



HAL
open science

Etude théorique et expérimentale des résonances de galerie de microsphères de silice: pièges à photons pour des expériences d'électrodynamique en cavité

Laurent Collot

► **To cite this version:**

Laurent Collot. Etude théorique et expérimentale des résonances de galerie de microsphères de silice: pièges à photons pour des expériences d'électrodynamique en cavité. Physique Atomique [physics.atom-ph]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 1994. Français. NNT : . tel-00011895

HAL Id: tel-00011895

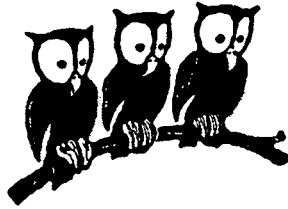
<https://theses.hal.science/tel-00011895>

Submitted on 9 Mar 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Laboratoire Kastler Brossel
de l'École Normale Supérieure.



Thèse de Doctorat de l'Université
Pierre et Marie Curie (Paris 6)

Spécialité : **Physique quantique**

présentée par

Laurent COLLOT

pour obtenir le titre de
Docteur de l'Université Paris VI

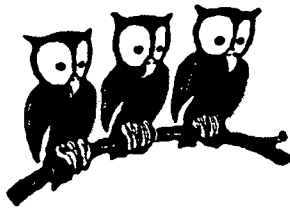
Sujet de la thèse :

**Etude théorique et expérimentale des résonances de galerie
de microsphères de silice :
pièges à photons pour des expériences d'électrodynamique
en cavité.**

Soutenue le 29 novembre 1994 devant le jury composé de:

M.	G. STEPHAN	Président et Rapporteur
M.	M. ORRIT	Rapporteur
M.	J.M. RAIMOND	Examineur
Mme.	V. LEFÈVRE-SEGUIN	Examineur
M.	YUZHU WANG	Examineur
M.	S. HAROCHE	Directeur de Thèse

Laboratoire Kastler Brossel
de l'École Normale Supérieure.



Thèse de Doctorat de l'Université
Pierre et Marie Curie (Paris 6)

Spécialité : **Physique quantique**

présentée par

Laurent COLLOT

pour obtenir le titre de
Docteur de l'Université Paris VI

Sujet de la thèse :

**Etude théorique et expérimentale des résonances de galerie
de microsphères de silice :
pièges à photons pour des expériences d'électrodynamique
en cavité.**

Soutenue le 29 novembre 1994 devant le jury composé de:

M.	G. STEPHAN	Président et Rapporteur
M.	M. ORRIT	Rapporteur
M.	J.M. RAIMOND	Examineur
Mme.	V. LEFÈVRE-SEGUIN	Examineur
M.	YUZHU WANG	Examineur
M.	S. HAROCHE	Directeur de Thèse

“Les miroirs feraient mieux de réfléchir davantage”.

Jean Cocteau.

Remerciements.

Le travail présenté dans ce mémoire a été effectué au laboratoire Kastler Brossel de l'École Normale Supérieure durant la période 1990-1993. Je remercie son directeur, Jacques Dupont-Roc, de m'y avoir accueilli.

Je tiens à remercier tout particulièrement Guy Stéphan, qui a accepté de présider le jury: son enthousiasme pour les lasers à microsphères dopées a contribué à stimuler nos travaux expérimentaux.

Merci également à Yuzhu Wang et à Michel Orrit de l'intérêt qu'ils ont bien voulu témoigner à ces recherches en acceptant de faire partie du jury.

Je remercie tout particulièrement Serge Haroche qui a dirigé ces recherches. Ses conseils et ses directives ont seuls permis de mener à bien ce travail, tout en ménageant beaucoup de liberté.

Jean-Michel Raimond, par son foisonnement d'idées, a veillé pas à pas au bon déroulement des expériences. J'ai eu également le plaisir de travailler quotidiennement avec Valérie Lefèvre dont la sagacité et les qualités d'organisation ont bien souvent été précieuses. Je souhaite aussi témoigner de toute ma gratitude à Serge, Jean-Michel et Valérie pour l'aide qu'ils m'ont apportée dans la rédaction de ce mémoire.

Jean Hare a beaucoup contribué à la réalisation des calculs présentés dans ce mémoire: je l'en remercie sincèrement. Je ne saurais oublier les autres membres de l'équipe, Michel Brune pour ses conseils pertinents, David Weiss et Vahid Sandoghdar pour les quelques mois de travail commun.

Je souhaite remercier tout particulièrement Philippe et Philip Goy pour le double rôle qu'ils ont joué dans ces expériences. A l'aide du premier nous avons détecté les premières résonances de galerie (micro-ondes) dans un système modèle alors que nos tentatives restaient infructueuses dans le domaine optique. Dans le même temps, Philip a tenté sans répit d'améliorer mes connaissances générales.

Nos expériences n'auraient pu être réalisées sans la compétence et la gentillesse de Jean-Claude Guillaume, André Clouqueur et leurs équipes des services techniques *électronique* et *mécanique*.

Enfin je ne saurais conclure sans dire combien le soutien de mes parents m'aura été précieux durant toutes ces années.

Introduction Générale.

-1 Motivation générale de nos études sur les microsphères.

Le développement des résonateurs électromagnétiques a été un élément essentiel dans les progrès de l'électronique et de l'optique quantiques. Dès les années 1950-1960, la réalisation de cavités accordables de grande surtension a évidemment joué un rôle important dans la technologie des lasers et des masers. Pour ne citer que quelques exemples plus récents, les expériences de compression des fluctuations du vide ont tiré profit du développement de cavités optiques de très faibles pertes, de type Fabry-Pérot, ou encore constituées d'un bloc monolithique transparent. La mise au point des nouveaux dispositifs interférométriques visant à détecter de très faibles variations de longueur (antennes gravitationnelles) ou de très faibles mouvements de rotation (gyroscopes laser) sont également tributaires des progrès accomplis dans la technologie des cavités optiques (qualité optique des surfaces, structure des résonateurs...)

Un des domaines de l'optique quantique moderne où les qualités des résonateurs sont particulièrement déterminantes est l'électrodynamique quantique en cavité qui s'intéresse aux propriétés de systèmes élémentaires, constitués d'un atome couplé à quelques photons dans un petit résonateur électromagnétique à très faibles pertes. L'étude de ces systèmes a conduit au cours des dernières années à la réalisation d'expériences remarquables, mettant en évidence par exemple, la modification du taux d'émission spontanée d'un atome en espace confiné, l'oscillation de Rabi d'un atome dans le champ du vide ou d'un seul photon dans une cavité, le dédoublement du spectre d'une cavité ne contenant qu'un seul atome, l'effet maser dans un milieu amplificateur monoatomique, le déplacement de Lamb des niveaux d'énergie atomiques induit par les fluctuations du vide d'un seul mode d'une cavité résonnante...[1]

Il ne s'agit là que d'un début et bien d'autres aspects fascinants de l'électrodynamique en cavité sont actuellement étudiés, avec le but de réaliser des expériences qui, il y a quelques années encore, auraient été considérées comme de pures expériences de pensée. La mesure non-destructive de photons dans une cavité devient possible[2][3], ainsi que la réalisation de superpositions cohérentes d'états du champ présentant des caractéristiques macroscopiques de phase, d'amplitude, ou de localisation spatiale différentes. Des dispositifs fondés sur des cavités accordables doivent permettre de produire des interrupteurs quantiques (à l'aide de leur couplage avec un atome unique qui les traverse) obéissant à une logique très particulière, étant à la fois "ouverts" et "fermés"[4]. La téléportation d'un état atomique entre deux cavités devient également possible[5].

Deux qualités des résonateurs sont essentielles pour la plupart de ces expériences. D'une part, le couplage d'un seul photon avec le dipôle atomique doit être grand, ce qui exige une forte localisation du champ dans un mode de tout petit volume V , idéalement de quelques fois le cube de la longueur d'onde d'émission ou d'absorption de l'atome. D'autre part, le champ et le dipôle atomique doivent être très faiblement amortis et survivre pendant un temps plus long que l'inverse du couplage atome-photon. Ceci exige en particulier que le coefficient de surtension, ou facteur Q , de la cavité soit très grand. La combinaison de grands Q et de petits V est donc le but recherché dans une majorité d'expériences d'électrodynamique en cavité. Deux domaines de longueur d'onde très différents ont été explorés à ce jour.

Dans le domaine micro-onde, il est possible de fabriquer des cavités supraconductrices de très grand Q (typiquement de 10^9 à 10^{10}) de volume de moins d'un centimètre cube, pour des longueurs d'onde de quelques millimètres (fréquences de l'ordre de 20 à 100GHz). Ces cavités, couplées à des atomes de Rydberg, sont idéales pour explorer l'électrodynamique en cavité aux grandes longueurs d'onde. On tire alors en particulier avantage du très grand couplage intrinsèque des dipôles géants des atomes de Rydberg avec le champ.[6]

Dans le domaine optique, les dipôles sont beaucoup plus petits, mais on peut en principe confiner le champ dans un volume beaucoup plus restreint et encore atteindre des couplages atome-photon importants. De petits résonateurs Fabry-Pérot, formés de miroirs de très grand pouvoir réflecteur, séparés par un demi à un millimètre ont été réalisés pour des expériences d'électrodynamique quantique en cavité optique et ont permis en particulier l'observation de l'effet Stark dynamique du vide dans une cavité résonnante[7][8]. Malgré leur petite taille, ces cavités restent cependant grandes à l'échelle de la longueur d'onde optique λ (au moins quelques $10^5 \lambda^3$) et leur Q record est tributaire de l'utilisation de miroirs à la pointe de la technologie des traitements optiques, très fragiles et d'un accès commercial limité. Le besoin de cavités plus compactes et plus faciles à réaliser est évident. Une voie possible est la réalisation de cavités microscopiques formées de miroirs plans séparés par une distance de l'ordre de λ . Cette solution a été développée en particulier en optique des semiconducteurs pour fabriquer des micro diodes laser aux propriétés remarquables (très faible seuil, caractéristiques de bruit nouvelles)[9]. Elle est également mise en œuvre dans certaines expériences d'électrodynamique en cavité. Cette

technique présente toutefois l'inconvénient que le Q de ces cavités est limité par la qualité des surfaces réflectrices (souvent des miroirs de Bragg) et par la diffraction sur le bord des miroirs plans. Elle n'est donc pas applicable aux expériences où un long confinement du champ est requis.

Une autre direction très prometteuse consiste à réaliser une cavité monolithique de tout petit volume, en pratique une microsphère de silice transparente, qui présente des modes résonnants constitués d'ondes se réfléchissant sous incidence rasante à l'intérieur du matériau. Ces modes présentent un très petit volume, le champ n'étant non nul que dans le voisinage immédiat d'une ligne fermée suivant la surface. Leur extension transverse sont de l'ordre de λ . Le volume du mode est alors, en première approximation simplement proportionnel aux dimensions linéaires du résonateur. Un calcul plus exact montre que des volumes de l'ordre de la centaine de λ^3 sont réalisables pour des sphères de quelques dizaines de microns de diamètre. Le champ résonnant présente une composante d'onde évanescente à l'extérieur de la sphère. Ce champ doit permettre de coupler un mode à des atomes rasant la surface ou piégés dans son voisinage. Le champ évanescent ne se propage pas vers l'extérieur et par conséquent n'ajoute pas aux pertes. Aussi, les pertes de ces modes sont, pour des microsphères de cette taille (ou plus grandes), essentiellement limitées par l'absorption du matériau et correspondent, à la limite, à des Q de l'ordre de 10^{10} à 10^{11} . On tire ici profit du fait que la diffraction de ces modes est extrêmement faible, ce qui correspond à une réflexion totale interne sous incidence rasante à l'intérieur du matériau sans lumière transmise.

Ces caractéristiques prometteuses nous ont conduits en 1991 à nous intéresser à ces résonateurs microscopiques nouveaux, avec l'espoir de pouvoir les utiliser pour étendre au domaine optique nos expériences d'électrodynamique quantique en cavité. Ce mémoire présente les résultats de nos premières études sur ces microsphères, dont les propriétés générales sont connues depuis longtemps (modes de galeries, arc-en-ciel) et dont l'utilité pour l'optique quantique a été remarquée, dès 1989, par Braginsky.[10]

-2 Aperçu historique des modes de galerie.

Dès le début du siècle, Gustav Mie publie un article sur la diffusion du champ électromagnétique par une sphère diélectrique [11]. Ce travail de 1908 servira constamment de référence par la suite. Mais si l'histoire a retenu le nom de Mie, il serait plus juste de lui associer les noms de Clebsch, Lorenz et surtout celui de Lord Rayleigh [12][13][14], (sans oublier les articles contemporains de P. Debye[15][16]).

Les travaux d'Alfred Clebsch (vers 1860, quelques années avant la publication des équations de Maxwell en 1865) et, plus tard, ceux de Ludwig Lorenz sur les solutions

de l'équation d'onde pour une sphère, sont remarquablement précoces et injustement méconnus, car ils forgent certains des outils mathématiques encore en usage dans ce domaine: développement en série sur les harmoniques sphériques, représentation en série des fonctions de Bessel...

Mais c'est sans-doute à Rayleigh que l'on doit la première intuition, et ensuite les premiers calculs, sur les "résonances de galerie". Ainsi, dès 1877, Lord Rayleigh [17] évoque la question des "whispering gallery modes" (WGM), dénommés ainsi en raison d'un singulier phénomène acoustique que l'on peut mettre en évidence par exemple dans la grande galerie ceinturant la base du dôme de la cathédrale Saint-Paul à Londres. Située le long de la base circulaire de la grande voûte ogivale, cette galerie présente la particularité de guider très efficacement les ondes sonores: deux personnes disposées en deux points quelconques de sa périphérie peuvent dialoguer sans peine en dépit de leur éloignement (le dôme fait plus de 50m de diamètre[18]). Plus tard, il analyse la diffusion d'une onde électromagnétique par un cylindre diélectrique [19] et, dans le domaine acoustique encore, invente des résonateurs utilisant des modes de galerie, dont il détermine la surtension [20].

Depuis, l'étude des propriétés de sphères diélectriques—ou conductrices— interagissant avec des champs, a suscité, sans discontinuer, de nombreuses analyses mathématiques, élargies avec le temps à des situations plus complexes: distribution non-uniforme de l'indice de réfraction, déformations quelconques de la sphère...

Dans cette abondante littérature, on peut remarquer qu'au fil du temps, l'intérêt s'est déplacé vers les modes de galerie eux mêmes. On les rencontre d'ailleurs fréquemment sous le nom de "creeping waves", ou "ondes de surface à résonance de forme", en raison de leur grande sensibilité à la forme précise du résonateur diélectrique. A l'origine, les physiciens cherchaient plutôt des explications aux phénomènes d'arc en ciel, à la coloration des suspensions colloïdales... et s'intéressaient en général surtout aux effets de diffusion de la lumière. Les modes de galerie, qui ne sont que très faiblement excités par une onde plane comme nous le verrons par la suite, jouent un faible rôle dans ce type de phénomènes et semblaient plutôt à l'époque des curiosités difficilement accessibles tant par le calcul que par les expériences. Après Rayleigh, il faut attendre l'époque des radars pour voir discutés les WGM dans le domaine des micro-ondes, par Richtmyer [21] et en géophysique, au sujet des ondes telluriques[22].

C'est avec l'avènement des lasers que l'étude de ces résonances a pris un véritable essor. Ces sources accordables quasi-monochromatiques ont apporté la résolution nécessaire à l'observation des résonances fines associées aux WGM¹. Dans les années 1970, une première série d'expériences remarquables dues à A. Ashkin met en évidence, sur des microgouttelettes (ou de petites particules) lévitées par laser, des résonances extrêmement fines, mesurées sur l'intensité du faisceau laser nécessaire à leur lévitation (spectroscopie de "force") [23][24].

Ce type d'effet résonnant associé aux modes de galerie, permet la mesure du spectre de ces modes, ce qui autorise alors la détermination simultanée du diamètre et de l'indice du diélectrique dont la gouttelette est constituée. Il n'est donc pas étonnant que les

¹Le premier article, dans les années soixante, montre même que les modes de galerie de petites sphères de quelques microns, peuvent favoriser l'émission laser, dans du fluorure de calcium dopé par Sm^{++}

résonances de galerie aient pris une importance considérable en météorologie, dans l'étude des aérosols (au sens large!), des panaches de fumées industrielles [25][26]...

Par la suite, le confinement spatial des modes de galerie et leur long temps de vie ont été exploités pour mettre en évidence des effets d'optique non-linéaire [27][28], en particulier par le groupe de R. K. Chang: émission Raman stimulée, effet laser dans des gouttelettes d'alcool dopées par de la Rhodamine 6G [29][30]. Des expériences voisines réalisées par le groupe de Campillo[31] ont permis de mettre clairement en évidence, dans de petites gouttes ($14\mu m$) dopées par ce colorant, un accroissement du taux d'émission lumineuse de la Rhodamine aux fréquences des modes de galerie, dans des proportions variables suivant le facteur de surtension du mode considéré. Dans le même temps, une émission laser est observée par T. Baër [32] dans des sphères de *Nd : YAG* de $5mm$ de diamètre, et plus récemment par Wang[33] dans des sphères de verre au néodyme de $30\mu m$ de diamètre[34].

La plupart des expériences jusqu'à ces dernières années ont toutefois utilisé des microgouttelettes (en chute libre ou piégées par un faisceau laser ou des trappes électrodynamiques) plutôt que des sphères solides. De telles microgouttelettes sont faciles à produire², et on peut varier à volonté leur composition. En revanche, ces avantages se paient par une transparence limitée des liquides, avec également des difficultés à obtenir une surface immobile: ces gouttelettes ont de nombreux modes de vibration mécanique très faciles à exciter. Ainsi, la puissance optique que l'on peut coupler aux modes de ces cavités est limité par l'excitation de ces modes vibratoires de surface (effet Brillouin stimulé)[35]. Enfin, l'évaporation du liquide d'indice entraîne inévitablement des dérives du diamètre de la sphère. Ces expériences n'ont pas mis en évidence de facteur de surtension supérieurs au million.

A l'opposé, les résonateurs solides constituent des échantillons stables et durables. Connu comme l'un des fondateurs du concept de mesure non-destructive (QND)[10], V. B. Braginsky s'est intéressé dès la fin des années 80, aux microsphères de verre comme résonateurs de haute surtension pouvant être l'instrument de telles mesures: les non-linéarités optiques du diélectrique auraient été mises à profit pour mesurer l'intensité du champ lumineux résonnant[36][37][38]. Ces microrésonateurs monolithiques lui paraissaient également de bons candidats à la réalisation du "calculateur optique" proposé par R. Feynmann. Ses premières tentatives utilisant le verre de silice ont mis en évidence des surtensions de $Q = 2.10^8$ (à $635nm$, pour des diamètres de sphères d'une centaine de microns), qui surpassent de deux ordres de grandeurs les meilleurs résultats obtenus avec des gouttes liquides. On peut citer aussi les travaux de S. Schiller sur des sphères beaucoup plus grandes ($\varnothing 10mm$)[39][40].

C'est donc dans ce contexte que ce thème de recherche a commencé au laboratoire de physique de l'ENS, avec le double objectif à long terme, de fabriquer des microcavités optiques qui permettraient la réalisation d'expériences d'électrodynamique en

²au moyen d'une simple buse mise en vibration par une céramique piézo-électrique qui produit un jet de liquide sous pression. La colonne, qui présente à la sortie de l'orifice de petites variations périodiques de diamètre, se fragmente rapidement en gouttes individuelles régulières en raison des forces de tension superficielle.

cavité évoquées en tête de cette introduction, et d'utiliser les résonances de galerie de très grande surtension dans des expériences d'optique non-linéaire.

-3 Plan de ce travail.

Notre travail a consisté plus particulièrement à caractériser, sur le plan théorique et expérimental, les modes de grande surtension de petites sphères diélectriques, et à analyser quelques expériences que ces dispositifs doivent permettre de réaliser, notamment en électrodynamique quantique en cavité.

Ce mémoire se divise en trois parties principales.

Le chapitre premier est une analyse théorique des modes électromagnétiques de grand Q des sphères diélectriques.

L'exposé commence par une étude qualitative et intuitive des propriétés optiques de ce système. Le cas particulier de rayons lumineux intérieurs à la sphère diélectrique et quasi-tangents à sa surface est discuté en détail. Ce traitement introductif, qui permet de conclure à l'existence dans les microsphères de phénomènes optiques résonnants cède ensuite la place à une analyse plus quantitative, qui est fondée sur l'analogie de ce problème d'optique ondulatoire avec la description quantique d'une particule dans un puits de potentiel approprié. Ce parallèle permet, en s'appuyant sur quelques résultats classiques de mécanique quantique, de dégager l'essentiel des effets physiques importants, comme la décomposition du champ contenu dans les microsphères en modes discrets. Afin de répondre aux exigences formulées dans l'introduction générale de ce mémoire, nous fixerons plus spécialement notre attention sur une catégorie particulière de ces effets résonnants: les modes de galerie.

La résolution explicite des équations de l'électromagnétisme, effectuée dans l'annexe A en raison de la lourdeur des expressions, conduit à la définition précise des modes électromagnétiques, et à une caractérisation explicite du champ optique à l'intérieur et à l'extérieur des sphères diélectriques. (Dans cette même annexe figure également une méthode d'amélioration de la convergence de la solution électromagnétique obtenue, adaptée aux effets faiblement résonnants.)

Les expressions obtenues donnent la distribution spatiale du champ électromagnétique dans tout l'espace, et permettent en particulier d'évaluer des grandeurs physiques importantes, comme le volume occupé par le champ électromagnétique des modes résonnants.

Les expressions complexes obtenues par la résolution des équations des champs ne conduisent toutefois pas à des formules faciles d'emploi pour des calculs numériques. Aussi, nous présentons un recueil succinct de méthodes d'approximation qui permettent une évaluation performante de la position des résonances fines de galerie.

Dans le but d'utiliser des sphères diélectriques comme des cavités optiques de haute surtension, il est nécessaire de mettre au point le couplage des modes de ces systèmes à

des faisceaux extérieurs propageants. Le principe d'une méthode de couplage par onde évanescente est alors présenté.

La dernière partie de ce premier chapitre vise à préparer l'étude expérimentale des modes de galerie présentée au second chapitre. Tout d'abord, l'effet d'une petite ovalisation du résonateur sur la position et la largeur des modes de haute surtension est étudié. Les pertes du diélectrique constituant les microsphères sont ensuite prises en compte. Enfin, nous déterminons, en fonction des largeurs de modes limitées par l'absorption du diélectrique choisi, la silice, la taille minimale des microsphères qui seront étudiées expérimentalement. Un tableau récapitulatif résume les principaux ordres de grandeurs attendus pour des microsphères de différents diamètres.

Le second chapitre est consacré à l'étude expérimentale des résonances des microsphères par différentes techniques spectroscopiques.

Ce chapitre commence par décrire le premier dispositif expérimental que nous avons construit et explique en détail la méthodologie de fabrication des petites sphères de silice par fusion sans contact que nous avons mis au point. Le dispositif de micromanipulation des résonateurs ainsi que le système optique de couplage par onde évanescente au laser de spectroscopie sont décrits en détail. Nous présentons ensuite nos tout premiers spectres enregistrés dans le proche infrarouge qui mettent en évidence des résonances très fines de quelques centaines de kilohertz de largeur, correspondant à des facteurs de qualité Q de quelques 10^9 .

En raison de plusieurs limitations expérimentales sévères, comme la pollution de la surface des résonateurs par des poussières et des molécules adsorbées, nous expliquons pourquoi nous avons été amenés à entamer la réalisation d'un second dispositif beaucoup plus performant qui permet de fondre, puis de caractériser spectroscopiquement des microsphères sous vide, sans contamination. Après une description de ce système mécanique et optique entièrement télécommandé de l'extérieur, nous donnons une nouvelle série de mesures, obtenue avec ce nouveau dispositif, dans de bien meilleures conditions de reproductibilité.

Enfin, après l'étude de deux méthodes possibles d'accord en fréquence des résonateurs, nous mettons en évidence des effets non-linéaires proportionnels à l'intensité lumineuse couplée dans les modes.

Le dernier chapitre de ce mémoire se divise en deux parties distinctes. La première étudie la faisabilité d'une expérience d'électrodynamique en cavité que l'on pourrait envisager de réaliser, en mettant à profit les propriétés spécifiques des modes de galerie de très petites sphères de silice, comme le grand confinement du champ électromagnétique résonnant et le fort gradient de champ à la surface du diélectrique. Ces dernières devraient permettre d'imaginer une expérience de déviation d'un jet d'atomes froids par un champ résonnant de seulement quelques photons. Comme l'interaction atome-champ de type dipolaire utilisée ici est purement dispersive (pour des désaccords assez grands), la déviation peut s'effectuer sans modification (par absorption) du nombre de photons contenus dans le mode de la microsphère. Une telle situation devrait mettre en évidence la quantification de la force dipolaire déflexrice. Cette manipulation réaliserait une variante

de l'expérience de Stern et Gerlach: ici un jet de particules classiques—les atomes— est dévié par le champ d'un mode optique quantique de quelques photons contenus dans un mode de galerie.

Enfin, la troisième partie passe en revue quelques projets d'expériences variées. Les ordres de grandeur particuliers des résonances de galerie permettent en effet d'envisager de réaliser des systèmes optiques à la fois compacts et performants. En particulier, on peut songer à utiliser les résonances de grande surtension pour stabiliser la raie d'émission d'un laser ou encore mettre à profit le gradient de champ à la surface pour constituer des détecteurs de positions très sensibles.

L'inclusion d'ions actifs dans la silice constituant le milieu diélectrique des microcavités permettrait, sous l'effet d'un pompage optique extérieur, d'obtenir un milieu amplificateur dans le volume même des microsphères. Ainsi, un effet laser pourrait être observé dans les modes de galerie résonnants. Un tel microlaser devrait présenter un seuil de fonctionnement très bas et émettre un rayonnement extrêmement pur spectralement.

Chapitre I

Propriétés optiques des microsphères.

Dans cette première partie, nous allons exposer un certain nombre d'idées physiques utiles à la compréhension des propriétés optiques de petites sphères de diélectrique et introduire quelques méthodes de calcul des grandeurs physiques importantes. Le point de départ de cette étude repose sur des principes intuitifs simples qui permettent d'expliquer qualitativement la plupart des effets qui nous intéressent, comme l'existence de résonances optiques de haute surtension.

Nous présenterons ensuite quelques résultats plus quantitatifs, qui permettront d'estimer les principales grandeurs physiques caractérisant les résonances optiques des microsphères: comment déterminer, à partir de la géométrie du résonateur, la position, la largeur spectrale des modes optiques et leur géométrie, comment leur coupler une source laser extérieure...

Ce volet théorique est, en partie, le fruit d'une compilation de résultats classiques de physique mathématique. En effet, l'omniprésence des gouttes liquides dans notre environnement a motivé, dès la découverte des lois de l'électromagnétisme, l'étude des propriétés optiques de sphères diélectriques. De nombreuses expérimentations numériques se sont avérées nécessaires pour sélectionner les méthodes de calcul les mieux adaptées aux ordres de grandeur des microsphères de silice que nous voulions étudier. En particulier, les techniques d'approximation numériques de cette partie s'appuient sur les travaux précurseurs de Lam et Young, et de H.M. Nussenzveig[41][42]. Aussi, bien que des idées physiques simples permettent véritablement de "comprendre" intuitivement la nature de ces résonances de galerie, il nous a semblé utile de faire figurer dans ce mémoire des méthodes de calcul numérique véritablement *utilisables* pour effectuer des prédictions quantitatives.

I-1 Position du problème.

L'introduction générale suggère qu'une boule diélectrique transparente pourrait être utilisée comme cavité optique de très grande finesse. Comprendre comment un photon peut de-

meurer piégé longtemps dans un milieu optique sphérique impose dans un premier temps de déterminer, dans le cadre de l'électromagnétisme classique, l'évolution d'un champ optique dans cette géométrie. Une telle analyse n'est pas très facile, car il s'agit d'une structure tridimensionnelle, dont les murs ne sont pas infranchissables puisqu'ils sont constitués d'un simple saut d'indice et non d'une limite de type conducteur parfait. Le système est donc une cavité ouverte. Un tel problème ne pourra donc pas être étudié sur une portion restreinte de l'espace, mais en tout point (en incluant les sources lumineuses).

Les difficultés de la solution mathématique exacte du champ optique dans ce système électromagnétique ouvert ne doivent cependant pas nous rebuter. L'analyse de ces sphères diélectriques à la lumière de quelques images physiques simples et intuitives permet en effet de dégager les idées physiques essentielles et de se figurer comment ces microrésonateurs peuvent piéger un photon très longtemps. Nous commencerons par un choix particulier des sources lumineuses. Ce cas nous permettra de distinguer très simplement deux catégories de chemins optiques, correspondant à des effets faiblement résonnants et fortement résonnants; ces derniers retiendront plus spécialement notre attention car ils sont rattachés aux résonances de galerie de grande surtension qui nous intéressent.

Ensuite, nous aborderons un traitement plus quantitatif. Nous serons amenés à considérer, non pas un mode résonnant isolé, mais le problème de la diffusion résonnante du champ de sources par la sphère diélectrique. On verra alors qu'il est possible, par un choix approprié des sources, d'exciter sélectivement une famille de modes très fins, qui pourront être considérés comme isolés. Ainsi, nous déduirons de cette analyse les conditions requises pour l'observation expérimentale de ces résonances fines. Les effets de petites perturbations géométriques, puis de pertes diélectriques seront considérés.

I-2 Quelques images physiques simples.

Nous nous proposons d'étudier ici le cas particulier d'une boule parfaite de rayon a , constituée d'un bon diélectrique transparent (sans perte), isotrope et homogène. Sauf mention contraire, nous supposerons cette propriété vérifiée tout au long de ce mémoire. La sphère dont l'indice sera noté N , est supposée plongée dans le vide. Nous allons d'abord étudier, par une méthode d'optique géométrique élémentaire, quelques trajectoires classiques de photons contenus dans la boule de diélectrique.

Pour que de telles considérations soient légitimes, nous supposerons tout d'abord que la taille de la sphère est nettement supérieure à la longueur d'onde de la lumière λ . De ce fait, on pourra négliger dans cette approche liminaire, certains effets purement ondulatoires. Ce traitement simple, utilisant quelques considérations d'*optique géométrique* va permettre de distinguer deux catégories de trajectoires classiques: les unes suivant lesquelles l'intensité de la lumière décroîtrait géométriquement avec la longueur du chemin optique; les autres pour lesquelles les rayons se propageraient indéfiniment (à la limite de ce modèle schématique).

Cette subdivision que nous retrouverons à l'occasion de l'étude analytique des modes optiques des microsphères, distingue deux catégories de rayons. La première classe de

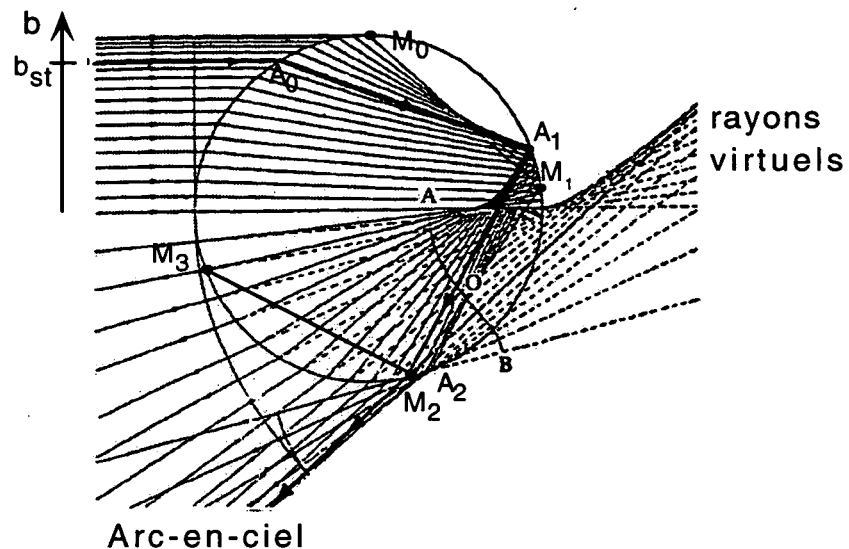


Figure I.1: Chaque trajectoire est déterminée en appliquant les lois de la réflexion et de la réfraction à l'interface vide-verre. L'accumulation des trajectoires retro-réfléchies pour des angles de déviation particuliers explique l'existence d'arcs-en-ciel.

trajectoires classiques est à mettre en relation avec des effets d'arc en ciel, faiblement résonnants, qui expliquent la diffusion de la lumière par une sphère de diélectrique. La seconde classe de trajectoires associée à des effets critiques en longueur d'onde, expliquera l'existence des modes optiques, dans la boule diélectrique.

I-2-1 Deux catégories de trajectoires.

- Effets d'arc en ciel

Commençons par envoyer sur la sphère diélectrique de rayon a , un faisceau de lumière parallèle. Si la lumière interagissait avec le milieu diélectrique transparent d'indice N en suivant les lois de l'optique géométrique, la solution du problème s'obtiendrait en déterminant la trajectoire de chaque rayon lumineux, (sans se soucier des phases relatives). Ce traitement n'est autre que la méthode de résolution en trajectoires discrètes d'un problème de diffusion classique. On évalue généralement la déviation $\Theta(b)$ d'une famille de trajectoires incidentes parallèles, en fonction du paramètre d'impact. Celle-ci contient l'essentiel de l'information caractérisant le centre diffuseur (s'il présente une symétrie de révolution). La figure I.1 présente les premières réfractions et réflexions subies, pour un ensemble de rayons incidents parallèles, rencontrant une sphère d'indice uniforme $N(r) = 1.457$ (l'indice de la silice à $780nm$). Cette figure (d'après [42]) permet d'expliquer, par exemple, l'effet d'arc en ciel qui se produit lorsqu'une source de lumière blanche éclaire une goutte d'eau[43].

En effet, pour un paramètre d'impact b convenable, le rayon incident va être réfracté une première fois en pénétrant dans la sphère en A_0 , réfléchi intérieurement une fois en A_1 , puis va ressortir en subissant une dernière réfraction en A_2 . (Il existe aussi un faisceau réfléchi en A_2). L'effet d'arc-en-ciel se produit précisément quand la déflexion totale $\Theta(b)$, entre l'entrée et la sortie devient stationnaire en b pour $b \equiv b_{st}$, c'est à dire si $\frac{d\Theta}{db}(b_{st}) \equiv 0$. Si l'eau ne présentait pas d'effet de dispersion de l'indice en fonction de la longueur d'onde, on observerait une accumulation brillante de lumière suivant un cône, d'angle au sommet 42 degrés dans le cas de gouttes d'eau[44].

Suivons maintenant une trajectoire correspondant à un paramètre d'impact plus grand que b_{st} ; plus b est grand, plus le faisceau atteignant A_2 sera rasant, et donc plus l'intensité des faisceaux réfléchis intérieurement en $A_2, A_3 \dots$, sera grande. La première réfraction a lieu en M_0 . Ensuite, la lumière va subir une première réflexion interne en M_1 , associée à un premier faisceau sortant réfracté, puis va effectuer une multitude de réflexions internes en $M_2, M_3 \dots$. On voit donc qu'en chaque M_i , l'intensité du rayon lumineux est divisée par le coefficient de Fresnel approprié, fonction également de la polarisation du champ incident. On distinguera ici commodément les polarisations en notant (TE) les champs qui possèdent une composante électrique selon la surface du dioptre et (TM) ceux pour lesquels le champ électrique est perpendiculaire à la surface. On appelle θ l'angle d'incidence, et θ_c l'angle qui vérifie $N \sin(\theta_c) = 1$. La dépendance angulaire des coefficients de Fresnel permet de conclure que la réflectivité effective de la surface interne de la sphère diélectrique augmente avec l'incidence, jusqu'à l'angle critique, en restant toujours strictement inférieure à l'unité. Ces trajectoires n'interviendront donc que dans des phénomènes de diffraction faiblement résonnants (effets du "fond"), car en deçà de l'angle critique, le dioptre est un piètre réflecteur. Cette classe d'effets causera par exemple des *ondulations lentes en longueur d'onde* de l'intensité rétrodiffusée.

- Réflexion totale interne

Considérons maintenant les trajectoires internes qui vérifient $\theta > \theta_c$. Pour celles-ci les rayons émergents disparaissent. Il se produit le phénomène de réflexion interne totale. Les éventuels phénomènes résonnants, associés à de telles trajectoires totalement réfléchies intérieurement, ne seront plus limités a priori par les pertes causées par les rayons réfractés vers l'extérieur. On s'attend donc dans ce cas, sous réserve que ce raisonnement classique puisse s'appliquer, à des effets fortement résonnants.

Les photons—dans le cadre de cette approximation triviale qui ne prend en compte aucun effet de diffraction, seront indéfiniment réfléchis à l'intérieur du diélectrique (réflexion totale interne T.I.R). La figure I.2 montre une trajectoire particulière totalement réfléchie à l'intérieur du résonateur. (Bien que l'on ait figuré au sommet de la figure un "rayon entrant", il est bien clair que la trajectoire commence nécessairement à l'intérieur, car $\theta_{interne} > \theta_c$: à ce stade, l'optique géométrique ne peut expliquer qu'un photon puisse pénétrer de l'extérieur dans la sphère suivant une trajectoire sur-critique.) Les lois de la réflexion totale imposent que la trajectoire soit un polygone régulier (éventuellement non-fermé), contenu dans un plan passant par le centre du résonateur.

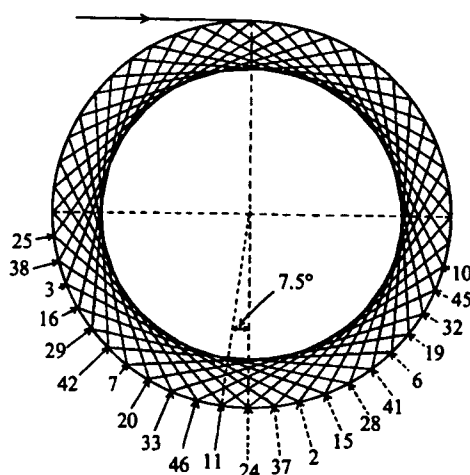


Figure I.2: On a figuré ici une trajectoire classique d'ordre $l = 24$ (sur $\tilde{n} = 11$ tours). Les flèches indiquent le nombre de réflexions internes déjà effectuées. La caustique circulaire visible sur cette figure laisse penser que l'intensité du champ sera maximale dans cette couronne périphérique.

Bien entendu, on sait également que les lois de l'électromagnétisme imposent la continuité du champ électromagnétique à la surface du verre. Il subsistera donc une onde externe évanescente, qui ne se propagera pas radialement—et donc n'emportera pas d'énergie; l'optique géométrique qui ne tient pas compte ici de la courbure du dioptre (dans la direction perpendiculaire au plan de la figure précédente) ne prévoit pas de pertes pour ces trajectoires T.I.R. On comprendra qu'une telle approximation verra son exactitude s'améliorer avec le facteur d'échelle du problème a/λ .

I-2-2 Approximation eikonale.

En suivant une approche ondulatoire locale, nous allons maintenant étendre très simplement les résultats purement géométriques précédents. Si l'on suit continûment l'évolution de la phase du champ électromagnétique le long d'une trajectoire, en fonction de très petites variations de cette dernière on peut obtenir localement la courbure du champ. Il s'agit donc de calculer les chemins optiques le long d'un ensemble de tracés géométriques voisins, dans la limite où cette variation spatiale est suffisamment lente à l'échelle de la longueur d'onde optique. Une telle approximation porte habituellement le nom d'approximation eikonale[45][46]. En particulier, nous pouvons chercher à affiner la compréhension des effets résonnants associés aux trajectoires T.I.R dont nous venons de parler.

Considérons à nouveau une trajectoire de la figure I.2, et écrivons les conditions bien connues que la phase doit vérifier le long du chemin optique et en son voisinage, pour que

le champ électromagnétique soit stationnaire.

1. Condition d'orbite cyclique

La trajectoire doit être *fermée*, éventuellement après plusieurs tours. Nous obtenons donc nécessairement un polygone régulier, qui possède $2l$ arêtes parcourues en \tilde{n} tours, avec l entier. (Trajectoire en "étoile"). Cette définition de l coïncide avec la valeur l du nombre angulaire introduit par la suite au paragraphe I-3-3. Le périmètre p d'un tel polygone vaut $2l \times 2a \sin(\tilde{n}\pi/2l)$. (La figure I.2 représente par exemple le cas d'un polygone régulier à 48 cotés sur onze tours.) Nous nous intéresserons par la suite presque exclusivement au cas $l \gg 1$ et \tilde{n} petit devant l .

2. Condition de périodicité de la phase

Le périmètre p de ce polygone doit vérifier:

$$\frac{Np}{\lambda} + \frac{2l\Delta\phi_R}{2\pi} = b, \quad (\text{I.1})$$

où b est un entier fixant l'ordre d'interférence, et $\Delta\phi_R$ le déphasage par réflexion, c'est à dire l'argument des coefficients de Fresnel usuels. Au delà de l'angle d'incidence critique $\theta_c = \arcsin(1/N)$, ces coefficients sont de module unitaire et valent:

$$\Gamma_\mu = \frac{\mu \cos \theta - i\sqrt{N^2 \sin^2 \theta - 1}}{\mu \cos \theta + i\sqrt{N^2 \sin^2 \theta - 1}}, \quad (\text{I.2})$$

où μ prend les valeurs suivantes, pour les deux polarisations possibles TE et TM¹

$$\begin{aligned} [\text{Mode TE}] \quad \mu &= N \\ [\text{Mode TM}] \quad \mu &= 1/N. \end{aligned} \quad (\text{I.3})$$

Dans notre cas, l'angle d'incidence θ est égal à $\frac{\pi}{2} - \frac{\tilde{n}\pi}{2l}$, et le déphasage $\Delta\phi_R$ vaut donc, au premier ordre en \tilde{n}/l :

$$\Delta\phi_R = -\pi + \frac{\mu}{\sqrt{N^2 - 1}} \cdot \frac{\tilde{n}\pi}{2l}. \quad (\text{I.4})$$

Remarquons que ce déphasage dépend bien de la polarisation par le paramètre μ . On peut maintenant obtenir une expression approchée de la formule I.1, dans la limite où $\tilde{n}/l \ll 1$, sous la forme:

$$Nka \approx l \left[1 - \frac{\mu}{lM} + \frac{\tilde{n}^2 \pi^2}{24l^2} \right], \quad (\text{I.5})$$

¹La définition usuelle des modes TE et TM est la suivante: les modes TE ont une composante électrique radiale nulle tandis que les modes TM ont une composante magnétique radiale nulle.

où ka est un nombre sans dimension, le *paramètre de taille*² formé par le produit du vecteur d'onde par le rayon de la sphère, $M = \sqrt{N^2 - 1}$ et où l'on a choisi l'ordre b égal à $(\tilde{n} - 1)l$. C'est l'ordre le plus bas compatible avec une longueur des cotés supérieure à $\lambda/2$ pour $\tilde{n} = 1$.

La relation I.5 donne des indications importantes (que nous retrouverons dans le cadre de l'électromagnétisme classique):

- Chaque résonance est caractérisée par deux nombres \tilde{n} et l . Leur position dépend surtout de l (quasi proportionnellement) et dans une moindre mesure de \tilde{n} . Nous retrouverons ces notations familières plus loin, mais \tilde{n} sera remplacé par $n = \tilde{n} - 1$.
- Le champ électromagnétique est confiné radialement (au voisinage des trajectoires polygonales), pour des rayons compris entre a et $a \cos \theta$. L'extension radiale du champ est donc de l'ordre de $a \frac{\tilde{n}^2 \pi^2}{8l^2}$, quantité qui varie quadratiquement avec \tilde{n} .
- On distinguera deux familles de résonances distinctes, correspondant aux deux polarisations TE et TM du champ. Leur écart relatif, pour un couple (l, \tilde{n}) fixé, variera comme $1/l$ (en unités de ka), les modes TE précèdent les modes TM à valeurs du paramètre de taille croissantes.
- On attend en outre un spectre quasi périodique, où deux résonances voisines en l , de même \tilde{n} , seront approximativement séparées en fréquence par $\frac{c}{2\pi N a}$. Cela est l'analogie des modes longitudinaux d'un interféromètre de Fabry-Pérot.
- Enfin, les résultats relatifs à l'effet de réflexion totale pour les ondes planes laissent penser que la réflexion frustrée en chaque sommet du polygone entraînera l'existence d'une onde évanescente à l'extérieur du diélectrique, de portée caractéristique $1/(k||1 - N^2 \sin^2 \theta||^{\frac{1}{2}})$. Cette distance, qui diverge à l'incidence critique, vaudra donc environ $1/k = \lambda/2\pi$ pour les angles d'incidence voisins de $\pi/2$ qui nous préoccupent. Ainsi, le résonateur sera "entouré" d'un anneau évanescent le long du grand cercle équatorial, de portée $\lambda/2\pi$.

3. Courbure

Jusqu'ici, nous avons supposé implicitement que la propagation lumineuse dans la sphère était assimilable à un système bidimensionnel. La symétrie sphérique du problème impose en plus que la courbure du champ corresponde à la courbure de la surface du diélectrique, non seulement dans le plan de la figure I.2, mais également orthogonalement à ce plan. Cette dernière remarque montre bien les limitations de l'approche eikonale simple exposée ci-dessus: en fait, les résultats dérivés ici s'avèreront assez exacts dans le cas particuliers des modes de galerie que nous avons

² Nka compte la longueur du chemin optique de la trajectoire eikonale en unités de longueur d'onde

étudiés expérimentalement, car ceux-ci sont également localisés dans la troisième dimension (perpendiculairement au plan de la figure I.2).

Après ces quelques considérations, valables seulement dans le cas de sphères grandes devant la longueur d'onde de la lumière, il nous faut revenir à une théorie plus générale, valable également pour de petites cavités en interaction avec des sources.

I-3 Cavité électromagnétique ouverte.

I-3-1 Généralités.

Si les idées physiques intuitives que nous venons de discuter sont applicables, les petites sphères de diélectrique devraient permettre, pour des tailles de résonateur convenables, de réaliser des cavités optiques réalisant un confinement du champ électromagnétique tel que de nombreuses expériences modèles d'électrodynamique en cavité deviendraient possibles dans le domaine optique. Ainsi, l'étude de l'interaction entre un petit nombre de photons piégés par la cavité et quelques systèmes atomiques simples: atome(s) libre(s) ou ion(s) devrait mettre en évidence la nature quantique du champ optique. L'analyse effectuée ci-dessus a montré que le champ électromagnétique des modes résonnants devait être confiné au voisinage de l'équateur: pour des sphères de périmètre comparable à $100 - 1000\lambda$, on s'attend donc à ce que le volume du mode optique soit comparable à quelques milliers de λ^3 . Un seul photon confiné dans un tel volume conduit à un champ (interne) de l'ordre de $100V/cm$! L'interaction de ce champ avec un dipôle d'une unité atomique (comparable au dipôle d'un atome alcalin dans l'état fondamental) est caractérisée par une fréquence d'échange (fréquence de Rabi) d'environ $100MHz$, beaucoup plus grande que les largeurs naturelles typiques (quelques mégahertz pour les alcalins). En vue d'observer des effets d'interaction matière-rayonnement les plus grands possibles, comme par exemple une dynamique du système très différente en fonction du nombre de photons $0, 1 \dots$ contenu dans un mode précis de la cavité, il faut donc minimiser le volume de la cavité, tout en maintenant le facteur de surtension des modes maximal. Toutefois, à mesure que l'on réduit la taille de la cavité (l'échelle choisie étant la longueur d'onde optique), les effets de courbure évoqués plus haut commencent à intervenir et feront que la réflexion de la lumière à l'interface diélectrique ne sera plus exactement une réflexion totale: une partie du champ pourra s'échapper. Ces effets rentrent dans la catégorie des pertes par diffraction.

Les petites sphères diélectriques apparaissent donc comme des cavités optiques ouvertes (tout comme par exemple une cavité laser, constituée de miroirs semi-transparents). Il nous faut donc recourir à un formalisme adapté à ce type de système non conservatif. Sans rentrer dans le détail de ces questions propres à l'électrodynamique classique et quantique en cavité, rappelons brièvement deux approches classiques conduisant toutes deux à la détermination des propriétés optiques de cavités ouvertes.

On peut aborder ce problème des cavités ouvertes de deux manières complémentaires. La première, dite des modes normaux, consiste à écrire l'Hamiltonien du champ optique

(qu'il soit quantique ou classique), sur une portion de l'espace incluant les "murs" de la cavité. La recherche des états propres conduit en général à trouver des valeurs propres complexes, car l'Hamiltonien n'est pas hermitique si la cavité présente des pertes. La partie imaginaire du spectre contient, dans ce formalisme, tous les effets dissipatifs. Ces modes quasi-normaux sont toutefois à manipuler avec précaution, en raison de divergences qui peuvent apparaître du fait que rien ne garantit que le champ des modes propres soit nul à l'infini. Nous invitons le lecteur à consulter [47] pour de plus amples détails.

L'autre approche possible consiste, au lieu de considérer le calcul comme un problème aux valeurs propres, à chercher directement une solution aux équations locales du champ, compatible avec les conditions aux limites du problème, pour un choix particulier de sources. Cela revient en fait à rechercher les effets de diffusion du champ des sources, sous l'effet des conditions aux limites imposés par les parois du système. Le lien avec l'approche modale décrite ci-dessus s'effectuera en associant à chaque valeur propre (éventuellement complexe) un pôle particulier des fonctions caractérisant la diffusion, comme l'amplitude de diffusion.

Bien que ces deux points de vue soient équivalents pour prédire la position des résonances et leur surtension, nous privilégierons ici le second. En effet, la deuxième approche est plus complète car elle traite simultanément du délicat problème du couplage du champ des sources aux modes de la sphère, et non seulement de la prédiction des résonances optiques isolées de haute surtension. A ce sujet, on consultera avec profit l'article de Johnson [48] qui énonce très clairement le principe du calcul des champs diffusés par la microsphère, ou encore le livre de M. Nussenzveig [42] pour un revue plus exhaustive. La compréhension du couplage semble donc pouvoir être profitablement abordée en utilisant ce second point de vue en terme de diffusion, puisque l'on sera amené à considérer des termes sources bien définis. A cette occasion, nous verrons qu'il existe une forte analogie entre notre micro-cavité étudiée en termes d'états de diffusion classiques, et le problème d'une particule massive obéissant aux lois de la mécanique quantique, en mouvement dans un potentiel radial. A l'issue de cette étude, nous obtiendrons une solution générale, sous forme de série, au problème de la diffusion d'un champ incident quelconque par une microsphère. Nous utiliserons à cette occasion une base de fonctions vectorielles (les harmoniques sphériques vectorielles) particulièrement bien adaptées à la symétrie sphérique du résonateur.

Pour remédier à certaines difficultés de convergence de cette solution, le lecteur trouvera en annexe B une transformation de cette solution en une série à convergence rapide, qui présente l'avantage de donner une signification physique claire aux effets faiblement résonnants. Notons bien ici que le but de ce travail n'est pas l'étude des propriétés générales de diffusion de la lumière par une sphère diélectrique. Aussi, nous ne parlerons des effets de diffusion faiblement résonnants que dans la mesure où ces derniers peuvent expliquer certains effets observables expérimentalement lors de la recherche de résonances de haute surtension. En particulier, le formalisme développé dans cette annexe pourrait être utilisé pour étudier quantitativement l'efficacité du couplage d'un champ laser sonde aux modes des microsphères.

Précisons enfin que dans les prochains chapitres de ce mémoire, nous nous intéresserons presque exclusivement aux seuls modes de galeries de grande surtension, suffisamment fins pour pouvoir être considérés comme isolés. Aussi, le lecteur désireux d'aborder rapidement la partie expérimentale de ce travail pourra négliger de lire les parties détaillant la solution électromagnétique générale, et consulter directement le tableau synthétique de la page 69 (à la fin de ce chapitre) qui rappelle, pour diverses tailles de microsphères, les valeurs calculées des principaux paramètres physiques. Ces valeurs serviront de point de départ à la conception pratique de l'expérience.

I-3-2 Equations locales de la diffusion.

Nous avons choisi d'aborder l'étude quantitative des propriétés optiques des microsphères en terme de diffusion d'un champ source incident par la cavité diélectrique. Résoudre le problème de la diffusion du champ électromagnétique par une sphère diélectrique, c'est chercher les champs solutions des équations de Maxwell qui satisfont les conditions aux limites adéquates.

- $\vec{D} = \epsilon\vec{E}$ et \vec{H} vérifient les équations locales de l'électromagnétisme.
- Conditions aux limites à la surface de la sphère : $\left\{ \begin{array}{l} \text{continuité de } \vec{D}_{\text{tangential}} \\ \text{et de } \vec{H} \end{array} \right.$

Le premier ensemble d'équations locales—les équations de Maxwell, sont écrites pour le champ total, c'est à dire que \vec{D} renferme à la fois le champ des sources et le champ rayonné par le diélectrique polarisé. Seul le champ *total* est solution des équations locales de l'électromagnétisme.

Le second point représente la continuité du champ à l'interface diélectrique-vide de la sphère. Une telle condition de raccordement entre diélectriques, différente d'une condition de type conducteur parfait, contribue à la complexité de la solution.

Enfin, le principe de causalité impose qu'à grande distance de la sphère, la lumière diffusée par le diélectrique tende asymptotiquement vers une onde sortante (le champ devant être uniformément nul avant l'allumage des sources).

Ecrivons, pour une onde monochromatique de vecteur d'onde \vec{k} (dans le vide), ce qu'imposent les équations de Maxwell aux champs. L'élimination du champ magnétique des équations de Maxwell conduit à l'équation d'onde vectorielle suivante:

$$\Delta\mathbf{E} + k^2 N^2(r)\mathbf{E} = 0 \quad (\text{I.6})$$

où $N(r)$ désigne l'indice du milieu au point r . Il serait commode de transformer ce problème vectoriel en un problème scalaire. Il est bien connu que les champs \mathbf{E} et \mathbf{H} peuvent se décomposer sur deux familles de solutions indépendantes correspondant aux modes TE et TM déjà définis. Pour les modes TE (resp. TM) \mathbf{E} qui n'a pas de composante électrique

(resp. magnétique) radiale, peut s'écrire sous la forme:

$${}^{TE}\mathbf{E} = E\vec{\nabla} \times (\vec{r}D^{(e)}) \quad (\text{I.7})$$

$${}^{TM}\mathbf{H} = H\vec{\nabla} \times (\vec{r}D^{(m)}). \quad (\text{I.8})$$

Les deux fonctions potentielles scalaires $D^{(e)}$ et $D^{(m)}$ sont suffisantes, pour dériver toutes les composantes du champ électromagnétique. Ces fonctions scalaires ont été introduites par P. Debye en 1909. Connues depuis lors sous le nom de potentiels de Debye, elles satisfont toutes deux à la version scalaire de l'équation d'onde I.6, dénommée équation d'Helmholtz:

$$\Delta D^{(e),(m)} + k^2 N^2(r) D^{(e),(m)} = 0. \quad (\text{I.9})$$

(Consulter pour plus de détail les équations B.81, données à la page 195 de l'annexe B). Il nous faut également déterminer comment les conditions aux limites sur les champs (vectoriels) se traduisent pour les potentiels scalaires. En remplaçant \mathbf{E} (resp. \mathbf{H}) au moyen de I.7, on trouve que les conditions aux limites pour les champs électriques et magnétiques imposent la continuité de $rD^{(e)}$ et $\partial_r(rD^{(e)})$ d'une part, et de $N^2 r D^{(m)}$ et $\partial_r(rD^{(m)})$ d'autre part.

I-3-3 Une Analogie Quantique.

L'équation d'Helmholtz (scalaire) I.9 peut encore s'écrire:

$$\left[-\Delta + k^2 (1 - N^2(r)) \right] D^{(e),(m)} = k^2 D^{(e),(m)}. \quad (\text{I.10})$$

Cette dernière expression présente une forte analogie avec l'équation décrivant l'évolution quantique d'une particule de masse μ dans un puits de potentiel $V(r)$. Ce problème de Schrödinger qui présente une symétrie sphérique se met en équation sous la forme (en représentation R) :

$$\left[-\Delta + \frac{2\mu}{\hbar^2} V(r) \right] \psi(\vec{r}) = \frac{2\mu}{\hbar^2} E \psi(\vec{r}), \quad (\text{I.11})$$

avec E l'énergie du système.

On constate qu'à condition de choisir $V(r)$ sous la forme $\frac{\hbar^2}{2\mu} [1 - N^2(r)]$, l'équation aux dérivées partielles définissant $D^{(e),(m)}$ est similaire à l'expression (I.11), en notant cependant qu'à la différence des problèmes de mécanique quantique, le pseudo-potential V dépend de k . Nous allons maintenant préciser cette analogie, qui va nous permettre d'approfondir notre compréhension des modes des microsphères, en développant un parallèle entre les modes électromagnétiques de galerie et les états quasi-liés dans la poche de potentiel de $V(r)$.

Intéressons-nous maintenant à l'équation de Schrödinger radiale écrite en unités réduites, pour le problème de type particule dans un potentiel central présenté au paragraphe

précédent. Les unités réduites adaptées imposent que $\hbar^2/2\mu = 1$, où μ est la masse réduite de la particule. La symétrie sphérique de l'analogie quantique (et du problème d'électromagnétisme) permet l'élimination des variables angulaires, en développant les fonctions solutions (scalaires) sur la base d'harmoniques sphériques $Y_l^m(\theta, \phi)$. Pour chaque valeur l du moment angulaire, les équations I.11 (ou I.9) se réduisent à des équations radiales, puisque les dépendances angulaires sont contenues dans les Y_l^m . L'équation radiale s'écrira donc, pour la fonction d'onde ψ_l (ou D_l):

$$\left[-\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r + V(r) + \frac{l(l+1)}{r^2} \right] \psi_l(r) = E_l \psi_l(r) \quad (\text{I.12})$$

où $V(r)$ est le potentiel central approprié, obtenu par identification avec (I.9), et E_l est l'énergie totale du système. On obtient aisément $V(r)$:

$$V(r) = k^2 [1 - N^2(r)] \quad E_l = k^2 \quad (\text{I.13})$$

I-3-3-1 Particule quantique dans un potentiel central.

Il est commode de regrouper l'expression du potentiel $V(r)$ associé aux effets d'indice du diélectrique avec le terme centrifuge en $\frac{l(l+1)}{r^2}$. On notera dans la suite $V_l(r)$ le potentiel total obtenu:

$$V_l(r) = \underbrace{k^2 [1 - N^2(r)]}_{\text{Energie radiale}} + \underbrace{\frac{l(l+1)}{r^2}}_{\text{Potentiel Centrifuge}} \quad (\text{I.14})$$

Le potentiel présente deux valeurs gauche et droite particulières, au voisinage de la discontinuité $r = a$.

$$V_{min} = \frac{l(l+1)}{a^2} - (N(a)^2 - 1)k^2, \quad V_{max} = \frac{l(l+1)}{a^2} \quad (\text{I.15})$$

On notera r_{in}, r_a, r_{out} les rayons respectifs des trois points d'intersection de $V_l(r)$ avec une énergie constante V_0 telle que $V_{min} < V_0 < V_{max}$. Les rayons r_{in}, r_a, r_{out} sont les points tournants classiques. On peut aussi définir une *pseudo-impulsion* $p_l(r)$ définie par la relation :

$p_l^2(r) = k^2 N^2(r) - \frac{l(l+1)}{r^2}$, la quantité $p_l^2/2\mu$ représentant l'analogie de l'énergie cinétique en mécanique quantique. Une région où $p_l^2(r) < 0$ sera classiquement *interdite*.

Dans le cas particulier d'une sphère diélectrique d'indice uniforme, le potentiel V_l est donc défini par l'expression suivante :

$$V_l(r) = \begin{cases} k^2(1 - N^2) + \frac{l(l+1)}{r^2} & r \leq a, \\ \frac{l(l+1)}{r^2} & r > a \end{cases} \quad (\text{I.16})$$

La figure I.3 en donne l'allure dans ce cas particulier.

Pour des diélectriques transparents usuels, ce potentiel coïncide avec une barrière centrifuge, pour $r > a$. Il présente un saut brutal en $r = a$ (à la surface de la sphère

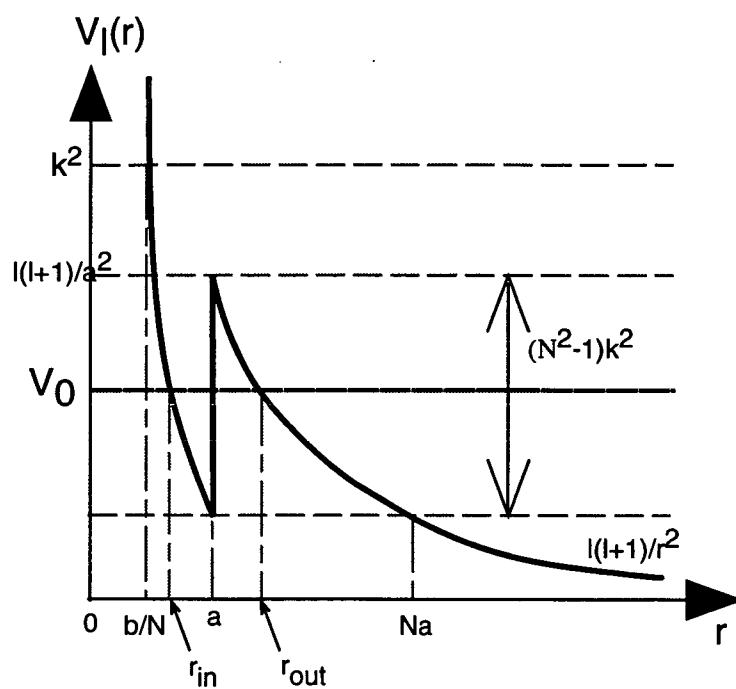


Figure I.3: On a figuré ici l'allure radiale du pseudo-potentiell. Pour la valeur V_0 figurée ici, on trouve trois points d'intersection avec le potentiell $V_l(r)$: r_{in} (inner), a et r_{out} (outer).

diélectrique). Ce saut ménage un puits sur le flanc du potentiel, dans laquelle la pseudo-particule va pouvoir, pour des énergies totales convenables, venir se piéger. Aux conditions de raccordement en $r = a$ de l'électromagnétisme vont se substituer des relations entre valeurs gauches et droites de la fonction d'onde ψ . Pour plus de commodité, on distinguera la solution dite "intérieure", valable pour $r < a$, de la solution "extérieure", qui s'applique à l'espace complémentaire.

Par analogie avec la théorie des potentiels de Debye que nous venons de rappeler, les conditions de raccordement pour les fonctions d'ondes ψ_l sont analogues à celles vérifiées par les potentiels de Debye. Les conditions aux limites à la surface de la sphère étant différentes pour les modes TE et TM , on trouve ici deux familles de modes associés aux fonctions radiales $\psi_l^{TE}(r)$ et $\psi_l^{TM}(r)$, nulles à l'origine, qui satisfont aux relations:

$$\ln' \psi_l^{TE}(r = a^-) = \ln' \psi_l^{TE}(r = a^+), \quad (\text{I.17})$$

$$N^2 \psi_l^{TM}(r = a^-) = \psi_l^{TM}(r = a^+), \quad (\text{I.18})$$

$$\partial_r(r\psi_l^{TM})(r = a^-) = \partial_r(r\psi_l^{TM})(r = a^+). \quad (\text{I.19})$$

Nous avons établi ci-dessus l'équivalence formelle du problème d'électromagnétisme avec un problème de Schrödinger. Cette dernière formulation présente l'intérêt de suggérer quelques résultats physiques simples, propres aux états quasi-liés de particules quantiques dans un potentiel central $V(r)$, dans le cas particulier d'un indice uniforme.

I-3-3-2 États propres d'une particule dans le puits de potentiel central.

La similarité des équations qui régissent les champs scalaires entre les cas quantique et classique va nous permettre d'utiliser quelques résultats bien connus de la mécanique quantique pour les transposer à l'électromagnétisme. Il nous faut donc trouver un champ (quantique) $\psi(\vec{r})$ solution de l'équation scalaire I.12, avec la dépendance $V(r)$ adaptée (I.16). Cette solution devrait également se raccorder convenablement à la surface de la sphère, et coïncider aux grandes distances avec le champ des sources. Ce calcul conduisant évidemment au même résultat que celui décrit dans l'annexe B traitant de la solution électromagnétique, nous n'effectuerons pas ici le raccordement explicitement. Rappelons seulement ici que les solutions intérieures ($r \leq a$) et extérieures ($r > a$) s'expriment toutes deux (dans ce cas scalaire) comme une combinaison linéaire des fonctions suivantes j_n et y_n (les fonctions de Ricatti-Bessel sphériques) (voir annexe A). Les conditions aux limites, en fixant les quatre paramètres libres de ces deux combinaisons linéaires, définissent une solution unique. Comme les états propres de diffusion résonnants jouent un rôle central dans l'étude des résonances, étudions plus en détail les états propres de la pseudo-particule dans le puits de potentiel $V(r)$, en l'absence de terme source.

Dans ce cas particulier, on retrouve une situation particulièrement familière au physicien atomiste: la quantification d'une particule dans un potentiel radial présentant un "puits" susceptible de renfermer des états quasi-liés. L'allure de la fonction d'onde étant fonction de la position de l'énergie totale E par rapport aux énergies de fond V_{min} et de sommet V_{max} de barrières, discutons maintenant les différents cas possibles.

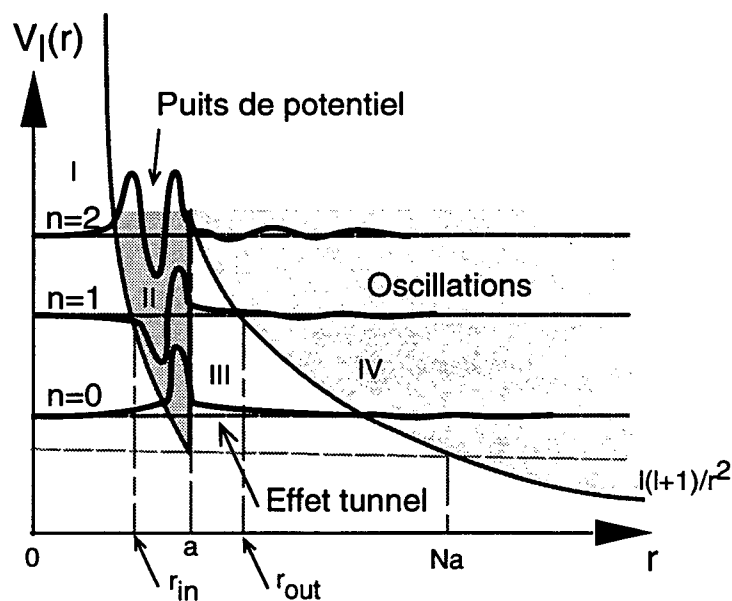


Figure I.4: Le puits de potentiel permet l'existence d'états quasi-liés: les trois premières fonctions radiales sont distinguées par le nombre de nœuds n .

a • Etats quasi-liés. Supposons que l'énergie E du système vaille V_0 , dont la valeur est portée sur la figure I.3.

L'équation $U(r) \equiv E$ admettra trois solutions, $r_1 = \frac{b}{N}$ avec $b = \lambda/k$ paramètre d'impact donné plus haut, $r_a = a$ et $r_2 = b$. La fonction d'onde résonnante, solution de ce problème de puits de potentiel, présentera les comportements suivants:

- Décroissance exponentielle vers l'origine sur l'intervalle $[0, r_1]$,
- Oscillation pour $r \in [r_1, a]$
- Décroissance exponentielle pour $r \in [a, r_2]$
- Oscillation devenant régulière lorsque $r \rightarrow \infty$, pour $r > r_2$.

On peut alors porter sur le graphe I.3 l'allure de la partie radiale de la fonction ψ .

La pseudo-impulsion p_l montre bien que le champ ne peut être du type propageant sur les zones interdites classiquement. Dans le cas où l est tel que l'énergie E est égale à E_0 , la pseudo particule de ce problème potentiel est confinée principalement dans le puits de potentiel (zone II) créé par le saut d'indice. Le puits fuit cependant par effet tunnel de part et d'autre (zones I et III), pour rejoindre le demi-espace libre (zone IV). La fuite par effet tunnel de la particule au travers de la barrière de potentiel correspond aux pertes par diffraction des modes électromagnétiques. A l'intérieur du puits de potentiel, on s'attend à trouver le phénomène caractéristique d'un problème d'ondes confinées : une quantification

de l'énergie. Cette discrétisation va se retrouver sur les spectres électromagnétiques: les résonances peuvent donc être expliquées par la condition mise sur la dépendance radiale du champ.

La figure I.4 donne la dépendance radiale des trois premières fonctions d'ondes résonnantes, numérotées par le nombre entier n (le *nombre quantique radial*). n donne le nombre de *nœuds* de la fonction radiale, à l'intérieur du puits de potentiel.

Lorsque l'énergie E du système augmente, les états propres rencontrés correspondent à des valeurs de n croissantes. Ces états sont de moins en moins liés au puits de potentiel. En effet, plus on considère des niveaux d'énergie élevée dans la poche de potentiel, plus ceux-ci ont tendance à "fuir" par effet tunnel à l'extérieur. Pour ces derniers, la probabilité de confiner longtemps la pseudo-particule dans le puits de potentiel sera minimale; ces états auront donc une largeur plus grande, tandis que les niveaux les plus fins correspondront aux premiers niveaux au fond du puits. Pour ces niveaux quasi-liés, la pseudo-particule est presque toujours confinée entre le point tournant classique interne r_1 et a . Résumons les conséquences essentielles de ce phénomène.

Le champ électromagnétique sera donc, à résonance, particulièrement confiné, juste sous la surface de la microsphère. Enfin, les "fuites" de la barrière, vers l'extérieur, seront à mettre en parallèle avec les pertes par diffraction des boules diélectriques. Enfin, pour $r > r_2$, la partie radiale de la fonction d'onde ψ décroît exponentiellement. La microsphère sera donc probablement entourée du halo évanescent que nous avons déjà évoqué tout au début de ce mémoire.

Enfin, la condition sur l'énergie du système k^2 , qui doit être comprise entre V_{min} et V_{max} pour avoir des états quasi-liés, permet de trouver les valeurs de l correspondant aux états quasi-liés:

$$a^2 k^2 < l(l+1) < N^2 a^2 k^2. \quad (I.20)$$

Rappelons ici la quantité sans dimension $\beta = ka$, appelée paramètre de taille, qui donne la "taille" de la microsphère mesurée en unités de longueur d'onde. Pour des valeurs de $\beta = ka$ assez grandes, les états les plus profonds (voisins de V_{min}) correspondront à des l de l'ordre de Nka tandis que les états les plus faiblement liés auront un moment angulaire de l'ordre de β (et des nombres radiaux n plus grands). On peut d'ailleurs préciser les conditions sur les paramètres pour que les états quasi-liés de la poche de potentiel aient une grande durée de vie. Une faible probabilité de fuite par effet tunnel au travers de la barrière de potentiel impose donc que la largeur de cette barrière, $r_{out} - a$ soit grande devant l'unité de mesure des distances qui est ici la longueur d'onde de de Broglie $2\pi/k$. En particulier, pour les états les plus profonds $k^2 \approx V_{min}$, $r_{out} \approx N a$. La condition précédente se réécrit $(N-1)ka \gg 1$. On trouve donc ici que le paramètre de taille de la sphère doit être assez grand pour que des états liés de grande durée de vie (correspondant on s'en doute aux modes de galerie les plus fins) puissent exister dans le résonateur: si la taille de la cavité devient comparable à la longueur d'onde, les photons deviennent trop gros pour y être contenus, et les pertes par diffraction deviennent considérables.

b • Etats non-liés. Si l'énergie E est plus grande que $V_{max} = l(l+1)/a^2$ ou plus petite que V_{min} , il ne peut plus exister d'état lié; la particule "n'orbite" pas autour de l'origine. Un photon incident de grande énergie (et donc de petite longueur d'onde) pénétrera donc dans le diélectrique où il subira quelques réflexions avant de ressortir. Un photon de basse énergie sera à l'inverse essentiellement diffusé par la microsphère. Dans ce dernier cas, la microsphère apparaît (à distance) comme un point diffuseur. Ces effets de diffusion interviennent par exemple dans le phénomène d'arc en ciel, mais ne jouent pas un rôle fondamental dans l'étude des effets fortement résonnants qui nous préoccupent plus particulièrement. Van der Hulst[49], par exemple, présente quelques résultats dans ce régime de diffusion faiblement résonnante.

Dans toute la suite, nous opterons pour la terminologie suivante, fondée sur cette distinction entre *états quasi-liés* et *états de diffusion (non-liés)*. Les premiers, qui correspondent aux états les plus profonds du potentiel et aux nombres quantiques radiaux n les plus faibles seront appelés *Modes de Galerie (Whispering Gallery Modes)* (voir dans l'introduction page 10 l'explication du phénomène acoustique à l'origine de l'appellation).

Les états faiblement liés, les *états de diffusion*, seront associés aux effets du "fond" d'intensité des spectres (Background Effects), dans le cas d'une expérience de diffusion.

I-3-4 Dépendances du champ en fonction des paramètres n et l .

Il est aisé de tirer de l'analogie quantique un bon nombre d'indications qualitatives ou semi-quantitatives sur la nature des variations de la fonction d'onde, et donc par analogie du champ électromagnétique, en fonction des paramètres du problème.

- Dépendance en l : modes "longitudinaux"

Cette analyse quantique permet d'estimer l'espacement des modes, en fonction de l . Au lieu d'écrire la condition de quantification de manière indirecte, par le biais des conditions aux limites (I.17), on peut remplacer celle-ci par une condition approchée, condition de type *Bohr-Sommerfeld*[45], qui revient à écrire la périodicité de l'intégrale de phase radiale Φ_l :

$$\Phi_l = \int_{r_{inner}}^a k_{eff}(r) dr \approx (n + 1/2)\pi \quad (\text{pour } n = 0, 1, 2 \dots) \quad (\text{I.21})$$

avec $k_{eff}(r) = \sqrt{N^2 k^2 - (l + 1/2)^2 / r^2}$. Cette expression approchée pour la fonction de phase Φ_l n'est acceptable que si le potentiel $V(r)$ varie suffisamment lentement à l'échelle de λ , ce qui est peut être discutable ici, en raison du caractère brutal du saut d'indice à la surface de la sphère. Nous verrons plus loin que les prédictions obtenues par de telles méthodes d'approximation, dénommées "approximation WKB" sont effectivement assez grossières, en particulier pour les modes de galerie très profonds.

Exprimons en utilisant la relation I.21, l'écart entre deux modes de l consécutifs (limité ici au premier ordre d'un développement de l'intégrale elliptique):

$$\beta(l+1, n) - \beta(l, n) \approx \beta(l, n)/\zeta \tan^{-1}(\zeta/(l + \frac{1}{2})), \quad (\text{I.22})$$

avec $\zeta = ((\beta(l, n)/N)^2 - (l + \frac{1}{2})^2)^{\frac{1}{2}}$ qui pour nous vaut quelques unités. La prédiction naïve de l'optique géométrique conduisait, rappelons le à $\delta\beta \sim 1/N$ (I.5), valeur qui se trouve être surestimée, ce qui est compréhensible puisque la courbure du dioptre rend les chemins optiques plus courts que le périmètre d'un grand cercle.

• Dépendance en n : modes "transverses"

On peut également, comme plus haut, dériver à partir de la formule I.21 l'écart entre deux mode radiaux ($\Delta n = 1$). En se limitant toujours au premier ordre du développement des fonctions transcendentes rencontrées, on trouve:

$$\beta(l, n+1) - \beta(l, n) \approx \pi\beta(l, n)/\zeta. \quad (\text{I.23})$$

Calculons également la dépendance attendue de la largeur du mode en fonction du nombre n . Le mode correspondant à $n = 0$ est le mode le plus profond du puits de potentiel. Les valeurs croissantes de n vont voir la fonction radiale se rapprocher du sommet de la barrière, correspondant à $E = E_{max}$. La largeur des modes va donc probablement augmenter très vite si l'on se rapproche du sommet de la barrière. Précisons cette dépendance numériquement, à partir de la probabilité de franchir la barrière de potentiel. Cette probabilité donnera directement la largeur du mode optique, car le temps de vie, ou temps d'amortissement de la cavité T_{cav} s'écrit :

$$T_{cav} \propto \left[\begin{array}{c} \text{Probabilité de} \\ \text{traverser la barrière} \end{array} \right]^{-1} \times \left[\begin{array}{c} \text{Période du} \\ \text{mouvement radial.} \end{array} \right]$$

Un calcul possible consiste à utiliser l'*impulsion radiale effective*, définie plus haut (I-3-3-1) pour $r < a$, que nous prendrons égale à :

$$k_{eff}(r) = \sqrt{\frac{(l + 1/2)^2}{r^2} - k^2} \quad \text{pour } r > a \quad (\text{I.24})$$

Le nombre de tentatives pour traverser la barrière sera proportionnel à $\exp[\psi]$ avec ψ l'intégrale de phase radiale sur la région interdite :

$$\psi = \int_a^{r_{outer}} k_{eff}(r) dr \quad (\text{I.25})$$

D'autre part, la période du mouvement interne T_{rt} peut être estimée facilement à partir de l'intervalle entre modes transverses consécutifs:

$$T_{rt} = \frac{2\pi a}{c} [\beta(l, n+1) - \beta(l, n)]^{-1}. \quad (\text{I.26})$$

Cette dernière quantité peut être évaluée en utilisant la formule I.22 du paragraphe précédent. Nous pouvons maintenant résumer, sous forme de tableau, les valeurs numériques obtenues, pour un diélectrique d'indice 1.45 (silice), à la longueur d'onde de $0.8\mu m$.

l	n	β	taille ($\phi\mu m$)	$Q_{diff}^{WKB} = \omega T_{cav}$
30	0	24.4	6	520
50	0	38.9	10	30000
60	0	46.1	11.5	260000
60	1	50.9	12.6	4900
60	2	55.3	13.7	250
70	0	53.2	13.2	2500000
70	1	58.2	14.4	25000
70	2	62.8	15.6	680

On s'est placé volontairement ici dans le cas limite de très petites sphères—typiquement d'une dizaine de microns de diamètre. En effet, pour des sphères plus grandes, les effets de perte par diffraction deviennent négligeables devant l'absorption du diélectrique. Néanmoins, on voit que pour le premier mode radial ($n = 0$), le facteur de qualité limité par diffraction croît exponentiellement avec l , le moment angulaire. En revanche, à l fixé, le facteur de qualité décroît moins vite qu'exponentiellement avec n . Il faut toutefois se montrer prudent quant aux prédictions de ces calculs semi-classiques, en particulier au voisinage du sommet de la barrière. (Des calculs plus sophistiqués montreront cependant que les dépendances semi-qualitatives énoncées ici sont valables.) On constate également sur ces premières estimations que de toutes petites sphères de silice d'une quinzaine de microns de diamètre possèdent déjà des résonances de surtension supérieures au million!

Les images physiques familières utilisées jusqu'ici, qu'elles soient quantiques ou classiques, ont permis de comprendre l'essentiel des effets physiques—ou des difficultés rencontrées dans le problème des sphères diélectriques. En particulier les raisonnements semi-classiques de cette partie sont attrayants par leur simplicité; aussi nous allons donner quelques critères qui permettent de s'assurer que ces calculs semi-classiques simples fournissent des approximations acceptables.

I-3-5 Domaine de validité des raisonnements semi-classiques.

Revenons un instant sur les idées semi-classiques utilisées ci-avant. On peut considérer l'optique géométrique comme cas limite de l'optique ondulatoire. Ce lien a donné naissance à la mécanique hamiltonienne : la trajectoire classique d'une particule non-relativiste d'énergie E , dans un potentiel $V(r)$ est reliée à un rayon lumineux régi par les lois de l'optique géométrique dans un milieu d'indice $N = \sqrt{1 - [V(r)/E]}$, et le principe de moindre action correspond au principe de Fermat [50]. De même, la mécanique quantique est reliée à l'optique ondulatoire par le biais de la longueur d'onde de de Broglie :

$$\lambda = \hbar/p = \frac{\hbar}{\sqrt{2m[E - V(r)]}} \quad (\text{I.27})$$

En raison de l'analogie quantique développée ci-dessus, on pourrait se demander si des méthodes semi-classiques d'approximation ne pourraient pas être employées avec profit dans la détermination du spectre de la particule massive dans le potentiel V . Le paragraphe qui suit tente de démontrer les insuffisances d'une telle approche.

I-3-5-1 Approximation WKB.

Une méthode d'approximation bien connue, qui présente le mérite de conserver un lien clair avec la mécanique classique, consiste à utiliser l'action

$$S = \int [2\mu(E - V(\vec{R}))]^{\frac{1}{2}} dR \quad (\text{I.28})$$

pour paramétriser l'évolution de phase de la fonction d'onde ψ , sous la forme $\psi = f \exp iS/\hbar$, qui correspond également, du fait de l'analogie exposée plus-haut, à la phase du champ électromagnétique : $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp[i\{k_0 S(\vec{R}) - i\omega t\}]$. (On a également $\|\nabla S\| = N^2(\vec{R})$.) Ensuite, en écrivant que ψ est solution de l'équation de Schrödinger, on trouve une équation de Hamilton-Jacobi avec second membre :

$$\partial_t S + \frac{1}{2\mu} (\nabla S)^2 + V(\vec{R}) = \frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\Delta f}{f} \quad (\text{I.29})$$

Le fondement des approximations semi-classiques *WKB* en mécanique quantique (*eikonale* en optique) repose dans notre cas sur l'élimination du second membre (manière de "faire tendre" \hbar vers 0). Ceci n'est légitime que si les variations spatiales de f sont faibles ($\Delta f \ll 1$). Donc pour pouvoir distinguer dans notre problème d'optique des *trajectoires semi-classiques*, les variations spatiales du système (conditions aux limites par exemple) devront être petites sur une échelle de distance λ . Le potentiel V considéré dans l'analogie développée précédemment ne vérifie assurément pas ce premier critère, et l'on s'attend donc à ce que les prédictions fournies par des théories *WKB* soient relativement peu précises. En plus de cette condition sur la taille du système, on ne peut en général pas négliger le comportement ondulatoire de la particule dans la poche de potentiel: du fait

de la forme oscillante prise pour ψ , on attend des effets d'interférence entre plusieurs trajectoires (eikonales) voisines. Estimons l'importance de ces effets liés à la taille finie de la poche de potentiel. Si la portée du potentiel V est de l'ordre de a , avoir une indétermination δr sur la distance d'une trajectoire eikonale au centre de la sphère, impliquera du fait des relations de Heisenberg une dispersion δp_{\perp} de l'impulsion transverse, supérieure à \hbar/a , et donc une incertitude sur l'angle de déviation de la trajectoire de l'ordre de $\delta\theta = m\delta p_{\perp}/p$, où $p = h/\lambda$ est le vecteur d'onde. Une trajectoire bien définie ("classique") impose donc que $\delta\theta \ll 1$, soit encore:

$$\beta \gg 1 \quad \text{où } \beta = ka. \quad (\text{I.30})$$

On retrouve donc ici la condition sur la taille du résonateur, qui, mesurée en unité de λ , doit être petite devant l'unité pour minimiser les effets de diffraction sur les bords du potentiel: on ne pourra donc s'intéresser au cas où la particule est très délocalisée dans le puits de potentiel. On s'attend également à ce que les méthodes semi-classiques ne fonctionnent pas bien au voisinage des points du potentiels qui engendrent des variations rapides de l'action S , comme le fond de la barrière, ou encore son sommet. Ces diverses remarques permettent de conclure que les méthodes semiclassiques ne sont pas performantes dans deux cas. Tout d'abord, les théories semiclassiques ne peuvent s'appliquer au cas des très petites sphères diélectriques, pour lesquelles le rayon du résonateur avoisine la longueur d'onde de la lumière. Dans ce cas, les effets ondulatoires prédominent.

En supposant cette condition satisfaite, les approximations semiclassiques ne donnent pas de résultats satisfaisants pour les états très fortement liés au fond du puits de potentiel: ce type de formulation ne donnera donc pas avec exactitude la position ou le facteur de qualité d'une résonance de galerie de haute surtension. Nous donnerons plus loin d'autres méthodes pratiques de détermination de ces grandeurs, adaptées à ce cas. Enfin, on ne pourra s'intéresser aux états les plus élevés du puits de potentiel, pour lesquels le second point tournant classique r_{out} est voisin du sommet anguleux de la barrière, pour lesquelles le gradient de l'action S n'est pas a priori négligeable. En général les méthodes semi-classiques, bien que précieuses par leur simplicité (comme par exemple la quantification de Born-Sommerfeld dans le cadre de l'approximation WKB), ne donneront pas de prédictions meilleures que quelques pourcent dans le cas des modes de galerie de haute surtension. Une telle précision est tout à fait insuffisante pour pointer des résonances de facteur de qualité supérieur à 10^{10} ! Aussi nous allons maintenant nous référer aux résultats exacts obtenus en annexe B, lors de la résolution des équations de l'électromagnétisme.

I-4 Synthèse des résultats obtenus en annexes A et B.

En raison des faiblesses des méthodes d'approximations simples que nous venons de décrire, il nous faut donc revenir à la solution exacte du problème d'électromagnétisme,

qui est traité exhaustivement en annexe B. Les formules qui y ont été obtenues donnent formellement une solution à la diffusion par une sphère diélectrique d'une onde électromagnétique incidente. Nous pouvons particulariser ces solutions obtenues sous forme de séries, afin d'étudier une résonance de galerie isolée. Nous allons donc commencer par préciser explicitement le lien qui existe entre les termes de la série solution que nous avons obtenue et une résonance de galerie donnée.

I-4-1 Pôles et résonances.

L'application du programme que nous nous étions fixé au début de ce chapitre, c'est à dire l'écriture des équations locales de l'électromagnétisme et le raccordement de leurs solutions aux frontières des différents domaines, nous a permis d'écrire des solutions intérieures et extérieures au problème de la diffusion d'un champ source quelconque par une sphère diélectrique. Rappelons la forme générale de la solution obtenue en annexe B (équations B.55 et B.53, page 188):

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{JM} \sum_{\lambda'} \frac{\mathcal{E}_{\lambda\lambda'}^{(\lambda')}(\mathbf{r})}{kr} \mathbf{Y}_{Jl}^M(\hat{\mathbf{r}}) \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \sum_{JM} \sum_{\lambda'} \frac{\mathcal{B}_{\lambda\lambda'}^{(\lambda')}(\mathbf{r})}{kr} \mathbf{Y}_{Jl}^M(\hat{\mathbf{r}}). \quad (\text{I.31})$$

Les solutions obtenues s'écrivent comme une combinaison linéaire des harmoniques vectorielles sphériques $\mathbf{Y}_{Jl}^M(\hat{\mathbf{r}})$. Les trois indices $\{l, J, M\}$ suffisent à désigner chaque élément de la base des harmoniques vectoriels sphériques, obtenus ici par composition d'opérateurs de moment cinétique angulaire (voir page 110). On aura donc $-J \leq M \leq J$ et $J = l-1, l, l+1$. Les coefficients $\mathcal{E}_{\lambda\lambda'}^{(\lambda')}(\mathbf{r})$ sont déterminés par les conditions de raccordement aux limites. Dans le cas où le champ source est une onde plane, le calcul effectué en annexe B donne une forme explicite pour chaque coefficient de la série solution. Plus précisément, ces coefficients se mettent sous la forme d'une fraction rationnelle comportant uniquement des fonctions spéciales évaluées en $\beta = ka, kr$ et $\alpha = Nka, Nkr$. A titre d'illustration, rappelons le dénominateur des coefficients $\mathcal{E}_{\lambda\lambda'}^{(\lambda')}(\mathbf{r})$ et $\mathcal{B}_{\lambda\lambda'}^{(\lambda')}(\mathbf{r})$:

$$Nv'_J(\beta)u_J(\alpha) - u'_J(\alpha)v_J(\beta)v'_J(\beta)u_J(\alpha) - Nv'_J(\alpha)v_J(\beta). \quad (\text{I.32})$$

Au voisinage d'une racine de l'un de ces dénominateurs, un terme particulier de J et M déterminé, va devenir prépondérant et cette contribution particulière au champ total constitue un *mode résonnant*. Ce terme résonnant est donc localement équivalent à $1/(\beta - \tilde{\beta}_{J,M})$. La partie réelle de ce pôle définit donc la fréquence de résonance, tandis que la distance du pôle à l'axe donne la largeur $\propto \Im \tilde{\beta}_{J,M}$. On peut également conclure, qu'au voisinage du paramètre de taille $\tilde{\beta}_{J,M}$, la résonance aura une forme lorentzienne. Dans toute la suite $\beta_{J,M}$ désignera le pôle dans le plan complexe du coefficient de $\mathbf{Y}_{J,M}$. On retrouve donc ici une situation aussi familière que les modes d'un interféromètre de Fabry-Pérot, à condition bien entendu de se limiter au voisinage immédiat des résonances fines du spectre pour éviter des situations plus compliquées où plusieurs résonances larges pourraient se chevaucher.

I-4-2 Modes fins et effets du “fond”.

La dualité des approches en terme de théorie de la diffusion et en terme de mode normal apparaît ici très clairement. La solution au problème de diffusion que nous exhibons ici est une combinaison linéaire d’harmoniques vectorielles sphériques, dont les coefficients, pour des termes de source donnés, possèdent des pôles qui provoquent pour certaines pulsations ω un maximum de l’amplitude d’un des termes de la série. La position et la largeur des résonances sont donc déterminées complètement par le pôle correspondant de $\mathcal{E}_{\lambda\lambda'}^{(\lambda)}$ (resp \mathcal{E}). La distribution spatiale des champs intérieurs et extérieurs sera donnée par l’harmonique vectorielle sphérique, en facteur du coefficient résonnant. On a donc relié, si toutefois on se limite à des modes suffisamment fins pour ne pas se recouvrir, chaque résonance étroite de galerie à un terme particulier de la série de diffusion, qui devient prépondérant lorsque la fréquence (réelle) du champ source approche la partie réelle de l’un de ses pôles. Il faut toutefois noter que les modes très faiblement résonnants (associés aux états très faiblement ou pas liés de l’analogie quantique), sont tellement larges qu’ils forment un “fond” presque continu, avec des oscillations très lentes en longueur d’onde. Aussi, si l’on souhaitait effectuer un bilan rigoureux de l’énergie couplée aux différents modes du résonateur, on ne pourrait pas se dispenser de resommer un grand nombre de termes de la série solution, même dans le cas de sphères de grands paramètres de taille, qui présentent par ailleurs des pertes par diffraction complètement négligeables ($\sim 10^{-100}$ pour un diamètre de $250\mu m$).

On distinguera de ce fait deux contributions différentes au champ diffusé. L’une, correspondra au mode résonnant lorentzien de grande finesse. Cette contribution est très bien décrite par l’équation $1/(\beta - \tilde{\beta}_{J,M})$. Bien entendu, dans le but d’utiliser les résonances fines de galerie dans des expériences d’électrodynamique en cavité, seuls ces termes fortement résonnants nous intéressent. On pourra donc, sous réserve que l’on puisse les exciter sélectivement, se restreindre à ces modes de galerie.

L’autre représenterait l’ensemble des effets faiblement résonnants, constitués par la multitude de résonances très larges qui se chevauchent. Cette dernière contribution est difficilement calculable par la série obtenue au début de l’annexe B, en raison de difficultés de convergence que nous allons maintenant discuter brièvement.

I-4-3 Difficultés de convergence.

Les séries (B.53) et (B.55) permettent en principe de calculer le champ électromagnétique dans tout l’espace en fonction des sources couplées au résonateur. Hormis l’éventuel terme dominant de la série que nous avons interprété comme “résonance”, des expérimentations numériques [51] montrent la nécessité de resommer au moins $\beta + c\beta^{1/3}$ (avec $c \approx 4$) autres termes, pour rendre correctement les effets faiblement résonnants. Un tel calcul s’avère malheureusement extrêmement coûteux en nombre d’opérations. En effet, il faut évaluer, pour chaque terme, des fonctions spéciales d’ordre $\sim l$, en des points $\beta \sim l$, dans une région où ces fonctions passent précisément d’un régime monotone à une oscillation rapide: les développements asymptotiques sont donc difficiles. Il existe essentiellement

deux types d'approches. Les unes reposent sur des développements asymptotiques des fonctions spéciales (nous en donnons un aperçu au paragraphe I-6). Les autres consistent à réinterpréter physiquement les termes faiblement résonnants de la série. Le regroupement pertinent de termes que l'on obtient alors améliore beaucoup la convergence de la série, et permet dans le même temps de dégager une interprétation physique claire de chaque terme non-résonnant de la nouvelle série. Cette dernière approche, qui s'appuie principalement sur les travaux de H.M. Nussenzveig [52][53] est présentée en détail dans l'annexe [B-4-1-1], page 189, en raison de l'intérêt de son interprétation physique. La série modifiée à convergence rapide qui y est obtenue devrait permettre, par exemple, de calculer pour une configuration donnée des champs sources, la proportion du champ couplée aux modes faiblement résonnants. Nous ne présenterons pas cependant dans ce mémoire un tel calcul. (La détermination numérique de ces efficacités de couplage dans le cas de la configuration de couplage que nous utilisons expérimentalement est un problème que nous n'avons pas encore résolu complètement.)

A l'issue de cette étude de la solution électromagnétique exacte, nous avons une meilleure compréhension de la nature des modes de galerie résonnants. Nous avons montré l'équivalence entre les conditions de résonance et l'existence d'un pôle dans l'expression de l'amplitude des champs. Enfin, nous connaissons la géométrie de chaque mode $\{J, l, M\}$, qui est celle de l'harmonique vectorielle sphérique $\mathbf{Y}_{Jl}^M(\hat{\mathbf{r}})$ pour la dépendance angulaire, multipliée par une dépendance radiale connue.

Nous pouvons maintenant appliquer ces résultats à l'étude détaillée d'un mode de galerie particulier.

I-5 Distribution spatiale du champ d'un mode de galerie.

Dans cette partie nous allons décrire la distribution spatiale du champ électromagnétique d'un mode donné du résonateur. Le choix des coordonnées sphériques s'impose, et nous choisirons les notations rappelées sur la figure I.5:

Un terme, pour un couple $\{J, M\}$ donné, des séries (B.53) et (B.55), donne la distribution explicite de champ recherchée dans tout l'espace. La solution obtenue étant séparable—les \mathbf{Y}_{Jl}^M ne dépendent que de $\hat{\mathbf{r}}$, la dépendance radiale interne et externe est contenue dans les fonctions $\mathcal{E}_{JM}^{\{\bullet, \circ\}}(\mathbf{r})$, tandis que la dépendance ortho-radiale dans les fonctions angulaires $\mathbf{Y}_{Jl}^M(\hat{\mathbf{r}})$. Précisons maintenant l'allure de la dépendance angulaire.

I-5-1 Dépendance angulaire

Considérons l'expression exacte des fonctions harmoniques vectorielles sphériques. Ces fonctions ont été construites (page 183) par composition d'opérateurs vectoriels. Toutefois, par commodité, nous employerons les notations scalaires usuelles de la base découplée, en notant n le nombre quantique radial, l et $-l \leq m \leq l$ les nombres quantiques orbitaux, $l(l+1)$ étant valeur propre de l'opérateur \mathbf{L}^2 et m de L_z . Enfin, comme dans l'annexe

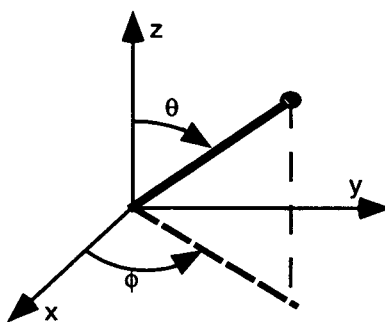


Figure I.5: Angles sphériques.

B, la base complète sera obtenue en distinguant les modes TE et TM (troisième indice de la base découplée, valant 1 ou -1), indicés respectivement (e) et (m) . Avec ces notations, la décomposition des harmoniques vectoriels sphériques sur les vecteurs unitaires ortho-radiaux de la base locale \hat{e}_θ et \hat{e}_ϕ s'écrit:

$$[\mathbf{Y}_{lm}^{(e)}(\hat{\mathbf{r}})]_{\hat{e}_\theta} = C(l, m) \exp[i m \phi] \frac{d}{d\theta} P_l^m(\cos \theta) \quad (\text{I.33})$$

$$[\mathbf{Y}_{lm}^{(e)}(\hat{\mathbf{r}})]_{\hat{e}_\phi} = i C(l, m) \exp[i m \phi] \frac{m}{\sin \theta} P_l^m(\cos \theta) \quad (\text{I.34})$$

$$[\mathbf{Y}_{lm}^{(m)}(\hat{\mathbf{r}})]_{\hat{e}_\theta} = -i C(l, m) \exp[i m \phi] \frac{m}{\sin \theta} P_l^m(\cos \theta) \quad (\text{I.35})$$

$$[\mathbf{Y}_{lm}^{(m)}(\hat{\mathbf{r}})]_{\hat{e}_\phi} = C(l, m) \exp[i m \phi] \frac{d}{d\theta} P_l^m(\cos \theta) \quad (\text{I.36})$$

avec $C(l, m) = (-1)^m i^l \left[\frac{2l+1}{4\pi l(l+1)} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \right]^{\frac{1}{2}}$. P_l^m désigne les polynômes de Legendre associés.

Là encore, la solution se sépare dans tous les cas en un terme fonction de ϕ (*angle azimutal*), multiplié par un autre dépendant de θ (*angle polaire*).

I-5-1-1 En ϕ , suivant le plan équatorial ($\theta = \pi/2$).

Pour la base choisie au paragraphe précédent, la dépendance dans ce plan est $\{\exp[i m \phi]\}$. La figure I.5, montre dans le plan équatorial, une sorte de "marguerite" à $2 \times m = 48$ lobes. Cette base, qui s'écrit sous la forme $\{\exp[i(m\phi - \omega t)]\}$ si l'on rétablit la dépendance temporelle, représente des ondes progressives qui suivent l'équateur du résonateur. Remarquons que pour les modes tels que $|m| \sim l$, l'ordre d'interférence l est voisin du nombre de lobes: l'étendue de chaque lobe à la surface du résonateur sera donc d'environ λ/N .

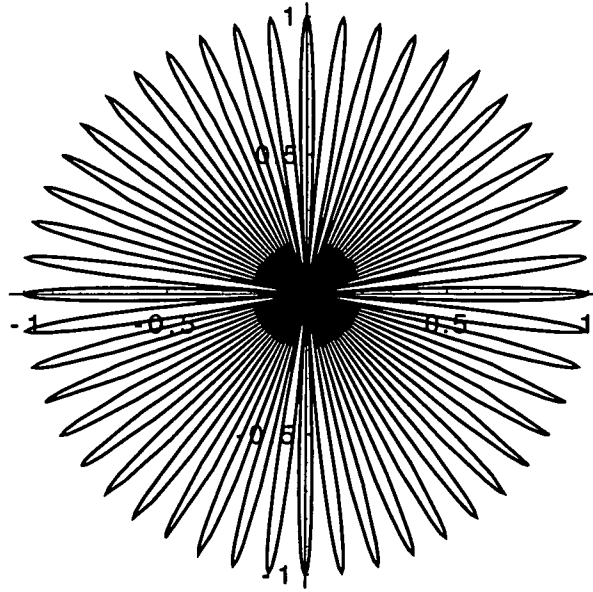


Figure I.6: Représentation polaire de la dépendance en ϕ de la partie réelle du champ dans le plan équatorial, pour un mode $m=24$.

I-5-1-2 Dépendances en θ suivant le plan azimutal.

La dépendance suivant θ est plus complexe : par exemple, les modes transverses électriques sont une combinaison linéaire des vecteurs \hat{e}_θ et \hat{e}_ϕ , avec pour coefficients $P_n^M(\cos \theta)/\sin \theta$ et $\frac{\partial}{\partial \theta} P_n^M(\cos \theta)$. L'allure de la variation de tels coefficients n'étant pas évidente, nous allons considérer quelques cas plus simples.

- Modes *sphériques*. Nous associerons à cette dénomination les valeurs de m voisines de 0. Dans ce cas, l'intensité du champ au voisinage de l'équateur est pratiquement indépendante de θ : on obtient des modes localement quasi-sphériques. Comme ceux-ci ne correspondent pas à une forte localisation du champ, (qui se répartit sur une large bande équatoriale), nous ne les étudierons pas ici en détail.
- Modes *localisés*. Ces modes correspondent aux valeurs extrémales permises pour m , soit $\|m\| \equiv l$.

L'allure de la dépendance est assez simple pour $\|m\| = l$. Pour un mode TE, la contribution principale au champ d'un mode peut être approchée par $(\sin \theta)^m$. Cette fonction est maximale pour $\theta = \pi/2$ correspondant à l'équateur de la sphère.

Nous donnons figure I.7 une représentation polaire de l'amplitude du champ, pour trois modes (quasi-)équatoriaux: $\{l = 24, m = 24\}$, $\{l = 24, m = 23\}$ et $\{l = 24, m = 22\}$. On remarquera l'ouverture azimutale progressive, avec $|l - |m||$, des lobes du mode résonnant.

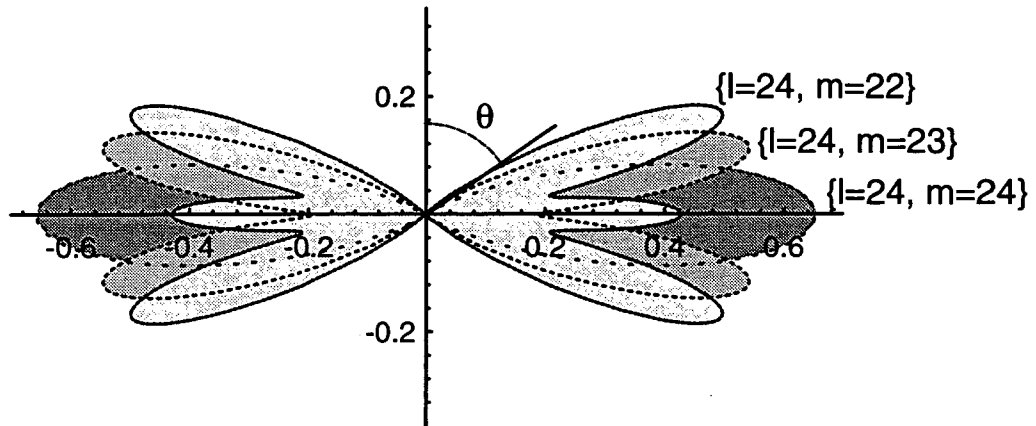


Figure I.7: Représentation polaire de l'amplitude du champ dans le plan azimutal, pour les modes (TE) $\{l = 24, m = 24\}$, $\{l = 24, m = 23\}$ et $\{l = 24, m = 22\}$.

Cette ouverture angulaire vaut environ $\sim 1/\sqrt{l}$. Le champ, en ce qui concerne la dépendance angulaire, est donc d'autant plus confiné autour de l'équateur, que le moment angulaire l est élevé. Pour $|m| = l - \delta l$, si $\delta l \ll l$, on obtient $\delta l + 1$ lobes, chacun de largeur approximative $\sim 1/\sqrt{l}$. Si $\|m\| \sim l$, l'effet de localisation est si fort que l'on peut considérer que le champ est nul au voisinage des pôles: la lumière est guidée au voisinage de l'équateur du résonateur, et les parties polaires ne sont pas éclairées. Illustrons numériquement ce phénomène. La largeur angulaire du pic pour $l = m = 200$ est de l'ordre de 7° . Pour $\theta = \pi/4$, les champs seront divisés par $2^{(l/2)}$, soit $\sim 10^{30}$ pour $l = 200$: nous utiliserons dans la partie expérimentale cette localisation équatoriale, pour fixer mécaniquement le résonateur par ses parties polaires.

I-5-1-3 Dépendance radiale.

Cette dépendance est contenue dans les expressions générales obtenues lors de la solution explicite du problème d'électromagnétisme, dans les fonctions $\mathcal{E}(r)$ et $\mathcal{B}(r)$. Physiquement, l'analogie des pages 25 et suivantes est peut-être plus parlante. Revenons à la subdivision en deux (états non-liés) ou quatre (états quasi-liés) domaines discutée dans le paragraphe I-3-3-2. Nous ne traiterons pas ici le cas des états trop faiblement liés, pour être piégés par le saut d'indice. De tels effets de diffusion de la lumière (si $E > V_{max}$ avec les notations de la partie (I-3-3-2)) par une sphère sont abondamment traités dans la littérature, et la distribution de champs y est donnée [54].

a • Allure de la dépendance radiale Lorsque l'énergie du système coupe trois fois le potentiel radial, la situation physique est la suivante : à l'intérieur de la boule, pour $r_1 < r < r_2$ on a un champ quasi-stationnaire, qui présente radialement n nœuds, n étant le nombre quantique radial; cette onde piégée "fuit" vers les deux directions possibles. Vers le centre de la sphère, le champ s'amortit exponentiellement (ce comportement asymptotique provient du fait que les fonctions de Bessel sphériques, $j_l(r)$, tendent très rapidement vers zéro au voisinage de l'origine. La pénétration du champ quasi-stationnaire n'excède pas $\sim \lambda / (2\pi N) \times l^{\frac{1}{3}}$ (dans le cas particulier du premier mode radial $n = 0$). On retrouve ici confirmation de l'idée physique intuitive de confinement du champ dans une caustique située sous la surface de la sphère diélectrique.

Vers l'extérieur, de la surface au point r_{out} , on a une décroissance sensiblement exponentielle sur une longueur caractéristique λ , pour $n \equiv 0$ (une estimation plus précise est: $\lambda / (2\pi(N^2 - 1)^{\frac{1}{2}})$). Moins les modes seront confinés par la barrière, plus le champ aura tendance à s'échapper vers l'extérieur d'une part, et plus la portée de l'onde amortie exponentiellement sera grande.

Enfin, à l'extérieur, pour $r > r_{out}$, le champ redevient oscillant : cela correspond au champ diffusé (pertes par diffraction), qui, suffisamment loin de la surface, prolonge la partie évanescence du champ. Comme dans tout effet de diffusion sphérique à trois dimensions, l'amplitude diffusée décroît comme $1/r$, et non exponentiellement. Toutefois, comme nous le verrons dans la partie expérimentale, pour les sphères de silice de taille suffisante pour obtenir des finesse supérieures au million, les pertes par diffraction sont extrêmement petites, et donc l'amplitude de ce champ diffusé sera de facto totalement négligeable. La figure I.7 donne les dépendance radiales de l'intensité du champ électrique d'un mode, pour trois valeurs croissantes du nombre radial: $\{l = 76, n = 0\}$, $\{l = 76, n = 1\}$ et $\{l = 76, n = 3\}$. On remarquera que l'intensité relative du champ croît à la surface du résonateur avec n . Ceci peut se comprendre, car les fuites par diffraction augmentent pour les modes les moins liés du puits de potentiel: le champ "explore" davantage le sommet de la barrière.

I-5-2 Volume d'un mode.

Pour la réalisation d'expériences d'électrodynamique en cavité, le volume d'un mode résonnant, c'est à dire le volume de la zone de l'espace qui renferme l'énergie du champ *stationnaire*, est apparu comme déterminant pour maximiser l'amplitude du champ électrique dans la cavité. En effet plus ce volume sera exigü, plus les photons du mode seront confinés dans un petit volume, et par voie de conséquence, plus l'amplitude crête des champs électromagnétiques sera élevée. Voyons comment définir le volume de modes qui possèdent une toute petite onde sortante: la cavité n'est pas parfaitement fermée.

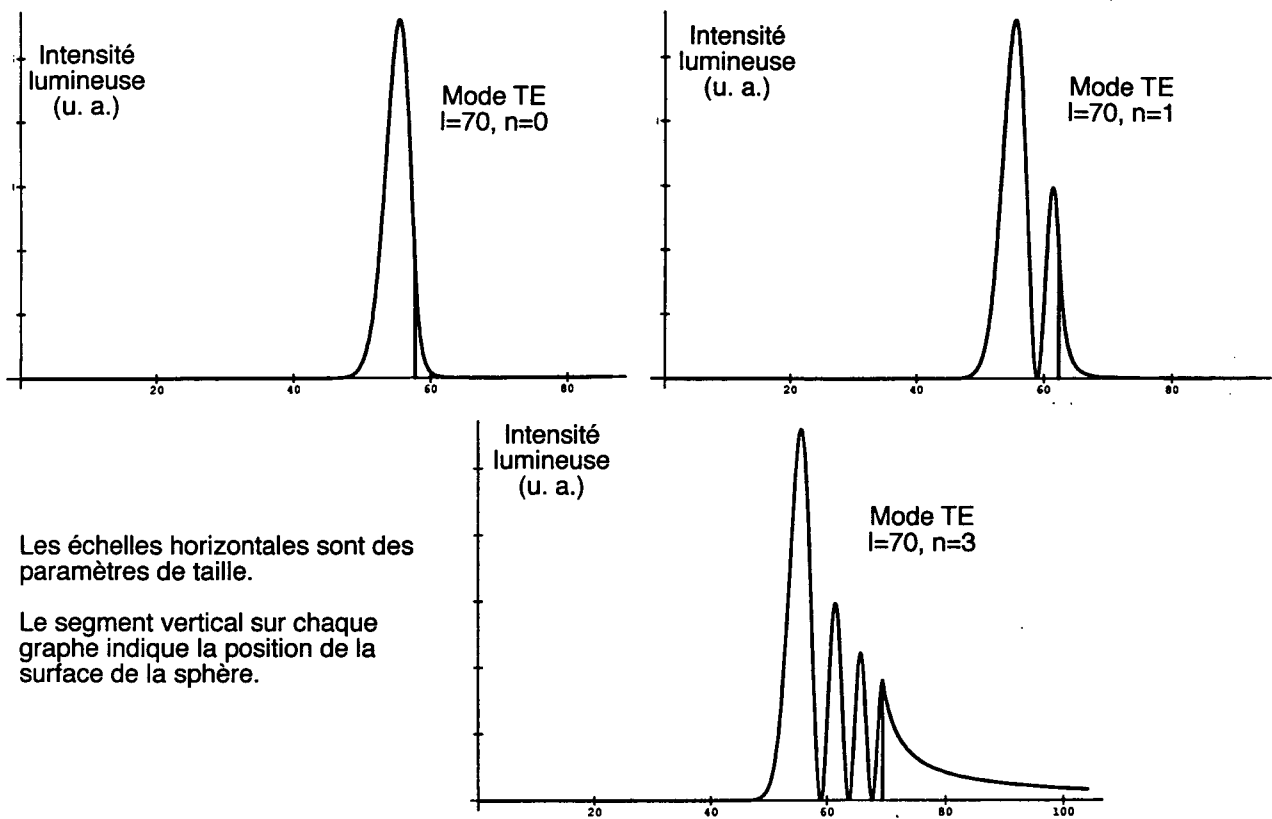


Figure I.8: Dépendance radiale de l'intensité du champ électrique, pour les modes $\{l = 76, n = 0\}$, $\{l = 76, n = 1\}$ et $\{l = 76, n = 3\}$ d'un résonateur de silice. L'échelle radiale choisie étant kr , la surface du résonateur est donc à l'abscisse β . Les facteurs de qualité (diffractifs) sont respectivement $4 \cdot 10^{10}$, $2 \cdot 10^7$ et $5 \cdot 10^4$.

I-5-2-1 Principe de calcul du volume.

On souhaite ne comptabiliser dans le volume d'un mode de grande finesse que les champs véritablement "stationnaires" au sens où l'on ne souhaite pas prendre en compte la contribution divergente de la lumière qui s'échappe du résonateur par les pertes par diffraction. Comme nous le verrons dans la partie expérimentale, pour la classe de taille que nous utilisons dans nos expériences, les fuites par diffraction ne sont pas en général déterminantes pour le facteur de qualité observé. La première idée serait donc d'intégrer l'énergie dans tout l'espace, en supprimant tous les termes propageants des expressions des champs \mathbf{E} et \mathbf{B} . Cela nous conduit à la première définition possible.

Volume 1 exact.

L'énergie du mode $\mathcal{G}_{\{J,m,n\}}$ sera la somme de

$$\int_{r < a} d^3r \frac{1}{2} \{ (\epsilon_0 \epsilon_r) \mathbf{E}_{\{J,m,n\}}^2(r) + \mu_0^{-1} \mathbf{B}_{\{J,m,n\}}^2(r) \}$$

et de

$$\int_{r > a} d^3r \frac{1}{2} \{ (\epsilon_0 \epsilon_r) \mathbf{E}_{\{J,m,n\}}^2(r) + \mu_0^{-1} \mathbf{B}_{\{J,m,n\}}^2(r) \}$$

avec $\mathbf{E}_{\{J,m,n\}}$ et $\mathbf{B}_{\{J,m,n\}}$ coïncidant avec (B.53) à l'intérieur, et pris à l'extérieur égaux à la restriction des fonctions (B.55) à un terme décroissant asymptotiquement comme $\exp[-\Re(k)r]/r$. ϵ_r désigne ici la permittivité relative du diélectrique (non-magnétique).

Le volume est alors défini traditionnellement à partir de l'énergie et de la valeur crête du champ électrique \mathbf{E}_{max} par:

$$V_{total} = \frac{\mathcal{G}_{\{J,m,n\}}}{\epsilon_0 \mathbf{E}_{max}^2}.$$

Néanmoins, cette définition pose des problèmes d'ordre technique. En effet, tandis que l'intégration des parties angulaires du carré des champs est analytique, la partie radiale n'est pas simple à évaluer. Il faudrait recourir à des développements limités des fonctions radiales, au voisinage de la surface. Nous choisirons ici une solution plus "physique" à ce problème. Nous sommes en effet spécialement intéressés par la détermination du volume des modes de galerie les plus confinés, qui conduiront, pour un nombre de photons donné, aux plus grands champs électromagnétiques. Aussi, nous pouvons donner une seconde définition approchée, excellente approximation du volume du mode:

Volume 2 physique équivalent.

Pour les modes de galerie les plus profonds, l'énergie du mode $\mathcal{H}_{\{J,m,n\}}$ est avec une bonne approximation la somme de

$$\int_{r < a} d^3r \frac{1}{2} \{ (\epsilon_0 \epsilon_r) \mathbf{E}_{\{J,m,n\}}^2(r) + \mu_0^{-1} \mathbf{B}_{\{J,m,n\}}^2(r) \}$$

et de

$$\int_{a < r < r_0} d^3r \frac{1}{2} \{ (\epsilon_0 \epsilon_r) \mathbf{E}_{\{J,m,n\}}^{\bullet 2}(r) + \mu_0^{-1} \mathbf{B}_{\{J,m,n\}}^{\bullet 2}(r) \},$$

où $\mathbf{E}_{\{J,m,n\}}^*$ est l'expression du champ à l'intérieur (B.55), et r_0 est le premier zéro de fonctions radiales de la solution intérieure (qui se trouve dans ce cas à l'extérieur pour $r > a$). Le volume admet la même définition que ci-dessus.

Il existe une interprétation physique simple, de la définition ci-dessus. L'énergie $\mathcal{H}_{\{J,m,n\}}$ qui y est introduite, est l'énergie électromagnétique d'un système très voisin de la sphère diélectrique. Elle correspondrait à l'énergie contenue dans une sphère diélectrique de rayon r_0 (et non a), métallisée à sa surface (condition de conducteur parfait à la surface: $E(r = r_0) \equiv 0$). Un tel système résonnerait précisément pour $\omega = \omega_{\{J,m,n\}}$.

Pour d'autres usages qu'une mesure *linéaire* de volume, c'est-à-dire pour laquelle chaque élément de volume est simplement pondéré par la valeur de l'intensité, on pourrait choisir d'autres définitions du volume, adaptées par exemple à l'étude des effets non-linéaires dans les microrésonateurs, effets qui dépendent du carré de l'intensité. On obtiendrait dans ce cas le volume effectif suivant [55]:

Volume 3 pour des effets non-linéaires.

Le volume effectif "quadratique" en intensité V_4 pourrait être défini par le rapport

$$V_4 = \frac{\left[\int d^3r \|\mathbf{E}(\mathbf{r})\|^2 \right]^2}{\int d^3r \mathbf{E}(\mathbf{r})^4}. \quad (\text{I.37})$$

Donnons quelques précisions numériques sur ces volumes, dans le cas des modes équatoriaux. Commençons par discuter quelques ordres de grandeurs. Pour ces modes de galerie les plus fins, les largeurs caractéristiques données lors de la description des variations spatiales des modes (I-5-1 et I-5-1-3), permettent d'obtenir les dépendances correctes du volume au premier ordre en puissances de J, m, n (ou l, m, n pour une polarisation fixée).

I-5-2-2 Détermination semi-quantitative du volume des modes les plus fins $\{l, m = l, n = 0\}$.

Considérons un mode de galerie profond $\{l, m = l, n = 0, 1, 2, \dots\}$. On sait que le champ d'un tel mode se trouve principalement localisé au voisinage de l'équateur. Quant à la dépendance azimutale, la variation sinusoïdale des champs en ϕ conduirait à une moyenne de l'intensité valant $\frac{1}{2}$. Enfin radialement, le champ est essentiellement délimité par les rayons $r = (1 - l^{-\frac{2}{3}})a$ et a . En combinant les trois dépendances, on obtient un volume qui ressemble à un tore de rayon a , dont la section mesure $(\lambda/2\pi N)l^{\frac{1}{3}}$ (radialement) par $l(\lambda/2\pi N)/\sqrt{l}$ (orthoradialement). Exprimons ce volume en fonction de λ (la longueur d'onde résonnante) et l . Comme il s'agit de résonances fines, $\beta = ka \approx l + O(l^{\frac{1}{3}})$ (cf supra). On trouve donc, comme $\frac{a}{l} \sim \lambda/2\pi N$:

$$V \approx 2\pi a \times (\lambda/2\pi N)l^{\frac{1}{3}} \times \sqrt{l} \frac{\lambda}{2\pi N} \approx 2\pi \left(\frac{\lambda}{2\pi N} \right)^3 l^{\frac{11}{6}}. \quad (\text{I.38})$$

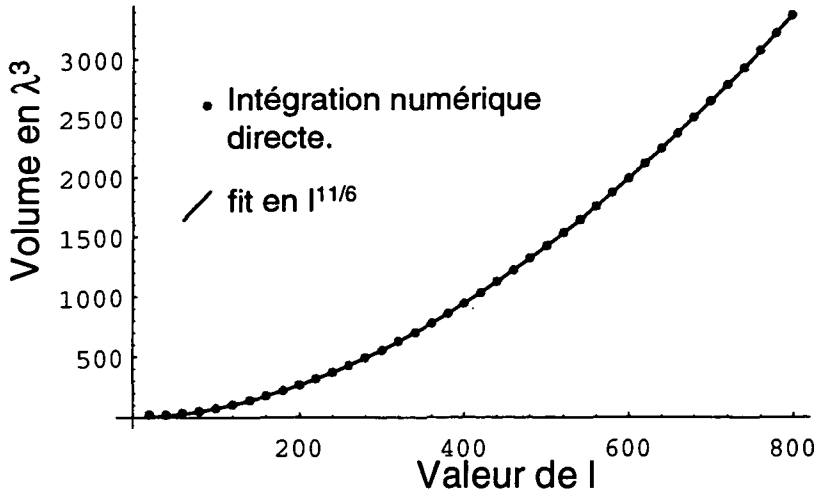


Figure I.9: Ce graphique montre la dépendance en l du volume (défini dans le texte) des modes $n = 0$. Cette quantité est donnée ici en fonction de λ^3 .

I-5-2-3 Intégration numérique du volume.

La figure I.9 ci-dessus donne le volume en λ^3 , obtenu par intégration numérique de la partie radiale de l'intensité du champ en conformité avec la seconde définition du volume qui vient d'être donnée. Le résultat est ici donné en fonction de l , pour $m = l$, pour l'indice de la silice. La courbe continue représente la prédiction donnée par la loi de puissances en $l^{11/6}$, tirée de l'évaluation naïve du paragraphe précédent. Le préfacteur numérique obtenu n'est bien sûr pas exactement celui de l'expression naïve I.38. Comme l'accord est excellent, on pourra utiliser la formule très simple suivante:

$$V_{\{l,l\}} \approx 2.21 \times \left(\frac{\lambda}{2\pi N} \right)^3 \pi^{3/2} l^{11/6}. \quad (\text{I.39})$$

On trouve que le volume du mode de galerie équatorial ($l = 100$, $m = l, n = 0$), qui correspond à une sphère de verre de diamètre $20\mu\text{m}$ et $\beta = 80$, de surtension $Q_{diff} \approx 10^{11}$ est de l'ordre de $50\lambda^3$. Les microsphères semblent donc bien répondre à l'une des exigences de l'électrodynamique en cavité: assurer un bon confinement du champ en volume; les cavités optiques sphériques présentent en effet à la fois un très petit volume—quelques dizaines de λ^3 et des facteurs de qualité (limités par diffraction) extrêmement grands.

A ce point de l'étude théorique des propriétés optiques des modes de galerie, nous possédons une description détaillée de chaque mode isolé. Il nous manque cependant des méthodes efficaces de détermination de la position et de la largeur d'une résonance de $\{l, m, n\}$ fixé. A titre d'illustration des difficultés d'une telle entreprise, la figure I.10 (tirée de [42]) montre la section efficace de diffusion en fonction du paramètre de taille: l'objet du prochain paragraphe est de prédire, avec une précision meilleure que leur largeur, la position des modes fins (indiqués par des flèches sur la figure).

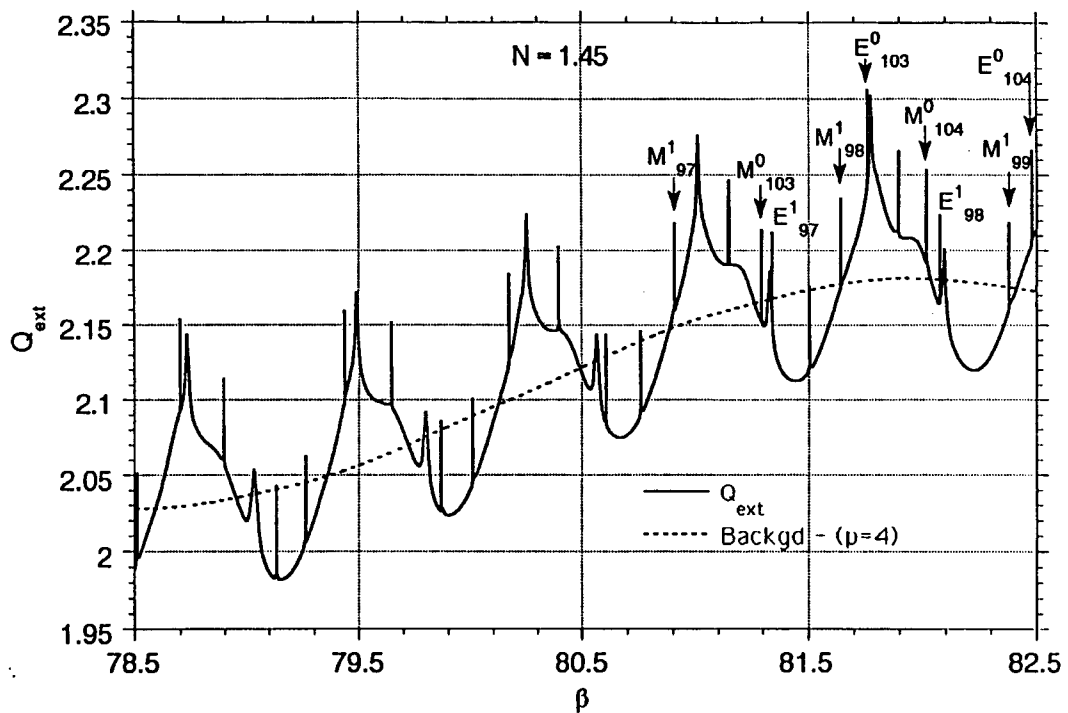


Figure I.10: On a représenté sur ce graphique la section efficace (calculée) de diffusion (pour une onde plane), divisée par π^2 , en fonction du paramètre de taille pour des sphères de silice. Les modes fins de galerie sont repérés par leurs nombres principaux l, n et leur polarisation.

On observe sur cette figure, trois types de structures d'échelle différente. Une oscillation lente ($\Delta\beta \sim 2\pi$) qui correspond aux effets de diffraction que l'on obtiendrait pour une ouverture circulaire de même diamètre que la sphère. A cette oscillation lente s'ajoute une structure presque périodique ($\Delta\beta \sim 0.72$), la "pseudo-période" des modes de galerie, qui s'interprète comme l'équivalent de l'intervalle spectral libre (FSR) d'un Fabry-Pérot. Enfin, les modes fins équatoriaux apparaissent à cette échelle comme des segments verticaux. On peut deviner un décalage progressif, de chaque mode de n fixé, d'une pseudo-période à l'autre.

Limitons nous maintenant à ces seuls modes fins et donnons quelques méthodes de calcul de la position et de la largeur de telles résonances.

I-6 Méthodes de calcul approché.

L'information qui détermine la position et la largeur des résonances est contenue dans les équations implicites compliquées qui expriment les conditions de raccordement aux limites du diélectrique (voir par exemple I-4-1, page 36). Leur résolution nécessite l'évaluation de fonctions spéciales, à des ordres aussi élevés que le paramètre de taille des sphères, qui peut valoir des dizaines de milliers pour des sphères de quelques millimètres de diamètre. Aussi, si l'on souhaite déterminer à mieux que sa largeur la position d'une résonance par la résolution directe de ces équations implicites comme les facteurs de qualité attendus sont très élevés (ils pourraient en principe dépasser 10^{11} , à $\lambda = 1.5\mu m$ [56]), il faudrait effectuer tous les calculs avec une précision d'au moins 13 chiffres significatifs. Ce n'est pas très aisé lorsque l'ordre des fonctions spéciales à évaluer atteint quelques centaines (et même plusieurs milliers pour des sphères de l'ordre du millimètre, limite de notre procédé de fabrication). En raison de ces difficultés numériques, il serait donc plus judicieux de déterminer des formules approchées à convergence rapide.

I-6-1 Méthode de détermination pratique de la position et de la largeur des résonances.

Nous présentons ici deux méthodes pratiques de détermination de la position et de la largeur des résonances de galerie, valables dans des situations, où comme nous l'avons déjà évoqué, les méthodes d'approximations de type WKB se révèlent trop imprécises. La première méthode exposée ici est conceptuellement la plus simple. Elle repose sur un développement limité des fonctions spéciales rencontrées dans les équations implicites qui donnent la position et la largeur des résonances. Cette méthode conduit à des formules relativement simples, qui ne sont malheureusement précises que pour les résonances de galerie les plus profondes ($n = 0, 1 \dots$). Si l'on souhaite obtenir rapidement des résultats limités aux cas des tout premiers modes radiaux les plus fins, cette méthode d'approximation se révèle suffisante à l'usage.

A contrario, la seconde méthode, bien que plus complexe numériquement donne des résultats beaucoup plus précis dans tous les cas, et devrait être préférée pour tout calcul

approché conduit sur un ordinateur puissant. Cette méthode mise au point par H.M. Nussenzveig et L.G. Guimarães[57], repose sur un développement asymptotique subtil des fonctions de Bessel sphériques dû à Olver [58], dit développement "uniforme".

Considérons à nouveau les équations implicites qui proviennent des dénominateurs des expressions obtenues par la condition de raccordement des champs à la surface du diélectrique, dans le cas d'un champ scalaire [voir par exemple Johnson]. Pour un mode TE par exemple, on obtient le β du mode résonnant si:

$$NJ'_{l+\frac{1}{2}}(N\beta)/J_{l+\frac{1}{2}}(N\beta) = H'_{l+\frac{1}{2}}(\beta)/H_{l+\frac{1}{2}}(\beta) \quad (\text{I.40})$$

et pour un mode TM:

$$J'_{l+\frac{1}{2}}(N\beta)/J_{l+\frac{1}{2}}(N\beta) = NH'_{l+\frac{1}{2}}(\beta)/H_{l+\frac{1}{2}}(\beta). \quad (\text{I.41})$$

(J et H sont ici respectivement les fonctions de Bessel et de Hankel.)

L'annexe A, page (175), donne en (A-4-1), des développements limités de J_ν et de Y_ν en $\nu^{-\frac{1}{3}}$. La substitution dans l'équation implicite des fonctions J et Y par leurs développements conduit, en égalant les coefficients des termes de même puissance (on note ici $\hat{\lambda} = l + \frac{1}{2}$ le moment angulaire "total"):

$$N\beta_{l,n} = \hat{\lambda} + 2^{-\frac{1}{3}} A_{n+1} \hat{\lambda}^{\frac{1}{3}} - \frac{\mu}{\bar{M}} + \frac{3}{10} 2^{(-2/3)} A_{n+1}^2 \hat{\lambda}^{-\frac{1}{3}} - \frac{2^{-\frac{1}{3}} \mu ((n+1)^2 - 2\mu^2/3)}{((n+1)^2 - 1)^{3/2}} A_{n+1} \hat{\lambda}^{-2/3} + O(1/\hat{\lambda}). \quad (\text{I.42})$$

On a noté: $\bar{M} = (N^2 - 1)^{\frac{1}{2}}$ et $\mu = \begin{cases} N & \text{modes TE} \\ 1/N & \text{modes TM} \end{cases}$. A_n est le n -ième zéro de la fonction d'Airy pour les valeurs négatives: $Ai(-A_n) = 0$. n est le nombre quantique radial du mode, l le nombre orbital de la résonance $\{l, n\}$, repérée par la valeur $\beta = \beta_{l,n}$.

On trouve la largeur correspondante, donnée pour un mode TE: (n_l sont les fonctions de Neumann de l'annexe A sur les fonctions spéciales):

$$\gamma_{l,n}^{TE} = \frac{2}{\bar{M}^2 \beta_{l,n}^2 n_l (\beta_{l,n})^2} \quad (\text{I.43})$$

et pour un mode TM:

$$\gamma_{l,n}^{TM} = \frac{2}{\bar{M}^2 \{ \hat{\lambda}^2 \beta_{l,n}^2 (1 + 1/N^2) - 1 \} \beta_{l,n}^2 n_l (\beta_{l,n})^2}. \quad (\text{I.44})$$

A titre d'illustration, nous pouvons prendre les trois premiers termes du développement (I.42) pour obtenir une approximation de la position d'un mode $l, n - 1$, repérée, en unités de $\beta = ka$ par $\beta_{l,n-1}$:

$$\beta_{l,n} \approx \hat{\lambda}/N + 2^{-\frac{1}{3}} A_n \hat{\lambda}^{\frac{1}{3}}/N - \frac{\mu}{NM}, \quad (\text{I.45})$$

avec les mêmes notations que ci-dessus. A l'ordre le plus bas de ce développement en λ , on voit que, Nka est une fonction affine du moment angulaire total, ce qui évoque les modes

longitudinaux d'une cavité Fabry-Pérot qui serait "enroulée" autour de la microsphère. De plus, l'écart entre les modes de l successifs est indépendant de la polarisation (qui intervient par le coefficient μ). On retrouve la "pseudo-périodicité" évoquée lors de l'analyse intuitive du phénomène de résonance, à la page 110 de ce mémoire. On remarquera que la valeur de l'écart entre modes TE et TM était correctement prédite à l'ordre le plus bas, en calculant les déphasages le long d'une trajectoire géométrique. Pour les modes profonds on trouve en effet une périodicité (pour $\Delta l = 1$) $\Delta\nu \approx c/(2\pi Na)$, ce qui correspond précisément au FSR d'un Fabry-Pérot chargé par un milieu d'indice N , de longueur $2\pi Na$, cette dernière distance étant aussi le périmètre de la sphère. Pour les modes les moins profonds, ceux qui se trouvent au voisinage du sommet de la barrière ($n \sim n_{max}$), on voit que la pseudo période augmente, en restant majorée par $\Delta\nu \approx c/(2\pi a)$, qui serait le FSR d'un Fabry-Pérot non chargé. Physiquement, cela se justifie par l'argument suivant: pour les modes moins profonds, les photons du mode sont "plus souvent" hors de la sphère que pour les modes fins. L'indice extérieur étant 1, le chemin optique se raccourcit et donc le FSR augmente.

En revanche, la dépendance en n est complexe, puisqu'elle fait intervenir les zéros consécutifs de la fonction d'Airy. On retrouve le fait que la dépendance "transverse" (ici radiale) du champ induit un effet de déphasage aux limites non-trivial. Pour les grandes valeurs de n , il existe cependant une approximation simple des racines négatives de la fonction d'Airy. On peut montrer en effet qu'asymptotiquement les racines sont espacées régulièrement: $A_{(n+1)} \propto n$. En conséquence, les modes les plus larges, seront harmoniques, séparés par $\frac{\pi}{M}$. Cette limite linéaire correspondrait à une quantification de type Bohr-Sommerfeld, écrite pour l'intégrale de phase radiale.

Donnons également des formules pratiques similaires pour la détermination des largeurs attendues des modes résonnants les plus fins. Les expressions (I.43) et (I.44) donnent la largeur à mi-hauteur d'un mode $\{n, l\}$ déterminé. Quelle que soit la polarisation, on observe une variation de la largeur en $(\beta_{l,n} n_l(\beta_{l,n}))^{-2}$. Cette expression fournit de bons résultats, quelle que soit la "profondeur" du mode dans la barrière de potentiel, c'est-à-dire pour $0 \leq n \leq n_{max}$. Un raisonnement simple semi-classique permet d'ailleurs d'estimer n_{max} , le nombre quantique radial de la résonance la moins profonde du puits, juste au dessous du haut de la barrière, qui se trouvent pour $\beta \sim \hat{\lambda} - O(\hat{\lambda}^{\frac{1}{3}})$.

Cherchons maintenant la largeur de la résonance la plus fine ($n = 0$). Pour cela, reprenons les expressions de la page 32 définissant l'intégrale de phase radiale ψ du vecteur d'onde effectif k_{eff} , sur la région classiquement interdite du potentiel (I.21):

$$\psi = \int_a^{r_{outer}} k_{eff}(r) dr \quad (I.46)$$

avec $k_{eff}(r) = \sqrt{\frac{(l+1/2)^2}{r^2} - k^2}$ pour $r > a$.

Comme on l'a vu plus haut, la largeur des modes est déterminée par la quantité $\exp(\psi)$, pour $\beta \approx \hat{\lambda}/N + 2^{-\frac{1}{3}} A_{n+1} \hat{\lambda}^{\frac{1}{3}}$. On trouve que la largeur varie comme $\exp(-\frac{4}{3}(\hat{\lambda} A_{n+1}/N)^{3/2})$. Pour les modes les plus profonds, la largeur varie plus vite qu'exponentiellement avec le moment cinétique total $\hat{\lambda}$, et présente donc une évolution semblable avec le paramètre de taille $\beta = ka$ de la sphère.

Nous invitons à ce stade le lecteur qui souhaiterait disposer de méthodes d'approximations encore plus performantes à se reporter à la fin de l'annexe A consacré aux fonctions spéciales, page 178. En effet, nous y donnons une méthode d'approximation qui repose sur un développement des fonctions de Hankel et de Bessel, la méthode d'approximation uniforme. Celle-ci se révèle très précise pour les paramètres de taille qui nous intéressent, (ce qui est illustré par un graphique comparatif page 178).

I-7 Couplage d'un mode donné aux sources.

Les résonances de galerie nous sont maintenant plus familières, et nous disposons d'outils pour en calculer les propriétés. Nous savons également qu'il existe une multitude d'autres modes faiblement résonnants, qui ne nous intéressent pas dans le cadre de l'électrodynamique en cavité. Il est donc primordial de déterminer les conditions opératoires les plus favorables à l'observation expérimentale de résonances fines et localisées. Il s'agit en quelque sorte de prendre le problème à rebours: connaissant la distribution caractéristique du champ résonnant des modes fins, quelle source lumineuse choisir pour que le couplage de cette source aux modes de galerie soit optimal?

I-7-1 Idée intuitive du "phase-matching".

Les murs de la cavité, par leur action sur le champ, imposent la phase de l'onde électromagnétique dans tout l'espace. A titre d'illustration, lorsque nous avons traité dans l'analogie quantique, la quantification d'une pseudo particule dans un potentiel radial, nous avons imposé dans l'approximation de type Bohr-Sommerfeld, une condition sur l'intégrale de phase radiale, pour tenir compte de l'effet des parois de la cavité. Aussi, pour faire pénétrer des photons extérieurs dans la cavité, il est essentiel que la phase du champ rayonné par les sources approche, dans les zones de recouvrement, la distribution de phase du mode quasi-normal du résonateur. On peut le comprendre autrement. Supposons que cela ne soit pas le cas. En chaque point de l'interface où l'on doit écrire la condition de raccordement pour le champ total (constitué du champ des sources et du champ du mode résonnant) la phase relative entre le champ des sources et la phase propre de la cavité va être rapidement variable. Cela aura pour effet par exemple de rendre quasi-nulle toute grandeur obtenue par intégration sur un voisinage de la surface du dioptré. La base des ondes planes ne semble donc pas très utile pour découvrir la configuration de champ à donner aux sources. Comme il est nécessaire de réaliser une adaptation de la phase relative des champs résonnants et source, on pourrait songer à créer au voisinage de la surface de la sphère un champ localement semblable au mode de galerie. Commençons donc par décrire le champ d'un mode à proximité d'un point de l'équateur.

Réutilisons les expressions du paragraphe (I-5) donnant les variations spatiales du champ d'un mode et déterminons le vecteur d'onde effectif du mode résonnant à la surface. Supposons que $\|m\| \sim l$ (mode équatorial). Pour ces modes, on peut supposer en première approximation (voir par exemple I.45), que la valeur de l correspondante est $\alpha \approx$

Nka . La dépendance azimutale $\{\exp[i(m\phi - \omega t)]\}$ devient $\exp[i(Nka\phi - \omega t)] \exp[-r/\lambda]$, après multiplication par la dépendance radiale. La surface peut être paramétrée par $s = a\sqrt{\phi^2 + \theta^2}$. Le champ d'un mode de galerie est donc, au voisinage de la surface, $\exp[i(Nks - \omega t)] \exp[-r/\lambda]$. Une telle onde est donc localement semblable à un champ évanescent, de vecteur d'onde longitudinal réel $k_{\parallel} = N k_{vide}$, et présentant une dépendance transverse imaginaire pure $k_{évanescant} = i/\lambda$. Ce dernier traitement donne une bonne représentation intuitive de la carte de champ radiale.

Tout se passe comme si l'on avait, sous la surface de la sphère, un faisceau guidé par un diélectrique d'indice N , (le vecteur d'onde effectif k_{eff} étant pour les modes de galerie profonds $2\pi N/\lambda$), qui se raccorde à la surface à l'onde évanescente produite par un faisceau de vecteur d'onde k_{eff} sous une incidence rasante $\pi/2$.

Pour poursuivre cette démarche quelque peu heuristique, il semble raisonnable de penser que le couplage d'une onde extérieure sera efficace si le vecteur d'onde de ce champ coïncide localement avec le vecteur k du mode résonnant: cette condition ne signifie rien d'autre que l'adaptation de la distribution des phases ("phase-matching") entre le champ des sources et le récepteur—la cavité. Afin de satisfaire ce critère, il nous faut générer, de manière ajustable, un vecteur k , vérifiant à la fois la condition de phase matching longitudinale précédente, tout en maintenant la fréquence fixe (imposée par la résonance de galerie à exciter). Une solution possible est de "ralentir" l'onde sonde sous l'incidence ψ , au moyen d'un milieu d'indice N' dans un demi-espace ne contenant pas la sphère, situé à une distance $G > 0$ de sa surface, où G est le "gap" entre la sphère et le demi-espace d'indice N' . La figure I.11 précise l'agencement des différents faisceaux et dioptries.

L'écriture des conditions aux limites pour une onde plane sous l'incidence ψ de pulsation $\omega_{\{n,l\}}$ (fixée par la position d'une résonance de la sphère), donne les composantes du vecteur d'onde (complexe) κ à la surface du diélectrique N' . La composante longitudinale (réelle) vaut

$$\kappa^{\parallel} = (\omega_{\{n,l\}}/c) N' \sin \psi, \quad (\text{I.47})$$

et la composante normale

$$\kappa^{\top} = (\omega_{\{n,l\}}/c) (1 - N'^2 \sin^2 \psi)^{\frac{1}{2}}, \quad (\text{I.48})$$

qui est donc imaginaire pure si ψ est supérieur à l'angle critique du milieu N' pour le vide. Dans ce dernier cas, le champ du côté du vide, est une onde évanescente de portée $\Im(k^{\top})$. Écrivons maintenant la condition de phase matching pour les κ longitudinaux, qui s'exprime avec des notations déjà introduites:

$$N \frac{a}{a + G} = N' \sin \psi. \quad (\text{I.49})$$

On trouve donc, dans ce modèle semi-classique, que les paramètres optimaux pour le couplage sont liés par la contrainte I.49, qui, pour un gap égal à zéro (sphère en contact avec le diélectrique) impose pour ψ l'angle critique correspondant à une interface entre un milieu d'indice N' et la silice d'indice N .

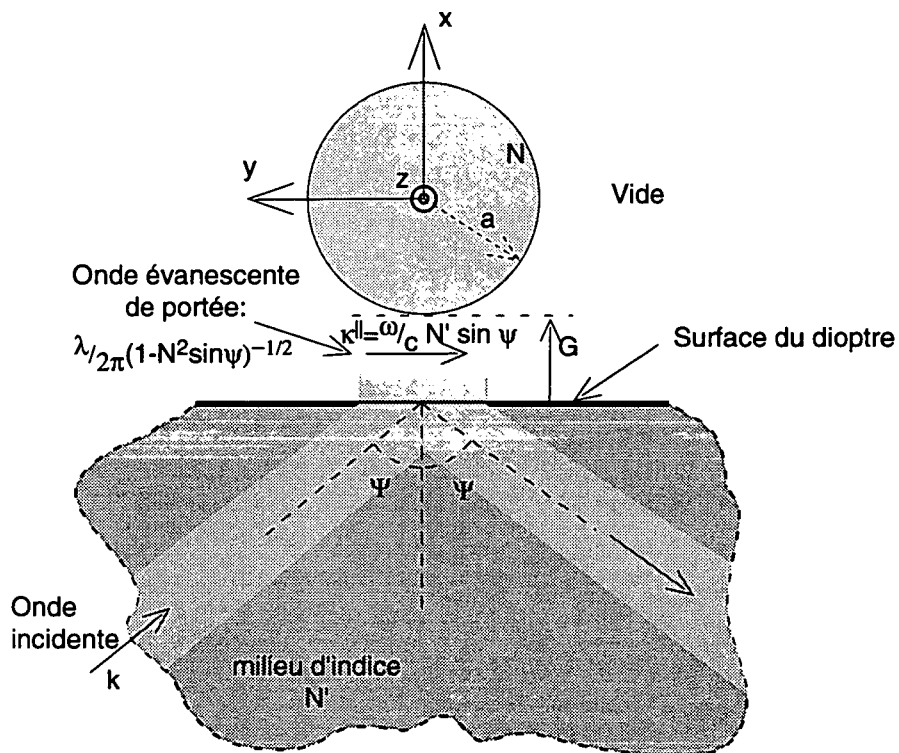


Figure I.11: Ce dessin illustre comment une onde évanescente de vecteur d'onde convenable peut être produite par une réflexion totale dans un milieu d'indice N' . On a représenté la microsphère, située à la distance G du prisme.

Remarque: Pour les sphères susceptibles de posséder des modes de grande surtension, a est en général beaucoup plus grand que G , et l'on n'attachera pas ici trop d'importance à la correction en G/a introduite ici, du fait que le raccordement des phases a été écrit à la surface du prisme. Nous réutiliserons toutefois ce résultat par la suite, car il se révèle assez exact (cf infra).

On en déduit la valeur de la partie imaginaire $\Im\kappa^\top = \omega_{\{n,l\}}/c (N^2 - 1)^{\frac{1}{2}}$ qui donne la portée de l'exponentielle décroissante de l'onde évanescente à la surface du demi-espace, et qui pour les matériaux usuels d'indice voisin de 1.5, est très voisine d'une longueur d'onde optique λ divisée par 2π . On s'attend à ce que le couplage du mode résonnant de la sphère à l'onde évanescente varie en fonction de G , comme l'amplitude de l'onde évanescente à la surface de la sphère soit : $\exp(-2\pi G/\lambda)$.

Malheureusement, nous savons que cette modélisation simple du couplage n'est valable que pour le cas limite où les approximations semi-classiques sont valables. Bien que les idées simples précédentes donnent assez bien les ordres de grandeur des paramètres à adopter, les formules ne permettent pas en général de déterminer quantitativement le couplage à un mode donné de la sphère. Ces résultats semi-qualitatifs sont insuffisants et un traitement plus rigoureux s'impose. Nous allons voir maintenant les grandes lignes d'un calcul donnant la dépendance angulaire du couplage, en fonction de l'incidence ψ . Cette prédiction repose sur la décomposition du champ sonde évanescent produit par réflexion interne frustrée d'une onde plane à l'intérieur d'un prisme sur la base des harmoniques sphériques explicités dans l'annexe B à la page 183 de ce mémoire.

I-7-2 Couplage d'un mode de galerie à une onde évanescente.

Pour effectuer ce calcul, nous allons adopter un point de vue modal et allons supposer que l'on peut négliger tous les mécanismes de perte de la cavité: pertes par diffraction vers l'extérieur, absorption du diélectrique. Nous supposerons également que le système optique qui produit l'onde évanescente reste suffisamment éloigné de la surface du résonateur pour n'induire aucune distorsion du mode résonnant. Cette dernière hypothèse limitera la validité d'un tel calcul au régime des couplages faibles. (Si cela s'avérait nécessaire, on pourrait toujours itérer cette méthode, en introduisant à chaque étape l'effet de ce type de perturbation.) Nous allons de plus nous limiter, comme cela a déjà été fait plusieurs fois au long de ce chapitre, au cas de champs scalaires³. Le coefficient de couplage $c(l, m, \psi)$ d'un mode résonnant $\{l, m\}$ particulier au champ évanescent créé par la réflexion interne frustrée d'une onde plane sous l'incidence ψ est simplement donné par une identification. En effet, la dépendance angulaire du mode $\{l, m\}$ est contenue dans l'harmonique sphérique Y_l^m . Si l'on décompose l'onde évanescente "plane" produite par réflexion frustrée dans le prisme sur la base des $\{Y_l^{m'}\}$, les propriétés d'orthogonalité des harmoniques sphériques donnent immédiatement que le coefficient de couplage $c(l, m, \psi)$ cherché est simplement le coefficient du terme Y_l^m de cette décomposition.

³On pourrait ici en particulier se limiter, pour des modes TE, à la composante du champ électrique suivant l'axe des pôles. Cette approximation se révèle excellente au voisinage du plan équatorial.

Partons du développement de Rayleigh d'une onde plane avec les conditions de phase de London et Shortley (cf annexe B):

$$e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l (-)^m i^l j_l(kr) Y_l^m(\Omega_r) Y_l^{-m}(\Omega_k). \quad (\text{I.50})$$

On a noté Ω_k et Ω_r les angles sphériques respectifs de \mathbf{k} et de \mathbf{r} , $\xi = \widehat{\mathbf{k}, \mathbf{r}}$, j_l les fonctions de Bessel sphériques. Cette formule, obtenue a priori pour des vecteurs \mathbf{k} réels peut être prolongée analytiquement pour des valeurs complexes de \mathbf{k} . Calculons en particulier cette expression pour $\mathbf{k} = \boldsymbol{\kappa}$ correspondant au vecteur d'onde complexe obtenu dans l'air à la surface du prisme, lorsque l'onde plane incidente subit une réflexion totale[59]. La pulsation du champ incident sera supposée fixée, en coïncidence avec le mode de galerie $\omega_{\{l,n\}}$ par exemple. Si l'on choisit le centre de la sphère comme origine, l'expression du champ électrique, pour l'onde plane "évanescence" de vecteur d'onde $\boldsymbol{\kappa}$ et d'amplitude E_0 est la suivante:

$$E(\mathbf{r}, \psi) = E_0 \exp[i\boldsymbol{\kappa}^\top(G + a)] \times 4\pi \sum_{l'} \sum_{m=-l'}^{l'} i^{l'} j_{l'}(\omega_{\{n,l\}} r/c) Y_{l'}^m(\Omega_r) Y_{l'}^{-m}(\Omega_k). \quad (\text{I.51})$$

Les angles sphériques de $\vec{\kappa}$ sont $\theta = \frac{\pi}{2}$ et $\phi = \psi_{TIR}$, où ψ_{TIR} est déduit des composantes de $\vec{\kappa}$ donné par les relations I.47 et I.48. Lorsque la réflexion sur le prisme est totale, ψ_{TIR} est complexe et l'on posera l'angle imaginaire $\psi_{TIR} = \pi/2 - i\xi$, où $\xi = \text{Argch}(N' \sin \psi)$. Comme sur la figure 1.11, N' désigne l'indice du prisme produisant la réflexion frustrée et ψ est l'angle d'incidence. Il vient :

$$\kappa^{\parallel} = \omega_{\{n,l\}}/c N' \sin \psi = \omega_{\{n,l\}}/c \sin \psi_{TIR} = \omega_{\{n,l\}}/c \text{ch} \xi, \quad (\text{I.52})$$

et pour la composante normale

$$\kappa^\top = \omega_{\{n,l\}}/c (1 - N'^2 \sin^2 \psi)^{\frac{1}{2}} = \omega_{\{n,l\}}/c \cos \psi_{TIR} = \omega_{\{n,l\}}/c \text{ish} \xi. \quad (\text{I.53})$$

On obtient finalement l'expression suivante du champ électrique, pour l'onde plane "évanescence" de vecteur d'onde $\boldsymbol{\kappa}$ et d'amplitude E_0 :

$$E(\mathbf{r}, \psi) = E_0 \exp[-\sinh \xi (G + a/N) \frac{\omega_{\{n,l\}}}{c}] \times \\ \times 4\pi \sum_l \sum_{m=-l}^l i^l (-)^m j_l(\omega_{\{n,l\}} r/c) Y_l^m(\Omega_r) Y_l^{-m}(\pi/2, \psi_{TIR}).$$

Par identification des termes de cette dernière expression avec le champ résonnant de la sphère correspondant au mode $\{n, l, m\}$, on trouve la dépendance angulaire du coefficient de couplage $c(l, m, \psi)$ de l'onde évanescence à ce mode particulier. Ce dernier peut être exprimé sous la forme:

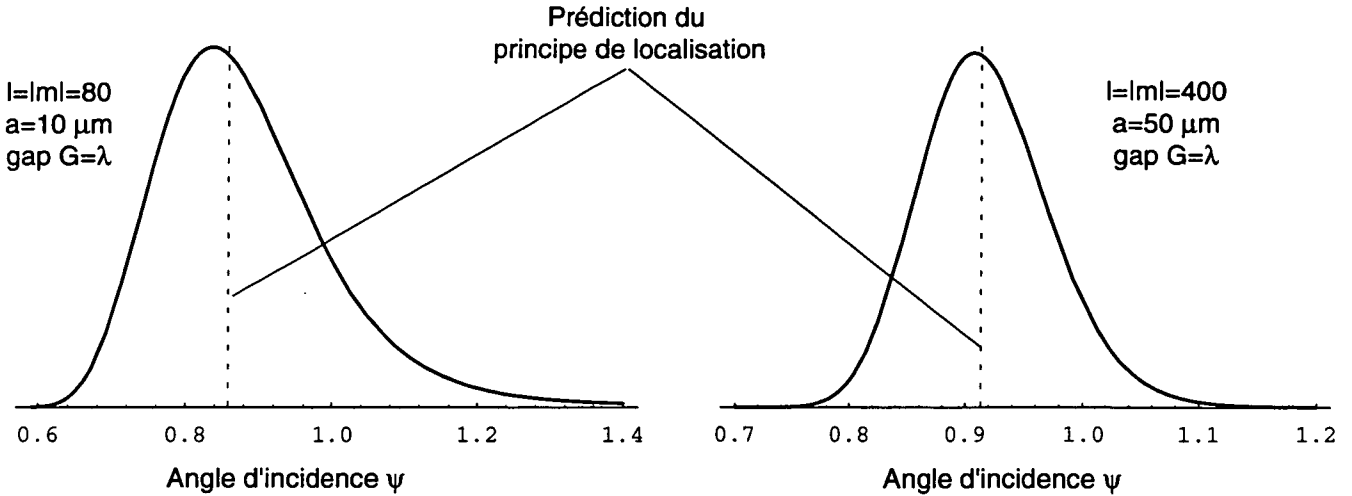


Figure I.12: On a représenté ici la dépendance du coefficient de couplage c en fonction de l'angle d'incidence (en radians). On voit que la valeur optimale du couplage qui correspond au maximum de la courbe est atteint pour une incidence qui ne diffère que très peu de la valeur prédite par l'argument semi-classique de la formule I.49. Pour la sphère la plus grande, le pic de couplage présente une largeur de l'ordre de 5 degrés.

$$c(l, m, \psi) \propto \exp[-(G + a/N) \frac{\omega_{\{n,l\}}}{c} \sinh \xi] Y_l^{-m}(\pi/2, \psi_{TIR}). \quad (\text{I.54})$$

Dans le cas particulier des modes de galerie équatoriaux (ici $m = l$), on obtient c sous la forme:

$$c(l, m, \psi) \propto \exp[-(G + a/N) \frac{\omega_{\{n,l\}}}{c} \sinh \xi + l\xi]. \quad (\text{I.55})$$

La figure I.12 montre les variations de ce coefficient de couplage (en amplitude) en fonction de l'incidence ψ , pour deux tailles de sphères, possédant des modes de galerie équatoriaux $l = m = 80$ ($\phi 20 \mu\text{m}$) et $l = -m = 400$ ($\phi 100 \mu\text{m}$). L'indice N' du prisme a été pris égal à 1.8. Dans les deux cas le gap G vaut λ ; la ligne en pointillé indique la position prédite par la condition I.49 d'égalité des vecteurs d'onde longitudinaux.

En conclusion, on constate un relativement bon accord entre le principe de localisation et ce calcul donnant la partie angulaire des coefficients de couplage. Nous ne saurions trop insister, en raison des approximations utilisées pour effectuer ce calcul, sur l'éventuelle inexactitude de l'angle de couplage optimal. (En particulier dans cette modélisation, le champ évanescent n'est pas perturbé par la présence de la microsphère.)

Pour réaliser expérimentalement un tel couplage, on a vu qu'une onde "plane" évanescente pouvait être produite par la réflexion totale frustrée, à l'intérieur d'un prisme de verre par exemple, d'un faisceau collimaté. Bien entendu, les points de cette onde

évanescence trop éloignés (à plus que λ) de la cavité ne pourront contribuer. On comprend intuitivement que le mode résonnant et le faisceau utilisé pour l'excitation doivent se "recouvrir". Aussi, le couplage aux modes équatoriaux pourrait être plus efficace si l'on réfléchissait un faisceau laser focalisé au voisinage de la sphère, au lieu d'une onde plane. Plus précisément, l'extension azimutale du mode de la microsphère devrait être comparable à la taille du waist formé sur l'hypoténuse du prisme créant l'onde évanescence. Enfin, l'ouverture du faisceau laser devrait être plus petite que la largeur du pic visible sur la figure I.12. Le lecteur trouvera dans la partie expérimentale de ce mémoire des descriptions détaillées des dispositifs optiques que nous avons employés pour créer une telle onde évanescence focalisée.

I-8 Perturbation des modes par de petites imperfections.

Toutes les considérations développées jusqu'ici supposaient que la forme et la composition de la sphère diélectrique étaient parfaites. Il nous faut estimer les effets de petites déformations géométriques et de fluctuations de l'indice en volume des résonateurs diélectriques.

Supposons que les techniques de fabrication des cavités sphériques conduisent à l'obtention de volumes quasi-sphériques, présentant de petites ovalisations. Nous allons nous limiter à des déformations invariantes par rotation autour de l'axe polaire des microcavités, car cela simplifie grandement les calculs. De plus, il se trouve qu'expérimentalement cela semble être une modélisation raisonnable de la surface des microsphères. Nous verrons en effet dans la partie expérimentale que les microcavités fabriquées par notre procédé de fusion par laser CO_2 semblent approcher en première approximation un ellipsoïde de révolution, d'excentricité inférieure au millième. Les axes propres de cet ellipsoïde seront supposés connus, et l'on choisira l'orientation de la microcavité dans l'espace de telle sorte que l'axe de révolution soit perpendiculaire au plan optique des faisceaux.

Les calculs développés dans cette partie sont fondés principalement sur les travaux de H.M. Lai, C.C. Lam, P.T. Leung et K. Young. On pourra se référer par exemple à [60]. La méthode de calcul exposée est essentiellement un développement perturbatif des petites variations de la solution au problème d'électromagnétisme scalaire, écrit ici comme un problème de Dirichlet, pour une sphère diélectrique légèrement inhomogène.

Avant d'entamer ce calcul, on peut essayer de comprendre en recourant aux mêmes arguments heuristique de chemin optiques que ceux exposés dans la partie liminaire de ce mémoire, les effets combinés d'un changement du diamètre du cercle équatorial et de la courbure du dioptre suivant la direction perpendiculaire à ce cercle équatorial. Faisons varier, en déformant la sphère initiale, l'ellipticité de la cavité en maintenant à tout moment la symétrie de révolution et le volume constant. Suivons par continuité un mode équatorial localisé donné. Si la sphère est transformée en un ellipsoïde de révolution, de grand axe $2r_p$ suivant l'axe des pôles, le périmètre du cercle équatorial $2\pi r_e$ va décroître

proportionnellement à l'excentricité e , définie par $e = (r_p - r_e)/a$. Si l'on suit une eikonale très voisine du cercle équatorial, la déformation entraîne une réduction du chemin optique, qui est en valeur relative l'opposé de la variation relative de rayon équatorial, et donc la fréquence propre va s'accroître. Si $\delta\omega$ est la variation de la pulsation d'un mode de galerie ω lors de la déformation, on a: $\frac{\delta\omega}{\omega} = -\frac{\delta r_e}{r_e}$. Or, la conservation du volume impose que $r_p r_e^2 = a^3$ ce qui entraîne pour l'excentricité que $e = -3\frac{\delta r_e}{r_e}$. On trouve donc finalement que:

$$\frac{\delta\omega}{\omega} = \frac{1}{3}e. \quad (\text{I.56})$$

Ce dernier résultat ne tient pas compte des effets de courbure suivant la direction orthogonale au cercle équatorial. Toujours pour la déformation qui vient d'être considérée, (allongement suivant l'axe des pôles), la courbure du dioptre diminue (excentricité négative), et l'on se rapproche davantage d'une configuration cylindrique. Le champ du mode résonnant va devoir adapter sa courbure transverse, initialement égale à $1/a$, à cette courbure plus faible. On peut tenter d'évaluer, en fonction de m , l'importance de cet effet de courbure par un argument de type "eikonal".

Au premier ordre, les corrections à la position des résonances est donnée par la modification du périmètre des trajectoires classiques. Pour un résonateur parfaitement sphérique, les trajectoires associées à une valeur de m sont des grands cercles dont l'axe, colinéaire au vecteur moment angulaire, fait un angle θ avec l'axe polaire tel que $\cos \theta = \frac{m}{l}$.

Pour la déformation envisagée, ces trajectoires deviennent des ellipses dont le périmètre est:

$$p = p_0 \left[1 + \frac{e}{6} \left(1 - \frac{3m^2}{l^2} \right) \right], \quad (\text{I.57})$$

où $p_0 = 2\pi a$ est la circonférence de la sphère initiale. On attend donc un déplacement relatif de la résonance donné par:

$$\frac{\delta\omega}{\omega} = -\frac{\delta p}{p} = -\frac{e}{6} \left[1 - \frac{3m^2}{l^2} \right]. \quad (\text{I.58})$$

On notera, et cela se comprend par symétrie, que la dégénérescence en m n'est pas levée. Enfin, l'expression de δp utilisée ci-dessus est approchée est correspond en fait à une trajectoire fermée elliptique, alors que les trajectoires réelles précèdent lentement autour de l'axe polaire. Comme on souhaiterait connaître avec certitude le coefficient du terme en m^2/l^2 (ce qui n'est pas a priori garanti par le calcul semi-classique qui précède), nous allons maintenant calculer, au moyen de résultats adaptés de l'annexe C, l'effet d'une petite ovalisation maintenant la symétrie de révolution et le volume de la cavité.

L'annexe C donne sous forme perturbative les effets liés à une petite modification en volume, de l'indice du diélectrique qui constitue le résonateur sphérique. La méthode de calcul employée, s'accommode bien d'une variation des équations locales. En revanche, techniquement il est plus difficile de briser la symétrie sphérique de la surface du résonateur.

Nous allons recourir à un artifice extrêmement simple pour modéliser une déformation de la surface du résonateur uniquement par un effet d'indice. Il suffit d'introduire une permittivité effective fonction des variables d'espace, valant N^2 dans les régions où il faut "créer" un milieu d'indice et $1 - N^2$ dans le cas contraire. Ainsi, en chaque point, la somme des permittivités du diélectrique de la sphère et de la perturbation vaut exactement N^2 si le point est à l'intérieur du résonateur elliptique et 1 dans le cas contraire. De plus, les déformations relatives considérées sont très petites: on peut, avec une excellente approximation condenser tout l'effet de la perturbation à la surface d'une boule de diélectrique d'indice N . Avec les notations de l'annexe, on trouve donc qu'une perturbation de la surface de la forme:

$$r(\theta, \phi) = a(1 + \epsilon s(\hat{\mathbf{r}})), \quad (\text{I.59})$$

peut s'écrire en première approximation comme une variation de la permittivité concentrée à la surface de la sphère équivalente:

$$N^2(\theta, \phi) = (N^2 - 1)\delta(r - a)\epsilon a s(\hat{\mathbf{r}}). \quad (\text{I.60})$$

Il nous suffit donc, pour connaître les éventuels déplacements et élargissements prédits par la formule C.22 de l'annexe, de calculer le coefficient $C_{ll'}^{(1)}(\beta)$ par la formule C.13. De manière à pouvoir écrire ici un résultat analytique, nous allons choisir une déformation (à volume constant) $s(\hat{\mathbf{r}})$ particulière de la surface, sous la forme:

$$s(\theta, \phi) = a(1 + \epsilon Y_{20}(\theta, \phi)), \quad (\text{I.61})$$

où Y_{20} représente l'harmonique sphérique scalaire $l, m = 0$. La figure I.13 ci-dessus montre l'allure de la surface déformée dans un plan méridien, pour une valeur exagérée de $\epsilon = 0.4$. Ce choix est une bonne approximation d'une déformation elliptique.

Dans ce cas l'intégrale dans C.13 est analytique et l'on trouve que le déplacement relatif en fréquence $\Delta Re(\beta)/Re(\beta)$ vaut:

$$\frac{\Delta Re(\beta)}{Re(\beta)} = -\epsilon \sqrt{\frac{5}{4\pi}} C(l2l, 000) C(l2l, m0m), \quad (\text{I.62})$$

(les C sont des coefficients de Clebsch-Gordan) ce qui peut se réécrire en fonction de l'excentricité e de l'ellipsoïde de révolution osculateur à la surface, et l'on obtient finalement le shift évalué au premier ordre:

$$\frac{\Delta Re(\beta)}{Re(\beta)} = \frac{e}{6} \left[\frac{3m^2}{l(l+1)} - 1 \right]. \quad (\text{I.63})$$

On voit que l'explication intuitive donnée au début de ce paragraphe prédisait correctement le signe et la dépendance quadratique de l'effet. Enfin, rappelons que le calcul au premier ordre effectué en annexe prédisait une modification du facteur de qualité nulle au premier ordre, et donc probablement très petite.

En conclusion, la théorie développée ici donne, pour les modes de galerie localisés au voisinage de l'équateur ($|m| \approx l$), un déplacement relatif des modes résonnants proportionnel à l'ellipticité du résonateur. Numériquement, avec les ellipticités de l'ordre de

Ovalisation de la forme:
 $r(\theta)/a=1 + 0.4 Y_{20}(\theta)$

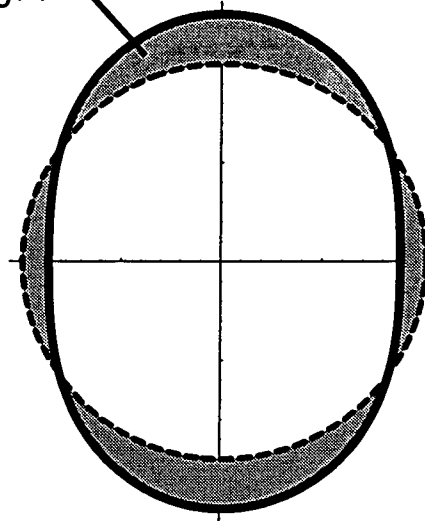


Figure I.13: Trace sur un plan méridien d'une déformation quasi-elliptique de la surface modélisée par la fonction $Y_{20}(\theta, \phi)$.

$10^{-3} - 10^{-4}$ mesurées pour nos sphères expérimentales, on trouve donc un déplacement de cet ordre pour les modes les plus fins, ce qui est considérable comparé aux largeurs relatives des modes de quelques 10^{-10} déjà mesurés expérimentalement. Cet effet est donc très gênant si l'on cherche à pointer dans l'absolu une résonance de $\{l, m\}$ donnés: on pourrait se tromper sur la détermination de l , si l'erreur cumulée sur la mesure de l'indice de réfraction du diélectrique et sur le diamètre de la microsphère dépassait 10^{-4} . L'identification des résonances passe donc nécessairement dans ce cas par la mesure de l'excentricité du résonateur avec une bonne précision (le ppm), en plus du rayon et de l'indice. Il existe peut être une solution à ce problème (qui comporte trois paramètres inconnus), en pointant un grand nombre de modes sur plusieurs pseudo-périodes du spectre: ainsi, les petites variations de la position des résonances de différents l devrait permettre, par une méthode de régression, la détermination de tous les paramètres libres.

En revanche, si l'on se préoccupe uniquement des écarts différentiels entre modes $|\Delta m| = 1$, pour $|m| \approx l$, l'effet relatif est divisé par un facteur $1/l$ supplémentaire, ce qui conduit avec les valeurs de l que nous explorons, à des déplacements relatifs différentiels nettement plus petits, dans la gamme $10^{-5} - 10^{-8}$. En conclusion, l'effet de déplacement absolu de la fréquence des résonances du fait d'une petite ellipticité résiduelle du résonateur peut être gênant si l'on souhaitait identifier les nombres "quantiques" des résonances, pour des sphères présentant un ordre d'interférence supérieur au millier ($l \sim 1000$, $\beta \sim 800$, diamètre $> 200 \mu m$). En revanche, les déplacements relatifs induits restent assez petits, pour les premiers modes équatoriaux de sphères pas trop petites. Cet effet pourra donc

dans le cadre de ce travail être assimilé à une translation en bloc du spectre.

I-9 Choix des conditions expérimentales.

Nous avons jusqu'ici exposé de manière générale les propriétés de résonance optique de sphères de diélectrique, et présenté plusieurs approches physiques possibles permettant d'analyser les phénomènes. Par exemple, les objectifs énoncés dans l'introduction générale et de multiples raisons pratiques vont bien entendu restreindre les choix possibles quant à la nature du diélectrique par exemple, ou bien la taille de la sphère en unité de longueur d'onde. Nous allons discuter les meilleurs compromis et décider d'une situation expérimentale.

I-9-1 Confinement du champ.

Revenons un instant sur les buts énoncés en tête de ce document. L'idée qui a motivé ce travail est de confiner un champ optique dans une toute petite cavité électromagnétique aussi parfaite que possible. Si l'on souhaite par exemple effectuer des expériences d'optique non-linéaire avec des champs de quelques photons, il faut maximiser la valeur du champ électromagnétique dans la cavité. Choisissons la valeur crête du champ électrique par photon dans la cavité comme paramètre de la discussion, ce qui nous permettra de déterminer la taille optimale des microrésonateurs sphériques à fabriquer.

Le champ électrique maximum par photon E_{max} à l'intérieur de la boîte de volume V est fonction des paramètres géométriques du système et de l'énergie du photon piégé. Ce champ maximum s'écrit[61]:

$$E_{max} = \left(\frac{h\nu}{2N^2\epsilon_0 V} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{I.64})$$

Cette relation exprime simplement l'identité entre l'énergie du photon et l'énergie de polarisation du diélectrique. A partir de cette expression de E_{max} , il est aisé de dégager les conditions qui maximisent le champ par photon. Réécrivons E_{max} en faisant apparaître la longueur d'onde λ de la lumière, et en exprimant le volume réduit $v_\lambda(\beta) = V/\lambda^3$ de la cavité en cette unité (β est le paramètre de taille introduit dans le premier chapitre).

$$E_{max} = \left\{ \frac{hc}{2\epsilon_0 N^2 v_\lambda \lambda^4} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (\text{I.65})$$

Nous pouvons donc jouer sur deux points:

- Utiliser des photons "durs", de courte longueur d'onde, pour minimiser λ .
- Minimiser le volume de la cavité et utiliser un ordre d'interférence aussi faible que possible.

On ne peut toutefois pas diminuer indéfiniment la longueur d'onde et la taille de la cavité sans se heurter à des difficultés, que nous allons maintenant exposer.

I-9-2 Temps d'amortissement de la cavité.

En règle générale, les critères de confinement du champ donnés ci-dessus, ne sont pas les seuls à considérer. En effet, on imagine bien que le temps pendant lequel la cavité va maintenir les photons confinés, va jouer un rôle déterminant sur l'importance des effets. Il est donc nécessaire, en vue d'obtenir un confinement dans la durée, d'empêcher que les photons piégés dans la cavité ne s'échappent, réduisant à néant le "renforcement" résonnant du champ.

Les pertes renferment ici deux effets distincts. Le premier présente un caractère véritablement irréversible: les photons de la cavité peuvent être absorbés par les imperfections de la cavité, (ils sont en général transformés totalement ou partiellement en phonons). Ce type de phénomène contribuant aux pertes sera appelé *interaction inélastique*. Lorsque le système est tel que la cavité ne constitue pas un système parfaitement fermé, une partie du champ du résonateur s'échappe à l'infini. Ce type de fuite rentre dans la catégorie des *pertes par diffraction* que nous avons déjà rencontrées. Enfin si le volume (ou les parois) du résonateur présentent des variations d'indice (ou de forme) à une échelle comparable à celle de la longueur d'onde, le champ résonnant possédera une projection non-nulle sur des modes propres du champ purement propageants: l'énergie de la cavité sera progressivement envoyée dans tout l'espace. De tels effets sont à classer dans les *effets de diffusion*.

Suite à cette analyse, il est facile d'estimer le temps d'amortissement total de la cavité, en additionnant les probabilités p_i décorréelées de perte par les différents mécanismes énumérés. En définissant le facteur de qualité $Q = \omega T_{cav} = \omega/p$, avec $p = \sum_i p_i$, on obtient la relation bien connue:

$$Q^{-1} = Q_{inélastique}^{-1} + Q_{diffraction}^{-1} + Q_{diffusion}^{-1}, \quad (I.66)$$

les différents Q_i représentant le facteur de qualité d'une cavité qui ne posséderait que $\{i\}$ comme mécanisme de perte.

Il est facile de se convaincre que la fabrication de résonateurs de grande surtension requiert des contributions aussi faibles que possible des trois termes énoncés. La cavité devra posséder des pertes par diffraction très faibles, être constituée d'un matériau aussi transparent que possible, homogène, enfermé dans des parois parfaitement polies.

Face à ces impératifs, il existe à notre connaissance, une seule autre technologie concurrente à l'utilisation des modes de galerie des microsphères de silice. Celle-ci utilise une disposition plus conventionnelle puisqu'il s'agit d'une cavité de type Fabry-Pérot, terminée par des miroirs multi-diélectriques de qualité exceptionnelle. Nous allons dans le paragraphe qui suit les comparer brièvement.

I-9-3 Comparaison des cavités monolithiques aux cavités Fabry-Pérot.

Depuis quelques années déjà, les progrès de l'optique ont permis la réalisation de miroirs de très grande qualité optique et donc de cavités optiques de très bonne finesse. Avec

de tels miroirs, récemment portés à la perfection par l'avènement des gyro-lasers (qui ne tolèrent aucune lumière rétrodiffusée), la réalisation de cavités adaptées aux expériences d'électrodynamique en cavité est devenue une réalité. Les miroirs utilisés dans ces Fabry-Pérot sont constitués d'un substrat de silice, généralement une calotte sphérique concave de rayon convenable, revêtu sur sa face active d'une succession de plusieurs dizaines de couches minces de diélectriques transparents.

La constitution de miroirs de grande qualité, en vertu des principes énoncés plus haut, requiert principalement deux choses. Premièrement, la surface du substrat doit être aussi bien polie que possible, pour réduire la diffusion parasite. A notre connaissance, l'étape ultime de polissage utilise des faisceaux d'ions qui aplanissent la surface à l'échelle moléculaire. La rugosité résiduelle, intégrée sur un micron-carré, est de l'ordre de 10 à 100 picomètres⁴[62]. Deuxièmement, le traitement multicouche (jusqu'à 50!) doit être épitaxié avec un soin extrême, aussi bien en épaisseur qu'en densité (assistance par faisceau ionique qui "tasse" les atomes de la couche). Le record annoncé de finesse est détenu par l'équipe de Kimble [63]. La finesse est de l'ordre de 1.10^6 . D'autres sources donnent des intensités de retro-diffusion parasite sur les miroirs. La société *Sextant Avionique* annonce que l'intensité renvoyée par le miroir dans tout l'espace, après soustraction de ce qui est réfléchi dans le "bon" faisceau, avoisine le millionième de la puissance incidente. Cette estimation indirecte, qui conduit donc à des finesse semblables, semble indiquer que ces miroirs super-polis sont limités par des effets de diffusion par les accidents résiduels du substrat et des couches diélectriques. Une petite cavité Fabry-Pérot de 1mm de long, avec des miroirs de courbure de l'ordre du centimètre a permis de mettre en évidence des effets liés à la présence d'un unique atome résonnant dans la cavité [64][7][65].

Bien que pleine de promesses, cette technique expérimentale demeure très délicate. La technologie de production de ces super-miroirs est quasiment inaccessible, seuls quelques rares industriels la maîtrisant actuellement. De plus, il semble difficile de réaliser de cette façon des cavités de volume réellement comparable à quelques λ^3 , car ni les techniques de polissage, ni le dépôt par épitaxie ne permettent d'obtenir des dioptries de très petite courbure.

La fabrication de miroirs de très haute réflectivité, dans le domaine visible, fait appel à la technologie la plus raffinée. A l'inverse, la technique de préparation des microsphères que nous avons mis au point, incomparablement plus simple à maîtriser que l'épitaxie, conduit à des microrésonateurs de très petit volume, possédant naturellement un poli de surface de très bonne qualité et une finesse plusieurs fois supérieure aux meilleurs miroirs diélectriques. Pour toutes ces raisons, nos microrésonateurs monolithiques semblent plus adaptés aux expériences de physique fondamentale nécessitant un confinement extrême du champ. Les mini-cavités Fabry-Pérot possèdent cependant un certain nombre d'avantages: elles sont bien sûr très aisément accordables et il est facile de faire interagir des particules avec le champ du mode qui est presque en totalité dans le vide.

⁴La rugosité structurale (voir annexe E consacrée à la silice) due aux chaînes de silicates serait de l'ordre de 0.5nm à une échelle transverse d'un demi nanomètre. Une ondulation moyenne de 10 picomètres, intégrée sur un μm , a été récemment mesurée sur d'excellents substrats, ce qui pourrait signifier que le bruit spatial suit une loi en $1/\sqrt{f}$, où f serait la fréquence spatiale du "vallonnement" de surface.

I-9-4 Dimensionnement et nature du diélectrique constituant les sphères.

On a vu qu'à condition de choisir une sphère suffisamment grande, il existait des résonances de facteur de qualité limité par diffraction $Q_{diffraction}$ aussi grand que souhaité: cette grandeur croît quasi exponentiellement avec le paramètre de taille $\beta = ka$. En toute logique, la méthode de détermination du paramètre de taille, en vue d'obtenir des cavités de volume minimum, dont les pertes seraient limitées par les pertes du diélectrique, devrait être celle-ci :

- Estimer le facteur de qualité attendu, si les pertes provenaient exclusivement des imperfections du diélectrique.
- Déterminer le plus petit paramètre de taille conduisant (pour les $n_0 \ll n_{max}$ premiers modes radiaux) à des pertes par diffraction comparables aux pertes du matériau. (La relation I.66 impose alors $Q_{diffraction} \sim Q_{absorption}$).

I-9-4-1 Sélection du diélectrique.

L'extraordinaire avènement des fibres optiques dans le domaine des télécommunications apporte immédiatement une réponse technologique. Fruits de deux décennies de recherches, les verres de silice synthétique qui constituent le cœur des fibres de haute performance actuelles, sont incomparablement plus transparents que ce que l'on pouvait espérer à la fin des années soixante-dix. Les pertes typiques obtenues pour des fibres de télécommunication à cœur silice dopé au germanium, et à gaine silice, sont en effet passées de $\approx 1dB/m$, à $0.17dB/km$ (à la longueur d'onde de $1.55\mu m$) [66], la longueur caractéristique de propagation entre répéteurs passant de quelques dizaines de mètres à la centaine de kilomètres. Ce diélectrique est de loin le matériau le plus transparent connu. Avec l'aide de l'annexe E, nous pouvons maintenant préciser davantage ce qu'impliquerait le choix de la silice comme diélectrique.

L'atténuation du verre de silice en fonction de la longueur d'onde est minimale pour une longueur d'onde voisine de $1.55\mu m$. L'absorption résiduelle du matériau homogène est alors de $0.14db/km$. Le lecteur trouvera dans l'annexe E quelques informations concernant les propriétés physico-chimiques de ce diélectrique remarquable. Cette valeur d'atténuation record n'est toutefois obtenue que pour des échantillons extrêmement purs chimiquement (les espèces parasites, hors Cl^- , se chiffrant en parties par millions). Or, à la suite de toute manipulation dans l'air la silice va se recouvrir d'un film moléculaire susceptible de libérer des ions OH^- dans le verre. Les raies de ces espèces, même sous forme de traces, peuvent limiter considérablement la transparence du verre de silice à $1.55\mu m$, quand bien même ce dernier eut été initialement parfaitement pur. Il nous a donc semblé préférable de commencer ces expériences dans une région du spectre où les effets potentiels de l'eau seraient moins critiques, bien que le matériau pur y soit moins transparent. Nous avons opté pour des longueurs d'onde plus courtes, au voisinage de $780nm$. Les diodes laser à cette longueur d'onde sont très répandues, cette lumière infra-rouge est presque

visible à l'œil nu. Enfin, la raie D_2 du rubidium, à $780.2nm$, pourrait être utilisée dans des expériences d'interaction entre le champ évanescent de la microcavité et des atomes libres. A $780nm$, les pertes en volume attendues sont de l'ordre de $2dB/km$. Nous allons maintenant estimer le facteur de qualité limite impliqué par cette valeur, puis en déduire la taille optimale de sphère à fabriquer.

Remarque : Il va de soi que pour des expériences qui viseraient à obtenir des surtensions records, le choix de la longueur d'onde des télécommunications $1.55\mu m$ s'imposerait. Il faudrait alors probablement synthétiser in-situ, dans une enceinte anhydre, de la silice par voie chimique. Nous donnons dans l'annexe E un projet de protocole et les conditions thermochimiques acceptables pour qu'une telle synthèse se produise en un point de l'enceinte.

I-9-5 Facteurs de qualité limités par les pertes du matériau.

Calculons maintenant le facteur de qualité maximal limité seulement par les pertes en volume du diélectrique Q_{abs} et la diffusion propre du diélectrique causée par des fluctuations de l'indice du résonateur à l'échelle moléculaire.

I-9-5-1 Estimation du facteur de qualité limité par l'absorption.

L'estimation la plus simple que l'on peut effectuer repose sur la définition du facteur de qualité $Q_{abs} = \omega_{lum} T_{cav}$, en prenant pour T_{cav} la distance moyenne parcourue par la lumière dans le milieu, divisée par la célérité de propagation : si l'on choisit pour cette dernière valeur c/N , on commet une erreur qui sera acceptable pour les modes les plus profonds. Pour ceux-ci, le champ se trouve principalement dans la barrière, dans un milieu d'indice N . On se limitera également à des sphères de paramètre de taille assez grand pour minimiser les effets de diffraction. Si ces hypothèses sont vérifiées, la distance de propagation moyenne (pour une atténuation de $3dB$) sera $L_{3dB} = 1000/(3 A_{km})$, ou A_{km} est l'atténuation en dB par kilomètre du verre de silice employé. On déduit donc que

$$Q_{abs} = \frac{1000 \times 10 \times \ln_{10} e \times 2\pi N}{A_{km} \lambda} \quad (I.67)$$

Pour $\lambda = 780nm$ et $A_{km} = 2 dB/km$, on trouve $Q_a = 1.8 \cdot 10^{10}$; au maximum de transparence du matériau, à la longueur d'onde $\lambda = 1550nm$, avec $A_{km} = 0.14 dB/km$, $Q_{abs} = 1.3 \cdot 10^{11}$ (ce qui correspond à des largeurs respectives de 21 et 1.5 Kilohertz).

I-9-5-2 Facteur de qualité limité par la "granularité" du diélectrique.

Un milieu diélectrique comme la silice n'est pas parfaitement homogène à des échelles de l'ordre du nanomètre. Aussi, intéressons-nous un instant à la structure moléculaire de la silice. Ce matériau est constitué, comme cela est expliqué à la fin de ce mémoire dans l'annexe E consacrée aux propriétés de la silice vitreuse, par un empilement peu ordonné de tétraèdres de silicates. Ces tétraèdres forment des cycles comportant de 5 à 7 éléments,

d'une taille moyenne de $0.4nm$ à $0.5nm$. La polarisabilité microscopique du diélectrique va donc se modifier significativement sur une échelle de cet ordre. La théorie des guides d'onde permet d'estimer les pertes occasionnées par la traversée d'un tel milieu. Nous avons trouvé dans la littérature spécialisée[67] la formule suivante donnant l'atténuation caractéristique (diffusive) A_{diff} d'un champ de longueur d'onde λ sous la forme suivante:

$$A_{diff} = A_{diff}^0 \frac{\sigma^2}{\lambda} \left[\frac{\lambda}{\pi\xi} + \frac{\pi\xi}{\lambda} \right]^{-1}. \quad (I.68)$$

ξ représente la longueur de corrélation des variations spatiales du diélectrique et σ la taille moyenne des défauts. Dans le cas de la silice, ξ est très vraisemblablement voisin du diamètre des "cycles" de silicates, soit un demi-nanomètre. Il est également plausible de choisir pour σ la taille d'un tétraèdre.

Remarque importante: Cette formule, qui est utilisée habituellement pour estimer les effets de corrugations dans les guides-d'ondes, traite le cas de défauts présentant une certaine régularité spatiale. Cet effet est donc très différent de la diffusion Rayleigh en λ^{-4} . Nous avons pris le parti d'inclure les effets de la diffusion Rayleigh dans les pertes en volume du diélectrique.

On peut alors tracer le diagramme I.14, qui donne la variation du facteur de qualité correspondant $Q_{diffusion}$ à l'atténuation A_{diff} , en fonction de la longueur d'onde de la lumière.

Note: Comme A_{diff}^0 est a priori inconnu, une valeur compatible avec nos résultats expérimentaux a été choisie pour ce paramètre. Nous ne pouvons toutefois pas affirmer ici que ce type d'effets donne les pertes mesurées expérimentalement. Il serait donc intéressant de réaliser des mesures à d'autres longueurs d'ondes.

Remarque: on peut déduire de cette courbe que, si cette cause de pertes par diffusion en volume est prépondérante aux longueurs d'ondes du proche infrarouge, on devrait observer un gain des facteurs de qualité de seulement un demi-ordre de grandeur entre $780nm$ et $1.55\mu m$.

Cherchons maintenant le paramètre de taille minimum pour lequel les modes de galerie les plus fins ($n = 0$) auraient des facteurs de qualité limités par diffraction $Q_{diffraction}$ du même ordre de grandeur que la surtension limitée par les mécanismes de pertes intrinsèques au diélectrique.

I-9-5-3 Conséquences sur le paramètre de taille de la sphère.

Les formules approchées données plus haut, qui donnent la largeur théorique d'une résonance de $\{n, l\}$ donné, permettent de déterminer le l_{min} minimum tel que:

$$Q_{diffraction}(\{0, l_{min}\}) \leq Q_{abs}.$$

On trouve, après une recherche numérique utilisant la relation I.43 que $l_{min} = 95$ (pour $N_{silice} = 1.453$). Une telle valeur de l correspond à un paramètre de taille d'environ 70 (en faisant usage de la relation I.45), et donc à une sphère de diamètre $2a = 2\beta/k_{lum} = 17\mu$.

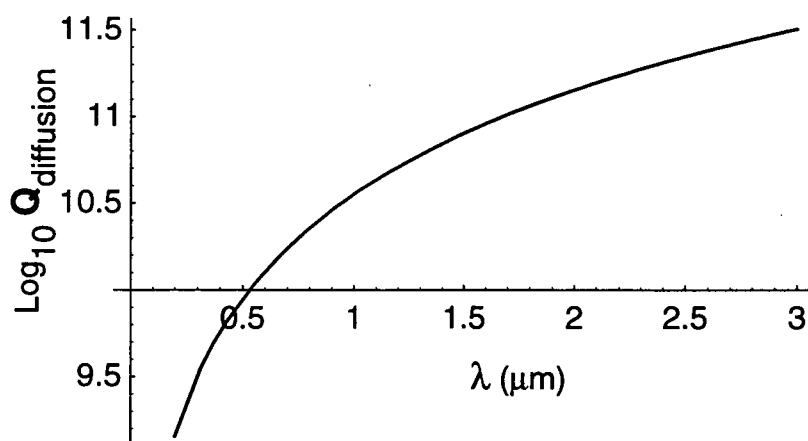


Figure I.14: Représentation semi-logarithmique du facteur de qualité limité par les effets de diffusions du diélectrique (voir texte).

En conclusion, la procédure présentée donne une taille minimale de sphère, en deçà de laquelle les facteurs de qualité ne seraient plus limités par les pertes intrinsèques de la silice.

I-9-5-4 Liens entre facteur de qualité et pôle.

La manière de relier l'atténuation du matériau au facteur de qualité du résonateur qui a été utilisée ici présente l'avantage de donner une illustration physique très claire de l'effet d'absorption des photons par le milieu diélectrique. Ces pertes limitent le temps de séjour T_{cav} d'un photon résonnant dans le mode, et donc en vertu du théorème de Fourier, induisent un élargissement inévitable des modes en $1/T_{cav}$. On pourrait souhaiter disposer d'une méthode plus rigoureuse, ne reposant pas sur une estimation a priori du chemin optique (comme $N \times L_{3dB}$) parcouru pendant T_{cav} .

Mathématiquement, les formules exactes du premier chapitre restent valables, si les valeurs prises pour l'indice N sont étendues aux nombres complexes $N = N' + iN''$. Ainsi, sur les formules qui prédisent la position et la largeur d'une résonance donnée en fournissant la valeur complexe $\beta(\{n, l\})$, pour un indice comportant une partie complexe N'' non-nulle, on obtiendra une nouvelle valeur de β , dont les parties réelle et imaginaire posséderont la même signification physique qu'auparavant, $\Re(\beta)$ donnant la position et $\Im(\beta)$ la largeur d'un mode d'une sphère avec pertes. De plus, la validité des raisonnements conduisant à des formules approchées est assurée si on suppose en plus que $\beta \times N'' \ll N'$: toutes les expressions resteront convergentes et l'on pourra même obtenir des approximations perturbatives en $\beta N''/N'$.

On obtient par exemple, en application de l'approximation donnée en I.45, sous la forme $\beta(n, l) = (1/N)(\lambda + 2^{-\frac{1}{3}}\lambda^{\frac{1}{3}})$, (β étant décomposé sous la forme $\beta = \beta' + i\beta''$) les effets, calculés au premier ordre en $\beta'N''/N'$, pour la position et la largeur des résonances dans le cas où le diélectrique présente des pertes en volume, modélisées par N'' . Au premier ordre, la partie réelle de β β' est inchangée: les résonances ne sont pas déplacées par les pertes en volumes (à l'ordre le plus bas). En revanche, à la partie imaginaire β'' associée aux pertes par diffraction s'ajoute un terme en $-\beta \times |N''|/N'$. Ce résultat peut être comparé à la correction qui serait obtenue par l'évaluation géométrique du chemin optique: la composante imaginaire de l'indice ne modifie pas la longueur du chemin optique de longueur $\approx \lambda N'\beta$, et n'entraîne donc pas de déplacement des résonances. En revanche, l'atténuation par unité de longueur \mathcal{A} vaut $-|N''|k$. On a donc les identités suivantes:

$$2Q = \frac{\beta'}{|\beta''|} = \frac{2\pi N'}{\mathcal{A}\lambda} = N'/|N''|, \quad (\text{I.69})$$

avec $\beta = \beta' + i\beta''$. On retrouve donc bien par ce calcul simple la même perturbation induite sur la partie imaginaire du pôle β , c'est à dire: $\beta'' = -\beta'N''/N'$.

En conséquence, pour des milieux très transparents les pertes ne déplacent pas les résonances (à l'ordre le plus bas). En revanche, à la largeur théorique donnée par la diffraction s'ajoute une largeur induite par les pertes (on retrouve bien ici, du fait que les largeurs s'ajoutent, qu'il faut sommer l'inverse des facteurs de qualité).

Il est temps de spécifier, maintenant que la taille minimale des sphères est déterminée, les ordres de grandeur attendus pour les résonances et leur volume. Nous présentons ici les valeurs numériques relatives à quelques tailles de sphères : la sphère "minimale" déterminée ci-dessus, une sphère de relativement grande taille (plus aisément manipulable pour de premières expériences qu'une "poussière" microscopique de $\varnothing 20\mu m$!) et plusieurs sphères de taille intermédiaire.

I-9-6 Principaux ordres de grandeurs numériques, pour diverses tailles de sphères.

Les estimations numériques suivantes, caractérisant les propriétés générales du spectre ainsi que la largeur d'un mode donné, sont obtenues par application des expressions approchées du paragraphe I-6. Cantonnons nous aux valeurs numériques obtenues pour des microsphères de silice, d'indice 1.457, à la longueur d'onde de 785nm pour des diamètres respectifs de $\phi 20\mu\text{m}$, $\phi 40\mu\text{m}$, $\phi 85\mu\text{m}$, $\phi 150\mu\text{m}$ et $\phi 300\mu\text{m}$.

ϕ de la microsphère (μm)	20	40	85	150	300
Paramètre de taille β	80	160	340	680	1360
l correspondant pour le mode le plus profond ($n = 0$)	108	222	481	973	1959
$Q_{\text{diffraction}}$ mode TE (1,0)	$3.2 \cdot 10^{11}$	$9 \cdot 10^{28}$	$3 \cdot 10^{70} \diamond$	$4.7 \cdot 10^{391} \diamond$	$4.3 \cdot 10^{813} \diamond$
$Q_{\text{diffraction}}$ mode TM (1,0)	$1.5 \cdot 10^{19}$	$6.6 \cdot 10^{37} \diamond$	$4.3 \cdot 10^{80} \diamond$	$2.6 \cdot 10^{402} \diamond$	$3.6 \cdot 10^{825} \diamond$
$Q_{\text{diffraction}}$ mode TE (1,9)	—	—	$4.8 \cdot 10^{26}$	$2 \cdot 10^{93} \diamond$	$2.8 \cdot 10^{241} \diamond$
$Q_{\text{diffraction}}$ mode TM (1,9)	$2 \cdot 10^6$	$4.3 \cdot 10^9$	$1.4 \cdot 10^{37} \diamond$	$7 \cdot 10^{104} \diamond$	$1.3 \cdot 10^{254} \diamond$
Volume (en λ^3)	87	326	1345	4895	17650
Champ électrique interne maximum E_{max} (V/m)	18200	9400	4625	2425	1275
Quasi-période (en unité de β) pour $\beta(l+1,0) - \beta(l,0)$	0.705	0.698	0.695	0.691	0.689
Valeur en fréquence (GHz) de la quasi-période	3366	1666	781	440	219
Espacement (en unité de β) des deux premiers modes radiaux $\beta_n(l,1) - \beta_n(l,0)$	5.646	6.984	7.775	10.575	13.059
Valeur en fréquence (GHz) de cet écart ($\delta n = 1$)	26700	16680	8735	6732	4157

\diamond Les facteurs de qualité (limités par diffraction) supérieurs à 10^{33} (correspondant à des temps de confinement plus longs que l'âge de l'univers!) subsistent dans le tableau pour montrer la variation exponentielle des effets de diffraction avec le paramètre de taille.

Commentaire :

La table de données numériques ci-dessus permet de bien choisir les conditions expérimentales en fonction des buts poursuivis. S'il s'agit simplement d'observer des résonances de facteur de qualité aussi élevé que possible, un diamètre de sphère supérieur à $100\mu\text{m}$ semble raisonnable. En effet, pour des paramètres de taille supérieur à 500, on constate que les dix premiers modes radiaux (en n) ont un facteur de qualité limité par diffraction

nettement plus grand que 10^{10} . (Bien entendu, les valeurs gigantesques du tableau veulent simplement dire que la limitation expérimentale des facteurs de qualité sera dans ces cas complètement insensible aux pertes par diffraction, d'autres mécanismes de pertes devenant prépondérants.) D'autre part, la densité de mode croît sensiblement avec la taille du résonateur, puisque d'une part, la quasi période diminue approximativement comme l'inverse de la taille, et que d'autre part, le nombre de modes radiaux de grande surtension augmente (quasi proportionnellement) avec la taille. Enfin, si en raison de petites ovalisations géométriques (cf traitement théorique du paragraphe I-8, page 57), il se produit une levée de la dégénérescence en m , le spectre sera enrichi des premières raies de la famille $\{m = l, m = l-1, m = l-2 \dots\}$, dont le nombre augmentera environ comme la taille. En conclusion, on s'attend à rencontrer une densité de résonances croissant quadratiquement avec la taille de la microsphère, ce qui rendra, pour une plage de balayage du laser de spectroscopie donnée, la recherche des modes plus aisée sur les boules de grande taille.

En revanche, les expériences visant à mettre en évidence des effets non-linéaires, nécessiteront un petit volume de mode, et éventuellement un champ superficiel plus grand, ce qui impose de petites sphères, de 20 à $90\mu m$.

Pour entamer l'étude spectroscopique des résonances de galeries, il nous a semblé souhaitable de sélectionner des sphères de tailles comprises entre $80\mu m$ et $250\mu m$, à la fois en raison des critères qui viennent d'être exposés et pour faciliter l'observation visuelle et la micro-manipulation de tels objets. Nous allons maintenant décrire le procédé expérimental que nous employons pour produire des micro-sphères de taille variable, possédant de bonnes propriétés optiques.

Chapitre II

Étude expérimentale des résonances.

Dans le premier chapitre, essentiellement théorique, nous avons tenté de préciser l'étendue des paramètres expérimentaux utilisables, afin d'atteindre les objectifs énoncés en tête de ce mémoire. Résumons brièvement ici les conclusions de cette étude.

Tout d'abord, la taille du résonateur résulte d'un compromis entre volume du mode et limitation du facteur de qualité par les pertes par diffraction, puisque celles-ci s'accroissent à mesure que les sphères diminuent de taille. Nous avons choisi de nous limiter à des boules diélectriques de diamètre compris entre $\phi 40\mu m$ et $\phi 250\mu m$. En effet, les billes de taille inférieures à cette limite possèdent peu de modes fins (seules les résonances de nombre quantique radial de l'ordre de l'unité présentent un facteur de qualité suffisant) et sont plus difficiles à manipuler; les sphères de taille comparable au millimètre présentent davantage de distorsion de leur surface—nous tenterons d'en donner la raison lors de la description de notre procédé de fabrication. Comme nous ne possédions que peu d'informations sur la manière de fabriquer de petites boules de diélectrique quasi-parfaites, il nous a fallu expérimenter de nombreuses variantes d'une même technique. Sans entrer dans le détail de chacune d'elles, nous allons décrire les deux principales versions du dispositif expérimental qui nous ont permis d'observer des facteurs de qualité record.

II-1 Premier système expérimental.

Dans cette partie, nous rapportons nos premières expériences qui, dès la mise au point du protocole expérimental, conduisirent à des mesures de très grands facteurs de qualité. Le premier volet de l'exposé qui va suivre est divisé en trois parties, qui présentent chronologiquement les étapes nécessaires à l'enregistrement d'un spectre à haute résolution. Nous aborderons successivement les aspects liés à la fabrication des microsphères, au dispositif qui assure la micro-manipulation des sphères formées, et enfin à l'étude spectroscopique des résonances elles-mêmes.

Le second volet sera consacré à la présentation et à l'analyse des résultats expérimentaux.

Enfin, nous débattons des limitations de cette première version du montage expérimental, qui ont entraîné la construction d'un système plus complexe, dans lequel les trois étapes précédentes s'enchaînent dans une enceinte fermée, sans intervention manuelle.

II-1-1 Premières tentatives de fabrication des sphères.

Les objectifs, tant optiques que géométriques, imposent de difficiles contraintes à la technique de fabrication des microsphères. Résumons succinctement nos exigences a priori. Il nous faut façonner une boule d'un diamètre avoisinant $100\mu m$ (le diamètre d'un cheveu), à partir d'une silice chimiquement très pure, la plupart des espèces parasites dispersées dans la matrice de verre induisant des pertes inacceptables. Enfin, l'homogénéité du verre doit être irréprochable, et la surface être aussi lisse que possible, sans ondulation ni défaut ponctuel: toute variation spatiale brutale des propriétés du diélectrique introduit des pertes par diffraction supplémentaires.

Le principe de la méthode que nous avons retenue utilise les propriétés rhéologiques du verre de silice fondu. Nous allons voir qu'elles assurent automatiquement la sphéricité de la microsphère.

II-1-1-1 Fusion de la microsphère.

Le principe général de la fabrication est le suivant. L'étape liminaire de notre procédé de fabrication est l'obtention d'une fibre de verre de silice synthétique, d'un diamètre d'environ 20% (jusque 35%) du diamètre final de la boule que l'on souhaite réaliser. Ensuite, on fond une des extrémités de cette fibre. Les forces de tension superficielle font que l'on obtient, si les conditions opératoires sont appropriées, une sphère. Plusieurs variantes du procédé sont possibles; décrivons en détail cette méthode.

A l'heure actuelle, le matériau de départ est une baguette cylindrique de $\varnothing 2mm$, fabriquée par la firme allemande *Heraeus* à partir d'une silice synthétique, désignée commercialement par la qualité *SUPRASIL*. D'après ce que nous savons (des tubes de cette silice sont utilisés comme gaine par certains fabricants de fibre optique) cette silice est obtenue par réaction du gaz $SiCl_4$ sur l'oxygène,¹ dans une torche à plasma. Ce procédé de synthèse fournit une silice de bonne qualité chimique, exempte d'impureté gênante (métallique comme le fer par exemple, responsable de la teinte verdâtre du verre ordinaire, et d'ions OH^- qui causent une très forte absorption aux rayonnements de grande longueur d'onde: en particulier la résonance de valence de OH^- cause une très forte absorption, typ. 1% de transmittance vers $960nm$). Notons toutefois que le verre de silice obtenu est loin d'être chimiquement pur, et contient une proportion assez considérable de chlore—quelque cent ppm—provenant du réactif initial[68]. Cette dernière espèce n'est pas gênante en ce qui concerne les propriétés d'absorption du verre, au moins dans l'infrarouge. En revanche, l'indice du milieu se trouve sensiblement diminué (quelques 10 à 100 ppm).

¹Le $SiCl_4$, liquide aux C.N.P.T., est un réactif industriel disponible à de très hauts degrés de pureté. Cet intermédiaire de la chimie du silicium (semi-conducteurs) peut être purifié très efficacement par des distillations successives.

Les fabricants de fibre optique ajoutent d'ailleurs parfois du chlore gazeux au cours du processus de synthèse dans le but de diminuer l'indice du matériau produit. Toutefois, comme dans notre cas la proportion d'halogène est inconnue, nous ne pourrions connaître a priori l'indice du milieu avec une très grande précision.

II-1-1-2 Filage de la préforme.

Après un nettoyage (méthanol puis acétone) visant à éliminer en priorité les espèces alcalines (comme Na) et les contaminants organiques à la surface du verre, nous étirons manuellement au chalumeau oxy-acétylénique (nous avons également essayé un chalumeau oxyhydrique, sans constater d'amélioration significative) une portion du cylindre, l'expérience permettant d'obtenir un "filage" relativement reproductible. En raison du caractère vitreux du matériau, et du gradient de température imposé par la flamme, le résultat est le suivant : on obtient deux demi-baguettes reliées par un fin filament. La zone de transition est d'autant plus conique que le gradient de température initial était grand. Le diamètre de la fibre est principalement réglé par la célérité avec laquelle on file le verre et par la viscosité du verre, donc sa température. Les extrémités des baguettes, du fait de leur plus gros diamètre, sont au cours du processus des réservoirs de verre pâteux, qui "nourissent" la fibre fine dont la substance se fige instantanément au contact de l'air. On prélève ensuite par fracture, une partie de la fibre formée, et on la fixe mécaniquement sur un support.

Il convient néanmoins de prêter attention à quelques détails lors de l'opération de filage. Le chauffage direct du verre par une flamme nue doit s'effectuer avec une grande prudence, sans quoi la silice sera irrémédiablement dégradée. Si le chauffage est effectué avec une flamme fuligineuse (réductrice), les produits organiques de réaction imbrulés peuvent réagir avec la silice pour former des dépôts noirâtres (silicium ou carbure de silicium?), très peu transparents... Un chauffage prolongé fait naître dans la silice une myriade de microbulles d'hydrogène (l'hydrogène atomique diffuse très facilement dans le verre). On s'attachera donc à limiter autant que possible cette opération, et à bien contrôler la température ($< 2000K$). (Chauffé à plus de $1000K$ les bandes électroniques de la silice sont telles que le matériau devient un très bon corps noir : l'émission de lumière visible permet de connaître la température atteinte.) En conclusion, cette étape de verrerie n'est très certainement pas optimale, et nous recherchons d'autres techniques de chauffage (purement radiatives).

A partir de l'ébauche qui se présente donc comme un fin filament de silice d'un diamètre d'environ 20 à $100\mu m$, nous allons fabriquer une microsphère à l'une des extrémités. La silice étant un corps pur, sa viscosité va considérablement se modifier au voisinage de son point de fusion, et les forces de tension superficielle vont alors jouer un rôle important sur la forme de la surface libre du verre fondu. L'idée est donc de fondre sans contamination l'extrémité libre de la fibre. Lorsque le verre devient liquide, il se forme une goutte à l'extrémité du fil de silice. Celle-ci prend alors approximativement la forme d'une calotte sphérique, sous l'effet des forces de tension superficielle.

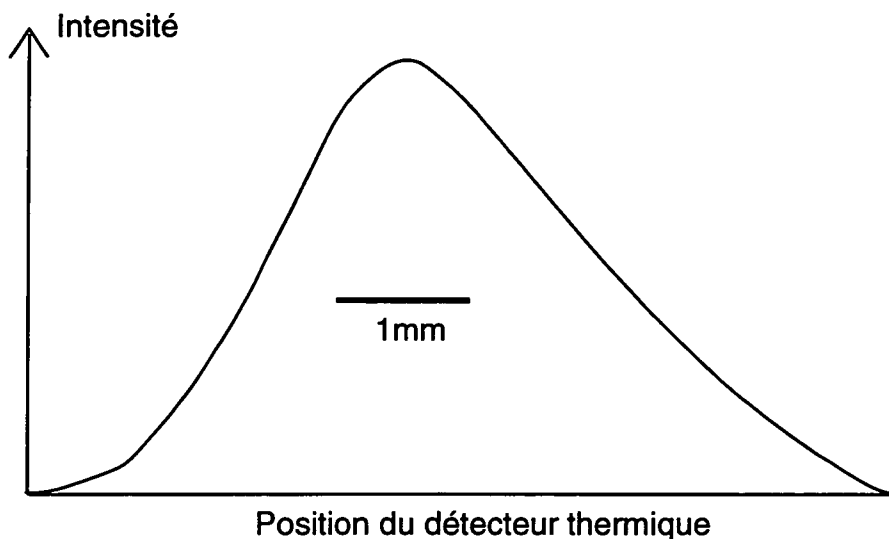


Figure II.1: Variation suivant un axe radial de la puissance émise par le laser CO_2 guide d'onde utilisé pour l'expérience. Bien que la distribution de champ émise ne soit pas gaussienne, on ne distingue pas sur cette mesure d'ondulation de fréquence spatiale élevée: un tel faisceau ne devrait pas produire de perturbation sur la surface du verre.

II-1-1-3 Fusion par laser CO_2 .

La petite taille de la sphère que nous voulons former impose que l'apport d'énergie destinée à la fusion de l'extrémité de la préforme soit extrêmement localisé. De plus, en raison des risques exposés plus-haut de pollution du verre par une flamme, il nous a semblé préférable de recourir à un mode de chauffage purement radiatif. Nous avons finalement opté pour le faisceau d'un laser à dioxyde de carbone. Le laser dont nous disposons est un laser guide-d'onde à excitation radiofréquence, de puissance maximale (multimode) 10W. Par son mode d'excitation, il est facile de régler à volonté la puissance moyenne émise par le laser, en variant le rapport cyclique du signal booléen qui autorise l'oscillation du générateur HF de pompe. Dans notre première expérience, ce rapport cyclique était synthétisé numériquement (avec une résolution du pour cent), par un hachage à une fréquence voisine d'une dizaine de kilohertz. (La finesse d'ajustement a récemment été portée à un pour mille pour les expériences de fusion réalisées sous pression réduite.) Nous nous sommes également assuré de l'absence de modes transverses de grande fréquence spatiale. En effet, si le faisceau CO_2 présentait des variations parasites d'intensité de grande fréquence spatiale, des ondulations de même période pourraient être induites à la surface de la cible lors de la fusion. La figure II.1, qui représente une section du faisceau laser, a été obtenue en déplaçant très lentement un bolomètre éclairé par une fente mobile de 5/100mm.

Des expériences préliminaires ont également démontré que l'irradiation laser de la cible devait être la plus isotrope possible, et l'illumination simultanée de l'ébauche par

au moins deux faisceaux semble un minimum. L'interaction du faisceau thermique avec la silice produit un certain nombre d'effets parasites dont quelques-uns sont recensés ci-dessous:

- La force générée par la pression de radiation d'un faisceau CO_2 de puissance P , vaut P/c (si toute l'énergie sert au chauffage). Une puissance de 10 watts engendre une force correspondant au poids d'une sphère de $120\mu m$ de diamètre. Les déformations induites seront comparables à la gravité.
- L'effet de "radiomètre". Si le chauffage est effectué dans un gaz, la thermalisation des molécules de celui-ci avec la surface à haute température, augmente l'impulsion moyenne transférée à la paroi, et donc la pression locale. Dans le cas d'un seul faisceau de chauffage, tout gradient de température entre un point directement irradié et son opposé sur la sphère va créer une force radiométrique, fraction de la pression atmosphérique, qui pourrait perturber la symétrie de révolution de la boule formée.
- Enfin, de tels gradients de température sont également très préjudiciables à une fusion axiale de la fibre. En effet, la viscosité est plus faible au point de température supérieure, ce qui fait que la fibre va se courber vers le faisceau.

Nous avons finalement construit un système optique qui divise la puissance du laser en deux faisceaux de même intensité, chacun des bras étant lui-même doté d'une optique (en $ZnSe$) de focalisation. Les deux faisceaux contra-propageants sont ajustés pour être focalisés au même point de l'espace. L'expérience montre que la puissance dans les deux branches doit être réglée à mieux que 10%, pour que la fusion s'effectue dans de bonnes conditions. Un autre point important est le réglage des distances qui séparent les deux optiques $ZnSe$ de focalisation de l'ébauche située en leur milieu. Celles-ci seront égalisées aussi bien que possible et choisies de manière à être légèrement sous-focales, de manière à ce que les faisceaux ne soient que partiellement interceptés par la silice (soit légèrement plus grande que la microsphère que l'on veut former: quelques centaines de microns). Ces paramètres sont ajustés expérimentalement en observant les effets des taches focales sur une cible fusible (PMMA).

Dans nos premières expériences, l'expérimentateur contrôlait manuellement la puissance du laser, tout en déplaçant, sous contrôle binoculaire, l'ébauche suivant trois axes. L'opération étant menée à l'estime, le contrôle du diamètre final de la forme obtenue était réalisée à environ $5\mu m$ près. La figure II.2 donne une vue d'ensemble du système utilisé initialement pour la fusion des microsphères. Les déplacements du support de fibre utilisaient des vis micrométriques.

Nous avons réalisé des photographies au microscope électronique à balayage des "gouttes" de silice, qui montrent bien la forme générale obtenue. Le cliché II.3 montre la forme typique obtenue, ici pour un diamètre de $150\mu m$. L'observation de la surface aux plus forts grossissements n'a révélé aucune structure visible à l'échelle de $10nm$. (le courant du faisceau d'électrons et la tension d'accélération étant réduits au maximum pour ne pas

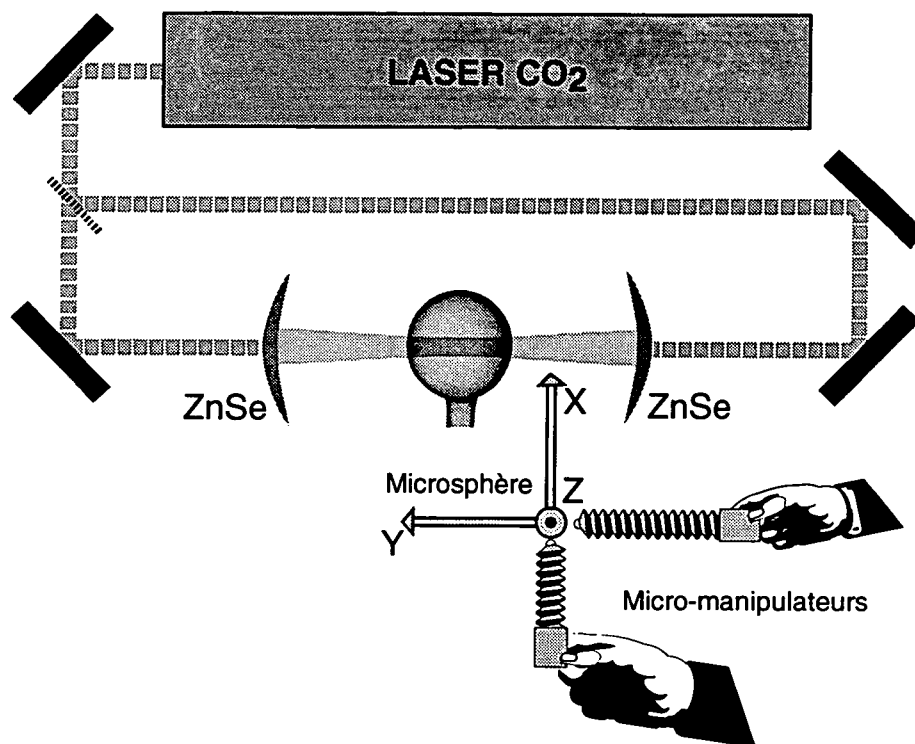


Figure II.2: *Schema du premier dispositif de fusion par laser CO₂, dans une onde stationnaire.*

endommager la silice métallisée pour l'observation microscopique[69]. Un faisceau trop énergétique peut "brûler" superficiellement la surface de l'échantillon et créer de ce fait de fausses imperfections.) L'allure globale de la forme de verre obtenue est intuitivement assez facile à comprendre. La partie la plus sphérique, qui renferme l'essentiel du verre, est au cours de la fabrication la partie la plus chaude. La chaleur est principalement évacuée par les pertes radiatives de la silice chauffée à l'incandescence (celles-ci suivent la loi de Stephan en σT^4) et par les pertes convectives du gaz (ce dernier effet est comparable au précédent lors de la fusion). Ces phénomènes de refroidissement, conjugués à la relativement bonne conductibilité thermique de la silice fondue nivellent les écarts de température, et expliquent la bonne rotondité de la surface. La zone reliée à la fibre qui a donné naissance à la sphère, est une sorte de "ménisque" annulaire qui s'explique par le passage progressif de l'état liquide à l'état solide dans la partie cylindrique.

Il se produit cependant au cours de la fusion un phénomène qui ne peut être passé sous silence. La silice chauffée à son point de fusion est le siège de deux effets physico-chimiques différents qui sont responsables d'une perte progressive de matière. La silice chauffée à haute température se sublime et se décompose en surface en libérant du monoxyde de silicium, que l'on observe dans l'air sous forme de fumées blanches de silicates. Ces pertes de matière contrarient la croissance des sphères qui fondent la fibre ébauche. La vitesse d'accrétion à laquelle la boule en formation "mange" la fibre est proportionnelle à la puissance véhiculée entre la surface chauffée par le laser et le "queusot", divisée par la section de la fibre, tandis que la vitesse de sublimation est fonction de la surface de la sphère formée et de la température. Expérimentalement, on constate que l'on parvient, après un certain temps, à un équilibre, qui conduit à un rapport (diamètre final de la sphère) / (diamètre de la fibre ébauche) de l'ordre de 3 à 4, quasi indépendant des conditions opératoires, ce qui confirme l'explication "cinétique" ci-dessus.

On obtient à l'issue de cette préparation une "microsphère"² qui semble assez sphérique; celle-ci reste bien-sûr soudée à la fibre initiale. Lorsque le système optique de fusion est bien aligné et lorsque les puissances sont correctement ajustées, on produit de la sorte assez facilement des sphères de diamètre compris entre 50 à 250 microns (suivant le diamètre de la fibre ébauche et les conditions expérimentales), d'ellipticité meilleure que 10^{-3} (les plus petites sphères étant en général les plus rondes).

II-1-1-4 Zone optiquement utilisable.

Dans le premier chapitre de ce mémoire, nous avons vu qu'une certaine catégorie de modes résonnants des microsphères diélectriques présente la particularité d'avoir l'essentiel du champ confiné au voisinage d'un grand cercle du résonateur. Nous avons alors appelé ces résonances, "modes de galerie" et introduit un système de numérotation des modes $\{l, n, m\}$. Pour des résonateurs parfaitement sphériques, la condition de résonance est indépendante de m et il subsiste une dégénérescence en m d'ordre $2l + 1$. Nous savons que les modes de galerie les plus fins correspondent aux valeurs de m telles que $|m|$ soit

²Par commodité de langage, nous continuerons d'appeler les micro-résonateurs rattachés à la fibre de silice qui leur a donné naissance "microsphère"!

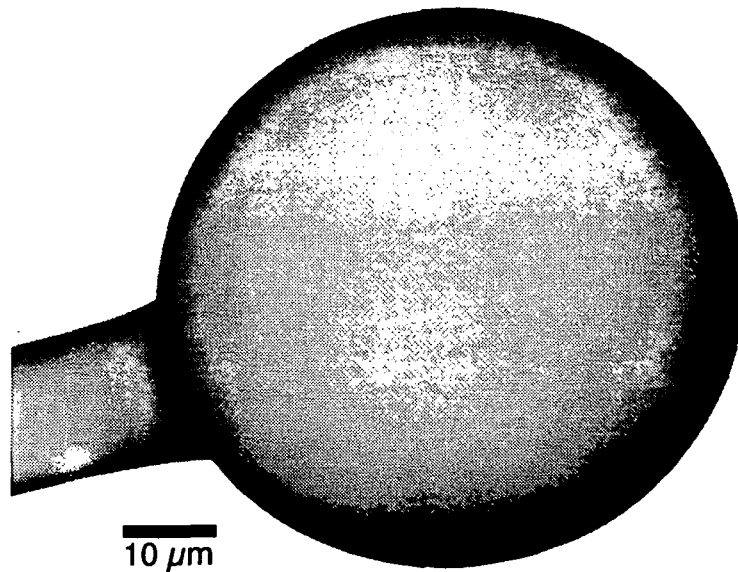


Figure II.3: Image obtenue par microscopie électronique à balayage d'une microsphère de silice de $150\mu\text{m}$ de diamètre, fabriquée par fusion par laser CO_2 .

voisin du maximum l . Pour ces valeurs des paramètres, l'essentiel de l'intensité du champ résonnant est localisé le long de l'équateur, et présente une ouverture—pour des tailles de sphères compatibles avec de grandes surtensions—, de seulement quelques degrés par rapport au centre.

La conséquence de cette localisation forte est très claire : même si la forme des parties polaires du résonateur diffère notablement de la forme sphérique idéale, les propriétés des résonances de grand $|m|$ seront uniquement déterminées par les deux courbures principales de la surface diélectrique, au niveau de l'équateur. Pour ces modes équatoriaux, la fixation mécanique pourra donc se faire dans les zones polaires du système, sans perturber les résonances.

Remarque : il faut cependant ajouter que ce raisonnement n'est valable (dans le cas où les deux courbures sont légèrement différentes) que si le résonateur n'est pas trop incliné lors de son montage mécanique, par rapport à son axe de révolution. Dans le cas contraire, il se produirait un phénomène semblable à ce qui se produit dans un Fabry-Pérot incliné: les trajectoires équatoriales dont nous avons parlé seraient remplacées par des courbes gauches, dessinées sur la surface du résonateur, comportant deux boucles symétriques, enroulées chacune une fois autour de l'ellipsoïde de révolution. Nous avons pu observer ce phénomène expérimentalement (uniquement pour un champ guidé non-résonnant) en regardant au microscope binoculaire la lumière diffusée par des poussières à la surface d'une microsphère volontairement inclinée de plusieurs degrés par rapport au plan d'incidence, le résonateur étant couplé à un laser hélium-néon.

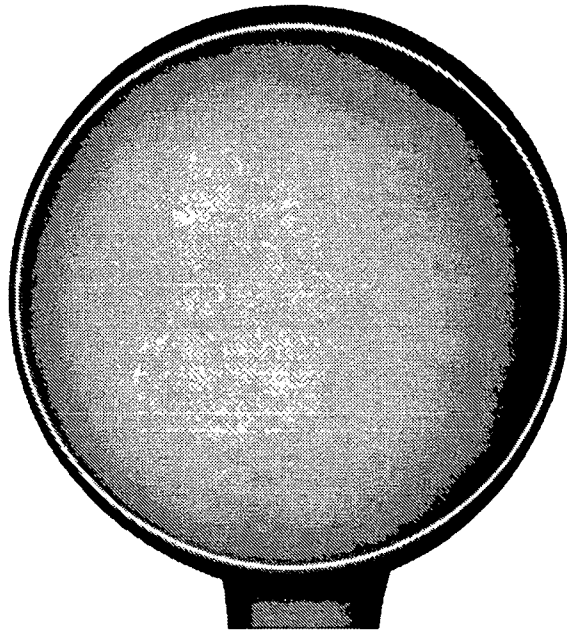


Figure II.4: *Le cercle clair, tracé sur la photographie du résonateur expérimental montré figure II.3, représente la trace de la meilleure sphère osculatrice passant par l'équateur. La déformation résiduelle est sensiblement elliptique.*

Le type de forme obtenue par la technique de fusion de l'extrémité d'une fibre (qui a engendré par exemple les objets des photographies II.3) produit des résonateurs adaptés à l'observation de résonances de grand $|m|$ et l'on peut vérifier sur la figure II.4 qu'à proximité du grand cercle perpendiculaire à l'axe de symétrie principal du système, on dispose d'une zone annulaire très voisine d'une calotte sphérique. Cette figure indique la trace de la meilleure sphère tangente "à l'équateur", sur le cliché du résonateur expérimental montré figure II.3.

Notons également que le groupe de V. Braginsky qui a initié les recherches dans le domaine des microsphères de silice (par opposition aux expériences sur des gouttes liquides), utilise probablement une technique de fusion voisine de la nôtre, mais nous ne connaissons pas le détail de sa procédure expérimentale [70].

Il reste maintenant à décrire le dispositif expérimental que nous avons construit pour les expériences de caractérisation spectroscopique des modes de galerie.

II-1-2 Couplage du laser sonde aux modes de galerie.

Comme dans toute cavité optique de haute finesse, en chaque point du champ quasi-stationnaire d'un mode propre résonant, la phase de l'onde est extrêmement bien définie.

Le couplage efficace d'un champ laser sonde monomode à la cavité n'est donc jamais aisé à réaliser, puisqu'il faut adapter mutuellement les champs source et résonnant. Décrivons le procédé de couplage par onde évanescente focalisée que nous utilisons, en nous appuyant sur les résultats théoriques obtenus au chapitre premier (page 51).

Nous avons obtenus dans la partie concernée, qu'un couplage efficace des modes de galerie à un champ incident évanescent impliquait une contrainte sur les vecteurs d'ondes longitudinaux, suivant l'hypoténuse du prisme qui produit le champ évanescent. Pour un faisceau sonde sous l'incidence ψ on obtient $N a / (a + G) = N' \sin \psi$, où a est le rayon de la sphère, N son indice, N' l'indice du prisme diélectrique qui sert à fabriquer l'onde évanescente à partir du faisceau du laser sonde et G le "gap", distance entre la sphère et le prisme. On se souviendra également que ce modèle simple produit des résultats voisins du calcul de couplage plus sophistiqué qui est également exposé au chapitre premier. Cette première estimation de l'angle ψ est suffisante pour concevoir le système optique nécessaire au couplage, sous réserve que l'angle d'incidence puisse être ajusté expérimentalement sur quelques degrés.

Évaluons numériquement la valeur de cet angle, en considérant une microsphère de silice d'un diamètre typique d'environ $100\mu m$, étudiée à la longueur d'onde de $785nm$, pour un "gap" de 5λ (qui correspond à une efficacité de couplage d'environ $-40dB$). Le prisme choisi est constitué d'un verre d'indice fort $N' = 1.7$ (connu sous l'appellation commerciale SF11 : ce verre possède un indice propre assez élevé tout en n'étant pas mécaniquement trop tendre, ce qui pourrait nuire à la qualité optique de sa surface ("pits").). On trouve pour de tels ordres de grandeur une incidence $\psi = 58^\circ$. Cette dernière valeur étant très voisine de 60° , on pourra utiliser un prisme d'indice équilatéral pour générer l'onde évanescente.

On choisira finalement une valeur de l'ordre de $\psi = 55^\circ$, plus proche de la valeur prédite par l'étude théorique précise du couplage en fonction de l'incidence. Remarquons que cet angle dépend a priori de l . Toutefois, pour les tailles de sphères que nous nous proposons d'étudier, l est relativement grand (de l'ordre du millier). Aussi, l'angle de couplage optimal ne variera pratiquement pas sur une grande étendue spectrale.

Jusque là, nous avons implicitement supposé que l'onde incidente sur le prisme créant le champ évanescent était une onde plane. Un tel champ produira une onde évanescente d'intensité constante pour une distance à la surface du prisme donnée. Du fait de la courbure de la sphère et de la géométrie des modes de galerie que nous souhaitons exciter, seule la portion de l'onde évanescente au voisinage immédiat du point le plus proche de la microsphère va contribuer au couplage. Cet effet est particulièrement marqué du fait que l'intensité de l'onde évanescente varie exponentiellement avec la distance au prisme. On a donc avantage à focaliser le faisceau laser sonde sur l'hypoténuse du prisme produisant le champ évanescent, sur un diamètre comparable à l'extension azimutale du mode, soit quelques longueurs d'ondes. Cette focalisation ne doit pas accroître l'ouverture angulaire du faisceau $2 \times \Delta\psi$ jusqu'à excéder la largeur du pic de couplage optimal prédit par le calcul du premier chapitre, page 110. Rappelons que la tolérance en angle d'incidence obtenue est de l'ordre de quelques degrés. L'ouverture du faisceau et la taille du waist w_0

à la surface du prisme ne sont toutefois pas indépendants. Les lois de l'optique gaussienne imposent en effet que:

$$\Delta\psi = \frac{\lambda}{\pi w_0}. \quad (\text{II.1})$$

Numériquement, pour un waist au niveau du prisme de diamètre 5λ , on trouve un angle au sommet $2 \times \Delta\psi \approx 2^\circ$, compatible avec la tolérance angulaire du couplage, typiquement de $\pm 2^\circ$.

Proposons ici une autre méthode de couplage, qui est fondée sur la similitude entre le champ d'un mode guidé d'une fibre optique monomode et le champ des modes de galerie au voisinage de l'équateur. Dans une fibre à saut d'indice, le champ électrique dans le cœur de diamètre a peut être approché par la formule (dans un système de coordonnées cylindriques):

$$\mathbf{E}(r, \theta, z) = E_0(\sin(n\phi)\mathbf{e}_r + \cos(n\phi)\mathbf{e}_\theta)J_n(\chi r)\text{Exp}[i(\chi z - \omega t)], \quad (\text{II.2})$$

χ étant fixé par les conditions aux limites. On peut montrer que χ est en première approximation légèrement plus petit que χ_0 défini par $J_n(\chi_0 a) = 0$, ce qui signifie simplement que, comme la condition aux limites est un saut d'indice, le champ n'est pas rigoureusement nul en $r = a/2$. Au contraire, la valeur χ_0 correspond à une condition de type conducteur parfait à la surface du cœur de la fibre. On en déduit donc que $\chi < 2\pi N/\lambda$. On retrouve là un résultat bien connu. La vitesse de groupe dans une fibre est inférieure à la propagation libre dans le diélectrique. Cette situation est similaire au cas des microsphères et il existe une onde évanescente qui s'étend à l'extérieur du cœur dans la gaine ($r > a/2$), de portée $\lambda/(2\pi)$. Supposons maintenant que l'on usine la fibre de manière à obtenir la structure représentée en II.5.

La gaine de la fibre est polie avec précaution de manière à presque atteindre le cœur. Ainsi, on devrait créer localement à l'extérieur de la fibre, une onde de vecteur d'onde complexe, de projection voisine de $\chi \sim \chi_0$ le long de l'axe de la fibre, et de valeur imaginaire pure perpendiculairement $\sim 2\pi i/\lambda$. On constate que ces valeurs des projections du vecteur d'onde sont approximativement celles que nous avons rencontrées lors de l'étude des modes de galerie dans les microsphères. En approchant la zone entaillée de la fibre de l'équateur de la microsphère, on devrait pouvoir coupler très efficacement le mode guidé de la fibre dans un mode équatorial résonnant. De plus, le phase matching est réglable en utilisant des fibres optiques possédant différents diamètres de cœur. L'intensité du couplage peut également être choisie en modifiant la distance de la fibre à la surface de la cavité. Cette méthode semble prometteuse pour réaliser un couplage fort aux modes équatoriaux, sans perte de lumière³. La photographie II.6 montre un tel dispositif, enchassé dans un bloc de résine chargé de poudre de silice. La surface active est marquée par une tache sombre.

Les paramètres expérimentaux sont maintenant connus; nous pouvons donc faire la description du premier montage optique que nous avons utilisé.

³L'industrie des télécommunications utilise couramment des coupleurs en X[71], qui sont constitués en fait par la réunion de deux demi-coupleurs identiques à celui décrit ici. Des pertes d'insertion (principalement causées par de la diffusion sur les surfaces entaillées) inférieure au décibel sont communes.

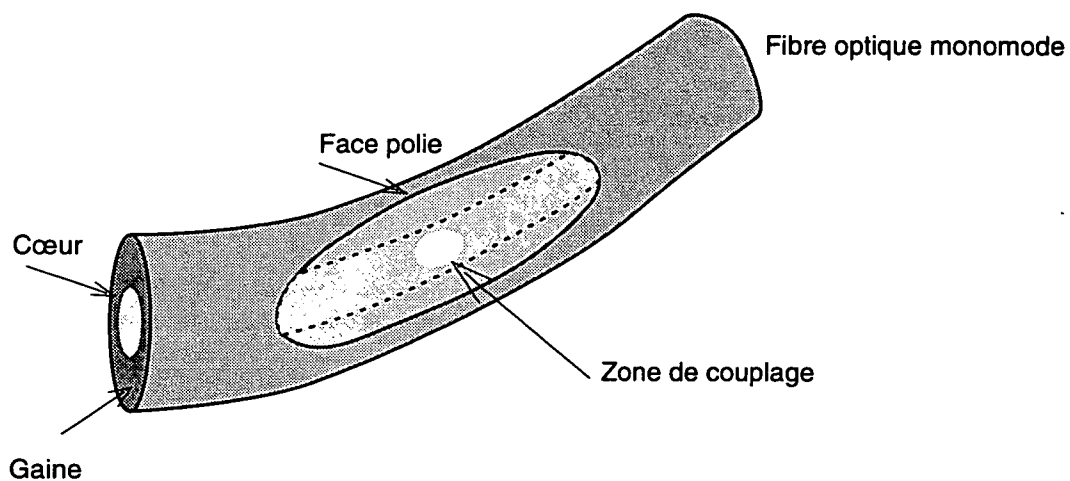


Figure II.5: Schéma descriptif d'un coupleur à onde évanescente utilisant une fibre monomode polie pour créer une facette parallèle au cœur.

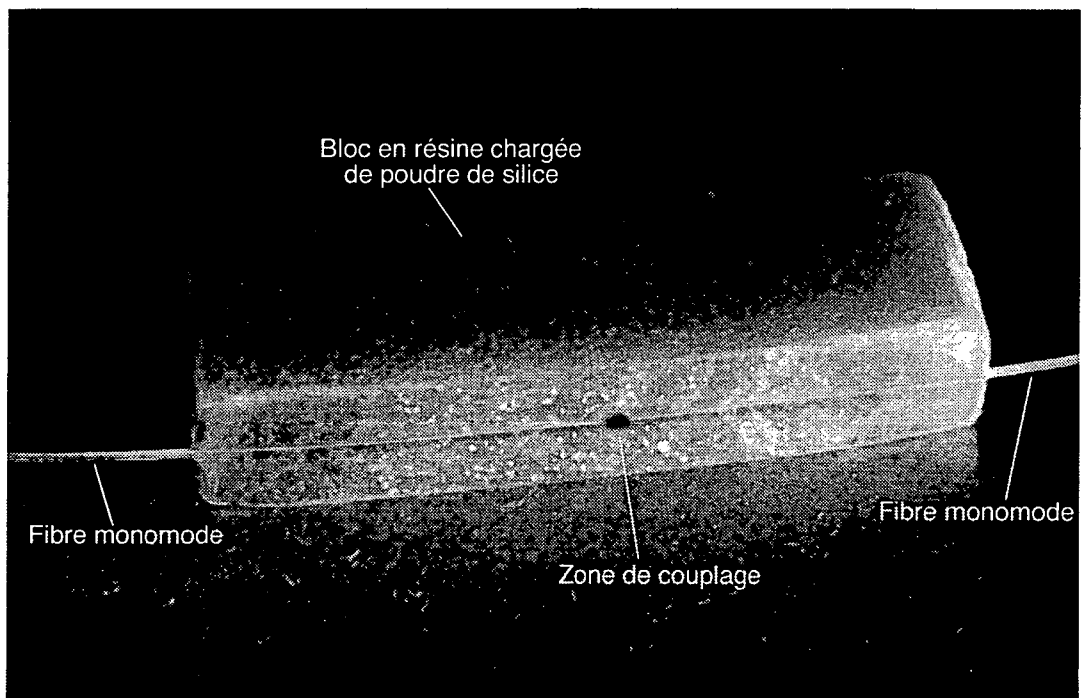


Figure II.6: Cette photographie montre un demi-coupleur fabriqué par la firme "SVFO". Ce prototype, dont l'entaille n'est pas assez profonde, a seulement permis une confirmation qualitative (en lumière rouge) de la faisabilité d'un tel couplage.

II-1-3 Description du montage de caractérisation des résonances.

II-1-3-1 Laser sonde.

L'étude spectroscopique des modes fins d'une microsphère (de taille comparable aux données du tableau de la page 69 résumant les principaux ordres de grandeur attendus), requiert une source laser présentant les caractéristiques spectrales suivantes. En vue de réaliser des enregistrements à haute résolution des résonances de galerie, la raie émise doit être particulièrement fine : idéalement son facteur de surtension devrait être plus grand que 10^{10} , puisque si les facteurs de qualité des sphères étaient limités par l'absorption de la silice, on a vu que des valeurs de cet ordre devraient être mesurées. De plus, du fait de la grande valeur de la pseudo-période, le laser de spectroscopie devrait présenter une accordabilité suffisante pour balayer au moins une pseudo-période de manière à rencontrer un échantillonnage représentatif des modes de galerie. Cela correspond, pour des paramètres de taille de quelques centaines à une accordabilité relative du pour cent! La réalisation d'une telle source n'est pas aisée. Nous avons construit pour les premières expériences une source utilisant un laser infrarouge à semi-conducteur, dont la pureté spectrale était améliorée par un dispositif optique externe. Nous allons maintenant décrire en détail ce système.

Le laser principal de spectroscopie utilisé dans les premières expériences était une diode laser *GaAlAs* SHARP LT021, à guidage par l'indice, délivrant au maximum $15mW$ à la longueur d'onde de $785nm$. Un tel semi-conducteur ne possédant pas une pureté spectrale suffisante pour enregistrer des raies de surtension supérieure à 10^7 , un système d'injection optique externe à réseau a été construit en vue d'affiner la raie laser. La lumière émise par la jonction, collimatée par un objectif Melles-Griot de $8mm$ de focale, est retro-réfléchi dans la diode laser par l'ordre un d'un réseau holographique Edmund-Scientific (disposé à environ $40mm$ de la jonction). L'ordre zéro du réseau extrait une partie de la lumière de la cavité laser, constituée à une extrémité par les traits du réseau, et à l'autre par une facette de la diode laser. Une telle configuration, par analogie avec les spectrographes, est parfois appelée montage de "Littrow", le canal d'indice fort de la jonction jouant le rôle de la "fente" du spectrographe. Un tel système optique d'auto-injection dispersif en phase a été mis en œuvre pour la première fois sur une diode laser⁴ dès 1981 [72][73][74][75], et le couplage de la diode laser à une cavité optique externe suffit à améliorer les propriétés spectrales du laser. L'ensemble du système, entièrement enfermé dans un bloc massif de DURALUMIN, est régulé en température. Un soin particulier a été accordé à cette mécanique afin de la rendre la plus rigide possible et minimiser les fluctuations de fréquences causées par des vibrations du système. Une boîte sourde élimine la majeure partie des ondes acoustiques nuisibles, l'ensemble de la table optique étant posée sur un support isolant les trépidations du sol (coupure 10Hz). Enfin, comme la fréquence d'oscillation optique des lasers à semi-conducteur dépend du courant qui traverse la jonction, la conception soignée du générateur électronique de courant tente de minimiser les variations et les bruits électriques divers introduits par l'alimentation en

⁴Un tel dispositif a été utilisé dès les années 70 comme élément sélectif dans les laser à colorant.

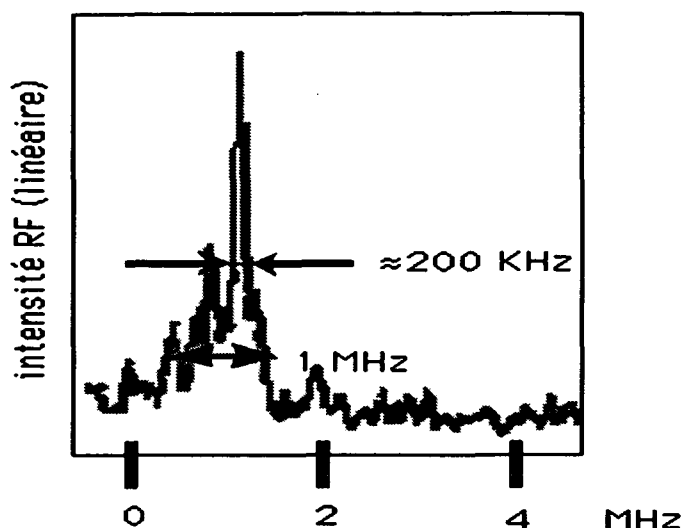


Figure II.7: Spectre du battement de deux systèmes laser identiques (voir la description du texte).

courant de la diode émettrice.

Pour contrôler le bruit de fréquence du système laser, nous avons mesuré le spectre de bruit en fréquence de l'intensité lumineuse traversant un Fabry-Pérot au voisinage de la confocalité, pour une intensité moyenne égale à la moitié de la lumière maximale transmise. La largeur des résonances du Fabry-Pérot valait 2MHz. L'amplitude de ce signal correspond à un bruit RMS en fréquence du laser de l'ordre de 50 à 100kHz (créé principalement par le bruit radio-électrique de la pièce et les vibrations du sol). Cependant nous avons observé qu'une contribution non-négligeable au bruit total provenait de sources larges à des fréquences de l'ordre du Mégahertz.

Pour mieux caractériser le bruit en fréquence dans notre montage, un second laser identique au laser sonde a été construit. La figure II.7 donne le spectre de battement des deux lasers. On distingue clairement une composante fine, de largeur comparable à la centaine de kilohertz, superposée à un bruit de fond beaucoup plus large.

Nous avons au cours de cette première série d'expériences, tenté d'améliorer par différents moyens cette largeur instrumentale, qui limite l'observation spectroscopique à des résonances de facteur de surtension 4.10^9 . Nous avons par exemple travaillé à diminuer les bruits de courant issus des alimentations électroniques, bruits qui se répercutent sur les caractéristiques spectrales des lasers. Nous avons également veillé systématiquement à isoler l'expérience des vibrations mécaniques du sol du laboratoire: nous avons vérifié au moyen d'un accéléromètre sensible[76] de notre fabrication que des chambres à air disposées sous la dalle de granit supportant le montage optique réduisent considérablement les trépidations dans la gamme 5-100 hertz.

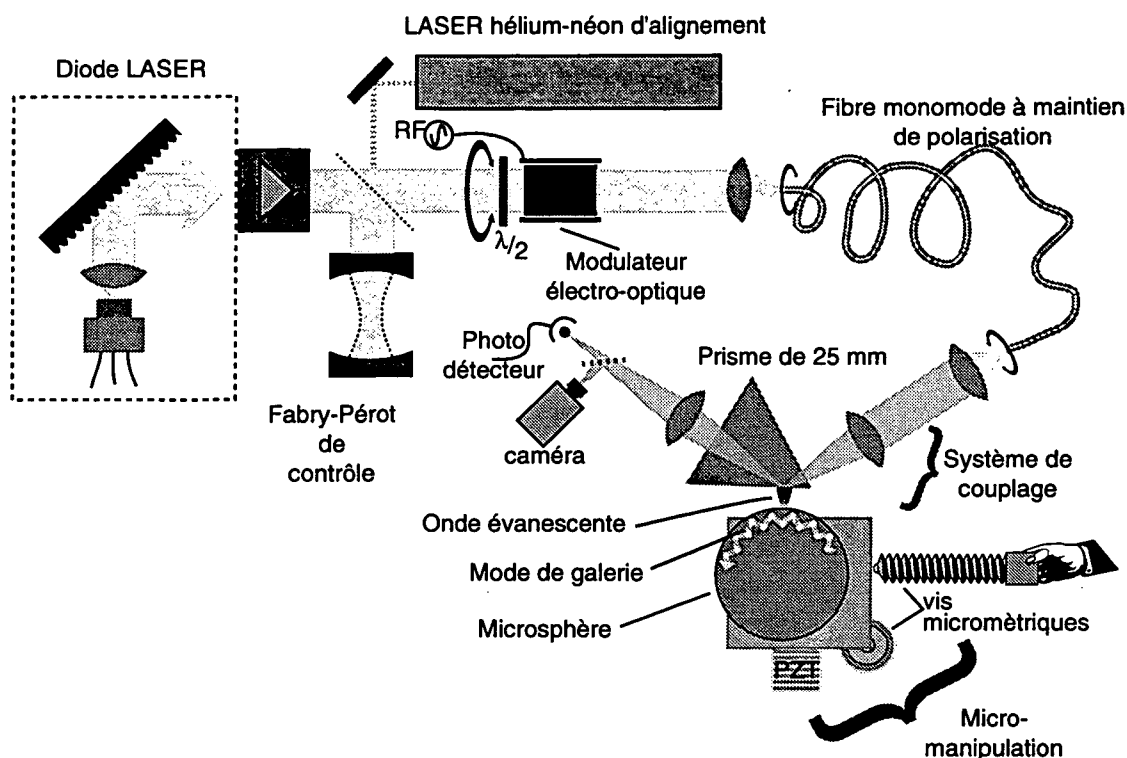


Figure II.8: Premier système de caractérisation spectroscopique des microsphères.

II-1-3-2 Système optique.

Présentons le système optique, schématisé sur la figure II.8, qui a permis l'enregistrement des premières résonances de grande finesse.

La lumière issue du laser de spectroscopie traverse d'abord deux isolateurs optiques (de marque Isowave, $\sim 30dB$ d'isolation), de manière à limiter les effets de rétroaction optique parasites vers le laser de spectroscopie (lumière diffusée, réflexion sur les détecteurs ou les lentilles), puis l'astigmatisme propre aux diodes laser est compensé au moyen de prismes anamorphoseurs.

Dans un but de visualisation, la lumière du laser de spectroscopie est ensuite superposée soigneusement au faisceau rouge d'un laser Hélium-Néon. Comme nous le verrons, cette lumière rouge s'est avérée d'un grand secours pour la recherche des résonances. Le faisceau infrarouge est ensuite modulé en phase au moyen d'un modulateur électro-optique. Ce dernier, de type modulateur à ondes progressives, est constitué d'un cristal de $LiTaO_3$, d'une section de $1mm^2$, d'une longueur telle ($25mm$) que l'accord longitudinal de phase soit encore acceptable pour des fréquences de modulation de l'ordre du Gigahertz.

Enfin, l'excitation du cristal, réalisée par des électrodes faiblement inductives, autorise une modulation efficace, de l'ordre de 5% pour une puissance RF de l'ordre de quelques watts. Le cristal est monté en aussi bon contact thermique que possible, sur une surface polie de laiton, qui joue également le rôle de masse électrique pour la radiofréquence. Le faisceau en sortie du modulateur est repolarisé au moyen d'un cube polariseur tournant autour de l'axe du faisceau, de manière à éliminer toute autre polarisation (induite par d'éventuelles biréfringences dans le cristal) que la polarisation linéaire initiale. La lumière modulée traverse ensuite un morceau de fibre à maintien de polarisation⁵[77], conduisant celle-ci au cœur de l'expérience. Cette fibre joue simultanément plusieurs rôles.

- Permettre un contrôle de la superposition de la lumière-guide rouge avec le laser infrarouge.
- Effectuer un filtrage spatial du faisceau infrarouge, de manière à envoyer un mode gaussien de bonne qualité sur la zone de couplage : l'extrémité de la fibre constituait un point source parfait pour le dispositif optique générant l'onde évanescente focalisée.
- Permettre un découplage mécanique supplémentaire entre la table optique principale et le sous ensemble portant la microsphère et l'optique de focalisation.

Présentons plus en détail cet ensemble optique et mécanique qui assure les deux fonctions principales de l'expérience : la génération d'une onde évanescente focalisée, et la micro manipulation d'une microsphère (attachée à sa fibre support) dans ce champ évanescent.

L'élément central de ce dispositif est un prisme équilatéral en SF11, de 25mm d'arête, d'indice 1.7. Ce prisme est monté sur un support (ajustable autour de l'axe vertical), lui-même fixé sur une lourde platine intermédiaire, posée sur un amortisseur visco-élastique. Un second support tournant micrométrique, concentrique avec le porte-prisme, porte l'extrémité de la fibre à maintien de polarisation. Son extrémité est utilisée comme un point source, dont on projette une image réelle au moyen de deux objectifs de microscope tête-bêche (objectifs "16×" Melles-Griot, de focale 10.8mm, d'ouverture numérique 0.32) en un point focal situé précisément sur l'hypoténuse du prisme d'indice fort. Comme cette focalisation s'effectue après la traversée d'une épaisseur de verre (du prisme équilatéral), on tente d'approcher autant que possible la tache focale d'une arête du prisme. On minimise ainsi les aberrations (principalement un défaut de sphéricité) induites par les objectifs qui ne sont pas corrigés pour de telles conditions. Le support tournant micrométrique qui porte l'ensemble de cette optique, permet, par une simple rotation, de changer à volonté l'angle d'incidence au point de couplage (noté ψ plus haut). De plus, trois butées "XYZ" permettent d'ajuster dans l'espace, la position exacte du foyer par rapport au prisme.

⁵Une telle fibre, dont le cœur possède une forte anisotropie provoquée artificiellement par une contrainte ou une ovalisation du guide, présente la particularité de pouvoir guider deux modes de polarisations orthogonales, avec deux vitesses de phases légèrement différentes.

Un second ensemble de micromanipulation suivant trois axes, indépendant du précédent, porte la fibre-support de la microsphère, dont l'axe est fixé a priori suivant la verticale. L'axe qui règle le "gap", c'est à dire la distance entre la microsphère et la surface du prisme est muni à la fois d'une butée micrométrique différentielle, et d'une céramique piézo-électrique qui autorise un contrôle électrique très fin.

La lumière du laser sonde, après réflexion totale frustrée au point de couplage sur l'hypoténuse du prisme, ressort du prisme équilatéral, est collimatée par un groupe de lentilles, partagée en plusieurs faisceaux qui sont envoyés vers les détecteurs.

Avec une telle mécanique possédant plusieurs translations micrométriques empilées, l'ajustement de la plupart des réglages essentiels, qui sont sensibles pour des translations le long de l'hypoténuse à des distances de quelques longueurs d'onde (taille de la zone focalisée de couplage), et pour le "gap" à une petite fraction de $\lambda \sim 100nm$ (portée de l'onde évanescente), requièrent une grande précision manuelle.

Avant de décrire le protocole expérimental de recherche des signaux, et de présenter ceux-ci, il nous faut décrire les détecteurs placés sur le faisceau émergent du prisme.

II-1-3-3 Détecteurs.

L'un des faisceaux, après séparation et collimation, est envoyé directement sur la rétine sensible d'une caméra de télévision. Nous pensons que les images obtenues sont très utiles pour trouver rapidement les bonnes conditions expérimentales qui permettent l'observation des résonances. On va voir que l'on réalise ainsi une sorte de microscopie de champ proche de l'hypoténuse du prisme au voisinage de la tache focalisée du laser sonde, perturbée par la présence de la microsphère. En effet, en l'absence de microsphère, on obtient simplement la section d'un faisceau gaussien $TEM\{0,0\}$. Supposons maintenant que la distance focale du système optique de couplage soit mal ajustée, et que l'on déplace la microsphère parallèlement à l'hypoténuse, à une distance comparable à la portée de l'onde évanescente. Du fait de la dépendance exponentielle des effets optiques en fonction de la distance dans l'onde évanescente, la présence de la sphère dans ce champ va principalement avoir un effet sur le champ au voisinage des points où la microsphère et le prisme sont les plus proches: la sphère, par son indice, va modifier quasiment ponctuellement la phase de l'onde évanescente défocalisée. Une telle perturbation locale d'un faisceau gaussien, hors d'un plan focal, va en général créer des anneaux désaxés. L'obtention d'anneaux symétriques démontrera au contraire que le résonateur se trouve exactement sur la perpendiculaire au prisme passant par le centre de la tache focale. En plus, ces franges donnent une information relative à la distance de la perturbation au plan de Fourier. Elles disparaîtront lorsque la focalisation sera rigoureuse.

L'image fournie par cette caméra nous permet donc d'ajuster trois paramètres de l'expérience: la focalisation du laser sonde sur l'hypoténuse, et l'alignement de la microsphère avec cette tache focale.

Une partie de la lumière est également dirigée vers un détecteur quadratique "lent" (soit un photomultiplicateur HAMATSU R666, soit une photodiode silicium), dont l'amplificateur de charge possède une bande passante limitée aux basses fréquences (100Hz à

100kHz) Nous enregistrons ainsi l'intensité totale quasi continue transmise par le prisme, avec ou sans interaction avec la microsphère. Il faut bien noter que la fréquence de modulation de phase générée par le modulateur électro-optique ne peut être détectée par cet appareil.

Enfin, la majeure partie de la lumière est envoyée à un photodétecteur rapide, optimisé pour détecter la variation d'intensité à la fréquence de modulation. Ce dernier est constitué d'une photodiode silicium PIN, dont le photocourant est amplifié par un amplificateur transimpédance. La bande passante de ce photodétecteur est de l'ordre de 200MHz .

II-1-4 Principe de détection des signaux.

Dans un premier temps, on cherche à mesurer, en fonction de la longueur d'onde, l'amplitude et éventuellement la phase du faisceau sonde qui subit une réflexion totale à l'intérieur du prisme. On peut deviner simplement ce qu'il advient de l'amplitude du faisceau sonde, lorsque la fréquence de ce dernier coïncide ou ne coïncide pas avec celle d'un mode de galerie.

II-1-4-1 Mesure directe de l'intensité transmise.

Exactement à résonance, les photons du laser sonde peuvent entrer dans le mode de galerie, puisqu'alors les conditions aux limites singulières maximisent l'amplitude du champ résonnant. A l'inverse, hors résonance, les photons de la sonde ne peuvent entrer dans le mode de la microsphère car la phase de l'onde qui leur est associée ne présente pas les dépendances adaptées. Cette distinction qualitative du comportement à et hors résonance ne concerne que la partie du champ couplée aux modes résonnants: même hors de la largeur d'une résonance fine, une partie du champ se couple aux modes non-résonnants du "fond" de diffusion (modes faiblement résonnants que nous avons évoqués à plusieurs reprises.) Tous ces photons sondes qui ont été transférés du mode laser au mode de galerie par le couplage, peuvent dès lors après un temps variable, suivre plusieurs chemins probabilistes, certains leurs faisant quitter le résonateur, d'autres encore correspondant à une absorption. Ce couplage du faisceau sonde incident au mode de galerie excité peut être mis en parallèle avec le mécanisme symétrique, qui permet au champ de s'échapper dans le faisceau sonde émergent après réflexion sur l'hypoténuse du prisme de couplage.

Pour démontrer l'égalité des amplitudes des couplages pour entrer et sortir du résonateur, il suffit d'opérer une symétrie par renversement du temps, suivie par une symétrie d'espace: le faisceau sonde incident est couplé, comme indiqué sur la figure II.9, à un mode de galerie *droit*. Par renversement du temps on déduit que le mode gauche correspondant est couplé avec le même coefficient à un faisceau émergent du prisme vers le bas. Enfin, une symétrie d'espace laissant la sphère et l'hypoténuse du prisme invariants transforme le mode *gauche* en mode *droit* et donne un faisceau émergent du prisme avec le même vecteur d'onde qu'un faisceau réfléchi.

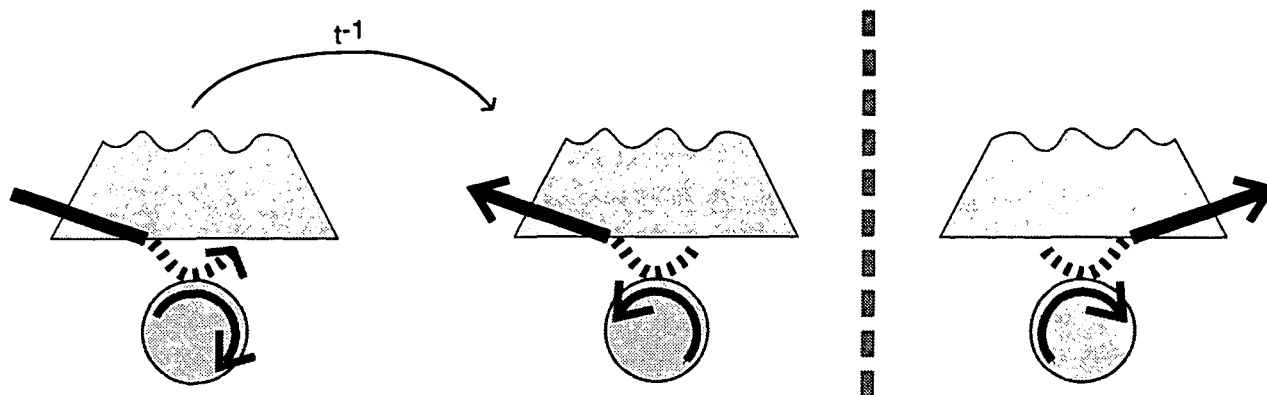


Figure II.9: Invariance du couplage par renversement du temps et symétrie d'espace.

Bien entendu, un photon du mode peut également subir une diffusion, élastique ou inélastique, ou encore s'échapper à l'infini dans une onde propageante (pertes par diffractions). Dans le cas de micro-résonateur d'un diamètre comparable à $100\mu m$, ces pertes sont tout à fait négligeables pour les modes de galerie. Comme, à résonance, tous les photons provenant de l'onde laser sonde ne sont pas restitués à l'onde sortante du prisme en raison des mécanismes que nous venons de décrire, la transmission du système prisme-microsphère est nécessairement inférieure à l'unité. On obtiendra donc sur le détecteur quadratique, des raies d'absorption, de profondeur déterminée par le couplage du faisceau sonde aux modes résonnants, de largeur subordonnée à la probabilité totale des photons de s'échapper du résonateur. Le facteur de qualité attendu Q , pour un mode donné sera donc déterminé à partir du facteur de qualité Q_{propre} intrinsèque du mode, pour une microsphère isolée dans l'espace, par la formule :

$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{Q_{couplage}} + \frac{1}{Q_{propre}} \quad (II.3)$$

(Q_{propre} est lui-même décomposable au moyen de l'expression I.66, page 62).

La conséquence pratique de la diminution du facteur de qualité d'une résonance avec le couplage, impose donc de vérifier systématiquement, lorsque l'on cherche à enregistrer des résonances aussi fines que possible, que la largeur observée n'est pas limitée par un "gap" G trop petit.

Cette mesure directe de l'intensité transmise donne directement le couplage et la largeur des modes de galerie, lorsque l'on balaye assez lentement la fréquence du laser sonde: les résonances de galerie apparaissent dans une telle expérience comme des raies d'absorption. Il s'agit donc d'une détection sur fond blanc. Les performances (rapport signal sur bruit) d'une telle détection se sont avérées insuffisantes pour observer les résonances les plus fines, qui rappelons-le, doivent être observées dans des conditions de

couplage très faible. En effet, une telle mesure n'est pas optimale électroniquement, car elle s'effectue sur une bande de fréquences centrées autour de la fréquence nulle. Dans ces conditions, les chaînes de photo-détection sont victimes de nombreuses sources de bruits électroniques à basse fréquence, de grande amplitude, qui augmentent le bruit de la détection (bien au delà du bruit de photons car le bruit électronique des amplificateurs présente en général un grand excès de bruit autour de la fréquence nulle).

Aussi, nous avons choisi un mode de détection d'un principe différent, qui opère loin de la fréquence nulle. Cela nous a permis, toutes choses égales par ailleurs, un gain d'au moins un ordre de grandeur sur le rapport signal sur bruit.

II-1-4-2 Détection par modulation de phase.

La lumière issue du laser balayable de spectroscopie traverse un modulateur électro-optique[78] avant d'être envoyée à l'optique de couplage; on a également la possibilité de détecter, à cette fréquence de modulation, l'intensité du laser sonde après interaction avec la microsphère. Voyons dans ce paragraphe comment il est possible d'extraire l'information concernant les résonances du signal radiofréquence détecté par le photorécepteur rapide.

Pour comprendre les effets induits par une cavité sur un faisceau modulé en phase, modélisons le système de la manière suivante. Supposons d'abord que le laser est parfaitement monochromatique, et que le modulateur électro-optique réalise une modulation de phase parfaite (sans modulation d'amplitude). On admettra également ici que la profondeur de modulation est choisie de telle sorte que l'on peut négliger totalement la contribution des modulations aux fréquences harmoniques plus élevées que le fondamental. L'annexe D présente une mise en équation complète. Nous invitons le lecteur à y rechercher les calculs explicites des signaux attendus. En revanche, sans prétendre deviner la forme exacte des signaux, on peut au moins comprendre le principe de la méthode. La figure II.7 illustre graphiquement comment une résonance peut, en atténuant et en déphasant les différentes composantes présentes dans le champ sonde, induire une modulation d'amplitude à la fréquence de modulation.

En l'absence de couplage avec la cavité (diagramme de gauche), le détecteur qui est assez rapide pour mesurer des variations d'intensité à la fréquence de modulation, va recevoir la porteuse centrale, c'est à dire le laser lui-même, et les deux bandes latérales symétriques, de phases opposées. Il n'y aura aucun signal à la fréquence de modulation, comme l'indique graphiquement la partie gauche de la figure ci-dessous, car les deux bandes latérales produisent une contribution totale exactement nulle.

Lorsqu'une résonance se trouve au voisinage d'une des bandes latérales (diagrammes (1) et (3) de la figure II.10), si l'on suppose que la largeur du mode est notablement inférieure à la fréquence de modulation, le détecteur va mesurer cette fois, le battement entre la porteuse, une bande latérale inchangée et la seconde bande latérale atténuée et déphasée. L'annulation stricte des deux composantes modulées ne se produit plus, et l'on obtient un signal non-nul à la fréquence de modulation; ce cas est représenté au centre de la figure précédente. Enfin, troisième cas (diagramme (2)), la résonance est au voisinage

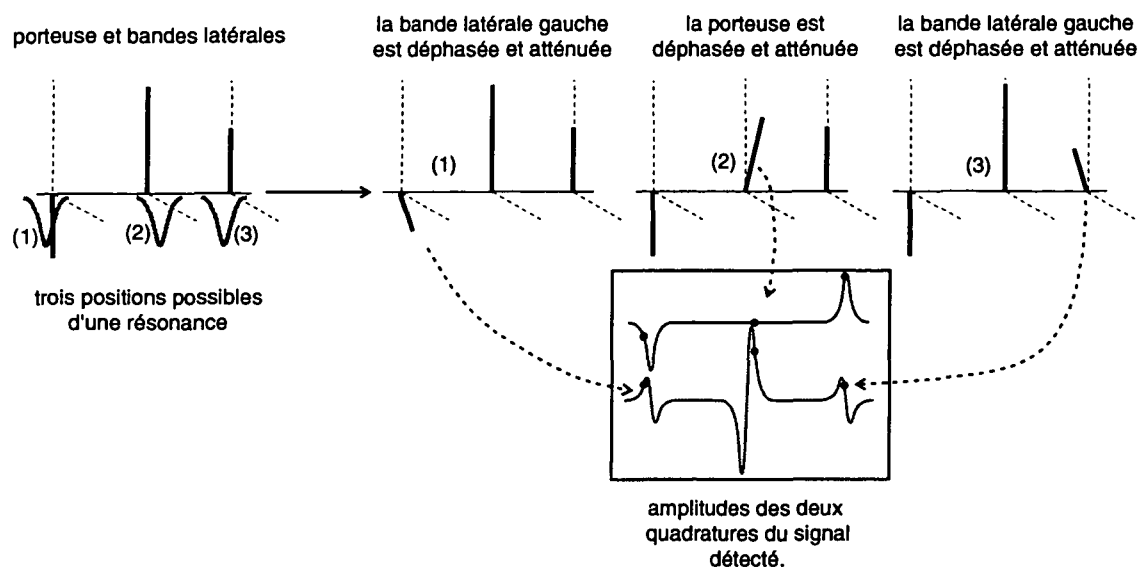


Figure II.10: Représentation graphique de l'effet de la cavité sur les phases et les amplitudes des composantes du laser de spectroscopie, ainsi que l'amplitude du signal RF détecté, pour les deux quadratures.

de la fréquence centrale. Si cette dernière ne coïncide pas exactement avec le mode, la cavité va déphaser et atténuer la porteuse, en laissant les bandes latérales inchangées. En choisissant comme nouvelle origine des phases la porteuse déphasée, on retrouve une situation où une porteuse bat avec deux bandes latérales de mêmes amplitudes et de phases respectives $\pi - \delta\phi$ et $-\pi - \delta\phi$, ce qui donne à nouveau un signal sur le détecteur. En revanche, lorsque la cavité est précisément centrée sur la porteuse on a une contribution exactement nulle.

Une analyse quantitative de ces effets de battement donne, comme cela est expliqué en détail dans l'annexe D, les allures calculées suivantes pour l'amplitude du signal RF détecté en fonction de la fréquence du laser: le graphique de gauche (figure II.11) présente dans le plan de Fresnel le cas où le diagramme caractéristique de la réponse en fréquence de la cavité est translaté par une composante parasite, de module et de phase indépendants de la fréquence. Cela correspond au cas d'une modulation de phase imparfaite à laquelle s'ajoute une modulation d'amplitude parasite de phase quelconque, appelée parfois "fuite vectorielle". La courbe, à droite, montre l'allure du signal démodulé en amplitude. On remarquera que dans ce cas, les pics diffèrent de la forme caractéristique des signaux d'absorption ou de dispersion.

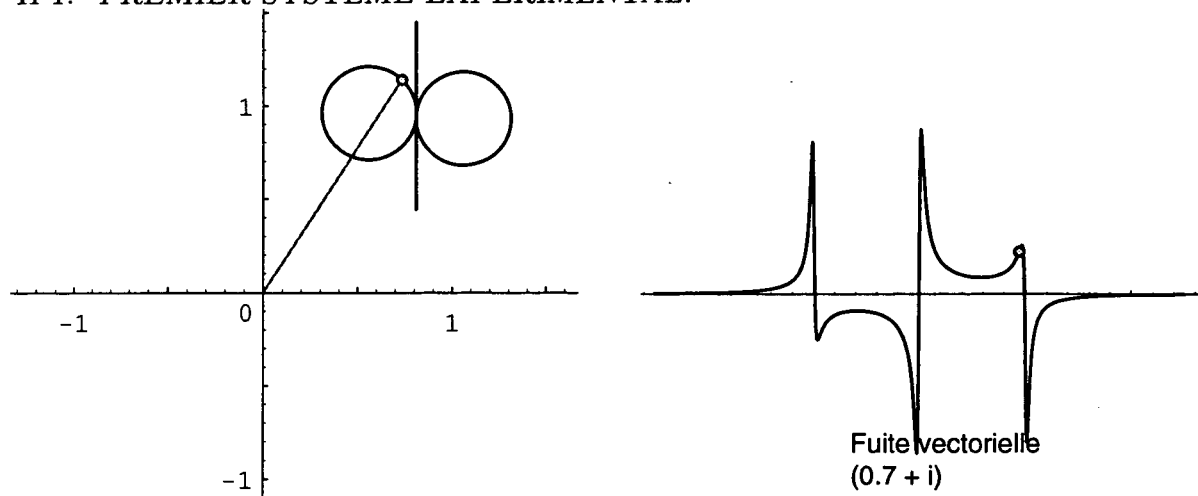


Figure II.11: La figure de gauche représente dans le plan de Fresnel la valeur complexe du photo-courant démodulé à la fréquence $\delta\omega$ dans le cas d'une modulation d'amplitude parasite, pour un balayage en fréquence du laser sonde. A droite, on observe l'effet de ce bruit d'amplitude cohérent sur l'amplitude du signal démodulé.

II-1-5 Présentation des premiers résultats expérimentaux.

Les conditions de couplage du laser sonde aux modes de galerie étant assez critiques, nous avons été amenés à définir une procédure conduisant automatiquement à l'observation de résonances. Lors des premières expériences, en raison du manque de sensibilité des réglages mécaniques, nous procédions en deux étapes successives qui vont faire l'objet du paragraphe suivant.

II-1-5-1 Déroulement d'une expérience.

Nous commençons par effectuer un préalignement, qui permet d'amener sous contrôle binoculaire, la microsphère au voisinage immédiat de la partie focalisée de l'onde évanescente. Ensuite, nous tentons de placer le résonateur dans cette onde évanescente. Si la microsphère se trouve à proximité d'une position de couplage, l'effet est immédiatement visible sur la caméra vidéo observant le mode du faisceau transmis par le prisme. Une modification de l'image liée à la sphère est en effet l'indication que la cavité interagit avec l'onde évanescente. Comme on l'a vu, le bon alignement de la microsphère correspond à des anneaux centrés sur le moniteur de télévision. La focalisation de l'onde évanescente est alors optimisée pour maximiser le diamètre des anneaux : on obtient une sorte de "teinte-plate". A ce stade, les réglages, à l'exception du "gap" sphère-prisme, sont proches de l'optimum. Il faut noter que dans cette première version du système expérimental, les forces de Van der Waals, entre le prisme et la microsphère avaient tendance, pour les petites valeurs du "gap", à déformer la fibre support et à amener le résonateur en contact avec le prisme. Il faut alors rééloigner suffisamment le support de la microsphère jusqu'à "décoller" le résonateur de la surface du prisme. Cet effet interdit une exploration méthodique des zones de fortes intensités de l'onde évanescente. Lorsqu'un effet

d'interférence est visible sur la caméra de télévision, le "gap" en revanche, n'est pas adapté à l'observation des résonances : le fait que l'on détecte, grâce à la caméra de TV, des franges sur l'image du gap en champ lointain prouve que la sphère perturbe significativement l'onde évanescente à la surface du prisme; réciproquement, le prisme va perturber le mode résonnant de la microsphère. Ceci est évidemment incompatible avec un couplage faible des modes au laser sonde. Le premier dispositif mécanique ne permettant pas un déplacement calibré, nous éloignons le support de la microsphère jusqu'à faire disparaître tout effet d'interférence sur l'image en champ lointain. Ensuite, le support de la microsphère était prudemment rapproché, tout en contrôlant le signal de spectroscopie. En effet si malencontreusement la distance sphère-prisme est trop faible, le couplage présentant une variation exponentielle avec la distance, toutes les structures résonnantes fines seront nivelées par le surcouplage, et l'on pourrait conclure à l'absence de modes de galerie pour la microsphère incriminée. Cette procédure a permis l'enregistrement de résonances de galerie étroites. Les principaux résultats de ce travail sont donnés dans le paragraphe qui suit.

II-1-5-2 Premiers enregistrements de résonances de galerie.

Lorsque la succession d'étapes décrite au paragraphe ci-dessus est menée à son terme, et si la microsphère n'est ni trop inclinée par rapport à son axe de symétrie de révolution, ni contaminée en surface par des poussières, on peut observer, lors d'un balayage de quelques Gigahertz pour un sphère d'une centaine de microns de diamètre, quelques structures résonnantes (sur l'intensité détectée ou l'amplitude du signal radiofréquence à la fréquence de modulation par exemple).

La figure II.12 donne l'allure de signaux caractéristiques rencontrés, pour une sphère de $250\mu m$ de diamètre. L'abscisse représente un balayage du laser sonde d'environ $4GHz$; l'ordonnée du graphe figure, en unités arbitraires, l'amplitude de la modulation détectée par le récepteur scalaire, accordé à la fréquence de modulation.

Si l'on restreint le domaine de balayage à quelques centaines de Mégahertz au voisinage d'un mode, on peut observer simultanément (figure II.13) un mode de galerie isolé et les deux bandes latérales symétriques générées par la modulation de phase du faisceau sonde. La forme des signaux obtenus démontre, suite aux constatations du paragraphe II-1-4-2, que dans cette expérience, une modulation d'amplitude parasite est additionnée au signal.

Si l'on restreint encore la gamme de balayage du laser, en restant centré sur la bande latérale droite, on peut observer ce type de signaux (figure II.14):

En réalité, ce spectre a été enregistré à une intensité plus faible que le triplet précédent (environ 10 nanowatts couplés au mode), de manière à être certain que la largeur de la structure est bien une largeur intrinsèque mesurée et non une largeur liée au couplage. On mesure une largeur caractéristique de l'ordre de $200kHz$, qui correspond à un facteur de qualité de $Q = 2.10^9$, et à une "finesse" \mathcal{F} de:

$$\mathcal{F} = \frac{\Delta\nu}{\delta\nu} = Q \times \frac{\Delta\nu}{\nu} = Q \times \frac{\lambda}{2\pi a} \Delta\beta (\Delta l = 1). \quad (II.4)$$

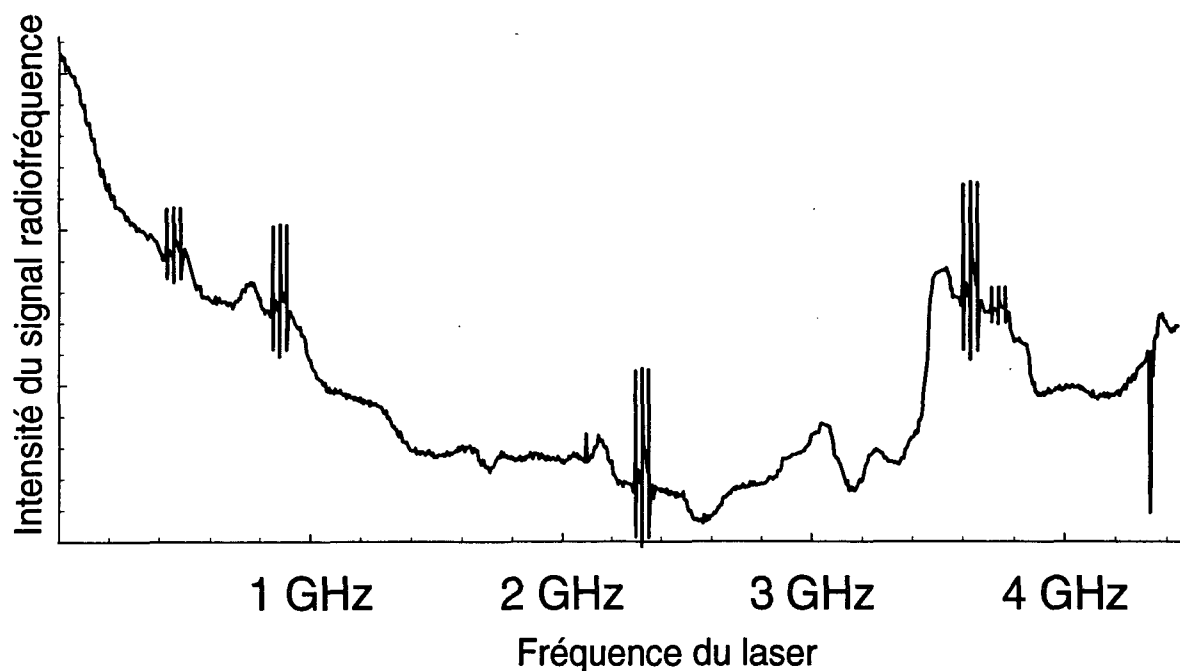


Figure II.12: Spectre (en modulation de fréquence avec détection scalaire) enregistré sur une sphère de $250\mu\text{m}$ de diamètre, lors d'un balayage d'environ 4GHz . Chaque résonance de galerie apparaît sous forme d'un triplet.

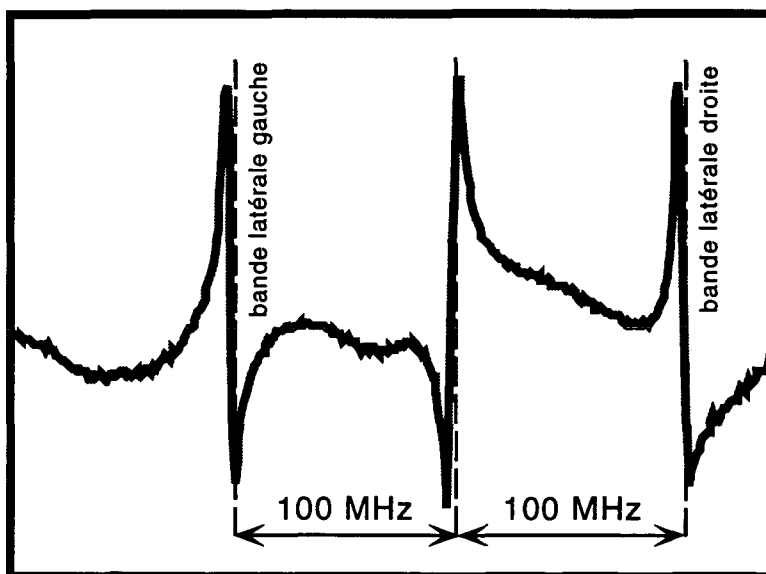


Figure II.13: Allure du triplet caractéristique de la détection par modulation de fréquence, obtenu pour un mode de galerie particulier d'une sphère de silice de $240\mu\text{m}$ de diamètre. Ce signal, comme on peut le constater comporte une modulation d'amplitude parasite de grande amplitude.

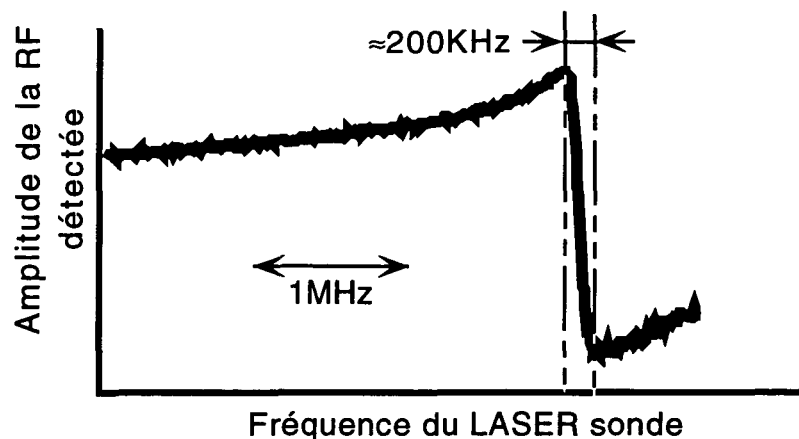


Figure II.14: Bande latérale droite d'une résonance de galerie de largeur 200kHz , pour une microsphère de $240\mu\text{m}$ de diamètre.

$\Delta\nu$ représente l'écart en fréquence entre modes de l consécutifs, $\Delta\beta(\Delta l = 1)$ ce même écart en unités de paramètre de taille, Q le facteur de qualité du mode, $\Delta\beta(\Delta l = 1)$.

Pour une sphère de $\phi 240\mu\text{m}$, on trouve $\mathcal{F} = 1.4 \cdot 10^6$. Une telle finesse est supérieure à ce qui a été obtenu par la technologie des miroirs multidiélectriques la plus avancée [63].

Nous avons également observé très fréquemment des doublets très rapprochés (400kHz à 2MHz), au lieu d'une résonance unique. Ce phénomène a été également observé dans au moins un autre groupe [70]. La figure II.16 montre un tel doublet, mesuré sur une sphère de $\phi 120\mu\text{m}$. La séparation entre les composantes est de l'ordre d'un demi-mégahertz, (à comparer à la pseudo-période de l'ordre de 450GHz). Ce très faible espacement entre les deux composantes permet a priori d'écarter des effets liés à une ellipticité du résonateur. Le dédoublement observé correspond en valeur relative à quelques 10^{-9} , ce qui est très inférieur au déplacement relatif attendu des modes pour des ellipticités de 10^{-4} à 10^{-3} , comme cela a été décrit au premier chapitre. Nous avons également vérifié que l'allure caractéristique était indépendante de la puissance lumineuse couplée au résonateur: ceci permet donc d'écarter des phénomènes d'origine non-linéaire (diffusion Brillouin stimulée, diffusion Raman stimulée [79][80]). Une hypothèse possible serait l'existence d'un couplage très fort entre les modes gauche et droite de la cavité ($m = \pm l$) par des effets de retrodiffusion, induits par exemple par un petit défaut quasi ponctuel dans le verre. Notons que ce couplage est nécessairement plus fort que les pertes, puisque les deux composantes du doublet sont résolues. Des calculs préliminaires nous ont montré, pour un défaut unique modélisé par un petit dipôle, que les deux ondes gauche et droite se "calent" mutuellement en quadrature, et dans cette situation le flux d'énergie rayonné par le dipôle est inférieur au couplage entre les deux sens de propagation. Plus précisément, si l'on ajuste la polarisabilité du dipôle de manière à trouver des doublets dont l'écartement correspond aux valeurs expérimentales (un lacune de $\phi 100\text{nm}$ dans le matériau suffisant

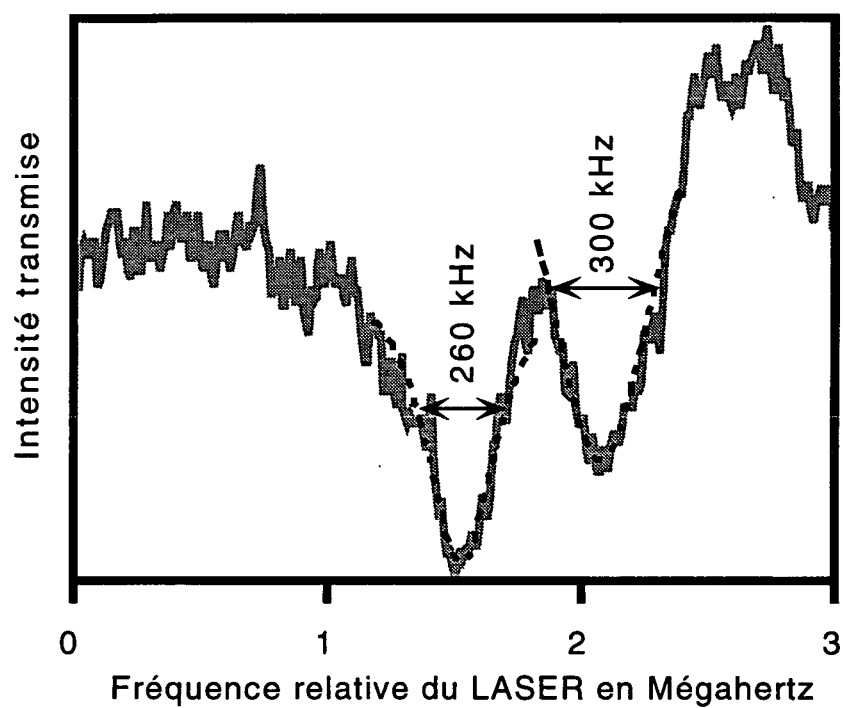


Figure II.15: *Doublet serré observé en spectroscopie FM, le signal étant traité numériquement pour permettre un "fit" par de simples fonctions lorentziennes.*

à expliquer une telle polarisabilité), on obtient alors par le calcul une largeur des composantes du doublet négligeable devant les valeurs expérimentales. Nous pensons donc que deux mécanismes distincts sont requis pour expliquer l'existence de ces doublets: un effet de rétrodiffusion lève la dégénérescence des deux sens de rotation, et d'autres mécanismes de pertes sont responsables du temps d'amortissement de la cavité.

En conclusion, ce premier système expérimental a permis de nous familiariser avec les techniques d'observation des modes de galerie par spectroscopie à haute résolution dans une onde évanescente, et de détection par modulation de phase. Cette première série de mesures a rendu possible une sélection quantitative de la qualité des échantillons de silice ultra-pure à notre disposition. Ces expériences nous ont également aidés à mieux estimer la stabilité mécanique requise pour le système de micro-manipulation. Cette étape préliminaire faisait également la démonstration que de très grands facteurs de qualité pouvaient être observés, pour des largeurs de mode de l'ordre de la centaine de kilohertz, valeur approchant sensiblement la largeur estimée de notre source laser. Une limitation d'origine instrumentale de la largeur des résonances n'était donc pas à exclure. Nous souhaitons donc poursuivre les observations avec un meilleur contrôle des paramètres expérimentaux. Pour ce faire, plusieurs limitations expérimentales sérieuses, liées à la conception du système de fabrication des sphères et à l'appareil de mesure lui-même devaient être éliminées. Nous avons donc été amenés, forts de l'expérience acquise avec ce premier montage, à repenser l'appareillage dans son ensemble.

II-2 Construction d'un nouveau montage.

II-2-1 Problèmes expérimentaux à résoudre.

L'observation la plus importante effectuée au cours des premières expériences concerne la pollution de la surface du résonateur exposée à l'air. En effet, nous pouvions voir au microscope, apparaître avec le temps des points diffuseurs dans la zone équatoriale des microsphères. Ces particules de poussières, en tombant dans la zone du mode, augmentent drastiquement les pertes, et ruinent le facteur de qualité. Comme nous ne pouvions transférer notre laboratoire d'optique dans une salle blanche, nous avons tenté de protéger les microrésonateurs en les plaçant dans un filet d'air filtré laminaire. Malheureusement, cette précaution s'est révélée insuffisante et le risque de contamination irréversible des sphères nouvellement formées s'est avéré trop grand car le transfert des microsphères de l'appareil de préparation à la zone d'observation introduit presque systématiquement quelques poussières.

Il semblerait également que des films moléculaires condensés, d'eau par exemple, puissent augmenter considérablement les pertes de surface. Considérons la courbe II.16, qui donne le coefficient d'absorption de l'eau en fonction de la longueur d'onde. (D'après [81]).

On voit qu'à la longueur d'onde de $0.78\mu m$ à laquelle nous travaillons, le coefficient d'absorption A_w avoisine $40dB.m^{-1}$. Supposons que l'éventuel film d'eau à la surface du

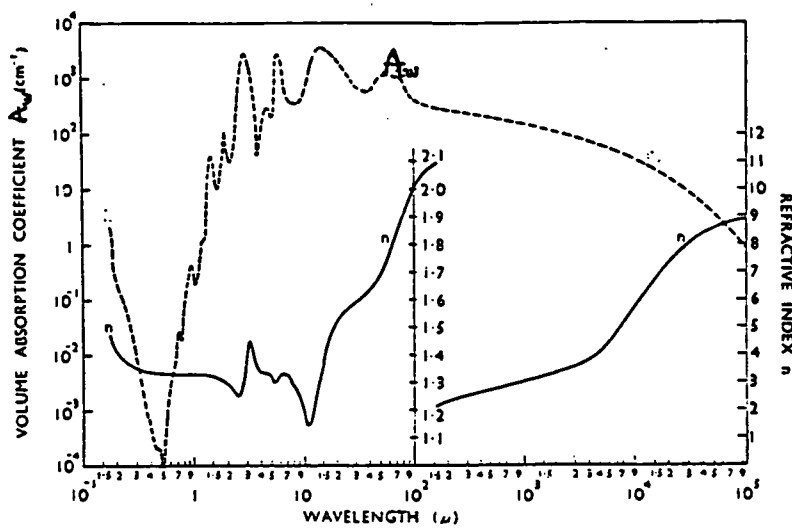


Figure II.16: Coefficient d'absorption de l'eau A_w , en fonction de la longueur d'onde.

résonateur soit petit devant la longueur d'onde, de l'ordre de la dizaine de nanomètres au maximum. On peut alors considérer que ce film d'épaisseur e va entraîner des pertes, assimilables à des pertes en volume, caractérisées par un coefficient d'atténuation $a_w \sim A_w e / \lambda$. On peut alors appliquer la formule de la page 65 pour cette atténuation effective. La limitation du facteur de qualité par le film adsorbé, sera donc comparable à l'absorption en volume de la silice, pour:

$$e \sim a_w / A_w \lambda,$$

soit une épaisseur de l'ordre de la dizaine de nanomètres. Des spécialistes [82] des microscopes à force atomique (AFM) nous ont affirmé qu'une telle épaisseur de film n'était pas incompatible avec leurs propres mesures. Ceci voudrait donc dire que nos meilleures mesures de facteurs de surtension pourraient avoir été limitées par cette infime pellicule d'eau.

Toutes ces raisons nous ont conduit à concevoir un système unique capable d'effectuer successivement les opérations de fusion laser et de caractérisation spectroscopique, dans une seule enceinte étanche, avec la possibilité d'opérer sous vide secondaire pour réduire les effets de couches moléculaires adsorbées. Nous avons en revanche décidé de conserver la méthode de couplage aux modes de galerie par onde évanescente, sans la modifier fondamentalement, à un détail près: la fibre optique a été supprimée, car il s'est avéré difficile de réaliser des clivages tels que les effets d'étalons optiques dus aux réflexions parasites aux extrémités ne perturbent les signaux. Enfin, en vue d'améliorer la reproductibilité et la sensibilité des mouvements, voir même d'automatiser le processus de fabrication, nous avons choisi d'effectuer l'ensemble des déplacements sous vide au moyen d'actuateurs pilotés par un ordinateur. Le paragraphe suivant donne une brève description de ce dispositif électro-mécanique.

II-2-2 Description du nouvel appareillage.

Il est principalement constitué d'une enceinte à vide, que l'on peut évacuer à des pressions de l'ordre de 10^{-6} à 10^{-7} mbar au moyen d'une pompe turbo-moléculaire. A l'intérieur, une platine principale rigide en acier inoxydable supporte l'ensemble des dispositifs mécaniques et optiques. Ces derniers se divisent en deux sous-ensembles aux fonctionnalités différentes. L'un est une sorte de support en fourche, micromanipulable suivant deux axes, qui fixe mécaniquement la fibre-support des microsphères. L'autre est formé d'une sous-platine qui supporte toute l'optique nécessaire à l'observation de résonances, soit un prisme équilatéral d'indice fort, d'un millimètre d'arête et les deux doublets de focalisation et de recollimation. Tout cet ensemble peut effectuer une translation sur une distance de 20mm afin d'éloigner, lors de l'étape de fusion laser, les surfaces optiques de la silice incandescente. Un volet obturateur, qui s'efface automatiquement lorsque l'on approche l'optique de la sphère, parachève la protection et évite que l'on forme des couches de silice évaporées sur "l'hypoténuse" du prisme lorsque l'on opère sous vide. Enfin, l'ensemble du dispositif est régulé électroniquement en température, deux gros modules thermoélectriques refroidis par eau fournissant une puissance thermique d'une trentaine de watts. La figure II.17 montre la disposition générale du dispositif.

Une photographie du système réalisé est donnée, figure II.18, en légende de laquelle les principaux éléments fonctionnels sont énumérés.

II-2-2-1 Système de préhension de la microsphère.

Les concepts essentiels qui ont guidé sa conception ont été axés sur sa stabilité mécanique, sa compacité et l'accès optique à la microsphère. Nous voulions également essayer de fondre des microsphères au milieu d'un morceau de fibre et non simplement à l'une des extrémités. Nous comptions ainsi obtenir une goutte de verre supportée par deux "pédoncules" au lieu d'un seul. Ceci devrait améliorer considérablement la raideur du support de la sphère, tout en permettant un accord mécanique des résonances, en exerçant une force de traction axiale. Cette dernière possibilité sera réétudiée en détail page 117. Nous avons construit deux "pinces" identiques, capables d'immobiliser efficacement par serrage une fibre cylindrique. Toutefois, pour la première série d'expériences effectuées avec ce nouveau montage, les microsphères seront toujours fixées à une seule extrémité.⁶ Chacune est fixée sur un actionneur piézoélectrique (PZT) de course 0.8mm[83]. Les deux "pinces" et leurs actionneurs sont disposés l'un au dessus de l'autre, en respectant un alignement méticuleux des plans de serrage des "pinces" : on peut donc exercer sur une fibre fixée simultanément aux deux points de serrage, un effort purement longitudinal. De par la construction symétrique de cette "fourchette", une translation le long de l'axe de la fibre s'effectuera par une variation de longueur coordonnée entre les deux actionneurs, l'un s'allongeant et l'autre se raccourcissant. La fibre, ou la demi-fibre lorsque l'on souhaite fondre des sphères à une extrémité, est normalement montée verticalement; cet axe est

⁶En effet, si le système de préhension double vibre mécaniquement, les modes résonnants pourraient voir leur fréquence varier aléatoirement et élargir artificiellement les signaux spectroscopiques.

Synoptis du nouveau montage expérimental de fabrication et de caractérisation des microsphères

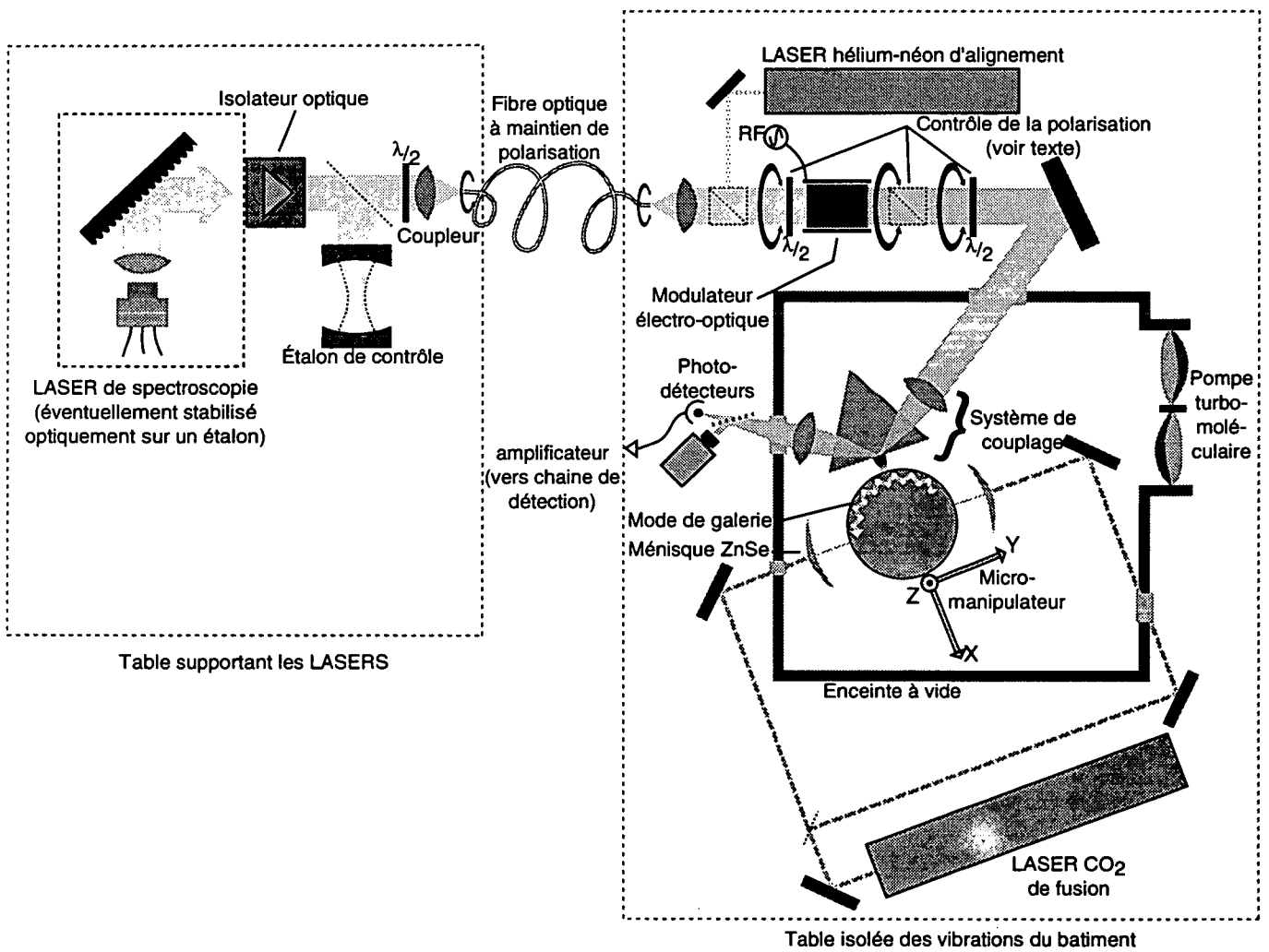


Figure II.17: Schéma général du nouveau système expérimental.

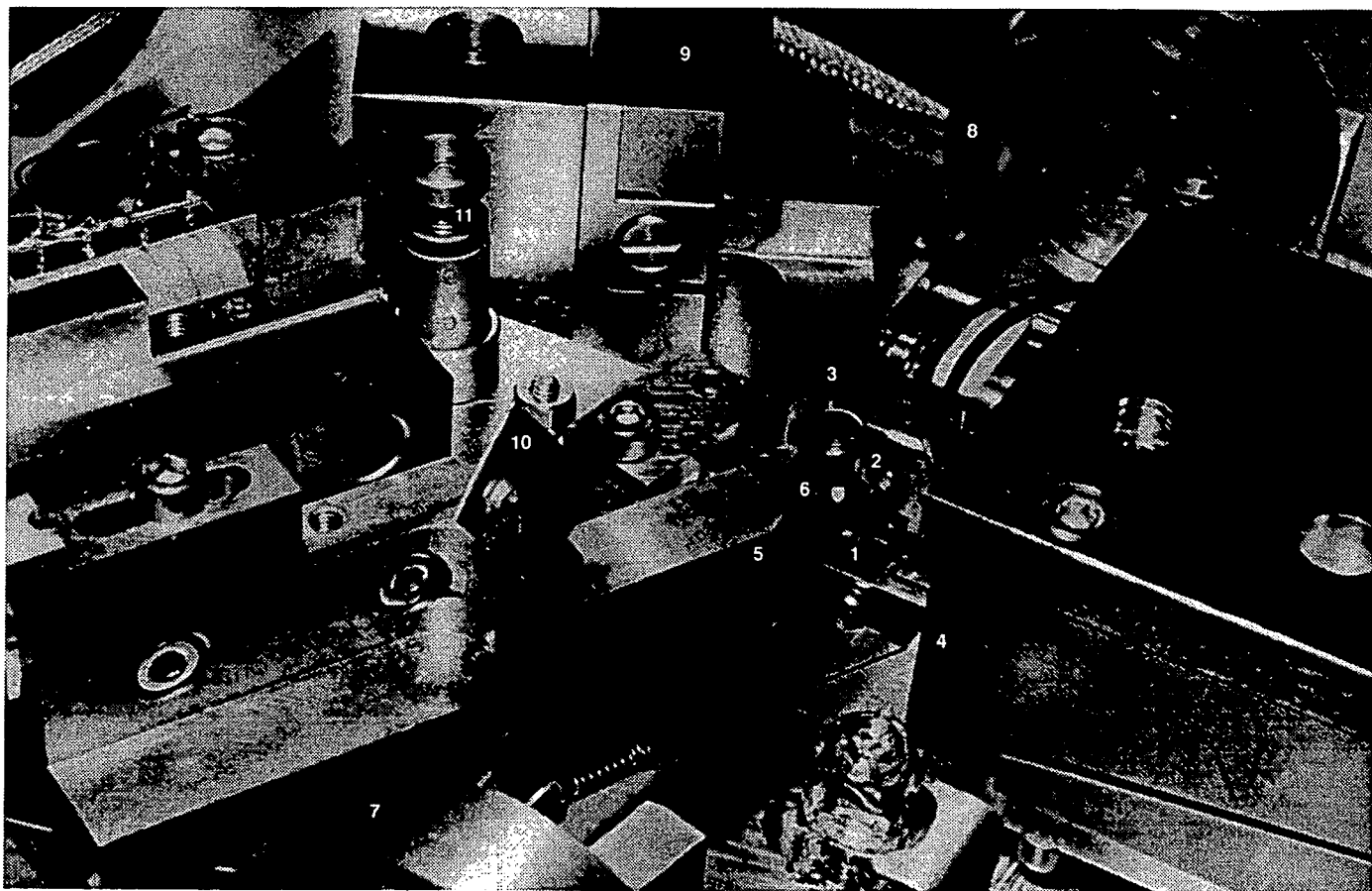
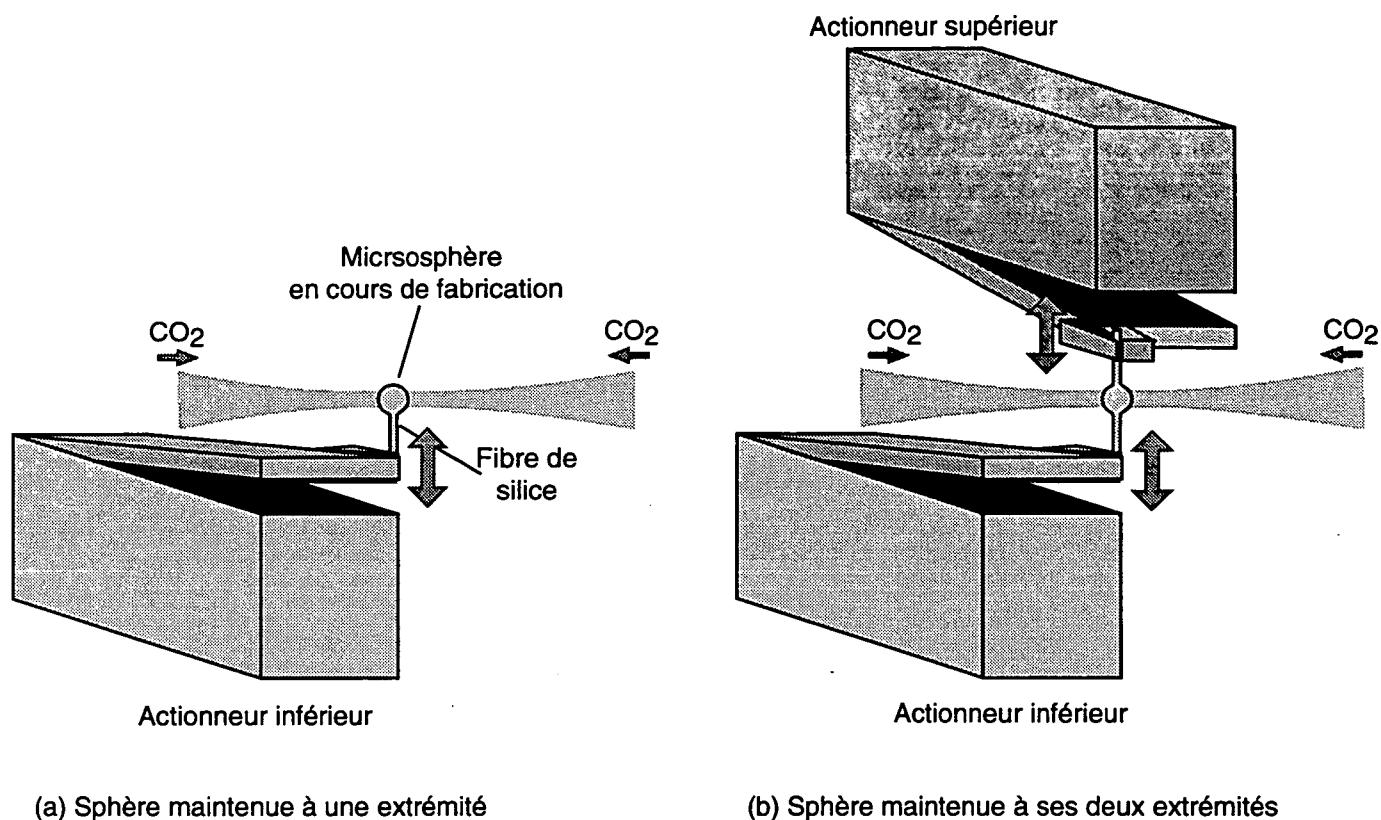


Figure II.18: Photographie de l'intérieur de l'enceinte à vide.



(a) Sphère maintenue à une extrémité

(b) Sphère maintenue à ses deux extrémités

Figure II.19: Disposition du système de "pince" qui fixe mécaniquement la microsphère. La figure de gauche (a) montre comment la fibre ébauche qui porte le microrésonateur à une extrémité est maintenue au cours de l'expérience. La configuration (b), qui n'a pas encore été complètement testée, permettrait en revanche la fusion d'une goutte de verre au milieu d'une fibre ébauche tenue aux deux extrémités.

défini comme axe des x .

Dans le plan horizontal, la vis d'une bonne platine de translation, actionnée par un motoréducteur pas-à-pas, permet une translation précise selon l'axe des y . Deux lentilles en $ZnSe$, situées de part et d'autre du centre de la "fourchette", focalisent sur l'ébauche de la microsphère deux faisceaux contrapropageants, issus du laser CO_2 (figure II.19).

Le déplacement de l'autre platine qui supporte l'optique de couplage des faisceaux-sondes, s'effectue à deux échelles très différentes : plusieurs centimètres lorsqu'il s'agit d'éloigner le prisme de couplage de la zone de fusion, quelques microns avec une résolution de quelques nanomètres pour varier le couplage dans l'onde évanescente. Nous avons choisi d'utiliser un seul actionneur pour ces deux sortes de mouvement. La vis d'une très bonne platine de translation (roulis $< 10^{-6}$ rad) est remplacée par un moteur "inchworm", de la firme américaine Burleigh. Un tel moteur est constitué de deux anneaux métalliques, coulissant en frottement doux le long d'un cylindre rectifié. Ces bagues, chacune munie d'un PZT annulaire, peuvent se bloquer sur cet axe à l'application d'une haute tension. Entre ces anneaux, est inséré un tube PZT, dont l'extension est commandé par une

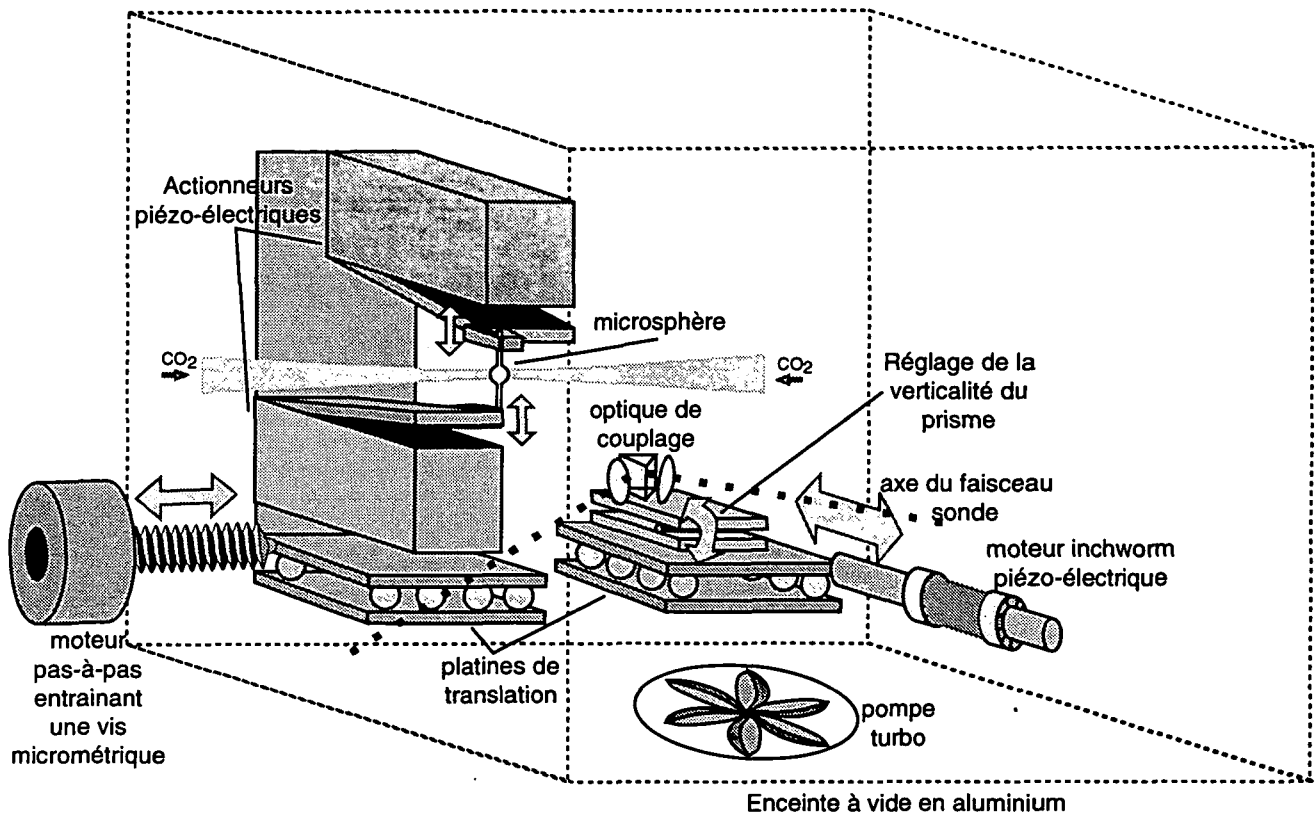


Figure II.20: Dessin de la platine mobile qui supporte les composants optiques nécessaires au couplage par onde évanescente focalisée.

troisième haute tension analogique. La succession suivante d'opérations fait avancer le dispositif le long du cylindre: serrage bague n°1, desserrage bague n°2, application d'une rampe croissante sur l'élément PZT central, serrage bague n°2, desserrage bague n°1, application d'une rampe décroissante sur l'élément PZT central, etc... Le pas maximal par rampe est de deux microns. Une fois l'une des bagues serrée, le système est équivalent à une PZT ordinaire et possède une résolution inférieure au nanomètre.

Comme le montre le schéma II.17, la configuration optique utilisée pour créer l'onde évanescente focalisée est très semblable à l'ancien système, à ceci près que la fibre optique à maintien de polarisation a été supprimée, ce qui permet de s'affranchir des effets d'étalon optique, dus aux réflexions parasites aux extrémités. La lumière des lasers est désormais propagée par des faisceaux libres. Ceux-ci pénètrent dans l'enceinte par des fenêtres traitées antireflet. Les objectifs de microscope ont été remplacés par des doublets "laser-grade", de focale 10mm. La focalisation, préréglée (à l'air) par des vis micrométriques, est ajustée sur une des branches par un "stack" PZT dont le déplacement est multiplié mécaniquement.

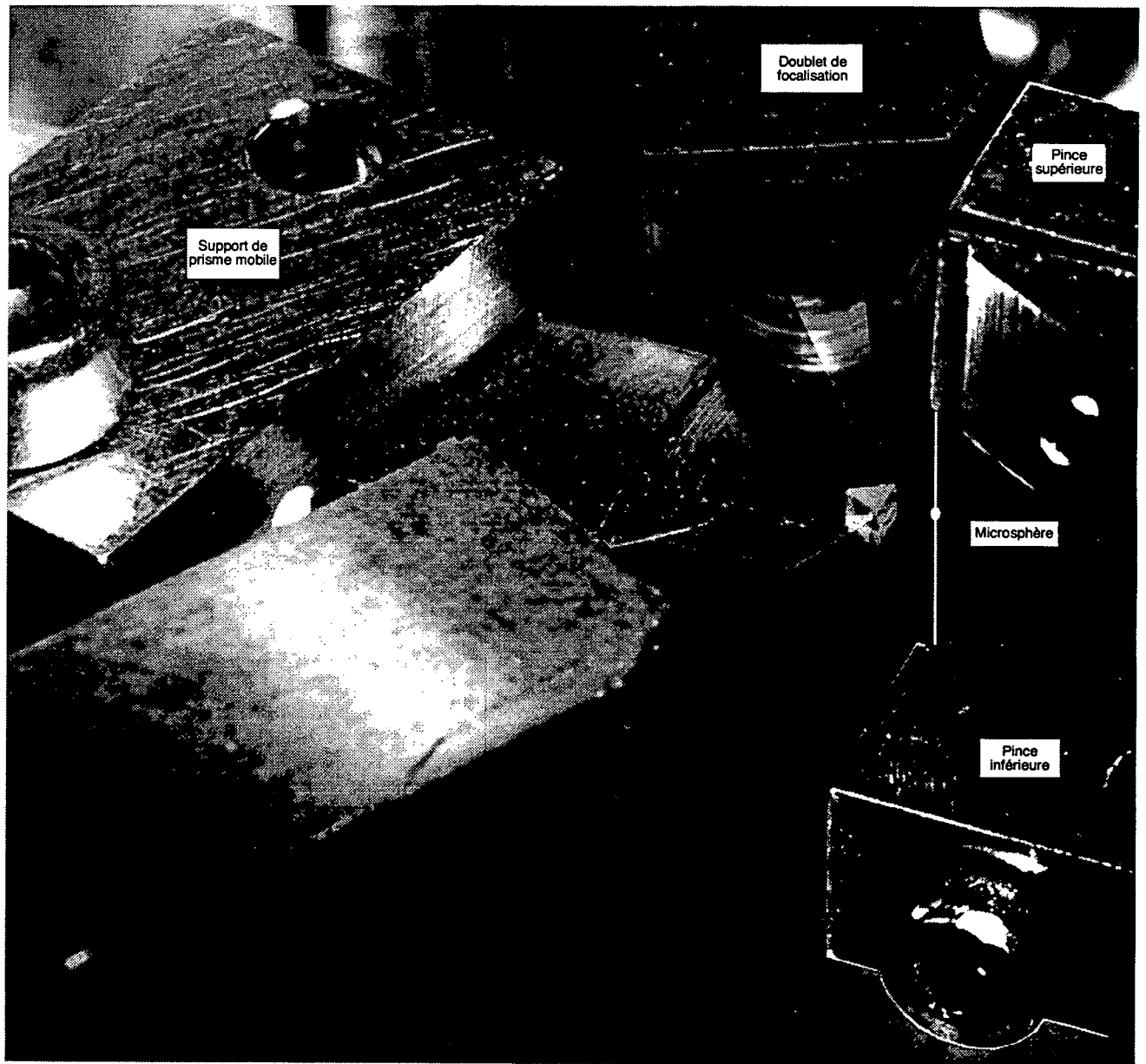


Figure II.21: Cette photographie montre le cœur du dispositif expérimental de fabrication et de caractérisation des microsphères.

Sur la photographie de détail II.21, le prisme de 1mm donne l'échelle! Les cinq degrés de liberté de cette mécanique, la puissance émise par le laser CO_2 ainsi que divers autres paramètres (vide, sécurité sur les faisceaux de puissance...) sont contrôlés par un calculateur central. Décrivons succinctement ce dispositif intégralement piloté par informatique.

Le schéma II.22 donne la structure logicielle et matérielle de l'appareillage, qui peut être commandé par un seul chercheur, en actionnant des leviers disposés sur un pupitre de commande. Le logiciel dédié, comporte un mini noyau temps réel qui contrôle l'exécution dans le temps d'un nombre variable de tâches élémentaires. Chacune d'entre elles commande une fonction ou un organe particulier du système. (Par exemple, une des tâches va générer les signaux qui pilotent un moteur pas-à-pas, une autre effectue la lecture 100 fois par seconde des leviers de contrôle ...) L'intérêt d'une telle structure est un contrôle quasi-simultané et indépendant de tous les sous-systèmes de l'appareillage. Un tel logiciel assure également une grande fiabilité : le programme a fonctionné des mois durant sans interruption.

Un soin particulier a été apporté à l'électronique d'interface, et aux amplificateurs haute-tension en particulier. Un contrôle au nanomètre près de l'écartement des branches de la fourchette (dans le cas où un accord mécanique du résonateur est effectué), nécessite en effet une stabilité de l'ordre du ppm de la haute tension (1kV) qui commande les PZT. Nous avons donc mis au point, avec l'aide du département électronique, une source ultra-stable de haute tension programmable, opto-découplée, à base de transistors MOSFET. La commande informatique binaire de la tension s'effectue au moyen d'une valeur codée sur 20 bits. Cet ensemble électronique présente un coefficient de température inférieur à $10\text{ppm}/\text{K}$, ce qui garantit une dérive thermique des hautes tensions de l'ordre du ppm par minute.

II-2-3 Lasers de spectroscopie.

Pour cette nouvelle série d'expérience nous avons décidé de construire deux lasers distincts, l'un très balayable en longueur d'onde, en vue de reconstruire si possible la totalité d'une pseudo-période, l'autre le plus stable possible.

II-2-3-1 Description.

Le premier, construit à partir d'une diode sharp LT024 à 785nm , utilise un feedback optique de type Littrow, déjà décrit plus haut. En revanche, la conception mécanique de ce laser est telle que le réseau effectue un mouvement combiné de translation—la cavité laser s'allonge—et de rotation—le réseau suit la variation de longueur d'onde. Une telle disposition permet un grand balayage en fréquence du laser. En fait, il est également nécessaire de changer simultanément le courant dans le laser semiconducteur au cours du balayage, ce qui change la longueur optique de la cavité (en modifiant dans la jonction la quantité de porteurs) probablement pour compenser les effets liés à la réflectivité de la facette de sortie de la diode qui n'est pas traitée antireflet : la cavité propre de la diode perturbe la phase du champ optique. Nous sommes capables de balayer ainsi environ

Synoptique du système informatique de commande du nouveau montage expérimental.

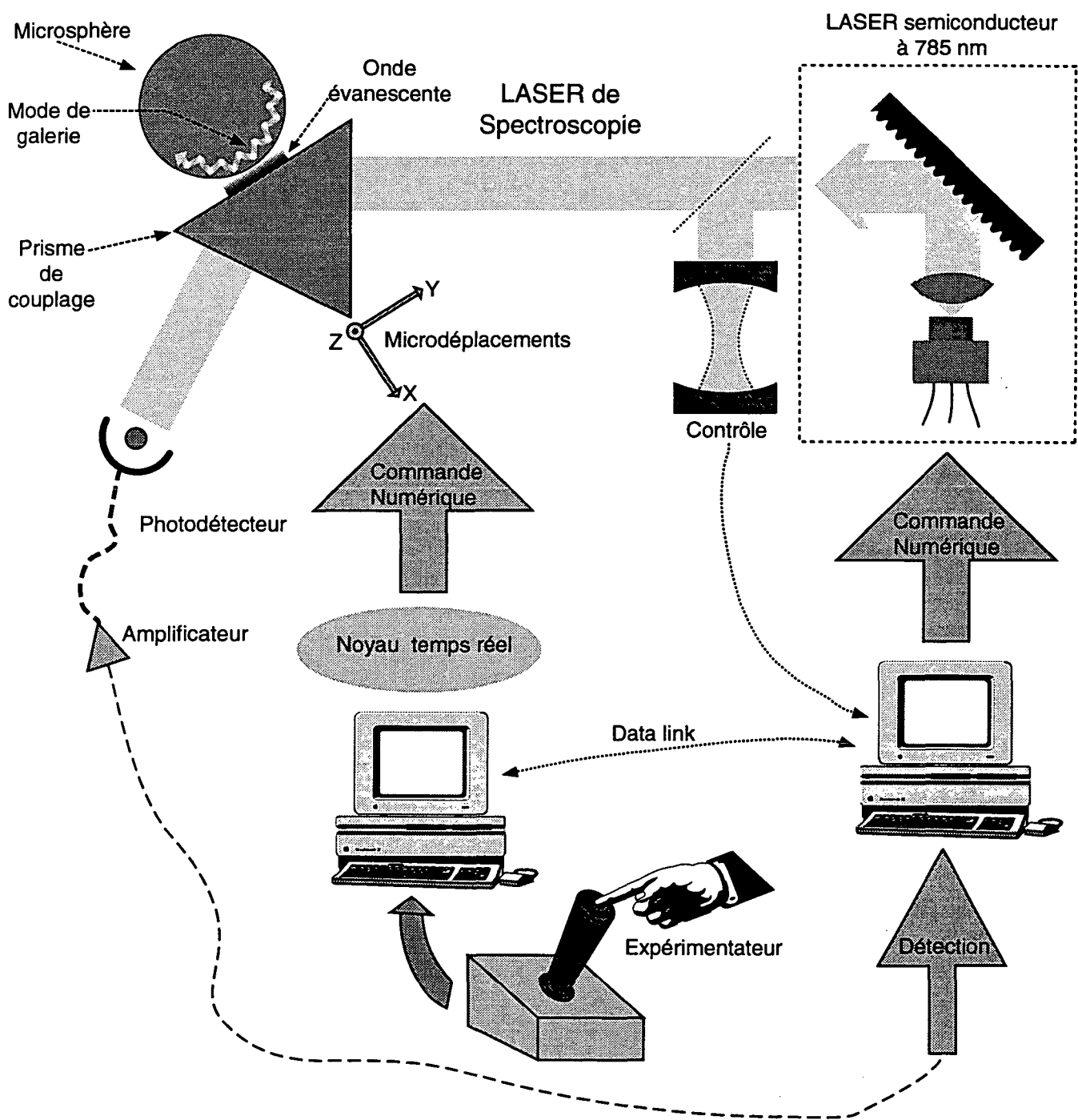


Figure II.22: Synopsis général du système de contrôle informatisé de l'expérience.

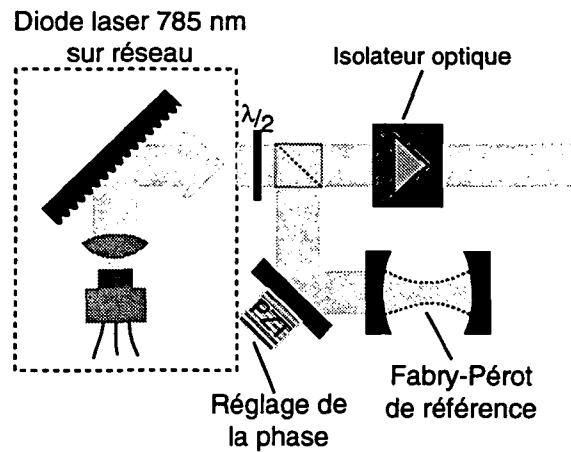


Figure II.23: Principe du nouveau laser de spectroscopie à haute résolution, qui utilise une diode laser sur réseau, couplée optiquement à un étalon externe.

20GHz. L'amplitude de balayage semble entièrement limitée par les effets de cavité parasite du laser lui-même. Nous utiliserons probablement à l'avenir des diodes traitées antireflet.

Le second laser utilisé actuellement dans l'expérience est une version dérivée du premier laser construit. Nous lui avons ajouté une cavité Fabry-Pérot externe, dont nous allons décrire la fonction, montée sur le même support mécanique, à l'intérieur d'une grande boîte sourde. Les faisceaux suivent le diagramme donné ci-dessous.

Cette configuration d'injection optique, quelque peu inhabituelle, nous a été suggérée par André Clairon du LPTF. On remarquera la présence d'un miroir monté sur une cale piézoélectrique entre le réseau de diffraction et la cavité Fabry-Pérot. Ce miroir permet d'assurer que le champ qui est rayonné par le mode de la cavité Fabry-Pérot soit réinjecté dans le laser avec la bonne relation de phase. Sans rentrer dans le détail d'un tel dispositif (consulter par exemple la thèse de P. Laurent), on sait que le gain d'une telle rétroaction diminue avec l'écart de la fréquence lumineuse au centre de la raie émise par la diode laser. Aussi, la stabilisation purement optique de la diode sur le Fabry-Pérot externe n'est pas suffisante pour contrarier l'effet du réseau : ce dernier impose la fréquence autour de laquelle l'émission laser se produit. Dans notre montage, un système électronique indépendant, détecte l'intensité transmise au travers du Fabry-Pérot pour une modulation donnée du courant de la diode laser, et réagit sur la position du réseau[84]. Lorsque la boucle d'asservissement linéaire fonctionne, le réseau "suit" en fréquence la cavité Fabry-Pérot, et l'effet de stabilisation optique peut se produire. Nous balayons la fréquence du laser en modifiant la longueur de la cavité Fabry-Pérot "maître" au moyen d'une céramique piézoélectrique. Dans un tel mode de fonctionnement nous parvenons à balayer continûment sans saut de mode un demi gigahertz et la stabilité à moyen terme du laser ainsi asservi est meilleure.

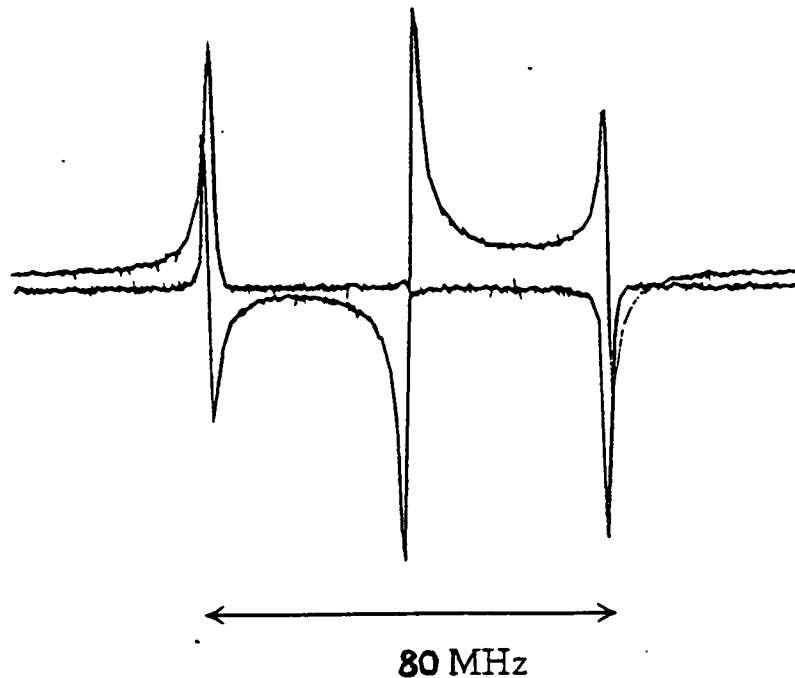


Figure II.24: Triplet caractéristique d'un signal de spectroscopie par modulation de fréquence, pour les deux quadratures du signal de modulation de phase (à 40 MHz). La modulation d'amplitude est ici négligeable.

II-3 Nouveaux résultats expérimentaux.

Les imperfections du premier montage expérimental construit nous ont révélé les points essentiels qui doivent être particulièrement soignés. La stabilité mécanique statique des microdéplacements, ainsi que la rigidité des différents supports est critique, afin d'observer un mode déterminé, dans de bonnes conditions de reproductibilité. Par exemple, une stabilisation active de la température de l'enceinte à vide en aluminium qui renferme le cœur de l'expérience s'est avérée nécessaire pour éliminer de lentes dérives de la position de la microsphère, à l'échelle de l'heure et même de plusieurs journées. Ces nouveaux perfectionnements permettent maintenant d'étudier véritablement un mode de galerie de haute surtension sur de longues périodes, et donc de faire varier les paramètres pertinents qui régissent par exemple le couplage de la cavité au faisceau du laser-sonde.

Le dispositif de modulation en phase a été grandement amélioré: en effet la proportion de modulation d'amplitude parasite, est désormais beaucoup plus petite que le signal de résonance. La figure II.24 montre un signal typique de spectroscopie FM, où les trois pics ont maintenant une forme symétrique, sans fuite.

Ce nouveau montage expérimental présente une bien meilleure stabilité aux temps longs que le premier système à l'air libre. Aussi, des études systématiques des paramètres sont maintenant possibles, en observant leurs effets sur un mode donné. Notons également comme cela a déjà été mentionné plus haut que de nombreuses résonances sont des dou-

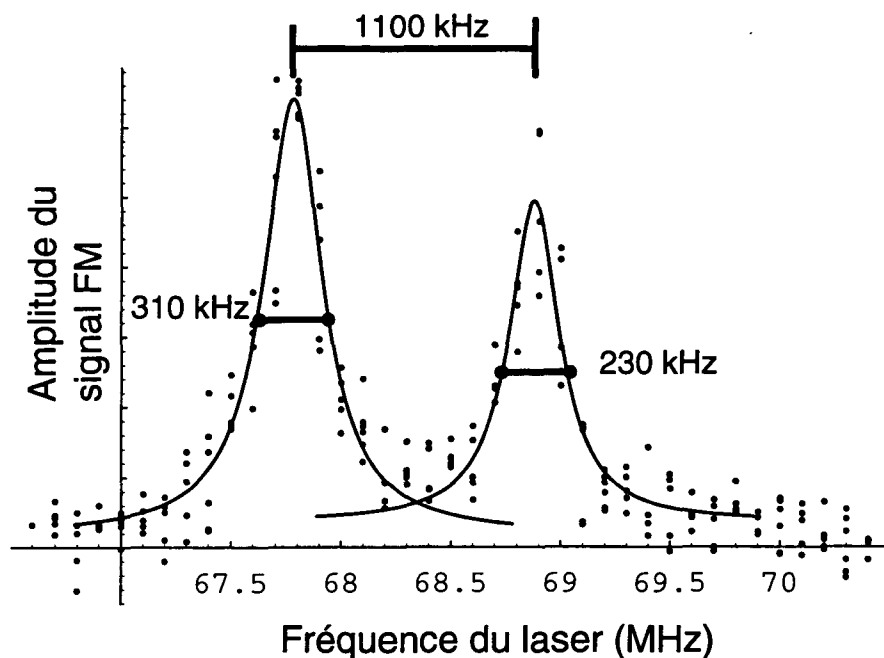


Figure II.25: *Doublet bien résolu. Les deux composantes, qui présentent ici des largeurs légèrement différentes, ont été approchées séparément par des lorentziennes.*

blets. L'un d'entre eux est représenté figure II.25.

Les possibilités accrues de micromanipulation du nouveau montage permettront peut-être de confirmer l'hypothèse justifiant l'existence de ces doublets en modifiant légèrement le point de couplage. Pour l'heure, nous n'avons cependant pas encore pu mener à bien cette étude systématique.

Nous allons maintenant étudier les effets d'un petit déplacement de la microsphère par rapport au prisme de couplage. Enfin le cas particulier des grandes intensités lumineuses couplées au mode sera abordé.

II-3-1 Mesure de facteurs de qualité.

Nous avons déduit jusqu'ici le facteur de qualité des résonateurs étudiés de la largeur spectrale des résonances. Néanmoins, la largeur du mode enregistrée sur un balayage en fréquence est le produit de convolution de la fonction d'appareil—la largeur de la source laser balayée—par la largeur intrinsèque du résonateur $\delta\nu = \nu_{lum}/Q$. Dans le cas de signaux approximativement lorentziens, la largeur expérimentale est donc la somme des largeurs du laser de spectroscopie et du mode de galerie. Un tel procédé n'est applicable que si la largeur de la source est très petite devant la largeur du mode résonant.⁷ Comme nos lasers de spectroscopie semblent avoir une largeur de l'ordre de grandeur de

⁷Si le spectre de la source laser est parfaitement connu, on peut dans une certaine mesure déconvoluer le spectre expérimental par celui de la source, et trouver la largeur intrinsèque du mode.

celle des modes les plus fins, et que leur largeur peut être dégradée à tout moment par des augmentations transitoires de bruit HF dans la salle d'expérience, nous souhaitons donc disposer d'une méthode de mesure des largeurs intrinsèques des modes ne souffrant d'aucune dépendance au Laser de spectroscopie.

Le principe de la méthode retenue est la contrepartie temporelle de la technique de spectroscopie par balayage utilisée jusqu'ici. Ainsi, au lieu d'explorer l'espace des fréquences, on va mesurer les variations temporelles de l'intensité lumineuse contenue dans un mode résonnant en réponse à un échelon. La durée caractéristique de son amortissement T_{cav} donnera directement le facteur de qualité $Q = \omega_{lum} \times T_{cav}$.

II-3-1-1 Mesure temporelle.

La mise en œuvre expérimentale de la constante d'amortissement T_{cav} pourrait donc s'effectuer ainsi : un faisceau sonde, exactement résonnant avec le mode de galerie à qualifier, serait éteint à l'instant $t = 0$. Un photo-détecteur, (comme celui utilisé pour les mesures d'intensité sur les modes) placé sur le faisceau de sortie enregistrerait, après extinction du faisceau sonde, le faible flash lumineux correspondant au recouplage par le prisme des photons piégés du mode vers le faisceau propageant extérieur. Cette méthode n'est malheureusement pas très facile à utiliser pour une raison très simple : à l'instant $t = 0$ l'intensité vue par le détecteur passe brutalement de l'intensité du faisceau sonde à $-30dB \dots -60dB$ fois cette intensité, quantité qui représente l'intensité lumineuse en provenance du mode résonnant. Comme il nous faut mesurer des constantes de temps comprises entre quelque $100ns$ à $10\mu s$, il nous a semblé hasardeux de construire une chaîne de détection possédant une bande passante de quelques mégahertz, sans aucune sur-oscillation pour des variations du signal de l'ordre de la pleine échelle. Nous allons maintenant décrire une méthode dérivée de la spectroscopie par modulation de phase, qui ne souffre pas de ce type d'inconvénient, tout en permettant, par son principe hétérodyne une meilleure sensibilité.

Considérons à nouveau le principe de la détection FM usuelle. On ajoute, par une modulation de phase, deux bandes latérales cohérentes symétriques. La cavité atténue et déphase différemment les bandes latérales, si bien que le photo-détecteur rapide enregistre un signal d'amplitude à la fréquence de modulation, alors qu'en l'absence de la cavité, l'effet des deux bandes latérales en opposition de phase stricte s'annule. Supposons maintenant que le laser sonde est accordé de telle sorte que la cavité soit exactement résonnante avec une des bandes latérales (et non la porteuse). Si à l'instant $t = 0$, on coupe la modulation radiofréquence qui engendre les bandes latérales, pour les temps $t > 0$, il parviendra principalement au détecteur rapide la porteuse (qui n'a pratiquement pas varié d'intensité si l'efficacité du modulateur électro-optique EO est assez petite devant l'unité) et le champ résonnant contenu dans le mode de galerie, qui est couplé par le prisme vers l'extérieur. Il en résulte un signal de battement à la fréquence de modulation, puisque la cavité est exactement à la fréquence qui correspondait à l'une des bandes latérales. On va ainsi détecter, pour les temps $t > 0$ une oscillation amortie exponentiellement, à la fréquence de modulation RF, décroissant avec une constante de temps T_{cav} (on détecte ici un signal

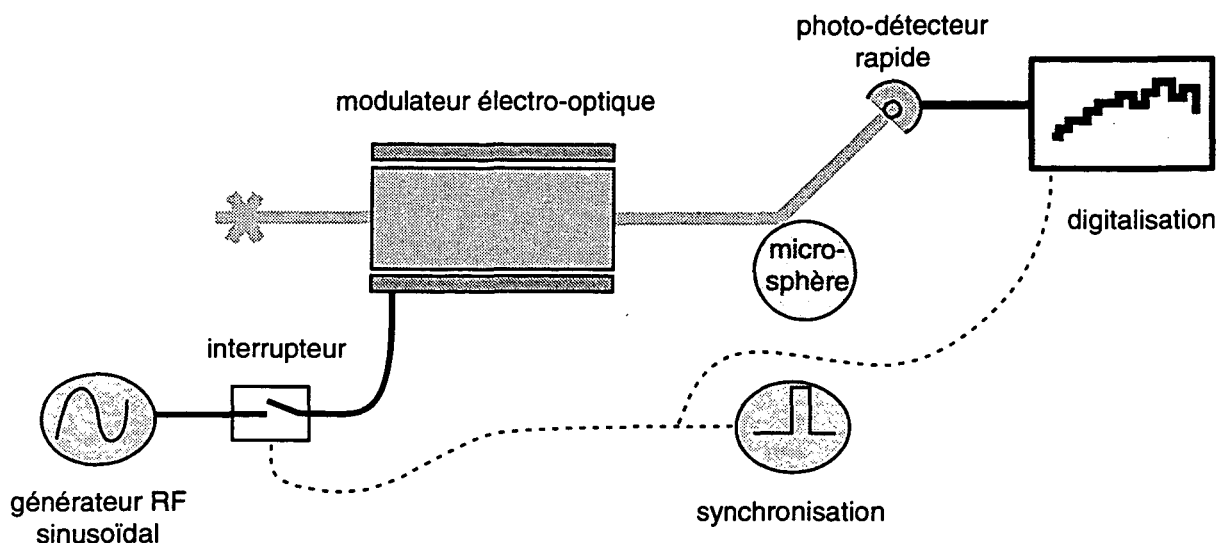


Figure II.26: Principe de la détection par modulation de phase pulsée.

relié à l'intensité lumineuse dans la cavité), qui est exactement le temps d'amortissement de la cavité. Afin que l'on puisse enregistrer un nombre suffisant de périodes de l'oscillation amortie, il faut choisir la fréquence de modulation grande devant l'inverse de la durée caractéristique T_{cav} à déterminer. Nous opérons en général vers 50MHz , valeur bien en deça de la coupure de notre électronique de détection rapide. Les paramètres choisis permettent ainsi la mesure de facteurs de surtension plus grands que 10^8 , correspondants à des largeurs de résonances inférieures à quelques mégahertz. On constate que cette méthode de spectroscopie FM pulsée fonctionne même si le laser sonde est plus large que la résonance. La seule condition est que la bande passante de la démodulation soit très supérieure à l'inverse de T_{cav} . Dans cette situation, le détecteur rapide va voir après l'extinction des bandes latérales, le battement entre une source très pure—le champ en provenance de la cavité, et une source plus large—le laser sonde. Au lieu d'une sinusoïde amortie, on obtiendra une oscillation dont la phase est brouillée par les excursions de phase du laser sonde, dont l'enveloppe s'atténuera avec la constante de temps T_{cav} .

Dans la pratique, la structure de notre système de détection est représentée figure II.26.

Le temps de décroissance minimum d'origine instrumentale est de l'ordre de quelques dizaines de nanosecondes, principalement limité par le dispositif électronique qui assure la coupure de la radiofréquence. Dans l'appareillage actuel, la détection est effectuée par échantillonnage numérique direct du signal RF émanant du détecteur. Nous échantillonnons à une fréquence de 300MHz , sur une profondeur de 8bits , ce qui donne une dynamique (sans post-traitement) de 50dB . Si l'on souhaite simplement mesurer la constante de temps T_{cav} de la cavité, il suffit d'évaluer le carré du signal RF lumineux et de moyenner, en synchronisme avec la commande de "l'interrupteur RF", un grand nombre d'oscillations amorties. Ce traitement donne comme résultat typique, le graphique II.27, qui montre bien la décroissance exponentielle de l'intensité du mode de galerie, avec une

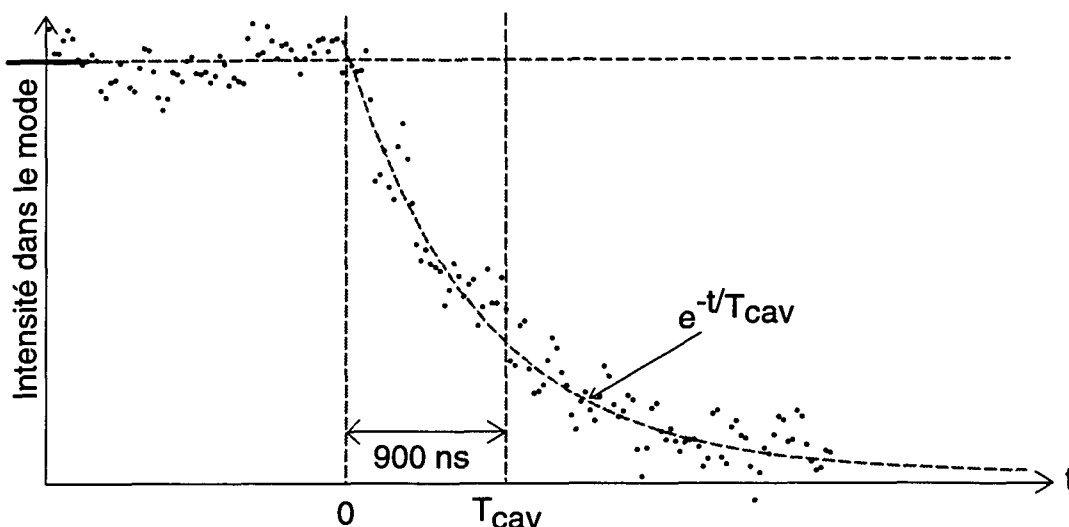


Figure II.27: Mesure de la décroissance temporelle d'un mode de galerie. On trouve un temps caractéristique de 900 nsec , ce qui correspond à un facteur de qualité de 2.10^9 , valeur compatible avec la largeur déterminée spectroscopiquement.

constante de temps caractéristique de $T_{cav} = 900\text{ nsec}$, ce qui correspond à un facteur de surtension $Q = \omega T_{cav} = 2.10^9$.

Cette méthode temporelle de mesure, conjuguée avec la mesure directe des largeurs (pour les modes plus larges que le laser), permettent en principe une mesure fiable des facteurs de surtension de résonances de galerie isolées. En particulier, ces techniques peuvent être appliquées à l'étude des effets du couplage du champ du laser sonde aux modes de galerie.

II-3-1-2 Effet du couplage à l'onde évanescente.

On a vu (I-7) que l'inverse du facteur de qualité devrait pouvoir se décomposer en plusieurs contributions distinctes, sous la forme: $Q^{-1} = Q_{couplage}^{-1} + Q_{propre}^{-1}$. Nous avons tenté de vérifier cette loi, en mesurant le facteur de surtension en fonction de l'énergie couplée au mode, à intensité du laser sonde fixée. La figure II.28 montre, le résultat de cette mesure.

Considérons en particulier la courbe (o), qui donne la largeur de la résonance en fonction de l'amplitude du signal détecté par modulation de fréquence. On voit que les points mesurés se répartissent en deux séquences. La branche horizontale, associée à un facteur de qualité constant correspond à la situation où le prisme ne perturbe pas de manière significative le mode résonnant: on mesure alors le temps de décroissance intrinsèque. Dans cette situation de sous-couplage, la probabilité que les photons du mode s'échappent par le prisme est petite devant les causes de pertes (ou de diffraction pour les très petites sphères, dont le facteur de qualité serait déterminé par les pertes par diffraction). La seconde branche représente la situation opposée de sur-couplage, telle que le couplage au mode du laser sonde soit prépondérant, et constitue à la limite la

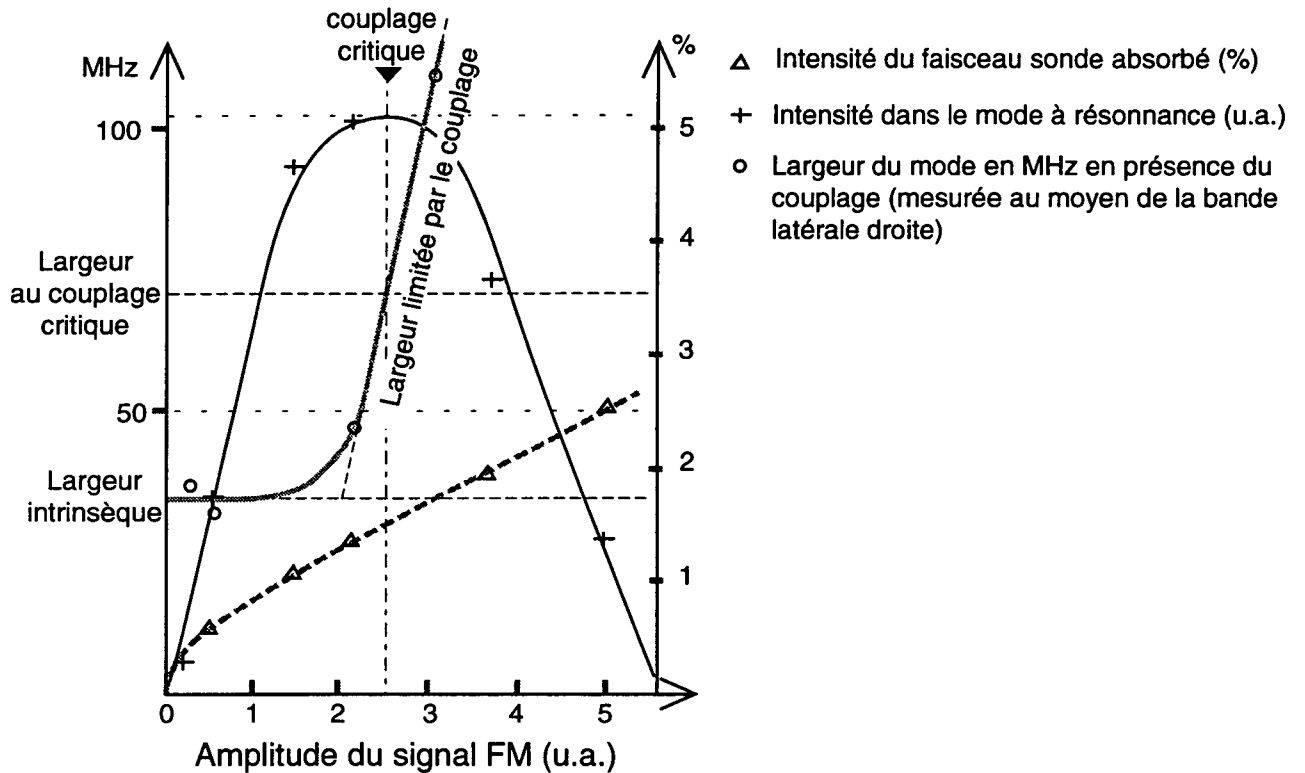


Figure II.28: Ce graphe donne respectivement, en fonction de l'amplitude du signal détecté par modulation de phase, l'intensité relative qui a disparu du faisceau sonde, l'intensité couplée dans le mode résonnant et la largeur du mode considéré. La droite horizontale en pointillés donne la largeur propre extrapolée du mode étudié.

principale cause de pertes. Enfin, au coude intermédiaire entre ces deux situations, il y a égalisation des pertes de couplage et des autres pertes: c'est le couplage critique. On enregistre également l'intensité intra-cavité, par une méthode qui va être décrite à la fin de ce paragraphe. On remarquera que ce coude coïncide avec le maximum d'intensité contenu dans le résonateur (points (+)): on retrouve bien là la propriété caractéristique du couplage critique, qui est le point optimal d'adaptation d'impédance entre le mode résonnant et le faisceau sonde.

Décrivons maintenant la méthode que nous avons employée pour mesurer l'intensité lumineuse contenue dans la microsphère à résonance.

Le couplage de la cavité au laser de spectroscopie fait que, une fois l'équilibre réalisé, une certaine intensité lumineuse est piégée par la cavité. Pour la déterminer indépendamment du coefficient de couplage, on peut songer à utiliser un effet optique mesurable qui serait proportionnel à cette intensité, par exemple des non-linéarités optiques. Une étude détaillée de tels phénomènes est présentée plus loin dans ce chapitre. Aussi, sans entrer trop dans le détail de tels effets, on peut aisément comprendre la cause de non-linéarité qui domine ici: à mesure que l'intensité s'accroît dans la cavité, les pertes du diélectrique qui la constitue produisent un échauffement de la silice. Cette augmentation de température diminue l'indice du matériau et induit une dilatation du résonateur. Il se trouve que pour nos conditions expérimentales, la combinaison de ces deux effets antagonistes résulte en un accroissement de la fréquence à laquelle se produit la résonance. La détermination spectroscopique de la nouvelle position de résonance, déplacée (vers les courtes longueurs d'ondes) par la puissance couplée dans le mode de la cavité, est donc une mesure indirecte de l'intensité lumineuse résonnante. Chaque point (+) de la courbe expérimentale présentée figure II.28 a donc été obtenu, pour une intensité de sonde fixée et pour un couplage donné de ce laser au mode de galerie, en mesurant le déplacement maximal qui pouvait être induit par le laser.

Comme le nouveau dispositif expérimental utilise un système de translation par *inch-worm* contrôlé par ordinateur, nous avons tenté également d'incorporer dans le logiciel de commande une estimation quantitative des déplacements relatifs de la platine mobile portant l'optique de couplage, (calculée à partir de la séquence de rampes de tensions envoyées aux céramiques piézoélectriques). Bien entendu, cette mesure ne donne pas la distance absolue de la microsphère au prisme. Aussi, nous avons essayé de définir le gap zéro aussi précisément que possible, par un pointé au microscope du contact de la sphère au prisme (la flexibilité de la fibre support semble garantir la surface du résonateur de tout dommage mécanique). La figure II.29 montre la largeur d'un mode de galerie en fonction de la distance de la sphère au prisme, cette dernière étant déterminée comme il vient d'être décrit.

La droite horizontale en pointillé donne la largeur (sans dimension) intrinsèque du mode, Q_{propre}^{-1} , non perturbée par le couplage: on voit que celle-ci est atteinte pour une distance de l'ordre de la longueur d'onde. Pour les distances intermédiaires, la largeur du mode, en échelle semi-logarithmique, semble assez bien prédite par une droite (trait mixte). On interprète aisément ce résultat, en écrivant la largeur Q^{-1} du mode sous la

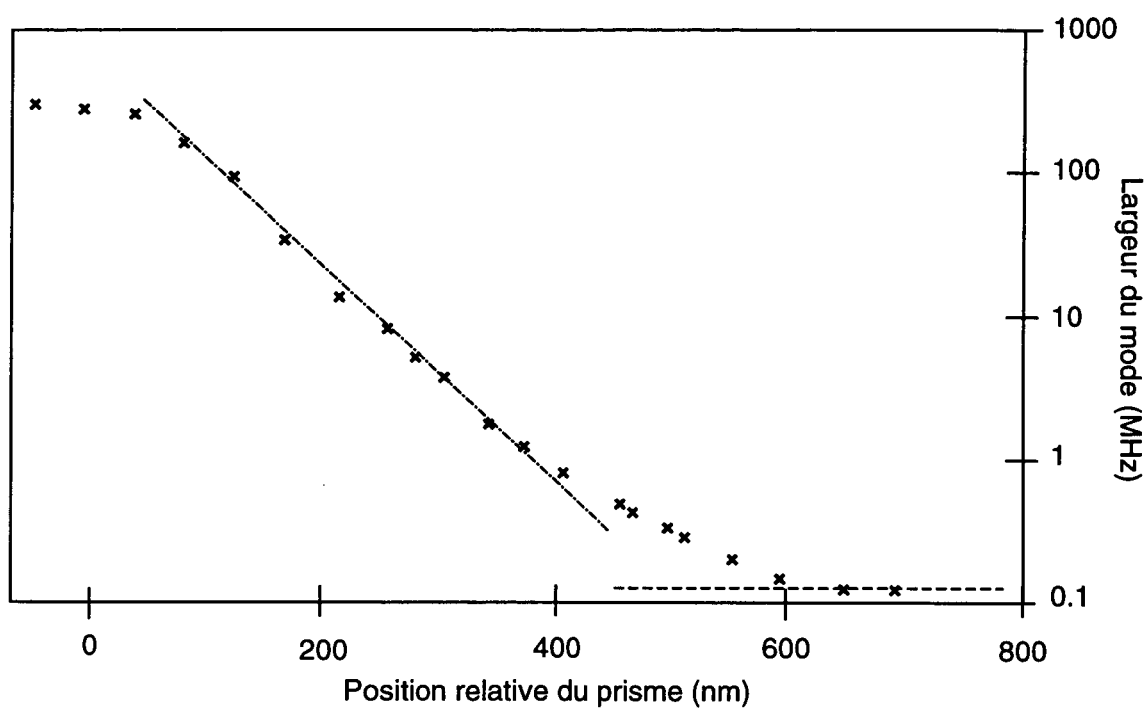


Figure II.29: Largeur d'un mode de galerie en fonction de l'éloignement de la sphère au prisme.

forme:

$$Q^{-1} = Q_{propre}^{-1} + Q_{couplage}^{-1} \times \exp(-2G/\tilde{G}). \quad (\text{II.5})$$

\tilde{G} est la distance caractéristique du couplage. Dans la partie théorique de ce mémoire traitant du couplage par onde évanescente nous avons dérivé une valeur approchée pour \tilde{G} sous la forme:

$$\tilde{G} = \frac{\lambda}{2\pi} \times \frac{1}{\sqrt{N^2 - 1}} \approx 120nm. \quad (\text{II.6})$$

La pente de la droite en trait mixte conduit à mesurer $\tilde{G} \approx 122nm$, valeur en très bon accord avec la prédiction théorique.

Les résultats expérimentaux qui viennent d'être commentés nous permettent de considérer l'utilisation de modes de galerie dans des expériences d'optique variées dans lesquelles des microsphères pourraient jouer le rôle de supercavités optiques. En effet, les résonances fines sont maintenant bien comprises et l'on est capable de varier dans une large gamme le couplage d'un mode de galerie isolé au champ du laser sonde. Pour certaines expériences, il serait cependant utile de pouvoir accorder la fréquence de résonance du mode considéré, pour pouvoir la faire coïncider par exemple, avec une raie atomique ou moléculaire fixée. Passons maintenant en revue quelques méthodes possibles d'accord de la microcavité.

II-3-2 Accord du résonateur.

Plusieurs méthodes d'accord sont possibles pour un résonateur monolithique en silice. On peut a priori agir sur la forme du résonateur lui-même par déformation élastique, ou encore modifier l'indice du diélectrique. Pour moduler l'indice du résonateur, on pourrait songer à utiliser les effets d'électrostriction et/ou électro-optiques, ou encore un effet magnéto-optique. Ceux-ci permettraient en principe d'atteindre des fréquences de modulation très élevées. Malheureusement, la silice étant un milieu centro-symétrique, l'accord relatif maximal que l'on peut espérer, pour des champs facilement réalisables au laboratoire, est extrêmement petit, tout au plus de l'ordre du milliardième. Comme la plage d'accord que nous souhaiterions obtenir vaudrait idéalement une pseudo-période $\Delta\beta(\delta l = 1) \approx 1/N$, ce qui correspond pour la taille de sphères qui nous intéresse, à une accordabilité de 10^{-3} à 10^{-2} , (de manière à pouvoir choisir n'importe quel mode $\{n, m\}$), il nous faut nous tourner vers des procédés plus efficaces. Si l'on se souvient des propriétés élastiques exceptionnelles du verre de silice, que peut-on escompter en terme d'accordabilité d'une déformation mécanique réversible du résonateur?

II-3-2-1 Accord mécanique.

La manière la plus évidente de déplacer les résonances serait de modifier la taille de la microsphère. Il semble difficile de déformer la cavité de façon isotrope. En revanche,

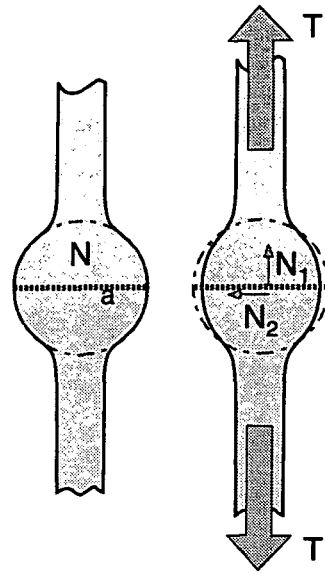


Figure II.30: Soumise à la force de traction T , la fibre et le microrésonateur vont se déformer élastiquement.

l'application d'une contrainte longitudinale devrait permettre une dilatation du système, au moins suivant l'axe de la contrainte. Lors de la description du système de fixation mécanique de la fibre support de la microsphère, nous avons évoqué la possibilité de réaliser des microsphères accrochées au milieu d'un fragment de fil de silice, dont les deux extrémités sont fixées aux actionneurs piézoélectriques. Si l'on commande l'élongation simultanée de ces derniers, la fibre de silice va subir une force de traction, qui va se propager à la microsphère. Le dessin II.30 ci-dessus montre comment la contrainte devrait déformer élastiquement le microrésonateur. Bien entendu, on ne peut dans une telle situation exercer de force de compression, qui induirait le flambage de la fibre support.

Evaluons l'ordre de grandeur du déplacement en fréquence des résonances. Deux effets physiques vont y contribuer. En premier lieu, la contrainte créée dans le volume du résonateur, va déformer élastiquement la microsphère (il n'y a pratiquement pas de fluage pour ce matériau extrêmement visqueux la rupture intervenant toujours avant par fissuration). Nous supposons ici que l'on peut considérer que, sous l'effet de la force de traction, la microcavité subit dans le plan équatorial un allongement relatif suivant l'axe de la contrainte, de \mathcal{A} , tout en conservant approximativement le volume de la cavité.

Par suite de cette déformation isochore, le résonateur mis sous contrainte peut être modélisé au voisinage de l'équateur par un d'ellipsoïde de révolution, d'ellipticité $+\frac{3}{2}\mathcal{A}$. On peut alors appliquer sans modification la formule I.63, page 59, qui donne les effets de déplacement en fréquences des résonances de galerie sous l'effet d'une ovalisation de la

cavité. On trouve que le déplacement relatif induit par l'allongement vaut:

$$\frac{\Delta\beta(l, m)}{\beta(l, m)} = -\mathcal{A}/4 \left[\frac{3m^2}{l(l+1)} - 1 \right]. \quad (\text{II.7})$$

L'autre effet physique important est la biréfringence créée par la contrainte mécanique anisotrope. L'indice de réfraction de la silice subit une modification δN_{\parallel} ou δN_{\perp} suivant que la polarisation du champ électrique est parallèle ou perpendiculaire à l'axe de la contrainte appliquée. La référence [85] donne l'expression de ces modifications, en fonction des constantes de Pockels p_{11} et p_{12} d'un diélectrique initialement isotrope:

$$\delta N_{\parallel} = -\frac{N^3}{2} \{p_{11} - 2\sigma p_{12}\} \mathcal{A} \quad (\text{II.8})$$

$$\delta N_{\perp} = -\frac{N^3}{2} \{p_{12} - \sigma(p_{11} + p_{12})\} \mathcal{A}, \quad (\text{II.9})$$

où $\sigma = 0.17$ est le coefficient de Poisson de la silice, $p_{11} = 0.126$ et $p_{12} = 0.26$. (L'annexe E qui traite des propriétés de la silice vitreuse, relie les coefficients de Pockels à la constante photo-élastique de la silice.)

En prenant en compte simultanément les effets de déformation mécanique du résonateur et de variation de l'indice, on trouve les déplacements relatifs des modes, en fonction de l'allongement \mathcal{A} . Numériquement, on obtient que les modes TE vont se déplacer en valeur relative de:

$$\left(\frac{\delta\nu}{\nu} \right)_{TE} = 0.2 \mathcal{A}, \quad (\text{II.10})$$

tandis que pour les modes TM :

$$\left(\frac{\delta\nu}{\nu} \right)_{TM} = 0.36 \mathcal{A}. \quad (\text{II.11})$$

Ainsi, si l'hypothèse de déformation isochore est valide, les modes TM vont donc se déplacer davantage vers le bleu que les modes TE , ceci proportionnellement à l'allongement. L'accord maximal que l'on peut espérer de cette méthode va dépendre de l'allongement avant rupture. Les fibres optiques commerciales supportent généralement des allongements de plusieurs pour cent (typ. 7%). Eversole et Huston [86] rendent compte (pour des fibres cylindriques) de déformations de l'ordre du pour cent⁸. On peut estimer que l'accord maximal possible avec cette méthode est d'au moins un pour-mille, permettant un accord sur une pseudo-période, ce qui était notre objectif initial. Nous n'avons pas encore essayé expérimentalement cette méthode d'accord qui s'avère très prometteuse. En revanche, il s'est avéré relativement facile de fabriquer des micro-cavités de forme

⁸Cette valeur, sensiblement plus faible que la précédente peut s'expliquer par le fait que cette dernière expérience a été réalisée dans l'air, avec des fibres sans gaine: l'humidité ambiante accélère considérablement la fissuration du matériau

comparable à la figure II.30, la seule difficulté étant d'aligner rigoureusement des deux "pinces" porte-fibres.

Nous avons en revanche déjà expérimenté une autre méthode d'accord très simple, qui ne nécessite pas la fixation du résonateur à deux fibres. Elle consiste à modifier la température du diélectrique. Nous allons voir maintenant comment les effets conjugués de la dilatation thermique du volume du résonateur et de la variation de l'indice du milieu avec la température permettent d'accorder la cavité⁹.

II-3-2-2 Accord en température.

Partons de l'expression approchée I.45, page 49 de $\beta_{l,n}$. Ici, comme le rayon de la cavité va varier, nous allons évaluer directement la dépendance de la fréquence $\nu_{l,n}$ de la résonance $\{l, n\}$ en fonction de la température. On trouve:

$$\frac{\partial \nu_{l,n}}{\partial T} = \frac{\partial \nu_{l,n}}{\partial N} \frac{\partial N}{\partial T} + \frac{\partial \nu_{l,n}}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial T}. \quad (\text{II.12})$$

En évaluant $\frac{\partial N}{\partial T}$, on trouve finalement que, pour un mode *TE*:

$$\frac{\partial \nu_{l,n}}{\partial T} = -\frac{c}{2\pi a} \left[\left(\frac{1}{N^2} \{ \lambda + 2^{-\frac{1}{3}} A_n \lambda^{\frac{1}{3}} \} - N/M^3 \right) \frac{\partial N}{\partial T} + \alpha_T \beta_{l,n} \right]; \quad (\text{II.13})$$

et pour un mode *TM*:

$$\frac{\partial \nu_{l,n}}{\partial T} = -\frac{c}{2\pi a} \left[\left(\frac{1}{N^2} \{ \lambda + 2^{-\frac{1}{3}} A_n \lambda^{\frac{1}{3}} \} - 1/(NM^3) - 2/(N^3 M) \right) \frac{\partial N}{\partial T} + \alpha_T \beta_{l,n} \right], \quad (\text{II.14})$$

avec $M = (N^2 - 1)^{\frac{1}{2}}$ et $\lambda = l + \frac{1}{2}$. α_T est ici le coefficient de dilatation linéaire de la silice en température. Si l'on évalue numériquement les déplacements attendus, on constate que le premier terme des expressions données ci-dessus est dominant: les déplacements obtenus seront très peu dépendants du mode précis considéré. Cela est confirmé par les valeurs données dans le tableau ci-contre, pour une sphère de $75\mu\text{m}$ de diamètre et une de $150\mu\text{m}$. Le coefficient de dilatation α_T vaut $5.5 \cdot 10^{-7} \cdot K^{-1}$, et $\frac{\partial N}{\partial T} = -1.28 \cdot 10^{-5} \cdot K^{-1}$ [87][85].

Diamètre en μm	$\{l, n\}$	Modes TE ou TM ($\text{GHz}/^\circ\text{K}$)
75	{423, 0}	-3.132
	{423, 1}	-3.120
	{423, 2}	-3.106
	{423, 3}	-3.091
150	{857, 0}	-3.139
	{857, 1}	-3.133
	{857, 2}	-3.126
	{857, 3}	-3.118

⁹On pourrait songer à utiliser un gaz sous pression variable afin de modifier l'indice extérieur à la sphère et non la sphère elle-même: hélas, les variations réalisables facilement restent modestes

Nous avons vérifié expérimentalement cette loi, en pointant à une température de l'enceinte expérimentale donnée, un mode de galerie particulier par la mesure de sa fréquence optique absolue avec un λ damètre; en modifiant légèrement le point de consigne de l'asservissement en température, nous avons alors suivi la dérive du mode. Pour une sphère de $\varnothing 150\mu m$, nous avons trouvé $-3.1GHz.K^{-1}$, valeur en bon accord avec les résultats du modèle. Schiller rapporte des résultats comparables[88]. En conclusion, les coefficients thermiques des modes, quasi-identiques pour les deux polarisations, permettront un accord de la cavité, sur quelques pour cent de la pseudo-période.

Passons maintenant à l'étude d'une tout autre catégorie d'effets optiques, qui font intervenir des non-linéarités induites par le faisceau laser sonde.

II-4 Effet de la puissance de la sonde.

Jusqu'alors, les spectres présentés dans ces pages ont tous été enregistrés dans des conditions telles que la puissance couplée dans le mode de la microsphère avoisine au plus la centaine de nanowatts. Si on tente d'accroître la puissance couplée, on observe expérimentalement des effets qui dépendent de façon non-linéaire de cette intensité. Aussi allons nous maintenant les décrire en détail et tenter de les comprendre au moyen de modélisations physiques simples.

II-4-1 Effets d'hystérésis.

L'observation la plus directe d'effets non-linéaires dans une cavité optique est peut-être d'effectuer un balayage local de la fréquence du laser sonde autour d'une résonance, suffisamment lent pour exclure tout effet dynamique, pour des intensités lumineuses couplées au mode résonnant croissantes. La figure II.31 montre un tel spectre, enregistré en intensité. On s'est centré ici autour d'une résonance isolée d'une microsphère de $\varnothing 65\mu m$. Un aller et un retour de balayage sont enregistrés.

L'interprétation qualitative du phénomène est simple. Aux intensités très faibles, on obtient pour l'intensité transmise par la cavité, la lorentzienne déjà décrite. Pour une intensité plus grande, lorsque le laser sonde approche de la résonance à moins d'une demi-largeur, si le matériau qui constitue la cavité présente une non-linéarité quadratique (i.e. en intensité), l'intensité couplée dans le mode peut être suffisante pour déplacer la résonance du mode de galerie, dans une direction qui dépend du signe de l'effet non-linéaire. Pour fixer les idées, et ce qui correspond à la situation expérimentale, nous allons considérer que la fréquence de résonance du mode diminue avec l'intensité. On peut visualiser ce phénomène en calculant le réseau de courbes définies par ce modèle simple. Les deux paramètres qui permettent de paramétriser toute la surface sont la fréquence et l'intensité du couplage, représentés sur les axes x et y (à puissance laser sonde constante). En ordonnée, on a fait figurer la puissance couplée au mode (axe z). Nous obtenons la figure II.32.

La courbe en trait pointillé représente le couplage tel que le flanc abrupt de la résonance

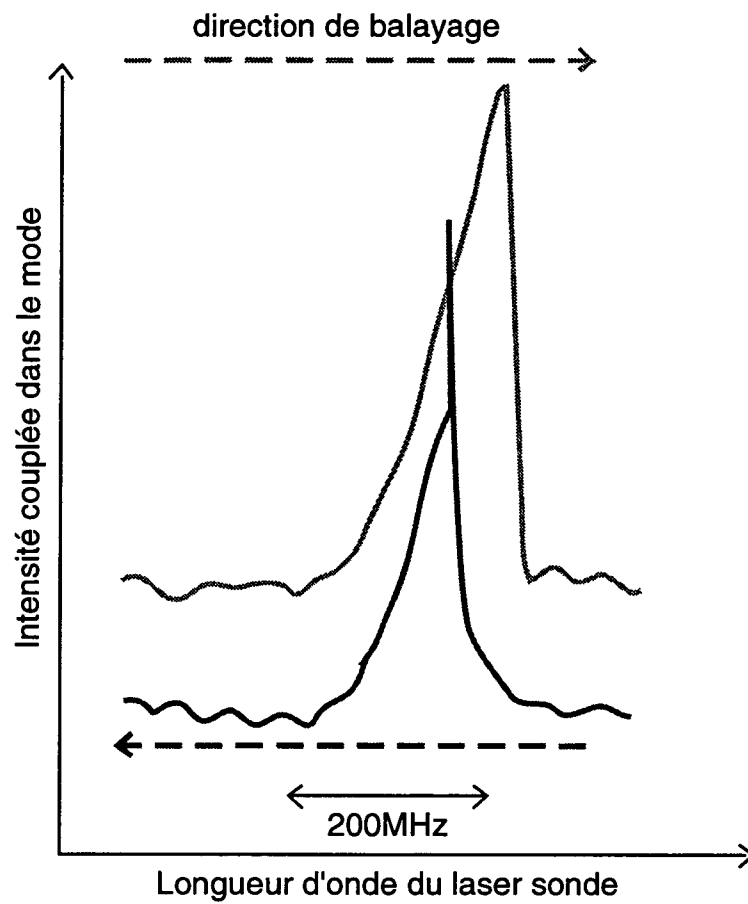


Figure II.31: Balayage local autour de la porteuse d'un mode de galerie, pour une (forte) intensité couplée de l'ordre de $25\mu W$.

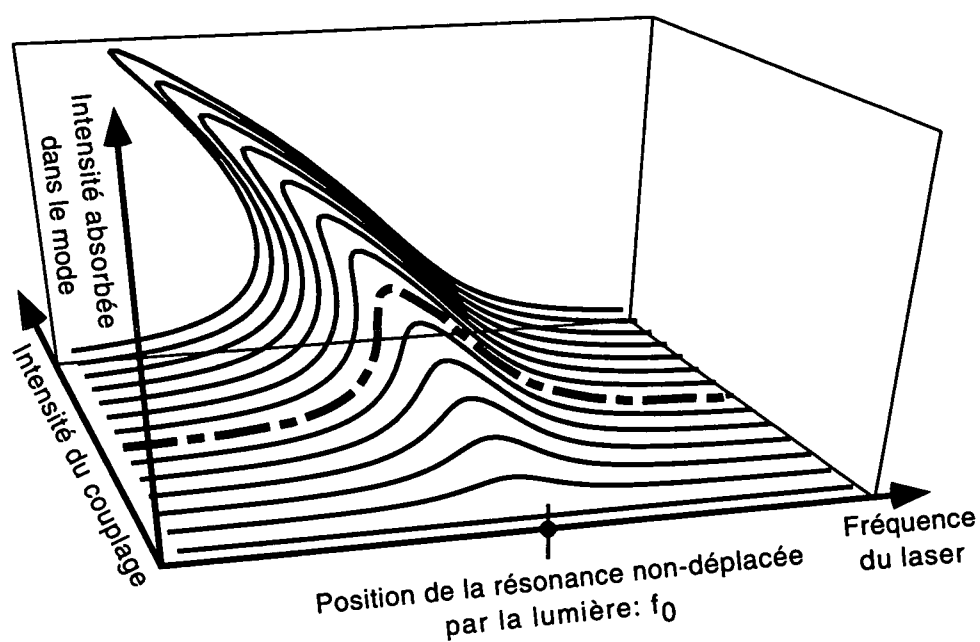


Figure II.32: Réseau de spectres (en amplitude) calculés dans le cas d'un déplacement du mode variant linéairement avec l'intensité couplée. (Bien entendu, tous les points de cette surface calculée qui possède des surplombs, ne correspondent pas à des régimes stables.)

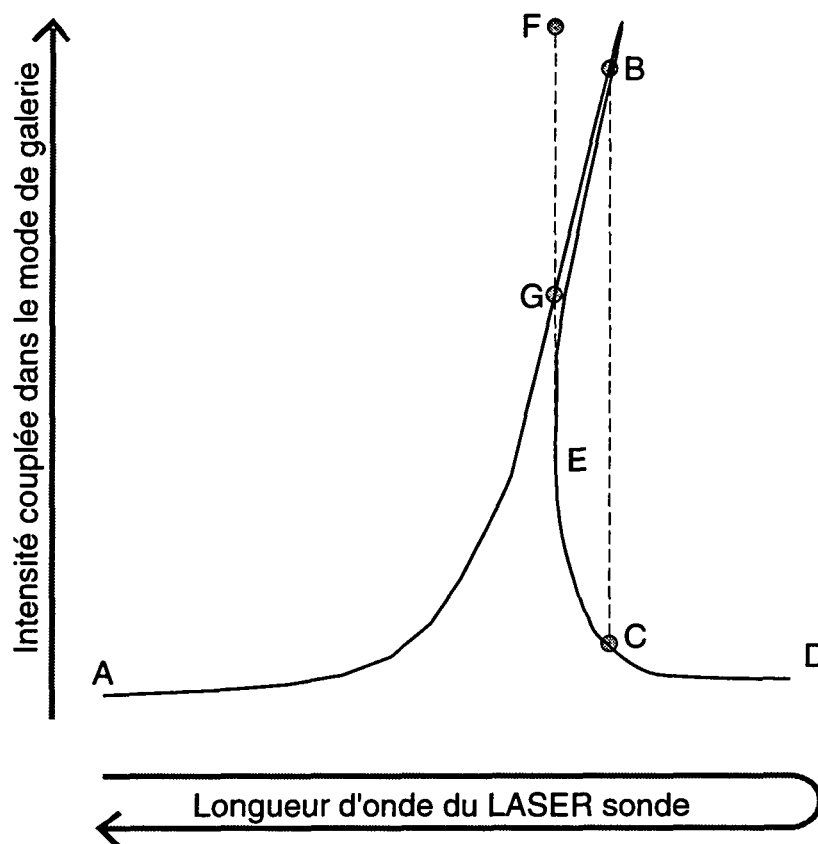


Figure II.33: Cette figure représente une section de la surface de la figure II.32. Le texte décrit le cycle parcouru lorsque l'on balaye le laser sonde.

déformée par la non-linéarité possède une tangente verticale. Suivons un cycle de balayage en fréquence pour un couplage donné constant, supérieur à ce couplage limite. Un tel cycle apparaît sur la figure II.33.

Augmentons la fréquence du laser sonde, en commençant à gauche de la résonance. On parcourt alors l'arc AB . En B , le système "décroche, et saute sur la trajectoire CD (le sommet n'est en général pas atteint, en raison du bruit sur l'amplitude du couplage). Si à présent la fréquence du laser est diminuée à partir de D , l'arc DE est parcouru, et le saut se produit en E où la tangente est verticale vers F . Ce dernier point représente l'intensité maximale qui serait couplée à une cavité identique à la cavité étudiée mais dépourvue d'effet thermique, centrée à une fréquence telle que le point E appartienne au flanc droit de la lorentzienne décrivant le mode. Ce point F ne correspond pas à une situation d'équilibre et une interprétation plus précise nécessiterait une étude dynamique du remplissage de la cavité, en tenant compte des constantes de temps propre des effets non-linéaires. Sans entrer de ce type d'étude, on peut toutefois préciser qualitativement l'évolution temporelle du système après que le point E ait été atteint, (dans le cas particulier où la vitesse

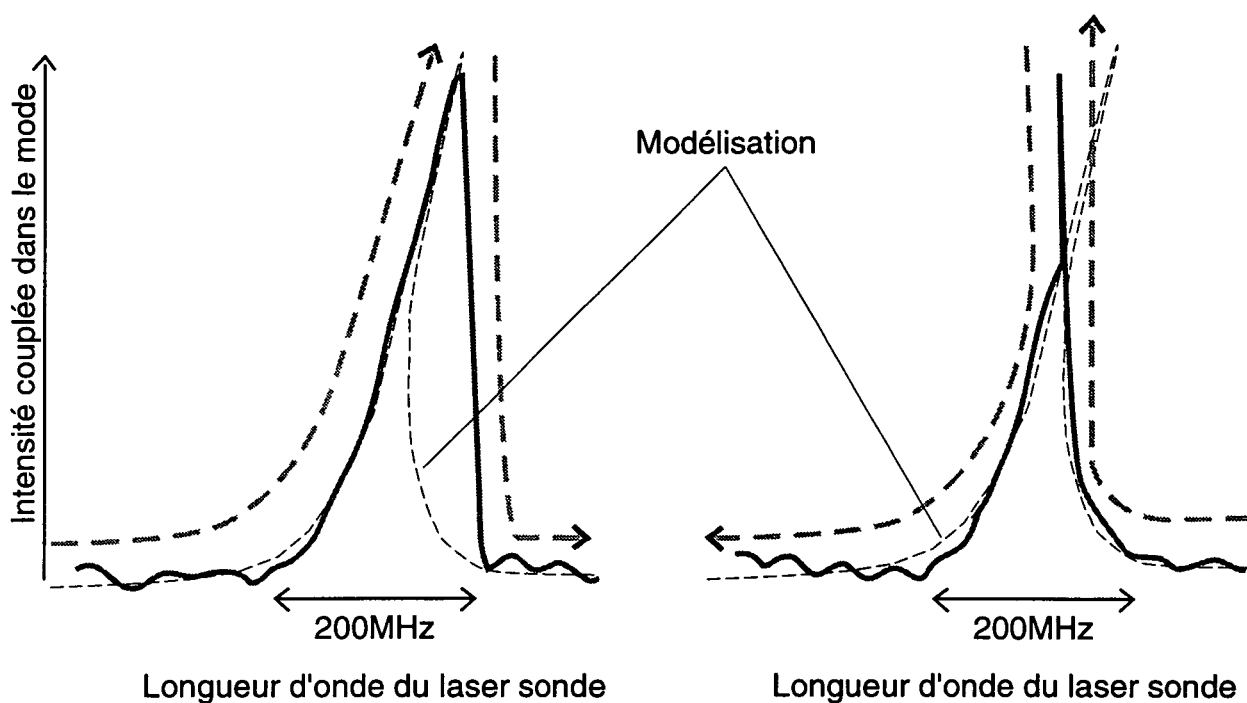


Figure II.34: Mise en évidence d'effets non-linéaires proportionnels en intensité, pour une microsphère de $\phi 65\mu m$. La puissance maximale couplée est de l'ordre de $25\mu W$, ce qui est suffisant pour déplacer la résonance sur environ $200 MHz$.

de balayage du laser est petite devant la réponse dynamique du résonateur). Il va se produire un "flash" transitoire de lumière lorsque le mode de la cavité va commencer à se remplir. Si l'on suppose que les effets de chauffage sont beaucoup plus lents que le temps caractéristique de couplage ($\omega/Q_{couplage}$), l'intensité va atteindre brièvement le point F . Ensuite, la cavité va chauffer et la fréquence propre du mode va se déplacer vers la droite, et l'intensité va donc diminuer, puisque le résonateur va s'éloigner de la résonance. Le système va finalement atteindre à nouveau un point d'équilibre, G . Si l'on continue à diminuer la fréquence, on suit la courbe GA . La figure suivante montre simultanément le spectre attendu par cette prédiction et un spectre mesuré, pour les deux sens de balayage.

La figure II.34 montre simultanément les résultats obtenus par notre modélisation simple (après ajustement des paramètres libres) et les courbes expérimentales représentées en II.31. Ce modèle reproduit donc de manière correcte le comportement statique du système, en reliant l'intensité couplée au mode à une non-linéarité. Il ne permet toutefois pas de calculer des effets dépendants du temps, qui permettraient peut-être d'isoler les différents effets physiques produisant cette non-linéarité, qui pourraient se produire à des échelles de temps différentes.

II-4-1-1 Interprétation des effets non-linéaires.

Afin d'affiner les considérations de la partie précédente, il nous faut comprendre plus précisément l'origine des non-linéarités du matériau. Nous nous limiterons ici à l'ordre le plus bas des non-linéarités en ne considérant que des effets proportionnels à l'intensité. On peut proposer a priori deux catégories de mécanismes très différents, qui produiraient de tels effets. La première est particulièrement simple: la lumière qui se propage dans le diélectrique peut provoquer un chauffage du diélectrique si ce dernier possède des pertes. Cet effet thermique, qui est à l'évidence proportionnel à l'intensité, pourrait être qualifié d'indirect, car le déplacement en fréquence du mode est subordonné à la réponse thermique du résonateur dans son ensemble. A ce premier mécanisme on peut opposer une seconde classe d'effets induits par la non-linéarité optique (Kerr) de la silice elle-même: l'indice du matériau est dans ce cas fonction de l'intensité lumineuse. Pour étudier quantitativement les effets d'origine thermique, nous allons effectuer un bilan précis de la chaleur échangée au sein de la microsphère et modifier en conséquence les équations définissant la position des modes résonnants. Ensuite, nous aborderons le problème des non-linéarités intrinsèques au diélectrique.

Si ces effets non-linéaires restent assez petits, c'est-à-dire si les variations relatives de l'indice en tout point du matériau sont petites devant 1, on pourra réduire l'effet de ces non-linéarités aux déplacements qu'ils induisent sur la position des modes. On considère implicitement dans une telle approche perturbative que les petites modifications des propriétés optiques du diélectrique n'altèrent pas significativement la nature des modes résonnants, et l'on ne s'intéressera pas ici aux variations de largeur et de distribution spatiale du champ (qui ne seront modifiées qu'à l'ordre suivant). Il nous faut donc déterminer l'intensité couplée au microrésonateur en fonction de la fréquence du laser sonde, sachant que la position effective de la résonance est fonction de l'intensité intra-cavité.

Commençons par étudier le cas des pertes inélastiques dans le diélectrique. Celles-ci sont converties en chaleur. Les variations de température qui en découlent changent l'indice et la taille du résonateur, (comme cela a été vu au paragraphe II-3-2-2 dans le cas d'une variation de température homogène). Ces modifications se répercutent à leur tour sur la position des résonances (et dans une moindre mesure leur largeur et la distribution spatiale du champ).

On se ramène donc au problème couplé suivant: déterminer la position d'un mode donné, sachant que cette position dépend de l'indice de la microsphère qui dépend lui-même de l'écart à résonance via l'efficacité du couplage. Commençons par considérer les effets de chauffage du résonateur.

Les flux de chaleur entre la zone du mode (qui est le lieu de la génération de chaleur) et le reste de la sphère peuvent être modélisés très simplement en décomposant le système en trois masses thermiques. L'une, très légère (indiquée m pour "mode"), coïncidant avec le volume de verre contenant le mode et l'autre constituée du reliquat massif (notée "r"). Ces deux zones sont en contact thermique, caractérisé par la constante de temps τ_{mr} . Les températures respectives de la zone du mode et du reste de la boule de diélectrique, T_m et T_r , caractérisent complètement, avec le champ maximal du mode E_{max} et la pulsation

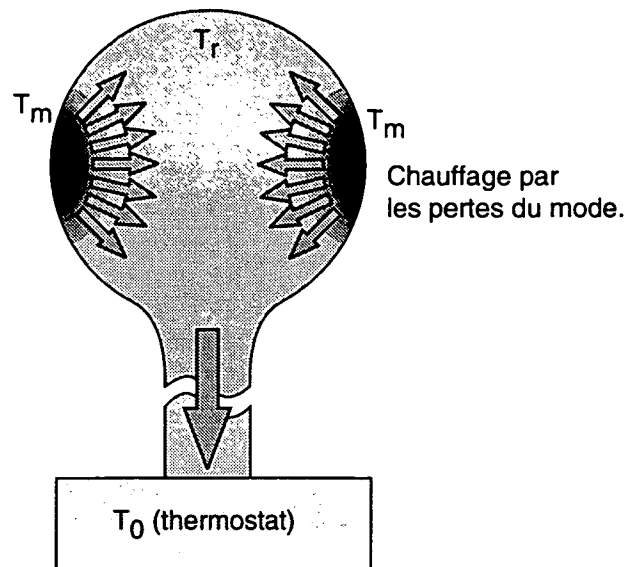


Figure II.35: On a décomposé ici le résonateur en deux parties. La première, qui coïncide avec le mode optique produisant le chauffage. La seconde est constituée du reste de la microsphère. Enfin, l'ensemble, considéré comme un tout, est en contact thermique avec un thermostat, le laboratoire.

ω de la lumière, la position des résonances. Enfin, le volume "r" est en contact thermique avec un thermostat à la température T_0 —le dispositif expérimental, via la conductivité du support de la microsphère de constante de temps τ_{rt} (les pertes radiatives sont ici négligeables, et on supposera que l'on opère sous vide). Cette modélisation est figurée schématiquement ci-dessus (figure II.35). Cette subdivision du résonateur va nous permettre de dissocier deux types d'effets thermiques. D'une part le chauffage "rapide" qui se produit lorsque les pertes inélastiques chauffent localement la silice dans la région du mode résonnant et provoquent une modification de l'indice qui déplace la résonance. D'autre part, l'effet de chauffage du résonateur comme un tout, semblable à ce qui a été décrit dans la partie traitant de l'accord thermique des cavités. Ilchenko rapporte des conclusions similaires[89]. Bien qu'apparaissant à des échelles de temps différentes, ces deux processus qui entraînent tous les deux un déplacement de la fréquence des modes de galerie, relèvent d'effets proportionnels à l'intensité du champ optique. On va donc pouvoir caractériser mathématiquement ces deux types d'effets par la donnée des variations respectives de l'indice effectif du milieu en fonction de l'intensité du champ: $N_m(E) = N + N_m^{(2)} E^2$. Il est également commode d'introduire la susceptibilité effective $\chi_m = \chi + \chi^{(3)} E^2$, avec $\chi^{(3)} = 2N m^{(2)} \times N$ [90]. Evaluons maintenant l'ordre de grandeur de ces coefficients, sous l'effet des deux modes de chauffage qui viennent d'être discutés.

a • Chauffage "rapide" du mode. Les équations de la calorimétrie donnent pour le volume de diélectrique chauffé par les pertes du mode résonnant:

$$\overbrace{T_m - T_r}^{\dot{}} = -(T_m - T_r)/\tau_{mr} + \left\{ \frac{\omega \epsilon_0 N^2 E^2}{Q_{abs} c_v} \right\}. \quad (\text{II.15})$$

Q_{abs} est ici le facteur de qualité limité par absorption du mode, c_v la capacité calorifique volumique de la silice et V le volume du mode optique. Le terme entre accolades exprime les effets de la chaleur générée par les pertes optiques. Rappelons que τ_{mr} représente la constante de temps caractérisant les échanges thermiques entre la région du mode et le reste du résonateur. On peut estimer sa valeur, pour un mode de galerie $\{l, n = 0\}$, par le temps de diffusion thermique sur l'épaisseur du mode:

$$\tau_{mr} = \frac{[\lambda l^{\frac{1}{3}} / (\pi N)]^2}{D}. \quad (\text{II.16})$$

Le numérateur de cette expression est le carré de "l'épaisseur" occupée par le mode (nous avons déjà rencontré cette estimation à l'occasion de la détermination du volume des modes de galerie). Au dénominateur figure le coefficient de diffusivité thermique D de la silice. Comme l'indice de la silice dépend linéairement de la température, en fonction du coefficient $\partial_T N$, l'équation II.15 permet d'obtenir l'évolution de la susceptibilité optique $\chi = N^2 - 1$ sous la forme:

$$\dot{\chi} = -\chi/\tau_{mr} + \chi_m^{(3)} \cdot E^2/\tau_{mr}. \quad (\text{II.17})$$

Par identification avec II.15 on obtient $\chi_m^{(3)}$ sous la forme:

$$\chi_m^{(3)} = 2N \frac{\omega \epsilon_0 N^2}{c_v Q_{abs}} \tau_{mr} \partial_T N. \quad (\text{II.18})$$

Numériquement, pour une sphère de silice ($N = 1.45$, $D = 8.5/10^{-3} \text{cm}^2 \text{s}^{-1}$ et $c_v = 1.5 \cdot 10^6 \text{Jm}^{-3} \text{K}^{-1}$), de rayon $a = 40 \mu\text{m}$ correspondant à $l = 450$ à 780nm , pour $Q_{abs} = 3 \cdot 10^9$, on trouve $\chi_m^{(3)} = 5 \cdot 10^{-22} \text{S.I.} (= 4.5 \cdot 10^{-13} \text{esu})$. Le temps caractéristique τ_{mr} correspondant est de l'ordre de $2 \mu\text{s}$.

On peut également calculer le seuil de puissance intracavité nécessaire pour entraîner un déplacement du mode de sa largeur. Pour les mêmes paramètres que ci-dessus, on trouve que $4.4 \cdot 10^4$ photons confinés dans le mode sont nécessaires pour déplacer le mode de 10^{-10} en valeur relative. Cela correspond à une puissance circulant dans le mode de $6nW$.

b • Chauffage "lent" de l'ensemble du résonateur. On considère maintenant les effets de chauffage du résonateur comme un tout par les pertes du mode. Le calcul est très semblable à ce que nous venons de faire. La constante de temps τ_{rt} est déterminée par le rayon r_f et la longueur L_f de la fibre de silice qui relie la microsphère au support (ce dernier étant thermalisé avec le reste du laboratoire). On peut écrire:

$$\tau_{rt} = \frac{L_f a^3}{r_f^2 D}, \quad (\text{II.19})$$

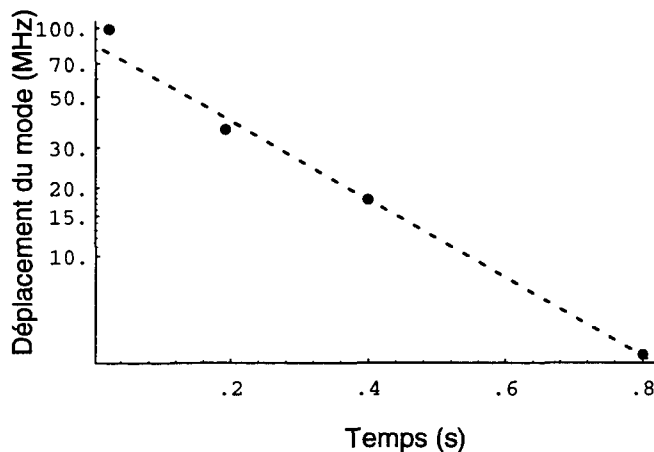


Figure II.36: Evolution temporelle de la fréquence d'un mode de galerie, après extinction du laser sonde. La cause de chauffage étant supprimée, le résonateur refroidit en bloc, au contact du support.

où, comme plus haut, a est le rayon de la sphère et D la diffusivité thermique de la silice. La constante χ_r correspondante à quasiment la même expression que χ_m , à ceci près que les pertes optiques chauffent toute la sphère et non plus seulement la zone du mode. Il faut donc introduire un facteur multiplicatif $V_{mode}(l, n = 0)/V_S$. $V_{mode}(l, n = 0)$ est le volume optique du mode de galerie $\{l, n = 0\}$ déterminé page 46, et $V_S = \frac{4}{3}\pi a^3$. On trouve finalement:

$$\chi_r = 2N \frac{\omega \epsilon_0 N^2 V_{mode}}{c_v V_S Q_{abs}} \tau_{rt} \partial_T N. \quad (\text{II.20})$$

Numériquement, pour une même sphère qu'au paragraphe ci-dessus, supportée par un filament de silice de 2mm et de $a/3 = 13\mu\text{m}$ de rayon, on trouve que $\tau_{rt} = 0.9\text{s}$ et $\chi_r = 5.10^{-19}$. La puissance intra-cavité requise pour déplacer le mode de 10^{-10} vaut 6pW pour cette valeur de χ_r .

Cet effet de chauffage en bloc de la cavité est très bien mesuré expérimentalement. La figure II.36 ci-contre montre, en échelles semi-logarithmiques, le déplacement (en fréquence) temporel d'un mode de galerie d'une microsphère de $\phi 110\mu\text{m}$, suspendue par une fibre de $\phi 50\mu\text{m}$ de 2mm de long, après extinction du laser sonde.

Un déplacement en fréquence de 100MHz correspondent ici à un chauffage de 0.033K . La constante de temps mesurée est de l'ordre de 0.25s (la constante de temps τ_{rt} "théorique" définie plus haut vaudrait ici 3s : seule la loi d'échelle est correctement prédite par τ_{rt} . Pour obtenir des valeurs exactes, il faudrait intégrer exactement les équations de la chaleur dans le résonateur).

Il reste à prendre en considération pour que ce modèle puisse reproduire correctement les différents effets non-linéaires, la non linéarité optique de la silice elle-même.

c • Non linéarité du diélectrique (Kerr). Le milieu diélectrique lui-même peut induire des effets non-linéaires, qui apparaissent lorsque ce dernier est soumis à une irradiation lumineuse. En effet, à mesure que le champ électrique optique des ondes lumineuses incidentes croît, la polarisabilité du diélectrique sature. Aussi, si l'on fait abstraction des effets qui pourraient avoir lieu au voisinage de la surface du résonateur [91], comme la silice est un milieu centro-symétrique, il ne peut exister d'effet non-linéaire du second ordre (fonction du produit de l'amplitude de deux champs optiques $E_1 E_2$). A l'ordre le plus bas, la polarisation non-linéaire $P_{NL}^{(3)}$ du diélectrique éclairé par trois ondes d'amplitudes respectives E_1, E_2, E_3 peut donc se développer a priori sous la forme tensorielle suivante [92]:

$$P_{NLi}^{(3)} = 3\chi_{ijkl}^{(3)}(E_{1j}E_{2k}E_{3l}^* + c.c.). \quad (\text{II.21})$$

Du fait de la symétrie du milieu, lorsque le milieu est irradié par un champ unique d'amplitude E , on peut réduire l'expression à:

$$P_{NLi}^{(3)} = \chi^{(3)}(E_i^2 E_i^* + c.c.), \quad (\text{II.22})$$

avec $\chi^{(3)} = 6\chi_{iiii}^{(3)}$. Pour la silice $\chi^{(3)} \approx 1.4 \cdot 10^{-22}$ ($10^{-14} esu$). Cependant, les effets non-linéaires liés au diélectrique se manifesteront seulement dans le résonateur, pour des échelles de temps telles que le champ résonnant puisse se bâtir dans la cavité. Le temps correspondant est donc $\tau_{kerr} = Q_{couplage}/\omega$, où $Q_{couplage}$ est le facteur de qualité limité par le couplage. Si l'on travaille au couplage critique, on prendra donc $\tau_{kerr} \approx Q_{abs}/\omega$. Numériquement, on trouve pour le même facteur de qualité $3 \cdot 10^9$ que ci-dessus, $\tau_{kerr} \approx 1.2 \mu s$. (Remarquons également que $\chi^{(3)}$ a le même signe que les effets thermiques: l'indice optique effectif diminue avec l'intensité lumineuse dans les deux cas.) Enfin, la puissance intra-cavité induisant, par effet Kerr un déplacement du mode de 10^{-10} vaut ici $10 nW$, toujours pour une sphère de diamètre $80 \mu m$. On voit que pour de tels facteurs de qualité, ces valeurs sont voisines de celles obtenues pour le chauffage rapide du diélectrique, rendant la distinction des effets difficile.

d • Susceptibilité non-linéaire totale. On peut regrouper les trois types d'effets non-linéaires, et déduire, en fonction de la constante de temps que l'on considère, l'ordre de grandeur de la susceptibilité non-linéaire χ_{NL} totale que l'on obtient. La courbe II.37 montre un tel résultat.

Pour les sphères que nous savons actuellement fabriquer, les constantes de temps de l'effet Kerr¹⁰ de la silice dans la cavité et du phénomène de chauffage du résonateur sont très semblables—de l'ordre de la microseconde. Aussi, la mesure de la susceptibilité

¹⁰Ici il ne s'agit pas de la constante de temps extrinsèque du matériau, mais du temps de couplage de la lumière sonde au mode de galerie, soit environ T_{cav}

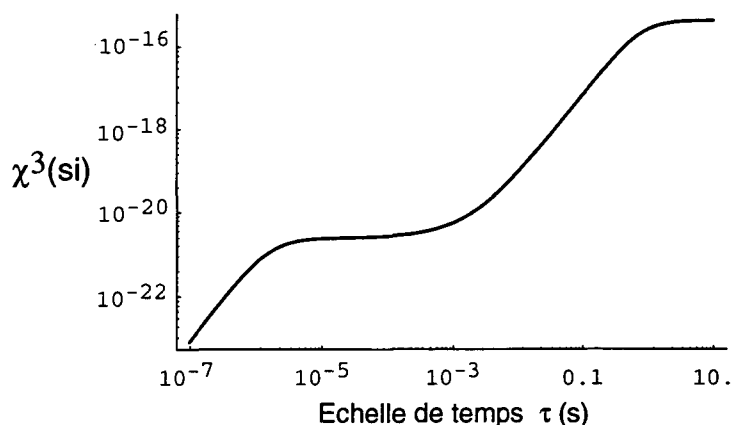


Figure II.37: On a regroupé ici les différentes contributions non-linéaires, qui donnent toutes les trois les variations de la susceptibilité effective du diélectrique constitutif, en fonction de l'intensité lumineuse dans le mode. Ce diagramme logarithmique précise l'importance de leurs effets cumulés en fonction de l'échelle temporelle considérée.

du diélectrique, effectuée au moyen d'impulsions brèves de l'ordre de la microseconde, avec un faible taux de répétition (de manière à ne pas être gêné par la susceptibilité géante causée par le chauffage thermique de toute la cavité), ne semble pas suffisante pour quantifier de manière précise la valeur de la constante Kerr (c.w.) dans la silice que nous utilisons. Expérimentalement, les sphères de petites taille et de très haute surtension sont les meilleures candidates à une telle expérience.

II-5 Conclusion de la partie expérimentale.

Au cours de ce travail, nous avons appris à fabriquer, puis à caractériser spectroscopiquement des micro-résonateurs monolithiques en silice ultra-pure, de 50 à 500 μm de diamètre. La seconde version de notre appareillage est désormais capable de fondre les microsphères sous vide secondaire, et permet l'enregistrement des résonances sans avoir à rouvrir l'enceinte expérimentale.

Les résultats expérimentaux exposés dans cette partie démontrent qu'il est possible d'observer dans ces billes de silice des résonances de galerie de finesse record (de plusieurs millions). En terme de facteurs de qualité, ces microrésonateurs monolithiques sont comparables à des cavités Fabry-Pérot d'un mètre de long, munies de bons miroirs diélectriques. De surcroît, le couplage des modes de galerie des microsphères aux champs extérieurs peut être ajusté en faisant varier la distance de la micro-cavité au dispositif de couplage par onde évanescente. Ces premiers résultats expérimentaux sont donc très encourageants

et font des microsphères d'authentiques supercavités optiques, utilisables dans de nombreuses expériences d'optique.

Au cours de ce chapitre, nous avons passé en revue quelques effets physiques qui, à défaut d'être totalement originaux, surviennent dans les sphères de silice à des ordres de grandeur inhabituels, comme par exemple la mise en évidence d'effets non-linéaires pour des puissances couplées dans la gamme du nanowatt. Il reste probablement de nombreuses voies à explorer dans cette direction, en particulier la possibilité d'utiliser les non-linéarités intrinsèques du matériau afin de réaliser des expériences d'optiques non-linéaires plus subtiles ("squeezing" d'un champ optique par exemple).

L'étude des modes de galerie eux-mêmes n'est également pas achevée, et plusieurs directions restent à explorer. Dans l'optique de la recherche des plus grands facteurs de surtension tout d'abord, il nous faut remarquer que les résonances les plus fines enregistrées jusqu'ici dans nos expériences sont encore à presque un ordre de grandeur des largeurs que les mécanismes de pertes identifiés pourraient laisser espérer. Il reste donc encore à comprendre les véritables limitations auxquelles nous-nous heurtons aujourd'hui: effets de défauts de surface, absorptions d'impuretés résiduelles, couches moléculaires superficielles... Il est probable que des caractérisations plus soignées de la surfaces du diélectrique (par des observations au microscope à force atomique AFM, par exemple) et la réalisations d'expériences à d'autres longueur d'ondes (au maximum de transmission du verre de silice à $1.55\mu m$) permettrons de mieux comprendre les mécanismes de perte résiduels.

L'observation expérimentale a d'autre part très souvent mis en évidence des doublets serrés (de l'ordre du mégahertz) dans les spectres optiques des résonances. Nous avons vu que ces doublets ne pouvaient pas être expliqués par de purs effets géométriques quels qu'ils soient (ovalisations ou ondulations de la surface). Nous suspectons donc des effets liés à l'excitation simultanée des modes de galerie droit et gauche, bien que le système de couplage par onde évanescente ne doive en principe n'exciter efficacement qu'un seul sens de rotation. Des calculs préliminaires ont montré que ce couplage parasite pourrait être causé par des défauts quasi ponctuels.

Enfin, l'une des orientations actuelles des expériences porte sur l'étude du couplage des modes de galerie au champ évanescent. En parallèle d'un travail expérimental d'exploration méthodique des paramètres, des travaux théoriques visent à calculer quantitativement l'amplitude de ce couplage. La méthode de couplage des résonateurs à une fibre optique entaillée (voir supra) est en cours d'essai. Si cette méthode de couplage fonctionne aussi bien que nous l'espérons, la partie optique de l'expérience pourrait être simplifiée, et gagnerait en compacité.

La troisième partie de ce mémoire va maintenant passer en revue quelques-unes des idées d'expériences utilisant des résonances fines de galerie, qui ont fait l'objet d'une étude préliminaire de faisabilité.

Chapitre III

Perspectives.

Le second chapitre de ce mémoire a montré que l'on pouvait observer expérimentalement des résonances de très grande finesse dans ces micro-résonateurs de silice. Le volume du mode des résonances de galerie les plus fines est tel (quelques centaines à quelques milliers de λ^3) qu'il permet d'espérer la mise en évidence expérimentale d'effets physiques hors d'atteinte auparavant. En effet l'extrême confinement du champ électromagnétique devrait permettre, par exemple, de réaliser des expériences sensibles au champ d'un unique photon piégé dans la cavité.

Nous présentons dans ce chapitre plusieurs propositions d'expériences qui tirent spécifiquement profit des particularités des microsphères, comme le très grand confinement du champ électromagnétique et l'existence de grands gradients de champ à la surface de la silice, la grande finesse du résonateur, ou encore la possibilité de réaliser des expériences d'optique non-linéaire résonnantes. Le premier volet de cette partie présente les ordres de grandeur d'une expérience qui devrait permettre la déviation d'un jet d'atomes lents par le champ d'un photon unique d'un mode résonnant d'une microsphère. Une partie des résultats exposés ici sont repris dans la référence [93].

Ensuite, dans une seconde partie, nous discuterons la faisabilité d'un certain nombre d'autres idées d'expériences, qui pourraient encore renforcer l'intérêt porté aux microsphères comme supercavités optiques.

III-1 Quantification de la force d'interaction atome-champ.

III-1-1 Effets "dispersifs" et action mécanique.

Lorsque l'on effectue au laboratoire une mesure d'intensité optique, on envoie généralement la totalité ou une fraction du faisceau à mesurer sur un détecteur quadratique. Dans une photodiode par exemple, les photons incidents produisent avec une bonne probabilité des paires électron-trou, qui sont dissociées par le champ électrique local et génèrent un photocourant proportionnel (approximativement) à l'intensité optique. Dans de tels détecteurs

les photons sont détruits par la mesure. Il serait particulièrement intéressant de pouvoir mesurer une intensité optique, tout en évitant la dissipation du champ dans le détecteur. Avec un tel dispositif, on pourrait imaginer d'envoyer un message sous forme optique à de nombreux destinataires successifs, sans avoir à le régénérer entre chacun d'eux. On notera que le principe d'une telle mesure non-destructive (QND) repose nécessairement sur une interaction dispersive non-absorptive entre le champ et le détecteur. Depuis la proposition conceptuelle initiale de Braginsky [10], de très nombreux systèmes QND ont été discutés. Sur le plan expérimental, plusieurs voies sont actuellement explorées[36][37][38]. Dans le domaine de la mesure de champs optiques par exemple, plusieurs groupes ont pu réduire le bruit d'intensité d'un faisceau laser au moyen d'un atténuateur variable commandé par le résultat d'une mesure d'intensité non-destructive. Le principe général de ces mesures d'intensité non-destructives consiste à envoyer le faisceau à mesurer sur un milieu non-linéaire dispersif (milieu matériel ou atomes libres), et à sonder les modifications d'indice induites par ce champ au moyen d'un faisceau annexe de plus faible intensité. On réalise ainsi une sorte de mesure "croisée", puisque l'on détecte avec le faisceau annexe des modifications induites par le champ à mesurer. Comme les effets purement dispersifs sont en général très petits lorsque l'on se place dans le régime où les effets dissipatifs sont négligeables, il est plus facile de chercher à mesurer l'intensité d'un champ contenu dans une cavité électromagnétique. En effet, si l'on réalise la mesure sur une échelle de temps petite devant le temps d'amortissement de la cavité (T_{cav}), on bénéficie du confinement réalisé par la cavité électromagnétique. (L'amplitude du champ à mesurer est ainsi multiplié par la finesse du résonateur.) Dans un tel système, des champs de quelques photons pourraient alors devenir accessibles au processus de mesure. Une telle expérience est en cours de réalisation dans notre laboratoire[94]. Un jet d'atomes préparés dans un état très excité (atomes de Rydberg circulaires) traverse une cavité micro-onde supraconductrice de très haute surtension (10^8 à 10^{10}) contenant quelques photons micro-ondes ($50GHz$). Le champ de cette cavité, légèrement désaccordée par rapport à l'une des transitions atomique, déplace les niveaux atomiques lors de la traversée (effet Stark dynamique). La mesure (interférométrique) du déphasage total subi par les atomes à la suite de la traversée, renseigne indirectement sur l'amplitude du champ contenu dans la cavité. Cette expérience devrait permettre de mesurer sans absorption le champ micro-onde.

Cette expérience utilise à la fois le très grand moment dipolaire électrique des atomes de Rydberg et les grands facteurs de qualité réalisables avec des cavités en niobium supraconducteur, à des températures cryogéniques ($\approx 1K$). On peut également songer à d'autres effets que l'étude des degrés de liberté internes des atomes sous l'influence du champ désaccordé de la cavité. Ce dernier, va en effet exercer une action mécanique sur le jet d'atomes traversant le mode électromagnétique, sous l'action des forces dipolaires. Ce type d'effets, discutés dans la référence[95], est malheureusement très difficile à mettre en évidence dans le cas d'une expérience en cavité supraconductrice, car les photons microondes possèdent une énergie très basse comparée à celle des photons utilisés dans les expériences utilisant des forces radiatives (comme le refroidissement laser par exemple [96], sur la raie D2 des alcalins par exemple). Pour obtenir des effets mécaniques mesurables sur le jet d'atomes, dans la limite de champs lumineux de nature quantique

(champs de quelques photons), il semble souhaitable de modifier le système physique qui vient d'être décrit afin de pouvoir utiliser des photons quasi-visibles.

Aussi, nous présentons dans cette section une proposition d'expérience qui permettrait en principe la mise en évidence expérimentale de la déviation d'un jet d'atomes sous l'effet d'un champ optique (dans le proche infrarouge) de seulement quelques photons contenu dans un mode de galerie de grande finesse. Une telle expérience serait véritablement complémentaire de celle utilisant des atomes de Rydberg, car en raison de certaines limitations expérimentales que nous expliciterons, la réalisation d'une mesure QND du champ d'un mode de galerie semble difficile, tout au moins avec des atomes alcalins.

III-1-2 Effet "Stern-Gerlach" inverse.

Pour avoir accès à la nature du champ contenu dans un mode de galerie, on peut penser utiliser les degrés de liberté externes d'atomes libres pour "sonder" le fort gradient de champ électrique optique à la surface d'une microsphère. Si un jet d'atomes, quasi-monocinétique et bien collimaté est envoyé vers cette zone, et si le mode de la cavité est accordé assez loin de la transition atomique, l'interaction des atomes avec la lumière générera principalement une force de nature dipolaire fonction du gradient de l'intensité lumineuse résonnante, lui-même proportionnel au nombre de photons contenus dans le résonateur. Celle-ci va modifier leur cinématique et on comprend que la mesure des trajectoires atomiques puisse fournir des informations a posteriori sur l'intensité lumineuse au sein de la cavité optique. Il faut bien entendu bannir autant que possible les mécanismes qui peuvent changer irréversiblement le nombre de photons contenus dans la cavité électromagnétique: les processus d'absorption d'un photon de la cavité par les pertes du mode résonnant, ou encore l'absorption d'un photon par un atome sonde. On entrevoit ici deux des conditions essentielles qui vont déterminer le choix des paramètres: le désaccord entre la cavité et la transition atomique doit être tel que l'échange de photon réel entre les atomes sondes et le champ se révèle minime et la cavité doit présenter aussi peu de pertes que possible.

Si de telles conditions étaient remplies strictement, on aurait constitué là un système de mesure du champ optique résonnant "non destructif" parfait, puisque la détermination des trajectoires atomiques, sonde indirectement le champ optique sans l'absorber. Le résultat d'une telle mesure ne sera valide que pour des temps courts devant le temps d'amortissement de la cavité. En effet, aux temps longs en absence de couplage avec une source extérieure, le champ électromagnétique relaxe vers zéro.

Lorsque l'on relâche les contraintes que l'on vient d'énumérer (ce qui facilite bien sûr grandement l'expérience), le dispositif expérimental ne permet plus de réaliser une véritable mesure non-destructive au sens où l'on ne peut répéter la mesure avant l'amortissement du champ. Une telle situation n'est toutefois pas sans intérêt. Si on couple en permanence une source lumineuse au mode résonnant, on peut alors observer les trajectoires atomiques en continu, (ce qui est bien plus facile qu'une expérience résolue en temps). On réalise alors une expérience de diffusion d'un jet atomique par un champ optique (qui peut ne comporter que quelques photons) de nature quantique. Une telle situation est tout

à fait symétrique de l'expérience historique de Stern et Gerlach[97]: le faisceau de particules "classiques" sonde via leurs degrés de liberté externes¹, le fort gradient de champ électromagnétique, issu de quelques photons piégés dans la cavité résonnante. Ce champ doit bien sûr être considéré ici comme un champ quantique, à la différence du gradient de champ magnétique—classique— utilisé comme élément sélectif dans l'expérience Stern et Gerlach. Pour cette raison nous appellerons cet effet de déflexion sélective en fonction du champ optique effet Stern et Gerlach "inverse".

Dans ce chapitre, nous allons passer en revue les principaux effets physiques mis en cause dans cette expérience de Stern-Gerlach "inverse": la force dipolaire et l'absorption de photons par les atomes sondes, les effets de la force dipolaire sur les degrés de liberté externes des atomes. Cette étude nous permettra en particulier d'estimer les paramètres expérimentaux réalisables avec les microsphères étudiées expérimentalement au chapitre second.

III-1-3 Description globale du dispositif.

On peut dissocier le système en trois éléments distincts, qui vont jouer un rôle séquentiel. Il nous faut tout d'abord une source d'atomes libres, et comme il faut suivre temporellement les trajectoires de ces atomes, nous ne pouvons pas utiliser des états excités (optiques) qui se dés excitent très rapidement par émission spontanée (en quelques dizaines de nanosecondes pour les alcalins). Nous opterons donc pour une source d'atomes dans l'état fondamental, que nous modéliserons dans un premier temps par des systèmes à deux niveaux, couplés à la lumière par un hamiltonien dipolaire électrique. Nous choisirons ici un dipôle de l'ordre d'une unité atomique, pour une masse de l'ordre de $80u.a.$ (typiquement un atome de rubidium dans l'état fondamental).

Nous souhaitons également que la source d'atomes émette un flux bien collimaté et possède une faible dispersion en vitesse. Bien que l'on puisse envisager de recourir à des sources atomiques utilisant des techniques récentes de refroidissement radiatif[96] (comme le "funnel" de S. Chu par exemple[98]), nous utiliserons ici un dispositif plus simple, fondé sur un nuage d'atomes dense (préalablement refroidis) lancés à l'origine des temps dans la direction de la microsphère. On pourrait par exemple utiliser dans la pratique un piège magnéto-optique pour constituer un nuage dense d'atomes, éteindre les champs magnétiques et passer dans une situation de mélasse optique désaccordée qui lancerait les atomes à une vitesse réglable à volonté dans la gamme de quelques m/s . La vitesse transverse des atomes peut-être aussi petite que quelques centimètres-seconde, ce qui fait d'un tel système une source d'atomes d'une grande brillance. Un tel enchaînement d'opérations est actuellement bien maîtrisé dans bon nombre de laboratoires et ne saurait constituer un obstacle. De nombreux auteurs ont décrit en détail le fonctionnement d'un tel système [99].

¹On va voir qu'il n'est pas possible de négliger complètement ici le caractère ondulatoire des atomes si l'on souhaite effectuer une analyse quantitative de l'expérience; un traitement classique des trajectoires atomiques suffit toutefois pour comprendre qualitativement son principe.

Le faisceau d'atomes va ensuite gagner la zone d'interaction proprement dite. Nous savons que le champ électromagnétique résonnant se trouve essentiellement au voisinage d'un grand cercle du résonateur, pour les modes de galerie qui nous intéressent. Dans toute expérience utilisant des atomes extérieurs en vol libre, il n'est pas possible d'accéder à la partie du champ qui est piégée à l'intérieur du volume du diélectrique. Nous devons donc nous contenter de la composante évanescente du mode qui s'étend sur une distance de l'ordre de $\lambda/2\pi$ dans le vide, à l'extérieur de la sphère. Cette configuration permet d'envisager une expérience de diffusion dans laquelle des atomes du jet, après la traversée d'un diaphragme éliminant les atomes trop éloignés de la région équatoriale, frôleraient la surface de la microsphère en traversant la zone évanescente du mode. Enfin, la fraction des atomes poursuivant leur trajectoire peut être détectée plus loin sur un détecteur d'atomes, après une dernière phase de vol balistique. Les trois étapes de l'expérience sont figurées sur le dessin en perspective III.1.

Un tel dispositif permettrait donc l'étude, sur un jet collimaté d'atomes quasi résonnants dans l'état fondamental (noté $|g\rangle$), des effets de diffusion liés essentiellement au très fort gradient lumineux créé par le mode du champ électromagnétique à la surface de la microsphère. Les interactions des atomes avec le champ confiné du mode de la microsphère sont a priori proportionnelles au nombre n de photons du mode optique, puisque, loin de la résonance, le traitement classique des déplacements lumineux introduit un potentiel lumineux effectif proportionnel à n . Cette proportionnalité laisse espérer que le comportement moyen des atomes après interaction avec la lumière dépende simplement de n , ce qui donnerait la possibilité de déduire simplement la valeur de n , nombre de photons dans le mode de la microsphère, de la densité spatiale d'atomes mesurée sur le détecteur inférieur de l'appareil. Nous allons voir cependant qu'il faut prendre en compte plusieurs effets physiques différents pour calculer avec précision les trajectoires des atomes frôlant la surface de la microsphère.

Nous allons aborder cette étude par un traitement purement classique des degrés de liberté externes de l'atome et quantique pour les champs et les niveaux atomiques. Par la suite, pour tenir compte d'effets de diffraction du faisceau atomique, la quantification du mouvement des atomes selon l'un des axes du problème sera envisagée.

III-1-4 Potentiel lumineux et force de Van der Waals.

Revenons un instant sur l'interaction atome-mode de la cavité optique. Elle repose sur la connaissance spatiale du champ électrique d'un mode. La distribution $E(\mathbf{r})$ du champ électrique induit par les photons de la cavité a été étudiée exactement dans le premier chapitre de cette étude. Toutefois, dans le but de simplifier les simulations numériques effectuées pour cette partie, nous nous sommes limités à une approximation locale, valable au voisinage de l'équateur du résonateur. Les variations spatiales de l'amplitude relative $f = E/E_{surf}$ du champ électrique d'un mode de galerie équatorial (E_{surf} désigne le champ à surface de la microsphère, à l'équateur), sont bien rendues, pour les modes équatoriaux

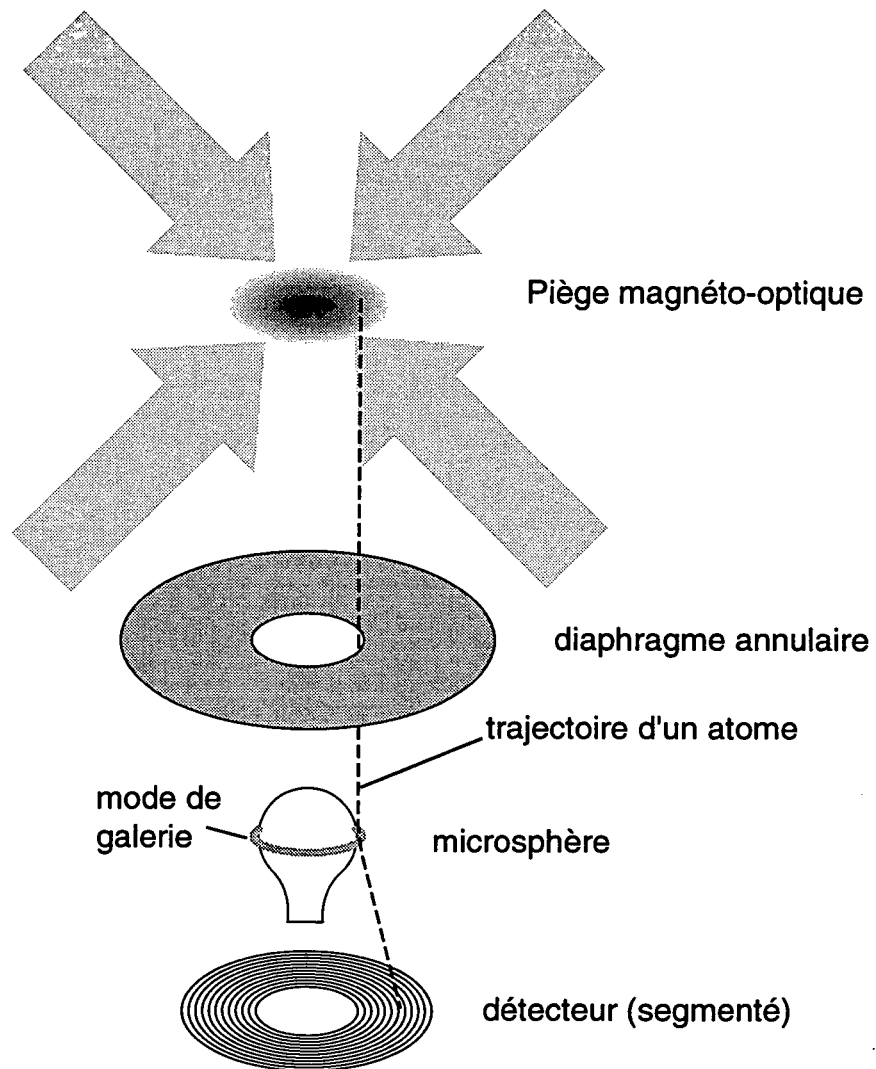


Figure III.1: Principe de l'expérience de diffusion atomique.

$l = m$ par une expression de la forme:

$$f(r, \theta) = \exp(-(r - a)/L) \exp\left(\frac{-N2a\pi(\theta - \frac{\pi}{2})^2/\lambda}{2}\right), \quad (\text{III.1})$$

où $\{r, \theta\}$ sont les coordonnées sphériques du point courant, par rapport au centre du résonateur (de rayon a). La distance L , portée du champ évanescents du mode, est très proche de $\lambda/(2\pi)$ et est définie par $L = (\lambda/2\pi)(N^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}$. Elle vaut environ $120nm$ à la longueur d'onde de $780nm$. Ecrivons maintenant l'effet d'un tel champ sur un atome quasi résonnant.

Pour fixer les idées, nous supposons encore ici que les atomes alcalins qui possèdent des raies accessibles à nos lasers à semi-conducteurs opérant dans le proche infrarouge, peuvent être assimilés à des systèmes à deux niveaux, où g est le fondamental et e un état excité, de moment dipolaire électrique $\mathcal{D}_{eg} = \langle e | D | g \rangle$ de l'ordre de quelques unités atomiques. Le hamiltonien du système atomique (restreint au sous-espace sous-tendu par $\{g, e\}$) s'écrit :

$$H_{at} = \hbar\omega_{ge}S_{eg}^+S_{ge}^-, \quad (\text{III.2})$$

avec $S_{ge}^+ = |e\rangle\langle g|$ et $S_{ge}^- = (S_{ge}^+)^\dagger$. En présence du champ de la cavité, le hamiltonien du système total $H = H_{at} + H_{int} + H_{champ}$ comporte les termes (dans l'approximation du champ tournant) :

$$H_{int} = \hbar\Omega(\mathbf{r})(aS_{ge}^+ + a^\dagger S_{ge}^-), \quad (\text{III.3})$$

$$H_{champ} = \hbar\omega_{lum}(a^\dagger a + \frac{1}{2}), \quad (\text{III.4})$$

où a est l'opérateur de destruction d'un photon du mode de la cavité. Enfin, $\Omega(\mathbf{r}) = \mathcal{D}E_{lum}(\mathbf{r})/\hbar$ est la pulsation de Rabi au point \mathbf{r} , qui exprime l'intensité du couplage entre le dipôle \mathcal{D} et le champ électrique du mode $E_{lum}(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r})E_0$. Avec la définition du volume du mode de la cavité, adoptée au chapitre premier, le champ maximum s'exprime $E_0 = \{\hbar\omega_{lum}/(2N^2\epsilon_0 V_{mode})\}^{\frac{1}{2}}$. Cette valeur maximale est atteinte au voisinage de la surface du résonateur, à l'intérieur du diélectrique. Pour les atomes libres que l'on considère ici, la pulsation $\Omega(\mathbf{r})$ maximale est atteinte sur l'équateur du résonateur ($r = R$). Les états propres du système couplé atome-mode sont bien connus—ce sont les états habillés de l'atome par le champ à n photons de la cavité. A la suite du couplage des états $|g, n+1\rangle$ et $|e, n\rangle$ par l'hamiltonien du système on obtient (dans l'approximation du champ tournant) deux nouveaux états caractérisant le système atome-champ, $|+, n\rangle$ et $|-, n\rangle$, d'énergie respectives :

$$E_{\pm, n}(\mathbf{r}) = \hbar(n\omega_{lum} \pm \sqrt{n\Omega^2(\mathbf{r}) + (\delta/2)^2}), \quad (\text{III.5})$$

où ω désigne la pulsation de la lumière, $\delta = \omega - \omega_{eg}$ le désaccord entre le mode de la cavité et la pulsation atomique de la transition $g \rightarrow e$.

Dans le cas où l'on s'intéresse à des effets non résonnants, pour lesquels le désaccord δ est grand comparé à la pulsation de Rabi Ω , condition que nous écrirons $\Omega^2 n / \delta \ll 1$ (couplage faible), on peut considérer que les niveaux d'énergie $E_{\pm, n}(\mathbf{r})$ sont les niveaux initiaux

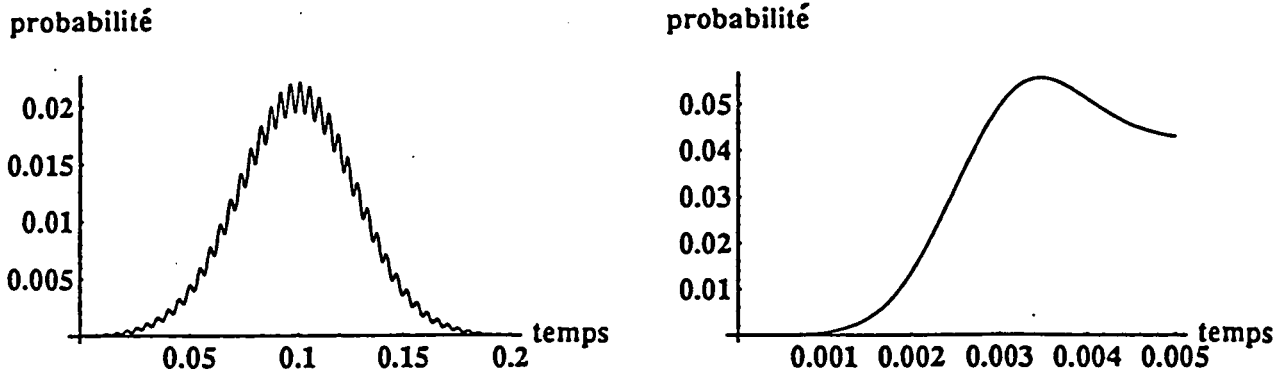


Figure III.2: Probabilité d'excitation, pour deux temps de transit des atomes dans le mode: à gauche la vitesse des atomes est 50m/s , et à droite 2000m/s , toutes choses égales par ailleurs.

de l'atome seul, déplacés d'une quantité $\hbar\Omega^2 n/\delta$ sous l'effet de la lumière (déplacement lumineux). Dans ce cas, on considèrera que l'Hamiltonien effectif de couplage atome-champ peut se mettre sous la forme :

$$H_{int} = \frac{\hbar\Omega^2(\mathbf{r})}{\delta} a^\dagger a \{|e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|\}. \quad (\text{III.6})$$

Revenons un instant sur l'état interne d'un atome traversant le mode de la cavité, toujours dans l'hypothèse où la condition de couplage faible est vérifiée. Considérons temporellement l'évolution de l'état atomique d'un atome initialement dans l'état fondamental $|g\rangle$ rencontrant un mode contenant n photons.

En pénétrant dans le mode de la cavité, l'état du système atome+champ va se projeter principalement sur l'état $|+, n\rangle$, à condition que le désaccord soit vers le "bleu" ($\delta > 0$) et que le couplage ne soit pas trop fort. Quelles sont les conditions précises de ce passage adiabatique? L'analogie usuelle avec un spin $\frac{1}{2}$ plongé dans un champ magnétique dépendant du temps permet de répondre sans calcul. L'évolution restera adiabatique si la période d'une précession $\sim 2\pi/\sqrt{\Omega^2 + \delta^2/n}$ dure beaucoup moins longtemps que le temps caractéristique des changements d'orientation de l'axe de précession. Cette dernière échelle de temps est donnée par le temps de traversée du mode de galerie par l'atome, soit $\sim \lambda/v$. Les deux graphes ci-dessus III.2 (d'après [100]) donnent l'évolution calculée de la probabilité pour l'atome d'être dans l'état excité e , lorsqu'il traverse le mode pour deux vitesses longitudinales (toutes choses égales par ailleurs) très différentes : 50m/s et 2000m/s . (Le champ électrique considéré correspond au champ d'un photon unique dans la cavité, à une distance de $\lambda/2\pi$ de la surface d'une sphère de $\phi 40\mu\text{m}$, pour un désaccord de $5\Omega_{max}$.)

On voit que sur la figure de gauche, l'atome ressort après l'interaction dans l'état fondamental, tandis qu'à plus grande vitesse, il y a une probabilité non-nulle de ressortir dans l'état excité. Ce dernier cas de figure est bien entendu incompatible avec les exigences d'une mesure du champ non-destructive exposées dans l'introduction de cette partie.

Lorsque l'atome quitte le mode dans l'état excité, l'énergie qu'il emporte provient du champ électromagnétique, ce qui signifie qu'un photon a été prélevé par l'atome : cela réduit à néant toute tentative de mesure sans destruction du nombre de photons dans le mode.

Cependant, même lorsque le critère temporel d'adiabaticité est vérifié, comme sur la figure de gauche, on constate qu'au cours de l'interaction, la probabilité que l'atome soit dans l'état excité n'est pas nulle. Or, la probabilité de désexcitation par émission spontanée des atomes en cours d'interaction peut s'exprimer comme la probabilité calculée figure III.2, multipliée par le nombre possible de cycles de fluorescence pendant la durée de la traversée. Minimiser cette probabilité de désexcitation impose de choisir un désaccord δ suffisamment grand et des temps d'interaction relativement courts (dans la limite où la traversée de la cavité reste adiabatique bien entendu).

En conclusion, à condition de choisir convenablement les paramètres du système, on peut donc faire en sorte que les atomes voient un potentiel lumineux répulsif, proportionnel au nombre de photons contenus dans le mode de galerie, tout en assurant que la probabilité que l'ensemble des atomes-sondes nécessaire pour réaliser la mesure n'emporte un photon du mode, reste petite devant 1. Toutefois, les forces dipolaires ne sont pas les seules concernées dans l'analyse des trajectoires classiques des atomes rasant la surface du résonateur. Il reste en effet à ajouter à l'expression du potentiel lumineux précédent un terme lié aux interactions des atomes avec la surface diélectrique qu'ils frôlent.

Un dipôle placé en regard d'une surface conductrice (ou diélectrique) subit une force qui peut recevoir une explication qualitative simple. Le dipôle (et ses fluctuations) interagit avec son image électrique (retardée par la propagation et, dans le cas d'une surface diélectrique, en tenant compte de la réflectivité finie du diélectrique, exprimé par les coefficients de Fresnel appropriés déjà introduits au chapitre premier). Aux basses fréquences, l'éloignement du dipôle à la paroi R est plus petit que la longueur d'onde des fluctuations incidentes, et donc la partie fluctuante des dipôles est quasiment en phase : on trouve une contribution moyenne à l'énergie d'interaction du dipôle avec son image non-nulle en $1/R^3$. Le calcul complet exact donne, pour une paroi diélectrique d'indice N et un atome dans l'état fondamental², la formule suivante :

$$V_{VdW}(R) = \hbar \frac{\langle g | D^2 | g \rangle}{R^3} A_{VdW}^0, \quad (\text{III.7})$$

où A_{VdW}^0 est une constante. Cependant, ce résultat n'est en principe valide que sur le domaine de London, qui correspond à $R \ll \lambda$. Comme la valeur des paramètres qui nous intéresse ici s'étend au delà de cette limite, nous avons choisi une expression approchée valide à la fois sur les domaines de London et de Casimir-Polder[101] $R \gg \lambda$, sous la forme:

²Nous supposons ici que l'on peut considérer que l'excitation de l'atome reste négligeable (quelques pour cent) et donc que le seul élément de matrices de l'opérateur dipole électrique qui intervient est $\langle g | D^2 | g \rangle$.

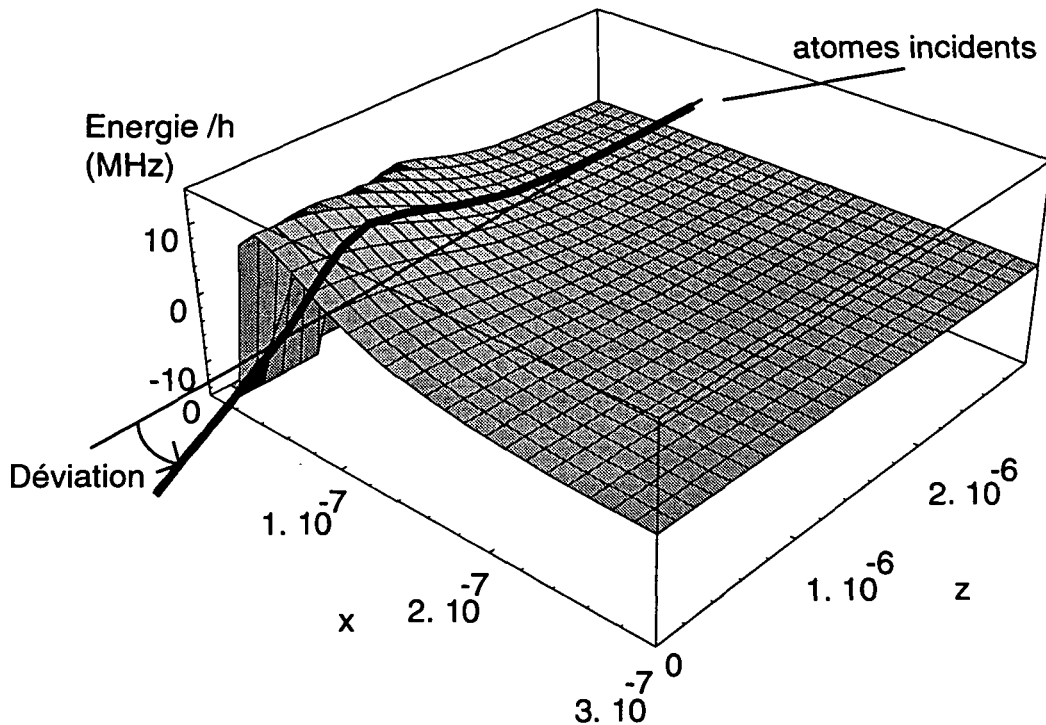


Figure III.3: Surface du potentiel vu par les atomes frôlant le microrésonateur. On a représenté, dessinée sur cette surface, une trajectoire classique (dans l'espace réel les trajectoires sont contenues dans un plan). Pour des paramètres d'impacts convenables, on voit que les trajectoires des atomes peuvent être infléchies par la "bosse" de potentiel.

$$V_{VdW}(R) = -\hbar\Omega_{VdW} \frac{(\lambda/2\pi)^3}{R^3(1 + 2\pi R/\lambda)}. \quad (\text{III.8})$$

Nous prendrons ici $\Omega_{VdW}/2\pi = 420\text{kHz}$, qui correspond assez bien aux valeurs mesurées [102][103] pour les alcalins.

Le potentiel total vu par les atomes est donc la somme du potentiel lumineux dipolaire dépendant linéairement du nombre de photons dans le mode de galerie et de l'interaction de Van der Waals des atomes avec la surface de silice. La figure III.3 donne une représentation tridimensionnelle de la "surface de potentiel" (pour 4 photons dans le mode d'une microsphère de $\phi 35\mu\text{m}$, et un detuning de $8\Omega_{max}$).

Précisons, pour les valeurs précédentes, les caractéristiques de la barrière. Le sommet de la barrière se situe à des distances de la surface de l'ordre de 100nm (ce qui n'est pas très différent de la portée de l'onde évanescente). La hauteur de la barrière correspond à environ 5cm/s .

Jusqu'ici, nous ne nous sommes préoccupés que de l'ordre de grandeur du dipôle

atomique. Considérons maintenant des atomes alcalins réels, sans réduire leur structure de niveaux à seulement 2 états. Pour fixer les idées, nous allons nous intéresser plus particulièrement dans cette étude quantitative au cas du rubidium 85. On a également supposé que les atomes utilisés étaient des atomes à deux niveaux. Il nous faut maintenant déterminer si l'expression générale du potentiel lumineux entraînant la déflexion est encore valable lorsque l'on prend en compte la structure interne des niveaux.

III-1-5 Complication liée à la structure des atomes réels.

Nous avons considéré jusqu'ici un modèle d'atomes à deux niveaux pour traiter l'interaction des atomes avec le champ évanescent des microsphères. Si l'on choisit d'utiliser le rubidium 85 pour une expérience réelle (espèce qui se prête bien par exemple à l'utilisation des méthodes de refroidissement radiatif), cet alcalin possède une structure hyperfine. La raie à $780.2nm$ qui correspond à la longueur d'onde que nous avons utilisée pour caractériser les modes de galerie des microrésonateurs, est la raie D_2 des alcalins. Elle part dans le cas du rubidium du niveau $5S_{1/2}$ (g) vers le niveau $5P_{3/2}$ (e). Du fait du spin nucléaire ($I = 5/2$), le niveau fondamental se scinde en deux sous-niveaux $F_g = 2, 3$, tandis que le niveau excité se subdivise en $F_e = 1, 2, 3, 4$. Les écarts entre ces derniers niveaux sont de l'ordre de $70MHz$. En revanche, la séparation entre les niveaux fondamentaux est de plusieurs gigahertz, ce qui est très supérieur aux désaccords considérés dans l'expérience de déflexion. On pourra donc se restreindre à un seul sous niveau, et on supposera que la source de rubidium collimatée contient uniquement des atomes pompés optiquement dans le sous niveau hyperfin magnétique $F_g = 3, M_F = 3$ (l'axe de quantification est ici l'axe perpendiculaire à l'équateur du résonateur). De plus, la saturation est dans notre cas très petite (on a vu justement que l'on cherche à tout prix à minimiser la population de l'état excité). Dans une telle situation, le potentiel d'interaction atome-onde évanescence est décrit avec une très bonne approximation, par le déplacement lumineux [104] du niveau fondamental considéré. Au second ordre de la théorie des perturbations [45][46], on obtient donc le potentiel lumineux vu par les atomes:

$$V_{dipol}(r, \theta) := \sum_e \frac{\langle g | (D \cdot \epsilon^*) | e \rangle \langle e | (D \cdot \epsilon) | g \rangle}{\hbar\omega + E(F_g) - E(e)}. \quad (\text{III.9})$$

ϵ est ici la polarisation du champ évanescent. $E(F_g)$ et $E(e)$ sont respectivement les énergies du niveau hyperfin fondamental concerné et des états excités. La somme porte a priori sur tous les états excités. Comme les atomes interagissent avec le champ résonnant de modes TE ou TM , la polarisation du champ est linéaire. Aussi, toutes les composantes Zeeman d'un même niveau hyperfin ont le même déplacement lumineux et donc V est ici un opérateur purement scalaire.

Pour des désaccords du résonateur plus grands que la structure hyperfine, l'expression des déplacements lumineux obtenue en tenant compte de la structure réelle des atomes, est très semblable au cas idéal des atomes à deux niveaux, à condition de considérer une combinaison linéaire convenable des différents états excités présents au numérateur de III.9.

En conclusion, les dépendances du calcul initial restent valables, à condition de considérer un dipôle effectif réduit par le facteur qui vient d'être obtenu. On obtient numériquement, pour le rubidium, les paramètres numériques suivants (pour un diamètre du résonateur de $\varnothing 35\mu m$): pour un photon contenu dans le mode, la fréquence de Rabi maximale à la surface du résonateur vaut $\Omega_{max} = 440\text{megarad.s}^{-1}$. Pour un désaccord $\delta/2\pi$ de $8\Omega_{max}/2\pi = 560\text{MHz}$ (choisi trois fois plus grand que la séparation hyperfine qui vaut 70MHz pour le niveau considéré), la probabilité qu'un atome du jet frôlant la cavité absorbe un photon du mode de galerie est inférieure à 30%, pour au plus 5 photons dans le mode.

Nous disposons maintenant d'une modélisation plausible du potentiel global d'interaction entre un atome et la microsphère. Pour aborder l'étude du mouvement d'atomes lancés dans un tel potentiel, nous allons d'abord effectuer une intégration numérique des trajectoires classiques.

III-1-6 Cinématique classique et effet d'arc en ciel.

La détermination de la trajectoire classique suivie par un atome lancé en direction de la région du mode peut s'obtenir en calculant directement le gradient du potentiel V_{total} . Si on se limite aux atomes de trajectoires initialement contenues dans un plan polaire, la symétrie du potentiel par rapport à celui-ci impose que les trajectoires restent dans ce plan tout au long du mouvement. On se ramène donc à un problème de diffusion à deux dimensions. Il subsiste—le système étant invariant autour de son axe polaire—deux paramètres libres : le paramètre d'impact de l'atome b et la vitesse initiale v_0 . La figure ci-dessous montre les trajectoires d'une famille d'atomes de paramètres d'impacts échelonnés, pour les mêmes conditions que la figure précédente.

En vue d'observer des effets de déflexion, la vitesse longitudinale est choisie nettement plus grande que la hauteur de la barrière. La petite fraction d'atomes qui passent dans la zone attractive dominée par les forces de Van der Waals "tombent" sur la surface de verre, avec laquelle ils forment des états liés ("collage"). Le réseau de courbes III.4 représente, pour des nombres de photons croissants, la déviation totale des trajectoires, en fonction du paramètre d'impact. En raison de l'existence d'un flanc de pente maximale sur la surface du potentiel modélisant l'interaction des atomes avec la microsphère, on s'attend à ce que, à nombre de photons fixé, la déviation passe par un maximum: une telle situation implique une accumulation des atomes défléchis autour de la déviation maximale. Nous noterons b_{max} la valeur du paramètre d'impact qui correspond à la déviation maximale. Si l'on souhaite déterminer la longueur efficace différentielle en fonction de la déviation définie comme le flux d'atomes diffusés par unité d'angle normalisé par le flux total, il faut calculer l'histogramme de la fonction de déviation, soit encore $db/d(\text{deviation})(b)$. La tangente horizontale à l'angle maximum de déviation va produire une singularité et de ce fait la fonction de déviation ne sera pas inversible. Cette difficulté peut être évacuée en traitant séparément les cas $0 < b < b_{max}$ et $b_{max} < b < b_{\infty}$. Chacun des fragments est inversible et le résultat global s'obtient en ajoutant les deux contributions. La courbe III.5 donne le résultat de cette opération. La singularité (l'effet d'arc en ciel) est marquée

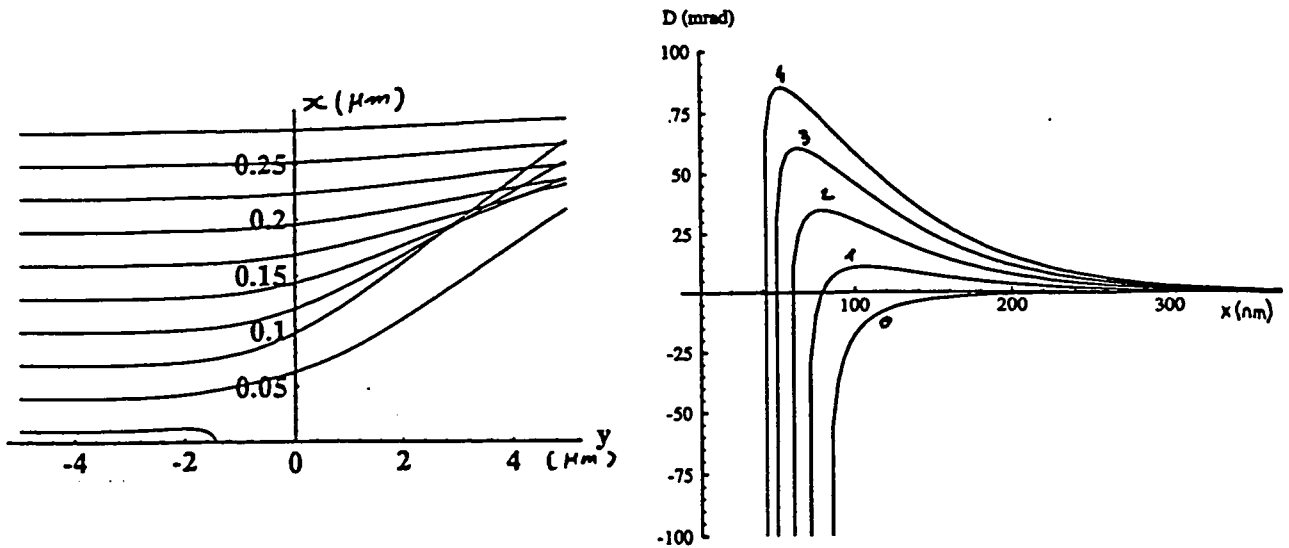


Figure III.4: (A gauche) Trajectoires classiques obtenues par intégration numérique des équations du mouvement. (A droite) Déviations mesurées en fonction du nombre de photons dans le mode.

par une barre verticale sur la déviation maximale.

En ce qui concerne les vitesses longitudinales, on peut distinguer deux régimes de vitesse. Si la vitesse est telle que, pendant l'interaction, l'atome n'a pas le temps de varier sa distance à la sphère, on est dans une situation de choc: l'atome recevra une impulsion transverse proportionnelle au temps d'interaction, et donc proportionnelle à l'inverse de sa vitesse longitudinale. La déviation, qui s'exprime comme le rapport de la vitesse transverse et de la vitesse longitudinale diminuera donc comme l'inverse du carré de la vitesse longitudinale. A basse vitesse, en revanche, la déviation diminuera moins vite avec la vitesse longitudinale, et conduira, à la limite des vitesses comparables à la hauteur de la barrière, à une loi approximativement inverse de la vitesse longitudinale. Les résultats de cette discussion sont rassemblés sur le graphe logarithmique III.6, tiré de [100].

On voit que, pour maximiser la déviation, on gagne à choisir des vitesses aussi faibles que possible. Cependant, la probabilité d'émission spontanée, augmente linéairement avec le temps d'interaction; il faut donc préciser les conditions optimales de l'expérience, qui correspondraient à une déviation maximale des atomes et une probabilité minimale de provoquer un cycle de fluorescence. Le choix des paramètres idéaux résultera d'un compromis qu'il nous faut maintenant discuter.

III-1-7 Détermination des conditions opératoires optimales.

Obtenir une déviation maximale requiert un petit désaccord et une faible vitesse longitudinale, ce qui entraîne précisément un accroissement de la probabilité d'excitation des atomes. Les deux contraintes étant incompatibles, il nous faut évaluer numériquement la situation expérimentale.

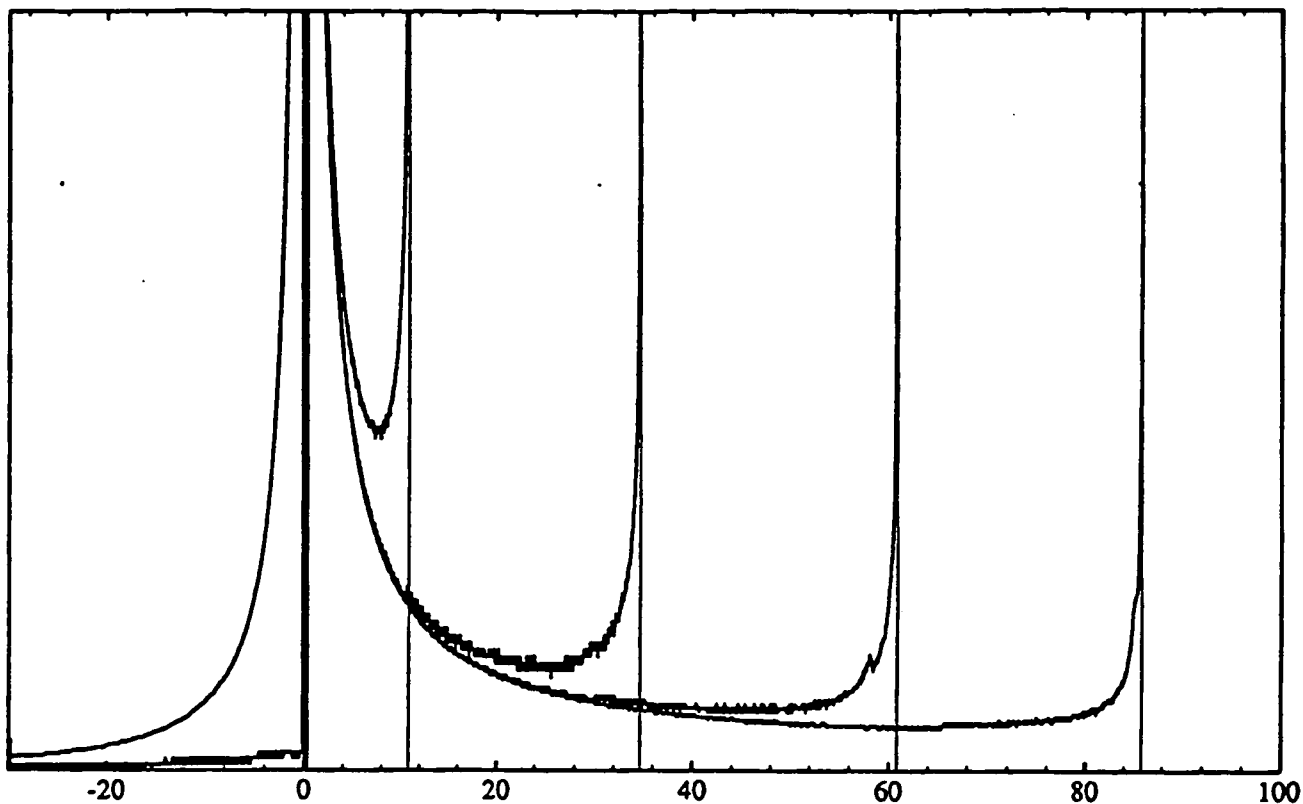


Figure III.5: Longueur efficace différentielle en fonction de la déviation. L'effet d'accumulation (arc-en-ciel) correspondant à la déviation maximale est indiquée par une barre verticale.

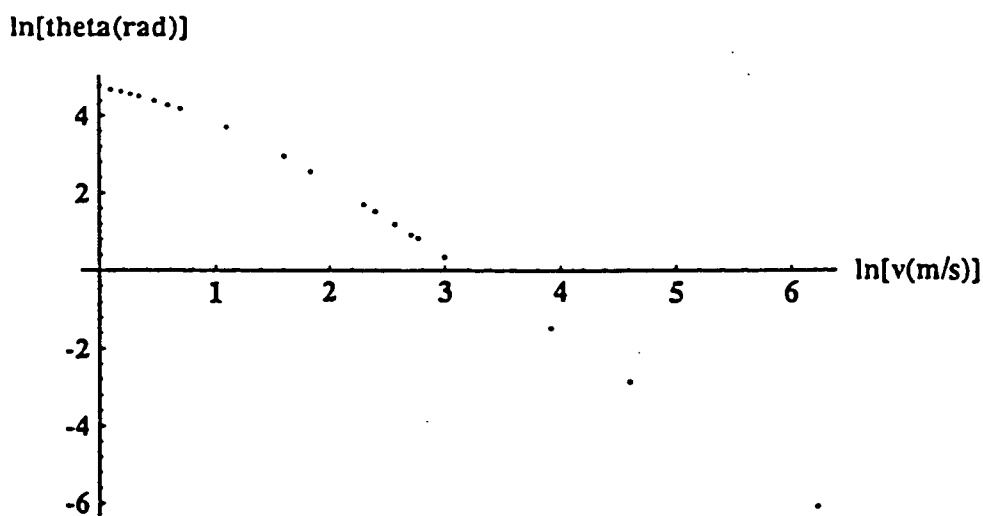


Figure III.6: Effet de la vitesse incidente des atomes sur la déviation maximale (calculée) obtenue: aux grandes vitesses, l'interaction avec le potentiel est assimilable à un transfert percussif d'impulsion transverse.

D'une part ce que l'on recherche ici (par analogie avec un spectrographe par exemple) est une *résolution* maximale, ou encore que le rapport $\mathcal{R} = \frac{\text{déviaton}}{\text{divergence}}$ soit aussi grand que possible, la divergence propre $\sim v_t/v_l$ du faisceau d'atomes étant due aux imperfections de la source (atomes à température non-nulle des mélasses optiques). Si de plus la vitesse v_l longitudinale des atomes est telle que l'interaction atome-champ peut être assimilée à un choc—ou encore “percussionnelle” suivant la discussion du paragraphe précédent—, on peut grossièrement approcher la déflexion au moyen de l'expression suivante (qui peut se lire comme le produit de la force dipolaire par le temps d'interaction de l'atome avec le champ, le tout étant divisé par la vitesse longitudinale pour obtenir un angle):

$$\frac{\hbar}{M_{\text{atome}}} \frac{2}{\lambda} \frac{\exp(-2b/\lambda)\Omega_0^2}{\delta} \times \frac{\lambda}{v_l} \times \frac{1}{v_t}, \quad (\text{III.10})$$

ce qui conduit, après substitution, à l'expression de la “résolution” définie ci-avant :

$$\mathcal{R} = \frac{\hbar}{M_{\text{atome}}} \frac{2}{\lambda} \frac{\exp(-2b/\lambda)\Omega_0^2}{\delta} \frac{\lambda}{v_l} \frac{1}{v_t}. \quad (\text{III.11})$$

D'autre part, la probabilité maximale que l'atome soit, à un instant donné de son passage dans le mode, dans l'état excité est de l'ordre de $\exp(-2b/\lambda)\Omega_0^2/2\delta^2$. En outre, pendant dt , la probabilité qu'un atome se désexcite par émission spontanée est dt/τ , où τ est la durée de vie du niveau excité ($\tau \approx 30$ ns). Ainsi, la probabilité de perdre un photon pendant dt vaut $\exp(-2b/\lambda)\Omega_0^2/2\delta^2 \times dt/\tau$. Le *taux de transfert* maximal est, par définition, la forme intégrée sur la durée de la traversée du champ par l'atome, de la probabilité précédente, soit, dans la limite des faibles valeurs:

$$T = \frac{1}{2} \frac{\exp(-b/\lambda)\Omega_0^2}{\delta^2} \frac{\lambda}{v_l} \frac{1}{\tau}. \quad (\text{III.12})$$

La puissance des dépendances de III.11 et III.12 en désaccord relatif δ/Ω_0 sont respectivement -1 et -2 : le *taux de transfert* diminuera plus vite que la *résolution* avec le désaccord, mais il n'y a pas d'optimum car les deux paramètres décroissent tous les deux avec le désaccord.

III-1-8 Simulation des profils de déviation classiques.

Lors du calcul des effets d'interaction entre mode et atomes effectué aux paragraphes précédents, nous n'avons pas tenu compte de la divergence du jet d'atomes issu de la source. De plus, les atomes qui passent suffisamment loin de la surface de la sphère ne sont pas du tout concernés par la présence de la sphère, le champ du mode décroissant exponentiellement!

Pour modéliser la distribution transverse de la source atomique déjà décrite, introduisons à présent une dispersion sur les vitesses transverses réaliste: une distribution gaussienne de largeur à mi-hauteur $v_t = 2$ cm/s correspondant à une divergence du jet

de 2 mrad. Dans l'approche percussive tout se passe maintenant comme si à chaque paramètre d'impact était associée une distribution de déviation centrée sur la déviation que l'on obtient sans dispersion. (En effet, en première approximation, le paramètre d'impact change très peu lorsque l'on effectue une très légère rotation d'une trajectoire donnée.) Mathématiquement, il faut donc effectuer la convolution de la densité de déviation par le profil de divergence du jet. Notons qu'une dispersion similaire en vitesse longitudinale produit également une dispersion angulaire. Néanmoins il est facile de montrer que dans les deux régimes de vitesse sa largeur est beaucoup plus faible que celle due à la dispersion en vitesse transverse: elle est de l'ordre de 0.1 mrad, aussi nous la négligerons.

La zone d'interaction avec la lumière étant limitée au voisinage immédiat de la surface (λ), il convient de protéger les détecteurs d'un aveuglement qui serait inévitable si tous les atomes du jet ne traversant pas le mode leur parvenaient. Nous proposons ici deux remèdes, liés au choix de la méthode de détection utilisée.

Si l'on décide d'enregistrer les profils de diffusion en *position*, on pourrait par exemple observer avec une caméra infrarouge les atomes (après interaction avec le mode) dans une onde laser résonnante, perpendiculaire à leur trajectoire, de manière à ce que les atomes effectuent quelques cycles de fluorescence. Un tel dispositif ressemble aux appareillages d'étude de la diffusion, qui collimatent en général le faisceau de particules incidentes au moyen d'une fente située avant la zone d'interaction. C'est précisément le dispositif schématisé figure III.1.

La figure III.7 montre le résultat final de ce calcul classique, (pour un diaphragme annulaire ménageant un espace libre de $0.2\mu m$ à la périphérie de la sphère), pour des champs à 0, 1, 2, 3 et 4 photons dans le mode. Le rapport de surface entre la section efficace du mode et la surface du diaphragme entraîne qu'environ 5% des atomes traversant le dispositif portent une information (cependant, comme les autres n'interagissent pas avec la lumière, ils ne peuvent absorber de photon). Cette figure montre donc ce que l'on observerait sur un écran en prenant en compte les atomes non-déviés.

On voit que dans ces conditions, le pic à un photon se résume à un épaulement sur le profil gaussien initial. Si, au lieu de considérer dans l'abstrait que la cavité contient un pur état de Fock, c'est à dire caractérisé par un nombre de photons parfaitement fixé, on couple très faiblement la cavité à une source monochromatique cohérente, on va bâtir dans la cavité un champ possédant une statistique poissonnienne, dont le nombre moyen de photons dans le mode variera avec le couplage. Un tel état du champ est un état cohérent $|\alpha\rangle = \exp(\alpha.a^\dagger - \alpha^*.a) |0\rangle$ [105]. Cette définition conduit à la décomposition usuelle de $|\alpha\rangle$ sur la base $\{|n\rangle\}$:

$$|\alpha\rangle = \exp(-\frac{1}{2}|\alpha|^2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (\text{III.13})$$

Nous utiliserons cette distribution dans toute la suite pour modéliser l'état du champ dans la cavité dans le cas d'un couplage avec une source laser. La figure ci-dessous donne la densité angulaire d'atomes détectée après la zone d'interaction, dans le cas particulier d'un champ cohérent $\bar{n} = 2$.

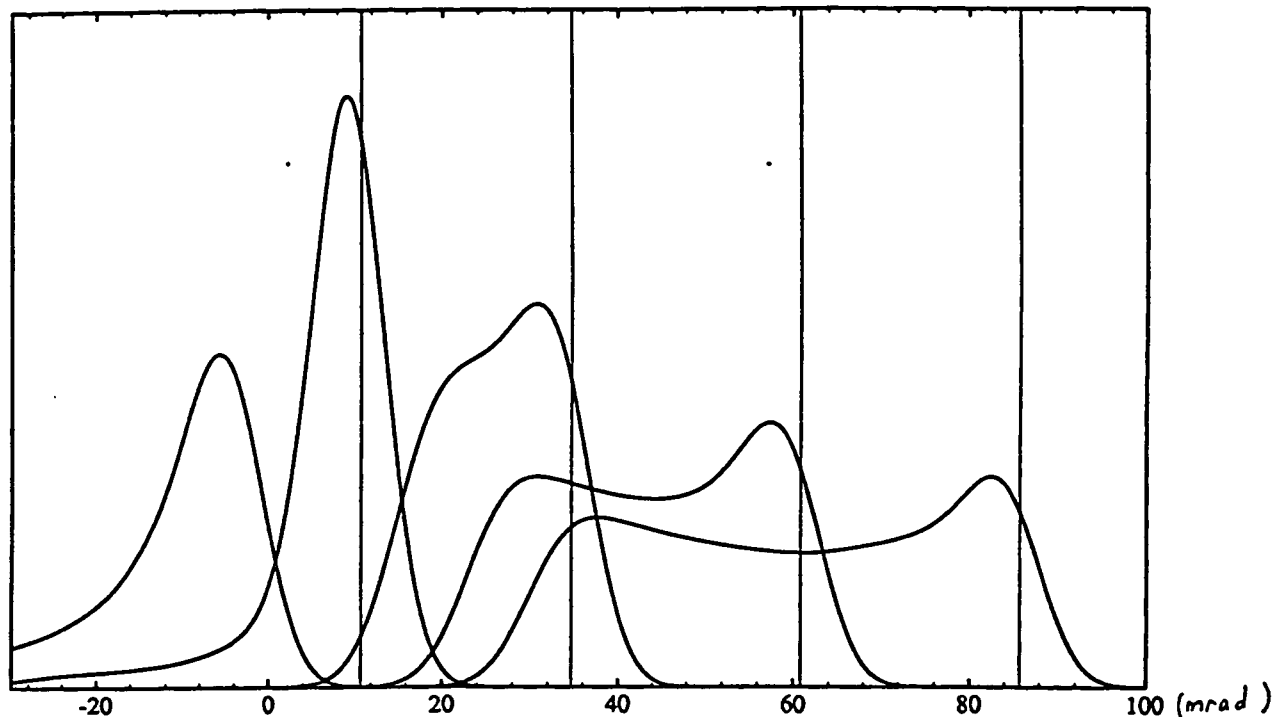


Figure III.7: Répartition des atomes détectés après l'interaction, pour des états du champs résonnant à 0, 1, 2, 3, 4 photons. Les autres paramètres correspondent à ceux déjà choisis.

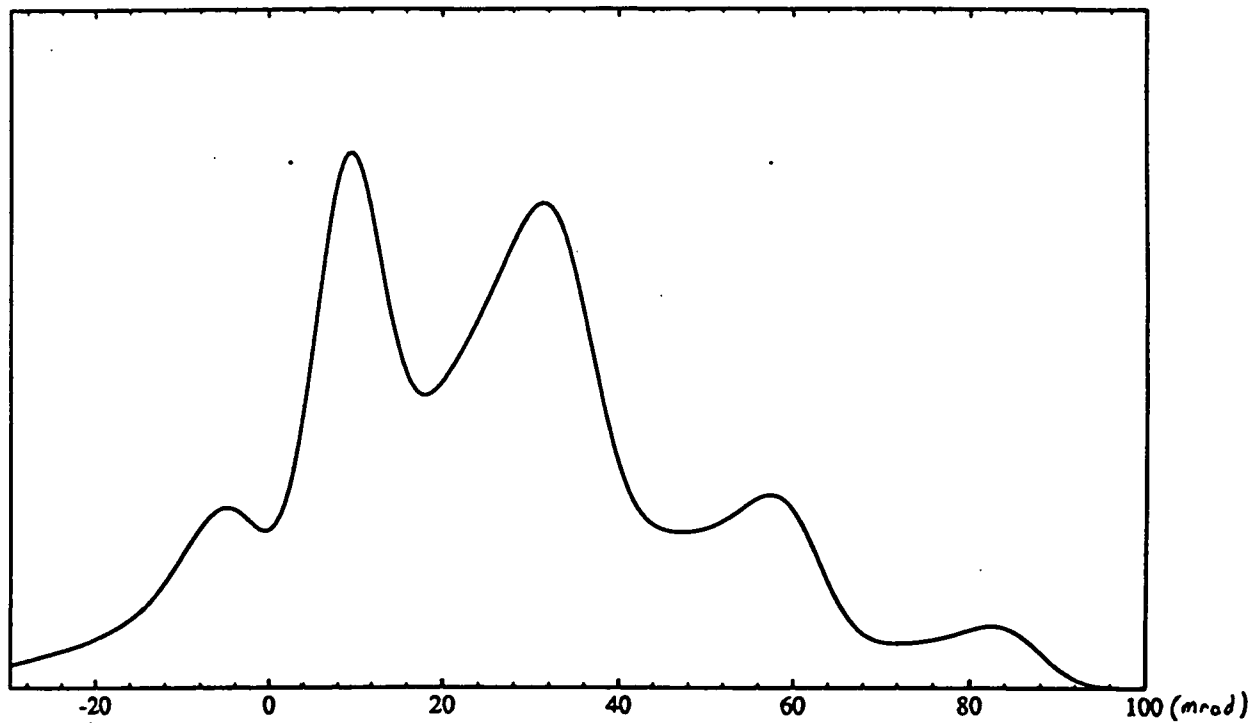


Figure III.8: Figure semblable pour un état cohérent du champ à deux photons.

Remarque: L'enregistrement des positions des atomes après un temps de vol n'est pas la seule possibilité de détection qui s'offre à nous. On pourrait tenter de détecter selectivement les atomes qui présenteraient une vitesse transverse donnée. Une détection selective en vitesse transverse peut être effectuée, comme cela a été démontré par S. Chu [106], en irradiant, suivant une direction perpendiculaire au faisceau atomique et contenue dans le plan équatorial de la microsphère, le jet d'atomes déviés par deux faisceaux laser. Tous deux sont choisis individuellement non-résonnants avec les deux transitions d'un système en Λ . Une condition de résonance de type Raman stimulée, dépendante de la vitesse transverse des atomes, permettrait l'observation d'une classe de vitesse transverse. Le principal avantage de cette technique sur la méthode de fluorescence dans l'espace des positions exposée plus haut est que l'on peut se passer de diaphragme: en effet la selection des atomes s'opère dans ce cas en fonction de la vitesse transverse, ce qui est subordonné à la qualité du refroidissement transverse de la source atomique. L'inconvénient majeur de ce principe de détection est toutefois que l'on ne détecte à la fois qu'une classe de vitesse.

En conclusion, les profils obtenus, dans le cas où l'on suppose que la cavité contient un état de Fock (état du champ à exactement n photons, noté $|n\rangle$), sont complexes car les pics dans les longueurs efficaces de diffusion associés aux différents nombres de photons, se chevauchent partiellement. La déviation maximale reste cependant simplement reliée au nombre de photons contenus dans la cavité. Il reste cependant à vérifier la validité de cette théorie qui recourt à un traitement classique des degrés de liberté externes des atomes. Or, cette expérience de diffraction utilise un jet d'atomes très froids transversalement pour sonder un potentiel de relativement courte portée: il nous faut maintenant estimer l'importance des effets ondulatoires—ou effets de diffraction qui peuvent se manifester en raison de la petite extension transverse du potentiel.

III-1-9 Effets quantiques.

Lors du traitement classique du mouvement des atomes, la petitesse des déflexions obtenues nous a contraint à utiliser une source d'atomes présentant une distribution de vitesses transverses v_t extrêmement petites (de l'ordre du centimètre par seconde). La longueur de cohérence l_{ct} transverse de tels atomes peut s'écrire: $l_{ct} = h/(mv_t)$. Pour des atomes de rubidium possédant une vitesse transverse de quelque $2\text{cm}\cdot\text{s}^{-1}$, on trouve environ 40nm . L'extension transverse du paquet d'onde atomique est donc comparable à l'extension du champ du mode (120nm): un traitement quantique de la variable externe des atomes, colinéaire au rayon de la sphère s'impose donc.

Nous avons vu plus haut, lors de l'analyse classique de la diffusion des atomes par l'effet conjugué du potentiel lumineux et de la force de Van der Waals, qu'il fallait choisir une vitesse longitudinale assez grande pour limiter la probabilité de porter les atomes dans l'état excité. Pour les paramètres choisis, l'énergie cinétique des atomes est grande devant la hauteur de la barrière de potentiel. Afin de réaliser un calcul complètement quantique décrivant l'interaction des atomes avec le potentiel V de la microsphère, il faudrait en principe calculer l'évolution temporelle, dans tout l'espace, des fonctions d'onde atomi-

ques. Pour rester dans des limites raisonnables, nous avons choisi de réduire la taille des calculs en ne traitant quantiquement qu'un des degrés de liberté du problème—suivant la direction radiale, en conservant une évolution classique sur les deux dimensions restantes. Il suffit de chercher une solution (numérique) directe au problème de Schrödinger décrivant l'évolution du paquet d'onde atomique lors de l'interaction avec le potentiel V . Cette méthode permet de prendre en compte précisément les effets liés aux variations spatiales rapides du potentiel radial, sans compliquer le reste du traitement. Voyons plus en détails les fondements et les résultats numériques obtenus par cette méthode d'approximation paraxiale.

III-1-10 Approximation paraxiale

Pour comprendre pourquoi l'on peut réduire dimensionnellement le problème, partons d'une fonction d'onde atomique à deux dimensions (suivant l'axe du jet atomique, l'axe x et perpendiculairement à la surface de la microsphère, axe y), solution de l'équation de Schrödinger en présence du potentiel total V (champ+Van der Waals). On a déjà éliminé ici l'une des dépendances transverses en raison de la symétrie de révolution du problème.

Vu la grande vitesse longitudinale des atomes, une onde plane incidente va donner après interaction une quasi onde plane, dont les plans d'onde seront très peu perturbés. Le long du jet, l'évolution de la phase est principalement celle de l'onde plane incidente. On prendra donc Ψ sous la forme : $\Psi(x, y) = e^{ik_1 x} u(x, y)$. Ici $u(x, y)$ est une enveloppe lentement variable. Nous avons ainsi séparé l'évolution longitudinale de l'évolution transverse. L'équation de Schrödinger, écrite pour la fonction d'onde Ψ de l'atome dans le potentiel V conduit à :

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \left(-k_1^2 u + 2ik_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) e^{ik_1 x}. \quad (\text{III.14})$$

L'*approximation paraxiale* consiste à négliger la dérivée seconde par rapport à x , la quantité $\partial^2 u / \partial x^2 \ll k_1^2 u$, en raison de la lente variation du potentiel et donc de la fonction $u(x, y)$. L'équation de Schrödinger pour un état stationnaire de diffusion :

$$-\frac{\hbar^2}{2M} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \right) + V(x, y) \Psi = \frac{\hbar^2 k_1^2}{2M} \Psi, \quad (\text{III.15})$$

devient, dans le cadre de cette approximation :

$$i \frac{\hbar^2 k_1}{M} \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\hbar^2}{2M} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + V(x, y) u. \quad (\text{III.16})$$

Il s'agit d'une équation analogue à celle rencontrée en optique gaussienne, exprimant une propagation lumineuse dans un milieu d'indice variable. Si nous introduisons le paramètre $\tau \equiv x/v_l \equiv x M/\hbar k_1$ (paramétrage temporel d'une trajectoire classique non perturbée parcourue à la vitesse v_l), l'équation paraxiale peut finalement être écrite sous la forme

d'une nouvelle équation de Schrödinger:

$$i\hbar \frac{\partial u}{\partial \tau}(y, \tau) = -\frac{\hbar^2}{2M} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(y, \tau) + V(y, \tau)u(y, \tau) \quad (\text{III.17})$$

Il s'agit de l'équation d'évolution d'une particule de masse M , décrite par la fonction d'onde $u(y, \tau)$, dans un potentiel unidimensionnel dépendant du temps τ qui serait celui "vu" par la particule classique astreinte à se déplacer selon une trajectoire non perturbée.

III-1-10-1 Simulation directe de l'évolution du paquet d'onde.

Le paragraphe précédent fournit un procédé de calcul qui permet de calculer, au prix d'une complexité raisonnable, l'évolution temporelle d'une fonction d'onde atomique en interaction avec la microsphère. Il nous faut étendre ce résultat au cas de plusieurs atomes issus d'une source atomique donnée—une mélasse optique par exemple—. En général, la manière correcte de décrire l'ensemble des atomes provenant de la source qui interagissent avec la microsphère, repose sur le formalisme de l'opérateur densité. Avant de pouvoir déterminer l'évolution du système atomique sous l'effet du résonateur, il nous faut caractériser l'état des atomes du jet incident.

Dans le cas particulier d'atomes issus d'une mélasse optique (probablement du fait du caractère stochastique des interactions des atomes avec les faisceaux laser de la mélasse) il semblerait (d'après Jean Dalibard) que la matrice densité représentant le système atomique dans la base des ondes planes, soit pratiquement diagonale. Les cohérences entre vecteurs \mathbf{k} seraient très petites. Les coefficients de la diagonale sont donc ceux de la distribution classique des impulsions transverses du jet. Pour des raisons de commodité (en raison des difficultés qui apparaissent lorsque l'on cherche à calculer la transformée de Fourier du potentiel V), les calculs ont été effectués en représentation $\{|\mathbf{r}\rangle\}$.

Le principe de la méthode employée, consiste à tirer au hasard un paramètre d'impact aléatoire et à se donner une distribution spatiale transverse de largeur moyenne de la longueur de cohérence transverse des atomes. On calcule alors l'évolution de cette distribution au moyen de l'équation (III.17). Le module au carré de la transformée de Fourier de la fonction d'onde émergente $\|\tilde{u}(k)\|^2$, homogène à une longueur, est directement la densité de flux atomique par unité d'angle, ou encore la longueur différentielle de diffusion suivant l'appellation utilisée lors du traitement classique.) Les résultats des différentes "expériences", obtenus pour chaque tirage du paramètre d'impact, sont finalement moyennés. Ce mécanisme simule exactement la déflexion de "paquets d'ondes" distincts, incohérents entre eux, qui viendraient s'accumuler après interaction sur un écran d'observation.

Ces calculs effectués numériquement[100], utilisaient une implémentation des équations (III.17) de type "différences finies", analogue à celle donnée dans [107].

III-1-10-2 Résultats.

Le potentiel $V(x, y)$ étant divergent pour $y \rightarrow 0$, nous avons régularisé les expressions en modifiant le potentiel V , au voisinage de la surface ($y \leq y_0$). Le choix, par continuité,

d'une valeur constante finie pour $y \leq y_0$ à la place de V permet mathématiquement d'éviter un comportement oscillant près de l'origine, et rend compte en un certain sens du "collage" des atomes³ sur la surface de silice du résonateur.

Remarque: à la différence du traitement classique, la dispersion initiale en vitesse transverse du faisceau atomique est automatiquement prise en compte comme l'on considère ici des paquets d'ondes.

La figure III.9 montre les résultats numériques du calcul quantique dans l'approximation paraxiale, pour 0, 1, 2, 3, 4 photons dans le mode (les paramètres expérimentaux étant les mêmes que pour le calcul classique).

Remarque : on constate que le calcul quantique redonne des profils de déviation qualitativement semblables à ceux obtenus par une théorie classique. La différence la plus marquante est peut-être les oscillations de courte période angulaire qui apparaissent surimposées. On peut comprendre, en s'aidant d'une formulation plus analytique développée par Shiff[108], très similaire aux méthodes d'approximation eikonales de l'optique, leur origine physique.

III-1-11 Résumé des résultats obtenus.

Les paragraphes précédents nous ont permis de calculer en détail les effets du potentiel de surface de la microsphère sur le faisceau atomique. En particulier, les simulations ont démontré que l'action du pseudo-potential, dépendant de l'état quantique du champ de la cavité, conduit à des effets de diffusion du jet d'atomes sonde corrélé à l'état du champ. En particulier, les structures attendues dans les profils de déflexion sont un signe indubitable de la quantification du champ électromagnétique dans les modes de la cavité. (Un article récent évoque également cet aspect de force dipolaire quantifiée[109].) Pour que le champ électromagnétique ne subisse aucune modification ou altération en retour, nous avons précisé les conditions, portant sur le désaccord δ et la vitesse longitudinale v_l des atomes qui doivent être satisfaites. Il semblerait, qu'après optimisation des paramètres, il soit difficile d'obtenir des probabilités d'absorption d'un photon du mode, par atome alcalin traversant l'onde évanescente, inférieures à quelques pour cent (pour quelques photons dans la cavité). Il semblerait donc qu'un tel taux de transfert n'interdise pas absolument de réaliser une véritable mesure QND du champ dans la cavité par observation des signaux de diffusion atomique. Nous avons toutefois effectué une analyse détaillée du processus de mesure, similaire à celle donnée dans [94], afin de vérifier son principe. En particulier, nous avons montré, au moyen de simulations Monte-Carlo qu'il suffirait de collecter quelques atomes, dans n fenêtres centrées autour des maxima de diffusion correspondant à 0, 1... photons dans la cavité, pour réduire efficacement l'état quantique du champ résonnant vers un état de Fock (environ 5 atomes suffisent pour un champ de $\bar{n} = 1.5$). La probabilité qu'un photon de la cavité soit absorbé au cours de la mesure est alors d'environ 40%.

³Bien sûr, les atomes qui se précipitent sur la surface sont perdus, mais ils ne perturbent pas le mode optique car la présence de la surface modifie complètement leurs propriétés radiatives.

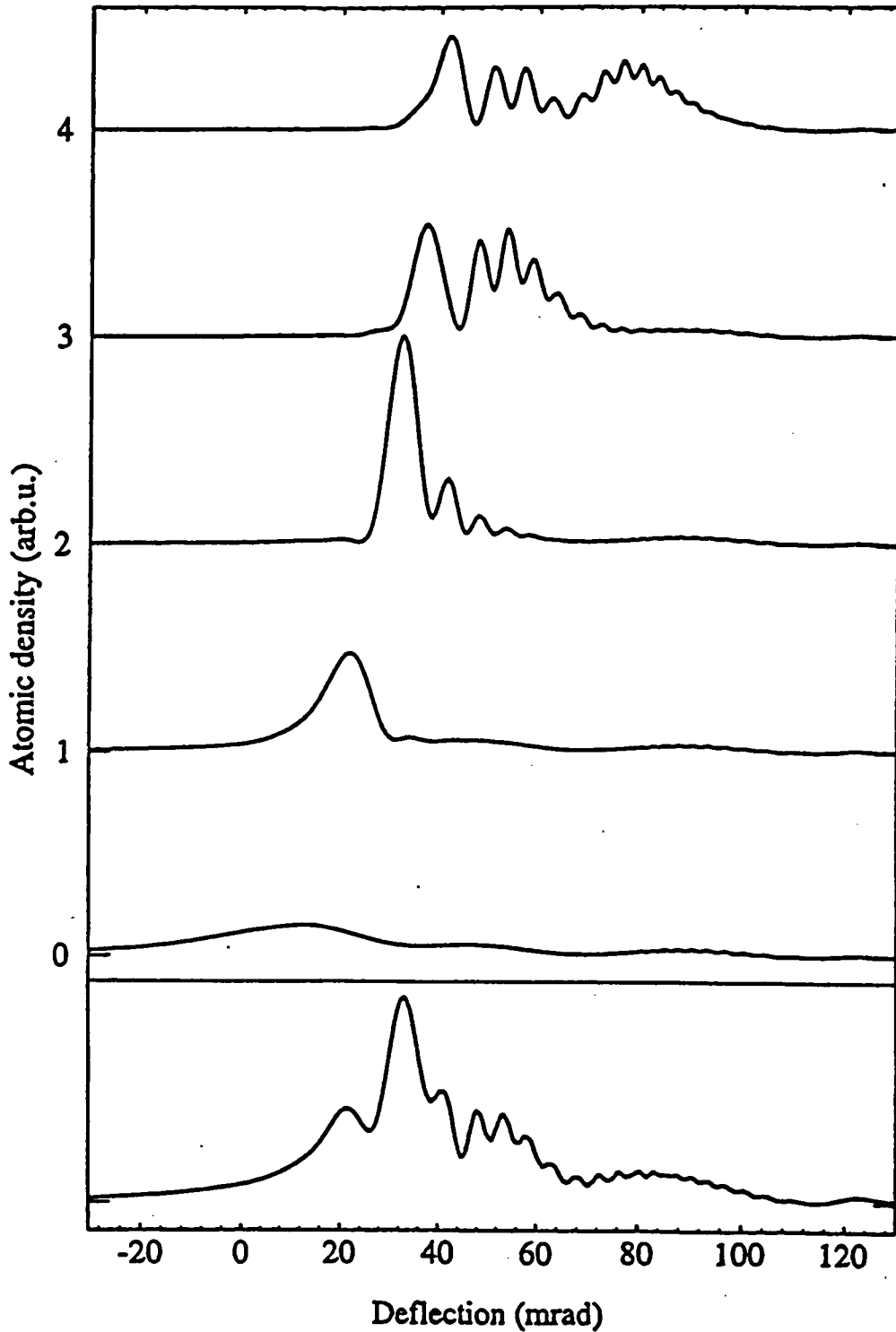


Figure III.9: Allure des profils de déflexion prédits par la méthode quantique du paragraphe précédent pour des champs dans la cavité de 0, 1, 2, 3, 4 photons. Le diagramme, en bas de page, correspond à un état cohérent de $\langle n \rangle = 2$.

Passons maintenant en revue quelques autres idées d'expériences d'optique qui pourraient être réalisées avec les modes de galerie des microsphères, et mettraient à profit les particularités exceptionnelles de leurs résonances.

III-2 Quelques autres idées d'expériences.

L'extrême finesse des modes de galerie, conjuguée au caractère monolithique de ces supercavités, devrait permettre la réalisation de nouveaux dispositifs aux performances fascinantes. Les microsphères peuvent en premier lieu être utilisées comme des résonateurs "passifs", beaucoup plus compacts, à facteur de qualité égal, que les interféromètres de Fabry-Pérot. Cette voie est poursuivie par au moins un autre groupe[88]. Ces travaux sont fondés sur des cavités sphériques de plus grande taille (quelques centimètres) polies mécaniquement, ce qui limite les facteurs de qualité à $\approx 10^8$.

Les résonances de galerie peuvent être également utilisées dans des systèmes comportant des éléments non-linéaires. Ainsi, Hollberg a mis en évidence très récemment l'auto-stabilisation par injection optique d'une diode laser infrarouge sur le mode d'une microsphère [110]. Nous présentons ci-dessous un projet visant à une réalisation similaire dans le domaine de l'optique intégrée.

Enfin, toujours dans cette direction, on peut songer "intégrer" le milieu optiquement actif au voisinage de la surface ou même à l'intérieur de la microsphère: une expérience visant à faire fonctionner un micro-laser à microsphère est en cours dans notre laboratoire.

Passons maintenant en revue ces trois catégories de réalisations.

III-2-1 Etalon de fréquence optique.

Une application envisageable des micro-cavités est la réalisation d'étalons de fréquence optique. Vu l'extrême finesse des modes de ces cavités dans le proche infra-rouge, il semble possible de stabiliser une source monochromatique au centre d'une résonance : la cavité jouerait le rôle de mémoire de phase pour le système. Voyons plus en détail les différentes options possibles, en tentant d'évaluer les sources de bruit perturbatrices.

Nous nous limiterons ici à l'étude de deux configurations optiques. L'une, purement passive, consiste à stabiliser électroniquement, par la technique de modulation de phase (voir annexe D), un laser sur un mode de galerie résonnant. La seconde recourt au couplage d'un milieu amplificateur optique—ici une diode laser, à un mode optique de galerie bien défini: pour des paramètres de couplage convenables, la cavité optique externe constituée par la microsphère va déterminer la fréquence d'oscillation de la diode laser, ainsi que la pureté spectrale de la radiation émise dans une certaine mesure. Ces deux systèmes étant aujourd'hui d'usage courant en optique, nous ne réexpliquerons pas ici le détail de leur fonctionnement, et nous renvoyons le lecteur aux articles de références (par exemple [75]).

Afin de jauger l'intérêt pratique de tels systèmes, tentons maintenant d'estimer les performances que l'on pourrait obtenir.

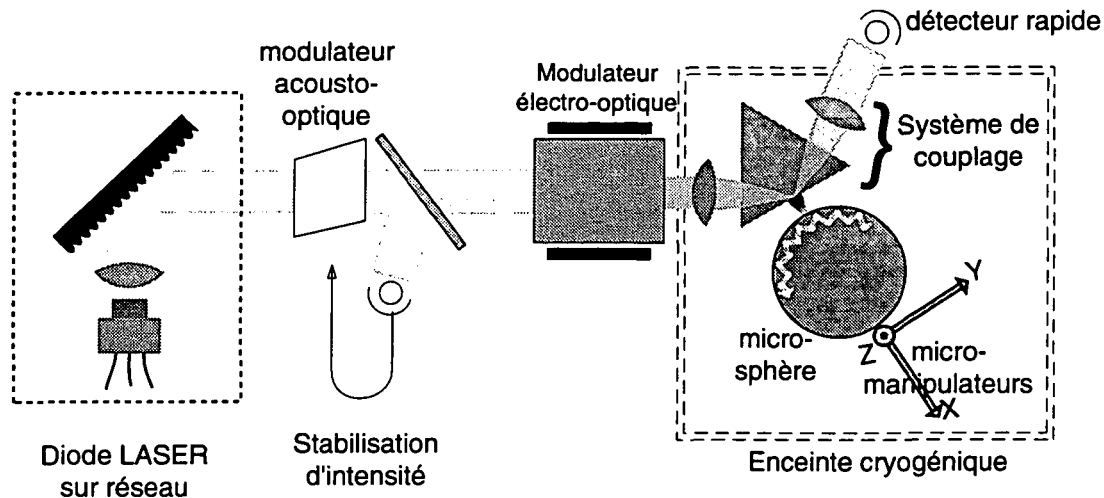


Figure III.10: Le faisceau, en provenance du laser est d'abord stabilisé en intensité pour éviter des dérives de la fréquence de la cavité sous l'effet de fluctuations de la puissance lumineuse. Le laser est ensuite stabilisé (par une retro-action sur le courant) au moyen d'une méthode usuelle de modulation de phase.

La stabilisation d'un laser sur un mode de galerie pourrait répondre à la disposition donnée sur la figure ci-dessous.

De gauche à droite (figure III.10), on reconnaît le laser source, contrôlable en fréquence par le courant de jonction et par l'orientation du réseau de diffraction, qui traverse tout d'abord un dispositif de stabilisation de l'intensité du faisceau. Ensuite, ce même faisceau, traverse le modulateur de phase électro-optique, puis une partie est couplée à la micro-sphère, qui se trouve dans une enceinte régulée en température. Le faisceau émergent aboutit enfin sur un photodétecteur rapide. Supposons que le laser soit quasi résonnant avec une des bandes latérales créée par le modulateur, celle de droite par exemple. On obtient alors classiquement le signal d'erreur permettant d'asservir le laser à la fréquence de cette bande latérale, par comparaison de la phase du champ radiofréquence envoyé au modulateur avec la phase du photo-signal. (Nous noterons dans ce paragraphe cette différence de phase ϕ .) On déduit enfin de ce signal la correction à appliquer au laser (via son courant) pour le stabiliser exactement à résonance: lorsque ceci est réalisé, la cavité joue le rôle d'oscillateur de référence qui impose la phase optique au laser asservi. L'interprétation physique est simple : on détecte ainsi le battement hétérodyne de la porteuse, -la fréquence centrale émise par le laser-, avec une bande latérale plus ou moins déphasée par la cavité. Passons maintenant en revue les limitations du système.

- Dérives thermiques propres de la cavité.

Nous sommes ici pénalisés par un effet que nous avons utilisé à notre profit pour accorder les résonances (voir page 120): les variations d'indice et de taille de la cavité avec la température. Toute variation de température modifie la position des

résonances, selon la formule II.13. Toutefois, le coefficient de dilatation linéaire et la variation d'indice optique avec la température varient tous les deux approximativement comme T^3 . A $2K$, l'action combinée de ces deux effets sur la position relative des résonances seraient de l'ordre de $10^{-8}/K$. Une stabilisation au micro-K conduirait donc à des stabilités relatives de quelques 10^{-14} , avec a priori un bruit en $1/f^2$ aux temps courts, du fait du couplage thermique du résonateur avec la masse thermique du réfrigérateur, conduisant peut-être encore à une meilleure stabilité aux temps courts. Suite aux travaux de S.Schiller, des cavités monolithiques cryogéniques en silice de quelques centimètres cubes de volume, seraient en cours de test, avec pour but la réalisation de résonateurs présentant de très faibles dérives.

- Résonances mécaniques du résonateur.

Afin de mesurer l'intérêt des microsphères comme micro-cavités monolithiques, calculons les fréquences propres des premiers modes de vibration. Soit \mathbf{u} le champ de vecteur qui décrit les mouvements mécaniques en chaque point de la cavité. Si l'on décompose ce champ \mathbf{u} sous la forme $\mathbf{u} = \mathbf{u}_t + \mathbf{u}_l$, avec $\text{div}\mathbf{u}_t = 0$ et $\text{rot}\mathbf{u}_l = 0$, l'équation de l'élasticité décomposée de la sorte donne pour la composante longitudinale[111]:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}_l}{\partial t^2} - c_l^2 \Delta \mathbf{u}_l = 0 \text{ et pour la composante transverse } \frac{\partial^2 \mathbf{u}_t}{\partial t^2} - c_t^2 \Delta \mathbf{u}_t = 0.$$

c_l et c_t sont deux célérités (compression et cisaillement) caractérisant le milieu. Pour la silice, c_l est de l'ordre de $1800m.s^{-1}$, $c_t \sim 1400m.s^{-1}$. Remarquons que le système d'équations précédent est semblable à un problème d'ondes électromagnétiques. Cherchons une solution périodique de pulsation ω_n dérivant d'un potentiel $u_r = \partial_r e$ et purement radiale à ce problème. On peut prendre e sous la forme : $e = e_0 \sin(\omega r/c_l)/r$. En écrivant que la contrainte dans la silice est nulle à la surface de la sphère de rayon a , on trouve que ω doit vérifier l'équation implicite suivante, dont les solutions donnent la position des modes vibratoires:

$$\tan \omega_n a/c_l = \frac{\omega_n a/c_l}{1 - (a\omega_n/2c_t)^2} \quad (\text{III.18})$$

Les deux premiers modes propres sont obtenus respectivement pour $\omega_0 a/c_l = 2940$ et $\omega_1 a/c_l = 10558$. Pour un sphère de rayon $50\mu m$, cela conduit à des fréquences respectives de $9MHz$ et $33MHz$.

Ainsi, la fréquence élevée (bien supérieure à la largeur observée des modes de galerie) des premiers modes de vibration mécanique garantit une très bonne immunité des microsphères aux diverses vibrations mécaniques parasites.

En conclusion, les microsphères de silice apparaissent intéressantes comme étalon optique monolithique, et pourraient être utilisées comme mémoire optique pour des temps comparables à la seconde (au delà, les dérives thermiques lentes du réfrigérateur deviennent gênantes).

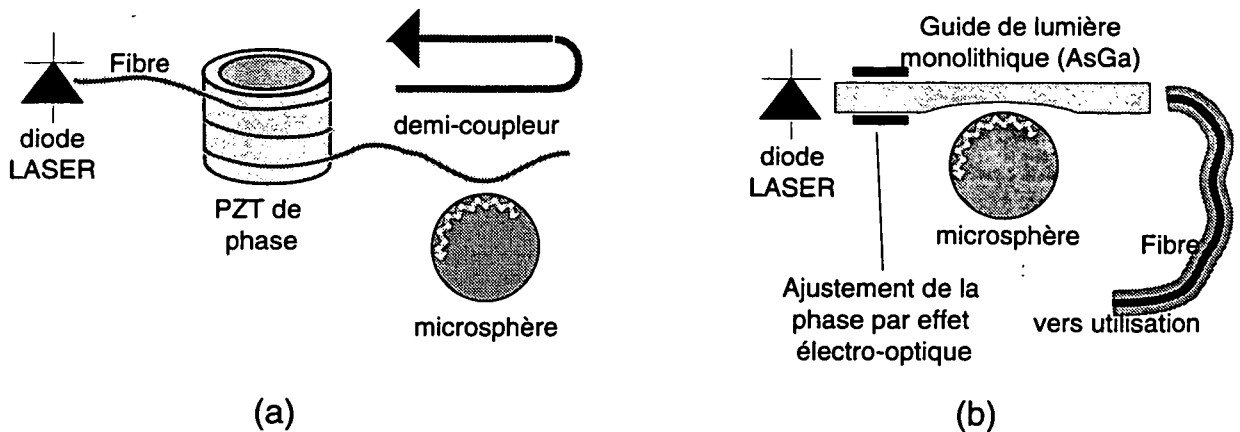


Figure III.11: (a) Stabilisation d'une diode laser sur une résonance de galerie, en utilisant la lumière retro-diffusée "parasite". (b) Version tout-intégré du même dispositif.

Une autre application voisine semble attrayante dans le cadre des sources utilisées dans les télécommunications optiques. L'idée de départ est analogue à la technique de stabilisation optique d'une diode laser sur une cavité Fabry-Pérot confocale [112][113]. Une toute petite fraction (-40db typ) de la lumière contenue dans le mode résonnant de la cavité FP est réinjectée avec la phase appropriée dans la diode laser, ce qui suffit à obliger cette dernière à émettre en phase avec le mode du FP. Le système pourrait être constitué de la manière suivante:

Le tracé (figure III.11 a) représente une fibre optique monomode de silice. Entre la diode laser et la cavité est inséré un déphaseur, qui n'est autre qu'un tronçon de la fibre collé à une céramique piezo-électrique. Le "demi-coupleur" a été décrit dans le paragraphe expliquant le couplage aux microsphères, page 81. Rappelons simplement ici que ce dispositif permettrait de coupler selectivement de la lumière dans un mode de la cavité, sans interrompre la propagation dans la fibre. On utilise ici explicitement la lumière retro-diffusée par un mode résonnant (comme expliqué au second chapitre[110]). En (b) est symbolisé un montage réalisable selon les techniques de l'optique intégrée, le couplage aux modes de galerie s'effectuant au moyen d'un guide diélectrique de forme appropriée. Le réglage de la phase pourrait se faire en modifiant localement l'indice du guide au moyen d'un champ électrique statique. Ces systèmes sont parfaitement équivalents au montages réalisant la stabilisation optique d'une diode laser sur une cavité Fabry-Pérot externe, ce qui devrait donc permettre de réduire la largeur du laser à moins d'un kilohertz. Un tel système qui peut être aisément intégré dans un volume inférieur au centimètre cube, pourrait intéresser le domaine des télécommunications (afin d'accroître la longueur de cohérence de diodes DFB par exemple).

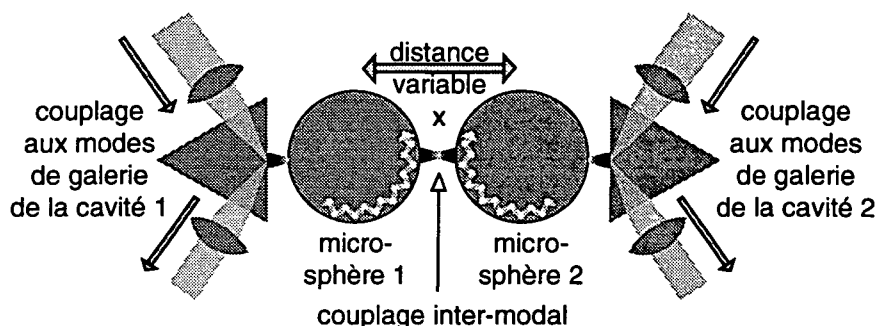


Figure III.12: Deux microsphères, séparées d'une distance x , sont ici en interaction mutuelle. Un double système de couplage, semblable à celui décrit dans la partie expérimentale de ce mémoire, permet de mesurer spectroscopiquement la position des résonances dans les deux systèmes simultanément.

III-2-2 Mesure de distance.

Le très fort gradient d'intensité qui existe à la surface des microsphères, lorsque la cavité contient un mode de galerie résonnant laisse entrevoir une application dans le domaine de la détection de microdéplacement. Considérons le système représenté figure III.12, initialement proposé par V.S. Ilchenko [89].

Supposons que les cavités 1 et 2 soient couplées respectivement à deux lasers sondes, chacun exactement à résonance avec un mode de galerie. On supposera également que les fréquences de ces deux lasers sont choisies de manière à être aussi proches que le permettent les spectres respectifs des deux microsphères. Que ce passe-t-il lorsque la distance x est réduite de manière à ce que les champs évanescents le long des équateurs des deux sphères se rencontrent? Limitons-nous au cas où cette interaction reste suffisamment faible. On peut distinguer deux effets physiques distincts. Si les modes se recouvrent suffisamment, comme les fréquences respectives des deux modes sont voisines, un photon de la cavité 1 va pouvoir se coupler à la cavité 2, d'autant plus facilement que l'écart de fréquence entre les modes sera petit. Nous sommes donc dans la situation de deux oscillateurs harmoniques couplés, le couplage étant fonction du recouvrement spatial des modes et de l'écart en fréquence initial des résonances choisies. Un second effet physique, dual du premier, est également à considérer: lorsque la cavité 2 est à proximité de l'équateur de la cavité 1, les conditions aux limites du système optique 1 sont légèrement perturbées par la surface de silice de 2. Cet effet, indépendant comme on le voit du champ de la cavité 2, affecte les modes de 1.

On peut assez raisonnablement estimer l'ordre de grandeur des déplacements

modaux attendus (voir par exemple [114] pour une modélisation plus quantitative). Lorsque les sphères s'approchent à une distance voisine de la portée du champ évanescent, soit une centaine de nanomètres, les modes devraient se déplacer d'au moins leur largeur, car alors le couplage entre les deux sphères est voisin du couplage d'une sphère au prisme créant l'onde évanescente. La bande passante de la mesure est a priori le temps de couplage de la cavité au laser sonde, soit environ le mégahertz. On pourrait donc espérer une sensibilité d'au moins $10^{-10}m/\sqrt{Hz}$. A titre de comparaison, un dispositif de type "microscope" tunnel (qui utilise le courant tunnel entre une pointe acérée et une plaque métallique) permet de réaliser des senseurs de position dans la gamme $10^{-11} - 10^{-14}m/\sqrt{Hz}$.

III-2-3 Microlasers dopés.

Jusqu'ici, la matrice de verre dont sont constituées les microsphères a joué un rôle très passif. Tout au plus avons nous tiré parti des variations physiques de celle-ci, en fonction de l'intensité de l'irradiation ou de la température. On pourrait donc considérer de fabriquer des microrésonateurs à partir d'un verre de silice allié à une faible proportion d'espèces hôtes, qui lui conférerait des propriétés optiques particulières, sans trop altérer la transparence exceptionnelle du matériau pur. Nous allons discuter dans ce paragraphe quelques projets d'expériences exploitant cette idée, et qui sont en phase de conception dans notre laboratoire⁴.

III-2-3-1 Verre et pollution "contrôlée".

L'addition d'atomes étrangers peut modifier considérablement les propriétés optiques d'un verre. Par exemple, l'introduction d'une très petite quantité de fer dans du verre de silice crée des bandes d'absorption extrêmement intenses dans les parties rouge et proche infrarouge du spectre. D'autres éléments d'addition peuvent modifier complètement les propriétés dispersives des verres. La maîtrise de la dispersion par l'élaboration de verres complexes est d'ailleurs un des facteurs (avec les dioptries asphériques) responsable de l'amélioration considérable de la qualité des instruments d'optiques ces dernières années, en photographie notamment. L'ajout d'espèces en faible concentration aux verres de silice permet également d'accroître dans des proportions importantes le facteur de mérite des verres non-linéaires—le coefficient non-linéaire du verre rapporté à sa transparence—.

En raison de l'ampleur du domaine, il faut nous limiter à une classe particulière d'effets. La possibilité de fabriquer des verres de silice qui sous l'effet d'un rayonnement de pompe intense peuvent amplifier les rayonnements dans une fenêtre de longueur d'onde, ouvre la voie à de multiples réalisations fascinantes. En particulier, la silice dopée par des terres rares comme le néodyme, a permis très tôt la réalisation de laser: un barreau de Néodyme-verre de quelques centimètre cubes, pompé par flash, émet à la longueur d'onde de $1.08\mu m$ [92]. Un tel laser requiert typiquement une centaine de joules de puissance de pompe (l'énergie minimale que doit fournir la lampe flash de pompe). La probabilité totale qu'un photon absorbé dans une bande d'absorption quelconque du verre dopé conduise à

⁴Ce projet de réaliser des microlasers dopés est poursuivi en collaboration avec le ENSSAT de Lannion.

un atome dans le niveau laser excité est d'environ 0.4 [115][116]. De tels lasers sont de plus accordables sur plusieurs nanomètres. Plus récemment, l'émission laser de nombreux ions implantés dans une matrice de verre (parfois en présence d'autres espèces comme K , La , Ba , Al , Ge qui modifient l'environnement chimique vu par les ions actifs), a été observé pour Er^{3+} à $1.543\mu m$ et à $1.55\mu m$, pour Yb^{3+} à $1.015\mu m$, pour Ho^{3+} à $2.1\mu m$, pour Tm^{3+} à 1.85 et 2.015 , Pr^{3+} [117]... A titre d'illustration, la figure III.13 montre la variété des terres rares utilisées pour réaliser des lasers solides.

Serait-il envisageable de doper nos microrésonateurs à ondes de surface par l'une de ces espèces, afin de disposer d'un milieu amplificateur dans le volume même des microsphères.

Le néodyme va particulièrement retenir notre attention. En effet, cet ion est bien adapté à notre problème. Le néodyme, de structure électronique $[Xe] 4f^3$, implanté dans une matrice vitreuse de silice, présente trois bandes de fluorescence intenses vers 0.9, 1.08 et $1.3\mu m$, et deux bandes d'absorption principales à 590 et $800nm$, que l'on voit représentées figure III.15 [118]. La structure des "niveaux" (ce sont en fait des bandes très larges comme on va le voir) est schématisée en III.14. (Les notations employées ici sont celles du couplage $L-S$ (Russel-Saunders) $^{2S+1}L_J$, qui est ici la désignation la mieux adaptée.)

Ces deux longueurs d'ondes, pour lesquelles le verre dopé absorbe efficacement de la lumière le traversant, présentent de nombreux intérêts pratiques pour le choix d'une source lumineuse de pompe. Une diode laser à $810nm$ de moyenne puissance (10 à $100mW$) peut être utilisée comme pompe, solution plus souple expérimentalement qu'une pompe par un laser à argon vers les niveaux $^4G_{7/2}$, car elle permet une modulation aisée et rapide de l'intensité de pompe, et permet de s'affranchir de la lourdeur d'un laser à gaz. Nous pouvons donc maintenant débiter l'étude de notre système modèle constitué d'une microsphère de silice dopée par des ions néodyme, avec une concentration qui reste à déterminer.

III-2-3-2 Comportement des ions dans la matrice de verre.

Le paragraphe précédent nous a rappelé quelques unes des propriétés générales du verre de silice dopé. Revenons toutefois un instant à une analyse plus microscopique. Considérons un ion néodyme dans la matrice de verre. Comme l'explique l'annexe sur le verre de silice à la fin ce mémoire, les impuretés se placent en général dans les régions interstitielles du verre, dans les zones laissées vacantes par les tétraèdres de silicates. Le champ électrique microscopique dans un tel site littéralement environné par les liaisons oxygène qui relient les tétraèdres entre-eux peut être considérable. De plus, l'absence d'ordre de la matière vitreuse fait que chaque ion voit un champ local différent. De ce fait chaque site optiquement actif va émettre à une fréquence légèrement différente, responsable du grand élargissement inhomogène des transitions observées[119]. (Cette interprétation est confortée par le fait que les raies observées dans la structure cristalline du YAG sont beaucoup plus fines: l'ordre du réseau fait que l'on n'a pas cet effet de dispersion des champs locaux.)

A l'intérieur d'un site particulier, la forme des raies d'un ion particulier est bien

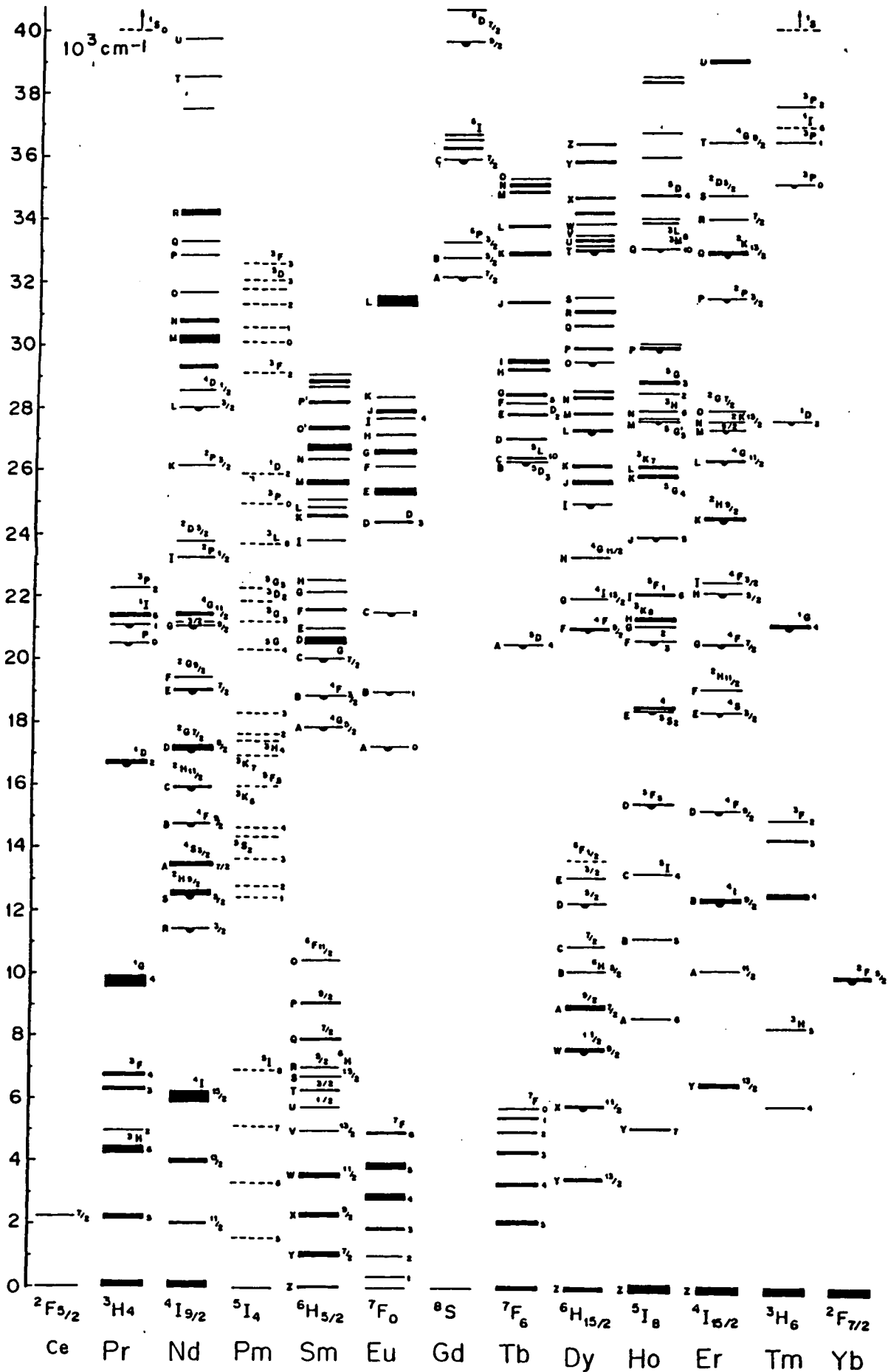


Figure III.13: Niveaux des terres rares en usage dans des lasers solides. Une telle diversité de niveaux permet en fait d'observer un effet laser du bleu (par up-conversion) à l'infrarouge lointain (documentation SONY corp.).

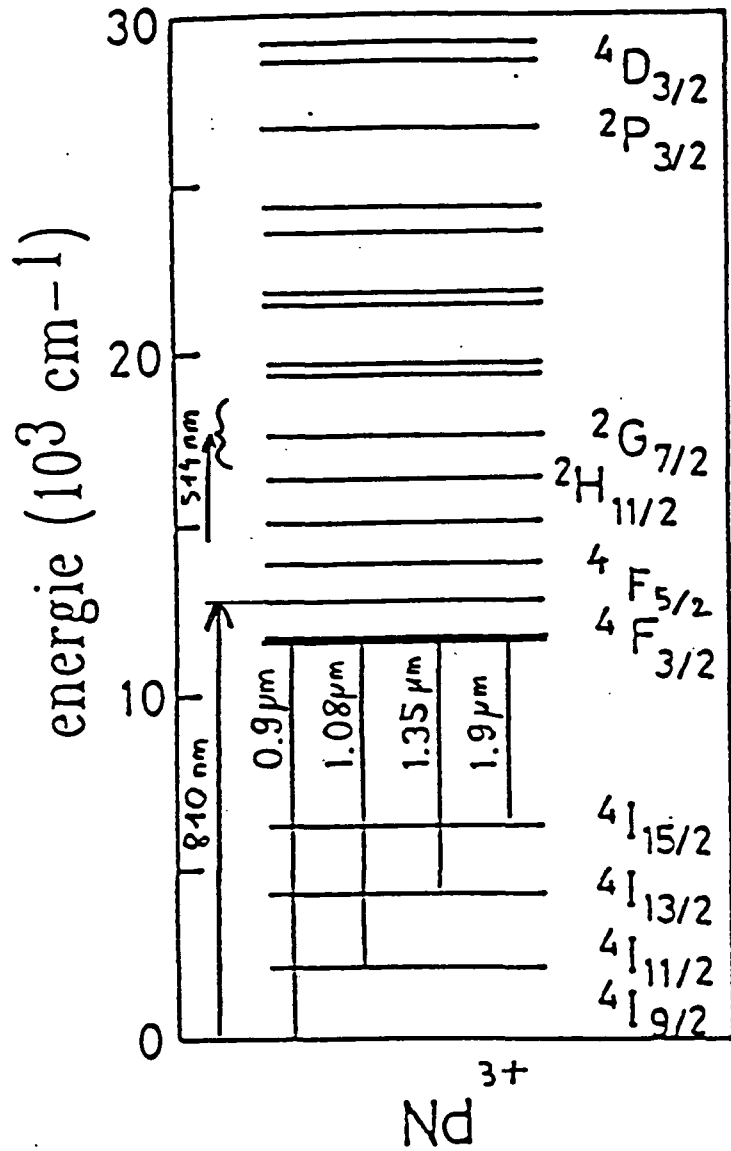


Figure III.14: Niveaux du système Nd:verre de silice. On a fait figurer ici les deux principales longueurs d'ondes de pompe (flèches montantes) possibles, ainsi que les deux raies de fluorescence à 1.33 μm et 1.08 μm .

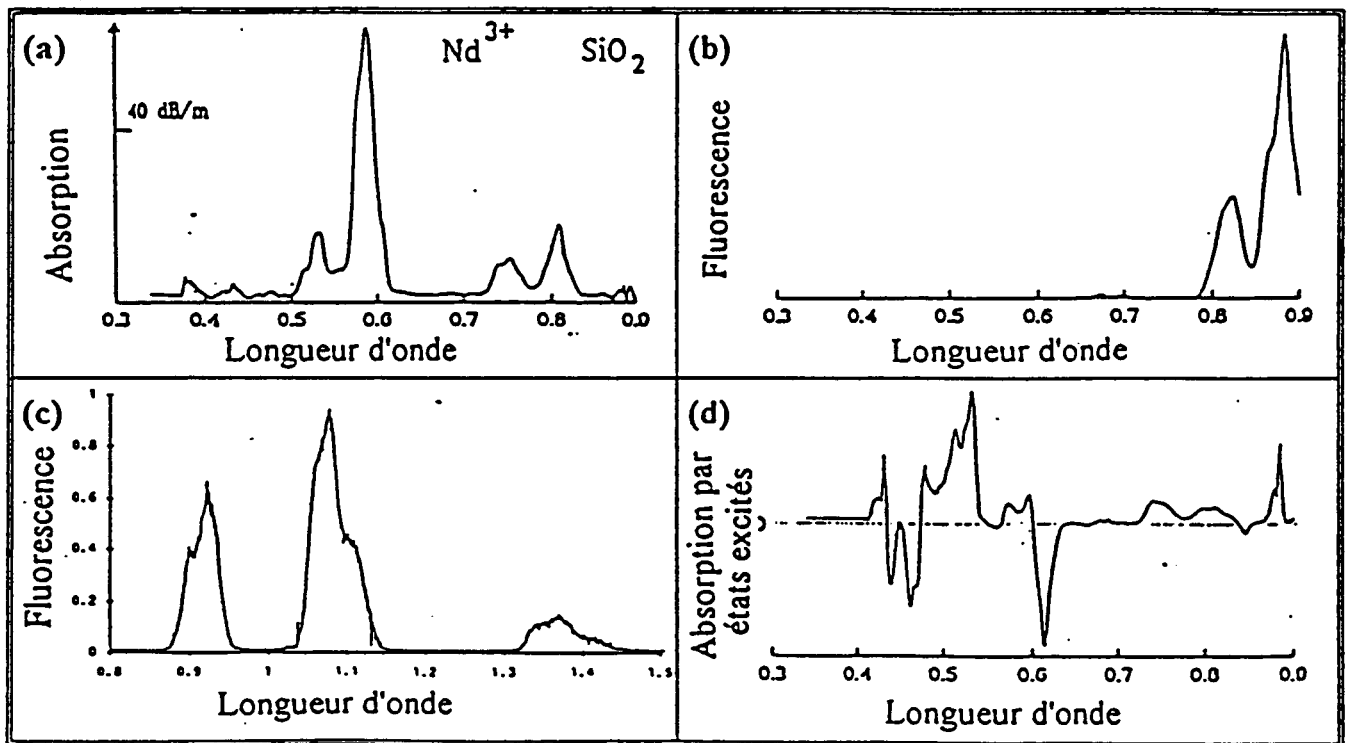


Figure III.15: (a) Spectre d'absorption du Nd^{3+} dans une matrice silice, (b) et (c) spectres d'émission correspondants et (d) spectre d'absorption par les états excités.

décrite par une lorentzienne dont la largeur—la largeur homogène— représente le temps de disparition des cohérences optiques. Cette largeur est limitée ici principalement, à la différence d'atomes libres, par les interactions inélastiques de l'ion avec les phonons de la matrice vitreuse. En particulier, dans le verre de silice, les phonons ont une énergie maximale très élevée, qui peut atteindre 1100cm^{-1} , soit quelque dix pour cent d'une transition optique! Ces deux causes d'élargissement, qui sont comparables à température ambiante, expliquent la grande largeur des raies de fluorescence présentées figure III.15: environ 50nm .

III-2-3-3 Transition à $1.08\mu\text{m}$.

Considérons plus en détail la transition à $1.08\mu\text{m}$, entre les niveaux ${}^4F_{3/2}$ et ${}^4I_{11/2}$. La durée de vie du niveau ${}^4F_{3/2}$ est assez longue ($\approx 1\text{ms}$), car les moments dipolaires de cette raie sont petits, et le taux de désexcitation non-radiative est limité, même à température ambiante, car l'écart d'énergie avec le niveau suivant est grand comparé à l'énergie maximale des phonons (5450cm^{-1} devant 1100cm^{-1}). Ces désexcitations non-radiatives mettent donc en cause nécessairement plusieurs phonons. On s'attend donc à ce que le taux d'émission multiphononique varie quasi exponentiellement avec l'écart au niveau immédiatement inférieur. Shinn [120] donne des critères plus précis:

- Si plus de 10 phonons sont nécessaires pour la transition, le taux de désexcitation est très faible et ne dépend presque plus de la température.
- Si moins de 4 phonons suffisent, la transition radiative ne se produit plus, et on peut considérer alors que les deux niveaux sont en équilibre thermique.

Ces deux points expliquent donc pourquoi la cascade non-radiative à partir des niveaux excités par la pompe s'effectue si vite jusqu'au niveau supérieur de la transition à $1.08\mu\text{m}$, qui présente lui-même une probabilité de désexcitation non-radiative faible.

Le champ électrique local de la matrice vitreuse (cf supra) lève la dégénérescence des niveaux $F_{3/2}$ et $I_{11/2}$ par effet Stark, en 2 et 6 sous-niveaux respectivement. Sur les 12 composantes, 10 sont résolues sur le spectre de fluorescence à 300K , et il est généralement admis ([118], page 87) que seuls les deux sous-niveaux $F_{3/2}$ et les deux niveaux inférieurs (de la multiplicité Stark) de $I_{11/2}$ contribuent à l'émission laser.

Un tel milieu, convenablement pompé, présente du gain, en particulier à la longueur d'onde de $1.08\mu\text{m}$, et l'on peut donc envisager d'observer un effet laser qui utiliserait comme cavité les modes de galerie résonnants d'une microsphère de silice dopée. Il nous faut maintenant préciser quelle configuration expérimentale pourrait être utilisée.

III-2-3-4 Microlaser à ondes de surface.

Considérons une microsphère de silice de quelques dizaines de microns de rayon, fabriquée par fusion à partir d'une ébauche faiblement dopée par des ions Nd^{3+} . Si l'on effectue la caractérisation spectroscopique du résonateur dopé au moyen du dispositif décrit dans la partie expérimentale de ce mémoire, on va détecter les modes de galeries habituels.

Comme les ions néodyme n'absorbent pas beaucoup pour des longueurs d'ondes plus grandes que $0.9\mu m$, le spectre des résonances de galerie devrait apparaître quasi non affecté par le dopage au delà de $1\mu m$. Si l'on superpose maintenant au laser sonde de spectroscopie le laser pompe à $810nm$, ce dernier est a priori non résonnant avec les modes de la cavité, et de ce fait ne va pas séjourner longtemps dans la sphère. Il devrait cependant pouvoir rentrer dans la microsphère par le prisme de couplage et illuminer l'équateur⁵. Nous avons dès à présent vérifié expérimentalement ce fait au moyen d'un laser He-Ne. Notons ici qu'un bon rendement peut être espéré, car la pompe éclaire sélectivement le milieu actif, et ce champ est renforcé par les effets faiblement résonnants du "fond de diffusion" dont nous avons parlé au premier chapitre: bien que non-résonnante, la lumière est guidée sous la surface du résonateur.

L'une des principales raisons qui justifie ici l'emploi de l'ion néodyme dans ces microlasers est la structure à quatre niveaux, pour la raie à $1.08\mu m$: après une émission stimulée, l'ion se retrouve dans l'état ${}^4I_{11/2}$, qui se désexcite non-radiativement (très rapidement) vers le fondamental. Il n'existe donc quasiment aucune absorption à cette longueur d'onde qui pourrait limiter la transparence du diélectrique dopé. D'autre part, comme les désexcitations non-radiatives sont très rapides, il est facile de réaliser une inversion de population (pour la transition active).

Remarque: on ne peut espérer réaliser dans un tel système un laser à pompage cohérent, car de très nombreux autres chemins de désexcitation à partir des niveaux excités brouillent la cohérence bâtie par la pompe.

Tentons de déterminer les caractéristiques principales de la lumière émise à $1.08\mu m$.

Il nous faut commencer par déterminer le dopage optimal qui permettrait, à la fréquence de la transition à $1.08\mu m$ la compensation exacte des pertes de la cavité par l'effet d'amplification. Nous allons supposer dans un premier temps qu'il n'existe qu'un seul mode de galerie dans le profil de gain du milieu amplificateur. Écrivons, en utilisant la théorie semi-classique du laser introduite par Schawlow et Townes [121], l'inversion de la densité de population critique $(n_{4F_{3/2}} - n_{4I_{11/2}})_t$ qui entraîne la compensation exacte des pertes de la cavité par le gain.

$$(n_{4F_{3/2}} - n_{4I_{11/2}})_t = \frac{8\pi N^3 \nu^2 t_{sp}}{c^3 T_{cav} g(\nu)}, \quad (\text{III.19})$$

où ν la fréquence de la transition utilisée, t_{sp} le temps de désexcitation spontanée des atomes dans l'état excité et vaut $t_{sp} \approx 3 \cdot 10^{-4} s$ ([92] p173 ou [118]). $g(\nu)$ caractérise la forme de la raie (sa largeur homogène) et vaut ici approximativement l'inverse de la largeur en fréquence de la transition, soit $1/(3 \cdot 10^{12})$. Le temps d'amortissement de la cavité est noté T_{cav} (sans pompe). Dans le cas qui nous occupe, on prendra $T_{cav} \approx 2\mu s$, ce qui correspond à une microsphère réaliste. On trouve finalement:

⁵Dans le cas de dopages assez faibles, il pourrait être judicieux de mettre la pompe à résonance avec un mode de galerie afin d'accroître son efficacité, sous réserve que les déplacements thermiques induits restent petits.

$$\Delta n_t = (N_{4F_{3/2}} - n_{4I_{11/2}})_t = 1.10^2(\mu m)^{-3}, \quad (\text{III.20})$$

Ici, la désexcitation non-radiative du niveau inférieur $4I_{11/2}$ est si efficace, que l'on peut admettre que $N_{4I_{11/2}} \approx 0$, en régime stationnaire. Seulement 3.10^4 ions actifs dans le mode (de volume $300\mu m^3$) suffisent donc à compenser les pertes, à température ambiante.

Pour un système à quatre niveaux, la puissance de fluorescence critique P_s , qui correspond à la puissance minimale qu'il faut fournir au système pour maintenir la différence de population à la valeur N_t (c'est aussi la puissance émise au seuil par émission spontanée) s'écrit:

$$P_s = \Delta n_t \frac{h\nu V_{mode}}{t_2}. \quad (\text{III.21})$$

V_{mode} est le volume du mode dans lequel se produit l'émission, et t_2^{-1} est le taux de départ par ion actif du niveau supérieur. Ici $t_2 \approx 0.5\mu s$. On trouve $P_s \approx 2.10^{-11}W$.

Détermination du seuil de fonctionnement (pompe non-résonnante)

Pour évaluer la puissance P_{th}^{pump} de pompe correspondant au seuil de fonctionnement laser pour un dopage total N_{dop} supérieur à ΔN_t , il suffit d'écrire que le gain induit par le pompage égale les pertes. La puissance P_{abs} de pompe absorbée par les ions actifs vaut:

$$P_{abs}^{pump} = n_{dop} \sigma \frac{c}{N} I_p. \quad (\text{III.22})$$

σ désigne ici la section efficace des ions, que l'on peut relier au taux de pompage γ_p du niveau supérieur par $\gamma_p = n_{dop} \sigma c$. Ici $\sigma \approx 4.10^{-25}m^2$. I_p est l'intensité de la pompe dans le volume du mode. On trouve donc la relation suivante pour la puissance de pompe correspondant au seuil:

$$P_{th}^{pump} = \frac{1}{N_{dop} V_{mode}} \times \frac{S}{\sigma} \times \frac{\Delta n_t h\nu V_{mode}}{t_2}, \quad (\text{III.23})$$

où S désigne la section du mode.

Considérons des dopages comparables à ceux utilisés dans les lasers à fibres optiques de silice dopées au néodyme. Par exemple, dans l'expérience de Shimitzu [122] et plus récemment dans celles réalisées au CNET, le cœur de la fibre de silice monomode utilisée était dopé à une concentration de $150ppm$, par des ions de néodyme (cela représente environ 20 fois la concentration Δn_t trouvée plus haut). Pour de tels dopages, le seuil pourrait avoisiner la centaine de nanowatts, pour des résonateurs d'un diamètre de $80\mu m$.

Cas d'une pompe résonnante ou quasi-résonnante.

La détermination des puissances de seuil effectuées ici suppose implicitement que la lumière de pompe ne sert qu'une seule fois. Or, même pour des dopages de $150ppm$, la lumière de pompe est loin d'être totalement absorbée après une révolution dans la cavité (l'absorption à la longueur d'onde de la pompe est de l'ordre de $4dB/m$, ce qui correspond à distance caractéristique d'absorption de l'ordre du mètre à comparer au périmètre de la microsphère). L'effet de guidage faiblement résonnant de la pompe devrait permettre

un certain recyclage et l'on devrait observer expérimentalement des puissances de seuil sensiblement inférieures à celles données ici. Comme les profils d'absorption du verre dopé sont larges, on pourrait même mettre le laser de pompe à résonance avec un mode de galerie, ce qui devrait accroître considérablement l'efficacité du microlaser.

Nous avons considéré jusqu'ici qu'un mode de galerie unique était présent dans la zone de gain des ions. En réalité, il n'en est rien, car le profil de gain, qui présente pour le néodyme une largeur de l'ordre de 750GHz , s'étend pour une sphère de $\phi 50\mu\text{m}$, sur un peu plus d'une pseudo-période (environ 650GHz). Pour cette pseudo-période, les modes de galerie $\{l, m = l, n = 0\}$, $\{l, m = l - 1, n = 0\}$, $\{l, m = l - 2, n = 0\}$, $\{l, m = l, n = 1\}$ peuvent donner lieu à un effet laser. Toutefois, seuls les premiers modes $n < 5$ et $l - |m| < 5$ vont présenter un recouvrement significatif avec le laser de pompe. Les puissances seuils pour l'effet laser seront donc supérieures à celles indiquées ci-dessus et l'on devrait observer pour ces microsphères laser plusieurs dizaines de modes laser présents simultanément dans la lumière émise, sachant que les effets de compétitions entre modes dans les lasers à ions de terres rares sont très faibles[123]. Enfin, de tels microlasers devraient se distinguer par une très grande pureté spectrale, du fait de la surtension initiale déjà très grande, de la cavité optique qui donne lieu à l'effet laser. Des largeurs de raies inférieures au kilohertz sont peut être réalisables, ce qui suffirait à motiver une tentative de réalisation expérimentale!

III-2-3-5 Vers un microlaser à ion unique!

A partir des micro-lasers à modes de galerie du paragraphe précédent, on pourrait songer à modifier les paramètres du système de manière à opérer dans un mode de fonctionnement moins classique. Dans les microlasers du paragraphe précédent, la distribution aléatoire des champs microscopiques locaux, et le couplage des ions actifs aux phonons de grande énergie de la silice, entraîne une très grande dispersion des couplages avec la lumière du mode de galerie résonnant. Si au lieu d'opérer à l'ambiante, on refroidissait la matrice de silice à des températures cryogéniques, la diminution de l'énergie des phonons pourrait être considérable. En admettant une dépendance de l'élargissement homogène en $T^{1.8}$ [118], les raies des ions pourraient présenter des largeurs de seulement quelques mégahertz à 1K .

En ce qui concerne l'élargissement inhomogène, il n'y a pas de solution triviale pour réduire la largeur des raies. En revanche, chaque ion de dopant voit un champ donné, et subit donc un déplacement fixé. En choisissant des dopages suffisamment faibles pour qu'un seul ion de la matrice, dans le volume du mode galerie soit résonnant avec le champ optique (dans une bande de fréquence correspondant à la largeur du mode de galerie), le dopant pourrait être vu, à 1K , comme un système atomique de quelques mégahertz de largeur. Pour voir si de tels ordres de grandeur peuvent être atteints, calculons comme ci-dessus, la densité d'inversion de population critique dans ces conditions.

Pour un gain de 3.10^4 sur la largeur de la raie du néodyme correspondant au passage de 300K à 1K , on trouve effectivement que le nombre critique d'atomes peut être de l'ordre de l'unité. Si ce concept se révèle expérimentalement viable, de tels microlasers

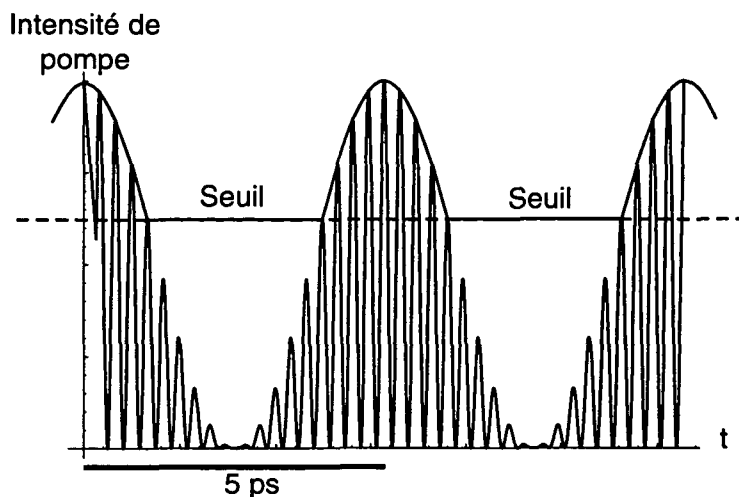


Figure III.16: Allure temporelle de l'intensité de pompe envoyée au micro-laser. Le trait pointillé indique le seuil du microlaser.

pourraient se révéler des systèmes "tout-solide" de choix pour la mise en évidence d'effets d'électrodynamique en cavité.

III-2-3-6 Fonctionnement "exotique".

La très petite taille des microsphères implique que le temps mis par un photon pour effectuer un tour de la cavité ("round-trip") est très court. Pour une microsphère de $\varnothing 300\mu m$, ce temps est approximativement de $5ps$. Si on éclaire une microsphère de cette taille, préalablement dopée avec des ions, par un faisceau pompe assez intense, on va observer une émission laser dans une multitude de modes (probablement des milliers), car la densité de mode croît plus vite que le carré de la taille du résonateur. Supposons maintenant que l'on pompe le microlaser par la superposition de deux faisceaux monomodes de même polarisation, "mode-matchés". Si la fréquence des deux lasers de pompes ν_{p1} , ν_{p2} est choisie de telle sorte que $(\nu_{p1} - \nu_{p2})^{-1}$ soit égal au temps de "round-trip", l'intensité de pompe en fonction du temps pourrait ressembler à la figure III.16.

Une telle configuration devrait permettre de mettre en évidence des effets d'oscillation laser particuliers. L'excitation impulsionnelle des ions, synchrone avec le temps de "round-trip", a tendance à favoriser un mode de fonctionnement impulsionnel du laser, qui au lieu d'émettre une radiation continue, génère un train d'impulsion avec un taux de répétition égal au temps de round-trip. Le laser est dit opérer en "mode-locking", car chaque impulsion est en fait constituée de la superposition d'un grand nombre de modes longitudinaux successifs. Le mode d'excitation pulsé les oblige à maintenir leurs phases relatives nulles. La largeur minimale des impulsions obtenues est approximativement l'inverse de la largeur du profil de gain du milieu amplificateur. Des impulsions de $0.3ps$ sont courants pour les lasers néodyme-verre. (Dans le cas des microsphères, ce mode de fonc-

tionnement devrait être favorisé par les mêmes non-linéarités que celles qui permettent la propagation d'ondes solitons dans les fibres de télécommunication[124]: ces effets de dispersion devraient beaucoup contribuer au "nivellement" des évolutions des phases des modes longitudinaux consécutifs.) Il faut souligner qu'il existe une limite supérieure à la fréquence de répétition des pulses, imposée par la durée de vie du niveau le plus haut, vidé par processus non-radiatif rapide qui peuple le niveau du haut de la transition laser. Si l'expérience met en évidence un tel mode de fonctionnement pour des microsphères dopées de quelques centaines de microns de diamètre, on disposerait là d'un générateur d'impulsions optiques très courtes qui pourrait servir de générateur de pulses optiques à très haute fréquence de répétition.

Conclusion Générale.

Nous avons présenté dans ce mémoire les premiers résultats expérimentaux et théoriques obtenus dans notre laboratoire, concernant les propriétés optiques de microsphères de silice.

Nous nous sommes efforcés, au début du premier chapitre, de dégager des idées physiques simples et intuitives, qui éclairent la compréhension des résonances optiques de grande surtension des microsphères: les modes de galerie. Résumons en un mot les conclusions de cette première approche intuitive.

Les résonances de galerie correspondent à une situation pour laquelle la lumière se propage juste sous la surface de la sphère diélectrique, quasi tangentiellement à celle-ci. Le saut d'indice optique à la surface transforme la propagation rectiligne des ondes lumineuses dans un diélectrique homogène en de nouvelles trajectoires infléchies, qui peuvent être interprétées, à la limite de cette modélisation géométrique, comme une sorte de réflexion totale continue. Il en résulte un effet de guidage par l'indice le long d'un grand cercle de la microsphère, ce que nous avons appelé tout au long de ce mémoire la zone "équatoriale" du résonateur.

Après cette étude, nous avons présenté dans le cadre de l'électromagnétisme, un traitement plus quantitatif de ces effets. Les équations de propagations des ondes électromagnétiques, complétées par les conditions aux limites appropriées permettent l'écriture de solutions formelles au problème de la diffusion d'un champ optique source quelconque par une sphère diélectrique. Ces calculs ont également confirmés l'existence des résonances extrêmement fines prédites par les images géométriques précédentes, uniquement limitées—pour un diélectrique parfaitement transparent et homogène—par des effets de diffraction décroissants rapidement avec les paramètres de taille du système ka et Nka .

Les relations de continuité du champ électromagnétique à la surface du diélectrique ont également montré qu'à résonance, une partie quasi non propageante du champ optique se trouve hors du résonateur, sur une distance d'une fraction de longueur d'onde de l'équateur de la sphère. L'existence de cet "anneau" évanescent nous a permis de choisir une distribution de champ source particulière qui autorise un couplage particulièrement efficace

et sélectif aux modes résonnants. Nous nous sommes plus particulièrement intéressés au couplage par une onde évanescente obtenue par un prisme à réflexion totale.

La première partie de ce mémoire comporte également un certain nombre de prédictions, tant numériques qu'analytiques, de valeurs physiques importantes pour l'étude des résonances de galerie: la conception rationnelle de l'expérience présentée au second chapitre était subordonnée à la détermination théorique des positions des modes, largeurs, volume des modes, carte du champ électromagnétique...

La partie expérimentale de ce travail poursuivait un double but. Il nous a fallu tout d'abord mettre au point des méthodes pratiques de fabrication et de micromanipulation des microsphères. Bien que les grands principes à observer pour nettoyer, fondre et façonner le verre de silice soient connus, nous avons dû essayer un très grand nombre de techniques différentes avant de disposer d'une procédure qui nous donne satisfaction. Dans l'état actuel de l'expérience, la presque totalité des opérations qui conduisent à un micro-résonateur fini s'effectuent sans contact et sous vide. La nécessité de disposer de conditions aussi drastiques a bien sûr conditionné bon nombre des choix technologiques retenus pour la fabrication du système mécanique de micromanipulation des sphères.

Le dispositif expérimental construit a permis de confirmer la plupart des effets que nous avons rencontrés lors de l'étude théorique. Dès les premières tentatives, la méthode du couplage par onde évanescente s'est imposée, et l'on peut, si les éléments optiques sont convenablement ajustés, coupler dans un mode de galerie donné quelque dix pour cent de la puissance d'un faisceau laser sonde. Nous avons également vérifié qu'en variant la distance de l'équateur du résonateur au prisme de couplage, on pouvait régler continûment l'amplitude de ce couplage.

Au cours de ces mesures, nous avons enregistré à de nombreuses reprises des résonances de galerie d'une centaine de kilohertz de largeur, de facteur de qualité intrinsèque de l'ordre de plusieurs milliards, pour des sphères d'un diamètre d'environ cent microns. Cela correspond à des finesses de l'ordre de $10^6 - 10^7$, ce qui est presque un ordre de grandeur plus grand que les valeurs mesurées pour les meilleurs miroirs multidiélectriques. Les résonateurs de silice permettent donc de réaliser des cavités de finesse inégalée, d'une extrême compacité.

Dans la troisième partie de ce travail, nous avons cherché à mettre à profit les caractères remarquables des modes de galerie pour proposer quelques expériences qu'il serait très difficile de réaliser avec des cavités optiques conventionnelles.

Le début du troisième chapitre est consacré à l'analyse d'une proposition d'expérience associant une microsphère de silice et un jet collimaté d'atomes dans l'état fondamental, frôlant la surface de la cavité. Le but de cette expérience est d'utiliser l'action du gradient du champ optique résonnant d'un mode de galerie (et de la surface diélectrique) sur les trajectoires des atomes pour obtenir des informations sur la lumière piégée dans le microrésonateur. L'analyse classique et quantique qui est présentée dans ce chapitre, montre que si le désaccord de la transition atomique avec le mode de galerie que l'on souhaite étudier est assez grand, les forces dipolaires peuvent défléchir les atomes durant

la traversée du mode (en les repoussant pour un désaccord vers le bleu). Cet effet, est en partie contrebalancé par la force attractive de Van der Waals, caractérisée par une portée légèrement plus courte. Enfin, pour des désaccords assez grands, les atomes ont une grande probabilité de demeurer dans l'état fondamental au cours de l'interaction, ce qui garantit que les atomes sonde ne changent pas le nombre de photons du mode. Qualitativement, ces effets combinés dévient en moyenne les atomes d'un angle approximativement proportionnel à l'intensité lumineuse contenue dans le mode de galerie. Ce système réalise donc la mesure du champ optique sans modifier l'intensité de ce champ: cela est le principe même d'une mesure non-destructive.

Les ordres de grandeurs présentés dans cette partie révèlent cependant l'extrême difficulté d'une telle expérience, principalement lié à la petitesse des déflexions obtenues, si on limite la probabilité d'absorption des photons du mode. En revanche, une expérience de type Stern-Gerlach qui pourrait mesurer directement la distribution (en nombre de photons) d'un très faible champ cohérent de quelques photons, semble plus réalisable.

Enfin, la fin de ce mémoire suggère un certain nombre d'autres expériences d'optique utilisant des microsphères, peut-être plus proche du laboratoire que la précédente. Certaines d'entre-elles, comme la stabilisation d'une diode laser sur un mode de galerie, ont surtout une portée technologique. Au contraire, la fabrication de microsphères dopées avec des terres rares pour réaliser des micro-lasers ouvre des perspectives fascinantes. Ce projet, qui est déjà en cours dans notre laboratoire, constituera probablement le premier prolongement de ce travail.

Annexe A

Quelques fonctions spéciales.

A-1 Polynômes et fonctions de Legendre P_l et P_l^m .

- Définition (Formule de Rodrigues)

$$P_l(\cos \theta) = \frac{(-1)^l}{2^l l!} \left[\frac{d}{d(\cos \theta)} \right]^l (\sin \theta)^{2l} \quad (\text{A.1})$$

- Fermeture

Ils forment une base complète des fonctions sur l'intervalle : $x \in [-1, 1]$.

$$\int_{-1}^1 dx P_l(x) P_{l'}(x) = \frac{\delta_{ll'}}{l + \frac{1}{2}} \quad (\text{A.2})$$

$$\sum_l \left(l + \frac{1}{2} \right) P_l(x) P_l(x') = \delta(x - x') \quad (\text{A.3})$$

- Fonctions modifiées de Legendre de la première espèce. On définit ces fonctions à partir des polynômes de Legendre, si $0 \leq m \leq l$

$$P_l^m(\cos \theta) = (\sin \theta)^m \left[\frac{d}{d(\cos \theta)} \right]^m P_l(\cos \theta) \quad (\text{A.4})$$

Ces fonctions, de parité $l + m$, sont solutions de l'équation de Legendre

$$\frac{d}{dx} \left[(1 - x^2) \frac{dP_l^m}{dx} \right] + \left[l(l + 1) - \frac{m^2}{1 - x^2} \right] P_l^m = 0 \quad (\text{A.5})$$

A-2 Fonctions de Ricatti.

A-2-1 Fonctions de Ricatti-Bessel u_l .

Les fonctions de Ricatti-Bessel u_l peuvent se définir à partir des fonctions de Bessel J_λ , pour des indices demi-entiers $\lambda = l + \frac{1}{2}$. On a :

$$u_l(z) \equiv \sqrt{\frac{1}{2}\pi z} J_{l+\frac{1}{2}}(z) \quad (\text{A.6})$$

(On les introduit parfois à partir des fonctions de Bessel modifiées j_l , par la relation $u_l(z) = z j_l(z)$.)

A-2-2 Fonctions de Ricatti-Neumann v_l .

Celles-ci se définissent à partir de fonctions de Neumann N_l , par la même relation

$$v_l(z) \equiv \sqrt{\frac{1}{2}\pi z} N_{l+\frac{1}{2}}(z) \quad (\text{A.7})$$

Les fonctions u et v vérifient toutes deux les relations de récurrence suivantes :

$$f_{l-1}(z) = f'_l(z) + \frac{l}{z} f_l(z) \quad (\text{A.8})$$

$$f_{l+1}(z) = -f'_l(z) + \frac{l+1}{z} f_l(z) \quad (\text{A.9})$$

$$(\text{A.10})$$

A-2-3 Fonctions de Hankel

Les fonctions de Hankel $H_\nu^{(1)}$ et $H_\nu^{(2)}$ peuvent se définir à partir des fonctions de Bessel J_ν . On a, pour tout z complexe:

$$H_\nu^{(1)}(z) = i \csc(\pi\nu) \{ \exp(-i\pi\nu) J_{\nu}(z) - J_{-\nu}(z) \} \quad (\text{A.11})$$

$$H_\nu^{(2)}(z) = i \csc(\pi\nu) \{ J_{-\nu}(z) - \exp(i\pi\nu) J_{\nu}(z) \}. \quad (\text{A.12})$$

A-3 Fonctions entrantes et sortantes.

Ces fonctions, que nous noterons, $w_l^{(+)}$ et $w_l^{(-)}$, représentent la décomposition en ondes entrantes et sortantes, des champs du problème de diffusion de symétrie sphérique. Elles peuvent s'écrire en fonction des fonctions de Hankel (A.11), sous la forme :

$$w_l^{(+)}(z) = i \exp[i\pi l] \sqrt{\frac{1}{2}\pi z} H_{l+\frac{1}{2}}^{(1)}(z) \quad (\text{A.13})$$

$$w_l^{(-)}(z) = -i \sqrt{\frac{1}{2}\pi z} H_{l+\frac{1}{2}}^{(2)}(z) \quad (\text{A.14})$$

A-4 Quelques développements asymptotiques utiles.

A-4-1 Développements asymptotiques de J_λ et Y_λ .

Abramowitz donne les développements suivants, au point $nx = \lambda + t\lambda^{\frac{1}{3}}$, en puissance de $\lambda^{(-1/3)}$:

$$J_\lambda(nx) \sim \frac{2^{\frac{1}{3}}}{\lambda^{\frac{1}{3}}} Ai(-2^{\frac{1}{3}}t) \left[1 + \sum_{j=1}^{\infty} f_j(t) \lambda^{2j/3} \right] + \frac{2^{\frac{1}{3}}}{\lambda} Ai'(-2^{\frac{1}{3}}t) \sum_{j=0}^{\infty} g_j(t) \lambda^{2j/3} \lambda^{2j/3}, \quad (\text{A.15})$$

$$Y_\lambda(nx) \sim \frac{\exp[\lambda(b - \tanh b)]}{(\pi \lambda \tanh(b/2))^{\frac{1}{2}}} \left[1 + \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j u_j(\coth b) \lambda^{(-j)} \right] \quad (\text{A.16})$$

où f_j , g_j et u_j sont des polynômes (cf Abramowitz page 365), et b est tel que $\cosh b = \lambda/x$.

A-4-2 Développement de Debye de $\ln' H_\lambda$ et $\ln' J_\lambda$.

Introduisons les notations suivantes, pour $\beta < \lambda < \alpha$ (ce qui est toujours vrai dans le cas où ces nombres ont le sens physique défini dans ce mémoire):

$$\delta(\lambda, \beta) = (\lambda^2 - \beta^2)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A.17})$$

$$\zeta(\lambda, \alpha) = (\alpha^2 - \lambda^2)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A.18})$$

$$\psi(\lambda, \beta) = \delta(\lambda, \beta) - \lambda \cosh^{-1}(\lambda/\beta) = -\lambda \int_{\beta/\lambda}^1 dt \sqrt{t^{-2} - 1} \quad (\text{A.19})$$

$$\phi(\lambda, \alpha) = \zeta(\lambda, \alpha) - \lambda \cos^{-1}(\lambda/\alpha) = \lambda \int_1^{\alpha/\lambda} dt \sqrt{1 - t^{-2}}. \quad (\text{A.20})$$

Alors on peut écrire les développements suivants, dus à Debye:

$$\ln' H_\lambda^{(1)}(\beta) \sim -\delta/\beta \left\{ 1 - \frac{\beta^2}{2\delta^3} - i \exp[2\psi(\lambda, \beta)] \left[1 + \frac{1}{4\delta} - \frac{5\lambda^2}{12\delta^3} \right] \right\}$$

$$\ln' J_\lambda(\alpha) \sim -\frac{\zeta}{\alpha} \left\{ \tan \left[\phi(\lambda, \alpha) - \frac{\pi}{4} \right] + \frac{3}{8\zeta} + \frac{7\lambda^2}{24\zeta^3} - \tan^2 \left[\phi(\lambda, \alpha) - \frac{\pi}{4} \right] \left[\frac{1}{8\zeta} + \frac{5\lambda^2}{24\zeta^3} \right] \right\}$$

A-4-3 Développements Uniformes.

Donnons simplement ici les développements de Olver de J , J' , H et H' avec les mêmes notations que le paragraphe précédent. Pour plus de précisions, consulter [58] par exemple.

$$J_\lambda(\alpha) \sim \left[\frac{4y}{\zeta^2} \right]^{\frac{1}{4}} \left[Ai(-y) + \frac{b}{\sqrt{y}} Ai'(-y) \right] \quad (\text{A.21})$$

$$J'_\lambda(\alpha) \sim -2/\alpha \left[\frac{4y}{\zeta^2} \right]^{-\frac{1}{4}} [Ai'(-y) + c\sqrt{y} Ai(-y)] \quad (\text{A.22})$$

$$H_{\lambda}^{(1)}(\alpha) \sim \left[\frac{4x}{\delta^2} \right]^{\frac{1}{4}} [\mathcal{A}(x) - i\mathcal{B}(x)] \quad (\text{A.23})$$

$$H_{\lambda}^{\prime(1)}(\alpha) \sim -2/\beta \left[\frac{4x}{\delta^2} \right]^{-\frac{1}{4}} [\mathcal{A}'(x) - i\mathcal{B}'(x)], \quad (\text{A.24})$$

avec les définitions suivantes (x, y, b, c, g et h sont elles-mêmes des fonctions compliquées de x):

$$x = (-3/2 \psi(\lambda, \alpha))^{2/3} \quad (\text{A.25})$$

$$y = (3/2 \phi(\lambda, \alpha))^{2/3} \quad (\text{A.26})$$

$$b = (1/8) \left(\frac{1}{\zeta} + \frac{5\lambda^2}{3\zeta^3} - \frac{5}{9\phi} \right) \quad (\text{A.27})$$

$$c = (1/8) \left(\frac{3}{\zeta} + \frac{7\lambda^2}{3\zeta^3} - \frac{7}{9\phi} \right) \quad (\text{A.28})$$

$$g = (1/8) \left(-\frac{1}{\delta} + \frac{5\lambda^2}{3\delta^3} + \frac{5}{9\psi} \right) \quad (\text{A.29})$$

$$h = (1/8) \left(\frac{3}{\delta} - \frac{7\lambda^2}{3\delta^3} - \frac{7}{9\psi} \right), \quad (\text{A.30})$$

et où les fonction notées \mathcal{A} et \mathcal{B} dérivent des fonctions d'Airy:

$$\mathcal{A}(x) = Ai(x) + p x^{-\frac{1}{2}} Ai'(x) \quad (\text{A.31})$$

$$\mathcal{B}(x) = Bi(x) + p x^{-\frac{1}{2}} Bi'(x) \quad (\text{A.32})$$

$$\mathcal{A}'(x) = Ai'(x) + q x^{\frac{1}{2}} Ai(x) \quad (\text{A.33})$$

$$\mathcal{B}'(x) = Bi'(x) + q x^{\frac{1}{2}} Bi(x), \quad (\text{A.34})$$

les fonctions p et q étant définies par:

$$p = \frac{1}{8} \left\{ -\frac{1}{\delta} + \frac{5\lambda^2}{3\delta^3 + \frac{5}{9\psi}} \right\} \quad (\text{A.35})$$

$$q = \frac{1}{8} \left\{ \frac{3}{\delta} - \frac{7\lambda^2}{3\delta^3 - \frac{7}{9\psi}} \right\}. \quad (\text{A.36})$$

A-4-4 Application à la méthode d'approximation uniforme.

Voyons maintenant le principe d'une méthode d'approximation de la position des résonances, fondée sur les développements uniformes du paragraphe précédent. Cette méthode prolonge les résultats donnés dans le corps de ce mémoire page 48.

Partons à nouveau des équations implicites (I.32), page 36, et remplaçons les fonctions spéciales par leurs développements uniformes qui viennent d'être obtenus. On trouve une

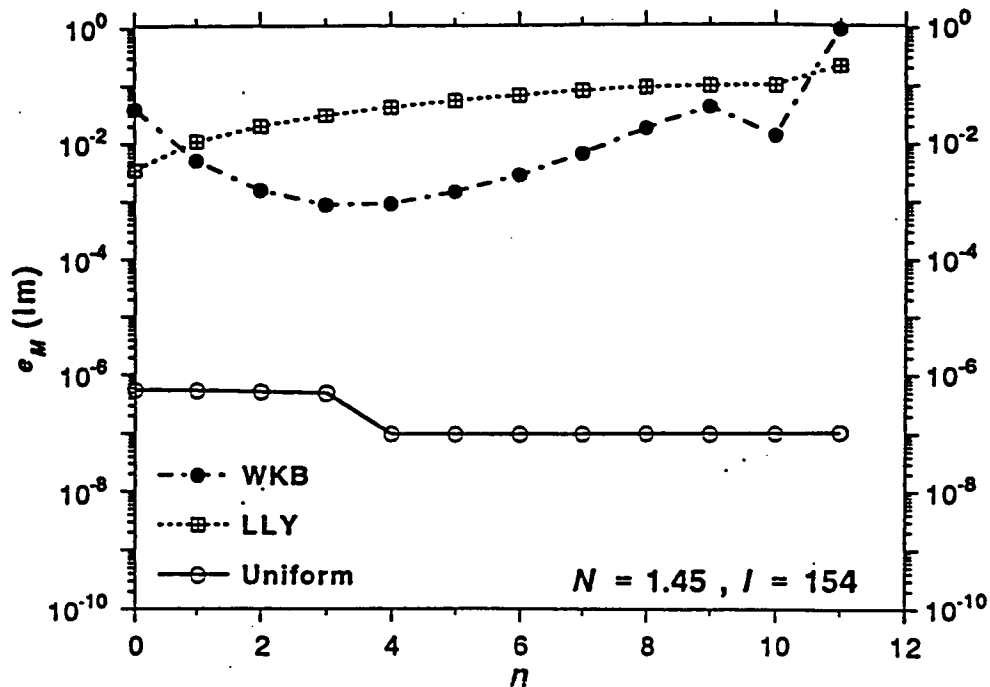


Figure A.1: Comparaison de la précision fournie par trois méthodes d'approximation de la position des résonances de galerie dans des sphères de silice. Pour les modes radiaux successifs $\{l = 154, n = 0\}, \{l = 154, n = 1\} \dots$, la méthode uniforme se révèle bien plus précise et donne toujours des prédictions relatives meilleures que le ppm.

nouvelle équation implicite à valeur complexe:

$$\frac{\delta}{\sqrt{x}} \left(\frac{AA' + BB'}{A^2 + B^2} \right) (x) - \frac{1}{2}(1 - e_j) = e_j \zeta \left(\frac{Im(y) + c}{1 + bIm(y)} \right). \quad (\text{A.37})$$

e_j vaut respectivement 1 et $1/N$ pour un mode TE et un mode TM. Les expressions des fonctions $\psi(\lambda, \alpha)$ (resp.) $\phi(\lambda, \alpha)$, qui ont ici la signification physique d'intégrales de phase radiale du vecteur d'onde effectif k_{eff} sur les régions interdites (resp.) permises du potentiel, sont données explicitement par la formule A.17, et ζ et $\delta \dots$ ont été définis plus haut. Les fonction notées \mathcal{A} et \mathcal{B} , qui dérivent des fonctions d'Airy Ai et Bi sont données par les relations A.31.

Pour les résonances fines, la partie imaginaire du paramètre β , dont toutes les grandeurs impliquées ci-dessus dérivent, est extrêmement petite. Aussi, on peut résoudre A.37 d'abord sur \mathbf{R} , puis utiliser la racine réelle comme point de départ de l'algorithme de recherche. Nous avons programmé cette méthode, qui donne effectivement de très bons résultats. La figure suivante, d'après [57], donne une comparaison explicite des précisions obtenues pour diverse méthodes: les méthodes de type WKB, LLY qui désignent les formules I.42 données plus haut et enfin les approximations uniformes, dans le cas d'une sphère de silice.

Les prédictions fournies par les trois méthodes sont comparées pour les dix premiers modes radiaux, associés à $l = 154$. (La valeur exacte est obtenue par résolution numérique

de l'équation implicite exacte qui définit la position des résonances.) On constate par exemple que la précision des méthodes LLY, inférieure au pourcent pour le premier mode radial, se dégrade progressivement lorsque l'on considère les modes radiaux successifs. La méthode d'approximation uniforme se révèle donc toujours supérieure pour le pointé des résonances de galerie, tout au moins pour les paramètres de taille qui nous préoccupent ici.

Annexe B

Solution électromagnétique exacte.

Nous allons nous intéresser dans cette annexe aux effets de diffusion d'un champ incident donné sur la sphère diélectrique, en résolvant les équations de l'électromagnétisme dans le cas d'une sphère diélectrique d'indice réel uniforme.

B-1 Difficultés rencontrées.

Le principe retenu au premier chapitre repose sur le calcul direct des effets de diffusion d'un champ incident quelconque par la sphère diélectrique.

- Ce problème d'électromagnétisme est particulièrement difficile à résoudre exactement, car comme on l'a vu :
 1. Les conditions aux limites, bien qu'elles présentent une symétrie sphérique, sont de type interface diélectrique-vide, et donc il faut calculer la valeur des champs en tout point de l'espace et non simplement dans le résonateur.
 2. Le saut brutal de l'indice en $r = a$, crée une singularité difficilement compatible avec les méthodes d'approximation (WKB) qui supposent une variation lente de la phase à l'échelle de la longueur d'onde. (Par exemple, la position absolue des résonances fines ne peut être prédite par des arguments de type phase stationnaire, sur un tour.)
- La courbure du système étant essentielle, on ne peut pas employer a priori d'approximation de type paraxiale.

Il nous faut donc résoudre, dans le cas vectoriel, des expressions similaires à l'équation d'Helmoltz, déjà rencontrée page 25. Les champs doivent vérifier les équations:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = k^2 N^2(r) \mathbf{E} \quad (\text{B.1})$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = k^2 N^2(r) \mathbf{B} \quad (\text{B.2})$$

Toutefois, comme le problème des modes de microsphères possède une symétrie sphérique évidente, il serait judicieux d'introduire une base complète de l'espace de fonctions qui seraient automatiquement solution des équations locales des champs.

Nous allons donc tout d'abord rappeler brièvement dans cette annexe, une base de fonctions scalaires, familière aux physiciens atomistes : les fonctions sphériques Y_l^m . Ensuite, nous construirons des fonctions vectorielles, qui nous permettront de décrire des quantités physiques vectorielles, comme les composantes électriques et magnétiques du champ. Enfin, nous donnerons quelques propriétés (fermeture, symétries) de ces fonctions et nous décomposerons des ondes planes sur la base formée par ces fonctions. Nous allons maintenant commencer par écrire, en le décomposant sur une base appropriée, le champ diffusé par la sphère. Nous dériverons d'abord une série qui fut historiquement la première solution au problème de diffusion sphérique par un diélectrique de symétrie sphérique, puis nous appliquerons des transformations à cette série, dans le but de lever des difficultés de convergence.

B-2 Construction d'une base adaptée.

Rappelons ici les expressions des fonctions (angulaires) constituant une telle base dans le cas scalaire.

B-2-1 Harmoniques sphériques Y_l^m scalaires.

Considérons les harmoniques sphériques, d'expression

$$Y_l^m(\hat{\mathbf{r}}) = (-1)^m i^l \left[\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \right]^{\frac{1}{2}} \exp[im\phi] P_l^m(\cos\theta) \quad (\text{B.3})$$

où θ et ϕ sont les angles d'Euler du vecteur unitaire $\hat{\mathbf{r}}$ et P_m^l les polynômes de Legendre modifiés (voir annexe A). (Dans toute la suite $\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{u}/\|\mathbf{u}\|$). Ils constituent une base complète au sens où :

$$\int d\Omega Y_l^m(\hat{\mathbf{r}}) Y_{l'}^{m'}(\hat{\mathbf{r}}) = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \quad (\text{B.4})$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_l^m(\hat{\mathbf{r}}) Y_l^m(\hat{\mathbf{r}}') = \delta(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{r}}'). \quad (\text{B.5})$$

Nous savons par référence à la mécanique quantique que ces fonctions sont vecteurs propres des opérateurs \mathbf{L}^2 et L_z ¹, et on a les relations habituelles :

$$\mathbf{L}^2 Y_l^m = \{\mathbf{r} \times (-i\nabla)\}^2 Y_l^m = l(l+1) Y_l^m \quad (\text{B.6})$$

$$L_z Y_l^m = \{[\mathbf{r} \times (-i\nabla)] \cdot \hat{\mathbf{z}}\} Y_l^m = m Y_l^m \quad (\text{B.7})$$

¹ \mathbf{L}^2 et L_z forment un ensemble complet d'observables qui commutent, les Y_l^m constituent donc une base complète.

B-2-2 Fonction de $\hat{\mathbf{r}}_1$ et $\hat{\mathbf{r}}_2$ invariante par rotation.

Il est facile, en utilisant cette base d'exprimer par exemple, toute fonction scalaire invariante par rotation d'espace. En effet, on peut montrer que l'on a l'identité suivante :

$$4\pi \sum_{m=-l}^l Y_l^m(\hat{\mathbf{r}}_1) Y_l^{m*}(\hat{\mathbf{r}}_2) = (2l+1) P_l(\hat{\mathbf{r}}_1 \cdot \hat{\mathbf{r}}_2) \quad (\text{B.8})$$

Comme le démontre la formule (A.2), les polynomes de Legendre constituent une base des fonctions sur $[-1, 1]$; donc toute fonction invariante par rotation, se décompose sous la forme :

$$f(\hat{\mathbf{r}}_1, \hat{\mathbf{r}}_2) = \tilde{f}(\hat{\mathbf{r}}_1 \cdot \hat{\mathbf{r}}_2) = \sum_{l,m} c_l Y_l^m(\hat{\mathbf{r}}_1) Y_l^{m*}(\hat{\mathbf{r}}_2) \quad (\text{B.9})$$

B-2-3 Construction des harmoniques sphériques vectoriels.

La décomposition, sur une base propre, de fonctions vectorielles requiert la définition d'une base d'harmoniques sphériques vectoriels. Dans ce cas vectoriel, par analogie avec la mécanique quantique, il faudra ajouter aux opérateurs \mathbf{L}^2 et L_z rencontrés ci-dessus (B.6), un opérateur de "spin" \mathbf{S} , défini par ses composantes $\mathbf{S}_{\{x,y,z\}}(\mathbf{f}) = i\hat{\mathbf{e}}_{\{x,y,z\}} \times \mathbf{f}$. Les trois vecteurs libres χ_μ :

$$\chi_1 = (\hat{\mathbf{e}}_y - i\hat{\mathbf{e}}_x)/\sqrt{2} \quad , \quad \chi_0 = i\hat{\mathbf{e}}_z \quad \text{et} \quad \chi_{-1} = (\hat{\mathbf{e}}_y + i\hat{\mathbf{e}}_x)/\sqrt{2}$$

sont vecteurs propres de \mathbf{S}^2 et S_z , avec des valeurs propres respectives 2 et μ . Dès lors, il est naturel de construire les fonctions vectorielles $\mathbf{Y}_{lm\mu}(\hat{\mathbf{r}}) = Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}})\chi_\mu$, les Y_{lm} étant calculés en (B.3). Ces nouvelles fonctions vectorielles sont vecteurs propres des opérateurs de moment cinétique :

$$L_z \mathbf{Y}_{lm\mu} = m \mathbf{Y}_{lm\mu} \quad , \quad S_z \mathbf{Y}_{lm\mu} = \mu \mathbf{Y}_{lm\mu} \quad \text{et} \quad \mathbf{L}^2 \mathbf{Y}_{lm\mu} = l(l+1) \mathbf{Y}_{lm\mu}$$

On construira les états propres des opérateurs moment cinétique angulaire total $\mathbf{L} + \mathbf{S}$, par combinaison linéaire des $\mathbf{Y}_{lm\mu}$, (composition d'un moment $\{1\}$ et $\{l\}$), les coefficients étant les Clebsch-Gordan² $C(l1J, m\mu M)$, ce qui s'écrit, si $J = l-1, l, l+1$

$$\mathbf{Y}_{Jl}^M(\hat{\mathbf{r}}) = \sum_{m\mu} C(l1J, m\mu M) \mathbf{Y}_{lm\mu} \quad (\text{B.10})$$

$$= \sum_{\mu} C(l1J, \{M-\mu\}\mu M) \mathbf{Y}_{l\{M-\mu\}\mu} \quad (\text{B.11})$$

Ces nouveaux états vérifient donc :

$$(L_z + S_z) \mathbf{Y}_{Jl}^M = M \mathbf{Y}_{Jl}^M \quad (\text{B.12})$$

$$(\mathbf{L} + \mathbf{S})^2 \mathbf{Y}_{Jl}^M = J(J+1) \mathbf{Y}_{Jl}^M \quad (\text{B.13})$$

$$\mathbf{L}^2 \mathbf{Y}_{Jl}^M = l(l+1) \mathbf{Y}_{Jl}^M \quad (\text{B.14})$$

²parfois notés $\langle l, 1; m, \mu | J, M \rangle$

Comme $(\mathbf{L} + \mathbf{S})^2, \mathbf{S}^2, \mathbf{L}^2, L_z + S_z$ commutent entre eux, les fonctions vectorielles \mathbf{Y}_{Jl}^M forment une base complète, qui, par le choix des coefficients C , est orthonormale :

$$\int d\Omega \mathbf{Y}_{Jl}^{M*}(\hat{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{Y}_{J'l'}^{M'}(\hat{\mathbf{r}}) = \delta_{JJ'} \delta_{MM'} \delta_{ll'} \quad (\text{B.15})$$

$$\sum_{JlM} \mathbf{Y}_{Jl}^M(\hat{\mathbf{r}}) \otimes \mathbf{Y}_{Jl}^{M*}(\hat{\mathbf{r}}) = \mathbb{1} \delta(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{r}}') \quad (\text{B.16})$$

B-2-4 Décomposition en composantes transverses et longitudinales.

À partir de ces fonctions, il est commode de former une nouvelle base, combinaison en J des \mathbf{Y}_{Jl}^M , telle que les composantes soient purement longitudinales ou transverses. Cela donne :

$$\mathbf{Y}_{JM}^{(e)} = \left(\frac{J+1}{2J+1} \right)^{\frac{1}{2}} \mathbf{Y}_{J\{J-1\}}^M - \left(\frac{J}{2J+1} \right)^{\frac{1}{2}} \mathbf{Y}_{J\{J+1\}}^M \quad (\text{B.17})$$

$$\mathbf{Y}_{JM}^{(m)} = \mathbf{Y}_{JJ}^M \quad (\text{B.18})$$

$$\mathbf{Y}_{JM}^{\parallel} = \left(\frac{J}{2J+1} \right)^{\frac{1}{2}} \mathbf{Y}_{J\{J-1\}}^M + \left(\frac{J+1}{2J+1} \right)^{\frac{1}{2}} \mathbf{Y}_{J\{J+1\}}^M \quad (\text{B.19})$$

La matrice de passage vers ces nouveaux vecteurs étant unitaire, ils forment également une base complète orthonormale.

$$\int d\Omega \mathbf{Y}_{JM}^{(\mu)*}(\hat{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{Y}_{J'M'}^{(\mu')}(\hat{\mathbf{r}}) = \delta_{JJ'} \delta_{MM'} \delta_{\mu\mu'} \quad (\text{B.20})$$

$$\sum_{J\mu M} \mathbf{Y}_{JM}^{(\mu)}(\hat{\mathbf{r}}) \otimes \mathbf{Y}_{JM}^{(\mu)*}(\hat{\mathbf{r}}) = \mathbb{1} \delta(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{r}}') \quad (\text{B.21})$$

On peut se convaincre que ces fonctions vérifient en outre les relations respectives suivantes :

$$\mathbf{Y}_{JM}^{(e)}(\hat{\mathbf{r}}) = [J(J+1)]^{-\frac{1}{2}} r \nabla Y_J^M(\hat{\mathbf{r}}) \quad (\text{B.22})$$

$$\mathbf{Y}_{JM}^{(m)}(\hat{\mathbf{r}}) = \hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{Y}_{JM}^{(e)}(\hat{\mathbf{r}}) = r \nabla \times \mathbf{Y}_{JM}^{(e)}(\hat{\mathbf{r}}) \quad (\text{B.23})$$

$$\mathbf{Y}_{JM}^{\parallel}(\hat{\mathbf{r}}) = \hat{\mathbf{r}} Y_J^M(\hat{\mathbf{r}}) = -[J(J+1)]^{-\frac{1}{2}} r^2 \nabla \times \{ \nabla \times \mathbf{Y}_{JM}^{(e)}(\hat{\mathbf{r}}) \} \quad (\text{B.24})$$

B-2-4-1 Projections suivant θ et ϕ .

Donnons les composantes des \mathbf{Y}_{JM} suivant $\hat{\mathbf{e}}_\theta$ et $\hat{\mathbf{e}}_\phi$, au moyen des relations (B.22) (B.24).

$$\left[\mathbf{Y}_{JM}^{(e)}(\hat{\mathbf{r}}) \right]_{\hat{\mathbf{e}}_\theta} = C(J, M) \exp[iM\phi] \frac{d}{d\theta} P_J^M(\cos\theta) \quad (\text{B.25})$$

$$\left[\mathbf{Y}_{JM}^{(e)}(\hat{\mathbf{r}}) \right]_{\hat{\mathbf{e}}_\phi} = iC(J, M) \exp[iM\phi] \frac{M}{\sin\theta} P_J^M(\cos\theta) \quad (\text{B.26})$$

$$\left[\mathbf{Y}_{JM}^{(m)}(\hat{\mathbf{r}}) \right]_{\hat{\mathbf{e}}_\theta} = -iC(J, M) \exp[iM\phi] \frac{M}{\sin\theta} P_J^M(\cos\theta) \quad (\text{B.27})$$

$$\left[\mathbf{Y}_{JM}^{(m)}(\hat{\mathbf{r}}) \right]_{\hat{\mathbf{e}}_\phi} = C(J, M) \exp[iM\phi] \frac{d}{d\theta} P_J^M(\cos\theta) \quad (\text{B.28})$$

avec $C(J, M) = (-1)^M i^J \left[\frac{2J+1}{4\pi J(J+1)} \frac{(J-M)!}{(J+M)!} \right]^{\frac{1}{2}}$

B-2-5 Fonctions tensorielles invariantes par rotation.

Les relations (B-2-3) définissant une base de l'espace, la formule (B.8) de la page (183) admet un équivalent tensoriel, sous la forme :

$$(2l+1)P_l(\hat{\mathbf{r}}_1 \cdot \hat{\mathbf{r}}_2) \mathbb{1} = 4\pi \sum_{JM} \mathbf{Y}_{Jl}^M(\hat{\mathbf{r}}_1) \otimes \mathbf{Y}_{Jl}^{M*}(\hat{\mathbf{r}}_2) \quad (\text{B.29})$$

Il en découle, que toute fonction tensorielle \mathbb{T} invariante par rotation se décomposera sous la forme :

$$\mathbb{T}(\hat{\mathbf{r}}_1, \hat{\mathbf{r}}_2) = \sum_{Jl} c_{Jl}^J \sum_M \{ \mathbf{Y}_{Jl}^M(\hat{\mathbf{r}}_1) \otimes \mathbf{Y}_{Jl}^{M*}(\hat{\mathbf{r}}_2) \} \quad (\text{B.30})$$

B-2-6 Décomposition multipolaire d'un champ vectoriel $\mathbf{X}(\mathbf{r})$.

Les \mathbf{Y} étant une base complète orthonormale, tout champ vectoriel $\mathbf{X}(\mathbf{r})$, se décomposera de manière unique sous la forme :

$$\mathbf{X}(\mathbf{r}) = \sum_{JM} \sum_{\lambda'} \frac{\mathcal{X}_{\lambda\lambda'}^J \mathbf{Y}_{JM}^{(\lambda')}(\mathbf{r})}{N(r)r} \quad (\text{B.31})$$

Nous utilisons cette décomposition dans la théorie de Mie.

B-2-7 Ondes planes

Nous allons maintenant décomposer explicitement une onde plane, sur les bases d'harmoniques sphériques, que nous venons de construire. Une décomposition est utilisée (dans sa version vectorielle) pour le calcul du couplage (I-7), page 51.

B-2-7-1 Cas scalaire

La décomposition d'une onde plane scalaire sur la base des fonctions Y_l^m , est un résultat bien connu de physique mathématique :

$$\exp[i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}] = 4\pi \sum_{lm} i^l j_l(kr) Y_l^m(\hat{\mathbf{r}}) Y_l^{m*}(\hat{\mathbf{k}}) \quad (\text{B.32})$$

où $\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{u} / \|\mathbf{u}\|$, et où $j_l(z) = (\frac{1}{2}\pi/z)^{\frac{1}{2}} J_{l+\frac{1}{2}}(z)$ est la fonction de Bessel modifiée.

B-2-7-2 Cas tensoriel.

On voudrait maintenant étendre le cas scalaire précédent, à une expression tensorielle comme $\exp[i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}] \mathbb{1}$. Cette fonction, invariante par rotation, vérifie les hypothèses de la formule (B.30), et sera donc décomposable sur les \mathbf{Y}_{Jl}^M . Comme de plus (B.29) comporte les mêmes coefficients que (B.8), on trouve sans calcul que :

$$\exp[i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}] \mathbb{1} = 4\pi \sum_l i^l j_l(kr) \sum_{JM} \mathbf{Y}_{Jl}^M(\hat{\mathbf{r}}) \otimes \mathbf{Y}_{Jl}^{M*}(\hat{\mathbf{k}}) \quad (\text{B.33})$$

B-3 Solution formelle du problème de diffusion.

Nous allons maintenant appliquer le formalisme des fonctions harmoniques vectorielles sphériques au problème des sphères diélectriques. L'équation (B.30) donne l'expression la plus générale d'un opérateur tensoriel invariant par rotation, fonction de $\hat{\mathbf{r}}_1$ et $\hat{\mathbf{r}}_2$. Or, les conditions aux limites de notre problème sont totalement invariantes par rotation. Donc, dès que l'on s'est donné un champ incident sous forme d'onde plane, défini par un vecteur d'onde \mathbf{k} , et une polarisation, l'observation du champ en un point \mathbf{r} de l'espace ne peut dépendre que de l'angle entre \mathbf{k} et \mathbf{r} . On cherchera l'expression des champs diffusés sous la forme de (B.30), pour un champ incident $\mathbb{T}_0(\mathbf{k}, \mathbf{r}, \mu) = T_0 \exp[i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}] \chi_\mu^{(k)}$, où $\chi_\mu^{(k)}$ est une base semblable aux χ_μ formule (B-2-3) page 183, construite sur les composantes $\mathbf{k}_{\{x,y,z\}}$.

B-3-1 Champ électrique diffusé.

Donnons donc l'expression générale du champ électrique diffusé,

$$\mathbb{E}_{diff}(\mathbf{k}, \mathbf{r}, \mu) = \frac{2\pi}{kr} \sum_{\substack{\lambda, \lambda' \\ JM}} i^{J+1} \mathcal{E}_{\lambda, \lambda'}^J(r) \left[\mathbf{Y}_{JM}^\lambda(\hat{\mathbf{r}}) \otimes \mathbf{Y}_{JM}^{\lambda'*}(\hat{\mathbf{k}}) \right] \cdot \chi_\mu^{(k)} \quad (\text{B.34})$$

Or, le champ *physique* longitudinal $\mathbf{E}(r) = \mathbb{E}_{diff} \cdot \mathbf{E}_{in}$, où \mathbf{E}_{in} représente le champ incident défini par :

$$\mathbf{E}_{in}(\mathbf{k}, \mathbf{r}, \mu) = \exp[i\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{k}}] \chi_\mu^{(k)} \quad (\text{B.35})$$

$$\mu \in \{-1, 1\}. \quad (\text{B.36})$$

Les $\chi_\mu^{(k)}$ ont été définis au paragraphe B-3, construits à partir du vecteur \mathbf{k} . Le champ électromagnétique doit vérifier les équations de Maxwell, ce qui conduit aux contraintes suivantes pour les seuls coefficients non-nuls :

$$\mathcal{E}_{ee}^J(r) = -i[w_J^{(-)'}(r) - (-1)^J S_{ee}^J w_J^{(+)'}(r)] \quad (\text{B.37})$$

$$\mathcal{E}_{mm}^J(r) = w_J^{(-)}(r) - (-1)^J S_{mm}^J w_J^{(+)}(r) \quad (\text{B.38})$$

$$\mathcal{E}_{me}^J(r) = -(-1)^J S_{me}^J w_J^{(+)}(r) \quad (\text{B.39})$$

$$\mathcal{E}_{em}^J(r) = i(-1)^J S_{em}^J w_J^{(+)'}(r) \quad (\text{B.40})$$

$$\mathcal{E}_{\parallel e}^J(r) = \frac{-i}{kr} \sqrt{J(J+1)} [w_J^{(-)}(r) - (-1)^J S_{ee}^J w_J^{(+)}(r)] \quad (\text{B.41})$$

$$\mathcal{E}_{\parallel m}^J(r) = \frac{i}{kr} (-1)^J \sqrt{J(J+1)} S_{em}^J w_J^{(+)}(r) \quad (\text{B.42})$$

$\mathbf{E}(r)$ doit vérifier en outre $\nabla \cdot \mathbf{E}(r) = 0$, ce qui est automatiquement assuré ici.

Les coefficients $S_{\lambda\lambda'}^J$, sont ceux de la *matrice de diffusion* S^J , et ils sont déterminés par la continuité des champs \mathbf{E} et \mathbf{B} , à la surface du diffuseur.

B-3-2 Champ magnétique diffusé.

D'une manière similaire, il est facile de tirer de (B.34) l'expression du champ magnétique, par l'équation de Maxwell $\mathbf{B} = -i/k \nabla \times \mathbf{E}$. En utilisant les relations :

$$\nabla \times (f(r) \mathbf{Y}_{JM}^{(e)}) = 1/r (rf(r))' \mathbf{Y}_{JM}^{(m)} \quad (\text{B.43})$$

$$\nabla \times (f(r) \mathbf{Y}_{JM}^{(m)}) = -1/r (rf(r))' \mathbf{Y}_{JM}^{(e)} - 1/r f(r) \sqrt{J(J+1)} \mathbf{Y}_{JM}^{(ll)} \quad (\text{B.44})$$

$$\nabla \times (f(r) \mathbf{Y}_{JM}^{(ll)}) = -1/r f(r) \sqrt{J(J+1)} \mathbf{Y}_{JM}^{(m)} \quad (\text{B.45})$$

On trouve donc \mathbb{B}_{diff} sous la forme :

$$\mathbb{B}_{diff}(\mathbf{k}, \mathbf{r}, \mu) = 2\pi \sum_{\substack{\lambda, \lambda' \\ JM}} i^{J+1} \mathcal{B}_{\lambda, \lambda'}^J [\mathbf{Y}_{JM}^\lambda(\hat{\mathbf{r}}) \otimes \mathbf{Y}_{JM}^{\lambda'}(\hat{\mathbf{k}})] \cdot \chi_\mu^{(k)} \quad (\text{B.46})$$

les $\mathcal{B}_{\lambda, \lambda'}^J$, étant reliés aux $\mathcal{E}_{\lambda, \lambda'}^J$, par les relations (B.43), on trouve les contraintes sur les $\mathcal{B}_{\lambda, \lambda'}^J$:

$$\mathcal{B}_{ee}^J(r) = i(-1)^{J+1} S_{me}^J w_J^{(+)}(r) \quad (\text{B.47})$$

$$\mathcal{B}_{mm}^J(r) = (-1)^{J+1} S_{em}^J w_J^{(+)}(r) \quad (\text{B.48})$$

$$\mathcal{B}_{me}^J(r) = w_J^{(-)}(r) - (-1)^J S_{ee}^J w_J^{(+)}(r) \quad (\text{B.49})$$

$$\mathcal{B}_{em}^J(r) = i[w_J^{(-)}(r) - (-1)^J S_{mm}^J w_J^{(+)}(r)] \quad (\text{B.50})$$

$$\mathcal{B}_{\parallel e}^J(r) = \frac{i}{kr} (-1)^J \sqrt{J(J+1)} S_{me}^J w_J^{(+)}(r) \quad (\text{B.51})$$

$$\mathcal{B}_{\parallel m}^J(r) = \frac{i}{kr} \sqrt{J(J+1)} [w_J^{(-)}(r) - (-1)^J S_{mm}^J w_J^{(+)}(r)] \quad (\text{B.52})$$

B-4 Solution explicite pour une sphère diélectrique.

Nous avons donné plus haut la solution formelle au problème de diffusion, en exprimant \mathbf{E}_{diff} en fonction de \mathbf{E}_{in} (lui même développé en ondes planes projetées sur les \mathbf{Y}_{LM}) cf (B.35). Nous avons obtenu une solution similaire pour le champ magnétique. Ici, nous allons tenter de raccorder explicitement les solutions internes et externes, à la surface du

diélectrique, en omettant les termes sources. Ainsi, on va obtenir les modes quasi-normaux du problème, indépendamment de la configuration des sources. Les champs seront bien entendu exprimés sur la base des harmoniques vectoriels sphériques en distinguant le cas intérieur à la sphère ($r < a$) noté \bullet , de l'extérieur ($r > a$) noté \odot .

A l'intérieur, on a respectivement pour le champ électrique et magnétique les expressions générales :

$$\mathbf{E}^\bullet(\mathbf{r}) = \sum_{JM} \sum_{\lambda'} \frac{\mathcal{E}_{\lambda\lambda'}^{(\lambda')^\bullet}(\mathbf{r})}{N(r)kr} \mathbf{Y}_{Jl}^M(\hat{\mathbf{r}}) \quad \mathbf{B}^\bullet(\mathbf{r}) = \sum_{JM} \sum_{\lambda'} \frac{\mathcal{B}_{\lambda\lambda'}^{(\lambda')^\bullet}(\mathbf{r})}{N(r)kr} \mathbf{Y}_{Jl}^M(\hat{\mathbf{r}}) \quad (\text{B.53})$$

Considérons un terme, à (JM) fixé, du développement précédent. Nous nous limiterons de plus aux composantes transverses $\{\lambda, \lambda'\} \in \{e, m\}$, en adoptant une notation matricielle 2×2 . L'expression générale des $\mathcal{E}^{\{\bullet, \odot\}}(\mathbf{r})$ et des $\mathcal{B}^{\{\bullet, \odot\}}(\mathbf{r})$ est donnée par :

$$\mathcal{E}^\bullet(r) = \begin{pmatrix} -iu'_J(Nkr) & 0 \\ 0 & u_J(Nkr) \end{pmatrix} M_1, \quad \mathcal{B}^\bullet(r) = \begin{pmatrix} 0 & iu'_J(Nkr) \\ u_J(Nkr) & 0 \end{pmatrix} M_1 \quad (\text{B.54})$$

où M_1 est une matrice constante. Ses composantes ne contiennent pas de fonctions $v_J(r)$ qui divergent lorsque $r \rightarrow 0$. D'une façon similaire, on trouve qu'à l'extérieur de la sphère :

$$\mathcal{E}^\odot(\mathbf{r}) = \sum_{JM} \sum_{\lambda'} \frac{\mathcal{E}_{\lambda\lambda'}^{(\lambda')^\odot}(\mathbf{r})}{kr} \mathbf{Y}_{Jl}^M(\hat{\mathbf{r}}) \quad \mathcal{B}^\odot(\mathbf{r}) = \sum_{JM} \sum_{\lambda'} \frac{\mathcal{B}_{\lambda\lambda'}^{(\lambda')^\odot}(\mathbf{r})}{kr} \mathbf{Y}_{Jl}^M(\hat{\mathbf{r}}) \quad (\text{B.55})$$

ce qui détermine les formes générales de \mathcal{E}^\odot et \mathcal{B}^\odot :

$$\mathcal{E}^\odot(r) = \begin{pmatrix} -iu'_J(kr) & 0 \\ 0 & u_J(kr) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -iv'_J(kr) & 0 \\ 0 & v_J(kr) \end{pmatrix} T_J \quad (\text{B.56})$$

$$\mathcal{B}^\odot(r) = \begin{pmatrix} 0 & iu'_J(kr) \\ u_J(kr) & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & iv'_J(kr) \\ v_J(kr) & 0 \end{pmatrix} T_J \quad (\text{B.57})$$

T_J est une matrice à déterminer en fonction des conditions initiales. Il reste à écrire la continuité des composantes transverses des champs électrique et magnétique, à la surface du diélectrique en ($r = a$). Cela entraîne les relations suivantes pour $\mathcal{E}^{\{\bullet, \odot\}}$ et $\mathcal{B}^{\{\bullet, \odot\}}$: $\mathcal{E}^\bullet(a) = \mathcal{E}^\odot(a)$ et $\mathcal{B}^\bullet(a) = \mathcal{B}^\odot(a)$. Si l'on élimine M_1 de ce système, on trouve les deux coefficients diagonaux non-nuls de T_J :

$$T_J^{ee} = \frac{Nu'_J(\beta)u_J(\alpha) - u'_J(\alpha)u_J(\beta)}{Nv'_J(\beta)u_J(\alpha) - u'_J(\alpha)v_J(\beta)} \quad (\text{B.58})$$

$$T_J^{mm} = \frac{u'_J(\beta)u_J(\alpha) - Nu'_J(\alpha)u_J(\beta)}{v'_J(\beta)u_J(\alpha) - Nv'_J(\alpha)v_J(\beta)} \quad (\text{B.59})$$

avec les notations déjà indiquées $\beta = ka$ et $\alpha = Nka$.

Les constantes d'intégration sont donc fixées, pour chaque $\{J, M\}$, et l'on peut donc connaître, par les relations (B.53 et suivantes), la carte du champ dans tout l'espace,

pour n'importe quel champ incident. Les séries (B.53 et suivantes) sont semblables à la solution dérivée par Mie dans les années 1930.

On peut également donner l'expression de la matrice S_J en fonction de la matrice T_J , par la relation suivante :

$$S_J = \frac{\mathbb{1} + iT_J}{\mathbb{1} - iT_J} \quad (\text{B.60})$$

ce qui s'écrit :

$$S_J^{ee} = \exp[i\pi J] \frac{Nw_J^{(-)'}(\beta) u_J(\alpha) - w_J^{(-)}(\beta) u_J'(\alpha)}{Nw_J^{(+)' }(\beta) u_J(\alpha) - w_J^{(+)}(\beta) u_J'(\alpha)} \quad (\text{B.61})$$

$$S_J^{mm} = \exp[i\pi J] \frac{w_J^{(-)'}(\beta) u_J(\alpha) - Nw_J^{(-)}(\beta) u_J'(\alpha)}{w_J^{(+)' }(\beta) u_J(\alpha) - Nw_J^{(+)}(\beta) u_J'(\alpha)} \quad (\text{B.62})$$

Remarque : Si l'indice N est réel (pas de pertes), on vérifie bien que S_J est unitaire, puisque dans ce cas T_J est réel, et donc $\|S_J^{ee}\|^2 = \|S_J^{mm}\|^2 = 1$ par (B.60).

B-4-1 Lien entre les problèmes scalaires et vectoriels.

La forme de la solution générale de \mathcal{E} et \mathcal{B} , montre que deux familles de fonctions radiales scalaires $D^{(e)}(r)$ et $D^{(m)}(r)$ (et leurs premières dérivées), sont suffisantes, pour exprimer la solution générale du système. (En fait toute combinaison de u_J, v_J). Elles vérifient les équations différentielles suivantes (et bien sûr les conditions aux limites appropriées):

$$\frac{d^2 D_J^{(e)}(r)}{dr^2} + \left[k^2 N^2(r) - \frac{J(J+1)}{r^2} \right] D_J^{(e)}(r) = 0 \quad (\text{B.63})$$

$$\frac{d^2 D_J^{(m)}(r)}{dr^2} - \frac{2}{N(r)} \frac{dN(r)}{dr} \frac{dD_J^{(m)}(r)}{dr} + \left[k^2 N^2(r) - \frac{J(J+1)}{r^2} \right] D_J^{(m)}(r) = 0 \quad (\text{B.64})$$

Ces deux fonctions sont appelées *potentiels scalaires de Debye*. Le lecteur remarquera que la première de ces équations a précisément la forme d'une équation de Schrödinger radiale, comme celle rencontrée en I.12. On a exhibé ici explicitement les fonctions potentiels de Debye, ce qui légitime donc la simplification effectuée lors de l'analogie quantique donnée plus haut, qui nous avait permis de considérer des champs scalaires. De la sorte, nous pourrions toujours commencer le traitement d'un problème de diffusion (classique sans spin!), par un problème scalaire équivalent, puis l'étendre sans perte de généralité au cas vectoriel. C'est ce qui sera fait dans le paragraphe suivant, qui vise à améliorer la convergence de la série B.53.

B-4-1-1 Amélioration de la vitesse de convergence.

Nous avons vu que la série de Mie (B.55) ne convergerait pas rapidement (nécessité de resommer au bas mot $\beta + c\beta^{1/3}$ termes). Nous allons nous efforcer de transformer la série de manière à améliorer sa vitesse de convergence. La série obtenue, dite série modifiée de Debye, présentera des propriétés de convergence remarquables.

a • Introduction. La genèse de la méthode que nous allons présenter ici, est une version améliorée d'une dérivation due à Debye. Le calcul présenté ci-dessous en détail, utilise un formalisme adapté au problème des sphères transparentes. En effet, des difficultés de convergence spécifiques apparaissent, par opposition au cas de sphères dures.

Comme on souhaite obtenir une formule contenant toutes les contributions au champ diffusé, aussi bien les effets de diffusion faiblement résonnante (background) que les résonances de galerie, nous partirons de la série de Mie usuelle. Ensuite, en transformant la sommation discrète en une intégrale, nous obtiendrons après une seconde transformation une nouvelle série qui présentera encore des difficultés de convergence dans le cas des sphères transparentes.

Enfin, en faisant apparaître dans cette dernière série les coefficients de Fresnel pour une onde sphérique, nous dériverons une nouvelle solution, qui permettra de calculer efficacement le champ diffusé en tout point. Pour plus de simplicité, tous ces calculs seront menés dans le cas scalaire.

b • Principe de la méthode dans un cas scalaire. Partons d'un développement de la solution sous la forme suivante, analogue scalaire de ce que nous avons obtenu plus haut lors du calcul exact du champ diffusé, qui donne le développement de l'amplitude de diffusion f , en fonction des éléments de la matrice S du problème, sur la base scalaire des Y_{lm} . On obtient, (avec les notations habituelles de ce type de problème)

$$f(\mathbf{k}, \theta) = (ik)^{-1} \sum_{l=0}^{\infty} \left(l + \frac{1}{2}\right) [S_l(\mathbf{k}) - 1] P_l(\cos \theta) \quad (\text{B.65})$$

qui est la traditionnelle décomposition en ondes partielles que l'on rencontre en mécanique quantique ???. P_l est le polynôme de Legendre d'ordre l . Par soucis de cohérence avec les notations précédentes, réexprimons cette expression, en fonction uniquement de $\beta = ka$, le paramètre de taille de la sphère diélectrique, et de θ :

$$\tilde{f}(\beta, \theta) = (i\beta^{-1}) \sum_{l=0}^{\infty} \left(l + \frac{1}{2}\right) [S_l(\beta) - 1] P_l(\cos \theta) \quad (\text{B.66})$$

Rappelons ce que les conditions de raccordement du champ à la surface $r \rightarrow a$ imposent à S_l :

$$S_l(\beta) = -\frac{h_l^{(2)}(\beta)}{h_l^{(1)}(\beta)} \left\{ \frac{\ln' h_l^{(2)}(\beta) - N \ln' j_l(\alpha)}{\ln' h_l^{(1)}(\beta) - N \ln' j_l(\alpha)} \right\} \quad (\text{B.67})$$

avec les mêmes notations que pour B.61. Nous allons maintenant transformer la sommation (B.65), dans laquelle la fonction S est évaluée en des points discrets, en une série où S sera intégrée continûment.

c • Somme de Poisson. Il nous faut au préalable forger quelques outils mathématiques.

Considérons une fonction f à valeurs réelles. Nous noterons, si elle existe, \hat{f} sa transformée de Fourier définie par l'intégrale : $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ixt} dx$

Formule 1 Supposons³ que $f \in L^1(\mathbb{R})$. L'intégrale \hat{f} existe. Si $\hat{f} \in L^1$ et si la fonction F définie par la série :

$$F(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x + 2k\pi)$$

est convergente, alors

- F est 2π -périodique.
- Le n -ième coefficient de Fourier de F est $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\hat{f}(n)$, et donc

$$F(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x + 2k\pi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e^{inx} \quad (\text{B.68})$$

La dernière égalité se nomme *Somme de Poisson*.

Appliquons cette formule, à une fonction ϕ , de la forme $\phi(\lambda, x) = \Theta(\lambda)f(\lambda/2\pi)$, avec f suffisamment régulière pour vérifier les hypothèses du théorème. La fonction Θ est ici la fonction de Heaviside. On en déduit facilement que :

$$\sum_{l=0}^{\infty} \phi(l + \frac{1}{2}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m \int_0^{\infty} \phi(\lambda, x) \exp(2im\pi\lambda) d\lambda \quad (\text{B.69})$$

Effectuons à nouveau cette transformation sur la fonction \tilde{f} de l'équation (B.66). Il vient:

$$\tilde{f}(\beta, \theta) = (i\beta^{-1}) \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m \int_0^{\infty} d\lambda \lambda \exp(2im\pi\lambda) [S(\lambda, k) - 1] P_{\lambda-\frac{1}{2}}(\cos \theta) \quad (\text{B.70})$$

avec $S(\lambda, k)$, la fonction S du problème de diffusion définie par (B.67). Il serait également commode ici d'éliminer la double sommation discrète et intégrale de l'expression exacte (B.70). On peut imaginer de transformer l'intégrale à valeurs réelles par une intégrale complexe, et faire apparaître des pôles dans l'intégrand, dont les résidus vaudraient précisément les termes de la sommation discrète.

Formule 2 Transformation de Watson

Si g est une fonction méromorphe⁴, alors on a l'égalité :

$$\sum_{l=0}^{\infty} g(l + 1/2) = \frac{1}{2} \int_C g(\lambda) \frac{\exp(-i\pi\lambda)}{\cos(\pi\lambda)} d\lambda \quad (\text{B.71})$$

³Nous noterons $L^p(\mathbb{R})$ la classe des fonctions complexes de la variable réelle, mesurables au sens de Lebesgue, pour lesquelles la norme $\|f\|_p = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^p dt \right\}^{1/p}$ est finie.

⁴Rappel : Une fonction f est dite méromorphe \square sur un ouvert Ω s'il existe un ensemble $A \subset \Omega$ tel que :

- A n'a pas de point d'accumulation dans Ω ,
- f est analytique sur Ω privé de A ,
- f a un pôle en tout point de A .

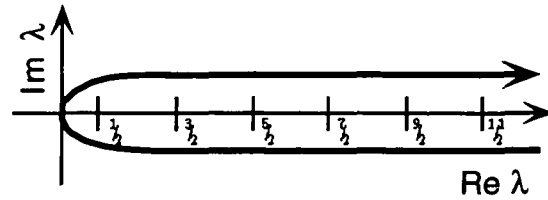


Figure B.1: Contour utilisé pour la transformé de Watson.

pour le contour C suivant :

- *Valeur de l'intégrale.* On peut appliquer le théorème des résidus à l'intégrand, qui est visiblement une fonction *méromorphe*. Les λ qui annulent $\cos(\pi\lambda)$ sont les entiers impairs. En ces points, le résidu de l'intégrand vaut $g(\lambda)i/\pi$, et l'indicatrice du contour C vaut -1 , et donc l'intégrale vaut $2i\pi \times g(\lambda) \times i/\pi \times -1$
- *Remarque physique :* l'introduction de la notion de fonction *méromorphe* n'est pas dans le cadre de cette étude physique, une subtilité purement mathématique. Nous allons appliquer les formules ci-dessus, à une fonction (S) (qui possède entre autres de nombreux pôles au voisinage de l'axe réel) que nous prolongerons analytiquement au voisinage de cet axe : pour qu'un tel calcul soit valable, il faudra vérifier que ses pôles ne "s'accumulent" pas au voisinage de l'axe physique réel.

Appliquons cette transformation (B.71) à l'expression (B.70), donnant l'amplitude de diffusion sous réserve que S soit méromorphe. On trouve :

$$\tilde{f}(\beta, \theta) = (i\beta)^{-1} \int_C d\lambda \left\{ [1 - S(\lambda, k)] P_{\lambda - \frac{1}{2}}(\cos \theta) \right\} \left\{ \exp(-i\pi\lambda) \frac{\lambda}{\cos(\pi\lambda)} \right\} \quad (\text{B.72})$$

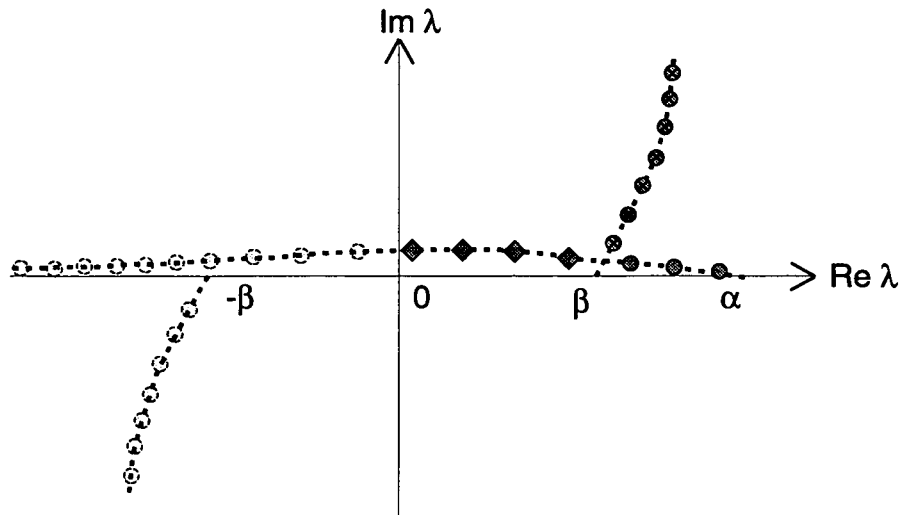


Figure B.2: Pôles de Regge (voir la classification des pôles dans le texte).

d • Transformation de Watson L'intégrale (B.72) donne sous une forme compacte la solution au problème de diffusion. Cette transformation est due à Watson[125]. Avant de voir l'intérêt de (B.72), il reste à étudier les pôles (dans le plan complexe) de la fonction $S(\lambda, k)$, appelés pôles de Regge. En ce qui concerne le caractère méromorphe de la fonction S , l'expression analytique obtenue en B.67, permet de se convaincre que l'équation transcendante du dénominateur, ne peut s'annuler qu'en des points distincts. En revanche, il importe de savoir la densité et la répartition des pôles au voisinage de l'axe réel, car la convergence de (B.72) sera médiocre s'il existe une multitude de pôles près de l'axe physique réel, du fait que la série des résidus converge comme $\sum_n \Im \text{Pôle}(S)_n$.

Nous renvoyons le lecteur à [52] et [53], qui présente une étude analytique asymptotique du comportement des pôles de Regge. La figure B.2 montre la position des pôles de Regge, que l'on peut subdiviser en trois catégories physiques distinctes (en se limitant par symétrie au premier quadrant) :

- *Résonances fines* (o).
Pôles associés à $\beta < \Re(\lambda) < \alpha$. Ils correspondent aux résonances les plus fines du spectre de Mie.
- *Résonances larges* (◊).
Pôles associés à $0 < \Re(\lambda) < \beta$.
Ces deux premières familles de pôles se trouvent sur une courbe qui suit l'axe réel. Ils correspondent aux phénomènes physiques "intérieurs" à la sphère. Les pôles les plus à droite (grands moments cinétiques $\Re(\lambda) \sim \alpha$) sont les plus proches de l'axe et correspondent aux états les plus liés. (cf quasi-bounded-states).

- *Ondes de surface* (\otimes).

Ces pôles qui s'écartent de l'axe réel à partie de $\Re(\lambda) \sim \beta$ sont pratiquement insensibles à "l'intérieur" du potentiel ($r < a$). (On trouve des positions presque identiques dans le cas d'une sphère impénétrable.) Ils sont quasi totalement déterminés par la géométrie de la limite du diélectrique, d'où leur appellation d'*ondes de surface*.

On comprend que les pôles correspondant aux résonances posent des problèmes de convergence. En revanche, la série associée aux ondes de surface converge rapidement.

La raison qui fait que l'expression (B.72) possède des pôles de Regge (associés aux résonances), très près de l'axe réel, provient de la méthode même choisie dans cette approche. On peut montrer que si l'intégrale (B.72) est évaluée par la méthode de la phase stationnaire, à chaque contribution principale d'un terme stationnaire est associée, en première approximation, une trajectoire classique, régie par l'optique géométrique, (cf figure B.2). Chaque réflexion donnant lieu à une onde réfractée et une onde réfléchie intérieurement, la contribution d'une trajectoire s'obtient comme une somme infinie d'ondes partielles. On comprend donc pourquoi la transformation décrite ci-dessus donne des séries convergeant rapidement dans le cas de la sphère impénétrable : chaque trajectoire classique ne comporte qu'un seul rayon réfléchi et non une infinité. La solution à ce problème passe donc par une autre décomposition que les trajectoires classiques. Il faudrait traiter le problème comme un problème d'*interaction de surface*. On va donc réexprimer S comme une combinaison de coefficients de réflexion R et T , obtenus pour des ondes partielles sphériques. Cette idée est initialement de Debye, mais la première application claire de ces calculs aux sphères diélectriques est due à H.M Nussensweig.

B-4-2 Développement modifié de S en une série convergeant rapidement.

Considérons une onde sphérique rentrante d'ordre l , qui rencontre la sphère en $r = a$. On appellera, par analogie avec les coefficients de Fresnel, $R_{22}(l, \beta)$ le coefficient de réflexion *milieu externe 2* \rightarrow *milieu externe 2* de la sphère pour cette onde et $T_{21}(l, \beta)$ le coefficient de transmission *milieu externe 2* \rightarrow *milieu interne 1*. Pour obtenir leur expression, il suffit de résoudre l'équation radiale, dans tout l'espace, et d'écrire le raccordement des fonctions d'onde :

$$\psi_{2,l}(r) = A \left[\frac{h_l^{(2)}(kr)}{h_l^{(2)}(\beta)} + R_{22}(l, \beta) \frac{h_l^{(1)}(kr)}{h_l^{(1)}(\beta)} \right] \quad (\text{B.73})$$

$$\psi_{1,l}(r) = A T_{21}(l, \beta) \frac{h_l^{(2)}(Nkr)}{h_l^{(2)}(\alpha)} \quad (\text{B.74})$$

On trouve en définitive, en utilisant les notations de la partie A, et la propriété suivante du Wronskien $W[H_\lambda^{(1)}(x), H_\lambda^{(2)}(x)] = -4i/\pi x$

$$R_{22}(\lambda, \beta) = -\frac{\phi^{(2)}(\beta) - N\phi^{(2)}(\alpha)}{\phi^{(1)}(\beta) - N\phi^{(2)}(\alpha)} \quad (\text{B.75})$$

$$T_{21}(\lambda, \beta) = \frac{4i}{\pi\beta H_\lambda^{(1)}(\beta) H_\lambda^{(2)}(\beta) [\phi^{(1)}(\beta) - N\phi^{(2)}(\alpha)]} \quad (\text{B.76})$$

On peut effectuer le même calcul pour une onde- l sortante, ce qui donne les deux coefficients restants :

$$R_{11}(\lambda, \beta) = \frac{\phi^{(1)}(\beta) - N\phi^{(1)}(\alpha)}{\phi^{(1)}(\beta) - N\phi^{(2)}(\alpha)} \quad (\text{B.77})$$

$$T_{12}(\lambda, \beta) = \frac{4i}{\pi\beta H_\lambda^{(1)}(\alpha) H_\lambda^{(2)}(\alpha) [\phi^{(1)}(\beta) - N\phi^{(2)}(\alpha)]} \quad (\text{B.78})$$

On vérifie que ces coefficients tendent vers les coefficients de Fresnel usuels (cf [126] ou [127]), lorsque $r \rightarrow \infty$. Il suffit maintenant de réexprimer $S(\lambda, \beta)$, à partir de sa définition B.67, à l'aide des coefficients R_{22} et T_{21} . On trouve

$$S(\lambda, \beta) = \frac{H_\lambda^{(2)}(\beta)}{H_\lambda^{(1)}(\beta)} \left\{ R_{22}(\lambda, \beta) + \frac{H_\lambda^{(1)}(\alpha) T_{21}(\lambda, \beta) T_{12}(\lambda, \beta)}{H_\lambda^{(2)}(\alpha) [1 - \zeta(\lambda, \beta)]} \right\} \quad (\text{B.79})$$

où $\zeta = \frac{H_\lambda^{(1)}(\alpha)}{H_\lambda^{(2)}(\alpha)} R_{11}(\lambda, \beta)$

Enfin, si $\|\zeta(\lambda, \beta)\| < 1$, ce qui est vrai car $\|R_{11}(\lambda, \beta)\| \leq 1$, on peut développer le dénominateur de B.79 en série entière, ce qui donne :

$$S(\lambda, \beta) = \frac{H_\lambda^{(2)}(\beta)}{H_\lambda^{(1)}(\beta)} \left\{ R_{22}(\lambda, \beta) + T_{21}(\lambda, \beta) T_{12}(\lambda, \beta) \frac{H_\lambda^{(1)}(\alpha)}{H_\lambda^{(2)}(\alpha)} \sum_{p=1}^{\infty} \zeta^{p-1}(\lambda, \beta) \right\} \quad (\text{B.80})$$

Le nouveau développement modifié de Debye s'écrit donc :

$$\tilde{f}(\beta, \theta) = \tilde{f}_0(\beta, \theta) + \sum_{p=1}^{\infty} \tilde{f}_p(\beta, \theta) \quad (\text{B.81})$$

avec, si $p = 0$

$$\tilde{f}_0(\beta, \theta) = \frac{i}{\beta} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m \int_0^\infty d\lambda \lambda \exp[2i\pi m\lambda] P_{\lambda-\frac{1}{2}}(\cos \theta) \left[1 - R_{22} \frac{H_\lambda^{(2)}(\beta)}{H_\lambda^{(1)}(\beta)} \right] \quad (\text{B.82})$$

et si $p > 0$ et $\Xi(\lambda, \beta) = T_{21}(\lambda, \beta) T_{12}(\lambda, \beta) \frac{H_\lambda^{(1)}(\alpha) H_\lambda^{(2)}(\beta)}{H_\lambda^{(2)}(\alpha) H_\lambda^{(1)}(\beta)}$

$$\tilde{f}_p(\beta, \theta) = \frac{i}{\beta} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m \int_0^\infty d\lambda \lambda \exp[2i\pi m\lambda] P_{\lambda-\frac{1}{2}}(\cos \theta) \Xi(\lambda, \beta) \zeta^{p-1}(\lambda, \beta) \quad (\text{B.83})$$

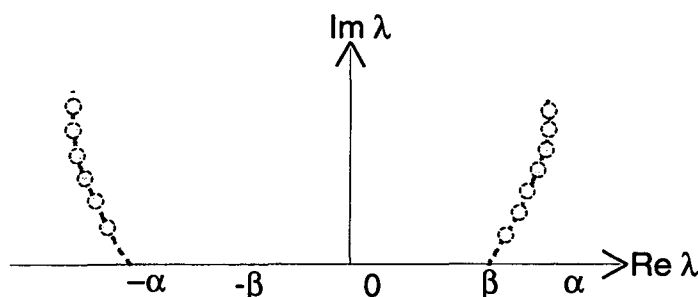


Figure B.3: Pôles de la série modifiée.

B-4-3 Pôles du développement modifié de Debye.

Il reste à vérifier que l'idée d'utiliser des ondes sphériques propageantes pour exprimer la solution était efficace. Les pôles, pour chacun des termes de la série coïncident, seul l'ordre $p + 1$ de chaque pôle change; ils sont donnés par l'équation implicite :

$$\phi^{(1)}(\beta) = N\phi^{(2)}(\alpha) \quad (\text{B.84})$$

La figure B.3 donne l'allure de la répartition des pôles de la série modifiée. Ce graphe est très semblable à la partie du diagramme de la figure B.2 relative aux ondes de surface. Tous les pôles qui subsistaient le long de l'axe réel ont disparu. La difficulté de convergence de la série (II-3) a été levée. Quant à la vitesse de convergence de la série de Debye elle-même (B.81), celle-ci ne va dépendre que de $\|\zeta(\lambda, \beta)\|$, soit $\|R_{11}(\lambda, \beta)\|$. La vitesse de convergence est donc dictée par la réflectivité de la sphère pour les ondes partielles de λ qui contribuent à l'intégrale des $\tilde{f}_p(\beta, \theta)$. La série présentera donc en général une convergence rapide, sauf précisément pour les modes de galerie, pour lesquels l'écart de la réflectivité à l'unité tend exponentiellement vers zéro, lorsque λ augmente; il apparaît donc des singularités dans le développement modifié de Debye (B.81). On peut y remédier en tronquant le développement au p_{max} -ème terme :

$$\tilde{f}(\beta, \theta) = \tilde{f}_0(\beta, \theta) + \sum_{p=1}^{p_{max}} \tilde{f}_p(\beta, \theta) + \Delta\tilde{f}_{p_{max}}(\beta, \theta) \quad (\text{B.85})$$

avec

$$\Delta\tilde{f}_{p_{max}}(\beta, \theta) = \frac{\tilde{f}_{p_{max}+1}(\beta, \theta)}{1 - \zeta(\beta, \theta)} \quad (\text{B.86})$$

où $\zeta(\beta, \theta)$ est la fonction (B-4-2), introduite plus haut. Dans le cas “pathologique” des modes de galerie, on pourra trouver un p_{max} tel que la contribution principale provienne de $\Delta \tilde{f}_{p_{max}}(\beta, \theta)$. (Cela correspond à choisir p_{max} tel que $\Re P\acute{o}le > \beta$.)

En conclusion, nous avons obtenu une expression (B.81) qui donne très efficacement les effets de diffusion faiblement résonnants du champ par la sphère de diélectrique. De plus, nous avons vu qu’il était facile d’isoler dans (B.81) la contribution principale aux modes de galerie, et donc d’obtenir pour un WG mode donné, la condition de résonance, la largeur et son couplage.

Annexe C

Effet de petites perturbations d'indice.

Toutes les considérations développées jusqu'ici supposaient que la forme et la composition de la sphère diélectrique étaient parfaites. Le procédé de fabrication des microsphères que nous employons expérimentalement ne produit pas nécessairement des boules de diélectriques sphériques et homogènes. Aussi, il nous faut donner quelques indications des effets de petites déformations géométriques et des fluctuations de l'indice en volume sur les résonances de galerie. Cette annexe se limite au cas des modifications de l'indice pour une sphère supposée parfaite.

C-1 Effet de petites imperfections constitutives.

Il n'est pas question ici de tenter de développer une théorie générale des propriétés optiques résonnantes de petites particules transparentes, mais simplement de pouvoir prédire les effets sur la position et la largeur des résonances de petites ovalisations du résonateur, ou encore de très petites variations spatiales de l'indice. Le point de vue que nous adopterons ici sera perturbatif. Nous allons donc essayer d'obtenir les effets sous la forme d'un développement en puissance de l'amplitude de la perturbation d'indice ou de forme.

En raison de l'existence des potentiels de Debye (se référer à la page 195 quant à leur définition), nous pouvons nous limiter à un problème scalaire. Partons donc de la version scalaire de l'équation d'Helmholtz déjà rencontrée page 25:

$$\Delta\psi + k^2 N^2(\mathbf{r})\psi = 0 \quad (\text{C.1})$$

Maintenant, l'indice est a priori une fonction des coordonnées, sous la forme particulière, à l'intérieur du diélectrique:

$$N^2(\mathbf{r}) = N^2 + \epsilon s(\mathbf{r}). \quad (\text{C.2})$$

$s(\mathbf{r})$, normalisée à l'unité, donne la distribution spatiale d'une variation infinitésimale de l'indice. Dans un premier temps, on va supposer que le résonateur est toujours parfaitement sphérique: il est en effet plus facile de donner une dépendance spatiale à l'indice de

réfraction que de modifier les conditions aux limites. On va voir que l'on peut très simplement simuler des variations de la forme de la surface en introduisant un indice effectif convenable. Etudions tout d'abord l'effet des petites variations d'indice sur la solution intérieure à la sphère.

C-1-1 Perturbation de la solution intérieure.

Si la fonction d'onde ψ satisfait, à l'intérieur du diélectrique, l'équation C.1, le théorème de Dirichlet permet d'exprimer ψ et ses dérivées dans tout le volume du résonateur uniquement en fonction de la valeur de ψ à la surface ($\|\mathbf{r}\| = a$). Ainsi, on a la relation:

$$\partial_r \psi(\mathbf{r}) = \int a^2 \sin(\theta) d\theta' d\phi' \mathcal{C}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \psi(\mathbf{r}') \quad (\text{C.3})$$

avec en coordonnées sphériques, $\mathbf{r} = (a, \theta, \phi)$ et $\mathbf{r}' = (a, \theta', \phi')$. $\mathcal{C}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ est une distribution. Dans le seul but de simplifier les calculs, nous nous limiterons désormais au cas où la perturbation d'indice présente une symétrie de révolution autour de l'axe polaire. La théorie est aisément généralisable. Dans ce cas, on peut développer la solution intérieure $\psi(r < a)$ sur la base des harmoniques sphériques Y_{lm} , avec les notations de l'annexe A, sous la forme $\psi(r, \theta, \phi) = \sum_l c_l(r) \cdot Y_{lm}(\theta, \phi)$. En remplaçant dans C.3, on trouve:

$$\frac{d}{dr} c_l(r = a) = \sum_{l'} C_{ll'}(\beta) \cdot c_{l'}(a), \quad (\text{C.4})$$

où $C_{ll'}(\beta)$ peut être considérée comme la représentation matricielle, sur la base des harmoniques sphériques, de la fonction $\mathcal{C}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$. Ces coefficients sont bien sûr fonction de la longueur d'onde, ce que nous rappelons ici par la dépendance en $\beta = ka$. Calculons maintenant $C_{ll'}$. En fait, on peut développer ψ et $C_{ll'}$ en puissance du paramètre infinitésimal ϵ , sous la forme:

$$\psi = \psi_0 + \epsilon \psi_1 + \epsilon^2 \psi_2 + \dots \quad (\text{C.5})$$

$$C_{ll'}(\beta) = C_{ll'}^{(0)}(\beta) + \epsilon C_{ll'}^{(1)}(\beta) + \dots \quad (\text{C.6})$$

Chaque terme ψ_i peut d'ailleurs se décomposer comme plus haut sur la base de Y_{lm} : $\psi_i = \sum_l c_{i,l}(r) \cdot Y_{lm}$. ψ_0 étant solution du problème non-perturbé, l'équation différentielle vérifiée par ψ_1 peut s'écrire:

$$\Delta \psi - k^2 N^2 \psi_1 = -k^2 s(r, \theta) \psi_0, \quad (\text{C.7})$$

ce qui donne, exprimé sur la base des Y_{lm} , en effectuant un produit scalaire avec Y_{lm}^* , et en notant Δ_l l'opérateur laplacien sphérique $r^{-2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr} - l(l+1)/r^2$:

$$(\Delta_l - k^2 N^2) c_{l,i}(r) = -k^2 \sum_{l'} \int d\theta d\phi Y_{lm}^* s(r, \theta) Y_{l'm'} s_{l',0}(r). \quad (\text{C.8})$$

En décomposant à son tour s sur la base des Y_{lm} , (chaque coefficient est noté s_l) cette équation devient:

$$(\Delta_l - k^2 N^2) c_{l,i}(r) = -k^2 \sum_{l''} K(l, l', l'') c_{l',0}(r) s_{l''} \frac{j_l'(Nkr)}{j_l'(N\beta)}, \quad (\text{C.9})$$

avec le coefficient résultant de l'intégration angulaire:

$$K(l, l', l'') = \left\{ \frac{(2l'' + 1)(2l' + 1)}{4\pi(sl + 1)} \right\}^{\frac{1}{2}} C(l'l''l, m0m)C(l'l''l, 000). \quad (\text{C.10})$$

Or, comme plus haut, le théorème de Dirichlet permet d'écrire:

$$\frac{d}{dr} c_{l,1}(r = a) = \sum_{l'} C_{ll'}^{(1)}(\beta) \cdot c_{l',0}(a). \quad (\text{C.11})$$

L'obtention explicite de $C_{ll'}^{(1)}(\beta)$ relève ensuite des méthodes standard de l'analyse vectorielle. Introduisons la fonction de Green G_l satisfaisant $\Delta_l G_l(r, r') = \delta(r - r')$. Alors, on tire par intégration sur l'espace, de la relation précédente que:

$$C_{ll'}^{(1)}(\beta) = -K(l, l', l'') \int_0^a dr' \frac{\partial G_l(r = a, r')}{\partial r} s_{l''}(r') \frac{j_l'(Nkr')}{j_l'(N\beta)} \quad (\text{C.12})$$

On peut montrer que $\frac{\partial G_l(r=a, r')}{\partial r} = (r'^2/a^2) \frac{j_l(Nkr')}{j_l(N\beta)}$, d'où:

$$C_{ll'}^{(1)}(\beta) = -\frac{K(l, l', l'')}{a^2 j_l(N\beta) j_l'(N\beta)} \int_0^a dr' r'^2 j_l(Nkr') s_{l''}(r') j_l'(Nkr'), \quad (\text{C.13})$$

qui est d'ailleurs tout simplement $\langle l | s_{l''} | l' \rangle$. On connaît donc maintenant l'effet de la perturbation sur la solution intérieure.

Afin de calculer l'effet sur les résonances, il va falloir raccorder maintenant la solution intérieure à la solution extérieure.

C-1-2 Raccordement et théorie des perturbations.

Nous savons que cette dernière peut se mettre sous la forme d'une combinaison linéaire de fonctions de Hankel:

$$\psi = \sum_l Y_{lm}(\theta, \phi) (a_l h_l^{(1)} + b_l h_l^{(2)})(kr) \quad (\text{C.14})$$

Ecrivons une conditions de raccordement pour les dérivées logarithmiques des fonction ψ (similaire à celle rencontrée en I.17 pour des champs scalaires), en introduisant la matrice C intérieure qui vient d'être calculée au premier ordre. On trouve sur la base de Y_{lm} , par la relation C.4 (utilisée pour $r = a^+$ dans le membre de droite de manière à faire apparaître les mêmes fonctions extérieures à gauche et à droite):

$$\sum_{l'} C_{ll'} (a_{l'} h_{l'}^{(1)} + b_{l'} h_{l'}^{(2)}) = a_l h_l^{(1)} + b_l h_l^{(2)}. \quad (\text{C.15})$$

Cette dernière relation peut être réécrite matriciellement, au moyen de l'opérateur D (défini comme un opérateur de "dérivation"), qui transforme les fonctions h_l en h'_l :

$$D_{ll'}(\beta) = \delta_{ll'} \frac{h_l^{(1)'}}{h_l^{(1)}}. \quad (\text{C.16})$$

On obtient alors C.15 sous la forme $(C(\beta) - D(\beta))a_l h_l^{(1)}(\beta) + (C(\beta) - D(\beta)^*)b_l h_l^{(2)}(\beta) = 0$. On remarquera que l'opérateur non-perturbé $(C - D)^{(0)}(\beta_0)$ est diagonal. $(C - D) = \Delta$ peut ainsi être développé comme les autres opérateurs du problème en puissances de ϵ sous la forme:

$$\Delta = \Delta^{(0)} + \epsilon.\Delta^{(1)} + \dots \quad (\text{C.17})$$

Il faut maintenant exprimer le fait que l'on recherche les résonances du système perturbé. La condition de résonance—qui fixe les valeurs (complexes) de β pour lesquelles se produisent les résonances—, s'écrit ici simplement $\det(\Delta) \equiv 0$, puisque l'on considère uniquement des ondes externes sortantes. On peut d'autre part appliquer la théorie des perturbations à l'opérateur (C_D) . On trouve que les valeurs propres valent classiquement:

$$\Delta_{ll} + \sum_{l' \neq l} (\Delta_{ll'} - \Delta_{ll'}^{(0)}) (\Delta_{l'l} - \Delta_{l'l}^{(0)}) / \Delta_{l'l}^{(0)} + \dots \quad (\text{C.18})$$

Une manière suffisante de satisfaire la condition de résonance $\det(\Delta) \equiv 0$ est d'imposer la nullité de ces valeurs propres. Aux deux premiers ordres de la théorie des perturbations, on obtient:

$$\Delta_{ll'}^{(1)} = 0 \quad (\text{C.19})$$

$$\Delta_{ll'}^{(2)} - (\Delta_{ll'}^{(1)})(\Delta_{l'l}^{(1)}) / \Delta_{l'l}^{(0)} = 0. \quad (\text{C.20})$$

On peut, grâce à ces résultats, obtenir très facilement le shift en fréquence induit par la perturbation, en développant ici encore $\Delta(\beta)$ autour de sa valeur non perturbée $\Delta^{(0)}(\beta^{(0)})$ en puissance de ϵ . Si $\beta = \beta^{(0)} + \epsilon\beta^{(1)} + \epsilon^2\beta^{(2)} + \dots$, le développement de δ peut s'écrire:

$$\Delta(\beta) = \Delta^{(0)}(\beta^{(0)}) + \epsilon \left[\beta^{(1)} \Delta^{(0)' }(\beta^{(0)}) + \Delta^{(1)}(\beta^{(0)}) + \epsilon^2 \dots \right]. \quad (\text{C.21})$$

Ainsi, on obtient par identification, les effets au premier ordre en ϵ sur le mode, sous la forme:

$$\beta^{(1)} = -\frac{C_{ll}^{(1)}}{C_{ll}^{(0)'} - D_{ll}'}, \quad (\text{C.22})$$

qui contient donc dans sa partie réelle les effets de déplacement de la résonance, tandis que sa partie imaginaire reflète les effets d'élargissement éventuel.

La théorie développée ici permet de calculer l'effet d'une perturbation (symétrique) arbitraire de l'indice de la sphère diélectrique. Nous en faisons, à la page 110, une application explicite, afin de déterminer les conséquences d'une petite ovalisation (suivant l'axe des pôles).

Annexe D

Détection par modulation de phase.

Cette annexe complète la description physique du chapitre expérimental de la forme des signaux obtenus par une technique de modulation de phase. Les calculs qui suivent permettent d'analyser quantitativement les signaux obtenus lorsque l'on enregistre les modes optiques d'une cavité optique (observée par réflexion) au moyen d'un faisceau-sonde modulé en phase.

Le premier volet de cette annexe concerne l'analyse, dans un cas idéal, des signaux détectés par un photodétecteur rapide, recevant à la fois le faisceau sonde modulé, quasi-intégralement réfléchi sur le dioptre du coupleur d'entrée et la lumière rayonnée par une résonance. Nous verrons qu'il se produit un effet "d'hétérodynage" entre ces deux champs. Ensuite, nous présenterons les résultats dans le plan tournant de Fresnel, sur lequel les résonances apparaîtront soit comme des segments de droite, soit comme des cercles. Enfin, nous discuterons les conséquences d'une modulation d'amplitude parasite induite par le modulateur électro-optique.

D-1 Spectroscopie par modulation de phase.

Cette technique, utilisée depuis une cinquantaine d'années par les radioélectriciens, a seulement été utilisée relativement récemment dans des expériences de spectroscopie à haute résolution. Seule la fabrication, dans les années 60, de cristaux électro-optiques (*KDP*, *BaTiO₃*) de bonne efficacité et présentant une bonne qualité optique [78], a permis d'étendre ce mode de détection hétérodyne au domaine optique. Nous nous proposons d'analyser les signaux de spectroscopie par modulation de phase obtenus dans la partie expérimentale de ce mémoire, au chapitre deux.

Nous allons étudier, étape par étape, l'effet des résonances sur les champs optiques, et analyser le signal attendu en sortie du détecteur quadratique.

D-1-1 Modélisation dans le cas idéal.

Nous supposons ici que le laser de spectroscopie est monochromatique, de pulsation ω et polarisé linéairement. Le faisceau traverse ensuite un cristal électro-optique, parfaitement clivé suivant ses axes électriques. On suppose également que l'excitation par une onde radiofréquence de pulsation $\delta\omega$, réalisée par une ligne de propagation adaptée, polarise le milieu anisotrope exactement suivant un de ses axes propres, perpendiculairement à la direction de propagation du faisceau. Le champ laser, supposé monochromatique à l'entrée du modulateur, devient sous l'effet de la modulation de l'indice du cristal par le champ électrique radiofréquence:

$$E_{probe}(t)/E_0 = \text{Exp}[i(\omega t + m \sin \delta\omega t)] \quad (\text{D.1})$$

$$= J_0(m)\text{Exp}[i\omega t] + J_1(m)(\text{Exp}[i(\omega + \delta\omega)t] - \text{Exp}[i(\omega - \delta\omega)t]) \quad (\text{D.2})$$

E_0 représente l'amplitude initiale du champ sonde de pulsation ω et m est la profondeur de modulation qui peut s'écrire:

$$m = \frac{\pi N_{cryst}^3 r_{63} E_{RF} l_{cryst}}{\lambda_{lum}} \quad (\text{D.3})$$

N_{cryst}^3 est l'indice optique du cristal anisotrope pour la polarisation considérée, r_{63} l'élément approprié du tenseur des coefficients électro-optiques du matériau (typiquement $10^{-11} m/V$), E_{RF} l'amplitude du champ radio-fréquence qui réalise l'excitation du cristal de longueur l_{cryst} . J_l sont les fonctions de Bessel. Pour des modulations de faible profondeur, on peut ne conserver¹ que le premier ordre en m . On notera $\alpha = J_1(m)$, et on assimilera $J_0(m)$ à l'unité. Numériquement, pour un Watt (dans 50Ω) de radiofréquence circulant le long d'un cristal de $TiNbO_3$ de $25mm$ de long et de $2mm$ de section, on trouve environ $m \approx 0.04$. On en déduit que l'efficacité de modulation vaudra environ $\alpha \approx 2.5\%$.

Le champ électromagnétique, après traversée du modulateur de phase peut s'écrire [92]:

$$E_{probe} = E_0(\exp(i\omega t) + \alpha \exp(i(\omega + \delta\omega)t) - \alpha \exp(i(\omega - \delta\omega)t)) \quad (\text{D.4})$$

En raison de la nature de notre système de couplage par onde évanescente, le champ du laser traverse presque sans perte (hormis la portion envoyée sur la cavité) le prisme à réflexion totale: le détecteur reçoit donc simultanément le champ sonde et le champ revenant de la cavité. Ce système optique s'apparente donc à une cavité fabry-Pérot observée en réflexion. Le champ qui parvient au détecteur peut s'écrire :

$$E_{sensor} = E_{probe} + H(E_{probe}). \quad (\text{D.5})$$

¹Il faut également vérifier que la longueur l du cristal est très petite devant $2\pi/k(N(\omega + \delta\omega) - N(\omega))$ (condition de phase-matching). Par exemple, pour une fréquence de modulation de $100MHz$, on trouve $3m$, ce qui est très grand devant la longueur du cristal de $LiNbO_3$. Il faut également que l'inverse du temps de transit des photons dans le cristal soit grand devant la fréquence de modulation. [92]

On a noté $H(E_{probe})$ la fonction de réponse de la cavité pour le champ E_{probe} (qui comporte dans notre cas les trois bandes produites par la modulation). Sur un petit intervalle de fréquence, les résonances fines de galerie (comme les modes d'un Fabry-Pérot) ont une forme lorentzienne (voir page 36), et donc, pour une onde monochromatique E de pulsation Ω et d'amplitude e , l'amplitude du champ rayonné par le mode peut s'écrire $H(E, \Omega) = eh\Gamma(\Gamma + i(\Omega - \omega_0))^{-1}$. Dans cette expression, h représente l'amplitude du couplage du champ incident au mode de galerie considéré, de pulsation ω_0 , et de largeur Γ . L'intensité perçue par le détecteur rapide vaudra $I_{sensor} = E_{sensor}E_{sensor}^*$. Le signal en provenance du détecteur est démodulé exactement à la fréquence de la modulation de phase $\delta\omega$. Le signal $\mathcal{S}(\omega, \delta\omega)$ détecté à cette pulsation vaut:

$$\mathcal{S}(\omega, \delta\omega)_{sensor}(\delta\omega)[\omega] = \mathcal{FT}(\delta\omega)(E_{sensor}[\omega]E_{sensor}[\omega]^*) \quad (D.6)$$

est donc la composante de Fourier de l'intensité reçue par le détecteur à la fréquence de modulation. Dans notre expérience, la démodulation autour de la pulsation $\delta\omega$ est effectuée par deux appareils distincts. L'un est un récepteur scalaire d'une part, qui mesure en fait l'énergie détectée dans une bande de fréquence réglable autour de $\delta\omega$: nous appellerons ce mode de démodulation, détection scalaire, car un tel appareil ne détecte donc pas la phase relative du photocourant par rapport à la modulation RF. L'autre utilise une détection synchrone, référencée par le signal de modulation RF. Cette dernière est capable de mesurer (dans une bande de quelques centaines de Hertz) les deux quadratures du signal à $\delta\omega$: nous l'appellerons détection vectorielle. Nous allons donc effectuer le calcul des signaux, dans ces deux cas.

L'expression analytique suivante peut être obtenue pour $\mathcal{S}(\omega, \delta\omega)$:

$$\mathcal{S}(\omega, \delta\omega) = e^2 \frac{2 a \delta\omega (\Gamma^{-1})^2 h (2 + i \delta\omega \Gamma^{-1} + h) (\omega - \omega_0)}{(1 + 2 i \delta\omega \Gamma^{-1} - \delta\omega^2 (\Gamma^{-1})^2 + (\omega - \omega_0)^2 (\Gamma^{-1})^2) (1 + (\omega - \omega_0)^2 (\Gamma^{-1})^2)}. \quad (D.7)$$

On remarque au dénominateur de cette fraction rationnelle, trois pôles distincts dont on va voir les conséquences physiques. Donnons pour fixer les idées l'allure de variation, de $\mathcal{I}_{sensor}(+\delta\omega)[\omega]$ en fonction de ω , ce qui correspond dans l'expérience à balayer le laser tout en maintenant la fréquence de modulation RF fixe. Pour les paramètres suivants, $\Gamma^{-1} = 25$, $\delta\omega = 2$, $\omega_0 = 10$, $e = 1$ et $h = 0.1$, la figure D.1 montre à gauche l'amplitude $\|\mathcal{S}(\omega, \delta\omega)\|$ détectée par le récepteur scalaire à la fréquence de modulation et à droite les deux quadratures enregistrées simultanément.

Les deux pics symétriques, centrés sur $\omega_0 \pm \delta\omega$, correspondant au passage d'une bande latérale FM sur la cavité. Enfin, strictement en ω_0 , le signal s'annule, ce qui se comprend car alors la cavité est exactement au centre des bandes latérales; ces dernières étant déphasées identiquement par la cavité, leur somme vectorielle donne zéro. La fonction $\mathcal{S}(\omega, \delta\omega)$ étant complexe, il pourrait être intéressant de la représenter dans le plan complexe, en fonction de ω pris comme paramètre.

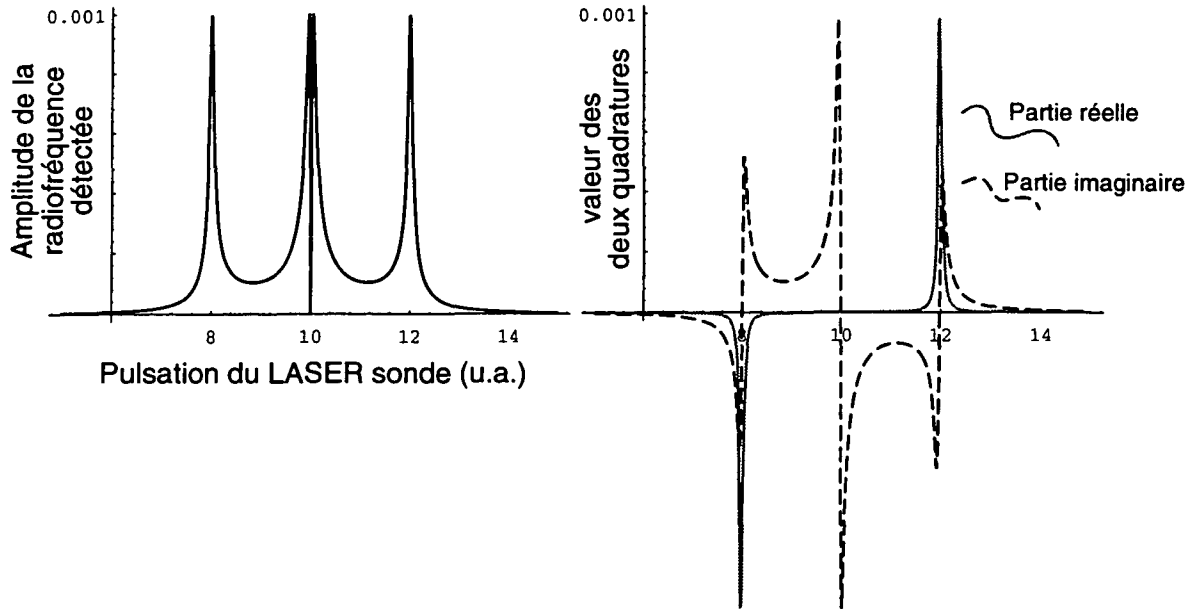


Figure D.1: Simulation de l'amplitude des photo-signaux détectés à la fréquence de la modulation de phase, en fonction de la fréquence du laser sonde. À gauche on a représenté l'amplitude totale de ce signal, et à droite, les deux quadratures démodulées en utilisant l'oscillateur local (qui alimente le modulateur électro-optique) comme référence.

D-2 Représentation dans le plan de Fresnel.

D-2-1 Cas idéal.

La représentation paramétrique de \mathcal{I}_{sensor} dans le plan complexe possède une signification physique importante. Une telle courbe paramétrée donne en fait la phase et l'amplitude de l'onde électrique issue du détecteur, dans le plan tournant à la pulsation $\delta\omega$ (plan de Fresnel). Avec les mêmes valeurs indicatives des paramètres, on obtient dans le plan de Fresnel la courbe D.2 (à gauche) :

On remarque deux cercles identiques et un segment sur la médiatrice des centres. Les cercles proviennent du terme en $(1 + 2i\delta\omega\Gamma^{-1} - \delta\omega^2(\Gamma^{-1})^2 + (\omega - \omega_0)^2(\Gamma^{-1})^2)^{-1}$ (ce terme se décompose en deux facteurs symétriques $(i \pm \delta\omega\Gamma^{-1})$ qui sont bien les équations des transformées de deux droites par une inversion géométrique).

D-2-2 "Fuite" vectorielle.

Le calcul qui vient d'être exposé supposait le laser monochromatique et le modulateur électro-optique parfaits. Étudions les conséquences d'éventuelles imperfections du modulateur.

Dans un modulateur réel, de petits désalignements angulaires des axes propres du

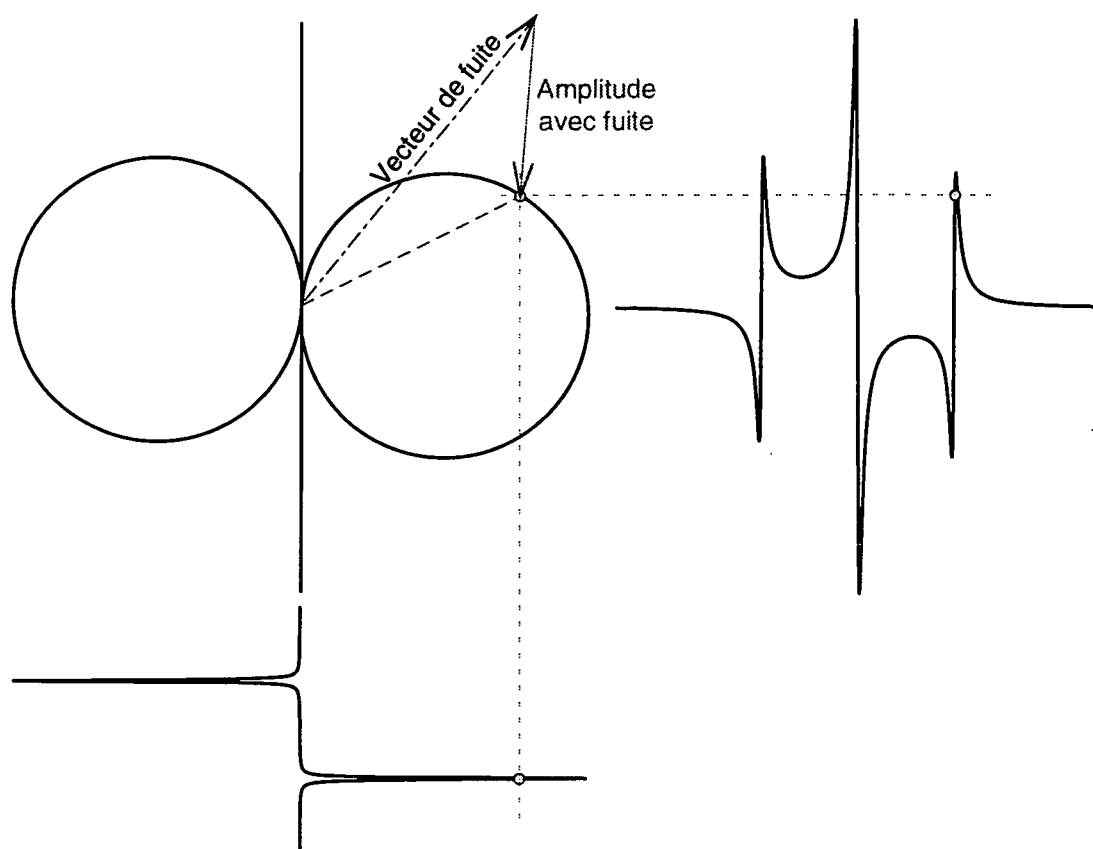


Figure D.2: A partir des deux quadratures, on obtient aisément la représentation polaire du photo-courant démodulé à la fréquence $\delta\omega$, pour un balayage en fréquence du laser sonde.

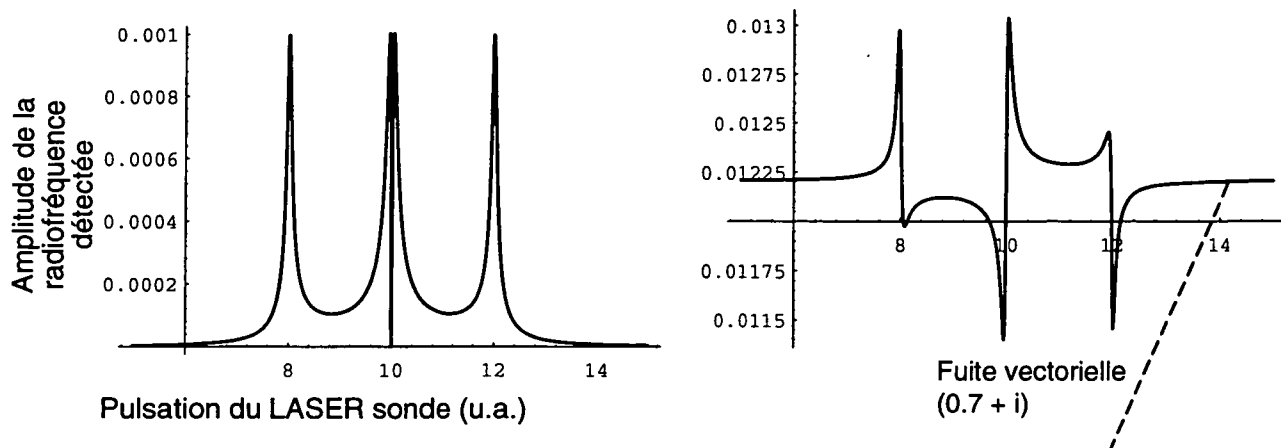


Figure D.3: L'addition au photo-signal d'un signal parasite radiofréquence, cohérent avec l'oscillateur local, d'amplitude relative $0.7 + i$, modifie la forme des signaux scalaires.

cristal ou encore des effets de chauffage par pertes diélectriques de ce dernier provoquent l'apparition d'une modulation d'amplitude à la pulsation $\delta\omega$. Cette composante va être directement détectée (la quasi-totalité du champ est directement réfléchi vers détecteur) par la chaîne de démodulation: au signal utile va se superposer un signal continu, éventuellement très grand devant la mesure. La détection ne sera plus sur fond noir. Cette "fuite" continue peut être représentée sur le diagramme de Fresnel comme un vecteur fixe (noté sur la figure D.2 "vecteur de fuite"), l'amplitude du signal utile étant appelé "amplitude avec fuite". Ce "bruit" parasite, indépendant de la fréquence optique du laser sonde, va simplement décaler le zéro des deux quadratures. En revanche, la forme générale du signal donnant l'amplitude totale (détection scalaire) va être modifiée. Cette déformation est représentée figure D.3, à droite, pour une modulation d'amplitude parasite valant $(0.7 + i) \exp[i\delta\omega t]$: on voit que loin de la résonance, l'amplitude détectée et non-nulle et vaut $\sqrt{0.7^2 + 1^2} = 1.22$. La courbe de gauche rappelle la forme du signal obtenu en l'absence de cette modulation parasite.

On voit qu'une modulation d'amplitude résiduelle peut déformer les pics lorentziens de la figure D.1 et leur donner une forme dispersive.

Annexe E

Quelques propriétés de la Silice

La silice présente un bon nombre de caractéristiques physiques et chimiques proprement spectaculaires. Nous ne parlerons pas ici des nombreux effets anisotropes, rencontrés dans les diverses variétés allotropiques cristallisées de l'oxyde SiO_2 —comme le quartz α par exemple, largement utilisé pour sa piézo-électricité ou ses propriétés rotatoires. Nous allons nous intéresser au contraire au verre de silice, matière vitreuse isotrope, exceptionnellement transparente dans l'infrarouge. Sa structure de verre, désordonnée à grande distance, lui confère également des propriétés mécaniques incomparables.

E-1 Propriétés mécaniques.

La structure du verre de silice, ainsi que l'énergie de valence de la liaison $Si - O$ sont principalement responsables de l'élasticité remarquable de ce matériau, qui présente en outre un coefficient de dilatation linéaire (thermique) très faible.

E-1-1 Structure

Afin de mieux comprendre les propriétés physico-chimiques du verre de silice, examinons sa structure [128][62]. Comme dans la plupart des silicates, l'unité structurale de base est un tétraèdre compact, constitué d'un atome de silicium lié à quatre atomes d'oxygène. Chacun d'eux appartient à deux tétraèdres adjacents : de ce fait chaque tétraèdre est lié à quatre de ses voisins. A plus grande échelle, le matériau est formé d'un réseau interconnecté de cycles de 5 à 7 tétraèdres élémentaires, l'orientation individuelle de chacun étant quasiment aléatoire. Le diamètre moyen des cycles de silicate est compris entre 0.4 et 0.5 nanomètres. Un tel verre présentera donc des variations spatiales de ses paramètres physiques, comme l'indice, à l'échelle d'un demi nanomètre. (cf diffusion Rayleigh ci-dessous).

La figure E.1 montre le détail de la disposition des tétraèdres[128].

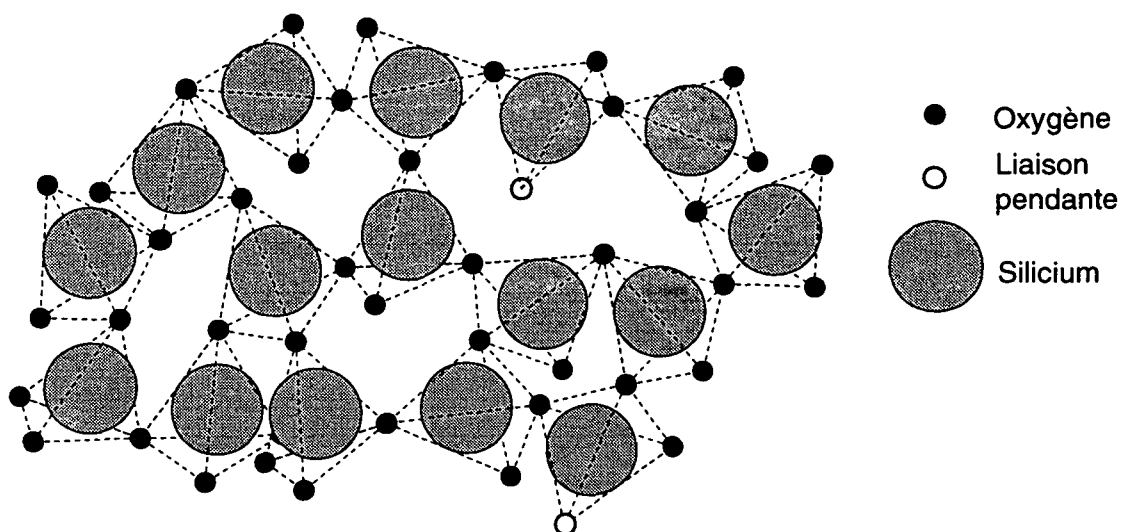


Figure E.1: Structure du verre silice.

E-1-2 Propriétés mécaniques

E-1-2-1 Elasticité

En raison du caractère fibreux du verre (cf la figure E.1 montrant les chaînes formées de tétraèdres), et de l'énergie élevée de la liaison SiO ($\Delta H_f^0(SiO_2^{vitreux}) = -202 \text{ kcal/mol}$) le module de Young Y_{SiO_2} (qui est le rapport de la contrainte et de l'allongement relatif) de la silice vitreuse est relativement peu élevé : $\approx 7.03 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$, ce qui en fait un matériau sensiblement cinq fois plus élastique que l'acier, avec une limite élastique extrêmement élevée, quasi confondue avec la limite de rupture, de l'ordre de $5 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$ (30 fois l'acier dur). La déformation à la rupture est de l'ordre de 10%! Le module de Poisson ν vaut 0.17. Dans le corps du texte nous présentons un procédé d'accord, qui utilise une déformation élastique de la sphère de silice. Toutefois, la valeur limite de la déformation avant rupture est totalement déterminée, dans le cas d'un matériau homogène de qualité optique, par la surface : toute amorce de recristallisation ou de fracture en surface, va nucléer une amorce de rupture qui va se propager rapidement et entraîner la fracture du verre : dans ce cas, la limite de rupture peut être abaissée d'un facteur mille (dans le cas d'un verre en contact prolongé avec de l'eau et des espèces alcalines). Pour des fibres optiques convenablement nettoyées, les ingénieurs du CNET affirment qu'une déformation permanente de plusieurs pour cent n'entraîne pas la rupture, à condition de travailler dans une atmosphère sèche (voir infra). Un article récent de A.L. Huston et J.D. Eversole [86] annoncent, toujours pour des fibres de silice, des déformations non-destructives de 1.5%.

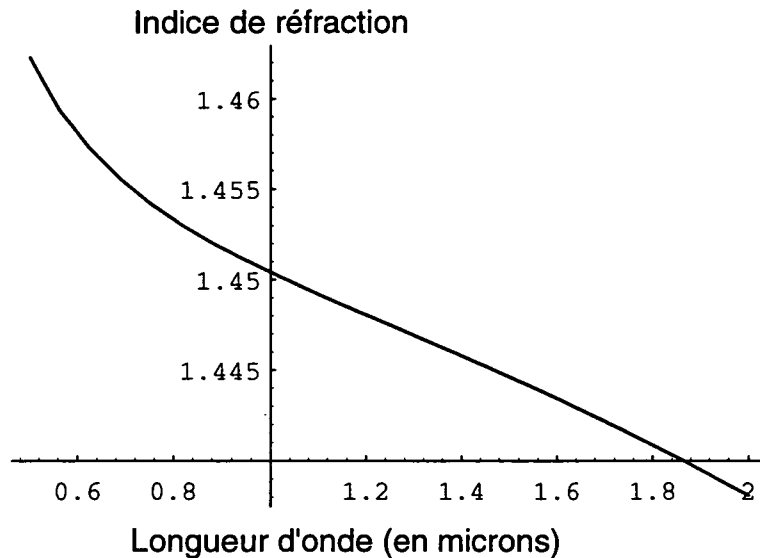


Figure E.2: Propriétés dispersives du verre de silice.

E-1-2-2 Expansion thermique

Le coefficient de dilatation du verre de silice α_T vaut, au voisinage de la température ambiante entre 20 et 800°C :

$$\alpha_T = 5.5 \cdot 10^{-7} \cdot K^{-1}$$

Toutes ces propriétés mécaniques peuvent être notablement modifiées lorsque le verre est placé à haute température, dans une solution alcaline (Ca, K...). Des ions du bain peuvent alors s'immiscer dans le réseau de tétraèdres et occuper les interstices. Le module de Young est alors beaucoup augmenté et le coefficient de dilatation thermique diminué. Ce procédé de trempe alcaline pourrait peut-être servir à renforcer localement (loin de la zone optiquement active) les points d'attache de nos microsphères à leur fibre support.

E-2 Propriétés optiques.

E-2-1 Indice de réfraction et dispersion.

Le verre de silice présente comme la plupart des diélectriques une variation de son indice de réfraction en fonction de la longueur d'onde. Les tables de références fournissent des formules approchées quantifiant cette dispersion [87]. On peut obtenir ainsi l'indice en fonction de la longueur d'onde, représenté figure E.2 sur l'intervalle 0.5 – 2 μm . (La précision annoncée [87] est de quelques 10^{-5} !)

En particulier, l'indice du matériau est voisin de 1.453 à la longueur d'onde de 785 nm utilisée dans nos expériences. Toutefois, une faible concentration (jusqu'à 1000 ppm) de Cl dans le verre (provenant en général du $SiCl_4$ employé dans le procédé de synthèse chimique du verre de silice ultra-pur) peut abaisser l'indice de quelques 10^{-4} .

E-2-1-1 Effet d'une variation thermique sur l'indice.

L'effet d'une variation de température du verre de silice sur l'indice N , peut être estimé, au voisinage de la température ambiante, par l'expression [87]:

$$N(T) = 1.453 + \partial_T N(T - 273)$$

avec $\partial_T N = 1.28 \cdot 10^{-5} K^{-1}$ Lorsque l'on souhaite déterminer l'effet d'une variation de température sur la position des résonances de galerie, il convient de prendre garde à comptabiliser l'action combinée des effets de dilatation thermique, et de diminution de l'indice optique. Le calcul est effectué à la page 120.

E-2-1-2 Effet d'une contrainte sur l'indice

L'application d'une contrainte sur un matériau transparent isotrope, brise en général la symétrie de sa structure, et le milieu devient anisotrope : pour une compression pure, par exemple, on s'attend intuitivement à ce que la permittivité du milieu augmente pour une polarisation électrique colinéaire à l'axe de la compression (il y a maintenant plus d'atomes par unité de longueur selon cette direction), et diminue pour une polarisation orthogonale. Nous avons trouvé dans la littérature une valeur expérimentale de la constante photo-élastique de la silice $C_p = -3.36 \cdot 10^{-12} m^2/N$, définie de la manière suivante [85]:

$$(\delta N_{\perp} - \delta N_{\parallel}) = C_p \times Y \times \mathcal{A} = -0.236 \mathcal{A}, \quad (\text{E.1})$$

qui relie la différence des indices mesurés perpendiculairement et suivant l'axe de la contrainte au module de Young de la silice (voir ci-dessus) et à l'allongement \mathcal{A} . Utilisons cette valeur pour vérifier les constantes de Pockels pour la silice p_{11} et p_{12} utilisées dans le corps du texte page 119 pour estimer les possibilités d'accord mécanique de la cavité. On aura:

$$(\delta N_{\perp} - \delta N_{\parallel}) = -\frac{N^3}{2}(1 + \sigma) \{p_{12} - p_{11}\} \mathcal{A} = -0.239 \mathcal{A}. \quad (\text{E.2})$$

Le bon accord obtenu semble donc confirmer les chiffres de Borrelli et Miller [85].

E-2-2 Propagation dans une structure optique en silice.

La transparence de la silice vitreuse dans le visible est aujourd'hui très bien connue du fait de l'essor industriel des fibres optiques. On peut recenser un certain nombre d'effets physiques conduisant à des pertes intrinsèques. Certaines de ces pertes sont provoquées par les électrons des liaisons de l'édifice moléculaire proprement dit; d'autres à de petites fluctuations en volume du remplissage du solide, causées par l'agencement quasi-aléatoire des "filaments" de $SiO_2 - SiO_2 - \dots$ qui induisent des modifications de l'indice de réfraction. D'autres enfin proviennent d'ondulations infimes de la surface délimitant la structure optique.

- Queue d'absorption ultra-violette : les orbitales électroniques des liaisons $Si - O$ sont, aux grandes énergies, peuvent entrer en résonance avec un champ électromagnétique extérieur. Aux fréquences optiques qui nous intéressent dans le proche infrarouge, loin de toute raie UV, il reste une absorption résiduelle, qui est ici négligeable devant les autres causes de pertes (voir courbe E.3). (Cela explique également que la silice ne soit plus transparente pour des longueurs d'ondes inférieures à $200nm$).
- Absorption infrarouge : du côté rouge du spectre on trouve cette fois les raies vibrationnelles de l'édifice. Une bonne approximation de cette absorption infrarouge est $\exp(-K(\nu - \nu_1))$.
- Diffusion Rayleigh : les fluctuations d'indice du matériau, à l'échelle moléculaire ($\ll \lambda_{lum}$), conduisent à une diffusion en volume dans le matériau en ν^4 .
- Diffusion par les ondulations de surface. Pour des fluctuations de très petite échelle spatiale, les pertes sont indépendantes de la longueur d'onde.
- Pertes causées par d'autres espèces chimiques : ions OH^- (pic d'absorption à 1.4μ), ions Fe^{2+} absorbant dans le rouge et l'infrarouge ...

Nous donnons dans la figure E.3 ci-dessous les effets (mesurés) de ces différentes causes de perte, avec leurs poids respectifs (en lignes discontinues), et l'absorption mesurée dans une fibre de télécommunication (il s'ajoute ici l'absorption de GeO utilisé pour augmenter l'indice du cœur). [66]. Le minimum d'absorption se trouve à $1.55\mu m$, la longueur d'onde utilisée pour les communications à grande distance. A cette longueur d'onde, la valeur généralement admise de l'absorption propre du matériau homogène est $0.14dB/km$. L'atténuation minimale mesurée (1992) sur des fibres silice est de l'ordre de $0.17 db/km$. A $780nm$, l'absorption du diélectrique est d'environ $2 db/km$.

E-2-3 Contamination du diélectrique.

Le paragraphe E-1 ci-dessus présentait la structure de la silice vitreuse. Cet édifice n'est en fait stable qu'en l'absence de tout polluant (eau, ions alcalins).

Cette structure lacunaire explique en effet la facilité avec laquelle les verres silicatés peuvent être pollués en volume par des ions alcalins (électro-positifs) : ceux-ci peuvent en effet facilement entrer dans les cages formées par les cycles de tétraèdres. La diffusion de telles espèces, grandement facilitée par l'élévation de la température du réseau, peut être mise à profit pour doper (au voisinage de la surface toutefois) le verre par des ions actifs.

D'autres polluants comme des molécules d'eau peuvent jouer un rôle encore plus pernicieux que les impuretés alcalines et même détruire l'édifice moléculaire. L'eau favorise en effet la fissuration du matériau, en se substituant aux liaisons qui garantissent la stabilité des sites tétraédriques. Cette réaction peut entraîner la séparation de deux tétraèdres. Elle abaisse d'un facteur 20 l'énergie nécessaire à la rupture d'une liaison oxygène-silicium (d'après [128]). Enfin, à la suite de contaminations de surface, ou après un recuit prolongé,

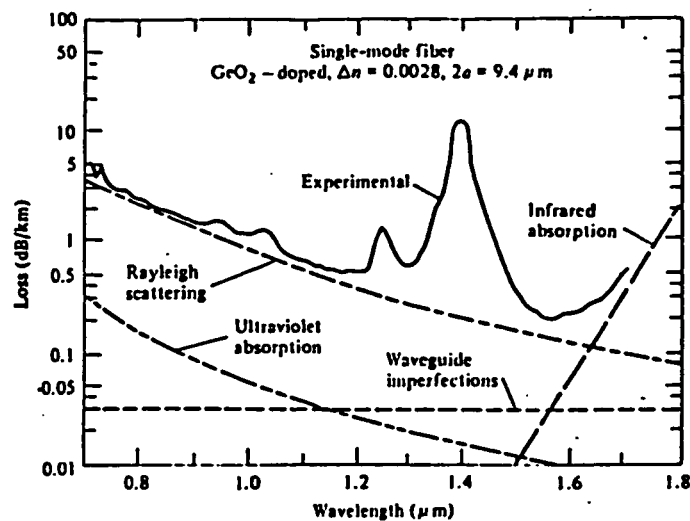


Figure E.3: Pertes d'une fibre optique (dopée GeO₂) en fonction de la longueur d'onde. Plusieurs des causes de pertes sont ici individuellement ajoutées.

la silice vitreuse peut localement recristalliser—se dévitrifier, les tétraèdres se réordonnant en une structure régulière (cristoballite). Une telle transformation est catastrophique pour un verre à faible perte, car les zones cristallisées n'ont pas le même indice de réfraction que le verre. Il en résulte l'apparition de centres diffuseurs, qui ruinent la transparence optique du matériau.

E-2-4 Microsphères et silice synthétique.

Dans toutes les expériences que nous avons réalisées jusqu'à ce jour, le verre de silice utilisé était une silice synthétique de production commerciale (Héraeus). La manipulation dans l'atmosphère de ces baguettes de silice, les a nécessairement mises en contact avec de l'eau. Les réactions chimiques décrites au paragraphe précédent peuvent donc faire pénétrer des ions hydroxydes dans l'édifice du matériau, ce qui conduirait à des pertes en volume inacceptables pour des expériences réalisées au voisinage de la longueur d'onde d'absorption de OH^- ($\lambda > 1 \mu\text{m}$).

On pourrait imaginer de synthétiser la silice ultra pure requise pour nos expériences directement dans notre enceinte à vide. Il suffirait de partir d'un fil de silice déjà très pur, placé comme dans le processus de fusion par LASER actuel, au waist des deux faisceaux CO_2 . Supposons que la puissance de ces faisceaux soit choisie de manière à chauffer la silice en dessous de son point de fusion, par exemple vers 1500°C . Si un flux gazeux à faible pression de SiCl_4 et d'oxygène est dirigé au moyen d'un capillaire sur la zone chauffée, la réaction endothermique de synthèse de la silice par oxydation du SiCl_4 devrait se produire précisément au point de focalisation des LASER CO_2 . Ce procédé serait très propre, puisque les réactifs gazeux déposent de la silice synthétique, sans autre contact qu'un fragment de silice de bonne pureté. La silice formée par une telle

réaction est en général poreuse, ce qui permettrait d'ailleurs de doper la silice produite en volume, par co-évaporation d'un dopant au voisinage de la sphère en formation (chlorure de néodyme sublimé dans un four de tungstène par exemple). Une étape finale de fusion sous vide à haute température de l'ébauche obtenue devrait permettre de produire une microsphère de très bonne qualité. Il se pourrait qu'une telle technique, qui s'inspire de l'un des procédés industriels de fabrication des fibres optiques, s'impose pour observer des facteurs de qualité records à la longueur d'onde de $1.55\mu m$, longueur d'onde à laquelle les polluants (ions OH^-) sont particulièrement néfastes.

Bibliographie

- [1] P.R. Berman. *Advances in Atomic, Molecular and Optical Physics*, volume Supp. 2. Academic Press Inc., London, 1994. Ce livre et les références qui y sont incluses, donnent un panorama très complet des développements théoriques et expérimentaux de l'Electrodynamique en cavité depuis les origines.
- [2] M. Brune, S. Haroche, V. Lefèvre, J.M. Raimond, and N. Zagury. *Physical Review Letters*, (65), 1990.
- [3] M. Brune, S. Haroche, V. Lefèvre, and J.M. Raimond. *Physical Review A*, (45), 1992.
- [4] L. Davidovich, A. Maali, M. Brune, J.M. Raimond, and S. Haroche. *Physical Review Letters*, (71), 1993.
- [5] J.M. Raimond, M. Brune, L. Davidovich, and S. Haroche. Mesoscopic quantum coherences in cavity qed, fundamentals of quantum optics iii. In F. Ehlotzky, editor, *Fifth Meeting on Laser Phenomena*, Berlin, 1993. Springer Verlag.
- [6] Pour une revue des travaux théoriques et expérimentaux sur l'interaction des atomes de Rydberg avec le rayonnement, se référer par exemple à: J.M. Raimond and S. Haroche, in *Advances in Atomic and Molecular Physics*, D.R. Bates and L. Esterman, Eds., Academic Press Inc., vol. 20, NewYork (1985).
- [7] H.J. Kimble. *Structure and Dynamics in Cavity Quantum Electrodynamics*. Berman, 1994.
- [8] F. Bernardot, P. Nussenzveig, M. Brune, J.M. Raimond, and S. Haroche. Vacuum rabi splitting observed in a microwave cavity. *Europhysics Letters*, (17), 1992.
- [9] G.R. Jacobivitz F. De Martini, G. Innenti and P. Mataloni. *Physical Review Letters*, (59), 1987.
- [10] V. Braginsky, Y.I. Vorontsov, and F.I. Khalili. *Zh. Eksp. Theor. Fiz.*, (73), 1977.
- [11] G. Mie. Beitrage zur optik trüben-medien, speziell kolloïdalen metallosungen. *Ann Phys. (Leipzig)*, (25), 1908.

- [12] L. Lorenz. *Kgl. Danske Vidensk. Selk. Skrifter*, (6), 1890.
- [13] Lord Rayleigh. *Phil. Mag*, (47), 1899.
- [14] Lord Rayleigh. On the light from the sky, its polarisation and colour. *Phil. Mag.*, 1871.
- [15] P.J. Debye. *Physik. Z*, (9), 1908.
- [16] P.J. Debye. *Ann. Physik*, (30), 1909.
- [17] Lord Rayleigh. *Theory of Sound*, volume 1. Macmillan and co., 1877.
- [18] New Grolier Multimedia encyclopedia on CDROM, 1992.
- [19] Lord Rayleigh. *Phil. Mag*, (12), 1881.
- [20] Lord Rayleigh. *Phil. Mag*, (27), 1914.
- [21] R.D. Richtmyer. Diélectric resonators. *J. Appl. Phys.*, 10, 1939.
- [22] F. Linke and F. Möller. *Handbuch der Geophysik*, volume 8. Gebrüder Bornträger, Berlin, 1961.
- [23] A. Ashkin and J.M. Dziedzic. Optical levitation by radiation pressure. *Appl. Phys. Lett*, (19), 1971.
- [24] A. Ashkin and J.M. Dziedzic. Observation of resonances in the radiation pressure on dielectric spheres. *Physical Review Letters*, (38), 1977.
- [25] E.J. Mc Cartney. *Optics of the atmosphere*. Wiley ed., NewYork, 1976.
- [26] R.A.R. Tricker. *Introduction to meteorological optics*. Elsevier, 1970.
- [27] P.W. Barber and R.K. Chang. *Optical effects associated with small particles*. World Scientific, Singapore, 1988. Ce livre donne un grand nombre de références sur les expériences réalisées sur les résonances de galerie.
- [28] W.L. Bond C.G.B. Garrett, W. Kaiser. *Physical Review Letters*, (124), 1961.
- [29] R.E. Benner, P.W. Barber, and R.K. Chang. *Physical Review Letters*, (44), 1980.
- [30] Thurn. Structural resonances observed in the raman spectra of optically levitated liquid droplets. *Applied Optics*, 24(10), 1985.
- [31] A. J. Campillo, J.D. Eversole, H.B. Lin, and A.L. Huston. *J.O.S.A*, 1990. A 7, p.2159 and B 7, p.2079.
- [32] T. Baer. *Opt. Letters*, (12), 1987.

- [33] S.X. Quian, J.B. Snow, H.M. Tseng, and R.K. Wang. *Science*, (231), 1986.
- [34] Y. Wang, Y. Li, Y. Liu, and B. Zu. *SPIE Proc.*, (150), 1991.
- [35] R.H. Stolen E.P. Ippen. *Applied Physics Letters*, (21), 1989. (Consulter également J.Z. Zhang and R.K. Chang, *J.O.S.A B*, 6, 151, (1989).).
- [36] V. B. Braginsky and F. I. Khalili. *Zh. Eksp. Theor. Fiz*, 78, 1980.
- [37] N. Imoto, H. A. Haus, and Y. Yamamoto. *Physical Review A*, 32, 1985.
- [38] M. D. Levenson, R. M. Shelby, M. Reid, and D. Walls. *Physical Review A*, 57, 1986.
- [39] S. Shiller. PhD thesis, Stanford University, 1993. PhD.
- [40] S. Schiller and R.L. Byer. *Optics Lett.*, 16(15), 1991.
- [41] A.T. Young. Rayleigh scattering. *Physic Today*, 1(35), 1982.
- [42] H.M. Nussenzveig. *Diffraction Effects in Semiclassical Scattering*, volume 1 of *Montrroll Memorial Lecture Series in Mathematical Physics*. Cambridge University Press, 1992.
- [43] I. Newton, 1704. For in June 1692, I saw by reflexion in a vessel of stagnating Water three Halos, Crowns, or Rings of Colours about the Sun, Like the little Rainbows, concentrick to his body.
- [44] H.M. Nussenzveig. *Scientific American*, (236), 1977.
- [45] A. Messiah. *Quantum Mechanics*. North Holland, Amsterdam, 1957.
- [46] L.I.Schiff. *Quantum Mecanics*. Mc Graw-Hill, NewYork, 3rd edition, 1968.
- [47] Lai et al. *Physical Review A*, (41), 1990. and also in *Laser Handbook*, vol.1,I. Ronchi, p.152, T. Arecchi and E.O. Schulz-Dubois eds., North-Holland, (1972).
- [48] B.R. Johnson. *J.O.S.A*, vol 10(2), 1993.
- [49] H.C. Van de Hulst. *Absorption and Scattering of Light by Small Particles*. Wiley-Interscience Publi., 1983.
- [50] Goldstein. *Mécanique Classique*. Dunod, Paris, 1957.
- [51] J. Wiscombe. Improved mie scattering algorithms. *Applied Optics*, (19), 1980.
- [52] H.M. Nussenzveig. *J. Math. Phys.*, (10), 1969a.
- [53] H.M. Nussenzveig. *J. Math. Phys.*, (10), 1969b.
- [54] J.P. Barton, D.R. Alexander, and S.A. Schaub. *J. Applied Physic*, 65, 1989.

- [55] V.S. Ilchenko, M.L. Gorodetsky, and V.B. Braginsky. *Phys. Rev. A*, 137, 1989.
- [56] L. Collot, V. Lefèvre-Seguin, M. Brune, J. M. Raimond, and S. Haroche. Very high Q whispering-gallery-modes in silica microspheres. *Europhys. Letters*, 23(5), 1993.
- [57] L.G. Guimaraes and H.M. Nussenzveig. Uniform approximation to mie resonances. *J. Mod. Optics.*, 1994. To Appear.
- [58] F. W. J. Olver. *Trans. Roy. Soc. London*, 250, 1958.
- [59] J.Hare a grandement contribué à faire fonctionner cette méthode de calcul.
- [60] H.M. Lai, C.C. Lam, P.T. Leung, and K. Young. *J.O.S.A B*, 8, 1991.
- [61] S. Haroche, 1990. Ecole d'été des Houches LIII.
- [62] A-C. Boccara. Mesurer la rugosité à l'échelle du picomètre. *La Recherche*, 24, Janvier 1993.
- [63] G. Rempe, J.R. Thompson, R.J. Brecha, W.D. Lee, and H.J. Kimble. *Physical Review Letters*, 13(67), 1991.
- [64] E. Giacobino M. Ducloy and C. Camy, editors. *Proceedings of the X international Conference on Laser Spectroscopy*. World Scientific, 1992.
- [65] H.T. Kimble. Private communication.
- [66] T. Miya, Y. Tarunuma, T. Hosak, and T. Migashita. Ultimate low loss single mode fibre at $1.55\mu\text{m}$. *Elec. Lett.*, 15(4), 1979.
- [67] V. B. Braginsky, V.S. Ilchenko, M.L. Gorodetsky, and S.P. Vyatchanin. *Proc. spie. Laser Optics 93*, 1994. to appear.
- [68] Communication faite lors de la visite de l'atelier "fibres optiques" du CNET (Lannion): la présence de chlore diminue légèrement l'indice du verre, effet qui doit donc être pris en compte lors de la fabrication.
- [69] Nous avons limité autant que possible la tension d'accélération à moins de $10kV$.
- [70] Braginsky, 1994. MPQ, Munich.
- [71] S.K. Sheem and T.G. Giallorenzi. *Optics Letters*, 1979.
- [72] M.W. Flemming and A. Mooradian. *IEEE J. Quantum Elect.*, (17), 1981.
- [73] H. Tabuchi and H. Ishitawa. *Elec. Lett.*, (26), 1986.
- [74] Notoni et al. *IEEE Photon Techn. Lett.* 2, (85), 1990.
- [75] M. Ohtsu, N Nakagawa, M. Kouroggi, and W. Wang. *J. Appl. Phys.*, (73), 1993.

- [76] Cet accéléromètre est constitué d'une céramique PZT bimorphe (Philips), branchée entre l'entrée inverseuse et la sortie d'un amplificateur d'électromètre (Analog Device).
- [77] *Optical Components div., Techn. Sheets*, 1993.
- [78] L. C. Peters. Gigacycle bandwidth coherent light travelling and phase modulation. *proc. IEEE*, 51, 1963.
- [79] A. J. Campillo, J.D. Eversole, and H.B. Lin. Cavity quantum electrodynamic enhancement of stimulated emission in microdroplets. *Physical Review Letters*, (67), 1991.
- [80] G. Chen, K. Chang, S. Hill, and W. Berber. *Optics Letters*, 16(16), 1991.
- [81] R.M. Goody. *Atmospheric Radiation*. Oxford University Press, NewYork, 1964.
- [82] G. Binnig, 1994. Discussion de l'épaisseur du film d'eau, IBM Germany, Munich.
- [83] Fabriqués par la société allemande Physik Instrument, ces actionneurs piézoélectriques sont découpés par étincelage dans un seul bloc d'acier inoxydable qui assure une multiplication par dix des déplacements d'un "stack" PZT.
- [84] J.L. Hall, L. Hollberg, T. Baer, and H.G. Robinson. *Appl. Phys. Lett.*, (39), 1981.
- [85] N.F. Borelli and R.A. Miller. *Applied Optics*, 7, 1968.
- [86] J.D. Eversole and A.L. Huston. *Optics Letters*, 18, 1993.
- [87] Melles Griot Corporation. *Optical Materials section*, 1991.
- [88] S. Schiller and R. L. Byer. *Optics Letters*, 16(15), 1991.
- [89] V.S. Ilchenko and M.L. Gorodetsky. *Laser Physics*, 2(6), 1992.
- [90] R.W. Boyd. *Nonlinear Optics*. Academic Press, Inc., 1980.
- [91] K. Hayata and M. Koshiba. Theory of surface-emitting second-harmonic generation from optically trapped microspheres. *Physical Review Letters*, 1994. To appear.
- [92] A. Yariv. *Optical Electronics*. Holt-Saunders International Editions, 1985.
- [93] F. Treussart, J. Hare, L. Collot, V. Lefèvre, D. Weiss, V. Sandoghdar, J.M. Raimond, and S. Haroche. *Optics Letters*, 19(20), 1994.
- [94] M. Brune, S. Haroche, J. M. Raimond, L. Davidovich, and N.Zagury. Qnd measurements and generation of schrödinger cat states. *Physical Review A*, 45(7), 1992.

- [95] M. Brune, S. Haroche, , and J.M. Raimond. Trapping atoms by the vacuum field in a cavity. *Europhys. Lett.*, (14), 1991.
- [96] W.D. Phillips, J.V. Prodan and H.J. Metcalf, *J.O.S.A. B*, 2, 1751 (1985) and T. Hänsch, A. Schawlow, *Opt. Com.* 13, 68 (1975) ainsi que les groupes de S. Chu et D.W. Wineland.
- [97] W. Gerlach and O. Stern. Der experimentelle nachweis des richtungs quantelung im magnetfeld zeitschrift für physik. (9), 1922.
- [98] E. Riis, D.S. Weiss, K. Moler, and S. Chu. *Physical Review Letters*, (64), 1990.
- [99] P. Lett, R. Watts, C. Westbrook, W. Phillips, P. Gould and H. Metcalf, *Phys. Rev. Lett.*, 61, 169, (1988) and J. Dalibard, C. Salomon, A. Aspect, E. Arimondo, R. Kaiser, N. Vansteenkiste and C. Cohen-Tannoudji, (in *Atomic Physics 11*), S. Haroche, J.C. Gay and G. Grynberg, eds World Scientific, Singapore (1989).
- [100] Rapport de F. Treussart de fin de DEA, Faisabilité d'une expérience de déflexion d'atomes lents par un mode à quelques photons d'une microsphère de silice, ENS (1993).
- [101] H.B.G. Casimir and D. Polder. The influence of retardation on the london-van der waals forces. *Physical Review*, (73), 1948.
- [102] M. Oria, M. Chevrollier, D. Bloch, M. Fichet, and M. Ducloy. *Euro. Letters*, 14(6), 1991.
- [103] C.I. Sukenik, M.G. Boshier, D. Cho, V. Sandoghdar, and E.A. Hinds. Measurement of the casimir-polder force. *Physical Review Letters*, 70, 1993.
- [104] C.Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, and G. Grynberg. *Processus d'interaction entre photons et atomes*. CNRS, intereditions edition, 1988.
- [105] J.P. Blaizot and G. Ripka. *Quantum Theory of Finite Systems*. MIT, 1986.
- [106] M.A. Kasevich, D.S. Weiss, and S. Chu. *Opt. Lett.*, (15), 1990.
- [107] A. Goldberg et al. *Ann. J. Phys.*, (35), 1976.
- [108] L.I. Schiff. *Nuovo Cimento*, (6), 1957.
- [109] I. Sh. Averbuck, V.M. Akulin, and W.P. Schleich. *Physical Review Letters*, (72), 1994.
- [110] Hollgberg nous a rapporté avoir observé l'effet d'asservissement optique d'une diode laser sur la lumière retrodiffusée d'un mode de galerie.
- [111] L. Landau and E. Lifchitz. *Théorie de l'élasticité*, volume VII. MIR ed, Moscow, 1969.

- [112] B. Dahmani, L. Hollberg, and R. Drullinger. *Optics Letters*, 12, 1987.
- [113] A. Clairon, P. Laurent, C. Bréant, and B. Dahmani, editors. *Laser diodes and Fabry-Pérot*, Neuchâtel-Switzerland, March 1988. Proc. EFTF.
- [114] V.S. Ilchenko, M.L. Gorodetsky, and S.P. Vyatchanin. *Opt. Comms*, 1995. to be published.
- [115] E. Snitzer. *Physical Review Letters*, (7), 1961.
- [116] E. Snitzer and C.G. Young. Glass lasers. *Applied Optics*, 5(10), 1966.
- [117] P. Le Boudec. *Thèse de Doctorat*. PhD thesis, Université de Rennes I, 1993.
- [118] M. Le Flohic. *Thèse de Doctorat*. PhD thesis, Université de Rennes I, 1991.
- [119] M.J. Weber, J.A. Paisner, S.S. Sussman, W.M. Young, L.A. Riseberg, C. Brecher, and J. Lum. *Applied Optics*, 12/13, 1976.
- [120] M.D. Shin, W.A. Sibley, M.G. Drexhage, and N.N. Brown. *Phys. Rev. B*, 27(1), 1983.
- [121] A.L. Schawlow and C.H. Townes. Infrared and optical masers. *Physical Review*, 112, 1958.
- [122] M. Shimizu, H. Huda, and M. Moriguchi. *Elec. Letters*, (23), 1987.
- [123] G. Stephan, 1994.
- [124] E. Desurvire. The golden age of optical fiber amplifiers. *Physics Today*, January 1994.
- [125] G.N. Watson. *Theory of Bessel functions*. Cambridge University Press, 1962. (2nd ed).
- [126] R. G. Newton. *Scattering theory of waves and particules*. TMP Springer Verlag, 1987.
- [127] J.D. Jackson. *Classical Electrodynamics*. John Wiley, NewYork, 2nd edition, 1975.
- [128] B. Bunker. *Pour la Science*, (124), Février 1988.

Table des Matières

-1	Motivation générale de nos études sur les microsphères.	7
-2	Aperçu historique des modes de galerie.	9
-3	Plan de ce travail.	12
I	Propriétés optiques des microsphères.	15
I-1	Position du problème.	15
I-2	Quelques images physiques simples.	16
I-2-1	Deux catégories de trajectoires.	17
I-2-2	Approximation eikonale.	19
I-3	Cavité électromagnétique ouverte.	22
I-3-1	Généralités.	22
I-3-2	Equations locales de la diffusion.	24
I-3-3	Une Analogie Quantique.	25
I-3-4	Dépendances du champ en fonction des paramètres n et l	31
I-3-5	Domaine de validité des raisonnements semi-classiques.	34
I-4	Synthèse des résultats obtenus en annexes A et B.	35
I-4-1	Pôles et résonances.	36
I-4-2	Modes fins et effets du "fond".	37
I-4-3	Difficultés de convergence.	37
I-5	Distribution spatiale du champ d'un mode de galerie.	38
I-5-1	Dépendance angulaire	38
I-5-2	Volume d'un mode.	42
I-6	Méthodes de calcul approché.	48
I-6-1	Méthode de détermination pratique de la position et de la largeur des résonances.	48
I-7	Couplage d'un mode donné aux sources.	51
I-7-1	Idée intuitive du "phase-matching".	51
I-7-2	Couplage d'un mode de galerie à une onde évanescente.	54
I-8	Perturbation des modes par de petites imperfections.	57
I-9	Choix des conditions expérimentales.	61
I-9-1	Confinement du champ.	61
I-9-2	Temps d'amortissement de la cavité.	62
I-9-3	Comparaison des cavités monolithiques aux cavités Fabry-Pérot.	62
I-9-4	Dimensionnement et nature du diélectrique constituant les sphères.	64

I-9-5	Facteurs de qualité limités par les pertes du matériau.	65
I-9-6	Principaux ordres de grandeurs numériques, pour diverses tailles de sphères.	69
II	Étude expérimentale des résonances.	71
II-1	Premier système expérimental.	71
II-1-1	Premières tentatives de fabrication des sphères.	72
II-1-2	Couplage du laser sonde aux modes de galerie.	79
II-1-3	Description du montage de caractérisation des résonances.	84
II-1-4	Principe de détection des signaux.	89
II-1-5	Présentation des premiers résultats expérimentaux.	93
II-2	Construction d'un nouveau montage.	98
II-2-1	Problèmes expérimentaux à résoudre.	98
II-2-2	Description du nouvel appareillage.	100
II-2-3	Lasers de spectroscopie.	106
II-3	Nouveaux résultats expérimentaux.	109
II-3-1	Mesure de facteurs de qualité.	110
II-3-2	Accord du résonateur.	117
II-4	Effet de la puissance de la sonde.	121
II-4-1	Effets d'hystérésis.	121
II-5	Conclusion de la partie expérimentale.	131
III	Perspectives.	133
III-1	Quantification de la force d'interaction atome-champ.	133
III-1-1	Effets "dispersifs" et action mécanique.	133
III-1-2	Effet "Stern-Gerlach" inverse.	135
III-1-3	Description globale du dispositif.	136
III-1-4	Potentiel lumineux et force de Van der Waals.	137
III-1-5	Complication liée à la structure des atomes réels.	143
III-1-6	Cinématique classique et effet d'arc en ciel.	144
III-1-7	Détermination des conditions opératoires optimales.	146
III-1-8	Simulation des profils de déviation classiques.	147
III-1-9	Effets quantiques.	150
III-1-10	Approximation paraxiale	151
III-1-11	Résumé des résultats obtenus.	153
III-2	Quelques autres idées d'expériences.	155
III-2-1	Étalon de fréquence optique.	155
III-2-2	Mesure de distance.	158
III-2-3	Microlasers dopés.	160
A	Quelques fonctions spéciales.	175
A-1	Polynômes et fonctions de Legendre P_l et P_l^m	175
A-2	Fonctions de Ricatti.	176

A-2-1	Fonctions de Ricatti-Bessel u_l .	176
A-2-2	Fonctions de Ricatti-Neumann v_l .	176
A-2-3	Fonctions de Hankel	176
A-3	Fonctions entrantes et sortantes.	176
A-4	Quelques développements asymptotiques utiles.	177
A-4-1	Développements asymptotiques de J_λ et Y_λ .	177
A-4-2	Développement de Debye de $\ln' H_\lambda$ et $\ln' J_\lambda$.	177
A-4-3	Développements Uniformes.	177
A-4-4	Application à la méthode d'approximation uniforme.	178
B	Solution électromagnétique exacte.	181
B-1	Difficultés rencontrées.	181
B-2	Construction d'une base adaptée.	182
B-2-1	Harmoniques sphériques Y_l^m scalaires.	182
B-2-2	Fonction de \hat{r}_1 et \hat{r}_2 invariante par rotation.	183
B-2-3	Construction des harmoniques sphériques vectoriels.	183
B-2-4	Décomposition en composantes transverses et longitudinales.	184
B-2-5	Fonctions tensorielles invariantes par rotation.	185
B-2-6	Décomposition multipolaire d'un champ vectoriel $\mathbf{X}(\mathbf{r})$.	185
B-2-7	Ondes planes	185
B-3	Solution formelle du problème de diffusion.	186
B-3-1	Champ électrique diffusé.	186
B-3-2	Champ magnétique diffusé.	187
B-4	Solution explicite pour une sphère diélectrique.	187
B-4-1	Lien entre les problèmes scalaires et vectoriels.	189
B-4-2	Développement modifié de S en une série convergeant rapidement.	194
B-4-3	Pôles du développement modifié de Debye.	196
C	Effet de petites perturbations d'indice.	199
C-1	Effet de petites imperfections constitutives.	199
C-1-1	Perturbation de la solution intérieure.	200
C-1-2	Raccordement et théorie des perturbations.	201
D	Détection par modulation de phase.	203
D-1	Spectroscopie par modulation de phase.	203
D-1-1	Modélisation dans le cas idéal.	204
D-2	Représentation dans le plan de Fresnel.	206
D-2-1	Cas idéal.	206
D-2-2	"Fuite" vectorielle.	206
E	Quelques propriétés de la Silice	209
E-1	Propriétés mécaniques.	209
E-1-1	Structure	209
E-1-2	Propriétés mécaniques	210

E-2	Propriétés optiques.	211
E-2-1	Indice de réfraction et dispersion.	211
E-2-2	Propagation dans une structure optique en silice.	212
E-2-3	Contamination du diélectrique.	213
E-2-4	Microsphères et silice synthétique.	214

Laurent COLLOT

**Étude Théorique et Expérimentale des Modes de Galerie de Microsphères de Silice:
Pièges à Photons pour des Expériences d'Électrodynamique Quantique en Cavité.**

RÉSUMÉ

Ce travail de thèse porte sur l'étude des résonances de galerie de très haute surtension observées sur des microsphères de silice d'un diamètre voisin de $100\mu\text{m}$. Ces résonances correspondent à des modes de propagation du champ le long d'un anneau équatorial dont les dimensions transversales sont de l'ordre de la longueur d'onde. Les pertes de ces modes guidés sont extrêmement faibles. Ils offrent donc une combinaison remarquable d'une très forte localisation du champ dans un tout petit volume et de très longs temps de vie pour les photons. Ces propriétés en font des résonateurs de choix tant pour de nombreuses applications pratiques que pour des expériences d'Électrodynamique Quantique en cavité.

Le mémoire de thèse présente les propriétés de ces résonances, décrit leur observation expérimentale par spectroscopie laser et analyse quelques perspectives ouvertes par ces études en physique appliquée et fondamentale. Les possibilités d'utiliser ces modes de galerie pour asservir en phase un laser à diode ou pour fabriquer des lasers microscopiques sont envisagées. Une expérience de déflexion d'atomes froids dans l'onde évanescente associée à un mode de galerie est également étudiée. Une telle expérience devrait permettre de mettre en évidence la nature discrète de l'intensité d'un champ lumineux constitué de quelques photons et réaliser une mesure dispersive de tous petits champs optiques.

MOTS CLÉS Optique, Micro-Cavité, Résonances de Mie, très haute Finesse, Électrodynamique Quantique, Microlaser, Effet Stern-Gerlach-Inverse.

ABSTRACT

This thesis is devoted to the study of very high Q whispering gallery modes in silica microspheres, about $100\mu\text{m}$ in diameter. For these resonances the electromagnetic field propagates along an equatorial surface ring with transverse dimensions of the order of the wavelength. These guided modes have very low losses. They exhibit a remarkable combination of strong localization of the field in a small volume and very long storage times for the photons. These two properties render these microspheres ideal as optical resonators for practical applications as well as for cavity QED experiments.

This manuscript starts with a general presentation of these resonances. The experimental techniques used to observe the resonances by laser spectroscopy are then discussed, and several projects in applied and fundamental physics are analysed. Furthermore, using these modes to phase-lock a diode laser or to make new microlasers are particularly attractive. An experiment where an atomic beam is deflected by passing through the evanescent field of a whispering-gallery mode is also discussed. Such an experiment would allow to demonstrate the quantized nature of a few-photon-field and to measure, by a dispersive mechanism, optical fields created by a small number of photons.

KEY WORDS Optics, Microcavity, Whispering-Gallery-modes, Quantum Electrodynamics, Microlaser, Inverse Stern-Gerlach Effect.