HAL
open science

Modèles de pondération par les méthodes de tri croisé pour l'aide à la décision collaborative en projet

Frej Limayem

To cite this version:

Frej Limayem. Modèles de pondération par les méthodes de tri croisé pour l'aide à la décision collaborative en projet. Sciences de l'ingénieur [physics]. Ecole Centrale Paris, 2001. Français. NNT : . tel-00011948

HAL Id: tel-00011948

https://theses.hal.science/tel-00011948

Submitted on 14 Mar 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ECOLE CENTRALE PARIS

THÈSE DE DOCTORAT

spécialité

Productique - Génie industriel

présentée par

Frej LIMAYEM

pour l'obtention du

GRADE DE DOCTEUR

intitulée

Modèles de pondération par les méthodes de tri croisé pour l'aide à la décision collaborative en projet

soutenue le 23 novembre 2001

devant un jury composé de :

Vincent GIARD	Examinateur (Président)	Professeur
Pascal LAURENT	Examinateur	MdC
Freerk A. LOOTSMA	Rapporteur	Professeur
Michel TOLLENAERE	Rapporteur	Professeur
Bernard YANNOU	Directeur de thèse	MdC, HDR

Laboratoire Productique Logistique
ECOLE CENTRALE PARIS
Grande voie des vignes
92295 CHÂTENAY-MALABRY Cedex

2001-26

"Patience ! Avec le temps, l'herbe devient du lait"

Proverbe chinois

A ma famille
qui m'a toujours soutenu

REMERCIEMENTS

De nombreuses personnes m'ont aidé à la réalisation de ce travail. Je tiens à les en remercier vivement.

Ma reconnaissance s'adresse tout d'abord à mon directeur de Thèse et responsable scientifique, Bernard Yannou [(a)], dont la rigueur et l'esprit critique m'ont sans cesse guidé. Sa créativité et son sens du fonctionnel ont été un stimulant constant à ma recherche. Il a toujours été disponible et consistant dans son implication. Ma contribution à ce travail est indissociable de la sienne. Je le remercie pour la confiance qu'il m'a accordée et lui suis reconnaissant pour son soutien sans faille tant sur le plan scientifique que personnel.

Ma gratitude va également à Jean Claude-Bocquet [(b)] qui m'a accueilli au sein du laboratoire PL puis co-encadré en début de thèse. Elle va plus généralement à tous ceux que j'ai croisés au sein de ce laboratoire : personnel administratif, professeurs, maîtres de conférences, thésards, étudiants en DEA et stagiaires. Je les remercie pour leurs conseils, leur soutien et tous les bons moments que j'ai pu partagés avec eux.

Je n'oublie pas n'ont plus ceux qui ont activement participé à ce travail. Je remercie tout particulièrement Russell Barton [(c)], Sinène Bel Hadj Amor, Otavio Dasilva, Gilles Fromageot, Ahmed Lemlioui et Martin Meckesheimer.

Je tiens aussi à remercier vivement Freerk A. Lootsma [(d)] et Michel Tollenaere [(e)] qui m'ont fait l'honneur de bien vouloir rapporter mon travail de thèse. Ma reconnaissance s'adresse également aux autres membres du Jury, messieurs Vincent Giard [(f)] et Pascal Laurent [(g)].

J'exprime aussi ma gratitude à Anne Prévot [(h)] et Sylvie Guillemain [(h)] ainsi qu'à Odilia Bertrand [(i)] pour leur aide précieuse à la finalisation de ce document.

Enfin, je ne voudrais surtout pas oublier ma femme, toute ma famille et tous mes amis, en particulier Mohamed Ouala Kassaagi, qui n'ont cessé de me soutenir.

a. Maître de Conférences Habilité à Diriger des Recherches au laboratoire Productique - Logistique de l'École Centrale Paris
b. Professeur à l'École Centrale Paris et directeur du laboratoire Productique - Logistique
c. Professeur à Penn State University, Pennsylvanie, USA
d. Professeur à Delft University of Technology, Pays-Bas
e. Professeur à l'École Nationale Supérieure de Génie Industriel - Institut National Polytechnique de Grenoble
f. Professeur à l'Institue d'Administration des Entreprises de Paris - Université Paris 1
g. Maître de conférences à l'École Centrale Paris
h. Secrétaires au laboratoire Productique Logistique
i. Responsable du bureau des études doctorales à l'École Centrale Paris

TABLE DES MATIERES

Introduction 1

I. Introduction à la problématique du tri croisé 3

I-1. La pondération en gestion de projet 3

I-2. Introduction aux méthodes de tri croisé 4

I-3. Test d'exactitude 5

I-4. Lacunes de certaines méthodes utilisées sur le terrain 6

I-5. Cohérence des données d'entrée 7

I-6. Prise en compte de l'incertitude 8

I-7. Extension à l'aide à la décision multicritère 8

I-8. Appréciation des rapports d'importance 9

I-8.1. Signification des poids 9

I-8.2. Échelle de notation 10

I-9. Fonctionnalités de tri croisé utiles à l'aide à la décision en projet 11

I-10. Synthèse et perspectives 12

II. Revue de la littérature scientifique 13

II-1. Approches déterministes 13

II-1.1. Approche basée sur l'analyse des valeurs propres (V.P.) 14

II-1.2. Approche basée sur la régression logarithmique selon les moindres carrés (R.L.M.C.) 14

II-1.3. Récapitulatif des approches déterministes présentées 16

II-2. Prise en compte de l'imprécision inhérente au jugement humain 17

II-2.1. Approches basées sur la logique floue 18

II-2.2. Approches probabilistes 20

II-3. Synthèse et perspectives 21

III. Extension et comparaison des approches R.L.M.C. et M.G.L.C. 23

III-1. Extension de l'approche R.L.M.C. 23

III-2. Extension de l'approche M.G.L.C. 25

III-3. Synthèse et perspectives 28

IV. Correction de l'approche de Buckley par l'algorithme F.W.A. 29

IV-1. Travers et limitations de l'approche de Buckley 29

IV-2. Présentation de l'algorithme F.W.A. 31

IV-3. Application de F.W.A. au tri croisé 32

IV-4. Perspectives d'extension floue de la méthode déterministe V.P. 36

IV-5. Synthèse et perspectives 37

V. Indicateurs et boucles d'amélioration de la cohérence *39*

V-1. Indicateur de cohérence **40**
V-1.1. Indicateur de cohérence proposé par Saaty 40
V-1.2. Indicateur de cohérence issu de la théorie de la régression 41

V-2. Indicateur générique de cohérence **42**

V-3. Indicateur générique corrigé de cohérence **44**

V-4. Cohérence à différents niveaux de granularité au sein du groupe de décision **49**

V-5. Correction itérative de l'incohérence **51**
V-5.1. Filtrage des opinions 51
V-5.2. Réduction de l'incohérence 52

V-6. Prise en compte de l'imprécision **55**
V-6.1. Extension des indicateurs de cohérence 56
V-6.2. Identification et traitement des opinions les moins cohérentes 56

V-7. Synthèse et perspectives **58**

VI. Plate-forme de tri croisé asynchrone et réparti en projet *59*

VI-1. Concept de tri croisé asynchrone et réparti en projet **60**

VI-2. Algorithme du Tri Croisé de Monte Carlo (T.C.M.C.) **62**
VI-2.1. Principe de base du T.C.M.C. 62
VI-2.2. Description de l'algorithme 63

VI-3. Ouvertures vers la décision coopérative en projet **66**
VI-3.1. Compatibilité avec les outils existants de travail en groupe 67
VI-3.2. Complémentarité avec les outils de gestion de projet 67
VI-3.3. Perspectives de développement dans la pratique 68

VI-4. Synthèse et perspectives **68**

VII. Exemples numériques *69*

VII-1. Cas d'une *matrice des comparaisons* non réciproque et incomplète **69**

VII-2. Cas d'une *matrice des comparaisons* à opinions multiples **72**

VII-3. Résumé et perspectives **82**

Conclusion *83*

Bibliographie *85*

Liste des abréviations *89*

Liste des illustrations *91*

Figures **91**

Tableaux **91**

Table des formules *93*

Liste des variables *95*

Annexes *1*

Annexe I Copies d'écran de la maquette TCMC **3**

Annexe II Copie d'écran du logiciel « Plate-Forme de Tri Croisé » **5**

INTRODUCTION

En gestion de projet, les conséquences associées aux procédures de pondération sont non négligeables. Les poids calculés permettent très souvent de dimensionner le projet de manière à canaliser les efforts et les investissements vers les objectifs les plus importants. Malgré cet enjeu, les fonctionnalités offertes par de nombreux outils de tri croisé du terrain, qui s'avèrent des outils majeurs de pondération en groupe, présentent de nombreuses lacunes. Nous en donnerons des exemples. Ces lacunes sont pourtant comblées, pour la plupart, par des méthodes existant dans le monde de la recherche. Parallèlement, nous verrons par la suite que les approches proposées dans le monde de la recherche sont parfois trop restrictives, en termes d'hypothèses, et mal adaptées aux particularités de certains contextes d'utilisation. Nous visons, par le présent travail, à réduire ce fossé. Un cahier des charges d'une méthode de tri croisé répondant selon nous convenablement à bon nombre des lacunes que nous avons recensées dans la pratique est donné au chapitre suivant.

Le présent document est organisé en sept chapitres. Le premier propose une introduction vulgarisée à la problématique du tri croisé. Le deuxième est quant à lui consacré à une revue de la littérature scientifique dans laquelle sont présentées différentes méthodes de tri croisé, et en particulier des approches permettant la prise en compte de l'imprécision inhérente au jugement en utilisant la logique floue ou la théorie des probabilités. Dans le troisième chapitre, une formulation déterministe du problème est proposée. Elle généralise deux approches parues dans la littérature : l'approche basée sur la régression logarithmique et la méthode de la moyenne géométrique sur les lignes et les colonnes. Dans le quatrième chapitre, et en réponse à certaines critiques formulées dans la littérature, nous proposons une correction de l'approche de Buckley [BUC85] par l'application à la problématique du tri croisé de l'algorithme F.W.A. proposé par Dong et Wong [DON87]. Le cinquième chapitre est consacré à la prise en compte de l'incohérence des jugements. Un indicateur de cohérence et une procédure de réduction de l'incohérence, représentant une bonne part de notre apport, y sont présentés. Une plate-forme de tri croisé dédiée à la conduite de vote asynchrone et distribué en projet est envisagée au sixième chapitre. L'incertitude peut y être représentée aussi bien de manière ordinale (basée sur la logique floue) que quantitative (probabiliste). La maquette informatique que nous avons développée se restreint à un traitement stochastique de l'incertitude par une approche de Monte Carlo. Les raisons de ce choix sont en partie liées à la spécificité de certains outils projet. C'est par exemple le cas de la méthode DELPHI. Au septième chapitre des exemples numériques illustrent les différents résultats proposés dans les précédents chapitres et notamment la boucle d'asservissement en amélioration de cohérence. Enfin, en conclusion, les différentes parties de ce travail sont récapitulées pour en souligner les apports mais aussi les limites et dégager des perspectives futures, notamment la mise en œuvre d'un logiciel informatique intégrant des fonctionnalités de vote asynchrone et distribué à travers le réseau.

Ce manuscrit comporte un nombre important de renvois à des formules, à des tableaux et à des figures, ainsi que des symboles (variables et abréviations) à occurrences multiples. Pour en faciliter la lecture, il est utile de se reporter aux tables et aux listes correspondantes, situées en fin de document.

I. INTRODUCTION A LA PROBLEMATIQUE DU TRI CROISE

Ce premier chapitre vise à familiariser le lecteur avec l'approche du tri croisé et ses applications pour l'aide à la décision en projet. Nous y soulignons certaines lacunes de quelques méthodes utilisées dans la pratique. Des concepts, des problématiques et des spécifications en relation avec l'approche du tri croisé y sont également introduits de manière vulgarisée. Ils seront en partie traités dans la suite de ce document.

I-1. LA PONDERATION EN GESTION DE PROJET

Pouvoir pondérer, seul ou en groupe, un ensemble d'éléments est une activité très fréquente en gestion de projet[1], notamment en Management par la Valeur. Les conséquences de ces pondérations sont souvent considérables car ces dernières interviennent, la plupart du temps, dans les processus de décision des entreprises. Le caractère contingent, limité dans le temps et non répétitif à l'identique d'un projet amplifie le risque lié à la prise de décision[2]. Cela justifie alors l'intérêt d'un travail de recherche sur une méthode d'aide à la pondération en groupe dans un contexte de projet.

Citons quelques cas classiques de pondération durant un projet industriel :

---

[1] En s'appuyant sur un ensemble de définitions parues dans la littérature, Courtot propose une caractérisation, en plusieurs points, de ce qu'est un projet([COU98], pages 28-38). Une relecture plus synthétique de sa définition est proposée ci-dessous.

De nombreux auteurs s'accordent à reconnaître dans un projet :

- ⇨ une durée limitée dans le temps et un caractère contingent et non répétitif à l'identique.
- ⇨ la satisfaction d'un ensemble de besoins :
  - ▪ non discordants,
  - ▪ visant la modification d'un environnement,
  - ▪ suffisamment stables pour être envisagés différemment dans un futur dépassant l'horizon temporel du projet,
  - ▪ traduits dans ce qu'ils ont d'explicite en **objectifs** cohérents,
- ⇨ la mobilisation et l'**affectation**, à l'horizon du projet, d'un ensemble **de ressources** (humaines, matérielles) hétérogènes, limitées mais suffisamment complémentaires pour réaliser des activités concourantes,
- ⇨ la définition (organisationnelle et matérielle) et la **sélection de solutions** en accord avec les objectifs du projet, plus ou moins innovantes et destinées à un horizon temporel ultérieur à celui du projet.
- ⇨ la mise en place de structures organisationnelles spécifiques et temporaires, particulièrement adaptée à la gestion de l'information et à la coordination des acteurs intervenant sur le projet.

[2] En début de projet, le manque d'information et sa forte incertitude rendent difficile la validation d'une décision. Quand bien même les conséquences associées viendraient à se préciser, à mesure de l'avancement du projet, la restriction progressive des degrés de libertés sur les ressources disponibles limite les possibilités d'action et la cascade de décisions prises est difficilement réversible. En conséquence, le risque de non atteinte des objectifs du projet est omniprésent. L'appréciation d'un risque fait intervenir trois aspects : la probabilité d'occurrence d'un effet redouté, sa gravité et sa détectabilité en temps utile. Un risque est d'autant plus élevé, qu'un effet redouté a de fortes chances de se produire, qu'il est dommageable (conséquences graves) et qu'il est difficile à anticiper.

- la valorisation d'objectifs en phase 3 (Analyse Fonctionnelle) d'une action Analyse de la Valeur, ou la pondération des besoins client dans la première matrice d'une approche Q.F.D. (Quality Function Deployment),
- la pondération de critères de choix dans un processus de décision,
- la pondération de probabilités d'occurrence ou de coefficients de gravité en sûreté de fonctionnement,
- la pondération de durées de tâches lors d'un projet contraint dans le temps,
- la pondération des coûts imputables à un projet pour mener une Conception à Coût Objectif (C.C.O.).

I-2. INTRODUCTION AUX METHODES DE TRI CROISE

Que l'on décide d'effectuer cette pondération seul ou en groupe pour bénéficier de multiples expertises, on se trouve rapidement dans l'embarras lorsqu'il s'agit de répartir 100% d'importance sur un nombre élevé d'éléments (la difficulté commence déjà à 3 ou 4). Les méthodes dites de *tri croisé* interviennent alors pour simplifier le processus global de pondération en décomposant le problème en plusieurs comparaisons binaires d'éléments. Ces comparaisons binaires sont plus ou moins qualitatives ou quantitatives. Les différents jugements partiels sont ensuite recomposés en un jeu de poids « acceptable ». Les méthodes de *tri croisé* sont dotées de nombreuses propriétés que nous présenterons dans ce mémoire. Ces méthodes s'adaptent de différentes manières aux problématiques de projet ; des propositions originales seront également faites dans ce sens.

Une méthode de *tri croisé* se définit tout simplement comme l'algorithme qui, à partir d'un ensemble d'opinions exprimant des comparaisons binaires d'éléments, fournit un jeu de poids acceptable. Pour n éléments à pondérer, il s'agit d'estimer des *importances relatives* qui peuvent prendre la forme $c_{ij} \approx w_i/w_j$; $i,j=1,\ldots n$, w_i et w_j représentant respectivement les poids des éléments e_i et e_j. Ces importances relatives sont toutes exprimées au regard d'un même critère de jugement. Par exemple, l'importance relative au regard d'une enveloppe budgétaire à dispatcher sur les différents éléments. Un autre exemple pourrait être l'importance relative au regard d'un critère de sélection (ex : choisir l'élément le plus esthétique), en quel cas les poids joueraient le rôle de notes pour établir un classement des éléments. Sur chaque arrangement binaire d'éléments (e_i,e_j), que le décideur est à même d'apprécier, une comparaison consiste alors à choisir un rapport d'importance c_{ij} parmi un ensemble de valeurs possibles dans l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

En croisant les éléments les uns par rapport aux autres, les comparaisons binaires à renseigner forment une matrice dite *matrice des comparaisons binaires*. Dans ce premier chapitre nous supposons que chaque comparaison binaire comporte exactement une opinion. Lorsque les opinions symétriques sont inverses l'une de l'autre ($c_{ij}=1/c_{ji}$; $i,j = 1,2,\ldots,n$), la *matrice des comparaisons binaires* est dite *réciproque* et seules $n\times(n-1)/2$ comparaisons binaires suffisent (voir figure I–1). Il est également possible d'exprimer une comparaison binaire par une *part d'importance relative* $c_{ii} \approx w_i/(w_i+w_j)$. La notion de *part d'importance relative* est souvent plus intuitive. Lorsque $w_i/(w_i+w_j)$ est estimé à 30%, cela signifie que w_i

représente 30% relativement au total w_i+w_j et, par conséquent, w_j représente relativement 70%[3] (c'est le cas de la méthode C.A.B.Q. brièvement décrite à la section I-4).

La figure I–1, schématise le principe de base des méthodes de *tri croisé* sur un exemple faisant intervenir une demi-*matrice de comparaisons binaires* pour quatre éléments à pondérer.

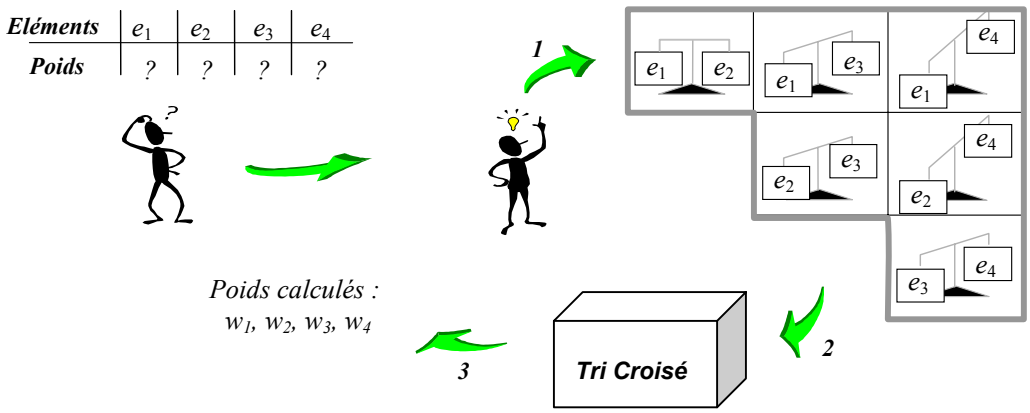


figure I–1 : Principe de base d'un outil de tri croisé illustré sur une demi-matrice de comparaisons binaires *pour quatre éléments à pondérer*

Nous verrons au chapitre suivant que le remplissage de la *matrice des comparaisons* peut, en toute généralité, comporter des opinions multiples pour une même case ou au contraire des cases vides dans la mesure où la quantité d'information disponible est suffisante, relativement à la méthode de tri croisé considérée. La procédure de remplissage lorsqu'elle est conduite en groupe peut être assimilée à un vote qui peut prendre différentes formes (vote individuel, vote commun, vote confidentiel, vote concerté, etc.). Dans la suite de ce document, la désignation « *matrice des comparaisons binaires* » sera maintenue pour sa commodité y compris en présence de plus d'une opinion ou de moins d'une opinion par case de la matrice.

I-3. TEST D'EXACTITUDE

Nous proposons la définition suivante de la propriété d'*exactitude* :

définition I–1

Une méthode de tri croisé est dite exacte si, pour n'importe quelle *matrice de comparaisons*, renseignée à partir d'un jeu initial normalisé (totalisant 100%) de poids supposés connus, l'algorithme de tri croisé considéré conduit à ce même jeu initial de poids après normalisation.

En d'autres termes, en construisant artificiellement une *matrice de comparaisons* à partir d'un jeu de poids existant[4], la méthode de *tri croisé* doit nous donner en sortie exactement ce jeu de poids sans occasionner de distorsion. Cette propriété est illustrée en figure I–2 dans le cas particulier d'une pondération à quatre éléments et d'une *matrice de comparaisons* réciproque (voir §I-2).

[3] Le passage d'une représentation à l'autre est trivial.

[4] Soulignons que dans la réalité ce jeu de poids n'est pas connu puisque c'est lui qu'on cherche à déterminer.

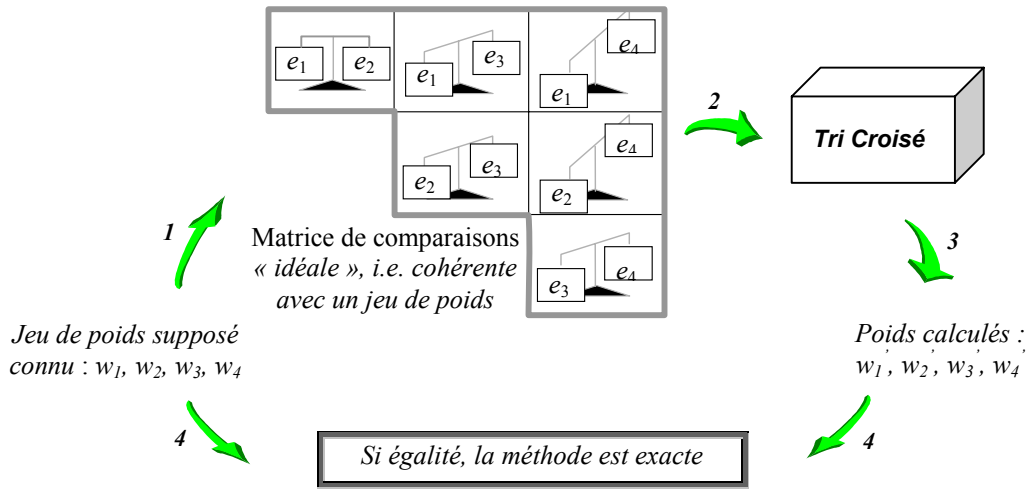


figure I–2 : Vérification de l'exactitude d'une méthode de tri croisé en 4 phases (illustration du cas particulier d'une pondération à quatre éléments pour une matrice de comparaisons *réciproque)*

I-4. LACUNES DE CERTAINES METHODES UTILISEES SUR LE TERRAIN

En gestion de projet, certaines méthodes de tri croisé sont réservées au classement et non à la pondération. C'est par exemple le cas de la version décrite dans la plupart des manuels d'Analyse de la Valeur (ex : [RAK90], [AFA94]). La méthode consiste à remplir une *demi-matrice de comparaisons* de manière qualitative. A la case (*i,j*) de la demi-matrice (*i* pour la ligne, *j* pour la colonne, avec $j>i$), on fait figurer l'intitulé de l'élément le plus important (élément *i* ou élément *j*) assorti d'un coefficient compris entre 0 et 3 selon que cet élément est jugé *aussi important (0)*, *légèrement plus important (1)*, *plus important (2)* ou *beaucoup plus important (3)* que l'autre élément (exemple : « *j* , *2* » signifie que l'élément *j* est *plus important* que l'élément *i*). De telles échelles exprimant une différence d'importance relative sont fréquemment utilisées dans la pratique par les méthodologues de l'Analyse de la Valeur. Dans un second temps, le poids de chacun des éléments est calculé comme étant le rapport des points qu'il a récoltés sur le total des points distribués à tous les éléments. Si le total des points distribués est nul on conclut bien entendu à l'égalité des poids. Cette procédure qui permet le classement des éléments impose, de manière inhérente, un poids nul aux éléments les moins importants. Il ne s'agit pas d'une méthode exacte au sens de la pondération (voir §I-3 et l'exemple ci-dessous).

Une autre méthode de *tri croisé* dénommée C.A.B.Q. décrite dans [BEL90] et présente dans plusieurs logiciels du marché se propose de corriger quelques travers (en tant qu'outil de pondération) de la version du *tri croisé* précédemment décrite. A la case (*i,j*) de la demi-matrice, l'utilisateur dispose d'un nombre fixe de points (en pratique 10) à répartir entre chacun des deux éléments *i* et *j* (exemple : 4 points pour *i* et 6 points pour *j*) afin d'estimer la *part d'importance relative* de chacun d'entre eux. Là encore, le poids d'un élément est calculé au prorata des points qui lui ont été attribués. La méthode C.A.B.Q. est elle aussi inexacte au sens de la pondération. Elle écrase le poids de l'élément le plus important en le limitant à $2/n$. En effet, si on considère que le quota de points par comparaison binaire est de 10, la limite supérieure de points que peut récolter un élément est de 10 pour chacune des comparaisons dans laquelle il intervient, soit $10\times(n-1)$ points. Le nombre total de points répartis sur les $n\times(n-1)/2$ cases de la demi-*matrice des comparaisons* étant de $10\times n\times(n-1)/2$, le poids limite est donc de :

$$\frac{10\times(n-1)}{10\times\frac{n}{2}\times(n-1)}=\frac{2}{n}.$$

Malgré ce biais, de nombreux praticiens utilisent cette méthode pour la pondération dans des processus de décision (ex : répartition de ressources).

L'exemple qui suit caractérise l'inexactitude des deux méthodes évoquées précédemment. Pour le jeu suivant de poids initiaux (supposés connus) : w_1=11%, w_2=11%, w_3=18%, w_4=60%, les poids prédits sont respectivement w_1=0%, w_2=0%, w_3=30,8%, w_4=69,2% pour la première méthode et w_1=17,3%, w_2=17,3%, w_3=24,5%, w_4=40,8% pour la seconde. Ainsi, en moyenne sur cet exemple, la valeur absolue des écarts entre les poids calculés et les poids initiaux est de 11% pour la première méthode évoquée et de 9,6% pour la seconde (méthode C.A.B.Q.). Or cet écart peut avoir des conséquences fâcheuses lors, par exemple, de l'utilisation du tri Croisé dans la pondération des coûts imputables à un projet pour mener une Conception à Coût Objectif (C.C.O.).

I-5. COHERENCE DES DONNEES D'ENTREE

La *matrice des comparaisons* renseignée à partir d'un jeu de poids préalablement connus est cohérente dans le sens où toutes les comparaisons élémentaires sont cohérentes entre elles. Lorsque les comparaisons expriment un rapport d'importance $c_{ij}=w_i/w_j$, la notion de cohérence, évoquée ici, est équivalente à la transitivité des comparaisons, c'est-à-dire : $c_{ih}\times c_{hj}=c_{ij}$, pour tout h, i, j =1,2,...,n. En toute généralité, le remplissage des comparaisons de la matrice se faisant de manière intuitive, la matrice n'a aucune chance d'être cohérente[5] car nous sommes en présence d'un système de n^2 équations[6] à n inconnues. Le système est en toute logique mathématique sur-contraint et sans solution. Les algorithmes de *tri croisé* doivent donc gérer cette incohérence, notamment sous sa forme la plus extrême, à savoir : la violation de la transitivité de la relation d'ordre. La *matrice des comparaisons* peut en effet comporter des rapports d'importance exprimant des illogismes du type $w_i>w_j$, $w_j>w_k$ et $w_k>w_i$. Il est très simple au niveau algorithmique de détecter ces incohérences cycliques et les deux méthodes précédemment citées à la section I-4 le font lorsqu'elles sont informatisées. En revanche, l'absence d'incohérences cycliques (respect de la cohérence *ordinale*) ne garantit pas la condition de transitivité présentée ci-dessus. Par exemple dans le cas de rapports d'importance, bien que les comparaisons c_{ij}=2 ; c_{jk}=2 ; c_{ik}=3 respectent la relation d'ordre $w_i>w_j>w_k$, la transitivité numérique (ou cohérence *cardinale*[7]) n'est pas vérifiée ($c_{ij}\times c_{jk}\neq c_{ik}$). La prise en compte de l'incohérence des comparaisons binaires est d'autant plus importante que le processus de décision peut intégrer les opinions de différents décideurs. Dans la pratique de la gestion de projet et en s'appuyant sur ce qui se fait en Analyse de la Valeur, il semble que peu de logiciels intégrant des fonctionnalités de tri croisé proposent un indicateur de *cohérence* des données d'entrée. Un tel indicateur permettrait pourtant d'éclairer la prise de décision (nous en reparlerons par la suite à partir du chapitre V).

[5] Soulignons que la notion d'incohérence d'un jeu de données d'entrée n'a rien à voir avec la propriété d'exactitude d'une méthode de tri croisé.

[6] Ce cas de figure correspond à une matrice des comparaisons comportant exactement une opinion par case. Dans le cas d'une matrice réciproque, $n\times(n-1)/2$ équations à n inconnues suffiraient. De manière plus générale, chaque comparaison exprimée correspond à une équation.

[7] La notion de cohérence numérique ou cardinale est plus générale que la notion de cohérence ordinale.

I-6. PRISE EN COMPTE DE L'INCERTITUDE

Pour différentes raisons[8], l'ensemble des opinions exprimées n'est jamais exempt d'incertitude. De nombreux auteurs (voir [DUB94*], [WOO89] et Chap.II) s'accordent à distinguer deux sortes d'incertitude : l'imprécision et l'incertitude dite stochastique ou aléatoire. Cette seconde catégorie renvoie plus généralement à la notion d'incohérence.

- ⇨ L'imprécision est inhérente au jugement. Dans le cadre d'un choix parmi un ensemble disjonctif de valeurs (ex : choix d'une note entre 0 et 10 lors d'une comparaison binaire exprimée en parts d'importance relative), l'imprécision d'une information exprime son incapacité à réduire l'ensemble des valeurs candidates (possibles) à une seule[9].
- ⇨ Un autre type d'incertitude peut se manifester en présence de plusieurs réalisations contradictoires d'une même variable dont on connaît mal le comportement. Il est alors difficile d'en donner une estimation ou d'en prédire les occurrences à venir[10]. Le traitement de ces différentes portions d'information, qui peuvent être individuellement précises tout en étant globalement incohérentes, conduit en général à des résultats, eux mêmes, entachés du même type d'incertitude. Dans le cadre du tri croisé, en présence par exemple de comparaisons cycliques il n'existe aucune solution exacte au problème posé. Le jeu de poids fourni est une solution approchée pour résoudre cette incohérence. De même, lorsque dans une procédure de tri croisé en groupe des valeurs différentes sont attribuées aux mêmes comparaisons binaires, les poids obtenus en sortie sont eux aussi marqués par cette disparité.

Cette définition de l'incertitude englobe la notion d'incohérence introduite à la section I-5. De manière générale, lorsque l'incertitude entache les comparaisons binaires elle doit très naturellement se répercuter sur les poids résultants et il est important de la prendre en compte. Des approches de la littérature prenant en compte l'incertitude seront présentées à la section II-2. Nous en reparlerons également dans les sections suivantes.

I-7. EXTENSION A L'AIDE A LA DECISION MULTICRITERE

L'aide à la décision en projet et plus particulièrement l'aide à la décision multicritère s'intéresse, le plus souvent, à la modélisation du processus de décision afin d'associer à un ensemble A d'alternatives de décision une structure d'ordre particulière. Sur le terrain cela peut répondre à des besoins différents. Par exemple :

---

[8] Le jugement est avant tout un traitement d'information. Outres les difficultés liées à la disponibilité et à la qualité des informations en entrée sur les éléments à comparer, le fait de restreindre le support du jugement à un seul critère peut conduire à l'hésitation, à l'erreur de jugement et même à la non décision. Dans le contexte du tri croisé, une comparaison peut relever de multiples dimensions imbriquées et difficiles à isoler les unes des autres. Il n'est pas toujours évident, dans ces conditions, de se ramener à un critère de jugement unique, clairement défini, consensuel et représentatif de l'ensemble des éléments à comparer.

[9] Supposons que l'on demande à un décideur quelle température aurait-il envie qu'il fasse le lendemain ? Quoi qu'il réponde, il lui sera difficile de justifier son choix à un degré prêt. Cette hésitation est indépendante de la nature imprévisible de la température. Elle reflète en quelque sorte les limites de sa sensibilité subjective. Dans une problématique de tri croisé, la quantification intuitive des comparaisons binaires s'accompagne naturellement de ce type d'incertitude que l'on désigne par imprécision inhérente au choix parmi un ensemble disjonctif de valeurs.

[10] C'est en particulier le cas des phénomènes aléatoires lorsqu'il s'agit par exemple de prédire le $(n+1)^{\text{ème}}$ résultat d'un jet de dé, connaissant les n résultats précédents.

- ⇨ la sélection d'un sous-ensemble optimal, aussi restreint que possible (ex : sélection d'une solution parmi *n*),
- ⇨ ou la répartition de ressources limitées (ex : répartition d'un budget sur les différentes tâches d'un projet).

Dans la littérature de l'aide à la décision multicritère, l'ensemble des alternatives de décision est souvent analysé deux à deux de manière qualitative en considérant un ensemble aussi restreint et représentatif que possible de situations de préférence (ex : {indifférence, préférence stricte}). Le *système relationnel de préférence* (s.r.p.) ainsi constitué induit, en fonction des situations de préférence qui le composent et de leurs propriétés (réflexivité, symétrie, asymétrie, transitivité,…), une structure d'ordre particulière sur l'ensemble d'alternatives considéré.

Parallèlement, la quête de la décision optimale a motivé de nombreux travaux sur la quantification des préférences à partir d'un s.r.p.. En d'autres termes, comment traduire la représentation qualitative obtenue en une représentation quantitative équivalente, compte tenu des propriétés que présente la structure d'ordre mise en évidence et des caractéristiques de l'ensemble d'alternatives *A* (ex : fini, dénombrable). La quantification des préférences passe par le choix de critères et d'échelles de jugement. Parmi d'autres, les approches hiérarchiques procèdent à une agrégation de ces critères de jugement en un critère de synthèse facilitant la prise de décision (pour plus de détail voir par exemple [ROY85]).

Comme nous l'avons déjà vu, le tri croisé permet de pondérer un ensemble d'éléments au regard d'un même et unique critère de jugement. Dans la littérature, l'approche A.H.P. [SAA77] offre un cadre de modélisation intéressant qui permet d'étendre le tri croisé à l'échelle d'une hiérarchie composée d'objectifs et de critères. Etant donné un ensemble *A* d'alternatives et dans le cas particulier d'une hiérarchie à deux niveaux, constituée d'un objectif global auquel sont associés des critères de jugement, A.H.P. préconise de décomposer le processus de décision en trois étapes :

1- pondérer l'ensemble des alternatives au regard de chacun des critères,

2- pondérer l'ensemble des critères relativement à l'objectif global,

3- calculer le poids global de chacune des alternatives comme la moyenne des poids obtenus sur chacun des critères, pondérée par les poids de ces critères.

I-8. APPRECIATION DES RAPPORTS D'IMPORTANCE

I-8.1. SIGNIFICATION DES POIDS

Le sens donné aux poids, notamment par la manière dont ils seront utilisés, peut avoir une influence non négligeable sur l'appréciation des rapports d'importance. Lorsque les poids expriment la manière selon laquelle une même ressource (ex : budget) doit être répartie sur différents éléments (ex : tâches), ils sont destinés à être les coefficients multiplicateurs d'une même quantité (la ressource en question). L'appréciation des rapports d'importance est alors relativement claire. Elle est en revanche plus sensible lorsque les éléments à pondérer sont des critères ou des objectifs destinés à la notation d'un ensemble d'alternatives. Les poids seront alors multiplicateurs de performances mesurées sur des échelles qui peuvent être de nature différente puisque associées à des critères ou à des objectifs différents. En fonction du mode d'agrégation de ces performances pondérées, les différences d'échelle peuvent avoir une incidence non négligeable sur l'appréciation des rapports d'importance.

Prenons le cas de la pondération d'un ensemble de critères intervenant dans le calcul d'une note moyenne. Si la formule d'agrégation est de type somme pondérée, l'estimation d'un rapport d'importance entre deux critères est homogène à un taux d'échange pondéré par un rapport d'échelles[11]. Si au contraire la formule d'agrégation est de type produit pondéré (moyenne géométrique), les rapports d'importance entre critères ne sont pas sensés prendre en compte les différences au niveau des échelles de mesure[12].

Il est aussi important de souligner que la procédure de tri croisé s'inscrit dans une hypothèse d'indépendance au sens des préférences. En d'autres termes, le décideur devrait pouvoir apprécier le rapport des parts d'importance associées à chaque couple d'éléments indépendamment de la manière dont le complément d'importance à 1 se répartit sur les éléments restants. Cette contrainte vaut aussi bien si les poids sont par la suite utilisés dans une somme pondérée ou un produit pondéré. Une revue plus détaillée des hypothèses sous-jacentes aux procédures d'agrégation est proposée dans [ROY85] ou [DUB94*].

La signification accordée aux poids n'étant pas explicitement développée dans la suite de ce document nous faisons ici l'hypothèse que le groupe de décision en tient compte de façon à avoir des poids pertinents.

I-8.2. ÉCHELLE DE NOTATION

Dans la littérature, différentes échelles de notation sont proposées pour l'estimation de l'importance relative de deux éléments. Elles relient, le plus souvent, différents degrés linguistiques d'importance à des ordres de grandeur numériques. C'est par exemple le cas de l'échelle proposée par Saaty [SAA77] pour estimer un rapport d'importance ($c_{ij}\approx w_i/w_j$) dans le cadre de la forme additive[13] de la méthode A.H.P. (Analytic Hierarchy Process, voir §I-7). L'échelle proposée comporte 9 échelons pour décrire différentes nuances allant d'une égale importance (c_{ij}=1) à une importance absolue de l'un des deux éléments (ex : i) par rapport à l'autre (c_{ij}=9) [14]. Il existe également des échelles dites géométriques. Citons à titre d'exemple, l'échelle associée à la forme multiplicative de la méthode A.H.P.[15]. Elle est de la forme

[11] Soit la somme pondérée $f(n_1, n_2,\ldots, n_N)=\sum_i(p_i\, n_i\, \beta_i)$ où n_i représente la note normalisée attribuée sur le critère i à une alternative donnée (dans une échelle commune à tous les critères) et β_i le facteur d'échelle spécifique au critère i. En passant à la dérivée partielle du premier ordre, on obtient la relation suivante $p_i/p_j=(\beta_i\times\partial f/\partial n_i)/(\beta_j\times\partial f/\partial n_j)$. Le rapport des poids est alors équivalent à un taux d'échange ($(\partial f/\partial n_i)/(\partial f/\partial n_j)$) pondéré par un rapport d'échelle (β_i/β_j).

[12] Soit le produit pondéré $f(n_1, n_2,\ldots, n_N)=\Pi_i(n_i\, \beta_i)^{p_i}$ où n_i représente la note normalisée attribuée sur le critère i à une alternative donnée (dans une échelle commune à tous les critères) et β_i le facteur d'échelle spécifique au critère i. En passant à la dérivée partielle du premier ordre, on obtient la relation suivante $p_i/p_j=(1/n_j\times\partial f/\partial n_i)/(1/n_i\times\partial f/\partial n_j)$. Le rapport des poids exprime, dans ce cas de figure, un taux d'échange relatif qui intègre la situation de départ (couple de notes) à partir de laquelle est envisagée la comparaison des deux critères. Il ne prend en revanche pas en compte les facteurs d'échelle. Pour plus de détail voir par exemple [LOO96] où Lootsma justifie cette non prise en compte par le fait que les facteurs d'échelle se simplifient lors de la comparaisons des notes obtenues par deux alternatives ($f(n_{1m}, n_{2m},\ldots, n_{Nm})/f(n_{1n}, n_{2n},\ldots, n_{Nn})=\Pi_i(n_{im}/n_{in})^{p_i}$). Dans cet article, l'auteur souligne entre autres l'adéquation de la moyenne géométrique au jugement humain, notamment lorsqu'il s'agit de pondérer des critères de jugement par référence à un champ de connaissance particulier mais indépendamment d'un contexte immédiat. Il propose un procédé d'appréciation des rapports d'importance dans lequel le décideur compare deux à deux les critères indépendamment des alternatives à noter.

[13] Les poids sont dans ce cas destinés à une agrégation de type somme pondérée.

[14] Cette échelle est en accord avec la limite de sensibilité du jugement humain à 7±2 échelons, conformément à des expérimentations psychologiques. Compte tenu de la symétrie du problème 17 échelons sont considérés au total : {1/9,1/8,…,1/2,1,2,…,8,9}.

[15] Les poids sont ici destinés à une agrégation de type produit pondéré.

$c_{ij} \approx w_i/w_j = \exp(\gamma\delta_{ij})$, avec γ un facteur d'échelle et $\delta_{ij} \in \{-8,-6,-4,\ldots,4,6,8\}$ un échelon numérique pouvant être associé à différentes appréciations linguistiques du rapport d'importance des éléments i et j. Une autre échelle géométrique, associée à la méthode SMART, consiste à poser $c_{ij}=(\sqrt{2})^{m_i-m_j}$, avec m_i et m_j des entiers pris entre 4 et 10 pour noter, respectivement, les critères i et j (voir [LOO96]) [16].

Dans la suite de ce document, nous n'adoptons pas d'échelle de notation particulière sur l'intervalle de définition des comparaisons binaires. Ceci dit, il est toujours possible d'utiliser une échelle, comme passerelle, pour traduire des données d'entrée linguistiques, provenant des décideurs, sous une forme numérique.

I-9. FONCTIONNALITES DE TRI CROISE UTILES A L'AIDE A LA DECISION EN PROJET

La liste qui suit détaille dix propriétés, que nous jugeons importantes pour aboutir à un outil flexible de *tri croisé* en environnement projet. Sans êtres exhaustives, les spécifications fonctionnelles proposées s'inscrivent dans l'optique d'une utilisation méthodologique, industrielle, ergonomique et de qualité. Elles viennent en réponse aux lacunes que nous avons constatées dans certains outils utilisés sur le terrain. Elles tiennent également compte des limitations dont souffrent certaines approches issues du monde de la recherche. Une revue de la littérature scientifique est proposée au chapitre suivant.

1) La méthode doit être exacte[17].
2) Les comparaisons doivent pouvoir être exprimées avec une certaine imprécision.
3) Un calcul de poids doit être rendu avec un degré de cohérence variant de 0 à 100% (100% pour une matrice parfaitement cohérente). En effet, il faut que l'individu ou le groupe projet dispose d'une mesure de la cohérence globale de son jugement, afin de pouvoir en estimer la pertinence au sein du processus de prise de décision considéré.
4) Ce degré de cohérence est encore plus utile si l'individu ou le groupe est informé des comparaisons sur lesquelles il a été le plus incohérent (compte tenu de sa stratégie de vote et de l'ensemble des données d'entrée) pour pouvoir, s'il le désire, réviser son jugement.
5) Les données de la *matrice des comparaisons* doivent pouvoir être incomplètes. En effet, il se peut par exemple qu'aucun expert du groupe de travail ne connaisse suffisamment bien deux éléments pour se prononcer sur leur rapport d'importance.
6) Plusieurs *opinions* doivent pouvoir être exprimées au niveau d'une comparaison, ce nombre pouvant varier d'une comparaison à l'autre.
7) Lorsque l'ordre des éléments à comparer influe sur l'issue d'une comparaison binaire, on doit pouvoir considérer indépendamment les deux arrangements : (i,j) et (j,i). C'est

[16] L'échelle qui comporte une raison de progression géométrique de $\sqrt{2}$ est plus précisément dédiée à la pondération des critères de jugement. Pour l'échelle $c_{ij} \approx w_i/w_j = \exp(\gamma\delta_{ij})$, cela revient à poser $\gamma = \log(\sqrt{2})$. Pour pondérer les alternatives associées au processus de décision, la raison de progression géométrique est usuellement de 2.

[17] Bien entendu, pourquoi autoriserait-on une distorsion des jugements élémentaires que sont les comparaisons binaires ?

le cas par exemple des comparaisons par les sens : lorsqu'on goûte un aliment *i* avant un aliment *j*, le résultat peut être différent de la procédure inverse car le palais s'habitue au premier aliment. Il en va de même pour le toucher, l'ouïe ou la vue.

8) On doit pouvoir traiter le cas des tests en aveugle pour lesquels l'identité des éléments à comparer n'est pas révélée. Dans la mesure où on ne sait pas ce que l'on compare, on peut trouver des différences entre des éléments identiques. Sur des *matrices de comparaisons* constituées de rapports d'importance, cela revient à autoriser que les comparaisons situées sur la diagonale (c_{ii}) soient différentes de 1.

9) A l'ère du travail distribué (groupware, internet), il faut pouvoir permettre à plusieurs personnes de travailler à un même tri croisé de manière répartie (chaque votant étant associé à une partie de la *matrice des comparaison*s) et asynchrone.

10) Les algorithmes exacts de tri croisé présents dans la littérature ne couvrent pas de manière exhaustive les différents protocoles de tri existants dans la pratique (tri en aveugle, vote à distance, vote asynchrone, etc.). Une plate-forme de tri croisé devrait permettre de décrire le problème de manière fonctionnelle et de sélectionner, en interne, les meilleurs algorithmes de résolution, ceci dans un souci de transparence pour l'utilisateur.

I-10. SYNTHESE ET PERSPECTIVES

Ce premier chapitre dépeint, en s'appuyant sur quelques exemples, le contexte d'utilisation des méthodes de tri croisé en projet. Il en présente également le principe de base et souligne les lacunes constatées dans certains outils de la pratique. Ces lacunes peuvent avoir des conséquences non négligeables dans la mesure où ces outils sont associés à l'évaluation de paramètres intervenant dans les processus de décision.

Nous introduisons ensuite la structure matricielle associée à la saisie des comparaisons binaires d'éléments. Ces comparaisons binaires constituent les données d'entrée de base d'une procédure de tri croisé. Nous passons également en revue certaines propriétés du tri croisé, notamment l'exactitude et la cohérence. Nous rappelons aussi la sensibilité d'une telle approche au sens accordé aux poids et évoquons l'utilité opérationnelle des échelles de notation, tout en précisant que ces deux aspects ne sont pas explicitement pris en compte dans ce travail.

Un autre aspect important concerne l'incertitude qui peut entacher les comparaisons binaires en entrée d'une procédure de tri croisé. La notion d'incertitude est abordée de manière générique. Elle englobe l'imprécision inhérente au jugement mais aussi l'incohérence induite par la coexistence possible, à travers les comparaisons binaires, de portions d'information non concordantes. La prise en compte de l'incertitude constitue une part importante de notre travail de thèse.

Ce premier chapitre propose enfin un cahier des charges regroupant des fonctionnalités que nous jugeons indispensables à un outil de tri croisé destiné à l'environnement projet. Les spécifications qui y sont consignées viennent principalement en réponse aux lacunes et aux limitations constatées dans les approches existantes. Cela concerne également des méthodes issues de la recherche qui seront introduites au chapitre suivant, consacré à la revue de la littérature scientifique.

II. REVUE DE LA LITTERATURE SCIENTIFIQUE

Cette revue de la littérature est dédiée aux travaux conduits dans le monde de la recherche. Elle comporte deux parties. La première est consacrée à la présentation de différentes méthodes de tri croisé déterministes[18]. Nous y rappelons également quelques concepts de base (ex : cohérence, transitivité, réciprocité) permettant de caractériser les comparaisons binaires associées à une procédure de tri croisé. Ils ont été pour la plupart introduits de manière vulgarisée au chapitre précédent. La seconde partie est consacrée à la prise en compte de l'imprécision inhérente à la comparaison de tout couple d'éléments.

II-1. APPROCHES DETERMINISTES

Pondérer un ensemble de n éléments au regard d'un critère unique en utilisant la méthode de tri croisé de base nécessite l'estimation de n^2 rapports de poids (ou d'importances au regard du critère de jugement considéré), comme le montre la matrice donnée en figure II–1. Lorsque les comparaisons symétriques sont inverses l'une de l'autre ($c_{ij}=1/c_{ji}$; $i,j = 1,2,...,n$), la *matrice des comparaisons* est dite réciproque. Il suffit alors de renseigner la demi matrice supérieure ($n\times(n-1)/2$ comparaisons binaires). C'est le cas lorsque la comparaison entre deux éléments peut être faite indifféremment dans un sens ou dans l'autre. Ce cas de figure est le plus fréquent[19].

$$\begin{array}{c|cccc} & e_1 & e_2 & \dots & e_n \\ \hline e_1 & c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ e_2 & c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ e_n & c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{array}, \quad \text{avec } c_{ij} \approx \frac{w_i}{w_j}$$

figure II–1 : Matrice des comparaisons binaires

La *matrice des comparaisons* est dite cohérente si et seulement si la condition de transitivité $c_{ih}\cdot c_{hj}= c_{ij}$, est vérifiée pour tout $h, i, j = 1,2,...,n$. Les incohérences cycliques brièvement présentées en introduction violent cette condition mais elles ne représentent qu'un cas particulier des incohérences. A moins de connaître a priori les poids de chacun des éléments (mais le problème n'existerait plus), il est peu probable de construire une *matrice de comparaisons* cohérente. En effet, compte tenu de l'intuition et de l'imprécision qui

[18] Nous entendons par déterministe : « ne faisant pas intervenir d'imprécision dans le chiffrage des comparaisons binaires ».

[19] Un contre-exemple peut être celui de la comparaison d'aliments, le palais se transformant au fur et à mesure de la gustation.

caractérisent le jugement humain, cela reviendrait à lier les n^2 équations que sont les comparaisons binaires de sorte qu'elles se réduisent à n équations linéairement indépendantes.

II-1.1. APPROCHE BASEE SUR L'ANALYSE DES VALEURS PROPRES (V.P.)

Une matrice à valeurs positives admet une plus grande valeur propre (en module) λ_{max} qui est unique (de multiplicité 1) et réelle positive. Le vecteur propre qui lui correspond est déterminé à un facteur multiplicatif près et ses composantes sont de même signe (théorème de Perron et Frobenius, voir [SAA77]). Pour une *matrice de comparaisons* faiblement incohérente[20], Saaty propose d'adopter ce vecteur propre (associé à λ_{max}) comme approximation du jeu de poids recherché. Le vecteur propre en question est alors normalisé de sorte que la somme de ses composantes soit égale à 1.

Saaty présuppose la matrice des comparaisons réciproque. Il démontre, dans ce cas de figure, que $\lambda_{max} \geq n$ et que la matrice est cohérente si et seulement si $\lambda_{max}=n$. Sous cette condition de réciprocité, il propose également un indicateur de cohérence équivalent à une mesure de la variance des erreurs de jugement (§V-1.1).

Dans une étude comparative, Herman et Koczkodaj [HER96] testent plusieurs méthodes de tri croisé pour estimer selon différentes métriques la distance entre la matrice de départ C et la matrice cohérente C^*, reconstruite à partir du jeu de poids obtenu. Les auteurs soulignent que l'approche basée sur l'analyse des valeurs propres semble statistiquement la plus appropriée si le critère retenu est la minimisation de l'écart maximal en valeur absolue : $max(|c_{ij} - c_{ij}^*|)$; $i,j=1,2,...,n$.

II-1.2. APPROCHE BASEE SUR LA REGRESSION LOGARITHMIQUE SELON LES MOINDRES CARRES (R.L.M.C.)

définition II–1

Soit c_{ijk}, $i,j=1,2,...,n$, $k=1,2,...,d$, l'opinion du $k^{ème}$ décideur pour comparer l'importance de l'élément i relativement à celle de l'élément j, d étant le nombre de décideurs. Pour tout arrangement binaire d'éléments, un décideur a le choix entre exprimer une seule opinion ou s'abstenir. Pour avoir une notation homogène, posons α_{ijk} ($i,j=1,2,...,n$, $k=1,2,...,d$) un facteur qui vaut 1 si le décideur k exprime une opinion ($c_{ijk} \in]0 ; +\infty[$) et 0 sinon. Lorsque $\alpha_{ijk}=0$, la valeur de c_{ijk} est arbitrairement *f*ixée à une valeur positive ($c_{ijk}=c_0>0$).

Dans ce contexte :

1- une *matrice de comparaisons* est dite réciproque si et seulement si les opinions symétriques, issues d'un même décideur, sont soient toutes deux non exprimées, soient toutes deux exprimées et qu'elles sont, dans ce dernier cas de figure, inverses l'une de l'autre ($\alpha_{ijk}\, c_{ijk} = \alpha_{jik}\, 1/c_{jik}$; $i, j = 1,2,...,n$; $k=1,2,...,d$),

2- la condition de transitivité qui garantit la cohérence de la *matrice des comparaisons* s'énonce comme suit : $\alpha_{ihk}c_{ihk} \times \alpha_{hjk}c_{hjk} = \alpha_{ijk}c_{ijk}$, pour tout $h, i, j = 1,2,...,n$; $k=1,2,...,d$.

[20] Saaty souligne le fait que le calcul des poids n'a de sens que pour une *matrice de comparaisons* faiblement incohérente. Pour une *matrice de comparaisons* cohérente, la solution est triviale puisque chacune des colonnes de la matrice restitue le jeu de poids recherché, à un facteur multiplicatif près.

L'approche précédente (V.P.) nécessite exactement une opinion par comparaison binaire. En présence de multiples décideurs ou au contraire d'une comparaison non renseignée, De Graan [DEG80] et Lootsma [LOO82] proposent une approche basée sur une régression logarithmique selon les moindres carrés[21] (voir §III-1), approche dénotée par la suite R.L.M.C..

La transformation logarithmique permet d'obtenir une relation linéaire entre une comparaison et la paire de poids qui lui est associée ($c_{ijk} \approx w_i/w_j \Leftrightarrow log(c_{ijk}) \approx log(w_i) - log(w_j)$, si $\alpha_{ijk}=1$). Le problème peut alors être posé en termes de minimisation d'une fonction de régression linéaire (voir §III-1) au sens des moindres carrés. La fonction à minimiser est donnée par la formule II–1.

formule II–1
$$f = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} \sum_{k=1}^{d} \alpha_{ijk} \left(\log(c_{ijk}) - \left(\log(w_i) - \log(w_j) \right) \right)^2$$

Sous cette forme, les opinions symétriques sont supposées inverses l'une de l'autre ($\alpha_{ijk}\, c_{ijk} = \alpha_{jik}\, 1/c_{jik}$; $i, j = 1,2,...,n$; $k=1,2,...,d$) et les opinions diagonales sont toutes supposées égales à 1.

Du fait qu'un jeu de poids soit déterminé à un facteur multiplicatif près, les équations normales correspondant aux n poids recherchés sont linéairement dépendantes (de rang $n-1$). Pour éliminer cette dépendance il suffit de fixer l'un des poids à une valeur positive (non nulle) arbitraire. Après avoir fixé arbitrairement w_n à 1, les équations normales modifiées sont données par la formule II–2.

En présence de comparaisons non renseignées (aucune opinion sur l'ensemble des décideurs), l'estimation des poids reste possible tant que le système d'équations normales conserve autant de degrés de liberté que d'inconnues (rang $n-1$). Pour satisfaire cette condition, chaque élément doit être impliqué dans au moins une opinion et il ne doit pas exister deux éléments i et j disjoints, tels que $\alpha_{ihk} \times \alpha_{hjk} = 0 \quad \forall k=1,2,...,d, \quad \forall h=1,2,...,n$ (les opinions manquantes ne doivent pas isoler i de j par transitivité).

formule II–2
$$\theta_i \sum_{j \neq i}^{n} d_{ij} - \sum_{j \neq i}^{n-1} d_{ij} \theta_j = \sum_{j \neq i}^{n} \sum_{k=1}^{d} \alpha_{ijk} b_{ijk}, \quad i = 1,2,...,n\text{-}1 \; ;$$

avec
$$\begin{cases} \theta_i \approx \log(w_i), \quad i = 1,2,...,n, \\ \theta_n = 0, \quad \text{(poids fixé arbitrairement à 1)} \\ b_{ijk} = \log(c_{ijk}), i,j = 1,2,...,n; \; k = 1,2,...,d, \\ d_{ij} = \sum_{k=1}^{d} \alpha_{ijk}^2 = \sum_{k=1}^{d} \alpha_{ijk}, i,j = 1,2,...,n, \\ d_{ij} : \text{nombre total d'opinions exprimées sur la comparaison } c_{ij}. \end{cases}$$

[21] Dans la suite de ce document, on emploiera également l'intitulé « régression selon les moindres carrés logarithmiques » pour désigner cette approche.

Lorsqu'elle existe, la solution se présente sous la forme $\theta_i \approx log(w_i)$[22], $i = 1,2,...,n$. L'estimation du jeu de poids recherché est obtenue en appliquant la transformation inverse de la transformation logarithmique utilisée au niveau des comparaisons binaires[23]. Le jeu de poids proposé est ensuite normalisé pour que la somme des poids soit égale à 1.

En présence de exactement une opinion par comparaison, la solution normalisée est équivalente à celle donnée par la méthode de la moyenne géométrique sur les lignes (M.G.L.) et présentée par la formule II–3 [BOE89].

formule II–3 $$w_i \approx \frac{r_i}{\sum_{s=1}^{n} r_s}, \quad i = 1,2,...,n; \quad \text{avec} \quad r_s = \left(\prod_{j=1}^{n} c_{sj} \right)^{1/n}, \quad s = 1,2,...,n.$$

Dans certaines applications (ex : dégustation et plus généralement comparaison par les sens) et pour une même paire d'éléments, les comparaisons symétriques ne sont pas nécessairement inverses l'une de l'autre. Pour de tels cas, l'approche logarithmique reste valable. La formulation correspondante est proposée à la section III-1 sous la désignation R.L.M.C.G. (G. pour généralisée). En présence de exactement une opinion par comparaison, une approche équivalente à R.L.M.C.G. a été proposée par Koczkodaj et Orlowski [KOC99] sous la désignation de Moyenne Géométrique sur les Lignes et les Colonnes (M.G.L.C.). Leur algorithme qui généralise la méthode M.G.L. permet en partant d'une *matrice de comparaisons* incohérente C, de générer la matrice cohérente C^* qui s'en approche le plus au sens des moindres carrés logarithmiques ($\sum(\log(c_{ij}^*)-\log(c_{ij}))^2$; $i,j=1,2,\ldots,n$). L'estimation du jeu de poids recherché est donnée par la colonne de C^* correspondant au poids ayant été arbitrairement fixé à 1 (pour les mêmes raisons que dans R.L.M.C.). Cette approche sera détaillée à la section §III-2.

II-1.3. RECAPITULATIF DES APPROCHES DETERMINISTES PRESENTEES

Le tableau ci-dessous présente une synthèse des différentes approches déterministes présentées à la section II-1. Dans la dernière colonne il faut relativiser la notion d'optimalité. Lorsqu'une matrice est très peu cohérente, une solution n'aura pas de sens physique même si elle est optimale au sens d'une certaine métrique. Une métaphore illustrant cet aspect est proposée au niveau de l'introduction du chapitre V.

[22] Le signe « ≈ » est là pour rappeler que la solution proposée n'est qu'une estimation (optimisée) du jeu de poids recherché.

[23] Dans ce document, comme c'est souvent le cas dans la littérature, on utilisera par défaut le logarithme népérien au niveau des comparaisons binaires et la fonction exponentielle comme transformation inverse.

Méthode déterministe	Biblio-graphie	Matrice réciproque	Remplissage matrice	Opinions par comparaison	Commentaire sur la solution
V.P.	[SAA77]	oui[24]		1	bonne selon le critère $max(\lvert c_{ij}-c_{ij}^{*}\rvert)$, $i,j=1,2,...,n$
R.L.M.C.	[DEG80] [LOO82]	oui		0, 1, ou plus	optimale au sens des moindres carrés logarithmiques
M.G.L.	[BOE89]	non		1	optimale au sens des moindres carrés logarithmiques si la *matrice des comparaisons* est réciproque
M.G.L.C.	[KOC99]	non		1	optimale au sens des moindres carrés logarithmiques

tableau II–1 : Récapitulatif des différentes méthodes déterministes rencontrées dans la littérature

II-2. PRISE EN COMPTE DE L'IMPRECISION INHERENTE AU JUGEMENT HUMAIN

La plupart des travaux que nous avons relevés dans la littérature sont basés sur deux approches : la logique floue et la théorie des probabilités[25]. Chacune de ces deux approches permet de modéliser la notion d'imprécision au sens d'un choix parmi un ensemble disjonctif d'éléments.

Lors de la comparaison de deux éléments (e_i, e_j), un décideur peut hésiter entre plusieurs valeurs pour estimer le rapport w_i/w_j. Modéliser cette hésitation par la logique floue revient à associer à chaque valeur envisagée un coefficient graduel entre 0 et 1 qui traduit le degré de vraisemblance ou de possibilité que lui accorde le décideur. Par opposition à la logique bi-valuée (soit 0, soit 1) classique, la logique floue est une logique multi-valuée. Elle permet une

[24] La méthode V.P. s'applique en théorie à toute matrice à valeurs positives. Ceci dit, Saaty présuppose dans son approche la réciprocité de la *matrice des comparaisons*. Cette condition sous-tend, en particulier, les résultats qu'il propose au niveau de l'appréciation de la cohérence (voir §II-1.1).

[25] Bien que les approches basées sur la logique floue ou la théorie des probabilités soient parmi les plus utilisées, elles ne sont pas les seules dédiées à la représentation et au traitement de l'imprécision inhérente au jugement. A titre d'exemple, Arbel [ARB89] propose d'encadrer chaque rapport d'importance par deux valeurs. Les intervalles ainsi obtenus sont ensuite traduits en un système d'inéquations définissant un espace de solutions réalisables. En s'appuyant sur une approche de type programmation linéaire, l'étude des propriétés de cette région peut fournir d'utiles informations quant à la robustesse du classement des éléments à pondérer. Par ailleurs, en présence de fortes incohérences, l'auteur préconise une procédure en vue d'identifier et de traiter les opinions les moins cohérentes.

représentation qualitative mais, en revanche, assez fine de la notion d'imprécision, notamment à travers la théorie des possibilités. Cette dernière permet de représenter et de traiter de manière qualitative l'imprécision d'une information exprimée dans le langage naturel. Elle offre, en particulier, une certaine expressivité de concept (ex : possibilité, certitude, nécessité) propice à mettre en valeur les nuances du raisonnement et du langage naturel. Selon Wood et al. [WOO89] et Dubois et al. [DUB94*] la représentation et le traitement des incertitudes de jugement par la logique floue et notamment la théorie des possibilités est l'approche la plus appropriée lorsque l'incertitude en question traduit une hésitation ou une imprécision du décideur quant à l'expression de sa préférence. A l'inverse l'approche probabiliste s'impose lorsque l'incertitude est d'origine stochastique. Dans l'approche probabiliste, il s'agit d'estimer la fréquence ou la vraisemblance (les chances) d'occurrence d'une valeur relativement à toutes les valeurs de comparaison jugées possibles. L'approche probabiliste aborde l'imprécision de manière quantitative et donc plus riche mais, en revanche, moins flexible (nuancée) que la logique floue. Dubois et Prade, auteurs de nombreux travaux dans le domaine de la logique floue, proposent dans [DUB94*] une revue comparative plus détaillée des deux approches. Toujours dans le cadre d'un choix parmi un ensemble disjonctif de valeurs, Wood et al. [WOO89] préconisent une procédure intermédiaire. Elle s'appuie sur l'idée d'un découplage entre la nature stochastique d'une information et le mécanisme de calcul probabiliste. L'approche consiste à utiliser le mécanisme de calcul probabiliste, de manière indépendante, pour traiter une courbe d'imprécision de nature non stochastique.

II-2.1. APPROCHES BASEES SUR LA LOGIQUE FLOUE

définition II–2

Un nombre flou imprécis $\tilde{a}$ est défini par la donnée d'une distribution de possibilité[26] $\pi_{\tilde{a}}$ qui associe aux éléments d'un ensemble numérique U (ex : $\Re$) différents degrés de possibilité ou de vraisemblance sur une échelle qualitative (ordinale) qui varie de 0 à 1 (voir les principes de la logique floue dans [ZAD75] par exemple).

Van Laarhoven et Pedrycz [VAN83], ont proposé une extension du principe de la régression logarithmique selon les moindres carrés à la prise en compte de l'imprécision. Pour cela, ils considèrent chaque comparaison binaire comme un nombre flou dont la fonction d'appartenance est triangulaire. Pour un rapport d'importance c_{ijk}, exprimé par un décideur k pour comparer deux éléments (e_i, e_j), une fonction d'appartenance associe à toute valeur possible de ce rapport (il y en a une infinité), un degré d'appartenance à la notion « précis » (situé entre 0 et 1). Une fonction d'appartenance triangulaire est ainsi définie par une valeur basse (c_{ijkb}), une valeur modale (c_{ijkm}) et une valeur haute (c_{ijkh}) (voir figure II–2). Les poids résultants sont également donnés sous forme de nombres flous triangulaires.

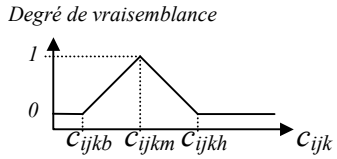


figure II–2 : Nombre flou triangulaire

[26] Une distribution de possibilité est équivalente à une fonction d'appartenance à la notion "possible".

Comme dans l'approche déterministe, une opinion exprimée a pour symétrique son inverse ($(c_{ijkb}, c_{ijkm}, c_{ijkh}) = (1/c_{jikh}, 1/c_{jikm}, 1/c_{jikb})$). La fonction de régression à minimiser est donnée par la formule II–4.

formule II–4

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n}\sum_{k=1}^{d}\begin{pmatrix}\alpha_{ijk}\{b_{ijkb}-\theta_{ib}+\theta_{jh}\}^2\\ +\alpha_{ijk}\{b_{ijkm}-\theta_{im}+\theta_{jm}\}^2\\ +\alpha_{ijk}\{b_{ijkh}-\theta_{ih}+\theta_{jb}\}^2\end{pmatrix}$$

$$\text{avec}\quad \begin{vmatrix}\theta_{iz}\approx\log(w_{iz}),\quad i=1,2,...,n,\ z\in\{b,m,h\}\\ b_{ijkz}=\log(c_{ijkz}),\quad i,j=1,2,...,n,\ k=1,2,...,d,\ z\in\{b,m,h\}\end{vmatrix}$$

Après avoir fixé arbitrairement[27] (w_{nb}, w_{nm}, w_{nh}) à (1, 1, 1), les équations normales correspondantes sont données par la formule II–5.

formule II–5

$$\theta_{ib}\sum_{j\neq i}^{n}d_{ij}-\sum_{j\neq i}^{n-1}d_{ij}\theta_{jh}=\sum_{j\neq i}^{n}\sum_{k=1}^{d}\alpha_{ijk}b_{ijkb},\quad i=1,2,...,n-1$$

$$\theta_{im}\sum_{j\neq i}^{n}d_{ij}-\sum_{j\neq i}^{n-1}d_{ij}\theta_{jm}=\sum_{j\neq i}^{n}\sum_{k=1}^{d}\alpha_{ijk}b_{ijkm},\quad i=1,2,...,n-1$$

$$\theta_{ih}\sum_{j\neq i}^{n}d_{ij}-\sum_{j\neq i}^{n-1}d_{ij}\theta_{jb}=\sum_{j\neq i}^{n}\sum_{k=1}^{d}\alpha_{ijk}b_{ijkh},\quad i=1,2,...,n-1$$

$$\text{avec}\quad \begin{vmatrix}\theta_{iz}\approx\log(w_{iz}),\quad i=1,2,...,n,\ z\in\{b,m,h\},\\ \theta_{nz}=0,\quad z\in\{b,m,h\},\ \text{(poids fixé arbitrairement à 1)}\\ b_{ijkz}=\log(c_{ijkz}),\quad i,j=1,2,...,n,\ k=1,2,...,d,\ z\in\{b,m,h\},\\ d_{ij}=\sum_{k=1}^{d}\alpha_{ijk}^2=\sum_{k=1}^{d}\alpha_{ijk},\ i,j=1,2,...,n.\end{vmatrix}$$

La procédure de normalisation utilisée a été critiquée par Boender et al. [BOE89] dans la mesure où elle détériore l'optimum obtenu avant normalisation. Ils démontrent en effet que la *matrice des comparaisons* étant réciproque, une solution de la formule II–5 est nécessairement de la forme ($k_1 exp(\theta_{ib})$, $k_2 exp(\theta_{im})$, $k_1 exp(\theta_{ih})$), k_1 et k_2 étant deux constantes positives arbitraires. Or, la procédure de normalisation proposée par Van Laarhoven et Pedrycz ramène la solution à la forme ($k_1 exp(\theta_{ib})$, $k_2 exp(\theta_{im})$, $k_3 exp(\theta_{ih})$) avec $k_1=[\sum_i(exp(\theta_{ih}))]^{-1} \neq k_3=[\sum_i(exp(\theta_{ib}))]^{-1}$ en présence d'imprécision. Pour corriger ce biais, Boender et al. proposent la procédure de normalisation donnée par la formule II–6.

[27] Conformément à la section §II-1.2, le système d'équations normales est linéairement dépendant du fait que les poids soient déterminés à un facteur multiplicatif près. Pour éliminer cette dépendance, il suffit de fixer l'un des poids à une valeur positive (non nulle) arbitraire.

formule II–6

$$\begin{pmatrix} w_{ib} \\ w_{im} \\ w_{ih} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \dfrac{\exp(\theta_{ib})}{\left(\sum_{j=1}^{n}\exp(\theta_{jb})\cdot\sum_{j=1}^{n}\exp(\theta_{jh})\right)^{1/2}} \\ \dfrac{\exp(\theta_{im})}{\sum_{j=1}^{n}\exp(\theta_{jm})} \\ \dfrac{\exp(\theta_{iu})}{\left(\sum_{j=1}^{n}\exp(\theta_{jb})\cdot\sum_{j=1}^{n}\exp(\theta_{jh})\right)^{1/2}} \end{pmatrix}, \; i = 1,2,\ldots,n.$$

Les poids flous, issus de cette nouvelle procédure de normalisation, sont toutefois susceptibles de violer la relation d'ordre « *valeur basse≤valeur moyenne≤valeur haute* », dite condition de rationalité. Pour éviter ce problème, Boender et al. suggèrent de considérer cette condition comme une contrainte supplémentaire à prendre en compte lors de la résolution du système d'équations normales (formule II–5). Une autre solution, proposée par Gogus et al. [GOG97] et validée sur des problèmes à trois éléments, consiste à imposer aux comparaisons binaires une condition dite de rationalité partielle afin de garantir la relation d'ordre « *valeur basse≤valeur haute* ».

Une autre extension des approches classiques à la prise en compte de l'imprécision est proposée par Buckley [BUC85]. Elle ne souffre pas du biais précédent et ne se limite pas à des nombres flous triangulaires. Elle requiert par contre une formulation analytique des poids en fonction des opinions, avec des opérateurs algébriques classiques (ex : +,- , ×, ÷) qui soient extensibles à la logique floue. Par exemple la méthode M.G.L. fournit une telle formulation comme l'illustre la formule II–3. La généralisation de la partie droite de cette équation à des nombres et à des opérateurs flous[28] permet ensuite de calculer le jeu de poids recherché. Cette généralisation de la méthode M.G.L. a été critiquée compte tenu du fait que les poids qu'elle fournissait étaient moins précis que ceux fournis par l'approche proposée par Boender et al.. La procédure de combinaison des nombre flous utilisée par Buckley souffre en effet de divers biais qui se traduisent par une surestimation de l'imprécision. Cette distorsion peut être en partie palliée par l'algorithme F.W.A. [DON87]. Ce point est développé au niveau du chapitre IV.

II-2.2. APPROCHES PROBABILISTES

L'approche probabiliste permet, elle aussi, une extension des approches déterministes de tri croisé à la prise en compte de l'imprécision. Elle permet de connaître de manière analytique ou simulée une estimation des distributions de probabilité des différents poids. Cela implique néanmoins certaines conditions (ex : hypothèse d'indépendance) que doivent vérifier les distributions des variables aléatoires d'entrée, que sont les opinions exprimées au niveau des comparaisons binaires.

Après une brève revue de la littérature et la présentation d'un ensemble de résultats sur les distributions dites réciproques, Escobar et Moreno-Jiménez [ESC00] ont proposé une extension des méthodes V.P. (§II-1.1) et M.G.L. (formule II–3, §II-1.2). Par rapport aux

[28] Le principe d'extension *max*(∨)-*min*(∧), proposé par Zadeh [ZAD75], généralise les opérateurs algébriques usuels, associés aux nombres réels (ex : + ,-,×,÷), pour les rendre applicables aux nombres flous.

approches déterministes d'origine, ils soumettent la *matrice des comparaisons* à des contraintes supplémentaires à savoir être réciproque pour l'approche M.G.L. et cohérente pour l'approche V.P.. Les opinions de la *matrice des comparaisons* sont assimilées à des variables aléatoires supposées indépendantes et respectivement représentées par une distribution réciproque. Les auteurs démontrent que le jeu de poids correspondant se présente, lui aussi, sous forme de distributions réciproques dont ils donnent l'expression analytique. La connaissance de ces probabilités permet des déductions intéressantes concernant la stabilité du classement des différentes alternatives (voir également [SAA87]).

Pour la prise en compte de l'imprécision, les approches de type analytique présentent souvent l'avantage d'être explicites (formulation exacte de la solution) et rapides en temps de calcul. Elles nécessitent en revanche des hypothèses souvent restrictives. Les approches de type simulation sont en général plus flexibles et plus robustes. Ceci dit, elle conduisent à des solutions approchées (moins explicites) et nécessitent des temps de calcul souvent supérieurs (lorsque des approches analytiques plus directes sont applicables).

Au-delà de la problématique du tri croisé, les méthodes dites de Monte Carlo[29] sont parmi les plus utilisées [BUS66] en simulation. L'approche de Monte Carlo, que nous utilisons à la section VI-2, consiste à effectuer, à partir d'un tirage aléatoire sur chacune des opinions (associée à une distribution de probabilité), un calcul de tri croisé déterministe. Cette procédure de base est réitérée un nombre suffisant de fois pour avoir une approximation de la distribution de probabilité de chacun des poids. Ceci dit, notre contribution à la problématique du tri croisé ne se situe pas au niveau de la prise en compte de l'imprécision d'origine probabiliste. Notre apport, se fera principalement sur des développements connexes, notamment au niveau de la prise en compte des incohérences de jugement (indicateurs de cohérence et boucles de correction d'incohérence) permettant une approche globale adaptée à la prise de décision en projet. Nous développerons plus en détail cet aspect « plate-forme de tri croisé » au niveau du chapitre VI.

II-3. SYNTHESE ET PERSPECTIVES

Dans ce deuxième chapitre on voit clairement l'éventail des solutions qui sont apportées par la littérature scientifique en réponse aux spécifications préconisées à la section I-9 pour caractériser une méthode de tri croisé utile à l'aide à la décision en projet. Cela concerne en particulier les huit premières spécifications. Soulignons, par ailleurs, que les approches présentées dans ce chapitre ne sont pas toutes récentes. Pour autant, elles ne souffrent pas des biais que nous avions relevés dans certaines méthodes inexactes utilisées à l'heure actuelle sur le terrain. Cela donne une mesure du gouffre qui sépare le monde de la recherche de celui de la pratique.

Dans les chapitres suivants nous allons tenter d'affiner certaines de ces approches théoriques en traitant principalement trois aspects : le caractère générique d'une approche de tri croisé, la prise en compte de l'imprécision inhérente au jugement et la gestion de son incohérence.

[29] Les méthodes dites de Monte Carlo modélisent un problème sous forme de variables indépendantes qui sont simulées (opinions) et de variables dépendantes (poids) qui sont calculées à partir de ces variables indépendantes. Elles nécessitent l'utilisation d'un générateur de nombres aléatoires à partir duquel sont effectués les tirages sur les distributions de probabilité des variables indépendantes. En fonction de la précision de l'information recherchée, un nombre plus ou moins important de simulations est à prévoir.

Nous tenterons ensuite de recentrer notre travail sur la pratique en apportant des éléments de réponse aux deux dernières fonctionnalités préconisées à la section I-9. Nous aborderons en particulier la question du paramétrage fonctionnel de la stratégie de vote et celle de la prise en compte du caractère souvent asynchrone et délocalisé des compétences impliquées dans un projet.

III. EXTENSION ET COMPARAISON DES APPROCHES R.L.M.C. ET M.G.L.C.

Les approches déterministes proposées au §II-1 présupposent des hypothèses souvent restrictives sur la *matrice des comparaisons*. L'approche R.L.M.C. présentée présuppose que la *matrice des comparaisons* soit réciproque alors que l'approche M.G.L.C. exige qu'elle contienne exactement une opinion par case (i,j). Dans ce chapitre, nous montrons que l'extension de chacune de ces deux approches à une *matrice des comparaisons* générale aboutit à une formulation commune du problème. Nous proposons également une formulation analytique des poids solution plus générale que celle donnée par l'approche M.G.L.C.

III-1. EXTENSION DE L'APPROCHE R.L.M.C.

Un modèle de régression peut être perçu comme une approximation optimisée de la relation qui peut exister entre une variable dite dépendante (supposée aléatoire) et un ensemble de variables de prédiction (supposées non aléatoires). Le modèle est construit à partir d'un ensemble d'observations de la variable dépendante pour différents jeux de variables de prédiction. Par exemple, si l'on présuppose que la taille d'un individu est reliée à son poids par un modèle linéaire, une approche de régression consiste à trouver la droite qui caractérise le mieux un ensemble de mesures (poids, taille) réalisées sur un échantillon représentatif d'individus.

Dans le cas d'un modèle de régression linéaire, une observation Y_i de la variable dépendante y est reliée aux valeurs prises par les variables de prédiction $x_1,x_2,...,x_n$ par des équations de la forme $Y_i=\eta_0+\eta_1X_{1,i}+...+\eta_nX_{n,i}+\varepsilon_i$. Les coefficients constants $\eta_0,\eta_1,...,\eta_n$ constituent les paramètres à estimer pour caler le modèle. Le coefficient ε_i est un coefficient aléatoire d'erreur qui mesure l'écart entre l'estimation linéaire et l'observation. A partir de plusieurs observations, le système d'équations obtenu s'écrit en notation matricielle : $Y=XH+E$. La régression linéaire selon les moindres carrés consiste à estimer le vecteur H par le vecteur Θ qui minimise, sur les différents jeux de variables de prédiction considérés, la somme des carrés des erreurs ($\sum_i (Y_i - \hat{Y}_i)^2$) entre les valeurs de la variable dépendante qui sont mesurées (Y) et celles qui sont estimées ($\hat{Y} = X\Theta$). Lorsque Θ existe, il est donné par la résolution du système d'équations, dites normales : $X^tY = X^tX\Theta$ [30] (voir formule III–1 ci-dessous).

30 L'incertitude prise en compte dans un modèle de régression est classiquement probabiliste. Lorsque chacune des composantes du vecteur d'erreurs E suit une loi de probabilité de moyenne nulle, l'estimateur Θ vaut, en moyenne, H. C'est dans ce cas un estimateur sans biais de H. Si de plus la variance des erreurs est constante et que ces dernières ne sont pas corrélées entre elles, alors cet estimateur est de variance minimale. Dire que les erreurs sont non corrélées revient à dire que les observations ne le sont pas, elles-mêmes. Lorsque ce n'est pas le cas, la méthode dite de régression pondérée (approche décrite dans [DRA81]) permet de se ramener à la première configuration et fournit un estimateur sans biais de variance minimale qui ne correspond cependant plus aux moindres carrés. Si maintenant les erreurs sont non corrélées tout en suivant une distribution normale de

formule III–1 $\Theta = (X^t X)^{-1} X^t Y$

Dans une problématique de tri croisé, si l'on considère $Y_{ijk}=\alpha_{ijk}\times log(c_{ijk})$ $i,j=1,2,...,n$, $i\neq j$ comme les observations de la variable dépendante, l'équation $\alpha_{ijk}\times log(c_{ijk})= \alpha_{ijk}\times(log(w_i)-log(w_j)+\varepsilon_{ijk})$, relie de manière linéaire une observation Y_{ijk} au jeu de variables de prédiction $(X_1=0,..., X_i=\alpha_{ijk},X_{i+1}=0,...,X_j=-\alpha_{ijk},X_{j+1}=0,...,X_n=0)$ par l'intermédiaire des paramètres ($\eta_1=log(w_1),..., \eta_i=log(w_i),...,\eta_j=log(w_j),...,\eta_n=log(w_n)$). Il s'agit là d'un modèle de régression linéaire sans ordonnée à l'origine (η_0 fixé à 0)[31]. Conformément à la section II-1.2, α_{ijk} vaut 1 si le décideur k exprime une opinion sur la comparaison c_{ij} et 0 sinon. La fonction à minimiser est donnée par la formule III–2.

formule III–2

$$f = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^{n} \sum_{k=1}^{d} \alpha_{ijk} \left(\log(c_{ijk}) - \left(\log(w_i) - \log(w_j)\right)\right)^2$$

$$\text{avec } \alpha_{ijk} = \begin{cases} 1, \text{ si le décideur } k \text{ renseigne la comparaison } c_{ij}, \\ 0, \text{ sinon et } c_{ijk} = c_0 > 0 \text{ (constante positive arbitraire).} \end{cases}$$

Avec les notations utilisées à la section II-1.2, l'extension de l'approche R.L.M.C. à la prise en compte d'une *matrice des comparaisons* non réciproque est immédiate. Elle consiste à compléter le vecteur Y par les valeurs correspondant aux opinions symétriques et à prendre en compte les jeux de variables de prédiction associés.

Les équations normales données par la formule III–3 généralisent celles données par la formule II–2. Comme pour R.L.M.C., il faut s'assurer que le système d'équations normales est de rang $n-1$. Nous noterons R.L.M.C.G. (G. pour généralisée) la méthode de tri croisé correspondante.

moyenne nulle et de variance constante, l'estimateur des moindres carrés correspond au maximum de vraisemblance. C'est-à-dire qu'il maximise la vraisemblance (probabilité) de l'échantillon observé (Y), afin d'estimer les paramètres recherchés (H) [PRO92]. En général, il est difficile de connaître avec précision la distribution des erreurs et il s'agit le plus souvent de vérifier a posteriori que les hypothèses faites ne sont pas fausses. Pour plus de précisions, [DRA81] propose une introduction détaillée aux modèles de régression. Dans une problématique de tri croisé, les opinions sont souvent corrélées du fait des exigences de transitivité et de réciprocité. En conséquence, le jeu de poids fourni selon les moindres carrés classiques n'est ni de variance minimale, ni de vraisemblance maximale. La régression pondérée, qui n'est pas utilisée dans ce travail, permettrait de corriger la première de ces conséquences. Il n'est également pas exclu, comme c'est le cas à la section V-1.1 et dans les exemples numériques traités à la section VII-1, que les distributions de probabilité associées aux opinions ne soient pas symétriques. La moyenne des erreurs peut en conséquence ne plus être nulle et le jeu de poids fourni, selon les moindres carrés classiques, constitue, dans ce cas, un estimateur biaisé.

[31] Lorsque le modèle comporte une ordonnée à l'origine, cette dernière correspond, selon les moindres carrés, à la moyenne des observations. En présence d'une matrice des comparaisons réciproque, la moyenne des observations $Y_{ijk}=\alpha_{ijk}\times ln(c_{ijk})$ $i,j=1,2,...,n$, $i\neq j$, $k=1,2,\ldots,d$ est nulle. L'abstraction de l'ordonnée à l'origine ne réduit alors pas le pouvoir explicatif du modèle de régression. Quoi qu'il en soit, pour représenter la problématique du tri croisé l'abstraction de l'ordonnée à l'origine est nécessaire.

formule III–3

$$\theta_i \sum_{j\neq i}^{n}\left(d_{ij}+d_{ji}\right)-\sum_{j\neq i}^{n-1}\left(d_{ij}+d_{ji}\right)\theta_j=\sum_{j\neq i}^{n}\sum_{k=1}^{d}\left(\alpha_{ijk}b_{ijk}-\alpha_{jik}b_{jik}\right),\quad i=1,2,\ldots,n\text{-}1$$

$$\text{avec}\quad \begin{cases} \theta_i \approx \log(w_i),\quad i=1,2,\ldots,n, \\ \theta_n=0,\ \text{(poids arbitrairement fixé à 1)} \\ b_{ijk}=\log(c_{ijk}),\ i,j=1,2,\ldots,n,\quad k=1,2,\ldots,d, \\ d_{ij}=\sum_{k=1}^{d}\alpha_{ijk},\ i,j=1,2,\ldots,n. \end{cases}$$

Les opinions diagonales, qui ne sont pas prises en compte dans ce modèle, n'influent pas sur le jeu de poids estimé ($w_i \approx exp(\theta_i)$, i=1,2,…,n). Dans le cadre d'une procédure de test en aveugle au cours de laquelle l'identité des éléments à comparer n'est pas révélée, il est vrai qu'on peut aboutir à une appréciation du rapport d'importance qui soit différente de 1 entre des éléments identiques. Pour autant, en présence de comparaisons diagonales différentes de 1, le fait de les présupposer égales à 1 rapproche la *matrice des comparaisons* de n'importe quelle matrice cohérente et en particulier de celle obtenue à partir du jeu de poids fourni par R.L.M.C.G..

III-2. EXTENSION DE L'APPROCHE M.G.L.C.

Dans cette partie nous proposons une extension de la modélisation proposée par Koczkodaj et Orlowski (§II-1.2) à la prise en compte d'un nombre variable d'opinions pour une comparaison c_{ij}.

Dans leur article [KOC99], Koczkodaj et Orlowski se proposent de trouver la *matrice des comparaisons* cohérente : C^*, qui soit la plus proche, au sens des moindres carrés logarithmiques, de la matrice C renseignée par le groupe de décision. Dans leur formulation, C n'est pas supposée réciproque mais comporte, en revanche, exactement une opinion par comparaison. Le problème se ramène à la minimisation de la fonction quadratique f, donnée par la formule III–4.

formule III–4

$$f=\sum_{i,j=1}^{n}\left(\log(c_{ij})-\left(\log(w_i)-\log(w_j)\right)\right)^2$$

En supposant variable le nombre d'opinions par comparaison binaire, l'extension de la fonction f conduit à la formulation donnée par la formule III–2, à ceci près que la condition $i\neq j$ n'est pas nécessaire. Or comme nous l'avons dit, les opinions diagonales n'influent pas sur le résultat. D'où l'équivalence entre R.L.M.C.G. et l'extension de M.G.L.C. à un nombre variable d'opinions. Nous désignerons l'extension de M.G.L.C. par M.G.L.C.M.O. pour Moyenne Géométrique sur les Lignes et les Colonnes Multi-Opinion.

Comme nous l'avons évoqué à la section II-1.2, les poids étant définis à un facteur multiplicatif près, il est nécessaire d'en fixer arbitrairement un. Koczkodaj et Orlowski minimisent la distance euclidienne entre les matrices B et B^*, respectivement images logarithmiques de C et de C^*, sous la contrainte $w_n=1$, soit $log(w_n)=0$. Ils utilisent la méthode des multiplicateurs de Lagrange qui ramène le problème à la minimisation de la fonction $u=f+\lambda\eta_n$ par rapport aux variables $\eta_1=log(w_1)$, $\eta_2=log(w_2)$,...,$\eta_n=log(w_n)$ et λ.

Dans le cas d'un nombre variable d'opinions par comparaison binaire, en annulant la dérivée partielle de u par rapport à η_i, i=1,2,...,n et en suivant le même enchaînement de calcul algébrique que Koczkodaj et Orlowski détaillent dans leur article, on obtient la formulation donnée par la formule III–5. Cette formulation est équivalente à quelques notations près à la formule III–3. En passant à des notations matricielles on retrouverait tout simplement un système d'équations normales.

formule III–5

$$\begin{cases} \theta_i \sum_{j=1}^{n} Q_{ij} - \sum_{j=1}^{n} \theta_j Q_{ij} = R_i - G_i, \quad i = 1,2,...,n \\ \theta_n = 0 \end{cases}$$

$$\text{avec} \begin{cases} \theta_i \approx \log(w_i), \ i = 1,2,...,n, \\ R_i = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{d} \alpha_{ijk} b_{ijk}, \ i = 1,2,...,n, \\ G_i = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{d} \alpha_{jik} b_{jik}, \ i = 1,2,...,n, \\ Q_{ij} = Q_{ji} = \sum_{k=1}^{d} \left(\alpha_{ijk} + \alpha_{jik}\right), \ i, j = 1,2,...,n, \\ b_{ijk} = \log(c_{ijk}), i,j = 1,2,...,n, \ \ k = 1,2,...,d. \end{cases}$$

Les quantités R_i et G_i représentent respectivement la somme de logarithmes d'opinions dans lesquelles l'élément i est considéré respectivement en premier et en second. La quantité Q_{ij} représente le nombre d'opinions exprimées (simultanément) sur les éléments i et j. Elle concerne les comparaisons symétriques c_{ijk} et c_{jik}, k=1,2,...,d. Lorsque Q_{ij} est égale à une constante, elle est nécessairement paire. Ceci résulte de la symétrie de la *matrice des comparaisons*. En particulier, au niveau des comparaisons diagonales, on obtient : $Q_{ii} = \sum_{k=1}^{d} (\alpha_{iik} + \alpha_{iik}) = 2\sum_{k=1}^{d} \alpha_{iik}$. Posons Q_{ij}=$2q$ (avec q entier positif). Dans ce cas de figure (Q_{ij} constante) et d'après la formule III–5, on a :

$$\theta_i \sum_{j=1}^{n} 2q - \sum_{j=1}^{n} 2q\theta_j = R_i - G_i, \ i = 1,2,...,n \ \Leftrightarrow \ \theta_i = \frac{R_i - G_i}{2nq} + \frac{\sum_{j=1}^{n} \theta_j}{n}, \ i = 1,2,...,n \, .$$

Le poids w_n étant arbitrairement fixé à 1, on obtient :

$$\theta_n = \log(w_n) = 0 = \frac{R_n - G_n}{2nq} + \frac{\sum_{j=1}^{n} \theta_j}{n}, \ \text{ d'où } \ \theta_i = \frac{R_i - G_i - (R_n - G_n)}{2nq}, \ \ i = 1,2,...,n \, .$$

Les poids sont alors donnés par :

$$w_i \approx \exp(\theta_i), \ \ i = 1,2,...,n \ \Leftrightarrow \ w_i \approx \sqrt[2q]{\frac{R_i^*}{G_i^*} \times \frac{G_n^*}{R_n^*}}, \ \ i = 1,2,...,n.$$

Les termes de la forme R^*_s et G^*_s sont respectivement homogènes à des moyennes géométriques sur les opinions concernant respectivement la ligne et la colonne s. Elles sont données par :

$$\left|\begin{array}{l} R_s^* = \sqrt[n]{\exp(R_s)} = \sqrt[n]{\exp\left(\sum_{r=1}^{n}\sum_{k=1}^{d}\alpha_{srk}\log(c_{srk})\right)} = \sqrt[n]{\prod_{r=1}^{n}\prod_{k=1}^{d}c_{srk}^{\alpha_{srk}}} \\ G_s^* = \sqrt[n]{\exp(G_s)} = \sqrt[n]{\exp\left(\sum_{r=1}^{n}\sum_{k=1}^{d}\alpha_{rsk}\log(c_{rsk})\right)} = \sqrt[n]{\prod_{r=1}^{n}\prod_{k=1}^{d}c_{rsk}^{\alpha_{rsk}}} \end{array}\right., \quad s = 1,2,...,n.$$

En isolant la partie constante correspondant au poids arbitrairement fixé à une valeur positive non nulle (ici $w_n = 1$), cela donne :

$$w_i \approx h_n^* \sqrt[2q]{\frac{R_i^*}{G_i^*}}, \quad i = 1,2,...,n, \quad \text{avec } h_n^* = \sqrt[2q]{\frac{G_n^*}{R_n^*}}.$$

Après normalisation, on obtient :

formule III–6

$$\left|\begin{array}{l} w_i \approx \sqrt[2q]{\frac{R_i^*}{G_i^*}} \Big/ \sum_{j=1}^{n}\sqrt[2q]{\frac{R_j^*}{G_j^*}}, \quad i = 1,2,...,n, \\ \text{avec} \left|\begin{array}{l} R_s^* = \sqrt[n]{\prod_{r=1}^{n}\prod_{k=1}^{d}c_{srk}^{\alpha_{srk}}} \\ G_s^* = \sqrt[n]{\prod_{r=1}^{n}\prod_{k=1}^{d}c_{rsk}^{\alpha_{rsk}}} \end{array}\right., \quad s = 1,2,...,n. \end{array}\right.$$

La condition $Q_{ij}=2q$, équivaut à dire que le nombre d'opinions concernant simultanément deux éléments est constant (le total sur les deux comparaisons symétriques c_{ij} et c_{ji}, $\forall$ $i,j=1,2,...,n$). Bien que restrictive, cette hypothèse traduit la volonté d'avoir un vote équilibré. Il s'agit là d'une stratégie parfaitement envisageable dans la pratique. Par exemple, la figure III–1 illustre le cas q=2 pour n=3 (nombre d'éléments à pondérer). Chaque point symbolise une opinion.

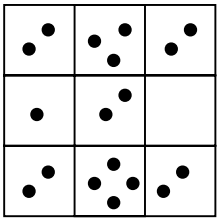


figure III–1 : Exemple de matrice de comparaisons *pour* n=3 et q=*2.*

Sous la condition $Q_{ij}=2q$, la formule III–6 constitue une formulation simplifiée (et normalisée) de la solution donnée par le système d'équations normales (formule III–3 ou formule III–5). Elle permet, dans ce cas précis, une généralisation de la solution proposée par Koczkodaj et Orlowski, qui correspond au cas q=1. En effet, les *matrices des comparaisons* auxquelles ils se sont intéressés comportent exactement une opinion par comparaison. La formulation qu'ils proposent pour estimer la comparaison c^*_{ij} (optimale au sens des moindres carrés logarithmiques) est donnée par la formule III–7.

formule III–7 $$c_{ij}^{*} = \frac{w_i}{w_j} \approx \sqrt[2]{\frac{R_i^*}{G_i^*} \times \frac{G_j^*}{R_j^*}} = \sqrt[2n]{\prod_{r=1}^{n} \left(\frac{c_{ir}}{c_{ri}} \times \frac{c_{rj}}{c_{jr}} \right)}\ ,\ i,j = 1,2,...,n, \quad \text{avec} \left| \begin{array}{l} R_s^* = \sqrt[n]{\prod_{r=1}^{n} c_{sr}} \\ G_s^* = \sqrt[n]{\prod_{r=1}^{n} c_{rs}} \end{array} \right.$$

En appliquant la formule III–6, l'expression que nous obtenons pour estimer cette même comparaison c^*_{ij} est donnée par la formule III–8, ci-dessous.

formule III–8 $$c_{ij}^{*} \approx \sqrt[2q]{\frac{R_i^*}{G_i^*} \times \frac{G_j^*}{R_j^*}} = \sqrt[2qn]{\prod_{r=1}^{n} \prod_{k=1}^{d} \left(\frac{c_{irk}^{\alpha_{irk}}}{c_{rik}^{\alpha_{rik}}} \times \frac{c_{rjk}^{\alpha_{rjk}}}{c_{jrk}^{\alpha_{jrk}}} \right)}\ ,\ i,j = 1,2,...,n, \quad \text{avec} \left| \begin{array}{l} R_s^* = \sqrt[n]{\prod_{r=1}^{n} \prod_{k=1}^{d} c_{srk}^{\alpha_{srk}}} \\ G_s^* = \sqrt[n]{\prod_{r=1}^{n} \prod_{k=1}^{d} c_{rsk}^{\alpha_{rsk}}} \end{array} \right.$$

III-3. SYNTHESE ET PERSPECTIVES

Dans ce chapitre nous montrons clairement la similarité des méthodes M.G.L.C. et R.L.M.C. du point de vue de la logique d'optimisation en proposant une formulation commune généralisant ces deux approches. Nous proposons également à travers la formule III–6 une formulation analytique de la solution qui généralise la formulation proposée par Koczkodaj et Orlowski en présence d'une *matrice de comparaisons* comportant un nombre fixe d'opinions concernant simultanément deux éléments parmi l'ensemble des éléments à pondérer. Savoir identifier de telles configurations peut s'avérer utile lorsqu'on est amené à calculer de manière itérative le jeu de poids recherché. C'est en particulier le cas lors de l'extension des méthodes de tri croisé déterministes à la prise en compte de l'imprécision inhérente au jugement. Des approches par simulation telles que l'algorithme F.W.A. (voir chapitre IV), basé sur la logique floue, ou une méthode de Monte Carlo (voir chapitre VI), si l'on adopte une logique probabiliste, peuvent être coûteuses en de telles itérations.

IV. CORRECTION DE L'APPROCHE DE BUCKLEY PAR L'ALGORITHME F.W.A.

L'approche de Buckley que nous avons brièvement évoquée au chapitre II, s'inspire du principe d'extension des ensembles classiques aux ensembles flous, proposé par Zadeh [ZAD75]. Soit $y=f(x_1,x_2,...,x_K)$ une fonction déterministe qui associe une variable numérique de sortie à K variables numériques d'entrée, combinées entre elles par des opérateurs algébriques classiques (ex : +,-,×,÷). Le principe d'extension de Zadeh consiste à considérer chacune des variables d'entrée comme un nombre flou ($\widetilde{I}_1, \widetilde{I}_2, ..., \widetilde{I}_K$) et à les combiner entre elles par une extension max-min des opérateurs algébriques classiques. Le nombre flou obtenu en sortie est donné par la formule IV–1.

formule IV–1 $$\mu_{\widetilde{S}}(y) = \max_{\substack{(x_1,x_2,...,x_K)\in X_1\times X_2\times..\times X_K \\ \text{avec } y=f(x_1,x_2,...,x_K)}} \left\{ \min\left\{ \mu_{\widetilde{I}_1}(x_1), \mu_{\widetilde{I}_2}(x_2), ..., \mu_{\widetilde{I}_K}(x_K) \right\} \right\}$$

Ce principe d'extension est applicable à toute expression de la forme $w_k=f(c_{ij}\,;\ i,j=1,2,...,n)$, $k=1,2,...,n$, exprimant un poids en fonction de comparaisons binaires. Il est en particulier applicable à toute méthode de tri croisé déterministe capable de fournir de telles formulations.

IV-1. TRAVERS ET LIMITATIONS DE L'APPROCHE DE BUCKLEY

Buckley [BUC85] préconise de représenter les opinions par des nombres flous trapézoïdaux. Il considère des expressions (à l'origine déterministes) de la forme $y=f(x_1,x_2,...,x_K)$ où les opinions jouent le rôle des variables d'entrées et les poids celui de la variable de sortie. Pour déterminer les courbes floues associées aux poids en sortie, son approche consiste à associer aux variables d'entrée des courbes trapézoïdales et à les combiner de manière séquentielle en utilisant la notion de coupe de niveau qui ramène le problème à un calcul d'intervalles classique. La somme des poids est ensuite normalisée à 1.

définition IV–1

Soit $\widetilde{a}$ un nombre flou défini sur un ensemble numérique U (ex : $\Re$), par la distribution de possibilité $\pi_{\widetilde{a}}$. Une coupe de niveau $\alpha \in$]0, 1] désigne le sous-ensemble des éléments de U dont le degré de possibilité par $\pi_{\widetilde{a}}$ est au moins égal à α.

Remarque : Un nombre flou est d'autant plus précis que l'ensemble des valeurs que contient sa coupe de niveau 0 (plus exactement 0^+) est réduit.

Pour une même coupe de niveau et pour calculer les bornes *min* et *max* de l'intervalle associé à une variable de sortie y, sa procédure consiste à combiner de manière successive les intervalles associés aux termes figurant au membre droit de l'équation $y=f(x_1,x_2,...,x_K)$. Le calcul d'une borne sur l'intervalle de sortie implique le choix d'une borne sur chacun des

intervalles d'entrée, ramenant localement le problème au cas de figure déterministe. Le choix des bornes sur les intervalles d'entrée est fait de manière à obtenir en sortie l'intervalle le plus ample. Prenons l'exemple de l'équation $y=x_1+x_2+x_3$, mettant en jeu les intervalles d'entrée $[min_{x1}, max_{x1}]$, $[min_{x2}, max_{x2}]$, $[min_{x3}, max_{x3}]$ et l'opérateur algébrique d'addition. Les bornes de l'intervalle de sortie sont calculées en deux étapes, par exemple : $[min_y, max_y] = [min_{x1} + min_{x2}, max_{x1} + max_{x2}] + [min_{x3}, max_{x3}]$, puis $[min_y, max_y] = [(min_{x1} + min_{x2}) + min_{x3}, (max_{x1} + max_{x2}) + ma_xx_3]$. Si le choix des bornes à combiner parait évident en présence d'une formule analytique simple, mettant en jeu des opérateurs algébriques binaires classiques (ex :+,–,×,÷), il l'est moins pour un algorithme de tri croisé du type V.P. (voir §IV-4).

D'un autre coté, les formules analytiques déterministes considérées sont souvent associées à des hypothèses de validité. Sur l'ensemble des intervalles à combiner, le choix des bornes (pour avoir en sortie l'intervalle le plus ample) ne garantit pas nécessairement le respect de ces hypothèses. C'est notamment le cas de la formule analytique associée à la méthode M.G.L. (formule II–3 et tableau II–1). Elle nécessite que la *matrice des comparaisons* (déterministe) soit réciproque pour être optimale au sens des moindres carrés logarithmiques. Cependant, les bornes choisies sur les comparaisons symétriques, composant la *matrice des comparaisons* entachée d'imprécision, ne sont pas nécessairement inverses l'une de l'autre (voir les commentaires associés au tableau IV–2, §IV-3).

Aussi, en ne considérant que les bornes *min* ou *max* des variables d'entrée, la procédure proposée par Buckley présuppose la monotonie de la fonction d'agrégation par rapport aux variables d'entrée que sont les combinaisons binaires. Dans le cadre du tri croisé, la fonction d'agrégation n'est pas nécessairement monotone par rapport à toutes les comparaisons binaires qui la composent. Cet aspect est abordé plus en détail à la section IV-3.

Enfin, dans une expression analytique classique, la substitution des variables par des intervalles peut conduire à des résultats inutilement imprécis. C'est le cas lorsque l'expression analytique contient plusieurs fois la même variable. En effet, lors de la substitution, les occurrences multiples sont traitées de manière indépendante. Cela conduit à des illogismes bien connus. Par exemple, étant donnés $x \subset \Re_+^*$ et y tel que $x+y \subset \Re_+^*$, l'expression $x/(x+y)$ conduit à un résultat plus imprécis que $1/(1+y/x)$. Dans l'approche de Buckley et indépendamment de l'expression analytique obtenue, l'étape de normalisation (voir formule IV–2) induit inévitablement une imprécision artificielle.

formule IV–2 $$\tilde{w}_{\mathrm{N},i} = \frac{\tilde{w}_i}{\tilde{w}_1 + \tilde{w}_2 + \ldots + \tilde{w}_i + \ldots \tilde{w}_n}, \quad i = 1,2,\ldots,n$$

Ultérieurement à la contribution de Buckley, Dong et Wong [DON87] ont proposé un algorithme exact de calcul d'intervalles flous dénommé *fuzzy weighted average* (F.W.A.)[32]. Il nous a paru intéressant de l'appliquer à l'approche de Buckley, dont il corrige certains travers. Les résultats obtenus sont comparés à ceux d'autres principes d'extension floue qui s'appliquent, eux aussi, à des méthodes de tri croisé de manière à prendre en compte l'imprécision des comparaisons binaires.

[32] Il est également connu sous les noms de L.I.A. pour *Level Interval Algorithm* ou encore « *the vertex method* ».

IV-2. PRESENTATION DE L'ALGORITHME F.W.A.

Etant donnée une extension à des nombres flous des K variables d'entrée d'une fonction d'agrégation déterministe du type $y=f(x_1,x_2,...,x_K)$, l'algorithme F.W.A. s'appuie, lui aussi, sur la notion de coupe de niveau pour construire la représentation de la variable floue de sortie. Pour une coupe de niveau donnée, les points qu'il génère sur la courbe associée à la variable de sortie coïncident avec ceux donnés par le principe d'extension de Zadeh, lorsque la fonction d'agrégation en question est monotone.

L'exemple qui suit illustre l'application de l'algorithme F.W.A. à la procédure de normalisation (voir formule IV–2) de deux poids représentés par des nombres flous trapézoïdaux $\widetilde{w}_1$ et $\widetilde{w}_2$. Les poids étant par nature positifs, la fonction de normalisation est monotone. La figure IV–1 représente ces poids avant normalisation.

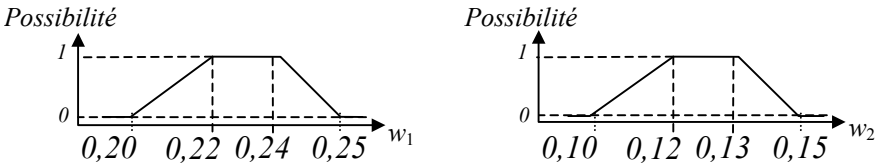


figure IV–1 : Poids flous trapézoïdaux avant normalisation

Le tableau IV–1 représente les poids flous donnés en figure IV-5 à travers les coupes de niveau 0 et 1.

α	$\widetilde{w}_{1,\alpha}$	$\widetilde{w}_{2,\alpha}$
1	[0,22 ; 0,24]	[0,12 ; 0,13]
0	[0,20 ; 0,25]	[0,10 ; 0,15]

tableau IV–1 : Représentation de poids flous selon les coupes de niveau 0 et 1

1. Pour une coupe de niveau donnée, l'algorithme F.W.A. identifie tous les K-uplets distincts issus des combinaisons possibles entre les extrémités des intervalles représentant les K variables d'entrée. Lorsque les courbes d'entrée sont convexes et que leur intersection par la coupe de niveau génère sur chacune d'entre elles deux points[33], il y a 2^K K-uplets. Dans cet exemple, pour α=0, les combinaisons possibles donnent lieu aux couples ($w_{1,0}$; $w_{2,0}$)={(0,2 ; 0,1) ; (0,2 ; 0,15) ; (0,25 ; 0,1) ; (0,25 ; 0,15)}.
2. Ensuite, le résultat correspondant à chacun de ces K-uplets est calculé par la fonction f considérée. Dans l'exemple, f est donnée par la formule IV–2. Pour α=0, les 4 valeurs possibles pour w_1 normalisé et w_2 normalisé sont respectivement $w_{1,N}\in$ {0,2/(0,2+0,1) ; 0,2/(0,2+0,15) ; 0,25/(0,25+0,1) ; 0,25/(0,25+0,15)} = {0,67 ; 0,57 ; 0,71 ; 0,62} et $w_{2,N}\in$ {0,1/(0,2+0,1) ; 0,15/(0,2+0,15) ; 0,1/(0,25+0,1) ; 0,15/(0,25+0,15)} = {0,33 ; 0,43 ; 0,29 ; 0,38}.

[33] Il est possible que l'intersection entre une courbe d'imprécision convexe et une coupe de niveau engendre un seul point. C'est par exemple le cas pour une courbe de forme triangulaire intersectée en son sommet.

3. Enfin, seules les valeurs minimale et maximale sont conservées pour donner l'intervalle correspondant à la variable de sortie. Dans l'exemple et pour α=0, les coupes de niveau résultantes pour w_1 normalisé et w_2 normalisé sont respectivement $\widetilde{w}_{1,0,\mathrm{N}}$=[0,57 ; 0,71] et $\widetilde{w}_{2,0,\mathrm{N}}$=[0,29 ; 0,43]. L'algorithme original de Buckley aurait donné $\widetilde{w}_{1,0,\mathrm{N}}$=[0,5 ; 0,83] et $\widetilde{w}_{2,0,\mathrm{N}}$=[0,25 ; 0,5].

Sur cet exemple les données d'entrée sont associées à des fonctions d'appartenance convexes. Lorsque ce n'est pas le cas (ex : courbes en M), l'algorithme F.W.A. reste applicable du moment qu'il est possible de ramener toute courbe non convexe à une succession de parties convexes. Cet aspect est brièvement évoqué dans [DON87]. Les différentes parties convexes sont alors traitées de manière disjointe et la variable de sortie est associée à l'union des différents intervalles engendrés par l'algorithme F.W.A..

Soit p_{ij}, le nombre de points générés sur la courbe de la variable d'entrée i par la $j^{ème}$ coupe de niveau considérée. Par exemple, si la variable i est associée à une courbe en M, p_{ij}=3 pour la coupe de niveau 0, p_{ij}=2 pour la coupe de niveau 1 et p_{ij}=4 pour un niveau intermédiaire. Le nombre d'évaluations nécessaires pour les K variables d'entrée et les T coupes de niveau considérées est alors de $\sum_{j=1}^{T}\prod_{i=1}^{K} p_{ij}$. De manière générale, la prise en compte de courbes non convexes ($p_{ij}\geq 2$, $\forall j$) engendre un accroissement de la combinatoire.

Une version améliorée de l'algorithme F.W.A. a été proposée dans [SCO98]. Avec cette nouvelle version, les temps de calcul sont considérablement réduits, notamment en présence de courbes floues non convexes en entrée. Cette amélioration s'appuie sur la connaissance du sens de variation de la fonction d'agrégation qu'elle présuppose monotone. Pour une coupe de niveau donnée, elle se traduit par une exploration sélective des *K-uplets* issus des combinaisons possibles entre les extrémités des intervalles représentant les K variables d'entrée[34]. Un exemple d'application de cette variante de l'algorithme F.W.A. est présenté à la section VII-1 (voir figure VII–4).

IV-3. APPLICATION DE F.W.A. AU TRI CROISE

Dans le cadre du tri croisé, les poids sont déterminés à partir de *rapports d'importance*. Chaque poids peut être considéré comme une fonction monotone si l'on se restreint aux *rapports d'importance* dans lesquels il intervient (pour tout i, $\partial w_i/\partial c_{ijk}\geq 0$ et $\partial w_i/\partial c_{jik}\leq 0$, j=1,2,...,n ; k=1,2,...,d). Ceci n'est pas le cas lorsque les *rapports d'importance* considérés n'impliquent pas le poids en question ($\partial w_i/\partial c_{hjk}$, $h,j\neq i$).

Supposons que la *matrice des comparaisons* comporte un total constant d'opinions en considérant simultanément les comparaisons symétriques c_{ij} et c_{ji}, $\forall\, i,j$=1,2,...,n. Dans ce cas

[34] Pour la variable de sortie considérée, au lieu des $\Pi_i p_{ij}$ évaluations normalement requises à la $j^{ème}$ coupe de niveau, seules $K+1$ évaluations sont dans un premier temps nécessaires pour déterminer le sens de variation de la fonction d'agrégation au niveau de chacune des K variables d'entrée (lorsque ce sens de variation n'est pas connu d'avance et que la fonction d'agrégation en question est monotone). En partant d'un *K-uplet* donné, on parcourt successivement ses composantes en changeant à chaque fois d'extrémité sur l'intervalle (l'un d'eux suffit s'il y en a plusieurs) de la variable d'entrée concernée. On analyse et enregistre ainsi le comportement de la fonction d'agrégation sur chacune des variables d'entrée. Ensuite dès que ce sens de variation est connu, les *K-uplet* correspondant respectivement au *min* et au *max* de la fonction d'agrégation sont eux mêmes connus sans ambiguïté. Seules $2\times\Pi_i(p_{ij}/2)$, soit $(\Pi_i p_{ij})/2^{K-1}$, évaluations sont alors requises pour la $j^{ème}$ coupe de niveau considérée.

de figure l'expression analytique de chacun des poids est donnée par la formule III–6 au sens des moindres carrés logarithmiques. En exprimant un poids w_i comme une fonction (à une seule variable) de c_{hjk}, $h,j \neq i$, on obtient la formule IV–3.

formule IV–3

$$\left| \begin{array}{l} w_i = \dfrac{1}{1 + a_0 \left(a_{hx} \sqrt[n]{c_{hjk}} + \dfrac{1}{a_{xj} \sqrt[n]{c_{hjk}}} + a_1 \right)}, \; h, j \neq i \\ avec \left| \begin{array}{l} r_t = \sqrt[n]{\prod_{s=1}^{n} \prod_{l=1}^{d} c_{tsl} \Big/ \prod_{s=1}^{n} \prod_{l=1}^{d} c_{stl}}, \; t = 1,2,\ldots,n, \\ a_0 = 1/r_i, \\ a_1 = \sum_{\substack{t=1 \\ t \neq i,j,h}}^{n} r_t, \\ a_{hx} = r_h \Big/ \sqrt[n]{c_{hjk}}, \\ a_{xj} = \left(1/r_j\right) \Big/ \sqrt[n]{c_{hjk}}. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

La dérivée partielle $\partial w_i / \partial c_{hjk}$, $h,j \neq i$, s'annule en un seul point : $c_{hjk} = 1 \Big/ \sqrt[2/n]{a_{hx} a_{xj}}$ et l'extremum qui lui est associé est un maximum.

Sur cet exemple, la fonction (ou plus généralement l'algorithme) d'agrégation n'est donc pas monotone au niveau de chacune des comparaisons binaires considérées. La solution fournie par F.W.A. est alors sous-optimale. En effet, pour les comparaisons binaires n'impliquant pas directement le poids en question ($\partial w_i / \partial c_{hjk}$, $h,j \neq i$), bien que la composante de l'optimum puisse se trouver à l'intérieur de l'intervalle, seules les extrémités de cet intervalle sont prises en comptes. Mis à part des fonctions d'agrégation triviales qui ne prendraient en compte que la partie monotone des comparaisons binaires, les fonctions d'agrégation les plus utilisées ne satisfont pas à l'hypothèse d'application de l'algorithme F.W.A. et les résultats qui en découlent sont sous-optimaux. Remarquons au passage que la plus grande amplitude [*min*, max**] est obtenue pour les intervalles de poids dont les extrémités correspondent respectivement à l'optimum *min* global* et *max* global* de la fonction d'agrégation. Par conséquent les intervalles non optimaux correspondent à une sous-estimation de l'imprécision.

Dans [SCO98], l'auteur aborde dans un cadre général, différent de celui du tri croisé, la possibilité de l'extension de l'approche F.W.A. à la recherche de l'optimum global. L'exploration de l'intérieur des intervalles pourrait considérablement augmenter le nombre d'évaluations à effectuer sur la fonction d'agrégation. En considérant le compromis temps de calcul et écart à l'optimum, il n'est pas certain qu'une augmentation substantielle du nombre d'évaluations soit profitable. Selon l'auteur, supposer la fonction d'agrégation monotone lorsqu'elle ne l'est pas est, en ce sens, une simplification envisageable.

Dans le cadre du tri croisé, considérons le cas de figure (évoqué ci-dessus) où la fonction d'agrégation serait soit monotone soit convexe au niveau de chacune des comparaisons binaires. Il serait alors intéressant, au niveau des comparaisons susceptibles d'exhiber un extremum, d'explorer une valeur intermédiaire à l'intérieur de l'intervalle considéré (typiquement son milieu) pour une coupe de niveau donnée. Cela permettrait de savoir si l'une des extrémités retenues est sous-optimale et le cas échéant de la remplacer par cette

valeur intermédiaire. Si aucun intervalle n'est sous-optimal alors on peut affirmer que la solution finale fournie par l'algorithme F.W.A. est optimale. Dans le cas contraire la solution proposée est tout de même meilleure que celle qu'on aurait obtenue en ne considérant que les extrémités des intervalles. En appliquant cette approche heuristique à l'algorithme F.W.A. amélioré, proposé par Scott (voir IV-2), seul le nombre des évaluations préliminaires, nécessaires à la connaissance du comportement de la fonction d'agrégation, est concerné. Son augmentation reste raisonnable dans la mesure où elle est inférieure à sa valeur initiale. En effet, au pire des cas, le nombre des évaluations préliminaires passerait de K+1 à 2K+1. Cette perspective d'optimisation n'est pas d'avantage développée dans ce travail. Cela nécessiterait, en particulier, une étude plus approfondie du comportement des fonctions (ou algorithmes) d'agrégation communément utilisées.

Il est également important de souligner que la fonction d'agrégation n'adopte pas le même comportement pour toutes les variables de sortie. Le choix du K-uplet la minimisant ou la maximisant dépend de la variable de sortie considérée. Cela nous amène à considérer en définitive autant de K-uplets minimisant ou maximisant que de variables de sortie et de coupes de niveau. Pour certaines approches de tri croisé telles que la méthode R.L.M.C.G. (voir §III-1) ou la méthode V.P. (voir §IV-4), la fonction d'agrégation est du type $(y_1,y_2,...,y_S)=f(x_1,x_2,...,x_K)$. Elle peut alors artificiellement se ramener au cas de figure $y_i=f(x_1,x_2,...,x_K)$, i=1,2,...,n, négligeant ainsi les couplages existant entre les variables de sortie. Cette simplification qui permet d'étendre le champs d'application de l'algorithme F.W.A. induit cependant une surestimation de l'imprécision[35]. Une telle extension semble pertinente dans la mesure où l'approche floue correspond en général à une analyse du pire et du meilleur des cas.

L'exemple proposé en figure IV–2 décrit la *matrice des comparaisons binaires* de trois éléments $\{e_1, e_2, e_3\}$ où l'imprécision est prise en compte par des nombres flous triangulaires. Boender et al. [BOE89] avaient utilisé cet exemple pour comparer leur approche basée sur la régression logarithmique selon les moindres carrés, que nous notons Bo.R.L.M.C. (voir §II-2.1), à l'approche originale de Buckley, appliquée à la méthode M.G.L. (formule II–3), que nous notons Bu.M.G.L.. Pour une *matrice de comparaisons* réciproque comportant exactement une opinion déterministe par comparaison, M.G.L. est sensée donner la même solution que la méthode R.L.M.C. (voir §II-1.2 ou chapitre III).

	e_1	e_2	e_3
e_1	(1,1,1)	(2/7,1/3,2/5)	(1/6,1/5,1/4)
e_2	(5/2,3,7/2)	(1,1,1)	(2/5,1/2,2/3)
e_3	(4,5,6)	(3/2,2,5/2)	(1,1,1)

figure IV–2 : Matrice des comparaisons *proposée dans l'article [BOE89]*

Le tableau IV–2, ci-dessous, superpose aux résultats publiés dans l'article [BOE89] ceux obtenus par l'algorithme F.W.A., amélioré par Scott, que nous proposons d'appliquer aux

[35] Cette simplification présuppose la non interactivité des variables de sortie que sont les poids. Cette hypothèse n'est pas vérifiée dans le cas des approches V.P. et R.L.M.C.G.. En conséquence, l'application de l'algorithme F.W.A. conduit, pour ces méthodes et de ce point de vue, à une surestimation de l'imprécision car le nombre de combinaisons explorées est plus important du fait que l'on relaxe la contrainte de couplage entre les variables de sortie.

méthodes déterministes M.G.L. et R.L.M.C.G. (voir chapitre III) sous la désignation F.W.A.M.G.L. et F.W.A.R.L.M.C.G..

	Bo.R.L.M.C.	Bu.M.G.L.	F.W.A.M.G.L.	F.W.A.R.L.M.C.G
e1	(10,5 ; 10,9 ; 11,8)%	(8,5 ; 10,9 ; 14,6)%	(8,7 ; 10,9 ; 14,1)%	(9,2 ; 10,9 ; 13,4)%
e2	(28,0 ; 30,9 ; 34,9)%	(23,5 ; 30,9 ; 41,7)%	(25,4 ; 30,9 ; 37,8)%	(25,8 ; 30,9 ; 37,3)%
e3	(49,8 ; 58,2 ; 66,5)%	(42,7 ; 58,2 ; 77,6)%	(50,4 ; 58,2 ; 64,4)%	(51,1 ; 58,2 ; 63,7)%
temps	0,01 secondes	0,01 secondes	0,5 secondes	0,6 secondes

tableau IV–2 : Résultats comparatifs des méthodes de tri croisé Bo.R.L.M.C., Bu.M.G.L., F.W.A.M.G.L. et F.W.A.R.L.M.C.

Les calculs ont été effectués sur un Pentium II 400MHz à partir d'un algorithme codé sous Matlab 5.3.. La correction apportée à l'approche de Buckley conduit, sur cet exemple, à des résultats globalement plus précis que l'approche d'origine. Par ailleurs les résultats de Bo.R.L.M.C. ne dominent pas, dans leur ensemble, ceux de l'approche F.W.A.M.G.L. au sens de la minimisation de la variance[36]. Pour e_3 c'est au contraire F.W.A.M.G.L. qui domine Bo.R.L.M.C..

En réalité, la logique d'extension de l'approche F.W.A. dégrade l'optimum lorsqu'elle est appliquée à M.G.L.. A première vue, on pourrait s'attendre à ce que les résultats de l'extension soient identiques entre M.G.L. et R.L.M.C.G. puisque ces deux méthodes déterministes donnent le même résultat en présence d'une matrice réciproque déterministe. Cependant, tout comme la procédure de Buckley, l'algorithme F.W.A. ne considère en entrée que les extrémités d'intervalle (*min* et *max*) issues des coupes de niveau opérées sur les comparaisons binaires. Les *matrices des comparaisons* déterministes ainsi recomposées ne sont alors pas nécessairement réciproques. Pour des matrices non réciproques et contrairement à la méthode R.L.M.C.G.[37], les valeurs (*min* et *max*) inférées par la méthode M.G.L. ne correspondent plus à l'optimum au sens des moindres carrés logarithmiques (tableau II–1).

[36] Dans la mesure où les approches de Buckley, Bo.R.L.M.C. et F.W.A. s'appuient sur des logiques différentes de propagation de l'imprécision, la comparaison de la variance des estimations qu'elles fournissent n'a pas de sens dans l'absolu. Pour juger de la qualité d'une estimation il est en général nécessaire de considérer simultanément différents aspects tels que la vraisemblance de l'échantillon utilisé, l'écart à la valeur exacte (biais) et la variance de l'estimateur. A supposer que les trois extensions soient équivalentes pour ce qui est du biais (puisque toutes trois fournissent une même valeur modale), elles le sont moins pour ce qui est de la vraisemblance de l'échantillon utilisé (valeurs associées aux variables de sortie), compte tenu qu'elles adoptent trois logiques de calcul très différentes. Typiquement, le non respect de la condition dite de rationalité (voir §II-2.1) par l'approche de Boender, remet en cause la représentativité des échantillons qu'elle génère, tout comme les travers dont souffre l'approche de Buckley (voir §IV-1). Dans ce même registre et en plus des limitations (en partie atténuées) qu'elle partage avec l'approche de Buckley, l'approche F.W.A. (telle que nous l'appliquons au tri croisé) peut être spécifiquement critiquée lorsqu'elle néglige les couplages entre variables de sortie, conduisant ainsi à des échantillons quelque peu artificiels (voir §IV-3 et §IV-4).

L'important n'est pas de fournir les poids les plus précis mais des poids suffisamment cohérents qui soient représentatifs de l'imprécision de départ, compte tenu de la logique de propagation adoptée. Dans ce paragraphe, nous n'avons pas pour objectif d'étudier la dominance de l'une ou de l'autre des méthodes d'extension, du point de vue de l'imprécision la plus faible, mais plutôt de corriger, dans son principe, l'approche de Buckley qui offre par ailleurs une plus grande flexibilité au niveau des courbes d'entrée prises en compte. En effet, dans son principe (basé sur la notion de coupe de niveau), la méthode de Buckley peut traiter tout type de primitive convexe et ne se restreint pas à des primitives triangulaires comme c'est le cas pour l'approche Bo.R.L.M.C..

[37] Conformément à ce qui à été dit à la section II-1.2, pour une matrice non réciproque comportant exactement une opinion par comparaison, les poids fournis par l'approche R.L.M.C.G. sont équivalents à ceux fournis par l'approche M.G.L.C. qui constitue une généralisation de l'approche M.G.L..

Sur ce point, l'algorithme F.W.A. présente la même limitation que celui de Buckley (§IV-1). Cette distorsion dégrade en particulier la représentativité des courbes de poids fournies (voir note de pas de page n°36).

Les temps de F.W.A. sont supérieurs à ceux des deux premières approches. Ils restent néanmoins très raisonnables. Comme nous l'avons préciser en conclusion du chapitre III, savoir reconnaître des configurations particulières de la *matrice des comparaisons*, pour lesquelles il existe des formulations analytiques simples du jeu de poids recherché (comme c'est le cas pour M.G.L.), réduit le temps de calcul consommé par chaque évaluation de la fonction d'agrégation. Cela peut s'avérer utile en présence de courbes d'imprécisions de forme non convexe (ex : histogrammes issus d'un vote) qui pourraient sensiblement augmenter la combinatoire (voir l'exemple traité à la section VII-1)[38].

IV-4. PERSPECTIVES D'EXTENSION FLOUE DE LA METHODE DETERMINISTE V.P.

Pour illustrer plus en détail le cas de fonctions d'agrégation présentant un couplage entre les variables de sortie, considérons la méthode V.P. (voir §II-1.1) et la légitimité de son extension à la prise en compte de l'imprécision par des nombres flous. Dans son article [BUC85] Buckley explique que le passage de la valeur propre de plus grand module au vecteur propre correspondant, induit un couplage entre les composantes de ce dernier ; celles-ci mêmes qui forment le jeu de poids recherché. Il s'agit là d'un couplage identitaire dans la mesure où ces composantes n'ont de sens que si elles sont reliées à une même valeur propre.

Du fait que les composantes de poids soient définies à un facteur multiplicatif près, il n'est pas possible de conserver une même relation d'ordre (≥ ou ≤) entre les composantes homologues de deux vecteurs propres différents $(w_1,w_2,...,w_n)^t$ et $(w_1',w_2',...,w'_n)^t$. Cela apparaît clairement lorsque leur somme est normalisée à 1. Dans ces conditions Buckley démontre que l'extension floue qu'il utilise ne garantit pas la convexité des variables de sortie.

Prenons l'exemple d'une *matrice de comparaisons* qui contient N opinions (ex : $N= n^2$ pour exactement une opinion par comparaison binaire). Pour une coupe de niveau donnée (notion introduite par la définition IV–1) et des primitives trapézoïdales, Buckley ne considère que deux combinaisons sur les extrémités des N intervalles correspondant, parmi 2^N possibles selon l'algorithme F.W.A.. Ces deux combinaisons correspondent respectivement au N-uplet des extrémités basses et à celui des extrémités hautes. Sur l'exemple donné en figure IV–2 et pour la coupe de niveau 0, cela revient à considérer les deux matrices données, ci-dessous, en figure IV–3.

[38] Dans la version de l'algorithme F.W.A. améliorée par Scott [SCO98], le facteur d'accroissement dû à la non convexité est donné par le terme $\sum_j(\Pi_i p_{ij})/(2^{K-1}\times T)$ (avec p_{ij} le nombre de points générés sur la courbe de la variable d'entrée i par la $j^{ème}$ coupe de niveau considérée et T le nombre total de coupes de niveau considérées ; voir §IV-2).

$$C^b = \begin{array}{c|ccc} & e_1 & e_2 & e_3 \\ \hline e_1 & 1 & 2/7 & 1/6 \\ e_2 & 5/2 & 1 & 2/5 \\ e_3 & 4 & 3/2 & 1 \end{array} \Rightarrow w^b \approx \begin{array}{c} 11{,}4\% \\ 31{,}5\% \\ 57{,}1\% \end{array} \quad ; \quad C^h = \begin{array}{c|ccc} & e_1 & e_2 & e_3 \\ \hline e_1 & 1 & 2/5 & 1/4 \\ e_2 & 7/2 & 1 & 2/3 \\ e_3 & 6 & 5/2 & 1 \end{array} \Rightarrow w^h \approx \begin{array}{c} 10{,}9\% \\ 31{,}1\% \\ 58{,}0\% \end{array}$$

extrémités basses *extrémités hautes*

figure IV–3 : Illustration de l'application de la méthode V.P. à la coupe de niveau 0 sur la matrice des comparaisons *donnée en figure IV–2*

Les extrémités basses sur les poids sont alors associées au vecteur propre issu du premier N-uplet et les extrémités hautes à celui issu du second. Comme prévu, sur la figure IV–3, les vecteurs de poids w^b et w^h donnés par la méthode V.P. ne respectent pas l'infériorité de la borne basse à la borne haute sur toutes leurs composantes ($w_1^b \approx 11{,}4 > w_1^h \approx 10{,}9$; $w_2^b \approx 31{,}5 > w_2^h \approx 31{,}1$ et $w_3^b \approx 57{,}1 < w_3^h \approx 58$). Les vecteurs w^b et w^h recherchés ne peuvent donc pas être simultanément solution de l'équation $Cw=\lambda_{max}w$. Sinon, ils violeraient la condition $w_i^b < w_i^h$ pour $i=1,\ldots,n$, nécessaire à la convexité des courbes de sortie.

Cet écueil est en partie pallié par l'algorithme F.W.A. qui, pour une coupe de niveau donnée, relaxe les couplages entre les variables de sortie en les considérant séparément. Les bornes w_i^b et w_i^h sont choisies comme, respectivement, le *min* et le *max* parmi les i^{èmes} composantes des vecteurs propres normalisés, issus de toutes les *matrices des comparaisons* possibles. Les deux vecteurs de poids w^b et w^h composés respectivement de ces bornes *min* et *max*, calculées de manière indépendante, assurent la convexité des courbes en sortie. En revanche, ils ne sont plus solution de l'équation $Cw=\lambda_{max}w$ puisque leurs composantes ne sont pas toutes issues d'une même *matrice de comparaisons*.

Ceci dit et pour une coupe de niveau donnée., les vecteurs propres associés aux *matrices des comparaisons* possibles situent toujours chacune de leurs composantes à l'intérieur de l'intervalle recherché sur la courbe de poids correspondante. Les courbes ainsi reconstituées sont donc, dans leur globalité, représentatives des vecteurs et des valeurs propres inférés. En cela, elles respectent dans son principe la notion de couplage identitaire (évoquée en début de section) qui caractérise la méthode V.P..

D'un autre coté, il est vrai, que la non prise en compte du couplage conduit à une surestimation de l'imprécision. Comme nous l'avons évoqué à la section IV-3, cette simplification est acceptable dans la mesure où l'approche floue correspond en général à une analyse du pire et du meilleur des cas.

Appliquée à l'exemple de la figure IV–2, l'extension de la méthode V.P. par l'algorithme F.W.A. conduit aux résultats suivants : $\widetilde{w}_1 \approx (8{,}6\ ;\ 10{,}9\ ;\ 14{,}1)\%$, $\widetilde{w}_2 \approx (25{,}4\ ;\ 30{,}9\ ;\ 37{,}7)\%$ et $\widetilde{w}_3 \approx (50{,}2\ ;\ 58{,}2\ ;\ 64{,}4)\%$.

IV-5. SYNTHESE ET PERSPECTIVES

Ce chapitre s'intéresse aux perspectives d'application de l'algorithme F.W.A. initialement proposé par Dong et Wong [DON87] pour l'extension des méthodes déterministes de tri croisé à la prise en compte de l'imprécision. Cette alternative, basée sur la logique floue et plus particulièrement sur la notion de coupe de niveau, permet d'éviter une partie des biais qui pourraient être reprochés à l'approche initialement proposée par Buckley, notamment

l'imprécision artificielle que cette dernière induit lorsque l'expression analytique des poids fait intervenir plusieurs fois une même variable.

L'algorithme F.W.A. présente à son tour certaines limitations. Comme l'approche de Buckley, il est inadéquat pour certaines méthodes déterministes dont il peut violer les hypothèses de validité (ex : M.G.L.). La solution proposée par F.W.A. ne correspond alors pas au critère d'optimisation considéré (ex : moindres carrés logarithmiques pour M.G.L.). Indépendamment de ce cas de figure, F.W.A. nécessite que la fonction d'agrégation qui transforme les comparaisons binaires en poids soit monotone. Malheureusement, ce n'est en général pas le cas des fonctions d'agrégation associées aux méthodes de tri croisé. De ce point de vue, F.W.A. conduit à une sous-estimation de l'imprécision. Nous avons envisagé une approche heuristique en vue d'atténuer ce biais dans la continuité d'une amélioration proposée par Scott [SCO98]. Une étude plus approfondie du comportement des fonctions d'agrégation utilisées dans la littérature du tri croisé permettrait sans doute une optimisation sur mesure et donc plus efficace de l'algorithme F.W.A.. Enfin l'algorithme F.W.A. tend à relaxer les couplages qui peuvent exister entre les poids issus de certaines méthodes déterministes de tri croisé telles que V.P. (voir §II-1.1) ou R.L.M.C.G. (voir §III-1). Cette approximation conduit à une surestimation de l'imprécision. Elle semble justifiée dans la mesure où, conformément à l'esprit de l'approche floue utilisée, on s'attache à l'étude du pire et du meilleur des cas.

Comparé à d'autres méthodes proposées dans la littérature, l'algorithme F.W.A. semble conduire à des résultats satisfaisants pour des temps de calcul raisonnables. Il offre, par ailleurs, une grande flexibilité au niveau de la forme des courbes d'imprécision utilisées en entrée.

V. INDICATEURS ET BOUCLES D'AMELIORATION DE LA COHERENCE

L'imprécision dont nous avons parlé jusqu'à présent n'est qu'une composante de l'incertitude qui peut caractériser les résultats d'une procédure de tri croisé. Conformément à la section I-6, la seconde composante est associée à l'incohérence relative des opinions exprimées par le groupe de décision (leur aspect contradictoire). Dans la suite de ce chapitre, les opinions associées par le groupe de décision aux comparaisons binaires d'éléments, sont supposées individuellement précises dans un premier temps. La dernière partie du chapitre (§V-6) aborde la question de la prise en compte d'opinions à la fois imprécises et incohérentes.

Dans une problématique de tri croisé déterministe, chaque opinion, exprimée sur une comparaison binaire, correspond à une équation qui met en relation, au plus, deux variables de poids ($c_{ijk}=w_i/w_j$, $i,j=1,2,...,n$; $k=1,2,...,d$)[39]. Pour illustrer de manière concrète l'incidence de l'incohérence de la *matrice des comparaisons* sur le calcul des poids, on pourrait dénombrer et résoudre (après avoir fixé arbitrairement une variable) tous les systèmes d'équations distincts de rang $n-1$ (n étant le nombre d'éléments à pondérer). Chaque poids serait alors associé à une distribution de valeurs possibles. Dès lors que l'écart-type d'une distribution de poids est non nul, il y a incohérence de la matrice, c'est-à-dire lorsque deux résolutions différentes mènent à deux résultats différents. La moyenne des écart-type est alors d'autant plus élevée que l'incohérence de la *matrice des comparaisons* est grande.

Une autre façon d'illustrer cette incohérence consiste à assimiler les opinions exprimées à des objectifs. En présence d'une *matrice de comparaisons* incohérente (voir §I-5 et définition II–1), ces objectifs ne peuvent pas être atteints simultanément. Les méthodes de tri croisé tentent alors, malgré tout, de fournir une solution qui ne s'en éloigne globalement pas trop ; compte tenu du sens que donne la méthode utilisée à la notion de distance. De ce point de vue et comme le souligne Saaty dans [SAA77], le jeu de poids recherché sera d'autant plus pertinent que la matrice de départ sera cohérente. Dans le cas par exemple de comparaisons cycliques du type ($c_{ij}>c_{jh}>c_{hi}$), la solution proposée ne pourra en aucun cas vérifier cet ordre.

Si, en présence d'une *matrice de comparaisons* incohérente, le groupe de décision refuse de revenir sur son jugement, cela peut :

- soit expliquer le fait que le niveau d'incohérence est jugé acceptable (imperceptible au niveau de chacune des comparaisons) par l'ensemble des décideurs,
- soit expliquer une situation de conflit d'opinion, lorsque la *matrice des comparaisons* comporte des opinions divergentes exprimées par différents décideurs ne cherchant pas nécessairement le compromis,

Lorsque le groupe de décision accepte de revoir son jugement, il est important de pouvoir l'assister en vue d'améliorer la cohérence de la *matrice des comparaisons*. L'utilisation

[39] Rappelons ici que n représente le nombre d'opinions à pondérer et d le nombre de décideurs composant le groupe de décision. La définition II–1 propose plus de détail sur ces notations.

d'indicateurs de cohérence peut fournir des repères aux décideurs en vue de reformuler leurs opinions et éviter ainsi le blocage du processus de décision.

Notons par ailleurs que tout critère de jugement (choisi pour pondérer les éléments) est un vecteur d'incohérence lorsqu'il est mal adapté, dans sa signification ou dans son échelle de notation, à la comparaison de tout ou partie des éléments. Dans une stratégie de compromis, ceci peut se traduire par des incohérences persistantes. Il est alors indispensable de porter l'aide à la décision au niveau du référentiel de jugement lui même en révisant le critère choisi pour le tri croisé. Ce travail de thèse se situe dans l'hypothèse d'un référentiel de jugement mono-critère pertinent. Une présentation détaillée de la notion de référentiel de jugement est proposée dans [ROY85].

V-1. INDICATEUR DE COHERENCE

La notion de cohérence est relative à la distance qui sépare une *matrice de comparaisons* qui ne vérifie pas la propriété de transitivité (voir définition II–1) d'une matrice qui elle la vérifie. Compte tenu du fait que différentes métriques sont envisageables pour le calcul de cette distance, il est difficile de parler d'indicateur unique.

Les indicateurs de cohérence que nous avons rencontrés dans la littérature ne prennent pas en compte le cas d'une *matrice de comparaisons* dont les opinions diagonales ne sont pas égales à 1. Par ailleurs, ils ne permettent pas une différentiation de l'incohérence mesurée en fonction de la stratégie de vote que pourrait choisir le groupe de décision. Compte tenu de la diversité des champs d'application pratique du tri croisé (ex : test en aveugle rendant possible la comparaison d'un élément à lui même) et de la multiplicité des stratégies de vote envisageables par le groupe de décision (ex : rechercher ou non le compromis), il serait intéressant de disposer d'un *indicateur générique* capable de couvrir un spectre plus ou moins large de *matrices de comparaisons* (ex : opinions multiples, diagonale différente de 1, etc.) tout en autorisant une mesure ciblée de l'incohérence.

Les exemples d'indicateurs de cohérence présentés dans ce qui suit ne constituent pas une revue exhaustive de la littérature. Le but de cette section est d'introduire progressivement un indicateur basé sur la théorie de la régression qui sera, dans les sections suivantes, complété et utilisé en vue d'une appréciation sélective de l'incohérence.

V-1.1. INDICATEUR DE COHERENCE PROPOSE PAR SAATY

L'indicateur de cohérence (voir formule V–1) proposé par Saaty [SAA77] nécessite que la *matrice des comparaisons* soit réciproque et qu'elle comporte exactement une opinion par comparaison. Il est alors équivalent à une mesure de la variance des erreurs (ou des divergences) de jugement ($I.C._{Saaty} \in [0\ ;\ +\infty[$).

formule V–1

$$I.C._{Saaty} = \frac{\lambda_{\max} - n}{n-1},$$

avec $\lambda_{\max}$: valeur propre maximale de la matrice des comparaisons,
n : nombre d'éléments à pondérer.

Par ailleurs, Saaty souligne la difficulté d'associer à son indicateur une limite rigide au-delà de laquelle l'incohérence serait clairement établie. Il propose en revanche un test

statistique qui n'exclue pas la cohérence du moment que la moyenne de l'indicateur est inférieure à son écart-type.

Soit $\{1,2,...,g\}$, l'échelle de notation retenue. Pour un nombre d'éléments $n>1$ donné, cet indicateur est dominé par la borne $n(g-1)/(n-1)$ et il peut donc être traduit dans une échelle entre 0 et 1. Dans le même article, Saaty propose également une étude statistique sur l'évolution moyenne de la cohérence en fonction du nombre d'éléments à comparer et de la finesse de l'échelle de notation. Les comparaisons sont rentrées de manière aléatoire pour former une matrice réciproque. L'étude montre clairement que quelque soit l'échelle utilisée, la cohérence décroît fortement en fonction du nombre d'éléments à pondérer. Saaty s'appuie sur ce constat, par ailleurs confirmé en psychophysique, pour souligner l'intérêt des structures hiérarchiques et en particulier de l'approche A.H.P. qui permet de décomposer la pondération d'un ensemble d'éléments en plusieurs sous problèmes de pondération de taille réduite.

Intuitivement, il semble que l'indicateur de cohérence calculé soit d'autant plus significatif que l'échelle de notation adoptée est fine. Cette exigence se heurte cependant à la sensibilité du jugement humain qui requiert des échelles d'environ 7 échelons (voir §I-8). Dans l'idéal l'échelle de notation devrait elle aussi s'ajuster de manière à réduire l'incohérence résiduelle dont elle peut être responsable (compte tenu de la spécificité des ordres de grandeur caractérisant les rapports d'importance pour un ensemble d'éléments à pondérer). Comme nous l'avons déjà indiqué à la section I-8, nous n'abordons pas cet aspect dans ce travail dans la mesure où nous ne considérons pas d'échelle de notation particulière sur l'intervalle de définition des comparaisons binaires (ex :]0 ; +∞[, lorsqu'il s'agit de rapports d'importance et]0 ; 1[lorsqu'il s'agit de parts d'importance relative).

V-1.2. INDICATEUR DE COHERENCE ISSU DE LA THEORIE DE LA REGRESSION

Comme nous l'avons vu à la section III-1, un modèle de régression a pour but de prédire, à partir d'un ensemble d'observations, la relation qui existe entre une variable dépendante et un ensemble de variables de prédiction.

Pour un modèle de régression, la somme des carrés prédite par le modèle est toujours inférieure ou égale à la somme des carrés des observations (voir formule V–2 et section III-1 pour plus de précision sur les notations). Il s'agit là d'un résultat classique, bien connu dans la littérature dédiée à la régression (voir par exemple [DRA81]). La différence correspond à la part d'erreur non expliquée par le modèle.

formule V–2

$$E^tE = \sum_i (Y_i - \hat{Y}_i)^2 = (Y - X\Theta)^t (Y - X\Theta) = Y^tY - 2\Theta^t X^t Y + \Theta^t X^t X\Theta$$

or $X^t X\Theta = X^t Y$ (équations normales)

d'où $Y^tY = \Theta^t X^t Y + E^t E$

avec
- Y : observations de la variable dépendante,
- X : jeux des variables de prédiction correspondant à Y,
- Θ : paramètres optimaux du modèle de régression,
- $Y^tY = \sum_i Y_i^2$: somme des carrés des valeurs observées,
- E^tE : somme des carrés des erreurs,
- $\Theta^t X^t Y = \sum_i \hat{Y}_i Y_i$: somme des carrés prédite.

Pour apprécier la qualité de la prédiction apportée par un modèle de régression, il est intéressant de calculer le rapport $\Theta^t X^t Y / Y^t Y$ qui se situe entre 0 et 1. Nous désignons ce rapport de manière synthétique par le sigle P.E.S.C. pour « Part Expliquée de la Somme des Carrés ». Ce rapport est une forme dérivée du coefficient de détermination R^2, bien connu en régression linéaire. R^2 représente la corrélation entre les observations (Y) de la variable dépendante et les estimations ($\hat{Y}$) qui leur sont associées et reflète la pertinence du modèle utilisé. Plus les estimations sont corrélées aux observations ($R^2 \rightarrow 1$) et plus le modèle linéaire est adapté à la prédiction de la variable dépendante au sens des moindres carrés. Le coefficient de détermination R^2 nécessite par contre la présence parmi les paramètres du modèle, d'une ordonnée à l'origine, ce qui n'est en général pas le cas du modèle linéaire associé à la problématique du tri croisé (voir §III-1). Lorsque la *matrice des comparaisons* est réciproque, l'optimum correspond à une ordonnée à l'origine nulle et on a alors l'égalité P.E.S.C.= R^2.

Nous proposons d'adopter le coefficient P.E.S.C. comme indicateur de cohérence des comparaisons d'entrée dans le cadre de la problématique du tri croisé[40]. Lorsque P.E.S.C. est égal à 1, le modèle est capable de prédire toutes les opinions exprimées. Dans le cas contraire, P.E.S.C. est strictement inférieur à 1 et vaut 0 lorsque la part prédite de la « somme des carrés des opinions exprimées » est nulle. Avec les notations adoptées depuis la section II-1.2 une formulation de l'indicateur P.E.S.C. est donnée par la formule V–3. Dans la suite de ce document, il sera également désigné par $I.C._{Régression}$.

formule V–3

$$I.C._{Régression} = \text{P.E.S.C.} = \begin{cases} \dfrac{\Theta^t X^t Y}{Y^t Y}, \text{ si } \exists\left(c_{ijk} \neq 1, \alpha_{ijk} = 1\right), i,j = 1,2,\ldots,n;\ i \neq j; \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad k = 1,2,\ldots,d; \\ 1, \text{ sinon.} \end{cases}$$

$$\text{avec} \begin{cases} \Theta^t X^t Y = \sum_{i=1}^{n-1} \theta_i \left(\sum_{j \neq i}^{n} \sum_{k=1}^{d} \left(\alpha_{ijk} \log\left(c_{ijk}\right) - \alpha_{jik} \log\left(c_{jik}\right) \right) \right), \\ \theta_i \approx \log(w_i),\ i = 1,2,\ldots,n;\ \theta_n = 0, \\ Y^t Y = \Theta^t X^t Y + E^t E = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j>i}^{n} \sum_{k=1}^{d} \left(\left(\alpha_{ijk} \log\left(c_{ijk}\right)\right)^2 + \left(\alpha_{jik} \log\left(c_{jik}\right)\right)^2 \right). \end{cases}$$

V-2. INDICATEUR GENERIQUE DE COHERENCE

Comme nous l'avons vu au chapitre III, une approche basée sur un modèle de régression logarithmique selon les moindres carrés revient à trouver la matrice cohérente qui se rapproche le plus (au sens des moindres carrés logarithmiques) de la *matrice des comparaisons binaires*. Mettre à 1 toutes les opinions diagonales (lorsqu'elles n'y sont pas), rapproche la matrice de départ de n'importe qu'elle matrice cohérente. Un modèle de régression présuppose implicitement que ces opinions sont égales à 1 et l'indicateur P.E.S.C.

[40] Bien que n'ayant pas rencontré dans notre revue de la littérature d'articles sur le sujet, nous émettons des réserves quant à l'aspect novateur de cette proposition. Ces réserves sont tout d'abord motivées par la popularité du coefficient de détermination R^2 dont nous nous inspirons. D'autre part, il existe de nombreux travaux appliquant la théorie de la régression au cadre du tri croisé comme en témoigne par exemple la méthode R.L.M.C. (voir §II-1.2).

ne prend pas en compte l'incohérence des opinions sur la diagonale. Rappelons au passage que c'est également le cas de l'indicateur de Saaty qui nécessite une matrice réciproque donc à diagonale unité[41]. Pour pallier ce manque, il est possible de compléter P.E.S.C. par un indicateur spécifique aux comparaisons diagonales. L'indicateur proposé par la formule V–4 vaut 1 si toutes les opinions exprimées sur la comparaison diagonale c_{ii} sont cohérentes (c_{iik}=1, i=1,2,...,n ; k=1,2,...,d) et il tend vers 0 lorsqu'elles sont toutes très incohérentes ($c_{iik} \to +\infty$ ou 0, i=1,2,...,n ; k=1,2,...,d).

formule V–4
$$I.C._{Diagonale,i} = \begin{cases} \dfrac{1}{d_{ii}} \displaystyle\sum_{k=1}^{d} \dfrac{\alpha_{iik}}{1+(\log(c_{iik}))^2}, & \text{si } d_{ii} = \displaystyle\sum_{k=1}^{d} \alpha_{iik} \neq 0 \\ 1, \text{ sinon.} \end{cases}, \quad i = 1,2,...,n$$

Un indicateur générique peut être construit en combinant les indicateurs $I.C._{Régression}$ et $I.C._{Diagonale,i}$. Une formulation possible consiste à faire une moyenne des deux indicateurs précédents, pondérés par le nombre de comparaisons qui leur sont respectivement associées (voir formule V–5). Sur les n^2 comparaison de la matrice, (n^2-n) sont prises en compte par $I.C._{Régression}$. A l'image de $I.C._{Régression}$ et de $I.C._{Diagonale,i,}$, l'indicateur résultant varie entre 0 et 1 pour exprimer une cohérence croissante[42].

formule V–5
$$I.C._{Générique} = \frac{1}{n^2}\left((n^2 - n) I.C._{Régression} + \sum_{i=1}^{n} I.C._{Diagonale,i} \right)$$

Une analyse plus fine du comportement, entre 0 et 1, des indicateurs $I.C._{Régression}$ et $I.C._{Diagonale,i}$ est nécessaire si l'on veut connaître avec plus de précision le comportement de $I.C._{Générique}$. La figure V–1 illustre grossièrement le comportement de la fonction de combinaison lorsque le nombre d'éléments à comparer évolue de 3 à 100, dans le cas où les comparaisons diagonales sont toutes égales (ce qui ramène le problème à deux dimensions). L'influence de l'incohérence sur les comparaisons diagonales s'estompe à mesure que le nombre d'éléments à comparer croit. Par ailleurs, l'indicateur de cohérence sur les comparaisons diagonales a plus de chance de se situer à proximité de 1 (région grisée sur la figure) que n'en a l'indicateur concernant les comparaisons non diagonales, compte tenu du faible risque d'incohérence lorsque l'on compare un élément à lui-même.

Par ailleurs et comme le souligne la plupart des auteurs de la littérature, il est difficile d'associer à un indicateur une limite rigide définissant une zone d'incohérence élevée. Comme le préconise Saaty pour son indicateur (voir §V-1.1), une telle limite doit tenir compte de la dimension du problème et de l'échelle de notation adoptée. Elle doit surtout prendre en considération la spécificité de chaque décideur et sa capacité à apprécier les ordres de grandeur en présence. Cet aspect n'est pas traité dans ce travail. La criticité des valeurs prises par notre indicateur est laissée à l'appréciation du groupe de décision.

[41] L'indicateur P.E.S.C. est plus général que celui de Saaty dans la mesure où il s'applique à des matrices ne comportant pas exactement une opinion par comparaison.

[42] Ce constat découle des propriétés d'idempotence, de continuité et de monotonie croissante de la moyenne arithmétique pondérée, utilisée comme fonction d'agrégation (voir par exemple [DUB94*]).

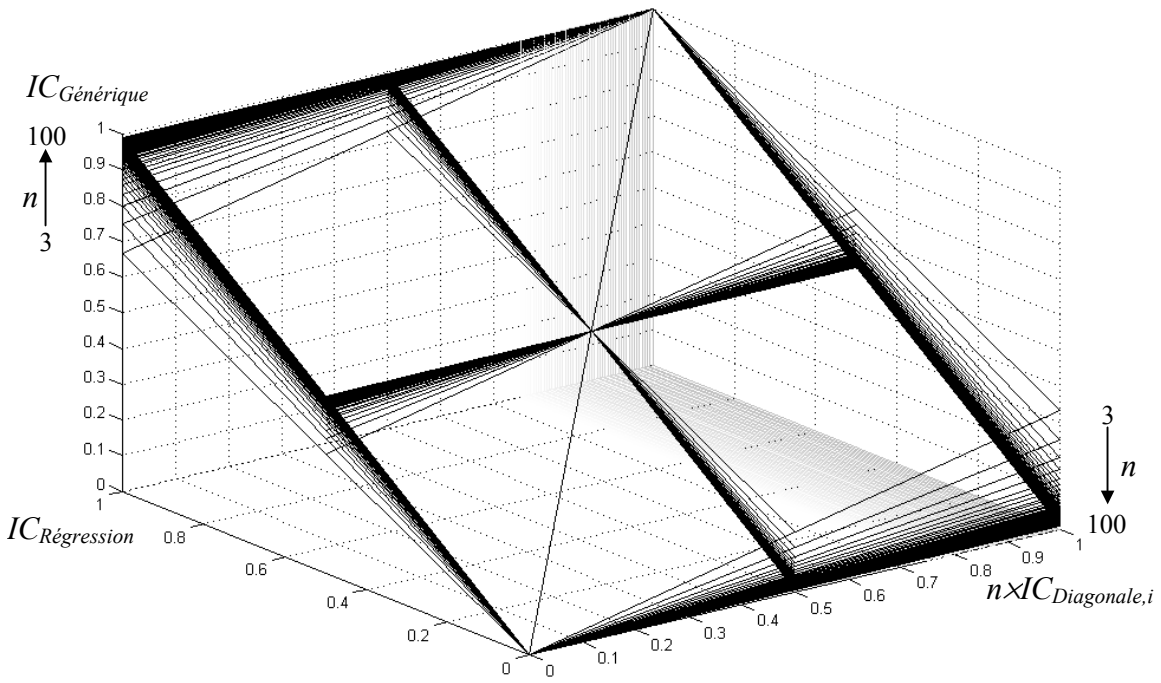


figure V–1 : Représentation grossière de l'évolution de I.C.$_{Générique}$ en fonction du nombre d'éléments à comparer

V-3. INDICATEUR GENERIQUE CORRIGE DE COHERENCE

Dans un modèle de régression, les écarts entre l'observation et la prédiction peuvent être attribués à deux causes complémentaires, à savoir : la présence de mesures redondantes ou l'inadéquation du modèle choisi. Pour ce qui est de la redondance, elle se manifeste lorsque différentes valeurs de la variable dépendante y, $\{Y_{1,j},\ldots,Y_{m_j,j}\}$ sont associées à un même jeu (j) de variables de prédiction $\{X_{1,j},\ldots,X_{n,j}\}$.

La somme des écarts, élevés au carré, entre les observations et leurs estimations peut être détaillée pour distinguer chacune des configurations de variables de prédiction sous la forme : $E^tE = \sum_j \sum_{i=1}^{m_j} \left(Y_{i,j} - \hat{Y}_j\right)^2$. Conformément à la formule V–6, chaque restriction de la somme des écarts à un même jeu j de variables de prédiction peut être décomposée en deux quantités complémentaires [DRA81] :

- ⇨ la somme des écarts élevés au carré, entre les valeurs observées sur l'échantillon correspondant au jeu j et la moyenne $\overline{Y}_j$ de cet échantillon. Elle exprime une part d'erreur, dite erreurs pures, qui est inaccessible au modèle de régression, quel qu'il soit, et intervient dès lors qu'il existe des observations redondantes (relatives à même jeu de variables de prédiction) non confondues.
- ⇨ la seconde quantité, qui est égale à m_j fois l'écart au carré entre la valeur prédite $\hat{Y}_j$ et la moyenne $\overline{Y}_j$, représente les erreurs de calage. Lorsque le modèle choisi est le bon, les erreurs de calage sont nulles. Dans le cas contraire, elles expriment l'inadéquation du modèle choisi. Ce second type d'erreurs peut exister en l'absence d'opinions multiples.

formule V–6 $$\sum_{i=1}^{m_j}\left(Y_{i,j}-\hat{Y}_j\right)^2=\sum_{i=1}^{m_j}\left(Y_{i,j}-\overline{Y}_j\right)^2-2\left(\hat{Y}_j-\overline{Y}_j\right)\underbrace{\sum_{i=1}^{m_j}\left(Y_{i,j}-\overline{Y}_j\right)}_{0}+\left(\hat{Y}_j-\overline{Y}_j\right)^2\underbrace{\sum_{i=1}^{m_j}1}_{m_j}$$

La figure V–2, illustre sur une régression à une seule variable de prédiction ces deux types d'erreurs. Le modèle non linéaire évite les erreurs de calage du modèle linéaire mais ne peut rien face aux erreurs pures.

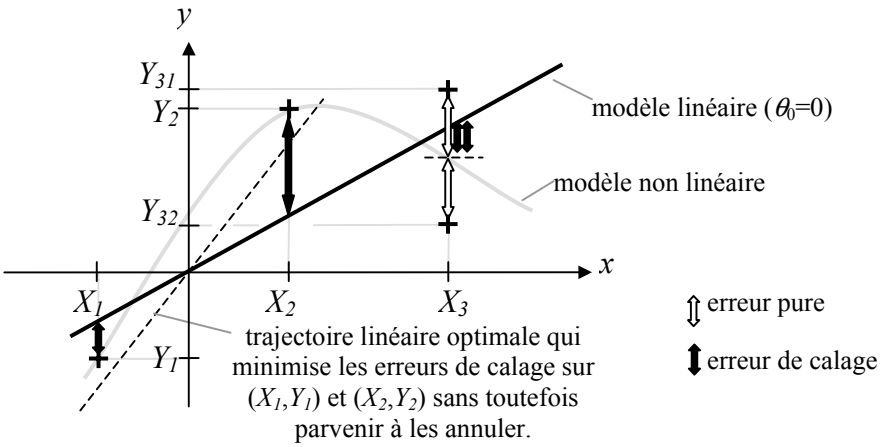


figure V–2 : Illustration des erreurs pures et des erreurs de calage

Prenons le cas d'une même configuration de variables de prédiction associée à différentes observations de la variable dépendante y. Dans le meilleur des cas, le modèle adopté prédira pour chacune de ces observations, leur valeur moyenne annulant ainsi les erreurs de calage (c'est le cas du modèle non linéaire sur la figure V–2).

Dans le cadre du tri croisé, pour une même case (i,j) de la *matrice des comparaisons*, la présence d'opinions multiples non identiques génère obligatoirement des erreurs pures. Avec le modèle linéaire choisi les opinions symétriques, non inverses les unes des autres, sont également source d'erreurs. Ce ne sont cependant pas des erreurs pures mais des erreurs de calage. Pour preuve, ces deux opinions symétriques, l'une de l'autre, $\alpha_{ijk}log(c_{ijk})=\alpha_{ijk}log(w_i)-\alpha_{ijk}log(w_j)+\varepsilon_{ijk}$ et $\alpha_{jik}log(c_{jik})=-\alpha_{jik}log(w_i)+\alpha_{jik}log(w_j)+\varepsilon_{jik}$ ne correspondent pas à une même configuration des variables de prédiction sauf si ces deux opinions sont toutes deux manquantes (étant donné que le paramètre α vaut 0 ou 1, $\alpha_{ijk}\neq-\alpha_{jik}$ sauf si $\alpha_{ijk}=\alpha_{jik}=0$,). Plus généralement, toute incohérence de la *matrice des comparaisons* non imputable à des opinions multiples correspond à des erreurs de calage.

Comme évoqué ci-dessus, les erreurs de calage peuvent, elles aussi, comporter une part inaccessible au modèle de régression choisi, exprimant ainsi son inadéquation. Cela peut être le cas d'un modèle linéaire, et ce quel que soit son paramétrage (ex : trajectoire en pointillé sur la figure V–2 ne pouvant joindre les points (X_1,Y_1) et (X_2,Y_2)). Ce résidu d'erreur peut s'exprimer comme une somme de carrés à des valeurs limites. Par exemple, dans le cadre du tri croisé et pour deux opinions symétriques $Y_1=\alpha_{ijk}ln(c_{ijk})$ et $Y_2=\alpha_{jik}ln(c_{jik})$, le modèle linéaire utilisé pourra au meilleur des cas prédire les valeurs limites respectives $Y_1^*=(Y_1-Y_2)/2$ et $Y_2^*=-(Y_1-Y_2)/2=-Y_1^*$. La part d'erreur $(Y_1-Y_1^*)^2+(Y_2-Y_2^*)^2$, ne sera jamais comblée par le jeu de poids fourni en sortie.

En présence d'erreurs pures ou de calage, la valeur maximale que peut atteindre l'indicateur P.E.S.C. est strictement inférieure à 1. Dans ce qui suit nous considérons uniquement les erreurs pures ou de calage associées aux opinions concernant simultanément deux mêmes éléments i et j (c_{ijk} ou c_{jik}, i,j=1,2,...,n ; k=1,2,...,d). Si le groupe de décision estime qu'une partie de ces erreurs, non accessible au modèle, est tolérée, il est légitime de ne pas la prendre en considération lors du calcul de P.E.S.C., conformément à la formule V–7.

formule V–7

$$I.\mathrm{C.}_{\textit{Régression Corrigé}} = \mathrm{P.E.S.C.} = \begin{cases} \dfrac{\Theta^t X^t Y}{Y^t Y - v_\varepsilon}, \text{ si } \exists\left(c_{ijk} \neq 1, \alpha_{ijk} = 1\right), i,j = 1,2,...,n; i \neq j; \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad k = 1,2,...,d; \\ 1, \text{ sinon.} \end{cases}$$

$$\text{avec} \begin{cases} \Theta^t X^t Y = \sum_{i=1}^{n-1} \theta_i \left(\sum_{j \neq i}^{n} \sum_{k=1}^{d} \left(\alpha_{ijk} \log\left(c_{ijk}\right) - \alpha_{jik} \log\left(c_{jik}\right) \right) \right), \\ \theta_i \approx \log(w_i),\ i = 1,2,...,n,\ \ \theta_n = 0, \\ Y^t Y = \Theta^t X^t Y + E^t E = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j>i}^{n} \sum_{k=1}^{d} \left(\left(\alpha_{ijk} \log\left(c_{ijk}\right)\right)^2 + \left(\alpha_{jik} \log\left(c_{jik}\right)\right)^2 \right), \\ v_\varepsilon = \text{part d'erreur inaccessible au modèle choisi mais tolérée} \\ \qquad \text{par le groupe de décision.} \end{cases}$$

Dans la formule V–8, différents exemples sont proposés pour la part d'erreur v_ε à retrancher.

- ⇨ $v_{\varepsilon 0}$ correspond au cas où aucune erreur n'est tolérée et où il est légitime que toute incohérence pénalise l'indicateur P.E.S.C..
- ⇨ $v_{\varepsilon 1}$ correspond au cas où les incohérences (erreurs pures et erreurs de calage non accessibles au modèle) relatives à toutes les opinions associées simultanément aux mêmes deux éléments i et j (c_{ijk} et c_{jik}, i,j=1,2,...,n ; $i \neq j$; k=1,2,...,d) sont tolérées. La valeur limite vers laquelle le modèle pourrait tendre (si tout était cohérent par ailleurs) est donnée, pour chaque combinaison de deux éléments, par une moyenne logarithmique faisant intervenir toutes les opinions exprimées sur cette combinaison.
- ⇨ $v_{\varepsilon 2}$ correspond au cas où seules les erreurs de calage relatives aux opinions symétriques, exprimées par un même décideur, sont tolérées. La valeur limite vers laquelle le modèle pourrait tendre (si tout était cohérent par ailleurs) est donnée, pour chaque paire d'opinions c_{ijk} et c_{jik}, par la quantité $m_{(i,j),k}$ pour c_{ijk} et $-m_{(i,j),k}$ pour c_{jik}. La quantité $m_{(i,j),k}$ correspond à la moyenne entre $log(c_{ijk})$ et $- log(c_{jik})$.
- ⇨ $v_{\varepsilon 3}$ correspond au cas où seules les erreurs de calage d'une opinion c_{ijk} avec sa symétrique c_{jik} ne sont pas tolérées. La valeur limite vers laquelle le modèle pourrait tendre (si tout était cohérent par ailleurs) est donnée, pour chaque opinion c_{ijk} par la quantité $m_{ijk,\varepsilon 3}$. Le calcul de cette valeur limite est donné par une moyenne logarithmique qui fait intervenir l'opinion c_{ijk} ainsi que les moyennes $m_{(i,j),l}$ (voir $v_{\varepsilon 2}$) relatives aux opinions provenant d'un décideur différent ($l \neq k$). Seule l'opinion c_{jik} (symétrique de c_{ijk}) n'est pas prise en compte dans ce calcul. Elle est remplacée par l'inverse de c_{ijk} et cela pour exprimer que l'erreur de calage que génère c_{jik} (lorsqu'elle est différente de $1/c_{ijk}$) n'est pas tolérée.

- ⇨ $v_{\varepsilon 4}$ correspond au cas où uniquement les erreurs pures, relatives aux opinions multiples (associées à une même case c_{ij} de la *matrice des comparaisons*), sont tolérées. La valeur limite vers laquelle le modèle pourrait tendre (si tout était cohérent par ailleurs) est donnée, pour chaque case c_{ij}, par la moyenne logarithmique m_{ij} des opinions qui y sont exprimées.

Par définition, la part d'erreur $v_{\varepsilon 1}$ englobe $v_{\varepsilon 2}$, $v_{\varepsilon 3}$ et $v_{\varepsilon 4}$. Pour autant elle n'en est pas la somme. Les parts d'erreur $v_{\varepsilon 2}$, $v_{\varepsilon 3}$ et $v_{\varepsilon 4}$ sont en partie calculées à partir d'opinions communes. Le fait de les composer de manière additive introduirait donc une redondance difficile à interpréter en terme de stratégie de vote.

formule V–8

$$
\begin{aligned}
v_{\varepsilon 0} &= 0 \\
v_{\varepsilon 1} &= \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j>i}^{n}\sum_{k=1}^{d}\left(\alpha_{ijk}\left(log\left(c_{ijk}\right)-m_{(i,j)}\right)^2+\alpha_{jik}\left(log\left(c_{jik}\right)-\left(-m_{(i,j)}\right)\right)^2\right) \\
v_{\varepsilon 2} &= \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j>i}^{n}\sum_{k=1}^{d}\left(\alpha_{ijk}\left(log\left(c_{ijk}\right)-m_{(i,j),k}\right)^2+\alpha_{jik}\left(log\left(c_{jik}\right)-\left(-m_{(i,j),k}\right)\right)^2\right) \\
v_{\varepsilon 3} &= \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j>i}^{n}\sum_{k=1}^{d}\left(\alpha_{ijk}\left(log\left(c_{ijk}\right)-m_{ijk,\varepsilon 3}\right)^2+\alpha_{jik}\left(log\left(c_{jik}\right)-m_{jik,\varepsilon 3}\right)^2\right) \\
v_{\varepsilon 4} &= \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j>i}^{n}\sum_{k=1}^{d}\left(\alpha_{ijk}\left(log\left(c_{ijk}\right)-m_{ij}\right)^2+\alpha_{jik}\left(log\left(c_{jik}\right)-m_{ji}\right)^2\right)
\end{aligned}
$$

avec

$$
\begin{aligned}
&\text{pour } i,j=1,2,...,n,\ k=1,2,...,d: \\
&d_{ij}=\sum_{k=1}^{d}\alpha_{ijk} \\
&m_{(i,j)}=\begin{cases}\dfrac{\sum_{k=1}^{d}\left(\alpha_{ijk}\times\log\left(c_{ijk}\right)-\alpha_{jik}\times\log\left(c_{jik}\right)\right)}{d_{ij}+d_{ji}}, & \text{si } d_{ij}+d_{ji}>0 \\ 0, \text{sinon.} & \end{cases} \\
&m_{(i,j),k}=\begin{cases}\dfrac{\alpha_{ijk}\times\log\left(c_{ijk}\right)-\alpha_{jik}\times\log\left(c_{jik}\right)}{\alpha_{ijk}+\alpha_{jik}}, & \text{si } \alpha_{ijk}+\alpha_{jik}>0 \\ 0, \text{sinon.} & \end{cases} \\
&m_{ijk,\varepsilon 3}=\begin{cases}\dfrac{\left(\alpha_{ijk}+\alpha_{jik}\right)\times\log\left(c_{ijk}\right)+\sum_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{d}\left(\left(\alpha_{ijl}+\alpha_{jil}\right)\times m_{(i,j),l}\right)}{\sum_{l=1}^{d}\left(\alpha_{ijl}+\alpha_{jil}\right)}, & \text{si } \sum_{l=1}^{d}\left(\alpha_{ijl}+\alpha_{jil}\right)>0 \\ 0, \text{sinon.} & \end{cases} \\
&m_{ij}=\begin{cases}\dfrac{\sum_{k=1}^{d}\alpha_{ijk}\times\log\left(c_{ijk}\right)}{d_{ij}}, & \text{si } d_{ij}>0 \\ 0, \text{sinon.} & \end{cases}
\end{aligned}
$$

Dans la pratique, il n'est pas exclu que le groupe de décision tolère aussi bien les opinions symétriques non inverses l'une de l'autre, provenant d'un même décideur, que les divergences d'opinion entre décideurs différents. Par exemple, dans le cadre d'un test en aveugle mettant en jeu des jugements binaires dans lesquels l'ordre des éléments à comparer influe fortement

sur le résultat, l'occurrence d'incohérences relatives à des comparaisons symétriques non inverses est fortement prévisible, notamment si le groupe de décision n'est pas composé exclusivement d'experts. Si en plus le groupe ne recherche pas nécessairement le compromis, c'est à dire qu'il autorise la divergence d'opinion, il peut alors retrancher la quantité $v_{\varepsilon 1}$ du dénominateur de P.E.S.C.. Le groupe de décision tolère dans ce cas toute incohérence liée à une même combinaison de deux éléments : aussi bien les opinions multiples différentes que symétriques non inverses. Si le groupe de décision est engagé dans une recherche de compromis, c'est à dire qu'il ne tolère pas les divergences, tout en autorisant les incohérences personnelles relatives aux opinions symétriques non inverses associées à un même décideur (ex : test en aveugle[43] avec recherche de compromis), c'est la quantité $v_{\varepsilon 2}$ qu'il faut retrancher du dénominateur de P.E.S.C.. S'il autorise, au contraire, les divergences d'opinion sans pour autant accepter les incohérences entre les opinions symétriques exprimées par un même décideur (ex : audit d'experts), c'est la quantité $v_{\varepsilon 3}$ qu'il faut retrancher du dénominateur de P.E.S.C..

La quantité $v_{\varepsilon 4}$ n'a en revanche pas de réelle utilité pratique. Elle exprime la volonté de tolérer les opinions multiples (liées à une même case c_{ij}) tout en pénalisant le fait que deux opinions symétriques ne soient pas inverses l'une de l'autre bien qu'elles proviennent de décideurs différents ($c_{ijk} \neq 1/c_{jil}$, $k \neq l$). Dans le cas particulier d'une *matrice de comparaisons* réciproque à opinions multiples (voir définition II–1), on aboutit aux égalités $v_{\varepsilon 0}=v_{\varepsilon 2}$ et $v_{\varepsilon 1}=v_{\varepsilon 3}=v_{\varepsilon 4}$. Si de plus la *matrice des comparaisons* réciproque comporte, au plus, une opinion par comparaison, on aboutit aux égalités $v_{\varepsilon 0}=v_{\varepsilon 1}=v_{\varepsilon 2}=v_{\varepsilon 3}=v_{\varepsilon 4}$.

Dans les trois premiers cas de figure ($v_{\varepsilon 1}$, $v_{\varepsilon 2}$, $v_{\varepsilon 3}$), l'indicateur P.E.S.C. ainsi corrigé (voir formule V–7) exprimera de manière plus sélective la part d'incohérence que le groupe de décision ne tolère pas et qu'il devrait, par conséquent, être disposé à améliorer en révisant tout ou partie de ses opinions. Il faut cependant rappeler ici que les parts d'erreur relaxées (retranchées du dénominateur de P.E.S.C.) se basent sur des raisonnements optimistes du type « si tout était cohérent par ailleurs ». En réalité, la part d'erreur que le modèle ne sera pas en mesure d'exprimer, du fait d'une incohérence tolérée, sera toujours supérieure ou égale (dans le meilleur des cas) à la part d'erreur relaxée. La correction apportée est en ce sens partielle.

L'ajustement proposé pour l'indicateur $I.C._{Régression}$ (P.E.S.C.) est valable dans son principe pour l'indicateur $I.C._{Diagonale,i}$. Deux cas de figure sont à distinguer :

- ⇨ soit les incohérences dues au non respect de l'identité (équi-comparabilité à lui-même) d'un élément sont tolérées, auquel cas $I.C._{Diagonale\ Corrigé,i}$ vaut par défaut 1,
- ⇨ soit elles ne le sont pas et $I.C._{Diagonale\ Corrigé,i}$ est identique à $I.C._{Diagonale,i}$.

En présence d'une *matrice de comparaisons* réciproque, on a l'égalité :

$$I.C._{Diagonale\ Corrigé,i} = I.C._{Diagonale,i} = 1.$$

Les différentes variantes retenues pour l'indicateur générique corrigé combinant $I.C._{Régression\ Corrigé}$ et $I.C._{Diagonale\ Corrigé,i}$ sont regroupées dans la formule V–9. Des exemples numériques illustrant certaines de ces variantes sont proposés à la section VII-2. Parmi les perspectives envisageables (voir §V-4), on pourrait imaginer des corrections plus ciblées qui

[43] L'identité des éléments à comparer n'est pas révélée, d'où la possibilité d'avoir, pour un même votant, des comparaisons symétriques non inverses les unes des autres. Par ailleurs, les rapports d'importance situés sur la diagonale peuvent être différents de 1 bien que comparant un élément à lui même.

viseraient un sous-groupe de décideurs (éventuellement un), voire un sous-ensemble des combinaisons possibles de deux éléments (parmi les *n* éléments à pondérer).

formule V–9

$$I.C._{\text{Générique Corrigé}}^{a,b} = \frac{1}{n^2}\left(\left(n^2 - n\right) I.C._{\text{Régression Corrigé}}^{a} + \sum_{i=1}^{n} I.C._{\text{Diagonale Corrigé},i}^{b}\right)$$

$$\text{avec} \left| \begin{array}{l} a \in \{0,1,2,3,4\}; \\ I.C._{\text{Régression Corrigé}}^{0} = I.C._{\text{Régression Corrigé}} \text{ pour } \nu_\varepsilon = \nu_{\varepsilon 0}, \\ I.C._{\text{Régression Corrigé}}^{1} = I.C._{\text{Régression Corrigé}} \text{ pour } \nu_\varepsilon = \nu_{\varepsilon 1}, \\ I.C._{\text{Régression Corrigé}}^{2} = I.C._{\text{Régression Corrigé}} \text{ pour } \nu_\varepsilon = \nu_{\varepsilon 2}, \\ I.C._{\text{Régression Corrigé}}^{3} = I.C._{\text{Régression Corrigé}} \text{ pour } \nu_\varepsilon = \nu_{\varepsilon 3}, \\ b \in \{0,1\}; \\ I.C._{\text{Diagonale Corrigé},i}^{0} = I.C._{\text{Diagonale},i}, \\ I.C._{\text{Diagonale Corrigé},i}^{1} = 1. \end{array} \right.$$

V-4. COHERENCE A DIFFERENTS NIVEAUX DE GRANULARITE AU SEIN DU GROUPE DE DECISION

Un groupe de décision peut être perçu comme un ensemble plus ou moins spécialisé de décideurs pouvant s'exprimer sur tout ou partie des comparaisons binaires d'éléments. A l'arrivée, chaque opinion exprimée peut être représentative d'un ou de plusieurs décideurs moyennant un poids[44], tout dépend de la stratégie de remplissage de la *matrice des comparaisons*. Par exemple, le groupe de décision peut se concerter pour chacune des comparaisons binaires et fournir à chaque fois une opinion commune. Il peut également différencier, au niveau de chacune des comparaisons, les opinions de chacun des individus ayant désiré s'exprimer. Une autre possibilité consiste à remplir, de manière disjointe ou spécialisée, différentes parties de la matrice en veillant par exemple à ce que tout décideur soit compétent et apte à s'exprimer sur les comparaisons à sa charge.

Chaque scénario pose le problème de l'estimation de la cohérence d'une manière différente. Il s'agit non seulement de refléter la pertinence du modèle de tri croisé adopté ou celle des informations récoltées mais aussi d'analyser plus finement la répartition des rôles entre les décideurs et en particulier l'incidence de la cohérence des individus ou des sous-groupes sur la cohérence globale du groupe.

Introduisons dans ce qui suit la notion d'*entité votante* pour désigner toute composante du groupe de décision, individu ou groupe d'individus, habilitée à s'exprimer d'une même voix sur un ensemble de comparaisons binaires.

[44] La notion de poids associé à une opinion n'est pas abordée de manière explicite dans ce travail. Les résultats qui y sont présentés restent valables lors de la prise en compte de poids entiers. Cela revient à dupliquer les opinions concernées de manière relative, proportionnellement à leur poids. Cependant cette procédure risque d'alourdir les calculs. Une autre alternative inspirée de la méthode de la régression pondérée consiste à associer la notion de poids à une amplification ou au contraire à une réduction de la variance (imprécision) de manière à ce que les opinions qui pèsent le plus sur la décision soient créditées d'une plus grande précision.

définition V–1

Dans la continuité des notations introduites à la définition II–1, soit c_{ijk}, $i,j=1,2,...,n$, $k=1,2,...,v$, l'opinion de la $k^{ème}$ entité votante pour comparer l'importance de l'élément i relativement à celle de l'élément j, v étant le nombre d'entités votantes associées au groupe de décision. Pour tout arrangement binaire d'éléments, une entité votante a le choix entre exprimer une seule opinion ou s'abstenir. Pour avoir une notation homogène, posons α_{ijk} ($i,j=1,2,...,n$, $k=1,2,...,v$) un facteur qui vaut 1 si l'entité votante k exprime une opinion ($c_{ijk}\in]0 ; +\infty[$) et 0 sinon. Lorsque $\alpha_{ijk}=0$, la valeur de c_{ijk} est arbitrairement *f*ixée à une valeur positive ($c_{ijk}=c_0>0$). Un décideur pouvant en toute généralité intervenir au niveau de plusieurs entités votantes à la fois, posons β_{kh} ($k=1,2,...,v$, $h=1,2,...,d$) un facteur qui vaut 1 si le décideur h est impliqué dans l'entité votante k et 0 sinon.

A un changement de notation près, les formules introduites dans les sections et les chapitres précédents sont par définition valables à l'échelle de l'ensemble des entités votantes engendrées par le groupe de décision. Toutes les opinions de la *matrice des comparaisons* sont alors prises en compte. A une échelle plus fine, à savoir celle d'une entité votante isolée ou d'une coalition d'entités votantes, il suffit de restreindre la *matrice des comparaisons* globale au sous-ensemble des opinions exprimées par l'entité votante ou la coalition considérée. Dans la mesure où la nouvelle matrice satisfait aux conditions d'application des formules en question, celles-ci restent valables. C'est en particulier le cas de l'*indicateur générique corrigé de cohérence*. En réponse à la perspective formulée à la fin de la section V-3, il est ainsi possible de mesurer de manière ciblée la cohérence d'une entité votante ou d'une coalition d'entités votantes et d'accéder, à travers elle, à la cohérence du décideur ou du groupe de décideurs qui lui est associé. Le paramétrage de l'*indicateur générique corrigé de cohérence* peut varier d'une entité votante à une autre comme il peut varier d'une coalition aux entités votantes qui la composent. Tout dépend de la stratégie de vote envisagée (voir §VI-1).

Il est aussi important de distinguer le fait d'affecter une entité à une comparaison binaire du fait que cette entité s'exprime ou pas sur cette comparaison. Pour combler cette lacune il suffit de considérer un paramètre d'affectation γ_{ijk} valant 1 si l'entité votante k est affectée à la comparaison binaire c_{ij} et 0 sinon. Il suffit ensuite d'ajouter à toutes les formules de ce document, dans lesquelles figure le coefficient α_{ijk}, la contrainte $\alpha_{ijk}\leq \gamma_{ijk}$.

L'affectation des décideurs aux entités votantes n'est pas indépendante de celle des entités votantes aux comparaisons binaires. Ensemble, elles reflètent la stratégie de vote du groupe de décision. Un même décideur ou un même sous-groupe de décideurs peut, en toute généralité, constitué plusieurs entités votantes différentes, dans la mesure où les ensembles de comparaisons binaires, auxquels sont affectées ces entités, sont différents. En revanche, il est en général souhaitable (pour éviter tout risque de redondance), que ces ensemble de comparaisons soient disjoints. Analytiquement, cette condition de non redondance pourrait s'exprimer comme suit :

formule V–10

$$\sum_{k \in I_{\{h_1,h_2,...,h_u\}}} \gamma_{ijk} \leq 1, \quad i,j = 1,2,...,n; \ \{h_1,h_2,...,h_u\} \in \mathrm{E}_{C_d^u}; \ u = 1,2,...,d;$$

avec

$$\gamma_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si l'entité votante } k \text{ est affecté à la comparaison } c_{ij}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$\mathrm{E}_{C_d^u}$: ensemble des combinaisons de u décideurs parmi d,

$\{h_1,h_2,...,h_u\}$: combinaison de u décideurs parmi C_d^u combinaisons possibles,

$I_{\{h_1,h_2,...,h_u\}}$: indices des entités votantes (parmi v au total) associées exclusivement aux décideurs $\{h_1,h_2,...,h_u\}$,

$$I_{\{h_1,h_2,...,h_u\}} = \left\{ k = 1,2,...,v \,/\, \prod_{i=1}^{u} \beta_{kh_i} = 1 \ \text{ et } \ \sum_{h=1}^{d} \beta_{kh} = u \right\},$$

$$\beta_{kh} = \begin{cases} 1 & \text{si le décideur } h \text{ est associé à l'entité votante } k, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dans la section qui suit, nous abordons la question de l'amélioration de la cohérence du groupe de décision en passant par celle des entités votantes. Nous sommes alors dans la situation où le groupe de décision accepte, du moins en partie, de corriger l'incohérence à laquelle il est confronté.

V-5. CORRECTION ITERATIVE DE L'INCOHERENCE

En partant d'une *matrice de comparaisons* incohérente C, à laquelle on associe un jeu de poids $\{w_1,\ldots,w_n\}$, il est possible de reconstruire une *matrice de comparaisons* C^*, cohérente, à partir des rapports $c_{ij}^*=w_i/w_j$. La comparaison de ces deux matrices permet d'identifier les opinions homologues (c_{ijk}, c_{ij}^*) les plus éloignées les unes des autres. Cela permet d'isoler un sous-ensemble d'opinions de la matrice C, jugées comme les moins représentatives du jeu de poids $\{w_1,\ldots,w_n\}$ et en ce sens les plus incohérentes.

Il faut ici rappeler que le jeu de poids associé à C est relatif à la logique de la méthode de tri utilisée et qu'il a d'autant plus de sens que l'incohérence est faible. En supposant que le groupe de décision juge ce jeu de poids vraisemblable et qu'il veuille bien réviser son jugement, il serait judicieux de modifier en priorité les opinions qui en sont les moins représentatives.

V-5.1. FILTRAGE DES OPINIONS

La mise en évidence des opinions les moins cohérentes dépend du sens que l'on donne à la notion de distance entre deux *matrices de comparaisons* et de la limite à partir de laquelle une opinion est jugée parmi les plus incohérentes. En ce qui concerne l'appréciation de la distance, nous proposons de comparer à 0 la différence entre les images logarithmiques d'une opinion exprimée (c_{ijk}) et de son homologue cohérente reconstituée ($c_{ij}^*=w_i/w_j$). Cela revient à comparer le rapport de ces deux opinions à 1 (ex : $log(c_{ijk})-log(c_{ij}^*)\geq 0 \Leftrightarrow c_{ijk}/c_{ij}^*\geq 1$). Le signe de cet écart logarithmique indique le sens dans lequel il faudra réviser l'opinion exprimée pour tendre vers son homologue cohérente. Son amplitude (dénommée écart logarithmique absolu) révèle, quant à elle, la priorité de cette révision.

Pour ce qui est de l'appréciation de la distance limite au-delà de laquelle une opinion est jugée parmi les plus incohérentes, tous les auteurs de la littérature s'accordent à dire qu'il s'agit là d'une tâche délicate. En effet un seuil rigide de filtrage est souvent difficile à justifier au regard d'une notion aussi subjective que la cohérence d'une entité votante. Cette problématique pose la même difficulté que l'association d'un seuil rigide d'acceptation à un indicateur de cohérence (voir §V-2). D'un autre coté, il est très important de cerner tant bien que mal les incohérences, ne serait-ce que pour amorcer une dynamique de correction au sein du groupe et éviter ainsi le blocage du processus de décision.

Pour caractériser les opinions les plus incohérentes on pourrait par exemple (voir §V-6.2) considérer la moyenne des écarts logarithmiques absolus enregistrés sur l'ensemble de la *matrice des comparaisons C*. Une opinion est alors considérée parmi les plus incohérentes dès que son écart logarithmique absolu est supérieur à cette moyenne. Cette approche fixe de manière statistique la limite de cohérence à défaut de pouvoir cerner plus finement la subjectivité du jugement. Dans [SAA77] l'auteur propose une procédure de correction itérative de la cohérence en retenant à chaque fois la comparaison dont l'écart en valeur absolue à son homologue sur C^* (calculée par la méthode V.P.) est maximal. Son approche s'inscrit dans le cadre de *matrices de comparaisons* associées à un nombre réduit d'éléments à pondérer (du fait de la hiérarchisation par la méthode A.H.P.) et comportant exactement une opinion par comparaison. En ce qui nous concerne, le nombre d'éléments à comparer est moins contraint dans la mesure où l'on prend en compte la capacité du groupe à s'organiser pour optimiser le remplissage de la *matrice des comparaisons* (voir §V-4). Par ailleurs, un nombre variable d'opinions est autorisé par comparaison. En conséquence, le nombre d'opinions exprimées peut être relativement important et une correction isolée aurait un faible impact. Dans ces conditions, considérer la *moyenne* comme critère de filtrage nous semble mieux approprié que le *max* qui risque de ralentir la procédure itérative de correction de l'incohérence.

V-5.2. REDUCTION DE L'INCOHERENCE

Soulignons qu'en présence d'incohérence, il n'est pas toujours judicieux d'imposer à tout ou partie des entités votantes la valeur exacte des modifications à effectuer pour coïncider avec une matrice cohérente particulière. Cela est d'autant plus vrai que l'incohérence est élevée. Il faudrait plutôt les inciter à modifier leur jugement de manière à être les plus proches possible d'une matrice cohérente quelconque, pas nécessairement celle proposée par la méthode utilisée. Cette dernière peut en revanche servir de base à des suggestions en vue d'amorcer les révisions, voire de les orienter. Par exemple, elle peut proposer un sous-ensemble d'opinions à réviser en priorité, voire suggérer le sens des modifications à apporter (en augmentation ou en diminution).

Par ailleurs, le groupe de décision n'est pas toujours intéressé par une réduction globale de l'incohérence. Il peut, comme nous l'avons vu à la section §V-3, considérer comme légitime une partie de l'incohérence (qu'il s'agisse d'erreurs pures ou d'erreurs de calage). Si c'est le cas, il est difficile d'associer une opinion donnée à un type d'incohérence (erreurs pures ou de calage). En effet, une même opinion peut contribuer simultanément à différents types d'incohérence : elle peut faire partie, en même temps, d'opinions multiples (génératrices d'erreurs pures) et d'opinions symétriques non inverses (génératrices d'erreurs de calage). Elle peut aussi contribuer de manière moins directe et donc plus difficile à localiser au non respect de la condition de transitivité, nécessaire à la cohérence de la *matrice des comparaisons*. Ceci dit, il ne faut pas s'interdire la révision d'une opinion associée à une part d'incohérence non tolérée sous prétexte qu'elle contribue, par ailleurs, à des parts d'incohérence tolérées.

En général, une attention particulière est accordée à l'amélioration de la cohérence propre de chaque entité votante (individu ou sous-groupe) en charge d'une partie des données d'entrée de la *matrice des comparaisons*. L'algorithme proposé en figure V–3 va dans ce sens. Il s'adresse à une entité votante en vu d'améliorer sa cohérence de manière itérative.

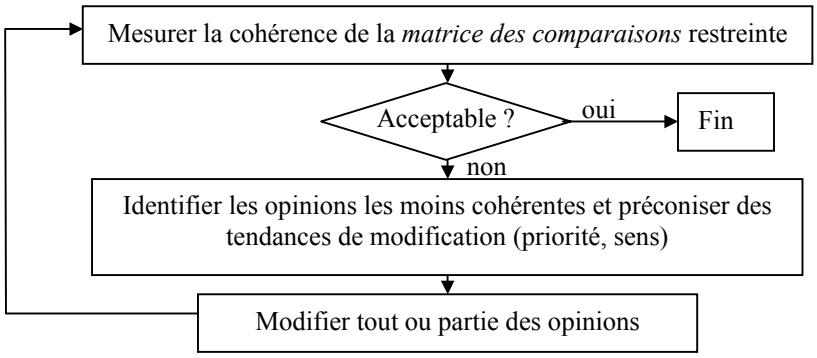


figure V–3 : Correction itérative de l'incohérence d'une entité votante indépendamment de l'incohérence globale du groupe de décision.

Lorsque le groupe de décision recherche le compromis, il est important d'envisager l'amélioration de la cohérence de ses différentes entités votantes de manière concourante[45]. L'algorithme proposé en figure V–4 tente de concilier l'intérêt de l'entité votante à laquelle il s'adresse avec celui du groupe de décision dans sa globalité[46]. Il l'incite à améliorer la cohérence du groupe de décision dans la mesure où elle ne s'oppose pas à sa propre cohérence.

[45] Par exemple, dans un groupe de décision fortement hiérarchisé, la notion d'entité votante peut être conçue de manière récursive. Le sommet de la hiérarchie s'exprime au nom de tout le groupe de décision sur l'ensemble des comparaisons binaires traitées par ce groupe. A mesure que l'on se dirige vers la base de la hiérarchie, les entités votantes se décomposent en sous-entités disjointes au sens des décideurs qui la composent. Dans ce cas de figure et du fait de la structure même du groupe de décision, le traitement de l'incohérence s'inscrit naturellement dans le cadre d'une recherche de compromis. Les opinions exprimées par une entité votante doivent être en accord avec celles de toutes les entités votantes qui l'englobent, jusqu'au sommet de la hiérarchie.

[46] Pour des stratégies de vote plus élaborées limitant le compromis à une coalition d'entités votantes, le même algorithme peut être envisagé localement en remplaçant le groupe de décision par la coalition en question.

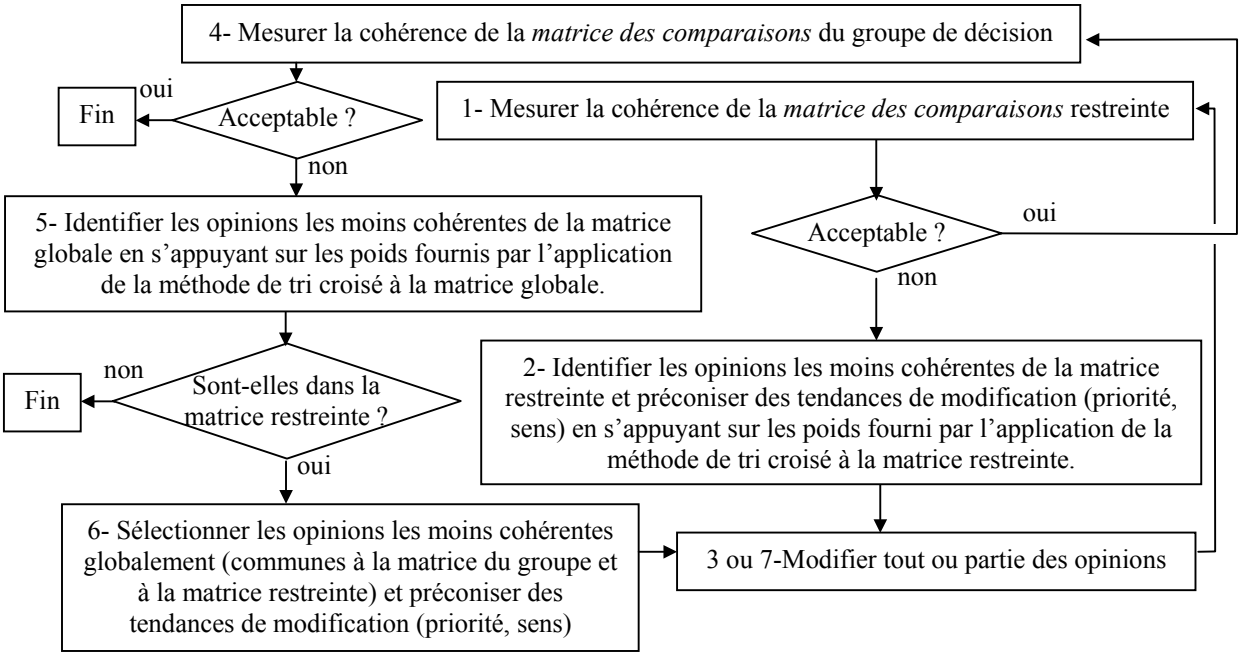


figure V–4 : Correction itérative de l'incohérence dans le cadre d'une recherche de compromis

Comme nous l'avons déjà évoqué à la section V-4, il est possible d'utiliser à l'échelle d'un groupe, qu'il s'agisse du groupe de décision dans sa globalité ou d'un sous-ensemble de ses entités votantes, un paramétrage de l'*indicateur générique corrigé de cohérence* qui soit différent de celui utilisé à l'échelle d'une entité votante représentant un individu isolé. Cela est souvent nécessaire dans la mesure où l'incohérence d'un groupe est en général plus tolérée que celle d'un individu. Plus généralement, la diversité des paramétrages utilisés est le reflet de la diversité des stratégies de vote adoptées pour le groupe de décision et ses entités votantes.

Il est également envisageable d'utiliser des méthodes déterministes de tri croisé différentes pour le traitement des *matrices de comparaisons* considérées (restreintes ou globale). En revanche et pour assurer la convergence de la boucle d'amélioration de la cohérence, les critères d'optimisation associés aux méthodes déterministes de tri croisé utilisées doivent être concordants dans le cas d'une recherche de compromis[47].

A l'issue de l'étape (6), lorsqu'une entité votante (individu ou sous-groupe) décide de revoir ses opinions pour aller dans le sens de la cohérence du groupe, il est fort probable que cela se fasse au détriment de sa propre cohérence. En effet, une entité votante, ayant par ailleurs acquis une bonne cohérence propre, est le plus souvent incitée à la révision d'opinions isolées ; celles qui lui permettent d'aller de la manière la plus significative dans le sens de la cohérence du groupe. Ceci dit, se limiter à une perturbation locale des opinions a de fortes chances d'altérer la cohérence propre de l'entité votante. Il est alors important que cette dernière engage au préalable une réévaluation globale des ordres de grandeur en propageant,

[47] Par exemple, il est bien connu dans la littérature que pour une *matrice des comparaisons* réciproque et incohérente de taille supérieure à 3, les résultats obtenus en utilisant la méthode basée sur l'étude des valeurs propres sont différents de ceux obtenus par la méthode de la régression logarithmique selon les moindres carrées. Faire coexister des critères d'optimisation conduisant à des optimums différents pour des jeux de données identiques serait générateur d'une incohérence artificielle qui pourrait altérer la boucle d'amélioration de la cohérence.

le plus possible, la modification consentie au sein de la *matrice des comparaisons* restreinte qui est la sienne.

Toujours dans le cas d'une recherche de compromis, la passivité d'une entité votante peut s'expliquer par le fait que l'incohérence résiduelle du groupe soit en dehors de son champ d'action (ses opinions ne font pas partie des plus incohérentes à l'échelle du groupe et sont donc peu influentes). Elle se justifie également lorsque cette incohérence résiduelle du groupe ne peut être réduite sans altérer la cohérence propre de l'entité votante en question.

La convergence des deux algorithmes présentés ci-dessus ne peut être garantie dans la mesure où les entités votantes restent maîtresses des tests d'arrêt. Néanmoins, nous avons validé ces algorithmes en séance de groupe pour un nombre réduit d'éléments à pondérer ($n \leq 6$) et en présence d'un nombre restreint d'entités votantes. Chacune d'entre elles était associée à un décideur unique et différent ($d \leq 4$). Le groupe de décision parvenait assez vite à une *matrice de comparaisons* d'une cohérence acceptable (un exemple est proposé à la section VII-2).

Il faut toutefois rappeler ici le constat de Saaty (voir §V-1.1) sur le fait que la cohérence tend naturellement à décroître en fonction du nombre d'éléments à comparer. Pour un groupe de décideurs polyvalents (habilités à s'exprimer, chacun, sur l'ensemble des comparaisons binaires) et un nombre important d'éléments à pondérer (dans [SAA77], $n>9$), la procédure de correction risque d'être longue et fastidieuse, tout comme celle du remplissage des cases de la *matrice des comparaisons*. Le passage par une décomposition hiérarchique de l'ensemble des éléments à pondérer (voir [SAA77]) constitue une première réponse au problème. Une autre manière de gérer cette complexité est de structurer le groupe de décision lui-même en privilégiant la diversité et la complémentarité des compétences. Cela présuppose, toutefois, une certaine liberté dans le choix des individus composant le groupe de décision et leur affectation aux comparaisons binaires. Les décideurs seraient alors répartis en entités votantes spécialisées associées à des sous-ensembles disjoints de comparaisons binaires. Intuitivement, cela devrait faciliter le remplissage de la *matrice des comparaisons*, favoriser la cohérence propre de chaque entité votante et réduire le nombre de révisions qui leur sont demandées. Par ailleurs, envisager la procédure de tri croisé de manière distribuée dans l'espace (ex : vote via le réseau) ne peut qu'en réduire la pénibilité. L'envisager de manière distribuée dans le temps y contribue également à condition que la durée du vote soit suffisamment réduite pour assurer la stabilité des jugements émis. Une maquette informatique est envisagée dans cet esprit à la section VI-1.

Il est également intéressant de remarquer l'utilité de l'*indicateur générique corrigé de cohérence* pour l'appréciation de l'efficacité des actions en amélioration de cohérence. En effet, une révision des opinions semble d'autant plus légitime qu'elle aboutit à la diminution d'une incohérence reconnue par le groupe de décision. Réciproquement, l'incohérence en question méritait bien une révision des opinions, d'où en quelque sorte une confirmation a posteriori de sa criticité. L'*indicateur générique corrigé de cohérence* contribue, au sein des algorithmes de correction, à cette mise en évidence rétroactive. Comme nous l'avons évoqué à la section V-2, il est en revanche difficile d'associer à un tel indicateur un seuil rigide permettant de caractériser, a priori, la criticité de l'incohérence.

V-6. PRISE EN COMPTE DE L'IMPRECISION

Tout d'abord, signalons qu'il est nécessaire de choisir à l'échelle du groupe de décision une même logique de traitement de l'imprécision afin d'assurer l'homogénéité des résultats.

V-6.1. EXTENSION DES INDICATEURS DE COHERENCE

Les indicateurs proposés dans ce cinquième chapitre, pour mesurer la cohérence d'un ensemble d'opinions en entrée d'une procédure de tri croisé, sont tous extensibles à une prise en compte de l'imprécision. Cette extension peut, par exemple, être envisagée à travers l'algorithme F.W.A. (décrit au chapitre IV), basé sur la logique floue, ou à travers l'approche de Monte Carlo (brièvement décrite à la section VI-2, voir aussi §II-2.2), basée sur une logique probabiliste. Un exemple, illustrant l'extension des indicateurs de cohérence par l'approche de Monte Carlo est proposé à la section VII-2.

V-6.2. IDENTIFICATION ET TRAITEMENT DES OPINIONS LES MOINS COHERENTES

Considérons les deux courbes d'imprécision respectivement associées à une opinion de la *matrice des comparaisons* et à son homologue cohérente reconstituée à partir du jeu de poids obtenu (lui-même imprécis). En présence d'un chevauchement entre ces deux courbes, il est souvent difficile de mesurer l'écart qui les sépare ; cet écart servant de base à la comparaison de l'incohérence des différentes opinions exprimées.

Soient $X=[x_b, x_h]$ et $Y=[y_b, y_h]$ (b pour l'extrémité basse et h pour l'extrémité haute), les intervalles supports de deux courbes d'imprécision. Un chevauchement de ces deux courbes est synonyme d'ambiguïté dans leur relation d'ordre. L'indicateur de dominance $I.D.(X,Y)$ donné par la formule V–11 est alors strictement inférieur à 1 en valeur absolue.

formule V–11

$$I.D.(X,Y)=\frac{(x_h-y_h)+(x_b-y_b)}{(x_h-x_b)+(y_h-y_b)},$$

$$\text{avec}\left|\begin{array}{l} X=[x_b,x_h], \\ Y=[y_b,y_h]. \end{array}\right.$$

Dans le cadre de l'identification des opinions les moins cohérentes, l'utilisation de cet indicateur peut être envisagée à travers un classement des opinions de la *matrice des comparaisons* considérée en deux groupes :

- ⇨ l'ensemble des opinions correspondant à une dominance non ambiguë lorsqu'elles sont comparées à leurs homologues cohérentes ($|I.D.|\geq 1$), dénommé G_1.
- ⇨ et son complémentaire, dénommé G_2.

Tant que le premier ensemble (G_1) est non vide, il est prioritaire. Seules les opinions qui y figurent sont concernées par la procédure de correction de l'incohérence. Pour chacune de ces opinions, notons la c_{ijk}, le degré d'incohérence est supposé proportionnel à l'écart, en valeur absolue, entre la courbe d'imprécision associée à $log(c_{ijk})$ et celle associée à son homologue cohérente $log(c_{ij}^*)$. Cet écart est mesuré en remplaçant chacune de ces deux courbes par une valeur précise. Il s'agit d'une valeur représentative (ex : valeur modale) de la courbe en question, compte tenu de la logique de prise en compte de l'imprécision. Typiquement, la valeur moyenne serait déconseillée dans une approche basée sur une logique qualitative telle que la logique floue.

Considérons à présent le cas de figure où le second groupe d'opinions (G_2) est le seul à être non vide. Les préconisations en correction d'incohérence sont alors déduites du degré de

dominance $I.D.(log(c_{ijk}),log(c_{ij}^*))$ associé à chacune des opinions composant ce second groupe.[48]

Pour une opinion donnée, une fois l'écart ou l'*indicateur de dominance* calculé, la valeur absolue du résultat est comparée à la moyenne des valeurs absolues enregistrées sur le groupe d'opinions considéré (G_1 ou G_2). Si la valeur absolue est supérieure à la moyenne, l'opinion en question est alors jugée parmi les plus incohérentes. Le sous-ensemble des opinions les plus incohérentes sont ensuite traitées conformément aux algorithmes proposés à la section V-5.2.

Notre indicateur de dominance peut être considéré comme partiel dans la mesure où il prend en compte le support des courbes d'imprécision mais pas leur forme. Ceci dit, il s'applique aussi bien à la logique flou qu'à la logique probabiliste. Dans son ensemble, l'approche semble suffisamment discriminante dans la perspective d'une correction suggestive et non directive de l'incohérence du groupe de décision. D'autres indicateurs de dominance sont envisageables comme en témoignent, par exemple, les travaux de Nakahara [NAK98]. Dans un cadre plus général que celui du tri croisé, l'auteur propose plusieurs alternatives pour l'appréciation des relations d'ordre pouvant exister entre deux courbes d'imprécision floues. L'indicateur que nous proposons s'en inspire.

Par ailleurs, comme nous le verrons à la section VI-2.2.4 dans le cadre d'une approche du type Monte Carlo, il est également possible d'identifier les opinions les moins cohérentes sans pour autant distinguer les cas de chevauchement. Les courbes d'imprécision associées aux opinions de la *matrice des comparaisons* sont alors remplacées, d'emblée (sans passer par l'indicateur de dominance), par des valeurs qui en sont représentatives (ex : valeur moyenne). Le problème est alors ramené au cas de figure déterministe (§V-5). Dans le cadre d'une approche de Monte Carlo, cette alternative est d'autant plus justifiée que les extrémités des intervalles, supports des courbes d'imprécision, sont difficiles à localiser (voir §VI-2.2.2).

Rappelons également, en ce qui concerne le traitement de l'imprécision inhérente au jugement, qu'il existe dans la littérature d'autres travaux que ceux proposés dans le cadre de la logique floue ou de la théorie des probabilités. Prenons par exemple l'approche préconisée par Arbel (voir §II-2 note 25). L'auteur ramène le problème à un modèle de programmation linéaire dans lequel chaque opinion estimant un rapport d'importance est associée à deux inéquations ($a \leq w_i/w_j \leq b \Leftrightarrow -w_i+aw_j \leq 0$ et $w_i-bw_j \leq 0$). En présence d'une forte incohérence, ces contraintes sont, une à la fois, relaxées et utilisées comme fonction objectif à minimiser. Celles pour lesquelles le problème relaxé n'admet pas de solution annulant la fonction objectif sont marquées. Elles correspondent aux bornes les moins cohérentes, celles qu'il faut réviser en priorité. Il est à noter que cette approche ne s'appuie pas sur la généralisation d'une méthode déterministe particulière. Contrairement à notre approche, elle ne découple pas le traitement de l'incohérence de celui de l'imprécision.

[48] L'*indicateur de dominance* est proportionnel à l'écart entre courbes et inversement proportionnel à leur dispersion. Lorsque le groupe d'opinions G_1 (absence de chevauchement) est non vide, s'appuyer sur cet indicateur pour apprécier le degré d'incohérence de l'une de ses opinions peut fausser les résultats. En effet, l'écart entre une opinion exprimée et son homologue cohérente serait alors pondéré par l'étroitesse de leurs courbes respectives. Ainsi une opinion pourrait être considérée comme plus cohérente qu'une autre bien que l'écart $(log(c_{ijk})-log(c_{ij}^*))$ qui lui est associé soit le plus élevé des deux. Il suffirait pour cela que sa dispersion soit suffisamment faible relativement à celle de l'autre opinion. C'est pourquoi, nous n'employons l'*indicateur de dominance* comme indicateur du degré d'incohérence que pour les opinions de G_2, G_1 étant vide.

V-7. SYNTHESE ET PERSPECTIVES

Ce chapitre a présenté des méthodes dédiées à l'identification et à la correction des incohérences susceptibles d'entacher les comparaisons binaires exprimées par le groupe de décision dans le cadre d'une procédure de tri croisé. Dans un premier temps, seul le cas de figure déterministe a été considéré. La prise en compte de l'imprécision inhérente au jugement a quant à elle été traitée en fin de chapitre. Elle concerne non seulement l'indicateur de cohérence que nous proposons mais également la procédure que nous envisageons en vue d'améliorer cette cohérence.

L'indicateur générique de cohérence proposé dans ce chapitre prend en compte les opinions exprimées au sein de la *matrice des comparaisons* dans leur globalité, y compris celles exprimées au niveau de la diagonale. Il comble à ce niveau un manque que nous avons souligné au niveau des indicateurs présents dans la littérature. Par ailleurs, compte tenu de la diversité des stratégies de tri (ou de vote) envisageables, cet indicateur est paramétrable. Il permet de relaxer, du moins en partie, la part d'incohérence qui est tolérée par le groupe de décision. En conséquence, il rend majoritairement compte de l'incohérence que le groupe de décision est disposé à corriger. Enfin cet indicateur s'applique aussi bien à l'échelle du groupe de décision qu'à celle des entités votantes, notion introduite pour exprimer une plus grande variété dans la manière d'associer les décideurs au remplissage de la *matrice des comparaisons*. A l'échelle d'une entité votante la *matrice des comparaisons* considérée est obtenue en restreignant la *matrice des comparaisons* globale aux opinions exprimées par l'entité en question.

Une fois la cohérence mesurée, une procédure de correction itérative de l'incohérence est suggérée au groupe de décision. A l'échelle d'une entité votante, elle permet d'identifier ses opinions les moins cohérentes. Elle lui propose également des conseils en vue d'améliorer sa propre cohérence. Lorsque la stratégie de vote adoptée par le groupe de décision s'inscrit dans le cadre d'une recherche de compromis, ces conseils concernent aussi bien la cohérence de l'entité votante que celle du groupe de décision dont elle fait partie.

Une caractérisation plus fine de la notion d'entité votante, utilisée dans ce chapitre, constitue une perspective d'amélioration intéressante. Intégrer des paramètres tels que l'échelle de notation ou le niveau de confiance accordé à un vote contribuerait à ce que les indicateurs de cohérence et les procédures d'amélioration soient mieux ciblés. Plus généralement, modéliser de manière plus fine la structure du groupe de décision permet de dégager une plus grande variété au niveau des stratégies de vote envisageables. C'est dans ce sens que s'oriente la plate-forme de tri croisé ébauchée au chapitre suivant. Elle apporte des éléments de réponse au cahier des charges énoncé à la section I-9.

VI. PLATE-FORME DE TRI CROISE ASYNCHRONE ET REPARTI EN PROJET

Dans cette section nous présentons un ensemble de spécifications techniques dans l'esprit d'une plate-forme projet de tri croisé asynchrone et réparti, répondant au cahier des charges de la section I-9. En plus de la prise en compte de l'imprécision et de l'incohérence du jugement, un paramétrage fonctionnel de la procédure de tri permet d'intégrer certaines caractéristiques du groupe de décision. Pour cela, l'approche adoptée envisage notamment une définition de la notion d'*entité de décision* :

- ⇨ en distinguant clairement le rôle du chef de projet (entité de coordination) de celui des votants (entités votantes),
- ⇨ en identifiant de manière claire les entités votantes (voir §V-6) composant le groupe de décision : sous-groupes et individus,
- ⇨ en assignant à chaque entité votante, qu'il s'agisse d'un sous-groupe ou d'un individu, une sous-*matrice des comparaisons* (issue de la restriction de la *matrice des comparaisons* globale) qui soit en accord avec son expertise des éléments à comparer,
- ⇨ en permettant la régulation de l'accessibilité des uns aux avis des autres,
- ⇨ en proposant aux décideurs composant une entité votante, une échelle de notation adaptative et dynamique[49] en accord avec leur perception des ordres de grandeur en présence lors des comparaisons binaires d'éléments (rappelons que les individus constituant une même entité votante s'expriment d'une même voix),
- ⇨ en associant à chaque vote un degré de confiance qui pourrait prendre en compte l'avis du chef de projet a priori et celui de l'entité votante a posteriori,
- ⇨ etc.

Ce paramétrage peut s'inscrire dans un management plus ou moins directif ou participatif en fonction de la plus ou moins grande autonomie déléguée aux entités votantes par le chef de projet.

[49] Le choix de l'échelle de notation n'est pas sans influence sur la cohérence du vote et donc sur la qualité du résultat. Une échelle trop précise alourdirait les comparaisons binaires requises (voir §I-8). A l'inverse, une échelle trop grossière engendrerait une perte d'information. D'où l'intérêt d'une échelle personnalisée que l'on pourrait faire évoluer de manière à améliorer la cohérence du vote. Cette flexibilité est d'autant plus utile que l'entité votante considérée peut être constituée de plusieurs décideurs. Il s'agit alors, en quelque sorte, de trouver la PPCE (plus petite commune échelle).

VI-1. CONCEPT DE TRI CROISE ASYNCHRONE ET REPARTI EN PROJET

La figure VI–1 présente synthétiquement quelques spécifications[50] caractéristiques d'une procédure de tri croisé asynchrone et répartie, en accord avec le cahier des charges de la section I-9. La première catégorie de spécifications se situe au niveau de la stratégie de vote globale. Comme nous l'avons vu aux sections V-5, V-6 et V-7, différentes stratégies sont envisageables[51]. La deuxième catégorie de spécifications s'intéresse, quant à elle, au protocole de vote des entités votantes.

Si la première catégorie de spécifications s'adresse clairement au chef de projet (entité de coordination), la seconde s'adresse à toutes les entités de décision, (autant le chef de projet que les entités votantes). Tout dépend du type de management adopté au sein du groupe de décision.

Le caractère asynchrone et réparti de la procédure de vote transparaît dans l'indépendance, dans le lieu et dans le temps, qu'il peut y avoir entre les entités de décision et en particulier entre les entités votantes, lors du remplissage de la *matrice des comparaisons*. Le dépouillement des votes peut être réalisé aussi bien à l'échelle de l'entité votante, qu'à celle du groupe de décision dans sa globalité. Des échéanciers et des fonctionnalités de rapport automatique peuvent également être envisagés.

[50] Ces spécifications constituent un premier niveau de traitement des spécifications fonctionnelles proposées à la section I-9.

[51] Rappelons qu'il est nécessaire, pour assurer l'homogénéité des résultats, de choisir à l'échelle du groupe de décision une même logique de traitement de l'imprécision (§V-6). Il est également important, lorsqu'on se situe dans le cadre d'une recherche de compromis, que les critères d'optimisation associés aux différentes méthodes déterministes de tri croisé utilisées soient concordants (§V-5).

Spécifications au niveau du groupe

- ⇨ Permettre la structuration du vote : définition et traçabilité dans le temps des entités votantes et des liens qu'elles tissent entre les décideurs et les comparaisons binaires d'éléments (voir §V-4)
- ⇨ Prendre en compte le type d'incohérence tolérée pour le groupe (voir §V-3)
- ⇨ Permettre le choix d'un type de traitement de l'imprécision (1)
- ⇨ Permettre le choix du critère d'optimisation (2) ou du moins de la méthode de tri croisé à l'échelle du groupe (voir §V-5)
- ⇨ Etc.

Spécifications au niveau de chaque entité votante

- ⇨ Permettre la structuration interne (ex : hiérarchique ou non)
- ⇨ Aider au choix d'une échelle de notation appropriée
- ⇨ Permettre la définition d'un échéancier de vote global
- ⇨ Permettre la définition d'un échéancier de vote interne à chaque entité
- ⇨ Permettre de gérer la confidentialité externe des opinions entre entités votantes
- ⇨ Permettre de gérer la confidentialité interne des opinions
- ⇨ Permettre la représentation de l'incertitude : imprécision (3), type d'incohérence tolérée (voir §V-3) et confiance accordée au vote.
- ⇨ Permettre le vote à distance
- ⇨ Permettre la régulation du vote : paramétrage des droits et des degrés de liberté délégués à chacune des entités votantes par le chef de projet
- ⇨ Permettre le choix des critères d'optimisation (2) ou du moins des méthodes de tri croisé à l'échelle de l'entité votante
- ⇨ Etc.

(1) Traitement de l'imprécision

- ⇨ Traitement par le principe d'extension de la logique floue
- ⇨ Traitement probabiliste

(2) Critère d'optimisation classique de la littérature (voir [HER96] pour les références)

- ⇨ Moindres carrés
- ⇨ Moindres carrés logarithmiques
- ⇨ Minimisation de l'écart maximal en valeur absolue

(3) Représentation de l'imprécision

- ⇨ Représentation par une fonction d'appartenance floue lorsque, pour une comparaison binaire donnée, chaque décideur composant l'entité votante exprime son imprécision ou alors lorsque l'imprécision du sous-groupe, constituant l'entité votante, est volontairement concertée et exprimée de manière commune.
- ⇨ Représentation statistique dans le cas où, pour chaque comparaison binaire considérée, l'imprécision du sous-groupe constituant l'entité votante, est composée à partir de votes individuellement précis.

figure VI–1 : Différents niveaux de spécification dans une procédure de tri croisé asynchrone et répartie

VI-2. ALGORITHME DU TRI CROISE DE MONTE CARLO (T.C.M.C.)

Pour notre première maquette informatique et dans un soucis de simplicité nous avons décidé de ne retenir qu'une seule logique de prise en compte de l'imprécision. Rappelons, toutefois, que les deux logiques d'extension sont envisagées en parallèle dans la plate-forme globale compte tenu de leur complémentarité.

Il est vrai que la logique floue semble mieux adaptée à la représentation et au traitement du jugement humain (voir §II-2). Rappelons tout de même qu'il existe des ponts entre l'approche probabiliste de base et des notions plus subjectives, c'est notamment le cas des probabilités subjectives (voir [PRO92]). Il existe par ailleurs des approximations permettant de déployer uniquement le mécanisme de calcul probabiliste à partir d'entrées exprimant une préférence sous forme d'une courbe d'appartenance floue (approche proposée par Wood et al. [WOO89], voir §II-2). Par ailleurs, dans les outils pratiques dédiés à la gestion de projet, les données en entrée d'une procédure de pondération sont très souvent issues d'approches statistiques. C'est notamment le cas de la méthode DELPHI (voir [ADA89]) dédiée au vote en séance de groupe[52]. Ce constat a pesé sur notre décision concernant le choix d'une logique de prise en compte de l'imprécision. L'approche probabiliste a été finalement retenue et implémentée par une méthode de Monte Carlo [BUS66]. En plus des raisons évoquées ci-dessus notre choix a été motivé par la grande flexibilité de l'approche de Monte Carlo pour l'extension d'approches de tri croisé déterministes à la prise en compte de l'incertitude. Elle ne souffre pas des limitations que présentent les approches basées sur la logique floue à l'égard de certaines méthodes déterministes (ex : M.G.L.). Elle est aussi plus robuste dans la mesure où elle est moins sensible à la complexité des courbes utilisées en entrée pour représenter l'imprécision (voir chapitre IV).

L'algorithme adopté pour la maquette constitue une version simplifiée de la plate-forme globale de vote asynchrone et réparti (voir §VI-1 en particulier (1)). Nous l'avons nommé *Tri Croisé de Monte Carlo* (T.C.M.C.). Notre apport ne se situe pas dans l'application de l'approche de Monte Carlo à la problématique du tri croisé de base. Cela a déjà été fait (voir §II-2.2). Il nous semble en revanche intéressant de l'utiliser pour valider dans son principe la plate-forme de tri croisé et ses principales fonctionnalités. Il s'agit notamment de la prise en compte de l'incertitude (imprécision + incohérence) inhérente au jugement et de l'assistance proposée au groupe de décision pour améliorer, lorsqu'il le désire, sa cohérence. On utilise pour cela l'indicateur et les boucles d'amélioration de cohérence présentés au chapitre V.

VI-2.1. PRINCIPE DE BASE DU T.C.M.C.

Considérons une *matrice de comparaisons* où les comparaisons symétriques ne sont pas nécessairement inverses les unes des autres et où il n'est pas nécessaire d'avoir exactement une opinion par comparaison. Chaque opinion est assimilée à une variable aléatoire définie par une distribution de probabilité. Comme la plupart des approches probabilistes, nous présupposons l'indépendance de ces variables aléatoires[53] (voir par exemple [ESC00]).

[52] Les opinions des différents décideurs sont recueillies successivement et superposées en histogramme de façon à ce que chaque nouvelle opinion puisse s'inspirer de la tendance du groupe. Ce protocole a pour but de converger vers un consensus.

[53] L'hypothèse d'indépendance des variables aléatoires a pour homologue en logique floue l'hypothèse de non-interactivité des nombres flous. Bien que semblables en apparence, elles sont très différentes. Lorsqu'elle n'est pas vérifiée, l'hypothèse d'indépendance invalide le raisonnement probabiliste (compensatoire) effectué en la

L'idée de base consiste à échantillonner une valeur dans chacune des opinions puis de calculer le jeu de poids correspondant par n'importe quelle approche déterministe et applicable de tri croisé. Après N itérations avec la méthode déterministe choisie, chaque poids est défini par un ensemble de N valeurs. Il est alors possible de reconstruire une approximation de sa distribution de probabilité à partir de ces N valeurs qui lui sont associées. Reconstituer cette distribution nécessite un calcul intégral multidimensionnel pour lequel l'approche de Monte Carlo est particulièrement efficace, sa convergence est en $\frac{1}{\sqrt{N}}$ [BUS66].

VI-2.2. DESCRIPTION DE L'ALGORITHME

Les variables d'entrée de l'algorithme sont, pour chaque entité votante :

- des comparaisons binaires définies par une courbe d'imprécision interprétée comme une courbe de densité de probabilité,
- la méthode de tri croisé déterministe choisie ou alors le type de critère d'optimisation à partir duquel l'algorithme choisira en interne et en fonction des données d'entrée une méthode de tri croisé déterministe appropriée (voir par exemple le tableau II–1).

Les variables de sortie de l'algorithme se situent à deux niveaux : celui de l'entité votante et celui du groupe de décision dans sa globalité. A chacun de ces niveaux l'algorithme fournit :

- des poids définis par une courbe d'imprécision sous forme d'une courbe de densité de probabilité,
- pour chaque poids la valeur modale (la plus probable) assortie d'une estimation de l'erreur absolue,
- un degré de cohérence,
- les comparaisons les plus incohérentes classées par ordre de priorité et assorties d'un sens de variation (augmentation ou diminution) pour améliorer la cohérence.

Le traitement des données d'entrée, qu'il s'agisse d'une *matrice de comparaisons* restreinte ou globale (relative à tout le groupe de décision), se fait en cinq étapes :

1) sélection, lorsqu'elle n'a pas été faite en externe, d'une méthode de tri croisé déterministe en fonction des données d'entrée et du critère d'optimisation retenu.

2) génération aléatoire de N *matrices de comparaisons* déterministes,

3) calcul des N jeux de valeurs associées aux poids,

4) approximation de la distribution de probabilité de chacun des poids,

5) analyse de cohérence.

---

supposant vraie. L'hypothèse de non-interactivité est quant à elle plus souple dans la mesure où le raisonnement flou qui lui est associé s'appuie sur une analyse qualitative du pire et du meilleur des cas (voir aussi §IV-3). Ce raisonnement flou est en ce sens moins riche mais en revanche plus robuste que la logique probabiliste compensatoire (voir par exemple [DUB94*] pour plus de détail).

Dans le cadre du tri croisé, cette hypothèse d'indépendance rejoint en quelque sorte la notion d'indépendance au sens des préférences, introduite à la section I-7. Le décideur y est supposé capable de restreindre localement son jugement à une paire d'éléments sans être influencé par son appréciation de l'importance relative accordée aux éléments restants. Cette hypothèse est nécessaire à la validité d'une approche du type tri croisé.

Une maquette informatique a été développée sous MATLAB 5.3. Elle permet à un ou plusieurs décideurs l'accès à différentes méthodes de tri croisé ainsi qu'à une aide en ligne leur permettant de choisir l'approche la mieux adaptée à leur problématique. Une boucle de correction d'incohérence est également disponible pour aider un décideur ou un groupe de décideurs à converger vers un jeu de poids réaliste. Quelques copies d'écran sont données en annexe I.

Revenons à présent à la remarque faite à la section III-2 concernant l'utilité de reconnaître les cas de figure pour lesquels une expression analytique simple des poids serait disponible. A l'échelle des entités votantes, il n'est pas rare d'aboutir à des configurations remarquables[54] par restriction de la *matrice des comparaisons* globale[55]. L'algorithme du T.C.M.C., lorsqu'il en a la liberté, sélectionne alors en interne la méthode exacte la plus économique en temps de calcul. Dans une approche probabiliste du type Monte Carlo, tout comme l'approche floue F.W.A. (voir §IV-3), réduire le temps de calcul au niveau de chaque itération (étapes 2 et 3 ci-dessus) peut conduire globalement à un gain de temps significatif.

Les quatre sections qui suivent présentent avec plus de détail quelques aspects de l'algorithme du T.C.M.C., à savoir :

- ⇨ l'estimation du nombre de tirages,
- ⇨ le lissage des courbes de poids,
- ⇨ le calcul de l'erreur absolue sur l'abscisse associée à la valeur modale de poids
- ⇨ et enfin l'extension de l'identification et du traitement de l'incohérence à la prise en compte de l'imprécision inhérente au jugement.

VI-2.2.1. ESTIMATION DU NOMBRE DE TIRAGES

A l'issue du tirage effectué sur une *matrice de comparaisons* aléatoire et suite à son traitement par une méthode de tri croisé déterministe, soit p la probabilité qu'une variable aléatoire de poids w_i, i=1,…,n, se trouve dans l'intervalle $[W_{ib}\,;\,W_{ih}]$ (W_{ib} désignant l'extrémité basse et W_{ih} l'extrémité haute). Pour estimer p avec une erreur relative maximale de r, la taille N de l'échantillon est donnée par la formule VI–1 [BUS66][56]. Par exemple, pour p=r=10%, N≈8100 tirages. Dans la pratique, la quantité p n'étant pas connue a priori, l'approximation qui lui est associé dans la formule VI–1 correspond à une borne inférieure, à savoir la probabilité minimale à laquelle il est légitime de prévoir que w_i, i=1,…,n, se trouve dans l'intervalle $[W_{ib}\,;\,W_{ih}]$.

formule VI–1 $$N \approx \frac{9(1-p)}{pr^2}$$

[54] La notion de configuration remarquable de la *matrice des comparaisons* est bien entendu relative à la méthode de tri croisé utilisée (voir tableau II–1).

[55] Une entité votante, notamment lorsqu'elle est réduite à un seul individu, privilégie des *matrices de comparaisons* réciproques. Par ailleurs, la prise en compte de l'expertise des entités votantes, lors de la répartition des comparaisons binaires à renseigner, réduit les chances d'abstention. Enfin, certaines procédures de vote en groupe, à l'image de la méthode DELPHI, cumulent les divers votes en une opinion commune pour chacune des comparaisons binaires considérées.

[56] La formule VI–1 présuppose que la fraction des tirages située dans l'intervalle $[W_{ib}\,;\,W_{ih}]$ suit une loi normale. La formule correspond alors à un intervalle de confiance de 0,997. Une condition nécessaire mais non suffisante pour une telle hypothèse consiste à vérifier que la quantité $p \times N$ est largement supérieure à 1 [BUS66].

Lors de l'approximation de la distribution de probabilité de chacun des poids, les paramètres *p* et *r* aident à l'estimation de l'erreur commise sur les coordonnées des points de la courbe et en particulier la valeur modale (abscisse du point correspondant à l'ordonnée la plus élevée de la courbe).

VI-2.2.2. LISSAGE DE LA COURBE

Dans la procédure que nous utilisons pour lisser la courbe associée à chacun des poids, chaque point de coordonnées (*x,y*) est représentatif d'une fenêtre glissante de densité *p* (probabilité estimée par le rapport *« nombre de valeurs à l'intérieur de la fenêtre »*/*N*). L'abscisse *x* est calculée comme la moyenne des valeurs de poids de la fenêtre. Elle est d'autant plus précise que la fenêtre est étroite et que *p* correspond à une portion élevée de tirages[57]. L'ordonnée *y*, donnée par le rapport *p/« amplitude de la fenêtre »*, représente l'ordonnée moyenne de la fenêtre (voir figure VI–2). Elle est estimée avec une erreur relative maximale de *r* [BUS66]. Notons en particulier que les coordonnées des points correspondant aux extrémités de la distribution ne peuvent être estimées de manière suffisamment précise en un temps raisonnable. La probabilité *p* qui leur est associée correspond en général à une très faible fraction des tirages. De plus, la méthode de la fenêtre glissante a tendance à les décaler vers l'intérieur de la courbe.

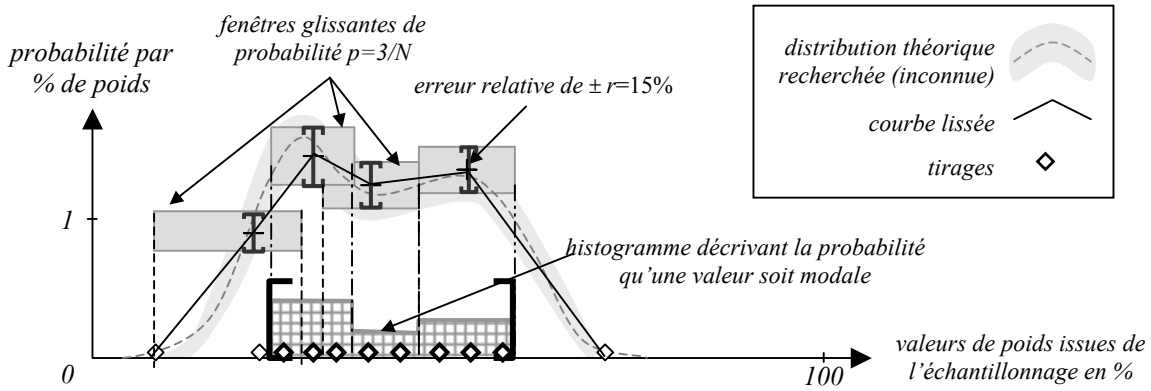


figure VI–2: Transformation des valeurs de poids issues de l'échantillonnage en une courbe lissée

VI-2.2.3. CALCUL DE L'ERREUR ABSOLUE

La valeur modale correspond au poids auquel l'entité votante accorde le plus de vraisemblance. Elle est de ce fait plus pertinente mais en revanche moins précise qu'une valeur moyenne, compte tenu du mécanisme de calcul probabiliste adopté. Le calcul de l'erreur absolue sur la valeur modale d'un poids dépend de plusieurs facteurs : les paramètres *p* et *r*, intervenant dans le calcul du nombre de tirages (voir formule VI–1), mais aussi la forme de la fonction de densité de probabilité.

Comme l'illustre la figure VI–2, l'ordonnée associée à une fenêtre est connue avec une erreur relative de *r*. Si l'on pose *y** l'ordonnée théorique exacte que l'on cherche à estimer, on

[57] En supposant que les valeurs de poids situées dans la fenêtre suivent une distribution normale de paramètres (μ,σ), le théorème central limite prévoit pour la valeur estimée de la moyenne une distribution normale de paramètres ($m=\mu$, $s=\sigma/\sqrt{N}$) ; *N* étant la taille de l'échantillon.

a la relation $y \in [y^* \times (1-r),\ y^* \times (1+r)]$. Inversement, $y^* \in [y/(1+r),\ y/(1-r)]$, $r<1$. Il est possible que l'intervalle d'erreur relative $[y/(1+r),\ y/(1-r)]$ associé à la valeur modale chevauche ceux d'autres fenêtres glissantes. En l'absence de chevauchement, l'intervalle d'erreur absolue sur la valeur modale se restreint à l'amplitude de la fenêtre glissante associée à cette valeur modale. Dans le cas contraire, l'intervalle d'erreur absolue s'en trouve étendu. Le graphique en histogramme donné en figure VI–2 illustre ce dernier cas de figure et représente la probabilité qu'une valeur soit modale.

VI-2.2.4. EXTENSION DE L'IDENTIFICATION ET DU TRAITEMENT DE L'INCOHERENCE A LA PRISE EN COMPTE DE L'IMPRECISION INHERENTE AU JUGEMENT

Cette section présente brièvement la manière dont l'identification et le traitement de l'incohérence sont pris en compte au sein de l'algorithme du T.C.M.C.. Elle illustre également quelques aspects de l'alternative probabiliste évoquée à la section V-6.

Comme nous l'avions déjà précisé, l'approche de Monte Carlo permet de généraliser, à la prise en compte de l'imprécision, les résultats relatifs à l'indicateur de cohérence déterministe proposé au chapitre V. Pour une *matrice de comparaisons* entachée d'imprécision, la valeur prise par l'indicateur de cohérence est une moyenne calculée sur les *N matrices des comparaisons* déterministes échantillonnées.

Pour ce qui est du traitement de l'incohérence, rappelons que chaque tirage *t* effectué sur les opinions de la *matrice des comparaisons,* entachée d'imprécision, est ensuite associé à un jeu de poids déterministe. Au sein de l'algorithme du T.C.M.C., l'incohérence d'une opinion est mesurée par rapport à la différence $\Delta_{ijk,t} = ln(c_{ijk,t}) - ln(w_{i,t}/w_{j,t})$[58]. Sur l'ensemble des tirages, une différence moyenne est associée à chacune des opinions. Celles qui excèdent la moyenne des différences moyennes tout en étant supérieures au troisième quartile[59], sont jugées révisables. En fonction de la stratégie de vote adoptée, le groupe de décision a alors la possibilité d'appliquer les boucles de correction d'incohérence présentées à la section V-5.2.

Dans sa version actuelle, l'algorithme du T.C.M.C. ne prend pas en compte une échelle de notation spécifique à chaque entité votante. Si cela avait été le cas, il aurait été intéressant de ramener la différence moyenne associée à chaque opinion à un rapport [60]. Un critère de sélection supplémentaire aurait pu être que ce rapport excède l'échelon d'indifférence associé à l'échelle de notation en question. Cela présuppose toutefois que cette échelle de notation, initialement destinée à l'appréciation de *rapports d'importance*, soit extensible à l'appréciation de rapports de *rapports d'importance*.

VI-3. OUVERTURES VERS LA DECISION COOPERATIVE EN PROJET

Les fonctionnalités que nous proposons relèvent du « bon sens » et s'inscrivent pour la plupart dans la continuité de travaux issus de la littérature. Elles n'ont en revanche pas été suffisamment validées sur le plan pratique, mises à part quelques simulations présentées au

[58] Il s'agit là de la différence entre le logarithme népérien de la valeur échantillonnée sur l'opinion c_{ijk} et celui de l'opinion cohérente reconstituée à partir des poids w_i et w_j associés au tirage *t*.

[59] En statistiques, sur un ensemble ordonné de valeurs, celles dont la fonction de répartition F(V)=P(v≤V), se rapproche le plus de ¼, de ½ et de ¾ correspondent respectivement au premier, au second (médiane) et au troisième quartile (v désigne la variable aléatoire associée aux valeurs V).

[60] La différence étant homogène au logarithme d'un rapport, il faut passer par la transformation exponentielle inverse pour être homogène à un rapport.

chapitre suivant. Dans cette section nous essayons de pallier ce manque en développant, succinctement et de manière intuitive, les perspectives d'application de telles fonctionnalités dans la pratique.

VI-3.1. COMPATIBILITE AVEC LES OUTILS EXISTANTS DE TRAVAIL EN GROUPE

Le paramétrage et la régulation qui sont envisagés au niveau des fonctionnalités de la plate-forme de tri croisé facilitent à l'équipe projet la reproduction de configurations bien connues dans la pratique en terme de travail en groupe. Par exemple, en définissant une entité votante à plusieurs décideurs, en choisissant une représentation statistique de l'imprécision (voir (3) sur la figure VI–1) et en autorisant l'accès aux résultats intermédiaires des votes (paramétrage de la confidentialité), on retrouve l'approche DELPHI (voir note de bas de page n°52).

La flexibilité du paramétrage permet également d'étendre ces méthodes de travail et de les adapter aux spécificités du groupe de décision (ex : intégrer des votes à distance). Le chef de projet dispose d'une grande liberté au niveau de la construction des entités votantes ainsi qu'au niveau de la prise en compte de la diversité de leurs compétences et de leur complémentarité. Il peut également moduler leurs degrés de liberté et leur déléguer tout ou partie de leur paramétrage interne (ex : confidentialité, structuration interne, choix du critère d'optimisation, représentation de l'incertitude). Il lui est ainsi possible de définir une grande variété de protocoles de vote.

VI-3.2. COMPLEMENTARITE AVEC LES OUTILS DE GESTION DE PROJET

Dans des méthodes telles que l'Analyse de la Valeur (valorisation d'objectifs en phase 3) ou le Q.F.D. (pondération des objectifs clients), l'introduction d'une telle plate-forme de tri croisé permet de pallier localement les biais induits par l'utilisation d'outils inappropriés à la pondération (voir section I-4) tout en assurant la continuité des protocoles de vote traditionnellement adoptés. Les fonctionnalités proposées dans cette plate-forme de tri croisé ne doivent pas être perçues comme une extension imposée et donc une modification rigide de l'existant. Elles sont paramétrables pour aisément s'adapter à chaque cas de figure.

Sur des modèles d'aide à la décision hiérarchiques multicritère tels que l'approche A.H.P., où la procédure de pondération est présente à tous les niveaux, l'apport d'une telle plate-forme serait d'autant plus intéressant. En effet, une telle plate-forme rendrait plus flexible la procédure de saisie des données nécessaires à la construction du modèle d'aide à la décision. Tout comme la hiérarchisation préconisée par Saaty, la saisie répartie et asynchrone des données allège la procédure opérationnelle et favorise la cohérence[61] propre des différentes entités votantes impliquées (voir §V-5).

Comme c'est le cas pour la méthode A.H.P., la procédure de tri croisé est souvent utilisée en amont de modèles de décision à base de moyennes pondérées[62]. Cela présuppose

[61] Sans développer ici la notion de cohérence pour une hiérarchie signalons tout de même que, dans la mesure où chacun des étages de la hiérarchie est associé à une *matrice de comparaisons* (voir [SAA77]), le produit des indicateurs de cohérence relatifs à chacun des étages constitue un indicateur global de cohérence. Par ailleurs, les boucles de correction d'incohérence (voir §V-5.2) sont applicables à chacun des étages de la hiérarchie.

[62] D'autres alternatives à la moyenne pondérée, perçue comme l'un des compromis possibles entre le *min* et le *max*, existent dans la littérature (voir par exemple [DUB94] ou [DUB98] pour une revue plus détaillée). Des approches analytiques génériques telles que la formulation paramétrique proposée dans [SCO95] ou les opérateurs pondérés du type OWA (Ordered Weighted Average) cités dans [DUB94] permettent de simuler différentes nuances entre le *min* et le *max*. Pour ce qui est des approches non analytiques citons l'exemple des

néanmoins une certaine indépendance des éléments à agréger (performances ou critères de décision) au niveau de leur contribution à la décision globale. Dans le cas où cette hypothèse n'est pas vérifiée il est important de pouvoir représenter les éventuels couplages entre les éléments à agréger. Nous avons proposé, dans le cadre de la conception de produit, un modèle hiérarchique mixte dénommé S.P.E.C., pour *Suivi de Performance en Conception*, combinant alternativement des bases de règles floues et des moyennes pondérées géométriques dans un travail qui n'est pas présenté dans ce document mais qui a été en partie publié (voir [LIM00] et [Yan00]).

VI-3.3. PERSPECTIVES DE DEVELOPPEMENT DANS LA PRATIQUE

Un logiciel informatique destiné aux praticiens a également été envisagé. Il s'appuie sur une modélisation objet épurée et consacre une attention particulière aux aspects opérationnels et aux interfaces utilisateurs. Une copie d'écran de la première version est proposée en annexe II. Cette première version a pour but de sensibiliser les praticiens à l'intérêt de notre approche. Elle n'intègre malheureusement pas les fonctionnalités de vote asynchrone et réparti par le réseau. Ce report est volontaire dans la mesure où nous voulions dans un premier temps mesurer la réceptivité du terrain et sa capacité à mettre à profit de telles fonctionnalités. Elles constituent néanmoins une priorité pour les versions futures et un point clé de notre approche. Dans la limite de nos investigations, nous n'avons pas rencontré sur le marché d'outils comparables au notre du point de vue des fonctionnalités proposées.

VI-4. SYNTHESE ET PERSPECTIVES

Ce chapitre propose de nouveaux éléments de réponse au cahier des charges de la section I-9. En complément des chapitres théoriques précédents, qui concernent les huit premières spécifications, ce chapitre présente une trame de réponse globale qui aborde en particulier des aspects d'ordre pratique. Le concept de *plate-forme de tri croisé asynchrone et réparti* dont il est question, se distingue par sa flexibilité. Le groupe de décision peut en effet y représenter de manière souple et réaliste sa stratégie de vote grâce à des fonctionnalités modulables.

Une maquette informatique donnant corps à une partie de ces fonctionnalités est également présentée (copies d'écran en annexe I). Elle se restreint au cas de figure probabiliste en ce qui concerne le traitement de l'imprécision et s'appuie plus particulièrement sur une approche de type Monte Carlo.

Enfin, nous avons évoqué un ensemble de perspectives en vue de l'exploitation pratique des fonctionnalités proposées en environnement projet. Des exemples concrets sont donnés pour illustrer la complémentarité avec des outils existants. Un logiciel informatique plus complet est en cours de réalisation. Une première version est d'ores et déjà disponible (copie d'écran en annexe II).

---

algorithmes de classement tels qu'ELECTRE, méthode basée sur des notions telle que la concordance et la discordance d'un ensemble de critères quant à la dominance d'un élément à classer sur un autre, ou encore la méthode des classements comparés. Ces deux approches sont décrites dans [ROY85].

VII. EXEMPLES NUMERIQUES

Ce chapitre consacre plus d'exemples à certains aspects présentés au cours des chapitres précédents. La première partie est dédiée à un exemple d'extension de la méthode R.L.M.C.G., introduite au chapitre III, à la prise en compte de l'imprécision. L'exemple comprend une comparaison entre l'algorithme F.W.A. [DON87] (voir chapitre IV) et la méthode de Monte Carlo utilisée dans l'algorithme du T.C.M.C.. La *matrice des comparaisons* considérée est non réciproque et incomplètement renseignée. La seconde partie relate un cas d'application de la plate-forme de tri croisé T.C.M.C. dans le cadre de l'évaluation de l'ergonomie de frappe d'un clavier. En plus des calculs de cohérence associés au groupe de décision, l'exemple décrit brièvement la procédure itérative de correction de l'incohérence. Tous les calculs présentés dans ce chapitre ont été effectués sur un Pentium II 400MHz à partir d'algorithmes codés sous Matlab 5.3.

VII-1. CAS D'UNE *MATRICE DES COMPARAISONS* NON RECIPROQUE ET INCOMPLETE

Cet exemple illustre une *matrice des comparaisons binaires* correspondant à quatre éléments à pondérer. Les opinions sont représentées par des histogrammes comme cela peut être le cas en sortie d'une séance de vote en groupe du type DELPHI (voir [ADA89]). La matrice est non réciproque et elle comporte quelques comparaisons non renseignées (voir figure VII–1). Les opinions diagonales sont présupposées égales à 1. Pour les raisons énoncées en fin de section III-1, les opinions diagonales n'ont pas d'incidence sur l'estimation du jeu de poids. Les opinions exprimées sous forme d'histogrammes peuvent aussi bien être interprétées dans un contexte qualitatif flou ou quantitatif probabiliste. Les deux représentations sont équivalentes à un facteur de normalisation près. Dans le premier cas, la valeur modale est associée à une ordonnée de 1, dans le second l'intégrale sous la courbe vaut 1. Dans ce qui suit et dans un souci de lisibilité, les courbes d'entrée sont assimilées à des fonctions d'appartenance floues.

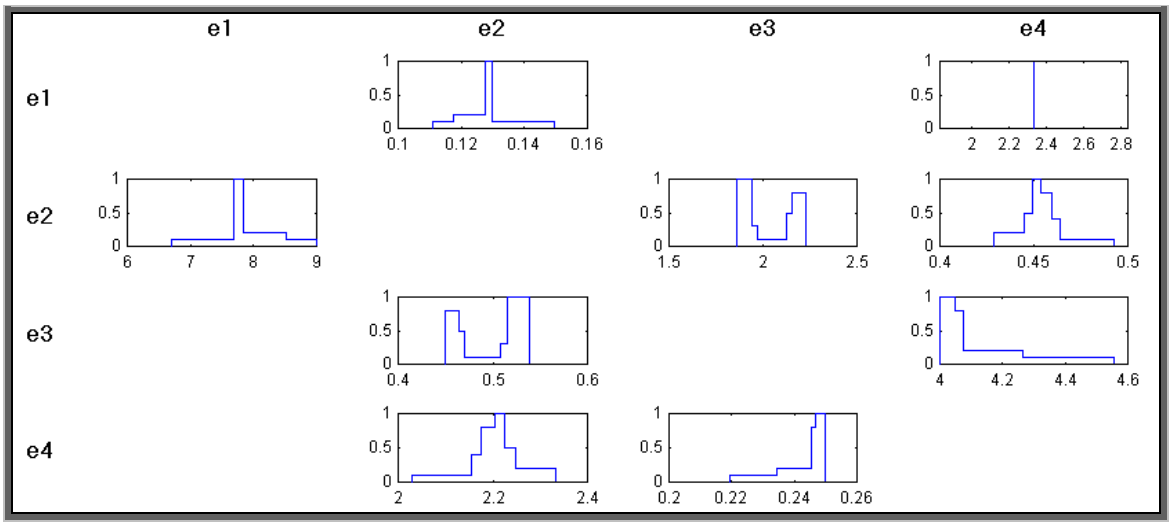


figure VII–1 : Matrice de comparaisons binaires *non réciproque et incomplète*

Les résultats issus de l'application de l'approche de Monte Carlo pour étendre la méthode R.L.M.C.G. (voir §III-1) à la prise en compte de l'imprécision sont donnés en figure VII–2. Le temps de calcul est de 29 minutes pour (p=0,1 ; r=0,05), soit 32000 tirages.

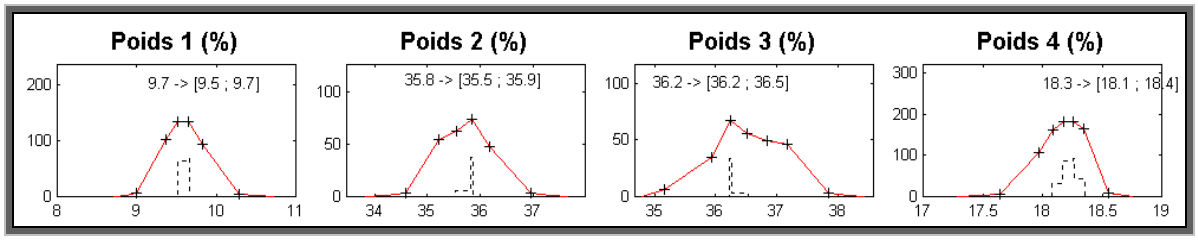


figure VII–2 : Jeu de poids en % donné par l'algorithme T.C.M.C. pour 32000 tirages

Pour 1000 tirages (ex : p=0,8 ; r=0,05), les résultats proposés en figure VII–3 sont moins précis que les précédents. En revanche, ils n'ont nécessité que 34 secondes de temps de calcul. Tout dépend du compromis temps/précision recherché.

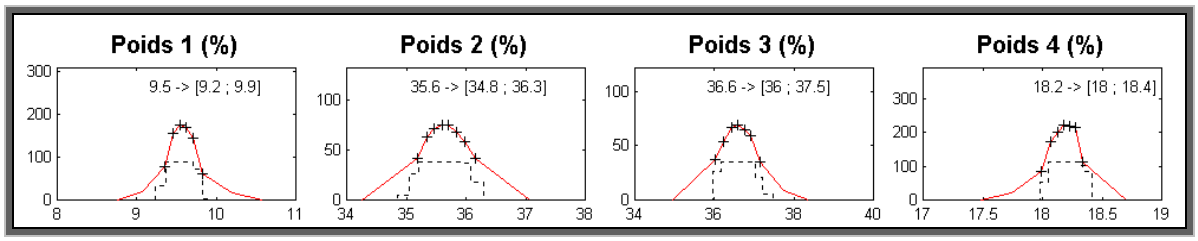


figure VII–3 : Jeu de poids en % donné par l'algorithme T.C.M.C. pour 1000 tirages

La figure VII–4, illustre les résultats de l'application de l'algorithmes F.W.A. pour étendre, à la prise en compte de l'imprécision, la méthode R.L.M.C.G. (voir §III-1). Le temps de calcul est de 4 minutes avec la version améliorée de l'algorithmes F.W.A (voir §IV-3 et [SCO98]).

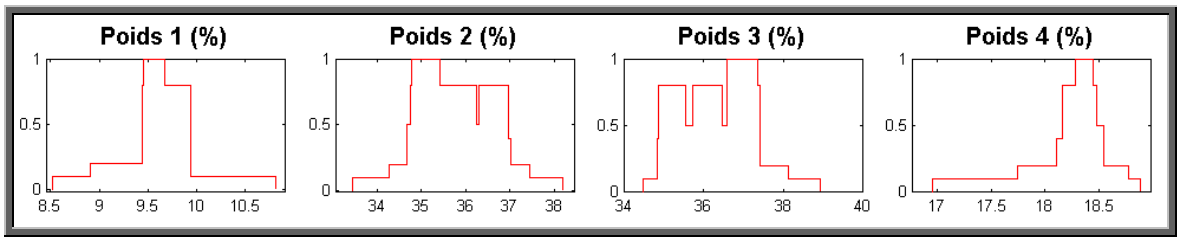


figure VII–4 : Jeu de poids en % donné par l'algorithme F.W.A.

Pour l'algorithme F.W.A., le temps de calcul est fonction du nombre de coupes de niveau considérées (T=11 coupes équidistantes sur cet exemple), des nombre K (K=9 sur cet exemple) et n (n=4 sur cet exemple) de variables respectivement d'entrée et de sortie ainsi que de la complexité des primitives utilisées pour représenter l'imprécision. Sur cet exemple, si les K=9 comparaisons binaires d'entrée (comparaisons non vides) étaient représentées par des courbes convexes générant 2 extrémités par coupe de niveau, cela nécessiterait au total l'exploration de $n \times T \times 2^K = 11 \times 2^{11}$ combinaisons possibles avec l'algorithme F.W.A. non amélioré. En revanche, sur l'ensemble des T coupes de niveau considérées, la version améliorée proposée dans [SCO98] (voir §IV-2) se limiterait à $K+1+(n \times T \times 2)=98$ combinaisons à explorer. Comme les courbes d'entrée ne sont pas toutes convexes, le nombre d'extrémités à distinguer est plus important, ce qui peut sensiblement augmenter la combinatoire même dans la version améliorée (voir §IV-2 et §IV-3). Par ailleurs, le fait que les courbes d'entrée présentent des paliers rend plus délicate l'identification des parties convexes intersectées par une coupe de niveau. Il est alors et entre autres important de distinguer les intervalles pleins des intervalles vides. Cela permet la reconstruction des paliers sur les courbes de sortie mais n'a en revanche pas d'incidence significative sur le temps de calcul.

Pour l'algorithme T.C.M.C. (voir §VI-2), le temps de calcul est fonction des paramètres p (0,1 puis 0,8) et r (0,05). Le nombre de tirages proposé par la formule VI–1 est bien entendu à pondérer par le nombre d'opinions (comparaisons binaires) à traiter.

Les différences entre les résultats issus des calculs probabilistes et ceux issus des calculs basés sur la logique floue, notamment pour ce qui est du positionnement de la valeur modale, découlent des différences fondamentales qui existent entre leurs mécanismes de calcul respectifs. L'article [WOO89] aborde la question avec plus de détail bien qu'il compare les deux approches dans un cadre différent de celui du tri croisé.

En synthèse de ce qui a été dit aux chapitres II, IV et VI, rappelons que l'algorithme F.W.A. et l'approche de Monte Carlo s'appuient sur deux logiques très différentes, autant au niveau de la représentation que du traitement de l'imprécision. En conséquence, leur comparaison peut difficilement s'inscrire dans une logique de classement en dehors d'un contexte particulier d'application. En revanche ces deux approches sont parmi les plus appropriées, chacune selon sa logique.

Dans le cadre du tri croisé, la logique floue semble mieux armée pour la représentation et le traitement de l'imprécision inhérente au jugement, ce qui pourrait donné un léger avantage à l'algorithme F.W.A.. Il est vrai aussi que l'hypothèse de non interactivité qu'elle nécessite est moins rigide que l'hypothèse d'indépendance que présuppose l'application d'une approche probabiliste de type Monte Carlo. Ceci dit l'hypothèse d'indépendance est exigée bien en amont pour justifier la validité même d'une approche du type tri croisé. Nous avons également vu que certains protocoles de vote conduisaient naturellement à une imprécision de nature statistique et qu'il existait par ailleurs des travaux en vue d'une utilisation plus souple de la logique probabiliste de base. De plus, une approche de type de Monte Carlo offre une

plus grande variété en terme de méthodes de tri croisé déterministes qu'elle est capable de traiter. Elle est également moins sensible à la diversité des courbes d'imprécision associées aux comparaisons binaires données en entrée.

VII-2. CAS D'UNE *MATRICE DES COMPARAISONS* A OPINIONS MULTIPLES

Nous avons choisi d'illustrer dans cette section quelques fonctionnalités de la plate-forme de tri-croisé introduite au chapitre VI ; fonctionnalités qui ont été mises en œuvre au sein de la maquette informatique du *Tri Croisé de Monte Carlo*. Nous considérons pour cela le cas réel de la conception optimale d'un clavier d'ordinateur ergonomique innovant (voir figure VII–5 et [YAN98]). Nous en relatons brièvement le contexte dans ce qui suit.

Disposant de nouvelles formes de pavés de touches[63], il fallait repenser la répartition des lettres, ou plus généralement des symboles alphanumériques, sur les touches. Ce problème de répartition optimale est un problème ancien puisque le standard français *Azerty* est issu du standard américain *Qwerty* qui a été conçu en 1873 pour ralentir la frappe[64] ! Depuis lors des tentatives expérimentales de répartition optimale ont échoué à s'imposer comme standards ; citons le clavier *Dvorak* aux Etats-Unis et le clavier *Marsan* en France, bien connus des spécialistes de l'ergonomie. Ces claviers ont pourtant en commun des propriétés remarquables : la distance parcourue par les doigts est 2,5 fois inférieure (les lettres les plus utilisées se trouvent sur la rangée de garde), un rééquilibrage entre main droite et main gauche ainsi qu'entre les doigts selon leur endurance est réalisé, l'alternance de frappe main droite / main gauche est grandement améliorée, etc.

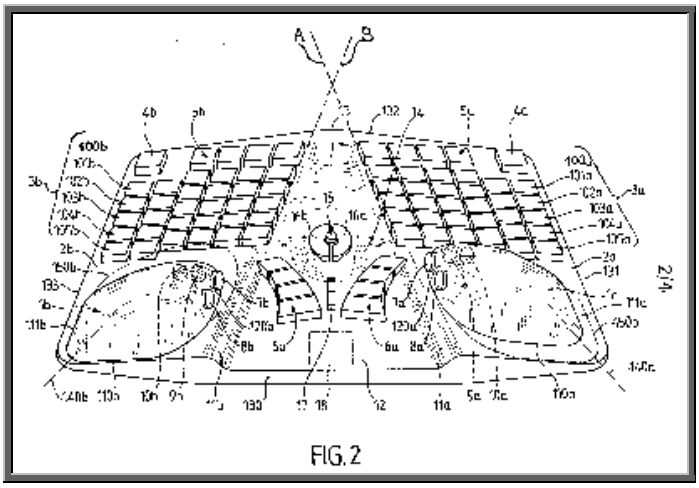


figure VII–5 : Le clavier ergonomique du brevet [YAN98]

En reprenant ce problème de répartition optimale de lettres avec l'aide de programmes d'optimisation, un projet de l'E.C.P.[65] espérait trouver de meilleurs résultats et proposer un

[63] Il y a notamment des touches activables par les pouces ainsi que des touches intégrées à des repose-paumes fonctionnels en cours de frappe et réglables en translation.

[64] En effet, les machines à écrire mécaniques emmêlaient leurs marteaux lorsque deux frappes consécutives étaient trop rapprochées.

[65] École Centrale Paris

nouveau standard français. Ce fut le cas avec une étude qui vient de s'achever et qui a permis d'aboutir à une proposition de clavier français (voir figure VII–5) qui est 52% meilleur que le standard *Azerty* et 20% meilleur que le clavier manuellement optimisé *Marsan*. Cette étude, consignée dans [WAG01], a utilisé un algorithme d'optimisation mathématique nouvellement apparu : « les systèmes de colonies de fourmis », pour trouver une meilleure solution (donnée en figure VII–6). Cet algorithme nécessite la mise en œuvre d'une fonction d'évaluation permettant de calculer une note globale pour un clavier candidat. Cette fonction d'évaluation, détaillée dans [WAG01], est obtenue à partir de 6 notes de pénalité $n_{i,clavier\ courant}$ exprimant le non respect de 6 critères ergonomiques présents dans les travaux de Marsan (voir [MAR87]). Ces 6 notes de pénalité étant exprimées dans des unités différentes, le choix a été fait de les rendre sans dimension en les divisant par la note correspondante du clavier standard *Azerty*. Ces notes sont visibles sur la figure VII–6, une valeur inférieure à 1 signifiant une plus grande ergonomie que le clavier *Azerty*. La fonction d'évaluation d'un clavier est donc donnée par une moyenne pondérée de ces pénalités adimensionnelles par la formule suivante :

$$Note = \sum_{i=1}^{6} p_i \frac{n_{i,clavier\ courant}}{n_{i,AZERTY}}$$

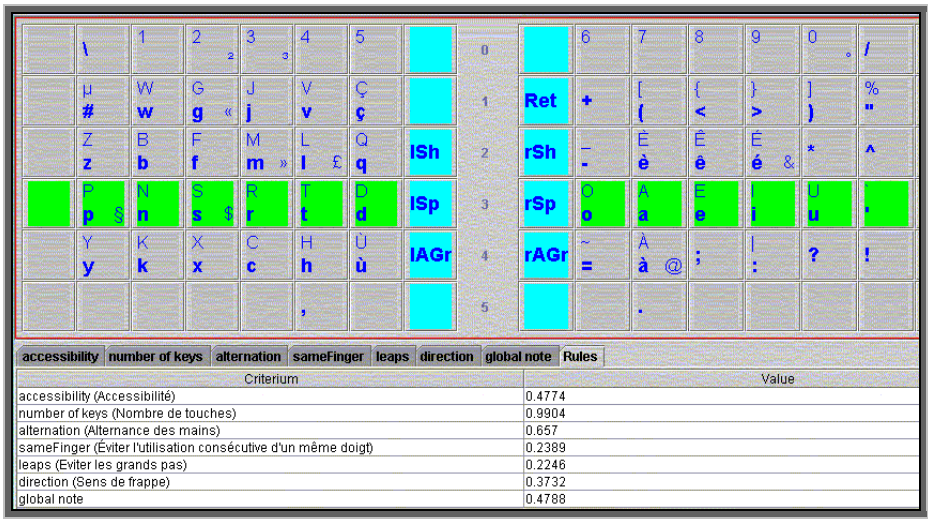


figure VII–6 : La meilleure répartition de lettres pour un clavier français proposée dans [WAG01]

La pondération de ces pénalités, qui n'était pas fixée dans les travaux de Marsan, a donc été cruciale pour le résultat. Elle a été réalisée par l'intermédiaire du *T.C.M.C.* au cours d'une séance de travail mettant en jeu un animateur et deux votants connaissant l'ergonomie de la frappe. Ces deux derniers intervenants constituent chacun une entité votante et sont dénommés, dans cet exemple, *décideur 1* et *décideur 2*.

1	Potentiel d'amélioration du critère « **accessibilité et charge** » vs Azerty Le critère ergonomique $n_{1,clavier\ courant}$ mesure l'écart entre l'utilisation réelle de chacun des doigts et un profil d'utilisation idéale.	13,7%
2	Potentiel d'amélioration du critère « **nombre de touches** » vs Azerty Le critère ergonomique $n_{2,clavier\ courant}$ mesure le nombre de frappes de touches nécessaire à l'activation d'un symbole.	11,6%
3	Potentiel d'amélioration du critère « **alternance des mains** » vs Azerty Le critère ergonomique $n_{3,clavier\ courant}$ mesure le pourcentage de frappes consécutives réalisées par une même main.	26,5%
4	Potentiel d'amélioration du critère « **utilisation d'un même doigt** » vs Azerty Le critère ergonomique $n_{4,clavier\ courant}$ mesure le pourcentage de frappes consécutives réalisées par un même doigt.	19,1%
5	Potentiel d'amélioration du critère « **grands pas** » vs Azerty Le critère ergonomique $n_{5,clavier\ courant}$ mesure le pourcentage de frappes consécutives réalisées par deux doigts différents d'une même main sur des rangées de touches différentes (obligeant une torsion du poignet).	15,0%
6	Potentiel d'amélioration du critère « **sens de frappe** » vs Azerty Le critère ergonomique $n_{6,clavier\ courant}$ mesure le pourcentage de frappes consécutives réalisées par deux doigts d'une même main dans le sens pouce vers auriculaire (sens contraire au réflexe de tapotage).	14,1%

tableau VII–1 : Pondération finale adoptée pour les 6 pénalisations ergonomiques du clavier

Il a été demandé aux deux décideurs de s'exprimer indépendamment sur l'importance relative des 6 pénalités (sans dimension) au travers du remplissage d'une demi-*matrice de comparaisons*. Ils étaient autorisés à omettre certaines comparaisons binaires (ce qu'à fait le décideur 2) et à modéliser ou pas les incertitudes sur le chiffrage (ils ont souvent pris des triangles symétriques avec 10% d'intervalle d'incertitude). Les 6 éléments à comparer leur ont été présentés comme des « potentialités d'amélioration ergonomique par rapport au clavier *Azerty* » (voir tableau VII–1). Les comparaisons binaires sont exprimées en *parts d'importance relative* (voir §I-1).

Un premier tour de chiffrage des pondérations a donc eu lieu sans que les deux décideurs ne se soient vraiment entretenus sur un chiffrage précis (commun). Les deux *matrices des comparaisons* et les poids résultats de chaque décideur sont donnés dans la figure VII–7. Le premier constat est que leurs résultats sont assez similaires pour les poids {2, 3, 4, 6}, le décideur 1 donnant plus d'importance au critère 5 de « grand pas » et le décideur 2 donnant à l'inverse plus d'importance au critère 1 d'« accessibilité ». Les deux décideurs sont assez cohérents avec eux-mêmes. Au-delà de 90% (92 pour le premier et 97 pour le second), on peut considérer les deux décideurs suffisamment cohérents pour une pondération mettant en jeu 6 éléments[66]. Parmi les possibilités de correction proposées à la section V-3 pour l'indicateur de cohérence, nous sommes dans le cas de figure $I.C._{Générique\ Corrigé}^{0,1}$. En effet, le vote doit in fine déboucher sur un jeu de poids consensuel. La procédure de correction d'incohérence s'inscrit donc dans le cadre d'une recherche de compromis. De plus, les *matrices des comparaisons* restreintes (relatives à chacun des décideurs), tout comme la *matrice des comparaisons* globale (relative au groupe, voir figure VII–8), sont ici réciproques.

[66] La cohérence théorique de 100% est difficile à atteindre à mesure que le nombre d'opinions renseignées augmente (voir §V-1.1). L'accumulation de petites incohérences locales et imperceptibles (en deçà de la sensibilité du décideur) peut conduire à une incohérence globale significative.

Chaque décideur a eu accès au résultat de l'autre et des résultats pour le groupe ont été produits. Des poids sont proposés pour le groupe en figure VII–8 et la cohérence du groupe est estimée à 78%. On a ainsi affaire à deux jugements assez, voire très, intrinsèquement cohérents (c'est souvent le cas pour des spécialistes) mais assez incohérents entre eux compte tenu de la stratégie de vote adoptée.

Le tableau VII–2 illustre les différentes variantes de l'indicateur de cohérence générique applicables en présence de *matrices de comparaisons* réciproques. Si l'indicateur générique corrigé $I.C._{Générique\ Corrigé}^{1,1}$ avait été choisi pour exprimer le fait que la divergence d'opinion était tolérée, l'indicateur de cohérence pour le groupe aurait été de 97% au lieu de 78%.

	Décideur 1	*Décideur 2*	*Groupe*
$I.C._{Générique\ Corrigé}^{0,1}$	***93%***	***97%***	***78%***
$I.C._{Générique\ Corrigé}^{1,1}$	*93%*	*97%*	*97%*

tableau VII–2 : Comparaison de deux variantes de l'indicateur de cohérence générique à l'échelle de l'entité votante et à celle du groupe de décision

Les décideurs ont deux types de conseils qu'ils ont bien entendu loisir de suivre ou de ne pas suivre. D'une part, ils peuvent améliorer leur cohérence personnelle en suivant les conseils sur les « comparaisons à changer » de la figure VII–7, ou alors améliorer la cohérence du groupe en suivant les conseils sur les « comparaisons à changer » de la figure VII–8. Ces conseils en diminution ou en augmentation d'une comparaison sont rangés par ordre de priorité (ou d'amplitude) décroissant.

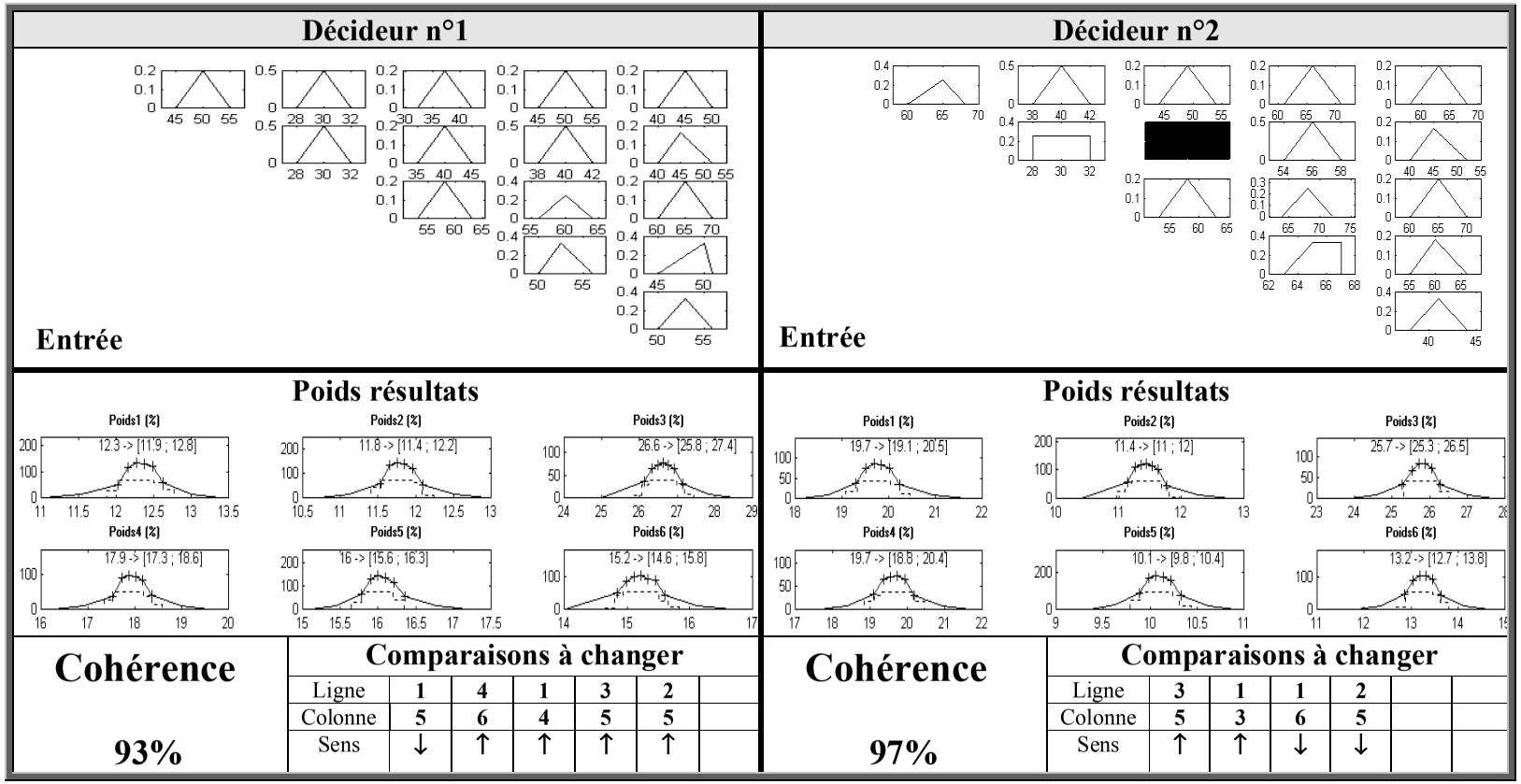
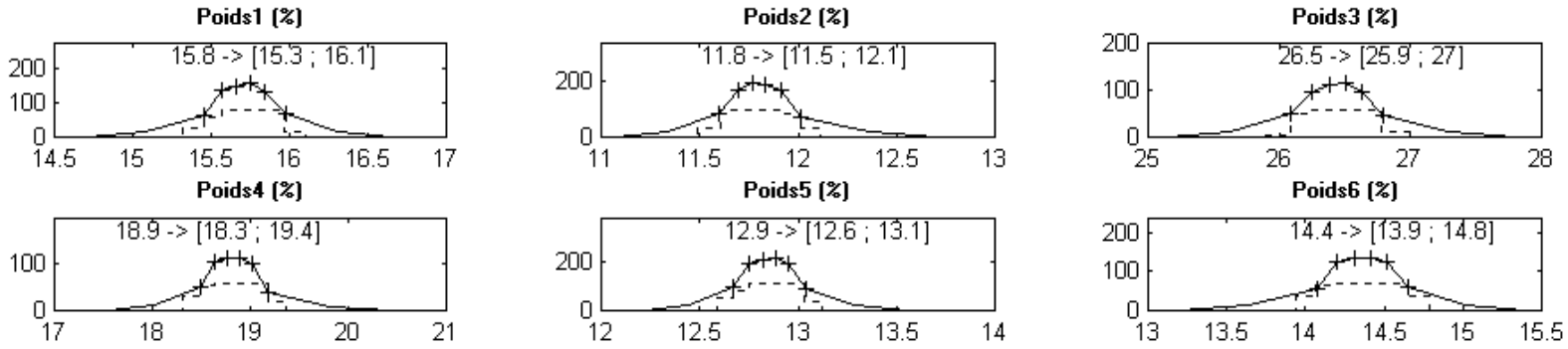


figure VII–7 : Premier tour – Tableaux de bord individuels

Poids résultats du groupe



Cohérence du groupe 78%

Décideur n°1	Comparaisons à changer dans le sens du groupe					
	Ligne	1	1	4	2	3
	Colonne	4	3	6	5	5
	Sens	↑	↑	↑	↑	↑

Décideur n°2	Comparaisons à changer dans le sens du groupe					
	Ligne	1	1	2		
	Colonne	5	6	5		
	Sens	↓	↓	↓		

figure VII–8 : Premier tour – Tableau de bord du groupe

Après examen des recommandations qui lui ont été faites le décideur 1, jugeant sa cohérence propre suffisante mais fragile, décide de ne suivre que partiellement les conseils de la figure VII–7 et ceux de la figure VII–8. Il diminue la comparaison (1, 5) de 10% et augmente la comparaison (4, 6) de 10% et la comparaison (1, 4) de 5% pour aller dans le sens de sa cohérence propre. Les deux dernières modifications vont aussi dans le sens de la cohérence du groupe. Il en résulte une grande amélioration de cohérence personnelle (97% en figure VII–9) pour une relativement faible modification personnelle des poids. Les nouvelles préconisations suggèrent, à présent, au décideur 1 de diminuer en priorité (1,4), contrairement aux suggestions précédentes. Ce renversement de situation indique que la valeur la plus cohérente se trouve entre l'ancienne et la nouvelle valeur prise par la comparaison (1,4). Lorsque l'entité votante ne suit que des conseils en accord avec sa cohérence propre, ce renversement peut aussi signifier que l'entité votante n'est peut être plus en mesure d'affiner encore plus son jugement.

Le décideur 2, qui avait une bonne cohérence personnelle, s'est lui laissé plus influencer par les résultats du groupe. Le logiciel lui conseille en priorité (voir figure VII–7) de diminuer l'importance de l'élément 1 par rapport aux éléments 5 et 6. Le décideur 2 décide tout d'abord de diminuer la valeur de la comparaison (1, 6) de 5% et celle de la comparaison (2, 5) de 5%, puisqu'il s'agit là de préconisations qui servent aussi bien sa propre cohérence (voir figure VII–7) que celle du groupe (voir figure VII–8). Il décide également de diminuer la comparaison (1, 5) de 10%, reconnaissant qu'il l'avait surestimée. Cette préconisation lui a été faite pour aller exclusivement dans le sens de la cohérence du groupe. Il décide également de répercuter cette modification de moitié (5%) sur toute autre comparaison mettant en jeu les éléments 1 (en donnant moins d'importance à 1) ou 5 (en donnant plus d'importance à 5). En l'occurrence, il va diminuer les comparaisons (1,2), (1,3), (1,4), (1,6), (2,5),(3,5) et (4,5) de 5%[67] et augmenter la comparaison (5,6) de 5%. Lorsqu'un décideur suit une préconisation qui va exclusivement dans le sens de la cohérence du groupe, le logiciel lui conseille de manière heuristique de réexaminer les autres comparaisons situées sur la ligne et la colonne de la comparaison modifiée[68]. Les modifications opérées par le décideur 2 sont résumées dans le tableau VII–3.

	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
e_1	-5%	-5%	-5%	-10%	-10%
e_2				-10%	
e_3				-5%	
e_4				-5%	
e_5					+5%

tableau VII–3 : Modifications opérées par le décideur 2 sur sa matrice des comparaisons

[67] Il est normal que les comparaisons (1, 6) et (2, 5) soient diminuées deux fois de suite. La première diminution était sensée les rapprocher d'un état plus cohérent conformément aux préconisations visant à améliorer la cohérence propre du décideur 1. La seconde diminution tente quant à elle de corriger la perturbation de ce nouvel état de cohérence suite à la diminution, non préconisée, de la comparaison (1,5) de 10%.

[68] Lorsqu'un décideur suit une préconisation qui va exclusivement dans le sens de la cohérence du groupe et que la *matrice des comparaisons* ne se limite pas à une demi-matrice, la comparaison symétrique de celle qui a été modifiée doit, bien entendu, elle aussi être réexaminée. Il est également préconisé de réexaminer toute autre comparaison située sur la ligne et la colonne de cette comparaison symétrique.

La figure VII–9 montre que la cohérence du jugement personnel du décideur 2 n'est pas dégradée alors que la cohérence du groupe s'améliore considérablement en passant de 78% à 90% sur la figure VII–10. D'un commun accord, les deux décideurs décident de ne plus modifier leur jugement et les résultats du groupe donnés en figure VII–10 sont adoptés comme résultats définitifs, le compromis étant jugé satisfaisant par les deux décideurs.

Cette étude a fait l'objet d'une publication dans une revue [LIM01]. Les calculs effectués sur T.C.M.C. ont consommé chacun 1000 tirages. L'algorithme déterministe utilisé est celui basé sur la régression logarithmique selon les moindres carrés, pour une *matrice de comparaisons* réciproque (R.L.M.C., voir §II-1.2).

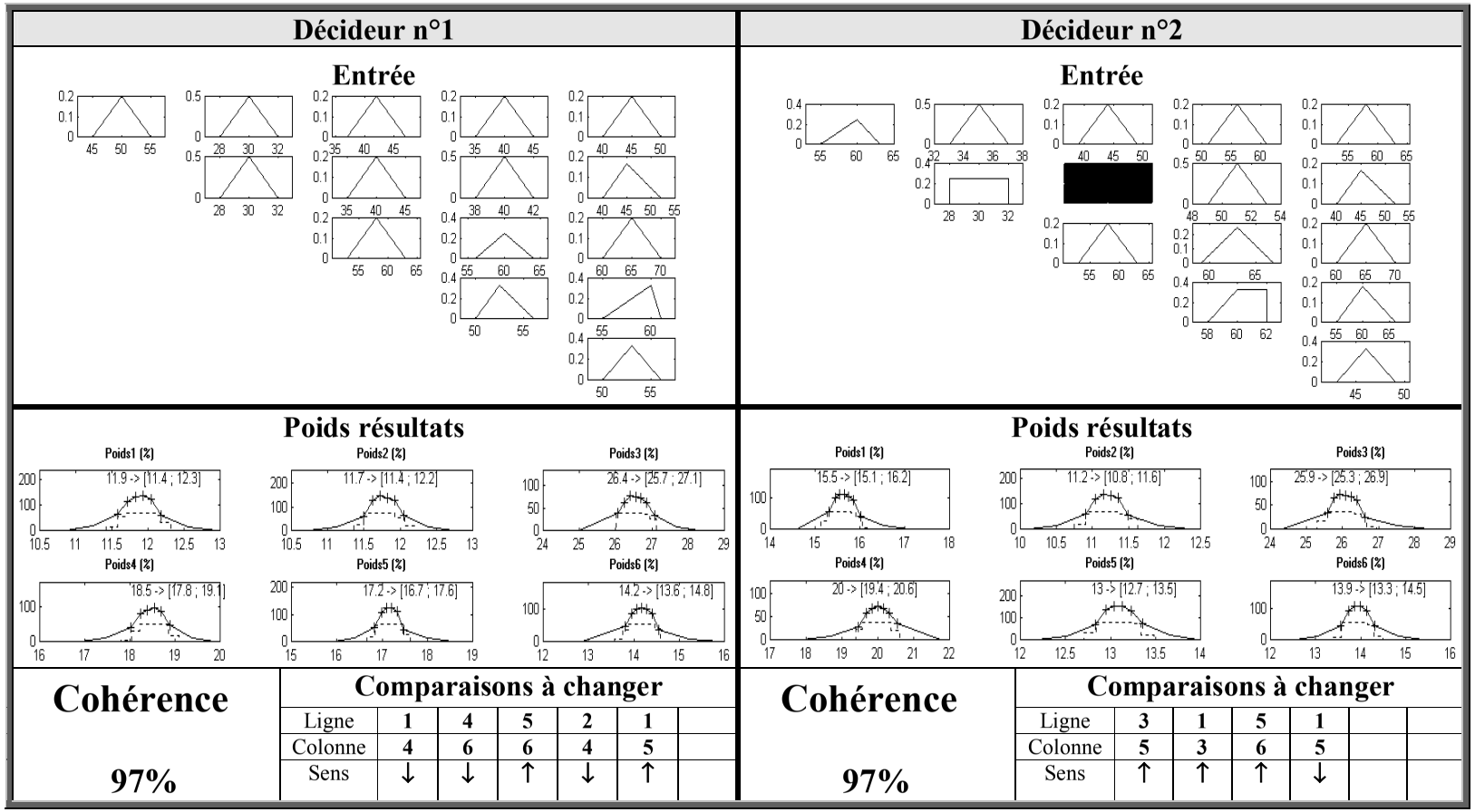
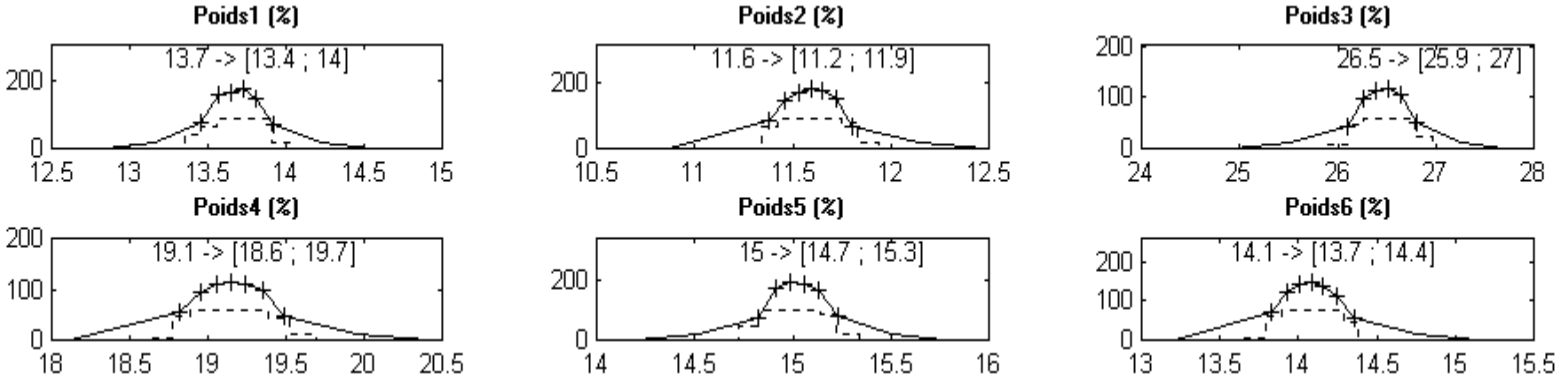


figure VII–9: Deuxième tour – Tableaux de bord individuels

Poids résultats du groupe



Cohérence du groupe **90%**

Décideur n°1	**Comparaisons à changer dans le sens du groupe**						**Décideur n°2**	**Comparaisons à changer dans le sens du groupe**					
	Ligne	**1**	**1**	**1**	**1**			Ligne	**1**	**5**	**1**	**4**	
	Colonne	**5**	**3**	**6**	**2**			Colonne	**5**	**6**	**2**	**5**	
	Sens	↑	↑	↑	↑			Sens	↓	↑	↓	↓	

figure VII–10: Deuxième tour – Tableau de bord du groupe

VII-3. RESUME ET PERSPECTIVES

Le premier exemple numérique proposé dans ce chapitre illustre quelques unes des différences qu'il peut y avoir, dans le cadre d'une procédure de tri croisé, entre l'approche F.W.A., basée sur la logique floue, et la méthode de Monte Carlo utilisée au sein du T.C.M.C. et basée sur une logique probabiliste. Dans cet exemple, les courbes d'imprécision sont représentée par des histogrammes. Ce type de données d'entrée correspond parfaitement à ce que l'on aurait pu obtenir en sortie d'une séance de vote en groupe du type DELPHI (voir [ADA89]). Par ailleurs, la présence de cases vides et d'opinions symétriques non réciproques est typique d'un vote en aveugle (où l'identité des éléments à comparer n'est pas révélée) avec possibilité d'abstention.

Le deuxième exemple illustre un cas d'application de l'algorithme T.C.M.C. à la pondération d'un ensemble de pénalités relatives à l'ergonomie de frappe d'un clavier. Le groupe de décision est formé de deux décideurs constituant chacun une entité votante. La stratégie de vote du groupe s'inscrit dans une recherche de compromis. L'utilisation de l'algorithme T.C.M.C. a permis de converger assez rapidement vers des poids consensuels.

Les deux exemples proposés témoignent de la souplesse d'application de notre plate-forme de tri croisé tant au niveau de la prise en compte des données d'entrée que du paramétrage de la stratégie de vote (ex : filtrage de l'incohérence) ou de l'aide à la décision (ex : boucles d'amélioration de la cohérence). Néanmoins, il est clair que d'autres exemples d'application de ce type sont nécessaires à la validation de son intérêt pratique. Une plus grande variété de domaines d'application et de stratégies de vote est indispensable à la représentativité de cette validation.

CONCLUSION

Cette thèse s'inscrit dans le cadre des méthodes d'aide à la pondération en projet et plus particulièrement celles dites du tri croisé. Cette désignation englobe toute méthode ramenant le problème à un ensemble de comparaisons binaires des éléments à pondérer pour simplifier la tâche du groupe de décision. Ce travail a été motivé par les lacunes que nous avons observées dans certains outils utilisés sur le terrain, notamment dans le domaine de la conception de produit. Une grande partie de ces lacunes est d'ores et déjà résolue. Cependant, les solutions existant dans la littérature scientifique semblent avoir du mal à intégrer la pratique. Cela nous a incité à poser la problématique en terme de spécifications fonctionnelles attendues d'un outil de pondération par tri croisé en projet. Les apports et les perspectives brièvement récapitulés dans ce qui suit constituent des éléments de réponse au cahier des charges proposé à la section I-9.

Principaux apports

Sur le plan théorique, nous avons tout d'abord proposé au chapitre III une formulation mathématique du problème sous la forme d'un système d'équations généralisant deux approches de la littérature, à savoir les méthodes R.L.M.C. et M.G.L.C. (voir §II-1.2). Cette généralisation introduit plus de flexibilité au niveau de la prise en compte des comparaisons binaires. Pour une configuration particulière de ces données d'entrée, nous préconisons également une formulation analytique simplifiée des solutions généralisant celle proposée par l'approche M.G.L.C..

Ce premier apport correspond à une approche déterministe du problème qui ne prend pas en compte l'imprécision pouvant entacher les opinions exprimées au niveau de toute comparaison binaire d'éléments. A priori, toute méthode de tri croisé déterministe peut prétendre à une extension pour pallier cette limitation. C'est à ce niveau que se situe notre deuxième apport. Dans la littérature deux logiques d'extension très différentes sont utilisées pour la représentation et le traitement de l'imprécision : celle basée sur la logique floue et l'approche probabiliste. Dans le cadre de la première alternative, nous avons abordé au chapitre IV différents aspects concernant l'application au tri croisé de l'algorithme F.W.A., proposé par Dong et Wong [DON87]. Il permet de pallier certaines limitations dont souffrent des approches de la littérature basées sur la même logique d'extension. Des perspectives d'optimisation sont également envisagées.

Au chapitre V, nous avons proposé un indicateur de cohérence original dans la mesure où il couvre l'ensemble des comparaisons binaires envisageables en entrée tout en permettant un filtrage sélectif de l'incohérence que le groupe de décision pourrait tolérer. Nous avons aussi introduit la notion d'entité votante pour assouplir l'association *décideur*/*comparaison binaire* et permettre la prise en compte de différentes stratégie de vote au sein du groupe de décision. Une procédure suggestive et itérative d'amélioration de la cohérence a également été proposée. Les cohérences des entités votantes et du groupe entier sont distinguées, permettant à chaque entité votante d'être consciente du compromis auquel elle aboutit.

Enfin, la trame d'une plate-forme de tri croisé a été présentée au chapitre VI. Elle intègre les apports théoriques précédents et offre une grande souplesse au niveau de la conception et de la conduite d'une procédure de tri croisé en projet. Une première maquette informatique simplifiée a été réalisée. Elle a permis comme en témoignent les exemples numériques proposés au chapitre VII une première validation du concept.

Perspectives futures

Nous avons essayé tout au long de ce document de préciser les limites de nos apports et de proposer par la même occasion des perspectives d'amélioration.

Par exemple, en ce qui concerne l'application de l'approche F.W.A. au contexte du tri croisé, nous avons souligné l'intérêt d'étudier plus finement la fonction d'agrégation des comparaisons binaires, associée à toute méthode de tri croisé. La connaissance de son comportement permettrait une optimisation des résultats fournis en ce qui concerne la prise en compte de l'imprécision inhérente au jugement.

Au niveau de l'indicateur de cohérence proposé au chapitre V nous avons précisé les limites du filtrage de l'incohérence tolérée par le groupe. Nous avons également évoqué l'intérêt d'affiner la notion d'entité votante de manière à offrir une plus grande variété de stratégies de vote au groupe de décision. Cela permettrait également une meilleure prise en compte de la spécificité du groupe de décision ouvrant ainsi des perspectives intéressantes au niveau de l'application pratique.

Une partie de ces perspectives a été intégrée dans le concept de *plate-forme de tri croisé asynchrone et réparti* proposé au chapitre VI. Le développement de cette plate-forme au sein d'un logiciel informatique a également été envisagé. Une première version a été réalisée avec, notamment, la collaboration de la société Mk-tools (copie d'écran en annexe II). Nous avons d'ores et déjà contacté des utilisateurs potentiels qui sont prêt à la tester sur le terrain. Il s'agit principalement de praticiens en méthodologie dans le domaine de l'aide à la conception de produit.

BIBLIOGRAPHIE

[ADA89] B. Adam, "Animer une étude analyse de la valeur" *dans la collection* "Formation permanente en sciences humaines", *Ed.S.* L. Bellenger, ESF éditeur - Entreprise Moderne d'Edition et Librairies Techniques, 1989.

[AFA94] AFAV, "L'Analyse de la Valeur", *Eds.S.* G. Damien et A. Monnin, Ministère de la coopération, 1994.

[ARB89] A. Arbel, "Approximate articulation of preference and priority derivation" *publié dans* European Journal of Operational Research, *vol.* 43, *pp.* 317-326, 1989.

[BEL90] S. Bellut, "La compétitivité par la maîtrise des coûts - conception à coûts objectifs et analyse de la valeur", Paris, AFNOR gestion, 1990.

[BOE89] C. G. E. Boender, J. G. de Graan et F. A. Lootsma, "Multi-criteria decision analysis with fuzzy pairwise comparisons" *publié dans* Fuzzy Sets and Systems, *vol.* 29, *pp.* 133 - 143, 1989.

[BUC85] J. J. Buckley, "Fuzzy hierarchical analysis" *publié dans* Fuzzy Sets and Systems, *vol.* 17, *pp.* 233-247, 1985.

[BUS66] N. P. Buslenko, D. I. Golenko, Y. A. Shreider, I. M. Sobol' et V. G. Sragovich, "The Monte Carlo Method - The Method of Statistical Trials" *dans la collection* "International series of monographs in pure and applied mathematics", *Ed.S.* P. Press, *vol.* 87, 1966.

[COU98] H. Courtot, "La gestion des risques dans les projets" *dans la collection* "Production et techniques quantitatives appliquées à la gestion", *Ed.S.* V. Giard, *vol.* 1, *Edition n°* 1, Economica, 1998.

[DEG80] J. G. De Graan, "Extensions to the multiple criteria analysis of T. L. Saaty", Report National Institute of Water Supply, The Netherlands 1980.

[DON87] W. M. Dong et F. S. Wong, "Fuzzy weighted averages and implementation of the extension principle" *publié dans* Fuzzy Sets and Systems, *vol.* 21, *pp.* 183-199, 1987.

[DRA81] N. R. Draper et H. Smith, "Applied Regression Analysis" *dans la collection* "Wiley series in probability and mathematical statistics", *Eds.S.* R.A. Bradley, J.S. Hunter et al., *vol.* 1, *Edition n°* 2, John Wiley & Sons, Inc., 1981.

[DUB94] D. Dubois et H. Prade, "Ensembles flous et théorie des possibilités : notions de base" *dans* Logique Floue, *vol.* 1, ARAGO, *Ed.* O.F.d.T. Avancées, *Edition n°* 1, Paris, Masson, 1994, *pp.* 29-62.

[DUB94*] D. Dubois et M. Grabisch, "Agrégation multicritère et optimisation" *dans* Logique Floue, *vol.* 1, ARAGO, *Ed.* O.F.d.T. Avancées, *Edition n°* 1, Paris, Masson, 1994, *pp.* 179-199.

[DUB98] D. Dubois, M. Grabisch, F. Modave et H. Prade, “Un Parallèle entre Décision dans l'Incertain et Décision Multicritère dans une perspective IA” *présenté à* RFIA' 98, Clermont-Ferrand, 1998.

[ESC00] M. T. Escobar et J. M. Moreno-Jiménez, “Reciprocal distributions in the analytic hierarchy process” *publié dans* European Journal of Operational Research, *vol.* 123, *pp.* 154-174, 2000.

[GOG97] O. Gogus et T. O. Boucher, “A consistency test for rational weights in multi-criterion decision analysis with fuzzy pairwise comparisons” *publié dans* Fuzzy Sets and Systems, *vol.* 86, *pp.* 129-138, 1997.

[HER96] M. W. Herman et W. W. Koczkodaj, “A Monte Carlo study of pairwise comparison” *publié dans* Information Processing Letters, *vol.* 57, *pp.* 25-29, 1996.

[KOC99] W. W. Koczkodaj et M. Orlowski, “Computing a consistent approximation to a generalized pairwise comparisons matrix” *publié dans* Computers and Mathematics with Applications, *pp.* 79-85, 1999.

[LIM00] F. Limayem et B. Yannou, “La méthode SPEC : une modélisation détaillée du Cahier des Charges Fonctionnel pour un suivi de projet et une maîtrise des risques” *présenté au* Congrès international AFAV 2000 : Les hommes et le management par la valeur, Paris, 2000.

[LIM01] F. Limayem et B. Yannou, “Le Tri Croisé de Monte Carlo : une boite à outils pour l'aide à la décision coopérative” *à paraître prochainement dans* la Revue de CFAO et d’informatique graphique, 2001.

[LOO82] F. A. Lootsma, "Performance evaluation of nonlinear optimization methods via multi-criteria decision analysis and via linear model analysis" *dans la collection* "Nonlinear Optimization 1981", *Ed.S.* A. Press, *vol.* 1, *Edition n°* 1, London, M.J.D. Powell, 1982.

[LOO96] F. A. Lootsma, “A model for the relative importance of the criteria in the multiplicative AHP and SMART” *publié dans* European Journal of Operational Research, *vol.* 94, *pp.* 467-476, 1996.

[MAR87] C. Marsan, “Claviers alphanumériques ergonomiques pour machines à écrire et similaires”, Brevet d'invention n° 87-03267, déposé le 03 mars 1987 à l'Institut National de la Propriété Industrielle, France, 1987.

[NAK98] Y. Nakahara, “User oriented ranking criteria and its application to fuzzy mathematical programming problems” *publié dans* Fuzzy Sets and Systems, *vol.* 94, *pp.* 275-286, 1998.

[PRO92] H. Procaccia et L. Piepszownik, "Fiabilité des équipements et théorie de la décision statistique fréquentielle et bayésienne" *dans la collection* "Collection de la direction des études et recherches d'Electricité de France", *vol.* 1, *Edition n°* 1, Editions Eyrolles, 1992.

[RAK90] I. Rak, C. Teixido, J. Favier et M. Cazenaud, "La démarche de projet industriel" *dans la collection* "Approches systèmes", Foucher, 1990.

[ROY85] B. Roy, "Méthodologie Multicritère d'Aide à la Décision" *dans la collection* "Production et techniques quantitatives appliquées à la gestion", *Ed.S.* V. Giard, *vol.* 1, *Edition n°* 1, Paris, Economica, 1985.

[SAA77] T. L. Saaty, “A scaling method for priorities in hierarchical structures” *publié dans* Journal of Mathematical Psychology, *vol.* 15, *pp.* 234-281, 1977.

[SAA87] T. L. Saaty et L. G. Vargas, “Uncertainty and rank order in the analitic hierarchy process” *publié dans* European Journal of Operational Research, *vol.* 32, *pp.* 107-117, 1987.

[SCO95] M. J. Scott et E. K. Antonsson, “Aggregation functions for engineering design trade-offs” *présenté à* 9th International Conference on Design Theory and Methodology, 1995.

[SCO98] M. J. Scott, “Formalizing Negotiation in Engineering Design”, *thèse en* Mechanical Engineering *soutenue à* California Institute of Technologie, 1998.

[VAN83] P. J. M. van Laarhoven et W. Pedrycz, “A fuzzy extension of Saaty's priority theory” *publié dans* Fuzzy Sets and Systems, *vol.* 11, *pp.* 229-241, 1983.

[WAG01] M. O. Wagner, B. Yannou, S. Kehl, D. Feillet et J. Eggers, “Ergonomic Modeling and Optimization of the Keyboard Arrangement with an Ant Colony Optimization Algorithm” *à paraître prochainement dans* Journal of Engineering Design, 2001.

[WOO89] K. L. Wood, E. K. Antonsson et J. L. Beck, “Comparing fuzzy and probability calculus for representing imprecision in preliminary engineering design” *présenté à* Design Theory and Methodology, Montréal, CANADA, 1989.

[YAN98] B. Yannou et P. Hossenlopp, “Clavier alphanumérique ergonomique”, Brevet d'invention n° 98-04588, déposé le 10 avril 1998, délivré le 23 juin 2000 sous le numéro de publication 2 777 222 1998.

[YAN00] B. Yannou et F. Limayem, “La méthode SPEC : Suivi de Performances En cours de Conception” présenté à IDMME 2000 : Third International Conference on Integrated Design and Manufacturing in Mechanical Engineering, Montréal, 2000.

[ZAD75] L. A. Zadeh, “The concept of a Linguistic Variable and its Application to Approximate Reasoning” *publié dans* Information Sciences, *vol.* 8, *pp.* 199-249, 1975.

LISTE DES ABREVIATIONS

A.H.P.	Analytic Hierarchy Process
Bo.R.L.M.C.	extension de la méthode déterministe de tri R.L.M.C. selon l'approche de Boender et al.
Bu.M.G.L.	extension de la méthode déterministe de tri M.G.L. selon l'approche de Buckley
C.A.B.Q.	Classement par Approche Binaire Quantitative
E.C.P.	École Centrale Paris
F.W.A.	Fuzzy Weighted Average
F.W.A.M.G.L.	extension de la méthode déterministe de tri M.G.L. selon l'approche F.W.A.
F.W.A.R.L.M.C.	extension de la méthode déterministe de tri R.L.M.C. selon l'approche F.W.A.
F.W.A.R.L.M.C.G.	extension de la méthode déterministe de tri R.L.M.C.G. selon l'approche F.W.A.
I.C.	Indicateur de Cohérence
I.D.	Indicateur de Dominance
M.G.L.C.	Moyenne Géométrique sur les Lignes et les Colonnes
M.G.L.	Moyenne Géométrique sur les Lignes
M.G.L.C.M.O.	Moyenne Géométrique sur les Lignes et les Colonnes Multi-Opinion
P.E.S.C.	Part Expliquée de la Somme des Carrés
Q.F.D.	Quality Function Deployment
R.L.M.C.	Régression Logarithmique selon les Moindres Carrés
R.L.M.C.G.	Régression Logarithmique selon les Moindres Carrés Généralisée
T.C.M.C.	Tri Croisé de Monte Carlo
V.P.	approche basée sur l'analyse des Valeurs Propres

LISTE DES ILLUSTRATIONS

FIGURES

*figure I–1 : Principe de base d'un outil de tri croisé illustré sur une demi-*matrice de comparaisons binaires *pour quatre éléments à pondérer* 5
figure I–2 : Vérification de l'exactitude d'une méthode de tri croisé en 4 phases (illustration du cas particulier d'une pondération à quatre éléments pour une matrice de comparaisons *réciproque)* 6
figure II–1 : Matrice des comparaisons binaires 13
figure II–2 : Nombre flou triangulaire 18
figure III–1 : Exemple de matrice de comparaisons *pour n*=3 et *q=2.* 27
figure IV–1 : Poids flous trapézoïdaux avant normalisation 31
figure IV–2 : Matrice des comparaisons *proposée dans l'article [BOE89]* 34
figure IV–3 : Illustration de l'application de la méthode V.P. à la coupe de niveau 0 sur la matrice des comparaisons *donnée en figure IV–2* 37
figure V–1 : Représentation grossière de l'évolution de $I.C._{Générique}$ *en fonction du nombre d'éléments à comparer* 44
figure V–2 : Illustration des erreurs pures et des erreurs de calage 45
figure V–3 : Correction itérative de l'incohérence d'une entité votante indépendamment de l'incohérence globale du groupe de décision. 53
figure V–4 : Correction itérative de l'incohérence dans le cadre d'une recherche de compromis 54
figure VI–1 : Différents niveaux de spécification dans une procédure de tri croisé asynchrone et répartie 61
figure VI–2: Transformation des valeurs de poids issues de l'échantillonnage en une courbe lissée 65
figure VII–1 : Matrice de comparaisons binaires *non réciproque et incomplète* 70
figure VII–2 : Jeu de poids en % donné par l'algorithme T.C.M.C. pour 32000 tirages 70
figure VII–3 : Jeu de poids en % donné par l'algorithme T.C.M.C. pour 1000 tirages 70
figure VII–4 : Jeu de poids en % donné par l'algorithme F.W.A. 71
figure VII–5 : Le clavier ergonomique du brevet [YAN98] 72
figure VII–6 : La meilleure répartition de lettres pour un clavier français proposée dans [WAG01] 73
figure VII–7 : Premier tour – Tableaux de bord individuels 76
figure VII–8 : Premier tour – Tableau de bord du groupe 77
figure VII–9: Deuxième tour – Tableaux de bord individuels 80
figure VII–10: Deuxième tour – Tableau de bord du groupe 81

TABLEAUX

tableau II–1 : Récapitulatif des différentes méthodes déterministes rencontrées dans la littérature 17
tableau IV–1 : Représentation de poids flous selon les coupes de niveau 0 et 1 31
tableau IV–2 : Résultats comparatifs des méthodes de tri croisé Bo.R.L.M.C., Bu.M.G.L., F.W.A.M.G.L. et F.W.A.R.L.M.C. 35
tableau VII–1 : Pondération finale adoptée pour les 6 pénalisations ergonomiques du clavier 74
tableau VII–2 : Comparaison de deux variantes de l'indicateur de cohérence générique à l'échelle de l'entité votante et à celle du groupe de décision 75
tableau VII–3 : Modifications opérées par le décideur 2 sur sa matrice des comparaisons 78

TABLE DES FORMULES

formule II–1 15
formule II–2 15
formule II–3 16
formule II–4 19
formule II–5 19
formule II–6 20
formule III–1 24
formule III–2 24
formule III–3 25
formule III–4 25
formule III–5 26
formule III–6 27
formule III–7 28
formule III–8 28
formule IV–1 29
formule IV–2 30
formule IV–3 33
formule V–1 40
formule V–2 41
formule V–3 42
formule V–4 43
formule V–5 43
formule V–6 45
formule V–7 46
formule V–8 47
formule V–9 49
formule V–10 51
formule V–11 56
formule VI–1 64

LISTE DES VARIABLES

La liste ci-dessous regroupe les variables susceptibles d'occurrences multiples à différents endroits du manuscrit.

b_{ijk}	variable intermédiaire égale au logarithme de l'opinion c_{ijk}
C	*matrice des comparaisons binaires*
C^*	matrice cohérente, se rapprochant de C, fournie par le modèle de tri croisé
c_{ij}	comparaison binaire estimant l'importance relative d'un élément i par rapport à celle d'un élément j
c_{ijk}	opinion exprimée par le décideur k sur la comparaison binaire c_{ij}
d	nombre total de décideurs
d_{ij}	nombre total d'opinions exprimées par les décideurs sur la comparaison c_{ij}
E	vecteur des coefficients d'erreur
e_i	élément i
G_1	sous-ensemble des opinions, exprimées dans C, correspondant à une dominance (voir *I.D.*) non ambiguë lorsqu'elles sont comparées à leurs homologues cohérentes
G_2	complémentaire de G_1 sur l'ensemble des opinions exprimées dans C
H	vecteur des coefficients de calage du modèle de régression
$I.C._{Diagonale\ Corrigé,i}$	indicateur dérivé de $I.C._{Diagonale,i}$ permettant de moduler la notion d'incohérence
$I.C._{Diagonale,i}$	indicateur de cohérence spécifique à la comparaison binaire c_{ii} (située sur la diagonale de la *matrice des comparaisons* au croisement de la ligne et de la colonne i)
$I.C._{Générique}$	moyenne pondérée des indicateurs $I.C._{Regression}$ et $I.C._{Diagonale,i}$
$I.C._{Générique\ Corrigé}$	indicateur dérivé de $I.C._{Générique}$ permettant de moduler la notion d'incohérence
$I.C._{Regression}$	*P.E.S.C.*
$I.C._{Regression\ Corrigé}$	indicateur dérivé de $I.C._{Regression}$ permettant de moduler la notion d'incohérence
$I.C._{Saaty}$	indicateur de cohérence proposé par Saaty
I.D.	indicateur mesurant la relation d'ordre entre deux intervalles, y compris en présence de chevauchement
K	nombre de variables d'entrée considérées dans l'approche F.W.A.
n	nombre d'éléments à pondérer

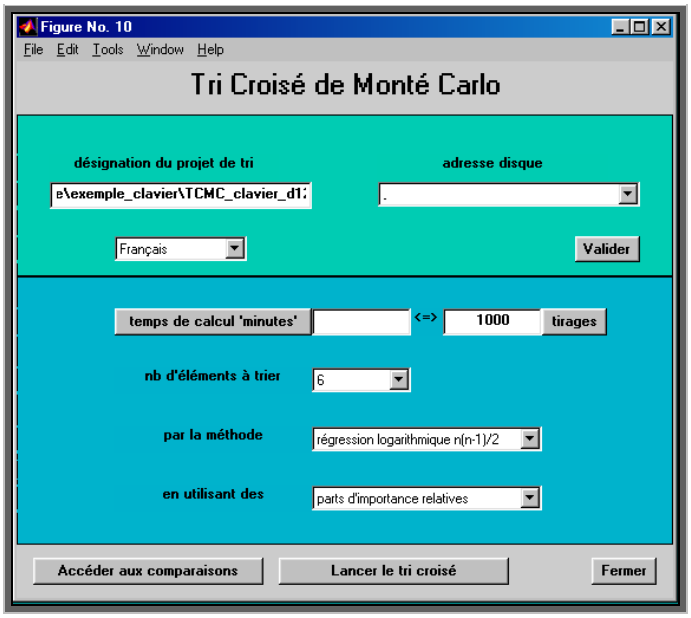
N	nombre de tirages aléatoires effectués dans le cadre de l'approche Monte Carlo
p	probabilité minimale qu'il est possible d'estimer par l'approche de Monte Carlo
P.E.S.C.	indicateur de cohérence dérivé du coefficient de détermination R^2
p_{ij}	nombre de points générés sur la courbe de la variable d'entrée i par la $j^{ème}$ coupe de niveau considérée dans l'approche F.W.A..
r	erreur relative sur la probabilité estimée par l'approche de Monte Carlo
R^2	coefficient de détermination représentant la corrélation entre les observations (Y) de la variable dépendante et les estimations ($\hat{Y}$) qui leur sont associées par le modèle de régression linéaire utilisé
T	nombre de coupes de niveau considérées dans l'approche F.W.A.
w_i	poids de l'élément i relativement à l'ensemble des éléments à pondérer
X	matrice des variables de prédiction considérée dans le cadre du modèle de régression
x_j	$j^{\text{ème}}$ variable de prédiction considérée dans le cadre du modèle de régression
X_{ji}	valeur prise par la variable de prédiction x_j pour la $i^{ème}$ observation de la variable dépendante y
y	variable dépendante, supposée aléatoire, associée au modèle de régression
Y	vecteur des observations
Y_i	$i^{ème}$ observation de la variable dépendante y
$\hat{Y}$	prédiction fournie par le modèle de régression pour estimer Y
α_{ijk}	variable de décision qui vaut 1 si le décideur k s'exprime sur la comparaison c_{ij} et 0 sinon
ε_i	coefficient aléatoire d'erreur mesurant l'écart entre l'observation Y_i de la variable dépendante et la prédiction $\hat{Y}_i$ qui lui est associée par le modèle de régression
η_i	constante pondérant la $i^{ème}$ variable de prédiction et permettant le calage du modèle de régression
λ_{max}	valeur propre maximale (en module) caractérisant C
v_ε	part d'erreur tolérée par le groupe de décision
Θ	prédiction fournie par le modèle de régression pour estimer H
θ_i	variable intermédiaire égale au logarithme du poids w_i

ANNEXES

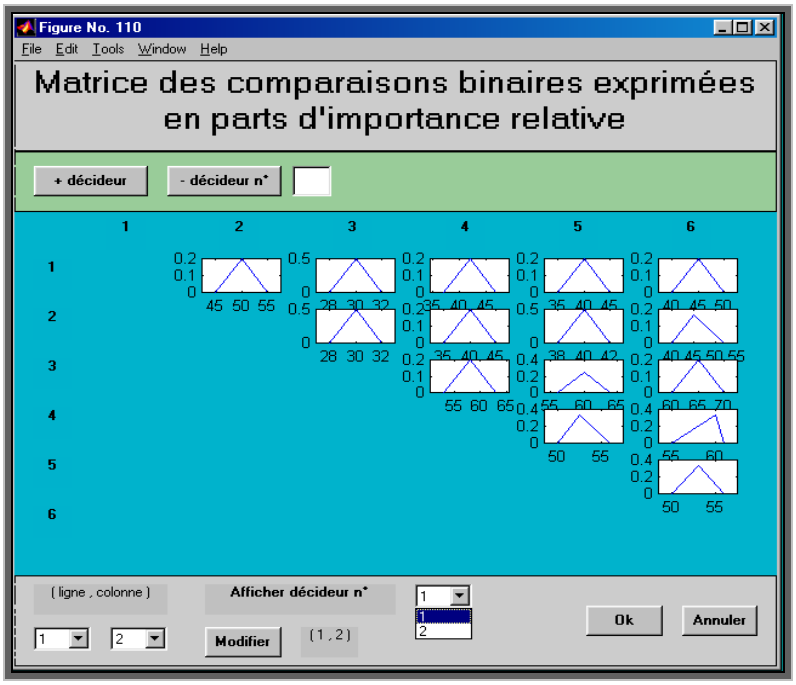
Annexe I Copies d'écran de la maquette TCMC

Les copies d'écran présentées dans cette annexe illustrent l'utilisation de la maquette T.C.M.C. dans le cadre de l'exemple de la section VII-2.

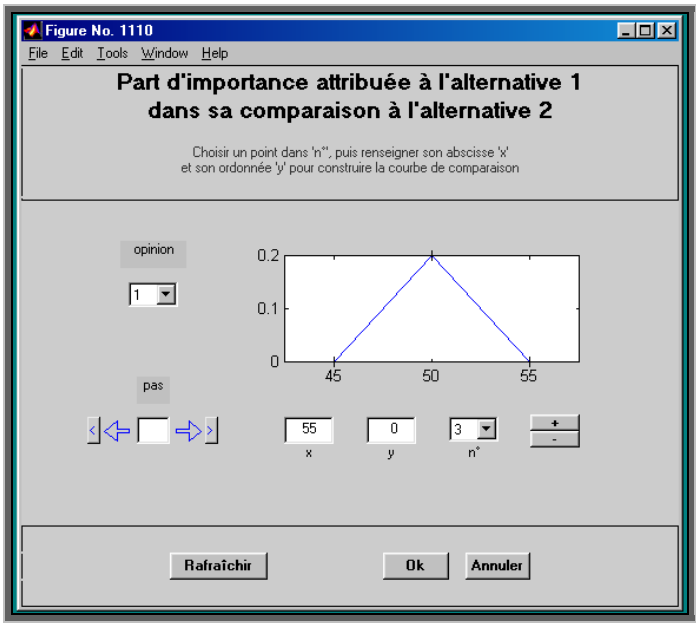
Menu principal



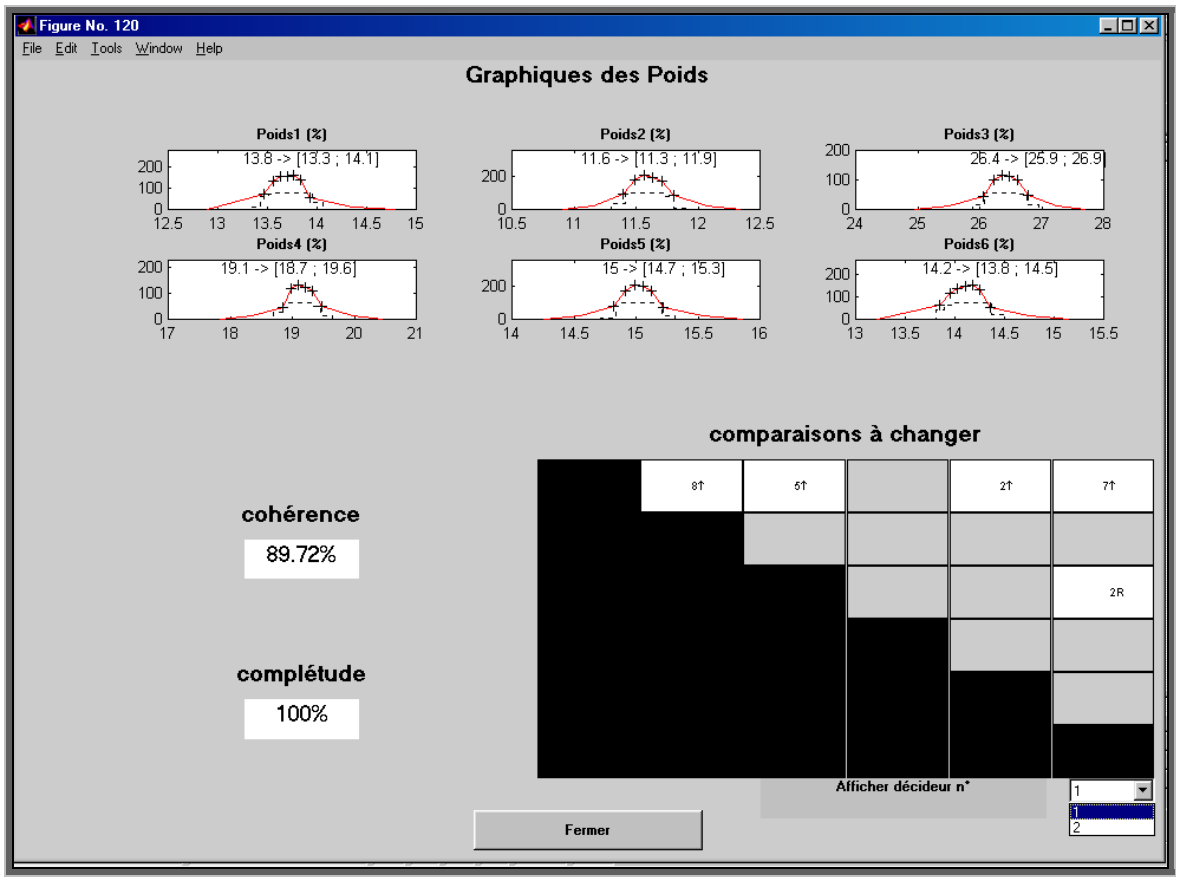
Édition des opinions



Saisie et modification des opinions

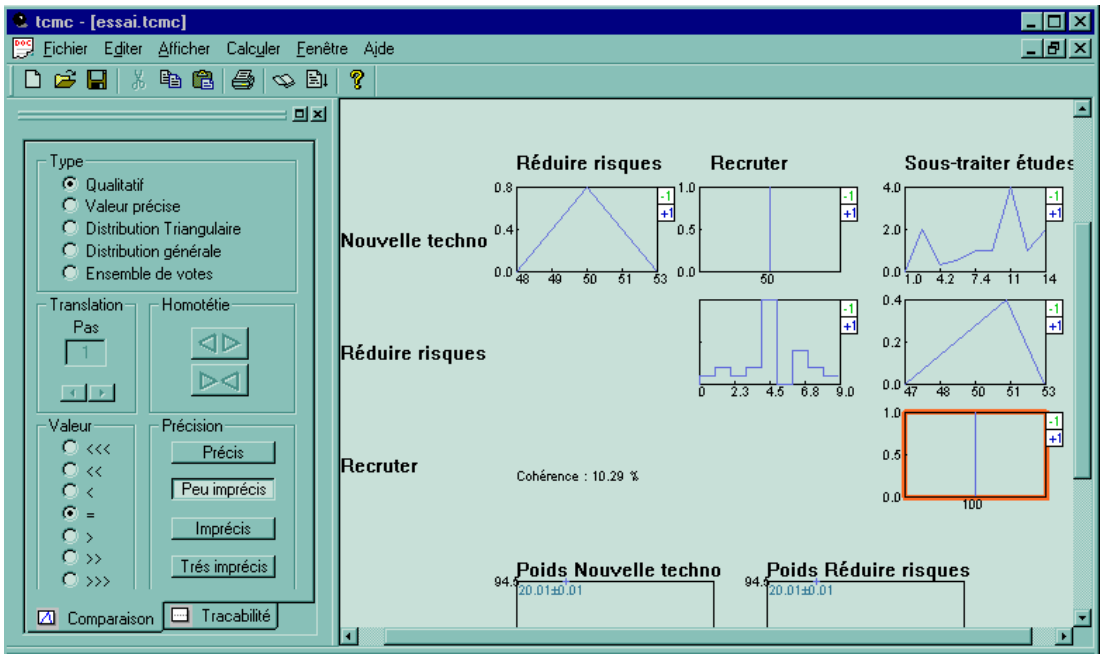


Affichage des résultats



Annexe II Copie d'écran du logiciel « Plate-Forme de Tri Croisé »

La copie d'écran ci-dessous représente l'écran utilisateur principal au sein duquel s'effectue aussi bien la saisie des données d'entrées que l'édition des résultats et des conseils en vue d'améliorer la cohérence du groupe de décision.



RESUME

En gestion de projet, les procédures de pondération sont associées à l'évaluation de paramètres intervenant dans les processus de décision. Malgré cet enjeu les outils du terrain sont très souvent peu adaptés aux exigences projet. Certains conduisent même à des résultats inexacts. Parallèlement, les solutions disponibles dans le monde de la recherche ne présentent pas toujours la souplesse nécessaire à leur exploitation immédiate sur le terrain. Ce travail de thèse apporte des éléments de réponse tant sur le plan théorique que pratique. Il s'inscrit dans le cadre plus particulier des outils dit de tri croisé. Cette désignation englobe toute méthode ramenant le problème à un ensemble de comparaisons binaires des éléments à pondérer pour simplifier la tâche du groupe de décision.

Nos apports consistent tout d'abord en une plus grande flexibilité dans la prise en compte des opinions des décideurs. Une formulation mathématique générale du problème est proposée ainsi que des perspectives, basées sur la logique floue, en vue d'une meilleure gestion de l'imprécision inhérente au jugement. Notre contribution se situe aussi au niveau de la détection et du traitement de l'incohérence induite par l'agrégation de comparaisons binaires comportant le plus souvent une part d'information redondante sans être nécessairement concordante. Un indicateur de cohérence original est proposé de même qu'une procédure itérative en vue de l'amélioration de cette cohérence. De plus, l'introduction de la notion d'entité votante permet d'envisager une plus grande variété de stratégies de vote et de cibler l'assistance apportée au groupe de décision. Enfin sur le plan pratique, un concept original de plate-forme de tri croisé asynchrone et réparti est proposé. Il offre une grande souplesse au niveau de la conception et de la conduite d'une procédure de tri croisé en projet. Une maquette informatique a été développée en vue de valider une partie de ses fonctionnalités.

MOTS-CLÉS : *aide à la décision multicritère, gestion de projet, incertitude, logique floue, Monte Carlo, pondération, protocole de vote, tri croisé.*

ABSTRACT

In project management, weighting procedures contribute to the assessment of decision-making parameters. Despite this crucial role, market tools are very often insufficiently adapted to project requirements. Some of them lead even to inexact results. In parallel, the solutions that are available in the research world are often not enough flexible to allow immediate ground application. This thesis work provides some answers on both theoretical and practical levels. More precisely, it deals with pairwise comparisons based tools. This designation includes any method expressing the problem in terms of binary comparisons of the elements to be weighted, in order to facilitate the decision group task.

First of all, the added value of this work includes a greater flexibility in handling decision-makers opinions. A general mathematical formulation of the problem is proposed as well as perspectives for a better management of the judgmental imprecision from a fuzzy logic viewpoint. Our contribution also involves the detection and treatment of the inconsistency induced from the aggregation of pairwise comparisons which often include redundant but not coherent pieces of information. An original consistency indicator is proposed as well as an iterative procedure in order to enhance this consistency. Moreover, the introduction of the "voting entity" notion broadens the variety of vote strategies one can consider and allows a customized assistance to the decision group. Eventually, on the practical level, an original platform concept of asynchronic and distributed pairwise comparisons is proposed. It offers a greater flexibility for the design and management of pairwise comparison procedures in project. A computer program was developed in order to validate some of its functionalities.

KEY WORDS: *fuzzy logic, Monte Carlo, multicriteria decision making, pairwise comparison, project management, uncertainty, vote protocol, weighting.*