Atomes refroidis par laser : du refroidissement sub-recul à la recherche d'effets quantiques collectifs

Olivier Morice

▶ **To cite this version:**

Olivier Morice. Atomes refroidis par laser : du refroidissement sub-recul à la recherche d'effets quantiques collectifs. Physique Atomique [physics.atom-ph]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 1995. Français. NNT : . tel-00011902v1

HAL Id: tel-00011902

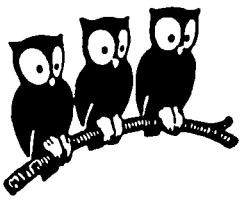
https://theses.hal.science/tel-00011902v1

Submitted on 9 Mar 2006 (v1), last revised 24 Feb 2018 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

DÉPARTEMENT DE PHYSIQUE
DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE



THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ PARIS VI
spécialité : Physique Quantique

présentée par
Olivier MORICE

pour obtenir le titre de
Docteur de l'Université Paris VI

Sujet de la thèse :

ATOMES REFROIDIS PAR LASER : DU REFROIDISSEMENT SUB-RECUL À LA RECHERCHE D'EFFETS QUANTIQUES COLLECTIFS

Soutenue le 19 décembre 1995 devant le jury composé par :

MM. Claude COHEN-TANNOUDJI	Président
Christian BORDÉ	Rapporteur
Maciej LEWENSTEIN	Rapporteur
Jean-Yves COURTOIS	Examinateur
Christian MINIATURA	Examinateur
Jean-Michel RAIMOND	Examinateur
Jean DALIBARD	Directeur de Thèse

DÉPARTEMENT DE PHYSIQUE
DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ PARIS VI
spécialité : Physique Quantique

présentée par
Olivier MORICE

pour obtenir le titre de
Docteur de l'Université Paris VI

Sujet de la thèse :

ATOMES REFROIDIS PAR LASER : DU REFROIDISSEMENT SUB-RECUL À LA RECHERCHE D'EFFETS QUANTIQUES COLLECTIFS

Soutenue le 19 décembre 1995 devant le jury composé par :

MM. Claude COHEN-TANNOUDJI	Président
Christian BORDÉ	Rapporteur
Maciej LEWENSTEIN	Rapporteur
Jean-Yves COURTOIS	Examinateur
Christian MINIATURA	Examinateur
Jean-Michel RAIMOND	Examinateur
Jean DALIBARD	Directeur de Thèse

Remerciements

Ce travail a été réalisé au Laboratoire Kastler Brossel (anciennement Laboratoire de Spectroscopie Hertzienne de l'École Normale Supérieure). Aussi je tiens à remercier en tout premier lieu ses directeurs successifs, Jacques Dupont-Roc et Michèle Leduc, qui m'y ont accueilli et qui m'ont fait bénéficier de conditions de recherche exceptionnelles.

Je voudrais remercier Claude Cohen-Tannoudji de m'avoir accepté dans son équipe, à laquelle il a su donner à la fois un niveau scientifique exceptionnel et une excellente atmosphère de travail. J'ai eu la chance, en particulier lors des réunions d'équipe qui se sont tenues pendant la première année de ma thèse, de bénéficier directement de ses conseils. J'ai ainsi pu profiter son expérience et de ses extraordinaires compétences en physique quantique. Je voudrais également le remercier d'avoir accepté de présider le jury de soutenance de ma thèse.

Jean Dalibard a proposé le sujet de ma thèse et en a assuré la direction. L'extrême abondance de ses idées originales, tant dans le domaine théorique qu'expérimental, m'a été d'un très grand secours, en particulier dans les nombreux moments où la progression de mes travaux semblait bloquée. J'ai en outre pu profiter de ses exceptionnelles qualités pédagogiques, et notamment de la capacité qui est la sienne de remettre en forme mes propres calculs, puis de me les expliciter. Je voudrais également le remercier pour la patience dont il a fait preuve lors de la lecture de ce manuscrit, n'hésitant pas à sacrifier ses soirées pour déchiffrer les passages que j'avais négligé de détailler et d'éclaircir suffisamment.

La partie expérimentale de cette thèse n'aurait pu être réalisée sans l'aide de Christophe Salomon. Son expérience et ses compétences technologiques et expérimentales hors du commun m'ont été d'un secours inestimable. C'est lui qui est venu apporter à nos expériences l'impulsion nécessaire, en particulier pendant les longues nuits que nous avons passées à la recherche d'un hypothétique signal. Je voudrais également rendre hommage aux capacités qui sont les siennes de promouvoir nos sujets de recherche, sans lesquelles les moyens financiers dont dispose notre équipe ne seraient certainement pas ce qu'ils sont.

Je remercierai également Yvan Castin pour l'assistance qu'il m'a prodiguée dans la partie théorique de ma thèse. Partageant le même bureau que moi la plupart du temps, c'est à lui que revenait la lourde charge de répondre à mes

questions. A cela il n'a jamais ménagé son temps ni sa peine. Il n'a pas non plus hésité à se charger des calculs que je trouvais trop difficiles, et à les mener à bien. Ses exceptionnelles compétences en informatique m'ont également été très profitables.

Je voudrais aussi remercier ceux qui ont été mes collaborateurs directs sur les deux expériences auxquelles j'ai participé. Jakob Reichel m'a patiemment initié aux techniques expérimentales, lesquelles ne m'étaient pas du tout familières. Ses compétences en électronique et en informatique ont joué un rôle primordial dans le succès de l'expérience de refroidissement Raman. Je garderai également un excellent souvenir des moments que j'ai passés avec Pierre Lemonde pour la mise au point du piège opto-électrique. J'ai bénéficié de l'excellente maîtrise qu'il possédait du fonctionnement de l'expérience. En particulier sa capacité à retrouver en quelques minutes un signal que je recherchais en vain depuis deux heures m'a époustouflé.

Je remercie également Guglielmo Tino, qui a installé une grande partie du dispositif de l'expérience Raman avec un soin méticuleux, et qui m'a donné l'occasion d'entretenir un minimum mon anglais. Merci également à Ekkehard Peik pour l'entretien du laser Titane-Saphir, ainsi qu'à Hélène Perrin et à Wolfgang Hänsel qui ont participé à l'élaboration du piège opto-électrique.

Je suis également reconnaissant à MM. Bordé, Courtois, Lewenstein, Miniatura et Raimond, pour l'intérêt qu'ils ont voulu apporter à ces recherches en acceptant de faire partie du jury de soutenance.

Je ne saurais non plus oublier mes autres camarades thésitifs, François Bardou, Maxime Ben Dahan, Kirstine Berg-Sørensen, Denis Boiron, Philippe Bouyer, Pierre Desbiolles, Olivier Émile, Peter Grüter, David Guéry-Odelin, Simone Kulin, Brahim Lounis, Bruno Saubaméa, Pascal Schriftgizer, Pippa Storey, avec lesquels j'ai pu échanger quelques paroles ou résoudre des problèmes quotidiens. Merci également aux autres membres de l'équipe, et en particulier à Carl Aminoff, Markus Arndt, Ralph Dum, John Lawall, Alain Michaud et Andrew Steane.

Enfin, je remercie les personnels du laboratoire pour leur soutien logistique, dont en particulier André Clouqueur et l'atelier d'électronique, ainsi que Claude Guillaume et l'atelier de mécanique. Je remercie également Michèle Sanchez, le secrétariat du LKB et la bibliothèque du département de physique de l'ENS.

Introduction générale

L'INVENTION des lasers a été à l'origine de spectaculaires avancées dans le domaine de la physique atomique. Il est maintenant possible d'agir mécaniquement sur les atomes, de les ralentir à des vitesses de quelques millimètres par seconde, de les piéger et de les manipuler [1–5]. Le refroidissement d'atomes par laser est ainsi devenu un domaine de recherche extrêmement vaste, dont les retombées sont nombreuses, en particulier en physique fondamentale.

Une première mise en évidence expérimentale de l'action mécanique de la lumière sur les atomes a été réalisée par R. Frisch en 1933 [6] ; l'auteur a réussi à dévier un jet atomique de sodium, à l'aide de la lumière résonnante crée par une lampe à décharge de sodium (une expérience similaire, mais plus performante, a ensuite été effectuée en 1972 [7]). Des effets plus spectaculaires, tels le ralentissement de jets atomiques, n'auraient toutefois pas pu être observés avant l'apparition de lasers résonnants ; du fait de leurs finesse spectrale et de leur forte puissance, ces derniers, comparés aux lampes, agissent sur les atomes de façon beaucoup plus efficace [8].

Le ralentissement par laser de jets atomiques a quant-à lui été mis au point pendant les années 80 [9–15] (signalons que l'idée de refroidir des particules à l'aide de lumière avait déjà été introduite en 1950 par Alfred Kastler [16]). On utilise pour cela un laser quasi-résonnant avec une transition atomique fermée, se propageant le long du jet, dans le sens opposé à la vitesse des atomes. Un atome du jet, de vitesse initiale $v \sim 1\ 000$ m/s, peut être excité en absorbant un photon du laser, encaissant du même coup son impulsion $\hbar k_{\mathrm{L}}$. Ensuite, l'atome retourne dans son état fondamental en émettant spontanément un photon. Cette émission ayant lieu dans une direction aléatoire, le transfert moyen d'impulsion correspondant est nul. Le cycle absorption/émission spontanée peut ensuite recommencer. Finalement, l'atome est ralenti ($v \sim 10$ m/s) au bout de quelques dizaines de milliers de cycles. La situation est en réalité un peu plus compliquée car il faut tenir compte de l'effet Doppler : la condition de résonance atome/laser dépend de la vitesse de l'atome. Par conséquent, si le laser est résonnant pour des atomes non ralentis, il cesse de l'être dès que la vitesse atomique décroît. Pour contourner cette difficulté, plusieurs techniques (glissement de fréquence accompagnant

le ralentissement des atomes, décalage progressif de la fréquence de résonance à l'aide d'un champ magnétique) ont été mises en œuvre.

Dans les expériences de ralentissement de jets, les atomes ne sont décélérés que selon une seule direction de l'espace. Avec les mélasses optiques, qui sont basées sur l'effet Doppler, on peut ralentir les atomes dans les 3 directions. Le principe du refroidissement Doppler a été proposé dès 1975 [17, 18]. La première mélasse optique utilisant des atomes neutres fut fabriquée en 1985 [19]. Pour réaliser une mélasse, on utilise 3 paires de faisceaux se propageant en sens opposé (une par direction de l'espace). Ces faisceaux sont désaccordés sur le rouge de la transition (*i.e.* la fréquence des lasers est légèrement inférieure à la fréquence de résonance atomique). Un atome en mouvement absorbera préférentiellement des photons du faisceau se propageant dans le sens opposé à sa vitesse, l'effet Doppler venant dans ce cas compenser le désaccord du faisceau ; il encaissera alors les impulsions de ces photons et sera donc ralenti.

Les premiers modèles théoriques prévoyaient que les plus basses températures accessibles à l'aide de mélasses optiques étaient de l'ordre de $\hbar\Gamma/k_B$, où Γ est la largeur du niveau atomique excité (cette limite est appelée « limite Doppler », et correspond, dans le cas du césium, à quelques centaines de μK). Pourtant, plusieurs expériences mesurèrent en 1988 des températures bien inférieures à cette limite Doppler [20–22] (un cas tout à fait exceptionnel puisque des expériences fonctionnaient mieux que la théorie correspondante), atteignant finalement, dans le cas du césium, la température de 2,5±0,6 μK [23]. Ceci fut interprété grâce à l'introduction de « nouveaux mécanismes » de refroidissement, qui reposent sur une combinaison de pompage optique, de déplacements lumineux, et de gradients de polarisation de la lumière laser [24, 25]. On a pu ainsi montrer et vérifier expérimentalement que les mélasses optiques permettent d'atteindre des températures légèrement supérieures à la température de recul, définie par $k_B T_{rec} = \hbar^2 k_L^2/M$, M étant la masse de l'atome et k_L le vecteur d'onde d'un laser résonnant (pour le césium, $T_{rec} = 200$ nK).

Les mélasses optiques permettent de créer un nuage atomique de très faible température, mais n'imposent aucune contrainte sur leur extension spatiale. Or, il est utile, pour certaines applications, de réaliser des nuages atomiques les plus compacts possible. Il faut pour cela créer, en plus de la force de friction qui est proportionnelle à la vitesse, une force de rappel proportionnelle au vecteur position, et donc réaliser un *piège* à atomes. Or, on peut montrer [26] qu'il est impossible de confiner les atomes uniquement à l'aide de la force de pression de radiation, parce que cette force est proportionnelle au vecteur de Poynting, de divergence nulle (théorème de Gauß optique). Une solution fut néanmoins imaginée par Jean Dalibard, et concrétisée expérimentalement peu de temps après par une équipe américaine [27] : le piège magnéto-optique (PMO). Ce système utilise une mélasse optique avec des faisceaux de polarisation circulaire, ainsi qu'un gradient de champ magnétique statique, le point de confinement se trouvant là où ce champ s'annule. Le piégeage est possible parce que la force n'est

plus proportionnelle au vecteur de Poynting. Signalons que le PMO réalise à la fois un confinement et un refroidissement des atomes, et que les « nouveaux mécanismes » de refroidissement évoqués plus haut y interviennent aussi [28–30] ; la température obtenue est donc sub-Doppler. Les premiers pièges magnéto-optiques furent réalisés en utilisant un jet atomique ralenti par laser, qui jouait le rôle de « source d'atomes ». Une spectaculaire simplification du dispositif expérimental fut ensuite apportée par les pièges magnéto-optiques en cellule [31, 32], qui sont directement chargés à partir d'une vapeur atomique à température ambiante et de pression 1 μPa (10^{-8} Torr). Le piège magnéto-optique constitue désormais le moyen le plus simple pour obtenir des atomes froids. Plusieurs dizaines de tels pièges existent aujourd'hui à travers le monde.

Le refroidissement d'atomes par laser a débouché sur un certain nombre d'applications pratiques (ou plus exactement utiles à d'autres domaines de la physique). Au premier rang d'entre elles figure l'horloge atomique [33, 34] : le temps est défini à partir d'une transition hyperfine du césium, que l'on mesure à l'aide de la méthode des franges de Ramsey. Avec des atomes froids, les temps d'interaction sont plus longs, et par conséquent la résolution des franges est plus précise. Un autre champ d'application du refroidissement radiatif existe dans le domaine de l'optique non linéaire [32, 35–40], car la susceptibilité non linéaire d'un nuage d'atomes froids est bien supérieure à celle d'une vapeur atomique à température ambiante (pour laquelle on est limité par l'élargissement Doppler des raies). En particulier, des expériences de réduction du bruit quantique de la lumière, utilisant un piège magnéto-optique, ont récemment été réalisées [41, 42]. Par ailleurs, les atomes froids ont permis d'étudier précisément les processus de collisions entre atomes [43, 44].

Parmi les retombées du refroidissement d'atomes par laser, l'optique et l'interférométrie atomique [45, 46] constituent à elles seules un vaste domaine de recherche. Le principe est d'utiliser des ondes de de Broglie atomiques pour des expériences similaires aux expériences d'optique traditionnelles (réflexion, diffraction, interférences) [47–49]. En particulier, des études théoriques [50–52] ont mis en évidence l'intérêt potentiel des interféromètres à ondes de de Broglie atomiques, qui sont beaucoup plus sensibles que les interféromètres optiques (des expériences de détection d'ondes gravitationnelles à l'aide d'atomes ont par exemple été envisagées). Les premières expériences d'interférométrie atomique (sans atomes froids) ont été réalisées en 1991 [53–57]. L'utilisation d'atomes refroidis par laser [58, 59] augmente la longueur d'onde de de Broglie, et permet ainsi d'accroître encore la précision des interféromètres.

En dépit des retombées technologiques que je viens d'énumérer, la principale finalité du refroidissement radiatif demeure d'ordre fondamental : le fait de disposer de particules quasiment au repos, et que l'on peut « manipuler » à volonté, permet de tester un certain nombre de théories et de lois de la mécanique quantique. Ainsi, lorsque la température d'un nuage atomique est de l'ordre de la température de recul, la longueur d'onde de de Broglie des atomes $\Lambda_{DB} = h/\sqrt{2\pi M k_B T}$

devient du même ordre de grandeur que la longueur d'onde optique. Dans ces conditions, il est nécessaire de quantifier le mouvement du centre de masse de l'atome [60]. Par exemple, le mouvement d'atomes dans des potentiels périodiques induits par la lumière a été étudié théoriquement [60–62], et l'apparition de signaux explicitement liés à la quantification du mouvement a été prédite. Les atomes froids permettent également de rechercher des effets quantiques collectifs, c'est-à-dire des effets liés à l'indiscernabilité des atomes, qui peuvent apparaître lorsque la distance moyenne entre deux atomes devient du même ordre de grandeur que leur longueur d'onde de de Broglie. Le plus spectaculaire de ces effets est bien sûr la condensation de Bose-Einstein, qui a tout récemment été observée sur des atomes froids [63–65].

Prédite dès les années 1920, la condensation de Bose-Einstein [66–69] est une transition de phase qui, lorsqu'elle se produit, provoque l'accumulation d'un grand nombre de particules dans l'état de plus basse énergie (à condition bien sûr qu'il s'agisse de bosons, ce qui est le cas de la plupart des espèces atomiques que l'on sait refroidir par laser). La condensation de Bose-Einstein a lieu lorsque l'inégalité $\rho\Lambda_{\mathrm{DB}}^3 \geqslant 2{,}612$ est vérifiée, ρ étant le nombre de particules par unité de volume. Depuis plusieurs dizaines d'années, deux phénomènes pouvant être assimilés à la condensation de Bose-Einstein ont été observés en physique : la superfluidité de l'hélium liquide d'une part, et la supraconductivité d'autre part. Toutefois, les interactions entre particules y sont tellement fortes qu'il est difficile de reconnaître les propriétés quantiques macroscopiques prédites par Bose et par Einstein. Plus récemment, la condensation de Bose-Einstein a été observée sur un gaz d'excitons dans un semi-conducteur [70]. L'interaction entre particules y est plus faible, mais il demeure difficile d'en extraire des données suffisamment précises pour tester la théorie.

Les densités mises en jeu étant nettement moins importantes, les atomes froids dont on a récemment observé la condensation (et qui sont toujours dans leur état fondamental) interagissent beaucoup moins que les atomes d'hélium liquéfiés, ou que les paires de Cooper des supra-conducteurs. Contrairement aux excitons qui sont des pseudo-particules avec une durée de vie extrêmement brève (typiquement 30 ns), les atomes possèdent des durées de vie infinies : on pourra donc mettre en évidence des phénomènes physiques faisant intervenir des constantes de temps de l'ordre de la seconde, et par suite être en mesure tester expérimentalement un grand nombre de propriétés quantiques spécifiques des condensats. La condensation des atomes froids ouvre donc de grandes perspectives en ce qui concerne l'amélioration de notre connaissance des lois fondamentales de la mécanique quantique.

Les nuages atomiques produits par un piège magnéto-optique ou par une mélasse ne permettent pas toutefois d'observer la condensation de Bose-Einstein, et ce pour deux raisons : d'une part, la distance moyenne entre deux atomes reste toujours supérieure à la longueur d'onde optique (dans le cas contraire, les atomes qui sont excités interagissent fortement avec ceux qui sont dans l'état fondamen-

tal, et ceci perturbe le processus de refroidissement). D'autre part, la longueur d'onde de de Broglie atomique est toujours inférieure à la longueur d'onde optique, ou, ce qui est équivalent, la vitesse quadratique moyenne des atomes reste supérieure à la vitesse de recul d'un seul photon, définie par $v_{\mathrm{rec}} = \hbar k_{\mathrm{L}}/M$ (et ce parce que les atomes d'un PMO échangent en permanence des photons avec les faisceaux, ce qui provoque à chaque fois un recul de Mv_{rec}). Pour augmenter la densité ou pour diminuer davantage la température des atomes, il faut recourir à de nouvelles techniques ; les trois expériences de condensation réalisées à ce jour ont ainsi utilisé le *refroidissement évaporatif*. Ce procédé consiste à éteindre les faisceaux de la mélasse, puis, par un moyen approprié, à chasser du nuage les atomes de plus haute énergie. Grâce aux collisions élastiques entre atomes, le nuage se rethermalise dans un deuxième temps, la température moyenne diminuant et la densité augmentant. Le processus peut ensuite être réitéré. Remarquons qu'il ne s'agit plus ici de refroidissement par laser (même si ce dernier intervient lors de la première étape qui amène les atomes à quelques températures de recul).

Le refroidissement évaporatif n'est cependant pas la voie que nous avons choisie au laboratoire pour abaisser la température des atomes en-dessous de la température de recul. Nous avons cherché à atteindre ce but en continuant à utiliser des lasers : il existe en effet deux mécanismes permettant de progresser dans cette voie (même si leurs résultats sont, pour l'instant du moins, moins spectaculaires que ceux du refroidissement évaporatif). L'une de ces deux méthodes (le refroidissement Raman) sera décrite en détail dans la première partie de ce manuscrit.

Je présente maintenant le plan de cette thèse : il est constitué de deux parties (la première plutôt expérimentale, la deuxième entièrement théorique) qui pourront être lues de façon totalement indépendante. Plusieurs compléments et annexes figurent également ; le lecteur pourra sans inconvénient les sauter lors d'une première lecture, quitte à y revenir plus tard s'il le souhaite.

La première partie sera consacrée au refroidissement laser sub-recul d'atomes de césium par la méthode des transitions Raman. Je commencerai par la description d'une expérience de refroidissement d'atomes libres à une dimension. Cette expérience préliminaire a permis d'obtenir une température 1D de 24 nK, c'est-à-dire un facteur 10 en-dessous de la température de recul. Les deux chapitres suivants indiqueront une voie permettant d'envisager la généralisation de cette expérience à 3D. Une telle généralisation nécessite de confiner préalablement les atomes dans un piège où les atomes ne diffusent pas de photons. Un nouveau type de piège, le piège opto-électrique, a été conçu dans ce but, puis réalisé expérimentalement.

Dans la deuxième partie de ce manuscrit, je me pencherai sur les méthodes de détection de la condensation de Bose-Einstein, ainsi que, plus généralement, sur l'observation d'effets quantiques collectifs qui pourraient apparaître avant cette condensation. Les expériences réalisées jusqu'ici utilisent toutes des atomes confinés dans un piège, une configuration qui facilite la détection du condensat.

Pourtant, l'étude qui sera présentée ne se place pas dans ce cas, mais dans celui plus académique où les atomes ne sont soumis à aucun potentiel extérieur. La distance moyenne entre atomes sera en outre supposée grande devant la longueur d'onde optique, et ce afin de faciliter les calculs (ceci permettra également de discriminer sans ambiguïté les effets vraiment liés à la statistique quantique, de phénomènes plus classiques de type superradiance, qui résultent de l'accumulation d'un grand nombre d'atomes dans un volume de l'ordre de λ_L^3, où λ_L est la longueur d'onde optique). Sous ces hypothèses, nous avons regardé s'il était possible de mettre en évidence des effets liés à l'indiscernabilité des atomes en mesurant l'indice de réfraction du nuage, ou encore la diffusion de la lumière sur les atomes. Nous avons montré que de tels effets devraient effectivement pouvoir être observés même au-dessus de la température de recul, mais que les signaux correspondants seront faibles, et qu'il sera difficile de les mettre en évidence expérimentalement.

Première partie

Refroidissement sub-recul d'atomes de césium

Introduction

QUAND j'ai commencé ma thèse, au début de l'été 1992, le refroidissement d'atomes par laser était déjà un sujet bien exploré. Plusieurs dizaines de pièges magnéto-optiques existaient à travers le monde, et les mécanismes de refroidissement sub-Doppler (en particulier l'effet Sisyphe) étaient parfaitement compris. Les températures minimales atteintes (quelques microkelvins pour le césium) restaient cependant supérieures à la température de recul ($T_{\rm rec} = \hbar^2 k^2/(M k_{\rm B})$, k étant le vecteur d'onde d'un laser résonnant et M la masse de l'atome), qui semblait constituer une limite difficilement franchissable.

Toutefois, des mécanismes de refroidissement laser permettant d'atteindre des températures sub-recul avaient déjà été proposés, et deux expériences avaient été réalisées à une dimension. La première expérience, effectuée au laboratoire de Spectroscopie Hertzienne sur des atomes d'hélium métastable [71], utilisait le mécanisme du *Piégeage Cohérent de Population Sélectif en Vitesse* (PCPSV, encore appelé méthode des *résonances noires*) [72]. Elle avait permis d'atteindre une température 1D de 2 μK, soit la moitié de la température de recul (ce résultat a par la suite été amélioré [73], puis généralisé à 2D [74] et à 3D [75]). Parallèlement, l'équipe américaine de Mark Kasevich et Steven Chu [76] avait obtenu, avec des atomes de sodium, une température de 100 nK, soit $T_{\rm rec}/20$. Cette expérience (dont le principe a par la suite été généralisé à 2 et 3 dimensions [77], aboutissant à une température légèrement sub-recul à 2D, et non sub-recul à 3D) utilisait le mécanisme du *refroidissement Raman*, basé sur les idées de Pritchard [78]. Nous avons dans ce contexte décidé de réaliser une expérience de refroidissement sub-recul sur le césium, qui est l'atome qu'utilisent la plupart des expériences de notre équipe.

Les deux types d'expériences que je viens d'évoquer (PCPSV et refroidissement Raman) fonctionnent en fait selon le même principe : on fabrique un système de faisceaux lumineux excitant les atomes de façon sélective en vitesse (fig. 0.1). Le profil d'excitation doit pouvoir être choisi de telle sorte qu'il existe une classe de vitesse (autour d'une vitesse v_0 fixée) pour laquelle les atomes ne « voient » pas la lumière. Considérons alors un atome de vitesse initiale v, non voisine de v_0. Cet atome peut interagir avec la lumière, et être excité. Si c'est le cas, il absorbera un ou plusieurs photons, et émettra des photons de façon spontanée. Sa vitesse

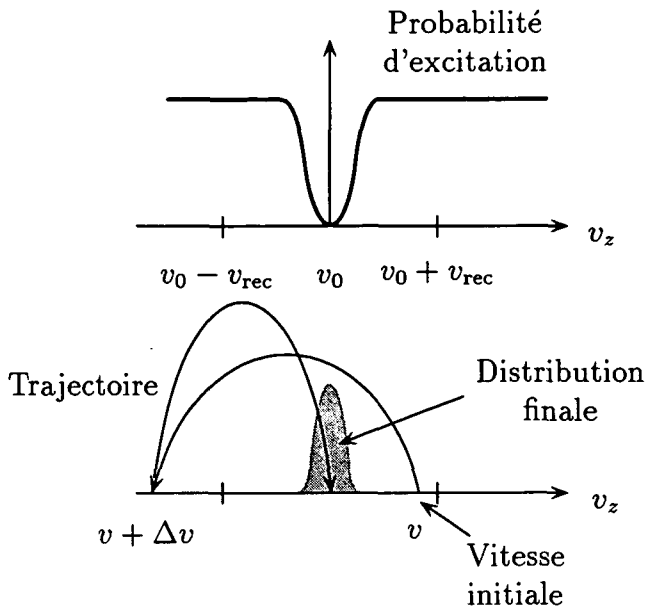


FIG. 0.1 - *Principe général du refroidissement laser sub-recul.*

sera modifiée d'une quantité Δv aléatoire. L'atome pourra ensuite effectuer un nouveau cycle d'absorption/émission spontanée, avec un nouveau changement aléatoire de vitesse, etc. On voit donc que l'atome va effectuer une *marche au hasard* dans l'espace des vitesses, avec des sauts de l'ordre de la vitesse de recul $v_{rec} = \hbar k/M$.

Supposons maintenant qu'au bout d'un certain nombre de sauts, l'atome arrive au voisinage de $v = v_0$. Il ne pourra plus dès lors interagir avec la lumière, et sa vitesse ne changera plus. On va donc observer une accumulation d'atomes au voisinage de v_0. La largeur de la distribution en vitesse finale sera la largeur de la zone « noire ». Si l'on est capable de fabriquer une zone noire plus étroite que v_{rec}, alors la température finale sera sub-recul.

La difficulté réside naturellement dans la fabrication du système lumineux et de son profil d'excitation. La méthode des résonances noires [72, 73] utilise une transition $1 \rightarrow 1$. On envoie sur les atomes deux faisceaux se propageant en sens opposé et de polarisation circulaire (fig. 0.2). Lorsque la vitesse de l'atome est nulle, on peut montrer que, grâce aux choix des polarisations et aux coefficients de Clebsch-Gordan qui sont opposés, l'état $1/\sqrt{2}(|f,+\rangle - |f,-\rangle)$ n'est pas couplé à la lumière. Par contre, si la vitesse atomique est non nulle, l'effet Doppler induit un déséquilibre entre les deux faisceaux, ce qui détruit l'état non couplé. Au terme de la marche au hasard, les atomes vont donc s'accumuler autour de la vitesse nulle, dans la superposition linéaire que je viens de citer[1].

1. La situation est en réalité plus complexe : si l'on traite le problème correctement en tenant compte des termes de recul, on montre que ce sont des atomes dans l'état $1/\sqrt{2}(|f,+,P = +\hbar k\rangle - |f,-,P = -\hbar k\rangle)$ qui n'interagissent pas avec la lumière.

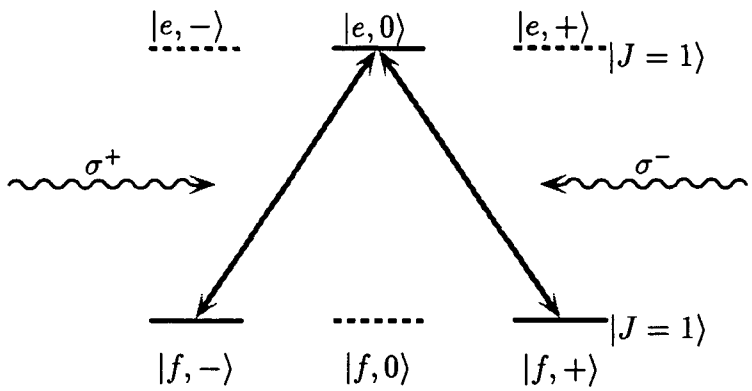


FIG. 0.2 - *Principe des résonances noires.*

Le refroidissement Raman consiste à envoyer sur les atomes une série d'impulsions lumineuses de fréquence et de durée bien déterminées. Chacune de ces impulsions excite une classe de vitesse donnée. En combinant de manière adéquate les impulsions successives, on peut fabriquer « à la main » un profil d'excitation convenant au refroidissement sub-recul. Contrairement à la méthode des résonances noires, qui nécessite une transition en Λ, la méthode Raman fonctionne sur un atome à trois niveaux dont deux de grande durée de vie, sans autre condition supplémentaire. C'est pourquoi nous l'avons choisie pour refroidir les atomes de césium.

En 1993 et 1994, nous avons transposé au césium l'expérience de Kasevich et Chu, et obtenu une « température 1D » de 23 nK. Je présenterai le principe et les résultats de cette expérience dans le chapitre 1. Parallèlement, j'ai réfléchi à la manière de généraliser le refroidissement Raman à 3D. Cette généralisation n'est en effet pas immédiate du fait de la gravité qui accélère les atomes dans la direction verticale. J'ai montré (chapitre 2) qu'il était possible de refroidir par la méthode Raman des atomes préalablement piégés, et ai conçu un nouveau modèle de piège (le piège opto-électrique) pouvant convenir à ce type de refroidissement. L'expérience correspondante a débuté fin 1994, et est présentée au chapitre 3. A ce jour, le piège opto-électrique fonctionne bien et le refroidissement Raman des atomes confinés est en cours.

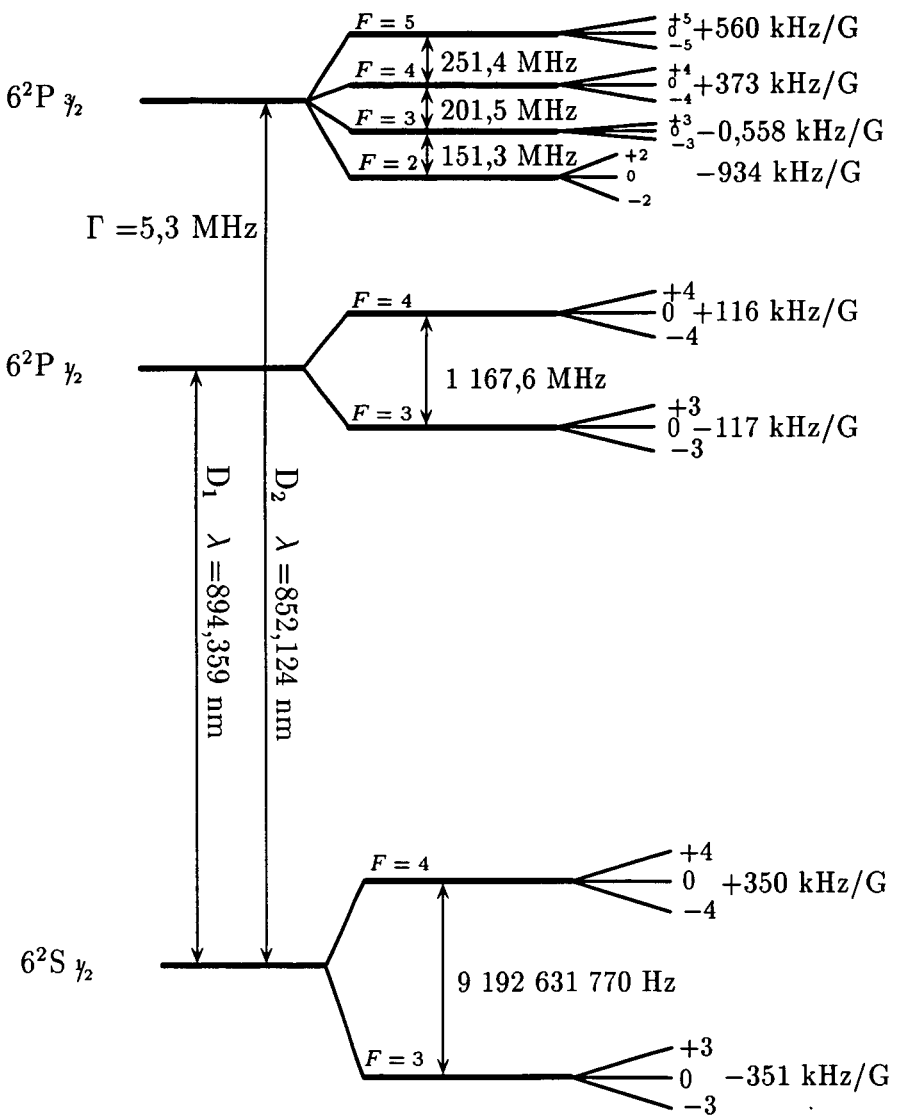


FIG. 0.3 - *Structure et constantes atomiques du césium.*

Chapitre 1

Refroidissement Raman 1D d'atomes libres

L'EXPÉRIENCE que je vais présenter dans ce chapitre est la transposition au césium de l'expérience de refroidissement sub-recul d'atomes de sodium réalisée en 1992 par Mark Kasevich et Steven Chu [76]. Lorsque nous l'avons entreprise, nous souhaitions rapidement acquérir la technique du refroidissement Raman, dont nous avions besoin pour passer au refroidissement sub-recul 3D d'atomes confinés (dont je présente la théorie dans le chapitre 2) ; le but du refroidissement 3D d'atomes confinés était (et reste) d'augmenter de façon importante la densité dans l'espace des phases du nuage atomique, par une méthode différente du refroidissement évaporatif. La réalisation de cette expérience a finalement pris plus de temps que prévu, et le lecteur pourrait estimer que le fait de ne pas être les premiers n'était pas quelque chose de très motivant. Toutefois, les nouveautés apportées par rapport à l'expérience de Stanford (principalement dues au changement d'atome) sont suffisamment importantes pour nous permettre de considérer cette expérience comme un résultat à part entière. En outre, ce travail a constitué le point de départ de l'expérience de refroidissement au nanokelvin utilisant des impulsions en créneaux [79], laquelle a donné lieu à des développements théoriques et expérimentaux extrêmement intéressants, ce que nous n'aurions absolument pas pu prévoir en 1992.

Le césium est utilisé de façon préférentielle dans un certain nombre d'expériences utilisant les atomes froids : c'est par exemple le cas de l'horloge atomique [33, 34]. C'est également le cas d'expériences où la grande masse de l'atome constitue un atout parce qu'elle limite l'étalement des distributions en vitesses (interférométrie atomique, mesure de $\hbar/M$). Disposer d'atomes refroidis sous la vitesse de recul peut constituer une amélioration importante pour le fonctionnement de ces expériences. Par conséquent, l'expérience sur le césium que nous avons réalisée constitue un outil qui pourra s'avérer utile par la suite. En outre, le césium est l'atome que notre équipe avait choisi dans les années 80 (entre autres pour développer des horloges atomiques). Le fait de l'utiliser également pour le

refroidissement Raman nous a apporté un avantage stratégique non négligeable, puisque nous disposions avant de commencer de diodes laser et de miroirs traités pour la longueur d'onde adéquate.

Le changement d'atome a apporté un certains nombre de modifications techniques par rapport à l'expérience de Kasevich. Le principal changement est lié à la longueur d'onde des lasers résonnants. Alors que le sodium nécessite des lasers à colorant à λ =589 nm, il existe des diodes laser résonnantes avec la transition du césium (λ =852 nm). Ceci constitue une importante simplification. Par contre, la fréquence de structure hyperfine du césium vaut ν_{shf} =9,2 GHz, contre 1,7 GHz pour le sodium. Par conséquent, il n'est plus possible de fabriquer les fréquences Raman en utilisant un modulateur électro-optique comme dans l'expérience américaine. Nous avons dû recourir à deux lasers asservis en phase à 9 GHz, ce qui constitue une complication sensible (mais ceci nous a fourni l'occasion d'acquérir une technique utile et qui fonctionne remarquablement bien). Une autre difficulté réside dans la compensation du champ magnétique, qui doit être réalisée à une précision inférieure au mG.

Après un bref exposé du principe du refroidissement Raman (§ 1.1), je présenterai au paragraphe 1.2 les principales caractéristiques du dispositif expérimental. J'évoquerai dans la section 1.3 les étapes de la mise au point de l'expérience — en particulier la compensation du champ magnétique et l'optimisation de la séquence d'impulsions Raman. Je terminerai en exposant nos résultats (§ 1.4). Comme pour toute réalisation expérimentale, les éléments présentés ici sont le fruit d'un travail d'équipe : j'ai bénéficié de l'appui de Jakob Reichel, de Guglielmo Tino et de Christophe Salomon. Je renvoie notamment à la thèse de Jakob Reichel [80] le lecteur qui souhaiterait connaître des détails qui ne sont pas présentés ici. Le lecteur pourra en outre retrouver dans la référence [81] les résultats présentés dans ce chapitre.

1. Principe et théorie du refroidissement Raman

a) Les niveaux et les faisceaux utilisés

Le refroidissement Raman fonctionne sur un système atomique à trois niveaux (fig. 1.1) : deux niveaux ont une grande durée de vie, tandis que le troisième a une courte durée de vie. Notons que tous les atomes ne possèdent pas *a priori* une structure de ce type. Le refroidissement Raman n'est donc pas toujours applicable ; toutefois les conditions requises sont bien moins draconiennes que pour la méthode PCPSV. Dans le cas des alcalins, les deux niveaux inférieurs ($|1\rangle$ et $|2\rangle$) sont séparés par une fréquence du domaine micro-onde. La fréquence de transition entre l'un des niveaux inférieurs et le niveau supérieur $|e\rangle$ est une fréquence optique.

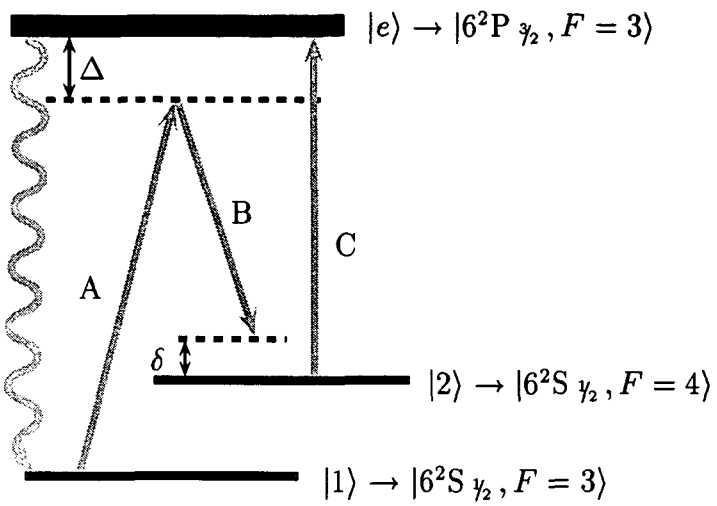


FIG. 1.1 - *Schéma du refroidissement Raman.*

Dans le cas du césium, on prend pour état $|1\rangle$ le niveau fondamental $|6^2\mathrm{S}\,{}^1/_2, F = 3\rangle$, et pour état $|2\rangle$ le niveau $|6^2\mathrm{S}\,{}^1/_2, F = 4\rangle$ (voir la structure des niveaux du césium p. 18). Notons que ces deux niveaux contiennent un certain nombre de sous-niveaux Zeeman qui doivent être dégénérés : le refroidissement Raman ne peut donc fonctionner que si le champ magnétique est quasiment nul. L'état excité $|e\rangle$ est le niveau $|6^2\mathrm{P}\,{}^3/_2, F = 3\rangle$.

On envoie sur ces atomes à trois niveaux un système de deux faisceaux (de faible saturation) notés A et B, et appelés *faisceaux Raman*. Ces faisceaux ne sont pas résonnants avec la transition optique, mais sont désaccordés de telle sorte que la différence de leurs fréquences soit voisine de la fréquence de la transition $|1\rangle \rightarrow |2\rangle$. On peut montrer [82] que, lorsque le désaccord Δ est grand devant δ et devant les fréquences de Rabi Ω_A et Ω_B des faisceaux Raman[1], il n'y a pas d'excitation réelle dans l'état $|e\rangle$ et les faisceaux Raman agissent sur un atome de façon équivalente à une micro-onde de fréquence de Rabi

$$\overline{\Omega} = -\frac{\Omega_A \Omega_B^*}{2\Delta}, \tag{1.2}$$

et de désaccord

$$\delta_{\mathrm{at}} \equiv \delta - \frac{|\Omega_A|^2 - |\Omega_B|^2}{4\Delta} - (\vec{k}_A - \vec{k}_B)\cdot\vec{v} + \frac{\hbar(\vec{k}_A - \vec{k}_B)^2}{2M}, \tag{1.3}$$

1. Dans toute cette thèse, la définition adoptée pour la fréquence de Rabi est

$$\frac{\hbar\Omega}{2} = -\frac{\vec{d}\cdot\vec{\mathcal{E}}}{2}. \tag{1.1}$$

$\vec{d}$ étant l'élément de matrice du dipôle atomique et $\vec{\mathcal{E}}$ l'amplitude (complexe) du champ électrique.

où $\vec{k}_A$ et $\vec{k}_B$ sont les vecteurs d'ondes des faisceaux Raman, M la masse du césium et $\vec{v}$ la vitesse de l'atome[1]. La première fraction au second membre de l'équation (1.3) est due aux déplacements lumineux des niveaux $|1\rangle$ et $|2\rangle$. Les deux termes suivants correspondent à l'effet Doppler et à l'effet de recul [8].

Dans une expérience de refroidissement Raman, les atomes sont initialement dans l'état $|1\rangle$. En interagissant avec les faisceaux Raman, ils sont susceptibles d'être excités vers l'état $|2\rangle$. Si tel est le cas, il ne peuvent revenir spontanément vers le niveau initial car le niveau $|2\rangle$ est un niveau stable. Pour introduire l'irréversibilité nécessaire à tout processus de refroidissement, on utilise un troisième faisceau C appelé *repompeur Raman.* Ce faisceau excite les atomes dans l'état excité $|e\rangle$, leur permettant de revenir dans l'état initial $|1\rangle$ par émission spontanée.

b) La sélectivité en vitesse

Si un atome est en mouvement, il « verra », d'après la formule (1.3), le système de faisceaux Raman avec un désaccord effectif dépendant de sa vitesse (effet Doppler). En particulier, la transition sera résonnante lorsque $\delta = (\vec{k}_A - \vec{k}_B)\cdot\vec{v} + \text{Cte}$, où $\vec{v}$ est la vitesse de l'atome. Pour espérer atteindre de très basses températures, il est nécessaire de sélectionner les vitesses atomiques très précisément. La meilleure sélectivité en vitesse (*i.e.* le meilleur rapport vitesse/fréquence) sera assurée lorsque les faisceaux Raman se propagent en sens opposé.

Le niveau atomique $|2\rangle$ possède une durée de vie quasi-infinie, donc une largeur radiative nulle. La sélection des fréquences (et donc des vitesses) peut dès lors se faire avec une précision qui n'est limitée que par la durée de l'interaction atome/faisceaux lasers. Toutefois, pour profiter pleinement de cette précision élevée, il faut que le repompeur ne soit pas présent lors de l'excitation. C'est pourquoi l'expérience de refroidissement Raman ne fonctionne pas avec des faisceaux continus, mais avec des impulsions lumineuses. La largeur de la zone d'excitation dépend alors de la durée et de l'intensité de l'impulsion Raman.

c) Principe du refroidissement Raman

Le principe du refroidissement Raman 1D est donc le suivant : on envoie successivement une impulsion de faisceaux Raman, puis une impulsion de repompeur. L'impulsion Raman, qui possède un certain désaccord δ, excite vers $|2\rangle$ les atomes dont la vitesse est voisine de $\delta/2k$ (à une constante additive près, indépendante de la vitesse de l'atome). Ensuite, l'impulsion de repompeur Raman excite les atomes vers $|e\rangle$, et un photon spontané est émis pour revenir dans $|1\rangle$. Au cours de ce processus, l'atome a encaissé et émis plusieurs photons, avec un caractère

1. Les calculs permettant d'aboutir aux formules (1.2) et (1.3) seront détaillés au paragraphe 2.A, p. 108. Le choix des polarisations des faisceaux Raman sera quant-à-lui évoqué au paragraphe 3.1.*a.iii*, p. 123.

aléatoire dû à la direction du photon spontané. Il a donc effectué un saut dans l'espace des vitesses : c'est la marche au hasard dont j'ai parlé dans l'introduction (p. 16). Signalons que pour que les atomes soient effectivement poussés (en moyenne) vers la zone de vitesse comprise entre $-v_{\text{rec}}$ et $+v_{\text{rec}}$, il faut que le désaccord δ soit négatif.

Un fois le processus terminé, on recommence avec une autre impulsion Raman de désaccord δ et de puissance différents. Cette impulsion va exciter les atomes dans une autre classe de vitesse, etc. En utilisant de la sorte un grand nombre d'impulsions successives, on peut fabriquer un profil d'excitation tel celui représenté sur la figure 1.2. On s'arrange pour qu'aucune impulsion ne vienne exciter les atomes au voisinage de $v = 0$. Les atomes viendront finalement s'accumuler dans cette zone, selon le principe général du refroidissement sub-recul, expliqué dans l'introduction.

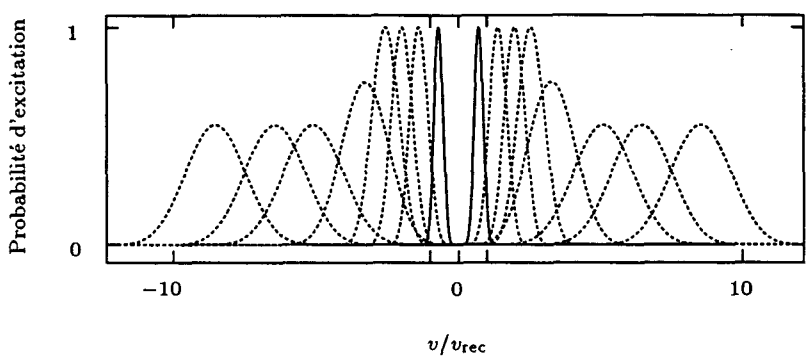


FIG. 1.2 - *Taux d'excitation par les impulsions d'une séquence typique utilisée dans l'expérience de refroidissement Raman. Le « profil d'excitation » évoqué dans le texte est la somme de toutes ces courbes.*

Afin de permettre à l'atome d'effectuer sa marche au hasard, il est nécessaire de répéter l'ensemble de la séquence un grand nombre de fois. En particulier, plus la zone « noire » est étroite, plus l'atome devra effectuer de sauts avant d'y parvenir, et plus grand devra être le nombre de répétitions de la séquence, si l'on désire qu'une fraction raisonnable des atomes soit refroidie. Néanmoins, la durée totale du refroidissement est limitée par des contraintes expérimentales (sur lesquelles je reviendrai). Par conséquent, un compromis devra être trouvé entre la largeur de la zone noire (et donc la température finale) et la fraction d'atomes refroidis.

Remarque : j'ai été un peu rapide dans ce qui précède. En effet, les atomes excités dans l'état $|e\rangle$ par le repompeur Raman ont une probabilité non nulle d'effectuer la transition $|e\rangle \rightarrow |2\rangle$. L'absorption d'un autre photon du repompeur Raman est dans ce cas nécessaire. Les niveaux $|1\rangle$, $|2\rangle$ et $|e\rangle$ ont été choisis de façon à optimiser le rapport de branchement (*i.e.* la probabilité ξ pour un atome

dans $|e\rangle$ de revenir dans $|1\rangle$) : on obtient ainsi ξ =0,75. La table 1.1 indique la valeur de ce rapport de branchement pour d'autres choix possibles des niveaux.

TAB. 1.1 - *Le rapport de branchement ξ, calculé en fonction des niveaux choisis sur le césium (ξ est indépendant du sous-niveau Zeeman de l'état excité $|e\rangle$ d'où l'on part). La configuration choisie est celle de la 3^e ligne.*

$\|1\rangle$	$\|2\rangle$	$\|e\rangle$	ξ
$\|6^2S_{1/2}, F=4\rangle$	$\|6^2S_{1/2}, F=3\rangle$	$\|6^2P_{3/2}, F=3\rangle$	0,25
$\|6^2S_{1/2}, F=4\rangle$	$\|6^2S_{1/2}, F=3\rangle$	$\|6^2P_{3/2}, F=4\rangle$	0,58
$\|6^2S_{1/2}, F=3\rangle$	$\|6^2S_{1/2}, F=4\rangle$	$\|6^2P_{3/2}, F=3\rangle$	0,75
$\|6^2S_{1/2}, F=3\rangle$	$\|6^2S_{1/2}, F=4\rangle$	$\|6^2P_{3/2}, F=4\rangle$	0,42

d) Choix du profil temporel des impulsions Raman

Le bon fonctionnement du refroidissement Raman suppose que les atomes puissent venir s'accumuler dans la zone autour de la vitesse nulle et y rester jusqu'à la fin de l'expérience. Les impulsions Raman ne doivent donc pas exciter de façon parasite les atomes de vitesse nulle. Il faut par conséquent être capable de fabriquer des impulsions avec un profil d'excitation (*i.e.* un profil spectral) « propre », c'est-à-dire avec des flancs raides et pas de pics latéraux (idéalement à support compact). Toutefois, le profil temporel de l'impulsion est naturellement à support compact. Comme on peut s'en douter, une telle impulsion « miracle » n'existe pas, mais il existe une solution fournissant un résultat convenable.

i) Excitation par une impulsion de faible puissance

Soit $\overline{\Omega}(t)$ le profil temporel de la fréquence de Rabi effective d'une impulsion Raman (que l'on peut assimiler à une micro-onde), et δ_{at} son désaccord. On calcule la probabilité pour un atome de passer de l'état $|1\rangle$ à l'état $|2\rangle$ en résolvant l'équation de Schrödinger pour un atome à deux niveaux. Celle-ci s'écrit

$$\frac{dC_1}{dt} = -i\frac{\overline{\Omega}(t)}{2}C_2 \qquad (1.4.a)$$

$$\frac{dC_2}{dt} = i\delta_{at}C_2 - i\frac{\overline{\Omega}(t)}{2}C_1\,, \qquad (1.4.b)$$

où $C_i = \langle i|\psi\rangle$, avec $i = 1, 2$ et ψ étant l'état du système.

Dans le cas d'une impulsion de faible puissance, on peut supposer que les atomes ont une faible probabilité d'être excités, et remplacer dans l'équation (1.4.b) C_1 par 1. On en déduit que la probabilité pour l'atome de passer de l'état

$|1\rangle$ à l'état $|2\rangle$ est

$$P_{1\to 2} = |C_2(t=+\infty)|^2 = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\overline{\Omega}(t')}{2} e^{-i\delta_{at}t'} \mathrm{d}t' \right|^2 . \tag{1.5}$$

On voit donc que le profil d'excitation d'une impulsion de faible puissance est donnée par le carré de sa transformée de Fourier. On en déduit notamment qu'il n'existe pas d'impulsion dont le profil d'excitation (*i.e.* dans l'espace des vitesses) est à support compact.

ii) Les impulsions de Blackman

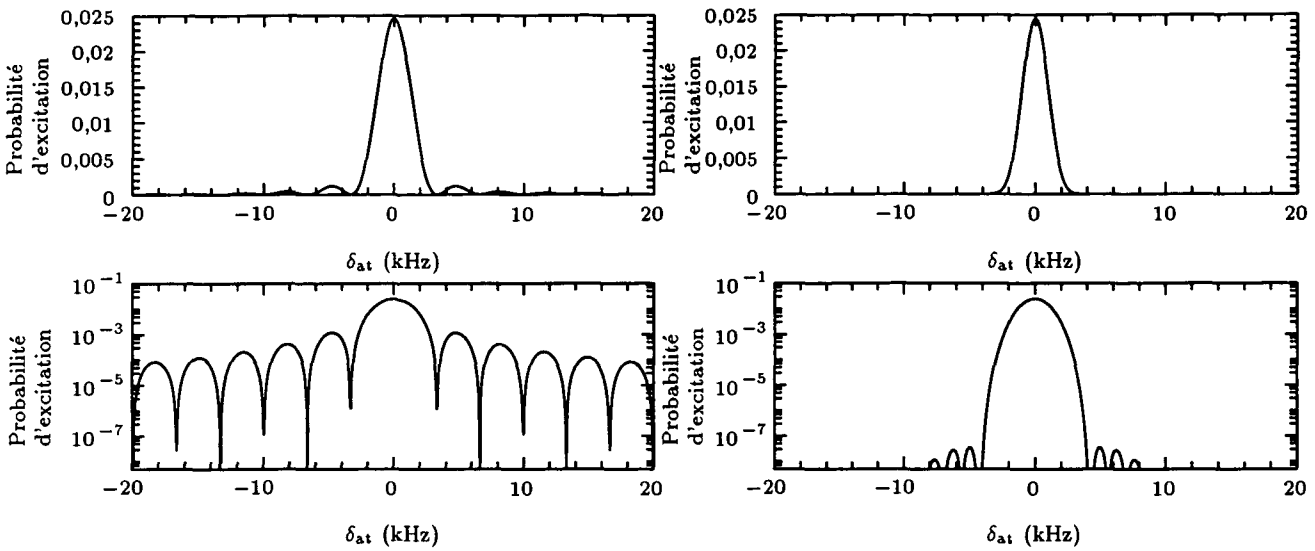
Le problème est donc de trouver une impulsion dont le profil temporel est à support compact, et dont le profil spectral ne possède pas trop de bandes latérales. On voit par exemple (fig. 1.3-*a*) qu'un simple créneau (*i.e.* $\overline{\Omega}(t) = \overline{\Omega}_0\theta(t)\theta(\tau - t)$, θ étant la fonction de Heavyside), possède des bandes latérales importantes.

La solution à ce problème se trouve dans la littérature [83, p. 95-100; 84]: l'impulsion de Blackman donnée par la formule

$$\overline{\Omega}(t) = \overline{\Omega}_0 \left[0{,}5\cos\left(2\pi\frac{t}{\tau}\right) + 0{,}08\cos\left(4\pi\frac{t}{\tau}\right) + 0{,}42\right] \theta\left(t+\frac{\tau}{2}\right)\theta\left(\frac{\tau}{2}-t\right), \tag{1.6}$$

fournit un résultat acceptable (fig. 1.3-*b*). Signalons que les coefficients de la formule (1.6) sont des coefficients approchés, qui sont obtenus en minimisant la première bande latérale de la transformée de Fourier. Il serait possible de fabriquer un « Blackman amélioré » en rajoutant à la formule (1.6) des harmoniques d'ordre plus élevées. Toutefois, je ne pense pas que ceci améliorerait le résultat de notre expérience, car d'autres limitations entrent en jeu.

Remarque: après que l'expérience que je présente ici eut été terminée, une nouvelle approche théorique du problème basée sur les vols de Lévy a été développée [79, 80, 85]. Elle montre notamment qu'un refroidissement utilisant des impulsions en créneaux peut être utilisé, à condition de faire coïncider exactement les zéros du profil d'excitation (ces zéros sont visibles sur la figure 1.3-*a*). Il faut pour cela contrôler finement le désaccord des impulsions Raman (compte tenu notamment des déplacements lumineux), ce qui a nécessité des améliorations du dispositif expérimental. La température finale est alors 10 fois plus basse que celle obtenue avec des impulsions de Blackman pendant la même durée d'interaction.



(a) *Créneau* (b) *Blackman*

FIG. 1.3 - *Comparaison du taux d'excitation d'un créneau de durée 300 μs, et d'une impulsion de Blackman de durée 714 μs (l'aire des deux impulsions est la même). La fréquence de Rabi maximale est $\overline{\Omega}_0/2 = 2\pi \times 166$ Hz. Ces taux sont calculés en résolvant numériquement l'équation de Schrödinger (1.4).*

iii) Cas où les impulsions sont puissantes. Condition d'impulsion π

Toute la discussion du paragraphe 1.1.*d.ii* a été faite en se plaçant dans le régime où la puissance des faisceaux Raman est faible, *i.e.*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\overline{\Omega}(t')}{2} \mathrm{d}t' \ll 1 . \tag{1.7}$$

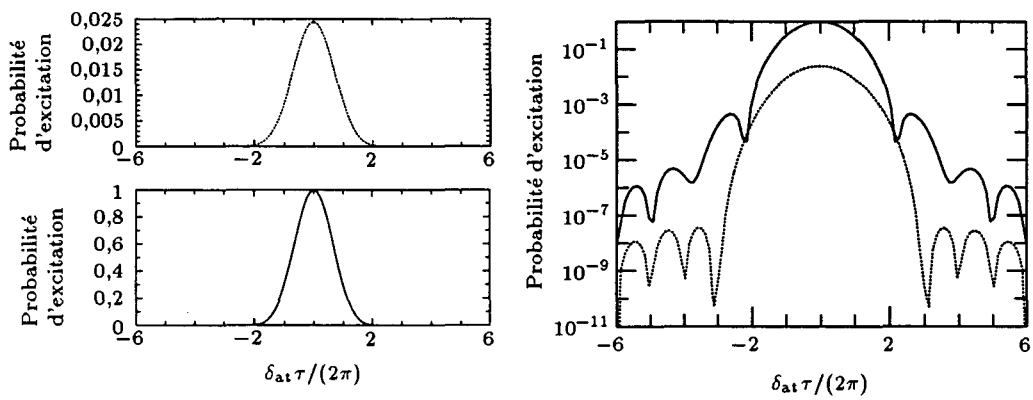
Expérimentalement, on n'a pas intérêt à travailler dans ce régime, car on ne profite pas pleinement du temps de refroidissement à notre disposition. Dans le cas où la transition Raman est résonnante ($\delta_0 = 0$), l'équation de Schrödinger (1.4) peut être résolue analytiquement. On trouve alors que la probabilité d'excitation $|1\rangle \rightarrow |2\rangle$ vaut 1 lorsque

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\overline{\Omega}(t')}{2} \mathrm{d}t' = (2k+1)\frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{1.8}$$

On retrouve la condition d'impulsion π, bien connue dans les expériences de franges de Ramsey [86–88].

Afin de donner aux refroidissement Raman une plus grande efficacité (de façon à réduire le temps de refroidissement Raman), on a intérêt à se placer dans la situation où les impulsions Raman sont des impulsions π. La relation (1.7) n'est

donc plus vérifiée, et nous ne ne pouvons plus calculer le profil d'excitation par une simple transformée de Fourier. Nous devons donc vérifier que ce dernier ne contient toujours pas trop de bandes latérales. C'est ce qui est fait sur la figure 1.4. Le profil d'excitation s'élargit et les bandes latérales deviennent plus importantes quand on augmente la puissance des faisceaux Raman, mais il subsiste un facteur 10^4 entre le pic principal et les bandes latérales.



(a) *Echelle linéaire* (b) *Echelle logarithmique*

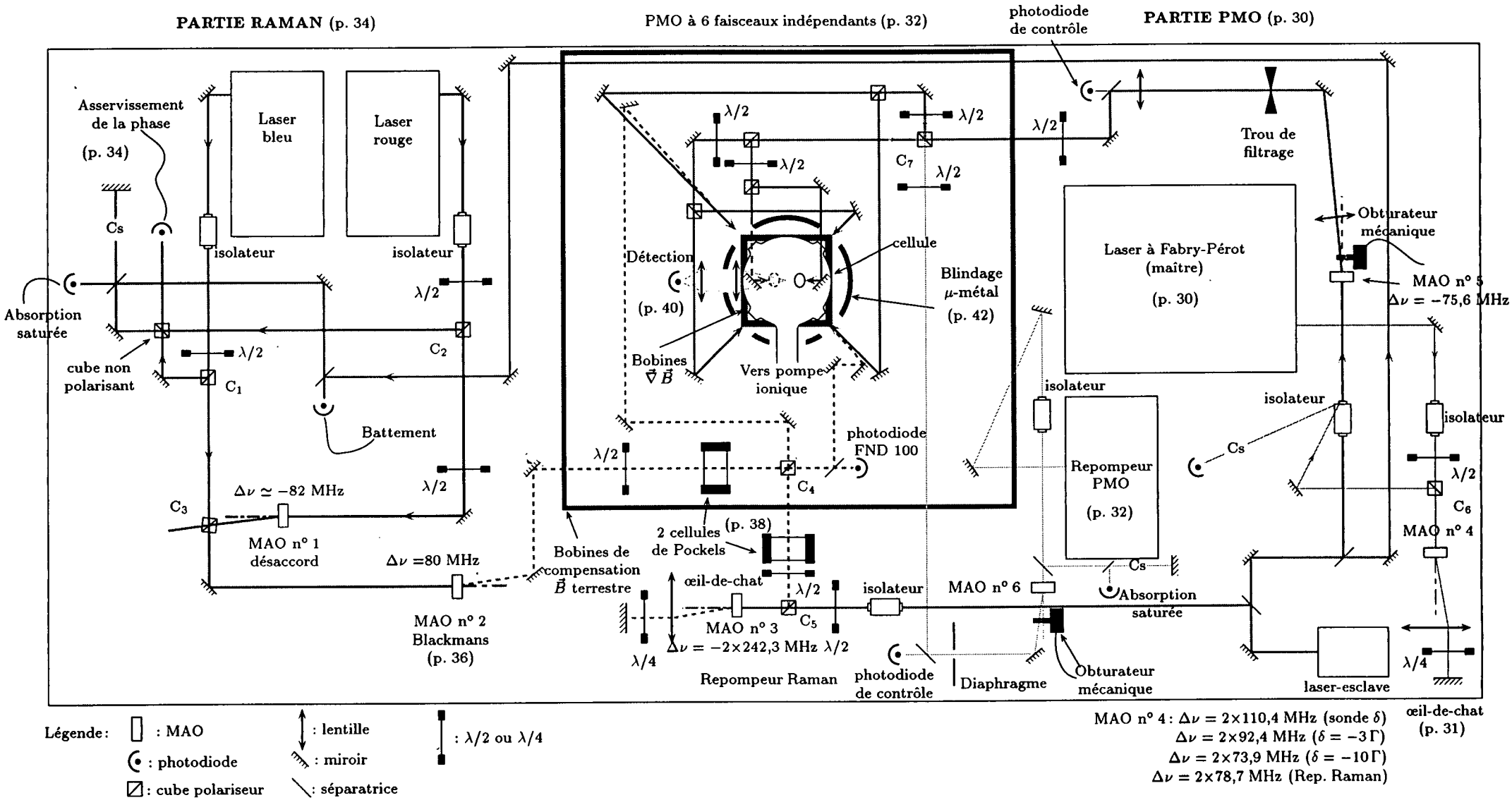
FIG. 1.4 - *Profil d'excitation Raman avec une impulsion Blackman de durée* τ. *Les courbes en pointillés sont tracées dans le régime linéaire,* i.e. $0{,}42\ \overline{\Omega}_0\tau/4\pi = 0{,}05$. *Les courbes continues vérifient la condition d'impulsion* π, i.e. $0{,}42\ \overline{\Omega}_0\tau/2 = \pi$. *Notons que la différence de contraste entre le pic principal et les bandes latérales passe de* 10^8 *à* 10^4.

2. Le dispositif expérimental

a) Présentation générale du dispositif expérimental

Le plan simplifié du dispositif utilisé pour l'expérience de refroidissement 1D est représenté sur la figure 1.5. Les éléments étaient installés sur une table Newport de surface 3 m^2. La figure 1.6 pourra donner au lecteur une idée de la densité d'occupation de cette table. Tous les lasers utilisés sont des diodes laser. Au centre de la table d'expérience, on trouve une cellule en verre contenant une vapeur de césium à $\sim$ 1 µPa (10^{-8} Torr), le vide étant maintenu et contrôlé par une pompe ionique (non représentée sur la figure 1.5).

Avant d'effectuer le refroidissement Raman, on commence par pré-refroidir les atomes à l'aide d'un piège magnéto-optique en cellule [31]. Ce PMO est réalisé à l'aide des éléments situés à droite de la table (sur la figure 1.5). Il permet de disposer d'un nuage contenant environ 4.10^7 atomes, à une température de l'ordre de 6 µK. On charge le PMO pendant environ 400 ms, puis on effectue du



Les prismes anamorphoseurs, les télescopes des isolateurs et des MAO, et les $\lambda/4$ des 6 bras du PMO sont absents de cette figure.

FIG. 1.5 - *Schéma général de l'expérience Raman.*

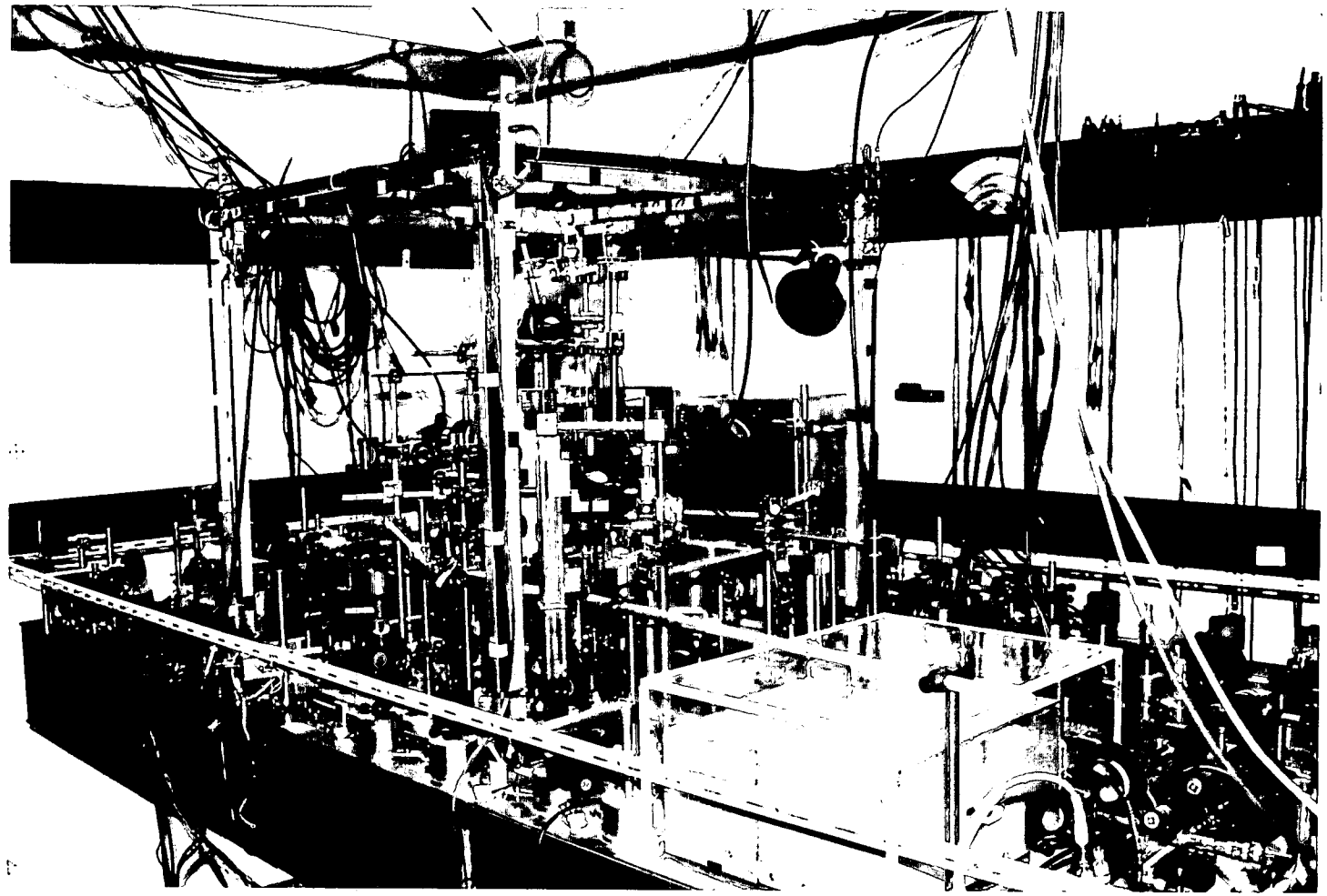


FIG. 1.6 - *Photographie de l'expérience Raman. Les deux diodes verrouillées en phase (faisceaux Raman) sont situées dans la boîte en plexiglas au premier plan. Au centre de la table, les bobines de compensation du champ terrestre forment un grand cube. Le blindage en μ-métal qui entoure la cellule de césium est situé au centre de ce cube (il est en grande partie masqué par des supports de miroir).*

refroidissement Raman pendant 25 ms sur ces atomes pré-refroidis. Les faisceaux Raman proviennent de deux diodes laser affinées spectralement grâce à un réseau, et verrouillées en phase[1] (elles sont situées en haut à gauche de la figure 1.5). Les impulsions de Blackman sont créées à l'aide d'un modulateur acousto-optique.

L'ensemble de l'expérience est contrôlé par un programme informatique fonctionnant sur un PC (non représenté sur la figure 1.5). Ce programme, qui est l'œuvre de Jakob Reichel [80], est d'une remarquable efficacité et d'une très grande convivialité, même s'il souffrait, dans ses premières versions, d'un défaut : que les menus soient en anglais.

b) Le piège magnéto-optique

i) Elements optiques

Les éléments optiques constituant le piège magnéto-optique (à l'exception du repompeur) ont été montés à l'origine par Brahim Lounis pour ses expériences sur les réseaux optiques. Le lecteur pourra donc trouver dans la thèse de ce dernier [89, p. 96] des détails concernant leur fonctionnement (je ne fournirai ici que les grandes lignes).

Pour faire fonctionner efficacement le piège magnéto-optique, ainsi que pour détecter les atomes après le refroidissement Raman, on a besoin d'un laser dont la fréquence est stabilisée avec une précision de l'ordre du MHz. Comme une diode laser a typiquement une largeur de 20 MHz, on doit affiner le spectre de cette dernière. Cet affinement spectral est réalisé par auto-injection à l'aide d'un Fabry-Pérot extérieur, méthode mise au point initialement au LPTF [90 ; 91, p. 12 ; 30, p. 71]. Notre montage utilise une diode laser Hitachi, que l'on asservit sur le sommet du croisement de niveau ($6^2\mathrm{S}_{1/2}, F = 4 \rightarrow 6^2\mathrm{P}_{3/2}, F' = 4, 6^2\mathrm{S}_{1/2}, F = 4 \rightarrow 6^2\mathrm{P}_{3/2}, F' = 5$), grâce à une cale piézo-électrique sur laquelle on a installé l'un des miroirs du Fabry-Pérot. Un autre miroir, situé entre le laser et le Fabry-Pérot, doit également être installé sur une cale piézo-électrique (dont la tension est également asservie) afin de contrôler la phase du trajet entre le laser et le Fabry-Pérot.

La puissance de ce laser n'est que de 6 mW : c'est insuffisant pour un piège magnéto-optique. On utilise donc ce faisceau pour injecter une diode SDL de 150 mW, très performante pour ce genre d'utilisation. L'injection d'une diode est en quelque sorte une « amplification lumineuse », puisque la diode esclave possède les propriétés spectrales de la diode maître, mais beaucoup plus de puissance (verrouillage en phase). Pour réaliser une bonne injection, il faut que les modes des diodes maître et esclave se recouvrent bien. Ceci est réalisé de manière astucieuse en envoyant le faisceau maître par la deuxième voie du second cube

1. Dans toute la suite, je désignerai par « laser bleu » celui des lasers Raman possédant la fréquence la plus élevée, et par « laser rouge » l'autre laser Raman. Il va pourtant de soi que ces deux lasers émettent dans l'infrarouge !

de l'isolateur optique du faisceau esclave, selon une méthode mise au point par Brahim Lounis [89, p. 70].

J'ai signalé que la diode maître était asservie sur un croisement de niveau, c'est-à-dire à $\nu_{\text{rés}} - 125$ MHz, où $\nu_{\text{rés}}$ est la fréquence de résonance de la transition $F = 4 \rightarrow F' = 5$. Or, l'optimum de fonctionnement pour un piège magnéto-optique se produit lorsque le désaccord des faisceaux du piège est de l'ordre de $-3\,\Gamma$ [30, p. 115], où $\Gamma = 2\pi \times 5{,}3$ MHz est la largeur de l'état excité du césium. Il est par conséquent indispensable de modifier la fréquence des faisceaux. En outre, nous verrons par la suite qu'il est nécessaire, pour le bon fonctionnement de l'expérience, de disposer successivement de 4 désaccords différents.

Les fréquences des lasers sont déplacées à l'aide de modulateurs acousto-optiques (MAO). Deux modulateurs ont été utilisés : l'un sur le faisceau maître et l'autre sur le faisceau esclave. Le MAO du faisceau esclave (n° 5 sur la figure 1.5) est installé en simple passage, avec un déplacement de fréquence de $-75{,}6$ MHz, ce qui est voisin de l'optimum de puissance transmise (80 % dans l'ordre 1 à 80 MHz)[1]. Le modulateur du faisceau maître (n° 4) est installé en double passage, selon un dispositif appelé œil-de-chat (fig. 1.7) : la position du faisceau est ainsi indépendante de la fréquence du MAO, et le faisceau esclave reste toujours injecté.

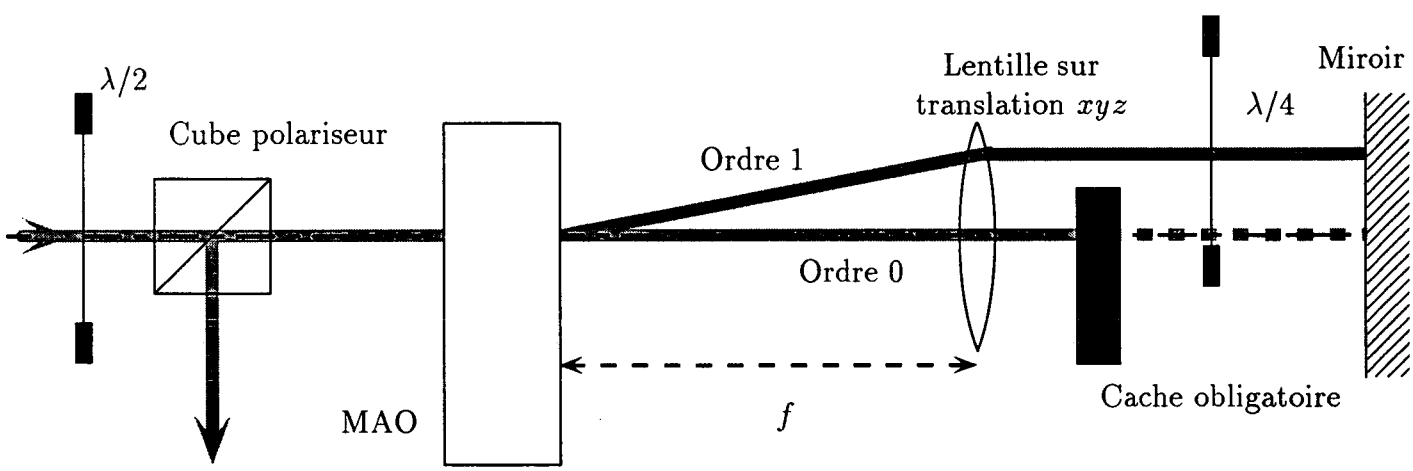


FIG. 1.7 - *Modulateur acousto-optique monté en double passage selon le principe de l'œil-de-chat. Le miroir doit être réglé de telle sorte qu'en l'absence de lentille l'ordre 0 du M.A.O revienne dans celui-ci. On règle la lentille dans un deuxième temps en obstruant l'ordre 0.*

Outre sa fonction de décalage de fréquence, le MAO du faisceau esclave permet de couper rapidement (*i.e.* en un temps inférieur à 10 μs) ce faisceau lors de la phase de refroidissement Raman. Malheureusement cette extinction n'est pas

1. Ceci dépend naturellement du modèle de MAO choisi (ici Crystal Technology 3080).

totale et un peu de lumière arrive au niveau des atomes, induisant des déplacements lumineux et l'émission de photons spontanés nuisibles au refroidissement Raman (si la lumière est résonnante, une extinction inférieure au µW est nécessaire). On utilise donc également un obturateur mécanique et un trou de filtrage de diamètre 100 µm, placé au foyer d'un télescope. La fermeture de l'obturateur mécanique nécessite plusieurs millisecondes, mais ce dernier assure une extinction totale. Outre l'extinction du faisceau, le trou de filtrage permet d'obtenir un profil de faisceau parfaitement gaussien. Le prix à payer est une perte de puissance de l'ordre de 30 %.

A l'aide de cubes polariseurs et de lames demi-ondes, le faisceau est séparé en six bras indépendants. Ceci offre, par rapport à un piège de type rétro-réfléchi, l'avantage de pouvoir optimiser plus finement le nombre d'atomes piégés. Mais cet avantage est aussi une contrainte, dans la mesure où nous devions passer quotidiennement une heure ou deux à réaligner le piège, à cause de la mauvaise qualité des supports de miroirs et des variations de la température de la pièce[1]. Au niveau du piège, le diamètre des faisceaux est de l'ordre de 1 cm.

Le faisceau repompeur du PMO provient d'une diode STC, affinée à l'aide d'un réseau [91, p. 11 ; 92 ; 93 ; 94, p. 188] : l'ordre 1 du réseau est renvoyé dans la diode et sert à l'injection, tandis que l'ordre 0 constitue le faisceau utile. Cette technique permet d'obtenir une largeur spectrale de l'ordre de 500 kHz, mais on perd environ 50 % de la puissance. Cette diode a été montée par Moritz Fichtmüller [95].

La diode du repompeur est asservie sur le croisement de niveau $F = 3 \rightarrow F' = 2, F = 3 \rightarrow F' = 3$. On utilise ensuite un modulateur acousto-optique à 75,6 MHz (n° 6) pour arriver sur la résonance $F = 3 \rightarrow F' = 3$. Ce modulateur sert à couper la lumière rapidement au début de la phase de refroidissement Raman. Signalons que là aussi, l'utilisation d'un obturateur mécanique (suivi d'un simple diaphragme), s'est avérée nécessaire. Finalement, le repompeur est mélangé avec les faisceaux du piège sur le cube C_7 (fig. 1.5). Il est donc présent dans les 6 bras du piège.

ii) Séquence temporelle

Voici la séquence temporelle que nous avons avons utilisée dans cette expérience :

– tout d'abord, nous chargeons le PMO pendant un temps de l'ordre de 350 ms. Le désaccord du piège est de -3Γ et les faisceaux du piège sont au maximum de leur puissance. Signalons que ce temps de 350 ms est insuffisant pour que le nombre d'atomes dans le PMO atteigne sa valeur stationnaire[2]. Il

1. Dans les derniers mois de l'expérience, nous avons remplacé tous les supports de miroir par des supports de la marque Thorlabs, ce qui a nettement amélioré cette situation.

2. Nous aurions pu raccourcir le temps de chargement du PMO en augmentant la pression de césium dans la cellule. Toutefois, ceci aurait eu pour effet d'augmenter le bruit de fond lors

représente toutefois un bon compromis entre un nombre d'atomes suffisant et une durée de prise de données raisonnable ;

– dans un deuxième temps, on réduit l'intensité des faisceaux du PMO de 90 %, en utilisant le MAO du faisceau esclave (n° 5), et ce pendant 5 ms ;

– ensuite, on coupe le gradient de champ magnétique du PMO On entre donc dans une phase de mélasse optique, de durée 35 ms environ ;

– enfin, le désaccord des faisceaux de la mélasse est porté à $-10\,\Gamma$, et ce à l'aide du MAO du faisceau maître (n° 4). Cette phase de mélasse à grand désaccord dure typiquement 10 ms.

Les faisceaux sont ensuite éteints et les obturateurs mécaniques fermés. La phase de refroidissement Raman peut alors commencer.

Cette séquence un peu compliquée (quoique très standard) a été rendue nécessaire par plusieurs facteurs. Tout d'abord, le refroidissement Raman ne peut se faire qu'avec un champ magnétique résiduel inférieur au mG. Or, du fait de l'auto-induction des bobines créant le gradient de champ magnétique, le courant de ces dernières met 5 ms pour descendre (temps $1/e$). La présence des faisceaux de mélasse pendant ce temps empêche aux atomes de fuir de la zone de capture[1].

Les désaccords et intensités des faisceaux pendant les différentes phases ont été choisis de façon à minimiser la température finale du nuage atomique (afin de donner « moins de travail » au refroidissement Raman, et de limiter l'extension transverse du nuage pendant la phase de refroidissement Raman), tout en conservant suffisamment d'atomes. Il est ainsi montré [30, fig. 17 p. 204 ; 96] que, dans le cas où il existe un gradient de polarisation (comme ici où nous avons une mélasse $\sigma^+ - \sigma^-$), la température finale des atomes est plus basse à grand désaccord, plus basse quand l'intensité lumineuse est faible, et plus basse pour la mélasse que pour le piège. Finalement, la température de la mélasse est de l'ordre de 6 µK.

Remarque : le piège magnéto-optique et la mélasse produisent des atomes dans le niveau $|F = 4\rangle$. Or, nous avons vu que le refroidissement Raman doit se faire à partir d'atomes dans $|F = 3\rangle$ (p. 23). Il est donc nécessaire de dépomper les atomes. Pour ce faire, nous avons employé deux méthodes : on peut couper le repompeur du PMO avant les faisceaux de de la mélasse. Les atomes tombent alors « naturellement » dans le niveau $|F = 3\rangle$ en une fraction de ms. On peut également « encourager » le processus de dépompage en envoyant sur les atomes une impulsion de repompeur Raman de 300 µs. Les deux méthodes conduisent à des résultats équivalents.

---

de la détection du signal.

1. Toutefois, le fait que les obturateurs mécaniques se ferment lentement impose le respect d'un « délai de sécurité » de 1 à 2 ms entre la coupure des MAO et le début du refroidissement Raman.

c) Fabrication des fréquences Raman

i) Verrouillage en phase des deux lasers

La fabrication des fréquences Raman a constitué la partie de l'expérience la plus délicate à construire. Nous avons choisi d'utiliser deux diodes SDL affinées spectralement avec un réseau (selon le même principe que pour le repompeur du PMO). La puissance des diodes en libre est 100 mW pour le laser bleu, et 150 mW pour le laser rouge.

Pour effectuer du refroidissement Raman, il est nécessaire que la différence des fréquences des deux faisceaux soit fixée avec une précision nettement inférieure à $kv_{\mathrm{rec}} = 2\pi \times 4$ kHz. Or la largeur des diodes affinées avec un réseau est de quelques centaines de kilohertz ! Pourtant, il existe une solution à ce problème : le verrouillage en phase d'un laser par rapport à l'autre [88, p. 134]. La technique du verrouillage en phase avait été initialement mise au point dans les années 50. Elle fut par la suite adaptée aux diodes lasers. Le premier verrouillage en phase de deux diodes laser à 9 GHz (*i.e.* à la fréquence de résonance hyperfine du césium) a été réalisé en 1994, en collaboration avec le LPTF [97], pour la fabrication de l'horloge atomique à césium. Le dispositif de notre expérience a quant-à lui entièrement été installé par Guglielmo Tino [98]. Je n'en présenterai ici que les grandes lignes, une explication complète de son fonctionnement n'étant pas de mon ressort.

On commence par prélever une petite quantité (réglable) de chacun des deux lasers, et on fait coïncider les deux faisceaux obtenus (fig. 1.8). On focalise ce mélange sur une photodiode rapide (*i.e.* transmettant des fréquences de l'ordre de 10 GHz), de façon à créer un battement. La photodiode mesure le carré du champ électrique total. Le signal électrique contient donc une composante en $(\omega_A - \omega_B)/(2\pi)$ (ω_A et ω_B étant les pulsations des lasers bleu et rouge), qui est de l'ordre de 9 GHz.

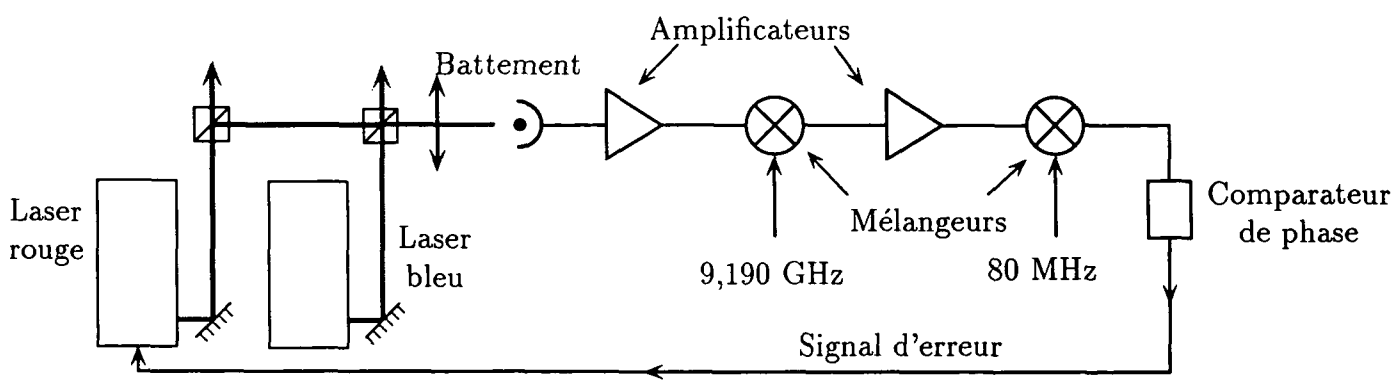


FIG. 1.8 - *Schéma simplifié du dispositif de verrouillage en phase des deux lasers Raman.*

A l'aide d'un mélangeur électronique, on mélange ce signal de photodiode avec

un signal de référence, de fréquence 9,19 GHz. Ce signal de référence est produit par une chaîne de multiplication de fréquence gracieusement prêtée par le LPTF. Du mélangeur, il sort un signal contenant la différence des deux fréquences (de l'ordre de 80 MHz).

On utilise alors un comparateur de phase, qui compare la phase du signal de battement avec celle d'un signal de radiofréquence à 80 MHz, fourni par un synthétiseur. Il permet d'induire un signal d'erreur proportionnel au déphasage, qui est envoyé sur le courant de diode, et sur la haute tension de la cale piézo-électrique du laser rouge, de façon à fermer la boucle d'asservissement. Lorsque le système est asservi, la différence de phase entre le signal de battement et celui du synthétiseur est constante. On peut donc dire que les deux fréquences sont rigoureusement égales. Le verrouillage en phase fonctionne plusieurs heures sans saut de l'asservissement.

ii) Définition du désaccord Δ

Le verrouillage en phase que je viens d'évoquer permet de définir la différence des fréquences entre les deux lasers Raman. Pour définir totalement les fréquences de ces derniers, il reste donc à fixer le désaccord Δ (voir figure 1.1, p. 21). Pour cela, on a construit un battement entre les lasers Raman, et un laser de référence proche de la résonance du césium (voir figure 1.5, p. 28) ; ce laser est une petite partie du faisceau esclave du PMO Le signal de battement est détecté par une photodiode rapide, et envoyé sur un analyseur de spectre. Cela permet de connaître la valeur du désaccord Δ. Signalons que nous n'avons pas jugé utile d'asservir la diode bleue : sa fréquence flotte donc pendant l'expérience, ce qui n'est pas très grave, car la valeur de Δ varie peu, et l'autre laser « suit » grâce au verrouillage en phase qui peut tenir pendant plusieurs heures.

La plupart des expériences ont été réalisées avec $\Delta = -2\pi \times 3$ GHz. Afin d'assurer une meilleure homogénéité des déplacements lumineux dus aux faisceaux Raman, un désaccord plus élevé eût été préférable. Toutefois, le désaccord Δ ne doit pas être trop près de $\pm 2\pi \times 9$ GHz, sinon l'un des deux faisceaux va se rapprocher de résonance avec une transition[1]. La solution serait donc de travailler avec un désaccord Δ bien supérieur à la résonance hyperfine du césium, par exemple $\Delta = 2\pi \times 30$ GHz. Toutefois, la fréquence de Rabi effective étant en $1/\Delta$ (éq. (1.2)) , nous aurions dans ce cas été sévèrement limités par la puissance Raman disponible.

1. Par exemple, si $\Delta = -2\pi \times 8$ GHz, le laser bleu n'est désaccordé que de 1 GHz par rapport à la transition $|2\rangle \rightarrow |e\rangle$.

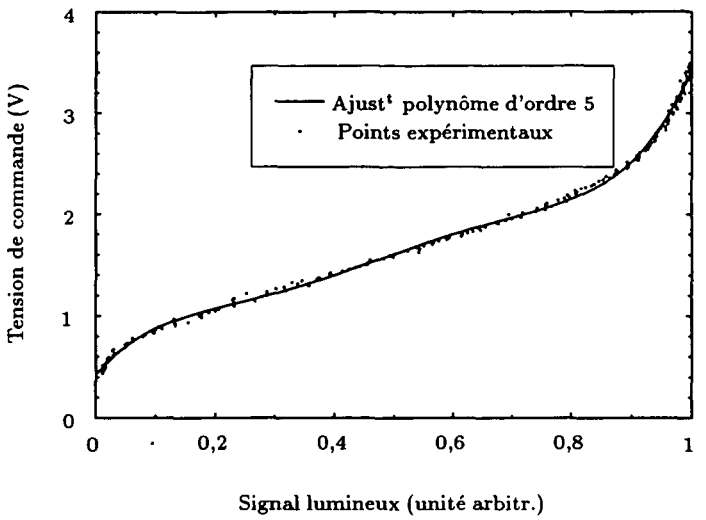


FIG. 1.9 - *Fonction de transfert du boîtier TFM et du MAO n° 2.*

d) Mise en œuvre des impulsions Raman

i) Création du profil des impulsions (Blackman)

Le profil des impulsions Raman (en particulier les fameuses impulsions de Blackman) a été créé à l'aide d'un modulateur acousto-optique (MAO n° 2 sur la figure 1.5, p. 28), dont on peut contrôler la quantité de lumière passant dans l'ordre 1. Nous avons jugé plus simple d'utiliser le même modulateur pour les 2 faisceaux Raman. On fait donc coïncider ces faisceaux à l'aide d'un cube polariseur (cube C_3). Ils passent tous les deux dans le MAO puis, comme leurs polarisations sont orthogonales, on les sépare grâce à un second cube (cube C_4).

Le modulateur acousto-optique est alimenté par une radiofréquence à 80 MHz. Pour dessiner le profil des impulsions, on utilise un boîtier électronique (boîtier TFM) commandé par une tension de 0 à 5 V, et qui laisse passer d'autant plus de radiofréquence que cette tension est élevée. Le problème réside alors dans la fabrication de cette tension de commande. En effet, s'il existe de nos jours des générateurs de fonctions offrant de multiples possibilités (créneaux, triangles, sinusoïdes), aucun ne possède encore l'option « Blackman ». En outre, la fonction de réponse des boîtiers TFM et du MAO n'est pas linéaire (même si elle est heureusement monotone).

Nous avons résolu le problème en calibrant la fonction de transfert, c'est-à-dire en envoyant sur le boîtier TFM un signal de commande triangulaire, et en enregistrant sur une photodiode la lumière transmise dans l'ordre 1 du MAO. Cela donne la courbe de la figure 1.9. Cette courbe est ensuite traitée informatiquement : grâce au logiciel EasyPlot, on affiche la réciproque de la fonction de

transfert, que l'on ajuste par un polynôme d'ordre 5[1]. Cela permet de corriger les non-linéarités du boîtier et du MAO tout en éliminant le bruit introduit lors de la détection du profil[2].

Pendant la phase d'expérience, la commande du boîtier TFM (et donc du MAO) provient d'un générateur rapide de fonctions programmable (appelé GDPC). Ce générateur communique avec l'ordinateur qui pilote l'expérience. L'ordinateur place dans la mémoire du GDPC le profil d'un impulsion de Blackman (corrigée par la réciproque de la fonction de transfert précédemment étalonnée), ou encore celui de toute la séquence de refroidissement. Ce profil est discrétisé avec une précision temporelle pouvant descendre à la microseconde. Ce générateur est en outre déclenchable, c'est-à-dire que la commande d'impulsion de Blackman sera effectivement envoyée sur le MAO après que le GDPC aura reçu un avertissement (signal logique) venant de l'ordinateur.

Outre le profil des impulsions, le GDPC peut produire une dizaine de signaux digitaux, eux aussi programmables, et qui servent à commander certains éléments de l'expérience (notamment les cellules de Pockels). Il y a en fait 2 échelles de temps sur l'expérience: une échelle lente (piégeage, mélasse, temps noir, détection) qui est commandée directement par l'ordinateur, et une échelle rapide (succession des impulsions dans la séquence de refroidissement) qui est commandée par le GDPC.

ii) Le désaccord δ

Revenons au schéma de principe du verrouillage en phase (fig. 1.8). On voit qu'après la source à 9,190 GHz, on mélange le signal électrique avec une radiofréquence à environ 80 MHz (et ce pour des raisons techniques). Autrement dit, une fois les lasers asservis, les faisceaux Raman seront désaccordés de 82 MHz par rapport à la transition hyperfine du césium (qui est de 9,192 GHz).

Pour rattraper ce désaccord, on utilise le modulateur acousto-optique n° 1 à 80 MHz. Ce MAO n'est traversé que par le faisceau rouge (ce qui, outre le désaccord, compense la différence de puissance entre les deux lasers). Il est alimenté par un synthétiseur de fréquence télécommandable. En modulant sa fréquence, on peut modifier finement la valeur du désaccord δ du système Raman, de façon à ce que les impulsions de la séquence de refroidissement possèdent les désaccords *ad hoc*. La fréquence de ce MAO doit donc pouvoir être changée rapidement: c'est pourquoi elle est aussi commandée par le GDPC (qui possède une deuxième voie analogique).

Remarque: le MAO n° 2 des blackmans modifie également la fréquence des lasers Raman, mais cette fois-ci les deux lasers sont déplacés de la même quantité,

1. Le choix d'un polynôme d'ordre 5 ne repose sur aucun fondement théorique.

2. La photodiode mesure la puissance et non l'amplitude de la lumière. Toutefois, d'après la formule (1.2), la fréquence de Rabi effective du processus Raman est bien proportionnelle à la puissance des faisceaux.

donc le désaccord δ ne change pas.

iii) Le sens des faisceaux. Les cellules de Pockels

La figure 1.2 (p. 23) nous montre qu'un séquence typique d'impulsions Raman doit pouvoir exciter de façon symétrique les atomes de vitesse v et les atomes de vitesse $-v$. Pour ce faire, on peut utiliser successivement des impulsions avec $\delta_{\text{at}} > 0$ et $\delta_{\text{at}} < 0$; pourtant, ce n'est pas la bonne solution. En effet, les impulsions de désaccord positif ont pour effet de « pousser » les atomes dans le même sens que leur vitesse, et donc d'augmenter l'énergie cinétique 1D moyenne du nuage atomique. Au lieu de faire du refroidissement, on fait en fait du chauffage. Pour réaliser le refroidissement Raman, il faut que le désaccord δ_{at} soit négatif. Afin d'exciter les 2 côtés de la distribution en vitesses, il faut donc pouvoir échanger les trajets des faisceaux bleu et rouge.

Ceci est réalisé à l'aide d'une cellule de Pockels. Une cellule de Pockels est une lame à retard commandable : lorsqu'il n'y a pas de tension, elle n'agit pas sur la lumière ; lorsque'il y a une certaine tension, elle agit comme une lame demi-onde. Si les axes propres de la cellule de Pockels sont bien réglés, elle fait alors tourner la polarisation des faisceaux de $\pi/2$. Le faisceau qui était transmis par le cube C_4 est maintenant réfléchi, et *vice versa*.

Une cellule de Pockels a la propriété de réagir à sa commande en un temps très bref (de l'ordre de la nanoseconde, ce qui est beaucoup mieux que ce dont nous avons besoin, typiquement 1 µs). En outre, elle doit être commandée par une tension de l'ordre de 6 kV. La difficulté est de trouver un interrupteur qui puisse couper une tension de 6 kV, et qui réagisse en 1 µs. Nous avons pour cela utilisé des interrupteurs de l'entreprise allemande Behlke, et choisi un montage de type *va-et-vient*, où deux interrupteurs sont nécessaires, l'un isolant la cellule de Pockels de la source de tension tandis que l'autre la raccorde à la masse. Le lecteur pourra trouver le schéma de ce montage dans la thèse de Jakob Reichel [80].

Finalement les deux faisceaux Raman arrivent sur les atomes avec une polarisation linéaire. Ils sont polarisés orthogonalement l'un par rapport à l'autre. Le diamètre des faisceaux est de l'ordre de 1 cm, donc les atomes quittent, du fait de la gravité, la zone éclairée au bout de 40 ms environ. C'est ce qui limite le temps de refroidissement disponible.

iv) Le repompeur Raman. Choix des niveaux et pompage des atomes.

Le repompeur Raman ne provient pas d'une sixième diode laser ; nous avons prélevé une petite partie du faisceau esclave du PMO (peu de puissance est nécessaire).

Nous avons vu au paragraphe 1.1.*c* (p. 23) que pour optimiser le rapport de branchement, il fallait régler le repompeur Raman sur la transition $F = 4 \rightarrow F' =$

3. Or, le faisceau esclave est quasi-résonnant avec la transition $F = 4 \rightarrow F' = 5$[1], ce qui fait une différence de 510 MHz environ (compte tenu du MAO n° 5 présent dans le faisceau). Pour effectuer ce décalage, nous avons dû utiliser un MAO (n° 3) prévu pour 200 MHz, et l'employer en double passage à 242 MHz. Il a en outre été nécessaire de modifier la fréquence du MAO du faisceau maître (n° 4) pendant la phase où le repompeur Raman fonctionne (heureusement elle ne coïncide pas avec la phase de piégeage). Le MAO du repompeur Raman permet également d'allumer et d'éteindre celui-ci (impulsions de repompeur Raman). Le faisceau est suffisamment faible pour qu'aucun obturateur mécanique supplémentaire ne soit nécessaire.

Le repompeur Raman est envoyé sur le cube C_4 de manière à coïncider avec les faisceaux Raman. Il induit un recul de v_{rec} sur les atomes. Il est donc nécessaire de contrôler sa direction, ce que l'on fait avec la la 2$^{\text{e}}$ cellule de Pockels. On choisit cette direction en fonction des paramètres de l'impulsion Raman qui vient juste de se produire. En général, si la vitesse résonnante de l'impulsion Raman est élevée (*i.e.* supérieure à $2\,v_{\text{rec}}$), on oriente le repompeur Raman de telle sorte qu'il « pousse » les atomes dans le même sens que l'impulsion Raman. Si par contre la vitesse résonnante est faible, le repompeur Raman atténue la poussée des faisceaux Raman (dans ce cas la vitesse de l'atome change de signe, et on veut éviter qu'en valeur absolue elle n'augmente trop).

La polarisation du repompeur Raman avant sa cellule de Pockels a toutefois été réglée de telle sorte que 90 % de la puissance passe dans une direction, et 10 % dans l'autre (ce qui atténue donc la portée du choix précédent). Si l'on ne prend pas cette précaution, le repompage est moins efficace à cause de l'existence d'« états noirs », c'est-à-dire d'états non couplés à la lumière [99][2]. Une partie des atomes viennent, par pompage optique, s'accumuler dans ces états noirs qu'ils ne peuvent dès lors plus quitter. Lorsqu'on envoie 10 % de la lumière dans l'autre bras, les atomes interagissent avec deux faisceaux polarisés linéairement, mais avec des polarisations orthogonales. On peut montrer [71] que dans ce cas l'état noir devient sélectif en vitesse. Les atomes ne peuvent plus s'y accumuler très longtemps (sauf pour une vitesse bien précise).

Finalement, nous arrivons à repomper les atomes en 50 µs environ (ce qui est assez long comparé à Γ^{-1}). Les impulsions de repompeur Raman sont toutefois plus courtes que la plupart des impulsions Raman, et représentent une faible part (28 % environ) du temps total de refroidissement.

1. Il est même (avant le MAO n° 5) 60 MHz sur le bleu de cette transition.

2. L'existence de ces états est un problème mathématique: le repompeur Raman couple un espace vectoriel de dimension 9 (*i.e.* $|F = 4\rangle$) à un autre espace de dimension 7 ($|F' = 3\rangle$). Par conséquent, le noyau du morphisme d'espace vectoriel est non nul.

e) La détection du signal

La détection de la distribution en vitesse d'atomes refroidis sous la vitesse de recul paraissait au départ un problème délicat ; en effet, les techniques usuelles de temps de vol n'offraient pas une précision suffisante. Il s'est rapidement avéré que la méthode la plus efficace, pour sonder la distribution en vitesse, était d'utiliser les faisceaux Raman [100].

Le principe de la méthode est le suivant : on envoie sur les atomes refroidis une impulsion Raman (de Blackman) de désaccord δ déterminé, et de longue durée (typiquement 3 ms). Cette impulsion « de sélection » excite dans l'état $|F = 4\rangle$ les atomes dont la vitesse est voisine de $v_{\text{rés}} = \delta/(2k) + \text{Cte}$. Ensuite, on allume les faisceaux du PMO, tout en les mettant à résonance avec la transition $F = 4 \rightarrow F' = 5$ (ceci est réalisé au moyen du MAO n° 4). Les atomes situés dans le niveau $|F = 4\rangle$ émettent de la lumière de fluorescence, que l'on peut détecter sur une photodiode placée au voisinage de la cellule. Le signal observé est proportionnel au nombre d'atomes dans l'état $|F = 4\rangle$, donc au nombre d'atomes présents initialement dans la classe de vitesse voisine de v_0. Pour obtenir un spectre de distribution en vitesse, il faut recommencer un grand nombre de fois le cycle entier piégeage + mélasse + refroidissement Raman + détection, en sélectionnant à chaque fois une classe de vitesse différente.

La mise en œuvre de ce système de détection a posé un certain nombre de problèmes techniques. Il a tout d'abord fallu installer un système optique permettant de collecter la lumière de fluorescence émise par les atomes. Afin de récolter le plus de lumière possible, nous avons utilisé un système de deux lentilles convergentes, dont l'une est placée le plus près possible de la cellule. La photodiode de détection est située au point image du PMO par ce système de lentilles, qui peut être détecté à l'aide d'une carte infrarouge, d'un viseur... et de beaucoup de patience.

Comme je l'ai dit, on détecte la présence d'atomes dans $|F = 4\rangle$ en les illuminant avec les faisceaux du PMO. Le problème est que la puissance de ces faisceaux fluctue d'environ 10 % sur un échelle de temps de l'ordre de la seconde, ces fluctuations étant essentiellement dues à des vibrations mécaniques du trou de filtrage. Or, le bruit induit par ces fluctuations sur le signal de fluorescence est du même ordre de grandeur que le signal qui nous intéresse. Pour remédier à ce problème, nous mesurons les fluctuations de puissance du faisceau, grâce à une photodiode de contrôle placée après le trou de filtrage. Ensuite, à l'aide d'un dispositif électronique approprié, nous effectuons la différence entre le signal expérimental et ce signal de contrôle. Nous en tirons un nouveau signal, dans lequel le bruit est fortement atténué[1].

Finalement, on observe un pic de fluorescence de durée environ 1 ms ; après cela, les atomes sont retournés dans l'état $|F = 3\rangle$. Ce pic vient se superposer à la

1. Nous verrons au chapitre 3 (p. 160) qu'il existe une méthode plus simple pour résoudre ce genre de problème : elle consiste à asservir la puissance du faisceau après le trou de filtrage.

fluorescence (constante) des atomes rapides de la cellule. L'ordinateur enregistre la différence entre le sommet du pic et ce bruit de fond. Le signal représente typiquement 1 % de la fluorescence totale.

f) Distribution en vitesse

La figure 1.10 montre le signal typique que l'on obtient en sondant par une impulsion Raman le nuage atomique obtenu à partir d'un piège magnéto-optique et d'une mélasse (de la façon que j'ai décrite au paragraphe 1.2.*b.ii*), sans faire de refroidissement Raman. Il s'agit donc de la distribution en vitesse des atomes de la mélasse. Le champ magnétique a été compensé de la manière que je décrirai au paragraphe 1.3.*a*.

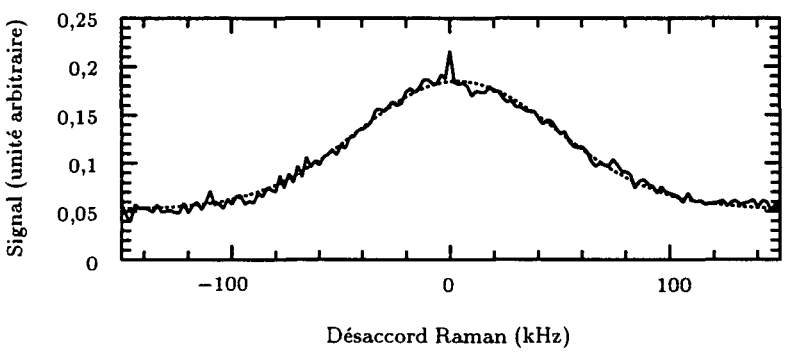


FIG. 1.10 - *Distribution en vitesse des atomes de la mélasse, mesurée en utilisant une impulsion de Blackman de 1,5 ms. En pointillés, l'ajustement par une gaussienne. La température de la mélasse est 5,9 μK.*

On constate que la courbe peut être ajustée de façon satisfaisante par une gaussienne. Cette manœuvre permet de déduire la température de la mélasse (5,9 μK sur la figure 1.10).

3. Mise au point de l'expérience

a) Compensation du champ magnétique

i) Nécessité de la compensation et solution apportée

Une bonne compensation du champ magnétique a constitué l'un des points les plus délicats que nous ayons eu à résoudre lors du montage de l'expérience. J'ai déjà évoqué le fait que le refroidissement Raman nécessite que les sous-niveaux Zeeman soient dégénérés, et ce à une précision bien inférieure à la fréquence de recul $\hbar k^2/M$, qui pour le césium vaut $2\pi \times 4$ kHz. Compte tenu de la valeur des facteurs de Landé (fig. 0.3, p. 18), on en déduit que le champ magnétique doit être compensé avec une précision meilleure que le mG.

Avant de débuter l'expérience, nous avons effectué des mesures de champ magnétique à l'aide d'un magnétomètre. Nous avons découvert que le champ magnétique dans notre salle expérience était de l'ordre du Gauß. Ce champ magnétique était dû au champ terrestre, ainsi qu'à la pompe ionique placée non loin de la cellule. En outre, du fait de la présence de câbles EDF enfouis dans les murs, le champ comprenait une composante oscillant à 50 Hz. Enfin, le champ était également perturbé par une expérience située dans le même bâtiment (à 10 m environ), et qui produisait localement des champs de plusieurs teslas de façon intermittente (ce qui induisait un champ de quelques mG au niveau de notre expérience).

Il était donc difficile de compenser le champ uniquement à l'aide de bobines de compensation, comme on le fait si l'on veut simplement compenser le champ terrestre : il eût fallu dans ce cas envisager un système d'asservissement, passablement compliqué à mettre en œuvre. Nous avons préféré utiliser le blindage en μ-métal que notre groupe possédait à la suite des dernières expériences en micro-gravité [101 ; 102 ; 89, p. 64]. Malheureusement, ce blindage avait été conçu pour être utilisé avec la cellule employée pour les premières expériences de piège magnéto-optique [30, p. 89]. Les performances de cette cellule sont très inadaptées au refroidissement Raman, du fait du faible accès optique et des faces non traitées. Toutefois, la situation financière de notre équipe ne nous permettait pas, à l'époque, de commander une nouvelle cellule et un nouveau blindage (ce dernier surtout étant fort coûteux).

Le blindage en μ-métal n'arrête pas totalement le champ magnétique (en particulier à cause des trous y sont percés pour faire passer les faisceaux et pour observer le piège). Nous avons dû recourir, en plus du blindage, à des bobines de compensation. Elles assurent une compensation grossière du champ au niveau du blindage. Ces bobines doivent être alimentées avec des alimentations assurant une stabilité du courant à une précision de l'ordre de 10^{-5}, du même type que celles utilisées pour les diodes laser.

ii) Mesure du champ magnétique avec les atomes

Le magnétomètre de notre équipe permet de mesurer le champ magnétique avec une grande précision. Néanmoins, celui-ci n'est pas uniforme et il est difficile de placer ce magnétomètre sous vide, à l'endroit précis du piège magnéto-optique ! Nous avons donc dû imaginer une méthode atomique pour la mesure du champ magnétique.

La solution que nous avons retenue consiste à utiliser encore les transitions Raman, et à enregistrer un spectre avec des faisceaux Raman se propageant dans le même sens et selon le même axe[1]. Dans ce cas, la transition Raman n'est

1. Pour cela nous avons installé le cube C_4 sur une translation micro-contrôle. On peut ainsi faire coulisser le cube de manière à l'écarter du trajet des faisceaux. Les faisceaux Raman empruntent alors le même chemin, avec des polarisations orthogonales.

pas sélective en vitesse, et l'on peut visualiser les différents sous-niveaux Zeeman des deux niveau hyperfins du césium (fig. 1.11-*a*). En modifiant le courant des bobines de compensation, on fait progressivement coïncider les différents pics en un seul, puis on diminue la largeur de ce dernier. Finalement, on obtient un pic de largeur 500 Hz, ce qui correspond à un champ magnétique résiduel de 0,2 mG (fig. 1.11-*b*). Lors de la détection des vitesses atomiques, on disposera donc d'une précision de $v_{\text{rec}}/16$, soit 0,22 mm/s.

b) Optimisation de la séquence d'impulsions

L'optimisation de la séquence d'impulsions Raman a certainement été la partie la plus fastidieuse de cette expérience. Nous avons procédé en trois étapes :

- tout d'abord, nous avons étudié l'influence sur les atomes d'une impulsion Raman unique. Nous avons pu ainsi vérifier les effets (déplacement lumineux, élargissement du profil d'excitation, saturation) prédits par la théorie ;
- à partir de ces résultats, nous avons construit une séquence de départ, que nous avons testée sur les atomes ;
- enfin, nous avons progressivement optimisé cette séquence en modifiant une à une ses impulsions.

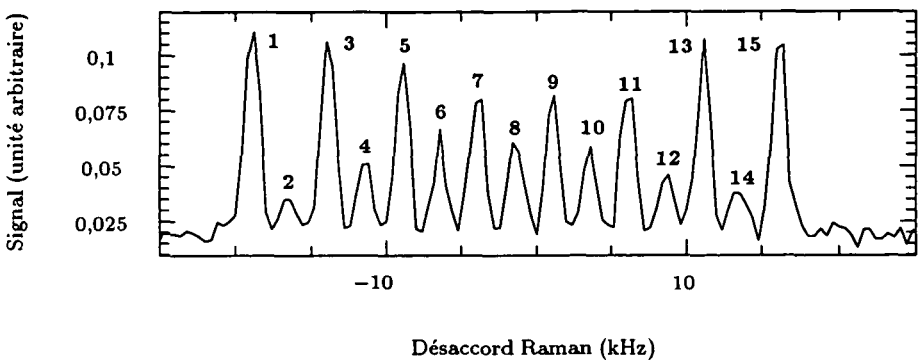
Nous avons en outre dû minimiser certains effets parasites (excitation résiduelle non résonnante, excitation Raman dans le sens co-propageant).

i) Influence d'un impulsion Raman unique : les « trous » dans la distribution

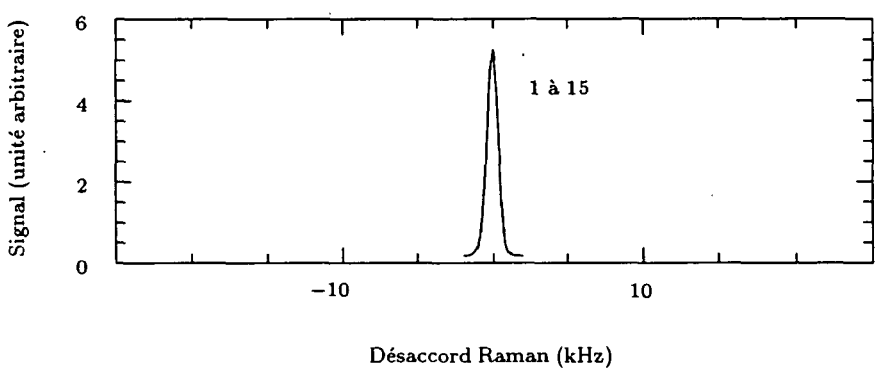
Méthode de test. Avant d'entreprendre le refroidissement Raman, nous avons testé l'efficacité des impulsions de Blackman, et comparé leurs effets aux prédictions théoriques. Nous devions en particulier calibrer le rapport puissance lumineuse/fréquence de Rabi, afin de savoir pour quelle puissance les effets prédits (déplacement lumineux, condition d'impulsion π, élargissement du profil d'excitation) devaient se produire. Ce facteur de conversion ne pouvait pas être connu à l'avance, parce que le profil spatial des faisceaux Raman est très irrégulier[1]. La présence de nombreux sous-niveaux Zeeman avec des coefficients de Clebsh-Gordan différents est une autre complication que notre théorie ne prend pas en compte.

Tester l'efficacité d'une impulsion Raman est *a priori* fort simple : il suffit de préparer la mélasse, d'envoyer une seule impulsion Raman de durée et de puissance déterminées, puis de sonder la distribution. On s'attend alors à ce que l'impulsion « creuse un trou » dans cette distribution. La pratique s'avère plus compliquée dans la mesure où le rapport signal sur bruit est faible (même en répétant plusieurs fois l'expérience avec les mêmes paramètres et en moyennant

1. L'intensité lumineuse varie du simple au double sur une échelle de l'ordre du millimètre.



(a) B ≃ *7,3 mG*



(b) *Champ compensé*

1 :	$-3 \to -4$	**4 :**	$-3 \to -1$	**7 :**	$-1 \to 0$	**10 :**	$0 \to 2$	**13**	$2 \to 3$
			$-2 \to -2$		$0 \to -1$		$1 \to 1$		$3 \to 2$
			$-1 \to -3$				$2 \to 0$		
2 :	$-3 \to -3$	**5 :**	$-2 \to -1$	**8 :**	$-1 \to -1$	**11 :**	$1 \to 2$	**14 :**	$2 \to 4$
	$-2 \to -4$		$-1 \to -2$		$0 \to 0$		$2 \to 1$		$3 \to 3$
					$1 \to -1$				
3 :	$-3 \to -2$	**6 :**	$-2 \to 0$	**9 :**	$0 \to 1$	**12 :**	$1 \to 3$	**15 :**	$3 \to 4$
	$-2 \to -3$		$-1 \to -1$		$1 \to 0$		$2 \to 2$		
			$0 \to -2$				$3 \to 1$		

(c) *Répartition des raies*

FIG. 1.11 - *Spectre Raman, réalisé avec 2 faisceaux se propageant dans le même sens. Lorsque le champ magnétique n'est pas compensé, on reconnaît les transitions entre sous-niveaux Zeeman du césium (de nombreuses transitions sont confondues à cause des valeurs voisines (au signe près) des facteurs de Landé des niveaux* $|F = 3\rangle$ *et* $|F = 4\rangle$*). Remarque : le* 1^{er} *spectre n'est pas centré sur le désaccord nul ; ceci est dû aux déplacements lumineux induits par les faisceaux Raman.*

le signal). Cela est dû au fait que peu d'atomes « se situent » là où l'on creuse le trou (*i.e.* ont une vitesse quasi-résonnante avec l'impulsion testée).

Pour augmenter le rapport signal sur bruit, il est possible de tester l'impulsion en utilisant des faisceaux Raman se propageant dans le même sens (*i.e.* dans la configuration que l'on utilise pour compenser le champ magnétique). Dans ce cas, pourvu que le champ soit bien compensé et que le désaccord δ de l'impulsion soit nul, tous les atomes contribuent au signal. Toutefois, cette méthode ne fournit pas un résultat très satisfaisant parce que l'on ne teste pas les impulsions dans les conditions où elles seront ensuite utilisées (les faisceaux Raman n'empruntent pas le même chemin, donc n'ont pas, au niveau du piège, le même profil spatial).

La méthode que nous avons retenue est finalement la suivante : à l'aide de 16 impulsions de Blackman de courte durée (50 à 100 µs chacune), nous refroidissons les atomes à environ $3\,v_{\mathrm{rec}}$. Un tel refroidissement, au-dessus de la vitesse de recul, est relativement facile et ne nécessite pas d'optimisation fine. Nous disposons ainsi d'une densité dans l'espace des v_x plus élevée. On pourra ensuite tester l'impulsion avec un rapport signal sur bruit bien meilleur.

Remarque : les atomes excités par l'impulsion creusant le trou sont ensuite repompés par le repompeur Raman (et on sonde la distribution ensuite). Ceci est un peu gênant car certains des atomes peuvent, après l'émission spontanée d'un photon, « retomber dans le trou » (*i.e.* avoir une vitesse correspondant à la zone testée), et donc fausser le profil de ce dernier. Afin d'obtenir un résultat plus correct, nous avons essayé de ne pas repomper les atomes avant de sonder la distribution. Cette méthode n'est toutefois pas la plus efficace, car les atomes excités par l'impulsion-trou contribuent au signal de fluorescence quel que soit le désaccord de l'impulsion-sonde. Il apparaît donc un décalage sur l'ensemble du spectre, et donc une source de bruit supplémentaire qui vient limiter l'intérêt du procédé.

Spectre de trou. Extraction des données. La figure 1.12 représente le spectre d'un trou typique. Il a été réalisé avec une impulsion de Blackman de 500 µs. On constate que le rapport signal sur bruit est convenable (mais nous avons également dû tester des impulsions possédant des paramètres moins favorables).

Pour extraire d'une telle figure des données quantitatives, nous avons ajusté le spectre par une gaussienne (en ne retenant que le voisinage du trou). Une telle méthode est critiquable d'un point de vue théorique, car le profil d'excitation n'est pas du tout gaussien[1]. Toutefois, le médaillon de la figure 1.12 nous montre que cet ajustement ne fournit pas de résultat aberrant. De toute façon, cette

1. Il eût fallu ajuster la courbe par le profil d'excitation théorique d'une impulsion de Blackman, mais ceci n'est réalisable en pratique que dans le régime des faibles puissances, là où le profil se calcule par transformée de Fourier ; dans le cas contraire, on ne dispose pas de formule analytique pour ce profil d'excitation théorique.

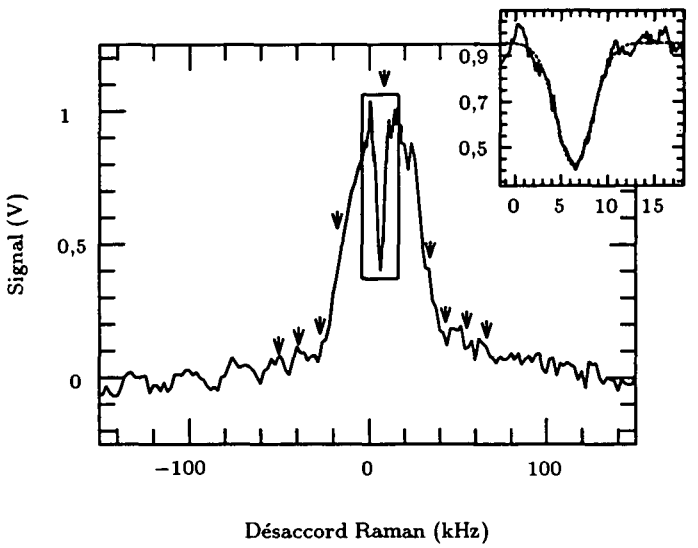


FIG. 1.12 - *Profil d'excitation d'une impulsion de Blackman (« trou »), testé sur des atomes préalablement refroidis à $3v_{rec}$. La durée de l'impulsion est 500 µs, et sa puissance 0,2 fois la puissance maximale des faisceaux Raman. Les flèches verticales représentent les fréquences de résonance des impulsions ayant servi au pré-refroidissement (ainsi que la fréquence de l'impulsion créant le trou). En médaillon, détail de la courbe au niveau du trou. La courbe en pointillés représente l'ajustement par une gaussienne.*

méthode est très pratique, puisqu'elle nous permet d'extraire simplement, pour chaque valeur des paramètres (puissance et durée de l'impulsion), trois types de données : la profondeur du trou (*i.e.* l'efficacité de l'excitation), sa largeur et son centre (*i.e.* le déplacement lumineux).

Résultats de l'étude. Cette étude nous permet tout d'abord d'évaluer le déplacement lumineux induit par les faisceaux Raman. La connaissance de ce paramètre est en effet cruciale pour placer au bon endroit les impulsions d'une séquence de refroidissement. On trouve comme attendu que le déplacement lumineux ne dépend pas de la durée de l'impulsion, et dépend linéairement de sa puissance. Lorsque l'impulsion des faisceaux Raman est maximale, le déplacement lumineux est de −9,4 kHz. Ceci permet d'évaluer un facteur de conversion puissance Raman/fréquence de Rabi effective.

On trouve ensuite que, comme le prédit la théorie, les caractéristiques géométriques du trou (profondeur et largeur) ne dépendent que du produit puissance × durée. Le seuil d'élargissement du trou est conforme à ce que prédit la théorie, compte tenu du facteur de conversion précédemment évalué. Par contre, la profondeur du trou ne présente pas d'oscillations de Rabi, et la probabilité d'excitation ne vaut jamais 1, mais au maximum 0,5. Cela est dû aux irrégularités

du profil spatial des faisceaux Raman et aux valeurs disparates des coefficients de Clebsch-Gordan, qui font que, en fonction de leur position où du sous-niveau Zeeman dans lequel ils sont, tous les atomes ne « voient » pas les faisceaux Raman avec la même puissance, et donc ne vérifient pas la condition d'impulsion π en même temps.

ii) Recherche de la séquence ad hoc

Fabrication de la séquence préliminaire. Nous avons pour commencer fabriqué une séquence préliminaire en utilisant le programme de résolution de l'équation de Schrödinger. Cette résolution permet, pour une séquence donnée, de fabriquer un profil d'excitation théorique (comme celui de la figure 1.2). Nous avons retenu une séquence n'excitant pas les atomes de vitesse nulle, et dont le profil d'excitation est suffisamment étroit. Pour ce faire, nous avons utilisé des impulsions de Blackman de durée, amplitude et désaccord variables. Les plus longues impulsions (*i.e.* celles dont le profil d'excitation est le plus étroit) ont une vitesse résonnante plus proche de 0. Cette séquence a ensuite été testée à l'aide d'un programme de simulation de Monte-Carlo. Ce programme est l'œuvre de Guglielmo Tino et de Jakob Reichel [80].

Après cette optimisation théorique, nous avons transporté la séquence sur l'expérience. Nous avons corrigé la fréquence de chaque impulsion, de façon à tenir compte des déplacements lumineux, que nous savons prévoir grâce aux résultats du paragraphe 1.3.*b.i* (p. 43).

Nous avons également dû tenir compte de certaines contraintes expérimentales. Tout d'abord, la durée totale de la séquence de refroidissement ne peut pas excéder 30 ms. Passé ce délai, les atomes, du fait de la gravité, sont sortis des faisceaux Raman (dont la taille est de l'ordre du cm). En outre, la puissance des faisceaux Raman est limitée : pour un désaccord Δ de $2\pi\times2{,}7$ GHz, la fréquence de Rabi effective $\overline{\Omega}$ ne peut pas dépasser 2.10^5 rad/s. Par conséquent, si l'on souhaite que les impulsions aient une efficacité raisonnable (*i.e.* de l'ordre de 0,5), il n'est pas possible qu'elles aient une durée inférieure à 30 µs.

Optimisation de la séquence. Une fois la séquence préliminaire établie, il a fallu l'optimiser, c'est-à-dire minimiser la largeur du pic d'atomes refroidis, tout en maintenant à un niveau raisonnable le pourcentage d'atomes dans ce pic. Une telle optimisation s'est avérée particulièrement fastidieuse (et a nécessité de longues nuits de travail) en raison du grand nombre de paramètres dans le problème.

En fait, l'optimisation a essentiellement porté sur deux points : l'ordre de passage des impulsions et le nombre de répétitions de la séquence d'une part, et les paramètres des impulsions Raman (durée, désaccord et puissance de chacune) d'autre part. Pour ce qui est de l'ordre, nous avons choisi d'envoyer d'abord toutes les impulsions de vitesse résonnante négative, puis toutes celles de vitesse

résonnante positive. Nous recommençons ensuite l'ensemble de la séquence, de façon à permettre aux atomes d'effectuer leur marche au hasard dans l'espace des vitesses[1].

L'optimisation des paramètres des impulsions Raman a porté presque exclusivement sur les impulsions les plus « proches » (en terme de vitesse résonnante) de $v = 0$, le but étant de fabriquer un profil d'excitation suffisamment étroit tout en n'excitant pas les atomes de vitesse nulle.

iii) Minimisation de quelques effets parasites

Choix du désaccord Δ. Le choix du désaccord Δ a été retenu en fonction des critères suivants :

- l'excitation non résonnante par l'un des faisceaux Raman ne doit pas perturber le refroidissement Raman ;
- les déplacements lumineux induits par les faisceaux Raman doivent être les mêmes pour tous les sous niveaux Zeeman ;
- la fréquence de Rabi effective $\overline{\Omega}$ doit être suffisante.

Si la troisième condition tend à minimiser Δ, les deux premières tendent à le maximiser. En particulier, la deuxième condition nécessite que Δ soit grand devant la structure hyperfine de l'état fondamental[2] ($2\pi\times 9{,}192$ GHz), ce qui est impossible à vérifier du fait de la faible puissance de nos lasers Raman. De fait, l'inhomogénéité des déplacements lumineux, ainsi que l'excitation résiduelle vers $|e\rangle$ sont les deux facteurs qui ont limité la température finale. Finalement, nous avons travaillé avec des désaccords $\Delta/(2\pi)$ compris entre 1,7 et 4,5 GHz[3].

Nous avons testé l'effet de l'excitation non résonnante en comparant l'efficacité du refroidissement pour différentes valeur de Δ. Pour ce faire, on corrige l'amplitude de chaque impulsion de façon à avoir la même fréquence de Rabi effective $\overline{\Omega}$. Par rapport à la courbe de référence où $\Delta = 2\pi\times 4{,}2$ GHz, on constate une perte d'efficacité de 30 % lorsque $\Delta = 2\pi\times 2{,}7$ GHz, et une perte encore plus importante lorsque $\Delta = 2\pi\times 1{,}7$ GHz (à un tel désaccord, un atome a une probabilité 1/2 d'être excité de façon non résonnante pendant la durée totale de la séquence).

Le pic « co-propageant ». Regardons la figure 1.10. En plus de la courbe gaussienne correspondant à la distribution thermique, on constate la présence d'un petit pic à désaccord nul. Ce pic ne peut être assimilé à du bruit sur le

1. Afin de gagner du temps, nous ne répétons pas, lors des derniers passages, les impulsions dont la vitesse résonnante est le plus éloignée de 0 (voir la table 1.2). Ces impulsions sont inutiles, car, après quelques sauts dans l'espace des vitesses, les atomes ne quittent plus la zone comprise entre $+4\,v_{\mathrm{rec}}$ et $-4\,v_{\mathrm{rec}}$.

2. Voir à ce sujet le raisonnement p. 120

3. Je rappelle qu'il n'est pas avantageux que $|\Delta|$ soit trop proche de 9 GHz.

spectre (il reste présent d'une fois sur l'autre). Il est également présent après le refroidissement Raman (petite saillie présente sur la courbe continue de la figure 1.13, à gauche du pic principal).

Il s'avère que ce pic est lié à la réflectivité résiduelle des faces de notre cellule. Une partie de l'un des faisceaux Raman est réfléchie au niveau de la face de sortie de la cellule, de telle sorte qu'elle repasse sur les atomes. Cette réflexion se propage donc dans le même sens que l'autre faisceau Raman (pas tout-à-fait selon le même axe cependant, les faces de la cellule n'étant pas orthogonales à l'axe de propagation des faisceaux). Si le désaccord δ est nul, une résonance Raman peu sélective en vitesse se produit. Cette résonance est à l'origine du pic de la figure 1.10. Nous avons pu limiter l'importance de ce pic en diminuant la taille des faisceaux Raman, à l'aide de fentes verticales (de façon à limiter le recouvrement au niveau du piège), mais non le faire disparaître complètement.

Pour éviter que cet effet parasite vienne perturber le refroidissement Raman, il n'y a qu'une seule solution : s'arranger pour qu'aucune impulsion de la séquence ne possède de désaccord δ trop proche de 0 (à quelques centaines de Hertz près).

4. Résultat expérimental

a) Présentation du résultat

La figure 1.13 présente un résultat expérimental typique. La courbe continue représente la distribution en vitesse obtenue par un refroidissement Raman de 24 ms, et Δ =4,2 GHz. On obtient un pic centré sur la vitesse nulle, 5 fois plus haut que la distribution initiale. Ce pic contient 37 % des atomes. En pointillés figure la distribution en vitesse de la mélasse, mesurée après le même délai de 24 ms mais sans refroidissement Raman. La température de cette distribution non refroidie vaut 5,9 µK. L'aire de la courbe (qui est proportionnelle au nombre d'atomes), est, à 5 % près, la même dans les deux cas (avec et sans refroidissement). Pendant ce délai de 24 ms, 17 % des atomes sont perdus du fait de la gravité qui les expulse en dehors de la zone irradiée par les lasers. Les caractéristiques des impulsions de la séquence utilisées sont présentées dans la table 1.2.

Nous avons mesuré la largeur du pic refroidi en l'ajustant avec une gaussienne. Il est bien évident qu'il s'agit d'une opération arbitraire d'un point de vue théorique (puisque ce pic n'a aucune raison d'être gaussien), mais c'est un moyen commode pour évaluer l'efficacité du refroidissement. Pour ce faire, nous avons donc effectué un agrandissement de la figure au niveau du pic (médaillon de la figure 1.13.a), et nous avons calculé la gaussienne la plus proche en utilisant le logiciel Easyplot.

L'expression de la gaussienne est

$$F(v) = \frac{c}{b\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(v-a)^2}{2b^2}\right) + d, \qquad (1.9)$$

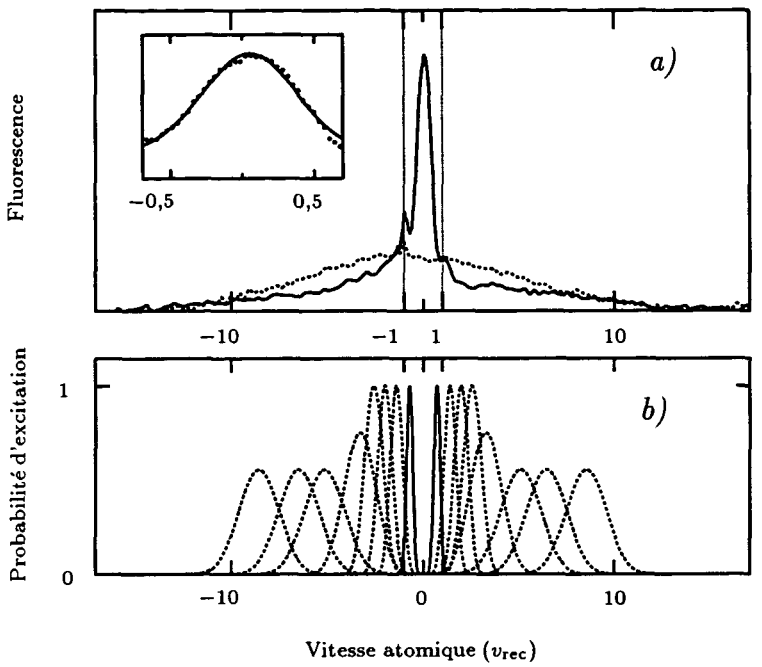


FIG. 1.13 - *Refroidissement Raman d'atomes de césium, utilisant une séquence de durée totale 24 ms, détaillée dans la table 1.2.* a) *: résultat expérimental. En pointillés, la distribution de la mélasse (sans refroidissement Raman), de température 5,9 μK. En continu, la distribution refroidie. En médaillon, agrandissement du pic refroidi et ajustement avec une gaussienne. Elle correspond à une température effective de 23±5 nK (cf. texte).* b) *: probabilité d'excitation par les impulsions de la séquence, calculée en résolvant l'équation de Schrödinger (cf. p. 24). Elle a été tracée en tenant compte des déplacements lumineux, évalués expérimentalement (§ 1.3.b.i).*

F étant le signal de fluorescence, et v la vitesse atomique. Les coefficients a, b, c et d sont calculés par le logiciel. Après le calcul de l'ordinateur, on obtient une gaussienne dont la ligne de base (*i.e.* le coefficient d) ne correspond à rien de particulier (et notamment, elle ne coïncide pas avec la ligne de base de la distribution initiale). Nous avons également essayé d'ajuster la gaussienne en imposant le coefficient d. En fonction de la valeur que l'on donne à d, on trouve, pour la largeur b, un résultat différent à 50 % près. Nous avons retenu la solution où l'on impose la base de la gaussienne au sommet de la distribution initiale. Elle fournit pour b un résultat intermédiaire, comparé à d'autres solutions également raisonnables (ce n'est ni le plus pessimiste, ni le plus optimiste).

La gaussienne obtenue a une largeur quadratique moyenne de $1{,}2 \pm 0{,}1$ mm/s, soit $0{,}34\, v_{rec}$. De cette largeur nous avons extrait une « température » : 23 ± 5 nK. Il s'agissait à l'époque de la température la plus basse jamais observée (un record dépassé depuis), mais n'oublions pas que ce n'était que du refroidissement à 1D !

TAB. 1.2 - *Caractéristiques de la séquence utilisée pour obtenir le résultat de la figure 1.13. La séquence contient 8 impulsions de vitesse résonnante ($v_{rés}$) positive, et 8 de vitesse résonnante négative. Elle est appliquée 7 fois, parfois de façon incomplète (3 dernières lignes du tableau). Le sens du repompeur Raman (4^e ligne) est inversé pour les impulsions de vitesse résonnante proche de 0. Les amplitudes (6^e ligne) valent 1 lorsque toute la puissance Raman disponible est utilisée. Rappelons que $2kv_{rec} = 2\pi \times 8$ kHz, et que du fait de l'effet de recul (éq. (1.3)), la résonance se produit pour $\delta = 2\pi \times 8$ kHz. Les vitesses résonnantes (3^e ligne) sont calculées sans tenir compte des déplacements lumineux.*

Fréq. (kHz)	−53	−36	−25	−10	−5	−2	+2	+5	+5	+2	−2	−5	−10	−25	−36	−53
Sens	1	1	1	1	1	1	1	1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1
$v_{rés}/v_{rec}$	7,63	5,5	4,13	2,25	1,63	1,25	0,75	0,38	−0,38	−0,75	−1,25	−1,63	−2,25	−4,13	−5,5	−7,63
η ($\vec{k}_C = \eta\vec{k}_A$)	1	1	1	1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	1	1	1	1
Durée (µs)	80	80	80	100	150	200	225	500	500	225	200	150	100	80	80	80
Amplitude	1	1	1	1	0,9	0,7	0,6	0,3	0,3	0,6	0,7	0,9	1	1	1	1
1re fois	1	2	3	4	5		6	7	14	13		12	11	10	9	8
2^e-3^e fois	1	2	3	4	5	6	7	8	16	15	14	13	12	11	10	9
4^e-7^e fois			1	2	3	4	5	6	12	11	10	9	8	7		

b) Temps de refroidissement

Nous avons tracé, en fonction du nombre de répétitions de la séquence de la table 1.2, la hauteur et la largeur du pic refroidi. Ceci nous a permis de calculer le temps de refroidissement $1/e$: on trouve 18 ms.

Nous nous sommes demandés si nous pouvions comparer ce temps de refroidissement à celui de l'expérience sur le sodium [76], qui est 1,5 ms. Ce temps est intrinsèquement lié aux durées des impulsions, elles mêmes inversement proportionnelles à la largeur finale souhaitée de la distribution en vitesse. Si cette largeur s'exprime comme une fraction de la vitesse de recul, alors le temps de refroidissement est proportionnel à M/k^2. Dans ces conditions, notre temps de refroidissement est similaire à celui obtenu avec le sodium.

5. Conclusion

Cette expérience a donc permis de transposer sur le césium l'expérience de refroidissement sub-recul 1D réalisée sur le sodium par Mark Kasevich et Steven Chu [76]. Nous avons obtenu un résultat comparable au leur, en ce qui concerne la largeur de la distribution en vitesse finale (exprimée en unité de recul), le pourcentage d'atomes refroidis, et le temps de refroidissement. Notre expérience

représente en outre une simplification dans la mesure où tous les lasers sont des diodes.

Toutefois, comme je l'ai dit dans l'introduction de ce chapitre, cette expérience n'est qu'un début. Lorsque nous l'avons achevée, à l'été 1994, plusieurs voies de continuation étaient possibles :

- tout d'abord, nous pouvions améliorer cette expérience, de façon à obtenir une « température » encore plus basse. Nous pouvions notamment augmenter la puissance des lasers Raman (grâce à l'utilisation d'une deuxième paire de diodes, injectées par les premières), et augmenter le désaccord Δ de façon à homogénéiser les déplacements lumineux induits par les faisceaux Raman et à diminuer l'excitation résiduelle vers $|e\rangle$. Une autre amélioration consistait à utiliser une cellule traitée anti-reflets (pour supprimer le pic « co-propageant »), et à utiliser un blindage en μ-métal à double couche. Cette voie a été suivie par Jakob Reichel *et al.* [79, 80]. Toutefois, les résultat qu'ils ont obtenus n'auraient pas été aussi spectaculaires sans les idées de François Bardou sur les vols de Lévy [85]. A l'aide de quelques impulsions en créneaux seulement, ils ont en effet pu obtenir une « température » 1D de l'ordre du nanokelvin ;

- nous envisagions également de généraliser l'expérience à 2 dimensions, ce qui ne posait pas de difficultés de principe. Toutefois, l'expérience avait déjà été réalisée sur le sodium [77]. Cette voie ne constituait donc pas une étude originale. En outre, la généralisation à 3D était compliquée par la gravité qui accélère les atomes. Réaliser le refroidissement à 3D en microgravité aurait pu constituer une possibilité intéressante mais coûteuse ;

- pour réaliser le refroidissement Raman à 3 dimensions, nous avons préféré utiliser des atomes confinés. Nous avons pour cela construit un nouveau piège (le piège opto-électrique) adapté à une telle expérience. Le refroidissement Raman d'atomes confinés diffère sensiblement du refroidissement d'atomes libres. Aussi vais-je maintenant consacrer un chapitre à sa description théorique.

Chapitre 2

Théorie du refroidissement Raman dans un piège harmonique

CE CHAPITRE sera entièrement consacré à la théorie du refroidissement Raman à 3 dimensions. Je supposerai que les atomes sont confinés au fond d'un piège harmonique idéal, sans me préoccuper pour l'instant de la réalisation pratique de ce piège. Je rappelle que le refroidissement Raman 3D d'atomes libres est compliqué par la présence de la gravité, qui accélère les atomes à des vitesses supérieures à v_{rec} en des temps bien inférieurs aux temps typiques de refroidissement [1].

On pourrait craindre que la force confinante vienne perturber le fonctionnement du refroidissement Raman. En fait, il s'avère que la présence du piège, loin d'être une gêne, constitue en réalité un atout. En particulier, si le piège est anisotrope, on peut refroidir les atomes à 3 dimensions en utilisant une seule paire de faisceaux Raman. Si en effet on refroidit selon la direction x (supposée différente des axes propres du piège), la redistribution des vitesses dues aux oscillations des atomes induit un refroidissement selon y et z. Cette technique est bien connue depuis la fin des années 70, puisqu'elle a été appliquée au cas des ions piégés [103, 104].

De plus, en l'absence de refroidissement, la vitesse des atomes selon x n'est plus constante, du fait des oscillations. Par conséquent, on peut effectuer du refroidissement Raman avec des faisceaux continus, les atomes étant amenés à résonance par leurs oscillations. Toutefois, l'utilisation d'impulsions ne doit pas non plus être écartée. En choisissant leurs paramètres de façon judicieuse, le

1. Il est certes possible de réaliser un glissement en fréquence des faisceaux verticaux, de façon à accompagner les atomes lors de leur accélération due à la gravité. Cette solution est toutefois extrêmement difficile à mettre en œuvre, car elle nécessiterait de travailler dans une colonne de plusieurs mètres de hauteur. En outre, la position des faisceaux horizontaux devrait également accompagner la position du nuage atomique.

refroidissement en impulsions peut en effet être beaucoup plus efficace que le refroidissement continu.

Lorsque l'on refroidit des atomes confinés, on réduit l'amplitude de leur trajectoire. Cette réduction a lieu aussi bien dans l'espace des vitesses que dans l'espace des positions. Si par exemple on réduit d'un facteur α la vitesse quadratique moyenne des atomes, on réduit aussi d'un facteur α l'extension spatiale du nuage atomique (du fait de l'harmonicité du piège). On augmente donc d'un facteur α^6 le paramètre $\rho\Lambda_{\mathrm{DB}}^3$ (où ρ est la densité atomique, et $\Lambda_{\mathrm{DB}} = h/\sqrt{2\pi M k_{\mathrm{B}} T}$ la longueur d'onde de de Broglie des atomes), qui est le paramètre caractérisant la présence ou l'absence d'effets quantiques collectifs (voir la deuxième partie de cette thèse). Le refroidissement d'atomes confinés permet donc de se rapprocher « plus vite » de la condensation de Bose-Einstein (en comparaison, le refroidissement Raman d'atomes libres (pour lequel on oublierait la gravité) ne fait gagner qu'un facteur α^3 sur $\rho\Lambda_{\mathrm{DB}}^3$).

Rappelons que le refroidissement Raman n'est pas aujourd'hui la meilleure méthode pour obtenir de très basses températures. La condensation de Bose-Einstein ($\rho\Lambda_{\mathrm{DB}}^3 = 2{,}612$) a ainsi été obtenue par refroidissement évaporatif [63], une technique qui repose sur les collisions élastiques entre atomes froids (ce n'est donc pas du refroidissement laser). L'expérience de refroidissement Raman dans un piège dipolaire réalisée par l'équipe de Steven Chu [105] n'a quant-à elle obtenu que $\rho\Lambda_{\mathrm{DB}}^3 \sim 10^{-2}$. L'étude que je présente ici a été effectuée bien avant que les deux expériences que je viens de citer aient été réalisées. S'il est clair que nous n'avons pas choisi la voie la plus efficace, il était difficile de le prévoir à l'époque. En outre, le condensat produit par l'équipe de Cornell ne contient que 2 000 atomes. Le refroidissement Raman (combiné au refroidissement évaporatif) constitue encore un bon candidat pour fabriquer un condensat contenant davantage d'atomes, ce qui permettrait de tester la théorie quantique dans des conditions plus confortables. Signalons aussi que le refroidissement Raman peut permettre (si l'on utilise un piège optique) de travailler sans champ magnétique, une caractéristique très appréciable, par exemple pour la fabrication d'une horloge.

Ce chapitre entièrement théorique sera essentiellement consacré au refroidissement Raman continu, qui est beaucoup plus simple à modéliser que le refroidissement en impulsions. Ce dernier sera toutefois abordé dans la section 2.5. Je commencerai (section 2.1.*a*) par introduire le principe du refroidissement et exposerai les méthodes existant dans la littérature qui permettent de résoudre des problèmes similaires. Dans la section 2.2, je me placerai dans le cas d'une raie de largeur (effective) nulle. Je mettrai notamment en évidence l'existence d'un seuil de refroidissement de l'ordre de la température de recul. La section 2.3 étudiera le cas où la largeur de la raie est finie. A 1 dimension, il existe un moyen de résoudre le problème de façon analytique. Par contre, le seul moyen d'investigation du problème à 3D est la simulation de Monte-Carlo. Enfin, la section 2.4 sera consacrée aux problèmes de temps de refroidissement.

Remarque : en dehors du refroidissement Raman et du refroidissement évaporatif, il existe d'autres méthode de refroidissement d'atomes piégés. L'une de ces méthodes, qui fonctionne dans un piège magnétique, utilise le principe du refroidissement Sisyphe [78, 106–109]. Elle tire parti du fait qu'un piège magnétique ne piège pas tous les sous-niveaux Zeeman de la même façon. On peut donc s'arranger pour que l'atome, lorsqu'il ralentit (*i.e.* convertit sons énergie cinétique en énergie potentielle), soit dans un sous-niveau Zeeman de moment magnétique élevé (*i.e.* pour lequel les pentes du piège sont raides). Lorsque la vitesse de l'atome s'annule, et avant que celui-ci n'accélère à nouveau, on le fait basculer dans un niveau de faible moment magnétique. Cette méthode s'avère toutefois limitée, car elle ne permet pas d'atteindre des températures sub-recul.

1. Présentation générale du refroidissement d'atomes confinés

a) Principe du refroidissement dans un piège

i) Dispositif utilisé

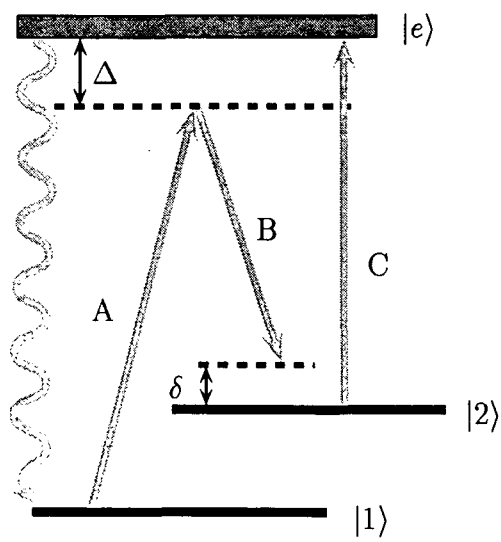


FIG. 2.1 - *La structure atomique à 3 niveaux et les faisceaux utilisés.*

Je supposerai que les atomes possèdent la structure à 3 niveaux introduite au chapitre 1, et à nouveau représentée sur la figure 2.1. J'utiliserai également le même système de faisceaux. Je rappelle que les 2 faisceaux A et B créent un processus Raman stimulé, qui est équivalent (au recul près) à une micro-onde, de fréquence de Rabi $\overline{\Omega}$ dont l'expression est donnée par l'équation (1.2), p. 21. Ce processus Raman fait passer les atomes de l'état $|1\rangle$ vers l'état $|2\rangle$. La résonance se produit pour

$$\delta_{\text{eff}} = (\vec{k}_A - \vec{k}_B) \cdot \vec{v}\,, \tag{2.1}$$

$\vec{k}_A$ et $\vec{k}_B$ étant les vecteurs d'ondes des faisceaux A et B, et $\vec{v}$ la vitesse de l'atome. La sélectivité en vitesse de la transition est donc maximisée quand les deux faisceaux se propagent en sens opposé. J'ai posé

$$\delta_{\text{eff}} \equiv \delta - \frac{|\Omega_A|^2 - |\Omega_B|^2}{4\Delta} + \frac{\hbar(\vec{k}_A - \vec{k}_B)^2}{2M}, \tag{2.2}$$

où Ω_A et Ω_B sont les fréquences de Rabi des faisceaux A et B.

Le troisième faisceau C (appelé repompeur) excite les atomes de $|2\rangle$ vers $|e\rangle$, le retour dans $|1\rangle$ se faisant ensuite par émission spontanée. Ceci introduit l'irréversibilité nécessaire à tout processus de refroidissement. Lorsque les 3 faisceaux sont présents en même temps (refroidissement continu), et lorsque la puissance des faisceaux est suffisamment faible, le profil d'excitation est lorentzien, la largeur de la lorentzienne étant donnée par

$$\overline{\Gamma} = \frac{|\Omega_C|^2}{\Gamma}, \tag{2.3}$$

Ω_C étant la fréquence de Rabi du faisceau repompeur C. Tout se passe en fait comme si l'on était en présence d'un atome à deux niveaux $|1\rangle$ et $|2\rangle$, la durée de vie du niveau $|2\rangle$ étant artificiellement rendue finie à l'aide du repompeur C.

En plus des faisceaux, les atomes sont soumis à une force dérivant d'un potentiel harmonique dont l'expression générale est

$$U(\vec{R}) = \frac{1}{2}\vec{R} \cdot \vec{\vec{K}} \cdot \vec{R}, \tag{2.4}$$

où $\vec{\vec{K}}$ est le tenseur de rappel et $\vec{R}$ la position de l'atome. Le piège est supposé suffisamment profond pour compenser la gravité, la force de pesanteur pouvant alors être incluse dans l'expression (2.4) par changement d'origine des coordonnées. L'harmonicité du piège n'est pas indispensable, mais facilitera les calculs.

Je supposerai en outre que le potentiel (2.4) vu par les atomes est le même pour l'état $|1\rangle$ et pour l'état $|2\rangle$. Je présenterai au début du chapitre 3 (§ 3.1, p. 118) quelques exemples de pièges remplissant cette condition ; nous verrons que le piège dipolaire très désaccordé ainsi que le piège opto-électrique conviennent. Par contre, le piège magnétique ne convient pas.

ii) Effets attendus

Pour comprendre le mécanisme du refroidissement, nous nous situons dans le cas où le mouvement des atomes peut être traité classiquement. Plaçons-nous pour commencer à une dimension (fig. 2.2). Un atome décrit, dans l'espace des phases et sous l'action du potentiel, une trajectoire elliptique. Supposons que les faisceaux Raman sont colinéaires, de sens opposé, et posons $k \simeq \|\vec{k}_A\| \simeq \|\vec{k}_B\|$. Lorsque la vitesse de l'atome est telle que $2kv = \delta_{\text{eff}}$, celui-ci entre en résonance. En effectuant la transition du niveau $|1\rangle$ vers le niveau $|2\rangle$, puis en

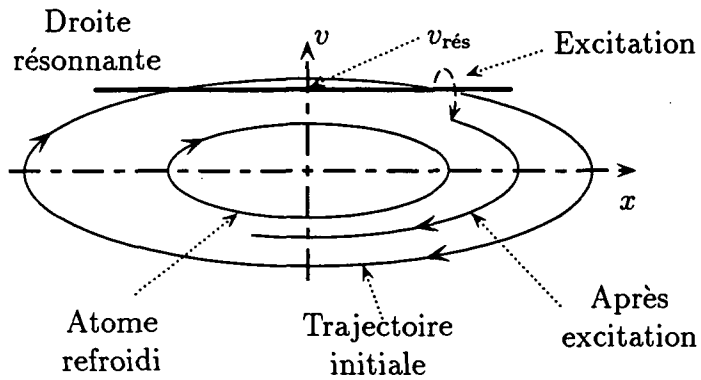


FIG. 2.2 - *Principe du refroidissement d'un atome piégé à une dimension.*

étant pompé optiquement, il encaisse l'impulsion des différents photons absorbés ou émis. Après la transition, la trajectoire est une ellipse de taille différente. Le processus est réitéré jusqu'à ce que l'atome atteigne une ellipse assez petite pour ne plus couper la droite résonnante. L'atome ne pouvant plus être à nouveau résonnant sera définitivement refroidi.

A 2 ou 3 dimensions, le principe est analogue (fig. 2.3). J'ai représenté l'espace des vitesses à 2D (il est impossible de représenter l'espace des phases complet qui est à 4D ou à 6D). Les axes x et y sont les axes propres du piège. Comme les énergies directionnelles

$$\begin{cases} E_x = \frac{1}{2}Mv_x^2 + \frac{1}{2}K_{xx}x^2 \\ E_y = \frac{1}{2}Mv_y^2 + \frac{1}{2}K_{yy}y^2 \end{cases}$$

sont des constantes du mouvement, les atomes décrivent des trajectoires inscrites dans des rectangles d'équations :

$$\begin{cases} |v_x| \leqslant \sqrt{\frac{2E_x}{M}} \\ |v_y| \leqslant \sqrt{\frac{2E_y}{M}} \,. \end{cases}$$

La résonance se produit pour $(\vec{k}_A - \vec{k}_B) \cdot \vec{v} = \delta_{\text{eff}}$, c'est-à-dire sur une droite, orthogonale à la direction des faisceaux Raman lorsque ceux-ci sont colinéaires. Les impulsions encaissées lors de l'excitation auront pour effet de changer les constantes du mouvement, et le processus est ensuite réitéré jusqu'à ce que la trajectoire soit inscrite dans un rectangle ne coupant pas la droite résonnante. Si les faisceaux Raman sont parallèles à l'un des axes propres du piège, les énergies suivant les autres directions ne seront modifiées que *via* le photon spontané, en moyenne nul mais qui induit un chauffage. Il est clair qu'alors le refroidissement ne pourra pas se faire. D'où la nécessité de choisir la direction des faisceaux hors

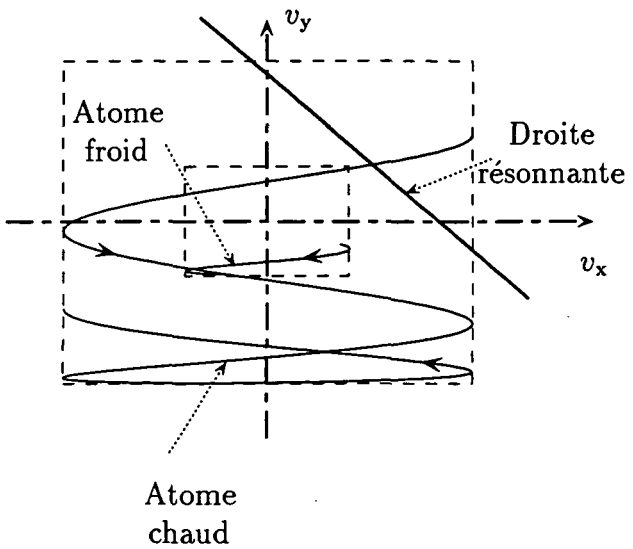


FIG. 2.3 - *Principe du refroidissement d'un atome piégé à deux dimensions.*

des plans de symétrie du piège, et par suite, que les trois fréquences d'oscillation soient toutes différentes.

Remarques :

- la description du refroidissement que je viens de faire est une description à un atome. Dans toute cette étude, je ne tiendrai pas compte des effets d'interaction entre plusieurs atomes qui peuvent se produire (collisions élastiques et inélastiques, diffusion multiple de photons résonnants). Je ne tiendrai pas non plus compte des effets statistiques, à l'origine du fonctionnement du « laser à atomes » [110], dans lequel l'« émission stimulée » d'un atome dans un mode du piège déjà occupé accélère le refroidissement ;

- *a priori*, les distributions en énergie que l'on obtient par refroidissement Raman ne sont pas thermiques. Il est donc abusif de parler de « refroidissement » (on veut simplement dire que l'énergie des atomes décroît) ;

- dans toute la suite, je désignerai par par « vitesse résonnante » la quantité définie par

$$v_{\text{rés}} = -\frac{\delta_{\text{eff}}}{\|\vec{k}_{\text{A}} - \vec{k}_{\text{B}}\|}. \tag{2.5}$$

Le paramètre η sera défini par

$$\eta = \frac{(\vec{k}_A - \vec{k}_B)\cdot\vec{k}_C}{\|\vec{k}_A - \vec{k}_B\| k_C}. \tag{2.6}$$

Je me placerai le plus souvent dans le cas où les 3 faisceaux sont colinéaires. Dans

ce cas, on a les relations

$$v_{\text{rés}} = -\frac{\delta_{\text{eff}}}{2k} \tag{2.7}$$

$$\vec{k}_C = \eta \vec{k}_A \,. \tag{2.8}$$

b) Le modèle de Pritchard

Dans ce paragraphe, je vais présenter un modèle qualitatif introduit par Pritchard [78, pages 68-72 ; 106]. Ce modèle permet d'apporter quelques indications sur la limite du refroidissement (*i.e.* la température finale accessible), ainsi que sur le temps de refroidissement. Nous verrons notamment que la largeur de la raie $\overline{\Gamma}$ joue un rôle primordial. Signalons que, contrairement à la description du principe du refroidissement que je viens de faire, ce modèle ne tient pas compte du mouvement des atomes dans le piège.

Supposons que les atomes soient confinés, dans l'espace des vitesses, dans un disque (ou une boule) $\mathcal{R}_r$, de rayon de l'ordre de la vitesse de recul $v_{\text{rec}} = \hbar k/M$ (expérimentalement cet ordre de grandeur peut être atteint avec un piège magnéto-optique ou une mélasse). Avec un faisceau de profil spectral lorentzien de largeur finie $\overline{\Gamma}$, on cherche à les refroidir sous une vitesse v_f (fig. 2.4), *i.e.* dans la région $\mathcal{R}_f$.

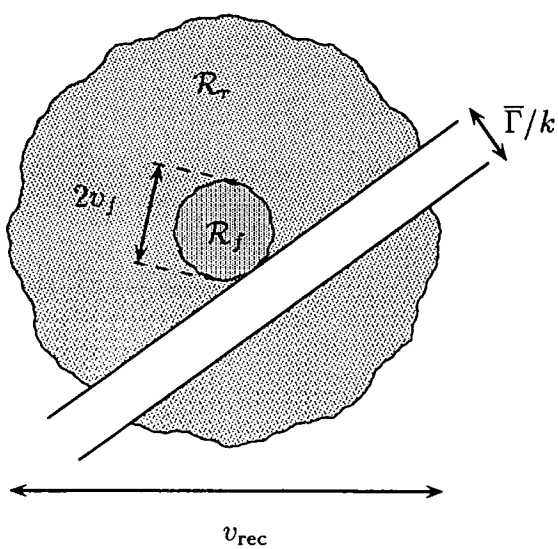


FIG. 2.4 - *Raisonnement de Pritchard.*

La zone résonnante, assimilée à l'intersection d'une bande de largeur $\overline{\Gamma}/k$ et de $\mathcal{R}_r$, a pour volume, en unité de vitesse (à une constante multiplicative sans dimension près)

$$(v_{\text{rec}})^{n-1} \frac{\overline{\Gamma}}{k} \,,$$

n étant la dimension. En divisant par le volume de $\mathcal{R}_r$, c'est-à-dire $(v_{\text{rec}})^n$, on obtient la probabilité, pour un atome situé hors de $\mathcal{R}_f$, d'être résonnant (indépendante de la dimension) :

$$\frac{\overline{\Gamma}}{kv_{\text{rec}}}.$$

Le taux d'excitation d'un atome à résonance étant

$$\overline{\Gamma}\frac{|\overline{\Omega}|^2/4}{\delta_{\text{eff}}^2+\overline{\Gamma}^2/4} \simeq \frac{|\overline{\Omega}|^2}{\overline{\Gamma}} \text{ pour } |\delta_{\text{eff}}| \ll \overline{\Gamma},$$

on déduit la probabilité par unité de temps, pour un atome oscillant dans $\mathcal{R}_r$, *déjà refroidi ou non*, et ayant une densité de présence uniforme, d'être excité de façon résonnante :

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \frac{|\overline{\Omega}|^2}{kv_{\text{rec}}}(1-\Pi), \tag{2.9}$$

où Π est la proportion d'atomes déjà dans la zone $\mathcal{R}_f$. On suppose que l'atome excité peut retomber dans $\mathcal{R}_r$ avec une probabilité uniforme. Il tombera dans $\mathcal{R}_f$ avec la probabilité

$$\left(\frac{v_f}{v_{\text{rec}}}\right)^n.$$

Le taux de remplissage de $\mathcal{R}_f$ sera donc

$$\left(\frac{\mathrm{d}\Pi}{\mathrm{d}t}\right)_{\text{remplissage}} \sim \left(\frac{v_f}{v_{\text{rec}}}\right)^n \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \frac{|\overline{\Omega}|^2}{kv_{\text{rec}}}\left(\frac{v_f}{v_{\text{rec}}}\right)^n (1-\Pi).$$

Les atomes de $\mathcal{R}_f$ pourront quant à eux être excités de façon non résonnante, d'où le taux de départ de cette zone (si $kv_f \gg \overline{\Gamma}$) :

$$\left(\frac{\mathrm{d}\Pi}{\mathrm{d}t}\right)_{\text{vidange}} \sim \frac{\Pi\overline{\Gamma}|\overline{\Omega}|^2}{4\delta_{\text{eff}}^2} \sim \frac{\Pi\overline{\Gamma}|\overline{\Omega}|^2}{(kv_f)^2}.$$

La proportion Π d'atomes refroidis évoluera finalement selon l'équation différentielle

$$\frac{\mathrm{d}\Pi}{\mathrm{d}t} = \frac{|\overline{\Omega}|^2}{kv_{\text{rec}}}\left(\frac{v_f}{v_{\text{rec}}}\right)^n (1-\Pi) - \frac{\overline{\Gamma}|\overline{\Omega}|^2}{(kv_f)^2}\Pi. \tag{2.10}$$

En annulant le premier membre de (2.10), on peut déduire la valeur de Π à l'état stationnaire ; on obtient

$$\Pi_{\text{stat}} = \frac{\left(\dfrac{v_f}{v_{\text{rec}}}\right)^{n+2}}{\left(\dfrac{v_f}{v_{\text{rec}}}\right)^{n+2} + \dfrac{\overline{\Gamma}}{kv_{\text{rec}}}}. \tag{2.11}$$

D'autre part, on peut estimer le temps de refroidissement, qui vaut

$$\tau_{\text{refdt}}^{-1} = |\overline{\Omega}|^2 \left(\frac{1}{kv_{\text{rec}}} \left(\frac{v_f}{v_{\text{rec}}} \right)^n + \frac{\overline{\Gamma}}{(kv_f)^2} \right) . \tag{2.12}$$

Pour des valeurs typiques (à 3D) de $\overline{\Omega} \sim 0{,}03\, kv_{\text{rec}}$, $\overline{\Gamma} \sim 0{,}1\, kv_{\text{rec}}$, $v_f \sim 0{,}5\, v_{\text{rec}}$, et en prenant la valeur du césium $kv_{\text{rec}} = 2{,}4.10^4$ rad/s, on obtient

$$\tau_{\text{refdt}} \sim 100 \text{ ms} .$$

D'autre part, on peut évaluer la température minimale accessible (*i.e.* la plus petite valeur de v_f compatible avec un refroidissement efficace) en supposant qu'elle correspond au cas où $\Pi = 1/2$; on obtient

$$\boxed{\frac{v_f}{v_{\text{rec}}} = \left(\frac{\overline{\Gamma}}{kv_{\text{rec}}} \right)^{\frac{1}{n+2}} .} \tag{2.13}$$

On constate donc que la largeur effective de la raie $\overline{\Gamma}$ joue un rôle primordial vis-à-vis de la température accessible. Signalons que cette vitesse limite ne dépend pas de $\overline{\Omega}$.

Remarque : ce modèle ne rend pas compte de tous les effets entrant en jeu dans le refroidissement. En particulier, il ne traite correctement ni la redistribution des vitesses induite par les processus d'absorption/émission spontanée, ni le rôle des oscillations dans le piège. Avant de passer à une théorie plus poussée, je vais rappeler brièvement quelques études qui ont précédemment été faites sur le sujet.

c) *Les théories semi-classiques du refroidissement d'atomes confinés*

Nous avons vu que, lorsque les faisceaux Raman et le repompeur sont continus, ils agissent sur l'atome de façon analogue à un faisceau unique, quasi-résonnant avec une transition à deux niveaux. Par conséquent, on s'attend à ce que le refroidissement Raman continu ait un comportement analogue au refroidissement Doppler sur une raie étroite. Le refroidissement Doppler d'atomes confinés a déjà été étudié au début des années 80. Les résultats que je présente ici figurent dans [111, section V].

Le problème comporte trois paramètres ayant la dimension d'une fréquence : la fréquence d'oscillation dans le piège ω_x, la largeur de la raie $\overline{\Gamma}$, et enfin la pulsation de recul

$$\omega_{\text{rec}} = \frac{\hbar k^2}{2M} \equiv \frac{E_{\text{rec}}}{\hbar} , \tag{2.14}$$

où $k \simeq k_A \simeq k_B$. En fonction des valeurs respectives de ces 3 paramètres, le système fonctionne selon différents régimes. L'objet de ce paragraphe est de présenter ces différents régimes de fonctionnement, ainsi que les méthodes d'étude qui correspondent (ces méthodes se restreignent en général à une dimension). Nous verrons alors dans quelle mesure elles sont applicables au cas qui nous intéresse du refroidissement sub-recul.

i) Le régime de l'atome lourd ($\omega_x \ll \overline{\Gamma}$)

Comme pour tout refroidissement Doppler, l'énergie la plus basse que peuvent atteindre les atomes est de l'ordre de $\hbar\overline{\Gamma}$ (si $\overline{\Gamma} > \omega_{\rm rec}$), ou de $\hbar\omega_{\rm rec}$ (si $\overline{\Gamma} < \omega_{\rm rec}$) [112]. Dans le cas d'un piège lâche ($\omega_x \ll \overline{\Gamma}$), cette énergie est très supérieure au *quantum* d'énergie du mouvement dans le piège $\hbar\omega_x$. Autrement dit, le mouvement atomique peut être traité semi-classiquement. En outre, l'excitation de l'atome par la lumière et l'émission spontanée ont lieu en un temps court devant la période d'oscillation : la vitesse de l'atome ne joue vis-à-vis du processus d'interaction atome/lumière que le rôle d'un paramètre. Le mécanisme du refroidissement est celui présenté au paragraphe 2.1.*a.ii* (dans lequel j'avais implicitement fait les hypothèses du présent paragraphe).

La densité atomique dans l'espace des phases (c'est-à-dire la fonction de Wigner $W(\vec{R},\vec{P})$) peut être évaluée à 1D par un traitement de type Fokker-Planck [113]. Ce traitement consiste à développer W sous la forme

$$W(\vec{R},\vec{P}+\hbar\vec{k}) \simeq \hbar\vec{k}\cdot\frac{\partial}{\partial\vec{P}}W(\vec{R},\vec{P})\,.$$

Il faut donc que la fonction de Wigner varie lentement sur une échelle d'impulsion de l'ordre de $\hbar k$. La largeur de la distribution finale en vitesse étant de l'ordre de $\overline{\Gamma}/k$, on en déduit que ce traitement impose la condition

$$\omega_{\rm rec} \ll \overline{\Gamma}\,. \tag{2.15}$$

Dans le cas où la condition (2.15) n'est pas remplie, il n'existe pas, à ma connaissance, de méthode analytique de résolution du problème. Ce dernier peut toutefois être traité numériquement, par une discrétisation de l'équation intégro-différentielle, ou encore une simulation de Monte-Carlo.

ii) Le régime de l'atome rapide ($\omega_x \gg \overline{\Gamma}$)

Dans le cas où la fréquence d'oscillation est élevée ($\omega_x \gg \overline{\Gamma}$), le processus d'interaction atome/lumière n'est plus localisé à un endroit précis de la trajectoire de l'atome. Dans ce cas, il convient de ne plus raisonner en termes de vitesse et de position, mais en termes de fréquence. Soit $\omega_{\rm L}$ la fréquence de la micro-onde équivalente (dans le cas qui nous intéresse du refroidissement Raman, $\omega_{\rm L} = \omega_A - \omega_B$). Du fait de l'oscillation dans le piège à la fréquence ω_x, tout se passe,

du point de vue de l'atome, comme si le faisceau était muni de bandes latérales, à la fréquence $\omega_L + n\omega_x$, où $n \in \mathbb{Z}$. Si le désaccord δ_{eff} est un multiple entier de ω_x (et s'il est négatif), l'atome peut entrer en résonance; ce dernier perd alors quelques *quanta* d'énergie mécanique, qui servent à compenser le déficit d'énergie du photon. C'est le principe du *refroidissement par bandes latérales*, réalisé expérimentalement pour des ions piégés par Neuhauser *et al.* [114].

Lorsque l'énergie des atomes est grande devant $\hbar\omega_x$, le refroidissement peut être décrit de manière semi-classique [115]. On a encore recours à une équation de Fokker-Planck, mais différente de celle utilisée dans le cas des atomes lourds. On utilise cette fois-ci les variables action et angle, (l'énergie est une constante du mouvement en l'absence de refroidissement), tirant parti du fait que le temps typique de refroidissement est très long devant la période d'oscillation. Comme au paragraphe 2.1.*c.i*, la méthode nécessite que $\omega_{\text{rec}} \ll \overline{\Gamma}$.

iii) Le régime de Lamb-Dicke

Lorsque l'énergie des atomes cesse d'être grande devant $\hbar\omega_x$ (et notamment, si $\omega_x \gg \overline{\Gamma}$, à la fin du processus de refroidissement), il n'est plus possible d'utiliser une méthode semi-classique. Il faut quantifier le mouvement des atomes. Si l'on note $|n\rangle$ et $|n'\rangle$ deux états quantiques du piège (en se plaçant à 1D), a et $a^\dagger$ les opérateurs d'annihilation et de création, et R l'opérateur position, on peut effectuer le développement

$$\begin{aligned}\langle n|e^{-ikR}|n'\rangle &= \langle n|e^{-i\zeta_0(a^\dagger+a)}|n'\rangle \\ &= \delta_{n,n'}\left[1 - \frac{\zeta_0^2(2n+1)}{2}\right] - i\zeta_0(\sqrt{n'}\delta_{n',n+1} + \sqrt{n}\delta_{n',n-1}) + \mathrm{O}(\zeta_0^2)\,,\end{aligned} \tag{2.16}$$

où le paramètre ζ_0 est défini par

$$\zeta_0^2 = \frac{\omega_{\text{rec}}}{2\omega_x}\,. \tag{2.17}$$

Le développement (2.16) n'est donc valable que lorsque

$$\omega_x \gg \omega_{\text{rec}}\ ; \tag{2.18}$$

c'est la condition de validité du régime de Lamb-Dicke. Par contre, aucune restriction n'a besoin d'être faite sur $\omega_x/\overline{\Gamma}$.

Lorsque la condition (2.18) est remplie, le niveau $|n\rangle$ n'est couplé en première approximation qu'avec les niveaux voisins $|n+1\rangle$ et $|n-1\rangle$. Dans le régime de Lamb-Dicke, on exploite cette propriété [116, 117]. Le principe est d'écrire une équation maîtresse sur les populations des niveaux du piège, *i.e.*

$$P(n) = \langle n|\rho|n\rangle\,.$$

ρ étant la matrice densité. Cette équation maîtresse est de la forme

$$\frac{\mathrm{d}P(n)}{\mathrm{d}t} = \zeta_0^2 \Big\{(n+1)A_-P(n+1) - [(n+1)A_+ + nA_-]P(n) + nA_+P(n-1)\Big\}\,, \quad (2.19)$$

A_+ et A_- étant des coefficients qui dépendent de l'intensité et du désaccord de la micro-onde équivalente, mais non de n.

L'état stationnaire du refroidissement s'obtient en écrivant la condition du bilan détaillé. On trouve que la température finale est de l'ordre de $\hbar\overline{\Gamma}/k_{\mathrm{B}}$. Dans le cas où $\omega_x \gg \overline{\Gamma}$, tous les atomes sont donc dans l'état fondamental du piège. Si l'on est de plus en présence d'un grand nombre d'atomes, il devient alors nécessaire de tenir compte des effets quantiques collectifs, qui viennent modifier le processus de refroidissement [118].

iv) Récapitulation des différents régimes. Application au refroidissement sub-recul

La figure 2.5 permet de visualiser les différents régimes de fonctionnement du refroidissement Doppler (ou du refroidissement Raman) d'atomes confinés, ainsi que les domaines de validité des méthodes de résolution du problème à 1D. On constate qu'il existe un domaine où aucune des méthodes présentées ci-dessus ne convient : le cas où $\omega_x \ll \omega_{\mathrm{rec}}$ et $\overline{\Gamma} \ll \omega_{\mathrm{rec}}$.

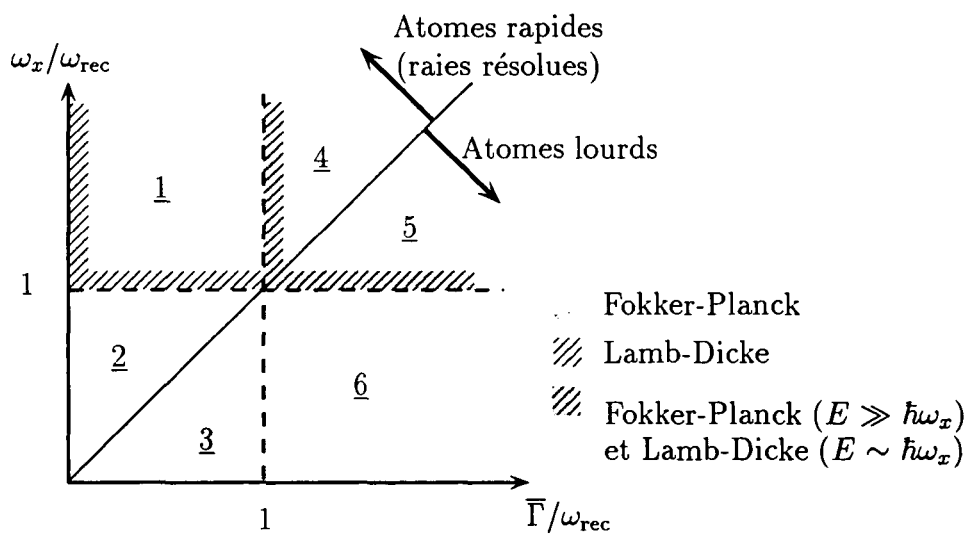


FIG. 2.5 - *Visualisation des différents régimes de fonctionnement du refroidissement continu d'atomes confinés, et des zones de validité des méthodes de calcul à 1D.*

Le cas qui nous intéresse est celui du refroidissement (continu) sub-recul. Nous avons vu que dans tous les cas de figure, la température limite est supérieure à

$\hbar\overline{\Gamma}/k_B$ ou de l'ordre de $\hbar\overline{\Gamma}/k_B$. Le refroidissement sub-recul n'est donc réalisable que lorsque $\overline{\Gamma} \ll \omega_{rec}$. Ceci exclut *a priori* la résolution du problème par une méthode de type Fokker-Planck (régions 4 à 6 sur la figure 2.5).

Regardons maintenant la région 1, située dans le régime de Lamb-Dicke. Il s'agit d'un cas où la température peut descendre en-dessous de $\hbar\omega_x/k_B$: on peut mettre tous les atomes dans le niveau fondamental du piège. En réalité, ce n'est pas la température qui va nous limiter ici, mais la densité. Nous savons en effet que la taille de l'état fondamental du piège est donnée par

$$b \equiv \sqrt{\frac{2\hbar}{M\omega_x}}, \tag{2.20}$$

soit $\zeta_0 = \pi b/\lambda$, λ étant la longueur d'onde optique. Nous avons $\zeta_0 \ll 1$ (régime de Lamb-Dicke), donc $b \ll \lambda\!\!\!^{-} = \lambda/(2\pi)$. Plusieurs atomes sont confinés dans l'état fondamental du piège, c'est-à-dire dans une région de taille b. Par conséquent, la densité atomique ρ est très élevée, *i.e.* $\rho\lambda\!\!\!^{-3} \gg 1$. Or, dans le cas où la distance inter-atomique devient inférieure à $\lambda\!\!\!^{-}$, le refroidissement est fortement perturbé par la diffusion multiple des photons, que je ne prends pas en compte dans ce modèle. Aucune expérience de refroidissement laser n'a de fait su produire $\rho\lambda\!\!\!^{-3}_L \gg 1$. La zone 1 de la figure 2.5 n'est donc pas un cas de figure *ad hoc*.

Dans toute la suite, nous nous placerons dans la zone 3, *i.e.* dans le cas où $\omega_{rec} \gg \overline{\Gamma} \gg \omega_x$. Aucun argument n'y empêche *a priori* le refroidissement sub-recul. Dans ce régime, ni la méthode de Fokker-Planck, ni les méthodes fonctionnant dans le régime de Lamb-Dicke ne sont *a priori* applicables. Par contre, comme l'énergie des atomes reste toujours très supérieure à $\hbar\omega_x$, leur mouvement peut être traité classiquement. Le problème pourra donc être étudié à l'aide de simulations de Monte-Carlo classiques.

J'ai écarté la zone 2, où $\omega_{rec} \gg \omega_x \gg \overline{\Gamma}$. En effet, le problème ne peut y être traité ni classiquement, ni par les méthodes du régime de Lamb-Dicke. La seule solution serait donc de résoudre numériquement les équations pilotes, ce qui me paraît compliqué à réaliser. En outre, ce régime impose que $\overline{\Gamma}$ soit très faible (typiquement quelques dizaines de Hertz). On peut donc prévoir que le temps de refroidissement, qui est directement relié à $\overline{\Gamma}$, soit extrêmement long, *i.e.* plusieurs minutes[1]. Ceci poserait donc certainement des problèmes expérimentaux difficiles à résoudre (notamment du point de vue de la qualité du vide).

1. Nous verrons au paragraphe 2.4 (p. 89) que le long temps de refroidissement constitue déjà un problème dans le régime où $\omega_{rec} \gg \overline{\Gamma} \gg \omega_x$ (le temps de refroidissement de 100 ms, évalué d'après le raisonnement de Pritchard (p. 61), constituant une valeur beaucoup trop optimiste).

2. Etude préliminaire: cas d'un profil d'excitation en δ

Dans ce paragraphe, je me placerai dans le cas d'un raie infiniment étroite, l'excitation ne pouvant se produire qu'à résonance. J'admettrai en outre que le mouvement des atomes peut être traité classiquement. Ces deux hypothèses vont permettre de dégager quelques résultats élémentaires[1].

a) Dimension 1

Chaque excitation d'un atome modifie la taille de l'ellipse qu'il décrit dans l'espace des phases d'une manière aléatoire. Je vais calculer ici à quelle condition l'énergie diminue en moyenne lors d'une excitation, et en déduire un seuil sur la vitesse résonnante.

Nous savons qu'à 1 dimension, l'excitation d'un atome a lieu à vitesse fixée, c'est-à-dire, si les deux faisceaux Raman sont colinéaires et se propagent en sens opposé, pour

$$v = -\frac{\delta_{\text{eff}}}{2k} \equiv v_{\text{rés}} \,. \tag{2.21}$$

Avant l'excitation, l'énergie mécanique d'un atome est

$$E = \frac{1}{2}Kx^2 + \frac{1}{2}Mv_{\text{rés}}^2 \,, \tag{2.22}$$

x étant la position spatiale de l'atome. Juste après l'excitation et l'émission spontanée, l'atome a encaissé l'impulsion Mw, et son énergie est devenue

$$E + \Delta E = \frac{1}{2}Kx^2 + \frac{1}{2}M(v_{\text{rés}} + w)^2 \,, \tag{2.23}$$

la position n'ayant pas changé. On obtient donc, après moyennage de w et w^2 (qui se fait indépendamment de la vitesse de l'atome), la condition :

$$\boxed{\langle \Delta E \rangle \leqslant 0 \Leftrightarrow v_{\text{rés}} \geqslant \frac{\langle w^2 \rangle}{2|\langle w \rangle|} \equiv s_0 \,.} \tag{2.24}$$

Pour calculer $\langle w \rangle$ et $\langle w^2 \rangle$, il faut tenir compte de deux sources de fluctuation : il y a tout d'abord la direction du photon spontané. Pour simplifier, je supposerai dans toute cette étude qu'il est émis de manière isotrope. On obtient alors :

$$\langle w_x \rangle = -v_{\text{rec}}(2 + \eta) \tag{2.25.a}$$

$$\langle w_x^2 \rangle = v_{\text{rec}}^2 \left(5 + 4\eta + \frac{1}{3}\right) \,. \tag{2.25.b}$$

1. Remarquons que le profil d'excitation n'est pas lorentzien. Les résultats du paragraphe 2.1.*b*, ainsi que les conditions du paragraphe 2.1.*c*, ne sont donc pas applicables.

Le paramètre $\eta = \pm 1$ est le sens du faisceau de repompeur. J'ai supposé que le repompeur était colinéaire aux faisceaux Raman, avec $\vec{k}_C = \eta \vec{k}_A$. La grandeur v_{rec} est la vitesse de recul $\hbar k/M$.

En réalité, le résultat est compliqué par le fait que l'atome peut retomber sur le niveau $|2\rangle$ au lieu du niveau $|1\rangle$, après absorption d'un premier photon du laser de repompage C (fig. 2.1). Si c'est le cas, il faut pomper à nouveau, et réémettre un photon spontané. On appelle ξ le rapport de branchement, c'est-à-dire la probabilité d'effectuer la transition $|e\rangle \rightarrow |1\rangle$. En sommant jusqu'à l'infini sur le nombre de photons spontanés émis, et en intégrant sur leurs directions (grâce à la transformation de Fourier), on obtient :

$$\langle w \rangle = -v_{\text{rec}}(2 + \frac{\eta}{\xi}) \tag{2.26.a}$$

$$\langle w^2 \rangle = v_{\text{rec}}^2 \left(4 + \frac{4\eta}{\xi} - \frac{2}{3\xi} + \frac{2}{\xi^2}\right) . \tag{2.26.b}$$

Avec des valeurs typiques ($\xi = 0{,}75$, $\eta = -1$), on trouve $s_0 = v_{\text{rec}}$.

b) Généralisation aux dimensions supérieures

La généralisation aux dimensions supérieures de la condition (2.24) est assez délicate dans la mesure où la relation (2.21) n'est plus valable : la résonance n'a plus lieu à vitesse fixe, mais sur un plan de l'espace des vitesses (ou une droite si nous sommes à 2D ; voir la figure 2.3).

Plaçons-nous à 2D pour se fixer les idées. Les quantités

$$v_x^0 = \sqrt{v_x^2 + \omega_x^2 x^2} \tag{2.27.a}$$

$$v_y^0 = \sqrt{v_y^2 + \omega_y^2 y^2} \tag{2.27.b}$$

sont des constantes du mouvement (ω_x et ω_y sont les fréquences d'oscillation dans le piège). Lors de l'excitation d'un atome, la variation d'énergie selon x est donnée par

$$\begin{aligned} \Delta E_x &= \frac{1}{2} M \left((v'^0_x)^2 - (v^0_x)^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} M \left((v_x + w_x)^2 - {v_x}^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} M \left({w_x}^2 + 2 v_x w_x \right) , \end{aligned} \tag{2.28}$$

où $M w_x$ est l'impulsion selon x encaissée par l'atome lors du processus, indépendante de la vitesse de l'atome. La moyenne et la moyenne quadratique de

$\vec{w} = w_{x,y}$ s'expriment sous la forme

$$\langle \vec{w} \rangle = \frac{\hbar}{M} \left(\vec{k}_A - \vec{k}_B + \frac{\vec{k}_C}{\xi} \right) \tag{2.29.a}$$

$$\left\langle (\vec{w} \cdot \vec{u})^2 \right\rangle = \frac{\hbar^2}{M^2} \left\{ \left[\left(\vec{k}_A - \vec{k}_B + \frac{\vec{k}_C}{\xi} \right) \cdot \vec{u} \right]^2 + \frac{1-\xi}{\xi^2} \left[\vec{k}_C \cdot \vec{u} \right]^2 \right\} + \frac{1}{3\xi} v_{\text{rec}}^2 , \tag{2.29.b}$$

où $\vec{u}$ est un vecteur unitaire quelconque. La formule (2.29) est une généralisation de (2.26), dans laquelle je n'ai fait aucune hypothèse sur les directions des 3 faisceaux laser.

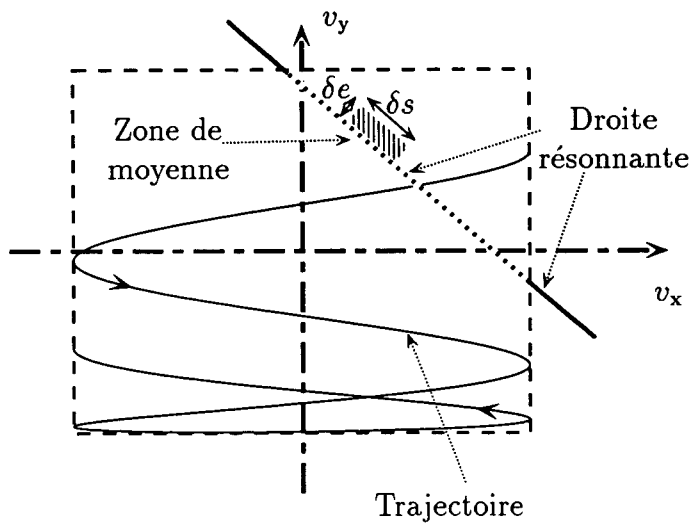


FIG. 2.6 - *Calcul de la condition de seuil en dimension 2 ou 3.*

La vitesse de l'atome à résonance $\vec{v} = (v_x, v_y)$ peut se moyenner grâce à l'équation de la trajectoire (fig. 2.6). Soit (s, e) un système de coordonnés orthonormé de l'espace des vitesses, tel que s soit l'abscisse linéique sur la droite résonnante, et que l'on ait $e = 0$ sur cette droite résonnante. La probabilité pour l'atome de se trouver au voisinage de la droite résonnante, dans le rectangle de côtés $\delta s\, \delta e$, est donnée par

$$p(s, e=0)\, \delta s\, \delta e = p_0^x \left(v_x(s, e=0) \right) p_0^y \left(v_y(s, e=0) \right) \delta s\, \delta e\,, \tag{2.30}$$

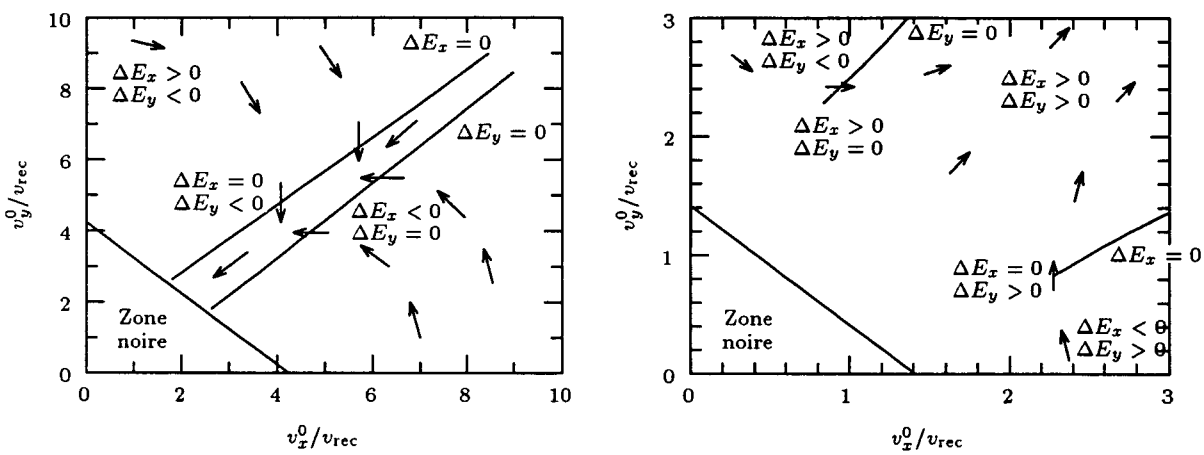
avec

$$p_0^x(v_x) \propto \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_x}{v_x^0} \right)^2}}, \tag{2.31}$$

(et de même pour $p_0^y(v_y)$). La densité linéique de probabilité sur la droite résonnante est donc proportionnelle au produit $p_0^x(v_x)\,p_0^y(v_y)$. Par suite la valeur moyenne de $\vec{v}$ à résonance vaut

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\int_{\text{droite}} \mathrm{d}s\, \vec{v}(s,0)\, p_0^x(v_x(s,0))\, p_0^y(v_y(s,0))}{\int_{\text{droite}} \mathrm{d}s\, p_0^x\left(v_x(s,0)\right)\, p_0^y\left(v_y(s,0)\right)}. \tag{2.32}$$

La formule (2.32) permet de moyenner numériquement la vitesse $\vec{v}$ sur la droite résonnante. La quantité $\vec{w}$ se moyennant indépendamment en utilisant (2.29), on peut calculer, grâce à (2.28), les moyennes $\langle \Delta E_x \rangle$ et $\langle \Delta E_y \rangle$ en fonction des amplitudes de mouvement v_x^0 et v_y^0. Les résultats de ces calculs sont présentés sur la figure 2.7, où est représenté l'espace des amplitudes de trajectoires $\vec{v}_0 = (v_0^x, v_0^y)$. Des signes de ΔE_x et de ΔE_y, et donc de la variation de $\vec{v}_0$ lors d'une excitation, on peut déduire qualitativement des *lignes de courant* dans l'espace des amplitudes de trajectoires. Le sens de ces « courants » est aussi indiqué sur la figure 2.7.



(a) *1er cas de figure.* (b) *2e cas de figure.*

FIG. 2.7 - *Carte du signe de la variation d'énergie directionnelle lors de l'excitation, en fonction des énergies directionnelles (les courbes correspondant à des variations nulles sont en fait presque des droites). Les flèches sont les sens de « courants » que l'on peut en déduire qualitativement.*

Selon les positions relatives des deux courbes correspondant à $\Delta E_x = 0$ et $\Delta E_y = 0$, elles mêmes déterminées par la fréquence du laser, deux cas peuvent se produire : si la droite $\Delta E_x = 0$ est « au-dessus » (fig. 2.7-*a*), les lignes de courant peuvent amener les atomes dans la zone $|(\vec{k}_A - \vec{k}_B)\cdot\vec{v}_0| < |\delta_{\text{eff}}|$, qui correspond aux trajectoires atomiques ne coupant pas la droite résonnante (ces atomes ne peuvent

plus être réexcités). Le refroidissement aura bien lieu. Au contraire, dans le cas de la figure 2.7-*b*, le refroidissement ne peut avoir lieu. Le cas limite est celui où les courbes $\Delta E_x = 0$ et $\Delta E_y = 0$ se rejoignent sur la droite $|(\vec{k}_A - \vec{k}_B)\cdot\vec{v}_0| = |\delta_{\text{eff}}|$. Dans ce cas, la formule (2.32) se simplifie en

$$\langle\vec{v}\rangle = \vec{v}_0\,, \tag{2.33}$$

(éventuellement au moyen de changements de sens des axes dans l'espace des vitesses) et la nullité de (2.28) donne

$$v_x^0 = \frac{\langle {w_x}^2\rangle}{2|\langle w_x\rangle|} \tag{2.34.a}$$

$$v_y^0 = \frac{\langle {w_y}^2\rangle}{2|\langle w_y\rangle|} \tag{2.34.b}$$

$$|\delta_{\text{eff}}| = |(\vec{k}_A - \vec{k}_B)\cdot\vec{v}_0|\,, \tag{2.34.c}$$

où j'ai supposé que $\langle w_x\rangle$ et $\langle w_y\rangle$ étaient négatifs (ce qui est nécessaire pour avoir du refroidissement). Finalement, on généralise la condition de seuil (2.24) à partir de (2.34), en remplaçant l'égalité (2.34.c) par une inégalité

$$\boxed{|\delta_{\text{eff}}| \geqslant \left((\vec{k}_A - \vec{k}_B)\cdot\vec{u}_x\frac{\langle {w_x}^2\rangle}{2|\langle w_x\rangle|} + (\vec{k}_A - \vec{k}_B)\cdot\vec{u}_y\frac{\langle {w_y}^2\rangle}{2|\langle w_y\rangle|}\right)\,,} \tag{2.35}$$

$\vec{u}_{x,y}$ étant les vecteurs de la base correspondant aux axes propres du piège. On peut de la même façon généraliser (2.35) à 3 dimensions.

La condition de seuil (2.35) indique qu'il n'est pas possible d'effectuer du refroidissement si le désaccord est trop proche de 0, et donc si la *vitesse résonnante* $v_{\text{rés}}$ (définie par la formule (2.5), p. 58) est trop faible. Il s'agit donc bien d'un seuil de refroidissement : il n'est pas possible de refroidir les atomes (du moins par cette méthode) en-dessous d'une limite qui est de l'ordre de la température de recul. Remarquons que la largeur de la raie $\hbar\overline{\Gamma}/k_{\text{B}}$ constitue également une limite pour la température finale (voir le paragraphe 2.1.*b*, p. 59). Cette seconde limite n'apparaît pas ici car j'ai supposé que le profil d'excitation était une fonction δ.

c) Simulations de Monte-Carlo

Il est possible de tester numériquement les conditions (2.24) et (2.35) par des simulations de Monte-Carlo. Le principe est le suivant : on crée un tableau $6 \times N$ (N étant le nombre d'atomes) qui, pour chaque atome, stocke les 3 composantes de la position et de l'impulsion. On calcule, pour chaque intervalle de temps Δt, l'action de la force de confinement sur les atomes, grâce à une méthode de

Runge-Kutta[1]. On teste aussi si l'atome a franchi pendant l'intervalle la droite résonnante. Dans l'affirmative, on simule l'excitation en ajoutant à l'impulsion de l'atome celle des photons Raman et de pompage, ainsi que celle d'un photon spontané de direction aléatoire (choisi selon une loi isotrope). On tient également compte de la possibilité d'effectuer la transition spontanée $|e\rangle \rightarrow |2\rangle$ (si le rapport de branchement ξ est strictement inférieur à 1). Périodiquement, on regarde la proportion d'atomes non excitables ; je rappelle que les atomes dont la trajectoire dans l'espace des vitesses ne coupe plus la droite résonnante (*i.e.* vérifiant $|(\vec{k}_A - \vec{k}_B) \cdot \vec{v}_0| < |\delta_{\text{eff}}|$) ne sont plus excitables (fig. 2.6).

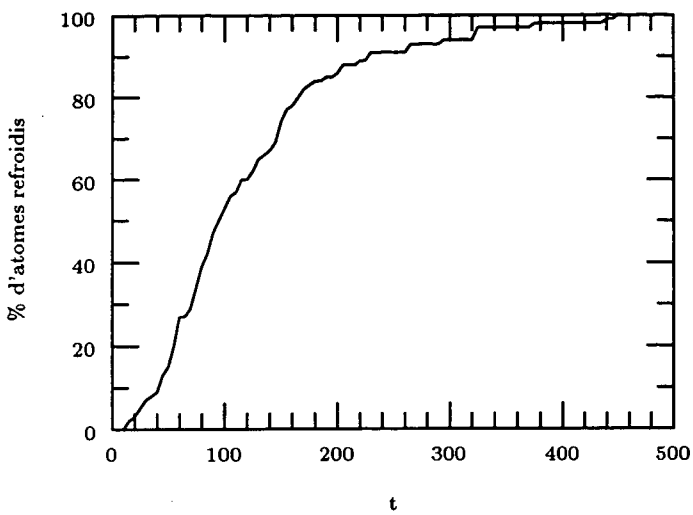
On donne tout d'abord à $v_{\text{rés}}$ une valeur suffisamment élevée, et on regarde le nombre d'atomes froids, en fonction du temps (fig. 2.8-*a*). On en déduit un ordre de grandeur pour le temps de refroidissement. Dans un deuxième temps, on balaye $v_{\text{rés}}$, on effectue pour chaque valeur une simulation comme précédemment, et on trace le pourcentage d'atomes refroidis à la fin[2]. On obtient la courbe de la figure 2.8-*b* :

Sur la figure 2.8-*b* apparaît clairement un seuil, sous lequel le refroidissement est impossible. Pour vérifier la formule (2.35), on fait maintenant varier le rapport de branchement ξ, recommençant pour chaque valeur la courbe de la figure 2.8-*b*. On détecte le seuil, c'est-à-dire la valeur de $v_{\text{rés}}$ permettant de refroidir 50 % des atomes. Enfin, on compare avec le résultat théorique, issu des formules (2.29) et (2.35), ce qui aboutit à un assez bon accord (fig. 2.8-*c*).

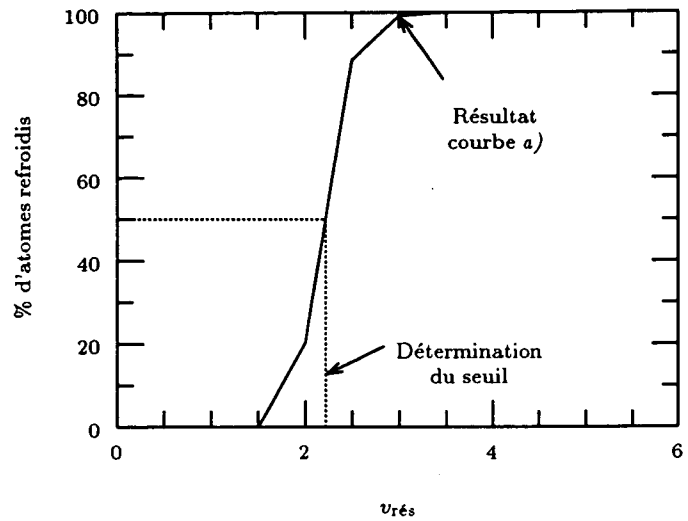
La figure 2.9 a été calculée selon le même principe que la figure 2.8, les simulations étant cette fois-ci réalisées à une dimension. On constate qu'il y a un bon accord avec le résultat (2.24). On remarquera aussi que les temps de refroidissement sont plus courts qu'à 3D.

1. Le recours à Runge-Kutta n'est pas indispensable, dans la mesure où la trajectoire classique d'une particule dans un piège harmonique est bien connue ! J'ai choisi cette solution afin de pouvoir utiliser le même programme dans le cas où le piège n'est pas harmonique (et notamment avec le potentiel correspondant à un piège dipolaire, ou à un piège opto-électrique (chapitre 3)).

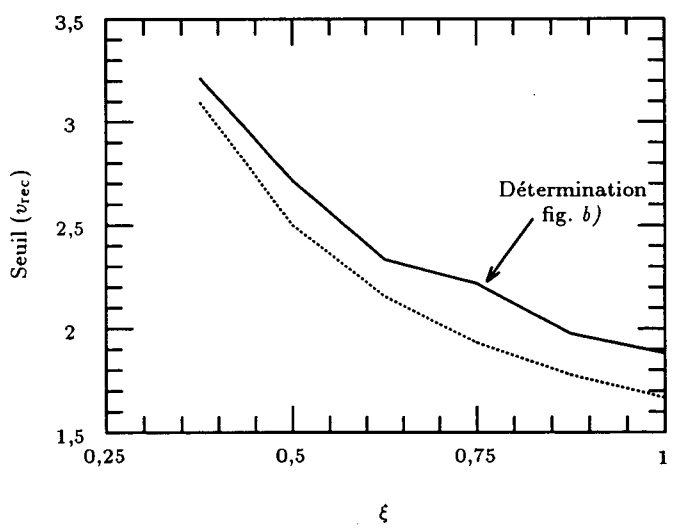
2. Les simulations effectuées sur la figure 2.8 n'atteignent pas toutes l'état stationnaire. En effet, plus la vitesse résonnante est proche du seuil (même supérieure à celui-ci), plus le temps de refroidissement est long, et il n'est pas possible de faire tourner le programme indéfiniment. Par exemple, dans le cas de la figure 2.8-*a*, l'état stationnaire est tout juste atteint.



(a) *% d'atomes refroidis en fonction du temps, exprimé en périodes d'oscillation selon (Ox). La vitesse résonnante (exprimée en vitesse de recul) vaut 3, et le rapport de branchement vaut ξ= 0,75.*



(b) *% d'atomes refroidis au bout de 500 périodes, en fonction de la vitesse résonnante. Ce pourcentage est déduit de courbes de type* a, *en moyennant le nombre d'atomes piégés entre 400 et 500 périodes d'oscillation.. Le rapport de branchement ξ vaut 0,75.*



(c) *Seuil, exprimé en fonction du rapport de branchement ξ. Le seuil est la vitesse résonnante pour laquelle 50 % des atomes peuvent être refroidis (déduit de courbes de type* b*). En pointillés, la courbe théorique issue de la formule (2.35).*

FIG. 2.8 - *Calcul du seuil à 3 dimensions, à l'aide de simulations de Monte-Carlo. La raie est infiniment étroite. Tous les faisceaux sont colinéaires au vecteur de coordonnées (1,1,1) dans la base définie pas les axes propres du piège. Le sens du repompeur est η = 1. Les 3 fréquences du piège valent respectivement 133, 189 et 231 rad.s^{-1}. Au départ, les atomes sont répartis de façon aléatoire dans l'espace des phases, pouvant acquérir au maximum une vitesse de 10 v_{rec}. Les simulations ont été réalisées avec 100 atomes, sur 500 périodes d'oscillation.*

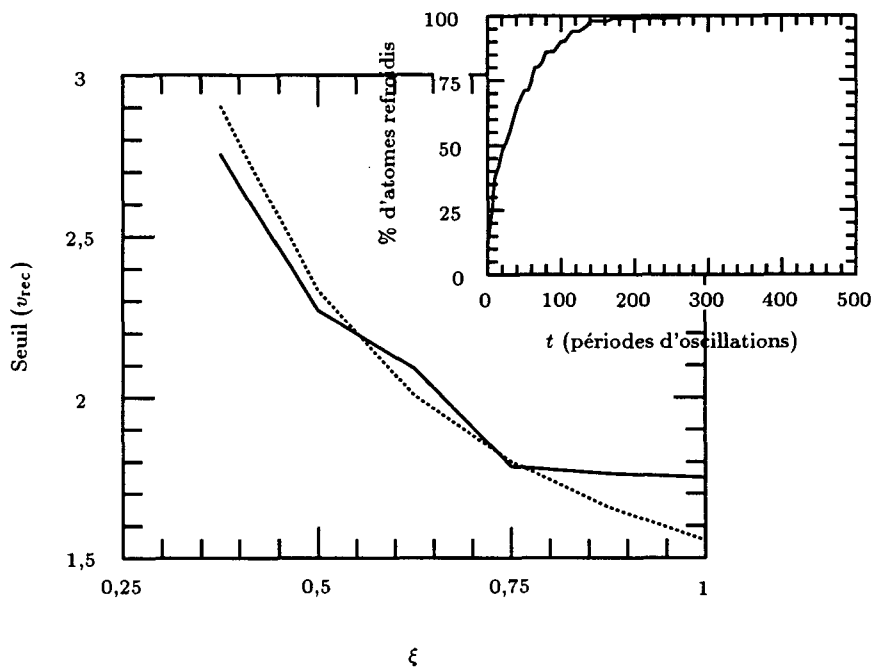


FIG. 2.9 - *Vérification de la condition de seuil 1D, effectuée de la même façon que sur la figure 2.8. Les simulations sont réalisées avec avec une fréquence d'oscillation de 133 rad/s, les autres paramètres étant les mêmes que sur la figure 2.8. La courbe continue correspond au seuil déduit des simulations, la courbe en pointillé est le seuil théorique déduit de la formule (2.24). En médaillon, le résultat d'une simulation, correspondant à* $\xi = 0,75$ *et* $v_{rés} = 3v_{rec}$.

d) Rôle des fréquences du piège

Les simulations de Monte-Carlo permettent aussi de vérifier l'assertion faite au paragraphe 2.1.*a.ii* selon laquelle les 3 fréquences du piège doivent être différentes. La figure 2.10, comme la figure 2.8, est réalisée à partir d'une succession de simulations Monte-Carlo, $v_{rés}$ étant cette fois-ci fixée, et l'une des fréquences du piège variant. On constate effectivement une brutale augmentation de l'énergie moyenne à l'état stationnaire lorsque 2 fréquences sont voisines.

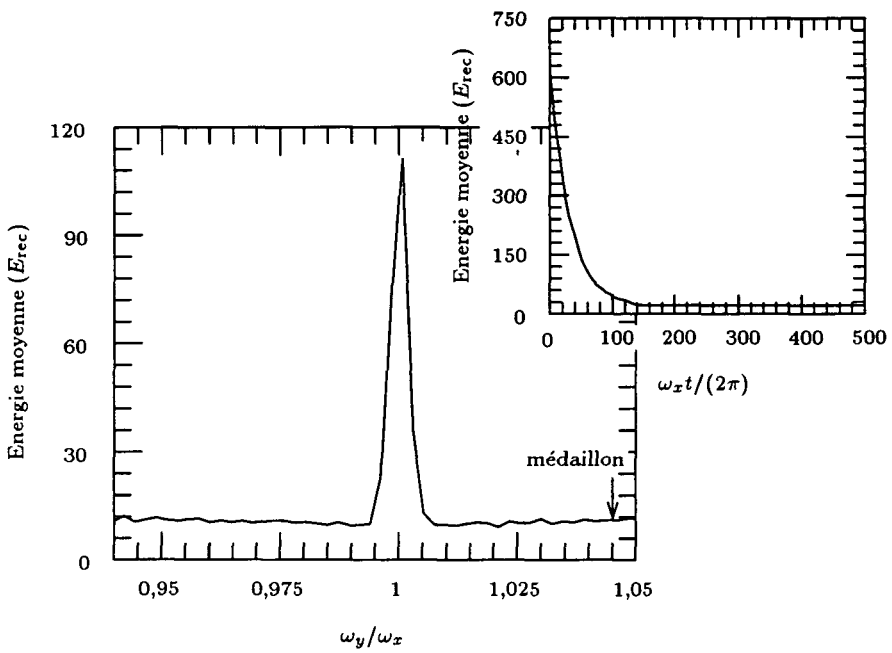


FIG. 2.10 - *Vérification de la nécessité d'avoir des fréquences différentes. Les simulations sont réalisées à 2 dimensions, avec une vitesse résonnante fixée au-dessus du seuil (à 5,5 v_{rec}) (ξ = 0,75, η = 1, direction (1,1)). En abscisse, la fréquence selon y est rapportée à la fréquence selon x, cette dernière étant fixée à 133 rad/s. En ordonnée, l'énergie moyenne atteinte, moyennée entre 400 et 500 périodes d'oscillations. En médaillon, la simulation correspondant à* ω_y/ω_x = *1,045.*

3. Etude quantitative du refroidissement Raman d'atomes piégés

Au paragraphe 2.2 (p. 66), j'ai utilisé un modèle dans lequel le mouvement des atomes était traité classiquement, et où le profil d'excitation était une fonction δ. J'ai trouvé qu'il existait un seuil pour la vitesse résonnante (de l'ordre de la vitesse

de recul), en-dessous duquel le refroidissement n'était pas possible. Ce seuil est lié aux oscillations des atomes dans le piège, et aux redistributions d'impulsions dues aux interactions atome/lumière. Par ailleurs, le modèle de Pritchard (§ 2.1.*b*, p. 59), qui ne prend pas en compte correctement ces redistributions, et qui ignore les oscillations dans le piège (mais pour lequel la largeur de la raie $\overline{\Gamma}$ est non nulle), prédit l'existence d'une température limite de l'ordre de $\hbar\overline{\Gamma}/k_{\mathrm{B}}$.

Afin de savoir quel est le comportement réel du refroidissement, il s'avère donc nécessaire d'utiliser une théorie plus poussée, dans laquelle la largeur non nulle de la raie tout comme les oscillations dans le piège sont prises en compte. Je n'ai en outre pas démontré qu'il est licite de traiter le mouvement atomique classiquement. Je commencerai donc par exposer les grandes lignes de cette démonstration au paragraphe 2.3.*a*. Ce résultat admis, j'étudierai le refroidissement à l'aide de simulations de Monte-Carlo classiques (§ 2.3.*b.i*, p. 77). Enfin, je terminerai cette section par une étude analytique, dans le cas unidimensionnel (§ 2.3.*c*, p. 82). Cette étude permet de retrouver le seuil établi au paragraphe 2.2.*a*, p. 66 (éq. (2.24)), et donc de montrer qu'il reste valable dans le cas où la largeur de la raie est non nulle.

a) Mise en place des équations

Je vais maintenant écrire les équations nécessaires à l'étude plus poussée du refroidissement d'atomes piégés. Je ne donnerai ici que les grandes lignes du calcul, le lecteur qui le souhaite pouvant se reporter au complément 2.A (p. 108) pour de plus amples détails.

On commence par écrire les équations de Bloch optiques [119, p. 334] appliquées à un atome à 3 niveaux (fig. 2.1). Comme on étudie l'action mécanique de la lumière sur les atomes, on écrit en fait des équations généralisées, qui décrivent l'évolution d'une matrice densité agissant à la fois sur les degrés de liberté internes et externes de l'atome [120, p. 116].

On effectue ensuite diverses approximations visant à simplifier ces équations. Ce sont, dans l'ordre :

- l'approximation Raman [82], permettant de remplacer les deux faisceaux A et B (fig. 2.1) par un faisceau unique équivalent, sous l'hypothèse d'un grand désaccord Δ et d'une population de l'état $|e\rangle$ faible devant celles des états fondamentaux $|1\rangle$ et $|2\rangle$. Rappelons que ces 2 faisceaux transfèrent aux atomes l'impulsion $\hbar(\vec{k}_A - \vec{k}_B)$;
- sous cette même hypothèse de faible population, on élimine adiabatiquement la population et les cohérences de $|e\rangle$. Le faisceau de repompage C crée une durée de vie effective pour l'état $|2\rangle$ qui se comporte alors vis-à-vis de $|1\rangle$ comme un pseudo-état excité ;
- avant de simplifier encore les équations, on effectue un passage en repré-

sentation de Wigner [121] : les éléments de matrice du type

$$\langle \vec{P}|\sigma_{ab}|\vec{P}'\rangle_{a,b=1,2}$$

sont remplacés par des fonctions $W_{a,b}(\vec{R},\vec{P})$ pouvant être interprétées comme des quasi-densités de populations ou de cohérences dans l'espace des phases ;

- enfin, on élimine adiabatiquement $|2\rangle$. Cette élimination requiert que la population de $|2\rangle$ soit faible devant celle de $|1\rangle$, et donc que la transition Raman soit faiblement saturée ($\overline{\Omega} \ll \overline{\Gamma}$). Il est également nécessaire d'avoir $\overline{\Gamma} \gg \omega_{x,y,z}$ (condition qui correspond au régime de l'« atome lourd » présenté au paragraphe 2.1.*c.i*, p. 62).

Voici l'équation obtenue :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial W_{1,1}}{\partial t} + \frac{\vec{P}}{M}\cdot\frac{\partial W_{1,1}}{\partial \vec{R}} - \vec{R}\cdot\vec{\vec{K}}\cdot\frac{\partial W_{1,1}}{\partial \vec{P}} \\
&= -\mathcal{L}\left(\vec{P}\right) W_{1,1}(\vec{R},\vec{P}) \\
&\quad + \frac{3\xi}{8\pi}\sum_{m=0}^{+\infty}\left(\frac{3(1-\xi)}{8\pi}\right)^m \int\cdots\int \mathrm{d}^2\vec{n}_0\ldots\mathrm{d}^2\vec{n}_m \prod_{j=0}^{m}\left(\sum_{\vec{\varepsilon}_j\perp\vec{n}_j}|\vec{d}_{e,2}\cdot\vec{\varepsilon}_j|^2\right) \\
&\quad \times \mathcal{L}\left(\vec{P} - (m+1)\hbar\vec{k}_C + \hbar\left(\vec{k}_B - \vec{k}_A\right) + \hbar k \times \sum_{j=0}^{m}\vec{n}_j\right) \\
&\qquad \times W_{1,1}\left(\vec{R}, \vec{P} - (m+1)\hbar\vec{k}_C + \hbar\left(\vec{k}_B - \vec{k}_A\right) + \hbar k \times \sum_{j=0}^{m}\vec{n}_j\right) ,
\end{aligned} \tag{2.36}$$

où

$$\mathcal{L}(\vec{P}) = \frac{\dfrac{|\overline{\Omega}|^2\overline{\Gamma}}{4}}{\dfrac{\overline{\Gamma}^2}{4} + \left(\overline{\delta} - \dfrac{\vec{P}}{M}\cdot\left(\vec{k}_B - \vec{k}_A\right) + \dfrac{\hbar\left(\vec{k}_B - \vec{k}_A\right)^2}{2M}\right)^2}. \tag{2.37}$$

Les quantités $\overline{\Omega}$, $\overline{\Gamma}$, et $\overline{\delta}$ sont définies respectivement par

$$\overline{\Omega} = -\frac{\Omega_A\Omega_B^*}{2\Delta} \tag{2.38.a}$$

$$\overline{\Gamma} = \frac{|\Omega_C|^2}{\Gamma} \tag{2.38.b}$$

$$\overline{\delta} = \delta - \frac{|\Omega_A|^2 - |\Omega_B|^2}{4\Delta}. \tag{2.38.c}$$

et s'interprètent comme suit : $\overline{\Omega}$ est la fréquence de Rabi effective du processus Raman ; $\overline{\Gamma}$ est la durée de vie effective du niveau $|2\rangle$, induite par la présence du repompeur C ; enfin, $\overline{\delta}$ est le désaccord de la transition Raman, corrigé par les déplacements lumineux des niveaux $|1\rangle$ et $|2\rangle$. k est le vecteur d'onde d'un laser résonnant, et les $\vec{n}_j$ sont des vecteurs d'onde unitaires.

On reconnaît dans l'équation (2.36) l'évolution semi-classique de la densité atomique dans l'espace des phases. Les termes du premier membre correspondent au mouvement d'un atome dans le piège, traité classiquement. Le premier terme du second membre est la probabilité d'excitation de l'atome par unité de temps, avec un profil Lorentzien (taux de perte). Le deuxième terme est le taux de gain : on somme sur le nombre de photons spontanés émis $(m + 1)$, on intègre sur la direction de chaque photon spontané, et pour chaque cas, on considère le taux d'excitation pour la vitesse qu'avait l'atome avant le cycle absorption/émission spontanée.

Le fait que l'on obtienne une équation d'évolution semi-classique (alors que l'on est parti des équations de Bloch, c'est-à-dire d'équations totalement quantiques) va nous autoriser à traiter le problème à l'aide de simulations de Monte-Carlo classiques.

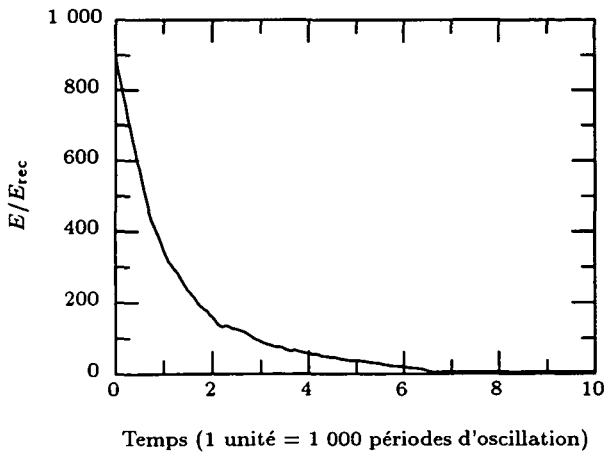
b) Simulations de Monte-Carlo

i) Refroidissement utilisant une seule paire de faisceaux Raman

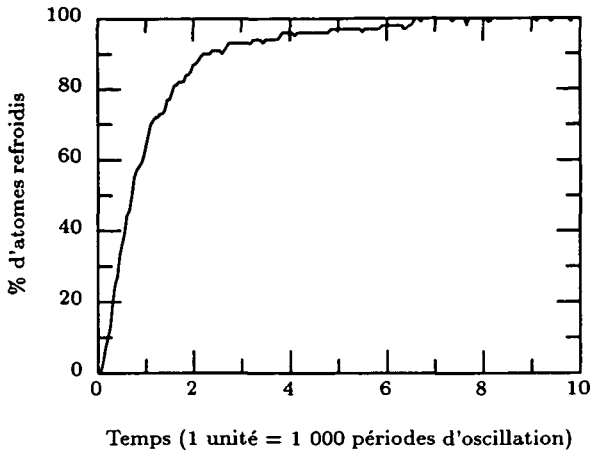
Comme annoncé, j'ai résolu numériquement l'équation (2.36) à l'aide de simulations de Monte-Carlo. Cette méthode présente l'avantage de ne pas nécessiter de grands temps de calculs, mais produit des courbes avec du bruit. Le programme est analogue à celui utilisé dans le cas d'une raie infiniment étroite (page 70), la seule différence se situant au niveau de la modélisation de l'excitation : on tire un nombre aléatoire et on décrète qu'il y a excitation lorsqu'il dépasse la quantité $\mathcal{L}\Delta t$[1]. Afin d'accélérer l'exécution du programme, j'ai en outre utilisé deux pas d'intégration différents : lorsque l'atome est hors résonance, je calcule son mouvement par Runge-Kutta en utilisant un pas relativement grand (mais petit devant la période d'oscillation). Quand l'atome s'approche de la résonance, je passe à un pas plus petit (*i.e.* tel que le désaccord vu par l'atome change peu (comparé à $\overline{\Gamma}$) pendant un pas).

La figure 2.11 représente le résultat d'une simulation avec $v_{\text{rés}} = 3\,v_{\text{rec}}$. On constate que le refroidissement fonctionne bien, puisque 100 % des atomes sont confinés, à la fin, sur des trajectoires ne coupant pas le plan résonnant (*i.e.* d'équation $2\vec{k} \cdot \vec{v} = v_{\text{rés}}$). Le temps de refroidissement est de l'ordre de 1000 périodes d'oscillations (soit 50 s). Par contre, dans le cas de la figure 2.12 où

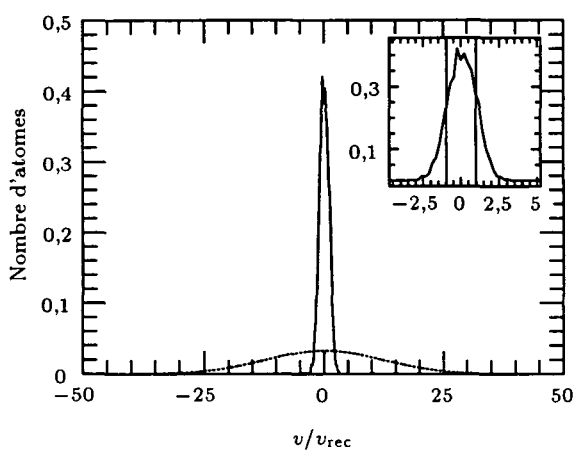
1. La quantité $\mathcal{L}$ dépend de $\overline{\Gamma}$ et de $\overline{\Omega}$, que j'exprime usuellement en unité kv_{rec}. Pour toutes les simulations de ce chapitre, j'ai posé $kv_{\text{rec}} = 2{,}4.10^4$ rad/s (cette valeur correspond au césium).



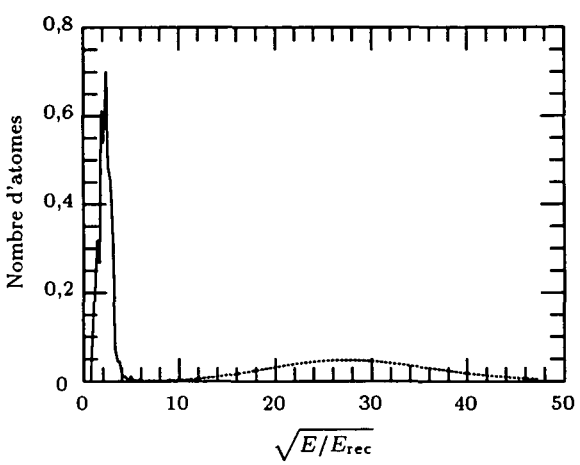
(a) *Energie moyenne des atomes en énergie de recul* ($E_{rec} = 1/2 M v_{rec}^2$), *en fonction du temps exprimé en milliers de périodes d'oscillation selon* (Ox).



(b) *Pourcentage d'atomes refroidis en fonction du temps. Les atomes refroidis sont ceux dont la trajectoire dans l'espace des vitesses ne coupe pas le plan* $2\vec{k} \cdot \vec{v} = \delta_{eff}$.



(c) *Distribution finale en vitesse, moyennée sur les 100 atomes de la simulation (l'aire de la courbe vaut 1) et sur le temps entre 9 000 et 10 000 périodes d'oscillation. Les vitesses sont exprimées en vitesse de recul, et sont mesurées selon la direction (1;−1;1) (par rapport aux axes propres du piège). En pointillés, la distribution initiale (courbe théorique).*



(d) *Distribution finale en fonction de la racine de l'énergie (en unité* E_{rec}). *Le moyennage se fait de la même façon que pour la vitesse.*

FIG. 2.11 - *Résultat d'une simulation Monte-Carlo 3D avec 100 atomes, tenant compte de la largeur des raies. Le rapport de branchement est pris égal à 0,75. La direction du faisceau est (1;1;1) par rapport aux axes propres du piège, le repompeur donnant une impulsion dans le même sens que celle des faisceaux Raman* ($\eta = 1$). *Tout ceci donne un seuil égal à 1,93* v_{rec}. *La largeur effective* $\overline{\Gamma}$ *vaut* $0,1 k v_{rec}$, *et la fréquence de Rabi effective* $\overline{\Omega}/2 = 0,03 k v_{rec}$. *Les 3 fréquences du piège valent respectivement 133, 125, et 231 rad/s. La vitesse résonnante est 3* v_{rec}. *Cette simulation montre qu'il est possible d'atteindre* T_{rec} *en un temps 1/e de 1000 périodes d'oscillation (soit 50 s).*

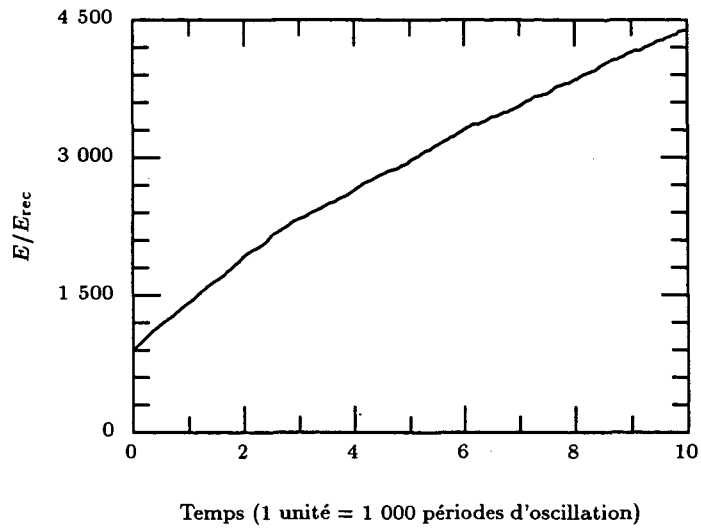


FIG. 2.12 - *Même principe que pour la figure précédente. La vitesse résonnante est ici* v_{rec}. *On constate que l'énergie moyenne des atomes augmente (chauffage).*

$v_{\text{rés}} = v_{\text{rec}}$, le refroidissement ne fonctionne pas parce que nous sommes en-dessous du seuil (2.35).

La distribution finale en vitesse est représentée sur la figure 2.11-*c*. Il est possible d'évaluer la température finale en ajustant le pic refroidi par une gaussienne. Une telle manœuvre, usuelle en physique expérimentale, est plus inhabituelle en théorie. Dans le cas présent, elle est d'ailleurs difficile à justifier, car la distribution finale n'est *a priori* pas thermique. Toutefois, ceci permet de déduire un ordre de grandeur pour la température finale. J'ai trouvé que la vitesse quadratique moyenne selon un axe était voisine de v_{rec}. La température correspondante est de l'ordre de 200 nK.

Pour déterminer quelle valeur de $\rho\Lambda_{\text{DB}}^3$ il serait possible d'atteindre expérimentalement par cette méthode[1], il faut connaître la densité et la température initiales. J'ai pour cela choisi des paramètres expérimentaux voisins de ceux du piège opto-électrique (cette expérience est présentée au chapitre 3). On confine 5.10^5 atomes dans le P.O.E., avec une densité $\rho = 4.10^9$ atomes/cm^3, et à une température de 10 μK (soit $\rho\Lambda_{\text{DB}}^3 = 7 \times 6{,}1.10^{-8}$, où je rappelle que la dégénérescence entre 7 sous-niveaux Zeeman diminue d'autant les effets quantiques collectifs). Cette température correspond à une vitesse quadratique moyenne selon z de $7{,}5\, v_{\text{rec}}$. Le refroidissement Raman conduira à une compression de la distribution en v_z d'un facteur 7,5 (la largeur de la distribution finale étant indépendante de la distribution initiale). La distribution en position selon z sera rétrécie dans les mêmes proportions, et $\rho\Lambda_{\text{DB}}^3$ augmentera d'un facteur $7{,}5^6$. On obtiendra donc,

1. Je rappelle que ρ est la densité atomique, et $\Lambda_{\text{DB}} = h/\sqrt{2\pi M k_{\text{B}} T}$ la longueur d'onde de de Broglie des atomes.

après refroidissement Raman, la valeur $\rho\Lambda_{DB}^3 = 7 \times 1{,}1.10^{-2}$ (et une densité de $1{,}7.10^{12}$ atomes/cm^3, soit $\rho\lambda_{optique}^3 \sim 1$). Cette valeur du paramètre $\rho\Lambda_{DB}^3$ est encore insuffisante pour observer la condensation de Bose-Einstein (qui nécessite $\rho\Lambda_{DB}^3 \geqslant 7 \times 2{,}612$). Toutefois, elle n'en est plus aussi éloignée. En particulier, une expérience de refroidissement évaporatif réalisée à partir d'atomes refroidis à la vitesse de recul par refroidissement Raman aboutirait à un condensat contenant davantage d'atomes que dans l'expérience de Boulder [63] (mais moins que dans celle de Cambridge [65]).

Remarque: les paramètres de départ que j'ai choisis ne sont pas *a priori* les plus favorables. En effet, le piège opto-électrique que nous avons réalisé expérimentalement contient peu d'atomes, en raison du chargement médiocre du piège magnéto-optique servant à collecter les atomes (médiocre chargement qui est lui-même dû à la présence de l'électrode). La situation pourrait être améliorée en utilisant un second piège magnéto-optique et un vide différentiel, comme il est fait dans [48]. Le refroidissement Raman se ferait dans ce cas à partir des paramètres typiques du piège magnéto-optique, *i.e.* $\rho\Lambda_{DB}^3 \sim 3.10^{-4}$. On serait donc tenté de croire que la condensation de Bose-Einstein deviendrait accessible sans avoir recours au refroidissement évaporatif.

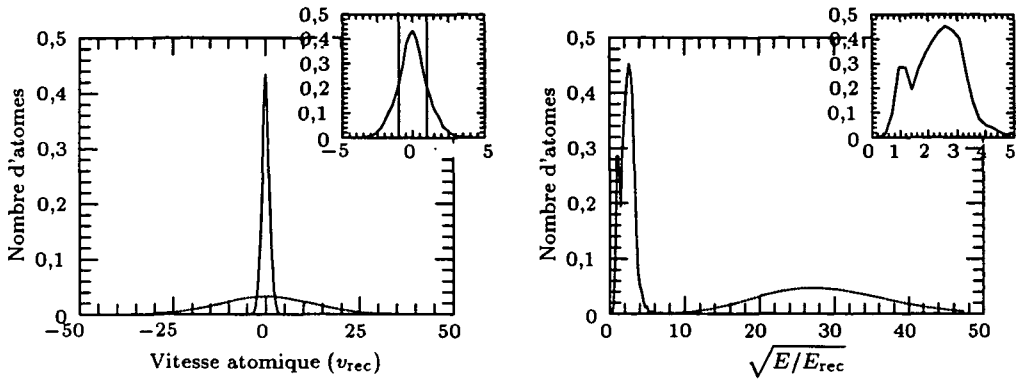
En réalité, nous serions rapidement limités par la densité atomique, et par les processus de diffusion multiple des photons intervenant dans le refroidissement Raman, que je ne prends pas du tout en compte dans mes calculs. La statistique quantique des atomes devrait également modifier le processus de refroidissement, ainsi qu'il est expliqué dans [110] (laser à atomes).

ii) Refroidissement utilisant plusieurs systèmes de faisceaux Raman

La figure 2.11 nous enseigne qu'il est possible de refroidir des atomes à la température de recul, en choisissant $v_{rés} = 3\,v_{rec}$. Par contre, si l'on diminue la vitesse résonnante, on franchit le seuil (2.35), et on n'arrive plus à refroidir. Il semble donc difficile de refroidir les atomes en-dessous de la température de recul.

Il est néanmoins possible de contourner le problème en utilisant un deuxième système de faisceaux Raman, de vitesse résonnante différente (si leurs saturations sont suffisamment faibles, et si leurs vitesses résonnantes sont séparées d'une quantité supérieure à leurs fréquences de Rabi effectives, on montre que leurs effets s'ajoutent). La vitesse résonnante du faisceau n° 1 (le moins puissant) sera placée sous le seuil (2.35), c'est-à-dire qu'il réchaufferait en moyenne les atomes s'il était seul. Celle du deuxième, plus puissant, sera quant à elle bien au-dessus: il les refroidira donc. Les atomes de grande énergie, lors de leurs oscillations dans le piège, entreront en résonance avec les deux faisceaux successivement: si les paramètres sont bien choisis, le 2^e faisceau Raman sera prédominant, et l'énergie des atomes diminuera progressivement jusqu'à ce qu'ils ne coupent plus que le premier faisceau. Alors, ils seront réchauffés, jusqu'à couper à nouveau le 2^e faisceau. A l'état stationnaire, les atomes auront donc une énergie de l'ordre de $E = \frac{1}{2}M(v_{rés}^{(2)})^2$. Les atomes auront néanmoins une chance notable d'acquérir une énergie suffisamment faible pour ne plus couper aucun des deux faisceaux: dans ce cas il resteront refroidis (tant qu'il n'y aura pas d'excitation non résonnante).

La figure 2.13 nous montre une tentative de refroidissement des atomes sous



(a) *Distribution en vitesse*

(b) *Distribution en fonction de la racine de l'énergie*

FIG. 2.13 - *Refroidissement d'atomes piégés utilisant trois systèmes de faisceaux Raman, avec respectivement, 1° :* $v_{rés} = 5 v_{rec}$, $\overline{\Omega}/2 = 0{,}05 kv_{rec}$, $\eta = 1$; *2° :* $v_{rés} = 3 v_{rec}$, $\overline{\Omega}/2 = 0{,}03 kv_{rec}$, $\eta = 1$; *3° :* $v_{rés} = v_{rec}$, $\overline{\Omega}/2 = 0{,}01 kv_{rec}$, $\eta = -1$. *Les autres paramètres (et notamment l'axe des faisceaux) sont les mêmes que sur la figure 2.11. Les distributions finales en énergie et en vitesse sont moyennées entre 1 000 et 1 200 périodes d'oscillations (*i.e. *après que l'état stationnaire a été atteint). 6 % des atomes se situent finalement dans le pic sub-recul.*

l'énergie de recul avec 3 faisceaux (le 3e faisceau à $v_{rés} = 5\, v_{rec}$ n'est pas indispensable mais accélère le processus de refroidissement). On constate que, conformément au raisonnement qualitatif ci-dessus, environ 6 % des atomes ont maintenant une énergie sous l'énergie de recul.

Remarques :

- la distribution obtenue par du refroidissement Raman à plusieurs systèmes de faisceaux n'a plus rien à voir avec une distribution thermique. En outre, l'énergie moyenne des atomes n'est pas plus basse que pour le refroidissement de la figure 2.11 (un seul système de faisceaux avec $v_{rés} = 3\, v_{rec}$) ;

- on pourrait, à partir de la distribution en énergie 2.13-*b*, éliminer les atomes de plus haute énergie, de façon à ne conserver que le pic sub-recul. Toutefois, je ne pense pas *a priori* que cette méthode soit plus efficace que de faire du refroidissement évaporatif (basé sur les collisions élastiques) à partir de la distribution à T_{rec} de la figure 2.11 ;

- on peut envisager d'augmenter le pourcentage d'atomes dans le pic sub-recul en ajoutant des systèmes de faisceaux Raman supplémentaires. Toutefois, cette piste deviendra difficile à suivre expérimentalement, puisqu'elle nécessite à chaque fois l'installation de deux nouvelles diodes laser. Un méthode équivalente consiste à passer au refroidissement par impulsions, et d'alterner des impulsions de fréquences différentes ; ceci revient à généraliser à 3 dimensions (et dans un

piège) l'expérience de refroidissement sub-recul que j'ai présentée au chapitre 1.

c) Etude particulière à 1D

A 3 dimensions, l'équation du mouvement (2.36) ne peut être résolue que numériquement. Par contre, à 1 dimension et moyennant certaines approximations, il existe un moyen de traiter le problème analytiquement. C'est ce que je vais faire dans ce paragraphe. L'étude qui va suivre repose sur deux approximations : tout d'abord, je vais utiliser le fait que le temps typique de refroidissement est très long devant la période d'oscillation[1] (ce qui me permettra de moyenner la densité sur une trajectoire dans l'espace des phases, de façon à éliminer l'évolution hamiltonienne). Ensuite, je supposerai que la densité dans l'espace des vitesses varie peu sur une échelle de l'ordre de v_{rec}, de façon à effectuer un développement de Taylor de cette densité.

Un tel traitement du problème (qui aboutit à une équation de Fokker-Planck) est tout-à-fait analogue à celui développé par Juha Javanainen et Stig Stenholm [113] à propos du refroidissement Doppler d'atomes confinés. Or, j'ai signalé au paragraphe 2.1.*c.iv* (p. 64) que cette méthode n'était pas applicable au cas du refroidissement sub-recul : on ne peut en principe pas affirmer que la densité varie peu sur une échelle de l'ordre de la vitesse de recul. En réalité, du fait de la condition de seuil (2.24) (et les simulations de Monte-Carlo du paragraphe précédent le confirment), le refroidissement Raman continu d'atomes piégés n'est pas à proprement parler du refroidissement sub-recul, mais plutôt du refroidissement à la vitesse de recul. Par conséquent, nous sommes à la limite de la zone de validité de la méthode de Fokker-Planck. Je vérifierai à la fin du calcul que les approximations faites ici étaient licites, en comparant les résultats obtenus avec ceux d'une simulation de Monte-Carlo.

i) Moyenne sur le temps d'oscillation

Le petit paramètre du problème. Soit $v = P/M$ la vitesse de l'atome (à une dimension). L'ordre de grandeur de la variation de v pendant un temps δt est

$$\delta v = \omega_x v \delta t \,,$$

où $\omega_x = \sqrt{\dfrac{K}{M}}$. Dans l'espace des vitesses, l'étendue de la zone où l'atome est excitable est

$$\delta v \sim \frac{\overline{\Gamma}}{k} \,.$$

1. Cette affirmation est tout-à fait vérifiée, par exemple, dans les simulations de Monte-Carlo des figures 2.11 à 2.13.

Le temps nécessaire pour traverser la zone résonnante est donc

$$\delta t = \frac{\delta v}{\omega_x v_{\text{rés}}} = \frac{\overline{\Gamma}}{k v_{\text{rés}} \omega_x},$$

où la vitesse résonnante est de l'ordre de quelques vitesses de recul ($v_{\text{rés}} \sim v_{\text{rec}}$). Le taux d'excitation par unité de temps, par le processus Raman, est $\overline{\Omega}^2/\overline{\Gamma}$. Donc le taux d'excitation pendant un tour est, en supposant que l'atome ne peut être excité que dans la zone résonnante (et en oubliant le facteur 2π) :

$$\boxed{\zeta = \frac{\overline{\Omega}^2}{\overline{\Gamma}} \delta t = \frac{\overline{\Omega}^2}{k v_{\text{rec}} \omega_x}.} \tag{2.39}$$

Il reste à relier le temps de refroidissement au paramètre ζ donné par (2.39). On peut pour cela utiliser la formule (2.12), issue du raisonnement de Pritchard. Elle nous montre que, pour $v_f \sim v_{\text{rec}}$ et $\overline{\Gamma} \leqslant k v_{\text{rec}}$, le temps de refroidissement $\tau_{\text{refdt}} = k v_{\text{rec}}/\overline{\Omega}^2$ est long devant la période d'oscillation lorsque

$$\zeta \ll 1. \tag{2.40}$$

En fait, la condition (2.40) est seulement une condition suffisante. Il se peut très bien (notamment si l'énergie initiale de l'atome est très supérieure à $M v_{\text{rés}}^2/2$) qu'un atome ait une grande probabilité d'être excité à chaque tour, mais qu'il lui faille un grand nombre d'excitations et donc un grand nombre de pas dans sa marche au hasard pour atteindre la zone subrecul.

Elimination des dimensions. Partant de l'équation (2.36) écrite à une dimension, on cherche à faire apparaître le paramètre ζ, afin de faire un développement perturbatif. Pour cela, il est naturel de redéfinir les variables, afin de ne plus faire intervenir que des paramètres sans dimension. Je pose donc

$$\tilde{v} = \frac{v}{\hbar k/M} = \frac{v}{v_{\text{rec}}} \tag{2.41.a}$$

$$\tilde{R} = \frac{R\omega_x}{v_{\text{rec}}} \tag{2.41.b}$$

$$\tau = \zeta \omega_x t. \tag{2.41.c}$$

On obtient

$$\zeta \frac{\partial W}{\partial \tau} + \tilde{v} \frac{\partial W}{\partial \tilde{R}} - \tilde{R} \frac{\partial W}{\partial \tilde{v}} = \zeta \left(-\tilde{\mathcal{L}}(\tilde{v}) W(\tilde{R}, \tilde{v}) + \int \mathrm{d}\tilde{w}\, p(\tilde{w}) \tilde{\mathcal{L}}(\tilde{v} + \tilde{w}) W(\tilde{R}, \tilde{v} + \tilde{w}) \right), \tag{2.42}$$

avec

$$\tilde{\mathcal{L}}(\tilde{v}) = \frac{\tilde{\Gamma}/4}{\frac{\tilde{\Gamma}^2}{4} + (\tilde{\delta} + 2\tilde{v})^2} \tag{2.43.a}$$

$$\tilde{\Gamma} = \frac{\overline{\Gamma}}{k v_{\text{rec}}} \tag{2.43.b}$$

$$\tilde{\delta} = \frac{\overline{\delta} + 2\hbar k^2/M}{k v_{\text{rec}}} \; ; \tag{2.43.c}$$

$\tilde{w}$ est la variation de vitesse induite par le processus (Raman, pompage, émission spontanée) ; $p(\tilde{w})$ est la loi de probabilité de $\tilde{w}$, tenant compte de tous les phénomènes (polarisations, photons spontanés multiples, directions d'émissions). J'ai supposé que les faisceaux Raman étaient colinéaires et de sens opposé. Enfin, j'ai posé $W(\tilde{R}, \tilde{v}) \equiv W_{1,1}(R, v)$.

Développement en puissances de ζ [120, pages 337-380 ; 122]. On écrit la fonction de Wigner sous la forme

$$W = W^{(0)} + \zeta W^{(1)} + \zeta^2 W^{(2)} + \cdots , \tag{2.44}$$

et on développe (2.42) en puissances de ζ.

A l'ordre 0, on obtient

$$\tilde{v}\frac{\partial W^{(0)}}{\partial \tilde{R}} - \tilde{R}\frac{\partial W^{(0)}}{\partial \tilde{v}} = 0 . \tag{2.45}$$

J'effectue maintenant le changement de variable

$$\begin{cases} \tilde{v} = \rho \cos\theta \\ \tilde{R} = \rho \sin\theta . \end{cases} \tag{2.46}$$

Remarquons que ρ et θ sont les variables *action* et *angle* que l'on introduit souvent dans le cas de systèmes présentant une évolution quasi-hamiltonienne [111, p. 725]. A l'ordre le plus bas en ζ, on trouve que

$$\frac{\partial}{\partial \theta} W^{(0)}(\rho) = 0 . \tag{2.47}$$

L'évolution est bien hamiltonienne à cet ordre (la variable d'action ρ est une constante du mouvement).

En écrivant le terme d'ordre 1 de (2.42), et en intégrant sur une trajectoire de l'espace des phases (ρ = Cte), ce qui élimine les termes en $W^{(1)}$, on obtient

$$2\pi \frac{\partial}{\partial \tau} W^{(0)}(\rho, \tau) = \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\theta \left[-\tilde{\mathcal{L}}(\rho\cos\theta) W^{(0)}(\rho) \right.$$
$$\left. + \int \mathrm{d}\tilde{w}\, p(\tilde{w})\, \tilde{\mathcal{L}}(\rho\cos\theta + \tilde{w}) W^{(0)}(\tilde{R} = \rho\sin\theta, \tilde{v} = \rho\cos\theta + \tilde{w}) \right] . \tag{2.48}$$

Dans la suite, je rechercherai les solutions stationnaires de (2.48), c'est-à-dire qui annulent le premier membre.

ii) Développement en puissances de $\tilde{w}$

Je vais, dans (2.48), effectuer un développement de la fonction $\tilde{\mathcal{L}}W^{(0)}$ en puissance de $\tilde{w}$. Ce développement est *a priori* valable lorsque la fonction $\tilde{\mathcal{L}}W^{(0)}$ varie peu à l'échelle de v_{rec}, c'est-à-dire

$$\overline{\Gamma} \gg k v_{\text{rec}} . \tag{2.49}$$

J'ai déjà évoqué que, si la relation (2.49) n'est pas vérifiée dans le cas du refroidissement sub-recul, on peut considérer que la méthode est valable pour le refroidissement Raman continu d'atomes piégés, qui ne peut prétendre atteindre que des températures de l'ordre du recul. Je justifierai *a posteriori* la validité du développement par une comparaison avec les résultats des simulations de Monte-Carlo.

En développant, dans (2.48) (à l'état stationnaire), le produit $\tilde{\mathcal{L}}W^{(0)}$ à l'ordre 2 en $\tilde{w}$, puis en remplaçant les dérivées en $\tilde{v}$, $\tilde{R}$ obtenues par des dérivées en ρ, θ (moyennant des intégrations par parties), on arrive à

$$0 = \langle \tilde{w} \rangle \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho} \left(\rho I_1 W^{(0)} \right) + \frac{\langle \tilde{w}^2 \rangle}{2} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\rho^2} \left(\rho I_2 W^{(0)}(\rho) \right) - \frac{\langle \tilde{w}^2 \rangle}{2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho} \left(I_3 W^{(0)}(\rho) \right) , \tag{2.50}$$

où I_1, I_2, et I_3 sont des fonctions de ρ données par :

$$I_1(\rho) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\tilde{\Gamma} \cos\theta \, \mathrm{d}\theta}{\frac{\tilde{\Gamma}^2}{4} + (\tilde{\delta} - 2\rho\cos\theta)^2} \tag{2.51.a}$$

$$I_2(\rho) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\tilde{\Gamma} \cos^2\theta \, \mathrm{d}\theta}{\frac{\tilde{\Gamma}^2}{4} + (\tilde{\delta} - 2\rho\cos\theta)^2} \tag{2.51.b}$$

$$I_3(\rho) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\tilde{\Gamma} \sin^2\theta \, \mathrm{d}\theta}{\frac{\tilde{\Gamma}^2}{4} + (\tilde{\delta} - 2\rho\cos\theta)^2} . \tag{2.51.c}$$

Les quantités $\langle \tilde{w} \rangle$ et $\langle \tilde{w}^2 \rangle$ sont des moyennes par rapport à la loi de probabilité p (en supposant l'émission spontanée isotrope, elles se calculent à partir de (2.29)).

On remarque que (2.50) est une équation de type Fokker-Planck, sur l'espace des racines carrées des énergies.

iii) Intégration de l'équation de Fokker-Planck

L'équation (2.50) s'intègre immédiatement par rapport à ρ pour donner :

$$\text{Cte} = \langle\tilde{w}\rangle \rho I_1 W^{(0)} + \frac{\langle\tilde{w}^2\rangle}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}(\rho I_2 W^{(0)}) - \frac{\langle\tilde{w}^2\rangle}{2} I_3 W^{(0)} . \tag{2.52}$$

Je poserai que la constante du premier membre de (2.52) est nulle. L'équation (2.52) peut en effet être interprétée comme une équation sur le courant de densité atomique dans l'espace des énergies. Annuler la constante revient à dire que ce courant est nul à l'infini.

On peut maintenant intégrer (2.52) pour obtenir :

$$\boxed{W^{(0)}(\rho) = \frac{A}{\rho I_2(\rho)} \exp\left\{ -\int_1^\rho \left(\frac{I_1(\rho')}{\tilde{s} I_2(\rho')} - \frac{I_3(\rho')}{\rho' I_2(\rho')} \right) \mathrm{d}\rho' \right\} ,} \tag{2.53}$$

avec

$$\tilde{s} \equiv \frac{\langle\tilde{w}^2\rangle}{2\langle\tilde{w}\rangle} = \frac{s_0}{v_{\text{rec}}} , \tag{2.54}$$

s_0 étant donné par (2.24).

La constante d'intégration A est définie par la norme de la fonction de Wigner (le nombre total d'atomes N étant fixé), c'est-à-dire par

$$2\pi \int_0^\rho \rho' W^{(0)}(\rho') \mathrm{d}\rho' = N . \tag{2.55}$$

La borne inférieure de l'intégrale présente dans (2.53) a été fixée à 1 arbitrairement. Toute autre valeur différente de 0 peut également convenir (*via* une modification de la constante A).

Il convient donc de vérifier si (2.55) converge, ce qui va nécessiter des développements de (2.53) en 0 et en $+\infty$.

iv) Etude asymptotique

Les intégrales (2.51) peuvent se calculer analytiquement, un logiciel de calcul symbolique s'avérant en pratique indispensable pour mener à bien le calcul. On développe ensuite le résultat obtenu.

Lorsque $\rho \to 0$, on trouve

$$I_1(\rho) \underset{\rho\to 0}{\sim} o(1) \tag{2.56.a}$$

$$I_2(\rho) \underset{\rho\to 0}{\sim} \frac{\pi\tilde{\Gamma}}{\frac{\tilde{\Gamma}^2}{4}+\tilde{\delta}^2} + o(1) \tag{2.56.b}$$

$$I_3(\rho) \underset{\rho\to 0}{\sim} \frac{\pi\tilde{\Gamma}}{\frac{\tilde{\Gamma}^2}{4}+\tilde{\delta}^2} + o(1)\,. \tag{2.56.c}$$

Par conséquent, l'argument de l'exponentielle de l'équation (2.53) est en $\ln(\rho) + O(1)$, et $W^{(0)}$ tend vers une limite finie lorsque $\rho \to 0$. Il n'y a donc pas de divergence en 0.

En $+\infty$, cela donne

$$I_2(\rho) \underset{\rho\to\infty}{\sim} \frac{\pi}{2\rho^2} + o\left(\frac{1}{\rho^2}\right) \tag{2.57.a}$$

$$\frac{I_1(\rho')}{\tilde{s}I_2(\rho')} - \frac{I_3(\rho')}{\rho' I_2(\rho')} \underset{\rho\to\infty}{\sim} 2\left(\frac{\tilde{\delta}}{\tilde{s}} - 2\right) + \left(4\tilde{\delta}^2 - \frac{\tilde{\delta}(4\tilde{\delta}^2-1)}{2\tilde{s}}\right)\frac{1}{\rho'} + o\left(\frac{1}{\rho'}\right). \tag{2.57.b}$$

On déduit de (2.57) que l'exponentielle de la formule (2.53) admet une limite finie lorsque $\rho \to +\infty$ (et est intégrable à l'infini) si et seulement si

$$\tilde{\delta} > 2\tilde{s}\,. \tag{2.58}$$

Le fait que $W^{(0)}$ soit normalisable équivaut à l'existence d'une solution stationnaire pour l'équation de Fokker-Planck (2.50). C'est donc un critère de faisabilité du refroidissement (dans le cas contraire, les atomes sont réchauffés en permanence, il n'y a donc pas de solution stationnaire). On constate que la condition (2.58) est identique à la condition (2.24). C'est un résultat important car il montre que la condition de seuil (2.24), calculée dans le cas de raies infiniment étroites, est généralisable aux raies de profil lorentzien.

Il eût été intéressant d'effectuer le calcul analytique que je viens de faire à 3 dimensions, pour vérifier la condition de seuil généralisée (2.35). Malheureusement, les calculs sont inextricables (notamment parce que l'équation de Fokker-Planck ne peut pas s'intégrer).

v) Comparaison avec une simulation Monte-Carlo

J'ai représenté sur la figure 2.14 le profil de la solution (2.53) de l'équation de Fokker-Planck (2.50) (densité atomique en fonction de l'énergie). En pointillés, sur cette même figure, on trouve le résultat d'une simulation Monte-Carlo réalisée à 1 dimension à partir de l'équation (2.36).

L'accord entre les deux courbes de la figure 2.14 est bon : ceci permet de justifier a posteriori le développement en puissances de $\tilde{w}$, et ce bien que la solution ne varie pas lentement à l'échelle de v_{rec}.

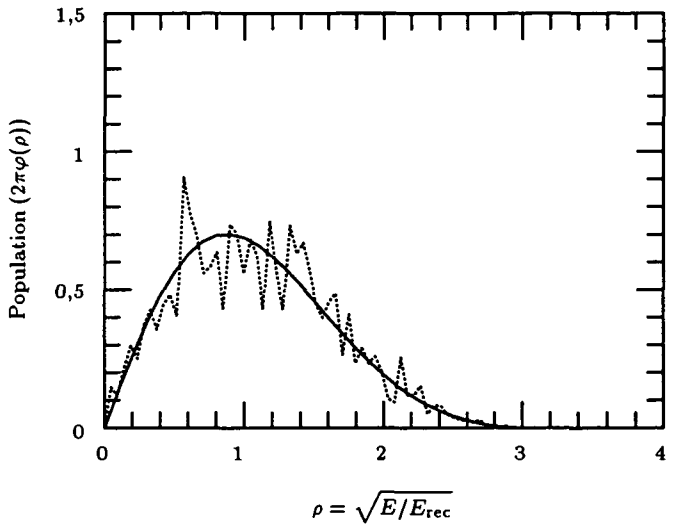


FIG. 2.14 - *Justification des hypothèses ayant conduit à l'équation de Fokker-Planck. En trait plein, le profil de la solution analytique (intégrales calculées par la méthode des trapèzes). En pointillés, simulation Monte-Carlo 1D (profil en fonction de la racine de l'énergie moyenné entre 5 000 et 6 000 périodes d'oscillation,* i.e. *à l'état stationnaire).* $\overline{\Gamma} = 0{,}1 \text{kv}_{\text{rec}}$, $\overline{\Omega}/2 = 0{,}06 \text{kv}_{\text{rec}}$, $\text{v}_{\text{rés}} = 3\text{v}_{\text{rec}}$, $\eta = -1, \xi = 0{,}75$.

vi) Rôle des paramètres du problème

Je rappelle qu'il y a 4 paramètres dans le problème : le désaccord effectif $\overline{\delta}$ (ou encore la vitesse résonnante), la largeur effective $\overline{\Gamma}$, la fréquence de Rabi effective $\overline{\Omega}$, et la pulsation du piège ω_x.

La solution de l'équation de Fokker-Planck (2.53) ne dépend ni de $\overline{\Omega}$, ni de ω_x. Si l'on rétablit les variables dimensionnées, la solution dépend à nouveau de la fréquence d'oscillation du piège en ce qui concerne sa partie spatiale. Par contre, la distribution finale en vitesse n'en dépend pas (elle ne dépend pas non plus de la puissance des faisceaux Raman). L'indépendance vis-à-vis de la puissance des faisceaux Raman avait déjà été prévue par le raisonnement de Pritchard, p. 61 (ce raisonnement ne tenait par ailleurs pas compte des oscillations dans le piège, donc n'aurait pas pu prévoir une quelconque dépendance en ω_x). On peut en outre montrer, grâce à des simulations de Monte-Carlo à 3 dimensions, que l'indépendance en $\overline{\Omega}$ et en $\omega_{x,y,z}$ ne provient pas de la limitation au premier ordre dans le développement en ζ (§ 2.3.*c.i*), ni non plus de la restriction à 1D : elle est générale.

4. Etude du temps de refroidissement

L'étude quantitative du paragraphe 2.3 traitait presque uniquement de l'état d'équilibre. Nous allons nous intéresser maintenant à la dynamique, c'est-à-dire au temps que mettent les atomes à se refroidir.

La courbe de la figure 2.11-*b* donne une idée de ce temps de refroidissement : si on l'ajuste avec une exponentielle, on trouve que le temps de refroidissement $1/e$ est de 1 100 périodes d'oscillation selon x, soit 50 secondes.

Si l'on veut réaliser une expérience de refroidissement sub-recul d'atomes piégés, il faut prendre garde à ce qu'aucun processus parasite n'ait lieu pendant le temps de refroidissement. En particulier, une collision avec un atome du gaz résiduel est extrêmement nocive : l'atome froid sera chassé du piège. Or, avec des paramètres expérimentaux typiques (piège chargé à l'aide d'un PMO, lui-même réalisé en cellule à partir d'une vapeur de césium à 1 μPa ($\simeq 10^{-8}$ Torr)), le temps de collision est inférieur à la seconde. Il est certes possible de réaliser un vide tel que la durée moyenne entre collisions soit supérieure à une minute ; toutefois, si l'on veut disposer d'un nombre d'atomes suffisant, ceci nécessite de mettre en œuvre un double PMO [48], ce qui n'est pas encore tout-à-fait une technique standard.

Aussi allons-nous, avant de nous lancer dans les expériences, regarder s'il est possible, tout en conservant le mécanisme de refroidissement, d'en diminuer la durée.

a) Deux modèles à 1 dimension

Premier modèle. Le temps de refroidissement a déjà été abordé au paragraphe 2.3.*c.i.* Nous avons vu que ce dernier est très long devant la période d'oscillation si le paramètre $\zeta = \overline{\Omega}^2 / (k v_{\mathrm{rec}} \omega_x)$ est très petit devant 1. De l'équation (2.42), on peut par ailleurs déduire que le temps typique de refroidissement est de l'ordre de

$$(\zeta \omega_x)^{-1} = \frac{k v_{\mathrm{rec}}}{\overline{\Omega}^2} .$$

On peut donc modifier la durée du refroidissement (*i.e.*, par exemple, le temps d'atteinte de l'état d'équilibre) en modifiant $\overline{\Omega}$ (ce qui, comme je l'ai signalé, ne modifie pas la distribution stationnaire). En fait, cette durée dépend également de l'énergie initiale, l'évolution n'étant pas exponentielle.

Je vais maintenant préciser tout cela en décrivant, à une dimension, l'évolution de l'énergie moyenne des atomes en fonction du temps.

La vitesse de l'atome obéit à

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \omega_x^2 x_0 \cos(\omega_x t) , \tag{2.59}$$

où x_0 est l'amplitude du mouvement, reliée à l'énergie mécanique par

$$E = \frac{1}{2} M \omega_x^2 x_0^2 , \tag{2.60}$$

soit

$$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}v}{\omega_x^2 x_0 \cos(\omega_x t)}, \tag{2.61}$$

Le nombre de photons absorbés pendant un tour (*i.e.* pendant le temps $2\pi/\omega_x$), lors des deux passages à résonance, est (pour un rapport de branchement de 1)

$$\begin{aligned} n &= \int \frac{2\overline{\Gamma}|\overline{\Omega}|^2/4}{\frac{\overline{\Gamma}^2}{4} + (\overline{\delta} - 2kv)^2} \mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\overline{\Gamma}|\overline{\Omega}|^2/2}{\frac{\overline{\Gamma}^2}{4} + (\overline{\delta} - 2kv)^2} \frac{\mathrm{d}v}{\omega_x^2 x_0 \cos(\omega_x t_0)} \\ &= \frac{\pi|\overline{\Omega}|^2}{2k\omega_x^2 x_0 \cos(\omega_x t_0)}, \end{aligned} \tag{2.62}$$

où t_0 est l'instant où a lieu la résonance. Pour le calcul de (2.62), on a remplacé l'ellipse parcourue par l'atome dans l'espace des phases par sa tangente au point de résonance, ce qui permet d'intégrer entre $-\infty$ et $+\infty$. La variation d'énergie moyenne pendant un tour est donc $n\langle\Delta E\rangle$, où $\langle\Delta E\rangle$ est la variation moyenne d'énergie due au processus d'interaction atome/lumière, définie en moyennant l'équation (2.23) sur le nombre et la direction des photons spontanés. On fait la transformation

$$\cos(\omega_x t_0) = \sqrt{1 - \sin^2(\omega_x t_0)} = \frac{1}{\omega_x x_0}\sqrt{\frac{2}{M}}\sqrt{E - \frac{1}{2}Mv_{\text{rés}}^2}, \tag{2.63}$$

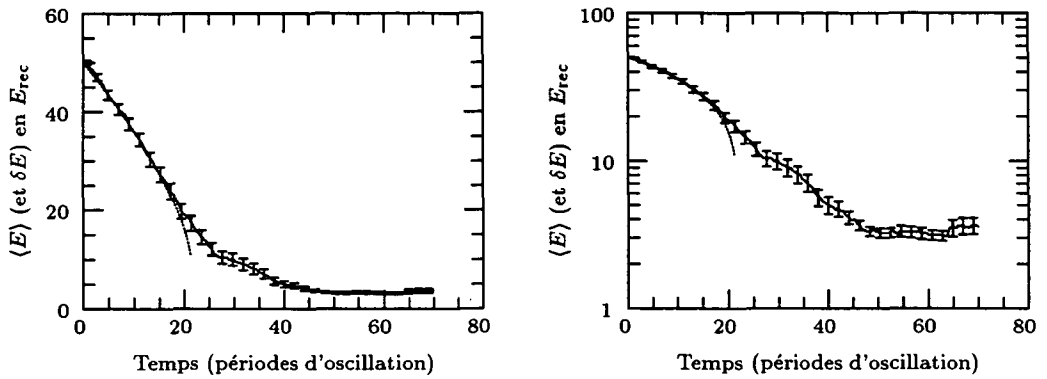
et on obtient

$$\boxed{\left\langle \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{E - \frac{1}{2}Mv_{\text{rés}}^2}\, 4k\sqrt{\frac{2}{M}}} \frac{|\overline{\Omega}|^2}{4}\langle\Delta E\rangle .} \tag{2.64}$$

La formule (2.64) n'est valable qu'au début de l'évolution : en effet, lorsqu'un atome est presque refroidi, sa trajectoire devient tangente à la droite résonnante. Remplacer, comme je l'ai fait, la trajectoire proche de la résonance par sa tangente, revient à supposer que l'atome est toujours résonnant, ce qui naturellement est illicite.

L'équation (2.64) peut être résolue. On obtient :

$$E - \frac{1}{2}Mv_{\text{rés}}^2 = \left(\left[E(t=0) - \frac{1}{2}Mv_{\text{rés}}^2 \right]^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}t \frac{\langle\Delta E\rangle|\overline{\Omega}|^2}{4k\sqrt{\frac{2}{M}}} \right)^{\frac{2}{3}} . \tag{2.65}$$



(a) *Echelle linéaire* (b) *Echelle logarithmique*

FIG. 2.15 - *Evolution de l'énergie moyenne des atomes en fonction du temps. En pointillés, le premier modèle présenté au paragraphe 2.4.a (éq. (2.65)). En trait plein, simulation de Monte-Carlo 1D, avec 100 atomes (les barres verticales matérialisent 2*δE*, où* δE *est l'écart-type). Les paramètres sont* $\overline{\Omega}/2 = 0{,}03\mathrm{kv}_{rec}$, $\overline{\Gamma}/2 = 0{,}1\mathrm{kv}_{rec}$, $\mathrm{v}_{rés} = 3\mathrm{v}_{rec}$, $\eta = 1$, $\xi = 0{,}75$, $\omega_x = 133$ *rad/s.*

(Cette expression n'est plus définie quand t est trop grand, ce qui confirme bien que le modèle n'est plus valable (je rappelle que $\langle \Delta E \rangle < 0$)). La constante de temps typique de la formule (2.65), *i.e.*

$$\tau_{\mathrm{ref}} \sim \frac{16 E^{\frac{3}{2}} \sqrt{E_{\mathrm{rec}}}}{3\langle \Delta E \rangle |\hbar\overline{\Omega}|^2}, \tag{2.66}$$

vaut environ 2 s, pour du césium et en choisissant les paramètres de la figure 2.15.

Remarque: dans le cas du refroidissement Doppler pour des atomes libres dont la raie est étroite ($\Gamma \ll E_{\mathrm{rec}}$), on montre [112, éq. (3.8)] que le temps de refroidissement est donné par

$$\tau_{\mathrm{ref}} \sim \frac{E^2}{2\Gamma |\hbar\Omega|^2}. \tag{2.67}$$

Ce résultat n'est pas le même que celui de l'équation (2.66), mais on y retrouve le fait que le temps de refroidissement est inversement proportionnel à $|\overline{\Omega}|^2$.

Sur la figure 2.15, j'ai représenté l'évolution de $\langle E \rangle$, et de $(\langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2)^{1/2}$ (représentée par les barres d'erreur), en fonction du temps, obtenues par une simulation Monte-Carlo. En pointillés, le modèle exposé ci-dessus. L'accord est excellent au début du refroidissement, et se dégrade ensuite comme attendu.

Modèle de Pritchard. Ce modèle (qui est présenté au paragraphe 2.1.*b*, p. 59) permet également d'estimer le temps de refroidissement. Il est valable

lorsque la vitesse initiale est de l'ordre de v_{rec} (alors que le modèle précédent supposait $v_{\text{initiale}} \gg v_{\text{rec}}$). La solution de l'équation différentielle (2.10) est exponentielle, et la constante d'évolution temporelle est

$$\frac{1}{\tau_{\text{ref}}} = |\overline{\Omega}|^2 \left[\frac{\overline{\Gamma}}{(kv_f)^2} + \frac{1}{kv_{\text{rec}}} \left(\frac{v_f}{v_{\text{rec}}} \right)^n \right] . \tag{2.68}$$

On remarque que là aussi le temps de refroidissement est inversement proportionnel à $|\overline{\Omega}|^2$.

b) Rôle des paramètres du problème

Les modèles précédents présentent tous deux un temps de refroidissement inversement proportionnel à $|\overline{\Omega}|^2$: j'ai vérifié et généralisé à 3D cette propriété grâce à une série de simulations de Monte-Carlo (fig. 2.16).

Le rôle de fréquences du piège est aussi une question intéressante : aucun des trois modèles précédents ne prédit de dépendance de la durée du refroidissement en $\omega_{x,y,z}$ [1]. Ceci est vérifié à 3D, sur la figure 2.17.

Enfin, on remarquera en comparant les figures 2.15 et 2.16 que les temps typiques de refroidissement ne sont pas du tout les mêmes à 1D et à 3D : pour des fréquences de Rabi effectives comparables ($\overline{\Omega}/2 \sim 0{,}03\, kv_{\text{rec}}$), le refroidissement dure quelques dizaines de périodes d'oscillation à 1D, contre quelques milliers à 3D (soit plusieurs dizaines de secondes). Les temps de refroidissement à 3D sont donc extrêmement longs.

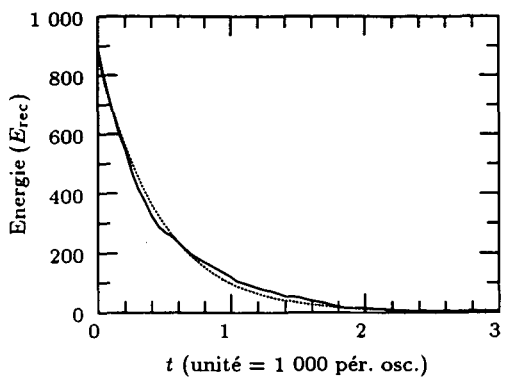
c) Les causes du long temps de refroidissement

Qualitativement, on peut déceler trois causes pour le long temps de refroidissement que l'on observe à 3D (je rappelle que nous sommes toujours dans le cas du refroidissement continu) :

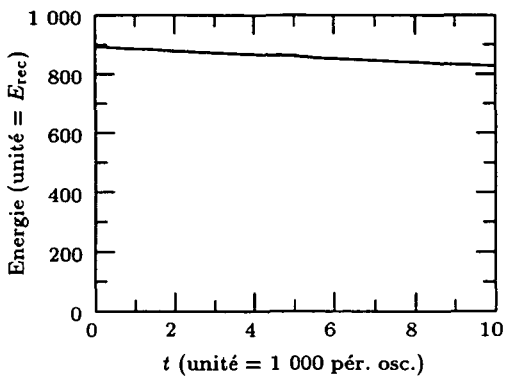
- du fait que $\overline{\Gamma} \ll kv_{\text{rec}}$, les atomes sont, lors de leurs oscillations, la plupart du temps hors résonance ; ceci est encore plus vrai à 3D qu'à 1D ;
- les atomes ont besoin d'être excités plusieurs dizaines de fois avant d'être refroidis : d'une part parce que $E_{\text{départ}} \gg E_{\text{rec}}$ (l'énergie des atomes doit baisser, ce qui prend du temps), et d'autre part parce que les atomes doivent effectuer une marche au hasard pour atteindre une distribution sub-recul (ou de l'ordre du recul), un argument qui lui aussi prend plus de poids à 3D ;
- lorsque les atomes sont résonnants, leur taux d'excitation est petit (car $\overline{\Omega}$ est petit, pour ne pas saturer (et donc élargir) la transition Raman).

Tous ces points sont incontournables en refroidissement continu. Par contre, ce n'est pas le cas si l'on utilise des impulsions lumineuses. En effet, si on s'arrange

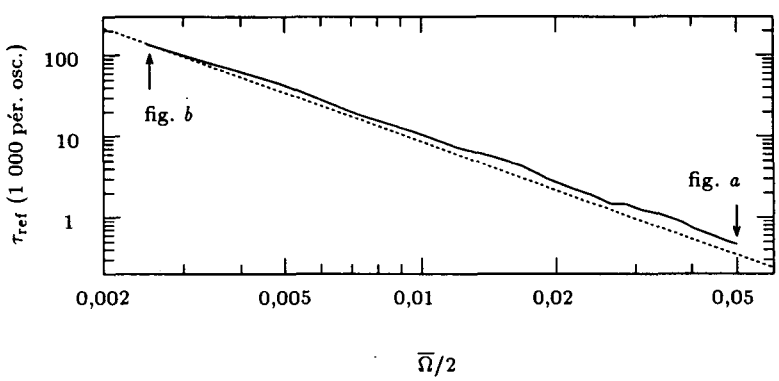
1. Attention : cette propriété n'est vraie que dans le cas de figure $\omega_{x,y,z} \ll \overline{\Gamma}$ où je me suis placé.



(a) *Simulation avec* $\overline{\Omega}/2 = 0{,}05$.



(b) *Simulation avec* $\overline{\Omega}/2 = 2{,}5.10^{-3}$.



(c) *Temps de refroidissement en fonction de la fréquence de Rabi effective.*

FIG. 2.16 - *Evaluation du temps de refroidissement 1/e en fonction de la fréquence de Rabi effective. Pour chaque valeur de* $\overline{\Omega}$, *j'effectue une simulation de Monte-Carlo à 3D pendant 10 000 périodes d'oscillation, et je trace l'évolution de l'énergie moyenne des atomes en fonction du temps (sous-figures* a *et* b*). Pour toutes les simulations, les paramètres autres que* $\overline{\Omega}$ *sont les mêmes que sur la figure 2.11. J'en déduis le temps de refroidissement* τ_{ref} *en ajustant la courbe par une exponentielle (si* $\overline{\Omega}/2 \geqslant 1{,}67.10^{-2}$, *comme sur la sous-figure* a*) ou par une droite, si l'état stationnaire n'est pas atteint (sous-figure* b*). Le temps* τ_{ref} *est tracé en fonction de* $\overline{\Omega}$ *sur la sous-figure* c. *La courbe en pointillés représente l'ajustement par l'équation* $\tau_{ref} = a/(\overline{\Omega}/2)^2$. *On trouve* $a = 2{,}34.10^7\ s^3$.

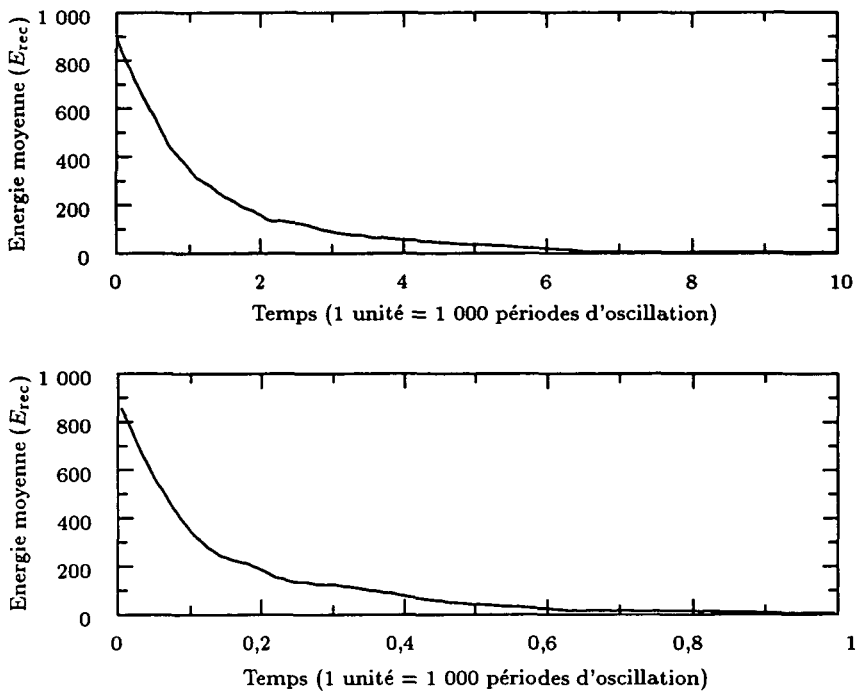


FIG. 2.17 - *Deux simulations de Monte-Carlo à 3 dimensions, avec les mêmes paramètres que sur la figure 2.11, les fréquences d'oscillation mises à part. Sur la figure du haut, les pulsations du piège sont respectivement 133, 125 et 231 rad/s. Sur la figure du bas, elles sont respectivement dix fois plus petites. Le temps de refroidissement, en périodes d'oscillation, est pratiquement divisé par 10 : c'est donc le même en secondes.*

pour que les faisceaux Raman et le repompeur ne soient jamais présents en même temps, le spectre d'excitation n'est plus lorentzien, mais dépend du profil temporel de l'impulsion Raman, ainsi que de sa puissance. En particulier, si l'on choisit bien ce profil temporel et cette puissance, il est possible qu'un atome résonnant avec la lumière soit excité avec une probabilité voisine de 1, tout en garantissant un faible niveau d'excitation résiduelle pour les atomes non résonnants. En réalisant une succession d'impulsions de désaccords différents, on peut également s'arranger pour qu'un atome puisse être excité en de nombreux points de sa trajectoire. Le refroidissement par impulsions devrait donc nous permettre de contourner le 1er et le 3^{e} point évoqués ci-dessus.

5. Le refroidissement par impulsions

Cette section sera consacrée au refroidissement par impulsions, et à la façon dont il peut permettre d'accélérer le processus de refroidissement. Cette accélé-

ration est basée sur la possibilité d'exciter les atomes par *passage adiabatique*: on utilise une impulsion Raman de longue durée, sans repompeur Raman. Les atomes qui coupent le plan résonnant (dans l'espace des vitesses) passent de l'état $|1\rangle$ vers l'état $|2\rangle$ avec une probabilité voisine de 1, tandis que ceux qui ne la coupent pas restent dans l'état $|1\rangle$. Au bout d'un certain temps (et en tout cas avant que les atomes puissent couper une deuxième fois le plan résonnant), on éteint les faisceaux Raman et on repompe les atomes qui sont passés dans l'état $|2\rangle$.

Outre quelques considérations théoriques sur le principe du passage adiabatique et sur les conditions de validité de celui-ci, je présenterai dans cette section des simulations de Monte-Carlo décrivant le refroidissement par passage adiabatique. Ces simulations sont beaucoup plus complexes à réaliser que dans le cas continu, car il est difficile d'évaluer le taux d'excitation d'un atome. Le programme que j'ai réalisé utilise une résolution numérique de l'équation de Schrödinger.

a) La condition de passage adiabatique

On considère un hamiltonien variant lentement dans le temps, de spectre discret, dont les valeurs propres sont toujours, au cours de l'évolution, deux à deux distinctes, et dont les vecteurs et valeurs propres sont des fonctions C^2. On peut alors montrer [123, vol. 2 p. 645] qu'un système initialement dans un état propre $|i(-\infty)\rangle$ de l'hamiltonien, reste dans l'état propre $|i(t)\rangle$ au cours de l'évolution, si l'on satisfait la condition

$$\left|\frac{\alpha_i^{\max}}{\omega_i^{\min}}\right|^2 \ll 1\,, \tag{2.69}$$

où ω_i est la fréquence de transition de $|i\rangle$ vers son plus proche voisin, $\omega_i^{\min}$ le minimum de ω_i lors de l'évolution, $\alpha_{i,j} = \langle j|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|i(t)\rangle$, et $\alpha_i^{\max}$ est le maximum sur j et sur t de $\alpha_{i,j}(t)$.

Je vais maintenant appliquer cette condition au cas d'un atome interagissant avec les faisceaux Raman, en l'absence de repompeur. Pour cela, j'assimilerai la transition Raman à une micro-onde, quasi-résonnante, et j'emploierai le formalisme de l'atome habillé [119, p. 389].

Les états propres de l'hamiltonien atomes + champ sont

$$\begin{cases} |a(N)\rangle = \sin\theta\,|1, N+1\rangle + \cos\theta\,|2, N\rangle \\ |b(N)\rangle = \cos\theta\,|1, N+1\rangle - \sin\theta\,|2, N\rangle\,, \end{cases} \tag{2.70}$$

où N est le nombre de photons micro-onde, et $\theta \in]0, \pi/2[$ est défini par

$$2\theta = -\arctan\frac{\overline{\Omega}}{\delta_{\text{eff}}}\,, \tag{2.71}$$

$\overline{\Omega}$ étant la fréquence de Rabi et δ_{eff} le désaccord.

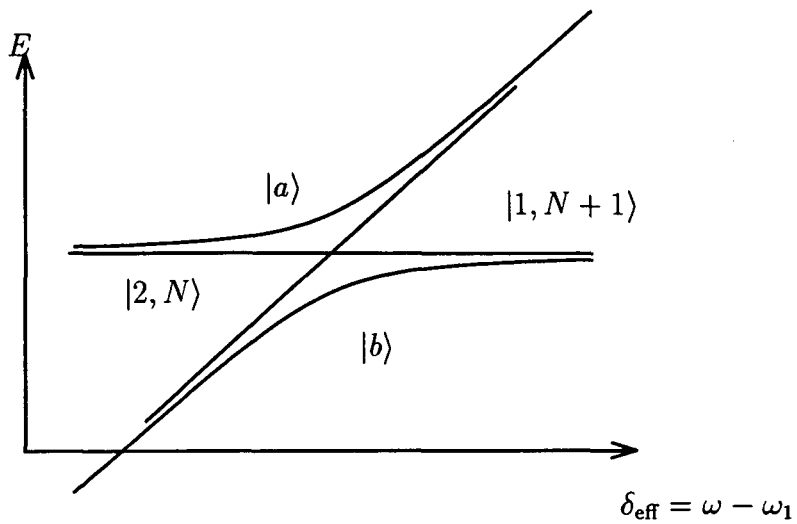


FIG. 2.18 - *Formalisme de l'atome habillé.*

Pour notre problème, le désaccord et donc θ varient lentement, du fait du mouvement de l'atome dans le piège. A $t = -\infty$, l'atome est dans l'état $|1, N+1\rangle$, et $\overline{\delta} = -\infty$. On suppose qu'à $t = +\infty$, le désaccord vaut $+\infty$. La fréquence de Bohr vaut ici $\sqrt{|\overline{\Omega}|^2 + \delta_{\text{eff}}^2}$, donc $\omega_i^{\min} = \overline{\Omega}$. En outre,

$$\begin{aligned} \alpha_{a,b}(t) &= \langle 1, N+1 | \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} | a, N \rangle \\ &= \cos\theta \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \\ &= \cos\theta \frac{\overline{\Omega}}{2\left(\overline{\Omega}^2 + \delta_{\text{eff}}^2\right)} \frac{\mathrm{d}\delta_{\text{eff}}}{\mathrm{d}t} . \end{aligned} \tag{2.72}$$

On évalue $\mathrm{d}\delta_{\text{eff}}/\mathrm{d}t$ grâce aux équations du mouvement de l'atome dans le piège (en se plaçant à une dimension), soit

$$\delta_{\text{eff}}(t) = 2k \left(v_0 \sin(\omega_x t) - v_{\text{rés}}\right) . \tag{2.73}$$

Je suppose que l'amplitude du mouvement v_0 vérifie $v_0 \sim |v_{\text{rés}}|$. J'en déduis l'inégalité

$$|\alpha_{a,b}(t)| \leqslant \frac{k|v_{\text{rés}}|\omega_x}{\overline{\Omega}} . \tag{2.74}$$

On tire finalement de (2.69) la condition de passage adiabatique:

$$\boxed{\left|\frac{k v_{\text{rés}} \omega_x}{\overline{\Omega}^2}\right|^2 \ll 1 .} \tag{2.75}$$

Remarque : en pratique, j'imposerai la condition[1]

$$\overline{\Omega} \geqslant 2\sqrt{k v_{\text{rés}} \omega_x} \tag{2.76}$$

(marge de sécurité).

b) Diagramme durée-fréquence de Rabi

Dans ce paragraphe, je vais énumérer les conditions faisant intervenir la fréquence de Rabi effective $\overline{\Omega}$ et la durée des impulsions Raman.

Impulsions laissant aux atomes le temps de traverser la raie (dans l'espace des vitesses). On écrit à 1D l'équation sur la vitesse des atomes :

$$\begin{cases} v = v_0 \sin(\omega_x t) = v_{\text{rés}} \\ \mathrm{d}v = v_0 \omega_x \cos(\omega_x t) \mathrm{d}t \,. \end{cases} \tag{2.77}$$

La largeur en vitesse de la raie est

$$k\,\delta v \sim \overline{\Omega} \,; \tag{2.78}$$

on en déduit le temps nécessaire aux atomes pour traverser la raie :

$$\delta t \sim \frac{\overline{\Omega}}{k v_{\text{rés}} \omega_x} \tan(\omega_x t) \,. \tag{2.79}$$

Pour $\tan(\omega_x t) \sim 1$, on tire la condition :

$$\boxed{\tau_{\text{impul}} \geqslant \frac{\overline{\Omega}}{k v_{\text{rés}} \omega_x} \,.} \tag{2.80}$$

Faible déplacement dans l'espace des phases, pendant une impulsion. J'imposerai la condition :

$$\boxed{\tau_{\text{impul}} \ll \frac{2\pi}{\omega_x}} \tag{2.81}$$

(marge de sécurité imposée en pratique : $\tau_{\text{impul}} \leqslant 0{,}3 \times 2\pi/\omega_x$).

1. Pour écrire la condition (2.74), j'avais implicitement supposé que $\cos\theta = 1$, ce qui est excessif. En effet, la résonance se produit pour $\theta = \pi/4$, soit $\cos\theta = 1/\sqrt{2}$. Pour écrire l'inégalité (2.76), j'ai en outre supposé que $v_0 = 2\, v_{\text{rés}}$. Enfin, j'ai imposé un facteur 10 de marge sur la condition (2.69) (en tenant compte du carré naturellement).

Etroitesse de la raie. Dans le cas du refroidissement par impulsions (pas de durée de vie du niveau excité), la largeur effective de la raie est la fréquence de Rabi $\overline{\Omega}$. Il est donc *a priori* nécessaire d'avoir $\overline{\Omega} \ll kv_{\text{rec}}$. Je me contenterai en fait de la condition moins restrictive suivante (la sélection n'a pas besoin d'être précise si la vitesse résonnante est élevée) :

$$\boxed{\overline{\Omega} \ll kv_{\text{rés}}} \tag{2.82}$$

(marge de sécurité $\overline{\Omega} \leqslant 0{,}2\, kv_{\text{rés}}$).

Diagramme de fonctionnement. Les conditions (2.75),(2.80),(2.81) et (2.82) sont rassemblées sur la figure 2.19. J'ai choisi $v_{\text{rés}} = v_{\text{rec}}$ (avec $kv_{\text{rec}} = 2{,}4.10^4$ rad/s, valeur qui correspond au césium), et j'ai tracé les 4 conditions en tenant compte des « marges de sécurité » énoncées dans le texte. On constate que le refroidissement par impulsions d'atomes piégés est compatible avec le passage adiabatique. Cette propriété reste vraie si on augmente $v_{\text{rés}}$ (car la condition (2.82) croît plus vite que la condition (2.75)).

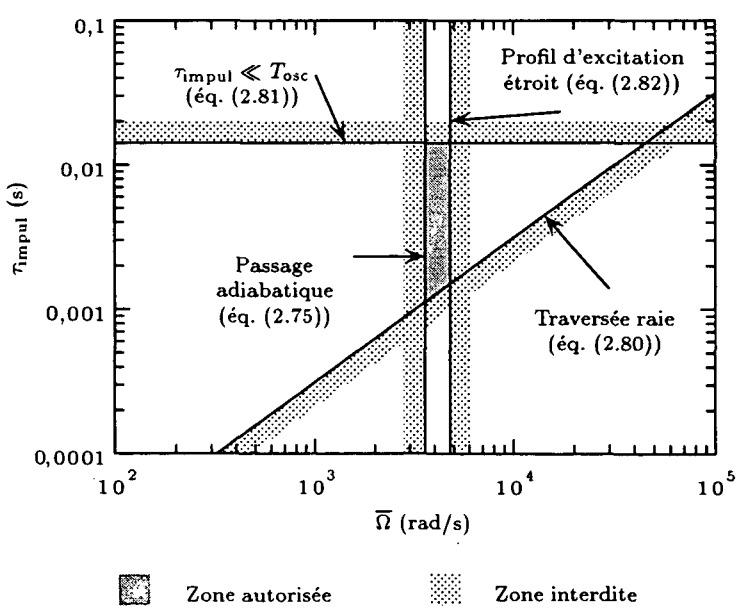


FIG. 2.19 - *Faisabilité du refroidissement par impulsions par passage adiabatique. La vitesse résonnante vaut* $v_{rés} = v_{rec}$ *et la pulsation du piège* $\omega_x = 133$ *rad/s.*

Remarque : La figure 2.19 a été réalisée en prenant une valeur de pulsation de l'ordre de la pulsation longitudinale du piège opto-électrique. Avec des pulsations

de l'ordre de 10^3 rad/s, telles les pulsations transverses du POE (voir § 3.3.*b*, p. 171), le diagramme se resserre et le refroidissement par passage adiabatique devient impossible.

c) Résolution numérique de l'équation de Schrödinger

Je vais maintenant effectuer une étude plus précise du refroidissement en impulsions par passage adiabatique. Cette étude est basée sur une résolution numérique de l'équation de Schrödinger, selon la méthode décrite au chapitre 1 (§ 1.1.*d*, p. 24). Dans le cas du passage adiabatique, une part importante des atomes est située dans l'état $|2\rangle$. Il n'est donc pas possible de calculer le spectre d'excitation par une simple transformée de Fourier[1].

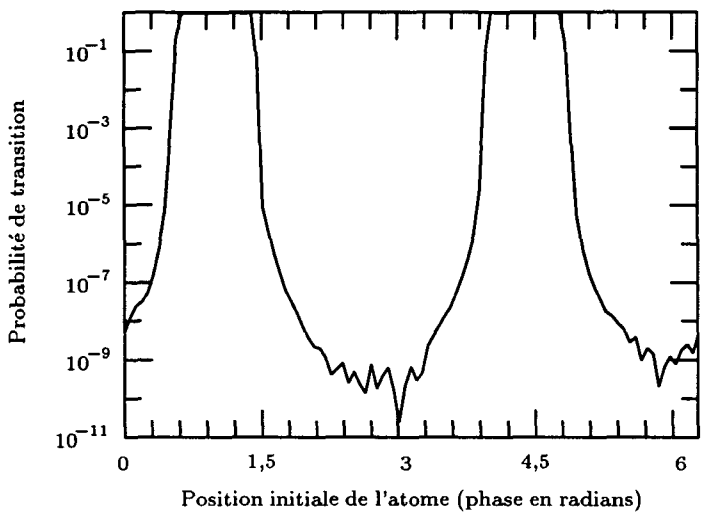


FIG. 2.20 - *Probabilité de transition, en fonction la position initiale de l'atome sur sa trajectoire dans l'espace des phases (à 1D cette dernière est elliptique, et la position se repère par un angle). La pulsation d'oscillation est* $\omega_x = 133$ *rad/s, la durée du créneau* $\tau_{impul} = 6$ *ms, celle de la rampe* $\tau_{rampe} = 0{,}6$ *ms. La vitesse résonnante est* $v_{rés} = 2\,v_{rec}$*, l'amplitude de la trajectoire* $v_0 = 15\,v_{rec}$*, et la fréquence de Rabi effective* $\overline{\Omega}/2 = 0{,}2 k v_{rec}$*. On constate que l'atome est excité avec une probabilité voisine de 1 s'il a coupé la droite résonnante (passage adiabatique).*

Le résultat d'une résolution numérique de l'équation de Schrödinger est présenté sur la figure 2.20. J'ai utilisé la méthode de Runge-kutta à l'ordre 4, et fait évoluer les parties réelles et imaginaires des coefficients de la fonction d'onde.

1. Le fait que beaucoup d'atomes soient dans $|2\rangle$ peut s'avérer très gênant, à cause des collisions inélastiques entre atomes froids accompagnées d'un changement de structure hyperfine, qui sont susceptibles de chasser les atomes du piège. Des précisions à ce sujet seront apportées au paragraphe 3.3.*c.ii* (p. 174).

L'atome est confiné dans un piège harmonique à une dimension, et donc le désaccord δ_{eff} qu'il « voit » évolue en conséquence. Le profil temporel de l'impulsion est le suivant (avec $\tau_{\text{impul}} \gg \tau_{\text{rampe}}$) :

$$\begin{cases} \overline{\Omega}(t) = \overline{\Omega}_0 \left[0{,}5 \cos\left(2\pi \dfrac{t}{\tau_{\text{rampe}}}\right) + 0{,}08 \cos\left(4\pi \dfrac{t}{\tau_{\text{rampe}}}\right) + 0{,}42\right] & \text{pour } -\tau_{\text{rampe}}/2 \leqslant t \leqslant 0\,; \\ \overline{\Omega}(t) = \overline{\Omega}_0 & \text{pour } 0 \leqslant t \leqslant \tau_{\text{impul}}\,; \\ \overline{\Omega}(t) = \overline{\Omega}_0 \left[0{,}5 \cos\left(2\pi \dfrac{t-\tau_{\text{impul}}}{\tau_{\text{rampe}}}\right) + 0{,}08 \cos\left(4\pi \dfrac{t-\tau_{\text{impul}}}{\tau_{\text{rampe}}}\right) + 0{,}42\right] & \text{pour } \tau_{\text{impul}} \leqslant t \leqslant \tau_{\text{impul}} + \tau_{\text{rampe}}/2\,; \\ \overline{\Omega}(t) = 0 & \text{pour } t \leqslant -\tau_{\text{rampe}}/2 \text{ ou } t \geqslant \tau_{\text{impul}} + \tau_{\text{rampe}}/2. \end{cases} \tag{2.83}$$

Il s'agit donc d'un créneau, régularisé à la montée et à la descente par des morceaux d'impulsion de Blackman. Ce choix donne un profil spectral convenable, mais n'est pas le résultat d'une quelconque optimisation. Au début, l'atome est dans l'état $|1\rangle$. Je calcule la quantité $|\langle 2|\psi(+\infty)\rangle|^2$ (où $|\psi(+\infty)\rangle$ est l'état de l'atome à la fin de l'impulsion), que je trace en fonction de la position initiale de l'atome sur sa trajectoire (phase).

On constate que la probabilité de transition est pratiquement égale à 1 si l'atome a pu franchir la zone résonnante pendant la durée de l'impulsion. Elle est presque nulle dans le cas contraire. La propriété de passage adiabatique est donc bien vérifiée.

d) Simulation de Monte-Carlo à 1D

La réalisation d'une simulation de Monte-Carlo décrivant le refroidissement par impulsion est beaucoup plus compliquée que dans le cas continu, car la probabilité d'excitation d'un atome n'est pas donnée par une formule analytique et doit être évaluée en résolvant l'équation de Schrödinger.

Certes, il est en théorie possible de réaliser une simulation en faisant évoluer 6 paramètres (à 1D) par atome (un pour sa position, un pour son impulsion et 4 pour son état interne). Ces 6 paramètres sont solution d'une équation différentielle à coefficients dépendant du temps, qu'il est possible de résoudre numériquement par la méthode de Runge-Kutta. En fait, nous sommes gênés par l'existence de deux constantes de temps différentes dans le problème : d'une part la période d'oscillation, et d'autre part la durée des impulsions, qui est beaucoup plus courte. Dans le cas continu, il suffit de prendre un pas d'intégration petit devant la période d'oscillation[1]. Dans le cas des impulsions, il faudrait prendre un pas court devant la durée des impulsions. Ceci implique donc des temps de calculs beaucoup trop longs[2].

1. en le raccourcissant au voisinage de la résonance.

2. La présente étude à été réalisée au début de l'année 1993. Depuis cette époque, le matériel informatique de notre équipe s'est amélioré, de telle sorte qu'une telle simulation prenant en

En fait, une telle simulation reviendrait à faire un grand nombre de fois le même calcul. En effet, la probabilité d'excitation ne dépend que de l'amplitude de la trajectoire de l'atome, et de la « phase » (*i.e.* l'emplacement) qu'il occupe sur cette trajectoire au début de l'impulsion. Au cours de l'évolution (mais pas forcément au même moment), il est très probable que deux atomes abordent une impulsion avec des amplitudes de trajectoire et des « phases » voisines. Dans ce cas il est inutile de calculer deux fois la probabilité d'excitation.

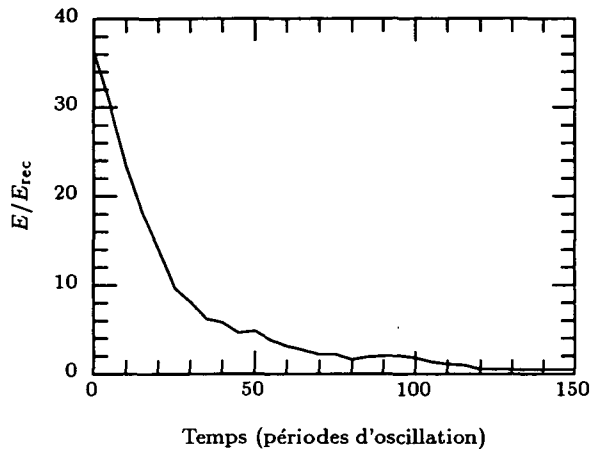
La méthode que j'ai employée est donc la suivante : je commence par réaliser une série de courbes analogues à la figure 2.20, mais pour différentes valeurs de l'amplitude v_0 de la trajectoire. Ceci permet de créer une « banque de données », et donc de connaître, en fonction de sa position dans l'espace des phases au début de l'impulsion, et au moyen d'une éventuelle extrapolation, la probabilité pour un atome d'être excité à la fin de l'impulsion. Je fait dans un deuxième temps tourner la simulation de Monte-Carlo proprement dite, en calculant (par Runge-Kutta) le mouvement des atomes à 1D dans le piège. Périodiquement commence une impulsion : en fonction de sa position et de sa vitesse, en utilisant les données enregistrées et en tirant un nombre aléatoire, je détermine si un atome est ou non excité. Je continue ensuite l'évolution, et je fais encaisser aux atomes excités les impulsions Raman et de pompage à un moment choisi : au passage à résonance pour le Raman, et après l'impulsion Raman pour le repompeur. Cette méthode permet de tenir compte du mouvement des atomes dans le piège pendant le temps passé dans le niveau $|2\rangle$.

Le résultat est présenté sur la figure 2.21. En ajustant par une exponentielle la courbe d'évolution de l'énergie (figure 2.21-*a*), on trouve une temps de refroidissement $1/e$ de 22 périodes d'oscillation, soit 1 s. On constate que ce temps de refroidissement est du même ordre de grandeur que celui que l'on l'observe dans le cas du refroidissement continu (voir la figure 2.15, p. 91). *A priori* donc, nous n'avons rien gagné (mais il n'en sera pas de même à 3D). La vitesse quadratique moyenne finale est $0{,}4\, v_{\mathrm{rec}}$ (résultat obtenu en ajustant la distribution en vitesse par une gaussienne).

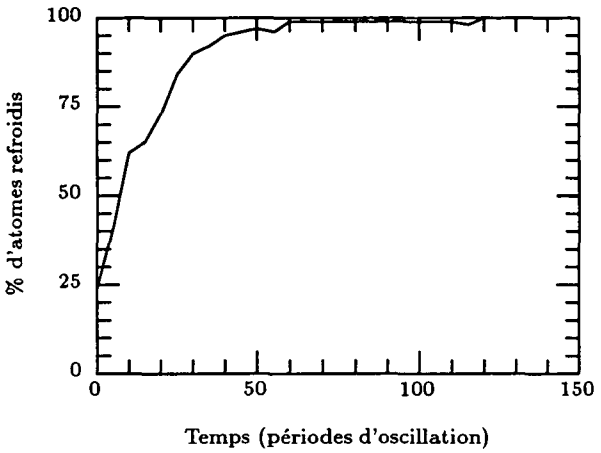
e) Simulation de Monte-Carlo à 3D

Pour effectuer à 3D une simulation de Monte-Carlo analogue à celle de la figure 2.21, il faut au préalable enregistrer les taux de transition correspondant à toutes les valeurs possibles des trois énergies directionnelles, et des 3 « phases » au début de l'impulsion : il y a donc 6 paramètres au total au lieu de deux. Ceci est difficilement réalisable, en raison du temps que nécessiterait le calcul de toutes ces données, et de l'espace mémoire qu'elles occuperaient. En outre, je ne suis pas sûr que la méthode soit « rentable » à 3D, dans la mesure où il devient difficile que deux atomes (même à deux moments différents) abordent une impulsion avec

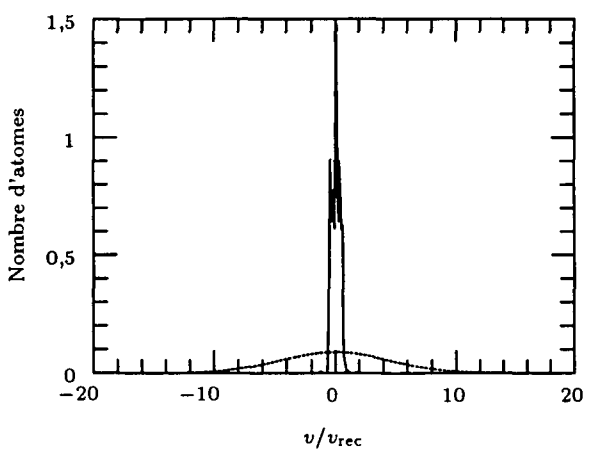
compte les degrés de liberté internes et externes est très probablement envisageable (mais le programme correspondant reste à écrire).



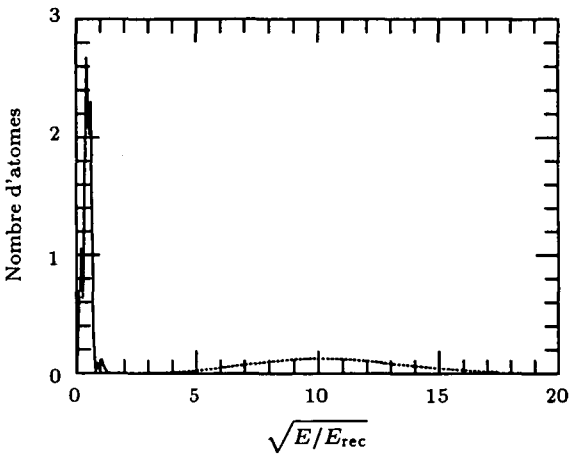
(a) *Energie moyenne des atomes en fonction du temps.*



(b) *Pourcentage d'atomes refroidis en fonction du temps.*



(c) *Distribution finale en vitesse, moyennée sur les 100 atomes de la simulation et sur le temps entre 800 et 1 000 périodes d'oscillation. En pointillés, la distribution initiale (courbe théorique).*



(d) *Distribution finale en fonction de la racine de l'énergie. Le moyennage se fait de la même façon que pour la vitesse.*

FIG. 2.21 - *Résultat d'une simulation Monte-Carlo 1D avec 100 atomes, en impulsions et par passage adiabatique. Le rapport de branchement est pris égal à 0,75. La largeur effective $\overline{\Gamma}$ vaut $0,1\,\mathrm{kv}_{rec}$, et la fréquence de Rabi effective maximale $\overline{\Omega}/2 = 0,2\,\mathrm{kv}_{rec}$. Le repompeur pousse les atomes dans le sens opposé aux faisceaux Raman (η= -1). La fréquence du piège vaut 133 rad/s. La vitesse résonnante est 2 v_{rec}. Les impulsions Raman utilisées sont des créneaux de 6 ms, la rampe étant une impulsion de Blackman de durée 0,6 ms (voir texte p. 100). Résultat : la vitesse quadratique moyenne de $0,4\,\mathrm{v}_{rec}$ est atteinte en 1 s.*

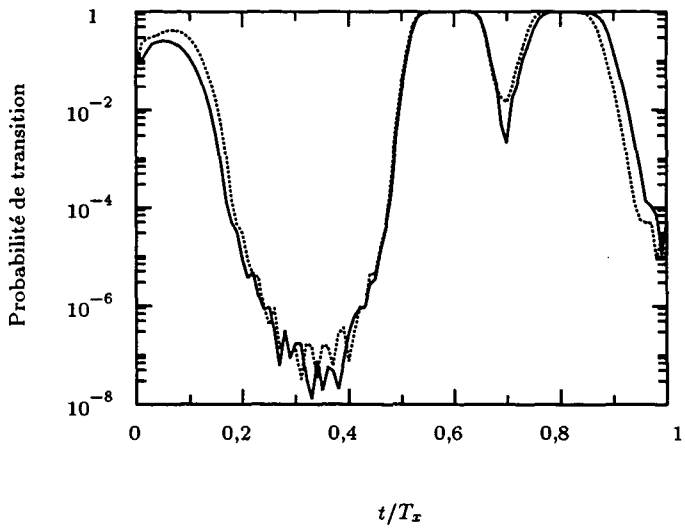


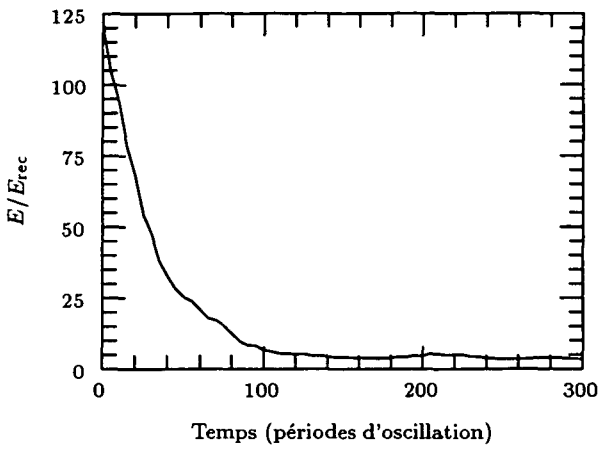
FIG. 2.22 - *Comparaison du taux d'excitation par un créneau , calculé à 3D en faisant réellement évoluer l'atome dans l'espace des phases à 3D (en trait plein), et en approximant son mouvement par un mouvement dans l'espace des phases 1D (en pointillés). On constate un bon accord entre les deux courbes, ce qui justifie la méthode employée pour les simulations à 3D.*

leurs six paramètres qui coïncident.

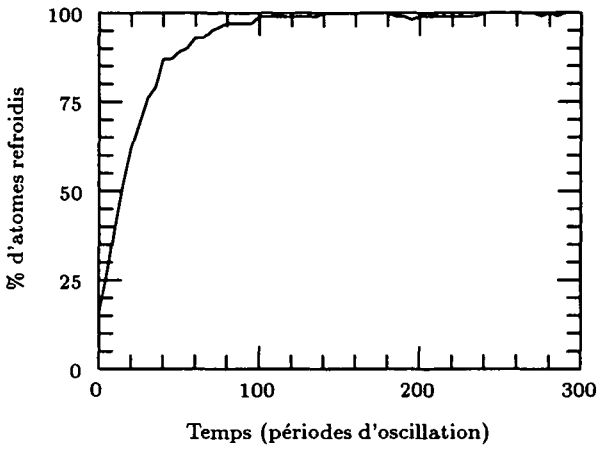
A priori donc, il vaut mieux renoncer à cette méthode et entreprendre une simulation complète, sur les degrés de liberté internes et externes (soit 10 paramètres à 3D). Toutefois, nous savons que ceci est difficile à réaliser (c'est encore plus vrai à 3D qu'à 1D). Plutôt que de renoncer, j'ai préféré « tricher » en utilisant une méthode approchée. Le principe est d'utiliser les paramètres 1D pour effectuer la simulation à 3D. Pour cela, je considère une trajectoire fictive 1D dont les caractéristiques sont telles qu'elles permettent d'évaluer correctement le taux d'excitabilité d'un atome. Pour déterminer cette trajectoire fictive, à partir de la vitesse de l'atome, j'écris l'égalité du désaccord $\delta_{\text{eff}}(t)$ et de sa dérivée entre la trajectoire fictive et la vraie trajectoire. Le temps t correspond au milieu de l'impulsion. Cela donne

$$\sum_{i=x,y,z} k_i v_i^0 \cos(\omega_i t + \varphi_i) = k v^0 \cos(\Omega t + \varphi) \qquad (2.84.a)$$

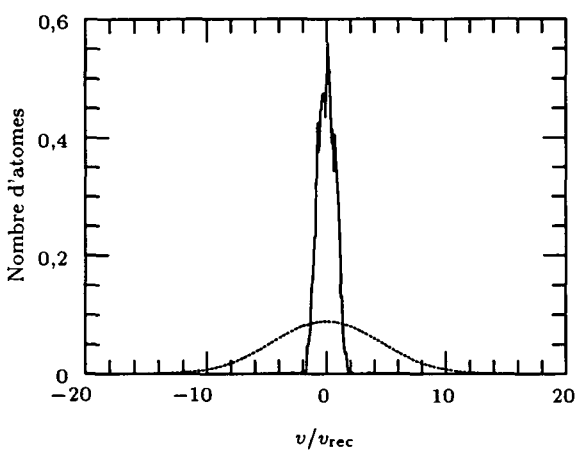
$$\sum_{i=x,y,z} k_i v_i^0 \omega_i \sin(\omega_i t + \varphi_i) = k v^0 \Omega \sin(\Omega t + \varphi)\,, \qquad (2.84.b)$$



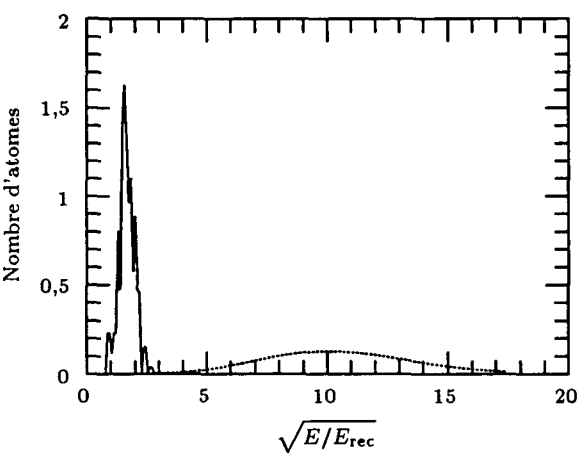
(a) *Energie moyenne des atomes en fonction du temps.*



(b) *Pourcentage d'atomes refroidis en fonction du temps.*



(c) *Distribution finale en vitesse, moyennée sur les 100 atomes de la simulation et sur le temps entre 800 et 1 000 périodes d'oscillation. En pointillés, la distribution initiale (courbe théorique).*



(d) *Distribution finale en fonction de la racine de l'énergie. Le moyennage se fait de la même façon que pour la vitesse.*

FIG. 2.23 - *Résultat d'une simulation Monte-Carlo à 3D avec 100 atomes, en impulsions et par passage adiabatique. Le rapport de branchement est pris égal à 0,75. La largeur effective* $\overline{\Gamma}$ *vaut* $0{,}1\,\mathrm{kv}_{rec}$*, et la fréquence de Rabi effective maximale* $\overline{\Omega}/2 = 0{,}3\mathrm{kv}_{rec}$*. La direction du faisceau est (1;1;1) par rapport aux axes propres du piège, le repompeur donnant une impulsion dans le même sens que celle des faisceaux Raman (*$\eta = 1$*). Les 3 fréquences du piège valent respectivement 133, 125, et 231 rad/s. La vitesse résonnante est 3* v_{rec}*. Les impulsions Raman utilisées sont des créneaux de 6 ms, la rampe étant une impulsion de Blackman de durée 0,6 ms (voir texte p. 100). Cette simulation permet d'atteindre une température légèrement sub-recul en 1,6 s.*

où j"ai choisi pour fréquence Ω la moyenne quadratique des trois fréquences d'oscillation du piège[1], *i.e.*

$$\Omega^2 = \sum_{i=x,y,z} \frac{\omega_i^2}{3}. \tag{2.85}$$

L'équation (2.84) permet de calculer, pour chaque atome, et pour chaque impulsion, les quantités φ et v^0. On déduit ensuite la probabilité de passage dans $|2\rangle$ par lecture du tableau.

Afin de m'assurer le la validité de cette méthode, j'ai comparé (fig. 2.22) les taux d'excitation 3D obtenus en faisant réellement évoluer un atome dans l'espace des phases à 3D (en trait plein), et les taux d'excitations calculés avec la méthode d'approximation que je viens d'exposer (en pointillés). On constate que l'accord est bon en général, sauf sur la partie gauche de la courbe: on se trouve alors dans un cas où l'atome ne fait qu'effleurer la zone résonnante. Pour avoir un bon accord, il faudrait rendre égales les dérivées suivantes du désaccord par rapport au temps, ce que ne fait pas la méthode. Toutefois, ce cas est assez exceptionnel (sauf en fin de refroidissement). De plus, le signe de l'erreur n'est pas systématique: nous pourrons donc avoir une bonne idée du refroidissement adiabatique à 3D.

Sur la figure 2.23, on constate que l'on peut obtenir à 3D, avec des impulsions laser et en créant un passage adiabatique, un refroidissement avec $v_{\text{rés}} = 3\,v_{\text{rec}}$ en un temps de 33 périodes d'oscillation (1,6 s), c'est-à-dire beaucoup plus court que pour le refroidissement continu, et compatible avec la méthode de piégeage opto-électrique (voir chapitre 3, § 3.1.*b.iii*, p. 136). La vitesse quadratique moyenne finale obtenue est $0{,}8\,v_{\text{rec}}$.

f) Le refroidissement par impulsions de Blackman

Bien que la présente section soit intitulée « le refroidissement par impulsions », je n'ai jusqu'ici parlé que de refroidissement par passage adiabatique. Or, on peut concevoir d'autres types refroidissement par impulsions (*i.e.* dans lesquels on ne recherche pas de passage adiabatique). En particulier, on peut envisager d'utiliser une succession d'impulsions de Blackman possédant des désaccords différents (de la même façon que dans l'expérience 1D décrite au chapitre 1), et se propageant successivement selon les trois directions de l'espace. On peut par cette méthode réaliser un profil d'excitation excitant les atomes partout sauf dans une classe de vitesse étroite autour de 0 (*i.e.* analogue à celui représenté schématiquement sur la figure 0.1, p. 16). De cette façon les atomes peuvent être excités sans posséder toujours la même vitesse selon un axe. On devrait donc pouvoir s'affranchir de la condition de seuil (2.35) (la courbe de la figure 2.13 réalisée avec trois systèmes

1. Il est difficile de justifier ce choix par un raisonnement rigoureux. On observe *a posteriori* (voir figure 2.22) qu'il conduit à une erreur satisfaisante (et de signe non systématique).

de faisceaux continus constitue déjà un premier pas dans cette voie)[1].

On peut toutefois objecter que cette méthode n'est pas très élégante. En effet, le refroidissement Raman continu, tout comme le refroidissement par passage adiabatique, tire parti du mouvement des atomes dans le piège. Ce n'est pas le cas du refroidissement par des impulsions de Blackman, que l'on conçoit plutôt comme une expérience de refroidissement Raman 3D d'atomes libres, dans laquelle le piège viendrait jouer un rôle perturbateur que l'on souhaite le plus faible possible[2]. Néanmoins, il est possible d'envisager une solution mixte : par exemple du refroidissement adiabatique maintenant l'énergie des atomes sous quelques E_{rec}, et des impulsions de Blackman selon les trois directions pour essayer de refroidir davantage une fraction des atomes. J'ai tenté d'explorer cette piste en utilisant mon programme de simulation de Monte-Carlo. Je n'ai malheureusement pas obtenu de résultat satisfaisant. En fait, l'étude est compliquée par le grand nombre de degrés de liberté (la durée, le désaccord et la puissance de chaque impulsion) et la durée du calcul informatique (typiquement une demi-journée si je suis seul sur la machine). L'optimisation du résultat, qui nécessite de faire tourner le programme un grand nombre de fois en modifiant un unique paramètre à chaque fois, demanderait un temps qui aurait pu s'avérer supérieur à la durée de ma thèse (au point qu'il peut paraître plus rapide de commencer par faire l'expérience).

Par ailleurs, on pourrait songer à appliquer aux atomes piégés les idées de François Bardou et de Jakob Reichel sur les vols de Lévy [79, 80, 85]. Peut-être est-il possible de refroidir les atomes à des températures largement sub-recul, grâce à l'utilisation de quelques impulsions en créneau convenablement disposées. Quoi qu'il en soit, l'exploration de cette voie nécessite à mon avis l'élaboration d'un programme de simulation du refroidissement Raman par impulsions beaucoup plus complexe que celui que j'ai écrit[3].

1. Lorsque l'on effectue du refroidissement Raman (par impulsions) sur des atomes libres, il n'y a pas de seuil de refroidissement. Par « continuité », on peut déduire que pour des atomes confinés dans un piège très lâche (*i.e.* de très basses fréquences d'oscillation), il n'y a pas non plus de seuil. Par contre, l'obtention de températures sub-recul me semble plus difficile dans le cas où le temps moyen séparant deux excitations d'un atome donné par les faisceaux Raman devient supérieur à la période d'oscillation (et il sera de toute façon nécessaire d'utiliser un grand nombre d'impulsions de désaccords différents).

2. Heun-Jin Lee *et al.* affirment explicitement (en se basant sur des résultats expérimentaux) que le refroidissement Raman fonctionne mieux pour des atomes libres [105].

3. Comme je l'ai dit, mon programme évalue l'excitabilité des atomes par extrapolation à partir de quelques valeurs calculées une fois pour toutes, et qui correspondent à des paramètres atomiques (vitesse, position) fixés. Le profil d'excitation au voisinage d'un point où l'excitabilité est nulle, dont on sait qu'il détermine de façon cruciale la température finale accessible [79, 80], n'est absolument pas modélisé correctement ici, notamment parce que le maillage ne comporte pas assez de points.

6. Conclusion

Au cours de ce chapitre, j'ai donc établi que le refroidissement Raman d'atomes piégés s'avère un peu décevant, dans la mesure où je n'ai pas dégagé de mécanismes permettant d'atteindre des températures sub-recul. Dans le cas du refroidissement continu, cette impossibilité est intrinsèquement liée au mouvement des atomes dans le piège, et au fait que le désaccord δ des faisceaux Raman est toujours le même. Il n'est cependant pas exclu qu'il soit possible, lorsque les fréquences d'oscillation du piège sont très basses, de contourner le seuil (2.35) en utilisant un grand nombre d'impulsions Raman de désaccords différents. Toutefois, la séquence *ad hoc* n'a pas encore été trouvée[1].

Les considérations liées au seuil mises à part, le refroidissement Raman d'atomes piégés est intéressant parce qu'il permet également d'augmenter la densité spatiale. Par conséquent, si la vitesse selon un axe diminue d'un facteur α, la densité dans l'espace des phases augmente de α^6. Les simulations que j'ai effectuées (qui ne tiennent certes pas compte de la diffusion multiple des photons) prévoient l'obtention d'un paramètre $\rho\Lambda_{\mathrm{DB}}^3$ seulement 200 fois plus petit que la valeur correspondant à la condensation de Bose-Einstein. Le recours ultérieur au refroidissement évaporatif sera donc indispensable, mais on peut espérer produire un condensat contenant davantage d'atomes que si l'on était parti des conditions du piège magnéto-optique.

Toute l'étude théorique de ce chapitre a été réalisée en supposant l'existence d'un piège que l'on peut considérer comme harmonique, qui confine les atomes sans perturber le fonctionnement du refroidissement Raman. Aucune considération n'a jusqu'ici été faite quant à l'existence d'un tel piège. Le prochain chapitre sera donc consacré à la résolution (théorique et expérimentale) de ce problème.

1. Une toute autre direction devrait également être explorée : le régime de Lamb-Dicke ($\omega_x \gg \omega_{\mathrm{rec}}$), pour lequel il n'a pas été prouvé que les interactions entre atomes jouent dans tous les cas un rôle nocif.

Complément A : Obtention des équations du mouvement

L'objet de ce complément est d'établir l'équation (2.36) à partir des équations de Bloch optiques généralisées. Ce calcul permet de justifier l'étude du problème par une approche semi-classique et donc l'emploi de simulations de Monte-Carlo classiques. Ce complément contient en outre la démonstration de l'analogie qui peut être faite entre un système de faisceaux Raman et une micro-onde.

Je tiens à toutefois à prévenir le lecteur que les calculs qui vont suivre sont relativement lourds, et que leur lecture n'est absolument pas nécessaire à la compréhension de la suite de cette thèse. En outre, ils ne constituent pas quelque chose de fondamentalement nouveau, la majorité des éléments pouvant être retrouvés dans les références [113, 120, 82]. Toutefois, il m'a paru utile de les faire figurer, de façon à fournir une assise analytique aux résultats numériques que j'ai présentés dans ce chapitre.

a) Notations

On considère l'atome à 3 niveaux, irradié par 3 lasers, représenté sur la figure 2.1. Si E_1, E_2, et E_e sont les énergies des 3 niveaux, avec $E_2 = 0$, on définit les quantités suivantes :

- les écarts entre les niveaux :

$$\begin{aligned} \hbar\omega_1 &= E_1 - E_2 = E_1 \\ \hbar\omega_2 &= E_e - E_2 = E_e \ ; \end{aligned} \tag{2.86}$$

- les désaccords :

$$\begin{aligned} \hbar\Delta &= \hbar\omega_A - (E_e - E_1) \\ \hbar\delta &= \hbar\omega_1 + \hbar\omega_A - \hbar\omega_B \\ \hbar\delta_{\text{rep}} &= \hbar\omega_C - \hbar\omega_e \, . \end{aligned} \tag{2.87}$$

b) Equation d'évolution, hamiltonien du système

L'hamiltonien du système s'écrit

$$H = \frac{\vec{P}^2}{2M} + \frac{1}{2}\vec{R}\cdot\vec{\vec{K}}\cdot\vec{R} - \vec{d}\cdot\vec{E}(\vec{R},t)\,, \tag{2.88}$$

$\vec{d}$ étant l'opérateur dipolaire électrique, et $\vec{E}$ le champ, défini par :

$$\vec{E} = \frac{\mathcal{E}_A}{2}\vec{\varepsilon}_A e^{i(\vec{k}_A\cdot\vec{R}-\omega_A t)} + \frac{\mathcal{E}_B}{2}\vec{\varepsilon}_B e^{i(\vec{k}_B\cdot\vec{R}-\omega_B t)} + \frac{\mathcal{E}_C}{2}\vec{\varepsilon}_C e^{i(\vec{k}_C\cdot\vec{R}-\omega_C t)} + \text{c.c.} \tag{2.89}$$

L'équation d'évolution de la matrice densité du système s'écrit alors

$$i\hbar\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} = -[\sigma, H] + i\hbar\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}\right)_{\text{relax}}, \tag{2.90}$$

où σ agit à la fois sur les états internes et externes de l'atome. $\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}\right)_{\text{relax}}$ décrit l'émission spontanée.

c) Approximation séculaire. Equations de Bloch optiques

L'approximation séculaire consiste à négliger les termes non résonnants devant les termes résonnants (les premiers oscillent très vite, donc on effectue une moyenne sur un temps long devant leur période d'oscillation).

Pour notre problème, l'hypothèse est la suivante :

$$|\delta|, |\delta_{\text{rep}}|, |\omega_e - \omega_B| \ll |\omega_n - \omega_m - \omega_L|\,, \tag{2.91}$$

où m et n sont deux niveaux atomiques quelconques, $L = A, B, C$, et

$$(m, n, L) \neq \{(e,1,A),(e,1,B),(e,2,C)\}\,. \tag{2.92}$$

On déduit de (2.88), (2.89) et (2.90) les équations de Bloch [120, page 116] :

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_{e,e}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{i\hbar}\left[\frac{\vec{P}^2}{2M} + \frac{1}{2}\vec{R}\cdot\vec{\vec{K}}\cdot\vec{R}, \sigma_{e,e}\right]$$
$$+ \left(\frac{1}{i\hbar}(V_A^+\sigma_{1,e}e^{-i\omega_A t} + V_B^+\sigma_{2,e}e^{-i\omega_B t} + V_C^+\sigma_{2,e}e^{-i\omega_C t}) + \text{h.c.}\right) - \Gamma\sigma_{e,e}$$

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_{1,1}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{i\hbar}\left[\frac{\vec{P}^2}{2M} + \frac{1}{2}\vec{R}\cdot\vec{\vec{K}}\cdot\vec{R}, \sigma_{1,1}\right] + \left(\frac{1}{i\hbar}V_A^-\sigma_{e,1}e^{i\omega_A t} + \text{h.c.}\right) + (\dot{\sigma}_{1,1})_{\text{relax}}$$

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_{2,2}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{i\hbar}\left[\frac{\vec{P}^2}{2M} + \frac{1}{2}\vec{R}\cdot\vec{\vec{K}}\cdot\vec{R}, \sigma_{2,2}\right]$$
$$+ \left(\frac{1}{i\hbar}(V_B^- e^{i\omega_B t} + V_V^- e^{i\omega_C t})\sigma_{e,2} + \text{h.c.}\right) + (\dot{\sigma}_{2,2})_{\text{relax}}$$

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_{e,2}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{i\hbar}\left[\frac{\vec{P}^2}{2M} + \frac{1}{2}\vec{R}\cdot\vec{\vec{K}}\cdot\vec{R}, \sigma_{e,2}\right] - i\omega_e\sigma_{e,2} + \frac{1}{i\hbar}\left(V_A^+ e^{-i\omega_A t}\sigma_{1,2}\right.$$
$$\left. + (V_B^+ e^{-i\omega_B t} + V_C^+ e^{-i\omega_C t})\sigma_{2,2} - \sigma_{e,e}(V_A^+ e^{-i\omega_B t} + V_C^+ e^{-i\omega_C t})\right)$$
$$- \frac{\Gamma}{2}\sigma_{e,2}$$

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_{e,1}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{i\hbar}\left[\frac{\vec{P}^2}{2M} + \frac{1}{2}\vec{R}\cdot\vec{\vec{K}}\cdot\vec{R}, \sigma_{e,1}\right] - i(\omega_e - \omega_1)\sigma_{e,1} + \frac{1}{i\hbar}\left(V_A^+ e^{-i\omega_A t}\sigma_{1,1}\right.$$

$$+(V_B^+ e^{-i\omega_B t} + V_C^+ e^{-i\omega_C t})\sigma_{2,1} - \sigma_{e,e} V_A^+ e^{-i\omega_A t}\Big) - \frac{\Gamma}{2}\sigma_{e,1}$$

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_{1,2}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{i\hbar}\left[\frac{\vec{P}^2}{2M} + \frac{1}{2}\vec{R}\cdot\vec{\vec{K}}\cdot\vec{R}, \sigma_{1,2}\right] - i\omega_1\sigma_{1,2} + \frac{1}{i\hbar}\Big(V_A^- e^{i\omega_A t}\sigma_{e,2}$$

$$-\sigma_{1,e}(V_B^+ e^{-i\omega_B t} + V_C^+ e^{-i\omega_C t})\Big)\,, \tag{2.93}$$

avec

$$(\dot{\sigma}_{1,1})_{\text{relax}} = \frac{3}{8\pi}\Gamma\xi \int \mathrm{d}^2\vec{n} \sum_{\vec{\varepsilon}\perp\vec{n}} (\vec{d}_{1,e}\cdot\vec{\varepsilon}^*) e^{-ik\vec{n}\cdot\vec{R}} \sigma_{e,e} e^{ik\vec{n}\cdot\vec{R}} (\vec{d}_{e,1}\cdot\vec{\varepsilon}) \tag{2.94}$$

et

$$(\dot{\sigma}_{2,2})_{\text{relax}} = \frac{3}{8\pi}\Gamma(1-\xi) \int \mathrm{d}^2\vec{n} \sum_{\vec{\varepsilon}\perp\vec{n}} (\vec{d}_{2,e}\cdot\vec{\varepsilon}^*) e^{-ik\vec{n}\cdot\vec{R}} \sigma_{e,e} e^{ik\vec{n}\cdot\vec{R}} (\vec{d}_{e,2}\cdot\vec{\varepsilon})\,, \tag{2.95}$$

ξ étant le rapport de branchement, $\vec{n}$ et $\vec{\varepsilon}$ des vecteurs unitaires et k la norme du vecteur d'onde d'un laser résonnant ;

$$V_A^+ = -\frac{\vec{\varepsilon}_A}{2}\cdot\vec{d}_{e,1}\mathcal{E}_A e^{i\vec{k}_A\cdot\vec{R}} \tag{2.96.a}$$

$$V_B^+ = -\frac{\vec{\varepsilon}_B}{2}\cdot\vec{d}_{e,2}\mathcal{E}_B e^{i\vec{k}_B\cdot\vec{R}} \tag{2.96.b}$$

$$V_C^+ = -\frac{\vec{\varepsilon}_C}{2}\cdot\vec{d}_{e,2}\mathcal{E}_C e^{i\vec{k}_C\cdot\vec{R}}\,; \tag{2.96.c}$$

V_A^-, V_B^- et V_C^- sont les opérateurs hermitiens conjugués.

Dans la suite du calcul, j'effectuerai le changement de variable suivant :

$$\tilde{\sigma}_{e,1} = \sigma_{e,1} e^{i(\omega_e-\omega_1)t} \tag{2.97.a}$$

$$\tilde{\sigma}_{e,2} = \sigma_{e,2} e^{i\omega_e t} \tag{2.97.b}$$

$$\tilde{\sigma}_{1,2} = \sigma_{1,2} e^{i\omega_1 t}\,. \tag{2.97.c}$$

d) Approximation Raman

Cette approximation permet de remplacer les deux faisceaux A et B par un faisceau effectif équivalent [82]. On pose tout d'abord :

$$\frac{\Omega_A}{2} = -\frac{\vec{\varepsilon}_A}{2}\cdot\vec{d}_{e,1}\mathcal{E}_A\,, \tag{2.98}$$

soit

$$V_A^+ = \Omega_A e^{i\vec{k}_A\cdot\vec{R}} \tag{2.99}$$

(*idem* pour B et C). On fait alors l'hypothèse:

$$\Delta \gg |\Omega_A|, |\Omega_B|, |\Omega_C|, \delta, \delta_{\text{rep}} \tag{2.100.a}$$

$$\Delta \gg \Gamma\sigma_{e,e} \tag{2.100.b}$$

$$\sigma_{e,1} \ll \sigma_{1,1}, \sigma_{2,2}\,. \tag{2.100.c}$$

On veut pouvoir négliger, dans l'équation (2.93), le commutateur de l'hamiltonien externe. En prenant (2.93) entre les deux états propres du piège $\langle n'_x, n'_y, n'_z|$ et $|n_x, n_y, n_z\rangle$, ce commutateur vaut:

$$\Delta n_x \omega_x + \Delta n_y \omega_y + \Delta n_z \omega_z\,, \tag{2.101}$$

où $\Delta n_x = n'_x - n_x$, et $\omega_{x,y,z}$ sont les fréquences propres du piège. Pour pouvoir négliger (2.101), il faut supposer que

$$\Delta \gg \sum_{i=x,y,z} |\Delta n_i| \omega_i\,. \tag{2.102}$$

Je supposerai en fait que seuls les Δn_i de l'ordre de 1 contribuent (les autres pouvant être négligés par une approximation de type séculaire). (2.102) devient:

$$\boxed{\Delta \gg \omega_{x,y,z}\,.} \tag{2.103}$$

Je vais maintenant intégrer, dans (2.93), l'équation en $\tilde{\sigma}_{e,2}$, sur une durée grande devant $1/\Delta$, et petite devant $1/\Gamma$, $1/\Omega_{A,B,C}$. Je néglige le terme en $\sigma_{e,e}$ devant celui en $\sigma_{2,2}$[1]. Je suppose que $\sigma_{1,1}$, $\tilde{\sigma}_{1,2}$ et $\sigma_{2,2}$ évoluent sur des temps de l'ordre de $1/\Gamma$ et $1/\Omega_{A,B,C}$, longs devant le temps d'intégration, ce qui permet de les considérer comme constants.

$$\tilde{\sigma}_{e,2} = \frac{1}{i\hbar}\left[V_A^+ \tilde{\sigma}_{1,2} \frac{e^{-i\Delta t}}{(-i\Delta)} + \left(V_B^+ \frac{e^{-i(\Delta-\delta)t}}{-i(\Delta-\delta)} + V_C^+ \frac{e^{-i\delta_{\text{rep}} t}}{-i\delta_{\text{rep}}}\right)\sigma_{2,2}\right] \tag{2.104.a}$$

$$\tilde{\sigma}_{e,1} = \frac{1}{i\hbar}\left[V_A^+ \sigma_{1,1} \frac{e^{-i\Delta t}}{(-i\Delta)} + \left(V_B^+ \frac{e^{-i(\Delta-\delta)t}}{-i(\Delta-\delta)} + V_C^+ \frac{e^{-i\delta_{\text{rep}} t}}{-i\delta_{\text{rep}}}\right)\sigma_{2,2}\right] \tag{2.104.b}$$

J'injecte (2.104) dans les équations en $\sigma_{1,1}$, $\sigma_{2,2}$ et $\tilde{\sigma}_{1,2}$ de (2.93). Je néglige tous les termes où $e^{\pm i\Delta t}$ ne disparaît pas (il oscille très vite à l'échelle de temps où l'on se place):

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_{1,1}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{i\hbar}\left[\frac{\vec{P}^2}{2M} + \frac{1}{2}\vec{R}\cdot\vec{\vec{K}}\cdot\vec{R}, \sigma_{1,1}\right] + \left(\frac{i}{\hbar^2}\frac{V_A^- V_B^+}{(-\Delta)} e^{i\delta t}\tilde{\sigma}_{2,1} + \text{h.c.}\right) + (\dot{\sigma}_{1,1})_{\text{relax}}$$

1. Je néglige également le commutateur d'évolution externe

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\sigma_{2,2}}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{i\hbar}\left[\frac{\vec{P}^2}{2M} + \frac{1}{2}\vec{R}\cdot\vec{\vec{K}}\cdot\vec{R}, \sigma_{2,2}\right] + \left(\frac{i}{\hbar^2}\frac{V_B^- V_A^+}{(-\Delta)} e^{-i\delta t}\tilde{\sigma}_{1,2} + \text{h.c.}\right) \\
&\quad + \left(\frac{-i}{\hbar^2} V_C^- e^{-i\delta_{\text{dip}} t}\tilde{\sigma}_{e,2} + \text{h.c.}\right) + (\dot{\sigma}_{2,2})_{\text{relax}} \\
\frac{\mathrm{d}\tilde{\sigma}_{1,2}}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{i\hbar}\left[\frac{\vec{P}^2}{2M} + \frac{1}{2}\vec{R}\cdot\vec{\vec{K}}\cdot\vec{R}, \tilde{\sigma}_{1,2}\right] + \frac{i}{\hbar^2}\left(\frac{V_A^- V_A^+}{(-\Delta)}\tilde{\sigma}_{1,2} + \frac{V_A^- V_B+}{(-\Delta)} e^{i\delta t}\sigma_{2,2}\right. \\
&\quad \left. -\sigma_{1,1}\frac{V_A^- V_B^+}{(-\Delta)} e^{i\delta t} - \tilde{\sigma}_{1,2}\frac{V_B^- V_B^+}{(-\Delta)}\right) + \frac{i}{\hbar}\tilde{\sigma}_{1,e} V_C^+ e^{-i\delta_{\text{dip}} t} \\
\frac{\mathrm{d}\sigma_{e,e}}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{i\hbar}\left[\frac{\vec{P}^2}{2M} + \frac{1}{2}\vec{R}\cdot\vec{\vec{K}}\cdot\vec{R}, \sigma_{e,e}\right] + \left(-\frac{i}{\hbar} V_C^+ e^{-i\delta_{\text{dip}} t}\tilde{\sigma}_{2,e} + \text{h.c}\right) - \Gamma\sigma_{e,e} \\
\frac{\mathrm{d}\tilde{\sigma}_{e,2}}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{i\hbar}\left[\frac{\vec{P}^2}{2M} + \frac{1}{2}\vec{R}\cdot\vec{\vec{K}}\cdot\vec{R}, \tilde{\sigma}_{e,2}\right] \\
&\quad - \frac{i}{\hbar}\left(V_C^+\sigma_{2,2} e^{-i\delta_{\text{dip}} t} - \sigma_{e,e} V_C^+ e^{-i\delta_{\text{dip}} t}\right) - \frac{\Gamma}{2}\tilde{\sigma}_{e,2} \\
\frac{\mathrm{d}\tilde{\sigma}_{e,1}}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{i\hbar}\left[\frac{\vec{P}^2}{2M} + \frac{1}{2}\vec{R}\cdot\vec{\vec{K}}\cdot\vec{R}, \tilde{\sigma}_{e,1}\right] - \frac{1}{\hbar} V_C^+ e^{-i\delta_{\text{dip}} t}\tilde{\sigma}_{2,1} - \frac{\Gamma}{2}\tilde{\sigma_{e,1}}\,. \qquad (2.105)
\end{aligned}
$$

On vérifie bien que les constantes d'évolution de $\sigma_{1,1}$, $\sigma_{2,2}$ et $\tilde{\sigma}_{1,2}$ sont grandes devant $1/\Delta$.

e) Elimination adiabatique du niveau $|e\rangle$

Je supposerai :

– que la population de l'état $|e\rangle$ est petite devant celles des états fondamentaux $|1\rangle$ et $|2\rangle$;

– que le temps d'évolution de $|e\rangle$, c'est-à-dire Γ^{-1}, est très court devant le temps de pompage de $|2\rangle$ vers $|e\rangle$, donné par $(\Gamma s_C)^{-1}$, où s_C est le paramètre de saturation du faisceau C. On doit donc avoir $s_C \ll 1$, c'est-à-dire

$$\Omega_C \ll \Gamma \qquad (2.106.\text{a})$$

$$|\delta_{\text{dip}}| \ll \Gamma\,. \qquad (2.106.\text{b})$$

Si la condition (2.106) est vérifiée, $\sigma_{e,e}$, $\sigma_{e,1}$ et $\sigma_{e,2}$ atteignent tout de suite leur état stationnaire : on dit qu'ils suivent adiabatiquement le niveau fondamental. Cette propriété va permettre d'éliminer l'état excité, en remplaçant la population et les cohérences dans les autres équations. J'effectue par ailleurs le changement

de variable :

$$\begin{cases} \breve{\sigma}_{e,2} = \tilde{\sigma}_{e,2} e^{i\delta_{\text{dip}} t} \\ \breve{\sigma}_{2,e} = \tilde{\sigma}_{2,e} e^{-i\delta_{\text{dip}} t} . \end{cases} \tag{2.107}$$

– je suppose également (pour négliger l'hamiltonien externe) que :

$$\Gamma \gg \sum_{x,y,z} \Delta n_{x,y,z} \omega_{x,y,z} . \tag{2.108}$$

Plus physiquement, cela suppose que les atomes n'ont pas le temps de tourner dans le piège pendant le temps qu'ils passent dans l'état excité.

$$\boxed{\Gamma \gg \omega_{x,y,z} .} \tag{2.109}$$

On annule alors les dérivées temporelles de l'état excité (suivi adiabatique), et on néglige le commutateur :

$$\frac{\Gamma}{2} \breve{\sigma}_{e,2} = -\frac{i}{\hbar} V_C^+ \sigma_{2,2} \tag{2.110.a}$$

$$\frac{\Gamma}{2} \breve{\sigma}_{e,1} = -\frac{i}{\hbar} V_C^+ \tilde{\sigma}_{2,1} \tag{2.110.b}$$

$$\Gamma \sigma_{e,e} = -\frac{i}{\hbar} V_C^+ \breve{\sigma}_{2,e} + \text{h.c.} \tag{2.110.c}$$

On substitue dans celles des équations (2.105) qui ne font intervenir que le fondamental :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\sigma_{1,1}}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{i\hbar} \left[\frac{\vec{P}^2}{2M} + \frac{1}{2} \vec{R} \cdot \vec{\vec{K}} \cdot \vec{R} , \sigma_{1,1} \right] + \left(\frac{i}{\hbar^2} \frac{\overline{\Omega}^*}{2} e^{i(\vec{k}_B - \vec{k}_A)\cdot \vec{R}} \breve{\sigma}_{2,1} + \text{h.c.} \right) \\
&\quad + \frac{3\xi}{8\pi} \overline{\Gamma} \int \mathrm{d}^2 \vec{n} \sum_{\vec{\varepsilon} \perp \vec{n}} (\vec{d}_{1,e} \cdot \vec{\varepsilon}^*) e^{-ik\vec{n}\cdot\vec{R}} e^{i\vec{k}_C \cdot \vec{R}} \sigma_{2,2} e^{-i\vec{k}_C \cdot \vec{R}} e^{ik\vec{n}\cdot\vec{R}} (\vec{d}_{e,1} \cdot \vec{\varepsilon}) \\
\frac{\mathrm{d}\sigma_{2,2}}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{i\hbar} \left[\frac{\vec{P}^2}{2M} + \frac{1}{2} \vec{R} \cdot \vec{\vec{K}} \cdot \vec{R} , \sigma_{2,2} \right] + \left(\frac{i}{\hbar^2} \frac{\overline{\Omega}}{2} e^{i(\vec{k}_A - \vec{k}_B)\cdot \vec{R}} \breve{\sigma}_{1,2} + \text{h.c.} \right) - \overline{\Gamma} \sigma_{2,2} \\
&\quad + \frac{3}{8\pi} \overline{\Gamma} (1 - \xi) \int \mathrm{d}^2 \vec{n} \sum_{\vec{\varepsilon} \perp \vec{n}} (\vec{d}_{2,e} \cdot \vec{\varepsilon}^*) e^{-ik\vec{n}\cdot\vec{R}} e^{i\vec{k}_C \cdot \vec{R}} \sigma_{2,2} e^{-i\vec{k}_C \cdot \vec{R}} e^{ik\vec{n}\cdot\vec{R}} (\vec{d}_{e,2} \cdot \vec{\varepsilon}) \\
\frac{\mathrm{d}\breve{\sigma}_{1,2}}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{i\hbar} \left[\frac{\vec{P}^2}{2M} + \frac{1}{2} \vec{R} \cdot \vec{\vec{K}} \cdot \vec{R} , \breve{\sigma}_{1,2} \right] - i\overline{\delta} \breve{\sigma}_{1,2} \\
&\quad + i \left(\frac{\overline{\Omega}^*}{2} e^{i(\vec{k}_B - \vec{k}_A)\cdot \vec{R}} \sigma_{2,2} - \sigma_{1,1} \frac{\overline{\Omega}}{2} e^{i(\vec{k}_A - \vec{k}_B)\cdot \vec{R}} \right) - \frac{\overline{\Gamma}}{2} \sigma_{1,2} ,
\end{aligned} \tag{2.111}$$

avec

$$\breve{\sigma}_{1,2} = \tilde{\sigma}_{1,2} e^{-i\delta t} = \sigma_{1,2} e^{i(\omega_B - \omega_A)t} \tag{2.112.a}$$

$$\overline{\Gamma} = \frac{|\Omega_C|^2}{\Gamma} \tag{2.112.b}$$

$$\overline{\Omega} = -\frac{\Omega_A \Omega_B^*}{2\Delta} \tag{2.112.c}$$

$$\overline{\delta} = \delta - \frac{|\Omega_A|^2 - |\Omega_B|^2}{4\Delta}. \tag{2.112.d}$$

On remarque que le système (2.111) est analogue aux équations de Bloch optiques écrites pour un atome à deux niveaux. Le système de faisceaux Raman peut être assimilé à une micro-onde de fréquence de Rabi $\overline{\Omega}$ et de désaccord $\overline{\delta}$.

f) Passage en représentation de Wigner

Chacune des équations (2.111) est en fait un opérateur agissant sur l'espace des impulsions ou des positions. Je vais ici le prendre entre les états $\langle \vec{R} - \frac{\vec{R}_1}{2}|$ et $|\vec{R} + \frac{\vec{R}_1}{2}\rangle e^{-i\frac{\vec{P}\cdot\vec{R}_1}{\hbar}}$, et intégrer sur $\vec{R}_1$. Cette opération fait apparaître les quantités :

$$W_{1,1}(\vec{R}, \vec{P}) = \frac{1}{h^3} \int \langle \vec{R} - \frac{\vec{R}_1}{2} | \sigma_{1,1} | \vec{R} + \frac{\vec{R}_1}{2} \rangle e^{-i\frac{\vec{P}\cdot\vec{R}_1}{\hbar}} \mathrm{d}^3\vec{R}_1 \tag{2.113.a}$$

$$W_{2,1}(\vec{R}, \vec{P}) = \frac{1}{h^3} e^{i(\vec{k}_A - \vec{k}_B)\cdot\vec{R}} \int \langle \vec{R} - \frac{\vec{R}_1}{2} | \breve{\sigma}_{2,1} | \vec{R} + \frac{\vec{R}_1}{2} \rangle e^{-i\frac{\vec{P}\cdot\vec{R}_1}{\hbar}} \mathrm{d}^3\vec{R}_1 . \tag{2.113.b}$$

et de même pour $W_{2,2}$ et $W_{1,2} = (W_{2,1})^*$. Les quantités définies par (2.113), sont appelées fonctions de Wigner [121]. Bien que quantiques vis-à-vis des degrés de liberté externes, elles peuvent être interprétées comme des densités de présence des atomes. Les fonctions de Wigner peuvent être négatives, ce qui peut être relié à la possibilité de passage par effet tunnel à travers une barrière de potentiel.

Voici l'équation obtenue :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial W_{1,1}}{\partial t} + \frac{\vec{P}}{M} \cdot \frac{\partial W_{1,1}}{\partial \vec{R}} - \vec{R} \cdot \vec{\vec{K}} \cdot \frac{\partial W_{1,1}}{\partial \vec{P}} \\
&\quad = i\frac{\overline{\Omega}^*}{2} W_{2,1}\left(\vec{R}, \vec{P} + \hbar\frac{\vec{k}_A - \vec{k}_B}{2}\right) - i\frac{\overline{\Omega}}{2} W_{1,2}\left(\vec{R}, \vec{P} + \hbar\frac{\vec{k}_A - \vec{k}_B}{2}\right) \\
&\quad + \frac{3\xi}{8\pi} \int \mathrm{d}^2\vec{n} \sum_{\vec{\varepsilon}\perp\vec{n}} |\vec{d}_{e,1} \cdot \vec{\varepsilon}|^2 W_{2,2}(\vec{R}, \vec{P} - \hbar\vec{k}_C + \hbar k\vec{n})
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial W_{2,2}}{\partial t} + \frac{\vec{P}}{M}\cdot\frac{\partial W_{2,2}}{\partial \vec{R}} - \vec{R}\cdot\vec{\vec{K}}\cdot\frac{\partial W_{2,2}}{\partial \vec{P}}$$
$$= i\frac{\overline{\Omega}}{2}W_{1,2}\left(\vec{R},\vec{P}+\hbar\frac{\vec{k}_B-\vec{k}_A}{2}\right) - i\frac{\overline{\Omega}^*}{2}W_{2,1}\left(\vec{R},\vec{P}+\hbar\frac{\vec{k}_B-\vec{k}_A}{2}\right) - \overline{\Gamma}W_{2,2}$$
$$+\frac{3}{8\pi}(1-\xi)\int \mathrm{d}^2\vec{n}\sum_{\vec{\varepsilon}\perp\vec{n}}\left|\vec{d}_{e,2}\cdot\vec{\varepsilon}\right|^2 W_{2,2}(\vec{R},\vec{P}-\hbar\vec{k}_C+\hbar k\vec{n})$$
$$\frac{\partial W_{1,2}}{\partial t} + \frac{\vec{P}}{M}\cdot\frac{\partial W_{1,2}}{\partial \vec{R}} - \vec{R}\cdot\vec{\vec{K}}\cdot\frac{\partial W_{1,2}}{\partial \vec{P}}$$
$$= -i\left(\overline{\delta} - \frac{\vec{P}}{M}.(\vec{k}_B-\vec{k}_A)\right)W_{1,2} + i\frac{\overline{\Omega}^*}{2}\left\{W_{2,2}\left(\vec{R},\vec{P}+\hbar\frac{\vec{k}_A-\vec{k}_B}{2}\right)\right.$$
$$\left. -W_{1,1}\left(\vec{R},\vec{P}+\hbar\frac{\vec{k}_B-\vec{k}_A}{2}\right)\right\} - \frac{\overline{\Gamma}}{2}W_{1,2}\,. \tag{2.114}$$

g) Elimination adiabatique du niveau $|2\rangle$

Pour éliminer adiabatiquement le niveau $|2\rangle$ (et donc se ramener à une équation unique sur la densité d'atomes dans le fondamental), on raisonne de façon analogue au paragraphe 2.A.*e*. Je supposerai donc que :

$$\boxed{\begin{aligned} W_{2,2} &\ll W_{1,1} \qquad (2.115.a)\\ \overline{\Gamma} &\gg \omega_{x,y,z} \qquad (2.115.b)\\ \overline{s}_2 &\ll 1\,, \qquad (2.115.c)\end{aligned}}$$

avec

$$\overline{s}_2 = \frac{\dfrac{\overline{\Omega}^2}{4}}{\overline{\delta}^2 + \dfrac{\overline{\Gamma}^2}{4}}\,. \tag{2.116}$$

Quelques remarques doivent être faites à propos des relations (2.115). La relation (2.115.c) traduit la faible saturation de la transition Raman (et (2.115.a) découle de (2.115.c), elle même vérifiée si $\overline{\Omega} \ll \overline{\Gamma}$). La condition (2.115.c) est la condition de piège lâche (ou encore de l'atome lourd) : sans elle, il n'est plus possible de traiter le problème classiquement (voir § 2.1.*c.i*, p. 62). Remarquons aussi que les conditions que j'avais imposées jusqu'ici (relations (2.91), (2.100), (2.103), (2.106) et (2.109)) sont presque toujours vérifiées dans une situation « normale » (atomes alcalins pour lesquels la largeur Γ est grande devant la fréquence de recul, lasers quasi-résonnants et de puissances raisonnables). Les équations (2.115.b) et (2.115.c) constituent les seules hypothèses vraiment restrictives que l'on s'impose.

En annulant le premier membre de la troisième équation de (2.114), on exprime $W_{1,2}$ en fonction de $W_{1,1}$ et $W_{2,2}$. On substitue dans les 2 premières équations : on obtient un système de deux équations à 2 inconnues, $W_{1,1}$ et $W_{2,2}$. On annule également les dérivées partielles de l'équation en $W_{2,2}$, et on exprime $\overline{\Gamma} W_{2,2}$ en fonction de $W_{1,1}$ et d'une intégrale sur $W_{2,2}$. On substitue $W_{2,2}$ dans la première équation, puis de manière itérative dans les intégrales (ce qui fait apparaître une série sur le nombre de photons spontanés émis). Voici le résultat obtenu :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial W_{1,1}}{\partial t} + \frac{\vec{P}}{M} \cdot \frac{\partial W_{1,1}}{\partial \vec{R}} - \vec{R} \cdot \vec{\vec{K}} \cdot \frac{\partial W_{1,1}}{\partial \vec{P}} \\
&= -\mathcal{L}\left(\vec{P}\right) W_{1,1}(\vec{R}, \vec{P}) \\
&\quad + \frac{3\xi}{8\pi} \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\frac{3(1-\xi)}{8\pi}\right)^m \int \cdots \int d^2\vec{n}_0 \ldots d^2\vec{n}_m \prod_{j=0}^{m} \left(\sum_{\vec{\varepsilon}_j \perp \vec{n}_j} |\vec{d}_{e,2} \cdot \vec{\varepsilon}_j|^2 \right) \\
&\quad \times \mathcal{L}\left(\vec{P} - (m+1)\hbar\vec{k}_C + \hbar\left(\vec{k}_B - \vec{k}_A\right) + \hbar k \times \sum_{j=0}^{m} \vec{n}_j \right) \\
&\qquad \times W_{1,1}\left(\vec{R}, \vec{P} - (m+1)\hbar\vec{k}_C + \hbar\left(\vec{k}_B - \vec{k}_A\right) + \hbar k \times \sum_{j=0}^{m} \vec{n}_j \right) ,
\end{aligned} \tag{2.117}$$

où

$$\mathcal{L}(\vec{P}) = \frac{|\overline{\Omega}|^2 \frac{\overline{\Gamma}}{4}}{\frac{\overline{\Gamma}^2}{4} + \left(\overline{\delta} - \frac{\vec{P}}{M} \cdot (\vec{k_B} - \vec{k_A}) + \frac{\hbar(\vec{k_B} - \vec{k_A})^2}{2M} \right)^2} . \tag{2.118}$$

Si l'on interprète la fonction de Wigner comme la densité atomique dans l'espace des phases, alors la formule (2.117) représente l'équation d'évolution classique de cette densité. Ceci justifie le traitement du problème par des simulations de Monte-Carlo classiques.

Chapitre 3

Réalisation d'un nouveau piège à atomes

L'ÉTUDE théorique que j'ai menée au chapitre 2 a montré que le refroidissement Raman d'atomes confinés permet d'atteindre, avec des atomes de césium, une température de l'ordre de la température de recul (soit 200 nK). J'ai supposé que les atomes étaient confinés dans un piège (modélisable par un piège harmonique, mais cette condition n'est pas essentielle), sans me préoccuper de la façon de réaliser ce piège. S'il existe de nos jours de très nombreuses manières de confiner des atomes, toutes ne sont pas adaptées au refroidissement Raman. Par exemple, le piège magnéto-optique ne convient pas, parce que les atomes y émettent continuellement des photons spontanés, ce qui induit un processus de chauffage incompatible avec le maintien d'une température sub-recul (ou de l'ordre du recul). De façon générale, un piège compatible avec le refroidissement Raman doit remplir deux critères :

- le piège doit être suffisamment profond (de façon à pouvoir contenir le nuage atomique avant le refroidissement Raman), et posséder une durée de vie suffisamment grande (*i.e.* supérieure au temps typique de refroidissement, qui est de quelques secondes pour le refroidissement en impulsions par passage adiabatique) ;
- le piège doit être compatible avec le fonctionnement du refroidissement Raman. Ceci exclut, ainsi que je viens de le dire, les pièges induisant l'émission de photons spontanés (comme le piège magnéto-optique). D'autres caractéristiques peuvent également perturber le refroidissement Raman (c'est le cas par exemple si la constante de raideur n'est pas la même pour des atomes situés dans le niveau $|1\rangle$ et dans le niveau $|2\rangle$) ;

Ce chapitre sera consacré à l'étude théorique et expérimentale d'un piège pouvant servir au refroidissement Raman : le piège opto-électrique (POE). Ce piège est constitué d'une électrode portée à un potentiel élevé (12 kV sur l'expérience), servant à compenser la gravité et à confiner les atomes dans la direction verticale.

Un faisceau laser focalisé et très désaccordé réalise le confinement transverse. Afin de justifier le choix de cette configuration, je commencerai par étudier le cas d'un piège dipolaire standard (§ 3.1.*a*), et je montrerai pourquoi il n'est pas très bien adapté au refroidissement Raman. Les caractéristiques du piège opto-électrique seront présentées au paragraphe 3.1.*b*. Je passerai ensuite à la réalisation expérimentale : le dispositif et le fonctionnement de notre expérience seront décrits dans la section 3.2. J'exposerai les résultats expérimentaux (signature du confinement et caractéristiques du piège) au paragraphe 3.3.

Le piège opto-électrique n'est pas le seul type de piège compatible avec le refroidissement Raman que j'aie envisagé. Il existe en particulier une autre solution, combinant le piégeage magnétique et la compensation de la gravité à l'aide d'une électrode. Ce piège électrostatique et magnétostatique est présenté théoriquement à la fin de ce chapitre (complément 3.A, p. 179). Le refroidissement Raman dans un tel piège est basé sur une exploitation particulièrement agréable des symétries et des règles de sélection. Toutefois, sa réalisation pratique serait assez délicate. C'est pourquoi nous avons renoncé à le mettre en œuvre expérimentalement, et avons opté pour le piège opto-électrique.

1. Principe du piège opto-électrique

a) Le piège dipolaire très désaccordé

i) Principe général du piège dipolaire

Le piégeage d'atomes par force dipolaire est devenu une technique de confinement bien standard [124–127]. Le principe est le suivant : un atome interagissant avec de la lumière est soumis à deux forces [119, p. 356 ; 128], la force de pression de radiation (proportionnelle au gradient de la phase du champ), et la force dipolaire, proportionnelle au gradient de l'intensité du champ. Lorsque le désaccord du laser δ_{dip} est suffisamment grand[1], c'est la force dipolaire qui prédomine. Lorsque la saturation du laser est faible, l'expression de cette dernière est

$$\vec{\mathcal{F}}_{\text{dip}} = \vec{\nabla} \frac{\hbar |\Omega_{\text{dip}}|^2}{4\delta_{\text{dip}}}, \tag{3.1}$$

Ω_{dip} étant la fréquence de Rabi traduisant le couplage atome-laser.

On voit donc que la force dipolaire dérive d'un potentiel, lequel est égal (toujours dans le cas d'une faible saturation) au déplacement lumineux induit par le laser sur le niveau fondamental (ou le niveau métastable) de l'atome. En particulier, si le désaccord δ_{dip} du laser est négatif, l'atome sera attiré vers les maxima d'intensité lumineuse.

1. En particulier $\delta_{\text{dip}} \gg \Gamma$. Cette condition est nécessaire, mais n'est pas suffisante si l'intensité lumineuse varie peu à l'échelle de la longueur d'onde optique.

Pour fabriquer un piège dipolaire, il suffit de créer un fort gradient d'intensité. Pour ce faire, la solution la plus simple est de focaliser fortement un faisceau. Les atomes seront ainsi confinés au foyer, *i.e.* là où se trouve le maximum d'intensité.

ii) Intensité lumineuse au voisinage du foyer d'un faisceau gaussien

L'expression du champ électrique, pour un faisceau gaussien focalisé se propageant dans la direction z et dont le foyer se situe à l'origine des coordonnées, est donnée par [129, section 3.2]

$$\vec{E}_{\rm dip}(x,y,z) = \Re\mathrm{e}\left\{\mathcal{E}_{\rm dip}\vec{\varepsilon}_{\rm dip}\frac{c_0}{c(z)}\exp\left[-i\left(k_{\rm dip}z-\Phi(z)\right)-(x^2+y^2)\left(\frac{1}{c^2(z)}+\frac{ik_{\rm dip}}{2\mathcal{R}(z)}\right)\right]e^{i\omega_{\rm dip}t}\right\}, \tag{3.2}$$

où c_0 est le col du faisceau, $\lambda_{\rm dip}$ sa longueur d'onde, $\vec{k}_{\rm dip} = k_{\rm dip}\vec{u}_z$ son vecteur d'onde, $\omega_{\rm dip}$ sa fréquence, et

$$c^2(z) = c_0^2\left[1+\left(\frac{\lambda_{\rm dip}z}{\pi c_0^2}\right)^2\right] \tag{3.3.a}$$

$$\mathcal{R}(z) = z\left[1+\left(\frac{\pi c_0^2}{\lambda_{\rm dip}z}\right)^2\right] \tag{3.3.b}$$

$$\Phi(z) = \arctan\left(\frac{\lambda_{\rm dip}z}{\pi c_0^2}\right). \tag{3.3.c}$$

On fait l'hypothèse que l'angle de focalisation

$$\Theta = \frac{\lambda_{\rm dip}}{\pi c_0} \tag{3.4}$$

est petit devant 1, c'est-à-dire

$$\boxed{\lambda_{\rm dip} \ll c_0\,.} \tag{3.5}$$

Au voisinage du foyer du faisceau, c'est-à-dire pour

$$|z| \ll \frac{c_0}{\Theta} \tag{3.6}$$

et

$$|x|, |y| \ll c_0\,, \tag{3.7}$$

on peut faire un développement limité de (3.2) :

$$\|\vec{E}_{\rm dip}\|^2 = |\mathcal{E}_{\rm dip}|^2\left(1-\frac{\Theta^2z^2}{c_0^2}-2\frac{x^2+y^2}{c_0^2}\right). \tag{3.8}$$

Remarque: on voit sur la formule (3.8) qu'il existe un profonde asymétrie entre les directions x et y d'une part, et la direction z d'autre part. En particulier, la fréquence d'oscillation dans la direction de l'axe du faisceau sera beaucoup plus faible (*i.e.* d'un facteur pouvant aller de 10 environ jusqu'à l'infini) que les fréquences d'oscillation transverses. Les simulations de Monte-Carlo que j'ai effectuées ne permettent pas de conclure qu'une telle asymétrie est nuisible au refroidissement Raman (pourvu que les fréquences d'oscillation soient toutes très inférieures à la fréquence de recul). Toutefois, il est possible de rétablir une symétrie entre les fréquences d'oscillations (du moins en terme d'ordre de grandeur) en utilisant deux faisceaux croisés, comme il est fait dans [130] (piège dipolaire croisé).

iii) Déplacement lumineux des niveaux du césium

Plaçons nous dans le cas du césium, qui est utilisé pour la plupart des expériences effectuées dans notre équipe[1]. En l'absence de champ magnétique, les sous-niveaux Zeeman sont dégénérés.

Je supposerai que le faisceau laser utilisé pour le confinement par force dipolaire est désaccordé quelques centaines de GHz (ou davantage) sur le rouge de la transition $6^2\mathrm{S}_{1/2} \rightarrow 6^2\mathrm{P}_{3/2}$ c'est-à-dire d'une quantité très supérieure aux structures hyperfines de l'état $|6^2\mathrm{P}\rangle$. Je vais montrer que dans ce cas, et lorsque la polarisation du faisceau est linéaire, le déplacement lumineux est le même pour tous les sous-niveaux hyperfins et Zeeman de l'état fondamental $|6^2\mathrm{S}_{1/2}\rangle$.

Je commence par définir l'opérateur déplacement lumineux $\mathcal{W}$ par l'expression

$$\mathcal{W} = \frac{\left(\vec{D}\cdot\vec{E}_{\mathrm{dip}}\right)^2}{\hbar\Delta_{\mathrm{dip}}}, \tag{3.9}$$

où $\vec{D}$ est l'opérateur dipôle, et Δ_{dip} le désaccord du faisceau dipolaire (supposé non nul) que l'on considère lui aussi comme un opérateur (puisqu'*a priori* il dépend du niveau excité considéré). Le but est de calculer l'élément de matrice de $\mathcal{W}$, *i.e.*

$$\begin{aligned}
&\left\langle 6^2\mathrm{S}_{1/2}, F_1, m_1|\mathcal{W}|6^2\mathrm{S}_{1/2}, F_2, m_2\right\rangle \\
&= \sum_{J'=1/2,\,3/2}\ \sum_{F'}\ \sum_{m'=-F'}^{F'} \frac{\left\langle 6^2\mathrm{S}_{1/2}, F_1, m_1|\vec{D}^-\cdot\vec{E}^-_{\mathrm{dip}}|6^2\mathrm{P}_{J'}, F', m'\right\rangle\left\langle 6^2\mathrm{P}_{J'}, F', m'|\vec{D}^+\cdot\vec{E}^+_{\mathrm{dip}}|6^2\mathrm{S}_{1/2}, F_2, m_2\right\rangle}{\hbar\omega_{\mathrm{dip}} - E_{6^2\mathrm{P}_{J'},F'}}.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

où $\vec{D}^+$ (resp. $\vec{D}^-$) est la partie montante (resp. descendante) de l'opérateur dipôle, et $\vec{E}^+_{\mathrm{dip}}$ (resp. $\vec{E}^-_{\mathrm{dip}}$) est la partie du champ oscillant en $\exp(-i\omega_{\mathrm{dip}}t)$ (resp. en $\exp(i\omega_{\mathrm{dip}}t)$). Je désigne par $E_{6^2\mathrm{P}_{J'},F'}$ l'énergie de l'état excité $|6^2\mathrm{P}_{J'}, F'\rangle$ (en

1. Voir la structure des niveaux du césium sur la figure 0.3, p. 18.

posant que l'énergie de l'état fondamental est nulle). J'ai écrit l'équation (3.10) dans le cadre de l'approximation du champ tournant. Ceci nécessite donc que le faisceau dipolaire soit quasi-résonnant (*i.e.* $\delta_{\text{dip}} \ll \omega_{\text{dip}}$), et que les contributions des autres niveaux puissent être négligées.

Dans le cas où le désaccord du faisceau dipolaire est grand devant les structures hyperfines de l'état $|6^2\text{P}\rangle$ (mais non nécessairement devant la structure hyperfine de $6^2\text{S}\rangle$), l'équation (3.10) se simplifie en

$$\left\langle 6^2\text{S}_{1/2}, F_1, m_1 | \mathcal{W} | 6^2\text{S}_{1/2}, F_2, m_2 \right\rangle = \sum_{J'=1/2,\,3/2} \frac{1}{\hbar\omega_{\text{dip}} - E_{6^2\text{P}_{J'}}} \times \sum_{F'} \sum_{m'=-F'}^{F'} \left\langle 6^2\text{S}_{1/2}, F_1, m_1 | \vec{D}^- \cdot \vec{E}^-_{\text{dip}} | 6^2\text{P}_{J'}, F', m' \right\rangle \left\langle 6^2\text{P}_{J'}, F', m' | \vec{D}^+ \cdot \vec{E}^+_{\text{dip}} | 6^2\text{S}_{1/2}, F_2, m_2 \right\rangle . \tag{3.11}$$

L'opérateur dipôle électrique $\vec{D}$ commute avec l'opérateur de structure hyperfine $\vec{I} \cdot \vec{J}$ (où $\vec{J}$ est la somme des spins des électrons et $\vec{I}$ le spin nucléaire). Par conséquent, il est plus avantageux de calculer un élément de matrice dans la base découplée. On obtient donc

$$\left\langle 6^2\text{S}_{1/2}, m_J, m_I | \mathcal{W} | 6^2\text{S}_{1/2}, m_J, m_I \right\rangle = \sum_{J'=1/2,\,3/2} \frac{1}{\hbar\omega_{\text{dip}} - E_{6^2\text{P}_{J'}}} \times \sum_{m_{J'}=-J'}^{J'} \left\langle 6^2\text{S}_{1/2}, m_J, m_I | \vec{D}^- \cdot \vec{E}^-_{\text{dip}} | 6^2\text{P}_{J'}, m_{J'}, m_I \right\rangle \left\langle 6^2\text{P}_{J'}, m_{J'}, m_I | \vec{D}^+ \cdot \vec{E}^+_{\text{dip}} | 6^2\text{S}_{1/2}, m_J, m_I \right\rangle , \tag{3.12}$$

où m_J et m_I sont les nombres quantiques décrivant les spins des électrons et du noyau (les éléments de matrices non diagonaux par rapport à ces deux nombres quantiques sont nuls).

On reconnaît dans la formule (3.12) le produit de deux éléments de matrice d'un opérateur vectoriel, pris entre un état fondamental de moment cinétique $1/2$ et un état excité de moment cinétique $1/2$ ou $3/2$ (le spin nucléaire étant « spectateur »). Les coefficients de Clebsch-Gordan correspondants à ces deux transitions sont rappelés sur la figure 3.1.

Plaçons-nous tout d'abord dans le cas où la polarisation du faisceau est linéaire. On peut alors choisir un axe de quantification parallèle à la polarisation du faisceau. On voit donc que les carrés des coefficients de Clebsh-Gordan qui interviennent sont les mêmes dans l'état $|6^2\text{S}_{1/2}, m_J = +1/2\rangle$ et dans l'état $|6^2\text{S}_{1/2}, m_J = -1/2\rangle$. L'élément de matrice sera donc le même, et par suite, l'opérateur $\mathcal{W}$ sera scalaire dans le sous-espace $6^2\text{S}_{1/2}$. Le déplacement lumineux sera indépendant du sous-niveau Zeeman et du niveau hyperfin. Remarquons que cette propriété n'est plus vraie si le laser est polarisé circulairement ou elliptiquement

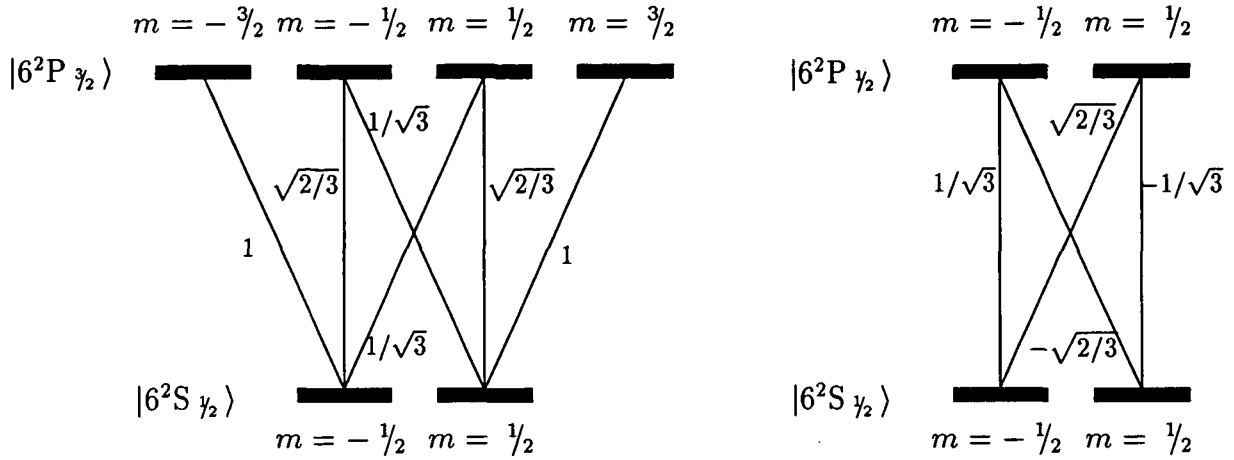


FIG. 3.1 - *Coefficients de Clebsch-Gordan des transitions* $1/2 \rightarrow 3/2$ *et* $1/2 \rightarrow 1/2$.

(car dans ce cas les coefficients de Clebsch-Gordan qui entrent en jeu ne sont plus les mêmes dans l'état $|6^2\mathrm{S}_{1/2}, m_J = +1/2\rangle$ et dans l'état $|6^2\mathrm{S}_{1/2}, m_J = -1/2\rangle$. Le fait que le niveau fondamental soit un état de spin $1/2$ est également crucial ; dans le cas contraire, les coefficients de Clebsch-Gordan ne seraient pas tous semblables, même en polarisation linéaire (l'opérateur $\mathcal{W}$ contiendrait une composante tensorielle d'ordre 2). La propriété du déplacement lumineux que je viens de démontrer ne peut donc pas être généralisée à un niveau excité du césium, ni non plus à un atome autre qu'un alcalin.

Tous les niveaux sont déplacés de la même quantité ; le piège aura la même pente quel que soit le niveau dans lequel se trouve l'atome, ce qui correspond aux conditions dans lesquelles je me suis placé au chapitre 2. Pour effectuer le refroidissement Raman, je choisirai les niveaux $|1\rangle = |6^2\mathrm{S}_{1/2}, F = 3\rangle$, $|2\rangle = |6^2\mathrm{S}_{1/2}, F = 4\rangle$, et $|e\rangle = |6^2\mathrm{P}_{3/2}, F = 3\rangle$. Il s'agit du même choix qu'au chapitre 1. L'expression du potentiel de confinement (et donc du tenseur de rappel $\vec{=}[K]$) se déduit de la formule (3.8), *i.e.*

$$U(\vec{R}) = \frac{\hbar|\Omega_{\mathrm{dip}}|^2}{4\delta_{\mathrm{dip}}}\left(1 - \frac{\Theta^2 z^2}{c_0^2} - 2\frac{x^2+y^2}{c_0^2}\right) . \tag{3.13}$$

Remarques :

- les déplacements lumineux dans les alcalins ont été calculés et mesurés avec précision dans [131, 132]. Des considérations de symétries analogues à celles que je viens d'évoquer ont en outre été introduites à propos des transitions à deux photons [133, 134] ;

- le résultat que je viens d'établir ne nécessite nullement que l'approximation du champ tournant soit applicable (*i.e.* que le laser soit quasi-résonnant). Si tel n'est pas le cas, l'élément de matrice de l'opérateur déplacement lumineux contient un plus grand nombre de termes (*i.e.* des termes anti-résonnants et des

termes faisant intervenir des niveaux excités supérieurs) ; cependant, les mêmes considérations de symétrie peuvent être appliquées à ces termes supplémentaires, pourvu que le désaccord du laser par rapport chaque niveau soit grand devant la structure hyperfine de ce niveau (et ce parce que l'état fondamental est de spin $1/2$, et donc ne peut être couplé qu'avec des états de spin $1/2$ ou $3/2$) ;

– dans le cas où le désaccord δ_{dip} est grand devant la structure fine (*i.e.* $\Delta\lambda_{\text{dip}} = \lambda_{\text{dip}} - \lambda_{\text{at}} \gg 42$ nm), on peut également découpler cette structure fine. Tout se passe comme si l'on travaillait sur une transition $0 \rightarrow 1$ (*i.e.* une transition entre $|6^2\text{S}\rangle$ et $|6^2\text{P}\rangle$). Du fait de l'égalité des coefficients de Clebsch-Gordan, le déplacement lumineux est alors un opérateur scalaire quelle que soit la polarisation du faisceau ;

– ce résultat peut également être appliqué dans le cas d'un champ électrique statique : la polarisabilité statique α du niveau $6^2\text{S}_{1/2}$ du césium, que l'on définit par

$$\Delta E_{\text{Stark}} = -\frac{\alpha}{2}\left\|\vec{E}\right\|^2 \tag{3.14}$$

(où ΔE_{Stark} est le déplacement du niveau par effet Stark), est indépendante du sous-niveau Zeeman et du niveau hyperfin. La valeur numérique de α, qui a été évaluée aussi bien théoriquement [135, 136] qu'expérimentalement [137], est $\alpha = 5{,}8.10^{-39}$ J.V^{-2}.m^2 (des mesures du déplacement de la raie $6^2\text{S} \rightarrow 6^2\text{P}$ ont également été effectuées [138–140]). La variation de l'écartement des deux niveaux hyperfins $|F = 3\rangle$ et $|F = 4\rangle$ du fondamental due aux contributions de termes d'ordre supérieur a par ailleurs été évaluée [141, 142]. Le résultat est $\alpha_{F=4,m_F=0} - \alpha_{F=3,m_F=0} = 3{,}03.10^{-43}$ J.V^2.m^{-2} ;

On peut également appliquer ces considérations de symétries au cas d'une transition Raman entre $|6^2\text{S}_{1/2}, F = 3\rangle$ et $|6^2\text{S}_{1/2}, F = 4\rangle$ (*i.e.* à la transition utilisée pour réaliser le refroidissement Raman des atomes de césium). Je définis l'opérateur de transition Raman par

$$\mathcal{W}_{\text{Raman}} = \frac{\left(\vec{D}\cdot\vec{E}_A\right)\left(\vec{D}\cdot\vec{E}_B\right)}{4\Delta}, \tag{3.15}$$

où Δ est le désaccord défini sur la figure 2.1 (p. 55), supposé grand devant la structure hyperfine, et $\vec{E}_{A,B}$ les champs électriques crêtes des deux lasers Raman. Si les deux faisceaux Raman ont la même polarisation linéaire, alors l'opérateur $\mathcal{W}_{\text{Raman}}$ est un opérateur scalaire dans l'espace $|6^2\text{S}_{1/2}\rangle$. Par conséquent, il ne peut pas coupler des états de F différents (qui sont orthogonaux), et la transition Raman ne peut avoir lieu. Dans le cas d'une configuration $\sigma^+ - \sigma^-$, la transition Raman ne fonctionne pas non plus : on se convainc en effet aisément qu'une telle transition est interdite sur une configuration $1/2 \rightarrow 1/2$ ou $1/2 \rightarrow 3/2$. Par contre, rien n'interdit *a priori* la transition Raman si les deux polarisations sont linéaires et orthogonales entre elles ; c'est la configuration que nous avons choisie au chapitre 1 (p. 38), car elle garantit en outre l'égalité des déplacements lumineux entre les sous-niveaux Zeeman et hyperfins. Signalons enfin que dans le cas où le désaccord Δ est grand devant la structure fine, il devient impossible d'effectuer une transition Raman.

iv) Conditions de fonctionnement du piège dipolaire

Le but de ce paragraphe est d'étudier quelles valeurs du désaccord δ_{dip} et de la fréquence de Rabi Ω_{dip} du faisceau de piégeage sont compatibles avec le refroidissement Raman.

Désaccord du faisceau-piège. Comme nous venons de le voir, le désaccord δ_{dip} du faisceau-piège doit être grand devant la structure hyperfine du niveau excité, afin de déplacer tous les sous-niveaux de la même manière. Il doit également être inférieur à la fréquence de la transition elle-même (pour des raisons de bon sens). De plus, le faisceau piège ne doit pas être résonnant ou quasi-résonnant avec la raie D1 (transition $|6^2\text{S}\ {}_1/_2\rangle \rightarrow |6^2\text{P}\ {}_1/_2\rangle$). D'où les conditions (voir la figure 0.3, p. 18) :

$$\boxed{\begin{array}{c} 1{,}7.10^{13}\ \text{Hz} \gg \left|\dfrac{\delta_{\text{dip}}}{2\pi}\right| \gg 2{,}51.10^{8}\ \text{Hz} \\ \text{ou} \\ 3{,}5.10^{14}\ \text{Hz} > \left|\dfrac{\delta_{\text{dip}}}{2\pi}\right| \gg 1{,}7.10^{13}\ \text{Hz}\,. \end{array}} \tag{3.16}$$

Facteur de sécurité : sur la condition relative à la structure hyperfine, j'imposerai un facteur 10 de marge. J'imposerai en outre que le désaccord par rapport à la raie D1 soit au moins égal à la moitié de la structure fine (*i.e.* $8{,}3.10^{12}$ Hz). D'où la condition

$$3{,}5.10^{14}\ \text{Hz} > \left|\frac{\delta_{\text{dip}}}{2\pi}\right| \geqslant 2{,}5.10^{13}\ \text{Hz} \quad \text{ou} \quad 8{,}3.10^{12}\ \text{Hz} \geqslant \left|\frac{\delta_{\text{dip}}}{2\pi}\right| \geqslant 2{,}51.10^{9}\ \text{Hz}\,. \tag{3.17}$$

Compensation de la gravité et profondeur du piège. La constante de rappel du piège dipolaire est plus importante dans la direction transverse du faisceau. Il convient donc de placer le faisceau horizontalement, afin de compenser plus facilement la gravité. Au point $(x, y = 0, z = 0)$, le potentiel vu par l'atome, tenant compte de la gravité, est

$$U(x,0,0) = \frac{\hbar|\Omega_{\text{dip}}|^2}{4\delta_{\text{dip}}} \exp\left(-2\frac{x^2}{c_0^2}\right) + Mgx\,, \tag{3.18}$$

où je rappelle que $\delta_{\text{dip}} < 0$.

Soit U_{min} la profondeur minimale du piège que l'on s'impose (on prendra typiquement $0{,}1\,\hbar\Gamma$, où Γ est la largeur naturelle de l'état excité du césium). Il est difficile d'imposer que la profondeur du piège soit exactement U_{min} (car les équations ne sont pas solubles), mais on peut facilement majorer cette condition.

En écrivant la différence de potentiel entre le point $x = 0$ et le point $x = -c_0$, on déduit la condition

$$\boxed{\frac{\hbar|\Omega_{\rm dip}|^2}{4|\delta_{\rm dip}|}(1 - e^{-2}) \geqslant U_{\rm min} + Mgc_0\,.} \tag{3.19}$$

Piège lâche. J'ai mentionné au paragraphe 2.1.*c.iv* (p. 64) qu'il n'était pas souhaitable de se placer dans le régime de Lamb-Dicke (qui correspond à $\omega_{x,y,z} \gg \omega_{\rm rec}$), car ce régime implique de fortes densités dès qu'il y a plus d'un atome. Le refroidissement est alors très perturbé par les interactions entre dipôles atomiques. J'imposerai ici la condition inverse, *i.e.* $\omega_{x,y,z} \ll \omega_{\rm rec}$, qui est l'hypothèse de validité du traitement classique du refroidissement que j'ai effectué au chapitre 2. Cette hypothèse est également nécessaire au refroidissement par passage adiabatique (§ 2.5.*b*, p. 98). Signalons toutefois que le refroidissement Raman reste *a priori* possible lorsque $\omega_{x,y,z} \sim \omega_{\rm rec}$.

Les fréquences d'oscillations les plus élevées étant les fréquences transverses, on en déduit la condition

$$\boxed{\sqrt{\frac{\hbar|\Omega_{\rm dip}|^2}{Mc_0^2|\delta_{\rm dip}|}} \ll \omega_{\rm rec}\,.} \tag{3.20}$$

Facteur de sécurité: j'imposerai un facteur 3 sur la condition (3.20) (je rappelle en outre que $\omega_{\rm rec} = Mv_{\rm rec}^2/(2\hbar) = kv_{\rm rec}/2$). J'en déduis la condition

$$\frac{\hbar|\Omega_{\rm dip}|^2}{|\delta_{\rm dip}|} \leqslant 0{,}1Mc_0^2\,\omega_{\rm rec}^2\,. \tag{3.21}$$

Remarque: compte tenu des ordres de grandeurs choisis pour c_0 et des conditions (3.17) imposées sur le désaccord, la condition (3.20) implique que le faisceau dipolaire est faiblement saturé ($\delta_{\rm dip} \gg \Omega_{\rm dip}$).

Puissance du faisceau de piégeage. Je vais maintenant imposer une condition bassement matérielle: la fréquence de Rabi $\Omega_{\rm dip}$ doit correspondre à une puissance laser réalisable dans l'état actuel de la technologie.

Pour un faisceau gaussien quasi-résonnant ($\delta_{\rm dip} \ll \omega_{\rm at}$, où $\omega_{\rm at}$ est la fréquence de résonance atomique), la fréquence de Rabi $\Omega_{\rm dip}$ est reliée à la puissance du faisceau $P_{\rm dip}$ par la formule

$$\boxed{\frac{\Omega_{\rm dip}}{\Gamma} = \sqrt{\frac{12c^2}{\hbar\Gamma\omega_{\rm at}^3 c_0^2}P_{\rm dip}}\,.} \tag{3.22}$$

La formule (3.22) s'établit en intégrant le flux du vecteur de Poynting. On relie Γ à l'élément de matrice du dipôle par la célèbre formule

$$\Gamma = \frac{d^2\omega_{\text{at}}^3}{3\pi\varepsilon_0\hbar c^3}. \tag{3.23}$$

Numériquement, dans le cas du césium, on obtient

$$\frac{\Omega_{\text{dip}}}{\Gamma} = 0{,}168\sqrt{\frac{P_{\text{dip}}}{c_0^2}}, \tag{3.24}$$

la puissance P_{dip} étant exprimée en W, et le col c_0 en m.

Si le laser cesse d'être quasi-résonnant, il n'est plus possible d'employer la formule (3.22). Par contre, dans le cas où $\omega_{\text{dip}} \ll \omega_{\text{at}}$, on peut considérer le champ du laser comme un champ électrique quasi-statique (les expériences de piégeage d'atomes avec un laser CO_2 [127] correspondent à ce cas de figure). Le déplacement des niveaux peut alors se calculer en utilisant la polarisabilité statique du césium $\alpha = 5{,}8.10^{-39}$ J.m^2.V^{-2}. Je rappelle que dans le cas statique, le déplacement Stark du niveau fondamental est donné par la formule (3.14). Si le champ est oscillant, on ne doit conserver que les termes de fréquence nulle (on suppose que le temps de réponse mécanique de l'atome est long devant la période du laser $2\pi/\omega_{\text{dip}}$). On obtient donc

$$\Delta E_{\text{Dépl. lum.}} \underset{\omega_{\text{dip}} \ll \omega_{\text{at}}}{=} -\frac{\alpha}{4}\|\vec{\mathcal{E}}\|^2, \tag{3.25}$$

où $\vec{\mathcal{E}}$ est l'amplitude crête du champ, *i.e.* $\vec{E}(t) = \vec{\mathcal{E}}/2\exp(i\omega_{\text{dip}}t) + \text{c.c.}$ On déduit finalement l'expression du déplacement lumineux

$$\boxed{\Delta E_{\text{Dépl. lum.}} \underset{\omega_{\text{dip}} \ll \omega_{\text{at}}}{=} -\frac{4\alpha}{c_0^2}\frac{P_{\text{dip}}}{4\pi\varepsilon_0 c}.} \tag{3.26}$$

Remarques :

– dans le cas quasi-statique, et par souci de commodité, je définirai une fréquence de Rabi par

$$\Omega_{\text{dip}}^2 = \frac{4\delta_{\text{dip}}}{\hbar}|\Delta E_{\text{Dépl. Lum.}}|. \tag{3.27}$$

Cette définition n'a *a priori* pas de sens physique, mais permet d'appliquer les formules (3.19) et (3.20) (qui en fait ne font intervenir que le déplacement lumineux) ;

– dans le cas quasi-résonnant, on peut écrire la relation

$$\Delta E_{\text{Dépl. lum.}} = \frac{\hbar|\Omega_{\text{dip}}|^2}{4\delta_{\text{dip}}} = -\frac{\alpha_{\text{quasi rés.}}}{4}\|\vec{\mathcal{E}}\|^2 , \tag{3.28}$$

où la polarisabilité quasi-résonnante $\alpha_{\text{quasi rés.}}$ est donnée par

$$\alpha_{\text{quasi rés.}} \equiv \frac{3\pi\varepsilon_0 c^3\Gamma}{\omega_{\text{at}}^3|\delta_{\text{dip}}|} . \tag{3.29}$$

Dans le cas où $\lambda_{\text{dip}} = 1{,}06$ µm, on trouve $\alpha_{\text{quasi rés.}} = 1{,}6.10^{-38}$ J.m^2.V^{-2}.

Chauffage par le faisceau-piège. Un piège dipolaire n'est pas tout à fait un piège conservatif : les photons du laser peuvent diffuser sur les atomes, ce qui induit un réchauffement de ceux-ci. Je me propose donc de chiffrer ce phénomène.

Excitation résiduelle dans le cas quasi-résonnant. Pour commencer, je me place dans la situation où le laser est quasi-résonnant ($\delta_{\text{dip}} \ll \omega_{\text{dip}}$). Dans ce cas, un atome est susceptible d'absorber un photon du laser, et d'émettre ensuite un photon de façon spontanée. Le refroidissement Raman fonctionnera si le délai d'absorption d'un photon du laser est plus long que le temps typique de refroidissement τ_{ref}. J'écrirai donc (sachant que $\delta_{\text{dip}} \gg \Omega_{\text{dip}}$)

$$\boxed{\Gamma\frac{|\Omega_{\text{dip}}|^2}{4\delta_{\text{dip}}^2} \ll \frac{1}{\tau_{\text{ref}}} .} \tag{3.30}$$

En pratique, je supposerai que $\tau_{\text{ref}} \sim 2$ s. J'imposerai à l'équation (3.30) un facteur 2 de sécurité, d'où la condition

$$\Gamma\frac{|\Omega_{\text{dip}}|^2}{4\delta_{\text{dip}}^2} \leqslant \frac{1}{2\tau_{\text{ref}}} . \tag{3.31}$$

Fluctuation de la force dipolaire. En dehors de l'excitation résiduelle, il existe une autre source de chauffage (toujours dans le cas d'un laser quasi-résonnant), due aux fluctuations quantiques de la force dipolaire [124, 143]. Elle induit un coefficient de diffusion dont l'expression est donnée par

$$D_{\text{fluct.}} = \frac{\hbar^2}{2\Gamma}\left(\frac{\Omega_{\text{dip}}^2}{\Omega_{\text{dip}}^2 + 2\delta_{\text{dip}}^2}\right)^3 \left(\vec{\nabla}\Omega(x,y,z)\right)^2 . \tag{3.32}$$

Je rappelle que la définition d'un coefficient de diffusion est

$$\frac{\mathrm{d}\left\langle \vec{P}^2 \right\rangle}{\mathrm{d}t} = 2D . \tag{3.33}$$

Ce qui nous intéresse est le temps $\hbar^2k^2/(2D)$, qui est le temps au bout duquel l'impulsion quadratique moyenne aura augmenté de $\hbar k$: en le comparant à τ_{ref}, on peut déterminer s'il est possible de refroidir à T_{rec}.

Le gradient de la fréquence de Rabi figurant dans l'expression (3.32) se calcule en utilisant la formule (3.2) du faisceau gaussien. On trouve $(\vec{\nabla}\Omega)^2 \leqslant 4\Omega_{\text{dip}}^2/(ec_0^2)$ ($e = \exp 1$). En supposant que $\delta_{\text{dip}} \gg \Omega_{\text{dip}}$, on déduit la condition

$$\boxed{\frac{\Omega_{\text{dip}}^8}{2e\delta_{\text{dip}}^6\Gamma k^2 c_0^2} \ll \frac{1}{\tau_{\text{ref}}}.} \tag{3.34}$$

Facteur de sécurité : j'imposerai un facteur 3 sur la condition (3.34), soit

$$\frac{\Omega_{\text{dip}}^4}{\delta_{\text{dip}}^3} \leqslant 4kc_0\sqrt{\frac{\Gamma}{\tau_{\text{ref}}}}. \tag{3.35}$$

Diffusion des photons dans le cas quasi-statique. Dans le cas quasi-statique ($\omega_{\text{dip}} \ll \omega_{\text{at}}$) les formules (3.30) et (3.34) ne sont plus valables. Le chauffage doit être évalué en utilisant la formule de la diffusion Rayleigh [119, formule (2) p. 499]. La section efficace totale de diffusion d'un photon par un atome est donnée par

$$\sigma_{\text{tot}} = \frac{8\pi}{3} r_{\text{class}}^2 \left(\frac{\omega_{\text{dip}}}{\omega_{\text{at}}}\right)^4, \tag{3.36}$$

où r_{class} est le rayon classique de l'électron $\hbar\alpha_{\text{s.f.}}/(m_{\text{él.}}c)$, $m_{\text{él.}}$ étant la masse de l'électron et $\alpha_{\text{s.f.}}$ la constante de structure fine. Le flux de photons par unité de surface, sur l'axe du laser, étant $P_{\text{dip}}/(\hbar\omega_{\text{dip}}) \times 2/(\pi c_0^2)$, on déduit le nombre de photons diffusés sur chaque atome, par unité de temps

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = \frac{16}{3}\frac{r_{\text{cl.}}^2}{c_0^2}\left(\frac{\omega_{\text{dip}}}{\omega_{\text{at}}}\right)^4 \frac{P_{\text{dip}}}{\hbar\omega_{\text{dip}}}. \tag{3.37}$$

J'imposerai donc qu'aucun photon ne diffuse sur un atome pendant le temps de refroidissement, soit

$$\boxed{\frac{16}{3}\frac{r_{\text{cl.}}^2}{c_0^2}\left(\frac{\omega_{\text{dip}}}{\omega_{\text{at}}}\right)^4 \frac{P_{\text{dip}}}{\hbar\omega_{\text{dip}}} \leqslant \frac{1}{\tau_{\text{ref}}}.} \tag{3.38}$$

Je ne rajouterai pas de facteur de sécurité à la condition (3.38). En effet, dans le présent cas de figure, l'impulsion des photons est très inférieure à $\hbar k_{\text{résonn.}}$. Par conséquent, le recul induit par la diffusion d'un photon sur l'atome est petit

devant Mv_{rec} (v_{rec} étant la vitesse de recul d'un photon résonnant). Le refroidissement Raman ne sera donc pas très perturbé si quelques photons infrarouge lointain viennent diffuser sur l'atome pendant τ_{ref}.

Remarque : en utilisant la définition (3.26)-(3.27) de la fréquence de Rabi, la condition (3.38) devient

$$\Omega_{\text{dip}}^2 \leqslant \frac{3}{4}\omega_{\text{at}}^2 \left(\frac{\omega_{\text{at}}}{\omega_{\text{dip}}}\right)^3 \frac{\alpha}{r_{\text{cl.}}^2 \pi \varepsilon_0 c \tau_{\text{ref}}}. \tag{3.39}$$

Diagrammes de fonctionnement. Les conditions (3.17), (3.19), (3.21), (3.31), (3.35) et (3.39) (c'est-à-dire tenant compte des « facteurs de sécurité ») sont représentées sur le diagramme fréquence de Rabi/désaccord de la figure 3.2[1]. J'ai également indiqué par des croix les paramètres correspondant à quelques lasers usuels (Titane-Saphir (Ti-Sa) de puissance 1 W à $\lambda = 853$ nm, Yag de puissance 20 W à $\lambda = 1{,}06$ µm, et laser à CO_2 de puissance 100 W à $\lambda = 10{,}6$ µm). J'ai imposé que la profondeur du piège U_{min} soit au moins égale à $0{,}1\,\hbar\Gamma$, de telle sorte que le piège puisse contenir le nuage atomique issu d'un piège magnéto-optique ou d'une mélasse. J'ai pris pour col du faisceau $c_0 = 200$ µm : c'est la valeur maximale compatible avec la profondeur de piège demandée dans le cas du Yag[2]. Le temps de refroidissement τ_{ref} est supposé inférieur ou égal à 2 secondes.

On constate que seul un laser à CO_2 peut convenir au refroidissement Raman dans un piège dipolaire. Dans le cas du Yag, le laser excite les atomes de façon non résonnante avant que le refroidissement Raman ait pu agir[3]. Ce type de laser n'étant pas accordable, la seule solution pour diminuer l'excitation résiduelle est d'augmenter le col du faisceau, et donc de diminuer la profondeur du piège. On pourrait certes penser qu'une profondeur de $0{,}1\,\hbar\Gamma$ est une situation « confortable ». Toutefois, avec les paramètres choisis, la quantité Mgc_0 aussi de l'ordre de $0{,}1\,\hbar\Gamma$. Autrement dit, si l'on souhaite continuer à compenser la gravité, il n'est pas possible de réduire la fréquence de Rabi du faisceau (et donc son excitation résiduelle).

v) Conclusion

La conclusion tirée de la figure 3.2 est passablement pessimiste : le refroidissement Raman dans un piège dipolaire est très difficile à faire. On peut cependant

1. Remarquons que la condition (3.35) (fluctuations de la force dipolaire) ne joue aucun rôle. Toutefois, il était difficile de le prévoir *a priori*.

2. Nous avons toujours intérêt à élargir le col du faisceau au maximum : ceci permet d'augmenter le volume de capture du piège, et donc le nombre d'atomes qu'il contiendra. Remarquons toutefois que pour toutes les expériences de piégeage dipolaire qui ont été réalisées jusqu'ici [125, 126, 130], le col du faisceau est de l'ordre de 10 µm.

3. On observe un photon spontané toutes les 1,4 s. Certes, ce n'est pas loin du seuil requis ; toutefois, il est prudent de se réserver une marge de sécurité.

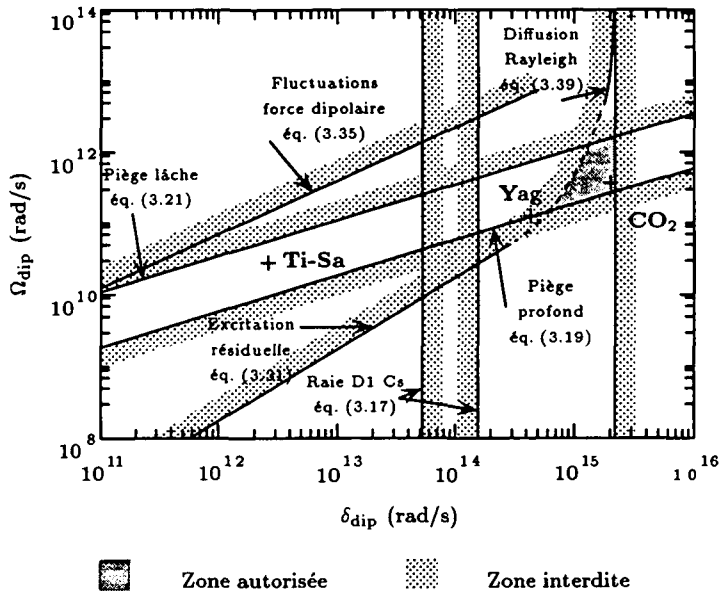


FIG. 3.2 - *Conditions de fonctionnement du refroidissement d'atomes de césium dans un piège dipolaire. Le col du faisceau vaut* $c_0 = 200\ \mu m$*, la profondeur requise pour le piège est* $0{,}1\hbar\Gamma$*, et le refroidissement Raman est supposé réalisable en 2 s. On constate que seul le laser* CO_2 *peut constituer une solution.*

envisager trois pistes à suivre :

– effectuer l'expérience avec un laser CO_2 : c'est le seul cas de figure qui, d'après la figure 3.2, est compatible avec le refroidissement Raman. Signalons que la réalisation de cette expérience dans notre laboratoire demanderait beaucoup de temps et d'argent, parce que le matériel optique dont nous disposons (lentilles à faces traitées anti-reflets, miroirs R_{max}) n'est pas du tout adapté à la longueur d'onde de 10,6 μm (le prix du laser CO_2 est lui aussi non négligeable) ;

– changer d'atome. Avec un atome plus léger (par exemple du sodium), la vitesse de recul est plus élevée, ce qui a pour effet de rendre moins draconiennes les conditions de profondeur du piège, et de lenteur des fréquences d'oscillation ;

– changer le principe du piégeage : c'est la voie que nous avons choisie, avec le piège opto-électrique.

b) Le piège opto-électrique

i) Principe du piégeage

Parmi les conditions imposées au paragraphe 3.1.*a.iv* pour garantir le fonctionnement du piège dipolaire, l'une est particulièrement restrictive : celle liée à la profondeur du piège. Plus précisément, le fait d'être contraint de compenser la gravité (alors que le césium est un atome lourd) impose d'utiliser un faisceau soit

très puissant, soit très focalisé ; on est alors limité par le chauffage résiduel et par les fréquences d'oscillation trop élevées. Si par contre on pouvait, par un moyen quelconque, supprimer l'effet de la gravité, il deviendrait possible de réaliser un piège dipolaire suffisamment profond sans nécessiter une très grande intensité lumineuse.

Pour éliminer l'effet de la gravité, il existe bien sûr la possibilité de transporter l'expérience dans la caravelle du CNES. Toutefois, une autre solution moins coûteuse consiste à compenser l'attraction terrestre à l'aide d'une autre force. Par exemple, on peut utiliser la force induite sur les atomes par un gradient de champ électrique statique : pour un atome dans l'état fondamental $|6^2S\ _{1/2}\rangle$, l'expression de cette force est

$$\vec{\mathcal{F}} = \frac{\alpha}{2}\vec{\nabla}(\vec{E}^2) = \alpha\left(\vec{\nabla}\otimes\vec{E}\right)\cdot\vec{E}\,, \tag{3.40}$$

où $\alpha > 0$ est la polarisabilité statique introduite au paragraphe 3.1.*a.iii*[1]. Les atomes sont attirés vers les régions de fort champ électrique.

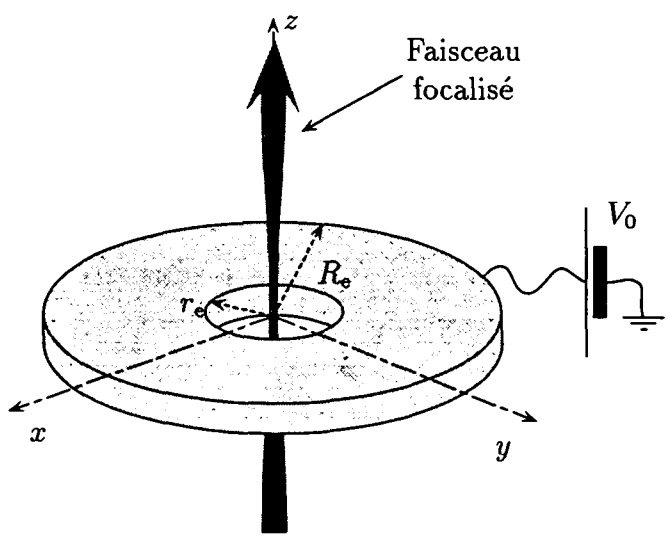


FIG. 3.3 - *L'électrode annulaire et le faisceau très désaccordé qui constituent le piège opto-électrique (POE). La focalisation du faisceau est exagérée sur la figure.*

Nous avons choisi de fabriquer le champ électrique à l'aide d'une électrode portée au potentiel V_0. Je supposerai pour l'instant que le potentiel 0 est à l'infini. L'électrode est un disque circulaire (fig. 3.3) percé d'un petit trou, géométrie qui est le fruit de quelques tâtonnements et non d'une optimisation systématique.

Le carré du champ électrique créé par une telle électrode est représenté en fonction des coordonnées cylindriques r et z sur la figure 3.4. La zone où l'on

1. Le tenseur $\vec{\nabla}\otimes\vec{E}$ est la matrice A de composantes $A_{ij} = \nabla_i E_j$. Les notations tensorielles que j'emploie dans cette thèse (le plus souvent dans la deuxième partie) sont explicitées dans la table II.1, p. 218.

cherche à piéger les atomes est située sur l'axe de révolution ($r = 0$). Faisons dans un premier temps abstraction des degrés de liberté transverses (*i.e.* restreignons-nous à l'axe de révolution). On constate alors que le champ présente un maximum, situé à 1 mm environ au-dessus (et au-dessous) du plan de l'électrode. S'il n'y a pas d'autre force, ce maximum permet de piéger les atomes. En tenant compte de la pesanteur et lorsque l'axe de révolution est vertical, ce puits de potentiel permet, s'il est suffisamment profond, de compenser la gravité.

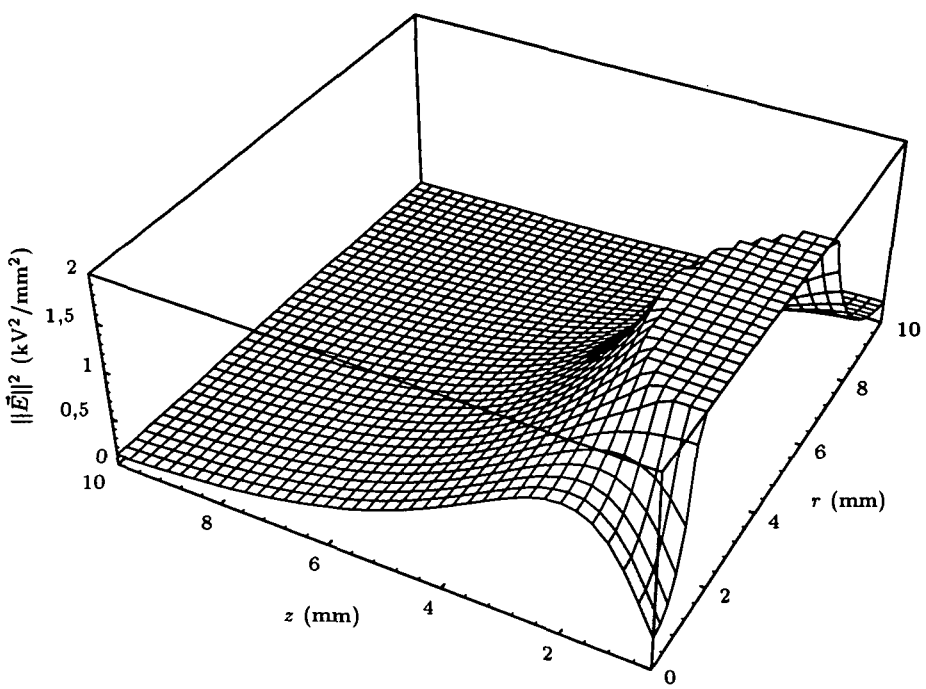


FIG. 3.4 - *Carré du champ électrique créé par une électrode annulaire de rayon externe* $R_e = 5$ *mm, de rayon interne* $r_e = 1{,}5$ *mm, et d'épaisseur 0,5 mm. Ce carré du champ est tracé en fonction des coordonnées cylindriques* r *et* z. *L'électrode est portée au potentiel 12 kV, le potentiel 0 étant à l'infini. Les carrés de champs supérieurs à 2* $kV^2.mm^{-2}$ *(au voisinage de l'électrode) sont « tronqués ». Notons que les atomes (qui sont attirés vers les régions de fort champ) sont expulsés de l'axe de révolution.*

Si maintenant on prend en compte les degrés de liberté transverses, on remarque que le carré du champ n'est pas maximal: il augmente dès que l'on s'éloigne de l'axe de révolution. Par conséquent, les atomes seront expulsés de cet axe. Pour compenser cette expulsion, nous avons donc recours à un faisceau très désaccordé sur le rouge de la raie D_2 du césium. Ce faisceau se propage dans la direction verticale, le long de l'axe de révolution de l'électrode, de la façon représentée sur la figure 3.3. Grâce à la force dipolaire, il permet de compenser

la force expulsante du champ électrique statique, et donc de confiner les atomes le long de l'axe.

Remarques :

– le faisceau que j'ai représenté sur la figure 3.3 est focalisé. Ceci correspond à la situation expérimentale (c'est le moyen le plus pratique pour fabriquer un faisceau de petite taille — typiquement 100 μm). Toutefois, et contrairement au cas du piège dipolaire simple présenté au paragraphe 3.1.*a* (p. 118), la force longitudinale induite par cette focalisation ne joue ici aucun rôle (elle est d'ailleurs négligeable devant la force électrostatique et devant la gravité) ;

– l'intensité lumineuse n'a plus besoin d'être aussi élevée que dans le cas du piège dipolaire, parce que l'on ne demande plus au faisceau de compenser la gravité. Toutefois, il lui faut compenser l'expulsion électrostatique, et un esprit pessimiste pourrait craindre que cette nouvelle compensation « coûte aussi cher » que celle de la gravité. En fait il n'en est rien, à condition que le diamètre du faisceau reste petit devant celui du trou de l'électrode ;

– un lecteur naïf pourrait croire que l'expulsion des atomes hors de l'axe par le champ électrique statique ne serait due qu'à un choix malheureux de la géométrie de l'électrode. On peut facilement montrer que tel n'est pas le cas, et qu'il est impossible de fabriquer un maximum local de $\|\vec{E}\|^2$. En effet, si un tel maximum existait, alors on pourrait trouver une surface Σ sur laquelle la force vue par les atomes pointerait toujours vers l'intérieur, *i.e.*

$$\iint_{\Sigma} \vec{\mathcal{F}}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}^2\vec{n} < 0\,. \tag{3.41}$$

En utilisant l'équation (3.40) et la formule de Stockes, on déduit que

$$\iiint_{V} \mathrm{d}^3\vec{r}\ \mathrm{div}\left[\left(\vec{\nabla}\otimes\vec{E}(\vec{r})\right)\cdot\vec{E}(\vec{r})\right] < 0\,, \tag{3.42}$$

où V est le volume contenu à l'intérieur de Σ. Mais

$$\mathrm{div}\left[\left(\vec{\nabla}\otimes\vec{E}(\vec{r})\right)\cdot\vec{E}(\vec{r})\right] = \left(\vec{\nabla}\otimes\vec{E}(\vec{r})\right) : {}^{\mathrm{t}}\left(\vec{\nabla}\otimes\vec{E}(\vec{r})\right) + \left(\Delta\vec{E}(\vec{r})\right)\cdot\vec{E}(\vec{r})\,, \tag{3.43}$$

où le symbole : désigne la contraction totale de deux tenseurs (*i.e.* la trace du produit au sens des matrices). Dans le cas de l'électrostatique et en l'absence de charge au point $\vec{r}$, l'équation $\Delta\vec{E}(\vec{r}) = \vec{0}$ est vérifiée (elle découle directement des équations de Maxwell). Sachant que toute matrice réelle A vérifie $\mathrm{Tr}(A\,{}^{\mathrm{t}}A) \geqslant 0$, on en déduit la contradiction.

Remarque : un piège atomique entièrement électrostatique a été proposé, basé sur l'existence d'un minimum local de champ [144]. Il fonctionne avec des atomes attirés vers les régions de champ faible, ce qui n'est possible que ci ceux-ci ne sont pas dans leur état fondamental.

ii) Evaluation du potentiel électrostatique. Détermination de la taille de l'électrode

Compte tenu de la valeur numérique de la polarisabilité du césium ($\alpha = 5{,}8.10^{-39}$ J.V^{-2}.m^2) et de sa masse ($M = 2{,}22.10^{-25}$ kg), la compensation de la gravité au moyen d'un champ électrique statique nécessite $\partial(E^2)/\partial z \sim 7{,}5.10^{14}$ V^2 m^{-3}. Si la tension à laquelle est portée l'électrode est 10 kV (un ordre de grandeur accessible sans trop de complications expérimentales) on trouve que la taille de l'électrode doit être de l'ordre de 5 mm ; c'est la valeur que nous avons choisie pour le rayon externe de l'électrode. Usiner une électrode de cette taille est certes une opération relativement délicate pour celui qui n'est pas un professionnel de la mécanique ; toutefois, une augmentation d'un facteur 2 de cette taille eût nécessité de travailler avec une tension $2^{3/2}$ fois plus élevée.

Le diamètre du trou percé dans l'électrode a aussi dû être déterminé avec soin : plus il est petit, plus le champ sur l'axe de révolution est grand. Mais il devient aussi plus difficile de faire passer un faisceau à l'intérieur. En outre, le point d'équilibre se rapproche du plan de l'électrode, rendant plus délicat son accès optique.

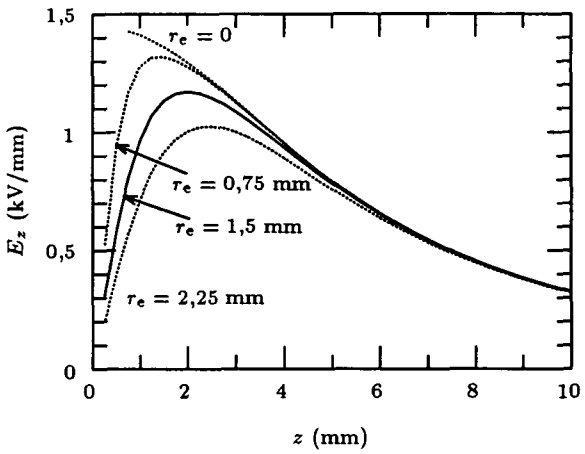
Sur la figure 3.5, j'ai représenté, pour diverses valeurs du rayon du trou, le champ électrique sur l'axe de révolution, la force électrostatique à laquelle sont soumis les atomes sur ce même axe, ainsi que le potentiel correspondant compte tenu de la gravité. Ces quantités ont été évaluées en utilisant un programme de résolution numérique de l'équation de Laplace, mis au point au Max-Planck Institut de Munich par Charles Schrama et Ekkehard Peik[1], et utilisant la méthode des différences finies décrite dans [145] (ce programme avait été conçu à l'origine pour mettre au point des pièges à ions [146]). On voit qu'un trou de 1,5 mm de rayon constitue un compromis acceptable. On trouve que dans ce cas, le point d'équilibre se situe à $h = 1{,}2$ mm au-dessus du plan médian de l'électrode. L'intensité du champ électrique en ce point est $\|\vec{E}\| = 1$ kV/mm. La profondeur du piège dans la direction z est environ $0{,}25\,\hbar\Gamma$. La force à laquelle est soumis un atome situé à une distance dz du point d'équilibre, dont l'expression est donnée par

$$F_z = \alpha\,\mathrm{d}z\left(\left(\frac{\partial E}{\partial z}\right)^2 + E\frac{\partial^2 E}{\partial z^2}\right), \tag{3.44}$$

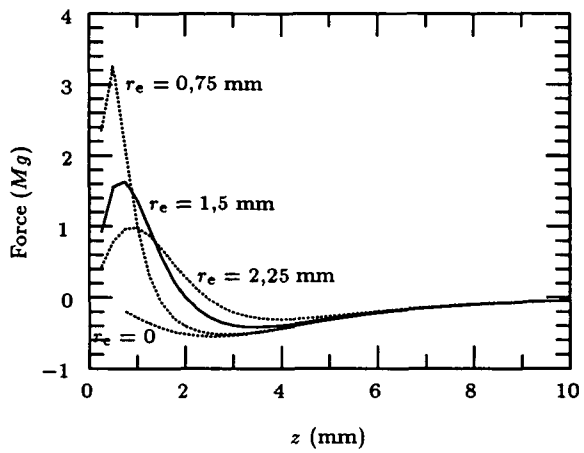
conduit à une constante de rappel de $\kappa_z = 2{,}8.10^{-21}$ J.m^{-2}, soit une pulsation d'oscillation de 110 rad/s.

Remarque : l'évaluation de la force expulsante dans les directions transverses (au voisinage de l'axe) ne nécessite pas de calculer le champ électrique au points correspondants ; on peut la déduire de l'évaluation du champ sur l'axe, en utilisant

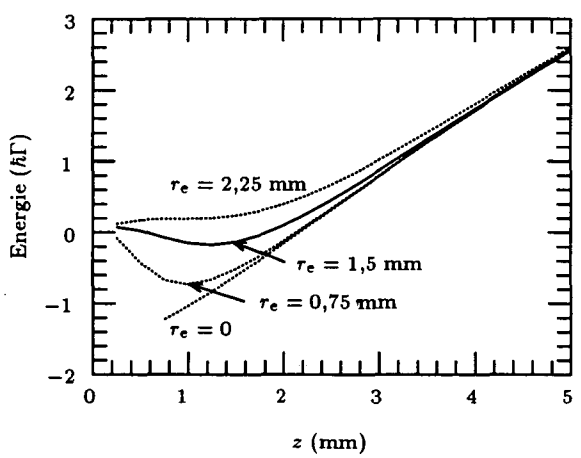
1. Le carré du champ électrique visualisé sur la figure 3.4 a été calculé par le même programme.



(a) *Champ électrique le long de l'axe.*



(b) *Force électrique à laquelle sont soumis les atomes le long de l'axe.*



(c) *Potentiel vu par les atomes, tenant compte de la gravité.*

FIG. 3.5 - *Confinement des atomes dans la direction verticale à l'aide d'un champ électrique statique, évalué pour plusieurs valeurs du rayon interne* r_e *de l'électrode. Le rayon externe vaut* $R_e = 5$ *mm et l'épaisseur 0,5 mm. L'électrode est portée au potentiel de 12 kV, le potentiel 0 étant placé à l'infini. On constate qu'un bon confinement est réalisé pour* $r_e = 1{,}5$ *mm.*

l'invariance par rotation et les équations de Maxwell. On écrit donc

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\partial E_y}{\partial y} \tag{3.45.a}$$

$$\mathrm{div}\,\vec{E} = 0 \Rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial x} = -\frac{1}{2}\frac{\partial E_z}{\partial z} \tag{3.45.b}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{E} = \vec{0} \Rightarrow \frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial E_x}{\partial z} \tag{3.45.c}$$

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2}\,. \tag{3.45.d}$$

On en déduit l'expression du carré du champ électrique au voisinage de l'axe :

$$\vec{E}^2(\mathrm{d}x, 0, z = h) = E_x^2 - \frac{1}{2}E_x\frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2}\mathrm{d}x^2 + \frac{1}{4}\mathrm{d}x^2\left(\frac{\partial E}{\partial z}\right)^2\,. \tag{3.46}$$

d'où l'expression de la force selon x au point $(dx, 0, z)$:

$$F_x = \alpha\,\mathrm{d}x\left(-\frac{1}{2}E_z\frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial E}{\partial z}\right)^2\right)\,. \tag{3.47}$$

Numériquement, on trouve que la constante de raideur électrostatique transverse vaut $\kappa_\perp^{\text{élec.}} = -2{,}0.10^{-21}$ J.m^{-2}.

iii) Les paramètres du faisceau dipolaire. Diagramme de fonctionnement

Les conditions de fonctionnement que j'ai établies au paragraphe 3.1.*a.iv* à propos du piège dipolaire peuvent être reprises ici. En particulier, les conditions (3.17), (3.21), (3.31), (3.35), (3.39) doivent être remplies. Ce n'est par contre pas le cas de la condition (3.19), puisque ce n'est plus le faisceau dipolaire qui compense la gravité. Cette condition doit être remplacée par

$$\boxed{\frac{\hbar|\Omega_{\text{dip}}|^2}{4\delta_{\text{dip}}} \geqslant U_{\min}\,,} \tag{3.48}$$

condition qui assure au POE une profondeur transverse suffisante.

On constate donc que le piège opto-électrique peut fonctionner avec un laser à CO_2 (de puissance 100 W) comme avec un Yag (de puissance 20 W). En particulier, dans le cas du Yag, un atome émet un photon spontané toutes les 3,6 s. Certes, un lecteur pourvu d'un minimum d'esprit critique remarquera que l'on n'a gagné qu'un facteur 2,6 par rapport au piège dipolaire simple, et que

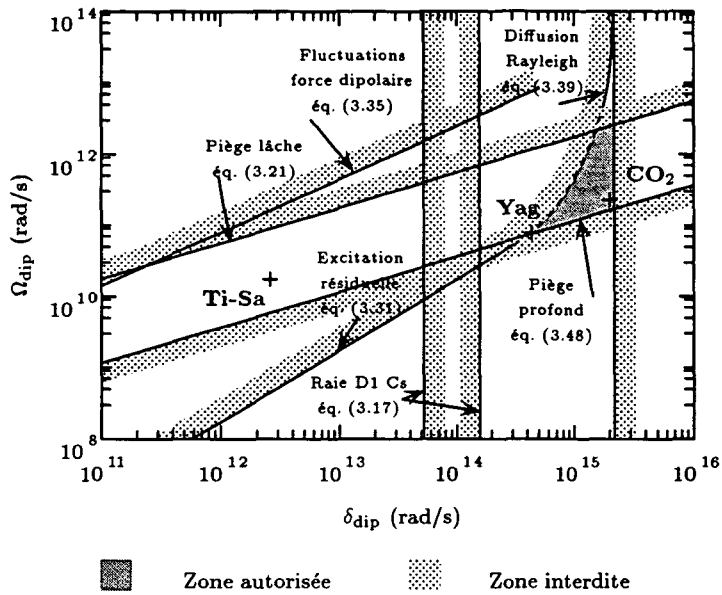


FIG. 3.6 - *Conditions de fonctionnement du piège opto-électrique (partie optique). Le col du faisceau vaut* $c_0 = 320\ \mu m$*, la profondeur de piège requise est* $0{,}1\hbar\Gamma$*, et le temps de refroidissement Raman est supposé inférieur ou égal à 2 s. On constate qu'un POE peut être réalisé avec un laser* CO_2 *de 100 W ou bien un laser Yag de 20 W.*

peut-être n'était-ce pas la peine de tant travailler à la conception de ce nouveau piège, pour un si piètre résultat. Un tel jugement n'est certes pas dénué de valeur, mais on peut toutefois lui opposer les arguments suivants :

- passer de 1,4 à 3,6 s pour le temps moyen d'excitation résiduelle est un changement important, puisque j'ai établi au chapitre 2 (§ 2.5.*e*, p. 105) que le temps typique de refroidissement Raman par passage adiabatique était de l'ordre de 2 s ;

- on peut remarquer en comparant les figures 3.2 et 3.6 que, pour un laser Yag de même puissance et pour un piège de même profondeur, le col du faisceau sera 1,6 fois plus grand dans le cas d'un POE. Par conséquent, le volume de capture sera 2,6 fois plus élevé que pour un piège dipolaire simple (et 4 fois plus grand si on le compare à un piège dipolaire croisé). Le nombre d'atomes capturés sera augmenté en proportion, ce qui est non négligeable ;

- j'ai signalé que dans le cas du piège dipolaire, il ne servait à rien d'abaisser la profondeur du piège en-dessous de $0{,}1\ \hbar\Gamma$, car la nécessité de compenser la gravité empêchait de diminuer la fréquence de Rabi du faisceau (et donc l'excitation résiduelle). Ce n'est plus le cas pour un POE. Or une profondeur de $0{,}1\ \hbar\Gamma$ est une situation confortable si la température des atomes est de l'ordre de T_{rec}. On peut donc envisager de charger le piège avec une profondeur de $0{,}1\ \hbar\Gamma$, puis

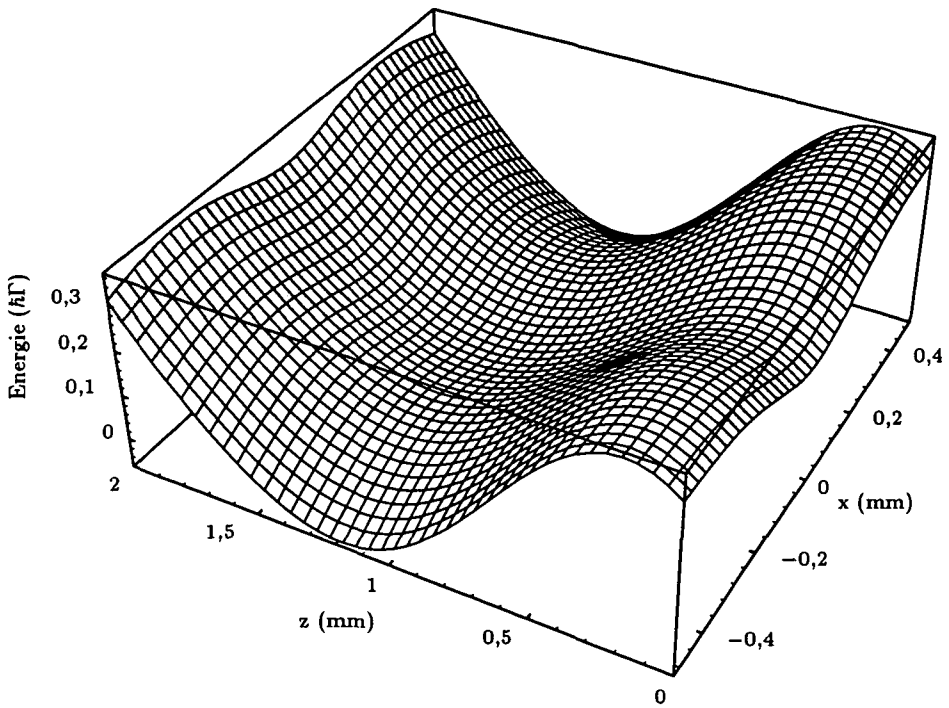


FIG. 3.7 - *Allure du potentiel auquel sont soumis les atomes (vue en coupe x/z). Les paramètres électriques sont* $R_e = 5$ *mm,* $r_e = 1{,}5$ *mm, et* $V_0 = 12$ *kV. Le faisceau est un laser Yag de puissance 20 W, et de col* $c_0 = 320$ *µm.*

de diminuer progressivement la puissance du faisceau au fur et à mesure que se produit le refroidissement Raman. On réduirait de la sorte le taux d'excitation résiduelle, laissant au refroidissement Raman le temps d'atteindre une température légèrement sub-recul.

iv) Valeurs numériques retenues

Je présente dans la table 3.1 des valeurs numériques convenant à la réalisation expérimentale d'un piège opto-électrique. J'ai envisagé d'utiliser trois types de lasers : un laser Titane-Saphir à 853 nm, un laser Yag à 1,06 µm, et un laser à CO_2 à 10,6 µm. Rappelons que l'utilisation du laser Titane Saphir est incompatible avec le refroidissement Raman, à cause de l'excitation résiduelle non résonnante. Toutefois, le piégeage pourra parfaitement fonctionner. Aussi, c'est un laser Ti-Sa que nous avons utilisé pour la première réalisation expérimentale du POE, car notre équipe possédait déjà ce laser. Le piégeage à l'aide d'un laser Yag a par la suite été réalisé par Pierre Lemonde, Ekkehard Peik, Hélène Perrin et Wolfgang Hänsel ; il constitue un bon candidat pour réaliser le refroidissement Raman, et ne nécessite pas d'investissements trop importants. Il faut néanmoins

être conscient du fait que le chauffage résiduel constituera l'une des limites à la température accessible. La solution idéale serait d'utiliser un laser CO_2 ; elle nécessiterait toutefois de profondes modifications du dispositif expérimental (en particulier, le verre dont est constituée la cellule à vide ne laisse pas passer la fréquence du laser CO_2). En outre, l'utilité de la partie électrostatique du POE n'est dans ce cas plus démontrée (un simple piège dipolaire croisé fait aussi bien l'affaire).

v) Conclusion

J'ai proposé dans cette section un nouveau piège à atomes, le piège opto-électrique, qui est bien adapté au refroidissement Raman d'atomes confinés : il présente en effet la propriété de ne pas trop chauffer les atomes, et de posséder des pulsations d'oscillation lentes. De même qu'un piège dipolaire (et à l'opposé d'un piège magnétique), il permet de piéger les atomes dans tous les sous-niveaux Zeeman de l'état fondamental $|6^2S\ _{1/2}\rangle$; la constante de raideur est en outre indépendante du sous-niveau Zeeman. Les fréquences d'oscillation dans les 3 directions sont du même ordre de grandeur (ce qui n'est pas le cas d'un piège dipolaire simple). Enfin, comparé à un piège dipolaire croisé, le POE possède un plus grand volume de capture. Le chargement à partir d'un PMO sera donc grandement facilité.

Il reste maintenant à réaliser expérimentalement le POE : ce sera l'objet de la prochaine section.

2. Description du montage expérimental

La figure 3.8 représente un plan simplifié du dispositif expérimental utilisé pour le piège opto-électrique. Comme pour l'expérience de refroidissement Raman que j'ai présentée au chapitre 1, la source d'atomes froids est constituée d'un piège magnéto-optique (PMO), lui même chargé à partir d'une vapeur de césium à 1 µPa (10^{-8} Torr). On utilise une pompe ionique pour maintenir et pour contrôler le vide. Les faisceaux utilisés pour ce PMO proviennent tous de diodes laser.

Après avoir chargé le PMO pendant 1 à 3 s, on transfère les atomes dans le POE. Le faisceau désaccordé utilisé pour ce dernier est un laser Titane-Saphir. Les atomes sont maintenus dans le POE pendant un temps de l'ordre de quelques centaines de millisecondes (que l'on fait varier). On détecte ensuite le nombre d'atomes restés dans le piège (par absorption ou par fluorescence, en utilisant une méthode de temps de vol).

L'ensemble de la séquence temporelle est contrôlée à partir d'un ordinateur. Nous avons pour cela réutilisé le programme qui avait été conçu pour le refroidissement Raman d'atomes libres (quelques adaptations ont bien sûr été nécessaires).

La description du dispositif, ainsi que les résultats expérimentaux que je vais détailler ici, ont été publiés dans la référence [147]. Ils sont le fruit d'un travail

TAB. 3.1 - *Valeurs expérimentales typiques du piège opto-électrique.*

Partie électrostatique :

Dimensions de l'électrode : R_e =5 mm, r_e = 1,5 mm

Hauteur du piège : 1,2 mm au-dessus du plan médian de l'électrode

Tension appliquée sur l'électrode : 12 kV

Pulsation d'oscillation selon (Oz) : 110 rad/s

Période d'oscillation selon (Oz) : 57 ms

Profondeur longitudinale du piège : $\hbar\Gamma/4$

Constante de raideur d'expulsion transverse : $-2{,}0.10^{-21}$ J.m^{-2}.

Champ électrique statique au centre du piège : 1 kV/mm

Faisceau focalisé :

Laser	**Ti-Sa**	**Yag**	**CO_2**
λ_{dip}	853 nm	1,06 µm	10,6 µm
Puissance	200 mW	20 W	100 W
col	320 µm	320 µm	320 µm
Ω_{dip} (rad/s)	8.10^9	$7{,}8.10^{10}$	
δ_{dip} (rad/s)	$-2{,}3.10^{12}$	$-4{,}3.10^{14}$	$-2{,}0.10^{15}$
$\delta_{dip}/(2\pi)$ (THz)	−0,36	−69	−324

Caractéristiques du piège :

Profondeur ($\hbar\Gamma$)	0,2	0,1	0,2
Pulsation d'oscillation transverse (rad/s)	339	238	333
Période d'oscillation transverse (ms)	18	26	19
1er photon spontané	10 ms	3,7 s	3 h

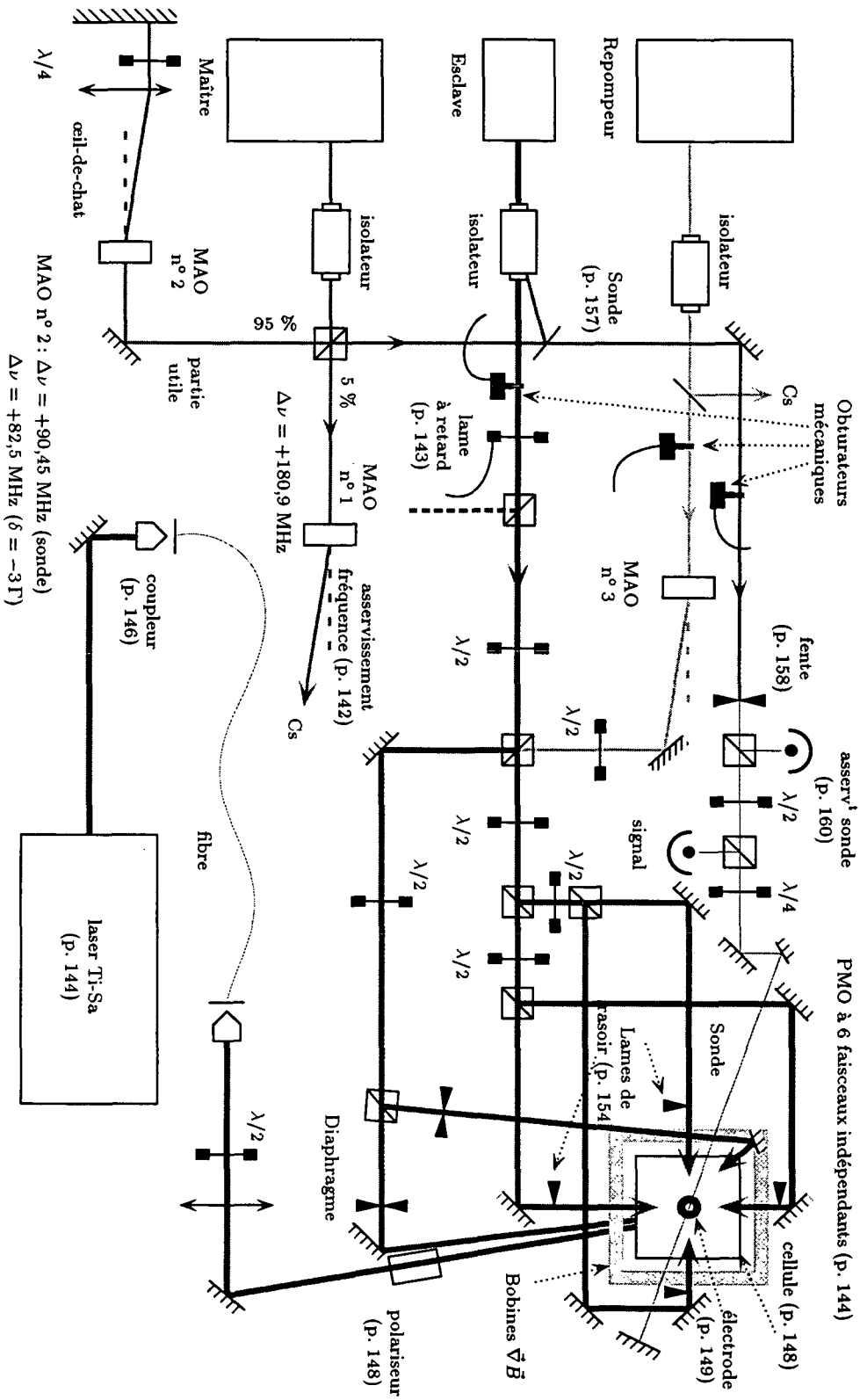


FIG. 3.8 - *Le dispositif expérimental du POE.*

d'équipe dans lequel Pierre Lemonde a fourni la plus grande part. Ekkehard Peik, Jakob Reichel, Hélène Perrin, Wolfgang Hänsel, ainsi que Christophe Salomon y ont également apporté une contribution importante. Certaines informations ne figurant pas dans cette thèse pourront en particulier être trouvées dans [148].

a) Le piège magnéto-optique

Le piège magnéto-optique fonctionne avec six faisceaux indépendants, lesquels proviennent tous de la même diode laser. Selon une technique maintenant bien rodée[1], nous utilisons une diode laser SDL de forte puissance (150 mW), affinée spectralement grâce à l'injection d'un faisceau provenant d'une autre diode. Ici, la diode maître est également une diode SDL, de puissance 100 mW, que l'on affine à l'aide d'un réseau.

Pour fixer la fréquence du laser du PMO, on asservit la fréquence de la diode maître au sommet de l'une des raies du profil d'absorption saturée du césium. Traditionnellement, dans des montages analogues, on module la fréquence du laser (en général en agissant sur le courant de la diode ou sur la longueur de la cavité externe), de façon à fabriquer électroniquement la dérivée du signal d'absorption saturée, ce qui permet d'induire un signal d'erreur qui s'annule pour la fréquence correspondant à la raie. Toutefois, le fait que la fréquence de la lumière soit ainsi modulée n'est pas sans inconvénient, en particulier dans le cas où l'on utilise le même laser pour sonder les atomes (on retrouve alors la modulation sur le signal)[2].

Nous avons ici eu recours à une solution astucieuse, mise au point par Philippe Bouyer et Pierre Lemonde lors de la réalisation du piège assisté par pompage optique [94, p. 189]. Elle consiste à séparer en deux le faisceau maître, l'un des bras (utilisant 5 % de la puissance) étant utilisé exclusivement pour l'asservissement (voir la figure 3.8). Sur ce bras est installé un modulateur acousto-optique (n° 1), alimenté par une micro-onde dont on module la fréquence à environ 100 kHz (ce MAO fonctionne en simple passage, et sa fréquence centrale vaut 180,9 MHz). Après le MAO, le faisceau est envoyé sur une cellule de césium, de façon à obtenir un signal d'absorption saturée. Grâce à la modulation de fréquence induite par le MAO, on peut obtenir un signal d'erreur s'annulant au sommet des raies, lequel est renvoyé sur le courant de la diode ainsi que sur la cale piézoélectrique contrôlant la position du réseau d'affinement[3]. Finalement, la fréquence du laser est asservie, mais la partie utile du faisceau n'est pas modulée (puisque la modulation ne s'effectue qu'après la séparatrice).

1. et déjà décrite, entre autres, au chapitre 1, p. 30.

2. En particulier, nous avions eu à faire face à ce problème lors de l'expérience de refroidissement Raman 1D présentée au chapitre 1 ; nous avions finalement éliminé, au niveau du signal, la fréquence de la modulation du laser grâce à l'utilisation d'un filtre passe-bande adéquat.

3. L'asservissement de la position du réseau permet d'éliminer les fluctuations de basse fréquence ; celui du courant, les fluctuations de haute fréquence.

La fréquence du laser est asservie sur la raie $6^2S_{1/2}, F = 4 \rightarrow 6^2P_{3/2}, F' = 5$ du césium, mais il ne faut pas oublier qu'elle est décalée de 180,9 MHz par le MAO n° 1. Afin de compenser ce décalage, on fait passer la partie utile du faisceau-maître dans un MAO (n° 2), installé en double passage. Nous avons utilisé le dispositif en œil-de-chat, que j'ai décrit au chapitre 1 sur la figure 1.7, et qui nous permet de modifier la fréquence du MAO (et donc celle de la lumière à la sortie) au cours des différentes phases de l'expérience, sans déplacer sensiblement la position du faisceau.

Le faisceau-maître est ensuite envoyé sur une lame séparatrice 50 %/50 %. La moitié de la puissance constitue la sonde par absorption que je décrirai au paragraphe 3.2.*d.i.* L'autre moitié sert à injecter le faisceau esclave. L'injection se fait *via* le prisme de sortie de l'isolateur optique installé sur le faisceau-esclave [89, p. 70], de la même façon que pour l'expérience de refroidissement Raman du chapitre 1.

Pendant la phase de piégeage opto-électrique, il est nécessaire de couper les faisceaux du PMO (donc le faisceau esclave). De plus, cette coupure doit pourvoir être réalisée en un temps le plus bref possible (*i.e.* très inférieur à la ms). Il eût été possible d'utiliser un modulateur acousto-optique, comme cela était fait sur l'expérience de refroidissement Raman. Toutefois, cette solution n'est pas idéale, d'abord parce qu'un MAO induit une perte d'au moins 20 % de la puissance, mais aussi (et surtout) parce qu'il détériore beaucoup le profil spatial du faisceau[1].

Nous avons ici eu recours à une technique remarquablement astucieuse, qui est elle aussi un « héritage » de l'expérience de piégeage assisté par pompage optique [94, p. 201 ; 149] (elle a été mise au point par Alain Michaud et Pierre Lemonde). Cette méthode exploite le fait que la diode est injectée par une autre ; en réduisant brutalement (*i.e.* en 5 µs) le courant de la diode esclave, on sort de la plage d'injection, et la lumière n'est plus résonnante avec les atomes. Toutefois, il est préférable, dans un deuxième temps, de couper réellement la lumière (notamment si l'on veut sonder les atomes juste après la phase de PMO) ; on descend donc le courant de la diode à zéro, et ce en 50 µs. Il n'est cependant pas souhaitable de maintenir trop longtemps un courant nul (faute de quoi la température de la diode, modifiée par l'extinction de cette dernière, mettra plusieurs secondes pour revenir à sa valeur initiale). On utilise donc un obturateur mécanique, qui bloque le faisceau en quelques ms. Passé ce délai, il est possible de rétablir le courant de la diode, laquelle retrouve son point d'injection en 50 ms environ.

Sur l'expérience de refroidissement Raman 1D, nous avions eu recours à une phase de piégeage à basse intensité (voir p. 32), qui permettait de diminuer la température des atomes présents dans le PMO. Pour ce faire, nous réduisions l'intensité lumineuse à l'aide d'un modulateur acousto-optique placé dans le faisceau

1. On peut bien sûr installer un trou de filtrage après le MAO, mais ceci cause encore une perte de puissance de 30 %.

esclave. Sur la présente expérience, il n'existe pas de tel MAO ; aussi, pour réduire l'intensité lumineuse à la fin de la phase de PMO, nous avons installé dans le faisceau une lame à retard (à cristaux liquides). Cette lame produit le même effet qu'un cellule de Pockels[1] : selon la façon dont elle est commandée, elle se comporte comme un cristal d'indice isotrope (*i.e.* elle ne modifie pas la polarisation de la lumière), ou comme une lame demi-onde (qui, si elle est convenablement orientée, tourne la polarisation de 90°). En installant un cube polariseur derrière cette lame, on peut éliminer la quasi totalité (*i.e.* 96 %) de la puissance au moment voulu, tout en ne provoquant aucune perte lors de la phase de pleine puissance.

Le faisceau est ensuite divisé en 6 bras, à l'aide de lames demi-onde et de cubes polariseurs. Au niveau du premier de ces cubes, on fait coïncider avec le faisceau principal le faisceau repompeur (qui est ainsi présent dans les 6 bras du piège). Le faisceau repompeur provient d'une diode SDL affinée spectralement avec un réseau. La puissance de ce laser lorsqu'il est libre est de 150 mW. Comme sur l'expérience de refroidissement Raman (p. 32), on utilise un modulateur acousto-optique (n° 3) pour couper rapidement le faisceau à la fin de la phase de PMO (un obturateur mécanique assurant dans un deuxième temps l'extinction complète). Le laser est asservi sur le croisement de niveau $F = 3 \rightarrow F' = 2, F = 3 \rightarrow F' = 3$. Le MAO n° 3 déplace la fréquence de +76 MHz, de telle sorte que la lumière est finalement résonnante avec la transition $F = 3 \rightarrow F' = 3$.

b) Le faisceau dipolaire

i) Le laser utilisé

Le faisceau très désaccordé utilisé pour le confinement transverse des atomes du POE provient d'un laser de saphir dopé au titane (Ti-Sa). En effet, notre équipe possédait déjà un laser de ce type, suite à l'expérience de cavité gravitationnelle réalisée en 1993 [150, 47]. Ce laser a été construit par Philippe Bouyer [94, pages 35 à 64], selon un modèle initialement mis au point par François Biraben. Pour notre expérience, il a été entretenu par Ekkehard Peik, qui a en particulier augmenté la puissance de sortie.

Je ne prétendrai pas ici entrer dans les détails du fonctionnement de ce laser, qui est assez complexe, et pour lequel le lecteur pourra trouver toutes les précisions qu'il désire dans la référence [94]. Je dirai simplement que le spectre d'émission du cristal de Ti-Sa a une largeur spectrale gigantesque (de 600 à 1050 nm). En installant dans la cavité les éléments sélectifs *ad hoc*, on peut donc fabriquer un laser accordable sur toute cette plage de fréquence (et de finesse meilleure que 5 MHz). Un autre avantage de ce type de laser est qu'il peut produire des puissances très supérieures à ce dont sont capables les diodes laser ; ainsi, le laser

1. La différence avec une cellule de Pockels (outre le coût qui est 10 fois moindre) est que le temps de réponse typique est beaucoup plus long : de l'ordre de la milliseconde, contre quelques nanosecondes pour une cellule de Pockels. La lame à cristaux liquides est commandée par une fréquence audio de quelques kHz.

de notre équipe fournit 1,2 W les jours où il est vraiment très bien réglé (en général, nous nous contentons plutôt de 800 mW). Toutefois, un laser Titane-Saphir présente par rapport aux diodes laser un inconvénient majeur : le cristal n'est pas semi-conducteur ; il faut donc le pomper à l'aide d'un autre laser, beaucoup plus puissant et de fréquence plus élevée que les fréquences du spectre d'émission. On utilise pour cela un laser à argon (λ =501,7 et 514,5 nm) de puissance 20 W (lequel nécessite une puissance électrique de 40 kW, un refroidissement hydraulique à fort débit (30 l/min), et des coûts d'entretien particulièrement élevés). En outre, le faisceau du laser argon se déplace lorsque ce dernier s'échauffe, et notre laser Ti-Sa est installé sur une table de mauvaise qualité mécanique, non solidaire du support sur lequel est posé le laser pompe. Par conséquent, le système se dérègle sans cesse, et il est nécessaire de passer une heure quotidienne à optimiser la puissance de sortie en réalignant le faisceau pompe.

Remarque : je rappelle que, si le laser Ti-Sa permet le piégeage opto-électrique des atomes, il est incompatible avec le refroidissement Raman dans ce piège en raison du trop grand nombre de photons diffusés (typiquement 1 photon toutes les 10 ms). Le piégeage avec un laser Yag (qui a par la suite été réalisé par notre équipe, en utilisant un laser gracieusement prêté par le groupe de Gilbert Grynberg) constitue pour cette raison une meilleure solution.

ii) Le couplage dans une fibre optique monomode

Nous n'avons pas utilisé directement le faisceau sortant du cristal de Titane-Saphir, et ce pour deux raisons : tout d'abord, le mode spatial n'est pas parfaitement gaussien (même s'il est beaucoup plus « propre » que celui d'une diode laser) ; ensuite, comme la cellule dans laquelle nous réalisons les expériences est située à 5 m du laser, nous craignons que les vibrations de la table que j'ai déjà évoquées induisent au niveau du POE des déplacements du faisceau nuisibles[1]. Pour ces deux raisons, nous avons choisi de coupler le laser dans une fibre monomode. Les caractéristiques géométriques (position et profil spatial) du faisceau sortant d'une fibre monomode sont en effet indépendantes des caractéristiques du faisceau entrant dans la fibre. Nous avons ainsi l'assurance de disposer à la sortie d'un faisceau parfaitement gaussien, et dont la position ne fluctue pas[2] (en particulier, il n'est pas nécessaire de réaligner le faisceau derrière la fibre lorsque l'on touche aux miroirs du laser). Le prix à payer est une perte importante de

1. Nous n'avons pas vérifié que de tels déplacement se produisaient effectivement. Remarquons à ce propos que, si le piège est situé dans le plan focal de la lentille de focalisation du faisceau, que l'on suppose placée loin de la source des fluctuations, alors le faisceau au foyer ne se déplace pas à l'ordre le plus bas. Toutefois, nous ne sommes pas sûrs que le piège soit exactement situé au foyer.

2. Les fluctuations de position du faisceau entrant dans la fibre induisent cependant des fluctuations de la puissance du faisceau à la sortie. Heureusement, l'effet de telles fluctuations s'est avéré négligeable sur une échelle de temps correspondant à la prise d'un spectre (*i.e.* de quelques minutes à une heure).

puissance : à la sortie, nous disposons au grand maximum de 250 mW (pour 1,2 W à l'entrée).

L'emploi des fibres optiques monomodes impose d'acquérir un savoir-faire très spécifique. Il n'est en effet pas évident de faire coïncider exactement le mode du laser avec celui de la fibre. Avant d'installer la fibre, nous devons cliver les extrémités, c'est-à-dire les couper de telle sorte que la section soit bien lisse pour que la lumière puisse entrer et sortir de la fibre sans diffraction. Autour du cœur de la fibre (*i.e.* la partie dans laquelle se propage la lumière), se trouve une gaine de protection en plastique. Il est nécessaire d'enlever cette gaine sur quelques centimètres (*i.e.* dénuder la fibre) avant de réaliser le clivage. Sachant que le diamètre de la fibre est de l'ordre de 100 µm, on comprend quelle peut être la difficulté de ces deux opérations (dénudage et clivage). Lorsque nous avons commencé à utiliser des fibres, nous avons dû travailler « à main nues » : on commençait à mouiller la fibre avec de la salive de façon à dissoudre la gaine, puis on essayait d'arracher cette dernière (une fois sur deux le cœur venait avec et il fallait recommencer). On chauffait ensuite le cœur dénudé avec un briquet (au risque d'enflammer la gaine si on la chauffait aussi), puis on pliait celui-ci à l'endroit chauffé de façon à le casser. Il restait ensuite à recommencer l'opération avec l'autre extrémité de la fibre, puis à installer cette dernière dans le faisceau (opération qui prend un bon quart d'heure), pour regarder si de la lumière était transmise par la fibre. Un fois sur deux, il s'avérait en fait nécessaire de recommencer le clivage. En outre, l'efficacité du couplage, lorsque l'on utilise cette méthode, reste de l'ordre du pour cent.

Par la suite (notamment grâce aux travaux réalisés par Wolfgang Hänsel [151] sur l'expérience visant à réaliser une horloge atomique en satellite), nous avons acquis un cliveur à lame de rasoir de la marque *T&B*, qui permet de cliver la fibre rapidement et sans la chauffer. Nous avons également découvert qu'il était possible de dénuder la fibre avec du décapant *V33*, lequel est extrêmement efficace, aussi bien d'ailleurs sur la gaine de la fibre que sur la peau du chercheur. L'ensemble de l'opération dénudage + clivage peut désormais être réalisée en quelques secondes.

Une fois la fibre clivée, il reste à la coupler avec le faisceau. Pour ce faire, on focalise le faisceau avec un objectif de microscope ; la position du foyer doit coïncider avec celle de l'extrémité de la fibre, avec une précision de l'ordre de quelques µm. On utilise donc un *coupleur de fibre*, c'est-à-dire un support muni de vis micrométriques, et sur lequel sont fixés l'objectif de microscope et l'extrémité de la fibre. Nous avons testé plusieurs modèles de tels coupleurs. Les plus efficaces (du point de vue de la facilité du réglage) sont ceux de la marque *Martock Design*.

Pour réaliser ce réglage, on commence par réaliser un alignement grossier en regardant au viseur infrarouge l'extrémité d'entrée de la fibre. On observe que la gaine de la fibre fluoresce sur une distance de quelques centimètres. On commence donc par maximiser l'intensité et la profondeur de pénétration de

cette fluorescence[1]. Dans un deuxième temps, on prend dans la main l'autre extrémité de la fibre, et on l'observe au viseur tout en tournant lentement les vis micrométriques. Au bout d'un certain temps, on verra apparaître une légère lueur, qu'il sera facile d'optimiser[2]. Dans un troisième temps, on installe l'extrémité de sortie de la fibre sur un autre coupleur, et on optimise finement la puissance transmise à l'aide d'une photodiode[3].

Afin d'assurer un taux de transmission optimal, on doit s'assurer que le col du faisceau au foyer de l'objectif de microscope, à l'entrée, soit voisin du diamètre du cœur de la fibre (lequel est fixé par le fabriquant et adapté à la longueur d'onde de travail). Pour une taille donnée du faisceau incident, il est ainsi nécessaire de connaître le meilleur grossissement pour l'objectif. Un tableau de correspondance entre la taille du faisceau incident et le grossissement de l'objectif a été établi par Wolfgang Hänsel (table 3.2). Ces résultats ont été obtenus en se basant sur le principe de retour inverse de la lumière : après avoir grossièrement couplé un faisceau dans une fibre, on installe un objectif à la sortie, et on règle sa position avec les vis micrométriques du coupleur, de telle sorte que le faisceau sortant soit parallèle. Puis, à l'aide d'une barrette de photodiodes, on mesure la taille de ce faisceau. Ceci permet de déterminer quelle taille de faisceau est la plus adaptée à l'objectif de sortie testé.

Remarque : à la fin de ma thèse, la méthode de traitement des fibres que je viens d'exposer est devenue en partie obsolète, du fait de l'apparition de nouvelles fibres de la marque *Point Source*. Il s'agit de fibres toutes montées, *i.e.* solidarisées à leur coupleur (et mécaniquement protégées par un tuyau mécanique). Il est possible de coupler de la lumière sans trop de difficultés en fixant l'extrémité de la fibre, et en alignant le faisceau à l'aide de deux supports de miroir. Toutefois, on ne peut pas (sous peine de détériorations) coupler une puissance lumineuse trop élevée.

iii) Caractéristiques du faisceau à la sortie de la fibre

Comme je l'ai dit, nous disposons d'un faisceau gaussien, de puissance inférieure ou égale à 250 mW. Le col du faisceau à la sortie (*i.e.* son rayon $1/e^2$) vaut

1. Ce diagnostic doit considéré avec précaution : il arrive, lorsque l'alignement est mauvais, que la lumière pénètre dans la gaine de la fibre et non dans le cœur. Dans ce cas, le maximum (local) de fluorescence ne correspond pas du tout à un bon couplage.

2. Il peut arriver que l'autre extrémité de la fibre soit déjà installée, ou encore située loin de l'extrémité d'entrée (parfois même dans une autre pièce), de telle sorte qu'il n'est pas possible de l'observer tout en tournant les vis. Il est alors conseillé d'installer face à la sortie de la fibre une caméra vidéo, de façon à pouvoir l'observer à distance.

3. Lorsque la longueur de la fibre excède 1 m, il est indispensable de la protéger des chocs mécaniques. Ceci peut être réalisé à l'aide d'un tuyau de plastique de type *Gardena* (normalement prévu pour arroser les jardins), dans lequel la fibre est relativement facile à enfiler. Pour réaliser cet enfilage, on commence par faire passer une ficelle, que l'on « pousse » dans le tuyau en y insufflant de l'air comprimé. On noue ensuite la ficelle à la fibre, que l'on tire doucement. Nous avons par ce moyen protégé jusqu'à 30 m de fibre.

TAB. 3.2 - *Correspondance entre le col c_0 du faisceau à l'entrée, et le grossissement de l'objectif à utiliser pour avoir un couplage optimal dans une fibre monomode à 850 nm. Le col du faisceau est défini par la formule* $\|\vec{E}\|^2(x,y,z) = \|\vec{E}_0\|^2 exp(-2(x^2+y^2)/c_0^2)$ *(il s'agit donc du rayon* $1/e^2$ *du faisceau).*

Objectif	focale (mm)	c_0 (mm)
×5	25,5	2,12
×20	8,3	0,595
×40	4,3	0,34
×60	2,9	0,255

0,8 mm. Le faisceau est focalisé à l'aide d'une lentille de distance focale 1 m. Le col du faisceau au foyer vaut donc 320 µm, d'après la formule (3.4).

La fibre utilisée n'est pas une fibre à maintien de polarisation. Par conséquent, la polarisation du faisceau à la sortie est absolument quelconque (*i.e.* elliptique ; elle dépend notamment du parcours de la fibre et de ses torsions [151]). Comme le POE nécessite une polarisation linéaire, du moins si l'on souhaite que tous les niveaux soient déplacés de la même façon (voir § 3.1.*a.iii*, p. 120), nous avons installé dans le faisceau un polariseur de haute qualité, qui linéarise la polarisation à 10^{-5} près (on perd donc une partie de la puissance). Pour des raisons d'encombrement, il y a un miroir entre ce polariseur et les atomes. Nous avons vérifié qu'une réflexion du faisceau ne détériorait pas sensiblement la qualité de la polarisation.

Pendant la phase de piégeage magnéto-optique, afin de ne pas perturber celui-ci, nous coupons le faisceau dipolaire à l'aide d'un obturateur mécanique. Cet obturateur est placé après la fibre ; si on le place avant, la fibre chauffe et n'atteint son taux de transmission optimal que plusieurs secondes après l'ouverture de l'obturateur (ce qui est beaucoup plus que la durée typique de piégeage opto-électrique).

c) La cellule et l'électrode

i) La cellule en verre

J'ai évoqué les problèmes que nous avions rencontrés à cause de la cellule, sur l'expérience de refroidissement Raman 1D (§ 1.3.*b.iii*, p. 48) : il apparaissait un pic parasite sur le signal, dû à la réflexion de l'un des faisceaux Raman sur la face intérieure de la cellule. Dans la perspective de réaliser du refroidissement Raman dans le POE, et pour ne plus avoir à faire face à ce problème, nous avons donc décidé de changer de cellule.

Nous avons choisi un modèle entièrement en verre, fabriqué par l'entreprise allemande *Hellma*, et déjà testé avec succès sur l'expérience de piégeage assisté par pompage optique[1]. L'avantage de ce type de cellule est son très grand accès optique. Il est notamment facile de s'assurer que l'incidence des faisceaux sur les faces ne soit pas normale, de telle sorte que les réflexions ne passent pas là où sont les atomes. L'inconvénient est son extrême fragilité.

Nous avons longtemps rêvé d'une cellule en verre dont toutes les faces seraient traitées anti-reflet, à l'intérieur comme à l'extérieur. Toutefois, pour des raisons purement technologiques, on ne peut traiter anti-reflet que des surfaces totalement accessibles. Le traitement d'une cellule est donc relativement aisé en ce qui concerne les faces extérieures, mais quasiment impossible pour les faces intérieures. Nous avons pensé avoir trouvé une solution consistant à faire traiter séparément chacune des faces de la cellule (sur leurs deux côtés), puis, dans un deuxième temps, de les assembler par contact optique (ce qui ne détruit pas le traitement). Ces tentatives se sont soldées par un échec, car nous n'avons jamais réussi à construire une cellule étanche. Deux mois de travail ont été inutilement consacrés à cette opération, pendant lesquels nous ne sommes parvenus qu'à briser deux cellules à 20 000 F pièce. Nous avons finalement commandé à *Hellma* un cellule toute montée, mais dont seules les faces extérieures sont traitées anti-reflet.

ii) L'électrode

Lors de l'étude théorique du POE que j'ai présentée au paragraphe 3.1.*b.i* (p. 130), j'avais supposé que l'électrode était de forme annulaire, (et j'avais calculé le champ électrique sous cette hypothèse). Nous avons donc cherché à réaliser une électrode se rapprochant le plus possible de ce modèle théorique. L'électrode est par conséquent un petit disque en acier inoxydable de diamètre 1 cm, d'épaisseur quelques dixièmes de mm, et percé d'un trou de 3 mm de diamètre. Elle repose sur quatre tiges de diamètre 1 mm, longues de 2 cm, elles mêmes fixées sur un disque de plus grande dimension, qui assure la stabilité mécanique de l'ensemble. Nous avons construit successivement deux versions de ce montage. La figure 3.9 représente la version ultime.

Lors du premier montage de l'électrode, le grillage présent sur la figure 3.9 était absent (le disque de stabilisation étant en outre porté au même potentiel que l'électrode). Nous pensions naïvement que la cellule en verre, non conductrice, était sans effet sur le champ électrique, et donc que l'on pouvait raisonner comme si le potentiel 0 était situé à l'infini (ou du moins, au niveau de l'objet métallique le plus proche, c'est-à-dire des supports des bobines du PMO situées à l'extérieur de la cellule, à 7 cm de l'électrode environ). Après quelques semaines d'expériences au

1. Nous n'avons pas pu réutiliser la cellule de cette expérience, dont la topographie n'était pas adaptée à l'installation d'une électrode et d'un blindage en μ-métal (lequel était nécessaire dans la perspective de refroidissement Raman d'atomes confinés, mais demeurait inutile pour une simple expérience de piégeage). Nous avons donc fait fabriquer une nouvelle cellule.

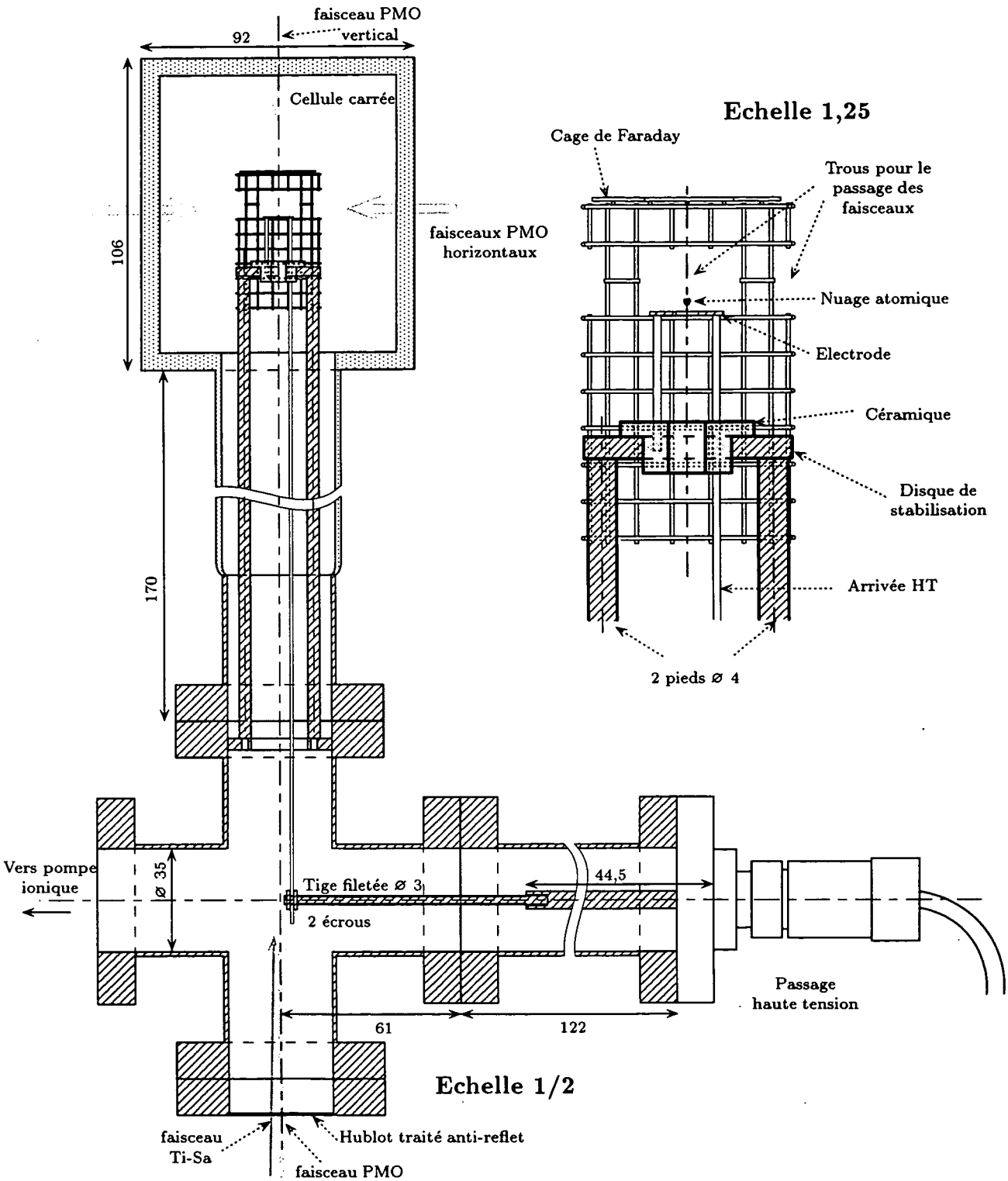


FIG. 3.9 - *Schéma technique simplifié de l'électrode et de la cellule.*

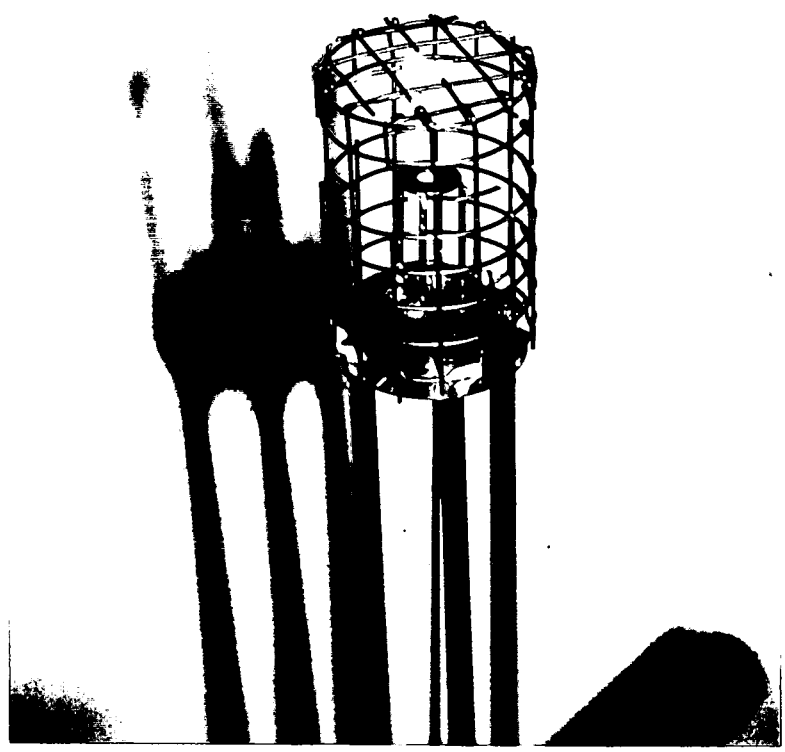


FIG. 3.10 - *Photographie de l'électrode, entourée du grillage servant de cage de Faraday.*

cours desquelles nous n'avons observé aucun piégeage électrostatique, nous avons eu l'idée de mesurer le déplacement Stark induit sur les atomes par le champ électrique (cette mesure a été réalisée par une méthode qui sera détaillée au paragraphe 3.2.*f*, p. 166). Nous avons trouvé que le champ électrique était 10 fois moindre que ce que prédisait la théorie. Nous avons alors fait appel à nos souvenirs de la classe de seconde, où nous chargions des bâtons d'ébonite (un matériau isolant, comme le verre) en les frottant avec une peau de chat. Nous avons émis l'hypothèse que notre cellule de verre pouvait elle aussi se charger (l'électrode arrachant des électrons au verre), et ainsi influer sur le champ électrique vu par les atomes. Nous avons suspendu à proximité de la cellule une petite boule de polystyrène ; lorsque l'on fait croître la haute tension sur l'électrode, la boulette est brusquement attirée par le verre de la cellule. Si on éteint la haute tension, elle reste collée pendant quelques minutes. Le polystyrène est donc bien attiré par la cellule (laquelle prend plusieurs minutes pour se décharger), et non par l'électrode à travers le verre. Par suite, la cellule chargée crée à l'intérieur un champ venant compenser celui de l'électrode. C'est pourquoi le champ « vu » par les atomes est si faible.

Pour éviter ce problème, la solution est d'entourer l'électrode d'une cage de Faraday, portée au potentiel 0 (cette cage de Faraday (grillage) est visible sur la photographie de la figure 3.10). Les champs électriques sont arrêtés par le grillage, et l'électrode ne se charge plus. Certes, les modèles théoriques du paragraphe 3.1.*b.i* (p. 130), dans lesquels je supposais la masse à l'infini, ne sont plus valables. Toutefois, il est facile de se convaincre (et on peut le vérifier en utilisant le programme résolvant l'équation de Laplace) que le fait de rapprocher la masse augmente l'intensité du champ électrique (et donc la profondeur du POE).

Remarque : l'installation du grillage a nécessité de remettre la cellule à pression ambiante, de démonter et remonter l'électrode, puis de refaire le vide en étuvant. L'ensemble de cette opération a pris 4 semaines. Nous en avons profité pour apporter quelques améliorations au montage.

Avant l'installation du grillage, nous avions souvent été gênés par des décharges électriques qui se produisaient dans la cellule, lorsque le potentiel de l'électrode était supérieur à 10 kV, et lorsque la pression de césium était suffisamment élevée (de l'ordre de quelques µPa). Ces décharges se produisaient le plus souvent sur le parcours des faisceaux quasi-résonnants du PMO, ce qui nous poussait à les interpréter comme l'ionisation d'atomes de césium dans l'état excité (ils s'ionisent plus facilement que les atomes dans l'état fondamental). Cependant, nous avons également observé des décharges lorsque les faisceaux étaient éteints, en particulier à des endroits où le fil de cuivre (dénudé) amenant la haute tension vers l'électrode passait à 1 ou 2 mm de pièces métalliques à la masse. Lorsque nous avons reconstruit le montage, nous avons donc pris soin d'éloigner le plus possible ce fil (opération assez délicate, compte tenu des petites dimensions des objets et de l'encombrement). Nous avons en outre isolé de la haute tension le disque de stabilisation, et ce grâce à l'emploi de la céramique MACOR (laquelle possède les propriétés d'être usinable, bien isolante, et de ne pas trop dégazer sous vide).

L'installation de la cage de Faraday proprement dite a elle aussi posé de très sérieux problèmes. Nous avons utilisé un grillage dont la maille fait 5 mm de côté. Afin de garantir le passage des faisceaux du PMO et du Ti-Sa, il a fallu couper les mailles aux endroits *ad hoc*. Le grillage a dû être roulé et plaqué contre le disque de stabilisation, opération qu'il a fallu

recommencer plusieurs fois, car l'ensemble ne pénétrait pas dans le goulot de la cellule. La grille a été fixée en utilisant de la colle *Torr Seal*, relativement bien adaptée au vide, bien qu'elle ne permette pas un dégazage au-delà de 120°C.

iii) L'alimentation électrique de l'électrode et la coupure de la haute tension

La source de haute tension utilisée est une alimentation de la marque SDS. Il n'est pas nécessaire d'utiliser une alimentation de forte puissance, car l'électrode se comporte comme une capacité, *i.e.* elle ne débite pas de courant (la valeur de cette capacité est environ 34 pF). La tension est transmise dans l'enceinte à vide *via* une pièce de la marque MECA 2000 prévue pour cette utilisation (passage haute tension modèle PMHT). Elle rejoint l'électrode par un fil dénudé (une gaine en plastique provoquerait du dégazage).

Il n'est pas possible de laisser l'électrode sous tension pendant la phase de piégeage magnéto-optique. En effet, le PMO fonctionne (en l'absence de champ électrique) avec un désaccord des faisceaux de -3Γ ($\Gamma = 2\pi \times 5{,}3$ MHz étant la largeur naturelle de l'état excité du césium). Or, lorsque le champ électrique est présent, le déplacement Stark de la transition est largement supérieur à -3Γ (§ 3.2.*f*, p. 166). Par conséquent, le désaccord effectif des faisceaux du PMO est fortement modifié, de telle sorte que le piégeage ne fonctionne plus. Il est donc nécessaire de couper la haute tension pendant le chargement du PMO, et de ne la mettre en route que juste au début de la phase de POE. En outre, comme nous le verrons au paragraphe 3.2.*d.i* (p. 161), on sonde les atomes du POE par une méthode de « temps de vol », consistant à couper la haute tension pour laisser tomber les atomes, de façon à regarder au bout de combien de temps ils passent dans une sonde résonnante placée au-dessous. Ceci implique donc que la haute tension puisse être coupée très rapidement (*i.e.* en un temps inférieur à la milliseconde).

Une coupure rapide du champ électrique n'est pas immédiate à réaliser, à cause des propriétés capacitives de l'électrode. Si par exemple la coupure est réalisée par une simple isolation électrique entre l'électrode et l'alimentation, elle ne se décharge que très lentement (*i.e.* en plusieurs secondes) de telle sorte que la détection par temps de vol est impossible. Il importe donc qu'au moment de la coupure, l'électrode soit directement reliée à la masse. Nous avons pour cela utilisé le montage représenté sur la figure 3.11. Il comprend un commutateur haute tension à tube construit par l'entreprise SDS, ainsi qu'un certain nombre de résistances de 1,2 MΩ montées en série. A la fin de la phase de PMO, on ferme l'interrupteur: l'électrode est portée au potentiel de 12 kV en quelques millisecondes (un temps compatible avec un bon chargement des atomes du PMO vers le POE). A la fin de la phase de POE, ouvre l'interrupteur, et l'électrode se décharge en un temps bien inférieur à la milliseconde. L'inconvénient de ce système est que l'alimentation doit débiter dans les résistances lorsque l'électrode

n'est pas chargée[1].

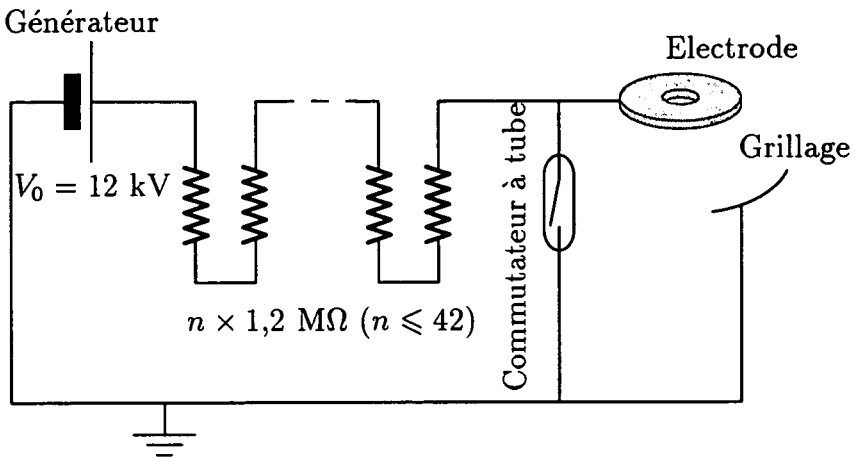


FIG. 3.11 - *Schéma électrique du dispositif de coupure de la haute tension.*

iv) L'alignement du POE par rapport au PMO

La théorie du paragraphe 3.1.*b.i*, p. 130 prévoit que la compensation de la gravité a lieu 1,2 mm au-dessus du plan médian de l'électrode (et sur l'axe de révolution). Pour charger le POE avec les atomes du PMO, il importe que les positions de ces deux pièges coïncident, ce qui pose un certain nombre de problèmes.

La mise en œuvre d'un PMO si près d'un obstacle n'est pas une chose tout à fait évidente. Il importe en particulier que les faisceaux n'éclairent pas l'électrode, sinon la lumière diffusée perturbe fortement le piégeage. Nous avons donc installé dans les faisceaux horizontaux du piège des lames de rasoir horizontales, montées sur une translation *Micro-Contrôle* permettant de régler finement leur hauteur. De cette façon, on s'arrange pour que la lumière vienne raser la surface supérieure de l'électrode, sans l'éclairer. De la même façon, des diaphragmes montés sur translation xy sont installés dans les bras verticaux. On donne ainsi aux faisceaux la taille et la position requises pour qu'ils passent exactement à l'intérieur du trou de l'électrode, sans déborder.

Remarque: à cause de ces lames de rasoir et de ces diaphragmes (et notamment parce que le diamètre des faisceaux verticaux est inférieur à 3 mm), le volume de capture du PMO est plus petit que pour un piège magnéto-optique réalisé dans des conditions usuelles. C'est pourquoi notre PMO ne contient que quelques 10^5 atomes.

1. On peut modifier le nombre de résistances (entre 1 et 42) en court-circuitant certaines d'entre elles. Moins il y a de résistances, plus le temps de chargement est bref. Si le nombre de résistances est trop faible toutefois, l'alimentation ne peut plus débiter assez de courant pour maintenir une tension de 12 kV.

La position d'un PMO est déterminée par le zéro du gradient de champ magnétique. Il importe donc que ce zéro soit situé à l'intersection des 6 faisceaux, ce dont il n'est pas facile de s'assurer lorsque la taille des faisceaux est si petite. Afin de faciliter les réglages, nous avons fixé les bobines du PMO sur un support *xyz* de la marque *Newport*, permettant de balayer un cube de 2 cm de côté avec une précision de 50 µm[1]. De cette façon, en déplaçant systématiquement les 3 vis et en s'armant d'une bonne dose de patience, il est possible de trouver une position pour laquelle le piège apparaît[2].

Faire apparaître un PMO relativement intense ne suffit pas ; il faut encore le faire coïncider avec le POE. Nous avons pour ce faire employé successivement deux méthodes, que je vais maintenant présenter. Pendant les premières phases de l'expérience, nous commencions par centrer approximativement le PMO par rapport au trou de l'électrode, en nous aidant de deux caméras vidéo placées dans le plan horizontal du piège (observant celui-ci selon des angles de vue orthogonaux). La deuxième étape consistait à aligner le faisceau dipolaire sur le PMO. Pour ce faire, nous rendions le laser résonnant, et cherchions à pousser le piège de manière à le faire disparaître (ou tout au moins à le perturber).

Cette méthode suppose de rendre le Titane-Saphir résonnant, ce qui est passablement délicat car il n'est pas asservi, et donc sa fréquence fluctue de quelques MHz sur une échelle de temps de l'ordre de la seconde. Nous avons grandement facilité la manœuvre (fig. 3.12) en faisant passer dans la même fibre que le Ti-Sa (non simultanément bien sûr) le faisceau résonnant provenant d'une diode laser DBR (de faible puissance, mais extrêmement facile à rendre résonnante et très stable en fréquence). En effet, comme la fibre est monomode, on est sûr que la position du faisceau après la fibre, réglée en utilisant la diode DBR, sera inchangée lorsque l'on passera au Ti-Sa. Pour coupler la diode DBR dans la fibre, nous avons utilisé un miroir fixé sur un support magnétique amovible de grande précision (de la marque *Thorlabs*), qu'il est possible de déplacer, puis de replacer en retrouvant le même réglage. En réglant les vis de ce miroir, ainsi que celles d'un autre miroir placé en amont, on arrive à coupler le faisceau de la diode DBR, et ce sans toucher aux vis micrométriques du coupleur de fibre, lesquelles ont été réglées pour le Ti-Sa. Après le réglage de la position du POE, on déplace le support magnétique. Comme le réglage du coupleur de fibre convenant au laser Ti-Sa n'a pas été modifié, celui-ci reste couplé dans la fibre.

La méthode que je viens d'exposer est celle qui nous a permis d'observer le POE pour la première fois. Toutefois, elle présente un inconvénient : la position

1. Il est également possible de déplacer le PMO en modifiant le courant des bobines de compensation du champ terrestre. Toutefois, cette méthode est déconseillée car elle perturbe fortement le piégeage.

2. Remarquons que le piège apparaît plus facilement si on le recherche nettement au-dessus (*i.e.* plusieurs mm) de l'électrode. En effet, la diffusion de la lumière sur l'électrode (malgré la présence des lames de rasoir) diminue le nombre d'atomes piégés lorsque le nuage est à moins d'1 mm de cette dernière.

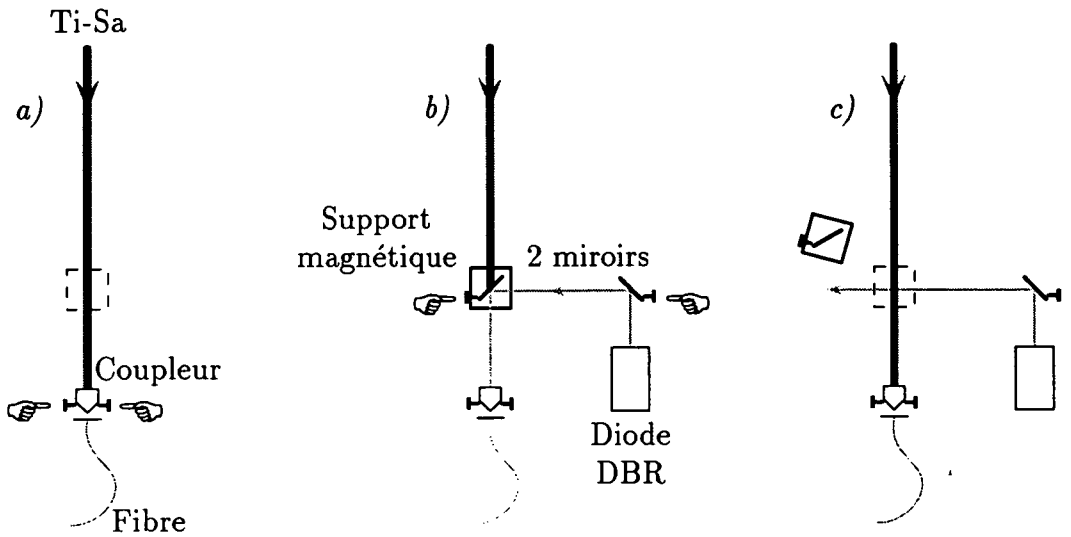


FIG. 3.12 - *Couplage du faisceau de la diode DBR dans la fibre du laser titane-saphir.* (a) *: on couple le laser titane-saphir dans la fibre en agissant sur les vis micrométriques du coupleur.* (b) *: on pose le miroir sur son support magnétique et on couple le faisceau de la diode en ne touchant qu'aux vis des miroirs.* (c) *: en ôtant le miroir sur support magnétique, le Ti-Sa est à nouveau couplé à la fibre. Si on remet en place ce miroir, le faisceau de la diode est couplé sans nécessiter de nouveau réglage.*

du faisceau dipolaire ne coïncide que très grossièrement avec l'axe de révolution de l'électrode. Or, plus on s'éloigne de cet axe, plus l'expulsion transverse du champ électrique est importante et moins le POE est profond. Une méthode plus astucieuse consiste donc à commencer par faire coïncider très précisément le faisceau avec l'axe. Nous avons pour cela fixé l'un des miroirs du faisceau dipolaire (après la fibre) sur un support à vis micrométriques graduées. On exploite alors le fait que le trou de l'électrode est circulaire. On commence par faire passer le faisceau dans le trou. Puis, on déplace l'une des vis micrométriques et on repère entre quelles positions limites le faisceau passe encore dans le trou. On se place ensuite au milieu de l'intervalle repéré, puis on procède de même avec l'autre vis. Notons que, comme le piège n'est pas exactement dans le plan de l'électrode, la méthode suppose que le faisceau soit à peu près vertical. Ceci ne pose en fait pas de problème, compte tenu de la géométrie du montage[1].

La deuxième étape du réglage consiste à aligner le PMO pour le faire coïncider avec le POE. On utilise les vis micrométriques des bobines, que l'on déplace jusqu'à faire apparaître sur l'écran de l'oscilloscope un signal de POE[2]. On peut

1. On peut voir sur la figure 3.9 que le faisceau parcourt environ 35 cm d'un tuyau large de 35 mm, avant d'arriver au niveau des atomes.

2. La nature de ce signal sera explicitée au paragraphe 3.2.*e* (p. 164).

ensuite ajuster finement la position des vis pour optimiser ledit signal. On voit que la méthode impose de savoir à peu près pour quels paramètres il faut chercher le signal. Il s'agit donc d'une technique que l'on peut utiliser lorsque le fonctionnement du POE est devenu routinier, mais qui aurait difficilement pu être employée pour rechercher le premier POE.

d) Les méthodes de détection

Charger une certaine quantité d'atomes dans le POE ne suffit pas ; il faut aussi être capable de détecter la fraction de ces atomes qui subsiste au bout d'un temps donné.

Il existe deux méthodes pour détecter des atomes froids : la détection par fluorescence et la détection par absorption. Nous les avons utilisées toutes les deux sur cette expérience. La méthode par fluorescence, qui est celle que nous avions adoptée pour l'expérience de refroidissement Raman 1D (p. 40), consiste à illuminer le nuage atomique avec de la lumière résonnante, et à détecter sur une photodiode la lumière diffusée par les atomes. Elle présente deux inconvénients majeurs : d'une part, pour des raisons d'encombrement évidentes, la fluorescence n'est détectée que dans un petit angle solide ; on perd donc la plus grande partie de la lumière utile. D'autre part, la lumière du laser utilisé pour sonder peut également être diffusée par des obstacles divers se trouvant sur son passage (en particulier, sur notre expérience, par l'électrode), ce qui induit un bruit de fond[1].

Pour détecter les atomes par absorption, on utilise un faisceau (résonnant) de faible puissance, traversant le nuage atomique. On place une photodiode à l'extrémité de ce faisceau, de façon à mesurer la lumière absorbée. L'avantage de la méthode est que toute la lumière du faisceau est utilisée. Comme on peut placer la photodiode loin de la cellule, les photons diffusés par des obstacles situés sur le parcours du faisceau n'arrivent pas sur la photodiode, et donc ne jouent pas de rôle nocif. Toutefois, cette technique est difficile à mettre en œuvre, parce que la moindre fluctuation de la puissance du faisceau induit une grande quantité de bruit sur le signal. Il convient donc d'éliminer au maximum ces fluctuations de puissance.

Je maintenant détailler de quelle façon nous avons mis en œuvre ces deux méthodes.

i) Détection par absorption

La configuration choisie. Pour détecter les atomes par absorption, nous avons utilisé une partie du faisceau maître (voir figure 3.8, p. 141) : nous disposons ainsi de lumière quasi-résonnante sans avoir besoin d'installer une diode

1. La lumière de la pièce peut également s'avérer très gênante (et dans les faits, il est presque toujours nécessaire nécessaire de travailler dans le noir). On devrait toutefois la rendre inoffensive en installant une détection synchrone.

supplémentaire. Le faisceau utilisé pour la sonde n'a pas besoin d'être très puissant, au contraire : plus la puissance est élevée, plus le chauffage des atomes par la sonde est important (en outre, si la transition atomique sature, la fraction de lumière absorbée diminue). Par ailleurs, la sonde est utilisée à un moment où le PMO est éteint. On peut donc (en modifiant la fréquence du MAO n° 2) rendre le faisceau maître (*i.e.* la sonde) résonnant au moment choisi, sans se soucier de l'injection du faisceau esclave.

La sonde a été installée de la manière représentée sur la figure 3.13. Afin de pouvoir détecter les atomes tout en sélectionnant très précisément leur position, nous avons choisi de faire passer la sonde dans une fente (de dimensions 1 mm × 200 μm)[1]. Nous avons utilisé une lentille de focale $f = 250$ mm, placée de façon à ce que l'image de la fente à travers cette lentille coïncide avec le point où se trouvent les atomes. De cette façon, le profil spatial du faisceau au niveau du piège a exactement la même forme que la fente, et peut donc être assimilé à un créneau ; la sélection des atomes en fonction de leur position se fait donc sans « bavures ».

Plutôt que de sonder les atomes avec une onde progressive, nous avons choisi d'utiliser une onde stationnaire, et donc de renvoyer la sonde sur elle-même à l'aide d'un miroir. En effet, avec une onde progressive, les atomes sont poussés par la sonde, et sortent rapidement de la zone de mesure. En employant une onde stationnaire, la force moyenne est nulle ; les atomes diffusent certes, mais quittent la sonde plus lentement, de telle sorte que l'amélioration du signal est très appréciable. La configuration de polarisation choisie pour la sonde est $\sigma^+ - \sigma^+$[2].

Nous avions construit pour le faisceau aller un profil en créneau en réalisant l'image d'une fente par une lentille. La même précaution doit être prise en ce qui concerne le faisceau retour. La configuration que nous avons choisie est représentée sur la figure 3.13. A l'aide d'une seconde lentille (de focale f =80 mm), on commence par réaliser l'image de l'image de la fente, au niveau de laquelle on place le miroir de réflexion. De cette façon, une troisième image, réfléchie de la première, se forme au niveau du piège. Cette géométrie possède un avantage : si la première image est légèrement déplacée dans une direction transverse, la troisième image se déplace dans le même sens de telle sorte que ces deux images coïncident toujours.

Remarques :

- la présence de l'image de la fente en un point ne signifie nullement que le faisceau est focalisé en ce point ;

1. En particulier, la taille de la fente est petite devant les dimensions du faisceau avant la fente, de telle sorte que l'on devrait pouvoir considérer (du moins en première approximation) que l'éclairement de la fente est uniforme.

2. Ce choix permet de pomper tous les atomes dans le niveau $|6^2S_{1/2}, F = 4, m_F = 4\rangle$. De cette façon, les atomes cyclent sur la transition $|F = 4\rangle \rightarrow |F' = 5\rangle$, pour laquelle le coefficient de Clebsch-Gordan vaut 1. Ainsi, les atomes absorbent la lumière de façon optimale.

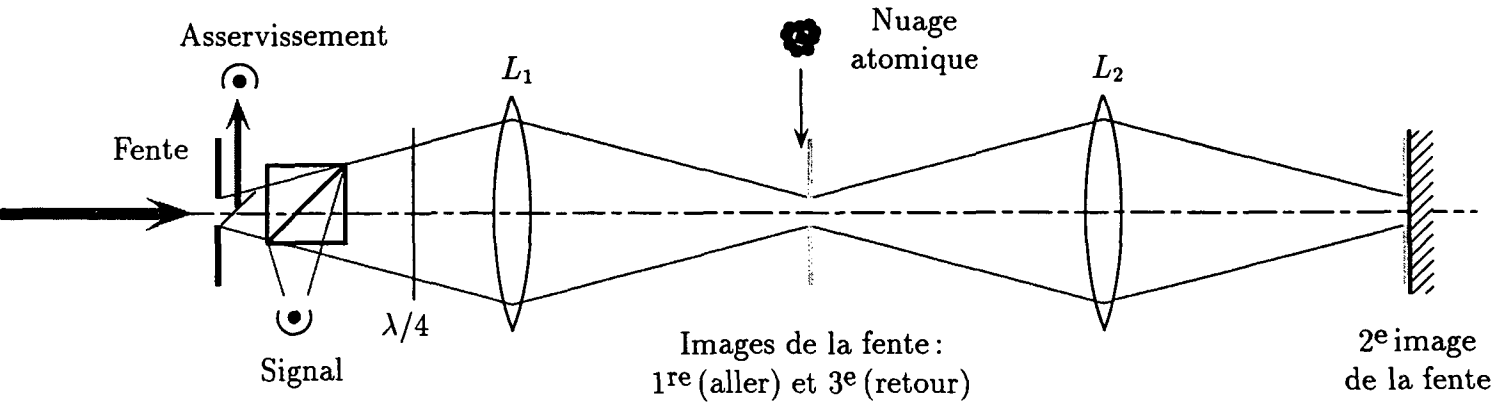


FIG. 3.13 - *La sonde à double passage utilisée, et l'image de la fente.*

– le positionnement des lentilles à la bonne distance du piège (à quelques millimètres près), de façon à faire coïncider les images de la fente avec la position de l'électrode, n'est pas immédiat. Pour ce faire, nous avons utilisé une caméra vidéo, que nous avons placée dans le faisceau (en atténuant fortement celui-ci), derrière la cellule. En alignant précisément l'axe de la caméra, le faisceau apparaît sur l'écran sous la forme d'une tache lumineuse. Dans un premier temps, nous réglons la mise au point de la caméra de façon à ce que l'électrode apparaisse parfaitement nette sur l'écran. Ensuite, nous déplaçons la lentille L_1 jusqu'à ce que la tache créée par le faisceau ait la forme d'un rectangle lui aussi bien net, correspondant à l'image de la fente. Lorsque l'électrode et l'image de la fente sont nettes en même temps, on est sûr qu'elles se situent au même endroit. Pour la lentille L_2, on procède de même, en installant une séparatrice en amont de la cellule (de façon à pouvoir observer le faisceau retour sans détruire le faisceau aller).

Réglage latéral de la sonde. Le réglage de la position transverse de la sonde est assez délicat en raison de la faible puissance de celle-ci[1]. Pour faire passer un faisceau dans un PMO[2], la technique standard consiste à le mettre à résonance, et à tenter de chasser les atomes du piège. Le problème est qu'ici, la sonde provient du faisceau maître, qui détermine aussi la fréquence des faisceaux du PMO ; si on met ce faisceau à résonance, le piège disparaît totalement. Nous avons dû travailler au désaccord $\delta = 1{,}5\,\Gamma$. Dans ces conditions, un œil bien entraîné arrivera à observer sur le piège une très légère perturbation due à la

1. Même lorsque l'on ôte la densité que l'on utilise normalement pour faire fonctionner la sonde, cette dernière est à peine visible sur une carte infrarouge. En fonctionnement normal, la puissance de la sonde est de l'ordre de 2 μW

2. Le réglage de la sonde vise à faire passer celle-ci dans le PMO. On suppose donc que le PMO est aligné avec le POE.

sonde[1].

Nous avons installé la lentille L_1 (fig. 3.13) sur une translation xy à vis graduées. Pour déplacer la sonde, nous manœuvrons ces vis à l'exclusion de toute autre. La difficulté provient du fait que les dimensions transverses de la sonde au niveau du piège sont très petites (puisque nous avons réalisé l'image d'une petite fente). Par conséquent, il est délicat de trouver pour quelle position des vis la sonde va passer au voisinage du piège; un balayage systématique nécessiterait plusieurs heures. Heureusement, nous sommes aidés par la présence de l'électrode, sur laquelle il est facile de faire arriver la sonde. En théorie donc, il suffit de centrer latéralement la sonde sur l'électrode, puis d'élever le faisceau de 1,1 mm.

Toutefois, les choses sont compliquées par le fait que, lorsque l'on tourne l'une des vis de la translation, le déplacement de la sonde n'est ni vertical, ni horizontal[2]. Aussi, nous avons dû au préalable calibrer les vis, en positionnant successivement le PMO à deux ou trois hauteurs différentes, sur l'axe, puis en regardant à chaque fois (après avoir effectué la recherche systématique) pour quelles positions des vis la sonde induisait la petite perturbation du piège précédemment évoquée. Cette calibration est assez fastidieuse, mais peut être faite une fois pour toutes; on est ensuite capable de positionner directement la sonde sur l'axe à une hauteur donnée, en choisissant les positions des vis adéquates.

Une fois réglé le faisceau aller, il reste à régler le retour, ce que l'on fait en déplaçant le miroir de renvoi. Le réglage grossier est effectué à l'aide d'une carte infrarouge percée d'un petit trou; le réglage fin, en regardant encore le PMO: le faisceau de retour, lorsqu'il coïncide parfaitement avec le faisceau aller, annule la petite perturbation induite par ce dernier (la force induite par la sonde sur les atomes est en moyenne nulle lorsque l'aller et le retour sont tous les deux présents).

Asservissement de la puissance de la sonde. Lorsque nous avons essayé d'observer le premier signal d'absorption, nous avons constaté la présence d'un bruit supérieur au signal, qui évoluait sur des temps de l'ordre de la seconde. Ce bruit était dû à des fluctuations de la puissance de la sonde, elles-mêmes causées par des vibrations mécaniques de la fente (et par le fait que le front d'onde du faisceau avant la fente n'est pas régulier). Pour résoudre ce problème, nous

1. Cette observation est rendue difficile par le fait que, lorsque le désaccord vaut $1{,}5\,\Gamma$, la forme du piège et le nombre d'atomes qu'il contient fluctuent beaucoup (sur un temps de l'ordre de la seconde), la perturbation due à la sonde que l'on cherche à mettre en évidence induisant des effets du même ordre de grandeur que ces fluctuations. Ces dernières sont dues aux vibrations mécaniques de l'assemblage de tiges sur lequel sont fixés les miroirs du PMO, vibrations qui sont responsables de variations des phases relatives entre les six bras du piège. Pour résoudre ce problème, il suffit de tapoter doucement (mais continuellement) quelque part sur cet assemblage de tiges. De cette façon, en créant des vibrations supplémentaires, on brouille totalement les phases relatives et le PMO ne fluctue plus.

2. La hauteur de la sonde est une fonction affine des positions des deux vis.

avons utilisé une méthode très astucieuse que nous devons à Pierre Lemonde: l'asservissement de la puissance de la sonde. Nous avons donc installé une photodiode de contrôle sur une petite dérivation du faisceau placée derrière la fente, et un dispositif électronique qui rétro-agit sur la puissance du faisceau *via* le MAO n° 2. L'installation de cet asservissement eût été un jeu d'enfant si la sonde avait pu rester allumée en permanence. Malheureusement, elle doit être coupée pendant la phase de piégeage opto-électrique. Si l'on ne prend pas de précaution, l'intégrateur présent dans la boucle de l'asservissement sature pendant la phase où le faisceau est coupé. Lorsque commence la phase de détection, il prend plusieurs millisecondes pour cesser d'être saturé, ce qui est catastrophique (les atomes ont le temps de disparaître). Nous avons finalement contourné ce problème en installant un circuit piloté par un interrupteur télécommandable, qui permet à l'asservissement de boucler sur lui-même pendant la phase où le faisceau est éteint.

Utilisation de la sonde en configuration « temps de vol ». Comme je l'ai dit, nous avons aligné la sonde sur le PMO, et donc sur le POE. Ceci permet de connaître, dès la fin de la phase de piégeage opto-électrique, la quantité d'atomes qui sont piégés. Le plus souvent toutefois, nous avons placé la sonde 2 à 3 mm en-dessous de la position du POE[1]. De cette façon, les atomes, à la fin de la phase de POE, tombent et passent dans la sonde: il s'agit d'une détection en « temps de vol », une méthode généralement utilisée pour remonter à la distribution des vitesses des atomes avant le lâcher, et donc à leur température. Dans le cas où la distribution en vitesse et en position des atomes est gaussienne, et si le profil du faisceau est gaussien[2], alors on peut montrer [94, p. 199] que le signal détecté V_{abs} est donné en fonction du temps par

$$V_{\text{abs}}(t) \propto \exp\left(-\frac{(t-\tau)^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2)}\right), \tag{3.49}$$

où τ est le temps moyen de chute libre et

$$\sigma_1^2 = \frac{k_{\text{B}}T}{Mg^2} \; ; \quad \sigma_2^2 = \frac{s_{\text{nuage}}^2}{2gh} \; ; \quad \sigma_3^2 = \frac{s_{\text{sonde}}^2}{2gh}. \tag{3.50}$$

La quantité h désigne la hauteur de chute, T la température du nuage, M la masse du césium : s_{nuage} et s_{sonde} sont respectivement la taille du nuage et de la sonde, dans la direction verticale. En fait, la méthode n'est précise que lorsque $\sigma_2, \sigma_3 \ll \sigma_1$ (il faut notamment que h soit suffisamment élevé). Avec les paramètres du problème ($T = 10$ µK (la température du PMO), $s_{\text{nuage}} = 620$ µm, et $s_{\text{sonde}} =$

1. Dans ce cas, la sonde passe en-dessous de l'électrode. Placer la sonde 2 mm en-dessous du piège n'est pas très difficile, une fois que la translation de la lentille L_1 a été calibrée.

2. Remarque: ce n'est pas le cas ici.

200 μm), cette condition n'est pas remplie[1]. Toutefois, notre temps de vol permet d'avoir quand même une idée de la température du POE ; il permet en outre de remonter à la vitesse moyenne selon z des atomes dans le POE, comme nous le verrons au paragraphe 3.3.*b* (p. 171) lorsque nous mettrons en évidence les oscillations longitudinales.

Efficacité de la sonde. Notre sonde s'est révélée être un moyen très performant pour détecter les atomes. Ainsi, lorsque nous détectons directement les atomes du PMO (sans phase de POE), les atomes absorbent jusqu'à 70 % de la lumière de la sonde. Le bruit a été réduit à un niveau tel que nous sommes capables de détecter 100 atomes en 20 ms.

Je vais évaluer ici quel est le nombre d'atomes correspondant à un signal donné. J'appelle $V_{\max}$ la tension mesurée sur la photodiode lorsqu'il n'y a pas d'atomes, en supposant que la tension 0 correspond à l'absence de lumière. On trouve $V_{\max} = 48$ V[2]. Je rappelle que la tension mesurée est proportionnelle à la puissance du faisceau. Sachant que la partie imaginaire de l'indice à résonance vaut, à faible saturation, $n'' = 3\pi\rho\lambda\!\!\!^{-3}_{\text{at}}$, où ρ est la densité atomique et $\lambda\!\!\!^{-} = c/\omega_{\text{at}}$ (ω_{at} étant la fréquence atomique), on déduit que la variation de tension due à l'absorption vaut (dans le cas où le milieu atomique est mince)

$$V_{\text{abs}} = V_{\max}\frac{12\pi\lambda\!\!\!^{-2}_{\text{at}} N_{\text{prés}}}{\mathcal{S}_{\text{sonde}}}, \tag{3.51}$$

où $N_{\text{prés}}$ est le nombre d'atomes présents dans la sonde (j'ai tenu compte du fait que les mêmes atomes absorbent la lumière à l'aller et au retour), et $\mathcal{S}_{\text{sonde}}$ la section de la sonde. La largeur de la sonde dans la direction horizontale (1 mm) est supérieure à la taille transverse du PMO (480 μm), de telle sorte que tous les atomes passent dans la sonde. Comme le temps que chaque atome passe dans la sonde est

$$\frac{s_{\text{sonde}}}{\sqrt{2gh}}$$

(s_{sonde} et h étant respectivement la largeur de la sonde et la hauteur de chute), on déduit l'équation donnant le nombre d'atomes total du nuage N_{tot} :

$$\boxed{\int V_{\text{abs}}(t)\mathrm{d}t = V_{\max}\frac{12\pi\lambda\!\!\!^{-2}_{\text{at}} s_{\text{sonde}}}{\mathcal{S}_{\text{sonde}}\sqrt{2gh}} N_{\text{tot}}\,.} \tag{3.52}$$

1. Les σ_i sont du même ordre de grandeur.

2. Cette tension de 48 V n'est bien sûr pas mesurable directement, puisque l'amplificateur de la photodiode sature au-delà de 15 V. On obtient la valeur en abaissant le gain d'un facteur 10 (on mesure alors 4,8 V).

Numériquement, on trouve (toujours pour un faisceau résonnant et de faible saturation)

$$N_{\text{tot}} = \frac{\int V_{\text{abs}}(t)\mathrm{d}t}{1{,}7.10^{-7}}, \tag{3.53}$$

la tension étant exprimée en volts et le temps en secondes.

ii) Détection par fluorescence

Outre la détection par absorption que je viens de décrire en détail (et qui fonctionne très bien), nous avons cherché à diagnostiquer la présence des atomes dans le POE par mesure de leur fluorescence. Dans ce but, nous avons installé successivement deux systèmes de mesure. Le premier montage a été mis au point pendant la première phase de l'expérience [148, p. 14], à une époque où la détection des atomes par absorption n'était pas encore au point (nous cherchions à mesurer le nombre d'atomes par deux moyens, ne sachant pas d'avance lequel serait le plus efficace). Nous avions installé un deuxième faisceau sonde, passant 2 cm en-dessous du piège[1], et lui aussi dérivé du faisceau maître. Après la coupure du piège, les atomes passaient dans cette sonde, et nous détections leur fluorescence. La taille de la sonde était suffisamment petite pour ne pas éclairer les piliers de l'électrode. Lors de la mise au point de cette détection, nous avons eu beaucoup de problèmes avec la lumière ambiante, et avons dû installer une détection synchrone. Au bout du compte, la méthode s'est avérée moins efficace que la détection par absorption.

Dans les dernières semaines de l'expérience, nous avons mis au point un autre système de détection de la fluorescence, beaucoup plus performant. Il utilise une caméra vidéo déclenchable, *i.e.* capable d'enregistrer la lumière diffusée en un instant donné (que l'on peut programmer). Après une phase de POE de durée variable, nous éclairons brusquement les atomes avec les faisceaux du PMO, et enregistrons une image[2]. Ceci permet de visualiser précisément la position des atomes dans le piège. Nous avons ainsi pu réaliser une séquence vidéo sur laquelle on voit osciller les atomes dans la direction verticale. On peut également évaluer précisément la taille du nuage atomique. N'ayant aucunement participé à l'élaboration de ce système de détection, je ne fournirai pas davantage de détails ici. Le lecteur pourra vraisemblablement trouver toutes les précisions qu'il souhaite dans l'une des références [152, 153], après qu'elles auront été rédigées.

1. par conséquent, en-dessous du « disque de stabilisation » visible sur la figure 3.9 (p. 150).

2. Remarquons que la diffusion de la lumière sur l'électrode ne constitue pas ici une gêne, puisque la caméra peut séparer spatialement le piège de l'électrode.

e) La séquence temporelle

La séquence temporelle que nous avons utilisée (fig 3.14) est la suivante :

– tout d'abord, nous collectons et refroidissons les atomes grâce à une phase de piégeage magnéto-optique, dont la durée est de l'ordre de quelques secondes. On remarquera que cette phase est plus longue que pour l'expérience de refroidissement Raman à 1D[1]. Cela vient du fait que nous travaillons à une pression de césium plus faible (une fraction de μPa, *i.e.* quelques 10^{-9} Torr), afin de réduire les collisions avec les atomes rapides, et donc d'améliorer le temps de piégeage des atomes du POE ; par conséquent, le temps de chargement du PMO est plus long ;

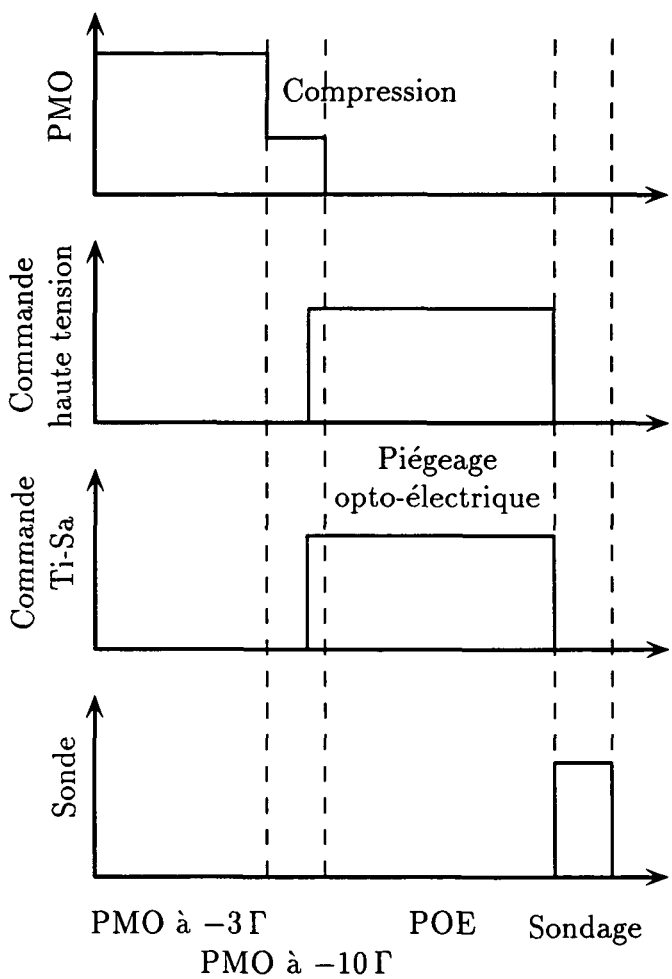


FIG. 3.14 - *La séquence temporelle utilisée*

1. où je rappelle qu'elle était de 350 ms (p. 32).

- dans un deuxième temps, nous réduisons la puissance des faisceaux du PMO de 25 à 2 mW/cm^2 (en utilisant la lame à retard évoquée p. 143), tandis que le désaccord du faisceau passe de $-3\,\Gamma$ à $-10\,\Gamma$. Cette phase, de durée 20 ms, permet de réduire la température des atomes [30, fig. 17 p. 204] et d'augmenter la densité dans l'espace des phases[1]. Le nuage obtenu contient 5.10^5 atomes à la température de 10 µK. Les dimensions du nuage atomique (diamètre $1/\sqrt{e}$) sont 480 µm horizontalement et 280 µm verticalement. Sa densité pic est approximativement 4.10^9 cm^{-3}, à un facteur 4 d'incertitude absolue près ;

- au début de la troisième phase, on désinjecte puis on coupe les faisceaux du PMO (selon la méthode décrite p. 143), et on éteint le repompeur. Parallèlement, on met en route la haute tension ainsi que le faisceau dipolaire[2]. Le piégeage opto-électrique commence ;

- enfin, après une phase de POE de durée variable (typiquement de 10 ms à 3 s), on éteint en quelques millisecondes la haute tension, ainsi que le faisceau dipolaire. Les atomes tombent et traversent la sonde au bout de 25 ms. Je rappelle que le temps de coupure du champ électrique est court devant la milliseconde (§ 3.2.*c.iii*, p. 153), et donc devant la durée du signal. La figure 3.15 représente un signal typique, observé dans le cas où il n'y a pas de phase de POE[3 4]. Une tension mesurée moins élevée correspond à davantage de lumière (par conséquent, davantage d'atomes signifie moins de lumière et donc plus de tension).

Comme je l'ai déjà évoqué dans l'introduction, cette séquence temporelle est commandée informatiquement : nous avons fait appel à Jakob Reichel pour qu'il adapte à notre expérience le programme du refroidissement Raman. Cette adaptation représente un travail certes non négligeable, mais dont l'importance reste raisonnable, si on la compare à ce qu'aurait demandé l'écriture d'un nouveau

1. Remarquons que, contrairement à l'expérience de refroidissement Raman du chapitre 1, il n'y a pas de phase de mélasse. Une telle phase aurait eu pour effet d'étaler le nuage atomique (dans l'espace des positions), et donc de réduire l'efficacité du transfert PMO → POE. Rappelons aussi que pour l'expérience Raman, la phase de temps noir (*i.e.* de refroidissement Raman) ne pouvait commencer que lorsque le champ magnétique était descendu à 0. Une telle contrainte n'existe pas sur la présente expérience, où $\vec{B}$ n'a pas besoin d'être très bien compensé.

2. Pour être sûr que le champ électrique est bien présent dès le début de la phase de piégeage opto-électrique (afin d'assurer un bon chargement du POE), cette mise en route a lieu quelques millisecondes avant la fin de la phase de PMO à grand désaccord. La coexistence entre les faisceaux et le champ électrique n'est pas gênante, dans la mesure où le déplacement Stark est insuffisant pour perturber le piégeage magnéto-optique lorsque $\delta = -10\,\Gamma$ (alors qu'il détruit totalement le piège lorsque $\delta = -3\,\Gamma$). Le faisceau dipolaire doit également être mis en route quelques ms avant le début de la phase de POE, en raison de la durée d'ouverture de l'obturateur mécanique.

3. Il existe un petit délai toutefois entre la fin de la phase de PMO et le début de la phase de sondage. Ce délai est rendu nécessaire par la manœuvre des obturateurs mécaniques

4. Le lecteur remarquera le faible niveau du bruit : il s'agit du résultat d'une longue et fastidieuse optimisation des circuits électroniques du dispositif de détection (avec en particulier une suppression systématique des boucles de masse), qui a pour l'essentiel été réalisée par Pierre Lemonde.

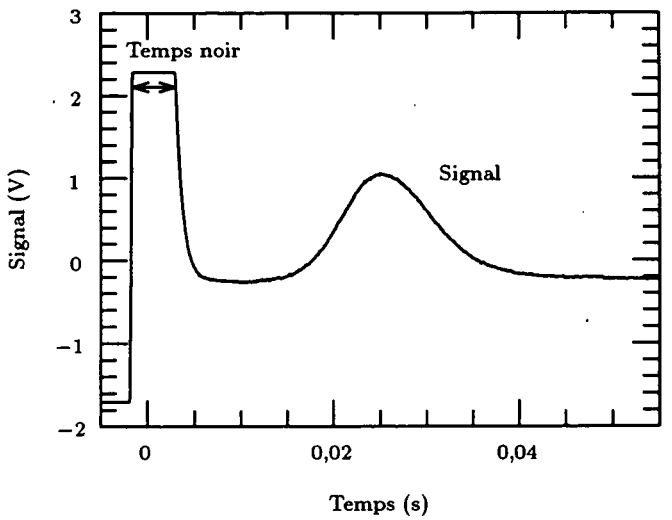


FIG. 3.15 - *Signal de temps de vol typique (sondage par absorption). Ce signal correspond à un « coup » (pas de moyenne). Le piège contient 9,8.10⁴ atomes.*

programme. En effet, les deux dispositifs expérimentaux ont de nombreux points communs (en particulier, tout ce qui concerne le piégeage magnéto-optique). La principale innovation qu'il a fallu apporter concerne le paramètre que l'on fait varier lorsque l'on enregistre une courbe; il ne pouvait bien sûr plus s'agir du désaccord Raman, comme c'était le cas sur l'expérience précédente. La nouvelle version du programme offre le choix entre trois paramètres à faire varier: le temps de piégeage opto-électrique (l'option la plus utilisée), le désaccord du faisceau sonde, et la durée de la phase de PMO à $-10\,\Gamma$. Le programme répète la séquence totale PMO + PMO grand désaccord + POE + sonde, en donnant à chaque fois une nouvelle valeur au paramètre choisi. Pour chaque valeur, il enregistre l'aire du pic d'un signal d'absorption (tel celui de la figure 3.15). Ceci permet de tracer un point sur la courbe.

Dans de nombreux cas toutefois, il est arrivé que cette prise de données informatisée ne soit pas adaptée, en particulier lorsque l'on souhaitait accéder à une donnée autre que l'aire du pic d'absorption (par exemple, sa largeur ou encore la position (temporelle) de son centre). Il pouvait également arriver que l'on désirât faire varier un paramètre ne figurant pas parmi ceux prévus dans le programme. Dans ce cas, il fallait tout faire « à la main », *i.e.* enregistrer, pour chaque valeur du paramètre, le spectre d'absorption, puis effectuer un dépouillement pour extraire la courbe désirée.

f) Résultat préliminaire

La première mesure expérimentale que nous avons faite est une « cartographie » du champ, c'est-à-dire une détermination du carré du champ électrique

statique le long de l'axe de révolution, en fonction de la hauteur z par rapport à l'électrode.

Pour réaliser cette mesure, nous utilisons la séquence temporelle précédemment décrite (en sondant tout de suite après la phase de PMO à grand désaccord), avec une modification: nous n'éteignons pas la haute tension pendant la phase de sondage. Nous traçons un spectre d'absorption sur $4 \rightarrow 5$ en faisant varier le désaccord de la sonde. Lorsque le champ électrique est nul, on observe, comme attendu, une courbe assimilable à une lorentzienne, centrée sur le désaccord nul, et de largeur Γ (fig. 3.16-*a*). En présence de champ électrique, la courbe s'est déplacée de plusieurs Γ du fait de l'effet Stark. Ce déplacement peut être évalué précisément en ajustant chacune des deux courbes avec une lorentzienne, de façon à en repérer le centre.

Connaissant le déplacement Stark de la raie, on peut remonter au carré du champ électrique. Notons qu'il faut pour ceci connaître la polarisabilité de l'état fondamental, mais aussi celle de l'état excité. Il est exposé dans [139, table IV] que la partie scalaire de la polarisabilité est donnée par

$$\alpha_{6^2\mathrm{P}\,3/2} - \alpha_{6^2\mathrm{S}\,1/2} = 2{,}1.10^{-38}\ \mathrm{J.m^2.V^{-2}}\,. \tag{3.54}$$

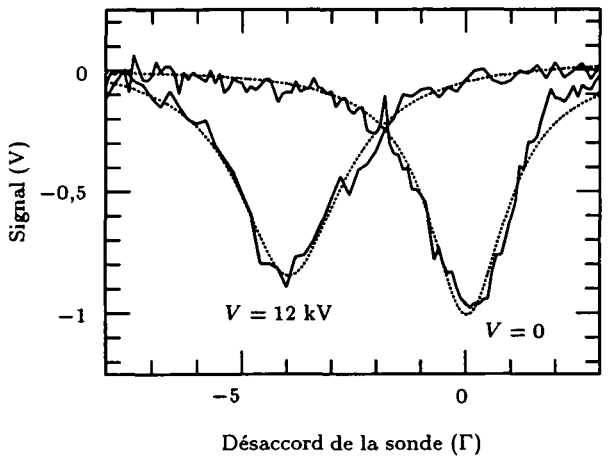
Notons que pour l'état excité, l'opérateur de déplacement Stark contient également un terme tensoriel d'ordre 2. Toutefois, les déplacements induits par ce terme restent petits devant ceux du terme scalaire (ils sont par contre responsables d'un élargissement de la raie).

Le champ électrique que nous venons de mesurer est celui du point de l'axe z correspondant à la hauteur de la sonde. Pour recommencer la mesure en un autre point, nous devons déplacer la sonde verticalement d'une quantité connue. Ceci peut être fait en tirant parti de la calibration des vis micrométriques évoquée p. 160. La précision de la sélection spatiale selon la direction verticale, est donnée par la largeur de la sonde, qui est 200 μm. On voit donc ici tout l'intérêt de construire, comme nous l'avons fait, un profil de faisceau étroit en réalisant l'image d'une fine fente (p. 158). La sélection horizontale de la position est quant-à elle déterminée par la taille du piège magnéto-optique[1], la largeur de la sonde dans cette direction (1 mm) étant supérieure à la taille du PMO (480 μm).

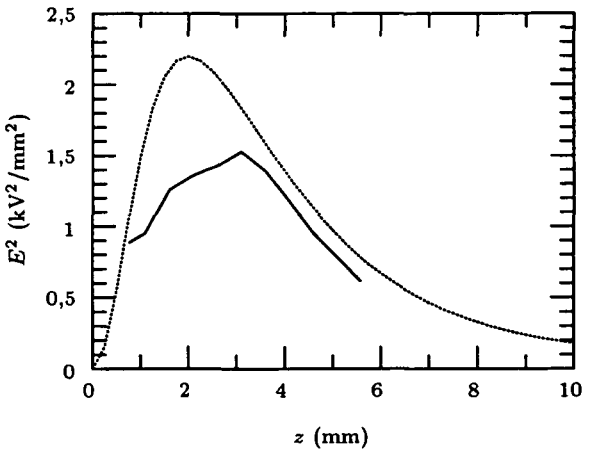
Les résultats de cette mesure sont représentés sur la figure 3.16-*b*. J'ai comparé la mesure expérimentale au résultat théorique obtenu par résolution numérique de l'équation de Laplace (§ 3.1.*b.ii*, p. 134), résolution qui a été effectuée en modélisant la cage de Faraday par un cylindre métallique au potentiel 0[2]. On constate

1. Lors de cette série de mesures, le nuage atomique du PMO doit être situé sur le passage de la sonde. Une mesure en « temps de vol » est en effet impossible, puisque le champ électrique, encore présent pendant la mesure, perturberait la chute des atomes. Lorsque l'on déplace la sonde, il faut aussi déplacer le PMO en manœuvrant les vis micrométriques de la translation xyz des bobines de gradient de champ magnétique.

2. Remarquons que la prise en compte de la grille fait augmenter le champ électrique d'environ 50 %, par rapport au cas de la figure 3.5 (p. 135) où la masse est à l'infini.



(a) *Spectre d'absorption, en l'absence et en présence de champ électrique (mesure effectuée à z = 2,6 mm au-dessus de l'électrode). En pointillés, l'ajustement par une lorentzienne.*



(b) *Champ électrique, mesuré en fonction de de z. En pointillés, la courbe théorique obtenue en résolvant l'équation de Laplace, et en tenant compte du grillage. L'accord est raisonnable compte tenu du moyennage géométrique (taille de la sonde).*

FIG. 3.16 - *Mesure expérimentale du champ électrique, le long de l'axe de révolution de l'électrode. La hauteur z = 0 correspond au plan médian de l'électrode. L'électrode est portée au potentiel de 12 kV.*

que, même si leur ordre de grandeur et leur allure générale sont les mêmes, les deux courbes ne coïncident pas parfaitement. En fait, on ne devait pas s'attendre à un excellent accord, et ce pour plusieurs raisons: tout d'abord, la géométrie de l'électrode a été modélisée très grossièrement[1]. Ensuite, le champ mesuré est en réalité une moyenne spatiale, à cause du caractère non ponctuel du PMO et de la sonde. Une troisième source d'erreur provient de l'imprécision avec laquelle le PMO (et donc le point de mesure) est centré sur l'axe. On observera sur la figure 3.4 (p. 132) que l'effet d'un mauvais centrage est plus important à proximité de l'électrode. Ceci pourrait expliquer pourquoi les courbes expérimentale et théorique de la figure 3.16-*b* coïncident mieux lorsque z est plus élevé.

Remarque: nous avons essayé de mettre en évidence par la même méthode les déplacements lumineux liés à la présence du faisceau dipolaire. Toutefois nous n'avons pas obtenu de résultat significatif, car ces déplacements restent inférieurs à Γ.

1. Le programme de résolution de l'équation de Laplace ne fonctionne que pour une géométrie à symétrie de révolution. Il n'est donc pas possible, par exemple, de prendre en compte l'effet des piliers de l'électrode. Les trous dans la cage de Faraday (qui servent à laisser passer les faisceaux) ne sont pas non plus modélisés.

3. Résultats expérimentaux

a) Première mise en évidence expérimentale du piégeage opto-électrique

Je vais présenter ici une mesure de temps de vol[1] que nous avons réalisée après avoir installé la cage de Faraday. La sonde est placée 3 mm en-dessous de la position de PMO, lequel a été placé approximativement au point où, d'après la théorie, la gravité sera compensée par la force électrostatique. Nous avons balayé la longueur de la phase noire (c'est-à-dire l'intervalle séparant la coupure des faisceaux du PMO et le début du sondage), et regardé sur l'écran d'un oscilloscope numérique (de la marque *Lecroy*) le comportement du signal. Nous avons ainsi recherché un effet du champ électrique, puis du faisceau dipolaire.

Les résultats correspondants sont présentés sur la figure 3.17, où la quantité de lumière transmise est tracée en fonction du temps, de la même façon que sur la figure 3.15[2]. La phase noire ainsi que la phase de sonde sont toutes deux visibles sur la courbe (pendant la phase noire, le signal sature à +0,2 V). Le déclenchement du balayage de l'oscilloscope est effectué à l'instant où commence la phase de sondage. C'est pourquoi le début de la phase noire apparaît de façon plus ou moins décalée, en fonction de la durée de celle-ci.

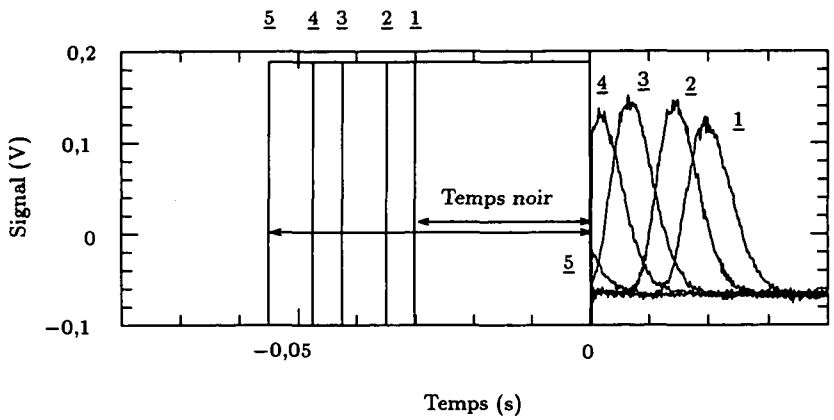
Sur la figure 3.17-*a*, il n'y a ni champ statique, ni faisceau dipolaire ; une fois que les faisceaux de la mélasse sont coupés, rien ne vient perturber la chute des atomes. On s'attend donc à ce que ceux-ci passent dans la sonde 25 ms après le début de la phase noire, et ce indépendamment du moment où on allume la sonde. Par conséquent, étant donné que l'oscilloscope est déclenché au début de la phase de sondage, on verra le pic se déplacer vers la gauche au fur et à mesure que la durée de la phase noire va augmenter. C'est effectivement ce que l'on vérifie sur la courbe expérimentale[3].

Si maintenant on met en route le champ statique pendant la phase noire, les atomes sont confinés dans la direction verticale. Leur chute ne peut commencer qu'à partir du moment où la haute tension est coupée, instant qui coïncide avec le début de la phase de sondage. On s'attend donc à ce que le pic du signal apparaisse 25 ms après le début de cette phase, indépendamment de la durée de la phase noire qui l'a précédée. C'est effectivement ce que l'on observe sur la figure

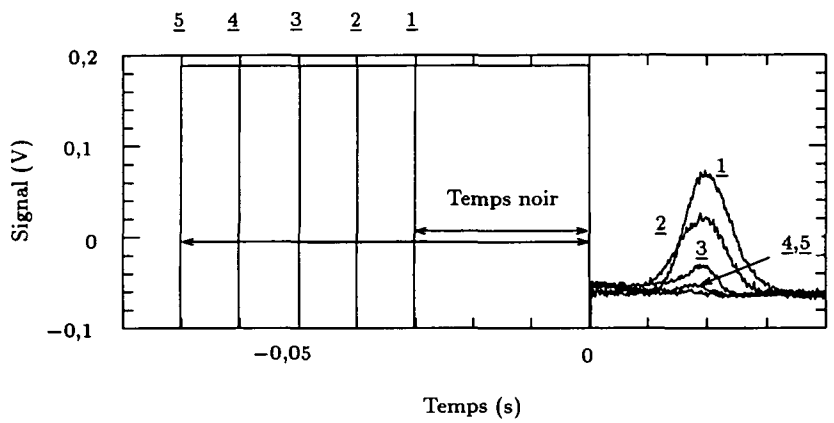
1. Pour tous les résultats expérimentaux qui vont suivre, le sondage a été réalisé par absorption.

2. Je rappelle qu'un maximum de lumière correspond à un minimum de tension. Le passage des atomes induit l'absorption d'une partie de la lumière, donc un pic dirigé vers les tensions positives.

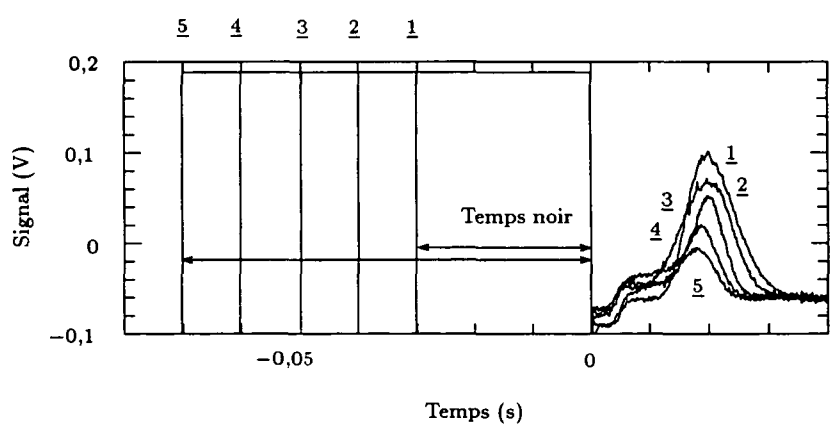
3. Pour réaliser la figure 3.17, j'ai dû superposer les courbes correspondant à différentes durées de la phase noire. Les choses sont beaucoup plus parlantes lorsque l'on affiche ces courbes successivement sur un écran ; dans ce cas, on peut vraiment voir le signal se déplacer petit à petit vers la gauche (ou ne pas se déplacer, lorsque le piégeage opto-électrique fonctionne). L'état actuel de la technologie ne permet malheureusement pas encore d'incorporer des images animées dans un manuscrit de thèse.



(a) *En l'absence de champ électrique et de faisceau dipolaire.*



(b) *Avec champ électrique et sans faisceau dipolaire.*



(c) *En présence de champ électrique et de faisceau dipolaire.*

FIG. 3.17 - *Mise en évidence du piégeage opto-électrique. Le signal d'absorption est mesuré pour différents temps noirs, (les courbes 1 à 5 correspondent à des temps noirs de 30, 35, 42,5, 47,5 et 55 ms pour la sous-figure* a, *et 30, 40, 50, 60 et 70 ms pour les sous-figures* b *et* c*). On constate que le champ électrique retient la chute des atomes et que le faisceau dipolaire maintient le nombre d'atomes (détails dans le texte).*

3.17-*b*, où le pic ne se déplace plus. Remarquons que la hauteur du pic décroît très vite, et que ce dernier a totalement disparu au-delà de 70 ms de temps noir. Ceci est dû au fait que le confinement dans la direction transverse n'est pas réalisé. Si le temps noir est trop long, les atomes s'éloignent de l'axe et ne passent plus dans la sonde au cours de leur chute.

Lorsque le faisceau dipolaire est lui aussi présent (fig. 3.17-*c*), on observe que le signal persiste beaucoup plus longtemps : il en reste encore un tiers au bout de 70 ms. Cette mesure a donc permis de mettre en évidence un piégeage opto-électrique : le champ électrostatique empêche la chute des atomes ; le faisceau dipolaire permet de conserver une partie importante des atomes en les confinant transversalement.

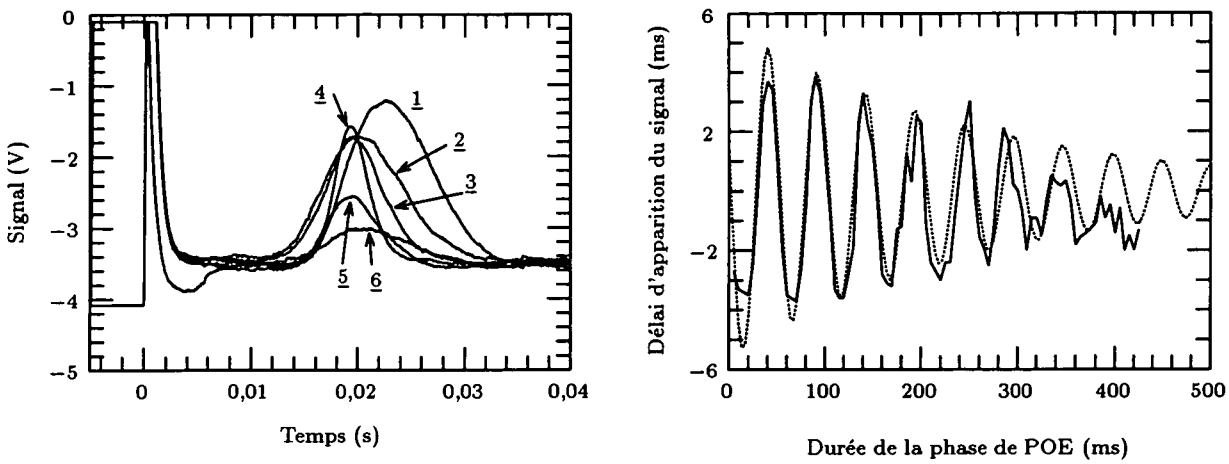
Remarque : cette expérience semble indiquer que la durée de vie du POE est de l'ordre de 50 ms. Cette durée de vie extrêmement courte (largement insuffisante pour le refroidissement Raman, même par impulsions) ne peut être expliquée ni par le chauffage résiduel du faisceau dipolaire, ni par les collisions avec les atomes rapides[1]. Quelques semaines après cette mesure, nous avons compris qu'elle provenait du fait que le faisceau dipolaire était mal centré. Il ne permettait donc pas réellement de confiner transversalement les atomes, même s'il ralentissait fortement leur expulsion. Nous avons résolu ce problème en mettant au point la nouvelle méthode de réglage de la position du POE, exposée p. 155 (elle consiste à centrer d'abord le faisceau dipolaire en se référant au trou de l'électrode, puis à déplacer la position du PMO de façon à optimiser le signal de POE après 50 ms de temps noir).

b) Mesure des oscillations longitudinales dans le POE

Nous avons réussi à mettre en évidence les oscillations longitudinales (*i.e.* dans la direction z) des atomes dans le POE. Pour ce faire, nous avons décalé légèrement la position du PMO vers le haut (par rapport à la position d'équilibre prévue par la théorie) : de cette façon, les atomes, qui ne sont plus « lâchés » au centre du POE, se mettent à osciller. La position et la vitesse moyennes du nuage atomique évoluent donc pendant la phase de POE ; par conséquent, lorsque l'on coupe le POE, les conditions initiales de la chute dépendent de la durée qu'a eue la phase de POE. Le délai d'apparition du signal de temps de vol (par rapport au début de la phase de sondage) va donc lui aussi dépendre de cette durée.

Sur la figure 3.18-*a*, j'ai représenté le signal de temps de vol pour différentes durées de la phase de POE. On constate en regardant les positions des sommets des courbes que l'effet des oscillations y est très nettement perceptible. Afin de

1. Le temps de chauffage par les photons du faisceau dipolaire peut facilement être calculé ; on vérifie ainsi que ce n'est pas lui qui est en cause. Pour ce qui est des collisions avec les atomes rapides, nous avons effectué des mesures comparatives entre la durée de vie du POE, et celle du PMO à $-10\,\Gamma$ (si ces collisions étaient en cause, elles auraient aussi limité la durée de vie du PMO à $-10\,\Gamma$).



(a) *Signaux d'absorption pour différents temps de piégeage opto-électrique (les courbes de 1 à 6 correspondent à des temps de POE de 0, 5, 10,..., 25 ms).*

(b) *Délai d'apparition du signal en fonction de la durée de la phase de POE. La courbe en pointillés représente l'ajustement par une sinusoïde amortie exponentiellement.*

FIG. 3.18 - *Mise en évidence des oscillations longitudinales dans le POE. Courbe* a *: on enregistre un signal d'absorption pour diverses durées de la phase de POE. Chaque courbe est ensuite ajustée par une gaussienne pour déterminer précisément l'abscisse de son sommet. Cette abscisse est tracée sur la courbe* b *(avec une origine arbitraire) en fonction du temps de POE. La période est de 52±1 ms, un résultat en accord avec les prédictions théoriques.*

quantifier cet effet, nous avons ajusté ces signaux par des gaussiennes, de façon à déterminer précisément l'abscisse des sommets. Ces abscisses (*i.e.* les délais d'arrivée du nuage atomique) sont tracées en fonction de la durée de la phase de POE sur la figure 3.18-*b*. On voit très clairement apparaître une sinusoïde amortie. La pulsation d'oscillation est de 120 rad/s, une valeur tout-à-fait compatible avec ce que prédit la théorie (table 3.1, p. 140), *i.e.* 110 rad/s[1]. Les oscillations sont amorties en un temps $1/e$ de 260 ± 30 ms. Cet amortissement est dû au chauffage résiduel du faisceau dipolaire, et au couplage non harmonique entre les oscillations transverses et longitudinales.

Lorsque des particules sont confinées dans un piège harmonique, leurs vitesses tout comme leurs positions oscillent sinusoïdalement. Or, une variation du délai d'apparition du signal de temps de vol peut tout aussi bien être causée par une variation de la position des particules, que par une variation de leur vitesse. On peut donc se demander, dans notre cas, qui de la vitesse ou de la position contribue le plus au signal sinusoïdal observé. On répond à cette question par un

1. Si l'on calcule le champ électrique en tenant compte de la cage de Faraday, on trouve une pulsation d'oscillation de 125 rad/s.

rapide calcul d'ordres de grandeurs. Une variation Δv_z de la vitesse moyenne des atomes induit sur le délai d'apparition du signal une variation $\Delta t = \Delta v_z/g$. Pour une variation de position Δz, on trouve un retard $\Delta t' = \Delta z/\sqrt{2gh}$, où $h = 3$ mm est la hauteur de chute. Sachant que dans le cas d'oscillations dans un piège harmonique, on a la relation $\Delta v_z = \omega_z \Delta z$, où ω_z est la pulsation d'oscillation, on déduit qu'il faut comparer $1/g$ et $1/(\omega_z\sqrt{2gh})$ (soit respectivement 0,1 et 0,03 $s^2.m^{-1}$). On trouve finalement que ce sont essentiellement des oscillations de la vitesse que l'on met en évidence sur la figure 3.18-*b*. Ce résultat pouvait d'ailleurs être prédit en considérant le déphasage des oscillations. Au début de la période de POE, on peut considérer (du moins si la mélasse n'est pas trop mal réglée) que la vitesse moyenne des atomes est nulle. C'est bien ce que l'on observe en regardant l'origine de la sinusoïde.

Remarques :

– les oscillations longitudinales des atomes du POE ont également été mises en évidence par Pierre Lemonde et Wolfgang Hänsel grâce à la caméra déclenchable évoquée p. 163. Ils ont ainsi pu, en enregistrant les images une par une, mettre au point un petit film dans lequel on peut voir les atomes osciller (ce qui est particulièrement spectaculaire) ;

– par contre, aucune des deux méthodes de détection n'a pu mettre en évidence les oscillations transverses. Cela est dû au fait que la taille transverse du PMO (180 μm) est du même ordre de grandeur que le col du faisceau dipolaire (320 μm).

c) Mesures de la durée de vie du POE

i) Principe des mesures et facteurs limitatifs

Nous avons réalisé un grand nombre de mesures permettant de déterminer la durée de piégeage typique du POE. Le principe de ces mesures est d'enregistrer le nombre d'atomes détectés par le temps de vol à la fin de la phase de POE (ce nombre d'atomes est donné par l'aire d'une courbe du type de la figure 3.15). Ensuite, on modifie la durée de cette phase et on recommence. En dépouillant les données, on obtient par exemple les courbes représentées sur la figure 3.19 (p. 176). On trouve que la durée de vie typique du POE est de l'ordre de la seconde (une fraction détectable des atomes subsistant au bout de 3 à 4 s).

Trois facteurs viennent limiter cette durée de piégeage : tout d'abord, la diffusion de photons du faisceau dipolaire, qui peut chauffer les atomes à un point tel que le nuage « déborde » du piège ; ensuite, les collisions avec des atomes rapides, qui se produisent surtout lorsque la pression de la vapeur de césium est élevée ; enfin, les collisions inélastiques entre atomes froids, accompagnées d'un changement de structure hyperfine.

Le taux de chauffage par le faisceau dipolaire dépend de la longueur d'onde de celui-ci. Lorsque $\lambda_{dip} = 852{,}8$ nm (soit $\Delta\lambda_{dip} = 0{,}7$ nm), chaque atome diffuse

160 photons par seconde. Ceci correspond à un chauffage de 70 μK/s ; dans ce cas, ce chauffage constitue effectivement l'une des limites à la durée de vie du POE. Par contre, si l'on travaille à plus grand désaccord (p. ex. $\lambda_{dip} = 853{,}9$ nm, *i.e.* $\Delta\lambda_{dip} = 1{,}8$ nm), ce processus parasite devient plus petit que les pertes par collisions avec le gaz résiduel. On le vérifie en constatant que la durée de vie ne dépend plus de la longueur d'onde.

Le vide résiduel constitue par contre une sérieuse limite pour la durée de confinement. Ainsi, les temps de 1 s que j'ai évoqués n'ont pu être observés que pour des pressions de l'ordre de 0,2 μPa, soit 2.10^{-9} Torr. Ceci implique des conditions de travail assez difficiles, car à très basse pression il y a peu d'atomes dans le PMO[1], et donc les signaux sont particulièrement faibles (il faut moyenner un grand nombre de fois). Les signaux que j'ai présentés jusqu'ici (par exemple ceux de la figure 3.15) ont tous été enregistrés avec des pressions de césium sensiblement plus élevées (typiquement 1 μPa). Dans ces conditions, la durée de vie du POE est de l'ordre de 500 ms[2].

ii) Les collisions inélastiques

Regardons maintenant la troisième cause de limitation concernant la durée de vie du POE : les collisions inélastiques entre atomes froids. L'étude de ces collisions constitue un sujet de recherche à part entière. On peut montrer qu'il existe de nombreux types de collisions inélastiques, beaucoup d'entre elles faisant intervenir un atome dans l'état excité [44]. Dans le cas du POE, on peut supposer que tous les atomes sont dans l'état fondamental $|6^2S_{1/2}\rangle$. Par conséquent, un seul type de collisions inélastiques se produira : les collisions avec changement de structure hyperfine [155–157], pour lesquelles deux atomes initialement dans $|F = 4\rangle$ entrent en collision, et basculent dans l'état $|F = 3\rangle$. L'énergie correspondante ($2h \times 9{,}2$ GHz, h étant la constante de Planck) est libérée sous forme d'énergie cinétique. Les atomes acquièrent donc une vitesse de 5 m/s environ, ce qui est largement suffisant pour les expulser du piège[3].

Les atomes collectés par le PMO sont tous dans l'état $|F = 4\rangle$, et donc des collisions inélastiques peuvent se produire. Toutefois, le POE peut également confiner les atomes dans $|F = 3\rangle$ (et dans ce cas, il ne se produit pas de collisions inélastiques). Afin de déterminer le rôle joué par ces collisions inélastiques, nous avons donc comparé des mesures de durée de vie pour des atomes dans $|F = 3\rangle$ avec les mêmes mesures pour des atomes dans $|F = 4\rangle$.

Pour préparer les atomes dans $|F = 3\rangle$, il suffit *a priori* de procéder comme sur l'expérience de refroidissement Raman à 1D (p. 33), c'est-à-dire de couper le

1. Typiquement, 100 atomes pour les derniers points (*i.e.* au bout de 2 à 3 s).

2. Remarquons que l'on pourrait concilier un vide poussé avec un nombre d'atomes décent en utilisant soit un double PMO [48], soit un PMO à état noir [154].

3. Remarque : des collisions inélastiques peuvent également se produire entre un atome initialement dans $|F = 3\rangle$ et un atome dans $|F = 4\rangle$.

repompeur quelques millisecondes avant les faisceaux du PMO afin que les atomes soient « dépompés » dans $|F = 3\rangle$. Toutefois, cette méthode ne fonctionne pas bien ici à cause de la présence du faisceau dipolaire, qui excite les atomes de nombreuses fois au cours de la phase de POE. Lorsqu'ils sont ainsi excités, les atomes peuvent retomber aussi bien que dans $|F = 3\rangle$ que dans $|F = 4\rangle$. Dans ces conditions, des collisions inélastiques vont pouvoir se produire.

Pour résoudre ce problème, nous avons installé une diode laser supplémentaire (diode OMTEC) que nous avons accordée sur la transition $|6^2\mathrm{S}_{1/2}, F = 4\rangle \rightarrow |6^2\mathrm{P}_{3/2}, F = 3\rangle$, et qui sature très faiblement les atomes (moins que le laser Ti-Sa). Ce faisceau « dépompeur » est allumé ou éteint à l'aide d'un obturateur mécanique. Lorsque nous souhaitons effectuer une mesure dans $|F = 3\rangle$, le dépompeur est mis en route à la fin de la phase de PMO à grand désaccord, et reste présent pendant toute la phase de POE. Pour sonder les atomes, nous rallumons le repompeur du PMO en même temps que la sonde. De cette façon, les atomes retournent dans $|F = 4\rangle$ et peuvent fluorescer lorsqu'ils passent dans la sonde[1].

Pour réaliser une mesure dans $|F = 4\rangle$, on n'utilise pas de faisceau qui pomperait les atomes de $|F = 3\rangle$ vers $|F = 4\rangle$. On se contente de désaccorder le faisceau dipolaire du mieux que l'on peut (typiquement $\lambda_{\mathrm{dip}} = 853$ nm). Certes une partie des atomes (typiquement 30 %) est excitée et passe dans $|F = 3\rangle$. Ces atomes ne participent pas aux collisions inélastiques. Toutefois, il reste suffisamment d'atomes dans $|F = 4\rangle$ pour que l'on puisse observer un effet dû à ces collisions.

Le résultat d'une mesure de durée de vie typique est présenté sur la figure 3.19 (le nombre d'atomes ayant été déduit du signal par la formule (3.53)). Cette courbe peut être interprétée de la manière suivante : pendant les 200 premières millisecondes du piégeage opto-électrique, a lieu une sélection « géométrique » (les atomes du PMO qui étaient en dehors de la zone de capture sont peu à peu expulsés, et ne contribuent plus au signal). Cette sélection géométrique se fait de la même manière pour les deux sous-niveaux hyperfins (50 % des atomes du PMO, soit 7.10^4 atomes environ, sont finalement transférés dans le POE). Au-delà de 200 ms, les comportements correspondant aux deux sous-niveaux se différencient : les pertes sont plus rapides pour le sous-niveau $|F = 4\rangle$, ce qui est conforme à ce que prédit l'interprétation en termes de collisions inélastiques.

Lorsque les atomes sont dans $|F = 3\rangle$, il n'y a pas de pertes par collisions inélastiques et la décroissance du nombre d'atomes confinés est exponentielle (ce que confirme la figure[2]). Si les atomes sont dans $|F = 4\rangle$, la décroissance n'est plus exponentielle. Dans ce cas, l'évolution du nombre d'atomes N est donnée

1. Le repompeur n'est pas « mélangé » avec la sonde ; il arrive sur les atomes par le trajet des faisceaux du PMO. En particulier, il ne peut plus agir sur les atomes lorsque ceux-ci, du fait de leur chute, sont passés sous l'électrode (là où se situe la sonde). Les atomes ont cependant « le temps » d'être repompés pendant qu'ils sont encore au-dessus de l'électrode.

2. Le temps $1/e$ de décroissance est ici de l'ordre de 500 ms (nous ne sommes pas dans des conditions de vide optimales).

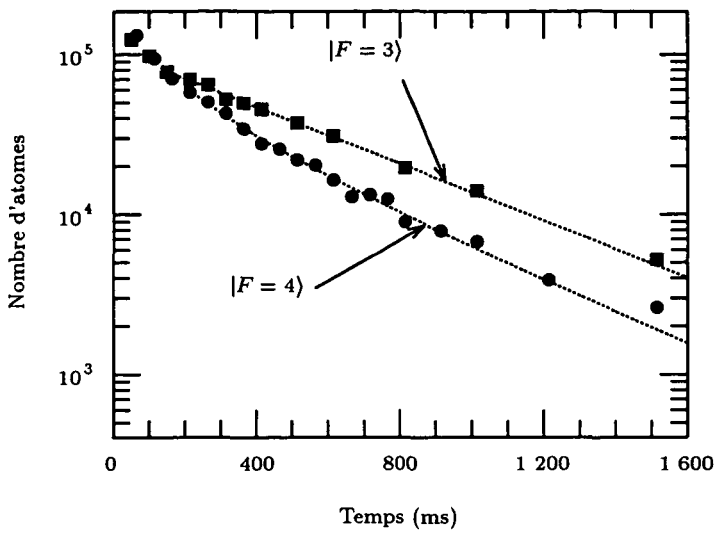


FIG. 3.19 - *Mesure de la durée du piégeage opto-électrique des atomes (pour un col du faisceau de 240 μm). Après 200 ms de sélection géométrique, la décroissance est exponentielle pour des atomes dans* $|\mathrm{F} = 3\rangle$, *mais pas pour des atomes dans* $|\mathrm{F} = 4\rangle$. *Ceci est dû aux pertes par collisions inélastiques. En pointillés, ajustement par une exponentielle (*$|\mathrm{F} = 3\rangle$*), et par la fonction (3.56) (*$|\mathrm{F} = 4\rangle$*).*

par [157, éq. (2)] :

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = -\gamma N - \frac{\beta}{V} N^2 , \tag{3.55}$$

où V est le volume du nuage atomique. La constante γ provient essentiellement des collisions avec les particules rapides. La constante β caractérise les collisions inélastiques.

La solution de l'équation (3.55) est

$$\frac{N(t)}{N_0} = \frac{\dfrac{\gamma V}{\beta N_0} e^{-\gamma(t-t_0)}}{1 + \dfrac{\gamma V}{\beta N_0} - e^{-\gamma(t-t_0)}} , \tag{3.56}$$

où $N(t_0) = N_0$. Lorsque l'on ajuste la courbe expérimentale par l'équation (3.56), on trouve un résultat assez satisfaisant.

Il est alors tentant de rechercher une valeur numérique pour le coefficient β. Le problème est que ceci nécessite de connaître à la fois le nombre d'atomes et la densité atomique dans $|F = 4\rangle$ (laquelle n'a pas de raison d'être uniforme). On peut admettre que, après la « sélection géométrique » (*i.e.* au bout de 200 ms), la taille transverse du piège coïncide approximativement avec celle du faisceau dipolaire[1]. Connaissant le nombre d'atomes, et en admettant que la forme du

1. Cette affirmation peut être vérifiée à l'aide de la caméra déclenchable.

nuage est gaussienne [158], on peut remonter à la densité pic, puis à β. Dans le cas de la présente courbe, on trouve que $\beta \sim 8{,}0.10^{-10}$ cm^3/s.

On remarquera que cette valeur n'est pas vraiment compatible avec les mesures effectuées dans [155], qui prédisent un coefficient β de quelques 10^{-11} cm^3/s. En réalité, nous avons effectué un grand nombre de mesures de durée de vie, lesquelles aboutissent à des valeurs de β très différentes (pouvant varier d'un facteur 10). Remarquons aussi que la valeur que nous avons indiquée dans l'article d'*Europhys. Lett.* [147], *i.e.* $\beta = 5.10^{-11} \pm 4.10^{-11}$ cm^3.s^{-1}, n'est pas non plus compatible. Il s'agit en réalité d'une moyenne pondérée de divers résultats obtenus, et nous nous sommes aperçus trop tard que le résultat correspondant à la figure 3.19 n'entrait pas dans la barre d'erreur (nous avions également oublié de modéliser le nuage par une gaussienne). Le résultat correct serait plutôt $\beta = 1{,}5.10^{-10\pm1}$ cm^3.s^{-1}.

Remarques :

– notre mesure de β est particulièrement imprécise ; ceci est est essentiellement dû au fait que la durée de la « sélection géométrique » est du même ordre de grandeur que les temps de pertes par collisions élastiques et inélastiques. Par conséquent, il est difficile de savoir après quel délai on doit commencer l'ajustement avec la fonction (3.56). En outre, il existe un certain nombre d'effets que nous n'avons pas pris en compte et qui viennent fausser le résultat (forme du nuage non gaussienne, volume du nuage difficile à évaluer, inhomogénéités éventuelles de la densité, étalement spatial du nuage au cours de l'évolution (en particulier dans la direction z), basculement d'une fraction des atomes de $|F = 4\rangle$ vers $|F = 3\rangle$ du fait du chauffage par le faisceau dipolaire, cette liste n'étant pas exhaustive). Signalons que la mesure du coefficient β pourrait être nettement plus précise si l'on augmentait la densité dans l'espace des phases (p. ex. à l'aide de refroidissement Raman), car on favoriserait alors les pertes par collisions inélastiques tout en se débarrassant de la sélection géométrique ;

– on voit donc que les collisions inélastiques sont responsables d'une perte d'atomes importante si ceux-ci ne sont pas dans l'état de plus basse énergie. Par conséquent, ces collisions sont susceptibles de perturber fortement le refroidissement d'atomes piégés[1]. Toutefois, il est possible de réduire le nombre de ces collisions en utilisant un laser intense très désaccordé sur le bleu de la transition atomique, ainsi qu'il est proposé dans [159].

1. Lors du refroidissement Raman continu, les atomes restent la plupart du temps dans l'état de plus basse énergie, si bien que les collisions inélastiques joueraient peu de rôle. Par contre, ce n'est pas du tout le cas pour le refroidissement en impulsions par passage adiabatique que j'ai présenté au paragraphe 2.5 (p. 94).

4. Conclusion et perspectives

Cette expérience a permis de mettre au point un nouveau type de piège conservatif, le piège opto-électrique. Il s'agit d'un piège suffisamment profond pour contenir le nuage atomique d'un piège magnéto-optique, quasi-isotrope, et dont les fréquences d'oscillation sont petites devant la fréquence de recul. Il possède un volume de capture sensiblement supérieur à celui d'un piège dipolaire croisé, ce qui permet potentiellement de confiner davantage d'atomes.

Le bon fonctionnement du piège que nous avons construit (lequel utilise un laser Titane-Saphir) a pu être prouvé de façon non ambiguë. L'oscillation des atomes dans le piège, dans la direction verticale, a été clairement reconnue, la fréquence étant tout à fait conforme à ce que prédit la théorie. La durée de confinement est de l'ordre de la seconde, et est essentiellement limitée par les collisions avec le gaz résiduel. Le rôle des collisions inélastiques a en outre été clairement mis en évidence.

A la suite de cette expérience, la route à suivre semble toute tracée : changer de laser (pour limiter le chauffage résiduel), et réaliser le refroidissement Raman selon les méthodes décrites au chapitre 2 (par la suite, il faudra aussi améliorer le vide, *i.e.* utiliser un vide différentiel et un double PMO). Pierre Lemonde, Hélène Perrin, Wolfgang Hänsel, Ekkehard Peik et Christophe Salomon ont récemment réalisé un POE avec un laser Yag, qui pour un col de 70 μm peut piéger 5.10^4 atomes, avec une durée de vie $1/e$ de 520±50 ms. Ils ont ensuite tenté de réaliser du refroidissement Raman dans ce nouveau POE, mais ont malheureusement rencontré des difficultés, car l'électrode et la grille créent des champs magnétiques parasites nuisibles à ce refroidissement. Il est donc nécessaire d'ouvrir la cellule pour remplacer l'électrode et le grillage par d'autres, constitués d'un matériau amagnétique.

Par ailleurs, un piège dipolaire croisé a été réalisé avec le laser Yag, et il fonctionne fort bien. Aussi est-il impossible de prédire aujourd'hui lequel du POE ou du piège dipolaire croisé sera finalement retenu pour le refroidissement subrecul d'atomes confinés.

Complément A : Le piège électrostatique et magnétostatique

Un inconvénient des pièges dipolaire et opto-électrique est, comme nous l'avons vu, le chauffage résiduel des atomes refroidis. Je vais, dans ce paragraphe, présenter un autre type de piège, qui ne chauffe pas du tout les atomes : le piège magnétostatique.

L'idée de piéger des particules neutres à l'aide du gradient d'un champ magnétique statique est fort ancienne [160, 161]. La première expérience d'un tel confinement fut réalisée en 1978 avec des neutrons [162]. Le piégeage d'atomes fut quant-à lui effectué en 1985 [163]. Le principe général est le suivant : si le champ magnétique est inhomogène, les atomes situés dans un sous-niveau Zeeman donné (de nombre quantique magnétique m) sont, du fait du déplacement Zeeman, soumis à un potentiel. Lorsque $\|\vec{B}\|$ admet un minimum, ce potentiel admet, selon le signe de m, un maximum ou bien un minimum. Pour créer un piège magnétique, il suffira donc de fabriquer un minimum local de champ magnétique[1], et de pomper tous les atomes dans le sous-niveau Zeeman *ad hoc*. Le piégeage magnétique a pu conduire à des développements physiques extrêmement spectaculaires, puisque c'est dans un piège magnétique que la condensation de Bose-Einstein a été observée [63]. L'intérêt que présente un tel piège (*i.e.* un piège où tous les atomes sont situés dans le même sous-niveau Zeeman) pour l'observation d'effets quantiques collectifs peut se comprendre aisément : lorsque les atomes sont répartis entre $2J+1$ sous-niveaux Zeeman, la dégénérescence quantique est réduite d'un facteur $2J+1$[2].

L'objet de ce complément est d'étudier s'il est possible d'effectuer du refroidissement Raman sur les atomes confinés dans un piège magnétique. Il apparaît clairement que le mécanisme étudié au chapitre 2 est difficilement adaptable, parce que l'émission de photons spontanée peut conduire les atomes dans des niveaux non piégeants. La solution que je propose ici (qui fonctionne sur le césium, le cas d'un autre atome n'ayant pas été étudié) repose sur le choix de sous-niveaux Zeeman et de polarisations des faisceaux Raman tels que les règles de sélection interdisent la transition vers un niveau non piégeant (transition fermée). La fabrication du gradient de champ magnétique a également dû être étudiée avec soin. L'expérience de condensation de Boulder utilise un piège quadrupolaire constitué de deux bobines montées en anti-Helmholtz [164] ; un tel type de piège ne convient pas au refroidissement Raman, car la direction du champ magnétique n'est pas la même dans tout l'espace (et il paraît très difficile d'adapter en tout point la polarisation des faisceaux Raman à la direction du champ magnétique).

La solution que j'ai choisie ici est un piège de Ioffe, dont je vais maintenant décrire le principe (§ 3.A.*a*). Le fonctionnement du refroidissement Raman dans ce piège magnétostatique sera ensuite introduit au paragraphe 3.A.*b*. Je terminerai (section 3.A.*c*)

1. Je rappel qu'il n'existe pas de maximum local de champ magnétique.

2. Le fait de disposer d'atomes tous pompés dans le sous-niveau Zeeman $|m = +J\rangle$ est particulièrement crucial pour l'observation d'effets quantiques collectifs sur l'indice de réfraction et sur la diffusion de la lumière, effets qui sont prédits et évalués théoriquement dans la deuxième partie de cette thèse. Il est en effet expliqué au paragraphe IV.5 (p. 284) que si les atomes ne sont pas tous dans l'état $|m = +J\rangle$, alors le signal d'effets collectifs est brouillé par des phénomènes de pompage optique induits par la sonde.

par la présentation des paramètres pouvant convenir à une future expérience. Signalons que bien que j'aie proposé le refroidissement Raman dans un piège magnétique dès le début 1993, et bien que ce piège semblât plus prometteur que le POE en terme de température finale accessible (du moins en faisant abstraction des effets parasites), l'étude que je présente ici n'a été suivie d'aucune concrétisation expérimentale, en raison des difficultés techniques auxquelles il eût alors fallu faire face. Je signale par ailleurs que les propositions théoriques que je vais exposer ont perdu une partie de leur attrait depuis les expériences de refroidissement évaporatif et de condensation de Bose-Einstein [63]. J'ai toutefois tenu (en dépit des pressions) à ce qu'elles figurent dans ce complément, car ce dernier contient des idées et des développements théoriques que je juge non dénués d'intérêt. Toutefois, un lecteur pressé pourra sans inconvénient majeur s'affranchir de le parcourir.

a) Réalisation pratique du piège

i) Réalisation en l'absence de gravité

Comme je l'ai dit, le refroidissement Raman nécessite la fabrication d'un piège dans lequel la direction du champ magnétique est quasiment la même partout ; il faut donc créer un fort champ uniforme, sur lequel viendra se superposer un champ inhomogène plus faible (*i.e.* suffisamment fort pour réaliser le piégeage, mais suffisamment faible pour ne pas trop perturber la direction du champ). La réalisation pratique d'un tel champ a été imaginée dans les années 60 par l'équipe de Ioffe [165]. L'adaptation du dispositif de Ioffe au cas des atomes a été proposée par Pritchard [166], la première expérience d'un tel piégeage (la configuration des bobines n'étant pas exactement la même toutefois) ayant été réalisée par l'équipe de Cornell en 1993 [167]. Le champ magnétique créé par le dispositif de Ioffe est calculé en détail dans [168] ; j'en rappellerai ici les grandes lignes.

Pour réaliser un piège de Ioffe, on utilise deux spires circulaires parallèles, proches de la configuration de Helmholtz, et 4 fils verticaux (fig. 3.20), qui brisent l'invariance par rotation[1]. Au voisinage du centre, le champ magnétique vaut, en coordonnées cylindriques (ρ, φ, z) [168, éq. (24) p. 1542] :

$$B_z = b_0 + b_2 \left(z^2 - \frac{\rho^2}{2} \right) \tag{3.57.a}$$

$$B_\rho = -b_2 z\rho + c_1 \rho \cos(2\varphi) \tag{3.57.b}$$

$$B_\varphi = -c_1 \rho \sin(2\varphi) , \tag{3.57.c}$$

1. On peut montrer que le confinement d'atomes par un champ magnétique invariant par rotation autour de (Oz) est impossible

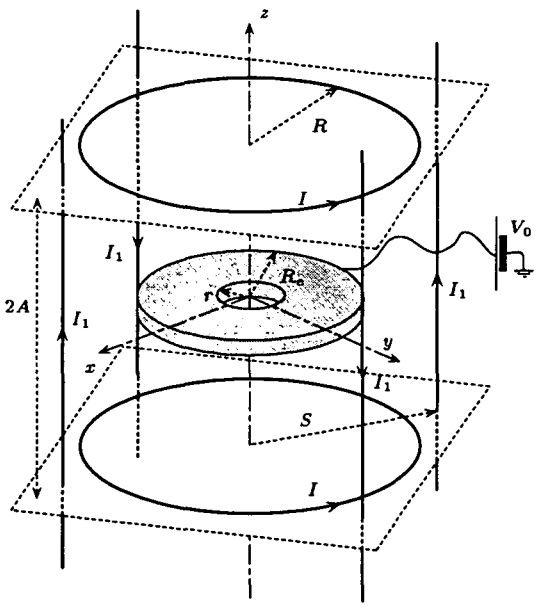


FIG. 3.20 - *Le piège de Ioffe (en gris, l'anneau chargé électriquement qui sert à compenser la gravité, et qui est présenté au paragraphe 3.A.a.ii; le rapport entre les tailles des bobines et de l'électrode n'est pas respecté).*

avec

$$b_0 = \frac{\mu_0 I R^2}{(R^2 + A^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{3.58.a}$$

$$b_2 = b_0 \frac{3(4A^2 - R^2)}{2(A^2 + R^2)^2} \tag{3.58.b}$$

$$c_1 = \frac{2\mu_0 I_1}{\pi S^2}\,. \tag{3.58.c}$$

Au voisinage du centre, l'expression du carré du module du champ vaut donc

$$\|\vec{B}\|^2 = b_0^2 + 2b_2 b_0 z^2 + \rho^2(c_1^2 - b_2 b_0) + o(\rho^2, z^2)\,. \tag{3.59}$$

On en déduit le potentiel vu par les atomes :

$$U(\vec{R}) = -g\mu_B m b_0 - g\mu_B m b_2 z^2 - g\mu_B m \frac{\rho^2}{2b_0}(c_1^2 - b_2 b_0)\,. \tag{3.60}$$

Pour avoir un confinement, les deux conditions suivantes doivent être vérifiées :

$$b_2 b_0 > 0 \tag{3.61.a}$$

$$c_1^2 > b_2 b_0\,. \tag{3.61.b}$$

On peut, par exemple, choisir les paramètres suivants : $R = 5$ cm, $A = 3$ cm, $S = 4$ cm, $I = I_1$.

ii) Rôle de la gravité

Contrairement à la force magnétique, la force gravitationnelle est indépendante du sous-niveau Zeeman. Si, en présence de la gravité, on confine les atomes à l'aide d'un piège magnétique, le centre du piège ne sera pas au même endroit selon le sous-niveau Zeeman choisi, comme on peut le voir sur la figure 3.21. Or, nous verrons que le refroidissement Raman dans un piège magnétique utilise deux niveaux $|1\rangle$ et $|2\rangle$ qui ne sont pas déplacés de la même façon par le champ magnétique. En présence de la gravité, la position du centre du piège ne sera donc pas la même pour $|1\rangle$ et pour $|2\rangle$, une situation qui est très nuisible au bon fonctionnement du refroidissement. Autrement dit, la gravité constitue une gêne, et nous devons chercher à compenser son effet à l'aide d'une autre force indépendante du sous-niveau Zeeman.

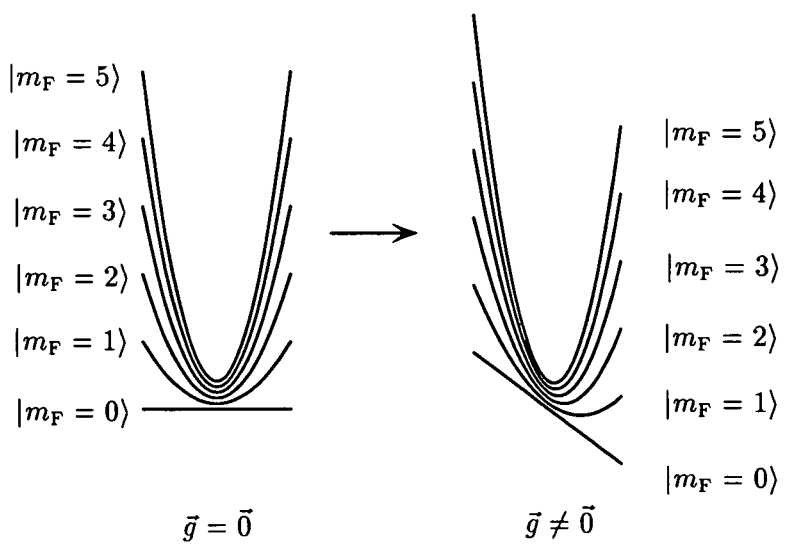


FIG. 3.21 - *Rôle de la gravité : a) : potentiel vu par les atomes en l'absence de gravité. b) : en présence de gravité.*

Compenser la gravité à l'aide d'une force indépendante du sous-niveau Zeeman est un problème que nous avons déjà résolu : il suffit d'utiliser l'électrode annulaire du piège opto-électrique. Le champ électrique créé par cette électrode compensera la gravité, et créera en outre un piégeage le long de l'axe, ainsi qu'une expulsion transverse, s'ajoutant à la force confinante du champ magnétique. Le centre du potentiel vu par les atomes sera donc bien indépendant du sous-niveau Zeeman, mais la courbure ne sera plus proportionnelle à m.

Remarque : on pourrait penser à première vue que les bobines circulaires du piège de Ioffe sont devenues inutiles, car le confinement vertical est maintenant assuré grâce à l'électrode (les 4 fils verticaux suffisant pour confiner les atomes selon x et y). En fait, ces bobines sont nécessaires pour maintenir un champ directeur parallèle à (Oz) (lequel est indispensable pour réaliser le refroidissement Raman).

b) Principe du refroidissement Raman dans un piège électrostatique et magnétostatique

i) Choix des niveaux $|1\rangle$ et $|2\rangle$

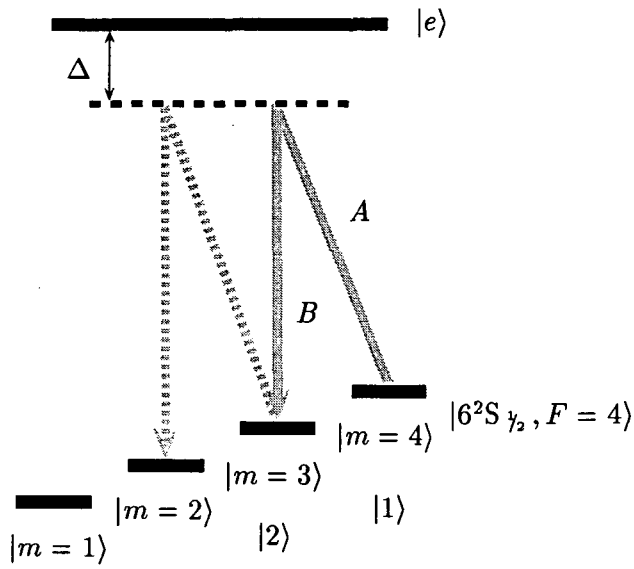


FIG. 3.22 - *Processus Raman pour le piège magnétique. (En pointillés, processus parasite).*

Pour pouvoir préparer les atomes par pompage optique, il est nécessaire de choisir des niveaux où $|m|$ est maximum. Il est donc tentant, dans le cas du césium, de prendre

$$\begin{aligned} |1\rangle &= |6^2S_{1/2}, F = 3, m_F = 3\rangle \\ |2\rangle &= |6^2S_{1/2}, F = 4, m_F = 4\rangle . \end{aligned} \tag{3.62}$$

Malheureusement, on peut voir sur la table 0.3 (p. 18) que les facteurs de Landé des niveaux $|F = 3\rangle$ et $|F = 4\rangle$ sont de signe opposé: avec cette configuration, si le niveau $|1\rangle$ est confiné, le niveau $|2\rangle$ sera expulsé; le refroidissement paraît dès lors difficile à réaliser, car les atomes passent, au cours du refroidissement, une fraction non négligeable du temps dans le niveau $|2\rangle$.

J'ai donc choisi d'appliquer le processus Raman entre deux sous-niveaux Zeeman d'un même niveau hyperfin. Le choix est le suivant:

$$\begin{aligned} |1\rangle &= |6^2S_{1/2}, F = 4, m_F = 4\rangle \\ |2\rangle &= |6^2S_{1/2}, F = 4, m_F = 3\rangle . \end{aligned} \tag{3.63}$$

Avec un tel choix, on peut certes craindre que les atomes dans $|2\rangle = |6^2S_{1/2}, F = 4, m_F = 3\rangle$ soient une deuxième fois excités par les faisceaux Raman, vers le niveau $|6^2S_{1/2}, F = 4, m_F = 2\rangle$ (cette transition est représentée en pointillés sur la figure 3.22). Dans ce cas les atomes sont momentanément « perdus pour la science » (il peuvent

néanmoins être repompés). En fait, un tel processus est limité par le fait que l'atome n'est plus résonnant pour cette nouvelle transition (à cause du changement de vitesse de $2\,v_{\mathrm{rec}}$ induit par la première transition). Davantage de détails seront donnés à ce sujet page 192.

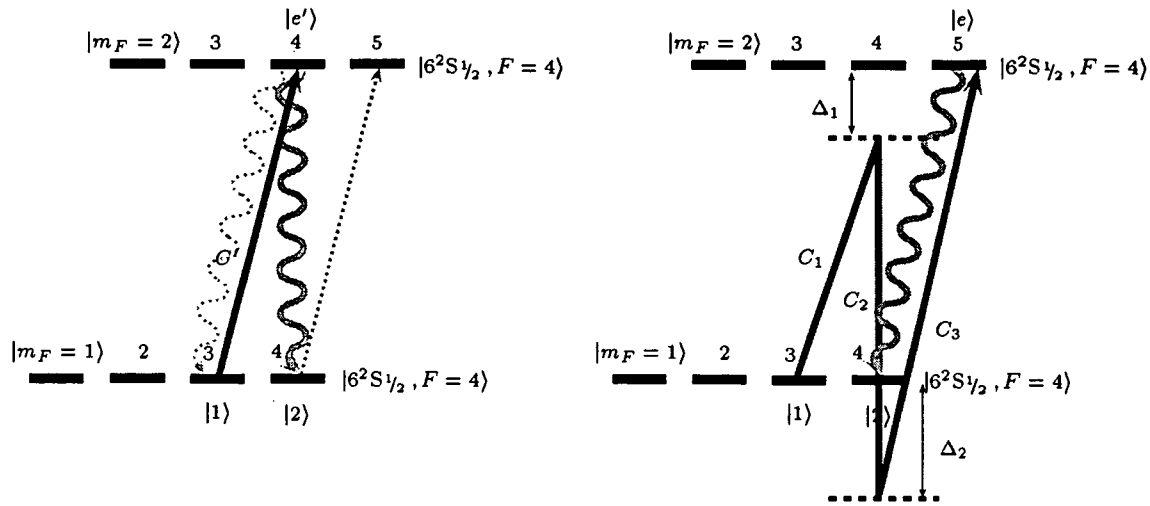
ii) Choix du niveau $|e\rangle$

Le choix du repompeur (et donc du niveau excité $|e\rangle$) est délicat, car les atomes qui sont dans $|1\rangle$ ne doivent pas pouvoir être repompés (sinon les atomes refroidis seraient chauffés). Dans le cas du refroidissement Raman entre les deux sous-niveaux hyperfins (cas des atomes libres, ou encore des atomes confinés dans un piège dipolaire ou opto-électrique), c'est la différence d'énergie (9,2 GHz) entre les niveaux $|1\rangle$ et $|2\rangle$, et donc le désaccord associé à cette excitation parasite, qui rend celle-ci inopérante. Par contre, pour le piège magnétique, la différence d'énergie entre ces deux niveaux est plus faible : de l'ordre de 100 à 200 MHz au maximum, si l'on utilise des champs magnétiques intenses induisant d'importants déplacements Zeeman. Pour empêcher l'excitation parasite, on peut toutefois tirer parti des symétries (*i.e.* des règles de sélection). Je propose ici deux solutions, lesquelles possèdent toutes deux des inconvénients.

La première solution utilise un faisceau polarisé σ^+, excitant les atomes de $|2\rangle = |6^2\mathrm{S}_{1/2}, F = 4, m_F = 3\rangle$ vers $|e'\rangle = |6^2\mathrm{P}_{3/2}, F = 5, m_F = 4\rangle$ (fig. 3.23-*a*). Par désexcitation, les atomes reviendront vers $|1\rangle$ ou vers $|2\rangle$, à l'exclusion de tout autre niveau (et notamment, ils ne reviendront pas vers l'état fondamental $|6^2\mathrm{S}_{1/2}, F = 3\rangle$). Toutefois, cette solution pose plusieurs problèmes : tout d'abord la probabilité d'effectuer la transition $|e'\rangle \rightarrow |1\rangle$ (c'est-à-dire le rapport de branchement ξ tel que je l'ai défini au paragraphe 1.1.*c*, p. 23) n'est que de 0,2[1]. Cette valeur est beaucoup plus faible que dans le cas du refroidissement Raman entre les deux sous-niveaux hyperfins (où l'on a $\xi = 0{,}75$). On doit donc s'attendre à un refroidissement beaucoup moins efficace. Le deuxième problème est lié à l'excitation par le repompeur des atomes de $|1\rangle$ vers l'état $|6^2\mathrm{P}_{3/2}, F = 5, m_F = 5\rangle$. Cette excitation sera résonnante si le déplacement Zeeman est inférieur ou de l'ordre de la largeur naturelle de l'état excité $\Gamma = 2\pi \times 5{,}3$ MHz ; l'effet sera alors catastrophique car les atomes refroidis à v_{rec} seront sans cesse excités par le repompeur. Toutefois, dans le cas de forts champs magnétiques, *i.e.* tels que le déplacement Zeeman est grand devant Γ, cette excitation deviendra non résonnante (et sera donc beaucoup moins gênante), grâce à la différence entre les facteurs de Landé des niveaux $|6^2\mathrm{S}_{1/2}, F = 4\rangle$ et $|6^2\mathrm{P}_{3/2}, F = 5\rangle$. Il va malheureusement apparaître un autre processus parasite, et ce dès que le déplacement Zeeman cessera d'être petit devant la structure hyperfine du niveau excité $|6^2\mathrm{P}_{3/2}\rangle$ (qui vaut 251 MHz) : le niveau $|e'\rangle$ deviendra une superposition linéaire des états $|6^2\mathrm{P}_{3/2}, F = 5, m_F = 4\rangle$ et $|6^2\mathrm{P}_{3/2}, F = 4, m_F = 4\rangle$. Par conséquent, la désexcitation vers le niveau (non piégeant) $|6^2\mathrm{S}_{1/2}, F = 3, m_F = 3\rangle$ sera possible ; il sera alors nécessaire d'installer un faisceau repompeur supplémentaire, de polarisation σ^+ et accordé sur la transition $|6^2\mathrm{S}_{1/2}, F = 3, m_F = 3\rangle \rightarrow |6^2\mathrm{P}_{3/2}, F = 4, m_F = 4\rangle$.

Une autre solution consiste à utiliser le processus à trois photons présenté sur la

1. Ce rapport de branchement se calcule à l'aide de coefficients de Clebsch-Gordan. Le lecteur pourra trouver dans [94, p. 260] les valeurs intervenant sur une transition $4 \rightarrow 5$.



(a) *Processus de repompage à un photon (en pointillés, effets parasites).*

(b) *Repompage à trois photons.*

FIG. 3.23 - *Deux méthodes de repompage pour le refroidissement Raman dans un piège magnétostatique.*

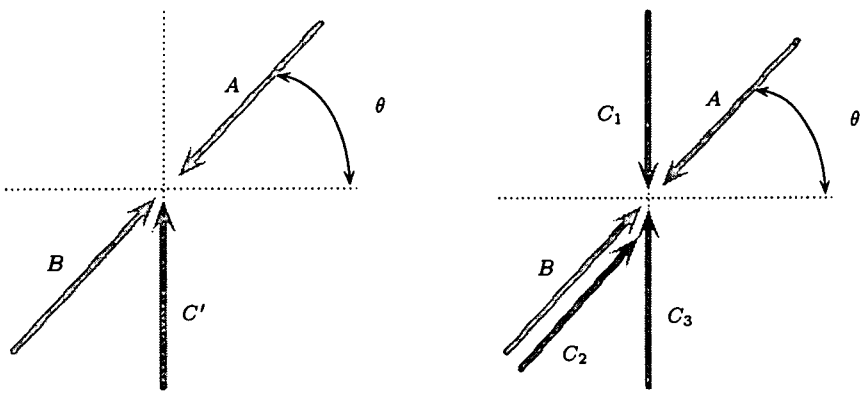
figure 3.23-*b*. Il fonctionne lorsque les désaccords Δ_1 et Δ_2 sont grands devant la structure hyperfine de l'état excité[1], ce qui permet d'atténuer l'excitation non résonnante (mais non de la supprimer totalement). Le fait que l'état excité soit $|e\rangle = |6^2\mathrm{P}_{3/2}, F = 5, m_F = 5\rangle$ présente un grand avantage: les atomes ne peuvent retomber que dans $|1\rangle$, à l'exclusion de tout autre niveau (grâce aux symétries). Le rapport de branchement ξ vaut donc 1, ce qui fournit un argument en faveur de cette méthode. En outre, même si le champ magnétique est très intense, le niveau $|6^2\mathrm{P}_{3/2}, F = 5, m_F = 5\rangle$ n'est pas couplé à d'autres niveaux (à cause de la conservation du moment cinétique). Toutefois, nous ne devons pas oublier qu'une transition à trois photons nécessite l'utilisation de lasers très puissants.

iii) Choix des directions des faisceaux, et de leurs polarisations

Le refroidissement Raman utilise donc deux faisceaux Raman A et B, et un (resp. trois) faisceau(x) de repompage noté(s) C' (resp. C_1, C_2, et C_3). Nous savons que les faisceaux Raman doivent se propager en dehors des axes et des plans de symétrie du piège (§ 2.1.*a.ii*, p. 58 et fig. 2.10, p. 74). La direction (1; 1; 1) par rapport aux axes propres du piège constitue en cela un bon choix. On devra en outre choisir les polarisations de telle sorte que par rapport à l'axe z, les composantes π (pour le faisceau A) et σ^- (pour le faisceau B) soient effectivement présentes. Remarquons que la présence éventuelle d'autres composantes de polarisation, formant un couplage $\sigma^- - \sigma^+$, n'est pas gênante:

1. D'après les considérations de symétrie évoquées au paragraphe 3.1.*a.iii* (p. 120), le repompage à trois photons ne peut pas fonctionner si les désaccords Δ_1 et Δ_2 sont grands devant la structure fine de l'état excité du césium $|6^2\mathrm{P}\rangle$ (soit $2\pi \times 17$ THz).

la transition Raman vers le niveau $|6^2S_{1/2}, F = 4, m_F = 2\rangle$ est interdite par les règles de sélection (voir § 3.1.*a.iii*, p. 120), pourvu que le désaccord Δ des faisceaux Raman soit grand devant la structure hyperfine de $|6^2P_{3/2}\rangle$.



(a) *Repompage à un photon.* (b) *Repompage à trois photons.*

FIG. 3.24 - *Les faisceaux utilisés et leurs directions.*

Regardons maintenant la direction du (ou des) faisceau(x) de repompage, et oublions dans un premier temps le cas où le déplacement Zeeman des niveaux est très supérieur à Γ. Il faut alors, pour éviter les excitations vers des niveaux non souhaités, s'appuyer sur les règles de sélection. Dans la configuration à 1 photon, nous n'avons pas le choix : le faisceau devant impérativement être polarisé σ^+, il ne peut que se propager le long de (Oz) (fig. 3.24-*a*). La situation est un peu analogue dans le cas à trois photons (fig. 3.24-*b*) : les faisceaux C_1 et C_3 sont polarisés σ^+, et ne doivent pas avoir de composante π (ou σ^-), sinon il existerait une possibilité d'effectuer la transition à trois photons $|6^2S_{1/2}, F = 4, m_F = 4\rangle \rightarrow |6^2P_{3/2}, F = 5, m_F = 5\rangle$. Par conséquent, ces deux faisceaux doivent être orientés selon (Oz).

On pourrait utiliser le même laser pour C_1 et C_3 ; dans ce cas, l'impulsion transmise aux atomes par ces deux lasers serait $2\hbar k$. Ceci est trop élevé, du point de vue de la compatibilité avec le refroidissement au recul[1]. Il est préférable d'utiliser deux faisceaux différents, de telle sorte que leurs transferts d'impulsions se compensent. Pour que le rôle de chacun des deux faisceaux soit défini de manière non ambiguë, il suffit de choisir $\Delta_1 \neq -\Delta_2$.

Le faisceau C_2 sera choisi colinéaire aux faisceaux Raman, et de même sens que le faisceau B ($\eta = -1$). Pour éviter une transition $|6^2S_{1/2}, F = 4, m_F = 4\rangle \rightarrow |6^2P_{3/2}, F = 5, m_F = 5\rangle$, il est nécessaire que le faisceau C_2 n'ait pas de composante σ^-, et soit donc une combinaison linéaire de π et de $\sigma+$. On peut vérifier qu'une telle exigence est compatible avec la direction oblique que j'ai choisie[2].

1. Je rappelle que le seuil (2.35) croît avec le transfert moyen d'impulsion induit par le processus Raman/repompage. Si le repompeur transmet $2\hbar k$, le seuil sera de l'ordre de quelques v_{rec}.

2. Il existe un vecteur unitaire de $\mathbb{C}^3$ qui soit à la fois orthogonal au vecteur de polarisation

Remarque : les directions des faisceaux ont été choisies de telles sorte que les règles de sélection interdisent un certain nombre de transitions parasites. Dans le cas où le champ magnétique est intense et où les déplacements Zeeman sont grands devant la largeur de l'état excité Γ, ces transitions parasites deviennent non résonnantes. Il devient donc à la rigueur possible de choisir la direction des faisceaux sans tenir compte de ces règles de sélection (même s'il me semble préférable de conserver les choix énoncés plus haut).

iv) Parabole résonnante

J'ai déjà signalé que, contrairement au piégeage dipolaire et au piégeage opto-électrique, le piégeage magnétique ne se fait pas avec la même raideur selon que les atomes sont situés dans $|1\rangle$ ou dans $|2\rangle$. L'étude théorique effectuée au chapitre 2 doit donc être adaptée. La résonance a lieu lorsque que l'effet Doppler compense la différence d'énergie entre $|1\rangle$ et $|2\rangle$, c'est-à-dire pour :

$$\begin{aligned} 2kv &= \delta_{\text{eff}} + \frac{1}{2\hbar}\vec{R}\cdot\left(\vec{\vec{K}}_{|1\rangle} - \vec{\vec{K}}_{|2\rangle}\right)\cdot\vec{R} \\ &\equiv \delta_{\text{eff}} + \frac{1}{2\hbar}\vec{R}\cdot\vec{\vec{\Xi}}\cdot\vec{\vec{K}}_{|1\rangle}\cdot\vec{R}, \end{aligned} \tag{3.64}$$

où $\bar{\bar{}}[K_{|1\rangle}]$ (resp. $\bar{\bar{}}[K_{|2\rangle}]$) est le tenseur de rappel pour des atomes dans l'état $|1\rangle$ (resp. $|2\rangle$), et $\vec{R}$ la position atomique. L'équation (3.64) définit le tenseur $\bar{\bar{}}[\Xi]$ qui est co-diagonalisable avec $\bar{\bar{}}[K_{|1\rangle}]$. On voit donc que, dans l'espace des phases, la zone résonnante n'est plus un hyperplan, mais un « hyperparaboloïde ».

A priori, cette propriété va modifier les propriétés du refroidissement ; ces nouvelles caractéristiques peuvent être comprises intuitivement dans le cas unidimensionnel en regardant la figure 3.25. Sur cette figure, le seuil s_0 défini par la formule (2.24) est représenté par une droite parallèle à l'axe des positions. Supposons que la quantité $v_{\text{rés}} = \delta_{\text{eff}}/(2k)$[1] soit inférieure à s_0. Comme la zone résonnante est parabolique, un atome de suffisamment grande énergie la coupera bien au-dessus du seuil : il sera donc refroidi, et le refroidissement se poursuivra jusqu'à ce qu'il puisse entrer en résonance sous le seuil. Alors il sera réchauffé, jusqu'à repasser au-dessus, et ainsi de suite. S'il tombe par hasard sur un trajectoire d'amplitude inférieure à $v_{\text{rés}}$, l'atome ne pourra plus entrer en résonance : il sera refroidi définitivement. En fait, nous obtenons, avec un seul système de faisceaux Raman, un profil d'excitation comparable (du moins qualitativement) à celui que j'avais « fabriqué » avec trois systèmes pour réaliser la figure 2.13 (p. 81).

A 3 dimensions, le raisonnement est toujours valable, mais un autre facteur vient limiter l'efficacité. La zone résonnante est ici une sous-variété tridimensionnelle d'un espace de dimension 6. Si les coefficients du tenseur $\bar{\bar{}}[\Xi]$ sont trop grands, c'est-à dire si la courbure de la parabole résonnante est trop forte, on comprend intuitivement que

---

σ^- par rapport à (Oz), et à la direction de propagation du faisceau C_2 (ici la direction de coordonnées $(1;1;1)$).

1. Je continue à utiliser la notation $v_{\text{rés}}$ bien que cette notation soit ici un abus (puisque la résonance n'a pas lieu à vitesse fixe).

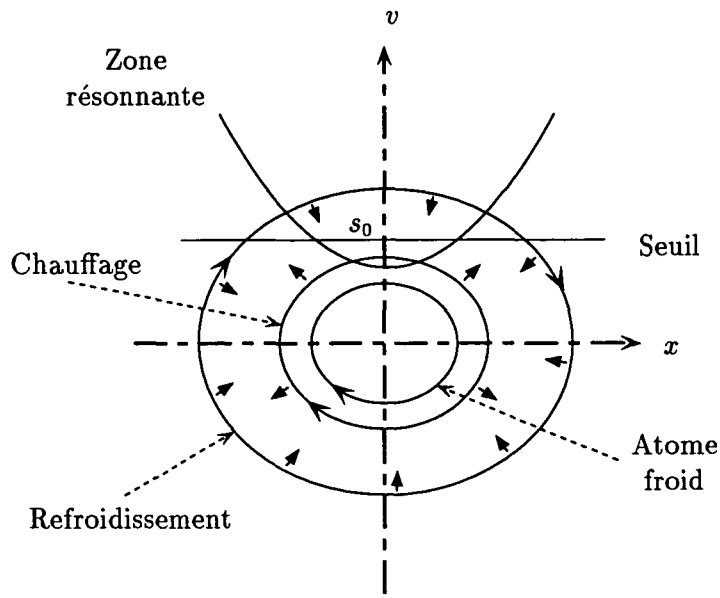


FIG. 3.25 - *Mécanisme de refroidissement lorsque la zone résonnante est de forme parabolique.*

les trajectoires des atomes de grande énergie ne la couperont pas ; le refroidissement ne pourra alors pas fonctionner.

v) Avantage d'une résonance sélective en vitesse et en position

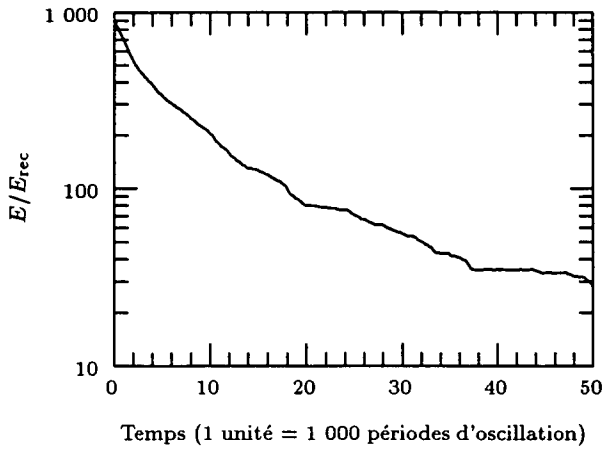
Afin de permettre au lecteur de se rendre compte de l'avantage que peut apporter le fait que la résonance soit à la fois sélective en vitesse et en position (ainsi que le rapport de branchement de 1), j'ai réalisé une simulation de Monte-Carlo (fig. 3.26) correspondant à ce cas. Il s'agit de refroidissement continu, et la vitesse résonnante vaut $v_{\text{rés}} = v_{\text{rec}}$, c'est-à-dire comme sur la figure 2.12 (p. 79). On constate que, contrairement à la figure 2.12, le refroidissement fonctionne. On arrive à mettre une bonne fraction des atomes sous la vitesse de recul. A la fin de la simulation, la vitesse quadratique moyenne selon un axe vaut $0{,}5\, v_{\text{rec}}$, soit deux fois moins que ce que l'on peut faire dans le cas où la résonance n'est pas sélective en position.

Toutefois, on devra se garder de tout excès d'optimisme, et ce pour deux raisons :

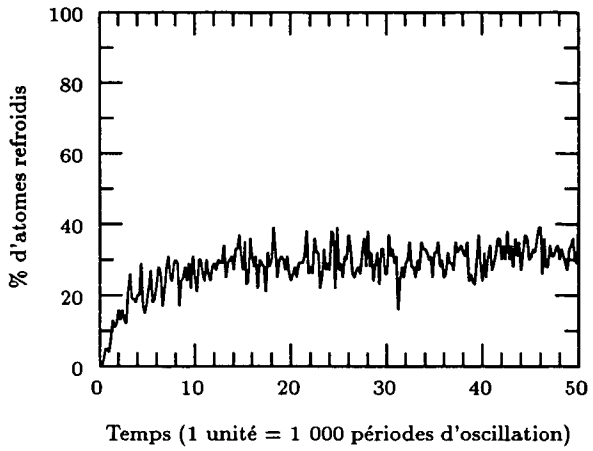
- on constatera que les temps d'atteinte de l'état stationnaire sont extrêmement longs[1] (plusieurs dizaines de milliers de périodes d'oscillation, soit 20 min typiquement) ; même si le piège ne chauffe pas, il est très difficile de garantir que les atomes puissent rester froids pendant 20 min[2] ;
- les nombreux processus parasites qui interviendront dans le cas d'un piège électrostatique et magnétostatique (§ 3.A.*d*, p. 191) ne sont pas pris en compte dans la

1. Remarque : sur la figure 3.26, je n'ai pas fait fonctionner la simulation assez longtemps pour atteindre l'état stationnaire (plusieurs jours de calcul seraient nécessaires).

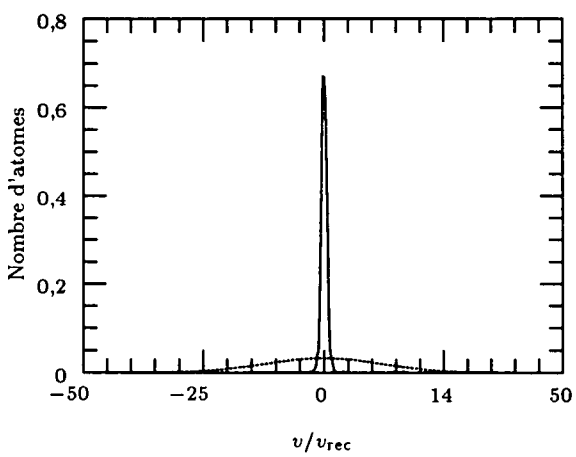
2. Le refroidissement pourrait sans doute être accéléré en utilisant des impulsions.



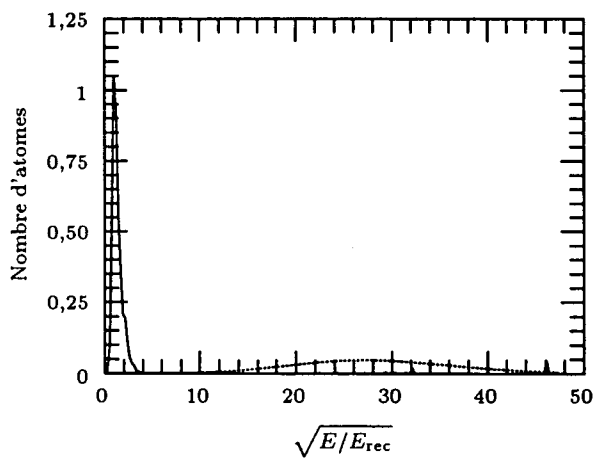
(a) *Energie moyenne des atomes en fonction du temps.*



(b) *Pourcentage, en fonction du temps, des atomes refroidis (*i.e. *vérifiant* $\vec{v}_0^2 \leqslant v_{rec}^2$, *où* $\vec{v}_0$ *représente l'amplitude de la trajectoire).*



(c) *Distribution finale en vitesse, moyennée sur les 100 atomes de la simulation et sur le temps entre 40 000 et 50 000 périodes d'oscillation. En pointillés, la distribution initiale (courbe théorique).*



(d) *Distribution finale en fonction de la racine de l'énergie. Le moyennage se fait de la même façon que pour la vitesse.*

FIG. 3.26 - *Simulation de Monte-Carlo (refroidissement continu), réalisée dans le cas où la transition Raman est sélective en vitesse et en position. La vitesse résonnante vaut* $v_{rés} = v_{rec}$ *; les pulsations d'oscillation dans le piège sont 137, 127, et 117 rad/s ; les coefficients diagonaux du tenseur* $\overline{\overline{[\Xi]}}$ *(cf. texte) sont* $2,7.10^{-2}$, *0,4 et 0,4. Le rapport de branchement* ξ *vaut 1, la direction du faisceau Raman est* $(1;1;1)$ *par rapport aux axes propres d'oscillation, et* $\eta = -1$. *La fréquence de Rabi effective est* $\overline{\Omega}/2 = 0,03 k v_{rec}$. *La simulation montre que l'on pourrait atteindre une vitesse quadratique moyenne selon un axe de* $0,5\, v_{rec}$. *Elle ne tient toutefois pas compte des processus parasites du piège électro/magnétostatique.*

simulation.

c) Ordres de grandeur

Les valeurs retenues pour un futur dispositif expérimental sont rassemblées dans la table 3.A.*c*. Elles utilisent des bobines de quelques centimètres de rayon, dans lesquelles circule un courant de 10^4 A (en pratique, on bobine 300 tours de fil dans lequel on fait passer 30 A ; la réalisation de telles bobines pose de nombreux problèmes techniques (chauffage, obstruction de l'accès optique du fait des dimensions des bobines) mais est néanmoins possible).

TAB. 3.3 - *Valeurs expérimentales typiques du piège électrostatique et magnétostatique.*

Champ magnétique :

$R = 5$ cm, $A = 3{,}5$ cm, $S = 3{,}5$ cm, $I = 5$ kA, $I_1 = 10$ kA ;
Champ magnétique : 7.10^{-2} T ;

Champ électrique :

$R_e = 5$ mm, $r_e = 1{,}5$ mm ;
Distance entre le piège et le plan de l'anneau : 1,2 mm ;
Tension appliquée sur l'anneau : $V_0 = 12$ kV ;

Caractéristiques du piège :

Pulsation selon (Oz) : 117 rad/s ;
Pulsation transverse : 127 rad/s ;
Périodes d'oscillation : 54 ms, 50 ms ;
Etendue du nuage pour une amplitude d'oscillation de $15\,v_{\rm rec}$: longitudinalement, 425 µm ; transversalement, 391 µm ;
Eléments diagonaux du tenseur $\overline{\overline{\Xi}}$ (courbure de la zone résonnante) : longitudinalement, $2{,}7.10^{-2}$; transversalement, 0,4 ;

Processus parasites :

Composante de $\vec{B}$ non parallèle à (Oz), à la distance $v_{\rm rec}/\omega_{x,y,z}$ du centre du piège : $dB_\perp/B_z = 2{,}7.10^{-3}$;
Déplacement du niveau $|6^2S_{1/2}, F = 4, m_F = 4\rangle$ dû au champ principal : 967 MHz

On obtient finalement un piège suffisamment profond ($45\,\hbar\Gamma$ dans les directions transverses, et de l'ordre de Γ dans la direction z), quasiment isotrope, avec des fréquences d'oscillation parfaitement compatibles avec les hypothèses faites au chapitre 2. Sur une distance de l'ordre de la taille d'un nuage refroidi à quelques $v_{\rm rec}$, le champ magnétique reste parallèle l'axe z à 1 % près.

Remarque : la table 3.A.*c* montre que le niveau $|1\rangle$ est déplacé de presque 1 GHz. De même, le niveau $|e\rangle$ sera déplacé de 1,9 GHz : c'est beaucoup plus que la largeur

de raie Γ, mais également que la structure hyperfine de l'état $|6^2P_{3/2}\rangle$. Nous devons donc tenir compte du fait que certains des niveaux $|1\rangle$, $|2\rangle$ et $|e\rangle$ choisis seront couplés avec d'autres niveaux hyperfins. Je rappelle que, du fait que l'opérateur de déplacement Zeeman commute avec J_z, il ne peut coupler que des états de même m_F. Par conséquent, cet effet de « mélange » ne concerne ni l'état $|1\rangle$, ni l'état $|e\rangle$ (dans la configuration de repompage à trois photons). Par contre, si l'on repompe avec un seul photon, l'état $|e'\rangle$ sera « corrompu » par l'état $|6^2P_{3/2}, F = 4, m_F = 4\rangle$: il sera nécessaire d'installer un repompeur supplémentaire, ainsi que je l'ai expliqué au paragraphe 3.A.*b.ii* (p. 184).

En outre, l'état $|2\rangle$ « contiendra » un peu du niveau $|6^2S_{1/2}, F = 3, m_F = 3\rangle$ (et ce bien sûr quel que soit le type de repompeur choisi). Ce couplage restera cependant minime, le déplacement de $|6^2S_{1/2}, F = 4, m_F = 4\rangle$ n'étant que 725 MHz, ce qui est petit devant la structure hyperfine (9,2 GHz) de l'état fondamental $|6^2S_{1/2}\rangle$. Aucun effet catastrophique ne sera donc à déplorer (le niveau $|2\rangle$ restera piégeant, et le repompage fonctionnera correctement, excitant les atomes vers le niveau *ad hoc*).

d) Les processus parasites

Je vais maintenant évoquer quelques processus parasites qui interviennent au cours du refroidissement Raman d'atomes confinés dans un piège électrostatique et magnétostatique, de manière à déterminer lesquels d'entre eux pourront constituer une gêne. Cette liste ne prétend en aucun cas être exhaustive.

Infractions aux règles de sélection. Le champ magnétique créé par le piège de Ioffe n'est pas rigoureusement parallèle à (Oz). Par suite, les règles de sélection sur lesquelles je me suis appuyé peuvent être transgressées (avec une faible probabilité). J'admettrai que les atomes, au cours de leurs déplacements dans le piège, « suivent » adiabatiquement les états propres de l'hamiltonien, de telle sorte qu'ils sont toujours dans un état quantique de moment angulaire défini par la direction du champ magnétique. On doit donc considérer que les faisceaux n'ont pas rigoureusement la polarisation requise.

Plusieurs types d'excitations parasites peuvent alors se produire (dans l'hypothèse d'un repompeur à trois photons) : l'excitation par le repompeur d'un atome de $|1\rangle$ vers $|e\rangle$ (*via* une transition π à la place de l'une des transitions σ^+) ; de la même façon, l'excitation d'un atome de $|2\rangle$ vers un niveau excité de moment angulaire $m_F = 4$; ou encore une transition Raman $\sigma^- - \sigma^+$ vers l'état $|6^2S_{1/2}, F = 4, m_F = 2\rangle$ [1]. En fait, l'importance de ces processus parasites est atténuée par deux facteurs : d'une part, les fréquences de Rabi effectives sont au moins 100 fois plus faible que celles des processus « normaux » (et ce parce que le champ est aligné à 1 %) ; et surtout, à cause des déplacements Zeeman et donc du fait que les processus parasites ne sont jamais résonnants : les désaccords valent au minimum 100 MHz, soit 25 fois la largeur naturelle, ce qui réduit la probabilité de transition d'un facteur 2 500 ;

1. Je rappelle toutefois que cette transition est interdite dès que le désaccord Δ des faisceaux Raman est très supérieur à la structure hyperfine de l'état $|6^2P_{3/2}\rangle$: voir le raisonnement fait page 123.

Chauffage résiduel par le repompeur. Le chauffage résiduel par l'un des faisceaux du repompeur (toujours dans le cas d'un repompage à trois photons) va également constituer un processus parasite, qui est lui beaucoup plus gênant. Je rappelle que les désaccords Δ_1 et Δ_2 ne doivent pas être plus grands que la structure fine de l'état $|6^2\mathrm{P}\rangle$, sinon les règles de sélection évoquées p. 123 empêchent le repompage. On doit donc typiquement prendre $\Delta_1 \sim \Delta_2 \sim 5.10^{13}$ rad/s. Si on impose en outre que l'efficacité du repompage $\Omega_{\mathrm{eff}}^2/\Gamma$ soit de l'ordre de ω_{rec}, où

$$\Omega_{\mathrm{eff}} = \frac{\Omega_{C_1}\Omega_{C_2}^*\Omega_{C_3}}{4\Delta_1\Delta_2} \tag{3.65}$$

est la fréquence de Rabi effective de la transition à trois photons ($\Omega_{C_{i\,i=1,\ldots,3}}$ étant les fréquences de Rabi des trois faisceaux, supposées du même ordre de grandeur), alors on trouve que le taux de chauffage $\Gamma\Omega_{C_i}^2/(4\Delta_i^2)$ est de 14 photons par seconde[1]. Cette valeur élevée est incompatible avec le refroidissement Raman continu, pour lequel le temps de refroidissement typique est de l'ordre de 50 s. Par contre, dans le cas du refroidissement en impulsions, on refroidit les atomes en 2 s, et le repompeur n'est pas présent en permanence. Il suffit donc de faire en sorte que le repompeur ne soit pas présent plus d'1/28 du temps (c'est-à dire, compte tenu du temps de pompage qui est de 40 µs avec les paramètres choisis, utiliser des impulsions Raman de durée 1 ms ou plus)[2].

On peut aussi se demander ce qu'il arrive aux atomes excités de façon non résonnante par l'un des faisceaux du repompeur. Supposons qu'avant d'être excités les atomes étaient dans $|1\rangle$ (c'est l'état dans lequel sont les atomes la plupart du temps). Dans ce cas, du fait de la polarisation des faisceaux, ils sont excités vers un état de moment angulaire $m_F = 4$ ou $m_F = 5$. S'ils sont excités vers l'état $|6^2\mathrm{P}_{3/2}, F = 5, m_F = 4 \text{ ou } 5\rangle$, ils reviendront nécessairement vers l'état $|1\rangle$ ou l'état $|2\rangle$ après émission spontanée. Ils ne seront pas « perdus pour la science ». Le seul cas ennuyeux se produit lorsque les atomes sont excités dans $|6^2\mathrm{P}_{3/2}, F = 4, m_F = 4\rangle$, puisqu'ils ont alors une probabilité 0,42 de retomber dans l'état $|6^2\mathrm{S}_{1/2}, F = 3, m_F = 3\rangle$ (d'après la table 1.1, p. 24). Comme cet état d'arrivée est unique, il existe la possibilité d'ajouter un faisceau supplémentaire de « dépompage » de polarisation σ^+, qui exciterait les atomes vers $|6^2\mathrm{P}_{3/2}, F = 4, m_F = 4\rangle$ pour qu'ils retournent dans $|1\rangle$ ou $|2\rangle$ par émission spontanée ;

Enfin, je rappelle pour mémoire le cas où on utiliserait un repompeur à un seul photon. Dans ce cas, le repompeur peut exciter les atomes de $|1\rangle$ vers $|6^2\mathrm{P}_{3/2}, F = 5, m_F = 5\rangle$, cette transition parasite étant désaccordée de 145 MHz. Si on impose pour le repompeur une efficacité de $|\Omega_C|^2/\Gamma = \omega_{\mathrm{rec}}$, on trouve un taux d'excitation parasite de 10 photons par seconde.

Deuxième transition Raman. Un autre processus parasite a été évoqué au paragraphe 3.A.*b.i*: les atomes dans le niveau $|2\rangle$ sont susceptibles d'effectuer une nouvelle transition Raman, qui les emmènerait dans le niveau $|6^2\mathrm{S}_{1/2}, F = 4, m_F = 2\rangle$. La

1. Une remarque au passage : l'efficacité de repompage que j'impose implique une fréquence de Rabi Ω_{C_i} de 2.10^{11} rad/s. Si l'on focalise le faisceau sur 100 µm (ce qui correspond à la taille du piège), la puissance nécessaire est de 14 W (pour chaque faisceau du repompeur bien sûr !).

2. Les conditions que j'impose ici sont sans doute un peu trop restrictives. En pratique, il suffit de s'assurer que l'efficacité du refroidissement est supérieure à celle du chauffage parasite.

première transition Raman a certes pour effet de modifier la vitesse de l'atome d'une quantité $2\,v_{\mathrm{rec}}$, et donc d'éloigner l'atome de la zone résonnante ; toutefois, rien n'empêche qu'il y revienne du fait des oscillations, et coupe à nouveau l'hyperparaboloïde résonnant avant d'avoir pu être repompé.

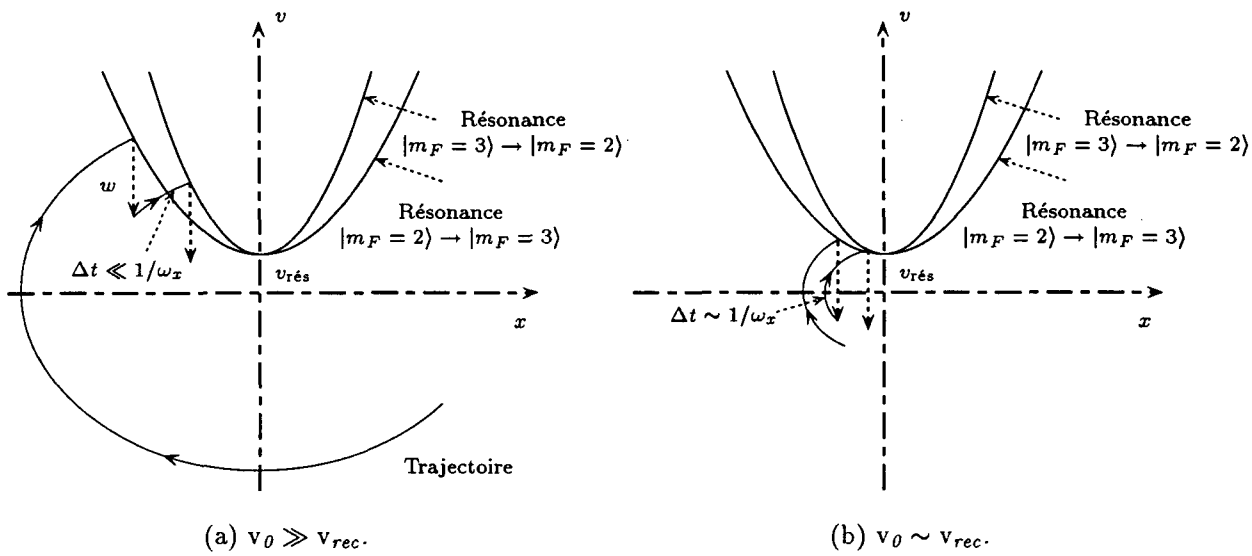


FIG. 3.27 - *Visualisation de la possibilité d'effectuer une 2e transition Raman vers l'état* $|m_F = 2\rangle$ *(les conditions de résonance ne sont pas les mêmes pour les transitions* $|m_F = 4\rangle \rightarrow |m_F = 3\rangle$ *et* $|m_F = 3\rangle \rightarrow |m_F = 2\rangle$*). On constate que le délai au bout duquel se produit cette 2e transition est plus long si l'énergie de l'atome est plus faible.*

Comme on peut le voir sur la figure 3.27, cette deuxième transition a plus de chances de se produire si l'énergie de l'atome est grande devant E_{rec} (dans ce cas l'atome revient sur la zone résonnante au bout d'une petite fraction de la période d'oscillation). Quantitativement, si l'amplitude de la trajectoire est de $10\,v_{\mathrm{rec}}$, on peut prévoir que la deuxième résonance se produira au bout du temps $\tau = 2/(10\,\omega_{x,y,z})$, soit environ 2 ms. Il importe donc qu'au début du refroidissement, les impulsions Raman soient de durée inférieure à 2 ms, de façon à repomper les atomes à temps. Une fois que les atomes sont refroidis à une vitesse de l'ordre de v_{rec}, il devient possible d'utiliser des impulsions un peu plus longues (jusqu'à 10 ms), ce qui permettra de « tailler » la distribution finale avec plus de précision. Signalons que ce processus parasite est moins important lorsque les coefficients du tenseur $\overline{\overline{\Xi}}$ sont plus élevés pour un atome dans $|2\rangle$ que pour un atome dans $|1\rangle$ (on le devine sur la figure 3.27), ce qui est le cas pour les oscillations transverses du piège électrostatique et magnétostatique. Enfin, on peut toujours récupérer les atomes qui auraient effectué cette transition parasite, à l'aide d'un laser supplémentaire polarisé σ^+ et accordé sur la transition $|6^2\mathrm{S}_{1/2}, F = 4, m_F = 2\rangle \rightarrow |6^2\mathrm{P}_{3/2}, F = 5, m_F = 3\rangle$;

Collisions inélastiques. J'évoquerai enfin un dernier processus parasite: les collisions inélastiques avec changement de structure hyperfine. *A priori*, on doit craindre que de telles collisions se produisent très souvent, puisque les atomes ne sont jamais dans l'état fondamental. Heureusement, la conservation du moment angulaire selon z total des deux atomes empêche un changement de structure hyperfine pour deux atomes initialement dans $|1\rangle$. Un tel changement de structure ne peut se produire que lors d'une collision entre un atome dans $|2\rangle$ avec un atome dans $|1\rangle$ (un seul des deux atomes changeant alors d'état hyperfin). La situation n'est donc pas plus catastrophique que dans le cas du POE (là aussi, la perte a lieu lors de la collision d'un atome dans $|1\rangle$ avec un atome dans $|2\rangle$). Je rappelle que pour diminuer ce taux de perte, il existe deux pistes: minimiser le temps que les atomes passent dans $|2\rangle$ (ce qui est difficilement conciliable avec le refroidissement par passage adiabatique), ou utiliser un laser sur le bleu de la transition, empêchant à deux atomes de s'approcher trop près, selon la méthode qui est décrite dans [159].

e) conclusion

Le piège électrostatique et magnétostatique est *a priori* une idée très séduisante, puisque'il s'agit d'un piège compatible avec le refroidissement Raman, et qui ne chauffe pas du tout les atomes. L'exploitation que nous avons faite des règles de sélection (avec en particulier l'utilisation d'un repompeur à trois photons), l'avantage que procure la sélectivité à la fois en vitesse et en position, et le fait que le rapport de branchement ξ vaille 1 constituent des points particulièrement attractifs. Toutefois, il existe de nombreux processus parasites, dont deux sont passablement gênants (la deuxième transition Raman et le chauffage par l'un des faisceaux du repompeur), même s'il devrait être possible de les rendre moins nocifs dans le cas du refroidissement par impulsions. En outre, la mise en œuvre du repompeur à trois photons nécessitera l'utilisation de trois lasers puissants et accordables. Du fait de ces difficultés, le piège magnétostatique et électrostatique a été (du moins momentanément) enterré.

Deuxième partie

Les effets quantiques collectifs

Introduction

SI LE REFROIDISSEMENT d'atomes par laser peut déboucher sur des applications pratiques variées (par exemple l'horloge atomique, ou encore l'interféromètre à atomes), sa principale finalité aux yeux de nombreux physiciens demeure d'ordre fondamental, dans la mesure où il nous apporte un outil permettant de vérifier expérimentalement (et à coût relativement faible) les lois de la mécanique quantique.

En particulier, il est un phénomène qui, depuis quelques années, intéresse beaucoup les physiciens de notre domaine : le comportement quantique collectif des atomes piégés, et plus précisément la condensation de Bose-Einstein [66, 67]. Les atomes neutres que nous refroidissons peuvent en effet être considérés comme des bosons ou bien comme des fermions, selon le nombre de neutrons qu'il y a dans leur noyau. Le plus souvent, ce sont des bosons. Or, pour certaines conditions de température et de densité, ces bosons ont la propriété de se placer tous dans le même état quantique. Ce phénomène a été plusieurs fois observé en physique, par exemple dans le cas de l'hélium liquide. Mais son observation dans le cas d'un gaz d'atomes froids, où les densités sont beaucoup plus faibles, constitue une nouveauté d'un grand attrait.

On montre [68] que, pour des bosons interagissant faiblement, la condensation de Bose-Einstein se produit pour[1]

$$\rho_0 \Lambda_{\mathrm{DB}}^3 \geqslant 2{,}612\,, \tag{0.1}$$

où ρ_0 est la densité atomique, et $\Lambda_{\mathrm{DB}} = h/\sqrt{2\pi M k_{\mathrm{B}} T}$ est la longueur d'onde de De Broglie. Avec les expériences classiques de refroidissement d'atomes par laser (piège magnéto-optique par exemple), nous avons des densités de l'ordre de quelques 10^{11} atome/cm^3, et des longueurs d'onde de De Broglie $\Lambda_{\mathrm{DB}} \sim \lambda_{\mathrm{optique}}/(4{,}5\sqrt{2\pi})$. Le paramètre $\rho_0 \Lambda_{\mathrm{DB}}^3$ vaut 2.10^{-5} : c'est très insuffisant pour observer la condensation de Bose-Eistein.

Pour se rapprocher de la condition (0.1), il est nécessaire d'augmenter la densité, et/ou de baisser la température ; d'où l'intérêt des expériences de refroidissement sub-recul. Par exemple, avec le refroidissement Raman d'atomes piégés

1. Toutes les notations utilisées dans cette deuxième partie sont rassemblées dans un tableau récapitulatif p. 397.

j'ai présenté théoriquement dans le chapitre 2 de la première partie[1] (et en particulier dans le piège opto-électrique, décrit au chapitre 3 de cette première partie), on peut espérer obtenir $\rho\Lambda_{DB}^3 \sim 10^{-2}$. C'est encore insuffisant pour observer la condensation de Bose-Einstein.

Néanmoins, d'autres expériences basées sur le refroidissement évaporatif (sans laser) ont été menées par des équipes concurrentes. Elles permettent de diminuer de façon très importante la température, tout en augmentant la densité, et ce bien que le nombre d'atomes diminue. Et tout récemment, le seuil de la condensation de Bose-Einstein a été atteint [63].

Les effets de condensation de Bose sur les atomes froids sont donc à portée des expériences actuelles. C'est pourquoi nous avons choisi d'étudier des méthodes de diagnostic de cette condensation de Bose, et plus généralement des effets quantiques collectifs. Nous aimerions en effet pouvoir observer des effets liés à la nature statistique des atomes avant que la condition (0.1) soit remplie.

Tout naturellement nous avons été poussés à rechercher de telles méthodes de diagnostic dans le domaine de l'optique: cela correspond à un champ d'études traditionnel dans notre laboratoire. La première méthode qui vient ainsi à l'esprit est l'étude de modifications de l'indice de réfraction de la lumière par un nuage d'atomes froids, induites par la statistique quantique. Cette étude y sera largement consacrée. On peut également étudier la diffusion de la lumière, qui offre un plus grand champ d'investigation grâce à un plus grand nombre de degrés de liberté: nous en dirons quelques mots au chapitre V. Enfin, il existe une autre méthode que nous n'aborderons pas: l'étude des corrélations dans les photons diffusés (expérience d'Hanbury-Brown et Twiss [169, 170]).

Le plan de la partie sera le suivant: tout d'abord j'introduirai le sujet (chapitre I) avec la présentation de quelques articles qui ont précédemment été publiés, et j'annoncerai la nature de nos résultats. J'exposerai ensuite les deux approches que j'ai employées pour calculer l'indice d'un milieu, et je les appliquerai au calcul d'indice à l'ordre le plus bas en densité (chapitre II). Je présenterai dans un III^{e} chapitre le calcul proprement dit, tenant compte cette fois des effets quantiques collectifs. Dans le chapitre IV, j'analyserai le résultat du chapitre III. J'y justifierai en particulier les approximations faites. Enfin, le chapitre V sera une introduction aux problèmes de section efficace de diffusion, plus complexes que les problèmes d'indice mais plus prometteurs pour de futures expériences.

1. Voir notamment p. 79.

Chapitre I

Influence de la statistique quantique des atomes sur leur interaction avec la lumière : présentation générale

LES CONDITIONS de température et de densité correspondant à la condensation de Bose-Einstein ont maintenant été atteintes, grâce aux techniques de refroidissement évaporatif. Cette condensation de Bose-Einstein a été détectée par des moyens optiques : en analysant la distribution en vitesse après destruction du condensat [63], mais aussi directement sur les atomes du condensat [64].

La détection d'un condensat est en principe évidente dans le cas d'un gaz inhomogène, par exemple lorsque les atomes sont confinés dans un piège harmonique (ce qui est le cas pour les expériences réalisées jusqu'ici). Lorsque le nuage atomique est de petite taille, la section efficace de diffusion peut s'exprimer, en première approximation, comme la transformée de Fourier de la densité atomique. Au-dessus de la condensation de Bose-Einstein, les atomes sont répartis sur un grand nombre d'états quantiques du piège, ce qui leur donne une certaine distribution en position. Cette distribution se traduit par un cône de diffusion assez étroit. Lorsque se produit condensation de Bose-Einstein (fig. I.1), de nombreux atomes viennent s'accumuler dans l'état fondamental du piège. Les atomes de ce condensat ont alors une distribution en position donnée par la fonction d'onde de cet état fondamental, c'est-à-dire beaucoup plus serrée que celle des autres atomes. Ce pic de densité se traduit par un élargissement du cône de diffusion.

Des critiques peuvent toutefois être émises à propos de cette méthode de détection. Tout d'abord, l'élargissement du cône de diffusion ne constitue pas vraiment une signature suffisante pour un test précis de la théorie (une augmentation brutale de la densité en un point pourrait avoir d'autres causes que la condensation de Bose-Einstein). Ensuite, l'expression de la section efficace de diffusion comme transformée de Fourier de la densité n'est qu'une approximation.

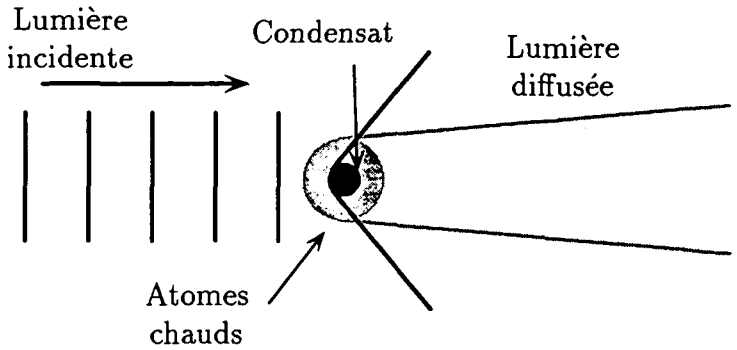


FIG. I.1 - *Diffusion de la lumière par un nuage d'atomes confinés en présence d'un condensat.*

Un traitement plus rigoureux impose de prendre en compte des termes correctifs, dus à la diffusion multiple d'une part, et aux effets collectifs (terme d'échange entre deux particules identiques) d'autre part.

Cette deuxième partie de ma thèse est entièrement consacrée à l'étude de ces deux types de corrections. Afin de simplifier les calculs, je me suis placé dans le cas d'un milieu homogène (les atomes ne sont soumis à aucun potentiel extérieur), où il n'est plus possible de détecter la condensation par élargissement du cône de diffusion. Je commencerai ce chapitre par la présentation d'un calcul élémentaire de section efficace de diffusion [171], qui montre que le terme statistique joue un rôle non négligeable. J'exposerai ensuite, dans la section I.2, les principaux résultats de la littérature sur le sujet. Enfin, j'introduirai les hypothèses de notre calcul, ainsi que ses principaux résultats.

1. Calcul de section efficace de diffusion dans le cadre de l'approximation de Born

Je considère (fig. I.2) un ensemble de N atomes à 2 niveaux que nous noterons $|f\rangle$ et $|e\rangle$. Tous ces atomes sont dans leur état fondamental, et leurs impulsions sont notées $\{\vec{P}_i\}_{i=1,\dots,N}$. J'étudie la section efficace de diffusion d'un photon unique $|\vec{k}_\mathrm{L}, \vec{\varepsilon}_\mathrm{L}\rangle$. Je noterai $|\vec{k}_\mathrm{d}, \vec{\varepsilon}_\mathrm{d}\rangle$ le photon diffusé, et $\{\vec{P}_i{}'\}_{i=1,\dots,N}$ les impulsions des atomes après la diffusion du photon (les atomes seront restés dans leur état fondamental).

On montre [119, p. 15] que la *section efficace de diffusion* (par unité d'angle solide) est donnée par

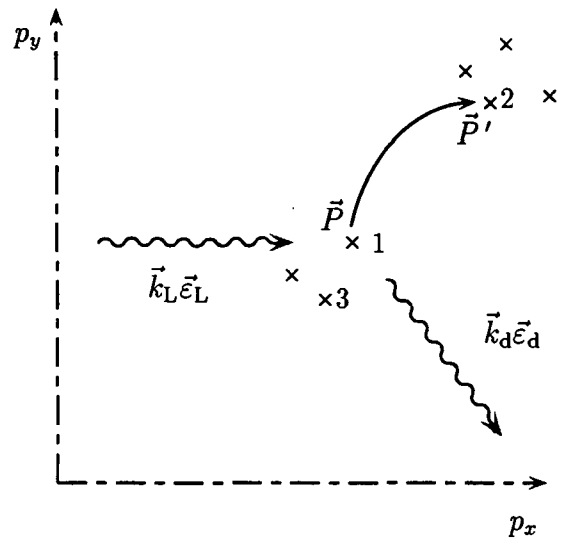


FIG. I.2 - *Diffusion d'un photon sur un nuage d'atomes froids.*

$$\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{\{\vec{p}\},\{\vec{p}'\}} = \frac{2\pi}{\hbar}\left|\left\langle\{f,\vec{P}_i\}_{i=1,\dots,N},\vec{k}_L\vec{\varepsilon}_L\left|\mathcal{T}(E)\right|\{f,\vec{P}_i'\}_{i=1,\dots,N},\vec{k}_d\vec{\varepsilon}_d\right\rangle\right|^2\frac{\rho_\varphi(E'=E)}{\Phi_{\text{inc.}}}, \tag{I.1}$$

où E est l'énergie du système atomes+photon avant la diffusion de ce dernier, et E' l'énergie après diffusion ; nous nous placerons dans des conditions telles que l'on peut négliger l'énergie cinétique des atomes dans l'évaluation de E (davantage de détails seront donnés dans le chapitre IV[1]). La quantité $\Phi_{\text{inc.}}$ est le flux incident de photon et ρ_φ la densité d'états.

La matrice $\mathcal{T}$ se calcule par une *resommation de diagrammes* (voir [119], et l'annexe B). L'approximation de Born consiste à négliger tous les diagrammes de diffusion multiple, comme indiqué sur la figure I.3. Dans ce cas la section efficace vaut simplement :

$$\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{\{\vec{p}\},\{\vec{p}'\}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{1\text{ atome}}\left|\left\langle\{\vec{P}_i\}_{i=1,\dots,N}\left|\sum_{i=1}^{N}e^{i\vec{q}\cdot\vec{R}_i}\right|\{\vec{P}_i'\}_{i=1,\dots,N}\right\rangle\right|^2, \tag{I.2}$$

avec $\vec{q} = \vec{k}_d - \vec{k}_L$; $\vec{R}_i$ est l'opérateur position de l'atome i. Le fait de négliger la diffusion multiple nous a permis de mettre en facteur l'expression de la diffusion par un seul atome[2].

1. Voir notamment le paragraphe IV.4, p. 279

2. On montre que l'approximation de Born revient à remplacer la matrice $\mathcal{T}$ par $\mathcal{V}(\hbar\omega_L - \mathcal{H}_0)^{-1}\mathcal{V}$, où $\mathcal{V}$ est le terme de l'hamiltonien $\mathcal{H}$ qui représente le couplage entre les dipôles atomiques et le champ électromagnétique, et $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H} - \mathcal{V}$ représente l'énergie des atomes excités et des photons. Ici, j'effectue une resommation partielle, conduisant à remplacer $\mathcal{H}_0$ par $\overline{\mathcal{H}}_0$, dans lequel l'énergie des atomes excités est renormalisée. L'expression de $\mathcal{V}$ est

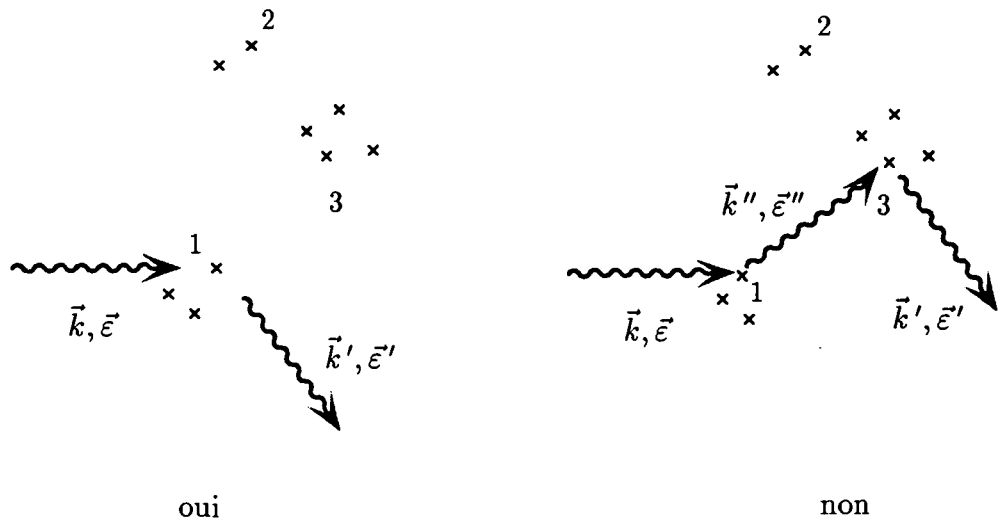


FIG. I.3 - *Calcul de section efficace de diffusion dans l'approximation de Born. Seuls les diagrammes de simple diffusion (à gauche) sont pris en compte.*

On effectue ensuite une sommation sur les états finals atomiques (sous l'hypothèse qu'on ne détecte pas cet état final). Cela revient à développer le carré dans (I.2), et à appliquer une relation de fermeture :

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right)_{1\text{ atome}} \left\langle \{\vec{P}_i\}_{i=1,\dots,N} \left| \underbrace{\sum_{i,j=1}^{N} e^{i\vec{q}\cdot(\vec{R}_i - \vec{R}_j)}}_{\mathcal{W}} \right| \{\vec{P}_i\}_{i=1,\dots,N} \right\rangle . \qquad \text{(I.4)}$$

L'expression (I.4) est la moyenne de l'opérateur quantique $\mathcal{W}$ dans l'état pur $|\{\vec{P}_i\}_{i=1,\dots,N}\rangle$. Si maintenant on veut prendre en compte la statistique quantique des atomes, il convient de remplacer cet état pur par la matrice densité ϖ de distribution thermique (pour un gaz parfait de Bose ou de Fermi), ce qui donne,

---

(pour des atomes à 2 niveaux $|f\rangle$ et $|e\rangle$, dans le cadre de l'approximation du champ tournant)

$$\mathcal{V} = -\sum_{i=1}^{N} \sum_{\vec{k}\vec{\varepsilon}} \hbar\Omega_{\vec{k}\vec{\varepsilon}} |e\rangle\langle f| a_{\vec{k}\vec{\varepsilon}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{R}_i} + \text{h.c.}, \qquad \text{(I.3)}$$

où l'on a effectué une somme sur tous les atomes i (de position $\vec{R}_i$), et sur tous les modes $\vec{k}\vec{\varepsilon}$ du champ, $a_{\vec{k}\vec{\varepsilon}}$ étant l'opérateur d'annihilation d'un photon dans le mode $\vec{k}\vec{\varepsilon}$. La quantité $\Omega_{\vec{k}\vec{\varepsilon}}$ est la fréquence de Rabi à un photon, dont l'expression sera donnée plus loin dans le cas vectoriel (éq. (II.2), p. 217).

On constate que l'expression de $\mathcal{V}$ donnée par (I.3) possède une exponentielle complexe. Cette exponentielle est à l'origine de celle que l'on trouve dans la formule (I.2).

dans le cas où les impulsions atomiques sont discrétisées :

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right)_{1\text{ atome}} \left[\delta_{\vec{q},\vec{0}} \sum_{\vec{p}} f_{\vec{p}}^2 + \sum_{\vec{p}} f_{\vec{p}} \left(1 + \eta_{\mathrm{b/f}} f_{\vec{p}+\hbar\vec{q}}\right)\right] , \tag{I.5}$$

où $f_{\vec{p}}$ est le facteur d'occupation de la classe d'impulsion $\vec{p}$ (cf. p. 245), et $\eta_{\mathrm{b/f}} = \pm 1$ selon la nature statistique de l'atome (boson ou fermion)[1]. L'expression (I.5) s'obtient en utilisant la seconde quantification ; on exprime pour cela l'opérateur à deux particules $\mathcal{W}$ en termes d'opérateurs de création et d'annihilation.

On introduit alors la densité de paire d'un gaz parfait quantique :

$$\rho^{\mathrm{II}}(\vec{r},\vec{r}') \equiv \mathrm{Tr}\left(\varpi \sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^{N} \delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{R}_i)\delta^{(3)}(\vec{r}'-\vec{R}_j)\right) . \tag{I.6}$$

Le calcul de cette densité de paire sera détaillé au paragraphe III.2.*b* (p. 245). Dans le cas où les atomes ne sont soumis à aucun potentiel extérieur, et où le milieu est infini, on obtient

$$\rho^{\mathrm{II}}(\vec{r},\vec{r}') = \rho_0^2 \left(1 + \varphi(\vec{r}-\vec{r}')\right) , \tag{I.7}$$

ρ_0 étant la densité atomique. La fonction φ introduite dans l'équation (I.7) dépend de la température et de la nature bosonique/fermionique des atomes.

Revenant maintenant à l'équation (I.5), on passe en point de vue $\vec{r}$ (en effectuant une transformée de Fourier) pour faire apparaître les fonctions delta, et on obtient, dans le cas où $N \gg 1$ (V étant le volume du milieu) :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right)_{1\text{ atome}} \left[N + N^2 \left|\int \frac{\mathrm{d}^3\vec{r}}{V} e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}}\right|^2 + N\rho_0 \int \mathrm{d}^3\vec{r}\,\varphi(\vec{r}) e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}}\right] .} \tag{I.8}$$

Nous nous restreignons maintenant au cas où $\rho_0 \Lambda_{\mathrm{DB}}^3 \ll 1$. Dans ce cas, on a simplement $\varphi(\vec{r}) = \eta_{\mathrm{b/f}} \exp(-2\pi r^2/\Lambda_{\mathrm{DB}}^2)$. Si l'on étend la 2$^{\mathrm{e}}$ intégrale de l'équation (I.8) sur tout l'espace (ce qui est valable lorsque la taille du milieu est bien supérieure à Λ_{DB}), on obtient le résultat :

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right)_{1\text{ atome}} \left[N + N^2 \left|\int \frac{\mathrm{d}^3\vec{r}}{V} e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}}\right|^2 + \eta_{\mathrm{b/f}} N \frac{\rho_0 \Lambda_{\mathrm{DB}}^3}{2^{3/2}} e^{-\dfrac{\hbar^2 q^2}{4Mk_BT}}\right] . \tag{I.9}$$

1. Je passe ici sous silence la relation spin-statistique : si un atome est un boson (resp. un fermion), alors le moment angulaire total de son état fondamental est entier (resp. demi-entier). L'expression approchée de la fonction φ que je donne ici est valable lorsque tous les atomes sont dans le même état interne. Ceci est vrai lorsque l'état fondamental est de moment angulaire nul, mais alors les atomes sont nécessairement des bosons. Pour que le résultat puisse aussi être appliqué au cas des fermions, on peut imposer qu'ils aient tous été pompés dans le même état (par exemple $|m_J = J\rangle$).

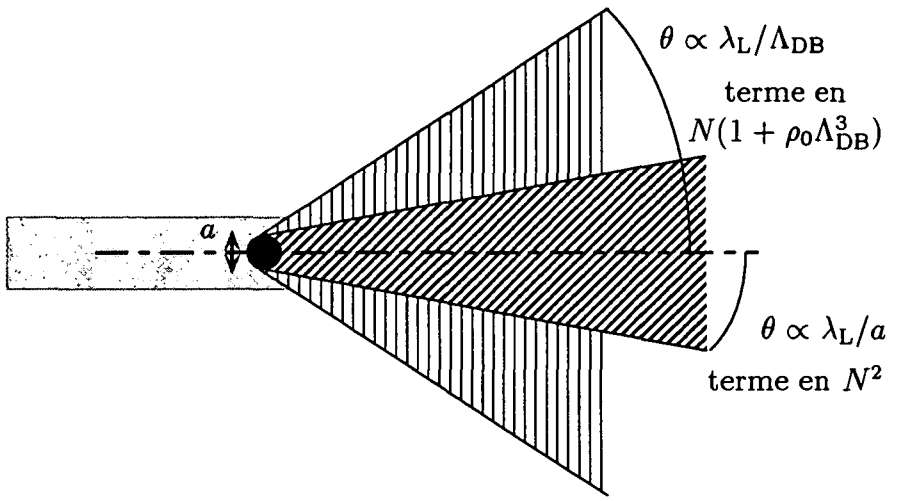


FIG. I.4 - *Interprétation des différents termes du résultat (I.9).*

Le résultat (I.9) peut facilement être interprété physiquement. Le premier terme du crochet, proportionnel à N, est le terme de diffusion des atomes individuels. Le second terme (terme de diffraction), proportionnel à N^2, correspond à la diffusion vers l'avant (interférence constructive), dans un cône d'angle au sommet de l'ordre de λ_L/a, (fig. I.4), où λ_L est la longueur d'onde optique, et a la taille du milieu vérifiant $a \gg \lambda_L$ (la densité atomique étant supposée constante à l'intérieur du milieu). Enfin, le 3^e terme est celui qui nous intéresse : il est directement relié à la nature statistique des atomes, et le paramètre $\rho_0\Lambda_{DB}^3$ y apparaît explicitement. On voit sur la figure I.2 que la diffusion peut ramener un atome vers une classe d'impulsion déjà occupée par d'autres atomes (du moins si $k_BT \gtrsim \hbar^2k^2/(2M)$, M étant la masse de l'atome). S'il s'agit de bosons (resp. de fermions), on s'attend à ce que le processus soit favorisé (resp. défavorisé) : c'est bien ce que l'on obtient dans le résultat (I.9) avec le facteur $\eta_{b/f}$ devant le terme statistique.

Nous avons donc pu, en quelques pages, mettre en évidence des effets statistiques facilement interprétables sur la diffusion de la lumière par un gaz d'atomes froids. Néanmoins, ce calcul reste très insuffisant, notamment parce que les conditions de validité de l'approximation de Born sont très restrictives[1].

2. Quelques publications sur la signature optique de la condensation de Bose-Eistein

Je présente dans cette section certaines publications sur le sujet qui existaient avant que je commence ce travail, ou qui sont apparues au cours des deux dernières années. Deux voies ont ont principalement été explorées : l'une concerne

1. Voir des précisions à ce sujet au paragraphe IV.2, p. 267.

les atomes piégés (paragraphe a), tandis que l'autre concerne les atomes libres (paragraphe b).

a) Diffusion de la lumière sur des atomes piégés

La condensation de Bose-Einstein a été observée sur des atomes confinés. C'est également dans ce cas de figure que se sont placées certaines études théoriques. Comme je l'ai dit dans l'introduction (p. 199), la condensation de Bose-Einstein s'accompagne dans ce cas d'un élargissement du cône de diffraction.

i) Le calcul de Lewenstein et You

Maciej Lewenstein et Li You [172] ont étudié le cas d'atomes piégés dans un piège harmonique lent ($\omega_p/2\pi = 10$ Hz, ω_p étant la pulsation du piège) et profond ($U_0/h \sim 10^4$ Hz, c'est-à-dire contenant plusieurs milliers de niveaux). Ces atomes sont sondés avec des impulsions lumineuses très brèves et très intenses. Ce sont des impulsions de durée τ_L telles que

$$\int_0^{\tau_L} \frac{\Omega(t)}{2} \mathrm{d}t = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{I.10}$$

Ω étant la fréquence de Rabi. Cette condition d'impulsion 2π permet, dans le cas où $1/\tau_L \gg \Gamma/2$ (Γ étant la largeur naturelle atomique), et donc l'émission spontanée est négligeable, de sonder les atomes froids sans les chauffer (mesure non destructive).

Dans un premier temps, les auteurs négligent totalement l'émission spontanée. Ils trouvent alors que le système se comporte comme un ensemble d'atomes à deux niveaux indépendants, le niveau $|f, n\rangle$ (atome dans son état fondamental, et dans le niveau n du piège) étant couplé à l'état $|\psi_n\rangle = \exp(i\vec{k}_L \cdot \vec{R})|e, n\rangle$ (où l'atome est excité ; $\vec{k}_L$ est le vecteur d'onde du faisceau laser, et ω_L sa fréquence).

Le rôle de l'émission spontanée est ensuite évalué perturbativement. On calcule le spectre d'émission dans une direction $\vec{k}\vec{\varepsilon}$, que l'on sépare en 2 parties : une partie cohérente et une partie incohérente. Au-dessus de la condensation de Bose-Einstein ($T > T_{CBE}$), le spectre cohérent est donné par :

$$C_{coh}(\vec{k}, \vec{\varepsilon}) = C_{coh}^{1\ atome}(\vec{k}, \vec{\varepsilon}) N^2 e^{-\frac{2a^2 \|\vec{k} - \vec{k}_L\|^2 k_B T}{\hbar\omega_p}}, \tag{I.11}$$

a étant la taille de la fonction d'onde de l'état fondamental ($a = \sqrt{\hbar/(2M\omega_p)}$), et N le nombre total d'atomes. $C_{coh}^{1\ atome}$ ne dépend que de $\vec{k}\vec{\varepsilon}$ et des caractéristiques de l'impulsion lumineuse incidente. Le nombre total de photons émis de façon cohérente se calcule en intégrant C_{coh} sur $\vec{k}\vec{\varepsilon}$. On obtient (dans le cas d'une impulsion en $1/\mathrm{ch}(t/\tau_L)$ d'aire 2π)

$$N_{tot} = \frac{3\pi^{3/2}}{32} \Gamma\tau_L N^2 \left(\frac{\hbar\omega_p}{2k_L^2 a^2 k_B T}\right)^{5/2} (\omega_L \tau_L)^3 . \tag{I.12}$$

Pour une impulsion de 100 ps, et pour une température de 10 μK (pour des atomes de césium), on trouve $N_{\rm tot} \simeq 10^{-2}N$. Nous sommes bien dans les conditions de l'approximation de faible nombre de photons spontanés. Le spectre cohérent diffuse dans un angle de 10^{-4} rad environ.

Lorsque $T < T_{\rm CBE}$, il apparaît un terme supplémentaire provenant du condensat qui s'écrit

$$C_{\rm coh}^{\rm CBE}(\vec{k},\vec{\varepsilon}) = C_{\rm coh}^{1\ \rm atome}(\vec{k},\vec{\varepsilon}) N_0^2 e^{-\|\vec{k}-\vec{k}_{\rm L}\|^2 a^2}\,, \tag{I.13}$$

et

$$N_{\rm tot} = N_0^2 \frac{\Gamma\tau_{\rm L}}{4k_{\rm L}^2 a^2}\,, \tag{I.14}$$

N_0 étant le nombre d'atomes dans l'état fondamental du piège (donc dans le condensat).

Cette diffusion cohérente se fait dans un angle beaucoup plus large (de l'ordre de 10^{-2} rad). Elle est aussi beaucoup plus importante: au niveau du seuil de la condensation de Bose-Einstein, $N_{\rm tot}$ devient de l'ordre de N.

Signalons que cet élargissement de l'angle solide du spectre cohérent correspond, comme dans la figure I.4, à un rétrécissement du nuage d'atomes qui vient maintenant remplir de manière microscopique l'état fondamental du piège[1]. Lewenstein et You ont en fait sondé la distribution en position des atomes.

ii) Le calcul de Javanainen

Juha Javanainen [173] considère également le cas d'atomes dans un piège harmonique isotrope de fréquence $\omega_{\rm p}$. Mais il les sonde avec un laser qui est cette fois-ci continu, et de faible intensité.

On suppose qu'il existe un condensat contenant N_0 atomes, dans l'état $|f,0\rangle$. Typiquement, on suppose $N_0 \simeq N/2$, N étant le nombre total d'atomes. En outre, le condensat est supposé optiquement mince. Comme dans le cas de Lewenstein et You, le laser couple l'état de plus basse énergie du piège avec l'état

$$|\psi_0\rangle = \exp(i\vec{k}_{\rm L}\cdot\vec{R})|e,0\rangle\,,$$

où l'atome est excité. Les atomes présents dans cet état vont bien sûr se désexciter par émission spontanée. Javanainen affirme que l'on peut ne retenir que les termes où, en se désexcitant, les atomes retombent dans le condensat. Ceci est vrai parce que l'amplitude de ce processus est favorisée d'un facteur $\sqrt{N_0}$ par rapport au

1. En partant de la fonction d'onde de l'état fondamental du piège (qui est une gaussienne), et en effectuant la transformée de Fourier correspondant au terme en N^2 du résultat (I.8), on trouve effectivement la gaussienne dans l'espace des $\vec{k}$ prévue par la formule (I.11).

cas où ils retombent dans un niveau quelconque — les autres niveaux du piège étant supposés inoccupés ou peu occupés[1].

Se restreindre ainsi au cas où l'atome retombe dans le condensat fait apparaître des conditions sur le photon spontané émis. On se place dans le cas où $\|\vec{k}_L\|a \gg 1$, a étant la taille du condensat $\sqrt{\hbar/2M\omega_p}$. Les photons doivent nécessairement être émis dans un cône d'angle $(\|\vec{k}_L\|a)^{-1}$ (comme sur la figure I.4). Ceci réduit le taux d'émission spontanée d'un facteur $(\|\vec{k}_L\|a)^{-2}$. Mais ce même taux d'émission spontanée se trouve augmenté d'un facteur N_0 par la présence de N_0 bosons dans l'état d'arrivée. Finalement, il vaut

$$\Gamma_N = \frac{N_0\Gamma}{f(\|\vec{k}_L\|a)}, \tag{I.15}$$

où Γ est la largeur naturelle atomique et f, inverse de la fonction de diffraction, vérifie

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{3}{2}x^2. \tag{I.16}$$

Le nombre d'atomes, à l'équilibre, dans l'état excité $|\varphi_0\rangle$, est quant à lui

$$N_0 \frac{\frac{\Omega^2}{4}}{\delta^2 + \frac{\Gamma_N^2}{4}},$$

Ω étant la fréquence de Rabi et δ le désaccord du laser.

On trouve donc :

- que le condensat se comporte comme un atome unique dont on peut négliger la saturation ;
- que sa raie est considérablement élargie par rapport à celle d'un atome unique ;
- que le nombre d'atomes excités varie en $1/N_0$ (lorsque $\delta \ll \Gamma_N$) ;
- enfin, que le nombre de photons émis par unité de temps est indépendant du nombre d'atomes dans le condensat.

En fait, ces résultats ne sont pas spécifiques de la condensation de Bose-Einstein. Ils peuvent être interprétés par un modèle classique de superradiance.

Mentionnons également un article de Li You, Maciej Lewenstein et J. Cooper [175], pour lequel on se place dans le cas où $a/\lambda\!\!\!^{-}_L \simeq 1$ (avec $\lambda\!\!\!^{-}_L = \lambda_L/(2\pi)$), et $N\lambda\!\!\!^{-3}_L/a^3 \simeq 1$. Les auteurs trouvent dans ce cas un spectre de diffusion plus complexe, composé d'un pic très étroit sur un fond non lorentzien. Ce spectre s'exprime comme la somme d'une série dont les premiers termes sont des lorentziennes de la largeur prévue par Javanainen.

1. En réalité, les atomes ne retombent prioritairement dans le condensat que si N_0 est suffisamment élevé. J. I. Cirac et M. Lewenstein [174] montrent que l'on doit vérifier la relation $N_0 \gg N - N_0 + n_{niv}$, où n_{niv} est le nombre de niveaux du piège accessibles.

b) Diffusion de la lumière sur des atomes libres

B. V. Svistunov et G. V. Shlyapnikov ont étudié l'interaction d'un gaz quantique libre avec de la lumière quasi-résonnante. Leur étude repose sur une analogie avec la physique des solides, et plus exactement avec les excitons, *i.e.* l'interaction entre un électron et un trou dans un semi-conducteur [176], et les polaritons, qui résultent de l'interaction entre un exciton et un photon. Les articles dont je rends compte ici se placent dans le cas des hautes densités, c'est-à dire

$$\rho_0 \lambda_L^3 \gg 1 , \tag{I.17}$$

où $2\pi\lambda_L = \lambda_L$ est la longueur d'onde d'un laser résonnant avec la transition atomique.

Tout d'abord, le cas où il n'y a pas de condensat est étudié dans [177]. Il y apparaît des pseudo-excitons, dus à l'interaction entre un atome excité et un atome dans le fondamental. Le couplage entre ces excitons et la lumière donne naissance à des polaritons, dont la relation de dispersion possède une bande interdite caractéristique.

Le cas de la condensation de Bose-Einstein est étudié par les mêmes auteurs [178], ainsi que, pour le cas d'un pur condensat, par Politzer [179]. Les auteurs négligent l'interaction entre atomes excités et atomes non excités[1], ainsi que l'émission spontanée (par un argument voisin de celui de Javanainen, *i.e.* que l'émission stimulée avec retour dans le condensat est beaucoup plus importante, puisqu'il y a un facteur multiplicatif dû au condensat et un autre dû aux photons du laser). Dans ce cas, le très fort couplage entre les photons résonnants et les atomes du condensat donne naissance à des polaritons, mais d'une nature différente de ceux de [177] ; ce sont des superpositions d'un photon et d'un atome excité.

Dans ces conditions, la relation de dispersion trouvée (*i.e.* la relation entre la fréquence ω_L du laser et son vecteur d'onde k_m) est la suivante [179] :

$$c^2 k_m^2 = \frac{1}{2}\left\{\omega_L^2 + 2\frac{Mc^2}{\hbar}(\omega_L - \omega_A) \pm \sqrt{\left(\omega_L^2 - \frac{2Mc^2}{\hbar}(\omega_L - \omega_A)\right)^2 + \frac{8Mc^2}{\hbar}\omega_L^2 \Gamma 3\pi\rho_0\lambda_L^3}\right\} , \tag{I.18}$$

où ω_A est la fréquence de résonance atomique, M la masse atomique et Γ la largeur naturelle de l'état excité.

On peut réexprimer la relation de dispersion (I.18) d'une manière plus physique, *i.e.* tenant davantage compte des différents ordres de grandeurs. Dans la limite où $\Gamma \ll \omega_A$, $\delta \equiv \omega_L - \omega_A \ll \omega_A$ et $\omega_{rec} \equiv \hbar\omega_A^2/(Mc^2) \ll \omega_A$, l'équation

1. du moins dans un premier temps, en ce qui concerne [178].

(I.18) devient

$$c^2 k_{\rm m}^2 = \frac{\omega_{\rm A}^2}{2}\left\{1 + 2\frac{\delta}{\omega_{\rm rec}} \pm \sqrt{\left(1 - 2\frac{\delta}{\omega_{\rm rec}}\right)^2 + 24\pi\frac{\Gamma}{\omega_{\rm rec}}\rho_0\lambda_{\rm L}^3}\right\} \qquad \text{(I.19)}$$

L'allure de la relation de dispersion (I.19) est représentée sur la figure I.5. On trouve qu'il existe une plage de fréquence (appelée *bande interdite*), de largeur $3\pi\Gamma\rho_0\lambda_{\rm L}^3$, pour laquelle ne correspond aucune valeur de $k_{\rm m}$[1]. Si on envoie dans le milieu de la lumière à cette fréquence, elle est totalement réfléchie.

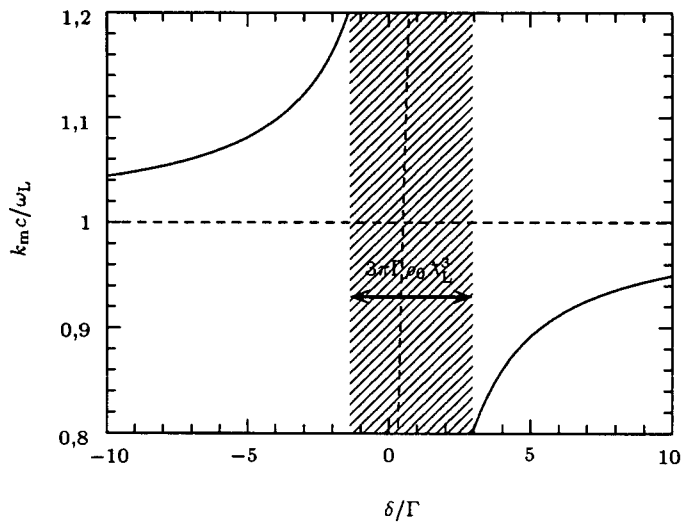


FIG. I.5 - *Relation de dispersion telle qu'elle est prévue par le calcul de Politzer. Les paramètres choisis sont* $2\pi c/\omega_A = 800$ *nm,* $\Gamma/(2\pi) = 100$ *Hz, et* $\omega_{rec}/(2\pi) = 10$ *kHz. La densité est de* $\rho_0(\lambda_L/(2\pi))^3 = 10$. *En pointillés, les états non couplés (atome excité et photon) ; la bande interdite est le résultat d'un anti-croisement.*

Pour obtenir le résultat (I.18), il a fallu négliger l'énergie cinétique des atomes. B. V. Svistunov et G. V. Shlyapnikov montrent qu'il est pour cela nécessaire de vérifier la relation

$$\frac{\Gamma}{\omega_{\rm rec}} \ll \rho_0\lambda_{\rm L}^3 . \qquad \text{(I.20)}$$

D'autre part, afin de pouvoir traiter les interactions dans le cadre de l'approximation binaire (c'est-à-dire ne prendre en compte que l'interaction entre 2 atomes), il faut se placer dans l'hypothèse

$$\rho_0(r^0)^3 \ll 1 , \qquad \text{(I.21)}$$

1. du moins, aucune valeur admissible, c'est-à-dire correspondant à un indice de réfraction de l'ordre de 1.

où r^0 est défini par

$$r^0 = \frac{3}{4}\lambda\!\!\!^{-}_{\mathrm{L}}\frac{\Gamma}{\omega_{\mathrm{rec}}}\,. \tag{I.22}$$

La quantité r_0 est une distance caractéristique pour les collisions entre un atome excité et un atome dans le fondamental, lorsque l'échange d'énergie se fait de façon résonnante, et dans le régime où le recul des atomes joue un rôle important [180].

En combinant les relations (I.17) et (I.21), on tire

$$\Gamma \ll \omega_{\mathrm{rec}}\,. \tag{I.23}$$

La condition (I.23) implique que l'étude de Svistunov et Shlyapnikov n'est par exemple pas valable dans le cas des alcalins.

Lorsqu'on rajoute l'émission spontanée et l'interaction entre atomes, Politzer montre que le résultat que je viens d'exposer reste valable, si la largeur naturelle des atomes ainsi que l'élargissement de raie dû à leur collision sont plus petits que la largeur de la bande interdite.

Svistunov et Shlyapnikov ont ensuite généralisé l'étude au cas d'une température finie, c'est-à-dire où le condensat coexiste avec des atomes qui sont dans d'autre états. Les calculs sont dans ce cas fort complexes, et montrent que 2 types de polaritons sont présents : les polaritons de condensat pur, produits de l'interaction entre un atome excité et un photon, et les polaritons « classiques », dus à l'interaction entre un photon et une paire atome excité/atome fondamental. Ces 2 types de polaritons interagissent entre eux de manière fort complexe. Un résultat typique est la courbe donnant la constante diélectrique en fonction du désaccord, qui possède 2 pôles dans le cas de la condensation de Bose-Einstein, et un seul au-dessus de cette condensation. Les auteurs ont donc réussi à mettre ainsi en évidence une signature non ambiguë de la condensation de Bose-Einstein, c'est-à-dire qui ne puisse pas s'interpréter comme un effet de superradiance susceptible d'apparaître également dans un système de N particules discernables.

c) Autres publications

D'autres publications relatives à la détection optique des effets quantiques collectifs et de la condensation de Bose-Einstein (et qui concernent soit des atomes libres, soit des atomes piégés) ont paru au cours de l'élaboration de la présente étude. Je me contenterai de les citer ici, sans en détailler le contenu.

Un calcul de la diffusion de la lumière par un gaz d'atomes peu dense a été réalisé par Juha Javanainen [181] (ce problème présente de profondes analogies avec celui que j'expose au paragraphe I.1, p. 200). Il met en évidence l'apparition d'un spectre à deux pics caractéristique de la condensation de Bose-Einstein. L'article de L. You, Maciej Lewenstein et J. Cooper [182] considère le cas d'un condensat d'atomes piégés, que l'on étudie à l'aide de courtes impulsions lumineuses intenses. Il s'agit d'une prolongation du travail que j'ai présenté au paragraphe

I.2.*a.i*, p. 205 [172], les interactions entre atomes étant cette fois-ci prises en compte.

L'interaction d'atomes identiques ultra-froids avec une onde laser stationnaire a en outre été étudiée dans [183]. On doit également mentionner l'existence d'une approche en termes d'« optique atomique non linéaire » du comportement d'un ensemble d'atomes identiques [184–187] (cette approche permet notamment d'obtenir une équation de Schrödinger effective non linéaire).

Enfin, une part importante des résultats que je vais maintenant présenter peut être retrouvée dans [188].

3. Les paramètres de notre étude

Voici la liste des conditions que nous nous imposerons :

- tous nos calculs seront effectués dans le cas d'atomes libres. Par conséquent, à l'intérieur du milieu, la densité atomique sera uniforme : $\rho(\vec{r}) = \text{Cte} = \rho_0$;
- la densité atomique sera supposée faible : $\rho_0 \lambda_L^3 \ll 1$, avec $\lambda_L = \lambda_L/(2\pi)$ (nous effectuerons un développement en puissances de $\rho_0 \lambda_L^3$) ;
- nous nous placerons dans le cas des raies larges : $\Gamma \gg \omega_{rec}$. Cette situation est vérifiée pour les alcalins, que nous utilisons dans presque toutes nos expériences. Sachant que les atomes seront supposés refroidis à des vitesses proches du recul, nous pourrons négliger dans tous les calculs les effets Doppler et de recul devant Γ.

Signalons que ces 2 dernières conditions sont exactement opposées à celles de [177]. Par conséquent, il n'y a aucune raison de s'attendre à trouver une bande interdite, ni une réflexion totale de la lumière ;

- dans toute cette étude, à l'exception du paragraphe IV.5, p. 284, nous nous placerons dans le cas d'une transition $0 \rightarrow 1$, comme indiqué sur la figure I.6. Le laser sera quant à lui quasi-résonnant, *i.e.* vérifiant la condition

$$|\delta| = |\omega_L - \omega_A| \sim \Gamma \ll \omega_A \,. \tag{I.24}$$

Cette hypothèse nous permettra de négliger la contribution des autres niveaux atomiques et de faire l'approximation du champ tournant ;

- nous avons imposé que les atomes soient refroidis à une température de l'ordre du recul. Par contre, nos calculs seront valables à des températures arbitrairement basses. Une restriction doit toutefois être faite à ce sujet : lorsque l'on mesure l'indice d'atomes refroidis sous la vitesse de recul avec une sonde quasi-résonnante, cette dernière a pour effet de chauffer les atomes et donc de détruire le milieu que l'on souhaite étudier. On répond à cette objection que la puissance du laser peut être rendue arbitrairement basse, nous laissant alors le temps d'effectuer notre mesure avant que les atomes soient chauffés.

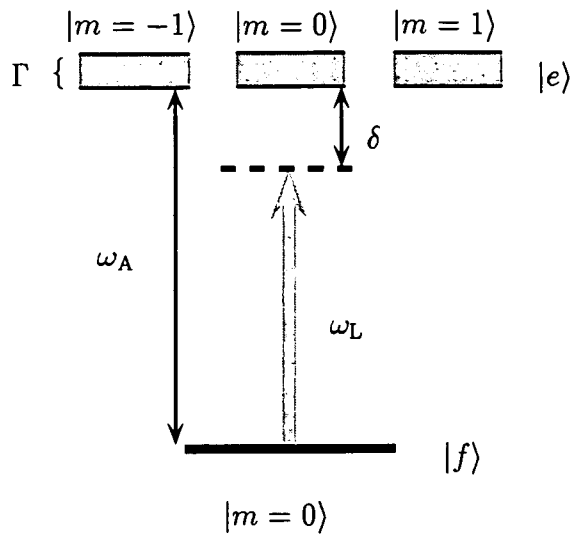


FIG. I.6 - *La transition* $0 \longrightarrow 1$ *sur laquelle nous effectuerons la plupart des calculs.*

4. Nature des résultats

A l'ordre 1 en $\rho_0\lambda_L^3$, nous obtiendrons le résultat suivant :

$$n = 1 - \frac{3\pi\rho_0\Gamma c^3}{2\omega_A^3\left(\delta + i\frac{\Gamma}{2}\right)} \tag{I.25}$$

Ce résultat est un résultat bien connu (voir par exemple [119, p. 578]). On l'obtient en traitant chaque atome indépendamment des autres atomes ; par conséquent on ne peut trouver aucun effet quantique collectif à cet ordre.

A l'ordre 2 en $\rho_0\lambda_L^3$, 2 types de corrections à (I.25) apparaissent : il y a d'une part les effets statistiques analogues à ceux mis en évidence avec le modèle de diffusion dans le cadre de l'approximation de Born (section I.1). D'autre part, apparaissent des effets classiques d'interaction dipôle-dipôle entre atomes proches, l'un étant dans l'état excité et l'autre dans le fondamental.

Nous allons comparer par un modèle simple les ordres de grandeur respectifs de ces deux corrections (fig. I.7). Pour cela, plaçons nous à grand désaccord δ positif, *i.e.* $\delta > \Gamma$. La correction classique à l'indice est due au fait que les interactions peuvent rendre certains atomes résonnants avec le laser. Comme nous le verrons au paragraphe III.2.*a*, p. 243, cette interaction dipôle-dipôle a pour effet de coupler un atome excité avec un autre dans l'état fondamental, et donc de déplacer les énergies des états excités. Au voisinage de $r = 0$ (r étant la distance inter-atomique), le déplacement des niveaux se comporte en $\Gamma c^3/(\omega_A^3\|\vec{r}\|^3)$ (fig. I.7). Par conséquent, il existe une distance inter-atomique pour

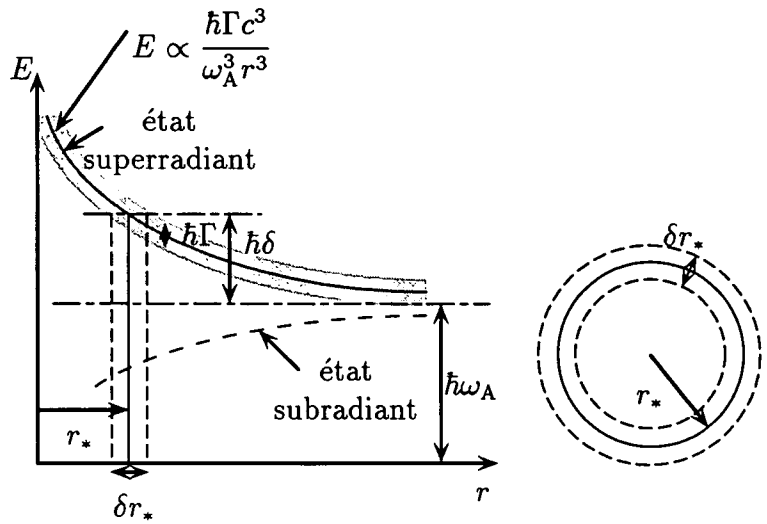


FIG. I.7 - *Evaluation des termes d'interaction dipôle-dipôle entre un atome excité et un autre dans l'état fondamental, lorsque la transition atomique est une transition* $0 \rightarrow 1$. *La figure correspond au cas où celui des deux atomes qui est excité possède un moment angulaire parallèle à la droite joignant les deux atomes (lorsque ce moment angulaire est orienté orthogonalement à la droite, l'énergie de l'état superradiant est inférieure à celle de l'état subradiant).*

laquelle le laser est résonnant. Cette distance est notée r_*, avec

$$\frac{\Gamma c^3}{\omega_A^3 r_*^3} = \delta\,, \tag{I.26}$$

et d'épaisseur δr_*, avec[1]

$$\frac{\delta r_*}{r_*}\frac{\Gamma c^3}{\omega_A^3 r_*^3} \sim \Gamma\,.$$

Le nombre moyen d'atomes distants de r_* à δr_* près d'un atome donné est

$$\rho_0 r_*^2 \delta r_* \sim \rho_0 \frac{c^3}{\omega_A^3}\left(\frac{\Gamma}{\delta}\right)^2\,.$$

Pour en déduire la correction classique à l'indice, on doit appliquer à ces atomes la formule (I.25), en supposant qu'ils sont résonnants, c'est-à-dire avec $\delta = 0$. On obtient :

$$\Delta n_{\text{class.}} \sim \left(\rho_0 \frac{c^3}{\omega_A^3}\frac{\Gamma}{\delta}\right)^2\,. \tag{I.27}$$

1. Je ne calcule ici qu'un ordre de grandeur. Je néglige donc le fait que Γ puisse être augmenté par superradiance d'un facteur 2.

La correction due aux effets quantiques collectifs peut être évaluée à partir de l'équation (I.9) ; on voit que, dans le cas de températures de l'ordre de celle du recul, il suffit de multiplier le résultat à 1 atome par $\rho_0 \Lambda_{\mathrm{DB}}^3$. D'où[1]

$$\Delta n_{\mathrm{quant.}} \sim \rho_0 \frac{c^3}{\omega_{\mathrm{A}}^3} \left(\frac{\Gamma}{\delta}\right)^2 \times \rho_0 \Lambda_{\mathrm{DB}}^3 \,. \tag{I.28}$$

Les équations (I.27) et (I.28) nous enseignent que le terme classique n'est négligeable devant le terme quantique qu'à très petite température ($\Lambda_{\mathrm{DB}} \gg c/\omega_{\mathrm{A}}$, *i.e.* $k_{\mathrm{B}}T \ll \hbar^2 k_{\mathrm{L}}^2/(2M)$). Comme nous ne souhaitons pas imposer sur les paramètres du problème de restrictions autres que celle de faible densité, nous devrons prendre en compte les interactions entre 2 atomes dont l'un est dans l'état excité. L'approche par l'approximation de Born ne suffit donc pas.

1. J'ai un peu « triché » en écrivant l'équation (I.28) : d'après mon raisonnement, la dépendance en désaccord devrait être celle du terme à un atome, c'est-à-dire effectivement δ^2/Γ^2 pour la partie imaginaire de l'indice (absorption), mais δ/Γ pour la partie réelle (déphasage). En fait, comme nous le verrons ultérieurement, le résultat (I.28) est bien le bon résultat y compris pour pour la partie réelle, même si je ne sais pas le justifier « avec les mains ».

Chapitre II

Les méthodes de calcul de l'indice de réfraction d'un milieu

CONSIDÉRONS un milieu d'atomes froids, interagissant avec un laser monochromatique. Nous cherchons à connaître l'influence des atomes sur la propagation de la lumière du laser.

Deux sortes de modifications peuvent être détectées expérimentalement. La première est le *déphasage*. Il suffit, pour l'observer, de construire un interféromètre avec un autre bras du même laser ne passant pas dans le milieu atomique. Le déphasage créé par les atomes se traduira par un déplacement de franges.

L'autre modification observable est l'*absorption*: la puissance du laser à la sortie du milieu sera diminuée, parce que les atomes en auront diffusé une partie dans toutes les directions. Pour mesurer l'absorption, il suffira de placer dans le laser un photodétecteur sensible, en faisant attention à ce qu'il soit suffisamment loin du milieu pour ne pas détecter les photons diffusés par les atomes, *i.e.* la partie incohérente du champ rayonné.

Nous allons calculer la *relation de dispersion* du milieu, c'est-à-dire la relation entre le vecteur d'onde $\vec{k}$ d'un champ électromagnétique présent dans ce milieu, et la fréquence d'évolution ω du système couplé. De cette relation de dispersion, nous pourrons déduire l'indice de réfraction n du milieu. Cet indice de réfraction est un nombre complexe. Ainsi, le déphasage d'un faisceau vaudra $\mathfrak{Re}(n)k_{\mathrm{L}}L$, tandis que son absorption sera $\exp(\mathfrak{Im}(n)k_{\mathrm{L}}L)$, k_{L} étant le vecteur d'onde de la lumière dans le vide, et L la longueur du milieu atomique.

Nous avons mis au point deux approches pour calculer cette relation de dispersion. La première approche suppose qu'il existe dans le milieu une onde plane progressive de vecteur d'onde $\vec{k}_{\mathrm{r}}$ réel. Par exemple, il peut s'agir d'un photon unique dans un milieu atomique infini. On étudie le comportement temporel du champ[1], et on trouve qu'il décroît exponentiellement en fonction du temps, *i.e.*

1. Le champ d'un photon unique est en moyenne nul. Néanmoins, il est facile de déduire du calcul à un photon la valeur moyenne du champ dans l'état $|0\rangle + \alpha|\vec{k}_{\mathrm{r}}\vec{\varepsilon}_{\mathrm{r}}\rangle$, qui est non nulle. Cet état correspond à un état cohérent dans la limite de très faible intensité.

qu'il oscille à un fréquence complexe ω_e. Ce calcul utilise la technique de la résolvante [119], qui fait appel à des resommations de diagrammes de Feynman. Je présenterai au paragraphe II.1.*g*, p. 224, une version simplifiée de ce calcul qui, sans passer par la méthode de la résolvante, permet d'obtenir la relation de dispersion dans le cas où l'on néglige les interactions entre atomes.

Dans la 2^e approche, on impose au champ d'osciller à une fréquence réelle ω_L, et on étudie la dépendance spatiale du champ. On trouve qu'il décroît exponentiellement avec z ((Oz) étant la direction de propagation du champ), c'est-à-dire que son vecteur d'onde $\vec{k}_m$ est complexe. Naturellement, le milieu dans ce cas ne peut pas être infini. Cette approche est à la fois plus standard en optique quantique, et plus proche de la réalité physique, du moins pour des géométries particulières où les effets de bord sont négligeables. Toutefois, elle nécessite de longs calculs (renvoyés dans l'annexe A) pour obtenir les équations du mouvement du champ électrique et des dipôles.

Remarque: ces calculs ne peuvent malheureusement pas caractériser exactement les résultats de futures expériences. En effet, un milieu d'atomes froids peut posséder des bords irréguliers, et sa densité atomique n'est pas uniforme. La géométrie du milieu va intervenir dans le comportement du faisceau, dans la mesure où de nombreuses réflexions et réfractions peuvent se produire à l'interface milieu/matière, qui ne sont pas prises en compte dans un simple calcul d'indice.

Ce problème n'est bien sûr pas spécifique aux milieux d'atomes froids (par exemple pour connaître la propagation de la lumière dans un morceau de verre, il faut tenir compte de la forme de ce dernier). Un calcul d'indice fournit des *équations de propagation* de la lumière. Il est ensuite possible de résoudre numériquement ces équations, en tenant compte de la géométrie du milieu, pour obtenir le déphasage et l'absorption réels d'un faisceau.

Certes, on pourrait craindre que, contrairement au cas du morceau de verre, la forme du milieu d'atomes froids soit mal connue ; c'est par exemple le cas pour un piège magnéto-optique, dont le profil est directement relié à la phase des faisceaux, qui est toujours mal contrôlée expérimentalement. Toutefois, ce n'est pas le cas pour les expériences de refroidissement évaporatif réalisées dans des pièges non dissipatifs, car l'atteinte d'un état d'équilibre y est assurée par les collisions.

1. Calcul d'indice par une méthode diagrammatique

a) Hamiltonien du problème

On considère un milieu constitué de N atomes froids, formant une transition $0 \longrightarrow 1$ comme indiqué sur la figure I.6. Le milieu atomique est supposé infini, et les atomes n'interagissent avec aucun potentiel extérieur. Dans ces conditions, il est simple de quantifier le mouvement externe des atomes en représentation $\vec{P}$, c'est-à-dire de le décrire par l'ensemble des impulsions $\{\vec{P}_i\}_{i=1}^N$. L'impulsion de chaque atome décrit normalement $\mathbb{R}^3$; pour la commodité des calculs, il est plus simple de restreindre le problème à un volume fini V de forme parallélépipédique, appelé « volume de quantification », et assorti de conditions aux limites périodiques

de type Born-von Karmann. Dans ce cas, les impulsions des atomes décrivent un réseau régulier, et les intégrales sur les impulsions sont remplacées par des sommes discrètes.

Le milieu atomique est supposé interagir avec un photon unique. Les modes du champ électromagnétique sont également discrétisés, avec le même volume de quantification que pour les impulsions atomiques.

Nous écrivons donc l'hamiltonien du système :

$$\mathcal{H} = \overbrace{\sum_{i=1}^{N} \hbar\tilde{\omega}_{\mathrm{A}} |i,\vec{e}\rangle \cdot \langle i,\vec{e}| + \sum_{\vec{k}\vec{\varepsilon}} \hbar\omega_{\vec{k}} a_{\vec{k}\vec{\varepsilon}} a^{\dagger}_{\vec{k}\vec{\varepsilon}}}^{\mathcal{H}_0} + \underbrace{\left(i \sum_{i=1}^{N} \sum_{\vec{k}\vec{\varepsilon}} \hbar\vec{\Omega}_{\vec{k}\vec{\varepsilon}} \cdot |i,\vec{e}\rangle\langle i,f| a_{\vec{k}\vec{\varepsilon}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{R}_i} + \mathrm{h.c.} \right)}_{\mathcal{V}} . \quad \text{(II.1)}$$

L'hamiltonien (II.1) a été écrit en jauge $\vec{d}\cdot\vec{E}$, dans le cadre de l'approximation du champ tournant, *i.e.* où tous les termes antirésonnants ont été négligés. La conséquence est qu'il y aura toujours, soit un photon unique et tous les atomes dans leur état fondamental, soit aucun photon et un atome excité. La fréquence de Rabi à un photon est définie par

$$\vec{\Omega}_{\vec{k}\vec{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\hbar\omega_{\vec{k}}}{2\varepsilon_0 V}}\, d\,\vec{\varepsilon}, \quad \text{(II.2)}$$

d étant l'élément de matrice du dipôle atomique et V le volume de quantification. J'ai choisi, dans l'équation (II.1), la base $\{|e_x\rangle, |e_y\rangle, |e_z\rangle\}$ pour décrire les sous-niveaux Zeeman de l'état excité, et j'ai employé une notation vectorielle un peu inhabituelle dont le principe est décrit dans la table II.1. Par exemple, l'opérateur $|i,\vec{e}\rangle \cdot \langle i,\vec{e}|$ projette l'atome i sur ses états excités, mais n'agit pas sur les autres atomes, ni sur l'espace des impulsions.

L'hamiltonien (II.1) ne comprend pas les termes d'énergie cinétique : leur prise en compte aurait fait apparaître, plus loin dans les calculs, les termes Doppler et de recul, que nous négligeons en vertu des hypothèses faites au paragraphe I.3. Les degrés de liberté externe de l'atome sont toutefois pris en compte dans le problème (tout se passe comme si l'on se plaçait dans la limite où la masse M de l'atome tend vers l'infini).

b) Etat du système à l'instant t

A $t = 0$, le système se trouve dans l'état

$$|\psi(t=0)\rangle = \left[\bigotimes_{i=1}^{N} |i,\vec{P}_i,f\rangle \right] \otimes a^{\dagger}_{\vec{k}_r\vec{\varepsilon}_r} |0\rangle , \quad \text{(II.3)}$$

TAB. II.1 - *Les notations vectorielles employées dans la cette thèse.*

J'emploie des notations permettant d'éviter d'écrire explicitement des sommations sur des indices de coordonnées. Les *vecteurs* sont surmontés d'une flèche : ainsi

$$\vec{v} = (v_i)_{i=x,y,z} .$$

Les *tenseurs* (*i.e.* les matrices 3×3) sont surmontés de 2 flèches :

$$\vec{\vec{a}} = [a_{ij}]_{i,j=x,y,z} .$$

Le signe $\otimes$ permet de fabriquer un tenseur avec 2 vecteurs, selon la définition

$$\vec{\vec{a}} = \vec{v} \otimes \vec{w} \Rightarrow a_{ij} = v_i w_j .$$

Le point $\cdot$ désigne tout aussi bien le produit scalaire de 2 vecteurs, que le produit matriciel de 2 tenseurs :

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \sum_{i=x,y,z} v_i w_i$$

$$(\vec{\vec{a}} \cdot \vec{v})_i = \sum_{j=x,y,z} a_{ij} v_j$$

$$[\vec{\vec{a}} \cdot \vec{\vec{b}}]_{ij} = \sum_{k=x,y,z} a_{ik} b_{kj}$$

$$\vec{w} \cdot \vec{\vec{a}} \cdot \vec{v} = \sum_{i,j=x,y,z} w_i a_{ij} v_j \text{ , etc.}$$

Ces conventions s'appliquent à des vecteurs numériques, mais peuvent aussi s'appliquer à des symboles de dérivation. Par exemple

$$\left(\vec{\nabla} \otimes \vec{\nabla}\right) \cdot \left(\vec{F}(\vec{r})\right) = \overrightarrow{\text{grad}}\,(\text{div}\, F(\vec{r})) .$$

Elles peuvent également s'appliquer à des opérateurs quantiques. Dans ce cas il faut prendre garde au fait que de tels opérateurs ne commutent pas. Ainsi

$$\left\{\vec{\vec{A}} \cdot \vec{\vec{B}}\right\}_{ij} = \sum_{k=x,y,z} A_{ik} B_{kj} ,$$

et

$$\left\{ {}^{\mathrm{t}}\left({}^{\mathrm{t}}\vec{\vec{B}} \cdot {}^{\mathrm{t}}\vec{\vec{A}}\right)\right\}_{ij} = \sum_{k=x,y,z} B_{kj} A_{ik} .$$

Enfin, les notations vectorielles peuvent s'appliquer aux sous-niveaux Zeeman d'un état $|J = 1\rangle$. En effet, je peux choisir pour base $\{|e_x\rangle, |e_y\rangle, |e_z\rangle\}$ au lieu de la base usuelle $\{|e_{-1}\rangle, |e_0\rangle, |e_1\rangle\}$. Je remplace alors les indices x, y, z par une notation vectorielle. Ainsi

$$|\vec{e}\rangle \cdot \langle\vec{e}| = |e_x\rangle\langle e_x| + |e_y\rangle\langle e_y| + |e_z\rangle\langle e_z| .$$

L'état $|\vec{e}\rangle \cdot \vec{\varepsilon}$ est l'état de l'atome excité par un photon de polarisation $\vec{\varepsilon}$.

$|0\rangle$ étant le vide de photons. Ceci signifie qu'il y a un photon $|\vec{k}_r\vec{\varepsilon}_r\rangle$, et que tous les atomes sont dans l'état fondamental avec une impulsion fixée. Nous noterons la fréquence du photon $\omega_r = c\|\vec{k}_r\|$. La notation ω_e désignera une quantité indépendante de ω_r : la fréquence d'évolution du système.

On calcule l'état du système à un instant quelconque en utilisant la formule :

$$|\psi(t)\rangle = \mathcal{U}(t,0)|\psi(t=0)\rangle\,, \tag{II.4}$$

où $\mathcal{U}(t,0)$ est l'opérateur d'évolution $\exp[-i\mathcal{H}t/\hbar]$. D'après [119, p. 164, formule (A.11)], on a

$$\mathcal{U}(t,0) \underset{t>0}{=} -\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}E\, e^{-iEt/\hbar}\mathcal{G}(E+i\varepsilon)\,, \tag{II.5}$$

où ε est un réel positif que nous ferons tendre vers 0 à la fin des calculs. La fonction $\mathcal{G}$ est définie pour $z \in \mathbb{C}$ par

$$\mathcal{G}(z) = \frac{1}{z-\mathcal{H}}\,, \tag{II.6}$$

(l'inversion devant être comprise au sens des matrices), et est appelée *résolvante* .

L'intégrale (II.5) se calcule à l'aide du théorème des résidus. On trouve alors que le système évolue selon une somme d'exponentielles $e^{i\omega_e t}$, où $\hbar\omega_e$ est l'un des pôles de la résolvante. Nous obtiendrons donc la relation de dispersion du système en recherchant les pôles de la résolvante (*i.e.* les fréquences complexes d'évolution du système), et en les exprimant en fonction de $\|\vec{k}_r\|$.

Remarque : nous nous intéressons en fait à l'élément de matrice $\langle\psi|\mathcal{U}(t,0)|\psi\rangle$, c'est pourquoi nous calculerons $\langle\psi|\mathcal{G}(z)|\psi\rangle$.

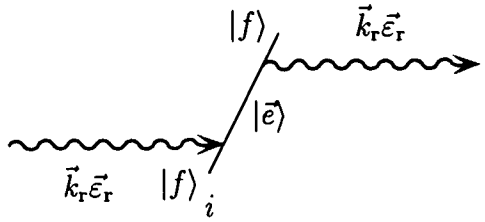
c) Calcul de la résolvante

La résolvante se calcule en utilisant la formule [119, formule (A.24) p. 167] (équivalente à la théorie des perturbations dépendant du temps) :

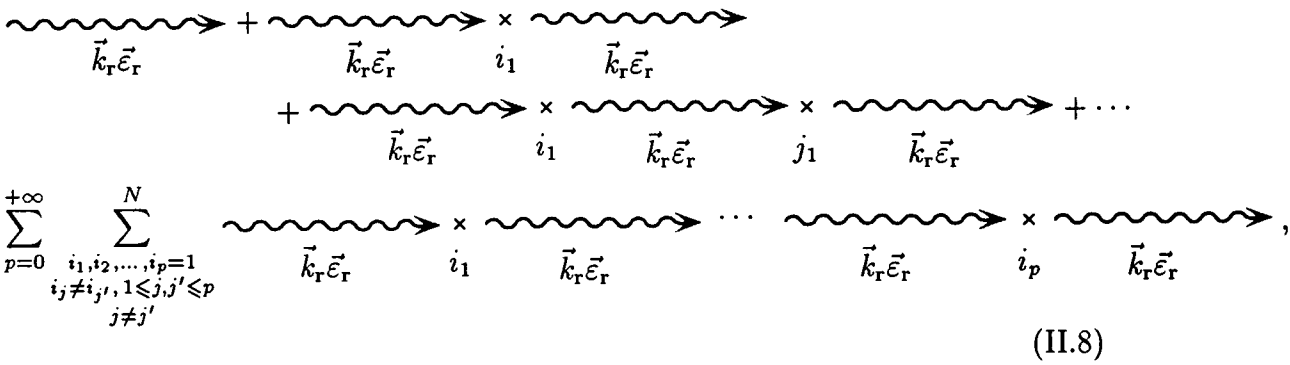
$$\mathcal{G}(z) = \mathcal{G}_0(z) + \mathcal{G}_0(z)\mathcal{V}\mathcal{G}_0(z) + \mathcal{G}_0(z)\mathcal{V}\mathcal{G}_0(z)\mathcal{V}\mathcal{G}_0(z) + \cdots\,, \tag{II.7}$$

avec $\mathcal{G}_0(z) = 1/(z-\mathcal{H}_0)$, $\mathcal{H}_0$ et $\mathcal{V}$ étant définis par les accolades de la formule (II.1).

L'équation (II.7) correspond à une somme de diagrammes. Par exemple le terme $\langle\psi|\mathcal{G}_0(z)|\psi\rangle$ correspond au diagramme le plus simple, que nous notons $\underset{\vec{k}_r\vec{\varepsilon}_r}{\rightsquigarrow}$. Il signifie que le photon $\vec{k}_r\vec{\varepsilon}_r$ est présent et n'interagit pas avec les atomes. Le terme $\langle\psi|\mathcal{G}_0(z)\mathcal{V}\mathcal{G}_0(z)|\psi\rangle$ vaut 0, à cause de la forme de l'hamiltonien (II.1) : en effet, le photon présent dans $|\psi\rangle$ est nécessairement détruit par l'opérateur d'annihilation de $\mathcal{V}$. En fait seuls les termes du développement (II.7) possédant un nombre pair d'opérateurs $\mathcal{V}$ sont non nuls.

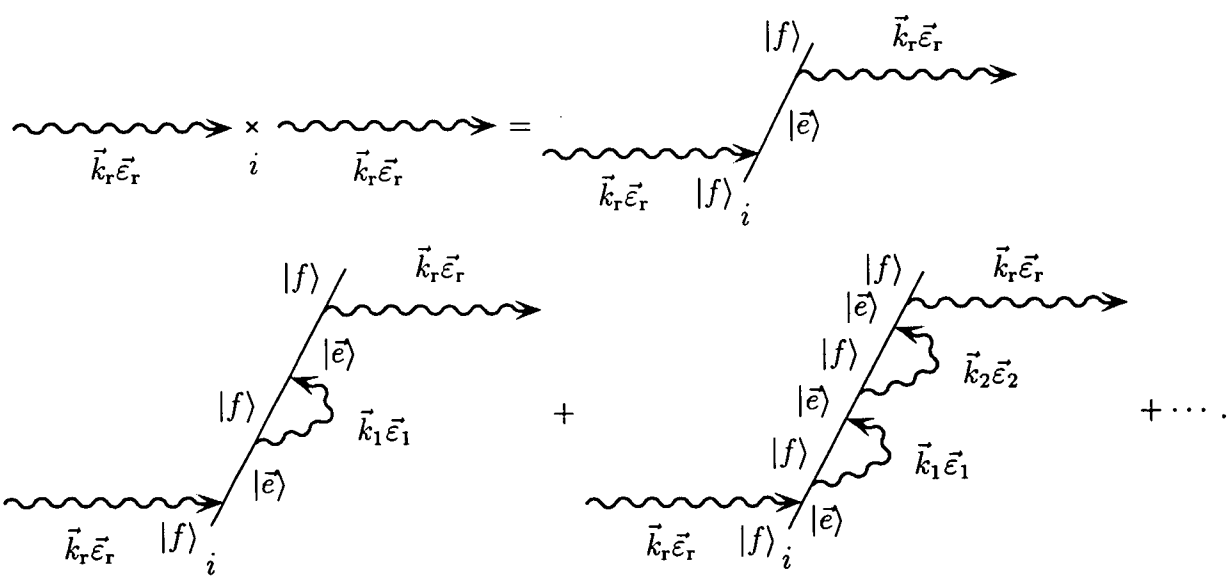
Le terme $\langle\psi|\mathcal{G}_0(z)\mathcal{V}\mathcal{G}_0(z)\mathcal{V}\mathcal{G}_0(z)|\psi\rangle$ fait apparaître un état intermédiaire dans lequel le photon a disparu, et un atome a été excité. Dans un point de vue diagrammatique, on le note  , ce qui donne $\left(\frac{1}{z-\hbar c k_r}\right)^2 \frac{\left|\vec{\varepsilon}_r^{\,*}\cdot\hbar\vec{\Omega}_{\vec{k}_r\vec{\varepsilon}_r}\right|^2}{z-\hbar\tilde{\omega}_A}$, où $k_r = \|\vec{k}_r\|$.

Je calculerai l'élément de matrice de la résolvante de manière approchée en faisant la somme[1]

$\langle\psi|\mathcal{G}(z)|\psi\rangle \simeq$ 

(II.8)

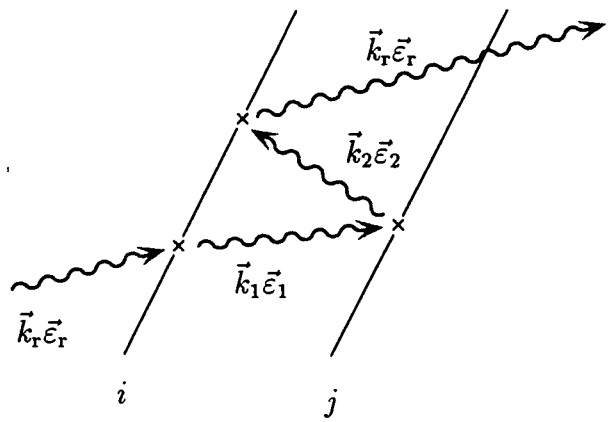
où le terme $\times_i$ est défini par



(II.9)

1. J'expliquerai plus loin (p. 222) pourquoi le photon est toujours diffusé dans le même mode.

Dans la somme (II.8), de nombreux diagrammes, tels que celui-ci :



n'ont pas été pris en compte : il s'agit des diagrammes où le photon passe 2 fois (ou plus) par un atome i donné, en visitant entre temps un atome $j \neq i$. Au chapitre III et lors de l'annexe B, nous prendrons en compte certains de ces diagrammes. Nous verrons alors qu'ils correspondent à des corrections d'ordre 2 en ρ_0/k_L^3, le terme que nous calculons ici étant quant à lui d'ordre 1. Notons que cette approximation consistant à négliger de tels diagrammes est connue dans la littérature sous le nom d'approximation de Twersky [189, p. 257].

d) Sommation des diagrammes de la formule (II.9)

En évaluant les diagrammes de la formule (II.9), on obtient

$$\underset{\vec{k}_r\vec{\varepsilon}_r}{\sim\!\sim\!\sim\!

photon incident excite naturellement l'atome dans l'état $\vec{\varepsilon}_r \cdot |\vec{e}\rangle$. Ensuite, le terme $\vec{\varepsilon}_r \cdot \langle \vec{e}|\mathcal{V}\mathcal{G}_0\mathcal{V}|\vec{e}\rangle \cdot \vec{u}$, avec $\vec{u} \perp \vec{\varepsilon}_r$, s'annule pour des raisons de parité lorsqu'on intègre sur le photon intermédiaire. De proche en proche, on déduit que c'est toujours dans le même sous-niveau Zeeman que l'atome est excité.

D'autre part, pour écrire la deuxième ligne de (II.10), j'ai développé en séries $1/(z-\mathcal{H})$, puis j'ai calculé la somme d'une série géométrie dont la raison n'est pas inférieure à 1 pour toute valeur de z. C'est une chose assez difficile à justifier, mais usuelle en théorie des perturbations [190, p. 51]. Dans l'annexe B, nous verrons qu'il est possible d'obtenir ce résultat directement, sans effectuer de sommation.

Il est habituel [119, p. 174] de négliger la dépendance en z dans la somme sur $\vec{k}\vec{\varepsilon}$ qui se trouve au dénominateur de (II.10). On évalue cette dernière pour $z = \hbar\omega_L + i\varepsilon$, avec $\varepsilon \to 0$, ω_L étant une fréquence optique quasi-résonnante avec les atomes (peu importe laquelle exactement). On utilise la relation $1/(x+i\varepsilon) \underset{\varepsilon \to 0}{=} \mathcal{P}\mathcal{P}(1/x) - i\pi\delta(x)$, $\mathcal{P}\mathcal{P}(1/x)$ désignant la distribution partie principale. On définit donc les quantités

$$\Gamma = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{\vec{k}\vec{\varepsilon}} \left| \vec{\varepsilon}_r^* \cdot \hbar\vec{\Omega}_{\vec{k}\vec{\varepsilon}} \right|^2 \delta(\hbar\omega_L - \hbar\omega_{\vec{k}}) \qquad \text{(II.11.a)}$$

$$\Delta E_A = \frac{1}{\hbar}\mathcal{P}\mathcal{P} \sum_{\vec{k}\vec{\varepsilon}} \frac{\left| \vec{\varepsilon}_r^* \cdot \hbar\vec{\Omega}_{\vec{k}\vec{\varepsilon}} \right|^2}{\hbar(\omega_L - \omega_{\vec{k}})}. \qquad \text{(II.11.b)}$$

Γ est la *largeur naturelle de l'état excité.* On reconnaît dans sa définition (II.11.a) la règle d'or de Fermi. ΔE_A correspond à un déplacement de l'énergie de l'état $|\vec{e}\rangle$. C'est le *déplacement de Lamb*, et sa définition (II.11.b) rappelle la théorie des perturbations au second ordre. On définit la fréquence atomique renormalisée par

$$\omega_A = \tilde{\omega}_A + \frac{\Delta E_A}{\hbar}, \qquad \text{(II.12)}$$

et l'on tire

$$= \frac{\left| \vec{\varepsilon}_r^* \cdot \hbar\vec{\Omega}_{\vec{k}_r\vec{\varepsilon}_r} \right|^2}{(z - \hbar c k_r)^2 \left(z - \hbar\omega_A + i\hbar\frac{\Gamma}{2} \right)}. \qquad \text{(II.13)}$$

e) Sommation des diagrammes de la formule (II.8)

Dans la définition (II.3) de l'état $|\psi\rangle$, j'ai imposé que les atomes se trouvent dans un état d'impulsion déterminée. Comme je calcule la résolvante entre $\langle\psi|$ et $|\psi\rangle$, l'impulsion de chaque atome doit être conservée dans chaque diagramme.

Comme le photon ne visite qu'une seule fois un atome donné (par hypothèse), il quitte ce dernier dans le même mode que son mode initial, c'est à dire $\vec{k}_r\vec{\varepsilon}_r$ [1].

Le fait que le photon reste toujours dans le même mode n'est pas très intuitif: un photon qui diffuse dans un milieu atomique n'a *a priori* aucune raison de rester dans le même mode. Je calcule en fait un indice de réfraction, c'est-à-dire je prends en compte uniquement la partie cohérente du champ. Cet indice de réfraction possède une partie imaginaire, responsable de l'absorption, qui d'après le théorème optique est directement reliée aux termes de diffusion dans une direction quelconque. Les termes de diffusion où l'impulsion n'est pas conservée sont donc bien présents dans ce calcul, même s'ils sont « masqués ».

Cette considération faite, la resommation de la formule (II.8) est immédiate. Elle donne

$$\langle\psi|\mathcal{G}(z)|\psi\rangle = \frac{1}{z-\hbar ck_r}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{\left|\vec{\varepsilon}_r^{\,*}\cdot\hbar\vec{\Omega}_{\vec{k}_r\vec{\varepsilon}_r}\right|^2}{(z-\hbar ck_r)\left(z-\hbar\omega_A+i\hbar\frac{\Gamma}{2}\right)}\right)^n \tag{II.14.a}$$

$$= \frac{1}{z-\hbar ck_r-\dfrac{N\left|\vec{\varepsilon}_r^{\,*}\cdot\hbar\vec{\Omega}_{\vec{k}_r\vec{\varepsilon}_r}\right|^2}{z-\hbar\omega_A+i\hbar\dfrac{\Gamma}{2}}}. \tag{II.14.b}$$

f) Relation de dispersion

On déduit la relation de dispersion en reliant les pôles $z=\hbar\omega_e$ (ω_e est complexe) de la résolvante dans (II.14.b), au vecteur d'onde k_r. En posant $\rho_0 = N/V$, et en utilisant la définition (II.2) de la fréquence de Rabi à 1 photon, ainsi que l'expression de Γ en fonction de d qui est

$$\Gamma = \frac{d^2\omega_A^3}{3\pi\varepsilon_0\hbar c^3}, \tag{II.15}$$

on tire

$$\boxed{(\omega_e-ck_r)\left(\omega_e-\omega_A+i\frac{\Gamma}{2}\right)=ck_r\frac{3\pi\rho_0\Gamma c^3}{2\omega_A^3}.} \tag{II.16}$$

L'interprétation de la relation (II.16) en terme d'indice n'est pas tout à fait évidente. Nous y reviendrons au paragraphe II.3, p. 230, après avoir introduit l'autre approche.

1. *A priori*, on pourrait penser que, même si l'impulsion du photon est conservée, la polarisation du photon peut ne pas rester constante. Les considérations de symétries discutées plus haut montrent qu'il n'en est rien.

g) Utilisation d'un hamiltonien effectif

Nous montrons dans ce paragraphe comment il est possible d'obtenir le résultat (II.16) très rapidement, sans recourir à la méthode de la résolvante. J'en recommande la lecture à tout lecteur qui ne serait pas très à l'aise avec les diagrammes de Feynman.

Le système est toujours décrit par l'hamiltonien (II.1) Nous considérons alors les 2 états

$$\left\{\begin{array}{l} |\psi_0\rangle = \left[\bigotimes_{i=1}^{N} |i, \vec{P}_i, f\rangle\right] \otimes a^{\dagger}_{\vec{k}_r \vec{\varepsilon}_r} |0\rangle \\ |\psi_1\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{N}} \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \left[\left(\bigotimes_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} |j, \vec{P}_j, f\rangle\right) \otimes |i, \vec{P}_i + \hbar\vec{k}_r, \vec{e}\cdot\vec{\varepsilon}_r\rangle \otimes |0\rangle\right] \end{array}\right. . \tag{II.17}$$

Je note $\mathfrak{E} = \{|\psi_0\rangle\} \oplus \{|\psi_1\rangle\}$. En l'absence d'émission spontanée, $\mathfrak{E}$ représente l'espace de Hilbert accessible par le système. Par contre, l'émission spontanée va provoquer une modification des impulsions atomiques, et donc un départ du système de l'espace $\mathfrak{E}$. Je traduis cela en introduisant une énergie complexe à l'état $\{|\psi_1\rangle\}$, la partie imaginaire $\hbar\Gamma$ étant le taux d'émission spontanée.

On peut écrire sur $\mathfrak{E}$ un *hamiltonien effectif* (non hermitien)

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} \hbar c k_r & \sqrt{N}\vec{\varepsilon}_r^{\,*} \cdot \hbar\vec{\Omega}_{\vec{k}_r\vec{\varepsilon}_r} \\ \sqrt{N}\hbar\vec{\Omega}^{*}_{\vec{k}_r\vec{\varepsilon}_r} \cdot \vec{\varepsilon}_r & \hbar\omega_A - i\hbar\dfrac{\Gamma}{2} \end{bmatrix} . \tag{II.18}$$

L'écriture de (II.18) est conforme à l'intuition. Pour le justifier rigoureusement, il faut utiliser la résolvante en employant la méthode des projecteurs (annexe B, p. 350).

Pour connaître l'évolution du système, il suffit ensuite de calculer le polynôme caractéristique de l'hamiltonien (II.18). On retrouve alors la relation de dispersion (II.16).

2. Calcul d'indice par une approche de champ moyen

a) Introduction

Nous considérons dans cette section un milieu atomique interagissant avec un champ laser monomode, c'est-à-dire un état cohérent. Dans ce cas, le laser pilote les dipôles atomiques à une fréquence ω_L réelle. Le champ se trouve atténué à cause de la diffusion de photons dans le milieu. Loin des bords, il décroît exponentiellement le long de l'axe de propagation du laser. L'amplitude du champ

devant rester bornée en tout point, nous ne pouvons pas nous placer dans un milieu infini. Nous avons choisi un milieu remplissant un demi-espace (fig. II.1). Cela permet de ne pas avoir de réflexions à l'intérieur du milieu. Le résultat que nous allons obtenir ne sera toutefois pas valable au voisinage du plan $z = 0$ (*i.e.* sur une distance de quelques longueurs d'ondes).

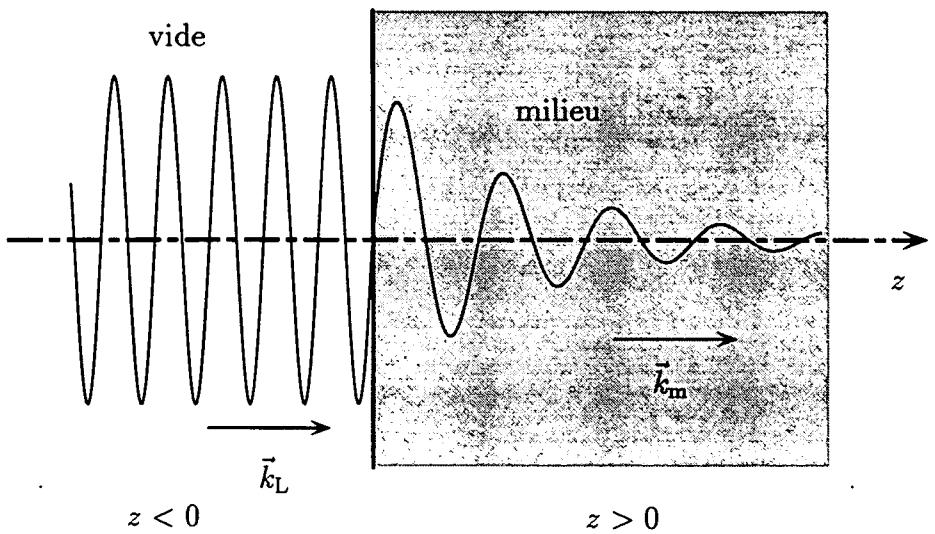


FIG. II.1 - *Calcul d'indice dans l'approche « champ moyen ». Le milieu, qui remplit la moitié de l'espace, déphase et atténue le champ.*

b) Méthode utilisant les équations de Maxwell-Bloch

La méthode la plus simple pour calculer un indice de réfraction est d'utiliser les équations de Maxwell dans un milieu (la densité et le courant de charges libres étant nuls). On introduit pour cela la quantité

$$\vec{\mathbb{E}}_\perp = \vec{E} + \frac{\vec{P}}{\varepsilon_0}, \tag{II.19}$$

qui est à ε_0 près l'induction électrique (j'évite la notation traditionnelle $\vec{D}$ à cause de la confusion possible avec les dipôles), $\vec{P}$ étant la densité de dipôles[1]. Les équations s'écrivent

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{II.20.a}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{\mathbb{E}}_\perp}{\partial t} \tag{II.20.b}$$

$$\mathrm{div}\,\vec{\mathbb{E}}_\perp = 0\,. \tag{II.20.c}$$

1. Le champ $\vec{\mathbb{E}}_\perp$ est transverse d'après l'équation (II.20.c), d'où l'indice $\perp$ dans la notation. Des indications relatives au choix de la notation $\vec{\mathbb{E}}$ figurent au début de l'annexe A.

En prenant le rotationnel de l'équation (II.20.a), j'obtiens

$$\Box \vec{E} = \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2} - \frac{1}{\varepsilon_0} \overrightarrow{\text{grad}}\, \text{div}\, \vec{P}\,. \tag{II.21}$$

Je suppose ensuite que le champ moyen $\vec{\mathcal{E}}(r)$ et la densité moyenne de dipôles $\vec{\mathcal{P}}(\vec{r})$ s'écrivent sous la forme

$$\vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{E}}_0 e^{i(\vec{k}_m \cdot \vec{r} - \omega_L t)} + \text{c.c.}\,, \tag{II.22.a}$$

$$\vec{\mathcal{P}} = \vec{\mathcal{P}}_0 e^{i(\vec{k}_m \cdot \vec{r} - \omega_L t)} + \text{c.c.}\,, \tag{II.22.b}$$

avec $\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = \left\langle \vec{E}(\vec{r}) \right\rangle$ et $\vec{\mathcal{P}}(\vec{r}) = \left\langle \vec{P}(\vec{r}) \right\rangle$. En outre, la moyenne de $\overrightarrow{\text{grad}}\, \text{div}\, \vec{P}$ est nulle dans la configuration géométrique que nous avons choisie (les quantités vectorielles sont dirigées selon (Ox) et ne dépendent que de z). Je me place dans la situation où le milieu répond linéairement au champ appliqué, *i.e.*

$$\vec{\mathcal{P}}_0 = \varepsilon_0 \chi \vec{\mathcal{E}}_0\,, \tag{II.23}$$

χ étant un nombre complexe appelé *susceptibilité du milieu* (je suppose ici χ scalaire). J'obtiens alors la relation de dispersion

$$k_m^2 = \frac{\omega_L^2}{c^2}(1 + \chi)\,, \tag{II.24}$$

où $\vec{k}_m = k_m \vec{u}_z$.

Pour un milieu formé d'atomes modélisables par un système à deux niveaux, la quantité χ se calcule à l'aide des équations de Bloch optiques [119, p. 578]. On obtient

$$\chi = -\frac{3\pi \rho_0 \Gamma c^3}{{\omega_A}^3 \left(\omega_L - \omega_A + i\dfrac{\Gamma}{2}\right)} \tag{II.25}$$

Ceci donne sans effort la relation de dispersion désirée.

c) Méthode utilisant les équations de Heisenberg

La méthode de Maxwell-Bloch que je viens de présenter permet d'obtenir simplement l'indice de réfraction à l'ordre le plus bas en densité. Il est possible de la généraliser au cas où l'on prend en compte les interactions et la statistique [186]. Toutefois, les calculs sont fort lourds. C'est pourquoi j'ai préféré utiliser une méthode utilisant les équations de Heisenberg.

Les détails de cette méthode sont présentés dans l'annexe A. Tout d'abord, on établit l'hamiltonien du problème en jauge $\vec{d} \cdot \vec{E}$ à partir de celui en jauge

$\vec{A} \cdot \vec{p}$. Puis on écrit les équations de Heisenberg sur le champ électrique, et sur les dipôles atomiques. On moyenne enfin ces équations sur les modes du champ et sur les degrés de liberté atomiques internes, mais pas sur les degrés de liberté externes des atomes. Ce moyennage se fait en imposant que les dipôles et le champ oscillent tous deux à la fréquence (réelle) $\pm\omega_L$. On note $\vec{e}(\vec{r})$ (resp. $\vec{d}_i$) la composante de Fourier du champ au point $\vec{r}$ (resp. du dipôle de l'atome i) qui oscille en $\exp(-i\omega_L t)$. Les quantités $\vec{e}(\vec{r})$ et $\vec{d}_i$ sont des opérateurs agissant sur les degrés de liberté externe des atomes. Le résultat obtenu est le suivant :

$$\vec{e}(\vec{r}) = \vec{E}_L e^{i\vec{k}_L\cdot\vec{r}} + \sum_{i=1}^{N} \frac{\vec{\vec{g}}(\vec{r}-\vec{R}_i)}{\varepsilon_0}\cdot\vec{d}_i \qquad \text{(II.26.a)}$$

$$\vec{d}_i = \alpha\left[\varepsilon_0\vec{E}_L e^{i\vec{k}_L\cdot\vec{R}_i} + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} \vec{\vec{g}}\left(\vec{R}_i-\vec{R}_j\right)\cdot\vec{d}_j\right], \qquad \text{(II.26.b)}$$

où $\vec{E}_L$ est l'amplitude du champ laser, et $\vec{k}_L = \omega_L/c\vec{u}_z$.

La quantité α est la *polarisabilité* d'un dipôle atomique. Elle vaut simplement χ/ρ_0, où χ est la susceptibilité du milieu qui a été évoquée au paragraphe précédent (éq. (II.25)). Cela donne :

$$\alpha = \frac{-3\pi\Gamma c^3}{{\omega_A}^3\left(\omega_L-\omega_A+i\frac{\Gamma}{2}\right)}. \qquad \text{(II.27)}$$

L'expression du tenseur $\vec{\vec{g}}$ est

$$\vec{\vec{g}}(\vec{r}) = -\frac{1}{3}\vec{\vec{1}}\delta^{(3)}(\vec{r}) - \frac{k_L^3}{4\pi}e^{ik_L r}\left[\left(-\frac{1}{k_L r}-\frac{i}{(k_L r)^2}+\frac{1}{(k_L r)^3}\right)\vec{\vec{1}} + \left(\frac{1}{k_L r}+\frac{3i}{(k_L r)^2}-\frac{3}{(k_L r)^3}\right)\frac{\vec{r}\otimes\vec{r}}{r^2}\right]. \qquad \text{(II.28)}$$

Ce potentiel $\vec{\vec{g}}$ est la fonction de Green de l'équation (II.21). Son expression (II.28) peut être retrouvée en calculant le champ électrique créé par un dipôle classique oscillant à la fréquence ω_L. Elle est bien d'ailleurs connue dans la littérature [191–194]. Le terme en δ au début de l'expression (II.28) est par contre moins habituel. Son origine est discutée en détail dans l'annexe A. Il permet d'obtenir la célèbre formule de Lorentz-Lorenz [195 ; 196 ; 197, p. 86] sans avoir recours aux techniques habituelles excluant une sphère autour des dipôles.

Les 2 équations (II.26) sont aisées à interpréter. L'équation (II.26.a) indique que le champ électrique au point $\vec{r}$ est égal à la somme du champ du laser, et des champs créés par chacun des dipôles. L'équation (II.26.b) indique que les dipôles sont pilotés par le champ qu'ils « voient », c'est-à-dire par le champ du laser et par le champ créé par les autre dipôles.

d) Moyenne sur les degrés de libertés atomiques externes

Pour moyenner (II.26) sur les degrés de liberté atomique externes, il est nécessaire d'introduire les 3 quantités moyennées suivantes :

$$\rho(\vec{r}) = \left\langle \sum_{i=1}^{N} \delta^{(3)}\left(\vec{r} - \vec{R}_i\right) \right\rangle \tag{II.29.a}$$

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = \langle \vec{e}(\vec{r}) \rangle \tag{II.29.b}$$

$$\vec{\mathcal{D}}(\vec{r}) = \frac{1}{\rho(\vec{r})} \left\langle \sum_{i=1}^{N} \delta^{(3)}\left(\vec{r} - \vec{R}_i\right) \vec{d}_i \right\rangle , \tag{II.29.c}$$

où les moyennes sont réalisées sur les positions atomiques[1].

Les atomes ne voyant aucun potentiel extérieur, et en nous plaçant loin des bords du milieu, nous pouvons supposer que $\rho(\vec{r}) = \text{Cte} = \rho_0$. En multipliant chaque terme de la somme de l'équation (II.26.a) par

$$\int \mathrm{d}^3\vec{r}\,' \, \delta^{(3)}(\vec{r}\,' - \vec{R}_i) = \mathbb{1} ,$$

puis en moyennant sur les positions atomiques, on tire

$$\boxed{\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = \vec{E}_{\mathrm{L}} e^{i\vec{k}_{\mathrm{L}}\cdot\vec{r}} + \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \int \mathrm{d}^3\vec{r}\,' \, \vec{\vec{g}}(\vec{r} - \vec{r}\,') \cdot \vec{\mathcal{D}}(\vec{r}\,') .} \tag{II.30}$$

Nous devons maintenant moyenner l'équation (II.26.b). Nous la multiplions pour cela par $\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{R}_i)$ pour obtenir

$$\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{R}_i)\vec{d}_i = \alpha \left[\varepsilon_0 \vec{E}_{\mathrm{L}} e^{i\vec{k}_{\mathrm{L}}\cdot\vec{R}_i} \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{R}_i) + \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{R}_i) \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \overbrace{\vec{\vec{g}}\left(\vec{R}_i - \vec{R}_j\right)}^{\vec{\vec{g}}(\vec{r} - \vec{R}_j)} \cdot \vec{d}_j \right] . \tag{II.31}$$

Comme il y a un $\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{R}_i)$ dans la somme de l'équation (II.31), on remplace le $\vec{R}_i$ dans l'argument de la fonction $\vec{\vec{g}}$, par $\vec{r}$. On introduit également un $\delta^{(3)}(\vec{r}\,' - \vec{R}_j)$, et une intégrale sur $\vec{r}\,'$, comme il a été fait pour passer de (II.26.a) à (II.30). On moyenne ensuite sur les positions atomiques, en effectuant l'approximation

1. Je rappelle que l'opérateur $\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{R}_i)$ est défini par

$$\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{R}_i) = |i, \vec{r}\rangle \, \langle i, \vec{r}| \otimes \Big(\bigotimes_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{N} \mathbb{1}_j\Big) .$$

$$\left\langle \delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{R}_i)\delta^{(3)}(\vec{r}'-\vec{R}_j)\right\rangle_{\text{externe}} \simeq \left\langle \delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{R}_i)\right\rangle_{\text{externe}} \left\langle \delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{R}_j)\right\rangle_{\text{externe}} . \tag{II.32}$$

L'équation (II.32) implique que les effets statistiques sont négligés : il est facile de le vérifier en sommant sur i et j (avec $i \neq j$) ; on fait alors apparaître la densité à deux corps, et on déduit que la corrélation entre les positions atomiques doit être nulle. Or, nous verrons au paragraphe III.2.*b* (p. 245) que les corrélations en position sont directement liées aux effets de statistique quantique. L'approximation que je fais ici nécessite donc que les points $\vec{r}$ et $\vec{r}'$ soient beaucoup plus éloignés que la longueur d'onde de de Broglie Λ_{DB}. L'équation (II.32) implique en outre que l'on néglige les interactions entre atomes : il est plus difficile de s'en convaincre avec ce que l'on sait à présent, mais ce point deviendra clair au chapitre III, lorsque j'établirai une correction à l'équation (II.32). On doit donc avoir $\|\vec{r}-\vec{r}'\| \gg \lambda_{\text{L}}$. Pour que ces deux conditions sur $\|\vec{r}-\vec{r}'\|$ soient vérifiées pour presque toutes les paires d'atomes, il faut se placer dans les limites d'un gaz non dégénéré ($\rho_0 \Lambda_{\text{DB}}^3 \ll 1$) et d'une faible densité ($\rho_0 \lambda_{\text{L}}^3 \ll 1$). Signalons que ces approximations sont équivalentes à celle que j'avais faite au paragraphe II.1.*c*, p. 219, où j'avais négligé les diagrammes où le photon passe plus d'une fois par le même atome.

En revenant à l'équation (II.31), et en effectuant une sommation sur i, on obtient finalement :

$$\boxed{\vec{\mathcal{D}}(\vec{r}) = \alpha\varepsilon_0 \vec{E}_{\text{L}} e^{i\vec{k}_{\text{L}}\cdot\vec{r}} + \alpha\rho_0 \int \mathrm{d}^3\vec{r}'\, \vec{g}(\vec{r}-\vec{r}')\cdot\vec{\mathcal{D}}(\vec{r}')\,.} \tag{II.33}$$

e) Obtention de la relation de dispersion

Nous supposons que la dépendance en z du champ électrique moyenné $\vec{\mathcal{E}}$ et du dipôle moyenné sont

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = \vec{\mathcal{E}}_0 e^{i\vec{k}_{\text{m}}\cdot\vec{r}} + \text{c.c.} \tag{II.34.a}$$

$$\vec{\mathcal{D}}(\vec{r}) = \vec{\mathcal{D}}_0 e^{i\vec{k}_{\text{m}}\cdot\vec{r}} + \text{c.c.}\,, \tag{II.34.b}$$

où le vecteur d'onde $\vec{k}_{\text{m}}$ est complexe à l'intérieur du milieu. On applique à l'équation (II.30) l'opérateur $\Delta + k_{\text{L}}^2$ (avec $k_{\text{L}} = \|\vec{k}_{\text{L}}\|$). On utilise la relation

$$(\Delta + k_{\text{L}}^2)\vec{g}(\vec{r}) = \left(-\vec{\nabla}\otimes\vec{\nabla} - k_{\text{L}}^2\vec{\mathbb{1}}\right)\delta^{(3)}(\vec{r})\,, \tag{II.35}$$

où $k_{\text{L}} = \|\vec{k}_{\text{L}}\| = \omega_{\text{L}}/c$. L'équation (II.35) traduit le fait que $\vec{g}$ est la fonction de Green de (II.21). Elle s'obtient en exprimant $\vec{g}$ en transformée de Fourier (voir

des détails dans l'annexe A, p. 332). On obtient finalement

$$\vec{\mathcal{E}}_0 = \frac{k_L^2 \vec{\mathcal{D}}_0 \rho_0}{\varepsilon_0 (k_m^2 - k_L^2)} . \tag{II.36}$$

D'autre part, la différence entre les équations (II.30) et (II.33) donne simplement

$$\vec{\mathcal{D}}_0 = \alpha \varepsilon_0 \vec{\mathcal{E}}_0 , \tag{II.37}$$

on déduit finalement la relation de dispersion :

$$\boxed{k_m^2 = \frac{\omega_L^2}{c^2}\left[1 - \frac{3\pi\rho_0\Gamma c^3}{\omega_A^3\left(\omega_L - \omega_A + i\frac{\Gamma}{2}\right)}\right]} . \tag{II.38}$$

Nous retiendrons pour la relation de dispersion une formulation qui est équivalente à (II.38) à l'ordre 1 en $\rho_0 \lambda_L^3$:

$$\boxed{k_m - \frac{\omega_L}{c} = -k_m \frac{3\pi\rho_0\Gamma c^3}{2\omega_A^3\left(\omega_L - \omega_A + i\frac{\Gamma}{2}\right)}} . \tag{II.39}$$

Notons que si l'on définit l'indice de réfraction par la formule

$$k_m = n\frac{\omega_L}{c} \tag{II.40}$$

(sachant que $c/\omega_A \simeq \lambda_L$), on retrouve pour l'indice la formule (I.25) à l'ordre le plus bas en $\rho_0 \lambda_L^3$.

3. Comparaison des résultats des 2 approches

J'ai donc présenté deux approches permettant d'obtenir la relation de dispersion de la lumière dans un milieu d'atomes froids. L'approche « champ moyen » est très facile à interpréter physiquement : on tire directement un indice de réfraction de la relation de dispersion obtenue. Il n'en va malheureusement pas de même pour l'approche diagrammatique, qui nous place dans une situation physique très éloignée des réalités expérimentales (comment fabriquer un photon unique?), et dont on ne peut guère tirer directement un indice de réfraction.

L'objet de cette section est de relier les deux approches, et ce par deux méthodes. La première méthode sera plutôt mathématique (développement de l'onde progressive de la 2^{e} approche sur la base des solutions de la 1re). La deuxième sera au contraire plus physique, montrant que sous certaines conditions, l'absorption d'un paquet d'onde évaluée par l'approche diagrammatique est la même que l'absorption de l'onde progressive de l'approche « champ moyen ».

a) Comparaison des relations de dispersion

On constate qu'à l'ordre le plus bas en densité, la relation de dispersion (II.16) que j'avais obtenue par l'approche diagrammatique coïncide avec la relation de dispersion (II.39) obtenue par l'approche de champ moyen. Plus exactement, si l'on note la relation de dispersion (II.16) sous la forme $\varphi(\omega_e, \|\vec{k}_r\|) = 0$, alors la relation (II.39) s'écrit $\varphi(\omega_L, \|\vec{k}_m\|) = 0$, avec la même fonction complexe φ.

L'objet de ce paragraphe est de démontrer qu'il ne s'agit pas d'une coïncidence, *i.e.* que les deux approches, bien qu'elles partent de situations physiques totalement différentes, doivent aboutir à la même relation de dispersion. Je préviens d'avance le lecteur que le paragraphe est très mathématique, mais que sa lecture n'est pas essentielle pour la compréhension de la suite de la thèse.

Je considère donc une onde électromagnétique « physique », dont le comportement temporel est imposé, *i.e.*

$$\vec{\mathcal{E}}(z,t) = \psi(z)\vec{\varepsilon}_L e^{-i\omega_L t}, \tag{II.41}$$

Je vais décomposer cette onde plane sur la base des solutions adaptées au 1er point de vue[1]. Je vais alors démontrer que la dépendance spatiale $\psi(z)$ de l'onde est bien celle à laquelle on s'attend, c'est-à-dire $\exp(ik_m z)$.

Le développement s'écrit *a priori* sous la forme

$$\psi(z)e^{-i\omega_L t} = \int \mathrm{d}k_r\, \alpha(k_r)\, e^{i\left(k_r z - \omega(k_r)t\right)}. \tag{II.42}$$

Dans l'équation (II.42), tous les vecteurs d'onde $\vec{k}$ sont supposés dirigés le long de (Oz), et je note $\vec{k} = k\vec{u}_z$. k_r étant un vecteur d'onde réel, je note $\omega(k_r)$ la fréquence de partie imaginaire négative (je la suppose unique) telle que $\varphi\left(\omega(k_r), k_r\right) = 0$.

Pour calculer la fonction $\alpha(k_r)$, je me place en $z = 0$ (en supposant que les effets de bord du milieu sont totalement absents). Je vais alors démontrer en utilisant la formule des résidus que, si l'on se restreint au cas où $t < 0$, la solution suivante convient :

$$\alpha(k_r) = \frac{1}{2i\pi}\frac{\psi(0)}{k_r - k_m}, \tag{II.43}$$

où k_m est le vecteur d'onde complexe de partie imaginaire positive tel que $\varphi(\omega_L, k_m) = 0$.

Pour démontrer l'équation (II.43), il faut appliquer le théorème des résidus, en fermant la boucle avec des k de partie imaginaire positive (pour que le pôle $k = k_m$ puisse contribuer). La relation de dispersion devra donc remplir les conditions *ad*

1. Je rappelle qu'il faut en réalité calculer la valeur moyenne du champ dans l'état $|0\rangle + \alpha|\vec{k}_r\vec{\varepsilon}_r\rangle$ pour obtenir un résultat non nul — moyenne qui se déduit immédiatement du résultat du calcul à un photon.

hoc. En particulier, $\omega(k)$ devra être définie et analytique sur le plan $\Im\mathrm{m}(k) \geqslant 0$. La partie imaginaire de $\omega(k)$ devra rester minorée quand $\Re\mathrm{e}(k) \to \pm\infty$, et tendre vers $+\infty$ quand $\Im\mathrm{m}(k) \to +\infty$ (rappelons que nous avons choisi $t < 0$).

On vérifie ces conditions pour la relation de dispersion (II.16)-(II.39). Elle s'écrit

$$\varphi(\omega, k) = (\omega - ck)\left(\omega - \omega_{\mathrm{A}} + i\frac{\Gamma}{2}\right) - ck\frac{3\pi\rho_0\Gamma c^3}{2\omega_{\mathrm{A}}^3}. \tag{II.44}$$

On peut vérifier que le discriminant de l'équation en ω ne peut s'annuler que pour des k de partie imaginaire négative (car $\Gamma \ll \omega_{\mathrm{A}}$). La racine qui nous intéresse, *i.e.*

$$\omega(k) = \frac{1}{2}\left(ck + \omega_{\mathrm{A}} - i\frac{\Gamma}{2} - \sqrt{\left(ck - \omega_{\mathrm{A}} + i\frac{\Gamma}{2}\right)^2 + ck\frac{6\pi\rho_0 c^3\Gamma}{\omega_{\mathrm{A}}^3}}\right), \tag{II.45}$$

est bien analytique sur $\{k \in \mathbb{C}/\Im\mathrm{m}k \geqslant 0\}$. On se convainc aussi facilement que sa partie imaginaire se comporte convenablement lorsque k est infini (réel ou imaginaire).

Revenons maintenant à la formule (II.42). Il est maintenant aisé de connaître la dépendance en z du champ électrique :

$$2i\pi e^{-i\omega_{\mathrm{L}}t}\psi(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}k_{\mathrm{r}} \frac{1}{k_{\mathrm{r}} - k_{\mathrm{m}}} e^{ik_{\mathrm{r}}z} e^{-i\omega(k_{\mathrm{r}})t}. \tag{II.46}$$

L'équation (II.46) s'intègre encore par la formule des résidus ; on est sûr que c'est possible pour $t < 0$ et $z \geqslant 0$. On trouve alors naturellement que

$$\psi(z) = e^{ik_{\mathrm{m}}z}, \tag{II.47}$$

où nous rappelons que k_{m} est la solution de $\varphi(\omega_{\mathrm{L}}, k_{\mathrm{m}}) = 0$, c'est-à-dire le résultat de l'approche de type « champ moyen »[1].

Ce paragraphe nous a prouvé que l'approche à 1 photon, même si elle nous place dans une situation physique éloignée de la réalité, nous fournit bien un résultat exploitable dans le cas d'un champ macroscopique, et peut donc être interprétée en termes d'indice de réfraction.

b) Interprétation physique de l'approche à 1 photon en termes de paquets d'ondes

Le paragraphe précédent nous a montré qu'il était possible d'utiliser le résultat de l'approche diagrammatique pour connaître la propagation de la lumière

1. Le calcul que nous venons de faire n'est certes pas valable pour $t > 0$, mais il suffit de faire une translation sur l'origine du temps pour être ramené au problème précédent.

dans l'approche « champ moyen ». Il ne nous fournissait cependant aucune interprétation physique correspondant à la situation de l'approche à un photon.

Je vais montrer ici qu'une telle interprétation est possible : je calculerai en effet l'absorption d'un paquet d'onde dans l'approche diagrammatique, et la relierai à l'absorption de l'onde progressive de l'approche de champ moyen.

i) Situation physique

Nous savons que l'approche à un photon que j'ai présentée au paragraphe II.1 ne correspond pas à une situation physique réaliste à cause de l'impossibilité d'isoler un photon unique, et surtout de l'impossibilité de disposer d'un milieu infini.

Le calcul que je rapporte ici [171] montre qu'il est néanmoins possible d'imaginer une situation qui s'en rapprocherait. Considérons en effet un paquet d'ondes, que pour simplifier nous supposerons constitué d'un unique photon. Nous le supposons également *piqué*, dans l'espace des impulsions, autour d'une impulsion $\hbar\vec{k}_L$, mais à support compact dans l'espace des positions. Le milieu est maintenant fini, mais beaucoup plus grand que la taille du paquet d'ondes.

A $t = -\infty$, on suppose que le paquet d'ondes est à l'extérieur du milieu. Son impulsion est donc $\hbar\vec{k}_L$ réel et sa fréquence est $\omega_L = c\|\vec{k}_L\|$. A $t = 0$, il est totalement entré dans le milieu (fig. II.2), avec une nouvelle impulsion qui est $\hbar\vec{k}_r$ réel[1]. Le paquet se déplace alors dans le milieu, tout en s'atténuant du fait de l'absorption[2]. On voit que le comportement du système est analogue au cas d'un photon constitué d'une onde plane, dans le vide à $t = -\infty$, et pour lequel on « brancherait » adiabatiquement le milieu atomique. Pour $t > 0$, le champ disparaît progressivement du fait de son couplage avec les atomes, et sa fréquence d'évolution ω_e est complexe. Je signale qu'une telle équivalence peut être démontrée [199, p. 108]

Pour connaître la relation entre $\vec{k}_L$ et ω_e, on écrit la conservation de l'énergie du système atomes+photons. Rappelons que l'on néglige l'énergie cinétique des atomes. L'énergie du système à $t = -\infty$ est donc $\hbar\omega_L$, celle à $t = 0$ est $\hbar\Re e(\omega_e)$, d'où[3]

$$\hbar\omega_L = \hbar\Re e(\omega_e)\,. \tag{II.48}$$

Je vais maintenant, dans le cas où $\delta = \omega_L - \omega_A \gg \Gamma$, calculer l'absorption du paquet d'ondes que je viens de considérer lorsque le milieu est de longueur L, puis la comparer au résultat de l'approche du champ moyen.

1. Du fait de l'interaction entre le photon est les atomes du milieu, ces derniers reculent. L'impulsion totale du système atomes+photon est conservée au cours du processus.

2. L'interaction d'un photon unique avec un milieu a été étudiée en détail dans les années 70 (voir p. ex. [198]).

3. Je suis conscient que l'affirmation que constitue l'équation (II.48) est un peu rapide : en réalité l'état du photon à l'intérieur du milieu n'est pas un état asymptotique, *i.e.* son énergie n'est pas bien définie.

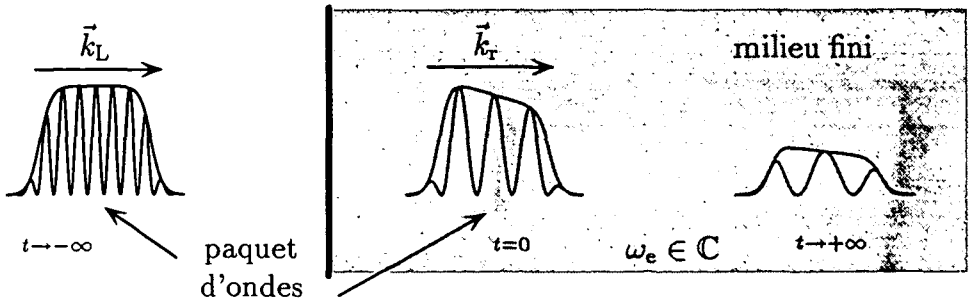


FIG. II.2 - *L'analogie entre l'évolution d'un photon composé d'une onde plane dans un milieu infini, et celle d'un paquet d'ondes traversant un milieu fini.*

ii) Absorption du paquet d'onde

Considérons une relation de dispersion $\varphi(\omega, k) = 0$, par exemple celle définie par l'équation (II.44) (mais tout autre relation de dispersion plus compliquée convient également). Pour ω et k réels, on peut séparer φ en partie réelle et imaginaire sous la forme

$$\varphi(\omega, k) = \varphi'(\omega, k) + i\varphi''(\omega, k) \tag{II.49}$$

Je suppose que les fonctions φ' et φ'' sont prolongeables analytiquement sur l'ensemble du plan complexe.

J'écris la relation de dispersion obtenue dans le cas à un photon (*i.e.* du paquet d'ondes). Je pose $\omega_e = \omega_L + i\omega_e''$ (où ω_e'' est réel grâce à (II.48)). De plus, je suppose que $|\omega_e''| \ll \omega_L$ (ce qui est vrai dans l'approximation des faibles densités). En développant la relation de dispersion $\varphi'(\omega_e, k_r) + i\varphi''(\omega_e, k_r) = 0$ au voisinage de (ω_L, k_L), puis en séparant parties réelle et imaginaire, on obtient [1]

$$\varphi'(\omega_L, k_L) + (k_r - k_L)\frac{\partial\varphi'}{\partial k}(\omega_L, k_L) - \omega_e''\frac{\partial\varphi''}{\partial\omega}(\omega_L, k_L) = 0 \tag{II.50.a}$$

$$\varphi''(\omega_L, k_L) + (k_r - k_L)\frac{\partial\varphi''}{\partial k}(\omega_L, k_L) + \omega_e''\frac{\partial\varphi'}{\partial\omega}(\omega_L, k_L) = 0\,. \tag{II.50.b}$$

En éliminant $k_r - k_L$ dans le système (II.50), on tire

$$\omega_e'' = \frac{\varphi''\dfrac{\partial\varphi'}{\partial k} - \varphi'\dfrac{\partial\varphi''}{\partial k}}{\dfrac{\partial\varphi'}{\partial k}\dfrac{\partial\varphi'}{\partial\omega} + \dfrac{\partial\varphi''}{\partial k}\dfrac{\partial\varphi''}{\partial\omega}}, \tag{II.51}$$

1. J'ai en fait été un peu rapide en écrivant l'équation (II.50). En effet, la condition $|\omega_e''| \ll \omega_L$ (et $|k_r - k_L| \ll k_L$) ne suffit pas pour que ce développement perturbatif soit valable, car la fonction φ peut varier rapidement à une échelle beaucoup plus petite que ω_L, *i.e.* à l'échelle de Γ. C'est pourquoi ce calcul n'est en fait correct que là où φ varie lentement, c'est-à-dire loin de résonance.

où toutes les fonctions considérées sont prises au point (ω_L, k_L).

L'absorption du paquet d'onde lorsqu'il aura parcouru la longueur L sera $\omega_e'' L/v_g$, où v_g est la vitesse de groupe, c'est-à-dire la vitesse à laquelle se propage le paquet d'ondes. Il s'agit maintenant de définir cette vitesse de groupe. La définition standard, quand ω et k sont réels, est $v_g = \mathrm{d}\omega/\mathrm{d}k$. Dans le cas où ω ou k ont une partie imaginaire non nulle, un ambiguïté apparaît[1]. J'ai choisi de prendre pour définition de la vitesse de groupe

$$v_g = \left(\frac{\partial \Re\mathrm{e}(\omega)}{\partial \Re\mathrm{e}(k)}\right)_{\Im\mathrm{m}(\omega)}, \tag{II.52}$$

où j'ai employé la notation des thermodynamiciens pour la dérivée partielle (*i.e.* j'effectue la dérivation en gardant constante la partie imaginaire de ω). Si c'était la partie imaginaire de k que j'avais gardée constante, le résultat eût été différent.

Cette définition posée, il est aisé de calculer la vitesse de groupe : on différentie d'abord la relation de dispersion. On obtient une relation faisant intervenir des dérivées partielles de φ prises au point qui nous intéresse ici, c'est-à-dire (ω_e, k_r). Je les remplace par les dérivées au point (ω_L, k_L), avec l'argument que l'erreur commise est d'ordre 1 en $(\omega_e - \omega_r)/\omega_r$. Je peux alors séparer partie réelle et partie imaginaire, puis en éliminer $\mathrm{d}\Im\mathrm{m}(k)$ entre les deux équations obtenues. Je trouve

$$\frac{1}{v_g} = -\frac{\dfrac{\partial\varphi'}{\partial\omega}\dfrac{\partial\varphi'}{\partial k} + \dfrac{\partial\varphi''}{\partial\omega}\dfrac{\partial\varphi'}{\partial k}}{\left(\dfrac{\partial\varphi'}{\partial k}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\varphi''}{\partial k}\right)^2}. \tag{II.53}$$

iii) Calcul dans l'approche « champ moyen »

J'écris maintenant l'analogue de l'équation (II.50) dans le cas de l'approche « champ moyen », c'est à dire le cas où tout le système oscille à la fréquence ω_L (*i.e.* la fréquence du laser en dehors du milieu), et où le vecteur d'onde à l'intérieur du milieu est $k_m = k_m' + ik_m''$:

$$\varphi'(\omega_L, k_L) + (k_m' - k_L)\frac{\partial\varphi'}{\partial k}(\omega_L, k_L) - k_m''\frac{\partial\varphi''}{\partial k}(\omega_L, k_L) = 0 \tag{II.54.a}$$

$$\varphi''(\omega_L, k_L) + (k_m' - k_L)\frac{\partial\varphi''}{\partial k}(\omega_L, k_L) + k_m''\frac{\partial\varphi'}{\partial k}(\omega_L, k_L) = 0\,. \tag{II.54.b}$$

Comme précédemment, j'élimine entre les deux équations (II.54) la quantité

1. Jackson, par exemple, ne définit la vitesse de groupe que pour un milieu non dissipatif [200, p. 299].

$k'_{\mathrm{m}} - k_{\mathrm{L}}$, pour obtenir

$$k''_{\mathrm{m}} = \frac{\varphi'' \dfrac{\partial \varphi'}{\partial k} - \varphi' \dfrac{\partial \varphi''}{\partial k}}{\left(\dfrac{\partial \varphi'}{\partial k}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial \varphi''}{\partial k}\right)^2}. \tag{II.55}$$

Combinant alors les résultat (II.51), (II.55) et (II.53), on obtient

$$\boxed{\frac{k''_{\mathrm{m}}}{\omega''_{\mathrm{e}}} = -\frac{1}{v_{\mathrm{g}}}.} \tag{II.56}$$

iv) Interprétation

On sait que le paquet d'ondes se propage dans le milieu à la vitesse de groupe $\vec{v}_{\mathrm{g}}$. Par conséquent, après la traversée du milieu, qui a duré le temps $L/\|\vec{v}_{\mathrm{g}}\|$, il est absorbé de la quantité $\exp(\omega''_{\mathrm{e}} L/\|\vec{v}_{\mathrm{g}}\|) = \exp(-k''_{\mathrm{m}} L)$. Autrement dit, on trouve le même taux d'absorption que dans l'approche « champ moyen ».

Il me paraît par contre moins aisé de comparer le déphasage du champ dans les deux approches.

4. Conclusion

J'ai donc présenté deux approches de calcul d'indice de réfraction. La première approche, diagrammatique, est éloignée des conditions expérimentales habituelles, mais est à mon avis plus élégante grâce à l'utilisation du puissant formalisme de la résolvante. La 2$^{\mathrm{e}}$ approche est certes beaucoup plus classique, et correspond à la réalité physique dans une géométrie très particulière. Toutefois, si l'on ne veut pas admettre les équations (II.26) de départ, de longues pages de calculs sont nécessaires pour les établir. Les deux méthodes aboutissent à la même relation de dispersion ; on peut ainsi ainsi tendre des liens entre elles.

Je n'ai calculé dans ce chapitre que des indices à l'ordre le plus bas ; aucune interaction entre atomes, ni aucun effet quantique collectif n'étaient présents. Pour aller au-delà, on a le choix entre les deux approches. Je me restreindrai maintenant à l'approche « champ moyen ». Le lecteur souhaitant connaître comment on obtient le même résultat par l'autre approche est invité à se reporter à l'annexe B.

Chapitre III

Calcul d'indice à l'ordre 2 en densité. La méthode de la hiérarchie

NOUS ALLONS dans ce chapitre calculer l'indice de réfraction d'un milieu d'atomes froids, en tenant compte de l'interaction entre paires d'atomes, ainsi que des effets statistiques. Nous utiliserons pour cela la méthode dite de la hiérarchie, selon laquelle la valeur moyenne du dipôle d'un atome au point $\vec{r}$ est modifiée s'il existe un autre atome au point $\vec{r}'$, avec $\vec{r}$ proche de $\vec{r}'$. Nous négligeons par contre les corrélations à 3 atomes, en faisant un développement de type Viriel, valable à faible densité.

Signalons que ce type de méthode a déjà été utilisée par J. Yvon en 1937 [201], puis repris à la fin des années 50 par P. Mazur *et al.* [191, 202–204]. Les auteurs étudiaient alors la propagation d'une onde électromagnétique dans un milieu en tenant compte de l'interaction de Van der Waals entre 2 atomes dans leur état fondamental. La fréquence de la lumière était alors petite devant la fréquence de résonance.

La situation physique qui nous intéresse est bien différente. Nous utilisons en effet de la lumière quasi-résonnante avec la transition atomique. Par conséquent, c'est l'interaction entre un atome dans l'état excité et un autre dans le fondamental qui est prépondérante. L'interaction entre deux atomes dans leur état fondamental, de portée beaucoup plus courte, sera négligée.

1. Calcul de l'indice

a) Les quantités moyennées

Je reviens aux équations sur les dipôle et sur le champ établies dans l'annexe A, et données en (II.26). Je rappelle que ces équations ont été moyennées sur le champ et sur les variables atomiques internes, mais sont des opérateurs vis-à-vis

des variables atomiques externes.

$$\vec{e}(\vec{r}) = \vec{E}_L e^{i\vec{k}_L\cdot\vec{r}} + \sum_{i=1}^{N} \frac{\vec{\vec{g}}(\vec{r}-\vec{R}_i)}{\varepsilon_0}\cdot\vec{d}_i \tag{III.1.a}$$

$$\vec{d}_i = \alpha\left[\varepsilon_0\vec{E}_{\mathrm{L}}e^{i\vec{k}_{\mathrm{L}}\cdot\vec{R}_i} + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\vec{\vec{g}}\left(\vec{R}_i-\vec{R}_j\right)\cdot\vec{d}_j\right]. \tag{III.1.b}$$

J'introduis maintenant les quantités suivantes :

$$\rho(\vec{r}) = \left\langle\sum_{i=1}^{N}\delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{R}_i)\right\rangle \tag{III.2.a}$$

$$\rho^{\mathrm{II}}(\vec{r},\vec{r}') = \left\langle\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{R}_i)\delta^{(3)}(\vec{r}'-\vec{R}_j)\right\rangle \tag{III.2.b}$$

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = \langle\vec{e}(\vec{r})\rangle \tag{III.2.c}$$

$$\vec{\mathcal{D}}(\vec{r}) = \frac{1}{\rho(\vec{r})}\left\langle\sum_{i=1}^{N}\delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{R}_i)\vec{d}_i\right\rangle \tag{III.2.d}$$

$$\vec{\mathcal{D}}(\vec{r}'/\vec{r}) = \frac{1}{\rho^{\mathrm{II}}(\vec{r},\vec{r}')}\left\langle\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\delta^{(3)}(\vec{r}'-\vec{R}_j)\delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{R}_i)\vec{d}_j\right\rangle, \tag{III.2.e}$$

où toutes les moyennes sont faites sur les variables atomiques externes.

La quantité $\rho(\vec{r})$ est la densité atomique. Dans toute cette étude, elle sera supposée constante à l'intérieur du milieu, *i.e.* $\rho(\vec{r}) = \rho_0$. La notation $\rho^{\mathrm{II}}(\vec{r},\vec{r}')$ désigne la densité à deux corps, c'est-à-dire la probabilité de trouver un atome en $\vec{r}$ et un autre en $\vec{r}'$. Pour un milieu isotrope et homogène, (le cas que nous considérons ici), la densité à 2 corps ne dépend que de $\|\vec{r}-\vec{r}'\|$, *i.e.*

$$\rho^{\mathrm{II}}(\vec{r},\vec{r}') = \rho_0^2\left(1+\varphi(\|\vec{r}-\vec{r}'\|)\right). \tag{III.3}$$

La fonction φ sera étudiée en détail au paragraphe III.2.*b*, p. 245. En l'absence d'effets statistiques, pour un gaz parfait de Boltzmann, on trouve simplement $\varphi = 0$. Avec la statistique, φ n'est plus nulle, mais $\varphi(0) > 0$ pour des bosons et $\varphi(0) < 0$ pour des fermions, ces derniers n'ayant pas tendance à se trouver au même endroit. Si l'on tenait compte de l'interaction entre atomes dans l'état fondamental, cette dernière viendrait aussi modifier l'expression de la fonction φ.

Regardons maintenant les moyennes des dipôles. A la quantité $\vec{\mathcal{D}}(\vec{r})$ que j'avais introduite au paragraphe II.2.*d*, p. 228, vient s'ajouter la quantité $\vec{\mathcal{D}}(\vec{r}'/\vec{r})$[1]. Elle correspond au dipôle moyen au point $\vec{r}'$ lorsqu'on a fixé un autre dipôle au point

1. Lire « $\vec{\mathcal{D}}(\vec{r}')$ sachant $\vec{r}$ ».

$\vec{r}$ (*i.e.* qu'on n'a pas moyenné sur la position de ce dipôle). Dans la suite, nous aurons également besoin des quantités à 3 corps :

$$\rho^{\mathrm{III}}(\vec{r},\vec{r}',\vec{r}'') = \left\langle \sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\sum_{\substack{\ell=1\\ \ell\neq i,j}}^{N} \delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{R}_i)\delta^{(3)}(\vec{r}'-\vec{R}_j)\delta^{(3)}(\vec{r}''-\vec{R}_\ell)\right\rangle \tag{III.4.a}$$

$$\vec{\mathcal{D}}(\vec{r}''/\vec{r},\vec{r}') = \frac{1}{\rho^{\mathrm{III}}(\vec{r},\vec{r}',\vec{r}'')} \times \left\langle \sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\sum_{\substack{\ell=1\\ \ell\neq i,j}}^{N} \delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{R}_i)\delta^{(3)}(\vec{r}'-\vec{R}_j)\delta^{(3)}(\vec{r}''-\vec{R}_\ell)\vec{d}_\ell\right\rangle . \tag{III.4.b}$$

b) Moyenne sur les variables atomiques externes

On moyenne l'équation (III.1.a) sur les variables atomiques externes. On fait ensuite de même pour (III.1.b), la multipliant successivement par $\delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{R}_i)$, puis $\delta^{(3)}(\vec{r}'-\vec{R}_i)\delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{R}_\ell)$, etc. Cela donne

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = \vec{E}_{\mathrm{L}}e^{i\vec{k}_{\mathrm{L}}\cdot\vec{r}} + \int \mathrm{d}^3\vec{r}'\rho(\vec{r}')\frac{\vec{\vec{g}}(\vec{r}-\vec{r}')}{\varepsilon_0}\cdot\vec{\mathcal{D}}(\vec{r}') \tag{III.5.a}$$

$$\vec{\mathcal{D}}(\vec{r}) = \alpha\varepsilon_0\vec{E}_{\mathrm{L}}e^{i\vec{k}_{\mathrm{L}}\cdot\vec{r}} + \alpha\int \mathrm{d}^3\vec{r}'\vec{\vec{g}}(\vec{r}-\vec{r}')\cdot\vec{\mathcal{D}}(\vec{r}'/\vec{r})\frac{\rho^{\mathrm{II}}(\vec{r},\vec{r}')}{\rho(\vec{r})} \tag{III.5.b}$$

$$\vec{\mathcal{D}}(\vec{r}'/\vec{r}) = \alpha\varepsilon_0\vec{E}_{\mathrm{L}}e^{i\vec{k}_{\mathrm{L}}\cdot\vec{r}} + \alpha\vec{\vec{g}}(\vec{r}'-\vec{r})\vec{\mathcal{D}}(\vec{r}/\vec{r}') + \alpha\int \mathrm{d}^3\vec{r}''\vec{\vec{g}}(\vec{r}'-\vec{r}'')\cdot\vec{\mathcal{D}}(\vec{r}''/\vec{r},\vec{r}')\frac{\rho^{\mathrm{III}}(\vec{r},\vec{r}',\vec{r}'')}{\rho^{\mathrm{II}}(\vec{r},\vec{r}')} . \tag{III.5.c}$$

...

Le système (III.5) constitue une *hiérarchie* d'équations (d'où le nom de la méthode) qu'il est possible de pousser arbitrairement loin. En effectuant la différence entre les équations (III.5.b) et (III.5.a) d'abord, (III.5.c) et (III.5.b) ensuite, etc., on obtient les équations suivantes

$$\vec{\mathcal{D}}(\vec{r}) = \alpha\varepsilon_0\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) + \int \mathrm{d}^3\vec{r}'\rho(\vec{r}')\alpha\vec{\vec{g}}(\vec{r}-\vec{r}')\cdot\left[\vec{\mathcal{D}}(\vec{r}'/\vec{r})\frac{\rho^{\mathrm{II}}(\vec{r},\vec{r}')}{\rho(\vec{r})\rho(\vec{r}')} - \vec{\mathcal{D}}(\vec{r}')\right] \tag{III.6.a}$$

$$\vec{\mathcal{D}}(\vec{r}'/\vec{r}) - \alpha\vec{\vec{g}}(\vec{r}'-\vec{r})\cdot\vec{\mathcal{D}}(\vec{r}/\vec{r}') = \vec{\mathcal{D}}(\vec{r}') + \int \mathrm{d}^3\vec{r}''\alpha\vec{\vec{g}}(\vec{r}'-\vec{r}'')\cdot\left[\vec{\mathcal{D}}(\vec{r}''/\vec{r},\vec{r}')\frac{\rho^{\mathrm{III}}(\vec{r},\vec{r}',\vec{r}'')}{\rho^{\mathrm{II}}(\vec{r},\vec{r}')} - \vec{\mathcal{D}}(\vec{r}''/\vec{r}')\frac{\rho^{\mathrm{II}}(\vec{r}',\vec{r}'')}{\rho(\vec{r}')}\right] . \tag{III.6.b}$$

...

c) Brisure de la hiérarchie

Le système (III.6) contient un nombre infini d'équations. Pour le résoudre, il faut effectuer une approximation.

L'approximation que nous allons faire repose sur le principe du développement du Viriel [68, p. 297]. Elle consiste à tenir compte des interactions entre 2 particules, mais à négliger l'interaction entre 3 particules. En effet, à faible densité, s'il est possible que 2 particules soient voisines, *i.e.* plus proches que la longueur d'onde optique, il est improbable que 3 particules soient distantes de moins de λ_L. De façon plus quantitative, comme la portée du potentiel de Van der Waals entre un atome excité et un atome dans l'état fondamental est de l'ordre de λ_L, on s'attend à ce que le développement soit valable lorsque $\rho_0\lambda_L^3 \ll 1$[1]. Ainsi, nous avons vu que, lorsqu'on néglige totalement les interactions entre atomes, on trouve un indice de réfraction $\rho_0\lambda_L^3$. Le premier terme du développement du Viriel, que nous calculons ici, va nous apporter des corrections en $(\rho_0\lambda_L^3)^2$. Si nous avions tenu compte des interactions de triplets d'atomes, nous aurions eu des termes supplémentaires en $(\rho_0\lambda_L^3)^3$, etc.

En revenant à l'équation (III.6.b), nous pouvons donc supposer que les points $\vec{r}$, $\vec{r}'$ et $\vec{r}''$ ne sont pas tous les trois dans le même cube de côté λ_L. Par conséquent

$$\vec{\mathcal{D}}(\vec{r}''/\vec{r},\vec{r}') \simeq \vec{\mathcal{D}}(\vec{r}''/\vec{r}')\,. \tag{III.7}$$

L'équation (III.7) certes n'est pas vraie dans tous les cas: notamment, elle est fausse lorsque $\vec{r}$ est proche de $\vec{r}''$, et loin de $\vec{r}'$. Néanmoins, on suppose que la fonction $\vec{\vec{g}}(\vec{r}'-\vec{r}'')$, présente dans l'intégrale du second membre de (III.6.b) et qui n'est non négligeable que lorsque $\|\vec{r}'-\vec{r}''\| \leqslant \lambda_L$, va défavoriser ce cas de figure. En outre, je remplacerai $\dfrac{\rho^{III}(\vec{r},\vec{r}',\vec{r}'')}{\rho^{II}(\vec{r},\vec{r}')}$ par $\dfrac{\rho^{II}(\vec{r}',\vec{r}'')}{\rho(\vec{r}')}$. Cette approximation peut s'avérer incorrecte pour des bosons dans la limite des très basses températures.

Je reconnais que les approximations que je fais ici ne sont pas totalement justifiées. C'est pourquoi je présenterai dans l'annexe C quelques indications sur le rôle de l'intégrale de l'équation (III.6.b) que je néglige ici. Nous verrons alors que les corrections que je trouve sont effectivement en $\rho_0\lambda_L^3$. En outre, je présenterai au paragraphe III.3, p. 252 une autre méthode de calcul, basée sur un développement systématique en puissances de la densité. S'il est plus mathématique que physique, et donc moins aisé à comprendre que la présente méthode, il conduit rigoureusement au même résultat que le présent paragraphe.

Revenons maintenant au système (III.6). On néglige l'intégrale dans l'équation (III.6.b). On réécrit ensuite (III.6.b), en échangeant cette fois $\vec{r}$ et $\vec{r}'$. Entre

1. Nous verrons au paragraphe IV.3.*b*, p. 279 que le vrai petit paramètre n'est en fait pas $\rho_0\lambda_L^3$, mais $\rho_0 r_*^3$, où r_* est l'endroit où l'interaction atome-lumière est résonnante compte tenu du déplacement de Van der Waals. La condition $\rho_0\lambda_L^3 \ll 1$ est trop restrictive à grand désaccord. Toutefois, je supposerai dans un premier temps qu'elle est vérifiée, afin de ne pas compliquer le raisonnement.

les deux équations obtenues, on élimine $\vec{\mathcal{D}}(\vec{r}/\vec{r}')$. On obtient alors (sachant que $\vec{\vec{g}}(\vec{r}'-\vec{r}) = \vec{\vec{g}}(\vec{r}-\vec{r}')$)

$$\vec{\mathcal{D}}(\vec{r}'/\vec{r}) = \frac{\vec{\mathcal{D}}(\vec{r}') + \alpha\vec{\vec{g}}(\vec{r}'-\vec{r})\cdot\vec{\mathcal{D}}(\vec{r})}{\vec{\vec{1}} - \alpha^2\vec{\vec{g}}^{\,2}(\vec{r}'-\vec{r})}, \tag{III.8}$$

où l'inversion se fait au sens des matrices 3×3, $\vec{\vec{1}}$ étant la matrice unité.

Remplaçant dans l'équation (III.6.a), et reprenant l'équation (III.5.a), on tire finalement (en utilisant la relation (III.3) caractérisant la densité à 2 corps) :

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = \vec{E}_{\mathrm{L}}e^{i\vec{k}_{\mathrm{L}}\cdot\vec{r}} + \int \mathrm{d}^3\vec{r}'\rho(\vec{r}')\frac{\vec{\vec{g}}(\vec{r}-\vec{r}')}{\varepsilon_0}\cdot\vec{\mathcal{D}}(\vec{r}') \tag{III.9.a}$$

$$\vec{\mathcal{D}}(\vec{r}) = \alpha\varepsilon_0\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) + \rho_0\int \mathrm{d}^3\vec{r}'\alpha\vec{\vec{g}}(\vec{r}-\vec{r}')\cdot\vec{\mathcal{D}}(\vec{r}')$$

$$+\rho_0\int \mathrm{d}^3\vec{r}'\frac{\alpha^2\vec{\vec{g}}^{\,2}(\vec{r}-\vec{r}')\cdot\vec{\mathcal{D}}(\vec{r}) + \alpha^3\vec{\vec{g}}^{\,3}(\vec{r}-\vec{r}')\cdot\vec{\mathcal{D}}(\vec{r}')}{\vec{\vec{1}} - \alpha^2\vec{\vec{g}}^{\,2}(\vec{r}'-\vec{r})}\left(1+\varphi(\|\vec{r}-\vec{r}'\|)\right). \tag{III.9.b}$$

d) Obtention de la relation de dispersion

Pour tirer du système (III.9) une relation de dispersion, nous nous replaçons dans des conditions du paragraphe II.2. Le milieu atomique remplit donc le demi-espace $z > 0$, à l'intérieur duquel il est homogène. $\vec{k}_{\mathrm{L}}$ (réel) est le vecteur d'onde du laser hors du milieu, et $\vec{k}_{\mathrm{m}}$ (complexe) le vecteur d'onde du champ dans le milieu. Comme au paragraphe II.2.*e*, p. 229, nous posons pour $z > 0$

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = \vec{\mathcal{E}}_0 e^{i\vec{k}_{\mathrm{m}}\cdot\vec{r}} + \text{c.c.} = \mathcal{E}_0\vec{\varepsilon}_{\mathrm{L}}e^{i\vec{k}_{\mathrm{m}}\cdot\vec{r}} + \text{c.c.} \tag{III.10.a}$$

$$\vec{\mathcal{D}}(\vec{r}) = \vec{\mathcal{D}}_0 e^{i\vec{k}_{\mathrm{m}}\cdot\vec{r}} + \text{c.c.} = \mathcal{D}_0\vec{\varepsilon}_{\mathrm{L}}e^{i\vec{k}_{\mathrm{m}}\cdot\vec{r}} + \text{c.c.}, \tag{III.10.b}$$

($\vec{\varepsilon}_{\mathrm{L}}$ étant la polarisation du laser incident, qui peut être linéaire ou elliptique), et appliquons à l'équation (III.9.a) l'opérateur $\Delta + k_{\mathrm{L}}^2$ (avec $k_{\mathrm{L}} = \|\vec{k}_{\mathrm{L}}\|$). On tire (si $\vec{k}_{\mathrm{m}} = k_{\mathrm{m}}\vec{u}_z$)

$$\vec{\mathcal{E}}_0 = \frac{k_{\mathrm{L}}^2\vec{\mathcal{D}}_0\rho_0}{\varepsilon_0\left(k_{\mathrm{m}}^2 - k_{\mathrm{L}}^2\right)}. \tag{III.11}$$

puis, en remplaçant dans (III.9.b),

$$\frac{k_{\mathrm{m}}^2}{k_{\mathrm{L}}^2} = 1 + \frac{\alpha\rho_0}{1+\mathcal{A}}, \tag{III.12.a}$$

où

$$\mathcal{A} = -\alpha\rho_0 \int \mathrm{d}^3\vec{r}_1\, \vec{\varepsilon}_{\mathrm{L}}{}^* \cdot \vec{\vec{g}}(\vec{r}_1) \cdot \vec{\varepsilon}_{\mathrm{L}} \varphi(\vec{r}_1) e^{-i\vec{k}_{\mathrm{m}}\cdot\vec{r}_1}$$
$$- \rho_0 \int \mathrm{d}^3\vec{r}_1\, \vec{\varepsilon}_{\mathrm{L}}{}^* \cdot \left[\frac{\alpha^2 \vec{\vec{g}}^{\,2}(\vec{r}_1) + \alpha^3 \vec{\vec{g}}^{\,3}(\vec{r}_1) e^{-i\vec{k}_{\mathrm{m}}\cdot\vec{r}_1}}{\vec{\vec{1}} - \alpha^2 \vec{\vec{g}}^{\,2}(\vec{r}_1)} \right] \cdot \vec{\varepsilon}_{\mathrm{L}} \left(1 + \varphi(\vec{r}_1)\right) . \quad \text{(III.12.b)}$$

Pour obtenir les équations (III.12), je suis passé un peu vite sur un point : sur les intégrales de la formule (III.9.b), j'ai effectué une translation sur les positions, en posant $\vec{r}_1 = \vec{r} - \vec{r}\,'$. Or les intégrales en question ne portaient pas sur tout l'espace, mais sur le demi-espace que remplit le milieu atomique. Par conséquent il n'était *a priori* pas possible d'éliminer la dépendance en $\vec{r}$ de l'équation comme je l'ai fait.

En fait, si on regarde de près ces intégrales, on constate qu'à un détail près elles convergent sur une distance de quelques longueurs d'onde. Pour un $\vec{r}$ suffisamment loin des bords du milieu (*i.e.* plus loin que quelques λ_{L}), il est donc licite d'étendre les intégrales sur tout l'espace, puis d'éliminer l'exponentielle $\exp(i\vec{k}_{\mathrm{m}} \cdot \vec{r})$.

Le petit détail en question est le suivant : dans les intégrales de l'équation (III.12.b) se trouve un facteur $\exp(-i\vec{k}_{\mathrm{m}} \cdot \vec{r}_1)$. Or $\vec{k}_{\mathrm{m}}$ est complexe, donc l'argument de l'exponentielle possède une partie réelle non nulle, faisant diverger l'intégrale quand $\vec{k}_{\mathrm{m}} \cdot \vec{r} \to +\infty$.

La réponse à ce problème est que le résultat (III.12.b) n'est pas le bon : il faut en fait remplacer dans les 2 intégrales les facteurs $\exp(-i\vec{k}_{\mathrm{m}} \cdot \vec{r}_1)$ par $\exp(-i\vec{k}_{\mathrm{L}} \cdot \vec{r}_1)$. Je ne peux pas justifier ceci ici, mais il s'agit du résultat obtenu au paragraphe (III.3, p. 252) par la méthode plus rigoureuse du développement en puissances de la densité. En fait, la divergence que nous obtenons ici est une conséquence des approximations hasardeuses que nous avons faites au paragraphe III.1.*c*, p. 240. Dans l'annexe C, où j'ai partiellement pris en compte les termes de l'intégrale (III.6.b) négligés ici, j'arrive à un résultat possédant aussi une exponentielle $\exp(i\vec{k}_{\mathrm{m}} \cdot \vec{r}_1)$, mais convergent. Ce résultat s'avère être peu différent de celui obtenu ici, la différence étant d'ordre 3 en $\rho_0 \lambda_{\mathrm{L}}^3$.

Finalement, je reporte la relation de dispersion obtenue (où je remplace $\vec{r}_1$ par $\vec{r}$) :

$$\frac{k_{\mathrm{m}}^2}{k_{\mathrm{L}}^2} = 1 + \frac{\alpha\rho_0}{1+\mathcal{A}},$$

où

$$\mathcal{A} = -\alpha\rho_0 \int \mathrm{d}^3\vec{r}\,\vec{\varepsilon}_{\mathrm{L}}{}^* \cdot \vec{\vec{g}}(\vec{r}) \cdot \vec{\varepsilon}_{\mathrm{L}}\varphi(\vec{r})e^{-i\vec{k}_{\mathrm{L}}\cdot\vec{r}}$$

$$- \rho_0 \int \mathrm{d}^3\vec{r}\,\vec{\varepsilon}_{\mathrm{L}}{}^* \cdot \left[\frac{\alpha^2\vec{\vec{g}}^{\,2}(\vec{r}) + \alpha^3\vec{\vec{g}}^{\,3}(\vec{r})e^{-i\vec{k}_{\mathrm{L}}\cdot\vec{r}}}{\vec{\vec{1}} - \alpha^2\vec{\vec{g}}^{\,2}(\vec{r})}\right] \cdot \vec{\varepsilon}_{\mathrm{L}}\left(1+\varphi(\vec{r})\right) .$$

(III.13)

Signalons que le type de correction à l'indice figurant dans l'expression (III.13) avait déjà été obtenu par des calculs de diffusion de la lumière dans des milieux constitués de particules classiques, distribuées de façon aléatoire [205, 206]. Dans le présent modèle toutefois, les équations de départ (équations quantiques traduisant l'interaction entre les atomes et la lumière) et donc la méthode d'obtention du résultat sont très différents. La présence des effets collectifs constitue également une nouveauté.

2. Vers une évaluation numérique de l'équation (III.13)

Les courbes correspondant au résultat (III.13) (c'est-à-dire l'indice de réfraction tracé en fonction de paramètres du problème, tels que la température ou le désaccord du laser) seront présentées au paragraphe IV.1.*a*, p. 263. D'ici là, je dois en effet préciser quelques points concernant le calcul de certains des éléments intervenant dans le résultat (III.13). Successivement je vais donc calculer et/ou interpréter :

- le potentiel d'interaction $\vec{\vec{g}}$ traduisant l'interaction entre deux dipôles oscillants ;
- la fonction de corrélation spatiale $\varphi(\vec{r})$, dépendant de la température et du caractère boson/fermion des atomes ;
- enfin, l'intégration angulaire de (III.13), les « pseudo-divergences » qui apparaissent, ainsi que le terme de Lorentz-Lorenz.

a) Le potentiel d'interaction $\vec{\vec{g}}$

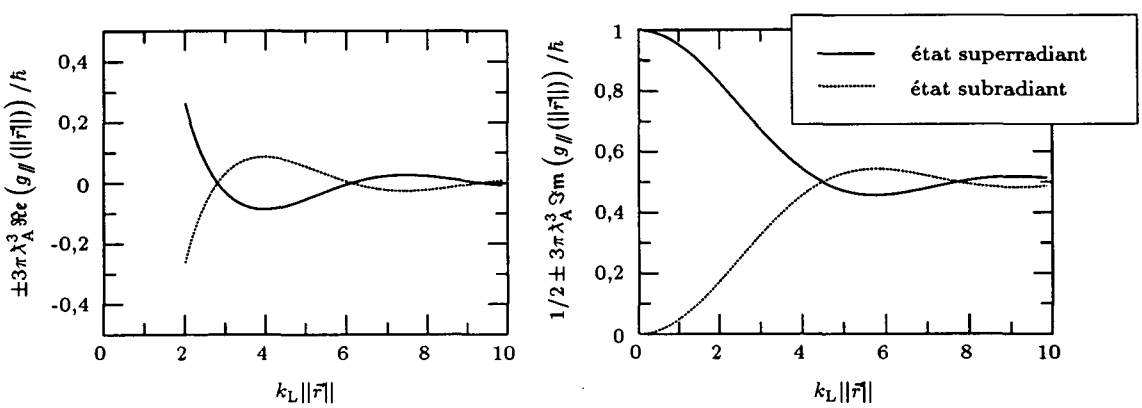
L'expression du potentiel $\vec{\vec{g}}(\vec{r})$ est donnée par la formule (II.28) du chapitre II. On voit qu'il est diagonalisable dans toute base orthonormée dont l'un des vecteurs est $\vec{r}/\|\vec{r}\|$, *i.e.*

$$\vec{\vec{g}}(\vec{r}) = \mathrm{Diag}_{\frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|},\vec{u}_1,\vec{u}_2}\left[g_{/\!/}(\|\vec{r}\|), g_\perp(\|\vec{r}\|), g_\perp(\|\vec{r}\|)\right] . \qquad \text{(III.14)}$$

Regardons le dénominateur de l'équation (III.13), que je note Dénom. Une fois la diagonalisation faite, et en utilisant la définition (II.27) de α, il s'écrit sous la forme

$$\text{Dénom} = \left\{ \frac{1}{\hbar\left(\delta + i\frac{\Gamma}{2}\right)} \right\}^2 \left[\hbar\left(\delta + i\frac{\Gamma}{2}\right) - 3\pi\hbar\Gamma\lambda_A^3 g_\ell(\|\vec{r}\|)\right]\left[\hbar\left(\delta + i\frac{\Gamma}{2}\right) + 3\pi\hbar\Gamma\lambda_A^3 g_\ell(\|\vec{r}\|)\right], \tag{III.15}$$

où $\ell = (//, \perp)$, $\delta = \omega_L - \omega_A$ est le désaccord du laser, et $\lambda_A = c/\omega_A$.



(a) *Partie réelle* (b) *Partie imaginaire*

FIG. III.1 - *Interprétation du dénominateur de l'expression (III.13). L'interaction entre 2 atomes dont l'un est excité crée 2 états couplés, l'un subradiant, l'autre superradiant.*

Nous savons que nous avons pris en compte l'interaction de Van der Waals entre un atome excité et un atome dans son état fondamental. On peut ainsi interpréter chacun des crochets de l'équation (III.15) comme étant l'énergie d'un état couplé, superposition linéaire des états $|1, f; 2, \vec{e}\rangle$ et $|1, \vec{e}; 2, f\rangle$ (les « numéros » des deux atomes considérés sont 1 et 2). L'énergie de cet état couplé est complexe, la partie imaginaire correspondant (à $\hbar$ près) à l'inverse de la durée de vie de l'état couplé. Les parties réelle et imaginaire de l'énergie ont été représentées sur la figure III.1. Lorsque $\|\vec{r}\| \to \infty$, $g_\ell(\|\vec{r}\|) = 0$: les atomes n'interagissent pas et les 2 niveaux sont dégénérés, ayant pour énergie $\hbar\omega_A$ et pour largeur $\hbar\Gamma$. Pour $\|\vec{r}\|$ fini, la levée de dégénérescence apparaît. Dans le cas où $\|\vec{r}\| \to 0$ (et si l'on oublie le terme en $\delta(\vec{r})$ présent dans l'expression de $\vec{\vec{g}}(\vec{r})$), les énergies des 2 niveaux divergent en $1/\|\vec{r}\|^3$, l'expression du potentiel étant alors celle de l'interaction entre 2 dipôles statiques [193]. Par contre, la partie imaginaire des 2 énergies

converge: pour $\vec{r} = \vec{0}$, l'un des 2 niveaux couplés a une durée de vie infinie — c'est l'état dit *subradiant* — tandis que l'autre émet un photon 2 fois plus vite qu'un atome libre — c'est l'état dit *superradiant* [207].

b) Calcul de la fonction de corrélation spatiale

Cette section sera la seule de cette thèse à être consacrée à la physique statistique. Je me propose en effet d'y indiquer l'expression de la distribution de paire $\varphi(\vec{r})$ dans différents cas de figures (bosons avec ou sans condensation de Bose-Einstein, fermions, etc.).

i) Calcul de la densité de paire en dehors de la condensation de Bose-Einstein

L'expression de la densité à 2 corps est

$$\rho^{\mathrm{II}}(\vec{r},\vec{r}') = \mathrm{Tr}\left[\left(\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{N} \delta^{(3)}(\vec{R}_i - \vec{r})\delta^{(3)}(\vec{R}_j - \vec{r}')\right)\varpi\right], \qquad \text{(III.16)}$$

où ϖ est la matrice densité du système. En développant la trace en représentation $\vec{p}$, écrivant les fonctions δ en transformée de Fourier, et en discrétisant l'espace des impulsions, on trouve, en seconde quantification

$$\rho^{\mathrm{II}}(\vec{r},\vec{r}') = \mathrm{Tr}\left(\frac{1}{V^2}\sum_{\vec{k}_1\vec{k}_2}\sum_{\vec{p}_1\vec{p}_2} c^{\dagger}_{\vec{p}_1+\hbar\vec{k}_1} c^{\dagger}_{\vec{p}_2+\hbar\vec{k}_2} c_{\vec{p}_2} c_{\vec{p}_1} e^{-i\left(\vec{k}_1\cdot\vec{r}+\vec{k}_2\cdot\vec{r}'\right)}\varpi\right), \qquad \text{(III.17)}$$

V étant le volume de quantification, $c^{\dagger}_{\vec{p}}$ l'opérateur de création d'un atome dans l'état fondamental et ayant l'impulsion $\vec{p}$, et $c_{\vec{p}}$ l'opérateur d'annihilation correspondant.

Je moyenne (III.17) en utilisant le théorème de Wick [208, p. 180]. Seuls les termes où l'on crée un atome dans des classes d'impulsion où l'on annihile aussi un atome ont une valeur moyenne non nulle. Il y a donc un terme où $\hbar\vec{k}_1 = \hbar\vec{k}_2 = 0$ (terme direct), et un terme où $\hbar\vec{k}_1 = -\hbar\vec{k}_2 = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$ (terme d'échange).

Je trouve alors que

$$\rho^{\mathrm{II}}(\vec{r},\vec{r}') = \rho_0^2 + \eta_{\mathrm{b/f}}\frac{1}{V^2}\sum_{\vec{p}_1\vec{p}_2} f_{\vec{p}_1} f_{\vec{p}_2} e^{-i\frac{\vec{p}_2-\vec{p}_1}{\hbar}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}, \qquad \text{(III.18)}$$

où $\eta_{\mathrm{b/f}} = \pm 1$ selon que l'on a affaire à des bosons ou à des fermions, et $f_{\vec{p}}$ est le facteur d'occupation de l'état d'impulsion $\vec{p}$ [209, p. 335 et 344]. L'expression de ce facteur d'occupation est

$$f_{\vec{p}} = \frac{1}{e^{\frac{(p^2/2M)-\mu}{k_{\mathrm{B}}T}} - \eta_{\mathrm{b/f}}}, \qquad \text{(III.19)}$$

μ étant le potentiel chimique.

L'expression (III.18) se calcule sans difficulté (en faisant tendre le volume de quantification vers $+\infty$ et en remplaçant les sommes discrètes par des intégrales[1]). On trouve finalement

$$\boxed{\rho^{\mathrm{II}}(\vec{r},\vec{r}') = \rho_0^2 - \eta_{\mathrm{b/f}} \frac{1}{4\pi^2 \|\vec{r}-\vec{r}'\|^2 \Lambda_{\mathrm{DB}}^4} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\, x \frac{e^{i\frac{\|\vec{r}-\vec{r}'\|}{\Lambda_{\mathrm{DB}}} x\sqrt{2\pi}}}{e^{\frac{x^2}{2}-\alpha_{\mathrm{s}}} - \eta_{\mathrm{b/f}}} \right]^2}, \tag{III.20}$$

où $\alpha_{\mathrm{s}} = \mu/(k_{\mathrm{B}}T)$ et $\Lambda_{\mathrm{DB}} = h/\sqrt{2\pi M k_{\mathrm{B}} T}$ est la longueur d'onde de de Broglie thermique des atomes.

ii) Calcul de α_{s}. Développement dans la limite classique

En écrivant que la somme des facteurs d'occupation est égal au nombre total N d'atomes, on déduit une définition implicite de la quantité α_{s} qui est

$$\rho_0 \Lambda_{\mathrm{DB}}^3 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x\, x^2}{e^{\frac{x^2}{2}-\alpha_{\mathrm{s}}} - \eta_{\mathrm{b/f}}}. \tag{III.21}$$

Le comportement de α_{s} en fonction du paramètre $\rho_0 \Lambda_{\mathrm{DB}}^3$ est indiqué sur la figure III.2. On trouve que les valeurs de bosons et de fermions coïncident à température infinie (*i.e.* pour $\rho_0 \Lambda_{\mathrm{DB}}^3 \to 0$). Pour les bosons, α_{s} est toujours négatif ou nul. Plus précisément, α_{s} s'annule dans le cas de la condensation de Bose[2], c'est-à-dire lorsque $\rho_0 \Lambda_{\mathrm{DB}}^3 \geqslant 2{,}612$. Pour les fermions, α_{s} devient positif à très basse température.

Dans la limite $\rho_0 \Lambda_{\mathrm{DB}}^3 \ll 1$, on peut négliger, aux dénominateur de (III.20) et de (III.21), le terme $\eta_{\mathrm{b/f}}$ devant $\exp(-\alpha_{\mathrm{s}})$. Par conséquent, l'expression du potentiel chimique se simplifie en

$$\alpha_{\mathrm{s}} = \ln\left(\rho_0 \Lambda_{\mathrm{DB}}^3\right). \tag{III.22}$$

On peut également calculer l'intégrale de l'équation (III.20), pour déduire une expression analytique de la densité à 2 corps qui est

$$\rho^{\mathrm{II}}(\vec{r},\vec{r}') = \rho_0^2 \left(1 + \eta_{\mathrm{b/f}} e^{-\frac{2\pi\|\vec{r}-\vec{r}'\|^2}{\Lambda_{\mathrm{DB}}^2}} \right). \tag{III.23}$$

1. Attention : ce passage à une intégrale n'est pas valable dans le cas de la condensation de Bose-Einstein (cas qui sera abordé p. 248).

2. du moins lorsque le volume de quantification est infini.

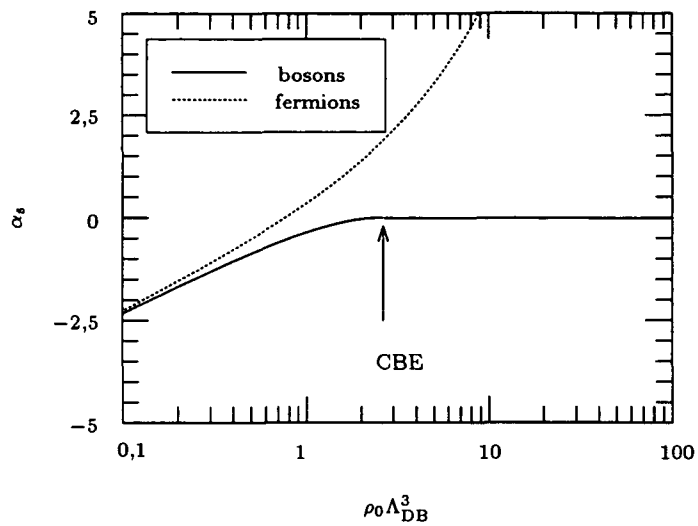


FIG. III.2 - *Allure de α_s en fonction du paramètre $\rho_0\Lambda^3_{DB}$.*

L'expression (III.23) aurait pu être directement obtenue en remplaçant, dans la formule (III.18), l'expression (III.19) du facteur d'occupation par $\exp\left(-p^2/(2Mk_BT)\right)$ (ce qui revient à calculer la première correction statistique à la distribution classique de Maxwell-Boltzmann).

iii) Expression de la densité de paire comme la somme d'une série

Léon Van Hove [210, formules (61) et (62)] indique une autre expression de la densité de paire, valable pour $\alpha_s < 0$:

$$\rho^{II}(\vec{r},\vec{r}') = \rho_0^2\left[1+\left(\frac{2{,}612}{\rho_0\Lambda^3_{DB}}\right)^2 Q^2\left(\eta_{b/f},\alpha_s,\frac{\pi\|\vec{r}-\vec{r}'\|^2}{\Lambda^2_{DB}}\right)\right], \qquad \text{(III.24)}$$

où la fonction Q est définie par

$$Q(\eta_{b/f},\alpha_s,x) = \frac{1}{2{,}612}\sum_{\ell=1}^{+\infty}\eta_{b/f}^{\ell-1}\ell^{-\frac{3}{2}}e^{\ell\alpha_s-\frac{x}{\ell}}. \qquad \text{(III.25)}$$

Je rappelle que $2{,}612 = \zeta(3/2) = \sum_{\ell=1}^{+\infty}\ell^{-3/2}$, ce qui fait que $Q(1,0,0) = 1$. Pour des bosons, et pour $\|\vec{r}-\vec{r}'\| \gg \Lambda_{DB}$ (c'est-à-dire $x \gg 1$), on peut montrer que l'on a

$$Q(1,\alpha_s,x) \underset{\substack{x\gg 1\\ \alpha_s\leqslant 0}}{\sim} \frac{1}{2{,}612}\sqrt{\frac{\pi}{x}}e^{-2\sqrt{-\alpha_s x}}. \qquad \text{(III.26)}$$

Ce développement a été utile lors de la numérisation de la distribution de paire (voir § IV.1.*a*, p. 263).

L'expression (III.24) n'est pas valable dans le cas de la condensation de Bose-Einstein, pas plus d'ailleurs que l'expression (III.20). Dans ce cas, j'ai eu recours au résultat présenté par F. London [211] :

$$\rho^{\mathrm{II}}_{\mathrm{CBE}}(\vec{r},\vec{r}') = \rho_0^2 \left\{ 1 + \left[1 - \frac{2{,}612}{\rho_0 \Lambda_{\mathrm{DB}}^3} + \frac{2{,}612}{\rho_0 \Lambda_{\mathrm{DB}}^3} Q\left(1, 0, \frac{\pi \|\vec{r}-\vec{r}'\|^2}{\Lambda_{\mathrm{DB}}^2}\right) \right]^2 - \left[1 - \frac{2{,}612}{\rho_0 \Lambda_{\mathrm{DB}}^3} \right]^2 \right\} . \tag{III.27}$$

iv) Développement dans le cas de fermions pour de grandes valeurs positives de α_s

L'expression (III.24) offre sur (III.20) l'avantage d'être beaucoup plus facile à évaluer numériquement[1]. Malheureusement, elle n'est pas valable dans tous les cas. Notamment, elle n'est pas valable pour des fermions lorsque $\rho_0 \Lambda_{\mathrm{DB}}^3 \to +\infty$, parce que dans ce cas $\alpha_s > 0$.

Dans le cas $\alpha_s > 0$, on peut bien sûr recourir à l'expression (III.20) et l'intégrer numériquement. Toutefois, cela devient très difficile à faire dans la limite des très basses températures, car dans ce cas l'exponentielle qui est au numérateur oscille très vite.

J'ai donc eu recours à un développement assez subtil, analogue à celui qui est fait dans le livre de Huang [68, p. 225] pour calculer le potentiel chimique des fermions à très basse température. Le principe en est le suivant : on se ramène d'abord par parité à une intégrale de 0 à $+\infty$, avec une fonction sinus au numérateur. Pour $\alpha_s \gg 1$, la fonction $1/\left[\exp(\frac{x^2}{2} - \alpha_s) + 1\right]$ a l'allure d'une marche montante. Sa dérivée a donc l'allure d'un pic centré en $\sqrt{2\alpha_s}$. Il suffit donc d'intégrer (III.20) par parties (pour faire apparaître la dérivée), puis de développer le numérateur autour de α_s. On étend enfin l'intégrale de $-\infty$ à $+\infty$, après avoir montré que la partie que l'on rajoute à la main se comporte en $\mathrm{O}\left(\exp(-\alpha_s)\right)$.

1. La convergence de la série $\sum_{\ell=1}^{+\infty} \ell^{-3/2}$ est cependant très lente. Pour accélérer l'évaluation numérique de la fonction Q, dans le cas des bosons et où $|\alpha_s| \ll 1$ (et notamment dans le cas de la condensation de Bose-Einstein), on l'écrit sous la forme

$$Q(1, \alpha_s, x) = 1 + \frac{1}{2{,}612} \sum_{\ell=1}^{+\infty} \ell^{-\frac{3}{2}} \left(e^{\ell\alpha_s - \frac{x}{\ell}} - 1 \right) , \tag{III.28}$$

ce qui permet d'obtenir une série convergent comme $\sum_{\ell=1}^{+\infty} \ell^{-5/2}$.

Après quelques pages d'un calcul pénible mais sans difficulté théorique, on trouve :

$$\alpha \underset{\rho_0\Lambda_{DB}^3 \to +\infty}{\sim} \left(\frac{3\sqrt{\pi}}{4}\rho_0\Lambda_{DB}^3\right)^{\frac{2}{3}}, \tag{III.29}$$

et

$$\rho^{II}(\vec{r},\vec{r}') \underset{\rho_0\Lambda_{DB}^3 \to +\infty}{\sim} \rho_0^2\left[1 - \frac{1}{r_\Lambda^2(\rho_0\Lambda_{DB}^3)^2\pi^2}\left(\frac{\sin\left(2r_\Lambda\sqrt{\pi\alpha_s}\right)}{2\pi r_\Lambda^2} - \frac{1}{r_\Lambda}\sqrt{\frac{\alpha_s}{\pi}}\cos\left(2r_\Lambda\sqrt{\pi\alpha_s}\right)\right)^2\right], \tag{III.30}$$

avec $r_\Lambda = \|\vec{r} - \vec{r}'\|/\Lambda_{DB}$.

v) Allure de la distribution de paire

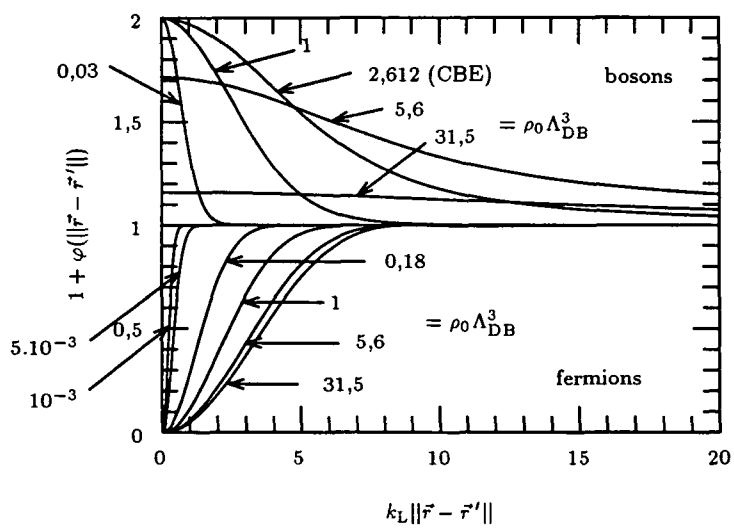


FIG. III.3 - *Allure de la distribution de paire* $\rho^{II}(\vec{r},\vec{r}')$. *La densité atomique est* $\rho\lambda_L^3 = 0{,}5$.

Je présente sur la figure III.3 l'allure de la distribution de paire telle qu'on l'obtient pour des bosons et pour des fermions, et pour différentes valeurs de $\rho_0\Lambda_{DB}^3$. Cette distribution a été calculée à l'aide de la formule (III.24) (ou bien (III.27)) à chaque fois que c'était possible, *i.e.* lorsque $\alpha_s < 0$. Dans le cas contraire, j'ai utilisé la formule (III.20), puis le développement (III.30) dès que $\alpha_s \geqslant 15$.

On constate tout d'abord qu'à température infinie, la distribution de paire est uniforme. Pour des fermions à température finie, la distribution est inférieure à 1 pour $\|\vec{r} - \vec{r}'\| \to 0$: c'est bien ce à quoi on s'attendait, *i.e.* deux fermions n'ont pas tendance à être au même endroit.

Le résultat des bosons est plus compliqué: en-deçà de la condensation de Bose-Einstein, on trouve effectivement que 2 bosons sont enclins à se trouver au même endroit. Par contre, une fois que l'on a franchi ce seuil, plus on descend la température, moins on a de chances de trouver deux bosons ensemble. L'explication est la suivante: dans le cas d'un condensat, beaucoup d'atomes sont dans le même état d'impulsion, c'est-à-dire l'état $\vec{p} = 0$. Par conséquent ces atomes sont complètement délocalisés dans l'espace des positions. Leurs positions ne sont donc pas du tout corrélées, d'où l'allure de la distribution de paire. Notamment, on voit qu'à température nulle la distribution de paire est uniforme, et donc que l'indice de réfraction sera le même qu'à température infinie. Si nous sommes à la recherche d'effets quantiques collectifs liés à une distribution de paire non triviale, nous devons les trouver autour du seuil de la condensation de Bose-Einstein, et non à des températures plus basses.

Remarque: la propriété que je viens d'exposer est analogue à ce que l'on peut observer dans le domaine de l'optique, lorsque l'on effectue des mesures de corrélation d'intensité (expérience d'Hanbury-Brown et Twiss [169]). Si l'on mesure la quantité $\langle I(\vec{k})I(\vec{k}')\rangle / \langle I(\vec{k})\rangle \langle I(\vec{k}')\rangle$, ($I(\vec{k})$ étant l'intensité rayonnée dans la direction $\vec{k}$), et si l'on fait tendre $\vec{k}$ vers $\vec{k}'$, on trouve 2 dans le cas d'une lampe (rayonnement thermique), mais 1 dans le cas d'un laser: le rayonnement de la lampe peut être assimilé à un gaz de Bose non condensé, et celui du laser à un condensat.

c) Intégration angulaire de l'expression (III.13)

L'intégration angulaire des intégrales apparaissant dans l'équation (III.13) ne pose pas de problème majeur, dans la mesure où les fonctions $g_{//}, g_{\perp}$ et φ ne dépendent que de $\|\vec{r}\|$. Il suffit donc de choisir l'axe z parallèle à $\vec{k}_{\mathrm{L}}$ (pour éviter de faire apparaître des fonctions de Bessel), puis de passer en coordonnées sphériques.

Le résultat obtenu est le suivant

$$\mathcal{A} = -\frac{1}{3}\alpha\rho_0 \overbrace{-\frac{i\alpha^2 k_{\mathrm{L}}^3 \rho_0}{12\pi}}^{\text{Correction à l'intégrale}}$$
$$- \frac{\pi\rho_0}{k_{\mathrm{L}}^3}\int_0^{+\infty} \mathrm{d}u\, u^2 \left\{ \frac{4}{u^2}\left[\frac{\sin u}{u} - \cos u\right] \frac{\alpha^3 \left(\hat{g}^1_{//}(u)\right)^3 + \alpha \hat{g}^1_{//}(u)\hat{\varphi}(u)}{1 - \alpha^2\left(\hat{g}^1_{//}(u)\right)^2} \right.$$
$$\left. + 4\left[\frac{\sin u}{u} + \frac{\cos u}{u^2} - \frac{\sin u}{u^3}\right] \frac{\alpha^3 \left(\hat{g}^1_{\perp}(u)\right)^3 + \alpha \hat{g}^1_{\perp}(u)\hat{\varphi}(u)}{1 - \alpha^2\left(\hat{g}^1_{\perp}(u)\right)^2} \right.$$

$$+\frac{4}{3}\frac{\alpha^2\left(\hat{g}^1_{/\!/}(u)\right)^2}{1-\alpha^2\left(\hat{g}^1_{/\!/}(u)\right)^2}\left(1+\hat{\varphi}(u)\right)+\frac{8}{3}\frac{\alpha^2\left(\hat{g}^1_{\perp}(u)\right)^2}{1-\alpha^2\left(\hat{g}^1_{\perp}(u)\right)^2}\left(1+\hat{\varphi}(u)\right)$$

$$\left.\underbrace{-\alpha^2\frac{k_{\mathrm{L}}^4}{16\pi^2u^2}e^{2iu}}_{\text{Correction à l'intégrale}}\right\}. \qquad \text{(III.31)}$$

Dans l'équation (III.31), j'ai écrit les intégrales en fonction du paramètre sans dimension $u \equiv k_{\mathrm{L}}r$. La fonction $\hat{\varphi}(u)$ vaut

$$\hat{\varphi}(k_{\mathrm{L}}r) \equiv \varphi(r)\,, \qquad \text{(III.32)}$$

et les fonctions $\hat{g}^1_\ell(u)$ sont définies par

$$\begin{aligned}\hat{g}^1_\ell(k_{\mathrm{L}}r) &\equiv g^1_\ell(r)\\ &\equiv g_\ell(r)+\frac{1}{3}\delta^{(3)}(\vec{r})\end{aligned} \qquad \text{(III.33)}$$

(il s'agit donc du potentiel d'interaction sans le terme de contact), ce qui donne

$$\hat{g}^1_{/\!/}(u) = -\frac{k_{\mathrm{L}}^3}{2\pi}\left(\frac{i}{u^2}-\frac{1}{u^3}\right) \qquad \text{(III.34.a)}$$

$$\hat{g}^1_{\perp}(u) = -\frac{k_{\mathrm{L}}^3}{4\pi}\left(-\frac{1}{u}-\frac{i}{u^2}+\frac{1}{u^3}\right). \qquad \text{(III.34.b)}$$

Comme il est montré dans l'annexe A, et plus précisément au paragraphe A.3, p. 340, le terme en δ présent dans la définition $\vec{g}$ fait apparaître le 1er terme du second membre de l'équation (III.31), en $\alpha\rho_0/3$ (on l'appelle terme de Lorentz-Lorenz).

Je dois également faire un commentaire à propos des termes marqués « correction à l'intégrale » : en effet, si on ne met pas ces termes, l'intégrale (III.31) diverge pour $u \to +\infty$, car la fonction à intégrer se comporte comme une exponentielle complexe non amortie. En fait, ceci n'est pas très physique, car lorsque 2 atomes sont très éloignés, ils interagissent *via* un potentiel « écranté » dû au fait que les photons échangés par les 2 atomes se propagent dans un milieu d'indice de réfraction différent de 1 (voir des détails dans l'annexe C). Ce potentiel écranté décroît exponentiellement lorsque $r \to +\infty$, et il en est alors de même pour l'intégrale (III.31). En fait, on montre que l'on obtient le bon résultat en remplaçant simplement $g^1_\ell(r)$ par $g^1_\ell(r+ir_\varepsilon)$, et en faisant tendre r_ε vers 0 à la fin du calcul. Ceci revient à ôter dans l'intégrale le terme non amorti, et de le calculer séparément — c'est ce qui est fait dans le résultat (III.31) avec les termes « correction à l'intégrale »[1].

1. Je rappelle que nous avions dû introduire à la main un petit facteur imaginaire $i\varepsilon'$ afin d'écrire les équations du mouvement, et ce aussi bien dans la méthode diagrammatique (annexe B, § B.1.*a.ii*, p. 349), que dans la méthode de champ moyen (annexe A, § A.2.*a.iv*, p. 330). C'est de ce même facteur dont nous avons besoin ici, il ne fallait donc pas le faire tendre vers 0 prématurément.

La convergence en 0 de l'intégrale (III.31) ne paraît pas immédiate au premier abord. Pourtant, si l'on effectue un développement limité au voisinage de 0 de l'expression à intégrer, on s'aperçoit que les termes divergents se compensent exactement. Ceci peut apparaître comme une sorte de miracle, qui d'ailleurs ne se reproduira pas dans le cas de la section efficace (chapitre V).

Le programme informatique. J'ai intégré l'équation (III.31) numériquement. Le programme que j'ai écrit utilise la routine MIDPNT de *Numerical Recipes* [212]. Cette routine calcule l'intégrale par la méthode des trapèzes. En l'appelant plusieurs fois de suite, on augmente le nombre de pas d'intégration. Je l'appelle 12 fois de suite, chaque appel multipliant par 3 le nombre de pas.

La borne supérieure d'intégration doit être fixée arbitrairement. Pour cela, j'ai tracé la fonction à intégrer, et j'ai regardé où elle semblait rejoindre son asymptote. Je me suis aperçu que cette valeur dépendait du désaccord. J'ai finalement pris pour borne la valeur $k_{\mathrm{L}}r = 108/\left((\delta/\Gamma)^2 + 0{,}25\right)$, qui convient pour plusieurs valeurs de δ[1]. Le choix de cette borne supérieure est en effet assez délicat : si elle est trop petite, le résultat est faux, tandis que si elle est trop grande, la fonction à intégrer oscille trop sur l'intervalle considéré, et l'ordinateur n'arrive pas à calculer. J'ai comparé le résultat que j'obtenais pour diverses valeurs voisines de la borne supérieure d'intégration.

Le pas d'intégration a lui aussi été choisi de façon totalement empirique. Il est toutefois possible, en s'appuyant sur le principe du développement fait au paragraphe IV.3 (p. 277), de montrer qu'à grand désaccord ce pas doit varier en $(\Gamma/\delta)^{4/3}$. Quoi qu'il en soit, toutes les simulations ont été effectuées avec un pas bien plus petit que ce qui était nécessaire.

L'évaluation de la fonction de corrélation φ a également été un peu délicate. Selon les valeurs des paramètres, j'ai choisi l'une ou l'autre des expressions présentées au paragraphe III.2.*b*. Enfin, j'ai calculé séparément les différents termes (pair ou impair, statistique ou non) de l'équation (III.31).

J'ai effectué ces intégrations pour plusieurs valeurs d'un paramètre (en général la température, mais parfois aussi le désaccord). Le programme, écrit en fortran 77, a été exécuté sur une station SUN Sparc 10. Un spectre typique, tel que celui de la figure IV.2 (chapitre IV), est obtenu en quelques heures.

3. Complément : développement en puissance de la densité

Avant de présenter les résultats numériques du calcul d'indice, je vais introduire ici une autre méthode, que l'on doit à Yvan Castin, et qui permet de retrouver le résultat (III.13). Si elle repose sur une approche voisine de celle de

1. Le facteur 108 a été choisi après quelques tâtonnements. Il ne représente pas le résultat d'une quelconque étude théorique.

la méthode de la hiérarchie, elle permet d'obtenir le résultat en justifiant parfaitement les approximations faites. En outre, elle sera directement généralisable au calcul de section efficace différentielle de diffusion, dans le cas d'un milieu faiblement absorbant (chapitre V).

Le principe est d'effectuer un développement systématique des termes intervenant dans le calcul en puissances de la densité ρ_0. Ceci est parfaitement rigoureux sur le plan mathématique. Le problème est que ρ_0 est une quantité pourvue d'une dimension. Or, on s'aperçoit que pour être valable sur le plan physique, le calcul nécessite une condition plus restrictive que $\rho_0\lambda_L^3 \ll 1$: le vrai petit paramètre qui va intervenir dans le problème est en effet $\rho_0\lambda_L^2 L$, où L est la longueur du milieu. Autrement dit, ce calcul n'est valable que dans le cas d'un milieu optiquement mince (alors que le résultat ne nécessite que $\rho_0\lambda_L^3 \ll 1$).

Ce calcul comporte trois étapes. On effectue tout d'abord un développement formel, en puissances de la densité, de la théorie macroscopique (*i.e.*. de l'expression de la densité de dipôles). On développe dans un deuxième temps la théorie microscopique. Enfin, on calcule l'indice à l'ordre 2 en identifiant terme à terme ces deux développements.

a) Développement formel de la théorie macroscopique

On suppose que la densité de dipôles moyenne au point $\vec{r}$, notée

$$\vec{\mathcal{P}}(\vec{r}) = \rho(\vec{r})\vec{\mathcal{D}}(\vec{r})\,, \tag{III.35}$$

est proportionnelle au champ électrique moyen en ce point, *i.e.*:

$$\vec{\mathcal{P}}(\vec{r}) = \varepsilon_0 \vec{\vec{\chi}}(\vec{r}) \cdot \vec{\mathcal{E}}(\vec{r})\,. \tag{III.36}$$

$\vec{\vec{\chi}}$ est une quantité *a priori* tensorielle, et complexe, appelée *susceptibilité du milieu*. Nous supposerons que $\vec{\vec{\chi}}$ se développe sous la forme

$$\vec{\vec{\chi}} = \vec{\vec{\chi}}^{(1)}[\rho] + \vec{\vec{\chi}}^{(2)}[\rho] + \cdots \tag{III.37}$$

Attention : le développement (III.37) n'est pas *local*, c'est-à-dire que rien n'impose que $\vec{\vec{\chi}}(\vec{r})$ ne dépende que de $\rho(\vec{r})$. Les quantités $\vec{\vec{\chi}}^{(1)}$ et $\vec{\vec{\chi}}^{(2)}$ sont des *fonctionnelles*, $\vec{\vec{\chi}}^{(1)}$ étant linéaire et $\vec{\vec{\chi}}^{(2)}$ quadratique dans l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Bien sûr, tout se simplifie si l'on suppose que la densité atomique est constante, mais je ne fais pas ici cette restriction.

En reprenant l'équation intégrale (III.9.a), et en remplaçant le dipôle moyen $\vec{\mathcal{D}}(\vec{r})$ grâce à (III.35) et (III.36), on obtient

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = \vec{E}_L e^{i\vec{k}_L\cdot\vec{r}} + \int \mathrm{d}^3\vec{r}\,' \frac{\vec{\vec{g}}(\vec{r}-\vec{r}\,')}{\varepsilon_0} \cdot \vec{\mathcal{P}}(\vec{r}\,')\ ; \tag{III.38}$$

d'où, en écrivant (III.38) à l'ordre 1 inclus

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = \vec{E}_L e^{i\vec{k}_L\cdot\vec{r}} + \int \mathrm{d}^3\vec{r}\,' \vec{\vec{g}}(\vec{r}-\vec{r}\,') \cdot \vec{\vec{\chi}}^{(1)}(\vec{r}\,') \cdot \vec{E}_L e^{i\vec{k}_L\cdot\vec{r}\,'} + \cdots\,. \tag{III.39}$$

Ensuite, en reprenant les équations (III.36) et (III.37), et en allant à l'ordre 2 en densité, on a

$$\vec{\mathcal{P}}(\vec{r}) = \varepsilon_0 \vec{\vec{\chi}}^{(1)}(\vec{r}) \cdot \vec{E}_{\mathrm{L}} e^{i\vec{k}_{\mathrm{L}}\cdot\vec{r}} + \varepsilon_0 \vec{\vec{\chi}}^{(1)}(\vec{r}) \cdot \int \mathrm{d}^3\vec{r}\,' \vec{\vec{g}}(\vec{r}-\vec{r}\,') \cdot \vec{\vec{\chi}}^{(1)}(\vec{r}\,') \cdot \vec{E}_{\mathrm{L}} e^{i\vec{k}_{\mathrm{L}}\cdot\vec{r}\,'} + \varepsilon_0 \vec{\vec{\chi}}^{(2)}(\vec{r}) \cdot \vec{E}_{\mathrm{L}} e^{i\vec{k}_{\mathrm{L}}\cdot\vec{r}} + \cdots . \tag{III.40}$$

b) Développement formel de la théorie microscopique

On revient à l'équation sur les dipôles non moyennée (III.1.b), *i.e.*

$$\vec{d}_i = \alpha\varepsilon_0 \vec{E}_{\mathrm{L}} e^{i\vec{k}_{\mathrm{L}}\cdot\vec{R}_i} + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \alpha \vec{\vec{g}}\left(\vec{R}_i - \vec{R}_j\right) \cdot \vec{d}_j \,. \tag{III.41}$$

Si l'on oublie les caractères opératoriel et vectoriel des dipôles, l'équation (III.41) répétée sur les N atomes fournit un système à N équations et N inconnues (chacun des dipôles $\vec{d}_i$). Lorsque l'on résout ce système, on exprime les $\vec{d}_i$ en fonction des positions $\vec{R}_\ell$ ($\ell = 1, \ldots, N$) des atomes (ces positions apparaissent au niveau du champ : $\vec{E}_{\mathrm{L}} \exp\left(i\vec{k}_{\mathrm{L}} \cdot \vec{R}_\ell\right)$, et au niveau des tenseurs d'interaction : $\vec{\vec{g}}(\vec{R}_\ell - \vec{R}_{\ell'})$). On peut donc envisager d'écrire $\vec{d}_i$ sous la forme :

$$\vec{d}_i = {}^{(1)}\vec{d}_i + {}^{(2)}\vec{d}_i + {}^{(3)}\vec{d}_i + \cdots , \tag{III.42}$$

où ${}^{(1)}\vec{d}_i$ ne fait intervenir qu'une seule position (forcément le point $\vec{R}_i$), ${}^{(2)}\vec{d}_i$ fait intervenir deux positions, etc.[1]. Lorsque l'on moyennera sur les positions atomiques, ${}^{(1)}\vec{d}_i$ fournira le terme en ρ_0, ${}^{(2)}\vec{d}_i$ le terme en ρ_0^2, etc.

On peut à nouveau développer les ${}^{(p)}\vec{d}_i$ sous la forme suivante :

$${}^{(1)}\vec{d}_i = \vec{d}_i^{\{i\}} \tag{III.43.a}$$

$${}^{(2)}\vec{d}_i = \sum_{j\neq i} \vec{d}_i^{\{i,j\}} \tag{III.43.b}$$

$${}^{(3)}\vec{d}_i = \sum_{\substack{j\neq i \\ \ell\neq i,j}} \vec{d}_i^{\{i,j,\ell\}} \tag{III.43.c}$$

$$\cdots$$

La quantité $\vec{d}_i^{\{i,j\}}$ utilisée dans l'équation (III.43.b) représente les termes du développement de $\vec{d}_i$ qui ne font intervenir que les positions $\vec{R}_i$ et $\vec{R}_j$. De même pour $\vec{d}_i^{\{i,j,\ell\}}$.

1. L'unicité du développement (III.42) ne paraît pas *a priori* des plus évidentes. En fait, il s'avère que l'expression du dipôle $\vec{d}_i$ est linéaire en champ, et dépend des $\vec{\vec{g}}(\vec{R}_\ell - \vec{R}_{\ell'})$ sous forme de fractions rationnelles. On peut développer formellement ces fractions en séries entières, et ensuite extraire pour tout p ($1 \leqslant p \leqslant N$) la contribution à p points.

Enfin, je définis les quantités suivantes

$$ {}^{(\leqslant 2)}\vec{d}_i^{\{i,j\}} = \vec{d}_i^{\{i\}} + \vec{d}_i^{\{i,j\}} \qquad \text{(III.44.a)} $$

$$ {}^{(\leqslant 3)}\vec{d}_i^{\{i,j,\ell\}} = \vec{d}_i^{\{i\}} + \vec{d}_i^{\{i,j\}} + \vec{d}_i^{\{i,\ell\}} + \vec{d}_i^{\{i,j,\ell\}} \qquad \text{(III.44.b)} $$

...

Je reviens maintenant à l'équation (III.41). En ne gardant que la contribution du point $\vec{R}_i$, j'obtiens

$$ {}^{(1)}\vec{d}_i = \alpha\varepsilon_0 \vec{E}_{\mathrm{L}} e^{i\vec{k}_{\mathrm{L}}\cdot\vec{R}_i} . \qquad \text{(III.45)} $$

En ne gardant maintenant que les contributions des points $\vec{R}_i$ et $\vec{R}_j$, je trouve

$$ {}^{(\leqslant 2)}\vec{d}_i^{\{i,j\}} = \alpha\varepsilon_0 \vec{E}_{\mathrm{L}} e^{i\vec{k}_{\mathrm{L}}\cdot\vec{R}_i} + \alpha\vec{\vec{g}}\left(\vec{R}_i - \vec{R}_j\right) \cdot {}^{(\leqslant 2)}\vec{d}_j^{\{j,i\}} . \qquad \text{(III.46.a)} $$

En échangeant les rôles de i et j, on a

$$ {}^{(\leqslant 2)}\vec{d}_j^{\{j,i\}} = \alpha\varepsilon_0 \vec{E}_{\mathrm{L}} e^{i\vec{k}_{\mathrm{L}}\cdot\vec{R}_j} + \alpha\vec{\vec{g}}\left(\vec{R}_i - \vec{R}_j\right) \cdot {}^{(\leqslant 2)}\vec{d}_i^{\{i,j\}} . \qquad \text{(III.46.b)} $$

En résolvant le système d'équations (III.46), et en utilisant la définition (III.44.a), on obtient

$$ \vec{d}_i^{\{i,j\}} = \alpha\varepsilon_0 \frac{\alpha^2 \vec{\vec{g}}^{\,2}\left(\vec{R}_i - \vec{R}_j\right) \cdot \vec{E}_{\mathrm{L}} e^{i\vec{k}_{\mathrm{L}}\cdot\vec{R}_i} + \alpha\vec{\vec{g}}\left(\vec{R}_i - \vec{R}_j\right) \cdot \vec{E}_{\mathrm{L}} e^{i\vec{k}_{\mathrm{L}}\cdot\vec{R}_j}}{\vec{\vec{1}} - \alpha^2 \vec{\vec{g}}^{\,2}\left(\vec{R}_i - \vec{R}_j\right)} . \qquad \text{(III.47)} $$

Finalement, en utilisant la définition (III.42) et l'équation (III.43.b), on obtient

$$ \begin{aligned} \vec{d}_i = \alpha\varepsilon_0 \Bigg[& \vec{E}_{\mathrm{L}} e^{i\vec{k}_{\mathrm{L}}\cdot\vec{R}_i} + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \alpha\vec{\vec{g}}\left(\vec{R}_i - \vec{R}_j\right) \cdot \vec{E}_{\mathrm{L}} e^{i\vec{k}_{\mathrm{L}}\cdot\vec{R}_j} \\ & + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \frac{\alpha^3 \vec{\vec{g}}^{\,3}\left(\vec{R}_i - \vec{R}_j\right)}{\vec{\vec{1}} - \alpha^2 \vec{\vec{g}}^{\,2}\left(\vec{R}_i - \vec{R}_j\right)} \cdot \vec{E}_{\mathrm{L}} e^{i\vec{k}_{\mathrm{L}}\cdot\vec{R}_j} \\ & + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \frac{\alpha^2 \vec{\vec{g}}^{\,2}\left(\vec{R}_i - \vec{R}_j\right)}{\vec{\vec{1}} - \alpha^2 \vec{\vec{g}}^{\,2}\left(\vec{R}_i - \vec{R}_j\right)} \cdot \vec{E}_{\mathrm{L}} e^{i\vec{k}_{\mathrm{L}}\cdot\vec{R}_i} \Bigg] + \sum_{p=3}^{+\infty} {}^{(p)}\vec{d}_i , \end{aligned} \qquad \text{(III.48)} $$

où j'ai partiellement développé la fraction rationnelle intervenant dans (III.47).

Il ne reste plus qu'à moyenner (III.48) sur les positions atomiques. Cela se fait en introduisant la densité à 2 corps définie par (III.2.b), et en posant

$$ \rho^{\mathrm{II}}(\vec{r},\vec{r}') = \rho(\vec{r})\rho(\vec{r}')\left(1 + \varphi(\|\vec{r} - \vec{r}'\|)\right) . \qquad \text{(III.49)} $$

D'où

$$\vec{\mathcal{P}}(\vec{r}) = \alpha\varepsilon_0\rho(\vec{r})\left[\vec{E}_{\mathrm{L}}e^{i\vec{k}_{\mathrm{L}}\cdot\vec{r}} + \int \mathrm{d}^3\vec{r}\,'\,\alpha\vec{\vec{g}}\,(\vec{r}-\vec{r}\,')\cdot\vec{E}_{\mathrm{L}}e^{i\vec{k}_{\mathrm{L}}\cdot\vec{r}\,'}\rho(\vec{r}\,')\left(1+\varphi(\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|)\right)\right.$$
$$+\int \mathrm{d}^3\vec{r}\,'\,\frac{\alpha^3\vec{\vec{g}}^{\,3}(\vec{r}-\vec{r}\,')}{\vec{\vec{1}}-\alpha^2\vec{\vec{g}}^{\,2}(\vec{r}-\vec{r}\,')}\cdot\vec{E}_{\mathrm{L}}e^{i\vec{k}_{\mathrm{L}}\cdot\vec{r}\,'}\rho(\vec{r}\,')\left(1+\varphi(\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|)\right)$$
$$\left.+\int \mathrm{d}^3\vec{r}\,'\,\frac{\alpha^2\vec{\vec{g}}^{\,2}(\vec{r}-\vec{r}\,')}{\vec{\vec{1}}-\alpha^2\vec{\vec{g}}^{\,2}(\vec{r}-\vec{r}\,')}\cdot\vec{E}_{\mathrm{L}}e^{i\vec{k}_{\mathrm{L}}\cdot\vec{r}}\rho(\vec{r}\,')\left(1+\varphi(\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|)\right)+\mathrm{O}(\rho^2)\right]. \tag{III.50}$$

Remarque: oublions un instant que le milieu est fini, et supposons celui-ci homogène ($\rho(\vec{r}) = \rho_0$). Les trois intégrales intervenant dans l'équation (III.50) peuvent être intégrées analytiquement sur les angles, conduisant à un résultat analogue à l'équation (III.31). On constate alors que pour les deux dernières lignes de (III.50), l'intégrale qui subsiste sur $r' = \|\vec{r}\,'\|$ obtenue converge rapidement, *i.e.* sur une distance de l'ordre de quelques longueurs d'onde optique. Par contre, dans l'intégrale de la première ligne de (III.50), la fonction de r' à intégrer tend vers une constante non nulle quand $r' \to +\infty$; l'intégrale diverge donc. Avec un milieu fini, on se convainc alors aisément que cette intégrale est de l'ordre de $\rho_0\lambda_{\mathrm{L}}^2 L$, où L est la longueur du milieu. On voit donc que, comme annoncé, la correction du deuxième ordre en densité rapportée au terme du premier ordre est en en $\rho_0\lambda_{\mathrm{L}}^2 L$.

c) Identification des deux développements terme à terme

A l'ordre 1 en densité, l'identification entre les équations (III.40) et (III.50) donne

$$\vec{\vec{\chi}}^{(1)}(\vec{r}) = \alpha\rho(\vec{r})\vec{\vec{1}}. \tag{III.51}$$

On remplace alors les $\vec{\vec{\chi}}^{(1)}$ qui figurent dans (III.40), puis on effectue l'identification à l'ordre 2. Cela donne

$$\vec{\vec{\chi}}^{(2)}(\vec{r}) = \alpha\rho(\vec{r})\int \mathrm{d}^3\vec{r}\,'\,\alpha\vec{\vec{g}}\,(\vec{r}-\vec{r}\,')\,\rho(\vec{r}\,')\varphi(\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|)e^{i\vec{k}_{\mathrm{L}}\cdot(\vec{r}\,'-\vec{r})}$$
$$+\alpha\rho(\vec{r})\int \mathrm{d}^3\vec{r}\,'\left[\frac{\alpha^3\vec{\vec{g}}^{\,3}(\vec{r}-\vec{r}\,')}{\vec{\vec{1}}-\alpha^2\vec{\vec{g}}^{\,2}(\vec{r}-\vec{r}\,')}e^{i\vec{k}_{\mathrm{L}}\cdot(\vec{r}\,'-\vec{r})}\right.$$
$$\left.+\frac{\alpha^2\vec{\vec{g}}^{\,2}(\vec{r}-\vec{r}\,')}{\vec{\vec{1}}-\alpha^2\vec{\vec{g}}^{\,2}(\vec{r}-\vec{r}\,')}\right]\rho(\vec{r}\,')\left(1+\varphi(\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|)\right). \tag{III.52}$$

Pour tirer une relation de dispersion à partir de l'expression de la susceptibilité donnée par (III.52), il suffit d'utiliser l'équation (II.24) (p. 226), qui, je le rappelle, est directement issue des équations de Maxwell[1]. Finalement, la relation

1. Le tenseur $\vec{\vec{\chi}}$ est scalaire dans le plan orthogonal à $\vec{k}_{\mathrm{L}}$. On écrit donc la relation de dispersion en faisant intervenir un élément de matrice de l'expression de $\vec{\vec{\chi}}$ que je viens de calculer, p. ex. $\vec{\varepsilon}_{\mathrm{L}}\cdot\vec{\vec{\chi}}\cdot\vec{\varepsilon}_{\mathrm{L}}$.

de dispersion obtenue dans la cas où la densité est constante est

$$\boxed{\frac{k_{\mathrm{m}}^2}{k_{\mathrm{L}}^2} = 1 + \alpha\rho_0\,(1 - \mathcal{A})\,,} \qquad \text{(III.53)}$$

où la quantité $\mathcal{A}$ est définie comme dans l'équation (III.13). On constate que la relation de dispersion (III.53) n'est pas exactement la même que (III.13), mais que les deux coïncident à l'ordre 2 en densité.

d) Expression du dipôle moyen en fonction de z

La méthode du développement systématique en puissances de la densité nous a permis de retrouver la relation de dispersion (III.13) sans approximation injustifiée. Nous allons voir ici que cette méthode est encore plus puissante, puisqu'elle nous fournit, dans le cas où le milieu atomique remplit le demi-espace $z \geqslant 0$, à l'intérieur duquel la densité est constante, la dépendance en z du dipôle atomique moyen (c'est-à-dire les corrections à la dépendance exponentielle).

Je préviens le lecteur que ce paragraphe n'est pas essentiel pour la compréhension du reste de la thèse. Il peut donc passer directement aux résultats présentés dans le chapitre IV, quitte à revenir ici lors d'une lecture ultérieure.

i) Ansatz *sur le comportement spatial du dipôle moyen*

Je supposerai *a priori* que le dipôle moyen $\vec{\mathcal{D}}(z)$ vérifie la relation

$$\int_{+\infty}^{z} \mathrm{d}z' \vec{\mathcal{D}}(z') e^{-ik_{\mathrm{L}}z'} = \vec{\mathcal{D}}_0 e^{i\psi(z)}\,, \qquad \text{(III.54)}$$

où la constante $\vec{\mathcal{D}}_0$ et la fonction ψ sont à déterminer. L'équation (III.54) est équivalente à

$$\vec{\mathcal{D}}(z) = i\vec{\mathcal{D}}_0 \psi'(z) e^{i\left(k_{\mathrm{L}}z + \psi(z)\right)}\,. \qquad \text{(III.55)}$$

La fonction ψ est une fonction à valeurs complexes. On s'attend à ce que

$$\psi(z) \underset{z\to+\infty}{\sim} (k_{\mathrm{m}} - k_{\mathrm{L}})z\,,$$

de façon à retrouver la dépendance exponentielle du dipôle lorsqu'on s'éloigne du bord du milieu.

ii) Calcul de la constante $\vec{\mathcal{D}}_0$

Pour calculer $\vec{\mathcal{D}}_0$, on utilise l'équation (III.9.a) sur le champ électrique, que je réécris ici dans le cas où les quantités ne dépendent que de z :

$$\vec{\mathcal{E}}(z) = \vec{E}_{\mathrm{L}} e^{ik_{\mathrm{L}}z} + \rho_0 \int_{z'\geqslant 0} \mathrm{d}^3\vec{r}\,' \frac{\vec{\vec{g}}(\vec{r} - \vec{r}\,')}{\varepsilon_0} \cdot \vec{\mathcal{D}}(z')\,, \qquad \text{(III.56)}$$

où $\vec{r} = (x, y, z)$ et $\vec{r}' = (x', y', z')$. La constante $\vec{\mathcal{D}}_0$ sera déterminée en supposant que le champ électrique $\vec{\mathcal{E}}$ s'amortit lorsque $z \to \infty$.

On commence par vérifier l'égalité suivante, valable pour tout champ de vecteurs $\vec{V}(z)$ ne dépendant que de z :

$$\int_{z\geqslant 0} \mathrm{d}^3\vec{r}'\vec{\vec{g}}(\vec{r}-\vec{r}')\cdot\vec{V}(z) = \frac{i}{2}\left(\vec{\vec{1}} - \vec{u}_z \otimes \vec{u}_z\right)\cdot\int_0^{+\infty} \mathrm{d}z' \frac{\omega_\mathrm{L}}{c} e^{ik_\mathrm{L}|z-z'|}\vec{V}(z') . \tag{III.57}$$

La relation (III.57) se vérifie en utilisant l'expression (A.34) (annexe A) du potentiel $\vec{\vec{g}}$ en transformée de Fourier. On y remplace la somme discrète par une intégrale. On utilise le système de coordonnées cartésiennes, et on intègre sur x et y (de $-\infty$ à $+\infty$ grâce à la géométrie du système). Ceci fait apparaître un $\delta(k_x)\delta(k_y)$. Il ne reste plus donc qu'une intégrale sur k_z que l'on intègre par la formule des résidus. Pour l'appliquer, il est nécessaire d'effectuer la transformation (A.35) (p. 331 dans l'annexe A). Le terme $\delta(k_z)$ qui apparaît alors se compense avec celui qui provenait du terme de contact.

J'applique maintenant la formule (III.57) avec $\vec{V}(z) = \vec{\mathcal{D}}(z)$. Puis je coupe l'intégrale en deux morceaux. J'obtiens :

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = \vec{E}_\mathrm{L} e^{ik_\mathrm{L}z} + \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\frac{i\omega_\mathrm{L}}{2c}\left(\int_0^z \mathrm{d}z' e^{ik_\mathrm{L}(z-z')}\vec{\mathcal{D}}(z') + \int_z^{+\infty} dz' e^{-ik_\mathrm{L}(z-z')}\vec{\mathcal{D}}(z')\right) . \tag{III.58}$$

Je rappelle que $\vec{\mathcal{E}}(z)$ doit tendre vers 0 dans la limite $z \to +\infty$. Comme le dipôle $\vec{\mathcal{D}}(z')$ décroît exponentiellement, la deuxième intégrale de (III.58) tend vers 0 quand $z \to +\infty$. Il faut par contre compenser les deux autres termes qui contiennent le facteur non amorti $e^{ik_\mathrm{L}z}$. On remplace pour cela $\vec{\mathcal{D}}(z')$ par son expression (III.55), et on intègre. Sachant que le dipôle est nul en $z = +\infty$, on exprime $\vec{\mathcal{D}}_0$ en fonction de $\vec{E}_\mathrm{L}$ et $\psi(0)$. On obtient finalement

$$\boxed{\vec{\mathcal{D}}(z) = \frac{\varepsilon_0}{\rho_0}\frac{2}{k_\mathrm{L}}\vec{E}_\mathrm{L}\psi'(z)e^{i\left(k_\mathrm{L}z + \int_0^z \mathrm{d}z'\psi'(z')\right)} .} \tag{III.59}$$

iii) Evaluation de la fonction ψ

La fonction ψ peut être évaluée par un développement systématique en puissances de la densité. Pour cela, on utilise le résultat à l'ordre 2 en densité (III.50), qui donne l'expression du dipôle $\vec{\mathcal{D}}(z)$ (proportionnel à $\vec{\mathcal{P}}(z)$ dans le cas de densités constantes).

L'expression (III.50) contient un grand nombre d'intégrales. En fait, on s'aperçoit que les 2 dernières convergent sur une distance de quelques longueurs d'onde

optiques. Dès que l'on est suffisamment loin du bord du milieu, on peut les étendre sur tout l'espace (ce que je ne fais pas ici, car je souhaite précisément étudier le cas où l'on est au bord du milieu. Mais je le ferai par exemple au chapitre V lorsque j'étudierai par une méthode voisine la section efficace différentielle de diffusion). L'intégrale de la première ligne doit être séparée en deux termes : un terme classique ne contenant pas la fonction de corrélation φ, et un terme quantique la contenant.

Le terme quantique converge lui aussi très rapidement, sauf dans le cas des bosons à température quasi-nulle. Par contre, le terme classique ne converge pas aussi vite (par exemple il diverge si on veut l'étendre sur tout l'espace). Par conséquent, ce terme dépendra de la distance entre $\vec{r}$ et le bord du milieu, même si l'on est très loin de ce bord.

Cette intégrale peut en fait être calculée en réutilisant le résultat (III.57), et en choisissant cette fois-ci $\vec{V}(z) = \vec{E}_{\mathrm{L}} e^{ik_{\mathrm{L}} z}$. Cela donne ici

$$\int_{z' \geqslant 0} \mathrm{d}^3\vec{r}\, \vec{g}(\vec{r} - \vec{r}') \cdot \vec{E}_{\mathrm{L}} e^{ik_{\mathrm{L}} z'} = \frac{i\omega_{\mathrm{L}}}{2c} \vec{E}_{\mathrm{L}} \int_0^{+\infty} \mathrm{d}z' e^{ik_{\mathrm{L}}|z-z'|} e^{ik_{\mathrm{L}} z'} .$$

On sépare ensuite l'intégrale en deux parties ($z' \leqslant z$ et $z' \geqslant z$). Pour la deuxième partie, un problème apparaît pour $z \to +\infty$, parce que la fonction à intégrer oscille sans s'amortir. L'artifice employé habituellement est de remplacer k_{L} par $k_{\mathrm{L}} + i\varepsilon'/c$, où ε' est un réel positif que l'on fait tendre vers 0 à la fin des calculs[1]. On trouve finalement le résultat suivant :

$$\begin{aligned}
\vec{\mathcal{D}}(\vec{r}) = \alpha\varepsilon_0 \Bigg[& \vec{E}_{\mathrm{L}} e^{ik_{\mathrm{L}} z} + \alpha\rho_0 \left(\frac{i}{2} k_{\mathrm{L}} z - \frac{1}{4} \right) \vec{E}_{\mathrm{L}} e^{ik_{\mathrm{L}} z} \\
& + \rho_0 \int_{z' \geqslant 0} \mathrm{d}^3\vec{r}'\, \alpha\vec{\vec{g}}(\vec{r} - \vec{r}') \cdot \vec{E}_{\mathrm{L}} e^{ik_{\mathrm{L}} z'} \varphi(\|\vec{r} - \vec{r}'\|) \\
& + \rho_0 \int_{z' \geqslant 0} \mathrm{d}^3\vec{r}'\, \frac{\alpha^3 \vec{\vec{g}}^{\,3}(\vec{r} - \vec{r}')}{\vec{\vec{1}} - \alpha^2 \vec{\vec{g}}^{\,2}(\vec{r} - \vec{r}')} \cdot \vec{E}_{\mathrm{L}} e^{ik_{\mathrm{L}} z'} \left(1 + \varphi(\|\vec{r} - \vec{r}'\|) \right) \\
& + \rho_0 \int_{z' \geqslant 0} \mathrm{d}^3\vec{r}'\, \frac{\alpha^2 \vec{\vec{g}}^{\,2}(\vec{r} - \vec{r}')}{\vec{\vec{1}} - \alpha^2 \vec{\vec{g}}^{\,2}(\vec{r} - \vec{r}')} \cdot \vec{E}_{\mathrm{L}} e^{ik_{\mathrm{L}} z} \rho(\vec{r}') \left(1 + \varphi(\|\vec{r} - \vec{r}'\|) \right) + \cdots \Bigg] .
\end{aligned} \tag{III.61}$$

Je suppose que la dérivée ψ' de la fonction ψ introduite au paragraphe (III.3.*d.i*) se développe en fonction de la densité sous la forme :

$$\psi'(z) = \rho_0 \psi'_{(1)}(z) + \rho_0^2 \psi'_{(2)}(z) + \cdots . \tag{III.62}$$

1. Ce procédé est utilisé plusieurs fois au cours de cette thèse : par exemple pour calculer le potentiel d'interaction (annexe A p. 330), ou bien pour calculer l'indice à l'aide de la matrice $\mathcal{T}$ (annexe B, § B.1.*a.ii*, p. 349). En fait, on montre que cette partie imaginaire apparaît naturellement si l'on tient compte du fait que les photons échangés par les atomes se propagent dans un milieu absorbant (annexe C).

L'équation (III.59) donne alors

$$\vec{\mathcal{D}}(z) = \frac{2\varepsilon_0}{k_\mathrm{L}}\vec{E}_\mathrm{L}\left(\psi'_{(1)} + \rho_0\psi'_{(2)} + i\rho_0\psi'_{(1)}(z)\int_0^z \mathrm{d}z'\psi'_{(1)}(z')\right)e^{ik_\mathrm{L}z}. \quad \text{(III.63)}$$

Il ne reste plus qu'à comparer terme à terme les équations (III.61) et (III.63). On obtient successivement

$$\boxed{\psi'_{(1)}(z) = \frac{\alpha}{2}k_\mathrm{L}\,,} \quad \text{(III.64)}$$

puis

$$\begin{aligned}\psi'_{(2)}(z) = {} & -k_\mathrm{L}\frac{\alpha^2}{8} + \alpha\frac{k_\mathrm{L}}{2}\int_{z'\geqslant 0}\mathrm{d}^3\vec{r}\,'\,\vec{\varepsilon}_\mathrm{L}{}^*\cdot\alpha\vec{\vec{g}}\,(\vec{r}-\vec{r}\,')\cdot\vec{\varepsilon}_\mathrm{L}e^{ik_\mathrm{L}z'}\varphi(\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|) \\ & + \alpha\frac{k_\mathrm{L}}{2}\int_{z'\geqslant 0}\mathrm{d}^3\vec{r}\,'\,\vec{\varepsilon}_\mathrm{L}{}^*\cdot\frac{\alpha^3\vec{\vec{g}}^{\,3}(\vec{r}-\vec{r}\,')}{\vec{\vec{1}}-\alpha^2\vec{\vec{g}}^{\,2}(\vec{r}-\vec{r}\,')}\cdot\vec{\varepsilon}_\mathrm{L}e^{ik_\mathrm{L}z'}\left(1+\varphi(\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|)\right) \\ & + \alpha\frac{k_\mathrm{L}}{2}\int_{z'\geqslant 0}\mathrm{d}^3\vec{r}\,'\,\vec{\varepsilon}_\mathrm{L}{}^*\cdot\frac{\alpha^2\vec{\vec{g}}^{\,2}(\vec{r}-\vec{r}\,')}{\vec{\vec{1}}-\alpha^2\vec{\vec{g}}^{\,2}(\vec{r}-\vec{r}\,')}\cdot\vec{\varepsilon}_\mathrm{L}e^{ik_\mathrm{L}z}\rho(\vec{r}\,')\left(1+\varphi(\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|)\right).\end{aligned} \quad \text{(III.65)}$$

Les équation (III.64) et (III.65) permettent de connaître la dépendance exacte du dipôle en fonction de z. Ce résultat n'a néanmoins qu'un intérêt théorique: d'une part, il n'est valable que dans le cas d'un milieu de forme très idéalisée (le demi-espace). Ensuite, il n'est pas très facile à exploiter dans la mesure où il est difficile d'évaluer numériquement les intégrales si on ne les étend pas sur tout l'espace (la possibilité de passer en coordonnées sphériques nous est ôtée, et il faudrait donc intégrer 3 variables numériquement, ce qui demanderait un important investissement que l'importance du résultat ne justifie pas). Son évaluation nous a toutefois permis de mieux comprendre ce qui se passe aux bords du milieu, et ceci nous sera utile dans l'annexe B (lors de l'interprétation des termes antirésonnants, p. 379).

Remarque: pour être rigoureux, il faut vérifier que les hypothèses que j'ai faites sur le comportement asymptotique de $\psi(z)$ pour $z \to +\infty$ sont vérifiées. Il s'agit en fait de démontrer que dans cette limite, l'équation (III.59) se ramène à un comportement en $e^{ik_\mathrm{m}z}$. Pour cela, il faut avoir

$$\psi(z) \underset{z\to+\infty}{\sim} (k_\mathrm{m} - k_\mathrm{L})z \quad \text{(III.66.a)}$$

et

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{d}z' \left(\psi'(z') - k_\mathrm{m} + k_\mathrm{L}\right) \text{ convergente.} \qquad \text{(III.66.b)}$$

Si la condition (III.66.a) se vérifie aisément en étendant les intégrales de (III.65) sur tout l'espace, il n'en va pas de même pour (III.66.b) qui nécessite de longues pages de vérification. Cette vérification a été effectivement été faite, mais, la jugeant sans intérêt physique, je ne la présenterai pas ici.

Chapitre IV

Analyse du résultat

LES CALCULS présentés dans le chapitre III nous ont fourni la relation de dispersion (III.13), à partir de laquelle il est aisé de déduire un indice. Cette équation, contenant à l'origine une intégrale sur tout l'espace, a pu être intégrée sur les angles, fournissant l'équation (III.31). Cette dernière équation ne comporte qu'une intégrale sur une seule variable, et peut donc être numérisée sans trop de difficultés.

J'exposerai dans ce chapitre les résultats numériques du calcul d'indice (section IV.1.*a*). Ces résultats sont des courbes donnant l'indice de réfraction complexe (*i.e.* le déphasage et l'absorption d'un faisceau) en fonction de paramètres tels que le désaccord ou la température. Nous verrons notamment comment en extraire ce qui nous intéresse, *i.e.* les effets quantiques collectifs.

Dans la section IV.2, je reviendrai sur le calcul dans le cadre de l'approximation de Born que j'avais présenté en introduction (§ I.1). J'essaierai de déterminer ce que la présente étude a apporté de nouveau par rapport à ce calcul.

Dans la section IV.3, j'effectuerai un développement limité du résultat (III.13) valable à grand désaccord. Ce développement me permettra (§ IV.3.*b*) de revenir sur la condition de faible densité, et de tenter de déterminer quel est le vrai petit paramètre. Enfin, au paragraphe IV.4, j'expliquerai en détail pourquoi nous avions le droit de négliger comme nous l'avons fait le mouvement des atomes.

Je terminerai par un complément (§ IV.5) qui montrera comment généraliser notre calcul au cas d'une transition atomique quelconque.

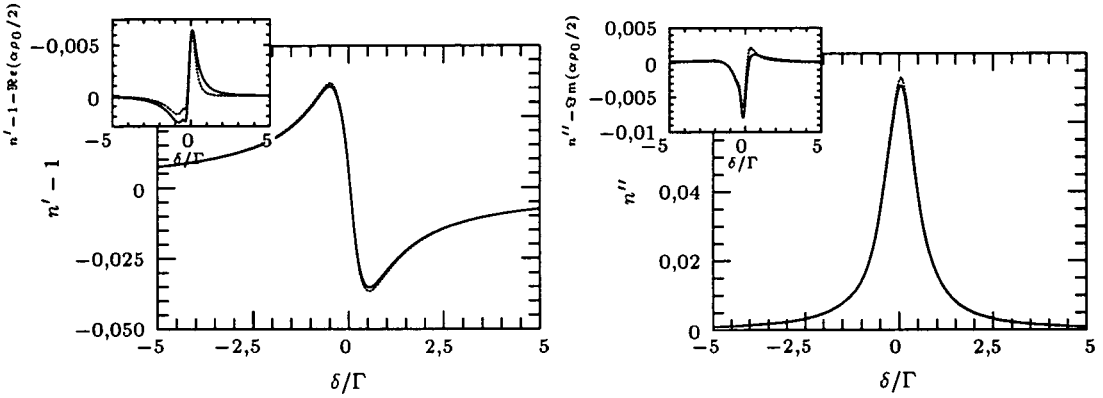
1. Présentation des résultats numériques

a) Courbes en fonction du désaccord

Afin de visualiser d'éventuels effets quantiques collectifs, j'ai tracé les parties réelle et imaginaire de l'indice de réfraction (c'est-à-dire le rapport $\mathfrak{Re}(k_{\mathrm{m}}/k_{\mathrm{L}})$ ou $\mathfrak{Im}(k_{\mathrm{m}}/k_{\mathrm{L}})$) en fonction de l'un des paramètres du problème. Je rappelle qu'il y a trois paramètres dans le problème: tout d'abord le *désaccord*, c'est-

à-dire la quantité $\delta = \omega_L - \omega_A$. Ce désaccord est en général comparable à la largeur naturelle de l'état excité Γ. Ensuite, la température T, comparable (ou bien inférieure) à la température de recul $\hbar^2 k_L^2/(Mk_B)$. Enfin, la densité ρ_0, très inférieure à $1/\lambda_L^3$.

Les premières courbes que j'ai tracées sont (bien que ce ne soient pas les plus démonstratives) les courbes en fonction du désaccord. De telles courbes sont présentées sur la figure IV.1. Afin de visualiser l'effet de la statistique, j'ai représenté en trait plein la courbe correspondant aux bosons, et en pointillés celle correspondant aux « boltzons » (c'est-à-dire aux particules discernables). Pour évaluer cette dernière courbe, on fait $\varphi = 0$ dans l'équation (III.31).



(a) *Partie réelle* (b) *Partie imaginaire*

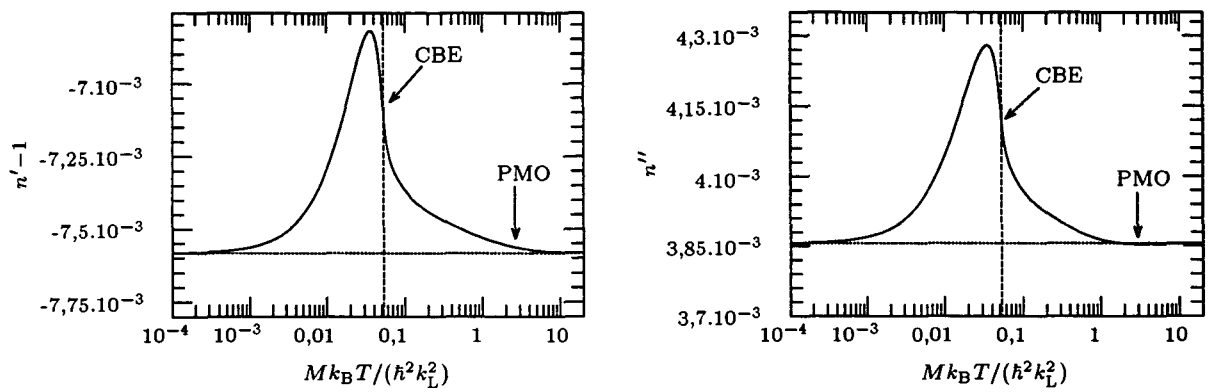
FIG. IV.1 - *Partie réelle (a) et partie imaginaire (b) de l'indice de réfraction d'un milieu atomique dilué, calculées en fonction du désaccord. La densité atomique vérifie* $\rho_0 \lambda_L^3 = 2$, *et la température* $\mathrm{Mk}_B/(\hbar^2 \mathrm{k}_L^2) = 1$. *La courbe en trait plein désigne les bosons, et celle en pointillés les « boltzons ». En médaillon, j'ai ôté le terme dominant dans l'expression de l'indice.*

On s'aperçoit qu'il est difficile de distinguer la courbe pleine de la courbe en pointillés. Ceci est dû au fait que le terme d'ordre 1 en densité ne dépend pas de la statistique. Or ce terme est nécessairement plus grand que le terme d'ordre 2 (faute de quoi notre calcul qui est perturbatif en densité ne serait pas valable). En médaillon de la figure IV.1, j'ai ôté le terme dominant en densité. Les effets collectifs sont alors visibles, sans être dominants. Toutefois, s'il est facile d'ôter un terme lorsque l'on fait des calculs, c'est beaucoup plus difficile sur une expérience.

b) Courbes en fonction de la température. Difficultés d'observer un signal expérimentalement

Il existe toutefois un moyen de mettre mieux en évidence les effets collectifs : tirant parti du fait que, dans l'équation (III.13), seul le terme statistique

dépend de la température, il suffit de tracer l'indice de réfraction en fonction de la température. C'est ce qui est fait sur la figure IV.2. L'effet de la statistique y est nettement plus visible, même si notre perception est faussée par le choix de l'échelle qui « masque » le terme dominant de l'indice.



(a) *Partie réelle* (b) *Partie imaginaire*

FIG. IV.2 - *Indice de réfraction en fonction de la température, pour des bosons (trait plein) et des atomes discernables (pointillés). Le désaccord vaut* $\delta = \Gamma$ *et la densité vérifie* $\rho_0 \lambda_L^3 = 0{,}5$. *La ligne en pointillés verticale repère la température correspondant à la condensation de Bose-Einstein. J'ai indiqué à droite des figures la situation accessible par un piège magnéto-optique (PMO). Signalons que la ressemblance entre les deux courbes est fortuite.*

Malheureusement, l'effet visible sur la figure IV.2 serait très difficile à mettre en évidence expérimentalement, et ce pour plusieurs raisons. Tout d'abord, les expériences classiques de refroidissement d'atomes par laser (piège magnéto-optique) nous placent sur la partie droite des courbes (à l'endroit indiqué sur la figure), c'est-à-dire là où pratiquement aucun effet n'est observable. Les expériences de refroidissement sub-recul, que ce soit par la méthode des résonances noires sur de l'hélium métastable, ou par la méthode Raman dans un piège opto-électrique (qui est présentée dans la première partie de cette thèse, mais qui n'a pas encore été réalisée à ce jour), permettent de gagner un ordre de grandeur. On atteint ainsi une zone où les effets, même s'ils existent, sont petits. Toutefois, je montrerai dans la section suivante qu'il est pour cela plus avantageux de se placer à grand désaccord.

Les expériences de refroidissement évaporatif menées à Boulder ont par ailleurs permis d'atteindre la condensation de Bose-Einstein [63]. Cette condensation a été détectée à partir d'atomes piégés, par une méthode de temps de vol : on éteint le piège, on laisse le nuage s'étaler pendant 60 ms, puis on sonde par absorption ; ce n'est donc pas une mesure *in situ* des atomes du condensat, même si elle

fonctionne très bien. L'expérience de Houston [64] mesure un signal de diffusion directement à partir des atomes du condensat. Mais il ne s'agit pas réellement d'un signal d'effets collectifs.

La détection d'effets collectifs sur les atomes, par mesure d'indice, serait quant-à elle beaucoup moins efficace. Même si les variations d'indice sont plus importantes au voisinage de la condensation, il est difficile (du moins dans le régime de faible densité) de mesurer expérimentalement un déphasage (ou une absorption), en faisant varier la température mais en gardant constants les autres paramètres, notamment la densité qui est toujours très difficile à contrôler. Or, des fluctuations de 10 % sur la densité induiraient des variations d'indice plus importantes que les effets que nous voudrions mettre en évidence, et ce même à la température correspondant à la condensation de Bose-Einstein.

On peut toutefois imaginer une expérience permettant de contourner cette difficulté. Elle consiste à utiliser deux faisceaux de même mode spatial (ceci peut être réalisé à l'aide d'un trou de filtrage), mais de polarisations orthogonales et de désaccords différents. Ces deux faisceaux sont séparés après le milieu atomique, ce qui permet de mesurer leurs déphasages respectifs, et d'en faire le rapport. On élimine de cette façon la plus grande partie des fluctuations de densité (puisque les 2 faisceaux ont interagi avec les mêmes atomes). Par contre, les effets collectifs apparaissant lorsque l'on fait varier la température ne seront pas éliminés. En effet, sur une courbe comme la figure IV.2, la température à laquelle commence la variation (*i.e.* le seuil d'apparition des effets collectifs) dépend du désaccord. Par conséquent, dans le cas de l'expérience que je décris ici, l'un des deux déphasages va varier avant l'autre, et une variation va apparaître sur le rapport des deux signaux. L'effet sera particulièrement visible si le désaccord de l'un des faisceaux est grand devant Γ, tandis que l'autre est de l'ordre de Γ (voir la section suivante).

Une autre possibilité est de regarder autre chose qu'un signal d'indice. Nous étions en fait gênés par la présence du terme d'ordre 1 en densité. Pour pouvoir observer des effets quantiques collectifs, il faut fabriquer un signal dans lequel le terme d'ordre 2 sera le terme dominant. Au chapitre V, nous verrons que la mesure de la section efficace différentielle de diffusion constitue un bon candidat, à condition de sonder la lumière diffusée dans une direction de polarisation orthogonale à la polarisation incidente. D'autres solutions seraient aussi envisageables (envoi de deux fréquences de désaccord opposé et comparaison électronique de leurs déphasages, mesure de l'effet Faraday à désaccord nul, etc.).

c) Mesure d'indice à grand désaccord

Lorsque l'on sonde les atomes avec un laser de désaccord (positif) $\delta \gg \Gamma$, la variation en fonction de T, et donc les effets collectifs, apparaissent pour des températures plus élevées. Pour s'en convaincre, il faut revenir au raisonnement que j'ai fait à la page 213 (davantage de détails seront également données au paragraphe IV.3.*a*, p. 278). Du fait de l'interaction dipôle-dipôle, il existe une

une distance inter-atomique r_* pour laquelle le laser est résonnant, définie par

$$\frac{\Gamma c^3}{\omega_A^3 r_*^3} = \delta .$$

Ce sont les atomes qui « voient » le laser de façon résonnante qui contribuent le plus à l'indice. Lorsque $\delta \to +\infty$, ce sont donc des paires d'atomes de plus en plus proches qui interviennent. Tout se passe comme si l'on « sondait » la distribution de paire $\varphi(r)$ pour des valeurs de r voisines de 0. Or, d'après la figure III.3 (p. 249), $\varphi(r) \simeq 1$ au voisinage de 0, même à des températures bien supérieures à la température de condensation, d'où l'effet attendu. Quantitativement, la température d'apparition des effets quantiques collectifs doit être (à un facteur numérique multiplicatif près)

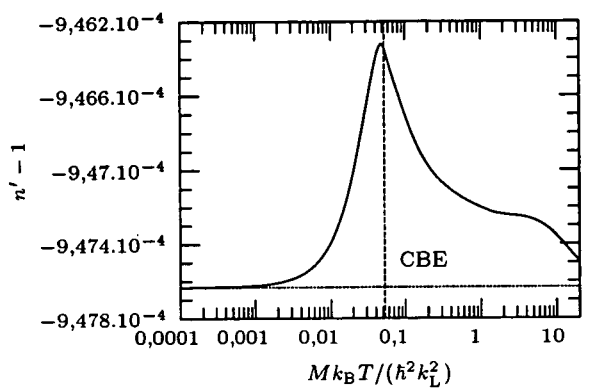
$$k_B T_{\substack{\text{effets} \\ \text{collectifs}}} = \left(\frac{\delta}{\Gamma}\right)^{2/3} \hbar\omega_{\text{rec}} . \qquad \text{(IV.1)}$$

La figure IV.3 confirme effectivement nos attentes: pour un désaccord de quelques dizaines de Γ, les effets collectifs apparaissent à des températures bien supérieure à la température de recul. Néanmoins, l'amplitude des variations est aussi beaucoup plus faible.

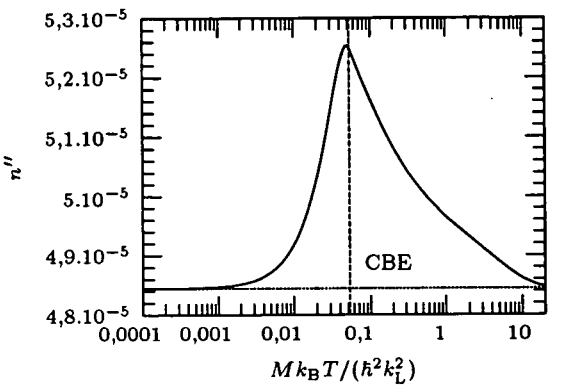
2. Précisions sur l'approximation de Born

Le but de cette section est de comparer le résultat (III.13) de notre calcul d'indice avec le calcul de diffusion dans le cadre de l'approximation de Born que j'avais présenté au chapitre I (§ I.1, p. 200). Nous pourrons en déduire si la prise en compte des interactions entre atomes, réalisée au chapitre III, était vraiment utile.

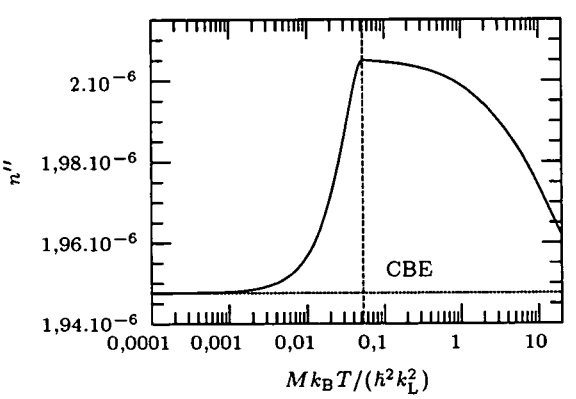
Tout d'abord les deux études ne calculent pas la même quantité. On peut toutefois comparer la partie imaginaire de l'indice de réfraction avec la section efficace totale de diffusion, grâce au théorème optique, que je rappellerai au paragraphe IV.2.*a*. Muni de ce théorème, on s'attend à ce que le calcul dans le cadre de l'approximation de Born redonne partiellement le résultat (III.13) : on pense retrouver le terme d'ordre le plus bas et le terme statistique (la première intégrale), mais pas la 2^e intégrale qui est reliée aux interactions. Nous verrons qu'en fait, la coïncidence attendue n'a lieu qu'à grand désaccord, et nous expliquerons pourquoi à l'aide de considérations diagrammatiques. Moyennant une légère amélioration du calcul de diffusion dans le cadre de l'approximation de Born, on peut néanmoins étendre la concordance des deux résultats à un désaccord quelconque. Enfin (§ IV.2.*e*, p. 276), je tracerai des courbes montrant que l'approximation de Born donne un bon résultat qualitatif, mais que la prise en compte des interactions telles que nous l'avons faite était bien nécessaire pour obtenir un résultat correct.



(a) *Partie réelle, $\delta = 10\Gamma$.*



(b) *Partie imaginaire, $\delta = 10\Gamma$.*



(c) *Partie imaginaire, $\delta = 50\Gamma$.*

FIG. IV.3 - *Indice de réfraction en fonction de la température, à grand désaccord, pour des bosons (trait plein) et des atomes discernables (pointillés). La densité vérifie $\rho_0 \lambda_L^3 = 0{,}5$. Je n'ai pas pu évaluer la partie réelle de l'indice pour $\delta = 50\Gamma$ (la variation de l'indice est trop faible comparée à la précision du programme).*

a) Le théorème optique

Le théorème optique se déduit du fait que la matrice $\mathcal{S}$ est unitaire. On utilise l'expression de $\mathcal{S}$ [119, p. 31 formule (30)] ($|\psi_{\rm inc}\rangle$ et $|\psi_{\rm dif}\rangle$ sont les états incident et diffusé discrétisés, d'énergie $E_{\rm inc}$ et $E_{\rm dif}$) :

$$\langle\psi_{\rm dif}|\mathcal{S}|\psi_{\rm inc}\rangle = \delta^{\rm c}(\psi_{\rm inc},\psi_{\rm dif}) - 2i\pi\delta(E_{\rm dif}-E_{\rm inc})\langle\psi_{\rm dif}|\mathcal{T}(E_{\rm inc})|\psi_{\rm inc}\rangle\,, \quad \text{(IV.2)}$$

où $\delta^{\rm c}$ est le symbole de Kronecker (égal à 1 si ses deux arguments sont égaux, 0 sinon). En écrivant que $\langle\psi_{\rm inc}|\mathcal{S}^{\dagger}\mathcal{S}|\psi_{\rm inc}\rangle = 1$, et en utilisant une relation de fermeture, on déduit que

$$2\Im{\rm m}\langle\psi_{\rm inc}|\mathcal{T}(E_{\rm inc})|\psi_{\rm inc}\rangle = 2\pi\sum_{\psi_{\rm dif}}\delta(E_{\rm dif}-E_{\rm inc})\left|\langle\psi_{\rm dif}|\mathcal{T}(E_{\rm inc})|\psi_{\rm inc}\rangle\right|^2 . \quad \text{(IV.3)}$$

On relie l'élément de la matrice $\mathcal{T}$ à l'indice de réfraction en utilisant la relation (B.28) (annexe B) que je rappelle ici :

$$n-1 = \lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{L\to\infty}\left(\frac{L}{a}\times\frac{\langle\psi_{\rm inc}|\mathcal{T}(\hbar\omega_{\rm L}+i\varepsilon)|\psi_{\rm inc}\rangle}{\hbar\omega_{\rm L}}\right), \quad \text{(IV.4)}$$

$\omega_{\rm L}$ étant la longueur d'onde du photon incident ($|\psi_{\rm inc}\rangle = |\vec{k}_{\rm L}\vec{\varepsilon}_{\rm L}\rangle$). La formule (IV.4) est valable lorsque le milieu remplit une lamelle d'épaisseur a et de section L^2.

D'autre part, en intégrant l'expression (I.1) de la section efficace différentielle de diffusion sur l'angle solide Ω, on trouve l'expression de la section efficace totale de diffusion :

$$\sigma_{\rm tot} = \frac{2\pi}{\hbar}\sum_{\psi_{\rm dif}}\delta(E_{\rm inc}-E_{\rm dif})\left|\langle\psi_{\rm dif}|\mathcal{T}(E_{\rm inc})|\psi_{\rm inc}\rangle\right|^2\times\frac{1}{\Phi_{\rm inc}}. \quad \text{(IV.5)}$$

Le flux incident de photons vaut $\Phi_{\rm inc} = c/V$, où V est le volume de quantification ($V = L^3$).

En comparant les équations (IV.3), (IV.4), et (IV.5), on arrive au théorème optique :

$$\boxed{\Im{\rm m}(n) = \frac{\sigma_{\rm tot}}{2k_{\rm L}L^2a}\,.} \quad \text{(IV.6)}$$

b) Comparaison des deux résultats

i) Calcul de la section efficace totale de diffusion

Je vais donc intégrer l'expression (I.8) sur l'angle de diffusion (et effectuer une sommation sur la polarisation du photon diffusé). Tout d'abord, je donne

l'expression de la section différentielle de diffusion d'un photon quasi-résonnant $\vec{k}_L\vec{\varepsilon}_L$ sur un atome unique (on l'obtient facilement en utilisant la matrice $\mathcal{T}$) :

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{1\text{ atome}}\left(\vec{k}_L\vec{\varepsilon}_L \longrightarrow \vec{k}_d\vec{\varepsilon}_d\right) = \frac{9c^2}{16\omega_A^2}\frac{\Gamma^2}{\delta^2+\frac{\Gamma^2}{4}}\left|\vec{\varepsilon}_L^{\,*}\cdot\vec{\varepsilon}_d\right|^2 , \qquad \text{(IV.7)}$$

$\vec{k}_d\vec{\varepsilon}_d$ étant le photon diffusé, et $\delta = \omega_L - \omega_A$ le désaccord. En intégrant sur Ω et sommant à chaque fois sur la polarisation $\vec{\varepsilon}_d$, on trouve

$$\left(\sigma_{tot}\right)_{1\text{ atome}} = \frac{3\pi c^2}{2\omega_A^2}\frac{\Gamma^2}{\delta^2+\frac{\Gamma^2}{4}}. \qquad \text{(IV.8)}$$

J'oublierai dans la suite la contribution du 2e terme de l'équation (I.8), qui de toute façon ne contient pas d'effets statistiques. Je me suis en effet placé dans le cas d'un milieu laminaire de dimensions transverses infinies, et le terme vaut alors simplement

$$8\pi^3\rho_0\delta^{(3)}\left(\vec{k}_d - \vec{k}_L\right) .$$

Si on l'intègre sur l'angle solide, on trouve une contribution infinie. Cela vient du fait qu'il faudrait, pour traiter correctement le problème, resommer certains diagrammes de diffusion multiple (plus de détails seront donnés au paragraphe IV.2.*c.i.* Voir aussi la remarque faite à ce sujet dans l'annexe B, p. 367).

Venons-en maintenant au 3e terme de (I.8), que je noterai $(d\sigma/d\Omega)_{stat}$. Pour l'intégrer sur l'angle solide, j'utilise la relation

$$\int d\Omega \sum_{\vec{\varepsilon}_d} = \frac{(2\pi)^3}{V}\frac{1}{k_L^2}\sum_{\vec{k}_d\vec{\varepsilon}_d}\delta\left(\|\vec{k}_d - \vec{k}_L\|\right) .$$

Cela donne

$$\left(\sigma_{tot}\right)_{stat} = \frac{9c^2}{16\omega_A^2}\frac{\Gamma^2}{\delta^2+\frac{\Gamma^2}{4}}(2\pi)^3 N\frac{\rho_0}{k_L^3}\int d^3\vec{r}\, e^{-i\vec{k}_L\cdot\vec{r}}\varphi(\vec{r})$$
$$\times \underbrace{\frac{1}{V}\sum_{\vec{k}_d\vec{\varepsilon}_d}\omega_d\vec{\varepsilon}_L^{\,*}\cdot\vec{\varepsilon}_d\otimes\vec{\varepsilon}_d^{\,*}\cdot\vec{\varepsilon}_L e^{i\vec{k}_d\cdot\vec{r}}\delta(\omega_d-\omega_L)}_{\Sigma} . \qquad \text{(IV.9)}$$

La somme Σ figurant dans la deuxième ligne de (IV.9) est réelle grâce à la symétrie $\vec{k}_d \to -\vec{k}_d$. On utilise en outre l'identité

$$\delta(\omega_L-\omega_d) = \lim_{\varepsilon'\to 0} -\frac{1}{\pi}\Im m\left(\frac{1}{\omega_L-\omega_d+i\varepsilon'}\right) .$$

On reconnaît alors dans la somme la partie résonnante du potentiel d'interaction $\vec{\bar{g}}(\vec{r})$ qui est défini par l'équation (A.34) (annexe A). Je rappelle que le calcul de diffusion a été fait dans le cadre de l'approximation du champ tournant. Or, avec cette approximation, nous savons que l'expression du potentiel $\vec{\bar{g}}$ se ramène à sa partie résonnante[1] ; nous pouvons donc faire l'assimilation :

$$\Sigma \simeq \frac{2}{\pi}\Im\mathrm{m}\left(\vec{\varepsilon}_{\mathrm{L}}^{\,*}\cdot\vec{\bar{g}}(\vec{r})\cdot\vec{\varepsilon}_{\mathrm{L}}\right) . \tag{IV.10}$$

On obtient finalement l'identité

$$\boxed{\sigma_{\mathrm{tot}} \simeq \frac{3\pi c^2}{2\omega_{\mathrm{A}}^2}\frac{\Gamma^2}{\delta^2+\dfrac{\Gamma^2}{4}}N\left[1+\frac{6\pi\rho_0 c^3}{\omega_{\mathrm{A}}^3}\int \mathrm{d}^3\vec{r}\,e^{-i\vec{k}_{\mathrm{L}}\cdot\vec{r}}\Im\mathrm{m}\left(\vec{\varepsilon}_{\mathrm{L}}^{\,*}\cdot\vec{\bar{g}}(\vec{r})\cdot\vec{\varepsilon}_{\mathrm{L}}\right)\varphi(\vec{r})\right] .} \tag{IV.11}$$

ii) Comparaison et interprétation

On peut vérifier que dans la limite $|\delta| \gg \Gamma$, l'équation (IV.11) se ramène à

$$\sigma_{\mathrm{tot}} = 2k_{\mathrm{L}}V\Im\mathrm{m}\left(\frac{\alpha\rho_0}{2}+\frac{\alpha^2\rho_0^2}{2}\int \mathrm{d}^3\vec{r}\,e^{-i\vec{k}_{\mathrm{L}}\cdot\vec{r}}\vec{\varepsilon}_{\mathrm{L}}^{\,*}\cdot\vec{\bar{g}}(\vec{r})\cdot\vec{\varepsilon}_{\mathrm{L}}\right) . \tag{IV.12}$$

On reconnaît que l'équation (IV.12) redonne, via le théorème optique (IV.6), deux des termes de l'indice de réfraction tel qu'on le déduit de l'équation (III.13) : le terme dominant en densité d'une part (terme à un atome), et le terme d'échange d'autre part (effets statistiques). Les autre termes sont absents parce que l'on a négligé, dans le calcul de diffusion, les diagrammes de diffusion multiple.

Malheureusement, lorsqu'on se place à un désaccord plus petit, la formule (IV.12) n'est plus valable et on n'arrive plus à relier simplement l'expression de la section efficace totale de diffusion avec celle de la partie imaginaire de l'indice. Plus exactement, c'est la partie statistique de (IV.11) que l'on n'arrive plus à relier (alors que ça fonctionne toujours correctement avec le premier terme). Le théorème optique est pourtant valable à tout désaccord. L'erreur vient du fait que nous n'avons pas pris en compte les mêmes diagrammes dans les deux calculs.

c) Comparaison des deux calculs en termes de diagrammes

i) Le théorème optique en termes de diagrammes

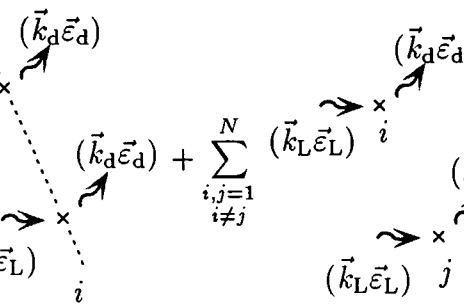
Les calculs que nous avons effectués ne sont bien sûr pas des calculs exacts. Pour l'indice de réfraction comme pour la section efficace de diffusion, de nom-

1. Je suis un peu rapide en faisant cette affirmation : en effet, si on ôte les termes antirésonnants et le terme de contact de l'expression du potentiel $\vec{\bar{g}}$, on s'aperçoit que celle-ci diverge. Il aurait donc fallu refaire le calcul de diffusion sans l'approximation du champ tournant. Toutefois, cela n'aurait rien apporté de plus à la physique du problème.

breux diagrammes ont été négligés afin de rendre faisables les calculs. Pour pouvoir appliquer le théorème optique et comparer une section efficace de diffusion avec un indice, il faut donc que les mêmes termes aient été pris en compte. Or il n'est pas toujours évident de reconnaître les termes d'un calcul à l'autre. Nous allons voir ici qu'il est possible d'y parvenir en « repliant » les diagrammes du calcul de diffusion de façon à obtenir ceux du calcul de l'indice.

Le calcul d'indice en termes de diagrammes a été présenté sommairement au chapitre II (§ II.1, p. 216), et détaillé dans l'annexe B. Par contre, j'ai été très rapide dans la présentation du calcul de diffusion. Une section différentielle de diffusion s'exprime à l'aide du carré d'un élément de la matrice $\mathcal{T}$; chacun des deux termes de ce carré peut être développé en diagrammes. Un diagramme de diffusion est donc un diagramme à deux « voies » parallèles, chaque voie correspondant à l'un des termes du carré [213, 214]. Pour nous fixer les idées, prenons par exemple le cas d'atomes discernables, et négligeons la diffusion multiple. On a la relation[1]

$$\sum_{\{\vec{P}\,'\}} \left|\left\langle \psi_{\text{dif}} \left| \mathcal{T}(E_{\text{inc}}) \right| \psi_{\text{inc}} \right\rangle\right|^2_{\text{disc.}} \simeq$$



$$\delta^{\text{c}}(\vec{k}_{\text{d}} - \vec{k}_{\text{L}}),$$

(IV.13)

où $|\psi_{\text{inc}}\rangle = |\{f, \vec{P}_i\}_{i=1,\ldots,N}, \vec{k}_{\text{L}}\vec{\varepsilon}_{\text{L}}\rangle$ et $|\psi_{\text{dif}}\rangle = |\{f, \vec{P}_i\,'\}_{i=1,\ldots,N}, \vec{k}_{\text{d}}\vec{\varepsilon}_{\text{d}}\rangle$. Les impulsions sont discrétisées, et δ^{c} est le symbole de Kronecker, traduisant la conservation de l'impulsion des atomes i et j.

Dans le premier diagramme de (IV.13), le photon diffuse sur le même atome dans chacune des deux voies. Ce diagramme correspond au premier terme de la formule (I.8) (terme en N). Le deuxième diagramme, où le photon ne diffuse pas sur le même atome, fournit le terme en N^2 dans le résultat (I.8). Rappelons que, pour des atomes discernables, $\varphi = 0$ et le 3$^{\text{e}}$ terme de (I.8) est nul.

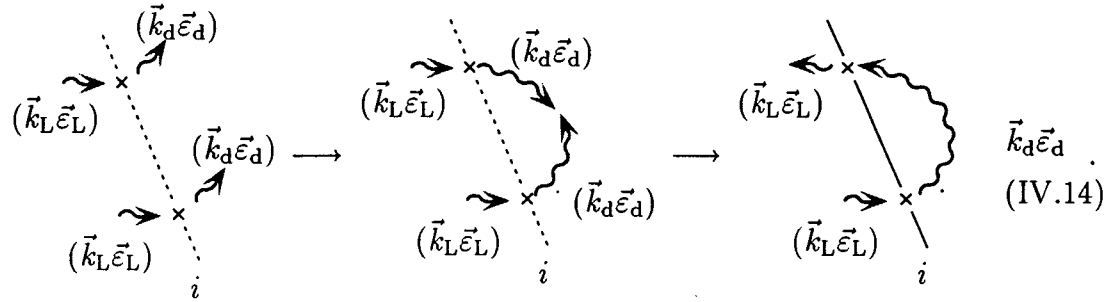
Pour passer d'une section efficace différentielle de diffusion à un indice de réfraction, il faut effectuer une sommation sur le photon $\vec{k}_{\text{d}}\vec{\varepsilon}_{\text{d}}$. Cela revient, comme on le voit dans la formule (IV.14), à refermer le diagramme sur lui-même pour construire un diagramme à une voie, analogue à ceux utilisés dans le calcul d'indice. De même, pour passer d'un indice de réfraction à une section efficace de diffusion, il faut ouvrir les diagrammes au niveau d'un photon émis (ce peut être un photon échangé entre 2 atomes, mais aussi un photon émis par un atome et

1. J'invite le lecteur à se reporter à la table B.1, p. 354 (annexe B) où sont expliquées les conventions que j'emploie à propos des diagrammes de Feynman.

aussitôt réabsorbé par ce même atome). Ce photon deviendra le photon $\vec{k}_d\vec{\varepsilon}_d$. Si l'on veut une section efficace différentielle de diffusion, on n'effectue plus de sommation sur ce photon.

On vérifie alors que le théorème optique est applicable si et seulement si l'ouverture/fermeture des diagrammes fonctionne dans les deux sens : en refermant les diagrammes du calcul de diffusion, on doit obtenir tous les diagrammes du calcul d'indice et eux seuls ; et en ouvrant les diagrammes du calcul d'indice à tous les endroits où c'est possible, on doit obtenir les diagrammes du calcul de diffusion et eux seuls.

Pour nous fixer les idées, appliquons ceci à la formule (IV.13). L'opération de fermeture du premier diagramme donne :



(IV.14)

On sait que le dernier diagramme de la formule (IV.14) vaut simplement $\sum_{i=1}^{N}$ $(\vec{k}_L\vec{\varepsilon}_L)$ → × → $(\vec{k}_L\vec{\varepsilon}_L)$ (× en i) : la croix signifie en effet (voir table B.1) que je resomme tous les photons émis et réabsorbés par l'atome (obtenant ainsi le déplacement de Lamb et la largeur naturelle de l'état excité). Le photon supplémentaire $\vec{k}_d\vec{\varepsilon}_d$ n'est donc qu'un terme de plus dans cette sommation. On reconnaît donc l'un des termes intervenant dans l'expression de (II.8) de l'indice à l'ordre le plus bas en densité.

Si maintenant on referme le 2e diagramme de (IV.13), on obtient

$$\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{N} (\vec{k}_L\vec{\varepsilon}_L) \rightarrow \times_i \rightsquigarrow \times_j (\vec{k}_L\vec{\varepsilon}_L) \rightarrow, \qquad \text{(IV.15)}$$

avec $\vec{k}_d = \vec{k}_L$ par conservation de l'impulsion (si le milieu est infini), et $\vec{\varepsilon}_d = \vec{\varepsilon}_L$ par conservation du moment cinétique. Ce diagramme figure aussi dans la sommation (II.8).

Remarque : la règle d'ouverture et de fermeture que j'ai énoncée plus haut ne semble pas fonctionner dans les deux sens. En effet, seuls les diagrammes de (II.8) impliquant un ou deux atomes peuvent, après ouverture, conduire à des termes de l'expression (IV.13). Cela n'est pas le cas des termes impliquant 3 atomes ou plus. Autrement dit, il semble qu'il manque des diagrammes dans l'équation (IV.13).

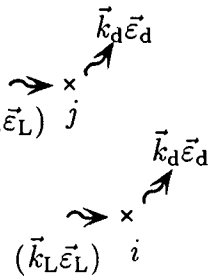
La situation est en fait plus complexe. Les diagrammes doivent être classés en deux types : réductibles et irréductibles. Les diagrammes réductibles peuvent être séparés en deux en coupant une ligne de photon. Par exemple, le 2e diagramme de (II.8) (qui fait intervenir un atome) est irréductible, alors que le 3e (à deux atomes) est réductible. Lorsque l'on compare un diagramme d'indice et un diagramme de diffusion par le schéma de fermeture et d'ouverture que je viens d'exposer, il faut que les deux diagrammes soient irréductibles. Je n'expliquerai pas ici l'origine de cette situation, car je n'ai pas encore introduit certaines notions indispensables. Quelques précisions seront données au paragraphe V.2.*b.vii*, p. 318.

ii) Comparaison du terme statistique

Le calcul de diffusion du paragraphe (I.1) (p. 200) prend en compte un *terme d'échange*, dépendant de la statistique quantique des atomes, et que l'on peut écrire sous la forme

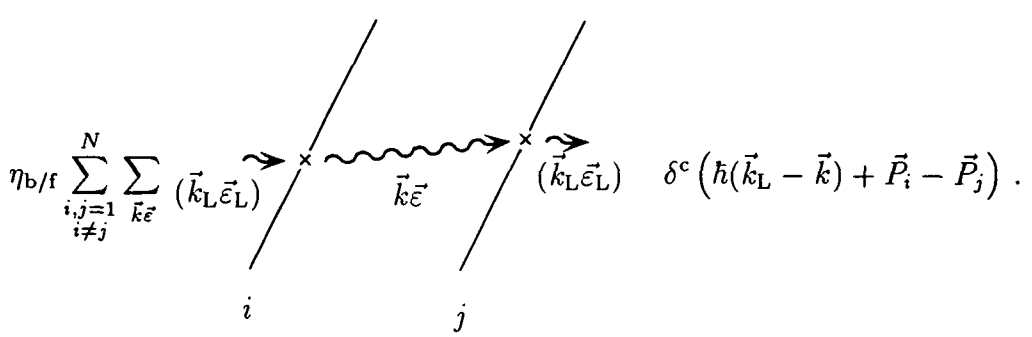
$$\sum_{\{\vec{P}'\}} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^{N} \left\langle \psi_{\text{dif}} \middle| T(E_{\text{inc}}) \middle| \psi_{\text{inc}} \right\rangle \left\langle \psi_{\text{inc}} \middle| \mathfrak{P}_{ij} T(E_{\text{inc}}) \middle| \psi_{\text{dif}} \right\rangle$$

$$\simeq \eta_{\text{b/f}} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^{N}$$



$$\delta^{\text{c}}\left(\hbar(\vec{k}_{\text{L}} - \vec{k}_{\text{d}}) + \vec{P}_i - \vec{P}_j\right), \quad \text{(IV.16)}$$

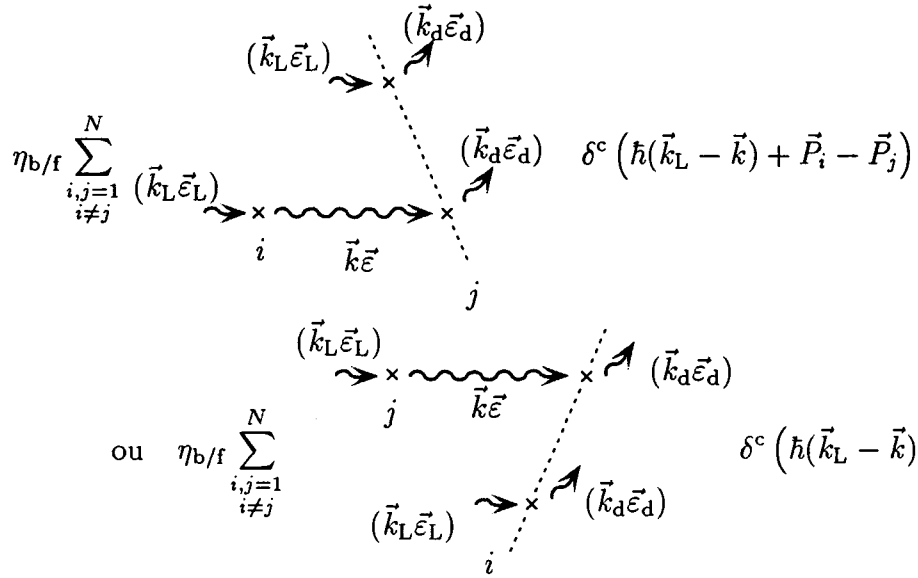
la conservation de l'impulsion se faisant ici *via* l'échange des 2 atomes i et j ($\mathfrak{P}_{ij}$ est l'opérateur d'échange). Si on regarde maintenant le terme du calcul d'indice auquel je souhaite le comparer, on trouve :



(IV.17)

Ce diagramme peut être ouvert sur le photon $\vec{k}\vec{\varepsilon}$, donnant naissance au diagramme (IV.16). Mais on peut aussi l'ouvrir sur l'un des photons « à l'intérieur » de $\times_i$ ou $\times_j$ (photon émis par l'un des atomes excité et aussitôt réabsorbé). On obtient

alors



(IV.18)

Ces deux diagrammes sont absents du calcul de diffusion effectué au paragraphe I.1, p. 200. En outre, ce sont des diagrammes irréductibles, à cause de l'échange entre i et j. Nous ne sommes donc pas en présence du même problème qu'à la section précédente. Le théorème optique ne s'applique donc pas au résultat (IV.11).

d) Extension de la méthode utilisant l'approximation de Born

Pour effectuer un calcul de diffusion correspondant, *via* le théorème optique, au résultat (III.13) de l'indice de réfraction (non compris la 2e intégrale figurant dans l'expression de $\mathcal{A}$, qui est liée aux interactions dipôle/dipôle entre les 2 atomes d'une paire, dont je ne tiens pas compte ici), il faut prendre en compte les deux diagrammes (IV.18). Je vais montrer ici qu'il existe une façon « physique » de le faire : il faut pour cela considérer que l'énergie de l'état excité d'une atome (resp. sa largeur naturelle) n'est plus $\hbar\omega_{\rm A}$ (resp. $\hbar\Gamma$) mais est modifiée par l'indiscernabilité des atomes [171].

Pour cela, on pose

$$\Delta E_{\rm S}+i\hbar\frac{\Gamma_{\rm S}}{2}=\sum_{\psi_f}\sum_{\vec{k}\vec{\varepsilon}}\frac{\left\langle\psi_e,\mathbf{0}|\mathcal{V}|\psi_f,\vec{k}\vec{\varepsilon}\right\rangle\left\langle\psi_f,\vec{k}\vec{\varepsilon}|\mathcal{V}|\psi_e,\mathbf{0}\right\rangle}{\hbar\omega_{\vec{k}}-\hbar\omega_{\rm A}+i\varepsilon}\,, \tag{IV.19}$$

où $|\psi_f\rangle$ est un état où tous les atomes sont dans l'état fondamental et où l'impulsion de chaque atome est fixée, et $|\psi_e\rangle$ un état à un atome excité, dans l'état excité de polarisation $\vec{\varepsilon}_{\rm L}$. Si les atomes sont discernables, on prend $|\psi_e\rangle = e^{i\vec{k}_{\rm L}\cdot\vec{R}_i}|i,\vec{e}\cdot\vec{\varepsilon}_{\rm L},\{j,f\}_{j\neq i}\rangle$, et on trouve simplement

$$\Delta E_{\rm S}+i\hbar\frac{\Gamma_{\rm S}}{2}=\Delta E_{\rm A}+i\hbar\frac{\Gamma}{2}\,. \tag{IV.20}$$

Avec l'indiscernabilité (pour des bosons), on prend

$$|\psi_e\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^{N} e^{i\vec{k}_L \cdot \vec{R}_i} \left| i, \vec{e} \cdot \vec{\varepsilon}_L, \{j, f\}_{j \neq i} \right\rangle , \tag{IV.21}$$

où je rappelle que, si $\vec{P}_i$ est l'impulsion de l'atome i, $e^{i\vec{k}_L \cdot \vec{R}_i} |i, \vec{e} \cdot \vec{\varepsilon}_L, \vec{P}_i\rangle = |i, \vec{e} \cdot \vec{\varepsilon}_L, \vec{P}_i + \hbar\vec{k}_L\rangle$. Après quelques lignes de calcul sans difficulté, on obtient

$$\Delta E_S + i\hbar\frac{\Gamma_S}{2} = \Delta E_A + i\hbar\frac{\Gamma}{2} - \rho_0 \frac{d^2}{\varepsilon_0} \underbrace{\int d^3\vec{r}\, \vec{\varepsilon}_L^{\,*} \cdot \vec{\vec{g}}(\vec{r}) \cdot \vec{\varepsilon}_L \varphi(\vec{r}) e^{-i\vec{k}_L \cdot \vec{r}}}_{\mathcal{I}} , \tag{IV.22}$$

d étant le dipôle atomique réduit.

Si maintenant, on remplace dans le dénominateur de l'équation (IV.11) le déplacement de Lamb et la largeur naturelle de l'état excité par leurs valeurs corrigées issues de l'équation (IV.22), on obtient

$$\boxed{\sigma_{tot} \simeq \frac{3\pi c^2}{2\omega_A^2} \frac{\Gamma^2}{\left| \delta + i\frac{\Gamma}{2} - \rho_0 \frac{3\pi\Gamma\hbar c^3}{\omega_A^3} \mathcal{I} \right|^2} N \left[1 + \frac{6\pi\rho_0 c^3}{\omega_A^3} \Im\mathrm{m}(\mathcal{I}) \right] .} \tag{IV.23}$$

On peut vérifier que l'équation (IV.23) redonne, *via* le théorème optique et à l'ordre 2 en densité, les deux premiers termes du résultat (III.13) de l'indice de réfraction.

Remarques :

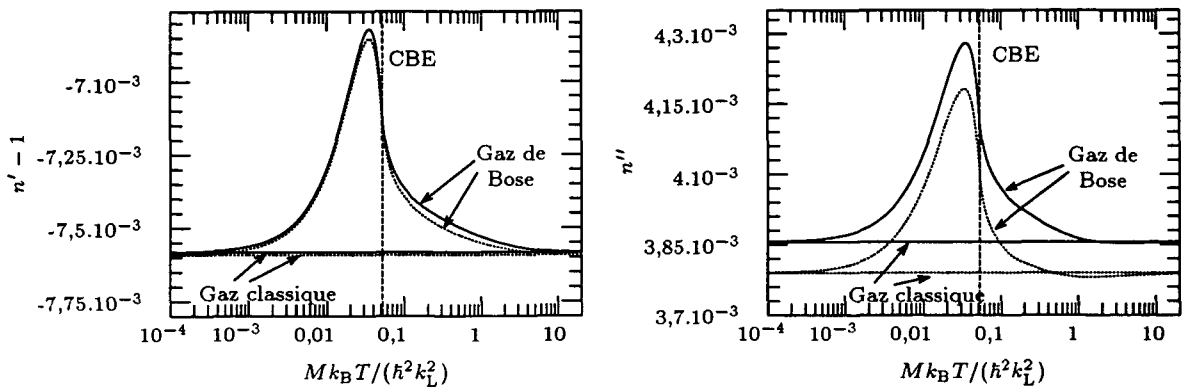
– il est possible d'interpréter physiquement le fait que la durée de vie de l'état excité est modifiée par la statistique quantique. Lorsqu'un atome se désexcite, il est susceptible de retomber dans une classe d'impulsion déjà occupée par d'autres atomes. On doit donc s'attendre à ce que l'émission spontanée soit favorisée dans le cas des bosons, et au contraire défavorisée dans le cas des fermions ;

– la formule (IV.23) ne permet pas de retrouver la dernière intégrale du résultat (III.13) ; il faudrait pour cela tenir compte de la diffusion multiple (le photon émis par désexcitation peut être absorbé par un autre atome puis réémis, processus qui vient modifier la durée de vie de l'état excité et le déplacement de Lamb) ;

– la modification de Γ et de ΔE due à l'indiscernabilité des atomes peut être retrouvée par une méthode de champ moyen [187].

e) Résultats numériques

Afin d'évaluer les conséquences de l'approximation de Born, j'ai tracé sur la figure IV.4 l'indice de réfraction en fonction de la température, avec et sans



(a) *Partie réelle* (b) *Partie imaginaire*

FIG. IV.4 - *Indice de réfraction en fonction de la température, calculé avec les mêmes paramètres que pour la figure IV.2. Les courbes en continu contiennent tous les termes. Les courbes en pointillés ne tiennent compte que de la correction correspondant à l'approximation de Born (terme d'ordre 1 et première intégrale de la formule (III.31)).*

l'approximation de Born. On constate que l'approximation de Born donne le bon résultat qualitativement, mais que les corrections dues aux interactions sont du même ordre de grandeur que les effets collectifs. Il était donc bien nécessaire d'en tenir compte.

3. Développement à grand désaccord du résultat (III.13)

Je vais présenter dans ce paragraphe un développement asymptotique du résultat (III.13) de l'indice de réfraction à l'ordre 2 en densité. Ce développement, que l'on doit à Gora Shlyapnikov, est valable à grand désaccord ($|\delta| \gg \Gamma$)[1]. Il nous permettra notamment d'apporter des précisions sur le petit paramètre de densité (§ IV.3.*b*).

1. Le calcul qui va suivre n'est en fait valable qu'à grand désaccord positif. Nous savons en effet que le potentiel d'interaction entre 2 atomes proches dont l'un est excité peut être répulsif ou bien attractif, selon l'état interne dans lequel se trouve la paire (voir p. ex. la figure I.7, p. 213). Dans le cas où le potentiel est attractif, il tend à confiner l'un des atomes au voisinage de l'autre, et par conséquent, il existe des états liés. Si le désaccord du laser est négatif, il peut entrer en résonance avec la transition conduisant vers l'un de ces états liés. Des effets physiques complexes, que je ne prends pas en compte mes calculs, peuvent se produire.

a) Principe du développement et calcul

Pour effectuer le développement, je suppose que la 2e intégrale de la formule (III.13)[1] contribue essentiellement là où son dénominateur s'annule, c'est-à-dire au voisinage de la distance r_* (définie par la formule (I.26)), qui est la distance à laquelle une paire d'atomes voit la lumière de façon résonnante. Je rappelle que cette distance r_* vérifie

$$3\pi\Gamma\lambda_A^3 g_\ell(r_*) \approx \pm\left(\delta + i\frac{\Gamma}{2}\right), \tag{IV.24}$$

(où $\ell = /\!/, \perp$). Lorsque $\delta \gg \Gamma$ ($\delta > 0$), alors $k_L r_* \ll 1$. On peut donc remplacer l'exponentielle complexe $\exp(i\vec{k}_L \cdot \vec{r})$ présente dans l'intégrale par 1. Je remplace aussi la fonction $\varphi(r)$ par sa valeur au point r_*. Cela donne, une fois faite l'intégration angulaire et en tenant compte du terme de contact :

$$\mathcal{A} \underset{\delta/\Gamma\to+\infty}{\sim} \left[-\frac{\alpha\rho_0}{3} - \pi\rho_0 \int \mathrm{d}r\, r^2 \left(\frac{4}{3}\frac{\alpha^2 g_{/\!/}^2(r)}{1-\alpha g_{/\!/}(r)} + \frac{8}{3}\frac{\alpha^2 g_\perp^2(r)}{1-\alpha g_\perp(r)}\right)\right]\big(1+\varphi(r_*)\big) + 1^{\text{re}}\text{ intégrale de (III.13).} \tag{IV.25}$$

On peut également remplacer l'expression de $g_{/\!/,\perp}$ déduite des équations (III.33) et (III.34), par sa valeur asymptotique en $1/(k_L^3 r^3)$. L'équation (IV.25) peut alors être calculée exactement (attention : on ne doit remplacer α par sa valeur asymptotique (qui est réelle) qu'à la fin du calcul). Voici le résultat finalement obtenu

$$\boxed{\mathcal{A} \underset{\delta/\Gamma\to+\infty}{\sim} \frac{2\pi}{3}\frac{\rho_0}{k_A^3}\frac{\Gamma}{\delta}\big(1+\varphi(r_*)\big)\left(\frac{3}{2} - \ln 2 + i\pi\right) + 1^{\text{re}}\text{ intégrale de (III.13).}} \tag{IV.26}$$

Remarque : l'intérêt de ce développement est qu'il prévoit le comportement à grand désaccord du signal, tel qu'il est montré par la figure IV.3 (*i.e.* les effets collectifs apparaissent à une température d'autant plus élevée que le désaccord est grand)[2]. La 1re intégrale de (III.13) présente ne présente pas *a priori* cette propriété (le pic correspondant ne se déplace pas en fonction du désaccord). Elle décroît en $1/\delta$ quand $\delta \to +\infty$, c'est-à-dire de la même façon que le 1er terme de (IV.26). On ne peut la négliger que si $\rho_0 \Lambda_{DB}^3 \ll 1$.

1. Je ne sais pas développer la première intégrale de (III.13).

2. Si l'on voulait considérer la limite (IV.26) au sens mathématique, il conviendrait d'y remplacer $\varphi(r_*)$ par $\varphi(0)$. Je ne l'ai pas fait car je ne veux pas supposer que $r_* \ll \Lambda_{DB}$ (afin de pouvoir considérer le cas des hautes températures). Le résultat (IV.26) n'est alors pas tout-à-fait exact, car l'équation (IV.24) n'est qu'approchée : il conviendrait d'introduire au niveau de l'équation (IV.25) un facteur numérique devant r_*, valant $(3/2)^{1/3}$ dans la direction // et $(3/4)^{1/3}$ dans la direction $\perp$. Toutefois, la prise en compte de ces facteurs numériques alourdit le résultat (IV.26) sans rien apporter de plus au niveau de la physique.

b) Evaluation du petit paramètre de densité

Dans ce paragraphe, je vais revenir sur l'approximation de faible densité que je fais dans l'ensemble de cette étude. Je rappelle que cette hypothèse nous a permis de négliger les interactions à 3 corps. La portée des interactions étant de l'ordre de la longueur d'onde optique, on doit trouver peu d'atomes dans un cube dont le côté est de l'ordre de λ_L.

Cet argument est fort qualitatif: rien ne nous permet par exemple de dire si la condition à remplir est

$$\rho_0 \lambda_L^3 \ll 1 , \tag{IV.27}$$

ou bien

$$\rho_0 \lambda_L^3 \ll 1 . \tag{IV.28}$$

Les deux conditions (IV.27) et (IV.28) sont très différentes: la première est 250 fois plus restrictive que la seconde! Il est donc indispensable de déterminer une condition de validité précise pour le calcul.

Un moyen de s'en tirer est de vérifier *a posteriori* que le calcul était bien valable. Il suffit en effet que la contribution du terme d'ordre 1 en densité soit effectivement bien plus importante que celle d'ordre 2. On vérifie par exemple que la condition est bien vérifiée sur les courbes des figures IV.1 et IV.2, et ce bien que la condition (IV.27) ne soit pas vérifiée (rappelons que les courbes ont été tracées avec $\rho_0 \lambda_L^3 = 2$ (fig. IV.1) ou $\rho_0 \lambda_L^3 = 0{,}5$ (fig. IV.2)).

Le résultat (IV.26) nous fournit une réponse plus quantitative dans le cas des particules discernables et à grand désaccord positif. On voit que la condition à remplir est

$$\rho_0 \lambda_L^3 \frac{\Gamma}{\delta} \ll 1 \tag{IV.29}$$

(les facteurs numériques présents dans (IV.26) étant tous voisins de 1), ou encore

$$\boxed{\rho_0 r_*^3 \ll 1 ,} \tag{IV.30}$$

r_* étant la distance pour laquelle une paire d'atomes voit la lumière de façon résonnante, donnée par la formule (I.26). On constate donc que la condition (IV.30) est moins restrictive que la condition (IV.28).

4. Le rôle de l'énergie cinétique. Condition sur le désaccord

Nous avons dans tous les calculs négligé le mouvement des atomes, sans vraiment justifier cette approximation. Ce paragraphe se propose de revenir sur ce point.

Je commencerai par me limiter au terme d'ordre 1 en densité (§ IV.4.*a*). Nous verrons que le mouvement des atomes peut être négligé dès que le désaccord est supérieur à l'énergie de recul. La dépendance en température induite par l'effet Doppler est négligeable devant celle des effets collectifs dans le cas $\Gamma \gg \omega_{\text{rec}}$ correspondant aux alcalins.

Dans le paragraphe IV.4.*b*, j'étudierai l'influence de l'énergie cinétique sur les termes d'ordre 2 en densité (interactions entre atomes). Le calcul sera effectué dans le cas de bosons à température nulle, et dans la limite des grands désaccords.

a) Corrections du premier terme de l'indice induites par le mouvement des atomes

Je vais recalculer ici l'indice à l'ordre le plus bas en densité, en tenant compte de manière perturbative du mouvement des atomes.

Pour cela, j'utilise la méthode de la matrice $\mathcal{T}$ (cf. annexe B, formule (B.28) p. 359). Je me place donc en point de vue $\vec{P}$. L'élément de matrice que je calcule maintenant est $\mathcal{T}(E_i)$, avec $E_i = \hbar\omega_{\text{L}} + \sum_{i=1}^{N} \vec{P}_i^2/(2M) + i\varepsilon$. Je tiens compte du changement d'impulsion que subissent les atomes quand ils sont excités (effet Doppler et effet de recul). Dans le cas d'un état pur (*i.e.* où l'impulsion de chaque atomes est bien déterminée), on trouve facilement que

$$n = \sum_{i=1}^{N} \frac{3\pi\Gamma c^3}{2\omega_{\text{A}}^3 V \left(\tilde{\delta} + i\dfrac{\Gamma}{2} - \dfrac{\vec{P}_i \cdot \vec{k}_{\text{L}}}{M}\right)} \tag{IV.31.a}$$

$$\simeq \sum_{i=1}^{N} \frac{3\pi\Gamma c^3}{2\omega_{\text{A}}^3 V \left(\tilde{\delta} + i\dfrac{\Gamma}{2}\right)} \left\{ 1 + \frac{\vec{P}_i \cdot \vec{k}_{\text{L}}}{M\left(\tilde{\delta} + i\dfrac{\Gamma}{2}\right)} + \left[\frac{\vec{P}_i \cdot \vec{k}_{\text{L}}}{M\left(\tilde{\delta} + i\dfrac{\Gamma}{2}\right)}\right]^2 + \cdots \right\}, \tag{IV.31.b}$$

où j'ai posé $\tilde{\delta} = \delta - \hbar k_{\text{L}}^2/(2M)$.

On voit donc sur la ligne (IV.31.a) que l'on peut négliger le mouvement des atomes dès que $\delta \gg \omega_{\text{rec}}$ (avec $\omega_{\text{rec}} = \hbar k_{\text{L}}^2/M$), et ce à condition que la vitesse moyenne des atomes soit de l'ordre de la vitesse de recul, ou bien plus faible (ce que nous avons supposé dans cette étude).

Néanmoins, la valeur de l'indice à l'ordre le plus bas ne nous intéresse guère : nous cherchons des effets collectifs, et nous avons vu au paragraphe IV.1.*a*, p. 263 que c'est la dépendance de l'indice en température qui permet de les mettre en évidence. Aussi se demande-t-on ici si l'effet Doppler ne va pas introduire une dépendance supplémentaire venant « brouiller » le signal qui nous intéresse.

Pour répondre à cette question, on moyenne maintenant l'équation (IV.31.b) sur une distribution thermique. On trouve

$$n = \frac{3\pi\rho_0\Gamma c^3}{2\omega_A^3\left(\tilde{\delta}+i\frac{\Gamma}{2}\right)}\left[1+\frac{\left\langle \vec{P}_x^2\right\rangle\cdot\vec{k}_L^2}{M^2\left(\tilde{\delta}+i\frac{\Gamma}{2}\right)^2}\right]. \tag{IV.32}$$

Dans le cas non dégénéré (*i.e.* où les facteurs d'occupation se réduisent à des exponentielles), on trouve

$$n = \frac{3\pi\rho_0\Gamma c^3}{2\omega_A^3\left(\tilde{\delta}+i\frac{\Gamma}{2}\right)}\left[1+\frac{Mk_BT}{\hbar^2k_L^2}\frac{\omega_{rec}^2}{\left(\tilde{\delta}+i\frac{\Gamma}{2}\right)^2}\right], \tag{IV.33}$$

En supposant que $\lambda_L \sim \Lambda_{DB}$, et en comparant l'équation (IV.33) avec l'équation (III.13) (dans laquelle le terme statistique, donc la dépendance en température, est en $\alpha\rho_0 \times \rho_0\Lambda_{DB}^3$), on voit que la dépendance en température due au mouvement des atomes est petite devant celle liée aux effets quantiques collectifs lorsque

$$\left(\frac{\omega_{rec}}{\Gamma}\right)^2 \ll \rho_0\lambda^3, \tag{IV.34}$$

condition qu'il est très facile de vérifier avec des alcalins (par exemple pour le césium la condition (IV.34) est équivalente à $\rho_0\lambda_L^3 \gg 5{,}7.10^{-7}$).

b) Calcul de l'indice d'un gaz de bosons à température nulle tenant compte du recul des atomes

i) Présentation du résultat

Yvan Castin [215] a effectué un calcul d'indice de réfraction tenant compte du mouvement atomique, et en se limitant au cas de bosons à température nulle (l'impulsion de chaque atome est donc initialement nulle). Voici le résultat obtenu :

$$\mathcal{A} = -\rho_0\left[\left\langle\vec{P}=\vec{0}\right|\vec{\varepsilon}_L^{\,*}\cdot\tilde{\alpha}\vec{\vec{g}}(\vec{R})\left(\frac{1}{2}\frac{\vec{\vec{1}}}{\vec{\vec{1}}+\tilde{\alpha}C_\beta\vec{\vec{1}}-\tilde{\alpha}\vec{\vec{g}}(\vec{R})}-\frac{1}{2}\frac{\vec{\vec{1}}}{\vec{\vec{1}}+\tilde{\alpha}C_\beta\vec{\vec{1}}+\tilde{\alpha}\vec{\vec{g}}(\vec{R})}\right)\cdot\tilde{\alpha}\vec{\vec{g}}(\vec{R})\cdot\vec{\varepsilon}_L e^{-i\vec{k}_L\cdot\vec{R}}\left|\vec{P}=\vec{0}\right\rangle\right.$$
$$\left.+\left\langle\vec{P}=\vec{0}\right|\vec{\varepsilon}_L^{\,*}\cdot\tilde{\alpha}\vec{\vec{g}}(\vec{R})\left(\frac{1}{2}\frac{\vec{\vec{1}}}{\vec{\vec{1}}+\tilde{\alpha}C_\beta\vec{\vec{1}}-\tilde{\alpha}\vec{\vec{g}}(\vec{R})}+\frac{1}{2}\frac{\vec{\vec{1}}}{\vec{\vec{1}}+\tilde{\alpha}C_\beta\vec{\vec{1}}+\tilde{\alpha}\vec{\vec{g}}(\vec{R})}\right)\cdot\tilde{\alpha}\vec{\vec{g}}(\vec{R})\cdot\vec{\varepsilon}_L e^{-i\vec{k}_L\cdot\vec{R}}\left|\vec{P}=\vec{0}\right\rangle\right], \tag{IV.35.a}$$

où

$$\tilde{\alpha} = \frac{-3\pi\Gamma c^3}{\omega_A^3\left(\omega_L - \omega_A - \dfrac{\hbar k_L^2}{2M} + i\dfrac{\Gamma}{2}\right)}, \qquad \text{(IV.35.b)}$$

et

$$C_{\vec{P}} = \frac{\omega_A^3}{3\pi\Gamma\hbar c^3}\left(\frac{\vec{P}^2}{M} + \frac{\hbar\vec{k}_L\cdot\vec{P}}{M}\right). \qquad \text{(IV.35.c)}$$

Le résultat (IV.35) peut être rapidement obtenu par la méthode de la résolvante. Aussi, j'épargnerai au lecteur les détails du calcul. Nous savons (cf. annexe B) que l'indice se calcule en resommant les diagrammes d'échanges de photons entre deux atomes (que l'on peut noter i et j). Le résultat (IV.35) a été obtenu en utilisant la particule réduite correspondant à la paire $\{i,j\}$, et donc en posant $\vec{R} = \vec{R}_i - \vec{R}_j$, et $\vec{P} = \left(\vec{P}_i - \vec{P}_j\right)/2$. Par conséquent, $\vec{\vec{g}}(\vec{R})$ et $C_{\vec{P}}$ ne commutent pas (et il faut se le rappeler lorsqu'on manipule les fractions de l'équation (IV.35.a)).

Remarque : les termes d'énergie cinétique ne figurent pas tous dans le résultat (IV.35). *A priori*, l'énergie cinétique intervient au niveau des dénominateurs d'énergie (éléments de matrice de $\mathcal{G}_0(z) = 1/(z-\mathcal{H}_0)$). Dans le calcul d'indice, il existe deux sortes de dénominateurs d'énergie : ceux correspondant à un état à un atome excité et 0 photon, qui s'écrivent

$$\frac{1}{z - \hbar\omega_A - \sum_{i=1}^N \vec{P}_i^2/(2M) + i\hbar\Gamma/2},$$

et ceux correspondant à un état à un photon et aucun atome excité, *i.e.*

$$\frac{1}{z - \hbar\omega_{\vec{k}} - \sum_{i=1}^N \vec{P}_i^2/(2M)}.$$

Pour obtenir le résultat (IV.35), il faut négliger l'énergie cinétique dans le 2$^{\text{e}}$ type de dénominateur (de façon à retrouver le potentiel $\vec{\vec{g}}$ sans correction). Si on ne néglige pas cette énergie cinétique, on modifie le pôle en z, et donc l'expression du potentiel d'interaction $\vec{\vec{g}}$. Or, on sait (notamment grâce à l'annexe C) que, si la modification du pôle est petite devant $\hbar\omega_L$, alors l'indice est inchangé à l'ordre 2 en densité. On peut donc négliger l'énergie cinétique dans le deuxième type de dénominateurs à condition qu'elle reste négligeable devant $\hbar\omega_L$.

ii) Développement dans la limite de masse infinie

Les dénominateurs de l'équation (IV.35.a) peuvent être développés en puissances de $1/M$ sous la forme

$$\vec{\varepsilon}_L^{\,*}\cdot\frac{1}{\vec{\vec{1}} + \tilde{\alpha}C_{\vec{P}}\vec{\vec{1}} \pm \tilde{\alpha}\vec{\vec{g}}(\vec{r})}\cdot\vec{\varepsilon}_L \simeq \vec{\varepsilon}_L^{\,*}\cdot\frac{1}{\vec{\vec{1}} \pm \tilde{\alpha}\vec{\vec{g}}(\vec{r})}\cdot\left(\vec{\vec{1}} - \tilde{\alpha}C_{\vec{P}}\frac{1}{\vec{\vec{1}} \pm \tilde{\alpha}\vec{\vec{g}}(\vec{r})}\right)\cdot\vec{\varepsilon}_L. \qquad \text{(IV.36)}$$

Je vais maintenant reporter le développement (IV.36) dans l'équation (IV.35.a). Pour ce faire, je vais négliger le terme $\exp(-i\vec{k}_L\cdot\vec{r})$ présent dans la première

ligne de (IV.35.a). Cette approximation est valable dans la limite des grands désaccords, où, comme nous l'avons vu au paragraphe IV.3, ce sont essentiellement des valeurs de r proches de 0 qui contribuent au résultat[1]. Dans ce cas, la contribution de l'état subradiant disparaît. On trouve simplement que[2]

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 + \left(\frac{\hbar k_L^2}{M\Gamma}\right) \mathcal{A}_1 , \tag{IV.37}$$

où

$$\mathcal{A}_0 = -\rho_0 \int \mathrm{d}^3\vec{r}\, \vec{\varepsilon}_L^{\,*} \cdot \frac{\tilde{\alpha}^2 \vec{\vec{g}}^2(\vec{r})}{\vec{\vec{1}} - \tilde{\alpha}^2 \vec{\vec{g}}^2(\vec{r})} \cdot \vec{\varepsilon}_L \tag{IV.38.a}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 = -\rho_0 \tilde{\alpha} \frac{\omega_A^3}{3\pi c^3} \Bigg[& \frac{i}{k_L} \int \mathrm{d}^3\vec{r}\, \vec{\varepsilon}_L^{\,*} \cdot \vec{\vec{f}}(\vec{r}) \cdot \left(\frac{\vec{k}_L}{k_L} \cdot \vec{\nabla} \vec{\vec{f}}(\vec{r}) \right) \cdot \vec{\varepsilon}_L \\ & + \frac{1}{k_L^2} \int \mathrm{d}^3\vec{r}\, {}^{\mathrm{t}}\left(\vec{\nabla} \otimes {}^{\mathrm{t}}\left\{ \vec{\varepsilon}_L^{\,*} \cdot \vec{\vec{f}}(\vec{r}) \right\} \right) : \left(\vec{\nabla} \otimes \vec{\vec{f}}(\vec{r}) \cdot \vec{\varepsilon}_L \right) \Bigg] , \end{aligned} \tag{IV.38.b}$$

où le tenseur $\vec{\vec{f}}$ est défini par

$$\vec{\vec{f}}(\vec{r}) = \frac{\tilde{\alpha} \vec{\vec{g}}(\vec{r})}{\vec{\vec{1}} - \tilde{\alpha} \vec{\vec{g}}(\vec{r})} . \tag{IV.39}$$

Compte tenu des hypothèses faites, l'expression (IV.38.a) de $\mathcal{A}_0$ est conforme au résultat « standard » (III.13). On peut s'assurer que les intégrales du terme correctif (IV.39) convergent sur une distance de l'ordre de λ_L. Par conséquent, le petit paramètre du problème est comme prévu $\hbar k_L^2/M\Gamma$. Dans le cas des alcalins, il paraît donc légitime de négliger l'énergie cinétique, et ce quel que soit le désaccord[3].

1. Sans cette approximation, le raisonnement que je fais ici n'est plus valable, car les intégrales qui constituent alors les coefficients du développement sont divergentes.

2. Le symbole : utilisé dans (IV.38) désigne la contraction totale de deux tenseurs (*i.e.* la trace de leur produit au sens des matrices). La dérivation du symbole $\vec{\nabla}$ s'applique sur ce qui est à droite, à l'intérieur du même groupe de parenthèses.

3. Cette affirmation est un peu rapide dans la mesure où l'argument des intégrales de l'équation (IV.38) dépend du désaccord δ. Par conséquent, le calcul ci-dessus ne permet pas de dire que l'on peut négliger l'énergie cinétique à tout désaccord.

Une étude plus poussée de ces intégrales a été effectuée par Yvan Castin [215]. Cette étude est basée sur un développement à grand désaccord du type de celui réalisé au paragraphe IV.3. Elle conclut que le terme correctif $\mathcal{A}_1$ se comporte, lorsque $\delta \to +\infty$, en $(\tilde{\alpha}\rho_0)^2(\Gamma/\delta)^{1/3}$. Par conséquent, $\mathcal{A}_1$ décroît plus vite que $\mathcal{A}_0$ à grand désaccord.

Les calculs conduisant à ce résultat sont fort longs. C'est pourquoi je n'ai pas jugé indispensable de les faire figurer dans cette thèse. Le lecteur intéressé par le détail de ces calculs pourra s'adresser à Yvan Castin.

Remarque : dans l'article que nous avons publié dans *Phys. Rev. A* [188], nous indiquions que notre calcul n'est valable que pour

$$\left(\frac{\delta}{\Gamma}\right)^{\frac{8}{3}} < \frac{M\Gamma}{\hbar k_L^2}.$$

Nous avons obtenu cette condition par un raisonnement semi-classique [216], en évaluant la force à laquelle est soumis un atome excité, situé au voisinage d'un autre atome de telle sorte que le laser soit résonnant. On calcule le temps au bout duquel l'atome, du fait de cette force, quitte la zone résonnante. Si ce temps est plus court que Γ^{-1}, le régime stationnaire ne peut pas être atteint et les hypothèses de départ de notre calcul sont fausses. En fait, ce raisonnement est faux parce qu'on n'a pas le droit de traiter le problème de façon semi-classique au voisinage du point de rebroussement. Par conséquent, notre calcul est bien valable pour tout désaccord positif.

5. Complément : généralisation au cas d'une transition atomique quelconque

Tous les calculs d'indice ont jusqu'ici été effectués en supposant que la transition atomique entre l'état fondamental et le premier état excité était une transition $0 \rightarrow 1$. Cette hypothèse est très restrictive, et ce principalement pour deux raisons : tout d'abord, la plupart des atomes refroidis par laser possèdent des transitions plus compliquées que $0 \rightarrow 1$ (par exemple $4 \rightarrow 5$ pour le césium). Les signaux prédits par ces calculs ne sont donc pas des signaux observables expérimentalement. De plus, comme nous recherchons des effets collectifs, il serait intéressant de pouvoir comparer l'indice selon que les atomes sont des bosons ou des fermions. Or, les fermions sont des particules de spin demi-entier (donc dans le cas des atomes, leur état fondamental doit avoir un moment angulaire demi-entier).

L'objet de ce paragraphe est de généraliser le calcul d'indice à une transition $J \rightarrow J+1$ quelconque. Le problème est compliqué par le pompage optique qui apparaît alors dans l'état fondamental. C'est pourquoi je me suis placé ici dans un cas particulier : celui où les atomes sont initialement pompés dans le sous-niveau $|m = +J\rangle$, et où le laser sonde est polarisé σ^+. De tels atomes peuvent être préparés dans un piège magnétique par du refroidissement évaporatif (comme par exemple dans l'expérience de l'équipe de Cornell [63]). Le piège électrostatique et magnétostatique, que j'ai présenté au paragraphe 3.A, p. 179 (première partie de cette thèse) pourrait constituer un moyen de les obtenir avec du refroidissement Raman.

a) Calcul de l'indice

Le principe du calcul est de resommer les diagrammes d'échanges de photons entre deux atomes d'une paire (méthode de la résolvante). Afin de simplifier les calculs, cette resommation doit être effectuée en choisissant comme axe de quantification la droite joignant les deux atomes. A l'origine l'un des deux atomes est dans l'état $|f, m = J\rangle_z$ et l'autre dans l'état $|e, m = J+1\rangle_z$, où z correspond à l'axe de propagation du laser. La première étape du calcul consiste donc à changer d'axe de quantification. Les potentiels d'interactions seront ensuite calculés dans la base correspondant à l'axe $\vec{r}$.

i) Changement d'axe de quantification

Pour effectuer ce changement de base, il faut connaître l'expression des représentation irréductibles du groupe de rotation $SO(3)$ (ou $SU(2)$ dans le cas d'un spin demi-entier). La réponse nous est fournie dans la littérature [217, p. 85]. Si une rotation est donnée par ses angles d'Euler φ_1, θ, et φ_2, alors l'élément de matrice de la représentation irréductible de rang ℓ est donné pour $-\ell \leqslant m, n \leqslant \ell$ par

$$\mathfrak{T}^{\ell}_{mn}(\varphi_1, \theta, \varphi_2) = e^{-im\varphi_2} P^{\ell}_{mn}(\cos\theta) e^{-in\varphi_1} , \tag{IV.40.a}$$

où

$$P^{\ell}_{mn}(X) = A(1-X)^{-\frac{n-m}{2}}(1+X)^{-\frac{n+m}{2}} \frac{\mathrm{d}^{\ell-n}}{\mathrm{d}X^{\ell-n}} \left[(1-X)^{\ell-m}(1+X)^{\ell+m}\right] , \tag{IV.40.b}$$

et

$$A = \frac{(-1)^{\ell-m} i^{n-m}}{2^{\ell}(\ell-m)!} \sqrt{\frac{(\ell-m)!(\ell+n)!}{(\ell+m)!(\ell-n)!}} . \tag{IV.40.c}$$

Nous avons besoin de prendre une rotation amenant $\vec{u}_z$ sur $\vec{r}/r$ (de coordonnées sphériques (θ, φ)). L'un des degrés de liberté est indéterminé. Il suffit donc de prendre $\varphi_2 = 0$ (et $\varphi_1 = \varphi$). On applique la formule (IV.40) successivement avec $\ell = J$ et $\ell = J+1$ (pour l'atome dans l'état fondamental et pour l'atome excité respectivement). Grâce à l'état initial choisi, la formule doit être appliquée pour $n = \ell$, ce qui simplifie considérablement les calculs.

ii) Resommation des diagrammes d'interaction

On choisit donc la direction de $\vec{r}$ comme axe de quantification. On considère (fig. IV.5) une paire d'atomes dont l'un est excité. Je note $|f, m; e, m'\rangle_{\vec{r}}$ l'état de cette paire, avec $-J \leqslant m \leqslant J$ et $-J-1 \leqslant m' \leqslant J+1$. Je cherche à connaître le

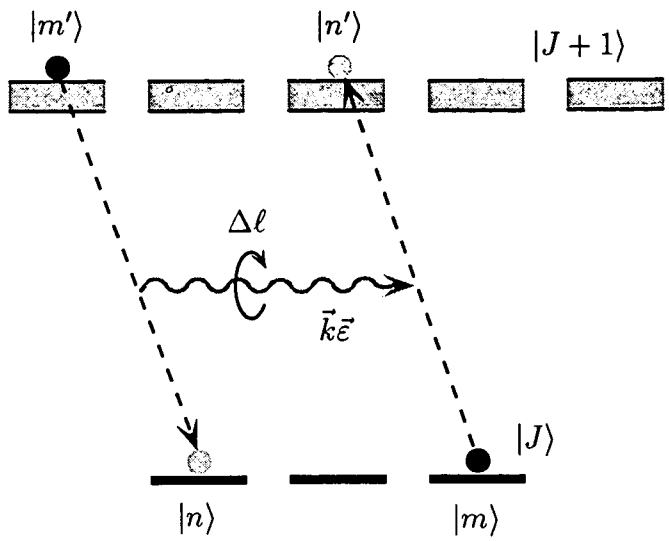


FIG. IV.5 - *Echange d'un photon entre un atome dans l'état fondamental et un autre dans l'état excité. L'axe de quantification choisi est* $\vec{r}$.

couplage par échange d'un photon de cet état avec l'état $|e,n';f,n\rangle_{\vec{r}}$. Ce couplage vaut

$$g_{mn}^{m'n'}(\vec{r}) = -\sum_{\vec{k}\vec{\varepsilon}} \frac{\omega}{2V} \langle m'|\vec{\varepsilon}^{\,*}|n\rangle \langle m|\vec{\varepsilon}|n'\rangle \left(\frac{e^{-i\vec{k}_{\rm L}\cdot\vec{r}}}{-\omega_{\rm L}-\omega-i\varepsilon'} + \frac{e^{i\vec{k}_{\rm L}\cdot\vec{r}}}{\omega_{\rm L}-\omega-i\varepsilon'} \right) - \sum_{\alpha=x,y,z} \delta^{(3)}(\vec{r}) \langle m'|\vec{u}_\alpha^{\,*}|n\rangle \langle m|\vec{u}_\alpha|n'\rangle \,, \quad \text{(IV.41)}$$

où $\langle m|\vec{\varepsilon}|n'\rangle$ est un élément de matrice (ce n'est pas un vecteur) qui se calcule par le théorème de Wigner-Eckart, l'élément de matrice réduit valant 1. La sommation de la deuxième ligne de (IV.41) se fait sur 3 vecteurs d'une base quelconque de $\mathbb{R}^3$.

Pour calculer l'expression (IV.41), on exprime les polarisations sur la base des polarisations σ^-, π et σ^+ par rapport à $\vec{r}$. On procède ensuite comme pour le calcul du tenseur $\vec{\vec{g}}$ dans le cas de la transition $0 \to 1$ (annexe A, p. 331). Voici le résultat finalement obtenu :

$$g_{mn}^{m'n'}(r) = \delta^{\rm c}_{m+m',n+n'} \left\{ -\frac{1}{3}\delta^{(3)}(\vec{r}) C_{\rm tot}^{mn} - \frac{k_{\rm L}^3}{4\pi} e^{ik_{\rm L}r} \left[\left(-\frac{1}{k_{\rm L}r} - \frac{i}{k_{\rm L}^2 r^2} + \frac{1}{k_{\rm L}^3 r^3} \right) C_{\rm tot}^{mn} + \left(\frac{1}{k_{\rm L}r} + \frac{3i}{k_{\rm L}^2 r^2} - \frac{3}{k_{\rm L}^3 r^3} \right) C^{mn}(0) \right] \right\} . \quad \text{(IV.42)}$$

où

$$C^{mn}(\Delta\ell) = \langle J, m; 1, \Delta\ell | J+1, m+\Delta\ell \rangle \langle J, n; 1, \Delta\ell | J+1, n+\Delta\ell \rangle \,, \quad \text{(IV.43)}$$

et

$$C^{mn}_{\text{tot}} = C^{mn}(-1) + C^{mn}(0) + C^{mn}(1) \,. \quad \text{(IV.44)}$$

Remarquons le symbole de Kronecker en facteur de l'expression (IV.42). Il traduit la conservation du moment cinétique de la paire d'atomes lors des processus d'échanges de photons.

iii) Résultat du calcul

Voici le résultat du calcul d'indice dans le cas d'une transition $J \to J+1$ quelconque, lorsque les atomes sont au préalable pompés optiquement dans le niveau $|f, m = +J\rangle$:

$$\boxed{\mathcal{A} = 1 - \rho_0 \int_0^{+\infty} \mathrm{d}r\, r^2 \sum_{\ell=-(2J+1)}^{2J+1} \left\{ J_\ell \bar{V}_\ell \cdot \frac{\alpha^2 \bar{\bar{g}}^2_\ell(r)}{1 - \alpha^2 \bar{\bar{g}}^2_\ell(r)} \cdot \bar{V}_\ell \left(1 + \varphi(r)\right) + K_\ell(r) \bar{V}_\ell \cdot \frac{\alpha^3 \bar{\bar{g}}^3_\ell(r) + \alpha \bar{\bar{g}}_\ell(r) \varphi(r)}{1 - \alpha^2 \bar{\bar{g}}^2_\ell(r)} \cdot \bar{V}_\ell \right\} ,} \quad \text{(IV.45)}$$

avec

$$J_\ell = 2\pi \int_{-1}^{1} \mathrm{d}y (1-y)^{2J+1-\ell} (1+y)^{2J+1+\ell} \quad \text{(IV.46.a)}$$

$$K_\ell(r) = 2\pi \int_{-1}^{1} \mathrm{d}y (1-y)^{2J+1-\ell} (1+y)^{2J+1+\ell} e^{ik_L r y} \quad \text{(IV.46.b)}$$

$\bar{V}_\ell$ est un vecteur colonne, défini pour $-J \leqslant m \leqslant J$ et $m' = \ell - m$ par

$$\left(\bar{V}_\ell\right)^{m'}_m = \frac{1}{2^{2J+1}} \sqrt{\frac{(2J)![2(2J+1)]!}{(J+1-m')!(J-m)!(J+1+m')!(J+m)!}} \,. \quad \text{(IV.47)}$$

Enfin, $\bar{\bar{g}}_\ell$ est une matrice carrée, indexée par m et n, avec $-J \leqslant m, n \leqslant J$. L'expression de son élément de matrice est défini par la formule (IV.42), avec $m + m' = n + n' = \ell$.

b) Calcul formel et numérique

Le résultat (IV.45) est beaucoup plus compliqué que le résultat (III.13) de la transition $0 \to 1$. Il contient en effet des intégrales supplémentaires (formule

(IV.46)), et les $4J + 3$ matrices $1/(1 - \bar{\bar{g}}_\ell^2)$ à inverser (dans la formule (III.13), il était facile d'effectuer l'inversion car on connaissait les axes propres du tenseur $\vec{\vec{g}}$).

Le problème est toutefois soluble si l'on particularise la valeur de J (et si celle-ci n'est pas trop élevée!). J'ai choisi d'effectuer le calcul à l'aide du logiciel de calcul symbolique *Mathematica*. Ce logiciel est capable de calculer toutes les quantités utilisées dans la formule (IV.42). Il peut notamment calculer les coefficients de Clebsch-Gordan et inverser les matrices de façon exacte.

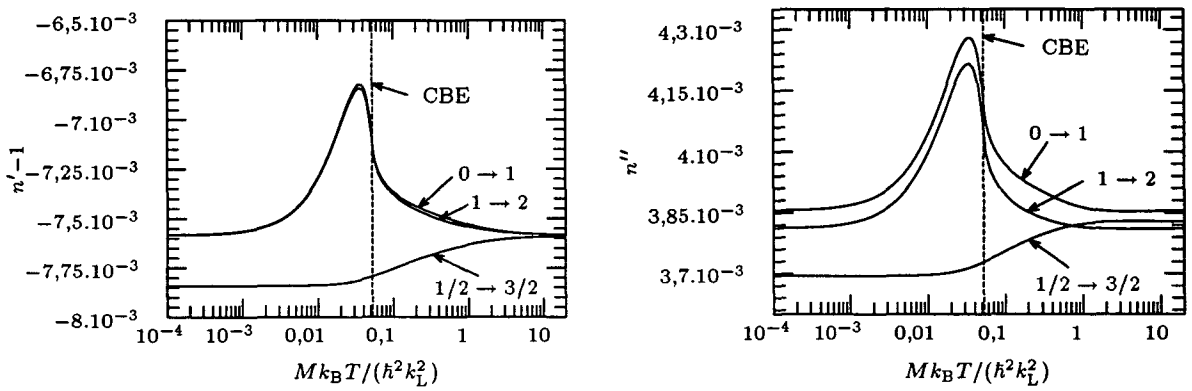
Le programme en *Mathematica* que j'ai écrit calcule l'argument de l'intégrale de (IV.42) pour chaque valeur de ℓ. Il convertit ensuite le résultat en code FORTRAN. Un programme FORTRAN effectue ensuite la sommation sur ℓ et calcule numériquement les intégrales.

Je suis conscient qu'il eût été préférable d'effectuer avec *Mathematica* la sommation sur ℓ, et de convertir le résultat en FORTRAN une fois faite cette sommation. Malheureusement, si l'on procède ainsi, l'expression de la fonction est trop longue (jusqu'à 20 lignes de code en mode 132 caractères par ligne), de sorte qu'à partir de $J = 1$ le compilateur refuse de compiler le résultat fourni par *Mathematica*.

Un autre problème survient du fait que la deuxième ligne de (IV.42) diverge en 0 pour une valeur donnée de ℓ (ce n'est que la somme des termes correspondant à toutes les valeurs de ℓ qui converge). Or les erreurs d'arrondi dans chacun des termes empêchent le résultat numérique de converger. J'ai résolu ce problème en soustrayant, lorsque $k_L r \leqslant 1$, à la fraction rationnelle de la deuxième ligne de (IV.42) le terme $\alpha \bar{\bar{g}}_\ell(r)$. Ensuite, j'ai calculé la contribution du terme soustrait en faisant effectuer par *Mathematica* la sommation sur ℓ, et en développant le résultat au voisinage de $r = 0$.

c) Résultat numérique

Le résultat du calcul d'indice pour diverses transitions $J \to J+1$ est donné par la figure IV.6. Dans le cas des valeurs de J demi-entières, j'ai utilisé la distribution de paire des fermions. On constate que, pour des valeurs de J correspondant au même type de statistique, l'indice de réfraction est très voisin. Ceci permet de justifier le fait que la quasi-totalité des calculs de cette thèse aient été effectués sur une transition $0 \to 1$.



(a) *Partie réelle*

(b) *Partie imaginaire*

FIG. IV.6 - *Indice de réfraction d'un gaz d'atomes, sur une transition* $J \longrightarrow J+1$, *tracé pour plusieurs valeurs de* J. *Le désaccord vaut* $\delta = \Gamma$, *la densité vérifie* $\rho_0 \lambda_L^3 = 0{,}5$, *et la lumière est polarisée* σ^+. *Dans les cas où* J *est demi-entier, j'ai utilisé la distribution de paire des fermions.*

Chapitre V

Calcul de section efficace différentielle de diffusion

EST-IL POSSIBLE d'observer des effets quantiques collectifs sur un gaz d'atomes froids en étudiant son interaction avec un faisceau lumineux? L'expérience de Boulder [63] nous a fourni une réponse positive: la condensation de Bose-Einstein est observable dans le cas de gaz inhomogènes (confinés au fond d'un piège). Par contre, une telle observation est beaucoup plus difficile dans le cas qui nous intéresse des atomes libres (du moins pour les faibles densités, c'est-à-dire dans le régime où il est possible de faire le calcul). En effet, lorsque l'on effectue une mesure de l'indice, les effets quantiques collectifs sont des effets du second ordre en densité. Or les fluctuations du premier ordre viennent brouiller le signal qui nous intéresse.

L'objet de ce chapitre est de revenir sur cette conclusion pessimiste. Nous devons pour cela rechercher des signaux d'interaction atomes/lumière, tels que les effets quantiques soient visibles « sur un fond noir ». Les effets quantiques collectifs sont des effets à 2 atomes (ou plus). Nous devons donc chercher un signal auquel un atome isolé ne contribue pas, mais auquel une paire d'atomes peut contribuer.

Nous avons trouvé un tel signal: la section efficace différentielle de diffusion. Nous savons que pour un atome isolé, cette section efficace est donnée par la formule

$$\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right)_{1\text{ atome}}\left(\vec{k}_{\mathrm{L}}\vec{\varepsilon}_{\mathrm{L}} \longrightarrow \vec{k}_{\mathrm{d}}\vec{\varepsilon}_{\mathrm{d}}\right) = \frac{9c^2}{16\omega_{\mathrm{A}}^2}\frac{\Gamma^2}{\delta^2+\dfrac{\Gamma^2}{4}}\left|\vec{\varepsilon}_{\mathrm{L}}^{\,*}\cdot\vec{\varepsilon}_{\mathrm{d}}\right|^2 , \qquad \text{(V.1)}$$

où $\vec{k}_{\mathrm{L}}\vec{\varepsilon}_{\mathrm{L}}$ est le photon incident et $\vec{k}_{\mathrm{d}}\vec{\varepsilon}_{\mathrm{d}}$ le photon diffusé. Supposons que l'on place, suffisamment loin du milieu, un photodétecteur. Ce photodétecteur permet de détecter la diffusion du photon dans une direction $\vec{k}_{\mathrm{d}}$ donnée. Plaçons maintenant devant ce photodétecteur un polariseur ne laissant passer que la composante de

polarisation orthogonale à la polarisation $\vec{\varepsilon}_L$ du photon incident (*i.e.* on impose $\vec{\varepsilon}_d \perp \vec{\varepsilon}_L$). Alors, d'après la formule (V.1), le photodétecteur ne détectera aucun signal.

Si maintenant plusieurs atomes sont présents, ils pourront échanger des photons. Au cours de ces échanges, la polarisation ne sera pas conservée, et un photon pourra être diffusé avec une polarisation possédant une composante orthogonale à la polarisation incidente. Nous avons là un signal uniquement lié aux paires d'atomes (*i.e.* dans lequel le terme dominant est le terme d'ordre 2 en densité). Plus exactement, le photodétecteur observera de la lumière si deux atomes sont situés suffisamment proches (à une distance de l'ordre de la longueur d'onde optique). On peut donc s'attendre à ce que les effets quantiques collectifs soient non négligeables dès que la température est de l'ordre de la température de recul.

Cet ultime chapitre sera entièrement consacré à l'étude de la section efficace différentielle de diffusion, et comprendra deux parties. Tout d'abord (section V.1), je la calculerai par un développement systématique en puissances de la densité, analogue à celui utilisé au paragraphe III.3, p. 252 pour le calcul d'indice. Le résultat obtenu n'est valable que dans le cas d'un milieu mince, (*i.e.* diffusant peu la lumière). De plus, pour intégrer numériquement les équations, je devrai supposer que le milieu est de forme sphérique et de densité uniforme. La section V.2 donnera des indications sur la généralisation du calcul au cas d'un milieu épais. Elle s'appuie sur le formalisme utilisé par les physiciens qui étudient la diffusion dans un milieu désordonné [213, 214, 218–220].

Nous verrons que des effets quantiques collectifs sont aisément détectables, même à des températures accessibles par des méthodes conventionnelles de refroidissement radiatif (mélasse et piège magnéto-optique). Toutefois, ce bel optimisme doit être tempéré par le fait que tous les calculs sont effectués sur une transition $0 \to 1$, type de transition qui n'existe pas sur les atomes pouvant être refroidis par laser. Si la transition est plus compliquée, une diffusion dans une polarisation orthogonale à la polarisation incidente est possible même avec un seul atome, *via* un changement de sous niveau Zeeman pour l'atome. On peut certes s'en tirer, dans le cas d'une transition $J \to J+1$, en pompant l'atome dans le sous-niveau $|+J\rangle$ du fondamental, en envoyant un laser polarisé σ^+ (voir § IV.5, p. 284) et en détectant encore dans une polarisation orthogonale à la polarisation incidente. On pourrait également utiliser une transition $J \to J$, en pompant également les atomes et en envoyant un laser σ^+ (cette fois-ci sans restriction sur la polarisation détectée). Dans ce cas, le signal ne pourrait apparaître que *via* l'interaction des atomes dans leur état fondamental, qui est de portée beaucoup plus courte. Les effets collectifs pourraient donc apparaître pour des longueurs d'onde de de Broglie beaucoup plus petites, donc pour des températures plus élevées. Quoi qu'il en soit, de telles expériences nécessitent un pompage parfait des atomes, le moindre défaut dans la qualité de ce dernier pouvant brouiller le signal.

Signalons avant de commencer que d'autre signaux détectables sur fond noir

ont été proposés. Par exemple, Shlyapnikov a proposé une expérience basée sur une transition à deux photons [221].

1. Calcul de l'intensité lumineuse dans le cas d'un milieu mince

a) Principe du calcul et définitions

Pour calculer l'indice de réfraction, nous avons dû évaluer l'amplitude du champ électrique à l'intérieur du milieu atomique. Pour calculer la section efficace de diffusion, c'est l'intensité lumineuse que nous devons connaître.

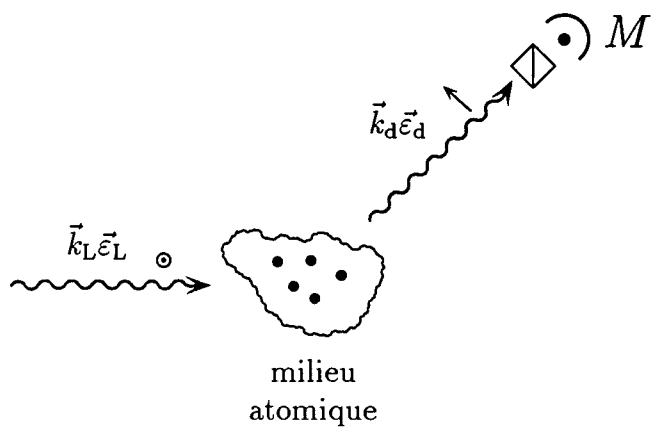


FIG. V.1 - *Diffusion d'un photon sur un nuage d'atome froids, et détection dans une direction de polarisation fixée (ici, elle est orthogonale à celle du photon incident).*

Soit donc un milieu atomique mince, c'est-à-dire tel que $\rho_0\lambda_L^2 a \ll 1$, où a est la taille du milieu (figure V.1). Le milieu est irradié par une onde plane incidente de vecteur d'onde $\vec{k}_L$ et de polarisation $\vec{\varepsilon}_L$. Je cherche à calculer l'intensité lumineuse en un point M situé loin du milieu, selon une direction de polarisation $\vec{\varepsilon}_d$ donnée.

Pour ce faire, je dois définir les quantité suivantes[1]

1. Le lecteur pourra être surpris des définitions figurant dans le système (V.2). En effet, les quantités $\vec{d}_i$ et $\vec{e}(\vec{r})$ sont déjà des moyennes sur les degrés de liberté atomiques internes et sur les photons. Dans ces conditions, on ne voit pas pourquoi on considère les produits de moyennes, par exemple $\vec{d}_i \otimes \vec{d}_j$, et non les moyennes des produits.

Aussi ai-je effectué une étude plus poussée, basée sur les moyennes de fonctions de corrélation temporelles, du type

$$\left\langle \vec{D}_i^+(t) \otimes \vec{D}_j^-(t+\tau) \right\rangle_{\text{interne+champ}} .$$

Ces moyennes ont été effectuées en représentation de Heisenberg, dans le cas où la saturation du laser est faible. Les calculs sont analogues à ceux concernant l'amplitude qui sont présentés dans l'annexe A.

$$\vec{\vec{\mathcal{I}}}(\vec{r},\vec{r}') = \left\langle \vec{e}(\vec{r}) \otimes \vec{e}^{\,\dagger}(\vec{r}') \right\rangle \tag{V.2.a}$$

$$\vec{\vec{\mathcal{K}}}(\vec{r}) = \frac{1}{\rho(\vec{r})} \left\langle \sum_{i=1}^{N} \vec{d}_i \otimes \vec{d}_i^{\,\dagger} \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{R}_i) \right\rangle \tag{V.2.b}$$

$$\vec{\vec{\mathcal{K}}}(\vec{r},\vec{r}') = \frac{1}{\rho^{\mathrm{II}}(\vec{r},\vec{r}')} \left\langle \sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^{N} \vec{d}_i \otimes \vec{d}_j^{\,\dagger} \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{R}_i) \delta^{(3)}(\vec{r}' - \vec{R}_j) \right\rangle , \tag{V.2.c}$$

les moyennes étant effectuées sur les degrés de libertés atomiques externes (je rappelle que $\vec{e}(\vec{r})$ et $\vec{d}_i$ sont des opérateurs vis-à-vis de ces degrés de liberté). L'intensité lumineuse au point $\vec{r}$ est donc $\vec{\vec{\mathcal{I}}}(\vec{r},\vec{r})$. La quantité que je me propose de calculer est $\vec{\varepsilon}_{\mathrm{d}}^{\,*} \cdot \vec{\vec{\mathcal{I}}}(\vec{r}_M,\vec{r}_M) \cdot \vec{\varepsilon}_{\mathrm{d}}$.

b) Développement formel de la théorie microscopique

Je calcule ici l'intensité lumineuse à l'ordre 2 en densité, par un développement formel de la théorie microscopique. Pour ce faire, j'utilise le formalisme mis en place au paragraphe III.3.*b*, p. 254.

i) Calcul de l'intensité lumineuse

On calcule l'intensité lumineuse en utilisant l'équation (III.1.a). En outre, comme le point M est situé loin du milieu, on suppose que le champ laser est nul en ce point (le laser a une taille finie). On obtient donc simplement :

$$\vec{e}(\vec{r}_M) \otimes \vec{e}^{\,\dagger}(\vec{r}_M) = \frac{1}{\varepsilon_0^2} \sum_{i=1}^{N} \vec{\vec{g}}(\vec{r}_M - \vec{R}_i) \cdot \vec{d}_i \otimes \vec{d}_i^{\,\dagger} \cdot \vec{\vec{g}}^{\,*}(\vec{r}_M - \vec{R}_i) + \frac{1}{\varepsilon_0^2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^{N} \vec{\vec{g}}(\vec{r}_M - \vec{R}_i) \cdot \vec{d}_i \otimes \vec{d}_j^{\,\dagger} \cdot \vec{\vec{g}}^{\,*}(\vec{r}_M - \vec{R}_j) . \tag{V.3}$$

En moyennant sur les positions atomiques, on met cette expression sous la forme

Je trouve finalement que les moyennes de produits d'opérateurs satisfont aux mêmes équations que les produits de valeurs moyennes. J'en déduis donc qu'il y a égalité entre ces deux types de quantités. Ceci découle du fait que le champ source est un champ cohérent, *i.e.*

$$\left\langle \vec{E}_0^-(\vec{r},t) \otimes \vec{E}_0^+(\vec{r}',t+\tau) \right\rangle_{\text{champ}} = \left\| \vec{E}_{\mathrm{L}} \right\|^2 \vec{\varepsilon}_{\mathrm{L}}^{\,*} \otimes \vec{\varepsilon}_{\mathrm{L}} e^{i\vec{k}_{\mathrm{L}}\cdot(\vec{r}'-\vec{r})} e^{-i\omega_{\mathrm{L}}\tau} .$$

$$\vec{\vec{\mathcal{I}}}(\vec{r}_M,\vec{r}_M) = \frac{1}{\varepsilon_0^2}\int_{\text{milieu}} \mathrm{d}^3\vec{r}\,\rho(\vec{r})\alpha\vec{\vec{g}}(\vec{r}_M-\vec{r})\cdot\vec{\vec{\mathcal{K}}}(\vec{r})\cdot\alpha^*\vec{\vec{g}}^*(\vec{r}_M-\vec{r})$$
$$+\frac{1}{\varepsilon_0^2}\iint_{\text{milieu}} \mathrm{d}^3\vec{r}\mathrm{d}^3\vec{r}'\,\rho^{\text{II}}(\vec{r},\vec{r}')\alpha\vec{\vec{g}}(\vec{r}_M-\vec{r})\cdot\vec{\vec{\mathcal{K}}}(\vec{r},\vec{r}')\cdot\alpha^*\vec{\vec{g}}^*(\vec{r}_M-\vec{r}')+\mathrm{O}(\rho^3)\,, \tag{V.4}$$

où les fonctions $\vec{\vec{\mathcal{K}}}(\vec{r})$ et $\vec{\vec{\mathcal{K}}}(\vec{r},\vec{r}')$ sont à déterminer.

ii) Calcul de la valeur moyenne de produits de deux dipôles

Comme au paragraphe III.3.*b* (p. 254), je développe la quantité $\vec{d}_i\otimes\vec{d}_j^{\,\dagger}$ sous la forme

$$\left(\vec{d}_i\otimes\vec{d}_j^{\,\dagger}\right) = {}^{(1)}\left(\vec{d}_i\otimes\vec{d}_j^{\,\dagger}\right)+{}^{(2)}\left(\vec{d}_i\otimes\vec{d}_j^{\,\dagger}\right)+\cdots\,, \tag{V.5}$$

où ${}^{(1)}\left(\vec{d}_i\otimes\vec{d}_j^{\,\dagger}\right)$ ne fait intervenir qu'une seule position atomique (et vaut donc 0 si $i\neq j$), ${}^{(2)}\left(\vec{d}_i\otimes\vec{d}_j^{\,\dagger}\right)$ en fait intervenir deux, etc. Je définis en outre

$${}^{(\leqslant 2)}\left(\vec{d}_i\otimes\vec{d}_j^{\,\dagger}\right) = {}^{(1)}\left(\vec{d}_i\otimes\vec{d}_j^{\,\dagger}\right)+{}^{(2)}\left(\vec{d}_i\otimes\vec{d}_j^{\,\dagger}\right)\,. \tag{V.6}$$

Dans le cas où $i\neq j$, la moyenne de ${}^{(\leqslant 2)}\left(\vec{d}_i\otimes\vec{d}_j^{\,\dagger}\right)$ sur les positions atomiques va nous fournir (d'après l'équation (V.2.c)) l'expression de $\vec{\vec{\mathcal{K}}}(\vec{r},\vec{r}')$ à l'ordre 2 en densité. Dans le cas où $i=j$ et en utilisant (V.2.b), on obtiendra $\vec{\vec{\mathcal{K}}}(\vec{r})$ à l'ordre 2.

Plaçons-nous pour commencer dans le cas $i\neq j$. Intuitivement, on écrit la relation

$${}^{(\leqslant 2)}\left(\vec{d}_i\otimes\vec{d}_j^{\,\dagger}\right) = \vec{d}_i^{\,\{i,j\}}\otimes\vec{d}_j^{\,\dagger\{j,i\}}\,. \tag{V.7}$$

On utilise l'expression (III.47) de $\vec{d}_i^{\,\{i,j\}}$ que je rappelle ici :

$$\vec{d}_i^{\,\{i,j\}} = \alpha\varepsilon_0\frac{\alpha^2\vec{\vec{g}}^{\,2}\left(\vec{R}_i-\vec{R}_j\right)\cdot\vec{E}_{\text{L}}e^{i\vec{k}_{\text{L}}\cdot\vec{R}_i}+\alpha\vec{\vec{g}}\left(\vec{R}_i-\vec{R}_j\right)\cdot\vec{E}_{\text{L}}e^{i\vec{k}_{\text{L}}\cdot\vec{R}_j}}{\vec{\vec{1}}-\alpha^2\vec{\vec{g}}^{\,2}\left(\vec{R}_i-\vec{R}_j\right)}\,. \tag{V.8}$$

Ceci donne, en multipliant par $\delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{R}_i)\delta^{(3)}(\vec{r}'-\vec{R}_j)$, puis en moyennant sur les positions des atomes

$$\vec{\vec{\mathcal{K}}}(\vec{r},\vec{r}') = \varepsilon_0^2|\alpha|^2\|\vec{E}_{\text{L}}\|^2\frac{\vec{\vec{1}}+\alpha\vec{\vec{g}}(\vec{r}-\vec{r}')e^{i\vec{k}_{\text{L}}\cdot(\vec{r}'-\vec{r})}}{\vec{\vec{1}}-\alpha^2\vec{\vec{g}}^{\,2}(\vec{r}-\vec{r}')}\cdot\vec{\varepsilon}_{\text{L}}$$
$$\otimes\vec{\varepsilon}_{\text{L}}^{\,*}\cdot\frac{e^{-i\vec{k}_{\text{L}}\cdot(\vec{r}'-\vec{r})}\vec{\vec{1}}+\alpha^*\vec{\vec{g}}^*(\vec{r}-\vec{r}')}{\vec{\vec{1}}-\alpha^{*2}\vec{\vec{g}}^{*2}(\vec{r}-\vec{r}')}+\mathrm{O}(\rho)\,. \tag{V.9}$$

Dans le cas où $i = j$, on obtient à partir de l'équation (III.41) le développement

$$^{(\leqslant 2)}\left(\vec{d}_i \otimes \vec{d}_i^{\dagger}\right) = {}^{(1)}\vec{d}_i \otimes {}^{(\leqslant 2)}\vec{d}_i^{\dagger} + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \alpha\vec{\vec{g}}(\vec{R}_i - \vec{R}_j) \cdot {}^{(\leqslant 2)}\left(\vec{d}_j \otimes \vec{d}_i^{\dagger}\right) . \quad \text{(V.10)}$$

On utilise ensuite les relations (V.7) et (V.8). Après moyenne sur les positions atomiques, on trouve

$$\vec{\vec{\mathcal{K}}}(\vec{r}) = \varepsilon_0^2|\alpha|^2\|\vec{E}_{\mathrm{L}}\|^2 \left\{ \vec{\varepsilon}_{\mathrm{L}} \otimes \vec{\varepsilon}_{\mathrm{L}}^{*} + \int \mathrm{d}^3\vec{r}\,' \frac{\rho^{\mathrm{II}}(\vec{r},\vec{r}\,')}{\rho(\vec{r})} \left[\frac{\vec{\vec{1}} + \alpha\vec{\vec{g}}(\vec{r}-\vec{r}\,')e^{i\vec{k}_{\mathrm{L}}\cdot(\vec{r}\,'-\vec{r})}}{\vec{\vec{1}} - \alpha^2\vec{\vec{g}}^{\,2}(\vec{r}-\vec{r}\,')} \cdot \vec{\varepsilon}_{\mathrm{L}} \right.\right.$$
$$\left.\left. \otimes\vec{\varepsilon}_{\mathrm{L}}^{*} \cdot \frac{\vec{\vec{1}} + \alpha^*\vec{\vec{g}}^{*}(\vec{r}-\vec{r}\,')e^{i\vec{k}_{\mathrm{L}}\cdot(\vec{r}\,'-\vec{r})}}{\vec{\vec{1}} - {\alpha^*}^2\vec{\vec{g}}^{*\,2}(\vec{r}-\vec{r}\,')} - \vec{\varepsilon}_{\mathrm{L}} \otimes \vec{\varepsilon}_{\mathrm{L}}^{*} \right] \right\} + \mathrm{O}(\rho^2) . \quad \text{(V.11)}$$

c) *Section efficace différentielle de diffusion*

Le point M est situé très loin du milieu. Plus exactement, si j'appelle O le centre du milieu, alors $\|\overrightarrow{OM}\| \gg a$. Je peux alors remplacer dans (V.4) les tenseurs $\vec{\vec{g}}(\vec{r}_M - \vec{r})$ et $\vec{\vec{g}}(\vec{r}_M - \vec{r}\,')$ par leurs valeurs asymptotiques, *i.e.*

$$\vec{\vec{g}}(\vec{r}_M - \vec{r}) \simeq \frac{k_{\mathrm{L}}^3}{4\pi} \frac{e^{ik_{\mathrm{L}}\|\vec{r}_M - \vec{r}\|}}{k_{\mathrm{L}}\|\overrightarrow{OM}\|} \left(\vec{\vec{1}} - \frac{\vec{k}_{\mathrm{d}} \otimes \vec{k}_{\mathrm{d}}}{k_{\mathrm{L}}^2} \right) , \quad \text{(V.12)}$$

où j'ai défini $\vec{k}_{\mathrm{d}} = k_{\mathrm{L}}\overrightarrow{OM}/\|\overrightarrow{OM}\|$. J'utiliserai également le développement

$$\|\vec{r}_M - \vec{r}\| - \|\vec{r}_M - \vec{r}\,'\| \simeq \frac{\vec{k}_{\mathrm{d}} \cdot (\vec{r}\,' - \vec{r})}{k_{\mathrm{L}}} . \quad \text{(V.13)}$$

Plutôt que de calculer l'intensité du champ au point M, j'évalue la section efficace de diffusion polarisée $\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\Omega(\vec{k}_{\mathrm{L}}\vec{\varepsilon}_{\mathrm{L}} \to \vec{k}_{\mathrm{d}}\vec{\varepsilon}_{\mathrm{d}})$. Pour cela, je tire parti du fait que le flux de photons à travers une surface est proportionnel à l'intensité du champ classique sur cette surface. D'où

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{\text{Nombre de photons diffusés}}{\text{Flux incident}} = \frac{\vec{\varepsilon}_{\mathrm{d}}^{*} \cdot \vec{\vec{\mathcal{I}}}_{\infty}(\vec{r}_M, \vec{r}_M) \cdot \vec{\varepsilon}_{\mathrm{d}}}{E_{\mathrm{L}}^2} \|\overrightarrow{OM}\|^2 \mathrm{d}\Omega . \quad \text{(V.14)}$$

d) *Résultat pour un milieu homogène*

Je suppose dorénavant que la densité atomique est constante à l'intérieur du milieu ($\rho(\vec{r}) = \rho_0$). Je calcule la section efficace de diffusion en utilisant les

équations (V.4), (V.9), (V.11) et (V.14). J'obtiens

$$\frac{1}{N}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \left|\frac{3\Gamma}{4k_{\mathrm{L}}\left(\delta + i\frac{\Gamma}{2}\right)}\right|^2 \left\{ |\vec{\varepsilon}_{\mathrm{d}}^{\,*}\cdot\vec{\varepsilon}_{\mathrm{L}}|^2 + (N-1)\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}^3\vec{r}\,p(\vec{r})\left(1+\varphi(\vec{r})\right) \right.$$
$$\left[\vec{\varepsilon}_{\mathrm{d}}^{\,*}\cdot\frac{\vec{\vec{1}}+\alpha\vec{\vec{g}}(\vec{r})e^{i\vec{k}_{\mathrm{L}}\cdot\vec{r}}}{\vec{\vec{1}}-\alpha^2\vec{\vec{g}}^{\,2}(\vec{r})}\cdot\vec{\varepsilon}_{\mathrm{L}}\otimes\vec{\varepsilon}_{\mathrm{L}}^{\,*}\cdot\frac{\vec{\vec{1}}+\alpha^*\vec{\vec{g}}^{\,*}(\vec{r})e^{-i\vec{k}_{\mathrm{L}}\cdot\vec{r}}}{\vec{\vec{1}}-\alpha^{*2}\vec{\vec{g}}^{\,*2}(\vec{r})}\cdot\vec{\varepsilon}_{\mathrm{d}} - |\vec{\varepsilon}_{\mathrm{d}}^{\,*}\cdot\vec{\varepsilon}_{\mathrm{L}}|^2 \right.$$
$$\left.\left. + e^{i\vec{k}_{\mathrm{d}}\cdot\vec{r}}\vec{\varepsilon}_{\mathrm{d}}^{\,*}\cdot\frac{\vec{\vec{1}}+\alpha\vec{\vec{g}}(\vec{r})e^{i\vec{k}_{\mathrm{L}}\cdot\vec{r}}}{\vec{\vec{1}}-\alpha^2\vec{\vec{g}}^{\,2}(\vec{r})}\cdot\vec{\varepsilon}_{\mathrm{L}}\otimes\vec{\varepsilon}_{\mathrm{L}}^{\,*}\cdot\frac{e^{-i\vec{k}_{\mathrm{L}}\cdot\vec{r}}\vec{\vec{1}}+\alpha^*\vec{\vec{g}}^{\,*}(\vec{r})}{\vec{\vec{1}}-\alpha^{*2}\vec{\vec{g}}^{\,*2}(\vec{r})}\cdot\vec{\varepsilon}_{\mathrm{d}}\right]\right\}, \quad \text{(V.15)}$$

où V est le volume du milieu et $p(\vec{r})$ est la probabilité que deux points du milieu soient séparés par le vecteur $\vec{r}$, définie par

$$p(\vec{r}) = \frac{1}{V^2}\iint_{\text{milieu}}\mathrm{d}^3\vec{r}_1\mathrm{d}^3\vec{r}_2\,\delta^{(3)}(\vec{r}_1-\vec{r}_2-\vec{r})\,. \quad \text{(V.16)}$$

L'équation (V.15) constitue formellement le résultat cherché. Son intégration numérique, qui est assez compliquée, sera toutefois considérablement simplifiée si on peut intégrer certaines variables analytiquement. Dans cette optique, je me suis placé dans le cas où le milieu remplit une boule de diamètre a. Cela permet de calculer analytiquement la partie angulaire de l'intégrale. Signalons que le choix de la boule devient désastreux si le milieu cesse d'être mince (à cause de la diffraction sur les bords du milieu qui se fait dans toutes les directions).

Dans le cas d'une boule, la probabilité $p(\vec{r})$ ne dépend que de r. On la calcule en évaluant le volume de l'intersection de deux boules de diamètre a et dont les centres sont distants de r. On trouve finalement

$$p(\vec{r}) = \frac{6}{\pi a^3}\left(1-\frac{3r}{2a}+\frac{r^3}{2a^3}\right)\theta(a-r)\,. \quad \text{(V.17)}$$

e) Séparation des termes de l'expression (V.15)

L'intégration analytique de la partie angulaire de l'équation (V.15) est *a priori* plus compliquée que pour l'indice. En particulier, nous sommes gênés par la présence d'exponentielles complexes avec des arguments différents ($i\vec{k}_{\mathrm{L}}\cdot\vec{r}$ ou $i\vec{k}_{\mathrm{d}}\cdot\vec{r}$). Afin de simplifier un peu les calculs (*i.e.* pour éviter de faire apparaître des fonctions de Bessel), il est préférable de développer l'expression (V.15), de façon à séparer ces exponentielles. On intégrera ensuite séparément la partie angulaire de chacun des termes, en choisissant à chaque fois pour axe z l'axe du vecteur d'onde de l'exponentielle complexe.

Voici le résultat de ce développement (pour $N \gg 1$) :

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{N}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = {} & \left|\frac{3\Gamma}{4k_{\mathrm{L}}\left(\delta + i\frac{\Gamma}{2}\right)}\right|^2 \Big(|\vec{\varepsilon}_{\mathrm{d}}^{\,*}\cdot\vec{\varepsilon}_{\mathrm{L}}|^2 \\
& + N\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}^3\vec{r}\,p(\vec{r})\Big[e^{i(\vec{k}_{\mathrm{d}}-\vec{k}_{\mathrm{L}})\cdot\vec{r}}\,|\vec{\varepsilon}_{\mathrm{L}}^{\,*}\cdot\vec{\varepsilon}_{\mathrm{d}}|^2 + \left(\vec{\varepsilon}_{\mathrm{d}}^{\,*}\cdot\alpha\vec{\vec{g}}(\vec{r})\cdot\vec{\varepsilon}_{\mathrm{L}}\otimes\vec{\varepsilon}_{\mathrm{L}}^{\,*}\cdot\vec{\varepsilon}_{\mathrm{d}}e^{i\vec{k}_{\mathrm{L}}\cdot\vec{r}} + \text{c.c.}\right) \\
& + \vec{\varepsilon}_{\mathrm{d}}^{\,*}\cdot\alpha\vec{\vec{g}}_{\infty}(\vec{r})\cdot\vec{\varepsilon}_{\mathrm{L}}\otimes\vec{\varepsilon}_{\mathrm{L}}^{\,*}\cdot\alpha^*\vec{\vec{g}}_{\infty}^{\,*}(\vec{r})\cdot\vec{\varepsilon}_{\mathrm{d}} + \left(e^{i\vec{k}_{\mathrm{d}}\cdot\vec{r}}\vec{\varepsilon}_{\mathrm{d}}^{\,*}\cdot\alpha\vec{\vec{g}}(\vec{r})\cdot\vec{\varepsilon}_{\mathrm{L}}\otimes\vec{\varepsilon}_{\mathrm{L}}^{\,*}\cdot\vec{\varepsilon}_{\mathrm{d}} + \text{c.c.}\right)\Big]\Big\} \text{ Termes géométriques} \\
& + \rho_0\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}^3\vec{r}\Big[\left(1+\varphi(\vec{r})\right)\vec{\varepsilon}_{\mathrm{d}}^{\,*}\cdot\frac{\alpha\vec{\vec{g}}(\vec{r})}{\vec{\vec{1}}-\alpha^2\vec{\vec{g}}^{\,2}(\vec{r})}\cdot\vec{\varepsilon}_{\mathrm{L}}\otimes\vec{\varepsilon}_{\mathrm{L}}^{\,*}\cdot\frac{\alpha^*\vec{\vec{g}}^{\,*}(\vec{r})}{\vec{\vec{1}}-\alpha^{*2}\vec{\vec{g}}^{\,*2}(\vec{r})}\cdot\vec{\varepsilon}_{\mathrm{d}} \\
& \qquad -\vec{\varepsilon}_{\mathrm{d}}^{\,*}\cdot\alpha\vec{\vec{g}}_{\infty}(\vec{r})\cdot\vec{\varepsilon}_{\mathrm{L}}\otimes\vec{\varepsilon}_{\mathrm{L}}^{\,*}\cdot\alpha^*\vec{\vec{g}}_{\infty}^{\,*}(\vec{r})\cdot\vec{\varepsilon}_{\mathrm{d}}\Big]\Big\} \text{ Echelles irréductibles} \\
& + \rho_0\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}^3\vec{r}\left(1+\varphi(\vec{r})\right)\left[\vec{\varepsilon}_{\mathrm{d}}^{\,*}\cdot\frac{\vec{\vec{1}}}{\vec{\vec{1}}-\alpha^2\vec{\vec{g}}^{\,2}(\vec{r})}\cdot\vec{\varepsilon}_{\mathrm{L}}\otimes\vec{\varepsilon}_{\mathrm{L}}^{\,*}\cdot\frac{\vec{\vec{1}}}{\vec{\vec{1}}-\alpha^{*2}\vec{\vec{g}}^{\,*2}(\vec{r})}\cdot\vec{\varepsilon}_{\mathrm{d}} - |\vec{\varepsilon}_{\mathrm{L}}^{\,*}\cdot\vec{\varepsilon}_{\mathrm{d}}|^2\right]\Big\} \text{ Boucles} \\
& + \rho_0\Bigg(\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}^3\vec{r}\Big[\left(1+\varphi(\vec{r})\right)\vec{\varepsilon}_{\mathrm{d}}^{\,*}\cdot\frac{\alpha\vec{\vec{g}}(\vec{r})}{\vec{\vec{1}}-\alpha^2\vec{\vec{g}}^{\,2}(\vec{r})}\cdot\vec{\varepsilon}_{\mathrm{L}}\otimes\vec{\varepsilon}_{\mathrm{L}}^{\,*}\cdot\frac{\vec{\vec{1}}}{\vec{\vec{1}}-\alpha^{*2}\vec{\vec{g}}^{\,*2}(\vec{r})}\cdot\vec{\varepsilon}_{\mathrm{d}} \\
& \qquad -\vec{\varepsilon}_{\mathrm{d}}^{\,*}\cdot\alpha\vec{\vec{g}}(\vec{r})\cdot\vec{\varepsilon}_{\mathrm{L}}\otimes\vec{\varepsilon}_{\mathrm{L}}^{\,*}\cdot\vec{\varepsilon}_{\mathrm{d}}\Big]\left(e^{i\vec{k}_{\mathrm{L}}\cdot\vec{r}}+e^{i\vec{k}_{\mathrm{d}}\cdot\vec{r}}\right) + \text{c.c.}\Bigg)\Big\} \text{ Echelles bouclées} \\
& + \rho_0\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}^3\vec{r}\left(1+\varphi(\vec{r})\right)e^{i(\vec{k}_{\mathrm{d}}+\vec{k}_{\mathrm{L}})\cdot\vec{r}}\vec{\varepsilon}_{\mathrm{d}}^{\,*}\cdot\frac{\alpha\vec{\vec{g}}(\vec{r})}{\vec{\vec{1}}-\alpha^2\vec{\vec{g}}^{\,2}(\vec{r})}\cdot\vec{\varepsilon}_{\mathrm{L}}\otimes\vec{\varepsilon}_{\mathrm{L}}^{\,*}\cdot\frac{\alpha^*\vec{\vec{g}}^{\,*}(\vec{r})}{\vec{\vec{1}}-\alpha^{*2}\vec{\vec{g}}^{\,*2}(\vec{r})}\cdot\vec{\varepsilon}_{\mathrm{d}}\Big\} \text{ Terme croisé} \\
& + \rho_0\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}^3\vec{r}\,e^{i(\vec{k}_{\mathrm{d}}-\vec{k}_{\mathrm{L}})\cdot\vec{r}}\Big[\left(1+\varphi(\vec{r})\right)\vec{\varepsilon}_{\mathrm{d}}^{\,*}\cdot\frac{\vec{\vec{1}}}{\vec{\vec{1}}-\alpha^2\vec{\vec{g}}^{\,2}(\vec{r})}\cdot\vec{\varepsilon}_{\mathrm{L}}\otimes\vec{\varepsilon}_{\mathrm{L}}^{\,*}\cdot\frac{\vec{\vec{1}}}{\vec{\vec{1}}-\alpha^{*2}\vec{\vec{g}}^{\,*2}(\vec{r})}\cdot\vec{\varepsilon}_{\mathrm{d}} \\
& \qquad - |\vec{\varepsilon}_{\mathrm{L}}^{\,*}\cdot\vec{\varepsilon}_{\mathrm{d}}|^2\Big]\Big)\Big\} \text{ Terme croisé progressif},
\end{aligned}
\tag{V.18}
$$

où le « tenseur asymptotique » $\vec{\vec{g}}_{\infty}$ est défini par

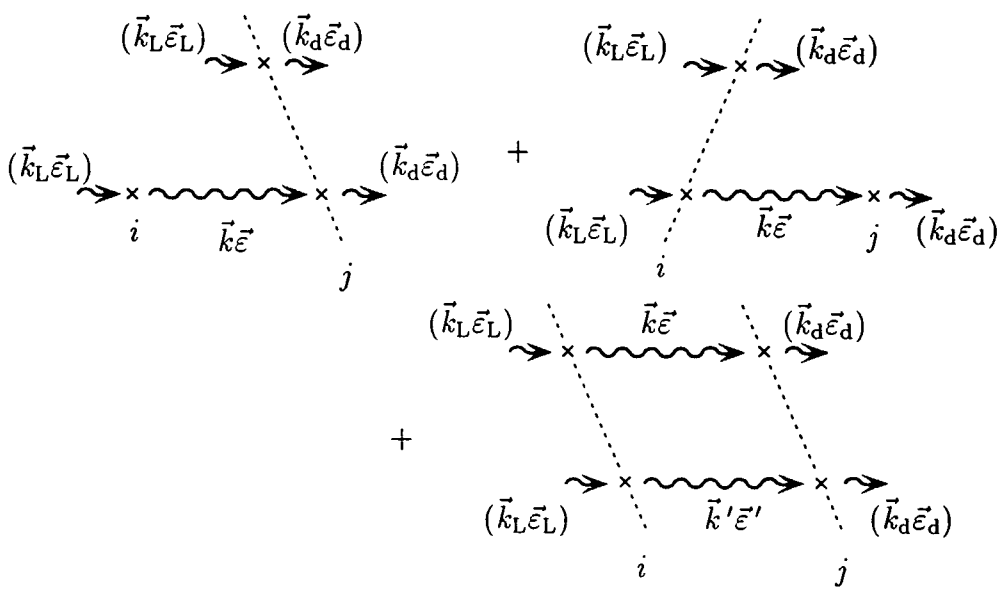
$$
\vec{\vec{g}}_{\infty}(\vec{r}) = \frac{k_{\mathrm{L}}^3}{4\pi}\frac{e^{ik_{\mathrm{L}}r}}{k_{\mathrm{L}}r}\left(\vec{\vec{1}} - \frac{\vec{r}\otimes\vec{r}}{r^2}\right), \tag{V.19}
$$

définition qui est suggérée par Bart A. van Tiggelen [214, p. 45]. Le tenseur $\vec{\vec{g}}_{\infty}(\vec{r})$ coïncide avec le tenseur $\vec{\vec{g}}(\vec{r})$ pour $k_{\mathrm{L}}r \gg 1$. Il ne contient pas les termes en $1/r^2$ ni les termes en $1/r^3$ (ni non plus le terme de contact).

Regardons de près les termes de l'équation (V.18). Les termes intitulés « termes géométriques » contiennent des intégrales qui ne convergent à l'infini que grâce à la présence de la probabilité $p(\vec{r})$. Ces termes dépendent fortement de

la taille et de la forme du milieu atomique. Au contraire, dans les termes suivants, les intégrales convergent sur une distance de l'ordre de la longueur d'onde optique. En me plaçant dans la limite $a \gg \lambda_L$, j'ai donc pu remplacer la probabilité $p(\vec{r})$ par la constante $1/V$ (c'est-à-dire traiter ces termes comme si le milieu était infini). Ces termes ne dépendent pas de la taille ni de la forme du milieu : ce sont des termes intrinsèques. Remarquons que les effets collectifs ne sont présents que dans les termes intrinsèques.

Il est également possible de séparer les termes intrinsèques des termes géométriques en raisonnant avec des diagrammes. Les diagrammes entrant en jeu dans les termes intrinsèques sont présentés dans la table V.1 (où j'ai repris pour chaque classe de diagrammes la nomenclature de Bart A. van Tiggelen et Ad Lagendijk [213]). On constate que ce sont tous des diagrammes *irréductibles*, c'est-à-dire qu'il est impossible de couper en deux en sectionnant deux lignes de photons parallèles. Au contraire, les diagrammes des termes géométriques, *i.e.*



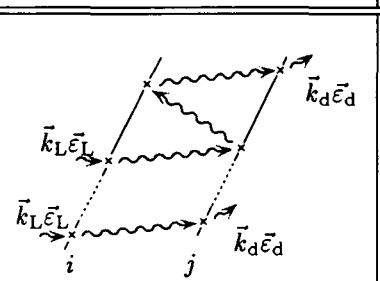
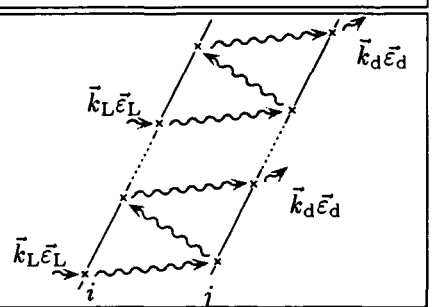
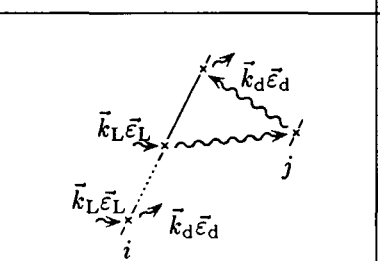
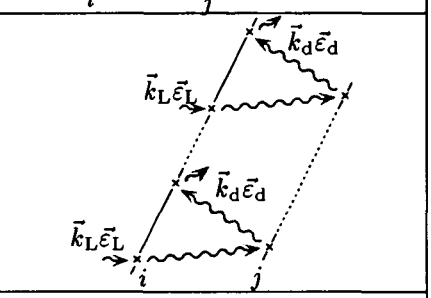
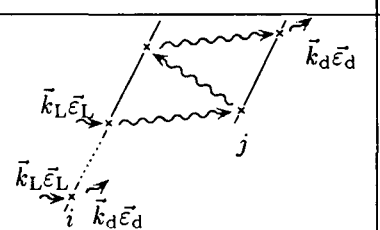
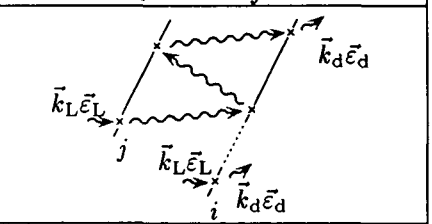
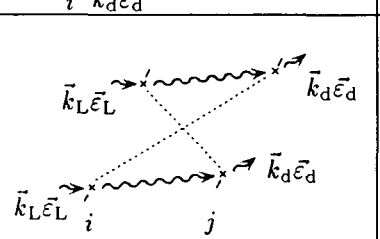
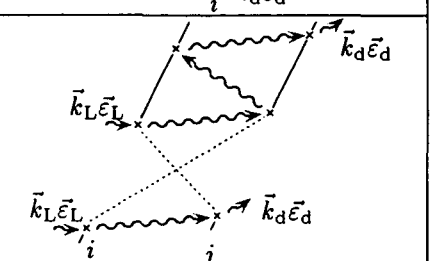
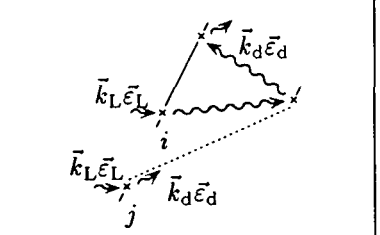
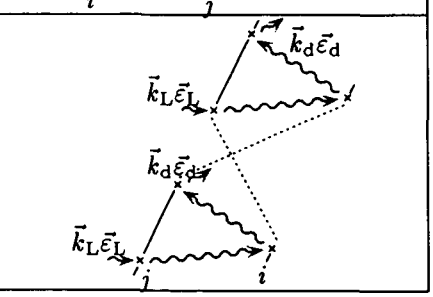
(V.20)

sont des diagrammes réductibles. Cette opposition entre diagrammes réductibles et irréductibles est quelque chose de fondamental : on rencontre d'ailleurs la même pour le calcul d'indice[1].

Les diagrammes réductibles de la formule (V.20) sont en fait les premiers d'une classe de diagrammes (les diagrammes d'échelles). Lorsque le milieu est épais, il est nécessaire de resommer l'ensemble de ces diagrammes. Des précisions seront apportées sur ce sujet au paragraphe V.2.*c.ii*, p. 319.

1. Voir par exemple dans l'annexe B la remarque p. 367.

TAB. V.1 - *Les termes irréductibles du résultat (V.18) et les diagrammes correspondants. Les termes statistiques et les complexes conjugués ne figurent pas dans ce tableau. Les noms ont été tirés de [213].*

Terme	*1er Diagramme*	*Diagrammes suivants*
Echelles irréductibles		
Boucles		
Echelles bouclées		
Terme croisé		
Terme croisé progressif		

f) Intégration angulaire dans le cas d'un milieu sphérique

Comme pour le calcul d'indice, j'ai intégré analytiquement la partie angulaire des intégrales figurant dans le résultat (V.18). Je me suis ainsi ramené à une intégrale portant sur une seule variable, beaucoup plus facile à traiter numériquement. Malgré la complexité et la longueur des calculs, je les ai effectués de façon archaïque (c'est-à-dire à la main). Par la suite, j'ai vérifié mon résultat à l'aide du logiciel de calcul symbolique *Mathematica*.

Je commence par définir le cadre général du calcul d'intégrales. Soient $\vec{\vec{}}[F](\vec{r})$ et $\vec{\vec{}}[G](\vec{r})$ deux tenseurs diagonaux sur toute base orthonormée dont le premier vecteur est $\vec{r}/\|\vec{r}\|$, *i.e.*

$$\vec{\vec{F}}(\vec{r}) = \mathrm{Diag}_{\frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|},\vec{u}_1,\vec{u}_2}\left[F_{/\!/}(\|\vec{r}\|), F_\perp(\|\vec{r}\|), F_\perp(\|\vec{r}\|)\right], \tag{V.21}$$

les valeurs propres ne dépendant que de $\|\vec{r}\|$. Je définis l'intégrale

$$\mathcal{I}_{\mathrm{ang}}(\vec{\vec{F}}, \vec{\vec{G}}, \vec{k}) = \int \mathrm{d}^3\vec{r}\, \vec{\varepsilon}_{\mathrm{d}}^{\,*} \cdot \vec{\vec{F}}(\vec{r}) \cdot \vec{\varepsilon}_{\mathrm{L}} \otimes \vec{\varepsilon}_{\mathrm{L}}^{\,*} \cdot \vec{\vec{G}}^{\,*}(\vec{r}) \cdot \vec{\varepsilon}_{\mathrm{d}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}. \tag{V.22}$$

On voit que toutes les intégrales figurant dans l'équation (V.16) se ramènent à la forme (V.22). Alors, le résultat de l'intégration angulaire (où j'ai séparé le cas $\vec{k} = \vec{0}$) est :

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{\mathrm{ang}}(\vec{\vec{F}}, \vec{\vec{F}}, \vec{0}) = \pi \int_0^{+\infty} \mathrm{d}r\, r^2 \Bigg[& \frac{4}{15}\left|F_{/\!/}(r) - F_\perp(r)\right|^2 \\
& + \left|\vec{\varepsilon}_{\mathrm{d}}^{\,*} \cdot \vec{\varepsilon}_{\mathrm{L}}\right|^2 \left(\frac{8}{15}\left|F_{/\!/}(r)\right|^2 + \frac{4}{5}\left(F_{/\!/}(r)F_\perp^*(r) + F_\perp(r)F_{/\!/}^*(r)\right) + \frac{28}{15}\left|F_\perp(r)\right|^2\right)\Bigg]
\end{aligned} \tag{V.23.a}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{\mathrm{ang}}(\vec{\vec{F}}, \vec{\vec{G}}, \vec{k}) = \pi \int_0^{+\infty} \mathrm{d}r\, r^2 & \\
\times \Bigg\{ & \left(F_{/\!/}(r) - F_\perp(r)\right)\left(G_{/\!/}^*(r) - G_\perp^*(r)\right)\Bigg[\frac{1}{4}\left(f_1(kr) - 2f_2(kr) + f_3(kr)\right) \\
& + \left(\left|\vec{\varepsilon}_{\mathrm{L}}^{\,*} \cdot \vec{k}/k\right|^2 + \left|\vec{\varepsilon}_{\mathrm{d}}^{\,*} \cdot \vec{k}/k\right|^2\right)\left(-\frac{1}{4}f_1(kr) + \frac{3}{2}f_2(kr) - \frac{5}{4}f_3(kr)\right) \\
& + \left|\vec{\varepsilon}_{\mathrm{L}}^{\,*} \cdot \vec{k}/k\right|^2 \left|\vec{\varepsilon}_{\mathrm{d}}^{\,*} \cdot \vec{k}/k\right|^2 \left(\frac{3}{4}f_1(kr) - \frac{15}{2}f_2(kr) + \frac{35}{4}f_3(kr)\right)\Bigg] \\
& + \left|\vec{\varepsilon}_{\mathrm{d}}^{\,*} \cdot \vec{\varepsilon}_{\mathrm{L}}\right|^2 \Bigg[\frac{1}{2}\left(f_1(kr) - 2f_2(kr) + f_3(kr)\right) F_{/\!/}(r)G_{/\!/}^*(r) \\
& + \frac{1}{2}\left(f_1(kr) - f_3(kr)\right)\left(F_{/\!/}(r)G_\perp^*(r) + F\perp(r)G_{/\!/}^*(r)\right) \\
& + \frac{1}{2}\left(f_1(kr) + 2f_2(kr) + f_3(kr)\right) F_\perp(r)G_\perp^*(r)\Bigg] \\
& + 2\vec{\varepsilon}_{\mathrm{d}}^{\,*} \cdot \vec{\varepsilon}_{\mathrm{L}} \otimes \vec{\varepsilon}_{\mathrm{L}}^{\,*} \cdot \vec{k}/k \otimes \vec{k}/k \cdot \vec{\varepsilon}_{\mathrm{d}}
\end{aligned}$$

$$\times \left[\left(-\frac{1}{2} f_1(kr) + 3 f_2(kr) - \frac{5}{2} f_3(kr) \right) F_{//}(r) G^*_{//}(r) \right.$$
$$+ \left(-\frac{3}{2} f_2(kr) + \frac{5}{2} f_3(kr) \right) \left(F_{//}(r) G^*_{\perp}(r) + F\perp(r) G^*_{//}(r) \right)$$
$$\left. + \left(\frac{1}{2} f_1(kr) - \frac{5}{2} f_3(kr) \right) F_{\perp}(r) G^*_{\perp}(r) \right] \Big\} , \qquad \text{(V.23.b)}$$

où les fonctions f_1, f_2 et f_3 sont définies par

$$f_1(kr) = 2\frac{\sin kr}{kr} \qquad \text{(V.24.a)}$$

$$f_2(kr) = 2\frac{\sin kr}{kr} + 4\frac{\cos kr}{k^2 r^2} - 4\frac{\sin kr}{k^3 r^3} \qquad \text{(V.24.b)}$$

$$f_3(kr) = 2\frac{\sin kr}{kr} + 8\frac{\cos kr}{k^2 r^2} - 24\frac{\sin kr}{k^3 r^3} - 48\frac{\cos kr}{k^4 r^4} + 48\frac{\sin kr}{k^5 r^5} . \qquad \text{(V.24.c)}$$

g) Résultats numériques

i) Principe du calcul numérique

J'ai évalué numériquement la section efficace différentielle de diffusion, en procédant de la même façon que pour l'indice, *i.e.* en partant de l'expression intégrée sur les angles. J'ai évalué la lumière diffusée par un milieu sphérique mince : j'ai donc dû choisir une densité et un rayon de milieu compatibles avec la condition de minceur.

Je suis parti de l'expression (V.18), transformée grâce à l'équation (V.23). J'ai intégré séparément les termes géométriques et les termes intrinsèques de l'équation (V.18), car le rayon de convergence des intégrales correspondantes n'est pas du tout du même ordre. Par contre, j'ai groupé (après l'intégration angulaire) les intégrants de tous les termes intrinsèques, avant de les intégrer numériquement. Si j'effectue les opérations dans l'ordre inverse (intégration numérique de chaque terme puis addition des résultats), j'obtiens un résultat faux à cause des erreurs d'arrondis (avec notamment une section efficace négative dans certains cas).

Remarquons que l'expression de la section efficace (plus exactement la contribution des diagrammes de boucles) contient un terme qui oscille sans s'amortir pour $r \to +\infty$. Ce problème avait déjà été rencontré dans le cas de l'indice et a été traité ici de la même façon (en intégrant séparément l'exponentielle complexe correspondante, et en l'ôtant de l'intégrant ; on le justifie en introduisant une partie imaginaire au pôle lors de l'évaluation de $\vec{\vec{g}}$ (par exemple en remplaçant $\vec{\vec{g}}$ par le tenseur $\vec{\vec{g}}_B$ défini par les formules (C.3) et (C.4) dans l'annexe C)).

Comme pour l'indice, j'ai effectué le calcul sur la station SUN SPARC de notre équipe. J'obtiens une courbe du genre de celle de la figure V.2 en quelques heures.

ii) Résultat

La figure V.2 présente le résultat d'un calcul de section efficace différentielle de diffusion, pour un milieu mince de forme sphérique, avec un désaccord laser valant $\delta = \Gamma$, et en détectant la lumière diffusée dans une direction de polarisation orthogonale à la polarisation incidente. La section efficace de diffusion par atome est tracée en fonction de la température.

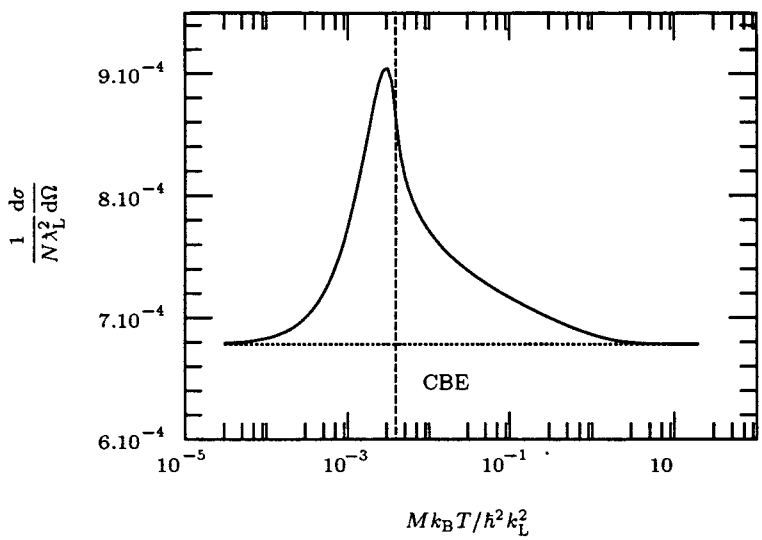


FIG. V.2 - *Résultat d'un calcul de section efficace différentielle de diffusion, pour des bosons (courbe continue) et des atomes discernables (courbe en pointillés). Le milieu remplit une sphère de rayon* $a/2 = 20\lambda_L$. *La densité atomique (homogène) vaut* $\rho_0\lambda_L^3 = 0{,}01$. *Le désaccord du laser vaut* $\delta = \Gamma$. *Le faisceau incident est polarisé linéairement. La direction de diffusion est (en coordonnées sphériques, par rapport aux axes* $\vec{u}_x = \vec{\varepsilon}_L$, $\vec{u}_y = \vec{u}_z \wedge \vec{u}_x$ *et* $\vec{u}_z = \vec{k}_L/k_L$*)* $\theta = \pi/4$, *et* $\varphi = \pi/2$. *La lumière diffusée est détectée dans une direction de polarisation orthogonale à la polarisation incidente.*

Comme dans le cas de l'indice, la seule dépendance en température est due aux effets de statistique quantique. On constate donc que ces effets de statistique représentent, dans le meilleur des cas (c'est-à-dire au voisinage de la condensation de Bose-Einstein), 20 % du signal total. C'est beaucoup mieux que dans le cas de l'indice ; c'est néanmoins un peu décevant en comparaison avec la peine que nous ont coûtée les calculs. Au vu de ce résultat, les effets collectifs ne semblent guère observables sur les expériences de notre laboratoire. Si l'on recherche les effets collectifs à des températures accessibles par le refroidissement laser, on a besoin de contrôler la densité atomique à une précision de l'ordre du pour cent, chose qui me paraît très difficile. A des températures plus basses (et notamment si la condensation de Bose est atteinte), une précision de 10 % sur la densité suffit. Mais il faut acquérir les techniques de refroidissement évaporatif, chose qui

nécessitera vraisemblablement plusieurs mois, voire un an.

Toutefois, comme pour l'indice, on doit s'attendre à ce que, si l'on se place à grand désaccord, les effets collectifs apparaissent pour des températures plus élevées (toujours selon le même argument développé p. 266, basé sur l'existence d'une distance r_* à laquelle les deux atomes d'une paire voient le laser de façon résonnante). C'est ce que nous allons maintenant vérifier.

iii) Résultat à grand désaccord

La figure V.3 nous montre des résultat obtenus à des désaccords laser allant de $\delta = 0$ à $\delta = 50\ \Gamma$. On voit que comme attendu, la dépendance en température (et donc les effets quantiques collectifs) apparaît à une température d'autant plus élevée que le désaccord est grand. Nous avons également une surprise: plus le désaccord est élevé, plus grande est l'importance (par rapport au signal total) du terme statistique. A grand désaccord, il représente la moitié du signal total. Il serait donc possible d'observer des effets quantiques collectifs sur des atomes refroidis par laser, sans qu'il soit nécessaire de très bien contrôler la densité.

Malheureusement, ce bel optimisme doit être tempéré, et ce pour deux raisons. La première a déjà été évoquée : les calculs sont effectués sur une transition $0 \rightarrow 1$, et pour généraliser le résultat, il faut être capable de pomper parfaitement les atomes. La deuxième difficulté vient du fait que l'intensité de la lumière diffusée décroît lorsque $\delta \rightarrow +\infty$. Pour un désaccord $\delta = 10\ \Gamma$, on trouve une section efficace différentielle par atome de l'ordre de $5.10^{-7}\ \lambda_L^2$ (je rappelle que je me suis placé dans le cas d'une très faible densité ($\rho_0 \lambda_L^3 = 0{,}01$) et que je détecte la lumière dans une direction de polarisation orthogonale à la polarisation incidente). Si l'on suppose que la fréquence de Rabi du laser incident est de l'ordre de Γ, et en prenant pour Γ la valeur du césium ($2\pi \times 5{,}3$ MHz), sachant également qu'avec les paramètres choisis[1] le milieu contient 335 atomes, on trouve que le milieu diffuse 600 photons par seconde et par stéradian. L'observation de ce signal nécessitera donc l'emploi d'un photomultiplicateur, une technique relativement compliquée à utiliser.

iv) Mesure de la lumière diffusée dans un petit angle

Le calcul de section efficace de diffusion dans le cadre de l'approximation de Born réalisé au paragraphe I.1 (p. 200) prédit que les effets collectifs seront importants si l'on détecte la lumière diffusée vers l'avant, dans une direction formant un petit angle $\theta \propto \lambda_L / \Lambda_{DB}$ par rapport à l'axe de propagation du faisceau (voir le résultat (I.8) et la figure I.4) ; dans ce cas il n'est pas besoin de filtrer la polarisation. On peut donc se demander s'il est possible de retrouver ce résultat dans le cadre du présent chapitre (*i.e.* en tenant compte des interactions entre paires d'atomes dont l'un est excité).

1. La densité vaut $\rho_0 \lambda_L^3 = 0{,}01$, et le rayon du milieu $a/2 = 20\ \lambda_L$.

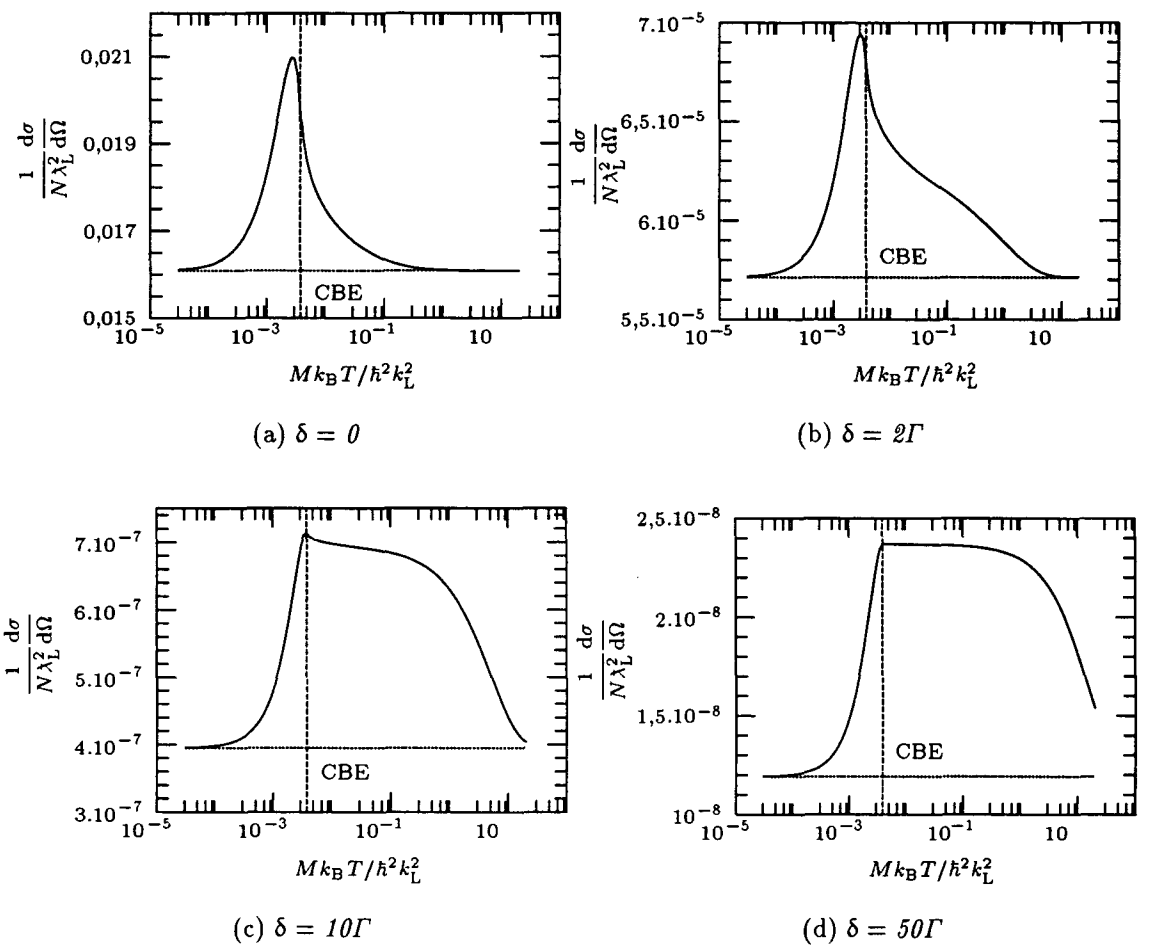


FIG. V.3 - *Calcul de section efficace de diffusion, tracée en fonction de la température pour différentes valeurs du désaccord du laser. Les autres paramètres (forme du milieu, densité, direction de diffusion, polarisation) sont les mêmes que pour la figure V.2.*

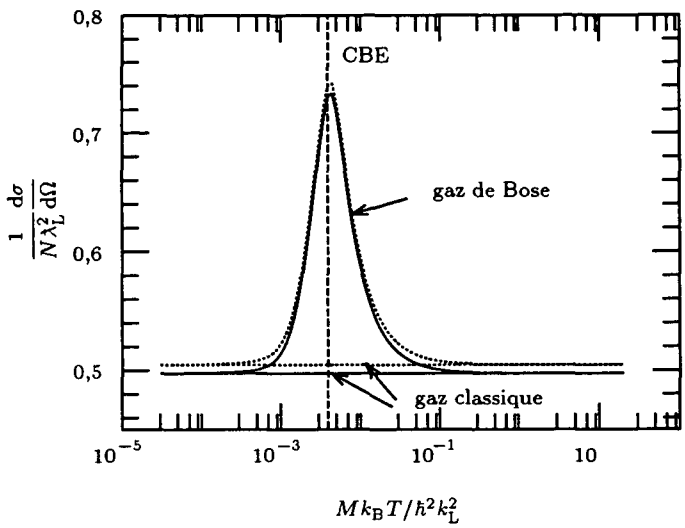


FIG. V.4 - *Résultat d'un calcul de section efficace différentielle avec un petit angle de diffusion ($\Theta = 0{,}1$ rad $= 5{,}7°$), et sans filtrage de la polarisation. La densité, le désaccord, la taille du milieu et l'angle φ sont les mêmes que sur la figure V.2. En pointillés, résultat obtenu dans le cadre de l'approximation de Born (éq. (I.8), p. 203).*

La figure V.4 vient confirmer nos attentes : en choisissant un angle de diffusion de 0,1 rad, on constate que, lorsque la condensation de Bose est atteinte et si l'on compare avec le cas des atomes discernables, 50 % de lumière supplémentaire est diffusée. On remarquera en outre que la prise en compte des interactions n'apporte que des corrections mineures, par rapport au résultat donné par l'approximation de Born ; de ce point de vue, les travaux que j'ai effectués dans ma thèse ne sont donc pas très « rentables ».

Au premier abord, une mesure de la lumière diffusée selon un petit angle semblera plus facilement réalisable que les mesures proposées dans les paragraphes précédents, basées sur un filtrage de la polarisation : la quantité de lumière diffusée y est en effet beaucoup plus importante. Toutefois, on ne pourra plus tirer parti de l'intéressante caractéristique présentée dans la section V.1.*g.iii* (p. 304), à savoir que les effets collectifs apparaissent pour des températures plus élevées si le désaccord du laser est grand (cette caractéristique est très liée aux interactions entre atomes, dont on sait qu'elles jouent peu de rôle dans le cas présent). Ceci limite donc l'intérêt de la mesure à petit angle, qui nécessiterait de fabriquer un condensat tout en contrôlant la densité à 10 % près, ce qui n'est pas réalisable dans l'état actuel des expériences[1].

1. L'astuce évoquée p. 266, qui consistait à éliminer les fluctuations de la densité en comparant la diffusion de deux faisceaux de désaccord différents se propageant selon le même axe, n'est pas applicable ici car elle est précisément basée sur la caractéristique de la diffusion à grand désaccord que je viens d'évoquer.

Remarque : le résultat de la figure V.4 met en évidence une situation où les termes d'échange entre deux atomes identiques cessent d'être négligeables devant les termes classiques. Dans ces conditions, il est possible que des termes d'échange entre trois atomes ou plus soient eux aussi non négligeables. Autrement dit, la courbe de la figure V.4 n'est pas un résultat correct quantitativement (mais il n'y a pas de raison *a priori* pour que les termes d'échange d'ordre supérieur viennent compenser de façon importante l'effet du terme d'ordre 2).

v) Conclusion

Les calculs d'intensité que j'ai présentés montrent qu'il est théoriquement possible d'observer un signal lié à l'indiscernabilité des atomes en mesurant la diffusion de la lumière dans une direction de polarisation orthogonale à la polarisation incidente. Toutefois, les conditions expérimentales seront particulièrement délicates, car elle nécessitent soit de très bien contrôler la densité, soit de détecter très peu de lumière.

Néanmoins, la condition de milieu mince $\rho_0 \lambda_L^2 a \ll 1$, et la condition de faible densité $\rho_0 \lambda_L^3 \ll 1$, que j'ai imposées dans mes calculs, sont des pures conditions de théoricien : sans elles, je ne sais pas faire le calcul, ce qui ne veut pas dire qu'il n'y a pas d'effets intéressants. En levant l'une de ces conditions, on augmente le nombre d'atomes, donc le signal lumineux. Pour pouvoir prédire quel sera ce signal, il faut trouver une méthode de calcul de la diffusion valable dans le cas d'un milieu épais et dense.

Cette méthode existe, bien qu'elle ne soit pas très élégante : il s'agit d'une simulation de Monte-Carlo, donc une méthode entièrement numérique. Elle permet de calculer la section efficace de diffusion non seulement dans le cas d'un milieu épais et/ou de densité élevée, mais également dans le cas où la densité n'est pas uniforme. On pourra par exemple traiter la situation où les atomes sont confinés dans un piège harmonique, comme c'est le cas sur les récentes expériences de condensation par refroidissement évaporatif [63].

Les résultats de cette méthode seront présentés dans l'article que nous publierons prochainement.

2. Généralisation au cas d'un milieu d'épaisseur quelconque

La section V.1 nous a permis d'évaluer la section efficace différentielle d'un milieu d'atomes froids dégénérés. Pour mener à bien les calculs, j'ai dû supposer que le milieu était mince, *i.e.* que $\rho_0 \lambda_L^2 a \ll 1$.

Je vais maintenant montrer comment aborder le problème sans cette hypothèse. Pour cela, j'utiliserai le formalisme employé en physique de la diffusion dans un milieu désordonné [218–220, 213, 214], tout en l'adaptant au cas de la

physique atomique. Afin d'aider le lecteur à mieux comprendre ce formalisme, je l'introduirai dans un premier temps en l'appliquant au problème maintenant bien connu de l'amplitude du champ et de l'indice de réfraction (équation de Dyson, § V.2.*a*). J'effectuerai ensuite le calcul de l'intensité, qui repose sur le même principe mais qui est beaucoup plus lourd (équation de Bethe-Salpeter, § V.2.*b*). Enfin, (§ V.2.*c*), j'interpréterai le résultat obtenu.

Avant de commencer, je préviendrai le lecteur des points suivants. Tout d'abord, les calculs qui vont suivre sont très lourds et relativement difficiles à comprendre. Ensuite, ils n'apportent strictement rien de plus du point de vue des effets collectifs. Enfin, ils débouchent sur une divergence que je ne sais pas traiter, et donc sur l'impossibilité de calculer l'intensité lumineuse dans le cas d'un milieu épais. Tout ceci, j'en conviens, n'encouragera guère le lecteur à continuer. Néanmoins, il m'a paru utile de faire figurer la section qui va suivre dans ma thèse, et ce pour plusieurs raisons. Pour commencer, le fait de trouver une divergence et de montrer que l'on ne peut pas résoudre (facilement) un problème constitue déjà un résultat en soi. Le calcul pour y parvenir permet en outre de créer un lien entre l'approche que nous avons développée (le calcul d'intensité par développement systématique en puissances de la densité) et les résultats de la littérature [213]. Il permet également d'apporter des précisions sur la zoologie des diagrammes pris en compte, sur la séparation entre termes géométriques et termes intrinsèques que nous avons rencontrée dans l'équation (V.18), ainsi que sur la formulation du théorème optique en termes de diagrammes. Enfin, les équations de Dyson et de Bethe-Salpeter constituent une formulation tellement élégante du problème qu'il eût été vraiment dommage d'en priver le lecteur !

a) Equation de Dyson. Calcul de l'amplitude du champ

i) Introduction

Je considère un milieu d'atomes froids, et une source de lumière, que je modéliserai par une distribution $\vec{s}(\vec{r})$ de dipôles forcés, oscillant à la fréquence quasi-résonnante ω_L. Je cherche à savoir comment le milieu réagit à cette source, de façon à connaître l'amplitude du champ en tout point (fig. V.5).

En l'absence d'atomes, ce champ est donné par la formule

$$\vec{E}_L(\vec{r}) = \int d^3\vec{r}_1 \, \frac{\vec{\vec{g}}(\vec{r} - \vec{r}_1)}{\varepsilon_0} \cdot \vec{s}(\vec{r}_1) \,. \tag{V.25}$$

En présence d'atomes, on suppose que le milieu réagit linéairement. Le champ est donc donné par

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = \int d^3\vec{r}_1 \, \frac{\vec{\vec{g}}_D(\vec{r}, \vec{r}_1)}{\varepsilon_0} \cdot \vec{s}(\vec{r}_1) \,, \tag{V.26}$$

où le tenseur $\vec{\vec{g}}_D(\vec{r}, \vec{r}_1)$ (appelé propagateur du champ) dépend *a priori* des caractéristiques géométriques du milieu.

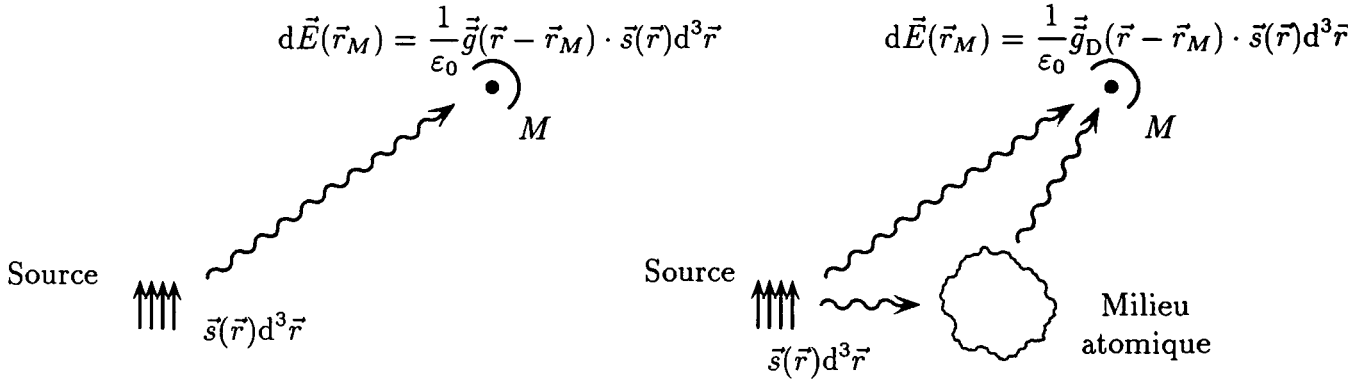


FIG. V.5 - *Réponse du champ à une sollicitation, en présence et en l'absence d'atomes.*

Le tenseur $\vec{\vec{g}}_D$ vérifie l'équation suivante [214, éq. (2.3) p. 37; 220, éq (39)], appelée équation de Dyson, et que je ne chercherai pas à démontrer ici :

$$\vec{\vec{g}}_D(\vec{r},\vec{r}_1) = \vec{\vec{g}}(\vec{r}-\vec{r}_1) + \iint_{\text{milieu}} d^3\vec{r}_2 d^3\vec{r}_3\, \vec{\vec{g}}(\vec{r}-\vec{r}_2)\cdot\vec{\vec{\Sigma}}(\vec{r}_2,\vec{r}_3)\cdot\vec{\vec{g}}_D(\vec{r}_3,\vec{r}_1)\,. \tag{V.27}$$

Le tenseur $\vec{=}[\Sigma]$ présent dans l'équation (V.27) est appelé « réponse irréductible ». C'est une quantité intrinsèque, *i.e.* qui ne dépend pas des caractéristiques géométriques du milieu[1]. Je vais maintenant calculer la réponse irréductible par une méthode perturbative.

Remarque : le lecteur pourra être gêné par le « parachutage » de l'équation (V.27). En particulier, le caractère non local du tenseur $\vec{=}[\Sigma]$ n'est pas du tout intuitif. On peut toutefois se rappeler (grâce aux résultats du chapitre III) que le dipôle moyen en un point n'est pas proportionnel au champ en ce point ; il dépend aussi du champ en des points voisins. Cette non-localité une fois admise, l'équation de Dyson (V.27) exprime que le champ en un point est la somme du champ des sources et du champ créé par les dipôles induits.

ii) Calcul de la réponse irréductible

L'amplitude moyenne du champ $\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})$ vérifie l'équation (III.5.a) qui relie le champ aux dipôles. En multipliant scalairement à droite l'équation de Dyson

1. Le développement de $\vec{=}[\Sigma]$ en termes de diagrammes ne contient que des diagrammes irréductibles.

(V.27) par $\vec{s}(\vec{r}_1)$, en intégrant sur $\vec{r}_1$ puis en utilisant les équations (V.25), (V.26) et (III.5.a), on déduit l'identité

$$\vec{\mathcal{P}}(\vec{r}_2) = \varepsilon_0 \int \mathrm{d}^3\vec{r}_3 \vec{\vec{\Sigma}}(\vec{r}_2, \vec{r}_3) \cdot \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}_3)\,, \tag{V.28}$$

où $\vec{\mathcal{P}}(\vec{r}) = \rho(\vec{r})\vec{\mathcal{D}}(\vec{r})$.

On calcule maintenant la réponse irréductible en puissance de la densité, comme nous l'avions fait pour l'indice au paragraphe III.3. Je rappelle que ce développement est un développement formel en puissance de ρ, valable dans le cas d'un milieu mince ($\rho\lambda_{\mathrm{L}}^2 a \ll 1$). L'expression de la réponse irréductible ne dépend pas de la géométrie du milieu. Par conséquent, les seuls paramètres de longueur qu'elle peut contenir contienne sont λ_{L} et Λ_{DB}. Autrement dit, la dépendance en ρ de la réponse irréductible est forcément en $\rho\lambda_{\mathrm{L}}^3$ (ou en $\rho\Lambda_{\mathrm{DB}}^3$). Il ne peut pas y avoir de terme en $\rho\lambda_{\mathrm{L}}^2 a$. C'est pourquoi le résultat du développement sera valable même lorsque $\rho\lambda_{\mathrm{L}}^2 a > 1$ pourvu que $\rho_0\lambda_{\mathrm{L}}^3 \ll 1$.

La réponse irréductible se développe donc en

$$\vec{\vec{\Sigma}} = \vec{\vec{\Sigma}}^{(1)}[\rho] + \vec{\vec{\Sigma}}^{(2)}[\rho] + \cdots\,. \tag{V.29}$$

La densité de dipôle $\vec{\mathcal{P}}(\vec{r})$ se développe sous la forme (en utilisant l'équation (III.5.a))

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{P}}(\vec{r}_1) = {} & \varepsilon_0 \int \mathrm{d}^3\vec{r}_2\, \vec{\vec{\Sigma}}^{(1)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \cdot \vec{E}_{\mathrm{L}}(\vec{r}_2) \\ & + \varepsilon_0 \iiint \mathrm{d}^3\vec{r}_2 \mathrm{d}^3\vec{r}_3 \mathrm{d}^3\vec{r}_4 \vec{\vec{\Sigma}}^{(1)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \cdot \vec{\vec{g}}(\vec{r}_2 - \vec{r}_3) \cdot \vec{\vec{\Sigma}}^{(1)}(\vec{r}_3, \vec{r}_4) \cdot \vec{E}_{\mathrm{L}}(\vec{r}_4) \\ & + \varepsilon_0 \int \mathrm{d}^3\vec{r}_2\, \vec{\vec{\Sigma}}^{(2)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \cdot \vec{E}_{\mathrm{L}}(\vec{r}_2)\,,\end{aligned} \tag{V.30}$$

qui est analogue à l'équation (III.40).

Les quantités $\vec{=}[\Sigma]^{(1)}$ et $\vec{=}[\Sigma]^{(2)}$ se calculent en utilisant l'équation (III.50) (où l'on remplace $\vec{E}_{\mathrm{L}} \exp(i\vec{k}_{\mathrm{L}} \cdot \vec{r})$ par $\vec{E}_{\mathrm{L}}(\vec{r})$). Je traite le problème en transformée de Fourier : je suppose que le champ source est en $\exp(i\vec{k} \cdot \vec{r})$ (où $\vec{k}$ est un vecteur d'onde de norme quelconque), et je définis :

$$\vec{\vec{\Sigma}}(\vec{r}_1, \vec{k}) = \int \mathrm{d}^3\vec{r}_2 \vec{\vec{\Sigma}}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}\,. \tag{V.31}$$

Je suppose également que la densité varie peu sur l'échelle de la longueur d'onde

optique (de façon à remplacer $\rho(\vec{r}_2)$ par $\rho(\vec{r}_1)$). J'obtiens finalement

$$\boxed{\begin{aligned}
&\vec{\vec{\Sigma}}^{(1)}(\vec{r}_1,\vec{r}_2) = \alpha\rho(\vec{r}_1)\delta^{(3)}(\vec{r}_2-\vec{r}_1)\\
&\vec{\vec{\Sigma}}^{(2)}(\vec{r}_1,\vec{k}) = \alpha\rho^2(\vec{r}_1)\int \mathrm{d}^3\vec{r}\,\alpha\vec{\vec{g}}(\vec{r})\varphi(r)e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\\
&\quad + \alpha\rho^2(\vec{r}_1)\int \mathrm{d}^3\vec{r}\left[\frac{\alpha^3\vec{\vec{g}}^{\,3}(\vec{r})}{\vec{\vec{1}}-\alpha^2\vec{\vec{g}}^{\,2}(\vec{r})}e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + \frac{\alpha^2\vec{\vec{g}}^{\,2}(\vec{r})}{\vec{\vec{1}}-\alpha^2\vec{\vec{g}}^{\,2}(\vec{r})}\right]\big(1+\varphi(r)\big)\,.
\end{aligned}} \tag{V.32}$$

Comme prévu, la réponse irréductible $\vec{\vec{\Sigma}}[\Sigma]$ ne dépend pas de la géométrie du milieu.

Remarques :

- si on remplace la réponse irréductible par son expression à l'ordre 1 en densité, l'équation de Dyson devient

$$\vec{\vec{g}}_{\mathrm{D}}(\vec{r},\vec{r}_1) \simeq \vec{\vec{g}}(\vec{r}-\vec{r}_1) + \int \mathrm{d}^3\vec{r}_2\,\alpha\rho(\vec{r}_2)\vec{\vec{g}}(\vec{r}-\vec{r}_2)\cdot\vec{\vec{g}}_{\mathrm{D}}(\vec{r}_2,\vec{r}_1)\,. \tag{V.33}$$

On reconnaît dans l'équation (V.33) l'équation (C.9) introduite dans l'annexe C. Le propagateur $\vec{\vec{g}}_{\mathrm{D}}$ coïncide donc au premier ordre en densité avec le potentiel renormalisé $\vec{\vec{g}}_{\mathrm{B}}$;

- dans le cas où le champ est une onde progressive, *i.e.* $\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = \vec{\mathcal{E}}_0\exp(i\vec{k}_{\mathrm{m}}\cdot\vec{r})$, où $\|\vec{k}_{\mathrm{m}}-\vec{k}_{\mathrm{L}}\| \ll k_{\mathrm{L}}$, on peut réécrire l'équation (V.28) sous la forme

$$\begin{aligned}
\vec{\mathcal{P}}(\vec{r}_1) &\simeq \varepsilon_0 e^{i\vec{k}_{\mathrm{m}}\cdot\vec{r}_1}\int \mathrm{d}^3\vec{r}_2\,\vec{\vec{\Sigma}}(\vec{r}_1,\vec{r}_2)\cdot\vec{\mathcal{E}}_0 e^{i\vec{k}_{\mathrm{L}}\cdot(\vec{r}_2-\vec{r}_1)}\\
&= \varepsilon_0\vec{\vec{\Sigma}}(\vec{r}_1,\vec{k}_{\mathrm{L}})\cdot\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}_1)\,.
\end{aligned} \tag{V.34}$$

Dans ces conditions, la relation entre dipôle et champ devient locale et on retrouve le résultat de l'indice de réfraction établi au chapitre III.

b) Calcul de l'intensité lumineuse

i) Equation de Bethe Salpeter

Comme au paragraphe V.2.*a.i* (p. 308), je considère une source lumineuse, par exemple une distribution de dipôles forcés. Je décris cette source par le tenseur $\vec{\vec{S}}[S](\vec{r},\vec{r}') \equiv \vec{s}(\vec{r})\otimes\vec{s}^{\,*}(\vec{r}')$. En l'absence de milieu atomique, l'intensité lumineuse est donnée par[1]

$$\vec{\vec{\mathcal{I}}}_0(\vec{r},\vec{r}') = \frac{1}{\varepsilon_0^2}\iint \mathrm{d}^3\vec{r}_1\mathrm{d}^3\vec{r}_1'\,\left[\vec{\vec{g}}(\vec{r}-\vec{r}_1)\circledast\vec{\vec{g}}^{\,*}(\vec{r}'-\vec{r}_1')\right] : \vec{\vec{S}}(\vec{r}_1,\vec{r}_1')\,. \tag{V.35}$$

1. La signification des nouvelles notations tensorielles introduites dans ce chapitre est expliquée dans la table V.2.

TAB. V.2 - *Les notations tensorielles du chapitre V.*

Tout d'abord, si $\vec{\vec{a}}$ et $\vec{\vec{b}}$ sont deux tenseurs, je définis leur contraction totale par

$$\vec{\vec{a}} : \vec{\vec{b}} = \sum_{i,j=x,y,z} a_{ij} b_{ji} = \mathrm{Tr}\, \vec{\vec{a}} \cdot \vec{\vec{b}}.$$

Dans ce chapitre, j'utilise des « super-tenseurs » qui sont des matrices à 4 indices :

$$\vec{\vec{\vec{\vec{T}}}} = [T_{ijk\ell}]_{i,j,k,\ell=x,y,z}.$$

Ces super-tenseurs peuvent être contractés avec des tenseurs à 2 indices, de la façon suivante :

$$\vec{\vec{a}} : \vec{\vec{\vec{\vec{T}}}} : \vec{\vec{b}} = \sum_{i,j,k,\ell=x,y,z} a_{\ell i} T_{ijk\ell} b_{jk}.$$

Attention à l'ordre des indices : ce n'est pas le plus intuitif, mais c'est celui qui convient le mieux au calcul d'intensité.

On peut également fabriquer un super-tenseur avec deux tenseurs, de la façon suivante :

$$\left[\vec{\vec{a}} \circledast \vec{\vec{b}}\right]_{ijk\ell} = a_{ij} b_{\ell k}.$$

Attention : $\vec{\vec{a}} : [\vec{\vec{b}} \circledast \vec{\vec{c}}] : \vec{\vec{d}} \neq (\vec{\vec{a}} : \vec{\vec{b}}) \times (\vec{\vec{c}} : \vec{\vec{d}})$. C'est pourquoi je n'ai pas utilisé le symbole $\otimes$. La relation correcte est

$$\vec{\vec{a}} : \left[\vec{\vec{b}} \circledast \vec{\vec{c}}\right] : \vec{\vec{d}} = \mathrm{Tr}\left[\vec{\vec{a}} \cdot \vec{\vec{b}} \cdot \vec{\vec{d}} \cdot {}^{\mathrm{t}}\vec{\vec{c}}\right].$$

En présence du milieu, l'intensité répond quadratiquement, *i.e.*

$$\vec{\vec{\mathcal{I}}}(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{\varepsilon_0^2} \iint \mathrm{d}^3\vec{r}_1 \mathrm{d}^3\vec{r}_1' \, \vec{\vec{\vec{\vec{G}}}}(\vec{r}, \vec{r}'; \vec{r}_1, \vec{r}_1') : \vec{\vec{S}}(\vec{r}_1, \vec{r}_1'). \qquad \text{(V.36)}$$

La quantité $\vec{\vec{\vec{\vec{\Xi}}}}[G]$ est le propagateur de l'intensité. Elle est solution de l'équation de Bethe-Salpeter [214, p. 40 ; 218, éq. (2.9) ; 219 ; 220], qui est au problème d'intensité ce que l'équation de Dyson est au problème d'amplitude :

$$\vec{\vec{\vec{G}}}(\vec{r},\vec{r}';\vec{r}_1,\vec{r}_1') = \vec{\vec{g}}_{\mathrm{D}}(\vec{r},\vec{r}_1) \circledast \vec{\vec{g}}_{\mathrm{D}}^{*}(\vec{r}',\vec{r}_1') + \iiiint_{\text{milieu}} \mathrm{d}^3\vec{r}_2\mathrm{d}^3\vec{r}_2'\mathrm{d}^3\vec{r}_3\mathrm{d}^3\vec{r}_3' \left[\vec{\vec{g}}_{\mathrm{D}}(\vec{r},\vec{r}_2) \circledast \vec{\vec{g}}_{\mathrm{D}}^{*}(\vec{r}',\vec{r}_2')\right] : \vec{\vec{\vec{\mathcal{V}}}}(\vec{r}_2,\vec{r}_2';\vec{r}_3,\vec{r}_3') : \vec{\vec{\vec{G}}}(\vec{r}_3,\vec{r}_3';\vec{r}_1,\vec{r}_1') \,. \tag{V.37}$$

La quantité $\vec{\vec{\vec{\Xi}}}[\mathcal{V}]$ présente dans l'équation (V.37) est appelée *vertex irréductible*. C'est une quantité intrinsèque, tout comme l'était la réponse irréductible $\vec{\vec{\Xi}}[\Sigma]$. Nous allons maintenant calculer l'expression du vertex irréductible par un développement en puissances de la densité.

ii) Expression en fonction des dipôles

Comme je l'ai fait pour le calcul de l'amplitude, je vais maintenant faire intervenir les dipôles. J'utilise l'équation (III.1.a) reliant le champ aux dipôles, lorsque le système oscille à une fréquence unique. J'obtiens

$$\begin{aligned}\vec{e}(\vec{r}) \otimes \vec{e}^{\dagger}(\vec{r}') = \vec{E}_{\mathrm{L}}(\vec{r}) \otimes \vec{E}_{\mathrm{L}}^{\dagger}(\vec{r}') &+ \sum_{i=1}^{N} \frac{\vec{\vec{g}}(\vec{r}-\vec{R}_i)}{\varepsilon_0} \cdot \vec{d}_i \otimes \vec{E}_{\mathrm{L}}^{\dagger}(\vec{r}') \\ + \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_{\mathrm{L}}(\vec{r}) \otimes \vec{d}_i^{\dagger} \cdot \frac{\vec{\vec{g}}^{*}(\vec{r}'-\vec{R}_i)}{\varepsilon_0} &+ \sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^{N} \frac{\vec{\vec{g}}(\vec{r}-\vec{R}_i)}{\varepsilon_0} \cdot \vec{d}_i \otimes \vec{d}_j^{\dagger} \cdot \frac{\vec{\vec{g}}^{*}(\vec{r}'-\vec{R}_j)}{\varepsilon_0} \\ &+ \sum_{i=1}^{N} \frac{\vec{\vec{g}}(\vec{r}-\vec{R}_i)}{\varepsilon_0} \cdot \vec{d}_i \otimes \vec{d}_i^{\dagger} \cdot \frac{\vec{\vec{g}}^{*}(\vec{r}'-\vec{R}_i)}{\varepsilon_0} \,.\end{aligned} \tag{V.38}$$

On moyenne l'équation (V.38) sur les positions atomiques, de façon à obtenir une expression de $\vec{\vec{\mathcal{I}}}[\mathcal{I}](\vec{r},\vec{r}')$. On compare ensuite avec l'expression de $\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) \otimes \vec{\mathcal{E}}^{*}(\vec{r}')$ obtenue en prenant le carré de l'équation (III.5.a). On obtient

$$\begin{aligned}\vec{\vec{\mathcal{I}}}(\vec{r},\vec{r}') = \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) \otimes \vec{\mathcal{E}}^{*}(\vec{r}') &+ \frac{1}{\varepsilon_0^2} \int_{\text{milieu}} \mathrm{d}^3\vec{r}_2 \left[\vec{\vec{g}}(\vec{r}_2-\vec{r}) \circledast \vec{\vec{g}}^{*}(\vec{r}_2-\vec{r}')\right] : \rho(\vec{r}_2)\vec{\vec{\mathcal{K}}}(\vec{r}_2) \\ &+ \frac{1}{\varepsilon_0^2} \iint_{\text{milieu}} \mathrm{d}^3\vec{r}_2\mathrm{d}^3\vec{r}_2' \left[\vec{\vec{g}}(\vec{r}_2-\vec{r}) \circledast \vec{\vec{g}}^{*}(\vec{r}_2'-\vec{r}')\right] \\ &\quad : \left(\rho^{\mathrm{II}}(\vec{r}_2,\vec{r}_2')\vec{\vec{\mathcal{K}}}(\vec{r}_2,\vec{r}_2') - \rho(\vec{r}_2)\rho(\vec{r}_2')\vec{\mathcal{D}}(\vec{r}_2) \otimes \vec{\mathcal{D}}^{*}(\vec{r}_2')\right) \,.\end{aligned} \tag{V.39}$$

On revient maintenant à l'équation de Bethe-Salpeter (V.37), et on la contracte à droite (au sens des tenseurs) avec $\vec{\vec{\Xi}}[S](\vec{r}_1,\vec{r}_1')$. On intègre ensuite

sur $\vec{r}_1$ et sur $\vec{r}_1'$. On obtient de cette façon l'équation suivante faisant intervenir l'intensité lumineuse :

$$\vec{\vec{\mathcal{I}}}(\vec{r},\vec{r}') = \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) \otimes \vec{\mathcal{E}}^*(\vec{r}') + \iiiint_{\text{milieu}} \mathrm{d}^3\vec{r}_2\mathrm{d}^3\vec{r}_2'\mathrm{d}^3\vec{r}_3\mathrm{d}^3\vec{r}_3' \left[\vec{\vec{g}}_{\mathrm{D}}(\vec{r},\vec{r}_2) \circledast \vec{\vec{g}}_{\mathrm{D}}^*(\vec{r}',\vec{r}_2')\right] : \vec{\vec{\vec{\vec{\mathcal{V}}}}}(\vec{r}_2,\vec{r}_2';\vec{r}_3,\vec{r}_3') : \vec{\vec{\mathcal{I}}}(\vec{r}_3,\vec{r}_3') . \tag{V.40}$$

Finalement, la comparaison des équations (V.39) et (V.40) nous fournit

$$\begin{aligned}\iiiint_{\text{milieu}} \mathrm{d}^3\vec{r}_2\mathrm{d}^3\vec{r}_2'\mathrm{d}^3\vec{r}_3\mathrm{d}^3\vec{r}_3' \left[\vec{\vec{g}}_{\mathrm{D}}(\vec{r},\vec{r}_2) \circledast \vec{\vec{g}}_{\mathrm{D}}^*(\vec{r}',\vec{r}_2')\right] : \vec{\vec{\vec{\vec{\mathcal{V}}}}}(\vec{r}_2,\vec{r}_2';\vec{r}_3,\vec{r}_3') : \vec{\vec{\mathcal{I}}}(\vec{r}_3,\vec{r}_3') \\ = \frac{1}{\varepsilon_0^2}\int_{\text{milieu}} \mathrm{d}^3\vec{r}_2 \left[\vec{\vec{g}}(\vec{r}_2-\vec{r}) \circledast \vec{\vec{g}}^*(\vec{r}_2-\vec{r}')\right] : \rho(\vec{r}_2)\vec{\vec{\mathcal{K}}}(\vec{r}_2) \\ + \frac{1}{\varepsilon_0^2}\iint_{\text{milieu}} \mathrm{d}^3\vec{r}_2\mathrm{d}^3\vec{r}_2' \left[\vec{\vec{g}}(\vec{r}_2-\vec{r}) \circledast \vec{\vec{g}}^*(\vec{r}_2'-\vec{r}')\right] \\ : \left(\rho^{\mathrm{II}}(\vec{r}_2,\vec{r}_2')\vec{\vec{\mathcal{K}}}(\vec{r}_2,\vec{r}_2') - \rho(\vec{r}_2)\rho(\vec{r}_2')\vec{\mathcal{D}}(\vec{r}_2) \otimes \vec{\mathcal{D}}^*(\vec{r}_2')\right) .\end{aligned} \tag{V.41}$$

iii) Développement formel de la théorie macroscopique

Je suppose que le vertex irréductible se développe en puissances de la densité sous la forme

$$\vec{\vec{\vec{\vec{\mathcal{V}}}}} = \vec{\vec{\vec{\vec{\mathcal{V}}}}}^{(1)}[\rho] + \vec{\vec{\vec{\vec{\mathcal{V}}}}}^{(2)}[\rho] + \cdots . \tag{V.42}$$

Pour développer l'équation (V.41) en puissances de la densité, il faut aussi développer les $\vec{\vec{g}}_{\mathrm{D}}$ figurant au premier membre. En fait, il suffit de les évaluer au premier ordre en densité. On peut donc utiliser l'équation (V.33). D'où l'identité :

$$\begin{aligned}&\iiiint_{\text{milieu}} \mathrm{d}^3\vec{r}_2\mathrm{d}^3\vec{r}_2'\mathrm{d}^3\vec{r}_3\mathrm{d}^3\vec{r}_3' \left[\vec{\vec{g}}(\vec{r}_2-\vec{r}) \circledast \vec{\vec{g}}^*(\vec{r}_2'-\vec{r}')\right] : \vec{\vec{\vec{\vec{\mathcal{V}}}}}^{(1)}(\vec{r}_2,\vec{r}_2';\vec{r}_3,\vec{r}_3') : \vec{\vec{\mathcal{I}}}(\vec{r}_3,\vec{r}_3') \\ &+ \iiiint_{\text{milieu}} \mathrm{d}^3\vec{r}_2\mathrm{d}^3\vec{r}_2'\mathrm{d}^3\vec{r}_3\mathrm{d}^3\vec{r}_3' \left[\vec{\vec{g}}(\vec{r}_2-\vec{r}) \circledast \vec{\vec{g}}^*(\vec{r}_2'-\vec{r}')\right] : \vec{\vec{\vec{\vec{\mathcal{V}}}}}^{(2)}(\vec{r}_2,\vec{r}_2';\vec{r}_3,\vec{r}_3') : \vec{\vec{\mathcal{I}}}(\vec{r}_3,\vec{r}_3') \\ &\quad + \iiiiint_{\text{milieu}} \mathrm{d}^3\vec{r}_2\mathrm{d}^3\vec{r}_2'\mathrm{d}^3\vec{r}_3\mathrm{d}^3\vec{r}_3'\mathrm{d}^3\vec{r}_4\alpha\rho(\vec{r}_4) \left[\left(\vec{\vec{g}}(\vec{r}_4-\vec{r}) \cdot \vec{\vec{g}}(\vec{r}_2-\vec{r}_4)\right)\right. \\ &\qquad \left.\circledast \vec{\vec{g}}^*(\vec{r}',\vec{r}_2')\right] : \vec{\vec{\vec{\vec{\mathcal{V}}}}}^{(1)}(\vec{r}_2,\vec{r}_2';\vec{r}_3,\vec{r}_3') : \vec{\vec{\mathcal{I}}}(\vec{r}_3,\vec{r}_3') \\ &+ \iiiiint_{\text{milieu}} \mathrm{d}^3\vec{r}_2\mathrm{d}^3\vec{r}_2'\mathrm{d}^3\vec{r}_3\mathrm{d}^3\vec{r}_3'\mathrm{d}^3\vec{r}_4'\alpha^*\rho(\vec{r}_4') \left[\vec{\vec{g}}(\vec{r}_2-\vec{r})\right. \\ &\qquad \left.\circledast \left(\vec{\vec{g}}^*(\vec{r}_4'-\vec{r}') \cdot \vec{\vec{g}}^*(\vec{r}_2'-\vec{r}_4')\right)\right] : \vec{\vec{\vec{\vec{\mathcal{V}}}}}^{(1)}(\vec{r}_2,\vec{r}_2';\vec{r}_3,\vec{r}_3') : \vec{\vec{\mathcal{I}}}(\vec{r}_3,\vec{r}_3')\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_0^2}\int_{\text{milieu}} \mathrm{d}^3\vec{r}_2 \left[\vec{\vec{g}}(\vec{r}_2-\vec{r})\circledast\vec{\vec{g}}^*(\vec{r}_2-\vec{r}')\right] : \rho(\vec{r}_2)\vec{\vec{\mathcal{K}}}(\vec{r}_2)$$
$$+ \frac{1}{\varepsilon_0^2}\iint_{\text{milieu}} \mathrm{d}^3\vec{r}_2\mathrm{d}^3\vec{r}_2' \left[\vec{\vec{g}}(\vec{r}_2-\vec{r})\circledast\vec{\vec{g}}^*(\vec{r}_2'-\vec{r}')\right]$$
$$: \left(\rho^{\mathrm{II}}(\vec{r}_2,\vec{r}_2')\vec{\vec{\mathcal{K}}}(\vec{r}_2,\vec{r}_2') - \rho(\vec{r}_2)\rho(\vec{r}_2')\vec{\mathcal{D}}(\vec{r}_2)\otimes\vec{\mathcal{D}}^*(\vec{r}_2')\right). \quad \text{(V.44)}$$

L'égalité (V.44) doit être vérifiée quels que soient $\vec{r}$ et $\vec{r}'$. Or on constate que $\vec{r}$ et $\vec{r}'$ interviennent dans toutes les intégrales de (V.44) *via* le même facteur $\vec{\vec{g}}(\vec{r}_2-\vec{r})\circledast\vec{\vec{g}}^*(\vec{r}_2'-\vec{r}')$. On peut donc intégrer sur $\vec{r}$ et $\vec{r}'$ (sur $\mathbb{R}^3$), poser $\vec{u}=\vec{r}-\vec{r}_2$ et $\vec{u}'=\vec{r}'-\vec{r}_2'$, puis séparer les intégrales sur $\vec{u}$ et $\vec{u}'$. Ceci donne :

$$\iint_{\text{milieu}} \mathrm{d}^3\vec{r}_2\mathrm{d}^3\vec{r}_2'\vec{\vec{\vec{\mathcal{V}}}}^{(1)}(\vec{r}_1,\vec{r}_1';\vec{r}_2,\vec{r}_2') : \vec{\vec{\mathcal{I}}}(\vec{r}_2,\vec{r}_2')$$
$$+ \iint_{\text{milieu}} \mathrm{d}^3\vec{r}_2\mathrm{d}^3\vec{r}_2'\vec{\vec{\vec{\mathcal{V}}}}^{(2)}(\vec{r}_1,\vec{r}_1';\vec{r}_2,\vec{r}_2') : \vec{\vec{\mathcal{I}}}(\vec{r}_2,\vec{r}_2')$$
$$+ \iiint_{\text{milieu}} \mathrm{d}^3\vec{r}_2\mathrm{d}^3\vec{r}_2'\mathrm{d}^3\vec{r}_3\alpha\rho(\vec{r}_1)\left[\vec{\vec{g}}(\vec{r}_3-\vec{r}_1)\circledast\vec{\vec{1}}\right] : \vec{\vec{\vec{\mathcal{V}}}}^{(1)}(\vec{r}_3,\vec{r}_1';\vec{r}_2,\vec{r}_2') : \vec{\vec{\mathcal{I}}}(\vec{r}_2,\vec{r}_2')$$
$$+ \iiint_{\text{milieu}} \mathrm{d}^3\vec{r}_2\mathrm{d}^3\vec{r}_2'\mathrm{d}^3\vec{r}_3'\alpha^*\rho(\vec{r}_1')\left[\vec{\vec{1}}\circledast\vec{\vec{g}}^*(\vec{r}_3'-\vec{r}_1')\right] : \vec{\vec{\vec{\mathcal{V}}}}^{(1)}(\vec{r}_1,\vec{r}_3';\vec{r}_2,\vec{r}_2') : \vec{\vec{\mathcal{I}}}(\vec{r}_2,\vec{r}_2')$$
$$= \frac{1}{\varepsilon_0^2}\rho(\vec{r}_1)\vec{\vec{\mathcal{K}}}(\vec{r}_1)\delta^{(3)}(\vec{r}_1-\vec{r}_1')$$
$$+ \frac{1}{\varepsilon_0^2}\rho^{\mathrm{II}}(\vec{r}_1,\vec{r}_1')\vec{\vec{\mathcal{K}}}(\vec{r}_1,\vec{r}_1') - \rho(\vec{r}_1)\rho(\vec{r}_1')\vec{\mathcal{D}}(\vec{r}_1)\otimes\vec{\mathcal{D}}^*(\vec{r}_1'). \quad \text{(V.45)}$$

iv) Développement formel de la théorie microscopique

Nous devons maintenant calculer par un développement microscopique les expressions de $\vec{\vec{\mathcal{I}}}](\vec{r},\vec{r}')$, de $\vec{\vec{\mathcal{K}}}](\vec{r},\vec{r}')$ et de $\vec{\vec{\mathcal{K}}}](\vec{r})$ à l'ordre 1 ou 2 en densité. Les deux derniers termes ont déjà été calculés. Leur expression est donnée par les formules (V.9) et (V.11), dans le cas où le champ est une onde plane de vecteur d'onde $\vec{k}_{\mathrm{L}}$. On en déduit immédiatement les expressions correspondant au cas (dont nous aurons besoin) où la norme du vecteur d'onde est quelconque.

L'intensité lumineuse n'a pas encore été évaluée à l'intérieur du milieu. On part de l'équation (V.39), et on ne garde que les termes faisant intervenir au plus

un atome

$$\overset{(\leqslant 1)}{\left(\vec{e}(\vec{r})\otimes\vec{e}^{\dagger}(\vec{r}')\right)} = \vec{E}_{\mathrm{L}}\otimes\vec{E}_{\mathrm{L}}^{*}e^{i\vec{k}_{\mathrm{L}}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}$$
$$+\frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\vec{g}(\vec{r}-\vec{R}_i)\cdot{}^{(1)}\vec{d}_i\otimes\vec{E}_{\mathrm{L}}^{*}e^{-i\vec{k}_{\mathrm{L}}\cdot\vec{r}'}+\frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\vec{E}_{\mathrm{L}}e^{i\vec{k}_{\mathrm{L}}\cdot\vec{r}}\otimes{}^{(1)}\vec{d}_i^{\dagger}\cdot\vec{g}^{*}(\vec{r}'-\vec{R}_i)$$
$$+\frac{1}{\varepsilon_0^2}\sum_{i=1}^{N}\vec{g}(\vec{r}-\vec{R}_i)\cdot{}^{(1)}\vec{d}_i\otimes{}^{(1)}\vec{d}_i^{\dagger}\cdot\vec{g}^{*}(\vec{r}'-\vec{R}_i)\,. \qquad \text{(V.46)}$$

Il faut maintenant moyenner l'équation (V.46) sur la position des atomes. Cela donne :

$$\begin{aligned}\vec{\vec{I}}(\vec{r},\vec{r}') = \|\vec{E}_{\mathrm{L}}\|^2\Big[&\vec{\varepsilon}_{\mathrm{L}}\otimes\vec{\varepsilon}_{\mathrm{L}}^{*}e^{i\vec{k}_{\mathrm{L}}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}\\ &+\int \mathrm{d}^3\vec{r}''\rho(\vec{r}'')\Big(\alpha\vec{g}(\vec{r}-\vec{r}'')\cdot\vec{\varepsilon}_{\mathrm{L}}\otimes\vec{\varepsilon}_{\mathrm{L}}^{*}e^{i\vec{k}_{\mathrm{L}}\cdot(\vec{r}''-\vec{r}')}\\ &\quad+\vec{\varepsilon}_{\mathrm{L}}\otimes\vec{\varepsilon}_{\mathrm{L}}^{*}\cdot\alpha^{*}\vec{\vec{g}}^{*}(\vec{r}'-\vec{r}'')e^{i\vec{k}_{\mathrm{L}}\cdot(\vec{r}-\vec{r}'')}\\ &\quad+\alpha\vec{g}(\vec{r}-\vec{r}'')\cdot\vec{\varepsilon}_{\mathrm{L}}\otimes\vec{\varepsilon}_{\mathrm{L}}^{*}\cdot\alpha^{*}\vec{\vec{g}}^{*}(\vec{r}'-\vec{r}'')\Big)\Big]+\mathrm{O}(\rho^2)\,.\end{aligned} \qquad \text{(V.47)}$$

Remarquons que l'intégrale qui apparaît est divergente si $\vec{r}=\vec{r}'$. Autrement dit, l'intensité du champ en un point à l'intérieur du milieu est infinie. Cette divergence doit être éliminée en introduisant une coupure sur les fréquences lors du calcul du potentiel $\vec{\vec{g}}$, où, ce qui revient au même, à introduire une « zone d'exclusion » autour de chaque atome (potentiel de type « sphère dure »). Je reviendrai sur ce point ultérieurement (§ V.2.*c.iii*, p. 320).

v) Calcul du vertex à l'ordre 2 en densité

Je vais maintenant calculer l'expression du vertex à l'ordre 2 en densité en utilisant les deux développements (macroscopique et microscopique) que j'ai effectués. Pour cela, il est plus simple de passer en transformée de Fourier. Je définis donc

$$\vec{\vec{\vec{\mathcal{V}}}}(\vec{r}_1,\vec{k}_1;\vec{r}_2,\vec{k}_2) = \iint \mathrm{d}^3\vec{r}_1'\mathrm{d}^3\vec{r}_2'\vec{\vec{\vec{\mathcal{V}}}}(\vec{r}_1,\vec{r}_1';\vec{r}_2,\vec{r}_2')e^{i\vec{k}_1\cdot(\vec{r}_1'-\vec{r}_1)-i\vec{k}_2\cdot(\vec{r}_2'-\vec{r}_2)}\,. \qquad \text{(V.48)}$$

On injecte maintenant les équations (V.9), (V.11) et (V.47) dans l'équation (V.45), que l'on multiplie par $\exp\left(i\vec{k}_{\mathrm{d}}\cdot(\vec{r}_1'-\vec{r}_1)\right)$. A l'ordre 1 en densité, on obtient

$$\vec{\vec{\vec{\mathcal{V}}}}^{(1)}(\vec{r}_1,\vec{k}_{\mathrm{d}};\vec{r}_2,\vec{k}_{\mathrm{L}}):(\vec{\varepsilon}_{\mathrm{L}}\otimes\vec{\varepsilon}_{\mathrm{L}}^{*}) = |\alpha|^2\rho(\vec{r}_1)\vec{\varepsilon}_{\mathrm{L}}\otimes\vec{\varepsilon}_{\mathrm{L}}^{*}\,, \qquad \text{(V.49)}$$

(valable quelles que soient les normes de $\vec{k}_{\rm L}$ et $\vec{k}_{\rm d}$). D'où

$$\vec{\vec{\vec{\mathcal{V}}}}^{(1)}(\vec{r}_1,\vec{r}_1';\vec{r}_2,\vec{r}_2') = |\alpha|^2\rho(\vec{r}_1)\delta^{(3)}(\vec{r}_1'-\vec{r}_1)\delta^{(3)}(\vec{r}_2'-\vec{r}_2)\vec{\varepsilon}_{\rm L}\otimes\vec{\varepsilon}_{\rm L}^{\,*}\,. \tag{V.50.a}$$

Je suppose que la densité ρ varie peut sur une échelle de longueur de l'ordre de la longueur d'onde optique. Je suppose en outre que les points $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$ sont suffisamment proches pour que $\rho(\vec{r}_1)\simeq\rho(\vec{r}_2)$. A l'ordre 2 en densité, j'obtiens

$$\begin{aligned}
&(\vec{\varepsilon}_{\rm d}\otimes\vec{\varepsilon}_{\rm d}^{\,*}):\left[\vec{\vec{\vec{\mathcal{V}}}}^{(2)}(\vec{r}_1,\vec{k}_{\rm d};\vec{r}_2,\vec{k}_{\rm L})\right]:(\vec{\varepsilon}_{\rm L}\otimes\vec{\varepsilon}_{\rm L}^{\,*})\\
&\qquad=|\alpha|^2\rho^2(\vec{r}_1)\int_{\mathbb{R}^3-\mathcal{V}_{r_\epsilon}(O)}{\rm d}^3\vec{r}\left[\left(1+\varphi(\vec{r})\right)\vec{\varepsilon}_{\rm d}^{\,*}\cdot\frac{\vec{\vec{1}}+\alpha\vec{\vec{g}}(\vec{r})e^{i\vec{k}_{\rm L}\cdot\vec{r}}}{\vec{\vec{1}}-\alpha^2\vec{\vec{g}}^{\,2}(\vec{r})}\cdot\vec{\varepsilon}_{\rm L}\right.\\
&\qquad\otimes\vec{\varepsilon}_{\rm L}^{\,*}\cdot\frac{\vec{\vec{1}}+\alpha^*\vec{\vec{g}}^{\,*}(\vec{r})e^{-i\vec{k}_{\rm L}\cdot\vec{r}}}{\vec{\vec{1}}-\alpha^{*2}\vec{\vec{g}}^{\,*2}(\vec{r})}\cdot\vec{\varepsilon}_{\rm d}-|\vec{\varepsilon}_{\rm L}^{\,*}\cdot\vec{\varepsilon}_{\rm d}|^2\left(1+\varphi(\vec{r})\right)\\
&\left.-\left(\vec{\varepsilon}_{\rm d}^{\,*}\cdot\alpha\vec{\vec{g}}(\vec{r})\cdot\vec{\varepsilon}_{\rm L}\otimes\vec{\varepsilon}_{\rm L}^{\,*}\cdot\vec{\varepsilon}_{\rm d}e^{i\vec{k}_{\rm L}\cdot\vec{r}}+{\rm c.c.}\right)-\vec{\varepsilon}_{\rm d}^{\,*}\cdot\alpha\vec{\vec{g}}(\vec{r})\cdot\vec{\varepsilon}_{\rm L}\otimes\vec{\varepsilon}_{\rm L}^{\,*}\cdot\alpha^*\vec{\vec{g}}^{\,*}(\vec{r})\cdot\vec{\varepsilon}_{\rm d}\right]\\
&+|\alpha|^2\rho_0^2\int_{\mathbb{R}^3}{\rm d}^3\vec{r}\left[\left(1+\varphi(\vec{r})\right)e^{i\vec{k}_{\rm d}\cdot\vec{r}}\vec{\varepsilon}_{\rm d}^{\,*}\cdot\frac{\vec{\vec{1}}+\alpha\vec{\vec{g}}(\vec{r})e^{i\vec{k}_{\rm L}\cdot\vec{r}}}{\vec{\vec{1}}-\alpha^2\vec{\vec{g}}^{\,2}(\vec{r})}\cdot\vec{\varepsilon}_{\rm L}\right.\\
&\qquad\otimes\vec{\varepsilon}_{\rm L}^{\,*}\cdot\frac{e^{-i\vec{k}_{\rm L}\cdot\vec{r}}\vec{\vec{1}}+\alpha^*\vec{\vec{g}}^{\,*}(\vec{r})}{\vec{\vec{1}}-\alpha^{*2}\vec{\vec{g}}^{\,*2}(\vec{r})}\cdot\vec{\varepsilon}_{\rm d}-e^{i(\vec{k}_{\rm d}-\vec{k}_{\rm L})\cdot\vec{r}}|\vec{\varepsilon}_{\rm L}^{\,*}\cdot\vec{\varepsilon}_{\rm d}|^2\\
&\qquad\left.-\left(e^{i\vec{k}_{\rm d}\cdot\vec{r}}\vec{\varepsilon}_{\rm d}^{\,*}\cdot\alpha\vec{\vec{g}}(\vec{r})\cdot\vec{\varepsilon}_{\rm L}\otimes\vec{\varepsilon}_{\rm L}^{\,*}\cdot\vec{\varepsilon}_{\rm d}+{\rm c.c.}\right)\right]\,.
\end{aligned} \tag{V.50.b}$$

Dans la première intégrale de l'équation (V.50.b), j'ai dû exclure une petite boule autour de 0. Sans cette précaution, l'intégrale diverge, parce que l'intensité lumineuse en un point à l'intérieur du milieu est infinie. Le résultat dépend donc de la taille de la boule exclue. Je reviendrai sur ce problème au paragraphe V.2.*c.iii*, p. 320.

vi) Interprétation et remarques

En développant en diagrammes le résultat (V.50.b), on vérifie qu'il ne contient que des diagrammes irréductibles. Ces diagrammes sont par ailleurs les mêmes

que ceux entrant en jeu dans la partie « intrinsèque » de l'expression de la section efficace (V.18) valable pour un milieu mince, et qui sont représentés dans la table V.1, p. 300. Le vertex irréductible peut donc être interprété comme une « section efficace différentielle de diffusion intrinsèque » (de même que, pour le calcul d'amplitude, la réponse irréductible (c'est-à-dire l'indice) peut être interprété comme un « déphasage intrinsèque »).

Le calcul du vertex à l'ordre 2 en densité a déjà été réalisé dans le cas scalaire par Bart A. van Tiggelen et Ad Lagendijk [213]. Les auteurs ne considèrent pas un milieu d'atomes froids, mais des particules classiques, qui induisent une constante diélectrique aléatoire, vérifiant les propriétés $\langle \varepsilon(\vec{r})\rangle = 0$ et $\langle \varepsilon(\vec{r})\varepsilon(\vec{r}')\rangle \propto \delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}')$. Les équations d'où ils partent sont donc très différentes des nôtres. Leur résultat est cependant tout à fait analogue au résultat (V.50.b) (aux effets collectifs près).

vii) Le théorème optique

Il est possible de relier la partie imaginaire de la réponse irréductible $\vec{\vec{\Sigma}}[\mathcal{V}]$ et le vertex irréductible $\vec{\vec{\vec{\Xi}}}[\mathcal{V}]$, pour obtenir une relation analogue au théorème optique (appelée identité de Ward [213]). Cette relation s'écrit

$$\Im\mathrm{m}\left(\vec{\varepsilon}_{\mathrm{L}}^{\,*}\cdot\vec{\vec{\Sigma}}(\vec{r},\vec{k}_{\mathrm{L}})\cdot\vec{\varepsilon}_{\mathrm{L}}\right) = \int\frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\sum_{\vec{\varepsilon}\perp\vec{k}}(\vec{\varepsilon}\otimes\vec{\varepsilon}^{\,*}) : \Im\mathrm{m}\left(\frac{\omega_{\mathrm{L}}^2}{\omega_{\mathrm{L}}^2-\omega_{\vec{k}}^2-\vec{\vec{\Sigma}}(\vec{r},\vec{k})}\right) : \vec{\vec{\vec{\mathcal{V}}}}(\vec{r},\vec{k};\vec{r},\vec{k}_{\mathrm{L}}) : (\vec{\varepsilon}_{\mathrm{L}}\otimes\vec{\varepsilon}_{\mathrm{L}}^{\,*})\,. \quad (\mathrm{V}.51)$$

Remarquons que l'identité (V.51) est plus complexe que l'expression (IV.6) établie au chapitre IV. En fait, cette dernière faisait (implicitement) l'approximation du champ tournant, dont nous savons qu'il ne faut pas la faire pour obtenir un résultat correct (voir à ce sujet le paragraphe B.3, p. 375).

Cette relation peut être retrouvée en refermant des diagrammes, selon la méthode que j'ai présentée au paragraphe IV.2.*c.i.* Toutefois, il est nécessaire d'utiliser pour $\vec{\vec{\Sigma}}[\Sigma]$ et pour $\vec{\vec{\vec{\Xi}}}[\mathcal{V}]$ des expressions renormalisées, dans lesquelles tous les tenseurs $\vec{\vec{g}}$ ont été remplacés par $\vec{\vec{g}}_{\mathrm{D}}$ (et ceci pour éviter certains problèmes avec des diagrammes réductibles, comme évoqué p. 273).

c) Calcul de l'intensité loin du milieu

i) Le vertex réductible

L'expression du vertex irréductible (V.50.b) ne suffit pas. Il faut calculer une quantité mesurable physiquement, par exemple l'intensité en un point éloigné du milieu. On peut calculer cette intensité en utilisant l'équation (V.40) et l'expression du vertex irréductible (V.50). En fait, il, est plus commode d'introduire une

nouvelle quantité, le *vertex réductible*. On le note $\vec{\vec{\Xi}}[\mathcal{R}]$, et on le définit par

$$\vec{\vec{\vec{\vec{G}}}}(\vec{r},\vec{r}';\vec{r}_1,\vec{r}_1') = \vec{\vec{g}}_{\mathrm{D}}(\vec{r},\vec{r}_1) \circledast \vec{\vec{g}}_{\mathrm{D}}^{*}(\vec{r}',\vec{r}_1') + \iiiint_{\text{milieu}} \mathrm{d}^3\vec{r}_2\mathrm{d}^3\vec{r}_2'\mathrm{d}^3\vec{r}_3\mathrm{d}^3\vec{r}_3' \left[\vec{\vec{g}}_{\mathrm{D}}(\vec{r},\vec{r}_2) \circledast \vec{\vec{g}}_{\mathrm{D}}{}^{*}(\vec{r}',\vec{r}_2')\right] : \vec{\vec{\vec{\vec{\mathcal{R}}}}}(\vec{r}_2,\vec{r}_2';\vec{r}_3,\vec{r}_3') : \left[\vec{\vec{g}}_{\mathrm{D}}(\vec{r}_3,\vec{r}_1) \circledast \vec{\vec{g}}_{\mathrm{D}}^{*}(\vec{r}_3',\vec{r}_1')\right] . \quad \text{(V.52)}$$

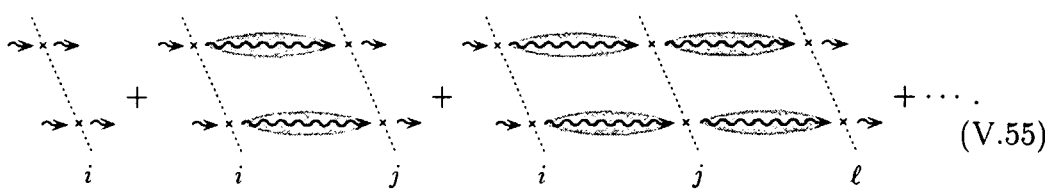
(V.53)

L'équation (V.53) permet de calculer le champ diffusé de façon non auto-cohérente. En comparant l'équation (V.53) avec l'équation de Bethe-Salpeter (V.37), on déduit l'équation sur le vertex réductible :

$$\vec{\vec{\vec{\vec{\mathcal{R}}}}}(\vec{r}_1,\vec{r}_1';\vec{r}_2,\vec{r}_2') = \vec{\vec{\vec{\vec{\mathcal{V}}}}}(\vec{r}_1,\vec{r}_1';\vec{r}_2,\vec{r}_2') + \iiiint_{\text{milieu}} \mathrm{d}\vec{r}_3\mathrm{d}^3\vec{r}_3'\mathrm{d}^3\vec{r}_4\mathrm{d}^3\vec{r}_4' \vec{\vec{\vec{\vec{\mathcal{V}}}}}(\vec{r}_1,\vec{r}_1';\vec{r}_4,\vec{r}_4') : \left[\vec{\vec{g}}_{\mathrm{D}}(\vec{r}_4,\vec{r}_3) \circledast \vec{\vec{g}}_{\mathrm{D}}{}^{*}(\vec{r}_4',\vec{r}_3')\right] : \vec{\vec{\vec{\vec{\mathcal{R}}}}}(\vec{r}_3,\vec{r}_3';\vec{r}_2,\vec{r}_2') . \quad \text{(V.54)}$$

ii) Solution diagrammatique (dans le cas scalaire)

L'équation du vertex réductible (V.54) peut être itérée. On se ramène alors à une resommation de diagrammes d'échelles réductibles. Par exemple, si le vertex irréductible $\vec{\vec{\Xi}}[\mathcal{V}]$ est évalué à l'ordre 1 en densité, $\vec{\vec{\Xi}}[\mathcal{R}]$ s'exprime sous la forme



(V.55)

Si le milieu est infini, dans le cas scalaire[1] et à l'ordre 1 en densité, une expression analytique de la somme (V.55) peut être calculée en transformée de Fourier [214].

Lorsque l'on va à l'ordre 2 en densité (toujours dans le cas scalaire), il convient de remplacer tous les « barreaux » de l'échelle (V.55) par l'ensemble des diagrammes représentés dans la table V.1. La resommation de diagrammes réductibles (V.55) s'apparente à la resommation (B.45) du calcul d'indice. Nous savons que pour obtenir un résultat valable même lorsque le milieu est épais, il faut resommer les diagrammes irréductibles à l'ordre 2, et les diagrammes réductibles

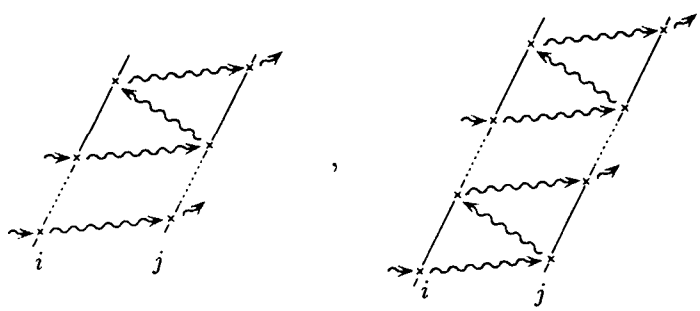
1. Dans le cas où le champ est scalaire, on resomme exactement les mêmes diagrammes. La seule différence est que le potentiel $\vec{g}(\vec{r})$ doit être remplacé par $Y(r) = e^{ik_{\mathrm{L}}r}/(4\pi r)$.

à tous les ordres. Dans le cas du milieu mince, nous nous étions restreints aux termes à deux atomes, pour les diagrammes réductibles comme pour les diagrammes irréductibles. Ainsi, les diagrammes réductibles de la formule (V.20) sont inclus dans les deux premiers termes de la somme (V.55)[1].

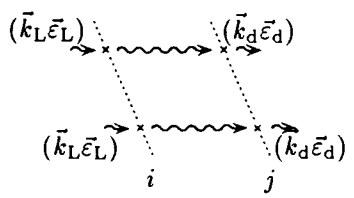
iii) Un problème ouvert : la résolution dans le cas vectoriel

Lorsque le champ est vectoriel, nous avons vu que l'intensité lumineuse en un point à l'intérieur du milieu est infinie (ce qui n'est pas le cas dans le cas scalaire). La conséquence est que l'expression du vertex irréductible (V.50.b) est divergente (et il a été nécessaire d'introduire une sphère d'exclusion). Si l'on calcule l'intensité en un point extérieur du milieu grâce à la resommation (V.55), on trouve un résultat qui dépend fortement de la taille de la sphère d'exclusion choisie. Pourtant, physiquement, l'intensité mesurée à l'extérieur du milieu n'a aucune raison de dépendre de la sphère d'exclusion. D'ailleurs, l'intensité que nous avions calculée dans le cas d'un milieu mince ne faisait pas intervenir de sphère d'exclusion.

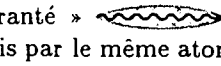
On peut voir que ce sont les diagrammes d'échelles qui sont à l'origine de la divergence. Dans le cas de milieu mince, tout se passe bien parce que la divergence qui est présente dans les diagrammes d'échelles irréductibles

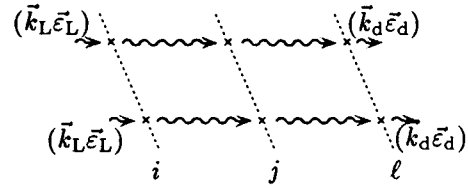


vient exactement compenser celle du diagramme d'échelle réductible



Par contre, dans le cas du milieu épais, les divergences des diagrammes d'échelles réductibles à partir du 3^e, *i.e.*

1. Je rappelle que par définition le diagramme « écranté »  contient tous les diagrammes de diffusion multiple ne passant pas deux fois par le même atome (définition dans l'annexe C, formule (C.2)). Cette convention permet d'inclure les deux premiers diagrammes de (V.20) dans (V.55).



ne sont pas compensées. Pour qu'ils le soient, il faudrait prendre en compte des diagrammes irréductibles à trois atomes. Un calcul de diffusion dans le cas d'un milieu épais, pour un champ vectoriel, ne peut converger que si l'on resomme les échelles réductibles et irréductibles à tous les ordres (ce qui semble inextricable).

Nous avons touché là la limite de notre méthode de calcul. Nous avions calculé l'indice à l'ordre 2 en densité pour un milieu arbitrairement épais, en resommant les diagrammes réductibles à tous les ordres, et les diagrammes irréductibles à l'ordre 2 seulement. Miraculeusement, et comme je l'avais fait remarquer p. 252, les termes en $1/r^3$ qui auraient dû faire diverger le résultat se compensaient avec ceux provenant de l'intégration angulaire. Pour la diffusion, le même miracle ne se reproduit pas : on ne peut pas gagner à tous les coups !

Annexe A

Les équations du mouvement dans l'approche « champ moyen ». Le problème des termes de contact

L'OBJET de cette annexe est d'établir les équations (II.26) dont nous sommes partis pour calculer l'indice de réfraction dans l'approche « champ moyen » (§ II.2.*c*). Ces équations se calculent à partir des équations de Heisenberg pour l'hamiltonien en jauge $\vec{d}\cdot\vec{E}$. Elles nous permettront de retrouver la célèbre formule de Lorentz-Lorenz sans avoir recours aux techniques classiques d'exclusion d'une petite sphère autour d'un atome.

Dans la section A.1, j'introduirai l'hamiltonien du système, avec un terme de contact le rendant valable même au voisinage d'un atome. Cet hamiltonien est écrit en jauge $\vec{A}\cdot\vec{p}$. J'effectuerai donc la transformation unitaire permettant de passer de la jauge $\vec{A}\cdot\vec{p}$ à la jauge $\vec{d}\cdot\vec{E}$, suivant la méthode présentée dans [222], ainsi que dans [223].

Les équations du mouvement proprement dites seront établies dans la section A.2, en prenant les opérateurs en représentation de Heisenberg. Enfin, la section A.3 sera consacrée plus particulièrement au terme de contact et à la formule de Lorentz-Lorenz.

1. Obtention de l'hamiltonien en jauge $\vec{d}\cdot\vec{E}$

a) Hamiltonien en jauge $\vec{\mathrm{A}}\cdot\vec{\mathrm{p}}$

Je vais dans ce paragraphe refaire la transformation permettant de passer de la jauge $\vec{A}\cdot\vec{p}$ à la jauge $\vec{d}\cdot\vec{E}$ [222, complément $\mathrm{A_{IV}}$; 192], en prêtant une attention toute particulière aux termes de contact.

En jauge $\vec{A}\cdot\vec{p}$, l'hamiltonien (non relativiste) s'écrit

$$\mathbb{H} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{\alpha_i}\frac{1}{2m_{\alpha_i}}\left[\vec{p}_{\alpha_i} - q_{\alpha_i}\vec{\mathbb{A}}(\vec{r}_{\alpha_i})\right]^2 + \sum_{i=1}^{N} V^{i}_{\text{Coul.}} + \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{N} V^{i,j}_{\text{dip,dip}} + \sum_{\vec{k}\vec{\varepsilon}} \hbar c k a^{\dagger}_{\vec{k}\vec{\varepsilon}} a_{\vec{k}\vec{\varepsilon}}. \quad \text{(A.1)}$$

Cet hamiltonien provient de [222, formule (41) p. 315]. Il est valable dans le cas de l'approximation des grandes longueurs d'ondes. Il est montré dans [223] que cette approximation permet de négliger le couplage des spins des électrons et des nucléons avec le champ magnétique. La somme sur i est une somme sur les N atomes du milieu. α_i représente un constituant (noyau, électrons) de l'atome i, de masse m_{α_i}, de position $\vec{r}_{\alpha_i}$ et d'impulsion $\vec{p}_{\alpha_i}$. Dans la suite, je poserai $\vec{r}_{\alpha_i} = \vec{R}_i + \vec{r}'_{\alpha_i}$ où $\vec{R}_i$ est la position du centre de masse de l'atome i. De même, $\vec{p}_{\alpha_i} = \frac{m_{\alpha_i}}{M}\vec{P}_i + \vec{p}'_{\alpha_i}$, où $\vec{P}_i$ est l'impulsion totale de l'atome i et M sa masse. La somme sur les photons du champ est discrétisée, car on a pris un volume de quantification fini. Le potentiel vecteur $\vec{\mathbb{A}}$ a pour expression :

$$\vec{\mathbb{A}}(\vec{r}) = \sum_{\vec{k}\vec{\varepsilon}} \sqrt{\frac{\hbar}{2ck\varepsilon_0 V}}\left[a_{\vec{k}\vec{\varepsilon}}\vec{\varepsilon}e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + a^{\dagger}_{\vec{k}\vec{\varepsilon}}\vec{\varepsilon}e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\right], \quad \text{(A.2)}$$

où V est le volume de quantification, et $k = \|\vec{k}\|$. Enfin, $V^{i}_{\text{Coul.}}$ représente le potentiel Coulombien liant les constituants de l'atome i, et $V^{i,j}_{\text{dip,dip}}$ le potentiel d'interaction des 2 atomes i et j.

En supposant que $R_{ij} = \|\vec{R}_i - \vec{R}_j\| \gg a_0$, on peut effectuer un développement en puissances de $1/R_{ij}$. A l'ordre le plus bas, cela donne

$$V^{i,j}_{\text{dip,dip}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R^3_{ij}}\left[\vec{D}_i\cdot\vec{D}_j - 3\left(\vec{D}_i\cdot\frac{\vec{R}_{ij}}{R_{ij}}\right)\left(\vec{D}_i\cdot\frac{\vec{R}_{ij}}{R_{ij}}\right)\right], \quad \text{(A.3)}$$

où $\vec{D}_i$ est le dipôle électrique de l'atome i, défini par

$$\vec{D}_i = \sum_{\alpha_i} q_{\alpha_i}\vec{r}'_{\alpha_i}. \quad \text{(A.4)}$$

J'ajouterai à (A.3) un *terme de contact*, ainsi que le fait Jackson [200, page 141, formule (4.20)][1]. Ce terme permet d'obtenir un résultat cohérent lorsqu'on intègre le champ électrique dans une boule contentant le dipôle. On peut ainsi remplacer l'atome par un dipôle idéalisé, rendant l'hamiltonien (A.1) valable même lorsque $\vec{R}_{ij}$ est nul ; je poserai donc :

1. Attention : ce terme n'est présent qu'à partir de l'édition de 1973.

$$V_{\mathrm{dip,dip}}^{i,j} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R_{ij}^3}\left[\vec{D}_i \cdot \vec{D}_j - 3\left(\vec{D}_i \cdot \frac{\vec{R}_{ij}}{R_{ij}}\right)\left(\vec{D}_i \cdot \frac{\vec{R}_{ij}}{R_{ij}}\right)\right] + \frac{1}{3\varepsilon_0}\vec{D}_i \cdot \vec{D}_j \delta^{(3)}(\vec{R}_{ij})\,. \tag{A.5}$$

b) Transformation unitaire

Par analogie avec [222, p. 309], posons

$$\mathfrak{T} = \prod_{i=1}^{N} \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\vec{D}_i \cdot \vec{\mathbb{A}}(\vec{R}_i)\right). \tag{A.6}$$

Nous verrons que $\mathfrak{T}$ est l'opérateur permettant de passer de la jauge $\vec{A} \cdot \vec{p}$ à la jauge $\vec{d} \cdot \vec{E}$. Partant de l'expression (A.2) du potentiel vecteur, on tire

$$\mathfrak{T} = \prod_{i=1}^{N} \exp\left\{\sum_{\vec{k}\vec{\varepsilon}} (\lambda_{\vec{k}\vec{\varepsilon}}^{i\,*}\, a_{\vec{k}\vec{\varepsilon}} - \lambda_{\vec{k}\vec{\varepsilon}}^{i}\, a_{\vec{k}\vec{\varepsilon}}^{\dagger})\right\}, \tag{A.7}$$

où

$$\lambda_{\vec{k}\vec{\varepsilon}}^{i} = \frac{i}{\sqrt{2\varepsilon_0 \hbar c k V}}(\vec{\varepsilon} \cdot \vec{D}_i) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{R}_i}\,. \tag{A.8}$$

Nous avons les relations :

$$\mathfrak{T} a_{\vec{k}\vec{\varepsilon}} \mathfrak{T}^{\dagger} = a_{\vec{k}\vec{\varepsilon}} + \sum_{i=1}^{N} \lambda_{\vec{k}\vec{\varepsilon}}^{i} \tag{A.9.a}$$

$$\mathfrak{T} \vec{p}'_{\alpha_i} \mathfrak{T}^{\dagger} = \vec{p}'_{\alpha_i} + q_{\alpha_i} \vec{\mathbb{A}}(\vec{R}_i)\,. \tag{A.9.b}$$

Toutes les autres quantités, à savoir $\vec{r}'_{\alpha_i}$, $\vec{R}_i$ et $\vec{P}_i$ sont inchangées par la transformation. On peut en outre montrer que

$$\left[\vec{\mathbb{A}}(\vec{R}_i), \vec{\mathbb{A}}(\vec{R}_j)\right] = 0 \tag{A.10}$$

ce qui fait que $\vec{\mathbb{A}}$ commute avec $\mathfrak{T}$.

Remarque : comme le fait Claude Cohen-Tannoudji dans son cours du Collège de France [223], j'ai adopté des caractères éclairés pour désigner les quantités en jauge $\vec{A} \cdot \vec{p}$, et des caractères ordinaires pour désigner les quantités transformées. Par exemple :

$$\mathcal{H} = \mathfrak{T}\mathbb{H}\mathfrak{T}^{\dagger} \tag{A.11.a}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \mathfrak{T}\vec{\mathbb{E}}(\vec{r})\mathfrak{T}^{\dagger}\,, \tag{A.11.b}$$

etc.

c) Induction électrique dans la jauge transformée

Pour écrire l'hamiltonien transformé par $\mathfrak{T}$, nous aurons besoin de l'induction électrique. Définissons tout d'abord la densité de charge. Elle s'écrit :

$$\rho_e(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{\alpha_i} q_{\alpha_i} \delta^{(3)} \left(\vec{r} - \vec{R}_i - \vec{r}'_{\alpha_i} \right) . \tag{A.12}$$

En transformée de Fourier, on obtient :

$$\begin{aligned} \check{\rho}_e(\vec{k}) &= \sum_{i=1}^{N} \sum_{\alpha_i} q_{\alpha_i} e^{-i\vec{k}\cdot(\vec{R}_i + \vec{r}'_{\alpha_i})} \\ &\simeq \sum_{i=1}^{N} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{R}_i} \left(-i\vec{k} \cdot \vec{D}_i \right) \end{aligned} \tag{A.13}$$

(j'ai fait un développement limité valable dans l'approximation des grandes longueurs d'onde).

Si l'on définit maintenant la densité de polarisation

$$\vec{P}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} \vec{D}_i \delta(\vec{r} - \vec{R}_i) , \tag{A.14}$$

on déduit de (A.13) que

$$\operatorname{div} \vec{P} = -\rho_e(\vec{r}) . \tag{A.15}$$

Définissons maintenant la quantité

$$\underline{\vec{E}}(\vec{r}) = \vec{E}(\vec{r}) + \frac{1}{\varepsilon_0} \vec{P}(\vec{r}) , \tag{A.16}$$

où $\vec{E}$ est le champ électrique *transformé*. A ε_0 près, $\underline{\vec{E}}$ est le vecteur induction électrique dans la jauge transformée (je n'utilise pas la notation traditionnelle $\vec{D}$ à cause de la confusion possible avec les dipôles). L'équation de Maxwell $\operatorname{div} \vec{E} = \rho_e/\varepsilon_0$ et (A.15) nous montrent que $\underline{\vec{E}}$ est un champ transverse, égal au champ électrique en dehors des atomes.

Définissons maintenant le champ électrique transverse, dans la jauge $\vec{A} \cdot \vec{p}$:

$$\vec{\mathbb{E}}_\perp(\vec{r}) = i \sum_{\vec{k}\vec{\varepsilon}} \sqrt{\frac{\hbar c k}{2\varepsilon_0 V}} \left(a_{\vec{k}\vec{\varepsilon}} \vec{\varepsilon} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} - a^\dagger_{\vec{k}\vec{\varepsilon}} \vec{\varepsilon} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \right) , \tag{A.17}$$

on obtient

$$\vec{E}_\perp \equiv \mathfrak{T} \vec{\mathbb{E}}_\perp(\vec{r}) \mathfrak{T}^\dagger = \vec{\mathbb{E}}_\perp(\vec{r}) - \sum_{i=1}^{N} \sum_{\vec{k}\vec{\varepsilon}} \left(\frac{1}{2\varepsilon_0 V} \vec{\varepsilon} (\vec{\varepsilon} \cdot \vec{D}_i) e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r} - \vec{R}_i)} + \text{h.c.} \right) . \tag{A.18}$$

On remplace dans (A.18) la sommation sur $\vec{k}$ par une intégrale. On reconnaît alors la transformée de Fourier de la partie transverse de $\vec{P}$. On obtient finalement :

$$\begin{aligned}\vec{\mathbb{E}}_\perp(\vec{r}) &= \mathfrak{T}\vec{\mathbb{E}}_\perp(\vec{r})\mathfrak{T}^\dagger + \frac{1}{\varepsilon_0}\vec{\mathbb{P}}_\perp(\vec{r}) \\ &= \vec{E}_\perp(\vec{r}) + \frac{\vec{P}_\perp(\vec{r})}{\varepsilon_0}\end{aligned}$$

($\vec{P}$ commute avec $\mathfrak{T}$, donc $\vec{\mathbb{P}}_\perp(\vec{r}) = \vec{P}_\perp(\vec{r})$)

$$= \left(\vec{\underline{E}}(\vec{r})\right)_\perp = \vec{\underline{E}}(\vec{r}) \tag{A.19}$$

(puisque $\vec{\underline{E}}$ est transverse). D'où finalement :

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{\mathbb{E}}_\perp(\vec{r}) &= i\sum_{\vec{k}\vec{\varepsilon}} \sqrt{\frac{\hbar ck}{2\varepsilon_0 V}}\left(a_{\vec{k}\vec{\varepsilon}}\vec{\varepsilon}e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} - a^\dagger_{\vec{k}\vec{\varepsilon}}\vec{\varepsilon}e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\right) \\ &= \vec{E}(\vec{r}) + \frac{\vec{P}(\vec{r})}{\varepsilon_0}.\end{aligned}} \tag{A.20}$$

d) Obtention de l'hamiltonien transformé

La transformation de l'hamiltonien (A.1) nous donne

$$\begin{aligned}\mathcal{H} \equiv \mathfrak{T}\mathbb{H}\mathfrak{T}^\dagger = \sum_{i=1}^N \frac{\vec{P}_i^{\,2}}{2M} + \sum_{i=1}^N \underbrace{\left[\sum_{\alpha_i}\frac{\vec{p}^{\,2}_{\alpha_i}}{2m_{\alpha_i}} + V^i_{\text{Coul.}}\right]}_{H^i_{\text{at}}} + \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^N V^{i,j}_{\text{dip,dip}} \\ + \underbrace{\sum_{\vec{k}\vec{\varepsilon}}\hbar ck a^\dagger_{\vec{k}\vec{\varepsilon}}a_{\vec{k}\vec{\varepsilon}}}_{H_{\text{R}}} + \underbrace{\sum_{i=1}^N\sum_{\vec{k}\vec{\varepsilon}}\hbar ck\left(\lambda^i_{\vec{k}\vec{\varepsilon}}a^\dagger_{\vec{k}\vec{\varepsilon}} + \lambda^{i*}_{\vec{k}\vec{\varepsilon}}a_{\vec{k}\vec{\varepsilon}}\right)}_{-\sum_{i=1}^N \vec{D}_i\cdot\left(\vec{\mathbb{E}}_\perp(\vec{R}_i)\right)} + \sum_{i,j=1}^N\sum_{\vec{k}\vec{\varepsilon}}\hbar ck\lambda^{i*}_{\vec{k}\vec{\varepsilon}}\lambda^j_{\vec{k}\vec{\varepsilon}}.\end{aligned} \tag{A.21}$$

Il nous reste à évaluer le dernier terme de la dernière ligne de (A.21). Pour cela, nous allons séparer le cas $i = j$ du cas $i \neq j$.

Cas $i = j$. En utilisant la définition (A.8) de $\lambda^i_{\vec{k}\vec{\varepsilon}}$, on obtient

$$\varepsilon^i_{\text{dip}} \equiv \sum_{\vec{k}\vec{\varepsilon}}\frac{1}{2\varepsilon_0 V}\left(\vec{\varepsilon}\cdot\vec{D}_i\right)^2. \tag{A.22}$$

Nous remplaçons dans (A.22) la somme sur $\vec{k}$ par une intégrale. On constate alors que cette intégrale diverge. Pour contourner ce problème, nous introduisons une

fréquence de coupure $\omega_M = ck_M$, et négligeons la contribution des photons de fréquence supérieure à ω_M [1]. Nous obtenons alors

$$\boxed{\varepsilon^i_{\text{dip}} = \frac{k_M^3}{18\varepsilon_0\pi^2}\vec{D}_i^2\,.} \tag{A.23}$$

Cas $i \neq j$. La dernière ligne de (A.21) nous donne maintenant

$$\varepsilon^{i,j}_{\text{dip,dip}} \equiv \sum_{\vec{k}\vec{\varepsilon}} \frac{1}{2\varepsilon_0 V}(\vec{\varepsilon}\cdot\vec{D}_i)(\vec{\varepsilon}\cdot\vec{D}_j)e^{i\vec{k}\cdot(\vec{R}_i-\vec{R}_j)}\,. \tag{A.24}$$

En remplaçant dans (A.24) la sommation sur $\vec{k}$ par une intégrale, on tire [2]

$$\varepsilon^{i,j}_{\text{dip,dip}} = \frac{1}{2\varepsilon_0}\vec{D}_i\cdot\underbrace{\frac{1}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}^3\vec{k}\left(\vec{\vec{1}} - \frac{\vec{k}\otimes\vec{k}}{k^2}\right)e^{i\vec{k}\cdot\vec{R}_{ij}}}_{\vec{\vec{\delta}}^{\perp}(\vec{R}_{ij})}\cdot\vec{D}_j\,, \tag{A.25}$$

où $\vec{R}_{ij} = \vec{R}_i - \vec{R}_j$.

On reconnaît dans (A.25) la fonction delta transverse [222, p. 40]. Convenablement régularisée, elle a pour expression

$$\vec{\vec{\delta}}^{\perp}(\vec{r}) = \frac{2}{3}\vec{\vec{1}}\delta^{(3)}(\vec{r}) + \frac{\eta(\vec{r})}{4\pi\|\vec{r}\|^3}\left(\frac{3\vec{r}\otimes\vec{r}}{\vec{r}^2} - \vec{\vec{1}}\right)\,, \tag{A.26}$$

où « $\eta(\vec{r})$ est égale à 1 en dehors de l'origine et supprime la divergence en $\vec{r} = \vec{0}$ » [222, p. 44].

Par conséquent, l'expression (A.25) vient exactement compenser $V^{i,j}_{\text{dip,dip}}$, au terme de contact près. Voici finalement l'hamiltonien en jauge $\vec{d}\cdot\vec{E}$:

$$\boxed{\begin{aligned}\mathcal{H} = \mathfrak{T}\mathbb{H}\mathfrak{T}^\dagger = &\sum_{i=1}^N\left[\frac{\vec{P}_i}{2M} + H^i_{\text{at}} + \frac{k_M^3}{18\varepsilon_0\pi^2}\vec{D}_i^2\right] + \sum_{\vec{k}\vec{\varepsilon}}\hbar ck a^\dagger_{\vec{k}\vec{\varepsilon}}a_{\vec{k}\vec{\varepsilon}}\\ &-\sum_{i=1}^N\vec{D}_i\cdot\vec{\mathbb{E}}_\perp(\vec{R}_i) + \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^N\frac{\vec{D}_i\cdot\vec{D}_j\delta^{(3)}(\vec{R}_{ij})}{\varepsilon_0}\,,\end{aligned}} \tag{A.27}$$

C'est cet hamiltonien transformé que nous utiliserons dans la suite.

1. Pour traiter le problème rigoureusement, il faudrait ne pas faire l'approximation des grandes longueurs d'ondes.

2. La signification des notations tensorielles employées ici se trouve dans la table II.1 p. 218.

2. Obtention des équations du mouvement

Le milieu atomique est supposé interagir avec un champ classique de fréquence ω_L. Le but de ce paragraphe est de déterminer les équations caractérisant la réponse du milieu, en étudiant l'évolution des opérateurs champ et dipôle en représentation de Heisenberg. Pour écrire cette section, je me suis inspiré du cours du Collège de France de 1979-1980 de Claude Cohen-Tannoudji [224].

a) Obtention de l'équation sur le champ

i) Evolution de l'opérateur de création

Plaçons-nous en représentation de Heisenberg, et écrivons l'évolution de l'opérateur a (celle de $a^\dagger$ se déduisant par conjugaison hermitique) :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tilde{a}_{\vec{k}\vec{\varepsilon}}(t) = -i\omega\tilde{a}_{\vec{k}\vec{\varepsilon}}(t) + \sum_{i=1}^{N}\sqrt{\frac{\omega}{2\hbar\varepsilon_0 V}}\vec{\varepsilon}\cdot\tilde{\vec{D}}_i(t)e^{-i\vec{k}\cdot\vec{R}_i}, \tag{A.28}$$

où $\omega = ck$. Le signe $\tilde{}$ au-dessus des opérateurs indique qu'ils sont pris en représentation de Heisenberg. J'ai en outre remplacé $\vec{\mathbb{E}}_\perp$ par son expression (A.20). En intégrant (A.28) entre les instants t_0 et t, on déduit

$$\tilde{a}_{\vec{k}\vec{\varepsilon}}(t) = \tilde{a}_{\vec{k}\vec{\varepsilon}}(t_0)e^{-i\omega(t-t_0)} + \sum_{i=1}^{N}\sqrt{\frac{\omega}{2\hbar\varepsilon_0 V}}\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t'\vec{\varepsilon}\cdot\tilde{\vec{D}}_i(t')e^{-i\left(\vec{k}\cdot\vec{R}_i-\omega(t'-t)\right)}. \tag{A.29}$$

ii) Evolution du champ

En reportant (A.29) dans l'expression (A.20), et posant $\tau = t - t'$, on obtient

$$\tilde{\vec{\mathbb{E}}}_\perp(\vec{r},t) = \tilde{\vec{\mathbb{E}}}_0(\vec{r},t) + \sum_{i=1}^{N}\int_0^{t-t_0}\mathrm{d}\tau\sum_{\vec{k}\vec{\varepsilon}}\frac{\omega}{2\varepsilon_0 V}\left[i\vec{\varepsilon}\otimes\vec{\varepsilon}\cdot\tilde{\vec{D}}_i(t-\tau)e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{R}_i)}e^{-i\omega\tau} + \text{h.c.}\right], \tag{A.30}$$

où $\tilde{\vec{\mathbb{E}}}_0$ est le champ tel qu'il évolue en l'absence d'atomes. Rappelons que, en représentation de Heisenberg, et à des instants différents de 0, l'opérateur $\vec{\mathbb{E}}_\perp$ (ainsi que $\vec{D}_i$) sont couplés à la fois aux variables de champ et aux variables atomiques internes.

iii) Moyenne sur le champ et sur les variables atomiques internes

Nous postulerons les relations suivantes :

$$\left\langle \tilde{\vec{D}}_i(t) \right\rangle_{\text{champ+interne}} \equiv \vec{d}_i e^{-i\omega_L t} + \text{h.c.} \tag{A.31.a}$$

$$\left\langle \tilde{\vec{E}}_0(\vec{r},t) \right\rangle_{\text{champ}} \equiv \vec{E}_L e^{i(\vec{k}_L\cdot\vec{r}-\omega t)} + \text{c.c.} \equiv E_L\vec{\varepsilon}_L e^{i(\vec{k}_L\cdot\vec{r}-\omega t)} + \text{c.c.} \tag{A.31.b}$$

$$\left\langle \tilde{\vec{E}}(\vec{r},t) \right\rangle_{\text{champ+interne}} \equiv \vec{e}(\vec{r})e^{-i\omega_L t} + \text{h.c.}\,, \tag{A.31.c}$$

ω_L étant la fréquence du laser, et $\vec{E}_L$ le champ laser en l'absence d'atomes.

Les définitions (A.31) que j'ai imposées sont loin d'être innocentes. En particulier, (A.31.a) impose à tous les dipôles d'osciller à la fréquence du laser ; cela revient à dire que le système n'a qu'une seule fréquence propre ω_A, proche de ω_L. Je fais donc, sans le dire, l'approximation de l'atome à 2 niveaux. Par contre, l'approximation du champ tournant semble ne pas être nécessaire pour écrire l'équation sur le champ. En effet, comme nous allons le voir, les termes antirésonnants viennent se combiner de façon naturelle avec les termes résonnants, au point que leur absence rendrait le calcul inextricable. Or on sait bien que l'approximation du champ tournant est inséparable de celle de l'atome à 2 niveaux. Mieux vaut plutôt dire que je fais effectivement les 2 approximations — atome à 2 niveaux et approximation du champ tournant — mais que, pour des raisons de faisabilité des calculs, je rajoute des termes antirésonnants dont je sais qu'ils sont petits.

Les moyennes de (A.31) ne portent que sur les photons et sur les variables atomiques internes. Autrement dit, $\vec{d}_i$ et $\vec{e}(\vec{r})$ sont des opérateurs agissant sur les variables atomiques externes, *i.e.* sur les positions/impulsions des atomes.

Je peux maintenant moyenner l'équation (A.30) :

$$\left\langle \tilde{\vec{\mathbb{E}}}_\perp(\vec{r},t) \right\rangle_{\text{champ+interne}} = E_L\vec{\varepsilon}_L e^{i(\vec{k}_L\cdot\vec{r}-\omega_L t)} + \text{c.c.}$$
$$+ \sum_{i=1}^{N} \int_0^{t-t_0} \mathrm{d}\tau \sum_{\vec{k}\vec{\varepsilon}} \frac{\omega}{2\varepsilon_0 V} \left[i\vec{\varepsilon}\otimes\vec{\varepsilon}\cdot\left(\vec{d}_i e^{-i\omega_L(t-\tau)} + \vec{d}_i{}^{\dagger} e^{i\omega_L(t-\tau)}\right) e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{R}_i)} e^{-i\omega\tau} + \text{h.c.} \right] . \tag{A.32}$$

iv) Intégration temporelle

Intégrons maintenant l'équation (A.32) par rapport à τ, dans la limite $t \to \infty$. Afin de faire converger les intégrales, il faut introduire un *facteur de convergence*, *i.e.* remplacer dans (A.32) les termes $\exp(i\omega_L\tau)$ par $\exp\left((i\omega_L - \varepsilon')\tau\right)$. Je ferai tendre ε' vers 0 à la fin du calcul.

Je remplace la quantité $\vec{\mathbb{E}}_\perp$, qui est proportionnelle à l'induction électrique, par le champ électrique $\vec{E}$, en utilisant les équations (A.14) et (A.20). Je sépare les termes oscillant en $\exp(i\omega_L t)$ des termes oscillant en $\exp(-i\omega_L t)$. Ainsi, $\vec{d}_i$ et $\vec{d}_i^{\,\dagger}$ viennent tous deux contribuer à $\vec{e}(\vec{r})$, l'un pour les termes résonnants, l'autre pour les termes antirésonnants.

On obtient finalement le résultat :

$$\boxed{\vec{e}(\vec{r}) = \vec{E}_L e^{i\vec{k}_L\cdot\vec{r}} + \sum_{i=1}^{N} \frac{\vec{\vec{g}}(\vec{r}-\vec{R}_i)}{\varepsilon_0}\cdot\vec{d}_i\,,} \tag{A.33}$$

où le tenseur $\vec{\vec{g}}$ est défini par :

$$\vec{\vec{g}}(\vec{r}) = -\sum_{\vec{k}\vec{\varepsilon}} \frac{\omega}{2V}\vec{\varepsilon}\otimes\vec{\varepsilon}\left(\frac{e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{-\omega_L-\omega-i\varepsilon'} + \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{\omega_L-\omega+i\varepsilon'}\right) - \delta^{(3)}(\vec{r})\,. \tag{A.34}$$

Il a la dimension de l'inverse d'un volume, et représente le potentiel d'interaction entre 2 dipôles oscillants.

v) Calcul du potentiel d'interaction

Tout d'abord, on fait tendre le volume de quantification vers l'infini, remplaçant dans (A.34) la sommation par une intégrale, selon la méthode habituelle. On change $\vec{k}$ en $-\vec{k}$ dans le première exponentielle, puis intègre sur les angles en choisissant un pour axe z l'axe de $\vec{r}$. Ensuite, on utilise la relation :

$$\omega^2\left(\frac{1}{\omega_L-\omega+i\varepsilon'}+\frac{1}{-\omega_L-\omega+i\varepsilon'}\right) \underset{\varepsilon'\to 0}{\sim} -2\omega+\omega_L^2\left(\frac{1}{\omega_L-\omega+i\varepsilon'}+\frac{1}{-\omega_L-\omega+i\varepsilon'}\right). \tag{A.35}$$

Ceci permet de changer ω en $-\omega$ dans les termes en $1/(-\omega_L-\omega+i\varepsilon')$, et ainsi

d'étendre l'intégration sur $\|\vec{k}\|$ de $-\infty$ à $+\infty$[1]. Voici le résultat intermédiaire :

$$\vec{\vec{g}}(\vec{r}) = \overbrace{\frac{1}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}^3\vec{k} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\left(\vec{\vec{1}} - \frac{\vec{k}\otimes\vec{k}}{k^2}\right)}^{\text{terme } -2\omega}$$
$$-\frac{1}{4\pi^2c^3}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\omega\,\omega\omega_{\mathrm{L}}^2\left[\left(\frac{\sin kr}{kr}+\frac{\cos kr}{k^2r^2}-\frac{\sin kr}{k^3r^3}\right)\vec{\vec{1}}\right.$$
$$\left.+\left(-\frac{\sin kr}{kr}-3\frac{\cos kr}{k^2r^2}+3\frac{\sin kr}{k^3r^3}\right)\frac{\vec{r}\otimes\vec{r}}{r^2}\right]\frac{1}{\omega_{\mathrm{L}}-\omega+i\varepsilon'}\Bigg\}\ \text{Fractions rationnelles}$$
$$\underbrace{-\delta^{(3)}(\vec{r})}_{\text{passage de } \vec{\mathbb{E}} \text{ à } \vec{E}} \quad . \tag{A.36}$$

Dans la première ligne de (A.36), nous reconnaissons la fonction delta transverse [222, p. 44]. Les 2 lignes suivantes doivent être intégrées par les résidus. Ceci se fait en séparant les parties en $\exp(i\vec{k}\cdot\vec{r})$ des parties en $\exp(ikr)$. On introduit un pôle supplémentaire en $\omega = 0$, qu'il faut contourner (le résultat ne dépend pas du côté par lequel on passe).

Remarquons qu'à l'infini, la fonction se comporte en $\exp(ikr)/k$. Ceci garantit son intégrabilité. Cela n'aurait pas été le cas si l'on avait intégré par les résidus l'équation (A.33) sans effectuer la transformation (A.35) : on aurait eu un comportement en $k\exp(ikr)$ à l'infini. Le résultat eût alors été effectivement différent, et bien évidemment faux.

Voici donc l'expression obtenue après intégration :

$$\boxed{\vec{\vec{g}}(\vec{r}) = -\frac{1}{3}\vec{\vec{1}}\delta^{(3)}(\vec{r}) - \frac{k_{\mathrm{L}}^3}{4\pi}e^{ik_{\mathrm{L}}r}\left[\left(-\frac{1}{k_{\mathrm{L}}r}-\frac{i}{(k_{\mathrm{L}}r)^2}+\frac{1}{(k_{\mathrm{L}}r)^3}\right)\vec{\vec{1}}\right.}$$
$$\boxed{\left.+\left(\frac{1}{k_{\mathrm{L}}r}+\frac{3i}{(k_{\mathrm{L}}r)^2}-\frac{3}{(k_{\mathrm{L}}r)^3}\right)\frac{\vec{r}\otimes\vec{r}}{r^2}\right] .} \tag{A.37}$$

Une interprétation physique de ce potentiel est faite au paragraphe III.2.*a*, p. 243. Je ferai juste une petite remarque ici : dans la limite $r \to 0$, on constate que l'expression (A.37) coïncide avec l'expression (A.5) caractérisant l'interaction entre 2 dipôles statiques. C'est vrai pour le terme en $1/r^3$, mais aussi pour le terme de contact en $\delta(\vec{r})$.

1. Signalons que le membre de droite de (A.35) est le résultat que nous aurions obtenu si nous avions fait tous les calculs en jauge $\vec{A}\cdot\vec{p}$.

Remarque: j'aurai besoin par la suite de connaître $(\Delta + k_L^2)\vec{\vec{g}}(\vec{r})$. Pour le calculer, il faut revenir à la définition (A.34) du potentiel $\vec{\vec{g}}$:

$$(\Delta + k_L^2)\vec{\vec{g}}(\vec{r}) = -\sum_{\vec{k}\vec{\varepsilon}} \frac{\omega}{2V}\vec{\varepsilon}\otimes\vec{\varepsilon}\left(\frac{k_L^2 - k^2}{-\omega_L - \omega - i\varepsilon'} + \frac{k_L^2 - k^2}{\omega_L - \omega + i\varepsilon'}\right) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

$$- (\Delta + k_L^2)\delta^{(3)}(\vec{r})\vec{\vec{1}}$$

$$\underset{\varepsilon'\to 0}{\sim} \frac{-1}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}^3k \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - \frac{\vec{k}}{k}\otimes\frac{\vec{k}}{k}\right) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} - (\Delta + k_L^2)\delta^{(3)}(\vec{r})\vec{\vec{1}},$$

d'où

$$(\Delta + k_L^2)\vec{\vec{g}}(\vec{r}) = \left(-\vec{\nabla}\otimes\vec{\nabla} - k_L^2\vec{\vec{1}}\right)\delta^{(3)}(\vec{r}). \qquad \text{(A.38)}$$

On voit donc que $\vec{\vec{g}}$ est une fonction de Green (d'où le choix de la notation).

b) Obtention de l'équation sur les dipôles

i) Hamiltonien atomique

Comme pour le champ, j'utilise l'hamiltonien (A.27) et la représentation de Heisenberg pour connaître l'évolution de l'opérateur dipôle $\vec{D}_i$.

Ce calcul ne peut se faire sans particulariser la structure atomique (fig. A.1). Je choisirai une transition $0 \to 1$, de fréquence ω_A, et de largeur de niveau excité Γ (prendre un atome à 2 niveaux eût conduit à des incohérences). Le laser de fréquence ω_L sera supposé quasi-résonnant, c'est-à-dire $\delta = \omega_L - \omega_A \sim \Gamma$. Ceci justifie l'hypothèse que j'avais déjà faite pour introduire l'équation (A.31).

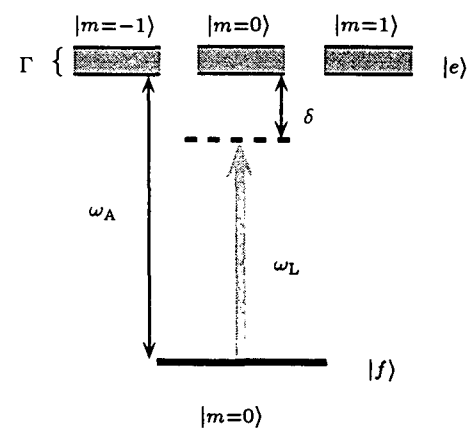


FIG. A.1 - *La transition utilisée.*

J'aurai besoin de connaître l'élément de matrice de l'opérateur $\vec{D}_i^2$, afin d'évaluer le rôle du terme en k_M^3 dans l'hamiltonien (A.27). Lorsque l'on se contente des contributions des niveaux $|f\rangle$ et $|e\rangle$, on trouve $\langle\vec{D}_i^2\rangle_{|e\rangle} = \langle\vec{D}_i^2\rangle_{|f\rangle}$, c'est-à-dire que le terme en k_M^3 ne contribue pas. Ce résultat est bien sûr inexact, il faut tenir compte des contributions des niveaux supérieurs.

Le calcul nécessiterait donc normalement de particulariser l'atome choisi, de façon à calculer l'élément de matrice de l'opérateur dipôle électrique en tenant compte de l'ensemble des niveaux et de leurs forces d'oscillateur respectives. Ce n'est pas l'approche que j'ai choisie, car je souhaite rester dans un cadre général. En outre, un calcul exact nécessiterait la prise en compte de très nombreux effets

(corrections relativistes, renormalisation des masses, etc.) qui dépassent largement le cadre de cette thèse. J'ai choisi de modéliser l'atome par un oscillateur harmonique isotrope à 2 dimensions. Nous verrons que cette hypothèse, qui peut paraître quelque peu arbitraire au lecteur, conduit à des résultats cohérents. Je donnerai quelques explications supplémentaires à ce sujet au paragraphe A.2.*b.v* (p. 339).

Je choisis donc les vecteurs $\{|e\rangle_x, |e\rangle_y, |e\rangle_z\}$, au lieu de la base $\{|e\rangle_0, |e\rangle_1, |e\rangle_{-1}\}$ qui est plus couramment utilisée. Je fais l'analogie $|f\rangle = |0,0,0\rangle$, $|e_x\rangle = |1,0,0\rangle$, $|e_y\rangle = |0,1,0\rangle$ et $|e_z\rangle = |0,0,1\rangle$, où $|n,m,p\rangle$ représente l'un des niveaux quantiques de l'oscillateur harmonique qui est isotrope. La fréquence d'oscillation dans le piège est $\tilde{\omega}_A$ [1]. D'après la relation

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\tilde{\omega}_A}}\left(a + a^\dagger\right),$$

(m étant la masse de la « particule » dans l'oscillateur harmonique, a et $a^\dagger$ les opérateurs d'annihilation et de création), on tire $\langle 0,0,0|\vec{D}_x^2|0,0,0\rangle$, d'où

$$\langle f|\vec{D}^2|f\rangle = \frac{3}{2}\frac{\hbar q^2}{m\tilde{\omega}_A}.$$

Pour calculer l'élément de matrice $\langle e_x|\vec{D}^2|e_x\rangle$, il faut tenir compte du couplage avec $|f\rangle$, mais aussi de celui avec $|2,0,0\rangle$. Cela donne

$$\langle e_x|\vec{D}^2|e_x\rangle = \frac{5}{2}\frac{\hbar q^2}{m\tilde{\omega}_A}.$$

On déduit que

$$\begin{aligned}\langle e_x|\vec{D}^2|e_x\rangle - \langle f|\vec{D}^2|f\rangle &= \frac{\hbar q^2}{m\tilde{\omega}_A} \\ &= 2\,|\langle f|D_x|e_x\rangle| \\ &= 2d^2,\end{aligned}$$

où d est le dipôle réduit, *i.e.* $d^2 = 3\pi\varepsilon_0\Gamma\hbar c^2/\omega_A^3$.

Finalement, à une redéfinition de l'origine des énergies près, j'obtiens :

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{at}^{'i} &\equiv H_{at}^i + \frac{k_M^3}{18\varepsilon_0\pi^2}\vec{D}_i^2 \\ &= \left(\hbar\tilde{\omega}_A + \frac{k_M^3}{9\varepsilon_0\pi^2}d^2\right)|\vec{e}\rangle\cdot\langle\vec{e}|,\end{aligned} \tag{A.39}$$

1. et non la fréquence atomique ω_A car le déplacement de Lamb ne figure pas dans l'hamiltonien.

où je rappelle que la notation vectorielle $|\vec{e}\rangle\cdot\langle\vec{e}|$ signifie $|e_x\rangle\langle e_x|+|e_y\rangle\langle e_y|+|e_z\rangle\langle e_z|$ (table II.1 p. 218).

Le facteur $k_M^3/(9\varepsilon_0\pi^2)$ peut être transformé en utilisant la relation (qui n'est certes pas des plus rigoureuses sur le plan mathématique)

$$\delta^{(3)}(\vec{r}=\vec{0}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}^3\vec{k}e^{i\vec{k}\cdot\vec{0}} \tag{A.40}$$

$$= \frac{k_M^3}{6\pi^2}. \tag{A.41}$$

Je sépare le facteur en k_M^3 de l'hamiltonien (A.39) en $1/9 = 1/6 - 1/18$. Le terme $1/6$ fournira un terme de contact pour le cas $i=j$, tandis que le terme $1/18$ viendra corriger l'énergie de l'état excité. Voici l'hamiltonien finalement obtenu :

$$\boxed{\begin{aligned}\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{N}\left[\frac{\vec{P}_i}{2M} + \left(\hbar\tilde{\omega}_{\mathrm{A}} - \frac{1}{3}\delta^{(3)}(\vec{0})\frac{d^2}{\varepsilon_0}\right)|\vec{e}\rangle\cdot\langle\vec{e}|\right] + \sum_{\vec{k}\vec{\varepsilon}}\hbar ck a^\dagger_{\vec{k}\vec{\varepsilon}}a_{\vec{k}\vec{\varepsilon}} \\ - \sum_{i=1}^{N}\vec{D}_i\cdot\vec{\mathbb{E}}_\perp(\vec{R}_i) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N}\frac{\vec{D}_i\cdot\vec{D}_j\delta^{(3)}(\vec{R}_{ij})}{\varepsilon_0}.\end{aligned}} \tag{A.42}$$

ii) Hamiltonien dans l'approximation de champ tournant

Je fais maintenant l'approximation du champ tournant, qui consiste à négliger les termes antirésonnants dans l'interaction dipôle-champ. Je rappelle que cette approximation est inséparable de celle de l'atome à 2 niveaux.

L'hamiltonien (A.42) s'écrit alors

$$\begin{aligned}\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{N}\left[\frac{\vec{P}_i}{2M} + \left(\hbar\tilde{\omega}_{\mathrm{A}} - \frac{1}{3}\delta^{(3)}(\vec{0})\right)|\vec{e}\rangle\cdot\langle\vec{e}|\right] + \sum_{\vec{k}\vec{\varepsilon}}\hbar ck a^\dagger_{\vec{k}\vec{\varepsilon}}a_{\vec{k}\vec{\varepsilon}} \\ + \left[-\vec{D}_i^+\cdot\vec{\mathbb{E}}_\perp^+(\vec{R}_i) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N}\frac{\vec{D}_i^+\cdot\vec{D}_j^-\delta^{(3)}(\vec{R}_{ij})}{\varepsilon_0} + \mathrm{h.c.}\right],\end{aligned} \tag{A.43}$$

où

$$\vec{\mathbb{E}}_\perp^+(\vec{r}) = i\sum_{\vec{k}\vec{\varepsilon}}\sqrt{\frac{\hbar c\|\vec{k}\|}{2\varepsilon_0 V}}a_{\vec{k}\vec{\varepsilon}}e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\vec{\varepsilon}, \tag{A.44}$$

et

$$\vec{D}_i^+ = d|\vec{e}_i\rangle\langle f_i|. \tag{A.45}$$

iii) Equations de Heisenberg sur les dipôles

J'écris les équations de Heisenberg avec l'hamiltonien (A.43), pour les opérateurs $\tilde{\vec{D}}_i^+$, $\tilde{\vec{D}}_i^-$, ainsi que pour les opérateurs

$$\tilde{\vec{\vec{s}}}_i \equiv \widetilde{|\vec{e}_i\rangle \otimes \langle \vec{e}_i|} \tag{A.46.a}$$

$$\tilde{f}_i \equiv \widetilde{|f_i\rangle\langle f_i|}\,. \tag{A.46.b}$$

Je remplace l'induction électrique $\vec{\mathbb{E}}_\perp$ par le champ électrique $\vec{E}$ grâce aux formules (A.14) et (A.20). Finalement j'obtiens les équations suivantes :

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\vec{D}}_i^- = \left(\hbar\tilde{\omega}_{\mathrm{A}} - \frac{1}{3}\delta^{(3)}(\vec{0})\frac{d^2}{\varepsilon_0}\right)\tilde{\vec{D}}_i^- - d^2\tilde{f}_i\vec{E}^+(\vec{R}_i) + d^2\tilde{\vec{\vec{s}}}_i\cdot\vec{E}^+(\vec{R}_i) \tag{A.47.a}$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\vec{D}}_i^+ = -\left(\hbar\tilde{\omega}_{\mathrm{A}} - \frac{1}{3}\delta^{(3)}(\vec{0})\frac{d^2}{\varepsilon_0}\right)\tilde{\vec{D}}_i^+ + d^2\vec{E}^-(\vec{R}_i)\tilde{f}_i - d^{2\,\mathrm{t}}\left[\vec{E}^-(\vec{R}_i)\cdot\tilde{\vec{\vec{s}}}_i\right] \tag{A.47.b}$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\tilde{f}_i = -\vec{E}^-(\vec{R}_i)\cdot\tilde{\vec{D}}_i^- + \tilde{\vec{D}}_i^+\cdot\vec{E}^+(\vec{R}_i) \tag{A.47.c}$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\vec{\vec{s}}}_i = -\tilde{\vec{D}}_i^+\otimes\vec{E}^+(\vec{R}_i) + \vec{E}^-(\vec{R}_i)\otimes\tilde{\vec{D}}_i^-\,. \tag{A.47.d}$$

Je signale au lecteur que, contrairement au champ $\vec{\mathbb{E}}_\perp$, le champ $\vec{E}$ contient dans sa définition des termes de dipôle. Autrement dit, il ne commute pas avec les opérateurs atomiques dont je viens d'écrire les équations d'évolution. J'attire aussi l'attention sur la transposée de matrice qui apparaît dans l'équation (A.47.b) : je n'avais en effet pas le droit d'inverser les ordres du champ $\vec{E}$ et du tenseur $\vec{\vec{s}}$ (voir la table II.1, p. 218).

iv) Moyenne sur les degrés de libertés atomiques internes et sur le champ

Je suppose que le système a atteint un régime stationnaire, dans lequel les dipôles atomiques et le champ oscillent à la fréquence ω_{L}, c'est-à-dire

$$\left\langle\tilde{\vec{D}}_i^-(t)\right\rangle_{\text{champ+interne}} \simeq \vec{d}_i e^{-i\omega_{\mathrm{L}}t} \tag{A.48.a}$$

$$\left\langle\tilde{\vec{E}}^+(\vec{r},t)\right\rangle_{\text{champ+interne}} \simeq \vec{e}(\vec{r})e^{-i\omega_{\mathrm{L}}t}\,. \tag{A.48.b}$$

J'ai employé le signe $\simeq$ dans les équations (A.48) parce qu'elles constituent une approximation (l'approximation du champ tournant) par rapport à la définition (A.31) des quantités $\vec{d}_i$ et $\vec{e}(\vec{r})$.

Intéressons-nous maintenant au système (A.47), et plus particulièrement à l'équation (A.47.a). Elle contient dans son second membre des produits d'opérateurs, dont les moyennes ne sont *a priori* pas égales au produit des valeurs moyennes. Pour les calculer, il faut revenir à l'équation (A.30) donnant l'évolution de l'opérateur champ. En me plaçant au point $\vec{R}_i$, je sépare la contribution de l'atome i (appelée « champ propre ») des contributions du laser et des atomes différents de i (que j'appelle « champ lissé »). Analytiquement, cela donne (en ne gardant parmi les termes qui contribuent à $\vec{E}^+$ que ceux de fréquence négative) :

$$\tilde{\vec{E}}^+(\vec{R}_i,t) = \overbrace{\tilde{\vec{\mathbb{E}}}_0^+(\vec{R}_i,t) + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\left(\int_0^{t-t_0} \mathrm{d}\tau \sum_{\vec{k}\vec{\varepsilon}} \frac{\omega}{2\varepsilon_0 V} i\vec{\varepsilon}\otimes\vec{\varepsilon}\cdot\tilde{\vec{D}}_j^-(t-\tau)e^{i\vec{k}\cdot(\vec{R}_i-\vec{R}_j)}e^{-i\omega\tau} + \frac{\tilde{\vec{D}}_j^-(t)}{\varepsilon_0}\delta^{(3)}(\vec{R}_i-\vec{R}_j)\right)}^{\vec{E}_i^+{}_{\text{lissé}}}$$
$$\underbrace{+\int_0^{t-t_0} \mathrm{d}\tau \sum_{\vec{k}\vec{\varepsilon}} \frac{\omega}{2\varepsilon_0 V} i\vec{\varepsilon}\otimes\vec{\varepsilon}\cdot\tilde{\vec{D}}_i^-(t-\tau)e^{-i\omega\tau} + \frac{\tilde{\vec{D}}_i^-(t)}{\varepsilon_0}\delta^{(3)}(\vec{0})}_{\vec{E}_i^+{}_{\text{propre}}}. \tag{A.49}$$

Commençons par le terme de l'équation (A.47.a) correspondant au champ propre. Il s'écrit

$$\tilde{f}_i(t)\vec{E}_i^+{}_{\text{propre}}(t) = \int_0^{t-t_0} \mathrm{d}\tau \sum_{\vec{k}\vec{\varepsilon}} \frac{\omega}{2\varepsilon_0 V} i\vec{\varepsilon}\otimes\vec{\varepsilon}\cdot\left(\tilde{f}_i(t)\tilde{\vec{D}}_i^-(t-\tau)\right)e^{-i\omega\tau} + \frac{\tilde{f}_i(t)\tilde{\vec{D}}_i^-(t)}{\varepsilon_0}\delta^{(3)}(0). \tag{A.50}$$

Je reprends ici l'argument avancé par C. Cohen-Tannoudji [224, p. VII-5] : « la somme sur $\vec{k}$ [intervenant dans l'équation (A.50)] fait apparaître une fonction de τ très étroite (de largeur $1/(ck_{\mathrm{M}})$), de sorte qu'il est justifié de poser :

$$[\tilde{\vec{D}}_i^-(t-\tau) = \tilde{\vec{D}}_i^-(t)e^{i\omega_{\mathrm{L}}\tau}].$$

(on ne tient compte que de l'évolution harmonique de $[\tilde{\vec{D}}_i^-]$ dans l'intervalle de temps très court $t-\tau, t$) ».

Finalement, comme $f_i\vec{D}_i^- = \vec{D}_i^-$, on obtient $\langle\tilde{f}_i(t)\vec{E}_i^+{}_{\text{propre}}(t)\rangle \simeq \langle\vec{E}_i^+{}_{\text{propre}}(t)\rangle$. On calcule la moyenne de $\vec{E}_i^+{}_{\text{propre}}$ de la même façon qu'au paragraphe A.2.*a.iii*, c'est-à-dire en étendant l'intégrale jusqu'à $+\infty$, puis en intégrant sur le temps. On tire

$$\left\langle\vec{E}_i^+{}_{\text{propre}}\right\rangle_{\text{champ+interne}} = \frac{\vec{\tilde{g}}(\vec{0})}{\varepsilon_0}\cdot\vec{d}_i. \tag{A.51}$$

On calcule $\vec{\vec{g}}(\vec{0})$ en revenant à la définition (A.34) du potentiel $\vec{\vec{g}}$. Je le groupe avec le terme $\delta^{(3)}(\vec{0})$ qui apparaît entre parenthèses dans l'équation (A.47.a), et j'obtiens

$$\vec{\vec{g}}(\vec{0}) + \frac{1}{3}\delta^{(3)}(\vec{0})\vec{\vec{1}} = -\sum_{\vec{k}\vec{\varepsilon}} \frac{\omega}{2V}\vec{\varepsilon}\otimes\vec{\varepsilon}\left(\frac{1}{-\omega_{\mathrm{L}}-\omega-i\varepsilon'} + \frac{1}{\omega_{\mathrm{L}}-\omega+i\varepsilon'}\right) - \frac{2}{3}\delta^{(3)}(\vec{0})\vec{\vec{1}}. \tag{A.52}$$

On transforme les fractions rationnelles en utilisant l'équation (A.35). Le terme qui sort vient exactement compenser le $-\,{}^2\!/_3\,\delta^{(3)}(\vec{0})$: le modèle de l'oscillateur harmonique nous a donc fourni le « bon » coefficient devant le terme en k_M^3. Je reviendrait là dessus au paragraphe A.2.*b.v*, p. 339. Il vient finalement

$$\vec{\vec{g}}(\vec{0}) + \frac{1}{3}\delta^{(3)}(\vec{0})\vec{\vec{1}} = \sum_{\vec{k}\vec{\varepsilon}} \frac{\omega_{\mathrm{L}}^2}{2\omega V}\vec{\varepsilon}\otimes\vec{\varepsilon}\left(\frac{1}{-\omega_{\mathrm{L}}-\omega-i\varepsilon'} + \frac{1}{\omega_{\mathrm{L}}-\omega+i\varepsilon'}\right) \tag{A.53.a}$$

$$= \left(-\Delta E_{\mathrm{A}} + i\hbar\frac{\Gamma}{2}\right)\frac{\varepsilon_0}{d^2}\vec{\vec{1}}. \tag{A.53.b}$$

On reconnaît dans l'équation (A.53.b) le déplacement de Lamb ΔE_{A} et la largeur naturelle de l'état excité Γ, telles qu'on les obtient en faisant les calculs en jauge $\vec{A}\cdot\vec{p}$ sans l'approximation du champ tournant. Dans la suite, j'utiliserai la fréquence atomique renormalisée, qui est :

$$\omega_{\mathrm{A}} = \tilde{\omega}_{\mathrm{A}} + \frac{\Delta E_{\mathrm{A}}}{\hbar}, \tag{A.54}$$

Revenons à l'équation (A.49), et étudions maintenant le terme de champ lissé. On peut une fois encore, par le même argument que pour le terme de champ propre, y remplacer $\vec{D}_j^-(t-\tau)$ par $\vec{D}_j^-(t)e^{i\omega_{\mathrm{L}}\tau}$. Nous supposons ensuite que le laser ne sature pas la transition atomique. On peut donc supposer que les atomes sont presque toujours dans leur état fondamental, et donc poser $f_i \simeq \mathbb{1}$.

Je définis ensuite la quantité

$$\vec{e}_{i_{\text{lissé}}} \equiv e^{i\omega_{\mathrm{L}}t}\left\langle \vec{E}_{i\ \text{lissé}}^{+}(t)\right\rangle_{\text{champ+interne}}, \tag{A.55}$$

et trouve sans difficulté que

$$\vec{e}_{i_{\text{lissé}}} = \vec{E}_L e^{i\vec{k}_{\mathrm{L}}\cdot\vec{R}_i} + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} \frac{\vec{\vec{g}}(\vec{R}_i-\vec{R}_j)}{\varepsilon_0}\cdot\vec{d}_j, \tag{A.56}$$

l'équation (A.56) n'étant que l'équation (A.33) écrite avec un atome de moins.

En revenant à l'équation (A.47.a), je néglige le terme faisant intervenir $\vec{\vec{s}}$, toujours sous l'hypothèse de faible saturation du laser. D'où finalement la version moyennée de (A.47.a) :

$$0 = -\hbar\left(\delta + i\frac{\Gamma}{2}\right)\vec{d}_i - d^2\vec{e}_{i_{\text{lissé}}}, \tag{A.57}$$

où $\delta = \omega_L - \omega_A$. Cela donne, en remplaçant $\vec{e}_{i_{\text{lissé}}}$ par sa définition (A.56) :

$$\boxed{\vec{d}_i = \alpha \left[\varepsilon_0 \vec{E}_L e^{i\vec{k}_L \cdot \vec{R}_i} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \vec{g}\left(\vec{R}_i - \vec{R}_j\right) \cdot \vec{d}_j \right],} \tag{A.58}$$

où α est la polarisabilité d'un atome, définie par

$$\boxed{\alpha = \frac{-3\pi\Gamma c^3}{{\omega_A}^3 \left(\omega_L - \omega_A + i\dfrac{\Gamma}{2}\right)}.} \tag{A.59}$$

v) Retour sur la modélisation par un oscillateur harmonique

L'équation (A.59) a été obtenue en modélisant le potentiel atomique par un oscillateur harmonique. Grâce à cette modélisation, nous avons obtenu un hamiltonien tel que le terme $\delta^{(3)}(\vec{0})$ disparaît dans la renormalisation (A.53) de l'énergie de l'état excité.

Pour se convaincre que cette propriété est bien liée au modèle que nous avons choisi, on peut refaire le calcul avec un autre modèle : par exemple un potentiel coulombien (c'est-à-dire un atome d'hydrogène sans structure fine ni structure hyperfine). On choisit comme niveaux $|f\rangle = |1s\rangle$ et $|\vec{e}\rangle = |2\vec{p}\rangle$, et on moyenne la quantité q^2z^2 en utilisant l'expression des fonctions d'onde correspondantes [225, t. 1, p. 813]. J'ai trouvé

$$\langle e_z|\vec{D}^2|e_z\rangle - \langle f|\vec{D}^2|f\rangle = 27q^2a_0^2, \tag{A.60.a}$$

avec

$$d = \langle e_z|D_z|f\rangle = \frac{256}{243\sqrt{2}} q a_0 . \tag{A.60.b}$$

Par conséquent $\langle e_z|\vec{D}^2|e_z\rangle - \langle f|\vec{D}^2|f\rangle \neq 2d^2$. On constate donc que le potentiel coulombien ne permet pas d'éliminer le $\delta^{(3)}(\vec{0})$ dans l'équation (A.53). Ce résultat est un peu embarrassant : contrairement à l'oscillateur harmonique, le potentiel coulombien correspond en effet à un véritable atome, l'atome d'hydrogène (sans les structures fine et hyperfine). On aurait donc dû s'attendre à ce qu'il donne un résultat cohérent.

En fait, ceci n'est pas aussi surprenant qu'il y paraît au premier abord ; nos calculs sont en effet valables dans le cas où le laser ne sature pas les atomes. Or pour l'oscillateur harmonique, il n'existe pas de termes de saturation. Autrement

dit, aucune approximation supplémentaire n'est nécessaire, nos calculs étant valables quelle que soit la puissance du laser. Le modèle de l'oscillateur harmonique est donc plus cohérent que celui du potentiel coulombien, aussi est-il normal qu'il conduise au bon résultat.

Signalons toutefois que le fait qu'il reste ou non un terme en $\delta^{(3)}(\vec{0})$ dans la renormalisation de l'état excité n'est pas très important pour nous : de toutes façons, un calcul correct nécessiterait la prise en compte de nombreux effets (relativistes, etc.). Ce qui nous intéresse ici n'est pas de calculer le déplacement de Lamb, mais de connaître précisément l'interaction entre deux dipôles atomiques. Or il n'est pas nécessaire de modéliser le potentiel atomique pour obtenir le résultat.

3. Calcul de l'indice de réfraction. Obtention de la formule de Lorentz-Lorenz

a) Relation de dispersion

Au chapitre III, j'ai moyenné les équations (A.33) et (A.33). En particularisant la géométrie du milieu (il remplit un demi-espace), j'ai pu calculer une relation de dispersion entre le vecteur d'onde $\vec{k}_{\mathrm{m}} = k_{\mathrm{m}}\vec{u}_z$ complexe et la fréquence ω_{L} réelle du champ. Je rappelle ici cette relation de dispersion :

$$\frac{k_{\mathrm{m}}^2}{k_{\mathrm{L}}^2} = 1 + \frac{\alpha\rho_0}{1+\mathcal{A}}\,, \tag{A.61.a}$$

où

$$\mathcal{A} = -\alpha\rho_0 \int \mathrm{d}^3\vec{r}\,\vec{\varepsilon}_{\mathrm{L}}{}^* \cdot \vec{\vec{g}}(\vec{r}) \cdot \vec{\varepsilon}_{\mathrm{L}}\varphi(\vec{r})e^{-i\vec{k}_{\mathrm{L}}\cdot\vec{r}} - \rho_0 \int \mathrm{d}^3\vec{r}\,\vec{\varepsilon}_{\mathrm{L}}{}^* \cdot \left[\frac{\alpha^2\vec{\vec{g}}^{\,2}(\vec{r}) + \alpha^3\vec{\vec{g}}^{\,3}(\vec{r})e^{-i\vec{k}_{\mathrm{L}}\cdot\vec{r}}}{\vec{\vec{1}} - \alpha^2\vec{\vec{g}}^{\,2}(\vec{r})}\right] \cdot \vec{\varepsilon}_{\mathrm{L}}\left(1+\varphi(\vec{r})\right)\,, \tag{A.61.b}$$

J'ai posé $\rho^{\mathrm{II}}(\vec{r},\vec{r}') = \rho_0^2\left(+\varphi(\|\vec{r}'-\vec{r}\|)\right)$. Je vais maintenant étudier le rôle joué par le terme de contact dans cette relation de dispersion.

b) Rôle du terme de contact. Formule de Lorentz-Lorenz

Le résultat (A.61.b) pose certains problèmes mathématiques : en effet $\vec{\vec{g}}$ contient un terme en δ, donc est une distribution. Or on ne peut pas diviser les distributions.

Pour s'en tirer, il faut « régulariser la fonction δ », par exemple en posant

$$\delta(r_x) = \lim_{r_\epsilon\to 0} \frac{1}{\pi}\frac{r_\epsilon}{r_x^2 + r_\epsilon^2} \equiv \lim_{r_\epsilon\to 0} \delta_{r_\epsilon}(r_x)\,. \tag{A.62}$$

Posons $\vec{\vec{g}}(\vec{r}) \equiv \vec{\vec{g}}_1(\vec{r}) - \frac{1}{3}\delta^{(3)}(\vec{r})\vec{\vec{1}}$. Dans les termes du type

$$\frac{\alpha^2 \vec{\vec{g}}^{\,2}(\vec{r})}{\vec{\vec{1}} - \alpha^2 \vec{\vec{g}}^{\,2}(\vec{r})},$$

le terme en $\delta^{(3)}$ ne joue aucun rôle, car là où δ_{r_ϵ} est non nul, $\vec{\vec{g}}_1$ est très grand (et donc δ_{r_ϵ} ne vient pas modifier la limite du terme, qui est -1). Par ailleurs,

$$\begin{aligned}\frac{\alpha^3 \vec{\vec{g}}^{\,3}(\vec{r})}{\vec{\vec{1}} - \alpha^2 \vec{\vec{g}}^{\,2}(\vec{r})} &= \alpha\left(\vec{\vec{g}}_1(\vec{r}) - \frac{1}{3}\delta^{(3)}(\vec{r})\vec{\vec{1}}\right)\frac{\alpha^2 \vec{\vec{g}}^{\,2}(\vec{r})}{\vec{\vec{1}} - \alpha^2 \vec{\vec{g}}^{\,2}(\vec{r})} \\ &\underset{r_\epsilon \to 0}{\sim} \frac{\alpha^3 \vec{\vec{g}}_1^{\,3}(\vec{r})}{\vec{\vec{1}} - \alpha^2 \vec{\vec{g}}_1^{\,2}(\vec{r})} + \frac{1}{3}\alpha\delta^{(3)}(\vec{r})\vec{\vec{1}}.\end{aligned}$$

Il résulte que, pour la partie statistique (*i.e.* celle faisant intervenir φ), la contribution du δ dans la 1re ligne de l'expression de $\mathcal{A}$ dans (A.61.b) vient exactement compenser celle de la 2e ligne. Par contre, le δ contribue de façon non nulle sur le terme non statistique (*i.e.* ne dépendant pas de φ). Finalement il vient

$$\begin{aligned}\mathcal{A} = -\alpha\rho_0 \int \mathrm{d}^3\vec{r}\,\vec{\varepsilon}_{\mathrm{L}}^{\,*} \cdot \vec{\vec{g}}_1(\vec{r}) \cdot \vec{\varepsilon}_{\mathrm{L}}\varphi(\vec{r}) e^{-i\vec{k}_{\mathrm{L}}\cdot\vec{r}} \\ - \rho_0 \int \mathrm{d}^3\vec{r}\,\vec{\varepsilon}_{\mathrm{L}}^{\,*} \cdot \left[\frac{\alpha^2 \vec{\vec{g}}_1^{\,2}(\vec{r}) + \alpha^3 \vec{\vec{g}}_1^{\,3}(\vec{r}) e^{-i\vec{k}_{\mathrm{L}}\cdot\vec{r}}}{\vec{\vec{1}} - \alpha^2 \vec{\vec{g}}_1^{\,2}(\vec{r})}\right] \cdot \vec{\varepsilon}_{\mathrm{L}}\left(1 + \varphi(\vec{r})\right) \\ - \frac{1}{3}\rho_0\alpha\,. \qquad \text{(A.63)}\end{aligned}$$

Plaçons-nous maintenant dans le cas d'atomes qui n'interagissent pas (*i.e.* tels que $\vec{\vec{g}}_1 = 0$). La relation de dispersion (A.61.b) se ramène alors à

$$\boxed{\frac{k_{\mathrm{m}}^2}{k_{\mathrm{L}}^2} = 1 + \frac{\alpha\rho_0}{1 - \frac{1}{3}\alpha\rho_0} \Rightarrow \alpha\rho_0 = \frac{3(n^2-1)}{n^2+2},} \qquad \text{(A.64)}$$

n étant l'indice de réfraction. On reconnaît dans l'équation (A.64) la célèbre formule de Lorentz-Lorenz [195, 196]. Je rappelle que cette formule est équivalente à celle de Clausius-Mossotti [226, 227].

4. Obtention de la formule de Lorentz-Lorenz par une méthode « traditionnelle »

Nous avons obtenu la formule de Lorentz-Lorenz par une approche nouvelle (à ma connaissance), qui consistait à remplacer le potentiel physique d'interaction

de 2 atomes par le potentiel d'interaction entre 2 dipôles idéaux, tel qu'il est prévu par Jackson [200]. Cette méthode conduit à un résultat exact, et est relativement rigoureuse sur le plan mathématique. On peut néanmoins s'interroger sur la pertinence de cette modélisation. En effet, le comportement de 2 atomes lorsqu'ils sont proches est beaucoup plus complexe qu'une simple interaction dipôle-dipôle. En principe, il faudrait traiter séparément chaque proton et chaque électron, et ne plus faire l'approximation des grandes longueurs d'onde.

Je ne suis personnellement pas capable de résoudre ce problème de façon exacte. Je vais toutefois rappeler ici la méthode traditionnelle [191, 204, 203] d'obtention de Lorentz-Lorenz, basée sur l'exclusion d'un petite sphère autour des atomes. Elle est mathématiquement beaucoup moins rigoureuse que la méthode précédente, mais présente l'avantage de ne pas prétendre traiter ce que l'on ne sait pas traiter !

a) Obtention des équations moyennées

L'obtention des équations moyennées, analogues à (III.9), passe par la considération d'une grandeur qualitative, que j'appellerai « champ lissé »[1]. En effet, le champ électrique varie très rapidement au voisinage des atomes, et nous ne savons pas l'exprimer dans ce cas. Nous avons donc besoin de travailler sur une quantité ne variant que sur des échelles macroscopiques. Pour cela, il faut *lisser* le champ, c'est-à-dire le moyenner sur une distance de l'ordre de quelques a_0. Ceci revient à ne pas considérer la contribution d'un atome très proche. Autrement dit, dans l'intégrale de (III.9.a), il faut exclure une petite sphère de rayon $r_\varepsilon \sim a_0$, centrée en $\vec{r}$.

D'autre part, le potentiel d'interaction $V^{ij}_{\text{dip,dip}}$ que j'introduis dans l'hamiltonien (A.1) sera toujours le potentiel de van Der Waals d'interaction entre 2 dipôles. Mais nous l'interpréterons ici comme un développement à grande distance du vrai potentiel inter-atomique (voir la formule (A.3)) et non plus comme un modèle défini de façon intrinsèque. Le terme de contact en δ sera bien sûr absent de ce potentiel, et sera remplacé par un potentiel de type « sphère dure » interdisant aux atomes d'un paire de s'approcher arbitrairement près l'un de l'autre.

1. J'ai déjà introduit un champ lissé page 337 lors de l'établissement l'équation d'évolution des dipôles, mais ce champ n'était défini qu'au voisinage d'un atome. Ici je prétends définir une telle quantité dans tout l'espace.

Finalement, voici l'analogue du système (III.9) :

$$\vec{\mathcal{E}}^{\text{lissé}}(\vec{r}) = \vec{E}_{\text{L}} e^{i\vec{k}_{\text{L}}\cdot\vec{r}} + \int_{\mathbb{R}^3 - \mathcal{V}_{r_\varepsilon}(\vec{r})} \mathrm{d}^3\vec{r}\,' \rho(\vec{r}\,') \frac{\vec{\vec{g}}_1(\vec{r}-\vec{r}\,')}{\varepsilon_0} \cdot \vec{\mathcal{D}}(\vec{r}\,') \tag{A.65.a}$$

$$\vec{\mathcal{D}}(\vec{r}) = \alpha\varepsilon_0 \vec{\mathcal{E}}^{\text{lissé}}(\vec{r}) + \rho_0 \int_{\mathbb{R}^3 - \mathcal{V}_{r_\varepsilon}(\vec{r})} \mathrm{d}^3\vec{r}\,' \alpha \vec{\vec{g}}_1(\vec{r}-\vec{r}\,') \cdot \vec{\mathcal{D}}(\vec{r}\,')$$

$$+ \rho_0 \int_{\mathbb{R}^3 - \mathcal{V}_{r_\varepsilon}(\vec{r})} \mathrm{d}^3\vec{r}\,' \frac{\alpha^2 \vec{\vec{g}}_1^{\,2}(\vec{r}-\vec{r}\,') \cdot \vec{\mathcal{D}}(\vec{r}) + \alpha^3 \vec{\vec{g}}_1^{\,3}(\vec{r}-\vec{r}\,') \cdot \vec{\mathcal{D}}(\vec{r}\,')}{\vec{\vec{1}} - \alpha^2 \vec{\vec{g}}_1^{\,2}(\vec{r}\,'-\vec{r})} \Big(1 + \varphi(\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|)\Big), \tag{A.65.b}$$

où $\mathcal{V}_{r_\varepsilon}(\vec{r})$ est la boule centrée en $\vec{r}$ et de rayon r_ε, qui est une distance de l'ordre de a_0. En fait, je fairai tendre r_ε vers 0 à la fin du calcul. Nous allons maintenant regarder en détail les propriétés du tenseur $\vec{\vec{g}}_1$.

b) Propriétés du tenseur d'interaction

La quantité $\vec{\vec{g}}_1$ a déjà été introduite page 341. Sa définition est

$$\vec{\vec{g}}_1(\vec{r}) = \vec{\vec{g}}(\vec{r}) + \frac{1}{3}\delta^{(3)}(\vec{r})\vec{\vec{1}} \tag{A.66.a}$$

$$= -\frac{k_{\text{L}}^3}{4\pi} e^{ik_{\text{L}}r} \left[\left(-\frac{1}{k_{\text{L}}r} - \frac{i}{(k_{\text{L}}r)^2} + \frac{1}{(k_{\text{L}}r)^3} \right) \vec{\vec{1}} + \left(\frac{1}{k_{\text{L}}r} + \frac{3i}{(k_{\text{L}})^2} - \frac{3}{(k_{\text{L}}r)^3} \right) \frac{\vec{r}\otimes\vec{r}}{r^2} \right]. \tag{A.66.b}$$

D'autre part, on peut vérifier en utilisant les calculs du paragraphe A.2.*a.v*, que [204, éq. (3)] :

$$\vec{\vec{g}}_1(\vec{r}) = -\left(\vec{\nabla}\otimes\vec{\nabla} + k_{\text{L}}^2 \vec{\vec{1}} \right) Y(r), \tag{A.67}$$

où

$$Y(r) = \frac{e^{ik_{\text{L}}r}}{4\pi r} = \frac{1}{2(2\pi)^3} \int \mathrm{d}^3\vec{k} \frac{\omega_{\text{L}}^2}{\omega} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \left(\frac{1}{-\omega_{\text{L}} - \omega - i\varepsilon'} + \frac{1}{\omega_{\text{L}} - \omega + i\varepsilon'} \right). \tag{A.68}$$

Enfin, en utilisant (A.38) et (A.66.a), on tire

$$\left(\Delta + k_{\text{L}}^2\right) \vec{\vec{g}}_1(\vec{r}) = \left(-\vec{\nabla}\otimes\vec{\nabla} - \frac{2}{3}k_{\text{L}}^2 + \frac{1}{3}\Delta \right) \delta^{(3)}(\vec{r})\vec{\vec{1}}. \tag{A.69}$$

c) Obtention de la relation de dispersion

J'applique à l'équation (A.65.a) l'opérateur $\Delta + k_{\mathrm{L}}^2$, en supposant que c'est cette fois-ci $\vec{\mathcal{E}}^{\text{lissé}}$ et non plus $\vec{\mathcal{E}}$ qui a un comportement régulier en $\exp(-i\vec{k}_{\mathrm{m}}\cdot\vec{r})$. Pour cela, il faut séparer l'intégrale en 2 termes, *i.e.* $\int_{\mathbb{R}^3} - \int_{\mathcal{V}_{r_\epsilon}(\vec{r})}$.

Le terme intégré sur $\mathbb{R}^3$ est traité comme au paragraphe A.3 (*i.e.* au sens des distributions), ce qui donne

$$\left(\Delta + k_{\mathrm{L}}^2\right)\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}^3\vec{r}\,\vec{\vec{g}}_1(\vec{r}-\vec{r}\,')\cdot\vec{\mathcal{D}}(\vec{r}\,') = \left(-\frac{2}{3}k_{\mathrm{L}}^2 - \frac{1}{3}k_{\mathrm{m}}^2\right)\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\vec{\mathcal{D}}(\vec{r})\,, \quad \text{(A.70)}$$

où j'ai utilisé (A.69) et (III.10.b).

L'autre terme ne peut pas être traité de la même manière (l'intégration n'ayant pas lieu sur tout l'espace, les dérivées de la fonction δ n'ont pas de sens). J'écris donc, utilisant encore (III.10.b) :

$$\begin{aligned}\left(\Delta_{\vec{r}} + k_{\mathrm{L}}^2\right)\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\int_{\mathcal{V}_{r_\epsilon}(\vec{r})}\overbrace{\mathrm{d}^3\vec{r}\,\vec{\vec{g}}_1(\vec{r}-\vec{r}\,')\cdot\vec{\mathcal{D}}}^{\text{Je pose } \vec{r}\,''=\vec{r}\,'-\vec{r}}&\\ = \left(\Delta_{\vec{r}} + k_{\mathrm{L}}^2\right)\left(\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}e^{i\vec{k}_{\mathrm{m}}\cdot\vec{r}}\mathcal{D}_0\right)\underbrace{\int\mathcal{V}_{r_\epsilon}(\vec{0})\mathrm{d}^3\vec{r}\,''\,\vec{\vec{g}}_1(\vec{r}\,'')\cdot\vec{\varepsilon}_{\mathrm{L}}e^{i\vec{k}_{\mathrm{m}}\cdot\vec{r}\,''}}_{\mathcal{I}}\,. &\quad \text{(A.71)}\end{aligned}$$

Maintenant, l'intégrale ne dépend plus de $\vec{r}$, donc la dérivation n'agit pas dessus. On transforme $\mathcal{I}$ en utilisant (A.67), puis une formule classique permettant de passer de l'intégrale sur la boule au flux d'un champ de vecteurs sur la sphère :

$$\mathcal{I} = -k_{\mathrm{L}}^2\int_{\mathcal{V}_{r_\epsilon}(\vec{0})}\mathrm{d}^3\vec{r}\,Y(\vec{r})\vec{\varepsilon}_{\mathrm{L}}e^{i\vec{k}_{\mathrm{m}}\cdot\vec{r}} - \oint_{\Sigma_{\vec{r}_\epsilon}(\vec{0})}\mathrm{d}^2\vec{n}\,\vec{n}\otimes\vec{\varepsilon}_{\mathrm{L}}\cdot\vec{\nabla}\left(Y(\vec{r})\right)\,, \quad \text{(A.72)}$$

$\Sigma_{\vec{r}_\epsilon}(\vec{0})$ désignant la sphère centrée en O, et de rayon r_ϵ.

Le 1er terme de l'équation (A.72) tend vers 0 quand r_ϵ tend vers 0, tandis que le second tend vers $-\frac{1}{3}\vec{\varepsilon}_{\mathrm{L}}$. Finalement, on obtient à nouveau la relation (III.11), $\mathcal{E}_0$ étant cette fois-ci l'amplitude du champ lissé.

On traite ensuite l'équation (A.65.b), toujours en excluant une petite boule autour de $\vec{r}\,' = \vec{r}$. On calcule l'effet de cette boule en écrivant que

$$\frac{\alpha^2\vec{\vec{g}}_1^{\,2}(\vec{r})}{\vec{\vec{1}} - \alpha^2\vec{\vec{g}}_1^{\,2}(\vec{r})} \xrightarrow[r\to 0]{} -1\,,$$

et en passant encore à l'intégrale sur un sphère en utilisant (A.67) et (A.72). Comme au paragraphe A.3.*b*, les contributions des termes statistiques se compensent, le terme non statistique donnant le terme de Lorentz-Lorenz.

d) Obtention directe de la formule de Lorentz-Lorenz

Dans ce paragraphe, nous ignorons à la fois les effets statistiques et les effets d'interaction entre atomes.

On réécrit donc le système (A.65) en négligeant la deuxième intégrale dans (A.65.b). Par contre, je suppose qu'il existe une « force » interdisant à deux atomes de se rapprocher à une distance inférieure à r_ε. Autrement dit, je prends

$$\begin{cases} \varphi(\vec{r}) = 0 \text{ pour } \|\vec{r}\| > r_\varepsilon \\ \varphi(\vec{r}) = 0 \text{ pour } \|\vec{r}\| \leqslant r_\varepsilon \,. \end{cases} \tag{A.73}$$

L'intégrale dans (A.65.b) est cette fois-ci prise dans tout l'espace. Moyennant cet artifice de calcul, il est possible d'obtenir la correction de Lorentz-Lorenz.

5. Conclusion

Cette annexe a permis d'obtenir les équations du mouvement dont je pars au chapitre III pour présenter la méthode de la hiérarchie. Ces équations ont été obtenues à partir de la jauge $\vec{A} \cdot \vec{p}$, ce qui constitue une justification plus rigoureuse que si nous étions partis de l'hamiltonien en jauge $\vec{d} \cdot \vec{E}$. Comme nous l'avons vu, la mise en place de ces équations a nécessités de forts longs calculs. Ceci est un argument en faveur de l'autre méthode, celle des diagrammes, qui permet d'obtenir l'expression de l'indice de réfraction au bout de quelques pages de calcul.

Nous avons pris un soin tout particulier dans l'expression du *terme de contact.* Moyennant quelques hypothèses de départ certes discutables, nous sommes arrivés à retrouver la formule de Lorentz-Lorenz sans recourir à l'exclusion d'une sphère. La prise en compte de ce terme était en effet importante, puisque sa contribution à l'indice de réfraction est du même ordre de grandeur que les effets collectifs qui nous intéressent.

Annexe B

Calcul dans l'approche diagrammatique

DANS CETTE ANNEXE , je me propose de calculer l'indice de réfraction à l'ordre 2 en densité, en tenant compte des effets quantiques collectifs, par la méthode diagrammatique que j'ai présentée au début du chapitre II (section II.1, p. 216). Nous avons vu que cette méthode présente des inconvénients : en particulier, du fait de la présence d'un photon unique, nous sommes loin des conditions expérimentales ; le résultat que l'on obtient doit être « transposé » dans les conditions classiques (voir § II.3.*a*) avant d'être interprété.

Cela dit, une fois que l'on a admis ce point, la méthode diagrammatique me semble posséder l'avantage d'être plus facile et plus directe à mettre en œuvre. Chronologiquement, c'est d'ailleurs elle que j'ai mise au point en premier. Sans doute mon jugement est-il biaisé par le fait qu'elle est plus proche du domaine d'étude traditionnel de notre équipe, et peut-être qu'un lecteur plus familier que moi avec l'optique quantique ne partagera pas mon avis. La méthode diagrammatique présente en tout cas l'avantage de travailler sur un petit nombre de degrés de liberté (puisqu'il n'y a qu'un seul photon), et donc de mieux « sentir » la physique mise en jeu.

Avant d'exposer le calcul proprement dit de l'indice à l'ordre 2, je reviendrai sur des considérations à l'ordre le plus bas (section B.1, p. 348), introduisant une variante de la méthode, qui utilise la matrice $\mathcal{T}$. Cette section n'est certes pas indispensable à la compréhension de cette thèse, mais présente un intérêt pédagogique : elle met en effet au jour un écueil qu'il faut éviter lorsqu'on utilise la théorie quantique de la diffusion, et qu'on l'applique à la diffusion vers l'avant. Je n'étais pas conscient de cet écueil avant d'effectuer mon travail de thèse, aussi m'a-t-il paru intéressant de le faire figurer dans ce manuscrit.

Dans la section B.2, p. 360, j'expose le calcul d'indice proprement dit, en employant l'approximation du champ tournant qui me permet de justifier de façon systématique quels sont les diagrammes à prendre en compte. Malheureusement, le résultat que j'obtiens, n'est pas équivalent au résultat (III.13) de la méthode

de la hiérarchie (section III.1.*d*, p. 241), même si les termes qui nous intéressent (interactions atomiques et effets quantiques collectifs) sont les mêmes dans les deux approches. Dans la section B.3 (p. 375), je ne ferai plus l'approximation du champ tournant. La relation de dispersion obtenue est alors la même que pour l'approche « champ moyen », aux prix d'un prise en compte moins systématique des différents diagrammes.

1. Calcul utilisant la matrice $\mathcal{T}$

Je présente ici une variante de la méthode de la résolvante, qui consiste à calculer la diffusion vers l'avant d'un photon sur un milieu atomique, et à en déduire un indice de réfraction. Son principal avantage sur la méthode de la résolvante est que le photon est quasi-résonnant avec la transition atomique. Les conditions sont donc identiques à celles de l'approche « champ moyen » dans la limite d'une saturation infiniment faible du laser. Cette méthode semble très bien fonctionner dans le cas pourtant peu réaliste où la lumière interagit avec un atome unique. Pourtant, dès que l'on passe à un grand nombre d'atomes et que l'on veut faire tendre le volume du milieu vers l'infini, surgissent un certains nombres de problèmes. J'analyserai ces problèmes et montrerai comment les contourner.

a) Calcul de l'indice créé par un seul atome

i) Hamiltonien du problème

Considérons un photon unique $|\vec{k}_\mathrm{L}, \vec{\varepsilon}_\mathrm{L}\rangle$, constitué d'une onde plane, et un unique atome, placé à l'origine des coordonnées. On cherche à connaître la perturbation induite par l'atome sur le photon. Pour ce faire, nous allons appliquer la théorie de la diffusion. J'écris donc tout d'abord l'hamiltonien du système[1]

$$\mathcal{H} = \overbrace{\hbar\tilde{\omega}_\mathrm{A}|\vec{e}\rangle\cdot\langle\vec{e}| + \sum_{\vec{k}\vec{\varepsilon}} \hbar\omega_{\vec{k}} a^\dagger_{\vec{k}\vec{\varepsilon}} a_{\vec{k}\vec{\varepsilon}}}^{\mathcal{H}_0} + \overbrace{\left[i\sum_{\vec{k},\vec{\varepsilon}} \hbar\vec{\Omega}_{\vec{k}\vec{\varepsilon}}\cdot|\vec{e}\rangle\langle f| a_{\vec{k}\vec{\varepsilon}} + \mathrm{h.c.}\right]}^{\mathcal{V}}, \qquad \text{(B.1)}$$

où $a^\dagger_{\vec{k}\vec{\varepsilon}}$ et $a_{\vec{k}\vec{\varepsilon}}$ sont les opérateurs de création et d'annihilation d'un photon dans le mode $\vec{k}\vec{\varepsilon}$, et $\vec{\Omega}_{\vec{k}\vec{\varepsilon}}$ la fréquence de Rabi à 1 photon définie par

$$\hbar\vec{\Omega}_{\vec{k}\vec{\varepsilon}} = \frac{\hbar\omega_{\vec{k}}}{2\varepsilon_0 V}\langle\vec{e}|\vec{d}\cdot\vec{\varepsilon}|f\rangle, \qquad \text{(B.2)}$$

V étant le volume de quantification. Dans toute la suite, je noterai ω pour $\omega_{\vec{k}} = c\|\vec{k}\|$.

1. Le lecteur trouvera dans la table II.1, p. 218 les définitions des notations vectorielles que j'emploie tout au long de cette thèse.

L'hamiltonien (B.1) a été écrit en jauge $\vec{d}\cdot\vec{E}$. Des détails sur le passage de la jauge $\vec{A}\cdot\vec{p}$ à la jauge $\vec{d}\cdot\vec{E}$ se trouvent dans l'appendice A. Le mouvement de l'atome a été négligé. $|\vec{e}\rangle$ désigne le vecteur des 3 états excités — je me place dans le cas de la transition $0 \to 1$ (fig. I.6), et $\hbar\tilde{\omega}_{\mathrm{A}}$ est son énergie non renormalisée. Le *terme de contact* (voir l'annexe A) est absent, puisque je ne considère qu'un seul atome. J'ai également fait l'approximation du champ tournant, qui consiste à négliger les termes antirésonnants. De cette approximation résulte le fait que les états où plus d'un photon est présent, ou bien ceux où l'atome est excité et où il y a des photons, ne sont pas accessibles par le système.

ii) Théorie de la diffusion

Je veux savoir ce que devient le photon du fait de son couplage avec l'atome. Pour cela, j'utilise la théorie des perturbations dépendant du temps. Je m'intéresse à l'amplitude de diffusion vers l'avant, qui doit donner l'absorption et le déphasage du photon, que l'on sait relier à la partie imaginaire et à la partie réelle de l'indice. D'après [119, page 15, formule (B.13)], en représentation d'interaction, cette amplitude de diffusion est donnée par

$$\left\langle f,\vec{k}_{\mathrm{L}}\vec{\varepsilon}_{\mathrm{L}}|\mathcal{U}\left(-\frac{t}{2},\frac{t}{2}\right)|f,\vec{k}_{\mathrm{L}}\vec{\varepsilon}_{\mathrm{L}}\right\rangle = 1 - 2i\pi\delta^{(t)}(0)\left\langle f,\vec{k}_{\mathrm{L}}\vec{\varepsilon}_{\mathrm{L}}|\mathcal{T}|f,\vec{k}_{\mathrm{L}}\vec{\varepsilon}_{\mathrm{L}}\right\rangle , \quad \text{(B.3)}$$

où la matrice $\mathcal{T}$ est donnée par

$$\mathcal{T} \equiv \mathcal{V} + \mathcal{V}\frac{1}{\hbar\omega_{\mathrm{L}} - \mathcal{H} + i\varepsilon}\mathcal{V} \quad \text{(B.4.a)}$$

$$\equiv \mathcal{V} + \mathcal{V}\mathcal{G}(\hbar\omega_{\mathrm{L}} + i\varepsilon)\mathcal{V} . \quad \text{(B.4.b)}$$

avec $\omega_{\mathrm{L}} = c\|\vec{k}_{\mathrm{L}}\|$. La notation ε désigne un réel positif que l'on fait tendre vers 0 à la fin des calculs. La fonction $\mathcal{G}$ est la *résolvante*, déjà introduite au chapitre II (section II.1.*b*, p. 217) ; il faut comprendre la division figurant dans sa définition au sens des matrices. La fonction $\delta^{(t)}$ est définie par

$$\delta^{(t)}(E) = \frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-t/2}^{t/2} dt\, e^{-iEt/\hbar} . \quad \text{(B.5)}$$

Enfin, le temps t est celui qu'a mis le photon à traverser le milieu, c'est-à-dire L/c, L étant la longueur du milieu. Par conséquent il vient

$$\left\langle f,\vec{k}_{\mathrm{L}}\vec{\varepsilon}_{\mathrm{L}}|\mathcal{U}\left(-\frac{t}{2},\frac{t}{2}\right)|f,\vec{k}_{\mathrm{L}}\vec{\varepsilon}_{\mathrm{L}}\right\rangle = 1 - \frac{it}{\hbar}\left\langle f,\vec{k}_{\mathrm{L}}\vec{\varepsilon}_{\mathrm{L}}|\mathcal{T}|f,\vec{k}_{\mathrm{L}}\vec{\varepsilon}_{\mathrm{L}}\right\rangle \quad \text{(B.6.a)}$$

$$\simeq \exp\left(-\frac{it}{\hbar}\left\langle f,\vec{k}_{\mathrm{L}}\vec{\varepsilon}_{\mathrm{L}}|\mathcal{T}|f,\vec{k}_{\mathrm{L}}\vec{\varepsilon}_{\mathrm{L}}\right\rangle\right) . \quad \text{(B.6.b)}$$

Dans l'équation (B.6), j'ai supposé que le couplage atome-champ était « petit », et ai reconnu le début du développement d'une exponentielle. Une telle manœuvre est loin d'être gratuite : j'en ferai les frais au paragraphe B.1.*b.ii.*

Toute cette étude a été faite en représentation d'interaction. On doit maintenant ajouter l'évolution propre du photon, qui est $\exp(-i\omega_L t)$. La contribution de (B.6.b) est donc un *déphasage*[1]. Le déphasage induit par un indice de réfraction n étant $(n-1)\omega_L t$, on déduit par identification avec (B.6.b) que

$$\boxed{n - 1 = \frac{\left\langle f, \vec{k}_L \vec{\varepsilon}_L | \mathcal{T} | f, \vec{k}_L \vec{\varepsilon}_L \right\rangle}{\hbar \omega_L}.} \tag{B.7}$$

iii) La méthode des projecteurs

Calculer l'élément de la matrice $\mathcal{T}$ revient, d'après la formule (B.4.b), à calculer celui de la résolvante. Ce calcul, d'ailleurs fort classique, a déjà été effectué au paragraphe II.1.*d*, en resommant explicitement les diagrammes de Feynman. Je désire néanmoins le refaire ici afin d'introduire une autre méthode plus directe, mais aussi plus mathématique que la resommation explicite : il s'agit de la méthode des projecteurs.

Soit $\mathfrak{E}$ un sous espace vectoriel de l'espace de Hilbert décrivant les états quantiques du système. J'appelle $\mathcal{P}$ le projecteur orthogonal sur $\mathfrak{E}$, et $\mathcal{Q}$ le projecteur sur $\mathfrak{E}^\perp$ (le sous-espace orthogonal). Je choisirai $\mathfrak{E}$ tel que $\mathcal{P}$ (et donc $\mathcal{Q}$) commute avec $\mathcal{H}_0$. Alors, on peut montrer [119, p. 170] que

$$\mathcal{P}\mathcal{G}(z)\mathcal{P} = \frac{\mathcal{P}}{z - \mathcal{P}\mathcal{H}_0\mathcal{P} - \mathcal{P}\mathcal{R}(z)\mathcal{P}}, \tag{B.8}$$

où l'opérateur $\mathcal{R}(z)$ est défini par

$$\mathcal{R}(z) \equiv \mathcal{V} + \mathcal{V}\frac{\mathcal{Q}}{z - \mathcal{Q}\mathcal{H}\mathcal{Q}}\mathcal{V} \tag{B.9.a}$$

$$= \mathcal{V} + \mathcal{V}\frac{\mathcal{Q}}{z - \mathcal{Q}\mathcal{H}_0\mathcal{Q}}\mathcal{V} + \mathcal{V}\frac{\mathcal{Q}}{z - \mathcal{Q}\mathcal{H}_0\mathcal{Q}}\mathcal{V}\frac{\mathcal{Q}}{z - \mathcal{Q}\mathcal{H}_0\mathcal{Q}}\mathcal{V} + \cdots . \tag{B.9.b}$$

Les notations employées dans les équations (B.8) et (B.9) sont certes très classiques, mais sont aussi fort dangereuses. Ainsi, la fraction dans la ligne (B.9.a) signifie que l'on considère la restriction à $\mathfrak{E}^\perp$ de l'opérateur $z - \mathcal{H}$, et qu'on l'inverse dans ce sous-espace. Par contre, le premier membre de (B.8) signifie, si l'on revient à la définition de la résolvante qui est contenue dans (B.4), que l'on commence par

1. Il y aussi de l'absorption, car la matrice $\mathcal{T}$ n'est pas hermitienne et l'élément de matrice a une partie imaginaire non nulle

inverser $z - \mathcal{H}$ dans l'espace de Hilbert complet, puis que l'on restreint ensuite le résultat au sous-espace (ici c'est $\mathfrak{E}$). Il est bien entendu que le résultat DÉPEND FORTEMENT de l'ordre dans lequel on a effectué les opérations (inversion et projection).

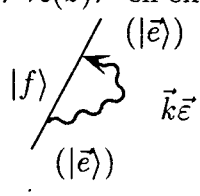
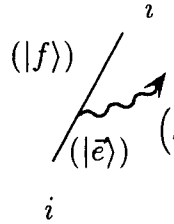
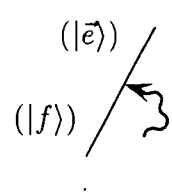
Les 2 équations (B.8) et (B.9) permettent de remplacer la resommation de diagrammes qui était nécessaire pour calculer la résolvante $\mathcal{G}(z)$ par une autre resommation visant à calculer $\mathcal{R}(z)$. Si l'on a convenablement choisi son sous-espace $\mathfrak{E}$, cette nouvelle somme peut être beaucoup plus facile à calculer (dans l'exemple qui va suivre, il y aura un nombre fini de termes). Par contre, il faut être capable d'inverser exactement l'équation (B.8).

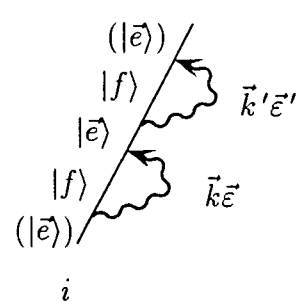
iv) Calcul de l'élément de la matrice T

Je choisis pour espace de projection l'espace vectoriel engendré par l'état où l'atome est excité, et où il n'y a pas de photon, *i.e.*

$$\mathfrak{E} = \mathrm{Vec}\left\{|\vec{e},\mathbf{0}\rangle\right\} . \tag{B.10}$$

Comme la transition atomique est $0 \to 1$, $\mathfrak{E}$ est de dimension 3.

On calcule $\mathcal{P}\mathcal{R}(z)\mathcal{P}$ en effectuant la somme (B.9.b). On s'aperçoit que seul le diagramme  contribue ; en effet les diagrammes d'ordre 1, tels que  ou  ne contribuent pas parce qu'ils n'arrivent pas (ou ne partent pas) dans un état de $\mathfrak{E}$ (à cause du projecteur $\mathcal{P}$ présent dans (B.8)). Les diagrammes d'ordre supérieur, tels que



ne contribuent pas non plus, car le système repasse au moins une fois dans l'état $\mathfrak{E}$ (le projecteur $\mathcal{Q}$ présent dans la définition de $\mathcal{R}(z)$ annule le terme).

On déduit alors que :

$$\vec{\varepsilon}_{\mathrm{L}}^{\,*} \cdot \langle \vec{e}, \mathbf{0} | \mathcal{P}\mathcal{R}(\hbar\omega_{\mathrm{L}} + i\varepsilon)\mathcal{P} | \vec{e}, \mathbf{0} \rangle \cdot \vec{\varepsilon}_{\mathrm{L}} = \sum_{\vec{k}\vec{\epsilon}} \frac{\vec{\varepsilon}_{\mathrm{L}}^{\,*} \cdot \hbar\vec{\Omega}_{\vec{k}\vec{\epsilon}} \otimes \hbar\vec{\Omega}_{\vec{k}\vec{\epsilon}}^{\,*} \cdot \vec{\varepsilon}_{\mathrm{L}}}{\hbar\omega_{\mathrm{L}} + i\varepsilon - \hbar\omega_{\vec{k}}} \tag{B.11.a}$$

$$= \left(\Delta E_{\mathrm{A}} - i\hbar\frac{\Gamma}{2} \right) , \tag{B.11.b}$$

où l'on a reconnu les expressions du déplacement de Lamb et de la largeur naturelle de l'état excité, qui ont été introduits au paragraphe II.1.*d*, p. 221, formule (II.11.b). D'où

$$\vec{\varepsilon}_{\mathrm{L}}^{\,*} \cdot \langle \vec{e}, \mathbf{0} | \mathcal{P}\mathcal{G}(\hbar\omega_{\mathrm{L}} + i\varepsilon)\mathcal{P} | \vec{e}, \mathbf{0} \rangle \cdot \vec{\varepsilon}_{\mathrm{L}} = \frac{1}{\hbar\left(\delta + i\frac{\Gamma}{2}\right)}, \tag{B.12}$$

δ étant le désaccord du laser. On voit donc que l'on a retrouvé les mêmes termes qu'au paragraphe II.1.*d*, mais de façon beaucoup plus directe, et notamment sans être obligé de calculer la somme d'une série dont la raison était supérieure à 1.

On déduit enfin facilement l'expression de $\mathcal{T}$ en utilisant l'équation (B.4.b), puis l'indice de réfraction avec la formule (B.7). On trouve

$$n = 1 - \frac{1}{V} \frac{3\pi\Gamma c^2}{2\omega_{\mathrm{A}}^3 \left(\delta + i\frac{\Gamma}{2}\right)}. \tag{B.13}$$

b) Les problèmes survenant lors du passage à N *atomes*

L'indice de réfraction donné par la formule (B.13) dépend du volume de quantification, ce qui heurte le bon sens de tout physicien. Ceci est dû au fait que je n'ai considéré qu'un atome unique. Ainsi, lorsque le volume de quantification tend vers l'infini, l'indice tend vers 1 parce que la lumière peut « passer à côté de l'atome ». La bonne façon de traiter le problème est de faire tendre le volume de quantification vers l'infini tout en conservant la densité atomique constante. Pour ce faire, il faut donc passer à N atomes.

i) Calcul de la matrice $\mathcal{T}$

J'écris l'hamiltonien à N atomes ajoutant simplement une somme sur i à l'hamiltonien (B.1). Je fais encore l'approximation du champ tournant et j'oublie les termes de contact (ils n'apporteraient rien de plus à la compréhension du problème). Cela donne donc

$$\mathcal{H} = \overbrace{\hbar\tilde{\omega}_{\mathrm{A}} \sum_{i=1}^{N} \left|i,\vec{e}\right\rangle \cdot \left\langle i,\vec{e}\right| + \sum_{\vec{k}\vec{\varepsilon}} \hbar\omega_{\vec{k}} a^{\dagger}_{\vec{k}\vec{\varepsilon}} a_{\vec{k}\vec{\varepsilon}}}^{\mathcal{H}_0} + \underbrace{\left[i \sum_{i=1}^{N} \sum_{\vec{k},\vec{\varepsilon}} \hbar\vec{\Omega}_{\vec{k}\vec{\varepsilon}} \cdot \left|i,\vec{e}\right\rangle \left\langle i,f\right| a_{\vec{k}\vec{\varepsilon}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{R}_i} + \mathrm{h.c.} \right]}_{\mathcal{V}} . \tag{B.14}$$

Remarquons que le terme $P^2/(2M)$ ne figure pas dans l'hamiltonien (B.14), même si les degrés de liberté externes des atomes sont présents dans le problème. Ceci correspond à la limite de la masse atomique infinie. Dans la suite, je me place en *représentation* $\vec{\mathrm{P}}$, c'est-à-dire utilise comme base des degrés de liberté atomique externes celle où les atomes sont dans des état d'impulsion bien déterminée[1].

Remarque : Dans ce paragraphe, j'abandonne momentanément la méthode des projecteurs pour revenir à la resommation explicite de diagrammes.

Le calcul à un atome du paragraphe B.1.*a* ne prenait en compte qu'un seul diagramme : $\overset{(\vec{k}_{\mathrm{L}}\vec{\varepsilon}_{\mathrm{L}})}{\rightsquigarrow} \times \overset{(\vec{k}_{\mathrm{L}}\vec{\varepsilon}_{\mathrm{L}})}{\rightsquigarrow}$ [2]. Il est tentant de généraliser le calcul à N atomes en ne gardant que ce diagramme, et en effectuant simplement une sommation sur i. Cela revient à multiplier le résultat (B.13) par le nombre total d'atomes N. On obtient alors le résultat standard (I.25) (p. 212) de l'indice de réfraction.

ii) Prise en compte de quelques diagrammes de diffusion multiple

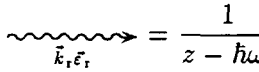
Si le résultat que nous venons d'obtenir est bien le bon résultat, la méthode utilisée pour y parvenir n'est pas correcte. En effet, rien ne permet de justifier le fait que l'on néglige des diagrammes de diffusion multiples, tel que celui-ci :

$$\overset{(\vec{k}_{\mathrm{L}}\vec{\varepsilon}_{\mathrm{L}})}{\rightsquigarrow} \times \overset{i_1}{} \overset{\vec{k}_{\mathrm{L}}\vec{\varepsilon}_{\mathrm{L}}}{\sim\!\sim\!\sim\!

TAB. B.1 - *Les diagrammes de Feynman.*

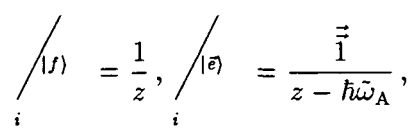
Les diagrammes de Feynman permettent d'exprimer schématiquement des éléments de matrice compliqués d'un opérateur tel que $\mathcal{G}(z) = 1/(z - \mathcal{H})$, qui peut se développer une série dont les termes font intervenir les opérateurs $\mathcal{V}$ et $\mathcal{G}_0 = 1/(z-\mathcal{H}_0)$ (éq. (II.7) p. 219). Des diagrammes sont également utilisés pour exprimer les développements de $\mathcal{T}(z)$ (éq. (B.4) p. 349) ou $\mathcal{R}(z)$ (éq. (B.9) p. 350)). La valeur de z ne figure pas explicitement dans le diagramme, mais est donnée par le contexte car reste en général la même à l'intérieur d'un paragraphe.

Principes généraux. Les diagrammes les plus simples représentent simplement un élément de matrice de $\mathcal{G}_0(z)$. Ainsi, on utilise une ligne ondulée pour un photon



$$= \frac{1}{z - \hbar\omega_r},$$

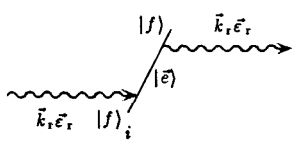
et des lignes droites pour des atomes, précisant s'ils sont ou non excités



$$= \frac{1}{z}, \quad = \frac{\vec{1}}{z - \hbar\tilde{\omega}_A},$$

$\hbar\tilde{\omega}_A$ étant l'énergie non renormalisée de l'état excité. La lettre i est le « numéro » de l'atome considéré.

Lorsqu'on accole plusieurs de ces éléments de diagrammes, on sous-entend que l'on évalue aussi le couplage permettant de passer d'un état à l'autre. Ainsi,

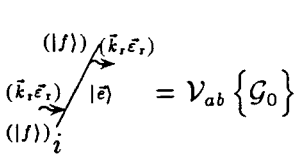


$$= \left\{\mathcal{G}_0\right\}_{aa} \mathcal{V}_{ab} \left\{\mathcal{G}_0\right\}_{bb} \mathcal{V}_{ba} \left\{\mathcal{G}_0\right\}_{aa} = \left(\frac{1}{z - \hbar\omega_r}\right)^2 \frac{\left|\vec{\varepsilon}_r^{\,*} \cdot \hbar\vec{\Omega}_{\vec{k}_r\vec{\varepsilon}_r}\right|^2}{z - \hbar\tilde{\omega}_A},$$

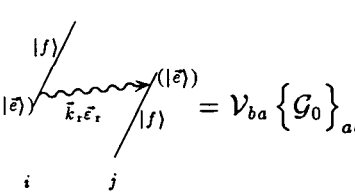
où $|a\rangle = |i, f; \vec{k}_r\vec{\varepsilon}_r\rangle$ et $|b\rangle = |i, \vec{\varepsilon}_r^{\,*} \cdot \vec{e}; \vec{0}\rangle$.

Remarque : les degrés de libertés atomiques externes ne sont pas inclus dans les diagrammes, qui doivent donc être évalués en supposant que tous les atomes sont localisés au point $\vec{r} = \vec{0}$.

Lorsqu'en bout de chaîne je veux tenir compte d'un couplage, mais pas du dénominateur de l'état correspondant, j'utilise un symbole raccourci, et j'écris l'état entre parenthèses. Par exemple



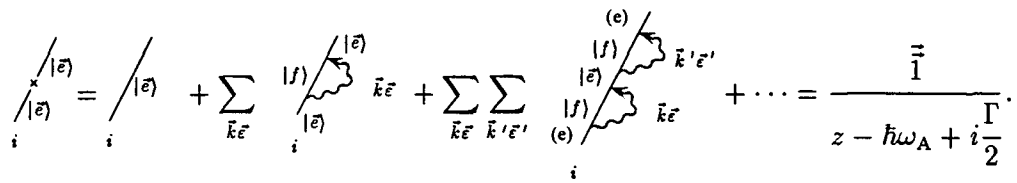
$$= \mathcal{V}_{ab} \left\{\mathcal{G}_0\right\}_{bb} \mathcal{V}_{ba}, \text{ et}$$

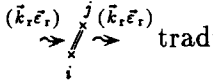


$$= \mathcal{V}_{ba} \left\{\mathcal{G}_0\right\}_{aa} \mathcal{V}_{ab}.$$

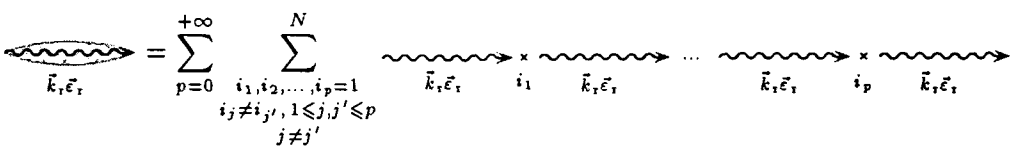
TAB. B.2 - *Les diagrammes de Feynman – suite et fin.*

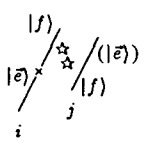
Symboles. Certains symboles peuvent remplacer la somme d'une certaine série de diagrammes. En particulier, la croix est utilisée pour désigner la renormalisation de l'état excité atomique



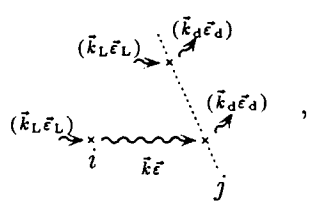
Le symbole  traduira l'interaction entre deux atomes d'une paire. Il s'exprime comme l'échange d'un nombre arbitraire de photons entre les deux atomes (voir la définition dans la formule (B.46) p. 368).

Egalement, dans l'annexe C, j'utiliserai le « photon renormalisé » (*i.e.* se propageant dans un milieu d'indice différent de 1) défini par



Enfin, un symbole tel que  représente la contribution du terme de contact (cf. § B.3.*a.ii*).

Diagrammes des calculs d'intensité. L'intensité lumineuse (ou la section efficace de diffusion) s'exprime à partir du carré d'un élément de matrice (par exemple la matrice $\mathcal{T}$). Chaque terme du carré se développe en diagrammes. On obtient donc un diagramme à deux « voies », dont voici un exemple :



la ligne en pointillés signifiant que, dans chacune des deux « voies », le photon diffuse sur le même atome j. L'expression de ce diagramme est

$$\frac{\hbar\vec{\Omega}^{*}_{\vec{k}_d\vec{\epsilon}_d}\cdot\hbar\vec{\Omega}_{\vec{k}\vec{\epsilon}}\,\hbar\vec{\Omega}^{*}_{\vec{k}\vec{\epsilon}}\cdot\hbar\vec{\Omega}_{\vec{k}_L\vec{\epsilon}_L}}{(z-\hbar\omega_A+i\hbar\Gamma/2)^2}\,\frac{1}{z-\hbar\omega_{\vec{k}}}\,\frac{\hbar\vec{\Omega}^{*}_{\vec{k}_L\vec{\epsilon}_L}\cdot\hbar\vec{\Omega}_{\vec{k}_d\vec{\epsilon}_d}}{(z-\hbar\omega_A+i\hbar\Gamma/2)^{*}}\,.$$

Je rappelle que le photon intermédiaire apparaissant dans le diagramme ci-dessus est nécessairement $\vec{k}_{\rm L}\vec{\varepsilon}_{\rm L}$, à cause de la conservation des impulsions atomiques et du moment angulaire (et parce que je me suis placé en représentation $\vec{P}$). Ce point, qui va contre l'intuition, a déjà été discuté au paragraphe II.1.*e*, p. 222.

Lorsqu'on calcule la contribution du diagramme, on obtient

$$\sum_{\substack{i_1,i_2=1\\ i_1\neq i_2}}^{N} \underset{i_1}{(\vec{k}_{\rm L}\vec{\varepsilon}_{\rm L})\times}\ \overset{\vec{k}_{\rm L}\vec{\varepsilon}_{\rm L}}{\sim\!\sim\!\sim}\ \underset{i_2}{\times\,(\vec{k}_{\rm L}\vec{\varepsilon}_{\rm L})} = \left[\frac{3\pi\rho_0\Gamma c^3}{2\omega_{\rm A}^3\left(\delta+i\dfrac{\Gamma}{2}\right)}\right]^2 \frac{\hbar^2\omega_{\rm L}^2}{z-\hbar\omega_{\rm L}}, \tag{B.15}$$

où $\rho_0 = N/V$. Comme on doit prendre $z = \hbar\omega_{\rm L} + i\varepsilon$, et faire tendre ε vers 0, on trouve que la contribution du diagramme (B.15) est infinie.

En fait, cet infini s'élimine si on prend en compte davantage de diagrammes. Ici, je me limiterai aux diagrammes ne passant pas 2 fois par le même atome[1] (c'est l'approximation de Twersky, dont j'ai déjà parlé au chapitre II, p. 221 [189, p. 257]), *i.e.*

$$\begin{aligned}
&\left\langle \{i,f\}_{i=1,\dots,N}, \vec{k}_{\rm L}\vec{\varepsilon}_{\rm L} \middle| \mathcal{T}(\hbar\omega_{\rm L}+i\varepsilon) \middle| \{i,f\}_{i=1,\dots,N}, \vec{k}_{\rm L}\vec{\varepsilon}_{\rm L} \right\rangle \\
&\simeq\ \underset{i_1}{(\vec{k}_{\rm L}\vec{\varepsilon}_{\rm L})\times}\ (\vec{k}_{\rm L}\vec{\varepsilon}_{\rm L}) \;+\; \underset{i_1}{(\vec{k}_{\rm L}\vec{\varepsilon}_{\rm L})\times}\ \overset{\vec{k}_{\rm L}\vec{\varepsilon}_{\rm L}}{\sim\!\sim\!\sim}\ \underset{i_2}{\times\,(\vec{k}_{\rm L}\vec{\varepsilon}_{\rm L})} + \cdots \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{\substack{i_1,i_2,\dots,i_n=1\\ i_j\neq i_{j'},\,1\leqslant j,j'\leqslant n\\ j\neq j'}}^{N} (\vec{k}_{\rm L}\vec{\varepsilon}_{\rm L})\ \underset{i_1}{\times}\ \overset{\vec{k}_{\rm L}\vec{\varepsilon}_{\rm L}}{\sim\!\sim\!\sim}\ \underset{i_2}{\times}\ \overset{\vec{k}_{\rm L}\vec{\varepsilon}_{\rm L}}{\sim\!\sim\!\sim}\ \cdots\ \overset{\vec{k}_{\rm L}\vec{\varepsilon}_{\rm L}}{\sim\!\sim\!\sim}\ \underset{i_n}{\times}\ (\vec{k}_{\rm L}\vec{\varepsilon}_{\rm L})
\end{aligned} \tag{B.16}$$

L'évaluation des diagrammes donne

$$\begin{aligned}
&\vec{\varepsilon}_{\rm L}^{\,*}\cdot\left\langle j,\vec{e},\{\ell,f\}_{\ell\neq i},\mathbf{0}\middle|\mathcal{G}(\hbar\omega_{\rm L}+i\varepsilon)\middle|i,\vec{e},\{\ell,f\}_{\ell\neq i},\mathbf{0}\right\rangle\cdot\vec{\varepsilon}_{\rm L} \\
&\qquad \underset{i\neq j}{\simeq} \frac{1}{\hbar\left(\delta+i\dfrac{\Gamma}{2}\right)} \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{\left|\vec{\varepsilon}_{\rm L}^{\,*}\cdot\hbar\vec{\Omega}_{\vec{k}_{\rm L}\vec{\varepsilon}_{\rm L}}\right|^2}{i\varepsilon}\,\frac{1}{i\varepsilon+\hbar\left(\delta+i\dfrac{\Gamma}{2}\right)}\right]^n,
\end{aligned} \tag{B.17}$$

le cas $i = j$ étant simplement donné par l'équation (B.12). $|\mathbf{0}\rangle$ est le vide de photons. La notation $|i,\vec{e},\{\ell,f\}_{\ell\neq i}\rangle$ caractérise l'état où tous les atomes sont

1. Le résultat quelque peu surprenant qui va suivre serait inchangé si je ne faisais pas cette approximation.

dans l'état fondamental, sauf l'atome i.[1].

Bien sûr la raison de la série présente dans l'équation (B.17) n'est pas inférieure à 1 (puisqu'on la fait tendre vers l'infini!). Toutefois, le livre de Mattuck [190, p. 51] nous indique que ce type de resommation est courante en théorie des champs et peut être justifiée rigoureusement (en revenant au point de vue temporel). On obtient l'élément de la matrice $\mathcal{T}$ en appliquant sa définition (B.4.b), et en sommant sur les atomes i et j :

$$\begin{aligned}
&\left\langle \{i,f\}_{i=1,\dots,N}, \vec{k}_{\mathrm{L}}\vec{\varepsilon}_{\mathrm{L}} \middle| \mathcal{T}(\hbar\omega_{\mathrm{L}} + i\varepsilon) \middle| \{i,f\}_{i=1,\dots,N}, \vec{k}_{\mathrm{L}}\vec{\varepsilon}_{\mathrm{L}} \right\rangle \\
&\qquad = \frac{N\left|\vec{\varepsilon}_{\mathrm{L}}^{\,*}\cdot\hbar\vec{\Omega}_{\vec{k}_{\mathrm{L}}\vec{\varepsilon}_{\mathrm{L}}}\right|^2}{\hbar\left(\delta + i\dfrac{\Gamma}{2}\right)} \left[1 + \frac{\dfrac{N\left|\vec{\varepsilon}_{\mathrm{L}}^{\,*}\cdot\hbar\vec{\Omega}_{\vec{k}_{\mathrm{L}}\vec{\varepsilon}_{\mathrm{L}}}\right|^2}{i\varepsilon\hbar\left(\delta + i\Gamma/2\right)}}{1 - \dfrac{N\left|\vec{\varepsilon}_{\mathrm{L}}^{\,*}\cdot\hbar\vec{\Omega}_{\vec{k}_{\mathrm{L}}\vec{\varepsilon}_{\mathrm{L}}}\right|^2}{i\varepsilon\hbar\left(\delta + i\Gamma/2\right)}} \right] \\
&\qquad \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0 .
\end{aligned} \tag{B.18}$$

Avec la formule (B.7), on déduit le résultat qui est certainement le plus sensationnel de toute cette thèse: l'indice de réfraction de tout milieu dilué vaut 1!

iii) Généralisation du « résultat » (B.18)

Je vais montrer ici que le « résultat » (B.18) n'est pas spécifique du problème d'indice qui nous intéresse: si l'on ne prend pas de précautions, l'élément de la matrice $\mathcal{T}$ correspondant à la diffusion vers l'avant vaut toujours 0.

Soit un système physique décrit par un hamiltonien $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{V}$. Soit $|\psi\rangle$ l'état du système à $t = -\infty$, et E son énergie. On peut développer la résolvante sous la forme

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}(z) &= \mathcal{G}_0(z) + \mathcal{G}_0(z)\mathcal{V}\mathcal{G}_0(z) + \mathcal{G}_0(z)\mathcal{V}\mathcal{G}(z)\mathcal{V}\mathcal{G}_0(z) \\
&= \mathcal{G}_0(z) + \mathcal{G}_0(z)\mathcal{T}(z)\mathcal{G}_0(z) ,
\end{aligned} \tag{B.19}$$

d'où

$$\langle\psi|\mathcal{G}(z)|\psi\rangle = \frac{1}{z-E} + \frac{1}{(z-E)^2}\langle\psi|\mathcal{T}(z)|\psi\rangle . \tag{B.20}$$

Dans le cas discret (*i.e.* où l'espace de quantification est fini), les pôles de $\mathcal{G}$ sont des pôles simples. Pour s'en assurer, il suffit de considérer une base $\{|\varphi_n\rangle\}$

1. Les impulsions atomiques ne figurent pas explicitement dans cet état, et ce afin de ne pas encore alourdir les notations. En effet, nous verrons qu'une fois que l'on a bien pris soin de placer les atomes dans des états d'impulsion bien définie (afin que le photon diffusé soit toujours dans le même mode), et si les atomes sont discernables, ce que je suppose ici, les éléments de matrice ne dépendent pas de la distribution des impulsions.

dans laquelle $\mathcal{H}$ est diagonal, *i.e.*

$$\mathcal{H}|\varphi_n\rangle = E_n|\varphi_n\rangle\,. \tag{B.21}$$

Alors, en utilisant une relation de fermeture, on déduit aisément que

$$\langle\psi|\mathcal{G}(z)|\psi\rangle = \sum_n \frac{|\langle\psi|\varphi_n\rangle|^2}{z - E_n}\,. \tag{B.22}$$

On voit donc que tous les pôles sont simples (même si certains niveaux sont dégénérés).

Par conséquent , dans l'équation (B.20), $z = E$ est un pôle simple, et donc $\lim_{z\to E} \mathcal{T}(z) = 0$.

iv) Origine de l'erreur

Claude Cohen-Tannoudji [199] a calculé l'évolution temporelle d'une onde plane lorsque l'on branche adiabatiquement le potentiel $\mathcal{V}$. En introduisant la dépendance temporelle

$$\mathcal{V}(\tau) = \mathcal{V}e^{-\frac{\varepsilon}{\hbar}|\tau|}\,, \tag{B.23}$$

il retrouve les dénominateurs $1/(z - \mathcal{H} + i\varepsilon)$ de la résolvante. En outre, il montre que cette situation physique est équivalente à celle d'un paquet d'ondes pénétrant dans un milieu fini. On voit donc que le paramètre ε est relié au le temps d'interaction t par la relation $\varepsilon = \hbar/t$. (Schématiquement, ε est la précision à laquelle on définit les énergies. Pour les définir précisément, on a besoin de faire interagir le milieu longtemps).

Revenons maintenant au calcul d'indice. Dans la formule (B.6.b), j'avais reconnu le début du développement d'une exponentielle. Cette opération est licite pour

$$\frac{t\langle\psi|\mathcal{T}|\psi\rangle}{\hbar} \ll 1\,. \tag{B.24}$$

Comme $\langle\psi|\mathcal{T}|\psi\rangle$ est de l'ordre de $\langle\psi|\mathcal{V}|\psi\rangle$, le calcul n'est valable que pour

$$\varepsilon \gg \langle\psi|\mathcal{V}|\psi\rangle\,. \tag{B.25}$$

On ne peut donc pas faire tendre sans précaution ε vers 0 à la fin du calcul.

v) Utilisation correcte de la matrice $\mathcal{T}$

Il est toutefois possible de calculer un indice de réfraction en utilisant la matrice $\mathcal{T}$. Pour cela, il faut considérer que le milieu atomique remplit une couche

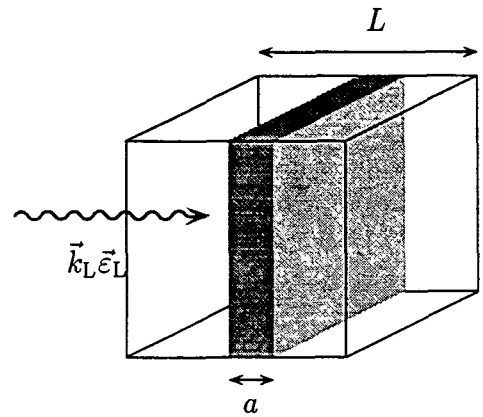


FIG. B.1 - *Configuration du calcul d'indice utilisant la matrice $\mathcal{T}$. Le volume de quantification est un cube de côté* L. *Les atomes y occupent une lamelle d'épaisseur* a.

d'épaisseur a (fig. B.1). L'espace de quantification est quant à lui un cube de côté L ($V = L^3$). Le temps d'interaction est donc $t = L/c$. Par conséquent

$$\left\langle \{i,f\}_{i=1,N}, \vec{k}_L\vec{\varepsilon}_L \left| \mathcal{U}\left(-\frac{t}{2},\frac{t}{2}\right) \right| \{i,f\}_{i=1,N}, \vec{k}_L\vec{\varepsilon}_L \right\rangle$$

$$= 1 - \frac{it}{\hbar}\left\langle \{i,f\}_{i=1,N}, \vec{k}_L\vec{\varepsilon}_L | \mathcal{T}(\hbar\omega_L + i\varepsilon) | \{i,f\}_{i=1,N}, \vec{k}_L\vec{\varepsilon}_L \right\rangle \tag{B.26.a}$$

$$\simeq \exp\left(-\frac{it}{\hbar}\left\langle \{i,f\}_{i=1,N}, \vec{k}_L\vec{\varepsilon}_L | \mathcal{T}(\hbar\omega_L + i\varepsilon) | \{i,f\}_{i=1,N}, \vec{k}_L\vec{\varepsilon}_L \right\rangle\right) \tag{B.26.b}$$

$$= \exp\left(i(n-1)k_L a\right), \tag{B.26.c}$$

soit

$$n - 1 = \frac{L}{a} \times \frac{\left\langle \{i,f\}_{i=1,N}, \vec{k}_L\vec{\varepsilon}_L | \mathcal{T}(\hbar\omega_L + i\varepsilon) | \{i,f\}_{i=1,N}, \vec{k}_L\vec{\varepsilon}_L \right\rangle}{\hbar\omega_L}. \tag{B.27}$$

La nouveauté est que lorsqu'on fait tendre L vers l'infini, ce n'est plus N/L^3 qui tend vers une constante (la densité ρ_0), mais $N/(aL^2)$. Par conséquent, la fraction qui est à l'intérieur du crochet de (B.18) tend vers 0, et le produit $\langle\mathcal{T}\rangle L/a$ tend vers une valeur finie. On peut, dans un deuxième temps, faire tendre ε vers 0.

$$n - 1 = \lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{L\to\infty}\left(\frac{L}{a} \times \frac{\left\langle \{i,f\}_{i=1,N}, \vec{k}_L\vec{\varepsilon}_L | \mathcal{T}(\hbar\omega_L + i\varepsilon) | \{i,f\}_{i=1,N}, \vec{k}_L\vec{\varepsilon}_L \right\rangle}{\hbar\omega_L}\right). \tag{B.28}$$

Cette approche permet d'obtenir le bon résultat. Notamment, dans le cadre de l'approximation de Twersky (*i.e.* à l'ordre le plus bas en densité), on retrouve le résultat habituel (I.25).

c) Conclusion

J'ai donc présenté dans cette section la méthode de la matrice $\mathcal{T}$ qui est une variante de la méthode de la résolvante que nous avions vue au chapitre II. Elle permet d'obtenir un indice de réfraction, par une approche à un photon, dans des conditions voisines (fréquence du laser, forme du milieu) de celles de l'approche « champ moyen ».

Cette méthode présente toutefois des inconvénients. Tout d'abord, si elle fournit un indice, qui est le bon résultat à l'ordre 1 en densité, elle ne fournit pas de relation de dispersion (donc le résultat est moins « général »). Ensuite, nous avons vu qu'il existe un gros écueil à éviter. Il faut donc considérer un milieu atomique fini (comme dans la méthode « champ moyen »). On perd du même coup l'avantage du milieu infini, qui permettait, *via* la conservation de l'impulsion, de resommer les diagrammes de façon systématique. La prise en compte soigneuse de certains effets liés à la géométrie serait nécessaire pour retrouver l'expression de l'indice à l'ordre 2 en densité, compte tenu des effets de réflexion sur la face d'entrée.

Dans la suite de cette annexe, j'ai opté pour la méthode de la résolvante. Je rappelle toutefois que les 2 méthodes sont très voisines, et qu'en particulier les diagrammes qu'il faut resommer pour tenir compte des interactions entre atomes et de la statistique sont les mêmes.

2. Calcul de l'indice à l'ordre 2 en densité

Dans cette section, je calcule l'indice de réfraction par la méthode de la résolvante, à l'ordre 2 en $\rho_0 \lambda_L^3$. Je considère donc l'interaction d'un photon unique $\vec{k}_r \vec{\varepsilon}_r$ de fréquence ω_r avec un milieu atomique infini, et je cherche à déterminer un pôle de la résolvante. Comme nous l'avons vu au paragraphe II.3.*b.i*, c'est la partie réelle de ce pôle qui est proche de la fréquence de résonance atomique. Par contre, le photon incident est plus loin de résonance.

Malgré cela, je fais dans ce paragraphe les approximations du champ tournant et de l'atome à deux niveaux. Ceci permet de traiter plus facilement les resommations de diagrammes de la résolvante, mais aboutit à un résultat en partie inexact (*i.e.* différent à l'ordre 2 en $\rho_0 \lambda_L^3$ de celui obtenu par la méthode « champ moyen »). Je reviendrai sur ce problème au paragraphe B.3.

a) Calcul dans le cas d'atomes discernables

i) Calcul de la résolvante en utilisant la méthodes des projecteurs

Le système atomique, qui est supposé s'étendre dans tout l'espace, est toujours décrit par l'hamiltonien (B.14). J'utilise ici la *méthode des projecteurs* que j'ai présentée au paragraphe B.1.*a.iii.* Je définis le sous-espace de Hilbert

$$\mathfrak{E}_{\{\vec{P}\}} = \left[\bigoplus_{i=1}^{N} \mathrm{Vec}\left\{e^{i\vec{k}_{\mathrm{r}}\cdot\vec{R}_i}\left|i, \vec{e}\cdot\vec{\varepsilon}_{\mathrm{r}}, \{\ell, f\}_{\ell\neq i}, \{\vec{P}\}, \mathbf{0}\right\rangle\right\}\right] \oplus \mathrm{Vec}\left\{\left|\{i,f\}_{i=1}^{N}, \{\vec{P}\}, \vec{k}_{\mathrm{r}}\vec{\varepsilon}_{\mathrm{r}}\right\rangle\right\}, \tag{B.29}$$

où $\{\vec{P}\} = \{\vec{P}_1, \ldots, \vec{P}_i, \ldots, \vec{P}_N\}$ est l'ensemble des impulsions des N atomes. Je rappelle que

$$e^{i\vec{k}_{\mathrm{r}}\cdot\vec{R}_i}|\vec{P}_i\rangle = |\vec{P}_i + \hbar\vec{k}_{\mathrm{r}}\rangle\,.$$

L'espace $\mathfrak{E}_{\{\vec{P}\}}$ est de dimension $N+1$[1]. Je note $\mathcal{P}_{\{\vec{P}\}}$ (resp. $\mathcal{Q}_{\{\vec{P}\}}$) le projecteur sur $\mathfrak{E}_{\{\vec{P}\}}$ (resp. $\mathfrak{E}^{\perp}_{\{\vec{P}\}}$).

Je souhaite calculer la quantité

$$\left\langle\mathcal{G}(z)\right\rangle = \left\langle\{i,f\}_{i=1}^{N}, \vec{k}_{\mathrm{r}}\vec{\varepsilon}_{\mathrm{r}}|\mathcal{P}_{\{\vec{P}\}}\mathcal{G}(z)\mathcal{P}_{\{\vec{P}\}}|\{i,f\}_{i=1}^{N}, \vec{k}_{\mathrm{r}}\vec{\varepsilon}_{\mathrm{r}}\right\rangle\,, \tag{B.30}$$

que dans la suite je noterai plus simplement $\langle\mathcal{G}(z)\rangle$. On vérifiera *a posteriori* que cet élément de matrice ne dépend pas de $\{\vec{P}\}$. Je définis les quantités :

$$R_{\mathrm{impair}} = \left\langle i, \vec{e}\cdot\vec{\varepsilon}_{\mathrm{r}}, \{\ell, f\}_{\ell\neq i}, \{\vec{P}\}, \mathbf{0}|\mathcal{R}(z)|j, \vec{e}\cdot\vec{\varepsilon}_{\mathrm{r}}, \{\ell, f\}_{\ell\neq j}, \{\vec{P}\}, \mathbf{0}\right\rangle \text{ où } i\neq j \tag{B.31.a}$$

$$R_{\mathrm{pair}} = \left\langle i, \vec{e}\cdot\vec{\varepsilon}_{\mathrm{r}}, \{\ell, f\}_{\ell\neq i}, \{\vec{P}\}, \mathbf{0}|\mathcal{R}(z)|i, \vec{e}\cdot\vec{\varepsilon}_{\mathrm{r}}, \{\ell, f\}_{\ell\neq i}, \{\vec{P}\}, \mathbf{0}\right\rangle - \Delta E_{\mathrm{A}} + i\hbar\frac{\Gamma}{2}\,, \tag{B.31.b}$$

où l'opérateur $\mathcal{R}(z)$ est défini par l'équation (B.9). On verra également *a posteriori* que R_{impair} et R_{pair} ne dépendent pas de $\{\vec{P}\}$, ni de i et j.

Utilisant la formule (B.8), on trouve que

$$\langle\mathcal{G}(z)\rangle = \mathcal{M}(z)^{-1}\,, \tag{B.32}$$

où $\mathcal{M}(z)$ est la matrice de rang $N+1$ définie par

1. Il eût été possible de choisir un espace de projection à 2 dimensions, contenant l'état à 1 photon et où tous les atomes sont dans le fondamental, et une combinaison linéaire *ad hoc* d'états à un atome excité. C'est d'ailleurs cette approche que j'avais choisie au paragraphe II.1.*g* (p. 224), pour calculer l'indice au premier ordre en densité. Dans le cas présent où l'on prend en compte les interactions et la statistique, je préfère personnellement inverser $z - \mathcal{H}$ dans ce gros espace, afin de mieux « sentir » la signification physique des termes.

$$\mathcal{M}(z) = \begin{bmatrix} z-\hbar\omega_{\rm r} & -i\hbar\vec{\Omega}^*_{\vec{k}_{\rm r}\vec{\varepsilon}_{\rm r}}\cdot\vec{\varepsilon}_{\rm r} & -i\hbar\vec{\Omega}^*_{\vec{k}_{\rm r}\vec{\varepsilon}_{\rm r}}\cdot\vec{\varepsilon}_{\rm r} & \cdots & -i\hbar\vec{\Omega}^*_{\vec{k}_{\rm r}\vec{\varepsilon}_{\rm r}}\cdot\vec{\varepsilon}_{\rm r} \\ i\vec{\varepsilon}^*_{\rm r}\cdot\hbar\vec{\Omega}^*_{\vec{k}_{\rm r}\vec{\varepsilon}_{\rm r}} & z-\hbar\omega_{\rm A}+i\hbar\dfrac{\Gamma}{2}-R_{\rm pair} & -R_{\rm impair} & \cdots & -R_{\rm impair} \\ i\vec{\varepsilon}^*_{\rm r}\cdot\hbar\vec{\Omega}^*_{\vec{k}_{\rm r}\vec{\varepsilon}_{\rm r}} & -R_{\rm impair} & z-\hbar\omega_{\rm A}+i\hbar\dfrac{\Gamma}{2}-R_{\rm pair} & \cdots & -R_{\rm impair} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ i\vec{\varepsilon}^*_{\rm r}\cdot\hbar\vec{\Omega}^*_{\vec{k}_{\rm r}\vec{\varepsilon}_{\rm r}} & -R_{\rm impair} & -R_{\rm impair} & \cdots & z-\hbar\omega_{\rm A}+i\hbar\dfrac{\Gamma}{2}-R_{\rm pair} \end{bmatrix}, \tag{B.33}$$

où la première ligne/colonne correspond à l'état à 1 photon et tous les atomes dans le fondamental. Les lignes/colonnes suivantes correspondent à un état à 1 atome excité.

Il est possible d'inverser exactement la matrice (B.33), chose qui n'est pas très surprenante, puisqu'il y a $N-1$ états non couplés. Voici en deux mots une manière de s'y prendre : on écrit le système linéaire $\mathcal{M}x = y$, x et y étant des vecteurs à $N+1$ coefficients. Le but est d'exprimer les coefficients de x (que je note $\{x_i\}_{i=0,\ldots,N}$) en fonction de ceux de y. La première ligne de la matrice $\mathcal{M}$ nous fournit une relation entre x_0 et $\sum_{i=1}^{N} x_i$. On obtient une deuxième relation de la sorte en additionnant les N dernières lignes de la matrice $\mathcal{M}$. On se ramène donc à un système à 2 équations et 2 inconnues (x_0 et $\sum_{i=1}^{N} x_i$).

Je trouve finalement le résultat *exact* suivant :

$$\boxed{\left\langle \mathcal{G}(z)\right\rangle = \cfrac{1}{z-\hbar\omega_{\rm r}-\cfrac{N\left|\vec{\varepsilon}^*_{\rm r}\cdot\hbar\vec{\Omega}_{\vec{k}_{\rm r}\vec{\varepsilon}_{\rm r}}\right|^2}{z-\hbar\omega_{\rm A}+i\hbar\dfrac{\Gamma}{2}-R_{\rm pair}-(N-1)R_{\rm impair}}}.} \tag{B.34}$$

ii) Calcul de R_{impair} *et* R_{pair}

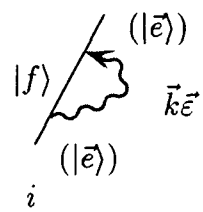
Il est malheureusement impossible de calculer $R_{\rm impair}$ et $R_{\rm pair}$ de façon exacte. Je vais donc devoir effectuer une approximation.

Cette approximation est analogue au *développement du Viriel*, utilisé par les thermodynamiciens pour calculer les corrections au gaz parfait [68, p. 297]. Il consiste à ne retenir que les diagrammes faisant intervenir un petit nombre d'atomes. Si l'on ne retient que les diagrammes à 1 atome, on obtient un résultat d'ordre 1 en $\rho_0\lambda_{\rm A}^3$ ($\lambda_{\rm A} = c/\omega_{\rm A}$). Si on tient aussi compte des diagrammes à 2 atomes, on obtient une correction d'ordre 2 en $\rho_0\lambda_{\rm A}^3$.

Limitons-nous pour l'instant à l'ordre 1. Dans ce cas, $R_{\text{impair}} = 0$, puisque sa définition (B.31.a) fait nécessairement intervenir 2 atomes. Le calcul de

$$\left\langle i, \vec{e}\cdot\vec{\varepsilon}_{\text{r}}, \{\ell, f\}_{\ell\neq i}, \{\vec{P}\}, \mathbf{0}|\mathcal{R}(z)|i, \vec{e}\cdot\vec{\varepsilon}_{\text{r}}, \{\ell, f\}_{\ell\neq i}, \{\vec{P}\}, \mathbf{0}\right\rangle$$

s'effectue à l'aide du développement (B.9.b). Comme au paragraphe B.1.*a.iv*, seul le diagramme



contribue, à cause des projecteurs intervenant dans la définition de $\mathcal{R}(z)$. On retrouve ainsi le déplacement de Lamb et la largeur naturelle de l'état excité. Comme j'ai soustrait ces quantités dans la définition (B.31.b) de R_{pair}, on obtient aussi $R_{\text{pair}} = 0$. D'où finalement le résultat

$$\left\langle \mathcal{G}(z)\right\rangle = \frac{1}{z - \hbar\omega_{\text{r}} - \dfrac{N\left|\vec{\varepsilon}_{\text{r}}^{\,*}\cdot\hbar\vec{\Omega}_{\vec{k}_{\text{r}}\vec{\varepsilon}_{\text{r}}}\right|^2}{z - \hbar\omega_{\text{A}} + i\hbar\dfrac{\Gamma}{2}}}, \tag{B.35}$$

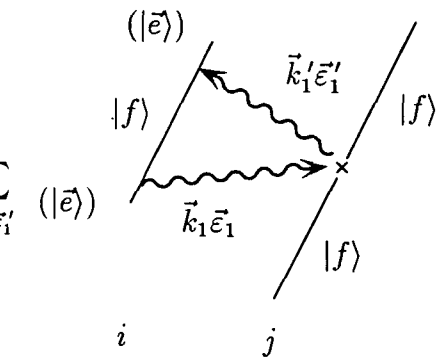
qui redonne la relation de dispersion (II.16) vue au chapitre II.

Signalons qu'on obtient cette relation de dispersion sans avoir à resommer explicitement la formule (II.8) (*i.e.* les diagrammes de diffusion multiple ne passant pas 2 fois par le même atome). Cette resommation est « cachée » dans l'inversion de la matrice (B.33).

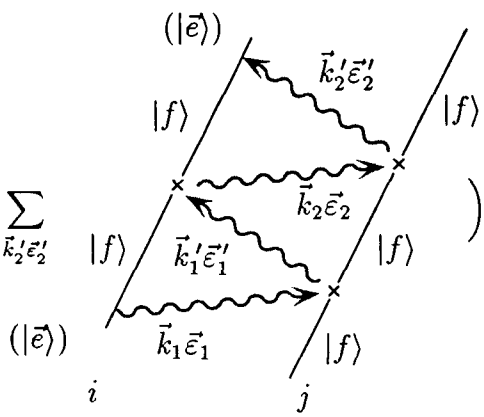
iii) Développement du Viriel à l'ordre 2 : calcul du terme pair

Il faut donc maintenant prendre en compte tous les diagrammes mettant en jeu 2 atomes distincts[1]. Ainsi, le terme pair donne

$$R_{\text{pair}} \simeq \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} \vec{\varepsilon}_{\text{r}}^{\,*} \cdot \Big(\sum_{\vec{k}_1\vec{\varepsilon}_1} \sum_{\vec{k}_1'\vec{\varepsilon}_1'} \Big)$$



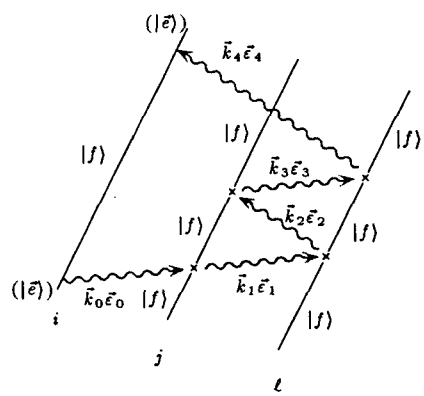
$$\cdot\, \vec{\varepsilon}_{\text{r}}\delta^{\text{c}}(\vec{k}_1 - \vec{k}_1') + \vec{\varepsilon}_{\text{r}}^{\,*} \cdot \Big(\sum_{\vec{k}_1\vec{\varepsilon}_1} \sum_{\vec{k}_1'\vec{\varepsilon}_1'} \sum_{\vec{k}_2\vec{\varepsilon}_2} \sum_{\vec{k}_2'\vec{\varepsilon}_2'} \Big)$$



$$\cdot\, \vec{\varepsilon}_{\text{r}}\delta^{\text{c}}(\vec{k}_1 + \vec{k}_2 - \vec{k}_1' - \vec{k}_2') + \cdots . \quad \text{(B.36)}$$

Je rappelle que les projecteurs $\mathcal{P}$ présents dans l'équation (B.8) imposent, à la « fin » de chaque diagramme, de « retomber » dans le sous-espace $\mathfrak{E}_{\{\vec{p}\}}$. Autrement dit, il est nécessaire que l'impulsion de chaque atome soit conservée

1. Je néglige donc les diagrammes faisant intervenir 3 atomes ou plus ; en voici un exemple :



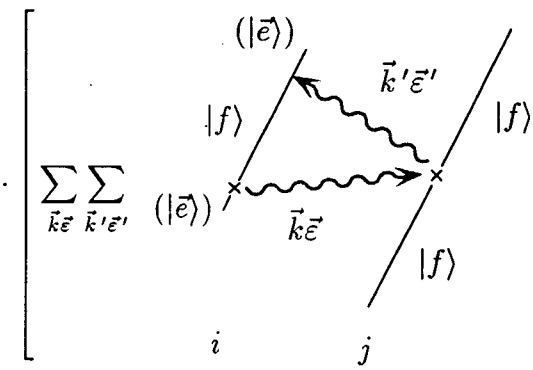
dans chaque diagramme. Cela revient à dire que

$$\sum_n \vec{k}_n = \sum_n \vec{k}'_n . \tag{B.37}$$

D'où le facteur $\delta^{\mathrm{c}}\left(\sum_n \vec{k}_n - \vec{k}'_n\right)$ présent dans chaque terme de (B.36). La fonction δ^{c} est le symbole de Kronecker, puisque l'espace de quantification est discrétisé.

On écrit les fonctions δ^{c} en transformée de Fourier, *i.e.* $V\delta^{\mathrm{c}}(\Delta\vec{k}) = \int \mathrm{d}^3\vec{r}\, e^{i\Delta\vec{k}\cdot\vec{r}}$ (où $\Delta\vec{k} = \sum_n(\vec{k}_n - \vec{k}'_n)$). Ceci permet de séparer la contribution de chacun des $\vec{k}_n$, et ainsi de « factoriser » les diagrammes de la somme (B.36) :

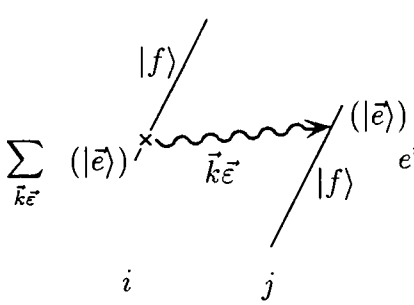
$$R_{\mathrm{pair}} \simeq \frac{1}{V}\left(z - \hbar\omega_{\mathrm{A}} + i\hbar\frac{\Gamma}{2}\right) \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \int \mathrm{d}^3\vec{r} \sum_{n=1}^{+\infty} \vec{\varepsilon}_{\mathrm{r}}^{\,*} \cdot \left[\sum_{\vec{k}\vec{\varepsilon}} \sum_{\vec{k}'\vec{\varepsilon}'} \right.$$



$$\left. e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{r}} \right]^n \cdot \vec{\varepsilon}_{\mathrm{r}} . \tag{B.38}$$

Comme i et j jouent un rôle symétrique, le diagramme figurant dans (B.38) peut encore être factorisé en deux termes identiques (en changeant $\vec{k}'$ en $-\vec{k}'$) correspondant à l'échange d'un photon entre un atome dans l'état fondamental et un autre dans l'état excité. Je pose

$$\sum_{\vec{k}\vec{\varepsilon}}$$



$$e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \equiv \alpha_z \vec{\vec{g}}_2(\vec{r}) , \tag{B.39}$$

où la quantité α_z est définie par

$$\alpha_z = \frac{-3\pi\Gamma c^3}{{\omega_{\mathrm{A}}}^3\left(\dfrac{z}{\hbar} - \omega_{\mathrm{A}} + i\dfrac{\Gamma}{2}\right)} . \tag{B.40}$$

Le tenseur $\vec{\vec{g}}_2$ est une approximation du tenseur $\vec{\vec{g}}$ introduit au chapitre II (éq. (II.28)). Il ne contient ni les termes antirésonnants, ni le terme de contact.

Finalement, le terme pair vaut

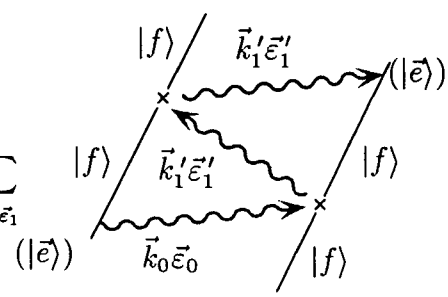
$$\boxed{R_{\text{pair}} \simeq \left(z - \hbar\omega_{\text{A}} + i\hbar\frac{\Gamma}{2}\right)\frac{N-1}{V}\int \mathrm{d}^3\vec{r}\,\vec{\varepsilon}_{\text{r}}^{\,*}\cdot\frac{\alpha_z^2\vec{\vec{g}}_2^{\,2}(\vec{r})}{\vec{\vec{1}}-\alpha_z^2\vec{\vec{g}}_2^{\,2}(\vec{r})}\cdot\vec{\varepsilon}_{\text{r}}\,.} \tag{B.41}$$

On vérifie bien que, comme annoncé, R_{pair} ne dépend pas du numéro de l'atome considéré, ni de la distribution des impulsions des atomes.

iv) Calcul du terme impair

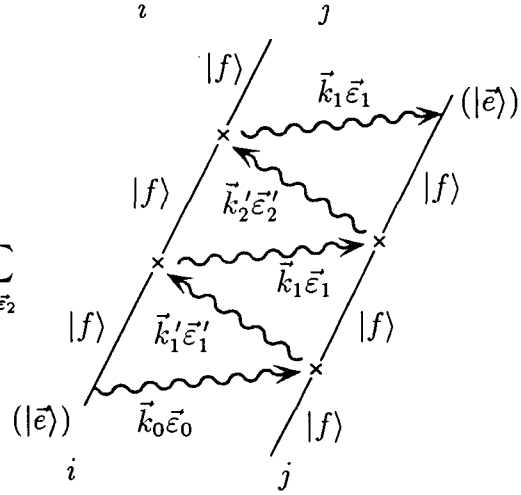
De même, on obtient pour le terme impair

$$R_{\text{impair}} \simeq \vec{\varepsilon}_{\text{r}}^{\,*}\cdot\Bigg(\sum_{\vec{k}_0\vec{\varepsilon}_0}\sum_{\vec{k}_1'\vec{\varepsilon}_1'}\sum_{\vec{k}_1\vec{\varepsilon}_1}$$



$$\Bigg)\cdot\vec{\varepsilon}_{\text{r}}\delta^{\text{c}}(\vec{k}_0+\vec{k}_1-\vec{k}_1'-\vec{k}_{\text{r}})$$

$$+\vec{\varepsilon}_{\text{r}}^{\,*}\cdot\Bigg(\sum_{\vec{k}_0\vec{\varepsilon}_0}\sum_{\vec{k}_1'\vec{\varepsilon}_1'}\sum_{\vec{k}_1\vec{\varepsilon}_1}\sum_{\vec{k}_2'\vec{\varepsilon}_2'}\sum_{\vec{k}_2\vec{\varepsilon}_2}$$



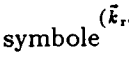
$$\Bigg)\cdot\vec{\varepsilon}_{\text{r}}\delta^{\text{c}}(\vec{k}_0+\vec{k}_1+\vec{k}_2-\vec{k}_1'-\vec{k}_2'-\vec{k}_{\text{r}})$$

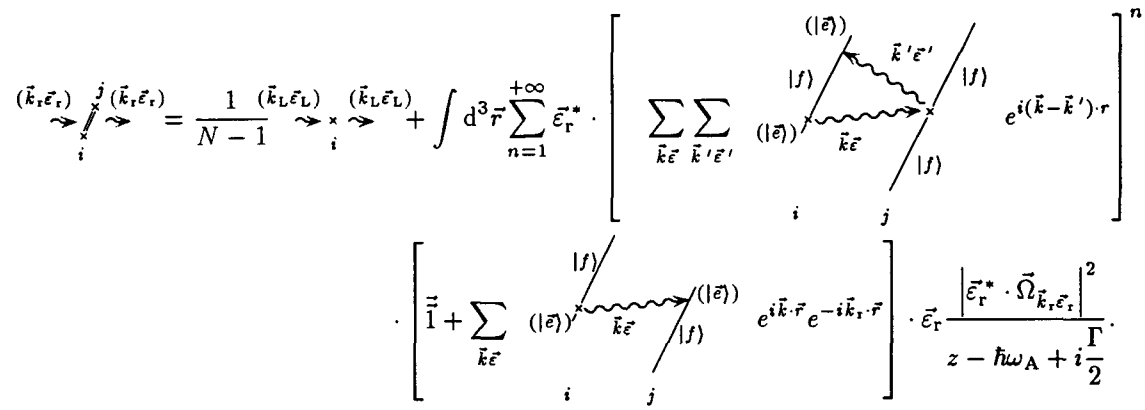
$$+\cdots\,. \tag{B.42}$$

Remarquons que les fonctions δ présentes dans l'équation (B.42) contiennent $\vec{k}_{\text{r}}$, ce qui n'était pas le cas pour le terme pair. Cela est dû au fait que l'atome i est excité au « départ » du diagramme, et pas à l'« arrivée ». Or, d'après la définition de l'espace de projection $\mathfrak{C}_{\{\vec{p}\}}$, cette désexcitation s'accompagne d'un changement d'impulsion pour l'atome i (physiquement, ce changement d'impulsion correspond à l'émission par cet atome d'un photon dans le mode $\vec{k}_{\text{r}}\vec{\varepsilon}_{\text{r}}$.).

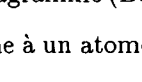
On remarque que le diagramme d'ordre 1, *i.e.*

$$\vec{\varepsilon}_{\mathrm{r}}^{\,*}\cdot\Big(\sum_{\vec{k}\vec{\varepsilon}}\ (|\vec{e}\rangle)\ \overset{|f\rangle}{\diagup}\!\!\sim\!\!\sim\!\!\sim

où le symbole  représente l'interaction entre 2 atomes d'une paire que nous venons de calculer, *i.e.*



(B.46)

On constate donc que le diagramme (B.43) est donc bien présent dans la somme (B.45) : il s'agit du cas $p = 2$, avec le terme à un atome dans l'expression de  . En ne le mettant pas dans la somme (B.46), on évite tout simplement de le compter deux fois.

Une manière naïve de calculer l'indice aurait été de ne pas sommer la série (B.45), mais de ne prendre que le terme $p = 1$. Cette façon de faire découle d'un *a priori* selon lequel, pour effectuer un calcul à l'ordre q en densité, il faut resommer tous les diagrammes à q atomes et eux seuls. Cet *a priori* n'est pas démenti par un calcul à l'ordre 1 en densité : on ne garde que le terme à 1 atome de (B.46), et obtient le bon résultat. Par contre, passant à l'ordre 2, nous n'avons aucune raison d'éliminer le diagramme (B.43). D'où un résultat divergent (ou tout au moins, si le milieu atomique est fini, dépendant fortement de la taille de ce dernier). La nécessité de resommer la série (B.45) apparaît donc *a posteriori*, et heurte le bon sens, puisque nécessite des diagrammes avec un nombre arbitrairement grand d'atomes pour calculer l'indice à l'ordre 2.

En fait, on peut se rendre compte que les diagrammes resommés dans la formule (B.45) sont un peu particuliers, dans la mesure où, lors de chaque absorption/émission du photon, l'impulsion de chacun des atomes est conservée. Par conséquent, les contributions de ces diagrammes s'ajoutent de façon cohérente[1]. Nous ressommons donc à tous les ordres les diagrammes cohérents, mais seulement à l'ordre 2 les diagrammes incohérents, *i.e.* ceux qui ne conservent pas l'impulsion des atomes.

Il faudra bien garder ce problème à l'esprit au chapitre V, lorsque nous calculerons la section efficace différentielle de diffusion. En effet, nous verrons qu'il y apparaît un grand nombre de divergences de ce type.

1. Cette propriété est en fait générale dès que l'on a affaire à des diagrammes réductibles [214], c'est-à dire des diagrammes que l'on peut séparer en deux en coupant une ligne de photons. Les diagrammes réductibles s'ajoutent de façon cohérente. On retrouve cette même propriété avec les diagrammes d'échelles, dans le calcul de diffusion (p. 319).

v) Relation de dispersion

La relation de dispersion se déduit de (B.34), en utilisant les résultats (B.41) et (B.44). On fait tendre le volume de quantification vers l'infini en supposant que

$$\lim_{V\to+\infty} \frac{N}{V} = \rho_0 .$$

Comme indiqué au chapitre (II), p. 223, on remplace z par $\hbar\omega_e$ et calcule la relation entre ω_e et $k_r = \omega_r/c$. Voici le résultat obtenu :

$$\boxed{\omega_e = ck_r \left(1 - \frac{\alpha_{\hbar\omega_e}}{2(1+\mathcal{A})}\right),} \tag{B.47.a}$$

où

$$\boxed{\mathcal{A} = -\rho_0 \int \mathrm{d}^3\vec{r}\,\vec{\varepsilon}_r^{\,*} \cdot \frac{\alpha^2_{\hbar\omega_e}\vec{\vec{g}}_2^{\,2}(\vec{r}) + \alpha^3_{\hbar\omega_e}\vec{\vec{g}}_2^{\,3}(\vec{r})e^{-i\vec{k}_r\cdot\vec{r}}}{\vec{\vec{1}} - \alpha^2_{\hbar\omega_e}\vec{\vec{g}}_2^{\,2}(\vec{r})} \cdot \vec{\varepsilon}_r .} \tag{B.47.b}$$

La quantité $\alpha_{\hbar\omega_e}$ est définie par l'équation (B.40) avec $z = \hbar\omega_e$, *i.e.*

$$\alpha_{\hbar\omega_e} = \frac{-3\pi\Gamma c^3}{{\omega_A}^3\left(\omega_e - \omega_A + i\dfrac{\Gamma}{2}\right)}. \tag{B.48}$$

b) Prise en compte de la statistique

i) Présentation de la méthode

Pour traiter le cas d'un gaz quantique à température non nulle, il faut moyenner la résolvante dans un état décrit par une matrice densité ϖ, *i.e.*

$$\left\langle \mathcal{G}(z) \right\rangle = \mathrm{Tr}\left(\varpi\mathcal{G}(z)\right) . \tag{B.49}$$

La transformée de Fourier de (B.49) permet d'obtenir l'opérateur d'évolution du système, moyenné *via* la matrice densité ϖ. Nous devons donc chercher les pôles de la quantité $\langle\mathcal{G}(z)\rangle$.

On supposera que la matrice densité ϖ pourra s'écrire sous la forme

$$\varpi = \varpi_{\text{photons}} \otimes \varpi_{\text{interne}} \otimes \varpi_{\text{externe}} . \tag{B.50}$$

La matrice ϖ_{photons} est la matrice densité du champ électromagnétique. Je suppose que ϖ_{photons} est un état pur à un seul photon, *i.e.*

$$\varpi_{\text{photons}} = |\vec{k}_r\vec{\varepsilon}_r\rangle\langle\vec{k}_r\vec{\varepsilon}_r| . \tag{B.51}$$

La matrice ϖ_{interne} est la matrice densité des degrés de liberté atomiques internes. On supposera qu'elle aussi est constituée d'un état pur où tous les atomes sont dans l'état fondamental. Enfin, la matrice ϖ_{externe} porte sur les impulsions des atomes. Elle vérifie le postulat d'(anti)symétrisation[1] :

$$\varpi_{\text{externe}} = \mathcal{S}^{\dagger}\varpi'_{\text{externe}}\mathcal{S}\,, \tag{B.52}$$

où ϖ'_{externe} est défini par

$$\varpi'_{\text{externe}} = \sum_{\{\vec{P}\}} \left(\prod_{i=1}^{N} f_{\vec{P}_i}\right) \left|\{\vec{P}\}\right\rangle\left\langle\{\vec{P}\}\right| . \tag{B.53}$$

La notation $\{\vec{P}\}$ désigne la distribution des impulsions des atomes, *i.e.* $\{\vec{P}\} = \vec{P}_1, \vec{P}_2, \ldots, \vec{P}_N$, et $f_{\vec{P}_i}$ est le facteur d'occupation défini par

$$f_{\vec{p}} = \frac{1}{e^{\dfrac{(p^2/2M)-\mu}{k_{\mathrm{B}}T}} - \eta_{\mathrm{b/f}}}\,, \tag{B.54}$$

μ étant le potentiel chimique. Tous les atomes sont supposés dans l'état fondamental.

Dans la formule (B.52), j'utilise l'opérateur $\mathcal{S}$ d'(anti)symétrisation, défini par

$$\mathcal{S} = \frac{1}{N!}\sum_{\varsigma\in\mathcal{S}_N} \eta_{\mathrm{b/f}}^{\varepsilon'(\varsigma)} |\varsigma\{\vec{P}\}\rangle\langle\{\vec{P}\}|\,, \tag{B.55}$$

où j'ai effectué une somme sur les permutations ς de rang N, $\varepsilon'(\varsigma)$ valant 0 pour une permutation paire et 1 pour une permutation impaire (la signature de la permutation est donc $(-1)^{\varepsilon'(\varsigma)}$). La quantité $\eta_{\mathrm{b/f}}$ vaut 1 (resp. -1) pour des bosons (resp. fermions).

ii) Projection sur un espace (anti)symétrisé

La difficulté dans le calcul de la valeur moyenne de la résolvante provient de l'opérateur d'(anti)symétrisation $\mathcal{S}$ présent dans la matrice densité.

J'introduis dans l'équation (B.49) une relation de fermeture, en utilisant la base $\{\vec{P}\}$ dans laquelle la matrice ϖ'_{externe} est diagonale. J'obtiens

$$\left\langle \mathcal{G}(z)\right\rangle = \sum_{\{\vec{P}\}} \left(\prod_{i=1}^{N} f_{\vec{P}_i}\right) \left\langle \vec{k}_{\mathrm{r}}\vec{\varepsilon}_{\mathrm{r}}, \{i,f\}_{1\leqslant i\leqslant N}, \{\vec{P}\}\,|\mathcal{S}\mathcal{G}(z)\mathcal{S}|\,\vec{k}_{\mathrm{r}}\vec{\varepsilon}_{\mathrm{r}}, \{i,f\}_{1\leqslant i\leqslant N}, \{\vec{P}\}\right\rangle . \tag{B.56}$$

1. Bien que les atomes considérés ici (transition $0 \longrightarrow 1$ entre le fondamental et le premier état excité) soient forcément des bosons, je n'élimine pas le cas des fermions afin de pouvoir généraliser mes calculs au cas d'une transition quelconque.

On voit donc qu'il faut restreindre l'espace de Hilbert aux états (anti)symétrisés, et moyenner $\mathcal{G}(z)$ dans un état de cet espace.

Comme au paragraphe B.2.*a.i*, je calcule l'élément de matrice de la résolvante en utilisant la méthode des projecteurs[1]. Je choisis pour espace de projection :

$$\mathfrak{E}_{\{\vec{P}\}} = \left[\bigoplus_{i=1}^{N} \mathrm{Vec}\left\{\mathfrak{S}e^{i\vec{k}_\mathrm{r}\cdot\vec{R}_i}\left|i, \vec{e}\cdot\vec{\varepsilon}_\mathrm{r}, \{\ell, f\}_{\ell\neq i}, \{\vec{P}\}, \mathbf{0}\right\rangle\right\}\right] \oplus \mathrm{Vec}\left\{\mathfrak{S}\left|\{i, f\}_{i=1}^{N}, \{\vec{P}\}, \vec{k}_\mathrm{r}\vec{\varepsilon}_\mathrm{r}\right\rangle\right\} . \tag{B.57}$$

Les $N+1$ vecteurs utilisés dans la définition (B.57) constituent une base de $\mathfrak{E}_{\{\vec{P}\}}$, à condition que deux atomes ne soient jamais dans la même classe d'impulsion. Ceci est toujours vrai pour les fermions, et, dans la limite où le volume de quantification tend vers l'infini, pour des bosons au-dessus de la condensation de Bose-Einstein[2]. Dans la suite, je raisonnerai sur ces vecteurs de base (anti)symétrisés, afin de calculer les éléments de matrice de $\mathcal{R}(z)$.

iii) Eléments de matrice de $\mathcal{R}(z)$

Je définis les quantités suivantes, qui sont les éléments de matrice de $\mathcal{R}(z)$ sur les vecteurs de base (anti)symétrisés :

$$R^{ij}_{\substack{\text{statistique}\\ \text{2 atomes}}} = \left\langle i, \vec{e}\cdot\vec{\varepsilon}_\mathrm{r}, \{\ell, f\}_{\ell\neq i}, \{\vec{P}\}, 0\middle|\mathfrak{S}\mathcal{R}(z)\mathfrak{S}\middle|j, \vec{e}\cdot\vec{\varepsilon}_\mathrm{r}, \{\ell, f\}_{\ell\neq j}, \{\vec{P}\}, \mathbf{0}\right\rangle \tag{B.58.a}$$

où $i \neq j$,

$$R^{i}_{\substack{\text{statistique}\\ \text{1 atome}}} = \left\langle i, \vec{e}\cdot\vec{\varepsilon}_\mathrm{r}, \{\ell, f\}_{\ell\neq i}, \{\vec{P}\}, 0\middle|\mathfrak{S}\mathcal{R}(z)\mathfrak{S}\middle|i, \vec{e}\cdot\vec{\varepsilon}_\mathrm{r}, \{\ell, f\}_{\ell\neq i}, \{\vec{P}\}, \mathbf{0}\right\rangle - \Delta E_\mathrm{A} + i\hbar\frac{\Gamma}{2}, \tag{B.58.b}$$

Contrairement aux termes définis dans l'équation (B.31), la quantité $R^{ij}_{\text{statistique, 2 atomes}}$ (resp. $R^{i}_{\text{statistique, 1 atome}}$) dépend des numéros des atomes i et j (resp. de l'atome i), ou plus exactement des impulsions $\vec{P}_i$ et $\vec{P}_j$ (resp. de $\vec{P}_i$). Ils dépendent aussi des impulsions des autre atomes (à cause du développement de $\mathcal{R}(z)$).

On exploite le fait que $\mathcal{R}(z)$ commute avec $\mathfrak{S}$ (ceci est dû au fait que $\mathcal{R}(z)$ ne « privilégie » aucun atome). Comme $\mathfrak{S}^2 = \mathfrak{S}$, on peut éliminer l'une des deux opérateurs $\mathfrak{S}$ dans chacune des équations (B.58).

1. Encore une fois, il eût été possible de raisonner sur un espace à 2 dimensions, en (anti)symétrisant les vecteurs de base de celui utilisé au paragraphe II.1.*g* (p. 224).

2. Il est aussi possible de résoudre le problème dans le cas de la condensation de Bose-Einstein. Pour cela, il faut considérer comme un seul état le cas où un atome du condensat est excité (à température nulle, $\mathfrak{E}_{\{\vec{P}\}}$ est donc de dimension 2). Il faut ensuite prendre des précautions lorsqu'on passe à la limite du volume infini.

L'opérateur $\mathcal{R}(z)$ se développe en diagrammes de Feynman. Nous savons qu'à l'ordre 2 du développement du Viriel, il ne faut retenir que les diagrammes passant par 2 atomes donnés i et j (pour exprimer $R^i_{\text{statistique, 1 atome}}$, il faut donc rajouter une sommation sur j), et négliger les diagrammes passant par un 3$^{\text{e}}$ atome.

L'opérateur $\mathfrak{S}$ se développe d'après (B.55) en une somme sur les permutations. En fait, les permutations qui ne laissent pas invariants les atomes autres que i et j ne contribuent pas, à cause de la conservation de l'impulsion (et du fait que les impulsions de deux atomes différents sont nécessairement différentes). Finalement, les deux seules permutations qui contribuent sont l'identité et la permutation échangeant i et j (notée $\mathfrak{P}_{ij}$). Le terme avec l'identité nous redonne les quantités R_{pair} et R_{impair} définies par l'équation (B.31). On obtient donc :

$$R^{ij}_{\substack{\text{statistique}\\ \text{2 atomes}}} = R_{\text{impair}} + \eta_{\text{b/f}} R^{ij}_{\substack{\text{échange}\\ \text{pair}}} \tag{B.59.a}$$

$$R^{i}_{\substack{\text{statistique}\\ \text{1 atome}}} = R_{\text{pair}} + \eta_{\text{b/f}} R^{i}_{\substack{\text{échange}\\ \text{impair}}}, \tag{B.59.b}$$

où

$$R^{ij}_{\substack{\text{échange}\\ \text{pair}}} = \left\langle i, \vec{e}\cdot\vec{\varepsilon}_{\text{r}}, \{\ell, f\}_{\ell\neq i}, \{\vec{P}\}, \mathbf{0} | \mathfrak{P}_{ij}\mathcal{R}(z) | j, \vec{e}\cdot\vec{\varepsilon}_{\text{r}}, \{\ell, f\}_{\ell\neq j}, \{\vec{P}\}, \mathbf{0}\right\rangle \tag{B.60.a}$$

$$R^{i}_{\substack{\text{échange}\\ \text{impair}}} = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} \left\langle i, \vec{e}\cdot\vec{\varepsilon}_{\text{r}}, \{\ell, f\}_{\ell\neq i}, \{\vec{P}\}, \mathbf{0} | \mathfrak{P}_{ij}\mathcal{R}(z) | i, \vec{e}\cdot\vec{\varepsilon}_{\text{r}}, \{\ell, f\}_{\ell\neq i}, \{\vec{P}\}, \mathbf{0}\right\rangle . \tag{B.60.b}$$

iv) Calcul de la résolvante

L'élément de matrice de la résolvante $\mathcal{G}(z)$ sur les vecteurs de base (anti)symétrisés vaut (en utilisant la formule (B.8) et le résultat (B.59)) :

$$\left\langle \vec{k}_{\text{r}}\vec{\varepsilon}_{\text{r}}, \{i, f\}_{1\leqslant i\leqslant N}, \{\vec{P}\} \left| \mathfrak{S}\mathcal{G}(z)\mathfrak{S} \right| \vec{k}_{\text{r}}\vec{\varepsilon}_{\text{r}}, \{i, f\}_{1\leqslant i\leqslant N}, \{\vec{P}\} \right\rangle = \left(\mathcal{M} + \eta_{\text{b/f}}\mathcal{N}\right)^{-1}, \tag{B.61}$$

où la matrice $\mathcal{M}$ est définie par (B.33), et la matrice $\mathcal{N}$ vaut

$$\mathcal{N}(z) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -R^{1}_{\substack{\text{échange}\\ \text{impair}}} & -R^{12}_{\substack{\text{échange}\\ \text{pair}}} & \cdots & -R^{1N}_{\substack{\text{échange}\\ \text{pair}}} \\ 0 & -R^{21}_{\substack{\text{échange}\\ \text{pair}}} & -R^{2}_{\substack{\text{échange}\\ \text{impair}}} & \cdots & -R^{2N}_{\substack{\text{échange}\\ \text{pair}}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & -R^{N1}_{\substack{\text{échange}\\ \text{pair}}} & -R^{N2}_{\substack{\text{échange}\\ \text{pair}}} & \cdots & -R^{N}_{\substack{\text{échange}\\ \text{impair}}} \end{bmatrix} . \tag{B.62}$$

Comme les éléments de matrice de $\mathcal{N}$ sont tous différents, il est impossible d'inverser la matrice exactement comme je l'avais fait dans le cas où les atomes

étaient discernables. J'utiliserai donc le développement

$$\left(\mathcal{M}+\eta_{\mathrm{b/f}}\mathcal{N}\right)^{-1}=\mathcal{M}^{-1}-\eta_{\mathrm{b/f}}\mathcal{M}^{-1}\mathcal{N}\mathcal{M}^{-1}+\cdots . \tag{B.63}$$

Ce développement est valable lorsque $z-\hbar\omega_{\mathrm{A}}\ll\hbar\omega_{\mathrm{A}}$, et dans la limite $\rho\lambda\!\!\!^{-3}_{\mathrm{A}}\ll 1$.

Le calcul du produit de matrices (B.63) est extrêmement long et fastidieux, mais ne pose pas de difficulté de principe (l'inverse $\mathcal{M}^{-1}$ ayant déjà été calculé au paragraphe B.2.*a*). Voici le résultat obtenu :

$$\begin{aligned}\left\langle \vec{k}_{\mathrm{r}}\vec{\varepsilon}_{\mathrm{r}},\{i,f\}_{1\leqslant i\leqslant N},\{\vec{P}\}\left|\mathfrak{S}\mathcal{G}(z)\mathfrak{S}\right|\vec{k}_{\mathrm{r}}\vec{\varepsilon}_{\mathrm{r}},\{i,f\}_{1\leqslant i\leqslant N},\{\vec{P}\}\right\rangle &\simeq \frac{1}{z-\hbar\omega_{\mathrm{r}}-\dfrac{N\left|\vec{\varepsilon}_{\mathrm{r}}^{\,*}\cdot\hbar\vec{\Omega}_{\vec{k}_{\mathrm{r}}\vec{\varepsilon}_{\mathrm{r}}}\right|^2}{z-\hbar\omega_{\mathrm{A}}+i\hbar\dfrac{\Gamma}{2}-R_{\mathrm{pair}}-(N-1)R_{\mathrm{impair}}}}\\ &\times\left[1+\eta_{\mathrm{b/f}}\frac{\left|\vec{\varepsilon}_{\mathrm{r}}^{\,*}\cdot\hbar\vec{\Omega}_{\vec{k}_{\mathrm{r}}\vec{\varepsilon}_{\mathrm{r}}}\right|^2\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{N}R^{i}_{\substack{\text{échange}\\ \text{impair}}}+\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{N}R^{ij}_{\substack{\text{échange}\\ \text{pair}}}\right)}{\left(z-\hbar\omega_{\mathrm{r}}-\dfrac{N\left|\vec{\varepsilon}_{\mathrm{r}}^{\,*}\cdot\hbar\vec{\Omega}_{\vec{k}_{\mathrm{r}}\vec{\varepsilon}_{\mathrm{r}}}\right|^2}{z-\hbar\omega_{\mathrm{A}}+i\hbar\dfrac{\Gamma}{2}-R_{\mathrm{pair}}-(N-1)R_{\mathrm{impair}}}\right)\left(z-\hbar\omega_{\mathrm{A}}+i\hbar\dfrac{\Gamma}{2}-R_{\mathrm{pair}}-(N-1)R_{\mathrm{impair}}\right)^2}\right].\end{aligned} \tag{B.64}$$

v) Moyenne sur les variables atomiques externes

Il faut maintenant moyenner l'équation (B.64) en sommant sur les ensembles d'impulsions $\{\vec{P}\}$, comme l'indique l'équation (B.56). On voit qu'il suffit en fait de moyenner $R^{ij}_{\text{échange, pair}}$ et $R^{i}_{\text{échange, impair}}$, qui sont les deux seules quantités de (B.64) dépendant de $\{\vec{P}\}$.

Ces deux quantités se calculent par resommation de diagrammes. Ainsi, $R^{ij}_{\text{échange, pair}}$ s'exprime avec la même somme de diagrammes que R_{pair} dans la formule (B.36), le

$$\delta^{\mathrm{c}}\left(\sum_{\ell}\left(\vec{k}_{\ell}-\vec{k}'_{\ell}\right)\right)$$

étant simplement remplacé par

$$\delta^{\mathrm{c}}\left(\sum_{\ell}\left(\vec{k}_{\ell}-\vec{k}'_{\ell}+(\vec{P}_i-\vec{P}_j)/\hbar\right)\right),$$

et la sommation sur j disparaissant (ℓ est le numéro du photon échangé). On écrit ensuite

$$\delta^{\mathrm{c}}\left(\sum_{\ell}\left(\vec{k}_{\ell}-\vec{k}'_{\ell}+\vec{P}_i-\vec{P}_j\right)\right)=\frac{1}{V}\int \mathrm{d}^3\vec{r}\prod_{\ell}e^{i(\vec{k}_{\ell}-\vec{k}'_{\ell})\cdot\vec{r}}e^{i\frac{\vec{P}_i-\vec{P}_j}{\hbar}\cdot\vec{r}}. \tag{B.65}$$

En multipliant l'équation (B.65) par $f_{\vec{P}_i} f_{\vec{P}_j}$, et en effectuant une sommation sur $\vec{P}_j$ et $\vec{P}_j$, on voit que l'on fait apparaître la densité à 2 corps (en utilisant la formule (III.18), p. 245). Finalement, on trouve le résultat

$$\mathrm{Tr}\left(\varpi'_{\text{externe}} R^{ij}_{\substack{\text{échange}\\ \text{pair}}}\right) = \left(z - \hbar\omega_{\mathrm{A}} + i\hbar\frac{\Gamma}{2}\right)\frac{1}{V}\int \mathrm{d}^3\vec{r}\,\vec{\varepsilon}_{\mathrm{r}}^{\,*}\cdot\frac{\alpha_z^2\vec{\vec{g}}_2^{\,2}(\vec{r})}{\vec{\vec{1}} - \alpha_z^2\vec{\vec{g}}_2^{\,2}(\vec{r})}\cdot\vec{\varepsilon}_{\mathrm{r}}\varphi(\vec{r}) \tag{B.66.a}$$

$$\mathrm{Tr}\left(\varpi'_{\text{externe}} R^{i}_{\substack{\text{échange}\\ \text{impair}}}\right) = \left(z - \hbar\omega_{\mathrm{A}} + i\hbar\frac{\Gamma}{2}\right)\frac{N-1}{V}\int \mathrm{d}^3\vec{r}\,\vec{\varepsilon}_{\mathrm{r}}^{\,*}\cdot\frac{\alpha_z^3\vec{\vec{g}}_2^{\,3}(\vec{r})e^{-i\vec{k}_{\mathrm{r}}\cdot\vec{r}}}{\vec{\vec{1}} - \alpha_z^2\vec{\vec{g}}_2^{\,2}(\vec{r})}\cdot\vec{\varepsilon}_{\mathrm{r}}\varphi(\vec{r})\,, \tag{B.66.b}$$

$\varphi(\vec{r})$ étant la partie « statistique » de la densité à deux corps, définie par l'équation (III.3), p. 238.

vi) Relation de dispersion

Pour trouver la relation de dispersion, nous devons trouver les pôles de la quantité $\langle\mathcal{G}(z)\rangle = \mathrm{Tr}(\varpi\mathcal{G}(z))$. Ces pôles sont les zéros de $1/\langle\mathcal{G}(z)\rangle$. L'expression (B.34) de la résolvante dans le cas où les atomes sont discernables suggère que l'on peut écrire (du moins au voisinage du pôle)

$$\frac{1}{\langle\mathcal{G}(z)\rangle} = z - \hbar\omega_{\mathrm{r}} - \frac{N\left|\vec{\varepsilon}_{\mathrm{r}}^{\,*}\cdot\hbar\vec{\Omega}_{\vec{k}_{\mathrm{r}}\vec{\varepsilon}_{\mathrm{r}}}\right|^2}{\left(z - \hbar\omega_{\mathrm{A}} + i\hbar\frac{\Gamma}{2}\right)\left(1 + \mathcal{C}_{\text{clas.}}(z) + \mathcal{C}_{\text{quant.}}(z)\right)}, \tag{B.67}$$

avec $\mathcal{C}_{\text{clas.}}(z) \ll 1$ et $\mathcal{C}_{\text{quant.}}(z) \ll 1$.

L'expression de $\mathcal{C}_{\text{clas.}}(z)$ nous est donnée en faisant $\eta_{\mathrm{b/f}} = 0$ et en utilisant les résultats du paragraphe B.2.*a*. On trouve

$$\mathcal{C}_{\text{clas.}}(z) = \frac{1}{z - \hbar\omega_{\mathrm{A}} + i\hbar\dfrac{\Gamma}{2}}\left(R_{\text{pair}} + (N-1)R_{\text{impair}}\right). \tag{B.68}$$

Pour calculer la correction statistique, on effectue un développement de $\langle\mathcal{G}(z)\rangle$ (valable au voisinage du pôle) à partir de l'équation (B.67), et l'on compare le résultat avec l'équation (B.64), moyennée sur les impulsions atomiques. On

obtient

$$\mathcal{C}_{\text{quant.}}(z) = \frac{1}{z - \hbar\omega_{\text{A}} + i\hbar\dfrac{\Gamma}{2}} \left(\left\langle R_{\substack{\text{échange} \\ \text{impair}}} \right\rangle + (N-1) \left\langle R_{\substack{\text{échange} \\ \text{pair}}} \right\rangle \right) , \qquad \text{(B.69)}$$

les moyennes $\langle R_{\text{échange, pair}} \rangle$ et $\langle R_{\text{échange, impair}} \rangle$ étant respectivement définies par (B.66.a) et (B.66.b).

On peut maintenant vérifier que pour $z \sim \hbar\omega_{\text{A}}$, les quantités $\mathcal{C}_{\text{clas.}}(z)$ et $\mathcal{C}_{\text{quant.}}(z)$ sont bien petites devant 1. On vérifie ensuite que l'expression du pôle obtenue (*i.e.* la valeur $\hbar\omega_{\text{e}}$ de z qui annule l'expression (B.67)), vérifie bien la condition de validité de (B.64), *i.e.* $\omega_{\text{e}} - \omega_{\text{A}} \ll \omega_{\text{A}}$. Ceci justifie *a posteriori* la validité de la méthode employée.

On déduit que la relation de dispersion (B.47.a), *i.e.*

$$\boxed{\omega_{\text{e}} = c k_{\text{r}} \left(1 - \frac{\alpha_{\hbar\omega_{\text{e}}}}{2(1+\mathcal{A})} \right) ,} \qquad \text{(B.70.a)}$$

est toujours valable, mais en prenant cette fois-ci pour $\mathcal{A}$

$$\boxed{\begin{aligned} \mathcal{A} = &-\rho_0 \int \mathrm{d}^3\vec{r}\, \vec{\varepsilon}_{\text{r}}^{\,*} \cdot \alpha_{\hbar\omega_{\text{e}}} \vec{\vec{g}}_2(\vec{r}) e^{-i\vec{k}_{\text{r}}\cdot\vec{r}} \cdot \vec{\varepsilon}_{\text{r}} \varphi(\vec{r}) \\ &- \rho_0 \int \mathrm{d}^3\vec{r}\, \vec{\varepsilon}_{\text{r}}^{\,*} \cdot \frac{\alpha^2_{\hbar\omega_{\text{e}}} \vec{\vec{g}}_2^{\,2}(\vec{r}) + \alpha^3_{\hbar\omega_{\text{e}}} \vec{\vec{g}}_2^{\,3}(\vec{r}) e^{-i\vec{k}_{\text{r}}\cdot\vec{r}}}{\vec{\vec{1}} - \alpha^2_{\hbar\omega_{\text{e}}} \vec{\vec{g}}_2^{\,2}(\vec{r})} \cdot \vec{\varepsilon}_{\text{r}} \left(1 + \varphi(\vec{r}) \right) . \end{aligned}}$$

(B.70.b)

3. Le problème des termes antirésonnants

La relation de dispersion (B.70) est une relation entre k_{r} et ω_{e}. Nous savons depuis le paragraphe II.3 (p. 230) qu'il est très difficile d'extraire directement un indice d'une telle relation de dispersion obtenue dans l'approche résolvante. Néanmoins, si cette relation de dispersion est analytique (ce qui est le cas ici), on doit retrouver la relation de dispersion que l'on obtient par l'approche « champ moyen » en remplaçant ω_{e} par ω_{L} (réelle et quasi-résonnante) et k_{r} par k_{m} (complexe). Dans ce cas, l'indice de réfraction est le rapport $ck_{\text{m}}/\omega_{\text{L}}$.

Si, par cette méthode, on compare la relation de dispersion (B.70) à la relation (III.13) (p. 243) obtenue par la méthode de la hiérarchie, on constate que les deux résultat se ressemblent beaucoup... mais ne sont pas exactement les mêmes. Deux différences majeures apparaissent : d'une part, la relation (III.13) est une relation en k^2/ω^2, alors que la relation (B.70) est en ω/k. Si l'on développe la relation

(III.13) en puissances de la densité, pour obtenir une relation de la même forme que (B.70), on constate qu'il apparaît un terme d'ordre 2 en $\rho_0 \lambda_L^3$ supplémentaire, qui ne figure pas dans l'équation (B.70). Certes, ce terme ne dépend pas de la statistique, et ne nous intéresse pas vraiment, mais sa contribution est du même ordre que celle des termes statistiques.

Plus grave, les intégrales incluses dans la définition (B.70.b) de $\mathcal{A}$ contiennent le potentiel $\vec{g}_2$, qui n'est pas égal au potentiel $\vec{g}$ utilisé dans l'équation (III.13). De plus, le potentiel $\vec{g}_2$ a jusqu'ici été défini par un diagramme (équation (B.39)). Si j'écris l'intégrale correspondante, je constate que celle-ci diverge pour les grandes fréquences.

Ces différences viennent du fait que l'hamiltonien (B.14) dont je suis parti dans le calcul par la résolvante n'est pas le même que l'hamiltonien (A.42) (annexe A) utilisé pour l'approche de champ moyen. Outre le terme de contact, ce dernier ne fait pas l'approximation du champ tournant. Nous avons vu au paragraphe II.3.*b* que l'on pouvait interpréter physiquement l'approche à un photon (*i.e.* la méthode de la résolvante) en supposant que la partie réelle de la fréquence complexe ω_e est proche de résonance. Dans ces conditions la fréquence du photon incident $\vec{k}_r \vec{\varepsilon}_r$ n'a pas de raison d'être quasi-résonnante. Par conséquent, nous n'avons pas le droit de faire l'approximation du champ tournant.

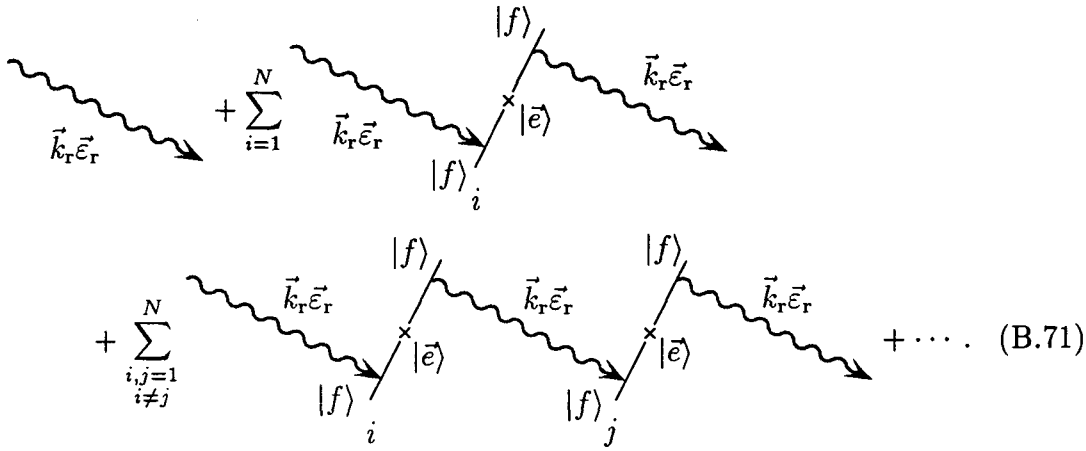
L'objet de cette section est donc de généraliser la méthode de la résolvante au cas où l'on ne fait pas l'approximation du champ tournant. Nous verrons que l'on arrive à obtenir la même relation de dispersion que celle de la méthode de la hiérarchie — moyennant il est vrai une prise en compte moins systématique des différents diagrammes.

a) Calcul sans tenir compte des interactions atomiques

i) Les diagrammes resommés

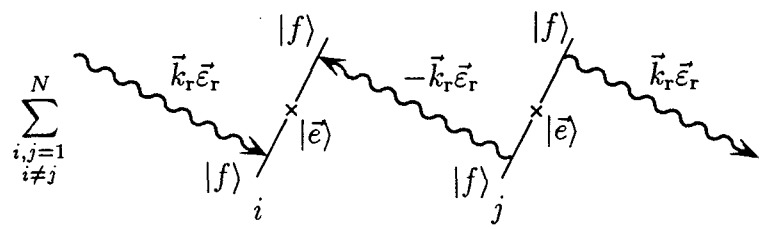
J'ai signalé dans la remarque p. 367 qu'il fallait, pour calculer l'indice, resommer tous les diagrammes cohérents (*i.e.* conservant l'impulsion de chaque

atomes). Ceci nous a conduit a calculer la somme (II.8) que je réécris ici :



(B.71)

Si l'on ne fait plus l'approximation du champ tournant, il existe un autre type de diagramme cohérent :



; (B.72)

dans le diagramme (B.72), l'atome j émet un photon dans le mode de direction opposée à celle du photon initial, tout en passant dans l'état excité. Ce photon est absorbé par l'atome i qui se désexcite. On vérifie facilement que l'impulsion de chacun des 2 atomes i et j est conservée.

Je vais donc évaluer l'élément de matrice de la résolvante en ajoutant les diagrammes du type (B.72) à la somme (B.71).

ii) Obtention de la relation de dispersion

Hamiltonien du problème. Je prendrai l'hamiltonien (A.42) que j'ai établi dans l'annexe A, et que je rappelle ici :

$$\begin{aligned}\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{N}\left[\frac{\vec{P}_i}{2M} + \left(\hbar\tilde{\omega}_A - \frac{1}{3}\delta^{(3)}(\vec{0})\frac{d^2}{\varepsilon_0}\right)|\vec{e}\rangle\cdot\langle\vec{e}|\right] + \sum_{\vec{k}\vec{\varepsilon}}\hbar ck a^\dagger_{\vec{k}\vec{\varepsilon}}a_{\vec{k}\vec{\varepsilon}} \\ -\sum_{i=1}^{N}\vec{D}_i\cdot\vec{\mathbb{E}}_\perp(\vec{R}_i) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N}\frac{\vec{D}_i\cdot\vec{D}_j\delta^{(3)}(\vec{R}_{ij})}{\varepsilon_0},\end{aligned} \tag{B.73}$$

où le champ $\vec{\mathbb{E}}_\perp$ se développe en

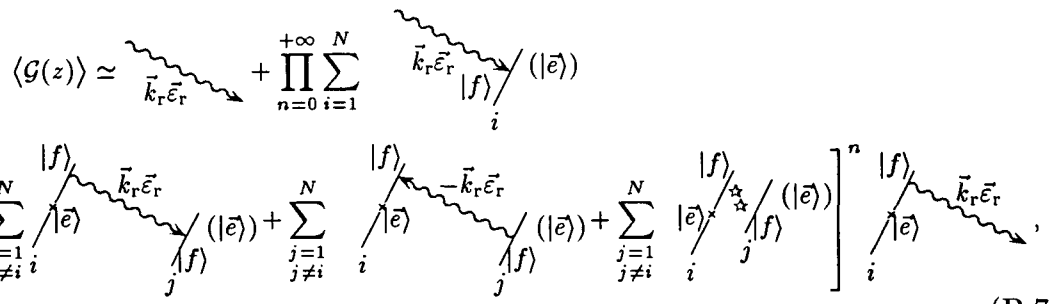
$$\vec{\mathbb{E}}_\perp(\vec{r}) = i\sum_{\vec{k}\vec{\varepsilon}}\sqrt{\frac{\hbar ck}{2\varepsilon_0 V}}\left(a_{\vec{k}\vec{\varepsilon}}\vec{\varepsilon}e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} - a^\dagger_{\vec{k}\vec{\varepsilon}}\vec{\varepsilon}e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\right). \tag{B.74}$$

Le terme $\delta^{(3)}(\vec{0})$ présent dans l'hamiltonien (B.73) apportera des corrections dans l'expression du déplacement de Lamb, que je ne détaillerai pas ici. Le dernier terme de cet hamiltonien est le terme de contact.

Sommation des diagrammes. Je souhaite calculer la quantité

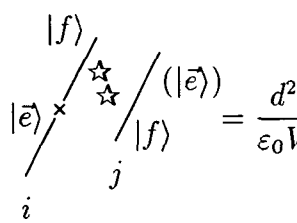
$$\left\langle \mathcal{G}(z) \right\rangle = \left\langle \{i,f\}_{i=1}^{N}, \{\vec{P}\}, \vec{k}_{\rm r}\vec{\varepsilon}_{\rm r} | \mathcal{G}(z) | \{i,f\}_{i=1}^{N}, \{\vec{P}\}, \vec{k}_{\rm r}\vec{\varepsilon}_{\rm r} \right\rangle , \qquad \text{(B.75)}$$

en resommant explicitement des diagrammes, *via* la formule (II.7). Je prends en compte tous les diagrammes cohérents résonnants et antirésonnants. Je néglige pour l'instant l'interaction entre atomes. J'obtiens l'expression



(B.76)

où le 3e terme du crochet dans (B.76) représente la contribution du terme de contact (désexcitation de l'atome i et excitation de l'atome j lorsqu'ils entrent en contact) :



$$= \frac{d^2}{\varepsilon_0 V} = \frac{3\pi\Gamma\hbar c^3}{V\omega_{\rm A}^3} , \qquad \text{(B.77)}$$

le volume de quantification V apparaissant quand on écrit la fonction δ du terme de contact en transformée de Fourier.

Tous calculs faits, on obtient à partir de l'équation (B.76) le résultat

$$\left\langle \mathcal{G}(z) \right\rangle = \frac{\left(z-\hbar ck_{\rm r}\right)\left(z-\hbar\omega_{\rm A}+i\hbar\frac{\Gamma}{2}\right)\left[1-\frac{N\left|\vec{\varepsilon}_{\rm r}^{\,*}\cdot\hbar\vec{\Omega}_{\vec{k}_{\rm r}\vec{\varepsilon}_{\rm r}}\right|^2}{z-\hbar\omega_{\rm A}+i\frac{\Gamma}{2}}\left(\frac{1}{z-\hbar ck_{\rm r}}+\frac{1}{z-\hbar ck_{\rm r}-2\hbar\tilde{\omega}_{\rm A}}\right)-\frac{3\pi N\Gamma\hbar c^3}{V\omega_{\rm A}^3\left(z-\hbar\omega_{\rm A}+i\frac{\Gamma}{2}\right)}\right]+N\left|\vec{\varepsilon}_{\rm r}^{\,*}\cdot\hbar\vec{\Omega}_{\vec{k}_{\rm r}\vec{\varepsilon}_{\rm r}}\right|^2}{\left(z-\hbar ck_{\rm r}\right)^2\left(z-\hbar\omega_{\rm A}+i\hbar\frac{\Gamma}{2}\right)\left[1-\frac{N\left|\vec{\varepsilon}_{\rm r}^{\,*}\cdot\hbar\vec{\Omega}_{\vec{k}_{\rm r}\vec{\varepsilon}_{\rm r}}\right|^2}{z-\hbar\omega_{\rm A}+i\frac{\Gamma}{2}}\left(\frac{1}{z-\hbar ck_{\rm r}}+\frac{1}{z-\hbar ck_{\rm r}-2\hbar\tilde{\omega}_{\rm A}}\right)-\frac{3\pi N\Gamma\hbar c^3}{V\omega_{\rm A}^3\left(z-\hbar\omega_{\rm A}+i\frac{\Gamma}{2}\right)}\right]} \qquad \text{(B.78)}$$

Relation de dispersion. La relation de dispersion s'obtient en calculant les pôles de l'élément de matrice de la résolvante, c'est-à-dire les valeurs de z qui annulent son dénominateur. On constate que l'équation (B.78) a 3 pôles simples ($z = \hbar c k_r$ n'est pas un pôle double car annule aussi le numérateur). Les deux pôles $z = \hbar c k_r$ et $z = \hbar\omega_A - i\hbar\frac{\Gamma}{2}$ correspondent respectivement à la propagation d'un photon pur et d'un atome excité pur : ils ne nous intéressent pas. Le troisième pôle, dû au couplage photon/atome, se calcule en annulant le crochet du dénominateur de (B.78). On obtient ainsi la relation de dispersion (en faisant $z = \hbar\omega_e$)

$$\boxed{1 + \frac{\alpha_{\hbar\omega_e}\rho_0 c k_r}{2}\left(\frac{1}{\omega_e - c k_r} + \frac{1}{\omega_e - c k_r - 2\tilde{\omega}_A}\right) + \alpha_{\hbar\omega_e}\rho_0 = 0\,,} \qquad \text{(B.79)}$$

où je rappelle que la quantité $\alpha_{\hbar\omega_e}$ est définie par l'équation (B.48).

Nous savons que, pour comparer la relation de dispersion (B.79) à la relation (II.38) obtenue par l'approche de champ moyen, il convient de remplacer k_r par k_m complexe, et ω_e par ω_L, réel et quasi-résonnant. Dans ces conditions, l'expression $\omega_L - c k_m - 2\tilde{\omega}_A$ figurant au dénominateur peut être remplacée par $-c k_m - \omega_L$ [1]. On obtient alors la relation de dispersion

$$c^2 k_m^2 = \omega_L^2(1 + \alpha\rho_0)\,, \qquad \text{(B.80)}$$

qui est exactement la relation de dispersion (II.38).

iii) Interprétation physique

La prise en compte des diagrammes antirésonnants nous a permis d'obtenir la relation de dispersion (B.79), dont on a vu qu'elle est équivalente à la relation en c^2k^2/ω^2 (B.80). Si l'on ne prend pas en compte ces diagrammes antirésonnants, on obtient (à l'ordre 1 en densité) la relation (II.16), que l'on peut réécrire en

$$c k_r = \omega_e\left(1 - \frac{c k_r}{\omega_e}\frac{\alpha_{\hbar\omega_e}}{2}\right)\,. \qquad \text{(B.81)}$$

On voit donc que c'est une relation en ck/ω.

Dans ce paragraphe je vais revenir à la méthode « champ moyen », dans le cas où le milieu remplit un demi-espace. Je vais montrer que si l'on écrit la continuité

1. On peut être surpris que ce soit la fréquence atomique non renormalisée qui apparaît dans la relation de dispersion (B.79) : je n'ai en fait pas tenu compte, par souci de simplicité, des diagrammes de renormalisation qui apparaissent lors de l'échange du photon antirésonnant entre les atomes i et j. Si j'en avais tenu compte, il aurait aurait fallu remplacer $2(\omega_A - i\Gamma/2)$ dans le 2e dénominateur de (B.79) par $2\omega_L$, et donc oublier totalement la partie imaginaire. On peut en fait s'en tirer grâce au fait que ck_m possède aussi une partie imaginaire, qui, si la densité atomique est suffisamment forte, est très supérieure à Γ.

du champ en $z = 0$ (à l'interface vide/matière) sans tenir compte de l'existence d'une onde réfléchie, alors on trouve une relation de dispersion en ck/ω analogue à (B.81). Il existe donc une analogie avec la situation physique de la méthode à un photon : la diffusion cohérente vers l'arrière du photon induite par les transitions antirésonnantes (formule (B.72)) peut en effet être assimilée à une réflexion du photon incident. Dans les deux méthodes, l'oubli du terme de réflexion entraîne donc l'obtention (incorrecte) d'une relation de dispersion en ck/ω.

Je reviens donc à l'équation (II.30). Je rappelle que, dans le chapitre II, nous nous étions placés dans le cas où le milieu remplit le demi-espace $z \geqslant 0$, et avions calculé la relation de dispersion en appliquant à (II.30) l'opérateur $\Delta + k_{\mathrm{L}}^2$.

Une méthode équivalente consiste à calculer l'intégrale figurant au second membre de (II.30), et donc d'intégrer sur ce demi-espace $z \geqslant 0$. Le calcul de cette intégrale a déjà été fait au paragraphe III.3.*d.ii* (éq. (III.58) p. 258). On obtient, en remplaçant $\mathcal{D}(z')$ par $\mathcal{D}_0 e^{ik_{\mathrm{m}}z'}$

$$\vec{\mathcal{E}}_0 e^{ik_{\mathrm{m}}z} = \vec{E}_{\mathrm{L}} e^{ik_{\mathrm{L}}z} + \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\vec{\mathcal{D}}_0 \left(\frac{k_{\mathrm{L}}^2 e^{ik_{\mathrm{m}}z}}{k_{\mathrm{m}}^2 - k_{\mathrm{L}}^2} - \frac{k_{\mathrm{L}} e^{ik_{\mathrm{L}}z}}{2(k_{\mathrm{m}} - k_{\mathrm{L}})} \right) . \tag{B.82}$$

La relation de dispersion s'obtient en annulant dans (B.82) la composante en $e^{ik_{\mathrm{L}}z}$. On doit donc vérifier la relation

$$\vec{E}_{\mathrm{L}} = \rho_0 \frac{\alpha \vec{\mathcal{E}}_0}{2} \frac{k_{\mathrm{L}}}{k_{\mathrm{m}} - k_{\mathrm{L}}} , \tag{B.83}$$

où l'on a utilisé la relation (II.37), valable au premier ordre en densité, *i.e.*

$$\vec{\mathcal{D}}_0 = \alpha \varepsilon_0 \vec{\mathcal{E}}_0 .$$

Dans ce qui suit, je vais raisonner sur des échelles de longueur macroscopiques (c'est-à-dire très supérieures à la longueur d'onde optique). Effectuons la supposition que, sur de telles échelles macroscopiques, le champ électrique est continu à l'interface $z = 0$. Alors $\vec{\mathcal{E}}_0 = \vec{E}_{\mathrm{L}}$, et on tire de (B.83) la relation

$$\frac{k_{\mathrm{m}}}{k_{\mathrm{L}}} = 1 + \frac{\alpha \rho_0}{2} . \tag{B.84}$$

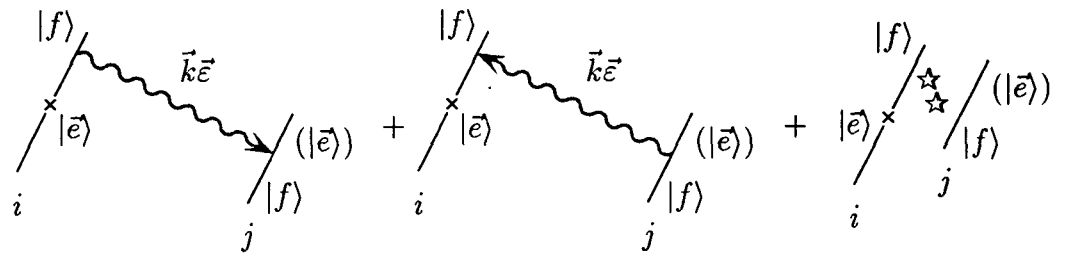
La relation (B.84) est en toute rigueur inexacte : on n'a pas le droit d'écrire la continuité du champ en $z = 0$. Nous savons (voir § III.3.*d*) que cette discontinuité à l'échelle macroscopique est en fait une variation rapide du champ sur une distance de quelques longueurs d'onde optique. Pour rétablir la continuité du champ macroscopique il faut introduire une onde réfléchie, c'est à dire un champ diffusé de façon cohérente vers l'arrière, par les atomes situés au voisinage de l'interface (ils oscillent tous en phase). On retrouve de cette façon la relation de dispersion correcte en c^2k^2/ω^2.

b) Prise en compte des interactions et de la statistique

Pour tenir compte des interactions et de la statistique, on raisonne comme au paragraphe (B.2) : en plus des diagrammes cohérents, on resomme tous les diagrammes d'échange de photons entre deux atomes d'une paire.

La différence est que nous devons aussi prendre en compte l'échange d'un photon antirésonnant [194, app. A], ainsi que la contribution du terme de contact. Je pose donc

$$\alpha_z \vec{\vec{g}}_z(\vec{r}) = \sum_{\vec{k}\vec{\varepsilon}} \Bigg[$$



$$\Bigg] e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}, \qquad \text{(B.85)}$$

α_z étant défini par l'équation (B.40). Analytiquement, la formule (B.85) donne

$$\vec{\vec{g}}_z(\vec{r}) = -\sum_{\vec{k}\vec{\varepsilon}} \frac{\omega}{2V} \vec{\varepsilon} \otimes \vec{\varepsilon} \left(\frac{e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{z - \hbar ck - 2\hbar\tilde{\omega}_A} + \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{z - \hbar ck} \right) - \delta^{(3)}(\vec{r}) . \qquad \text{(B.86)}$$

On obtient alors la relation de dispersion suivante :

$$1 + \frac{\alpha_{\hbar\omega_e}\rho_0 ck_r}{2(1+\mathcal{A})} \left(\frac{1}{\omega_e - ck_r} + \frac{1}{\omega_e - ck_r - 2\tilde{\omega}_A} \right) + \frac{\alpha_{\hbar\omega_e}\rho_0}{1+\mathcal{A}} = 0 , \qquad \text{(B.87)}$$

$\mathcal{A}$ étant défini par l'équation (B.70.b) où l'on remplace $\vec{\vec{g}}_2(\vec{r})$ par $\vec{\vec{g}}_{\hbar\omega_e}(\vec{r})$.

On peut vérifier en faisant le remplacement $(k_r, \omega_e) \longrightarrow (k_m, \omega_L)$ que l'on retrouve, si l'on se limite à l'ordre 2 en densité, la relation de dispersion (III.13).

Deux remarques s'imposent au niveau de ce remplacement.

Tout d'abord, l'équivalence entre une relation de dispersion en (k_r, ω_e) et une relation en (k_m, ω_L) ne marche que si la fonction vérifie certaines propriétés asymptotiques permettant de passer d'une approche à l'autre par le théorème des résidus (voir § II.3.*a*). Ces propriétés me paraissent difficiles à vérifier dans le cas de la relation de dispersion à l'ordre 2.

Ensuite, on devrait en toute rigueur introduire une énergie renormalisée (avec sa partie imaginaire) dans le premier dénominateur de l'équation (B.86) définissant le potentiel d'interaction $\vec{\vec{g}}_z$. Si on le fait, le calcul devient problématique car on ne peut plus intégrer par les résidus : la partie positive de l'intégrale sur $\omega_{\vec{k}}$ admet alors pour pôle $\omega = \hbar\omega_L$, tandis que la partie négative admet $\omega = \hbar\omega_L - 2\hbar(\omega_A - i\Gamma/2)$.

Toutefois, nous verrons dans l'annexe C que le remplacement dans $\vec{\vec{g}}$ du pôle $\omega = \omega_L$ par $\omega = \omega_L(1 + \rho_0\alpha/2)$ (dans ce cas bien sûr le pôle est le même quel que soit le signe de ω) ne modifie pas le résultat à l'ordre 2 en densité. Or, la modification introduite ici $(\Delta E_A - i\Gamma/2)$ est beaucoup plus petite, pour des densités raisonnables, que $\alpha\rho_0\omega_L$.

c) Les défauts de la méthode

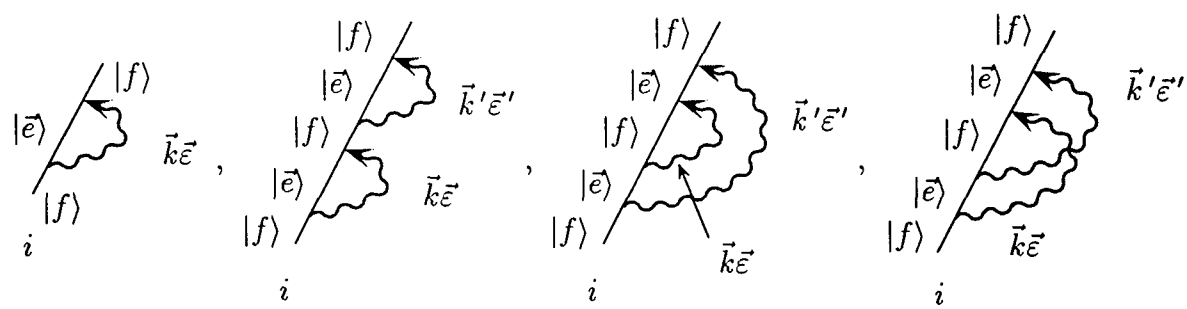
La méthode que je viens d'exposer permet, grâce à l'introduction de termes anti-résonnants, de retrouver exactement la relation de dispersion obtenue dans l'approche « champ moyen ». Toutefois, j'admets que la rigueur de cette méthode n'est pas totale. Plus précisément, deux points posent problème.

i) La prise en compte de tous les diagrammes

Le premier défaut de la méthode tient dans la nature de mon raisonnement : je suis parti d'un résultat (rigoureux) obtenu avec l'approximation du champ tournant, puis j'ai ajouté quelques diagrammes antirésonnants de manière à obtenir (un peu par miracle) le résultat que je souhaitais obtenir. Aucune comparaison systématique entre les diagrammes entrant en jeu et ceux qui sont négligés n'a été faite.

Le problème doit normalement être traité en utilisant des *états asymptotiques exacts*, selon la méthode présentée dans [119, p. 217]. Lorsque le photon incident $\vec{k}_r\vec{\varepsilon}_r$ est « loin » du milieu[1], les atomes interagissent tout de même avec le champ électromagnétique ; des excitations peuvent en effet apparaître spontanément, accompagnées d'émissions de photons. Il faut donc calculer l'état du système compte tenu de ces interactions (état asymptotique exact), puis étudier la propagation du photon $\vec{k}_r\vec{\varepsilon}_r$ dans le milieu en appliquant la théorie de la diffusion sur cet état asymptotique exact (*i.e.* en remplaçant l'état « nu » par un état renormalisé où les atomes sont entourés d'un nuage de photons virtuels).

Pour calculer l'état asymptotique exact, deux types de diagrammes sont à distinguer. Tout d'abord, des diagrammes faisant intervenir un seul atome, tel que ceux-ci :



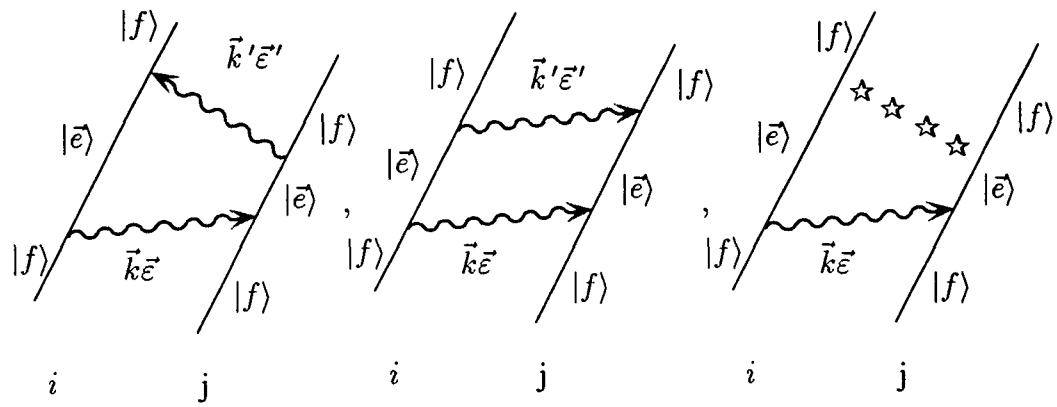
(B.88)

La prise en compte de tels diagrammes aboutit à une renormalisation du niveau fondamental $|f\rangle$ de l'atome. Si l'on néglige les deux derniers types de diagrammes de l'équation (B.88), on trouve que la transition entre $|f\rangle$ et $|\vec{e}\rangle$ est

1. Je raisonne ici en utilisant l'analogie entre l'évolution d'un photon dans un milieu infini que l'on a calculé ici par l'approche résolvante, et la diffusion d'un paquet d'ondes sur un milieu fini (p. 233).

modifiée d'une quantité (complexe) définie par l'équation (A.53.b), au lieu de l'équation (B.11.b) qui n'était pas en fait l'expression correcte[1].

D'autres diagrammes font intervenir plusieurs atomes: en voici quelques exemples:



De tels diagrammes sont responsables des interactions entre atomes dans leur état fondamental. J'ai dit au début du chapitre III que l'on pouvait négliger ce type d'interactions dans la limite de faible densité, car leur portée est beaucoup plus courte que celle des l'interactions que j'ai prises en compte entre un atome dans le fondamental et un autre dans l'état excité[2].

On voit donc que si l'on prend l'expression correcte (A.53.b) pour le déplacement de Lamb, et si la densité est suffisamment faible pour pouvoir négliger les interactions entre atomes dans leur état fondamental, alors l'état asymptotique exact est bien l'état que nous avons utilisé (*i.e.* où tous les atomes sont dans l'état fondamental avec un impulsion déterminée, et où il n'y a pas de photon).

ii) L'approximation de l'atome à deux niveaux

Dans toute cette annexe, j'ai négligé la contribution des niveaux supérieurs de l'atome, même lorsque j'ai cessé de faire l'approximation du champ tournant. Or chacun sait que ces deux approximations sont indissociables.

Dans l'approche « champ moyen », les autres niveaux ne contribuent pas, parce que le laser est quasi-résonnant avec la transition. Par contre, dans l'approche diagrammatique où le photon $\vec{k}_{\mathrm{r}}\vec{\varepsilon}_{\mathrm{r}}$ n'est pas résonnant avec la transition, les autres niveaux vont contribuer de façon non négligeable à la relation de dispersion.

En fait, ceci n'est pas très grave dans la mesure où la situation physique correspondant à l'approche à un photon ne nous intéresse guère. Pour nous ramener au cas qui nous intéresse, il faut faire l'extrapolation $(k_{\mathrm{r}}, \omega_{\mathrm{e}} \to k_{\mathrm{m}}, \omega_{\mathrm{L}})$: la

1. On peut constater que l'équation (A.53.b) diverge moins que l'équation (B.11.b) (divergence logarithmique au lieu d'une divergence en ω_M^4, où ω_M est la fréquence de coupure). Pour supprimer totalement la divergence, il faudrait tenir compte d'effets relativistes.

2. Si on tenait compte de ces interactions, on trouverait que la densité à deux corps serait modifiée lorsque deux atomes sont proches, et ce même en l'absence d'effets statistiques.

contribution des termes dus aux autre niveaux deviendra alors négligeable. Par contre, l'interprétation du paragraphe II.3.*b*, dans lequel je calculais l'absorption d'un paquet d'ondes, dans une situation physique analogue à celle de l'approche à un photon, devient plus difficile à justifier. On peut toutefois s'en tirer en se restreignant à des atomes dont l'essentiel de la force d'oscillateur serait celle de la première transition.

4. Conclusion

J'ai donc présenté une méthode alternative pour calculer l'indice de réfraction d'un milieu d'atomes froids, lorsque l'on tient compte des interactions et des effets quantiques collectifs. Cette méthode offre l'avantage d'être interprétable en termes de diagrammes. On peut aisément « visualiser » les processus entrant en jeu (chose qui s'est avérée très utile, notamment pour généraliser le calcul au cas de la section efficace différentielle de diffusion). Le fait de pouvoir travailler sur un milieu infini est aussi un avantage (on est ainsi débarrassé des effets de bord).

Dans le cadre de l'approximation du champ tournant, une prise en compte systématique des diagrammes a été faite. Nous avons vu qu'il faut resommer tous les diagrammes cohérents, c'est-à-dire ceux où le système repasse par l'état initial. Ensuite, selon l'ordre que l'on veut atteindre dans le développement du Viriel, on ressomme tous les diagrammes à 1, 2 atomes...

Malheureusement l'approximation du champ tournant ne conduit pas à la relation de dispersion correcte, tout simplement parce que ses conditions de validité ne sont pas vérifiées. Le calcul diagrammatique sans cette approximation est plus délicat quant-au choix des diagrammes à retenir. Toutefois il conduit à la bonne relation de dispersion, *i.e.* à la même que celle obtenue par les autres méthodes.

Annexe C

Renormalisation par la méthode de Barrat

Le calcul d'indice de réfraction par la méthode de la hiérarchie nécessite de remplacer, à l'intérieur de la formule (III.12.b), le vecteur d'onde complexe complexe $\vec{k}_m$ par le vecteur d'onde réel $\vec{k}_L$ du laser (au niveau de l'exponentielle complexe). Le même remplacement intervient lorsqu'on fait le calcul par la méthode de la résolvante. Un tel remplacement est nécessaire pour que l'intégrale converge, la seule justification rigoureuse de cette approximation étant donnée par le développement en puissances de la densité, qui est présenté au paragraphe III.3 (p. 252).

L'objet de cette annexe est de revenir sur le remplacement, et de montrer qu'il n'était pas nécessaire de lui donner une grande importance. Je ne prétends toutefois pas résoudre le problème rigoureusement, que ce soit par la méthode de la résolvante ou par celle de la hiérarchie.

Ma présentation est basée sur l'utilisation d'un potentiel *renormalisé*, obtenu en tenant compte du fait que les photons échangés par les atomes d'une paire se propagent dans un milieu d'indice différent de 1. Lorsque, dans la relation de dispersion (III.12), on utilise ce potentiel à la place du potentiel $\vec{g}$, il n'est plus nécessaire d'effectuer le remplacement $\vec{k}_m \to \vec{k}_L$ que je viens d'évoquer. L'indice déduit de cette nouvelle relation de dispersion est (numériquement) très proche de celui obtenu avec la relation (III.13), les corrections étant d'ordre 3 en $\rho_0 \lambda_L^3$.

Je commencerai donc (§ C.1.*a*) par établir l'expression du potentiel renormalisé. J'utiliserai pour cela l'approche « résolvante ». Au paragraphe C.2, je montrerai que ce potentiel renormalisé apparaît naturellement avec la méthode de la hiérarchie, lorsque l'on fait une approximation plus fine que (III.7). Néanmoins la relation de dispersion obtenue n'est pas la même. Je terminerai (§ C.3, p. 390) par une comparaison numérique des différentes relations de dispersion, et montrerai qu'il est raisonnable de les confondre à l'ordre qui nous intéresse.

1. Calcul par la méthode de la résolvante

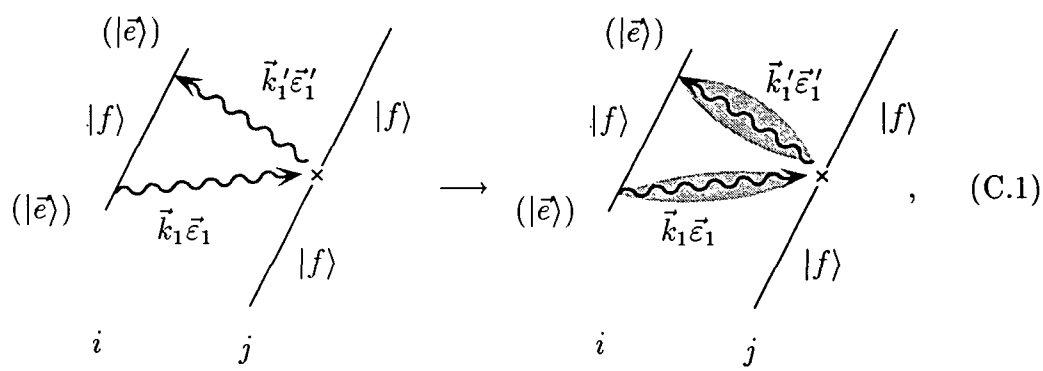
a) Introduction

Le calcul d'indice que nous avons effectué prend en compte les interactions de Van der Waals par paires d'atomes. Il sous-entend que deux atomes interagissent uniquement lorsqu'ils sont « proches » (*i.e.* que leur distance est inférieure ou de l'ordre de λ_L). Toutefois, lorsque, dans le résultat (III.31) (intégré sur les angles), on étend jusqu'à l'infini l'intégrale, qui porte sur la distance entre les deux atomes d'une paire, on trouve qu'il y a un terme qui oscille sans s'amortir.

La solution à ce problème vient du fait que lorsque les deux atomes de la paire s'éloignent, il devient hautement improbable qu'ils échangent un photon sans que celui-ci soit intercepté par un atome tiers. Pour traiter le problème, il faudrait donc introduire une « distance de coupure ». Nous allons voir ici que cette distance de coupure apparaît naturellement lorsque l'on tient compte des diagrammes dans lesquels le photon échangé est absorbé et réémis par les atomes se trouvant « sur son chemin ».

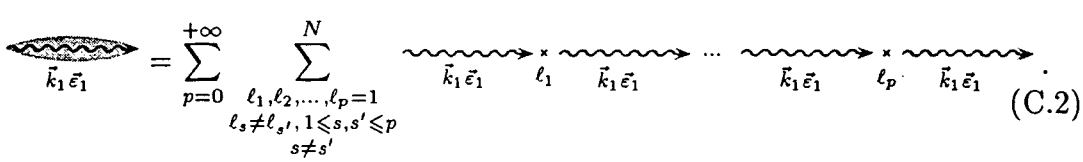
b) Calcul du potentiel renormalisé

Revenons au calcul d'indice par la méthode de la résolvante (annexe B), et remplaçons les diagrammes d'échanges de photons (tels qu'ils apparaissent dans la formule (B.85)) par des diagrammes renormalisés, *i.e.*



(C.1)

où



$$= \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{\substack{\ell_1,\ell_2,\ldots,\ell_p=1 \\ \ell_s\neq\ell_{s'},\,1\leqslant s,s'\leqslant p \\ s\neq s'}}^{N} \qquad (C.2)$$

On suppose que les atomes intermédiaires ℓ_n visités par le photon ne sont jamais deux fois les mêmes. Par conséquent, le photon reste dans le même mode tant qu'il n'a pas rejoint l'un des atomes i ou j de la paire. La resommation des

diagrammes de la formule (C.2) conduit au potentiel renormalisé[1]

$$\vec{\vec{g}}_{\mathrm{B}} = \sum_{\vec{k}\vec{\varepsilon}} \frac{1}{V} \frac{\vec{\vec{g}}_{\vec{k}\vec{\varepsilon}}(\vec{r})}{\vec{\vec{1}} - \alpha\rho_0 \vec{\vec{g}}_{\vec{k}\vec{\varepsilon}}(\vec{r})}, \tag{C.3.a}$$

où

$$\vec{\vec{g}}_{\vec{k}\vec{\varepsilon}}(\vec{r}) = \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{\omega_{\vec{k}}^2 - (\omega_{\mathrm{L}} + i\varepsilon')^2} \left[\omega_{\vec{k}}^2 \left(\vec{\varepsilon}\otimes\vec{\varepsilon} - \vec{\vec{1}}\right) + \omega_{\mathrm{L}}^2 \vec{\vec{1}}\right]. \tag{C.3.b}$$

J'ai tenu compte dans (C.3) des termes antirésonnants et du terme de contact. On remplace la somme sur $\vec{k}$ par une intégrale, pour aboutir au résultat

$$\vec{\vec{g}}_{\mathrm{B}}(\vec{r}) = \frac{1}{1+\alpha\rho_0} \left\{ -\frac{1}{3}\vec{\vec{1}}\delta^{(3)}(\vec{r}) - \frac{k_{\mathrm{c}}^3}{4\pi} e^{ik_{\mathrm{c}}r} \left[\left(-\frac{1}{k_{\mathrm{c}}r} - \frac{i}{(k_{\mathrm{c}}r)^2} + \frac{1}{(k_{\mathrm{c}}r)^3} \right) \vec{\vec{1}} \right.\right.$$
$$\left.\left. + \left(\frac{1}{k_{\mathrm{c}}r} + \frac{3i}{(k_{\mathrm{c}}r)^2} - \frac{3}{(k_{\mathrm{c}}r)^3} \right) \frac{\vec{r}\otimes\vec{r}}{r^2} \right] \right\}, \tag{C.4}$$

où $k_{\mathrm{c}}^2 = k_{\mathrm{L}}^2(1+\alpha\rho_0)$, et $\Im\mathrm{m}(k_{\mathrm{c}}) \geqslant 0$.

c) *Interprétation*

La renormalisation (C.1) a été introduite pour la première fois par Jean-Pierre Barrat [228, 229], puis par Alain Omont [230]. Les calculs étaient alors effectués en représentation $\vec{R}$. On tenait compte des atomes situés au voisinage du segment de droite joignant les deux atomes de la paire. Pour parvenir au résultat, il était nécessaire d'effectuer une approximation de type phase stationnaire [231, app. B], et de supposer le potentiel scalaire.

Nous effectuons ici le calcul en représentation $\vec{P}$, avec un potentiel vectoriel. Nous ne faisons aucune hypothèse sur la position des atomes intermédiaires (nous imposons seulement au photon de ne pas passer deux fois par le même atome), et parvenons à un résultat équivalent à celui de Barrat sans aucune approximation : ceci peut donc sembler un peu magique.

En fait, nous perdons en compréhension physique ce que nous avons gagné en exactitude mathématique. Dans la mesure où nous faisons contribuer un grand nombre d'atomes, nous ne comprenons plus très bien pourquoi deux d'entre eux (ceux de la paire) doivent jouer un rôle particulier, et notamment pourquoi nous interdisons au photon de passer deux fois par l'un des autres atomes. En fait, il faut garder à l'esprit les hypothèses du calcul de Barrat : ce sont les atomes placés sur le segment joignant les deux atomes de la paire et eux seuls que nous faisons contribuer, et le photon les « visite » dans l'ordre dans lequel ils sont placés sur ce segment (mais en représentation $\vec{P}$, rien ne permet de distinguer ces atomes des autres).

1. Pour ce calcul je prends $z = \hbar(\omega_{\mathrm{L}} + i\varepsilon')$. Cela ne change en rien le raisonnement, et permet d'obtenir directement le résultat correspondant à l'approche « champ moyen » ($\omega = \omega_{\mathrm{L}}$ réel et $k = k_{\mathrm{m}}$ complexe).

d) Relation de dispersion

On obtient la relation de dispersion en remplaçant $\vec{\vec{g}}$ par $\vec{\vec{g}}_{\rm B}$ dans l'équation (III.12). On obtient

$$\frac{k_{\rm m}^2}{k_{\rm L}^2} = 1 + \frac{\alpha\rho_0}{1+\mathcal{A}}\,, \tag{C.5.a}$$

où

$$\mathcal{A} = -\alpha\rho_0 \int \mathrm{d}^3\vec{r}_1\, \vec{\varepsilon}_{\rm L}{}^* \cdot \vec{\vec{g}}_{\rm B}(\vec{r}_1) \cdot \vec{\varepsilon}_{\rm L}\varphi(\vec{r}_1) e^{-i\vec{k}_{\rm m}\cdot\vec{r}_1}$$
$$- \rho_0 \int \mathrm{d}^3\vec{r}_1\, \vec{\varepsilon}_{\rm L}{}^* \cdot \left[\frac{\alpha^2\vec{\vec{g}}_{\rm B}{}^2(\vec{r}_1) + \alpha^3\vec{\vec{g}}_{\rm B}{}^3(\vec{r}_1)e^{-i\vec{k}_{\rm m}\cdot\vec{r}_1}}{\vec{\vec{1}} - \alpha^2\vec{\vec{g}}_{\rm B}{}^2(\vec{r}_1)}\right] \cdot \vec{\varepsilon}_{\rm L}\left(1+\varphi(\vec{r}_1)\right)\,. \tag{C.5.b}$$

On voit qu'il n'est plus besoin de remplacer $\vec{k}_{\rm m}$ par $\vec{k}_{\rm L}$ dans les exponentielle, car les $\vec{\vec{g}}_{\rm B}$ contiennent une exponentielle complexe venant compenser les divergences.

2. La renormalisation par la méthode de la hiérarchie

Nous avons donc monté en utilisant la méthode de la résolvante qu'il était possible, *via* la prise en compte de diagrammes faisant intervenir un grand nombre d'atomes, d'obtenir une relation de dispersion où il n'est plus besoin de remplacer $k_{\rm m}$ par $k_{\rm L}$, et dans laquelle intervient un potentiel d'interaction renormalisé.

Dans ce paragraphe, je montrerai qu'il est possible de faire apparaître ce même potentiel renormalisé avec la méthode de la hiérarchie, à condition de traiter les contributions de $\vec{\mathcal{D}}(\vec{r}''/\vec{r},\vec{r}')$ de façon plus fine qu'au chapitre III. Néanmoins, je n'ai pas su retrouver la relation de dispersion (C.5) par cette méthode. En outre, je ne sais faire le calcul que dans le cas d'atomes discernables.

Ce paragraphe n'a donc pas la prétention de calculer l'indice par la méthode de la hiérarchie de façon plus rigoureuse qu'au chapitre III, mais simplement de localiser la source de nos problèmes de convergence: le mauvais traitement des termes à trois atomes. Je rappelle encore une fois que seul le développement en puissances de la densité (§ III.3, p. 252) est en mesure de nous conduire rigoureusement au résultat.

a) Ansatz *sur le terme à 3 atomes*

Revenons à l'équation (III.6.b), et plaçons-nous dans le cas de « boltzons » (*i.e.* $\rho^{\rm II}(\vec{r},\vec{r}') = \rho(\vec{r})\rho(\vec{r}')$ et $\rho^{\rm III}(\vec{r},\vec{r}',\vec{r}'') = \rho(\vec{r})\rho(\vec{r}')\rho(\vec{r}'')$. Je postule alors l'équation suivante:

$$\vec{\mathcal{D}}(\vec{r}''/\vec{r},\vec{r}') = \vec{\mathcal{D}}(\vec{r}''/\vec{r}) + \vec{\mathcal{D}}(\vec{r}''/\vec{r}') - \vec{\mathcal{D}}(\vec{r}'')\,. \tag{C.6}$$

On se convainc facilement que l'*ansatz* (C.6) est vérifié dès que $\vec{r}$, $\vec{r}'$ et $\vec{r}''$ ne sont pas tous trois dans un même cube de côte λ_L (par contre, deux de ces points peuvent être plus proches que λ_L à condition que le troisième soit beaucoup plus loin). L'identité (C.6) est donc une nouvelle façon d'exprimer le développement du Viriel, dans le cadre duquel nous avons effectué tous nos calculs.

Je définis maintenant la quantité suivante

$$\vec{\mathcal{C}}(\vec{r}'/\vec{r}) = \vec{\mathcal{D}}(\vec{r}'/\vec{r}) - \vec{\mathcal{D}}(\vec{r}')\,. \tag{C.7}$$

L'équation (III.6.b) combinée avec l'*ansatz* (C.6) donne

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{C}}(\vec{r}'/\vec{r}) - \alpha\vec{\vec{g}}(\vec{r}'-\vec{r})\cdot\vec{\mathcal{C}}(\vec{r}/\vec{r}') &= \alpha\vec{\vec{g}}(\vec{r}'-\vec{r})\cdot\vec{\mathcal{D}}(\vec{r}) \\ &+ \int_{\text{milieu}} \mathrm{d}^3\vec{r}''\rho(\vec{r}'')\alpha\vec{\vec{g}}(\vec{r}'-\vec{r}'')\cdot\left(\vec{\mathcal{C}}(\vec{r}''/\vec{r}) - \alpha\vec{\vec{g}}(\vec{r}''-\vec{r})\cdot\vec{\mathcal{C}}(\vec{r}/\vec{r}'')\right) \\ &+ \int_{\text{milieu}} \mathrm{d}^3\vec{r}''\rho(\vec{r}'')\alpha\vec{\vec{g}}(\vec{r}'-\vec{r}'')\cdot\alpha\vec{\vec{g}}(\vec{r}''-\vec{r})\cdot\vec{\mathcal{C}}(\vec{r}/\vec{r}'')\,. \end{aligned} \tag{C.8}$$

Dans la suite, je négligerai la dernière ligne de l'équation (C.8) : les deux fonctions $\vec{\vec{g}}$ qui y sont présentes favorisent en effet le cas où $\vec{r}$ et $\vec{r}'$ sont tous deux proches de $\vec{r}''$ (je ne sais pas justifier plus rigoureusement cette approximation).

b) Relation de dispersion

La définition (C.3.a) du potentiel renormalisé n'est en fait valable que lorsque le milieu remplit tout l'espace. Dans le cas d'un milieu fini, il faut écrire

$$\vec{\vec{g}}_B(\vec{r}',\vec{r}) = \vec{\vec{g}}(\vec{r}'-\vec{r}) + \int_{\text{milieu}} \mathrm{d}^3\vec{r}''\rho(\vec{r}'')\alpha\vec{\vec{g}}(\vec{r}',\vec{r}'')\cdot\vec{\vec{g}}_B(\vec{r}''-\vec{r})\,. \tag{C.9}$$

Une transformée de Fourier permet de passer de (C.9) à (C.3.a) dans le cas d'un milieu infini ($\vec{\vec{g}}_B(\vec{r}',\vec{r})$ ne dépend alors que de $\vec{r}-\vec{r}'$). Je rappelle que la relation (C.9) coïncide avec l'équation de Dyson (V.27) à l'ordre le plus bas en densité.

On vérifie alors aisément qu'une solution de (C.8) (lorsqu'on effectue l'approximation énoncée plus haut) est

$$\vec{\mathcal{C}}(\vec{r}'/\vec{r}) - \alpha\vec{\vec{g}}(\vec{r}'-\vec{r})\cdot\vec{\mathcal{C}}(\vec{r}/\vec{r}') = \alpha\vec{\vec{g}}_B(\vec{r}',\vec{r})\cdot\vec{\mathcal{D}}(\vec{r})\,. \tag{C.10}$$

On résout l'équation (C.10) en échangeant les rôles de $\vec{r}$ et $\vec{r}'$, de façon à obtenir une seconde équation. On obtient finalement l'expression suivante pour $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A} = -\rho_0 \int \mathrm{d}^3\vec{r}_1\,\vec{\varepsilon}_L^{\,*}\cdot\left[\frac{\alpha\vec{\vec{g}}(\vec{r}_1)\cdot\alpha\vec{\vec{g}}_B(\vec{r}_1) + \alpha^2\vec{\vec{g}}^{\,2}(\vec{r}_1)\cdot\alpha\vec{\vec{g}}_B(\vec{r}_1)e^{-i\vec{k}_m\cdot\vec{r}_1}}{\vec{\vec{1}} - \alpha^2\vec{\vec{g}}^{\,2}(\vec{r}_1)}\right]\cdot\vec{\varepsilon}_L\,, \tag{C.11}$$

où j'ai étendu l'intégrale sur tout l'espace (en me plaçant loin des bords et en supposant la densité uniforme, cas dans lequel le tenseur $\vec{\vec{g}}_B(\vec{r},\vec{r}')$ est symétrique et ne dépend que de $\vec{r}-\vec{r}'$).

Plusieurs remarques peuvent être faites à propos de la relation de dispersion (C.11) :

- tout d'abord, la relation (C.11) n'est pas la même que la relation (C.5) : dans la relation (C.11), les potentiels ne sont pas tous renormalisés ;
- comme dans la relation (C.5), le potentiel renormalisé introduit une exponentielle complexe venant partiellement compenser la divergence du terme en $e^{i\vec{k}_m \cdot \vec{r}_1}$.

La partie imaginaire de l'argument de cette exponentielle n'est cependant pas suffisante pour compenser totalement la divergence. Le potentiel renormalisé fait en effet intervenir la quantité k_c, définie par

$$k_c^2 = k_L^2(1 + \alpha\rho_0)\,. \tag{C.12}$$

L'équation (C.12) traduit le fait que le photon échangé entre les deux atomes d'une paire se propage dans un milieu d'indice différent de 1. Le vecteur d'onde k_c correspond à cet indice, calculé à l'ordre le plus bas en densité. Pour obtenir un résultat cohérent, il conviendrait d'utiliser la relation de dispersion à l'ordre 2 en densité, c'est-à-dire de remplacer k_c par k_m dans l'expression de $\vec{\vec{g}}_B$ [1]. Si l'on effectue cette opération, la relation (C.11) converge.

3. Résultats numériques

Les calculs présentés dans cette annexe nous ont fourni les deux relations de dispersion (C.5) et (C.11), lesquelles viennent s'ajouter à la relation de dispersion (III.13) obtenue au chapitre III. Le lecteur peut légitimement se demander laquelle est la bonne.

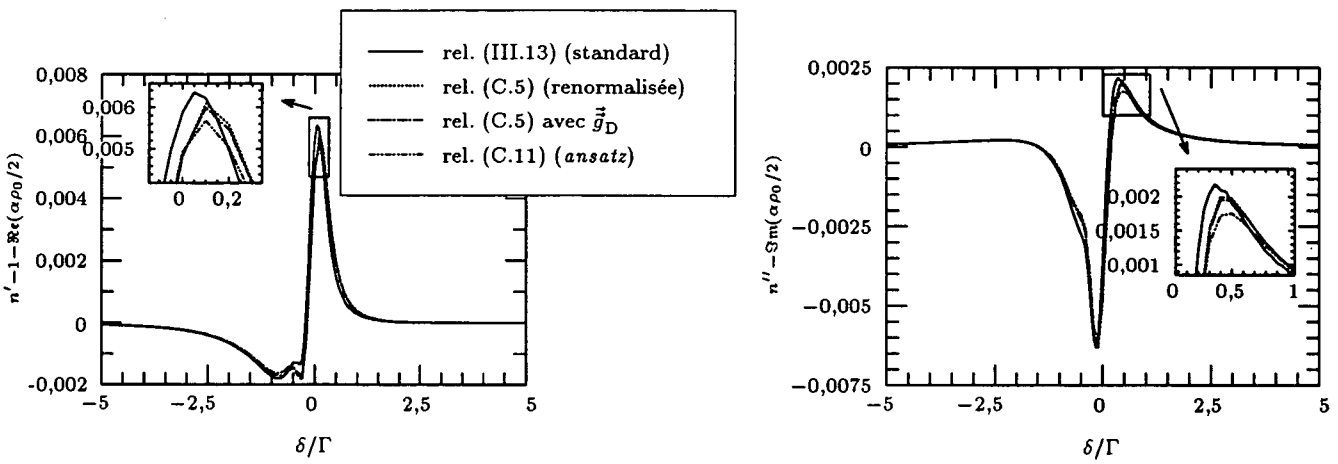
J'ai donc tracé sur la figure C.1 l'indice correspondant aux différents résultats que je viens d'évoquer. Je me suis placé dans le cas de particules classiques (le paragraphe C.2 ayant imposé cette restriction). Le résultat ne dépend donc pas de la température. J'ai tracé les courbes en fonction du désaccord, et pour plus de clarté j'ai ôté le terme dominant de l'indice (comme sur les médaillons de la figure IV.1).

Les courbes tracées sont les suivantes :

- la relation de dispersion « standard » (III.13) ;
- la relation de dispersion renormalisée (C.5) obtenue avec la méthode de la résolvante ;
- la même relation de dispersion, mais où je remplace $\vec{\vec{g}}_B$ par $\vec{\vec{g}}_D$;
- la relation de dispersion (C.11) obtenue par la méthode de la hiérarchie et l'utilisation d'un *ansatz*. Nous savons qu'il est alors nécessaire d'utiliser $\vec{\vec{g}}_D$;

1. Cela revient à remplacer $\vec{\vec{g}}_B$ par $\vec{\vec{g}}_D$, où $\vec{\vec{g}}_D$ est la solution de l'équation de Dyson (V.27).

Je signale que les trois dernières relations de dispersion sont auto-cohérentes, *i.e.* que k_{m}, et donc $\vec{g}_{\mathrm{D}}$, est défini par une équation intégrale. Sa valeur est calculée numériquement par plusieurs itérations successives.



(a) *Partie réelle* (b) *Partie imaginaire*

FIG. C.1 - *Correction d'ordre 2 à l'indice de réfraction, calculée pour des atomes discernables, et pour une densité vérifiant* $\rho_0\lambda_L^3 = 2$. *La courbe en plein correspond au résultat standard (III.13). Les courbes en pointillés correspondent à différentes manières de renormaliser le résultat.*

En regardant la figure C.1, on constate que toutes les courbes sont pratiquement confondues. Les différentes relations de dispersions ne diffèrent qu'à l'ordre 3 en densité. Par conséquent, j'avais raison de pas attacher trop d'importance à la divergence de l'équation (III.12) et au remplacement de k_{m} par k_{L}.

Conclusion générale

DEUX ASPECTS de la recherche d'effets quantiques collectifs ont été abordés dans cette thèse: d'une part le refroidissement Raman sub-recul qui, en abaissant la température des atomes, vise à placer ces derniers dans une situation où la statistique quantique joue un rôle plus important. D'autre part, la détection optique d'effets liés à l'indiscernabilité, effets qui pourraient être observés même en l'absence de condensat.

L'expérience de refroidissement Raman 1D présentée au chapitre 1 de la première partie était certes la reprise d'une expérience déjà effectuée sur le sodium ; toutefois, sa transposition au césium, qui n'était d'ailleurs pas immédiate, présentait un intérêt certain en raisons de ses retombées technologiques potentielles (en particulier dans le domaine de l'horloge atomique). Elle nous a en outre permis de nous familiariser avec la technique du refroidissement Raman, et ainsi d'acquérir le savoir-faire indispensable à des développements ultérieurs. Nous avons finalement obtenu (à une dimension certes) une « température » nettement sub-recul.

Du fait de la gravité qui accélère les atomes, le refroidissement sub-recul d'atomes de césium à 3D est difficile lorsque ces derniers sont libres. Aussi a-t-il été recherché au chapitre 2 comment procéder au refroidissement Raman d'atomes confinés. Au refroidissement continu, dont la théorie est relativement simple mais qui nécessite de longs temps d'interaction, nous avons préféré des mécanismes mettant en œuvre des impulsions lumineuses. La solution qui a été étudiée, basée sur le passage adiabatique, tire étroitement parti des oscillations des atomes dans le piège. Un refroidissement utilisant des impulsions de Blackman, c'est-à-dire selon un schéma analogue à celui du refroidissement d'atomes libres, est également envisageable ; toutefois, l'étude théorique correspondante n'a pas encore été faite. Par ailleurs, les résultats de ce chapitre ne concernent que le refroidissement d'un atome unique. La diffusion multiple des photons, qui se produit lorsque deux atomes ou plus sont en présence et qui est susceptible de perturber fortement le refroidissement, n'a pas été prise en compte.

Pour réaliser le refroidissement Raman d'atomes confinés, on a besoin d'un piège qui ne chauffe pas les atomes et qui les confine dans tous les sous-niveaux Zeeman de l'état fondamental. On peut pour cela utiliser un piège dipolaire

très désaccordé ; nous avons préféré fabriquer un nouveau piège, le piège opto-électrique, qui contiendra davantage d'atomes qu'un piège dipolaire. La réalisation expérimentale de ce piège a été menée à bien avec succès (chapitre 3). Le refroidissement Raman des atomes du piège opto-électrique devrait être la prochaine étape.

La deuxième partie de cette thèse, entièrement théorique, a été consacrée à la détection optique des effets de statistique quantique. Nous nous sommes placés dans le cas d'atomes libres, hypothèse qui ne correspond pourtant pas à la situation des expériences de condensation de Bose-Einstein récemment réalisées. Nous avons également supposé que la transition atomique était une transition $0 \rightarrow 1$ et que la densité était faible ($\rho_0 \lambda_L^3 \ll 1$) ; enfin, nous avons négligé le recul des atomes.

Les premiers chapitres de cette deuxième partie ont été consacrés à l'indice de réfraction, qui a été calculé par trois méthodes différentes. Il a été prouvé que la seule dépendance en température d'un signal de déphasage ou d'absorption de la lumière était due aux effets collectifs. Pour observer ces effets expérimentalement, il devrait donc *a priori* suffire d'effectuer une série de mesures correspondant à des températures différentes, tout en gardant la densité constante. Malheureusement, la densité atomique est très difficile à contrôler sur une expérience, et ses fluctuations induiraient sur le signal des variations plus importantes que la dépendance en température recherchée. La situation est par contre plus favorable si, au lieu de mesurer l'indice, on mesure la diffusion dans une direction de polarisation orthogonale à la polarisation incidente. Dans ce cas, seules les paires d'atomes proches contribuent au signal. Le terme lié à la statistique peut dès lors constituer une part importante du signal total, notamment si les conditions de température et de densité sont voisines de celles de la condensation de Bose-Einstein.

Nous avons en outre montré qu'il n'est pas nécessaire de condenser les atomes pour observer un signal d'effets quantiques collectifs. Ces effets peuvent en effet être observés dans des conditions correspondant à un piège magnéto-optique, si l'on utilise une sonde très désaccordée. Une restriction doit toutefois être apportée par le fait que si la transition atomique n'est pas une transition $0 \rightarrow 1$, les atomes doivent être parfaitement pompés dans le sous-niveau Zeeman de moment le plus élevé.

Les calculs de diffusion ont été réalisés en supposant que le milieu était optiquement mince (sans cette hypothèse ils sont inextricables). Ceci n'est cependant pas le cas le plus favorable car la quantité de lumière diffusée est alors extrêmement faible, surtout si l'on sonde à grand désaccord. Un calcul numérique basé sur des simulations de Monte-Carlo et utilisant la méthode de *Metropolis* a été entrepris par Ralph Dum et Yvan Castin. Ce calcul devrait permettre de se placer dans l'hypothèse d'un milieu plus épais. On devrait également pouvoir ne plus supposer que la densité atomique est uniforme, et ainsi traiter le cas où les atomes sont confinés dans un piège, une configuration qui est celle des expériences actuelles.

Lorsque ces calculs de diffusion auront abouti, une mise en évidence expérimentale des signaux prédits pourra être envisagée. Elle sera vraisemblablement effectuée sur un piège magnétique analogue à celui de l'expérience de Boulder, et qui est en cours de montage dans notre laboratoire.

Tableau récapitulatif des principales notations

Ce tableau regroupe, par ordre alphabétique, les principales notations que j'ai utilisées dans la deuxième partie de ma thèse (effets quantiques collectifs). Elles sont accompagnées de l'endroit où elles ont été introduites pour la première fois (numéro de la formule et page).

Notation	*Signification*	*1re introduction*	
		Equation	*Page*
a	Taille ou épaisseur du milieu atomique		
$a_{\vec{k}\vec{\varepsilon}}, a^{\dagger}_{\vec{k}\vec{\varepsilon}}$	Opérateurs d'annihilation et de création d'un photon dans le mode $\vec{k}\vec{\varepsilon}$	(II.1)	217
$\vec{A}$ ou $\vec{\mathbb{A}}$	Potentiel vecteur	(A.2)	324
$\mathcal{A}$	Correction du deuxième ordre à l'indice de réfraction	(III.13)	243
$\vec{B}$	Champ magnétique	(II.20.a)	225
$\|f\rangle$	Etat fondamental atomique	Fig. I.6	212
d	Dipôle atomique réduit	(II.2)	217
$\vec{d}_i$	Dipôle de l'atome i, moyenné sur les degrés de libertés atomiques internes et sur les photons	(II.26.b), (A.31.a)	227, 330
$\vec{D}_i$	opérateur dipôle de l'atome i	(A.4)	324
$\vec{\mathcal{D}}(\vec{r})$	Dipôle moyen au point $\vec{r}$	(II.29.c)	228
$\vec{\mathcal{D}}_0$	Amplitude du dipôle moyen	(II.34.b)	229
$\vec{\mathcal{D}}(\vec{r}'/\vec{r})$	Dipôle atomique moyen au point $\vec{r}'$ sachant qu'il y a un autre atome au point $\vec{r}$	(III.2.e)	238
$\|\vec{e}\rangle$	Etat excité atomique	Fig. I.6	212
$\vec{e}(\vec{r})$	Champ électrique moyenné sur les degrés de liberté atomiques internes et sur les photons	(II.26.a), (A.31.c)	227, 330
$\vec{E}$	Opérateur champ électrique en jauge $\vec{d}\cdot\vec{E}$	(II.19)	225
$\vec{E}_{\mathrm{L}}$	Amplitude du champ laser (approche « champ moyen »)	(II.26)	227
$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r})$	Champ électrique moyen au point $\vec{r}$		226
$\vec{\mathcal{E}}_0$	Amplitude du champ électrique moyen	(II.22.a)	226

Notation	*Signification*	*1re introduction*	
		Equation	*Page*
$\mathfrak{E}$	Espace de Hilbert des états accessibles par le système		224
$\mathbb{E}_\perp$	Champ électrique transverse en jauge $\vec{A}\cdot\vec{p}$, ou bien induction électrique (à ε_0 près) en jauge $\vec{d}\cdot\vec{E}$	(II.19)	225
$f_{\vec{p}}$	Facteur d'occupation	(III.19)	245
$\vec{\vec{g}}(\vec{r})$	Potentiel d'interaction entre deux atomes dont l'un est excité (fonction de Green)	(II.28), (A.34)	227, 331
$\vec{\vec{g}}_{\mathrm{B}}$	Potentiel renormalisé	(C.3.a)	387
$\vec{\vec{g}}_{\mathrm{D}}$	Propagateur de l'amplitude	(V.27)	309
$\vec{\vec{g}}_1$	Potentiel d'interaction privé du terme de contact	(III.33)	251
$\vec{\vec{g}}_2$	Potentiel d'interaction dans l'approximation du champ tournant	(B.39)	365
$g_{/\!/}$, $g_\perp$	Valeurs propres de la matrice $\vec{\vec{g}}$	(III.14)	243
$\vec{\vec{g}}_\infty$	Partie « asymptotique » du tenseur d'interaction (terme en $1/r$)	(V.19)	298
$\mathcal{G}(z)$	Résolvante ($z\in\mathbb{C}$)	(II.6)	219
$\mathcal{G}_0(z)$	$1/(z-\mathcal{H}_0)$	(II.7)	219
$\vec{\vec{\Xi}}[G]$	Propagateur de l'intensité	(V.37)	313
$\mathcal{H}$	Hamiltonien du système (en jauge $\vec{d}\cdot\vec{E}$)	(II.1)	217
$\mathcal{H}_0$	Hamiltonien non couplé	(II.1)	217
$\mathbb{H}$	Hamiltonien en jauge $\vec{A}\cdot\vec{p}$	(A.1)	324
$\vec{\vec{I}}(\vec{r},\vec{r}')$	Intensité du champ électrique	(V.2.a)	294
$\vec{k}$	Vecteur d'onde d'un photon quelconque	(II.1)	217
k_{c}	Vecteur d'onde dans le milieu, à l'ordre 1 en densité	(C.4)	387
$\vec{k}_{\mathrm{d}}$	Vecteur d'onde du photon diffusé		200
$\vec{k}_{\mathrm{L}}$	Vecteur d'onde du laser incident (supposé quasi-résonnant)		200
$\vec{k}_{\mathrm{m}}$	Vecteur d'onde (complexe) du laser quasi-résonnant dans le milieu ($\vec{k}_{\mathrm{m}}=k_{\mathrm{m}}\vec{u}_z$).	Fig. II.1	225
k_M	la fréquence de coupure $\omega_M=ck_M$ permet d'éliminer les divergences au voisinage d'un atome	(A.23)	328
$\vec{k}_{\mathrm{r}}$	Vecteur d'onde (réel) du photon incident dans l'approche « résolvante »		215
$\vec{\vec{\mathcal{K}}}(\vec{r})$	Amplitude dipolaire à 1 atome au point $\vec{r}$	(V.2.b)	294
$\vec{\vec{\mathcal{K}}}(\vec{r},\vec{r}')$	Amplitude dipolaire à 2 atomes	(V.2.c)	294
L	Longueur du milieu atomique		215
M	Masse atomique		
n	Indice de réfraction		
N	Nombre total d'atomes		197
$\vec{P}$	Densité de dipôles (opérateur)	(II.19)	225
$\{\vec{P}\}$	Ensemble des impulsions des atomes	(B.29)	361
$\vec{P}_i$	Impulsion de l'atome i (opérateur)	(II.3)	217
$\vec{\mathcal{P}}(\vec{r})$	Densité moyenne de dipôles au point $\vec{r}$		226
$\mathcal{P}$	Projecteur sur l'espace $\mathfrak{E}$	(B.8)	350
$\mathcal{Q}$	Projecteur sur l'espace $\mathfrak{E}^\perp$	(B.9)	350

Notation	*Signification*	*1re introduction*	
		Equation	*Page*
r_*	Distance à laquelle deux atomes d'une paire voient le laser de façon résonnante	(I.26)	213
$\vec{R}_i$	Position de l'atome i (opérateur)		201
$\mathcal{R}(z)$	Opérateur intervenant dans la théorie de la résolvante	(B.9)	350
$\vec{\vec{\Xi}}[\mathcal{R}]$	Vertex réductible	(V.53)	319
$\mathcal{S}$	Matrice $\mathcal{S}$ (utilisée en théorie de la diffusion)	(IV.2)	269
T	Température des atomes		197
$\mathcal{T}$	Matrice $\mathcal{T}$ (utilisée en théorie de la diffusion)	(I.1)	201
$\mathfrak{T}$	Opérateur unitaire permettant de passer de la jauge $\vec{A}\cdot\vec{p}$ à la jauge $\vec{d}\cdot\vec{E}$	(A.6)	325
$U(t_f, t_i)$	Opérateur d'évolution (pris entre les instants t_i et t_f)	(II.4)	219
V	Volume de quantification	(II.2)	217
$\mathcal{V}$	Terme de couplage dans l'hamiltonien	(II.1)	217
$\vec{\vec{\Xi}}[\mathcal{V}]$	Vertex irréductible	(V.37)	313
$Y(r)$	Potentiel d'interaction dans le cas scalaire	(A.68)	343
α	Polarisabilité d'un dipôle atomique	(II.27)	227
α_s	$\mu/(k_B T)$, μ étant le potentiel chimique ($e^{-\alpha_s}$ est la fugacité)	(III.20)	246
α_z	$-3\pi\Gamma c^3/[\omega_A{}^3(z/\hbar - \omega_A + i\Gamma/2)]$ (vérifie $\alpha_{\hbar\omega_L} = \alpha$)	(B.40)	365
Γ	Largeur naturelle de l'état excité atomique	Fig. I.6	212
δ	Désaccord du laser ($\delta = \omega_L - \omega_A$)	(I.24)	211
ΔE_A	Déplacement de Lamb de l'état excité	(II.11.b)	222
ε, ε'	Réel positif que l'on fait tendre vers 0 à la fin des calculs	(II.5)	219
$\vec{\varepsilon}$	Polarisation d'un photon quelconque	(II.1)	217
$\vec{\varepsilon}_d$	Polarisation du photon diffusé (cf $\vec{k}_d$)		200
$\vec{\varepsilon}_L$	Polarisation du laser incident (cf $\vec{k}_L$)		200
$\vec{\varepsilon}_r$	Polarisation du photon incident dans l'approche résolvante (cf $\vec{k}_r$)		217
$\eta_{b/f}$	± 1 (selon que les atomes sont des bosons ou des fermions)	(I.5)	203
λ_L	Longueur d'onde du faisceau incident (supposé quasi-résonnant)		
$\lambda\!\!\!^{-}_L$	$\lambda_L/(2\pi)$		211
Λ_{DB}	Longueur d'onde de De Broglie des atomes	(0.1)	197
μ	Potentiel chimique		245
ϖ	Matrice densité	(I.6)	203
		(III.16)	245
$\rho(\vec{r})$	Densité atomique		211
ρ_0	Densité atomique (lorsqu'elle est constante)	(II.29.a)	211, 228
$\rho^{II}(\vec{r}, \vec{r}')$	Densité à deux corps		
$\frac{d\sigma}{d\Omega}$	Section efficace différentielle de diffusion	(I.1)	201
σ_{tot}	Section efficace totale de diffusion	(IV.5)	269
$\vec{\vec{\Sigma}}$	Réponse irréductible	(V.27)	309
χ (ou $\vec{\chi}$)	Susceptibilité du milieu	(II.23)	226

Notation	*Signification*	*1re introduction*	
		Equation	*Page*
$\varphi(\vec{r})$	Fonction de corrélation spatiale		
$\|\psi\rangle$	Etat du système (atomes + photon)	(II.4)	219
ω_A	Fréquence de la transition atomique	Fig. I.6	212
$\tilde{\omega}_A$	Fréquence atomique non renormalisée	(II.1)	217
ω_e	Energie complexe (à $\hbar$ près) de l'état couplé photon+atomes dans l'approche résolvante		216
$\omega_{\vec{k}}$ ou ω	$c\|\|\vec{k}\|\|$	(II.1)	217
ω_L	Fréquence du laser incident quasi-résonnant (nombre réel)	Fig. I.6	212
ω_r	Energie du photon incident dans l'approche résolvante		219
ω_{rec}	Pulsation de recul		208
$\vec{\Omega}_{\vec{k}\vec{\epsilon}}$	Fréquence de Rabi à un photon	(II.2)	217

Bibliographie

[1] C. WIEMAN et S. CHU, éditeurs, *Laser cooling and Trapping of Atoms. J. Opt. Soc. Am. B* **6**, 2019 (1989).

[2] E. ARIMONDO, W. D. PHILLIPS et F. STRUMIA, éditeurs, *Manipolazione col laser di atomi e ioni, Rendiconti della Scuola Internazionale di Fisica «Enrico Fermi», CXVIII Corso.* North Holland, Amsterdam (1992).

[3] C. WIEMAN, D. WINELAND et S. J. SMITH, éditeurs, *Proceedings of the 14th International Conference on Atomic Physics, Boulder.* AIP Conf. Proc. n° 323. AIP, New York (1994). Voir en particulier les contributions de S. CHU, C. COHEN-TANNOUDJI, W. D. PHILLIPS et J. WALRAVEN.

[4] Y. CASTIN, J. DALIBARD et C. COHEN-TANNOUDJI. Dans *Bose-Einstein Condensation*, édité par A. GRIFFIN, D. W. SNOKE et S. STRINGARI, p. 173. Cambridge University Press, Cambridge (1995).

[5] J. DALIBARD et C. SALOMON, *Le refroidissement laser d'atomes neutres. Applications et perspectives.* Rapport de mise au point DRET (1992).

[6] R. FRISCH. *Z. Phys.* **86**, 42 (1933).

[7] J.-L. PICQUÉ et J.-L. VIALLE. *Optics Commun.* **5**, 402 (1972).

[8] J. L. HALL, C. J. BORDÉ et K. UEHARA. *Phys. Rev. Lett.* **37**, 1339 (1976).

[9] John PRODAN, Alan MIGDALL, William D. PHILLIPS, Ivan SO, Harold METCALF et Jean DALIBARD. *Phys. Rev. Lett.* **54**, 992 (1985).

[10] W. ERTMER, R. BLATT, J. L. HALL et M. ZHU. *Phys. Rev. Lett.* **54**, 996 (1985).

[11] William D. PHILLIPS, John V. PRODAN et Harold J. METCALF. *J. Opt. Soc. Am. B* **2**, 1751 (1985).

[12] J. LIANG et C. FABRE. *Optics Commun.* **59**, 31 (1986).

[13] Christophe SALOMON et Jean DALIBARD. *C. R. Acad. Sci. Paris* **306 II**, 1319 (1988).

[14] M. ZHU, C. W. OATES et J. L. HALL. *Phys. Rev. Lett.* **67**, 46 (1991).

[15] L. MOI, S. GOZZINI, C. GABBANINI, E. MARIOTTI, C. MARINELLI et A. LUCCHESINI. Dans *Light Induced Kinetic Effects on Atoms, Ions and Molecules*, édité par Luigi MOI, Silvia GOZZINI, Carlo GABBANINI, Ennio ARIMONDO et Franco STRUMIA, p. 221. ETS Editrice, Pisa (1991).

[16] Alfred KASTLER. *J. Phys. Rad.* **11**, 255 (1950).

[17] T. W. HÄNSCH et A. L. SCHAWLOW. *Optics Commun.* **13**, 68 (1975).

[18] D. WINELAND et H. DEHMELT. *Bull. Am. Phys. Soc.* **20**, 637 (1975).

[19] Steven CHU, L. HOLLBERG, J. E. BJORKHOLM, Alex CABLE et A. ASHKIN. *Phys. Rev. Lett.* **55**, 48 (1985).

[20] Paul D. LETT, Richard N. WATTS, Christoph I. WESTBROOK, William D. PHILLIPS, Phillip L. GOULD et Harold J. METCALF. *Phys. Rev. Lett.* **61**, 169 (1988).

[21] J. DALIBARD, C. SALOMON, A. ASPECT, E. ARIMONDO, R. KAISER, N. VANSTEENKISTE et C. COHEN-TANNOUDJI. Dans *Atomics Physics n° 11, Proceedings of th 11th International Conference of Atomics Physics*, édité par S. HAROCHE, J. C. GAY et G. GRYNBERG, p. 199. World Scientific, Singapour (1989).

[22] Steven CHU, D. S. WEISS, Y. SHEVY et P. J. UNGAR. Dans *Atomics Physics n° 11, Proceedings of th 11th International Conference of Atomics Physics*, édité par S. HAROCHE, J. C. GAY et G. GRYNBERG, p. 636. World Scientific, Singapour (1989).

[23] C. SALOMON, J. DALIBARD, W. D. PHILLIPS, A. CLAIRON et S. GUELLATI. *Europhys. Lett.* **12**, 683 (1990).

[24] J. DALIBARD et C. COHEN-TANNOUDJI. *J. Opt. Soc. Am. B* **6**, 2023 (1989).

[25] P. J. UNGAR, D. S. WEISS, E. RIIS et Steven CHU. *J. Opt. Soc. Am. B* **6**, 2058 (1989).

[26] A. ASHKIN et J. P. GORDON. *Opt. Lett.* **8**, 511 (1983).

[27] E. L. RAAB, M. PRENTISS, Alex CABLE, Steven CHU et D. E. PRITCHARD. *Phys. Rev. Lett.* **59**, 2631 (1987).

[28] A. M. STEANE et C. J. FOOT. *Europhys. Lett.* **14**, 231 (1991).

[29] M. DREWSEN, Ph. LAURENT, A. NADIR, G. SANTARELLI, A. CLAIRON, Y. CASTIN, D. GRISON et C. SALOMON. *Appl. Phys. B* **59**, 283 (1994).

[30] Delphine GRISON, *Atomes piégés et refroidis par laser à quelques microkelvins : un piège magnéto-optique dans une cellule de césium et quelques applications.* Thèse de Doctorat, Université Paris VI (1992).

[31] C. MONROE, W. SWANN, H. ROBINSON et C. WIEMAN. *Phys. Rev. Lett.* **65**, 1571 (1990).

[32] D. GRISON, B. LOUNIS, C. SALOMON, J.-Y. COURTOIS et G. GRYNBERG. *Europhys. Lett.* **15**, 149 (1991).

[33] A. CLAIRON, C. SALOMON, S. GUELLATI et W. D. PHILLIPS. *Europhys. Lett.* **16**, 165 (1991).

[34] Kurt GIBBLE et Steven CHU. *Phys. Rev. Lett.* **70**, 1771 (1993).

[35] J. W. R. TABOSA, G. CHEN, Z. HU, R. B. LEE et H. J. KIMBLE. *Phys. Rev. Lett.* **66**, 3245 (1991).

[36] L. HILICO, C. FABRE et E. GIACOBINO. *Europhys. Lett.* **18**, 685 (1992).

[37] P. VERKERK, B. LOUNIS, C. SALOMON, C. COHEN-TANNOUDJI, J.-Y. COURTOIS et G. GRYNBERG. *Phys. Rev. Lett.* **68**, 3861 (1992).

[38] A. HEMMERICH, C. ZIMMERMANN et T. W. HÄNSCH. *Europhys. Lett.* **22**, 89 (1993).

[39] A. HEMMERICH, C. ZIMMERMANN et T. W. HÄNSCH. *Phys. Rev. Lett.* **72**, 625 (1994).

[40] P. VERKERK, D. R. MEACHER, A. B. COATES, J.-Y. COURTOIS, S. GUIBAL, B. LOUNIS, C. SALOMON et G. GRYNBERG. *Europhys. Lett.* **26**, 171 (1994).

[41] A. LAMBRECHT, T. COUDREAU, A. M. STEINBERG et E. GIACOBINO. Soumis à *Phys. Rev. Lett.* (1995).

[42] Astrid LAMBRECHT, *Atomes froids et fluctuations quantiques.* Thèse de Doctorat, Université Pierre et Marie Curie (1995).

[43] M. PRENTISS, A. CABLE, J. E. BJORKHOLM, Steven CHU, E. L. RAAB et D. E. PRITCHARD. *Opt. Lett.* **13**, 452 (1988).

[44] P. S. JULIENNE et Jacques VIGUÉ. *Phys. Rev. A* **44**, 4464 (1991).

[45] J. MLYNEK, V. BALYKIN et P. MEYSTRE, éditeurs, *Optics and Interferometry with Atoms. Appl. Phys. B* **54**, 319 (1992).

[46] Pierre PILLET, éditeur, *Optique et interférométrie atomiques. J. Phys. II France* **4**, 1875 (1994).

[47] C. G. AMINOFF, A. M. STEANE, P. BOUYER, P. DESBIOLLES, J. DALIBARD et C. COHEN-TANNOUDJI. *Phys. Rev. Lett.* **71**, 3083 (1993).

[48] A. STEANE, P. SZRIFTGISER, P. DESBIOLLES et J. DALIBARD. *Phys. Rev. Lett.* **74**, 4972 (1995).

[49] T. M. ROACH, H. ABELE, M. G. BOSHIER, H. L. GROSSMAN, K. P. ZETIE et E. A. HINDS. *Phys. Rev. Lett.* **75**, 629 (1995).

[50] V. P. CHEBOTAYEV, B. Ya. DUBETSKY, A. P. KASANTSEV et V. P. YAKOVLEV. *J. Opt. Soc. Am. B* **2**, 1791 (1985).

[51] John F. CLAUSER. *Physica B* **151**, 262 (1988).

[52] Ch. J. BORDÉ. *Phys. Lett. A* **140**, 10 (1989).

[53] O. CARNAL et J. MLYNEK. *Phys. Rev. Lett.* **66**, 2689 (1991).

[54] David W. KEITH, Christopher R. EKSTROM, Quentin A. TURCHETTE et David E. PRITCHARD. *Phys. Rev. Lett.* **66**, 2693 (1991).

[55] F. RIEHLE, Th. KISTERS, A. WITTE, J. HELMCKE et Ch. J. BORDÉ. *Phys. Rev. Lett.* **67**, 177 (1991).

[56] J. ROBERT, Ch. MINIATURA, S. LE BOITEUX, J. REINHARDT, V. BOCVARSKI et J. BAUDON. *Europhys. Lett.* **16**, 29 (1991).

[57] O. CARNAL, M. SIGEL, T. SLEATOR, H. TAKUMA et J. MLYNEK. *Phys. Rev. Lett.* **67**, 3231 (1991).

[58] Mark KASEVICH et Steven CHU. *Phys. Rev. Lett.* **67**, 181 (1991).

[59] Fujio SHIMIZU, Kazuko SHIMIZU et Hiroshi TAKUMA. *Phys. Rev. A* **46**, R17 (1992).

[60] Y. CASTIN et J. DALIBARD. *Europhys. Lett.* **14**, 761 (1991).

[61] K. BERG-SØRENSEN, Y. CASTIN, K. MØLMER et J. DALIBARD. *Europhys. Lett.* **22**, 663 (1993).

[62] Yvan CASTIN, Kirstine BERG-SØRENSEN, Jean DALIBARD et Klaus MØLMER. *Phys. Rev. A* **50**, 5092 (1994).

[63] M. H. ANDERSON, J. H. ENSHER, M. R. MATTHEWS, C. E. WIEMAN et E. A. CORNELL. *Science* **269**, 198 (1995).

[64] C. C. BRADLEY, C. A. SACKETT, J. J. TOLLETT et R. G. HULET. *Phys. Rev. Lett.* **75**, 1687 (1995).

[65] K. B. DAVIS, M.-O. MEWES, M. R. ANDREWS, N. J. van DRUTEN, D. S. DURFEE, D. M. KURN et W. KETTERLE. A paraître (1995).

[66] S. N. BOSE. *Z. Phys.* **26**, 178 (1924).

[67] A. EINSTEIN. *Kgl. Preuss. Akad. Wiss.* **1924**, 261 (1924).

[68] Kerson HUANG, *Statistical Mechanics.* John Willey & Sons, New York, London, Sidney (1963).

[69] A. GRIFFIN, D. W. SNOKE et S. STRINGARI, éditeurs, *Bose-Einstein Condensation.* Cambridge University Press, Cambridge (1995).

[70] Jia Ling LIN et J. P. WOLFE. *Phys. Rev. Lett.* **71**, 1222 (1993).

[71] A. ASPECT, E. ARIMONDO, R. KAISER, N. VANSTEENKISTE et C. COHEN-TANNOUDJI. *Phys. Rev. Lett.* **61**, 826 (1988).

[72] A. ASPECT, A. ARIMONDO, R. KAISER, N. VANSTEENKISTE et C. COHEN-TANNOUDJI. *J. Opt. Soc. Am. B* **6**, 2112 (1989).

[73] François BARDOU, Bruno SAUBAMEA, John LAWALL, Kazuko SHIMIZU, Olivier ÉMILE, Chris WESTBROOK, Alain ASPECT et Claude COHEN-TANNOUDJI. *C. R. Acad. Sci. Paris* **318**, 877 (1994).

[74] J. LAWALL, F. BARDOU, B. SAUBAMEA, K. SHIMIZU, M. LEDUC, A. ASPECT et C. COHEN-TANNOUDJI. *Phys. Rev. Lett.* **73**, 1915 (1994).

[75] J. LAWALL, S. KULIN, B. SAUBAMEA, N. BIGELOW, M. LEDUC et C. COHEN-TANNOUDJI. Soumis à *Phys. Rev. Lett.* (1995).

[76] Mark KASEVICH et Steven CHU. *Phys. Rev. Lett.* **69**, 1741 (1992).

[77] Nir DAVIDSON, Heun-Jin LEE, Mark KASEVICH et Steven CHU. *Phys. Rev. Lett.* **72**, 3158 (1994).

[78] D. E. PRITCHARD, K. HELMERSON, V. S. BAGNATO, G. P. LAFYATIS et A. G. MARTIN. Dans *Laser spectroscopy VIII*, édité par W. PERSSON et S. SVANBERG, p. 68. Springer-Verlag, Berlin (1987).

[79] J. REICHEL, F. BARDOU, M. BEN DAHAN, E. PEIK, S. RAND, C. SALOMON et C. COHEN-TANNOUDJI. Soumis à *Phys. Rev. Lett.* (1995).

[80] Jakob REICHEL, Thèse de Doctorat, Université Paris VI (soutenance prévue en 1996).

[81] J. REICHEL, O. MORICE, G. M. TINO et C. SALOMON. *Europhys. Lett.* **28**, 477 (1994).

[82] Kathryn MOLER, David S. WEISS, Mark KASEVICH et Steven CHU. *Phys. Rev. A* **45**, 342 (1991).

[83] R. B. BLACKMAN et J. W. TUKEY, *The Measurement of Power Spectra From the Point of View of Communications Engineering.* Dover Publications, New York (1958).

[84] Fredric J. HARRIS. *Proc. of the IEEE* **66**, 51 (1978).

[85] François BARDOU, *Refroidissement laser sub-recul par résonances noires: expériences avec des atomes d'hélium métastables; approche Monte-Carlo quantique et vols de Lévy.* Thèse de Doctorat, Université Paris XI (1995).

[86] Norman F. RAMSEY. *Phys. Rev.* **78**, 695 (1950).

[87] Norman F. RAMSEY, *Molecular Beams.* Oxford University Press, Oxford (1985).

[88] Christophe SALOMON, *Franges de Ramsey et spectroscopie laser à ultra-haute résolution dans l'infrarouge.* Thèse de Doctorat d'État, Université Paris XIII (1984).

[89] Brahim LOUNIS, *Atomes refroidis par laser: de la mélasse au cristal optique.* Thèse de Doctorat, Université Paris XI (1993).

[90] Philippe LAURENT, *Stabilisation en fréquence de diodes laser par couplage optique résonnant sur une cavité Fabry-Perot confocale.* Thèse de Doctorat, Université Paris XI (1989).

[91] Carl E. WIEMAN et Leo HOLLBERG. *Rev. Sci. Instrum.* **62**, 1 (1991).

[92] M. de LABACHELERIE et P. CEREZ. *Optics Commun.* **55**, 174 (1985).

[93] M. de LABACHELERIE, C. LATRASSE, G. PASSEDAT et P. CEREZ. *Revue Scientifique et Technique de la Défense* **21**, 57 (1993).

[94] Philippe BOUYER, *Confinement par laser d'atomes froids dans une cavité gravitationnelle et dans un piège à pompage optique.* Thèse de Doctorat, Université Paris XI (1995).

[95] Moritz FICHTMÜLLER, *Analyse d'un piège magnéto-optique par l'absorption d'un faisceau d'une diode laser.* Rapport de magistère (1993).

[96] David S. WEISS, Erling RIIS, Yaakov SHEVY, P. Jeffrey UNGAR et Steven CHU. *J. Opt. Soc. Am. B* **6**, 2072 (1989).

[97] G. SANTARELLI, A. CLAIRON, S. N. LEA et G. M. TINO. *Optics Commun.* **104**, 339 (1994).

[98] Guglielmo M. TINO, *Phase locking of extended cavity semiconductor diode lasers.* Diffusion interne (1993).

[99] G. ALZETTA, A. GOZZINI, L. MOI et G. ORRIOLS. *Il Nuovo Cimento B* **36**, 5 (1976).

[100] Mark KASEVICH, David S. WEISS, Erling RIIS, Kathryn MOLER, Steven KASAPI et Steven CHU. *Phys. Rev. Lett.* **66**, 2297 (1991).

[101] Brahim LOUNIS, Jakob REICHEL et Christophe SALOMON. *C. R. Acad. Sci. Paris* **316**, 739 (1993).

[102] C. SALOMON, B. LOUNIS, J. REICHEL, A. CLAIRON, P. LAURENT et A. NADIR. *Revue Scientifique et Technique de la Défense* **21**, 113 (1993).

[103] D. J. WINELAND, R. E. DRULLINGER et F. L. WALLS. *Phys. Rev. Lett.* **40**, 1639 (1978).

[104] D. J. WINELAND et Wayne M. ITANO. *Phys. Rev. A* **20**, 1521 (1979).

[105] Heun-Jin LEE, Charles ADAMS, Nir DAVIDSON, Brent YOUNG, Martin WEITZ, Mark KASEVICH et Steven CHU. Dans *Atomics Physics n° 14*, édité par D. J. WINELAND, C. E. WIEMAN et S. J. SMITH, p. 258. AIP, New York (1994).

[106] David PRITCHARD. Communication à la conférence d'Helsinki de juillet 1986.

[107] D. J. WINELAND, J. DALIBARD et C. COHEN-TANNOUDJI. *J. Opt. Soc. Am. B* **9**, 32 (1992).

[108] B. HOELING et R. J. KNIZE. *Optics Commun.* **106**, 202 (1994).

[109] N. R. NEWBURY, C. J. MYATT, E. A. CORNELL et C. E. WIEMAN. *Phys. Rev. Lett.* **74**, 2196 (1995).

[110] Maxim OLSHANIĬ, Yvan CASTIN et Jean DALIBARD. Dans *Proceedings of the 12th International Conference on Laser Spectroscopy*, édité par M. INGUSCIO, M. ALLEGRINI et A. SASSO. World Scientific (1995).

[111] Stig STENHOLM. *Rev. Mod. Phys* **58**, 699 (1986).

[112] Y. CASTIN, H. WALLIS et J. DALIBARD. *J. Opt. Soc. Am. B* **6**, 2046 (1989).

[113] J. JAVANAINEN et S. STENHOLM. *Appl. Phys.* **21**, 283 (1980).

[114] W. NEUHAUSER, M. HOHENSTATT, P. TOSCHEK et H. DEHMELT. *Phys. Rev. Lett.* **41**, 233 (1978).

[115] J. JAVANAINEN et S. STENHOLM. *Appl. Phys.* **24**, 71 (1981).

[116] J. JAVANAINEN et S. STENHOLM. *Appl. Phys.* **24**, 151 (1981).

[117] M. LINDBERG et S. STENHOLM. *J. Phys. B* **17**, 3375 (1984).

[118] J. I. CIRAC, M. LEWENSTEIN et P. ZOLLER. *Phys. Rev. A* **50**, 3409 (1994).

[119] Claude COHEN-TANNOUDJI, Jacques DUPONT-ROC et Gilbert GRYNBERG, *Processus d'interaction entre photons et atomes*, vol. 2. Editions du CNRS (1988).

[120] Yvan CASTIN, *Les limites du refroidissement laser dans les mélasses optiques à une dimension.* Thèse de Doctorat, Université Paris VI (1992).

[121] Takehiko TAKABAYASI. *Progress of Theoretical Physics* **11**, 341 (1954).

[122] Y. CASTIN, J. DALIBARD et C. COHEN-TANNOUDJI. Dans *Light Induced Kinetic Effects on Atoms, Ions and Molecules*, édité par Luigi MOI, Silvia GOZZINI, Carlo GABBANINI, Ennio ARIMONDO et Franco STRUMIA, p. 5. ETS Editrice, Pisa (1991).

[123] Albert MESSIAH, *Mécanique Quantique.* Dunod, Paris (1962).

[124] Jean DALIBARD, *Le rôle des fluctuations dans la dynamique d'un atome couplé au champ électromagnétique.* Thèse de Doctorat d'État, Université Pierre et Marie Curie (Paris VI) (1986).

[125] Steven CHU, J. E. BJORKHOLM, A. ASHKIN et A. CABLE. *Phys. Rev. Lett.* **57**, 314 (1986).

[126] J. D. MILLER, R. A. CLINE et D. J. HEINZEN. *Phys. Rev. A* **47**, R4567 (1993).

[127] T. TAKEKOSHI, J. R. YEH et R. J. KNIZE. *Optics Commun.* **114**, 421 (1995).

[128] Claude COHEN-TANNOUDJI. Cours du Collège de France 1982-1983.

[129] H. KOGELNIK et T. LI. *Applied Optics* **5**, 1550 (1966).

[130] Charles S. ADAMS, Heun Jin LEE, Nir DAVIDSON, Mark KASEVICH et Steven CHU. *Phys. Rev. Lett.* **74**, 3577 (1995).

[131] B. S. MATHUR, H. TANG et W. HAPPER. *Phys. Rev.* **171**, 11 (1968).

[132] Claude COHEN-TANNOUDJI et Jacques DUPONT-ROC. *Phys. Rev. A* **5**, 968 (1972).

[133] François BIRABEN, *Mise en évidence des processus d'absorption de deux photons sans élargissement Doppler sur la transition 3S-5S dans le sodium.* Thèse de Doctorat de 3e Cycle, Université de Paris (1974).

[134] B. CAGNAC, G. GRYNBERG et F. BIRABEN. *J. Physique* **34**, 845 (1973).

[135] Richard MARRUS, Douglas MCCOLM et Joseph YELLIN. *Phys. Rev.* **147**, 55 (1966).

[136] R. M. STERNHEIMER. *Phys. Rev.* **183**, 112 (1969).

[137] Arthur SALOP, Edward POLLACK et Benjamin BEDERSON. *Phys. Rev.* **124**, 1431 (1961).

[138] Carol E. TANNER et Carl WIEMAN. *Phys. Rev. A* **38**, 162 (1988).

[139] L. R. HUNTER, D. KRAUSE, S. MURTHY et T. W. SUNG. *Phys. Rev. A* **37**, 3283 (1988).

[140] L. R. HUNTER, D. KRAUSE, K. E. MILLER, D. J. BERKELAND et M. G. BOSHIER. *Optics Commun.* **94**, 210 (1992).

[141] R. D. HAUN et J. R. ZACHARIAS. *Phys. Rev.* **107**, 107 (1957).

[142] L. W. ANDERSON. *Il Nuovo Cimento* **XXII**, 936 (1961).

[143] J. DALIBARD et C. COHEN-TANNOUDJI. *J. Opt. Soc. Am. B* **2**, 1707 (1985).

[144] William H. WING. *Phys. Rev. Lett.* **45**, 631 (1980).

[145] R. W. HOCKNEY. Dans *Methods in Computational Physics, vol. 9*, édité par Berni ALDER, Sidney FERNBACH et Manuel ROTENBERG, p. 135. Academic Press, New York (1970).

[146] C. A. SCHRAMA, E. PEIK, W. W. SMITH et H. WALTHER. *Optics Commun.* **101**, 32 (1993).

[147] P. LEMONDE, O. MORICE, E. PEIK, J. REICHEL, H. PERRIN, W. HÄNSEL et C. SALOMON. *Europhys. Lett.* **32**, 555 (1995).

[148] Hélène PERRIN. Rapport de stage de DEA (1995).

[149] P. BOUYER, P. LEMONDE, M. BEN DAHAN, A. MICHAUD, C. SALOMON et J. DALIBARD. *Europhys. Lett.* **27**, 569 (1994).

[150] Carl Gustaf AMINOFF, Philippe BOUYER et Pierre DESBIOLLES. *C. R. Acad. Sci. Paris* **316**, 1535 (1993).

[151] Wolfgang HÄNSEL, *Conception et réalisation d'un système de contrôle de polarisation dans une fibre optique monomode. Asservissement de ce système.* Rapport de stage (1994).

[152] Wolfgang HÄNSEL. Rapport de stage (*Diplomarbeit*) (sera rédigé en 1996).

[153] Pierre LEMONDE, Thèse de Doctorat, Université Paris VI (Soutenance prévue en 1997 ou 1998).

[154] Wolfgang KETTERLE, Kendall B. DAVIS, Michael A. JOFFE, Alex MARTIN et David E. PRITCHARD. *Phys. Rev. Lett.* **70**, 2253 (1993).

[155] D. SESKO, T. WALKER, C. MONROE, A. GALLAGHER et C. WIEMAN. *Phys. Rev. Lett.* **63**, 961 (1989).

[156] P. S. JULIENNE, A. M. SMITH et K. BURNETT. Dans *Advances in Atomic, Molecular, and Optical Physics n° 30*, édité par David BATES et Benjamin BEDERSON, p. 141. Academic Press, San Diego (1993).

[157] Thad WALKER et Paul FENG. Dans *Advances in Atomic, Molecular, and Optical Physics n° 34*, édité par David BATES et Benjamin BEDERSON, p. 125. Academic Press, San Diego (1994).

[158] F. BARDOU, O. ÉMILE, J.-M. COURTY, C. I. WESTBROOK et A. ASPECT. *Europhys. Lett.* **20**, 681 (1992).

[159] V. SANCHEZ-VILLICANA, S. D. GENSEMER, K. Y. N. TAN, A. KUMARAKRISHNAN, T. P. DINNEEN, W. SÜPTITZ et P. L. GOULD. *Phys. Rev. Lett.* **74**, 4619 (1995).

[160] H. FRIEDBURG et W. PAUL. *Die Naturwissenschaften* **38**, 159 (1951).

[161] V. V. VLADIMIRSKIĬ. *Sov. Phys. JETP* **12**, 740 (1961). Publié à l'origine dans *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **39**, 1062 (1960).

[162] K.-J. KÜGLER, W. PAUL et U. TRINKS. *Phys. Lett. B* **72**, 422 (1978).

[163] Alan L. MIGDALL, John V. PRODAN, William D. PHILLIPS, Thomas H. BERGEMAN et Harold J. METCALF. *Phys. Rev. Lett.* **54**, 2596 (1985).

[164] Wolfgang PETRICH, Michael H. ANDERSON, Jason R. ENSHER et Eric A. CORNELL. *Phys. Rev. Lett.* **74**, 3352 (1995).

[165] Y. V. GOTT, M. S. IOFFE et V. G. TEL'KOVSKIĬ. *Nucl. Fusion* **3**, 1045 (1962).

[166] David E. PRITCHARD. *Phys. Rev. Lett.* **51**, 1336 (1983).

[167] C. R. MONROE, E. A. CORNELL, C. A. SACKETT, C. J. MYATT et C. E. WIEMAN. *Phys. Rev. Lett.* **70**, 414 (1993).

[168] T. BERGEMAN, Gidon EREZ et Harold J. METCALF. *Phys. Rev. A* **35**, 1535 (1987).

[169] R. HANBURY-BROWN et R. Q. TWISS. *Nature* **177**, 27 (1956).

[170] C. JURCZAK, K. SENGSTOCK, R. KAISER, N. VANSTEENKISTE, C. I. WESTBROOK et A. ASPECT. *Optics Commun.* **115**, 480 (1995).

[171] Jean DALIBARD. Calculs non publiés.

[172] Maciej LEWENSTEIN et Li YOU. *Phys. Rev. Lett.* **71**, 1339 (1993).

[173] Juha JAVANAINEN. *Phys. Rev. Lett.* **72**, 2375 (1994).

[174] J. I. CIRAC et M. LEWENSTEIN. A paraître.

[175] Li YOU, Maciej LEWENSTEIN et J. COOPER. *Phys. Rev. A* **50**, R3565 (1994).

[176] Neil W. ASHCROFT et N. David MERMIN, *Solid State Physics.* HRW International Editions (1976).

[177] B. V. SVISTUNOV et G. V. SHLYAPNIKOV. *Sov. Phys. JETP* **70**, 460 (1990). Publié à l'origine dans *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **97**, 821 (1990).

[178] B. V. SVISTUNOV et G. V. SHLYAPNIKOV. *Sov. Phys. JETP* **71**, 71 (1990). Publié à l'origine dans *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **98**, 129 (1990).

[179] H. David POLITZER. *Phys. Rev. A* **43**, 6444 (1991).

[180] Yu. A. VDOVIN et V. M. GALITSKIĬ. *Sov. Phys. JETP* **25**, 894 (1967). Publié à l'origine dans *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **52**, 1345 (1967).

[181] Juha JAVANAINEN. *Phys. Rev. Lett.* **75**, 1927 (1995).

[182] L. YOU, Maciej LEWENSTEIN et J. COOPER. *Phys. Rev. A* **51**, 4712 (1995).

[183] Weiping ZHANG. *Phys. Lett. A* **176**, 225 (1993).

[184] G. LENZ, P. MEYSTRE et E. M. WRIGHT. *Phys. Rev. Lett.* **71**, 3271 (1993).

[185] G. LENZ, P. MEYSTRE et E. M. WRIGHT. *Phys. Rev. A* **50**, 1681 (1994).

[186] Yvan CASTIN et Klaus MØLMER. *Phys. Rev. A* **51**, R3426 (1995).

[187] Yvan CASTIN. Communication donnée à Sandbjerg (Danemark) en 1995.

[188] Olivier MORICE, Yvan CASTIN et Jean DALIBARD. *Phys. Rev. A* **51**, 3896 (1995).

[189] Akira ISHIMARU, *Wave propagation and Scattering in Random Media*, vol. 2. Academic Press, New York, San Francisco, Londres (1978).

[190] Richard D. MATTUCK, *A Guide to Feynman Diagrams in the Many-Body Problems.* McGraw-Hill International Book Company, New York, 2e éd. (1974). (Dover, 1992).

[191] P. MAZUR et M. MANDEL. *Physica* **XXII**, 299 (1956).

[192] E. A. POWER et S. ZIENAU. *Philos. Trans. R. Soc. Lond.* **251**, 427 (1958).

[193] M. J. STEPHEN. *Journ. Chem. Phys.* **40**, 669 (1964).

[194] P. W. MILONNI et P. L. KNIGHT. *Phys. Rev. A* **10**, 1096 (1974).

[195] H. A. LORENTZ. *Wiedem. Ann.* **9**, 641 (1880).

[196] L. LORENZ. *Wiedem. Ann.* **11**, 70 (1881).

[197] Max BORN et Emil WOLF, *Principles of Optics: Electromagnetic Theory of Propagation Interference and Diffraction of Light* . Pergamon Press, Londres (1959).

[198] S. PANCHARATNAM. *Proc. R. Soc. Lond. A* **330**, 281 (1972).

[199] Claude COHEN-TANNOUDJI, *Cours de 2e année. DEA de physique théorique — Atomique et statistique.* Notes de cours rédigées par Serge HAROCHE (1966).

[200] J. D. JACKSON, *Classical Electrodynamics.* John Willey & Sons, 2e éd. (1973).

[201] J. YVON, *Recherches sur la théorie cinétique des liquides.* Hermann, Paris (1937). Cet ouvrage peut être retrouvé dans une intégrale des publications de J. YVON, éditée sous le titre *Jacques Yvon, Œuvre Scientifique*, CEA Service de documentation, Saclay (1985).

[202] P. MAZUR et M. MANDEL. *Physica* **XXII**, 289 (1956).

[203] P. MAZUR. *Advances in Chemical Physics* **I**, 309 (1958).

[204] P. MAZUR. *Colloques internationaux du CNRS* **77**, 381 (1959).

[205] B. A. van TIGGELEN, A. LAGENDIJK et A. TIP. *J. Phys. Condens. Matter* **2**, 7653 (1990).

[206] Yu. N. BARABANENKOV et V. V. SHLYAPIN. *Phys. Lett. A* **170**, 239 (1992).

[207] R. H. LEHMBERG. *Phys. Rev. A* **2**, 883 (1970).

[208] Michel LE BELLAC, *Des phénomènes critiques aux champs de jauge.* Inter-Editions/Editions du CNRS (1988).

[209] Roger BALIAN, *Du microscopique au macroscopique : cours de physique statistique de l'école Polytechnique*, vol. 2. Ellipses (1982).

[210] Léon VAN HOVE. *Phys. Rev.* **95**, 249 (1954).

[211] F. LONDON. *Journ. Chem. Phys.* **11**, 203 (1942).

[212] William H. PRESS, Brian P. FLANNERY, Saul A. TEUKOLSKY et William T. VETTERLING, *Numerical Recipes.* Cambridge University Press, Cambridge (1986).

[213] Bart A. van TIGGELEN et Ad LAGENDIJK. *Phys. Rev. B* **50**, 16729 (1994).

[214] Bart A. van TIGGELEN, *Multiple scattering and localization of light.* Thèse de Doctorat, Universiteit van Amsterdam (1992).

[215] Yvan CASTIN. Calculs non publiés.

[216] Alan GALLAGHER et David E. PRITCHARD. *Phys. Rev. Lett.* **63**, 957 (1989).

[217] I. M. GEL'FAND, R. A. MINLOS et Z. Ya. SHAPIRO, *Representations of the rotation and Lorentz groups and their applications.* Pergamon Press (1963).

[218] Michael J. STEPHEN et Gabriel CWILICH. *Phys. Rev. B* **34**, 7564 (1986).

[219] F. C. MACKINTOSH et Sajeev JOHN. *Phys. Rev. B* **37**, 1884 (1987).

[220] E. AKKERMANS, P. E. WOLF, R. MAYNARD et G. MARET. *J. Physique* **49**, 77 (1988).

[221] Gora SHLYAPNIKOV. Communication privée.

[222] Claude COHEN-TANNOUDJI, Jacques DUPONT-ROC et Gilbert GRYNBERG, *Processus d'interaction entre photons et atomes*, vol. 1. Editions du CNRS (1987).

[223] Claude COHEN-TANNOUDJI. Cours du Collège de France 1974-1975.

[224] Claude COHEN-TANNOUDJI. Cours du Collège de France 1979-1980.

[225] Claude COHEN-TANNOUDJI, Bernard DIU et Franck LALOË, *Mécanique quantique*. Hermann, Paris (1973).

[226] R. CLAUSIUS, *Mechanische Wärmetheorie*, vol. 2. Braunschweig, 2e éd. (1879).

[227] O. F. MOSSOTTI. *Mem. Soc. Sci. Modena* **14**, 49 (1850).

[228] Jean-Pierre BARRAT, *Etude de la diffusion multiple cohérente de la lumière de résonance optique. Application au niveau 6^3P_1 du mercure.* Thèse de Doctorat, Faculté des sciences de l'Université de Paris (1959).

[229] Jean-Pierre BARRAT. *J. Physique* **20**, 541 (1959).

[230] Alain OMONT, *Etude théorique et expérimentale de la relaxation des niveaux atomiques de résonance par la diffusion multiple et les collisions résonnantes. Application au niveau 6^3P_1 du mercure.* Thèse de Doctorat, Université de Paris (1967).

[231] L. I. SCHIFF. *Phys. Rev.* **103**, 443 (1956).

Table des matières

Introduction générale 5

Première partie : Refroidissement sub-recul d'atomes de césium 13

Chapitre 1 : Refroidissement Raman 1D d'atomes libres 19
1. Principe et théorie du refroidissement Raman 20
   a) Les niveaux et les faisceaux utilisés 20
   b) La sélectivité en vitesse 22
   c) Principe du refroidissement Raman 22
   d) Choix du profil temporel des impulsions Raman 24
      i) Excitation par une impulsion de faible puissance 24
      ii) Les impulsions de Blackman 25
      iii) Cas où les impulsions sont puissantes. Condition d'impulsion π 26
2. Le dispositif expérimental 27
   a) Présentation générale du dispositif expérimental 27
   b) Le piège magnéto-optique 30
      i) Elements optiques 30
      ii) Séquence temporelle 32
   c) Fabrication des fréquences Raman 34
      i) Verrouillage en phase des deux lasers 34
      ii) Définition du désaccord Δ 35
   d) Mise en œuvre des impulsions Raman 36
      i) Création du profil des impulsions (Blackman) 36
      ii) Le désaccord δ 37
      iii) Le sens des faisceaux. Les cellules de Pockels 38
      iv) Le repompeur Raman. Choix des niveaux et pompage des atomes. 38
   e) La détection du signal 40
   f) Distribution en vitesse 41
3. Mise au point de l'expérience 41

a) Compensation du champ magnétique 41
i) Nécessité de la compensation et solution apportée 41
ii) Mesure du champ magnétique avec les atomes 42
b) Optimisation de la séquence d'impulsions 43
i) Influence d'un impulsion Raman unique: les « trous » dans la distribution 43
ii) Recherche de la séquence *ad hoc* 47
iii) Minimisation de quelques effets parasites 48
4. Résultat expérimental 49
a) Présentation du résultat 49
b) Temps de refroidissement 51
5. Conclusion 51

Chapitre 2 : Théorie du refroidissement Raman dans un piège harmonique 53
1. Présentation générale du refroidissement 55
a) Principe du refroidissement dans un piège 55
i) Dispositif utilisé 55
ii) Effets attendus 56
b) Le modèle de Pritchard 59
c) Les théories semi-classiques du refroidissement d'atomes confinés 61
i) Le régime de l'atome lourd ($\omega_x \ll \overline{\Gamma}$) 62
ii) Le régime de l'atome rapide ($\omega_x \gg \overline{\Gamma}$) 62
iii) Le régime de Lamb-Dicke 63
iv) Récapitulation des différents régimes 64
2. Etude préliminaire: cas d'un profil d'excitation en δ 66
a) Dimension 1 66
b) Généralisation aux dimensions supérieures 67
c) Simulations de Monte-Carlo 70
d) Rôle des fréquences du piège 74
3. Etude quantitative 74
a) Mise en place des équations 75
b) Simulations de Monte-Carlo 77
i) Refroidissement utilisant une seule paire de faisceaux Raman 77
ii) Refroidissement utilisant plusieurs systèmes de faisceaux Raman 80
c) Etude particulière à 1D 82
i) Moyenne sur le temps d'oscillation 82
ii) Développement en puissances de w 85
iii) Intégration de l'équation de Fokker-Planck 86
iv) Etude asymptotique 86
v) Comparaison avec une simulation Monte-Carlo 87

vi) Rôle des paramètres du problème 88
4. Etude du temps de refroidissement 89
a) Deux modèles à 1 dimension 89
b) Rôle des paramètres du problème 92
c) Les causes du long temps de refroidissement 92
5. Le refroidissement par impulsions 94
a) La condition de passage adiabatique 95
b) Diagramme durée-fréquence de Rabi 97
c) Résolution numérique de l'équation de Schrödinger 99
d) Simulation de Monte-Carlo à 1D 100
e) Simulation de Monte-Carlo à 3D 101
f) Le refroidissement par impulsions de Blackman 105
6. Conclusion 107
Complément A : Obtention des équations du mouvement 108
a) Notations 108
b) Equation d'évolution, hamiltonien du système 108
c) Approximation séculaire. Equations de Bloch optiques 109
d) Approximation Raman 110
e) Elimination adiabatique du niveau $|e\rangle$ 112
f) Passage en représentation de Wigner 114
g) Elimination adiabatique du niveau $|2\rangle$ 115

Chapitre 3 : Réalisation d'un nouveau piège à atomes 117
1. Principe du piège opto-électrique 118
a) Le piège dipolaire très désaccordé 118
i) Principe général du piège dipolaire 118
ii) Intensité lumineuse au voisinage du foyer d'un faisceau gaussien 119
iii) Déplacement lumineux des niveaux du césium 120
iv) Conditions de fonctionnement du piège dipolaire 124
v) Conclusion 129
b) Le piège opto-électrique 130
i) Principe du piégeage 130
ii) Evaluation du potentiel électrostatique. Détermination de la taille de l'électrode 134
iii) Les paramètres du faisceau dipolaire. Diagramme de fonctionnement 136
iv) Valeurs numériques retenues 138
v) Conclusion 139
2. Description du montage expérimental 139
a) Le piège magnéto-optique 142
b) Le faisceau dipolaire 144
i) Le laser utilisé 144

ii) Le couplage dans une fibre optique monomode 145
iii) Caractéristiques du faisceau à la sortie de la fibre 147
c) La cellule et l'électrode 148
i) La cellule en verre 148
ii) L'électrode 149
iii) L'alimentation électrique de l'électrode et la coupure de la haute tension 153
iv) L'alignement du POE par rapport au PMO 154
d) Les méthodes de détection 157
i) Détection par absorption 157
ii) Détection par fluorescence 163
e) La séquence temporelle 164
f) Résultat préliminaire 166
3. Résultats expérimentaux 169
a) Première mise en évidence expérimentale du piégeage opto-électrique 169
b) Mesure des oscillations longitudinales dans le POE 171
c) Mesures de la durée de vie du POE 173
i) Principe des mesures et facteurs limitatifs 173
ii) Les collisions inélastiques 174
4. Conclusion et perspectives 178
Complément A : Le piège électrostatique et magnétostatique 179
a) Réalisation pratique du piège 180
i) Réalisation en l'absence de gravité 180
ii) Rôle de la gravité 182
b) Principe du refroidissement Raman dans un piège électrostatique et magnétostatique 183
i) Choix des niveaux $|1\rangle$ et $|2\rangle$ 183
ii) Choix du niveau $|e\rangle$ 184
iii) Choix des directions des faisceaux, et de leurs polarisations . 185
iv) Parabole résonnante 187
v) Avantage d'une résonance sélective en vitesse et en position . 188
c) Ordres de grandeur 190
d) Les processus parasites 191
e) conclusion 194

Deuxième partie : Les effets quantiques collectifs 195

Chapitre I : Influence de la statistique quantique des atomes 199
1. Calcul dans le cadre de l'approximation de Born 200
2. Quelques publications sur le sujet 204

a) Diffusion de la lumière sur des atomes piégés 205
i) Le calcul de Lewenstein et You 205
ii) Le calcul de Javanainen 206
b) Diffusion de la lumière sur des atomes libres 208
c) Autres publications 210
3. Les paramètres de notre étude 211
4. Nature des résultats 212

Chapitre II: Les méthodes de calcul de l'indice de réfraction d'un milieu 215
1. Calcul d'indice par une méthode diagrammatique 216
a) Hamiltonien du problème 216
b) Etat du système à l'instant t 217
c) Calcul de la résolvante 219
d) Sommation des diagrammes de la formule (II.9) 221
e) Sommation des diagrammes de la formule (II.8) 222
f) Relation de dispersion 223
g) Utilisation d'un hamiltonien effectif 224
2. Calcul d'indice par une approche de champ moyen 224
a) Introduction 224
b) Méthode utilisant les équations de Maxwell-Bloch 225
c) Méthode utilisant les équations de Heisenberg 226
d) Moyenne sur les degrés de libertés atomiques externes 228
e) Obtention de la relation de dispersion 229
3. Comparaison des résultats des 2 approches 230
a) Comparaison des relations de dispersion 231
b) Interprétation physique de l'approche à 1 photon en termes de paquets d'ondes 232
i) Situation physique 233
ii) Absorption du paquet d'onde 234
iii) Calcul dans l'approche « champ moyen » 235
iv) Interprétation 236
4. Conclusion 236

Chapitre III: La méthode de la hiérarchie 237
1. Calcul de l'indice 237
a) Les quantités moyennées 237
b) Moyenne sur les variables atomiques externes 239
c) Brisure de la hiérarchie 240
d) Obtention de la relation de dispersion 241
2. Vers une évaluation numérique de l'équation (III.13) 243
a) Le potentiel d'interaction $\vec{g}$ 243

b) Calcul de la fonction de corrélation spatiale 245
i) Calcul de la densité de paire en dehors de la condensation de Bose-Einstein 245
ii) Calcul de α_s. Développement dans la limite classique 246
iii) Expression de la densité de paire comme la somme d'une série 247
iv) Développement dans le cas de fermions pour de grandes valeurs positives de α_s 248
v) Allure de la distribution de paire 249
c) Intégration angulaire de l'expression (III.13) 250
3. Complément : développement en puissance de la densité 252
a) Développement formel de la théorie macroscopique 253
b) Développement formel de la théorie microscopique 254
c) Identification des deux développements terme à terme 256
d) Expression du dipôle moyen en fonction de z 257
i) *Ansatz* sur le comportement spatial du dipôle moyen 257
ii) Calcul de la constante $\vec{D}_0$ 257
iii) Evaluation de la fonction ψ 258

Chapitre IV : Analyse du résultat **263**
1. Présentation des résultats numériques 263
a) Courbes en fonction du désaccord 263
b) Courbes en fonction de la température 264
c) Mesure d'indice à grand désaccord 266
2. Précisions sur l'approximation de Born 267
a) Le théorème optique 269
b) Comparaison des deux résultats 269
i) Calcul de la section efficace totale de diffusion 269
ii) Comparaison et interprétation 271
c) Comparaison des deux calculs en termes de diagrammes 271
i) Le théorème optique en termes de diagrammes 271
ii) Comparaison du terme statistique 274
d) Extension de la méthode utilisant l'approximation de Born . . . 275
e) Résultats numériques 276
3. Développement à grand désaccord du résultat (III.13) 277
a) Principe du développement et calcul 278
b) Evaluation du petit paramètre de densité 279
4. Le rôle de l'énergie cinétique. Condition sur le désaccord 279
a) Corrections du premier terme de l'indice induites par le mouvement des atomes 280
b) Calcul d'indice tenant compte du recul des atomes 281
i) Présentation du résultat 281
ii) Développement dans la limite de masse infinie 282

5. Complément : généralisation au cas d'une transition atomique quelconque 284
a) Calcul de l'indice 285
i) Changement d'axe de quantification 285
ii) Resommation des diagrammes d'interaction 285
iii) Résultat du calcul 287
b) Calcul formel et numérique 287
c) Résultat numérique 288

Chapitre V : Calcul de section efficace différentielle de diffusion 291
1. Calcul de l'intensité lumineuse dans le cas d'un milieu mince 293
a) Principe du calcul et définitions 293
b) Développement formel de la théorie microscopique 294
i) Calcul de l'intensité lumineuse 294
ii) Calcul de la valeur moyenne de produits de deux dipôles . . 295
c) Section efficace différentielle de diffusion 296
d) Résultat pour un milieu homogène 296
e) Séparation des termes de l'expression (V.15) 297
f) Intégration angulaire dans le cas d'un milieu sphérique 301
g) Résultats numériques 302
i) Principe du calcul numérique 302
ii) Résultat 303
iii) Résultat à grand désaccord 304
iv) Mesure de la lumière diffusée dans un petit angle 304
v) Conclusion 307
2. Généralisation au cas d'un milieu d'épaisseur quelconque 307
a) Equation de Dyson. Calcul de l'amplitude du champ 308
i) Introduction 308
ii) Calcul de la réponse irréductible 309
b) Calcul de l'intensité lumineuse 311
i) Equation de Bethe Salpeter 311
ii) Expression en fonction des dipôles 313
iii) Développement formel de la théorie macroscopique 314
iv) Développement formel de la théorie microscopique 315
v) Calcul du vertex à l'ordre 2 en densité 316
vi) Interprétation et remarques 317
vii) Le théorème optique 318
c) Calcul de l'intensité loin du milieu 318
i) Le vertex réductible 318
ii) Solution diagrammatique (dans le cas scalaire) 319
iii) Un problème ouvert : la résolution dans le cas vectoriel . . . 320

Annexe A : Les équations du mouvement dans l'approche « champ moyen » 323
1. Obtention de l'hamiltonien en jauge $\vec{d} \cdot \vec{E}$ 323
a) Hamiltonien en jauge $\vec{A} \cdot \vec{p}$ 323
b) Transformation unitaire 325
c) Induction électrique dans la jauge transformée 326
d) Obtention de l'hamiltonien transformé 327
2. Obtention des équations du mouvement 329
a) Obtention de l'équation sur le champ 329
i) Evolution de l'opérateur de création 329
ii) Evolution du champ 329
iii) Moyenne sur le champ et sur les variables atomiques internes 330
iv) Intégration temporelle 330
v) Calcul du potentiel d'interaction 331
b) Obtention de l'équation sur les dipôles 333
i) Hamiltonien atomique 333
ii) Hamiltonien dans l'approximation de champ tournant 335
iii) Equations de Heisenberg sur les dipôles 336
iv) Moyenne sur les degrés de libertés atomiques internes et sur le champ 336
v) Retour sur la modélisation par un oscillateur harmonique . . 339
3. Calcul de l'indice de réfraction 340
a) Relation de dispersion 340
b) Rôle du terme de contact. Formule de Lorentz-Lorenz 340
4. Obtention « traditionnelle » de Lorentz-Lorenz 341
a) Obtention des équations moyennées 342
b) Propriétés du tenseur d'interaction 343
c) Obtention de la relation de dispersion 344
d) Obtention directe de la formule de Lorentz-Lorenz 345
5. Conclusion 345

Annexe B : Calcul dans l'approche diagrammatique 347
1. Calcul utilisant la matrice T 348
a) Calcul de l'indice créé par un seul atome 348
i) Hamiltonien du problème 348
ii) Théorie de la diffusion 349
iii) La méthode des projecteurs 350
iv) Calcul de l'élément de la matrice T 351
b) Les problèmes survenant lors du passage à N atomes 352
i) Calcul de la matrice T 352
ii) Prise en compte de quelques diagrammes de diffusion multiple 353
iii) Généralisation du « résultat » (B.18) 357

iv) Origine de l'erreur 358
v) Utilisation correcte de la matrice T 358
c) Conclusion 360
2. Calcul de l'indice à l'ordre 2 en densité 360
a) Calcul dans le cas d'atomes discernables 361
i) Calcul de la résolvante en utilisant la méthodes des projecteurs361
ii) Calcul de R_{impair} et R_{pair} 362
iii) Développement du Viriel à l'ordre 2 : calcul du terme pair . . 364
iv) Calcul du terme impair 366
v) Relation de dispersion 369
b) Prise en compte de la statistique 369
i) Présentation de la méthode 369
ii) Projection sur un espace (anti)symétrisé 370
iii) Eléments de matrice de $R(z)$ 371
iv) Calcul de la résolvante 372
v) Moyenne sur les variables atomiques externes 373
vi) Relation de dispersion 374
3. Le problème des termes antirésonnants 375
a) Calcul sans tenir compte des interactions atomiques 376
i) Les diagrammes resommés 376
ii) Obtention de la relation de dispersion 377
iii) Interprétation physique 379
b) Prise en compte des interactions et de la statistique 381
c) Les défauts de la méthode 382
i) La prise en compte de tous les diagrammes 382
ii) L'approximation de l'atome à deux niveaux 383
4. Conclusion 384

Annexe C : Renormalisation par la méthode de Barrat 385
1. Calcul par la méthode de la résolvante 386
a) Introduction 386
b) Calcul du potentiel renormalisé 386
c) Interprétation 387
d) Relation de dispersion 388
2. La renormalisation par la méthode de la hiérarchie 388
a) *Ansatz* sur le terme à 3 atomes 388
b) Relation de dispersion 389
3. Résultats numériques 390

Conclusion générale 393

Olivier MORICE

« Atomes refroidis par laser : du refroidissement sub-recul à la recherche d'effets quantiques collectifs »

RÉSUMÉ

Les techniques de refroidissement d'atomes par laser ont permis d'atteindre des températures suffisamment basses pour que des effets liés à la statistique quantique deviennent observables. Toutefois, compte tenu des faibles densités mises en jeu dans ces expériences, de tels effets ne sont significatifs que lorsque la vitesse moyenne des atomes est inférieure à la vitesse de recul d'un seul photon. La première partie de cette thèse présente la mise en œuvre expérimentale à une dimension d'une méthode de refroidissement laser permettant de franchir la limite du recul, le refroidissement Raman. Pour rendre possible la généralisation cette méthode à trois dimensions et au cas d'atomes confinés, un nouveau type de piège, le piège opto-électrique, a été mis au point. Dans la deuxième partie, la détection des effets quantiques collectifs par une méthode optique (mesures de l'indice de réfraction et de la section efficace de diffusion) est étudiée théoriquement dans le cas d'un nuage atomique homogène et de faible densité. Sous cette hypothèse, les effets statistiques induisent une perturbation du signal faible, quoique détectable.

ABSTRACT

Thanks to laser cooling techniques, very low temperatures are now attainable. Quantum collective effects may consequently be observed. Since the densities involved in laser cooling experiments are rather low, such collective effects become relevant only when the average atomic velocity is smaller than the one photon recoil velocity. A subrecoil laser cooling method (Raman cooling) has been performed experimentally in one dimension, and is presented in the first part of this thesis. In order to generalise this technique to three dimensions with trapped atoms, we have realised a new kind of trap (the opto-electrical trap). In the second part of this thesis, we study theoretically an optical method for detecting collective quantum effects (measurements of the refractive index and of the scattering cross section). Our treatement is valid for the case of a homogeneous and weakly dense atomic cloud. We find that collective effects are responsible for a small but detectable perturbation of the signal.

MOTS CLEFS

Refroidissement radiatif — Refroidissement sub-recul — Refroidissement Raman — Piège dipolaire — Statistique quantique — Condensation de Bose-Einstein — Indice de réfraction — Diffusion de la lumière.