



HAL
open science

Stabilité des systèmes dynamiques non-réguliers, application aux robots marcheurs

Sophie Chareyron

► **To cite this version:**

Sophie Chareyron. Stabilité des systèmes dynamiques non-réguliers, application aux robots marcheurs. Automatique / Robotique. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG, 2005. Français. NNT: . tel-00011984

HAL Id: tel-00011984

<https://theses.hal.science/tel-00011984>

Submitted on 20 Mar 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE

No. attribué par la bibliothèque

/ / / / / / / / / / / / / / / /

T H E S E

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'INPG

Spécialité : Automatique Productique

préparée au laboratoire : INRIA Rhône-Alpes
dans le cadre de l'École Doctorale : **Électronique, Électrotechnique,
Automatique, Télécommunications et Signal**

présentée et soutenue publiquement
par

Sophie CHAREYRON

le 7 décembre 2005

Titre :

**Stabilité des systèmes dynamiques non-réguliers,
application aux robots marcheurs**

Directeur de thèse : Bernard BROGLIATO

Encadrant : Pierre-Brice WIEBER

JURY

M. Bernard MASCHKE	Président
M. Michel DE MATHELIN	Rapporteur
M. Silviu NICULESCU	Rapporteur
M. Bernard BROGLIATO	Directeur de thèse
M. Pierre-Brice WIEBER	Co-encadrant de thèse
M. Didier GEORGES	Examineur
M. Mazen ALAMIR	Examineur

Remerciements

Je tenais tout d'abord à remercier Mr de Mathelin et Mr Niculescu d'avoir accepté de rapporter ce manuscrit. Je remercie également Mr Maschke, Mr Alamir et Mr Georges d'avoir accepté de faire partie de mon jury de soutenance.

Je souhaitais également vivement remercier les membres du projet européen Siconos, en particulier Bernard Brogliato directeur du projet BIPOP à l'INRIA Rhône-Alpes, grâce à qui j'ai pu bénéficier d'un financement au sein de ce projet durant ces trois années. Merci également à Bernard Espiau pour son accueil au sein de l'INRIA Rhône-Alpes. Ces années de thèse ont été particulièrement riches en expériences et en formations. Je remercie très sincèrement et tout particulièrement Pierre-Brice Wieber, encadrant de cette thèse, pour sa patience, ses encouragements ainsi que pour sa rigueur intransigeante qui m'a beaucoup appris. La bonne ambiance régnant dans le projet BIPOP a beaucoup contribué au très bon déroulement de cette thèse, je garderai en particulier des souvenirs inoubliables des "bouffes BIP", moments d'extrême convivialité partagés avec les membres du projet POPART.

La bonne humeur quotidienne émanant de mes collègues du bureau a assurément joué un rôle fondamentale au cours de ces trois années de thèse. C'est en effet avec un plaisir non-dissimulé que je retournais chaque jour à l'INRIA. Merci donc à vous tous, en particulier à Hamoudi pour ses bouraks, Gwenael pour la hotline LINUX, Matthieu pour tous (et ce n'est même pas suffisant), Marie pour son sens de l'organisation tout spécifiquement pour les soirées, Jean-Matthieu pour sa bonne humeur et les gateaux de Jeanine, Elodie pour son rayonnement et sa ponctualité légendaire, David pour son penchant caliméro, Blandine pour ses cocktails, Jérôme pour la hotline pédagogique en math, Emil pour ses fabuleuses tablettes de chocolat, Seb J. pour son soutien au PSG, Mariam pour son rôle inimitable de l'élève modèle, Seb F. pour sa clarette, Jean-Baptiste pour les footings, Rodolphe pour son simulateur de patatoïde, Florence pour ses rêves venus d'ailleurs, et à tous les autres, Soraya, Serpil, Elvis, Mathieu, Franck, Damien, Pascal...

Enfin, je souhaitais dédier ce travail à mes deux soleils, Valier et Emma notre petite fille née au beau milieu des nano-structures et des systèmes dynamiques non-réguliers.

Table des matières

Introduction	1
I Les systèmes dynamiques non-réguliers	5
1 La dynamique non-régulière	7
1.1 Introduction	7
1.2 Modélisation des contacts non-permanents	8
1.2.1 Domaine des positions admissibles	8
1.2.2 Les cônes reliés au domaine admissible	11
1.3 La dynamique non-régulière	13
1.3.1 La dynamique non-régulière, une équation différentielle à mesures	13
1.3.2 La vitesse, une fonction à variation localement bornée	13
1.4 Au sujet des contacts	15
1.4.1 Des contacts unilatéraux	15
1.4.2 Une loi d'impact	15
1.4.3 La notion d'impact multiple	17
1.4.4 D'autres modèles de contact	19
1.5 Les forces de frottement	19
1.5.1 Le frottement de Coulomb	19
1.5.2 Les impacts avec frottement	21
2 Lien avec les systèmes hybrides	23
2.1 Introduction	23
2.2 Une autre formulation possible	24
2.2.1 Les systèmes hybrides	24
2.2.2 Des sous-classes de systèmes hybrides	25
2.2.3 Les systèmes dynamiques lagrangiens non-réguliers	26
2.3 Un comportement spécifique	27
2.3.1 Les accumulations d'impacts	27

2.3.2	L'intérêt des systèmes dynamiques non-réguliers	31
II	Stabilité des systèmes dynamiques discontinus	33
3	Stabilité des systèmes discontinus	35
3.1	Introduction	35
3.2	Stabilité des flots	36
3.2.1	Quelques notations	36
3.2.2	Rappel de la définition de la stabilité au sens de Lyapunov	36
3.3	Stabilité au sens de Lyapunov	37
3.3.1	Un théorème de stabilité au sens de Lyapunov	37
3.3.2	Nécessité d'une condition globale	40
4	Stabilité asymptotique	47
4.1	Introduction	47
4.2	La stabilité asymptotique	48
4.2.1	Rappel de la définition de la stabilité asymptotique au sens de Lyapunov	48
4.2.2	Insuffisance du théorème de stabilité	48
4.3	Théorème d'invariance de LaSalle	50
4.3.1	Propriété d'invariance de l'ensemble limite	50
4.3.2	Un théorème d'invariance de LaSalle	51
4.4	Continuité des trajectoires	53
4.4.1	Discontinuité des trajectoires	53
4.5	Les impacts multiples	54
4.5.1	Dépendance continue des trajectoires par rapport aux conditions initiales	54
III	Stabilité des systèmes dynamiques lagrangiens non-réguliers	57
5	Stabilité des systèmes lagrangiens	59
5.1	Introduction	59
5.2	Énergie des systèmes lagrangiens	60
5.2.1	Un préliminaire sur les mesures de Stieljes	60
5.2.2	L'énergie, une fonction non-croissante du temps	61
5.3	Un théorème de Lagrange-Dirichlet	64
5.3.1	L'énergie comme fonction de Lyapunov	64
5.3.2	L'énergie potentielle	67
5.4	Attractivité des points d'équilibre	68

5.4.1	Attractivité des points d'équilibres	68
5.5	Commande par la passivité	71
5.5.1	La théorie des systèmes dissipatifs	71
5.5.2	Commande par la passivité	72
5.5.3	Stabilité du bras manipulateur	73
5.5.4	L'intérêt d'une commande basée sur la passivité	74
6	Les robots marcheurs	77
6.1	Introduction	77
6.2	Rôle des forces de contact dans la marche	78
6.2.1	Nécessité de prendre appui sur le sol	78
6.2.2	Remarque sur les forces de réaction	79
6.3	Une condition d'équilibre	80
6.3.1	Le sous-actionnement des robots marcheurs	80
6.3.2	Les forces de contact aux positions d'équilibre	81
6.4	Une loi de commande	85
6.4.1	Une loi de commande basée sur la passivité	85
6.4.2	Stabilité de la loi de commande	87
6.4.3	Le problème de la poursuite de trajectoire	88
7	Conclusion	93
	ANNEXES	95
	Bibliographie	102

Table des figures

1.1	Une balle soumise à l'action de la gravité.	9
1.2	Atterrissage de la barre simultanément sur les deux points de contact.	10
1.3	Atterrissage de la barre simultanément sur les deux points de contact, puis basculement autour d'un point de contact.	10
1.4	Basculement de la barre autour d'un point de contact, puis atterrissage sur le deuxième point de contact.	10
1.5	Basculement de la barre autour d'un point de contact, puis atterrissage sur le deuxième point de contact et pivotement autour de ces deux points de contact.	10
1.6	Exemples de cônes tangents $\mathcal{T}(\mathbf{q})$ et de cônes normaux $\mathcal{N}(\mathbf{q})$ de l'ensemble Φ	12
1.7	Exemple d'un système glissant sur une contrainte.	17
1.8	Des impacts avec propagation d'ondes [65]	18
1.9	Exemple du berceau de Newton.	18
1.10	Décomposition des forces de contact	20
1.11	Illustration du cône de Coulomb	21
2.1	Fonctionnement du régulateur en température.	25
2.2	Évolutions de la position et de la vitesse de la balle en fonction du temps.	29
2.3	portrait de phase de la balle.	30
2.4	Exemple d'un convertisseur buck-boost [24].	31
2.5	Exemple de commande d'un convertisseur buck-boost [24].	31
3.1	Stabilité au sens de Lyapunov d'un ensemble \mathcal{S}	37
3.2	Les variations dans le temps du système dynamique (3.1)	41
3.3	Les variations dans le temps du système dynamique (3.1) avec discontinuité	42
3.4	Les variations dans le temps de la fonction candidate $V(x(t))$ pour le système dynamique (3.1) sans discontinuité (à gauche), et avec discontinuité (à droite)	42

3.5	Exemples de trajectoires vérifiant (3.2), $x_1(t)$ une trajectoire continue, $x_2(t)$ une trajectoire discontinue quelconque, $x_3(t)$ une trajectoire discontinue vérifiant $d(X^-(t, x), \mathcal{S}) \geq d(X^+(t, x), \mathcal{S})$	45
4.1	Stabilité asymptotique au sens de Lyapunov d'un ensemble \mathcal{S}	49
4.2	Un exemple de système dynamique lagrangien où les trajectoires ne sont pas continues par rapport aux conditions initiales	54
4.3	Un exemple de système dynamique lagrangien où les trajectoires sont continues par rapport aux conditions initiales	55
4.4	Situation d'impact multiple lorsque le pied de Bip se pose sur le sol.	56
5.1	Une contre-réaction négative entre deux systèmes passifs	71
6.1	Phases d'un cycle de marche [81]	79
6.2	Bip, entre la réalité et la paramétrisation	81
6.3	Remarques sur les critères de stabilité [85].	86
6.4	Deux trajectoires relativement proches.	90
6.5	Deux trajectoires relativement proches.	91
7.1	Structure d'un système hybride	98
7.2	Système de complémentarité	100
7.3	Les systèmes H_1 et H_2 en boucle fermée.	102

Avant-propos

Motivation

Ce travail de thèse a été réalisé à l'INRIA Rhône-Alpes dans le projet BIPOP. La thématique de cette équipe est centrée autour des systèmes dynamiques non-réguliers, leur modélisation, leur commande ainsi que leur simulation numérique. L'intérêt de cette thématique réside dans le grand nombre d'applications qui peuvent être modélisées par le biais de ces systèmes. En effet, la plupart des systèmes mécaniques soumis à des contacts non-permanents peuvent être modélisés par des systèmes dynamiques lagrangiens non-réguliers. Les applications concernent ainsi un grand nombre de domaines comme l'automobile, les systèmes électro-mécaniques ou bien la robotique.

Dans l'approche de la dynamique lagrangienne, nous considérons que les interactions entre le système et son environnement sont modélisées par des contacts entre solides parfaitement rigides. Cette hypothèse revient à considérer l'indéformabilité des solides en contact. Nous verrons qu'une conséquence directe de cette hypothèse sera l'apparition de discontinuités sur la vitesse, ce qui engendrera de nombreux problèmes notamment sur la formulation de la dynamique puisqu'elle fait appel à la notion d'accélération.

Il existe de nombreux problèmes ouverts dans ce domaine aussi bien au niveau théorique que sur des aspects numériques. Dans ce travail, nous nous penchons sur la question de la stabilité des systèmes dynamiques non-réguliers. Il existe en effet de nombreux outils permettant d'analyser la stabilité des systèmes dynamiques, comme la théorie de la stabilité au sens de Lyapunov. Mais ces outils ne sont pas applicables dans le cadre des systèmes dynamiques non-réguliers. Nous serons donc amenés à proposer une extension de ces théorèmes usuels pour l'étude de la stabilité des systèmes dynamiques dans le cas des systèmes dynamiques non-réguliers.

Dans un souci de compréhension, deux exemples relativement simples sont proposés tout au long de ce travail permettant d'illustrer les concepts introduits. Le premier exemple correspond à une balle soumise à l'action de la gravité. Le second exemple présente la commande d'un bras manipulateur complètement actionné.

L'étude de la stabilité de ce système constitue un résultat nouveau, puisque nous montrons la stabilité de la loi de commande du bras manipulateur sans aucune supposition sur l'état des contacts.

Le choix de l'application au cas des robots marcheurs a été motivé d'une part par le fait que le projet BIPOP dispose d'un robot anthropomorphe, le robot BIP, d'autre part parce que les études existantes sur la stabilité des robots marcheurs s'avèrent largement incomplètes. En effet, ces études ne prenaient généralement pas en compte des contacts non-permanents, pouvant se créer ou disparaître à tout instant, ce qui est pourtant inévitable dans l'étude de la marche des robots marcheurs. Nous estimons donc que la cadre de la dynamique non-régulière a pleinement son rôle à jouer dans cette application.

Plan

Trois parties peuvent être identifiées dans ce travail :

- La première partie présente le cadre de la dynamique non-régulière et situe ce cadre au sein du vaste domaine des systèmes hybrides.
- Dans une deuxième partie, nous laissons de côté le cadre de la dynamique non-régulière pour nous intéresser au cadre plus général des systèmes dynamiques décrits par des flots pouvant subir des discontinuités, ce qui englobe les systèmes dynamiques non-réguliers et les systèmes hybrides. Nous proposerons alors des théorèmes permettant l'étude de la stabilité et de la stabilité asymptotique de ces systèmes dynamiques.
- La troisième partie a pour but d'appliquer les théorèmes de stabilité établis dans la partie précédente au cas des systèmes dynamiques lagrangiens non-réguliers, ce qui nous amènera à formuler un théorème de Lagrange-Dirichlet. Nous utiliserons en particulier ce théorème pour étudier la stabilité de trois systèmes dynamiques lagrangiens non-réguliers : une balle rebondissant sur le sol, un bras manipulateur complètement actionné et un robot marcheur.

Maintenant présentons brièvement chapitre par chapitre le contenu de ce mémoire.

Nous verrons au chapitre 1 qu'il existe un cadre mathématique extrêmement rigoureux pour décrire l'évolution des systèmes dynamiques lagrangiens soumis à des contacts non-permanents entre solides parfaitement rigides. Ce cadre fait appel à des outils mathématiques inhabituels dans le cadre de l'automatique comme des équations différentielles à mesures ou des fonctions à variation bornée. Ce premier chapitre est donc entièrement consacré à la présentation du cadre de la dynamique

non-régulière.

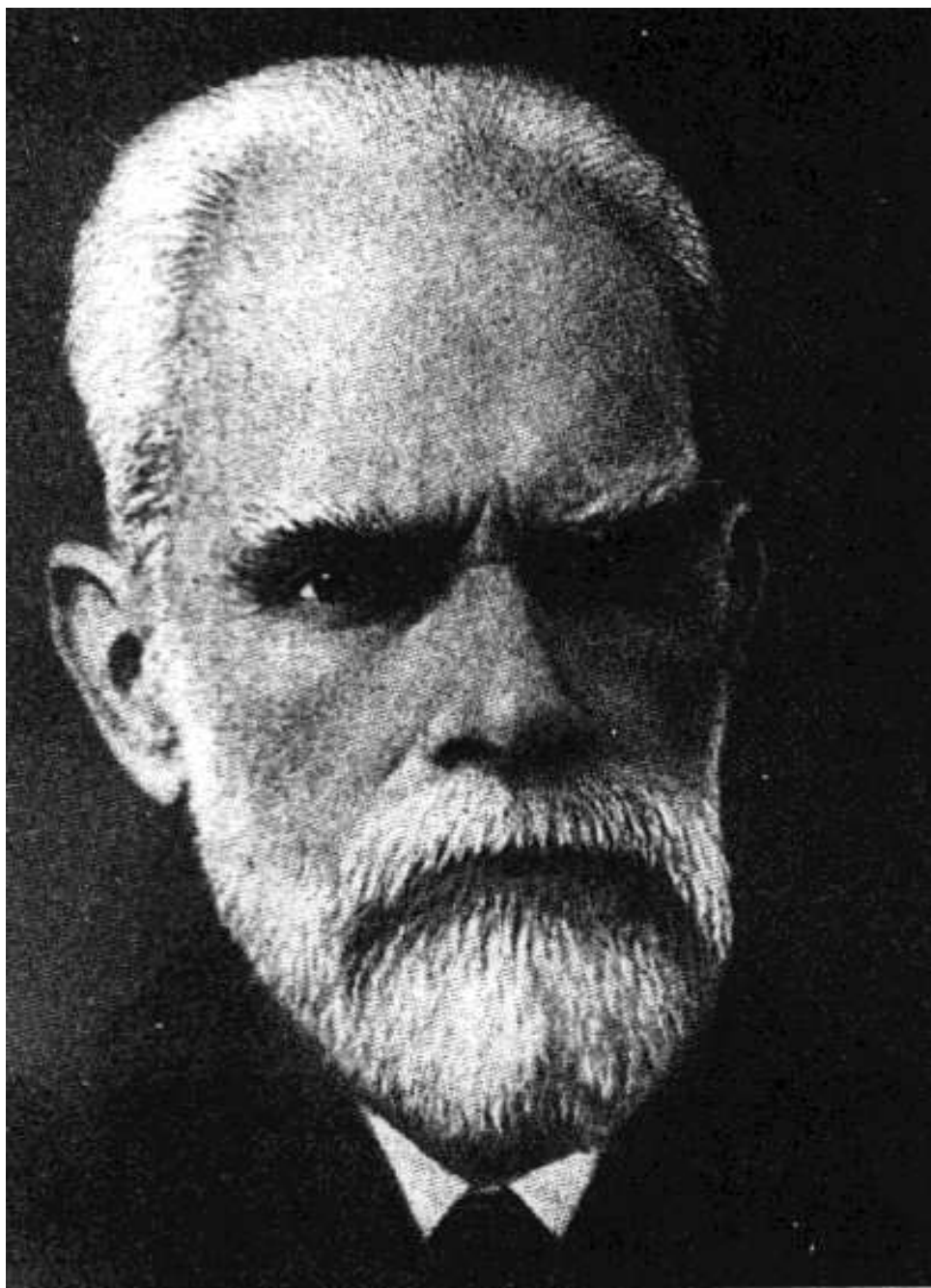
Les systèmes mécaniques soumis à des contacts non-permanents entre solides parfaitement rigides sont parfois formulé sous la forme de systèmes hybrides. Le deuxième chapitre a donc pour objectif de justifier le choix du cadre de la dynamique non-régulière comme cadre d'étude. Nous verrons que ce cadre se trouve en effet particulièrement adapté pour l'étude des systèmes dynamiques lagrangiens possédant des accumulations d'impacts.

Le troisième chapitre propose une extension du théorème de stabilité au sens de Lyapunov pour les systèmes dynamiques décrits par des flots pouvant subir des discontinuités. Ce théorème, relativement similaire au théorème usuel établi pour des systèmes dynamiques continus dans le temps, nécessite toutefois des hypothèses plus fortes sur la fonction de Lyapunov.

Le quatrième chapitre se penche sur la question de la stabilité asymptotique et plus particulièrement sur l'extension du théorème de LaSalle. Nous verrons qu'il est possible de proposer un théorème de LaSalle pour des systèmes dynamiques discontinus s'ils possèdent la propriété de continuité des trajectoires par rapport aux conditions initiales. Nous verrons en particulier dans quels cas les systèmes dynamiques lagrangiens non-réguliers satisfont cette propriété.

Le cinquième chapitre considère le cas des systèmes dynamiques lagrangiens non-réguliers. Nous verrons que l'énergie de ces systèmes correspond naturellement à une fonction de Lyapunov. En utilisant les théorèmes proposés dans les chapitres précédents, cette énergie nous permettra de conclure sur la stabilité des systèmes dynamiques lagrangiens non-réguliers à travers la formulation d'un théorème de Lagrange-Dirichlet. Puisque l'énergie joue un rôle clef dans l'analyse de stabilité de ces systèmes, dans le cas des systèmes dynamiques lagrangiens contrôlés nous serons donc amenés à proposer des lois de commande basées sur la passivité. Nous verrons en effet que le principal objectif de la commande basée sur la passivité est de préserver cette propriété de l'énergie en boucle fermée.

Enfin dans le sixième chapitre nous nous intéresserons au cas des robots marcheurs. Bien que la loi de commande en position et en force que nous proposerons sera relativement proche de celle proposée pour le bras manipulateur, nous verrons que le choix de la force désirée est loin d'être trivial du fait du caractère sous-actionné des robots marcheurs.



Александр Михайлович
ЛЯПУНОВ

Première partie

Les systèmes dynamiques
non-réguliers

Chapitre 1

Les systèmes dynamiques non-réguliers

Ce chapitre est entièrement consacré à la présentation du cadre de la dynamique non-régulière car il fait appel à des outils mathématiques inhabituels dans le cadre de l'automatique, comme des équations différentielles à mesures ou des fonctions à variation bornée.

1.1 Introduction

Issu de l'analyse des contacts non-permanents entre des solides parfaitement rigides, le cadre des systèmes dynamiques lagrangiens non-réguliers est relativement récent [6, 7, 58, 57, 59, 54, 72, 73]. Il concerne les systèmes lagrangiens dont les coordonnées sont contraintes à l'intérieur d'ensembles fermés, ce qui nous amène à introduire des outils mathématiques inhabituels dans le domaine de l'automatique, comme par exemple des fonctions à variation bornée, ou des équations différentielles à mesures. Ce chapitre utilise des notions issues de la théorie de la mesure et de

l'analyse convexe, nous renvoyons à la lecture de [71] et [41, 70] pour une présentation complète de ces théories.

Tout au long de ce chapitre entièrement consacré à la présentation du cadre des systèmes dynamiques non-réguliers, les outils mathématiques complexes utilisés seront illustrés par deux exemples simples, l'exemple d'une balle qui rebondit et l'exemple d'un bras manipulateur complètement actionné.

L'exemple de la balle qui rebondit.

On considère une balle de masse m rebondissant verticalement sur un plan horizontal sous l'action de la gravité, comme illustré à la figure 1.1. Cet exemple correspond probablement au cas le plus simple de système dynamique lagrangien non-régulier, il permettra donc d'illustrer les notions abstraites utilisées dans le cadre de la dynamique non-régulière. Nous verrons dans le chapitre suivant que ce système peut présenter des accumulations d'impacts, c'est à dire un nombre infini d'impacts en un temps fini. Ce comportement complexe n'est souvent pas pris en compte dans les analyses de stabilité, mais nous verrons que le cadre de la dynamique non-régulière semble particulièrement adapté pour l'analyse de stabilité de tels systèmes.

△

L'exemple du bras manipulateur.

Nous allons également étudier la stabilité d'une loi de commande pour la régulation à une position désirée \mathbf{q}_d et à des forces désirées \mathbf{r}_d d'un robot manipulateur. Comme cela a été proposé dans [82], nous choisissons une loi de commande relativement simple composée d'un proportionnel dérivé avec une compensation des forces de contacts \mathbf{r}_d et des autres forces non-contrôlées \mathbf{f}_u (telles que les forces de gravité) qui sont supposées parfaitement connues :

$$\mathbf{f}_c = -\mathbf{W}(\mathbf{q} - \mathbf{q}_d) - \mathbf{T}\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{r}_d - \mathbf{f}_u, \quad (1.1)$$

avec \mathbf{W} et \mathbf{T} deux matrices symétriques définies positives. Nous reviendrons plus en détail sur le choix de cette loi de commande au chapitre 5.

△

1.2 Modélisation des contacts non-permanents

1.2.1 Domaine des positions admissibles

Considérons un système dynamique à n degrés de liberté, dont la position est décrite par un vecteur de coordonnées généralisées $\mathbf{q} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$. La variation dans

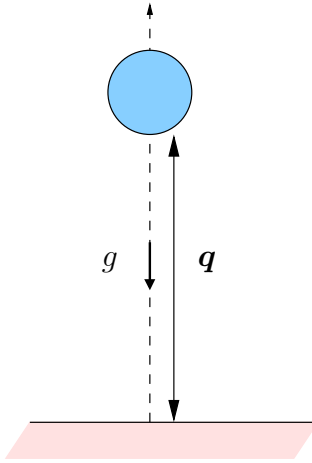


FIG. 1.1 – Une balle soumise à l'action de la gravité.

le temps de \mathbf{q} est reliée à la vitesse du système $\dot{\mathbf{q}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ par la relation suivante :

$$\forall t, t_0 \in \mathbb{R}, \mathbf{q}(t) = \mathbf{q}(t_0) + \int_{t_0}^t \dot{\mathbf{q}}(\tau) d\tau.$$

La position du système varie donc de manière continue dans le temps.

Dans ce travail nous nous intéressons au cas des systèmes dynamiques lagrangiens soumis à des contacts non-permanents entre des solides parfaitement rigides. Géométriquement parlant, le fait que les solides rigides ne peuvent s'interpénétrer se traduit par une contrainte sur la position du système dynamique, une contrainte prenant la forme d'un ensemble fermé $\Phi \subset \mathbb{R}^n$ dans lequel le vecteur des coordonnées généralisées est obligé de rester [58] :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \mathbf{q}(t) \in \Phi.$$

Ainsi, les phases de contact entre au moins deux solides correspondent aux phases où $\mathbf{q}(t)$ se trouve sur les frontières de Φ et les phases de non-contact correspondent à $\mathbf{q}(t)$ se trouvant à l'intérieur de Φ . Les figures 1.2 à 1.5 illustrent des trajectoires dans le domaine Φ à travers des exemples simples. Dans cette étude nous nous limitons au cas des systèmes autonomes, c'est-à-dire des systèmes dont la dynamique est invariante dans le temps. Nous supposons donc par la suite que cet ensemble fermé est invariant en fonction du temps.

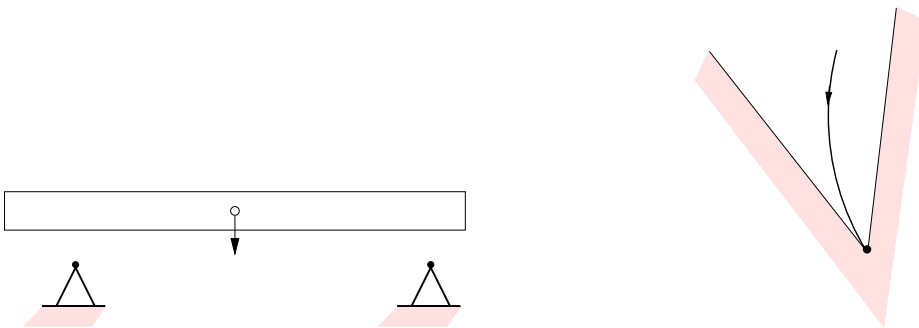


FIG. 1.2 – Atterrissage de la barre simultanément sur les deux points de contact.

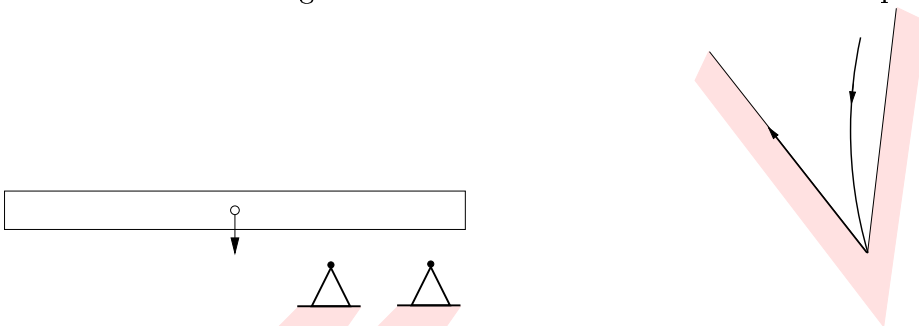


FIG. 1.3 – Atterrissage de la barre simultanément sur les deux points de contact, puis basculement autour d'un point de contact.

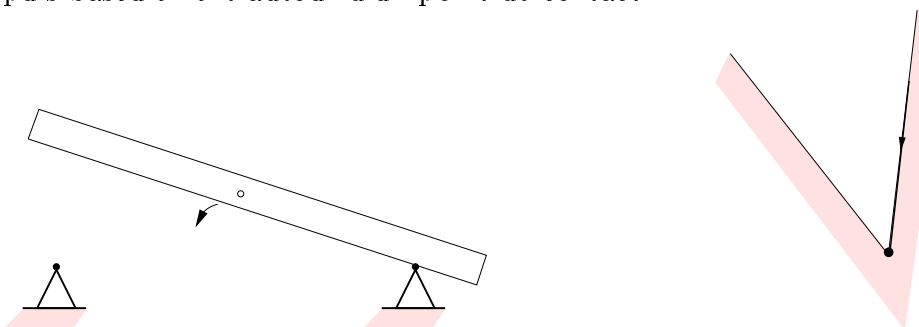


FIG. 1.4 – Basculement de la barre autour d'un point de contact, puis atterrissage sur le deuxième point de contact.

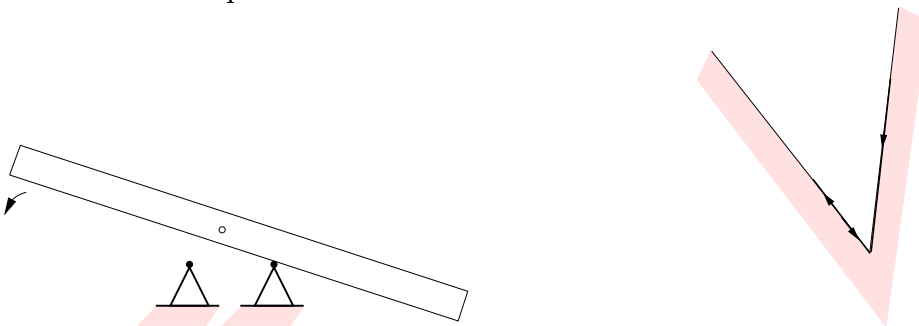


FIG. 1.5 – Basculement de la barre autour d'un point de contact, puis atterrissage sur le deuxième point de contact et pivotement autour de ces deux points de contact.

1.2.2 Les cônes reliés au domaine admissible

Nous pouvons ensuite définir pour tout $\mathbf{q} \in \Phi$ le cône tangent [41] de Φ à \mathbf{q} , $\mathcal{T}(\mathbf{q})$:

$$\mathcal{T}(\mathbf{q}) = \left\{ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n : \exists \tau_k \rightarrow 0, \tau_k > 0, \exists \mathbf{q}_k \rightarrow \mathbf{q}, \mathbf{q}_k \in \Phi, \text{ avec } \frac{\mathbf{q}_k - \mathbf{q}}{\tau_k} \rightarrow \mathbf{v} \right\},$$

et l'on constate que si la vitesse $\dot{\mathbf{q}}(t)$ possède une limite à droite et à gauche à chaque instant t , il est alors évident que $-\dot{\mathbf{q}}^-(t) \in \mathcal{T}(\mathbf{q}(t))$ et $\dot{\mathbf{q}}^+(t) \in \mathcal{T}(\mathbf{q}(t))$.

Remarquons aussi que lorsque \mathbf{q} se situe à l'intérieur du domaine Φ , $\mathcal{T}(\mathbf{q}) = \mathbb{R}^n$, et lorsque \mathbf{q} se trouve sur une frontière de Φ , alors le cône tangent se réduit tout au plus à un demi-espace (Fig. 1.6) : si le système atteint une frontière du domaine avec une vitesse $\dot{\mathbf{q}}^- \notin \mathcal{T}(\mathbf{q})$, il ne pourra pas poursuivre son mouvement avec une vitesse $\dot{\mathbf{q}}^+ = \dot{\mathbf{q}}^-$ et simultanément rester dans le domaine Φ (Fig. 1.6). La vitesse devra donc subir une discontinuité, correspondant à un impact entre des solides en contact.

Nous pouvons également définir pour tout $\mathbf{q} \in \Phi$, le cône normal [41] de Φ à \mathbf{q} , $\mathcal{N}(\mathbf{q})$:

$$\mathcal{N}(\mathbf{q}) = \left\{ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n : \forall \mathbf{q}' \in \Phi, \mathbf{v}^T(\mathbf{q}' - \mathbf{q}) \leq 0 \right\},$$

et nous verrons dans l'inclusion (1.10) à la section 1.4, que le cône normal intervient directement dans la description des forces créées lors des contacts entre solides rigides.

Soulignons que $\mathcal{N}(\mathbf{q}) = \{0\}$ lorsque \mathbf{q} se situe à l'intérieur du domaine Φ , et lorsque \mathbf{q} se trouve sur les frontières de ϕ , ce cône normal contient au moins une demi-droite de \mathbb{R}^n (Fig. 1.6), ce qui nous amène à la remarque évidente suivante : des forces de contact d'intensité non-nulle ne peuvent survenir que lorsque $\mathbf{q}(t)$ se trouve sur les frontières du domaine Φ , c'est à dire lorsqu'un contact est établi.

L'exemple de la balle qui rebondit.

Dans le cas de la balle qui rebondit, de dimension 1, ces ensembles s'écrivent :

$$\begin{aligned} \Phi &= \mathbb{R}^+ \\ \mathcal{T}(q) &= \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } q > 0, \\ \mathbb{R}^+ & \text{si } q = 0. \end{cases} \\ \mathcal{N}(q) &= \begin{cases} \{0\} & \text{si } q > 0, \\ \mathbb{R}^- & \text{si } q = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

△

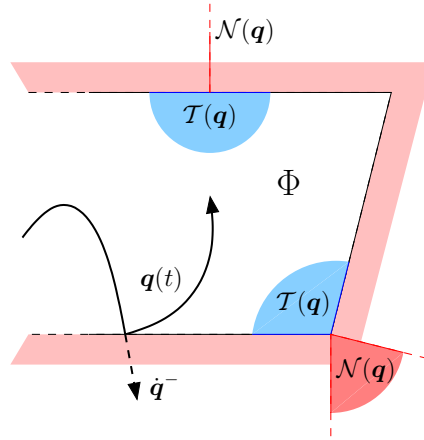


FIG. 1.6 – Exemples de cônes tangents $\mathcal{T}(\mathbf{q})$ et de cônes normaux $\mathcal{N}(\mathbf{q})$ de l'ensemble Φ

L'exemple du bras manipulateur.

Dans le cas d'un bras manipulateur, l'ensemble Φ peut être défini par m inégalités

$$\Phi = \{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n \mid \varphi_k(\mathbf{q}) \geq 0, \quad k \in \{1, 2, \dots, m\}\},$$

où chaque $\varphi_k(\mathbf{q}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction \mathcal{C}^1 dont le gradient est différent de zéro au moins dans un voisinage de la surface correspondante $\varphi_k(\mathbf{q}) = 0$.

La matrice jacobienne des m contraintes unilatérales peut être exprimée par

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}) = [\nabla\varphi_1(\mathbf{q}), \dots, \nabla\varphi_m(\mathbf{q})], \quad (1.2)$$

et en introduisant les fonctions indicatrices des contraintes actives $\delta_k(\mathbf{q})$:

$$\begin{cases} \delta_k(\mathbf{q}) = 1 & \text{si } \varphi_k(\mathbf{q}) = 0, \\ \delta_k(\mathbf{q}) = 0 & \text{si } \varphi_k(\mathbf{q}) > 0, \end{cases}$$

nous pouvons définir la matrice jacobienne des contraintes actives $\mathbf{C}_\delta(\mathbf{q})$ de la manière suivante

$$\mathbf{C}_\delta(\mathbf{q}) = [\delta_1(\mathbf{q})\mathbf{C}_1(\mathbf{q}), \dots, \delta_m(\mathbf{q})\mathbf{C}_m(\mathbf{q})]. \quad (1.3)$$

Ainsi, le cône tangent et le cône normal à l'ensemble ϕ au point \mathbf{q} peuvent être définis par

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\mathbf{q}) &= \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{C}_\delta^T(\mathbf{q})\mathbf{v} \geq 0\} \\ \mathcal{N}(\mathbf{q}) &= \{-\mathbf{C}_\delta(\mathbf{q})\boldsymbol{\lambda} : \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^{+m}\}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

△

1.3 La dynamique non-régulière

1.3.1 La dynamique non-régulière, une équation différentielle à mesures

La dynamique des systèmes dynamiques lagrangiens soumis à des forces Lebesgues-intégrables est généralement exprimée sous la forme d'une Équation Différentielle Ordinaire

$$M(\mathbf{q}) \frac{d\dot{\mathbf{q}}}{dt} + N(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{f},$$

où $M(\mathbf{q})$ correspond à la matrice d'inertie du système, c'est une matrice symétrique définie positive que nous supposons être une fonction \mathcal{C}^1 de \mathbf{q} , $N(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}}$ rassemble les effets non-linéaires (tels que les effets centrifuges, gyroscopiques et Coriolis), \mathbf{f} représente les forces extérieures Lebesgue-intégrables agissant sur la dynamique (par exemple les forces de gravité), dt correspondant à la mesure de Lebesgue. Les solutions de cette équation différentielle ordinaire correspondent à des mouvements qualifié de réguliers par [56] avec des vitesses localement absolument continues.

Cependant, nous avons observé dans la section 1.2 que lorsque le système est contraint de rester à l'intérieur d'un ensemble fermé, la vitesse peut avoir à subir des discontinuités. La dynamique ne peut donc plus être décrite simplement par le biais d'une équation différentielle ordinaire, elle s'écrit maintenant sous la forme d'une Équation Différentielle à Mesures (Measure Differential Equation) [58, 59]

$$M(\mathbf{q}) d\dot{\mathbf{q}} + N(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} dt = \mathbf{f} dt + d\mathbf{r}, \quad (1.5)$$

où $d\mathbf{r}$ correspond aux forces générées lors des contacts entre des solides rigides, c'est une mesure abstraite qui peut ne pas être une mesure Lebesgue-intégrable. Lorsque cette mesure abstraite est Lebesgue-intégrable, c'est-à-dire lorsque les forces normales de contacts sont Lebesgue-intégrables, nous retombons donc sur le cadre classique de la dynamique régulière. Mais $d\mathbf{r}$ peut ne pas être Lebesgue-intégrable, auquel cas la mesure accélération $d\dot{\mathbf{q}}$ ne sera également pas Lebesgue-intégrable, et la vitesse $\dot{\mathbf{q}}$ ne sera plus absolument continue.

1.3.2 La vitesse, une fonction à variation localement bornée

Il existe une solution à cette équation de la dynamique écrite sous une forme d'équation différentielle à mesures si l'on considère que la vitesse $\dot{\mathbf{q}}$ n'est plus absolument continue mais seulement à variation localement bornée, $\dot{\mathbf{q}} \in \text{lbv}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ [58] [59]. Les fonctions à variation localement bornée définies par

Définition 1 Une fonction f est dite à variation localement bornée sur \mathbb{R} si sa

variation sur chaque intervalle compact $[t_0, t_n]$ est finie :

$$\text{var}(f; [t_0, t_n]) = \sup_{t_0 \leq \dots \leq t_n} \sum_{i=1}^n \|f(t_i) - f(t_{i-1})\| < +\infty,$$

possèdent une limite à droite et à gauche à chaque instant, et elles vérifient sur tout sous-intervalle compact $[\sigma, \tau] \subset \mathbb{R}$

$$\int_{[\sigma, \tau]} d\dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}}^+(\tau) - \dot{\mathbf{q}}^-(\sigma).$$

Si l'on considère l'intégrale de l'équation différentielle à mesures (1.5) sur un singleton $\{\tau\}$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_{\{\tau\}} \mathbf{M}(\mathbf{q}) d\dot{\mathbf{q}} &= \mathbf{M}(\mathbf{q}) \int_{\{\tau\}} d\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{M}(\mathbf{q}) (\dot{\mathbf{q}}^+(\tau) - \dot{\mathbf{q}}^-(\tau)), \\ \int_{\{\tau\}} (\mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{f}) dt &= (\mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{f}) \int_{\{\tau\}} dt = 0, \end{aligned}$$

ce qui nous amène à la relation suivante entre les éventuelles discontinuités de la vitesse et les éventuels atomes des forces de contact

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) (\dot{\mathbf{q}}^+(\tau) - \dot{\mathbf{q}}^-(\tau)) = \int_{\{\tau\}} d\mathbf{r}, \quad (1.6)$$

$\mathbf{M}(\mathbf{q})$ étant inversible, on obtient

$$\dot{\mathbf{q}}^+(\tau) = \dot{\mathbf{q}}^-(\tau) + \mathbf{M}(\mathbf{q})^{-1} \int_{\{\tau\}} d\mathbf{r}. \quad (1.7)$$

L'exemple de la balle qui rebondit.

Dans le cas de la balle qui rebondit, l'équation de la dynamique se réduit à

$$m d\dot{q} = -mg dt + dr,$$

où $d\dot{q}$ est la mesure accélération verticale de la balle et dr est la mesure correspondant aux forces de contact.

△

L'exemple du bras manipulateur.

Dans le cas du bras manipulateur, les forces extérieures agissant sur la dynamique (1.5)

peuvent se décomposer en deux parties, les forces commandables \mathbf{f}_c et les autres forces non-commandables \mathbf{f}_u :

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_c + \mathbf{f}_u.$$

Avec la loi de commande (1.1), la dynamique en boucle fermée du bras manipulateur s'écrit donc

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) d\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} dt = (-\mathbf{W}(\mathbf{q} - \mathbf{q}_d) - \mathbf{T} \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{r}_d) dt + d\mathbf{r}. \quad (1.8)$$

△

1.4 Au sujet des contacts

1.4.1 Des contacts unilatéraux

Suivant [58], nous considérons que les interactions avec les contraintes sont parfaitement unilatérales. En exprimant la mesure $d\mathbf{r}$ comme le produit d'une mesure réelle non-négative $d\mu$ et d'une fonction de \mathbb{R}^n , $\mathbf{r}'_\mu \in L^1_{loc}(\mathbb{R}, d\mu; \mathbb{R}^n)$,

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}'_\mu d\mu, \quad (1.9)$$

l'unilatéralité des contacts peut s'écrire sous la forme d'une inclusion,

$$\forall t \in \mathbb{R}, -\mathbf{r}'_\mu(t) \in \mathcal{N}(\mathbf{q}(t)) \quad (1.10)$$

ce qui implique en particulier une relation de complémentarité entre les forces de contact $\mathbf{r}'_\mu(t)$ et les coordonnées du système $\mathbf{q}(t)$ telle que nous l'avons indiquée à la section 1.2 : des forces de contacts non-nulles ne peuvent apparaître que lorsqu'un contact est établi, c'est à dire lorsque $\mathbf{q}(t)$ se trouve sur le bord du domaine Φ .

1.4.2 Une loi d'impact

Nous considérons de plus que les comportements impulsionnels liés à ces interactions obéissent à une loi de restitution faisant intervenir un coefficient de restitution $e \in [0, 2]$. Les "chocs" parfaitement élastiques correspondent à $e = 1$, et ceux parfaitement inélastique correspondent à $e = 0$ (notons que $e > 1$ correspondrait à des rebonds artificiellement excités). En introduisant une vitesse moyenne $\dot{\mathbf{q}}_e(t)$ pondérée par le coefficient de restitution,

$$\dot{\mathbf{q}}_e = \dot{\mathbf{q}}^+ - \frac{e}{2}(\dot{\mathbf{q}}^+ - \dot{\mathbf{q}}^-), \quad (1.11)$$

la relation suivante permet à chaque instant de prendre en compte un éventuel comportement impulsionnel du système

$$\forall t \in \mathbb{R}, \dot{\mathbf{q}}_e(t)^T \mathbf{r}'_\mu(t) = 0. \quad (1.12)$$

Cette relation correspond à une relation de complémentarité entre les forces normales de contact $\mathbf{r}'_\mu(t)$ et la vitesse $\dot{\mathbf{q}}_e(t)$.

Les outils qui ont été présentés constituent les connaissances minimales indispensables pour l'étude de la stabilité des systèmes dynamiques non-réguliers, pour une présentation plus approfondie de ces concepts et de ces équations qui peuvent avoir des implications subtiles, nous conseillons vivement la lecture de [58].

L'exemple de la balle qui rebondit.

Dans le cas de la balle qui rebondit, la relation de complémentarité impliquée par l'inclusion (1.10) indique que lorsque la balle n'est pas en contact avec le sol, $q > 0$, alors $\mathcal{N}(q) = \{0\}$ ce qui signifie qu'il n'y a pas de forces de contact, $r'_\mu = 0$, et lorsque la balle est sur le sol, $q = 0$, on peut avoir une force de contact positive, $r'_\mu \geq 0$.

La relation de complémentarité issue de l'équation (1.12) implique que lorsque $r'_\mu \neq 0$, c'est-à-dire lorsque des forces de contact sont générées, alors $\dot{q}_e = 0$. Cette situation se rencontre soit lorsqu'un impact se produit, quand $\dot{q}^- \neq 0$, soit lorsque la balle est au repos sur le sol, quand $\dot{q}^- = 0$. La relation (1.11) nous donne donc

$$\dot{q}^+ = \frac{e}{(e-2)} \dot{q}^-. \quad (1.13)$$

Ainsi, $\dot{q}^+ = 0$ dans le cas d'impacts parfaitement inélastiques, quand $e = 0$, ou lorsque la balle est au repos sur le sol, et $\dot{q}^+ = -\dot{q}^-$ dans le cas d'impacts parfaitement élastiques, quand $e = 1$.

△

L'exemple du bras manipulateur.

Dans le cas du bras manipulateur, le cône normal est exprimé à partir de la matrice jacobienne des contraintes actives $\mathbf{C}_\delta(\mathbf{q})$ grâce à la relation (1.4). L'inclusion (1.10) qui lie les forces de contacts au cône normal peut donc être exprimé en utilisant la relation (1.3) par

$$\mathbf{r}'_\mu = \mathbf{C}_\delta(\mathbf{q})\boldsymbol{\lambda} = \sum_{k=1}^m \delta_k(\mathbf{q})\mathbf{C}_k(\mathbf{q})\lambda_k. \quad (1.14)$$

On peut observer tout d'abord que par définition, les multiplicateurs de Lagrange λ_k et les paramètres $\delta_k(\mathbf{q})$ sont toujours positifs ou nuls. Donc la multiplication de ces paramètres par le gradient des contraintes impliquent que les forces de contact sont

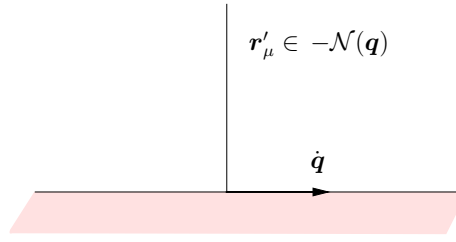


FIG. 1.7 – Exemple d'un système glissant sur une contrainte.

toujours dirigées vers l'intérieur du domaine des positions admissibles Φ . Notons également que par la définition des fonctions indicatrices $\delta_k(\mathbf{q})$, une force de contact ne peut être générée par une contrainte φ_k , que lorsque cette contrainte est active, $\varphi_k = 0$, le paramètre λ_k correspond à l'intensité de cette force.

Remarquons que contrairement au cas unidimensionnel de la balle, pour le bras manipulateur, \mathbf{r}'_μ peut être différent de zéro sans que la vitesse $\dot{\mathbf{q}}_e$ soit nulle. En effet la relation (1.12) implique une condition d'orthogonalité entre les forces de contact \mathbf{r}'_μ et la vitesse $\dot{\mathbf{q}}_e = 0$. Cette condition d'orthogonalité se trouve satisfaite par exemple lorsque le système dynamique glisse le long d'une contrainte plane comme l'illustre la figure 1.7.

△

1.4.3 La notion d'impact multiple

Arrêtons-nous un instant sur la notion d'impact multiple car elle jouera un rôle important dans la section 4.5. Les impacts multiples sont des impacts qui impliquent plusieurs contraintes simultanément. Nous voyons d'après les figures 1.2-1.5 que les impacts multiples correspondent aux impacts dans les coins de l'ensemble Φ .

La loi d'impact que nous avons considérée dans la section 1.4.2 correspond à une loi de restitution de Newton. Il faut savoir que la loi de Newton a tout d'abord été proposée dans le cas d'un seul contact, et sa généralisation aux cas d'impacts multiples ne reste valable que dans des cas bien précis.

En effet, le processus physique d'un impact représente un événement extrêmement complexe, faisant intervenir des dynamiques très rapides qui se propagent sur l'ensemble du système. Une loi d'impact ne pourra donc jamais contenir l'information complète de ce processus physique [33, 65]. Un modèle plus précis nécessiterait de prendre en compte l'élasticité des solides impliqués dans une collision afin de prendre en compte les ondes de propagation initiées par cette collision, comme l'illustre la figure 1.8 issue de [65]. Lorsque ce processus est considéré comme un

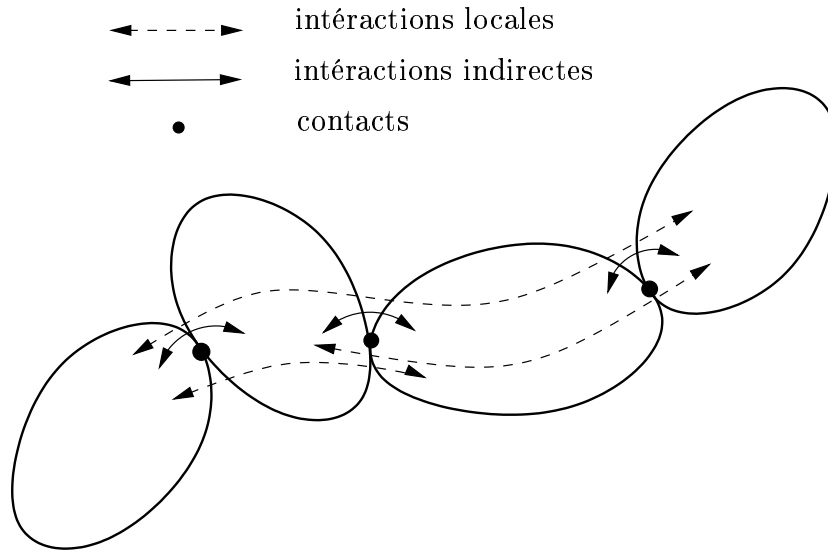


FIG. 1.8 – Des impacts avec propagation d’ondes [65]

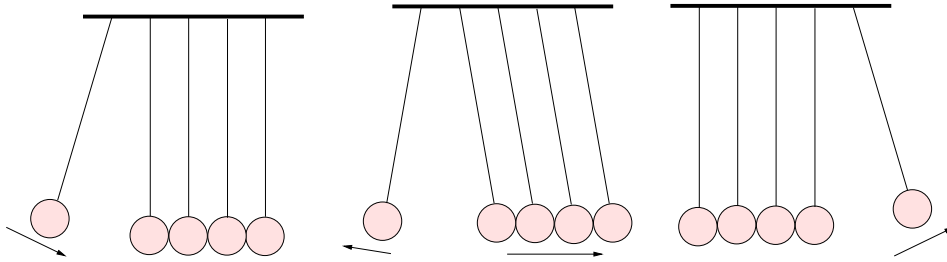


FIG. 1.9 – Exemple du berceau de Newton.

événement instantané, c’est-à-dire se produisant à un instant unique, ce qui est le cas dans l’approche des solides parfaitement rigides, on ne doit alors pas s’attendre à ce que les équations décrivant la loi de contact (1.10)-(1.12) soient suffisamment générales pour contenir toute l’information nécessaire pour obtenir une approximation correcte de la vitesse post-impact.

Dans de telles situations, il faut abandonner l’espoir de pouvoir prédire la trajectoire du système : c’est une conséquence de la “sur-idéalisation” faite dans l’hypothèse d’indéformabilité des solides. On illustre souvent l’inconsistance de la loi de Newton dans le cas d’impact multiple au travers de l’exemple du berceau de Newton rappelé à la figure 1.9. La figure de gauche présente l’état initial du système, la bille de gauche va donc venir frapper les billes immobiles. La figure du centre présente la configuration du système après ce premier impact en considérant la loi de Newton, et la figure de droite révèle la configuration réelle après cet impact.

1.4.4 D'autres modèles de contact

La principale difficulté dans l'analyse des systèmes dynamiques lagrangiens non-réguliers réside dans le fait que les vitesses peuvent subir des discontinuités. Ces comportements impulsionnels sur les vitesses découlent de l'hypothèse des contacts entre solides parfaitement rigides qui considère l'indéformabilité des solides.

Nous avons vu que l'hypothèse d'indéformabilité des solides en contact correspondait à un modèle de contact extrêmement simplifié. Puisque le processus physique d'un impact engendre une déformation des solides, il peut donc sembler plus adéquat de considérer un modèle compliant. Ce type de modèle prend en compte la déformation des solides lors des contacts à travers des systèmes de ressorts et d'amortisseurs. L'étude des systèmes dynamiques soumis à des contacts non-permanents et compliant reste dans le cadre des mouvements réguliers, ce qui signifie comme nous l'avons évoqué au début de la section 1.3 que la dynamique est régie par une équation différentielle ordinaire. Les théorèmes classiques pour l'étude de la stabilité des systèmes dynamiques lagrangiens peuvent s'appliquer directement pour ce modèle de contact. On trouve par exemple dans [46, 90] des analyses de stabilité de loi de commande pour des bras manipulateurs dans le cas de contacts compliant.

Le modèle de contact compliant possède cependant certains inconvénients, c'est pourquoi on peut trouver un grand nombre de travaux considérant des contacts de raideur infini entre le robot et son environnement [47, 52]. En effet comme nous l'avons précisé dans la section précédente les échelles de temps des dynamiques intervenant dans le processus physique d'un impact sont extrêmement brèves, ce qui entraîne une sensibilité numérique accrue [86] et complique grandement l'analyse de ces systèmes.

1.5 Les forces de frottement

1.5.1 Le frottement de Coulomb

Lorsque les forces de frottement sont prises en compte, les forces de contact $\mathbf{r}_{contact}$ ne sont plus dirigées uniquement selon la normale à la surface. Il est alors intéressant de décomposer ces forces en leurs composantes normale \mathbf{r} et tangentielle \mathbf{s} comme illustré à la figure 1.10.

Les composantes tangentielles sont reliées aux composantes normales par un modèle de frottement. Présentons brièvement le modèle de frottement de Coulomb (voir par exemple [89] pour une description plus approfondie) : les forces de frottement non-adhésives sont décrites en un point de contact donné en représentant le *cône de Coulomb*, noté \mathcal{C} , par une région conique convexe et fermée dans laquelle se trouvent obligatoirement les forces de contact générées par les solides en contact (figure 1.11).

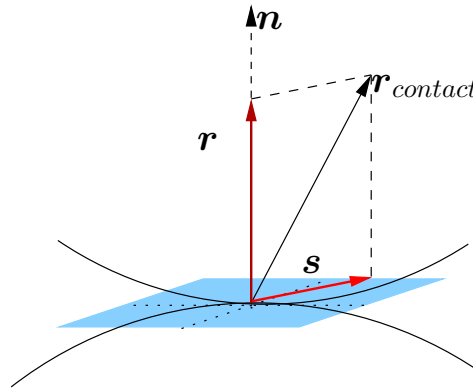


FIG. 1.10 – Décomposition des forces de contact

En général, le cône de Coulomb s'écrit en utilisant la décomposition des forces de contact en ses composantes normales et tangentielles. Ainsi le fait que les forces de contact doivent toujours appartenir au cône de Coulomb se traduit par la relation suivante entre la force tangentielle \mathbf{s} et la force normale \mathbf{r}

$$\|\mathbf{s}\| \leq \mu_0 \mathbf{r},$$

où μ_0 est le coefficient de frottement, une constante dépendant principalement du type des matériaux en contact. Lorsque les forces de contact atteignent le bord du cône de Coulomb, cela signifie qu'elles ne sont plus suffisantes pour empêcher le glissement des surfaces en contact. Les effets des frottements sur des solides glissant l'un par rapport à l'autre sont alors décrits par une loi de frottement de Coulomb reliant la vitesse relative tangentielle \mathbf{v} entre les deux solides en contact et les forces de réaction. Dans notre cas nous considérons que les contraintes unilatérales sont invariantes dans le temps, la loi de Coulomb nous donne donc une relation entre les forces normale et tangentielle et la vitesse $\dot{\mathbf{q}}$

$$\mathbf{s} = -\mu_0 \mathbf{r} \frac{\dot{\mathbf{q}}}{\|\dot{\mathbf{q}}\|}.$$

On peut remarquer que la force de frottement s'effectue dans le sens opposé à la direction de glissement, ce qui en fait *une force dissipative*, c'est à dire qu'elle vérifie à tout moment

$$\mathbf{s}^T \dot{\mathbf{q}} \leq 0. \quad (1.15)$$

Enfin, précisons que la prise en compte du frottement de Coulomb dans l'étude des systèmes mécaniques soumis à des contraintes unilatérales soulève un certain

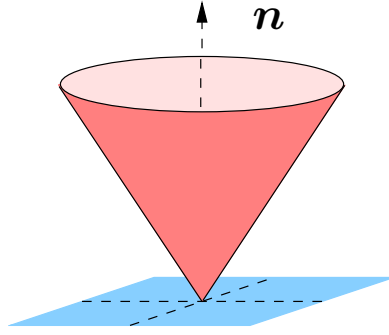


FIG. 1.11 – Illustration du cône de Coulomb

nombre d'indéterminations et d'inconsistances liées à la difficulté d'obtenir des résultats sur l'existence et l'unicité des solutions, comme l'expliquent clairement les travaux de [36, 32, 89] sur l'exemple classique du paradoxe de Painlevé.

Dans la suite de notre étude, nous utiliserons uniquement la propriété de dissipativité des forces de frottement.

1.5.2 Les impacts avec frottement

La formulation de la dynamique (1.5) permet de prendre en compte des forces de frottement. En effet, nous considérons que ces forces interviennent dans la dynamique (1.5) par le biais des forces extérieures \mathbf{f} . Puisque nous avons supposé que ces forces extérieures étaient Lebesgue-intégrables, les forces de frottements n'interviennent donc pas lors des impacts. Il est cependant possible de les inclure dans une loi de restitution, c'est ce qui est proposé par exemple dans [65] où les frottements de Coulomb sont combinés à une loi de restitution de Poisson, une autre possibilité est proposée dans [60], où la loi de restitution de Newton est associée à des éléments impulsions issus du modèle de frottements de Coulomb, aboutissant à une loi de restitution à trois paramètres. Cette loi, qui utilise la décomposition normale et tangentielle de la vitesse relative à un point de contact α , propose des coefficients de restitutions sur chacune des composantes de la vitesse :

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{q}}_{eN} &= \frac{\rho}{1+\rho}\dot{\mathbf{q}}_N^- + \frac{1}{1+\rho}\dot{\mathbf{q}}_N^+, \\ \dot{\mathbf{q}}_{eT} &= \frac{\tau}{1+\tau}\dot{\mathbf{q}}_T^- + \frac{1}{1+\tau}\dot{\mathbf{q}}_T^+, \end{aligned}$$

les paramètres ρ et τ sont appelés *coefficient de restitution normale et coefficient de restitution tangentielle*.

Cette loi de restitution permet de prendre en compte de manière conforme à la réalité certains comportements des systèmes lagrangiens non-réguliers, alors que la

loi de Newton se révèle inapte à modéliser de tels comportements. Prenons l'exemple de la balle de tennis, la loi de Newton nous garantira une trajectoire identique quel que soit le mouvement de rotation qu'effectue la balle autour d'elle même, alors que tout joueur de tennis sait que la trajectoire d'une balle "liftée" ou la trajectoire d'une balle "coupée" sera radicalement différente. Une loi de restitution permettra de prendre en compte de tels comportements. Citons également l'exemple familier du bloc rectangulaire qui atteint son équilibre après des alternances de pivotement autour des coins inférieurs. Il a été montré que la loi de restitution à trois paramètres (avec des coefficients de restitution nuls) fournit des résultats conformes aux observations [69], alors que lorsqu'un coin vient heurter la surface, la simple loi de Newton ne permet pas à l'autre coin de décoller, ce qui est pourtant ce que l'on observe physiquement et ce qui est obtenu en rajoutant des *frottements impulsionnels*.

Il faut cependant préciser que cette loi d'impact n'est adaptée que pour des corps dont la forme générale se rapproche de la sphère. Pour les corps allongés, tels que les barres, une simple loi de restitution se révèle inadaptée, car l'issue d'une collision dépend entre autre de la position des points d'impact [75].

Indépendamment des comportements impulsionnels, nous avons vu dans la section précédente que l'introduction du frottement de Coulomb ne garantissait pas systématiquement l'existence et l'unicité des solutions. Il est donc évident que l'introduction du frottement de Coulomb dans la loi de restitution ne simplifiera aucunement l'obtention de résultats d'existence et d'unicité. Des résultats préliminaires d'existence et d'unicité ont tout de même été établis dans le cas des systèmes dynamiques lagrangiens soumis à une contrainte unilatérale avec frottement de Coulomb [8, 10, 54].

Enfin, soulignons le fait que l'introduction des forces de frottement complique l'analyse de stabilité notamment du point de vue de la détermination des points d'équilibre du système [11, 79]. Dans ce travail nous avons donc décidé de nous intéresser au cas des impacts sans frottement, mais une extension au cas des impacts avec frottement ne nous semble pas impossible.

Chapitre 2

Lien avec les systèmes hybrides

Les systèmes dynamiques lagrangiens soumis à des contacts non-permanents font partie d'une large classe de systèmes dynamiques appelée systèmes hybrides. Dans ce chapitre, nous allons brièvement présenter ces systèmes hybrides, puis nous verrons pourquoi le cadre de la dynamique non-régulière nous paraît plus adapté pour l'étude des systèmes dynamiques lagrangiens soumis à des contacts non-permanents.

2.1 Introduction

Les systèmes dynamiques lagrangiens non-réguliers peuvent être considérés comme faisant partie d'une grande classe de systèmes dynamiques répondant au nom générique de systèmes hybrides : ce sont des systèmes décrits par une dynamique continue interagissant avec des événements discrets. Nous verrons dans la section 2.2 que cette classe de systèmes permet de décrire un grand nombre d'applications, dont les systèmes mécaniques soumis à des contacts non-permanents.

Nous présenterons ensuite dans la section 2.3, un comportement propre aux

systèmes hybrides, le comportement de type *Zénon* qui correspond au comportement d'un système tendant vers un point d'accumulation, ce système subit alors un nombre infini d'événements en un temps fini. Nous verrons que le simple exemple de la balle qui rebondit permet d'illustrer ce comportement. En effet dans le cas d'impacts dissipatifs, nous verrons que la balle se stabilisera sur le sol après un nombre infini d'impacts. Cet exemple relativement simple montre clairement que ce comportement devra être pris en considération dans l'étude des systèmes dynamiques lagrangiens non-réguliers. Nous expliquerons alors dans la section 2.3.2, pourquoi le cadre de la dynamique non-régulière nous paraît plus adapté en particulier pour les systèmes dynamiques présentant des points d'accumulation.

2.2 Une autre formulation possible

2.2.1 Les systèmes hybrides

Beaucoup de systèmes ne peuvent pas se modéliser simplement à l'aide d'une dynamique continue et différentiable, mais nécessite l'interaction d'événements discrets et d'une dynamique continue comme l'illustrent brièvement les deux exemples suivant issus des domaines de l'automobile et de la domotique.

Exemple.

Modèle d'une boîte de transmission manuelle

Nous présentons tout d'abord un modèle simplifié d'une boîte de transmission manuelle d'une voiture [29, 17]. Soit x_1 la position de la voiture, x_2 la vitesse de la voiture dûe au couple moteur et $u \in [0, 1]$ la position de l'accélérateur. La dynamique hybride simplifiée est donnée par

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{1 + \beta(p)} [-\alpha(x_2) + u] \end{aligned}$$

où $\alpha(x_2) > 0$ quand $x_2 > 0$, $p \in \{1, 2, 3, 4\}$ correspond à la vitesse sélectionnée sur la boîte de vitesse. Le système se compose donc de quatre dynamiques continues différentes qui dépendent de la position choisie sur la boîte de vitesse. La transition d'une dynamique à une autre est décidée par le conducteur qui peut changer manuellement à tout instant la position sur la boîte de vitesse.

△

Exemple.

Modèle d'un régulateur de température

Présentons maintenant l'exemple d'un régulateur de température [13, 3] : on désire réguler la température x_t d'une pièce à l'aide d'un thermostat qui met en marche

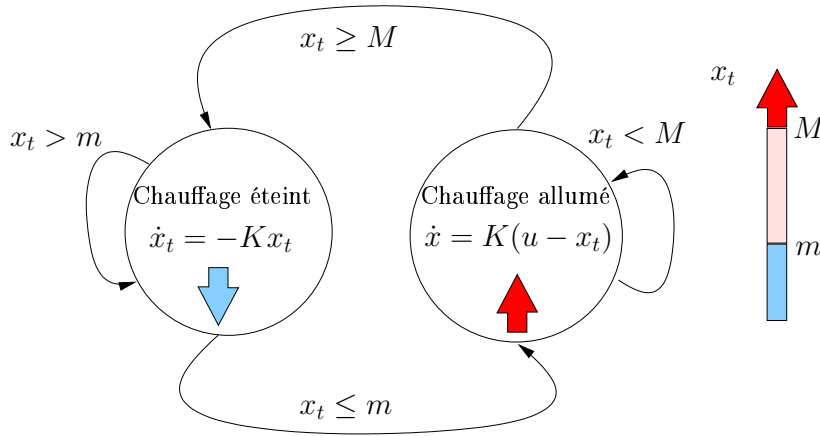


FIG. 2.1 – Fonctionnement du régulateur en température.

ou éteint un radiateur en fonction de la température mesurée dans la pièce. Lorsque le radiateur est éteint, la dynamique de la température correspond à un système du premier ordre,

$$\dot{x}_t = -Kx_t,$$

avec $K > 0$, donc la température diminue. Lorsque le radiateur est en marche, sa dynamique est donnée par

$$\dot{x}_t = K(u - x_t),$$

où u est proportionnel à la puissance du chauffage $m_u \leq u \leq M_u$. La figure 2.1 décrit la dynamique globale du système, ses états possibles et ses transitions.

△

Ces exemples relativement simples montrent clairement que les systèmes associant une dynamique continue et des événements discrets peuvent être utilisés pour décrire un grand nombre d'applications. Mais les outils classiques développés pour l'étude des systèmes dynamiques continus ne sont plus applicables dans le cas des systèmes hybrides, comme nous le verrons dans les chapitres 3 et 4, d'où la nécessité d'adapter ou de développer de nouveaux outils d'analyse. Une partie de la communauté scientifique s'est donc activement penchée sur l'étude de ces systèmes qu'ils ont baptisés *systèmes hybrides*. Le développement récent d'outils spécifiques pour l'analyse de ces systèmes fait déjà l'objet de nombreux travaux [5, 22, 29, 38, 49, 55].

2.2.2 Des sous-classes de systèmes hybrides

Certains travaux [30, 42] ont tenté de proposer une formulation générale permettant de décrire de manière unique l'ensemble des systèmes décrits par une dynamique continue associée à des événements discrets. Nous présentons une formulation issue de [30] dans l'annexe A. Cette formulation permet de modéliser un grand nombre

d'applications issues d'une multitude de domaines, tels que l'automobile [9], l'électronique de puissance [22, 39], les biotechnologies [12, 27], où encore les problèmes de trafics aériens [77], etc. Cependant la complexité de chacune de ces applications et les disparités d'un domaine à l'autre, n'ont pour l'instant pas permis d'aboutir à une théorie générale permettant indistinctement l'étude des systèmes hybrides.

Des sous-classes de systèmes hybrides se sont alors développées pour résoudre plus spécifiquement certains types de systèmes. Citons quelques une de ces classes :

- Systèmes permutants (Switched systems) [16, 24]
- Systèmes dynamiques et logiques (Mixed Logical Dynamical systems) [55]
- Systèmes affines par morceaux (PieceWise Affine) [13, 55]
- Systèmes linéaires de complémentarité (Linear Complementarity systems) [20, 22, 25, 80]
- ...

Des études spécifiques sur l'existence et l'unicité de solutions ont été menées sur chacune de ces classes et des outils d'analyse ont été développés. Notons également que des équivalences entre toutes ces classes commencent à être établies sous réserve parfois de conditions supplémentaires. Les travaux de [22, 38, 1] établissent donc des liens entre ces classes.

2.2.3 Les systèmes dynamiques lagrangiens non-réguliers

Remarquons tout d'abord que dans certains cas, les systèmes dynamiques lagrangiens non-réguliers peuvent être considérés comme des systèmes dont les solutions sont continues par morceaux avec la possibilité d'avoir une infinité dénombrable de morceaux. En effet, nous avons vu au chapitre précédent que les systèmes dynamiques lagrangiens non-réguliers ne pouvaient plus s'écrire simplement à l'aide d'une dynamique possédant des solutions continues dans le temps. La dynamique est maintenant donnée par une équation différentielle à mesures, dont les solutions sont des fonctions à variation bornée. On peut remarquer que ces fonctions à variation bornée peuvent également être décomposées en une somme de fonctions continues et un ensemble dénombrable de fonctions *saut* [57]. Dans certains cas, par exemple lorsque la définition de la dynamique (1.5) est analytique par morceaux, la solution devient continue par morceaux avec la possibilité d'avoir une infinité dénombrable de discontinuités [6]. Dans ce cas, il est possible de considérer séparément les parties continues et chaque événement discret correspondant à une discontinuité [5, 78].

On pourrait alors être tenté d'exprimer les systèmes dynamiques lagrangiens soumis à des contacts non-permanents dans le formalisme général des systèmes hybrides tel qu'il est présenté dans l'annexe A et comme cela a été proposé dans [49]. Cependant comme il est expliqué dans [19], le cadre des systèmes hybrides offre une formulation extrêmement simpliste de la dynamique et du modèle de contact qui

perdent ainsi toute leur signification physique. On peut trouver dans [19] d'autres inconsistances liées à ce choix de formulation.

A la liste des sous-classes de systèmes hybrides, il nous semble donc pertinent d'ajouter la dynamique non-régulière (voir [18] pour une présentation détaillée de cette classe de systèmes dynamiques). On peut cependant déjà préciser que les systèmes mécaniques soumis à des contacts non-permanents sont parfois formalisés sous la forme de systèmes de complémentarité. L'annexe A rappelle brièvement la formulation employée pour cette classe de système [23, 22].

En effet nous avons pu constater dans la section 1.4, que les lois de contacts (1.10)-(1.12) impliquaient des relations de complémentarité sur la position et sur la vitesse du système. Un passage entre les lois de contact (1.10)-(1.12) et la formulation sous la forme d'un problème de complémentarité est proposé dans [60]. Les systèmes mécaniques soumis à des contacts non-permanents ont été étudiés sous la forme d'un problème de complémentarité dans les travaux suivants [23, 15, 14]. Dans ces études, les phases de stabilisation sur les contraintes sont distinctes des phases de contacts et des phases de vol. Nous préférons donc nous positionner dans le cadre de la dynamique non-régulière qui propose une dynamique indépendante de l'état des contacts. Comme nous l'avons vu au chapitre précédent ceci est dû d'une part à la formulation de la dynamique sous la forme d'une équation différentielle à mesure, d'autre part à la formulation la loi de contact exprimée sous la forme d'une inclusion reliant les forces de contact au cône normal de l'ensemble des positions admissibles. Le cadre de la dynamique non-régulière se trouve donc particulièrement adapté pour l'étude des systèmes à impacts.

2.3 Un comportement spécifique

2.3.1 Les accumulations d'impacts

Les systèmes dynamiques hybrides peuvent exhiber un comportement particulier que l'on ne retrouve pas chez les systèmes dynamiques continus : le comportement de type *Zénon* qui correspond au fait que le système subit une infinité d'événements discrets (ou d'impacts dans le cas des systèmes mécaniques) en un temps fini. Cette définition que l'on retrouve dans une multitude de travaux reste cependant assez floue. Nous allons donc illustrer ce comportement dans le cas d'un exemple mécanique, ce qui permettra de saisir plus clairement la notion de point d'accumulation et de comportement de type *Zénon*.

L'exemple de la balle qui rebondit.

Considérons la chute de la balle : la balle est lâchée de la position $q(0) = 1$ à $t = 0$, avec une vitesse initiale nulle $\dot{q}(0) = 0$. La trajectoire de la balle, obtenue en

intégrant la dynamique de la balle, correspond tant que $q > 0$ à

$$\begin{aligned}\dot{q}(t) &= -gt + \dot{q}(0), \\ q(t) &= -\frac{g}{2}t^2 + \dot{q}(0)t + q(0).\end{aligned}\tag{2.1}$$

Lorsque la balle atteint le sol, à $q(t) = 0$, un impact se produit. La vitesse après cet impact est déterminée grâce à la loi d'impact (1.12), elle dépend donc de la vitesse avant l'impact et du coefficient de restitution. On considère dans cet exemple un coefficient de restitution $e = 0.5$, les impacts sont donc strictement dissipatifs. Le premier impact se produit à $t_{i1} = 0.45$, la vitesse post-impact sera alors $\dot{q}^+(t_{i1}) = egt = 2.02$, avec ces conditions initiales, la trajectoire de la balle après cet impact sera donnée

$$\begin{aligned}\dot{q}(t) &= -g(t - t_{i1}) + \dot{q}(t_{i1}), \\ q(t) &= -\frac{g}{2}(t - t_{i1})^2 + \dot{q}(t_{i1})(t - t_{i1}) + q(t_{i1}),\end{aligned}$$

jusqu'à ce qu'un nouvel impact se produise. La figure 2.2 présente les évolutions de la position et de la vitesse en fonction du temps et la figure 2.3 montre le plan de phase de la balle, c'est à dire la vitesse en fonction de la position. On peut deviner d'après ces deux figures que la balle va s'immobiliser sur le sol en temps fini. Dans cet exemple extrêmement simple, il est possible de montrer mathématiquement que la vitesse de la balle tend vers zéro en temps fini à travers une infinité d'impacts. Remarquons tout d'abord que la vitesse après l'impact $k - 1$ correspond, au signe près, à la vitesse avant l'impact k . La vitesse après l'impact k est donc reliée à la vitesse après l'impact $k - 1$ par la relation suivante

$$\dot{q}_k^+ = e\dot{q}_{k-1}^+,$$

on aura donc si l'on exprime \dot{q}_k^+ en fonction de la vitesse initiales

$$\dot{q}_k^+ = e^k \dot{q}_0^+.$$

Après une infinité d'impacts, on aura donc dans le cas où $e < 1$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \dot{q}_k^+ = \lim_{k \rightarrow \infty} e^k \dot{q}_0^+ = 0.$$

On peut également montrer simplement que la vitesse tend vers zéro en temps fini en calculant l'intervalle de temps entre l'impact k et $k + 1$

$$\Delta t_k = \frac{2\dot{q}_k^+}{g},$$

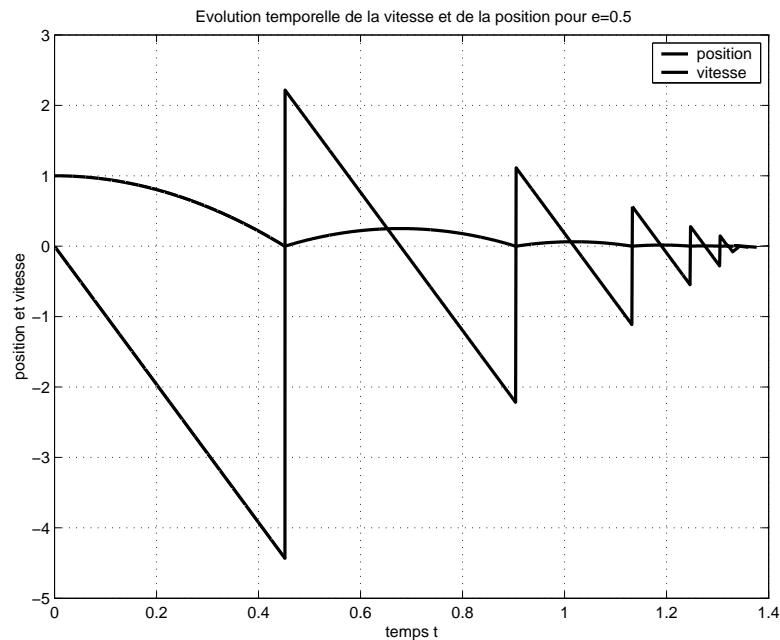


FIG. 2.2 – Évolutions de la position et de la vitesse de la balle en fonction du temps.

on a donc

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Delta t_k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2\dot{q}_k^+}{g} \quad (2.2)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2e^k \dot{q}_0^+}{g} \quad (2.3)$$

$$= \frac{2\dot{q}_0^+}{g(1-e)}. \quad (2.4)$$

Cette infinité d'impacts (se produisant en un temps fini comme nous venons de le montrer), correspond à ce que nous appelons **un point d'accumulation** du système. Il est évident que ce comportement n'est pas exclusif au cas de la balle qui rebondit, tous les systèmes mécaniques soumis à des contacts non-permanents sont concernés. Généralement, il est impossible de prouver la convergence des trajectoires vers un point d'accumulation de manière analytique, et l'intégration numérique des trajectoires reste encore un problème extrêmement complexe du fait de cette infinité de transitions. C'est pourquoi, pour prouver la stabilité des systèmes dynamiques non-réguliers nous ferons appel dans le chapitre 3 à la théorie de la stabilité au sens de Lyapunov qui ne nécessite pas le calcul des trajectoires.

△

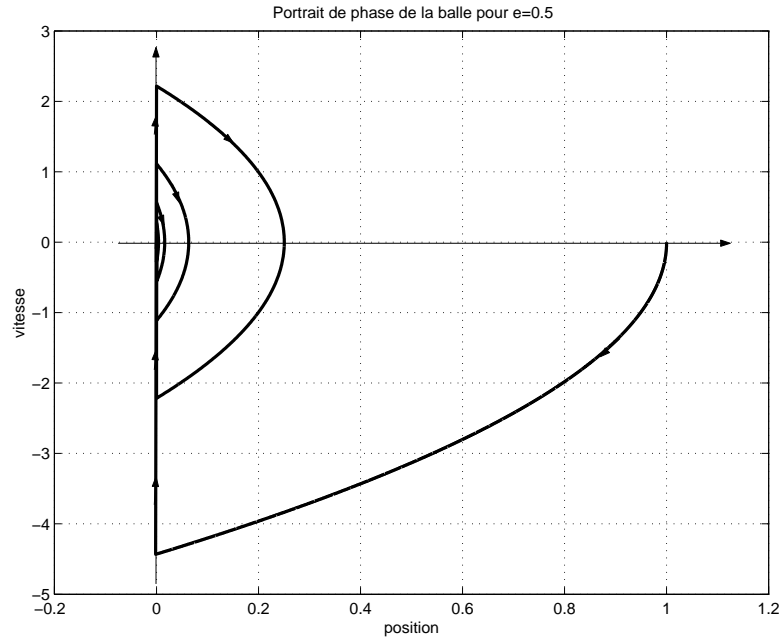


FIG. 2.3 – portrait de phase de la balle.

Ce comportement ne se retrouve pas uniquement dans le cadre des systèmes dynamiques lagrangiens soumis à des contacts non-permanents. En effet, il est présent dans la plupart des applications que nous avons mentionnées ci-dessus. Les figures 2.4 et 2.5 illustrent par exemple un tel comportement sur un système électrique issu du domaine de l'électronique de puissance [24] (voir également [42] pour un exemple sur la commande de remplissage de deux cuves [42]).

Précisons enfin que le nom de Zénon fait référence au philosophe Zénon d'Élée (500-400 avant J.C) dont les travaux principaux ont abouti à l'établissement de fameux paradoxes, qui avaient pour but de soulever des contradictions entre l'idée de mouvement et l'évolution du temps. Un exemple bien connu est le second paradoxe du mouvement de Zénon, dans lequel Achille fait la course avec une tortue [42]. Une solution de ce paradoxe n'a été proposée qu'au 17^{ième} siècle avec les résultats sur des suites infinies. En effet, la résolution de ce problème nous amène à calculer des limites de série infinie très similaires à ce que nous avons présenté dans le cas de la balle qui rebondit, c'est pourquoi ce comportement a été baptisé *comportement de type Zénon*.

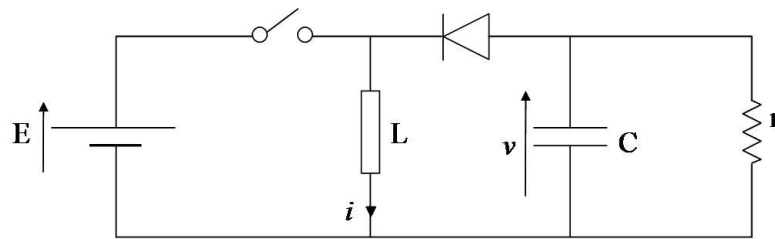


FIG. 2.4 – Exemple d'un convertisseur buck-boost [24].

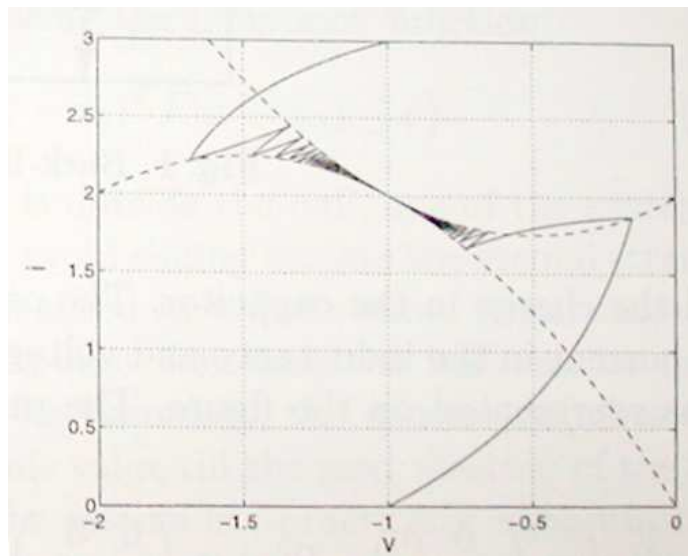


FIG. 2.5 – Exemple de commande d'un convertisseur buck-boost [24].

2.3.2 L'intérêt des systèmes dynamiques non-réguliers

Dans le formalisme usuel des systèmes hybrides, présenté dans l'annexe A, les discontinuités provoquées par des transitions entre la dynamique continue et les événements discrets, sont numérotées et ordonnées dans le temps. Cela peut poser problème dans le cas de systèmes possédant des points d'accumulation, puisque, comme nous venons de le voir, une infinité de transitions se produit en un temps fini.

Comme nous l'avons expliqué ci-dessus, le cadre de la dynamique non-régulière apparaît particulièrement approprié pour l'analyse des systèmes à impacts, puisqu'il propose une dynamique unique et indépendante de l'état des contacts. Les

accumulations d'impacts ne posent donc aucun problème spécifique dans le cadre de la dynamique non-régulière. C'est pourquoi dans la suite nous préférons ce cadre même si les règles de calcul des fonctions à variation bornée demandent quelques précautions, comme peut l'illustrer la proposition suivante qui sera utilisée dans la section 5.4, et dont la preuve est donnée dans [57].

Proposition 2 *Si $x \in lbv(I, \mathbb{R}^n)$, $y \in lbv(I, \mathbb{R}^n)$, et $\Phi(x, y) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est une paramétrisation bilinéaire et continue, alors $\Phi(x(t), y(t)) \in lbv(I, \mathbb{R})$ et*

$$d\Phi(x, y) = \Phi(dx, \frac{y^+ + y^-}{2}) + \Phi(\frac{x^+ + x^-}{2}, dy).$$

Deuxième partie

Stabilité des systèmes dynamiques discontinus

Chapitre 3

Résultats de stabilité pour des systèmes dynamiques discontinus

La stabilité au sens de Lyapunov est habituellement présentée pour des systèmes variant continûment dans le temps, ce qui n'est plus le cas lorsque l'on s'intéresse aux systèmes dynamiques non-réguliers. Dans ce chapitre nous proposerons un théorème de stabilité au sens de Lyapunov dans le cadre général des systèmes dynamiques décrits par des flots pouvant subir des discontinuités.

3.1 Introduction

La stabilité au sens de Lyapunov est habituellement présentée pour des systèmes dont l'état varie continûment dans le temps [16, 44, 94], des systèmes de type Fillipov par exemple [61, 4]. Mais nous avons vu que dans le cas de systèmes dynamiques lagrangiens non-réguliers, la vitesse et donc l'état $x(t) = (\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t))$ pouvait subir des discontinuités sur le bord du domaine $\Phi \times \mathbb{R}^n$. La stabilité au sens de Lyapunov

n'est heureusement pas liée à cette notion de continuité, et nous allons voir par la suite que des résultats de stabilité peuvent tout de même être obtenus pour des systèmes dynamiques.

Dans ce chapitre, nous laissons momentanément le cadre spécifique de la dynamique non-régulière pour considérer, comme dans [40] ou [94], le cadre plus général des systèmes dynamiques dont l'évolution est décrite par des flots invariants dans le temps qui dans notre cas, pourront subir des discontinuités dans le temps. La section 3.2 sera donc entièrement consacrée à la description de ces flots, ainsi qu'au rappel de la définition de la stabilité au sens de Lyapunov. Puis, dans ce cadre général, nous allons proposer dans la section 3.3, un théorème de stabilité au sens de Lyapunov pour les systèmes dynamiques dont l'état peut présenter des discontinuités.

3.2 Stabilité des flots

3.2.1 Quelques notations

Considérons un espace métrique \mathcal{X} dans lequel on définit un flot autonome par une application $X : \mathbb{R} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ vérifiant

$$\begin{aligned} -\forall x \in \mathcal{X}, \quad X(0, x) &= x, \\ -\forall x \in \mathcal{X}, \quad \forall (t, s) \in \mathbb{R}^2, \quad X(t, X(s, x)) &= X(t + s, x). \end{aligned}$$

On peut remarquer que cette définition ne suppose aucune condition de différentiabilité ni même de continuité. On peut ainsi définir la notion d'invariance d'un ensemble $\mathcal{M} \subset \mathcal{X}$, de la manière suivante

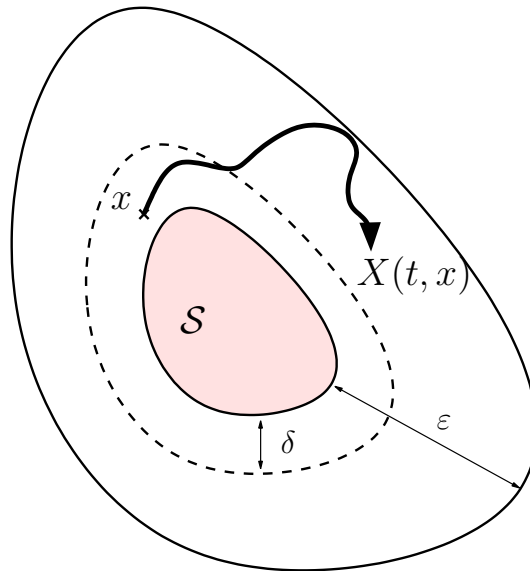
$$\forall x \in \mathcal{M}, \quad \forall t \geq 0, \quad X(t, x) \in \mathcal{M}.$$

Nous verrons à la section 4.3 que ce sera une notion clef dans l'établissement du théorème d'invariance de LaSalle.

Cet espace métrique est muni d'une fonction distance $d(., .)$, et nous noterons la fonction distance d'un point x à un ensemble $\mathcal{S} \subset \mathcal{X}$ par $d(x, \mathcal{S}) = \inf_{y \in \mathcal{S}} d(x, y)$.

3.2.2 Rappel de la définition de la stabilité au sens de Lyapunov

Les notations que nous avons introduites vont nous permettre maintenant de rappeler la définition de la stabilité au sens de Lyapunov d'un ensemble \mathcal{S} , illustrée dans la figure 3.1 :

FIG. 3.1 – Stabilité au sens de Lyapunov d'un ensemble \mathcal{S}

Définition 3 *Un ensemble fermé invariant $\mathcal{S} \subset \mathcal{X}$ est stable si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que*

$$d(x, \mathcal{S}) \leq \delta \implies \forall t \geq 0, d(X(t, x), \mathcal{S}) \leq \epsilon.$$

3.3 Un théorème de stabilité au sens de Lyapunov pour des systèmes discontinus

3.3.1 Un théorème de stabilité au sens de Lyapunov

Dans le cadre général des systèmes dynamiques décrits par des flots invariants dans le temps, il est possible de proposer le théorème suivant inspiré du théorème 12 dans [94] :

Théorème 4 *Un ensemble fermé $\mathcal{S} \subset \mathcal{X}$ est stable au sens de Lyapunov si et seulement si il existe une fonction $V : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ possédant les propriétés suivantes :*

(i) V est uniformément positive loin de \mathcal{S} ,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \gamma > 0 \text{ tel que } \forall x \in \mathcal{X}, d(x, \mathcal{S}) \geq \varepsilon \implies V(x) \geq \gamma,$$

(ii) V est uniformément continue dans un voisinage de l'ensemble \mathcal{S} ,

$$\forall \gamma > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } \forall x \in \mathcal{X}, d(x, \mathcal{S}) \leq \delta \implies V(x) \leq \gamma,$$

(iii) V est une fonction non-croissante du temps lorsque la trajectoire commence dans un voisinage de l'ensemble \mathcal{S} ,

$$\exists d_0 > 0 \text{ tel que } \forall x \in \mathcal{X}, d(x, \mathcal{S}) < d_0 \implies \forall t \geq 0, V(X(t, x)) \leq V(x).$$

Une fonction V satisfaisant ces conditions est appelée une fonction de Lyapunov pour l'ensemble stable \mathcal{S} .

Preuve 4 Si il existe une fonction $V(\cdot)$ satisfaisant la condition (iii) du théorème, alors il existe $d_0 > 0$ tel que

$$\forall x \in \mathcal{X}, d(x, \mathcal{S}) < d_0 \implies \forall t \geq 0, V(X(t, x)) \leq V(x).$$

Si cette fonction satisfait également les conditions (i) et (ii) alors pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe $\gamma > 0$ tel que

$$\forall x \in \mathcal{X}, d(x, \mathcal{S}) \geq \varepsilon \implies V(x) \geq \gamma,$$

ce qui peut être écrit également

$$\forall x \in \mathcal{X}, V(x) < \gamma \implies d(x, \mathcal{S}) < \varepsilon,$$

et pour ce $\gamma > 0$ il existe $0 < \delta < d_0$ tel que

$$\forall x \in \mathcal{X}, d(x, \mathcal{S}) \leq \delta \implies V(x) \leq \frac{\gamma}{2} < \gamma$$

ainsi, on obtient

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathcal{X}, d(x, \mathcal{S}) \leq \delta &\implies \forall t \geq 0, V(X(t, x)) \leq V(x) < \gamma \\ &\implies \forall t \geq 0, d(X(t, x), \mathcal{S}) \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

ce qui indique que l'ensemble \mathcal{S} est stable au sens de Lyapunov.

Maintenant, quel que soit l'ensemble \mathcal{S} , il existe toujours une fonction

$$V(x) = \sup_{\tau \geq 0} d(X(\tau, x), \mathcal{S}).$$

Il est évident que

$$\forall x \in \mathcal{X}, V(x) = \sup_{\tau \geq 0} d(X(\tau, x), \mathcal{S}) \geq d(X(0, x), \mathcal{S}) = d(x, \mathcal{S}),$$

la condition (i) est donc naturellement satisfaite :

$$\forall \varepsilon > 0, \forall x \in \mathcal{X}, d(x, \mathcal{S}) \geq \varepsilon \implies V(x) \geq \varepsilon.$$

De plus,

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathcal{X}, \forall t \geq 0, V(X(t, x)) &= \sup_{\tau \geq 0} d(X(\tau, X(t, x)), \mathcal{S}) \\ &= \sup_{\tau \geq 0} d(X(\tau + t, x), \mathcal{S}) \\ &= \sup_{\tau \geq t} d(X(\tau, x), \mathcal{S}) \\ &\leq \sup_{\tau \geq 0} d(X(\tau, x), \mathcal{S}) = V(x), \end{aligned}$$

la condition (iii) est donc également naturellement satisfaite pour tout $d_0 > 0$. Maintenant, si l'ensemble \mathcal{S} est stable au sens de Lyapunov, pour tout $\gamma > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathcal{X}, d(x, \mathcal{S}) \leq \delta &\implies \forall t \geq 0, d(X(t, x), \mathcal{S}) \leq \gamma \\ &\implies V(x) \leq \gamma, \end{aligned}$$

donc la condition (ii) est également satisfaite. □

Rappelons tout d'abord la définition des fonctions de classe \mathcal{K} ,

Définition 5 Une fonction continue $\alpha(\cdot) : [0, a) \rightarrow [0, \infty)$ est dite de classe \mathcal{K} si elle est strictement croissante et $\alpha(0) = 0$.

Dans le cadre des fonctions de classe \mathcal{K} les conditions (i) et (ii) du théorème 4 sont strictement équivalentes aux conditions (i') et (ii') suivantes : il existe deux fonctions de classe \mathcal{K} , $\alpha(\cdot)$ et $\beta(\cdot)$ telles que

- (i') $\forall x \in \mathcal{X}, V(x) \geq \alpha(d(x, \mathcal{S})),$
- (ii') $\exists d_0 > 0$ tel que $\forall x \in \mathcal{X}, d(x, \mathcal{S}) < d_0 \implies V(x) \leq \beta(d(x, \mathcal{S})).$

Les conditions que doit satisfaire la fonction de Lyapunov sont identiques : la continuité uniforme dans un voisinage de l'ensemble \mathcal{S} et la positivité uniforme loin de cet ensemble.

On peut remarquer que ce théorème est relativement proche de celui plus classique établi pour des systèmes dynamiques continus (comme le théorème 12 dans [94]) : la seule différence réside dans la condition (i) qui doit nécessairement être satisfaite sur tout l'espace et non plus seulement dans un voisinage de l'ensemble \mathcal{S} , comme nous allons l'expliquer dans la section suivante.

3.3.2 Nécessité d'une condition globale

Tout d'abord, essayons d'observer la nécessité d'une condition globale à travers l'exemple du système dynamique suivant :

Exemple.

Une version locale de la condition (i) du théorème 4 serait que la fonction V soit : (i') uniformément positive dans un voisinage de l'ensemble \mathcal{S} ,

$$\exists \varepsilon^* > 0, \forall \varepsilon > 0, \exists \gamma > 0 \text{ tel que } \forall x \in \mathcal{X}, \varepsilon^* \geq d(x, \mathcal{S}) \geq \varepsilon \implies V(x) \geq \gamma.$$

Considérons donc le système dynamique suivant dont les variations temporelles sont représentées dans la figure 3.2 en fonction des conditions initiales :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = -1 \text{ si } x < -1 \text{ ou } 0 < x \leq 1, \\ \frac{dx}{dt} = 0 \text{ si } x = 0, \\ \frac{dx}{dt} = 1 \text{ si } x > 1 \text{ ou } -1 \leq x < 0. \end{array} \right. \quad (3.1)$$

Il est évident que le point $\{0\}$ est stable pour ce système dynamique et en effet, si l'on choisit la fonction V suivante comme candidate pour être une fonction de Lyapunov

$$\left\{ \begin{array}{l} V(x) = |x| \quad \text{quand } |x| \leq 1 \\ V(x) = 2 - |x| \quad \text{quand } |x| > 1, \end{array} \right.$$

alors on peut voir sur la figure 3.4 de gauche que ces variations dans le temps satisfont la condition (iii) du théorème 4. Puisque les conditions (i') et (ii) de ce

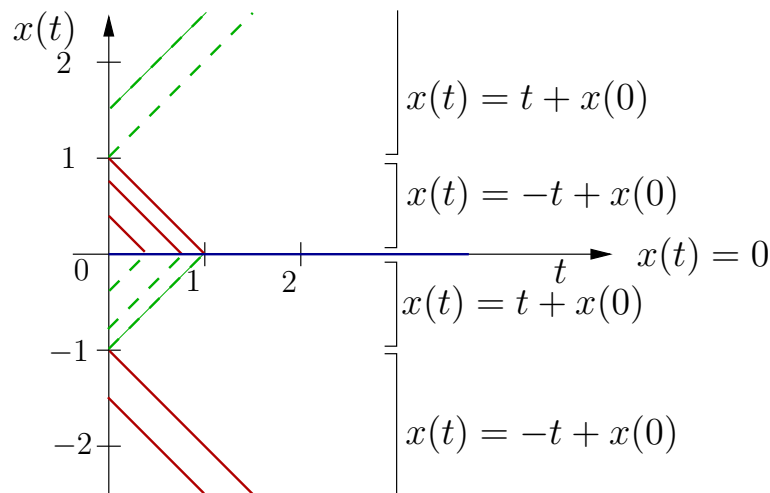


FIG. 3.2 – Les variations dans le temps du système dynamique (3.1)

théorème sont également clairement satisfaites, cette fonction est donc une fonction de Lyapunov pour le point stable $x = 0$. La condition locale (i') est suffisante ici car il n'y a pas de discontinuité sur l'état. Maintenant, ajoutons une discontinuité dans la dynamique de ce système :

$$\forall x^- \in]0, \frac{1}{2}], x^+ = 2 - |x^-|,$$

l'évolution temporelle de ce système dynamique est maintenant représentée dans la figure 3.3, et l'on peut observer que le point $x = 0$ n'est plus un point stable.

L'évolution dans le temps de la fonction candidate V est maintenant représentée dans la figure 3.4 de droite. Il est clair d'après cette figure que les conditions (i'), (ii) et (iii) du théorème 4 sont toujours satisfaites par cette fonction V . Cependant, comme nous l'avons observé dans la figure 3.3, pour n'importe quelle condition initiale $x > 0$, le système tend vers $+\infty$, donc le point $x = 0$ n'est plus stable. La condition locale (i') est donc mise en défaut car la discontinuité du système provoque un saut de l'état, de l'intérieur de n'importe quel voisinage de $x = 0$ vers l'extérieur de ce voisinage. Une condition globale telle que la condition (i) du théorème 4 est donc absolument nécessaire : nous pouvons en effet constater que la condition globale (i) n'est pas satisfaite ici, ce qui n'induit pas de conclusion abusive quant à la stabilité de ce système dynamique.

Cet exemple n'est pas à proprement parler un système dynamique lagrangien, cependant les systèmes dynamiques lagrangiens peuvent présenter des comportements

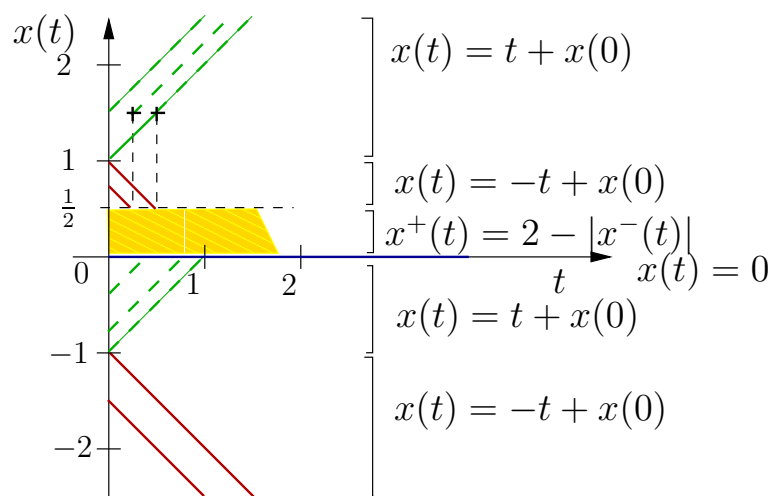


FIG. 3.3 – Les variations dans le temps du système dynamique (3.1) avec discontinuité

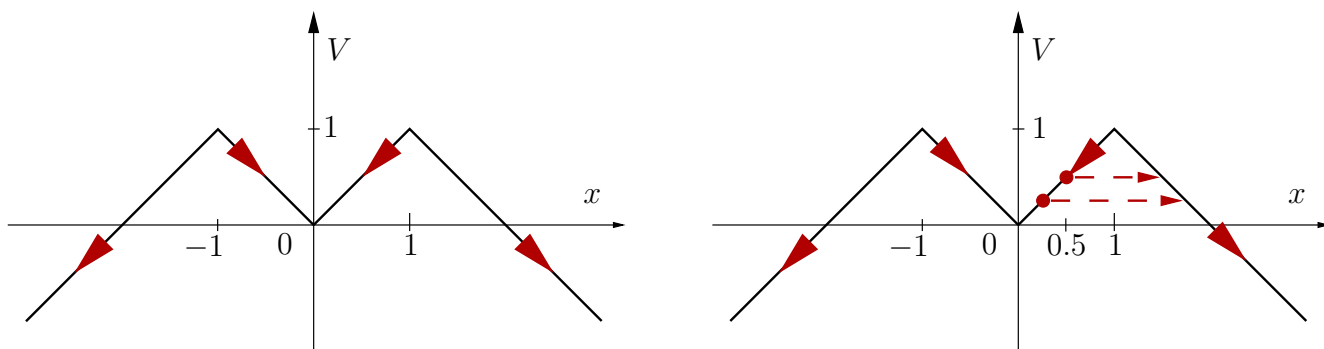


FIG. 3.4 – Les variations dans le temps de la fonction candidate $V(x(t))$ pour le système dynamique (3.1) sans discontinuité (à gauche), et avec discontinuité (à droite)

similaires par exemple lorsque le coefficient de restitution satisfait

$$\frac{q^+}{q^-} \rightarrow +\infty.$$

ce qui peut être le cas lorsque $e > 1$ ou lorsque la matrice d'inertie est singulière (lorsque les valeurs propres de la matrice d'inertie tendent vers zéro ou vers l'infini).

△

Nous venons de montrer qu'il est possible de trouver des systèmes dynamiques lagrangiens non-réguliers pour lesquels une condition globale est nécessaire. Cependant, la remarque 7 dans [78] précise qu'une condition locale peut être suffisante pour prouver la stabilité d'un système dynamique lagrangien non-régulier. Nous verrons par la suite que sous certaines hypothèses, une condition locale (i') du théorème 4 peut en effet être suffisante pour prouver la stabilité de ces systèmes. Essayons d'identifier dans quels cas cela serait suffisant en reprenant la première partie de la démonstration du théorème 4 :

On suppose donc qu'il existe une fonction $V(\cdot)$ satisfaisant les conditions (i'), (ii) et (iii) du théorème 4, alors il existe $d_0 > 0$ tel que

$$\forall x \in \mathcal{X}, d(x, \mathcal{S}) < d_0 \implies \forall t \geq 0, V(X(t, x)) \leq V(x).$$

et pour tout $\varepsilon \in [0, \varepsilon^*]$ il existe $\gamma > 0$ tel que

$$\forall x \in \mathcal{X}, \varepsilon^* \geq d(x, \mathcal{S}) \geq \varepsilon \implies V(x) \geq \gamma,$$

ce qui peut s'écrire également

$$\forall x \in \mathcal{X}, V(x) < \gamma \implies d(x, \mathcal{S}) < \varepsilon \text{ ou } d(x, \mathcal{S}) > \varepsilon^*,$$

et pour ce $\gamma > 0$ il existe $0 < \delta < d_0$ tel que

$$\forall x \in \mathcal{X}, d(x, \mathcal{S}) \leq \delta \implies V(x) \leq \frac{\gamma}{2} < \gamma$$

on obtient ainsi

$$\forall x \in \mathcal{X}, d(x, \mathcal{S}) \leq \delta \implies \forall t \geq 0, V(X(t, x)) \leq V(x) < \gamma$$

Cependant, on arrive maintenant à

$$\forall x \in \mathcal{X}, d(x, \mathcal{S}) \leq \delta \implies \forall t \geq 0, d(X(t, x), \mathcal{S}) \leq \varepsilon \text{ ou } d(X(t, x), \mathcal{S}) > \varepsilon^*. \quad (3.2)$$

Cette implication montre très clairement que l'état $X(t, x)$ peut se trouver dans deux ensembles distincts. Il est évident que dans le cas de flots continus dans le temps, lorsque la trajectoire débute dans un voisinage de l'ensemble \mathcal{S} , les ensembles n'appartenant pas au voisinage de cet ensemble ne peuvent pas être atteints, comme illustré par la trajectoire continue $x_1(t)$ dans la figure 3.5. On voit donc bien qu'une condition locale est suffisante dans le cas de trajectoire continue dans le temps. C'est en effet ce que nous avons pu observer dans l'exemple ci-dessus, lorsque le système dynamique (3.1) ne possédait pas de discontinuité.

Maintenant, lorsque le flot peut subir des discontinuités dans le temps, l'état du système peut sauter de n'importe quel voisinage de \mathcal{S} vers l'extérieur de ce voisinage, comme le montre la trajectoire $x_2(t)$ dans la figure 3.5. Dans ce cas là, une condition globale (i) sera nécessaire dans le théorème 4 afin de ne pas tirer des conclusions abusives quant à la stabilité de l'ensemble \mathcal{S} . C'est également ce que nous avons pu observer dans l'exemple ci-dessus, lorsqu'une discontinuité était ajoutée au système dynamique (3.1).

Remarquons que le flot peut tout à fait subir des discontinuités qui gardent l'état $X(t, x)$ à l'intérieur d'un voisinage de l'ensemble \mathcal{S} , comme le montre la trajectoire $x_3(t)$ dans la figure 3.5. Lorsque le système dynamique possède des discontinuités ayant des propriétés particulières comme par exemple la propriété suivante,

$$d(X^-(t, x), \mathcal{S}) \geq d(X^+(t, x), \mathcal{S}) \quad (3.3)$$

alors il est clair qu'une condition locale peut s'avérer suffisante. Dans le chapitre 5 nous verrons que la condition (3.3) peut être satisfaite par des systèmes dynamiques lagrangiens non-réguliers. En effet, nous avons déjà montré au chapitre précédent que les discontinuités de l'état étaient liées à une loi d'impact, nous verrons alors que la propriété (3.3) dépendra en particulier de la valeur du coefficient de restitution.

De manière générale, pour les systèmes dynamiques décrit à travers des flots pouvant présenter des discontinuités, une condition globale sur la condition (i) du théorème 4 sera nécessaire. On peut remarquer qu'une condition globale apparaît également dans [24, 93, 78] pour la même raison.

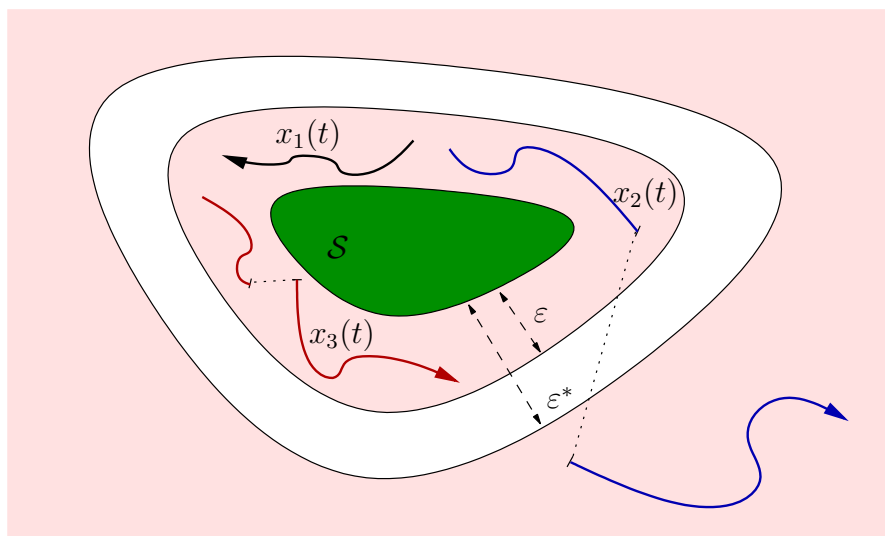


FIG. 3.5 – Exemples de trajectoires vérifiant (3.2), $x_1(t)$ une trajectoire continue, $x_2(t)$ une trajectoire discontinue quelconque, $x_3(t)$ une trajectoire discontinue vérifiant $d(X^-(t, x), S) \geq d(X^+(t, x), S)$.

Chapitre 4

Stabilité asymptotique pour les systèmes dynamiques discontinus

Dans le cas des systèmes dynamiques variant continûment dans le temps, le théorème de LaSalle s'avère être souvent un outil indispensable pour prouver la stabilité asymptotique. Nous verrons sous quelles conditions il est possible de proposer une extension de ce théorème pour les systèmes dynamiques discontinus.

4.1 Introduction

Le théorème 4 que nous venons de proposer fournit un outil d'analyse de la stabilité au sens de Lyapunov des systèmes dynamiques non-réguliers. Il peut être également important de posséder des outils permettant d'étudier la stabilité asymptotique de ces systèmes. Dans le cas des systèmes dynamiques continus, il est possible de conclure sur la stabilité asymptotique d'un ensemble en imposant des hypothèses plus fortes sur ce théorème de stabilité. La preuve de la stabilité asymptotique dans le théorème de stabilité au sens de Lyapunov requiert l'utilisation de la dérivée de la

fonction de Lyapunov. L'extension de cette partie du théorème au cas des systèmes dynamiques discontinus semble alors loin d'être trivial puisque nous ne disposons plus d'un tel outil.

Un autre théorème se révèle indispensable pour prouver la stabilité asymptotique dans le cas des systèmes dynamiques continus, le théorème d'invariance de LaSalle. Nous verrons à la section 4.3, qu'il est possible d'adapter le théorème d'invariance de LaSalle pour les systèmes pouvant subir des discontinuités, mais cela nécessite des hypothèses supplémentaires sur les propriétés que doivent vérifier les systèmes dynamiques non-réguliers. En effet, ce théorème ne sera applicable que pour les systèmes dynamiques possédant une propriété bien particulière : la continuité des trajectoires par rapport aux conditions initiales. Cependant lorsqu'on s'intéresse aux systèmes dynamiques dont l'état peut subir des discontinuités, cette propriété n'est pas obligatoirement satisfaite. Nous verrons dans la section 4.5, dans quels cas les systèmes dynamiques lagrangiens non-réguliers conservent cette propriété. Nous constaterons en particulier que l'on perd généralement cette propriété lorsque des impacts multiples se produisent, ce qui est malheureusement le cas par exemple pour les robots marcheurs lorsque le pied du robot prend appui sur le sol.

4.2 La stabilité asymptotique

4.2.1 Rappel de la définition de la stabilité asymptotique au sens de Lyapunov

Tout d'abord, rappelons la définition de la stabilité asymptotique au sens de Lyapunov d'un ensemble

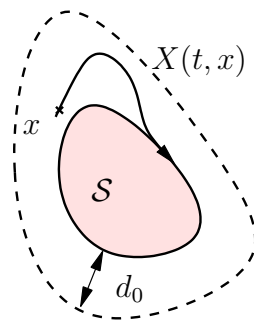
Définition 6 *Un ensemble fermé invariant $\mathcal{S} \subset \mathcal{X}$ est asymptotiquement stable si et seulement si il est stable et si il existe une constante positive d_0 telle que*

$$d(x, \mathcal{S}) \leq d_0 \implies d(X(t, x), \mathcal{S}) \longrightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow \infty.$$

La notion de stabilité asymptotique est illustrée dans la figure 4.1.

4.2.2 Insuffisance du théorème de stabilité

Dans le cas des systèmes dynamiques continus dans le temps, le théorème usuel permettant de montrer la stabilité au sens de Lyapunov d'un ensemble \mathcal{S} peut également, sous réserve d'une condition supplémentaire, permettre de conclure à la stabilité asymptotique de cet ensemble. En effet, si la fonction V est une fonction

FIG. 4.1 – Stabilité asymptotique au sens de Lyapunov d'un ensemble \mathcal{S}

strictement décroissante du temps alors le théorème de stabilité permet de conclure que l'ensemble stable est asymptotiquement stable [44].

La démonstration de ce théorème repose sur la continuité de la dérivée de la fonction de Lyapunov V et utilise l'intégration dans le temps de cette fonction. Une extension de ce théorème au cas des systèmes discontinus est cependant loin d'être triviale. Considérons le cas des systèmes dynamiques lagrangiens non-réguliers, nous verrons au chapitre 5 que la dérivée de la fonction de Lyapunov V est définie par une mesure abstraite dV qui sera plus forcément Lebesgue-intégrable. Les variations de dV ne seront donc plus obligatoirement continues dans le temps. L'extension directe du théorème de stabilité n'est donc pas possible sans hypothèse supplémentaire sur dV . En majorant dV par une mesure strictement négative, il serait peut-être possible de proposer une extension du théorème de Lyapunov pour prouver la stabilité asymptotique des systèmes dynamiques lagrangiens non-réguliers.

Cependant, le théorème de stabilité au sens de Lyapunov ne se révèle pas toujours facile à utiliser. En effet pour certains systèmes dynamiques asymptotiquement stables, il est parfois difficile de trouver une fonction de Lyapunov strictement décroissante dans le temps. Cette situation est souvent illustrée par l'exemple du pendule avec frottement [44]. Dans le cas des systèmes dynamiques lagrangiens non-réguliers, nous verrons au chapitre 5 que cette situation est rencontrée dans le simple exemple de la balle qui rebondit lorsque les impacts sont dissipatifs. Nous avons en effet observé au chapitre 2 que le système était asymptotiquement stable, et nous verrons qu'il est relativement simple de trouver une fonction de Lyapunov, mais celle-ci n'est pas strictement décroissante.

C'est pourquoi nous avons décidé de nous focaliser sur un autre outil pour démontrer la stabilité asymptotique des systèmes dynamiques discontinus : le théorème de LaSalle. Dans la section suivante nous allons donc essayer de proposer un théo-

rème similaire au théorème d'invariance de LaSalle pour les systèmes dynamiques décrits par des flots invariant dans le temps.

4.3 Théorème d'invariance de LaSalle pour les systèmes dynamiques discontinus

4.3.1 Propriété d'invariance de l'ensemble limite

Le théorème d'invariance de LaSalle s'intéresse à la convergence des trajectoires des systèmes dynamiques qui sont définies par

Définition 7 *Étant donné un état x_0 , on appelle la fonction $t \rightarrow X(t, x_0)$ un mouvement du système dynamique, et l'ensemble des positions $\{X(t, x_0), t \in \mathbb{R}^+\}$ la trajectoire correspondant à ce mouvement.*

La notion de stabilité asymptotique nécessite d'observer les trajectoires quand le temps t tend vers l'infini. Il nous sera alors très utile de considérer les ensembles limites de ces trajectoires \mathcal{L}^+ , définis par

Définition 8 *Étant donnée un état initial x_0 , un point p est appelé un point limite positif du mouvement $X(t, x_0)$ si il existe une séquence $\{t_n\}$ telle que $t_n \rightarrow +\infty$ et $X(t_n, x_0) \rightarrow p$ quand $n \rightarrow \infty$. L'ensemble de tous les points limites positifs est appelé l'ensemble limite positif \mathcal{L}^+ .*

Le théorème d'invariance de LaSalle utilise les propriétés de ces ensembles limites positifs \mathcal{L}^+ . En effet, dans le cas des systèmes dynamiques décrits par des flots variant continûment dans le temps, le théorème 3 de [94] montre que de tels ensembles limites sont fermés et invariants. Lorsqu'on considère un système dynamique dont l'état peut présenter des discontinuités, on peut montrer de manière identique que cet ensemble est fermé, mais on ne peut rien conclure quant à sa propriété d'invariance.

Dans le cas des systèmes dynamiques discontinus, il sera donc nécessaire d'avoir une propriété supplémentaire ; celle de la continuité des trajectoires par rapport aux conditions initiales,

$$\forall x_0 \in \mathcal{X}, \forall t \in \mathbb{R}, x \rightarrow x_0 \implies X(t, x) \rightarrow X(t, x_0). \quad (4.1)$$

Pour les systèmes qui satisfont cette propriété, l'invariance de l'ensemble limite peut être prouvée de manière analogue au lemme 3.1 de [44] :

Lemme 9 *Soit un flot $X(t, x)$ continu par rapport aux conditions initiales, alors quelque soit le mouvement, l'ensemble limite correspondant à $X(t, x_0)$ est invariant.*

Preuve 9 Considérons un mouvement $X(t, x_0)$ et un point p dans l'ensemble limite correspondant \mathcal{L}^+ , il existe une séquence $\{t_n\}$ telle que $t_n \rightarrow +\infty$ et $X(t_n, x_0) \rightarrow p$ quand $n \rightarrow \infty$. Grâce à la continuité des trajectoires par rapport aux conditions initiales et utilisant la définition des ensembles limites \mathcal{L}^+ , on obtient

$$\begin{aligned} \forall t > 0, X(t, p) &= \lim_{n \rightarrow \infty} X(t, X(t_n, x_0)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} X(t + t_n, x_0) \in \mathcal{L}^+ \end{aligned}$$

ce qui prouve l'invariance de l'ensemble limite. □

4.3.2 Un théorème d'invariance de LaSalle

Il est maintenant possible de proposer une version du théorème d'invariance de LaSalle dans le cadre général des systèmes dynamiques décrits par des flots pouvant présenter des discontinuités. Mais tout d'abord rappelons une propriété du lemme 3.1 de [44] qui nous sera utile dans la démonstration du théorème de LaSalle.

Lemme 10 *Soit un flot $X(t, x)$ borné, alors quelque soit le mouvement, les trajectoires convergent vers l'ensemble limite positif correspondant \mathcal{L}^+*

$$X(t, x_0) \rightarrow \mathcal{L}^+ \text{ quand } t \rightarrow \infty,$$

Preuve 10 On peut montrer que $X(t, x_0)$ approche \mathcal{L}^+ quand $t \rightarrow \infty$ par contradiction. Supposons que ce n'est pas le cas ; alors il existe $\varepsilon > 0$ et une séquence $\{t_n\}$ avec $t_n \rightarrow \infty$ quand $n \rightarrow \infty$ tels que $d(X(t_n, x_0), \mathcal{L}^+) > \varepsilon$. Puisque la suite $X(t_n, x_0)$ est bornée, il existe une sous-suite $X(t'_n, x_0) \rightarrow x^*$ quand $n \rightarrow \infty$. Le point x^* doit appartenir à \mathcal{L}^+ et en même temps il doit être à une distance ε de \mathcal{L}^+ , ce qui est une contradiction. Donc $X(t, x_0)$ approche \mathcal{L}^+ quand $t \rightarrow \infty$. □

Le théorème de LaSalle est basé sur l'étude des variations dans le temps d'une fonction $V(x)$, ce qui est habituellement réalisé à l'aide de la dérivée dans le temps de cette fonction $\dot{V}(x)$. Pour les systèmes dynamiques discontinus, cette dérivée n'existe pas forcément, nous proposons donc une formulation du théorème d'invariance de LaSalle ne faisant pas intervenir la dérivée de la fonction V . Nous obtenons donc la variation suivante du théorème 3.4 de [44] :

Théorème 11 *Soient $\Omega \subset \mathcal{X}$ un ensemble compact et $V : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue satisfaisant*

(i) *l'ensemble Ω est positivement invariant,*

$$\forall x \in \Omega, \forall t \geq 0, X(t, x) \in \Omega,$$

(ii) *la fonction V est une fonction non-croissante du temps lorsque la trajectoire commence dans Ω ,*

$$\forall x \in \Omega, \forall t \geq 0, V(X(t, x)) \leq V(x),$$

(iii) *le sous-ensemble $\mathcal{E} \subset \Omega$ rassemble tous les états où la fonction V est constante dans le temps,*

$$\forall x \in \Omega, \forall t > 0, V(X(t, x)) = V(x) \implies x \in \mathcal{E}.$$

Si les trajectoires du système dynamique sont continues par rapport aux conditions initiales, alors toutes les trajectoires débutant dans Ω convergent asymptotiquement quand $t \rightarrow \infty$ vers le plus grand sous-ensemble invariant \mathcal{M} de \mathcal{E} .

Preuve 11 Puisque Ω est un ensemble compact et invariant, quelque soit $x_0 \in \Omega$, $X(t, x_0)$ est borné, donc l'ensemble limite correspondant \mathcal{L}^+ est non-vide, c'est un sous-ensemble de Ω , le lemme 10 nous permet ensuite de conclure que $X(t, x_0)$ approche \mathcal{L}^+ quand $t \rightarrow \infty$.

De plus, nous savons d'après le lemme 9 que cet ensemble \mathcal{L}^+ est également invariant, nous pouvons donc conclure que chaque trajectoire débutant dans Ω approche un sous-ensemble invariant de Ω quand $t \rightarrow \infty$.

Il nous reste simplement à prouver que ce sous-ensemble invariant se trouve dans \mathcal{E} . D'après la condition (ii) de ce théorème, on sait que $V(X(t, x_0))$ est une fonction

non-croissante du temps, et $V(x)$ étant également une fonction continue de x , elle est donc bornée inférieurement sur l'ensemble compact Ω , donc $V(X(t, x_0))$ a une limite l quand $t \rightarrow \infty$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(X(t, x_0)) = l.$$

Par définition, pour tout $p \in \mathcal{L}^+$ il existe une séquence t_n avec $t_n \rightarrow \infty$ et $X(t_n, x_0) \rightarrow p$ quand $n \rightarrow \infty$. Par continuité de $V(x)$, nous avons

$$V(p) = \lim_{t \rightarrow \infty} V(X(t, x_0)) = l.$$

Donc $V(x) = l$ sur \mathcal{L}^+ , et puisque \mathcal{L}^+ est un ensemble invariant,

$$\forall x \in \mathcal{L}^+, \forall t \geq 0, V(X(t, x)) = V(x),$$

aussi nous avons $\mathcal{L}^+ \subset \mathcal{E}$. Toutes les trajectoires débutant dans Ω tendent vers un sous-ensemble invariant de \mathcal{E} , elles tendent donc vers le plus grand sous-ensemble invariant \mathcal{M} de \mathcal{E} quand $t \rightarrow \infty$. □

4.4 Continuité des trajectoires par rapport aux conditions initiales

4.4.1 Discontinuité des trajectoires

Le théorème d'invariance de LaSalle que nous venons de proposer n'est valable que si les trajectoires dépendent continûment des conditions initiales. Intéressons-nous tout d'abord au cas où les trajectoires ne sont pas continues par rapport aux conditions initiales. En se basant sur la remarque 3.2 de [26], nous considérons donc le système dynamique suivant, avec $\mathcal{X} = \mathbb{R}$,

$$\forall t > 0, X(t, x_0) = \begin{cases} x_0 e^{-t} & \text{si } x_0 \neq 0, \\ e^{-t} & \text{si } x_0 = 0. \end{cases}$$

On peut observer que les trajectoires de ce flot ne sont pas continues par rapport aux conditions initiales pour la position initiale $x_0 = 0$.

Remarquons ensuite que quel que soit $x_0 \in \mathbb{R}$, la trajectoire $X(t, x_0)$ approche l'ensemble $\mathcal{L}^+ = \{0\}$, mais cet ensemble n'est pas invariant puisque si $x_0 = 0$ alors on a $\forall t \geq 0, X(t, x_0) \neq 0$, donc

$$\forall t \geq 0, X(t, 0) \notin \mathcal{L}^+$$

La conclusion du lemme 9 n'est donc pas vérifiée lorsque les trajectoires ne sont pas continues par rapport aux conditions initiales. Puisque ce lemme joue un rôle

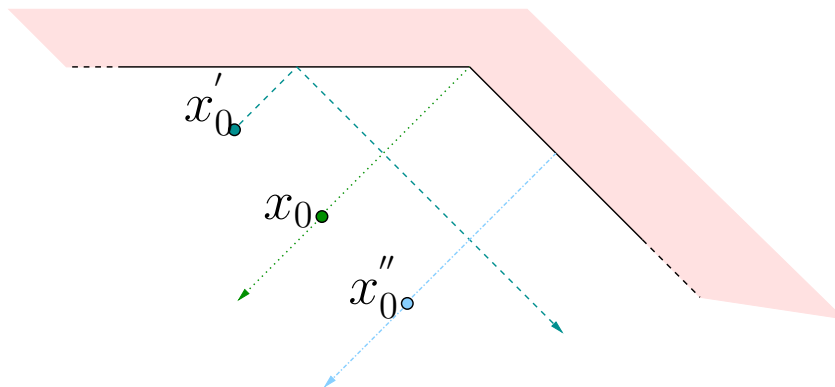


FIG. 4.2 – Un exemple de système dynamique lagrangien où les trajectoires ne sont pas continues par rapport aux conditions initiales

capital dans la démonstration du théorème de LaSalle, lorsque les trajectoires d'un système ne sont pas continues par rapport aux conditions initiales, on ne pourra pas appliquer ce théorème. On peut cependant remarquer que l'ensemble limite \mathcal{L}^+ n'est pas invariant dans cet exemple car le point où la discontinuité se produit, pour une position initiale $x_0 = 0$, appartient à cet ensemble limite.

Nous allons maintenant nous intéresser au cas des systèmes dynamiques lagrangiens non-réguliers, nous verrons où et quand une telle discontinuité par rapport aux conditions initiales se produit.

4.5 Les conséquences des impacts multiples pour les systèmes lagrangiens

4.5.1 Dépendance continue des trajectoires par rapport aux conditions initiales

Considérons une balle qui évolue dans un espace à deux dimensions, de telle sorte qu'elle puisse percuter un coin. La figure 4.2 montre un exemple de trois trajectoires pour trois conditions initiales x_0 , x'_0 et x''_0 . Lorsque la balle atteint un bord, nous considérons qu'elle rebondit suivant la loi d'impact (1.10)-(1.12) avec $e = 1$. Lorsque la condition initiale x''_0 tend vers la condition initiale x_0 , alors la trajectoire $X(t, x''_0)$ tend vers $X(t, x_0)$. Mais lorsque la condition initiale x'_0 tend vers x_0 , la trajectoire $X(t, x'_0)$ ne converge pas pour tout t vers $X(t, x_0)$: une discontinuité des trajectoires par rapport aux conditions initiales apparaît, car l'impact de la balle s'est produit dans un coin.

Lorsque le coin est orthogonal, comme dans la figure 4.3 ou lorsque l'angle est aigu

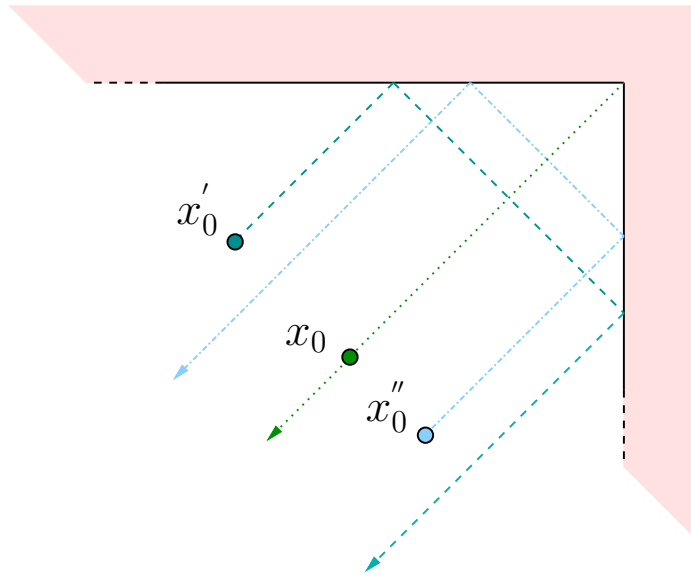


FIG. 4.3 – Un exemple de système dynamique lagrangien où les trajectoires sont continues par rapport aux conditions initiales

et les impacts parfaitement inélastiques, $e = 0$, on peut montrer que les trajectoires sont toujours continues par rapport aux conditions initiales [6] [63]. C'est également le cas pour les systèmes à un degré de liberté [73] ou lorsque l'ensemble Φ est convexe et ses bords sont \mathcal{C}^1 aux points d'impacts [6].

L'exemple de la balle qui rebondit.

L'exemple de la balle qui rebondit verticalement étant un système à un degré de liberté, la continuité des trajectoires par rapport aux conditions initiales est donc toujours satisfaite.

△

L'exemple du bras manipulateur.

Dans le cas d'un bras manipulateur, nous avons supposé que les contraintes étaient des fonctions \mathcal{C}^1 . Les trajectoires des systèmes dynamiques lagrangiens non-réguliers sont discontinues uniquement lorsque un impact se produit dans un coin entre deux contraintes. Il est donc possible d'appliquer notre version du théorème d'invariance de LaSalle tant qu'un tel événement ne se produit pas dans un voisinage de l'ensemble limite.

△

Les figures 1.2-1.5 illustrent un certain nombre de situations d'impact multiple impliquant deux contraintes. On se rend bien compte que suivant la positions des



FIG. 4.4 – Situation d'impact multiple lorsque le pied de Bip se pose sur le sol.

contraintes, il peut exister un certain nombre de situations pour lesquelles les conditions nécessaires pour appliquer le théorème de LaSalle ne sont pas remplies. Dans le cas d'un robot marcheur, la stabilisation du pied sur le sol correspond par exemple à un impact multiple puisque l'appui du pied sur le sol implique au minimum trois points de contact comme le laisse présager la figure 4.4. Il est peu probable que toutes les conditions soient remplies pour que dans ce cas là, les trajectoires soient continues par rapport aux conditions initiales. La stabilisation asymptotique reste donc un problème non-résolu dans certains cas de systèmes dynamiques lagrangiens non-réguliers.

On peut remarquer que cette sensibilité des systèmes dynamiques lagrangiens non-réguliers est liée à l'environnement réel du système, à travers la géométrie des contraintes. En effet, dans les cas d'impacts multiples, la moindre variation des conditions initiales aboutira généralement à une trajectoire complètement différente. Cette sensibilité est modélisée dans la loi d'impact (1.5)-(1.12) par une pure discontinuité.

Remarquons que cette sensibilité des trajectoires par rapport aux conditions initiales ne permet pas le calcul de solutions approchées puisque les seules erreurs d'approximations peuvent conduire à une trajectoire radicalement différente.

Troisième partie

Stabilité des systèmes dynamiques lagrangiens non-réguliers

Chapitre 5

Stabilité des systèmes lagrangiens

Les théorèmes établis dans les chapitres précédents peuvent s'appliquer pour l'étude des systèmes dynamiques lagrangiens non-réguliers sous réserve d'identifier une fonction candidate comme fonction de Lyapunov. Nous verrons que l'énergie du système se présente comme une candidate naturelle comme fonction de Lyapunov. Nous proposerons une loi de commande pour le bras manipulateur basées sur la passivité permettant ainsi de préserver les propriétés de l'énergie du système.

5.1 Introduction

Les théorèmes proposés au chapitre précédent sont relativement généraux puisqu'ils s'appliquent à tout système dynamique décrit par des flots pouvant présenter des discontinuités dans le temps. Cependant à l'instar des théorèmes usuels établis pour des systèmes dynamiques continus dans le temps, un problème non-trivial se pose, celui d'identifier une fonction de Lyapunov, ce qui rend souvent difficile l'application de ces théorèmes. Il existe cependant des classes de systèmes pour lesquels

de telles fonctions de Lyapunov sont un peu plus simples à trouver.

Les systèmes dynamiques lagrangiens possèdent une fonction caractéristique très intéressante qui correspond physiquement à l'énergie du système. Basé sur les propriétés de cette fonction énergie, le théorème de Lagrange-Dirichlet fournit un outil d'analyse de la stabilité des systèmes dynamiques lagrangiens plus pratique d'utilisation que le théorème de stabilité au sens de Lyapunov. Après un préliminaire sur les mesures de Stieljes dans la section 5.2.1, nous proposerons un théorème de Lagrange-Dirichlet pour les systèmes dynamiques lagrangiens non-réguliers en identifiant les propriétés que l'énergie totale du système doit satisfaire. Précisons qu'un théorème de Lagrange-Dirichlet a déjà été proposé dans [21] pour les systèmes dynamiques non-réguliers. Mais ce théorème ne s'appuyant pas sur un théorème de Lyapunov existant, on peut alors relever quelques étapes incomplètes dans la preuve. De plus, nous proposons dans la section 5.4 de compléter ce résultat en précisant les conditions supplémentaires que le système doit satisfaire afin de garantir la stabilité asymptotique.

L'énergie joue un rôle clef dans la démonstration de la stabilité au sens de Lyapunov des systèmes dynamiques lagrangiens. Dans le cas des systèmes dynamiques contrôlés, les commandes basées sur la passivité semblent d'un grand intérêt puisqu'elles visent à préserver les propriétés de la fonction énergie du système en boucle fermée. Dans la section 5.5 nous présenterons brièvement la théorie des systèmes passifs et la commande basée sur la passivité. En utilisant une technique de *potential energy shaping*, nous montrerons comment nous avons abouti à la loi de commande (1.1) présentée au début du chapitre 1 pour la régulation en position et en force du bras manipulateur.

5.2 La fonction énergie pour les systèmes lagrangiens

5.2.1 Un préliminaire sur les mesures de Stieljes

On peut tout d'abord remarquer que les deux théorèmes 4 et 11 sont basés sur l'analyse dans le temps des variations d'une fonction $V(\cdot)$. Dans le cas des systèmes dynamiques lagrangiens non-réguliers, nous avons vu à la section 1.2 que l'état de ces systèmes $x(t) = (\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t))$ est décrit par des fonctions à variation bornée : $x \in \text{lbv}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Si une fonction $V : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est localement Lipschitz continue, par exemple si elle est convexe ou \mathcal{C}^1 , alors $V(x(t))$ sera également à variation bornée : $(V \circ x) \in \text{lbv}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Dans ce cas, en utilisant les règles d'intégration (1.6), les variations de $V \circ x$ seront directement reliées au signe de la mesure de Stieljes associée $d(V \circ x)$. On peut rassembler ces résultats dans le lemme trivial

suivant qui nous sera très utile par la suite :

Lemme 12 *Soient $x \in lbv(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ une fonction à variation localement bornée et $V : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction localement Lipschitz continue, alors*

- $V \circ x$ est non-croissante si et seulement si $d(V \circ x) \leq 0$
- $V \circ x$ est constante si et seulement si $d(V \circ x) = 0$.

5.2.2 L'énergie, une fonction non-croissante du temps

Considérons maintenant que les forces extérieures Lebesgue-intégrables \mathbf{f} agissant sur la dynamique (1.5) dérivent d'un potentiel $P(\mathbf{q})$, et d'un terme dissipatif \mathbf{h} :

$$\mathbf{f} = -\frac{dP}{d\mathbf{q}}(\mathbf{q}) + \mathbf{h}, \quad \text{avec } \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{h} \leq 0, \quad (5.1)$$

$P(\mathbf{q})$ étant une fonction \mathcal{C}^1 .

Si l'on somme l'énergie cinétique de la dynamique lagrangienne (1.5),

$$K(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}$$

et l'énergie potentielle, alors on peut montrer que l'énergie totale du système $K(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + P(\mathbf{q})$ est une fonction non-croissante du temps de la manière suivante. Tout d'abord, on peut remarquer que toutes les conditions du lemme 12 sont remplies, on pourra donc s'intéresser directement à la mesure de Stieljes associée à la somme des énergies cinétique et potentielle. En appliquant ensuite les règles de calcul spécifiques au calcul des dérivées des fonctions à variation bornée présentées dans la proposition 2 et le fait que $\frac{1}{2}(\dot{\mathbf{q}}^+ + \dot{\mathbf{q}}^-) dt = \dot{\mathbf{q}} dt$, on obtient donc

$$dK = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} dt + \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{q}}^+ + \dot{\mathbf{q}}^-)^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) d\dot{\mathbf{q}}.$$

En remplaçant $\mathbf{M}(\mathbf{q}) d\dot{\mathbf{q}}$ par l'expression obtenue en utilisant l'équation de la dynamique (1.5), cela nous donne

$$dK = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T (\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - 2 \mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})) \dot{\mathbf{q}} dt + \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{q}}^+ + \dot{\mathbf{q}}^-)^T d\mathbf{r} + \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{f} dt,$$

mais puisque le vecteur $\dot{\mathbf{q}}^T(\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - 2\mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}))\dot{\mathbf{q}}$ est égal à zéro [48, 86], dK se réduit à :

$$dK = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{q}}^+ + \dot{\mathbf{q}}^-)^T d\mathbf{r} + \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{f} dt, \quad (5.2)$$

ce qui relie les variations de l'énergie cinétique dK à la puissance exercée par les forces extérieures $d\mathbf{r}$ et $\mathbf{f} dt$.

Maintenant, intéressons-nous plus particulièrement au premier terme. Remarquons tout d'abord que

$$\frac{1}{2}(\dot{\mathbf{q}}^+ + \dot{\mathbf{q}}^-) = \dot{\mathbf{q}}^+ - \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{q}}^+ - \dot{\mathbf{q}}^-),$$

puis, en utilisant la relation (1.11), remplaçons $\dot{\mathbf{q}}^+$ par

$$\dot{\mathbf{q}}^+ = \dot{\mathbf{q}}_e + \frac{e}{2}(\dot{\mathbf{q}}^+ - \dot{\mathbf{q}}^-),$$

on obtient donc

$$\frac{1}{2}(\dot{\mathbf{q}}^+ + \dot{\mathbf{q}}^-)^T d\mathbf{r} = \dot{\mathbf{q}}_e^T d\mathbf{r} - \frac{1-e}{2}(\dot{\mathbf{q}}^+ - \dot{\mathbf{q}}^-)^T d\mathbf{r}. \quad (5.3)$$

En utilisant la relation (1.7), qui relie la discontinuité possible en vitesse avec les forces de contact $d\mathbf{r}$, on a à chaque instant τ

$$\frac{1}{2}(\dot{\mathbf{q}}^+ + \dot{\mathbf{q}}^-)^T d\mathbf{r} = \dot{\mathbf{q}}_e^T d\mathbf{r} - \frac{1-e}{2} \left[\int_{\{\tau\}} d\mathbf{r} \right]^T \mathbf{M}(\mathbf{q})^{-1} d\mathbf{r},$$

ce qui donne finalement en utilisant la relation (1.9)

$$\frac{1}{2}(\dot{\mathbf{q}}^+ + \dot{\mathbf{q}}^-)^T d\mathbf{r} = \dot{\mathbf{q}}_e^T \mathbf{r}'_\mu d\mu - \frac{1-e}{2} \mathbf{r}'_\mu{}^T \mathbf{M}(\mathbf{q})^{-1} \mathbf{r}'_\mu \left[\int_{\{\tau\}} d\mu \right] d\mu. \quad (5.4)$$

Le premier terme est nul de part la loi d'impact (1.12). Dans le second terme, on peut remarquer que $d\mu$ est une mesure non-négative, $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ est une matrice positive définie, donc si $e \in [0, 1]$, ce second terme est toujours non-négatif. Les forces normales de contact $d\mathbf{r}$ sont donc passives, l'équation (5.2) satisfait donc

$$dK \leq \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{f} dt.$$

Avec des forces \mathbf{f} vérifiant la définition (5.1), on pourra donc écrire

$$dK \leq -\dot{\mathbf{q}}^T \frac{dP}{d\mathbf{q}}(\mathbf{q}) dt + \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{h} dt,$$

et la dérivée de l'énergie potentielle étant

$$dP = \dot{\mathbf{q}}^T \frac{dP}{d\mathbf{q}}(\mathbf{q}) dt,$$

nous obtenons finalement

$$dK + dP \leq \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{h} dt \leq 0. \quad (5.5)$$

Cette équation implique à travers le lemme 12 que l'énergie du système $K(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + P(\mathbf{q})$ est une fonction non-croissante du temps. On peut remarquer que dans le cas d'impacts parfaitement élastiques, lorsque $e = 1$, cette énergie est une fonction continue du temps bien que la vitesse du système puisse encore présenter des discontinuités.

L'exemple de la balle qui rebondit.

Dans le cas de la balle qui rebondit, il n'y a pas de terme dissipatif h , donc si l'on considère la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle de la balle $V(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + mgq$, sa dérivée est uniquement reliée aux forces normales de contact dr ,

$$\begin{aligned} dV &= m\frac{1}{2}(\dot{q}^+ + \dot{q}^-)d\dot{q} + mg\dot{q}dt \\ &= -mg\frac{1}{2}(\dot{q}^+ + \dot{q}^-)dt + \frac{1}{2}(\dot{q}^+ + \dot{q}^-)dr + mg\dot{q}dt \\ &= \frac{1}{2}(\dot{q}^+ + \dot{q}^-)dr \\ &= -\frac{1-e}{2}(\dot{q}^+ - \dot{q}^-)dr. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Il est clair d'après la relation (5.6) que cette énergie ne sera une fonction décroissante du temps que lorsque les trois conditions suivantes seront simultanément satisfaites : des impacts strictement dissipatifs, $e < 1$, une discontinuité de la vitesse, $\dot{q}^+ \neq \dot{q}^-$, et des forces de contact différentes de zéro, $dr \neq 0$. D'après la relation de complémentarité induite par la relation (1.10), nous savons que $dr \neq 0$ implique $q = 0$, ce qui nous amène à la constatation évidente suivante : la balle ne perd de l'énergie que lorsqu'un impact dissipatif se produit lors des rebonds sur le sol.

Il peut être intéressant maintenant d'identifier les situations où l'énergie est constante, car ce cas jouera un rôle central dans l'analyse de la stabilité asymptotique de la balle. En se basant sur les observations précédentes, on sait que l'énergie de la balle est constante lorsque les impacts sont parfaitement élastiques, quand $e = 1$. Dans le cas d'impacts strictement dissipatifs, quand $e < 1$, l'énergie est constante durant les phases de vols de la balle, quand $q > 0$, ou lorsque la balle repose de manière permanente sur le sol, quand $q = 0$ et $\dot{q} = 0$.

△

Nous reviendrons sur l'exemple du bras manipulateur à la section 5.5 car nous verrons que l'énergie totale du système dépend fortement de la loi de commande choisie. Pour que l'énergie totale du système soit une fonction non-croissante du temps, nous proposerons alors une loi de commande basée sur la passivité. La section 5.5 sera entièrement consacrée à la présentation de la théorie des systèmes dissipatifs et à l'élaboration d'une loi de commande basée sur la passivité pour le bras manipulateur.

5.3 Un théorème de Lagrange-Dirichlet pour les systèmes dynamiques non-réguliers

5.3.1 L'énergie comme fonction de Lyapunov

L'énergie des systèmes lagrangiens non-réguliers autonomes étant une fonction non-croissante du temps, elle satisfait donc tout naturellement la condition (iii) du théorème 4 pour tout $d_0 > 0$. Elle semble donc être une bonne candidate pour être une fonction de Lyapunov.

Pour que l'énergie du système soit une fonction de Lyapunov, il faut également que les conditions (i) et (ii) de ce théorème soient satisfaites. Ces conditions peuvent se reformuler distinctement sur l'énergie cinétique et sur l'énergie potentielle, nous obtenons ainsi le théorème suivant de Lagrange-Dirichlet pour les systèmes dynamiques lagrangiens non-réguliers :

Théorème 13 *Si l'énergie cinétique $K(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ d'un système dynamique lagrangien non-régulier est uniformément continue dans un voisinage de l'ensemble $\Phi \times \{0\}$,*

$$(a) \quad \forall \gamma > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } \forall (\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \Phi \times \mathbb{R}^n, \|\dot{\mathbf{q}}\| \leq \delta \implies K(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \leq \gamma,$$

et uniformément positive loin de cet ensemble,

$$(b) \quad \forall \varepsilon > 0, \exists \gamma > 0 \text{ tel que } \forall (\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \Phi \times \mathbb{R}^n, \|\dot{\mathbf{q}}\| \geq \varepsilon \implies K(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \geq \gamma,$$

et si les forces \mathbf{f} agissant sur ce système dérivent comme dans (5.1) d'une fonction potentielle $P(\mathbf{q})$ qui a un minimum $\min_{\Phi} P(\mathbf{q})$ tel que la fonction $P(\mathbf{q}) - \min_{\Phi} P(\mathbf{q})$ soit uniformément continue dans un voisinage de l'ensemble $\mathcal{S}' = \text{Arg min}_{\Phi} P(\mathbf{q})$,

(c) $\forall \gamma > 0, \exists \delta > 0$ tel que $\forall \mathbf{q} \in \Phi, d(\mathbf{q}, \mathcal{S}') \leq \delta \implies P(\mathbf{q}) - \min_{\Phi} P(\mathbf{q}) \leq \gamma,$

et uniformément positive loin de cet ensemble,

(d) $\forall \varepsilon > 0, \exists \gamma > 0$ tel que $\forall \mathbf{q} \in \Phi, d(\mathbf{q}, \mathcal{S}') \geq \varepsilon \implies P(\mathbf{q}) - \min_{\Phi} P(\mathbf{q}) \geq \gamma,$

alors l'ensemble $\mathcal{S} = \mathcal{S}' \times \{\mathbf{0}\}$ est stable au sens de Lyapunov.

Preuve 13 Nous avons besoin de montrer que la fonction

$$V(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = K(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + P(\mathbf{q}) - \min_{\Phi} P(\mathbf{q})$$

avec $K(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ et $P(\mathbf{q})$ satisfaisant les conditions (a), (b), (c) et (d), est une fonction de Lyapunov, elle doit donc vérifier les conditions du théorème 4. On a vu à la section précédente que la condition (iii) était toujours satisfaite, il nous reste donc à montrer que les conditions (i) et (ii) du théorème 4 sont également remplies par rapport à l'ensemble $\mathcal{S} = \mathcal{S}' \times \{\mathbf{0}\}$.

Comme l'espace d'état est un espace vectoriel réel de dimension fini, alors toutes les normes sont équivalentes. On utilisera donc la norme suivante $\|(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\| = \|\mathbf{q}\| + \|\dot{\mathbf{q}}\|$, la distance d'un état $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ à l'ensemble \mathcal{S} sera ainsi donnée par

$$d((\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \mathcal{S}) = d(\mathbf{q}, \mathcal{S}') + \|\dot{\mathbf{q}}\|,$$

ce qui simplifiera la preuve.

Étant donné un $\gamma > 0$ quelconque, choisissons un $\delta_1 > 0$ tel que

$$\forall (\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \Phi \times \mathbb{R}^n, \|\dot{\mathbf{q}}\| \leq \delta_1 \implies K(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \leq \frac{\gamma}{2}$$

d'après (a), et un $\delta_2 > 0$ tel que

$$\forall \mathbf{q} \in \Phi, d(\mathbf{q}, \mathcal{S}') \leq \delta_2 \implies P(\mathbf{q}) - \min_{\Phi} P(\mathbf{q}) \leq \frac{\gamma}{2}$$

d'après (c). Définissons $\delta = \min \{\delta_1, \delta_2\} > 0$, nous avons donc

$$\begin{aligned} \forall (\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \Phi \times \mathbb{R}^n, d((\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \mathcal{S}) \leq \delta &\implies \begin{cases} \|\dot{\mathbf{q}}\| \leq \delta_1 \\ d(\mathbf{q}, \mathcal{S}') \leq \delta_2 \end{cases} \\ &\implies V(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = K(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + P(\mathbf{q}) - \min_{\Phi} P(\mathbf{q}) \leq \gamma, \end{aligned}$$

la condition (ii) du théorème 4 est donc satisfaite.

Étant donné $\varepsilon > 0$, choisissons $\gamma_1 > 0$ tel que

$$\forall (\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \Phi \times \mathbb{R}^n, \|\dot{\mathbf{q}}\| \geq \frac{\varepsilon}{2} \implies K(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \geq \gamma_1$$

d'après (b), et $\gamma_2 > 0$ tel que

$$\forall \mathbf{q} \in \Phi, d(\mathbf{q}, \mathcal{S}') \geq \frac{\varepsilon}{2} \implies P(\mathbf{q}) - \min_{\Phi} P(\mathbf{q}) \geq \gamma_2$$

d'après (d). Définissons $\gamma = \min \{\gamma_1, \gamma_2\} > 0$, nous obtenons donc

$$\forall (\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \Phi \times \mathbb{R}^n, d((\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \mathcal{S}) \geq \varepsilon \implies \begin{cases} \text{soit } \|\dot{\mathbf{q}}\| \geq \frac{\varepsilon}{2} \\ \text{soit } d(\mathbf{q}, \mathcal{S}') \geq \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

mais on obtient dans les deux cas

$$\implies V(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = K(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + P(\mathbf{q}) - \min_{\Phi} P(\mathbf{q}) \geq \gamma,$$

donc la condition (i) du théorème 4 est également satisfaite et nous pouvons conclure que l'ensemble \mathcal{S} est stable au sens de Lyapunov. □

L'intérêt de répartir les conditions (i) et (ii) du théorème 4 sur l'énergie cinétique et l'énergie potentielle réside dans le fait que les conditions sur l'énergie cinétique sont toujours vérifiées, à l'exception de quelques cas pathologiques (lorsque les valeurs propres de la matrice d'inertie $M(\mathbf{q})$ tendent vers zéro ou vers l'infini). Il est donc uniquement nécessaire de vérifier les conditions sur l'énergie potentielle.

Nous avons montré dans la section 5.2.2 que l'énergie était une fonction non-croissante du temps dans le cas d'impacts dissipatifs ou élastiques, $e \in [0, 1]$. Nous pouvons également constater que dans ce cas là, nous avons la propriété suivante

$$d(\dot{\mathbf{q}}^-, 0) \geq d(\dot{\mathbf{q}}^+, 0)$$

donc

$$d((\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}^-), \mathcal{S}) \geq d((\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}^+), \mathcal{S}).$$

Nous avons remarqué dans la section 3.3, qu'une condition locale pourrait être suffisante pour les systèmes dynamiques discontinus satisfaisant cette propriété. Cette condition locale serait alors répercutée en des conditions locales (a) et (c) sur les énergies cinétiques et potentielles.

Précisons qu'un théorème de Lagrange-Dirichlet a déjà été proposé dans [21] pour les systèmes dynamiques non-réguliers. Cependant, ce théorème ne s'appuie pas sur un théorème de Lyapunov existant, on peut alors relever quelques étapes incomplètes dans la preuve. De plus, les résultats obtenus aux chapitres précédents vont nous permettre d'ajouter une analyse de la stabilité asymptotique des systèmes dynamiques lagrangiens non-réguliers.

5.3.2 L'énergie potentielle

Il est donc uniquement nécessaire de vérifier les conditions sur l'énergie potentielle, et nous pouvons observer que ces conditions sont remplies pour un grand nombre de classes de fonctions, comme par exemple les fonctions *coercives*, définie dans [41] par

Définition 14 *Une fonction continue f est coercive si elle satisfait*

$$f(x) \rightarrow +\infty \text{ quand } \|x\| \rightarrow +\infty.$$

Les fonctions qui satisfont cette propriété sont dites également *radialement non-bornées* [44].

Une fonction continue coercive possède toujours un minimum, avec un Arg min compact, ainsi la continuité uniforme dans un voisinage de cet Arg min est immédiate. La coercivité étant une hypothèse plus forte que la propriété "uniformément positive", la condition (d) se trouve donc également automatiquement satisfaite.

Corollaire 15 *Excluant les comportements pathologiques de l'énergie cinétique (si les conditions (a) et (b) du théorème 13 sont satisfaites), si les forces \mathbf{f} agissant sur un système dynamique lagrangien non-régulier dérivent comme dans (5.1) d'une fonction potentielle $P(\mathbf{q})$ coercive et C^1 , alors l'ensemble $\mathcal{S} = \{\text{Arg min}_{\Phi} P(\mathbf{q})\} \times \{0\}$ est stable au sens de Lyapunov.*

L'exemple de la balle qui rebondit.

Il est évident que l'énergie potentielle de la balle, $P(q) = mgq$, est une fonction coercive sur $\Phi = \mathbb{R}^+$, avec

$$\text{Arg min}_{\Phi} P(\mathbf{q}) = \{0\}.$$

Le corollaire 15 prouve ainsi que la position $q = 0$ est stable au sens de Lyapunov.

△

5.4 Attractivité des points d'équilibre et stabilité asymptotique

5.4.1 Attractivité des points d'équilibres

Étant une fonction non-croissante du temps, l'énergie du système vérifie naturellement la condition (ii) du théorème 11 quel que soit l'ensemble Ω . Nous pouvons également observer d'après le lemme 12 et la condition (5.5) que si l'énergie est constante sur un intervalle de temps alors sur cet intervalle

$$dK + dP = 0 \implies \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{h} dt = 0.$$

Maintenant, si le terme dissipatif \mathbf{h} est strictement dissipatif,

$$\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{h} = 0 \implies \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}.$$

Dans ce cas, la condition (iii) du théorème 11 est satisfaite par l'ensemble des états possédant une vitesse nulle,

$$\mathcal{E} = \Omega \cap (\Phi \times \{\mathbf{0}\}).$$

Le plus grand ensemble invariant de cet ensemble \mathcal{E} est par construction l'ensemble des points d'équilibre qui se trouve à l'intérieur de Ω , ce qui nous amène à l'application suivante du théorème 11 :

Théorème 16 *Si les forces \mathbf{f} agissant sur un système dynamique lagrangien non-régulier dérivent comme dans (5.1) d'une fonction potentielle $P(\cdot)$ coercive et C^1 avec un terme strictement dissipatif et si les trajectoires de ce système sont continues par rapport aux conditions initiales, alors s'il existe un ensemble compact $\Omega \subset \Phi \times \mathbb{R}^n$ qui est positivement invariant, toutes les trajectoires commençant dans cet ensemble convergent asymptotiquement quand $t \rightarrow \infty$ vers les points d'équilibre du système qui se trouvent dans cet ensemble.*

L'ensemble \mathcal{S} , que nous avons montré être un ensemble stable en utilisant le théorème 13, est un ensemble de points d'équilibre. Donc s'il n'y a pas d'autres

points d'équilibre dans un voisinage compact positivement invariant de cet ensemble, le théorème 16 permet alors de conclure que cet ensemble est asymptotiquement stable.

Sous les hypothèses du corollaire 15, on peut observer qu'il existe des ensembles de sous-niveaux d'énergie

$$\Omega_\lambda = \{(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \Phi \times \mathbb{R}^n \mid K(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + P(\mathbf{q}) \leq \lambda\}$$

qui sont naturellement des voisinages positivement invariants et compacts de l'ensemble \mathcal{S} . Nous pouvons alors proposer le corollaire suivant :

Corollaire 17 *Sous les hypothèses du corollaire 15, si le terme dissipatif dans (5.1) est strictement dissipatif, si les trajectoires du système dynamique sont continues par rapport aux conditions initiales et s'il n'y a pas d'autres points d'équilibre dans un voisinage de l'ensemble $\mathcal{S} = \{\text{Arg min}_\Phi P(\mathbf{q})\} \times \{\mathbf{0}\}$, alors cet ensemble est asymptotiquement stable au sens de Lyapunov.*

L'exemple de la balle qui rebondit.

En l'absence d'un terme strictement dissipatif dans la dynamique de la balle, il n'est pas possible de conclure sur la stabilité asymptotique du point d'équilibre $(0, 0)$ en utilisant le corollaire 17 ou le théorème 16. Cependant, nous pouvons essayer d'appliquer directement le théorème d'invariance de LaSalle. Pour cela considérons un ensemble de sous-niveaux d'énergie $V(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + mgq$ de la balle

$$\Omega_\lambda = \{(q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \mid V(q, \dot{q}) \leq \lambda\},$$

qui est naturellement compact et invariant. Quelle que soit la condition initiale $x \in \Omega_\lambda$, nous avons besoin d'identifier l'ensemble $\mathcal{E} \subset \Omega_\lambda$ qui rassemble tous les états où la fonction $V(\cdot)$ est stationnaire dans le temps, comme cela a été défini dans le théorème 11.

Tout d'abord, considérons le cas d'impacts strictement dissipatifs, quand $e < 1$: nous avons vu dans la section 5.2.2 que l'énergie de la balle était constante dans deux situations distinctes, durant les phases de vol de la balle, quand $q > 0$, et lorsque la balle repose en permanence sur le sol, quand $q = 0$ et $\dot{q}^+ = \dot{q}^- = 0$. L'ensemble \mathcal{E} peut alors s'écrire comme l'union de deux sous-ensembles de Ω disjoints, $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2$, définis par

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 &= \{(q, \dot{q}) \in \Omega_\lambda : q > 0\} \\ \mathcal{E}_2 &= \{(0, 0)\}. \end{aligned}$$

Il nous reste maintenant à identifier le plus grand sous-ensemble invariant \mathcal{M} de \mathcal{E} . On peut tout d'abord constater que les trajectoires à l'intérieur de l'ensemble \mathcal{E}_1 correspondent à

$$q(t) = q(0) + \dot{q}(0)t - \frac{1}{2}gt^2.$$

Puisqu'il existe obligatoirement un instant t où ces trajectoires vérifieront $\mathbf{q}(t) = 0$, elles seront donc obligées de quitter \mathcal{E}_1 , donc \mathcal{E}_1 n'est pas invariant. Ensuite, nous avons vu dans la section précédente que l'état $(0, 0)$ est stable et donc invariant : cela correspond donc au plus grand sous-ensemble de \mathcal{E} . Donc le théorème 11 permet de conclure que le point d'équilibre $(0, 0)$ est asymptotiquement stable dans le cas d'impacts strictement dissipatifs.

On peut remarquer cependant que dans le cas d'impact parfaitement élastique, quand $e = 1$, l'énergie de la balle est toujours constante, donc l'ensemble \mathcal{E} est égal à l'ensemble Ω_λ , qui est lui-même invariant. Dans ce cas, il est impossible de conclure quant à la stabilité asymptotique de l'état $(0, 0)$. En effet, on peut remarquer que cet état n'est pas asymptotiquement stable dans le cas d'impacts parfaitement élastiques puisque la balle rebondit régulièrement et indéfiniment sur le sol.

Enfin, finissons par un bref commentaire sur cette stabilité asymptotique : quelle que soit la condition initiale dans Ω_λ , les trajectoires convergeront vers $(0, 0)$ comme nous l'avons montré dans le chapitre 2. L'énergie de la balle diminuera jusqu'à s'annuler. Mais nous avons vu que l'énergie diminuait uniquement lorsqu'un impact se produisait, et grâce à la relation (1.13), nous pouvons observer que l'énergie de la balle après un impact $V^+(\tau)$ et l'énergie de la balle avant un impact $V^-(\tau)$ sont reliées par la relation suivante

$$\frac{V^+(\tau)}{V^-(\tau)} = \frac{e^2}{(e-2)^2} < 1.$$

L'évolution de l'énergie de la balle correspond donc à une suite géométrique de raison constante et inférieure à un, elle converge donc vers zéro après un nombre infini d'impacts. Nous voyons donc que dans le cas de la balle qui rebondit de dimension 1, un ensemble infini d'impacts se produit qui stabilise asymptotiquement l'état d'équilibre $(0, 0)$.

Nous avons observé au chapitre 2 que la balle se stabilisait asymptotiquement sur le sol en temps fini. Les outils issus de la théorie de la stabilité au sens de Lyapunov que nous avons proposés ne nous permettent pas de conclure sur la convergence en temps fini.

△

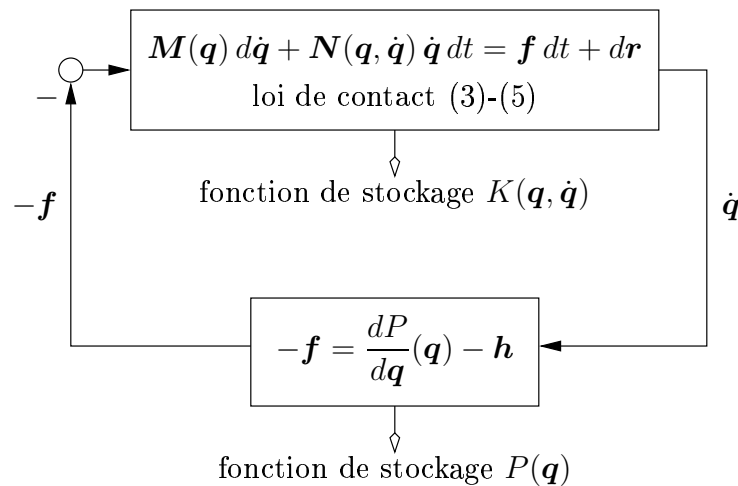


FIG. 5.1 – Une contre-réaction négative entre deux systèmes passifs

5.5 Commande par la passivité

5.5.1 La théorie des systèmes dissipatifs

Le concept de la passivité n'a été introduit dans la théorie du contrôle que récemment (dans les années soixante), les principales contributions dans ce domaine ont été apportées par Kalman [43], Popov [66, 67], Yakubovitch [91] et Willems [87, 88]. La théorie des systèmes dissipatifs permet la synthèse et l'analyse de systèmes contrôlés en se basant sur des considérations énergétiques reliant les signaux d'entrée-sortie du système et de son contrôleur. L'annexe C présente brièvement la base de cette théorie en plein essor [37, 50, 62, 92].

Nous avons vu dans la section 5.2.2 que l'énergie potentielle et l'énergie cinétique vérifiaient respectivement

$$dP \leq \dot{\mathbf{q}}^T (-\mathbf{f}) dt$$

et

$$dK \leq \mathbf{f}^T \dot{\mathbf{q}} dt,$$

ce qui permet de considérer le système étudié comme le bouclage avec une contre-réaction négative de deux systèmes passifs, l'un d'entrée $\dot{\mathbf{q}}$ et de sortie $-\mathbf{f}$ de dynamique (5.1), avec une fonction de stockage $P(\mathbf{q})$, l'autre d'entrée \mathbf{f} , de sortie $\dot{\mathbf{q}}$ et de dynamique (1.5)-(1.12), avec $K(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ comme fonction de stockage comme le montre la figure 5.1.

À ce jour, la théorie des systèmes dissipatifs n'est pas encore adaptée au cas des systèmes dynamiques non-réguliers, mais puisqu'elle est intimement liée aux systèmes dynamiques lagrangiens [48], il ne serait donc pas surprenant que son ex-

tension soit relativement directe à l'aide d'outils tels que ceux que nous avons présenté ici. L'extension du théorème de Lagrange-Dirichlet constitue donc un premier élément dans l'extension de la théorie des systèmes dissipatifs au cas des systèmes dynamiques lagrangiens non-réguliers.

Une propriété fondamentale des systèmes dynamiques dissipatifs réside dans le fait que l'énergie totale stockée dans le système décroît en fonction du temps. On peut remarquer que cette propriété, et plus généralement la théorie de la dissipativité se retrouve finalement étroitement liée avec la théorie de la stabilité au sens de Lyapunov. Nous utilisons d'ailleurs une fonction de Lyapunov basée sur l'énergie du système, un élément clef dans l'approche dissipative.

5.5.2 Commande par la passivité

La commande basée sur la passivité (PBC) est une technique bien établie pour la commande des systèmes mécaniques. En effet en présence d'un système dynamique lagrangien cette technique a pour but de préserver la structure d'Euler-Lagrange en boucle fermée.

La loi de commande (1.1) que nous avons proposée pour le bras manipulateur est basée sur la passivité. Cette loi de commande a été élaborée plus particulièrement par la technique de *potential energy shaping* proposée initialement par [76]. Rappelons que l'énergie totale des systèmes dynamiques lagrangiens se décompose en deux composantes, l'énergie cinétique et l'énergie potentielle. La technique de *potential shaping* peut donc être vu comme une modification de l'énergie potentielle du système dans le but de la remodeler afin qu'elle réponde aux objectifs désirés.

L'exemple du bras manipulateur.

La loi de commande (6.10) du bras manipulateur a été élaborée à partir de la méthode de "potential energy shaping". Nous avons donc façonné une fonction "potentielle" $P(\mathbf{q})$ de manière à ce que les forces extérieures qui dérivent de ce potentiel satisfassent les conditions désirées. Dans notre cas on construit la fonction $P(\mathbf{q})$ suivante

$$P(\mathbf{q}) = \frac{1}{2}(\mathbf{q} - \mathbf{q}_d)^T \mathbf{W}(\mathbf{q} - \mathbf{q}_d) + \mathbf{r}_d^T(\mathbf{q} - \mathbf{q}_d), \quad (5.7)$$

dont la dérivée vaut

$$\frac{dP}{d\mathbf{q}}(\mathbf{q}) = \mathbf{W}(\mathbf{q} - \mathbf{q}_d) + \mathbf{r}_d.$$

La loi de commande (6.10) est obtenue en ajoutant à cette dérivée un terme dissipatif $\mathbf{T} \dot{\mathbf{q}}$ et une pré-compensation des forces non-contrôlées \mathbf{f}_u

$$\mathbf{f}_c = -\frac{dP}{d\mathbf{q}}(\mathbf{q}) - \mathbf{T} \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{f}_u.$$

Ainsi par la méthode de “potential energy shaping”, la somme de l'énergie cinétique du bras manipulateur et de l'énergie potentielle $P(\mathbf{q})$ est assurée d'être toujours décroissante :

$$\begin{aligned} dK + dP &\leq \dot{\mathbf{q}}^T(-\mathbf{W}(\mathbf{q} - \mathbf{q}_d) - \mathbf{T}\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{r}_d)dt + \dot{\mathbf{q}}^T(\mathbf{W}(\mathbf{q} - \mathbf{q}_d) + \mathbf{r}_d)dt \\ &\leq -\dot{\mathbf{q}}^T\mathbf{T}\dot{\mathbf{q}}. \end{aligned}$$

△

5.5.3 Stabilité du bras manipulateur

La stabilité de la loi de commande du bras manipulateur peut maintenant être étudiée à l'aide des outils que nous avons présentés ci-dessus, les corollaires 15. et 17 **L'exemple du bras manipulateur.**

La position désirée \mathbf{q}_d et les forces de contacts désirées \mathbf{r}_d doivent être consistantes avec le modèle de contact (1.10), c'est à dire qu'elles doivent vérifier

$$\mathbf{r}_d \in \mathcal{N}(\mathbf{q}_d).$$

Par construction la fonction potentielle est coercive, elle possède donc un minimum. De plus c'est une fonction convexe. Si l'ensemble Φ est également convexe, alors le théorème VII.1.1.1 de [41] nous permet de conclure que

$$\min_{\Phi} P(\mathbf{q})$$

possède un minimum global atteint à une unique position, qui correspond par construction à la position désirée

$$\text{Arg min}_{\Phi} P(\mathbf{q}) = \{\mathbf{q}_d\}.$$

Le corollaire 15 basé sur le théorème de Lagrange-Dirichlet peut directement s'appliquer, on peut donc conclure que l'ensemble $\{(\mathbf{q}_d, \mathbf{0})\}$ est stable au sens de Lyapunov. Nous avons donc montré sans hypothèse sur l'état des contacts entre le robot et son environnement que l'état $(\mathbf{q}_d, \mathbf{0})$ est stable.

L'état $(\mathbf{q}_d, \mathbf{0})$ étant stable, il est donc invariant, de ce fait il correspond à un point d'équilibre. L'équation de la dynamique (1.5) avec la loi de commande (1.1)

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) d\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} dt = -\frac{dP}{d\mathbf{q}}(\mathbf{q}) dt - \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}} dt + d\mathbf{r}.$$

correspond au point d'équilibre $\{(\mathbf{q}_d, \mathbf{0})\}$, à une équation statique puisque $\dot{\mathbf{q}} + 0$ et $d\dot{\mathbf{q}} = 0$,

$$0 = -\frac{dP}{d\mathbf{q}}(\mathbf{q}) dt + d\mathbf{r}.$$

Or

$$\frac{dP}{d\mathbf{q}}(\mathbf{q}_d) = \mathbf{r}_d,$$

donc

$$0 = \mathbf{r}_d dt + d\mathbf{r},$$

les forces de contact normales $d\mathbf{r}$ en cet état sont donc égales aux forces désirées $\mathbf{r}_d dt$.

Concernant ces forces de contact, le fait de considérer des contacts non-permanents et unilatéraux implique que dans chaque voisinage d'une position où un contact est établi, il existe des positions qui ne sont pas en contact, et donc où la force de contact est réduite à zéro, tel que nous l'avons supposé dans la relation de complémentarité (1.10). Le fait d'avoir des forces de contact qui peuvent instantanément être réduites à zéro n'est pas compatible avec la définition de la stabilité au sens de Lyapunov que nous avons présentée à la section 3.2, à l'opposé de ce qui est fait dans [82], et où des contacts permanents étaient considérés. Dans le cas des systèmes dynamiques lagrangiens non-réguliers, on ne peut donc rien conclure sur la stabilité des forces de contact.

S'il n'y a pas de situation d'impact multiple, ni de point d'équilibre dans un voisinage de l'ensemble $(\mathbf{q}_d, \mathbf{0})$, le corollaire 17 peut être appliqué pour conclure que cet état est asymptotiquement stable : la loi de commande relativement simple (1.1) stabilise asymptotiquement le bras manipulateur à la position désirée.

△

5.5.4 L'intérêt d'une commande basée sur la passivité

Pourquoi avons nous fait le choix d'une loi de commande aussi simple que celle proposée en (1.1), ou plutôt pourquoi n'avons nous pas utiliser une loi de commande plus élaborée, compensant par exemple totalement la dynamique du robot comme avec un *computed torque* ? Remarquons tout d'abord qu'il est impossible de proposer une loi de commande permettant de compenser exactement les comportements impulsionsnels. D'une part les impacts sont des événements parfaitement imprévisibles, il nous sera donc impossible de prévoir les instants exacts auxquels les impacts vont se produire. D'autre part nous utilisons des loi de commandes qui génèrent des forces contrôlables Lebesgue-intégrables, ce qui ne permet pas de réaliser des commandes

impulsives.

Une loi de commande basée sur la passivité du système en boucle fermée semble alors être un choix judicieux car outre le fait que cette loi soit relativement simple (un simple Proportionnel-Dérivé), une fonction candidate comme fonction de Lyapunov se présente naturellement : l'énergie totale du système. En effet, les comportements impulsionnels sont inhérents aux discontinuités de la vitesse du système, ils sont donc directement reliés par le biais de la loi de contact, à l'énergie cinétique du système. Les impacts étant des phénomènes dissipatifs, l'énergie cinétique diminuera instantanément à chaque fois qu'un impact se produira. Les lois de commande compensant totalement la dynamique se révèlent ainsi moins adaptées que les lois de commande basées sur la passivité dans le cas des systèmes dynamiques lagrangiens soumis à des contacts non-permanents.

Les comportements impulsionnels subis par un système dynamique n'altèrent donc pas forcément la stabilité de ce système. Au contraire, de par leur caractère dissipatif, ils sont mêmes parfois à l'origine de la stabilisation asymptotique comme nous l'avons vu dans la section 5.4. Cette stabilisation asymptotique se fait naturellement dans de la balle qui rebondit, mais ces propriétés dissipatives peuvent également être utilisé dans la commande de systèmes hybrides. Ainsi des lois de commande provoquant un comportement Zénon ont été proposées dans le but de stabiliser asymptotiquement des systèmes dynamiques comme par exemple dans [24].

Chapitre 6

Application aux robots marcheurs

Ce chapitre est entièrement consacré à l'application aux robots marcheurs. Dans la réalisation de la marche, les forces de contact s'avèrent jouer un rôle indispensable, mais nous verrons que le caractère sous-actionné des robots marcheurs ne permet pas de disposer de n'importe quelle force de contact. La régulation de la position et de la force d'un robot marcheur ne sera donc pas aussi triviale que celle proposée pour la commande d'un bras manipulateur

6.1 Introduction

Ce chapitre est entièrement consacré à l'étude d'une loi de commande pour les robots marcheurs. Cette application a été motivée en particulier par le fait que le projet BIPOP dispose d'un robot anthropomorphe BIP présenté dans la figure 6.2.

Afin de bien cerner le rôle des forces de contact dans le contexte de la marche des robots bipèdes, nous nous intéresserons tout d'abord à l'exemple de la marche humaine. Nous verrons que ces forces jouent un rôle central pour la réalisation de la marche : il est nécessaire de prendre appui sur le sol pour pouvoir se déplacer. La

marche étant un moyen de locomotion, il est donc également nécessaire de renouveler ces appuis lorsque l'on désire réaliser un déplacement dans l'espace.

Cependant, la prise de contact du pied sur le sol constitue un problème théorique majeur dans l'étude des robots bipèdes [53]. Cette situation inévitable lorsque l'on s'intéresse à la marche n'est souvent pas considérée lors des études de stabilité. En effet, les études de stabilité existantes imposent des hypothèses relativement fortes concernant l'état des contacts, comme par exemple le non-décollement du pied dans une phase de support [64, 83].

Nous souhaitons donc utiliser le cadre de la dynamique non-régulière afin d'étudier la stabilité d'une loi de commande pour les robots marcheurs sans aucune supposition sur l'état des contacts. Comme nous l'avons proposé pour le bras manipulateur, nous désirons réaliser la régulation à une position et à une force désirées. Le passage de la loi de commande du bras manipulateur complètement articulé présentée au chapitre 5.5, à une loi de commande pour les robots marcheurs n'est cependant pas immédiat. Nous verrons dans la section 6.3.2 que contrairement au cas du bras manipulateur, le caractère sous-actionné des robots marcheurs fait que les forces de contact se trouvent étroitement liées à la position du robot.

Une condition d'équilibre devra être satisfaite pour qu'une force de contact puisse être générée. En se basant sur les résultats de la section 6.3.2, nous serons alors capables de proposer une loi de commande pour la régulation de la position et de la force d'un robot marcheur.

6.2 Rôle des forces de contact dans la marche

6.2.1 Nécessité de prendre appui sur le sol

Pour comprendre le rôle essentiel que jouent les forces de contact pour les robots marcheurs, revenons à la description du cycle de la marche humaine [2, 81] qui est représenté dans la figure 6.1. La marche est un mode de locomotion pendant lequel le sujet possède toujours au moins un pied au sol, ce qui donne naissance à une alternance de phases de *simple support* lorsqu'il n'y a qu'un seul pied en contact avec le sol, et des phases de *double support* lorsque les deux pieds sont en contacts avec le sol. On peut alors distinguer deux types de marches, *la marche statique*, pendant laquelle l'équilibre est maintenu en permanence, et la marche dynamique qui est une suite de déséquilibres avant rattrapés. Chez l'homme, la marche dynamique est choisie en situation normale alors que l'on optera pour la marche statique en situation délicate. Dans cette étude, nous nous intéresserons uniquement à l'analyse de stabilité des positions d'équilibre, c'est à dire le cas des systèmes autonomes et nous verrons brièvement à la section 6.4.3 les problèmes supplémentaires à prendre

en compte lorsque l'on s'intéresse aux systèmes non-autonomes.

La marche, de par cette succession de phases de simple support et de double support, permet d'effectuer un déplacement dans l'espace. Il est cependant évident que cette même succession de mouvements effectuée sans contact avec le sol ne donnerait pas lieu à un déplacement dans l'espace, c'est le cas par exemple des cosmonautes en apesanteur. En effet, les actions du pied sur le sol génèrent des forces de contact qui jouent un rôle capital dans la réalisation de déplacements [84].

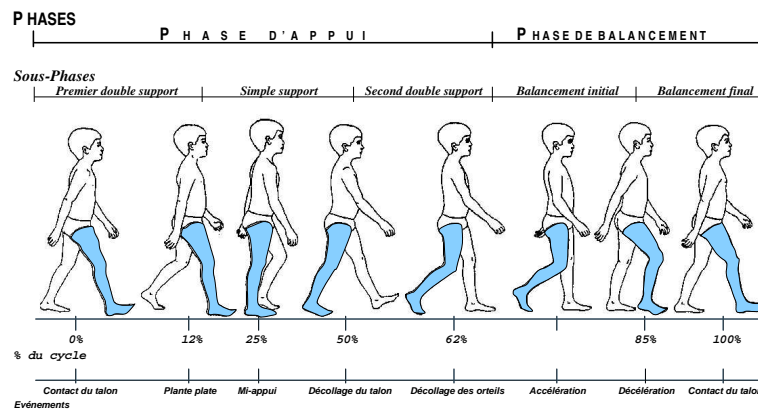


FIG. 6.1 – Phases d'un cycle de marche [81]

Maintenant, reprenons l'exemple du cycle de marche et imaginons que la succession des phases du cycle soit réalisée sur un sol qui n'est fait que de glace vive. Intuitivement, on sait que l'on sera dans l'incapacité de réaliser un déplacement dans l'espace. Le type de contact avec le sol aura donc également une place prépondérante dans la réalisation d'un déplacement. Les frottements interviennent souvent de manière non-négligeable sur le comportement dynamique des systèmes. Dans le cas du robot BIP, présenté dans la figure 6.2, cela a clairement été mis en évidence en identifiant la présence importante de divers types de frottements [68]. Même si, de manière générale on aura plutôt tendance à essayer de limiter les forces de frottements qui sont à l'origine d'une dissipation d'énergie, dans le contexte de la marche, les phénomènes de frottements entre le pied du robot et le sol s'avèrent être indispensables pour générer un déplacement [81, 86].

6.2.2 Remarque sur les forces de réaction

Il est intéressant de rappeler que ces forces de contact sont parfois appelées forces de réaction. Cette dénomination a pour origine le troisième principe de Newton, dont l'énoncé est :

Troisième principe de Newton, le principe d'action-réaction :

La réaction est toujours contraire à l'action, ou encore les actions que deux corps exercent l'un sur l'autre sont toujours égales (en norme) et dirigées en sens contraires.

Dans ce principe, il est clairement indiqué que les forces de réaction s'opposent à une action. Les forces de réaction ne peuvent donc pas être générées sans une action préalable, de même qu'elles ne peuvent pas être à l'origine de la rupture d'un contact. Pour que le pied décolle du sol il faudra donc l'action d'une nouvelle force extérieure. Dans le cas des robots marcheurs passifs [31, 35, 34, 74], ce sont les forces de gravité sur un sol incliné qui provoquent la rupture du contact. Dans le cas des systèmes actionnés, nous verrons à la section 6.3.2 que l'apport d'une énergie extérieure au système permettra de générer une force *commandable* pouvant servir dans le cas des robots marcheurs au décollage du pied.

6.3 Une condition d'équilibre sur les forces de contact

6.3.1 Le sous-actionnement des robots marcheurs

Tout d'abord, notons que le vecteur des coordonnées généralisées \mathbf{q} d'un robot marcheur peut être mis sous la forme suivante [86]

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \end{bmatrix},$$

avec \mathbf{q}_1 un vecteur rassemblant les positions des articulations du robot et \mathbf{q}_2 un vecteur décrivant la position et l'orientation d'un des solides du robot par rapport à son environnement. Dans la figure 6.2, on peut observer l'exemple de la structure du robot bipède BIP possédant 21 degrés de liberté. En effet il est constitué de 15 articulations (6 dans chaque jambe et 3 entre le bassin et le tronc) auxquelles il faut adjoindre 6 variables précisant la position et l'orientation d'un des solides dans l'espace. Dans la partie droite de la figure 6.2, le vecteur \mathbf{q}_1 contient les positions articulaires $[q_1, \dots, q_{15}]$, et le vecteur \mathbf{q}_2 décrit la position et l'orientation du pied droit $[q_{16}, \dots, q_{21}]$. Puisque les actionneurs du robot produisent des couples $\boldsymbol{\tau}$ agissant uniquement sur les positions articulaires, on peut montrer [85] que la commande de ces actionneurs \mathbf{u} aura la structure suivante

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (6.1)$$

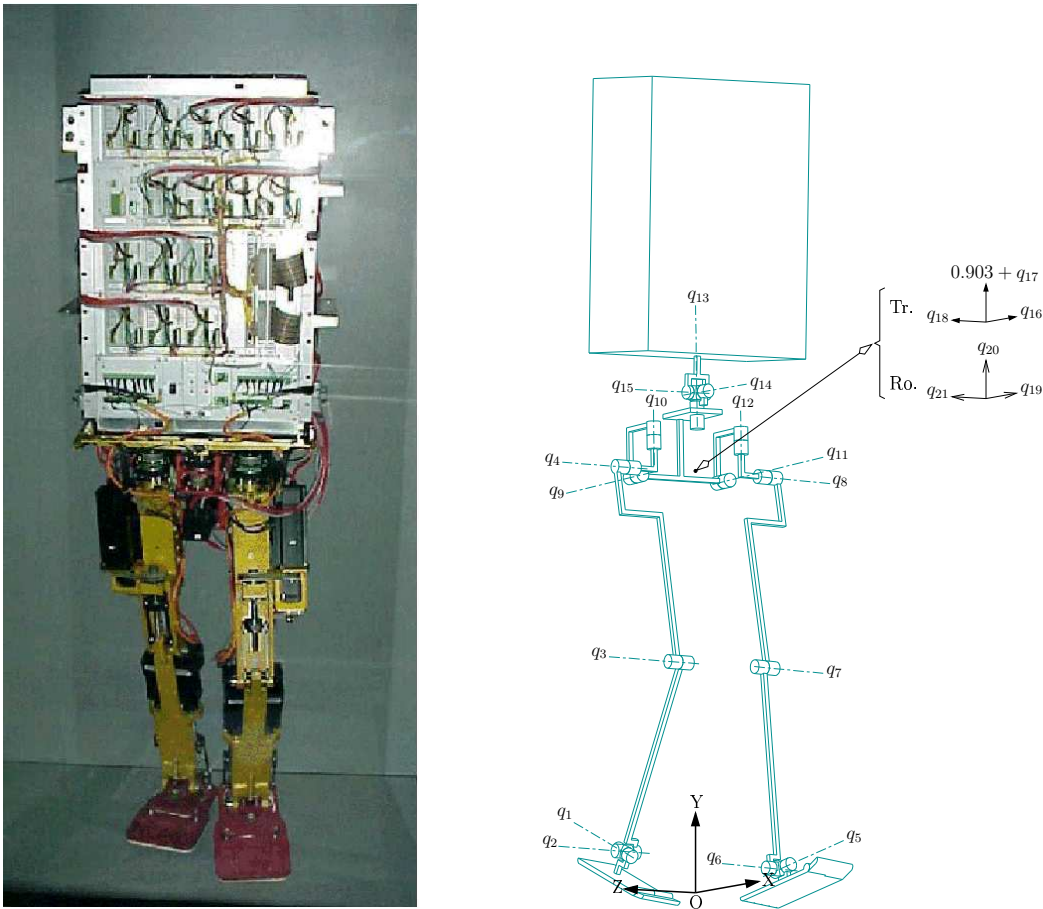


FIG. 6.2 – Bip, entre la réalité et la paramétrisation

6.3.2 Les forces de contact aux positions d'équilibre

La dynamique du robot peut être décrite à partir d'un modèle Lagrangien [45, 28], elle s'écrit donc sous la forme d'une équation différentielle à mesures

$$M(\mathbf{q}) d\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} dt + \mathbf{g}(\mathbf{q}) dt = \mathbf{u} dt + d\mathbf{r} + s dt, \quad (6.2)$$

où nous pouvons rappeler que $M(\mathbf{q})$ est la matrice d'inertie, $\mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}}$ rassemble les effets non-linéaires (tels que les effets centrifuges, gyroscopiques et de Coriolis), $\mathbf{g}(\mathbf{q}) dt$ représente les forces de gravité, \mathbf{u} correspond à la commande envoyée sur les actionneurs du robot, enfin $d\mathbf{r}$ et $s dt$ sont les forces normales et tangentielles de contact.

Maintenant, faisons apparaître la structure (6.1) du vecteur de la commande \mathbf{u}

dans l'équation de la dynamique du robot,

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) d\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} dt + \mathbf{g}(\mathbf{q}) dt = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} dt + d\mathbf{r} + s dt.$$

Nous allons nous intéresser aux points d'équilibre de cette équation, c'est à dire lorsque $\dot{\mathbf{q}} = 0$ et $d\dot{\mathbf{q}} = 0$,

$$d\mathbf{r} + s dt = \mathbf{g}(\mathbf{q}) dt - \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} dt$$

ou

$$\begin{bmatrix} d\mathbf{r}_1 + \mathbf{s}_1 dt \\ d\mathbf{r}_2 + \mathbf{s}_2 dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1(\mathbf{q}) - \boldsymbol{\tau} \\ \mathbf{g}_2(\mathbf{q}) \end{bmatrix} dt. \quad (6.3)$$

D'après (1.9), on peut exprimer les forces de contact normales sous la forme suivante $d\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}'_{\mu 1} d\mu$ et $d\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}'_{\mu 2} d\mu$, où $d\mu$ est une mesure réelle non-négative. Cette équation de mesures est satisfaite si $d\mu = dt$ et

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}'_{\mu 1} + \mathbf{s}_1 \\ \mathbf{r}'_{\mu 2} + \mathbf{s}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1(\mathbf{q}) - \boldsymbol{\tau} \\ \mathbf{g}_2(\mathbf{q}) \end{bmatrix}. \quad (6.4)$$

La relation (6.4) correspond à une condition d'équilibre entre les trois forces qui agissent sur la dynamique du robot (1.3.1) : les forces de contact (normales et tangentielles), la force de gravité et la commande des actionneurs. Du fait de la structure de la commande (6.1), $\boldsymbol{\tau}$ apparaît uniquement dans la partie supérieure de la condition d'équilibre (6.4). Nous voyons ainsi que dans la seconde partie de cette condition d'équilibre, seuls rentrent en jeu la force de gravité et les forces de contact, indépendamment de la commande :

$$\mathbf{r}'_{\mu 2} + \mathbf{s}_2 = \mathbf{g}_2(\mathbf{q}). \quad (6.5)$$

Cette condition d'équilibre peut être reliée à des conditions d'équilibre plus usuelles pour des systèmes mécaniques [51, 85]. En effet chacun des éléments de l'équation de la dynamique (1.3.1) peut se découper selon la même structure que le vecteur \mathbf{q} ou la condition d'équilibre (6.4) [86], la dynamique peut donc s'écrire sous la forme suivante

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_1(\mathbf{q}) \\ \mathbf{M}_2(\mathbf{q}) \end{bmatrix} d\dot{\mathbf{q}} + \begin{bmatrix} \mathbf{N}_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \\ \mathbf{N}_2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} dt + \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1(\mathbf{q}) \\ \mathbf{g}_2(\mathbf{q}) \end{bmatrix} dt = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} d\mathbf{r}_1 + \mathbf{s}_1 dt \\ d\mathbf{r}_2 + \mathbf{s}_2 dt \end{bmatrix}. \quad (6.6)$$

avec

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1(\mathbf{q}) \\ \mathbf{M}_2(\mathbf{q}) \end{bmatrix}, \text{ et } \mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \\ \mathbf{N}_2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \end{bmatrix}.$$

Il a été montré dans [84] que la seconde partie de l'équation de la dynamique se compose d'une équation de Newton et d'une équation d'Euler qui mettent en jeu respectivement l'accélération du centre de masse du robot et son moment dynamique de rotation. Ces équations fournissent une condition d'équilibre qui relie l'action de la gravité aux forces de contacts [51]. L'exemple d'un robot bipède dans un plan nous permettra de faire le lien avec une condition d'équilibre existante souvent utilisée dans l'étude de la stabilité des robots marcheurs.

Exemple.

Prenons l'exemple d'un robot bipède décrit dans un espace à deux dimensions, de masse m dont le centre de masse est situé à la position (x_G, y_G) . Ce robot, soumis à l'action de la gravité dirigée selon $-g\mathbf{e}_y$, se trouve en équilibre sur le sol via k points de contact.

Supposons pour simplifier les calculs que ces points de contact se situent dans le même plan horizontal, à la position $(x_{pk}, 0)$, et que les forces de contacts sont dirigées verticalement le long de \mathbf{e}_y , la composante tangentielle des forces de contact s est donc égale à zéro. Puisque les contacts qui s'exercent entre le robot et son environnement sont unilatéraux, les intensités des forces de contact sont nécessairement $\mathbf{r}_2 = \lambda_i \mathbf{e}_y$, avec $\lambda_i \geq 0$.

Les équations de la dynamique de Newton et Euler appliquées au centre de masse de ce robot en équilibre correspondent à une résultante de translation verticale et un moment de rotation horizontal

$$\begin{cases} -mg + \sum_{k=1}^m \lambda_k = 0, \\ -x_{pk}mg + \sum_{k=1}^m x_{pk}\lambda_k = 0. \end{cases}$$

De ces deux équations, on obtient la condition d'équilibre suivante, reliant la position horizontale du centre de masse du robot à la position horizontale des points de contact et à l'intensité des forces qui y sont générées

$$x_G = \frac{\sum_{k=1}^m x_{pk}\lambda_k}{\sum_{k=1}^m \lambda_k}. \quad (6.7)$$

On peut tout d'abord constater que cette condition d'équilibre n'impose aucune contrainte quant à la coordonnée verticale du centre de masse. Intéressons-nous maintenant à la coordonnée horizontale du centre de masse. Dans le cas d'un unique

contact, $k = 1$, cette expression se réduit à

$$x_G = \frac{x_{p1}\lambda_1}{\lambda_1} = x_{p1},$$

ce qui traduit le fait que les coordonnées horizontales du centre de gravité et de l'unique point de contact sont identiques. L'intensité de la force de contact en ce point est $\lambda_1 = mg$.

Lorsque le système dispose de deux points de contact k_1 et k_2 , le robot est en équilibre lorsque la coordonnée horizontale du centre de gravité satisfait la relation suivante

$$x_G = \frac{x_{p1}\lambda_1 + x_{p2}\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$

où x_{p1} et x_{p2} sont les positions horizontales des points de contact et λ_1 et λ_2 sont les intensités des forces qui y sont générées. On peut remarquer qu'une même position horizontale du centre de gravité x_G peut-être obtenue pour différentes positions horizontales des points de contact si les intensités des forces qui sont exercées en ces points de contact vérifient

$$\lambda_1 = mg \frac{(x_G - x_{p2})}{(x_{p1} - x_{p2})} \geq 0 \text{ et } \lambda_2 = mg \frac{(x_G - x_{p1})}{(x_{p2} - x_{p1})} \geq 0.$$

On peut remarquer que pour ce système plan, les équations de Newton et Euler ne fournissent que deux équations, par conséquent si le robot possède trois points de contact, ces deux relations sont insuffisantes pour déterminer les intensités des forces de contact en ces points. Rappelons que les équations de Newton et Euler correspondent à la partie inférieure de la condition d'équilibre (6.4) du robot. C'est donc la partie supérieure de(6.4)

$$\mathbf{r}'_{\mu 1} = \mathbf{g}_1(\mathbf{q}) - \boldsymbol{\tau},$$

qui permettra de déterminer complètement les intensités des forces de contact. On peut remarquer que cette équation relie la partie \mathbf{r}_1 des forces de contact aux forces de gravité et à la commande, ainsi par le biais de la commande $\boldsymbol{\tau}$, on pourra agir partiellement sur le choix des forces de contact \mathbf{r}_1 .

Rappelons que les forces de contact doivent satisfaire

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}'_{\mu 1} \\ \mathbf{r}'_{\mu 2} \end{bmatrix} \in \mathcal{N}(\mathbf{q}),$$

on observe dans cette relation un couplage non-linéaire entre $\mathbf{r}'_{\mu 1}$ et $\mathbf{r}'_{\mu 2}$, le choix des forces de contact désirées \mathbf{r}_1 sera donc étroitement lié à la partie $\mathbf{r}'_{\mu 2}$ des forces

de contact. En utilisant la relation (6.5), on s'aperçoit que les forces de contact $\mathbf{r}'_{\mu 2}$ sont liées à l'action de la gravité $\mathbf{g}_2(\mathbf{q})$. L'expression précédente peut donc s'écrire

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{g}_2(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \in \mathcal{N}(\mathbf{q}), \quad (6.8)$$

le choix de \mathbf{r}_1 dépendra donc fortement de la position du robot \mathbf{q} . Contrairement au cas du bras manipulateur, le caractère sous-actionné des robots marcheurs impose une étroite relation entre la position du robot et les forces de contact qui s'exercent entre le robot et son environnement.

△

La relation (6.7) correspond à un critère de stabilité utilisé pour l'étude de la stabilité des robots marcheurs qui se base sur la projection du centre de masse du système :

Un système est en "équilibre" si et seulement si la projection verticale de son centre de masse se trouve à l'intérieur de l'enveloppe convexe formée par ses points de contact.

Cependant comme le souligne [85], ce critère ne s'applique que lorsque les points de contacts se situent dans un même plan horizontal, comme dans l'exemple ci-dessus. La figure 6.3 présente un exemple de système satisfaisant ce critère (gauche) puis deux exemples ne le satisfaisant pas. Dans la figure du centre le robot n'est pas en équilibre mais la projection du centre de masse vérifie bien ce critère. Dans la figure de droite, le système est en équilibre grâce aux forces de frottements mais la projection du centre de masse ne se situe pas dans l'enveloppe convexe formée par ses points de contacts. Ce critère ne permet donc pas de déterminer correctement les cas où le système reste en équilibre des cas où il ne le peut pas.

Grâce à cet exemple simple nous avons pu relier la condition d'équilibre (6.3) à une condition d'équilibre entre le centre de masse du système et les points de contact. Des conditions d'équilibre pour des systèmes mécaniques plus complexes sont explicitées dans [51].

6.4 Une loi de commande pour les robots marcheurs

6.4.1 Une loi de commande basée sur la passivité

Nous désirons réaliser une régulation de la position et des forces de contact d'un robot marcheur à une position d'équilibre désirée \mathbf{q}_d et des forces de contact désirées $\mathbf{r}_d dt$. Nous considérons pour des raisons techniques que dans la suite il n'y a pas de frottement sec aux points de contact ainsi la position désirée correspond à un point

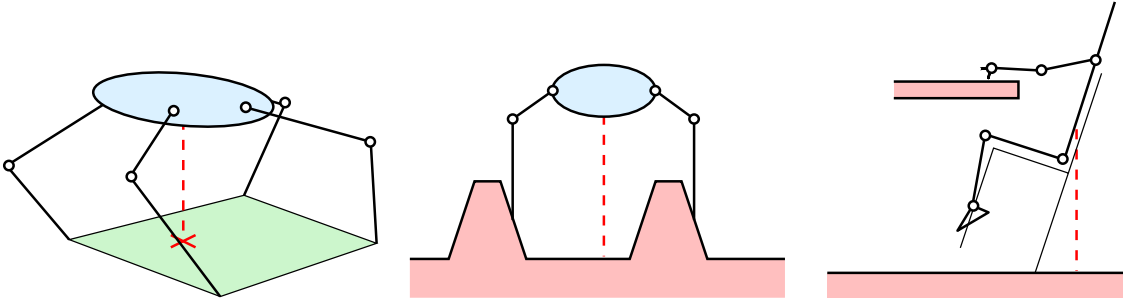


FIG. 6.3 – Remarques sur les critères de stabilité [85].

d'équilibre isolé.

La position et les forces de contact désirées \mathbf{q}_d et $\mathbf{r}'_{\mu d}$ doivent satisfaire la condition d'équilibre (6.8), à la position désirée on aura donc

$$\mathbf{r}'_{\mu d} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}'_{\mu 1d} \\ \mathbf{g}_2(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \in \mathcal{N}(\mathbf{q}_d), \quad (6.9)$$

Une fois la position désirée \mathbf{q}_d et les forces de contact désirées $\mathbf{r}'_{\mu 1d}$ déterminées, la commande $\boldsymbol{\tau}$ peut être choisie pour compenser la partie $\mathbf{g}_1(\mathbf{q}_d)$ de la force de gravité et ainsi pouvoir obtenir les forces de contact désirées $\mathbf{r}'_{\mu 1d}$ à la position désirée \mathbf{q}_d

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{q}_d) = \mathbf{g}_1(\mathbf{q}_d) - \mathbf{r}'_{\mu 1d}.$$

Nous choisissons une loi de commande basée sur la passivité comme nous l'avons fait dans la section 5.5 pour le bras manipulateur, nous choisissons donc le potentiel suivant

$$\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{q}_1) = \frac{1}{2}(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_{1d})^T \mathbf{W}(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_{1d}) + (\mathbf{r}'_{\mu 1d} - \mathbf{g}_1(\mathbf{q}_d))^T (\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_{1d}),$$

où \mathbf{W} est une matrice positive définie et \mathbf{q}_{1d} correspond à la position désirée des articulations du robot.

La dérivée de ce potentiel nous donne

$$\frac{d\tilde{\mathbf{P}}}{d\mathbf{q}_1}(\mathbf{q}_1) = \mathbf{W}(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_{1d}) + \mathbf{r}'_{\mu 1d} - \mathbf{g}_1(\mathbf{q}_d),$$

à laquelle nous ajoutons un terme dissipatif $\mathbf{T}\dot{\mathbf{q}}_1$, où \mathbf{T} est une matrice positive définie, afin d'obtenir la loi de commande suivante

$$\boldsymbol{\tau} = -\mathbf{W}(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_{1d}) + \mathbf{g}_1(\mathbf{q}_d) - \mathbf{r}'_{\mu 1d} - \mathbf{T}\dot{\mathbf{q}}_1, \quad (6.10)$$

qui réalise donc une action de proportionnel dérivé avec pré-compensation de la force de gravité et des forces de contact désirées.

On peut remarquer que le choix d'une loi de commande obtenue par la technique du *potential shaping* ne nous permet pas de compenser la partie $\mathbf{g}_1(\mathbf{q})$ des forces de gravité à tout instant. En effet pour obtenir une loi de commande dérivant d'un potentiel, on ne peut compenser que le terme constant $\mathbf{g}_1(\mathbf{q}_d)$ correspondant à la partie $\mathbf{g}_1(\mathbf{q})$ des forces de gravité qu'à la position désirée.

6.4.2 Stabilité de la loi de commande

Les forces Lebesgue-intégrables agissant sur la dynamique du robot marcheur (6.2) dérivent du potentiel $P(\mathbf{q})$ suivant

$$P(\mathbf{q}) = G(\mathbf{q}) + \tilde{P}(\mathbf{q}_1),$$

où $G(\mathbf{q})$ correspond au potentiel des forces de gravité.

Le corollaire 15 basé sur le théorème de Lagrange-Dirichlet peut directement s'appliquer, il permet de conclure que l'ensemble $\mathcal{S} = \mathcal{S}' \times \{\mathbf{0}\}$ est stable, avec $\mathcal{S}' = \underset{\Phi}{\text{Arg min}} P(\mathbf{q})$. Identifions les positions du robots appartenant à l'ensemble \mathcal{S}' .

Par construction, la fonction $\tilde{P}(\mathbf{q}_1)$ est coercive, elle possède donc un minimum. Ce minimum a été choisi pour être atteint à la position désirée \mathbf{q}_{1d} ,

$$\underset{\Phi}{\text{Arg min}} \tilde{P}(\mathbf{q}_1) = \mathbf{q}_{1d}.$$

On peut remarquer que le minimum de $\tilde{P}(\mathbf{q}_1)$ est atteint indépendamment de la position \mathbf{q}_2 . La partie de l'Arg min de $P(\mathbf{q})$ correspondant à \mathbf{q}_2 sera donc imposée par

$$\underset{\Phi}{\text{Arg min}} G(\mathbf{q}).$$

On suppose dans la suite que

$$\underset{\Phi}{\text{Arg min}} G(\mathbf{q}) = \mathcal{S}''$$

où

$$\mathcal{S}'' = \left\{ \mathbf{q}_d = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{1d} \\ \mathbf{q}_{2d} \end{bmatrix} \in \Phi \mid \underset{\Phi}{\text{Arg min}} G(\mathbf{q}) = \mathbf{q}_d \right\}.$$

Rappelons que le vecteur \mathbf{q}_2 décrit la position et l'orientation d'un des solides du robot par rapport à son environnement. Dans l'exemple du robot en équilibre sur un plan horizontal soumis à l'action de la gravité, pour une position désirée donnée \mathbf{q}_{1d} , l'ensemble \mathcal{S}'' contient un ensemble infini de positions \mathbf{q}_{2d} . En effet

à n'importe quel endroit sur le sol, le robot sera en équilibre. Dans cet exemple l'ensemble $\mathcal{S}' = \underset{\Phi}{\text{Arg min}} P(\mathbf{q})$ correspond donc à

$$\mathcal{S}' = \left\{ \mathbf{q}_d = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{1d} \\ \mathbf{q}_{2d} \end{bmatrix} \in \Phi \mid \forall x \in \mathbb{R}, \mathbf{q}_{2d} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Le corollaire 15 permet donc de conclure que l'ensemble $\mathcal{S} = \mathcal{S}' \times \{\mathbf{0}\}$ est stable au sens de Lyapunov. Cet ensemble étant invariant, il correspond à un ensemble de positions d'équilibre pour lesquelles l'équation (6.2) se réduit à

$$0 = - \begin{bmatrix} \mathbf{r}'_{\mu 1d} dt \\ \mathbf{g}_2(\mathbf{q}_d) dt \end{bmatrix} + d\mathbf{r}$$

En exprimant $d\mathbf{r} = \mathbf{r}'_{\mu} d\mu$, cette équation de mesures est satisfaite si $d\mu = dt$ et si

$$0 = - \begin{bmatrix} \mathbf{r}'_{\mu 1d} \\ \mathbf{g}_2(\mathbf{q}_d) \end{bmatrix} + \mathbf{r}'_{\mu},$$

d'après (6.9) les forces de contact correspondent donc bien aux forces de contact désirées $d\mathbf{r} = \mathbf{r}_d dt$.

Comme pour le bras manipulateur le corollaire 17 nous permet de conclure sur la stabilité asymptotique de la position d'équilibre désirée lorsqu'il n'y a pas de situation d'impact multiple ni de point d'équilibre dans un voisinage de $(\mathbf{q}_d, 0)$. Mais comme nous l'avons expliqué au chapitre 4, la stabilisation du pied sur le sol correspond par exemple à un impact multiple et il est peu probable que toutes les conditions soient remplies pour que dans ce cas là, les trajectoires soient continues par rapport aux conditions initiales. La stabilisation asymptotique reste donc un problème non-résolu dans certain nombre de cas.

6.4.3 Le problème de la poursuite de trajectoire

Concluons ce chapitre par un aperçu des difficultés qui apparaissent dans l'analyse de stabilité lorsqu'on considère le problème de la poursuite de trajectoires. Reprenons les notations introduites au chapitre 3, où les trajectoires sont décrites en utilisant la notion de flot $X(t, x)$, x correspondant à l'état initial. Dans l'objectif de la poursuite de trajectoire, toutes les trajectoires $X(t, \cdot)$ doivent converger vers une trajectoire de référence $X_d(t)$, on ne s'intéresse plus alors à la stabilité d'un point d'équilibre, on s'intéresse à la stabilité de l'erreur de poursuite $X(t, \cdot) - X_d(t)$.

On peut remarquer que lorsqu'on s'intéresse à la poursuite de trajectoire d'un système dynamique, on se place dans le cadre des systèmes non-autonomes puisque

la dynamique du système varie en fonction du temps, la référence du temps initial t_0 doit maintenant être incluse dans les conditions initiales.

Intéressons-nous à la question de la stabilité. Dans le cas des systèmes non-autonomes, il nous faut préciser la définition 3 de la stabilité au sens de Lyapunov afin de faire apparaître la dépendance de la stabilité par rapport au temps initial [44].

Définition 18 *Un ensemble fermé invariant $\mathcal{S} \subset \mathcal{X}$ est*

– *stable si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ tel que*

$$d(X(t_0, x), \mathcal{S}) \leq \delta \implies \forall t \geq t_0 \geq 0, d(X(t, x), \mathcal{S}) \leq \varepsilon.$$

– *uniformément stable si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ indépendant de t_0 tel que*

$$d(X(t_0, x), \mathcal{S}) \leq \delta \implies \forall t \geq t_0 \geq 0, d(X(t, x), \mathcal{S}) \leq \varepsilon.$$

La stabilité uniforme est donc obtenue lorsqu'un ensemble est stable indépendamment du temps initial t_0 .

Nous avons proposé au chapitre 3 un théorème permettant l'analyse de la stabilité des systèmes dynamiques autonomes indépendamment de la condition de continuité des trajectoires par rapport aux conditions initiales,

$$\forall x_0 \in \mathcal{X}, \forall t \in \mathbb{R}, x \rightarrow x_0 \implies X(t, x) \rightarrow X(t, x_0).$$

Nous avons vu au chapitre 4 que cette condition s'avère indispensable uniquement lorsque la question de la stabilité asymptotique est abordée.

Dans le cas de la poursuite de trajectoire, l'ensemble \mathcal{S} n'est plus invariant. Il correspond à la trajectoire désirée $X_d(\cdot)$ qui est maintenant une fonction du temps. La définition de la stabilité au sens de Lyapunov correspond alors directement à une condition de continuité des trajectoires par rapport aux conditions initiales puisque la condition de stabilité peut s'écrire sous la forme suivante : pour tout $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que

$$d(X(t_0, x), X_d(t_0)) \leq \delta \implies \forall t \geq t_0 \geq 0, d(X(t, x), X_d(t)) \leq \varepsilon.$$

La continuité des trajectoires par rapport aux conditions initiales n'est cependant pas une condition suffisante pour prouver la stabilité des systèmes dynamiques non-autonomes et non-réguliers comme le montre l'exemple suivant.

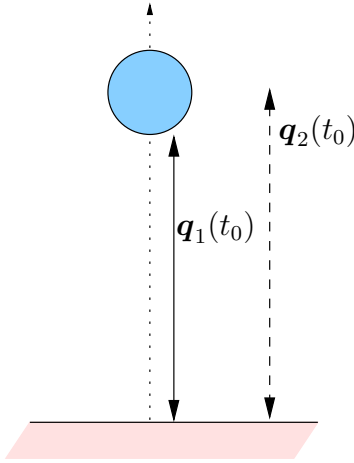


FIG. 6.4 – Deux trajectoires relativement proches.

Exemple.

Prenons l'exemple d'une balle animée d'une vitesse constante rebondissant contre une parois plane, on considère le choc parfaitement élastique. La trajectoire de cette balle débutant à t_0 avec les conditions initiales $(\mathbf{q}_1, \dot{\mathbf{q}}_0)$ est représentée dans la figure 6.4. On considère une seconde trajectoire débutant au même instant t_0 avec la même vitesse initiale mais à une position légèrement plus éloignée de la contrainte $(\mathbf{q}_2, \dot{\mathbf{q}}_0)$, sa trajectoire est repérée par des pointillés dans la figure 6.4. La figure 6.5 représente à la fois l'évolution des positions des deux balles $\mathbf{q}_1(t)$ et $\mathbf{q}_2(t)$ en fonction du temps et l'évolution des erreurs de position et de vitesse existant entre ces deux trajectoires. Ces deux courbes permettent ensuite de déterminer l'erreur "globale" entre les deux trajectoires, définie par

$$e(t) = \|\mathbf{q}_1(t) - \mathbf{q}_2(t)\| + \|\dot{\mathbf{q}}_1(t) - \dot{\mathbf{q}}_2(t)\|.$$

Revenons maintenant à la définition de la stabilité au sens de Lyapunov. Il est immédiat de constater que la condition de stabilité énoncée dans la définition ci-dessus implique la condition suivante en norme ∞ : $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ tel que pour tout $t \geq t_0$

$$d(X(t_0, x), Xd(t_0)) \leq \delta \implies \|X(., x) - Xd(.)\|_\infty \leq \varepsilon.$$

Or, on s'aperçoit d'après la figure 6.5 que l'erreur ne vérifie pas cette définition de la stabilité, car elle subit une discontinuité lors des impacts. Cette discontinuité de l'erreur dépend donc du coefficient de restitution et de la vitesse avant l'impact (plus

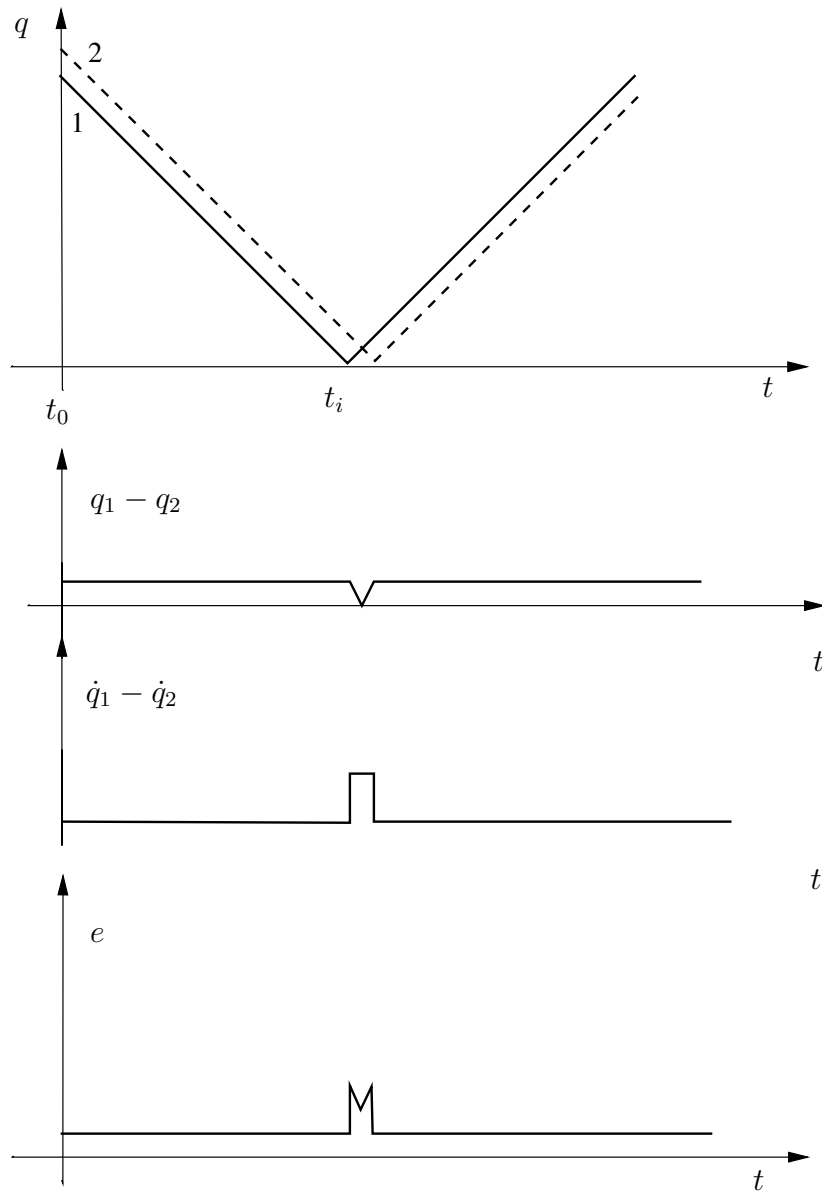


FIG. 6.5 – Deux trajectoires relativement proches.

la vitesse est grande plus l'erreur est grande). Lorsque le coefficient de restitution sera supérieur à zéro, une discontinuité sur l'erreur se produira nécessairement lors des impacts, le système dynamique ne sera plus stable au sens de Lyapunov. Remarquons que dans le cas de chocs parfaitement inélastiques, la balle glisse le long de la contrainte après le premier impact, l'erreur s'annule donc dès que le sol est atteint par la seconde trajectoire, la définition de la stabilité s'applique dans ce cas là.

△

Pour remédier à ce problème, d'autres définitions de la stabilité ont donc été proposées pour l'étude de la stabilité des systèmes dynamiques lagrangiens non-réguliers [23], faisant référence à des notions de stabilité *faible* et *forte*. Ces définitions qui considèrent la stabilité du système "en dehors des zones d'impacts", ont permis d'analyser la stabilité de la poursuite de trajectoires de bras manipulateurs complètement actionnés [14, 15]. Une autre solution a été proposée dans [73] qui consiste à définir une nouvelle norme pour laquelle cette discontinuité n'apparaîtrait pas.

Chapitre 7

Conclusion

Dans ce travail, nous avons choisi d'utiliser le cadre de la dynamique non-régulière car il offre un cadre mathématique rigoureux parfaitement adapté pour décrire les systèmes dynamiques lagrangiens soumis à des contacts non-permanents entre solides parfaitement rigides. Nous avons vu que ce cadre utilise des outils mathématiques issus de l'analyse convexe et de la théorie de la mesure, ainsi l'équation de la dynamique s'écrit sous la forme d'une équation différentielle à mesures, et la vitesse est une fonction à variation localement bornée. L'automatique de ces systèmes dynamiques commence tout juste à apparaître et les théories élémentaires, comme celle de la stabilité au sens de Lyapunov, nécessitent encore d'être établies. Cette observation constituait donc l'objectif de ce travail : l'étude de la stabilité des systèmes dynamiques non-réguliers.

Nous nous sommes tout d'abord intéressés au cadre plus général des systèmes dynamiques décrits par des flots pouvant présenter des discontinuités dans le temps, ce cadre englobe donc le cas des systèmes dynamiques lagrangiens non-réguliers. Nous avons alors essayé d'établir les premières bases permettant l'analyse de la stabilité de ces systèmes. Nous avons proposé par exemple un théorème de stabilité au sens de Lyapunov et une extension du théorème de LaSalle pour les systèmes dynamiques décrits par des flots pouvant subir des discontinuités. Ces théorèmes s'avèrent être relativement similaires aux théorèmes établis pour des systèmes continus, ils nécessitent toutefois des hypothèses supplémentaires, comme par exemple la continuité des trajectoires par rapport aux conditions initiales dans le cas du théorème de LaSalle.

Dans le cas des systèmes dynamiques lagrangiens non-réguliers, nous avons vu que l'énergie du système se trouve être une candidate naturelle comme fonction de Lyapunov. En se basant sur les propriétés de l'énergie, nous avons pu proposer un théorème de Lagrange-Dirichlet permettant d'analyser la stabilité et la stabilité asymptotique des systèmes dynamiques lagrangiens non-réguliers. Nous avons en-

suite souligné l'intérêt des lois de commandes basées sur la passivité, dont l'objectif en boucle fermée est de préserver les propriétés de cette fonction énergie.

Tout au long des cinq premiers chapitres nous avons proposé deux exemples permettant d'illustrer les nouveaux concepts que nous avons introduits. Dans l'exemple de la bille qui rebondit sur un sol plat, l'analyse de la stabilité asymptotique de la balle à travers un comportement de type Zénon par le théorème de LaSalle constitue un résultat nouveau. Le deuxième exemple avait pour objectif l'étude de la stabilité d'une loi de commande en position et en force pour un bras manipulateur. Les théorèmes que nous avons établis nous ont ainsi permis de conclure sur la stabilité asymptotique de cette loi de commande sans aucune supposition sur l'état des contacts, ce qui constitue également un résultat nouveau.

Enfin dans le dernier chapitre nous nous sommes intéressés au cas des robots marcheurs. Contrairement au bras manipulateur où le choix d'une position désirée et le choix d'une force de contact désirée étaient totalement indépendants, le caractère sous-actionné des robot marcheurs a pour conséquence de lier étroitement les forces de contact et la position du robot.

Perspective

Dans ce travail nous n'avons que partiellement pris en compte les forces de frottement. Par exemple nous n'avons pas considéré de frottement sec dans l'élaboration des lois de commandes du bras manipulateur et du robot bipède. Ceci vient du fait que le théorème de Lagrange-Dirichlet permet de conclure sur la stabilité d'un ensemble d'état, position-vitesse, dont les positions sont déterminées par l'Argmin de la fonction potentielle. Il existe un théorème d'analyse convexe fournissant les conditions nécessaires pour l'existence d'un tel minimum lorsque la fonction potentielle est coercive et convexe et lorsque l'ensemble Φ est convexe. Si l'on ajoute des forces de frottement sec, il faudrait pouvoir identifier les conditions nécessaires pour qu'un (ou plusieurs) minimum existe toujours et pour pouvoir l'identifier. D'autre part, nous n'avons pas pris en compte le frottement lors des impacts, mais nous avons vu à la section 1.3 qu'une formulation les intégrant était possible. Il nous semble donc envisageable de pouvoir compléter cette étude en prenant en compte le frottement de Coulomb.

L'étude des systèmes non-autonomes constitue également une perspective importante de ce travail. Nous avons présenté au chapitre précédent les difficultés liées à l'étude des systèmes non-autonomes lorsqu'on s'intéresse au cas des systèmes dynamiques non-réguliers. Nous avons également évoqué les choix possibles pour poursuivre dans cette direction.

De plus, nous avons vu que la théorie sur les systèmes dissipatifs n'avait pas

encore été adaptée aux systèmes dynamiques lagrangiens non-réguliers. Il reste donc un champ encore quasiment inexploré dans cette direction. Enfin, les résultats de stabilité que nous avons obtenus ne constituent que quelques bases préliminaires, le vaste domaine de l'étude de la stabilité des systèmes dynamiques lagrangiens non-réguliers reste encore à être découvert.

Annexe A : Les systèmes hybrides

Définition des systèmes hybrides

Les systèmes hybrides sont généralement présentés de la manière suivante [30, 42].

Définition 19 (Automate hybride) *Un automate hybride est défini comme étant une collection (Q, X, I, f, E) , où Q et X sont des ensembles de variables discrètes et continues respectivement, I est un ensemble de conditions initiales, enfin f et E décrivent respectivement l'évolution continue et discrète des états.*

Un état discret combiné avec un état issu d'une dynamique correspond à un noeud de l'automate. L'idée générale de la structure d'un automate hybride peut être vue à la figure 7. Il convient d'ajouter à cette définition la définition suivante

Définition 20 (Trajectoire de temps hybride) *Une trajectoire de temps hybride est une suite finie ou infinie d'intervalles de la droite réelle, $\tau = \{I_i\}$, $i \in \mathbb{N}$ satisfaisant les conditions suivantes :*

- I_i est fermé, sauf si τ est une suite finie et I_i est le dernier intervalle auquel cas il peut être ouvert sur la droite
- Soit $I_i = [\tau_i, \tau'_i]$, alors pour tout i , $\tau_i \leq \tau'_i$ et pour tout $i > 0$, $\tau_i = \tau'_{i-1}$.

Les trajectoires de temps hybrides peuvent tendre vers l'infini si τ est une suite infinie ou si τ est une suite finie qui se termine par un intervalle de temps de la forme $[\tau_N, \infty)$. Enfin, on définit l'exécution d'un automate

Définition 21 (Exécution d'un automate) *Une exécution \mathcal{X} d'un automate hybride H est une collection $\mathcal{X} = (\tau, q, x)$, satisfaisant*

- conditions initiales : $(q(\tau_0), x(\tau_0)) \in I$

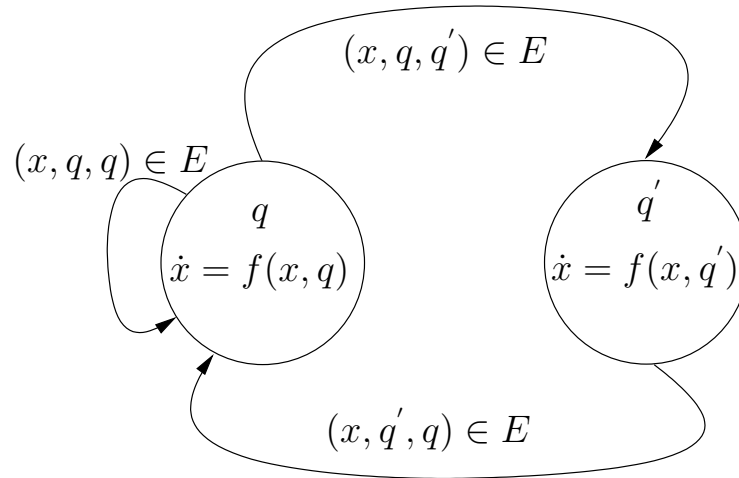


FIG. 7.1 – Structure d'un système hybride

- *évolution discrète* : $(x(\tau'_{i-1}), q(\tau_i)) \in E$, pour tout i
- *évolution continue* : pour tout i avec $\tau_i < \tau'_i$, x et q sont continus sur $[\tau_i, \tau'_i]$ et pour tout $t \in [\tau_i, \tau'_i)$, on a

$$\frac{dx}{dt}(t) = f(q(t), x(t)).$$

Une exécution $\mathcal{X} = (\tau, q, x)$ est dite infinie, si τ est une suite infinie, ou si $\sum_i (\tau'_i - \tau_i) = \infty$. De plus, une exécution est dite admissible si $\sum_i (\tau'_i - \tau_i) = \infty$, et elle est dite de type **Zénon** si elle est infinie mais non-admissible. Pour une exécution de type Zénon $\mathcal{X} = (\tau, q, x)$, on définit le temps du type Zénon comme $\tau_\infty = \sum_i (\tau'_i - \tau_i) < \infty$. Ce qui signifie que le système hybride a un nombre infini de transitions discrètes en un temps fini, τ_0, τ_∞ .

Annexe B : Les systèmes dynamique de complémentarité

Définition des problèmes de complémentarité

Les problèmes de complémentarité sont généralement présentés de la manière suivante [20, 22].

Définition 22 (Problème Linéaire de Complémentarité) $LCP(q, M)$ (Linear Complementarity Problem) : soit un vecteur q de dimension m et une matrice $m \times m$, on peut trouver un vecteur λ de dimension m tel que

$$\lambda \geq 0; \quad w := q + M\lambda \geq 0; \quad \lambda^T w = 0.$$

Le $LCP(q, M)$ peut s'écrire également sous la forme plus compacte suivante

$$0 \leq \lambda \perp q + M\lambda \geq 0.$$

La notation $w \perp \lambda$ exprime la relation d'orthogonalité qu'il existe entre les vecteurs w et λ , et les inégalités doivent être interprétée séparément pour chacun de ces deux vecteurs.

Définition des systèmes de complémentarité

Il est possible d'étendre le problème linéaire de complémentarité aux cas des systèmes dynamiques non-réguliers. Ces systèmes, appelés systèmes de complémentarité (CS) peuvent alors se mettre sous la forme suivante

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u, \lambda), \\ w &= g(x, u, \lambda), \\ 0 &\leq w \perp \lambda \geq 0 \end{aligned}$$

une loi de réinitialisation de l'état x

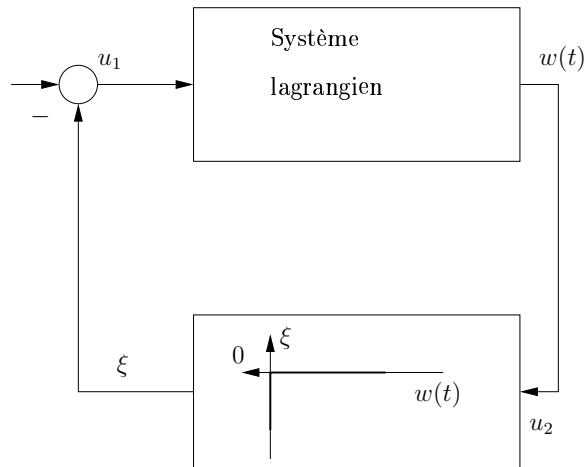


FIG. 7.2 – Système de complémentarité

où x représente le vecteur d'état du système, w un signal de sortie mesurable qui est utilisé pour le rebouclage du système et déterminé par l'application g , u correspond au signal de commande. λ et w constituent une paire de variables de complémentarité qui peut se représenter sous la forme d'une application multivaluée, comme le montre la figure 7.2.

Annexe C : Les systèmes dissipatifs

Définition

Dans cette annexe, nous allons présenter les principales définitions et propriétés des systèmes dissipatifs [48].

Définition 23 *Un système avec une entrée u et une sortie y où $u(t), y(t) \in \mathbb{R}^n$ est passif si il existe une constante β telle que*

$$\int_0^T y^T(t)u(t)dt \geq 0$$

pour toutes fonctions u , et tout $T \geq 0$. Si de plus, il existe des constantes $\delta \geq 0$ et $\varepsilon \geq 0$ telles que

$$\int_0^T y^T(t)u(t)dt \geq \beta + \delta \int_0^T u^T(t)u(t)dt + \varepsilon \int_0^T y^T(t)y(t)dt,$$

pour toutes fonctions u , et tout $T \geq 0$, alors le système est strictement dissipatif en entrée si $\delta > 0$, strictement passif en sortie si $\varepsilon > 0$ et strictement passif si $\delta > 0$ et $\varepsilon > 0$.

Considérons maintenant un système causal et non-linéaire $\Sigma : u(t) \rightarrow y(t)$ possédant dans l'espace d'état la représentation suivante

$$(\Sigma) \begin{cases} \dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x) + j(x)u \end{cases}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $u, y \in \mathbb{R}^m$, f, g et h sont \mathcal{C}^∞ et $f(0)=h(0)=0$.

On appelle $w(t)$ le taux d'approvisionnement, *the supply rate*, qui est tel que pour tout u et $x(0)$ et pour tout $t \in \mathbb{R}^+$

$$\int_0^t |w(s)|ds < \infty.$$

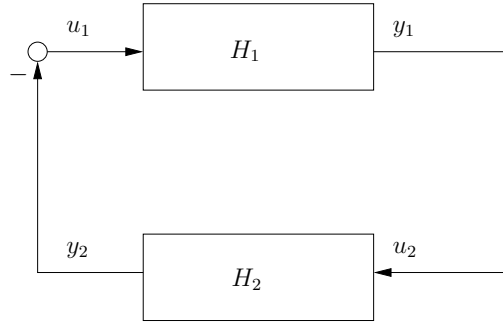


FIG. 7.3 – Les systèmes H_1 et H_2 en boucle fermée.

Définition 24 Un système Σ est dissipatif s'il existe une fonction de stockage $V(x) \geq 0$ tel que l'inéquation suivante soit vérifiée

$$V(x) \leq V(x(0)) + \int_0^t w(s)ds; \quad \forall u, \forall x(0), \forall t \geq 0.$$

Théorèmes sur la passivité

Théorème 25 Supposons que deux systèmes H_1 et H_2 respectivement d'entrée u_1 et u_2 et de sorties y_1 et y_2 comme l'illustre la figure 7.3, sont pseudo-strictement passifs, i.e.

$$\begin{aligned} \int_0^T y_1^T u_1 dt + \beta_1 &\geq \delta_1 \int_0^T u_1^T u_1 dt + \varepsilon_1 \int_0^T y_1^T y_1 dt \\ \int_0^T y_2^T u_2 dt + \beta_2 &\geq \delta_2 \int_0^T u_2^T u_2 dt + \varepsilon_2 \int_0^T y_2^T y_2 dt \end{aligned}$$

avec $\delta_1 + \varepsilon_1 \geq 0$ et $\delta_2 + \varepsilon_2 \geq 0$. Le système $H_1 - H_2$ en boucle fermée est stable à gains finis si : $\delta_1 \geq 0$, $\varepsilon_2 \geq 0$ et $\varepsilon_1 + \delta_2 > 0$, avec ε_1 ou δ_2 possiblement négatif.

Corollaire 26 Le systèmes $H_1 - H_2$ en boucle fermé est stable à gains finis si :

- (1) H_1 est passif et H_2 est strictement passif en entrée i.e. $\varepsilon_1 \geq 0$, $\varepsilon_2 > 0$, $\delta_1 \geq 0$ $\delta_2 \geq 0$.
- (2) H_1 est strictement passif en sortie et H_2 est passif i.e. $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 \geq 0$, $\delta_1 \geq 0$ $\delta_2 \geq 0$.

Bibliographie

- [1] V. Acary, B. Brogliato, A. Daniilidis, and C. Lemaréchal. On the equivalence between complementarity systems, projected systems and unilateral differential inclusion. Technical Report 5107, Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique, 2004.
- [2] P. Allard, I.A. F Stokes, and J.-P. Blanche. *Three-dimensional analysis of human movement*. Human Kinetics, 1994.
- [3] Rajeev Alur, Costas Courcoubetis, Thomas A. Henzinger, and Pei-Hsin Ho. Hybrid automata : An algorithmic approach to the specification and verification of hybrid systems. In *Hybrid Systems*, pages 209–229, London, UK, 1993. Springer-Verlag.
- [4] A. Bacciotti and F. Ceragioli. Stability and stabilization of discontinuous systems and nonsmooth lyapunov functions. *ESAIM : COCV*, 4 :361–376, june 1999.
- [5] D. Bainov and P.S. Simeonov. *Systems with impulse effect : stability, theory, and applications*. Chichester [England] : New York : Ellis Horwood ; Halsted Press, 1989.
- [6] P. Ballard. The dynamics of discrete mechanical systems with perfect unilateral constraints. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 154 :199–274, 2000.
- [7] P. Ballard. Formulation and well-posedness of the dynamics of rigid-body systems with perfect unilateral constraints. *Philosophical Transactions : Mathematical, Physical & Engineering Sciences*, 359(1789) :2327 – 2346, 2001.
- [8] S. Ballard, P. and Basseville. Existence and uniqueness for dynamical unilateral contact with coulomb friction : a model problem. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 39 :59–77, 2004.
- [9] A. Balluchi, L. Benvenuti, B. Di Benedetto, C. Pinello, and A. Sangiovanni-Vicentelli. Automotive engine control and hybrid systems : Challenges and opportunities. In *Proceedings of the IEEE*, volume 88, pages 888–912, July 2000.
- [10] S. Basseville. *Dynamique et stabilité d'un système discret en présence de contact et de frottement*. PhD thesis, Université d'Aix-Marseille, 2004.

- [11] S. Basseville, A. Leger, and E. Pratt. Investigation of the equilibrium states and their stability for a simple model with unilateral contact and coulomb friction. *Archive of Applied Mechanics*, 73 :409–420, 2003.
- [12] G. Batt, D. Ropers, H. de Jong, J. Geiselmann, M. Page, and D. Schneider. Qualitative analysis and verification of hybrid models of genetic regulatory networks : Nutritional stress response in *Escherichia coli*. In M. Morari and L. Thiele, editors, *Eighth International Workshop on Hybrid Systems : Computation and Control, HSCC 2005*, volume 3414 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 134–150. Springer, 2005.
- [13] A. Bemporad, G. Ferrari-Trecate, and M. Morari. Observability and Controllability of Piecewise Affine and Hybrid Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45(10) :1864–1876, october 2000.
- [14] J. M. Bourgeot. *Contrôle de Systèmes Mécaniques non Réguliers*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble, 2004.
- [15] J.-M. Bourgeot and B. Brogliato. Tracking control of Lagrangian complementarity systems. *Int. J. of Bifurcation and Chaos, special issue on Nonsmooth Dynamical Systems*, 15(3), 2005.
- [16] M. S. Branicky. Multiple lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems, 1998.
- [17] R.W. Brockett. *Hybrid Models for Motion Control Systems*, pages 29–53. Birkhauser, Boston,, 1993.
- [18] B. Brogliato. *Nonsmooth Mechanics*. Springer, 1999. 2nd edition.
- [19] B. Brogliato. Comments on "dynamical properties of hybrid automata", iee trans. on automatic control, vol. 48, pp.2-14,2003. Technical Report 4839, Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique, june 2003.
- [20] B. Brogliato. Some perspectives on the analysis and control of complementarity systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48(6) :918–935, june 2003.
- [21] B. Brogliato. Absolute stability and the Lagrange-Dirichlet theorem with monotone multivalued mappings. *Systems and Control Letters*, 51 :343–353, 2004.
- [22] B. Brogliato and W.P.M.H. Heemels. Hybrid systems modeling and control. *European Journal of Control. Special issue on "fundamental issues in control"*, 9(2-3) :177–189, 2003.
- [23] B. Brogliato, S. Niculescu, and P. Orhant. On the control of finite-dimensional mechanical systems with unilateral constraints. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42(2) :200–215, February 1997.
- [24] J. Buisson, P.Y. Richard, Wieber, and H. Cormerais. On the stabilisation of switching electrical power converters. In M. Morari and L. Thiele, editors, *Eighth International Workshop on Hybrid Systems : Computation and Control*,

- HSCC 2005*, volume 3414 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 215–225. Springer, 2005.
- [25] M.K. Camlibel, W.P.M.H. Heemels, and J.M. Schumacher. On linear passive complementarity systems. *European Journal of Control*, 8(3) :220–237, 2002.
- [26] V.-S. Chellaboina and W. M. Bhat, S. P. and Haddad. An invariance principle for nonlinear hybrid and impulsive dynamical systems. *Nonlinear analysis*, 53 :527–550, 2003.
- [27] H. de Jong, J.-L. Gouzé, C. Hernandez, M. Page, T. Sari, and J. Geiselmann. Qualitative simulation of genetic regulatory networks using piecewise-linear models. *Bulletin of Mathematical Biology*, 66((2)) :301–340, 2004.
- [28] Carlos Canudas de Wit, Georges Bastin, G. Bastin, Bruno Siciliano, and B. Siciliano, editors. *Theory of Robot Control*. Springer-Verlag New York, Inc., Secaucus, NJ, USA, 1996.
- [29] R. DeCarlo, M. Branicky, S. Pettersson, and B. Lennartson. Perspectives and results on the stability and stabilizability of hybrid systems, 2000.
- [30] E. Egerstedt, K. H. Johansson, J. Lygeros, and S. Sastry. Behavior based robotics using regularized hybrid automata. Phoenix, AZ, 1999. IEEE CDC.
- [31] M. Garcia, A. Chatterjee, A. Ruina, and A. Coleman. The simplest walking model : Stability, complexity, and scaling. *ASME Journal of Biomechanical Engineering*, 1998.
- [32] F. Genot and B. Brogliato. New results on painleve paradoxes. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 18 :653–678, 1999.
- [33] Ch. Glocker. On frictionless impact models in rigid-body systems. *Phil. Trans. Royal. Soc. Lond.A*, 359 :2385–2404, 2001.
- [34] A. Goswami, B. Espiau, and A. Keraman. Limit cycles in a passive compass gait biped and passivity mimicking control law, 199.
- [35] A. Goswami, B. Espiau, and A. Keramane. Limit cycle and their stability in a passive bipedal gait, 1996.
- [36] Franck Génot. *Contributions à la modélisation et à la commande des systèmes mécaniques de corps rigides avec contraintes unilatérales*. PhD thesis, INPG, Grenoble, 1998.
- [37] W. Haddad, V. Chellaboina, Q. Hui, and S. Nersesov. Vector dissipativity theory for large scale impulsive dynamical systems. *Mathematical Problems in Engineering*, 3 :225–262, 2004.
- [38] B. Heemels, W. P. M. H. and De Schutter and A. Bemporad. Equivalence of hybrid dynamical models. *Automatica*, 37(7) :1085–1091, July 2001.

- [39] W. P. M. H. Heemels, M. K. Çamlibel, A. J. van der Schaft, and J. M. Schumacher. Modelling, well-posedness, stability of switched electrical networks. In Oded Maler and Amir Pnueli, editors, *HSCC*, volume 2623 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 249–266. Springer, 2003.
- [40] D. Henry. *Geometric theory of semilinear parabolic equations*, volume 840 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1981.
- [41] J.-B. Hiriart-Urruty and C. Lemaréchal. *Convex Analysis and Minimization Algorithms*. Springer Verlag, 1996. Two volumes - 2nd printing.
- [42] K.H. Johansson, M. Egerstedt, J. Lygeros, and S. Sastry. On the regularization of zeno hybrid automata. *Systems and Control Letters*, 38 :141–150, 1999.
- [43] R. E. Kalman. Lyapunov functions for the problem of lur’e in automatic control. *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 49 :201–205, 1963.
- [44] H.K. Khalil. *Nonlinear systems*. Prentice-Hall, 1996.
- [45] W. Khalil and E. Dombre. *Modélisation, identification et commande des robots*, *Collection Robotique*. Hermès, Paris, 1999.
- [46] B. Siciliano L. Scivicco. *Modelling and Control of Robot Manipulators*. Springer, 2000.
- [47] A. Loria and E. Panteley. Force/motion control of constrained manipulators without velocity measurements. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(7) :1407–1412, 1999.
- [48] R. Lozano, B. Brogliato, O. Egeland, and B. Maschke. *Dissipative Systems Analysis and Control. Theory and Applications*. Springer, 2000.
- [49] K.H. Lygeros, J. and Johansson, J. Simic, S.N. and Zhang, and S.S. Sastry. Dynamical properties of hybrid automata. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48 :2–17, 2003.
- [50] B. Maschke, R. Ortega, and A. van der Schaft. Energy based lyapunov functions for forced hamiltonian systems with dissipation. *IEEE Transactions on automatic Control*, 45(8) :1498–1502, 2000.
- [51] Richard Mason, Elon Rimon, and Joel Burdick. A general stability test for multiply contacted objects in a potential field, with example applications to planar objects under gravity. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, December 1996. (submitted).
- [52] Laura Menini and A. Tornambè. Asymptotic tracking of periodic trajectories for a simple mechanical systems subject to nonsmooth impacts. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46(7) :1122–1126, 2001.
- [53] S. Miossec. *Contribution à l’étude de la marche d’un bipède*. PhD thesis, Université de Nantes, 2004.

- [54] M.D.P. Monteiro Marques. *Differential Inclusions in Nonsmooth Mechanical Problems : Shocks and Dry Friction*. Birkhauser, Boston, PNLDE 9, 1993.
- [55] M. Morari, M. Baotić and F. Borrelli. Hybrid systems modeling and control. *European Journal of Control*, 9 :177–189, 2003.
- [56] J.-J. Moreau. Dynamique de systèmes à liaisons unilatérales avec frottement sec éventuel ; essais numériques. Technical Report 85-1, Laboratoire de Mécanique générale des Milieux Continus, mai 1985.
- [57] J.-J. Moreau. Bounded variation in time. In J.-J. Moreau, P.D. Panagiotopoulos, and G. Strang, editors, *Topics in Nonsmooth Mechanics*, pages 1–74. Birkhäuser, 1988.
- [58] J.-J. Moreau. Unilateral contact and dry friction in finite freedom dynamics. In J.-J. Moreau and P.D. Panagiotopoulos, editors, *Nonsmooth mechanics and Applications*, volume 302, pages 1–82. Springer Verlag, 1988.
- [59] J.-J. Moreau. An introduction to unilateral dynamics. In M. Fremond and F. Maceri, editors, *Novel approaches in civil engineering*. Springer Verlag, 2001.
- [60] J.-J. Moreau. Modélisation et simulation de matériaux granulaires. In *Congrès National d'Analyse Numérique*, La Grande Motte (Languedoc), juin 2003.
- [61] Y. Orlov. Extended invariance principle for nonautonomous switched systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48(8) :1448–1452, august 2003.
- [62] E. Ortega, R. Garcia-Canseco. Interconnection and damping assignment passivity-based control : A survey. *European Journal of Control*, pages 432–450, december 2004.
- [63] L. Paoli. Problèmes de vibro-impact : étude de la dépendance par rapport aux données. *C.R. Acad. Sci. Paris*, 339 :27–32, 2004.
- [64] Jonghoon Park, Youngil Youm, and Wan-Kyun Chung. Control of ground interaction at the zero-moment point for dynamic control of humanoid robots. In *Proceedings of the 2005 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Barcelona, Spain, April 2005.
- [65] F. Pfeiffer and C. Glocker. *Multibody Dynamics with Unilateral Contacts*. Wiley-Intersciences Series, 1996.
- [66] V. M. Popov. Hyperstability and optimality of automatic systems with several control functions. *Rev. Roumaine Sci. Tech. - Elektrotechn. et Energie.*, 9(4) :629–690, 1964.
- [67] V. M. Popov. *Hyperstability of Control Systems*. Springer-Verlag, New York,, 1973.
- [68] C. Poussot-Vassal. Compensation de frottements sur un robot bipède anthropomorphe. Technical report, INRIA, 2005.

- [69] M. Raous. Experimental analysis of the rocking of a rigid block. In *Proceedings of the 3rd. Pan American Congress of Applied Mechanics (PACAM III)*, pages 61–64, Sao Paulo, Brazil, April 1993.
- [70] R.T. Rockafellar and R.J.-B. Wets. *Variational analysis*. Springer, 1998.
- [71] W. Rudin. *Analyse réelle et complexe*. Dunod, 1998.
- [72] M. Schatzman. A class of nonlinear differential equations of second order in time. *Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications*, 2(2) :355 – 373, 1978.
- [73] M. Schatzman. Uniqueness and continuous dependence on data for one dimensional impact problems. *Mathematical and Computational Modelling*, 28(4-8) :1 – 18, 1998.
- [74] M.W. Spong and F. Bullo. Controlled symmetries and passive walking. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50(7) :1025– 1031, 2005.
- [75] D. Stoianovici and Y. Hurmuzlu. A critical study of the applicability of rigid body collisions theory. *A.S.M.E. J. Appl. Mech.*, 63 :307–316, 1996.
- [76] M. Takegaki and S. Arimoto. A new feedback method for dynamic control of manipulators. *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 1981.
- [77] C. Tomlin, G. Pappas, and S. Sastry. Conflict resolution for air traffic management : A study in multi-agent hybrid systems, 1998.
- [78] A. Tornambè. Modeling and control of impact in mechanical systems : theory and experimental results. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(2) :294–309, february 1999.
- [79] N. Van de Wouw and R. Leine. Attractivity of equilibrium sets of systems with dry friction. *Nonlinear dynamics*, 48 :19–39, 2004.
- [80] A.J. van der Schaft and J.M. Schumacher. Complementarity modeling of hybrid systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43(4) :483–490, april 2003.
- [81] C.L. Vaughan, B.L. Davis, and J.C. O’Connors. *Dynamics of human gait*. Human Kinetics publishers, Champaign, 1992.
- [82] D. Wang and H. McClamroch. Position and force control for constrained manipulator motion : Lyapunov’s direct method. *IEEE Trans. Robot. Automat.*, 9(3) :308–313, 1993.
- [83] E. R. Westervelt, J. W. Grizzle, and D. E. Koditschek. Hybrid zero dynamics of planar biped walkers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48(1) :42–56, January 2003.
- [84] P. B. Wieber. Constrained dynamics and parametrized control in biped walking. In *Proceedings of the International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems*, 2000.

-
- [85] P. B. Wieber. On the stability of walking systems. In *Proceedings of the International Workshop on Humanoid and Human Friendly Robotics*, 2002.
- [86] P.B. Wieber. *Modélisation et commande d'un robot marcheur anthropomorphe*. PhD thesis, Ecole nationale supérieure des mines de Paris, decembre 2000.
- [87] J.C. Willems. Dissipative dynamical systems - part i : General theory. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 45 :321–351, 1972.
- [88] J.C. Willems. Dissipative dynamical systems - part ii : linear systems with quadratic supply rate. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 45 :352–393, 1972.
- [89] Le xuan Anh. *Dynamics of Mechanical Systems with Coulomb Friction*. Springer, 2003. Foundations of Engineering Mechanics.
- [90] T. Yabuta. Nonlinear basic stability concept of the hybrid position/force control scheme for robot manipulators. *IEEE Trans. Robot. Automat.*, 8(5) :663–670, 1992.
- [91] V.A. Yakubovich. Frequency domain conditions for the absolute stability of nonlinear control systems. *Proc.Inter-University Conference on Applied stability theory and analytical mechanics (in Russian), Kazan Aviation Inst.Publ.House, Kazan.,* 1962.
- [92] J. Yang, J. Wu Cheung, and J. Pan. Passivity-based control for speed regulation in permanent-magnet linear motors. *Power and energy systems*, 2003.
- [93] H. Ye, A. Michel, and L. Hou. Stability theory for hybrid dynamical systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43(4) :461–474, 1998.
- [94] V.I. Zubov. *Methods of A.M.Lyapunov and their application*. Noordhoff, 1964.