. Pour un morphisme $T = [V \xrightarrow{f} X \xleftarrow{g} W]$ de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}_q}(V, W)$, montrons la commutativité du diagramme :

$$\begin{tikzcd}
(\Lambda^1 \otimes \mathrm{Iso}_\alpha)(V) \arrow[r, "\nu_V"] \arrow[d, "(\Lambda\otimes\mathrm{Iso}_\alpha)(T)"'] & \mathrm{Iso}_\alpha(V) \arrow[d, "\mathrm{Iso}_\alpha(T)"] \\
(\Lambda^1 \otimes \mathrm{Iso}_\alpha)(W) \arrow[r, "\nu_W"'] & \mathrm{Iso}_\alpha(W)
\end{tikzcd}$$

On reprend les mêmes notations qu'au premier point concernant le produit fibré. On a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Iso}_\alpha(T) \circ \nu_V(v \otimes [h]) &= \mathrm{Iso}_\alpha(T)(B(h(x), v)[h]) \\
&= \begin{cases} B(h(x), v)[h'] & \text{si } P \simeq \langle x \rangle \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\nu_W \circ (\Lambda^1 \otimes \mathrm{Iso}_\alpha)(T)(v \otimes [h]) &= \nu_W \begin{cases} g^! \circ f(v) \otimes [h'] & \text{si } P \simeq \langle x \rangle \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \\
&= \begin{cases} B(h'(x), g^! \circ f(v))[h'] & \text{si } P \simeq \langle x \rangle \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}
B(h(x), v) &= B(f \circ h(x), f(v)) && \text{car } f \text{ conserve la forme quadratique} \\
&= B(g \circ h'(x), f(v)) && \text{par commutativité du diagramme cartésien} \\
&= B(g \circ h'(x), g \circ g^! \circ f(v)) && \text{par orthogonalité de } W \text{ et } L \\
&= B(h'(x), g^! \circ f(v)) && \text{puisque } g \text{ conserve la forme quadratique}
\end{aligned}$$

Par conséquent, les applications ν_W définissent bien une transformation naturelle de foncteurs $\nu : \Lambda^1 \otimes \mathrm{Iso}_\alpha \to \mathrm{Iso}_\alpha$, non triviale par définition. On déduit de la simplicité des foncteurs Iso_α donnée à la proposition 4.5.3, que la transformation naturelle ν est un épimorphisme de $\mathcal{F}_{quad}$. □

Les transformations naturelles μ et ν du lemme 6.5.1 nous permettent de définir les morphismes de $\mathcal{F}_{quad}$ suivants.

Définition 6.5.2. Soit n un entier naturel non nul.

1. La transformation naturelle $\mu_n : \Lambda^n \otimes \mathrm{Iso}_\alpha \to \Lambda^{n+1} \otimes \mathrm{Iso}_\alpha$ est obtenue par la composition suivante
$$\Lambda^n \otimes \mathrm{Iso}_\alpha \xrightarrow{1\otimes\mu} \Lambda^n \otimes \Lambda^1 \otimes \mathrm{Iso}_\alpha \xrightarrow{m\otimes 1} \Lambda^{n+1} \otimes \mathrm{Iso}_\alpha$$
où $m : \Lambda^n \otimes \Lambda^1 \to \Lambda^{n+1}$ est le produit dans l'algèbre extérieure.
2. La transformation naturelle $\nu_n : \Lambda^{n+1} \otimes \mathrm{Iso}_\alpha \to \Lambda^n \otimes \mathrm{Iso}_\alpha$ est obtenue par la composition suivante
$$\Lambda^{n+1} \otimes \mathrm{Iso}_\alpha \xrightarrow{\Delta\otimes 1} \Lambda^n \otimes \Lambda^1 \otimes \mathrm{Iso}_\alpha \xrightarrow{1\otimes\nu} \Lambda^n \otimes \mathrm{Iso}_\alpha$$
où $\Delta : \Lambda^{n+1} \to \Lambda^n \otimes \Lambda^1$ est l'application coproduit de Λ^{n+1} dans $\Lambda^n \otimes \Lambda^1$ dont on rappelle la définition :
$$\Delta_V(v_1 \wedge \ldots \wedge v_{n+1}) = \sum_i ((v_1 \wedge \ldots \wedge \hat{v_i} \wedge \ldots \wedge v_{n+1}) \otimes v_i)$$
pour un objet V de $\mathcal{T}_q$ et $v_1, \ldots, v_{n+1}$ des éléments de V.

On a la proposition suivante.

Proposition 6.5.3. *Le complexe suivant*

$$\ldots \to \Lambda^n \otimes \mathrm{Iso}_\alpha \xrightarrow{\mu_n} \Lambda^{n+1} \otimes \mathrm{Iso}_\alpha \xrightarrow{\mu_{n+1}} \Lambda^{n+2} \otimes \mathrm{Iso}_\alpha \to \ldots$$

est exact.

Démonstration. On montre, à partir de la définition, que le noyau de $(\mu_{n+1})_V$ est l'espace vectoriel engendré par l'ensemble

$$\{v_1 \wedge \ldots \wedge v_n \wedge h(x) \otimes [h] \text{ pour } [h] \text{ un générateur de } \mathrm{Iso}_\alpha(V) \text{ et } v_1, \ldots, v_n \text{ des éléments de } V\}$$

et cet espace coïncide avec l'image de $(\mu_n)_V$. □

Ceci justifie l'introduction du foncteur suivant.

Définition 6.5.4. Le foncteur K^n_α est le noyau de l'application $\mu_n : \Lambda^n \otimes \mathrm{Iso}_\alpha \to \Lambda^{n+1} \otimes \mathrm{Iso}_\alpha$.

On a la caractérisation suivante des espaces $K^n_\alpha(V)$.

Lemme 6.5.5. *Pour un objet V de $\mathcal{T}_q$, l'espace $K^n_\alpha(V)$ est engendré par les éléments de la forme*

$$z \wedge h(x) \otimes [h]$$

où $[h]$ est un générateur canonique de l'espace $\mathrm{Iso}_\alpha(V)$ et z est un élément de $\Lambda^{n-1}(V)$.

La proposition 6.5.3 a pour conséquence directe le résultat suivant.

Corollaire 6.5.6. *Pour n un entier naturel non nul, on a la suite exacte courte*

$$0 \to K^n_\alpha \to \Lambda^n \otimes \mathrm{Iso}_\alpha \to K^{n+1}_\alpha \to 0$$

Remarque 6.5.7. On montrera, dans des travaux ultérieurs, que cette suite exacte courte n'est pas scindée.

On cherche, dans la suite, à décomposer les foncteurs K^n_α. On commence par traiter le cas du foncteur K^1_α.

Lemme 6.5.8. *Le foncteur K^1_α est équivalent au foncteur Iso_α.*

Démonstration. Pour un objet V de $\mathcal{T}_q$, $K^1_\alpha(V)$ est l'espace vectoriel ayant pour base l'ensemble des éléments de la forme : $h(x) \otimes [h]$ pour un générateur $[h]$ de $\mathrm{Iso}_\alpha(V)$. On définit alors l'application linéaire

$$\begin{array}{ccc} K^1_\alpha(V) & \xrightarrow{\sigma_V} & \mathrm{Iso}_\alpha(V) \\ h(x) \otimes [h] & \longmapsto & [h] \end{array}$$

et on montre facilement que σ_V est un isomorphisme et que ces applications définissent une transformation naturelle de foncteurs. □

Pour identifier les facteurs de composition des foncteurs K^n_α pour $n > 1$, nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 6.5.9. *Pour n un entier naturel non nul, le morphisme $\nu_n : \Lambda^{n+1} \otimes \mathrm{Iso}_\alpha \to \Lambda^n \otimes \mathrm{Iso}_\alpha$ induit un morphisme $\nu^K_n : K^{n+1}_\alpha \to K^n_\alpha$ rendant le diagramme suivant commutatif*

$$\begin{tikzcd} K^{n+1}_\alpha \arrow[r, "\nu^K_n"] \arrow[d, hook] & K^n_\alpha \arrow[d, hook] \\ \Lambda^{n+1} \otimes \mathrm{Iso}_\alpha \arrow[r, "\nu_n"'] & \Lambda^n \otimes \mathrm{Iso}_\alpha \end{tikzcd}$$

Démonstration. Pour un objet V de $\mathcal{T}_q$ et $v_1 \wedge \ldots \wedge v_n \wedge h(x) \otimes [h]$ un générateur de $K_\alpha^{n+1}(V)$, on a :

$$(\nu_{nV})(v_1\wedge\ldots\wedge v_n\wedge h(x)\otimes[h]) = (\sum_{i=1}^{n} v_1\wedge\ldots\wedge\hat{v_i}\wedge\ldots\wedge v_n\wedge h(x)\otimes B(v_i,h(x))[h])+v_1\wedge\ldots\wedge v_n\otimes B(h(x),h(x))[h]$$

or, $B(h(x),h(x)) = 0$ puisque B est alternée. Par conséquent,

$$(\nu_{nV})(v_1 \wedge \ldots \wedge v_n \wedge h(x) \otimes [h]) = \sum_{i=1}^{n} v_1 \wedge \ldots \wedge \hat{v_i} \wedge \ldots \wedge v_n \wedge h(x) \otimes B(v_i, h(x))[h] \in K_\alpha^n(V)$$

d'où l'existence du morphisme induit ν_n^K. □

Ce lemme justifie l'introduction de la définition suivante.

Définition 6.5.10. Pour n un entier naturel tel que $n \geq 2$, le foncteur L_α^n est le noyau du morphisme $\nu_{n-1}^K : K_\alpha^n \to K_\alpha^{n-1}$.

On a la caractérisation suivante des espaces $L_\alpha^n(V)$ qui nous sera utile par la suite.

Lemme 6.5.11. *Pour un objet V de $\mathcal{T}_q$, l'espace $L_\alpha^n(V)$ est engendré par les éléments de la forme*

$$z \wedge h(x) \otimes [h]$$

où $[h]$ est un générateur canonique de l'espace $\mathrm{Iso}_\alpha(V)$ et z est un élément de $\Lambda^{n-1}(\langle h(x)\rangle^\perp)$.

Démonstration. Soit V un objet de $\mathcal{T}_q$, l'espace $L_\alpha^n(V)$ étant un sous-espace vectoriel de $K_\alpha^n(V)$, on a d'après le lemme 6.5.5 que l'espace $L_\alpha^n(V)$ est engendré par les éléments de la forme $z \wedge h(x) \otimes [h]$.

Pour un générateur canonique $[h]$ de $\mathrm{Iso}_\alpha(V)$ donné, l'espace V étant non dégénéré, on a l'existence d'un élément w de V tel que

$$B(h(x), w) = 1.$$

On note W l'espace $\mathrm{Vect}(h(x), w)$ et on décompose V sous la forme

$$V \simeq W \perp W^\perp.$$

Un générateur $z \wedge h(x) \otimes [h]$ s'écrit alors sous la forme

$$z' \wedge h(x) \otimes [h] + z'' \wedge w \wedge h(x) \otimes [h]$$

où $z' \in \Lambda^{n-1}(W^\perp)$ et $z'' \in \Lambda^{n-2}(W^\perp)$.

Soit x un élément de $L_\alpha^n(V)$, on a :

$$x = \sum_{[h]\in\mathcal{G}(\mathrm{Iso}_\alpha(V))} z_h \wedge h(x) \otimes [h] = \sum_{[h]\in\mathcal{G}(\mathrm{Iso}_\alpha(V))} (z'_h \wedge h(x) \otimes [h] + z''_h \wedge w \wedge h(x) \otimes [h])$$

où $\mathcal{G}(\mathrm{Iso}_\alpha(V))$ désigne l'ensemble des générateurs canoniques de l'espace $\mathrm{Iso}_\alpha(V)$. On a,

$$\nu_{n-1}^K(z'_h \wedge h(x) \otimes [h]) = 0$$

puisque $z'_h \in \Lambda^{n-1}(W^\perp) \subset \Lambda^{n-1}(\langle h(x)\rangle^\perp)$ et

$$\nu_{n-1}^K(z''_h \wedge w \wedge h(x) \otimes [h]) = z''_h \wedge h(x) \otimes [h].$$

L'élément x étant dans le noyau de ν_{n-1}^K, on en déduit $z''_h = 0$ et donc

$$x = \sum_{[h]\in\mathcal{G}(\mathrm{Iso}_\alpha(V))} z'_h \wedge h(x) \otimes [h]$$

pour $z'_h \in \Lambda^{n-1}(W^\perp) \subset \Lambda^{n-1}(\langle h(x)\rangle^\perp)$. □

On montre le lemme :

Lemme 6.5.12. *La composition suivante est nulle.*

$$\Lambda^{n+2} \otimes \mathrm{Iso}_\alpha \xrightarrow{\nu_{n+1}} \Lambda^{n+1} \otimes \mathrm{Iso}_\alpha \xrightarrow{\nu_n} \Lambda^n \otimes \mathrm{Iso}_\alpha$$

Démonstration. Soit V un objet de $\mathcal{T}_q$ et $v_1 \wedge \ldots \wedge v_{n+2} \otimes [h]$ un élément de $\Lambda^{n+2} \otimes \mathrm{Iso}_\alpha(V)$, on a

$$\begin{aligned}
&\nu_n \circ \nu_{n+1}(v_1 \wedge \ldots \wedge v_{n+2} \otimes [h]) \\
&= \nu_n(\textstyle\sum_{i=1}^{n+2}(v_1 \wedge \ldots \wedge \hat{v_i} \wedge \ldots \wedge v_{n+2} \otimes B(v_i, h(x))[h]) \\
&= \textstyle\sum_{j \neq i} \sum_{i=1}^{n+2}(v_1 \wedge \ldots \wedge \hat{v_i} \wedge \ldots \wedge \hat{v_j} \wedge \ldots \wedge v_{n+2} \otimes B(v_i, h(x))B(v_j, h(x))[h]) \\
&= 0 \text{ en caractéristique } 2
\end{aligned}$$

□

On en déduit le résultat qui suit.

Lemme 6.5.13. *Le morphisme $\nu_n^K : K_\alpha^{n+1} \to K_\alpha^n$ se factorise à travers L_α^n.*

Démonstration. On a, d'après le lemme 6.5.9, le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
K_\alpha^{n+1} \arrow[r, "\nu_n^K"] \arrow[d, hook] & K_\alpha^n \arrow[r, "\nu_{n-1}^K"] \arrow[d, hook] & K_\alpha^{n-1} \arrow[d, hook] \\
\Lambda^{n+1} \otimes \mathrm{Iso}_\alpha \arrow[r, "\nu_n"'] & \Lambda^n \otimes \mathrm{Iso}_\alpha \arrow[r, "\nu_{n-1}"'] & \Lambda^{n-1} \otimes \mathrm{Iso}_\alpha
\end{tikzcd}$$

dont on déduit, par le lemme 6.5.12, que $\nu_{n-1}^K \circ \nu_n^K = 0$. Par conséquent, on a le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & K_\alpha^{n+1} \arrow[dl, dotted] \arrow[d, "\nu_n^K"'] \arrow[dr, "0"] & \\
L_\alpha^n = \mathrm{Ker}(\nu_{n-1}) \arrow[r] & K_\alpha^n \arrow[r, "\nu_{n-1}^K"'] & K_\alpha^{n-1}
\end{tikzcd}$$

dont on déduit l'existence d'un morphisme $\tilde{\nu}_n^K : K_\alpha^{n+1} \to L_\alpha^n$. □

On a alors la proposition suivante.

Proposition 6.5.14. *Pour n un entier naturel non nul, on a la suite exacte courte*

$$0 \to L_\alpha^{n+1} \to K_\alpha^{n+1} \to L_\alpha^n \to 0.$$

Démonstration. Il suffit de montrer que la transformation naturelle $\tilde{\nu}_n^K : K_\alpha^{n+1} \to L_\alpha^n$ construite dans la démonstration du lemme précédent, est un épimorphisme de $\mathcal{F}_{quad}$.

Soit V un objet de $\mathcal{T}_q$, et $v_1 \wedge \ldots \wedge v_{n-1} \wedge h(x) \otimes [h]$ un générateur de $L_\alpha^n(V)$, par définition de $L_\alpha^n(V)$ on a $B(v_i, h(x)) = 0$ pour tout i dans $\{1, \ldots, n-1\}$. Etant donné que $h(x)$ est un élément non nul de l'espace quadratique non dégénéré V, on a l'existence d'un élément v de V tel que $B(v, h(x)) = 1$. On montre alors facilement que l'élément

$$v_1 \wedge \ldots \wedge v_{n-1} \wedge v \wedge h(x) \otimes [h] \text{ de } K_\alpha^{n+1}(V)$$

vérifie

$$(\tilde{\nu}_n^K)_V(v_1 \wedge \ldots \wedge v_{n-1} \wedge v \wedge h(x) \otimes [h]) = v_1 \wedge \ldots \wedge v_{n-1} \wedge h(x) \otimes [h],$$

d'où la surjectivité de $\tilde{\nu}_n^K$. □

6.5.2 Simplicité des foncteurs L^n_α

On montre dans cette section le résultat suivant, où les foncteurs L^n_α sont les sous-foncteurs de $\Lambda^n \otimes \mathrm{Iso}_\alpha$ définis en 6.5.10.

Théorème 6.5.15. *Les foncteurs L^n_α sont simples.*

Pour démontrer le théorème 6.5.15, nous aurons besoin du lemme fondamental suivant.

Lemme 6.5.16. *Si J est un sous-foncteur de L^n_α, alors pour tout objet V de $\mathcal{T}_q$, soit $J(V) = \{0\}$, soit $J(V) = L^n_\alpha(V)$.*

Démonstration. Soit J un sous-foncteur de L^n_α et V un objet de $\mathcal{T}_q$. Supposons que $J(V) \neq \{0\}$ et notons y un élément non nul de $J(V)$. On a

$$y = \sum_{[h]\in\mathcal{G}(\mathrm{Iso}_\alpha(V))} z_h \wedge h(x) \otimes [h] \tag{6.7}$$

où z_h est un élément de $\Lambda^{n-1}(\langle h(x)\rangle^\perp)$ d'après le lemme 6.5.11 et $\mathcal{G}(\mathrm{Iso}_\alpha(V))$ désigne l'ensemble des générateurs canoniques de l'espace $\mathrm{Iso}_\alpha(V)$.

La preuve se fait en trois étapes. On commence par montrer qu'il existe un générateur $[h]$ de $\mathrm{Iso}_\alpha(V)$ tel qu'on ait $z_h \wedge h(x) \otimes [h]$ dans $J(V)$. On en déduit que pour tout autre générateur $[h']$ de $\mathrm{Iso}_\alpha(V)$ on a un élément non nul de la forme $z' \wedge h'(x) \otimes [h']$ dans $J(V)$. Enfin, on montrera que pour tout élément de la forme $v_1 \wedge \ldots \wedge v_{n-1}$ de $\Lambda^{n-1}(\langle h(x)\rangle^\perp)$ et tout générateur $[h]$ de $\mathrm{Iso}_\alpha(V)$, l'élément $v_1 \wedge \ldots \wedge v_{n-1} \wedge h(x) \otimes [h]$ appartient à $J(V)$, ce qui prouvera que les deux espaces $J(V)$ et $L^n_\alpha(V)$ sont isomorphes d'après la caractérisation de l'espace $L^n_\alpha(V)$ donnée au lemme 6.5.11.

1. Soit $[h]$ un générateur de $\mathrm{Iso}_\alpha(V)$ tel que dans la décomposition de y donnée en (6.7) l'élément $z_h \wedge h(x) \otimes [h]$ est non nul. L'espace V étant non dégénéré, il existe un élément v de V tel que $B(v, h(x)) = 1$. On en déduit une décomposition symplectique de V de la forme :

$$V = \mathrm{Vect}(h(x), v) \perp \mathrm{Vect}(v_1, w_1) \perp \ldots \perp \mathrm{Vect}(v_m, w_m) = \mathrm{Vect}(h(x), v) \perp V' \tag{6.8}$$

On considère le morphisme suivant de $\mathcal{E}_q$,

$$\begin{array}{llll} f: & V & \to & V\perp(H_0)^{\perp(2m+1)} \\ & h(x) & \longmapsto & h(x) \\ & v & \longmapsto & v + a_0^1 \\ & v_k & \longmapsto & v_k + a_0^{2i} \\ & w_k & \longmapsto & w_k + a_0^{2i+1} \end{array}$$

pour k variant de 1 à m. On introduit alors le triplet $T = [V \xrightarrow{f} V\perp(H_0)^{\perp(2m+1)} \xleftarrow{i} V]$ et on déduit des deux diagrammes cartésiens suivants :

$$\begin{tikzcd} (x,\alpha) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Id}"'] & V \arrow[d, hook, "i"] \\ (x,\alpha) \arrow[r, "h"'] & V \arrow[r, "f"'] & V\perp(H_0)^{\perp(2m+1)} \end{tikzcd}$$

et, pour $h_i \neq h$,

$$\begin{tikzcd} \{0\} \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Id}"'] & V \arrow[d, hook, "i"] \\ (x,\alpha) \arrow[r, "h_i"'] & V \arrow[r, "f"'] & V\perp(H_0)^{\perp(2m+1)} \end{tikzcd}$$

que
$$J(T)(y) = z_h \wedge h(x) \otimes [h] \in J(V)$$
étant donné que $\epsilon(T) = \mathrm{Id}_V$.

2. Soit $[h']$ un générateur de $\mathrm{Iso}_\alpha(V)$ distinct de $[h]$. On a $q(h'(x)) = q((h(x)) = \alpha$, par conséquent l'isomorphisme linéaire, notée $\underline{f}$, de $(h(x), \alpha)$ dans $(h'(x), \alpha)$ est un morphisme de $\mathcal{E}_q^{\deg}$. On peut donc appliquer le lemme 1.1.16 pour obtenir l'existence d'un morphisme f de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}_q}(V, V)$ tel que le diagramme suivant soit commutatif :
$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] & V \\ (h(x), \alpha) \arrow[u, hook] \arrow[r, "\underline{f}"'] & (h'(x), \alpha). \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$
On en déduit le carré cartésien suivant
$$\begin{tikzcd} (x, \alpha) \arrow[r, "h'"] \arrow[d, "\mathrm{Id}"'] & V \arrow[d, "\mathrm{Id}"] \\ (x, \alpha) \arrow[r, "h"'] & V \arrow[r, "f"'] & V \end{tikzcd}$$
Par conséquent, en considérant le triplet $T = [V \xrightarrow{f} V \xleftarrow{\mathrm{Id}} V]$, on obtient :
$$J(T)(z_h \wedge h(x) \otimes [h]) = \Lambda^{n-1}(f)(z_h) \wedge h'(x) \otimes [h'] \in J(V)$$

3. D'après le point (1) de la démonstration, il existe un élément de la forme $z \wedge h(x) \otimes [h]$ dans $J(V)$. On souhaite montrer que pour tout élément de la forme $v_1 \wedge \ldots \wedge v_{n-1}$ de $\Lambda^{n-1}(\langle h(x) \rangle^\perp)$ et tout générateur $[h]$ de $\mathrm{Iso}_\alpha(V)$, l'élément $v_1 \wedge \ldots \wedge v_{n-1} \wedge h(x) \otimes [h]$ appartient à $J(V)$. D'après la démonstration du lemme 6.5.11, il suffit de montrer que l'élément $v_1 \wedge \ldots \wedge v_{n-1} \wedge h(x) \otimes [h]$ appartient à $J(V)$ pour $v_1 \wedge \ldots \wedge v_{n-1}$ dans $\Lambda^{n-1}(V')$ où V' est l'espace considéré dans la décomposition (6.8). Par simplicité du foncteur Λ^{n-1} dans $\mathcal{F}$, on a l'existence d'un endomorphisme g de $\epsilon(V')$ tel que
$$\Lambda^{n-1}(g)(z) = v_1 \wedge \ldots \wedge v_{n-1}$$
On en déduit que
$$J(\mathrm{Id}_{\mathcal{T}_q}(\mathrm{Vect}(h(x), v)) \perp t_g)(z \wedge h(x) \otimes [h]) = v_1 \wedge \ldots \wedge v_{n-1} \wedge h(x) \otimes [h]$$
où t_g est le triplet de $\mathrm{End}_{\mathcal{T}_q}(V')$ défini en 5.2.6 et $\mathrm{Id}_{\mathcal{T}_q}(\mathrm{Vect}(h(x), v)) \perp t_g$ désigne la somme orthogonale de triplets définie à la proposition 2.2.22.

□

Démonstration du théorème. Soit J un sous-foncteur non nul de L_α^n et V un objet de $\mathcal{T}_q$ tel que l'espace $J(V)$ est non trivial. D'après le lemme 6.5.16, on a $J(V) = L_\alpha^n(V)$. On montre, dans la suite, que pour tout objet W de $\mathcal{T}_q$, $J(W) = L_\alpha^n(W)$.

Soit W un objet de $\mathcal{T}_q$ fixé. La preuve se décompose en deux étapes.

1. Montrons que $J(V \perp W) \simeq L_\alpha^n(V \perp W)$.

   Soit i l'inclusion canonique de V dans $V \perp W$ et $T = L(f) = [V \xrightarrow{f} W \xleftarrow{\mathrm{Id}} W]$ le morphisme de $\mathcal{T}_q$, où $L : \mathcal{E}_q \to \mathcal{T}_q$ est le foncteur défini en 2.2.9. On a le diagramme cartésien suivant
$$\begin{tikzcd} (x, \alpha) \arrow[r, "i \circ h"] \arrow[d, "\mathrm{Id}"'] & V \perp W \arrow[d, "\mathrm{Id}"] \\ (x, \alpha) \arrow[r, "h"'] & V \arrow[r, "i"'] & V \perp W \end{tikzcd}$$

Comme $J(R(i))$ est un inverse à gauche de $J(L(i))$ d'après la proposition 2.2.16, l'espace $J(V\perp W)$ est non nul. On en déduit, par le lemme 6.5.16 que $J(V\perp W) \simeq L^n_\alpha(V\perp W)$.

2. Montrons que $J(W) \simeq L^n_\alpha(W)$.

   Il suffit de montrer, d'après le lemme 6.5.16, que si $L^n_\alpha(W)$ est non trivial alors il en est de même de $J(W)$. Soit j l'inclusion canonique de W dans $V\perp W$. Comme $L^n_\alpha(R(j))$ est un inverse à gauche de $L^n_\alpha(L(j))$, d'après la proposition 2.2.16, on a la surjection :

$$L^n_\alpha(V\perp W) \twoheadrightarrow L^n_\alpha(W)\ ,$$

   de plus, d'après le premier point de la démonstration, on a $J(V\perp W) = L^n_\alpha(V\perp W)$, ce qui fournit le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} J(V\perp W) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"'] & J(W) \arrow[d, hook] \\ L^n_\alpha(V\perp W) \arrow[r, two heads] & L^n_\alpha(W). \end{tikzcd}$$

   Par conséquent, par une chasse au diagramme, on obtient que, si $L^n_\alpha(W)$ est non nul, $J(W)$ est non nul.

□

On montre dans la proposition suivante que ceci fournit deux familles de foncteurs deux à deux non isomorphes.

Proposition 6.5.17. *Les foncteurs des deux familles $\{L^n_0 \mid n \in \mathbb{N}\}$ et $\{L^n_1 \mid n \in \mathbb{N}\}$ sont deux à deux non isomorphes.*

Démonstration. Pour α fixé, il existe, pour tout entier naturel n, un entier minimal $d(n)$ tel que

$$L^n_\alpha(H_0^{\perp d(n)}) \neq 0.$$

Soit k, un entier naturel distinct de n, si $|n-k| \geq 2$, les entiers $d(n)$ et $d(k)$ permettent de distinguer les foncteurs simples L^n_α et L^k_α, dans le cas contraire, on montre que les dimensions des espaces $L^n_\alpha(H_0^{\perp d(n)})$ et $L^k_\alpha(H_0^{\perp d(n)})$ sont différentes, ce qui prouve que les foncteurs simples L^n_α et L^k_α ne sont pas isomorphes.

De plus, deux foncteurs simples S_1 et S_2 de $\mathcal{F}_{quad}$ sont non isomorphes s'il existe un morphisme T de $\mathcal{T}_q$ tel que $S_1(T) = 0$ et $S_2(T) \neq 0$. Or, les morphismes T construits dans le premier point de la démonstration du lemme 6.5.16 sont tels que

$$L^n_\alpha(T) \neq 0$$

et

$$L^k_{(\alpha+1)}(T) = 0$$

où $(\alpha+1)$ désigne la réduction modulo 2 de $\alpha+1$.

□

6.6 Les facteurs de composition des foncteurs $\mathrm{Mix}_{0,1}$ et $\mathrm{Mix}_{1,1}$

On montre, dans cette section, que les facteurs de composition des foncteurs $\mathrm{Mix}_{0,1}$ sont les foncteurs L^n_0 et ceux de $\mathrm{Mix}_{1,1}$ sont les foncteurs L^n_1. Pour cela, on identifie le sous-quotient $k_d\Sigma_{\alpha,1}/k_{d+1}\Sigma_{\alpha,1}$ de la filtration du foncteur $\Sigma_{\alpha,1}$ par les foncteurs $k_d\Sigma_{\alpha,1}$ introduite à la section 6.4 au foncteur L^{d+1}_α défini en 6.5.16, ce qui fournit le résultat suivant.

Théorème 6.6.1. *La filtration décroissante du foncteur $\Sigma_{\alpha,1}$ par les foncteurs $k_d\Sigma_{\alpha,1}$*

$$\ldots \subset k_d\Sigma_{\alpha,1} \subset \ldots \subset k_1\Sigma_{\alpha,1} \subset k_0\Sigma_{\alpha,1} = \Sigma_{\alpha,1}$$

vérifie :

1. *la propriété de séparation :* $\cap k_d\Sigma_{\alpha,1} = \{0\}$
2. $k_d\Sigma_{\alpha,1}/k_{d+1}\Sigma_{\alpha,1} \simeq L_\alpha^{d+1}$.

Démonstration. Le premier point est clair par définition de la filtration $k_d\Sigma_{\alpha,1}$ introduite à la section 6.4.

D'après le lemme 6.4.7, on a :

$$(g_d \otimes \mathrm{Iso}_\alpha) \circ i_d(k_d\Sigma_{\alpha,1}) \subset L_\alpha^{d+1}.$$

Par conséquent, par le diagramme commutatif (6.6) donné dans la preuve de la proposition 6.4.6. on a la transformation naturelle

$$\sigma : k_d\Sigma_{\alpha,1}/k_{d+1}\Sigma_{\alpha,1} \to L_\alpha^{d+1}.$$

Les quotients $k_d\Sigma_{\alpha,1}/k_{d+1}\Sigma_{\alpha,1}$ étant non triviaux d'après la proposition 6.4.8 et les foncteurs L_α^{d+1} étant simples d'après le théorème 6.5.15, la transformation naturelle σ est une équivalence, d'où le résultat. □

Chapitre 7

Décomposition des projectifs P_{H_0} et P_{H_1}

Par des résultats classiques de la théorie des représentations, les décompositions en somme directe d'un foncteur F de $\mathcal{F}_{quad}$ correspondent à des décompositions en idempotents orthogonaux de 1 dans $\mathrm{End}_{\mathcal{F}_{quad}}(F)$.

Une des difficultés de la catégorie $\mathcal{F}_{quad}$ réside dans le fait que les anneaux $\mathrm{End}_{\mathcal{F}_{quad}}(P_V) = \mathbb{F}_2[\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}_q}(V,V)]$ ne sont pas faciles à identifier, ce qui rend la décomposition des projectifs P_V de $\mathcal{F}_{quad}$ délicate.

Néanmoins, on obtient dans ce chapitre, les décompositions des projectifs P_{H_0} et P_{H_1} en facteurs indécomposables grâce à l'étude explicite de la filtration des projectifs définie au chapitre 5 pour ces foncteurs. On déduira de ces décompositions que la catégorie $\mathcal{F}_{quad}$ possède des projectifs non nuls et finis et on donnera un début de classification des foncteurs simples de $\mathcal{F}_{quad}$.

7.1 Décomposition de P_{H_0}

Afin d'obtenir une décomposition du foncteur P_{H_0} en facteurs indécomposables, nous allons donner une description explicite des sous-quotients de la filtration de P_{H_0}, puis, on montrera que, pour ce foncteur, la filtration se scinde, et on identifiera les facteurs de la décomposition obtenue.

7.1.1 Description explicite des sous-quotients de la filtration

Le but de ce paragraphe est de donner une base des espaces vectoriels $P^{(0)}_{H_0}(V)$, $P^{(1)}_{H_0}/P^{(0)}_{H_0}(V)$ et $P_{H_0}/P^{(1)}_{H_0}(V)$ pour V un objet fixé de $\mathcal{T}_q$.

Base $\mathcal{B}^{(0)}_{H_0}$ de $P^{(0)}_{H_0}(V)$ On déduit du point (1) de la proposition 5.2.1 le résultat suivant.

Proposition 7.1.1. *Une base $\mathcal{B}^{(0)}_{H_0}$ de $P^{(0)}_{H_0}(V)$ est donnée par l'ensemble :*

$$\mathcal{B}^{(0)}_{H_0} = \{t_f \text{ pour } f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}^f}({\mathbb{F}_2}^{\oplus 2}, \epsilon(V))\}.$$

Base $\mathcal{B}^{(1)}_{H_0}$ de $P^{(1)}_{H_0}/P^{(0)}_{H_0}(V)$ Par définition de la filtration, un générateur $T = [H_0 \xrightarrow{f} V \perp L \xleftarrow{i_V} V]$ de $P^{(1)}_{H_0}/P^{(0)}_{H_0}(V)$ est tel que $I = f(H_0) \cap i(V)$ est un espace quadratique de dimension un. On rappelle qu'on notera (x,α) l'espace quadratique de dimension un engendré par un x tel que $q(x) = \alpha$, conformément à la notation 1.1.17. On a le lemme suivant.

Lemme 7.1.2. *Soient $T = [H_0 \xrightarrow{f} V\perp L \xleftarrow{i_V} V]$ un générateur de $P^{(1)}_{H_0}/P^{(0)}_{H_0}(V)$, et $\{a_0, b_0\}$ une base symplectique fixée de H_0, alors l'application f du triplet T a une des trois formes suivantes.*

1. *Si $I = (f(a_0), 0)$ l'application f est de la forme :*

$$\begin{array}{rccc} f: & H_0 & \longrightarrow & V\perp L \\ & a_0 & \mapsto & v \\ & b_0 & \mapsto & w+l \end{array}$$

   pour v et w deux éléments de V vérifiant $q(v) = 0$ et $B(v, w) = 1$ et l un élément non nul de L.

2. *Si $I = (f(b_0), 0)$ l'application f est de la forme :*

$$\begin{array}{rccc} f: & H_0 & \longrightarrow & V\perp L \\ & a_0 & \mapsto & v+l \\ & b_0 & \mapsto & w \end{array}$$

   pour v et w deux éléments de V vérifiant $q(w) = 0$ et $B(v, w) = 1$ et l un élément non nul de L.

3. *Si $I = (f(a_0 + b_0), 1)$ l'application f est de la forme :*

$$\begin{array}{rccc} f: & H_0 & \longrightarrow & V\perp L \\ & a_0 & \mapsto & v+l \\ & b_0 & \mapsto & w+l \end{array}$$

   pour v et w deux éléments de V vérifiant $q(v + w) = 1$ et $B(v, w) = 1$ et l un élément non nul de L.

Démonstration. L'espace H_0 admet trois sous-espaces de dimension un qui sont : $\mathrm{Vect}(a_0)$ et $\mathrm{Vect}(b_0)$ isométriques à $(x, 0)$ et $\mathrm{Vect}(a_0 + b_0)$ isométrique à $(x, 1)$. Ces trois sous espaces fournissent chacune des trois applications f données dans l'énoncé. □

Notation 7.1.3. Les triplets obtenus au point (1) du lemme seront dit de type A, ceux du point (2) de type B et ceux du dernier point de type C.

On a la proposition suivante.

Proposition 7.1.4. *Pour $T = [H_0 \xrightarrow{f} V\perp L \xleftarrow{i_V} V]$ et $T' = [H_0 \xrightarrow{f'} V\perp L' \xleftarrow{i'_V} V]$ deux générateurs de $P^{(1)}_{H_0}/P^{(0)}_{H_0}(V)$, les deux propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. *Les morphismes T et T' de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}_q}(H_0, V)$ sont de même type et vérifient la relation $p_V \circ f = p'_V \circ f'$.*
2. *Les deux morphismes T et T' de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}_q}(H_0, V)$ sont égaux.*

Démonstration. Supposons que les morphismes T et T' de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}_q}(H_0, V)$ soient tous deux représentés par des triplets de type A tel que $p_V \circ f = p'_V \circ f'$. On en déduit que :

$$\begin{array}{rccc} f: & H_0 & \longrightarrow & V\perp L \\ & a_0 & \mapsto & v \\ & b_0 & \mapsto & w+l \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rccc} f': & H_0 & \longrightarrow & V\perp L' \\ & a_0 & \mapsto & v \\ & b_0 & \mapsto & w+l' \end{array}$$

où v et w sont des éléments de V et l et l' sont des éléments non nuls de, respectivement, L et L'.

Comme les applications f et f' conservent la forme quadratique, on a $q(b_0) = q(w) + q(l) = q(w) + q(l')$ dont on déduit $q(l) = q(l')$ et, par conséquent, l'application évidente $\mathrm{Vect}(l) \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Vect}(l')$

conserve la forme quadratique. On peut donc appliquer le lemme 1.1.16 dont on déduit l'existence d'une application $\alpha : L\perp L' \to L\perp L'$ rendant le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{tikzcd} L\perp L' \arrow[r, "\alpha"] & L\perp L' \\ \mathrm{Vect}(l) \arrow[u, hook] \arrow[r, "\underline{\alpha}"'] & \mathrm{Vect}(l'). \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

On en déduit la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[d, hook, "i_V"] \arrow[ddr, hook, "i'_V"] & \\ H_0 \arrow[r, "f"] \arrow[drr, "f'"'] & V\perp(L\perp L') \arrow[dr, "\mathrm{Id}\perp\alpha"] & \\ & & V\perp(L\perp L') \end{tikzcd}$$

d'où l'égalité $T = T'$ puisque $T = [H_0 \xrightarrow{f} V\perp L\perp L' \xleftarrow{i_V} V]$ et $T' = [H_0 \xrightarrow{f'} V\perp L\perp L' \xleftarrow{i'_V} V]$, par inclusion.

On procède de la même manière pour les morphismes représentés par des triplets de type B et C.

Réciproquement, si $T = T'$, pour $T = [H_0 \xrightarrow{f} V\perp L \xleftarrow{i_V} V]$ et $T' = [H_0 \xrightarrow{f'} V\perp L' \xleftarrow{i'_V} V]$, d'après la proposition 2.2.20, les deux espaces engendrés par T et T' sont isométriques. Par conséquent, d'après le théorème 1.1.16, on a l'existence d'une isométrie $\beta : V\perp L\perp L' \to V\perp L\perp L'$ rendant le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{tikzcd} V\perp L\perp L' \arrow[r, "\beta"] & V\perp L\perp L' \\ \langle\langle T\rangle\rangle \arrow[u, hook] \arrow[r, "\simeq"'] & \langle\langle T'\rangle\rangle. \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

On en déduit la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[d, hook, "i_V"] \arrow[ddr, hook, "i'_V"] & \\ H_0 \arrow[r, "f"] \arrow[drr, "f'"'] & V\perp L\perp L' \arrow[dr, "\beta"] & \\ & & V\perp L\perp L' \end{tikzcd}$$

qui implique $\beta \circ i_V = i'_V$ dont on déduit que $\beta = \mathrm{Id}_V \perp \beta'$ où $\beta' : L\perp L' \to L\perp L'$ est un morphisme de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}_q}(L\perp L', L\perp L')$. Par conséquent,

$$f : \begin{array}{ccc} H_0 & \longrightarrow & V\perp L\perp L' \\ a_0 & \mapsto & v + l \\ b_0 & \mapsto & w + l' \end{array} \quad \text{et} \quad f' : \begin{array}{ccc} H_0 & \longrightarrow & V\perp L\perp L' \\ a_0 & \mapsto & v + \beta'(l) \\ b_0 & \mapsto & w + \beta'(l') \end{array}$$

ce qui prouve que $p_V \circ f = p'_V$. De plus, comme β' est inversible, pour tout x de $L\perp L'$ on a : x est non nul si et seulement si $\beta'(x)$ est non nul, ce qui prouve que les triplets T et T' sont de même type. $\square$

Cette proposition justifie la notation suivante.

Notation 7.1.5. On notera $A_{v,w}$, $B_{v,w}$ et $C_{v,w}$ les triplets de $P^{(1)}_{H_0}/P^{(0)}_{H_0}(V)$ respectivement de type A, B et C et vérifiant $p_V \circ f(a_0) = v$ et $p_V \circ f(b_0) = w$.

On déduit facilement du lemme 7.1.2 et de la proposition précédente le résultat suivant.

Proposition 7.1.6. *Une base $\mathcal{B}^{(1)}_{H_0}$ de $P^{(1)}_{H_0}/P^{(0)}_{H_0}(V)$ est donnée par l'ensemble :*

$$\begin{array}{ll} \mathcal{B}^{(1)}_{H_0} = \{ & A_{v,w} \text{ pour } v \text{ et } w \text{ deux éléments de } V \text{ vérifiant } q(v) = 0 \text{ et } B(v,w) = 1, \\ & B_{v,w} \text{ pour } v \text{ et } w \text{ deux éléments de } V \text{ vérifiant } q(w) = 0 \text{ et } B(v,w) = 1, \\ & C_{v,w} \text{ pour } v \text{ et } w \text{ deux éléments de } V \text{ vérifiant } q(v+w) = 1 \text{ et } B(v,w) = 1\} \end{array}$$

Base $\mathcal{B}^{(2)}_{H_0}$ de $P_{H_0}/P^{(1)}_{H_0}(V)$ D'après la proposition 5.3.4, on a $(P_{H_0}/P^{(1)}_{H_0})(V) \simeq \mathrm{Iso}_{H_0}(V)$ dont on déduit le résultat suivant.

Proposition 7.1.7. *Une base $\mathcal{B}^{(2)}_{H_0}$ de $P_{H_0}/P^{(1)}_{H_0}(V)$ est donnée par l'ensemble :*

$$\mathcal{B}^{(2)}_{H_0} = \{D_f \text{ pour } f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}_q}(H_0, V)\}$$

où D_f désigne le triplet $[H_0 \xrightarrow{f} V \xleftarrow{\mathrm{Id}} V]$.

On termine cette section en donnant les règles de composition pour les morphismes t_f, $A_{v,w}$, $B_{v,w}$, $C_{v,w}$ et D_f qui sont répertoriées dans la proposition suivante. Ce résultat calculatoire sera fondamental dans la prochaine section pour montrer le scindement de la filtration.

Proposition 7.1.8. *Pour un morphisme $T = [V \xrightarrow{\varphi} W \perp L \xleftarrow{i_W} W]$ de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}_q}(V, W)$, on a les relations suivantes.*

1. *Pour un morphisme f de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}^f}(\mathbb{F}_2{}^{\oplus 2}, \epsilon(V))$ on a :*

$$T \circ t_f = t_{\varphi \circ f}.$$

2. *(a) Pour deux éléments v et w de V vérifiant $q(v) = 0$ et $B(v,w) = 1$, on a :*

$$T \circ A_{v,w} = \begin{cases} A_{\varphi(v), p_W \circ \varphi(w)} & \text{si } \varphi(v) \in W \\ t_{p_W \circ (\varphi \perp \mathrm{Id}) \circ \alpha} & \text{sinon.} \end{cases}$$

(b) Pour deux éléments v et w de V vérifiant $q(w) = 0$ et $B(v,w) = 1$, on a :

$$T \circ B_{v,w} = \begin{cases} B_{p_W \circ \varphi(v), \varphi(w)} & \text{si } \varphi(w) \in W \\ t_{p_W \circ (\varphi \perp \mathrm{Id}) \circ \alpha} & \text{sinon.} \end{cases}$$

(c) Pour deux éléments v et w de V vérifiant $q(v+w) = 1$ et $B(v,w) = 1$, on a :

$$T \circ C_{v,w} = \begin{cases} C_{p_W \circ \varphi(v), p_W \circ \varphi(w)} & \text{si } \varphi(v+w) \in W \\ t_{p_W \circ (\varphi \perp \mathrm{Id}) \circ \alpha} & \text{sinon.} \end{cases}$$

3. *Pour un morphisme f de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}_q}(H_0, V)$, on a :*

$$T \circ D_f = \begin{cases} D_{\varphi \circ f} & \text{si } \varphi \circ f(a_0) \in W \text{ et } \varphi \circ f(b_0) \in W \\ A_{\varphi \circ f(a_0), p_W \circ \varphi \circ f(b_0)} & \text{si } \varphi \circ f(a_0) \in W \text{ et } \varphi \circ f(b_0) \notin W \\ B_{p_W \circ \varphi \circ f(a_0), \varphi \circ f(b_0)} & \text{si } \varphi \circ f(a_0) \notin W \text{ et } \varphi \circ f(b_0) \in W \\ C_{p_W \circ \varphi \circ f(a_0), p_W \circ \varphi \circ f(b_0)} & \text{si } \varphi \circ f(a_0) \notin W \text{ et } \varphi \circ f(b_0) \notin W \text{ et } \varphi \circ f(a_0 + b_0) \in W \\ t_{p_W \circ (\varphi \perp \mathrm{Id}) \circ \alpha} & \text{si } \varphi \circ f(a_0) \notin W \text{ et } \varphi \circ f(b_0) \notin W \text{ et } \varphi \circ f(a_0 + b_0) \notin W. \end{cases}$$

Démonstration. On a le diagramme de composition suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & & W \arrow[d, hook] \\
 & V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, hook] & W\perp L \arrow[d, hook] \\
H_0 \arrow[r, "\alpha"] & V\perp L' \arrow[r, "\varphi\perp\mathrm{Id}"'] & W\perp L\perp L'
\end{tikzcd}$$

1. Pour le triplet t_f, on a $\alpha(a_0) = f(a_0) + l$ et $\alpha(b_0) = f(b_0) + m$ où $\{l, m\}$ est une famille libre de L'. Par conséquent :

$$(\varphi\perp\mathrm{Id}) \circ \alpha(a_0) = \varphi \circ f(a_0) + l \text{ et } (\varphi\perp\mathrm{Id}) \circ \alpha(b_0) = \varphi \circ f(b_0) + m$$

   dont on déduit facilement que $T \circ t_f = t_{\varphi\circ f}$.
2. Pour $A_{v,w}$, on a $\alpha(a_0) = v$ et $\alpha(b_0) = w+l'$ où l' est un élément de L' non nul. Par conséquent :

$$(\varphi\perp\mathrm{Id}) \circ \alpha(a_0) = \varphi(v) \text{ et } (\varphi\perp\mathrm{Id}) \circ \alpha(b_0) = \varphi(w) + l'$$

   on doit alors distinguer deux cas :
   – si $\varphi(v) \in W$, comme φ conserve la forme quadratique, on a $q(\varphi(v)) = q(v)$ et comme L' est orthogonal à V, $B(\varphi(v), p_W \circ \varphi(w)) = B(\varphi(v), \varphi(w)) = B(v, w)$ ce qui justifie l'existence du triplet $A_{\varphi(v),p_W\circ\varphi(w)}$. On a alors

$$T \circ A_{v,w} = A_{\varphi(v),p_W\circ\varphi(w)};$$

   – sinon, $\varphi(v) = p_W \circ \varphi(v) + m$ où m est un élément non nul de L. Le triplet obtenu est donc de rang nul et on a $T \circ A_{v,w} = t_{p_W\circ(\varphi\perp\mathrm{Id})\circ\alpha}$.

   Les cas de $B_{v,w}$ et $C_{v,w}$ étant très similaires à celui de $A_{v,w}$, ils sont laissés au lecteur.
3. Pour le triplet D_f où f est un élément de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}_q}(H_0, V)$, on a $\alpha(a_0) = f(a_0) = v$ et $\alpha(b_0) = f(b_0) = w$ où v et w sont deux éléments de V. Par conséquent :

$$(\varphi\perp\mathrm{Id}) \circ \alpha(a_0) = \varphi(v) \text{ et } (\varphi\perp\mathrm{Id}) \circ \alpha(b_0) = \varphi(w).$$

   Comme $\varphi \circ f$ conserve la forme quadratique on a : $q(\varphi \circ f(a_0)) = q(\varphi \circ f(b_0)) = 0$ et $B(\varphi \circ f(a_0), \varphi \circ f(b_0)) = 1$, ce qui justifie l'existence des triplets $A_{\varphi\circ f(a_0),\varphi\circ f(b_0)}$, $B_{\varphi\circ f(a_0),\varphi\circ f(b_0)}$ et $C_{\varphi\circ f(a_0),\varphi\circ f(b_0)}$.

   On doit alors distinguer quatre cas :
   – si $\varphi(v) \in W$ et $\varphi(w) \in W$ alors $T \circ D_f = D_{\varphi\circ f}$;
   – si $\varphi \circ f(a_0) \in W$ et $\varphi \circ f(b_0) \notin W$, on a $\varphi \circ f(a_0) = w'$ et $\varphi \circ f(b_0) = w'' + l$, où l est un élément non nul de L. Le triplet obtenu est donc de type A et on a $T\circ D_f = A_{\varphi\circ f(a_0),\varphi\circ f(b_0)}$;
   – si $\varphi \circ f(a_0) \notin W$ et $\varphi \circ f(b_0) \in W$, on a $\varphi \circ f(a_0) = w' + l$ et $\varphi \circ f(b_0) = w''$, où l est un élément non nul de L. Le triplet obtenu est donc de type B et on a $T\circ D_f = B_{\varphi\circ f(a_0),\varphi\circ f(b_0)}$;
   – si $\varphi \circ f(a_0) \notin W$, $\varphi \circ f(b_0) \notin W$ et $\varphi \circ f(a_0 + b_0) \in W$, on a $\varphi \circ f(a_0) = w' + l$ et $\varphi \circ f(b_0) = w'' + l$, où l est un élément non nul de L. Le triplet obtenu est donc de type C et on a $T \circ D_f = C_{\varphi\circ f(a_0),\varphi\circ f(b_0)}$;
   – si $\varphi \circ f(a_0) \notin W$, $\varphi \circ f(b_0) \notin W$ et $\varphi \circ f(a_0 + b_0) \notin W$, , on a $\varphi \circ f(a_0) = w' + l$ et $\varphi \circ f(b_0) = w'' + l'$, où l et l' sont deux éléments non nuls de L. Le triplet obtenu est donc de rang nul et on a $T \circ D_f = t_{p_W\circ(\varphi\perp\mathrm{Id})\circ\alpha}$.

□

7.1.2 Scindement de la filtration pour le foncteur P_{H_0}

On montre dans cette section le résultat suivant.

Proposition 7.1.9. *La filtration par le rang se scinde pour le foncteur P_{H_0}, c'est à dire :*

$$P_{H_0} = P_{H_0}^{(0)} \oplus P_{H_0}^{(1)}/P_{H_0}^{(0)} \oplus P_{H_0}/P_{H_0}^{(1)}.$$

Démonstration. D'après le point (1) de la proposition 5.2.1, on a :

$$P_{H_0}^{(1)} = P_{H_0}^{(0)} \oplus P_{H_0}^{(1)}/P_{H_0}^{(0)}.$$

On montre dans la suite, que $P_{H_0} = P_{H_0}^{(1)} \oplus P_{H_0}/P_{H_0}^{(1)}$, ce qui fournira le résultat de l'énoncé.

Par définition de la filtration, on a la suite exacte courte :

$$0 \to P_{H_0}^{(1)} \to P_{H_0} \xrightarrow{p} P_{H_0}/P_{H_0}^{(1)} \to 0. \tag{7.1}$$

Soit V un objet de $\mathcal{T}_q$, on considère un morphisme f de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}_q}(H_0, V)$ et le générateur D_f de $P_{H_0}/P_{H_0}^{(1)}(V)$ qui lui est associé. Comme l'application f conserve la forme quadratique, on a : $q(f(a_0)) = q(f(b_0)) = 0$, $q(f(a_0 + b_0)) = 1$ et donc $B(f(a_0), f(b_0)) = 1$. Par conséquent, les triplets $A_{f(a_0),f(b_0)}$, $B_{f(a_0),f(b_0)}$ et $C_{f(a_0),f(b_0)}$ de $P_{H_0}(V)$ existent. On définit, alors, une application $s_V : P_{H_0}/P_{H_0}^{(1)}(V) \to P_{H_0}(V)$ par :

$$\begin{array}{rccl} s_V : & P_{H_0}/P_{H_0}^{(1)}(V) & \longrightarrow & P_{H_0}(V) \\ & D_f & \mapsto & D_f + A_{f(a_0),f(b_0)} + B_{f(a_0),f(b_0)} + C_{f(a_0),f(b_0)}. \end{array}$$

On vérifie alors les deux points suivants.

1. $p_V \circ s_V = \mathrm{Id}$
   Pour D_f un générateur de $P_{H_0}/P_{H_0}^{(1)}(V)$, on a
   $$p_V \circ s_V(D_f) = D_f$$
   étant donné que les triplets $A_{f(a_0),f(b_0)}$, $B_{f(a_0),f(b_0)}$ et $C_{f(a_0),f(b_0)}$ sont de rang inférieur ou égal à un.
2. Les applications s_V définissent une transformation naturelle
   Il s'agit de vérifier que, pour un morphisme $T = [V \xrightarrow{\varphi} W \perp L \xleftarrow{i_W} W]$ de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}_q}(V, W)$, on a la commutativité du diagramme suivant :
   $$\begin{tikzcd} P_{H_0}/P_{H_0}^{(1)}(V) \arrow[r, "s_V"] \arrow[d, "P_{H_0}/P_{H_0}^{(1)}(T)"'] & P_{H_0}(V) \arrow[d, "P_{H_0}(T)"] \\ P_{H_0}/P_{H_0}^{(1)}(W) \arrow[r, "s_W"] & P_{H_0}(W). \end{tikzcd}$$
   Par souci de clarté, on utilisera par la suite les notations suivantes : $A' = A_{\varphi\circ f(a_0), p_W\circ\varphi\circ f(b_0)}$, $B' = B_{p_W\circ\varphi\circ f(a_0), \varphi\circ f(b_0)}$, $C' = C_{p_W\circ\varphi\circ f(a_0), p_W\circ\varphi\circ f(b_0)}$ et $t' = t_{p_W\circ(\varphi\perp\mathrm{Id})\circ\alpha}$.
   On a d'une part, en utilisant les résultats de la proposition 7.1.8 :

$$
\begin{aligned}
&P_{H_0}(T)\circ s_V(D_f)\\
&= P_{H_0}(T)(D_f + A_{f(a_0),f(b_0)} + B_{f(a_0),f(b_0)} + C_{f(a_0),f(b_0)})\\
&= T\circ D_f + T\circ A_{f(a_0),f(b_0)} + T\circ B_{f(a_0),f(b_0)} + T\circ C_{f(a_0),f(b_0)}
\end{aligned}
$$

$$
= \begin{cases}
D_{\varphi\circ f} & +A' & +B' & +C' & & \text{si } \varphi\circ f(a_0)\in W \text{ et } \varphi\circ f(b_0)\in W\\
A' & +A' & +t' & +t' & =0 & \text{si } \varphi\circ f(a_0)\in W \text{ et } \varphi\circ f(b_0)\notin W\\
B' & +t' & +B' & +t' & =0 & \text{si } \varphi\circ f(a_0)\notin W \text{ et } \varphi\circ f(b_0)\in W\\
C' & +t' & +t' & +C' & =0 & \text{si } \varphi\circ f(a_0)\notin W \text{ et } \varphi\circ f(b_0)\notin W \text{ et } \varphi\circ f(a_0+b_0)\in W\\
t' & +t' & +t' & +t' & =0 & \text{si } \varphi\circ f(a_0)\notin W \text{ et } \varphi\circ f(b_0)\notin W \text{ et } \varphi\circ f(a_0+b_0)\notin W.
\end{cases}
$$

$$
= \begin{cases}
D_{\varphi\circ f} & +A' & +B' & +C' & \text{si } \varphi\circ f(a_0)\in W \text{ et } \varphi\circ f(b_0)\in W\\
0 & & & & \text{sinon.}
\end{cases}
$$

D'autre part, par le point (3) de la proposition 7.1.8, on a :

$$
P_{H_0}/P^{(1)}_{H_0}(T)(D_f) = \begin{cases} D_{\varphi\circ f} & \text{si } \varphi\circ f(a_0)\in W \text{ et } \varphi\circ f(b_0)\in W\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}
$$

puisque les triplets de type A, B, C et t sont nuls dans le quotient $P_{H_0}/P^{(1)}_{H_0}(W)$. On en déduit,

$$
s_W\circ P_{H_0}/P^{(1)}_{H_0}(T)(D_f) = \begin{cases} D_{\varphi\circ f} + A' + B' + C' & \text{si } \varphi\circ f(a_0)\in W \text{ et } \varphi\circ f(b_0)\in W\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}
$$

Par conséquent, les applications s_V définissent une transformation naturelle qui est une section de p, ce qui donne le scindement de la suite exacte 7.1. □

7.1.3 Identification des facteurs directs

L'objectif de ce paragraphe est d'identifier les facteurs de la décomposition donnée à la proposition 7.1.9. Pour cela, on commence par montrer, dans le lemme suivant, que les triplets de type A (respectivement de type B et C) définissent un sous-foncteur de $P^{(1)}_{H_0}/P^{(0)}_{H_0}$ qui est un facteur direct de ce foncteur.

Lemme 7.1.10. *Le foncteur $P^{(1)}_{H_0}/P^{(0)}_{H_0}$ se décompose en somme directe de la manière suivante*

$$
P^{(1)}_{H_0}/P^{(0)}_{H_0} = F_A \oplus F_B \oplus F_C
$$

où F_A, F_B et F_C sont les sous-foncteurs de $P^{(1)}_{H_0}/P^{(0)}_{H_0}$ engendrés, respectivement, par les triplets de type A, B et C.

Démonstration. On déduit facilement de la proposition 7.1.6 l'isomorphisme d'espace vectoriel

$$
P^{(1)}_{H_0}/P^{(0)}_{H_0}(V) = F_A(V) \oplus F_B(V) \oplus F_C(V)
$$

pour tout objet V de $\mathcal{T}_q$.

Il suffit donc de montrer que F_A, F_B et F_C sont des sous foncteurs de $P^{(1)}_{H_0}/P^{(0)}_{H_0}$.

Pour F_A, il s'agit de vérifier que, pour un morphisme $T = [V \xrightarrow{\varphi} W\perp L \xleftarrow{i_W} X]$ de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}_q}(V,W)$, on a la commutativité du diagramme suivant :

$$
\begin{tikzcd}
F_A(V) \arrow[r, "i_V"] \arrow[d, "F_A(T)"'] & P^{(1)}_{H_0}/P^{(0)}_{H_0}(V) \arrow[d, "P^{(1)}_{H_0}/P^{(0)}_{H_0}(T)"] \\
F_A(W) \arrow[r, "i_W"] & P^{(1)}_{H_0}/P^{(0)}_{H_0}(W).
\end{tikzcd}
$$

Soit $A_{v,w}$ un générateur de $F_A(V)$, on a d'après la proposition 7.1.8

$$T \circ A_{v,w} = \begin{cases} A_{\varphi(v),p_W\circ\varphi(w)} & \text{si } \varphi(v) \in W \\ t_{p_W\circ(\varphi\perp\mathrm{Id})\circ\alpha} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par conséquent,

$$P^{(1)}_{H_0}/P^{(0)}_{H_0}(T) \circ i_V(A_{v,w}) = \begin{cases} A_{\varphi(v),p_W\circ\varphi(w)} & \text{si } \varphi(v) \in W \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

puisque le triplet $t_{p_W\circ(\varphi\perp\mathrm{Id})\circ\alpha}$, qui est de rang nul, est égal à zéro dans le quotient $P^{(1)}_{H_0}/P^{(0)}_{H_0}(W)$.

On en déduit que $P^{(1)}_{H_0}/P^{(0)}_{H_0}(T) \circ i_V(A_{v,w})$ est dans l'espace vectoriel $F_A(W)$ et donc que F_A est un sous-foncteur de $P^{(1)}_{H_0}/P^{(0)}_{H_0}$.

De la même manière, en utilisant les valeurs de $T \circ B_{v,w}$ et $T \circ C_{v,w}$ données à la proposition 7.1.8, on montre que les foncteurs F_B et F_C sont des sous-foncteurs de $P^{(1)}_{H_0}/P^{(0)}_{H_0}$.

□

On identifie, dans le lemme suivant, les foncteurs F_A, F_B et F_C à des foncteurs mixtes définis au chapitre 6.

Lemme 7.1.11. *1. Le foncteur F_A (respectivement F_B) est isomorphe au foncteur* $\mathrm{Mix}_{0,1}$.

2. Le foncteur F_C est isomorphe au foncteur $\mathrm{Mix}_{1,1}$.

Démonstration. 1. L'isomorphisme $F_A \simeq \mathrm{Mix}_{0,1}$.

Soit $A_{v,w}$ un générateur de $F_A(V)$, on a, par définition d'un triplet de type A, $B(v,w) = 1$. Par conséquent, l'application linéaire suivante existe.

$$\begin{array}{rccc} \sigma^1_V : & F_A(V) & \to & \mathrm{Mix}_{0,1}(V) \\ & A_{v,w} & \longmapsto & [(w, v+w)]. \end{array}$$

L'application σ^1_V est clairement un isomorphisme d'inverse

$$\begin{array}{rccc} (\sigma^1_V)^{-1} : & \mathrm{Mix}_{0,1}(V) & \to & F_A(V) \\ & [(v,w)] & \longmapsto & A_{v+w,v}. \end{array}$$

Il nous reste à vérifier que ces applications σ^1_V définissent une transformation naturelle de foncteurs, c'est à dire que pour un morphisme $T = [V \xrightarrow{\varphi} W\perp L \xleftarrow{i_W} W]$, on a la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} F_A(V) \arrow[r, "\sigma^1_V"] \arrow[d, "F_A(T)"'] & \mathrm{Mix}_{0,1}(V) \arrow[d, "\mathrm{Mix}_{0,1}(T)"] \\ F_A(W) \arrow[r, "\sigma^1_W"] & \mathrm{Mix}_{0,1}(W). \end{tikzcd}$$

On a :

$$\begin{aligned} &\mathrm{Mix}_{0,1}(T) \circ \sigma^1_V(A_{v,w}) \\ &= \mathrm{Mix}_{0,1}(T)[(w, v+w)] \\ &= \begin{cases} [(p_W \circ (\varphi(w)), p_W \circ (\varphi(v+w))] & \text{si } \varphi(v) \in W \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ &= \begin{cases} [(p_W \circ (\varphi(w)), p_W \circ (\varphi(v+w))] & \text{si } \varphi(v) \in W \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

en utilisant la remarque 6.2.5 et,

$$\begin{aligned}\sigma^1_W \circ F_A(T)(A_{v,w}) &= \sigma^1_W \begin{cases} A_{\varphi(v),p_W\circ\varphi(w)} & \text{si } \varphi(v)\in W \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ &= \begin{cases} [(p_W\circ(\varphi(w)),\varphi(v)+p_W\circ(\varphi(w))] & \text{si } \varphi(v)\in W \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}\end{aligned}$$

Dans le cas où $\varphi(v)\in W$, on a :

$$[(p_W\circ(\varphi(w)),\varphi(v)+p_W\circ(\varphi(w))] = [(p_W\circ(\varphi(w)),p_W\circ(\varphi(v+w))],$$

ce qui prouve la naturalité de σ^1.

Les deux cas suivants étant très similaires à celui de F_A, on ne donne que l'expression d'un isomorphisme d'espace vectoriel, qui existe pour les même raisons que pour σ^1_V, et on laisse le soin au lecteur de vérifier que ceci défini bien une équivalence naturelle.

2. L'isomorphisme $F_B \simeq \mathrm{Mix}_{1,0}$.
   On considère l'isomorphisme d'espaces vectoriels suivant :

$$\begin{array}{rccc} \sigma^2_V : & F_B(V) & \to & \mathrm{Mix}_{0,1}(V) \\ & B_{v,w} & \longmapsto & [(v,v+w)]. \end{array}$$

3. L'isomorphisme $F_C \simeq \mathrm{Mix}_{1,1}$.
   On considère l'isomorphisme d'espace vectoriel suivant :

$$\begin{array}{rccc} \sigma^3_V : & F_C(V) & \to & \mathrm{Mix}_{1,1}(V) \\ & C_{v,w} & \longmapsto & [(v,w)] \end{array}$$

□

On déduit alors la décomposition suivante

Proposition 7.1.12. *Le foncteur projectif P_{H_0} admet la décomposition en somme directe suivante :*

$$P_{H_0} = \iota(P^{\mathcal{F}}_{\epsilon(\mathbb{F}_2{}^{\oplus 2})}) \oplus (\mathrm{Mix}_{0,1}{}^{\oplus 2} \oplus \mathrm{Mix}_{1,1}) \oplus \mathrm{Iso}_{H_0}$$

où $\mathrm{Mix}_{0,1}$ *et* $\mathrm{Mix}_{1,1}$ *sont des foncteurs mixtes et* Iso_{H_0} *est un foncteur isotrope.*

Démonstration. Par la proposition 7.1.9, on avait la décomposition en somme directe

$$P_{H_0} = P^{(0)}_{H_0} \oplus P^{(1)}_{H_0}/P^{(0)}_{H_0} \oplus P_{H_0}/P^{(1)}_{H_0}.$$

D'après les résultats généraux sur les projectifs, on a

$$P^{(0)}_{H_0} \simeq \iota(P^{\mathcal{F}}_{\epsilon(H_0)})$$

d'après le point (1) de la proposition 5.2.1 et

$$P_{H_0}/P^{(1)}_{H_0} \simeq \mathrm{Iso}_{H_0}$$

d'après la proposition 5.3.1. En combinant les lemmes 7.1.10 et 7.1.11, on a

$$P^{(1)}_{H_0}/P^{(0)}_{H_0} = \mathrm{Mix}_{0,1}{}^{\oplus 2} \oplus \mathrm{Mix}_{1,1}$$

d'où le résultat de l'énoncé. □

7.2 Décomposition de P_{H_1}

L'étude du foncteur P_{H_1} est très similaire à celle du foncteur P_{H_0} faite à la section précédente. Par conséquent, on se contente, ici, d'adapter cette dernière section au cas de P_{H_1} en omettant la plupart des démonstrations.

7.2.1 Description explicite des sous-quotients de la filtration

Le but de ce paragraphe est de donner une base des espaces vectoriels $P^{(0)}_{H_1}(V)$, $P^{(1)}_{H_1}/P^{(0)}_{H_1}(V)$ et $P_{H_1}/P^{(1)}_{H_1}(V)$ pour V un objet de $\mathcal{T}_q$.

Base $\mathcal{B}^{(0)}_{H_1}$ de $P^{(0)}_{H_1}(V)$ On déduit du point (1) de la proposition 5.2.1 le résultat suivant.

Proposition 7.2.1. *Une base $\mathcal{B}^{(0)}_{H_1}$ de $P^{(0)}_{H_1}(V)$ est donnée par l'ensemble :*

$$\mathcal{B}^{(0)}_{H_1} = \{t_f \text{ pour } f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}f}(\mathbb{F}_2{}^{\oplus 2}, \epsilon(V))\}.$$

Base $\mathcal{B}^{(1)}_{H_1}$ de $P^{(1)}_{H_1}/P^{(0)}_{H_1}(V)$ Par définition de la filtration, un générateur $T = [H_1 \xrightarrow{f} V \perp V' \xleftarrow{i_V} V]$ de $P^{(1)}_{H_1}/P^{(0)}_{H_1}(V)$ est tel que $I = f(H_1) \cap i(V)$ est un espace quadratique de dimension un. On a le lemme suivant.

Lemme 7.2.2. *Soient $T = [H_1 \xrightarrow{f} V \perp V' \xleftarrow{i_V} V]$ un générateur de $P^{(1)}_{H_1}/P^{(0)}_{H_1}(V)$, et $\{a_1, b_1\}$ une base symplectique fixée de H_1, alors l'application f du triplet T a une des trois formes suivantes.*

1. *Si $I = (f(a_1), 0)$ l'application f est de la forme :*

$$\begin{array}{rccc} f: & H_1 & \longrightarrow & V \perp L \\ & a_1 & \mapsto & v \\ & b_1 & \mapsto & w + l \end{array}$$

   pour v et w deux éléments de V vérifiant $q(v) = 1$ et $B(v, w) = 1$ et l un élément non nul de L.

2. *Si $I = (f(b_1), 0)$ l'application f est de la forme :*

$$\begin{array}{rccc} f: & H_1 & \longrightarrow & V \perp L \\ & a_1 & \mapsto & v + l \\ & b_1 & \mapsto & w \end{array}$$

   pour v et w deux éléments de V vérifiant $q(w) = 1$ et $B(v, w) = 1$ et l un élément non nul de L.

3. *Si $I = (f(a_1 + b_1), 1)$ l'application f est de la forme :*

$$\begin{array}{rccc} f: & H_1 & \longrightarrow & V \perp L \\ & a_1 & \mapsto & v + l \\ & b_1 & \mapsto & w + l \end{array}$$

   pour v et w deux éléments de V vérifiant $q(v + w) = 1$ et $B(v, w) = 1$ et l un élément non nul de L.

Démonstration. L'espace H_1 admet trois sous-espaces de dimension un qui sont : $\mathrm{Vect}(a_1)$, $\mathrm{Vect}(b_1)$ et $\mathrm{Vect}(a_1 + b_1)$ qui sont isométriques à $(x, 1)$. Ces trois sous espaces fournissent chacune des trois applications f données dans l'énoncé. □

Notation 7.2.3. Les triplets obtenus au point (1) du lemme seront dit de type E, ceux du point (2) de type F et ceux du dernier point de type G.

On a la proposition suivante.

Proposition 7.2.4. *Pour* $T = [H_1 \xrightarrow{f} V \perp L \xleftarrow{i_V} V]$ *et* $T' = [H_1 \xrightarrow{f'} V \perp L' \xleftarrow{i'_V} V]$ *deux générateurs de* $P^{(1)}_{H_1}/P^{(0)}_{H_1}(V)$*, les deux propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. *Les triplets* T *et* T' *sont de même type et vérifient la relation* $p_V \circ f = p'_V \circ f'$*.*
2. *Les deux triplets* T *et* T' *sont égaux.*

Démonstration. La preuve est similaire à celle de la proposition 7.1.4. □

Cette proposition justifie la notation suivante.

Notation 7.2.5. On notera, respectivement, $E_{v,w}$, $F_{v,w}$ et $G_{v,w}$ les triplets de $P^{(1)}_{H_1}/P^{(0)}_{H_1}(V)$ de type E, F et G et vérifiant $p_V \circ f(a_1) = v$ et $p_V \circ f(b_1) = w$.

On déduit facilement du lemme 7.2.2 et de la proposition précédente le résultat suivant.

Proposition 7.2.6. *Une base* $\mathcal{B}^{(1)}_{H_1}$ *de* $P^{(1)}_{H_1}/P^{(0)}_{H_1}(V)$ *est donnée par l'ensemble :*

$$\begin{array}{ll} \mathcal{B}^{(1)}_{H_1} = \{ & E_{v,w} \text{ pour } v \text{ et } w \text{ deux éléments de } V \text{ vérifiant } q(v) = 1 \text{ et } B(v,w) = 1, \\ & F_{v,w} \text{ pour } v \text{ et } w \text{ deux éléments de } V \text{ vérifiant } q(w) = 1 \text{ et } B(v,w) = 1, \\ & G_{v,w} \text{ pour } v \text{ et } w \text{ deux éléments de } V \text{ vérifiant } q(v+w) = 1 \text{ et } B(v,w) = 1\} \end{array}$$

Base $\mathcal{B}^{(2)}_{H_1}$ de $P_{H_1}/P^{(1)}_{H_1}(V)$ D'après la proposition 5.3.4, on a $(P_{H_1}/P^{(1)}_{H_1})(V) \simeq \mathrm{Iso}_{H_1}(V)$ dont on déduit le résultat suivant.

Proposition 7.2.7. *Une base* $\mathcal{B}^{(2)}_{H_1}$ *de* $P_{H_1}/P^{(1)}_{H_1}(V)$ *est donnée par l'ensemble :*

$$\mathcal{B}^{(2)}_{H_1} = \{H_f \text{ pour } f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}_q}(H_1, V)\}.$$

Les règles de composition pour les triplets $E_{v,w}$, $F_{v,w}$, $G_{v,w}$ et H_f sont analogues à celles de $A_{v,w}$, $B_{v,w}$, $C_{v,w}$ et D_f pour lesquelles on se reportera à la proposition 7.1.8.

7.2.2 Scindement de la filtration pour le foncteur P_{H_1}

On montre dans cette section le résultat suivant.

Proposition 7.2.8. *La filtration par le rang se scinde pour le foncteur* P_{H_1}*, c'est à dire :*

$$P_{H_1} = P^{(0)}_{H_1} \oplus P^{(1)}_{H_1}/P^{(0)}_{H_1} \oplus P_{H_1}/P^{(1)}_{H_1}.$$

Démonstration. On définit une application $s_V : P_{H_1}/P^{(1)}_{H_1}(V) \to P_{H_1}(V)$ par :

$$\begin{array}{rccl} s_V : & P_{H_1}/P^{(1)}_{H_1}(V) & \longrightarrow & P_{H_1}(V) \\ & H_f & \mapsto & H_f + E_{f(a_1),f(b_1)} + F_{f(a_1),f(b_1)} + G_{f(a_1),f(b_1)}. \end{array}$$

On vérifie alors, de la même manière que dans la proposition 7.1.9 pour le foncteur P_{H_0}, que les applications s_V définissent une transformation naturelle qui est une section de la projection $P_{H_1} \to P_{H_1}/P^{(1)}_{H_1}$. □

7.2.3 Identification des facteurs directs

On a le lemme suivant.

Lemme 7.2.9. *Le foncteur $P^{(1)}_{H_1}/P^{(0)}_{H_1}$ se décompose en somme directe de la manière suivante*

$$P^{(1)}_{H_1}/P^{(0)}_{H_1} = F_E \oplus F_F \oplus F_G$$

où F_E, F_F et F_G sont les sous-foncteurs de $P^{(1)}_{H_1}/P^{(0)}_{H_1}$ engendrés, respectivement, par les triplets de type E, F et G.

On identifie, dans le lemme suivant, les foncteurs F_E, F_F et F_G à des foncteurs mixtes définis au chapitre 6.

Lemme 7.2.10. *Les foncteurs F_E, F_F et F_G sont équivalents au foncteur* $\mathrm{Mix}_{1,1}$.

Démonstration. Les applications linéaires fournissant les équivalences naturelles sont construites de la même manière que celles données pour le foncteur P_{H_0} à la proposition 7.1.11. □

On en déduit la décomposition suivante

Proposition 7.2.11. *Le foncteur projectif P_{H_1} admet la décomposition en somme directe suivante :*

$$P_{H_1} = \iota(P^{\mathcal{F}}_{\epsilon(\mathbb{F}_2^{\oplus 2})}) \oplus \mathrm{Mix}_{1,1}{}^{\oplus 3} \oplus \mathrm{Iso}_{H_1}$$

où $\mathrm{Mix}_{1,1}$ *est un foncteur mixte et* Iso_{H_1} *est un foncteur isotrope.*

7.3 Conséquences des décompositions des foncteurs P_{H_0} et P_{H_1}

Dans cette section, on tire les conclusions des décompositions de P_{H_0} et P_{H_1} données aux propositions 7.1.12 et 7.2.11. On commence par en déduire l'indécomposabilité des foncteurs $\mathrm{Mix}_{0,1}$ et $\mathrm{Mix}_{1,1}$, ce qui nous permettra de donner les facteurs indécomposables des foncteurs P_{H_0} et P_{H_1}. On étudiera alors le caractère projectif des premiers foncteurs isotropes et on terminera en donnant le début de la classification des objets simples de $\mathcal{F}_{quad}$.

7.3.1 Indécomposabilité des foncteurs $\mathrm{Mix}_{0,1}$ et $\mathrm{Mix}_{1,1}$

Avant de montrer l'indécomposabilité des foncteurs $\mathrm{Mix}_{0,1}$ et $\mathrm{Mix}_{1,1}$, on fait le rappel suivant :

Remarque 7.3.1 (Rappel). Si le foncteur F de $\mathcal{F}_{quad}$ se décompose en $F_1 \oplus \ldots \oplus F_n$, alors les projections π_i de F sur F_i et les inclusions $j_i : F_i \to F$ induisent des idempotents $e_i = j_i \circ \pi_i$ de l'anneau $\mathrm{End}(F)$.

Proposition 7.3.2. *Les foncteurs* $\mathrm{Mix}_{0,1}$ *et* $\mathrm{Mix}_{1,1}$ *sont indécomposables.*

Démonstration. 1. D'après le point (2) du théorème 3.1.3, on a :

$$\mathrm{Hom}(P_{H_0}, Mix^2_{0,1}) = \mathrm{Mix}^2_{0,1}(H_0).$$

Or, par un calcul facile, on montre que l'espace $\mathrm{Mix}_{0,1}(H_0)$ est de dimension4. Comme dans la décomposition de P_{H_0} obtenue à la proposition 7.1.12, on a deux facteurs $\mathrm{Mix}^2_{0,1}$ on en déduit que $\mathrm{Hom}(\mathrm{Mix}^2_{0,1}, \mathrm{Mix}^2_{0,1}) = E$ est un espace vectoriel de dimension deux sur $\mathbb{F}_2$ de base $\{Id, \tau\}$ où l'application τ est définie par : $\tau([(u,v)]) = ([(v,u)])$. Par conséquent, en tant qu'anneau, on a $E = (\{0, Id, \tau, Id+\tau\}, +, \circ)$, et on montre facilement que cet anneau n'a pas d'idempotent non trivial.

2. De même que précédemment, on a $\mathrm{Hom}(P_{H_0}, \mathrm{Mix}^2_{1,1}) = \mathrm{Mix}^2_{1,1}(H_0)$.
   L'espace $\mathrm{Mix}_{1,1}(H_0)$ est de dimension 2, or, dans la décomposition de P_{H_0}, on a un facteur $\mathrm{Mix}^2_{1,1}$. On déduit de la même manière que pour $\mathrm{Mix}^2_{0,1}$ que l'anneau $\mathrm{Hom}(\mathrm{Mix}^2_{1,1}, \mathrm{Mix}^2_{1,1})$ n'a pas d'idempotent non trivial.

□

On déduit, de cette proposition, le résultat suivant :

Corollaire 7.3.3. *La suite exacte courte*

$$0 \to \Sigma_{\alpha,1} \to \mathrm{Mix}_{\alpha,1} \to \Sigma_{\alpha,1} \to 0.$$

obtenue à la proposition 6.2.12 n'est pas scindée.

La proposition 7.3.2 nous permet d'énoncer le théorème suivant.

Théorème 7.3.4. *Les foncteurs projectifs P_{H_0} et P_{H_1} admettent les décompositions en facteurs indécomposables suivantes :*

$$P_{H_0} = (\iota(\mathbb{F}_2) \oplus \iota(\bar{P}^{\mathcal{F}}_{\mathbb{F}_2}{}^{\oplus 2}) \oplus \iota(P^{\mathcal{F}}_{(2,1)}{}^{\oplus 2}) \oplus \iota(P^{\mathcal{F}}_{\Lambda^2})) \oplus (\mathrm{Mix}_{0,1}{}^{\oplus 2} \oplus \mathrm{Mix}_{1,1}) \oplus \mathrm{Iso}_{H_0}$$

et

$$P_{H_1} = (\iota(\mathbb{F}_2) \oplus \iota(\bar{P}^{\mathcal{F}}_{\mathbb{F}_2}{}^{\oplus 2}) \oplus \iota(P^{\mathcal{F}}_{(2,1)}{}^{\oplus 2}) \oplus \iota(P^{\mathcal{F}}_{\Lambda^2})) \oplus (\mathrm{Mix}_{1,1}{}^{\oplus 3}) \oplus F_{H_1} \oplus S_{H_1} \oplus S_{H_1}$$

où $\bar{P}^{\mathcal{F}}_{\mathbb{F}_2}$ est le foncteur tel que $P^{\mathcal{F}}_{\mathbb{F}_2} = \mathbb{F}_2 \oplus \bar{P}^{\mathcal{F}}_{\mathbb{F}_2}$, $P^{\mathcal{F}}_{\Lambda^2}$ est la couverture projective dans $\mathcal{F}$ du foncteur simple Λ^2, $P^{\mathcal{F}}_{(2,1)}$ est la couverture projective dans $\mathcal{F}$ du foncteur simple $S_{(2,1)}$, $\mathrm{Mix}_{0,1}$ et $\mathrm{Mix}_{1,1}$ sont deux foncteurs mixtes indécomposables, Iso_{H_0} est un foncteur isotrope indécomposable et F_{H_1} et S_{H_1} sont les facteurs indécomposables du foncteur isotrope Iso_{H_1}.

Démonstration. Les foncteurs $\mathrm{Mix}_{0,1}$ et $\mathrm{Mix}_{1,1}$ sont indécomposables d'après la proposition 7.3.2, le foncteur Iso_{H_0} est indécomposable d'après la proposition 4.5.5 et la décomposition en facteurs indécomposables du foncteur Iso_{H_1} est donnée à la proposition 4.5.5. Il nous reste à étudier le facteur $\iota(P^{\mathcal{F}}_{\epsilon(H_0)}) = \iota(P^{\mathcal{F}}_{\epsilon(H_1)})$. D'après les travaux de Harris et Kuhn dans [HK88], on a la décomposition en facteurs indécomposables

$$P^{\mathcal{F}}_{\mathbb{F}_2{}^{\oplus 2}} \simeq (\bar{P^{\mathcal{F}}}_{\mathbb{F}_2} \oplus P^{\mathcal{F}}_{(2,1)})^{\oplus 2} \oplus P^{\mathcal{F}}_{\Lambda^2} \oplus \mathbb{F}_2$$

avec les même notations que dans l'énoncé, d'où le résultat. □

7.3.2 Caractère projectif des premiers foncteurs isotropes

Les décompositions données aux propositions 7.1.12 et 7.2.11 nous permettent d'étudier le caractère projectif de certains foncteurs isotropes.

Etant donné que le foncteur Iso_{H_0} (respectivement F_{H_1} et S_{H_1}) est facteur direct du projectif P_{H_0} (respectivement P_{H_1}) on a le résultat suivant.

Proposition 7.3.5. *1. Le foncteur isotrope Iso_{H_0} est projectif dans $\mathcal{F}_{quad}$.*

2. Le foncteur isotrope Iso_{H_0} est projectif dans $\mathcal{F}_{quad}$.

On déduit alors de la proposition 4.5.2 donnant la finitude des foncteurs isotropes le résultat qui suit.

Proposition 7.3.6. *La catégorie $\mathcal{F}_{quad}$ possède des foncteurs projectifs finis non constants.*

Cette proposition est une des originalités de la catégorie $\mathcal{F}_{quad}$. En effet, on rappelle que, d'après le corollaire B7 de l'article de Kuhn [Kuh94a], dans la catégorie $\mathcal{F}$, les seuls foncteurs finis et projectifs sont les foncteurs constants.

On a le résultat suivant.

Proposition 7.3.7. *Les foncteurs* $\mathrm{Iso}_{(x,0)}$ *et* $\mathrm{Iso}_{(x,1)}$ *ne sont pas projectifs dans* $\mathcal{F}_{quad}$*. La couverture projective de* $\mathrm{Iso}_{(x,0)}$ *(respectivement* $\mathrm{Iso}_{(x,1)}$*) est le foncteur* $\mathrm{Mix}_{0,1}$ *(respectivement* $\mathrm{Mix}_{1,1}$*).*

Démonstration. On a $\mathrm{Iso}_{(x,0)}(H_0) \neq \{0\}$ et $\mathrm{Iso}_{(x,1)}(H_0) \neq \{0\}$, par conséquent, si ces deux foncteurs étaient projectifs, ils devraient être facteur direct du foncteur P_{H_0}. On déduit donc de la proposition 7.1.12, que ces foncteurs ne sont pas projectifs. Par contre, nous avons vu au théorème 6.6.1 que $\mathrm{Iso}_{(x,0)}$ est le facteur de composition supérieur de $\mathrm{Mix}_{0,1}$ et que $\mathrm{Iso}_{(x,1)}$ est celui de $\mathrm{Mix}_{1,1}$, ce qui prouve le deuxième point de l'énoncé. □

7.3.3 Classification des foncteurs simples S de $\mathcal{F}_{quad}$ tels que $S(H_0) \neq \{0\}$ ou $S(H_1) \neq \{0\}$

Si S est un foncteur simple de $\mathcal{F}_{quad}$ vérifiant $S(H_0) \neq \{0\}$ on a, par la proposition 3.1.3,

$$\mathrm{Hom}(P_{H_0}, S) = S(H_0) \neq \{0\}.$$

Par conséquent, il existe un morphisme de $\mathcal{F}_{quad}$ de P_{H_0} dans S qui est un épimorphisme, par simplicité de S. On déduit alors des décompositions données au théorème 7.3.4, de la proposition 4.5.5 concernant les foncteurs Iso_{H_0} et Iso_{H_1} et de l'étude des foncteurs $\mathrm{Mix}_{0,1}$ et $\mathrm{Mix}_{1,1}$ faite au chapitre 6 le résultat suivant.

Proposition 7.3.8. *Les classes d'isomorphisme de foncteurs simples, non constants, de* $\mathcal{F}_{quad}$ *qui sont non nuls sur au moins un des espaces* H_0 *ou* H_1 *sont :*

$$\iota(\Lambda),\ \iota(\Lambda^2),\ \iota(S_{(2,1)}),\ \mathrm{Iso}_{(x,0)},\ \mathrm{Iso}_{(x,1)},\ R_{H_0},\ R_{H_1},\ S_{H_1}$$

où R_{H_0}, R_{H_1} *et* S_{H_1} *sont les foncteurs simples introduits à la proposition 4.5.5.*

7.3.4 Calculs de groupes d'extensions dans $\mathcal{F}_{quad}$

Par les propositions 4.2.10 et 4.4.11 on obtient que le foncteur

$$\kappa \circ F_V : \mathbb{F}_2[O(V)] - mod \to \mathcal{F}_{quad}$$

est exact. Par conséquent, ce foncteur induit un morphisme sur les groupes d'extension :

$$\mathrm{Ext}^*_{O(V)-mod}(M, N) \xrightarrow{(\kappa \circ F_V)_*} \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}_{quad}}(F_V(M), F_V(N)).$$

On a la proposition suivante :

Proposition 7.3.9. *Pour* $V \in \{H_0, H_1\}$*, le morphisme* $(\kappa \circ F_V)_*$ *est un isomorphisme.*

Afin de démontrer cette proposition, nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 7.3.10. *Pour* $V \in \{H_0, H_1\}$*, si* P *est un* $O(V)$*-module projectif,* $F_V(P)$ *est projectif dans* $\mathcal{F}_{quad}$*.*

Démonstration. Si P est un $O(V)$-module projectif, on a, par définition, l'existence de Q tel que

$$P \oplus Q \simeq \mathbb{F}_2[O(V)].$$

On a que $F_V(P \oplus Q) \simeq F_V(P) \oplus F_V(Q)$ et, étant donné que

$$F_V(\mathbb{F}_2[O(V)]) = \mathrm{Iso}_V$$

et que les foncteurs Iso_{H_0} et Iso_{H_1} sont projectifs d'après la proposition 7.3.5, on obtient que $F_V(P)$ est projectif. □

Démonstration de la proposition. Soient M et N deux $O(V)$-modules pour $V \in \{H_0, H_1\}$ et $P_\bullet \to M$ une résolution projective de M. Le lemme 7.3.10 entraîne que $F_V(P_\bullet)$ est une résolution projective de $F_V(M)$. Le foncteur $\kappa \circ F_V$ induit un morphisme de complexes de chaînes

$$\mathrm{Hom}_{O(V)}(P_\bullet, N) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_{quad}}(F_V(P_\bullet), F_V(N))$$

qui induit le morphisme $(\kappa \circ F_V)_*$ en cohomologie. Enfin, ce morphisme est un isomorphisme, puisque

$$\mathrm{Hom}_{O(V)}(\mathbb{F}_2[O(V)], N) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_{quad}}(F_V(\mathbb{F}_2[O(V)]), F_V(N))$$

en tant que $O(V)$-modules.

□

On en déduit le corollaire suivant :

Corollaire 7.3.11. *Pour tout entier n, on a :*

$$\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{F}_{quad}}(R_{H_0}, R_{H_0}) \simeq \mathbb{F}_2$$

$$\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{F}_{quad}}(R_{H_1}, R_{H_1}) \simeq \mathbb{F}_2$$

où R_{H_0} et R_{H_1} sont les foncteurs simples définis à la proposition 4.5.5.

Démonstration. On applique la proposition 7.3.9 au $O(V)$-module trivial dans les deux cas.. □

Remarque 7.3.12. Cette proposition fournit une nouvelle différence importante entre les catégories $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}_{quad}$. En effet, on rappelle que dans $\mathcal{F}$, d'après l'article [PS98], pour tout objet simple S de $\mathcal{F}$, on a :

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{F}}(S, S) = 0.$$

La proposition précédente montre que, pour les objets simples de $\mathcal{F}_{quad}$, R_{H_0} et R_{H_1}, on a :

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{F}_{quad}}(R_{H_0}, R_{H_0}) \simeq \mathbb{F}_2$$

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{F}_{quad}}(R_{H_1}, R_{H_1}) \simeq \mathbb{F}_2.$$

Quatrième partie

Les foncteurs polynomiaux de $\mathcal{F}_{quad}$

Chapitre 8

Les foncteurs polynomiaux de $\mathcal{F}_{quad}$

Dans ce chapitre, après avoir étendu à $\mathcal{F}_{quad}$, la notion de foncteur polynomial, on montre, par récurrence, que les foncteurs finis et polynomiaux de $\mathcal{F}_{quad}$ sont les images par le foncteur $\iota : \mathcal{F} \to \mathcal{F}_{quad}$ des foncteurs finis et polynomiaux de $\mathcal{F}$.

8.1 Définition des foncteurs polynomiaux de $\mathcal{F}_{quad}$

8.1.1 Les foncteurs différences de $\mathcal{F}_{quad}$

On définit dans cette section, les foncteurs différences de $\mathcal{F}_{quad}$ qui généralisent la notion de foncteur différence dans $\mathcal{F}$ dont on rappelle la définition :

Définition 8.1.1. [Sch94] Le foncteur différence $\Delta : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ est le foncteur qui associe à un foncteur F de $\mathcal{F}$ le foncteur ΔF tel que, pour tout objet V de $\mathcal{E}^f$:

$$\Delta F(V) := \mathrm{Ker}(F(V \oplus \mathbb{F}_2) \xrightarrow{F(p)} F(V)),$$

où $p : V \oplus \mathbb{F}_2 \to V$ est la projection.

On donne la définition suivante :

Définition 8.1.2. Les foncteurs différences $\Delta_{H_0} : \mathcal{F}_{quad} \to \mathcal{F}_{quad}$ et $\Delta_{H_1} : \mathcal{F}_{quad} \to \mathcal{F}_{quad}$ sont les foncteurs qui associent à un foncteur F de $\mathcal{F}_{quad}$ les foncteurs $\Delta_{H_0}F$ et $\Delta_{H_1}F$ tels que, pour tout objet V de $\mathcal{T}_q$:

$$\Delta_{H_0}F(V) := \mathrm{Ker}(F(V \perp H_0) \xrightarrow{F(R(i_1))} F(V)),$$

$$\Delta_{H_1}F(V) := \mathrm{Ker}(F(V \perp H_1) \xrightarrow{F(R(i_2))} F(V)),$$

où $i_1 : V \to V \perp H_0$ et $i_2 : V \to V \perp H_1$ sont les inclusions et $R : \mathcal{E}_q \to \mathcal{T}_q$ est le foncteur défini en 2.2.9.

On a le résultat suivant :

Proposition 8.1.3. *Les foncteurs Δ_{H_0} et Δ_{H_1} sont exacts.*

8.1.2 Définition des foncteurs polynomiaux

On généralise à $\mathcal{F}_{quad}$ la définition suivante des foncteurs polynomiaux de $\mathcal{F}$.

Définition 8.1.4 ([Sch94])**.** Soit F un objet de $\mathcal{F}$:

1. le foncteur F est polynomial de degré 0 si et seulement si $\Delta F = 0$;
2. le foncteur F est polynomial de degré au plus $d+1$, pour d un entier naturel, si et seulement si ΔF est de degré au plus d.

On utilisera, dans ce chapitre, la définition suivante de foncteur polynomial dans $\mathcal{F}_{quad}$.

Définition 8.1.5. Soit F un objet de $\mathcal{F}_{quad}$:

1. le foncteur F est polynomial de degré 0 si et seulement si $\Delta_{H_0} F = \Delta_{H_1} F = 0$;
2. le foncteur F est polynomial de degré au plus $d+1$, pour d un entier naturel, si et seulement si $\Delta_{H_0} F$ et $\Delta_{H_1} F$ sont de degré au plus d.

La proposition suivante permet de simplifier la définition d'un foncteur polynomial de degré 0.

Proposition 8.1.6. *Pour un foncteur F de $\mathcal{F}_{quad}$, les deux propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. *Le foncteur $\Delta_{H_0} F$ est nul.*
2. *Le foncteur $\Delta_{H_1} F$ est nul.*

Démonstration. Si $\Delta_{H_0} F = 0$, on a, pour tout objet V de $\mathcal{T}_q$,

$$F(V) \simeq F(V \perp H_0).$$

Par conséquent,

$$F(V) \simeq F(V \perp H_0) \simeq F(V \perp H_0 \perp H_0) \simeq F(V \perp H_1 \perp H_1),$$

où le dernier isomorphisme est obtenu par le lemme 1.2.9. On déduit de l'existence des morphismes $F(V) \hookrightarrow F(V \perp H_1)$ et $F(V \perp H_1) \hookrightarrow F(V \perp H_1 \perp H_1)$, induits par les inclusions et de l'isomorphisme entre $F(V)$ et $F(V \perp H_1 \perp H_1)$, que

$$F(V) \simeq F(V \perp H_1) \simeq F(V \perp H_1 \perp H_1).$$

D'où $\Delta_{H_1} F = 0$.

La réciproque se montre de la même manière. □

8.2 Etude des foncteurs polynomiaux de $\mathcal{F}_{quad}$

On rappelle, conformément à la définition 3.1.5, qu'un objet F de $\mathcal{F}_{quad}$ est fini s'il admet une série de composition finie dont les sous-quotients sont simples. Le but de cette section est de montrer le résultat suivant :

Théorème 8.2.1. *Les foncteurs finis et polynomiaux de $\mathcal{F}_{quad}$ sont dans l'image du foncteur $\iota : \mathcal{F} \to \mathcal{F}_{quad}$.*

Ce résultat se démontre en effectuant une récurrence sur le degré des foncteurs polynomiaux.

8.2.1 Les foncteurs polynomiaux de degré 0 de $\mathcal{F}_{quad}$

Dans cette section, on initialise l'argument de récurrence. Ce résultat utilise de manière essentielle la classification des foncteurs simples S de $\mathcal{F}_{quad}$ tels que $S(H_0) \neq 0$ ou $S(H_1) \neq 0$, obtenue à la proposition 7.3.8. On a le résultat suivant.

Proposition 8.2.2. *Soit S un foncteur simple de $\mathcal{F}_{quad}$, S est polynomial de degré 0 si et seulement si S est le foncteur constant.*

Démonstration. Pour démontrer le sens direct du résultat précédent, deux cas sont à distinguer.

1. Si $S(H_0) = S(H_1) = 0$.
   D'après la classification des espaces quadratiques non dégénérés sur $\mathbb{F}_2$, si W est un espace de dimension minimale vérifiant $S(W) \neq 0$, on a l'existence d'un élément ϵ de $\{0, 1\}$ et d'un espace quadratique V non dégénéré et non nul, tels que :
   $$W \simeq H_\epsilon \perp V.$$
   Comme W est de dimension minimale, on a $S(V) = 0$, ce qui implique
   $$\Delta_{H_\epsilon} S(V) = S(H_\epsilon \perp V) \neq 0.$$
   On en déduit le résultat dans ce cas.
2. Si $S(H_0) \neq 0$ ou $S(H_1) \neq 0$.
   Dans ce cas, on utilise la classification des foncteurs simples S de $\mathcal{F}_{quad}$ tels que $S(H_0) \neq 0$ ou $S(H_1) \neq 0$ obtenue à la proposition 7.3.8. Par un calcul explicite pour chacun des foncteurs S obtenus dans cette classification, on obtient que les foncteurs $\Delta_{H_0} S$ sont non nuls sauf pour le foncteur constant $S = \mathbb{F}_2$.

La réciproque est triviale.

□

8.2.2 Démonstration du théorème 8.2.1

Afin de démontrer le théorème 8.2.1, nous aurons besoin du résultat suivant où les idempotents e_V obtenus à la proposition 5.2.9 jouent un rôle central.

Proposition 8.2.3. *Soit S un foncteur simple non trivial de $\mathcal{F}_{quad}$ n'appartenant pas à l'image du foncteur $\iota : \mathcal{F} \to \mathcal{F}_{quad}$, alors un des deux foncteurs $\Delta_{H_0} S$ ou $\Delta_{H_1} S$ n'appartient pas à l'image du foncteur $\iota : \mathcal{F} \to \mathcal{F}_{quad}$.*

Démonstration. Soit W un espace quadratique non dégénéré, de dimension minimale, vérifiant $S(W) \neq 0$, on distingue les deux cas suivants.

1. Si W est de dimension deux.
   Par un calcul explicite pour chacun des foncteurs simples S obtenus dans la classification donnée à la proposition 7.3.8, on obtient le résultat de l'énoncé.
2. Si W est de dimension strictement supérieure à deux.
   Il existe un espace quadratique non dégénéré V éventuellement nul et un élément ϵ de $\{0, 1\}$, tels que :
   $$W \simeq H_0 \perp H_\epsilon \perp V.$$
   Supposons que $\Delta_{H_0} S$ et $\Delta_{H_1} S$ sont dans l'image du foncteur ι, on prouve, dans la suite, que ceci entraîne que S est également dans l'image de ι, ce qui, par la proposition 5.2.13, est équivalent au fait qu'il existe un objet W de $\mathcal{T}_q$ tel que
   $$S(e_W)S(W) \neq 0.$$
   Par le corollaire 5.2.10, on a
   $$e_W = e_{H_0} \perp e_{H_\epsilon} \perp e_V.$$
   L'espace W étant supposé de dimension minimale pour la propriété $S(W) \neq 0$, on a
   $$S(H_0 \perp V) = S(H_\epsilon \perp V) = 0$$

ce qui entraîne que

$$\Delta_{H_0} S(H_\epsilon \perp V) \simeq S(W) \tag{8.1}$$
$$\Delta_{H_\epsilon} S(H_0 \perp V) \simeq S(W). \tag{8.2}$$

Ces isomorphismes sont naturels et, pour (8.1), l'action de $\mathrm{End}_{\mathcal{T}_q}(H_\epsilon \perp V)$ sur $\Delta_{H_0} S(H_\epsilon \perp V)$ correspond à la restriction de l'action de $\mathrm{End}_{\mathcal{T}_q}(W)$ sur $S(W)$, de même, pour (8.2), l'action de $\mathrm{End}_{\mathcal{T}_q}(H_0 \perp V)$ sur $\Delta_{H_\epsilon} S(H_0 \perp V)$ correspond à la restriction de l'action de $\mathrm{End}_{\mathcal{T}_q}(W)$ sur $S(W)$. Supposons que $\Delta_{H_0} S$ et $\Delta_{H_1} S$ sont dans l'image de ι. On en déduit :

$$S(1_{H_0} \perp e_{H_\epsilon} \perp e_V) S(W) = \Delta_{H_0} S(e_{H_\epsilon} \perp e_V) \Delta_{H_0} S(H_\epsilon \perp V) = \Delta_{H_0} S(H_\epsilon \perp V) = S(W)$$

où la première égalité découle de l'action décrite précédemment, la deuxième se déduit du corollaire 5.2.13 et la dernière est donnée par 8.1. De même, on obtient :

$$S(e_{H_0} \perp 1_{H_\epsilon} \perp e_V) S(W) = \Delta_{H_\epsilon} S(e_{H_0} \perp e_V) \Delta_{H_\epsilon} S(H_0 \perp V) = \Delta_{H_\epsilon} S(H_0 \perp V) = S(W).$$

On en déduit que

$$S(1_{H_0} \perp e_{H_\epsilon} \perp e_V) \circ S(e_{H_0} \perp 1_{H_\epsilon} \perp e_V) S(W) = S(W)$$

or, $S(1_{H_0} \perp e_{H_\epsilon} \perp e_V) \circ S(e_{H_0} \perp 1_{H_\epsilon} \perp e_V) = S(e_W)$ par le corollaire 5.2.10 ce qui entraine que

$$S(e_W) S(W) \neq 0$$

ce qui fournit le résultat.

□

Les deux lemmes qui suivent nous seront également nécessaires pour démontrer le théorème.

Lemme 8.2.4. *Un foncteur F de $\mathcal{F}_{quad}$ qui prend des valeurs de dimension finie et dont tous les facteurs de composition sont des foncteurs de $\iota(\mathcal{F})$ polynomiaux de degré inférieur ou égal à d est fini.*

Démonstration. On sait qu'un foncteur polynomial G de $\mathcal{F}$ de degré inférieur ou égal à d est tel que $G({\mathbb{F}_2}^d) \neq 0$. On en déduit que le nombre de facteurs de composition de F est fini. □

Lemme 8.2.5. *Un objet fini F de $\mathcal{F}_{quad}$ dont tous les facteurs de composition sont dans l'image du foncteur ι est dans l'image du foncteur ι.*

Démonstration. Ce résultat est une conséquence directe du théorème 5.2.12 d'après lequel $\iota(\mathcal{F})$ est une sous-catégorie épaisse de $\mathcal{F}_{quad}$. □

Démonstration du théorème 8.2.1. Soit F un foncteur fini et polynomial de $\mathcal{F}_{quad}$. Les foncteurs Δ_{H_0} et Δ_{H_1} étant exacts d'après la proposition 8.1.3, il suffit de considérer le cas d'un foncteur simple S. On raisonne par récurrence sur le degré polynomial.

Si S est de degré 0, on sait, d'après la proposition 8.2.2, que S est dans l'image du foncteur ι.

Supposons que tout foncteur simple polynomial de $\mathcal{F}_{quad}$ de degré d est dans l'image du foncteur ι et considérons un foncteur simple polynomial S de $\mathcal{F}_{quad}$ de degré $d+1$. D'après la définition des foncteurs polynomiaux de $\mathcal{F}_{quad}$ donnée en 8.1.5, les foncteurs $\Delta_{H_0} S$ et $\Delta_{H_1} S$ sont polynomiaux de degré d. On en déduit que tous les facteurs de composition des foncteurs $\Delta_{H_0} S$ et $\Delta_{H_1} S$ sont polynomiaux de degré inférieur ou égal à d et, par l'hypothèse de récurrence, on obtient qu'ils sont tous dans l'image de ι. Or, le foncteur S étant simple, il est quotient d'un projectif et prend donc des valeurs de dimension finie, ce qui entraîne que les foncteurs $\Delta_{H_0} S$ et $\Delta_{H_1} S$ prennent des valeurs de dimension finie. On déduit du lemme 8.2.4 que les foncteurs $\Delta_{H_0} S$ et $\Delta_{H_1} S$ sont finis, puis, par le lemme 8.2.5, on obtient que les foncteurs $\Delta_{H_0} S$ et $\Delta_{H_1} S$ sont dans l'image du foncteur ι, ce qui implique, par la proposition 8.2.3, que S est dans l'image du foncteur ι. □

Annexe A

Catégories de foncteurs

Cette annexe répertorie plusieurs résultats généraux concernant les catégories de foncteurs utilisés tout au long de cette thèse.

On s'intéresse plus particulièrement à la question suivante :

Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories, $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne, $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un foncteur et $- \circ F$: $\mathrm{Fonc}(\mathcal{D}, \mathcal{A}) \to \mathrm{Fonc}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ le foncteur induit par composition.

Lorsque le foncteur F a une certaine propriété $\mathcal{P}$, que peut-on en déduire sur le foncteur $- \circ F$?

Avant de traiter deux cas, très utiles, du problème posé précédemment, on rappelle la définition suivante.

Définition A.0.1. Soit $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un foncteur ;

1. le foncteur F est fidèle si, pour tous objets X et Y de $\mathcal{C}$, l'application :
$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \xrightarrow{F_{X,Y}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$$
est injective ;
2. le foncteur F est plein, si pour tous objets X et Y de $\mathcal{C}$, l'application :
$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \xrightarrow{F_{X,Y}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$$
est surjective ;
3. le foncteur F est essentiellement surjectif si tout objet de $\mathcal{D}$ est isomorphe à un objet de la forme $F(C)$.

Proposition A.0.2. *Si F est essentiellement surjectif, alors $- \circ F$ est fidèle.*

Avant de démontrer cette proposition, il est utile de remarquer le fait suivant.

Remarque A.0.3. La catégorie $\mathcal{A}$ étant supposée abélienne, on sait d'après [Gab62], que $\mathrm{Fonc}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ et $\mathrm{Fonc}(\mathcal{D}, \mathcal{A})$ sont des catégories abéliennes. Par conséquent, il existe une structure de groupe sur $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Fonc}(-,\mathcal{A})}(H_1, H_2)$. On peut alors utiliser la caractérisation de l'injectivité en termes de noyaux, ce qui donne l'équivalence suivante : le foncteur $- \circ F$ est fidèle si et seulement si pour tous objets H_1 et H_2 de $\mathrm{Fonc}(\mathcal{D}, \mathcal{A})$, $\mathrm{Ker}(- \circ F_{H_1,H_2}) = \{0\}$.

Démonstration. Soient H_1 et H_2 deux objets de $\mathrm{Fonc}(\mathcal{D}, \mathcal{A})$, $- \circ F_{H_1,H_2}$ le morphisme de groupes

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Fonc}(\mathcal{D},\mathcal{A})}(H_1, H_2) \xrightarrow{-\circ F_{H_1,H_2}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Fonc}(\mathcal{C},\mathcal{A})}(H_1 \circ F, H_2 \circ F)$$

σ un élément de $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Fonc}(\mathcal{D},\mathcal{A})}(H_1, H_2)$ tel que $- \circ F_{H_1,H_2}(\sigma) = 0$ et D un objet de $\mathcal{D}$.

Le foncteur F étant supposé essentiellement surjectif, on a l'existence d'un objet C de $\mathcal{C}$ vérifiant $F(C) = D$. On a alors le diagramme :

$$\begin{tikzcd} H_1 \circ F(C) \arrow[r, "-\circ F_{H_1,H_2}(\sigma)_C"] \arrow[d, "\simeq"] & H_2 \circ F(C) \arrow[d, "\simeq"] \\ H_1(D) \arrow[r, "\sigma_D"'] & H_2(D) \end{tikzcd}$$

Comme $- \circ F_{H_1,H_2}(\sigma)_C = 0$ par hypothèse, on en déduit que pour tout D de $\mathcal{D}$, $\sigma_D = 0$ d'où $\sigma = 0$. $\square$

Proposition A.0.4. *Si F est un foncteur plein et essentiellement surjectif, alors :*

1. *le foncteur $- \circ F$ est pleinement fidèle ;*
2. *tout sous-objet d'un objet de l'image du foncteur $- \circ F$ est isomorphe à un objet de l'image du foncteur $- \circ F$;*
3. *l'image par $- \circ F$ d'un foncteur simple de* $\mathrm{Fonc}(\mathcal{D}, \mathcal{A})$ *est un foncteur simple de* $\mathrm{Fonc}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$.

Démonstration. 1. La fidélité du foncteur $- \circ F$ est donnée par la proposition A.0.2.

Pour la plénitude, on considère deux objets G et H de $\mathrm{Fonc}(\mathcal{D}, \mathcal{A})$ et α un élément de $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Fonc}(\mathcal{C},\mathcal{A})}(G \circ F, H \circ F)$. On souhaite montrer qu'il existe un objet β de $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Fonc}(\mathcal{D},\mathcal{A})}(G, H)$ tel que $\beta \circ F = \alpha$.

Soit D un objet de $\mathcal{D}$, comme F est essentiellement surjectif, on peut choisir un objet C de $\mathcal{C}$ tel qu'il existe un isomorphisme :

$$\phi : F(C) \to D.$$

On définit un élément $\beta(D)$ de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(G(D), H(D))$ comme étant la composée

$$G(D) \xrightarrow{G(\phi^{-1})} G \circ F(C) \xrightarrow{\alpha(C)} H \circ F(C) \xrightarrow{H(\phi)} H(D).$$

On montre, dans la suite, que β définit une transformation naturelle de G vers H.

Soient $f : D \to D'$ un élément de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(D, D')$ et $\phi : F(C) \to D$ et $\phi' : F(C') \to D'$ les isomorphismes associés aux choix de C et C' par l'essentielle surjectivité de F ; étant donné que le foncteur F est plein, il existe un élément g de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, C')$ tel que

$$F(g) = \phi'^{-1} \circ f \circ \phi. \tag{A.1}$$

Or, le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd} G(D) \arrow[r, "\beta(D)"] \arrow[d, "G(\phi^{-1})"'] & H(D) \arrow[d, "H(\phi^{-1})"] \\ G \circ F(C) \arrow[r, "\alpha(C)"] \arrow[d, "G\circ F(g)"'] & H \circ F(C) \arrow[d, "H\circ F(g)"] \\ G \circ F(C') \arrow[r, "\alpha(C')"] \arrow[d, "G(\phi')"'] & H \circ F(C') \arrow[d, "H(\phi')"] \\ G(D') \arrow[r, "\beta(D')"] & H(D') \end{tikzcd}$$

car le carré supérieur (respectivement inférieur) commute par définition de $\beta(D)$ (respectivement $\beta(D')$) et la commutativité du carré au centre découle de la naturalité de α. Puisque

$$G(\phi') \circ GF(g) \circ G(\phi^{-1}) = G(\phi' \circ F(g) \circ \phi^{-1}) = G(f)$$

et

$$H(\phi') \circ HF(g) \circ H(\phi^{-1}) = H(\phi' \circ F(g) \circ \phi^{-1}) = H(f)$$

où les premières égalités découlent de la fonctorialité de G et de H et la seconde de la relation A.1, on déduit que β est une transformation naturelle.

2. Soient G un objet de $\mathrm{Fonc}(\mathcal{D}, \mathcal{A})$ et H un sous-objet de $G \circ F$, de même qu'au premier point, pour un objet D de $\mathcal{D}$, comme F est essentiellement surjectif, on peut choisir un objet C de $\mathcal{C}$ tel qu'il existe un isomorphisme :

$$\phi : F(C) \to D.$$

On définit un objet de $\mathcal{A}$ par :

$$K(D) := H(C).$$

De même qu'au premier point, pour $f : D \to D'$ un élément de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(D, D')$ et $\phi : F(C) \to D$ et $\phi' : F(C') \to D'$ les isomorphismes associés aux choix de C et C' par l'essentielle surjectivité de F, étant donné que le foncteur F est plein, il existe un élément g de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, C')$ tel que

$$F(g) = \phi'^{-1} \circ f \circ \phi. \tag{A.2}$$

On définit un morphisme

$$K(f) : K(D) \to K(D')$$

par $K(f) = H(g)$. On obtient le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
K(D) \arrow[r, equal] \arrow[d, "K(f)"'] & H(C) \arrow[r, hook] \arrow[d, "H(g)"'] & G \circ F(C) \arrow[r, "G(\phi)"] \arrow[d, "G \circ F(g)"'] & G(D) \arrow[d, "G(f)"'] \\
K(D') \arrow[r, equal] & H(C') \arrow[r, hook] & G \circ F(C') \arrow[r, "G(\phi')"] & G(D')
\end{tikzcd}$$

Comme les flèches horizontales du diagramme sont des monomorphismes, la définition de $K(f)$ ne dépend pas du choix du morphisme g dans A.2. Le foncteur K, ainsi défini, vérifie $K \circ F \simeq H$. De plus, on déduit de la commutativité du diagramme suivant que K est un sous-foncteur de G.

3. Soit S un foncteur simple de $\mathrm{Fonc}(\mathcal{D}, \mathcal{A})$ et $- \circ F(S) = S \circ F$ son image par $- \circ F$. Supposons que $S \circ F$ n'est pas simple et notons H un sous-foncteur propre de $S \circ F$. D'après la démonstration du point 2. de la proposition, il existe un sous-foncteur K de S tel que :

$$H \simeq K \circ F.$$

Comme H est un sous-foncteur propre de $S \circ F$, K est un sous-foncteur propre de S, ce qui contredit la simplicité de S.

□

Bibliographie

[BDFP01] H.-J. Baues, W. Dreckmann, V. Franjou & T. Pirashvili – « Foncteurs polynomiaux et foncteurs de Mackey non linéaires », *Bull. Soc. Math. France* **129** (2001), no. 2, p. 237–257.

[Bén67] J. Bénabou – « Introduction to bicategories », in *Reports of the Midwest Category Seminar*, Springer, Berlin, 1967, p. 1–77.

[Bou59] N. Bourbaki – *Éléments de mathématique. Première partie : Les structures fondamentales de l'analyse. Livre II : Algèbre. Chapitre 9 : Formes sesquilinéaires et formes quadratiques*, Actualités Sci. Ind. no. 1272, Hermann, Paris, 1959.

[Bro72] W. Browder – *Surgery on simply-connected manifolds*, Springer-Verlag, New York, 1972, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 65.

[CCN+85] J. H. Conway, R. T. Curtis, S. P. Norton, R. A. Parker & R. A. Wilson – *Atlas of finite groups*, Oxford University Press, Eynsham, 1985, Maximal subgroups and ordinary characters for simple groups, With computational assistance from J. G. Thackray.

[Die71] J. A. Dieudonné – *La géométrie des groupes classiques*, Springer-Verlag, Berlin, 1971, Troisième édition, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 5.

[Dre73] A. W. M. Dress – « Contributions to the theory of induced representations », in *Algebraic K-theory, II : "Classical" algebraic K-theory and connections with arithmetic (Proc. Conf., Battelle Memorial Inst., Seattle, Wash., 1972)*, Springer, Berlin, 1973, p. 183–240. Lecture Notes in Math., Vol. 342.

[Dwy80] W. G. Dwyer – « Twisted homological stability for general linear groups », *Ann. of Math. (2)* **111** (1980), no. 2, p. 239–251.

[FFPS03] V. Franjou, E. M. Friedlander, T. Pirashvili & L. Schwartz – *Rational representations, the Steenrod algebra and functor homology*, Panoramas et Synthèses [Panoramas and Syntheses], vol. 16, Société Mathématique de France, Paris, 2003.

[FFSS99] V. Franjou, E. M. Friedlander, A. Scorichenko & A. Suslin – « General linear and functor cohomology over finite fields », *Ann. of Math. (2)* **150** (1999), no. 2, p. 663–728.

[FL91] Z. Fiedorowicz & J.-L. Loday – « Crossed simplicial groups and their associated homology », *Trans. Amer. Math. Soc.* **326** (1991), no. 1, p. 57–87.

[FLS94] V. Franjou, J. Lannes & L. Schwartz – « Autour de la cohomologie de Mac Lane des corps finis », *Invent. Math.* **115** (1994), no. 3, p. 513–538.

[FS97] E. M. Friedlander & A. Suslin – « Cohomology of finite group schemes over a field », *Invent. Math.* **127** (1997), no. 2, p. 209–270.

[Gab62] P. Gabriel – « Des catégories abéliennes », *Bull. Soc. Math. France* **90** (1962), p. 323–448.

[HK88] J. C. Harris & N. J. Kuhn – « Stable decompositions of classifying spaces of finite abelian p-groups », *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **103** (1988), no. 3, p. 427–449.

[HLS93] H.-W. Henn, J. Lannes & L. Schwartz – « The categories of unstable modules and unstable algebras over the Steenrod algebra modulo nilpotent objects », *Amer. J. Math.* **115** (1993), no. 5, p. 1053–1106.

[JK81] G. James & A. Kerber – *The representation theory of the symmetric group*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 16, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass., 1981, With a foreword by P. M. Cohn, With an introduction by Gilbert de B. Robinson.

[Kuh94a] N. J. Kuhn – « Generic representations of the finite general linear groups and the Steenrod algebra. I », *Amer. J. Math.* **116** (1994), no. 2, p. 327–360.

[Kuh94b] — , « Generic representations of the finite general linear groups and the Steenrod algebra. II », *K-Theory* **8** (1994), no. 4, p. 395–428.

[Lin76] H. Lindner – « A remark on Mackey-functors », *Manuscripta Math.* **18** (1976), no. 3, p. 273–278.

[Pfi95] A. Pfister – *Quadratic forms with applications to algebraic geometry and topology*, London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 217, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[Pir02] T. Pirashvili – « On the PROP corresponding to bialgebras », *Cah. Topol. Géom. Différ. Catég.* **43** (2002), no. 3, p. 221–239.

[Pow98a] G. M. L. Powell – « The Artinian conjecture for $I^{\otimes 2}$ », *J. Pure Appl. Algebra* **128** (1998), no. 3, p. 291–310, With an appendix by Lionel Schwartz.

[Pow98b] — , « The structure of indecomposable injectives in generic representation theory », *Trans. Amer. Math. Soc.* **350** (1998), no. 10, p. 4167–4193.

[PS98] L. Piriou & L. Schwartz – « Extensions de foncteurs simples », *K-Theory* **15** (1998), no. 3, p. 269–291.

[Sch94] L. Schwartz – *Unstable modules over the Steenrod algebra and Sullivan's fixed point set conjecture*, Chicago Lectures in Mathematics, University of Chicago Press, Chicago, IL, 1994.

[TW95] J. Thévenaz & P. Webb – « The structure of Mackey functors », *Trans. Amer. Math. Soc.* **347** (1995), no. 6, p. 1865–1961.

Index des Notations

$B \underset{A}{\perp} C$, 26

$\mathrm{CoSp}(\mathcal{D})$, 32

Δ, 127
Δ_{H_0}, 127
Δ_{H_1}, 127

$\mathcal{E}$, 45
e_α, 66
$\mathcal{E}^f$, 45
ϵ, 45
$\mathcal{E}_q$, 23
$\mathcal{E}_q^{\deg}$, 25

$\langle\langle f \rangle\rangle$, 39
$f_{\alpha,\beta}$, 66
$\mathcal{F}$, 55
$\mathcal{F}_{iso}$, 62
$\mathcal{F}_{quad}$, 51

H_0, 19
H_1, 19
$\mathrm{Hom}^{(i)}_{\mathcal{T}_q}(V, W)$, 79

ι, 56
Iso_H, 59
iso_H, 63

K^n_α, 102
κ, 64

L^n_α, 103

$\mathrm{Mack}(\mathcal{E}_q^{\deg}, \mathcal{E})$, 52
$\mathrm{Mack}(\mathcal{E}_q, \mathcal{E})$, 53
$\mathrm{Mix}_{D,\eta}$, 87
$\mathrm{Mix}_{\alpha,\beta}$, 90
$M^V_{D,\eta}$, 87

ν_0 et ν_1, 21

$\mathcal{O}$, 45
$O(q_V)$, 29

P_{H_0}, 109
P_{H_1}, 118
P_V, 51

Q_V, 62

$\mathrm{Rad}(V)$, 18

σ, 41
$\Sigma_{\alpha,\beta}$, 92
$\mathrm{Sp}(\mathcal{D})$, 31
$Sp_n(\mathbb{F}_2)$, 29
$\mathcal{S}_q$, 39

$\langle\langle T \rangle\rangle$, 37
$\mathcal{T}_q$, 35
$\hat{\mathcal{T}}_q$, 33

(x, α), 19

Index

base symplectique, 19

catégorie $\mathrm{Sp}(\mathcal{D})$, 32
catégorie $\mathcal{E}_q$, 23
catégorie $\mathcal{E}_q^{\deg}$, 25
catégorie $\mathcal{F}$, 55
catégorie $\mathcal{F}_{iso}$, 62
catégorie $\mathcal{F}_{quad}$, 51
catégorie $\mathrm{Sp}(\mathcal{D})$, 31
catégorie $\mathcal{S}_q$, 39
catégorie $\mathcal{T}_q$, 35
Cospans, 32

dualité sur $\mathcal{F}_{iso}$, 64
dualité sur $\mathcal{F}_{quad}$, 55

espace minimal, 68
espace engendré par un triplet, 37
espace H_0, 19
espace H_1, 19
espace quadratique non dégénéré, 18

foncteur de Janus, 52
foncteur de Mackey, 52
foncteur essentiellement surjectif, 131
foncteur fini, 52
foncteur plein, 131
foncteur polynomial, 128
foncteur simple, 52
foncteur différence, 127
foncteur dualité de $\mathcal{F}_{iso}$, 64
foncteur dualité de $\mathcal{F}_{quad}$, 55
foncteur $\epsilon : \mathcal{T}_q \to \mathcal{E}^f$, 45
foncteur fidèle, 131
foncteur $\iota : \mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{F}_{quad}$, 56
foncteur $\kappa : \mathcal{F}_{iso} \hookrightarrow \mathcal{F}_{quad}$, 64
foncteur L_α^n, 103
foncteur oubli $\mathcal{O} : \mathcal{E}_q \to \mathcal{E}^f$, 45
foncteurs isotropes, 59
foncteurs mixtes, 87
foncteur $\sigma : \mathcal{T}_q \to \mathcal{S}_q$, 41
foncteur $\Sigma_{\alpha,\beta}$, 92
forme quadratique, 17
forme bilinéaire non singulière, 18

groupe orthogonal, 29
groupe symplectique, 29

invariant de Arf, 21
invariants ν_0 et ν_1, 21
inverse à gauche, 45

isométrie, 17

pseudo somme amalgamée, 26

radical, 18
rang d'un morphisme de $\mathcal{T}_q$, 79

somme orthogonale, 18
spans, 31

théorème de Witt, 18
totalement isotrope, 18
transvection orthogonale, 29

La catégorie $\mathcal{F}_{quad}$ des foncteurs de Mackey généralisés pour les formes quadratiques sur $\mathbb{F}_2$

Le but de ce travail est de construire et d'étudier des catégories de foncteurs associées aux espaces vectoriels munis de formes quadratiques non dégénérées sur $\mathbb{F}_2$. Après avoir construit la catégorie de foncteurs $\mathcal{F}_{quad}$, en utilisant des techniques similaires à celles utilisées pour les foncteurs de Mackey, on obtient plusieurs résultats concernant les objets simples de cette catégorie.

On montre l'existence d'un foncteur $\iota : \mathcal{F} \to \mathcal{F}_{quad}$ exact, fidèle et préservant les simples, où $\mathcal{F}$ est la catégorie des foncteurs entre la catégorie des espaces vectoriels finis sur $\mathbb{F}_2$ et la catégorie de tous les espaces vectoriels.

On introduit une autre catégorie de foncteurs, notée $\mathcal{F}_{iso}$, dont les objets simples sont indexés par les représentations modulaires irréductibles des groupes orthogonaux, éventuellement dégénérés, sur $\mathbb{F}_2$ et on montre l'existence d'un foncteur $\kappa : \mathcal{F}_{iso} \to \mathcal{F}_{quad}$ exact, fidèle et préservant les simples.

En décomposant les deux générateurs projectifs les plus simples de la catégorie $\mathcal{F}_{quad}$ on obtient une classification des "petits" objets simples de $\mathcal{F}_{quad}$ qui nous permet de montrer que les foncteurs polynomiaux de $\mathcal{F}_{quad}$ sont dans l'image du foncteur ι. De nouveaux foncteurs de $\mathcal{F}_{quad}$, baptisés foncteurs mixtes, apparaissent dans la décomposition de ces deux générateurs projectifs et fournissent deux familles infinies de foncteurs simples de $\mathcal{F}_{quad}$ ne provenant ni de $\mathcal{F}$, ni de $\mathcal{F}_{iso}$.

The category $\mathcal{F}_{quad}$ of generalized Mackey functors for the quadratic forms over $\mathbb{F}_2$

The purpose of this work is to construct and study functor categories associated to $\mathbb{F}_2$-vector spaces equipped with a quadratic form. After the construction of the category $\mathcal{F}_{quad}$ by use of similar techniques as for Mackey functors, we obtain several results about simple objects of this category.

We prove the existence of a faithful, exact functor $\iota : \mathcal{F} \to \mathcal{F}_{quad}$, which preserves simple objects, where $\mathcal{F}$ is the category of functors from the category of finite $\mathbb{F}_2$-vector spaces to the category of all vector spaces.

We introduce another functor category, noted by $\mathcal{F}_{iso}$, whose simple objects are indexed by the irreducible modular representations of possibly degenerate orthogonal groups over $\mathbb{F}_2$ and we prove the existence of a faithful, exact functor $\kappa : \mathcal{F}_{iso} \to \mathcal{F}_{quad}$, which preserves simple objects.

Using the decomposition of the first two projective generators of the category $\mathcal{F}_{quad}$, we obtain a classification of the simple objects of lowest rank of $\mathcal{F}_{quad}$, which allows us to prove that the polynomial functors of $\mathcal{F}_{quad}$ are in the image of the functor ι. In the decomposition of these projective generators appear new functors of $\mathcal{F}_{quad}$, called mixed functors, which give two infinite families of simple objects of $\mathcal{F}_{quad}$, which do not arise from the categories $\mathcal{F}$ and $\mathcal{F}_{iso}$.

Discipline : Mathématiques

Mots clés : catégories de foncteurs ; formes quadratiques sur $\mathbb{F}_2$; représentations des groupes orthogonaux sur $\mathbb{F}_2$; foncteurs de Mackey.

Keywords : functor categories ; quadratic forms over $\mathbb{F}_2$; representations of orthogonal groups over $\mathbb{F}_2$; Mackey functors.

Laboratoire Analyse, Géométrie et Applications, UMR 7539
Institut Galilée
Université Paris 13
99, avenue Jean-Baptiste Clément,
93430 VILLETANEUSE