



**HAL**  
open science

# Représentation et propagation de connaissances imprécises et incertaines: Application à l'évaluation des risques liés aux sites et sols pollués.

Cédric Baudrit

► **To cite this version:**

Cédric Baudrit. Représentation et propagation de connaissances imprécises et incertaines: Application à l'évaluation des risques liés aux sites et sols pollués.. Interface homme-machine [cs.HC]. Université Paul Sabatier - Toulouse III, 2005. Français. NNT : 2005TOU30104 . tel-00011933

**HAL Id: tel-00011933**

**<https://theses.hal.science/tel-00011933>**

Submitted on 13 Mar 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ TOULOUSE III – PAUL SABATIER  
U.F.R. Mathématiques Informatique Gestion

**THÈSE**

pour obtenir le grade de  
**DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ TOULOUSE III**  
Discipline : Informatique

présentée et soutenue  
par

**Cédric BAUDRIT**

le 19 octobre 2005

**Représentation et propagation  
de connaissances imprécises et incertaines :  
Application à l'évaluation des risques liés  
aux sites et aux sols pollués**

**JURY**

Eric Chojnacki	Ingénieur, IRSN, Cadarache - <i>examineur</i>
Thierry Denoeux	Professeur, Université de Technologie de Compiègne - <i>rapporteur</i>
Didier Dubois	Directeur de Recherche CNRS, IRIT, Toulouse 3 - <i>directeur de thèse</i>
Dominique Guyonnet	Responsable d'unité, BRGM, Orléans - <i>examineur</i>
Jean-Yves Jaffray	Professeur, LIP, PARIS 6 - <i>rapporteur</i>
Monique Pontier	Professeur, LSP, Université Paul Sabatier, Toulouse 3 - <i>présidente</i>

**MEMBRES INVITÉS**

Hafid Baroudi	(Institut National de l'Environnement Industriel et des Risques (INERIS))
Catherine Mercat-Rommens	(Institut de Radioprotection et de Sûreté Nucléaire (IRSN))



# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>13</b>
<b>Résumé</b>	<b>15</b>
<b>Abstract</b>	<b>17</b>
<b>1 Introduction</b>	<b>19</b>
1.1 Problématique . . . . .	19
1.2 Objectifs . . . . .	22
1.3 Organisation du rapport de thèse . . . . .	23
<b>2 Cadres formels pour représenter les probabilités imprécises</b>	<b>27</b>
2.1 Relations entre les différents cadres représentatifs des probabilités imprécises	27
2.1.1 Famille de probabilités et paires de probabilités cumulées (p-boxes) . .	28
2.1.2 Famille de probabilités et distributions de possibilité . . . . .	29
2.1.3 Famille de probabilités et fonctions de croyance . . . . .	30
2.2 Approximations discrètes par des fonctions de croyance . . . . .	30
2.2.1 les distributions de probabilité exprimées sous forme de fonctions de croyance . . . . .	30
2.2.2 les distributions de possibilité exprimées sous forme de fonctions de croyance . . . . .	31
2.2.3 Différentes façons d’exprimer une p-box sous forme de fonctions de croyance . . . . .	32
2.3 Comparaison entre l’expressivité de la p-box et celle de la distribution de pos- sibilité . . . . .	32
2.4 Famille de probabilités et variables aléatoires floues . . . . .	39
2.4.1 Modèle classique . . . . .	39
2.4.2 Modèle possibiliste de second ordre . . . . .	40
2.5 Distributions de possibilité codant les intervalles de prédiction . . . . .	42
<b>3 Représentations mathématiques de la connaissance</b>	<b>49</b>
3.1 Représentation de l’information par une distribution de probabilité $p$ . . . . .	49
3.1.1 Echantillon de grande taille . . . . .	49
3.1.2 Connaissance Théorique . . . . .	50
3.2 Représentation de l’information par les p-boxes . . . . .	50
3.2.1 Approximation d’une mesure de probabilité de moyenne et de support connu. . . . .	51

3.2.2	Représentation d'un échantillon de petite taille . . . . .	52
3.2.3	Approximation d'un modèle probabiliste paramétrique . . . . .	53
3.3	Représentation discrète par les fonctions de croyance . . . . .	54
3.4	Représentation de l'information par des distributions de possibilité continues	55
3.4.1	Distributions de possibilité avec le mode et le support connus : <i>Condition de Dominance</i> . . . . .	56
3.4.2	Prise en compte des fractiles dans la représentation possibiliste continue	59
3.4.3	Distribution de possibilité continue connaissant le mode et le support : <i>Condition de Dominance par les Intervalles de Prédiction</i> . . . . .	61
3.5	Représentation par une variable aléatoire floue . . . . .	63
3.6	Synthèse des représentations cohérentes avec la nature de l'information disponible	64
<b>4</b>	<b>Propagation des incertitudes épistémiques et stochastiques</b>	<b>67</b>
4.1	(In)dépendances . . . . .	68
4.1.1	Cadre classique des probabilités . . . . .	68
4.1.1.1	Définition de l'indépendance . . . . .	68
4.1.1.2	Notions sur les Copules . . . . .	69
4.1.2	Notions d'indépendance dans le cadre des probabilités imprécises . . .	69
4.2	Propagation dite " <i>Hybride</i> " combinant Possibilités et Probabilités . . . . .	72
4.3	Propagation des incertitudes dans le cadre de Dempster-Shafer " <i>ensembles aléatoires</i> " . . . . .	75
4.3.1	Hypothèse d'indépendance entre les incertitudes sources : " <i>Independent Random Sets</i> " . . . . .	75
4.3.2	Sans hypothèse sur les dépendances entre les incertitudes sources : " <i>Conservative Random Sets</i> " . . . . .	78
4.4	Propagation des incertitudes dans le cadre des p-boxes " <i>Dependency Bounds Convolution</i> " . . . . .	80
4.5	" <i>Conservative Random Sets</i> " versus " <i>Dependency Bounds Convolution</i> " . . .	84
4.6	Synthèse de la propagation des incertitudes stochastiques et épistémiques . .	86
4.7	Résultats issus des méthodes de propagation sur un cas synthétique . . . . .	87
4.8	Discussion sur le Monte-Carlo 2D . . . . .	88
<b>5</b>	<b>Exploitation des résultats issus de la propagation des incertitudes</b>	<b>91</b>
5.1	Présentation des résultats issus de la propagation des fonctions de croyance .	91
5.1.1	Mesurer la variabilité et l'imprécision séparément . . . . .	91
5.1.2	Estimer la probabilité d'un dépassement de seuil (vision verticale) . .	92
5.1.3	Intervalles de Prédiction (vision horizontale) . . . . .	95
5.1.4	Moyenne . . . . .	98
5.2	Résultats issus de la méthode " <i>Hybride</i> " . . . . .	99
5.2.1	Mesurer la variabilité et l'imprécision séparément . . . . .	99
5.2.2	Post-traitement proposé par Guyonnet et al. [63] . . . . .	100
5.2.3	Comparaison avec le traitement de Ferson et al. . . . .	102
5.2.4	Liens avec le modèle classique des variables aléatoires floues . . . . .	102
5.2.5	Liens avec le modèle possibiliste de second ordre . . . . .	104

<b>6</b>	<b>Application sur des cas réels simplifiés</b>	<b>107</b>
6.1	Risque Radiologique	108
6.1.1	Transfert du Sol vers les Plantes (Activité racinaire)	109
6.1.1.1	Représentation de l'information disponible	109
6.1.1.2	Etude des incertitudes de l'activité racinaire	110
6.1.2	Interception Directe des Retombées d'un rejet par les Végétaux (Activité foliaire)	116
6.1.2.1	Représentation de l'information disponible	116
6.1.2.2	Etude des incertitudes de l'activité foliaire	118
6.1.3	Activité massique du fourrage	122
6.1.3.1	Calcul d'intervalles	123
6.1.3.2	Calcul de référence	123
6.1.3.3	Calcul purement probabiliste (variabilité)	123
6.1.3.4	Calcul "hybride" (Combine imprécision-variabilité)	124
6.1.4	Transfert vers les produits animaux	125
6.1.4.1	Représentation de l'information disponible	125
6.1.4.2	Etude des incertitudes de l'activité volumique du lait	126
6.1.5	Transfert à l'homme	128
6.1.5.1	Représentation de l'information disponible	129
6.1.5.2	Etude des incertitudes sur la dose de strontium 90 ingérée	130
6.1.6	Conclusion	133
6.2	Les eaux souterraines	134
6.2.1	Description du scénario et Représentation mathématique de l'information disponible sur les paramètres	135
6.2.1.1	Terme Source	135
6.2.1.2	Le vecteur	137
6.2.1.3	Synthèse	143
6.2.2	Etude des incertitudes sur le modèle de la concentration	145
6.2.2.1	Calcul d'intervalles	145
6.2.2.2	Calcul purement probabiliste	145
6.2.2.3	Calculs "Hybride" et "Independent Random Sets"	147
6.2.2.4	Les effets du caractère imprécis de l'information sur le calcul de la concentration $C_{pc}$ en TCE	147
6.2.2.5	Les effets de la convexité de $C_s$ sur l'incertitude de concentration $C_{pc}$ en TCE	149
6.2.2.6	Les effets de la méthode de propagation choisie sur l'incertitude de la concentration $C_{pc}$	149
6.2.3	Conclusion	150
6.3	Cas de la pollution par le plomb	151
6.3.1	Représentation de l'information concernant les paramètres du modèle	153
6.3.1.1	Concentration en polluant (Plomb) dans le sol ( $C_{sol} (mg.kg^{-1}, sec)$ )	153
6.3.1.2	Taux d'ingestion de sol $Ir_{sol} (mg sol/jour)$	157
6.3.1.3	Fraction de sol ingérée $Fi (-)$	157
6.3.1.4	Durée d'exposition $Ed (ans)$	158
6.3.1.5	Fréquence d'exposition $Ef_{sol} (jours/an)$	158
6.3.1.6	Poids de l'individu $Bw (kg)$	158
6.3.1.7	Période sur laquelle l'exposition est moyennée $At (jours)$	159

6.3.2	Etude des incertitudes sur la dose absorbée $D_{sol}$ et la plombémie $[Pb]$	159
6.3.2.1	Calcul déterministe . . . . .	161
6.3.2.2	Calcul d'intervalles . . . . .	161
6.3.2.3	Calcul purement probabiliste . . . . .	163
6.3.2.4	Traitement de l'imprécision et de la variabilité de l'information	163
6.3.3	Conclusion . . . . .	169
<b>7</b>	<b>Conclusion</b>	<b>171</b>
<b>A</b>	<b>Notions de théorie des probabilités</b>	<b>175</b>
<b>B</b>	<b>Théorie des possibilités</b>	<b>177</b>
B.1	Principe d'Extension . . . . .	181
B.2	Sous Ensembles Flous . . . . .	182
<b>C</b>	<b>Théorie des fonctions de croyance</b>	<b>185</b>
C.1	Fonctions de croyance de Shafer [88] . . . . .	185
C.2	Fonctions de croyance - Intervalles Aléatoires . . . . .	188
<b>D</b>	<b>Recuit simulé</b>	<b>189</b>
	<b>Références</b>	<b>192</b>

# Table des figures

1.1	Confusion entre Variabilité et Imprécision. . . . .	21
1.2	Différence de résultats lors de la propagation selon que l'information est de nature imprécise ou aléatoire sur le modèle $A + B$ . . . . .	21
1.3	Influence des dépendances lors du processus de propagation sur les résultats du modèle $A + B$ . . . . .	22
2.1	Expression d'une distribution de probabilité à l'aide des fonctions de croyance	31
2.2	Expression d'une distribution de possibilité à l'aide des fonctions de croyance (approximation inférieure) . . . . .	31
2.3	Expression d'une distribution de possibilité à l'aide des fonctions de croyance (approximation supérieure) . . . . .	32
2.4	Expression d'une p-box à l'aide des fonctions de croyance . . . . .	33
2.5	Expression d'une p-box à l'aide des fonctions de croyance . . . . .	33
2.6	Mesures de probabilité dans $\mathcal{P}(\underline{F} < \overline{F})$ mais non présente dans $\mathcal{P}(\pi)$ . . . . .	36
2.7	Exemple de familles de probabilité incluses dans la distribution de possibilité triangulaire de noyau $\{10\}$ et de support $[1, 17]$ . . . . .	37
2.8	Densités de probabilité correspondant à $F^1$ et $F^2$ de la Figure 2.7 . . . . .	37
2.9	Echantillon de 3 distributions de possibilité $\tilde{T}(w_i)$ de la variable floue aléatoire $\tilde{T}$ et de 3 intervalles $[T(w_i)]_{0.4}$ de l'intervalle aléatoire $\tilde{T}_{0.4}$ . . . . .	40
2.10	Distribution de possibilité que la vraie probabilité d'être inférieure à 0.25 soit égale à $F(0.25)$ . . . . .	42
2.11	Echantillon de la famille $\mathcal{P}(\{\underline{F}_\alpha, \overline{F}_\alpha\})$ de mesures de probabilité . . . . .	43
2.12	Transformation optimale. . . . .	44
2.13	Densité triangulaire $p$ à gauche et la forme de sa transformation optimale $\pi_p^*$ à droite. . . . .	45
2.14	Densité de probabilité unimodale continue. . . . .	46
2.15	Etapas de la transformation optimale d'une densité de probabilité unimodale continue quand $\lambda \in [p(a_2), p(a_3)]$ . . . . .	46
2.16	Forme de la transformation optimale $\pi_p^*$ de la densité de probabilité unimodale continue $p$ . . . . .	46
3.1	Fréquences relatives des hauteurs de pluie mesurées et Calage des fréquences mesurées à l'aide d'un loi normale de moyenne 222.2 mm et d'écart-type 39.5 mm . . . . .	50
3.2	P-box défini à partir de $x \in [2, 7]$ et $E(X) = 4$ . . . . .	51
3.3	Distribution de possibilité $\pi$ contenant la p-box $[\underline{F}, \overline{F}]$ . . . . .	51
3.4	Une P-box $[\underline{F}, \overline{F}]$ défini à partir d'un échantillon de taille 10. . . . .	53

3.5	Distribution de possibilité optimale $\pi_p$ connaissant $\mu = 2$ et $\sigma = 1$ , utilisant l'inégalité de Bienaymé-Chebychev et Camp-Meidel. . . . .	55
3.6	Distribution de possibilité $\pi_L$ respectant la <i>condition de Dominance</i> quand on connaît le mode $M$ et le support. . . . .	57
3.7	Distribution de possibilité $\pi_{L,F(M)}$ respectant la <i>condition de Dominance</i> quand on connaît le mode $M$ , $F(M)$ et le support . . . . .	58
3.8	$M=4$ , $F(M) = 0.4$ , $\min = 0$ et $\max = 10$ . . . . .	58
3.9	Distribution de possibilité $\pi_L^m$ respectant la <i>condition de Dominance</i> quand on connaît la médiane, le mode $M$ , $F(M)$ et le support. . . . .	60
3.10	Cas où l'expert fournit les fractiles à 5%, 50% et 95% égaux à 1, 5 et 9 sur $[0,10]$ . . . . .	60
3.11	transformation optimale de $p$ autour du mode. . . . .	62
3.12	Borne supérieure de $\pi_p^*$ et son amélioration quand la concavité-convexité de $p$ est connue pour $M=0$ et $F(M) = 0.4$ . . . . .	64
4.1	Schéma du Calcul "Hybride" où $(X_i)_{i=1\dots k}$ sont les variables probabilistes (variabilité), $(X_i)_{i=k+1\dots n}$ les variables modélisées par des possibilités (imprécision) et $T$ le modèle mathématique. . . . .	74
4.2	Majoration et Minoration de la fonction de répartition $F_{L(x,y)}$ . . . . .	81
4.3	Méthode numérique pour calculer $\underline{F}_{X+Y}^{-1}(3/5)$ , $\overline{F}_{X+Y}^{-1}(3/5)$ . . . . .	82
4.4	Méthode numérique pour calculer $\underline{F}_{X-Y}^{-1}(3/5)$ , $\overline{F}_{X-Y}^{-1}(3/5)$ . . . . .	83
4.5	p-box of $X$ , $Y$ et $Z$ . . . . .	84
4.6	Probabilités cumulées haute et basse de $T$ . . . . .	85
4.7	Représentation mathématiques des paramètres $x$ , $y$ et $z$ du modèle $T$ . . . . .	87
4.8	Un échantillon de 17 distributions de possibilité issu du calcul "Hybride" . . . . .	88
4.9	Probabilités cumulées hautes et basses du modèle $\frac{(X+Z)}{Y}$ selon les 3 méthodes de propagation. CRS="Conservative Random Sets", IRS="Independent Random Sets", DBC="Dependency Bounds Convolution" . . . . .	89
5.1	Probabilités haute $Pl^T((-\infty, t])$ et basse $Bel^T((-\infty, t])$ associée à la variable $T(X, Y, Z) = (X + Z)/Y$ . . . . .	93
5.2	Probabilités haute $Pl^T([t, +\infty))$ et basse $Bel^T([t, +\infty))$ associée à la variable $T(X, Y, Z) = (X + Z)/Y$ . . . . .	94
5.3	Distribution de possibilité $\pi_i^T$ . . . . .	96
5.4	Approximation inférieure des intervalles de prédiction $T(X, Y, Z) = (X + Z)/Y$ . . . . .	96
5.5	Intervalles de prédiction optimistes et conservatifs de $T(X, Y, Z) = (X + Z)/Y$ . . . . .	97
5.6	Intervalle moyen de $T(X, Y, Z) = (X + Z)/Y$ . . . . .	98
5.7	Post traitement du calcul "Hybride" proposé par Guyonnet et al. [63]. . . . .	101
5.8	Obtention de la même distribution de possibilité $\pi_d^T$ issue du post traitement proposé par Guyonnet et al. [63] sur deux résultats possibles du calcul "Hybride". . . . .	102
5.9	Post traitement de Ferson et al. sur un échantillon de 10 distributions de possibilité issues du calcul "Hybride". . . . .	103
5.10	Probabilités cumulées hautes et basses du modèle $\frac{(X+Z)}{Y}$ selon les 4 méthodes de propagation. Hyb="Hybride", CRS="Conservative Random Sets", IRS="Independent Random Sets", DBC="Dependency Bounds Convolution" . . . . .	105
6.1	Effets de la variabilité sur l'activité racinaire du maïs dans le cadre probabiliste. . . . .	112

6.2	Effets de la variabilité du paramètre $P_r$ sur l'activité racinaire du maïs dans le cadre probabiliste. . . . .	112
6.3	Effet sur l'activité racinaire du maïs selon différentes lois de probabilité de $P_r$ . . . . .	113
6.4	Impact sur les probabilités de l'activité racinaire du maïs selon que l'on considère l'information sur la profondeur racinaire $P_r$ de nature aléatoire ou imprécise. . . . .	114
6.5	Influence de la représentation de la profondeur racinaire $P_r$ sur la probabilité que l'activité racinaire du maïs soit supérieure à un certain seuil. . . . .	115
6.6	Distribution de possibilité trapézoïdale $\pi$ de support $[0.015,1000]$ et de noyau $[0.025,0.1]$ . . . . .	117
6.7	Probabilités cumulées haute et basse issues de $\pi$ encadrant la probabilité cumulée trapézoïdale en noir. . . . .	117
6.8	Effet de la variabilité sur l'activité foliaire du maïs dans le cadre purement probabiliste (échelle logarithmique). . . . .	120
6.9	Influence de la représentation de $R_c, Rdt$ sur la probabilité d'obtenir l'activité foliaire du maïs supérieure à un certain seuil. . . . .	121
6.10	Influence de la représentation des paramètres $\lambda_{bio}, R_c, Rdt$ sur la probabilité d'obtenir l'activité foliaire du maïs supérieure à un certain seuil (échelle logarithmique). Ordre des indices correspondant aux paramètres indice= $(\lambda_{bio}, R_c, Rdt)$ . . . . .	122
6.11	Effet de la variabilité sur l'activité foliaire du maïs dans le cadre purement probabiliste (échelle logarithmique). . . . .	124
6.12	Influence de la représentation des paramètres $P_r, \lambda_{bio}, R_c, Rdt$ sur la probabilité que l'activité massique du maïs soit supérieure à un certain seuil. Ordre des indices correspondant aux paramètres $ind = (P_r, \lambda_{bio}, R_c, Rdt)$ . . . . .	125
6.13	Effets de la variabilité sur l'activité volumique du lait $Bq.l^{-1}$ . . . . .	128
6.14	Influence de la représentation de $P_r, \lambda_{bio}, R_c, Rdt, Ft_{lait}, Ration_{fourrage}$ sur la probabilité d'obtenir l'activité massique du maïs supérieure à un certain seuil (échelle logarithmique). Ordre des indices correspondant aux paramètres $(P_r, \lambda_{bio}, R_c, Rdt, Ft_{lait}, Ration_{fourrage})$ . . . . .	129
6.15	Distribution de possibilité pour la ration alimentaire de lait $Ration_{lait} (l.an^{-1})$ . . . . .	131
6.16	Probabilité cumulée tronquée pour la ration alimentaire de lait $Ration_{lait} (l.an^{-1})$ . . . . .	131
6.17	Effet de la variabilité sur la dose de strontium ingérée $Bq.an^{-1}$ , (Echelle logarithmique). . . . .	132
6.18	Influence de la représentation des paramètres $P_r, \lambda_{bio}, R_c, Rdt, Ft_{lait}, Ration_{fourrage}, Ration_{lait}$ sur la probabilité d'obtenir la dose ingérée $D_{ing}$ supérieure à un certain seuil. Indice= $(P_r, \lambda_{bio}, R_c, Rdt, Ft_{lait}, Ration_{fourrage}, Ration_{lait})=(3, 1, 1, 3, 1, 1, 1)$ imprécis = $(4, 2, 2, 4, 2, 2, 2)$ cas purement probabiliste. . . . .	133
6.19	Distribution de possibilité trapézoïdale $\pi_{C_s}$ pour $C_s$ . . . . .	136
6.20	Distribution de possibilité convexe $\pi_{C_s}$ pour $C_s$ . . . . .	136
6.21	Fréquences relatives cumulées des pluies brutes annuelles. Historique sur 30 années. . . . .	137
6.22	Fréquences relatives cumulées issue de la loi normale caler à partir des données de pluie brute annuelle. . . . .	137
6.23	Shéma conceptuel correspondant à la solution de Galya [61]. . . . .	138
6.24	Modèle conceptuel souvent supposé dans les évaluations des risques "eaux souterraines". . . . .	138

6.25	Distribution de possibilité trapézoïdale pour la perméabilité $K$ ( $m.s^{-1}$ ). . . . .	140
6.26	Dispersivité longitudinale $\alpha_x$ en fonction de la distance d'après Gelhar et al. [62]	141
6.27	Distribution de possibilité $\pi_{\alpha_x}$ représentant la connaissance sur $\alpha_x$ . . . . .	142
6.28	Comparatif des résultats sur la concentration $C_{pc}$ selon la loi de probabilité utilisée (mesures - normale) sur la pluie déterminant la pluie efficace $Q$ (voir Section 6.3.1). . . . .	146
6.29	Comparatif sur la concentration $C_{pc}$ en TCE entre un traitement purement probabiliste et un traitement par calcul d'intervalles. . . . .	147
6.30	Impacts sur l'incertitude de la concentration selon que l'on considère l'information, sur $C_s, K, i, \phi, \alpha_x, \alpha_y, \alpha_z, \lambda$ et $K_d$ , de nature aléatoire ou imprécise.	148
6.31	Impacts sur l'incertitude de la concentration selon que l'on considère l'information, sur $\theta_Q, C_s, K, i, \phi, \alpha_x, \alpha_y, \alpha_z, \lambda, K_d$ , est de nature aléatoire ou imprécise et selon la convexité à droite ou non de la distribution de possibilité représentant $C_{sol}$ . . . . .	149
6.32	Impacts de latechnique de propagation utilisée sur l'incertitude de la concentration. . . . .	150
6.33	Teneur en plomb ( $mg.kg^{-1}$ , matière sèche) dans les terrains de 0 à 30 cm de profondeur. Cellules excavées/cellules non excavées. . . . .	154
6.34	Probabilité cumulée de la teneur en plomb à partir des données de la Figure 6.33. . . . .	155
6.35	Distribution de possibilité triangulaire $\pi_{C_{sol}}$ représentant l'information sur la teneur en plomb à atteindre sur site après dépollution. . . . .	155
6.36	Distributions de possibilité $\pi_{Ir_{sol}}$ représentant le taux d'ingestion de sol $Ir_{sol}$ .	157
6.37	Distributions de possibilité trapézoïdale $\pi_{Fi_{interieur}}$ représentant la fraction de sol ingérée à l'intérieur de l'habitat $Fi_{interieur}$ . . . . .	158
6.38	Probabilité que la dose absorbée dépasse un certain seuil avec un traitement purement probabiliste de l'incertitude dans le cadre où le site ne serait pas dépollué. . . . .	164
6.39	Comparatif sur la dose susceptible d'être absorbée $D_{sol}$ après objectif de dépollution du site entre le traitement purement probabiliste et le traitement par intervalle	164
6.40	Influence de la représentation de la concentration $C_{sol}$ sur la dose relative à l'ingestion de sol $D_{sol}$ . . . . .	165
6.41	Impacts de l'imprécision due à $C_{sol}, Ir_{sol}$ et $Fi$ sur l'incertitude de la dose relative à l'ingestion de sol $D_{sol}$ avec la méthode de propagation "hybride" . .	167
6.42	Probabilité que la dose absorbée dépasse un certain seuil selon la méthode de propagation utilisée, P.b = probabilité basse, P.h = probabilité haute. . . . .	169
A.1	Représentation probabiliste de l'incertitude stochastique . . . . .	176
B.1	Distribution de possibilité définie à partir de l'avis d'expert : je suis sûr à 20% que $pH \in [6.8, 7.8]$ . . . . .	178
B.2	Exemple d'une distribution de possibilité $\pi_{expert}$ définie à partir de l'avis d'expert sur l'exemple précédent. . . . .	179
B.3	Représentation graphique d'une distribution de possibilité $\pi$ (aussi appelée intervalle flou) . . . . .	179
B.4	Fonctions de répartition haute et basse induites par la distribution de possibilité $\pi$ définie à partir de l'avis d'expert sur le $pH$ . . . . .	180

B.5	Calcul possibiliste de $A+B$ . . . . .	182
C.1	Mesures imprécises d'un paramètre variable. . . . .	187



# Remerciements

Ce travail a été financé par trois organismes :

- Bureau de Recherches Géologiques et Minières (BRGM).
- Institut de Radioprotection et de Sûreté Nucléaire (IRSN).
- Institut National de l’Environnement Industriel et des Risques (INERIS).

Mes remerciements vont tout d’abord à Didier Dubois, Directeur de recherche CNRS à l’université Paul Sabatier, pour avoir encadré et dirigé mes recherches. Je le remercie pour toute la confiance qu’il a su me porter, et pour la patience, la gentillesse et la disponibilité dont il a fait preuve à mon égard. Ses conseils et remarques constructives m’ont permis d’améliorer grandement la qualité de mes travaux et de ce mémoire.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à Dominique Guyonnet, Responsable de l’unité déchets et stockages au BRGM, qui a été un des précurseurs dans l’émergence de ce sujet de recherche. Son suivi et nos nombreuses collaborations ont joué un rôle majeur pour l’élaboration de ce travail. Je lui suis particulièrement redevable pour ce qui concerne les chapitres relatifs aux applications : pollution au trichloroéthylène des eaux souterraines et la pollution des sols par le plomb.

Un très grand merci à Eric Chojnacki et Catherine Mercat-Rommens, ingénieurs à l’IRSN, pour leur soutien. Ils ont contribué dans une large mesure à ce travail de par leur suivi et leurs remarques notamment dans le chapitre concernant l’application sur le risque radiologique.

Deseo dar las gracias a Inés Couso Blanco, profesora de la universidad de Oviedo por haberme acogido en el Departamento de Estadística e Investigación Operativa y Didáctica Matemática. Esta colaboración me permitió comprender mejor los conceptos de independencia en el marco de las probabilidades imprecisas. Contribuyó también a la escritura de dos artículos sobre los aspectos de las variables aleatorias borrosas resultantes de la propagación de la incertidumbre en el análisis de riesgo.

Je remercie également Hafid Baroudi qui a permis à un organisme plus proche des préoccupations industrielles comme l’INERIS de s’intéresser à ces travaux de recherche. Il a également contribué, en partenariat avec l’ADEME, à l’élaboration du chapitre sur l’application concernant la pollution des sols par le plomb.

Un très grand merci à mes deux rapporteurs, dont la lecture approfondie de ce mémoire

a permis d'en améliorer la qualité : Monsieur Thierry Denoeux, Professeur de l'Université de Technologie de Compiègne, et Monsieur Jean-Yves Jaffray, Professeur à l'Université de Paris VI.

Je tiens également à remercier Madame Monique Pontier, Professeur au laboratoire de statistique et probabilités de l'Université Paul Sabatier (Toulouse III), pour l'intérêt qu'elle a porté à mes travaux en examinant ce mémoire et l'honneur qu'elle me fait en participant à ce jury, sur un sujet de recherche parfois controversé dans le milieu des statisticiens.

Ces trois années m'ont permis de rencontrer et de me rapprocher de personnes généreuses et affectueuses qui ont su me soutenir dans les périodes difficiles que peut rencontrer un docteur (doute, fatigue, retard, stress ...); alors merci à Asma, Nathalie, Karenne, Sandra, Gwen et Manu.

Je remercie tout particulièrement belinha qui a su faire preuve de patience et a accepté le fait que mes congés et mes week-end soient parfois consacrés à un sujet relativement éloigné des préoccupations de la vie de couple.

Je ne peux enfin clôturer ces remerciements sans remercier du fond du coeur mes parents, qui n'ont eu de cesse de me soutenir et de croire en moi pendant ces longues années d'études.

# Résumé

Actuellement, les choix relatifs à la gestion des sites potentiellement pollués s'appuient, notamment, sur une évaluation des risques pour l'homme et l'environnement. Cette évaluation est effectuée à l'aide de modèles qui simulent le transfert de polluant depuis une source de pollution vers une cible vulnérable, pour différents scénarii d'exposition. La sélection des valeurs des paramètres de ces modèles s'appuie autant que possible sur les données recueillies lors des investigations de terrain (phase de diagnostic de site). Or pour des raisons de délais et de coûts, l'information recueillie lors de cette phase de diagnostic est toujours incomplète ; elle est donc entachée d'incertitude. De même, les modèles de transferts et d'exposition présentent également des incertitudes à intégrer dans les procédures. Cette notion globale d'incertitude doit être prise en compte dans l'évaluation du risque pour que les résultats soient utiles lors la phase décisionnelle.

L'incertitude sur les paramètres peut avoir deux origines. La première provient du caractère aléatoire de l'information due à une variabilité naturelle résultant de phénomènes stochastiques. On parle alors d'incertitudes de variabilité ou d'incertitudes stochastiques. La seconde est liée au caractère imprécis de l'information lié à un manque de connaissance et qui résulte par exemple d'erreurs systématiques lors de mesures ou d'avis d'experts. On parle alors d'incertitudes épistémiques. Dans le calcul de risque, ces deux notions sont souvent confondues alors qu'elles devraient être traitées de manière différente.

L'incertitude en évaluation des risques a surtout été appréhendée dans un cadre purement probabiliste. Cela revient à supposer que la connaissance sur les paramètres des modèles est toujours de nature aléatoire (variabilité). Cette approche consiste à représenter les paramètres incertains par des distributions de probabilité uniques et à transmettre l'incertitude relative à ces paramètres sur celle du risque encouru par la cible, en appliquant en général la technique dite Monte Carlo. Si cette approche est bien connue, toute la difficulté tient à une définition cohérente des distributions de probabilité affectées aux paramètres par rapport à la connaissance disponible. En effet dans un contexte d'évaluation des risques liés à l'exposition aux polluants, l'information dont on dispose concernant certains paramètres est souvent de nature imprécise. Le calage d'une distribution de probabilité unique sur ce type de connaissance devient subjectif et en partie arbitraire.

L'information dont on dispose réellement est souvent plus riche qu'un intervalle mais moins riche qu'une distribution de probabilité. En pratique, l'information de nature aléatoire est traitée de manière rigoureuse par les distributions de probabilité classiques. Celle de nature

imprécise est traitée de manière rigoureuse par des familles de distributions de probabilité définies au moyen de paires de probabilités cumulées hautes et basses ou, à l'aide de théories plus récentes, au moyen de distributions de possibilité (aussi appelées intervalles flous) ou encore au moyen d'intervalles aléatoires utilisant les fonctions de croyance de Dempster-Shafer.

Un des premiers objectifs de ce travail est de promouvoir la cohérence entre la manière dont on représente la connaissance sur les paramètres des modèles du risque et la connaissance dont on dispose réellement. Le deuxième objectif est de proposer différentes méthodes pour propager l'information de nature aléatoire et l'information de nature imprécise à travers les modèles du risque tout en essayant de tenir compte des dépendances entre les paramètres. Enfin, ces méthodes alternatives ont été testées sur des cas synthétiques puis sur des cas réels simplifiés, notamment pour proposer des moyens de présenter les résultats pour une phase décisionnelle.

- Calcul de dose : Transfert d'un polluant radioactif (le strontium) depuis le dépôt jusqu'à l'homme, au travers de la consommation d'un aliment (le lait de vache).
- Risque toxique après un déversement accidentel de trichloréthylène (TCE) au dessus d'une nappe d'eau (modèle semi analytique).
- Risque pour la santé liée aux sols pollués par des retombées de plomb.

# Abstract

Currently, decisions pertaining to the management of potentially polluted sites very often rely on the evaluation of risks for man and the environment. This evaluation is carried out with the help of models which simulate the transfer of pollutants from a source to a vulnerable target, for different scenarios of exposure. The selection of parameter values of these models is based as much as possible on the data collected at the time of on-site investigations (phase of diagnosis). However, due to time and financial constraints, information regarding model parameters is often incomplete and imprecise. This leads to uncertainty that needs to be accounted for the decision-making process.

Uncertainty regarding model parameters may have essentially two origins. It may arise from randomness due to natural variability resulting from heterogeneity of population or the fluctuations of a quantity in time. Or it may be caused by imprecision due to a lack of information resulting, for example, from systematic measurement errors or expert opinions. In risk assessment, no distinction is traditionally made between these two types of uncertainty, both being represented by means of a single probability distribution.

So, uncertainty in risk assessment models is generally addressed within a purely probabilistic framework. This approach comes down to assuming that knowledge regarding model parameters is always of random nature (variability). Such knowledge is represented by single probability distributions typically propagated through the risk model using the Monte-Carlo technique. Even if this approach is well-known, the difficulty is to avoid an arbitrary choice of the shape of probability distributions assigned to model parameters. Indeed in the context of risk assessment related to pollutant exposure, knowledge of some parameters is often imprecise or incomplete. The use of single probability distribution to represent this type of knowledge becomes subjective and partly arbitrary, and it is more natural to use intervals.

However, the available information is often richer than an interval but less rich than a probability distribution. In practice, while information regarding variability is best conveyed using probability distributions, information regarding imprecision is more faithfully conveyed using probability families encoded either by p-boxes (lower & upper cumulative distribution functions) or by possibility distributions (also called fuzzy intervals) or yet by random intervals using the belief functions of Dempster-Shafer.

The first objective of this work is to propose practical representation methods according to available information regarding model parameters by using possibility, probability and

random sets. The second one is to propose different methods for propagating variability and imprecision information through risk model by trying to take into account dependency between model parameters. Lastly, these alternative methods are tested on simplified real cases, with a view to provide useful inputs for the decision-making process.

- Dose calculation : Transfer of a radioactive pollutant (strontium) from the deposit to man, through the consumption of food (cow's milk).
- Toxic risk related to the accidental spill of trichloroethylene (TCE) into an aquifer (semi-analytical model).
- Risk for health related to grounds polluted by lead due to the presence of factories.

# Chapitre 1

## Introduction

Actuellement, les choix relatifs à la gestion des sites et sols (potentiellement) pollués s'appuient, notamment, sur une évaluation des risques pour l'homme et l'environnement. Cette évaluation est effectuée classiquement à l'aide de modèles qui simulent le transfert de polluant depuis une source de pollution vers une population cible, pour différents scénarii d'exposition. La sélection des valeurs des paramètres utilisées dans ces modèles s'appuie autant que possible sur les données recueillies lors des investigations de terrain (phase de diagnostic de site). Or pour des raisons de délais et de coûts, l'information recueillie lors de cette phase de diagnostic est toujours incomplète ; elle est donc entachée d'incertitude. Cette notion globale d'incertitude doit être prise en compte dans l'évaluation du risque pour que les résultats soient utilisables lors de la phase décisionnelle.

### 1.1 Problématique

L'incertitude en évaluation des risques a surtout été appréhendée dans un cadre purement probabiliste. C'est-à-dire que l'information sur les paramètres des modèles est généralement supposée de nature aléatoire (variabilité). Cette approche consiste à représenter les paramètres incertains par des distributions de probabilité uniques et à transmettre l'incertitude relative à ces paramètres sur celle du risque encouru par la cible, en appliquant en général la technique dite de Monte Carlo (Random Sampling, Latin Hypercube Sampling [20], Conover [19]). Si cette approche est bien connue, toute la difficulté tient à une définition cohérente, par rapport à la connaissance disponible, des distributions de probabilité affectées aux paramètres. En effet dans un contexte d'évaluation des risques liés aux sites et sols pollués, l'information dont on dispose concernant certains paramètres est souvent de nature imprécise. Le calage d'une distribution de probabilité unique sur ce type de connaissance devient subjectif et en partie arbitraire. A titre d'exemple, dans leur analyse de l'incertitude de la propagation de polluants organochlorés dans les eaux souterraines, McNab et al. [77] définissent 12 distributions de probabilité pour les paramètres de leur modèle, parmi lesquelles 9 sont qualifiées de "**postulées**" ! Or, comme il sera montré dans ce travail, le choix arbitraire de distributions de probabilité uniques peut avoir une incidence très importante sur les résultats de l'évaluation et donc sur les décisions qui pourraient en découler.

L'incertitude sur les paramètres peut avoir deux origines. La première source d'incertitude provient du caractère aléatoire de l'information qui est dû à une variabilité naturelle résultant

de phénomènes stochastiques. On parle alors d'incertitudes de variabilité ou d'incertitudes stochastiques. La seconde source d'incertitude est liée au caractère imprécis et incomplet de l'information en raison d'un manque de connaissance. On parle alors d'incertitudes épistémiques. Dans le calcul de risque, ces deux notions sont souvent confondues. Ferson [51] explique clairement la différence entre ces deux notions et les erreurs qui peuvent être engendrées par une telle confusion lors du processus de propagation.

En effet, supposons par exemple que pour un certain paramètre  $B$  intervenant dans son modèle d'exposition, l'évaluateur du risque sait seulement que la valeur du paramètre  $B$  est nécessairement supérieure à 0 et nécessairement inférieure à 2, soit  $B \in [0, 2]$  et rien d'autre. Le principe de Laplace dit de "raison insuffisante" (tout ce qui est équiprobable est équiprobable) ou le maximum d'entropie [64] [93] préconise de modéliser la connaissance sur  $B$  par une loi de probabilité uniforme sur  $[0, 2]$ . Ce choix est très contestable dans le sens où l'on apporte de l'information sur  $B$  dont on ne dispose pas, à savoir l'équiprobabilité; le cadre probabiliste confond ici l'ignorance (imprécision) avec le hasard (variabilité). En fait il existe une infinité de lois de probabilité qui sont limitées par  $[0, 2]$  et la loi uniforme représente seulement l'une d'entre elles (voir Figure 1.1). Ainsi, il semble plus cohérent de représenter ce type d'information à l'aide d'une famille de probabilités. Des théories (plus récentes) comme la théorie des possibilités [33, 38], l'utilisation de paires de probabilités cumulées hautes et basses [48, 49] (dénommées p-boxes) ou la théorie des fonctions de croyance de Shafer [88] permettent de définir des familles de probabilités et ainsi de représenter de façon moins arbitraire l'information incomplète, vague ou imprécise.

Le choix de représenter la connaissance par des probabilités uniques, et donc de supposer que l'information dont on dispose est de nature aléatoire, a des répercussions sur les résultats de la propagation des incertitudes à travers les modèles du risque.

Supposons que l'on ait deux paramètres  $A$  et  $B$  sur lesquels la seule information est  $A \in [0, 1]$ ,  $B \in [0, 2]$  et que l'on cherche à estimer  $A + B$ . Etant donnée la nature de l'information, la seule chose que l'on puisse dire est que  $A + B \in [0, 3]$ . Si nous calons des lois uniformes sur  $A$  et  $B$ , on obtient une distribution de probabilité trapézoïdale sur  $[0, 3]$  en supposant  $A$  et  $B$  indépendants, (voir Figure 1.2). Ainsi, nous sommes capables à partir de ce résultat de définir dans quelle mesure le résultat du modèle  $A + B$  est inférieur à un certain seuil (ex :  $P(A + B \leq 1.5) = 0.5$ ). Cette information est cependant contestable dans le sens où l'on a rajouté implicitement de l'information sur  $A$  et  $B$  pour caler les lois uniformes. En effet, si la distribution de probabilité uniforme modélise une ignorance partielle, il paraît alors illogique que la somme d'ignorances partielles aboutisse à une information précise de distribution non-uniforme telle qu'une distribution trapézoïdale. Etant donnée l'ignorance partielle sur  $A$  et  $B$ , nous ne pouvons pas obtenir une estimation précise de  $P(A + B \leq 1.5)$ . En combinant l'ensemble des probabilités limitées par  $[0, 1]$  avec celui des probabilités limitées par  $[0, 2]$ , on obtiendra au mieux un encadrement de  $P(A + B \leq 1.5)$  (ici trivial) à savoir  $0 \leq P(A + B \leq 1.5) \leq 1$  (voir Figure 1.2).

Dans le processus de propagation de la connaissance (ou connaissance partielle) des dépendances et/ou des corrélations entre les paramètres (dépendance linéaire, non linéaire, ou fonctionnelle) peuvent avoir des répercussions de (sur-sous)-estimations lourdes de conséquences sur les résultats selon les hypothèses que l'on peut faire [54] [85]. La technique classique de pro-

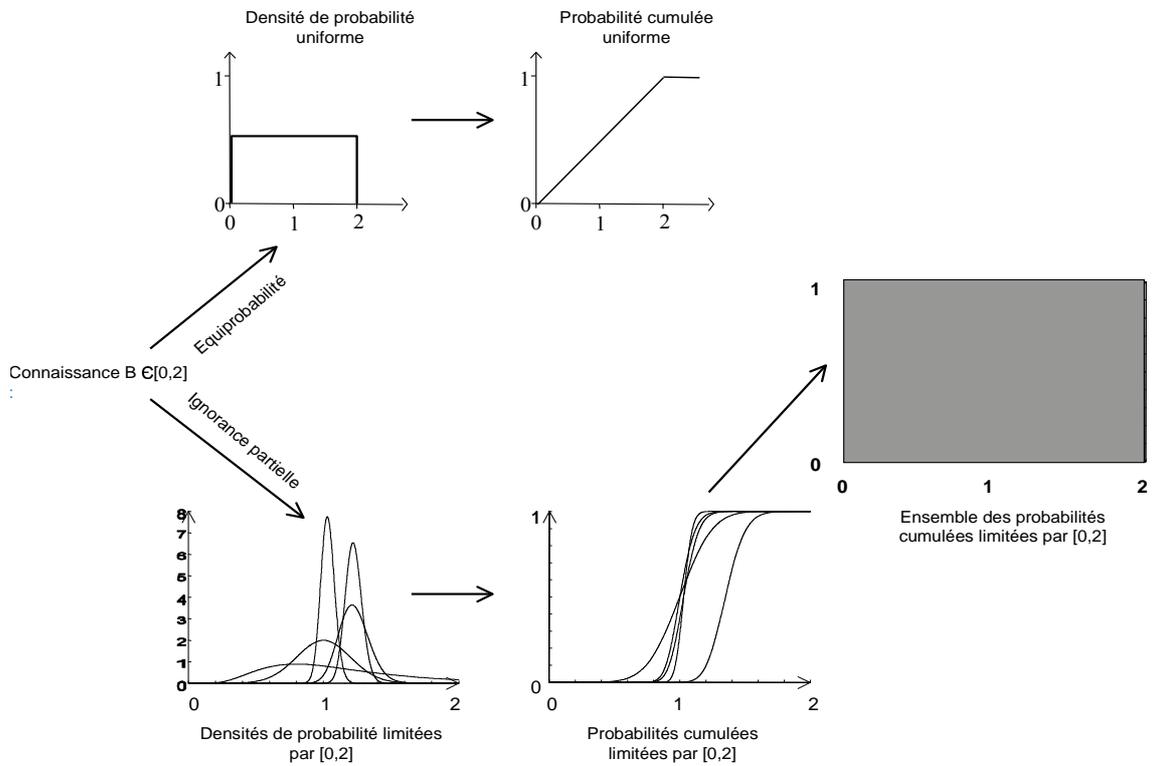


FIG. 1.1 – Confusion entre Variabilité et Imprécision.

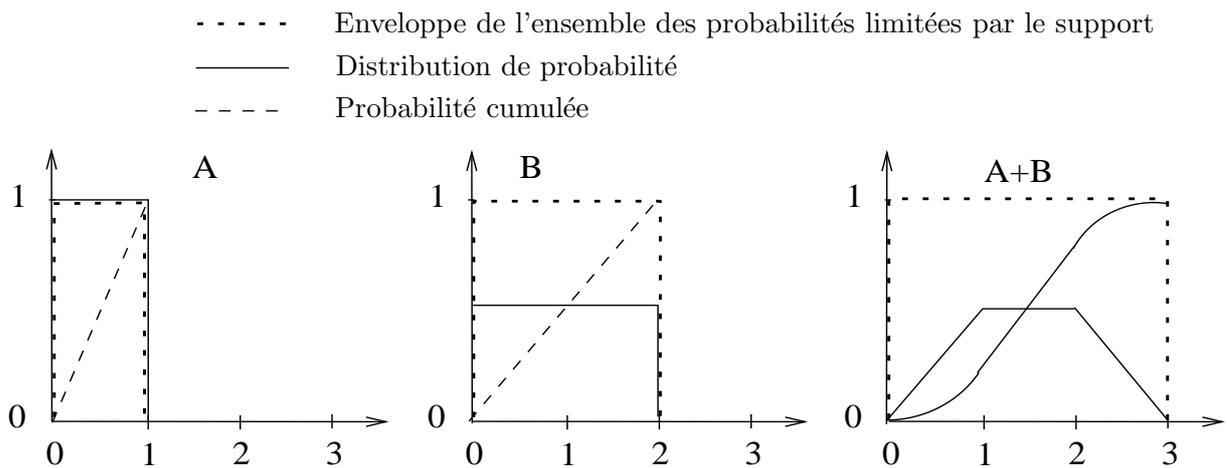


FIG. 1.2 – Différence de résultats lors de la propagation selon que l'information est de nature imprécise ou aléatoire sur le modèle  $A+B$ .

propagation de Monte-Carlo fait l'hypothèse d'indépendance stochastique entre les paramètres, des résultats différents seraient obtenus en supposant par exemple des corrélations entre  $A$  et  $B$  (voir Figure 1.3).

Lorsque le traitement des incertitudes est appréhendé dans un cadre purement probabiliste, le fait de supposer l'indépendance stochastique des paramètres a pour effet de créer des phénomènes de compensation des erreurs. Cela se ressent surtout sur les queues des distributions dans le sens où les scénarii associant plusieurs variables peu probables ont d'autant moins de chance de se réaliser. Or c'est justement à ces scénarii extrêmes que s'intéresse l'évaluateur de risque, notamment lorsqu'il s'agit d'évaluer le niveau de protection des populations.

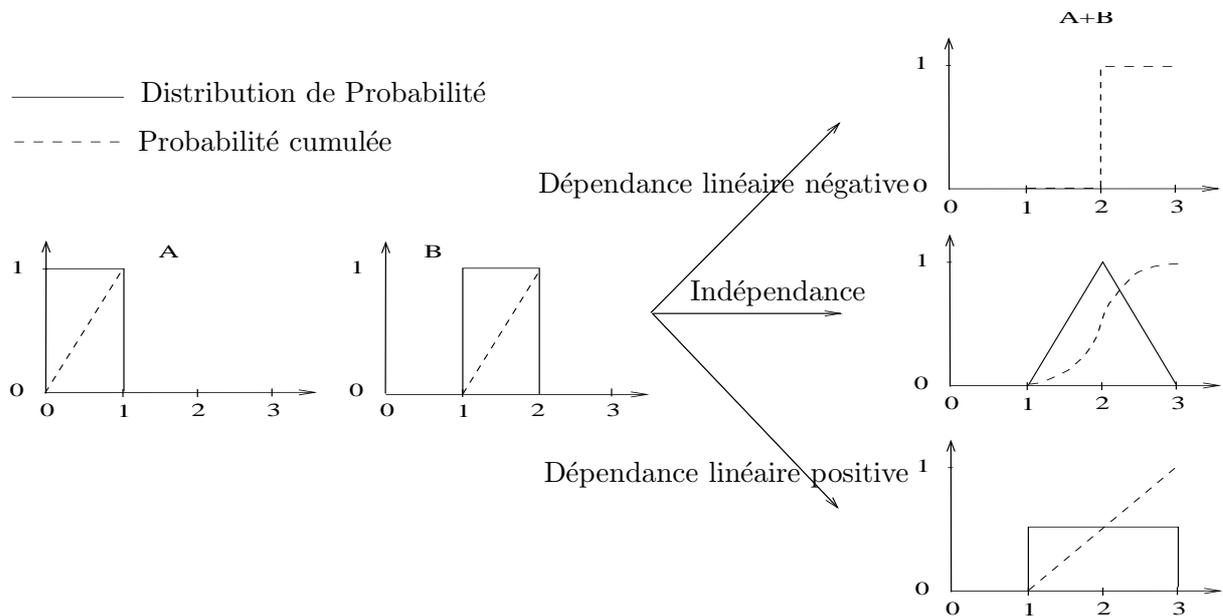


FIG. 1.3 – Influence des dépendances lors du processus de propagation sur les résultats du modèle  $A + B$ .

## 1.2 Objectifs

L'information dont on dispose réellement est souvent plus riche qu'un intervalle de valeurs mais moins riche qu'une distribution de probabilité. Un des premiers objectifs de ce travail est de préserver la cohérence entre la manière dont on représente l'information dans nos modèles et l'information dont on dispose réellement. Les deux sources d'incertitudes (stochastiques-épistémiques) doivent être traitées de manières différentes. En pratique, tandis que l'information de nature aléatoire est traitée de manière rigoureuse par les distributions de probabilité classiques, l'information de nature imprécise est mieux traitée par des familles de distributions de probabilité codées par des paires de probabilités cumulées hautes et basses (p-boxes) [48, 49], ou par des distributions de possibilité (aussi appelées intervalles flous) [33, 38] ou encore par des intervalles aléatoires [27] utilisant les fonctions de croyance de Dempster-Shafer [88]. Les deux sources d'incertitude ne s'excluent pas et sont souvent liées

(mesurage imprécis d'une quantité aléatoire par exemple).

De nombreux chercheurs ont utilisé soit les probabilités soit les possibilités afin de représenter l'incertitude [18] [30] [60] [75] [76] dans les problèmes environnementaux. Par contre, peu de chercheurs se sont intéressés à la question de comment combiner ces différents modes de représentation (probabilités, possibilités, fonctions de croyance) [3] [49] [65] [63]. Le deuxième objectif de ce travail est donc de proposer différentes méthodes pour propager les incertitudes stochastiques et épistémiques, issues de l'information de nature aléatoire et de l'information de nature imprécise, à travers les modèles de risque.

La prise en compte des (in)dépendances entre les paramètres lors du processus de propagation est un problème déjà très compliqué à traiter dans le cadre des probabilités classiques. Le fait de différencier l'incertitude stochastique de l'incertitude épistémique, dans la phase de propagation des incertitudes, accentue la difficulté de la gestion des dépendances entre les paramètres. Ainsi, nous n'étudierons en détail que les types de dépendances engendrées pour chaque méthode de propagation proposée.

Le dernier objectif de ce travail est de tester ces méthodes alternatives sur des cas synthétiques puis sur des cas réels ou réels simplifiés et établir comment présenter les résultats pour la phase décisionnelle. Ainsi, nous traiterons pour ce qui est des exemples, des cas relatifs aux domaines suivants :

- le risque radiologique ;
- la pollution au trichloroéthylène des eaux souterraines ;
- la pollution au plomb ;

L'objectif principal de ce travail est d'être le plus discriminant et le plus pertinent possible tout en respectant l'information réellement disponible dans l'évaluation des risques liés aux sites et sols pollués.

Le problème de propagation des incertitudes hétérogènes au travers de modèles mathématiques, modélisant des phénomènes réels, est très actuel comme le montrent de récentes publications dans des éditions spéciales de journaux d'analyse de risque [65].

### 1.3 Organisation du rapport de thèse

Dans le Chapitre 2, nous présentons les relations et les liens entre la théorie des possibilités (voir Annexe B), la théorie des probabilités (voir Annexe A) et la théorie des fonctions de croyance (voir Annexe C) permettant de définir des familles de probabilités. Nous comparons ensuite les modèles possibilistes (distributions de possibilité) avec les paires de probabilités cumulées (p-boxes) [48, 49] afin de mettre en évidence que dans certains cas de figure, il est plus précis et informatif d'utiliser un modèle possibiliste compte tenu de l'information disponible. Enfin, nous étudions les distributions de possibilité contenant les intervalles de prédiction des probabilités contenues dans la famille générée par le modèle possibiliste. Cette contribution fait partie intégrante de 3 articles [6, 11, 14].

Dans le Chapitre 3, nous présentons et proposons pour chaque modèle, (à savoir les distri-

Grandeur	Aléatoire	Déterministe
connue	variable aléatoire ex : mesures précises distribution de probabilité	valeur fixe ex : cste de gravité
mal connue	intervalles aléatoires ex : mesures imprécises Avis d'expert : intervalles de prédiction	Avis d'expert ex : intervalles de confiance Valeurs caractéristiques : mode, médiane...

TAB. 1.1 – Type de connaissance plausible selon la nature intrinsèque des paramètres

butions de probabilité, les p-boxes, les distributions de possibilité, ou encore les fonctions de croyance), le type de connaissance qu'il permet de représenter. Cette contribution fait l'objet de 3 articles [6, 11, 14]. Les distributions de probabilité permettent de représenter une information précise mais contradictoire (variabilité) dans le sens où l'on observe des résultats précis mais différents à chaque observation. Les distributions de possibilité sont particulièrement adaptées pour représenter une information imprécise mais cohérente, telle que l'avis d'expert. Cependant, tous ces modèles de représentation définissent des familles de probabilité, ainsi, ils permettent naturellement de représenter de l'information probabiliste incomplète. C'est à dire de l'information à la fois aléatoire et imprécise ou incomplète. Le Tableau 1.1 présente, de manière non exhaustive, le type de connaissance que l'on peut être amené à rencontrer selon la nature intrinsèque des quantités associées aux paramètres des modèles simulant les mécanismes de transfert.

Une fois que la connaissance sur les paramètres est représentée de manière cohérente par rapport à sa nature propre, au moyen des différents modèles cités ci-dessus, nous présentons, dans le Chapitre 4, deux méthodes de propagation des incertitudes épistémiques et stochastiques à travers les modèles du risque afin d'estimer l'incertitude sur les résultats :

- Méthode nommée ”*Hybride*” combinant calcul d'intervalles et Monte-Carlo (voir Section 4.2), qui combine calcul d'intervalles flous et calcul de variables aléatoires, systématisant Guyonnet et al. [63].
- Méthode nommée ”*Dependency Bounds Convolution*” / ”*propagation de p-box sans hypothèse de dépendances*” dans le cadre des paires de probabilités hautes et basses (p-boxes) (voir Section 4.4) développée et utilisée par Ferson et al., Williamson et al. [47, 56, 96].

Nous proposons deux autres méthodes [10, 13] :

- Méthode nommée ”*Independent Random Sets*” / ”*Ensembles Aléatoires Indépendants*” dans le cadre des fonctions de croyance (voir Section 4.3.1), déjà évoquée dans [36], qui englobe possibilités et probabilités.
- Méthode nommée ”*Conservative Random Sets*” / ”*propagation d'ensembles aléatoires sans hypothèse de dépendances*” dans le cadre des fonctions de croyance (voir Section 4.3.2) inspirée des travaux de Berleant et al. [15, 16].

Nous présentons en détail les structures de dépendance entre les paramètres que modélisent chaque méthode et qui ont un impact sur l'incertitude relative aux modèles de risque. Nous

mettons ainsi en évidence les liens entre les méthodes "Hybride" et "Independent Random Sets" puis le caractère trop conservatif de la méthode "Dependency Bounds Convolution" comparativement à la méthode "Conservative Random Sets" faisant l'objet des articles [5, 7, 10, 12, 13].

Le Chapitre 5 propose des moyens de présenter les résultats issus des méthodes de propagation afin de caractériser l'incertitude des modèles du risque pour une phase décisionnelle :

- Juger d'un dépassement de seuil.
- Définir les intervalles de prédiction.
- Calculer des évaluations résumées quant à la moyenne, l'écart type et leurs imprécisions.

Nous montrons les limites du post-traitement, proposé par Guyonnet et al. [63] pour extraire de l'information du résultat de la méthode "Hybride". Nous montrons les liens entre les résultats de la méthode "Hybride" et l'approche classique des variables aléatoires floues (contributions dans [7, 8]) puis nous proposons un post-traitement alternatif faisant l'objet des articles [4, 5, 12]. Ces modes d'exploitation sont illustrés à l'aide d'un cas synthétique.

Dans le Chapitre 6, nous testons ces méthodes alternatives sur des cas réels simplifiés et traitons l'incertitude relative à différents modèles :

- Le transfert d'un polluant radioactif (le strontium) depuis le dépôt jusqu'à l'homme, au travers de la consommation d'un aliment (le lait de vache).
- Le risque d'impact suite à un déversement accidentel de trichloréthylène (TCE) au dessus d'une nappe d'eau.
- Le risque pour la santé lié aux sols pollués par des retombées industrielles de plomb qui fait l'objet du papier [9].

Pour chacun de ces trois cas le traitement purement probabiliste est également mis en oeuvre afin de mettre en évidence l'influence de la représentation mathématique de la connaissance sur les résultats du calcul de risque. Nous montrons ainsi au travers de ces trois cas que la prise en compte de l'imprécision dans l'évaluation des risques peut avoir un réel impact pour une prise de décision.



## Chapitre 2

# Cadres formels pour représenter les probabilités imprécises

Nous présentons dans ce chapitre, différents cadres formels pour représenter les probabilités imprécises au moyen des différentes théories de l'incertain telles que la théorie des probabilités (voir Annexe A), la théorie des possibilités (voir Annexe B) et la théorie des fonctions de croyance (voir Annexe C). Nous étudions les liens et les ponts entre ces différents cadres et les comparons entre eux en comparant leur expressivité. Nous montrons ainsi que l'utilisation des modèles possibilistes, dans certains cas de figure, est plus informatif que l'utilisation des paires de probabilités cumulées (p-boxes) [48, 49]. Nous étudions les distributions de possibilité contenant les intervalles de prédiction des probabilités contenues dans la famille engendrée par le modèle possibiliste. Ce chapitre fait partie intégrante des articles [6, 7, 11, 14]

### 2.1 Relations entre les différents cadres représentatifs des probabilités imprécises

Considérons un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . Soit  $\mathcal{P}$  une famille de mesures de probabilité sur un référentiel  $\Omega$  et soit  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une variable aléatoire réelle associée à la mesure de probabilité  $P$ . Pour tout ensemble mesurable  $A \subseteq \Omega$ , on peut définir :

$$\text{Sa probabilité haute} \quad \overline{P}(A) = \sup_{P \in \mathcal{P}} P(A)$$

$$\text{Sa probabilité basse} \quad \underline{P}(A) = \inf_{P \in \mathcal{P}} P(A).$$

En d'autres termes la valeur de la probabilité  $P(A)$  est imprécise :

$$\forall P \in \mathcal{P}, \underline{P}(A) \leq P(A) \leq \overline{P}(A)$$

Il semble naturel de considérer une famille de mesures de probabilité lorsque nous sommes confrontés à de l'information probabiliste incomplète ou encore quand les paramètres d'un modèle probabiliste tels que la moyenne ou l'écart type sont mal connus.

Dans la tradition subjectiviste, on définit le degré de confiance d'un agent en l'événement  $A$  comme le prix  $P(A)$  que cet agent accepterait de payer pour acheter un billet de loterie

qui lui fait gagner un euro si l'événement  $A$  se produit. Plus l'agent croit en l'occurrence de  $A$ , moins il estime risqué d'acheter un billet de loterie à un prix proche de 1. Si le vendeur estime que l'agent propose des prix trop bas, il peut imposer à l'agent un échange de rôle, c'est à dire obliger l'agent à lui vendre un billet au prix  $P(A)$  et à lui payer 1 euro si l'événement  $A$  se produit. Dans l'optique des probabilités imprécises, on ne suppose pas cet échange de rôle. Ainsi la probabilité  $\underline{P}(A)$  peut être interprétée comme le prix maximal d'achat d'un billet qui fait gagner 1 euro si  $A$  se produit ; i.e.  $\underline{P}(A)$  mesure la croyance de l'agent en faveur de l'événement  $A$  [94]. La probabilité  $\overline{P}(A)$  peut s'interpréter comme le prix minimal de vente d'un billet mesurant ainsi le manque de confiance envers l'événement contraire  $A^c$  [94] et nous avons

$$\underline{P}(A) = 1 - \overline{P}(A^c)$$

Pour la vision objectiviste, nous renvoyons le lecteur à l'Annexe C. Lors d'observations imprécises par exemple, la quantité  $\underline{P}(A)$  représente la proportion des observations qui impliquent l'événement  $A$ . La quantité  $\overline{P}(A)$  représente la proportion des observations qui impliquent l'événement  $A$  plus toutes celles qui ne contredisent pas  $A$ .

Travailler et raisonner avec des familles de probabilités peut être très complexe. En effet, considérons

$$\mathcal{P}(\underline{P} < \overline{P}) = \{P, \forall A \subseteq \Omega, \underline{P}(A) \leq P(A) \leq \overline{P}(A)\}$$

la famille de mesures de probabilité induite par les bornes issues de la famille  $\mathcal{P}$ . En général,  $\mathcal{P}$  est un sous-ensemble de  $\mathcal{P}(\underline{P} < \overline{P})$  puisque le calcul de  $\underline{P}$  et  $\overline{P}$  est une projection de  $\mathcal{P}$ .

Dans la suite, nous considérons trois cadres (p-boxes, distributions de possibilité, fonctions de croyance) permettant de définir des familles de probabilités pour un traitement pragmatique.

### 2.1.1 Famille de probabilités et paires de probabilités cumulées (p-boxes)

La fonction de répartition ou probabilité cumulée (voir Annexe A) permet de définir entièrement une mesure de probabilité  $P$  sur  $\mathbb{R}$ . Un modèle naturel pour donner une approximation d'une mesure de probabilité mal connue est de considérer une paire  $(\underline{F}, \overline{F})$  de fonctions de répartition haute et basse ( $\overline{F} \geq \underline{F}$ ) généralisant la notion d'intervalle. L'intervalle  $[\underline{F}, \overline{F}]$  est nommé **p-box** [48, 49] et représente la classe de mesures de probabilité dont les probabilités cumulées sont bornées par  $\underline{F}$  et  $\overline{F}$  telles que :

$$\underline{F}(x) \leq F(x) \leq \overline{F}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Une p-box  $[\underline{F}, \overline{F}]$  peut être induite à partir d'une famille de probabilité  $\mathcal{P}$  sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \underline{F}(x) = \underline{P}((-\infty, x]), \quad \overline{F}(x) = \overline{P}((-\infty, x])$$

Nous pouvons également définir une famille de probabilités  $\mathcal{P}(\underline{F} \leq \overline{F})$  à partir d'une p-box  $[\underline{F}, \overline{F}]$  telle que :

$$\mathcal{P}(\underline{F} \leq \overline{F}) = \{P | \forall x, \underline{F}(x) \leq F(x) \leq \overline{F}(x)\}$$

Ainsi, une p-box  $[\underline{F}, \overline{F}]$  fournit un encadrement d'une probabilité cumulée  $F$  mal connue et l'écart entre les deux reflète le caractère incomplet de l'information. Comme nous le verrons par la suite, cette représentation peut parfois s'avérer très imprécise compte tenu de l'information disponible. En particulier, il est clair que si  $\overline{F}$  et  $\underline{F}$  sont induites par  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}(\underline{P} \leq \overline{P}) \subseteq \mathcal{P}(\underline{F} \leq \overline{F})$ , laquelle peut être beaucoup plus imprécise encore.

### 2.1.2 Famille de probabilités et distributions de possibilité

Nous pouvons interpréter tout couple de mesures de nécessité/possibilité  $[N, \Pi]$  (voir Annexe B) comme étant les mesures de probabilité inférieures et supérieures induites par une famille de mesures de probabilité. L'écart entre ces deux mesures reflète le caractère imprécis de l'information.

- Soit  $\pi$  une distribution de possibilité qui induit le couple de mesures nécessité/possibilité  $[N, \Pi]$  tel que :

$$\Pi(A) = \sup_{x \in A} \pi(x) \quad \text{et} \quad N(A) = 1 - \Pi(\bar{A})$$

On définit une famille de mesures de probabilité  $\mathcal{P}(\pi)$  telle que :

$$\mathcal{P}(\pi) = \{P \mid \forall A, N(A) \leq P(A)\} = \{P \mid \forall A, P(A) \leq \Pi(A)\}$$

Dans ce cas, nous avons (voir [26, 35]) :

$$\sup_{P \in \mathcal{P}(\pi)} P(A) = \Pi(A) \quad \text{et} \quad \inf_{P \in \mathcal{P}(\pi)} P(A) = N(A)$$

En d'autres termes, la famille  $\mathcal{P}(\pi)$  est entièrement déterminée par les intervalles de probabilités qu'elle génère, et peut être codée par  $\pi$ .

- Une distribution de possibilité reflète naturellement les informations données par un expert. Supposons un ensemble de couples  $(A_i, \lambda_i)_i$  fourni par un expert statuant que la probabilité  $P(A_i)$  est au moins égale à  $\lambda_i$  où  $A_i$  est un ensemble mesurable tel que  $A_i \subset A_j$  avec  $\lambda_i < \lambda_j$  (voir exemple dans Annexe B). Supposons que l'expert soit cohérent dans ses propos, ainsi, les ensembles  $(A_i)_i$  sont emboîtés (*i.e.*  $(A_i)_i \nearrow, (\lambda_i)_i \nearrow$ ). On définit alors la famille de mesures de probabilité  $\mathcal{P}$  telle que :

$$\mathcal{P} = \{P \mid \forall A_i, \lambda_i \leq P(A_i)\}$$

Dans ce cas nous avons (voir [22, 35, 73] dans le cas fini et [26] dans le cas infini) :

$$\sup_{P \in \mathcal{P}} P(A) = \Pi(A) \quad \text{et} \quad \inf_{P \in \mathcal{P}} P(A) = N(A)$$

avec

$$\pi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A_1 \\ \min\{1 - \lambda_i, x \notin A_i\} & \text{sinon} \end{cases}$$

D'après ce qui précède, nous pouvons définir une p-box  $[\underline{F}, \bar{F}]$  particulière à partir de  $\pi$  telle que  $\exists r \in \mathbb{R}, \underline{F}(r) = 0$  et  $\bar{F}(r) = 1$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \underline{F}(x) = N((-\infty, x]) = 1 - \pi(x) \quad \text{et} \quad \bar{F}(x) = \Pi((-\infty, x]) = \pi(x)$$

Comme nous le verrons par la suite, cette p-box contient beaucoup plus de mesures de probabilité que  $\mathcal{P}(\pi)$ .

### 2.1.3 Famille de probabilités et fonctions de croyance

Nous pouvons interpréter tout couple crédibilité/plausibilité  $[Bel, Pl]$  (voir Annexe C) comme étant les mesures de probabilité inférieures et supérieures induites par une famille de mesures de probabilité. Soit une distribution de masse  $\nu$  (voir Annexe C) induisant la plausibilité  $Pl$  et la crédibilité  $Bel$  telle que :

$$Pl(A) = \sum_{E, E \cap A \neq \emptyset} \nu(E) \quad \text{et} \quad Bel(A) = 1 - Pl(\bar{A})$$

La masse  $\nu$  codifie alors une famille de probabilités  $\mathcal{P}(\nu)$  telle que [27] :

$$\mathcal{P}(\nu) = \{P|\forall A, Bel(A) \leq P(A)\} = \{P|\forall A, P(A) \leq Pl(A)\}$$

Dans ce cas, nous avons :

$$\sup_{P \in \mathcal{P}(\nu)} P(A) = Pl(A) \quad \text{et} \quad \inf_{P \in \mathcal{P}(\nu)} P(A) = Bel(A)$$

Il apparaît immédiat que l'on peut définir une p-box particulière  $[\underline{F}, \bar{F}]$  telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \bar{F}(x) = Pl(X \in (-\infty, x]) \quad \text{et} \quad \underline{F}(x) = Bel(X \in (-\infty, x])$$

Mais, cette p-box contient plus de mesures de probabilité que  $\mathcal{P}(\nu)$ . Les fonctions de croyance (voir Annexe C) englobent les possibilités et les probabilités dans le cas fini. Par conséquent, une distribution de masse  $\nu$  peut coder une distribution de probabilité et une distribution de possibilité. Dans le cas continu, les représentations seront approchées par discrétisation ce qui est effectué dans la pratique pour faire les calculs.

## 2.2 Approximations discrètes par des fonctions de croyance

Dans cette section, nous allons approcher de manière discrète les densités de probabilité ou les distributions de possibilité continues sous forme de fonctions de croyance. Cette phase s'avérera très utile pour traiter l'incertitude, via l'outil informatique, sur les modèles de transfert de polluant vers l'homme présentés à la fin de ce rapport de thèse.

### 2.2.1 les distributions de probabilité exprimées sous forme de fonctions de croyance

- Soit  $X$  une variable aléatoire réelle discrète avec  $\Omega_X = \{x_1, \dots, x_m\}$  et  $p_i = P(X = x_i)$ . Les éléments focaux (voir Annexe C) de  $X$  sont des singletons  $(\{x_i\})_{i=1\dots m}$  et la masse de distribution  $(\nu_i)_{i=1\dots m}$  est égale à  $(p_i)_{i=1\dots m}$  car  $X$  est discrète. C'est à dire que :

$$\forall i = 1\dots m \quad \nu(\{x_i\}) = \nu_i = p_i$$

- Soit  $X$  une variable aléatoire réelle continue avec une densité de probabilité  $p$ . En discrétisant en  $m$  intervalles, nous définissons, comme ensembles focaux, des intervalles disjoints  $(]a_i, a_{i+1}[)_{i=1\dots m}$  et nous pouvons construire la masse de distribution  $(\nu_i)_{i=1\dots m}$  comme suit (voir Figure 2.1 pour exemple) :

$$\forall i = 1\dots m \quad \nu(]a_i, a_{i+1}[) = \nu_i = P(X \in ]a_i, a_{i+1}[) \quad (2.1)$$

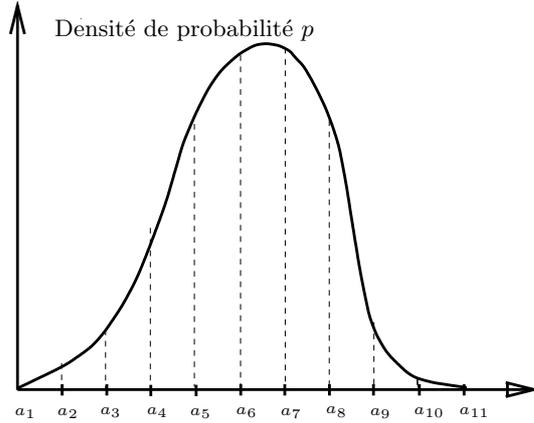


FIG. 2.1 – Expression d’une distribution de probabilité à l’aide des fonctions de croyance

La masse de distribution  $(\nu_i)_{i=1\dots 10}$  est :

$$\nu_i = \int_{a_i}^{a_{i+1}} p(x)dx$$

où  $p$  la distribution de probabilité de la variable  $X$  et  $]a_i, a_{i+1}]$  est l’élément focal associé à  $\nu_i$ .

Dans ce cas, la mesure de plausibilité  $Pl$  et la mesure de crédibilité  $Bel$  sont toutes les deux des mesures de probabilité sur  $\Omega_X$  ; c’est à dire que l’on a :

$$\forall A \in \mathcal{P}(]a_i, a_{i+1}]), Bel(A) = Pl(A) = P(A)$$

où  $\mathcal{P}(]a_i, a_{i+1}])$  est l’ensemble des parties de  $\Omega_X = \{]a_0, a_1], \dots, ]a_m, a_{m+1}]\}$

### 2.2.2 les distributions de possibilité exprimées sous forme de fonctions de croyance

Nous notons  $\pi$  la distribution de possibilité associée au paramètre  $Y$  et  $\pi_\alpha$  les  $\alpha$ -coupes de  $\pi$ . Les ensembles focaux pour  $Y$  correspondant aux  $\alpha$ -coupes sont notés  $(\pi_{\alpha_j})_{j=1\dots q}$  avec  $\alpha_q > 0, \alpha_{q+1} = 0, \alpha_1 = 1$  et tels que  $\pi_{\alpha_j} \subseteq \pi_{\alpha_{j+1}}$ . On note par  $(\nu_j = \alpha_j - \alpha_{j+1})_{j=1\dots q}$  la masse de distribution associée à  $(\pi_{\alpha_j})_{j=1\dots q}$  (voir Figure 2.3 pour un exemple avec  $\pi_{\alpha_j} = [a_j, \bar{a}_j]$ ). Nous obtenons une approximation inférieure de la distribution de possibilité  $\pi$ .

Dans ce cas, la mesure de plausibilité  $Pl$  est une mesure de possibilité  $\Pi = Pl$  et la me-

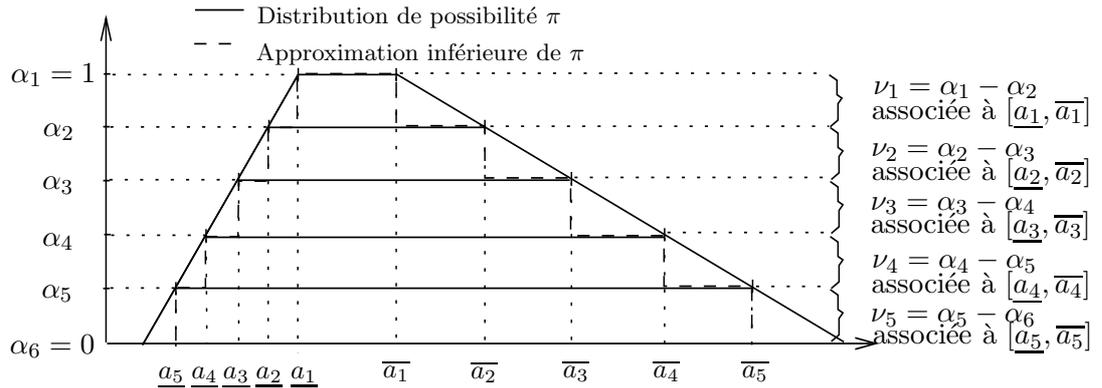


FIG. 2.2 – Expression d’une distribution de possibilité à l’aide des fonctions de croyance (approximation inférieure)

sure de crédibilité  $Bel$  est une mesure de nécessité  $N = Bel$ . Nous pourrions également considérer une approximation supérieure (voir Figure 2.3). Quelle que soit l’approximation, plus la discrétisation sera fine, plus on se rapprochera de la distribution de possibilité  $\pi$ .

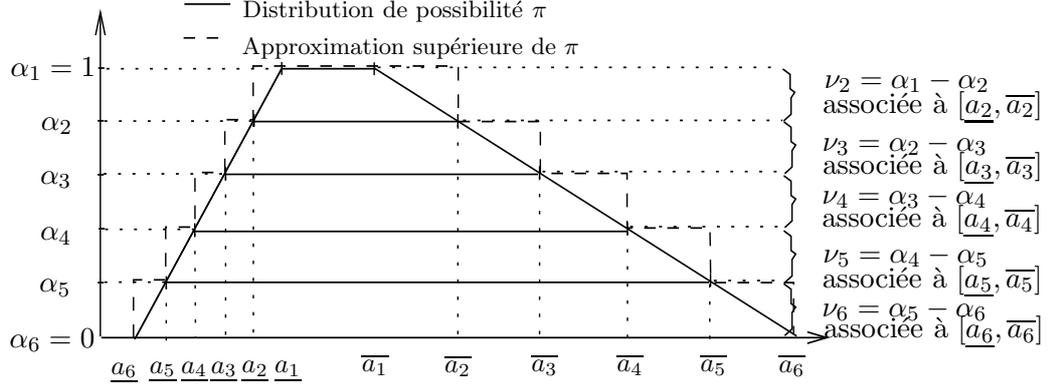


FIG. 2.3 – Expression d’une distribution de possibilité à l’aide des fonctions de croyance (approximation supérieure)

### 2.2.3 Différentes façons d’exprimer une p-box sous forme de fonctions de croyance

Soit  $X$  une variable aléatoire réelle mal connue représentée par une p-box  $[\underline{F}_X, \overline{F}_X]$ . Il n’existe pas une manière unique d’exprimer une p-box  $[\underline{F}_X, \overline{F}_X]$  au moyen d’une fonction de croyance.

Considérons le cas où  $\underline{F}_X^{-1}(0) < \overline{F}_X^{-1}(1)$  (voir Figure 2.4) où  $\underline{F}_X^{-1}$  (resp  $\overline{F}_X^{-1}$ ) est la fonction inverse de  $\underline{F}_X$  (resp  $\overline{F}_X$ ). Nous pouvons choisir les ensembles focaux de la forme

$$[\overline{F}_X^{-1}(p_i), \underline{F}_X^{-1}(p_i)] = [\underline{a}_i, \overline{a}_i]$$

et définir la fonction de masse  $\nu$  telle que

$$\nu([\underline{a}_i, \overline{a}_i]) = \nu_i = p_i - p_{i-1} \text{ où } 1 \geq p_i > p_{i-1} > 0$$

Considérons à présent le cas où  $\underline{F}_X^{-1}(0) > \overline{F}_X^{-1}(1)$  (voir Figure 2.5). Nous pouvons définir les ensembles focaux et la fonction de masse de la même manière que précédemment mais nous pouvons également choisir les ensembles focaux emboîtés de la forme  $[\overline{F}_X^{-1}(p_i), \underline{F}_X^{-1}(1 - p_i)]$  (voir Figure 2.5) ce qui revient à prendre les  $\alpha$ -coupes de la distribution de possibilité induite.

Un problème intéressant encore non résolu serait de caractériser l’ensemble des fonctions de croyance dont les distributions cumulatives supérieures et inférieures, issues de celui-ci, coïncident avec la p-box (discrète), et identifier parmi elles, celle qui est la moins informative (donc la moins arbitraire). Les approximations précédentes ne sont que des solutions particulières de ce problème.

## 2.3 Comparaison entre l’expressivité de la p-box et celle de la distribution de possibilité

Considérons une distribution de possibilité continue unimodale  $\pi$  avec un noyau  $\{a\}$  (i.e.  $\Pi(\{a\}) = \pi(a) = 1$  et  $\forall x \neq a, \pi(x) \neq 1$ ). Nous supposons l’unimodalité de  $\pi$  pour des raisons de clarté. Les résultats dans ce paragraphe s’adaptent aisément au cas où le noyau de  $\pi$  est

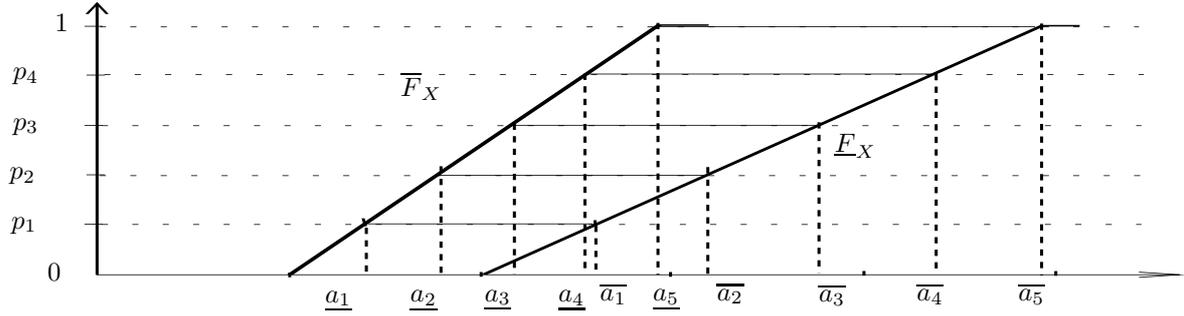


FIG. 2.4 – Expression d'une p-box à l'aide des fonctions de croyance

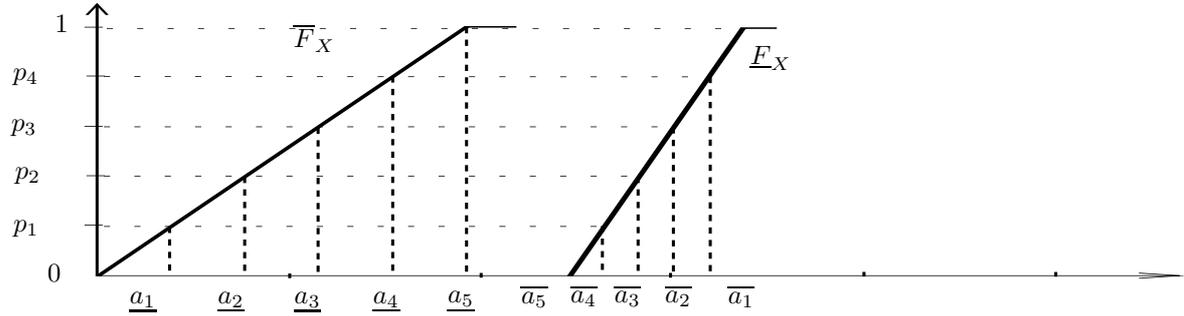


FIG. 2.5 – Expression d'une p-box à l'aide des fonctions de croyance

de la forme  $[a, b]$ . L'ensemble des mesures de probabilité induites par  $\pi$ , i.e,  $\mathcal{P}(\pi)$ , peut plus commodément être décrit par une condition sur les fonctions de répartition de ses probabilités (comme précisé par Dubois et Prade [39]) :

**Théorème 1** Soit  $\pi$  une distribution de possibilité unimodale continue de noyau  $\{a\}$ . Alors

$$\mathcal{P}(\pi) = \{P, \forall x, y, x \leq a \leq y, F(x) + 1 - F(y) \leq \max(\pi(x), \pi(y))\}$$

**Preuve.**

$\subseteq$  : Soient  $P \in \mathcal{P}(\pi)$  et un intervalle  $A$  tel que  $A = [x, y]$  contient  $a$ .

Par définition,  $N(A) \leq P(A)$  est équivalent à

$$F(y) - F(x) \geq 1 - \sup_{z \notin [x, y]} \pi(z)$$

c'est à dire

$$F(x) + 1 - F(y) \leq \max(\pi(x), \pi(y))$$

Nous avons donc

$$\mathcal{P}(\pi) \subseteq \{P, \forall x, y, x \leq a \leq y, F(x) + 1 - F(y) \leq \max(\pi(x), \pi(y))\}$$

$\supseteq$  : Soit  $P \in \{P, \forall x \leq a \leq y, F(x) + 1 - F(y) \leq \max(\pi(x), \pi(y))\}$ .

Considérons un ensemble mesurable  $A$  quelconque.

- (a) Pour  $A = (-\infty, x]$  avec  $x \leq a$ ,  $F(x) + 1 - F(+\infty) \leq \max(\pi(x), \pi(+\infty)) \Leftrightarrow F(x) \leq \pi^+(x) \Rightarrow P(A) \leq \Pi(A)$ .
- (b) Pour  $A = [y, +\infty)$  avec  $y \geq a$ ,  $F(-\infty) + 1 - F(y) \leq \max(\pi(y), \pi(-\infty)) \Leftrightarrow 1 - F(y) \leq \pi^-(y) \Rightarrow P(A) \leq \Pi(A)$ .
- (c) Pour  $A = [x, y]$  avec  $y \leq a$ , sachant que  $F$  est croissante et d'après le cas (a), nous avons  $F(y) - F(x) \leq F(y) \leq \pi^+(y) = \Pi(A)$ . Par conséquent,  $P(A) \leq \Pi(A)$ .
- (d) Pour  $A = [x, y]$  avec  $x \geq a$ , sachant que  $F$  est limitée par 1 et d'après le cas (b), nous avons  $F(y) - F(x) \leq 1 - F(x) \leq \pi^-(x) = \Pi(A)$ . Par conséquent  $P(A) \leq \Pi(A)$ .
- (e) Pour  $A$ , union d'intervalles telle que  $\Pi(A) < 1$ . Supposons que  $\Pi(A)$  soit obtenue pour  $y$  se trouvant à droite de  $a$ . Nous pouvons considérer un ensemble  $A' = (-\infty, x] \cup [y, +\infty)$  tel que  $\pi(x) = \pi(y)$ . Nécessairement,  $A'$  contient  $A$ , et nous avons  $\Pi(A) = \Pi(A') = \pi(x)$  et  $P(A) \leq P(A')$ . Nous avons  $x \leq a \leq y$ , donc  $P(A) \leq P(A') = F(x) + 1 - F(y) \leq \max(\pi(x), \pi(y)) = \Pi(A') = \Pi(A)$ . Nous avons ainsi  $P(A) \leq \Pi(A)$ .
- (f) Pour  $A$ , union d'intervalles telle que  $\Pi(A) = 1$ , choisissons  $y$  sur les frontières de  $A$  tel que  $\pi(y)$  soit maximale. Supposons que  $y$  soit à droite de  $a$ , Nous considérons un ensemble de la forme  $A' = [x, y] \subset A$  tel que  $\pi(x) = \pi(y)$ . Nous avons  $\Pi(A) = \Pi(A') = 1$  et  $N(A) = N(A')$ , de plus  $x \leq a \leq y$  donc  $F(x) + 1 - F(y) \leq \max(\pi(x), \pi(y)) \Leftrightarrow F(y) - F(x) \geq 1 - \pi^-(y)$ . nous avons ainsi,  $N(A) = N(A') \leq P(A') \leq P(A)$ , donc  $P(A) \geq N(A)$ .  $\square$

Notons que nous pouvons choisir  $x$  et  $y$  tels que  $\pi(x) = \pi(y)$  dans l'expression de  $\mathcal{P}(\pi)$ , i.e. supposons que  $[x, y]$  est une coupe de  $\pi$ . Si  $\pi_\alpha$  est l' $\alpha$ -coupe de  $\pi$ , alors  $\mathcal{P}(\pi) = \{P | P(\pi_\alpha) \geq N(\pi_\alpha), \forall \alpha \in (0, 1]\}$ . Donc, en posant  $\forall x \leq a, f(x) = \sup\{y, \pi(x) \geq \pi(y)\}$ , on peut prouver que :

$$\mathcal{P}(\pi) = \{P | \forall x \leq a, F(x) + 1 - F(f(x)) \leq \pi(x)\}.$$

Nous pouvons définir une p-box particulière  $[\underline{F}, \overline{F}]$  avec :

$$\overline{F}(x) = \Pi(X \in (-\infty, x]) \quad (2.2)$$

$$\underline{F}(x) = N(X \in (-\infty, x]). \quad (2.3)$$

Il est clair que

$$\overline{F}(x) = \pi(x) \quad \forall x \text{ tel que } \overline{F}(x) < 1$$

et

$$\underline{F}(x) = 1 - \pi(x) \quad \forall x \text{ tel que } \underline{F}(x) > 0$$

Définissons

$$\pi^+(x) = \begin{cases} \pi(x) & \text{for } x \leq a \\ 1 & \text{for } x \geq a \end{cases} \quad \text{et} \quad \pi^-(x) = \begin{cases} \pi(x) & \text{for } x \geq a \\ 1 & \text{for } x \leq a \end{cases}$$

Les fonctions  $\pi^+(x)$  et  $1 - \pi^-(x)$  sont égales aux fonctions de répartition  $\overline{F}$  et  $\underline{F}$ . La p-box  $[\overline{F}, \underline{F}] = [\pi^+, 1 - \pi^-]$  a une caractéristique spécifique importante : il existe une valeur réelle  $a$  telle que  $\overline{F}(a) = 1$  et  $\underline{F}(a) = 0$ . Cela signifie que la p-box contient la valeur déterministe  $a$ , de sorte que les deux distributions cumulatives agissent dans les deux parties disjointes séparées par cette valeur. Nous pouvons définir une distribution de possibilité à partir des

deux fonctions de répartition telle que  $\pi = \min(\overline{F}, 1 - \underline{F})$  et retrouvons ainsi la distribution de possibilité qui a produit la p-box. Toutefois, il est clair que ce processus appliqué à une p-box quelconque ne rend pas une distribution de possibilité normalisée quand les distributions cumulatives sont trop proches. Une p-box peut s'avérer être un outil précis pour approcher une distribution de probabilité dans le dernier cas (i.e.  $\underline{F}^{-1}(0) < \overline{F}^{-1}(1)$ ). De plus, les deux familles de mesures de probabilité  $\mathcal{P}(\pi)$  et  $\mathcal{P}(\underline{F} < \overline{F})$  sont différentes. Le résultat suivant indique que l'ensemble des probabilités  $\mathcal{P}(\pi)$  est plus précis que l'ensemble  $\mathcal{P}(\underline{F} < \overline{F})$  (Dubois et Prade [39]) :

**Théorème 2** *La famille de probabilités codées par la distribution de possibilité unimodale continue  $\pi$  est strictement incluse dans la famille de probabilité codée par la p-box  $[\underline{F}, \overline{F}]$  induite par  $\pi$  :*

$$\mathcal{P}(\pi) \subset \mathcal{P}(\underline{F} < \overline{F}) \text{ pour } \underline{F} = 1 - \pi^- \text{ et } \overline{F} = \pi^+$$

**Preuve.**

Soit  $P \in \mathcal{P}(\pi)$ . Comme

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} F(x) + 1 - F(y) = F(x) \text{ et } \lim_{y \rightarrow +\infty} \max(\pi(x), \pi(y)) = \pi^+(x)$$

Nous obtenons d'après le Théorème 1 :

$$F(x) \leq \pi^+(x)$$

De la même façon

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) + 1 - F(y) = 1 - F(y) \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} \max(\pi(x), \pi(y)) = \pi^-(y)$$

Donc

$$F(y) \geq 1 - \pi^-(y)$$

Par conséquent, nous avons  $P \in \mathcal{P}(\underline{F} < \overline{F})$ .

D'un autre côté, l'autre inclusion est fautive. En effet prenons par exemple la distribution de possibilité triangulaire  $\pi$  avec un support égal à  $[0, 2]$  et un noyau égal à  $\{1\}$ . Définissons  $\mathcal{P}(\underline{F} < \overline{F}) = \{P | \forall x, 1 - \pi^-(x) \leq F(x) \leq \pi^+(x)\}$  et  $P$  une mesure de probabilité telle que  $P(\{0.5\}) = 0.5$  et  $P(\{1.5\}) = 0.5$ . Nous avons  $P \in \mathcal{P}(\underline{F} < \overline{F})$ , toutefois  $P \notin \mathcal{P}(\pi)$  car, pour  $A = (-\infty, 0.5] \cup [1.5, +\infty)$ , on obtient  $P(A) = 1 > \Pi(A) = 0.5$ .  $\square$

Nous pouvons systématiser ce contre-exemple et trouver des familles de mesures de probabilité incluses dans la p-box  $[\underline{F}, \overline{F}]$  induite par  $\pi$ , qui ne sont pas présentes dans  $\mathcal{P}(\pi)$ . Le résultat suivant améliore un précédent résultat dû à Dubois et Prade [39] :

**Théorème 3** *Soit  $P$  une mesure de probabilité dans  $\mathcal{P}(\underline{F} < \overline{F})$  telle que :*

- Il existe  $\gamma \geq a$  satisfaisant  $P((-\infty, \gamma]) = \underline{F}(\gamma)$  (voir Figure 2.6.a) (ou  $P((-\infty, \gamma]) = \overline{F}(\gamma)$ , (voir Figure 2.6.b)).
- Il existe  $\theta \in \{x \leq a/\overline{F}(x) \leq 1 - \underline{F}(\gamma)\}$  tel que  $P((-\infty, \theta]) \neq 0$  (voir Figure 2.6.a) (ou  $\theta \in \{x \geq a/1 - \underline{F}(x) \leq \overline{F}(\gamma)\}$  tel que  $P((-\infty, \theta]) \neq 1$ , (voir Figure 2.6.b)).

Alors  $P \notin \mathcal{P}(\pi)$ .

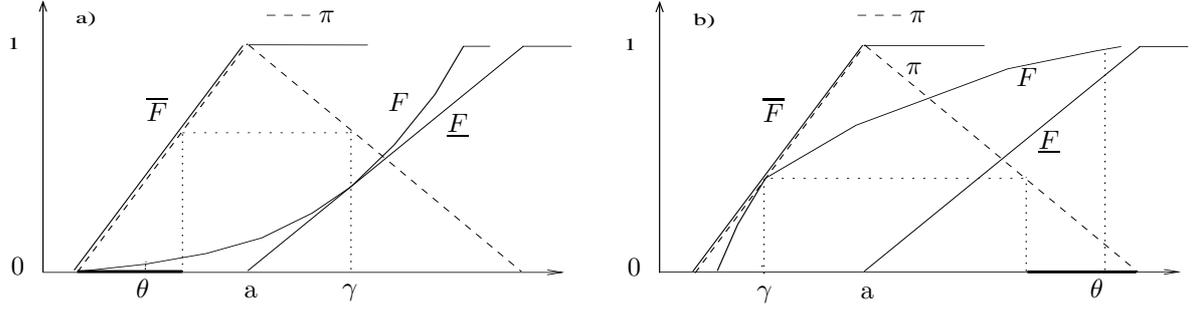


FIG. 2.6 – Mesures de probabilité dans  $\mathcal{P}(\underline{F}; \overline{F})$  mais non présente dans  $\mathcal{P}(\pi)$ .

**Preuve.** Soit  $P \in \mathcal{P}(\underline{F} < \overline{F})$  avec la probabilité cumulée (fonction de répartition)  $F$  associée à la mesure  $P$ .

Considérons le cas où  $\gamma \geq a$  existe tel que  $P((-\infty, \gamma]) = \underline{F}(\gamma)$  (voir Figure 2.6.a). Utilisant le théorème 1 et les caractéristiques de  $F$  sur  $(-\infty, \theta]$  nous avons

$$P((-\infty, \theta] \cup [\gamma, +\infty)) = F(\theta) + 1 - \underline{F}(\gamma) > 1 - \underline{F}(\gamma) = \pi(\gamma) = \max(\pi(\theta), \pi(\gamma))$$

Donc,  $P \notin \mathcal{P}(\pi)$ .

De la même manière, si il existe  $\gamma \leq a$  satisfaisant  $P((-\infty, \gamma]) = \overline{F}(\gamma)$ , (voir Figure 2.6.b); nous avons  $\overline{F}(\gamma) + 1 - F(\theta) > \overline{F}(\gamma) = \pi(\gamma) = \max(\pi(\gamma), \pi(\theta))$ .  $\square$

La p-box induite par  $\pi$  peut donc contenir des distributions de probabilité multimodales (si  $F(\theta) = F(\gamma)$  par exemple), et des distributions de probabilité unimodales avec un mode différent de  $a$  qui sont exclues de la famille de mesures de probabilité codée par la distribution de possibilité  $\pi$ .

Le théorème 3 identifie un ensemble de mesures de probabilité qui ne sont pas incluses dans  $\mathcal{P}(\pi)$ . Etant donné  $\pi$  et  $F$  telle que  $F \leq \overline{F} = \pi^+$ . Si  $F$  est connue sur  $(-\infty, a]$ , nous pouvons définir une borne minimale  $F_*$  de  $F$  sur  $[a, +\infty)$  telle que  $F$  appartienne à  $\mathcal{P}(\pi)$  si et seulement si  $F \geq F_*$ . Considérons la fonction  $g : y \mapsto \min\{x \leq a | \pi(x) = \pi(y)\}$ . D'après le théorème 1, on déduit que  $F \in \mathcal{P}(\pi)$  si et seulement si  $F(g(y)) + 1 - F(y) \leq \pi(y)$  et donc que

$$F(y) \geq 1 - \pi(y) + F(g(y)), \quad \forall y \geq a \quad (2.4)$$

Supposons que la distribution de possibilité  $\pi$  soit triangulaire sur  $[\min, a, \max]$ . La fonction  $1 - \pi(y) + F(g(y))$  n'est pas nécessairement croissante (voir Figure 2.7 où  $F^1$  et  $F^2$  sont deux polynômes de degré 2 sur  $[\min, a]$  où  $\min = 1$ ,  $a = 10$  et  $\max = 17$ ). Nous sommes donc contraints de remplacer la partie décroissante par un plateau afin que  $F^2$  soit croissante sur  $[a, \max]$ , on définit ainsi :

$$F_*(y) = \max(F(a), 1 - \pi(y) + F(g(y))) \quad y \geq a \text{ voir Figure 2.7}$$

Inversement, si  $F$  est connue sur  $[a, +\infty)$ , une borne maximale  $F^*$  peut être trouvée sur  $(-\infty, a]$  telle que  $F \in \mathcal{P}(\pi)$  si et seulement si

$$F(x) \leq F^*(x) = \min(F(a), \pi(x) - 1 + F(f(x))) \quad \forall x \leq a$$

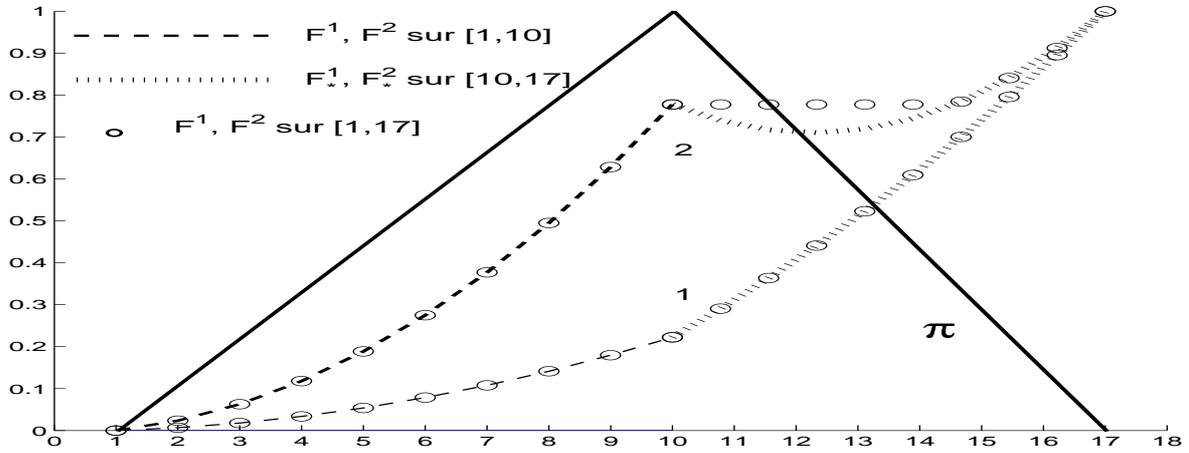


FIG. 2.7 – Exemple de familles de probabilité incluses dans la distribution de possibilité triangulaire de noyau  $\{10\}$  et de support  $[1, 17]$

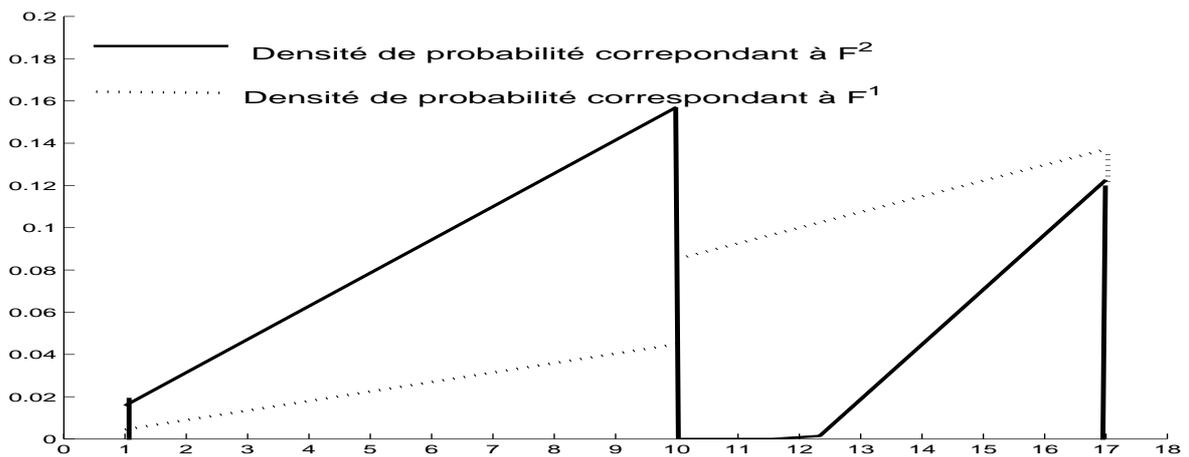


FIG. 2.8 – Densités de probabilité correspondant à  $F^1$  et  $F^2$  de la Figure 2.7

La figure 2.8 correspond aux densités des fonctions de répartition  $F^1$  et  $F^2$  de la Figure 2.7.

Ainsi, les courbes avec les ronds de la Figure 2.7 représentent les fonctions de répartition limitantes de  $F^1$  et  $F^2$  sur  $[1, 17]$ .

Il est clair que les ensembles :

$$\{P \mid F(x) \leq \overline{F}(x) \forall x \leq a \text{ et } F(x) = 1 \forall x \geq a\}$$

$$\{P \mid F(x) \geq \underline{F}(x) \forall x \geq a \text{ et } F(x) = 0 \forall x \leq a\}$$

sont inclus dans  $\mathcal{P}(\pi)$ . Ces ensembles correspondent alors à des distributions de probabilité limitées par  $[\min, a]$  ou limitées par  $[a, \max]$ . Se pose alors la question de savoir s'il est intéressant de conserver de telles probabilités.

Réciproquement, supposons que  $\underline{F} < \overline{F}$  soit l'information disponible, et qu'il existe une valeur réelle  $a$  telle que  $\overline{F}(a) = 1$  et  $\underline{F}(a) = 0$ . Les résultats ci-dessus prouvent que la distribution de possibilité  $\pi = \min(\overline{F}, 1 - \underline{F})$  ne peut pas englober toutes les distributions de probabilité limitées par la p-box. Un exemple évident :

Considérons une mesure de probabilité  $P$ , et la p-box  $[\underline{F}, \overline{F}]$  telles que  $\overline{F}(x) = F(x)$  pour  $x < a$  et 1 sinon ;  $\underline{F}(x) = F(x)$  pour  $x > a$  et 0 sinon. La distribution de possibilité correspondante est  $\pi(x) = F(x)$  si  $x < a$ ,  $\pi(x) = 1 - F(x)$  si  $x > a$  et  $\pi(x) = 1$  si  $x = a$ . Il peut être vérifié que  $P \notin \mathcal{P}(\pi)$  tandis que  $\underline{F} < F < \overline{F}$ .

Pouvons-nous trouver une telle distribution de possibilité  $\pi^*$  telle que  $\mathcal{P}(\pi^*)$  contienne la p-box  $[\underline{F}, \overline{F}]$  ?

Notons que  $\overline{F}(x) \geq F(x) \geq \underline{F}(x)$  implique que

$$\forall x \leq a \leq y, F(x) + 1 - F(y) \leq \overline{F}(x) + 1 - \underline{F}(y)$$

Ainsi, avec les intervalles  $[x, g(x)]$ , où  $g(x)$  est telle que

$$\overline{F}(x) = 1 - \underline{F}(g(x)), \forall x \leq a, F(x) + 1 - F(g(x)) \leq 2\overline{F}(x)$$

Ainsi, en posant :

$$\pi^{*+}(x) = \min(1, 2\overline{F}(x)) \text{ et } \pi^{*-}(y) = \min(1, 2(1 - \underline{F}(y)))$$

nous définissons une distribution de possibilité (souvent très imprécise)  $\pi^*$  telle que  $\mathcal{P}(\underline{F} < \overline{F}) \subset \mathcal{P}(\pi^*)$ .

Par conséquent, si nous cherchons à estimer la probabilité  $P(X \in [x, y])$  en utilisant la p-box  $[\underline{F}, \overline{F}]$  induite par  $\pi$ , pour un certain  $x \neq y$ , on peut obtenir un encadrement de cette probabilité plus grand que celui obtenu à partir de la distribution de possibilité. A partir de la p-box, la meilleure enveloppe de la probabilité  $P(X \in [x, y])$  peut être estimée par :

$$\max(0, \underline{F}(y) - \overline{F}(x)) \leq P(X \in [x, y]) \leq \overline{F}(y) - \underline{F}(x)$$

Avec un raisonnement similaire à la preuve du théorème 1, nous pouvons montrer

$$\exists(x, y), x \neq y \text{ tels que } \max(0, \underline{F}(y) - \overline{F}(x)) < N([x, y])$$

En effet, pour  $x < a < y$  tels que  $\pi^+(x) > 0$  et  $\pi^-(y) > 0$ , nous avons :

$$\begin{aligned} \max(0, \underline{F}(y) - \overline{F}(x)) &= \max(0, 1 - \pi^-(y) - \pi^+(x)) = 0 \text{ si } \pi^+(x) + \pi^-(y) > 1 \\ N([x, y]) &= 1 - \max(\pi^+(x), \pi^-(y)) > 0 \end{aligned}$$

Il est clair que  $\pi^+(x) + \pi^-(y) > \max(\pi^+(x), \pi^-(y))$  ce qui implique  $N([x, y]) > \underline{F}(y) - \overline{F}(x)$ . Nous pouvons conclure que : **Représenter la connaissance par une distribution de possibilité  $\pi$  est plus précis que d'utiliser la p-box  $[\underline{F}, \overline{F}]$  qu'elle induit.**

## 2.4 Famille de probabilités et variables aléatoires floues

Puri et Ralescu ([83]) considèrent que les résultats d'une expérience aléatoire ne sont pas numériques mais qu'ils peuvent être de nature linguistique vague.

### 2.4.1 Modèle classique

Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  un espace probabilisé. Considérons une variable aléatoire discrète  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $P(X = x_i) = p_i$  où  $i = 1 \dots n$  et  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ . Considérons également un paramètre fixe  $y_0$  telle que l'information disponible sur celui-ci est donnée par un ensemble flou associé à la fonction d'appartenance (distribution de possibilité)  $\pi_{y_0} : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ . Ainsi, on peut définir une variable  $\tilde{Y} : \Omega \rightarrow \tilde{\mathcal{P}}(\mathbb{R})$  qui affecte à chaque élément  $w$  de  $\Omega$  la même distribution de possibilité  $\pi_{y_0}$  où  $\tilde{\mathcal{P}}(\mathbb{R})$  est l'ensemble des distributions de possibilité de  $\mathbb{R}$  dans  $[0, 1]$ . Ce schéma illustre le fait que le paramètre  $y_0$  ne dépend pas de chaque élément particulier de  $\Omega$ .

Considérons une fonction  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1]$  et une variable aléatoire  $T = F \circ (X, y_0)$ .  $T$  prend les valeurs  $t_i = F(x_i, y_0)$  avec les probabilités respectives  $p_i$  pour  $i = 1 \dots n$ . Alors, l'information disponible sur  $T$  est donnée par la variable aléatoire floue  $\tilde{T} : \Omega \rightarrow \tilde{\mathcal{P}}(\mathbb{R})$  définie de la façon suivante :

$$\tilde{T}(w)(t) = \sup_{\{y \in \mathbb{R} / F(X(w), y) = t\}} \pi_{y_0}(y) \quad (2.5)$$

On définit ainsi  $n$  distributions de possibilité différentes  $(\pi_i^T)_{i=1 \dots n}$ , une pour chaque image de  $T$ . Pour chaque  $i \in \{1, \dots, n\}$  et chaque  $w \in \Omega$ , l'ensemble flou  $\tilde{T}(w)$  coïncide avec la distribution de possibilité  $\pi_i^T$ , définie à partir de  $F$  et  $\pi_{y_0}$  de l'équation 2.5. Ainsi, la variable aléatoire floue  $\tilde{T}$  prend ses  $n$  valeurs  $\pi_1^T, \dots, \pi_n^T$  avec les probabilités respectives  $p_1, \dots, p_n$ .

Nous pouvons interpréter ce résultat comme une distribution de masse  $(p_i)_i$  associée à des éléments focaux flous  $(\pi_i^T)_i$  [28, 40, 99]. Dans le cadre où les éléments focaux  $(\pi_i^T)_i$  seraient des ensembles classiques, nous aurions :

$$Bel(A) = \sum_{i=1}^n p_i N_i^T(A), \quad \forall A$$

où

$$N_i^T(A) = 1 \text{ si } \pi_i^T \subseteq A, \quad 0 \text{ sinon}$$

Ainsi, dans le cadre où les éléments focaux  $(\pi_i^T)_i$  sont des distributions de possibilité, la crédibilité  $Bel(A)$  et la plausibilité  $Pl(A)$  peuvent s'exprimer comme suit :

$$Pl(A) = \sum_{i=1}^n p_i \sup_{t \in A} \pi_i^T(t), \quad \forall A$$

$$Bel(A^c) = \sum_{i=1}^n p_i \inf_{t \in A} (1 - \pi_i^T(t)), \forall A$$

ce qui correspond à une extension naturelle des fonctions de croyance.

### 2.4.2 Modèle possibiliste de second ordre

Dans le cas précédent, la distribution de probabilité affecte un degré de probabilité précis à chaque image de  $\tilde{T}$  (distribution de possibilité). Cependant, un autre point de vue dans la littérature [21] est d'associer à chaque événement, une distribution de possibilité. Cette distribution de possibilité reflète le caractère imprécis de la vraie probabilité de l'événement.

Soit  $\tilde{T} : \Omega \rightarrow \tilde{\mathcal{P}}(\mathbb{R})$  une variable aléatoire floue représentant de l'information imprécise sur une variable aléatoire  $T_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Considérons à titre d'exemple la variable aléatoire floue  $\tilde{T} : \Omega \rightarrow \tilde{\mathcal{P}}(\mathbb{R})$  où la distribution de possibilité  $\tilde{T}(w)$  (voir Figure 2.9) est donnée par :

$$\tilde{T}(w)(x) = \begin{cases} 1 - |U(w) - x| & \text{si } x \in [U(w) - 1, U(w) + 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et  $U : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est une variable aléatoire avec une distribution uniforme sur  $[0, 1]$ . Pour chaque

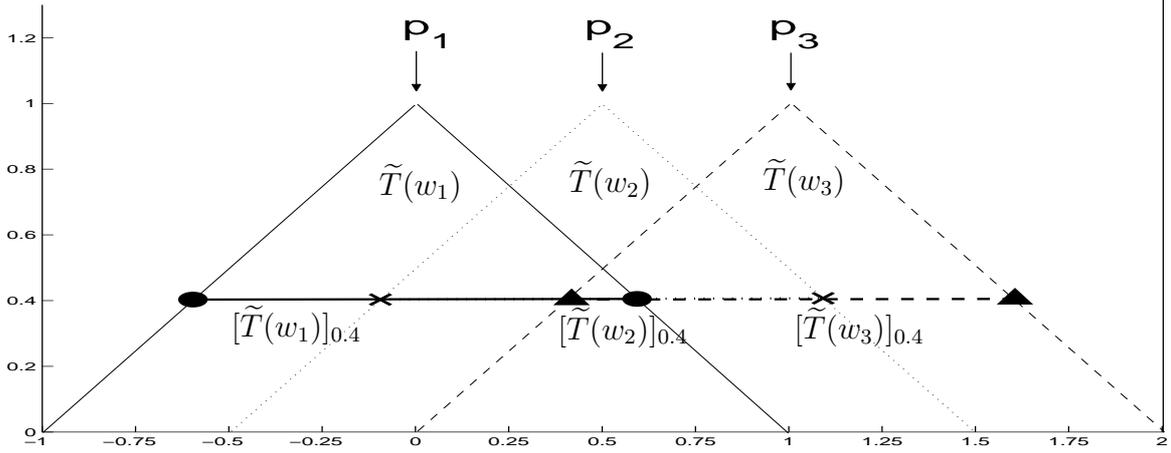


FIG. 2.9 – Echantillon de 3 distributions de possibilité  $\tilde{T}(w_i)$  de la variable floue aléatoire  $\tilde{T}$  et de 3 intervalles  $[T(w_i)]_{0.4}$  de l'intervalle aléatoire  $\tilde{T}_{0.4}$

$\alpha > 0$ , la probabilité de l'événement " $T_0(w) \in [\tilde{T}(w)]_\alpha, \forall w \in \Omega$ " est supérieure ou égale à  $1 - \alpha$ . Ceci est en accord avec le fait que la distribution de possibilité implique que pour chaque  $\alpha$  coupe  $[\tilde{T}(w)]_\alpha$ , le degré de nécessité  $N([\tilde{T}(w)]_\alpha) \geq 1 - \alpha$ . Les  $\alpha$  coupes, de la variable aléatoire floue de l'exemple, sont données (voir Figure 2.9) par :

$$[\tilde{T}(w)]_\alpha = [U(w) - (1 - \alpha), U(w) + (1 - \alpha)], \forall \alpha \in [0, 1]$$

Sous cette interprétation, nous pouvons dire que, pour chaque niveau de confiance  $1 - \alpha$ , la distribution de probabilité associée à  $T_0$  appartient à l'ensemble  $\mathcal{P}_{\tilde{T}_\alpha} = \{P_T | T \in S(\tilde{T}_\alpha)\}$ , où

$$S(\tilde{T}_\alpha) = \{X : \Omega \rightarrow \mathbb{R} | X(w) \in [\tilde{T}(w)]_\alpha\}$$

est l'ensemble des sélections de  $\tilde{T}_\alpha$ , l'ensemble des variables aléatoires compatibles avec  $\tilde{T}_\alpha$ . Ainsi, pour un événement  $A \subseteq \Omega$ , la probabilité  $P_{T_0}(A)$  appartient à l'ensemble :

$$\mathcal{P}_{\tilde{T}_\alpha}(A) = \{P_T(A) | T \in S(\tilde{T}_\alpha)\} \quad (2.6)$$

avec un niveau de confiance  $1 - \alpha$ . La distribution de possibilité  $\tilde{P}_{\tilde{T}}$  sur les distributions de probabilité, donnée par :

$$\tilde{P}_{\tilde{T}}(Q) = \sup\{\alpha \in [0, 1] | Q \in \mathcal{P}_{\tilde{T}_\alpha}\} \quad \forall Q$$

est vue comme une représentation imprécise de la mesure de probabilité  $P_{T_0}$ . En accord avec l'information disponible la quantité  $\tilde{P}_{\tilde{T}}(Q)$  représente le degré de possibilité que  $Q$  coïncide avec la vraie mesure de probabilité  $P_{T_0}$  associée à  $T_0$ .

D'un autre côté, pour chaque événement  $A$ , la distribution de possibilité  $\pi_{\tilde{P}_{\tilde{T}}(A)}$  définie comme suit :

$$\pi_{\tilde{P}_{\tilde{T}}(A)}(p) = \sup\{\alpha \in [0, 1] | p \in \mathcal{P}_{\tilde{T}_\alpha}(A)\}, \quad \forall p \in [0, 1]$$

représente notre imprécision sur la quantité  $P_{T_0}(A) = P(T_0 \in A)$ . Ainsi, la valeur  $\pi_{\tilde{P}_{\tilde{T}}(A)}(p)$  représente le degré de possibilité que le "vrai" degré de probabilité  $P_{T_0}(A)$  soit  $p$ . La Figure 2.10 représente la distribution de possibilité  $\pi_{\tilde{P}_{\tilde{T}}((-\infty, 0.25])}$  concernant la variable aléatoire floue de notre exemple. Les  $\alpha$ -coupes de l'ensemble flou  $\pi_{\tilde{P}_{\tilde{T}}((-\infty, 0.25])}$  sont données par :

$$[\pi_{\tilde{P}_{\tilde{T}}((-\infty, 0.25])}]_\alpha = \begin{cases} (0, 1) & \text{si } \alpha \leq 1/4 \\ (0, 5/4 - \alpha) & \text{si } \alpha \in (1/4, 3/4) \\ (\alpha - 3/4, 5/4 - \alpha) & \text{si } \alpha \geq 3/4 \end{cases}$$

La mesure de possibilité associée à la distribution de possibilité  $\tilde{P}_{\tilde{T}}$  est une mesure de possibilité de second ordre. Ce terme est utilisé car il s'agit d'une distribution de possibilité définie sur un ensemble de mesures de probabilité [94].

Nous rappelons qu'une distribution de possibilité code une famille de mesures de probabilité. Par conséquent, une distribution de possibilité de second ordre est associée à un ensemble de mesures de méta-probabilité ; chacune d'elles définie sur un ensemble de mesures de probabilité. Ainsi, une distribution de possibilité de second ordre permet de déclarer des phrases du type "la probabilité que la vraie probabilité de l'événement  $T_0 \in (-\infty, 0.25]$  soit 0.2 est située entre 0 et 0.95", i.e.

$$0 \leq P(P(T_0 \leq 0.25) = 0.2) \leq 0.95$$

Il est facile de vérifier que l'ensemble des valeurs considérées dans l'équation 2.6 est limité supérieurement (voir exemple Figure 2.10) par :

$$Pl_\alpha(A) = P(\{w \in \Omega | [\tilde{T}(w)]_\alpha \cap A \neq \emptyset\})$$

et limité inférieurement (voir exemple Figure 2.10) par :

$$Bel_\alpha(A) = P(\{w \in \Omega | [\tilde{T}(w)]_\alpha \subseteq A\})$$

En particulier, si  $A$  est un intervalle de la forme  $(-\infty, x]$ , alors  $Pl_\alpha(A)$  et  $Bel_\alpha(A)$  coïncident avec les valeurs :

$$\bar{F}_\alpha(x) = Pl_\alpha((-\infty, x]) = P(\{w \in \Omega | \min[\tilde{T}(w)]_\alpha \leq x\})$$

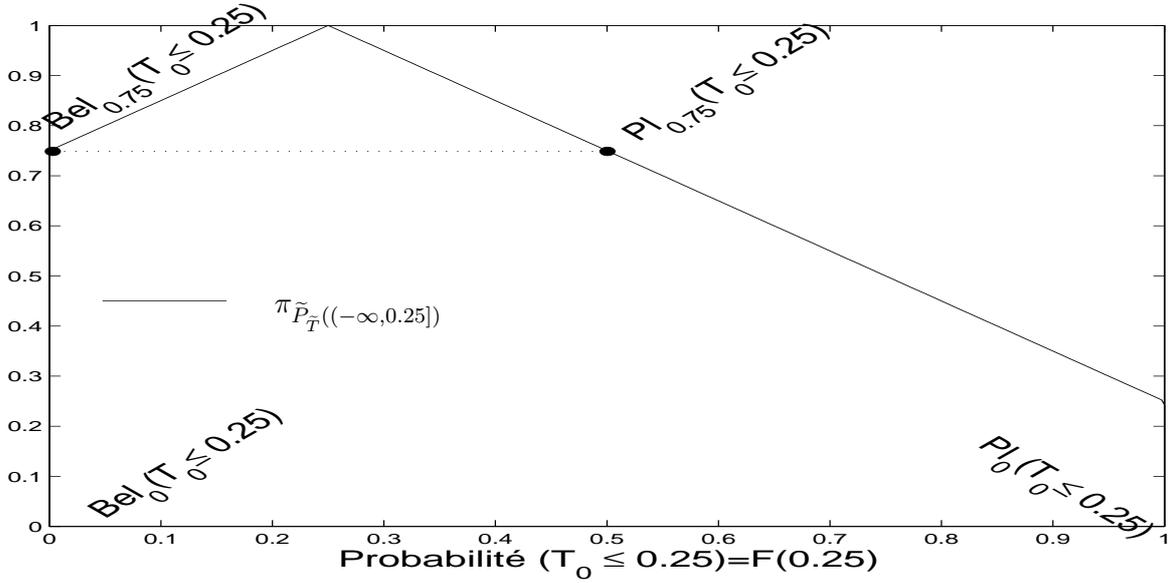


FIG. 2.10 – Distribution de possibilité que la vraie probabilité d'être inférieure à 0.25 soit égale à  $F(0.25)$

$$\underline{F}_\alpha(x) = Bel_\alpha((-\infty, x]) = P(\{w \in \Omega | \max[\tilde{T}(w)_\alpha] \leq x\})$$

Dans [55], Ferson et al. représente l'information concernant  $P_{T_0}$  par une famille emboîtée d'ensemble de mesures de probabilité  $\{\mathcal{P}(\{\underline{F}_\alpha, \overline{F}_\alpha\})\}_{\alpha \in [0,1]}$ .  $\mathcal{P}(\{\underline{F}_\alpha, \overline{F}_\alpha\})$  représente l'ensemble des mesures de probabilité obtenu à partir de  $\underline{F}_\alpha$  et  $\overline{F}_\alpha$ , i.e., l'ensemble :

$$\{Q | \underline{F}_\alpha(x) \leq Q((-\infty, x]) \leq \overline{F}_\alpha(x), \forall x \in \mathbb{R}\}$$

La figure 2.11 représente un échantillon de la famille de mesures de probabilité  $[\underline{F}_\alpha, \overline{F}_\alpha]$  concernant l'exemple précédent pour  $\alpha = 0$ ,  $\alpha = 0.5$  et  $\alpha = 1$ . En général, pour chaque  $\alpha \in (0, 1]$ , l'ensemble des mesures de probabilité  $\mathcal{P}_{\tilde{T}_\alpha}$  est plus précise que l'ensemble des mesures de probabilité associé à  $Bel_\alpha$  et  $Pl_\alpha$ . Par conséquent, pour un événement quelconque  $A$ , l'ensemble des valeurs  $\mathcal{P}_{\tilde{T}_\alpha}(A)$  est inclu dans l'intervalle  $[Bel_\alpha, Pl_\alpha]$ .

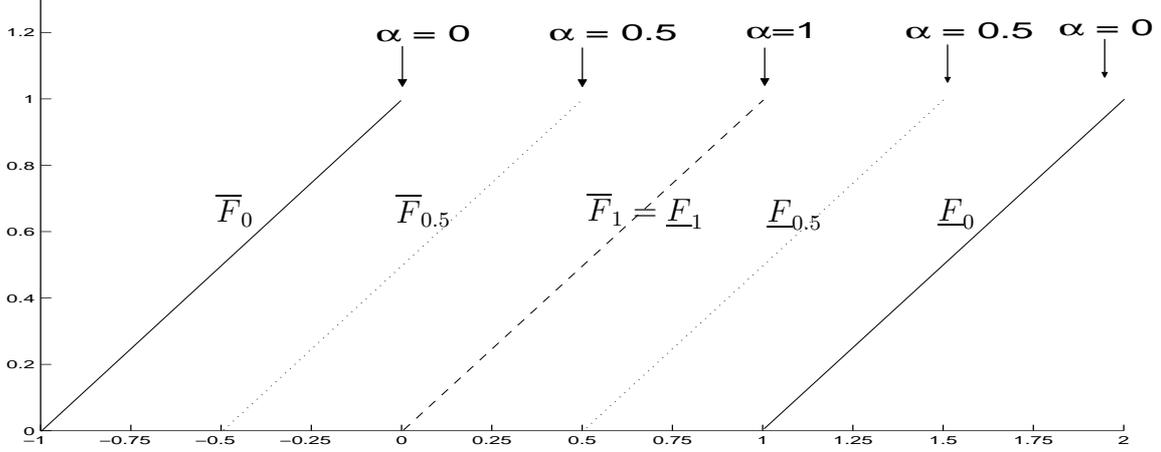
## 2.5 Distributions de possibilité codant les intervalles de prédiction

Soit  $p$  une fonction de densité de probabilité unimodale. Notons par  $M$  le mode de  $p$ . Soit  $P$  la mesure de probabilité associée à  $p$ . Jusqu'ici, nous avons considéré la distribution de possibilité  $\pi$  qui vérifie la condition suivante (nommée *Condition de Dominance*) :

$$P(A) \leq \Pi(A), \text{ pour tout ensemble mesurable } A$$

On dit que la mesure de possibilité  $\Pi$  domine la mesure de probabilité  $P$ , i.e.  $P \in \mathcal{P}(\pi)$ .

Plus généralement,  $\pi$  domine une famille de probabilité  $\mathcal{P}$  si et seulement si  $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}(\pi)$ .  $\Pi$

FIG. 2.11 – Echantillon de la famille  $\mathcal{P}(\{\underline{F}_\alpha, \overline{F}_\alpha\})$  de mesures de probabilité

est vrai que  $\mathcal{P}(\max(\pi_1, \pi_2))$  est la fermeture convexe de  $\mathcal{P}(\pi_1) \cup \mathcal{P}(\pi_2)$ , puisque la distribution de possibilité  $\max(\pi_1, \pi_2)$  génère la mesure de possibilité  $\max(\Pi_1, \Pi_2)$ . Au contraire,  $\mathcal{P}(\min(\pi_1, \pi_2)) \neq \mathcal{P}(\pi_1) \cap \mathcal{P}(\pi_2)$  en général, car  $\min(\Pi_1, \Pi_2)$  n'est pas une mesure de possibilité. Ainsi, si une famille de probabilités  $\mathcal{P}$  est dominée par deux distributions de possibilité  $\pi_1, \pi_2$ , on ne peut pas déduire que  $\mathcal{P}$  est dominée par  $\min(\pi_1, \pi_2)$ , même si  $\min(\pi_1, \pi_2)$  est normalisée.

Cependant, comme nous l'avons vu précédemment (voir Section 2.1.2 et Annexe B), une mesure de possibilité peut aussi coder un ensemble d'intervalles de confiance emboîtés fourni par un expert. Une distribution de possibilité  $\pi$  telle que  $P \in \mathcal{P}(\pi)$  peut être construite comme suit ([31], [34]) :

Soit  $J_\lambda = [x(\lambda), y(\lambda)]$  une famille d'intervalles emboîtés pour  $\lambda \in [0, 1]$  telle que  $J_\lambda \subseteq J_\beta$  si  $\lambda \geq \beta$ ,  $J_0 = \{x_*\} \subset \text{supp}(p)$  et  $J_1 = \text{supp}(p)$  où  $\text{supp}(p)$  est le support de la densité unimodale  $p$ . Alors, la distribution de possibilité  $\pi$  donnée par :

$$\pi(x(\lambda)) = \pi(y(\lambda)) = 1 - P(J_\lambda) \quad \forall \lambda \quad (2.7)$$

domine  $p$ . C'est à dire que  $p \in \mathcal{P}(\pi)$  (ou  $P \leq \Pi$ ). Si nous choisissons  $J_\lambda$  tel que :

$$J_\lambda = \{x, p(x) \geq \lambda\}, \quad \forall \lambda \in [0, \text{sup}(p)] \quad (2.8)$$

Alors,  $J_\lambda$  est l'intervalle de prédiction le plus étroit de probabilité  $1 - \alpha = P(J_\lambda)$ ,  $x_*$  est le mode  $M$  de  $p$  et  $J_\lambda$  est aussi l'intervalle le plus probable de longueur  $|y(\lambda) - x(\lambda)|$  [33]. Dans la suite, nous considérons une distribution de possibilité  $\pi$  telle que chaque  $\alpha$ -coupe de  $\pi$  coïncide avec le plus étroit intervalle de prédiction de  $p$  avec un niveau de confiance de  $1 - \alpha$  (nous nomons cette condition : *Condition de Dominance par les Intervalles de Prédiction*). Par conséquent, si nous choisissons  $J_\lambda$  comme dans (2.8) et  $\pi$  comme dans (2.7), nous obtenons une distribution de possibilité  $\pi_p^*$  telle que  $\Pi \geq P$  (*Condition de Dominance*) et l' $\alpha$ -coupe de  $\pi_p^*$  est en effet le plus étroit intervalle de prédiction de  $p$  de niveau de confiance  $1 - \alpha$  (*Condition de Dominance par les Intervalles de Prédiction*). Une telle distribution de possibilité  $\pi_p^*$  est appelée la *transformée optimale* de  $p$  (voir Figure 2.12),

$$\pi_p^*(x) = 1 - P(\{y, p(y) \geq p(x)\})$$

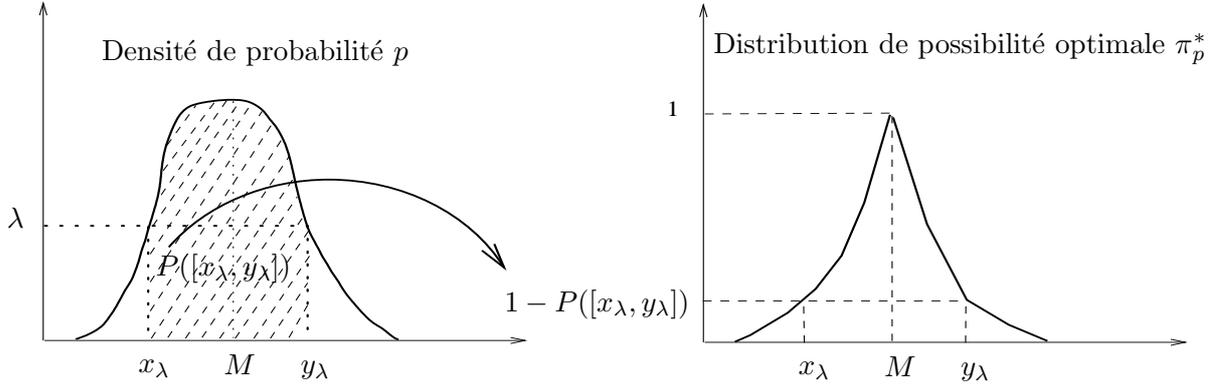


FIG. 2.12 – Transformation optimale.

et  $\pi_p^*(M) = 1$ . Cette transformation est optimale dans le sens où elle fournit la distribution de possibilité la plus spécifique (minimum d'aire sous la courbe) parmi celles qui dominent  $p$ , et préservent l'ordre induit par  $p$  sur l'intervalle support. Si  $J_\lambda$  est de la forme  $[x, f(x)]$  où  $f(x) = \max\{y, p(y) \geq p(x)\}$  alors  $\pi_p^*(x) = F(x) + 1 - F(f(x)) = \pi_p^*(f(x))$ .

Il est clair que la fonction  $\pi_p^*$  est une sorte de distribution de probabilité cumulée. Plus précisément, étant donné un ordre total  $\succ$  sur l'axe des réels et une valeur  $x$ , soit  $A_\succ(x) = \{y, x \succeq y\}$ , et on suppose que  $A_\succ(x)$  soit mesurable pour tout  $x$ . La fonction  $F_\succ(x) = P(A_\succ(x))$  est la fonction cumulée selon la relation d'ordre  $\succ$ . Si  $\succ = >$  l'ordre usuel sur l'axe des réels, alors  $F = F_\succ$ . Maintenant, choisissons l'ordre induit par la densité  $p$ , i.e.,  $x \succ_p y$  si et seulement si  $p(x) > p(y)$ , alors  $F_{\succ_p} = \pi_p^*$ .

Le calcul de  $\pi_p^*$  n'est pas si évident en général, mais le cas des densités symétriques a été étudié dans [31]; il est montré que  $\pi_p^*$  est convexe de chaque côté du mode de  $p$ . Ce résultat n'est plus vrai dans le cas général. Ainsi nous pouvons facilement montrer le résultat suivant :

**Théorème 4** *Soit  $p$  une distribution de probabilité unimodale continue de mode  $M$  et limitée par  $\text{supp}(p)$ . Si  $p$  est linéaire (par morceaux), alors sa transformation optimale est convexe par morceaux.*

**Preuve.**

Premièrement, nous montrons que la transformée optimale d'une densité triangulaire  $p$ , est convexe de chaque côté du mode  $M$  (voir Figure 2.13).

Soit  $[b, c]$  le support de  $p$ . Nous avons :

$$\begin{aligned} p_-(x) &= \frac{p(M)}{M-b}(x-b) & \text{et} & & p_-^{-1}(\lambda) &= \frac{M-b}{p(M)}\lambda + b \\ p_+(x) &= \frac{p(M)}{c-M}(c-x) & \text{et} & & p_+^{-1}(\lambda) &= c - \frac{c-M}{p(M)}\lambda \end{aligned}$$

Pour  $\lambda \in [0, p(M)]$ , nous obtenons :

$$\pi_p^*(p_-^{-1}(\lambda)) = \pi_p^*(p_+^{-1}(\lambda)) = \frac{\lambda^2}{2p(M)}(c-b)$$

Cela signifie que :

– Pour  $x \leq M$ , en posant  $\lambda = p_-(x)$ , nous avons :

$$\pi_p^*(x) = \frac{p(M)(c-b)}{2(M-b)^2}(x-b)^2$$

Donc,  $\forall x \leq M$ ,  $\pi_p^{*\prime\prime}(x) \geq 0$ , par conséquent  $\pi_p^*$  est convexe sur  $[b, M]$ .

– Pour  $x \geq M$ , en posant  $\lambda = p_+(x)$ , nous avons :

$$\pi_p^*(x) = \frac{p(M)(c-b)}{2(c-M)^2}(x-c)^2$$

Donc,  $\forall x \geq M$ ,  $\pi_p^{*\prime\prime}(x) \geq 0$ , par conséquent  $\pi_p^*$  est convexe sur  $[M, c]$ .

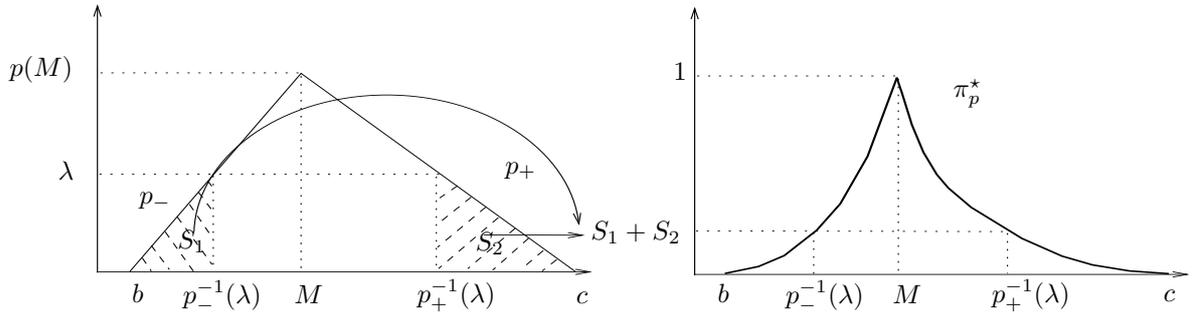


FIG. 2.13 – Densité triangulaire  $p$  à gauche et la forme de sa transformation optimale  $\pi_p^*$  à droite.

A présent, considérons  $p$  linéaire par morceaux et  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$  sont les ordonnées des points où  $p$  change de pente. En particulier  $p(M) = \lambda_n$  et  $p(b) = p(c) = \lambda_1 = \lambda_2 = 0$ .

Pour illustration, nous dessinons le cas où la densité  $p$  est linéaire sur 4 intervalles  $[b = \min(\text{supp}(p)), a_2]$ ,  $[a_2, M]$ ,  $[M, a_4]$ ,  $[a_4, c = \max(\text{supp}(p))]$  (voir Figure 2.14).

Considérons l'indice  $i$  tel que  $\lambda_i < \lambda_{i+1}$ ,  $\lambda \in [\lambda_i, \lambda_{i+1}]$ . Notons  $[\underline{b}_i, \bar{b}_i]$  et  $[\underline{b}_{i+1}, \bar{b}_{i+1}]$  les intervalles dont les bornes ont pour ordonnées  $\lambda_i$  et  $\lambda_{i+1}$ , et  $[x, y]$  tel que  $p(x) = p(y) = \lambda$  (voir Figure 2.15) où  $\lambda_i = p(a_2)$ ,  $\lambda_{i+1} = p(a_4)$ ,  $[\underline{b}_i, \bar{b}_i] = [a_2, p_4^{-1}(p(a_2))]$ ,  $[\underline{b}_{i+1}, \bar{b}_{i+1}] = [p_2^{-1}(p(a_4)), a_4]$ ,  $[x, y] = [p_2^{-1}(\lambda), p_4^{-1}(\lambda)]$ .

L'intégrale calculant  $\pi_p^*(x) = \pi_p^*(y)$  contient une partie constante correspondant à l'aire sous  $p$  en dehors de l'intervalle  $[\underline{b}_i, \bar{b}_i]$  ( $T_1$  et  $T_2$  dans la Figure 2.15), plus une partie linéaire en  $\lambda$  correspondant aux rectangles ( $R_1$  et  $R_2$  dans la Figure 2.15) d'aires  $\lambda_i \cdot (x - \underline{b}_i)$  et  $\lambda_i \cdot (\bar{b}_i - y)$  à l'intérieur des intervalles  $[\underline{b}_i, x]$  et  $[y, \bar{b}_i]$ , plus une partie quadratique en  $\lambda$  correspondant aux aires des triangles restants ( $S_1$  et  $S_2$  dans la Figure 2.15) localisés à l'intérieur des intervalles  $[\underline{b}_i, x]$  et  $[y, \bar{b}_i]$ , bornés par  $p$ , la ligne horizontale d'ordonnée  $\lambda_i$  et la ligne verticale d'abscisse  $x$  (resp.  $y$ ). La dérivée seconde de  $\pi_p^*$  est égale à 0 exceptée pour la partie quadratique de  $\pi_p^*$  pour laquelle elle est constante. Par conséquent, nous trouvons la même expression que dans la transformation optimale de la densité triangulaire  $p$  (voir Figure 2.13). Alors,  $\pi_p^*$  est convexe par morceaux et la Figure 2.16 montre la forme de  $\pi_p^*$  dans le cas où la densité  $p$  est linéaire en 5 points. Nous pouvons approcher une densité linéaire unimodale  $p$  quelconque au moyen d'une fonction continue par morceaux.

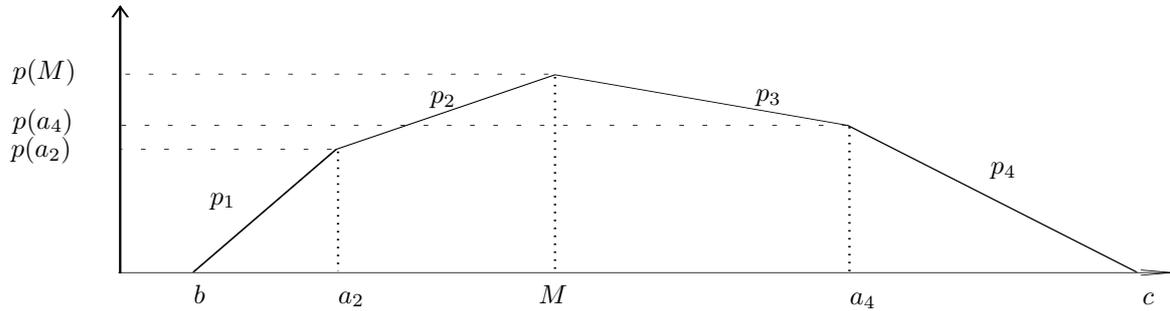


FIG. 2.14 – Densité de probabilité unimodale continue.

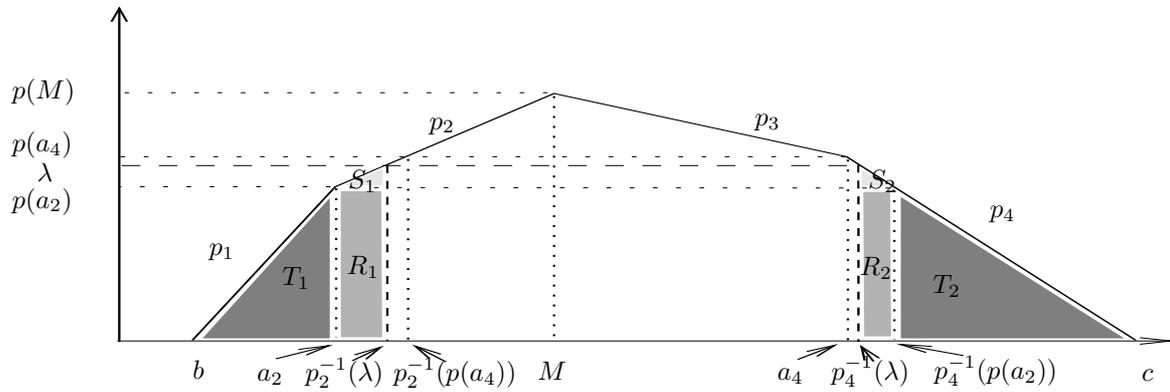


FIG. 2.15 – Etapes de la transformation optimale d'une densité de probabilité unimodale continue quand  $\lambda \in [p(a_2), p(a_3)]$ .

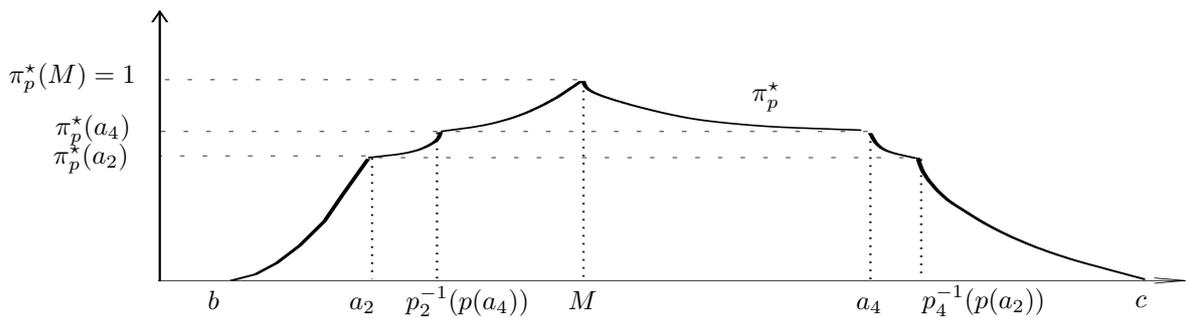


FIG. 2.16 – Forme de la transformation optimale  $\pi_p^*$  de la densité de probabilité unimodale continue  $p$ .

Une distribution de possibilité  $\pi$  telle que  $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}(\pi)$  est une représentation possibiliste approximative (couvrante) d'une famille de mesures de probabilité  $\mathcal{P}$  donnée. Clairement, cela signifie que  $\pi$  domine toutes les mesures de probabilité se trouvant dans  $\mathcal{P}$  (i.e.  $\Pi(A) \geq P(A) \forall P \in \mathcal{P}$ ). Idéalement la distribution de possibilité  $\pi$  devrait être telle que  $\mathcal{P}(\pi)$  est aussi petit que possible. Cependant de telles approximations optimales couvrant des familles de probabilités n'existent pas généralement (voir Dubois et Prade [37]).

Néanmoins, nous essaierons de déterminer une représentation possibiliste couvrant les familles de probabilités induites par des données probabilistes incomplètes. En utilisant l'idée des intervalles de prédiction les plus étroits décrits ci-dessus, il est aussi intéressant de caractériser les représentations possibilistes qui tiennent compte de tels intervalles, à savoir une distribution  $\pi_{\mathcal{P}} = \sup_{p \in \mathcal{P}} \pi_p^*$ .  $\pi_{\mathcal{P}}$  a la particularité que ses  $\alpha$ -coupes contiennent les  $1 - \alpha$ -intervalles de prédiction de n'importe quelle densité  $p \in \mathcal{P}$ . Notons que cette approche est permise par la propriété suivante :  $\mathcal{P}(\pi_1) \cup \mathcal{P}(\pi_2) \subseteq \mathcal{P}(\max(\pi_1, \pi_2))$ .



## Chapitre 3

# Représentations mathématiques de la connaissance

Les résultats précédents peuvent être utilisés pour proposer une représentation cohérente et fidèle d'une information incomplète ou imprécise au moyen des p-boxes, des fonctions de croyance et particulièrement au moyen des distributions de possibilité. Dans la pratique, différents degrés d'imprécision ou d'incomplétude peuvent être rencontrés. Une telle information peut correspondre notamment à des jugements d'expert. Dans le cas extrême, un expert pourrait ne fournir que les bornes d'intervalle contenant la valeur imprécisément connue. Mais bien souvent, il dispose de plus d'informations que celle décrite par un simple intervalle. En effet, un expert est souvent capable d'émettre des préférences au sein même de l'intervalle ou peut avoir une idée sur des valeurs typiques dans l'intervalle comme la médiane, la moyenne, le mode. L'information additionnelle sur une distribution peut être la connaissance des quantiles et des intervalles appropriés de confiance. Ces informations définissent alors des contraintes restreignant la famille de probabilités. Nous présentons dans ce chapitre ce que chaque modèle mathématique (distribution de probabilité  $p$ , de possibilité  $\pi$  ou de masse  $\nu \dots$ ), issu de la théorie des probabilités, des possibilités ou des fonctions de croyance, permet de représenter en terme d'information ; ce qui a fait l'objet des papiers suivants [6, 11, 14]. Nous rappelons les méthodes de représentation proposées par Ferson et al. à l'aide des p-boxes [48, 49], quand la moyenne d'une densité est connue, et pour modéliser un petit échantillon d'observations précises au moyen de probabilités imprécises.

### 3.1 Représentation de l'information par une distribution de probabilité $p$

#### 3.1.1 Echantillon de grande taille

Supposons qu'en raison de phénomènes naturels, un certain paramètre présente une certaine variabilité et qu'on sache mesurer ce paramètre avec une précision suffisante pour nos besoins. Si on dispose de suffisamment de mesures de ce paramètre, nous pouvons identifier une distribution de probabilité unique qui décrit sa variabilité. Par exemple la Figure 3.1 présente la distribution des fréquences relatives cumulées de la hauteur de pluie mesurée au travers d'un sol sableux, estimée à partir de 30 années de données météo. Dans le cadre d'une évaluation des risques qui ferait intervenir ce paramètre (hauteur de pluie), l'évaluateur pour-

rait choisir, soit de travailler directement avec la distribution mesurée (fréquences mesurées de la Figure 3.1)qqq, ou alors d'utiliser une loi de probabilité calée sur les fréquences mesurées. Par exemple la Figure 3.1 présente un calage à l'aide d'une loi normale de moyenne  $222.2 \text{ mm}$  et d'écart-type  $39.5 \text{ mm}$ . On note que la queue de la distribution mesurée dans les valeurs

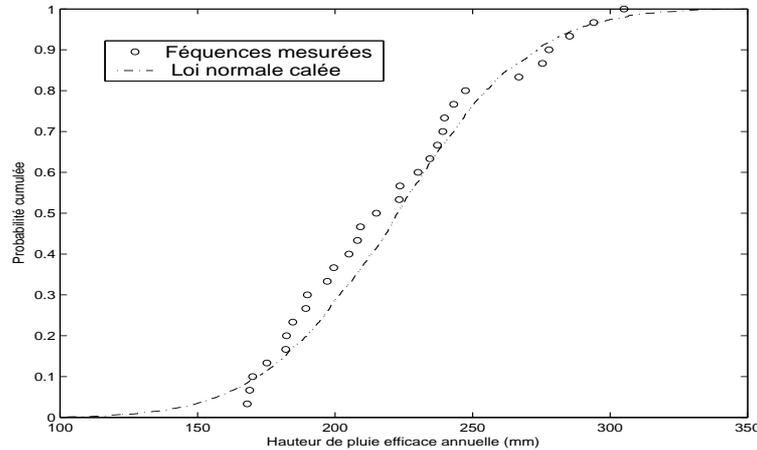


FIG. 3.1 – Fréquences relatives des hauteurs de pluie mesurées et Calage des fréquences mesurées à l'aide d'un loi normale de moyenne  $222.2 \text{ mm}$  et d'écart-type  $39.5 \text{ mm}$

basses n'est pas bien respectée par la loi calée. Comme la loi normale a un support infini, dans la pratique, elle sera tronquée évitant ainsi les valeurs trop basses.

### 3.1.2 Connaissance Théorique

Les densités de probabilité sont parfois utilisées pour des raisons théoriques et non nécessairement parce qu'on a un grand échantillon. Voici à titre d'exemple une liste non exhaustive des lois de probabilité utilisées :

- La loi de Poisson [86] est utilisée pour modéliser l'occurrence d'événements rares qui surviennent au cours d'une activité fréquente : par exemple, pannes de matériel, accident d'avion, randonneurs frappés par un éclair, désintégration des noyaux d'une substance radioactive, etc ...
- Le processus de Poisson [86] est utilisé pour modéliser le fait que l'occurrence d'un événement n'impacte pas l'occurrence d'un nouvel événement (ex : files d'attente).
- La loi normale est utilisée pour représenter la somme de processus stochastiques d'effets indépendants identiques (théorème de la limite centrale [86]).
- Découlant de ce qui précède, la loi Log-normale est utilisée pour modéliser le produit de processus stochastiques d'effets indépendants identiques.
- La loi uniforme est utilisée pour représenter l'équirépartition.

## 3.2 Représentation de l'information par les p-boxes

Les p-boxes  $[\underline{F}, \overline{F}]$  généralisent l'idée de l'intervalle d'une paire de points à une paire de probabilités cumulées (voir Section 2.1.1). Elles sont une manière très naturelle de prolonger

la notion d'intervalle. Elles sont particulièrement instructives quand les deux distributions cumulatives sont proches l'une de l'autre (i.e.  $\underline{F}^{-1}(0) \ll \overline{F}^{-1}(1)$ ). Elles apparaissent comme un choix naturel pour les modèles paramétriques avec des paramètres imprécis. Par exemple, un modèle gaussien, où la moyenne et/ou l'écart type se situent dans un intervalle prescrit, peut naturellement engendrer une p-box étroite (même si cette dernière contient des distributions non gaussiennes). Le modèle de la p-box a été particulièrement étudié par Ferson [48, 49]. Nous rappelons ses propositions pour représenter des distributions de probabilité connaissant la moyenne et l'usage de la distance de Kolmogorov-Smirnov pour obtenir une p-box à partir d'un faible échantillon de données.

### 3.2.1 Approximation d'une mesure de probabilité de moyenne et de support connu.

Supposons qu'un expert fournisse la moyenne  $\mu$  et le support  $I = [b, c]$ . Notons  $\mathcal{P}_I^{mean}$  l'ensemble des probabilités de support  $I$  et de moyenne  $\mu$ . Ferson [49] propose de représenter cette connaissance par une p-box  $[\underline{F}, \overline{F}]$ . Pour l'obtenir, il résout séparément les deux problèmes suivants pour chaque valeur de  $x$  :

$$\overline{F}(x) = \sup_{F:E(X)=\mu} F(x) \quad \text{et} \quad \underline{F}(x) = \inf_{F:E(X)=\mu} F(x)$$

où l'inconnue est la fonction de répartition  $F$ .

Utilisant la propriété caractéristique de la moyenne :

$$\int_b^\mu F(y)dy = \int_\mu^c (1 - F(y))dy$$

on obtient le résultat suivant

$$\underline{F}(x) = \begin{cases} \frac{x-\mu}{x-b} & \forall x \in [\mu, c] \\ 0 & \forall x \in [b, \mu] \end{cases} \quad \text{et} \quad \overline{F}(x) = \begin{cases} 1 & \forall x \in [\mu, c] \\ \frac{c-\mu}{c-x} & \forall x \in [b, \mu] \end{cases}$$

La p-box  $[\underline{F}, \overline{F}]$  (voir Figure 3.2 pour l'exemple) définit une famille de probabilités  $\mathcal{P}(\underline{F} < \overline{F})$

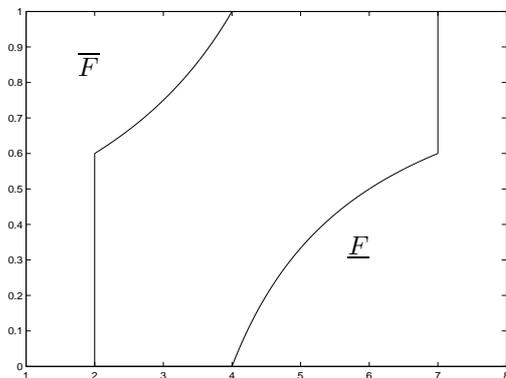


FIG. 3.2 – P-box défini à partir de  $x \in [2, 7]$  et  $E(X) = 4$ .

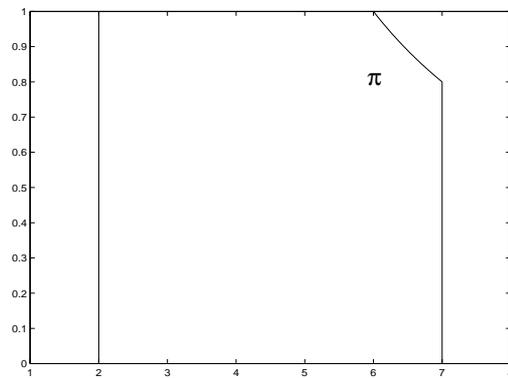


FIG. 3.3 – Distribution de possibilité  $\pi$  contenant la p-box  $[\underline{F}, \overline{F}]$ .

qui contient  $\mathcal{P}_I^{mean}$ . On pourrait être tenté d'utiliser la famille de probabilités induite par la distribution de possibilité  $\pi$  telle que

$$\pi(x) = \frac{c - \mu}{c - x} \text{ pour } x \in [b, \mu] \quad \text{et} \quad \pi(x) = 1 - \frac{x - \mu}{x - b} \text{ pour } x \in [\mu, c]$$

mais comme nous l'avons déjà mentionné, l'inclusion  $\mathcal{P}_I^{mean} \subset \mathcal{P}(\pi)$  n'est pas vraie. La mesure de probabilité  $P$ , définie par  $P(X = 2) = 3/5$  et  $P(X = 7) = 2/5$ , suffit pour montrer que nous n'avons pas l'inclusion. En effet, nous avons  $E(X) = 4$  mais  $P(X = 2 \text{ ou } X = 7) = 1$  et  $\Pi(X = 2 \text{ ou } X = 7) = 0.6$ , ce qui est contradictoire avec  $P \leq \Pi$ . Comme nous l'avons déjà fait remarquer (voir Section 2.3), la famille de probabilités  $\mathcal{P}(\pi)$  telle que  $\pi^+(x) = \min(1, 2\overline{F}(x))$  et  $\pi^-(y) = \min(1, 2(1 - \underline{F}(y)))$  (voir Figure 3.3), contient  $\mathcal{P}_I^{mean}$  et  $\mathcal{P}(\underline{F} < \overline{F})$ . Cependant, il est clair que cette p-box de Fig.3.2 est déjà très peu informative, et que la possibilité la couvrant l'est encore moins. En fait, la valeur moyenne ne semble pas apporter beaucoup d'information sur la distribution, et le problème de trouver une meilleure représentation de ce genre d'information reste ouvert. D'ailleurs, alors qu'il est très facile et souvent naturel de calculer la valeur moyenne des données statistiques, il n'est pas clair que cette valeur soit cognitivement plausible, i.e., nous pouvons douter qu'une valeur représentative unique d'une quantité mal connue fournie par un expert se rapporte à la moyenne. De plus, alors que certaines quantités comme le revenu moyen ont un sens, la taille moyenne des humains apparaît comme une notion très artificielle. En effet, on pourrait avoir 50% des individus de taille égale à 1.60 mètres, 50% des individus de taille égale à 1.80 mètres et il est absurde de décréter que la taille moyenne d'un individu est de 1.70 mètres.

### 3.2.2 Représentation d'un échantillon de petite taille

Quand la connaissance disponible se résume à un échantillon de petite taille  $(x_1, \dots, x_n)$  provenant d'une distribution de probabilité inconnue, Ferson et al. [48] définissent une p-box  $[\underline{F}, \overline{F}]$  en utilisant la loi de Kolmogorov-Smirnov (notée K.S.) [45, 78]. La loi de K.S. fournit des distributions cumulées limites de la distribution cumulée de l'échantillon  $F_n$  où  $n$  est la taille de l'échantillon. Nous pouvons définir  $F_n$  comme suit :

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < x_{(1)} \\ \vdots & \\ \frac{i}{n} & \text{pour } x_{(i)} \leq x < x_{(i+1)} \\ \vdots & \\ 1 & \text{pour } x \geq x_{(n)} \end{cases}$$

où  $x_{(i)}$  sont les statistiques d'ordre de l'échantillon.

$(\underline{F}_n)_n$  et  $(\overline{F}_n)_n$  convergent vers la distribution cumulée empirique  $F_n$  quand la taille de l'échantillon devient grande, bien que la convergence soit plutôt lente. La loi de Kolmogorov-Smirnov requiert que les données de l'échantillon soient indépendantes et identiquement distribuées. Cette hypothèse est standard, mais souvent difficile à justifier (si les données proviennent de sources hétérogènes, par exemple). Pour obtenir les probabilités cumulées limitantes  $\underline{F}$  et  $\overline{F}$ , on utilise la distance de Kolmogorov-Smirnov entre  $F_n$  et  $F$  définie comme suit :

$$D_{KS} = \max_{i=1, \dots, n} \left( \left| F(x_{(i)}) - \frac{i}{n} \right|, \left| F(x_{(i)}) - \frac{i-1}{n} \right| \right)$$

$D_{KS}$  est une variable aléatoire dont la distribution n'est pas connue mais Kolmogorov a trouvé que  $\sqrt{n}D_{KS}$  a une distribution limite donnée par :

$$\forall t \geq 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P(\sqrt{n}D_{KS} \leq t) = 1 - 2 \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} e^{-2k^2 t^2}$$

Cette distribution limite a été tabulée et permet pour chaque niveau de confiance  $\alpha$  de

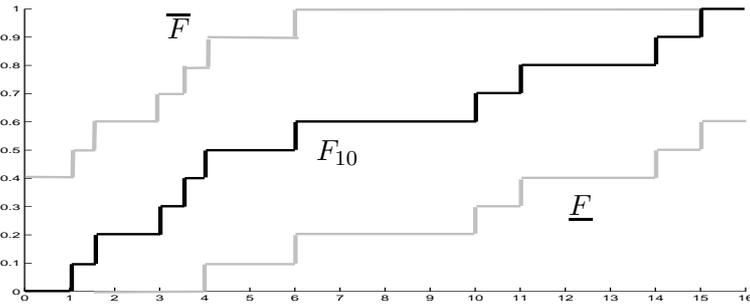


FIG. 3.4 – Une P-box  $[\underline{F}, \overline{F}]$  défini à partir d'un échantillon de taille 10.

trouver une valeur  $D_n(\alpha)$  telle que  $P(D_{KS} \leq D_n(\alpha)) = 1 - \alpha$ . Pour conclure, la loi de Kolmogorov-Smirnov permet de définir une p-box  $[\underline{F}_n, \overline{F}_n]$ ,  $\forall n$ , telle que

$$\underline{F}_n = \min(1, \max(0, F_n(x) - D_n(\alpha))) \quad \text{et} \quad \overline{F}_n = \min(1, \max(0, F_n(x) + D_n(\alpha)))$$

pour un niveau de confiance  $\alpha$  fixé. Par exemple, à un niveau de confiance de 95%, pour un échantillon de taille 10, la valeur de  $D_n(\alpha)$  est 0.40925 (voir Figure 3.4). Ces limites sont souvent employées pour exprimer la fiabilité des résultats d'une simulation ou pour examiner si le résultat d'une simulation suit un type de loi de probabilité. Cependant, il n'est pas habituel d'utiliser ces limites sur des paramètres d'entrée pour définir une famille de probabilités respectant la connaissance disponible. Nous devons être conscient que ces limites ne sont pas des limites certaines mais des limites statistiques. Cela signifie par exemple que dans 95% du temps la vraie distribution se trouvera à l'intérieur des limites  $\underline{F}_n$  et  $\overline{F}_n$ .

### 3.2.3 Approximation d'un modèle probabiliste paramétrique

Nous pouvons imaginer qu'un expert puisse fournir un modèle probabiliste  $P_\Theta$  pour représenter sa connaissance sur les paramètres d'un modèle du risque. Cependant, celui-ci étant incapable d'estimer avec exactitude la valeur des paramètres  $\theta \in \Theta$  du modèle probabiliste  $P_\Theta$  fournit un encadrement de chacun d'eux  $\theta \in [\underline{\Theta}, \overline{\Theta}]$ . Par exemple, l'expert décide, selon son expérience, qu'une certaine variable  $X$  suit une loi normale  $P_{(\mu, \sigma)} = \mathcal{N}(\mu, \sigma)$  et estime que la moyenne  $\mu \in [\underline{\mu}, \overline{\mu}]$  et que l'écart type  $\sigma \in [\underline{\sigma}, \overline{\sigma}]$ . Soit  $F_\Theta$  la fonction de répartition associée au modèle probabiliste  $P_\Theta$ . Nous pouvons alors définir une p-box  $[\underline{F}, \overline{F}]$  à partir de cette information en résolvant les deux problèmes suivants :

$$\underline{F}(x) = \inf_{\theta \in [\underline{\Theta}, \overline{\Theta}]} F_\Theta(x) \quad \text{et} \quad \overline{F}(x) = \sup_{\theta \in [\underline{\Theta}, \overline{\Theta}]} F_\Theta(x) \quad \forall x$$

### 3.3 Représentation discrète par les fonctions de croyance

La représentation d'une famille de probabilités au moyen des fonctions de croyance est appropriée si nous avons des probabilités d'événements connues. C'est typiquement le cas quand on connaît seulement la médiane de la distribution de probabilité. La signification de la médiane est :  $P(X \leq m) = 0.5$ .

Soit  $\mathcal{P}_I^{med}$  l'ensemble des distributions de probabilité de support  $I = [b, c]$  et médiane  $m$ . Cette connaissance peut être exactement représentée par une fonction de masse  $\nu_m$  telle que  $\nu_m([b, m]) = \nu_m(]m, c]) = 0.5$ . La crédibilité  $Bel_m$ , déduite de  $\nu_m$ , code toutes les probabilités de médiane  $m$ , i.e.,  $\mathcal{P}_I^{med} = \{P | \forall C, Bel_m(C) \leq P(C)\}$ .

Cette représentation s'étend naturellement au cas où on connaît des fractiles et le support  $I$  de la distribution de probabilité inconnue. Supposons qu'un expert fournisse les fractiles (quantiles voir dans l'Annexe A)  $x_1, x_2$  et  $x_3$  à 5%, 50% et 95%. Notons  $\mathcal{P}_I^{x_1, x_2, x_3}$  l'ensemble des distributions de probabilité de support  $I = [b, c]$  et de fractiles  $x_1, x_2, x_3$  connus. Nous pouvons représenter cette connaissance de manière exacte en utilisant les fonctions de croyance par la fonction de masse  $\nu_{fract}$  suivante :

$$\nu_{fract}([b, x_1]) = 0.05, \nu_{fract}(]x_1, x_2]) = 0.45, \nu_{fract}(]x_2, x_3]) = 0.45 \text{ et } \nu_{fract}(]x_3, c]) = 0.05$$

La crédibilité  $Bel_{fract}$ , déduite de  $\nu_{fract}$ , est dominée par toutes les probabilités de fractiles  $x_1, x_2$  et  $x_3$ , i.e.,  $\mathcal{P}_I^{x_1, x_2, x_3} = \{P | \forall C, Bel_{fract}(C) \leq P(C)\}$ . Notons que la fonction de masse induite par les fractiles porte sur une partition du support.

Au contraire, si un expert fournit un intervalle de confiance,  $x \in A \subseteq \mathbb{R}$  avec un certain degré  $\lambda$ , l'interprétation la plus prudente correspond à une inégalité  $P(A) \geq \lambda$ . La fonction de masse correspondante  $\nu$  assigne  $\lambda$  à  $A$  et  $1 - \lambda$  à l'axe des réels lui-même. Notons que ces deux ensembles focaux sont emboîtés. La connaissance d'un intervalle de confiance au niveau de confiance  $\lambda$  est moins précise que les fractiles : si  $A = [x_1, x_3]$  avec une confiance au moins égale à  $\lambda$ , nous ne pouvons pas déduire le degré de probabilité associé aux intervalles  $(-\infty, x_1]$  et  $[x_3, +\infty)$ , excepté si on suppose la symétrie de la densité sous-jacente.

Un intervalle de confiance peut donc être représenté par une distribution de possibilité [35] :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \pi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 1 - \lambda & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

où  $\pi$  codifie la famille de probabilités  $\mathcal{P}(\pi) = \{P | \forall A, \lambda \leq P(A)\}$ . Quand  $A$  est assez large, en pratique borné, son niveau de confiance est égale à 1. Cette représentation s'étend au cas où plusieurs intervalles de confiance  $\{A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_k\}$  sont obtenus pour plusieurs niveaux de confiance  $\{\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_k\}$  comme suggéré précédemment (voir Section 2.1.2). La fonction de masse correspondante est  $\nu(A_i) = \lambda_{i+1} - \lambda_i$ , avec  $\lambda_0 = 0$ . Ceci donne une distribution de possibilité discrète.

Le prochain paragraphe considère le cas des distributions de possibilité continues

### 3.4 Représentation de l'information par des distributions de possibilité continues

L'utilisation des distributions de possibilité continues, pour représenter des familles de probabilités, se fonde fortement sur des inégalités probabilistes. De telles inégalités fournissent des limites de probabilité pour des intervalles formant une famille d'intervalles emboîtés continue autour d'une valeur typique. Cette propriété d'emboîtement amène à interpréter la famille correspondante comme étant induite par une mesure de possibilité. Tandis que ces limites sont habituellement employées pour prouver des propriétés de convergence, nous proposons ici de les employer pour représenter de la connaissance. C'est le cas de l'inégalité de Chebyshev par exemple. L'inégalité classique de Chebyshev [70] définit une approximation encadrant les intervalles de confiance autour de la moyenne  $\mu$  connue d'une variable aléatoire  $X$ , sachant son écart type  $\sigma$ . L'inégalité de Chebyshev peut être écrite comme suit :

$$P(|X - \mu| \leq k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2} \text{ pour } k \geq 1$$

En se référant à la Section 2.1.2, l'inégalité de Chebyshev permet de définir une distribution

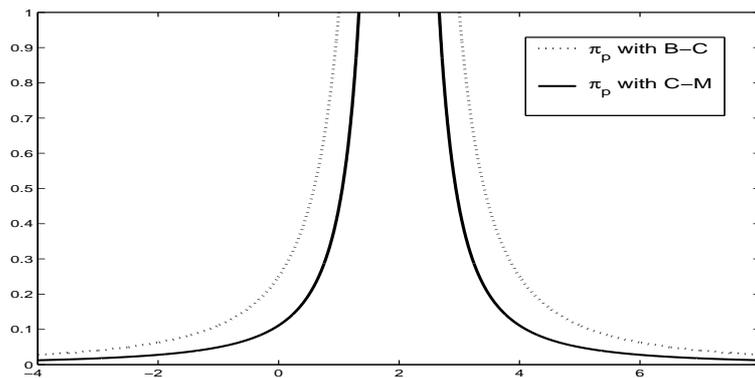


FIG. 3.5 – Distribution de possibilité optimale  $\pi_p$  connaissant  $\mu = 2$  et  $\sigma = 1$ , utilisant l'inégalité de Bienaymé-Chebychev et Camp-Meidel.

de possibilité  $\pi$  en considérant les intervalles  $[\mu - k\sigma, \mu + k\sigma]$  comme  $\alpha$ -coupes de  $\pi$  et  $\pi(\mu - k\sigma) = \pi(\mu + k\sigma) = 1/k^2$  (voir Figure 3.5). Cette distribution de possibilité (voir [31]) définit une famille de probabilités  $\mathcal{P}(\pi)$  telle que  $\mathcal{P}^{\mu, \sigma} \subseteq \mathcal{P}(\pi)$  contient toutes les distributions de probabilité de moyenne et d'écart type connus, que la distribution de probabilité inconnue soit symétrique ou non, unimodale ou non. S'il est de plus supposé que la distribution de probabilité inconnue est unimodale et symétrique, nous pouvons améliorer la précision de la distribution de possibilité  $\pi$  au moyen de l'inégalité de Camp-Meidel [70] (voir Figure 3.5).

$$P(|X - \mu| \leq k\sigma) \geq 1 - \frac{4}{9k^2} \text{ pour } k \geq \frac{2}{3}$$

Très souvent, et comme vu ci-dessus, les intervalles emboîtés partagent les mêmes points médians, rendant de ce fait les distributions de possibilité symétriques. Dans ce qui suit, nous abandonnerons cette condition restrictive. Au contraire, nous nous intéressons aux intervalles plus étroits de niveau de confiance fixé (voir Section 2.5 sur la *Condition de Dominance*

par les Intervalles de Prédiction). Cela nous amène à exploiter l'information sur le mode des distributions plutôt que la moyenne. De plus, on supposera que toutes les distributions ont un support borné. Quelques suppositions peuvent être faites sur la forme de la densité (sans aller jusqu'à choisir un modèle mathématique particulier comme le modèle gaussien) : la symétrie, la convexité ou la concavité peuvent être supposées ou connues, par exemple.

### 3.4.1 Distributions de possibilité avec le mode et le support connus : Condition de Dominance

Supposons que le mode  $M$  et le support  $I$  d'une distribution de probabilité  $p$  inconnue soient donnés par un expert. Dans ce paragraphe, on suppose que les distributions sont unimodales. On pourrait défendre l'hypothèse que le mode correspond mieux à la notion de valeur usuelle, comme étant la valeur la plus fréquemment observée. Même s'il est difficile d'extraire la valeur modale d'un échantillon de données statistiques, nous pouvons considérer que la valeur la plus fréquente (ou une petite gamme de valeurs les plus fréquentes) est une caractéristique naturelle extraite à partir des observations répétées par les humains. Ainsi le problème de représenter ce genre de connaissance semble naturel. Nous pouvons tirer profit du fait que la fonction de répartition  $F$ , associée à une distribution de probabilité  $p$  (asymétrique) unimodale satisfait la propriété suivante :

- $F$  est convexe sur  $[\inf(I), M]$  puisque  $p$  croît sur  $[\inf(I), M]$ .
- $F$  est concave sur  $[M, \sup(I)]$  puisque  $p$  décroît sur  $[M, \sup(I)]$ .

Ainsi,  $F$  change de concavité en  $M$ . Soit  $\mathcal{P}_I^M$  l'ensemble des probabilité de support  $I = [b, c]$  et de mode  $M$ . Ferson (dans [49]) propose de représenter cette connaissance par la p-box  $[\underline{F}_L, \overline{F}_L]$  où

- $\overline{F}_L(x) = \frac{x-b}{M-b}$  pour  $x \in [b, M]$  et 1 sinon.
- $\underline{F}_L(x) = \frac{x-M}{c-M}$  pour  $x \in [M, c]$  et 0 sinon.

En effet, il est évident que toute probabilité de mode  $M$  et de support  $I$  vérifie  $\overline{F}_L > F > \underline{F}_L$ . Cependant la distribution de possibilité triangulaire  $\pi_L = \min(\overline{F}_L, 1 - \underline{F}_L)$ , de support  $[b, c]$  et de noyau  $\{M\}$  domine aussi de telles probabilités et est donc une représentation plus précise que la p-box  $[\overline{F}_L, \underline{F}_L]$ . Pour le vérifier, considérons la famille emboîtée  $[x, y]$  telle que (voir Figure 3.6) :

$$\frac{(x-b)}{M-b} = \frac{(c-y)}{c-M}.$$

Ce sont les coupes de la distribution de possibilité triangulaire  $\pi_L$ . Définissons la distribution de probabilité cumulée  $F_L$  comme suit (voir Figure 3.6) :

$$F_L(x) = \frac{F(M)(x-b)}{M-b} \text{ pour } x \leq M \quad \text{et} \quad F_L(x) = F(M) + \frac{(x-M)(1-F(M))}{c-M} \text{ pour } x \geq M$$

Comme  $F$  est convexe avant le mode et concave après celui-ci, il est clair que

$$F_L(x) \geq F(x) \text{ pour } x \leq M \text{ et } F_L(x) \leq F(x) \text{ pour } x \geq M$$

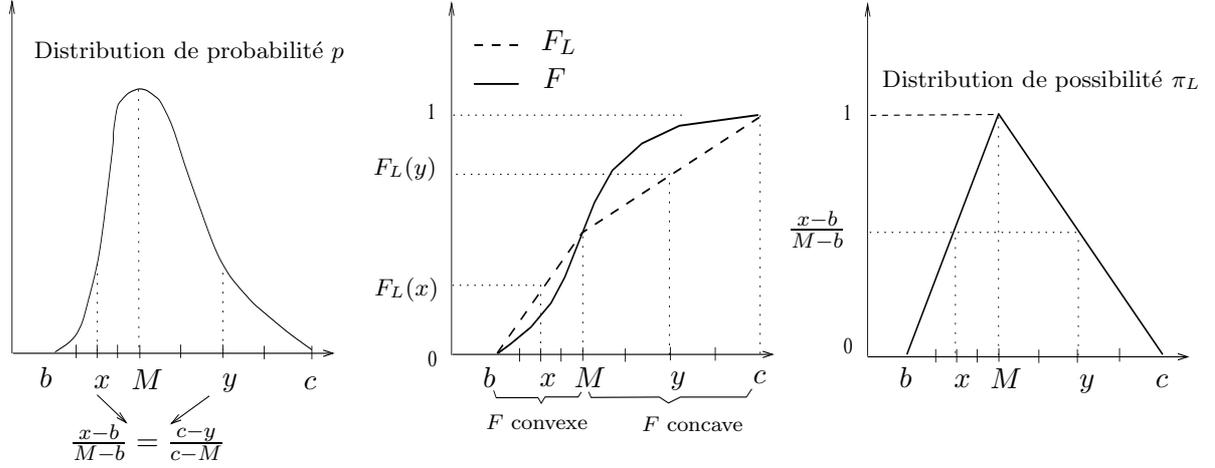


FIG. 3.6 – Distribution de possibilité  $\pi_L$  respectant la *condition de Dominance* quand on connaît le mode  $M$  et le support.

Utilisant (2.7) de la Section 2.5, il est clair que (voir Figure 3.6) :

$$\begin{aligned}
 \forall (P, x) \in \mathcal{P}_I^M \times [b, M], P([x, y]^c) &= F(x) + 1 - F(y) \\
 &\leq F_L(x) + 1 - F_L(y) \\
 &= \frac{F(M)(x-b)}{M-b} + 1 - (F(M) + \frac{(1-F(M))(y-M)}{c-M}) \\
 &= \frac{x-b}{M-b} = \pi_L(x)
 \end{aligned}$$

Ainsi, nous avons

$$\Pi_L(A) \geq P(A) \quad \forall A, \forall P \in \mathcal{P}_I^M$$

Clairement, on retrouve une interprétation du type de l'inégalité de Chebyshev mais ici l'inégalité probabiliste est construite à partir des  $\alpha$ -coupes de  $\pi_L$ . La famille de probabilités  $\mathcal{P}(\pi_L)$  est une meilleure approximation de  $\mathcal{P}_I^M$  que la p-box  $[F_L, \overline{F}_L]$  proposée par Ferson. Notons que supposer le support borné est crucial pour obtenir cette représentation linéaire par morceaux. Cependant, il est intéressant de noter que cette distribution  $\pi_L$  ne dépend pas de la valeur  $F(M)$ .

Supposons à présent que la valeur  $F(M)$  soit connue. Soit  $\mathcal{P}_I^{M, F(M)}$  l'ensemble des probabilités de support  $I = [b, c]$ , de mode  $M$  et  $F(M)$  connue. Nous avons déjà vu que cette information peut être représentée par les fonctions de croyance (voir Section 3.3) mais nous souhaitons préserver la représentation possibiliste et altérer sa forme afin d'intégrer les fractiles, en s'assurant toujours de la *Condition de Dominance* (voir Section 2.5).

Supposons que  $F(M) \leq 0.5$ . Nous choisissons les intervalles emboîtés  $J_x = [x, F^{-1}(1 - F(x))]$  autour de la médiane, et posons  $\overline{M} = F^{-1}(1 - F(M))$ . Nous avons vu que  $F$  est concave sur  $[M, c]$ . Donc,  $F > F_L$  sur  $[M, c]$ . Par conséquent

$$\overline{M} \leq \overline{M}_L = \frac{1}{1 - F(M)} \{(c - M)(1 - F(M)) - cF(M) + M\}$$

Maintenant, nous pouvons utiliser  $\pi_p(x) = 1 - P(J_x)$  pour dominer  $p$ . Soit  $J_x = [x, y]$ . La

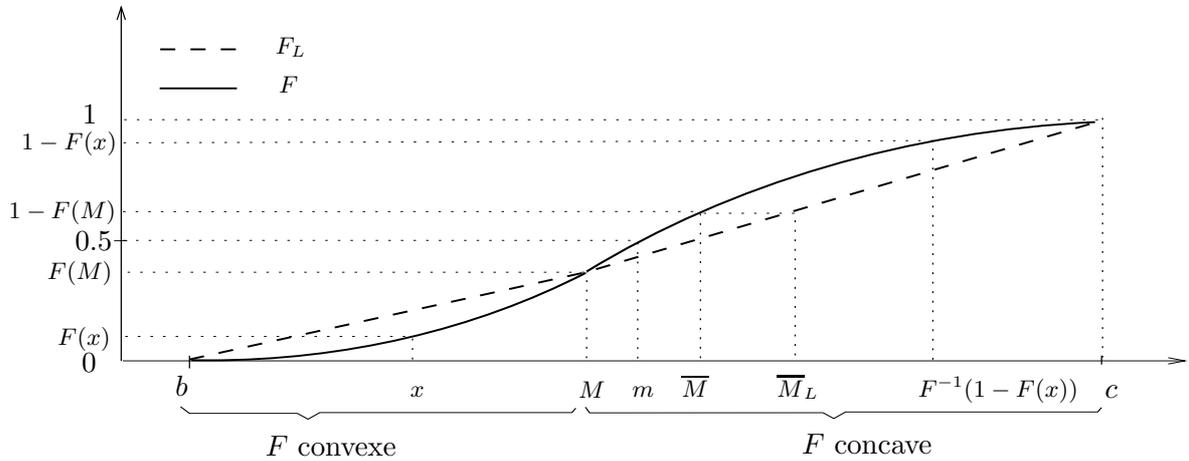


FIG. 3.7 – Distribution de possibilité  $\pi_{L,F(M)}$  respectant la *condition de Dominance* quand on connaît le mode  $M$ ,  $F(M)$  et le support

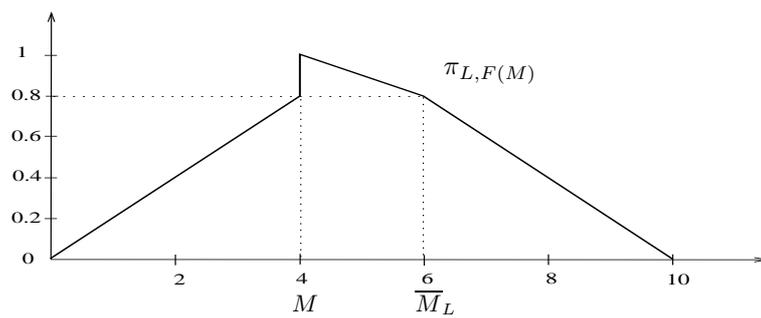


FIG. 3.8 –  $M=4$ ,  $F(M) = 0.4$ ,  $\min = 0$  et  $\max = 10$ .

distribution de possibilité suivante  $\pi_{L,F(M)}$  peut être utilisée à la place de  $\pi_L$  :

- Pour  $x \in [b, M]$ ,  $\pi_p(x) = F(x) + 1 - F \circ F^{-1}(1 - F(x)) = 2 \cdot F(x)$ , et  $\pi_p$  est convexe. Donc  $\pi_p(x) \leq 2 \cdot F_L(x)$ . Ainsi, on pose  $\pi_{L,F(M)}(x) = 2 \cdot F_L(x)$ .
- Pour  $x \in [M, \overline{M}_L]$ ,  $\pi_p(x) \leq F(M) + 1 - F(x)$ , et cette dernière est convexe. Nous posons  $\pi_{L,F(M)}(x) = F(M) + 1 - F_L(x)$ .
- Pour  $x \in [\overline{M}_L, c]$ ,  $\pi_p(x) = F \circ F^{-1}(1 - F(x)) + 1 - F(x) = 2 \cdot (1 - F(x))$  est convexe.  $\pi_p(x) \leq 2 \cdot (1 - F_L(x))$ . On pose donc  $\pi_{L,F(M)}(x) = 2 \cdot (1 - F_L(x))$ .

Donc, nous avons  $\mathcal{P}_I^{M,F(M)} \subseteq \mathcal{P}(\pi_{L,F(M)})$ . La forme obtenue est plus réaliste que la distribution de possibilité triangulaire spécialement quand  $M$  est au centre de  $I$ , car le manque de poids de probabilité d'un côté se répercute sur la distribution de possibilité (voir Figure 3.8). Dans le cas où  $F(M) = 0.5$ , nous obtenons  $M = \overline{M}$  et on retrouve ainsi la distribution de possibilité triangulaire  $\pi_L$  de support  $[b, c]$  et de noyau  $\{M\}$ .

Il est bon de faire remarquer que l'on ne peut pas raffiner le résultat, exploitant le fait que  $\pi_L$  et  $\pi_{L,F(M)}$  dominent  $\mathcal{P}_I^{M,F(M)}$ , en considérant  $\min(\pi_{L,F(M)}, \pi_L)$  comme approximation plus fine. En effet,  $\min(\pi_{L,F(M)}, \pi_L)$  ne dominera pas en général  $\mathcal{P}_I^{M,F(M)}$ , comme  $\mathcal{P}(\min(\pi_{L,F(M)}, \pi_L))$  est différent de  $\mathcal{P}(\pi_{L,F(M)}) \cap \mathcal{P}(\pi_L)$

### 3.4.2 Prise en compte des fractiles dans la représentation possibiliste continue

Supposons que l'expert fournisse le mode  $M$  et la médiane  $m$  de la distribution de probabilité unimodale inconnue. Soit  $\mathcal{P}_I^{M,m}$  l'ensemble de telles probabilités bornées par  $I = [b, c]$  et on suppose que  $m < M$ . Nous pouvons alors raffiner l'approximation possibiliste  $\pi_L$  en tenant compte de l'information additionnelle apportée par la médiane, à savoir  $F(m) = 0.5$ . Cela signifie que  $F$  passe par le point de coordonnées  $(m, 0.5)$ . Ainsi, à la place de  $F_L$ , nous pouvons considérer la fonction de répartition linéaire par morceaux  $F_L^m$  sur les segments  $[(b, 0), (m, 0.5)]$ ,  $[(m, 0.5), (M, F(M))]$ ,  $[(M, F(M)), (c, 1)]$ . Clairement,  $F \leq F_L^m < F_L$  sur  $[b, M]$  (voir Figure 3.9.a). Par conséquent, en choisissant encore les intervalles  $[x, y]$  tels que  $\frac{x-b}{M-b} = \frac{c-y}{c-M}$ , nous obtenons une distribution de possibilité linéaire par morceaux plus spécifique  $\pi_L^m \leq \pi_L$  qui domine toutes les probabilités de mode  $M$  et de médiane  $m$  (voir Figure 3.9.b). C'est à dire  $\mathcal{P}_I^{M,m} \subset \mathcal{P}(\pi_L^m)$ . En particulier :

$$\pi_L^m(m) = \pi_L^m(\overline{m}) = 0.5 + (1 - F(M)) \frac{m - b}{M - b}$$

où  $\frac{m-b}{M-b} = \frac{c-\overline{m}}{c-M}$ . Ce résultat précise le fait que quand  $p$  est unimodale, la médiane se trouve nécessairement dans l'intervalle  $[\frac{M+b}{2}, \frac{c+M}{2}]$ . En effet, supposons que  $m < \frac{M+b}{2}$ , nous avons  $\pi_p(m) \leq \pi_L(m) < 0.5$  ce qui est contradictoire avec le fait que  $\pi_p(m) = F(m) + 1 - F(f(m)) = 0.5 + 1 - F(f(m)) \geq 0.5$  où  $f(m) = \max\{y, p(y) \geq p(m)\}$ .

Notons que cette distribution de possibilité  $\pi_L^m$  dépend de  $F(M)$ , et que si  $M > m$ , l'inégalité  $F(M) \geq \frac{M-b}{2(m-b)}$  reste valide, puisque  $\pi_L^m \leq \pi_L$ . Quand  $F(M) = \frac{M-b}{2(m-b)}$ , la distribution de

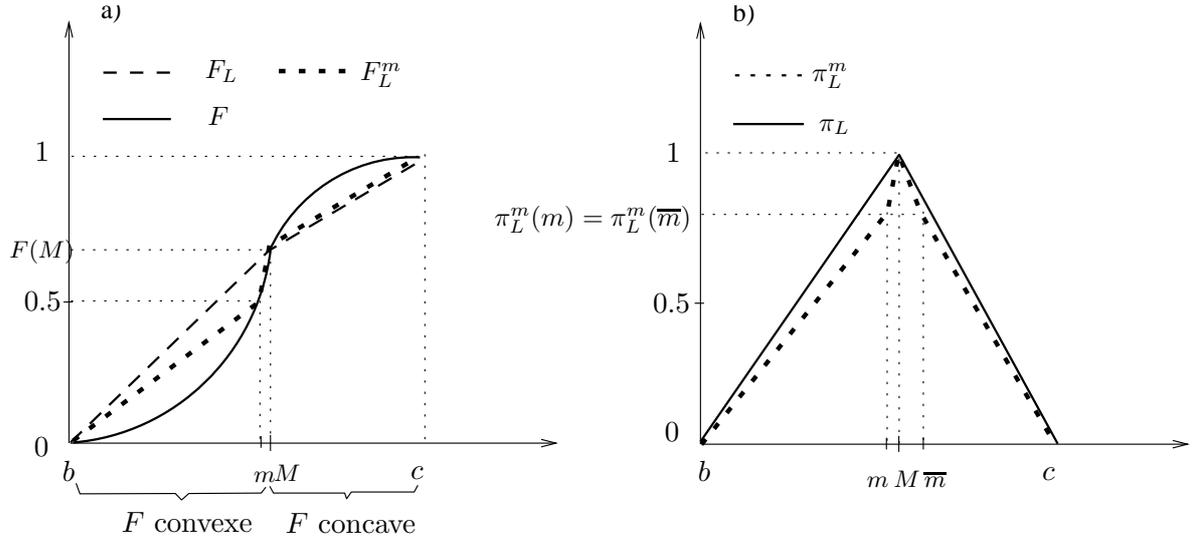


FIG. 3.9 – Distribution de possibilité  $\pi_L^m$  respectant la *condition de Dominance* quand on connaît la médiane, le mode  $M$ ,  $F(M)$  et le support.

possibilité triangulaire  $\pi_L$  est retrouvée, par exemple quand le mode et la médiane coïncident ( $F(M) = 0.5$ ). Si  $F(M) = 1$  (le cas le plus asymétrique) alors  $\pi_L^m(m) = 0.5$ . L'exploitation de cette représentation nécessite une estimation de  $F(M)$ . Mais cette quantité est une bonne mesure de l'asymétrie de la distribution de probabilité. Ce résultat est facile à étendre à d'autres fractiles, ou ensemble de fractiles si ceux-ci sont connus à priori. En particulier, considérons le cas où un expert donne les fractiles  $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_3$ , à 5%, 50% et 95%, et le mode  $M$ . Par définition  $x_2$  est la médiane, et nous supposons que celle-ci coïncide avec le mode. Soit la famille de probabilités  $\mathcal{P}_I^{x_1, x_2, x_3}$  ayant ces fractiles définis. Avec un raisonnement similaire au précédent nous pouvons représenter cette connaissance par la distribution de possibilité (symétrique) suivante :  $\pi(x_1) = \pi(x_3) = F(x_1) + 1 - F(x_3) = 0.1$ ,  $\pi(x_2) = 1$  en faisant des interpolations linéaire sur  $[b, x_1]$ ,  $[x_1, x_2]$ ,  $[x_2, x_3]$  et  $[x_3, c]$  pour chaque valeur de  $\pi(x)$ . Clairement  $\mathcal{P}_I^{x_1, x_2, x_3} \cup \mathcal{P}^{M, m} \subset \mathcal{P}(\pi)$  (respectant la *Condition de Dominance* définie dans le chapitre 2 à la Section 2.5).

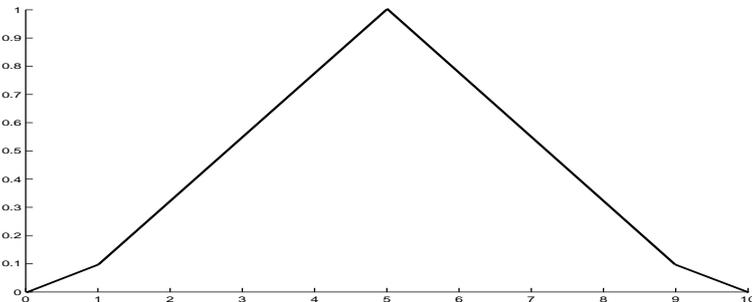


FIG. 3.10 – Cas où l'expert fournit les fractiles à 5%, 50% et 95% égaux à 1, 5 et 9 sur  $[0, 10]$ .

### 3.4.3 Distribution de possibilité continue connaissant le mode et le support : *Condition de Dominance par les Intervalles de Prédiction*

Supposons que  $I = [b, c]$  contienne la distribution de probabilité inconnue  $p$  et nous supposons que  $p$  est symétrique et unimodale. Soit  $\mathcal{P}_I^S$  l'ensemble des probabilités symétriques de support  $I$ . Leur mode est forcément  $\frac{b+c}{2}$  du fait de la symétrie (cela inclut la distribution uniforme sur  $I$ ). Si  $p$  est symétrique, la transformation optimale (voir chapitre 2 à la Section 2.5)  $\pi_p^*$  autour du mode est convexe de chaque côté du mode [31]. La distribution de possibilité triangulaire symétrique  $\pi_S$  de support  $I$  et de noyau  $\frac{b+c}{2}$  est donc telle que  $\pi_S \geq \pi_p^*, \forall p$ , et est réellement égale à  $\sup_{p \in \mathcal{P}_I^S} \pi_p$  [31]. Ainsi, nous avons non seulement  $\mathcal{P}(\pi_S)$  contenant  $\mathcal{P}_I^S$  mais aussi les  $\alpha$ -coupes de  $\pi_S$  encadrent les plus étroits intervalles de prédiction de niveau de confiance  $1 - \alpha$  de toutes les probabilités contenues dans  $\mathcal{P}_I^S$ , i.e,

$$\forall \lambda \in [0, \sup(p)], \{x | p(x) \geq \lambda\} \subseteq (\pi_S)_\alpha = \{x | \pi_S(x) \geq 1 - P(\{x | p(x) \geq \lambda\})\}$$

Néanmoins,  $\mathcal{P}(\pi_S)$  contient aussi des densités de probabilité qui ne sont pas symétriques et dont le mode diffère de  $\frac{b+c}{2}$ . Nous pouvons dire que la p-box  $[\underline{F}, \overline{F}]$  définie par

$$\overline{F}(x) = \frac{x-b}{c-b} \text{ si } x \leq \frac{b+c}{2} \text{ et } 1 \text{ sinon} \quad \text{et} \quad \underline{F}(x) = \frac{x-b}{c-b} \text{ si } x \geq \frac{b+c}{2} \text{ et } 0 \text{ sinon}$$

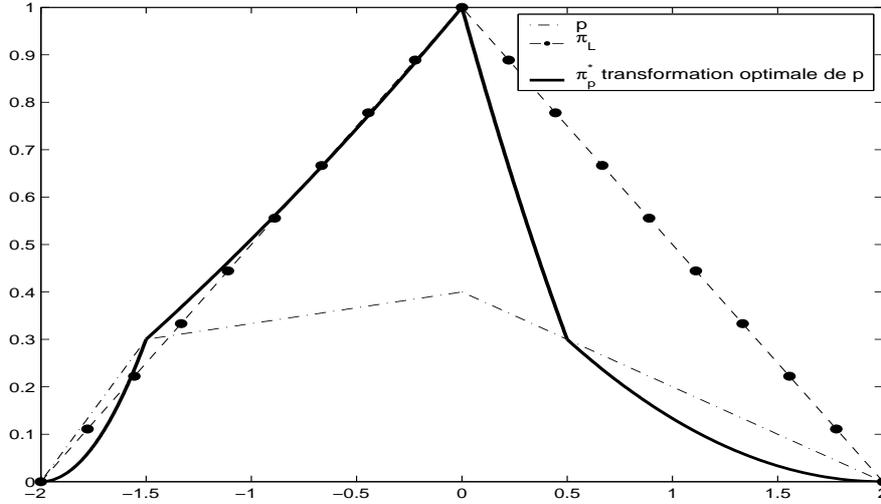
est une représentation plus informative des densités symétriques de support inclus dans  $I$  que  $\mathcal{P}(\pi_S)$ . Mais, notons dans ce cas que la distribution de possibilité  $\pi = \min(\overline{F}, 1 - \underline{F})$  si  $x \neq \frac{b+c}{2}$  domine aussi de telles distributions symétriques et est même plus précise que la p-box. Mais, bien sûr, elle n'encadre pas leurs intervalles de prédiction. Tout le mérite de la distribution de possibilité  $\pi_S$  est précisément d'encadrer les intervalles de prédiction dans  $\mathcal{P}_I^S$ . De façon intéressante, notons que  $\pi_S = 2 \cdot \min(\overline{F}, 1 - \underline{F})$  pour  $x \neq \frac{b+c}{2}$ .

Si nous connaissons des fractiles, nous pouvons raffiner la représentation comme expliqué dans le paragraphe précédent. De tels raffinements respecteraient la *Condition de dominance par les intervalles de prédiction* (see Figure 3.10) du fait de l'hypothèse de la symétrie.

Quand  $p$  est asymétrique, la transformation optimale  $\pi_p^*$ , associée à  $p$  peut ne pas être convexe de chaque côté du mode  $M$ . Ainsi, les  $\alpha$ -coupes de la distribution de possibilité triangulaire  $\pi_L$  de noyau  $\{M\}$  ne contient pas toujours les  $(1 - \alpha)$  intervalles de prédiction optimaux des mesures de probabilité de mode  $M$ , clairement mis en évidence dans le théorème 4 sur les transformations optimales des densités linéaires par morceaux. Par exemple, considérons l'exemple de la Figure 3.11 suggéré dans [31], où :

$$\begin{aligned} p(x) &= 0.6x + 1.2 \text{ sur } [-2, -1.5] \\ p(x) &= (0.2/3)x + 0.4 \text{ sur } [-1.5, 0] \\ p(x) &= -0.2x + 0.4 \text{ sur } [0, 2]. \end{aligned}$$

L'intervalle  $[-1.4, 1.4]$ , correspondant à l'0.3-coupe de la distribution de possibilité triangulaire, ne contient pas l'intervalle de prédiction au niveau de confiance 0.7 de la mesure de probabilité de mode 0, qui est  $[-1.5, 1.5]$  : la transformation optimale de  $p$  (voir Chapitre 2 Section 2.5) n'est en effet pas convexe partout. Nous pouvons néanmoins trouver une borne supérieure de  $\pi_p^*$  pour une densité unimodale asymétrique continue  $p$ . Alors, en utilisant la concavité de  $F$  et en considérant les intervalles emboîtés  $J_x = [x, \max\{y, p(y) \geq p(x)\}] = f(x)$  nous avons (voir Figure 3.12 :

FIG. 3.11 – transformation optimale de  $p$  autour du mode.

- Pour  $x \leq M$ ,  $\pi_p^*(x) \leq F(x) + 1 - F(f(x)) \leq F_L(x) + 1 - F(M) = \frac{F(M)(x-b)}{M-b} + 1 - F(M)$ .
- Pour  $x \geq M$ ,  $\pi_p^*(x) \leq F(f^{-1}(x)) + 1 - F(x) \leq F(M) + 1 - F_L(x) = 1 - \frac{1-F(M)}{c-M}(x-M)$

La connaissance de la valeur  $F(M)$  est nécessaire pour pouvoir couvrir  $\pi_p^*$  (voir Figure 3.12 pour exemple). En général, il sera difficile de trouver une distribution de possibilité plus informative qui tienne compte des intervalles de prédiction de toutes les mesures de probabilité sur un intervalle  $I$  avec un mode fixé, dû à la large étendue de telles distributions. On pourra rajouter de l'information sur la densité inconnue  $p$  telle que sa convexité-concavité.

**Théorème 5** Si la densité  $p$  est croissante convexe sur  $]b, M[$  et strictement décroissante concave sur  $]M, c[$  alors  $\pi_p^*$  est aussi convexe sur  $]b, M[$ .

**Preuve.** Nous devons montrer que la dérivée seconde de  $\pi_p^*$  est positive sur  $]b, M[$ . Considérons  $p_1$  (la partie gauche de  $p$ ) et  $p_2$  (la partie droite de  $p$ ) définie comme suit :

- $\forall x \in [b, M], p_1(x) = p(x)$  et 0 sinon.
- $\forall x \in [M, c], p_2(x) = p(x)$  et 0 sinon.

Pour  $x \in [b, M], \pi_p^*(x) = F(x) + 1 - F(f(x))$  où  $f(x) = \max\{y, p(y) \geq p(x)\}$ .  
Si on dérive  $\pi_p^*$  sur  $]b, M[$ , on obtient :

$$\pi_p^*(x) = F'(x) - f'(x)F'(f(x)) = p_1(x) - f'(x)p_2(f(x))$$

Cependant  $p_1(x) = p_2(f(x))$ , donc :

$$\pi_p^*(x) = p_1(x) (1 - f'(x))$$

Par conséquent en dérivant de nouveau :

$$\pi_p^{*''}(x) = p_1'(x) (1 - f'(x)) - p_1(x) f''(x)$$

Nous savons que  $p_1(x) = p_2(f(x))$ ; si nous dérivons cette égalité, on obtient :

$$f'(x) = \frac{p_1'(x)}{p_2'(f(x))}$$

La fonction  $p_1$  croît sur  $]b, M[$ , ainsi  $p_1' \geq 0$ . La fonction  $p_2$  décroît strictement sur  $]M, c[$ , ainsi  $p_2' < 0$ . Nous en déduisons alors que  $f' \leq 0 \leq 1$ . On en conclut donc que :

$$p_1'(x) (1 - f'(x)) \geq 0 \quad \forall x \in ]b, M[$$

En dérivant de nouveau  $f'$ , nous obtenons

$$f''(x) = \frac{p_1''(x) - (f'(x))^2 p_2''(f(x))}{p_2'(x)}$$

Nous savons que  $p$  est convexe sur  $]b, M[$  (resp. concave sur  $]M, c[$ ), nous avons  $p_1''(x) \geq 0$  pour tout  $x \in ]b, M[$  (resp.  $p_2''(x) \leq 0$  pour tout  $x \in ]M, c[$ ). Par conséquent,  $p_1''(x) - (f'(x))^2 p_2''(f(x)) \geq 0$  pour tout  $x \in ]b, M[$  et donc  $f''(x) \leq 0$  pour tout  $x \in ]b, M[$ . Nous concluons que

$$p_1(x) f''(x) \leq 0 \quad \forall x \in ]b, M[$$

En bref, nous avons :

$$p_1'(x) (1 - f'(x)) \geq 0 \quad \text{et} \quad p_1(x) f''(x) \leq 0 \quad \forall x \in ]b, M[$$

Nous avons donc prouvé que  $\pi_p^{*''}$  est positive sur  $]b, M[$ , et ainsi la convexité de  $\pi_p^*$  sur  $]b, M[$ .  $\square$

Supposer  $F(M) < 0.5$  est cohérent avec la convexité de  $p$  sur  $[b, M]$  et sa concavité sur  $[M, c]$ . Dans ce cas, une distribution de possibilité linéairement croissante de 0 à 1 sur  $[b, M]$  couvre toutes les transformations optimales de telles densités de ce côté. De l'autre côté du mode, l'utilisation d'une forme linéaire est possible avec  $\pi(c) = 1 - F(M)$  (voir Figure 3.12). Pour résumer, si nous supposons que  $F(M)$  est connue, alors selon le théorème 5 sur la dérivée seconde de  $p$  une distribution de possibilité plus informative, dont les coupes contiennent les intervalles de prédictions des densités de mode  $M$  ayant de telles caractéristiques, peut être calculée.

### 3.5 Représentation par une variable aléatoire floue

Une variable floue aléatoire  $\tilde{T} : \Omega \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$  (voir chapitre 2 Section 2.4) permet de représenter une information de nature imprécise et de nature aléatoire.

Un expert pourrait définir un modèle probabiliste  $P_\Theta$  pour représenter une information (variable aléatoire réelle  $T : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  mal connue) sans pour autant définir avec exactitude les paramètres de cette loi. Les paramètres  $\Theta$  du modèle probabiliste seraient typiquement représentés par des nombres flous (distributions de possibilité). Ainsi, on obtient une variable aléatoire  $T$  qui donne des nombres flous comme valeurs (c-à-d une variable aléatoire floue  $\tilde{T}$ ).

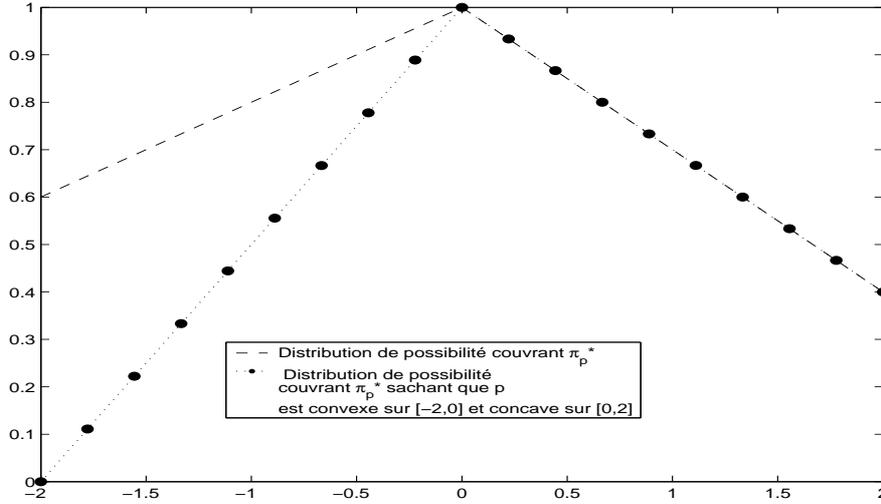


FIG. 3.12 – Borne supérieure de  $\pi_p^*$  et son amélioration quand la concavité-convexité de  $p$  est connue pour  $M=0$  et  $F(M) = 0.4$ .

Supposons par exemple que l'expert fixe la loi normale  $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$  de moyenne  $\mu$  et d'écart type  $\sigma$ . Il se peut que l'expert puisse fournir des intervalles de confiance pour définir sa connaissance sur  $\mu$  et  $\sigma$ . La connaissance sur les deux paramètres  $\mu$  et  $\sigma$  serait ainsi représentée par deux distributions de possibilité  $\pi_\mu$  et  $\pi_\sigma$ . Nous pouvons alors représenter cette connaissance par une famille d'ensemble de fonctions de répartition (voir Chapitre 2, Section 2.4.2)  $\{\mathcal{P}(\{\underline{F}_\alpha, \overline{F}_\alpha\})\}_{\alpha \in [0,1]}$  où  $\mathcal{P}(\{\underline{F}_\alpha, \overline{F}_\alpha\})$  représente l'ensemble des mesures de probabilité obtenu à partir de  $\underline{F}_\alpha$  et  $\overline{F}_\alpha$  tels que  $\forall \alpha \in [0, 1]$  :

$$\underline{F}_\alpha(x) = \inf_{(\mu, \sigma) \in (\pi_\mu)_\alpha \times (\pi_\sigma)_\alpha} F_{\mu, \sigma}(x) \quad \text{et} \quad \overline{F}_\alpha(x) = \sup_{(\mu, \sigma) \in (\pi_\mu)_\alpha \times (\pi_\sigma)_\alpha} F_{\mu, \sigma}(x) \quad \forall x$$

### 3.6 Synthèse des représentations cohérentes avec la nature de l'information disponible

La notion de probabilité imprécise offre un cadre formel naturel pour représenter la connaissance imprécise sur des quantités numériques. Plusieurs types d'information peuvent être approchés au moyen de distributions de possibilité, d'autres sont directement et exactement représentables par des fonctions de croyance, et d'autres plus naturellement adaptés dans le cadre de p-box.

- Les distributions de possibilité sont particulièrement bien adaptées pour représenter des familles de distributions dont le mode est connu et l'information est de type avis d'experts sous forme d'intervalles de confiance. Elles permettent d'intégrer de l'information additionnelle sur la symétrie et la concavité des densités, aussi bien que des quantiles connus.
- Les p-boxes apparaissent comme un choix naturel pour représenter des modèles proba-

bilistes paramétriques avec des paramètres imprécis et permettent de représenter des informations sur des valeurs moyennes d'une manière raisonnable.

- Les fonctions de croyance permettent de représenter directement l'information du type quantiles.

Les travaux récents de Neumaier [80] utilisent des familles de probabilités  $\mathcal{P}$  de la forme  $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\pi) \cap \mathcal{P}(1 - \rho)$  où  $\pi$  est une distribution de possibilité et  $\rho$  est une fonction  $I \rightarrow [0, 1]$  agissant en tant que limite inférieure de  $\pi$ , i.e.  $\rho \leq \pi$ . La famille de probabilités  $\mathcal{P}(\pi) = \mathcal{P}$  est récupérée quand  $\rho = 0$ . La famille de probabilités  $\mathcal{P}$  est plus précise que  $\mathcal{P}(\pi)$  et l'évaluation de son potentiel exige de futures investigations.

Quand nous connaissons	Représentation classique probabiliste	Représentation proposée
[min, max]	Loi Uniforme	Intervalle
[min,mode, max]	Loi Triangulaire	possibilité
[min,moyenne, max]	Loi Beta	p-box
[min,median, max]	Loi Gamma tronqué	fonction de croyance
[min,moyenne,écart type, max]	Loi Beta	possibilité
[min,fractiles, max]	Loi Gamma tronqué	fonction de croyance
Echantillon conséquent	Fonction de répartition empirique	Fonction de répartition empirique
Echantillon pauvre	Test d'adéquation à des familles	p-box
Connaissance de la forme de la loi	loi correspondante avec estimation des paramètres de la loi	p-box
Connaissance de la forme de la loi et intervalles sur les paramètres	Double Monte-Carlo	p-box

TAB. 3.1 – Liste non exhaustive des représentations mathématiques cohérente avec la nature de l'information

## Chapitre 4

# Propagation des incertitudes épistémiques et stochastiques

Dans les chapitres précédents, nous avons introduit les différents outils mathématiques permettant de représenter la connaissance sur les paramètres des modèles du risque de manière cohérente avec la nature de l'information, à savoir aléatoire ou imprécise. Nous pouvons nous intéresser à présent à la manière de propager l'incertitude sur l'information à travers le processus à risque  $T$  tout en essayant de tenir compte des dépendances entre les paramètres.

La première méthode, simple à mettre en oeuvre uniquement dans le cas de fonctions monotones, consiste à calculer toutes les valeurs possibles de  $T$  par un calcul d'intervalle. Nous obtenons ainsi un encadrement (*min* – *max*) de  $T$ . L'inconvénient de cette méthode est qu'elle ne permet pas de mesurer la vraisemblance d'événements du type  $T \in [t_1, t_2] \forall t_1, t_2$  où  $\text{min} < t_1 \leq t_2 < \text{max}$ . Le calcul d'intervalle n'est pas informatif, il peut être trop conservatif car il ne permet pas de prendre en compte l'information disponible pour certains paramètres quand elle est plus riche qu'un simple intervalle.

La seconde approche consiste à se placer dans un cadre purement probabiliste et à utiliser la méthode de Monte-Carlo. Cette méthode est toujours applicable quelle que soit la monotonie de la fonction et permet de prendre en considération les dépendances connues. Néanmoins, il faut être conscient que cette méthodologie ne permet pas de prendre en considération toutes les formes de dépendances [52]. Conover et al. [19] [20] ont mis au point une technique d'échantillonnage qui permet de tenir compte des coefficients de corrélation des rangs (dépendance monotone non linéaire) entre variables aléatoires lorsqu'ils sont connus.

La méthode de Monte-Carlo a été critiquée par Ferson [54, 56] dans le sens où elle peut engendrer des résultats trop optimistes. En effet, supposer par exemple les variables incertaines indépendantes quand on ne connaît pas leurs dépendances revient à accorder peu de poids aux scénarios extrêmes. Cette illusion de précision est renforcée par le fait que l'information est parfois imprécise ou incomplète et nous avons vu que le cadre probabiliste classique ne permet pas de représenter fidèlement ce type d'information.

Soit  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction (modèle mathématique du risque) de  $n$  arguments  $(x_i)_{i=1\dots n}$ . La connaissance sur les paramètres  $x_i$  peut être représentée au moyen d'une distribution de

probabilité, d'une p-box, d'une distribution de possibilité ou d'une fonction de croyance. Le but est d'obtenir l'incertitude attachée au modèle  $T$  avec le moins de perte possible de l'information sur les paramètres sources  $x_i$ .

On supposera qu'il y a  $k < n$  variables aléatoires  $(X_1, \dots, X_k)$  prenant les valeurs  $(x_1, \dots, x_k)$  et  $n - k$  variables mal connues  $X_{k+1}, \dots, X_n$  représentées par des paires de p-box et/ou des distributions de possibilité et/ou des fonctions de croyance.

Nous présentons et comparons dans ce chapitre quatre méthodes, pour propager les incertitudes épistémiques et stochastiques à travers un modèle  $T$ , qui tiennent compte du caractère aléatoire et imprécis de l'information (étude qui fait l'objet des articles suivants [5, 10, 13]).

Qui dit propagation de l'incertitude sur plusieurs paramètres dit prise en compte de l'(in)dépendance. La prise en compte des (in)dépendances entre les paramètres lors du processus de propagation est un problème déjà très compliqué à traiter dans le cadre purement probabiliste. Le fait de différencier l'incertitude stochastique de l'incertitude épistémique, dans la phase de propagation des incertitudes, accentue la difficulté de la gestion des (in)dépendances entre les paramètres.

## 4.1 (In)dépendances

La présence d'imprécision engendre deux niveaux de (in)dépendances entre les sources d'incertitudes (Observateurs-Phénomènes observés). Le premier concerne une (in)dépendance sur les sources d'information (observateurs) attachées aux variables, la seconde concerne l'(in)dépendance entre les variables elles-même (phénomènes observés).

### 4.1.1 Cadre classique des probabilités

Un événement  $A$  est indépendant d'un événement  $B$  signifie que la connaissance de  $B$  ne change pas les "chances" de réalisation de  $A$  et équivaut à  $P(A \cap B) = P(A).P(B)$ . Dans le cas contraire, nous pouvons utiliser les copules [79] afin de représenter la connaissance des dépendances.

#### 4.1.1.1 Définition de l'indépendance

Dans la théorie classique des probabilités, il y a plusieurs façon de définir le concept d'indépendance entre les événements ou entre les variables aléatoires. Considérons  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires caractérisées par la probabilité cumulée jointe  $F_{X,Y}$  avec les probabilités cumulées marginales  $F_X$  et  $F_Y$  telles que  $P(X \leq x) = F_X(x)$ ,  $P(Y \leq y) = F_Y(y)$  et  $F_{X,Y}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$ . L'indépendance entre  $X$  et  $Y$  implique et est impliquée par :

1.  $F_{X,Y}(x, y) = F_X(x)F_Y(y) \forall (x, y)$
2.  $f_{X,Y}(x, y) = f_X(x)f_Y(y) \forall (x, y)$  (densités de probabilités) si elles existent
3.  $E(w(X)z(Y)) = E(w(X))E(z(Y)) \forall w$  et  $z$  fonctions arbitraires
4.  $P(X \in I | Y \in J) = P(X \in I), \forall I, \forall J / 0 < P(Y \in J)$
5.  $P(Y \in J | X \in I) = P(Y \in J), \forall I, \forall J / 0 < P(X \in I)$
6.  $P(X \in I, Y \in J) = P(X \in I)P(Y \in J), \forall I, \forall J$

où  $f_{X,Y}$ ,  $f_X$  et  $f_Y$  sont les densités de probabilité associées à  $F_{X,Y}$ ,  $F_X$  et  $F_Y$ . dans le cadre des probabilités précises, toutes ces définitions de l'indépendance sont équivalentes. Autrement dit, la connaissance de la valeur de  $Y$  ne change pas les chances de réalisation de la valeur de  $X$ .

#### 4.1.1.2 Notions sur les Copules

Une copule bidimensionnelle [79] est une fonction  $C : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  qui possède les propriétés suivantes :

1.  $C(0, u) = C(u, 0) = 0$  et  $C(u, 1) = C(1, u) = u$  pour tout  $u \in [0, 1]$
2.  $C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2) + C(u_1, v_1) \geq 0$   
pour tout  $(u_1, u_2, v_1, v_2) \in [0, 1]^4$  tel que  $u_1 \leq u_2$  et  $v_1 \leq v_2$

La dernière condition est équivalente à la positivité de la densité

$$c(u, v) = \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} C(u, v) \geq 0$$

lorsque celle-ci existe. Toute probabilité cumulée jointe  $F_{X,Y}$  se décompose selon ses projections  $F_X$  et  $F_Y$  à l'aide d'une copule  $C$  [89], soit  $F_{X,Y}(x, y) = C(F_X(x), F_Y(y))$ .

Toute copule  $C$  vérifie [79] les bornes de Fréchet :

$$\max(u + v - 1, 0) \leq C(u, v) \leq \min(u, v) \quad (4.1)$$

La transformation  $U = F_X(X)$  définit une transformation uniforme sur  $[0, 1]$ . C'est à dire que si  $X$  est définie par la distribution cumulée  $F_X$  sur  $\mathbb{R}$  alors  $U$  suit une loi uniforme sur  $[0, 1]$ . En effet

$$\begin{aligned} P(U \leq u) &= P(F_X(X) \leq u) \\ &= P(X \leq F_X^{-1}(u)) \text{ car } F_X \text{ est une fonction croissante} \\ &= F_X(F_X^{-1}(u)) \\ &= u \end{aligned}$$

Si  $F_{X,Y} = C(F_X, F_Y)$  pour la copule  $C$ , alors  $C(u, v)$  définit une probabilité cumulée jointe sur  $[0, 1]^2$  dont les projections sont uniformes sur  $[0, 1]$ . La copule  $C$  contient toute l'information des dépendances de  $F_{X,Y}$ . On remarque que si  $C(u, v) = uv$ , alors les variables aléatoires sont indépendantes.

Dans le cas où  $C(F_X(x), F_Y(y)) = \min(F_X(x), F_Y(y))$ ,  $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} C(F_X(x), F_Y(y)) = 0$  presque partout sauf pour  $F_X(x) = F_Y(y)$ . Cela signifie que  $Y$  est presque sûrement une fonction croissante de  $X$  ou encore que  $P(F_X(X) = F_Y(Y)) = 1$ .

Dans le cas où  $C(F_X(x), F_Y(y)) = \max(F_X(x) + F_Y(y) - 1, 0)$ ,  $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} C(F_X(x), F_Y(y)) = 0$  presque partout sauf pour  $F_Y(y) = 1 - F_X(x)$ . Cela signifie que  $Y$  est presque sûrement une fonction décroissante de  $X$  ou encore  $P(F_Y(Y) = 1 - F_X(X)) = 1$ .

#### 4.1.2 Notions d'indépendance dans le cadre des probabilités imprécises

La notion d'indépendance, dans le cadre des probabilités précises, est unique mais ne l'est plus dans le cadre des probabilités imprécises. En effet, Couso et al. [23] reconnaissent et présentent plusieurs notions d'indépendance pour les probabilités imprécises, nommées

”repetition independance”, ”strong independence”, ”epistemic independence” et ”random set independence”.

Supposons deux mesures de probabilité  $P^X, P^Y$  mal définies associées aux variables aléatoires  $X, Y$  représentant deux paramètres  $x, y$ . L’ensemble des valeurs possibles pour les paramètres sont  $\Omega_X$  et  $\Omega_Y$ . Considérons  $\mathcal{P}^X, \mathcal{P}^Y$  deux ensembles de mesures de probabilité modélisant  $X, Y$  et  $P^{XY}$  la mesure de probabilité associée au vecteur aléatoire  $(X, Y)$ .

Si nous n’avons aucune connaissance sur les relations de dépendance qui pourraient exister entre  $X$  et  $Y$ , Couso et al. [23] définissent la notion d’”*intéraction inconnue*” (voir exemples dans [7]) entre les composantes  $X$  et  $Y$ . Dans ce cas, l’ensemble des probabilités pour le vecteur  $(X, Y)$  est :

$$\{P^{XY} | P^{XY}(\cdot \times \Omega_Y) = P^X \in \mathcal{P}^X, P^{XY}(\Omega_X \times \cdot) = P^Y \in \mathcal{P}^Y\}$$

Nous parlons alors de non connaissance de relations entre les observateurs (sources d’information) et entre les valeurs des observations (phénomènes observés).

Nous présentons dans ce qui suit les 4 notions d’indépendance dans le cadre des probabilités imprécises [23] :

- *l’indépendance de répétition (repetition independence [23])* apparaît quand il y a l’indépendance stochastique (dans le sens traditionnel) entre les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  qui sont identiquement distribuées (c-à-d  $P^X = P^Y = P$ ), bien que la probabilité  $P$  soit mal connue. En d’autres termes, nous avons la même information incomplète sur les probabilités marginales  $P^X, P^Y$  associées aux variables  $X$  et  $Y$  ; soit  $P^X = P^Y = P \in \mathcal{P}$ . Cette définition est donc l’analogie de la contrainte dans la théorie des probabilités classiques que les variables sont indépendantes et identiquement distribuées (voir exemples dans [7]). Cette notion définit la famille de probabilités

$$\mathcal{P}^{XY} = \{P^{XY} = P \otimes P | P \in \mathcal{P}\}$$

- *l’indépendance forte (strong independence [23])* est une complète absence de relation entre les sources d’information (observateurs). Cette notion définit la famille de probabilités contenant la mesure de probabilité jointe

$$\mathcal{P}^{XY} = \{P^{XY} = P^X \otimes P^Y | P^X \in \mathcal{P}^X, P^Y \in \mathcal{P}^Y\}$$

qui peuvent être engendrées par les ensembles  $\mathcal{P}^X$  et  $\mathcal{P}^Y$ . On dit que deux variables sont fortement indépendantes si

1. les valeurs des variables  $X$  (resp.  $Y$ ) sont aléatoires gouvernées par une distribution de probabilité unique  $P^X$  (resp.  $P^Y$ ) mais mal connue.
2. les variables  $X$  et  $Y$  sont stochastiquement indépendantes.
3. il n’y a pas de connaissance sur les relations entre les connaissances (observateurs) qui pourraient exclure des combinaisons possibles entre les possibles probabilités marginales  $P^X \in \mathcal{P}^X$  et  $P^Y \in \mathcal{P}^Y$ .

Cela signifie qu’il n’y a pas d’information sur des relations possibles entre la connaissance sur  $X$  et la connaissance sur  $Y$  (absence de connaissance sur les relations entre les

observateurs) et qu'il y a indépendance entre les variables elle-mêmes (phénomènes observés) (voir exemples dans [7]).

- *l'indépendance épistémique (epistemic independence [23])* est une sorte de généralisation de la notion d'indépendance aux ensembles de mesures de probabilité. Cette notion introduit le fait que la connaissance de la valeur de  $X$  n'affecte pas notre connaissance  $\mathcal{P}^Y$  sur  $Y$  même si la valeur de  $X$  peut affecter la valeur de  $Y$ . Cela signifie que si l'on apprend la valeur de  $X$ , alors la mesure de probabilité  $P^Y$  associée à  $Y$  est encore l'une des mesures de probabilité de  $\mathcal{P}^Y$  (mais en général pas toujours la même pour différentes valeurs de  $X$  puisque  $Y$  peut dépendre de  $X$ ) parce que la mesure de probabilité conditionnelle  $P^{Y|X}$  doit être dans  $\mathcal{P}^Y$ , et vice versa. Dans ce cas, la famille de probabilités contenant la mesure de probabilité jointe est :

$$\mathcal{P}^{XY} = \{P^{XY} | P^{X|Y} \in \mathcal{P}^X, P^{Y|X} \in \mathcal{P}^Y\}$$

où  $P^{X|Y}$  (resp.  $P^{Y|X}$ ) est la mesure de probabilité conditionnelle par rapport à  $Y$  (resp. par rapport à  $X$ )

$$P^{XY}(A, B) = P(X \in A, Y \in B) = P^{X|Y \in B}(A)P^Y(B) = P^{Y|X \in A}(B)P^X(A)$$

- *l'indépendance entre observations imprécises (random set independence [23])* correspond à une indépendance stochastique entre les éléments focaux dans le cadre des fonctions de croyance de Dempster-Shafer (voir Annexe C). C'est-à-dire que  $\mathcal{P}^X$  (resp.  $\mathcal{P}^Y$ ) est engendré par un ensemble aléatoire  $(\mathcal{F}^X, \nu^X)$  (resp.  $(\mathcal{F}^Y, \nu^Y)$ ) où  $\nu^X$  (resp.  $\nu^Y$ ) est la fonction de masse associée aux éléments focaux  $\mathcal{F}^X = \{E_1^X, \dots, E_n^X\}$  (resp.  $\mathcal{F}^Y = \{E_1^Y, \dots, E_n^Y\}$ ). Nous avons alors

$$\mathcal{P}^X = \{P^X | \forall A \subseteq \Omega_X, P^X(A) \leq \sum_{i, E_i^X \cap A \neq \emptyset} \nu^X(E_i^X)\}$$

$$\mathcal{P}^Y = \{P^Y | \forall A \subseteq \Omega_Y, P^Y(A) \leq \sum_{i, E_i^Y \cap A \neq \emptyset} \nu^Y(E_i^Y)\}$$

La famille de probabilités contenant la mesure de probabilité jointe se définit alors par

$$\mathcal{P}^{XY} = \{P^{XY} | \forall A \subseteq \Omega_X \times \Omega_Y, P^{XY}(A) \leq \sum_{ij, E_i^X \times E_j^Y \cap A \neq \emptyset} \nu^X(E_i^X)\nu^Y(E_j^Y)\}$$

Cette définition signifie que les distributions de probabilité sur  $\mathcal{F}^X$  et  $\mathcal{F}^Y$  sont stochastiquement indépendantes mais ne suppose rien sur les interactions possibles entre les valeurs de  $X$  et  $Y$  à l'intérieur de chacun des éléments focaux produit  $(E_i^X \times E_j^Y)_{ij}$ . Cette notion d'indépendance peut être vue comme une indépendance entre les sources d'informations (différents avis d'experts indépendants par exemple) sans définir de relation entre les variables elles-mêmes. On peut alors parler d'indépendance entre les observateurs et non connaissance des interactions entre les phénomènes observés (voir exemples dans [7]).

Couso et al. [23] donnent des exemples pour chaque définition. Fetz et al. [58] discutent les conséquences des différentes définitions de l'indépendance dans l'estimation des probabilités sur le modèle  $(x + y)^x$  selon les représentations mathématiques possibles des paramètres  $x$  et  $y$ . Les familles de mesures de probabilité jointes  $\mathcal{P}^{XY}$  définies par les différentes notions d'indépendance dans le cadre des probabilités imprécises peuvent être ordonnées [23, 58] :

$$\mathcal{P}_{\text{Indépendance de répétition}}^{XY} \subseteq \mathcal{P}_{\text{Indépendance forte}}^{XY} \subseteq \mathcal{P}_{\text{Indépendance épistémique}}^{XY}$$

et dans le cadre de Dempster-Shafer [23, 58] :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\text{Indépendance de répétition}}^{XY} &\subseteq \mathcal{P}_{\text{Indépendance forte}}^{XY} \\ \mathcal{P}_{\text{Indépendance forte}}^{XY} &\subseteq \mathcal{P}_{\text{Indépendance épistémique}}^{XY} \\ \mathcal{P}_{\text{Indépendance épistémique}}^{XY} &\subseteq \mathcal{P}_{\text{Indépendance entre observations imprécises}}^{XY} \end{aligned}$$

Fetz et al. [58] définissent la notion d'*indépendance entre observations floues* dans le cadre de Dempster-Shafer où les éléments focaux  $\mathcal{F}^X = \{E_1^X \subseteq \dots \subseteq E_n^X\}$  (resp.  $\mathcal{F}^Y = \{E_1^Y \subseteq \dots \subseteq E_n^Y\}$ ) sont cette fois-ci emboîtés. De ce fait, la fonction de masse  $\nu^X$  (resp.  $\nu^Y$ ) associée à  $\mathcal{F}^X$  (resp.  $\mathcal{F}^Y$ ) définit une distribution de possibilité  $\pi^X$  (resp.  $\pi^Y$ ) (voir Section 2.2.2) et nous avons  $\nu^X(E_i^X) = \nu^Y(E_i^Y) = \alpha_i - \alpha_{i-1}$  ( $\alpha_0=0$ ) où  $\alpha_i$  est une  $\alpha$ -coupe de  $\pi^X$  (resp.  $\pi^Y$ ). La famille de probabilités contenant la mesure de probabilité jointe est alors définie par :

$$\mathcal{P}^{XY} = \{P^{XY} \mid \forall A \subseteq \Omega_X \times \Omega_Y, P^{XY}(A) \leq \sum_{i, E_i^X \times E_i^Y \cap A \neq \emptyset} \nu^X(E_i^X)\}$$

Ils obtiennent un ensemble aléatoire avec les mêmes éléments focaux  $(E_i^X \times E_j^Y)_{ij}$  que dans la définition de l'*indépendance entre observations imprécises* mais avec des poids de probabilité différents. En fait, la notion d'*indépendance entre observations floues* est équivalente à la notion de distribution de possibilité jointe  $\pi^{XY}$  (discutée dans l'Annexe B Section B.1) définie par

$$\pi^{XY}(x, y) = \min(\pi^X(x), \pi^Y(y))$$

Comme nous le verrons, cette notion modélise le fait qu'il existe une dépendance totale entre les sources d'information (observateurs) sans pour définir de relation entre les variables elles-mêmes (observations) (voir exemples dans [7]).

L'(in)dépendance dans le cadre des probabilités classiques n'est déjà pas une notion évidente à traiter, elle se complique dans le cadre des probabilités imprécises. Une analyse plus approfondie sur ces notions d'(in)dépendances à deux niveaux (Observateurs-Observations) demanderait une étude à part entière. C'est pour cela que nous ne présentons en détail que les structures d'(in)dépendance générées pour chaque méthode de propagation proposée. Ces méthodologies ont évidemment les avantages et les restrictions liées au Monte-Carlo et au calcul d'intervalles.

## 4.2 Propagation dite "*Hybride*" combinant Possibilités et Probabilités

Le calcul "*Hybride*" [4, 55, 57, 53, 63] permet de propager de la variabilité (information de nature aléatoire) et de l'imprécision (information de nature imprécise). Il combine la technique dite de Monte-Carlo [20] et le calcul possibiliste au moyen du principe d'extension (voir

Annexe B Section B.1).

Nous allons décrire brièvement la méthodologie du calcul dit "Hybride". La procédure est schématisée dans la Figure 4.1.

1. On simule un échantillon de  $m$  réalisations  $(X_1 = x_1^i, \dots, X_k = x_k^i)_{i=1 \dots m}$  à partir des lois marginales associées aux  $k$  variables aléatoires  $(X_1, \dots, X_k)$  en tenant compte des (in)dépendances si celles-ci sont connues (voir Figure 4.1.a).
2. Maintenant que l'on a fixé les valeurs des  $k$  variables probabilistes pour les  $m$  réalisations, on effectue un calcul possibiliste pour estimer  $T$  pour chaque réalisation  $(x_1^i, \dots, x_k^i)$ .  $T(x_1^i, \dots, x_k^i, X_{k+1}, \dots, X_n)$  devient une variable modélisée par une distribution de possibilité. (voir Figure 4.1.b). On obtient une distribution de possibilité  $\pi_i^T$  pour chaque réalisation  $i = 1 \dots m$ .
3. On obtient ainsi une famille (échantillon) de  $m$  distributions de possibilité  $(\pi_1^T, \dots, \pi_m^T)$  auxquelles sont affectées des poids de probabilité  $p_i = 1/m \forall i = 1 \dots m$ . (voir Figure 4.1.c pour un échantillon des  $m$  distributions de possibilité).  $T(X)$  devient alors une variable aléatoire floue définie au sens du Chapitre 2 Section 2.4.

La présence d'imprécision relative aux variables mal connues  $X_{k+1}, \dots, X_n$  engendre deux niveaux de dépendances. Le premier concerne une dépendance sur les sources d'information attachées aux variables  $X_{k+1}, \dots, X_n$ , la seconde concerne la dépendance entre les variables  $X_{k+1}, \dots, X_n$  elles mêmes.

Le calcul possibiliste (voir Annexe B Section B.1) suppose une dépendance totale entre les sources d'information concernant les variables  $X_{k+1}, \dots, X_n$ , c-à-d sur les degrés de confiance ou encore les  $\alpha$ -coupes. Par exemple, un expert donne les intervalles de prédiction  $\pi_\alpha^{X_{k+1}}, \dots, \pi_\alpha^{X_n}$  concernant les variables  $X_{k+1}, \dots, X_n$  pour un même degré de confiance  $1 - \alpha$ . C'est à dire qu'une faible imprécision sur  $X_j, \forall j, j = k + 1 \dots n$ , implique une faible imprécision sur  $X_l \forall l, l = k + 1 \dots n$  et  $l \neq j$ . Le principe d'extension induit une faible dépendance entre la connaissance de  $X_{k+1}$  et,  $\dots$ , et la connaissance de  $X_n$  puisque par exemple les paires de valeurs dans le domaine  $(\pi_1^{X_{k+1}} \times \dots \times \pi_1^{X_n})$  sont supposées être les plus plausibles. Cependant, cette forme de dépendance n'implique pas de dépendance objective entre les variables  $X_{k+1}, \dots, X_n$  elle-mêmes à l'intérieur du domaine  $(\pi_\alpha^{X_{k+1}} \times \dots \times \pi_\alpha^{X_n})$ .

En raison de cette dépendance sur les degrés de confiance, on ne peut pas interpréter le calcul possibiliste comme une enveloppe du calcul purement probabiliste. A savoir, si  $P^X$  et  $P^Y$  sont deux mesures de probabilité associées aux variables aléatoires, supposées indépendantes,  $X$  et  $Y$  telles que

$$P^X \in \mathcal{P}(\pi^X) \quad \text{et} \quad P^Y \in \mathcal{P}(\pi^Y)$$

alors, cela n'implique pas que la mesure de probabilité jointe  $P^{XY} = P^X P^Y$  soit contenue dans  $\mathcal{P}(\min(\pi^X, \pi^Y))$ . En effet, supposons que  $X$  et  $Y$  soient deux variables aléatoires uniformes sur  $[0, 1]$ , et que  $\pi^X$  et  $\pi^Y$  soient linéairement décroissantes sur  $[0, 1]$ , de sorte que  $\pi^X(u) = \pi^Y(u) = 1 - u$ . Clairement

$$P^X([u, 1]) = \Pi^X([u, 1]) = 1 - u$$

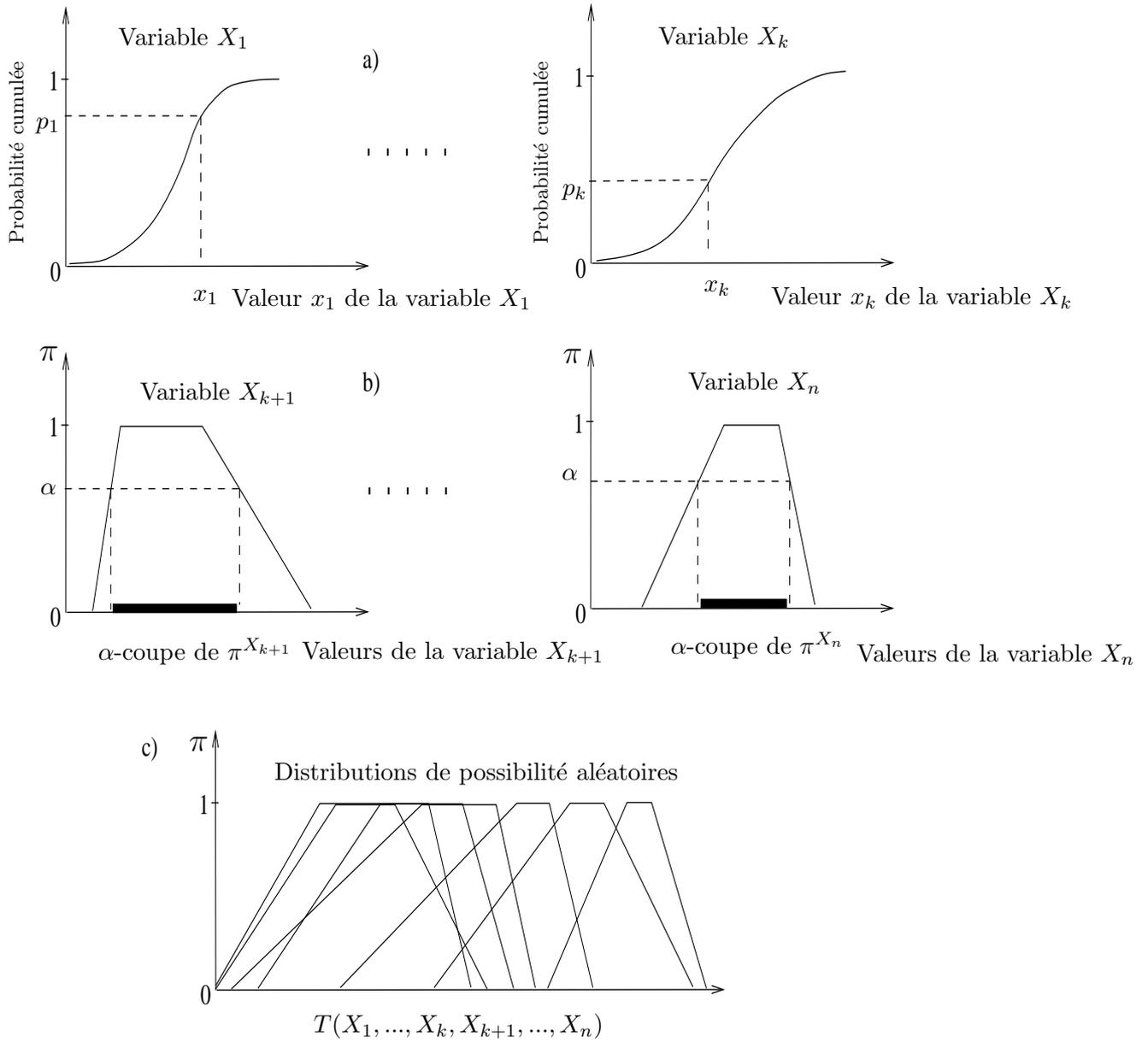


FIG. 4.1 – Schéma du Calcul "Hybride" où  $(X_i)_{i=1\dots k}$  sont les variables probabilistes (variabilité),  $(X_i)_{i=k+1\dots n}$  les variables modélisées par des possibilités (imprécision) et  $T$  le modèle mathématique.

Ainsi

$$P^X \in \mathcal{P}(\pi^X) \quad P^Y \in \mathcal{P}(\pi^Y)$$

Cependant, considérons  $C(u) = \{(x, y) | x + y \geq u\}$ . Il est clair que

$$P^{X,Y}(C(u)) = 1 - \frac{u^2}{2} \text{ si } u \leq 1 \text{ et } \frac{(2-u)^2}{2} \text{ sinon}$$

tandis que

$$\Pi^{X,Y}(C(u)) = \sup_x \min(1-x, 1-u-x) = 1 - \frac{u}{2}$$

Par conséquent

$$\Pi^{X,Y}(C(u)) < P^{X,Y}(C(u)) \text{ si } u \leq 1$$

Cela signifie que si  $Z = X + Y$ , alors la mesure de probabilité  $P^Z$  n'appartient pas à la famille de mesures de probabilité  $\mathcal{P}(\pi^Z)$ . Pour résumer, la méthode "Hybride" décrite est une méthode de Monte-Carlo classique pour les variables probabilistes, elle suppose une indépendance stochastique entre le groupe des variables probabilistes et le groupe des variables mal connues modélisées par des possibilités et suppose une dépendance totale sur les degrés de confiance entre les distributions de possibilité représentant la connaissance sur les variables mal connues. L'information "brute" fournie par la famille de distributions de possibilité obtenue à partir du calcul "Hybride" n'est pas évidente au premier abord à exploiter pour une prise de décision. Nous verrons notamment dans le Chapitre 5 comment synthétiser cette information en vue d'une comparaison avec un seuil de tolérance.

### 4.3 Propagation des incertitudes dans le cadre de Dempster-Shafer "ensembles aléatoires"

Les fonctions de croyance permettent d'exprimer dans un cadre unifié les probabilités et les possibilités (voir Sections 2.2.1 et 2.2.2 Chapitre 2). Nous allons ainsi représenter l'information de nature aléatoire et l'information de nature imprécise au moyen des fonctions de croyance pour propager les incertitudes dans un cadre homogène. Nous présentons deux méthodes pour propager l'information hétérogène en supposant d'une part une indépendance totale entre les incertitudes sources (épistémiques et stochastiques) (nommée "Independent Random Sets" / "ensembles aléatoires indépendants") et la non connaissance des dépendances entre les incertitudes sources d'autre part (nommée "Conservative Random Sets" / "propagation d'ensembles aléatoires sans hypothèse de dépendances").

#### 4.3.1 Hypothèse d'indépendance entre les incertitudes sources : "Independent Random Sets"

Considérons les variables  $X_{k+1}, \dots, X_n$  exprimées au moyen de leurs éléments focaux  $(\pi_{\alpha_{k+1}}^{X_{k+1}})_{\alpha_{k+1}}, \dots, (\pi_{\alpha_n}^{X_n})_{\alpha_n}$  et de leurs fonctions de masse associées  $(\nu_{\alpha_{k+1}}^{X_{k+1}})_{\alpha_{k+1}}, \dots, (\nu_{\alpha_n}^{X_n})_{\alpha_n}$ . Pour plus de clarté dans les notations, supposons que les variables aléatoires  $X_1, \dots, X_k$  soient discrètes et exprimées au moyen de leurs éléments focaux  $(\{x_1^{\beta_1}\})_{\beta_1}, \dots, (\{x_k^{\beta_k}\})_{\beta_k}$  et de leurs fonctions de masse associées  $(p_{\beta_1}^{X_1})_{\beta_1}, \dots, (p_{\beta_k}^{X_k})_{\beta_k}$ . Dans le cadre des densités de probabilité, les éléments focaux seraient des intervalles (voir Section 2.2.1 Chapitre 2). Avec la méthode

"Independent Random Sets", on fait l'hypothèse d'indépendance entre les éléments focaux. La méthode se décompose comme suit :

1. On détermine les éléments focaux du modèle  $T$

$$\pi_{\beta_1 \dots \beta_k \alpha_{k+1} \dots \alpha_n}^T = T(x_1^{\beta_1}, \dots, x_k^{\beta_k}, \pi_{\alpha_{k+1}}^{X_{k+1}}, \dots, \pi_{\alpha_n}^{X_n})$$

2. On affecte la masse (notée  $\nu_{\beta_1 \dots \beta_k \alpha_{k+1} \dots \alpha_n}^T$ ) aux éléments focaux  $\pi_{\beta_1 \dots \beta_k \alpha_{k+1} \dots \alpha_n}^T$  telle que

$$\forall \beta_1, \dots, \beta_k, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n; \quad \nu_{\beta_1 \dots \beta_k \alpha_{k+1} \dots \alpha_n}^T = p_{\beta_1}^{X_1} \times \dots \times p_{\beta_k}^{X_k} \times \nu_{\alpha_{k+1}}^{X_{k+1}} \times \nu_{\alpha_n}^{X_n}$$

On peut alors estimer, pour tout ensemble mesurable  $A$ , les quantités  $Pl^T(A)$  et  $Bel^T(A)$  comme suit :

$$Pl^T(A) = \sum_{(\beta_1, \dots, \beta_k, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n); \pi_{\beta_1 \dots \beta_k \alpha_{k+1} \dots \alpha_n}^T \cap A \neq \emptyset} \nu_{\beta_1 \dots \beta_k \alpha_{k+1} \dots \alpha_n}^T$$

$$Bel^T(A) = \sum_{(\beta_1, \dots, \beta_k, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n); \pi_{\beta_1 \dots \beta_k \alpha_{k+1} \dots \alpha_n}^T \subseteq A} \nu_{\beta_1 \dots \beta_k \alpha_{k+1} \dots \alpha_n}^T$$

L'approche "Independent Random Sets" peut être interprétée comme une enveloppe de l'approche purement probabiliste dans le cas où l'on aurait supposé toute l'information de nature aléatoire (donc choisi  $(P^{X_{k+1}}, \dots, P^{X_n}) \in \mathcal{P}(\pi^{X_{k+1}}) \times \dots \times \mathcal{P}(\pi^{X_n})$ ) et supposé l'hypothèse d'indépendance stochastique entre les variables [23].

Dans le cas où nous nous intéressons seulement aux probabilités de dépassement de seuil, i.e.  $P(T(X) \geq t)$  ou  $P(T(X) \leq t)$ , nous pouvons améliorer la méthode en temps de calcul en faisant du Monte-Carlo sur les  $\alpha$ -coupes des distributions de possibilité :

1. On simule un échantillon de  $m$  réalisations  $(X_1 = x_1^i, \dots, X_k = x_k^i)_{i=1 \dots m}$  à partir des lois marginales associées aux  $k$  variables aléatoires  $(X_1, \dots, X_k)$  avec hypothèse d'indépendance.
2. On simule un échantillon de  $m$  réalisations  $(X_{k+1} = \pi_{\alpha_i}^{X_{k+1}}, \dots, X_n = \pi_{\alpha_i}^{X_n})_{i=1 \dots m}$  avec hypothèse d'indépendance entre le tirage des  $\alpha$ -coupes.
3. On obtient ainsi un échantillon de  $m$  intervalles  $(T(x_1^i, \dots, x_k^i, \pi_{\alpha_i}^{X_{k+1}}, \dots, \pi_{\alpha_i}^{X_n}))_{i=1 \dots m}$  auxquelles sont affectés des poids de probabilité  $p_i = 1/m \forall i = 1, \dots, m$ .  $T(X)$  devient un intervalle aléatoire.

Nous pouvons ainsi déterminer  $Bel(T(X) \leq t)$  et  $Pl(T(X) \leq t)$  par

$$Bel(T(X) \leq t) = \frac{1}{m} \text{Card}\{i, \sup(T(x_1^i, \dots, x_k^i, \pi_{\alpha_i}^{X_{k+1}}, \dots, \pi_{\alpha_i}^{X_n})) \leq t\}$$

$$Pl(T(X) \leq t) = \frac{1}{m} \text{Card}\{i, \inf(T(x_1^i, \dots, x_k^i, \pi_{\alpha_i}^{X_{k+1}}, \dots, \pi_{\alpha_i}^{X_n})) \leq t\}$$

On a supposé l'indépendance stochastique entre les éléments focaux, supposons à présent que la même  $\alpha$ -coupe soit sélectionnée pour toutes les distributions de possibilité. La fonction de masse devient :  $\forall \beta_1, \dots, \beta_k, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n$

$$\begin{aligned} \alpha_{k+1} = \dots = \alpha_n & \quad \nu_{\beta_1 \dots \beta_k \alpha_{k+1} \dots \alpha_n}^T = \nu_{\alpha_{k+1}}^{X_{k+1}, \dots, X_n} \times p_{\beta_1}^{X_1} \times \dots \times p_{\beta_k}^{X_k} \\ \alpha_{k+1} \neq \dots \neq \alpha_n & \quad \nu_{\beta_1 \dots \beta_k \alpha_{k+1} \dots \alpha_n}^T = 0 \end{aligned}$$

La distribution de possibilité  $\pi^{X_{k+1}, \dots, X_n}$  est caractérisée par  $\min(\pi^{X_{k+1}}, \dots, \pi^{X_n})$  qui correspond aux produits cartésiens emboîtés des  $\alpha$ -coupes et  $\nu_{\alpha_{k+1}}^{X_{k+1}, \dots, X_n}$  est la masse associée au produit cartésien  $\pi_{\alpha_{k+1}}^{X_{k+1}} \times \dots \times \pi_{\alpha_n}^{X_n}$ . Comme dans le calcul "Hybride" (voir Section 4.2), nous supposons donc une dépendance totale entre les éléments focaux associés aux distributions de possibilité. Par conséquent, si on cherche à estimer  $Pl^T(A)$ , pour tout ensemble mesurable  $A$ , en utilisant la dernière définition de  $\nu_{\beta_1 \dots \beta_k \alpha_{k+1} \dots \alpha_n}^T$ , on déduit que :

$$Pl^T(A) = \sum_{(\beta_1, \dots, \beta_k, \alpha_{k+1}); \pi_{\beta_1 \dots \beta_k \alpha_{k+1} \dots \alpha_n}^T \cap A \neq \emptyset} \nu_{\alpha_{k+1}}^{X_{k+1}, \dots, X_n} \times p_{\beta_1}^{X_1} \times \dots \times p_{\beta_k}^{X_k}$$

Ainsi

$$Pl^T(A) = \sum_{(\beta_1, \dots, \beta_k)} p_{\beta_1}^{X_1} \times \dots \times p_{\beta_k}^{X_k} \times \sum_{\alpha_{k+1}; \pi_{\beta_1 \dots \beta_k \alpha_{k+1} \dots \alpha_n}^T \cap A \neq \emptyset} \nu_{\alpha_{k+1}}^{X_{k+1}, \dots, X_n}$$

C'est à dire, par définition

$$Pl^T(A) = \sum_{(\beta_1, \dots, \beta_k)} p_{\beta_1}^{X_1} \times \dots \times p_{\beta_k}^{X_k} \times Pl_{\beta_1, \dots, \beta_k}^T(A)$$

Or,  $\forall \beta_1, \dots, \beta_k$ , on a

$$\pi_{\beta_1 \dots \beta_k \alpha_j \dots \alpha_j}^T \subseteq \dots \subseteq \pi_{\beta_1 \dots \beta_k \alpha_k \dots \alpha_k}^T \quad \forall \alpha_j \geq \alpha_k$$

Par conséquent

$$Pl_{\beta_1, \dots, \beta_k}^T(A) = \Pi_{\beta_1 \dots \beta_k}^T(A)$$

Cela signifie que l'on obtient alors

$$Pl^T(A) = \sum_{\beta_1, \dots, \beta_k} p_{\beta_1}^{X_1} \times \dots \times p_{\beta_k}^{X_k} \times \Pi_{\beta_1 \dots \beta_k}^T(A)$$

où  $\Pi_{\beta_1 \dots \beta_k}^T$  sont les mesures de possibilité associées aux distributions de possibilité jointes  $\pi_{\beta_1 \dots \beta_k}^T$  obtenues par le calcul "Hybride". Cela signifie que les méthodes "Hybride" et "Independent Random Sets" sont équivalentes dans un cas de figure qui apparaît lorsque l'on combine seulement une variable mal connues modélisée par une distribution possibilité avec d'autres variables probabilistes avec hypothèse d'indépendance stochastique entre ces dernières.

Pour résumer, la méthode "Independent Random Sets" permet de restituer la méthode "Hybride" dans le cadre homogène de Dempster-Shafer en faisant une hypothèse de dépendance totale entre les sources d'information concernant les variables mal connues modélisées par des

possibilités. Cette méthode peut être interprétée comme une enveloppe de l'approche purement probabiliste dans le cas où l'on aurait supposé toute l'information de nature aléatoire et supposé l'hypothèse d'indépendance stochastique entre les variables. Par contre, l'incertitude sur le résultat est supérieure à celle obtenue par une modélisation purement probabiliste car modéliser l'incertitude épistémique par une distribution de possibilité revient à relâcher l'hypothèse sur la forme de la distribution de probabilité.

#### 4.3.2 Sans hypothèse sur les dépendances entre les incertitudes sources : "Conservative Random Sets"

En nous appuyant sur les travaux de Berleant et al. [15], nous proposons une méthode nommée "Conservative Random Sets" qui va chercher pour chaque événement  $A$  sa crédibilité minimale  $Bel_{min}(A)$  et sa plausibilité maximale  $Pl_{max}(A)$  sans faire d'hypothèse sur les dépendances des incertitudes sources (stochastiques et épistémiques). Par conséquent, les hypothèses de dépendance ne sont pas les mêmes pour les différents événements  $A$  : Pour chaque événement  $A$ , on détermine par optimisation numérique les dépendances entre les incertitudes sources qui minimisent la crédibilité puis les dépendances qui maximisent la plausibilité.

Pour plus de clarté, considérons un exemple impliquant 3 variables  $X, Y, Z$  qui peuvent être représentées par une distribution de probabilité, une distribution de possibilité ou une fonction de croyance et un modèle  $T : (x, y, z) \mapsto T(x, y, z)$ . Soient  $(\nu_i^X)_i$ ,  $(\nu_j^Y)_j$  et  $(\nu_k^Z)_k$  les fonctions de masse associées aux éléments focaux  $([\underline{x}_i, \bar{x}_i])_i$ ,  $([\underline{y}_j, \bar{y}_j])_j$  et  $([\underline{z}_k, \bar{z}_k])_k$ . Dans la méthode "Conservative Random Sets", contrairement à la méthode "Independent Random Sets" où la fonction de masse  $\nu_{ijk}^T$  représentant la connaissance sur le résultat  $T(X, Y, Z)$  est définie par :

$$\nu_{ijk}^T = \nu_i^X \times \nu_j^Y \times \nu_k^Z$$

nous devons chercher la distribution de masse  $\nu_{ijk}^T$  telle que  $Pl^T(A)$  est maximale et  $Bel^T(A)$  est minimale. Afin d'obtenir  $Pl_{max}^T(A)$ , nous devons résoudre le problème d'optimisation linéaire suivant :

$$\begin{aligned} \max \sum_{T([\underline{x}_i, \bar{x}_i], [\underline{y}_j, \bar{y}_j], [\underline{z}_k, \bar{z}_k]) \cap A \neq \emptyset} \nu_{ijk}^T \\ \sum_{jk} \nu_{ijk}^T &= \nu_i^X \quad \forall i \\ \sum_{ik} \nu_{ijk}^T &= \nu_j^Y \quad \forall j \\ \sum_{ij} \nu_{ijk}^T &= \nu_k^Z \quad \forall k \\ \sum_{i,j,k} \nu_{ijk}^T &= 1 \end{aligned}$$

De manière analogue, nous obtenons  $Bel_{min}^T(A)$  en résolvant le problème linéaire suivant :

$$\begin{aligned} \min \sum_{T([\underline{x}_i, \bar{x}_i], [\underline{y}_j, \bar{y}_j], [\underline{z}_k, \bar{z}_k]) \subseteq A} \nu_{ijk}^T \\ \sum_{jk} \nu_{ijk}^T &= \nu_i^X \quad \forall i \\ \sum_{ik} \nu_{ijk}^T &= \nu_j^Y \quad \forall j \\ \sum_{ij} \nu_{ijk}^T &= \nu_k^Z \quad \forall k \\ \sum_{i,j,k} \nu_{ijk}^T &= 1 \end{aligned}$$

La méthode "Conservative Random Sets" est une approche rigoureuse pour d'obtenir un encadrement conservatif de la probabilité  $P(T(X) \in A)$  mal connue quand on ne sait rien

sur les dépendances entre les incertitudes sources (épistémiques et stochastiques). Ainsi, nous avons :

$$\forall A \quad Bel_{min}^T(A) \leq P(T(X) \in A) \leq Pl_{max}^T(A)$$

quelles que soient les (in)dépendances entre les incertitudes sources. Il faut cependant garder en mémoire que cette méthode revient à faire des hypothèses différentes sur la structure de dépendance entre les incertitudes sources pour chaque événement  $A$ .

Supposons que l'on sache qu'il existe des relations linéaires entre certaines variables. En s'appuyant sur les travaux de Berleant [16], il est alors possible de réduire l'écart entre les probabilités hautes  $Pl_{max}^T(A)$  et basses  $Bel_{min}^T(A)$  en ajoutant cette information dans les contraintes et résoudre les deux problèmes d'optimisation linéaires suivants :

$$\begin{aligned} \max \sum_{T([\underline{x}_i, \overline{x}_i], [\underline{y}_j, \overline{y}_j], [\underline{z}_k, \overline{z}_k]) \cap A \neq \emptyset} \nu_{ijk}^T \\ \sum_{jk} \nu_{ijk}^T &= \nu_i^X \quad \forall i \\ \sum_{ik} \nu_{ijk}^T &= \nu_j^Y \quad \forall j \\ \sum_{ij} \nu_{ijk}^T &= \nu_k^Z \quad \forall k \\ \sum_{ij} \underline{x}_i \underline{y}_j (\sum_k \nu_{ijk}^T) &\geq \underline{a}_\rho \\ \sum_{ij} \overline{x}_i \overline{y}_j (\sum_k \nu_{ijk}^T) &\leq \overline{a}_\rho \\ \sum_{i,j,k} \nu_{ijk}^T &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min \sum_{T([\underline{x}_i, \overline{x}_i], [\underline{y}_j, \overline{y}_j], [\underline{z}_k, \overline{z}_k]) \subseteq A} \nu_{ijk}^T \\ \sum_{jk} \nu_{ijk}^T &= \nu_i^X \quad \forall i \\ \sum_{ik} \nu_{ijk}^T &= \nu_j^Y \quad \forall j \\ \sum_{ij} \nu_{ijk}^T &= \nu_k^Z \quad \forall k \\ \sum_{ij} \underline{x}_i \underline{y}_j (\sum_k \nu_{ijk}^T) &\geq \underline{a}_\rho \\ \sum_{ij} \overline{x}_i \overline{y}_j (\sum_k \nu_{ijk}^T) &\leq \overline{a}_\rho \\ \sum_{i,j,k} \nu_{ijk}^T &= 1 \end{aligned}$$

où  $\underline{a}_\rho$  et  $\overline{a}_\rho$  sont deux valeurs qui dépendent du coefficient de corrélation de Pearson  $\rho$  [86]. Ce coefficient [86] permet de caractériser l'existence d'une relation linéaire entre deux variables. S'il y a une relation linéaire entre  $X$  et  $Y$  alors  $\rho$  sera égal à 1 ou -1. La nullité de ce coefficient exclut la relation linéaire, mais n'exclut pas l'existence d'autres relations. Le coefficient de corrélation de Pearson  $\rho$  s'exprime par

$$\rho = \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sigma_X \sigma_Y} \quad (4.2)$$

où  $E(XY)$  (resp.  $E(X)$ ,  $E(Y)$ ) est l'espérance mathématique du couple  $XY$  (resp.  $X$ ,  $Y$ ) et  $\sigma_X$  (resp.  $\sigma_Y$ ) est l'écart type de  $X$  (resp.  $Y$ ).

Supposons qu'un expert puisse donner une estimation de  $\rho$ , par exemple  $\rho \in [\underline{\rho}, \overline{\rho}]$ . De plus, il est en mesure de fournir une estimation de la moyenne de  $X$ , de  $Y$  et de l'écart type  $\sigma_X$ ,  $\sigma_Y$ . C'est à dire :

$$E(X) \in [\underline{E(X)}, \overline{E(X)}], \quad E(Y) \in [\underline{E(Y)}, \overline{E(Y)}], \quad \sigma_X \in [\underline{\sigma_X}, \overline{\sigma_X}], \quad \sigma_Y \in [\underline{\sigma_Y}, \overline{\sigma_Y}]$$

Par conséquent, à l'aide de l'équation 4.2, nous avons

$$\underline{\rho} \underline{\sigma_X} \underline{\sigma_Y} + \underline{E(X)} \underline{E(Y)} \leq E(XY) \leq \overline{\rho} \overline{\sigma_X} \overline{\sigma_Y} + \overline{E(X)} \overline{E(Y)}$$

De plus, on peut exprimer la borne maximale  $\overline{E(XY)}$  et la borne minimale  $\underline{E(XY)}$  de  $E(XY)$  à l'aide de la fonction de masse jointe  $(\nu_{ijk}^T)_{ijk}$  par

$$\begin{aligned} \underline{E(XY)} &= \sum_{ij} \underline{x}_i \underline{y}_j \left( \sum_k \nu_{ijk}^T \right) \\ \overline{E(XY)} &= \sum_{ij} \overline{x}_i \overline{y}_j \left( \sum_k \nu_{ijk}^T \right) \end{aligned}$$

Ainsi en posant

$$\underline{\rho} \underline{\sigma_X} \underline{\sigma_Y} + \underline{E(X)} \underline{E(Y)} = \underline{a}_\rho$$

et

$$\overline{\rho} \overline{\sigma_X} \overline{\sigma_Y} + \overline{E(X)} \overline{E(Y)} = \overline{a}_\rho$$

On retrouve ainsi les contraintes à ajouter aux problèmes d'optimisation.

#### 4.4 Propagation des incertitudes dans le cadre des p-boxes "Dependency Bounds Convolution"

Ce paragraphe présente une autre méthode qui permet d'estimer les probabilités cumulées extrêmes hautes et basses du modèle  $T$  quand la structure de dépendance entre les variables est inconnue ("Dependency Bounds Convolution" / "propagation de p-box sans hypothèse de dépendances").

L'idée est d'utiliser l'inégalité de Fréchet

$$\max(F_X(x) + F_Y(y) - 1, 0) \leq F_{X,Y}(x, y) \leq \min(F_X(x), F_Y(y)) \quad (4.3)$$

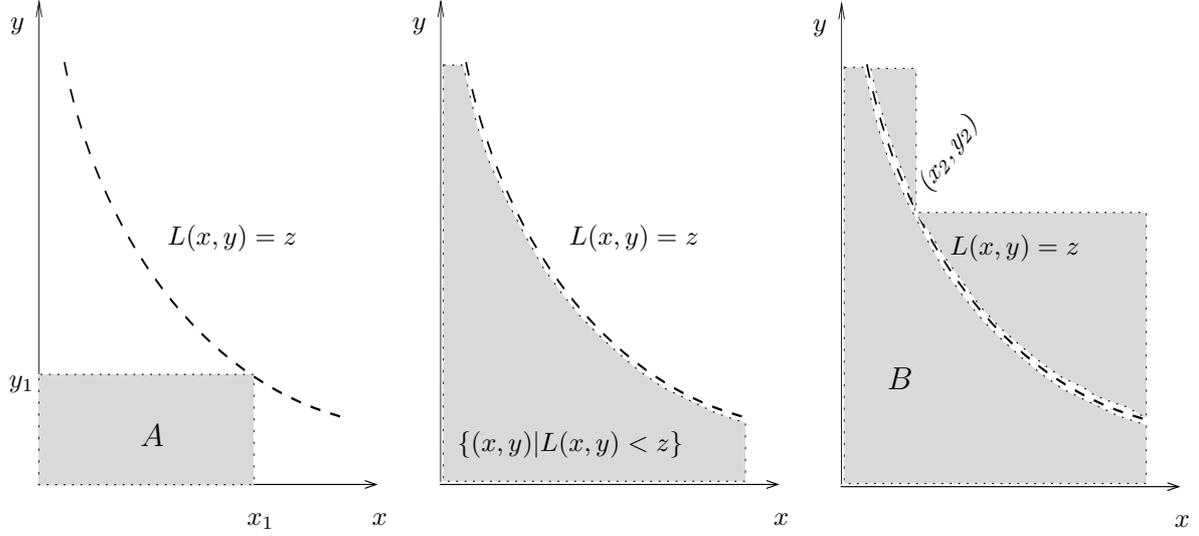
où  $F_{X,Y}$  est la fonction de répartition associée à la probabilité jointe du couple  $(X, Y)$  et les notions des copules (voir Section 4.1.1.2).

En se référant à ce qui précède, Williamson et Downs [96] ont montré que

$$\sup_{L(x,y)=z} \max(F_X(x) + F_Y(y) - 1, 0) \leq F_{L(X,Y)}(z) \leq \inf_{L(x,y)=z} \min(F_X(x) + F_Y(y), 1)$$

où  $L \in \{+, -, \div, \times\}$ . En effet, en s'appuyant sur la Figure 4.2, nous avons  $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2)$  appartenant à  $\{(x, y) | L(x, y) = z\}$

$$\begin{aligned} \max(F_X(x_1) + F_Y(y_1) - 1, 0) &\leq C(F_X(x_1), F_Y(y_1)) \\ &= \int \int_A dC(F_X(x), F_Y(y)) \\ &\leq \int \int_{\{(x,y) | L(x,y) < z\}} dC(F_X(x), F_Y(y)) \\ &\leq \int \int_B dC(F_X(x), F_Y(y)) \\ &= F_X(x_2) + F_Y(y_2) - C(F_X(x_2), F_Y(y_2)) \\ &\leq \min(F_X(x_2) + F_Y(y_2), 1) \end{aligned}$$


 FIG. 4.2 – Majoration et Minoration de la fonction de répartition  $F_{L(x,y)}$ 

Posons

$$\underline{F}_{L(X,Y)}(z) = \sup_{L(x,y)=z} \max(F_X(x) + F_Y(y) - 1, 0)$$

et

$$\overline{F}_{L(X,Y)}(z) = \inf_{L(x,y)=z} \min(F_X(x) + F_Y(y), 1)$$

Ainsi  $\underline{F}_{L(X,Y)}(z)$  est la plus grande valeur de  $\max(F_X(x) + F_Y(y) - 1, 0)$  où  $(x_1, y_1) \in \{(x, y) | L(x, y) = z\}$  et  $\overline{F}_{L(X,Y)}(z)$  est la plus petite valeur de  $\min(F_X(x_2) + F_Y(y_2), 1)$  où  $(x_2, y_2) \in \{(x, y) | L(x, y) = z\}$ .

Supposons que  $X$  et  $Y$  soient deux variables aléatoires mal connues représentées par deux p-boxes  $[\underline{F}_X, \overline{F}_X]$ ,  $[\underline{F}_Y, \overline{F}_Y]$ . D'après ce qui précède [96] déduisent pour les 4 opérateurs  $\{+, -, \times, \div\}$  :

$$\begin{aligned} \underline{F}_{X+Y}(z) &= \sup_{x+y=z} \{\max(\underline{F}_X(x) + \underline{F}_Y(y) - 1, 0)\} \\ \overline{F}_{X+Y}(z) &= \inf_{x+y=z} \{\min(\overline{F}_X(x) + \overline{F}_Y(y), 1)\} \\ \underline{F}_{X-Y}(z) &= \sup_{x+y=z} \{\max(\underline{F}_X(x) - \overline{F}_Y(-y), 0)\} \\ \overline{F}_{X-Y}(z) &= \inf_{x+y=z} \{\min(\overline{F}_X(x) + 1 - \underline{F}_Y(-y), 1)\} \\ \underline{F}_{X \times Y}(z) &= \sup_{x \times y=z} \{\max(\underline{F}_X(x) + \underline{F}_Y(y) - 1, 0)\} \\ \overline{F}_{X \times Y}(z) &= \inf_{x \times y=z} \{\min(\overline{F}_X(x) + \overline{F}_Y(y), 1)\} \\ \underline{F}_{X \div Y}(z) &= \sup_{x \times y=z} \{\max(\underline{F}_X(x) - \overline{F}_Y(1/y), 0)\} \\ \overline{F}_{X \div Y}(z) &= \inf_{x \times y=z} \{\min(\overline{F}_X(x) + 1 - \underline{F}_Y(1/y), 1)\} \end{aligned}$$

Ferson [47] a étendu ces résultats aux opérateurs min, max, log, exp et à la puissance.

Comme dans le calcul possibiliste (calcul d'intervalles par  $\alpha$ -coupes), la représentation quasi-inverse  $\underline{F}_{L(X,Y)}^{-1}$  (resp.  $\overline{F}_{L(X,Y)}^{-1}$ ) de  $\underline{F}_{L(X,Y)}$  (resp.  $\overline{F}_{L(X,Y)}$ ) peut être calculée à l'aide des quasi-inverse  $\underline{F}_X^{-1}$ ,  $\overline{F}_X^{-1}$ ,  $\underline{F}_Y^{-1}$  et  $\overline{F}_Y^{-1}$ . Williamson et Downs [96] ont proposé une méthode numérique pour calculer ces limites pour les 4 opérateurs  $\{+, -, \times, \div\}$ . Ils discrétisent les probabilités cumulées  $\underline{F}_X$ ,  $\overline{F}_X$ ,  $\underline{F}_Y$  et  $\overline{F}_Y$  en  $m + 1$  éléments et ils obtiennent les quantiles  $\underline{F}_{L(X,Y)}^{-1}$ ,

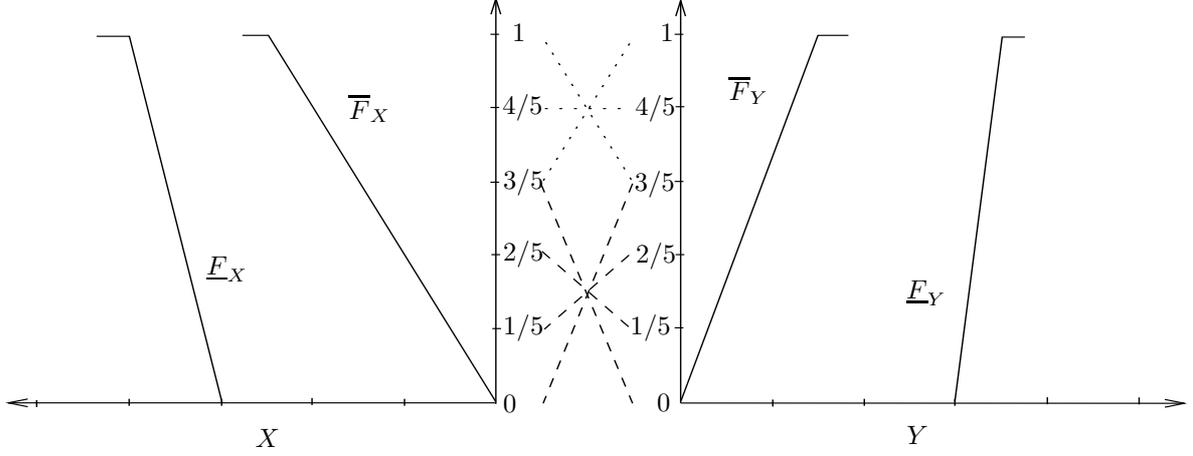


FIG. 4.3 – Méthode numérique pour calculer  $\underline{F}_{X+Y}^{-1}(3/5)$ ,  $\overline{F}_{X+Y}^{-1}(3/5)$ .

$\overline{F}_{L(X,Y)}^{-1}$ , pour l'addition, par

$$\underline{F}_{X+Y}^{-1}\left(\frac{i}{m}\right) = \min_{j=i\dots m} \left\{ \underline{F}_X^{-1}\left(\frac{j}{m}\right) + \underline{F}_Y^{-1}\left(\frac{i-j+m}{m}\right) \right\}$$

et

$$\overline{F}_{X+Y}^{-1}\left(\frac{i}{m}\right) = \max_{j=0\dots i} \left\{ \overline{F}_X^{-1}\left(\frac{j}{m}\right) + \overline{F}_Y^{-1}\left(\frac{i-j}{m}\right) \right\}$$

pour la soustraction, par

$$\underline{F}_{X-Y}^{-1}\left(\frac{i}{m}\right) = \min_{j=i\dots m} \left\{ \underline{F}_X^{-1}\left(\frac{j}{m}\right) - \overline{F}_Y^{-1}\left(\frac{j-i}{m}\right) \right\}$$

et

$$\overline{F}_{X-Y}^{-1}\left(\frac{i}{m}\right) = \max_{j=0\dots i} \left\{ \overline{F}_X^{-1}\left(\frac{j}{m}\right) - \underline{F}_Y^{-1}\left(\frac{j-i+m}{m}\right) \right\}$$

où  $i$  varie entre 0 and  $m$ . Les probabilités cumulées limites pour les opérateurs  $\times$  et  $\div$  peuvent être déduites de l'addition et de la soustraction.

La Figure 4.3 permet de visualiser la combinatoire permettant de déterminer  $\underline{F}_{X+Y}^{-1}(3/5)$  et  $\overline{F}_{X+Y}^{-1}(3/5)$  où  $m = 5$ ; i.e.

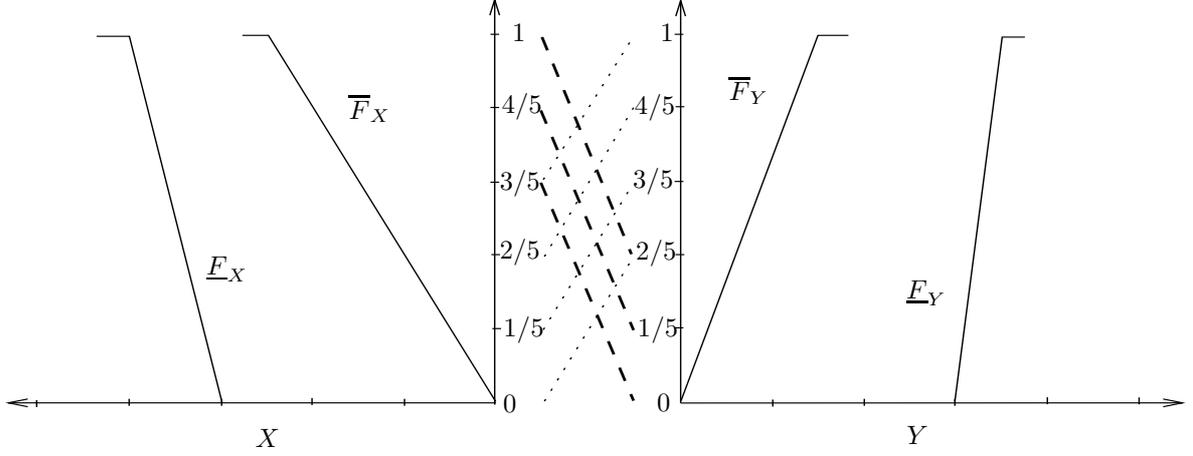
$$\underline{F}_{X+Y}^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) = \min \left( \underline{F}_X^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) + \underline{F}_Y^{-1}(1), \underline{F}_X^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) + \underline{F}_Y^{-1}\left(\frac{4}{5}\right), \underline{F}_X^{-1}(1) + \underline{F}_Y^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) \right)$$

et

$$\overline{F}_{X+Y}^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) = \max \left( \overline{F}_X^{-1}(0) + \overline{F}_Y^{-1}\left(\frac{3}{5}\right), \overline{F}_X^{-1}\left(\frac{1}{5}\right) + \overline{F}_Y^{-1}\left(\frac{2}{5}\right), \overline{F}_X^{-1}\left(\frac{2}{5}\right) + \overline{F}_Y^{-1}\left(\frac{1}{5}\right), \overline{F}_X^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) + \overline{F}_Y^{-1}(0) \right)$$

La Figure 4.4 permet de visualiser la combinatoire permettant de déterminer  $\underline{F}_{X-Y}^{-1}(3/5)$  et  $\overline{F}_{X-Y}^{-1}(3/5)$  où  $m = 5$ ; i.e.

$$\underline{F}_{X-Y}^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) = \min \left( \underline{F}_X^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) - \overline{F}_Y^{-1}(0), \underline{F}_X^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) - \overline{F}_Y^{-1}\left(\frac{1}{5}\right), \underline{F}_X^{-1}(1) - \overline{F}_Y^{-1}\left(\frac{2}{5}\right) \right)$$


 FIG. 4.4 – Méthode numérique pour calculer  $\underline{F}_{X-Y}^{-1}(3/5)$ ,  $\overline{F}_{X-Y}^{-1}(3/5)$ .

et

$$\overline{F}_{X-Y}^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) = \max\left(\overline{F}_X^{-1}(0) - \underline{F}_Y^{-1}\left(\frac{2}{5}\right), \overline{F}_X^{-1}\left(\frac{1}{5}\right) - \overline{F}_Y^{-1}\left(\frac{3}{5}\right), \overline{F}_X^{-1}\left(\frac{2}{5}\right) - \overline{F}_Y^{-1}\left(\frac{4}{5}\right), \overline{F}_X^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) - \overline{F}_Y^{-1}(1)\right)$$

Dans le cas où l'on est confronté à plus de 2 variables comme dans notre modèle  $T$ , Ferson [47] combine de façon itérative les variables deux à deux. Supposons par exemple que l'on ait 3 variables  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  représentées par les p-boxes  $[\underline{F}_X, \overline{F}_X]$ ,  $[\underline{F}_Y, \overline{F}_Y]$  et  $[\underline{F}_Z, \overline{F}_Z]$  et que nous cherchons à estimer  $\underline{F}_{X+Y+Z}$ ,  $\overline{F}_{X+Y+Z}$ . Ferson [47] combine  $[\underline{F}_X, \overline{F}_X]$  avec  $[\underline{F}_Y, \overline{F}_Y]$  pour déterminer  $\underline{F}_{X+Y}$  et  $\overline{F}_{X+Y}$  puis enfin  $[\underline{F}_{X+Y}, \overline{F}_{X+Y}]$  avec  $[\underline{F}_Z, \overline{F}_Z]$  pour déterminer  $\underline{F}_{X+Y+Z}$  et  $\overline{F}_{X+Y+Z}$ . De façon générale, il va ainsi construire ce qui ressemble à une probabilité jointe inférieure

$$\underline{F}_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = \max\left(\sum_{i=1}^n F_{X_i}(x_i) - n + 1, 0\right)$$

du vecteur  $(X_1, \dots, X_n)$ . Malheureusement, bien que nous ayons [79]

$$\max\left(\sum_{i=1}^n F_{X_i}(x_i) - n + 1, 0\right) \leq F_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n)$$

$\max(\sum_{i=1}^n F_{X_i}(x_i) - n + 1, 0)$  n'est plus une copule. Cela signifie que ce procédé va considérer des structures de dépendances entre les variables qui sont impossibles. En effet, considérons 3 variables aléatoires  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  mal définies ; une telle combinaison des copules fournit alors une distribution de probabilité jointe  $F_{(X,Y,Z)}$  pour le vecteur aléatoire  $(X, Y, Z)$

$$F_{(X,Y,Z)}(x, y, z) = \max(F_X(x) + F_Y(y) + F_Z(z) - 2, 0)$$

Par projection, nous pouvons constater que cette probabilité jointe prend en compte une structure de dépendances impossible

$$F_{(X,Y)}(x, y) = \lim_{z \rightarrow +\infty} \max(F_X(x) + F_Y(y) + F_Z(z) - 2, 0)$$

C'est à dire

$$F_{(X,Y)}(x, y) = \max(F_X(x) + F_Y(y) - 1, 0) \quad (4.4)$$

De manière similaire nous obtenons

$$F_{(Y,Z)}(y, z) = \max(F_Y(y) + F_Z(z) - 1, 0) \quad (4.5)$$

$$F_{(Z,X)}(z, x) = \max(F_X(x) + F_Z(z) - 1, 0) \quad (4.6)$$

Ceci signifie que  $Y$  est presque sûrement une fonction décroissante de  $X$ ,  $Z$  est presque sûrement une fonction décroissante de  $Y$  et  $Z$  est presque sûrement une fonction décroissante de  $X$ . Cependant, les conditions (4.4) (4.5) impliquent que  $Z$  doit être presque sûrement une fonction croissante de  $X$  ce qui est contradictoire avec la dernière condition (4.6).

Pour résumer, la méthode "*Dependency Bounds Convolution*" est une méthode conservatrice dans le sens où elle fournit un encadrement de la probabilité cumulée mal connue  $F^T$  sans hypothèse d'(in)dépendances entre les variables. Elle est valable seulement pour 2 variables, au delà elle peut paraître trop conservatrice compte tenu du fait qu'elle prend en considération des structures de dépendance impossibles.

#### 4.5 "*Conservative Random Sets*" versus "*Dependency Bounds Convolution*"

Ferson et al. [46] ont montré que les méthodes "*Conservative Random Sets*" et "*Dependency Bounds Convolution*" sont équivalentes pour déterminer les bornes de la probabilité cumulée d'un modèle mathématiques de 2 variables positives. En revanche cela n'est plus vrai dans le cas de 3 variables et plus.

Soit  $X$  (resp.  $Y$  et  $Z$ ) une variable aléatoire réelle positive mal connue représentée par une fonction de croyance  $\nu^X$  (resp.  $\nu^Y$  et  $\nu^Z$ ) telle que  $\nu^X([3, 4]) = 0.5$ ,  $\nu^X([2, 5]) = 0.5$  (resp.  $\nu^Y([3, 5]) = 0.5$ ,  $\nu^Y([2, 6]) = 0.5$  et  $\nu^Z([4, 5]) = 0.5$ ,  $\nu^Z([3, 6]) = 0.5$ ) et  $T(x, y, z) = (x+y) \times z$ . Nous essayons d'estimer un encadrement de  $F^T$  en utilisant les méthodes "*Conservative Random Sets*" et "*Dependency Bounds Convolution*". La Figure 4.9 représente les p-boxes  $[\underline{E}_X, \overline{F}_X]$ ,  $[\underline{E}_Y, \overline{F}_Y]$  et  $[\underline{E}_Z, \overline{F}_Z]$  déduites des fonctions de masse associées aux variables  $X$ ,  $Y$  et  $Z$ . La Figure 4.6 représente les probabilités cumulées haute et basse en appliquant soit la méthode "*Dependency Bounds Convolution*" soit la méthode "*Conservative Random Sets*".

Nous pouvons observer que  $\overline{F}_T(16) = 1$  alors que  $Pl_{max}((-\infty, 16]) = 0.75$ . Cela signifie

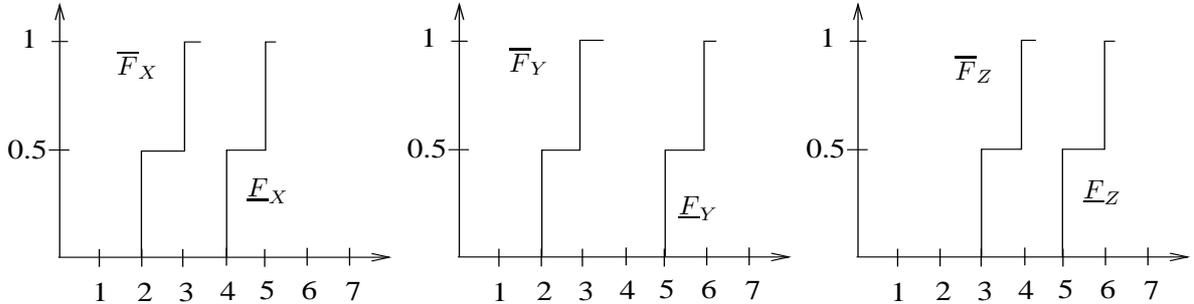
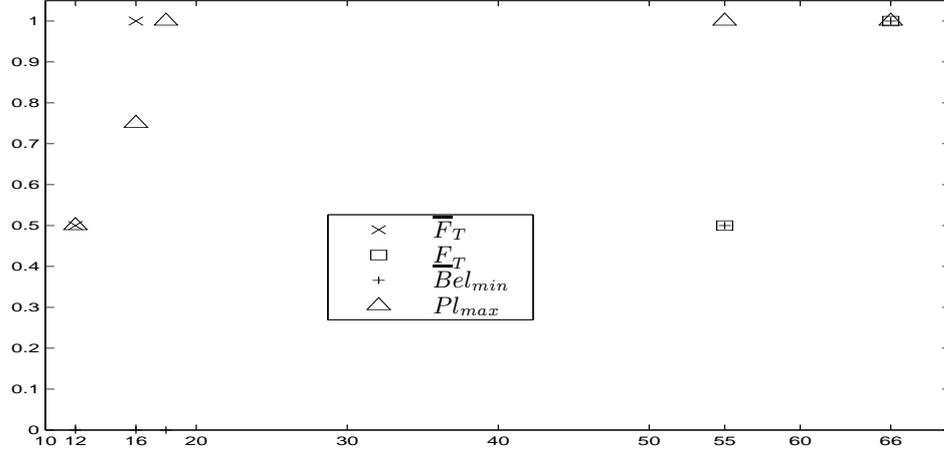


FIG. 4.5 – p-box of  $X$ ,  $Y$  et  $Z$

qu'il n'existe aucune masse de distribution  $\nu^T$  telle que  $Pl((-\infty, 16]) = 1$ . Donc, supposons


 FIG. 4.6 – Probabilités cumulées haute et basse de  $T$ 

qu'une telle masse de distribution existe. Nous avons deux éléments focaux associés à chaque variable, cela signifie qu'il y a huit éléments focaux associés à  $T$  :

$X$	$Y$	$Z$	$(X + Y) \times Z$	$\nu^T$
[3, 4]	[3, 5]	[4, 5]	[45, 100]	$\nu_{111}$
[3, 4]	[3, 5]	[3, 6]	[18, 54]	$\nu_{112}$
[3, 4]	[2, 6]	[4, 5]	[20, 50]	$\nu_{121}$
[3, 4]	[2, 6]	[3, 6]	[15, 60]	$\nu_{122}$
[2, 5]	[3, 5]	[4, 5]	[20, 50]	$\nu_{211}$
[2, 5]	[3, 5]	[3, 6]	[15, 60]	$\nu_{212}$
[2, 5]	[2, 6]	[4, 5]	[16, 55]	$\nu_{221}$
[2, 5]	[2, 6]	[3, 6]	[12, 66]	$\nu_{222}$

Nous calculons  $Pl_{max}((-\infty, 16])$  en résolvant les deux problèmes suivants :

$$\begin{aligned}
 & \max \nu_{122} + \nu_{212} + \nu_{221} + \nu_{222} \\
 & \nu_{111} + \nu_{112} + \nu_{121} + \nu_{122} = 0.5 \quad C(1) \\
 & \nu_{211} + \nu_{212} + \nu_{221} + \nu_{222} = 0.5 \quad C(2) \\
 & \nu_{111} + \nu_{112} + \nu_{211} + \nu_{212} = 0.5 \quad C(3) \\
 & \nu_{121} + \nu_{122} + \nu_{221} + \nu_{222} = 0.5 \quad C(4) \\
 & \nu_{111} + \nu_{121} + \nu_{211} + \nu_{221} = 0.5 \quad C(5) \\
 & \nu_{112} + \nu_{122} + \nu_{212} + \nu_{222} = 0.5 \quad C(6) \\
 & \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \nu_{ijk} = 1 \quad C(7)
 \end{aligned}$$

Nous avons supposé que  $Pl_{max}((-\infty, 16]) = 1$ . Cela signifie que  $\nu_{122} + \nu_{212} + \nu_{221} + \nu_{222} = 1$ . Par conséquent, la dernière contrainte  $C(7)$  implique :

$$\begin{aligned}
 \nu_{111} &= 0 \\
 \nu_{112} &= 0 \\
 \nu_{121} &= 0 \\
 \nu_{211} &= 0
 \end{aligned}$$

Les contraintes  $C(1)$  et  $C(5)$  impliquent donc :  $\nu_{122} = 0.5$  et  $\nu_{221} = 0.5$ . Par conséquent,  $\nu_{122} + \nu_{221} = 1$ , alors qu'en accord avec  $C(4)$ , cela aurait dû être égal à 0.5. Ainsi, la famille de probabilité  $\mathcal{P}(\nu^T)$  obtenue par la méthode "Conservative Random Sets", tout en

étant maximalement conservative, est plus précise que la famille  $\mathcal{P}(\underline{F}_T < \overline{F}_T)$  obtenue par la méthode "Dependency Bounds Convolution".

## 4.6 Synthèse de la propagation des incertitudes stochastiques et épistémiques

1. La méthode "Hybride" (voir Section 4.2 Chapitre 4) permet de combiner de l'information hétérogène (imprécision-variabilité) au moyen du calcul Monte-Carlo et du calcul possibiliste. Elle modélise les dépendances entre les incertitudes stochastiques par des corrélations quand elles sont connues ou par une hypothèse d'indépendance. Pour les incertitudes épistémiques, elle impose une dépendance totale sur les sources d'information relatives aux quantités mal connues : elle va associer les valeurs des variables mal connues prises au même niveau de confiance pour le calcul du risque. Enfin, elle fait une hypothèse d'indépendance entre les incertitudes stochastiques et épistémiques. Par contre, on n'est pas certain d'obtenir un encadrement conservateur de la probabilité du résultat dans le cas d'une modélisation purement probabiliste avec hypothèse d'indépendance.

2. La méthode "Independent Random Sets" / "Ensembles Aléatoires Indépendants" de la Section 4.3.1 Chapitre 4.

Nous nous ramenons dans le cadre homogène de Dempster-Shafer [88] où toute probabilité et toute possibilité peut se représenter à l'aide d'une fonction de croyance. A la différence de la méthode "Hybride", on prend une hypothèse d'indépendance entre les sources d'information des variables mal connues modélisées par des possibilités. Cette méthode conduit donc à une incertitude parfois plus faible sur les résultats que la méthode "Hybride" dans le sens où les scénarios associant plusieurs sources d'incertitude peu probables ont moins de chance de se réaliser. Par contre, elle permet d'obtenir une enveloppe conservatrice de l'approche purement probabiliste qui fait l'hypothèse d'indépendance entre les paramètres.

3. La méthode "Conservative Random Sets" / "propagation d'ensembles aléatoires sans hypothèse de dépendances" de la Section 4.3.2 Chapitre 4.

Dans cette méthode, on va chercher pour chaque valeur du modèle  $T$  sa crédibilité minimale (probabilité basse) et sa plausibilité maximale (probabilité haute) sans faire d'hypothèse sur les dépendances des incertitudes sources (stochastiques et épistémiques). Conséquemment, les hypothèses de dépendances ne sont pas les mêmes pour les différentes valeurs du modèle  $T$  : pour chaque valeur du modèle, on détermine par optimisation numérique les dépendances entre les incertitudes sources qui minimisent la crédibilité puis les dépendances qui maximisent la plausibilité.

4. La méthode "Dependency Bounds Convolution" / "propagation de p-box sans hypothèse de dépendances" de la Section 4.4 Chapitre 4.

Cette méthode fournit la p-box du modèle  $T$  sans supposer d'hypothèse sur la structure des dépendances entre deux variables. Les dépendances extrêmes sont modélisées de

manière itérative au moyen de copules qui permettent de définir les probabilités jointes haute et basse d'un couple de variables aléatoires. Cette méthode est équivalente à la méthode "Conservative Random Sets" dans le cas de 2 variables. Cependant, elle fournit des résultats, certes conservatifs, mais plus imprécis quand le modèle  $T$  possède plus de 2 variables puisque la combinaison itérative des copules ne fournit plus une copule et considère par conséquent des structures de dépendances impossibles.

Il faut être conscient que l'écart entre la probabilité haute  $Pl$  et la probabilité basse  $Bel$  du modèle  $T$  n'est plus uniquement dû au caractère imprécis de l'information des paramètres sources mais est aussi dû à la méthode de propagation utilisée selon les hypothèses d'indépendance qu'elle utilise. En effet, les méthodes "Hybride", "Independent Random Sets", "Conservative Random Sets" et "Dependency Bounds Convolution" ne modélisent pas de la même façon les dépendances entre les paramètres sources.

### 4.7 Résultats issus des méthodes de propagation sur un cas synthétique

Considérons un cas synthétique où le modèle  $T$  est défini par  $T : (x, y, z) \mapsto (x + z)/y$ . Supposons que la connaissance sur le paramètre  $x$  (resp.  $y$  et  $z$ ) soit représentée par une distribution de possibilité  $\pi_X$  de noyau [5, 6] et de support [3, 7] (resp. une distribution de possibilité  $\pi_Y$  de noyau [3, 4], de support [1, 5] et une distribution de probabilité uniforme sur [2, 4]) (voir Figure 4.7).

La Figure 4.8 représente un échantillon de 17 distributions de possibilité issu du calcul

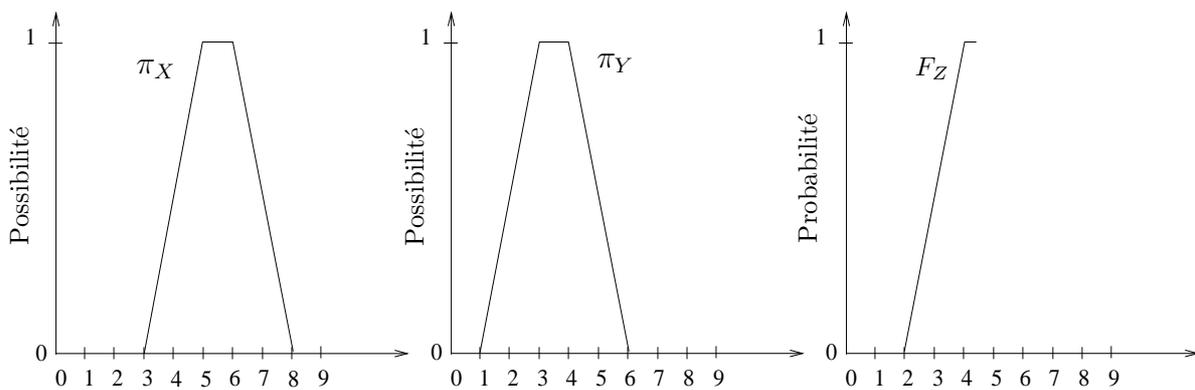


FIG. 4.7 – Représentation mathématiques des paramètres  $x$ ,  $y$  et  $z$  du modèle  $T$

"Hybride" du modèle  $T : (x, y, z) \mapsto (x + z)/y$ . Nous verrons dans le prochain chapitre comment exploiter ces résultats afin d'extraire de l'information utile et pertinente pour une prise de décision. Nous avons vu que l'utilisation des méthodes "Independent Random Sets", "Conservative Random Sets" et "Dependency Bounds Convolution" traite directement les probabilités d'événements de par leurs mises en oeuvre. Ainsi, la Figure 4.9 représente les probabilités cumulées hautes et basses du modèle  $T : (x, y, z) \mapsto (x + z)/y$  selon la méthode

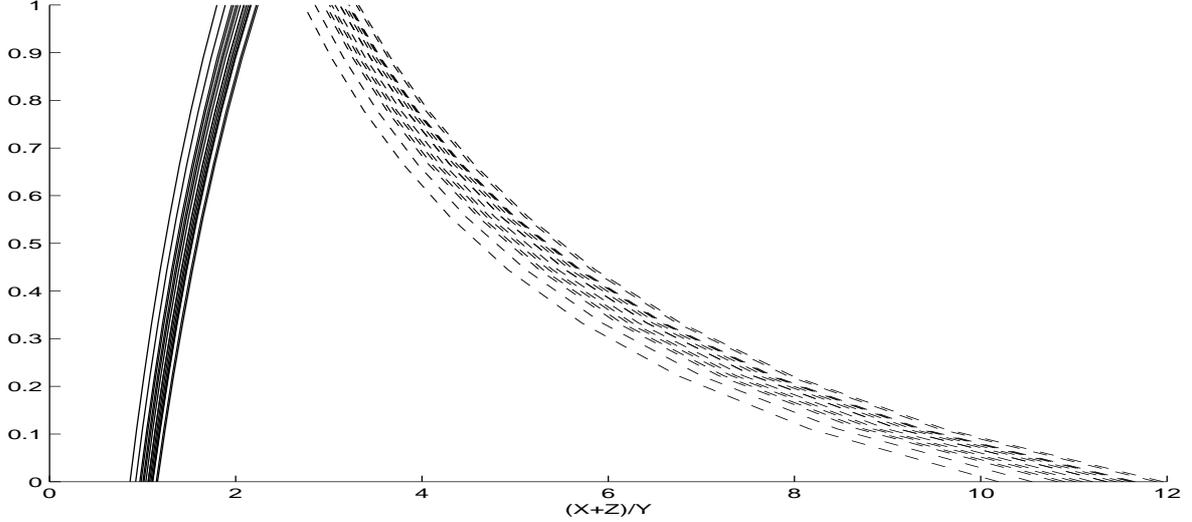


FIG. 4.8 – Un échantillon de 17 distributions de possibilité issu du calcul "Hybride"

de propagation utilisée. Nous pouvons observer que

$$\begin{aligned} \underline{P}_{DBC}^T((-\infty, t]) &\leq \underline{P}_{CRS}^T((-\infty, t]) \leq \underline{P}_{IRS}^T((-\infty, t]) \\ &\leq P(T \in (-\infty, t]) \leq \\ \overline{P}_{IRS}^T((-\infty, t]) &\leq \overline{P}_{DBC}^T((-\infty, t]) \leq \overline{P}_{CRS}^T((-\infty, t]) \end{aligned}$$

Nous pouvons remarquer que nous sommes "sûrs" à 95% que le modèle  $T$  ne dépassera pas 9 (resp. 10.31) dans le cadre de la méthode "Independent Random Sets" (resp. "Conservative Random Sets").

## 4.8 Discussion sur le Monte-Carlo 2D

La technique de Monte-Carlo 2D ([24, 66]) est typiquement utilisée quand les paramètres  $x$  du modèle de risque  $T$  sont modélisés par des modèles probabilistes paramétriques  $P_\Theta$  où ces paramètres  $\Theta$  sont imprécis. L'évaluateur peut être capable d'identifier un type de loi (modèle probabiliste paramétrique) pour représenter la connaissance sur les paramètres du modèle de risque mais fournit seulement un encadrement pour les paramètres  $\theta \in [\underline{\Theta}, \overline{\Theta}]$ . Nous décrivons brièvement la méthode de Monte-Carlo 2D

1. On suppose une loi  $\Theta$  et on simule un échantillon de  $m$  réalisations  $(\Theta_i)_{i=1\dots m}$ .
2. Pour chaque tirage  $i = 1 \dots m$ , on génère un échantillon de  $n$  réalisations  $(X_j(\Theta_i))_{j=1\dots n}$  à partir des lois marginales associées aux variables aléatoires  $X$  en tenant compte des (in)dépendances si celles-ci sont connues.
3. On obtient ainsi  $m$  distributions  $(T_{j=1\dots n}^{\Theta_1}(X), \dots, T_{j=1\dots n}^{\Theta_m}(X))$  où les  $T_{j=1\dots n}^{\Theta_k}(X)$ ,  $\forall k = 1 \dots m$  sont elles-mêmes des distributions de probabilité.  $T(X)$  devient une sorte de méta-distribution de probabilité.

L'évaluateur espère ainsi découvrir comment la variabilité et l'imprécision interagissent sur le modèle de risque. La première simulation est censée représenter l'information imprécise sur les paramètres  $\Theta$ . La principale faiblesse de cette méthode est l'utilisation de probabilités

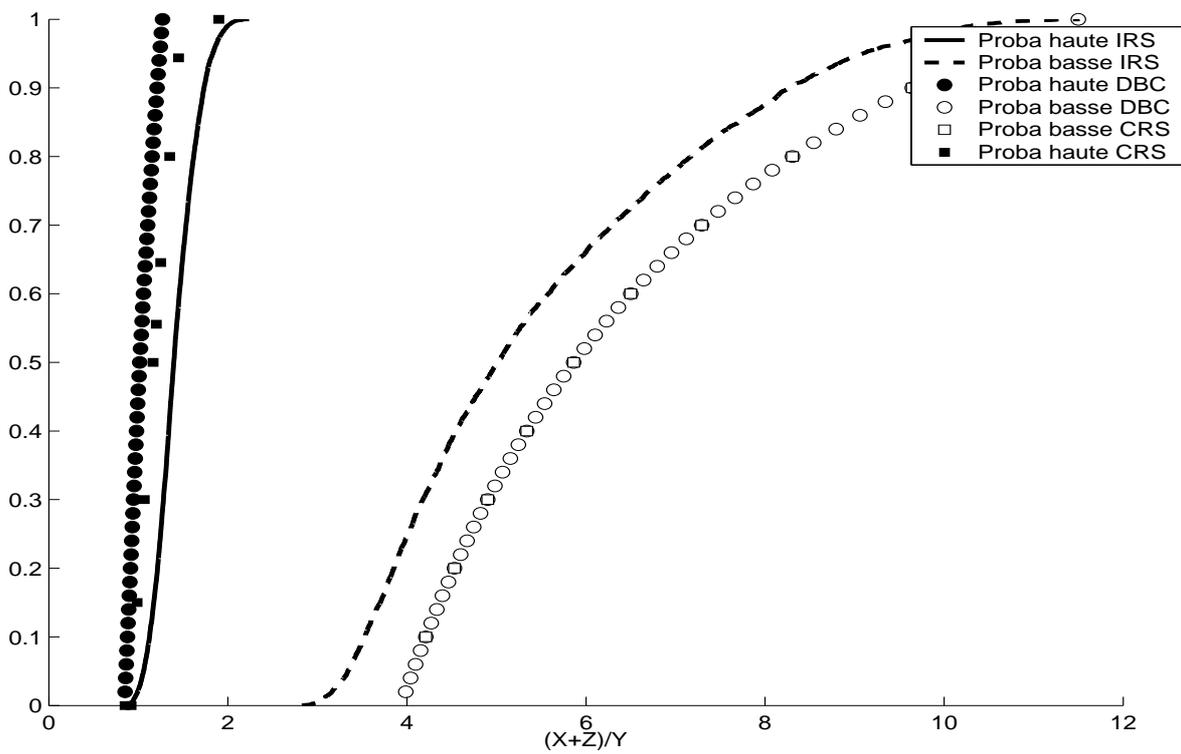


FIG. 4.9 – Probabilités cumulées hautes et basses du modèle  $\frac{(X+Z)}{Y}$  selon les 3 méthodes de propagation. CRS="Conservative Random Sets", IRS="Independent Random Sets", DBC="Dependency Bounds Convolution"

marginales uniques (uniforme dans le cas des intervalles) pour représenter la connaissance imprécise sur  $\Theta$ . En effet, nous avons déjà mis en évidence que ce choix est arbitraire et ne reflète pas le caractère imprécis de l'information. De plus, comment prendre en compte la structure des dépendances entre les variables aléatoires associées aux paramètres  $\Theta$ . Par exemple, si un des modèles paramétriques est une loi normale  $\mathcal{F}(\mu, \sigma)$ , comment justifier l'(in)dépendance entre  $\mu$  et  $\sigma$ ? Il paraît illusoire de penser que le 2D Monte-Carlo permet de prendre en compte l'information de nature imprécise. Il fournit un ensemble de  $m$  distributions de probabilité autant que de valeurs distinctes de  $\Theta$  choisies. Certains auteurs ont voulu synthétiser cet ensemble en une probabilité unique ce qui revient à confondre imprécision et variabilité, chose que nous ne voulons pas faire. Ainsi, il est plus cohérent d'utiliser les p-boxes pour représenter ce type d'information (voir Section 3.2.3).

## Chapitre 5

# Exploitation des résultats issus de la propagation des incertitudes

Nous allons dans ce chapitre présenter les exploitations possibles des résultats issus de la propagation des incertitudes épistémiques et stochastiques à travers le modèle  $T$  pour une phase décisionnelle.

### 5.1 Présentation des résultats issus de la propagation des fonctions de croyance

La propagation des incertitudes dans le cadre des fonctions de croyance de Dempster-Shafer (voir Section 4.3) fournit un ensemble aléatoire d'intervalles  $([\underline{T}_i, \overline{T}_i])_i$  (éléments focaux) auquel est associé une distribution de masse  $(\nu_i^T)_i$ . A partir de ce résultat, nous pouvons dans un premier temps fournir deux indicateurs caractérisant l'imprécision et la variabilité du modèle  $T$ . Supposons que l'on dispose de  $m$  éléments focaux.

#### 5.1.1 Mesurer la variabilité et l'imprécision séparément

Il est possible de résumer l'imprécision contenue dans un ensemble d'intervalles  $([\underline{T}_i, \overline{T}_i])_{i=1\dots m}$  via l'intervalle moyen  $M(T)$  défini par

$$M(T) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m [\underline{T}_i, \overline{T}_i]$$

La longueur  $L$  de l'intervalle  $M(T)$  reflète l'imprécision moyenne de l'ensemble des intervalles et fournit donc un indicateur de l'imprécision du modèle  $T$ . Nous pourrions aussi calculer la variance de l'imprécision.

Pour estimer l'indicateur de variabilité empirique  $V^T$  de  $T$ , on peut travailler avec une valeur représentative de chaque intervalle  $([\underline{T}_i, \overline{T}_i])_{i=1\dots m}$  et utiliser l'estimateur standard de la variance empirique :

$$V = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (h_i^T)^2 - \frac{2}{m(m-1)} \sum_{j<i} h_j^T h_i^T \quad (5.1)$$

où  $h_i^T$  est une valeur représentative de l'intervalle  $[\underline{T}_i, \overline{T}_i]$ . On peut choisir comme valeur représentative  $h_i^T$  le milieu de l'intervalle.

On pourrait également estimer un intervalle de la variance potentielle des observations  $[\underline{V}_T, \overline{V}_T]$  si elle avait été précise. En effet, considérons la fonction estimant la variance :

$$V : (x_1, \dots, x_m) \mapsto \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_i^2 - \frac{2}{m(m-1)} \sum_{j<i} x_j x_i \quad (5.2)$$

Pour obtenir  $[\underline{V}_T, \overline{V}_T]$ , nous résolvons les deux problèmes suivants :

$$\underline{V}_T = \inf_{x_i \in [\underline{T}_i, \overline{T}_i]} V(x_1, \dots, x_m)$$

$$\overline{V}_T = \sup_{x_i \in [\underline{T}_i, \overline{T}_i]} V(x_1, \dots, x_m)$$

Cet intervalle de variance décrit une variance potentielle du modèle  $T$ , car elle scanne les variances de toutes les probabilités contenues dans la famille de probabilités définie par la distribution de masse  $(\nu_i^T)_{i=1\dots m}$ . La fonction  $V$  n'atteint pas forcément ses extrema sur les bornes des intervalles  $[\underline{T}_i, \overline{T}_i]$ . Cependant, Ferson et al. [50] ont proposé une méthode polynomiale de calcul du minimum  $\underline{V}_T$ . La fonction  $V$  étant quadratique, elle atteindra sa borne supérieure sur une configuration extrême. Un algorithme simple pour calculer le maximum  $\overline{V}_T$  est donc de calculer les  $2^m$  configurations extrêmes pour ne garder que la plus grande valeur ainsi calculée. Fortin et al. [59] ont proposé une méthode plus rapide pour déterminer cette valeur maximale  $\overline{V}_T$ .

### 5.1.2 Estimer la probabilité d'un dépassement de seuil (vision verticale)

La vision verticale consiste à se fixer un seuil sur l'axe des abscisses et de fournir la probabilité de dépasser ou non ce seuil. Dans le cadre des fonctions de croyance, nous pouvons déterminer par définition la plausibilité  $Pl$  (probabilité haute) et la crédibilité  $Bel$  (probabilité basse) de n'importe quel ensemble mesurable  $A$  par

$$Pl(A) = \sum_{i=1, [\underline{T}_i, \overline{T}_i] \cap A \neq \emptyset}^m \nu_i^T \quad \text{et} \quad Bel(A) = \sum_{i=1, [\underline{T}_i, \overline{T}_i] \subseteq A}^m \nu_i^T$$

Nous pouvons alors nous intéresser à la probabilité que le résultat du modèle  $T$  soit inférieur à un certain seuil, i.e.  $P(T(X_1, \dots, X_n) \leq \text{seuil})$ . La Figure 5.1 représente la probabilité cumulée haute  $Pl^T((-\infty, t])$  et la probabilité cumulée basse  $Bel^T((-\infty, t])$  associées à la variable  $T(X, Y, Z)$  du cas synthétique de la Section 4.7. Ces deux probabilités sont issues de la méthode "Independent Random Sets". L'écart entre la probabilité haute  $Pl^T((-\infty, t])$  et la probabilité basse  $Bel^T((-\infty, t])$  est dû à l'imprécision de l'information concernant les paramètres  $x$  et  $y$ . Cet écart est également lié au choix de la méthode de propagation utilisée, à savoir la méthode "Independent Random Sets", qui fait l'hypothèse d'indépendance entre les incertitudes sources. Dans ces conditions, nous avons

$$Bel^T((-\infty, t]) \leq P(T(X, Y, Z) \leq t) \leq Pl^T((-\infty, t])$$

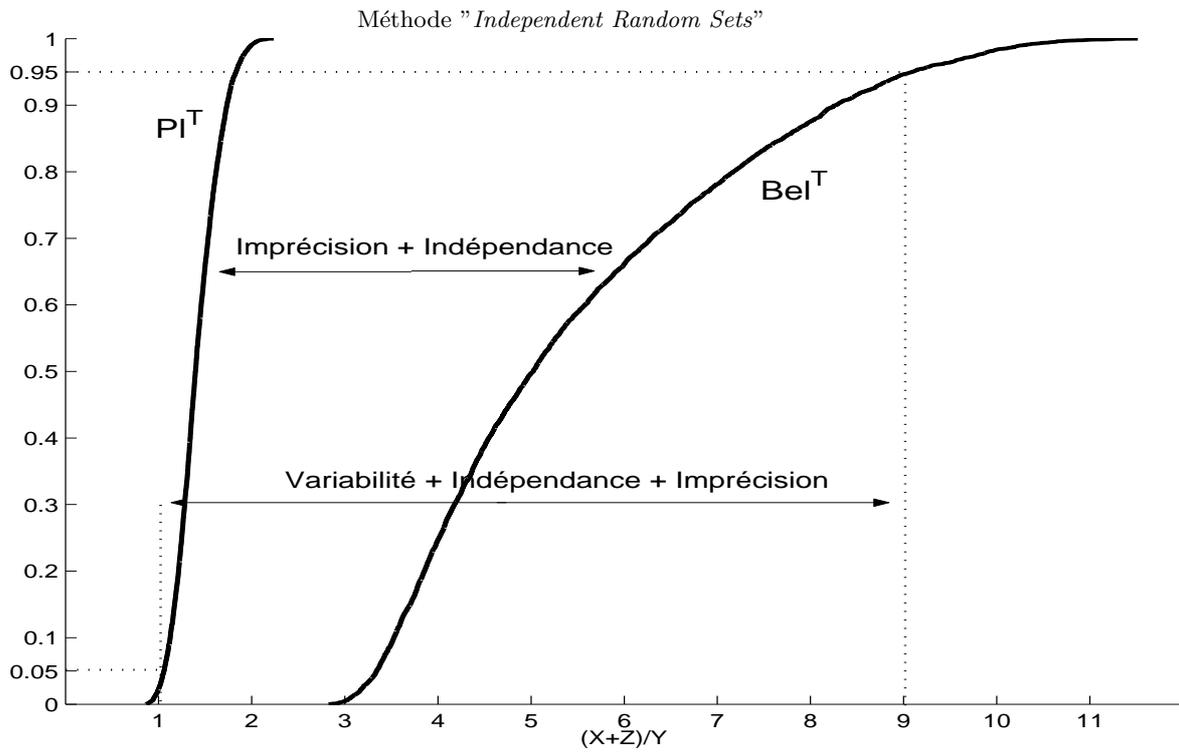


FIG. 5.1 – Probabilités haute  $Pl^T((-\infty, t])$  et basse  $Bel^T((-\infty, t])$  associée à la variable  $T(X, Y, Z) = (X + Z)/Y$

Si nous nous fixons un seuil égal à 9, nous sommes alors certain à 95% de ne pas dépasser ce seuil (voir Figure 5.1).

Une manière de caractériser l'incertitude totale du modèle  $T$  est d'utiliser l'intervalle  $[\overline{F}^{-1}(0.05), \underline{F}^{-1}(0.95)]$  où  $\overline{F}(t) = Pl^T((-\infty, t])$  et  $\underline{F}(t) = Bel^T((-\infty, t])$ . Ainsi, nous obtenons, dans notre exemple, l'intervalle  $[1, 9]$  contenant le caractère imprécis et aléatoire du modèle  $T$ . Si nous cherchons à estimer la probabilité d'être inférieure à 2.5, nous remarquons que

$$0 \leq P(T(X, Y, Z) \leq 2.5) \leq 1$$

Ceci signifie que nous sommes dans une ignorance totale de la probabilité de ne pas dépasser le seuil de 2.5.

D'un autre côté, nous pouvons nous intéresser à la probabilité que le modèle dépasse un certain seuil, i.e.  $P(T(X_1, \dots, X_n) > \text{seuil})$ . La Figure 5.2 représente la probabilité haute  $Pl^T([t, +\infty))$  et la probabilité basse  $Bel^T([t, +\infty))$  de dépasser le seuil  $t$  associées à la variable  $T(X, Y, Z)$  du cas synthétique de la Section 4.7. Ces deux probabilités sont issues de la méthode "Independent Random Sets". Ainsi, on est sûr à 95% de dépasser le seuil de 1.

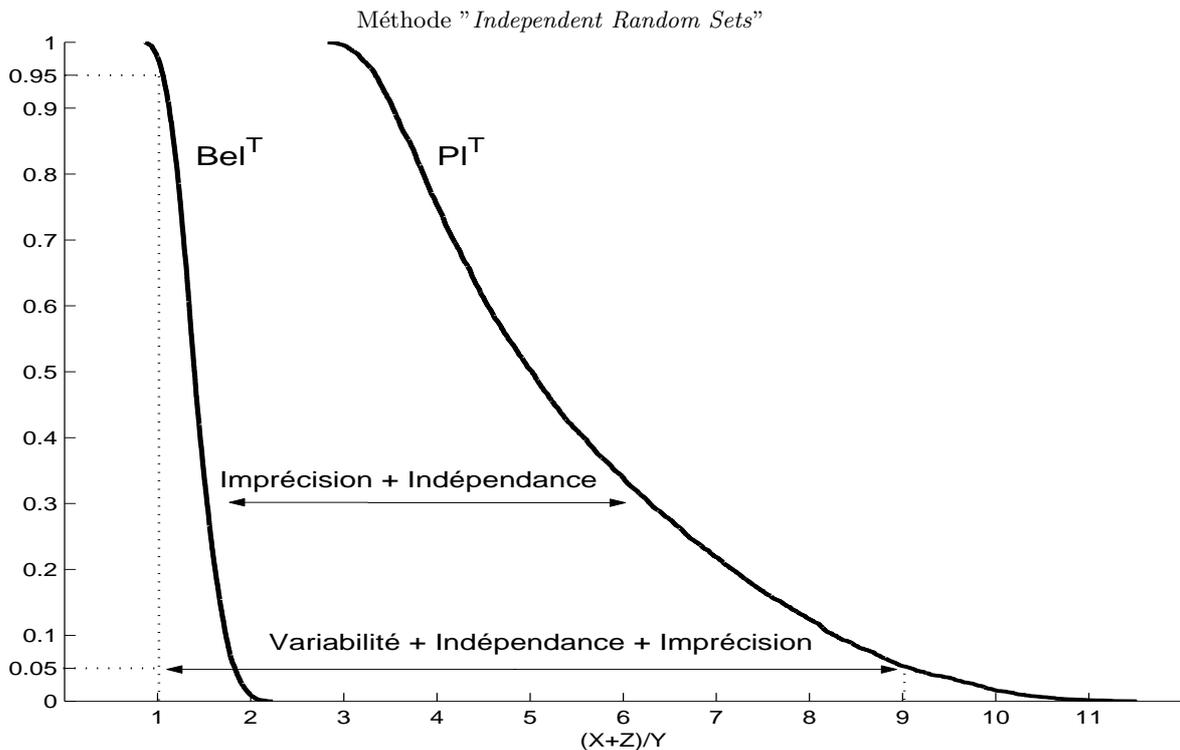


FIG. 5.2 – Probabilités haute  $Pl^T([t, +\infty))$  et basse  $Bel^T([t, +\infty))$  associée à la variable  $T(X, Y, Z) = (X + Z)/Y$

Nous pouvons également nous intéresser aux événements du type intervalle. C'est à dire que nous cherchons à estimer  $P(T(X_1, \dots, X_n) \in [t_1, t_2])$ . Notons que dans ce cas de figure, la méthode "Dependency Bounds Convolution" n'est pas adaptée puisque elle traite et fournit seulement un encadrement des probabilités que le résultat du modèle de risque soit

supérieur ou inférieur à un seuil. Nous estimons un encadrement  $[Bel^T([t_1, t_2]), Pl^T([t_1, t_2])]$  de  $P(T(X_1, \dots, X_n) \in [t_1, t_2])$  par

$$Bel^T([t_1, t_2]) = \sum_{i, [\underline{T}_i, \overline{T}_i] \subseteq [t_1, t_2]} \nu_i^T \quad \text{et} \quad Pl^T([t_1, t_2]) = \sum_{i, [\underline{T}_i, \overline{T}_i] \cap [t_1, t_2] \neq \emptyset} \nu_i^T$$

### 5.1.3 Intervalles de Prédiction (vision horizontale)

La vision horizontale consiste à se fixer une probabilité et à fournir l'intervalle correspondant. C'est à dire que nous cherchons à estimer les intervalles  $[t_1, t_2]_\alpha$  tels que

$$P(T(X_1, \dots, X_n) \in [t_1, t_2]_\alpha) \geq 1 - \alpha$$

Pour se faire, nous allons fournir une approximation inférieure  $\underline{[t_1, t_2]}_\alpha$  et supérieure  $\overline{[t_1, t_2]}_\alpha$  de ces intervalles tels que

$$\underline{[t_1, t_2]}_\alpha \subseteq [t_1, t_2]_\alpha \subseteq \overline{[t_1, t_2]}_\alpha$$

Nous pouvons définir une distribution de possibilité  $\pi_i^T$  telle que

$$\pi_i^T(t) = \sum_{i, t \in [\underline{T}_i, \overline{T}_i]} \nu_i^T$$

Nous pouvons par conséquent déterminer une borne inférieure  $\underline{\Pi}^T([t_1, t_2])$  de  $Pl^T([t_1, t_2])$  (resp. une borne supérieure  $\overline{N}^T([t_1, t_2])$  de  $Bel^T([t_1, t_2])$  par dualité) [37] par

$$\underline{\Pi}^T([t_1, t_2]) = \sup_{t \in [t_1, t_2]} \pi_i^T(t)$$

En effet, nous avons

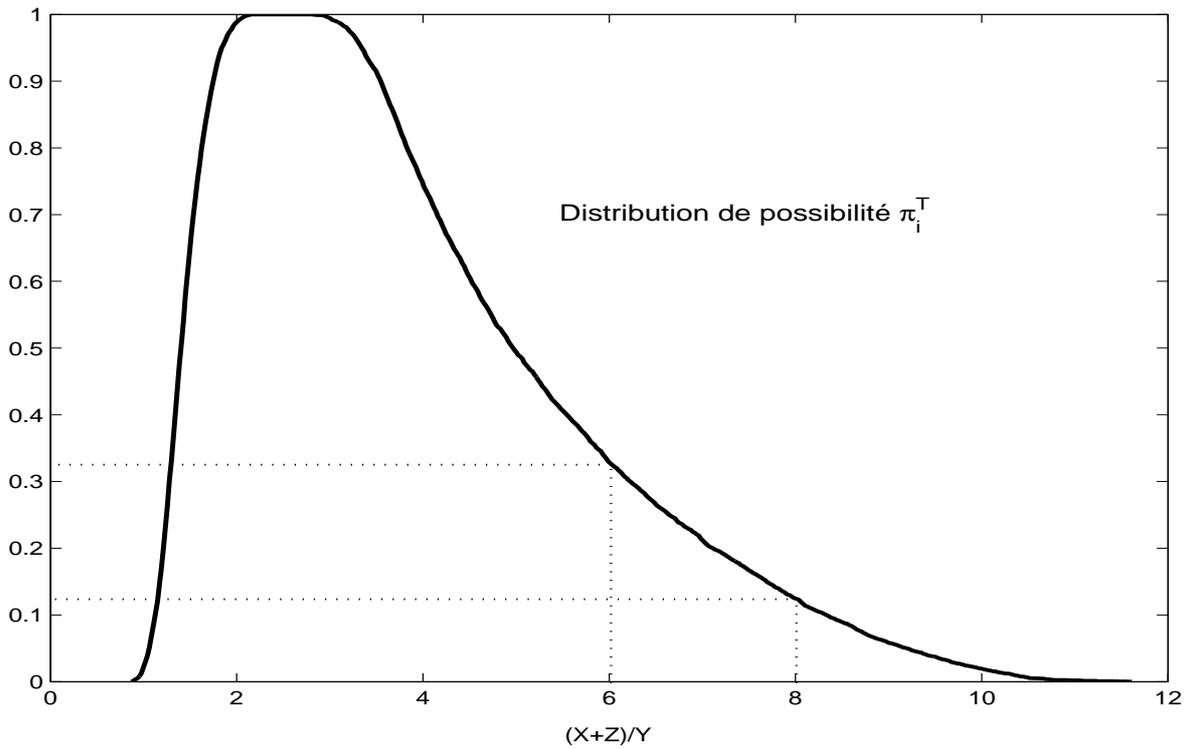
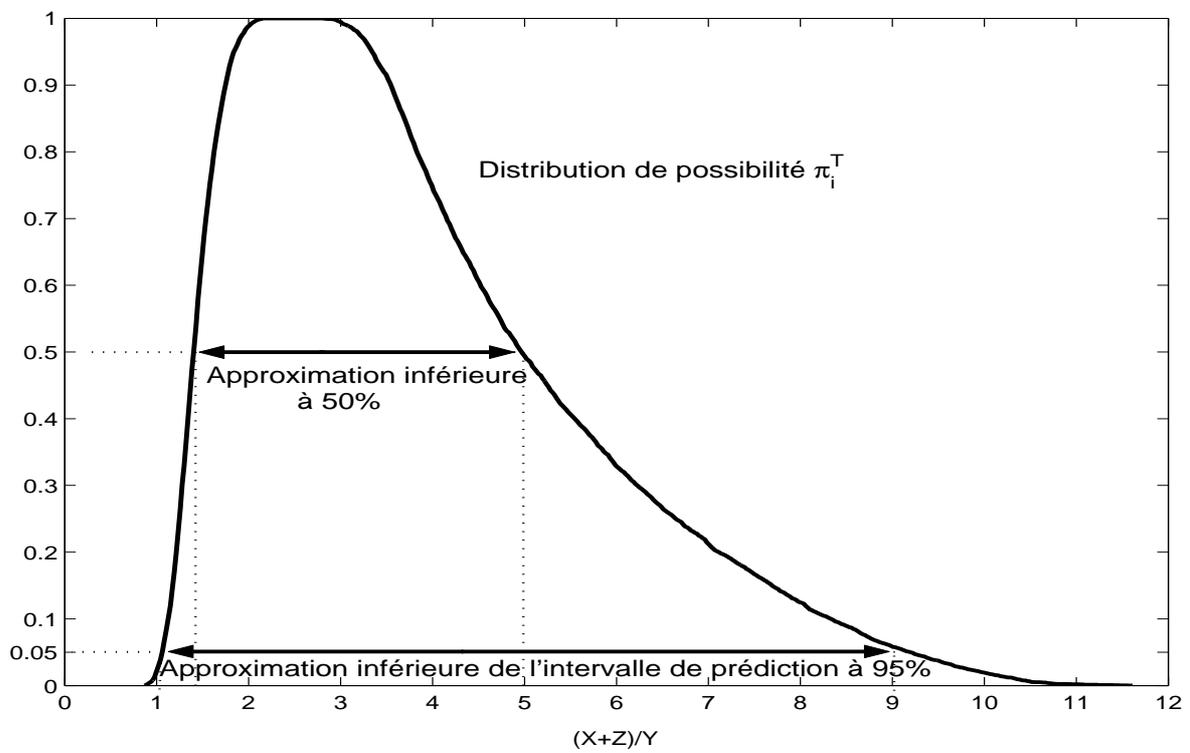
$$\begin{aligned} & \forall t \in A \quad \sum_{i, t \in [\underline{T}_i, \overline{T}_i]} \nu_i^T \leq \sum_{i, A \cap [\underline{T}_i, \overline{T}_i] \neq \emptyset} \nu_i^T \\ \Rightarrow & \forall t \in A \quad \sum_{i, t \in [\underline{T}_i, \overline{T}_i]} \nu_i^T \leq Pl^T(A) \\ \Rightarrow & \sup_{t \in A} \sum_{i, t \in [\underline{T}_i, \overline{T}_i]} \nu_i^T \leq Pl^T(A) \\ \Rightarrow & \underline{\Pi}^T(A) \leq Pl^T(A) \end{aligned}$$

La distribution de possibilité  $\pi_i^T$  (voir Figure 5.3) permet de définir la mesure de possibilité  $\underline{\Pi}^T$  (resp. mesure de nécessité  $\overline{N}^T$ ) qui approxime la mesure de plausibilité  $Pl^T$  (resp. la mesure de crédibilité  $Bel^T$ ) telle que [37]

$$\overline{N}^T(A), \underline{\Pi}^T(A) \subseteq [Bel^T(A), Pl^T(A)] \quad \forall A \text{ mesurable}$$

Ainsi, nous avons, par exemple (voir Figure 5.3),  $\underline{\Pi}^T([6, 8]) = 0.32$ , concernant l'exemple du cas synthétique de la Section 4.7. La fonction  $\pi_i^T$  permet ainsi de visualiser les résultats et de fournir une première approximation inférieure des intervalles de prédiction de  $T(X_1, \dots, X_n)$ . C'est à dire qu'elle fournit les intervalles  $\underline{[t_1, t_2]}_\alpha \subseteq [t_1, t_2]_\alpha$  telles que  $P(T(X_1, \dots, X_n) \in [t_1, t_2]_\alpha) \geq P(T(X_1, \dots, X_n) \in \underline{[t_1, t_2]}_\alpha) \geq 1 - \alpha$ .

Par exemple, si nous fixons  $\alpha = 5\%$  (resp.  $\alpha = 50\%$ ), nous obtenons l'intervalle  $[1, 9]$  (resp.  $[1.4, 5]$ ) qui signifie que nous savons que l'intervalle de prédiction à 95% (resp. 50%) contiendra l'intervalle  $[1, 9]$  (resp.  $[1.4, 5]$ ) (voir Figure 5.4).

FIG. 5.3 – Distribution de possibilité  $\pi_i^T$ FIG. 5.4 – Approximation inférieure des intervalles de prédiction  $T(X, Y, Z) = (X + Z)/Y$

Nous pouvons également déterminer une approximation supérieure  $\overline{[t_1, t_2]}_\alpha$  [37] des intervalles de prédiction  $[t_1, t_2]_\alpha$  à partir de la distribution de masse  $(\nu_i^T)_i$  et ainsi fournir une enveloppe des intervalles de prédiction de  $T(X_1, \dots, X_n)$ . Il suffit de définir une distribution de possibilité  $\pi_s^T$  en construisant un ensemble d'intervalles emboîtés à partir des éléments focaux  $[\underline{T}_i, \overline{T}_i]$  du modèle  $T$ . Cette distribution ne sera pas unique car elle dépend de comment on construit les intervalles emboîtés à partir des éléments focaux. Cependant, elle a l'avantage de fournir une approximation enveloppant les intervalles de prédiction du modèle  $T$ . Nous pouvons, par exemple, construire l'ensemble des intervalles emboîtés, définissant ainsi  $\pi_s^T$ , en faisant l'union des éléments focaux  $[\underline{T}_i, \overline{T}_i]$  qui sont contenus dans les coupes de la distribution de possibilité inférieure  $\pi_i^T$  [37]. La figure 5.5 représente une distribution de possibilité  $\pi_s^T$ ,

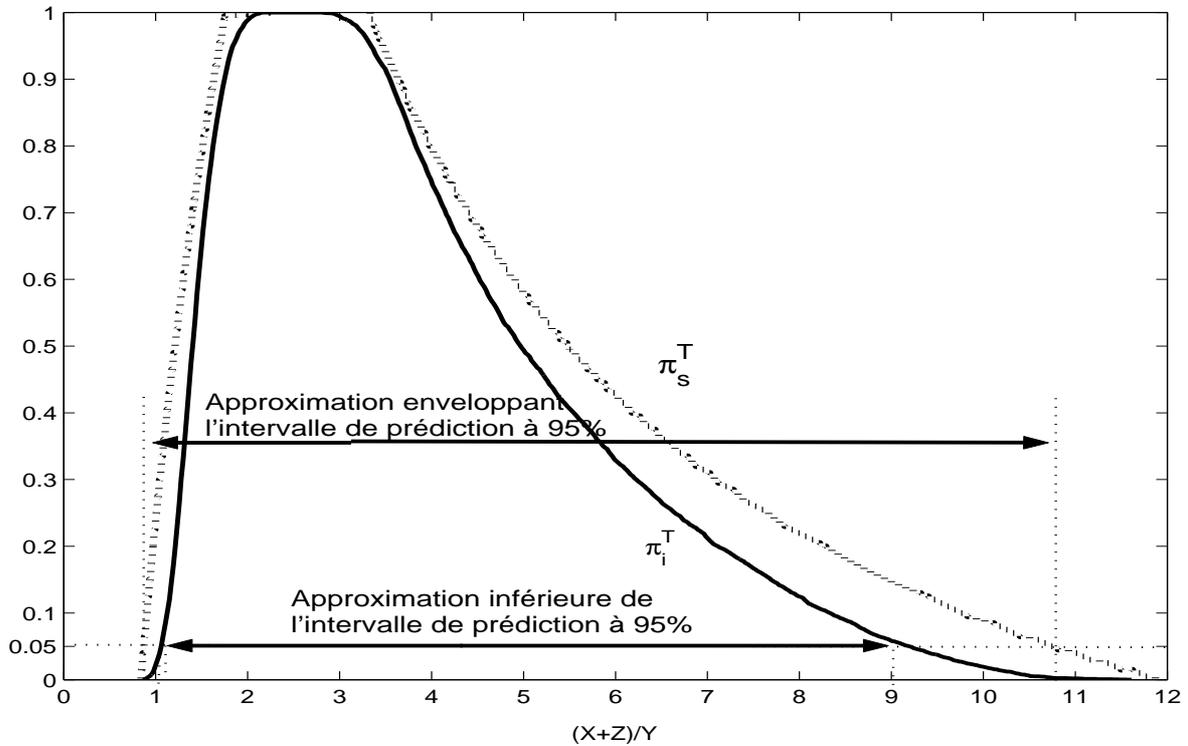


FIG. 5.5 – Intervalles de prédiction optimistes et conservatifs de  $T(X, Y, Z) = (X + Z)/Y$

possible, définie à partir des éléments focaux (obtenus par la méthode "Independent Random Sets") du modèle  $T$  concernant le cas synthétique de la Section 4.7. Ainsi, nous savons que l'intervalle  $[0.8, 10.7]$  contiendra l'intervalle de prédiction à 95% (voir Figure 5.5). Pour résumer, nous savons que l'intervalle de prédiction à 95% sera contenu avec certitude dans  $[0.8, 10.7]$  et contiendra l'intervalle  $[1, 9]$ . L'intérêt, pour l'expert, d'obtenir l'intervalle  $\underline{[t_1, t_2]}_\alpha$  apparaîtra seulement dans le cas de figure où  $\overline{[t_1, t_2]}_\alpha$  est vraiment très large par rapport à  $\underline{[t_1, t_2]}_\alpha$ . L'intervalle  $\underline{[t_1, t_2]}_\alpha$  fournira par conséquent un premier indicateur de l'intervalle de confiance de niveau  $\alpha$ .

### 5.1.4 Moyenne

Nous avons vu que la distribution de masse  $(\nu_i^T)_i$  définit une probabilité haute  $Pl^T$  et une probabilité basse  $Bel^T$ . Ainsi, elle définit la famille de probabilité

$$\{P^T | \forall A, P^T(A) \leq Pl^T(A)\} = \{P^T | \forall A, Bel^T(A) \leq P^T(A)\}$$

Par conséquent, nous pouvons définir un encadrement  $[\underline{E(T(X))}, \overline{E(T(X))}]$  de l'espérance mathématique de la variable  $T(X)$  où  $X = (X_1, \dots, X_n)$  et

$$\underline{E(T(X))} = \int_{\mathbb{R}} x dPl^T(\{w | T \circ X(w) \leq x\})$$

$$\overline{E(T(X))} = \int_{\mathbb{R}} x dBel^T(\{w | T \circ X(w) \leq x\})$$

Dans notre exemple de la Section 4.7 (voir Figure 5.6) avec la méthode "Independent Random Sets", nous obtenons

$$1.42 \leq E(T(X, Y, Z)) \leq 5.48$$

Ainsi, nous pourrions dire au décideur que la moyenne du modèle de risque  $T$  est comprise entre 1.42 et 5.48 et par conséquent lui fournir une information supplémentaire sur  $T$  pour une prise de décision.

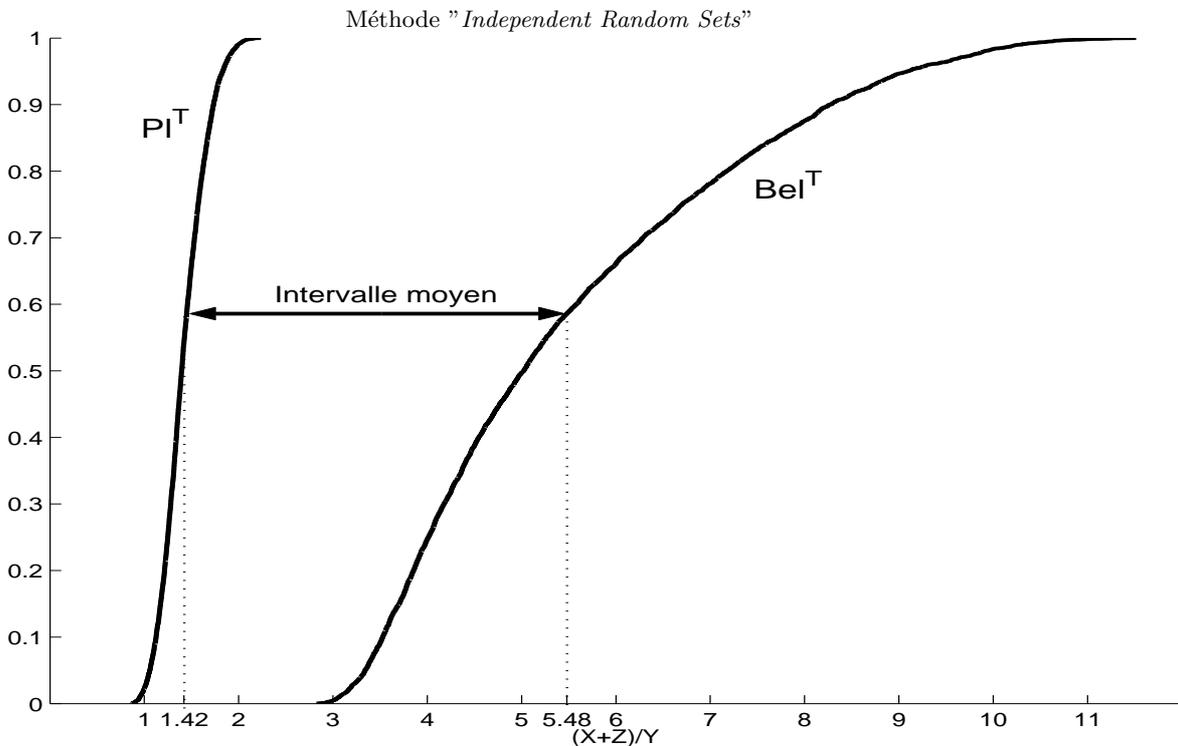


FIG. 5.6 – Intervalle moyen de  $T(X, Y, Z) = (X + Z)/Y$

## 5.2 Résultats issus de la méthode ”Hybride”

Nous rappelons que la méthode ”Hybride” fournit un ensemble de distributions de possibilité (voir Section 4.2 et Figure 4.8). C’est-à-dire que  $T(X)$  est une variable aléatoire floue. L’information fournie par cet ensemble n’est pas évidente au premier abord à exploiter pour une prise de décision. En s’appuyant sur la Section précédente 5.1.1, nous pouvons dans un premier temps proposer deux indicateurs caractérisant la variabilité et l’imprécision du modèle  $T$ .

### 5.2.1 Mesurer la variabilité et l’imprécision séparément

Il est possible de résumer l’imprécision contenue dans une distribution de possibilité  $\pi$  (intervalle flou) via l’intervalle moyen  $M(\pi) = \{E(X) | P^X \leq \Pi\}$  [39] (voir Annexe B) où  $P^X$  est la mesure de probabilité associée à la variable aléatoire  $X$  dominée par la mesure de possibilité  $\Pi$ . La longueur  $L$  de l’intervalle  $M(\pi)$  reflète l’imprécision de l’intervalle flou et est précisément égale à la surface sous la distribution de possibilité  $\pi$ . Pour évaluer l’imprécision moyenne de l’échantillon  $(\pi_i^T)_{i=1\dots m}$ , on peut calculer l’intervalle moyen flou  $\pi_{moyen}^T$  [74] par

$$\forall z, \pi_{moyen}^T(z) = \sup_{x_1, \dots, x_m; \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_i = z} \min(\pi_1^T(x_1), \dots, \pi_m^T(x_m))$$

Puis, on détermine la longueur  $L$  de l’intervalle moyen  $M(\pi_{moyen}^T)$  qui fournit un indicateur de l’imprécision de  $T(X)$  issu du calcul ”Hybride”.

Pour estimer l’indicateur de variabilité  $V^T$  de  $T(X)$ , nous pouvons travailler avec une valeur représentative de chaque distribution de possibilité  $\pi_i^T$  et utiliser l’estimateur standard de la variance (5.1). Nous pouvons choisir comme valeur représentative  $h_i^T$  le milieu de l’intervalle moyen  $M(\pi_i^T)$ . Cette valeur représentative est aussi égale à la moyenne de la probabilité pignistique [91] associée à  $\pi_i^T$ , proposée par Yager [98] :

$$h_i^t = \int_0^1 \frac{\sup \pi_{i\alpha}^T + \inf \pi_{i\alpha}^T}{2} d\alpha$$

Nous fournissons ainsi deux indicateurs  $L$  et  $V$  reflétant l’imprécision et la variabilité de  $T(X)$ . Par exemple, sur la Figure 5.8.a, la variabilité  $V$  est faible mais l’imprécision  $L$  est grande. Au contraire, sur la Figure 5.8.b, la variabilité  $V$  est forte, mais l’imprécision  $L$  est petite.

Nous pourrions également estimer une variance floue  $\pi_{variance}^T$  à l’aide de la fonction (5.2). En se reportant à la Section 5.1.1, nous obtenons  $\pi_{variance}^T$  en travaillant par  $\alpha$ -coupes et nous construisons les intervalles emboîtés  $[\pi_{variance}^T]_\alpha = [\underline{V}_{d,\alpha}, \overline{V}_{d,\alpha}]$ , en résolvant :

$$\underline{V}_{d,\alpha} = \inf_{x_i \in \pi_{i,\alpha}^T} V(x_1, \dots, x_m)$$

$$\overline{V}_{d,\alpha} = \sup_{x_i \in \pi_{i,\alpha}^T} V(x_1, \dots, x_m)$$

Cette variance floue décrit une variance potentielle du modèle  $T$ , car elle balaye toutes les variances de toutes les probabilités contenues dans la famille de probabilités définie par l’ensemble des distributions de possibilité  $(\pi_i^T)_{i=1\dots m}$ .

### 5.2.2 Post-traitement proposé par Guyonnet et al. [63]

Guyonnet et al. [63] proposent de synthétiser le résultat du calcul "Hybride" en une distribution de possibilité unique notée  $\pi_d^T$ .

Pour une  $\alpha$ -coupe donnée, ils considèrent les intervalles  $[\pi_i^T]_\alpha = [\underline{u}_{i\alpha}, \bar{u}_{i\alpha}]$  et construisent les distributions cumulées empiriques associées aux échantillons  $(\underline{u}_{i\alpha})_{i=1\dots m}$  et  $(\bar{u}_{i\alpha})_{i=1\dots m}$  (voir Figure 5.7.a). Ils construisent les  $\alpha$ -coupes  $[\pi_d^T]_\alpha = [\underline{u}_{d\alpha}, \bar{u}_{d\alpha}]$  de  $\pi_d^T$  comme suit (voir Figure 5.7.b)

$$\underline{u}_{d\alpha} = \sum_{i=1}^m \underline{u}_{i\alpha} \delta_{\lfloor \frac{i-1}{m}, \frac{i}{m} \rfloor} (1 - d\%) \quad \text{et} \quad \bar{u}_{d\alpha} = \sum_{i=1}^m \bar{u}_{i\alpha} \delta_{\lfloor \frac{i-1}{m}, \frac{i}{m} \rfloor} (d\%)$$

où

$$\delta_{\lfloor \frac{i-1}{m}, \frac{i}{m} \rfloor} (a) = 1 \text{ si } a \in \left] \frac{i-1}{m}, \frac{i}{m} \right], 0 \text{ sinon}$$

Faisant ce raisonnement pour chaque  $\alpha$ -coupe, ils obtiennent la distribution de possibilité  $\pi_d^T$ . La valeur fréquemment choisie pour  $d$  est 95. Cela signifie qu'ils éliminent 5% des branches gauches (resp. droites) des distributions de possibilité  $(\pi_i^T)_{i=1\dots m}$  et ils font l'union des distributions de possibilité restantes (voir Figure 5.7.c).

Nous avons mis en évidence que ce post traitement confondait variabilité et imprécision ([12]). En effet, il ne prend pas en compte les poids de probabilité générés par les variables aléatoires  $X_1, \dots, X_k$  et oublie ainsi les fréquences d'apparition de chaque distribution de possibilité  $\pi_i^T$ . Par conséquent, ce post traitement peut accorder aux branches gauches et droites de  $\pi_d^T$  des poids de probabilité excessifs. En effet, nous obtenons le même résultat si les distributions de possibilité  $\pi_1^T, \dots, \pi_m^T$  ont une large imprécision et une faible variabilité (voir Figure 5.8a) ou si elles ont une petite imprécision et une forte variabilité (voir Figure 5.8b). Nous pouvons illustrer ces problèmes de manière plus claire en combinant intervalles et probabilités. Considérons par exemple deux variables aléatoires indépendantes  $A$  et  $B$  telles que :

$$P(A = 1) = P(A = 2) = 0.5, \quad P(B = 4) = 1/3, \quad P(B = 6) = 2/3 \text{ et } C = [1, 2]$$

On considère le modèle  $T = (A + B)/C$ . Avec le calcul "Hybride",  $T(X)$  devient un intervalle aléatoire et nous obtenons

$$\begin{aligned} T_1 &= [2.5, 5] \text{ avec une probabilité de } 1/6 \\ T_2 &= [3.5, 7] \text{ avec une probabilité de } 2/6 \\ T_3 &= [3, 6] \text{ avec une probabilité de } 1/6 \\ T_4 &= [4, 8] \text{ avec une probabilité de } 2/6 \end{aligned}$$

En posant  $d = 20\%$ , avec ce post-traitement, nous obtenons  $T_d = [3, 7]$ , et on lui affecte une masse de 1, ce qui est contestable. En effet, nous avons éliminé la connaissance (probabilité) apportée par  $A$  et  $B$ , c'est à dire la variabilité.

Le second point contestable de ce post-traitement est qu'il traite indépendamment les parties droites et gauches des distributions de possibilité  $\pi_1^T, \dots, \pi_m^T$  alors qu'elles sont liées.

Nous proposons dans les Sections 5.2.4 et 5.2.5 d'autres alternatives plus rigoureuses. Notamment, en faisant le lien avec les variables aléatoires floues, nous pouvons donner une estimation de  $Pl^T(A)$  et  $Bel^T(A)$ .

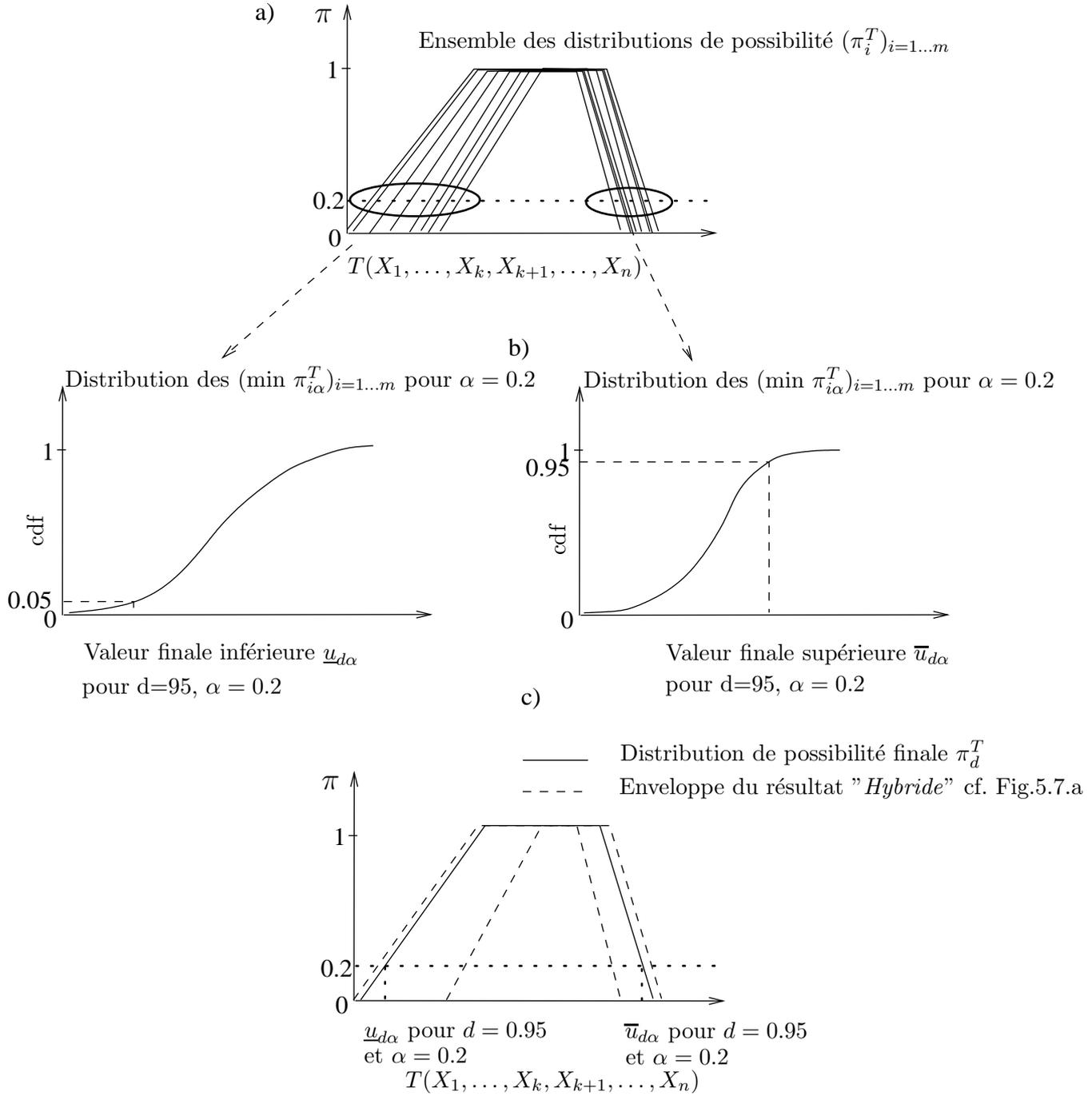


FIG. 5.7 – Post traitement du calcul "Hybride" proposé par Guyonnet et al. [63].

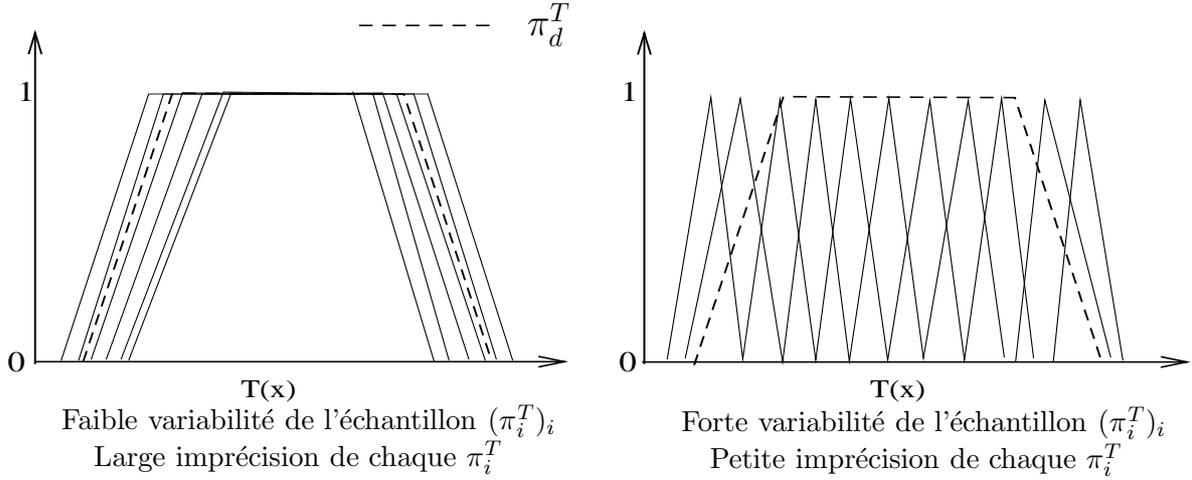


FIG. 5.8 – Obtention de la même distribution de possibilité  $\pi_d^T$  issue du post traitement proposé par Guyonnet et al. [63] sur deux résultats possibles du calcul "Hybride".

### 5.2.3 Comparaison avec le traitement de Ferson et al.

Ferson et al. [53, 55, 57] exploitent également séparément la variabilité et l'imprécision de la variable aléatoire floue  $T(X)$  issue du calcul "Hybride". Ils fixent un niveau de confiance (une  $\alpha$ -coupe) et ils s'intéressent aux probabilités cumulées hautes  $\overline{F}_\alpha^T$  et basses  $\underline{F}_\alpha^T$  induites par les  $\alpha$ -coupes  $([\pi_i^T]_\alpha)_{i=1\dots m}$  des distributions de possibilité  $(\pi_i^T)_{i=1\dots m}$  contraints par les masses de probabilités  $(p_i)_{i=1\dots m} = 1/m$ . Ils déterminent les probabilités cumulées haute  $\overline{F}_\alpha^T$  et basses  $\underline{F}_\alpha^T$  comme suit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \overline{F}_\alpha^T(x) = \frac{\text{card}\{\min[\pi_i^T]_\alpha \leq x\}}{m} \quad \text{et} \quad \underline{F}_\alpha^T(x) = \frac{\text{card}\{\max[\pi_i^T]_\alpha \leq x\}}{m}$$

Ainsi, s'ils veulent présenter des résultats informatifs mais risqués, ils choisissent le niveau de confiance égale à 1 ( $\alpha = 1$ ). Cependant, s'ils veulent rester prudents, ils choisissent  $\alpha = 0$  et utilisent le support de chaque distribution de possibilité  $\pi_i^T, \forall i = 1 \dots m$ . Ils obtiennent deux paires  $[\underline{F}_0^T, \overline{F}_0^T], [\underline{F}_1^T, \overline{F}_1^T]$  de probabilités cumulées (voir Figures 5.9). L'écart entre  $\underline{F}_\alpha^T$  et  $\overline{F}_\alpha^T$  caractérise l'imprécision des résultats du modèle  $T$  due à l'état d'ignorance partiel concernant certains paramètres de  $T$ . Les pentes de  $\underline{F}_\alpha^T$  et  $\overline{F}_\alpha^T$  caractérisent la variabilité des résultats du modèle  $T$ . C'est à dire qu'une forte variabilité du résultat générera des pentes faibles pour  $\underline{F}_\alpha^T$  et  $\overline{F}_\alpha^T$ . Ferson et al. capturent ainsi l'imprécision et la variabilité du résultat de manière paramétrée au moyen de paires de probabilités cumulées  $\underline{F}_\alpha^T$  et  $\overline{F}_\alpha^T$ . Cependant, dans la pratique, il sera certainement difficile de choisir le niveau de confiance pertinent pour une phase décisionnelle de manière à ne pas fournir un résultat trop peu informatif ( $\alpha = 0$ ) mais sans qu'il soit trop risqué ( $\alpha = 1$ ).

### 5.2.4 Liens avec le modèle classique des variables aléatoires floues

Le calcul "Hybride" fournit  $m$  distributions de possibilité  $(\pi_1^T, \dots, \pi_m^T)$  auxquelles sont associées des poids de probabilité  $(p_i)_{i=1\dots m}$ . Ainsi  $T(X)$  est une variable aléatoire floue. D'après la Section 2.4.1 du Chapitre 2, on peut estimer  $Pl^T(A)$  et  $Bel^T(A)$  de la manière

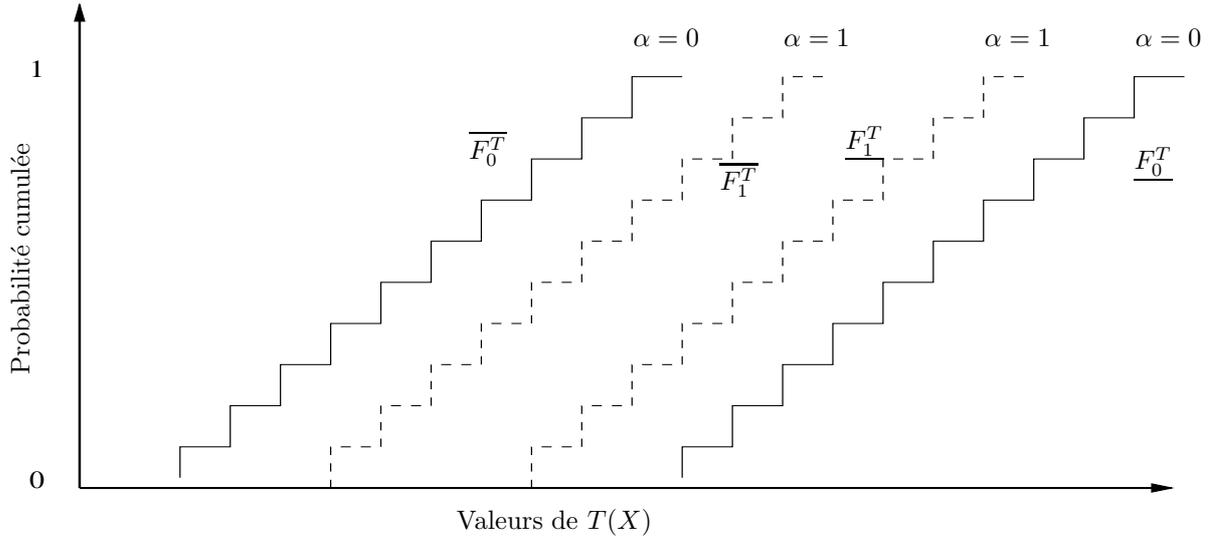


FIG. 5.9 – Post traitement de Ferson et al. sur un échantillon de 10 distributions de possibilité issues du calcul "Hybride".

suivante :

$$\forall A, Pl^T(A) = \sum_{i=1}^m p_i \Pi_i^T \quad \text{et} \quad Bel^T(A) = \sum_{i=1}^m p_i N_i^T$$

où  $\Pi_i^T$  (resp.  $N_i^T$ ) est la mesure de possibilité (resp. de nécessité) associée à la distribution de possibilité  $\pi_i^T$ .

Prenant en compte les propriétés des mesures de possibilité comme enveloppes d'un ensemble de mesures de probabilité (voir Section 2.1.2 Chapitre 2), nous avons :

$$Pl^T(A) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^m p_i P_i^T(A) \mid P_i^T \in \mathcal{P}(\pi_i^T), i = 1, \dots, m \right\}. \quad (5.3)$$

$$Bel^T(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^m p_i P_i^T(A) \mid P_i^T \in \mathcal{P}(\pi_i^T), i = 1, \dots, m \right\}. \quad (5.4)$$

Ces équations suggèrent une autre interprétation probabiliste de  $Pl^T$  et  $Bel^T$ . Soit  $A$  un sous-ensemble de  $\mathbb{R}$ . Si on observe une réalisation  $(x_1^i, \dots, x_n^i)$  pour le vecteur aléatoire  $(X_1, \dots, X_n)$ , alors la probabilité que  $T(x_1^i, \dots, x_k^i, X_{k+1}, \dots, X_n)$  prenne une valeur dans  $A$  est au plus égale à  $\Pi_i^T(A)$  et au moins supérieure à  $N_i^T(A)$ . C'est à dire :

$$N_i^T(A) \leq P(T \in A \mid (X_1, \dots, X_k) = (x_1^i, \dots, x_k^i)) = P_i^T(A) \leq \Pi_i^T(A)$$

De plus nous avons :

$$P((X_1, \dots, X_k) = (x_1^i, \dots, x_k^i)) = p_i$$

Par conséquent, d'après le théorème des probabilités totales

$$P^T(A) = \sum_{i=1}^m P((X_1, \dots, X_k) = (x_1^i, \dots, x_k^i)) \times P(T \in A \mid (X_1, \dots, X_k) = (x_1^i, \dots, x_k^i))$$

nous obtenons alors :

$$P^T(A) = \sum_{i=1}^m p_i P_i^T(A)$$

où  $P_i^T$  est la mesure de probabilité dominée par  $\Pi_i^T$ . En utilisant l'équation 5.3, on peut interpréter  $Pl^T(A)$  (resp.  $Bel^T(A)$  par un raisonnement analogue) comme étant la plus petite borne supérieure (resp. la plus grande borne inférieure) de la vraie probabilité  $P(T \in A)$ .

Nous pouvons ainsi estimer les probabilités de dépassement de seuil  $P(T(X) \leq t)$ ,  $P(T(X) > t)$  ou  $P(T(X) \in [t_1, t_2])$ . De plus, la moyenne pourra être estimée en se reportant à la Section précédente 5.1.4.

### 5.2.5 Liens avec le modèle possibiliste de second ordre

A partir du résultat du calcul "hybride", nous pouvons nous placer dans le cadre des possibilités de second ordre (voir Section 2.4.2 Chapitre 2). En effet, pour chaque  $\alpha$ -coupe, on obtient un ensemble aléatoire d'intervalles  $(\pi_{i\alpha}^T)_{i=1\dots m}$ . Nous pouvons ainsi calculer pour chaque  $\alpha$ -coupe les quantités  $Pl_\alpha^T(A)$  et  $Bel_\alpha^T(A)$  pour tout  $A$ , ensemble mesurable, comme suit :

$$Pl_\alpha^T(A) = \sum_{i=1, \pi_{i\alpha}^T \cap A \neq \emptyset}^m p_i \quad \text{et} \quad Bel_\alpha^T(A) = \sum_{i=1, \pi_{i\alpha}^T \subseteq A}^m p_i$$

L'ensemble des intervalles emboîtés  $([Bel_\alpha^T(A), Pl_\alpha^T(A)])_\alpha$  définit les  $\alpha$ -coupes de la possibilité de second ordre  $\tilde{\pi}^T$  associées à la variable aléatoire floue  $T(X)$  résultant du calcul "hybride". Il est facile de constater que l'intervalle  $[Bel^T(A), Pl^T(A)]$  correspond à l'intervalle moyen (voir Annexe B et [39]) de  $\tilde{\pi}^T$ , c-à-d :

$$Pl^T(A) = \int_0^1 Pl_\alpha^T(A) d\alpha \quad \text{et} \quad Bel^T(A) = \int_0^1 Bel_\alpha^T(A) d\alpha$$

En effet, on peut exprimer chaque distribution de possibilité  $\pi_i^T$  issue du calcul "hybride" au moyen d'une fonction de masse  $(\nu_\alpha)_\alpha$  associée aux éléments focaux  $(\pi_{i\alpha}^T)_\alpha$  correspondant aux  $\alpha$ -coupes de  $\pi_i^T$  (voir Section 2.2.2 Chapitre 2). Ainsi on obtient un ensemble aléatoire d'intervalles  $(\pi_{i\alpha}^T)_{i\alpha}$  auxquels sont associées les masses  $(\nu_\alpha \times p_i)_{i\alpha}$ . On en déduit alors que :

$$Pl^T(A) = \sum_{i,\alpha; \pi_{i\alpha}^T \cap A \neq \emptyset} \nu_\alpha p_i \quad \text{et} \quad Bel^T(A) = \sum_{i,\alpha; \pi_{i\alpha}^T \subseteq A} \nu_\alpha p_i$$

Ainsi

$$Pl^T(A) = \sum_\alpha \nu_\alpha \sum_{i; \pi_{i\alpha}^T \cap A \neq \emptyset} p_i \quad \text{et} \quad Bel^T(A) = \sum_\alpha \nu_\alpha \sum_{i; \pi_{i\alpha}^T \subseteq A} p_i$$

Donc

$$Pl^T(A) = \sum_\alpha \nu_\alpha Pl_\alpha^T(A) \quad \text{et} \quad Bel^T(A) = \sum_\alpha \nu_\alpha Bel_\alpha^T(A)$$

On peut faire directement le lien avec le post-traitement de Ferson et al. dans la Section 5.2.3 en remarquant que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, Pl^T((-\infty, t]) = \int_0^1 \overline{F}_\alpha^T(t) d\alpha \quad \text{et} \quad Bel^T((-\infty, t]) = \int_0^1 \underline{F}_\alpha^T(t) d\alpha$$

Ainsi

$$\forall t \in \mathbb{R}, \overline{F}_1^T(t) \leq Pl^T((-\infty, t]) \leq \overline{F}_0^T(t) \quad \text{et} \quad \underline{F}_0^T(t) \leq Bel^T((-\infty, t]) \leq \underline{F}_1^T(t)$$

Dans la vision du modèle possibiliste de second ordre, nous pouvons nous reporter à la Section 5.1.3 et définir ainsi une distribution de possibilité inférieure  $\pi_i^T$  et une distribution de possibilité supérieure  $\pi_s^T$  telles que

$$[N_i^T, \Pi_i^T] \subseteq [Bel^T, Pl^T] \subseteq [N_s^T, \Pi_s^T]$$

en utilisant l'ensemble des intervalles aléatoires  $(\pi_{i\alpha}^T)_{i\alpha}$  afin d'estimer une enveloppe des intervalles de prédiction.

La Figure 5.10 représente les probabilités cumulées hautes et basses du modèle  $T : (x, y, z) \mapsto (x+z)/y$  présenté au Chapitre 4 selon la méthode de propagation utilisée ou le post-traitement des résultats de la méthode "hybride". Les probabilités cumulées étoiles sont définies à partir des résultats de la méthode "hybride" en ramenant au modèle classique des variables aléatoires floues (voir Section 5.2.4). Les paires de probabilités cumulées triangles sont issue du post-traitement de la méthode "hybride" (approche Ferson, Section 5.2.3).

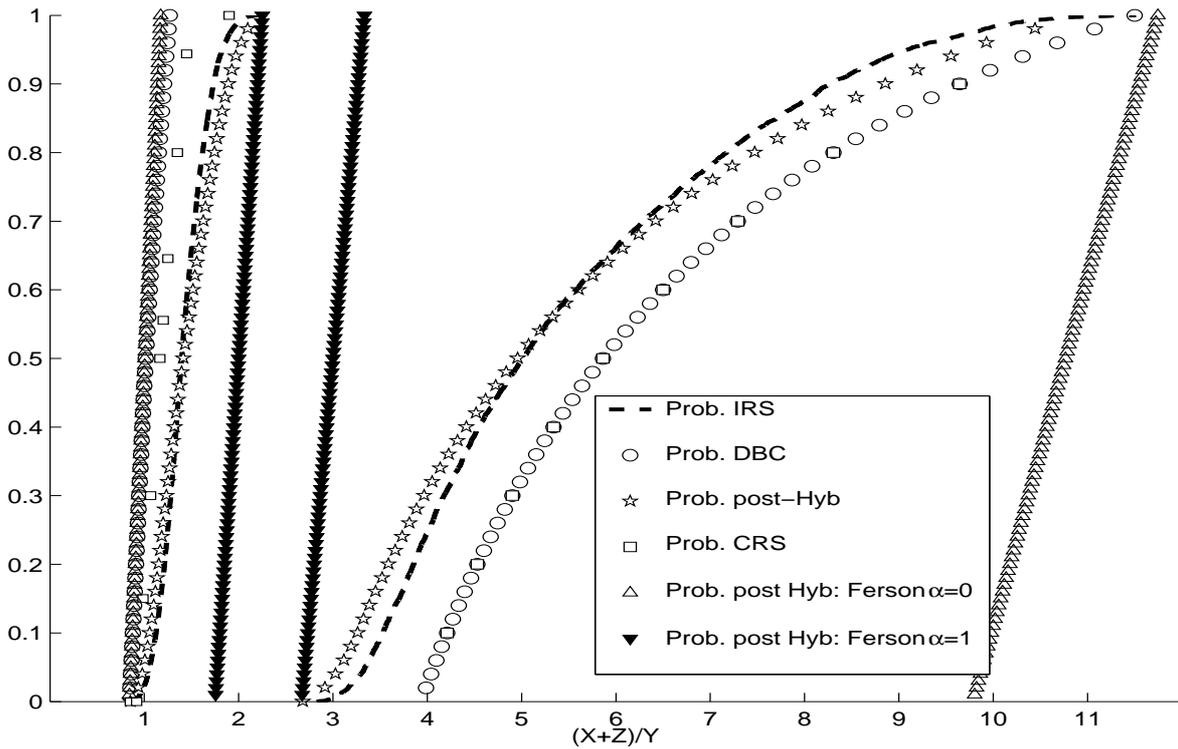


FIG. 5.10 – Probabilités cumulées hautes et basses du modèle  $\frac{(X+Z)}{Y}$  selon les 4 méthodes de propagation. Hyb="Hybride", CRS="Conservative Random Sets", IRS="Independent Random Sets", DBC="Dependency Bounds Convolution"



## Chapitre 6

# Application sur des cas réels simplifiés

Ce chapitre présente l'influence de la prise en compte de différentes formes de représentation mathématique de la connaissance sur 3 cas réels simplifiés :

1. Le transfert d'un polluant radioactif (le strontium) depuis le dépôt jusqu'à l'homme, au travers de la consommation d'un aliment (le lait de vache).
2. Le risque toxique après un déversement accidentel de trichloréthylène (TCE) au dessus d'une nappe d'eau (modèle semi analytique).
3. Le risque pour la santé liée aux sols pollués par des retombées industrielles de plomb.

Nous allons ainsi utiliser les probabilités, les p-boxes, les possibilités ou encore les fonctions de croyance pour représenter la connaissance des paramètres sources des modèles considérés en essayant de rester le plus cohérent possible avec la nature de l'information. Puis, nous utilisons les méthodes de propagation afin d'estimer l'incertitude des modèles considérés.

Dans le cas du risque radiologique, nous utilisons uniquement la méthode de propagation "Hybride". L'objectif de ce cas est de comparer les résultats obtenus avec différentes formes de représentation de la connaissance avec ceux issus d'une approche purement probabiliste afin de mettre en évidence l'ordre de grandeur de l'influence de la prise en compte du caractère imprécis de l'information sur l'incertitude des modèles considérés.

Dans le cas des "eaux souterraines", nous utilisons la méthode "Hybride" et la méthode "Independent Random Sets" pour propager les incertitudes épistémiques et stochastiques afin de mettre en évidence l'impact de la modélisation des dépendances, qui est propre à chaque méthode, sur l'incertitude du modèle. Les résultats sont aussi comparés avec une approche purement probabiliste.

Dans le cas du plomb, nous utilisons les 4 méthodes pour propager l'incertitude afin de les comparer en terme d'impact sur l'incertitude du modèle. Les incertitudes des modèles issues des 4 méthodes sont comparées avec l'approche purement probabiliste.

## 6.1 Risque Radiologique

L'objectif de cette étude est d'utiliser différentes représentations mathématiques (p-boxes, distributions de possibilité ou fonctions de croyance) pour les incertitudes sur une sous-partie du modèle d'évaluation du risque qui concerne le transfert d'un polluant radioactif (le  $^{90}\text{Sr}$ ) depuis le dépôt jusqu'à l'homme, au travers de la consommation d'un aliment (le lait de vache). Les équations choisies pour le modèle de transfert sont celles du rapport I.R.S.N. [84]. Dans cet exemple, on considère que le dépôt,  $D$ , est réparti de façon homogène sur l'année et est intégralement fait sous forme de dépôt sec ( $D = 1 \text{ Bq.m}^{-2}$ ). Les types de fourrages considérés sont l'herbe et le maïs ensilage. Le résultat final du modèle proposé est la dose annuelle  $D_{ing}$  par ingestion de lait de vache contaminé par du strontium 90 ( $^{90}\text{Sr}$ ) en  $\text{Bq.an}^{-1}$ , selon les équations suivantes :

$$Activite_{foliaire} = D \frac{R_c \cdot F_t}{RFS \cdot Rdt \cdot \lambda_{bio} \cdot 365} \quad (6.1)$$

$$Activite_{racinaire} = D \frac{Frac}{R_o \cdot P_r} \quad (6.2)$$

$$Activite_{fourrage} = Activite_{racinaire} + Activite_{foliaire} \quad (6.3)$$

$$Activite_{lait} = Ft_{lait} \cdot \sum_{fourrage} Activite_{fourrage} \cdot Ration_{fourrage} \cdot RFS_{fourrage} \quad (6.4)$$

$$D_{ing} = Activite_{lait} \cdot Ration_{lait} \quad (6.5)$$

$D$	Dépôt ( $\text{Bq.m}^{-2}$ ).
$Frac$	Facteur de transfert sol/plante ( $\text{Bq.kg sec de végétal}^{-1} / \text{Bq.kg de sol}^{-1}$ ).
$R_o$	Masse volumique des sols cultivés ( $\text{kg.m}^{-3}$ ).
$P_r$	Profondeur racinaire ( $m$ ).
$R_c$	Rapport de captation (sans unité).
$F_t$	Facteur de translocation (sans unité).
$RFS$	Rapport poids Frais/poids Sec (sans unité).
$Rdt$	Rendement cultural ( $\text{kg.m}^{-2}$ ).
$\lambda_{bio}$	Constante de décroissance biomécanique ( $j^{-1}$ ).
$Activite_{foliaire}$	Activité foliaire du fourrage ( $\text{Bq.kg sec}^{-1}$ ).
$Activite_{racinaire}$	Activité racinaire ( $\text{Bq.kg sec}^{-1}$ ).
$Activite_{fourrage}$	Activité massique du fourrage ( $\text{Bq.kg sec}^{-1}$ ).
$Ft_{lait}$	Facteur de transfert à l'équilibre ( $j.l \text{ frais}^{-1}$ ).
$Ration_{fourrage}$	Quantité de fourrage consommée chaque jour ( $\text{kg sec} \cdot j^{-1}$ ).
$Activite_{lait}$	Activité volumique du lait ( $\text{Bq.l}^{-1}$ ).
$Ration_{lait}$	Ration alimentaire de lait ( $l.an^{-1}$ ).
$D_{ing}$	Dose ingérée ( $\text{Bq.an}^{-1}$ ).

Nous étudions en détail, dans les Sections 6.1.1 à 6.1.5, l'influence de la représentation mathématique de la connaissance sur le résultat de chaque équation.

### 6.1.1 Transfert du Sol vers les Plantes (Activité racinaire)

Le transfert du sol vers les plantes, que ce soit pour le maïs ensilage ou pour l'herbe, est modélisé selon l'équation suivante :

$$Activite_{racinaire} = D \frac{Frac}{R_o \cdot P_r} \quad (6.6)$$

$D$	Dépôt ( $Bq.m^{-2}$ ).
$Frac$	Facteur de transfert sol/plante ( $Bq.kg \text{ sec de végétal}^{-1}/Bq.kg \text{ de sol}^{-1}$ ).
$R_o$	Masse volumique des sols cultivés ( $kg.m^{-3}$ ).
$P_r$	Profondeur racinaire ( $m$ ).
$Activite_{racinaire}$	Activité racinaire ( $Bq.kg \text{ sec}^{-1}$ ).

Pour cette application, le dépôt est considéré comme fixe ( $=1Bq.m^{-2}$ ).

#### 6.1.1.1 Représentation de l'information disponible

##### 6.1.1.1.1 Facteur de transfert sol/plante $Frac$ ( $Bq.kg \text{ sec de végétal}^{-1}/Bq.kg \text{ de sol}^{-1}$ )

Le facteur de transfert sol/plante  $Frac$ , représente la fraction d'activité présente dans le sol qui parvient à la partie consommée du végétal (grain, fruit, racine, tubercule). Les valeurs de ce paramètre dépendent du végétal et du sol. La principale source d'incertitude, pour le facteur de transfert  $Frac$ , est la variabilité naturelle qui est due aux types de sols. De nombreuses mesures de ce paramètre sont disponibles et la forme de la distribution retenue a priori pour l'herbe et le maïs ensilage a été la loi lognormale (voir Table 6.1) [84].

	Maïs	Herbe
Log-normale	(-0.84, 0.516)	(0.028, 0.557)

TAB. 6.1 – Représentation pour le facteur de transfert sol/plante  $Frac$  ( $Bq.kg^{-1} \text{ sec de végétal}/Bq.kg^{-1} \text{ de sol}$ ).

##### 6.1.1.1.2 Masse volumique des sols cultivés $R_o$ ( $kg.m^{-3}$ )

Comme pour le facteur de transfert sol/plante, la principale source d'incertitude pour la masse volumique  $R_o$  est la variabilité naturelle due aux types de sols. De nombreuses données de ce paramètre sont disponibles [84] et la distribution de probabilité retenue pour l'application à l'herbe et au maïs a été la loi normale de moyenne 1410 et d'écart type 356.

##### 6.1.1.1.3 Profondeur racinaire $P_r$ ( $m$ )

Pour les plantes cultivées, la profondeur racinaire  $P_r$  est déterminée par la profondeur de labour. Le labour permet de créer une couche de sol meuble et aérée dans laquelle les racines se développent facilement. Si le labour est fait sur une profondeur suffisante, les racines n'ont pas à pénétrer dans la couche plus profonde, non remaniée et beaucoup plus compacte. La nature intrinsèque du paramètre  $P_r$  est la variabilité naturelle due aux conditions de culture

(climat, engrais, ...) et au type de sol. Cependant, la profondeur de labour est rarement précisée dans les manuels agricoles qui la considèrent comme une information triviale. Les valeurs de référence de la bibliographie fournissent un encadrement. Il est de plus considéré que les valeurs centrales sont les plus vraisemblables. L'information disponible sur la profondeur racinaire  $P_r$  est donc de nature imprécise [84]. Dans le cadre habituel, cette information est représentée par une distribution de probabilité uniforme (respectivement triangulaire) pour l'intervalle (resp. quand on rajoute en plus les valeurs centrales préférées). Cependant, étant donné le caractère imprécis de l'information, il est plus cohérent de la représenter par une famille de probabilités à l'aide d'une distribution de possibilité. La table 6.2 répertorie les différents modèles pour représenter notre état de connaissance sur la profondeur racinaire  $P_r$ . Les indices dans la dernière colonne permettent d'identifier les différents modèles utilisés et ainsi étudier leurs influences sur les résultats de l'activité racinaire de la plante.

	Maïs	Herbe	Indice
Intervalle classique=Possibilité Rectangulaire	[0.15, 0.3]	[0.1, 0.3]	1
Probabilité uniforme	[0.15, 0.3]	[0.1, 0.3]	2
Distribution de possibilité triangulaire	[0.15, 0.225, 0.3]	[0.1, 0.2, 0.3]	3
Distribution de probabilité triangulaire	[0.15, 0.225, 0.3]	[0.1, 0.2, 0.3]	4

TAB. 6.2 – Différentes représentations pour la profondeur racinaire  $P_r$  ( $m$ ).

### 6.1.1.2 Etude des incertitudes de l'activité racinaire

Nous détaillerons l'étude des incertitudes sur l'activité racinaire uniquement pour le maïs. En effet, les phénomènes observés sont similaires pour l'herbe. Le but est de montrer les effets de la modélisation de la connaissance imprécise sur le résultat de l'activité racinaire comparativement au cadre purement probabiliste.

#### 6.1.1.2.1 Calcul d'intervalles

Tous les paramètres sont modélisés par des intervalles (min-max), puis on calcule l'ensemble des valeurs possibles de l'activité racinaire par un calcul d'intervalles (voir résultats Table 6.3). Cette méthode permet d'obtenir un encadrement (min-max) de l'activité racinaire sans pour autant nous informer dans quelle mesure on peut atteindre telle ou telle valeur à l'intérieur de cet encadrement.

Pour les paramètres modélisés par des lois de probabilité (facteur de transfert sol/Plante  $Frac$  et masse volumique  $R_o$ ), on prendra comme bornes les fractiles à 0.5% et 99.5%.

	Maïs	
$Frac$ ( $Bq.kg$ sec de végétal <sup>-1</sup> / $Bq.kg$ de sol <sup>-1</sup> )	0.114	1.63
$R_o$ ( $kg.m^{-3}$ )	493.005	2327
$Pr$ ( $m$ )	0.15	0.3
$Activite_{racinaire}$ ( $Bq.kg^{-1}$ sec)	$1.63e10^{-4}$	0.022

TAB. 6.3 – Résultats du Calcul d'intervalles pour l'activité racinaire du maïs ( $Bq.kg$  sec<sup>-1</sup>).

### 6.1.1.2.2 Calcul de référence

Le calcul de référence correspond à un calcul déterministe. Les valeurs modales de chaque paramètre sont sélectionnées et on calcule l'activité racinaire du maïs à partir de celles-ci. Le mode d'une loi log-normale de paramètre  $(m, \sigma)$  est donnée par  $e^{m-\sigma^2}$ . Ainsi, la valeur modale, pour le facteur de transfert sol/plante  $Frac$ , est de 0.33. La table 6.4 répertorie les valeurs modales de chaque paramètre et le résultat du calcul de l'activité racinaire du maïs.

	Maïs
$Frac$ ( $Bq.kg \text{ sec de végétal}^{-1} / Bq.kg \text{ de sol}^{-1}$ )	0.33
$R_o$ ( $kg.m^{-3}$ )	1410
$Pr$ ( $m$ )	0.225
$Activité_{racinaire}$ ( $Bq.kg \text{ sec}^{-1}$ )	$1.04e10^{-3}$

TAB. 6.4 – Résultat de l'activité racinaire du maïs ( $Bq.kg \text{ sec}^{-1}$ ) pour une sélection des valeurs modales de chaque paramètre.

### 6.1.1.2.3 Calcul purement probabiliste (variabilité)

Dans ce paragraphe, l'incertitude sur l'activité racinaire du maïs est uniquement due au caractère aléatoire (supposé) de l'information (incertitude=variabilité). La figure 6.1 nous montre les effets de la variabilité sur les résultats de l'activité racinaire du maïs comparativement au calcul de référence (voir Section 6.1.1.2.2). L'incertitude sur les paramètres : profondeur racinaire, rendement et facteur de transfert est modélisée par des lois de probabilités (voir Section 6.1.1.1) et on utilise la technique dite Monte-Carlo avec hypothèse d'indépendance pour estimer l'incertitude sur l'activité racinaire du maïs. Pour caractériser l'incertitude sur l'activité racinaire, on utilisera l'intervalle  $[F_{activité_{racinaire}}^{-1}(0.5), F_{activité_{racinaire}}^{-1}(0.95)]$  où  $F_{activité_{racinaire}}$  est la fonction de répartition (probabilité cumulée) de l'activité racinaire. La table 6.14 répertorie les fractiles à 5% et 95% de l'activité racinaire du maïs en injectant progressivement de la variabilité dans le modèle au travers des paramètres  $P_r$ ,  $R_o$  et  $Frac$ . Cette table et la figure 6.1 montrent que plus on injecte de la variabilité dans le modèle (activité racinaire du maïs) et plus la variabilité de l'activité racinaire du maïs est importante i.e  $\{1.04e10^{-3}\}_{ref} \subseteq [7.99e10^{-4}, 1.49e10^{-3}]_{P_r} \subseteq [6.58e10^{-4}, 1.96e10^{-3}]_{(P_r, R_o)} \subseteq [5.28e10^{-4}, 3.94e10^{-3}]_{(P_r, R_o, Frac)}$ . La figure 6.2 met en évidence (comparativement à la figure

	Fractile à 5%	Fractile à 95%	Rapport Fractiles à 95% / 5%
$P_r$ (indice=2)	$7.99e10^{-4}$	$1.49e10^{-3}$	1.86
$P_r$ (indice=2), $R_o$	$6.58e10^{-4}$	$1.96e10^{-3}$	2.98
$P_r$ (indice=2), $R_o$ , $Frac$	$5.28e10^{-4}$	$3.94e10^{-3}$	7.46

TAB. 6.5 – Synthèse des effets de la variabilité sur l'activité racinaire du maïs ( $Bq.kg \text{ sec}^{-1}$ ).

6.1) que lors d'une analyse de sensibilité du modèle, l'ordre dans lequel on injecte la variabilité au travers des paramètres du modèle génère des résultats différents. Cela montre notamment

la quasi-impossibilité d'avoir des indicateurs de sensibilité pertinents à partir d'études mono-paramétriques.

La figure 6.2 montre également les effets sur l'activité racinaire du maïs selon différentes représentations de la profondeur racinaire  $P_r$  (uniforme, triangulaire, constant). On peut conclure à ce stade de l'analyse (cadre purement probabiliste) que quelle que soit la représentation du paramètre  $P_r$  (valeur fixe, probabilité uniforme ou triangulaire), celle-ci n'a pas de conséquence sur l'activité racinaire (notamment sa variabilité). Ceci est dû d'une part au fait que la variabilité de la profondeur racinaire  $P_r$  est faible devant celle du facteur de transfert  $Frac$  et de la masse volumique  $R_o$  et d'autre part à l'hypothèse d'indépendance entre les paramètres incertains. Ainsi, on constate sur la figure 6.2 que prendre le paramètre  $P_r$  égal à sa valeur nominale ou modélisé par une loi uniforme n'influe quasiment pas sur la distribution de probabilité de l'activité racinaire. L'incertitude du paramètre  $P_r$  est donc noyée dans l'incertitude provenant des paramètres  $R_0$  et  $Frac$ . Cependant, ceci ne signifie pas que la valeur de  $P_r$  est sans effet sur l'activité racinaire, mais seulement que sa variabilité n'apparaît pas. Pour illustrer ce

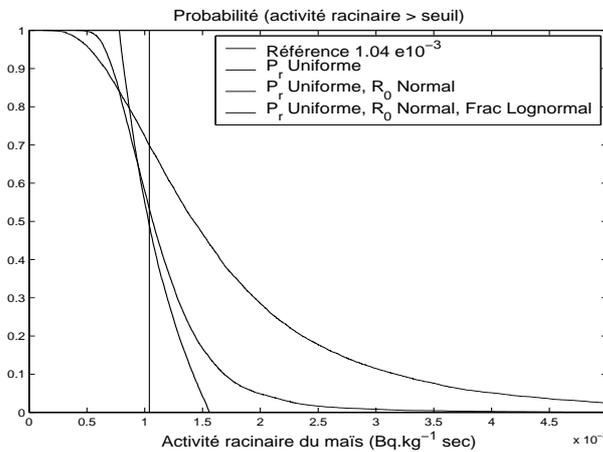


FIG. 6.1 – Effets de la variabilité sur l'activité racinaire du maïs dans le cadre probabiliste.

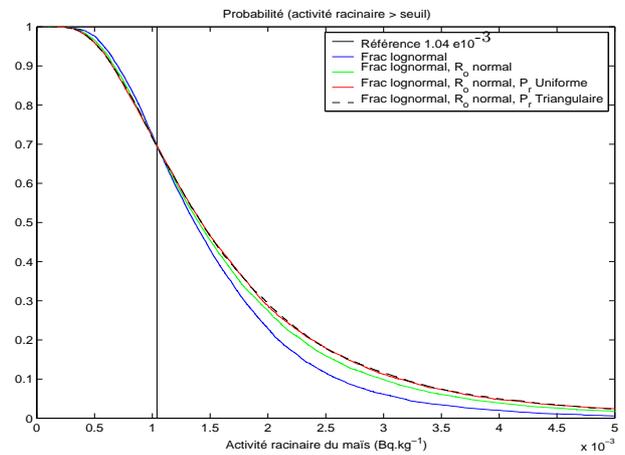


FIG. 6.2 – Effets de la variabilité du paramètre  $P_r$  sur l'activité racinaire du maïs dans le cadre probabiliste.

point, supposons par exemple que l'incertitude sur  $P_r$  soit modélisée par une loi de probabilité uniforme sur  $[0.15, 0.225]$  ou par une loi de probabilité uniforme sur  $[0.225, 0.3]$ . Ces deux modélisations :  $P_r$  entre  $[0.15, 0.225]$  et  $P_r$  entre  $[0.225, 0.30]$  correspondent à des informations plus précises que  $P_r$  entre  $[0.15, 0.30]$  et en première analyse on pourrait s'attendre à ce que les valeurs possibles de l'activité racinaire résultant de ces deux modélisations du paramètre  $P_r$  soient incluses dans la gamme de valeurs obtenues avec  $P_r$  variant entre  $[0.15, 0.30]$ . Ce n'est pas le cas comme le met en évidence la figure 6.3. Le résultat visualisé sur la Figure 6.2, à savoir que la variabilité du paramètre  $P_r$  est négligeable devant la variabilité des paramètres  $R_0$  et  $Frac$  est encore davantage vrai si on réduit la variabilité de  $P_r$ . Il est donc important de retenir que la Figure 6.2 montre l'effet de la variabilité de  $P_r$  et la Figure 6.3 montre l'effet de  $P_r$ . L'effet de la variabilité d'un paramètre et l'effet d'un paramètre sont des notions bien différentes et c'est pour les distinguer de façon naturelle que nous allons utiliser une méthode combinant la théorie des probabilités (effet de la variabilité des paramètres) et la théorie des possibilités (effet des paramètres).

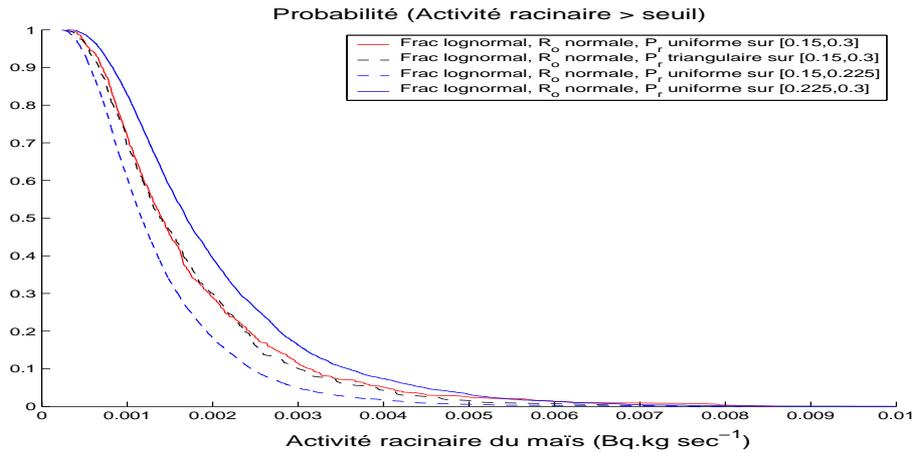


FIG. 6.3 – Effet sur l’activité racinaire du maïs selon différentes lois de probabilité de  $P_r$ .

#### 6.1.1.2.4 Calcul ”Hybride” (Combine imprécision-variabilité).

On considère à présent que l’information sur la profondeur racinaire  $P_r$  n’est plus de nature aléatoire mais de nature imprécise. Ce paramètre sera donc modélisé à l’aide d’un intervalle ou d’une distribution de possibilité triangulaire (Indice 1 ou 3) qui sera plus cohérente avec notre état de connaissance sur  $P_r$  (voir Section 6.1.1.1.3). Nous allons donc combiner de l’information de nature aléatoire au travers du facteur de transfert sol/plante  $Frac$ , de la masse volumique  $R_o$  et de l’information de nature imprécise au travers de la profondeur racinaire  $P_r$  à l’aide du calcul ”Hybride” (voir Section 4.2). La prise en compte de l’imprécision et de la variabilité, traitée par la méthode ”Hybride”, génère un ensemble de distributions de possibilité (voir Section 4.2). La prise en compte de l’imprécision dans le traitement des incertitudes, traitée par la théorie des possibilités ou des fonctions de croyance, génère non plus une probabilité unique mais une famille de probabilités. Le post-traitement du calcul ”hybride” fournit une probabilité haute et basse (voir Section 5.2.4). L’écart entre la probabilité haute et basse reflète le caractère imprécis de l’information sur les valeurs des paramètres. La probabilité basse comme la probabilité haute montrent l’effet de la variabilité des paramètres. La figure 6.4 permet d’apprécier les effets sur l’incertitude pour le modèle de l’activité racinaire du maïs suivant la modélisation de la connaissance sur la profondeur racinaire  $P_r$  à savoir une modélisation probabiliste ou possibiliste. L’incertitude sur l’activité racinaire du maïs n’est plus uniquement due à la variabilité des paramètres :  $R_0$ ,  $F_{rac}$  et  $P_r$ , mais est due à la variabilité des paramètres :  $R_0$ ,  $F_{rac}$  et à l’imprécision sur les valeurs possibles du paramètre  $P_r$ . Ainsi, à l’aide de la table 6.6, on remarque que l’incertitude totale augmente de 57% dans le cadre du calcul ”Hybrid”. Dans le cadre purement probabiliste, on avait conclu que l’incertitude sur la profondeur racinaire  $P_r$ , modélisée par de la variabilité n’avait pas d’influence sur l’incertitude de l’activité racinaire du maïs. En revanche, le fait de modéliser l’incertitude sur la profondeur racinaire  $P_r$  comme de l’imprécision conduit à une augmentation significative de l’incertitude totale sur l’activité racinaire. La figure 6.5 permet de comparer les incertitudes sur l’activité racinaire pour le maïs entre le calcul purement probabiliste, le calcul d’intervalle puis le calcul ”Hybride” pour différentes représentations de la profondeur racinaire  $P_r$ . On observe que plus notre information est riche concernant la profondeur racinaire  $P_r$  (intervalle  $\rightarrow$  possibilité triangulaire) plus l’écart entre les probabilités hautes et basses de l’activité

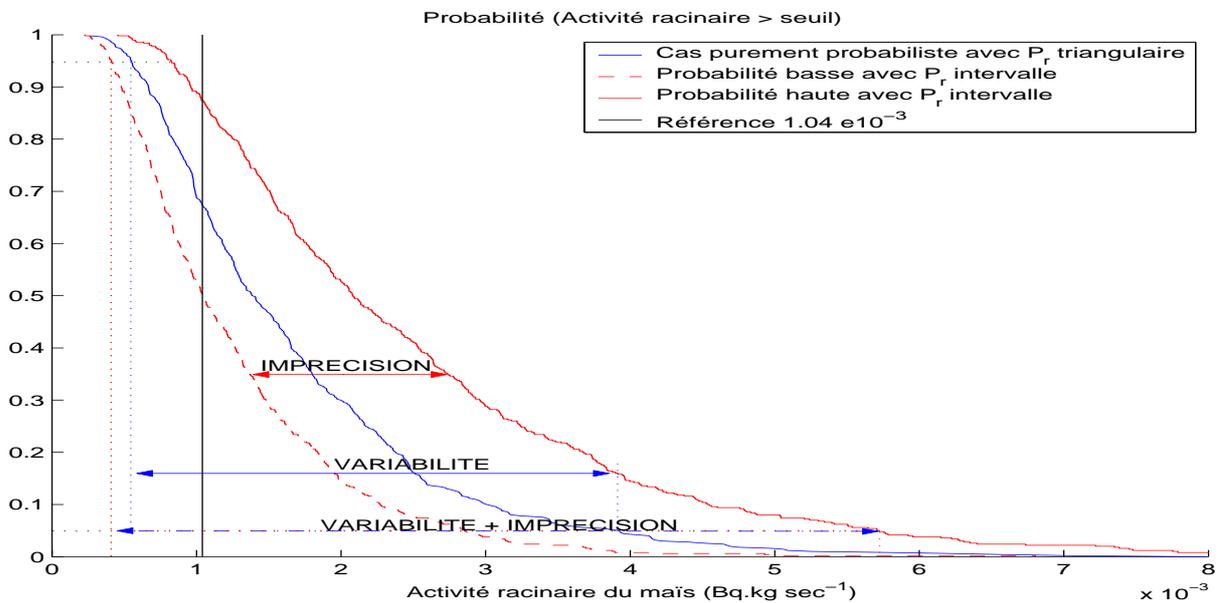


FIG. 6.4 – Impact sur les probabilités de l’activité racinaire du maïs selon que l’on considère l’information sur la profondeur racinaire  $P_r$  de nature aléatoire ou imprécise.

	Fractile à 5%	Fractile à 95%	Rapport Fractiles à 95% / 5%
Cas purement probabiliste	$5.48e10^{-4}$	$3.92e10^{-3}$	7.15
indice $P_r=1$ , Probabilité haute	$8.23e10^{-4}$	$5.70e10^{-3}$	13.83
indice $P_r=1$ , Probabilité basse	$4.12e10^{-4}$	$2.85e10^{-3}$	

TAB. 6.6 – Impact sur les fractiles de l’activité racinaire du maïs ( $Bq.kg \text{ sec}^{-1}$ ) selon la représentation mathématique de la connaissance sur la profondeur racinaire  $P_r$  (aléatoire ou imprécise).

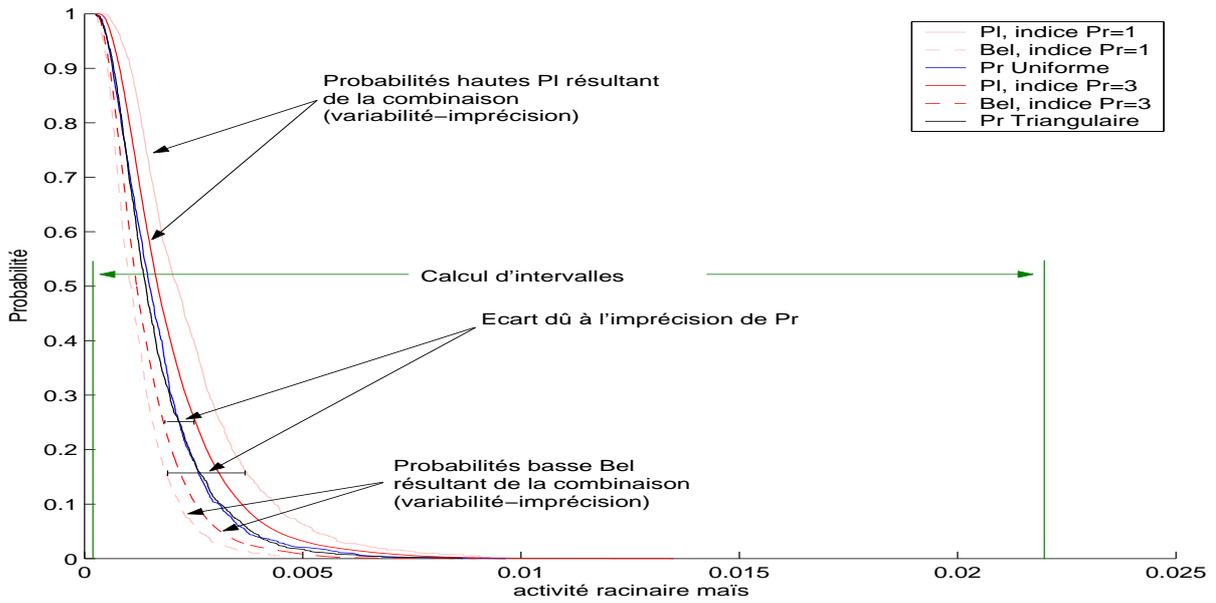


FIG. 6.5 – Influence de la représentation de la profondeur racinaire  $P_r$  sur la probabilité que l’activité racinaire du maïs soit supérieure à un certain seuil.

racinaire du maïs diminue (diminution de 30% de l’incertitude). La représentation de la profondeur racinaire  $P_r$  par une distribution de probabilité triangulaire sous-estime l’incertitude de l’activité racinaire de 48% (resp. 18%) comparativement au cas où  $P_r$  est représenté par un intervalle (resp. une distribution de possibilité triangulaire). Pour la profondeur racinaire  $P_r$  représentée par la distribution de possibilité triangulaire, on peut dire que :

$$0.01 \leq P_{Activite_{racinaire}}([0.005, \infty]) \leq 0.03$$

A noter que cette dernière représentation domine les deux distributions uniformes extrêmes qui avaient été utilisées pour la profondeur racinaire  $P_r$  dans la section précédente (voir Figure 6.3). En fait, la probabilité haute (resp. basse) en rouge de la figure 6.5 (indice  $P_r=3$ ) coïncide avec la probabilité haute (resp. basse) en bleu de la figure 6.3. Ces premiers résultats

	Fractile à 5%	Fractile à 95%	Rapport Fractiles à 95% / 5%
Cas purement probabiliste	$5.48e10^{-4}$	$3.92e10^{-3}$	7.15
indice $P_r=1$ , Probabilité haute	$8.23e10^{-4}$	$5.70e10^{-3}$	13.83
indice $P_r=1$ , Probabilité basse	$4.12e10^{-4}$	$2.85e10^{-3}$	
indice $P_r=3$ , Probabilité haute	$6.57e10^{-4}$	$4.15e10^{-3}$	8.75
indice $P_r=3$ , Probabilité basse	$4.73e10^{-4}$	$2.91e10^{-3}$	

TAB. 6.7 – Impacts sur les fractiles de l’activité racinaire du maïs ( $Bq.kg \text{ sec}^{-1}$ ) selon différentes représentations de la profondeur racinaire  $P_r$ .

mettent en évidence que dans un cadre purement probabiliste, on aurait conclu que la profondeur racinaire  $P_r$  n’était pas un paramètre influent. Cependant, en restant fidèle à l’état de connaissance sur  $P_r$  à savoir une connaissance imprécise, la profondeur racinaire devient

alors un paramètre influent sur l'incertitude totale. Représenter la profondeur racinaire par une distribution de probabilité unique donne des résultats informatifs (précis) mais qui sont arbitraires dans le sens où l'on a rajouté implicitement de l'information à notre état d'ignorance partielle sans justification. En procédant ainsi, on confond l'effet de l'imprécision sur les valeurs des paramètres (ici  $P_r$ ) avec l'effet de la variabilité des paramètres. En tenant compte du caractère imprécis de l'information, les résultats obtenus pour l'activité racinaire du maïs sont plus discriminants que le calcul d'intervalle et plus conservatifs que le cas purement probabiliste.

### 6.1.2 Interception Directe des Retombées d'un rejet par les Végétaux (Activité foliaire)

L'interception directe des retombées d'un rejet par les végétaux est régie par le modèle suivant quels que soient les végétaux considérés (Maïs et Herbe).

$$Activité_{foliaire} = D \frac{R_c \cdot F_t}{RFS \cdot Rdt \cdot \lambda_{bio} \cdot 365 \text{ jours}} \quad (6.7)$$

$D$	Dépôt ( $Bq \cdot m^{-2}$ ).
$R_c$	Rapport de captation (sans unité).
$F_t$	Facteur de translocation (sans unité).
$RFS$	Rapport poids Frais/poids Sec (sans unité).
$Rdt$	Rendement cultural ( $kg \cdot m^{-2}$ ).
$\lambda_{bio}$	Constante de décroissance biomécanique ( $j^{-1}$ ).
$Activité_{foliaire}$	Activité foliaire du fourrage ( $Bq \cdot kg \text{ sec}^{-1}$ ).

#### 6.1.2.1 Représentation de l'information disponible

##### 6.1.2.1.1 Constante de décroissance $\lambda_{bio}$ ( $j^{-1}$ )

La constante de décroissance biomécanique  $\lambda_{bio}$  permet de modéliser la diminution de l'activité massique du végétal due à la croissance du végétal et au renouvellement des téguments entre le moment du dépôt et celui de la récolte. Le paramètre  $\lambda_{bio}$  est intrinsèquement variable du fait de la variabilité naturelle des végétaux. Les conditions dans lesquelles poussent le végétal (types de sols, engrais, irrigation) influent sur la rapidité de sa croissance et sur le rendement final et donc sur la diminution de son activité massique. Notre état de connaissance sur ce paramètre est défini à partir d'avis d'experts, de quelques mesures et de données bibliographiques [84]. Il ressort que l'on est certain que  $\lambda_{bio} \in [0.015, 1000]j^{-1}$  et que les valeurs les plus vraisemblables sont dans  $[0.025, 0.1]j^{-1}$  que ce soit pour le maïs ou pour l'herbe. Dans un cadre purement probabiliste, on peut être tenté de représenter cette connaissance par la distribution de probabilité trapézoïdale. Le problème est que les valeurs sélectionnées lors de l'échantillonnage sont principalement supérieures à 0.1 ce qui n'est pas souhaité étant donné que les valeurs les plus vraisemblables sont dans  $[0.025, 0.1]$ . Ainsi, nous avons décidé d'utiliser la distribution de probabilité cumulée  $F_{\lambda_{bio}}$  telle que  $F_{\lambda_{bio}}(0.015) = 0$ ,  $F_{\lambda_{bio}}(0.025) = 0.05$ ,  $F_{\lambda_{bio}}(0.1) = 0.95$  et  $F_{\lambda_{bio}}(1000) = 1$  avec une interpolation linéaire entre chaque fractile (voir dans la table 6.8 son expression analytique). Cependant, l'information réellement disponible ne peut pas justifier l'utilisation d'une unique distribution de probabilité pour représenter la constante de décroissance  $\lambda_{bio}$ . La distribution de possibilité trapézoïdale, définie dans la table

6.8, est mieux adaptée (car plus fidèle) pour représenter  $\lambda_{bio}$  et elle domine la distribution de probabilité définie précédemment (voir Figures 6.6 et 6.7).

	Maïs & Herbe		Indice
Distribution de possibilité trapézoïdale	support=[0.015, 1000]	noyau=[0.025, 0.1]	1
Distribution de probabilité cumulée	$F_{\lambda_{bio}}(x) = 2.5(x - 0.015) \forall x \in [0.015, 0.025]$ $F_{\lambda_{bio}}(x) = \frac{95\%}{0.075}(x - 0.025) + 2.5\% \forall x \in [0.025, 0.1]$ $F_{\lambda_{bio}}(x) = \frac{2.5\%}{999.9}(x - 0.1) + 97.5\% \forall x \in [0.1, 1000]$		2

TAB. 6.8 – Différentes représentations pour la constante de décroissance biomécanique  $\lambda_{bio}$  ( $j^{-1}$ ).

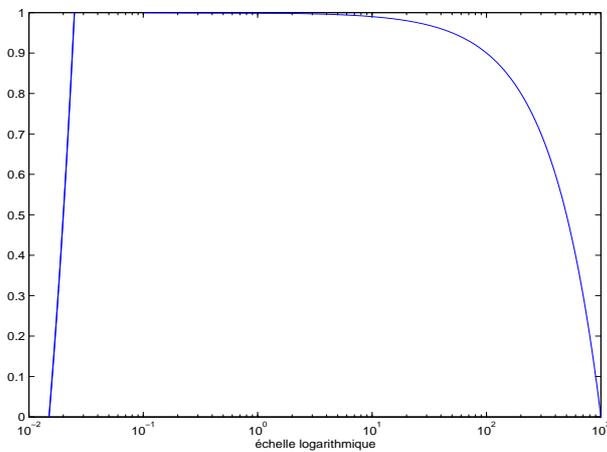


FIG. 6.6 – Distribution de possibilité trapézoïdale  $\pi$  de support [0.015,1000] et de noyau [0.025,0.1].

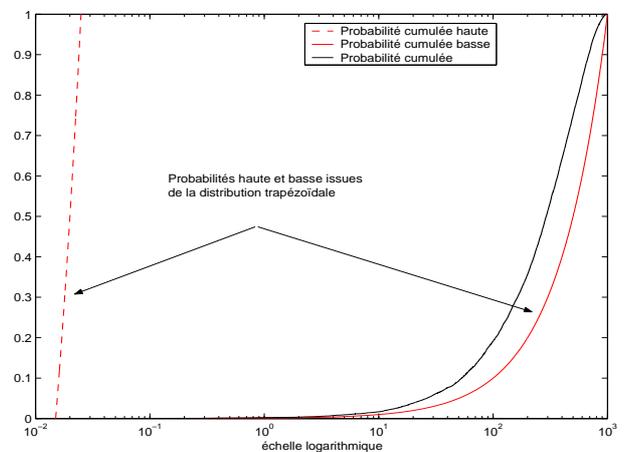


FIG. 6.7 – Probabilités cumulées haute et basse issues de  $\pi$  encadrant la probabilité cumulée trapézoïdale en noir.

### 6.1.2.1.2 Rapport de captation $R_c$ (sans unité)

Le rapport de captation  $R_c$  désigne la fraction du dépôt exprimé en  $Bq.m^{-2}$ , qui est interceptée par la surface foliaire des végétaux. La connaissance sur ce paramètre est issue de la formule de Chamberlain [17] qui reconstitue le rapport de captation  $R_c$  à partir du rendement de biomasse foliaire. Cette formule a permis de reconstituer un encadrement des valeurs possibles pour ce paramètre [84] (voir table 6.28 pour les différentes représentations du paramètre  $R_c$ ).

	Maïs	Herbe	Indice
Intervalle	[0.63, 0.82]	[0.8, 0.9]	1
Distribution de probabilité Uniforme	[0.63, 0.82]	[0.8, 0.9]	2

TAB. 6.9 – Différentes représentations pour le rapport de captation  $R_c$  (sans unité).

### 6.1.2.1.3 Facteur de Translocation (sans unité)

Le facteur de translocation  $F_t$  rend compte du transfert des radionucléides vers les organes de la plante et notamment vers la partie consommée après absorption due à un dépôt sur les tiges ou les feuilles des végétaux. Lorsque tout ou partie de la masse foliaire est consommée (maïs, herbe), il n'y a pas lieu de considérer la translocation et on adopte une valeur de 1 pour ce paramètre.

### 6.1.2.1.4 Rendement cultural $Rdt$ ( $kg.m^{-2}$ )

Le rendement cultural est une donnée agronomique variable. La connaissance concernant le paramètre  $Rdt$  est issue de la bibliographie. Les valeurs de référence fournissent un encadrement avec les valeurs centrales préférées [84]. La Table 6.10 présente les différentes représentations du rendement cultural  $Rdt$ .

	Maïs	Herbe	Indice
Intervalle	[4.5, 7.5]	[1, 10]	1
Distribution de probabilité Uniforme	[4.5, 7.5]	[1, 10]	2
Distribution de possibilité triangulaire	[4.5, 6, 7.5]	[1, 5.5, 10]	3
Distribution de probabilité triangulaire	[4.5, 6, 7.5]	[1, 5.5, 10]	4

TAB. 6.10 – Différentes représentations pour le rendement cultural  $Rdt$  ( $kg.m^{-2}$ ).

### 6.1.2.1.5 Rapport poids Frais/poids Sec $RFS$ (sans unité)

Le paramètre  $RFS$  est utilisé pour obtenir l'activité des végétaux en  $Bq.kg^{-1}$  sec. La connaissance de ce paramètre est issue d'une base de données qui a permis d'estimer la moyenne et l'écart type et de valider l'hypothèse d'une loi normale [84] (voir Table 6.11).

	Maïs	Herbe
normale	[0.285, 0.04]	[0.302, 0.164]

TAB. 6.11 – Représentation pour le rapport poids Sec/poids Frais  $\frac{1}{RFS}$  (sans unité).

## 6.1.2.2 Etude des incertitudes de l'activité foliaire

Comme pour l'activité racinaire, nous focaliserons notre étude sur l'activité foliaire du maïs. Le but est toujours de montrer les effets de différents modes de représentation de l'information disponible sur l'activité foliaire, comparativement à une représentation purement probabiliste.

### 6.1.2.2.1 Calcul d'intervalles

Par un raisonnement analogue à l'activité racinaire (voir Section 6.1.1.2.1), on calcule l'ensemble des valeurs possibles de l'activité foliaire par un calcul d'intervalles afin d'obtenir un encadrement (min-max) de celle-ci.

	Maïs	
$\frac{1}{RFS}$ (sans unité)	0.211	0.388
$R_c$ (sans unité)	0.63	0.82
$Rdt$ ( $kg.m^{-2}$ )	4.5	7.5
$\lambda_{bio}$ ( $j^{-1}$ )	0.015	1000
$Activite_{foliaire}$ ( $Bq.kg \text{ sec}^{-1}$ )	$5.086e10^{-8}$	0.0129

TAB. 6.12 – Résultat du calcul d'intervalles pour l'activité foliaire du maïs ( $Bq.kg \text{ sec}^{-1}$ ).

#### 6.1.2.2.2 Calcul de référence

Comme pour le calcul de référence de l'activité racinaire du maïs dans la Section 6.1.1.2.2, Les valeurs modales de chaque paramètre sont sélectionnées et on calcule l'activité foliaire du maïs à partir de celles-ci. La table 6.13 répertorie les valeurs modales de chaque paramètre et le calcul de l'activité foliaire du maïs.

	Maïs
$R_c$ (sans unité)	0.725
$\frac{1}{RFS}$ (sans unité)	0.285
$Rdt$ ( $kg.m^{-2}$ )	6
$\lambda_{bio}$ ( $j^{-1}$ )	0.0625
$Activité_{foliaire}$ ( $Bq.kg \text{ sec}^{-1}$ )	$1.5e10^{-3}$

TAB. 6.13 – Résultat de l'activité foliaire du maïs ( $Bq.kg \text{ sec}^{-1}$ ) pour une sélection des valeurs modales de chaque paramètre.

#### 6.1.2.2.3 Calcul purement probabiliste (variabilité)

Comme pour l'activité racinaire du maïs (voir Section 6.1.2.2.3), on se place dans le cadre purement probabiliste où l'on injecte de la variabilité, dans le modèle de l'activité foliaire, au travers de ses paramètres. La figure 6.8 permet de visualiser le caractère variable de l'activité foliaire du maïs comparativement au calcul de référence. L'apparition du plateau entre  $1e10e^{-7}$  et  $3e10^{-4} Bq.kg \text{ sec}^{-1}$  s'explique par le fait que la constante de décroissance  $\lambda_{bio}$  peut être dans  $[0.1,1000]$  avec une probabilité de 2.5% et donc peut générer (avec une probabilité faible) ces valeurs très faibles pour l'activité foliaire.

#### 6.1.2.2.4 Calcul "Hybride" (Combine imprécision-variabilité)

De manière similaire à l'activité racinaire du maïs, nous allons utiliser les modèles possibilistes pour les paramètres  $\lambda_{bio}$ ,  $Rdt$  et  $R_c$  et ainsi mettre en évidence leurs influences sur

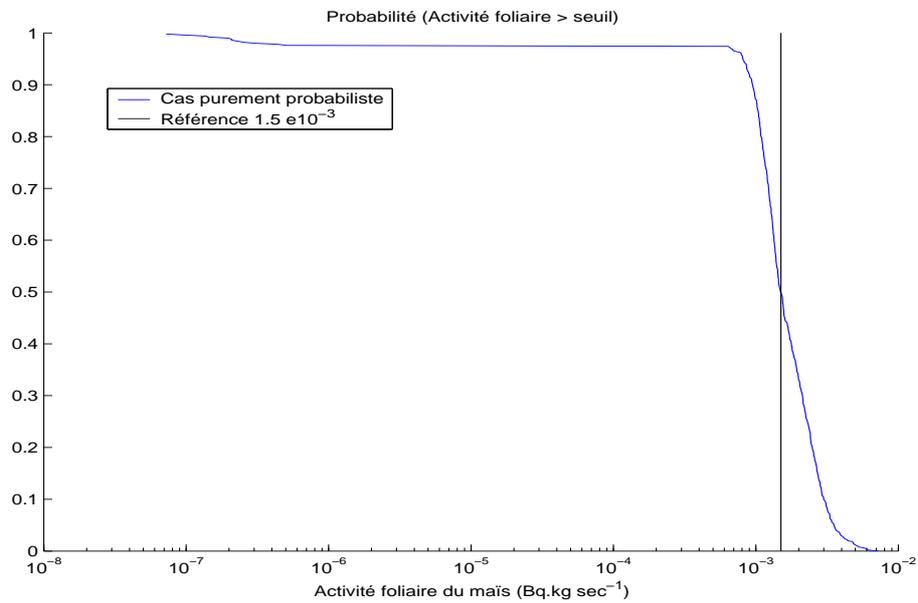


FIG. 6.8 – Effet de la variabilité sur l'activité foliaire du maïs dans le cadre purement probabiliste (échelle logarithmique).

	Fractile à 5%	Fractile à 95%	Rapport 95% / 5%
Cadre purement probabiliste indice( $\lambda_{bio}, R_c, Rdt$ )=(2,2,4)	$8.1e10^{-4}$	$3.53e10^{-3}$	4.35

TAB. 6.14 – Fractiles de l'activité foliaire du maïs ( $Bq.kg \text{ sec}^{-1}$ ).

l'activité foliaire du maïs comparativement au cadre purement probabiliste.

Considérons dans un premier temps que la constante de décroissance  $\lambda_{bio}$  soit représentée par la distribution de probabilité définie dans la table 6.8. L'utilisation de la distribution de possibilité triangulaire ou l'intervalle pour le rendement culturel  $Rdt$  n'a pas de conséquence directe sur le résultat. Ceci est dû à l'étendue faible des valeurs possibles pour le paramètre  $Rdt$ . La figure 6.9 et la table 6.15 montrent que le fait de considérer notre information sur les paramètres  $R_c$  et  $Rdt$  de nature imprécise contribue à une augmentation de 53% de l'incertitude sur l'activité foliaire du maïs dans le cadre du calcul "Hybrid". Considérons à

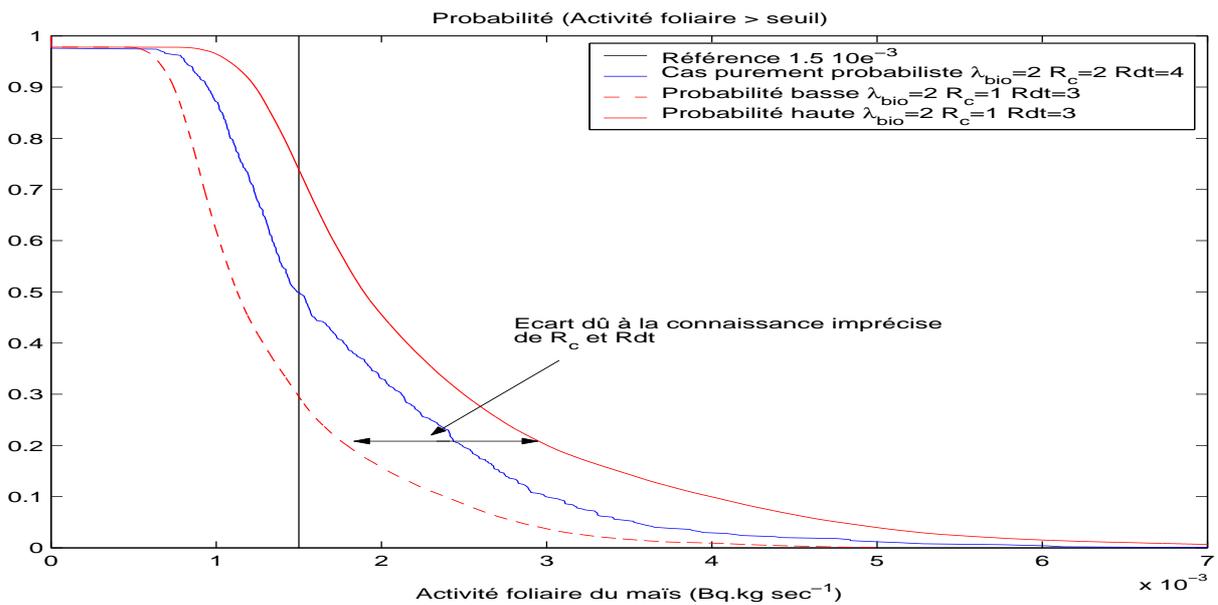


FIG. 6.9 – Influence de la représentation de  $R_c$ ,  $Rdt$  sur la probabilité d'obtenir l'activité foliaire du maïs supérieure à un certain seuil.

	Fractile à 5%	Fractile à 95%	Rapport 95% / 5%
Cas purement probabiliste	$8.1e10^{-4}$	$3.53e10^{-3}$	4.35
indice( $R_c = 1, Rdt = 3$ ), Probabilité haute	$1.1e10^{-3}$	$4.8e10^{-3}$	7.39
indice( $R_c = 1, Rdt = 3$ ), Probabilité basse	$6.49e10^{-4}$	$2.8e10^{-3}$	

TAB. 6.15 – Impacts sur les fractiles de l'activité foliaire du maïs ( $Bq.kg\ sec^{-1}$ ) selon où l'on considère la connaissance sur le rapport de captation  $R_c$  et le rendement culturel  $Rdt$  de nature aléatoire ou imprécise.

présent que la constante de décroissance  $\lambda_{bio}$  soit représentée par la distribution de possibilité trapézoïdale. La figure 6.10 montre que la constante de décroissance  $\lambda_{bio}$  est le paramètre le plus influent sur l'activité foliaire du maïs. Les effets se font surtout ressentir sur la probabilité basse de dépasser un seuil. En effet, le paramètre  $\lambda_{bio}$  apparaît au dénominateur de l'activité foliaire ce qui a pour conséquence d'écraser les valeurs basses de l'activité foliaire pour les valeurs hautes [0.1, 1000] de  $\lambda_{bio}$  lors du processus de propagation (méthodologie "Hybride").

Dans le cadre purement probabiliste, on a  $P(\lambda_{bio} \in [0.1, 1000]) = 2.5\%$ , autant dire que la probabilité d'obtenir des valeurs très hautes  $[0.1, 1000]$  pour la constante de décroissance  $\lambda_{bio}$  est très faible et donc la probabilité d'obtenir des valeurs très basses pour l'activité foliaire du maïs est très faible. Le fait de rester fidèle à l'information, notamment pour la constante de

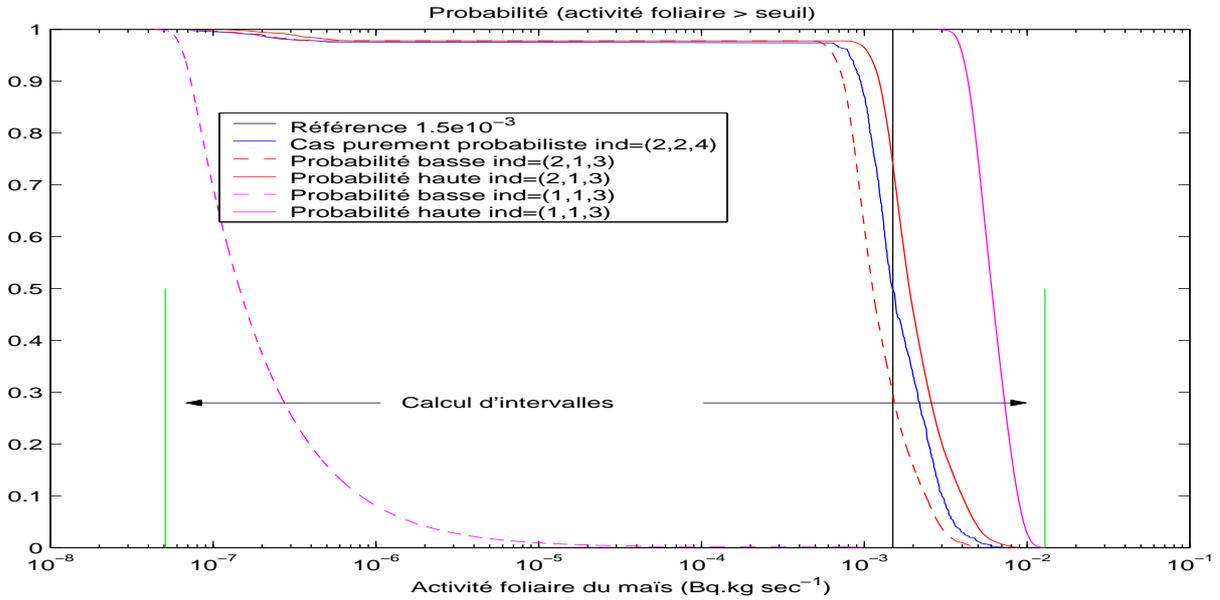


FIG. 6.10 – Influence de la représentation des paramètres  $\lambda_{bio}$ ,  $R_c$ ,  $Rdt$  sur la probabilité d'obtenir l'activité foliaire du maïs supérieure à un certain seuil (échelle logarithmique). Ordre des indices correspondant aux paramètres indice= $(\lambda_{bio}, R_c, Rdt)$ .

	Fractile à 5%	Fractile à 95%	Rapport 95% / 5%
Cas purement probabiliste	$8.1e10^{-4}$	$3.53e10^{-3}$	4.35
ind. ( $R_c = 1, Rdt = 3$ ), Prob. haute	$1.1e10^{-3}$	$4.8e10^{-3}$	7.39
ind. ( $R_c = 1, Rdt = 3$ ), Prob. basse	$6.49e10^{-4}$	$2.8e10^{-3}$	
ind. ( $\lambda_{bio} = 1, R_c = 1, Rdt = 3$ ), Prob. haute	$4.11e10^{-3}$	$9.59e10^{-3}$	$1.4e10^5$
ind. ( $\lambda_{bio} = 1, R_c = 1, Rdt = 3$ ), Prob. basse	$0.67e10^{-7}$	$16.63e10^{-7}$	

TAB. 6.16 – Impacts sur les fractiles de l'activité foliaire du maïs ( $Bq.kg \text{ sec}^{-1}$ ) selon la représentation des paramètres.

décroissance  $\lambda_{bio}$ , augmente considérablement l'incertitude sur l'activité foliaire du maïs (à savoir une augmentation de 253%). On remarque également que dans le cadre où l'on modélise fidèlement notre état de connaissance, il est tout à fait plausible de dépasser des valeurs comme  $0.005 Bq.kg \text{ sec}^{-1}$  alors que dans un cadre purement probabiliste, ce dépassement est jugé quasi impossible (voir Figure 6.10).

### 6.1.3 Activité massique du fourrage

$$Activité_{fourrage} = Activité_{racinaire} + Activité_{foliaire} \quad (6.8)$$

Comme pour les sections précédentes, nous nous focaliserons sur l'activité massique du maïs.

### 6.1.3.1 Calcul d'intervalles

L'activité foliaire du maïs peut atteindre des valeurs très basses (voir Table 6.17) compte tenu des valeurs très hautes que peut atteindre la constante de décroissance  $\lambda_{bio}$ . Ainsi, l'activité foliaire du maïs n'est pas le facteur dominant de l'activité massique totale du maïs pour les valeurs basses.

	Maïs	
$Activité_{racinaire} (Bq.kg \text{ sec}^{-1})$	$1.63e10^{-4}$	0.022
$Activité_{foliaire} (Bq.kg \text{ sec}^{-1})$	$5.086e10^{-8}$	0.0129
$Activité_{fourrage} (Bq.kg \text{ sec}^{-1})$	$1.63e10^{-4}$	0.0349

TAB. 6.17 – Résultats du calcul d'intervalles pour l'activité massique totale du maïs ( $Bq.kg \text{ sec}^{-1}$ ).

### 6.1.3.2 Calcul de référence

Les valeurs modales de chaque paramètre sont sélectionnées et on calcule l'activité massique du fourrage.

	Maïs
$Activité_{racinaire} (Bq.kg \text{ sec}^{-1})$	$1.04e10^{-3}$
$Activité_{foliaire} (Bq.kg \text{ sec}^{-1})$	$1.5e10^{-3}$
$Activité_{fourrage} (Bq.kg \text{ sec}^{-1})$	$2.54e10^{-3}$

TAB. 6.18 – Résultat de l'activité massique totale du maïs ( $Bq.kg \text{ sec}^{-1}$ ) pour une sélection des valeurs modales de chaque paramètre.

### 6.1.3.3 Calcul purement probabiliste (variabilité)

L'effet de plateau remarqué sur la figure 6.8 concernant l'activité foliaire ne se répercute pas sur l'activité massique totale du maïs car les valeurs basses de l'activité foliaire seront écrasées par les valeurs de l'activité racinaire.

	Fractile à 5%	Fractile à 95%	Rapport 95% / 5%
Cadre purement probabiliste Indice( $P_r, \lambda_{bio}, R_c, Rdt$ )=(4,2,2,4)	$1.72e10^{-3}$	$5.83e10^{-3}$	3.4

TAB. 6.19 – Fractiles de l'activité massique totale du maïs ( $Bq.kg \text{ sec}^{-1}$ ).

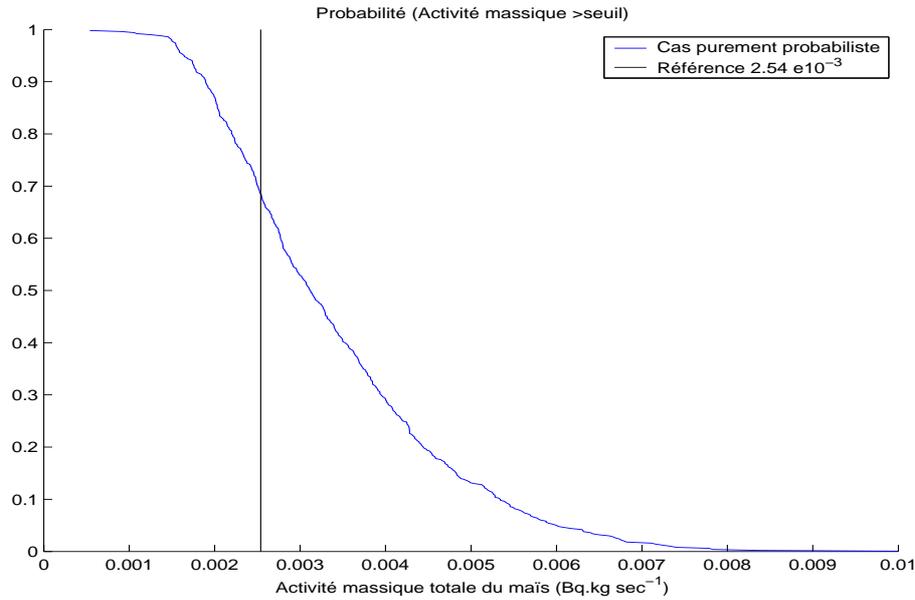


FIG. 6.11 – Effet de la variabilité sur l'activité foliaire du maïs dans le cadre purement probabiliste (échelle logarithmique).

#### 6.1.3.4 Calcul "hybride" (Combine imprécision-variabilité)

Dans la Section 6.1.1, nous avons mis en évidence que la profondeur racinaire  $P_r$  était un paramètre influent sur l'incertitude de l'activité racinaire du maïs quand celui-ci était modélisé par une distribution de possibilité. Nous décidons à présent de conserver la distribution de possibilité triangulaire car elle est cohérente avec l'information réellement disponible. Dans la Section 6.1.2, nous avons observé que la constante de décroissance  $\lambda_{bio}$  était le paramètre influent sur l'incertitude de l'activité foliaire du maïs quand celle-ci était représentée par une distribution de possibilité notamment sur les probabilités basses. En se référant aux tables 6.7 et 6.16, nous pouvons caractériser l'incertitude pour les valeurs hautes de l'activité racinaire (resp. l'activité foliaire) par l'intervalle  $[6.57e^{-4}, 4.15e^{-3}] Bq.kg sec^{-1}$  (resp.  $[4.11e10^{-3}, 9.59e10^{-3} Bq.kg sec^{-1}]$ ). On en déduit que l'activité foliaire du maïs sera donc le facteur dominant dans l'activité massique du maïs pour les probabilités hautes. En revanche, l'incertitude sur les valeurs basses caractérisée par l'intervalle  $[4.73e^{-4}, 2.91e^{-3}] Bq.kg sec^{-1}$  pour l'activité racinaire (resp.  $[0.67e10^{-7}, 16.63e10^{-7}] Bq.kg sec^{-1}$  pour l'activité foliaire), met en évidence que l'activité racinaire sera le facteur dominant de l'activité massique du maïs pour les probabilités basses. La table 6.20 nous montre que l'incertitude totale de

	Fractile à 5%	Fractile à 95%	Rapport 95% / 5%
Cas purement probabiliste	$1.72e10^{-3}$	$5.83e10^{-3}$	3.4
Probabilité haute, Ind=(3,1,1,3)	$5.4e10^{-3}$	$12.39e10^{-3}$	25
Probabilité basse, Ind=(3,1,1,3)	$4.94e10^{-4}$	$2.94e10^{-3}$	

TAB. 6.20 – Impacts sur les fractiles de l'activité massique du maïs ( $Bq.kg sec^{-1}$ ) selon la représentation des paramètres imprécis. Ordre des indices Ind= $(P_r, \lambda_{bio}, R_c, Rdt)$

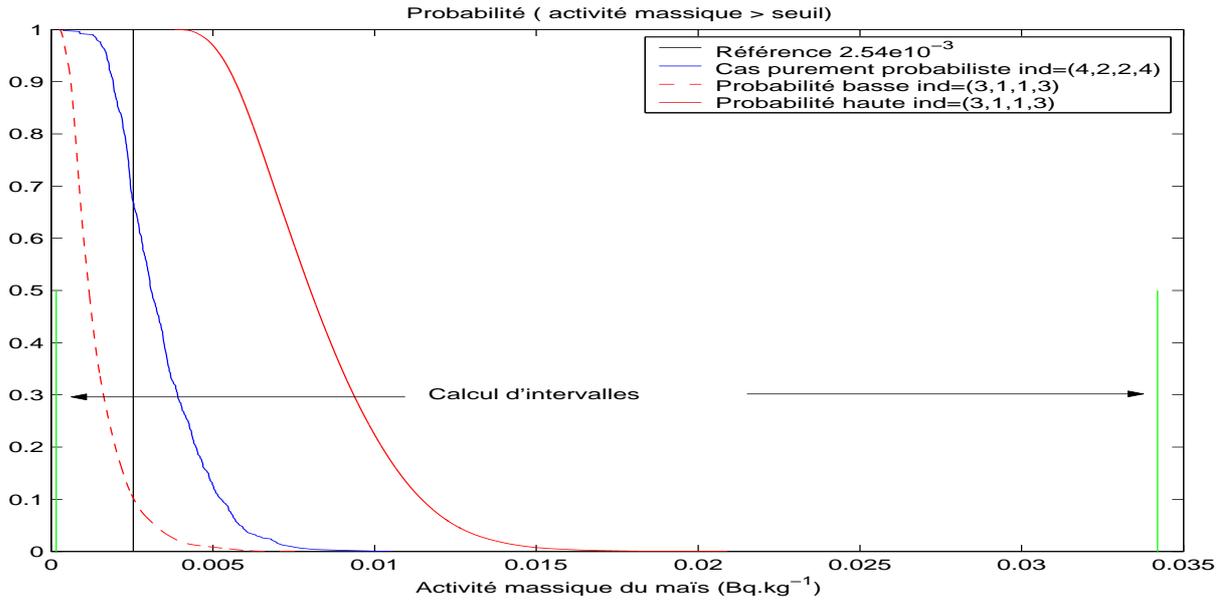


FIG. 6.12 – Influence de la représentation des paramètres  $P_r, \lambda_{bio}, Rc, Rdt$  sur la probabilité que l'activité massique du maïs soit supérieure à un certain seuil. Ordre des indices correspondant aux paramètres  $ind = (P_r, \lambda_{bio}, Rc, Rdt)$ .

l'activité massique du maïs est sous-estimée de 65% dans le cadre purement probabiliste. On observe également que la probabilité de dépasser  $0.007 \text{ Bq.kg.sec}^{-1}$  peut atteindre 70% dans le cadre où l'on essaie de conserver le caractère imprécis de l'information. Dans le cadre purement probabiliste ce dépassement de seuil est jugé quasi impossible.

#### 6.1.4 Transfert vers les produits animaux

Dans un environnement contenant des radionucléides artificiels dûs à une accumulation de dépôts successifs, les animaux sont contaminés principalement par ingestion de fourrages contaminés. Le transfert vers les produits animaux est régi par le modèle suivant :

$$Activité_{lait} = Ft_{lait} \cdot \sum_{fourrage} Activité_{fourrage} \cdot Ration_{fourrage} \cdot RFS_{fourrage} \quad (6.9)$$

$Ft_{lait}$	Facteur de transfert au lait de vache ( $j/l$ ).
$Ration_{fourrage}$	Quantité de fourrage consommée chaque jour ( $kg \text{ sec}.j^{-1}$ ).
$Activité_{fourrage}$	Activité massique du fourrage $Bq.kg \text{ sec}^{-1}$ .
$Activité_{lait}$	Activité volumique du lait ( $Bq.l^{-1}$ ).
$RFS_{fourrage}$	Rapport poids Frais/poids Sec (sans unité).

##### 6.1.4.1 Représentation de l'information disponible

###### 6.1.4.1.1 Facteur de transfert au lait de vache $Ft_{lait}$ ( $j/l$ ).

Pour une incorporation quotidienne donnée, l'intensité du transfert au lait dépend surtout de la répartition du radionucléide dans les organes et fluides de l'animal. Le facteur de transfert

à l'équilibre vers le lait dépend donc du radionucléide. Les valeurs de référence utilisées dans la table 6.21 sont celles issues de [84].

	Mais, Herbe	Indice
Intervalle	[0.001, 0.005]	1
Distribution de probabilité uniforme	[0.001, 0.005]	2

TAB. 6.21 – Représentation pour le facteur de transfert plante/lait  $Ft_{lait}$  ( $j/l$ ).

#### 6.1.4.1.2 Ration alimentaire d'une vache laitière $Ration_{fourrage}$ ( $kg \text{ sec}.j^{-1}$ )

On définit deux représentations possibles afin de comparer leurs répercussions sur les résultats de l'activité volumique du lait. Nous avons seulement de la connaissance sur la matière sèche totale ingérée à savoir les valeurs les plus vraisemblables se situant dans l'intervalle  $[10,14] \text{ kg sec}.j^{-1}$  mais on ne peut pas exclure les valeurs contenues dans  $[4,35] \text{ kg sec}.j^{-1}$ . Ces valeurs de référence sont issues de [84]. Il faut à présent déterminer la ration de maïs et d'herbe ingérée. Pour cela on va utiliser un *ratio* contenu dans  $[0,1]$  et déterminer le poids d'herbe ingérée en effectuant : matière sèche totale ingérée  $\times$  *ratio* et le poids du maïs ingéré en effectuant : matière sèche totale ingérée  $\times$   $(1 - \text{ratio})$ . Ainsi, la variable  $Ration_{fourrage}$  sera modélisée par :

Maïs, herbe	Indice
distribution de possibilité trapézoïdale aléatoire	1
combinaison d'une probabilité uniforme sur $[0,1]$ ( <i>ratio</i> ) et d'une distribution de probabilité trapézoïdale (matière sèche totale)	2

TAB. 6.22 – Représentation pour la Ration alimentaire d'une vache laitière  $Ration_{fourrage}$  ( $kg \text{ sec}.j^{-1}$ ).

#### 6.1.4.1.3 Rapport poids Frais/poids Sec $RFS$ (sans unité)

(voir Section 6.1.2.1.5)

### 6.1.4.2 Etude des incertitudes de l'activité volumique du lait

#### 6.1.4.2.1 Calcul d'intervalles

Le tableau 6.23 présente les résultats du calcul d'intervalles pour l'activité volumique du lait.

#### 6.1.4.2.2 Calcul de référence

La distribution de probabilité, représentant la connaissance sur le rapport poids Sec/poids

	Herbe		Maïs	
$Activité_{fourrage} (Bq.kg \text{ sec}^{-1})$	$3.5e10^{-4}$	0.2060	$1.63e10^{-4}$	0.0349
$Ration_{fourrage} (kg \text{ sec}.j^{-1})$	4	35	0	0
$Ration_{fourrage} (kg \text{ sec}.j^{-1})$	0	0	4	35
$Ft_{lait} (j/l)$	0.001	0.005	0.001	0.005
$RFS$ (sans unité)	1.38	20	2.58	4.74
$Activité_{lait} (Bq.l^{-1})$	$1.93e10^{-6}$		3.28	

TAB. 6.23 – Résultats du Calcul d’intervalles pour l’activité volumique du lait ( $Bq.l^{-1}$ ).

Frais  $\frac{1}{RFS}$ , est normale de paramètres connus ( $m, \sigma$ ). La valeur modale du rapport poids Frais/poids Sec  $RFS$  sera donnée par  $\frac{-m+\sqrt{m^2+4\sigma^2}}{2\sigma^2}$ .

	Maïs	Herbe
$Frac (Bq.kg^{-1} \text{ sec de végétal}/Bq.kg^{-1} \text{ de sol})$	0.33	0.75
$R_o (kg.m^{-3})$	1410	1410
$Pr (m)$	0.225	0.2
$R_c$ (sans unité)	0.725	0.85
$\frac{1}{RFS}$ (sans unité)	0.285	0.302
$RFS$ (sans unité)	3.44	2.67
$Rdt (kg.m^{-2})$	6	5.5
$\lambda_{bio} (j^{-1})$	0.0625	0.0625
$Ft_{lait} (j/l)$	0.003	0.003
$Ration_{fourrage} (kg \text{ sec}.j^{-1})$	6	6
$Activité_{lait} (Bq.l^{-1})$	$3.83e10^{-4}$	

TAB. 6.24 – Résultat de l’activité volumique du lait ( $Bq.l^{-1}$ ) pour une sélection des valeurs modales de chaque paramètre.

### 6.1.4.2.3 Calcul purement probabiliste (variabilité)

	Fractile à 5%	Fractile à 95%	Rapport 95% / 5%
Cadre purement probabiliste Indice=(4,2,2,4,2,2)	$2.13e10^{-4}$	$2.71e10^{-3}$	12.71

TAB. 6.25 – Fractiles de l’activité volumique du lait ( $Bq.l^{-1}$ ), Indice=( $P_r, \lambda_{bio}, R_c, Rdt, Ft_{lait}, Ration_{fourrage}$ ).

### 6.1.4.2.4 Calcul ”hybride” (Combine imprécision-variabilité)

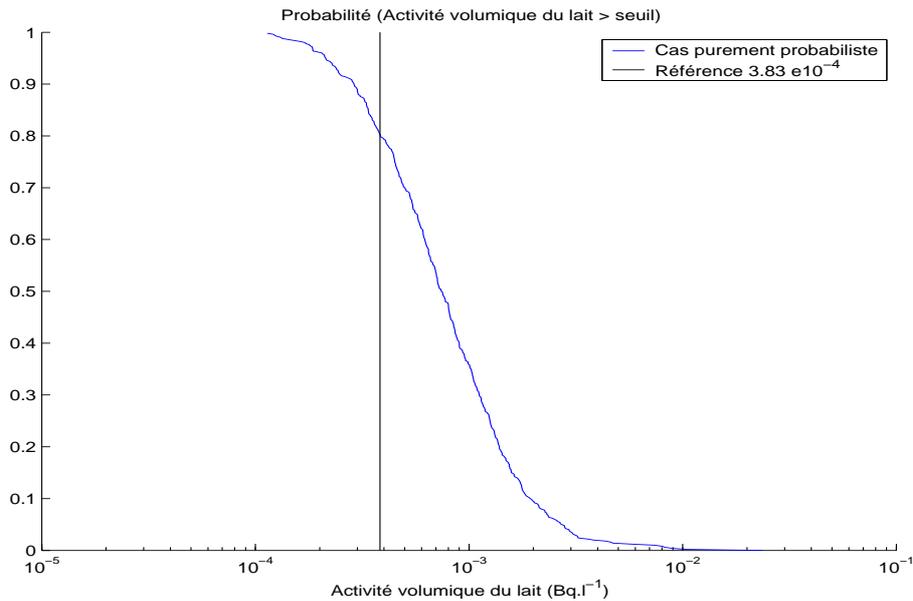


FIG. 6.13 – Effets de la variabilité sur l'activité volumique du lait  $Bq.l^{-1}$ .

A ce stade du document, on ne présente plus que la comparaison entre le cas purement probabiliste et le cas où l'on considère l'information de nature imprécise (information réellement disponible) car les phénomènes observés en testant les combinaisons (probabilité-possibilité) pour la connaissance de nature imprécise sont les mêmes que précédemment. La figure 6.14

	Fractile à 5%	Fractile à 95%	Rapport 95% / 5%
Cas purement probabiliste	$2.13e10^{-4}$	$2.71e10^{-3}$	12.71
Probabilité haute, Ind=(3,1,1,3,1,1)	$1.88e10^{-3}$	$2.01e10^{-2}$	$1.24e10^3$
Probabilité basse, Ind=(3,1,1,3,1,1)	$1.61e10^{-5}$	$2.24e10^{-4}$	

TAB. 6.26 – Impact sur les fractiles de l'activité volumique du lait ( $Bq.l^{-1}$ ) selon la représentation des paramètres. Ordre des indices Ind=( $P_r, \lambda_{bio}, R_c, Rdt, Ft_{lait}, Ration_{fourrage}$ )

et la table 6.26 mettent en évidence que le cadre purement probabiliste sous-estime de 87% l'incertitude totale de l'activité volumique du lait. En effet, on peut arriver à conclure que dépasser  $0.004 Bq.l^{-1}$  est quasiment impossible alors que si l'on représente l'imprécision de l'information, la probabilité de dépasser ce seuil peut atteindre 65% (probabilité haute).

### 6.1.5 Transfert à l'homme

La population concernée est constituée d'adultes. On considère que l'individu ne consomme que du lait produit par les vaches venant de la zone soumise au polluant (le strontium 90). Le transfert à l'homme est régi par le modèle suivant :

$$D_{ing} = Activité_{lait} \cdot Ration_{lait} \quad (6.10)$$

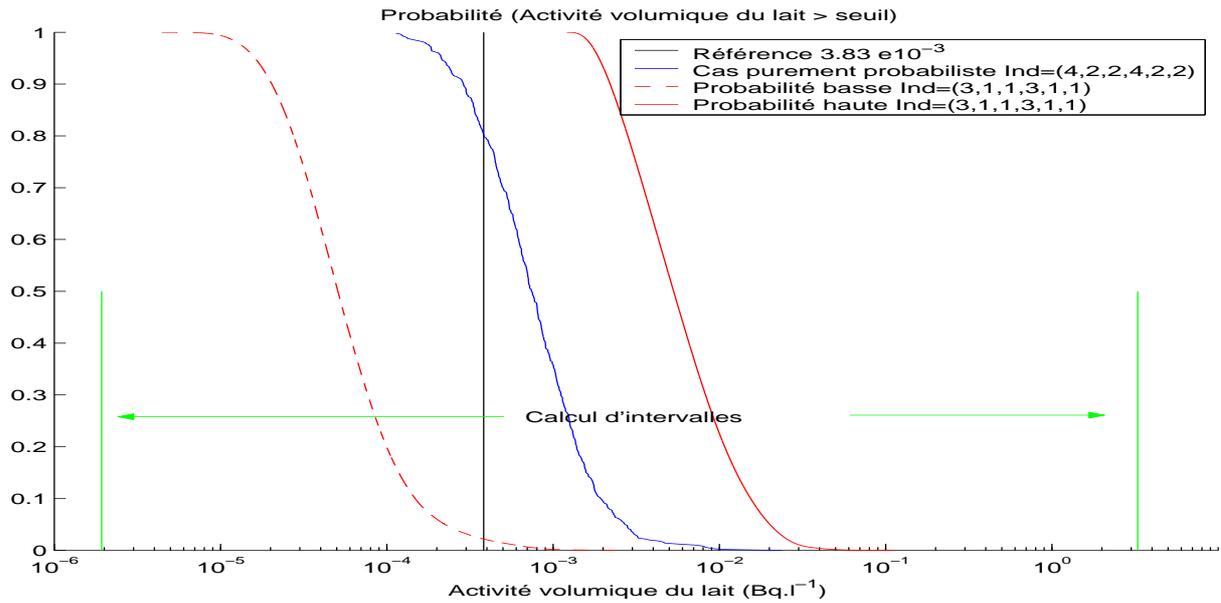


FIG. 6.14 – Influence de la représentation de  $P_r, \lambda_{bio}, Rc, Rdt, Ft_{lait}, Ration_{fourrage}$  sur la probabilité d’obtenir l’activité massique du maïs supérieure à un certain seuil (échelle logarithmique). Ordre des indices correspondant aux paramètres ( $P_r, \lambda_{bio}, Rc, Rdt, Ft_{lait}, Ration_{fourrage}$ ).

- $Ration_{lait}$  Ration alimentaire de lait ( $l.an^{-1}$ ).
- $Activite_{lait}$  Activité volumique du lait ( $Bq.l^{-1}$ ).
- $D_{ing}$  Dose ingérée ( $Bq.an^{-1}$ ).

### 6.1.5.1 Représentation de l’information disponible

#### 6.1.5.1.1 Ration alimentaire de lait $Ration_{lait}$ ( $l.an^{-1}$ )

L’information disponible sur la ration alimentaire de lait est issue du rapport [84] et synthétisée dans la table 6.27. On supposera que le mode est compris entre la moyenne et la médiane

	Valeur observée ( $l.an^{-1}$ )	intervalles de confiance à 95% ( $l.an^{-1}$ )	
Consommation moyenne	37	33	42
Fractile à 25%	1	1	2
Fractile à 50%	12	6	26
Fractile à 75%	63	51	77
Fractile à 90%	103	93	108
Fractile à 95%	121	108	133
Fractile à 97.5%	150	122	160

TAB. 6.27 – Information disponible sur la ration alimentaire  $Ration_{lait}$  ( $l.an^{-1}$ ).

(fractile à 50%). Etant donnée la valeur maximale de l'intervalle de confiance à 95% pour la fractile à 97.5% (à savoir  $160 \text{ l.an}^{-1}$ ), nous avons décidé que la ration de lait ne pourrait pas dépasser  $170 \text{ l.an}^{-1}$ . En se référant à la Section 3.4.2, la distribution de possibilité  $\pi$  (voir Figure 6.15) définit une famille de probabilité  $\mathcal{P}(\pi)$  qui contient toutes les probabilités unimodales de mode appartenant à [médiante,moyenne], de support  $[0, 170]$  ([14]) et de fractiles connus. C'est à dire que :

$$\bigcup_{M \in [\text{mediante}, \text{moyenne}]} \mathcal{P}_{[0,170]}^{M, \text{fractiles}} \subseteq \mathcal{P}(\pi)$$

$$\forall A \text{ mesurable}, \quad \forall P \in \bigcup_{M \in [\text{mediante}, \text{moyenne}]} \mathcal{P}_{[0,170]}^{M, \text{fractiles}} \quad P_{\text{Ration}_{\text{lait}}}(A) \leq \Pi_{\text{Ration}_{\text{lait}}}(A)$$

o.  $\mathcal{P}_{[0,170]}^{M, \text{fractiles}}$  est la famille de probabilité unimodale de mode  $M$ , de support  $[0, 170]$  et avec ses fractiles connus.

On testera également la loi normale  $\mathcal{N}(37, 55)$  pour le cas purement probabiliste, en la tronquant à 0. Elle sera déduite des fractiles en résolvant le problème suivant :

$$\min_{\sigma} \max_{[G_i]} G_i(\sigma)$$

où  $G_i(\sigma) = F_{th}(x_i, 37, \sigma) - F(x_i)$ ,  $F_{th}$  est la fonction de répartition normale théorique de moyenne 37, et  $F$  est la fonction de répartition donnée aux points (fractiles)  $x_i$ . C'est à dire que l'on cherche  $\sigma$  qui minimise le maximum de  $G_i$  (voir Figure 6.16).

	Indice
Distribution de possibilité issue des fractiles	1
Loi normale $\mathcal{N}(37, 55)$	2

TAB. 6.28 – Différentes représentations pour Ration alimentaire de lait  $\text{Ration}_{\text{lait}}$  ( $\text{l.an}^{-1}$ ).

### 6.1.5.2 Etude des incertitudes sur la dose de strontium 90 ingérée

#### 6.1.5.2.1 Calcul d'intervalles

$\text{Ration}_{\text{lait}}$ ( $\text{l.an}^{-1}$ )	0	170
$\text{Activite}_{\text{lait}}$ $\text{Bq.l}^{-1}$	$1.93e10^{-6}$	3.28
$D_{\text{ing}}$ ( $\text{Bq.an}^{-1}$ )	0	557

TAB. 6.29 – Résultat du calcul d'intervalles pour la dose ingérée  $D_{\text{ing}}$  ( $\text{Bq.an}^{-1}$ ).

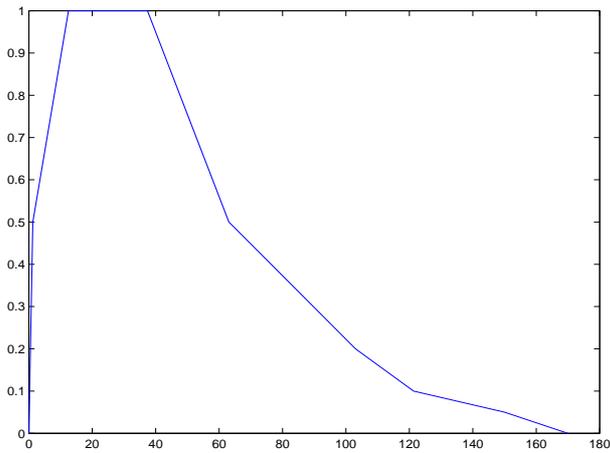


FIG. 6.15 – Distribution de possibilité pour la ration alimentaire de lait  $Ration_{lait}$  ( $l \cdot an^{-1}$ ).

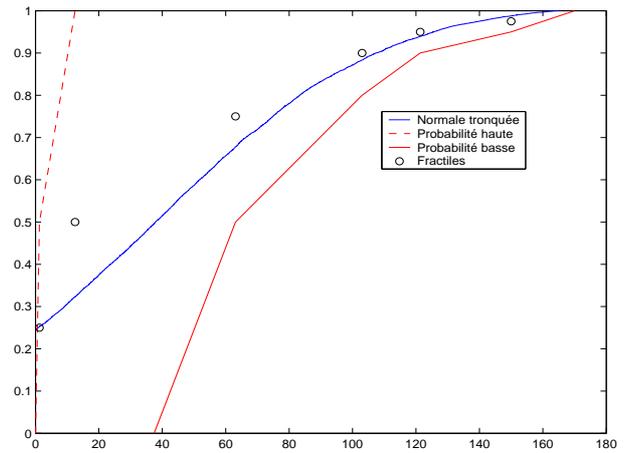


FIG. 6.16 – Probabilité cumulée tronquée pour la ration alimentaire de lait  $Ration_{lait}$  ( $l \cdot an^{-1}$ ).

6.1.5.2.2 Calcul de référence

$Activite_{lait}$ ( $Bq \cdot l^{-1}$ )	$3.83e10^{-4}$
$Ration_{lait}$ ( $l \cdot an^{-1}$ )	37.398
$D_{ing}$ ( $Bq \cdot an^{-1}$ )	0.014

TAB. 6.30 – Résultat de la dose ingérée ( $Bq \cdot an^{-1}$ ) pour une sélection des valeurs modales de chaque paramètre.

6.1.5.2.3 Calcul purement probabiliste (variabilité)

	Fractile à 5%	Fractile à 95%	Rapport 95% / 5%
Cadre purement probabiliste Indice=(4,2,2,4,2,2,2)	$3.5e10^{-3}$	$1.87e10^{-1}$	52.47

TAB. 6.31 – Fractiles de la dose de strontium ingérée ( $Bq \cdot an^{-1}$ ), Indice=( $P_r, \lambda_{bio}, R_c, R_{dt}, Ft_{lait}, Ration_{fourrage}, Ration_{lait}$ ).

6.1.5.2.4 Calcul "hybride" (Combine imprécision-variabilité)

La figure 6.18 permet de comparer les incertitudes sur la dose de strontium 90 ingérée entre le cas purement probabiliste, le calcul d'intervalles et le calcul "hybride". Le cadre purement

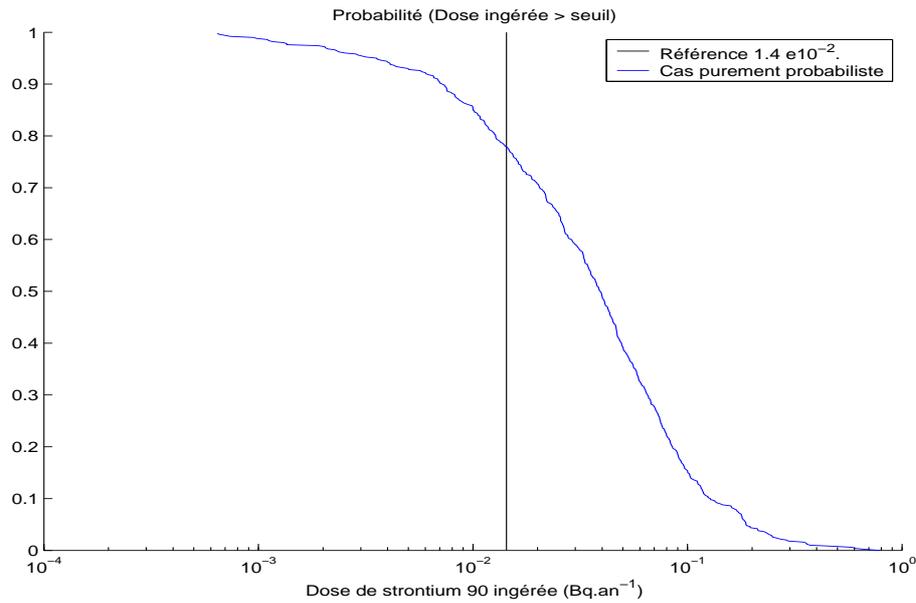


FIG. 6.17 – Effet de la variabilité sur la dose de strontium ingérée  $Bq.an^{-1}$ , (Echelle logarithmique).

probabiliste sous-estime de 93% l'incertitude totale comparativement au cas où l'on prend en compte l'imprécision de l'information disponible (calcul "hybride"). La table 6.32 montre que l'on est sûr à 95% que la dose ingérée dépassera  $2.93e10^{-6} Bq.an^{-1}$  et ne dépassera pas  $2.71 Bq.an^{-1}$ . Le fait de rajouter de l'information a priori afin de déterminer des distributions de probabilité sur les paramètres donne des résultats trop optimistes. En effet, la probabilité de dépasser  $0.4 Bq.an^{-1}$  est jugée quasi impossible dans le cadre probabiliste alors qu'elle peut atteindre 45% dans le cas où l'on tient compte de l'imprécision de l'information. L'écart entre la probabilité haute et basse est dû à l'imprécision de notre information sur la profondeur racinaire  $P_r$ , la constante de décroissance  $\lambda_{bio}$ , le rapport de captation  $R_c$ , le rendement culturel  $Rdt$ , le facteur de transfert au lait  $Ft_{lait}$ , la ration alimentaire  $Ration_{fourrage}$  et la ration alimentaire de lait  $Ration_{lait}$ . Ainsi, la probabilité de dépasser  $0.04 Bq.an^{-1}$  est comprise entre 0 et 1 ce qui reflète l'ignorance totale, contrairement au cas purement probabiliste qui l'estime égale à 50% seulement.

	Fractile à 5%	Fractile à 95%	Rapport 95% / 5%
Cas purement probabiliste, Ind=(4,2,2,4,2,2,2)	$3.5e10^{-3}$	$1.87e10^{-1}$	52.47
Probabilité haute, Ind=(3,1,1,3,1,1,1)	$7.79e10^{-2}$	2.71	$4.61e10^5$
Probabilité basse, Ind=(3,1,1,3,1,1,1)	$2.93e10^{-6}$	$1.58e10^{-3}$	

TAB. 6.32 – Impacts sur les fractiles de la dose ingérée ( $Bq.an^{-1}$ ). Ordre des indices Ind=( $P_r, \lambda_{bio}, R_c, Rdt, Ft_{lait}, Ration_{fourrage}, Ration_{lait}$ )

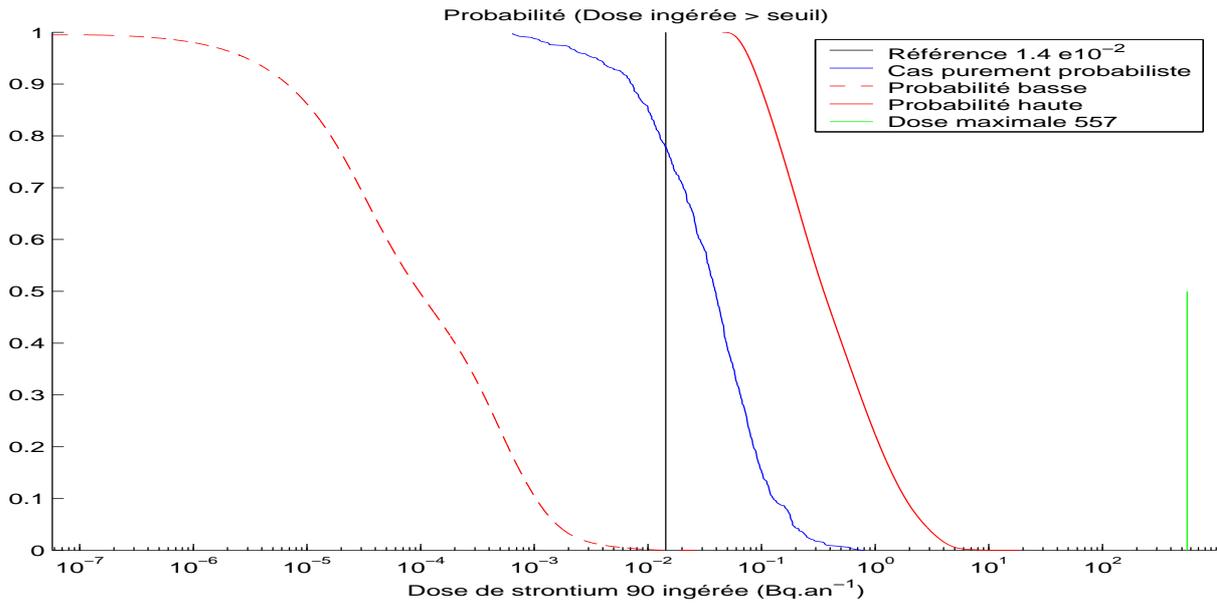


FIG. 6.18 – Influence de la représentation des paramètres  $P_r, \lambda_{bio}, R_c, Rdt, Ft_{lait}, Ration_{fourrage}, Ration_{lait}$  sur la probabilité d'obtenir la dose ingérée  $D_{ing}$  supérieure à un certain seuil. Indice =  $(P_r, \lambda_{bio}, R_c, Rdt, Ft_{lait}, Ration_{fourrage}, Ration_{lait}) = (3, 1, 1, 3, 1, 1, 1)_{\text{imprécis}} = (4, 2, 2, 4, 2, 2, 2)_{\text{cas purement probabiliste}}$ .

### 6.1.6 Conclusion

Cette application met en évidence le fait que l'on ne peut pas toujours justifier l'utilisation de distributions de probabilité uniques pour représenter notre connaissance sur les paramètres. Des théories alternatives comme les possibilités ou les fonctions de croyance permettent de définir des familles de probabilité et ainsi de mieux tenir compte du caractère souvent imprécis de notre état de connaissance.

Le calcul d'intervalles permet de définir des bornes hautes et basses mais peut être trop conservatif et pas assez discriminant. A l'opposé, le calcul purement probabiliste peut générer des résultats trop optimistes dûs au fait que l'on a modélisé de l'imprécision par de la variabilité. La méthode "hybride" permet de prendre en considération de l'information de nature hétérogène (imprécision-variabilité) et de la propager à travers des modèles mathématiques. Le post-traitement permet d'extraire par exemple, à partir du résultat du calcul "hybride", la probabilité de dépassement de seuil. Le caractère imprécis de l'information ne permet plus d'obtenir une probabilité unique mais un encadrement de celle-ci. L'écart entre la probabilité haute et basse reflète notre état d'ignorance partielle sur les paramètres. Tenir compte du caractère imprécis de l'information peut avoir un réel impact pour la phase décisionnelle. Supposons que la probabilité haute de dépasser un seuil fixé par les experts soit non négligeable comparativement au cadre purement probabiliste qui la jugerait quasi nulle, le résultat obtenu par le calcul purement probabiliste est contestable dans le sens où l'on a été obligé de rajouter de l'information (sans justification) sur certains paramètres en les modélisant par une distribution de probabilité. Il serait alors peut être préférable de refaire quelques investigations de terrain afin d'obtenir plus d'information et réduire ainsi l'écart entre la probabilité haute et basse. Au contraire si la probabilité haute de dépasser le seuil est quasi nulle, cela

nous conforte dans le choix, par exemple de ne pas dépolluer le site, car nous sommes restés cohérents avec l'information réellement disponible.

Cette méthode d'analyse de la nature des paramètres d'une équation d'évaluation des risques, variable ou imprécise, permet de faire évoluer notre état de connaissance sur certains paramètres cibles, dans le sens de la réduction des incertitudes ou à contrario de considérer notre état de connaissance comme optimal pour une problématique donnée.

## 6.2 Les eaux souterraines

L'objectif de cette étude est de traiter l'incertitude dans le cas d'un scénario d'exposition les "eaux souterraines" (consommation d'eau souterraine pour l'eau de boisson) en distinguant l'information de nature aléatoire (variabilité) et l'information incomplète (imprécision). Nous nous intéressons à l'impact sur les eaux souterraines d'un déversement accidentel de trichloroéthylène (TCE). Ce composé appartient à la famille des solvants organochlorés et présente plusieurs caractéristiques qui en font un polluant qui pose souvent des problèmes :

- Il est toxique à faibles doses.
- Il est relativement soluble dans l'eau.
- Il est persistant (se dégrade peu).

Ce cas d'étude présente l'intérêt d'aborder le problème de la complexité du modèle pouvant être traité avec nos approches de prise en compte de l'incertitude (modèle semi-analytique).

Dans la Section 6.3.1, nous présentons le scénario d'exposition, le modèle de transfert et proposons, pour chaque paramètre influençant la concentration, un mode de représentation de l'information (probabiliste ou possibiliste) qui tente d'être cohérent avec le type d'information que l'on peut espérer avoir dans la pratique des évaluations des risques.

Dans la Section 6.2.2, nous étudions l'influence de la représentation mathématique de la connaissance sur l'incertitude relative aux résultats du calcul de la concentration en TCE en un point cible. Quatre techniques de propagation seront utilisées :

- le calcul d'intervalle consistant à représenter tous les paramètres par des intervalles [min,max] puis à calculer l'ensemble des valeurs possibles du modèle de la concentration.
- le calcul probabiliste avec hypothèse d'indépendance stochastique (Monte-Carlo).
- le calcul "Hybride" (voir Section 4.2 Chapitre 4) consistant à combiner du calcul d'intervalle avec du Monte-Carlo.
- le calcul "Independent Random Sets" (voir Section 4.3.1 Chapitre 4) consistant à représenter l'information de nature imprécise et de nature aléatoire dans un cadre unifié faisant appel à la théorie de Dempster-Shafer [88] puis à la propager à travers le modèle du calcul de la concentration.

Nous pourrions ainsi, selon la représentation des paramètres et la technique de propagation choisies, examiner dans quelle mesure la concentration en TCE dépasse le seuil fixé ( $10 \mu\text{g.l}^{-1}$ ) par l'OMS pour l'eau destinée à la production d'eau de boisson.

### 6.2.1 Description du scénario et Représentation mathématique de l'information disponible sur les paramètres

Le scénario d'exposition traité est celui de l'émission de polluants dissous, par des sols pollués situés à l'aplomb d'une nappe d'eau souterraine. Dans la présentation ci-dessous, nous distinguerons ce qui se réfère à la source de ce qui se réfère au vecteur.

#### 6.2.1.1 Terme Source

Un déversement accidentel (renversement d'un camion) de trichloroéthylène (TCE) a eu lieu sur un site industriel, situé dans la région de Toulouse, de fabrication de composants électroniques (ce solvant est utilisé pour le nettoyage des pièces). Une tonne de TCE s'est infiltrée dans le sol. Le sol superficiel est constitué d'alluvions de type sablo-limoneux. La nappe d'eau souterraine se trouve à environ 3 mètres de profondeur. A la demande de l'administration (DRIRE ; Direction Régionale de l'Industrie de la Recherche et de l'Environnement), une évaluation des risques est réalisée pour établir si cette pollution est susceptible de générer des concentrations inacceptables dans les eaux souterraines. En concertation avec la DRIRE, le point de conformité est placé en bordure de site, à 300 m en aval hydraulique par rapport à la zone de déversement. Le point de conformité est un point où il est exigé que la concentration n'excède pas une certaine limite de concentration ( $10 \mu\text{g}/\text{l}$ ) jugée tolérable. Si ce niveau de concentration ne peut être respecté, alors la zone source (la zone de déversement) devra être traitée (par exemple par excavation des terres polluées, incinération puis stockage en centre de déchets industriels spéciaux stabilisés).

Le déversement a eu lieu sur une surface de 7 m (dans le sens perpendiculaire d'écoulement des eaux souterraines) sur 3 m (dans le sens d'écoulement des eaux souterraines). Le volume de TCE déversé est de 667 litres (masse volumique du TCE :  $1.5 \text{ g.cm}^{-3}$ ), soit environ 32 litres par  $\text{m}^2$  sur la zone de déversement. Ce TCE sera donc retenu dans le sol situé au dessus de la nappe (la zone dite non-saturée). En effet, les travaux de Schwille [87] ont montré que les sols sableux avaient une capacité de rétention de 3 à  $30 \text{ l.m}^{-3}$ . Compte tenu de la nature du sol sur le site (sablo-limoneux), la capacité de rétention est située dans le haut de la fourchette.

On se place donc dans la situation d'une source située au dessus de la nappe d'eau souterraine, qui émet du polluant par dissolution dans l'eau d'infiltration (la pluie efficace). Le flux polluant qui en résulte vient se mélanger avec l'eau souterraine.

Ce flux  $F$  dépend de deux paramètres :  $F = C_s \times Q$  (note : le flux diffusif est négligé compte tenu de la perméabilité du sol), avec

- $F$  Flux de masse (masse par unité de section et par unité de temps)
- $Q$  Débit d'infiltration à travers la zone source (volume par unité de temps)
- $C_s$  Concentration en TCE dissous dans l'eau d'infiltration

#### 6.2.1.1.1 Concentration en TCE dans l'eau d'infiltration : $C_s$ ( $\text{mg.l}^{-1}$ ).

D'après Feenstra et Cherry [44], l'eau qui percole au travers de sols imprégnés par du TCE, se charge en TCE dissous à une concentration qui est en deçà de la limite de solubilité que l'on peut mesurer en laboratoire ( $1100 \text{ mg.l}^{-1}$ ). Ils citent des valeurs inférieures à 10% de la

valeur de solubilité. Des essais de percolation au travers de sols prélevés sur ce site ont donné des valeurs de concentration dans l'eau de percolation situées entre  $1/7$  et  $1/3$  de la valeur de solubilité. Etant donné le caractère imprécis de l'information, on choisit de représenter la connaissance sur la concentration  $C_s$  en TCE par une distribution de possibilité  $\pi_{C_s}$  de support  $[\text{solubilité}/10, \text{solubilité}] = [110, 1100]$  et de noyau  $[\text{solubilité}/7, \text{solubilité}/3] = [157.1, 366.7]$  (voir Figure 6.19). On définit ainsi une famille de probabilités  $\mathcal{P}_{C_s}$  qui contient toutes les

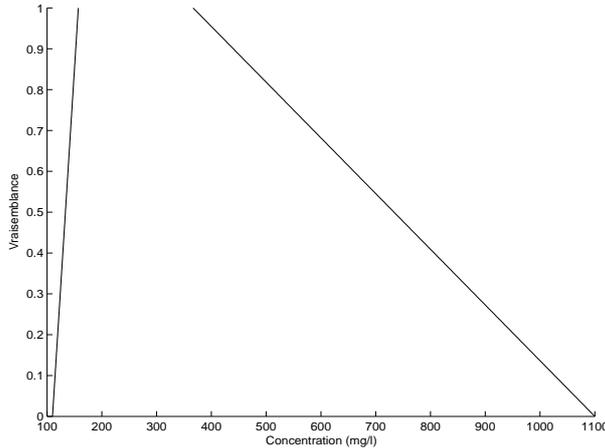


FIG. 6.19 – Distribution de possibilité trapézoïdale  $\pi_{C_s}$  pour  $C_s$

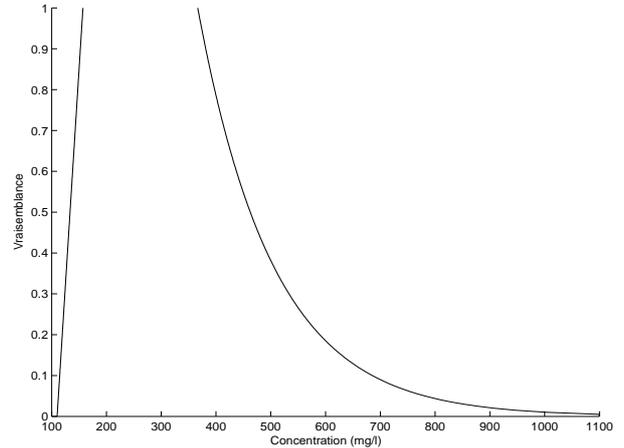


FIG. 6.20 – Distribution de possibilité convexe  $\pi_{C_s}$  pour  $C_s$

probabilités unimodales de mode compris entre  $[\text{solubilité}/7, \text{solubilité}/3]$  bornées par  $[\text{solubilité}/10, \text{solubilité}]$  [11] dans le sens où :

$$\forall P \in \mathcal{P}_{C_s}, \forall A \subseteq [110, 1100], P(C_s \in A) \leq \Pi_{C_s}(A)$$

où  $\mathcal{P}_{C_s}$  est l'ensemble des probabilités unimodales de Mode compris entre  $[157.1, 366.7]$  bornées par  $[110, 1100]$  et  $\Pi_{C_s}$  est la mesure de possibilité associée à la distribution de possibilité  $\pi_{C_s}$ .

Cependant, on pourra exprimer le fait que les valeurs hautes situées en dehors du noyau sont considérées comme étant peu vraisemblables (au vu des essais de percolation réalisés) en spécifiant une certaine convexité de la branche droite de la distribution de possibilité  $\pi_{C_s}$  (voir Figure 6.20). Si le choix du degré de convexité est relativement arbitraire, les conséquences sur les résultats seront nettement moindres que celles liées au choix d'une distribution de probabilité unique pour  $C_s$  malgré l'imprécision de l'information. Le choix de cette convexité aura, comme nous pourrons le constater, l'intérêt de resserrer l'écart entre les probabilité hautes et basses.

Les résultats obtenus sont comparés avec ceux obtenus en utilisant une densité de probabilité trapézoïdale pour représenter l'incertitude dans le cadre purement probabiliste.

A noter qu'il est fait l'hypothèse que la source émet à la concentration constante  $C_s$  pendant un temps très long. En effet, compte tenu de la masse déversée (une tonne) et des concentrations attendues, le temps nécessaire pour éliminer le polluant présent par lessivage est long. Nous nous plaçons donc dans le cadre d'un régime stationnaire (source constante et de durée pseudo-infinie).

### 6.2.1.1.2 Débit d'infiltration $Q$ .

Ce débit dépend du bilan hydrique (pluie efficace au travers de la zone source). La Figure 6.21 présente la distribution des fréquences relatives cumulées de la pluie brute, estimée à partir de 30 années de données météo provenant de la station de Toulouse-Blagnac. Afin de tenir compte du ruissellement et de l'évaporation, les données météo brutes seront multipliées par un facteur  $\theta_Q$  et nous représentons (communication expert)  $\theta_Q$  par l'intervalle  $[1/4, 1/3]$ . Nous testons également la loi normale (voir Figure 6.22) qui a été calée à partir des données brutes après un traitement statistique. Pour obtenir le débit d'infiltration  $Q$ , les valeurs de

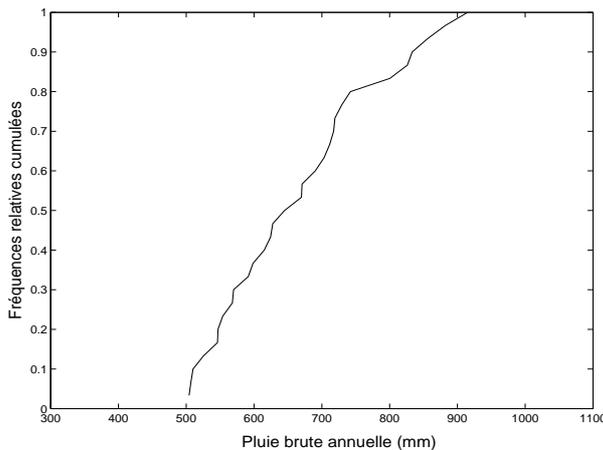


FIG. 6.21 – Fréquences relatives cumulées des pluies brutes annuelles. Historique sur 30 années.

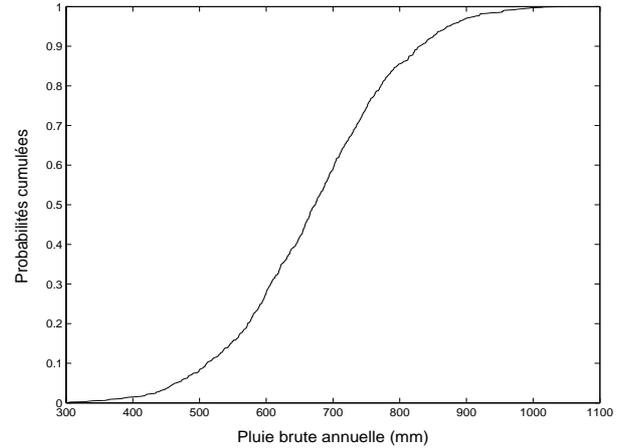


FIG. 6.22 – Fréquences relatives cumulées issue de la loi normale calée à partir des données de pluie brute annuelle.

pluies efficaces ( $\theta_Q \times$  Pluie brute) sont multipliées par la surface d'infiltration ( $7 \text{ m} \times 3 \text{ m}$ ). Ainsi nous avons :

$$Q = 7 \times 3 \times \theta_Q \times \text{Pluie brute}$$

L'utilisation de la distribution uniforme sur  $[1/4, 1/3]$  pour  $\theta_Q$  est testée à titre comparatif dans le cadre d'un traitement de l'incertitude purement probabiliste.

### 6.2.1.2 Le vecteur

Le vecteur de contamination considéré est l'eau souterraine. On se place, compte tenu de la masse mobilisable, dans le cadre d'un régime stationnaire, et on s'intéresse à la concentration dans l'eau souterraine en un point situé à une distance de 300 m de la zone source.

Le "modèle" proposé est la solution analytique de Galya [61]. L'intérêt de ce modèle par rapport à d'autres solutions couramment utilisées dans un contexte d'évaluation des risques "eaux souterraines" (notamment la solution de Domenico [29]) réside dans le fait que la solution de Galya évite l'hypothèse (non physique) d'un mélange parfait entre le flux provenant de la zone source avec l'eau souterraine non polluée. Le schéma conceptuel sous-jacent à la solution de Galya est présenté en Figure 6.23. Ce schéma conceptuel est à comparer à celui de la solution de Domenico [29] citée précédemment (Figure 6.24) et qui tend à surestimer l'effet

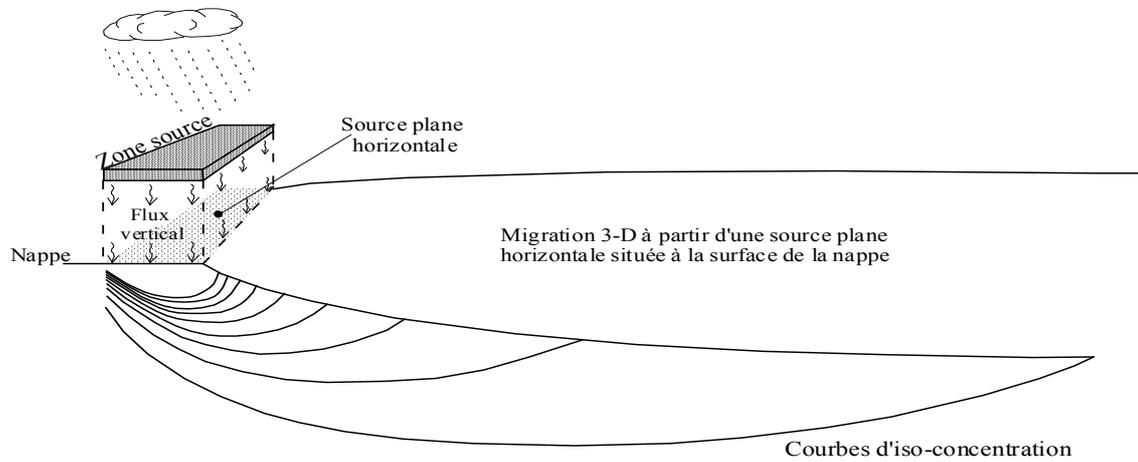


FIG. 6.23 – Shéma conceptuel correspondant à la solution de Galya [61].

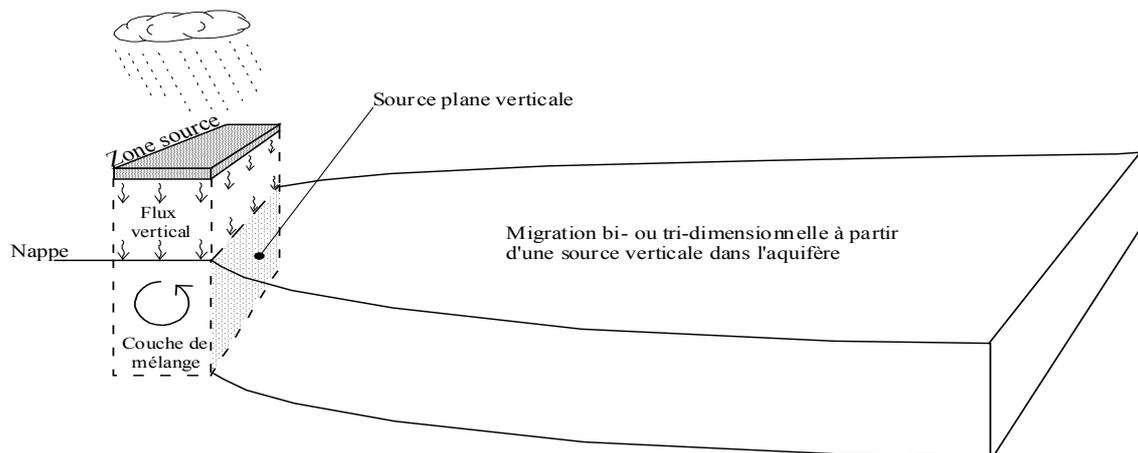


FIG. 6.24 – Modèle conceptuel souvent supposé dans les évaluations des risques "eaux souterraines".

de la dilution (mélange supposé instantané et parfait). La solution de Galya [61] fournit la concentration au point  $x, y, z$  et au temps  $t$  :

$$C(x, y, z, t) = \frac{1}{\phi R} \int_0^t F(\tau) X_o(x, t - \tau) Y_o(y, t - \tau) Z_o(z, t - \tau) T(t - \tau) d\tau$$

où :

- $C$  = Concentration dans l'aquifère au point  $x, y, z$  et au temps  $t$  ( $mg.l^{-1}$ )
- $X_o, Y_o, Z_o$  = Fonctions de Green pour le transport dans les directions  $x, y$  et  $z$
- $t$  = Temps
- $T$  = Fonction de dégradation :  $T = C_o e^{-\lambda t}$  où  $\lambda$  = constante de dégradation ( $an^{-1}$ )  
et  $C_o$  = concentration à  $t = 0$
- $F$  = Flux massique à la surface de la nappe (sur l'aire  $L \times B$ ) ( $g.an^{-1}$ )
- $\phi$  = Porosité de l'aquifère (sans unité)
- $R$  = Facteur de retard dans l'aquifère (sans unité)
- $\tau$  = Variable d'intégration

Les fonctions de Green sont définies par :

$$X_o(x, t) = \frac{1}{2L} \left( erf \left[ \frac{L/2 + x - vt/R}{\sqrt{4D_x t/R}} \right] + erf \left[ \frac{L/2 - x + vt/R}{\sqrt{4D_x t/R}} \right] \right)$$

$$Y_o(y, t) = \frac{1}{2B} \left( erf \left[ \frac{B/2 + y}{\sqrt{4D_y t/R}} \right] + erf \left[ \frac{L/2 - y}{\sqrt{4D_y t/R}} \right] \right)$$

$$Z_o(z, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi D_z t/R}} e^{-\frac{z^2}{4D_z t/R}}$$

où :

- $erf$  = la fonction erreur
- $L$  = longueur de la zone source (dans la direction d'écoulement des eaux souterraines) ( $m$ )
- $B$  = largeur de la zone source (dans la direction perpendiculaire à la direction d'écoulement des eaux souterraines) ( $m$ )
- $v$  = vitesse de l'eau dans les pores ( $m.an^{-1}$ )
- $D_x$  = coefficient de diffusion-dispersion longitudinale dans l'aquifère ( $m^2.an^{-1}$ )
- $D_y$  = coefficient de diffusion-dispersion horizontale-transverse ( $m^2.an^{-1}$ )
- $D_z$  = coefficient de diffusion-dispersion verticale-transverse ( $m^2.an^{-1}$ )

Comme on s'intéresse à la concentration en régime permanent, on attribue une valeur élevée au temps  $t$ ,  $t = 1000$  ans. Et on s'intéresse à la concentration dans l'axe du panache de pollution ( $y = 0$ ) et à la surface de la nappe ( $z = 0$ ).

Ci-dessous sont décrits les paramètres qui interviennent dans la solution de Galya.

#### 6.2.1.2.1 Perméabilité de l'aquifère $K$ ( $m.s^{-1}$ ).

La perméabilité intervient dans le calcul de la vitesse de l'eau, au travers de la loi de Darcy

$$v = -\frac{Ki}{\phi}$$

où

- $K$  = la perméabilité (ou conductivité hydraulique) ( $m.s^{-1}$ )
- $i$  = le gradient hydraulique (sans unité)
- C'est la différence de charge hydraulique entre deux points que divise la distance séparant ces points
- $\phi$  = porosité de l'aquifère (sans unité)

(note : le signe moins est une convention : la vitesse est positive dans la direction du gradient négatif).

De nombreuses données témoignent d'une distribution log-normale de la perméabilité [72]. Mais la détermination des valeurs caractéristiques de la distribution log-normale (moyenne, écart type) supposerait un nombre de mesures qui n'est en général pas réalisable dans la pratique. Nous supposons que sur la base de quelques (2 ou 3) mesures de la perméabilité dans des piézomètres, l'évaluateur se base sur une représentation de la connaissance de type distribution de possibilité (voir Figure 6.25) avec :

$$\begin{aligned} \text{Support} &= [10^{-5}, 10^{-4}] \text{ m.s}^{-1} \\ \text{Noyau} &= [3.10^{-5}, 6.10^{-5}] \text{ m.s}^{-1} \end{aligned}$$

La densité de probabilité trapézoïdale aurait été choisie dans un cadre purement probabiliste, elle sera donc testée.

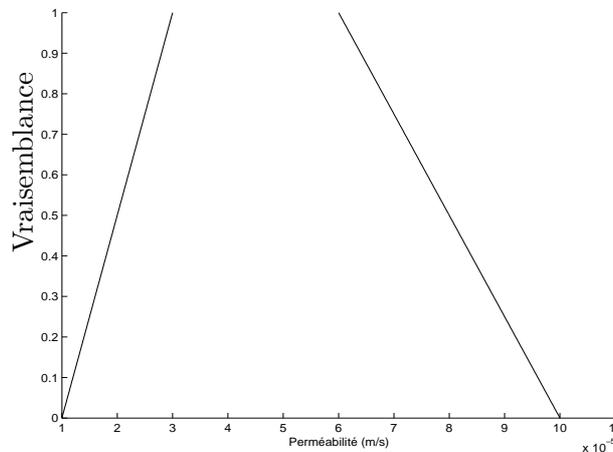


FIG. 6.25 – Distribution de possibilité trapézoïdale pour la perméabilité  $K$  ( $m.s^{-1}$ ).

#### 6.2.1.2.2 Gradient hydraulique $i$ (-).

Ce gradient est déterminé par la mesure des niveaux d'eau dans des piézomètres. Nous représentons la connaissance de ce paramètre par l'intervalle min-max :  $i \in [0.007, 0.01]$ . la distribution uniforme sur  $[0.007, 0.01]$  aurait été choisie dans le cadre classique de l'évaluation des risques, elle est donc testée à titre comparatif dans le cadre purement probabiliste de la prise en compte de l'incertitude.

### 6.2.1.2.3 Porosité $\phi$ (-).

Comme précédemment, nous représentons la connaissance de ce paramètre par un intervalle min-max :  $\phi \in [0.22, 0.3]$ . La distribution uniforme sur  $[0.22, 0.3]$  est testée à titre comparatif dans le cadre purement probabiliste de la prise en compte de l'incertitude.

### 6.2.1.2.4 Coefficients de dispersivité (-)

Ces paramètres entrent dans le calcul des coefficients de diffusion-dispersion. Compte tenu du niveau de perméabilité de l'aquifère, nous négligeons la contribution de la diffusion au coefficient  $D$ . On a donc :

$$D_x = \alpha_x v, \quad D_y = \alpha_y v, \quad D_z = \alpha_z v$$

où  $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$  sont les coefficients de dispersivité dans les directions x, y et z respectivement.

La manière rigoureuse de déterminer ces coefficients consiste à réaliser un essai de traçage ; un traceur est émis dans l'eau souterraine et l'évolution des concentrations en traceur en aval hydraulique est mesurée et calée à l'aide d'un modèle. Ce calage est obtenu en ajustant les valeurs de dispersivité.

Mais cette démarche est rarement envisageable dans la pratique pour des raisons de coûts. Dans la pratique des évaluations des risques, on sélectionne des valeurs en se basant sur les données de la littérature. Ces données montrent une corrélation entre l'échelle d'observation et la valeur de dispersivité. C'est-à-dire que si on s'intéresse à un panache de pollution sur une distance de 200 m par exemple, on utilisera une valeur de dispersivité longitudinale plus grande que si le panache a atteint une distance de 20 m. Les données compilées par Gelhar et al. [62] montrent bien cette corrélation (voir Figure 6.26). Bien que certains estiment

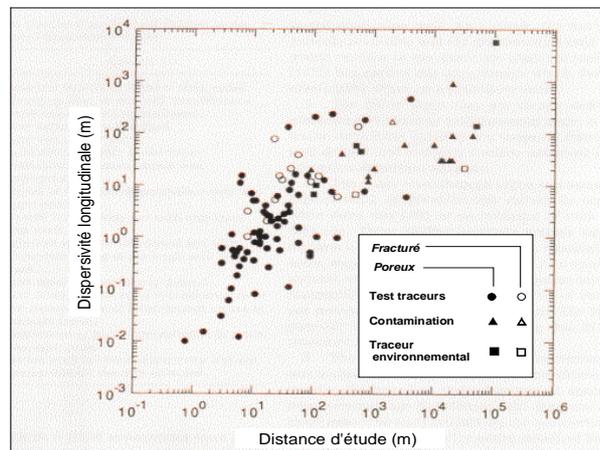


FIG. 6.26 – Dispersivité longitudinale  $\alpha_x$  en fonction de la distance d'après Gelhar et al. [62]

que l'usage d'une dispersivité régionalisée n'est qu'un artefact de résolution numérique permettant de prendre en compte la succession d'hétérogénéités, le concept de régionalisation permet le développement de plusieurs formules de dispersivité longitudinale, parmi lesquelles

les principales sont les suivantes :

Neuman [81]	$\alpha_x = 0.0175 \times (\text{Distance d'étude})^{1.46}$
Pickens et al. [82]	$\alpha_x = 0.1 \times (\text{Distance d'étude})$
Xu et al. [97]	$\alpha_x = 0.83 \times [\log(\text{Distance d'étude})]^{2.414}$

La formule de Neuman (resp. Pickens et al., Xu et al.) donne une valeur de  $\alpha_x = 72$  (resp.  $\alpha_x = 30$  et  $\alpha_x = 7$ ) pour une distance d'étude de 300 m. En se référant à ces informations et à la Figure 6.26 [62], nous décidons de représenter la connaissance sur la dispersivité longitudinale  $\alpha_x$  par une distribution de possibilité  $\pi_{\alpha_x}$  de support  $[5, 150]$  et avec un noyau égal à  $\{50\}$ . Comme pour la concentration  $C_s$  en TCE dans l'eau de percolation, nous considérons les valeurs proches des extrêmes du support  $[5, 150]$  comme étant très peu vraisemblables en spécifiant une certaine convexité sur les branches de la distribution de possibilité  $\pi_{\alpha_x}$  (voir Figure 6.27).

D'après Vance [92], la dispersivité horizontale transverse  $\alpha_y$  correspond à  $a_1$  fois la dis-

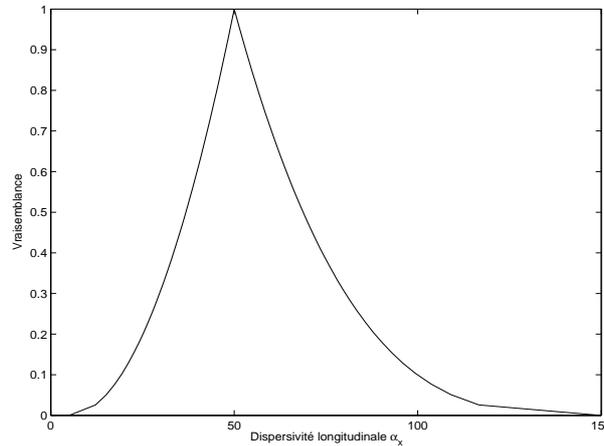


FIG. 6.27 – Distribution de possibilité  $\pi_{\alpha_x}$  représentant la connaissance sur  $\alpha_x$

persivité longitudinale où  $a_1 \in [0.1, 0.2]$ .

De même, la dispersivité verticale transverse  $\alpha_z$  correspond à  $a_2$  fois la dispersivité longitudinale [92] où  $a_2 \in [0.01, 0.02]$ .

La distribution de probabilité de même forme que  $\pi_{\alpha_x}$  sur  $[5, 50, 150]$  aurait pu être choisie dans le cadre classique de l'évaluation des risques pour représenter l'information sur la dispersivité longitudinale  $\alpha_x$ . Elle est donc testée à titre comparatif dans le cadre purement probabiliste d'un traitement de l'incertitude. Comme la dispersivité horizontale  $\alpha_y$  et la dispersivité verticale  $\alpha_z$  dépendent de la dispersivité longitudinale  $\alpha_x$ , on impose la condition  $\alpha_x > \alpha_y > \alpha_z$  lors de l'échantillonnage du Monte-Carlo afin d'éviter les combinaisons  $(\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z)$  physiquement impossibles.

#### 6.2.1.2.5 Constante de décroissance du polluant dissous $\lambda$ ( $an^{-1}$ ).

Ce paramètre a une influence importante sur l'impact puisqu'il contribue à une véritable "disparition" du polluant (nous faisons abstraction ici des éventuels produits de dégradation). Les données de la littérature sont rares. Une demi-vie de 1653 jours est citée par Howard [67] pour le TCE. Cela donne une constante de dégradation  $\lambda = 0.15 \text{ an}^{-1}$ . Compte tenu de l'incertitude importante sur ce paramètre, nous supposons de manière sécuritaire un intervalle min-max avec min=un cinquième de cette valeur ( $0.03 \text{ an}^{-1}$ ) et max=( $0.15 \text{ an}^{-1}$ ), ie.  $\lambda \in [0.03, 0.15]$ .

Comme pour les autres paramètres, l'utilisation de la distribution uniforme sur  $[0.03, 0.15]$  est testée à titre comparatif dans le cadre purement probabiliste d'un traitement de l'incertitude.

#### 6.2.1.2.6 Facteur de retard $R$ (-)

Ce facteur résulte de l'interaction entre le polluant dissous et la matrice solide du milieu poreux dans lequel il migre. Bien qu'on se place dans le cadre d'un régime de transport stationnaire, ce facteur a une influence dès lors qu'on inclut de la dégradation. Il est fonction du coefficient de partage sol-eau  $K_d$  :

$$R = 1 + \frac{\rho_s}{\phi} K_d$$

où  $\rho_s$  est la densité sèche du sol (poids de sol sec par unité de volume de sol humide ;  $g.cm^{-3}$ ).

Nous supposons que sur la base de mesures d'isothermes d'adsorption (pour estimer le  $K_d$ ) effectuées sur des sols prélevés sur le site, on arrive pour le  $K_d$  à un intervalle min-max= $[0.4, 1.2] \text{ cm}^3.g^{-1}$ . La distribution uniforme sur  $[0.4, 1.2]$  est testée à titre comparatif. La densité sèche  $\rho_s$  peut être déterminée assez facilement. Nous prendrons une valeur fixe de  $1.7 \text{ g.cm}^3$ .

#### 6.2.1.3 Synthèse

Pour résumer, on calcule une concentration de TCE en un point d'exposition situé à 300 m de la zone source dans l'axe du panache de pollution et à la surface de la nappe. Ce calcul fait appel à un modèle de transfert (la solution de Galya [61]). Le Tableau 6.33 synthétise les paramètres incertains du modèle.

Nous allons dans un premier temps traiter l'incertitude dans le cadre classique du calcul d'intervalle supposant toute l'information de nature imprécise et dans le cadre purement probabiliste supposant toute l'information de nature aléatoire. Pour propager l'information de nature imprécise et de nature aléatoire à travers le modèle, nous allons utiliser deux méthodes, à savoir la méthode "Hybride" (voir Section 4.2), puis la méthode "Independent Random Sets" (voir 4.3.1). Le calcul d'intervalles et ces deux dernières méthodes nécessitent de connaître le minimum et le maximum de la concentration  $C_{pc}$  en TCE au point de conformité donnée par la solution de Galya [61]. Etant donnée l'expression analytique pour calculer la concentration  $C_{pc}$ , la monotonie de la concentration ne semble pas évidente à définir. Pour minimiser une fonction dont on ne connaît pas la convexité, un algorithme de type gradient peut donner de très mauvais résultats. Si la fonction comporte beaucoup de minimas locaux, on est à peu près certain de rester bloqué sur l'un d'eux. Nous décidons donc d'utiliser un algorithme stochastique afin de déterminer le maximum et le minimum de la concentration  $C_{pc}$ . L'algorithme choisi est celui du Recuit Simulé [71] (voir Annexe D). La stratégie des algorithmes de recuit

Paramètre	Source d'information	Mode de représentation
Pluie brute $Q$	Données Météo France	Loi de probabilité basée sur les données
Facteur de ruissellement et d'évaporation $\theta_Q$ déterminant le débit $Q$	Avis d'expert	Intervalle $[1/4, 1/3]$
Concentration $C_s$ en TCE dissoute dans l'eau	Solubilité du polluant, littérature + mesures	Distribution de possibilité : support= $[110, 1100]$ , noyau= $[157.1, 366.7]$
Conductivité hydraulique de l'aquifère $K$	Forages, géologie, essais laboratoires	Distribution de possibilité trapézoïdale : support= $[10^{-5}, 10^{-4}]$ , noyau= $[3.10^{-5}, 6.10^{-5}]$
Gradient hydraulique $i$	Mesures piézométriques	Intervalle $[0.007, 0.01]$
Porosité $\phi$	Mesures laboratoire	Intervalle $[0.22, 0.3]$
Dispersivité $\alpha_x$	Littérature (Gelhar, Neumann ...)	Distribution de possibilité : support= $[5, 150]$ noyau= $\{50\}$
Dispersivité $\alpha_y$	Littérature (Vance, D.B)	$a_1 \times \alpha_x$ où $a_1 \in [0.1, 0.2]$
Dispersivité $\alpha_z$	Littérature (Vance, D.B)	$a_2 \times \alpha_x$ où $a_2 \in [0.01, 0.02]$
Constante de dégradation $\lambda$	Littérature	Intervalle $[0.03, 0.15]$
Coefficient de partage sol/eau $K_d$	Mesures d'isothermes d'absorption	Intervalle $[0.4, 1.2]$

TAB. 6.33 – Tableau résumant les paramètres incertains du modèle et leur représentation

consiste, en effectuant une exploration aléatoire de l'espace d'état, à favoriser les descentes, mais sans interdire tout à fait les remontées. On suppose que notre espace d'état est fini après discrétisation de l'ensemble des contraintes.

Nous avons vu que des dépendances explicites existent entre certains paramètres. Il faut en tenir compte lors de la procédure d'optimisation du Recuit Simulé et lors de l'échantillonnage du Monte-Carlo dans le cadre purement probabiliste. Nous avons ainsi :

$$\text{à } \phi \text{ fixé } \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} v = -\frac{Ki}{\phi} \\ R = 1 + \frac{\rho_s}{\phi} K_d \end{array} \right.$$

$$\text{à } \alpha_x \text{ fixé } \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha_y = a_1 \times \alpha_x \text{ avec } a_1 \in [0.1, 0.2] \\ \alpha_z = a_2 \times \alpha_x \text{ avec } a_2 \in [0.01, 0.02] \end{array} \right.$$

$$\alpha_x > \alpha_y > \alpha_z$$

## 6.2.2 Etude des incertitudes sur le modèle de la concentration

Dans un premier temps, nous calculons le minimum et le maximum du modèle considéré à l'aide du Recuit Simulé présenté dans l'Annexe D à l'aide des supports des distributions proposées dans la Section 6.3.1. Cette approche permet de définir les cas extrêmes mais n'est pas suffisamment informative compte tenu de notre état de connaissance sur les paramètres qui est plus riche qu'une connaissance basée uniquement sur des intervalles.

Dans un deuxième temps, nous supposons toute l'information concernant les paramètres de nature aléatoire et nous propageons celle-ci à travers le modèle considéré en utilisant la technique de Monte-Carlo avec hypothèse d'indépendance stochastique entre les paramètres (cadre purement probabiliste).

Pour finir, nous propageons l'information à travers le modèle considéré en essayant de rester fidèle à l'information réellement disponible et ainsi prendre en considération l'information de nature imprécise. Les méthodes de propagations utilisées sont la méthode "Hybride" et la méthode "Independent Random Sets".

Le but est de quantifier l'effet de la représentation de la connaissance imprécise sur le résultat de la concentration  $C_{pc}$  au point de conformité en le comparant au résultat obtenu dans le cadre purement probabiliste. Le point de conformité est défini à 300 m à l'aval hydraulique de la source, dans l'axe du panache et à la surface de la nappe, correspondant à la coordonnée (301.5,0,0,1000) par rapport au centre de la source.

### 6.2.2.1 Calcul d'intervalles

Tous les paramètres sont modélisés par des intervalles (min-max), puis on calcule les extrêmes de la concentration  $C_{pc}$  à l'aide de la procédure d'optimisation du Recuit Simulé de l'Annexe D. Cette méthode permet d'obtenir un encadrement (min-max) de la concentration  $C_{pc}$  sans pour autant nous renseigner sur la vraisemblance d'atteindre telle ou telle valeur à l'intérieur de cet encadrement.

Le Tableau 6.41 présente le maximum et le minimum de la concentration  $C_{pc}$  en TCE au point de conformité (301.5,0,0,1000). Nous rappelons que la vitesse  $v$  et le facteur de retard  $R$  (voir Section 6.2.1.3) dépendent de la porosité  $\phi$ . Ainsi, pour une valeur fixée de  $\phi$ , l'optimum potentiel (pour ce  $\phi$  fixé) sera atteint pour une vitesse  $v \in [\frac{2.21}{\phi}, \frac{31.54}{\phi}]$  et un retard  $R \in [1 + \frac{0.68}{\phi}, 1 + \frac{2.04}{\phi}]$ . Il en est de même pour les coefficients de dispersivité  $\alpha_x$ ,  $\alpha_y$  et  $\alpha_z$ . Nous remarquons que la concentration minimale en TCE est nulle. Ceci est principalement dû à la valeur haute que peut atteindre le facteur de retard  $R = 10.27$  et à la prise en compte de la dégradation.

### 6.2.2.2 Calcul purement probabiliste

L'incertitude sur les paramètres du modèle, dans ce paragraphe, sera uniquement due au caractère aléatoire (supposé) de l'information (incertitude=variabilité). Nous utilisons la technique dite Monte-Carlo avec hypothèse d'indépendance pour estimer la concentration  $C_{pc}$ . La Figure 6.28 permet de mettre en évidence que l'utilisation des mesures pour la pluie annuelle ou de la loi normale calée sur les données fournit des résultats similaires. Par conséquent,

	Contraintes des valeurs
$F$ ( $g.an^{-1}$ )	[323.61,7046.193]
$\lambda$ (-)	[0.15,0.03]
$\phi$ (-)	[0.3,0.22]
$v$ ( $m.s^{-1}$ )	$[\frac{2.21}{\phi}, \frac{31.54}{\phi}]$
$R$ (-)	$[1+\frac{0.68}{\phi}, 1+\frac{2.04}{\phi}]$
$\alpha_x$ (-)	[5.00 , 150.00]
$\alpha_y$ (-)	$[0.1\alpha_x , 0.2\alpha_x]$
$\alpha_z$ (-)	$[0.01\alpha_x , 0.02\alpha_x]$
$C_{pc}$ ( $\mu g.l^{-1}$ )	[0, 957]

TAB. 6.34 – Résultat du maxima et du minima de la concentration  $C_{pc}$  en TCE au point de conformité (301.5,0,0,1000) à l'aide du Recuit Simulé.

nous décidons pour la suite de cette étude de travailler uniquement avec la pluie efficace déduite des mesures de la pluie. La Figure 6.29 représente la probabilité que la concentration

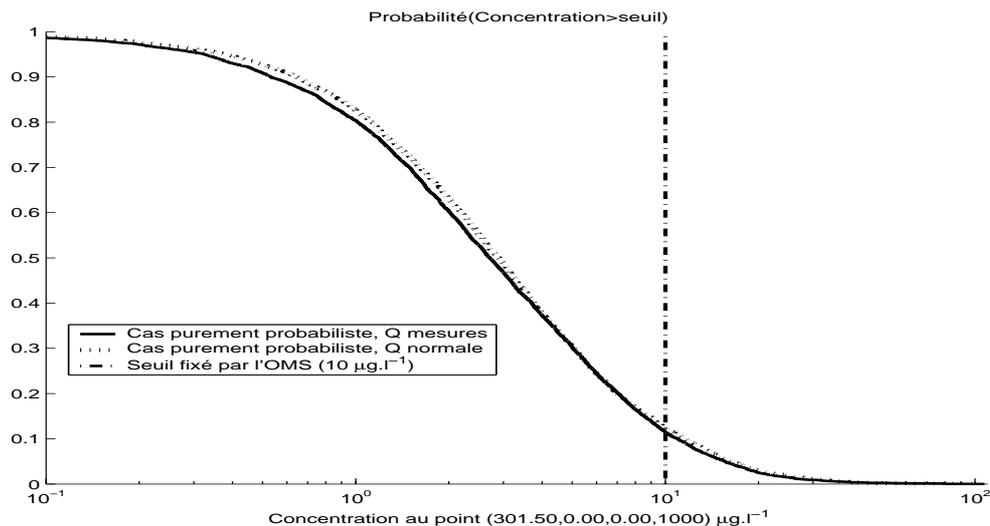


FIG. 6.28 – Comparatif des résultats sur la concentration  $C_{pc}$  selon la loi de probabilité utilisée (mesures - normale) sur la pluie déterminant la pluie efficace  $Q$  (voir Section 6.3.1).

en TCE dépasse un certain seuil et permet de faire une première comparaison avec l'approche sécuritaire consistant à déterminer les valeurs extrêmes (voir Section 6.2.2.1).

La variabilité des résultats concernant la concentration  $C_{pc}$  en TCE peut se caractériser par l'intervalle  $[F_{C_{pc}}^{-1}(0.5), F_{C_{pc}}^{-1}(0.95)]$  où  $F_{C_{pc}}$  est la fonction de répartition (probabilité cumulée) de la concentration  $C_{pc}$ . La Table 6.35 présente les fractiles à 5% et 95% de la concentration  $C_{pc}$ . L'approche sécuritaire nous informe que la concentration  $C_{pc}$  est certaine de se trouver dans l'intervalle  $[0, 957] \mu g.l^{-1}$ . L'approche probabiliste nous informe que la concentration  $C_{pc}$  se trouve dans l'intervalle  $[0.33, 15.57] \mu g.l^{-1}$  avec une probabilité de 90%. Nous pouvons

également dire que la probabilité de dépasser le seuil fixé par l’OMS ( $C_{pc} = 10 \mu g.l^{-1}$ ) est de 12% seulement. Ces affirmations sont toutefois contestables dans la mesure où nous avons supposé arbitrairement que toute l’incertitude sur les paramètres pouvaient être représentée par des distributions de probabilité uniques.

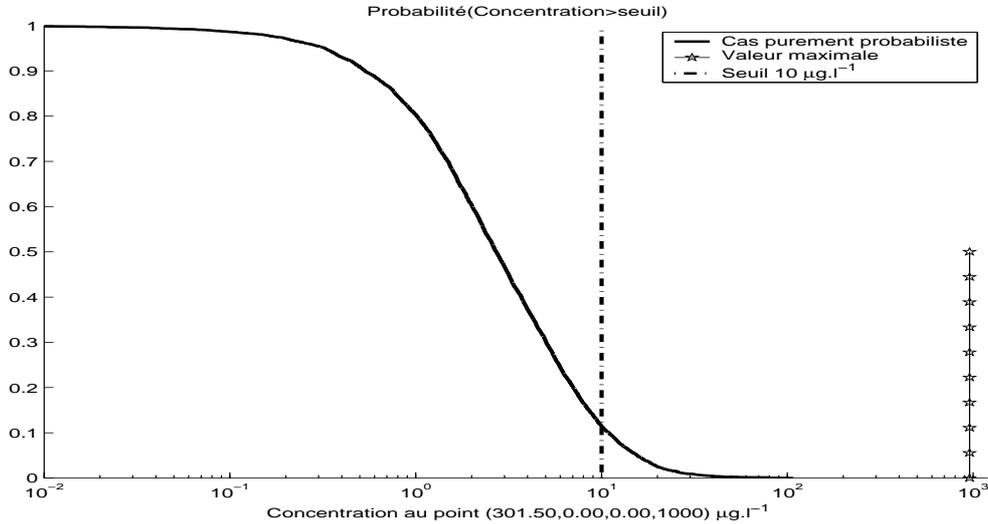


FIG. 6.29 – Comparatif sur la concentration  $C_{pc}$  en TCE entre un traitement purement probabiliste et un traitement par calcul d’intervalles.

	Fractile à 5%	Fractile à 95%	Rapport Fractile 95%/5%
Cadre purement probabiliste	0.33	15.57	47

TAB. 6.35 – Fractiles de la concentration  $C_{pc}$  en  $\mu g.l^{-1}$  dans le cadre purement probabiliste.

### 6.2.2.3 Calculs "Hybride" et "Independent Random Sets"

Nous considérons à présent que l’information, sur les paramètres  $\theta_Q, C_s, K, i, \phi, \alpha_x, \alpha_y, \alpha_z, \lambda, K_d$  n’est plus de nature aléatoire mais de nature imprécise. Ces paramètres sont donc modélisés à l’aide d’un intervalle ou d’une distribution de possibilité suivant le cas (voir Tableau 6.33). Nous allons donc combiner de l’information de nature aléatoire au travers de la pluie et de l’information de nature imprécise au travers des paramètres cités précédemment, à l’aide du calcul "Hybride" puis du calcul "Independent Random Sets".

### 6.2.2.4 Les effets du caractère imprécis de l’information sur le calcul de la concentration $C_{pc}$ en TCE

Nous considérons en premier lieu que la concentration  $C_s$  est représentée par la distribution de possibilité trapézoïdale (voir Figure 6.19). La Figure 6.30 permet d’observer les effets sur l’incertitude de la concentration  $C_{pc}$  en TCE au point de conformité selon que l’on se place dans le cadre purement probabiliste ou dans le cadre où l’on tient compte du caractère imprécis de l’information. Dans ce dernier cas, l’incertitude sur la concentration n’est plus

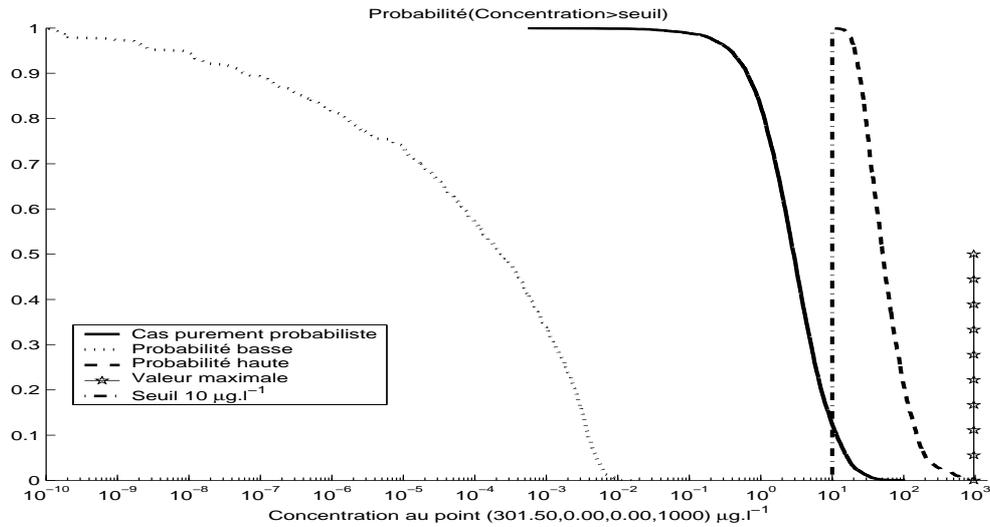


FIG. 6.30 – Impacts sur l’incertitude de la concentration selon que l’on considère l’information, sur  $C_s, K, i, \phi, \alpha_x, \alpha_y, \alpha_z, \lambda$  et  $K_d$ , de nature aléatoire ou imprécise.

uniquement due à de la variabilité mais est due à de la variabilité plus de l’imprécision. L’écart entre la probabilité haute et la probabilité basse reflète le caractère imprécis sous les conditions de (in)dépendances imposées dans le cadre de la méthode ”Hybride”. Ainsi, à l’aide de la Table 6.36, nous remarquons que l’incertitude totale, dans le cadre du calcul ”Hybride”, est de plus de 1235% supérieure à celle obtenue dans le cadre probabiliste. Dans le cadre purement probabiliste, nous aurions conclu que la probabilité de dépasser  $10 \mu g.l^{-1}$  était de 12%, valeur qui pourrait sembler acceptable en terme de risque. Mais avec la méthode ”hybride” qui tient compte du caractère imprécis de l’information dont nous disposons, nous arrivons à un risque de dépassement qui ne peut être jugé tolérable. En effet, dans un contexte sanitaire ou environnemental, nous aurions tendance à considérer la courbe de probabilité haute de dépassement de seuil. Or, la Figure 6.31 indique une probabilité haute de dépassement de seuil égal à 1, c’est à dire qu’il est tout à fait ”possible” que

$$P(\text{concentration en TCE} > 10 \mu g.l^{-1}) = 1$$

ce qui peut être jugé inacceptable en terme de risque.

	Fractile à 5%	Fractile à 95%	Rapport Fractile 95%/5%
Cadre purement probabiliste	0.33	15.57	47
Probabilité basse	$8e10^{-9}$	$5e10^{-3}$	$2e10^{10}$
Probabilité haute	20.7	203.5	

TAB. 6.36 – Fractiles de la concentration  $C_{pc}$  en  $\mu g.l^{-1}$ .

### 6.2.2.5 Les effets de la convexité de $C_s$ sur l'incertitude de concentration $C_{pc}$ en TCE

Dans cette sous-section, nous allons mettre en évidence que le fait de rajouter de la connaissance en jouant sur la convexité de la distribution de possibilité  $\pi_{C_s}$  (voir Figure 6.20) réduit l'écart entre la probabilité haute et basse. En effet, une certaine convexité imposée sur la branche droite de  $\pi_{C_s}$ , rendant ainsi la distribution de possibilité  $\pi_{C_s}$  plus informative, aura pour conséquence de fournir des résultats sur la concentration  $C_{pc}$  plus informatifs. La Figure 6.31 met en évidence les effets de la convexité de la concentration dans l'eau de percolation  $C_s$  dans la méthode "hybride". Nous pouvons observer que l'écart entre les probabilités haute et basse se resserre un peu quand la représentation de  $C_s$  est plus informative due à sa convexité à droite. Ceci semble naturel dans le sens où plus on est informatif et plus on obtient des résultats précis.

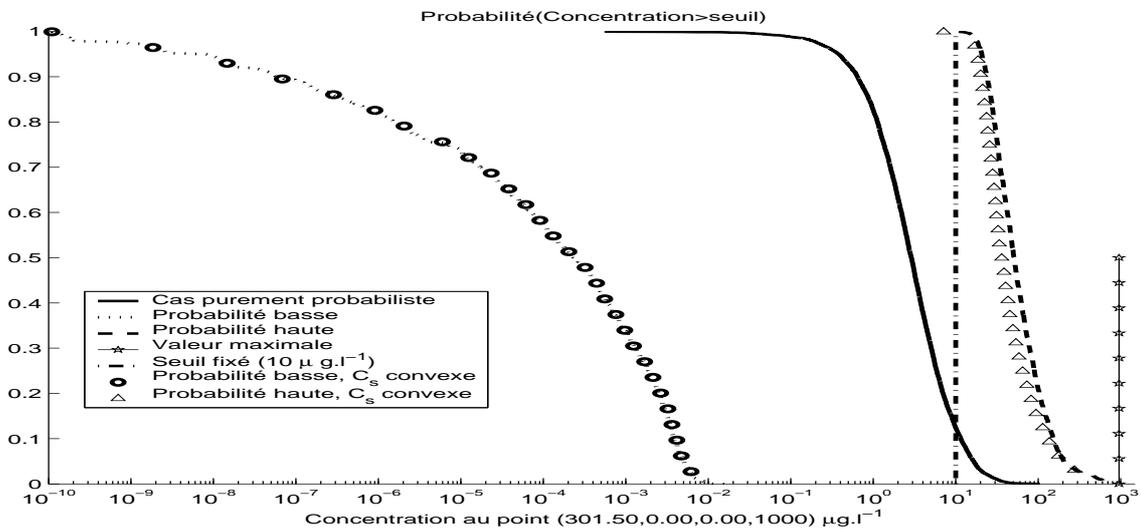


FIG. 6.31 – Impacts sur l'incertitude de la concentration selon que l'on considère l'information, sur  $\theta_Q, C_s, K, i, \phi, \alpha_x, \alpha_y, \alpha_z, \lambda K_d$ , est de nature aléatoire ou imprécise et selon la convexité à droite ou non de la distribution de possibilité représentant  $C_{sol}$ .

### 6.2.2.6 Les effets de la méthode de propagation choisie sur l'incertitude de la concentration $C_{pc}$

Cette section permet de mettre en évidence que l'incertitude sur la concentration  $C_{pc}$  diffère selon la méthode choisie ("Hybride" ou "Independence Random Sets") du fait notamment des (in)dépendances imposées par chacune d'elle.

La Figure 6.32 permet de comparer les deux méthodes de propagation sous les conditions de (in)dépendances qui leur sont propres. Nous pouvons remarquer à l'aide de la Table 6.37 que l'incertitude, dans le cadre de la méthode "Independence Random Sets", est inférieure de 14% à celle de la méthode "Hybrid". Quelque soit la méthode utilisée, la probabilité que la concentration en TCE au point de conformité dépasse  $10 \mu\text{g.l}^{-1}$  peut potentiellement atteindre 1 et on n'est absolument pas certain d'être en dessous de  $10 \mu\text{g.l}^{-1}$ . C'est à dire qu'il

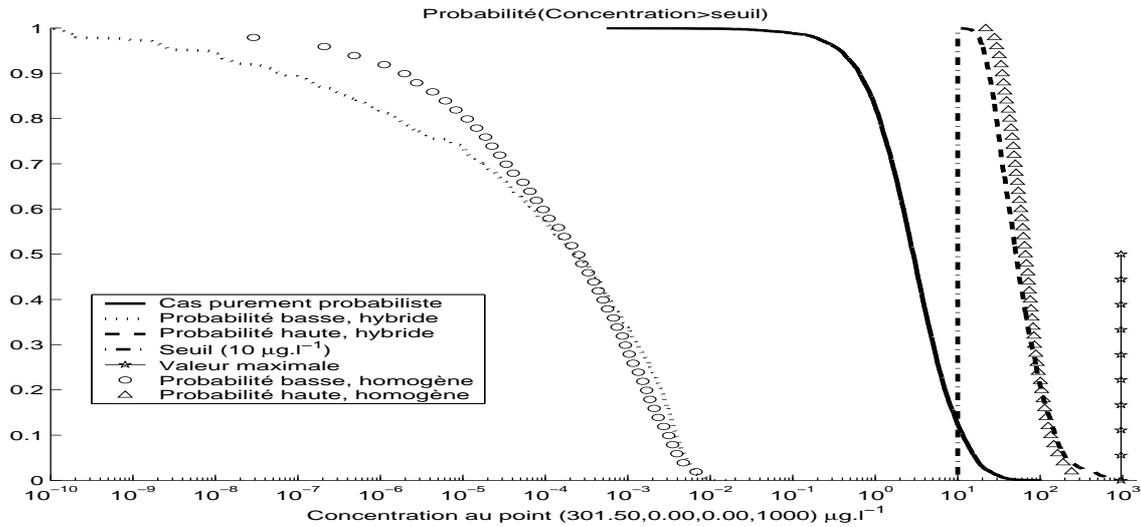


FIG. 6.32 – Impacts de la technique de propagation utilisée sur l'incertitude de la concentration.

est tout à fait possible que :

$$P(\text{concentration en TCE} > 10 \mu\text{g.l}^{-1}) = 1$$

ce qui est jugé inacceptable en terme d'impact sur l'environnement.

	Fractile à 5%	Fractile à 95%	Rapport Fractile 95%/5%
Cadre purement probabiliste	0.33	15.57	47
Probabilité basse, hybride	$8e10^{-9}$	$5e10^{-3}$	$2e10^{10}$
Probabilité haute, hybride	20.7	203.5	
Probabilité basse, Ind. Rand. Sets	$3e10^{-7}$	$4e10^{-3}$	$6e10^8$
Probabilité haute, Ind. Rand. Sets	30.5	175	

TAB. 6.37 – Fractiles de la concentration  $C_{pc}$  en  $\mu\text{g.l}^{-1}$ .

### 6.2.3 Conclusion

Cette étude présente un nouvel exemple des conséquences de l'utilisation de distributions de probabilité uniques pour représenter notre état de connaissance sur les paramètres. L'intérêt additionnel de ce cas est d'utiliser un modèle mathématique semi-analytique. Ne connaissant pas la monotonie du modèle, le temps de calcul est par conséquent plus long que pour le cas du risque radiologique du fait des procédures d'optimisation effectuées lors du processus de propagation. De plus, nous avons testé une autre technique de propagation, à savoir la méthode "Independence Random Sets".

Dans une approche purement probabiliste, nous aurions conclu que la probabilité de dépasser le seuil fixé par l'OMS ( $10 \mu\text{g.l}^{-1}$ ) est seulement de 12%, ce qui pourrait être jugé acceptable

en terme de risque. Le caractère imprécis de l'information et ce, quelle que soit la méthode de propagation utilisée suggère qu'il est tout à fait possible que la probabilité de dépasser  $10 \mu\text{g.l}^{-1}$  soit égale à 1 ce qui n'est pas acceptable en terme de risque. Au contraire, si nous avons obtenu que la probabilité haute de dépasser le seuil fixé par l'OMS soit quasi nulle, cela aurait permis de justifier le choix consistant à laisser les terrains en place (avec une surveillance des eaux souterraines). Nous voyons encore une fois que la prise en compte du caractère imprécis de l'information peut avoir un réel impact pour la phase décisionnelle.

### 6.3 Cas de la pollution par le plomb

Cette étude concerne une évaluation des risques associés à une ancienne fonderie de plomb. L'exploitation de cette fonderie qui a débuté en 1870 a donné lieu à la fabrication de plaques de cheminée, de carters, de matériel agricole, de batteries, à la récupération et à la transformation de métaux non ferreux ainsi que la fabrication de pigments pour peintures anticorrosion. Le rapport [2] indique également que 50 tonnes de rouleaux de cuivre provenant du centre CEA/CESTA auraient été brûlés à même le sol et que 200 kg de plomb en provenance du CEA auraient été fondus localement. A partir de 1984, les structures de l'ancienne fonderie ont progressivement été détruites.

Les principaux procédés et activités associés au fonctionnement de la fonderie de plomb pouvant avoir un impact sur l'environnement sont :

- les eaux de traitement (chargées en plomb) stockées dans un petit bassin de décantation qui a connu plusieurs débordements en période de fortes précipitations.
- le relargage à partir des cheminées de la fonderie des fumées et poussières non traitées impliquant une redéposition du plomb en surface des sols et sur les végétaux et ainsi la possibilité pour les populations d'inhaler le plomb véhiculé par ces poussières.
- la démolition de l'usine avec le brûlage sur site des matériaux souillés par le plomb ayant pour conséquence la redéposition du plomb sous forme de poussière sur le site et dans son environnement immédiat.

Le plomb reste le principal polluant sur le site même si l'on trouve d'autres métaux à un degré moindre comme le cadmium, le cuivre, l'étain et l'arsenic.

En juillet 1997, le site clôturé, disposant d'une habitation, semble avoir été loué. Par ailleurs, il est signalé l'existence à court terme d'un projet d'occupation du site correspondant à une utilisation de la maison d'habitation et à la plantation d'arbres dans une partie du site. Un arrêté préfectoral d'exécution d'office en date du 16 décembre 1996, a confié à l'ADEME la mission de préciser l'impact de la pollution du site et d'étudier différents scénarios de réhabilitation. Un des objectifs de la réhabilitation du site était la réduction de l'impact de la pollution des sols de surface en se fixant un seuil de dépollution pour la concentration de plomb dans le sol.

Pour évaluer les risques associés au site, dans l'état actuel, nous supposons que le site est utilisé pour l'habitat particulier. La voie d'exposition considérée est la possibilité d'ingestion, par l'enfant, de sols contenant du plomb (notamment en jouant sur le sol). Le rapport [2] montre en effet que ce scénario d'exposition est plus contraignant en terme de risque.

L'exposition associée à l'ingestion de sol, pollué par des retombées de plomb, peut être évaluée à l'aide de l'équation suivante [42] [75]

$$D_{sol} = \frac{(C_{sol} \times Ir_{sol} \times (Fi_{interieur} + Fi_{exterieur}) \times (Efsol_{interieur} + Efsol_{exterieur}) \times Ed)}{Bw \times At \times 10^6}$$

- $D_{sol}$  : La dose relative à l'ingestion de sol ( $mg\ Pb/[kg\ \text{poid corporel} \cdot \text{jour}]$ )  
 $C_{sol}$  : La concentration en polluant dans le sol ( $mg/kg$ )  
 $Ir_{sol}$  : Taux d'ingestion de sol ( $mg\ sol/jour$ )  
 $Fi$  : Fraction de sol ingérée(-)  
 $Efsol$  : Fréquence d'exposition ( $jours/an$ )  
 $Ed$  : durée d'exposition ( $ans$ )  
 $Bw$  : Poids de l'individu ( $kg$ )  
 $At$  : Période sur laquelle l'exposition est moyennée ( $jours$ )

Le risque se caractérise par un indice de risque  $IR$  qui est le ratio entre la dose  $D_{sol}$  de plomb absorbée par l'être humain par la voie d'exposition "ingestion de sol" et la valeur toxicologique de référence ( $VTR$ ) du plomb pour la voie ingestion. Cette dernière valeur, fixée par l'Organisation Mondiale de la Santé (O.M.S), est égale à :

$$VTR = 3.5\mu g\ Pb/[kg(\text{poid corporel}) \cdot \text{jour}]$$

L'indice de risque est :

$$IR = D_{sol}/VTR$$

A partir de la dose ingérée  $D_{sol}$ , on peut également calculer la plombémie ( $[Pb]$ ) attendue (concentration en plomb dans le sang) chez une personne exposée par la relation [68] :

$$[Pb] = D_{sol} \times 1.6 \quad (6.11)$$

avec

- $[Pb]$  : Plombémie attendue ( $\mu g \cdot dl^{-1}$ )  
 1.6 : Relation entre l'exposition et la plombémie définie par l'O.M.S. ( $\mu g \cdot l^{-1}$  par  $\mu g \cdot j^{-1}$ )

Dans la Section 6.3.1, nous proposons une représentation mathématique de chacun des paramètres du modèle (calcul de dose), selon la nature de l'information (variabilité-imprécision).

Dans la Section 6.3.2, nous traitons l'incertitude de la dose, et par conséquent celle de la plombémie en effectuant un calcul min-max calculant les valeurs extrêmes du modèle. Nous traitons ensuite l'incertitude dans un cadre purement probabiliste où toute l'information concernant les paramètres est supposée être de nature aléatoire. Nous considérons dans un premier temps les valeurs de teneurs en plomb  $C_{sol}$  recueillies sur le site puis dans un deuxième temps le seuil de dépollution fixé pour la réhabilitation du site. Nous pourrions ainsi dans cette deuxième phase observer si le seuil de dépollution fixé est suffisant pour la réhabilitation du site dans le cadre où l'information a été supposée de nature aléatoire.

Pour finir, nous traitons l'incertitude sur la dose après réhabilitation du site (c-a-d en se rapprochant de la valeur de dépollution pour  $C_{sol}$ ) en prenant en compte le caractère aléatoire et imprécis de l'information à l'aide des 4 méthodes de propagation :

- Méthode ”Hybride” (voir Section 4.2 Chapitre 4) combinant du Monte-Carlo avec du calcul possibiliste.
- Méthode ”Independent Random Sets” (voir Section 4.3.1 Chapitre 4) à l’aide de la théorie de Dempster-Shafer [88].
- Méthode ”Conservative Random Sets” (voir Section 4.3.2 Chapitre 4) à l’aide de la théorie de Dempster-Shafer [88] avec optimisation.
- Méthode ”Dependency Bounds Convolution” (voir Section 4.4 Chapitre 4) à l’aide des p-boxes.

qui seront comparées entre elles puis comparées à l’approche purement probabiliste.

### 6.3.1 Représentation de l’information concernant les paramètres du modèle

Nous allons utiliser les distributions de probabilité ou de possibilité pour tenter de représenter l’information disponible sur les paramètres du modèle.

#### 6.3.1.1 Concentration en polluant (Plomb) dans le sol ( $C_{sol}$ ( $mg.kg^{-1}$ , $sec$ ))

Les concentrations naturelles en plomb dans les sols sont variables et fonction de plusieurs facteurs dont les caractéristiques physico-chimiques des sols, la nature du substratum. En France, la plage de valeurs de 15 à 77  $mg.kg^{-1}$  [2], pour un sol sur roche mère non chargée en métaux et éloigné d’une activité industrielle, est jugée représentative. La concentration en plomb peut atteindre 22 à 500  $mg.kg^{-1}$  [2] pour les sols agricoles au voisinage d’industries de métaux non ferreux et 100 à 250  $mg.kg^{-1}$  [2] pour les sols agricoles sur roche mère naturellement chargée en métaux. La Figure 6.34 présente la probabilité cumulée empirique de la teneur en plomb sur le site de l’ancienne fonderie à partir des données recueillies (voir Figure 6.33). Elle sera utilisée pour représenter la concentration de référence en plomb dans le sol  $C_{sol}$  afin d’observer les conséquences sur la dose  $D_{sol}$  dans le cas où le site ne serait pas dépollué.

Dans le rapport [2], l’objectif de qualité du sol est fixé à  $C_{sol} = 300 mg.kg^{-1}$  pour le plomb correspondant à un seuil acceptable dans le cas de l’enfant et dans le scénario ”habitat particulier sur le site”. C’est cette valeur de 300  $mg.kg^{-1}$  qui est choisie pour une estimation déterministe du risque afin de vérifier si le seuil d’exposition est acceptable. Or, il n’est pas possible de dépolluer à 300  $mg.kg^{-1}$  de manière parfaitement uniforme sur tout le site. Pour la réhabilitation du site, l’INERIS (information d’experts) estime que les teneurs en plomb dépassant 500  $mg.kg^{-1}$  sont à proscrire et qu’il est impossible de dépolluer à moins de 40  $mg.kg^{-1}$ . Cela signifie qu’après dépollution du site, la teneur en plomb égale à 300  $mg.kg^{-1}$  (objectif à atteindre après dépollution) est la plus vraisemblable, mais nous ne pourrions pas exclure des teneurs en plomb comprises entre 40 et 500  $mg.kg^{-1}$  sur le site. Nous sommes donc typiquement confrontés à une information de nature imprécise qui pourra être mieux représentée par une distribution de possibilité triangulaire. Dans le cadre purement possibiliste, nous aurions supposé une densité de probabilité triangulaire. Cependant, compte tenu de l’information réellement disponible sur la concentration de plomb dans le sol  $C_{sol}$ , l’utilisation d’une distribution de probabilité unique, à savoir triangulaire, ne se justifie pas. En effet, il existe en fait une infinité de distributions de probabilité de mode 300  $mg.kg^{-1}$  bornées par 40  $mg.kg^{-1}$  et 500  $mg.kg^{-1}$  dont la distribution triangulaire est une des représentantes. Ainsi,



nous décidons de représenter la connaissance sur la teneur en plomb  $C_{sol}$  par la distribution de possibilité triangulaire  $\pi_{C_{sol}}$  de noyau  $\{300\}$  et de support  $[40, 500]$  (voir Figure 6.35) qui a pour intérêt de définir une famille de probabilités qui contient toutes les probabilités unimodales de mode 300 bornée par 40 et 500. A titre comparatif, nous utiliserons la distribution

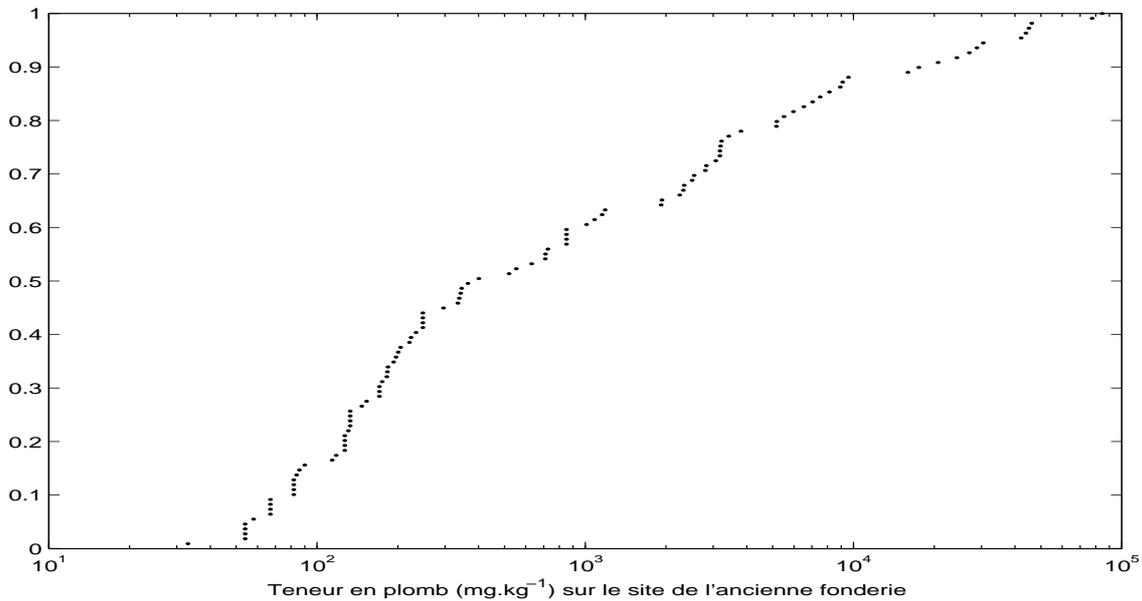


FIG. 6.34 – Probabilité cumulée de la teneur en plomb à partir des données de la Figure 6.33.

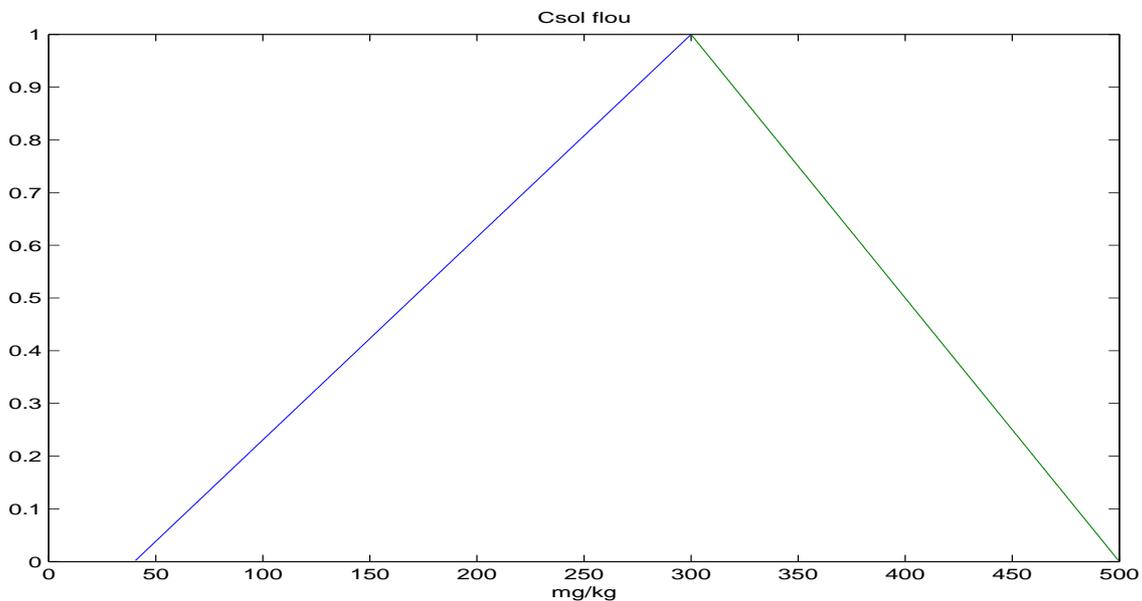


FIG. 6.35 – Distribution de possibilité triangulaire  $\pi_{C_{sol}}$  représentant l'information sur la teneur en plomb à atteindre sur site après dépollution.

de probabilité normale de moyenne 300 et d'écart type 50 (communication experts INERIS)

		Modèle mathématique
Scénario 1	On considère que l'objectif de dépollution à $300 \text{ mg.kg}^{-1}$ sera atteinte sur tout le site	$C_{sol} = 300$
Scénario 2	On est conscient que l'objectif de $300 \text{ mg.kg}^{-1}$ ne sera pas atteint partout et on considère que l'incertitude sur l'objectif de la teneur en plomb est de la variabilité	Distribution de probabilité normale de moyenne $300 \text{ mg.kg}^{-1}$ et d'écart type $50 \text{ mg.kg}^{-1}$
Scénario 3	On est conscient que l'objectif de $300 \text{ mg.kg}^{-1}$ ne sera pas atteint partout et on considère que l'incertitude sur l'objectif de la teneur en plomb est de l'imprécision. Nous considérons une représentation plus réaliste de l'information disponible.	Distribution de possibilité triangulaire de noyau $\{300\}$ et de support $[40,500]$

TAB. 6.38 – Synthèse des différentes représentations de l'objectif de dépollution à atteindre pour la concentration de plomb dans le sol  $C_{sol}$ .

afin de traiter l'incertitude dans le cadre purement probabiliste. Le tableau 6.38 synthétise les différents scénarii sur la représentation de l'objectif de dépollution à atteindre concernant la teneur en plomb dans le sol. Ces différents scénarii sont testés et nous observons ainsi l'impact de chacun sur le calcul de dose et par conséquent sur celui de la plombémie.

### 6.3.1.2 Taux d'ingestion de sol $I_{r_{sol}}$ ( $mg$ sol/jour)

On considère (communication experts INERIS) deux modèles possibilistes pour représenter le taux d'ingestion de sol  $I_{r_{sol}}$  (Voir Figure 6.36) :

- Hypothèse 1 : Noyau=[100,150], support=[20,300].
- Hypothèse 2 : Noyau=[50,200], support=[20,300].

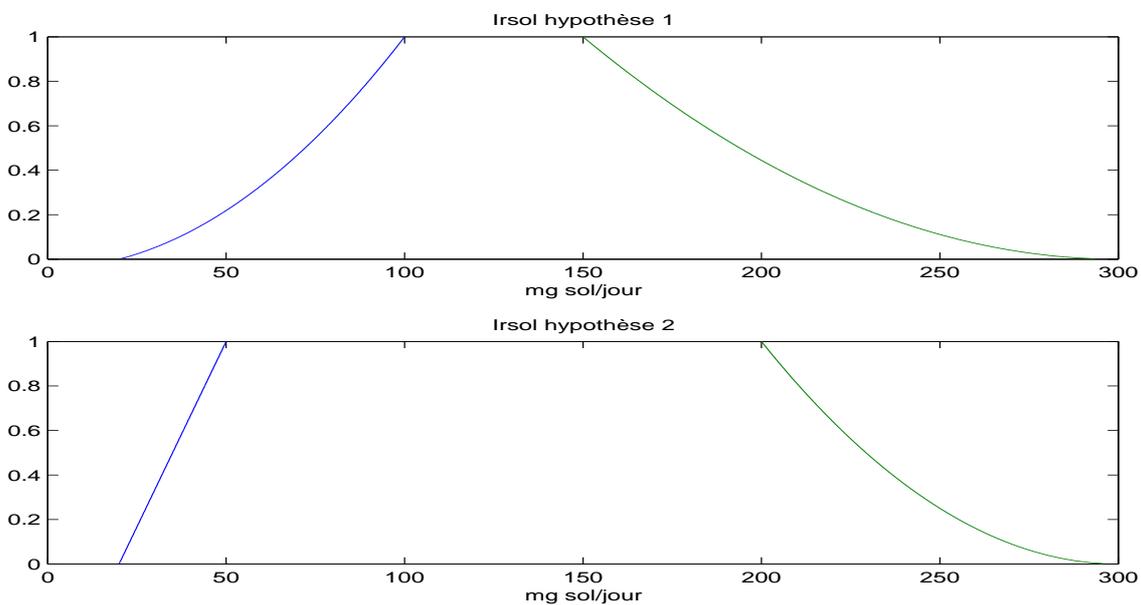


FIG. 6.36 – Distributions de possibilité  $\pi_{I_{r_{sol}}}$  représentant le taux d'ingestion de sol  $I_{r_{sol}}$ .

Dans le premier modèle (hypothèse 1), l'expert juge que l'enfant sur site ingèrera vraisemblablement entre 100 et 150  $mg$  de sol par jour mais n'exclut pas des valeurs limites comme 40 et 300  $mg$  par jour. La convexité de la distribution de possibilité peut s'interpréter comme le fait que les valeurs extrêmes situées en dehors du noyau [100,150] sont jugées très peu vraisemblables.

Dans la deuxième hypothèse, l'expert juge cette fois-ci que l'enfant ingère vraisemblablement entre 50 et 200  $mg$  par jour où 200  $mg$  est la valeur de référence issue des recommandations de l'US.EPA [42]. A titre comparatif, nous utilisons la densité de probabilité conservant la forme de la distribution de possibilité de l'hypothèse 2 afin de traiter l'incertitude dans le cadre purement probabiliste.

### 6.3.1.3 Fraction de sol ingérée $F_i$ (-)

La fraction de sol ingérée  $F_i$  se décompose en une fraction de sol ingérée à l'intérieur de l'habitat  $F_{i_{interieur}}$  et d'une fraction de sol ingérée à l'extérieur  $F_{i_{exterieur}}$  de l'habitat.

Nous considérons d'une part que tout le sol pouvant être ingéré est constitué de sol pollué et, d'autre part, qu'il peut être absorbé à 100% par l'organisme. Il s'agit là d'une hypothèse protectrice. Ainsi, la fraction ingérée à l'extérieur est fixée à 1, ie  $Fi_{exterieur} = 1$ . En revanche, l'expert INERIS juge que la fraction ingérée à l'intérieur est vraisemblablement dans l'intervalle  $[0.5,0.7]$  et considère impossible que la fraction de sol ingérée à l'intérieur soit en dehors de  $[0.2,0.9]$ . Ainsi, on modélise le paramètre  $Fi_{interieur}$  par une distribution de possibilité trapézoïdale de noyau  $[0.5,0.7]$  et de support  $[0.2,0.9]$  (voir Figure 6.37). A titre comparatif, nous testerons la densité de probabilité trapézoïdale correspondante afin de traiter l'incertitude dans le cadre purement probabiliste.

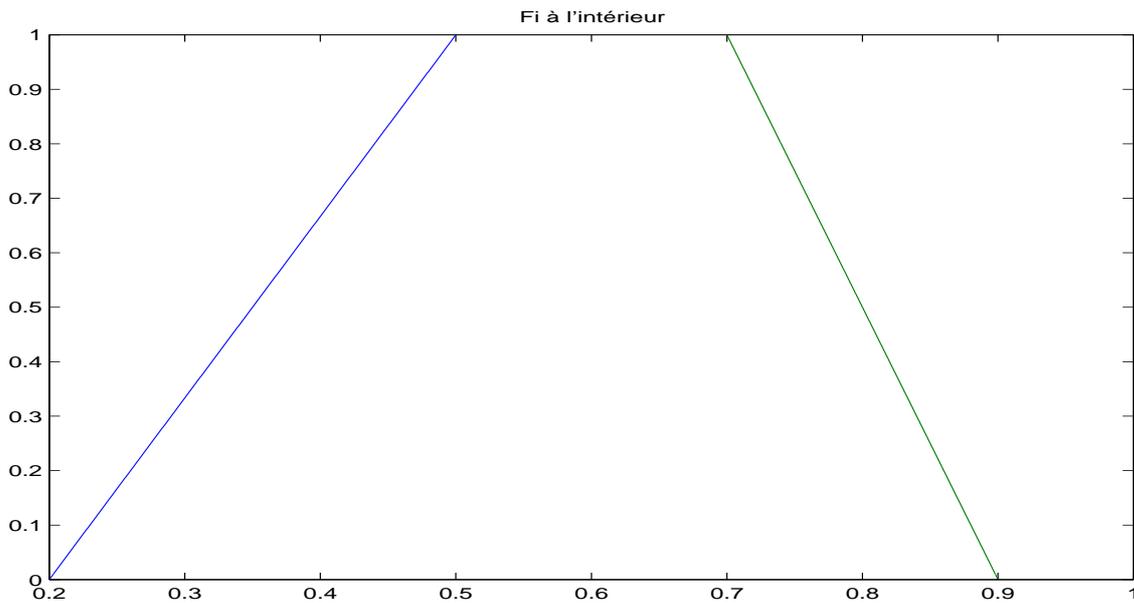


FIG. 6.37 – Distributions de possibilité trapézoïdale  $\pi_{Fi_{interieur}}$  représentant la fraction de sol ingérée à l'intérieur de l'habitat  $Fi_{interieur}$ .

#### 6.3.1.4 Durée d'exposition $Ed$ (ans)

La durée de l'exposition ici est de 6 ans.

#### 6.3.1.5 Fréquence d'exposition $Ef_{sol}$ (jours/an)

Comme pour la fraction de sol ingérée, la fréquence d'exposition se décompose en une exposition à l'extérieur  $Ef_{sol_{exterieur}}$  fixée à 2 heures par jour et une exposition à l'intérieur  $Ef_{sol_{interieur}}$  fixée à 16 heures par jour (com. experts INERIS).

#### 6.3.1.6 Poids de l'individu $Bw$ (kg)

On considère une cible (enfant) âgée entre 0 et 6 ans. La base de données CIBLEX fournit pour la classe d'âges  $[0-6]$  ans une moyenne de 17.4 kg, un minimum de 12.9 kg et un maximum de 21.5 kg.

On modélise le poids de l'individu  $Bw$  à l'aide d'une loi normale de moyenne 17.4 kg qui

sera tronquée pour ne pas estimer des poids en dehors de [12.9,21.5]. Nous considérons que le fractile à 95% (resp. à 0.05%) correspondra à 21.5 kg (resp. 12.9 kg). L'écart type n'étant pas fourni, nous décidons d'estimer celui-ci en résolvant le problème d'optimisation suivant :

$$\min_{\sigma} \max_{[G_i]} G_i(\sigma)$$

où  $G_i(\sigma) = F_{th}(x_i, 17.4, \sigma) - F(x_i)$ ,  $F_{th}$  est la fonction de répartition normale théorique de moyenne 17.4, d'écart type  $\sigma$ , et  $F$  est la fonction de répartition donnée aux points 12.9, 17.4 et 21.5 (ie  $F(12.9) = 0.05$ ,  $F(17.4) = 0.5$ ,  $F(21.5) = 0.95$ ). L'écart type  $\sigma$  minimisant le maximum de  $G_i$  est alors égal à 2.57 kg.

Un projet européen appelé "Expofacts" [43] fournit beaucoup plus de paramètres d'exposition et de pays que CIBLEX mais fournit des données moins précises que CIBLEX. Malheureusement la base de données de "Expofacts" [43] concernant le poids des enfants n'existe pas pour la France. Cependant, celle de l'Allemagne y est présente et le tableau 6.39 répertorie le poids moyen, l'écart type, la taille de l'échantillon et quelques fractiles pour différentes tranches d'âges. En considérant chaque tranche d'âge (sexe confondu), nous arrivons à un écart type de 2.35 kg. En supposant l'analogie entre les enfants allemands et français, l'écart type évalué précédemment (2.57 kg) paraît plausible.

### 6.3.1.7 Période sur laquelle l'exposition est moyennée $At$ (jours)

L'exposition est moyennée sur 6 ans et donc  $At = 2190$  jours. la période d'intégration est prise égale à la durée d'exposition dans la mesure où les effets cancérogènes pour le plomb n'étant pas prouvés, ils ne sont pas pris en compte.

## 6.3.2 Etude des incertitudes sur la dose absorbée $D_{sol}$ et la plombémie [Pb]

Dans cette Section, l'incertitude associée à chaque scénario d'exposition va être évaluée.

Dans un premier temps, nous effectuons un calcul de référence correspondant à un calcul déterministe. Les valeurs modales de chaque paramètre sont sélectionnées et nous calculons la résultante du modèle considéré à partir de celles-ci. Cette méthode permet de fournir à l'évaluateur une première évaluation de la dose de plomb ingérée  $D_{sol}$  et de la plombémie [Pb] pour ce scénario d'exposition.

Dans un deuxième temps, nous calculons le minimum et le maximum du modèle considéré par un calcul d'intervalles. Cette approche permet de définir les cas extrêmes mais n'est pas suffisamment informative compte tenu de notre état de connaissance sur les paramètres (en général souvent plus riche qu'une information de type intervalle (min-max)).

Dans un troisième temps, nous supposons toute l'information concernant les paramètres est de nature aléatoire. Chaque paramètre est alors modélisé par une distribution de probabilité unique et l'incertitude stochastique est propagée à travers le modèle considéré (calcul de dose) en utilisant la technique de Monte-Carlo avec hypothèse d'indépendance stochastique entre les paramètres (cadre purement probabiliste). Cette approche permet d'obtenir des résultats précis sur les probabilités de dépassement de seuil mais cette précision peut être jugée arbitraire dans le sens où l'on ne dispose pas d'assez de connaissance pour pouvoir justifier l'utilisation d'une distribution de probabilité unique pour chacun des paramètres.

Sexe (m/f)	Age (year)	Moyenne (kg)	Ecart type	Nombre d'in-divi-dus	Fractile à 5% (kg)	Fractile à 50% (kg)	Fractile à 95% (kg)
f	2,5y	13,05	1,56	283	10,6	13	15,7
m	2,5y	13,47	1,45	274	11,05	13,5	15,9
f	3,5y	15,19	1,93	368	12	15	18,5
m	3,5y	15,56	1,93	376	12,45	15,49	19
f	3y	14,3	1,77	524	11	14	17
m	3y	14,5	1,71	533	12	14,5	17,1
f	4,5y	17,49	2,33	384	14,1	17,1	21,5
m	4,5y	17,78	2,26	379	14,5	17,8	21,9
f	4y	16,53	2,23	364	13,54	16,2	20,5
m	4y	16,78	2,23	376	13,6	16,6	20,6
f	5,5y	20,05	2,89	491	16	19,9	25
m	5,5y	20,04	2,73	495	16,1	20	25
f	6,5y	21,89	3,2	584	17,35	21,6	27,4
m	6,5y	22,64	3,25	572	18	22,25	28
f	6y	21,2	3,21	554	16,5	20,9	26,4
m	6y	21,11	2,99	548	16,6	21	26,5
f	0m	3,16	0,35	105	2,58	3,15	3,74
m	0m	3,37	0,44	115	2,61	3,32	4,2
f	12m	9,14	1	346	7,6	9,1	10,78
m	12m	9,74	1,01	356	8,15	9,7	11,45
f	15m	9,74	1,07	216	8,2	9,76	11,5
m	15m	10,28	1,08	224	8,5	10,12	12,17
f	18m	10,44	1,36	227	8	10,5	12,78
m	18m	11,16	1,42	237	9	11,1	13,15
f	21m	11,26	1,48	254	9	11,22	13,7
m	21m	11,77	1,41	254	9,52	11,7	14,09
f	24m	11,86	1,54	255	9,5	11,79	14,5
m	24m	12,26	1,51	256	9,8	12,33	14,8
f	3m	5,61	0,7	115	4,4	5,55	6,8
m	3m	5,99	0,68	126	4,9	6,05	6,98
f	6m	7,35	0,8	142	6,1	7,33	8,5
m	6m	7,9	0,87	131	6,7	7,85	9,55
f	9m	8,34	0,93	160	6,92	8,34	9,95
m	9m	8,92	0,93	157	7,42	8,8	10,4

TAB. 6.39 – Synthèse des informations sur le poids dans Expofacts pour différentes tranches d'âges concernant l'Allemagne.

Pour finir, nous propageons l'information à travers le modèle en considérant l'information de nature imprécise. Dans ce dernier cas, les méthodes de propagations utilisées sont la méthode "Hybride", la méthode "Independence Random Sets", "Conservative Random Sets" puis la méthode "Dependency Bounds Convolution".

L'objectif est de montrer l'influence de la représentation mathématique de l'information et l'influence de la méthode utilisée pour propager l'information sur l'incertitude de la dose absorbée  $D_{sol}$  et par conséquent sur celle de la plombémie [Pb].

Les estimations réalisées ces dix dernières années dans plusieurs pays européens indiquent que l'apport alimentaire moyen en plomb serait compris entre 0.03 et 0.2  $mg.j^{-1}$  [2]. En 1987, l'Organisation Mondiale de la Santé a fixé à 25  $\mu g.kg^{-1}$  (soit 3.5  $\mu g/[kg.jour]$ ) la dose hebdomadaire admissible, par ingestion, pour des enfants. Ainsi, la dose de plomb  $D_{sol}$  susceptible d'être absorbée, après avoir ramené la concentration de plomb dans le sol  $C_{sol}$  à 300  $mg.kg^{-1}$  (seuil de dépollution à atteindre), ne devra pas dépasser 3.5  $\mu g/[kg.jour]$ . La comparaison du calcul de dose  $D_{sol}$  à ce niveau de référence est intéressante car elle peut, notamment, conclure à une situation acceptable en terme de santé publique si cette dose d'exposition calculée n'est pas supérieure à 3.5  $\mu g/[kg.jour]$ .

A l'heure actuelle, il est admis que la concentration dans le sang (Plombémie [Pb]), témoignant d'une exposition élevée chez l'enfant de moins de 6 ans, est de 100  $\mu g.l^{-1}$  [68]. Lors d'un dépistage de plombémie chez l'enfant, le dépassement de 100  $\mu g.l^{-1}$  justifiera une surveillance biologique de l'enfant et une enquête dans son environnement. Ainsi, il permettra éventuellement de conclure que l'enfant vit sur un site potentiellement pollué. On estime qu'en France, près de 2% des enfants de 1 à 6 ans présentent une plombémie supérieure à 100  $\mu g.l^{-1}$  [68]. Nous remarquons le caractère sécuritaire de l'OMS qui fixe la dose ( $D_{sol}$ ) seuil à 3.5  $\mu g/[kg.jour]$  correspondant à une plombémie de 5.6  $\mu g.l^{-1}$  qui est 18 fois inférieure à celle jugée élevée : 100  $\mu g.l^{-1}$ .

### 6.3.2.1 Calcul déterministe

Le Tableau 6.40 présente les résultats du calcul déterministe de la dose  $D_{sol}$  et de la plombémie [Pb]. Nous remarquons que la dose de plomb absorbée relative à l'ingestion de sol est inférieure à celle fixée par l'OMS. Ainsi, l'évaluateur pourrait conclure à ce stade de l'étude que l'objectif de dépollution de 300  $mg.kg^{-1}$  est satisfaisant. Cependant, cette approche suppose une définition précise des paramètres sources et ne tient pas compte du caractère aléatoire et imprécis de l'information de départ.

### 6.3.2.2 Calcul d'intervalles

Tous les paramètres sont modélisés par des intervalles (min-max) définis par les supports des distributions décrites précédemment, puis on calcule l'ensemble des valeurs possibles de la dose  $D_{sol}$  relative à l'ingestion de sol et par conséquent celles de la plombémie [Pb]. Cette méthode permet d'obtenir un encadrement (min-max) de la dose susceptible d'être absorbée  $D_{sol}$  sans pour autant nous informer dans quelle mesure on peut atteindre telle ou telle valeur à l'intérieur de cet encadrement.

Le Tableau 6.41 présente le maximum et le minimum de la dose susceptible d'être absorbée

	Valeur modale
$C_{sol}$ ( $mg.kg^{-1}$ sec)	300
$Ir_{sol}$ ( $mg$ sol/jour)	125
$Fi_{exterieur}$ (-)	1
$Fi_{interieur}$ (-)	0.6
$Ed$ (ans)	6
$Efsol_{exterieur}$ (jours/an)	$2/24 \times 365$
$Efsol_{interieur}$ (jours/an)	$16/24 \times 365$
$Bw$ (jours)	17.4
$At$ (jours)	$6 \times 365$
$D_{sol}$ ( $\mu g/[kg.jour]$ )	2.59
$[Pb]$ ( $\mu g.l^{-1}$ )	4.14

TAB. 6.40 – Résultat de la dose de plomb absorbée et de la plombémie pour une sélection des valeurs modales de chaque paramètre.

$D_{sol}$  et de la plombémie  $[Pb]$ . Nous pouvons remarquer qu'avec ce type de calcul, il est possible d'obtenir une dose 5 fois supérieure à celle préconisée par l'OMS. Cependant nous ne pouvons pas estimer dans quelle mesure cette dose risque d'être atteinte. Dans le doute, la conclusion de l'évaluateur aurait été de dire que le seuil de dépollution fixé à  $300 mg.kg^{-1}$  est insuffisant. Le dépassement de 5 fois la dose admissible implique une présence de plomb dans le sang de  $26.6 \mu g.l^{-1}$  (voir 6.41) qui reste largement en dessous des  $100 \mu g.l^{-1}$ . Ainsi, nous décidons de focaliser notre étude des incertitudes sur la dose  $D_{sol}$  relative à l'ingestion de sol.

Nous pouvons escompter obtenir des résultats plus précis dans le sens où le calcul d'intervalles prend en compte l'information la plus pauvre à savoir l'intervalle. Or, l'information dont on dispose, sur les paramètres, est plus riche qu'un simple intervalle.

$C_{sol}$ $mg.kg^{-1}$ sec	40	500
$Ir_{sol}$ $mg$ sol/jour	20	300
$Fi_{exterieur}$ (-)	1	1
$Fi_{interieur}$ (-)	0.2	0.9
$Ed$ (ans)	6	6
$Efsol_{exterieur}$ (jours/an)	$2/24 \times 365$	$2/24 \times 365$
$Efsol_{interieur}$ (jours/an)	$16/24 \times 365$	$16/24 \times 365$
$Bw$ ( $kg$ )	12.9	21.5
$At$ (jours)	$6 \times 365$	$6 \times 365$
$D_{sol}$ ( $\mu g/[kg.jour]$ )	$3.3510^{-2}$	16.6
$[Pb]$ ( $\mu g.l^{-1}$ )	0.056	26.6

TAB. 6.41 – Résultat du calcul d'intervalles pour la dose  $D_{sol}$  et la plombémie  $[Pb]$ .

### 6.3.2.3 Calcul purement probabiliste

Nous supposons dans cette section que l'incertitude sur les paramètres du modèle est uniquement due au caractère aléatoire (supposé) de l'information (incertitude=variabilité). Nous utilisons la technique dite Monte-Carlo avec hypothèse d'indépendance pour estimer la dose  $D_{sol}$ . A titre indicatif, nous avons traité le scénario où le site ne serait pas dépollué (voir Figure 6.33) et la Figure 6.38 présente la probabilité que la dose de plomb absorbée  $D_{sol}$  dépasse un certain seuil. Ainsi, on estime que dans 5% des cas la dose  $D_{sol}$  absorbée peut dépasser 85 fois la dose prescrite par l'OMS (voir Tableau 6.42) impliquant une plombémie de l'ordre de  $476 \mu g.l^{-1}$ . Ceci veut dire qu'un enfant, vivant sur ce site pollué pendant 6 ans, aurait potentiellement 5% de chance d'avoir une plombémie supérieure à  $476 \mu g.l^{-1}$  ce qui correspondrait à la nécessité de réaliser un bilan hospitalier d'urgence [68].

L'incertitude associée à la dose  $D_{sol}$  (variabilité) peut se caractériser par l'intervalle  $[F_{D_{sol}}^{-1}(0.05), F_{D_{sol}}^{-1}(0.95)]$  où  $F_{D_{sol}}$  est la fonction de répartition (probabilité cumulée) de la dose absorbée  $D_{sol}$ . La Table 6.42 répertorie les fractiles à 5% et 95% de la dose  $D_{sol}$ . Les fractiles de la plombémie  $[Pb]$  se déduisent des fractiles de la dose  $D_{sol}$  en effectuant  $F_{[Pb]}^{-1}(0.05) = F_{D_{sol}}^{-1}(0.05) \times 1.6$ . La Figure 6.39 représente la probabilité que la dose susceptible d'être absorbée dépasse un certain seuil après une dépollution du site consistant à s'approcher au plus près de  $300 mg.kg^{-1}$  pour la concentration de plomb dans le sol (0-30 cm). Elle permet de mettre en évidence les différences de résultats entre l'approche par intervalle (consistant à déterminer les valeurs extrêmes) et l'approche purement probabiliste. Nous remarquons que les résultats sur la dose  $D_{sol}$  sont similaires que l'on considère la concentration  $C_{sol}$  fixe ou variable. Nous pouvons en conclure à ce stade de l'analyse que la variabilité (supposée) du paramètre  $C_{sol}$  n'influence pas le calcul de la dose  $D_{sol}$ . Cela est dû au fait que la variabilité (supposée) de la concentration dans le sol  $C_{sol}$  est faible devant celle (supposée) du taux d'ingestion de sol  $Ir_{sol}$  et que l'utilisation de la loi normale fait tendre ses valeurs vers sa moyenne à savoir  $300 mg.kg^{-1}$ .

La Figure 6.39 nous indique que pour le scénario d'exposition retenu, la probabilité que la cible dépasse le seuil fixé par l'OMS ( $3.5 \mu g/[kg.jour]$ ) est de 30%. Le tableau 6.42 nous indique que dans 5% des cas la dose  $D_{sol}$  sera supérieure à  $5.1 \mu g/[kg.jour]$  soit une fois et demi supérieure à celle fixée par l'OMS. Dans l'approche par intervalle (voir Section 6.3.2.2), nous aurions conclu que la dose  $D_{sol}$  pouvait atteindre 5 fois celle fixée par l'OMS sans pour autant pouvoir estimer dans quelle mesure elle pouvait être atteinte. En revanche, l'approche purement probabiliste nous informe qu'il est quasi impossible d'atteindre la valeur de  $16.6 \mu g/[kg.jour]$  (voir Figure 6.39). De même, il est jugé quasi impossible que la dose  $D_{sol}$  dépasse  $6.25 \mu g/[kg.jour]$ .

Tous ces résultats, pouvant paraître extrêmement précis, sont à exploiter avec prudence. En effet, nous avons supposé toute l'information de nature aléatoire en imposant une distribution de probabilité unique pour modéliser chaque paramètre. Cependant, nous avons déjà fait remarquer auparavant que le choix d'une distribution de probabilité unique pour certains paramètres était arbitraire compte tenu de l'information réellement disponible sur ceux-ci.

### 6.3.2.4 Traitement de l'imprécision et de la variabilité de l'information

Nous allons à présent considérer la connaissance sur les paramètres  $C_{sol}$ ,  $Ir_{sol}$  et  $Fi$  comme de nature imprécise. Ces paramètres sont alors modélisés à l'aide de distributions de possibilité (voir Section 6.3.1) ce qui semble plus cohérent avec notre état de connaissance sur

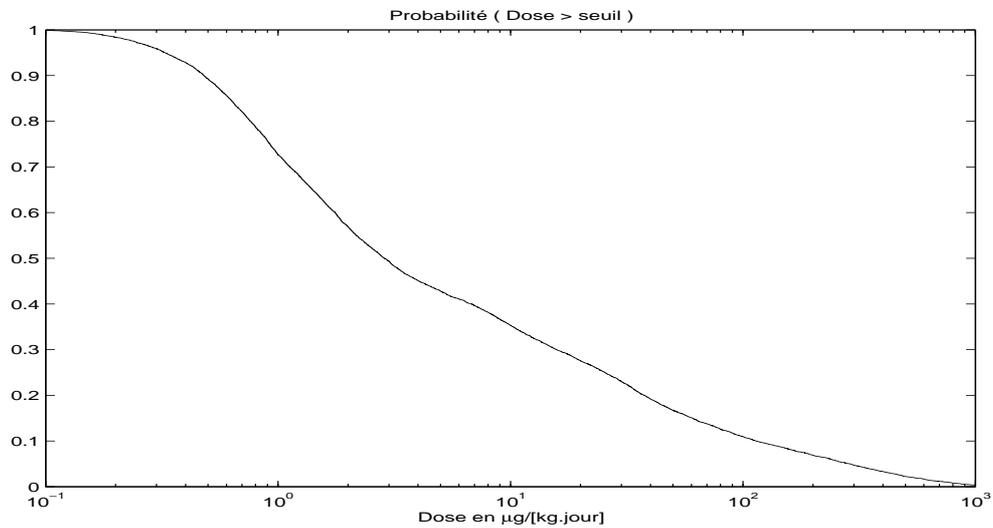


FIG. 6.38 – Probabilité que la dose absorbée dépasse un certain seuil avec un traitement purement probabiliste de l'incertitude dans le cadre où le site ne serait pas dépollué.

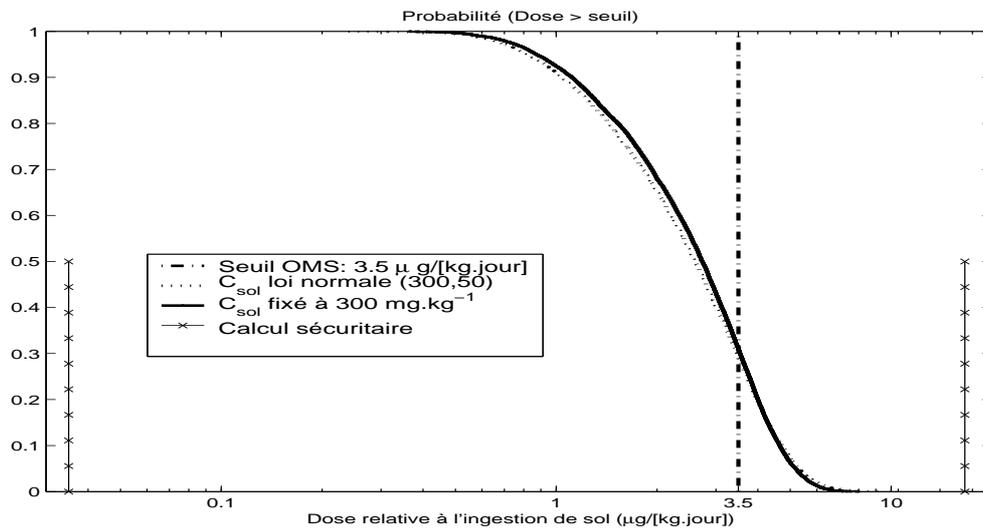


FIG. 6.39 – Comparatif sur la dose susceptible d'être absorbée  $D_{sol}$  après objectif de dépollution du site entre le traitement purement probabiliste et le traitement par intervalle

	Fractile à 5%	Fractile à 95%	Rapport Fractile 95%/5%
Cadre purement probabiliste avant dépollution	0.33	298	902
Cadre purement probabiliste après objectif de dépollution avec $C_{sol} = 300$ fixé, scénario 1	0.87	5.1	5.9
Cadre purement probabiliste après objectif de dépollution scénario 2	0.84	5.41	6.5

TAB. 6.42 – Fractiles de la dose  $D_{sol}$  ( $\mu g/[kg.jour]$ ) dans le cadre purement probabiliste.

ceux-ci. Nous allons donc combiner de l'information de nature aléatoire au travers du poids de l'individu  $Bw$  et de l'information de nature imprécise au travers des paramètres  $C_{sol}$ ,  $Ir_{sol}$  et  $Fi$  à l'aide des 4 méthodes citées précédemment.

### 6.3.2.4.1 Effets de la représentation de la connaissance sur l'incertitude de la dose en utilisant la méthode "hybride"

La Figure 6.40 permet d'observer l'influence de la représentation de la concentration de pol-

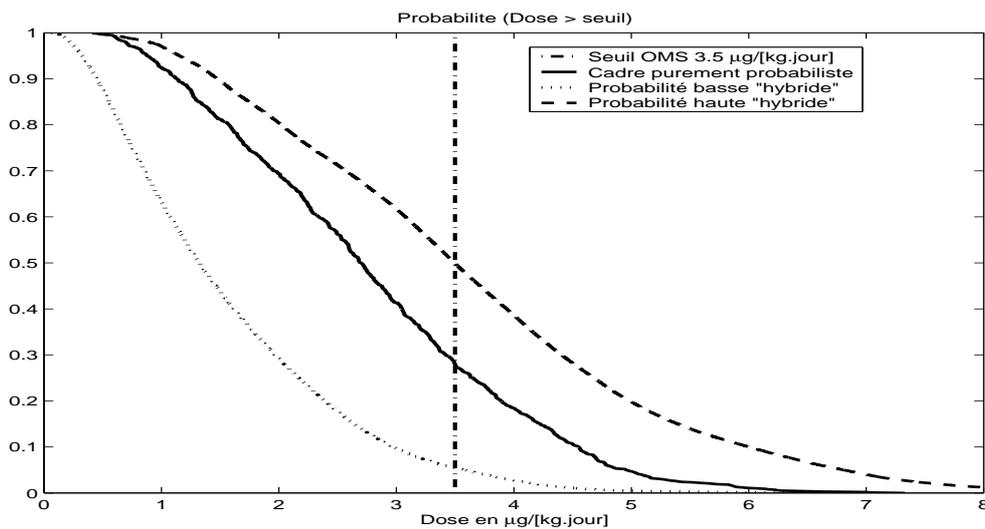


FIG. 6.40 – Influence de la représentation de la concentration  $C_{sol}$  sur la dose relative à l'ingestion de sol  $D_{sol}$

luant dans le sol  $C_{sol}$ . Nous avons considéré ici que seule l'information sur la concentration  $C_{sol}$  était de nature imprécise. Nous l'avons donc modélisée par la distribution de possibilité triangulaire (Voir Section 6.3.1) et utilisée la méthode "Hybride" pour propager l'information à travers le modèle. Dans le cadre purement probabiliste, nous aurions conclu que la variabilité de  $C_{sol}$  était sans effet sur la dose. Nous remarquons ici que cela n'est plus le cas quand l'imprécision sur la concentration  $C_{sol}$  est prise en compte. L'incertitude sur la dose  $D_{sol}$  n'est plus uniquement due à de la variabilité mais est due à de la variabilité plus de l'imprécision apportée par la connaissance imprécise de la concentration  $C_{sol}$ . L'écart entre

	Fractile à 5%	Fractile à 95%	Rapport Fractile 95%/5%
Cadre purement probabiliste	0.84	5.41	6.5
Probabilité basse "hybride", $C_{sol}$ imprécis	0.3	3.6	22.7
Probabilité haute "hybride", $C_{sol}$ imprécis	1.2	6.8	

TAB. 6.43 – Fractiles de la dose  $D_{sol}$  ( $\mu g/[kg.jour]$ ) selon que l'on considère l'information sur  $C_{sol}$  de nature imprécise (calcul "hybride") ou de nature aléatoire.

la probabilité basse et la probabilité haute reflète le caractère imprécis de la concentration  $C_{sol}$  sur la dose  $D_{sol}$ . Il faut néanmoins être conscient que cet écart dépend également de la méthode de propagation choisie puisque chaque méthode de propagation ne modélise pas de la même façon les dépendances entre les paramètres sources. Ainsi, le Tableau 6.43 nous indique que le fait de tenir compte de la nature de l'information concernant la concentration  $C_{sol}$  augmente l'incertitude totale de 42% dans le cadre de la méthode "hybride". La Figure 6.40 permet d'affirmer que l'on est sûr à 45% de ne pas dépasser la dose de  $3.5 \mu g/[kg.jour]$  fixé par l'OMS ou qu'il est possible dans 55% des cas de la dépasser. On conclut que la prise en compte de l'information réellement disponible sur la concentration  $C_{sol}$  (à savoir de nature imprécise) apporte une contribution de 30% sur l'incertitude totale de la dose  $D_{sol}$ .

Nous considérons à présent l'information concernant le taux d'ingestion de sol  $I_{r_{sol}}$  et la fraction de sol ingérée  $F_i$  comme imprécise. Ainsi, ces paramètres sont maintenant représentés par les distributions de possibilité définies dans la Section 6.3.1. La méthode "hybride" est utilisée dans un premier temps pour la propagation des incertitudes à travers le modèle. La figure 6.41 permet d'observer les conséquences de l'apport d'information imprécise sur le modèle du calcul de la dose  $D_{sol}$  susceptible d'être absorbée en utilisant la méthode "hybride". Elle permet aussi de mettre en évidence sur le taux d'ingestion de sol  $I_{r_{sol}}$  que plus on est informatif plus l'écart entre probabilité haute et basse diminue. En effet, la distribution de possibilité (hypothèse 1 voir Section 6.3.1) représentant l'information sur le taux d'ingestion  $I_{r_{sol}}$  est plus informative que celle utilisée dans l'hypothèse 2 (voir Section 6.3.1) ce qui a pour effet de réduire l'écart entre la probabilité haute et basse. La Figure 6.41 et le tableau 6.44 permettent de déduire que la prise en compte du caractère imprécis de l'information de départ contribue à plus de la moitié de l'incertitude totale sur la dose  $D_{sol}$  dans le cadre de

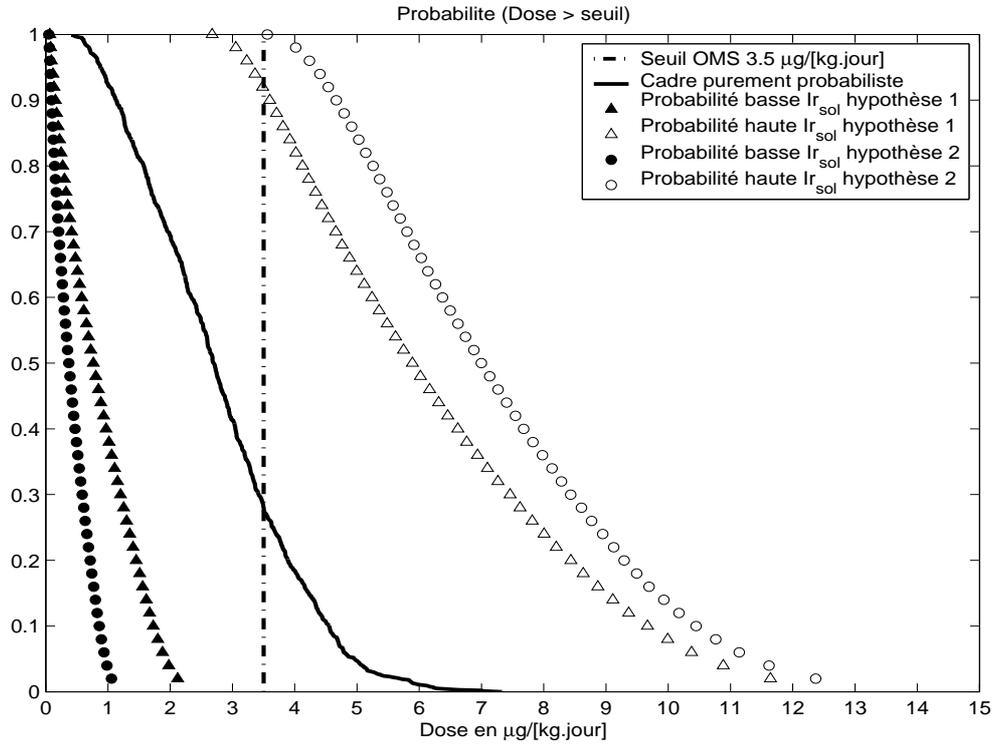


FIG. 6.41 – Impacts de l'imprécision due à  $C_{sol}$ ,  $Ir_{sol}$  et  $Fi$  sur l'incertitude de la dose relative à l'ingestion de sol  $D_{sol}$  avec la méthode de propagation "hybride"

	Fractile à 5%	Fractile à 95%	Rapport Fractile 95%/5%
Cadre purement probabiliste	0.84	5.41	6.5
Probabilité basse "hybride", $Ir_{sol}$ hypothèse 1	0.11	1.93	100
Probabilité haute "hybride", $Ir_{sol}$ hypothèse 1	3.31	10.64	
Probabilité basse "hybride", $Ir_{sol}$ hypothèse 2	0.07	0.95	160
Probabilité haute "hybride", $Ir_{sol}$ hypothèse 2	4.3	11.26	

TAB. 6.44 – Fractiles de la dose  $D_{sol}$  ( $\mu\text{g}/[\text{kg.jour}]$ ) selon que l'on considère l'information de nature imprécise (calcul "hybride") ou de nature aléatoire et selon la modélisation de  $Ir_{sol}$ .

l'approche "hybride". On remarque également, et ce quelle que soit la représentation possibiliste du taux d'ingestion de  $Ir_{sol}$ , que la probabilité de dépasser le seuil fixé par l'OMS est comprise entre 0 et 1. Ainsi, il est tout à fait possible, pour le scénario d'exposition retenu, que la cible absorbe dans tous les cas une dose supérieure au seuil de  $3.5 \mu g/[kg.jour]$  fixée par l'OMS. En d'autres termes, cela signifie qu'il est possible d'obtenir  $P(D_{sol} > 3.5) = 1$ , ce qui n'est pas acceptable en terme de risque sanitaire. Nous pouvons conclure à ce stade de l'étude que la représentation mathématique de l'information influe fortement sur le résultat du calcul de la dose  $D_{sol}$  et donc sur le risque  $IR$  puis sur la plombémie  $[Pb]$ .

Après avoir étudié l'influence des différentes représentations de la connaissance sur les résultats de calcul de dose  $D_{sol}$ . Etudions à présent l'influence des différentes méthodologies utilisables pour propager l'information à travers le modèle. Nous restons dans le cadre où l'on considère l'information de nature aléatoire pour le poids de l'individu  $Bw$  et de nature imprécise pour la concentration  $C_{sol}$ , le taux d'ingestion  $Ir_{sol}$  et la fraction ingérée  $Fi$ . Nous allons alors étudier l'impact sur le calcul de la dose  $D_{sol}$  selon la technique de propagation utilisée à savoir la méthode "hybride", "Independent Random Sets", "Conservative Random Sets" et "Dependency Bounds Convolution". En ce qui concerne le taux d'ingestion de sol  $Ir_{sol}$ , compte tenu de la valeur de référence issue des recommandations de l'US. EPA [42] à savoir  $Ir_{sol} = 200$ , nous décidons de conserver la modélisation de l'hypothèse 2 (voir Section 6.3.1).

#### 6.3.2.4.2 Effets de la méthode de propagation sur la dose relative à l'ingestion de sol

Dans cette section, nous mettons en avant l'influence de la méthodologie utilisée pour propager l'imprécision et la variabilité sur l'incertitude de la dose  $D_{sol}$ . Chaque méthode impose ses hypothèses d'(in)dépendances entre les paramètres du modèle. La Figure 6.42 présente la probabilité de dépasser une certaine dose relative à l'ingestion de sol selon la méthode de propagation utilisée (on utilisera l'hypothèse 2 pour représenter  $Ir_{sol}$ ). Elle confirme ainsi que la méthode "Independence Random Sets" conduit à une incertitude sur la dose  $D_{sol}$  plus faible que la méthode "Hybride". C'est à dire que l'on observe une diminution de 23% de l'incertitude totale de la dose par rapport à la méthode "Hybride" (voir Tableau 6.45). En effet, la méthode "hybride" est plus conservatrice que la méthode "Independent Random Sets" pour les valeurs élevées et moins pour les valeurs basses de la probabilité haute (voir Figure 6.42). De même la méthode "hybride" est moins conservatrice que la méthode "Independent Random Sets" pour les valeurs élevées de la probabilité basse. On remarque que dans le cadre de la non connaissance des dépendances, la méthode "Dependency Bounds Convolution" est plus conservatrice que la méthode "Conservative Random Sets". Ceci est dû au fait que la méthode "Dependency Bounds Convolution" traite la non connaissance des dépendances entre les variables de façon itérative deux à deux, ce qui a pour conséquence d'accentuer de façon arbitraire les pires cas et engendre des dépendances impossibles (voir Section 4.5). La méthode "Conservative Random Sets" est plus rigoureuse pour estimer les incertitudes de la dose dans le cas où l'on ne suppose rien sur les dépendances entre les paramètres. Ainsi, dans ce cas de figure, l'incertitude totale de la dose augmente de 192% par rapport au cadre purement probabiliste. On remarque de plus que quelle que soit la méthode utilisée pour propager l'information, il est tout à fait plausible que la cible dépasse le seuil fixé par l'OMS sans pour autant en être certain. C'est à dire que l'on peut potentiellement obtenir  $P(D_{sol} > 3.5) = 1$

ce qui n'est pas acceptable en terme de santé publique. Ce dernier paragraphe met bien en évidence que la méthode utilisée pour propager l'information de nature aléatoire et de nature imprécise à travers le modèle influe sur l'incertitude du résultat en l'occurrence ici la dose.

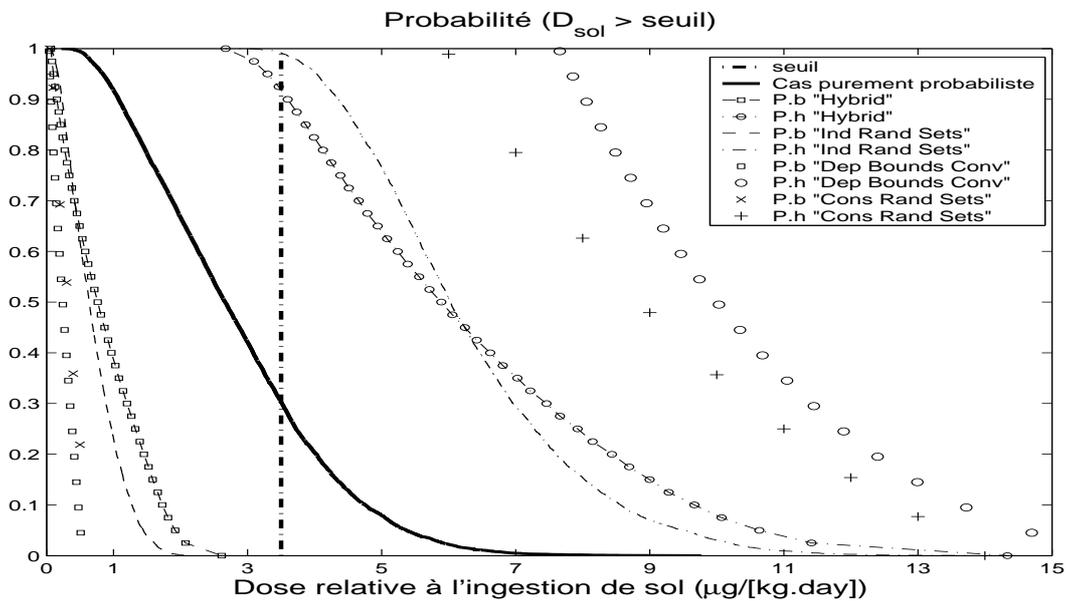


FIG. 6.42 – Probabilité que la dose absorbée dépasse un certain seuil selon la méthode de propagation utilisée, P.b = probabilité basse, P.h = probabilité haute.

### 6.3.3 Conclusion

Cette étude a principalement traité l'incertitude associée à la dose de plomb absorbée par l'ingestion de sol chez l'enfant exposé à une ancienne fonderie de plomb.

Nous avons testé les deux dernières techniques de propagation à savoir les méthodes "Conservative Random Sets" et "Dependency Bounds Convolution". Il est mis en évidence que la méthode "D.B.C." est plus conservatrice que la méthode "C.R.S." due au fait des structures de dépendances impossibles que génère la méthode "D.B.C.". Même si chaque méthode de propagation, utilisée dans cette étude, impose ses propres hypothèses d'(in)dépendances entre les paramètres sources, elles montrent qu'il est tout à fait possible d'atteindre une probabilité, de dépasser  $3.5 \mu\text{g}/[\text{kg}\cdot\text{jour}]$ , égale à 1, ce qui n'est pas acceptable en terme de santé publique. Ce résultat n'est pas étonnant puisque la dose calculée dans l'approche déterministe, consistant à supprimer l'incertitude sur les facteurs de risque, est déjà proche de  $3.5 \mu\text{g}/[\text{kg}\cdot\text{jour}]$ . Au contraire, si nous avons obtenu une probabilité haute de dépasser  $3.5 \mu\text{g}/[\text{kg}\cdot\text{jour}]$  quasi nulle, cela nous aurait conforté dans le choix de l'objectif de dépollution à atteindre de  $300 \text{ mg}\cdot\text{kg}^{-1}$  dans le sens où nous sommes restés fidèle à l'information réellement disponible.

	Fractile à 5%	Fractile à 95%	Rapport Fractile 95%/5%
Cadre purement probabiliste	0.84	5.41	6.5
Probabilité basse "hybride"	0.07	0.95	160
Probabilité haute "hybride"	4.3	11.26	
Probabilité basse "Independence Random Sets"	0.09	0.7	115
Probabilité haute "Independence Random Sets"	5.1	10.32	
Probabilité basse "Dependency Bounds Convolution"	0.05	0.27	268.8
Probabilité haute "Dependency Bounds Convolution"	8.5	13.44	
Probabilité basse "Conservative Random Sets"	0.07	0.3	192
Probabilité haute "Conservative Random Sets"	10	13.44	

TAB. 6.45 – Fractiles de la dose  $D_{sol}$  relative à l'ingestion de sol ( $\mu\text{g}/[\text{kg}\cdot\text{jour}]$ ) selon la méthode de propagation utilisée.

## Chapitre 7

# Conclusion

Dans le contexte d'évaluation des risques liés à l'exposition de l'homme aux polluants, l'information dont nous disposons est souvent imprécise, incomplète ou vague. Nous avons mis en évidence que l'utilisation systématique d'une distribution de probabilité unique pour représenter ce type de connaissance suppose une information subjective trop riche et risque d'être en partie arbitraire.

Un des premiers objectifs de ce travail a donc été de permettre la cohérence entre la manière dont on représente l'information dans les modèles de risque et l'information dont on dispose réellement. En pratique, l'information de nature aléatoire est traitée de manière rigoureuse par les distributions de probabilité classiques, tandis que l'information de nature imprécise est mieux traitée par des familles de distributions de probabilité codées par des paires de probabilités cumulées hautes et basses (p-boxes) ou par des distributions de possibilité (aussi appelées intervalles flous) ou encore par des intervalles aléatoires utilisant les fonctions de croyance de Dempster-Shafer.

Nous avons présenté les ponts existant entre les différentes théories de l'incertain (probabilités, possibilités, fonctions de croyance, p-boxes, variables aléatoires floues). Nous avons comparé l'expressivité des modèles possibilistes (distributions de possibilité) avec les paires de probabilités cumulées (p-boxes). Nous avons mis en évidence que l'utilisation d'une distribution de possibilité peut s'avérer être plus précis et informatif qu'une p-box compte tenu de l'information disponible (notamment quand on a une idée ou connaissance de la valeur modale). Nous avons exhibé des familles de probabilité qui sont et ne sont pas contenues dans la distribution de possibilité mais contenues dans la p-box qu'elle induit. Enfin, nous avons étudié les distributions de possibilité contenant les intervalles de prédiction des probabilités contenues dans la famille générée par le modèle possibiliste.

Nous avons proposé, selon les modèles mathématiques utilisés (distributions de probabilité et de possibilité, p-boxes, fonctions de croyance) le type de connaissance qu'ils permettent de représenter. Les distributions de probabilité permettent de la variabilité et sont parfois utilisées pour des raisons théoriques. Les distributions de possibilité sont particulièrement adaptées pour représenter l'information imprécise du type avis d'expert ou dans le cas où nous avons connaissance de la valeur modale des paramètres. L'utilisation des fonctions de

croyance est adaptée pour représenter de l'information à la fois imprécise et aléatoire telle que les fractiles. Les p-boxes apparaissent comme un choix naturel pour les modèles probabilistes paramétriques avec connaissance imprécise sur les paramètres du modèle. Cette première partie a fait l'objet des articles [7, 6, 11, 14].

Le deuxième objectif de ce travail a été de proposer différentes méthodes pour propager les incertitudes épistémiques et stochastiques, à travers les modèles mathématiques de risque et de détailler les structures de (in)dépendances générées par chacune d'elles.

Nous avons mis en évidence que la présence d'imprécision accentue la difficulté de la gestion des structures d'(in)dépendance entre les paramètres et génère deux niveaux de relation entre les sources d'incertitude. Le premier se situe au niveau des relations entre les sources d'information (observateurs) et le second se situe au niveau des relations entre les paramètres eux-mêmes (phénomènes observés). Nous avons proposé deux méthodes de propagation

- Méthode "*Independent Random Sets*" combinant intervalles et fonctions de masse dans le cadre de Dempster-Shafer.
- Méthode "*Conservative Random Sets*" combinant intervalles et fonctions de masse dans le cadre de Dempster-Shafer.

et présenté deux autres méthodes

- Méthode "*Hybride*" combinant calcul d'intervalles et Monte-Carlo.
- Méthode "*Dependency Bounds Convolution*" combinant des paires de probabilités hautes et basses (p-boxes).

en expliquant en détail les structures d'(in)dépendances que modélisent chacune des méthodes. Nous les avons comparées afin de mettre en évidence les liens et les différences qui pouvaient exister entre elles. Bien que la méthode "*Dependency Bounds Convolution*" permette de traiter la non connaissance de relations entre les paramètres, nous avons montré que l'utilisation de celle-ci génère des structures d'(in)dépendance impossibles et par conséquent fournit des résultats trop conservatifs. Ainsi, dans ce cas de figure, même si le temps de calcul est plus long, l'utilisation de la méthode "*Conservative Random Sets*" est plus rigoureuse et plus générale. De plus, la méthode "*Dependency Bounds Convolution*" permet seulement de traiter de manière cohérente les dépassements de seuil.

Cette partie a fait l'objet des articles [5, 7, 10, 12, 13].

Le dernier objectif a été de proposer des techniques d'exploitation possibles des résultats issus de la propagation des incertitudes pour une phase décisionnelle et de tester ces méthodes alternatives sur des cas réels simplifiés relatifs aux domaines du risque environnemental.

Nous avons proposé des façons possibles d'exploiter des résultats issus des méthodes de propagation afin de caractériser l'incertitude des modèles du risque pour une phase décisionnelle : nous avons traité ces exploitations sur un cas synthétique où nous avons considéré le modèle de risque de la forme  $T : (x, y, z) \mapsto (x + z)/y$ .

Nous avons mis en évidence que le post-traitement, proposé par Guyonnet et al. [63] pour extraire de l'information de la résultante de la méthode "*hybride*", est limité. Nous avons montré les liens entre les résultats de la méthode "*hybride*" et l'approche classique des variables aléatoires floues (contributions dans [7, 8]) puis nous avons proposé un post-traitement

alternatif faisant l'objet des articles [4, 5, 12].

Pour finir, nous avons testé ces méthodes alternatives sur des cas réels simplifiés et traité l'incertitude relative à différents modèles :

- Le transfert d'un polluant radioactif (le strontium) depuis le dépôt jusqu'à l'homme, au travers de la consommation d'un aliment (le lait de vache).
- Le risque toxique après un déversement accidentel de trichloréthylène (TCE) au dessus d'une nappe d'eau (modèle semi analytique).
- Le risque pour la santé liée aux sols pollués par des retombées industrielles de plomb faisant l'objet de l'article [9].

Chacune des trois études a été comparée à un traitement purement probabiliste et nous avons montré, au travers de ces trois études, que la prise en compte de l'imprécision dans l'évaluation des risques peut avoir une influence importante sur la prise de décision.

Pour de futurs travaux, il serait intéressant d'approfondir l'investigation de la Section 2.3 sur la différence entre la distribution de possibilité et la p-box qu'elle induit afin d'exhiber plus précisément des familles de probabilité contenues dans l'une et pas dans l'autre. Dans le même registre, nous pourrions essayer d'exhiber des catégories de famille de probabilités contenues dans la distribution de possibilité. Ainsi, l'expert pourrait estimer celles qu'il juge inappropriées en éliminant afin d'essayer de raffiner la distribution de possibilité. Typiquement, nous avons vu que la distribution de possibilité triangulaire contenait des densités de probabilité bi-modales (voir Figures 2.7 et 2.8). Peut-être ne sont elles pas à conserver si nous savons que la distribution de probabilité mal connue est unimodale. En ce qui concerne la représentation de la connaissance, nous pourrions nous intéresser à la manière de représenter un échantillon de petite taille par une distribution de possibilité définissant des intervalles de prédiction du paramètre afin d'éviter les limites statistiques de Kolmogorov-Smirnov (voir Section 3.2).

Nous avons à présent une idée plus précise sur les notions d'(in)dépendance dans le cadre des probabilités imprécises (voir Section 4.1.2). Il serait intéressant de voir comment il serait possible de prendre en considération les relations entre les observateurs eux mêmes puis entre eux et les phénomènes observés si de telles relations existent. Pourquoi ne pas essayer d'incorporer des relations floues dans les processus de propagation si celles-ci sont mal connues.

Concernant les exploitations possibles des résultats issus de la propagation, nous pourrions chercher à estimer la variance de l'imprécision du calcul "hybride" afin de savoir si l'imprécision de chaque distribution de possibilité résultant de cette méthode fluctue plus ou moins. Nous pourrions également nous intéresser au dépassement de seuil flou dans le cas où l'expert ne pourrait pas définir avec exactitude la valeur du seuil à ne pas dépasser.

Pour résumer, l'emploi systématique d'une probabilité unique pour représenter de la connaissance est inadapté et insuffisant pour représenter l'imprécision. Nous avons montré aux évaluateurs les limites de leurs connaissances et l'ignorance partielle devant laquelle ils pouvaient se trouver. L'utilisation des probabilités imprécises, afin de rester fidèle à notre état de connaissance, fournit deux indicateurs de probabilité, un degré haut et un degré bas. Notre étude montre que dans certain cas, il serait préférable de relâcher les contraintes de délais ou

de coûts afin de réduire l'écart entre ces deux indicateurs. Les experts ou évaluateurs doivent prendre conscience qu'ils sont face à une décision multicritère due à la présence d'imprécision et de variabilité.

## Annexe A

# Notions de théorie des probabilités

La théorie des probabilités permet de représenter de l'information précise entachée de variabilité. C'est à dire que l'on peut observer de façon précise les résultats d'une expérience mais ceux-ci sont différents à chaque observation (exemple pluviométrie).

Soit un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . Toute mesure de probabilité  $P$  peut se définir à partir d'une distribution de probabilité  $p$  sur un ensemble  $\Omega$ .

$$p : \Omega \rightarrow [0, 1]$$

telle que

$$\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1 \text{ dans le cas discret}$$

et

$$\int_{\Omega} p(\omega) d\omega \text{ dans le cas continu}$$

On a pour tout sous-ensemble  $A \subseteq \Omega$ , appelé événement :

$$\text{Dans le cas discret } P(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega), \quad \forall A \subseteq \Omega \quad (\text{A.1})$$

$$\text{Dans le cas continu } P(A) = \int_A p(\omega) d\omega, \quad \forall A \text{ mesurable} \quad (\text{A.2})$$

Le nombre  $p(\omega)$  représente la fréquence d'apparition de  $\omega$  après plusieurs essais dans le cas discret, et la densité de  $\omega$  dans le cas continu. La mesure de probabilité  $P$  vérifie :

$$\forall A, B \subseteq \Omega \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad (\text{A.3})$$

$$\forall A \subseteq \Omega \quad P(A) = 1 - P(\overline{A}) \quad (\text{A.4})$$

Une variable aléatoire réelle  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  associée à  $P$  est définie comme variable dans  $\mathbb{R}$ , dont la valeur dépend du résultat  $\omega$  de l'expérience aléatoire.

On appelle fonction de répartition  $F_X$  ou probabilité cumulée de  $X$  la fonction  $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ , définie à partir d'une densité  $p$  telle que :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x p(\omega) d\omega, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (\text{A.5})$$

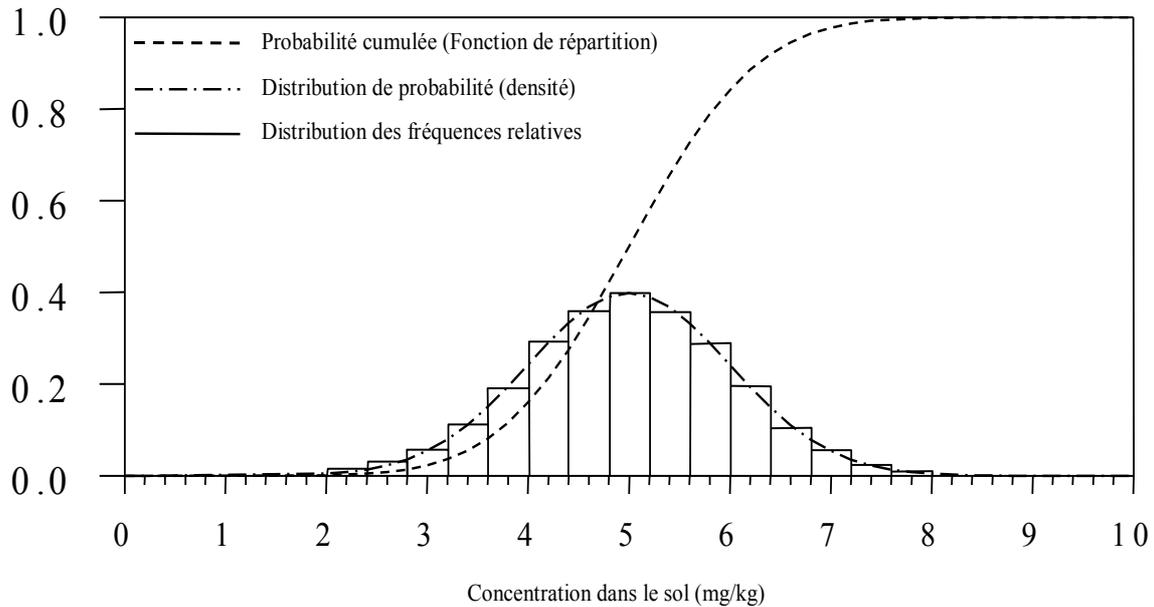


FIG. A.1 – Représentation probabiliste de l'incertitude stochastique

Une fonction de répartition caractérise entièrement la loi de  $X$ . La Figure A.1 est une représentation graphique d'une loi de probabilité associée à la concentration de métal dans le sol. Elle présente la densité de la loi, la distribution des fréquences relatives et la fonction de répartition. Ainsi, d'après ces graphiques, on déduit que :

$$\begin{aligned}
 P(\text{concentration} \leq 3) &= 0.05 \\
 P(\text{concentration} \leq 7) &= 0.95 \\
 P(\text{concentration} \in [3, 7]) &= 0.9
 \end{aligned}$$

La fonction quantile d'une variable aléatoire  $X$  (ou d'une loi de probabilité) est l'inverse de sa fonction de répartition. Quand cette fonction de répartition est strictement croissante, son inverse est définie sans ambiguïté. Mais une fonction de répartition reste constante sur tout intervalle dans lequel la variable aléatoire ne peut pas prendre de valeurs. C'est pourquoi on introduit la définition suivante. Soit une variable aléatoire  $X$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , et  $F_X$  sa fonction de répartition. On appelle fonction quantile de  $X$  la fonction, notée  $Q_X$ , de  $]0, 1[$  dans  $\mathbb{R}$ , qui à  $u \in ]0, 1[$  associe :

$$Q_X(u) = \inf\{x | F_X(x) \geq u\}$$

Par convention, on peut décider que  $Q_X(0)$  est la plus petite des valeurs possibles pour  $X$  et  $Q_X(1)$  est la plus grande. Si  $X$  a pour fonction de répartition  $F_X$  alors  $Q_X(X)$  suit une loi uniforme sur  $[0, 1]$ .

## Annexe B

# Théorie des possibilités

La théorie des possibilités fournit des outils mathématiques qui permettent de représenter de l'information incomplète, imprécise ou vague. Elle a été introduite par Zadeh en 1978 [100], puis développée par Dubois-Prade à partir 1985 [33].

Une distribution de possibilité peut être vue comme un ensemble d'intervalles de confiance emboîtés de valeurs du paramètre incertain auxquels sont attribués des degrés de confiance (confiance attribuée par exemple aux appareils de mesure ou avis d'experts). Prenons l'exemple suivant : un expert agronome donne son avis sur les valeurs possibles du  $pH$  d'un sol.

Je suis certain que  $pH \in [6, 8.6]$ .  
Je suis sûr à 80% que  $pH \in [6.2, 8.4]$ .  
Je suis sûr à 60% que  $pH \in [6.4, 8.2]$ .  
Je suis sûr à 40% que  $pH \in [6.6, 8]$ .  
Je suis sûr à 20% que  $pH \in [6.8, 7.8]$ .

Interprétation : Je suis sûr à 20% que  $pH \in [6.8, 7.8]$  signifie que :

la probabilité que  $pH \in [6.8, 7.8]$  est au moins égale à 20%.

ou encore que

la probabilité que  $pH \notin [6.8, 7.8]$  est au plus égale à 80%.

C'est à dire que l'on a :

$$20\% \leq P(pH \in [6.8, 7.8]) \text{ ou } P(pH \notin [6.8, 7.8]) \leq 80\% \quad (\text{B.1})$$

On construit alors une distribution de possibilité  $\pi$  (voir représentation graphique sur la Figure B.1) et on définit un ensemble de mesures de probabilité  $\mathcal{P}(\pi)$ ,

$$\mathcal{P}(\pi) = \{P | P(pH \in [6.8, 7.8]) \geq 20\%\}$$

tel que

$$\forall P \in \mathcal{P}(\pi), \quad 20\% \leq P(pH \in [6.8, 7.8]) \leq 100\%$$

Le degré bas, égal à 20% dans notre exemple, est nommé degré de **Nécessité**  $N$ ,  $N([6.8, 7.8]) = 20\%$ . Le degré haut, égal à 100%, est nommé degré de **Possibilité**  $\Pi$ ,  $\Pi([6.8, 7.8]) = 100\%$ . On peut noter que d'après les inégalités B.1 :

$$N([6.8, 7.8]) = 1 - \Pi([6.8, 7.8]^c)$$

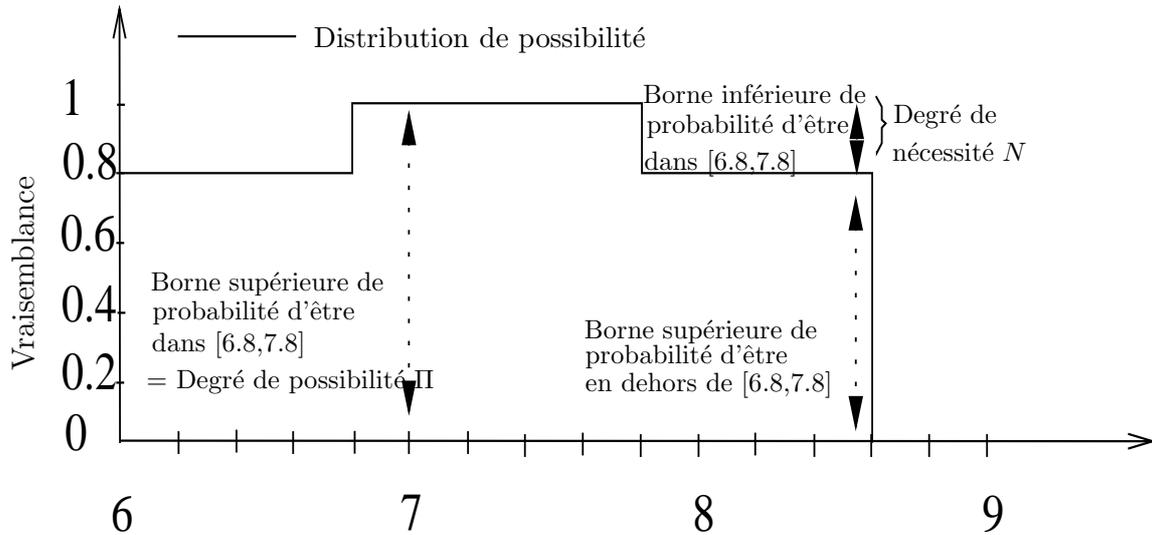


FIG. B.1 – Distribution de possibilité définie à partir de l’avis d’expert : je suis sûr à 20% que  $pH \in [6.8, 7.8]$

La Figure B.2 représente la distribution de possibilité  $\pi_{expert}$  qui a été définie à partir de la totalité de l’avis d’expert. Ainsi, la notion de possibilité relative aux valeurs des intervalles emboîtés est complémentaire de celle de certitude relative aux intervalles eux-mêmes. En effet, plus on élargit l’intervalle, plus on inclut des valeurs jugées peu possibles mais en contrepartie, plus on est certain que la vraie valeur se trouve bien à l’intérieur de l’intervalle (voir Figure B.2). Ceci est logique dans le sens où plus on est imprécis et plus on est certain de contenir l’information. Les valeurs à l’intérieur de l’intervalle associées au degré de confiance faible à 20% peuvent également s’interpréter comme les valeurs les plus vraisemblables du  $pH$ . On définit alors la famille de probabilité  $\mathcal{P}(\pi_{expert}) = :$

$$\mathcal{P}(\pi_{expert}) = \{P\{P(pH \in [6.8, 7.8]) \geq 20\%, P(pH \in [6.6, 8]) \geq 40\%, \\ P(pH \in [6.4, 8.2]) \geq 60\%, P(pH \in [6.2, 8.4]) \geq 80\%, P(pH \in [6, 8.6]) \geq 100\%\}$$

La distribution de possibilité  $\pi_{expert}$  nous informe que les valeurs les plus vraisemblables (valeurs risquées mais informatives) sont situées dans  $[6.8, 7.8]$  (appelé noyau de  $\pi_{expert}$ ) sans qu’il y ait de préférence à l’intérieur de l’intervalle. On retrouve les valeurs prudentes mais peu informatives dans l’intervalle  $[6, 8.6]$  aussi appelé support de  $\pi_{expert}$ . L’intervalle  $[6.2, 8.4]$  est une  $\alpha$ -coupe de  $\pi$  avec  $\alpha = 0.2$ .

De manière plus formelle, une mesure de possibilité  $\Pi$  (ou de nécessité  $N$ ) se définit à partir d’une distribution de possibilité  $\pi : \Omega \rightarrow [0, 1]$  telle que  $\sup_{w \in \Omega} \pi(w) = 1$  (voir Figure B.3). Le calcul de la mesure de possibilité  $\Pi$  et de nécessité  $N$  se fait de la manière suivante :

$$\Pi(A) = \sup_{w \in A} \pi(w) \quad (\text{B.2})$$

$$N(A) = 1 - \Pi(A^c) = \inf_{w \notin A} (1 - \pi(w)) \quad (\text{B.3})$$

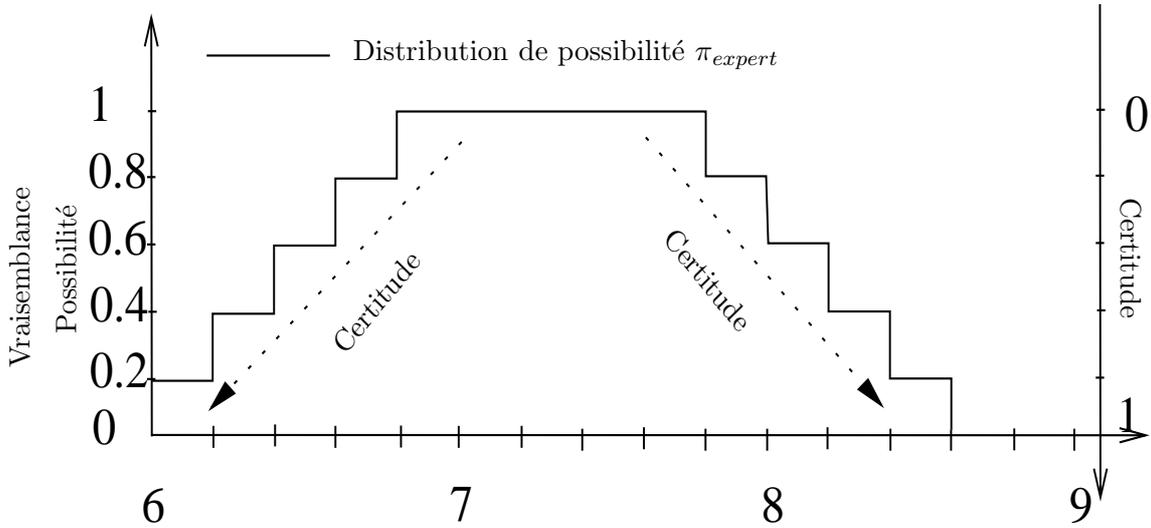


FIG. B.2 – Exemple d’une distribution de possibilité  $\pi_{expert}$  définie à partir de l’avis d’expert sur l’exemple précédent.

où  $A$  est un ensemble mesurable. Le degré de Nécessité  $N(A)$  indique dans quelle mesure l’événement  $A$  est certain, le degré de Possibilité  $\Pi(A)$  indique dans quelle mesure l’événement contraire  $A^c$  n’est pas possible.

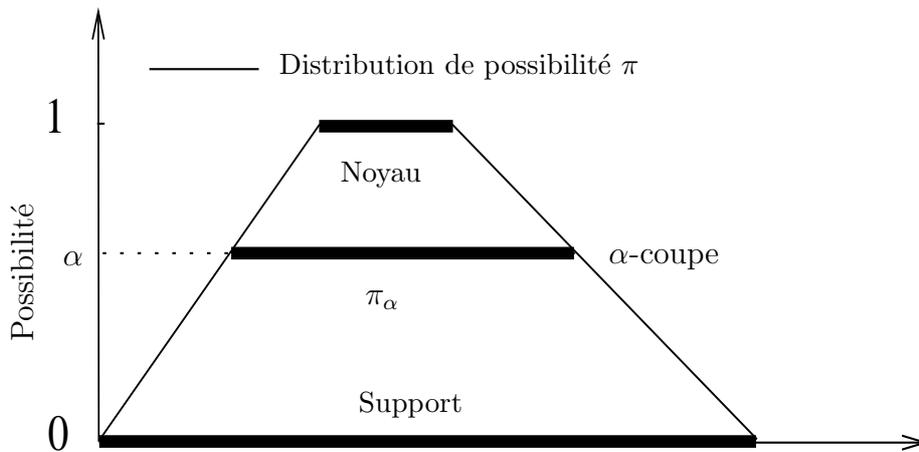


FIG. B.3 – Représentation graphique d’une distribution de possibilité  $\pi$  (aussi appelée intervalle flou)

– La mesure de possibilité  $\Pi$  vérifie :

$$\forall A, B \subseteq \Omega \text{ mesurable} \quad \Pi(A \cup B) = \sup(\Pi(A), \Pi(B)) \tag{B.4}$$

– La mesure de nécessité  $N$  vérifie :

$$\forall A, B \subseteq \Omega \text{ mesurable} \quad N(A \cap B) = \inf(N(A), N(B)) \tag{B.5}$$

Comme nous l'avons vu dans l'exemple précédent, une distribution de possibilité  $\pi$  peut être vue comme un ensemble d'intervalles de confiance emboîtés qui sont les  $\alpha$ -coupes

$$[\underline{x}_\alpha, \bar{x}_\alpha] = \{x, \pi(x) \geq \alpha\} = \pi_\alpha$$

de  $\pi$ . Le degré de certitude/nécessité, que  $[\underline{x}_\alpha, \bar{x}_\alpha]$  contienne la valeur du paramètre  $X$ , est  $N([\underline{x}_\alpha, \bar{x}_\alpha]) = (1-\alpha)$  si  $\pi$  est continue). Inversement en revenant à notre exemple d'expert, l'ensemble d'intervalles emboîtés  $A_i$  (fournit par l'expert) auxquels sont associés les degrés de certitude  $\lambda_i$  est équivalente à la distribution de possibilité

$$\pi(x) = \min_{i=1\dots n} 1 - \lambda_i, x \in A_i$$

On peut interpréter ces degrés de certitude  $\lambda_i$  comme  $N(A_i) \geq \lambda_i$  et  $\pi$  est choisie comme la distribution de possibilité la moins spécifique satisfaisant ces inégalités [35].

En résumé, une distribution de possibilité  $\pi$  code une famille de probabilités  $\mathcal{P}(\pi)$ . Elle

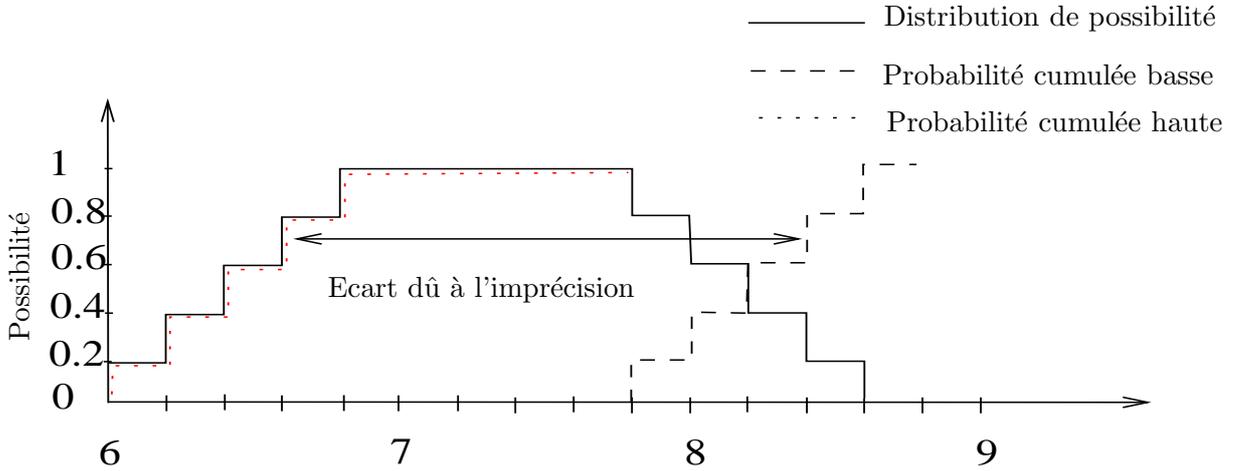


FIG. B.4 – Fonctions de répartition haute et basse induites par la distribution de possibilité  $\pi$  définie à partir de l'avis d'expert sur le  $pH$ .

permet ainsi de représenter de la connaissance probabiliste incomplète et d'obtenir des encadrements de probabilités [14] [31] [34] [49]. On peut ainsi définir une fonction de répartition (probabilité cumulée) supérieure  $\overline{F}$  et inférieure  $\underline{F}$  (voir Figure B.4) telle que

$$\forall x \underline{F}(x) \leq F(x) \leq \overline{F}(x)$$

avec

$$\overline{F}(x) = \Pi([-\infty, x]) \quad (\text{B.6})$$

$$\underline{F}(x) = N([-\infty, x]) \quad (\text{B.7})$$

L'écart entre les fonctions de répartition haute et basse reflète le caractère imprécis de l'information, donc ce que l'on ne sait pas. Nous avons ainsi par exemple (voir Figure B.4) :

$$N_{pH}([6, pH]) = \underline{F}(pH) \leq P_{pH}([6, pH]) \leq \overline{F}(pH) = \Pi_{pH}([6, pH]) \quad \forall \quad pH. \quad (\text{B.8})$$

Nous pouvons définir rigoureusement la notion d'espérance mathématique dans le cadre de mesure de possibilité. Soit  $X \rightarrow \mathbb{R}$  une variable aléatoire associée à une mesure de probabilité  $P^X \in \mathcal{P}(\pi)$  mal connue. On définit alors un intervalle moyen

$$M(\pi) = \{E(X) | P^X \leq \Pi\} = [\underline{E(X)}, \overline{E(X)}]$$

de la distribution de possibilité  $\pi$  [39] contenant l'espérance mathématique  $E(X)$  par :

$$\underline{E(X)} = \int_{\mathbb{R}} x d\Pi(\{w | X(w) \leq x\})$$

$$\overline{E(X)} = \int_{\mathbb{R}} x dN(\{w | X(w) \leq x\})$$

## B.1 Propagation d'information imprécise : Le Principe d'Extension

Soit un ensemble de variables mal connues  $(X_i)_{i=1\dots n}$  représentées chacune par une distribution de possibilité  $\pi^{X_i}$ . Le principe d'extension (calcul possibiliste) permet d'estimer la variable mal connue  $T(X_1, \dots, X_n)$  où  $T$  est une application  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Le calcul possibiliste [32] est une extension du calcul d'intervalle et s'exprime de la manière suivante :

$$\pi_T(u) = \sup_{x_1, \dots, x_n, T(x_1, \dots, x_n) = u} \min(\pi_1(x_1), \dots, \pi_n(x_n)) \quad (\text{B.9})$$

Si l'application  $T$  est continue, on peut contruire la distribution de possibilité  $\pi_T$  associée à la variable  $T(X_1, \dots, X_n)$  à partir des  $\alpha$ -coupes  $\pi_\alpha^{X_1}, \dots, \pi_\alpha^{X_n}$  :

$$\forall u, \pi_T(u) = \sup\{\alpha \in ]0, 1] | u \in T(\pi_\alpha^{X_1}, \dots, \pi_\alpha^{X_n})\}$$

où

$$T(\pi_\alpha^{X_1}, \dots, \pi_\alpha^{X_n}) = \{u | \forall (x_1, \dots, x_n) \in (\pi_\alpha^{X_1}, \dots, \pi_\alpha^{X_n}), u = T(x_1, \dots, x_n)\}$$

C'est à dire que pour chaque  $\alpha$ -coupe, on effectue un calcul d'intervalle (voir Figure B.5). L'application de cette méthode est cependant limitée aux cas où l'on connaît la monotonie de  $T$ . L'utilisation du *min* dans le calcul possibiliste suppose la non-interactivité entre les variables  $X_1, \dots, X_n$  qui exprime un manque de connaissance et d'engagement sur les liens qui pourraient exister entre celles-ci. En effet, la distribution de possibilité jointe la moins spécifique, dont les projections sont sur les domaines de variation  $X_1, \dots, X_n$ , est précisément  $\min(\pi^{X_1}, \dots, \pi^{X_n})$ , i.e.

$$\pi^{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) \leq \min(\pi^{X_1}(x_1), \dots, \pi^{X_n}(x_n)) \quad \forall x_1, \dots, x_n$$

On remarque que le calcul possibiliste suppose une dépendance totale entre les  $\alpha$ -coupes. Cependant, cette forme de dépendance n'implique pas de dépendances objectives entre les variables  $X_1, \dots, X_n$  elles mêmes à l'intérieur du domaine  $\pi_\alpha^{X_1} \times \dots \times \pi_\alpha^{X_n}$ . Il existe une certaine analogie entre indépendance stochastique et non-interaction "possibiliste". Soient  $P_{X_1, X_2}$  une mesure de probabilité jointe sur  $\Omega_1 \times \Omega_2$ ,  $P_{X_1}$  et  $P_{X_2}$  les mesures de probabilité marginales relatives aux variables  $X_1$  et  $X_2$ . Si  $X_1$  et  $X_2$  sont indépendants, alors

$$\forall A_1 \subseteq \Omega_1, \forall A_2 \subseteq \Omega_2, P_{X_1, X_2}(A_1 \times A_2) = P_{X_1}(A_1) \cdot P_{X_2}(A_2)$$

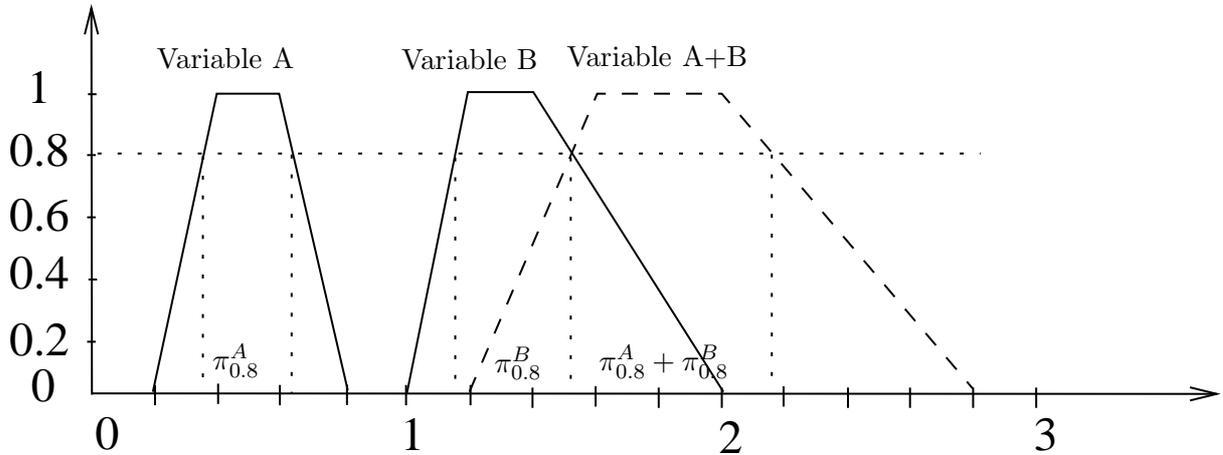


FIG. B.5 – Calcul possibiliste de A+B.

qui exprime du point de vue fréquentiel, que  $A_1$  se produit avec la même fréquence parmi les épreuves où  $A_2$  s'est manifesté, que parmi celles où  $A_2$  n'a pas eu lieu (et inversement). Au contraire,  $\min(\pi^{X_1}, \dots, \pi^{X_n})$  veut dire que le domaine de variation de  $A_1$  est indépendant de celui de  $A_2$  et inversement. En revanche, pour  $P_{X_1, X_2}(A_1 \times A_2) = \min(P_{X_1}(A_1), P_{X_2}(A_2))$ , si  $P_{X_1}(A_1) \leq P_{X_2}(A_2)$  alors  $A_1$  ne s'est produit que lors d'épreuves où  $A_2$  se produisait.

## B.2 Sous Ensembles Flous

Les sous-ensembles flous [101] peuvent être construits sur les éléments  $w$  d'un ensemble  $\Omega$  en généralisant la définition traditionnelle de la fonction caractéristique d'un ensemble dans  $\Omega$ . Un sous-ensemble flou  $G$  dans un ensemble  $\Omega$  est défini par une fonction d'appartenance, notée  $\mu_G$ . On peut définir  $G$  comme :

$$G = \{(w, \mu_G(w), w \in \Omega)\}$$

où  $\mu_G$  est défini par

$$\mu_G : \Omega \rightarrow [0, 1]$$

La valeur  $\mu_G(w)$  s'interprète comme le degré d'appartenance de  $w$  à l'ensemble flou  $G$ . Elle permet une modélisation simple de catégories vagues du langage naturel (comme "jeune" par exemple) définies sur un support objectif qui peut être une échelle numérique ( $\Omega =$  ensemble des âges) ou l'ensemble des objets qui seront qualifiés à l'aide de ces catégories ( $\Omega =$  ensemble des personnes). La valeur  $\mu_G(w)$  exprime alors à quel point la valeur (ou l'objet)  $w$  est compatible avec le concept  $G$ .

La fonction d'appartenance  $\mu_G$  d'un sous-ensemble flou  $G$  peut être interprétée comme une distribution de possibilité  $\pi_X$  si les éléments du support de  $G$  sont des valeurs mutuellement exclusives de la variable  $X$ . A partir d'un énoncé  $X \in G$ , où  $G$  est un sous-ensemble flou de  $\mathbb{R}$ , l'identification  $\pi_X(u) = \mu_G(u)$  signifie que si  $t$  est le degré d'appartenance de  $u$  à  $G$ ,  $t$  est aussi le degré de possibilité pour  $X$  d'être égal à  $u$ , quand la seule information disponible sur  $X$  est que la valeur de  $X$  est limitée par  $G$ .

Un **intervalle flou**  $G$  est un sous-ensemble flou de  $\mathbb{R}$ , convexe et tel que  $\sup_{x \in \mathbb{R}} \mu_G(x) = 1$  (voir Figure B.3). Un intervalle flou  $G$  est un **nombre flou** si sa fonction d'appartenance  $\mu_G$  est semi-continue supérieurement, de support  $\{x \in \mathbb{R} \mid \mu_G(x) > 0\}$  borné, admettant une unique valeur  $x^*$ , dite modale, telle que  $\mu_G(x^*) = 1$ .



## Annexe C

# Théorie des fonctions de croyance

La théorie des fonctions de croyance de Shafer [88] fournit des outils mathématiques qui permettent à la fois de traiter de l'information de nature aléatoire et imprécise.

### C.1 Fonctions de croyance de Shafer [88]

Introduisons la notion de fonction de croyance sur l'exemple d'un sondage électoral. Lors d'un sondage électoral, où 5 candidats se présentent (2 de gauche ( $G_1, G_2$ ) et 3 de droite ( $D_1, D_2, D_3$ )) :  $\{G_1, G_2, D_1, D_2, D_3\}$ , on rapporte que :

- 20% de la population interrogée est certaine de voter pour  $G_1$
- 5% de la population interrogée est certaine de voter pour  $G_2$
- 30% de la population interrogée est certaine de voter pour  $D_1$
- 10% de la population interrogée est certaine de voter pour la droite ( $D_1$  ou  $D_2$  ou  $D_3$ ) sans pour autant savoir pour qui
- 10% de la population interrogée est certaine de voter pour la gauche ( $G_1$  ou  $G_2$ ) sans pour autant savoir pour qui
- 25% de la population interrogée ne sait pas encore pour qui voter

A partir de cette information, nous pouvons définir une distribution de masse  $\nu$  telle que

$$\begin{aligned}\nu(G_1) &= 0.2 \\ \nu(G_2) &= 0.05 \\ \nu(D_1) &= 0.3 \\ \nu(D_1 \cup D_2 \cup D_3) &= 0.1 \\ \nu(G_1 \cup G_2) &= 0.1 \\ \nu(G_1 \cup G_2 \cup D_1 \cup D_2 \cup D_3) &= 0.25\end{aligned}$$

Ainsi, la masse  $\nu(D_1 \cup D_2 \cup D_3) = 0.1$  représente la proportion de la population interrogée qui pense voter pour l'un des candidats de droite sans savoir encore pour lequel. Ou encore, on peut voir cette masse  $\nu(D_1 \cup D_2 \cup D_3)$  comme la masse de probabilité re-distribuable sur  $D_1$  ou  $D_2$  ou  $D_3$  mais on ne sait pas comment. On ne sait pas comment répartir les 10% entre  $D_1$ ,  $D_2$  et  $D_3$  car nous n'avons pas l'information nécessaire pour le faire.

On remarque que la distribution de masse  $\nu$  modélise une information de nature aléatoire variable et de nature imprécise. La différence entre une distribution de probabilité et une distribution de masse est que l'on met des poids non plus sur des singletons (valeurs précises)

mais sur des atomes (intervalles, ensembles ...).

Dans un cadre purement probabiliste, en l'absence d'information supplémentaire, la masse  $\nu(D_1 \cup D_2 \cup D_3)$  serait répartie de manière uniforme sur  $D_1$ ,  $D_2$  et  $D_3$ .

Si à présent, on cherche à évaluer la probabilité que la population vote à droite, i.e.  $P(\text{Population vote pour } D_1 \text{ ou } D_2 \text{ ou } D_3)$ , d'après la distribution de masse  $\nu$  il est clair que :

**Au minimum**, 30% + 10% de la population interrogée votera à droite et non à gauche

↪ On obtient ainsi une borne minimale  $Bel$  (nommée **degré de Crédibilité**) de probabilité

↪  $Bel$  représente la proportion de la population interrogée qui est certaine de voter pour la droite

↪ i.e.  $P(\text{Population vote pour } D_1 \text{ ou } D_2 \text{ ou } D_3) \geq 40\%$

**Au maximum**, il y a 40% de la population interrogée qui votera pour la droite plus toute celle qui potentiellement pourrait voter à droite à savoir 25%

↪ On obtient ainsi une borne maximale  $Pl$  (nommée **degré de Plausibilité**) de probabilité

↪  $Pl$  représente la proportion de la population interrogée qui est certaine de voter pour la droite plus ceux hésitant à voter à droite ou à gauche

↪ i.e.  $P(\text{Population vote pour } D_1 \text{ ou } D_2 \text{ ou } D_3) \leq 65\%$

Considérons à présent un cas plus intéressant pour le domaine de l'environnement. Soit un appareil de mesure qui présente une erreur aléatoire (variabilité) et une erreur systématique (imprécision). On effectue  $N$  mesures imprécises d'un paramètre  $M$ . On obtient ainsi  $N$  intervalles  $([m_i - \delta, m_i + \delta])_{i=1 \dots N}$  quelconques contenant la vraie valeur avec une probabilité  $\nu_i$  d'obtenir chaque intervalle où  $\delta$  est l'erreur systématique et  $m_i$  la mesure  $i$ . La probabilité  $\nu_i$  peut être interprétée comme la fréquence d'apparition de l'intervalle  $[m_i - \delta, m_i + \delta]$  parmi les  $N$  mesures. On définit la distribution de poids de probabilité  $(\nu_i)_{i=1 \dots N}$  sur des intervalles où

$\nu_i =$  masse de probabilité re-distribuable sur l'intervalle  $[m_i - \delta, m_i + \delta]$  ;  
sans pour autant comment savoir répartir cette masse sur l'intervalle.

$\nu_i =$  Proba( l'intervalle  $[m_i - \delta, m_i + \delta]$  représente bien l'information).

Supposons que l'on obtienne les intervalles  $[1, 5]$ ,  $[2, 6]$ ,  $[3.5, 6.5]$  et  $[0, 4]$  après quatre mesures avec les probabilités respectives associées  $\nu_1$ ,  $\nu_2$ ,  $\nu_3$  et  $\nu_4$  (voir Figure C.1). Cherchons à estimer la probabilité que la mesure  $M$  soit dans l'intervalle  $[3, 7]$ . D'après notre information, on sait que  $M \in [3.5, 6.5]$  avec une probabilité de  $\nu_3$  ; de plus, si  $M \in [3.5, 6.5]$  alors  $M \in [3, 7]$ . Ainsi, on est certain avec une probabilité de  $\nu_3$  que  $M \in [3, 7]$  ; on obtient donc la borne inférieure  $Bel$  de la probabilité que  $M \in [3, 7]$  (voir Figure C.1). Comme l'intersection des quatre intervalles avec  $[3, 7]$  est non vide, ils ne contredisent pas le fait que  $M \in [3, 7]$ . Ainsi, la probabilité que  $M \in [3, 7]$  peut potentiellement atteindre  $\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4 = 1$  ; on obtient la borne supérieure  $Pl$  de la probabilité (voir Figure C.1). L'écart entre  $Bel(M \in [3, 7])$  et  $Pl(M \in [3, 7])$  caractérise l'imprécision de l'information (voir Figure C.1).

De manière plus formelle, la mesure de plausibilité  $Pl$  et la mesure de crédibilité  $Bel$  se

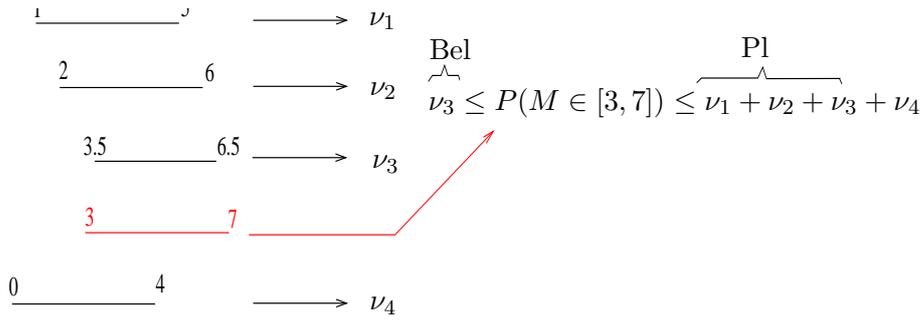


FIG. C.1 – Mesures imprécises d’un paramètre variable.

définissent à partir d’une distribution de masse  $\nu : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$  telle que  $\sum_{E \in \mathcal{P}(\Omega)} \nu(E) = 1$  de la manière suivante :

$$Bel(A) = \sum_{E, E \subseteq A} \nu(E) \text{ et } Pl(A) = \sum_{E, E \cap A \neq \emptyset} \nu(E)$$

$Bel(A)$  évalue à quel point il est certain que l’information disponible, modélisée par la fonction  $\nu$ , implique ” $x \in A$ ”.

$Pl(A)$  évalue à quel point l’information disponible ne contredit pas ” $x \in A$ ”.

$E$  est appelé élément focal de  $\mathcal{P}(\Omega)$ .  $\nu(\Omega)$  est la probabilité qu’on ne sache rien (elle vaut 1 quand on n’a pas d’information du tout). Comme pour les possibilités, on retrouve la notion de dualité entre les deux mesures  $Bel$  et  $Pl$  :

$$Pl(A) = 1 - Bel(A^c) \text{ ou } Bel(A) = 1 - Pl(A^c) \tag{C.1}$$

Comme la distribution de possibilité (voir l’Annexe B), la distribution de masse  $\nu$  permet de coder une famille de probabilités  $\mathcal{P}(\nu)$ ,

$$\mathcal{P}(\nu) = \{P, \forall A, Bel(A) \leq P(A)\} = \{P, \forall A, P(A) \leq Pl(A)\}$$

Dans ce cas on a :

$$\forall P \in \mathcal{P}, \quad Bel \leq P \leq Pl$$

L’écart entre les deux mesures définit le caractère imprécis de l’information. De plus,

- Si les éléments focaux de  $\nu$  sont emboîtés, la mesure de crédibilité (respectivement de plausibilité) est une mesure de nécessité (respectivement de possibilité).
- Si les éléments focaux sont disjoints et précis, les mesures de plausibilité, crédibilité coincident avec la mesure de probabilité pour tout élément focal ou union d’éléments focaux.

Ainsi on peut modéliser toute distribution de probabilité et toute distribution de possibilité à l’aide d’une fonction de masse  $\nu$ . Ceci aura pour avantage de travailler dans un cadre commun pour traiter l’information (imprécision-variabilité) dans les modèles.

## C.2 Lien entre Fonctions de croyance de Shafer [88] et Intervalles aléatoires de Dempster [27]

Soit  $\{\Theta, \mathcal{B}, P\}$  un espace probabilisé,  $\Omega$  un espace de mondes possibles de cardinal fini et une fonction  $\Gamma : \Theta \rightarrow \mathcal{P}(\Omega)$ . Soit une variable aléatoire  $X : \Theta \rightarrow \Omega$  telle que  $\forall \theta \in \Theta, X(\theta) \in \Gamma(\theta)$ .

Pour  $A \subset \Omega$ , on définit :

$$\bar{A} = \{\theta \in \Theta / \Gamma(\theta) \cap A \neq \emptyset\}$$

$$\underline{A} = \{\theta \in \Theta / \Gamma(\theta) \subseteq A\}$$

En particulier,  $\underline{\Omega} = \bar{\Omega} = \Omega$  est le domaine de  $\Gamma$ . Il est facile de voir que :

$$\underline{A} \subseteq X^{-1}(A) \subseteq \bar{A}$$

où  $X^{-1}(A) = \{\theta \in \Theta / X(\theta) \in A\}$ .

On définit ainsi une probabilité haute  $\bar{P}(A)$  et une probabilité basse  $\underline{P}(A)$  telles que :

$$\underline{P}(A) = P(\underline{A}) \leq P(A) \leq \bar{P}(A) = P(\bar{A})$$

Si on définit une fonction de masse  $\nu$  telle que :

$$\forall E \subseteq \Omega, \nu(E) = P(\{\theta \in \Theta / \Gamma(\theta) = E\})$$

On a :  $\sum_{E \subseteq \Omega} \nu(E) = 1$ , alors

$$P(\underline{A}) = \underline{P}(A) = Bel(A)$$

et

$$P(\bar{A}) = \bar{P}(A) = Pl(A)$$

En effet,

$$\begin{aligned} P(\underline{A}) &= P(\{\theta \in \Theta / \Gamma(\theta) \subseteq A\}) & P(\bar{A}) &= P(\{\theta \in \Theta / \Gamma(\theta) \cap A \neq \emptyset\}) \\ &= \sum_{E \subseteq A} P(\{\theta \in \Theta / \Gamma(\theta) = E\}) & &= \sum_{E \cap A \neq \emptyset} P(\{\theta \in \Theta / \Gamma(\theta) = E\}) \\ &= \sum_{E \subseteq A} \nu(E) & &= \sum_{E \cap A \neq \emptyset} \nu(E) \\ &= Bel(A) & &= Pl(A) \end{aligned}$$

Comme pour les possibilités, on peut définir rigoureusement la notion d'espérance mathématique dans le cadre des fonctions de croyance. Soit  $X \rightarrow \mathbb{R}$  une variable aléatoire associée à une mesure de probabilité  $P^X \in \mathcal{P}(\nu)$  mal connue. On définit alors un intervalle moyen

$$M(\nu) = \{E(X) | P^X \leq Pl\} = [\underline{E}(X), \overline{E}(X)]$$

de la fonction de masse  $\nu$  contenant l'espérance mathématique  $E(X)$  par :

$$\begin{aligned} \underline{E}(X) &= \int_{\mathbb{R}} x dPl(\{w | X(w) \leq x\}) \\ \overline{E}(X) &= \int_{\mathbb{R}} x dBel(\{w | X(w) \leq x\}) \end{aligned}$$

## Annexe D

# Recuit simulé

Nous rappelons que nous avons discrétisé l'ensemble des contraintes. Le recuit simulé [71] est un algorithme stochastique qui permet de déterminer des optimums de fonctions. Le Tableau D.1 présente la forme générale de l'algorithme du recuit simulé. Le nom de cet algorithme provient de son origine d'utilisation. Pour fabriquer un acier de bonne qualité, on le recuit plusieurs fois en effectuant des fusions à des températures décroissantes. Le recuit simulé reprend cette idée.

Considérons une fonction  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  à minimiser et représentant l'énergie d'un système mécanique statistique où  $\Omega$  est un espace d'état fini et  $w \in \Omega$  est un état. La probabilité  $P(w, w')$  pour que le système passe de l'état  $w$  à l'état  $w'$  à la température  $T$  est donnée par la distribution de Gibbs-Boltzmann  $P(w, w') = e^{-\frac{f(w')-f(w)}{kT}}$  où  $k$  est la constante de Boltzmann. Quand  $T$  sera élevée (ce qui sera le cas initialement) un grand nombre de transformations (passage d'un état à un autre) est accepté. A l'inverse, quand  $T$  sera proche de zéro, seules les transformations avantageuses seront acceptées. La qualité de l'optimum de  $f$  dépend de la méthode utilisée pour décroître la température  $T$ . Il a été montré [41] qu'il existe une valeur  $\beta$  (dépendant du problème) pour laquelle une décroissance logarithmique de la température  $T_n = \frac{\beta}{\log(n)}$  assure une convergence presque sûre vers l'optimum global. Cependant, pour une température minimale fixée  $T_{min}$ , le nombre d'itération pour atteindre  $T_{min}$  avec une décroissance logarithmique croît exponentiellement quand  $\beta$  diminue. Ainsi, pour une valeur faible de  $\beta$ , la recherche d'un optimum global par Recuit Simulé est équivalente à une recherche exhaustive dans tout l'espace des états. Par conséquent, la méthode la plus souvent appliquée pour faire décroître la température est d'utiliser une suite géométrique décroissante :  $T_n = r \times T_{n-1}$  pour  $n > 1$  et  $0 < r < 1$ . Le choix de  $T_0$ ,  $T_{min}$  et  $r$  dépend du problème que l'on cherche à résoudre.

En ce qui concerne notre problème, nous posons  $r=0.99$  afin d'obtenir une décroissance de  $T$  assez lente. Nous choisissons  $T_0$  et  $T_{min}$  de sorte que

$$T_0 = -\frac{df_0/n}{\log(p_0)} \text{ avec } p_0 \text{ proche de } 1$$

où  $df_0$  est défini à partir de l'algorithme présenté dans la Table D correspondant à la somme de  $n$  différences entre deux combinaisons aléatoires où  $n = 1000$ . Ce choix permet d'obtenir une probabilité élevée  $P = e^{-\frac{df}{T_0}}$  au début de l'algorithme du recuit simulé quand on a  $df > 0$

```

 $X = X_0$ 
 $T = T_0$ 
Tant que  $T > T_{min}$  faire
   $Y =$  tirage aléatoire d'un état voisin de  $X$ 
   $df = f(Y) - f(X)$ 
  Si  $df > 0$  alors // On ne rejette pas systématiquement la configuration augmentant l'erreur
     $P = e^{-\frac{df}{T}}$ 
     $A =$  Tirage aléatoire dans  $[0,1]$ 
    Si  $A < P$  alors
       $X = Y$ 
    Fin si
  Sinon // on adopte la nouvelle configuration
     $X = Y$ 
  Fin si
  Décroissance de la température  $T$ 
Fin tant que
retourne l'état  $X$ 

```

TAB. D.1 – Algorithme du Recuit Simulé pour déterminer le minimum de  $f$ 

```

 $X = X_0$ 
 $df_0 = 0$ 
 $df_{min} = 100000$ 
Pour  $n$  allant de 1 à 1000 faire
   $Y =$  tirage aléatoire d'un état voisin de  $X$ 
   $df_{tp} = f(Y) - f(X)$ 
  Si  $df_{tp} < 0$  alors
     $df_{tp} = -df_{tp}$ 
  Sinon
     $df_{tp} = df_{tp}$ 
  Fin si
  Si  $df_{tp} < df_{min}$  alors
     $df_{min} = df_{tp}$ 
  Fin si
   $df_0 = df_0 + df_{tp}$ 
   $X = Y$ 
Fin Pour
retourne  $df_{min}$  et  $df_0$ 

```

TAB. D.2 – Algorithme permettant d'initialiser  $T_0$  et  $T_{min}$

et ainsi d'accepter de nouvelles configurations.

$$T_{min} = \frac{df_{min}}{\log(p_1)} \text{ avec } p_1 \text{ proche de } 0$$

où la valeur  $df_{min}$  est déterminée à partir de l'algorithme présenté dans la Table D correspond à la recherche de la valeur minimale de la concentration parmi 1000 combinaisons aléatoires.



# Bibliographie

- [1] ADEME. (2001) - Ancienne Usine RTM - Belin-Beliet (33). Sondages et Prélèvements de Sols. Compte-Rendu d'Execution. *Dossier/31/01428/001/CR/01/A. GESTER/21.01.0167.*
- [2] KREBS. (1997) - Compléments de Diagnostic de Pollution - Evaluation des Risques et Etude des Scénarios de Réhabilitation. *FG/REHA/607.76/97.003b. KREBS/Division Réhabilitation de Sites.*
- [3] Bárdossy, G., Fodor, J. Evaluation of Uncertainties and Risks in Geology : New Mathematical Approaches for their Handling. *Springer, Berlin*, ISBN 3-540-20622-1, 2004.
- [4] Baudrit, C., Guyonnet, D., Dubois, D. Post-processing the hybrid method for addressing uncertainty in risk assessments. *Journal of Environmental Engineering* (sous presse).
- [5] Baudrit, C., Dubois, D., Guyonnet, D. Joint Propagation and Exploitation of Probabilistic and Possibilistic Information in Risk Assessment Models. Accepted à *IEEE Transaction on Fuzzy Systems.*
- [6] Baudrit, C., Dubois, D. Practical Representation of Incomplete Probabilistic Knowledge. Accepted à *Computational Statistic & Data Analysis.*
- [7] Baudrit, C., Couso, I., Dubois D. Joint propagation of probability and possibility in risk analysis : towards a formal framework, soumis à *International Journal of Approximate Reasoning.*
- [8] Baudrit, C., Couso, I., Dubois D. Probabilities of Events Induced by Fuzzy Random Variables. *European Conference on Fuzzy Logic and Technology (EUSFLAT'05)*, Barcelona (Spain), 541-546, 2005.
- [9] Baudrit, C., Guyonnet, D., Baroudi, H., Denys, S., Begassat, Ph. Assessment of child exposure to lead on an ironworks brownfield : uncertainty analysis. *Conference on Contaminated Soil (ConSoil'05)*, Bordeaux (France), 1071-1080, 2005.
- [10] Baudrit, C., Dubois, D. Comparing Methods for Joint Objective and Subjective Uncertainty Propagation with an example in a risk assessment. *International Symposium on Imprecise Probabilities and Their Application (ISIPTA'05)*, Pittsburg (USA, Pennsylvanie), 31-40, 2005.
- [11] Baudrit, C., Dubois, D., Fargier, H. Practical representation of incomplete probabilistic information. *Advances in Soft Computing :Soft Methods of Probability and Statistics conference*, Oviedo (Spain). Lopez-Diaz, M.A. Gil, P. Grzegorzewski, O. Hymiewicz (Eds), Springer, 149-156, 2004.
- [12] Baudrit, C., Dubois, D., Guyonnet, D., Fargier H. (2004) - Joint Treatment of imprecision and Randomness in Uncertainty Propagation. *Proc. Conf. on Information Processing and*

- Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems, Perugia*, pp.873-880. Version revue à paraître dans *Modern Information Processing : From Theory to Applications*, B. Bouchon-Meunier, G. Coletti and R.R. Yager (Eds), Elsevier.
- [13] Baudrit, C., Dubois, D., Fargier, H. Propagation of Uncertainty involving Imprecision and Randomness. *Proc.3<sup>d</sup> European Conference on Fuzzy Logic and Technology, Zittau (Germany)*, 653-658, 2003.
- [14] Baudrit, C., Dubois, D., Fargier, H. Représentation de la connaissance probabiliste incomplète. *Rencontres francophones sur la Logique Floue et ses Applications, Tours*, 65-72, 2003.
- [15] Berleant, D., Goodman-Strauss, C. Bounding results of Arithmetic Operations on Random Variables of Unknown Dependencies using Interval Arithmetic. *Reliable Computation*, 4, 147-165, 1998.
- [16] Berleant, D., Zhang, J. Using Pearson Correlation to Improve Envelopes Around the Distributions of Functions. *Reliable Computing*, 10(2), 139-161, 2004.
- [17] Chamberlain A.C. Interception and retention of radioactive aerosols by vegetation. *Atmospheric Environment*, 4, 1970.
- [18] Chojnacki, E., Rommens, C., Germain, P., Sugier, A., Merle-Szérémeta, A. Nord-Cotentin radioecological study-sensitivity and uncertainty analysis. I.R.S.N, 1999.
- [19] Conover, W.J., Iman, R.L. A Distribution-Free Approach to Inducing Rank Correlation Among Input Variables. *Technometric*, 3, 311-334, 1982.
- [20] Conover, W.J., McKay, M.D., Becknam, R.J. A Comparaison of Three Methods for Selecting Values of Input Variables in the Analysis of Output from a Computer Code. *Technometric*, 21, may, 1979.
- [21] Couso, I., Montes, S., Gil, P. Second order possibility measure induced by a fuzzy random variable. In C. Bertoluzza, M. A. Gil, and D. A. Ralescu (Eds.), *Statistical modeling, analysis and management of fuzzy data*, pages 127-144. Springer, Heidelberg, 2002.
- [22] Couso, I., Montes, S. and Gil, P. The necessity of the strong  $\alpha$ -cuts of a fuzzy set, *Int. J. of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 9, 249-262, 2001.
- [23] Couso, I., Moral, S., Walley, P. A survey of concepts of independence for imprecise probabilities *Risk Decision and Policy* 5 165-181, 2000.
- [24] Cullen, A.C., Frey, H.C. Probabilistic Techniques in Exposure Assessment : A Handbook for Dealing with Variability and Uncertainty in Models and Inputs. *Plenum Press : New York*, 1999.
- [25] De Cooman G., A behavioural model for vague probability assessments , to appear in *Fuzzy Sets and Systems*,
- [26] De Cooman, G., Aeyels, D. Supremum-preserving upper probabilities. *Information Sciences*, 118, 173-212, 1999.
- [27] Dempster, A.P. Upper and Lower Probabilities Induced by a Multivalued Mapping. *Annals of Mathematical Statistics*, 38, 325-339, 1967.
- [28] Denoeux, T. Modeling vague beliefs using fuzzy-valued belief structures. *Fuzzy Sets and Systems*, 116(2) :167-199, 2000
- [29] Domenico, P. An analytical model for multidimensional transport of a decaying contaminant species. *Journal of Hydrology*, v.91, pp.49-58, 1987.

- [30] Dou, C., Woldt, W., Bogardi, I., Dahab, M. Steady-state groundwater flow simulation with imprecise parameters. *Water Resource Res.*, 31(11), 2709-2719, 1995.
- [31] Dubois, D., Mauris, G., Foulloy, L. Prade, H. Probability-possibility transformations, triangular fuzzy sets and probabilistic inequalities. *Reliable Computing*, 10, 273-297, 2004.
- [32] Dubois, D., Kerre, E., Mesiar, R., Prade, H. Fuzzy interval analysis. *Fundamentals of Fuzzy Sets*, Dubois, D. Prade, H., Eds : Kluwer , Boston, Mass, 483-581, 2000.
- [33] Dubois, D., Nguyen, H.T., Prade, H. Possibility theory, probability and fuzzy sets : misunderstandings, bridges and gaps. *Fundamentals of Fuzzy Sets*, Dubois,D. Prade,H., Eds : Kluwer , Boston, Mass, 343-438 , 2000.
- [34] Dubois, D., Prade, H., Sandri, S.A. On possibility/probability transformations. *Fuzzy Logic : State of the Art* (R. Lowen, M. Lowen, eds.), Kluwer Academic Publ., 103-112, 1993.
- [35] Dubois, D., Prade, H. When upper probabilities are possibility measures. *Fuzzy Sets and Systems*, 49, 65-74, 1992.
- [36] Dubois, D., Prade, H. Random sets and fuzzy interval analysis. *Fuzzy Sets and Systems*, 101, 42-87, 1991.
- [37] Dubois, D., Prade, H. Consonant approximations of belief functions. *Int. J. Approximate Reasoning, Special Issue : Belief Functions and Belief Maintenance in Artificial Intelligence*, 4(5/6), 419-449, 1990.
- [38] Dubois, D., Prade, H. Possibility Theory : An Approach to Computerized Processing of Uncertainty, Plenum Press, New York, 1988.
- [39] Dubois, D., Prade, H. The mean value of a fuzzy number. *Fuzzy Sets & Systems*, 24, 279-300, 1987.
- [40] Dubois, D., Prade, H. Evidence measures based on fuzzy information. *Automatica*, 21(5), 547-562, 1985.
- [41] Duflo, M. Algorithmes stochastiques. *Mathématiques et Applications*, 23, Springer-Verlag, 1996.
- [42] EPA, U.S. (1989) - Risk Assessment Guidance for Superfund. *Volume I : Human Health Evaluation Manual (Part A)*. (EPA/540/1-89/002). Office of Emergency and Remedial Response. U.S EPA., Washington D.C.
- [43] [http ://www.klt.fi/expofacts/](http://www.klt.fi/expofacts/)
- [44] Feenstra, S., Cherry, J. Subsurface contamination by dense non-aqueous phase liquid (DNAPL) chemicals. Dans : *Proceedings of the International Groundwater Symposium, International Association of Hydrogeologists*, May 1-4, Halifax, Nova Scotia, Canada, 1988.
- [45] Feller, W. On the Kolmogorov-Smirnov limit theorems for empirical distributions. *Annals of Mathematical Statistics*, 19, 177-189, 1948.
- [46] Ferson, S., Berleant, D., Regan, H.M. Equivalent of methods for uncertainty propagation of real-valued random variables. *International Journal of Approximate Reasoning*, 36, 1-30, 2004.
- [47] Ferson, S. RAMAS Risk Calc 4.0 Software : *Risk Assessment with Uncertain Numbers*. Lewis Publishers, Boca Raton, Florida.

- [48] Ferson, S., Ginzburg, L., Kreinovich, V., Myers, D.M., Sentz, K. Construction Probability Boxes and Dempster-Shafer structures. *Sandia National Laboratories, Technical report SANDD2002-4015*, 2003.
- [49] Ferson, S., Ginzburg, L., Akcakaya, R. Whereof one cannot speak : when input distributions are unknown. A paraître dans *Risk Analysis*, 2003.
- [50] Ferson, S., Ginzburg, L., Kreinovich, V., Longpre, L., Aviles, M. Computing Variance for Interval Data is NP-Hard. *ACM SIGACT News*, 33(2), 108-118, 2002.
- [51] Ferson, S., Ginzburg, L.R. Different methods are needed to propagate ignorance and variability. *Reliability Engineering and Systems Safety*, 54, 133-144, 1996.
- [52] Ferson, S. What Monte Carlo methods cannot do. *Human and Ecology Risk Assessment*, 2, 990-1007, 1996.
- [53] Ferson, S., Arlin, J., Ginzburg, L. Hybrid Processing of Stochastic and Subjective Uncertainty Data. *Risk Analysis*, 16(6), 785-791, 1996.
- [54] Ferson, S., Burman, M.A. Correlation, dependency bounds and extinction risks. *Biological Conservation*, 73, 101-105, 1995.
- [55] Ferson, S., Ginzburg, L.R. Hybrid Arithmetic. Proceedings of ISUMA-NAFIPS 95, IEEE Computer Society Press, Los Alamitos, California, 619-623, 1995.
- [56] Ferson, S., Long, T.F. Conservative uncertainty propagation in environmental risk assessments. *Environmental Toxicology and Risk Assessment*. ASTM STP 1218, Ed J.S Hughes et al. Am. Soc. for Testing and Materials, Philadelphia, 97-110, 1994.
- [57] Ferson, S. Using fuzzy arithmetic in Monte Carlo simulation of fishery populations. *Management of Exploited Fish*, T. Quinn (ed.), *Proceedings of the ISMSEFP, Anchorage*, 595-608, 1992.
- [58] Fetz, Th., Oberguggenberger, M. Propagation of uncertainty through multivariate functions in the framework of sets of probability measures. *Reliability Engineering and System Safety*, 85, 73-87, 2004.
- [59] Fortin, J., Dubois, D., Fargier, H. The Empirical Variance of a Set of Fuzzy Intervals. Accepté à *FUZZY-IEEE*, 2005.
- [60] Freissinet, C., Vauclin, M. A fuzzy logic-based approach to assess imprecision of soil water contamination modeling. *Soil & Tillage Research*, 47, 1-17, 1998.
- [61] Galya, D. A horizontal plane source model for groundwater transport. *Ground Water*, V.25, no.6, pp.733-739, 1987.
- [62] Gelhar, L., Welty, C., Rehfeldt, K. A critical review of data on field-scale dispersion in aquifers. *Water Resources Research*, v.28, no.7, pp.1955-1974, 1992.
- [63] Guyonnet, D., Bourgine, B., Dubois, D., Fargier, H., Côme, B., Chilès, J.P. Hybrid approach for addressing uncertainty in risk assessments. *Journal of Environmental Engineering*, 126, 68-78, 2003.
- [64] Gzyl, H. The Method of Maximum Entropy. *Series on Advances in Mathematics for Applied Sciences*, 29, 1995.
- [65] Helton J.C. Oberkampf W.L., Eds. (2004) Alternative Representations of Uncertainty, *Reliability Engineering and Systems Safety*, vol. 85, Elsevier, 369 p.

- [66] Hoffman F.O., Hammonds, J.S. Propagation of uncertainty in risk assessments : The need to distinguish between uncertainty due to lack of knowledge and uncertainty due to variability. *Risk Analysis*, 14(5), 707-712, 1994.
- [67] Howard, P. Handbook of environmental degradation rates. *Lewis Publishers, Chelsea, Michigan USA.*, 1989.
- [68] InVS (2002). Dépistage du saturnisme infantile autour des sources industrielles de plomb. Tome 1 : Analyse de la pertinence de la mise en oeuvre d'un dépistage : du diagnostic environnemental à l'estimation des expositions.
- [69] Kaufmann, A., Gupta, M.M. Introduction to Fuzzy Arithmetic : Theory and Applications. *Van Nostrand Reinhold, New York*, 1985.
- [70] Kendall, M., Stuart, A. The Advanced Theory of Statistics. *ED. Griffin and Co.*, 1977.
- [71] Kirkpatrick, S., Gelatt, C.D., Vecchi, M.P. Optimization by simulated annealing. *Science*, 220, 671-680, 1983.
- [72] Kosugi, K. Lognormal distribution model for unsaturated soil hydraulic properties. *Water Resources Research*, 32(9), 2697-2703, 1996.
- [73] Krätschmer, V. When fuzzy measures are upper envelopes of probability measures, *Fuzzy Sets and Systems*, 138, 455-468, 2003.
- [74] Kruse, R., Meyer, K.D. Statistics with Vague Data. *Reidel, Dordrecht, Netherlands*, 1987.
- [75] Labieniec, P., Dzombak, D., Siegrist, R. Evaluation of uncertainty in a site-specific risk assessment. *Journal of Environmental Engineering*, 123(3), 234-243, 1997.
- [76] Lagacherie, P., Cazemier, D., Martin-Clouaire, R., Wassenaar, T. A spatial approach using imprecise soil data for modelling crop yields over vast areas. *Agriculture, Ecosystems and Environment*, 81, 5-16, 2000.
- [77] McNab, W., Rice, D., Bear, J., Ragaini, R., Tuckfield, C., Oldenburg, C. (1999) - Historical case analysis of chlorinated volatile organic compound plumes. *Rapport du Lawrence Livermore National Laboratory, UCRL-AR-133361, Californie, USA.*
- [78] Miller, L.H. Table of percentage points of Kolmogorov statistics. *Journal of the American Statistical Association*, 51, 111-121, 1956.
- [79] Nelsen, R.B. An Introduction to Copulas. *Lecture Notes in Statistics*, Springer-Verlag, New York, v.139, 1999.
- [80] Neumaier, A. Clouds, fuzzy sets and probability intervals. *Reliable computing*, 10, 249-272, 2004.
- [81] Neuman S.S.P. Universal Scaling of hydraulic conductivities and dispersivities in geologic media. *Water Resources Research*, v. 26, no. 8, pp.1749-1758, 1990.
- [82] Pickens J.F., G.E. Grisak. Scale-dependence dispersion in a stratified granular aquifer. *Water Resources Research*, v.17, no.4, pp.1191-1211, 1981.
- [83] Puri, M.L., Ralescu, D. Fuzzy Random Variables, *J. Math. Anal. Appl.* **114** 409-422, 1986.
- [84] Mercat-Rommens, C., P. Renaud, F. Vray, E. Chojnacki. Exemple simplifié proposé comme cas d'étude pour la représentation de la connaissance. , *Rapport DEI/SERURE/2004-02. Institut de Radioprotection et de Sûreté Nucléaire, Fontenay-aux-Roses*, 2004.

- [85] Mercat-Rommens, C., Chojnacki, E. Prise en compte de l'incertitude dans l'évaluation du risque d'exposition : définition de cas synthétiques. *Rapport DPRE/SERNAT/2002-23. Institut de Radioprotection et de Sécurité Nucléaire, Fontenay-aux-Roses, 2002.*
- [86] Saporta, G. Probabilités, analyse des données et statistique. *Editions Technip, Paris, 1990.*
- [87] Schwille, F. Dense Chlorinated Solvents. *Lewis Publishing, Chelsea, Michigan, USA., 1988.*
- [88] Shafer, G. A Mathematical Theory of Evidence. *Princeton University Press, 1976.*
- [89] Sklar, A. Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges. *Publ. Inst. Statist. Univ. Paris, 8, 229-231, 1959.*
- [90] Smets P. and Kennes R. (1994). The transferable belief model, *Artificial Intelligence, 66, 191-234.*
- [91] Smets, P. Constructing the pignistic probability function in a context of uncertainty, *Uncertainty in Artificial Intelligence 5* (M. Henrion et al., Eds.), North-Holland, Amsterdam, 29-39, 1990.
- [92] Vance, D.B. The 4 Technology Solutions. Natural Attenuation Part IV : Transverse Dispersion As The Natural Driving Force. <http://2the4.net/natat4disp.htm>.
- [93] Venditti, V. Aspects du principe de maximum d'entropie en modélisation statistique. Thèse de Doctorat, IS2 / UJF - Grenoble, juillet 1998.
- [94] Walley, P. Statistical inference based on a second-order possibility distribution, *Int. J. of General Systems, 26, 337-383, 1997.*
- [95] Walley, P. *Statistical Reasoning with Imprecise Probabilities*, Chapman and Hall, 1991.
- [96] Williamson, R.C., Downs, T. Probabilistic arithmetic I : Numerical methods for calculating convolutions and dependency bounds. *International Journal of Approximate Reasoning, 4, 8-158, 1990.*
- [97] Xu M., Eckstein Y. Use of Weighted Least-Squares Method in Evaluation of the Relationship Between Dispersivity and Field Scale. *Groundwater, v.33, no.6, 1995.*
- [98] Yager, R.R. A procedure for ordering fuzzy subsets of the unit interval, *Information Sciences, 24, 143-161, 1981.*
- [99] Yen, J. Generalizing the Dempster-Shafer theory to fuzzy sets. *IEEE Trans. Systems Man Cybernet, 20(3), 559-569, 1990.*
- [100] Zadeh, L.A. Fuzzy Sets as a basis for a theory of possibility. *Fuzzy Sets and Systems, 1, 3-28, 1978.*
- [101] Zadeh, L.A. Fuzzy sets. *Information & Control, (8) :338-353, 1965*