



HAL
open science

Contribution à la génération automatique de maillages de qualité pour la simulation numérique

Patrick Laug

► **To cite this version:**

Patrick Laug. Contribution à la génération automatique de maillages de qualité pour la simulation numérique. Modélisation et simulation. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2006. tel-00012000

HAL Id: tel-00012000

<https://theses.hal.science/tel-00012000>

Submitted on 21 Mar 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE
PARIS VI

Habilitation à Diriger des Recherches

Spécialité :
Mathématiques

Sujet :
**Contribution à la génération automatique de
maillages de qualité pour la simulation numérique**

Mémoire présenté par :
Patrick LAUG

Date de la soutenance :
9 mars 2006

Composition du jury :

T. BAKER	(Rapporteur)
H. BOROUCAKI	
T. COUPEZ	(Rapporteur)
P.L. GEORGE	
F. HECHT	
J.F. MAITRE	(Rapporteur)
A. PERRONNET	
O. PIRONNEAU	
F. SCHMITT	

Remerciements

Je remercie tout particulièrement les trois Rapporteurs désignés par la Commission des thèses, Tim BAKER (Princeton University), Thierry COUPEZ (École des Mines de Paris) et Jean-François MAITRE (École Centrale de Lyon) pour leur temps consacré à la lecture de mon dossier de recherche et à la rédaction de leurs rapports. Mes remerciements vont également à Houman BOROUCAKI, Paul Louis GEORGE, Frédéric HECHT, Alain PERRONNET, Olivier PIRONNEAU et Francis SCHMITT qui ont accepté d'être membres du jury.

Ma gratitude s'adresse aux nombreux collègues que j'ai pu côtoyer au cours de mes années de recherche au sein des projets Modulef et Gamma de l'INRIA, et qu'il serait impossible d'énumérer sans oublier quelques noms !

Enfin, mes travaux ne pourraient être réalisés sans le soutien de ma famille. Qu'elle trouve ici l'expression de ma reconnaissance.

Résumé. Contribution à la génération automatique de maillages de qualité pour la simulation numérique

La simulation d'un phénomène physique par la méthode des éléments finis ou d'autres méthodes d'analyse numérique nécessite une décomposition spatiale, ou *maillage*, du domaine étudié. Pour que le processus de simulation converge rapidement et atteigne la précision voulue, la qualité en taille et en forme du maillage joue un rôle primordial. Ce mémoire constitue une synthèse de mes contributions concernant la génération automatique de maillages respectant le mieux possible ces critères de qualité. Ces différents travaux de recherche ont été réalisés au sein du projet Gamma de l'INRIA. Dans ce document, les thèmes suivants sont abordés successivement :

- la discrétisation de courbes du plan ou de l'espace 3D,
- le maillage de domaines plans de contours fixes ou variables,
- le maillage de surfaces gauches paramétrées ou discrètes.

Au cours de ces opérations de discrétisation et de maillage, la taille et la forme des éléments sont contrôlées par un champ de métriques traduisant des contraintes géométriques et/ou physiques. Les méthodes présentées ont toutes été validées sur de nombreux exemples académiques ou industriels, notamment en mécanique des solides et en mécanique des fluides.

Mots-clés. Maillage, simulation numérique, champ de métriques, anisotropie, qualité d'un maillage, courbe, surface, surface paramétrée, surface discrète.

Abstract. Contribution to automatic mesh generation of quality meshes for numerical simulation

The simulation of a physical phenomenon by the finite element method or other numerical analysis methods requires a spatial decomposition, or mesh, of the studied domain. In order that the simulation process converges rapidly and reaches the desired accuracy, the size and shape quality of the mesh plays a crucial role. This report constitutes a survey of my contributions concerning the automatic generation of meshes respecting as well as possible these quality criteria. These different research works have been carried out in the Gamma group at INRIA. In this document, the following themes are successively addressed:

- *the discretization of curves in the plane or in the 3D space,*
- *the meshing of planar domains with fix or variable contours,*
- *the meshing of parametric or discrete warped surfaces.*

During these discretization and meshing operations, the size and shape of the elements are controlled by a metric field reflecting geometric and/or physical constraints. The presented methods have all been validated on many academic or industrial examples, notably in solid and fluid mechanics.

Keywords. *Mesh, numerical simulation, metric field, anisotropy, mesh quality, curve, surface, parametric surface, discrete surface.*

Table des matières

Avant-propos	11
1 Introduction	13
1.1 Schéma de résolution classique par la méthode des éléments finis	14
1.1.1 Rappel	14
1.1.2 Maillage uniforme, géométrique ou physique	16
1.2 Schéma de résolution avec adaptation <i>a posteriori</i>	21
1.3 Plan général de ce mémoire	23
2 Discrétisation d'une courbe de l'espace \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3	25
2.1 État de l'art	25
2.2 Présentation de notre contribution	26
2.3 Définition formelle du problème	27
2.4 Discrétisation sans construction préalable d'un support	28
2.5 Discrétisation avec construction préalable d'un support	28
2.5.1 Spécifications uniformes	32
2.5.2 Spécifications isotropes	33
2.5.3 Spécifications anisotropes	36
2.5.4 Combinaison de plusieurs spécifications	38
2.6 Discrétisation de type A^0 , A^1 ou géométrique	41
2.6.1 Écart et critère A^0	41
2.6.2 Écart et critère A^1	42
2.6.3 Spécifications de taille satisfaisant le critère A^0	43
2.6.4 Spécifications de taille satisfaisant le critère A^1	44
2.7 Application (courbes interfaces d'un Falcon)	45
3 Maillage d'un domaine plan	47
3.1 État de l'art	48
3.2 Présentation de notre contribution	49
3.3 Géométrie fixe	50
3.3.1 Détection et rectification des auto-intersections	51
3.3.2 Détection et rectification des arêtes proches (zones étroites)	51
3.3.3 Détection et rectification des variations de longueurs d'arêtes ad- jacentes	52
3.3.4 Maillage uniforme, isotrope ou anisotrope d'un domaine plan	52
3.3.5 Application en mécanique des fluides	53

3.4	Géométrie variable	58
3.4.1	Schéma général de remaillage	58
3.4.2	Définition de la frontière du domaine déformé	60
3.4.3	Définition des cartes de taille physiques	61
3.4.4	Remaillage adaptatif du domaine	64
3.4.5	Remaillage du domaine	65
3.4.6	Applications (essai brésilien et découpage orthogonal)	65
4	Maillage d'une surface gauche	69
4.1	État de l'art	69
4.2	Présentation de notre contribution	71
4.3	Maillage de type A^0 , A^1 ou géométrique	72
4.3.1	Écart et critère A^0	73
4.3.2	Écart et critère A^1	73
4.3.3	Contrôle local autour d'un point afin de satisfaire le critère A^0	74
4.3.4	Contrôle local autour d'un point afin de satisfaire le critère A^1	75
4.3.5	Spécifications de taille satisfaisant le critère A^0	79
4.3.6	Spécifications de taille satisfaisant le critère A^1	81
4.4	Surface paramétrée	83
4.4.1	Métrique induite dans le domaine des paramètres	85
4.4.2	Courbures principales d'une surface paramétrée	89
4.4.3	Application (visage de Voltaire)	90
4.5	Surface multicarreaux	94
4.5.1	Réparation du modèle CAO	94
4.5.2	Spécifications de taille sur une courbe interface	97
4.5.3	Discretisation d'une courbe interface et report dans les domaines de paramètres	97
4.5.4	Discretisation des courbes frontalières dans le cas d'une surface dégénérée	100
4.5.5	Maillage transcarreaux	100
4.5.6	Applications (Dassault Aviation et Lectra)	102
4.6	Surface sphérique ou moléculaire	104
4.6.1	Paramétrisation d'une sphère	104
4.6.2	Modélisation d'une surface moléculaire	106
4.6.3	Application (fragment d'ADN)	107
4.7	Surface interpolant une grille structurée	107
4.7.1	Lissage d'une grille bruitée	108
4.7.2	Interpolation par une surface de continuité G^1	110
4.7.3	Maillage de surfaces interpolantes	112
4.7.4	Application (Boeing)	112
4.8	Surface cartésienne	114
4.8.1	Estimation d'erreur géométrique	114
4.8.2	Application (tangente hyperbolique et Safran/Snecma)	115
4.9	Surface discrète	119
4.9.1	Extraction des caractéristiques géométriques	119
4.9.2	Une surface lisse presque partout	121

4.9.3	Raffinement adaptatif du maillage de référence	124
4.9.4	Application (pièce mécanique)	125
5	Conclusion et perspectives	127
5.1	Conclusion	127
5.2	Perspectives	129
A	Bibliographie	133
B	Publications de l'auteur	139
B.1	Livres et chapitres de livres	139
B.2	Journaux avec comité de lecture	140
B.3	Conférences avec actes (comportant des articles complets)	142
B.4	Conférences sans actes (ou comportant des articles résumés)	145
B.5	Rapports et guides édités par l'INRIA	147
B.6	Autres supports	149
C	Sélection d'articles	151

Avant-propos

La génération de maillage peut se définir très brièvement comme l'art de partitionner un domaine en éléments de géométrie simple comme des triangles, des quadrilatères, des tétraèdres, etc. La méthode générale consiste à placer des points sur la frontière et à l'intérieur d'un domaine, et à connecter ces points entre eux. Dans le cadre d'une simulation numérique par éléments ou volumes finis, la forme et la taille des éléments du maillage obtenu influent fortement sur la précision des calculs, indispensable à une bonne compréhension du phénomène physique étudié. Ainsi, depuis ses origines qui remontent à plus de quatre décennies, la génération automatique de maillage est un domaine de recherche qui ne cesse de progresser.

Chercheur à l'INRIA¹, j'ai participé dans les années 80 à la création et au développement du projet MODULEF² chargé de concevoir une bibliothèque de programmes et de structures de données pour la méthode des éléments finis. Ce projet a mis en évidence le rôle fondamental de la génération de maillages, et c'est ainsi qu'a été créé en 1996 le projet GAMMA³ exclusivement consacré à ce thème. Dans ce cadre, j'ai pu bénéficier d'un environnement exceptionnel et je tiens à remercier vivement tous les membres de cette équipe qui m'ont aidé et conseillé dans mes recherches, en particulier Paul-Louis George (responsable scientifique du projet GAMMA), Houman Borouchaki, Éric Saltel, Pascal Frey et Frédéric Hecht.

Ce mémoire de synthèse, organisé en cinq chapitres, présente mes principales contributions dans le domaine du maillage au cours de ces dix dernières années. Le cadre général de ces travaux est présenté en introduction au chapitre 1. Le deuxième chapitre est consacré à la discrétisation d'une courbe dans le plan ou dans l'espace tridimensionnel. La méthodologie de maillage d'un domaine plan de géométrie fixe ou variable est étudiée au chapitre 3, tandis que le maillage d'une surface gauche (paramétrée, multicarreaux ou discrète) est détaillé au chapitre 4. Pour conclure, le cinquième chapitre dresse un bilan et décrit les perspectives envisagées.

¹INRIA : Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique.

²Projet MODULEF : MODULEs Eléments Finis.

³Projet GAMMA : Génération Automatique de Maillages et Méthodes d'Adaptation.

Chapitre 1

Introduction

Dans de nombreux domaines scientifiques ou industriels, les expérimentations classiques sont remplacées, partiellement ou totalement, par des *simulations numériques*. En effet, ces études virtuelles sont généralement plus rapides à mettre en œuvre et moins coûteuses que des expériences réelles, voire même les seules réalisables en pratique.

De multiples exemples peuvent être cités à titre illustratif. Dans le domaine aéronautique, des avions sont maintenant conçus à l'aide de « souffleries numériques » ne nécessitant aucune construction de maquette, avant d'être testés en vraie grandeur. Dans le secteur automobile, de nouveaux modèles sont mis au point en un temps réduit grâce à une simulation efficace de leur comportement mécanique. Dans le domaine de la Défense, la simulation des effets d'une bombe nucléaire rend inutile les expérimentations réelles. Dans d'autres domaines, des études numériques sont systématiquement effectuées avant la construction de barrages, de ponts, de bâtiments, ou de nombreux autres objets courants. En résumé, cette démarche de simulation par le calcul est utilisée dans des secteurs très divers, qu'ils soient académiques ou industriels : aéronautique, spatial, automobile, nucléaire, bâtiment (BTP) comme nous venons de le voir, mais aussi chimie, semi-conducteurs, nanotechnologie, météorologie, biologie, médecine, environnement, etc.

La simulation numérique d'un phénomène physique suppose une modélisation de l'état et éventuellement de l'évolution de ce phénomène, en général sous forme d'un système d'équations aux dérivées partielles (EDP). Elle nécessite également une modélisation de la forme géométrique de l'objet considéré ou de la zone d'espace qui l'entoure, à l'aide de fonctions analytiques ou de données discrètes. De ces modélisations résulte un problème mathématique (P) dont la forme générique est la suivante :

Trouver un champ, scalaire ou vectoriel, satisfaisant un système donné d'équations aux dérivées partielles (EDP) à l'intérieur d'un domaine Ω , ainsi qu'un ensemble donné de conditions aux limites sur la frontière $\Gamma = \partial\Omega$ de ce domaine.	(P)
---	-----

En général, il n'est pas possible de résoudre le problème (P) de manière exacte. Une première approche (la plus ancienne historiquement) est la méthode des différences finies, dans lequel le domaine Ω est approché par une grille structurée. Cette approche étant difficilement applicable lorsque le domaine Ω est de géométrie complexe, la méthode des éléments finis est apparue dès les années cinquante et s'est considérable-

ment répandue depuis. Dans cette méthode, le domaine Ω est discrétisé sous forme d'un *maillage* et une solution approchée est recherchée aux nœuds de ce maillage. La solution en tout point de Ω est obtenue par interpolation (pour une description mathématique approfondie de cette méthode, voir en particulier [CIA78] ou [CIA03]).

De nos jours, de nombreux logiciels mettent en œuvre la méthode des éléments finis dans des disciplines aussi diverses que la mécanique des solides, la mécanique des fluides, l'électromagnétisme, etc. De plus en plus souvent, les systèmes de CAO (conception assistée par ordinateur) offrent des fonctionnalités pour une analyse par éléments finis. Ainsi, l'utilisateur peut à la fois créer un modèle géométrique de l'objet, simuler son comportement en présence de certaines contraintes physiques, et le modifier en fonction des résultats.

Les sections suivantes présentent cette méthodologie de simulation, d'abord dans un schéma classique puis dans un schéma adaptatif, en se focalisant sur la construction des maillages.

1.1 Schéma de résolution classique par la méthode des éléments finis

Le schéma classique de résolution du problème générique (P) formulé précédemment, pour un domaine Ω surfacique ou volumique et de frontière Γ , comporte principalement trois étapes :

1. La construction d'une discrétisation $M(\Gamma)$ de la frontière Γ .
2. La construction d'un maillage $M(\Omega)$ du domaine Ω s'appuyant sur la discrétisation précédente.
3. Le calcul d'une solution approchée S définie aux nœuds du maillage $M(\Omega)$.

Chacune de ces étapes est généralement réalisée de manière automatique, les deux premières par un *mailleur* et la troisième par un *solveur*. Afin que le calcul de cette dernière étape se termine normalement, avec une convergence rapide et une précision suffisante, le maillage doit être suffisamment fin et régulier. Ces quelques notions sont rappelées ci-dessous de manière plus précise.

1.1.1 Rappel

Cette section rappelle brièvement la définition d'un domaine, de son maillage et de certaines caractéristiques : conformité, finesse et régularité.

Domaine. De manière très générale, le domaine Ω qui modélise l'objet étudié est inclus dans une variété de dimension m dans l'espace \mathbb{R}^d .¹ En pratique, ce dernier espace est de dimension $d = 1, 2$ ou 3 et, selon la valeur de $m \leq d$, le domaine Ω pourra prendre l'une des formes suivantes :

¹De manière plus rigoureuse, il s'agit d'une variété topologique dans l'espace euclidien E^d , qui n'est autre que l'espace \mathbb{R}^d muni de la distance euclidienne usuelle. Rappelons qu'une distance doit être positive et satisfaire trois axiomes (identité, symétrie et inégalité triangulaire).

- Si $m = 1$: segment de courbe dans $\mathbb{R}^1, 2$ ou 3 (droit, plan ou gauche).
- Si $m = 2$: domaine surfacique dans \mathbb{R}^2 ou 3 (plan ou gauche).
- Si $m = 3$: domaine volumique dans \mathbb{R}^3 .

Par exemple, si $m = 2$ et $d = 3$, Ω sera une portion de surface gauche, c'est-à-dire une variété de dimension 2 dans l'espace \mathbb{R}^3 .

Maillage. Le maillage $M(\Omega)$ d'un tel domaine Ω est composé d'éléments K_i qui sont habituellement :

- Si $m = 1$: des segments (droits ou courbes).
- Si $m = 2$: des triangles ou des quadrilatères (de côtés droits ou courbes).
- Si $m = 3$: des tétraèdres, des prismes, des pyramides ou des hexaèdres (dont les arêtes sont droites ou courbes).

Les fonctions d'interpolation usuelles sur ces éléments sont des polynômes P^1 ou P^2 pour les triangles, Q^1 ou Q^2 pour les quadrilatères.

Conformité. Le maillage doit être *conforme*, ce qui signifie que pour tout couple d'éléments K_i et K_j , $i \neq j$, l'intersection $K_i \cap K_j$ est :

- Si $m = 1$: soit vide, soit une extrémité commune.
- Si $m = 2$: soit vide, soit un sommet commun, soit un côté commun.
- Si $m = 3$: soit vide, soit un sommet commun, soit une arête commune, soit une face commune.

Finesse. Pour définir la *finesse* [ERN02] d'un maillage, on définit auparavant celle d'un élément K , ou plus exactement un paramètre h_K d'autant plus petit que l'élément est fin. Ce paramètre, appelé taille ou diamètre de l'élément K , est le réel positif donné par la relation :

$$h_K = \max_{P_1, P_2 \in K} \|P_2 - P_1\| \quad (1.1)$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne usuelle. Autrement dit, h_K est la plus grande distance euclidienne entre deux points de l'élément K . Pour un triangle, c'est aussi la longueur de son plus grand côté.

La finesse d'un maillage $M(\Omega)$ est alors caractérisée par le paramètre h suivant :

$$h = \max_{K \in M(\Omega)} h_K \quad (1.2)$$

Régularité. De même, pour définir la *régularité* [ERN02] d'un maillage, on définit auparavant celle d'un élément simplicial K (triangle ou tétraèdre), ou plus exactement un paramètre σ_K d'autant plus petit que l'élément est régulier. Ce paramètre est un réel positif qui peut être donné par la relation :

$$\sigma_K = \frac{h_K}{\rho_K} \quad (1.3)$$

où ρ_K est un réel strictement positif dont la définition dépend de la transformation T_K de l'élément de référence \hat{K} vers l'élément K . Dans le cas d'un élément triangulaire quelconque, la transformation T_K est affine et ρ_K est le rayon du cercle inscrit dans

le triangle K . Pour un triangle équilatéral, le paramètre σ_K prend sa valeur minimale $2\sqrt{3}$, et donc le triangle est le plus régulier possible. En revanche, pour un triangle aplati, ρ_K tend vers zéro et σ_K tend vers l'infini, et donc le triangle est le moins régulier possible.

Dans le cas où l'élément K est un quadrilatère ou un polygone quelconque ayant n sommets, $n \geq 4$, la transformation T_K n'est généralement pas affine et la définition de ρ_K est étendue par $\rho_K = \min_{i=1,\dots,n} \rho_i$, ρ_i étant le rayon du cercle inscrit dans le triangle contenant les deux arêtes issues du sommet i de K .

La régularité d'un maillage $M(\Omega)$ est alors caractérisée par le paramètre σ suivant :

$$\sigma = \max_{K \in M(\Omega)} \sigma_K \quad (1.4)$$

En fait, il existe de nombreuses variantes pour caractériser la régularité, comme le montre le paragraphe suivant.

Qualité en forme. La régularité peut également être quantifiée par une *qualité en forme*, fonction réelle continue minimale pour un triangle totalement aplati, maximale pour un triangle équilatéral, et généralement normalisée entre 0 et 1.

Dans une première définition possible, la qualité $Q_1(K)$ d'un élément K est simplement égale à l'inverse du paramètre σ_K (cf. équation 1.3) multiplié par un coefficient de normalisation :

$$Q_1(K) = 2\sqrt{3} \frac{1}{\sigma_K} = 2\sqrt{3} \frac{\rho_K}{h_K} \quad (1.5)$$

Dans une autre définition classique, la qualité $Q_2(K)$ d'un triangle K de sommets A, B, C est proportionnelle au rapport entre l'aire de ce triangle et la somme des carrés des longueurs de ses côtés :

$$Q_2(K) = Q_2(ABC) = 4\sqrt{3} \frac{\text{aire}(ABC)}{AB^2 + BC^2 + CA^2} \quad (1.6)$$

Pour un triangle aplati, l'aire est nulle et donc $Q_2(K) = 0$. Pour un triangle équilatéral, le rapport ci-dessus est égal à $\frac{\sqrt{3}}{12}$, d'où le coefficient multiplicateur donnant $Q_2(K) = 1$.

De nombreuses autres définitions de la qualité d'un élément ont été proposées. L'utilisation de l'une ou l'autre de ces définitions n'a généralement pas d'influence significative sur les maillages générés [DOM01].

1.1.2 Maillage uniforme, géométrique ou physique

Dans la plupart des cas, la théorie des éléments finis permet d'obtenir une majoration de l'erreur globale sur la solution S d'un calcul, à partir des paramètres h et σ caractérisant respectivement la finesse et la régularité du maillage $M(\Omega)$. Elle permet par exemple de démontrer que, pour une famille de maillages tels que σ est toujours inférieur à une constante σ_0 , l'erreur tend vers zéro lorsque h tend vers zéro.

En pratique, une taille h très proche de 0 est évidemment irréalisable puisque le nombre d'éléments serait alors démesuré. Le maillage devra donc satisfaire le mieux possible plusieurs caractéristiques contradictoires :

- comporter un nombre raisonnable d'éléments,
- être suffisamment fin pour que la solution soit calculée avec une précision satisfaisante et pour que la géométrie de la frontière soit convenablement respectée,
- contenir des éléments suffisamment réguliers.

Nous allons préciser ces objectifs dans le cas particulier de maillages plans et composés uniquement de triangles. Nous introduirons ainsi les notions de maillage uniformes, géométriques et physiques, avec des spécifications isotropes ou anisotropes.

En effet, dans une première approche, on peut chercher à générer un *maillage uniforme*, c'est-à-dire dont les arêtes sont de taille constante. Ainsi, dans le cas idéal, les triangles sont tous équilatéraux et le paramètre de régularité atteint sa valeur optimale $\sigma = 2\sqrt{3}$. Cependant, lorsque le domaine est de forme quelconque, un tel maillage est impossible à réaliser. À titre d'illustration, la figure 1.1 montre le cas très particulier où le domaine est lui-même un triangle équilatéral, ce qui permet effectivement de le mailler en triangles parfaitement équilatéraux. En revanche, sur la figure 1.2, le sommet supérieur du domaine triangulaire a été décalé vers la droite, et le maillieur vise à générer des triangles « presque équilatéraux ».

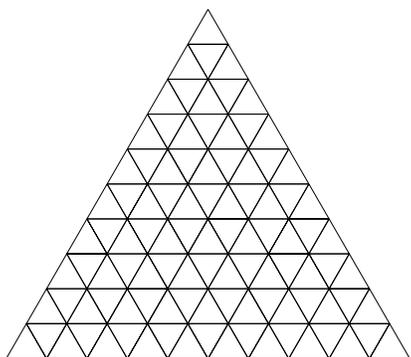


FIG. 1.1 – Maillage d'un domaine dont la frontière est un triangle équilatéral.

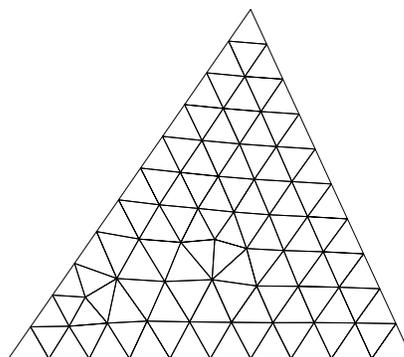


FIG. 1.2 – Maillage d'un domaine similaire au précédent, le sommet supérieur du triangle ayant été déplacé vers la droite.

Cependant, un maillage uniforme impose un pas fixe de discrétisation sur la frontière du domaine, et ne peut donc pas garantir une bonne représentation de sa géométrie. Par exemple, la figure 1.3 montre un domaine dont le contour est défini par une fonction analytique et la figure 1.4 un maillage uniforme de ce domaine. Sur la figure 1.5, la taille des arêtes est divisée par deux, ce qui multiplie environ par quatre le nombre de sommets (passant de 108 à 403) et de triangles (passant de 168 à 711). Les courbes frontalières sont alors mieux représentées moyennant un nombre plus important d'éléments.

Les considérations précédentes montrent l'intérêt d'une deuxième approche, dite de *maillage géométrique*. Le principe est de raffiner les parties de la frontière présentant de fortes courbures. Plus exactement, pour garantir que l'angle entre chaque arête et les tangentes en ses extrémités reste inférieur à un seuil donné, le pas de la discrétisation doit être localement proportionnel au rayon de courbure du contour (ce qui sera démontré

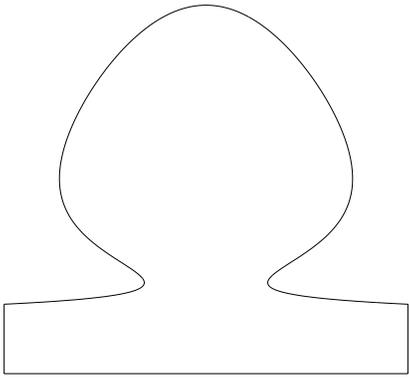


FIG. 1.3 – Frontière du domaine.

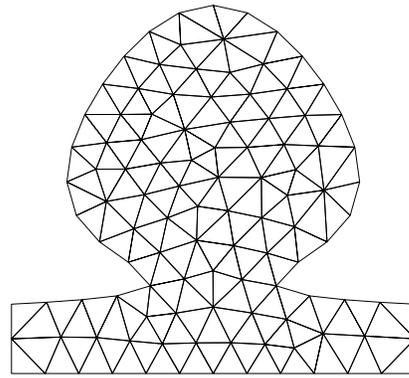


FIG. 1.4 – Maillage uniforme grossier.

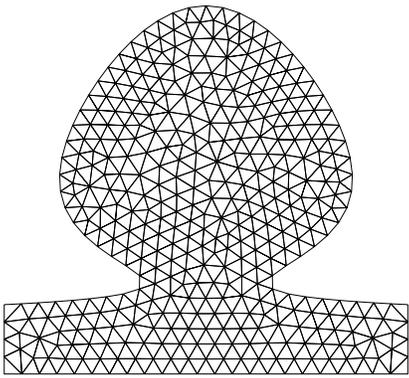


FIG. 1.5 – Maillage uniforme fin.

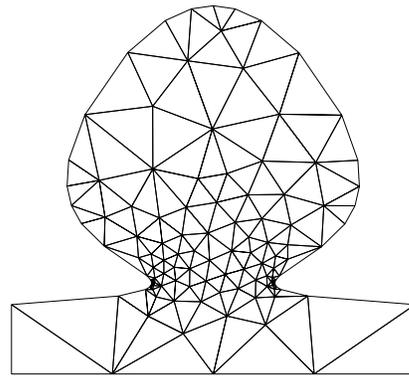


FIG. 1.6 – Maillage géométrique.

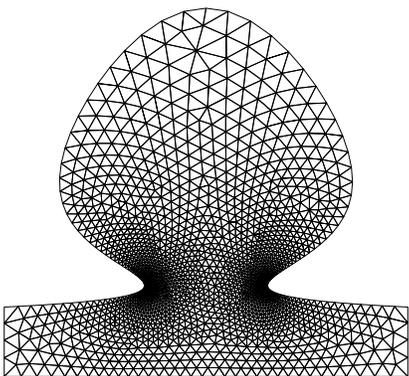


FIG. 1.7 – Gradation 1.1.

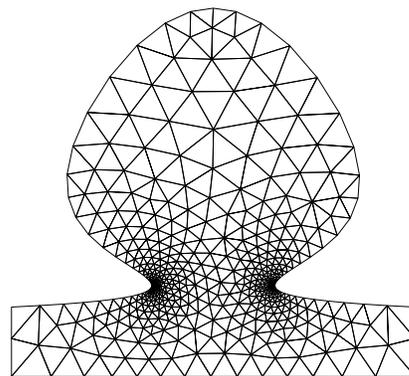


FIG. 1.8 – Gradation 1.3.

au chapitre suivant). À titre d'exemple, la figure 1.6 montre un maillage géométrique avec un écart d'angle maximal de 8 degrés. Comme on peut le constater, cette approche présente l'inconvénient de pouvoir engendrer une variation très importante du pas de la discrétisation de la frontière, ce qui entraîne la présence d'éléments non réguliers. Pour y remédier, on peut considérer des méthodes de lissage de ce pas, afin que le rapport entre les longueurs de deux arêtes consécutives soit borné. Sur la figure 1.7 (resp. 1.8), le rapport maximal est fixé à 1.1 (resp. 1.3), d'où une gradation progressive des tailles des éléments et une régularité accrue.

Dans l'approche précédente, comme dans des cas plus généraux, la taille souhaitée des éléments est connue uniquement sur la frontière, et non à l'intérieur du domaine. Celle-ci doit varier faiblement pour obtenir un maillage régulier, ce qui conduit à chercher une surface de variation minimale. En outre, certaines caractéristiques géométriques du domaine doivent être prises en compte, parmi lesquelles la présence d'une zone étroite ou de coins anguleux.

Pour spécifier la taille des éléments à générer dans un domaine Ω de frontière Γ , une *fonction de taille* $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $P \mapsto h(P)$ peut être définie. Cette fonction spécifie la taille souhaitée au voisinage de tout point P de Ω . Elle peut également être spécifiée en un nombre fini de points de Ω puis interpolée. Elle permet de contrôler un maillage selon certaines propriétés géométriques (courbure, proximité de frontières, ...) mais aussi physiques (par exemple l'erreur estimée), ou encore de fixer la gradation en taille des éléments. Cette fonction de taille $h(P)$ étant *a priori* quelconque, un maillage respectant ces spécifications sera appelé *maillage physique* par opposition à un maillage géométrique défini plus haut. Dans l'exemple de la figure 1.9, un maillage physique respecte un champ de taille qui impose un raffinement le long d'une courbe de Lissajous. La fonction de taille est définie par $h(P) = 0.3 d(P)$, où $d(P)$ désigne la distance du point P à cette courbe, puis cette valeur est bridée par deux bornes h_{\min} et h_{\max} . Le maillage généré contient 38 524 triangles.

Jusqu'ici, les spécifications considérées étaient *isotropes*, la taille prescrite en chaque point du domaine restant constante dans toutes les directions autour de ce point. Il s'agit du cas le plus fréquemment rencontré en pratique. Cependant, il peut être plus intéressant de définir des spécifications *anisotropes*, dans lesquelles la fonction de taille dépend aussi d'une direction autour du point P repérée par un angle α , soit $h : \Omega \times [0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}$, $(P, \alpha) \mapsto h(P, \alpha)$. Ce type de spécifications est utilisé pour la résolution de problèmes dont la solution présente de fortes variations selon certaines directions (par exemple, en mécanique des fluides, dans une étude de couches limites ou de chocs). Il permet de capter des phénomènes locaux tout en évitant la création d'un nombre trop important d'éléments. Dans le cas où la fonction $h(P, \alpha)$ définit un champ de métriques, il existe des méthodes efficaces pour générer un maillage respectant ces spécifications anisotropes. Dans le plan, cette condition se traduit par le fait que le lieu des points situés à une distance $h(P, \alpha)$, pour P fixé et α variant de 0 à 2π , est une ellipse centrée en P . La figure 1.10 fournit un exemple de maillage anisotrope, raffiné comme précédemment le long d'une courbe de Lissajous. Pour un point P quelconque appartenant au domaine carré, soit Q le point le plus proche sur cette courbe, et α la direction de la tangente à cette courbe en Q . La fonction de taille au point P est caractérisée par la longueur h_1 dans la direction α et h_2 dans la direction orthogonale, où $h_1 = 4h_2$ et h_2 est analogue à l'exemple précédent. Le nombre de triangles du

maillage anisotrope est de 17 060, inférieur à la moitié de celui du maillage isotrope, alors que les tailles prescrites dans les directions normales à la courbe sont identiques. Remarquons que le rapport d'élongation des triangles est généralement inférieur à 4 pour deux raisons, d'une part la direction α n'est pas constante sur le domaine et d'autre part les tailles sont bridées.

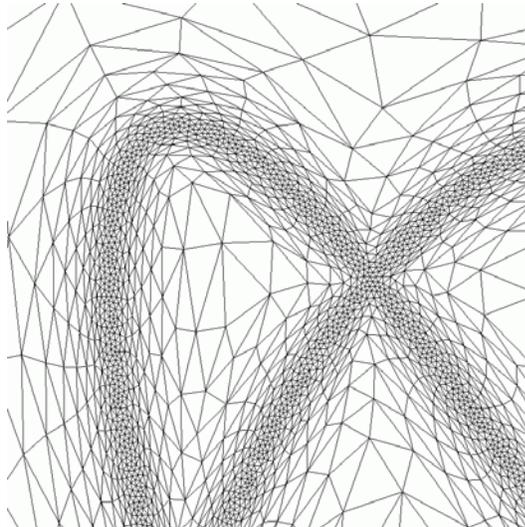
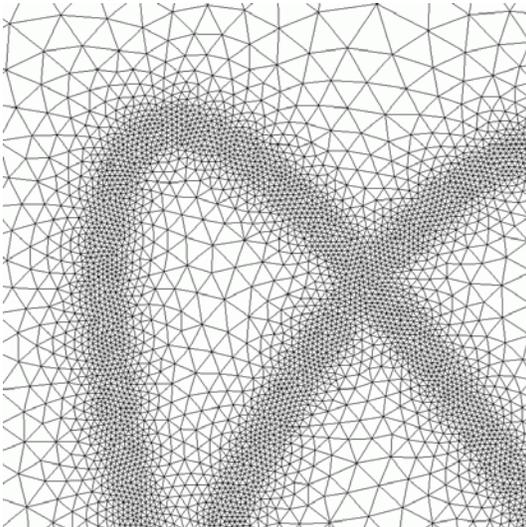
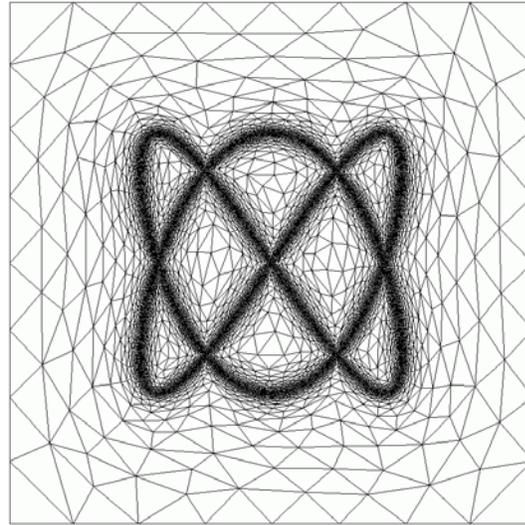
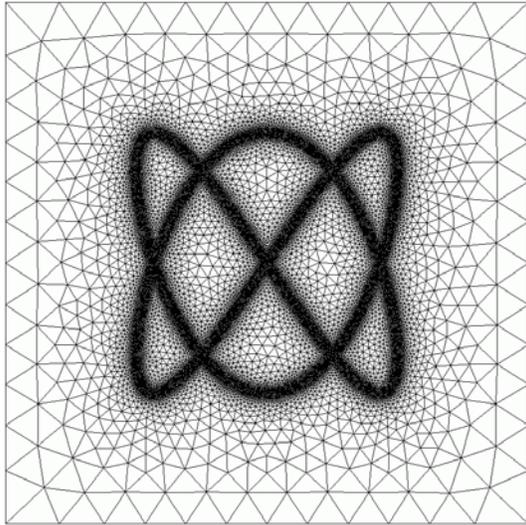


FIG. 1.9 – Maillage *isotrope* faisant apparaître une courbe de Lissajous.

FIG. 1.10 – Maillage *anisotrope* faisant apparaître (comme précédemment) une courbe de Lissajous.

1.2 Schéma de résolution avec adaptation *a posteriori*

Dans le schéma classique de résolution exposé dans la section précédente, la précision de la solution S obtenue dépend fortement de la taille et de la forme des éléments du maillage $M(\Omega)$. La construction de ce maillage peut être contrôlée par une fonction de taille isotrope ou anisotrope, mais ceci suppose une connaissance *a priori* de la solution. Sans cette connaissance, ou avec des connaissances réduites, il est nécessaire de raffiner excessivement le maillage, ce qui entraîne des calculs longs et coûteux, voire même une impossibilité lorsque le temps ou l'espace mémoire demandé est trop important. Il est alors préférable d'utiliser un *schéma adaptatif* dans lequel un maillage initial $M_0(\Omega)$, relativement grossier, permet de calculer la solution correspondante S_0 ; cette dernière est analysée par un estimateur d'erreur *a posteriori*, définissant ainsi une nouvelle carte de taille contrôlant un nouveau maillage $M_1(\Omega)$, et ainsi de suite. Un schéma adaptatif de résolution comporte donc les étapes ci-dessous :

1. Construction d'un maillage initial avec plus ou moins de connaissances sur les spécifications de tailles nécessaires.
2. Calcul d'une solution aux nœuds du maillage initial.
3. Création, à l'aide d'un estimateur d'erreur *a posteriori*, d'une carte de taille associée aux nœuds du maillage courant.
4. Construction d'un nouveau maillage respectant ces spécifications de taille. On dispose alors d'un *maillage de fond* et d'un *maillage courant*.
5. Calcul d'une solution aux nœuds du maillage courant.
6. Répétition des étapes 3 et suivantes jusqu'à ce que l'erreur estimée sur la solution soit inférieure à une valeur seuil donnée.

Les étapes 1 et 2 sont identiques à celles d'un schéma classique de résolution. À l'étape 3, plusieurs types d'estimateurs peuvent être envisagés, notamment ceux basés sur le hessien de la solution obtenu d'une manière discrète en utilisant un schéma aux différences finies pour le calcul des dérivées. Cette estimation permet de rendre le maillage plus fin dans les régions présentant de fortes variations du champ calculé, et plus grossier dans les régions de faibles variations. L'étape 4 consiste à construire un maillage respectant une carte de tailles spécifiées en un nombre fini de points, ce qui a déjà été évoqué dans la section précédente. À l'étape 5, le calcul de la solution peut être accéléré en effectuant au préalable un *transfert de champ*, qui consiste à calculer une solution initiale aux nœuds du maillage courant par interpolation de la solution aux nœuds du maillage de fond. Enfin, à l'étape 6, une estimation d'erreur détermine si le processus doit être itéré ou si la convergence est atteinte.

À titre d'illustration, la figure 1.11 montre le maillage initial M_0 et les maillages générés aux itérations 1, 2 et 3 d'une boucle adaptative. En chaque sommet du maillage grossier M_0 , la fonction de taille isotrope précédente $P \mapsto h(P)$ est évaluée, fournissant ainsi une carte discrète de tailles. Par suite, le maillage M_1 respectant les spécifications précédentes est plus dense lorsqu'un sommet du maillage M_0 est proche de la courbe de Lissajous. Une nouvelle carte discrète est calculée aux sommets du maillage M_1 , d'où

le maillage M_2 conforme au résultat attendu. Le maillage M_3 , d'aspect identique au précédent, confirme que le processus a convergé.

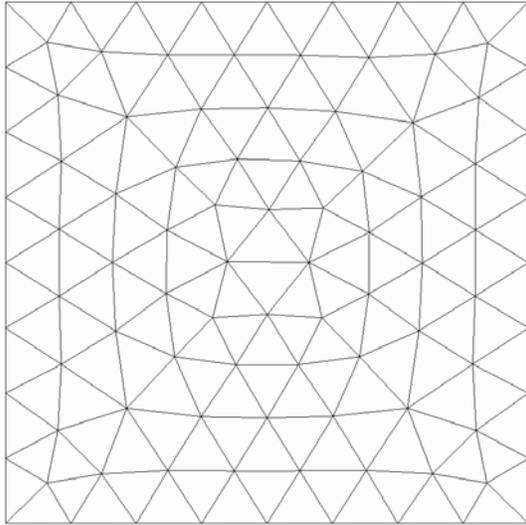
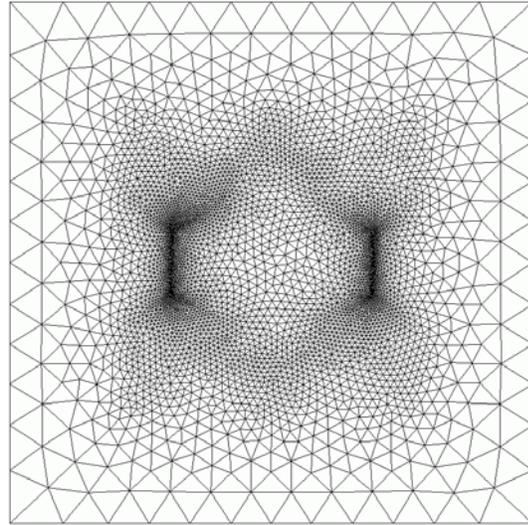
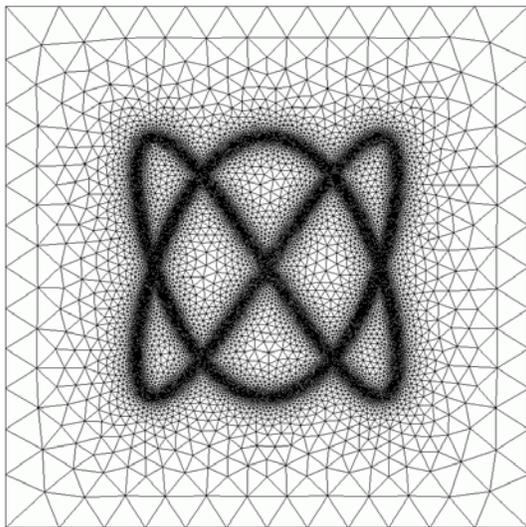
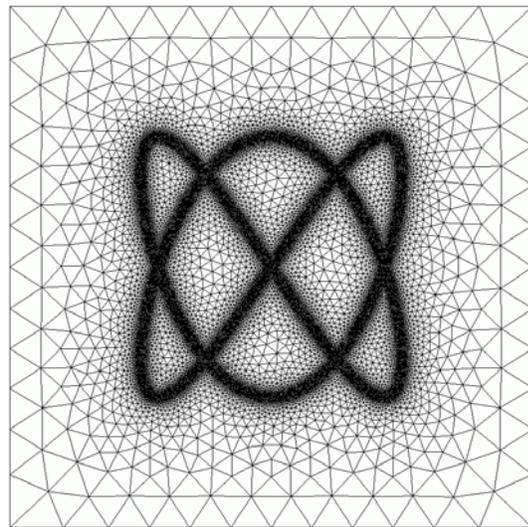
Maillage initial M_0 .Maillage adapté M_1 .Maillage adapté M_2 .Maillage adapté M_3 .

FIG. 1.11 – Processus de maillage adaptatif.

En résumé, nous avons précisé les principaux objectifs de la génération de maillages, dans un schéma classique ou adaptatif, en prenant pour exemple des maillages triangulaires plans. Ces objectifs s'appliquent également à la discrétisation de segments courbes, au maillage de domaines plans ou gauches (en triangles ou quadrilatères de côtés droits ou courbes) et au maillage de volumes.

1.3 Plan général de ce mémoire

Après ce chapitre d'introduction à la génération automatique de maillages en vue de simulations numériques, ce mémoire de synthèse contient trois chapitres intitulés respectivement :

- « Discrétisation d'une courbe de l'espace \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 » (chap. 2),
- « Maillage d'un domaine plan » (chap. 3),
- « Maillage d'une surface gauche » (chap. 4).

Chacun de ces trois chapitres contient successivement un *état de l'art* rappelant les approches existantes, une présentation rapide de notre *contribution* dans le domaine concerné, et une *description* plus détaillée de cette contribution.

Le chapitre 2 présente le problème de la discrétisation d'une courbe dans le plan ou dans l'espace tridimensionnel. Il précise la notion de métrique isotrope ou anisotrope permettant de spécifier la taille souhaitée des arêtes. Ces spécifications permettent notamment de construire une discrétisation géométrique, approchant une courbe continue avec un seuil de tolérance fixé.

Le chapitre 3 concerne le maillage d'un domaine plan dont la géométrie peut être fixe ou évoluer au cours du temps. Le maillage du domaine s'appuie sur une discrétisation préalable de ses courbes frontalières. Des méthodes d'estimation d'erreur physique sont également détaillées.

Le chapitre 4 est dédié au maillage d'une surface gauche, problème beaucoup plus complexe que celui d'un domaine plan et toujours d'actualité. Dans notre approche, des spécifications isotropes ou anisotropes sont définies en fonction des courbures de la surface. À partir de spécifications géométriques ou physiques, un maillage surfacique de qualité (adapté à un calcul par éléments finis) est construit par une méthode indirecte. Des surfaces de différents types sont étudiées : paramétrées, multicarreaux, moléculaires, interpolant une grille structurée, cartésiennes, ou encore discrètes.

Pour conclure ce mémoire, le chapitre 5 dresse un bilan de ces études et décrit diverses perspectives envisagées.

Chapitre 2

Discrétisation d'une courbe de l'espace \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3

Dans ce chapitre, nous nous intéressons au problème de la discrétisation d'une courbe dans le plan ou dans l'espace tridimensionnel. En effet, le maillage d'un domaine plan ou d'une surface gauche est généralement précédé d'une discrétisation de ses courbes frontalières. Cette étape de discrétisation est cruciale car elle influe sur la qualité du maillage qui en découle. En particulier, dans la modélisation géométrique d'un objet 3D, les courbes constituent généralement des interfaces entre deux carreaux adjacents ou des intersections entre deux surfaces. Leur discrétisation doit alors respecter convenablement les spécifications de taille prescrites afin que le maillage des carreaux, et éventuellement le maillage volumique correspondant, soient de qualité satisfaisante pour les calculs effectués ultérieurement.

Un bref aperçu de l'état de l'art sur ce sujet est dressé ci-dessous (section 2.1). Il est suivi d'une présentation générale et d'une synthèse de nos contributions (section 2.2 et suivantes). La section 2.3 définit de manière formelle le problème de la discrétisation d'une courbe Γ quelconque. La section 2.4 présente une méthode directe pour résoudre ce problème, mettant en œuvre l'algorithme de Newton-Raphson mais pouvant s'avérer très coûteuse en pratique. La section 2.5 propose une autre approche, basée sur la construction préalable d'un support $S(\Gamma)$ approchant fidèlement la courbe Γ . Ce procédé plus efficace est détaillé dans le cas de spécifications uniformes, isotropes, anisotropes, ou combinées. Le cas particulier d'une discrétisation respectant la géométrie d'une courbe *via* des spécifications isotropes est étudié dans la dernière section (2.6).

2.1 État de l'art

Les courbes sont généralement définies de manière explicite par une application continue. Elles peuvent aussi être définies par une suite de points de contrôle, mais dans ce cas des techniques classiques fournissent une interpolation sous forme de spline polynômiale par morceaux [BOO78, CAT74, FAR92, FOL89, HOS92]. Concernant leur discrétisation, la littérature est peu abondante, probablement parce que ce problème est d'apparence simple en comparaison de celui du maillage plan, surfacique ou volu-

mique. Néanmoins, on peut citer en premier lieu [FRY94], où sont décrites des méthodes d'approximation d'une courbe tout en respectant certaines spécifications. Ces dernières comprennent le nombre souhaité d'éléments, le type de variation des longueurs des éléments le long de la courbe (progression arithmétique ou géométrique), ou un écart maximal permettant de contrôler l'approximation géométrique de la courbe. Cependant, la courbe donnée doit être paramétrée par longueur d'arc. D'autres algorithmes de discrétisation de courbes ont été publiés, en particulier dans [CUI97, FRE87, JIN90, KWA98, LOH88, PER88, RYP02]. De manière générale, ils sont basés sur des calculs de longueurs d'arcs (ou abscisses curvilignes) et sur des résolutions de systèmes non linéaires représentant les équations analytiques des courbes.

2.2 Présentation de notre contribution

Notre nouvelle approche permet de discrétiser une courbe en évitant ces résolutions de systèmes non linéaires. Elle consiste à construire un support linéaire par morceaux sur lequel s'appuient les discrétisations à générer, ce qui entraîne des gains importants en rapidité, précision et robustesse par rapport aux méthodes classiques. La construction de ce support présente également ces avantages dans le contexte d'une méthode indirecte de maillage surfacique, où il est nécessaire d'obtenir une image inverse de la courbe discrétisée afin de la reporter dans les domaines de paramètres correspondants. Nous avons précisé cette approche lorsque les tailles des éléments sont prescrites *via* un champ de métriques isotrope ou anisotrope (cette forme de spécifications, utilisée notamment à l'INRIA, est introduite dans [VAL92]). Nous avons également mis en évidence des spécifications isotropes permettant de contrôler l'approximation géométrique d'une courbe.

Ces contributions sont détaillées dans [10, 21, 48, 87]. Le rapport de recherche [87] (1996) définit les bases de notre approche pour discrétiser ou rediscrétiser la frontière Γ d'un domaine Ω de \mathbb{R}^2 au sein d'un processus adaptatif. Une discrétisation initiale de Γ est supposée donnée. Elle est interpolée par des splines cubiques, afin de construire le support géométrique de la frontière. Ensuite, à chaque itération de la boucle d'adaptation, ce support est discrétisé en fonction d'une carte de métriques isotropes ou anisotropes donnée. L'essentiel de cette méthode a également été publié dans la revue RCFAO [10] (1996). Dans la communication à la conférence *Curves and Surfaces* [48] (2003), les courbes font partie de la frontière d'un domaine surfacique de \mathbb{R}^3 , et les surfaces font elles-mêmes partie de la frontière d'un domaine volumique. La discrétisation et le maillage de ces entités permet d'effectuer divers calculs par éléments finis, avec ou sans adaptation. Enfin, dans l'article de CNME [21] (2004), nous montrons la nécessité de linéariser le support dans le contexte d'une méthode indirecte de maillage surfacique, et nous décrivons la solution proposée pour atteindre cet objectif.

Nous présentons ci-dessous ces diverses contributions, après avoir posé de manière plus formelle le problème de la discrétisation des courbes.

2.3 Définition formelle du problème

Nous nous intéressons ici aux courbes paramétrées, qui sont définies par une application continue γ d'un intervalle $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ vers l'espace \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 . Ainsi, dans le cas tridimensionnel, une courbe Γ est définie par une application γ de la forme :

$$\gamma : I = [a, b] \rightarrow \Gamma, \quad t \mapsto \gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

On suppose que l'application γ est de classe C^2 (si la courbe Γ présente un nombre fini de points anguleux, il sera possible de la décomposer en plusieurs courbes de classe C^2). Une interprétation physique de l'équation 2.1 peut être donnée en considérant que le paramètre t représente le temps variant entre un instant initial a et un instant final b . Les trois composantes de $\gamma(t)$ représentent alors les coordonnées d'un point mobile dans l'espace tridimensionnel. La dérivée première de γ , habituellement notée $\dot{\gamma}$, représente la vitesse de ce point mobile. Enfin, la dérivée seconde notée $\ddot{\gamma}$ représente son accélération.

Rappelons que l'abscisse curviligne $s(t)$ d'un point $\gamma(t)$ sur la courbe Γ est donnée par la formule de Leibniz :

$$ds = \|d\gamma\| \quad (2.2)$$

équivalente à :

$$s(t) = \int_a^t \|\dot{\gamma}(u)\| du \quad (2.3)$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne usuelle.

En particulier, la longueur totale L de la courbe Γ est :

$$L = s(b) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt \quad (2.4)$$

Notre objectif est d'obtenir une discrétisation $M(\Gamma)$ de la courbe Γ , c'est-à-dire de trouver une suite croissante de paramètres $(t_i)_{i=0, \dots, n}$ (avec $t_0 = a$ et $t_n = b$) telle que chaque segment courbe (ou plus brièvement *arc*) d'extrémités $\gamma(t_i)$ et $\gamma(t_{i+1})$ obéisse à certaines spécifications.

Par exemple, l'une des spécifications les plus simples est celle d'une discrétisation uniforme, dans laquelle la courbe Γ doit être subdivisée en un nombre donné n d'arcs de mêmes longueurs. La méthode de discrétisation comprend alors deux étapes principales :

1. Calculer la longueur totale $L = s(b)$ de la courbe Γ .
2. Déterminer les paramètres t_i tels que $s(t_i) = i \frac{L}{n}$, pour $i = 0, \dots, n$, avec $t_0 = a$ et $t_n = b$.

La section 2.4 ci-dessous présente une approche dans laquelle ces deux étapes sont réalisées en utilisant directement les équations (2.3) et (2.4). Cependant, ce procédé est généralement inapplicable en pratique, d'où l'approche de la section 2.5 dans laquelle la courbe Γ est préalablement approchée par une ligne polygonale $S(\Gamma)$, puis les sommets de la discrétisation cherchée $M(\Gamma)$ sont placés sur ce support $S(\Gamma)$.

2.4 Discrétisation sans construction préalable d'un support

Pour mettre en œuvre l'algorithme de la section précédente, deux questions principales sont à résoudre :

- Aux étapes 1 et 2, comment évaluer la fonction $s(t)$ pour t donné dans l'intervalle $[a, b]$?
- À l'étape 2, comment obtenir le paramètre t tel que $s(t) = s^*$, où s^* est un réel donné compris entre $s(a) = 0$ et $s(b) = L$? Bien évidemment, ce paramètre t existe et est unique puisque la fonction s est croissante sur l'intervalle $[a, b]$.

Pour résoudre la première question, il suffit de calculer l'intégrale de l'équation 2.3 par un calcul formel ou par une méthode d'intégration discrète, cette dernière étant de type « trapèzes », Simpson ou une de ses variantes.

Concernant la seconde question, il s'agit de résoudre l'équation généralement non linéaire $s(t) = s^*$. L'algorithme de Newton-Raphson semble approprié car il permet en général de trouver efficacement le paramètre t tel qu'une fonction $f(t)$ s'annule, connaissant sa dérivée $\dot{f}(t)$. Nous avons ici $f(t) = s(t) - s^*$ et $\dot{f}(t) = \dot{s}(t) = \|\dot{\gamma}(t)\|$ (d'après l'équation 2.3). Cet algorithme s'écrit :

- Donner une estimation initiale t_0 de la racine cherchée.
- Répéter les itérations $t_{i+1} = t_i - \frac{f(t_i)}{\dot{f}(t_i)}$, pour $i = 0, 1, 2, \dots$, jusqu'à ce que $|t_{i+1} - t_i|$ soit inférieur à un certain seuil de précision.

On suppose que $\forall t \in [a, b], \dot{f}(t) = \dot{s}(t) \neq 0$. La convergence de l'algorithme peut être démontrée soit de manière algébrique, en considérant le développement de Taylor à l'ordre 1 de la fonction f au voisinage de t_i , soit de manière géométrique, en considérant le graphe de la fonction f et la tangente au point d'abscisse t_i . Pour donner le point de départ t_0 , l'expression $t_0 = a + (b - a) \frac{s^*}{L}$ fournit une bonne estimation lorsque s est une fonction pratiquement linéaire de t .

Par un développement de Taylor à l'ordre 2, on montre que cet algorithme converge de manière quadratique. Cependant, dans notre contexte, l'évaluation de la fonction f et de sa dérivée \dot{f} est généralement coûteuse en temps calcul. Il est donc préférable en pratique d'utiliser un modèle discret, comme indiqué dans la section suivante.

2.5 Discrétisation avec construction préalable d'un support

Dans cette autre approche, notre objectif est de construire préalablement une ligne polygonale $S(\Gamma)$, appelée *support*, approchant une courbe Γ . Une solution simple, fréquemment retenue, consiste à subdiviser uniformément l'intervalle de définition I de la fonction $t \mapsto \gamma(t)$. Cependant, cette méthode peut être inefficace car l'abscisse curviligne $s(t)$ n'est généralement pas une fonction linéaire du paramètre t . Dans les deux sections suivantes, nous montrons à l'aide d'un exemple les inconvénients de cette première approche, puis nous proposons un nouveau modèle de support.

Support classique avec variation du paramètre t à pas constant

Pour illustrer la méthode la plus courante et ses inconvénients possibles, supposons que la courbe Γ soit définie par la fonction γ ci-dessous :

$$\gamma : I = [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto \gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) = 2 \cos \alpha(t) \\ y(t) = \sin \alpha(t) \\ z(t) = 0 \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

où α est la fonction suivante :

$$\alpha : I = [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \alpha(t) = -\frac{\pi}{6} + t^{1.8} \left(\pi + 2 \frac{\pi}{6} \right) \quad (2.6)$$

Comme le montre la figure 2.1, la courbe Γ forme dans le plan xOy une portion d'ellipse d'extrémités P_0 et P_1 , cette ellipse de centre O ayant un grand axe d'extrémités $(\pm 2, 0)$ et un petit axe d'extrémités $(0, \pm 1)$. Pour un paramètre t donné, $\alpha(t)$ peut être interprété comme un angle au centre d'un cercle dont l'ellipse est la projection. Lorsque t varie de 0 à 1, l'angle $\alpha(t)$ varie de $-\frac{\pi}{6}$ à $\pi + \frac{\pi}{6}$ de manière croissante mais non linéaire.

Nous sommes ici dans le cas fréquent où le calcul exact de la longueur L de la courbe Γ est impossible. En effet, l'équation 2.4 conduit à une intégrale elliptique de deuxième espèce, mise en évidence par Legendre, qui ne peut être calculée que de manière approximative. Pour cette raison, nous subdivisons l'intervalle de définition $I = [0, 1]$ de γ , ici avec un pas constant de $\frac{1}{5}$, valeur exagérément grande pour mieux expliciter la méthode. Le tableau ci-dessous donne, pour $i = 0, \dots, 5$, la valeur du paramètre $t_i = \frac{i}{5}$, celle de $t_i^{1.8}$ mettant en évidence une variation non linéaire, et celle de L_i qui désigne l'abscisse curviligne approchée du point $\gamma(t_i)$, obtenue par une somme de longueurs d'arêtes du support $S(\Gamma)$. Dans ce tableau, les valeurs de $t_i^{1.8}$ et de L_i sont données à 10^{-3} près.

i	t_i	$t_i^{1.8}$	L_i
0	0.0	0.000	0.000
1	0.2	0.055	0.280
2	0.4	0.192	0.846
3	0.6	0.399	2.114
4	0.8	0.669	4.244
5	1.0	1.000	5.575

Ainsi, la longueur totale de la courbe Γ peut être approchée par $L = L_5 = 5.575$. Si l'on souhaite obtenir un maillage $M(\Gamma)$ en 3 arcs de même longueur, les abscisses curvilignes des sommets de ce maillage sont respectivement 0 , $\frac{1}{3}L$, $\frac{2}{3}L$ et L , soit approximativement 0 , 1.858 , 3.717 et 5.575 . Il est facile d'obtenir ces sommets par interpolation linéaire à partir de la table précédente. Pour calculer les paramètres correspondants t_i , des interpolations linéaires peuvent encore être effectuées. Cependant, même avec un support plus fin, les erreurs d'approximation seraient importantes car l'abscisse curviligne s ne varie pas linéairement avec le paramètre t .

De manière plus générale, la construction d'un support par subdivision uniforme de l'intervalle de définition I , bien que très utilisée en pratique, exige souvent un très grand nombre de points pour obtenir une précision acceptable. Par suite, nous proposons une nouvelle méthode de construction du support $S(\Gamma)$.

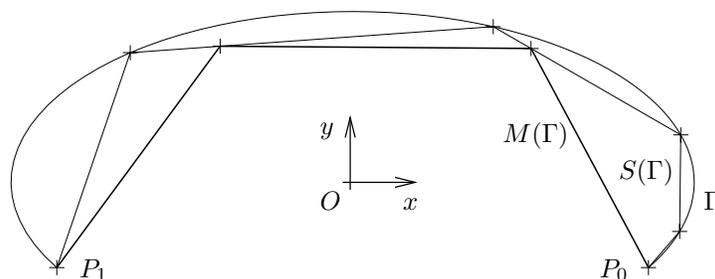


FIG. 2.1 – Exemple montrant une courbe Γ (portion d'ellipse d'extrémités P_0 et P_1), son support $S(\Gamma)$ comportant 5 arêtes (nombre volontairement réduit pour clarifier la figure), et sa discrétisation uniforme $M(\Gamma)$ comportant 3 arêtes.

Nouveau modèle de support

L'objectif est de construire un support « optimal » $S(\Gamma)$ d'une courbe Γ définie par l'équation 2.1, c'est-à-dire permettant d'atteindre une précision suffisante tout en utilisant un minimum de points. Ce support est lui-même défini par une suite croissante de paramètres t_i , $i = 0, \dots, m$, avec $t_0 = a$ et $t_m = b$, les points $\gamma(t_i)$ constituant les sommets du support. Pour que la méthode de maillage précédente soit applicable, il est nécessaire de garantir la *propriété géométrique* suivante :

Tout point $\gamma(t)$ de la courbe Γ , avec $t_i \leq t \leq t_{i+1}$, doit être « proche » du segment droit $[\gamma(t_i) \gamma(t_{i+1})]$, pour $i = 0, \dots, m - 1$. (PG)

Dans l'énoncé de la propriété (PG), la distance d'un point quelconque M à un segment $[AB]$ est définie de manière classique comme la plus petite distance entre ce point M et chacun des points du segment $[AB]$ (une définition plus générale est fournie plus loin par l'équation 2.23). En pratique, un point est considéré comme « proche » d'un segment si sa distance au segment ne dépasse pas un seuil donné ε . Grâce à cette propriété géométrique, la longueur totale L de Γ est voisine de la somme des longueurs des segments droits $[\gamma(t_i) \gamma(t_{i+1})]$ avec $i = 0, \dots, m - 1$, et la discrétisation de la courbe basée sur des abscisses curvilignes peut être réalisée à l'aide de simples interpolations linéaires.

Cependant, une propriété plus forte est nécessaire dans le contexte d'une approche indirecte de maillage surfacique (qui sera précisée en section 4.4). Dans ce cas, la courbe Γ de \mathbb{R}^3 est l'image par une application σ d'une courbe plane \mathcal{C}_ω représentant une application ω . Ceci s'écrit de manière formelle :

$$\omega : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \omega(t) \quad (2.7)$$

$$\sigma : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad u, v \mapsto \sigma(u, v) \quad (2.8)$$

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto \gamma(t) = \sigma(\omega(t)) = (\sigma \circ \omega)(t) \quad (2.9)$$

Par souci d'homogénéité, la courbe Γ sera également notée \mathcal{C}_γ . Dans notre approche indirecte de maillage, on veut faire correspondre à un point donné P de \mathcal{C}_γ le point P' de \mathcal{C}_ω tel que $\sigma(P') = P$. Autrement dit, on cherche le paramètre t tel que $\sigma(\omega(t)) = P$. En général, les applications réciproques de σ et de ω ne sont pas connues, et les méthodes

de type Newton-Raphson s'avèrent peu efficaces en raison des coûts d'évaluation de σ , de ω et de leurs dérivées. Par approximation, on utilise donc un support $(\omega(t_i))_{i=0,\dots,m}$ de \mathcal{C}_ω et le support correspondant $(\gamma(t_i))_{i=0,\dots,m}$ de \mathcal{C}_γ . À un point P du segment droit $[\gamma(t_i)\gamma(t_{i+1})]$, on fait correspondre un point P' du segment droit $[\omega(t_i)\omega(t_{i+1})]$ par interpolation linéaire sur les longueurs. Pour que cette approximation soit justifiée, nous faisons en sorte que la *propriété de linéarité* suivante soit vérifiée :

Lorsque t varie de t_i à t_{i+1} , le point correspondant $\gamma(t)$ sur la courbe Γ peut être approché, à l'aide d'une interpolation linéaire sur le segment droit $[\gamma(t_i)\gamma(t_{i+1})]$, par le point $\bar{\gamma}(t) = \gamma(t_i) + \lambda_i(t)(\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i))$ avec $\lambda_i(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i}$.

(PL)

À nouveau, deux points seront considérés comme proches si leur distance ne dépasse pas un seuil donné ε . L'ancienne propriété (PG) se déduit facilement de (PL) puisque tout point $\gamma(t)$ de la courbe Γ , avec $t_i \leq t \leq t_{i+1}$, est proche du point $\bar{\gamma}(t)$ situé sur le segment droit $[\gamma(t_i)\gamma(t_{i+1})]$, pour $i = 0, \dots, m - 1$. Mais la nouvelle propriété (PL) implique en outre que, pour un paramètre t compris entre t_i et t_{i+1} , la longueur de l'arc représentant la fonction $\gamma(u)$ avec $t_i \leq u \leq t$ est proche de la longueur du segment droit $[\gamma(t_i)\bar{\gamma}(t)]$. Ainsi, lorsque la propriété (PL) est vérifiée, l'application $t \mapsto s(t)$ donnant l'abscisse curviligne s en fonction du paramètre t peut être approchée avec une précision acceptable par une application linéaire par morceaux :

$$\bar{s}(t) = \sum_{j=0}^i \lambda_j(t) \|\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)\| \quad \text{avec} \quad \lambda_j(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } j < i \\ \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} & \text{si } j = i \end{cases} \quad (2.10)$$

À présent, nous avons besoin d'un algorithme pour trouver une suite de paramètres $(t_i)_{i=0,\dots,m}$, avec $t_0 = a$ et $t_m = b$, vérifiant la propriété (PL). L'idée de base est de chercher un paramètre t de l'intervalle ouvert $]a, b[$ qui maximise la distance entre les points $\gamma(t)$ et $\bar{\gamma}(t)$. Soit t_{max} ce paramètre et d_{max} la distance maximale associée. Si $d_{max} \leq \varepsilon$, notre objectif est atteint. Sinon, le processus peut être répété récursivement sur chacun des deux intervalles $]a, t_{max}[$ et $]t_{max}, b[$.

Cependant, il est généralement impossible de calculer exactement un tel paramètre t_{max} . Par suite, un échantillonnage de l'intervalle $[0, 1]$ est réalisé, soit $(\lambda_i)_{i=0,\dots,p}$ avec $\lambda_0 = 0$ et $\lambda_p = 1$. Les applications γ et $\bar{\gamma}$ sont évaluées aux points $t = a + \lambda_i(b - a)$ pour $i = 1, \dots, p - 1$. Pour plus d'efficacité, cet échantillonnage alterne des points répartis de manière uniforme (permettant d'obtenir le maximum exact dans certains cas courants, en particulier au point milieu $t = \frac{a+b}{2}$) et des points répartis aléatoirement (pour éviter le phénomène dit d'aliasing, par exemple lorsque γ est une fonction périodique de fréquence p). La figure 2.2 montre un exemple d'échantillonnage uniforme pour les points d'indices pairs $i = 0, 2, 4, \dots, p = 20$ et aléatoire pour les points d'indices impairs $i = 1, 3, \dots, p - 1$.

En résumé, lorsqu'un tel échantillonnage $(\lambda_i)_{i=0,\dots,p}$ a été réalisé, un support $S(\Gamma)$ de la courbe Γ est obtenu par subdivisions successives. Cet algorithme de linéarisation de l'application γ peut s'écrire sous forme simplifiée en pseudo-code :

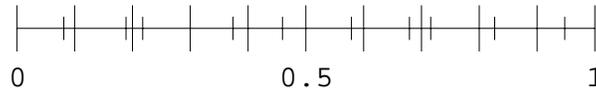


FIG. 2.2 – Échantillonnage alternativement uniforme et aléatoire de l'intervalle $[0, 1]$ donnant des points numérotés de 0 à 20.

```

procédure récursive subdiviser( $a, b$ )
   $d_{max} = 0$ 
  pour  $i = 1$  à  $p - 1$  faire
     $t = a + \lambda_i (b - a)$ 
     $M = \gamma(t)$ 
     $N = \gamma(a) + \lambda_i (\gamma(b) - \gamma(a))$ 
     $d = \|\vec{MN}\|$ 
    si ( $d > d_{max}$ ) {  $d_{max} = d$ ;    $t_{max} = t$  }
  fin pour
  si ( $d_{max} > \varepsilon$ ) { subdiviser( $a, t_{max}$ );   subdiviser( $t_{max}, b$ ) }
fin procédure

```

Si la courbe Γ comporte un point anguleux, cet algorithme produit un grand nombre de subdivisions autour de ce point anguleux, à moins que le tirage pseudo-aléatoire ne donne exactement le paramètre t correspondant. En pratique, il est préférable de fournir explicitement ce paramètre t .

Le support $S(\Gamma)$ généré par la méthode ci-dessus permet d'obtenir rapidement, à l'aide d'interpolations linéaires, une discrétisation de la courbe Γ avec un calcul précis des longueurs. En outre, dans le contexte d'une méthode indirecte de maillage surfacique, il permet de reporter efficacement une discrétisation tridimensionnelle dans les domaines paramétriques concernés, en évitant la résolution de systèmes non linéaires représentant les équations analytiques des courbes (cf. 4.5.3). Les sections suivantes précisent les méthodes utilisées pour discrétiser une courbe tout en respectant divers types de spécifications : uniformes, isotropes ou anisotropes.

2.5.1 Spécifications uniformes

Nous avons vu en section 2.3 que la discrétisation uniforme d'une courbe Γ consiste à subdiviser cette courbe en n arcs de même longueur. Dans ce cas, les spécifications fournissent généralement cette longueur constante h . L'algorithme de discrétisation s'écrit alors :

1. Calculer la longueur L de la courbe Γ .
2. Déterminer l'entier n tel que la longueur $l = \frac{L}{n}$ d'un arc soit la plus « proche » possible de h .
3. Déterminer les points P_i d'abscisses curvilignes $s_i = i \times l$, pour $i = 0, \dots, n$, où $P_0 = A$ et $P_n = B$ sont les deux extrémités de Γ .

Après avoir construit le support $S(\Gamma)$ (cf. section précédente), ce dernier algorithme en trois étapes est facile à mettre en œuvre. En effet, à l'étape 1, la longueur totale L

de Γ peut être approchée par celle de la ligne polygonale $S(\Gamma)$. À l'étape 2, on peut choisir n égal à l'entier le plus proche du réel $\frac{L}{h}$ (si cet entier approchant est nul, on prendra $n = 1$). On peut aussi, de manière plus élaborée, chercher à maximiser la qualité en taille $Q(l)$ (voir plus loin l'équation 2.14 et ce qui en suit). À l'étape 3, les points P_i peuvent être trouvés simplement par interpolation linéaire sur $S(\Gamma)$. Enfin, si les paramètres correspondants t_i sont nécessaires, ceux-ci peuvent être calculés eux aussi par des interpolations linéaires.

2.5.2 Spécifications isotropes

Pour préciser si un maillage doit être localement fin ou grossier, il est commode d'utiliser une fonction de taille $h(P)$ qui spécifie, en chaque point P d'un domaine Ω , la longueur idéale de toute arête issue de P . Géométriquement, pour un point P fixé, l'ensemble des points Q du plan tels que l'arête PQ est de longueur constante h est bien évidemment un cercle.

En pratique, la fonction de taille $h(P)$ n'est généralement connue que de manière discrète dans le domaine Ω . Sur une courbe Γ de la frontière de ce domaine Ω , la fonction $h(P)$ n'est alors connue qu'en un nombre fini de points, à savoir les deux extrémités de Γ et un certain nombre de points intermédiaires. En désignant ces points de définition par $(P_i)_{i=0,\dots,n}$, d'abscisses curvilignes croissantes $(s_i)_{i=0,\dots,n}$, la taille souhaitée en tout point P d'abscisse curviligne s comprise entre s_i et s_{i+1} , avec $i = 0, \dots, n-1$, peut être obtenue par interpolation. On utilise couramment une fonction d'interpolation linéaire ou géométrique :

$$\text{– linéaire :} \quad h_l(r) = h_i + r(h_{i+1} - h_i) \quad (2.11)$$

$$\text{– géométrique :} \quad h_g(r) = h_i \left(\frac{h_{i+1}}{h_i} \right)^r \quad (2.12)$$

où r désigne l'abscisse relative $\frac{s - s_i}{s_{i+1} - s_i}$ et $h_l(r)$ (resp. $h_g(r)$) la fonction de taille par interpolation linéaire (resp. géométrique) au point P d'abscisse relative r . Remarquons que, r étant compris entre 0 et 1, on a toujours $h_g(r) \leq h_l(r)$, et donc une interpolation géométrique cause en général un maillage plus fin qu'une interpolation linéaire.

La fonction de taille étant définie en tout point de la courbe Γ (éventuellement par interpolation), une discrétisation respectant ces spécifications peut être construite au moyen de *longueurs normalisées*. Si P_1 et P_2 sont deux points quelconques de la courbe, d'abscisses curvilignes respectives s_1 et s_2 , avec $s_1 < s_2$, la longueur normalisée $l_h(P_1P_2)$ de l'arc P_1P_2 est définie par :

$$l_h(P_1P_2) = \int_{s_1}^{s_2} \frac{1}{h(s)} ds \quad (2.13)$$

L'objectif est de discrétiser la courbe Γ en plusieurs arcs de même longueur normalisée aussi proche que possible de l'unité. En effet, on s'aperçoit en particulier que, si la fonction h est constante, on a $l_h(P_1P_2) = \frac{s_2 - s_1}{h} = 1$ et donc la longueur usuelle

du segment courbe P_1P_2 sera bien égale à la taille spécifiée h . L'algorithme général de discrétisation d'une courbe Γ respectant une fonction de taille h s'écrit alors :

1. Calculer la longueur normalisée $L = l_h(\Gamma)$ de la courbe Γ .
2. Déterminer l'entier n tel que la longueur normalisée $l = \frac{L}{n}$ d'un arc soit relativement la plus proche possible de l'unité.
3. Déterminer les points P_i tels que $l_h(AP_i) = i \times l$, pour $i = 0, \dots, n$, où $P_0 = A$ et $P_n = B$ sont les deux extrémités de Γ .

Dans la première étape, la longueur L est obtenue en sommant les longueurs normalisées des arcs Q_iQ_{i+1} , en notant $(Q_j)_{j=0, \dots, m}$ les points où la fonction de taille est définie de manière discrète. Lorsque l'interpolation est linéaire ou géométrique, chaque longueur peut être calculée de manière analytique [10, 87].

Dans la deuxième étape, l'écart de la longueur l d'un arc par rapport à l'unité peut être estimé de manière absolue, soit $|l - 1|$, ou de manière relative *via* une fonction de qualité $Q : \mathbb{R}^+ \rightarrow [0, 1]$ définie ainsi :

$$Q(l) = \begin{cases} l & \text{si } 0 \leq l \leq 1 \\ \frac{1}{l} & \text{si } l \geq 1 \end{cases} \quad (2.14)$$

Pour trouver un entier n qui maximise la quantité $Q(l)$, avec $l = \frac{L}{n}$, on considère la partie entière n_1 de L . Dans le cas trivial $n_1 = 0$, l'entier cherché est $n = 1$. Dans tous les autres cas, les deux entiers envisageables sont n_1 ou $n_2 = n_1 + 1$ qui encadrent L , d'où les longueurs associées $l_1 = \frac{L}{n_1}$ et $l_2 = \frac{L}{n_2}$ qui encadrent l'unité. Plus précisément, nous avons par hypothèse $n_1 \leq L < n_2$, d'où $l_2 < 1 \leq l_1$. Ceci conduit à comparer les qualités $Q(l_1) = \frac{1}{l_1} = \frac{n_1}{L}$ et $Q(l_2) = l_2 = \frac{L}{n_1 + 1}$. Le choix de la plus grande quantité donne $n = n_1$ si $L^2 \leq n_1(n_1 + 1)$ et $n = n_1 + 1$ sinon. On remarque alors que, pour tout $L \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$, on a $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq l \leq \sqrt{2}$ (ces extrema sont les limites de l , respectivement à droite et à gauche, lorsque L tend vers $\sqrt{2}$). À titre d'exemple, si la longueur normalisée de la courbe Γ est $L = 1.42$, on pourra discrétiser cette courbe en un seul arc de longueur $l_1 = 1.42$ ou en deux arcs de longueur $l_2 = 0.71$, ce dernier choix étant préférable car $Q(l_1) < Q(l_2)$. Un codage possible en pseudo-code est le suivant :

$$n = \max(\text{int}(L), 1)$$

$$\text{si } n(n + 1) < L^2 \text{ alors } n = n + 1$$

Dans la troisième et dernière étape, il suffit de chercher dans un premier temps les points d'interpolation Q_j et Q_{j+1} tels que $l_h(AQ_j) \leq l_h(AP_i) < l_h(AQ_{j+1})$, pour $i = 1, \dots, n - 1$. Dans un second temps, l'abscisse curviligne du point P_i peut à nouveau être obtenue analytiquement si l'interpolation est linéaire ou géométrique [10, 87]. Enfin, si le paramètre correspondant t_i est requis, celui-ci peut être calculé efficacement en utilisant le support $S(\Gamma)$ précédent (cf. section 2.5.1).

Exemples de discrétisations respectant des spécifications isotropes

Dans le cas isotrope, la taille requise est par définition indépendante de la direction des arêtes, et il suffit donc d'étudier la discrétisation d'un segment droit. Dans notre exemple (figure 2.3), aux cinq points d'abscisses 0, 3, 4, 8 et 10 sont spécifiées les tailles respectives 1.5, 0.5, 2.0, 0.1 et 0.7 représentées par des cercles. Par interpolation linéaire, on obtient une fonction de taille $h(s)$ définie en tout point du segment droit et dont le graphe est tracé sur la figure 2.4. L'algorithme de la section 2.5.2 fournit la discrétisation visible au bas de cette même figure. En outre, un histogramme est formé de carrés construits sur cette discrétisation. Les intersections de la courbe interpolée avec les segments horizontaux de cet histogramme prouvent que la discrétisation respecte bien la fonction de taille $h(s)$ [87]. De même, la figure 2.5 représente la nouvelle fonction de taille $h(s)$ résultant d'une interpolation géométrique, la discrétisation correspondante et l'histogramme prouvant le respect de la fonction de taille. Conformément à ce que nous avons mentionné plus haut, un plus grand nombre d'éléments est alors généré (26 arêtes au lieu de 17 précédemment).

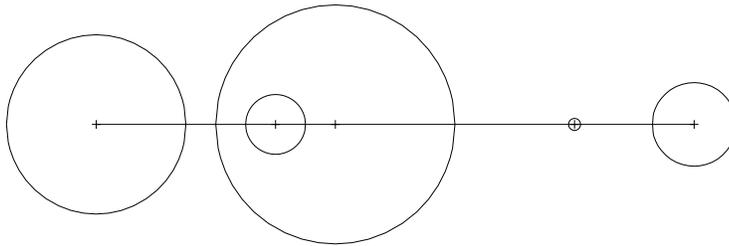


FIG. 2.3 – Tailles spécifiées en plusieurs points d'un segment droit (représentées par leurs « cercles unités »).

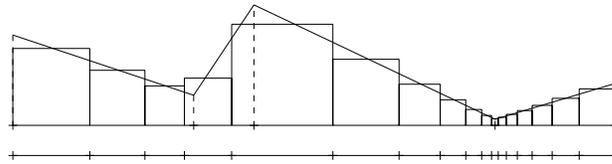


FIG. 2.4 – Graphe de la fonction de taille $h(s)$ obtenue par interpolation linéaire et discrétisation correspondante du segment droit (17 arêtes).

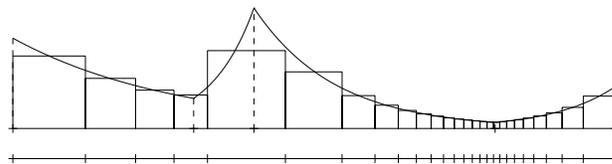


FIG. 2.5 – Graphe de la fonction de taille $h(s)$ obtenue par interpolation géométrique et discrétisation correspondante du segment droit (26 arêtes).

2.5.3 Spécifications anisotropes

Alors que les spécifications isotropes vues précédemment permettent de contrôler uniquement la taille des éléments d'un maillage, les spécifications anisotropes présentées dans cette section permettent de contrôler aussi leur forme. Ces spécifications anisotropes définissent, en tout point P d'un domaine Ω , un tenseur métrique (en abrégé une métrique). Dans un espace de dimension $d \geq 2$ muni de son repère, le tenseur en un point P est caractérisé par une matrice $\mathcal{M}(P)$ symétrique définie positive d'ordre d . Si une courbe Γ de cet espace est paramétrée par une application $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$, on définit sa longueur normalisée dans le champ de métriques $\{\mathcal{M}(P)\}_{P \in \Gamma}$ par :

$$l_{\mathcal{M}(\gamma(t))}(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{\dot{\gamma}(t)^T \mathcal{M}(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t)} dt \quad (2.15)$$

où $\dot{\gamma}$ désigne la dérivée de γ par rapport à t (cf. équation 2.1 et ce qui en suit).

Pour donner à ce qui précède une interprétation géométrique, considérons dans l'espace \mathbb{R}^2 muni de son repère usuel une métrique fixe \mathcal{M} :

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \quad \text{avec } a > 0, c > 0 \text{ et } ac - b^2 > 0 \quad (2.16)$$

Le « cercle unité » représentant cette métrique en un point P de \mathbb{R}^2 est le lieu des points Q tels que $l_{\mathcal{M}}(PQ) = 1$. En prenant pour origine le point P , et en paramétrant le segment de droite PQ par l'application linéaire $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto P + t\overrightarrow{PQ}$, les deux dernières équations donnent :

$$l_{\mathcal{M}}(PQ)^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = ax^2 + 2bxy + cy^2 = 1 \quad (2.17)$$

Cette équation est celle d'une ellipse centrée en P , qui peut être caractérisée par l'angle θ entre l'axe des abscisses du repère usuel et un axe quelconque de l'ellipse, par la longueur $2h_1$ de cet axe et par la longueur $2h_2$ de l'axe orthogonal (voir figure 2.6). Dans la base canonique de cette ellipse, la matrice définissant la métrique et l'équation du « cercle unité » deviennent :

$$\mathcal{M}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{h_1^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{h_2^2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{x'}{h_1^2} + \frac{y'}{h_2^2} = 1 \quad (2.18)$$

Ainsi, la taille requise pour une arête issue du point P est égale à h_1 dans la direction θ , à h_2 dans la direction orthogonale, et varie de manière monotone entre ces deux directions. En définissant une métrique $\mathcal{M}(P)$ en tout point P du domaine Ω , on obtient un champ anisotrope permettant de contrôler à la fois la taille et la forme des éléments générés, qui seront plus ou moins étirés selon l'excentricité de l'ellipse. Ce champ de métriques définit un espace riemannien sur le domaine Ω .

Comme dans le cas isotrope (cf. section précédente), les métriques ne sont généralement connues que de manière discrète. Pour interpoler une métrique sur un segment droit, connaissant les métriques \mathcal{M}_1 et \mathcal{M}_2 en ses deux extrémités, on utilise une

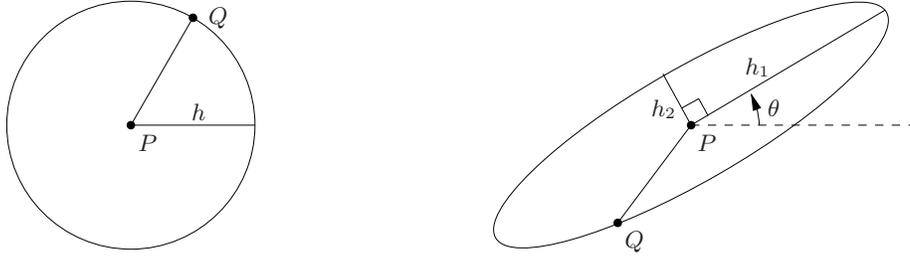


FIG. 2.6 – « Cercle unité » représentant une métrique isotrope (à gauche) et anisotrope (à droite).

réduction simultanée. Ce procédé fournit une base, généralement non orthonormée, dans laquelle les matrices \mathcal{M}_1 et \mathcal{M}_2 sont toutes deux diagonales. En identifiant chaque terme diagonal à l'inverse du carré d'une taille, on peut à nouveau utiliser une interpolation linéaire ou géométrique (cf. équations 2.11 et 2.12).

L'algorithme de discrétisation d'une courbe Γ respectant un champ anisotrope est analogue à celui de la section précédente. En notant $\mathcal{M}(\Gamma)$ le champ de métriques défini le long de la courbe Γ , cet algorithme comporte les étapes suivantes :

1. Calculer la longueur normalisée $L = l_{\mathcal{M}(\Gamma)}(\Gamma)$ de la courbe Γ .
2. Déterminer l'entier n tel que la longueur normalisée $l = \frac{L}{n}$ d'un arc soit relativement la plus proche possible de l'unité.
3. Déterminer les points P_i tels que $l_{\mathcal{M}(\Gamma)}(AP_i) = i \times l$, pour $i = 0, \dots, n$, où $P_0 = A$ et $P_n = B$ sont les deux extrémités de Γ .

Le déroulement de l'étape 2 est identique à celui de la section précédente. En revanche, dans les étapes 1 et 3, il est généralement difficile ou impossible de calculer analytiquement les longueurs. On utilise donc le support polygonal $S(\Gamma)$ présenté dans la section 2.5.1. Pour calculer la longueur d'un segment droit quelconque PQ appartenant à $S(\Gamma)$, l'équation 2.15 donne :

$$l_{\mathcal{M}(t)}(PQ) = \int_0^1 \sqrt{\overrightarrow{PQ}^T \mathcal{M}(t) \overrightarrow{PQ}} dt \quad (2.19)$$

En effet, le segment PQ peut être paramétré par l'application $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto P + t\overrightarrow{PQ}$, d'où la dérivée $\dot{\gamma}(t) = \overrightarrow{PQ}$. Généralement, l'intégrale ci-dessus ne peut pas être calculée exactement mais on peut utiliser une méthode d'intégration discrète avec adaptation. En se basant par exemple sur la « méthode des trapèzes », et en appelant f la fonction à intégrer, nous avons :

$$l_{\mathcal{M}(t)}(PQ) = \int_0^1 f(t) dt \approx \frac{f(0) + f(1)}{2} \quad (2.20)$$

Le résultat est jugé suffisamment précis s'il est inférieur à un certain seuil, par exemple 0.5 (rappelons que les longueurs sont normalisées). Sinon, on subdivise le segment PQ en deux segments de tailles égales (dans la métrique usuelle) et on recommence récursivement le processus. Toutes ces subdivisions de la courbe Γ sont conservées à

l'étape 1 pour être utilisées ensuite à l'étape 3. D'autres approches sont envisageables pour effectuer les intégrations numériques, parmi lesquelles la méthode de Simpson adaptative (déjà évoquée en section 2.4).

Exemples de discrétisations respectant des spécifications anisotropes

Considérons une courbe Γ fermée et présentant deux points anguleux (figure 2.7 à gauche). Le but est de discrétiser cette courbe dans un champ de métriques anisotropes.

Dans un premier temps, un support polygonal est généré. La figure 2.7, à gauche, montre le support polygonal correspondant à un seuil donné ε (cf. section 2.5). La même figure, à droite correspond à un seuil inférieur. Pour la suite des calculs, nous retiendrons ce dernier. La figure 2.8 montre les « cercles unités » correspondant aux métriques données dans les spécifications. Enfin, la figure 2.9 montre les discrétisations générées lorsque le champ de métrique est obtenu par interpolation linéaire (à gauche) ou géométrique (à droite). À nouveau, un plus grand nombre d'éléments est généré dans le deuxième cas. La visualisation des métriques en chaque sommet généré indique que la discrétisation est bien conforme aux spécifications.

2.5.4 Combinaison de plusieurs spécifications

Jusqu'à présent, les spécifications données en un point quelconque P du domaine Ω étaient représentées par une taille ou une métrique unique. Or, dans un calcul par éléments finis, les caractéristiques souhaitées pour les éléments du maillage peuvent découler de diverses contraintes liées à la modélisation du phénomène physique et/ou à la géométrie du domaine. D'où le nouveau problème posé : comment remplacer plusieurs spécifications en un point donné par une seule spécification ?

Clairement, les spécifications de type uniforme, isotrope et anisotrope, dans cet ordre, présentent une généralité de plus en plus grande. En effet, lorsque les spécifications sont de type anisotrope, le « cercle unité » en un point quelconque du domaine Ω est une ellipse caractérisée par son inclinaison θ et les longueurs h_1 et h_2 de ses demi-axes. Dans le cas particulier $h_1 = h_2 = h$, cette ellipse devient un cercle de rayon h correspondant à des spécifications isotropes. Enfin, si la taille h est constante sur le domaine Ω , les spécifications sont uniformes. Ainsi, lorsque des spécifications sont de plusieurs types, leur combinaison sera du type le plus général parmi ceux-ci.

L'idée de base pour déterminer la spécification unique cherchée est de considérer l'intersection des « disques unités » spécifiés au point P . Cette méthode est directement applicable dans les deux premiers cas, uniforme et isotrope. La taille requise au point P est alors le minimum des tailles requises.

En revanche, dans le cas anisotrope, le contour de l'intersection des « disques unités » n'est généralement pas une ellipse. On cherche donc la plus grande ellipse incluse dans cette intersection. Si deux spécifications anisotropes sont données au point P , une *réduction simultanée* permet d'obtenir l'ellipse cherchée. Rappelons que ce procédé, déjà utilisé précédemment à des fins d'interpolation, fournit une base dans laquelle les deux spécifications sont représentées par des matrices diagonales \mathcal{M}_1 et \mathcal{M}_2 que nous

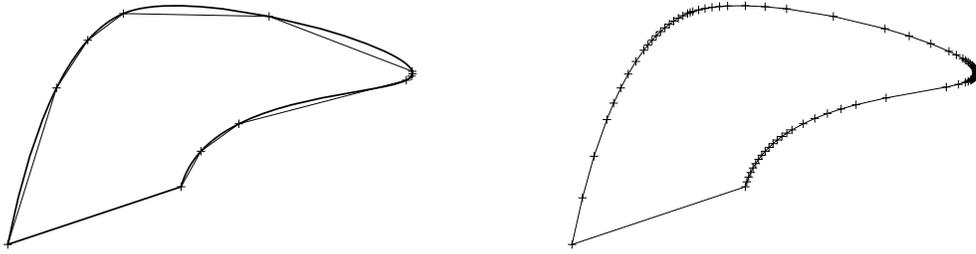


FIG. 2.7 – Deux supports polygonaux d’une même courbe Γ , le premier grossier et le second plus fin.

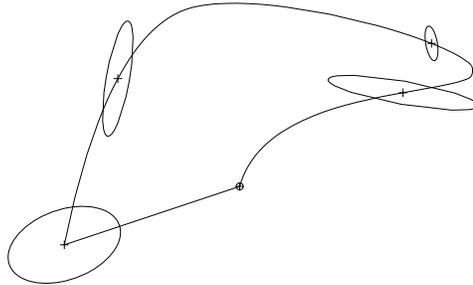


FIG. 2.8 – Métriques anisotropes spécifiées en plusieurs points de la courbe Γ .

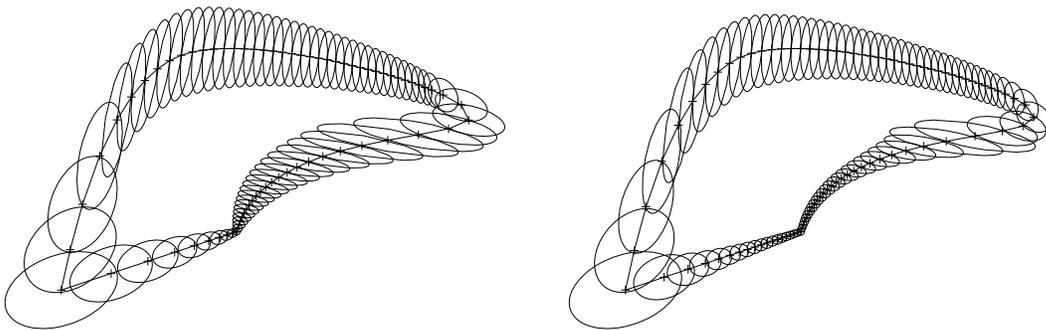


FIG. 2.9 – Deux discrétisations de la courbe Γ respectant le champ de métriques obtenu par interpolation, la première linéaire et la seconde géométrique.

écrivons sous la forme suivante :

$$\mathcal{M}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{h_{11}^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{h_{12}^2} \end{pmatrix} \quad \mathcal{M}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{h_{21}^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{h_{22}^2} \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

On en déduit la combinaison \mathcal{M} de \mathcal{M}_1 et de \mathcal{M}_2 dans cette même base :

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\min(h_{11}, h_{21})^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\min(h_{12}, h_{22})^2} \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

À titre d'exemple, la figure 2.10 montre trois ellipses représentant les « cercles unités » correspondant à deux métriques données ($\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$) et à leur combinaison \mathcal{M} . Cette dernière ellipse est entièrement incluse dans l'intersection des « disques » délimités par les deux premières ellipses. Par abus de langage, la métrique \mathcal{M} est aussi appelée *intersection* des métriques \mathcal{M}_1 et \mathcal{M}_2 .

Plus généralement, si une suite de métriques $(\mathcal{M}_i)_{i=1, \dots, n}$ est donnée, $n \geq 2$, la combinaison de ces métriques est représentée par la plus grande ellipse incluse dans l'intersection de leurs « disques unités ». Cette définition étant difficile à mettre en œuvre, une autre approche consiste à considérer la métrique intersection de \mathcal{M}_1 et de \mathcal{M}_2 , puis la métrique intersection du résultat avec \mathcal{M}_3 , et ainsi de suite. Remarquons que la première définition est indépendante de l'ordre initial des métriques tandis que la seconde ne l'est pas.

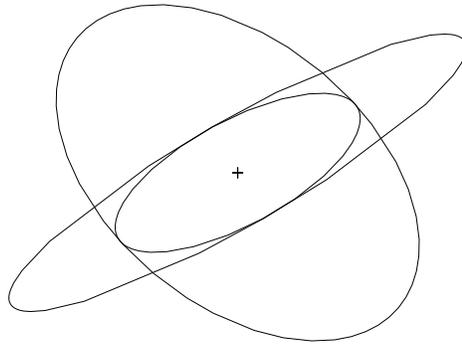


FIG. 2.10 – Ellipses correspondant à deux métriques données ($\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$) et à leur combinaison \mathcal{M} (cette dernière étant la plus interne).

2.6 Discrétisation de type A^0 , A^1 ou géométrique

Les spécifications précédentes (uniformes, isotropes, anisotropes ou une combinaison de celles-ci) constituent des outils très généraux pour contrôler la discrétisation d'une courbe. Une application intéressante, parmi d'autres, consiste à contrôler l'approximation géométrique de la courbe à l'aide de spécifications isotropes. Cet aspect est détaillé dans cette section et sera généralisé au chapitre 4 pour contrôler le maillage d'une surface gauche, en utilisant cette fois-ci des spécifications isotropes ou anisotropes.

Rappelons que les discrétisations que nous manipulons sont toutes *interpolantes*, c'est-à-dire que tout sommet P_i , $i = 0, \dots, n$, de la discrétisation $M(\Gamma)$ est aussi un point de la courbe Γ (ou plus exactement du support $S(\Gamma)$ qui approche fidèlement la courbe Γ). Nous noterons ici Γ_i la portion de la courbe Γ d'extrémités P_{i-1} et P_i , et $M(\Gamma_i)$ l'arête de $M(\Gamma)$ de mêmes extrémités, $i = 1, \dots, n$. Pour que chaque arête $M(\Gamma_i)$ puisse être considérée comme une approximation géométrique de Γ_i , il est nécessaire de vérifier deux types d'écart désignés par A^0 et A^1 :

- L'écart A^0 (écart d'approximation d'ordre 0) évalue les distances entre les points de l'arc Γ_i et l'arête $M(\Gamma_i)$.
- L'écart A^1 (écart d'approximation d'ordre 1) évalue les angles entre les tangentes à l'arc Γ_i et la direction de l'arête $M(\Gamma_i)$.

Ces écarts sont dits d'ordre 0 ou 1 car, si la courbe Γ représente une fonction γ , l'écart A^0 ne concerne que cette fonction γ , tandis que l'écart A^1 concerne la tangente à la courbe Γ et donc la dérivée première $\dot{\gamma}$. Le fait de majorer l'un ou l'autre de ces écarts pour tout $i = 1, \dots, n$ permet d'assurer la validité de l'approximation géométrique de la discrétisation vis-à-vis d'une certaine tolérance :

- Si l'écart A^0 est majoré par un seuil de distance ε_0 donné, la discrétisation $M(\Gamma)$ est considérée comme suffisamment proche de la courbe Γ . Nous dirons alors que $M(\Gamma)$ satisfait le « critère A_0 », ou que $M(\Gamma)$ est une « discrétisation A^0 ».
- Si l'écart A^1 est majoré par un seuil d'angle ε_1 donné, une portion lisse de courbe est approchée par une discrétisation d'aspect lisse elle aussi. Nous dirons dans ce cas que $M(\Gamma)$ satisfait le « critère A_1 », ou que $M(\Gamma)$ est une « discrétisation A^1 ».
- Si les écarts A^0 et A^1 sont tous deux majorés, nous parlerons d'une « discrétisation géométrique ».

Les sections ci-dessous définissent plus précisément ces deux écarts A^0 et A^1 .

2.6.1 Écart et critère A^0

Notre objectif est de définir l'écart d'approximation d'ordre 0, c'est-à-dire de quantifier la proximité ou l'éloignement d'une portion de courbe Γ_i par rapport à l'arête $M(\Gamma_i)$ de mêmes extrémités. À cette fin, plusieurs définitions de distances sont rappelées ci-dessous.

On désigne par $d(p, q)$ la distance usuelle entre deux points p et q .

La distance d'un point a à un ensemble B de points est définie par :

$$d(a, B) = \min_{b \in B} d(a, b) \tag{2.23}$$

La distance usuelle entre deux ensembles de points A et B est définie par :

$$d(A, B) = \min_{a \in A} d(a, B) \quad (2.24)$$

La distance ainsi définie ne permet pas de définir l'écart A^0 cherché. En effet, il suffit que les ensembles A et B aient un seul point commun, d'autres pouvant être très éloignés, pour que leur distance $d(A, B)$ soit nulle. On introduit donc la *distance de Hausdorff* $H(A, B)$, non symétrique¹, entre un ensemble de points A et un ensemble de points B :

$$H(A, B) = \max_{a \in A} d(a, B) \quad (2.25)$$

À présent, nous pouvons définir l'écart A^0 , noté E_0 , entre l'arc Γ_i et l'arête $M(\Gamma_i)$ par la relation suivante :

$$E_0(\Gamma_i, M(\Gamma_i)) = H(\Gamma_i, M(\Gamma_i)) \quad (2.26)$$

Autrement dit, pour tout point P de l'arc Γ_i , on évalue la distance entre P et l'arête $M(\Gamma_i)$. Le maximum de ces distances donne l'écart A^0 cherché. En pratique, il suffit de considérer un nombre fini de points répartis aléatoirement sur l'arc Γ_i .

Par définition, l'arête $M(\Gamma_i)$ satisfait le critère A^0 si l'écart précédent est majoré par un seuil de distance ε_0 donné :

$$E_0(\Gamma_i, M(\Gamma_i)) \leq \varepsilon_0 \quad (2.27)$$

2.6.2 Écart et critère A^1

La majoration de l'écart A^0 précédent par un seuil de distance ε_0 donné n'est pas suffisante pour obtenir dans tous les cas une approximation géométrique satisfaisante. Par exemple, sur la figure 2.11 à gauche, la courbe n'est pas lisse mais est approchée par une seule arête (supposée de distance inférieure à ε_0). Dans un second exemple, à droite, une courbe lisse est approchée par une discrétisation formant des « plis ». Généralement, ces deux types de discrétisation ne sont pas acceptables.

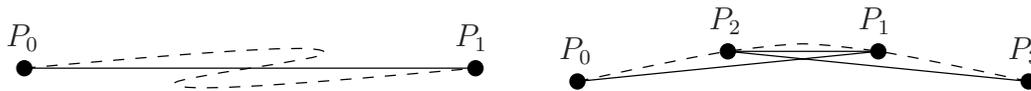


FIG. 2.11 – Exemples de discrétisations vérifiant le critère A^0 et non le critère A^1 .

¹En fait, $H(A, B)$ n'est pas une véritable distance car non symétrique. On définit la « distance de Hausdorff symétrique » par $H_s(A, B) = \max(H(A, B), H(B, A))$ mais cette dernière est d'un usage assez rare.

Pour y remédier, l'idée de base est de considérer, pour tout point P d'une portion de courbe Γ_i , l'écart angulaire entre le vecteur tangent en P à Γ_i et la direction de l'arête $M(\Gamma_i)$. Comme nous l'avons vu, l'évaluation des vecteurs tangents implique qu'il s'agit d'un écart d'approximation d'ordre 1 que nous noterons A^1 . Par un procédé semblable à celui de la section précédente, nous donnons ci-dessous, de proche en proche, une définition plus rigoureuse de cet écart A^1 .

L'angle entre deux vecteurs quelconques \vec{u} et \vec{v} est noté $a(\vec{u}, \vec{v})$.

Pour tout point P de Γ_i , désignons par $\vec{\tau}_{\Gamma_i}(P)$ le vecteur tangent en P à Γ_i . Par ailleurs, désignons par $\vec{\tau}$ le vecteur $\overrightarrow{P_{i-1}P_i}$ donnant la direction de l'arête $M(\Gamma_i)$.

Nous pouvons définir l'écart A^1 (non symétrique), noté E_1 , entre l'arc Γ_i et l'arête $M(\Gamma_i)$ par :

$$E_1(\Gamma_i, M(\Gamma_i)) = \max_{P \in \Gamma_i} a(\vec{\tau}_{\Gamma_i}(P), \vec{\tau}) \quad (2.28)$$

Ainsi, pour tout point P de l'arc Γ_i , on évalue l'angle entre la tangente en P à Γ_i et la direction de l'arête $M(\Gamma_i)$. Le maximum de ces angles donne l'écart A^1 cherché. En pratique, il suffit de considérer les tangentes aux deux extrémités et en un nombre fini de points répartis aléatoirement l'arc Γ_i .

Par définition, l'arête $M(\Gamma_i)$ satisfait le critère A^1 si l'écart précédent est majoré par un seuil d'angle ε_1 donné :

$$E_1(\Gamma_i, M(\Gamma_i)) \leq \varepsilon_1 \quad (2.29)$$

Le problème que nous nous posons maintenant est le suivant : une courbe Γ étant donnée, trouver une fonction de taille permettant de satisfaire le critère A^0 ou A^1 . Autrement dit, quelle est la plus grande taille h d'une arête issue d'un point quelconque P de Γ , de manière à respecter le critère A^0 ou A^1 ? Cette question est traitée ci-dessous, en confondant localement la courbe avec son cercle osculateur, ce qui suppose que le rayon de courbure soit continu et varie peu autour du point P .

2.6.3 Spécifications de taille satisfaisant le critère A^0

Considérons le cercle osculateur de la courbe Γ au point P (voir figure 2.12). Par définition, le rayon ρ de ce cercle est le rayon de courbure de Γ en P . Pour un point X se déplaçant sur ce cercle, on désigne par h la longueur de l'arête PX et par δ l'écart de cette arête avec le cercle. Les réels ρ , h et δ , qui vérifient respectivement $\rho > 0$, $0 \leq h \leq 2\rho$ et $0 \leq \delta \leq \rho$, sont liés entre eux par le théorème de Pythagore :

$$\left(\frac{h}{2}\right)^2 + (\rho - \delta)^2 = \rho^2 \quad \Leftrightarrow \quad h = 2\sqrt{\delta(2\rho - \delta)} \quad (2.30)$$

Lorsque la taille h croît de 0 à 2ρ , l'écart δ croît de 0 à ρ . Inversement, la fonction $\delta \mapsto h$ est croissante sur l'intervalle $[0, \rho]$.

Afin de satisfaire le critère A^0 , l'écart δ de toute arête du maillage doit être majoré par une constante ε_0 . La plus grande taille h d'une arête issue de P est donc définie par :

$$\boxed{h = 2\sqrt{\varepsilon_0(2\rho - \varepsilon_0)}} \quad (2.31)$$

Cette expression de h spécifie la fonction de taille cherchée pour le critère A^0 , le rayon de courbure ρ dépendant du point P . En général, on a $\rho \geq \varepsilon_0$ et cette expression est bien définie. Dans le cas contraire $\rho < \varepsilon_0$, ce qui correspond en pratique à un rayon de courbure exagérément petit, on procède comme si l'on avait $\rho = \varepsilon_0$, d'où $h = 2\varepsilon_0$.

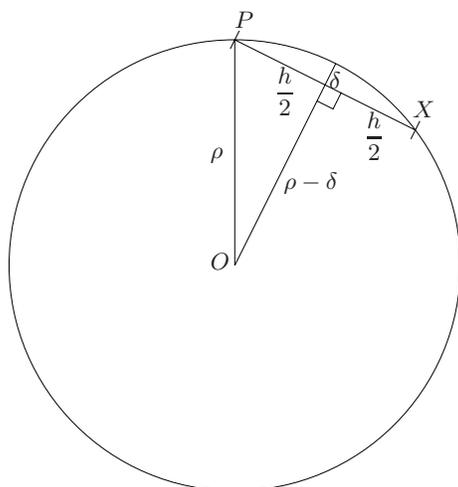


FIG. 2.12 – Écart de distance δ entre une arête PX et le cercle osculateur.

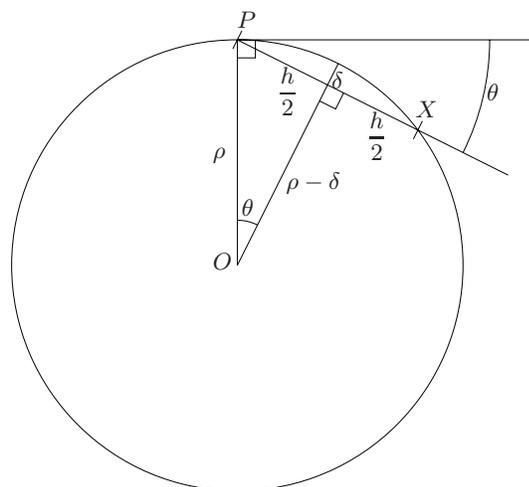


FIG. 2.13 – Écart d'angle θ entre une arête PX et le cercle osculateur.

2.6.4 Spécifications de taille satisfaisant le critère A^1

Considérons à nouveau le cercle osculateur de la courbe Γ au point P , et notons ρ son rayon (voir figure 2.13). Pour un point X se déplaçant sur ce cercle, on désigne par θ l'angle entre l'arête PX et la tangente en P à ce cercle. Le critère A^1 impose que l'angle θ soit majoré par une constante donnée ε_1 . En remarquant que $\sin \theta = \frac{h}{2\rho}$ et que $\cos \theta = 1 - \frac{\delta}{\rho}$ (voir sur la figure l'angle de sommet O et égal à θ), majorer l'angle θ revient à majorer l'écart relatif δ_r ou la taille relative h_r :

$$\theta \leq \varepsilon_1 \quad \Leftrightarrow \quad \delta_r = \frac{\delta}{\rho} \leq 1 - \cos \varepsilon_1 \quad \Leftrightarrow \quad h_r = \frac{h}{\rho} \leq 2 \sin \varepsilon_1 \quad (2.32)$$

Il résulte de cette équation que la taille h doit être proportionnelle au rayon de courbure ρ , avec un facteur de proportionnalité $\lambda = 2 \sin \varepsilon_1$:

$$\boxed{h = \lambda \rho = (2 \sin \varepsilon_1) \rho} \quad (2.33)$$

Le rayon de courbure ρ dépendant du point P , cette expression de h définit la fonction de taille cherchée pour le critère A^1 .

En résumé, la fonction de taille 2.31 (resp. 2.33) spécifie une discrétisation A^0 (resp. A^1). Il en résulte que le minimum de ces deux fonctions, qui satisfait à la fois les critères A^0 et A^1 , spécifie une discrétisation géométrique.

Chapitre 3

Maillage d'un domaine plan

Dans des contextes très divers, il est nécessaire de générer des maillages plans de qualité. En particulier, de nombreux problèmes physiques peuvent être modélisés sous forme bidimensionnelle de manière à demander des ressources réduites en temps calcul et en espace mémoire. Par ailleurs, le maillage dans le plan est à la base du maillage des surfaces gauches, moyennant certaines précautions comme nous le verrons au chapitre suivant. Enfin, une étude préliminaire en 2D précède souvent la résolution d'un problème 3D, bien que le passage de l'une à l'autre se traduise rarement par une simple extension.

Un domaine plan Ω est généralement défini par sa frontière Γ et par une « orientation » indiquant de quel côté de la frontière il se situe. Par exemple, la première image de la figure 3.1 montre un domaine formé d'un simple disque (la flèche indiquant de quel côté se trouve le domaine). Sur la deuxième image, le domaine est constitué d'un disque percé de quatre trous, la frontière comprenant alors cinq composantes connexes. Les autres images montrent que la donnée d'une courbe et d'une orientation sur cette courbe ne définit pas toujours correctement un domaine. Ainsi, sur la troisième image, la courbe est ouverte. Sur la quatrième, elle est fermée mais l'orientation fournie est incorrecte. Enfin, sur la cinquième, elle est également fermée mais présente une auto-intersection.

Après un état de l'art sur le sujet du maillage d'un domaine plan (section 3.1), nous donnons ci-après une présentation générale de nos contributions (3.2) et nous les détaillons dans le cas de domaines dont les contours sont fixes (3.3) ou variables (3.4).

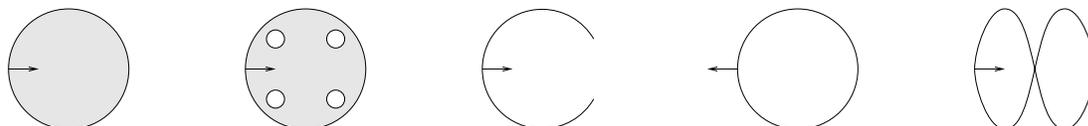


FIG. 3.1 – De gauche à droite, deux domaines bien définis et trois mal définis.

3.1 État de l'art

De nombreuses méthodes permettent de construire, généralement à partir de la donnée de la frontière d'un domaine de calcul, un maillage de celui-ci [FRE99]. Ces méthodes diffèrent principalement par la façon dont sont générés les sommets intérieurs du maillage. Parmi celles-ci, la *méthode frontale* offre un moyen puissant pour la construction d'un maillage aussi régulier que possible. En effet, elle utilise le fait que des entités du maillage sont déjà construites et place les points internes d'une manière optimale par rapport à ces entités. À l'initialisation, ces entités sont fournies par la discrétisation du contour, qui doit faire partie du maillage final. La méthode frontale consiste principalement à appliquer d'une manière itérative les procédures suivantes :

- définir un front constitué de quelques entités du maillage,
- placer des points internes d'une manière optimale par rapport à ce front,
- connecter les nouveaux points générés aux autres entités du maillage déjà existantes.

La première procédure est cruciale dans la mesure où la convergence de la méthode en dépend. Quant aux deux autres procédures, elles agissent sur la régularité du maillage. Parmi les méthodes frontales, plusieurs variantes ont été proposées qui diffèrent principalement par le fait que l'on remplit un domaine vide [LO85, LOH88, MAV92] ou que l'on modifie un premier maillage grossier du domaine [MER91, MUL92, REB91]. Dans le premier cas, le front représente la frontière entre la partie du domaine déjà maillée et le reste du domaine qui est encore vide, alors que dans le second cas le front sépare des éléments jugés « bons » des autres éléments. Dans chacun des cas, les points internes sont définis de la même manière afin de vérifier un critère de taille d'éléments assurant la régularité du maillage. En effet, la construction locale d'un élément équilatéral ne peut garantir une régularité globale, en particulier si le pas de la discrétisation des contours n'est pas constant. Chaque point interne généré dans le premier cas est connecté uniquement à l'élément du front qui a permis de le définir, alors que dans le second cas d'autres connexions peuvent être établies suivant le critère utilisé pour insérer le point dans le maillage. Le principal avantage de la première approche est que le front est naturellement défini et que sa gestion est simple. En contrepartie, la validation d'un nouvel élément généré se fait *via* la recherche d'intersections éventuelles avec des entités voisines et, tant que le front est non vide, le domaine n'est pas encore complètement maillé. À l'opposé, la seconde approche présente un double avantage : d'une part, le domaine est complètement maillé même si le front n'est pas vide et, d'autre part, les points générés sont naturellement insérés dans un maillage (ce qui évite les recherches d'intersections). En revanche, le front doit être correctement identifié et géré afin de garantir la convergence de la méthode.

L'adaptation locale des maillages à la physique des problèmes permet d'obtenir une meilleure précision des solutions calculées (voir par exemple [LO91, LOH89, MAV90, PER87, WEA94]). En particulier, il est possible de bien capter des évolutions rapides de la solution dans les zones de fortes variations tout en conservant un nombre acceptable de degrés de liberté. Les premières approches pour construire un maillage adapté sont basées sur un couplage entre des techniques de régularisation et de découpe locale des éléments du maillage. Dans une première phase, un maillage initial du domaine est construit suivant une méthode habituelle, puis un premier calcul de la solution du

problème est effectué. Selon un certain critère choisi (gradient de la solution, champ dérivé, estimation d'erreur, etc.), on détecte dans le maillage initial les zones à modifier, par raffinement ou par déraffinement, et on génère un nouveau maillage mieux adapté au problème ; ce processus est itéré jusqu'à l'obtention d'un maillage vérifiant le critère spécifié. En dimension 2 ou 3, la procédure de raffinement est bien maîtrisée (voir par exemple [BER85, BRI86, LEE92, RIV90]) tandis que celle de déraffinement est loin d'être complètement résolue. Par suite, au lieu de cette approche basée sur des modifications locales, on considère une méthode plus globale utilisant un mailleur automatique gouverné par un certain critère. Le maillage est alors entièrement recréé à chaque itération en fonction des résultats obtenus à l'itération précédente. Le critère d'adaptation indique, en général, la taille souhaitée des éléments. Dans le cas le plus général, on peut considérer localement des tailles variables suivant les directions, c'est-à-dire *anisotropes*. Ceci conduit à des calculs de longueurs non pas dans la métrique usuelle euclidienne, mais dans une métrique riemannienne [VAL92]. La plupart des méthodes classiques de génération de maillages (et en particulier la méthode frontale) peuvent être généralisées ainsi aux maillages adaptatifs respectant des spécifications de tailles isotropes ou anisotropes.

Des remaillages sont également nécessaires lorsque la frontière du domaine se déforme au cours du temps, en particulier lors de la simulation des procédés de mise en forme des matériaux (forgeage, emboutissage, poinçonnage, ...) mettant en jeu de grandes déformations avec endommagement. Dans ce champ d'application, le logiciel Forge2 [MAH98, MOL96, RAJ92, GER86] et son extension tridimensionnelle Forge3 [GUE04, DO04, COU00, COU97, COU96, SOY92] sont largement utilisés dans l'industrie depuis de nombreuses années. Ces deux logiciels comprennent à la fois des mailleurs et des solveurs, les premiers étant basés sur des techniques d'optimisation.

3.2 Présentation de notre contribution

Nos principales contributions liées à la génération de maillages plans portent sur des domaines de frontières fixes ou variables. Dans le cas de frontières fixes, le rapport de recherche [84] propose des algorithmes de maillage de type Delaunay gouverné par une carte de métriques. La méthode classique est rappelée puis chacune de ses étapes est généralisée à un espace riemannien. Des exemples d'application sont présentés dans une deuxième partie [85]. On montre par ailleurs que la méthode proposée s'étend à la dimension trois. Cette méthode a également été décrite dans la revue FEAD [11]. Les algorithmes proposés ont été implémentés dans le mailleur bidimensionnel anisotrope BL2D [86, 88, 92] qui a permis de les expérimenter et de les valider.

Pour que le domaine à mailler soit bien défini, une vérification de sa frontière discrétisée est nécessaire. La détection et la rectification des auto-intersections, des arêtes proches (zones étroites) et des variations de longueurs d'arêtes adjacentes aux frontières a été étudiée dans le contexte du maillage de surfaces moléculaires. On trouvera ainsi une section consacrée à la rectification des frontières dans le livre *Handbook of Numerical Analysis, Computational Chemistry* [6], dans les journaux RCFAO [12], EWC [16] et IJQC [19], ainsi que dans divers actes de conférences ou rapports [39, 42, 46, 89].

Dans le cas d'un domaine 2D à frontières variables, avec des applications dans la simulation de procédés de mise en forme des matériaux, notre nouvelle approche est décrite dans un premier article paru dans REEF [15]. Comparée aux techniques de maillage intégrées dans le logiciel Forge2 cité plus haut, des différences importantes concernent en particulier la construction du maillage (qui ne se fonde pas sur une méthode d'optimisation), l'adaptativité à des champs géométriques et physiques, et la modélisation des fissures. Notre article [15] présente les différentes étapes nécessaires au remaillage d'une structure mécanique au cours de grandes déformations plastiques avec endommagement. Pour illustrer la méthode proposée, on considère deux exemples : le poinçonnage d'une tôle mince par des outils rigides (poinçon, matrice et serre-flan) et le forgeage d'une pièce massive. L'efficacité de cette approche repose partie sur des estimations d'erreur à caractère géométrique et physique, détaillées par ailleurs dans [5]. Dans la Note CRAS [17], cette méthode de remaillage adaptatif est utilisée pour la prévision de la rupture ductile des matériaux. Des exemples montrent la formation de copeaux par un procédé de découpage orthogonal (rabotage) et l'écrasement d'une pièce cylindrique (essai brésilien). L'article de IJNME [22] rappelle le schéma général du remaillage adaptatif, la formulation du problème élasto-plastique avec endommagement ainsi que son schéma numérique de résolution, et montre cinq applications numériques de simulation de ces procédés : la traction avec rupture d'une plaque rectangulaire, le découpage orthogonal d'une tôle rectangulaire, l'écrasement d'un cylindre, le poinçonnage d'une tôle mince et la combinaison d'une extrusion suivie d'un perçage de la pièce obtenue. Les articles [23] et [25] insistent plus particulièrement sur les modèles de mécanique des milieux continus décrivant la thermo-élasto-(visco)plasticité en grandes déformations. Cette approche et ses applications en mécanique ont également donné lieu à diverses communications [47, 49, 50, 51, 52, 53, 55, 56] et [67, 69, 70] ainsi qu'à un DVD démonstratif montrant la concordance entre les résultats prévus par la simulation et les expériences réelles [98].

Toutes ces contributions concernant des domaines de géométrie fixe ou variable sont détaillées ci-dessous.

3.3 Géométrie fixe

Le maillage d'un domaine défini par sa frontière et une orientation peut être effectué en deux étapes :

1. Discrétisation des courbes frontalières.
2. Maillage du domaine proprement dit, en s'appuyant sur les discrétisations obtenues.

Le problème de la discrétisation d'une courbe a déjà été traité au chapitre 2. Cependant, la discrétisation obtenue peut rendre impossible la construction du maillage ou générer des éléments de mauvaise qualité. Ceci se produit notamment lorsque les frontières d'une zone étroite sont discrétisées de manière trop grossière ou lorsque des arêtes adjacentes sont de longueurs très différentes. Pour y remédier, les deux approches ci-dessous peuvent être retenues.

Dans la première, une fonction de taille adéquate contrôle à la fois la discrétisation et le maillage. La *transformée de l'axe médian* constitue alors un outil puissant pour

mesurer la proximité des frontières du domaine [QUA04]. Cette information associée au calcul local des courbures fournit une fonction de taille qui est ensuite lissée. Il en résulte un maillage respectant la complexité géométrique du domaine.

Dans la seconde, la discrétisation est effectuée sans contrôle particulier et il est alors nécessaire de procéder à des vérifications et éventuellement des corrections. Les trois sections suivantes (3.3.1 à 3.3.3) abordent à partir d'exemples différents types de vérifications, puis la section 3.3.4 présente brièvement des techniques permettant de mailler un domaine dont la frontière est discrétisée, ainsi que quelques résultats représentatifs.

3.3.1 Détection et rectification des auto-intersections

Considérons le domaine représenté sur la figure 3.2. La définition exacte de sa frontière est tracée en traits tiretés, et la discrétisation initiale de ce support en traits continus fins. On remarque que certaines arêtes se coupent, et donc que la frontière discrétisée du domaine n'est pas bien définie. Par un algorithme simple, si deux arêtes se coupent, l'arête la plus longue est subdivisée, et le processus est itéré (traits continus épais sur la figure 3.2). En fait, un algorithme plus général et plus robuste est présenté dans la section suivante.

3.3.2 Détection et rectification des arêtes proches (zones étroites)

La figure 3.3 montre un domaine comportant une zone étroite. Comme précédemment, on suppose que la discrétisation $M(\Gamma)$ de son contour est imposée. Puisque $M(\Gamma)$ contient des arêtes proches les unes des autres, le maillage du domaine s'appuyant sur $M(\Gamma)$ contiendrait des triangles très aplatis. Pour éviter cela, l'idée est d'associer à chaque arête A une bande de Hausdorff de largeur 2δ (délimitée sur la figure par des traits tiretés). Par définition, cette bande est l'ensemble des points p tels que $d(p, A) \leq \delta$, où $d(p, A)$ désigne la distance d'un point p à l'arête A (cf. équation 2.23). La largeur de cette bande est ici proportionnelle à la longueur de l'arête associée. Si cette bande contient un sommet de la discrétisation (excepté les deux extrémités de l'arête), l'arête est subdivisée. Ce processus est répété jusqu'à ce qu'aucune bande ne contienne un sommet. Dans le cas où deux arêtes forment un angle aigu, il est nécessaire de modifier cet algorithme en définissant une bande de largeur inférieure.

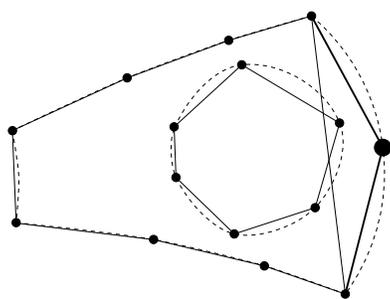


FIG. 3.2 – Arêtes sécantes.

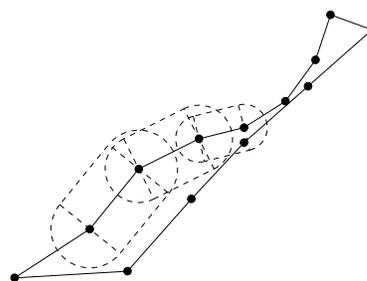


FIG. 3.3 – Arêtes proches.

3.3.3 Détection et rectification des variations de longueurs d'arêtes adjacentes

Une fois les frontières discrétisées (initialement ou après les corrections précédentes), les longueurs de deux arêtes adjacentes peuvent être très différentes, ce qui aboutit à une mauvaise qualité de maillage. Par exemple, la figure 3.4 représente une partie de maillage dans son état initial (à gauche) et après les rectifications précédentes dues aux arêtes proches (au milieu). On utilise alors un algorithme itératif qui limite le rapport entre les longueurs de deux arêtes consécutives sur une courbe, ce qui produit un maillage final de meilleure qualité (à droite).¹

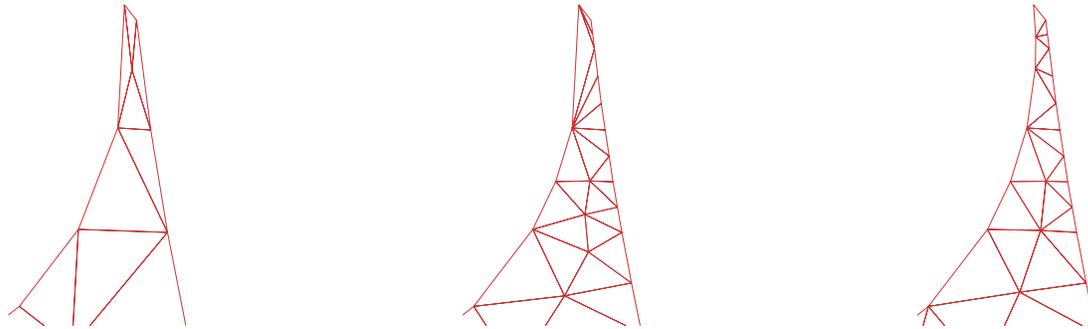


FIG. 3.4 – Maillage initial (à gauche), après détection des arêtes proches (au milieu) et après détection des longueurs d'arêtes adjacentes (à droite).

3.3.4 Maillage uniforme, isotrope ou anisotrope d'un domaine plan

Grâce aux détections et aux rectifications précédentes, la frontière du domaine est toujours bien définie et des maillages de qualité peuvent être construits. Cette approche a été validée à l'aide du mailleur bidimensionnel BL2D [92]. Ce dernier peut être contrôlé par des spécifications uniformes, isotropes ou anisotropes (respectivement introduites en sections 2.5.1, 2.5.2 et 2.5.3). Il peut être intégré dans un processus adaptatif. Son architecture logicielle est modulaire, et deux composants jouent un rôle central : le premier discrétise des courbes dans le plan et le second maille des domaines du plan à partir de leurs frontières discrétisées. Ce mailleur insère des points sur des arêtes internes (méthode algébrique) ou par couches successives (méthode frontale), puis connecte ces points entre eux par une méthode de Delaunay généralisée [84, 85]. Les éléments générés peuvent être des triangles droits (P^1), des triangles courbes quadratiques (P^2), ou encore des quadrilatères (Q^1 ou Q^2). Les quadrilatères sont obtenus par appariement de triangles.

Pour comparer les insertions de points par méthode algébrique ou frontale, considérons un domaine délimité par un cercle de rayon 50 (figure 3.5). À l'intérieur, une courbe en forme d'arobase (@) est imposée. La taille requise est de 5 sur le cercle extérieur et de 0.25 sur la courbe imposée, avec une gradation de 1.25 (ce mécanisme de gradation est

¹Notons que ces modifications sont effectuées *a priori* (avant le maillage du domaine). Dans le cas où un maillage initial a été généré et optimisé (au regard de la taille et de la forme des éléments), d'autres approches et références peuvent être trouvées dans [BOR98, SHEW99, GOO01].

détaillé dans [BOR98]). La partie gauche de la figure représente le maillage obtenu par une méthode algébrique, et la partie droite par une méthode frontale. Par ailleurs, la partie inférieure contient des vues agrandies de la partie supérieure. Comme le montre cet exemple, la méthode frontale produit en général un maillage de meilleure qualité (triangles presque équilatéraux, meilleure régularité, degré moins élevé des nœuds, fronts visibles partant de la frontière et de la courbe imposée).

Dans la figure 3.6, le domaine choisi est un « quart de plaque trouée », obtenu par différence entre le carré $[0, 1]^2$ et le disque de centre $(1, 1)$ et de rayon 0.5. Des maillages uniformes montrent diverses possibilités quant aux types des éléments générés : **p1** (triangles droits P^1), **p2** (triangles quadratiques courbes P^2), **q1.0** (quadrilatères droits Q^1 et quelques triangles P^1), **q1.1** (quadrilatères droits Q^1 uniquement), **q2.0** (quadrilatères courbes Q^2 et quelques triangles P^2) et **q2.1** (quadrilatères courbes Q^2 uniquement).

3.3.5 Application en mécanique des fluides

Les figures 3.7 et 3.8 montrent des maillages en triangles et en quadrilatères, respectivement isotropes et anisotropes. Ces maillages ont été générés par le logiciel BL2D [92] pour une application en mécanique des fluides. Les maillages anisotropes permettent d'atteindre la solution cherchée en limitant le nombre total d'éléments.

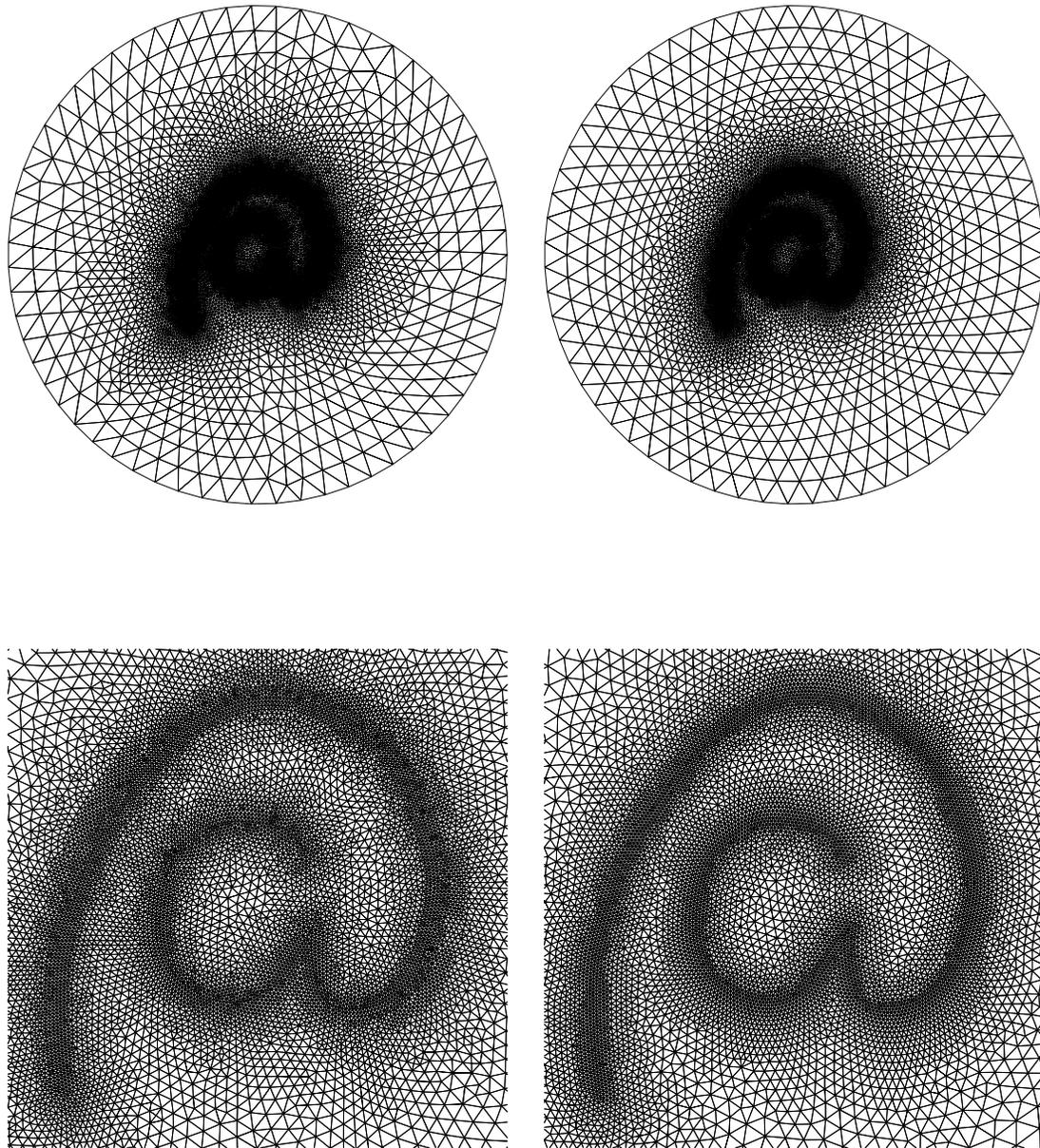


FIG. 3.5 – Maillages d'un domaine contenant une courbe en forme d'arobase (@). Respectivement à gauche et à droite, méthode algébrique et méthode frontale. Respectivement en haut et en bas, vues normales et vues agrandies.

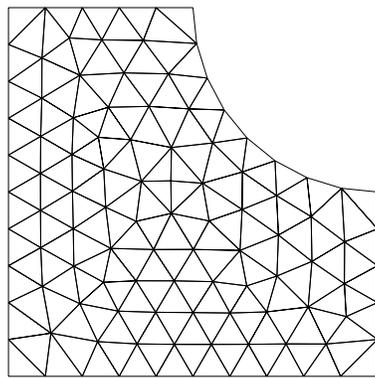
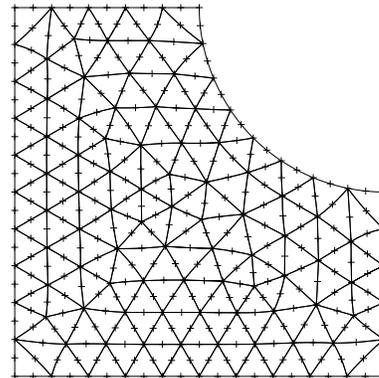
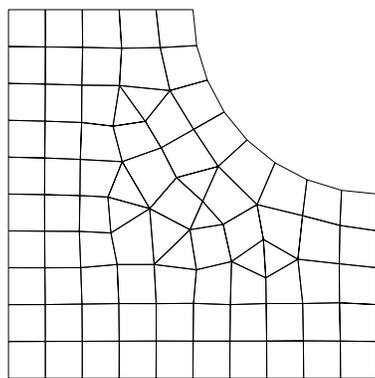
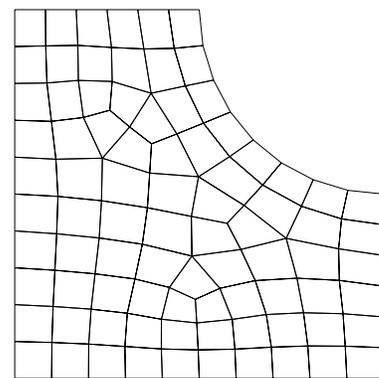
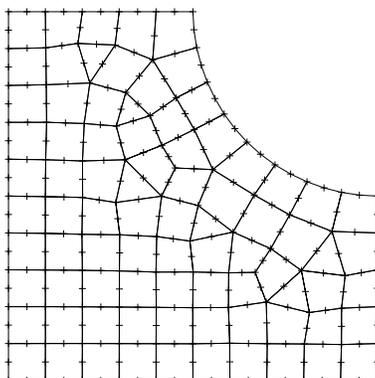
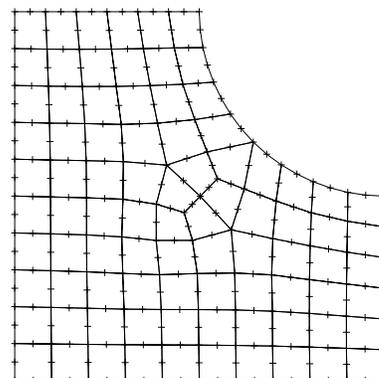
p1 (P^1)p2 (P^2)q1.0 (Q^1 et quelques P^1)q1.1 (Q^1 uniquement)q2.0 (Q^2 et quelques P^2)q2.1 (Q^2 uniquement)

FIG. 3.6 – Maillages uniformes d'un « quart de plaque trouée » constitués de divers types d'éléments.

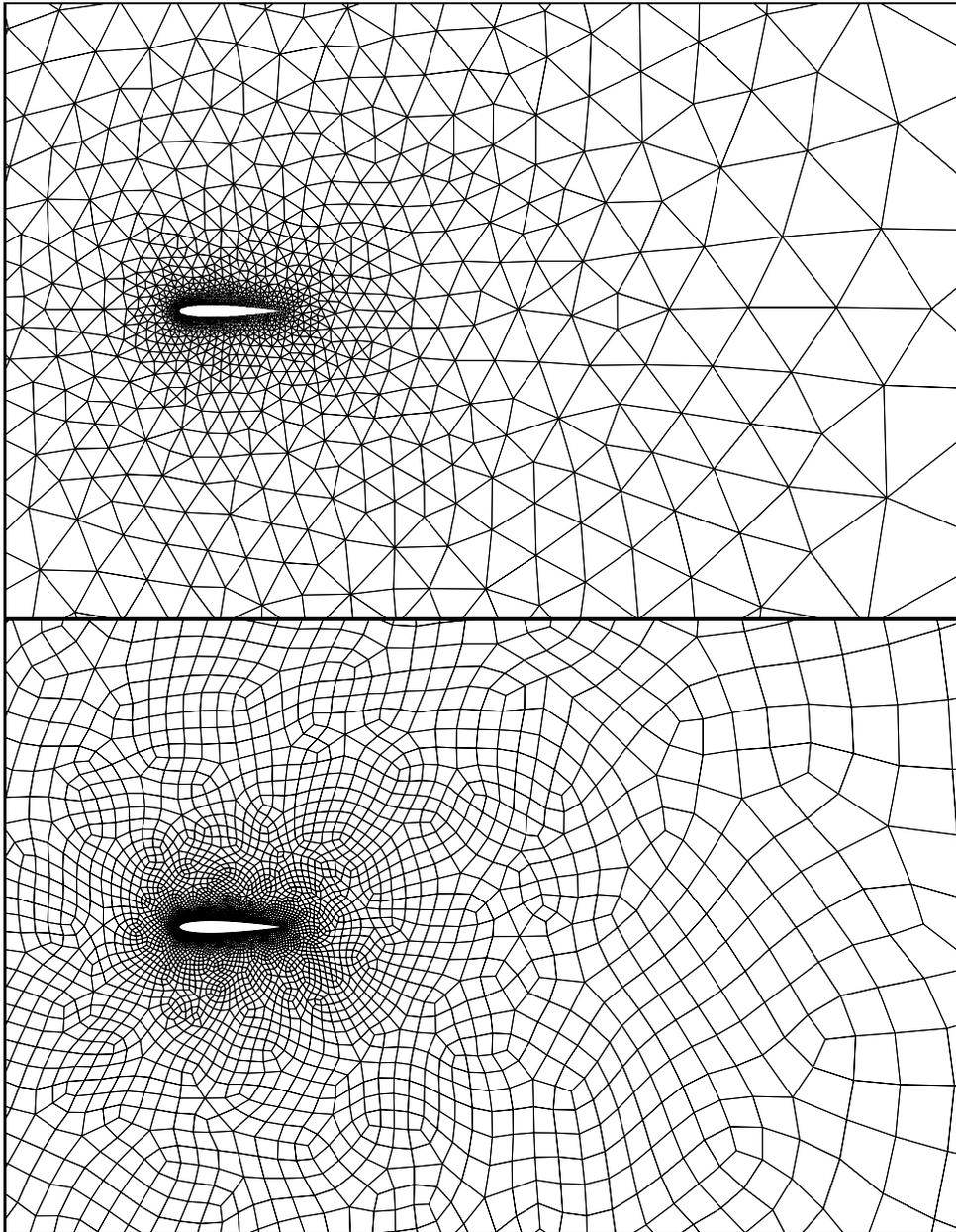


FIG. 3.7 – Maillages *isotropes* pour une application en mécanique des fluides : triangles initiaux (en haut) et quadrilatères (en bas).

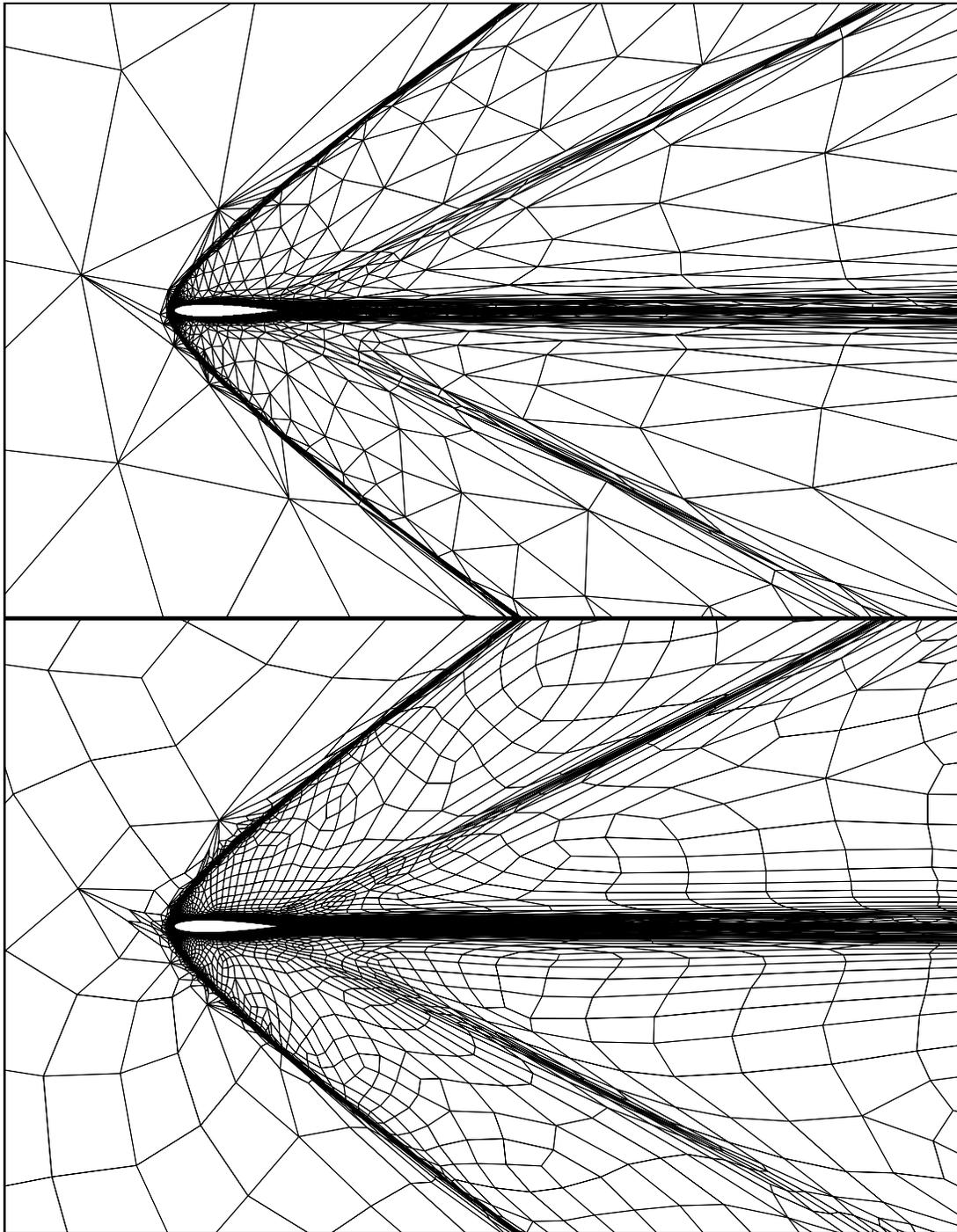


FIG. 3.8 – Maillages *anisotropes* pour une application en mécanique des fluides : triangles initiaux (en haut) et quadrilatères (en bas).

3.4 Géométrie variable

Jusqu'à présent, la frontière du domaine était fixée une fois pour toutes. Cependant, des difficultés apparaissent lorsque la géométrie du domaine est variable et ne peut pas être définie d'une manière explicite. Par exemple, dans de nombreux procédés de mise en forme des matériaux, des pièces mécaniques sont soumises à de grandes déformations plastiques et à des endommagements. Une simulation numérique de ces procédés par la méthode des éléments finis conduit à des remaillages fréquents d'un domaine dont la géométrie et les caractéristiques physiques évoluent fortement.

Le schéma général de la méthode proposée est constitué de plusieurs étapes permettant une représentation précise de ce domaine évolutif. Une rediscrétisation de la frontière et un remaillage du domaine sont effectués à chaque incrément de déformation, supposé suffisamment petit par rapport à la taille minimale spécifiée pour les éléments du maillage. Cette rediscrétisation et ce remaillage sont gouvernés par une carte de taille déterminée par le respect de la géométrie du domaine déformé, la précision de la solution physique recherchée, ainsi que la convergence du procédé mécanique.

3.4.1 Schéma général de remaillage

On considère une pièce modélisée par un domaine de calcul Ω de \mathbb{R}^2 défini à partir de sa frontière Γ . On suppose que cette dernière est donnée sous une forme discrète constituée d'un ensemble de segments droits. Cet ensemble constitue une discrétisation initiale $M(\Gamma)$ de la frontière du domaine Γ . La définition analytique de cette frontière permet uniquement l'obtention de cette géométrie discrète initiale, mais s'avère inutile pour les différents remaillages du domaine, dans la mesure où la géométrie du domaine varie d'une manière non négligeable au cours du calcul. De plus, on suppose que la déformation finale est obtenue itérativement par pas de « petites » déformations (ce qui est le cas dans le cadre d'un schéma d'intégration explicite pour la résolution du problème). Le remaillage est appliqué après chaque incrément de déformation selon le schéma suivant :

- définition de la nouvelle géométrie $G(\Gamma)$ après déformation,
- estimation d'erreur géométrique (écart entre la nouvelle géométrie $G(\Gamma)$ due aux divers types de déformation et la discrétisation courante $M(\Gamma)$ de la frontière), définition d'une carte de taille géométrique $\mathcal{H}_g(\Gamma)$ servant à gouverner la rediscrétisation de la frontière Γ ,
- estimation d'erreur physique (écart entre la solution physique $\mathcal{S}(\Omega)$ obtenue sur Ω et une solution idéale « lisse » considérée comme la solution de référence), définition d'une première carte de taille physique $\mathcal{H}_{\phi_1}(\Omega)$ servant à gouverner le remaillage du domaine Ω ,
- adaptation de la taille des éléments du maillage en fonction de l'endommagement, définition d'une deuxième carte de taille physique $\mathcal{H}_{\phi_2}(\Omega)$ servant aussi à gouverner le remaillage du domaine Ω ,
- intersection des cartes de taille $\mathcal{H}_g(\Gamma)$, $\mathcal{H}_{\phi_1}(\Omega)$ et $\mathcal{H}_{\phi_2}(\Omega)$, définition d'une carte de taille unique $\mathcal{H}(\Omega)$,
- rediscrétisation adaptative $\widetilde{M}(\Gamma)$ de la frontière du domaine par rapport à $\mathcal{H}(\Omega)$,
- remaillage adaptatif $\widetilde{M}(\Omega)$ du domaine par rapport à $\mathcal{H}(\Omega)$.

Définition de $G(\Gamma)$

La nouvelle géométrie $G(\Gamma)$ de Γ est déterminée en fonction de la nature de sa déformation. Trois types de déformations de la géométrie de la pièce sont considérés :

- *déformations libres* : ce type concerne les déformations dues à des contraintes mécaniques (par exemple des conditions d'équilibre), librement dans le plan. Dans ce cas, la nouvelle géométrie de la pièce après déformation est uniquement définie par la nouvelle position des sommets frontaliers ainsi que leurs connexions.
- *déformations liées* : il s'agit des déformations limitées par un contact avec un second domaine dont la géométrie est fixe (outil supposé rigide ou indéformable). Dans ce cas, la pièce prend la forme géométrique de l'outil et donc sa nouvelle géométrie après déformation est celle de l'outil.
- *déformations imposées* : le troisième type de déformation concerne les déformations obtenues par élimination des éléments totalement endommagés. Dans ce cas, une nouvelle géométrie de topologie différente peut éventuellement être obtenue.

Définition des cartes de taille $\mathcal{H}_g(\Gamma)$, $\mathcal{H}_{\phi_1}(\Omega)$ et $\mathcal{H}_{\phi_2}(\Omega)$

Pour estimer la taille en un nœud frontalier, plusieurs facteurs doivent être considérés. Si le nœud est libre, la taille est proportionnelle au rayon de courbure de la nouvelle frontière de la pièce. En revanche, s'il est lié, la taille est proportionnelle au rayon de courbure de la partie avoisinante de l'outil. Enfin, si le nœud est imposé, la taille dépend de la longueur des arêtes de la discrétisation courante de la frontière qui sont adjacentes au nœud. L'ensemble de ces spécifications de taille définit la carte $\mathcal{H}_g(\Gamma)$. Comme on verra plus loin (cf. Section 4), l'écart entre la solution physique obtenue par le calcul et la solution exacte peut être quantifié en fonction des tailles des éléments du maillage. Formellement, une carte de taille $\mathcal{H}_{\phi_1}(\Omega)$ associée aux nœuds de $M(\Omega)$ est ainsi définie. Dans le modèle mécanique appliqué, les fissures sont déduites de la suppression des éléments totalement endommagés. Pour approcher au mieux la réalité physique, on impose une taille minimale aux éléments endommagés. Ceci conduit à définir une autre carte de taille $\mathcal{H}_{\phi_2}(\Omega)$ associée à $M(\Omega)$ de manière à satisfaire cette nouvelle contrainte de taille.

Génération de la discrétisation $\widetilde{M}(\Gamma)$ et du maillage $\widetilde{M}(\Omega)$

À partir des trois cartes de taille $\mathcal{H}_g(\Gamma)$, $\mathcal{H}_{\phi_1}(\Omega)$ et $\mathcal{H}_{\phi_2}(\Omega)$, une carte de taille $\mathcal{H}(\Omega)$, intersection des trois premières, est définie (ce qui consiste à considérer la plus petite des tailles définies dans $\mathcal{H}_g(\Gamma)$, $\mathcal{H}_{\phi_1}(\Gamma)$ et $\mathcal{H}_{\phi_2}(\Gamma)$, où $\mathcal{H}_{\phi_i}(\Gamma)$ est la restriction de la carte $\mathcal{H}_{\phi_i}(\Omega)$ à la frontière Γ de Ω , $i = 1, 2$). Cette nouvelle carte permet de gouverner le remaillage adapté de la pièce qui comprend deux phases, la rediscrétisation de la frontière et le remaillage de la pièce s'appuyant sur cette discrétisation. La rediscrétisation de la frontière consiste à générer une nouvelle discrétisation de Γ qui respecte la carte de taille $\mathcal{H}(\Gamma)$. Le maillage de la pièce est alors entièrement reconstruit, à partir de la rediscrétisation de la frontière, suivant une méthode classique de h-adaptation basée sur une approche combinée frontale-Delaunay afin de respecter la carte $\mathcal{H}(\Omega)$.

3.4.2 Définition de la frontière du domaine déformé

Pour définir la nouvelle frontière déformée, on procède en deux étapes successives : l'identification des nœuds imposés, puis celle des nœuds liés. Dans chacun des cas, la géométrie sous-jacente est définie suivant un schéma d'interpolation différent permettant d'assurer la continuité géométrique correspondante.

Identification des nœuds imposés

Dans un premier temps, tous les éléments endommagés sont supprimés de la pièce. Ceci peut conduire à une nouvelle frontière possédant des points (nœuds) multiples ou plusieurs composantes connexes. Dans le premier cas, les éléments attachés aux nœuds multiples sont supprimés, et cette procédure est répétée si de nouveaux nœuds multiples apparaissent. Dans le deuxième cas, le choix des composantes connexes de la pièce à conserver pour la suite du calcul ne peut être qu'arbitraire, mais une heuristique consiste à considérer la plus grande des composantes.

Identification des nœuds liés

L'idée consiste à identifier *a priori* les nœuds de la pièce qui vont être en contact avec l'outil (si le pas de déplacement est appliqué à l'outil) en considérant la distance de Hausdorff de la pièce à l'outil. En 2D, ceci consiste à associer à chaque arête de la discrétisation de la pièce et de l'outil, une région centrée en cette arête, et à examiner les intersections éventuelles entre les régions associées à la pièce et celles associées à l'outil. Un nœud de la pièce est alors classé lié s'il appartient à l'une des régions associées à l'outil ou si un nœud de l'outil appartient à l'une des régions associées à la pièce contenant ce nœud. Formellement, la région $\mathcal{R}_\delta(e)$ associée à l'arête e est définie par :

$$\mathcal{R}_\delta(e) = \{X \in \mathbb{R}^2 \quad \text{t.q.} \quad d(X, e) \leq \delta\} \quad (3.1)$$

où $d(X, e)$ est la distance de X à e , et δ le pas de déplacement de l'outil. Dans le cas où la projection orthogonale de X sur la droite support de l'arête e se trouve à l'intérieur de e , alors la distance $d(X, e)$ est égale à la distance de X à son projeté et, dans le cas contraire, $d(X, e)$ est égale à la plus petite distance de X aux extrémités de e . Ainsi, géométriquement, cette région est la réunion de deux demi-disques de rayon δ centrés aux extrémités de e et de deux rectangles de base e et de hauteur δ s'appuyant sur e .

Schémas d'interpolation

La géométrie (après déformation) de la pièce peut être définie de deux façons, soit en conservant une géométrie proche de celle avant déformation, soit en définissant une nouvelle géométrie « plus lisse ». Dans le premier cas, la nouvelle géométrie est simplement définie par la discrétisation courante de la frontière, et les nouveaux nœuds du remaillage de la pièce sont placés sur les éléments de cette discrétisation. Dans le second cas, la nouvelle géométrie est définie en deux dimensions par une courbe lisse interpolant les nœuds et/ou autres caractéristiques géométriques de la discrétisation courante de la frontière. Les nouveaux nœuds sont alors placés sur cette courbe. L'avantage de

cette seconde approche (qui paraît plus lourde) est que la géométrie de la pièce reste lisse au cours de sa déformation.

Dans cette seconde approche, on utilise un schéma d'interpolation par des splines cubiques, globalement de continuité C^2 , selon la technique proposée par de Boor. Ceci revient à résoudre un système linéaire dont les équations traduisent les continuités d'ordre 0, 1 et 2 aux extrémités de chaque cubique. Cette approche n'est appliquée qu'aux nœuds libres ou liés. En effet, la frontière obtenue par suppression d'éléments ne reflète pas exactement la réalité physique et une interpolation d'ordre 2 ne peut être appliquée. En revanche, un lissage non interpolant peut donner un résultat convenable.

3.4.3 Définition des cartes de taille physiques

Deux cartes de taille physiques sont définies. La première, $\mathcal{H}_{\phi_1}(\Omega)$, est basée sur l'estimation *a posteriori* de l'erreur d'interpolation, et la deuxième, $\mathcal{H}_{\phi_2}(\Omega)$, est directement liée à l'endommagement.

(a) Erreur d'interpolation

Considérons la solution physique S_M calculée par éléments finis sur le maillage $M(\Omega)$ (voir la représentation 1D de la figure 3.9). En désignant par S la solution exacte, le problème consiste dans un premier temps à calculer l'écart $e_M = S - S_M$ représentant l'erreur sous-jacente à la solution obtenue par éléments finis, puis en déduire (en général par une majoration de cet écart) un autre maillage $M'(\Omega)$ tel que l'écart estimé entre S et la solution $S_{M'}$ obtenue de nouveau par éléments finis sur le maillage $M'(\Omega)$ soit borné par un seuil donné. Plusieurs points sont à préciser :

- comment quantifier l'écart e_M entre S et S_M ,
- comment utiliser cette dernière information pour construire un nouveau maillage sur lequel l'écart entre la solution par éléments finis correspondante et la solution exacte est borné par un seuil donné.

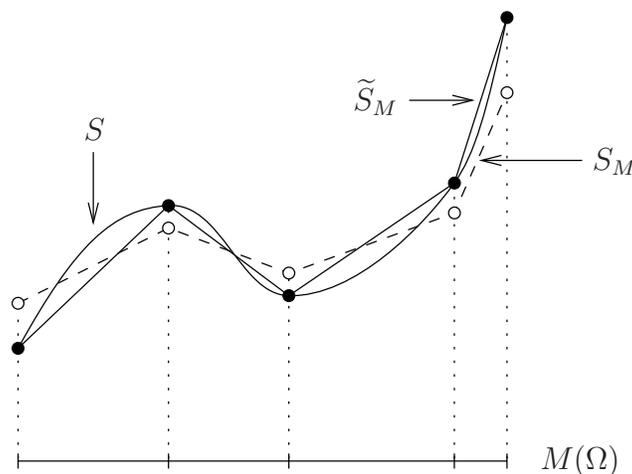


FIG. 3.9 – Quantification de l'erreur d'interpolation : solution exacte S , solution calculée S_M et solution interpolante \tilde{S}_M .

La solution S_M obtenue par éléments finis n'est pas interpolante (autrement dit, la solution obtenue aux nœuds de $M(\Omega)$ ne coïncide pas avec la valeur exacte de S en ces nœuds). De plus, pour tout élément du maillage, on ne peut garantir que la solution S_M coïncide avec la valeur exacte de S en au moins un point de l'élément. Il paraît donc difficile de quantifier explicitement l'écart e_M . L'étude directe de cet écart a cependant fait l'objet de plusieurs travaux [AIN97, VER96] mais, dans le cas général, sa quantification reste un problème ouvert. Par suite, d'autres approches indirectes ont été proposées pour quantifier ou plutôt majorer cet écart. Désignons par \tilde{S}_M l'interpolé de S par le maillage $M(\Omega)$ (qui est une fonction linéaire ou quadratique par morceaux suivant le degré des éléments de $M(\Omega)$) et par \tilde{e}_M l'écart $S - \tilde{S}_M$ entre S et \tilde{S}_M , appelée l'erreur d'interpolation sur S suivant $M(\Omega)$. Pour pouvoir quantifier l'écart e_M , on suppose que la relation suivante est vérifiée :

$$\|e_M\| \leq C \|\tilde{e}_M\| \quad (3.2)$$

où $\|\cdot\|$ est une norme et C une constante indépendante de $M(\Omega)$. En d'autres termes, on suppose que l'erreur par éléments finis est majorée par l'erreur par interpolation. Ceci permet alors de simplifier le problème d'origine en considérant le problème suivant : étant donnée, suivant un maillage $M(\Omega)$, une interpolation \tilde{S}_M de S , construire un autre maillage $M'(\Omega)$ sur lequel l'erreur d'interpolation est bornée par un seuil donné. Comme \tilde{S}_M peut être vu comme une représentation « discrète » de S , le problème se réduit alors à une caractérisation des maillages sur lesquels l'erreur d'interpolation est bornée par le seuil. Ce problème a fait l'objet de plusieurs études (cf. [BER99]), et dans la plupart, l'examen d'une « mesure » de l'erreur d'interpolation permet d'obtenir des contraintes liées aux éléments du maillage. Dans le cadre des méthodes d'adaptation de maillages, on s'intéresse particulièrement aux h-méthodes ou adaptations en taille pour lesquelles des contraintes en termes de tailles d'éléments sont spécifiées.

L'erreur d'interpolation permet notamment de quantifier le degré de « régularité » de la solution physique S . En d'autres termes, on cherche à construire un nouveau maillage de Ω sur lequel la solution serait la plus « lisse » possible. Pour cela, on suppose que $M(\Omega)$ est composé d'éléments triangulaires linéaires (à trois nœuds) et on propose trois méthodes. La première est basée sur le hessien de S , la deuxième sur la courbure de la surface solution, et la troisième sur la déformation locale de cette surface. Pour simplifier, les méthodes seront décrites en deux dimensions et peuvent être généralisées en trois dimensions.

(a.1) Erreur basée sur le hessien

Considérons l'interpolé linéaire \tilde{S}_M de S suivant le maillage $M(\Omega)$ composé d'éléments triangulaires. Pour estimer l'erreur d'interpolation \tilde{e}_M , on peut se baser sur le hessien de la solution S (voir par exemple [5]). En effet, pour un élément K de $M(\Omega)$, en considérant la norme L^∞ de l'erreur d'interpolation $\tilde{e}_M(K)$ sur K , on montre que (cf. [5]) :

$$\|\tilde{e}_M(K)\| \leq \frac{2}{9} M(K) h^2(K) \quad (3.3)$$

où $h(K)$ est la longueur du diamètre (arête la plus grande) de K et

$$M(K) = \max_{x \in K} \left(\max_{\|\vec{v}\|=1} |\langle \vec{v}, H_S(x) \vec{v} \rangle| \right) \quad (3.4)$$

H_S étant le hessien de S et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désignant le produit scalaire usuel. Dans un cadre isotrope, $M(K)$ représente la plus grande des valeurs propres des matrices $|H_S|(x)$ (valeur absolue de H_S) où x parcourt K . Selon l'équation 3.3, majorer l'erreur par un seuil donné ε revient à satisfaire la relation :

$$h(K) \leq \sqrt{\frac{9 \varepsilon}{2 M(K)}} \quad (3.5)$$

En pratique, H_S est approché par le hessien de \tilde{S}_M (la solution obtenue *via* le calcul par éléments finis), et la constante $M(K)$ est approchée par la plus grande des valeurs propres de la valeur absolue du hessien H_S aux extrémités de K .

(a.2) Erreur basée sur la courbure

Afin de minimiser aussi l'écart entre les plans tangents à la solution interpolante et ceux de la solution exacte, il convient de considérer les courbures géométriques de la surface cartésienne décrivant la solution. Pour cela, dans un premier temps, en chaque nœud de cette surface, on détermine la normale (et donc le gradient) par une moyenne pondérée de la normale unitaire aux éléments adjacents. Puis, dans le repère local (composé du plan tangent et la normale) associé à chaque nœud, on construit une quadrique centrée au nœud et passant au mieux par les nœuds adjacents. Ensuite, on approche localement le hessien par celui de cette quadrique. Connaissant le gradient et le hessien de la solution aux nœuds de $M(\Omega)$, on associe à chaque nœud $(w, S(w))$ de la surface $(M(\Omega), S_M)$ la taille $\beta \rho(w, S(w))$ dans le plan tangent à la surface en $(w, S(w))$, où $\rho(w, S(w))$ est le rayon de courbure minimal au point $(w, S(w))$ de la surface solution (dépendant du gradient et du hessien discret ainsi obtenus) et β un réel dépendant de l'écart physique toléré. Cette contrainte en taille décrit un cercle centré en $(w, S(w))$ et de rayon $\beta \rho(w, S(w))$ dans le plan tangent à la surface $(M(\Omega), S_M)$ en $(w, S(w))$. En projetant ce cercle dans le plan du domaine Ω on obtient généralement une ellipse, et en considérant le plus grand cercle contenu dans cette ellipse on obtient la contrainte en taille définie au nœud w de Ω . On en déduit ainsi une carte de taille $\mathcal{H}_{\phi_1}(\Omega)$ associée aux sommets de $M(\Omega)$.

(a.3) Erreur basée sur la déformation locale

La carte précédente caractérise la déformation locale de la surface cartésienne sous-jacente à la solution. Cette déformation peut être quantifiée plus simplement en considérant le hessien suivant la normale à la surface (c'est-à-dire la seconde forme fondamentale de la surface). Soit P un sommet de la surface solution. Localement, au voisinage de P , cette surface admet une représentation paramétrique $\phi(u, v)$, (u, v) étant les paramètres, avec $P = \phi(0, 0)$. En appliquant le développement de Taylor à

l'ordre 2 à ϕ au voisinage de P , on obtient :

$$\phi(u, v) = P + \phi'_u u + \phi'_v v + \frac{1}{2} (\phi''_{uu} u^2 + 2\phi''_{uv} uv + \phi''_{vv} v^2) + o(u^2 + v^2) e \quad (3.6)$$

où les dérivées de ϕ sont calculées en $(0, 0)$ et $e = (1, 1, 1)$. Si $\nu(P)$ désigne la normale à la surface en P , alors la quantité $\langle \nu(P), (\phi(u, v) - \phi(0, 0)) \rangle$ ($\langle \cdot, \cdot \rangle$ étant le produit scalaire) représentant l'écart du point $\phi(u, v)$ au plan tangent en P , et s'écrivant comme :

$$\frac{1}{2} (\langle \nu(P), \phi''_{uu} \rangle u^2 + 2\langle \nu(P), \phi''_{uv} \rangle uv + \langle \nu(P), \phi''_{vv} \rangle v^2) + o(u^2 + v^2) \quad (3.7)$$

est donc proportionnelle à la seconde forme fondamentale de la surface pour $u^2 + v^2$ assez petit.

Ainsi, pour mesurer la déformation locale de la surface (dans un cadre isotrope), il suffit de considérer pour chaque nœud de la surface l'écart maximal des nœuds adjacents au plan tangent en ce nœud à la surface. On définit donc la taille en chaque nœud de $M(\Omega)$ comme étant inversement proportionnelle à cet écart. Formellement, la taille associée à un nœud w de $M(\Omega)$ s'écrit :

$$h_{\phi_1}(w) = \frac{\beta}{\varepsilon(w, S(w))} \quad (3.8)$$

où $\varepsilon(w, S(w))$ désigne ce nouvel écart.

(b) Erreur basée sur l'endommagement

Après une simulation numérique, l'endommagement isotrope est quantifié par un réel compris entre 0 et 1. à un élément totalement endommagé (valeur 1) est associée une taille minimale d'élément et, à un élément d'endommagement 0, une taille maximale d'élément. Pour tous les autres éléments, une variation linéaire de taille peut être utilisée. Ces spécifications de taille définissent la carte de taille $\mathcal{H}_{\phi_2}(\Omega)$.

3.4.4 Remaillage adaptatif du domaine

Le remaillage adaptatif du domaine respectant la carte $\mathcal{H}(\Omega)$, intersection des cartes précédentes, comprend deux étapes successives : la rediscrétisation de la frontière et le remaillage du domaine s'appuyant sur cette nouvelle discrétisation.

Rediscrétisation de la frontière

La nouvelle géométrie $G(\Gamma)$ étant définie, on associe à chaque nœud v de $M(\Gamma)$ la taille $h(v)$ donnée par la carte $\mathcal{H}(\Gamma)$. Soit $e = AB$ une arête de $M(\Gamma)$. Conformément à l'équation 2.13, la longueur normalisée $l_{\mathcal{H}_g}(e)$ de l'arête e par rapport à la carte de taille $\mathcal{H}_g(\Gamma)$ est définie comme :

$$l_{\mathcal{H}_g}(e) = \|\overrightarrow{AB}\| \int_0^1 \frac{1}{h_g(A + t\overrightarrow{AB})} dt \quad (3.9)$$

où $\|\overrightarrow{AB}\|$ est la longueur euclidienne de l'arête AB et $h_g(A + t\overrightarrow{AB})$, la taille souhaitée au point $A + t\overrightarrow{AB}$ de AB . Avec cette nouvelle définition de longueur, la discrétisation

adaptative de $G(\Gamma)$ respectant la carte $\mathcal{H}(\Gamma)$ est une discrétisation dont les arêtes ont une longueur normalisée égale à l'unité. Ainsi, pour définir cette discrétisation, il suffit de calculer la longueur normalisée $L_{\mathcal{H}_g}(\Gamma)$ de la frontière, d'obtenir un entier n proche de $L_{\mathcal{H}_g}(\Gamma)$, et de découper la frontière en n arêtes de longueur normalisée $\frac{1}{n} L_{\mathcal{H}_g}(\Gamma)$.

3.4.5 Remaillage du domaine

Pour remailler le domaine, on peut appliquer une méthode de type combinée frontale-Delaunay, qui reconstruit entièrement un maillage du domaine adapté à un champ de taille donné, à partir d'un maillage donné de la frontière du domaine. Les différentes étapes d'un tel remaillage (décrites en détail dans [BOR01b]) sont schématisées ainsi :

- création du maillage du domaine sans points internes (en utilisant le noyau classique de Delaunay),
- insertion des points internes d'une manière itérative afin d'obtenir des arêtes d'éléments de longueur normalisée égale à l'unité par rapport à la carte de taille $\mathcal{H}(\Omega)$,
- optimisation en forme des éléments par bascules d'arêtes et bougés de points.

3.4.6 Applications (essai brésilien et découpage orthogonal)

Afin de montrer la validité de notre approche, deux exemples tirés du monde industriel sont présentés : l'essai brésilien (écrasement d'un lopin cylindrique) et le découpage orthogonal d'une pièce. Tous les maillages ont été réalisés par le mailleur BL2D [92].

Essai brésilien

L'essai brésilien, ou écrasement d'un lopin cylindrique, est fréquemment utilisé pour contrôler la forgeabilité à froid des matériaux ductiles. Dans cet exemple, un lopin cylindrique de 50 mm de diamètre est pressé entre deux outils plans, supposés infiniment longs, qui tendent à l'aplatir. Les outils supposés rigides sont composés, d'une part, du plan supérieur mobile par l'intermédiaire duquel s'exercent les déplacements imposés (0.1 mm par incrément) et, d'autre part, du plan inférieur fixe. Dans cet exemple, pour tous les maillages adaptatifs, des tailles extrémales d'éléments $h_{\min} = 1$ mm et $h_{\max} = 6$ mm sont spécifiées.

La figure 3.10 montre les maillages adaptés aux champs d'endommagement du cylindre correspondant à différents déplacements de l'outil mobile, avec une rupture finale. Dans un premier temps, l'endommagement est localisé sur deux bandes diagonales selon la fameuse « croix du forgeron », fréquemment constatée lors des expérimentations. Puis, l'amorçage de la fissure macroscopique se produit à l'intersection des deux bandes (au centre du cylindre) pour une réduction de hauteur de 40 %. Cette fissure se propage suivant l'une des bandes jusqu'à la rupture totale découpant le cylindre en deux morceaux. La même figure montre, en bas, une expérimentation qui confirme le résultat obtenu par la simulation.

Découpage orthogonal

L'usinage par enlèvement de copeaux est l'une des opérations les plus fréquemment utilisées pour la fabrication de pièces de structures. La modélisation du découpage des matériaux permet de déterminer les conditions de coupe optimales, l'usinabilité des matériaux et les grandeurs thermo-mécaniques de la pièce usinée. L'exemple considéré concerne la simulation de la formation d'un copeau lors de l'usinage de pièces massives en coupe orthogonale 2D. L'outil est supposé indéformable et son arête d'angle de coupe orthogonale de 5° est assimilée à une portion de cercle de rayon très faible ($R = 0.2$ mm). La vitesse de coupe est fixée à 0.1 mm/s et l'épaisseur coupée est de 2 mm. Dans cet exemple, pour tous les maillages adaptatifs, des tailles extrémales d'éléments $h_{\min} = 0.1$ mm et $h_{\max} = 10$ mm sont spécifiées.

La figure 3.11 montre les maillages adaptés aux champs d'endommagement de la pièce correspondant aux différents déplacements de l'outil. On constate sur ces images qu'un copeau est formé grâce à la déformation imposée par suppression d'éléments. Par ailleurs, les zones de contact avec l'outil (correspondant à la déformation liée) ainsi que les zones de localisation de l'endommagement (correspondant au contrôle d'erreur physique) sont raffinées. Comme le montre cette figure ainsi que l'expérimentation, la rupture du copeau est localisée à sa base.

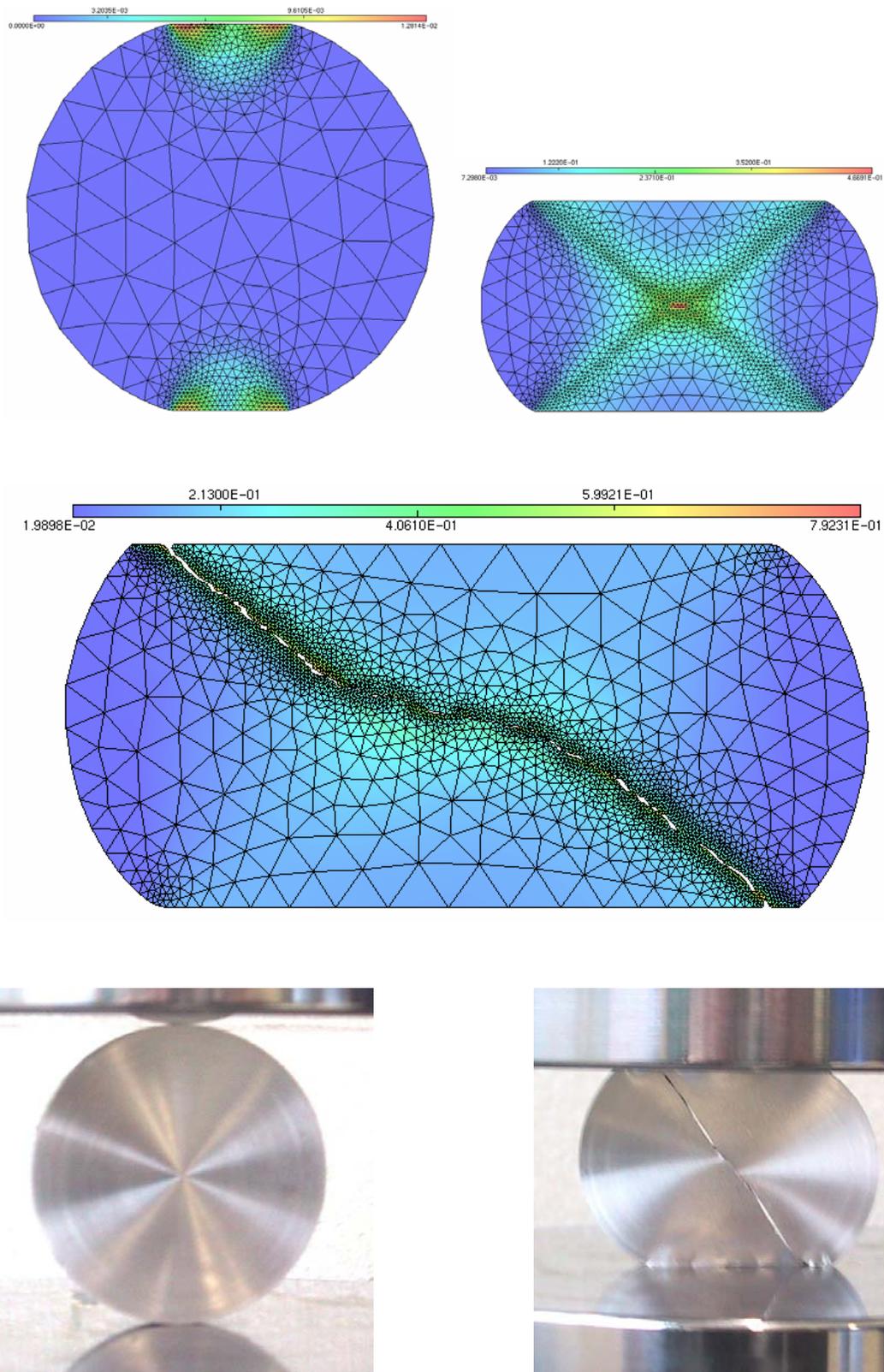


FIG. 3.10 – Essai brésilien. Simulation pour un déplacement d’outil de 6, 19 et 22 mm. Expérimentation réelle pour un déplacement d’outil de 0 et 20 mm.

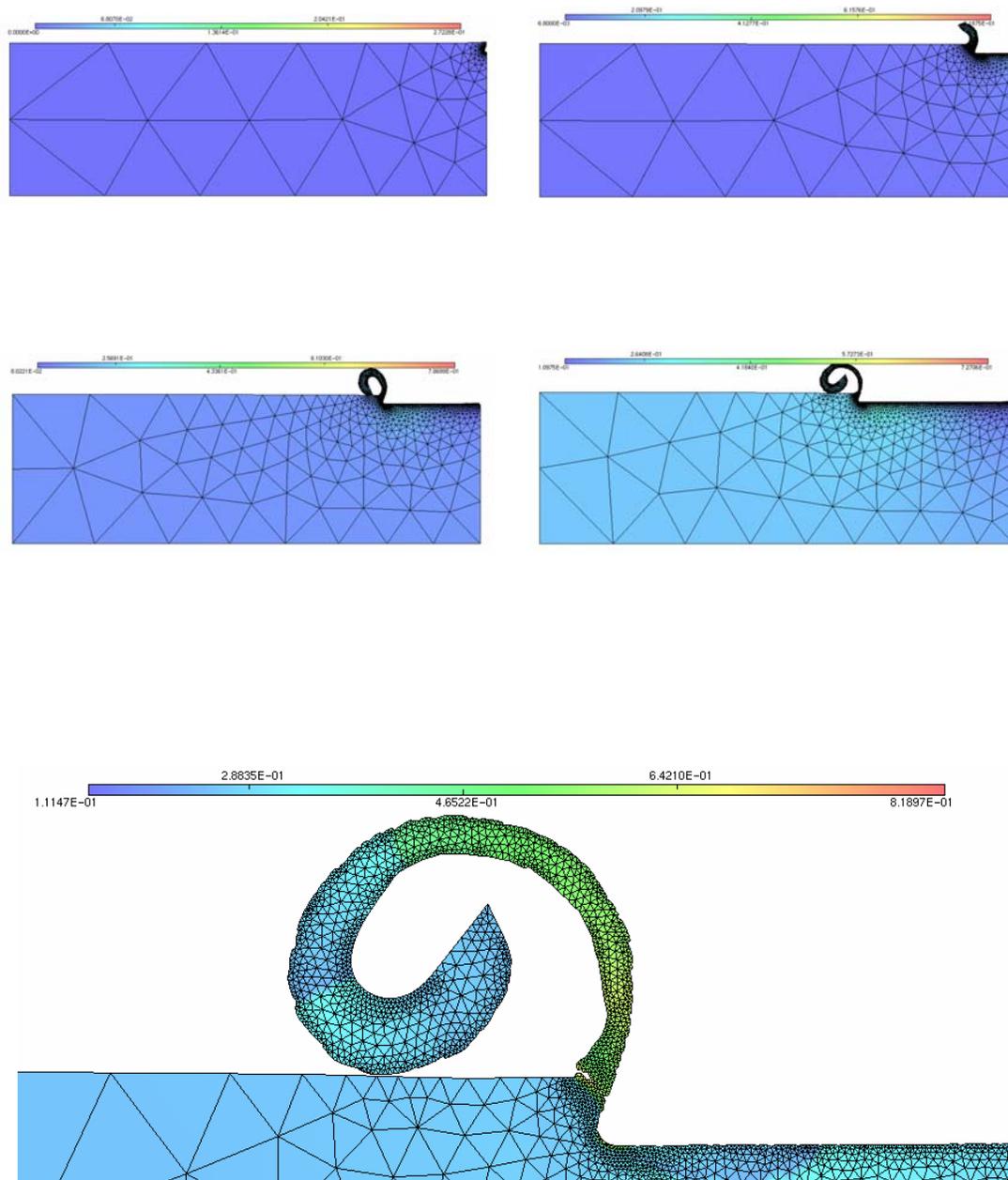


FIG. 3.11 – En haut, découpage orthogonal pour un déplacement d'outil de 0.2, 4, 16 et 28 mm, avec formation d'un premier copeau. En bas, segmentation de ce copeau pour un déplacement d'outil de 29.7 mm

Chapitre 4

Maillage d'une surface gauche

Le maillage d'une surface est d'une importance capitale dans de nombreux domaines du calcul numérique, tout particulièrement la méthode des éléments finis. Il constitue une étape indispensable dans la construction d'un maillage volumique. Pour définir une surface, on peut utiliser une représentation continue ou discrète. Dans le cas continu, la surface peut être définie de manière implicite ou explicite par des fonctions analytiques. Dans le cas discret, elle est définie par un maillage suffisamment proche de la surface réelle, appelé maillage de référence.

De prime abord, le problème du maillage d'une surface gauche peut paraître équivalent à celui du maillage d'un domaine plan vu au chapitre précédent. Cependant, il n'en est rien et plusieurs questions essentielles doivent être résolues, en particulier le contrôle de l'approximation géométrique d'une surface présentant de fortes courbures, ou encore la génération d'un maillage de qualité quelle que soit la définition de la surface.

La première section de ce chapitre (4.1) dresse un état de l'art dans ce domaine, et les sections suivantes donnent une présentation générale de nos contributions (4.2) suivie d'une description plus détaillée. Des spécifications nécessaires à la construction d'un maillage géométrique sont mises en évidence en section 4.3, à l'aide de métriques isotropes ou anisotropes. En section 4.4, une méthodologie est proposée pour le maillage d'une surface *paramétrée*, c'est-à-dire définie de manière explicite. Les sections suivantes utilisent cette méthodologie dans divers cas particulièrement importants : surface multicarreaux (4.5), surface moléculaire (4.6), surface interpolant une grille structurée (4.7) et surface cartésienne (4.8). Enfin, quelques aspects liés au maillage d'une surface définie de manière discrète sont détaillés en section 4.9.

4.1 État de l'art

Il existe essentiellement deux approches pour mailler des surfaces paramétrées : directe et indirecte. Dans l'approche directe, le maillage est généré sur la surface directement dans \mathbb{R}^3 . Parmi les approches directes, on peut citer les méthodes basées sur un *octree* [SHEP91], sur une avancée de front [LOH96] et sur un pavage [HAR98].

La méthode basée sur un *octree* consiste, en un premier temps, à générer un ensemble de boîtes se conformant à une carte donnée de tailles, puis à chercher les intersections de chaque boîte avec la surface, et finalement à mailler chaque portion de surface délimité

par ces contours. Le maillage résultant contient les arêtes qui constituent des contours. De petites arêtes (par rapport à la carte de tailles) peuvent être générées par ce procédé, puisqu'il n'y a aucun contrôle sur l'intersection des boîtes avec la surface. Une étape d'optimisation est donc nécessaire pour éliminer ces petites arêtes.

La méthode frontale consiste à générer le maillage d'une surface, par couches successives, en partant de son contour. Ainsi, un front est constitué par la frontière de la dernière couche créée et se déplace vers l'intérieur de la surface tant qu'il contient plus de trois arêtes. En fait, à chaque itération, une arête du front est sélectionnée et un point optimal (qui forme un élément optimal avec cette arête par rapport à une carte donnée de tailles) est généré près de la surface puis projeté sur celle-ci. Le point résultant sur la surface est ensuite ajusté itérativement. Une difficulté de cette méthode réside dans la gestion des collisions de front.

La méthode de pavage fonctionne comme une méthode frontale mais à chaque itération, un sommet du front est sélectionné et tous les éléments partageant ce sommet sont d'abord générés dans le plan tangent à la surface en ce sommet et ensuite projeté sur la surface. En comparaison avec l'approche frontale, cette méthode converge plus rapidement puisque le comportement local de la surface au voisinage d'un point lui appartenant est bien défini, tandis que ce comportement n'est pas bien défini au voisinage d'une arête.

L'approche indirecte consiste à mailler le domaine des paramètres et à appliquer le maillage résultant sur la surface. Elle est conceptuellement simple puisqu'un maillage bidimensionnel est généré dans le domaine des paramètres et donc elle est supposée plus rapide et plus robuste que la méthode directe. Un problème lié à ce type de méthodes est la génération d'un maillage qui respecte la métrique de la surface. Historiquement, cette méthode indirecte a été utilisée pour la visualisation de surfaces. En fait, le but était de minimiser l'erreur dans l'approximation polyédrique de la surface indirectement dans le domaine des paramètres sans se soucier de la qualité du maillage résultant [DOL90, FIL86, PIE95, SHEN92]. Pour obtenir que le maillage de surface soit isotrope, il faut en général que celui du domaine des paramètres soit anisotrope, à cause de la déformation métrique de la surface vers son domaine des paramètres. Ainsi, pour des calculs par éléments finis, le problème se réduit à la génération d'un maillage anisotrope dans le domaine des paramètres. À cette fin, divers algorithmes sont proposés [BOS96, SHI97, TRI98].

Le contrôle rigoureux de l'écart entre un maillage surfacique (qui correspond à une approximation géométrique polyédrique de la surface) et la surface réelle est l'une des clés de la modélisation. Pour chaque élément, cet écart dépend de la distance de l'élément à la surface, ainsi que de la déviation angulaire de l'élément par rapport aux plans tangents en chaque point correspondant sur la surface. On appelle *maillage géométrique* un maillage satisfaisant cette contrainte. Dans le cas d'une surface composée de carreaux définis par des fonctions polynômiales ou rationnelles (utilisées par la plupart des modélisateurs géométriques), Sheng et Hirsh [SHEN92], et Piegl et Richard [PIE95], ont proposé une méthode de génération de maillage par raffinement dans laquelle l'écart à la surface est contrôlé.

Concernant les surfaces définies de manière discrète, c'est-à-dire par un maillage de référence, des méthodes de simplification permettent de reconstruire un maillage en réduisant le nombre d'éléments. Ils sont généralement basés sur l'optimisation d'un

critère géométrique sans contrôler explicitement l'écart avec le maillage de référence (voir différentes approches dans [BOR97, COH96, GUE96, HAM94, HOP96, KAL96, SCH92, TUR92, VER97] et une vue d'ensemble dans [HEC95]).

4.2 Présentation de notre contribution

Concernant le maillage des surfaces continues, notre contribution porte sur trois thèmes principaux. En premier lieu, de même que des spécifications de tailles *isotropes* ont pu être définies pour contrôler l'approximation géométrique d'une *courbe* (cf. section 2.6), des spécifications de tailles *isotropes ou anisotropes* sont définies pour contrôler celle d'une *surface* en fonction de ses courbures principales. En deuxième lieu, nous proposons une méthode indirecte de maillage d'une surface paramétrée. En troisième lieu, pour étendre cette méthode aux surfaces multicarreaux, nous avons considéré plusieurs aspects importants : la réparation d'un modèle CAO, les spécifications de taille sur les courbes interfaces, la discrétisation de ces courbes et leur report dans les domaines de paramètres concernés, et le maillage transcarreaux par des techniques de simplification.

Une vue d'ensemble très générale sur la génération et l'adaptation de maillage est présentée dans *Encyclopedia of Computational Mechanics* [7]. Dans IJNME [13], notre méthode indirecte de maillage d'une surface paramétrée est détaillée. À partir de spécifications de tailles quelconques définies sur la surface gauche, on déduit des spécifications de tailles dans le domaine paramétrique plan. Les premières sont généralement isotropes et les secondes anisotropes. Le problème se réduit alors à mailler le domaine paramétrique en respectant ces nouvelles spécifications. Cette procédure s'applique à la génération d'un maillage géométrique isotrope de la surface, en définissant une fonction de taille à partir de sa courbure. Dans IJNME [18], les contributions de l'article précédent sont poursuivies de deux façons. D'une part, une surface paramétrée de continuité G^1 est construite à partir d'une grille structurée de points, cette dernière ayant quatre côtés ou trois dans les cas dégénérés. D'autre part, les spécifications de tailles géométriques sur la surface sont étendues au cas anisotrope. Dans AES [14], le processus de maillage surfacique isotrope est intégré dans un calcul adaptatif faisant intervenir un champ physique volumique. Dans un exemple tiré de la mécanique des fluides, le domaine volumique est délimité par le fuselage d'un avion et par un parallélépipède englobant. L'article de EWC [20] traite de la simplification des maillages de surfaces multicarreaux, utilisée pour la génération de maillages transcarreaux. Par ailleurs, des communications dans des actes de conférences s'intéressent au maillage surfacique dans le contexte du maillage adaptatif 3D [41], au calcul de manière discrète des dérivées nécessaires à notre méthode indirecte de maillage [43], à la simplification de maillage [45], au maillage des courbes et des surfaces pour des calculs par éléments finis [48] et au maillage surfacique à partir d'un modèle CAO [57].

Une étude détaillée sur une majoration possible de l'erreur d'interpolation, exploitable pour l'adaptation de maillage, est présentée dans le traité *Mécanique et Ingénierie des Matériaux* [5]. Une nouvelle approche reliant le problème d'estimation *a posteriori* d'erreur et la génération de maillages surfaciques y est introduite. Des exemples d'adaptation dans le cas d'une solution analytique ont permis de valider cette approche.

La méthodologie générale que nous proposons s'applique à différents types de surfaces. Dans le cas d'une surface moléculaire, il s'agit de modéliser celle-ci par des portions de sphères ou de tores, puis de paramétrer ces dernières de manière adéquate (voir le livre *Handbook of Numerical Analysis, Computational Chemistry* [6] et les références [12, 16, 19, 39, 42, 46]). Dans le cas des surfaces interpolant une grille structurée, une paramétrisation basée sur les carreaux de Coons est utilisée [18, 66]. Enfin, dans le cas particulier des surfaces cartésiennes, une méthode spécifique permet de limiter l'erreur géométrique en appliquant les résultats de [5] (voir plus haut).

Concernant le maillage des surfaces discrètes, nous présentons une nouvelle approche permettant d'extraire certaines caractéristiques géométriques d'une surface (lignes vives et normales aux sommets), de définir une surface interpolante de continuité G^1 presque partout et de raffiner cette surface [24].

4.3 Maillage de type A^0 , A^1 ou géométrique

Nous avons défini auparavant (section 2.6) des spécifications isotropes permettant de contrôler l'approximation géométrique d'une *courbe* Γ par sa discrétisation $M(\Gamma)$, en limitant un écart de distance A^0 et/ou un écart d'angle A^1 . Par extension, nous définissons dans cette section des spécifications isotropes ou anisotropes permettant de contrôler l'approximation géométrique d'une *surface gauche* Σ par son maillage $M(\Sigma)$.

Rappelons que les maillages considérés, de même que les discrétisations des courbes, sont tous *interpolants*. En d'autres termes, tout sommet P_j , $j = 1, \dots, p$, du maillage $M(\Sigma)$ est aussi un point de la surface Σ . Nous noterons ici Σ_i la portion de surface approchée par un élément $M(\Sigma_i)$, $i = 1, \dots, n$. Pour que chaque élément $M(\Sigma_i)$ puisse être considéré comme une approximation géométrique de Σ_i , il est nécessaire de vérifier deux types d'écarts désignés par A^0 et A^1 :

- L'écart A^0 (écart d'approximation d'ordre 0) évalue les distances entre les points de la surface Σ_i et l'élément $M(\Sigma_i)$.
- L'écart A^1 (écart d'approximation d'ordre 1) évalue les angles entre les normales à la surface Σ_i et la normale à l'élément $M(\Sigma_i)$.

Ces écarts sont dits d'ordre 0 ou 1 car, si la surface Σ représente une fonction σ , l'écart A^0 ne concerne que cette fonction σ , tandis que l'écart A^1 concerne la normale à la surface Σ et donc les deux dérivées premières notées σ_u et σ_v . Le fait de majorer l'un ou l'autre de ces écarts pour tout $i = 1, \dots, n$ permet d'assurer la validité de l'approximation géométrique de la discrétisation vis-à-vis d'une certaine tolérance :

- Si l'écart A^0 est majoré par un seuil de distance ε_0 donné, le maillage $M(\Sigma)$ est considérée comme suffisamment proche de la surface Σ . Nous dirons alors que $M(\Sigma)$ satisfait le « critère A_0 », ou que $M(\Sigma)$ est un « maillage A^0 ».
- Si l'écart A^1 est majoré par un seuil d'angle ε_1 donné, une portion lisse de surface est approchée par un maillage d'aspect lisse elle aussi. Nous dirons dans ce cas que $M(\Sigma)$ satisfait le « critère A_1 », ou que $M(\Sigma)$ est un « maillage A^1 ».
- Si les écarts A^0 et A^1 sont tous deux majorés, nous parlerons d'un « maillage géométrique ».

Les sections ci-dessous définissent plus précisément ces deux critères A^0 et A^1 .

4.3.1 Écart et critère A^0

Par un raisonnement identique à celui de la section 2.6.1, on peut définir l'écart A^0 , noté E_0 , entre la portion de surface Σ_i et l'élément $M(\Sigma_i)$ par la relation suivante :

$$E_0(\Sigma_i, M(\Sigma_i)) = H(\Sigma_i, M(\Sigma_i)) \quad (4.1)$$

où H désigne la distance de Hausdorff (équation 2.25). Autrement dit, pour tout point P de la surface Σ_i , on évalue la distance entre P et l'élément $M(\Sigma_i)$. Le maximum de ces distances donne l'écart A^0 cherché. En pratique, il suffit de considérer un nombre fini de points répartis aléatoirement sur Σ_i .

Par définition, l'élément $M(\Sigma_i)$ satisfait le critère A^0 si l'écart précédent est majoré par un seuil de distance ε_0 donné :

$$E_0(\Sigma_i, M(\Sigma_i)) \leq \varepsilon_0 \quad (4.2)$$

4.3.2 Écart et critère A^1

De même qu'en section 2.6.2, on constate ici que le critère A^0 précédent n'est pas suffisant pour obtenir dans tous les cas une approximation géométrique satisfaisante d'une surface. Les mêmes exemples peuvent être repris en construisant une surface par extrusion. Un autre exemple est celui d'une sphère maillée par des triangles, l'un d'eux ayant ses trois sommets situés sur un grand cercle de la sphère (voir figure 4.1). Il est alors toujours possible de satisfaire le critère A^0 en rapprochant suffisamment ces trois sommets, le triangle devenant alors de plus en plus étiré. Cependant, le plan du triangle reste perpendiculaire au plan tangent à la sphère en chaque sommet, et le maillage reste donc inacceptable.

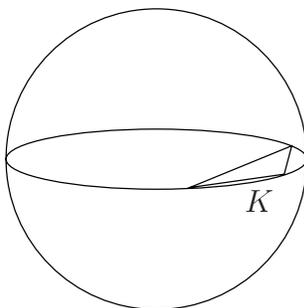


FIG. 4.1 – Triangle K dont les trois sommets sont sur un grand cercle d'une sphère.

Pour y remédier, l'idée de base est de considérer, pour tout point P d'une portion de surface Σ_i , l'écart angulaire entre le plan tangent en P à Σ_i et le plan de l'élément $M(\Sigma_i)$ (on suppose l'existence et l'unicité de ces plans). De manière équivalente, on peut considérer les normales à l'élément et à la surface. Comme nous l'avons vu, l'évaluation des normales implique qu'il s'agit d'un écart d'approximation d'ordre 1 que nous notons A^1 .

Rappelons que $a(\vec{u}, \vec{v})$ désigne l'angle entre deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} .

Pour tout point P de Σ_i , désignons par $\vec{\nu}_{\Sigma_i}(P)$ le vecteur normal en P à Σ_i . Par ailleurs, désignons par $\vec{\nu}$ la normale à l'élément $M(\Sigma_i)$.

Nous pouvons définir l'écart A^1 (non symétrique), noté E_1 , entre la surface Σ_i et l'élément $M(\Sigma_i)$ par :

$$E_1(\Sigma_i, M(\Sigma_i)) = \max_{P \in \Sigma_i} a(\vec{\nu}_{\Sigma_i}(P), \vec{\nu}) \quad (4.3)$$

Ainsi, pour tout point P de la surface Σ_i , on évalue l'angle entre la normale en P à Σ_i et la normale à l'élément $M(\Sigma_i)$. Le maximum de ces angles donne l'écart A^1 cherché. En pratique, il suffit de considérer les normales aux sommets P_j de l'élément $M(\Sigma_i)$ (qui appartiennent aussi à la portion de surface Σ_i), ainsi que les normales en un nombre fini de points répartis aléatoirement sur Σ_i .

Par définition, l'élément $M(\Sigma_i)$ satisfait le critère A^1 si l'écart précédent est majoré par un seuil d'angle ε_1 donné :

$$E_1(\Sigma_i, M(\Sigma_i)) \leq \varepsilon_1 \quad (4.4)$$

Dans les deux sections ci-dessous, nous étudions le problème suivant : est-il possible de contrôler localement les arêtes issues d'un point P de la surface Σ , de manière à ce que tout élément de sommet P vérifie le critère A^0 ou A^1 ? Cette étude nous permettra ensuite de définir des spécifications de taille isotropes ou anisotropes en tout point de la surface, afin de générer un maillage A^0 et/ou A^1 .

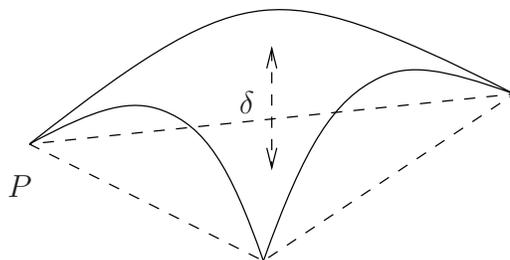
4.3.3 Contrôle local autour d'un point afin de satisfaire le critère A^0

Soit P un point quelconque de la surface Σ , et soit $M(\Sigma_i)$ un élément triangulaire de sommet P et approchant une portion de surface Σ_i (voir figure 4.2). Soit δ l'écart A^0 entre l'élément et la surface. L'objectif est de contrôler les longueurs des arêtes issues de P afin de majorer δ par un seuil donné ε_0 .

D'après l'équation 3.5, la longueur h de toute arête doit vérifier la relation :

$$h \leq \sqrt{\frac{9 \varepsilon_0}{2 \text{Maj}(\Sigma_i)}} \quad (4.5)$$

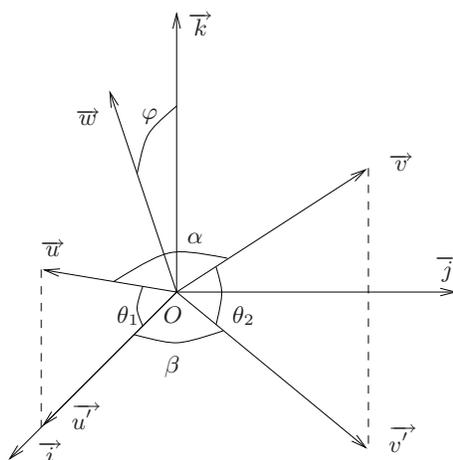
où $\text{Maj}(\Sigma_i)$ est un majorant faisant intervenir pour tout point de la portion de surface Σ_i le hessien H_σ de l'application σ représentant la surface Σ . En pratique, ce majorant est difficile voire même impossible à déterminer. En supposant que le hessien est continu et varie peu autour du point P , nous proposerons une fonction de taille basée sur les courbures principales de la surface au point P (cf. section 4.3.5).

FIG. 4.2 – Écart de distance δ entre un triangle et la portion de surface qu'il approche.

4.3.4 Contrôle local autour d'un point afin de satisfaire le critère A^1

Pour un triangle quelconque de sommet P , on considère à présent les écarts angulaires de ce triangle et de ses côtés et on pose le problème suivant : si les écarts A^1 des deux côtés issus de P sont majorés, l'écart A^1 du triangle lui-même est-il majoré ?

Pour résoudre ce problème, prenons pour origine le point P également désigné par O (voir figure 4.3). On considère les deux côtés issus de O , portés respectivement par les vecteurs unitaires \vec{u} et \vec{v} . Enfin, dans le plan tangent en O à la surface Σ , on construit un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ tel que \vec{k} est le vecteur unitaire normal à la surface et tel que \vec{u} est dans le plan (O, \vec{i}, \vec{k})

FIG. 4.3 – Écarts A_1 d'un triangle et de deux de côtés issus d'un point O .

Si les vecteurs \vec{u} et \vec{v} ne sont pas colinéaires, la normale unitaire \vec{w} à l'élément K est définie par :

$$\vec{w} = \frac{\vec{u} \times \vec{v}}{\|\vec{u} \times \vec{v}\|} \quad (4.6)$$

Soit \vec{u}' (resp. \vec{v}') la projection de \vec{u} (resp. \vec{v}) sur le plan tangent. On considère les angles $\theta_1 = (\vec{u}', \vec{u})$, $\theta_2 = (\vec{v}', \vec{v})$, $\alpha = (\vec{u}, \vec{v})$, $\beta = (\vec{u}', \vec{v}')$ et $\varphi = (\vec{w}, \vec{k})$, avec $\theta_1, \theta_2 \in [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$. Les vecteurs \vec{u} et \vec{v} étant choisis de telle façon que leurs projections \vec{u}' et \vec{v}' soient dans le sens direct, on a $\alpha, \beta \in [0, \pi]$ et $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Nous

voulons trouver une relation entre les angles φ , θ_1 et θ_2 , où φ représente l'écart angulaire entre la normale de l'élément et celle de la surface en O , et où θ_1 et θ_2 représentent les écarts angulaires respectifs entre les deux arêtes issues de O et le plan tangent à la surface.

Les coordonnées de \vec{u} et \vec{v} dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sont :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} \cos \theta_1 \\ 0 \\ \sin \theta_1 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} \cos \theta_2 \cos \beta \\ \cos \theta_2 \sin \beta \\ \sin \theta_2 \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

Les vecteurs \vec{u} et \vec{v} étant unitaires, on a $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \sin \alpha$, et les équations 4.6 et 4.7 donnent :

$$\vec{w} = \frac{\vec{u} \times \vec{v}}{\sin \alpha} = \frac{1}{\sin \alpha} \begin{pmatrix} -\sin \theta_1 \cos \theta_2 \sin \beta \\ \sin \theta_1 \cos \theta_2 \cos \beta - \cos \theta_1 \sin \theta_2 \\ \cos \theta_1 \cos \theta_2 \sin \beta \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

L'écart angulaire φ cherché vérifie la relation :

$$\vec{w} \cdot \vec{k} = \cos \varphi = \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2 \sin \beta}{\sin \alpha} \quad (4.9)$$

où β est donné par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \cos \alpha = \cos \theta_1 \cos \theta_2 \cos \beta + \sin \theta_1 \sin \theta_2 \quad (4.10)$$

$$\Rightarrow \cos \beta = \frac{\cos \alpha - \sin \theta_1 \sin \theta_2}{\cos \theta_1 \cos \theta_2} \quad (4.11)$$

D'après l'équation 4.9, on a :

$$\sin^2 \varphi = 1 - \cos^2 \varphi = 1 - \frac{\cos^2 \theta_1 \cos^2 \theta_2 (1 - \cos^2 \beta)}{\sin^2 \alpha} \quad (4.12)$$

et on trouve finalement :

$$\boxed{\sin^2 \varphi = \frac{\sin^2 \theta_1 - 2 \cos \alpha \sin \theta_1 \sin \theta_2 + \sin^2 \theta_2}{\sin^2 \alpha}} \quad (4.13)$$

Pour étudier les variations de l'écart angulaire φ , considérons tout d'abord la fonction :

$$f(x, y) = \frac{x^2 - 2 \cos \alpha x y + y^2}{\sin^2 \alpha} \quad (4.14)$$

où α est fixé, et x et y sont des variables réelles. L'équation $z = f(x, y)$ définit une surface cartésienne dont le minimum est au point $(0, 0, 0)$. L'intersection de cette surface avec le plan horizontal $z = z_0$, où z_0 croît de 0 à l'infini, donne des ellipses de taille croissante et dont les axes sont portés par les droites $y = x$ et $y = -x$ dans ce plan (voir figure 4.4 à gauche). Ainsi, lorsque le point (x, y) du plan xOy s'éloigne de l'origine, la valeur de $z = f(x, y)$ augmente.

Si z_0 est constant et α varie, on obtient des ellipses (ou un cercle dans le cas particulier $\alpha = \frac{\pi}{2}$) toutes tangentes au carré $[-\sqrt{z_0}, +\sqrt{z_0}]^2$. En effet, chaque ellipse a pour équation :

$$g(x, y) = x^2 - 2 \cos \alpha x y + y^2 - z_0 \sin^2 \alpha = 0 \quad (4.15)$$

Les valeurs extrêmes de x et de y sont atteintes lorsque l'une des composantes du gradient $\nabla g(x, y)$ s'annule. Ce vecteur normal s'écrit :

$$\nabla g(x, y) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \right)^T = 2 \begin{pmatrix} x - \cos \alpha y \\ y - \cos \alpha x \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

Si la deuxième composante s'annule, on a $y = \cos \alpha x$, que l'on reporte dans l'équation 4.15 :

$$x^2 - 2 \cos^2 \alpha x^2 + \cos^2 \alpha x^2 - z_0 \sin^2 \alpha = 0 \quad (4.17)$$

d'où les deux solutions $x = +\sqrt{z_0}$ et $x = -\sqrt{z_0}$, donnant respectivement $y = +\cos \alpha \sqrt{z_0}$ et $y = -\cos \alpha \sqrt{z_0}$. Si c'est la première composante de ∇g qui s'annule, on obtient deux autres points symétriques par rapport à la droite $y = x$. La figure 4.4 à droite montre diverses ellipses obtenues pour $z_0 = 1$, qui s'inscrivent toutes exactement dans le carré $[-1, +1]^2$. Si $\alpha < \frac{\pi}{2}$, le grand axe de l'ellipse est sur la droite $y = x$, et l'ellipse est d'autant plus étirée que α est proche de 0. Si $\alpha = \frac{\pi}{2}$, l'ellipse est un cercle. Si $\alpha > \frac{\pi}{2}$, le grand axe de l'ellipse est sur la droite $y = -x$, et l'ellipse est d'autant plus étirée que α est proche de π . Ces dernières constatations sont indépendantes de la valeur de z_0 .

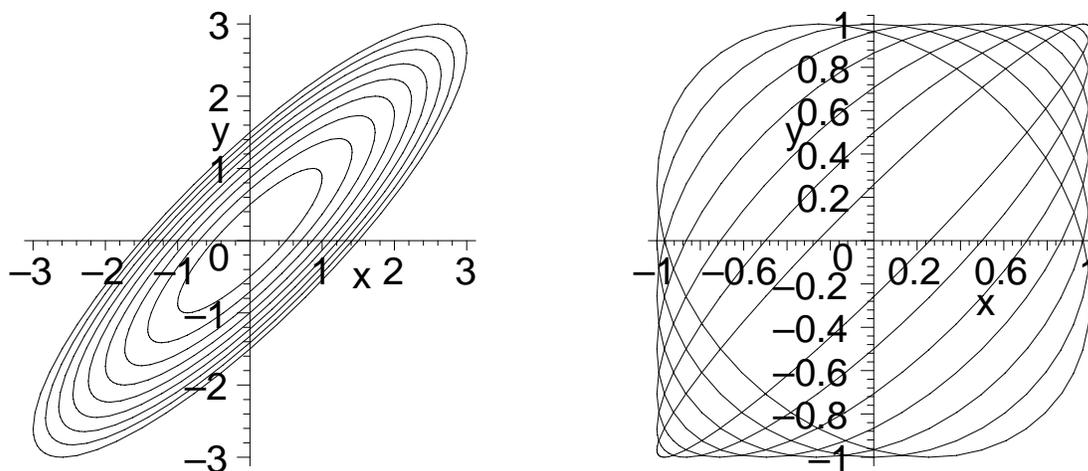


FIG. 4.4 – À gauche, isovaleurs $f(x, y) = z_0$ pour $z_0 = 1, 2, \dots, 9$ et un angle fixé $\alpha = \frac{\pi}{6}$. À droite, isovaleurs $f(x, y) = 1$ pour un angle $\alpha = \frac{\pi}{12}, 2 \frac{\pi}{12}, \dots, 7 \frac{\pi}{12}$.

Si l'on considère la définition de l'ellipse (4.15) comme une équation du deuxième degré en x , on trouve une seule solution si $y^2 = z_0$ et deux solutions si $y^2 < z_0$:

$$x = \cos \alpha y \pm \sin \alpha \sqrt{z_0 - y^2} \quad (4.18)$$

De manière symétrique, si $x^2 \leq z_0$ on a :

$$y = \cos \alpha x \pm \sin \alpha \sqrt{z_0 - x^2} \quad (4.19)$$

À présent, considérons l'écart angulaire $\varphi \in [0, \pi]$ donné par les équations 4.13 et 4.14 :

$$\varphi = \arcsin \sqrt{f(\sin \theta_1, \sin \theta_2)} \quad (4.20)$$

où θ_1 et θ_2 sont des variables comprises entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$. Le domaine de définition de cette fonction doit vérifier $0 \leq f(\sin \theta_1, \sin \theta_2) \leq 1$. D'après ce qui précède, tout point de coordonnées $(x = \sin \theta_1, y = \sin \theta_2)$ doit donc être situé à l'intérieur de l'ellipse d'équation $f(x, y) = 1$. D'après l'équation 4.19 avec $z_0 = 1$, pour $x = \sin \theta_1$ donné et nécessairement compris entre -1 et +1, les points de cette ellipse vérifient l'égalité :

$$y = \cos \alpha x \pm \sin \alpha \sqrt{1 - x^2} \quad (4.21)$$

$$\Leftrightarrow \sin \theta_2 = \cos \alpha \sin \theta_1 \pm \sin \alpha \sqrt{1 - \sin^2 \theta_1} \quad (4.22)$$

$$\Leftrightarrow \sin \theta_2 = \cos \alpha \sin \theta_1 \pm \sin \alpha \cos \theta_1 \quad (4.23)$$

$$\Leftrightarrow \sin \theta_2 = \sin(\theta_1 \pm \alpha) \quad (4.24)$$

$$\Leftrightarrow \alpha = |\theta_2 - \theta_1| \quad \text{ou} \quad \alpha = |\pi - \theta_2 - \theta_1| \quad (4.25)$$

car $\theta_1, \theta_2 \in [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$ et $\alpha \in [0, \pi]$. Nous obtenons ainsi la plus grande et la plus petite valeur possible de α , qui sont atteintes lorsque les vecteurs \vec{i} , \vec{u} et \vec{v} sont dans le même plan (avec un angle β égal à 0 ou π , voir figure 4.3). Pour ces deux valeurs extrêmes de α , on a $f(\sin \theta_1, \sin \theta_2) = 1$, et on obtient effectivement l'écart angulaire maximal $\varphi = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$. Pour α compris entre ces deux valeurs, l'expression 4.20 donnant φ est bien définie.

Lors de la génération d'un maillage géométrique, un écart angulaire maximal ε_1 est donné (généralement de l'ordre de 10 degrés). Tout point de coordonnées $(x = \sin \theta_1, y = \sin \theta_2)$ est donc situé à l'intérieur du carré $[-\sin \varepsilon_1, \sin \varepsilon_1]^2$. Si un point de ce carré est à l'extérieur de l'ellipse $f(x, y) = 1$, l'écart angulaire maximal $\varphi = \frac{\pi}{2}$ est atteint sur les portions de l'ellipse à l'intérieur du carré, α ayant alors l'une des deux valeurs extrêmes données par l'équation 4.25. Sinon, le carré est entièrement à l'intérieur de l'ellipse (ce qui se traduit par $2\varepsilon_1 \leq \alpha \leq \pi - 2\varepsilon_1$ d'après la même équation) et l'écart maximal φ_{max} est la plus grande des quatre valeurs obtenues aux sommets $A = (-\varepsilon_1, -\varepsilon_1)$, $B = (+\varepsilon_1, -\varepsilon_1)$, $C = (+\varepsilon_1, +\varepsilon_1)$ et $D = (-\varepsilon_1, +\varepsilon_1)$, soit :

$$\sin \varphi_{max} = \frac{\sin \varepsilon_1}{\sin \alpha} \sqrt{2 + 2|\cos \alpha|} \quad (4.26)$$

Cet écart maximal est atteint aux sommets B et D si $\alpha < \frac{\pi}{2}$, aux sommets A et C si $\alpha > \frac{\pi}{2}$, et aux quatre sommets si $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Pour les valeurs particulières $\alpha = 2\varepsilon_1$ et $\alpha = \pi - 2\varepsilon_1$ on obtient $\varphi_{max} = \frac{\pi}{2}$, et pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$ on a $\sin \varphi_{max} = \sqrt{2} \sin \varepsilon_1$.

À titre d'exemple, la courbe de la figure 4.5 représente φ_{max} en fonction de α pour ε_1 fixé à 10° (tous les angles sont exprimés en degrés). Lorsque α varie de 0° à $2\varepsilon_1 = 20^\circ$, l'écart maximal est constamment égal à 90° . En se déplaçant vers le point d'abscisse $\alpha = 90^\circ$, cet écart décroît jusqu'à ce que l'on ait $\sin \varphi_{max} = \sqrt{2} \sin 10^\circ$, soit $\varphi_{max} \approx 14^\circ$. Il croît ensuite jusqu'au point ($\alpha = 180 - 2\varepsilon_1 = 160^\circ$, $\varphi_{max} = 90^\circ$) puis reste constant. Par conséquent, si le maillage est suffisamment régulier pour que l'angle α entre deux arêtes soit toujours compris entre 40° et 140° , alors l'écart angulaire d'un élément reste inférieur à 31° , ce qui est un seuil généralement acceptable.

En conclusion, si le maillage est isotrope, le contrôle de l'écart angulaire des arêtes suffit pour obtenir un maillage A^1 . En revanche, s'il est anisotrope, des précautions supplémentaires devront être prises pour éviter une inclinaison trop grande des éléments par rapport aux plans tangents (cf. section 4.3.6).

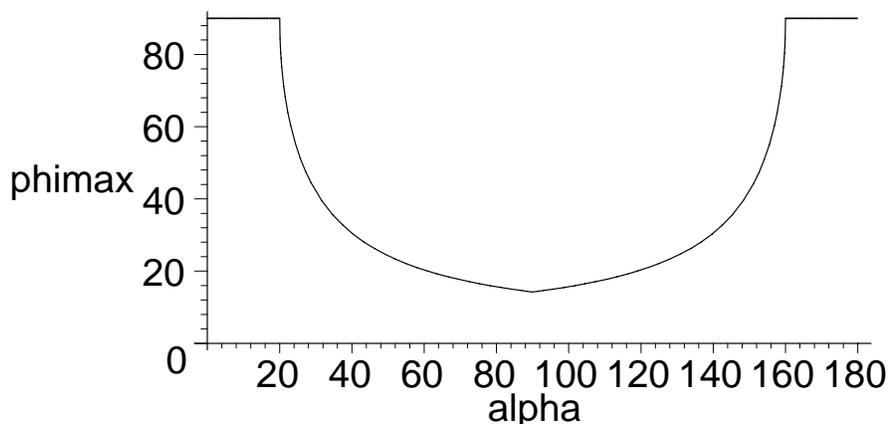


FIG. 4.5 – Écart maximal φ_{max} d'un élément en fonction de son ouverture α , pour un écart maximal ε_1 de ses arêtes fixé à 10 degrés.

En suivant la même démarche que dans la section 2.6, nous nous posons à présent le problème suivant : une surface Σ étant donnée, trouver des spécifications de taille permettant de satisfaire le critère A^0 ou A^1 . Dans le cas d'une *courbe* Γ , une fonction de taille $P \mapsto h(P)$ définissait des spécifications isotropes à partir de la courbure de Γ au point P . Dans le cas d'une *surface* Σ , deux courbures principales sont définies en un point P selon des directions orthogonales. Nous pourrions ainsi déterminer soit des spécifications isotropes à partir de la plus forte courbure, soit des spécifications anisotropes dans le plan tangent à Σ en P . À nouveau, nous supposons que les rayons de courbure sont continus et varient peu autour du point P .

4.3.5 Spécifications de taille satisfaisant le critère A^0

Rappelons qu'une *fonction de taille* permet de spécifier, en tout point P de la surface Σ , la longueur h souhaitée pour toute arête issue de P . Dans le cas le plus général, cette longueur dépend de la direction de l'arête, ou plus exactement d'un angle α variant de 0 à 2π dans le plan Π_t tangent en P à Σ . Dans le cas isotrope, cet angle α n'intervient pas et le lieu des points X du plan Π_t tels que $PX = h$ est un cercle.

Dans le cas anisotrope, la fonction $\alpha \mapsto h(\alpha)$ doit définir une ellipse afin d'obtenir un espace riemannien.

Pour étudier la courbure de la surface Σ au point P , on considère un vecteur unitaire \vec{w} d'origine P et inclus dans le plan tangent Π_t (voir figure 4.6). Le vecteur \vec{w} et la normale en P à Σ , notée $\vec{\nu}_\Sigma(P)$, engendrent un plan Π_n perpendiculaire à Π_t . Lorsque lorsque le plan Π_n tourne autour de la normale, son intersection avec la surface Σ est une courbe Γ dont le rayon de courbure ρ passe par un minimum ρ_1 et par un maximum ρ_2 , pour des valeurs respectives \vec{w}_1 et \vec{w}_2 du vecteur \vec{w} . On montre que les vecteurs \vec{w}_1 et \vec{w}_2 , appelés directions de courbures principales, sont orthogonaux. Si l'angle entre le vecteur fixe \vec{w}_1 et le vecteur tournant \vec{w} est α , le rayon de courbure ρ est donné par la formule d'Euler :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\cos^2 \alpha}{\rho_1} + \frac{\sin^2 \alpha}{\rho_2} \quad (4.27)$$

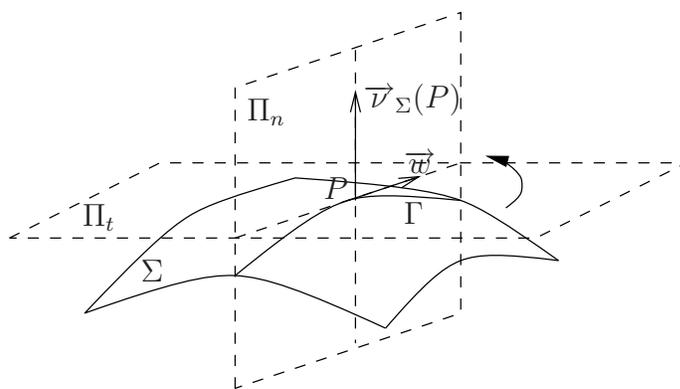


FIG. 4.6 – Étude de la courbure d'une surface Σ .

Afin de satisfaire le critère A^0 , l'écart δ de toute arête du maillage doit être majoré par une constante ε_0 . Pour cela, la taille h d'une arête issue d'un point P fixé, dépendant ou non de la direction de cette arête, doit remplir certaines conditions précisées ci-dessous.

Dans le cas isotrope, l'équation 2.31 fournit directement le résultat ci-dessous.

La fonction de taille satisfaisant le critère A_0 dans le cas isotrope est donnée par :

$$h = 2 \sqrt{\varepsilon_0 (2\rho_1 - \varepsilon_0)} \quad (4.28)$$

où ρ_1 est le rayon de courbure minimal de la surface Σ au point considéré P . Comme précédemment, on a en général $\rho_1 \geq \varepsilon_0$ et cette expression est bien définie. Dans le cas contraire $\rho_1 < \varepsilon_0$, ce qui correspond en pratique à un rayon de courbure exagérément petit, on procède comme si l'on avait $\rho_1 = \varepsilon_0$, d'où $h = 2\varepsilon_0$.

Dans le cas anisotrope, la formule d'Euler 4.27 et l'équation 2.30 avec $\delta = \varepsilon_0$ donnent une taille notée h_E :

$$h_E = 2 \sqrt{\varepsilon_0 \left(\frac{2\rho_1\rho_2}{\rho_2 \cos^2 \alpha + \rho_1 \sin^2 \alpha} - \varepsilon_0 \right)} \quad (4.29)$$

Cette taille h_E définit dans le plan tangent Π_t une courbe \mathcal{C}_E fermée, symétrique par rapport aux axes du repère $(P, \vec{w}_1, \vec{w}_2)$, mais non elliptique. Pour obtenir un espace riemannien, considérons l'ellipse \mathcal{C}_e passant les intersections de \mathcal{C}_E avec les deux axes du repère, et montrons que \mathcal{C}_e est la plus grande ellipse à l'intérieur de \mathcal{C}_E . La taille h_e définie par cette ellipse vérifie l'équation :

$$\frac{1}{h_e^2} = \frac{\cos^2 \alpha}{4\varepsilon_0(2\rho_1 - \varepsilon_0)} + \frac{\sin^2 \alpha}{4\varepsilon_0(2\rho_2 - \varepsilon_0)} = f_0(\alpha) \quad (4.30)$$

Nous devons donc montrer que, quel que soit l'angle α , on a $h_e \leq h_E$. On calcule pour cela la différence :

$$\Delta = \frac{1}{h_e^2} - \frac{1}{h_E^2} \quad (4.31)$$

D'après les équations 4.29 et 4.30, on a :

$$4\varepsilon_0 \Delta = \frac{\cos^2 \alpha}{2\rho_1 - \varepsilon_0} + \frac{\sin^2 \alpha}{2\rho_2 - \varepsilon_0} - \frac{1}{\frac{2\rho_1\rho_2}{\rho_2 \cos^2 \alpha + \rho_1 \sin^2 \alpha} - \varepsilon_0} \quad (4.32)$$

D'où finalement :

$$\Delta = \frac{(\rho_2 - \rho_1)^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{2(2\rho_1 - \varepsilon_0)(2\rho_2 - \varepsilon_0)[2\rho_1\rho_2 - \varepsilon_0(\rho_2 \cos^2 \alpha + \rho_1 \sin^2 \alpha)]} \quad (4.33)$$

Puisque $\rho_2 \geq \rho_1 \geq \varepsilon_0$, la différence Δ est effectivement positive. Nous pouvons en conclure le résultat ci-dessous.

La fonction de taille satisfaisant le critère A_0 dans le cas anisotrope est donnée par :

$$\boxed{h(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{f_0(\alpha)}}} \quad (4.34)$$

où $f_0(\alpha)$ est l'expression définie par l'équation 4.30. Cette expression suppose que ρ_1 et ρ_2 soient tous deux supérieurs ou égaux à ε_0 . Comme précédemment, si $\rho_1 < \varepsilon_0$ (resp. $\rho_2 < \varepsilon_0$), ce qui correspond en pratique à un rayon de courbure très petit, on bride ce rayon et on procède comme si l'on avait $\rho_1 = \varepsilon_0$ (resp. $\rho_2 = \varepsilon_0$).

À titre d'exemple, la figure 4.7 montre la courbe \mathcal{C}_E obtenue pour $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 4$ et $\varepsilon_0 = 0.7$, ainsi que l'ellipse interne \mathcal{C}_e .

4.3.6 Spécifications de taille satisfaisant le critère A^1

En un point fixé P de la surface Σ , on considère à nouveau l'intersection de cette surface avec un plan Π_n tournant autour de la normale $\vec{\nu}(P)$. Cette intersection est assimilée au cercle osculateur de rayon ρ (voir figure 2.13). Pour un point X se déplaçant sur ce cercle, on désigne par θ l'angle entre l'arête PX et la tangente en P à ce cercle. Le critère A^1 impose que l'angle θ soit majoré par une constante donnée ε_1 . Les conséquences concernant la taille h d'une arête issue du point P , dépendant ou non de la direction de cette arête, sont détaillées ci-dessous.

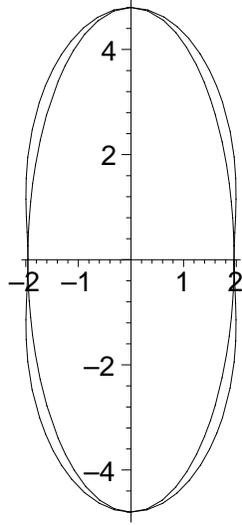


FIG. 4.7 – De l'extérieur vers l'intérieur : courbes \mathcal{C}_E (Euler) et \mathcal{C}_e (ellipse) correspondant à un critère de distance A^0 .

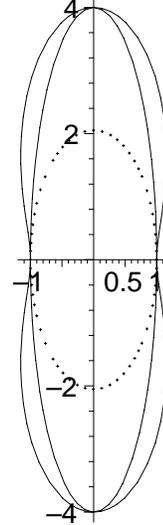


FIG. 4.8 – De l'extérieur vers l'intérieur : courbes \mathcal{C}_E (Euler), \mathcal{C}_e (ellipse) et \mathcal{C}_r (réduite) correspondant à un critère d'angle A^1 .

Dans le cas isotrope, on déduit directement de l'équation 2.33 que la taille h doit être proportionnelle au rayon de courbure minimal ρ_1 , avec un facteur de proportionnalité $\lambda = 2 \sin \varepsilon_1$, comme indiqué ci-dessous.

La fonction de taille satisfaisant le critère A_1 dans le cas isotrope est donnée par :

$$\boxed{h = \lambda \rho_1 = (2 \sin \varepsilon_1) \rho_1} \quad (4.35)$$

Dans le cas anisotrope, la formule d'Euler 4.27 et l'équation 2.32 donnent une taille notée h_E :

$$h_E = \frac{\lambda \rho_1 \rho_2}{\rho_2 \cos^2 \alpha + \rho_1 \sin^2 \alpha} \quad (4.36)$$

où $\lambda = 2 \sin \varepsilon_1$ est le même facteur de proportionnalité.

Comme précédemment, cette taille h_E définit dans le plan tangent Π_t une courbe \mathcal{C}_E fermée, symétrique par rapport aux axes du repère $(P, \vec{w}_1, \vec{w}_2)$, mais non elliptique. On considère donc l'ellipse \mathcal{C}_e passant les intersections de \mathcal{C}_E avec les deux axes du repère. La taille h_e définie par cette ellipse vérifie l'équation :

$$\frac{1}{h_e^2} = \frac{\cos^2 \alpha}{\lambda^2 \rho_1^2} + \frac{\sin^2 \alpha}{\lambda^2 \rho_2^2} \quad (4.37)$$

Les équations 4.36 et 4.37 permettent de calculer la différence Δ :

$$\Delta = \frac{1}{h_e^2} - \frac{1}{h_E^2} = \frac{\cos^2 \alpha}{\lambda^2 \rho_1^2} + \frac{\sin^2 \alpha}{\lambda^2 \rho_2^2} - \frac{(\rho_2 \cos^2 \alpha + \rho_1 \sin^2 \alpha)^2}{\lambda^2 \rho_1^2 \rho_2^2} \quad (4.38)$$

D'où finalement :

$$\Delta = \frac{1}{\lambda^2} \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right)^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \quad (4.39)$$

Puisque la différence Δ est positive, on a $h_e \leq h_E$ quel que soit l'angle α . Il en résulte que \mathcal{C}_e est la plus grande ellipse à l'intérieur de \mathcal{C}_E , et que l'expression 4.37 de h_e définit bien une fonction de taille anisotrope satisfaisant le critère A^1 .

Cependant, la fonction de taille h_e contrôle l'écart angulaire des arêtes et non celui des éléments, ce qui est insuffisant (voir la section 4.3.4 et sa conclusion). Pour pallier ce problème, on calcule l'écart de distance $\delta_1 = (1 - \cos \varepsilon_1) \rho_1$ dans la direction \vec{w}_1 du plus petit rayon de courbure, et on impose le même écart de distance dans toute direction \vec{w} . Ceci a pour effet de réduire l'écart angulaire des arêtes correspondant à de grands rayons de courbure. Cette fonction de taille réduite h_r est donnée par l'équation 4.30 appliquée avec un écart maximal de distance $\varepsilon_0 = \delta_1$, ce qui donne :

$$\frac{1}{h_r^2} = \frac{\cos^2 \alpha}{4 \delta_1 (2 \rho_1 - \delta_1)} + \frac{\sin^2 \alpha}{4 \delta_1 (2 \rho_2 - \delta_1)} = f_1(\alpha) \quad (4.40)$$

Finalemnt, nous obtenons le résultat ci-dessous.

La fonction de taille satisfaisant le critère A_1 dans le cas anisotrope est donnée par :

$$\boxed{h(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{f_1(\alpha)}}} \quad (4.41)$$

où $f_1(\alpha)$ est l'expression définie par l'équation 4.40.

À titre d'exemple, la figure 4.8 représente les trois courbes \mathcal{C}_E , \mathcal{C}_e et \mathcal{C}_r obtenues pour $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 4$ et $\varepsilon_1 = \frac{\pi}{6}$, d'où $\lambda = 2 \sin \varepsilon_1 = 1$. \mathcal{C}_E est la courbe non elliptique déduite de la formule d'Euler. \mathcal{C}_e est la plus grande ellipse à l'intérieur de \mathcal{C}_E . Enfin, \mathcal{C}_r (en pointillés) est l'ellipse réduite obtenue avec $\delta_1 = (1 - \cos \varepsilon_1) \rho_1 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$. Cette ellipse coupe l'axe Oy au point d'ordonnée $\sqrt{(2 - \sqrt{3})(14 + \sqrt{3})} \approx 2.053$.

En résumé, nous pouvons contrôler l'approximation géométrique d'une surface *via* des spécifications isotropes ou anisotropes, que ce soit pour un critère de distance A^0 (équations 4.28 et 4.34) ou pour un critère d'angle A^1 (équations 4.35 et 4.41). Une combinaison de plusieurs de ces spécifications est possible (cf. section 2.5.4). Si des spécifications physiques sont données par ailleurs, celles-ci devront être limitées par des spécifications géométriques de manière à respecter la forme du domaine. La section suivante traite du maillage d'une surface paramétrée respectant des spécifications de tailles *a priori* quelconques.

4.4 Surface paramétrée

Des surfaces très variées peuvent être définies au moyen de surfaces paramétrées composites. La plupart de ces surfaces sont approchées par des carreaux paramétrés polynômiaux ou rationnels, ce qui est le cas dans la plupart des systèmes de CAO. Dans ce chapitre, nous donnons quelques indications sur une méthode qui convient à la génération d'un maillage contraint d'un carreau paramétré. La contrainte consiste en une carte de tailles en chaque sommet (prescrivant une taille dans toute direction) ainsi qu'une qualité de forme associée à chaque élément du maillage. Ainsi, l'objectif

est de construire un maillage qui respecte les spécifications contenues dans une carte donnée de tailles et dont les éléments sont aussi réguliers que possible.

Par extension à la paramétrisation d'une courbe (équation 2.1), une surface paramétrée Σ est définie par une application σ , supposée de classe C^2 , d'un domaine Ω de \mathbb{R}^2 vers \mathbb{R}^3 :

$$\sigma : \Omega \rightarrow \Sigma, \quad u, v \mapsto \sigma(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix} \quad (4.42)$$

On suppose en outre que des spécifications de taille et de forme sont données *via* une métrique \mathcal{M} en chaque point P de Σ . En reprenant les notions introduites en sections 2.5.2 et 2.5.3, des spécifications isotropes sont définies par une fonction de taille $P \mapsto h(P)$ ou, de manière équivalente, par la métrique suivante notée \mathcal{M}_h :

$$\mathcal{M}_h(P) = \frac{1}{h^2(P)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.43)$$

Dans le cas anisotrope, la métrique est définie par une matrice symétrique \mathcal{M}_3 définie positive d'ordre 3 :

$$\mathcal{M}_3(P) = \begin{pmatrix} a(P) & b(P) & c(P) \\ b(P) & d(P) & e(P) \\ c(P) & e(P) & f(P) \end{pmatrix} \quad (4.44)$$

Elle peut aussi être définie dans le plan tangent à Σ en P par :

$$\mathcal{M}_3(P) = \begin{pmatrix} w_1(P) & w_2(P) \end{pmatrix} \mathcal{M}_2(P) \begin{pmatrix} w_1(P)^T \\ w_2(P)^T \end{pmatrix} \quad (4.45)$$

où $w_1(P)$ et $w_2(P)$ sont deux vecteurs de \mathbb{R}^3 définissant une base orthonormée de ce plan tangent, et $\mathcal{M}_2(P)$ est une matrice symétrique définie positive d'ordre 2.

Rappelons également l'expression de la longueur normalisée d'un segment courbe Γ dans un champ de métriques \mathcal{M} (équation 2.15) :

$$l_{\mathcal{M}(\gamma(t))}(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{\dot{\gamma}(t)^T \mathcal{M}(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t)} dt \quad (4.46)$$

En considérant la longueur normalisée des arêtes issues d'un point fixé P de Σ , le lieu des points X de \mathbb{R}^3 tels que $l_{\mathcal{M}_h(P)}(PX) = 1$ est, dans le cas isotrope, une sphère de centre P et de rayon $h(P)$ et, dans le cas anisotrope, un ellipsoïde centré en P .

Notre objectif est de mailler la surface Σ tout en respectant ces spécifications de taille et de forme. Dans les approches directes, les points à insérer sont projetés sur la surface par des méthodes de type Newton-Raphson ou BFGS. Nous proposons ci-dessous une approche indirecte, qui consiste à mailler le domaine bidimensionnel Ω et à appliquer le maillage résultant sur la surface Σ . Cette méthode est à la fois rapide et robuste mais demande d'exprimer, à partir du champ de métriques spécifié sur Σ , un champ de métriques défini sur Ω . Ce calcul de « métrique induite » est précisée dans la section ci-dessous.

4.4.1 Métrique induite dans le domaine des paramètres

Désignons par $M(\Sigma, \mathcal{M})$ un *maillage unité* de Σ dans la métrique donnée \mathcal{M} . De même, désignons par $M(\Omega, \widetilde{\mathcal{M}})$ un *maillage unité* de Ω dans la métrique induite cherchée $\widetilde{\mathcal{M}}$. De manière formelle, nous cherchons à exprimer $\widetilde{\mathcal{M}}$ en fonction de \mathcal{M} de telle sorte que la relation suivante soit satisfaite :

$$M(\Sigma, \mathcal{M}) = \sigma(M(\Omega, \widetilde{\mathcal{M}})) \quad (4.47)$$

Dans ce but, nous allons établir la longueur d'un segment courbe \mathcal{C}_γ tracé sur la surface gauche Σ , sachant qu'il est l'image par σ d'un segment courbe \mathcal{C}_ω tracé sur le domaine plan Ω . Le segment \mathcal{C}_ω étant défini par une application $\omega : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, son image \mathcal{C}_γ est définie par une application composée $\gamma = \sigma \circ \omega$:

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto \gamma(t) = \sigma(\omega(t)) = (\sigma \circ \omega)(t) \quad (4.48)$$

(la figure 4.22 offre une illustration dans laquelle \mathcal{C}_ω et \mathcal{C}_γ sont des courbes frontalières).

La dérivée première de γ est donc égale au produit matriciel :

$$\dot{\gamma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto \dot{\gamma}(t) = \dot{\sigma}(\omega(t)) \dot{\omega}(t) \quad (4.49)$$

où $\dot{\sigma}(\omega(t))$ est une matrice 3×2 formée à partir des dérivées partielles σ_u et σ_v :

$$\dot{\sigma}(\omega(t)) = \begin{pmatrix} \sigma_u(\omega(t)) & \sigma_v(\omega(t)) \end{pmatrix} \quad (4.50)$$

et où $\dot{\omega}(t)$ est une matrice 2×1 représentant la dérivée première de ω en t .

Dans ce qui suit, nous considérons successivement les cas où la métrique \mathcal{M} spécifiée dans \mathbb{R}^3 est la métrique euclidienne usuelle, puis une métrique isotrope quelconque et enfin une métrique anisotrope.

Métrique euclidienne usuelle dans \mathbb{R}^3

Nous étudions ici le cas où la métrique spécifiée \mathcal{M} est simplement définie par la matrice identité \mathcal{I}_3 . En se référant l'équation 2.4, la longueur euclidienne usuelle du segment \mathcal{C}_γ , noté ici Γ pour alléger les notations, est donnée par :

$$L_{\mathcal{I}_3}(\Gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{\dot{\gamma}(t)^\top \dot{\gamma}(t)} dt \quad (4.51)$$

D'après les équations 4.49 et 4.50, nous avons :

$$\dot{\gamma}(t)^\top \dot{\gamma}(t) = \dot{\omega}(t)^\top \dot{\sigma}(\omega(t))^\top \dot{\sigma}(\omega(t)) \dot{\omega}(t) \quad (4.52)$$

et

$$\dot{\sigma}(\omega(t))^\top \dot{\sigma}(\omega(t)) = \begin{pmatrix} \sigma_u(\omega(t))^\top \\ \sigma_v(\omega(t))^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_u(\omega(t)) & \sigma_v(\omega(t)) \end{pmatrix} \quad (4.53)$$

$$= \begin{pmatrix} \sigma_u(\omega(t))^\top \sigma_u(\omega(t)) & \sigma_u(\omega(t))^\top \sigma_v(\omega(t)) \\ \sigma_v(\omega(t))^\top \sigma_u(\omega(t)) & \sigma_v(\omega(t))^\top \sigma_v(\omega(t)) \end{pmatrix} \quad (4.54)$$

$$= \mathcal{M}_\sigma(\omega(t)) \quad (4.55)$$

où \mathcal{M}_σ est une matrice 2×2 qui caractérise la métrique intrinsèque locale de Σ au point $\gamma(t)$. Chaque élément de cette matrice peut être considéré comme un produit scalaire, noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$, des dérivées partielles σ_u et σ_v :

$$\mathcal{M}_\sigma = \begin{pmatrix} \langle \sigma_u, \sigma_u \rangle & \langle \sigma_u, \sigma_v \rangle \\ \langle \sigma_v, \sigma_u \rangle & \langle \sigma_v, \sigma_v \rangle \end{pmatrix} \quad (4.56)$$

En reprenant l'équation 4.51, la longueur euclidienne usuelle du segment courbe Γ est :

$$L_{\mathcal{I}_3}(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{\dot{\omega}(t)^T \mathcal{M}_\sigma(\omega(t)) \dot{\omega}(t)} dt \quad (4.57)$$

et, par identification, la métrique induite dans le cas d'une métrique euclidienne usuelle $\mathcal{M} = \mathcal{I}_3$ est :

$$\boxed{\widetilde{\mathcal{M}}(\omega(t)) = \mathcal{M}_\sigma(\omega(t))} \quad (4.58)$$

L'équation 4.57 permet de relier la métrique $\mathcal{M} = \mathcal{I}_3$ définie sur la surface gauche Σ et la métrique induite $\widetilde{\mathcal{M}} = \mathcal{M}_\sigma$ définie sur le domaine paramétrique Ω . En effet, cette formule montre que la longueur euclidienne d'un segment courbe $\omega(t)$ tracé dans Ω dépend de la norme euclidienne de $\dot{\omega}(t)$, tandis que la longueur euclidienne du segment courbe $\gamma(t) = \sigma(\omega(t))$ (image de $\omega(t)$ sur Σ) dépend de la « norme riemannienne » de $\dot{\omega}(t)$ par rapport à la métrique intrinsèque locale de Σ . Reprenant la discussion de la section 2.5.3, le « cercle unité » représentant la métrique $\mathcal{M}_\sigma(P)$ en un point P de Ω est une ellipse centrée en P , tandis que celui représentant la métrique usuelle au point $\sigma(P)$ de Σ , sur le plan tangent en ce point, est un véritable cercle de rayon 1. Ceci met en évidence la déformation métrique de la surface Σ vers son domaine paramétrique Ω . Ainsi, un maillage unité de Σ dans la métrique \mathcal{I}_3 est évidemment isotrope, tandis que son antécédent par σ est un maillage unité, généralement anisotrope, de Ω dans la métrique \mathcal{M}_σ .

À titre d'exemple, considérons le domaine carré $\Omega = [-2.5, +2.5]^2$ et son image Σ par l'application $\sigma : u, v \mapsto x = u, y = v, z = \frac{1}{2}(u^2 + v^2)$ (portion de paraboloid). La figure 4.9 montre, à gauche, un maillage du domaine plan Ω construit de telle sorte que le maillage de la surface gauche Σ soit un maillage unité dans la métrique euclidienne usuelle \mathcal{I}_3 . La même figure, à droite, visualise en chaque sommet P du maillage de Ω le « cercle unité » représentant la métrique induite $\mathcal{M}_\sigma(P)$. Dans ce cas particulier où l'application σ est une fonction cartésienne, cette ellipse n'est qu'une simple projection sur le plan de Ω du cercle unité représentant la métrique usuelle au point $\sigma(P)$ de Σ (cf. section 4.8). Remarquons que, pour qu'un maillage unité soit « idéal », les sommets doivent être situés aux intersections des ellipses, et que cette propriété est pratiquement vérifiée ici.

Métrique isotrope générale dans \mathbb{R}^3

Dans le cas isotrope général, la métrique \mathcal{M} spécifiée sur Σ est donnée par :

$$\mathcal{M}_h(P) = \frac{1}{h^2(P)} \mathcal{I}_3 \quad (4.59)$$

où $P \mapsto h(P)$ est une fonction de taille définie en tout point P de Σ (cf. équation 4.43).

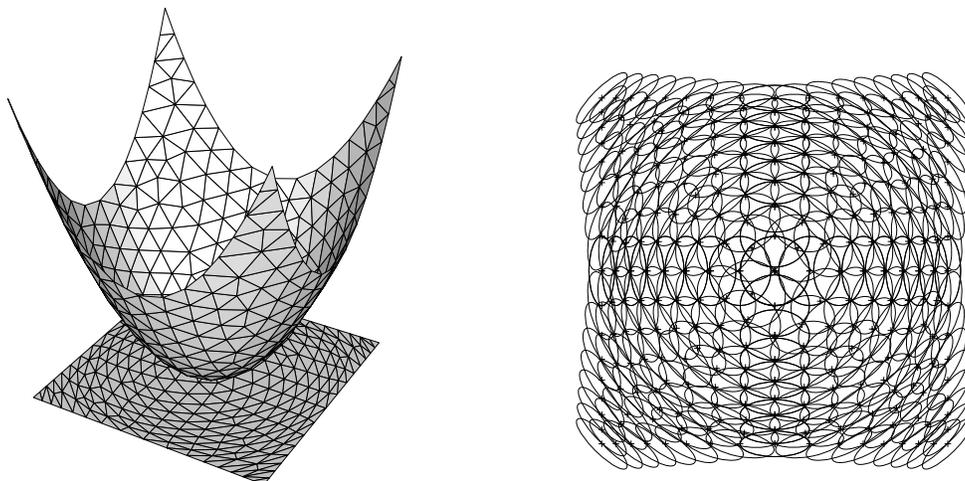


FIG. 4.9 – Maillage anisotrope d'un domaine paramétrique Ω de manière à obtenir un maillage unité d'une surface quadratique Σ dans la métrique usuelle \mathcal{I}_3 (et donc ici un maillage uniforme).

D'après l'équation 4.46, la longueur riemannienne du segment courbe Γ dans cette métrique est donnée par :

$$L_{\mathcal{M}_h}(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{\dot{\gamma}(t)^\top \mathcal{M}_h(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t)} dt \quad (4.60)$$

Un calcul analogue au précédent donne finalement :

$$L_{\mathcal{M}_h}(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{\dot{\omega}(t)^\top \frac{1}{h^2(\gamma(t))} \mathcal{M}_\sigma(\omega(t)) \dot{\omega}(t)} dt \quad (4.61)$$

ce qui peut être écrit comme

$$L_{\mathcal{M}_h}(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{\dot{\omega}(t)^\top \widetilde{\mathcal{M}}(\omega(t)) \dot{\omega}(t)} dt \quad (4.62)$$

avec

$$\boxed{\widetilde{\mathcal{M}}(\omega(t)) = \frac{1}{h^2(\gamma(t))} \mathcal{M}_\sigma(\omega(t))} \quad (4.63)$$

Cette dernière formulation définit, à partir de la métrique intrinsèque locale \mathcal{M}_σ , la métrique $\widetilde{\mathcal{M}}$ induite dans le domaine des paramètres. Comme précédemment, un maillage unité de Ω dans la métrique $\widetilde{\mathcal{M}}$ est généralement anisotrope, tandis que son image par σ donne un maillage respectant les spécifications isotropes données sur Σ .

Ces spécifications isotropes sur Σ peuvent, en particulier, définir une taille h proportionnelle au rayon de courbure minimal de la surface afin de générer un maillage géométrique (cf. équation 4.35). Reprenant l'exemple précédent, la figure 4.10 montre, à gauche, un maillage du domaine plan Ω construit de telle sorte que le maillage de la

surface gauche Σ soit un maillage géométrique (avec une tolérance angulaire $\varepsilon_1 = 8^\circ$). La même figure, à droite, visualise en chaque sommet P du maillage de Ω le « cercle unité » représentant la métrique induite $\widetilde{\mathcal{M}}(P)$. La surface Σ étant cartésienne, cette ellipse n'est autre que la projection sur le plan de Ω du cercle de rayon h tangent en $\sigma(P)$ à Σ (cf. section 4.8). Ici encore, on remarque que les sommets sont pratiquement situés aux intersections des ellipses, ce qui indique que le maillage respecte convenablement les spécifications de taille.

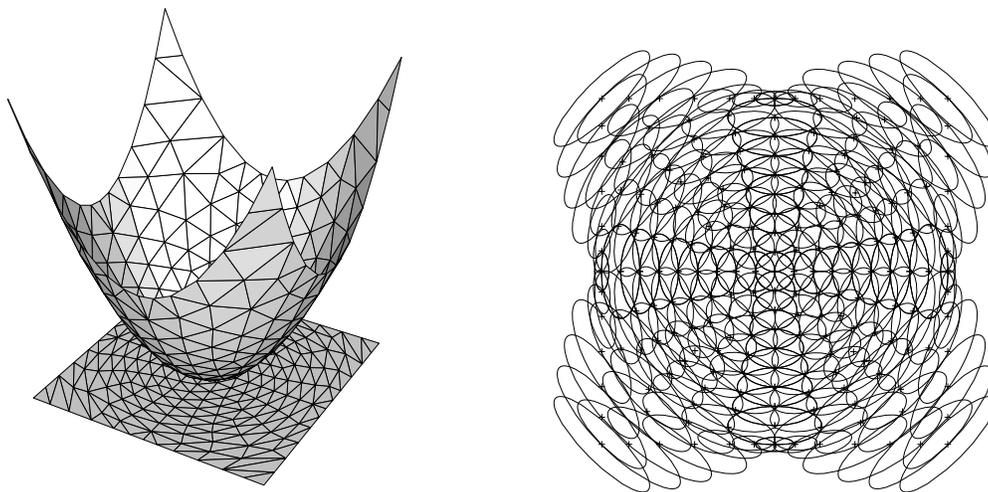


FIG. 4.10 – Maillage anisotrope d'un domaine paramétrique Ω de manière à obtenir un maillage géométrique isotrope d'une surface quadratique Σ .

Métrique anisotrope dans \mathbb{R}^3

Si une carte générale de métriques anisotropes \mathcal{M}_3 est spécifiée en tout point de Σ (cf. équation 4.44), le même raisonnement s'applique une nouvelle fois et définit la métrique induite :

$$\boxed{\widetilde{\mathcal{M}}(\omega(t)) = \dot{\sigma}(\omega(t))^T \mathcal{M}_3(\gamma(t)) \dot{\sigma}(\omega(t))} \quad (4.64)$$

ou, avec des notations simplifiées :

$$\widetilde{\mathcal{M}} = \begin{pmatrix} \sigma_u^T \\ \sigma_v^T \end{pmatrix} \mathcal{M}_3 \begin{pmatrix} \sigma_u & \sigma_v \end{pmatrix} \quad (4.65)$$

Cette formulation exige le calcul de deux produits matriciels, car il n'est pas possible ici d'exprimer simplement la métrique induite $\widetilde{\mathcal{M}}$ à partir de la métrique intrinsèque locale \mathcal{M}_σ . L'image par σ d'un maillage unité de Ω dans la métrique $\widetilde{\mathcal{M}}$ donne comme précédemment un maillage respectant les spécifications données, mais cette fois-ci ces maillages dans \mathbb{R}^2 et dans \mathbb{R}^3 sont tous deux anisotropes.

Dans le cas où la métrique \mathcal{M}_3 est définie à partir d'une métrique \mathcal{M}_2 dans le plan tangent à Σ exprimée dans le repère usuel (cf. équation 4.45), la métrique induite s'écrit

encore :

$$\widetilde{\mathcal{M}} = \begin{pmatrix} \sigma_u^T \\ \sigma_v^T \end{pmatrix} (w_1 \ w_2) \mathcal{M}_2 \begin{pmatrix} w_1^T \\ w_2^T \end{pmatrix} (\sigma_u \ \sigma_v) \quad (4.66)$$

Grâce aux différents résultats de cette section, nous pouvons construire par une méthode indirecte un maillage adaptatif contrôlé par une carte de taille physique et/ou géométrique. Les métriques correspondant à ce dernier cas dépendent des courbures principales en tout point de la surface (cf. section 4.3). Par suite, nous présentons ci-dessous un moyen d'obtenir ces courbures dans le cas d'une surface paramétrée.

4.4.2 Courbures principales d'une surface paramétrée

Considérons un point $X_0 = \sigma(x_0)$ de la surface Σ , où $x_0 = (u_0, v_0)$ (voir figure 4.11). Pour $x = (u, v)$ suffisamment proche de x_0 , un développement de Taylor à l'ordre 2 montre que $\sigma(x)$ peut être approché par la fonction quadratique σ_{q,x_0} avec :

$$\sigma_{q,x_0}(x) = X_0 + \sigma_u(x_0)u + \sigma_v(x_0)v + \frac{1}{2} (\sigma_{uu}(x_0)u^2 + 2\sigma_{uv}(x_0)uv + \sigma_{vv}(x_0)v^2) \quad (4.67)$$

qui définit une surface quadratique Σ_{q,X_0} . Ainsi, le problème se réduit à définir les courbures principales de cette surface quadratique au point X_0 .

Le plan tangent Π_t de Σ en X_0 est engendré par les deux vecteurs $\sigma_u(x_0)$ et $\sigma_v(x_0)$, et son vecteur normal unitaire $\nu(X_0)$ est alors défini par :

$$\nu(X_0) = \frac{\sigma_u(x_0) \times \sigma_v(x_0)}{\|\sigma_u(x_0) \times \sigma_v(x_0)\|} \quad (4.68)$$

Pour analyser le comportement de la surface quadratique Σ_{q,X_0} au voisinage de x_0 , nous considérons la trace de Σ_{q,X_0} sur le plan Π_n engendré par les deux vecteurs unitaires orthogonaux $\tau(X) = \frac{\sigma_u(x_0)u + \sigma_v(x_0)v}{\|\sigma_u(x_0)u + \sigma_v(x_0)v\|}$ et $\nu(X_0)$, qui constitue une section normale de Σ passant par $\tau(X)$. En effet, la trace de Σ_{q,X_0} sur Π_n est la courbe $\xi(x)\tau(X) + \eta(x)\nu(X_0)$ passant par X_0 (origine du plan Π_n), où ξ et η sont définis par :

$$\xi(x) = \sigma_{q,x_0}(x)^T \tau(X) \quad \eta(x) = \sigma_{q,x_0}(x)^T \nu(X_0) \quad (4.69)$$

ou encore :

$$\begin{aligned} \xi(x) &= \|\sigma_u(x_0)u + \sigma_v(x_0)v\| + O(\|x\|^2) \\ \eta(x) &= \frac{1}{2} (\sigma_{uu}(x_0)^T \nu(X_0) u^2 + 2 \sigma_{uv}(x_0)^T \nu(X_0) uv + \sigma_{vv}(x_0)^T \nu(X_0) v^2) \end{aligned} \quad (4.70)$$

Ainsi, nous avons :

$$\xi^2(x) = \|\sigma_u(x_0)u + \sigma_v(x_0)v\|^2 + o(\|x\|^2) = x^T \mathcal{M}_\sigma(X_0) x + o(\|x\|^2) \quad (4.71)$$

ce qui donne :

$$\frac{\xi^2(x)}{x^T \mathcal{M}_\sigma(X_0) x} = 1 + o(1) \quad (4.72)$$

Désignons par $\mathcal{N}_\sigma(X_0)$ la matrice 2×2 :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{uu}(x_0)^\top \nu(X_0) & \sigma_{uv}(x_0)^\top \nu(X_0) \\ \sigma_{uv}(x_0)^\top \nu(X_0) & \sigma_{vv}(x_0)^\top \nu(X_0) \end{pmatrix} \quad (4.73)$$

alors $\eta(x)$ peut être exprimé comme :

$$\eta(x) = \frac{1}{2} x^\top \mathcal{N}_\sigma(X_0) x \quad (4.74)$$

Puisque $o(\eta) = o(\|x\|^2) = o(\xi^2)$, nous avons :

$$\eta = \frac{1}{2} \kappa(x) \xi^2 + o(\xi^2) \quad (4.75)$$

où

$$\kappa(x) = \frac{x^\top \mathcal{N}_\sigma(X_0) x}{x^\top \mathcal{M}_\sigma(X_0) x} \quad (4.76)$$

L'équation précédente montre que la courbure de la courbe $\xi(x)\tau(X) + \eta(x)\nu(X_0)$ à l'origine X_0 est $\kappa(x)$ et que sa normale unitaire principale coïncide avec $\nu(X_0)$. Pour trouver les courbures principales au point X_0 , nous pouvons appliquer la réduction simultanée des matrices $\mathcal{N}_\sigma(X_0)$ et $\mathcal{M}_\sigma(X_0)$ qui fournissent une base orthonormée $(w_1(X_0), w_2(X_0))$ du plan tangent à Σ en X_0 pour laquelle les deux matrices ci-dessus sont diagonales. Cette base est constituée des vecteurs propres unitaires de la matrice $\mathcal{M}_\sigma^{-1}(X_0)\mathcal{N}_\sigma(X_0)$ (notons que $\mathcal{M}_\sigma(X_0)$ représente une métrique et est donc inversible). Cette matrice est appelée la matrice géométrique locale de Σ en X_0 et est désignée par $\mathcal{G}_\sigma(X_0)$. Ainsi, dans la base $(w_1(X_0), w_2(X_0))$, $\kappa(x)$ s'exprime comme :

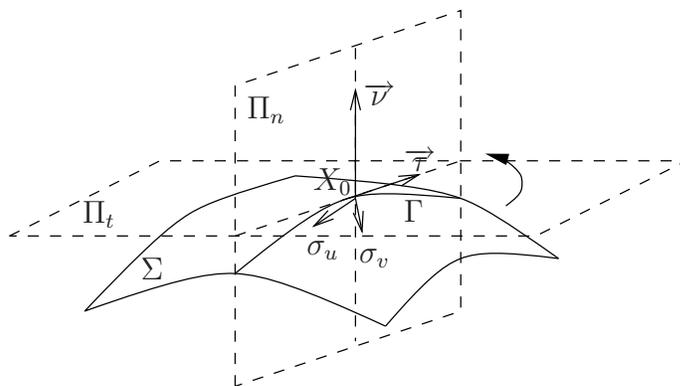
$$\kappa(x) = \frac{\kappa_1(X_0)u^2 + \kappa_2(X_0)v^2}{u^2 + v^2} \quad (4.77)$$

où $\kappa_1(X_0)$ (resp. $\kappa_2(X_0)$) est la valeur propre correspondant à $w_1(X_0)$ (resp. $w_2(X_0)$). En conclusion, nous avons montré un moyen d'obtenir les deux directions principales $w_1(X_0)$ et $w_2(X_0)$, ainsi que les courbures principales $\kappa_1(X_0)$ et $\kappa_2(X_0)$ dans ces directions respectives.

4.4.3 Application (visage de Voltaire)

À titre d'exemple, considérons une surface paramétrée représentant le visage de Voltaire. Les deux paramètres sont un angle $\theta \in [0, 2\pi]$ et une hauteur z . Le domaine paramétrique contient une ligne verticale imposée $\theta = \pi$. L'application $\theta, z \mapsto \sigma(\theta, z)$ calcule un point de l'espace tridimensionnel connaissant la distance de ce point à un axe vertical fixe. Sur chaque figure de cette section, la partie gauche représente le domaine de \mathbb{R}^2 et la partie droite son application dans \mathbb{R}^3 . Le mailleur surfacique utilisé est BLSURF [90].

La figure 4.12 montre un maillage uniforme du domaine paramétrique et le maillage surfacique correspondant (9372 triangles). Le maillage isotrope dans \mathbb{R}^2 et anisotrope dans \mathbb{R}^3 Ceci met en évidence la distorsion des éléments sur la surface, ce qui n'est pas souhaité en général.

FIG. 4.11 – Étude de la courbure d'une surface paramétrée Σ .

La figure 4.13 (resp. 4.14) montre un maillage surfacique uniforme de taille constante $h = 9$ (resp. $\frac{h}{2} = 4.5$) contenant 8 657 triangles (resp. 33 572 triangles). À présent, le maillage du domaine paramétrique est anisotrope, ce qui reflète encore la distorsion des métriques.

Les figures 4.15 et 4.16 montrent deux maillages surfaciques géométriques isotropes, (96 034 et 135 547 triangles) respectivement sans et avec contrôle de la gradation en taille (ce procédé de gradation est détaillé dans [BOR98]). Les parties raffinées de ces maillages sont dues à des courbures relativement élevées de la surface. Ce type de maillage fournit une bonne approximation géométrique de la surface.

Enfin, la figure 4.17 montre un maillage surfacique géométrique anisotrope (35 240 triangles). On constate que les zones raffinées dans le cas isotrope sont remplacées par des éléments étirés dans le cas anisotrope. Ainsi, la surface est approchée avec une précision équivalente, alors que le nombre d'éléments est considérablement réduit.

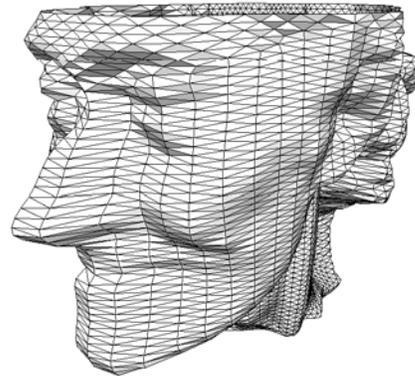
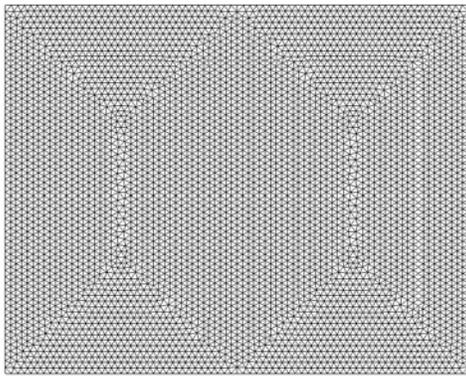


FIG. 4.12 – Visage de Voltaire. À gauche, maillage uniforme du domaine des paramètres. À droite, maillage surfacique correspondant

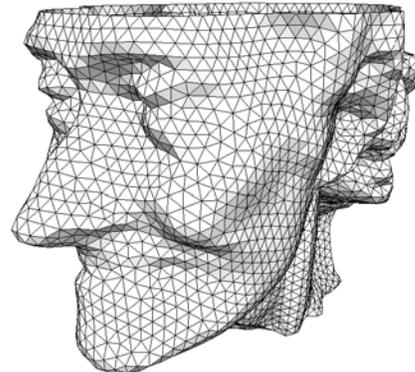
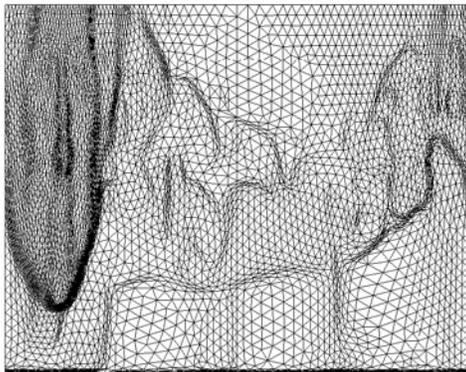


FIG. 4.13 – Visage de Voltaire. À droite, maillage uniforme « grossier ».

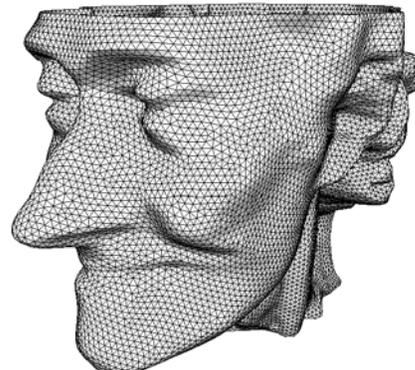
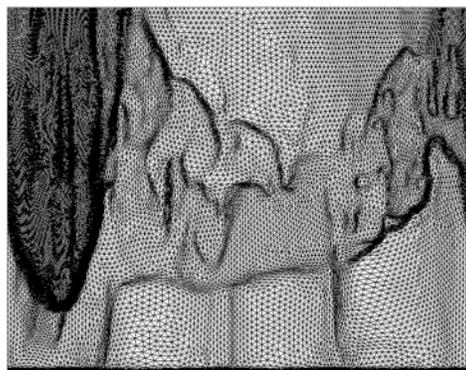


FIG. 4.14 – Visage de Voltaire. À droite, maillage uniforme « fin ».

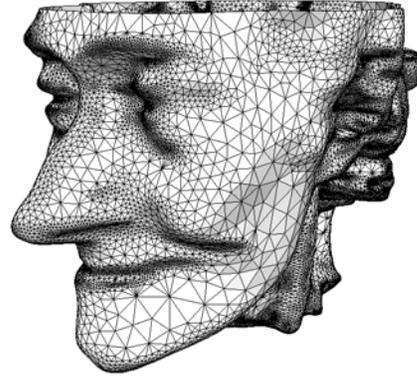
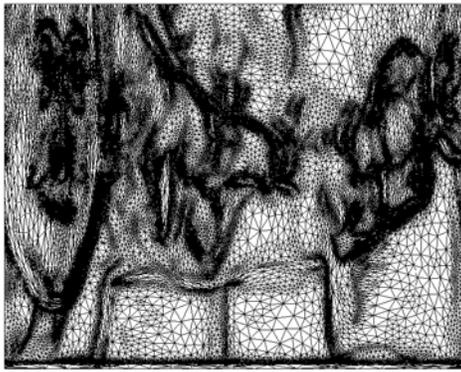


FIG. 4.15 – Visage de Voltaire. À droite, maillage géométrique isotrope sans gradation.

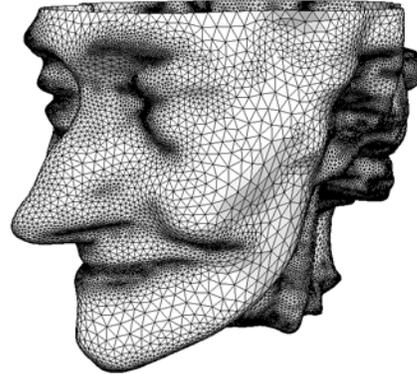
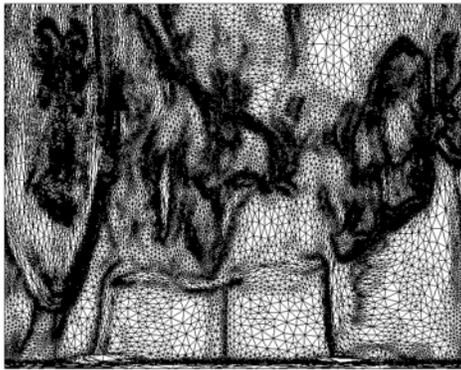


FIG. 4.16 – Visage de Voltaire. À droite, maillage géométrique isotrope avec gradation.

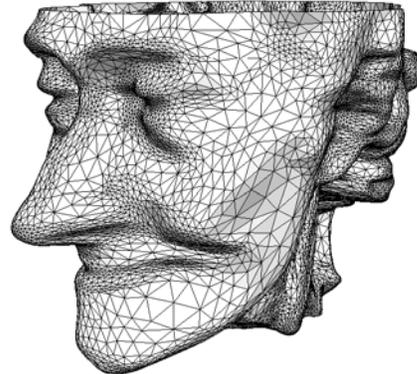
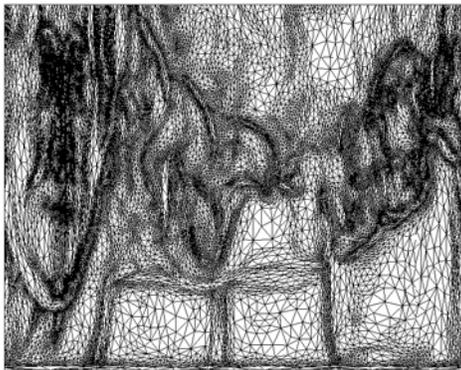


FIG. 4.17 – Visage de Voltaire. À droite, maillage géométrique anisotrope.

4.5 Surface multicarreaux

Le maillage d'une surface composée de carreaux paramétrés est une composante essentielle dans le couplage entre CAO et simulation numérique. En effet, un objet peut être modélisé en CAO par une représentation B-Rep (*boundary representation*), dans laquelle sa frontière est décomposée en plusieurs « carreaux ». ¹ L'objet est alors représenté par des informations géométriques et topologiques sur des points, des courbes et des surfaces. Pour mailler la surface de l'objet, chaque carreau peut être vu comme une surface paramétrée individuelle (cf. section précédente), mais un soin particulier doit être pris afin que le maillage global soit conforme. En particulier, les courbes interfaces doivent être définies de manière rigoureuse, ce qui n'est pas toujours vrai en pratique. De plus, toutes ces courbes doivent être discrétisées avant de procéder au maillage des carreaux adjacents. Ceci conduit au schéma général de calcul ci-dessous :

1. Réparation du modèle CAO
2. Discrétisation des courbes frontalières, notamment les courbes interfaces
3. Maillage surfacique des carreaux
4. Maillage volumique de l'objet
5. Simulation numérique

Les étapes 2 à 5 peuvent être répétées pour générer des maillages adaptatifs et/ou déformables. Les sections suivantes concernent plus particulièrement la réparation du modèle CAO, les spécifications de taille sur une courbe interface, la discrétisation d'une telle courbe et son report dans les domaines de paramètres concernés, ainsi que le cas particulier des surfaces dégénérées.

4.5.1 Réparation du modèle CAO

Idéalement, une représentation B-Rep donne de manière exacte des informations géométriques sur les carreaux et des informations topologiques permettant de les assembler. Cependant, ces informations peuvent être incorrectes : par exemple, deux carreaux théoriquement adjacents peuvent être séparés par un espace vide, se superposer partiellement, ou s'intersecter. Dans le premier cas, on pourra construire des carreaux comblant les espaces vides. Dans les autres cas, on pourra calculer les courbes intersections, les reporter dans les domaines de paramètres, et rectifier ces derniers. Une totale automatisation de cette « réparation de la CAO » (*CAD repair* ou *CAD cleaning*) reste encore un problème ouvert. Cependant, nous présentons ci-dessous une méthode simple de réparation lorsque les défauts sont de petites tailles.

Deux seuils de tolérance sont définis, ε_1 pour les distances propres à un seul carreau et ε_2 pour les distances entre deux carreaux différents. Pour un objet de taille normalisée, on prendra par exemple $\varepsilon_1 = 10^{-5}$ et $\varepsilon_2 = 10^{-2}$.

¹Dans une autre représentation courante en CAO, appelée CSG (*constructive solid geometry*), l'objet est défini par une suite d'opérations ensemblistes sur des solides élémentaires (par exemple union, intersection ou différence entre des cubes, des sphères, ou des cylindres pleins). De manière interne, le signe d'une fonction implicite $f(x, y, z)$ détermine l'intérieur, l'extérieur et la frontière de l'objet. La génération de maillage peut alors utiliser des algorithmes appelés *voxelisation* et *marching cubes*. On pourra également convertir automatiquement la représentation CSG en B-Rep (l'inverse n'étant pas possible en général) et appliquer la méthodologie de cette section.

Ainsi, pour identifier deux points communs, deux cas sont envisagés :

- S'ils appartiennent à un même carreau, leur distance doit être inférieure à ε_1 .
- S'ils appartiennent à deux carreaux différents, leur distance doit être inférieure à ε_2 .

Deux courbes sont alors considérées comme communes si elles vérifient les trois propriétés suivantes :

- Elles appartiennent à deux carreaux différents.
- Les extrémités de l'une des deux courbes sont communes avec celles de l'autre courbe (mêmes numéros globaux respectifs).
- Leur distance de Hausdorff est inférieure à ε_2 . En pratique, chaque courbe est approchée par une ligne polygonale. La distance entre tout sommet de l'une des deux lignes polygonales et une arête de l'autre doit être inférieure à ε_2 , et *vice versa*.

Pour traiter le cas des courbes se chevauchant partiellement, il est préalablement nécessaire de projeter chaque extrémité P sur toute courbe C appartenant à un autre carreau et voisine (distance inférieure à ε_2). Si la longueur du segment courbe compris entre le point projeté P' et l'une des extrémités de C est inférieure à ε_1 , le point P et cette extrémité sont considérés comme étant communs. Sinon, la courbe C est subdivisée en P' , et les points P et P' sont considérés comme étant communs.

Par exemple, la figure 4.18 représente trois carreaux (à gauche, numéros des points sur la frontière de ces trois carreaux; à droite, numéros des courbes). Initialement, les points et les courbes sont numérotés de manière séquentielle. Ainsi, des numéros apparaissent superposés à gauche de la figure lorsque deux extrémités de courbes sont géométriquement confondues. Cet effet est visible sur le rectangle inférieur dont les côtés sont d'extrémités respectives 1-2, 3-4, 5-6 et 7-8, et sur la frontière du carreau de gauche (resp. droite) comprenant les segments 9-10, 11-12, ..., 21-22 (resp. 23-24, 25-26, ..., 35-36). La partie droite de la figure montre les numéros des courbes, tous différents, de 1 à 18.

Sur la figure 4.19, les extrémités et les courbes communes ont été identifiées (pour des valeurs de ε_1 et ε_2 suffisamment grandes). De plus, les points 9, 10 et 24 ont été projetés sur le côté supérieur du rectangle. Un maillage totalement conforme des trois carreaux peut donc être généré, comme le montre la figure 4.20 (les distances entre les carreaux sont largement exagérées dans cet exemple).

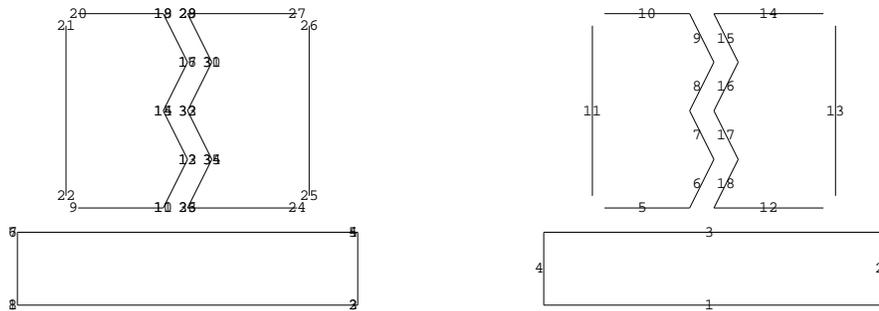


FIG. 4.18 – Numérotation initiale des points et des courbes.

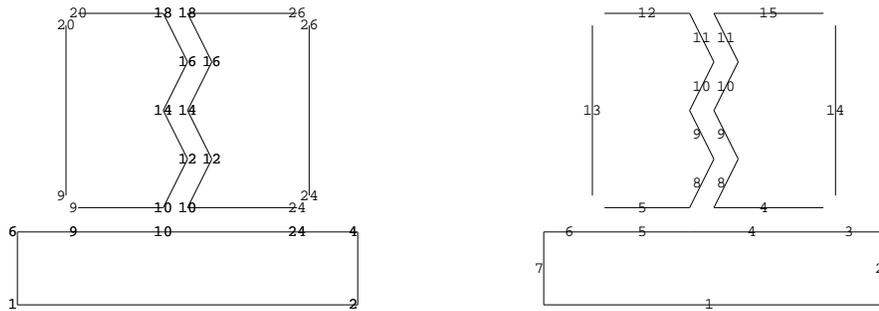


FIG. 4.19 – Numérotation après identification des points et courbes communs.

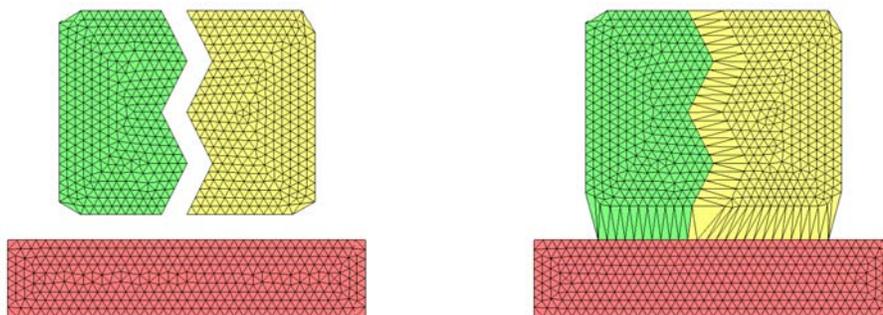


FIG. 4.20 – Maillages résultants, à gauche non conforme et à droite conforme (les distances entre les carreaux sont largement exagérées dans cet exemple).

4.5.2 Spécifications de taille sur une courbe interface

Pour discrétiser une courbe interface, les spécifications de taille à considérer peuvent être définies en certains points de la courbe, sur la courbe toute entière (de manière continue), ou sur des surfaces adjacentes. Dans ce dernier cas, on pourra retenir le minimum ou la moyenne des tailles associées aux différentes surfaces adjacentes.

Par exemple, la figure 4.21 représente une partie de la célèbre théière de l'Utah. Cette partie est composée de 4 carreaux et une taille constante est prescrite sur chacun d'entre eux (respectivement 0.5, 1, 2 et 8). À gauche, le minimum des tailles est retenu, ce qui produit un maillage de 534 sommets et 960 triangles. À droite, la moyenne géométrique est prise en compte, d'où un maillage de 494 sommets et 881 triangles.

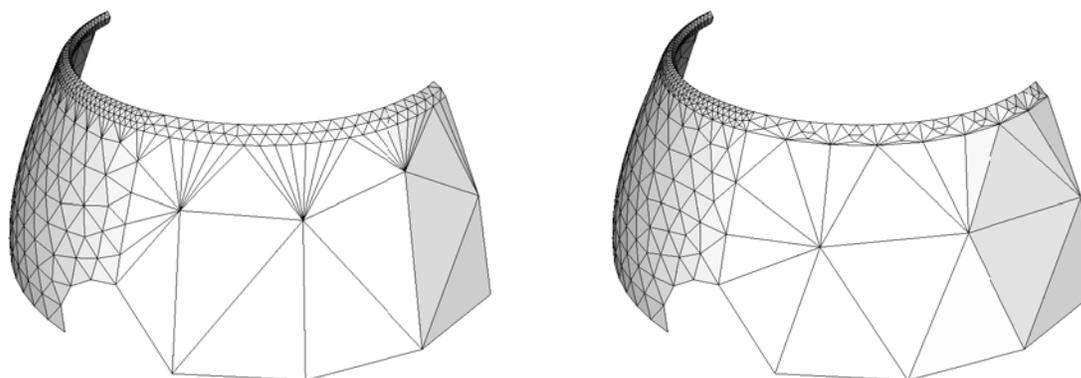


FIG. 4.21 – Théière de l'Utah : tailles prescrites aux interfaces obtenues par minimum (à gauche, 913 triangles) ou par moyenne géométrique (à droite, 864 triangles).

4.5.3 Discrétisation d'une courbe interface et report dans les domaines de paramètres

Après avoir défini de manière formelle une courbe interface, nous présentons ci-dessous une méthode pour discrétiser une telle courbe et reporter le résultat dans les domaines de paramètres concernés.

Définition d'une courbe interface

Une courbe interface est un cas particulier de courbe frontalière. La figure 4.22 donne une vue schématique des applications définissant les frontières d'un domaine paramétrique plan Ω et de son image Σ dans \mathbb{R}^3 . La frontière du domaine Ω est composée d'un certain nombre de courbes, chaque courbe \mathcal{C}_ω étant définie par une application ω :

$$\omega : I = [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{C}_\omega \subset \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \omega(t) \quad (4.78)$$

Le carreau Σ est lui-même défini par une application σ :

$$\sigma : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \Sigma \subset \mathbb{R}^3, \quad (u, v) \mapsto \sigma(u, v) \quad (4.79)$$

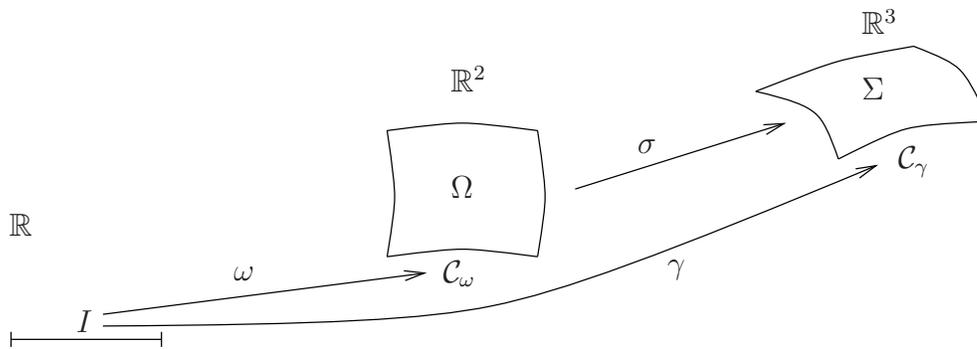


FIG. 4.22 – Vue schématique des applications définissant des courbes frontières (un seul carreau est représenté ici).

Ainsi, l'image de \mathcal{C}_ω par l'application σ est une courbe \mathcal{C}_γ faisant partie de la frontière du carreau Σ et définie par l'application composée $\gamma = \sigma \circ \omega$:

$$\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{C}_\gamma \subset \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto \gamma(t) = \sigma(\omega(t)) = (\sigma \circ \omega)(t) \quad (4.80)$$

Une courbe interface est définie par plusieurs applications $(\gamma_i)_{i=1,\dots,n}$ où n est appelé *degré* de la courbe interface. Un cas typique (figure 4.23 au centre) est celui d'une courbe interface partagée par deux carreaux Σ_1 et Σ_2 , c'est-à-dire en fait deux courbes confondues \mathcal{C}_{γ_1} et \mathcal{C}_{γ_2} définies respectivement par les applications γ_1 et γ_2 :

$$\begin{cases} \gamma_1 : I_1 \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{C}_{\gamma_1} \subset \mathbb{R}^3, & t \mapsto \gamma_1(t) = \sigma_1(\omega_1(t)) \\ \gamma_2 : I_2 \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{C}_{\gamma_2} \subset \mathbb{R}^3, & t \mapsto \gamma_2(t) = \sigma_2(\omega_2(t)) \end{cases} \quad (4.81)$$

Un autre cas courant (figure 4.23 à gauche) est celui d'une « couture » sur une surface périodique comme un cylindre ou un tore. Il s'agit alors d'un seul carreau Σ défini par une application σ :

$$\begin{cases} \gamma_1 : I_1 \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{C}_{\gamma_1} \subset \mathbb{R}^3, & t \mapsto \gamma_1(t) = \sigma(\omega_1(t)) \\ \gamma_2 : I_2 \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{C}_{\gamma_2} \subset \mathbb{R}^3, & t \mapsto \gamma_2(t) = \sigma(\omega_2(t)) \end{cases} \quad (4.82)$$

Enfin, la figure 4.23 à droite montre une courbe interface \mathcal{C} partagée par trois carreaux.

Remarque : caractérisation des surfaces manifold et non manifold

Le degré des courbes interfaces permet de classer les surfaces en plusieurs catégories. Une surface est dite *manifold* si toutes ses courbes interfaces sont de degré $n \leq 2$, *non manifold* sinon. Parmi les surfaces manifold, on distingue celles avec bord (s'il existe au moins une courbe interface de degré $n = 1$) et celles sans bord (si toutes les courbes interfaces sont de degré $n = 2$).

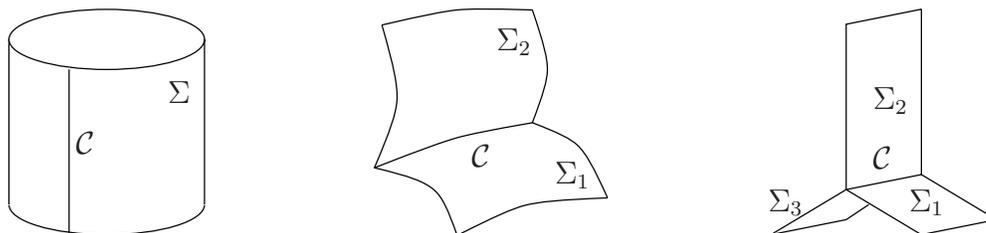


FIG. 4.23 – De gauche à droite, courbe interface \mathcal{C} partagée par 1, 2 ou 3 carreaux.

Discrétisation et report d'une courbe interface

La discrétisation d'une courbe interface reprend bien évidemment les méthodes de discrétisation d'une courbe quelconque (cf. chapitre 2). Cependant, bien qu'une courbe interface soit définie par plusieurs applications $(\gamma_i)_{i=1,\dots,n}$, avec $n \geq 2$, sa discrétisation dans l'espace tridimensionnel doit être unique. Le principe est de réaliser cette discrétisation en se basant sur l'une quelconque des définitions de la courbe interface, par exemple la première rencontrée, et de reporter cette discrétisation sur chacun des domaines de paramètres concernés.

Considérons par exemple une courbe interface partagée par deux carreaux et définie par les applications $\gamma_1 = \sigma_1 \circ \omega_1$ et $\gamma_2 = \sigma_2 \circ \omega_2$ (cf. équation 4.81). Dans un premier temps, une suite de paramètres $(t_i)_{i=0,\dots,m}$, avec $m \geq 2$, est constituée de manière à ce que la propriété de linéarité (PL) de la section 2.5 soit vérifiée pour l'application $\omega_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$. Dans un deuxième temps, cette suite de paramètres est enrichie de manière à ce que la propriété (PL) soit également vérifiée pour l'application $\gamma_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$. Il en résulte un support polygonal $S(\mathcal{C}_{\omega_1})$ approchant fidèlement la courbe plane \mathcal{C}_{ω_1} , dont l'image par σ_1 est un support polygonal $S(\mathcal{C}_{\gamma_1})$ approchant fidèlement la courbe gauche \mathcal{C}_{γ_1} . De la même façon, une autre suite de paramètres est constituée de manière à ce que la propriété (PL) soit vérifiée à la fois pour ω_2 et γ_2 , d'où les supports polygonaux $S(\mathcal{C}_{\omega_2})$ et $S(\mathcal{C}_{\gamma_2})$. Par construction, ces deux supports sont pratiquement confondus. Il suffit alors de discrétiser l'un d'entre eux comme indiqué précédemment, puis de reporter cette discrétisation sur chacun des supports $S(\mathcal{C}_{\omega_1})$ et $S(\mathcal{C}_{\omega_2})$ par simple interpolation linéaire (les supports ayant été conçus dans ce but, cf. section 2.5). Muni de ces discrétisations des courbes $S(\mathcal{C}_{\omega_1})$ et $S(\mathcal{C}_{\omega_2})$, frontières des domaines paramétriques Ω_1 et Ω_2 , ces derniers peuvent être maillés individuellement tout en garantissant la conformité du maillage de la surface composée des carreaux Σ_1 et Σ_2 .

Cette méthode s'étend sans difficulté à un nombre quelconque de courbes interfaces, chacune étant de degré quelconque. La discrétisation unique de ces courbes permet d'obtenir finalement un maillage conforme de la surface multicarreaux.

4.5.4 Discrétisation des courbes frontalières dans le cas d'une surface dégénérée

Une surface paramétrée Σ est dite dégénérée lorsqu'une courbe frontalière de son domaine de paramètres Ω a pour image un simple point de \mathbb{R}^3 . Par exemple, la partie gauche de figure 4.24 montre le maillage du domaine paramétrique d'un cône, et la partie droite représente son application dans l'espace tridimensionnel. Le domaine paramétrique est un rectangle dont le côté supérieur a pour image le sommet du cône. Concernant la discrétisation des frontières, le côté dégénéré du rectangle ne doit pas être subdivisé. Concernant le maillage surfacique, les tailles prescrites parallèlement à ce côté deviennent infinies dans son voisinage, et il est donc nécessaire de brider les métriques correspondantes. En outre, il faut veiller à ce que le nombre de triangles issu du sommet du cône soit supérieur ou égal à trois afin d'éviter un « pincement » au sommet du cône.

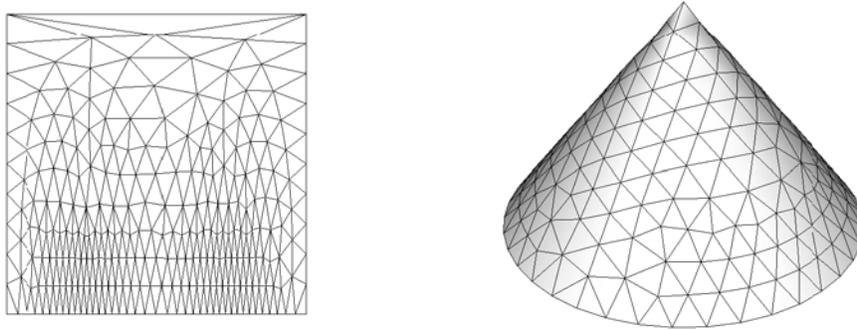


FIG. 4.24 – Maillage d'un cône.

4.5.5 Maillage transcarreaux

La méthodologie vue jusqu'ici produit des maillages dits « carreaux-dépendants » (*patch dependent*) car les frontières partagées par plusieurs carreaux sont imposées dans le maillage final de la surface. En d'autres termes, toute arête de la discrétisation d'une courbe interface est aussi une arête du maillage de la surface. Cette propriété peut être recherchée lorsque la courbe interface traduit une singularité géométrique (typiquement une ligne vive) ou lorsque la présence de ces carreaux a un sens physique particulier. En revanche, ce respect des contours des carreaux peut aboutir à la création de petites arêtes (par rapport à la taille spécifiée) ou d'éléments de qualité médiocre. L'idée est donc de construire dans un premier temps un maillage carreaux-dépendant, et d'utiliser dans un second temps des techniques de simplification de maillage pour produire un maillage « transcarreaux » (*patch independent*). Cependant, il est ici possible de contrôler l'écart de distance A^0 et l'écart d'angle A^1 du maillage transcarreaux.

Dans notre contexte, chaque élément du maillage initial est référencé par le carreau le contenant. Ainsi, les arêtes frontalières sont communes à au moins deux éléments ayant des références distinctes. En outre, les normales et les tailles prescrites sont données aux sommets du maillage.

Une arête frontalière est alors identifiée comme une *arête vive* si elle appartient à :

- un carreau seulement,
- au moins trois carreaux, ou
- exactement deux carreaux, mais les normales associées à ces carreaux sont différentes à l'une de ses extrémités.

En raison des erreurs d'opération en arithmétique flottante, la troisième condition est considérée comme vérifiée si l'angle entre les deux normales est inférieur à une certaine valeur seuil, par exemple un degré (1°). Par ailleurs, une région anguleuse peut être assimilée à une région plate en augmentant ce seuil, ce qui permet de supprimer certains détails géométriques si nécessaire. La géométrie étant bien définie, les petites arêtes sont éliminées par un simple *collapse* d'arête (fusion de ses deux extrémités). Cependant, deux cas doivent être considérés :

- l'arête est interne à un carreau, avec ses deux extrémités à l'intérieur du carreau, ou l'arête est une *arête vive* ;
- l'arête est interne à un carreau, mais l'une de ses extrémités appartient aussi à une *arête vive*.

Dans le premier cas, la fusion des deux extrémités peut être effectuée dans une direction quelconque. Dans le second cas, la fusion doit s'effectuer en direction de l'extrémité de l'arête vive.

Une arête est considérée comme petite si sa longueur normalisée est inférieure à 1. Soit $e = PQ$ une arête du maillage de référence, et soient $h(P)$ et $h(Q)$ les tailles prescrites en ses extrémités P et Q . La longueur normalisée de l'arête e est définie par :

$$L(e) = \|\overrightarrow{PQ}\| \int_0^1 \frac{1}{h(P) + t(h(Q) - h(P))} dt \quad (4.83)$$

si la taille est interpolée linéairement (cf. équation 3.9).

Supposons que le *collapse* de l'arête e fusionne le point P vers le point Q (voir figure 4.25). Soit f une arête issue de P et n'appartenant pas à un élément de sommet Q . Lorsque ce fusionnement a lieu, f devient une arête f' issue de Q . La longueur de cette nouvelle arête f' doit respecter la taille prescrite. En fait, au lieu de vérifier cette conformité de taille, on considère la qualité de la configuration globale. Pour cela, définissons la qualité en longueur d'une arête e par (équation 2.14) :

$$q(e) = \begin{cases} L(e) & \text{si } L(e) \leq 1 \\ \frac{1}{L(e)} & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.84)$$

Le *collapse* de l'arête e est appliqué si $L(e) < 1$ et si $q(e) < \min_{f'} q(f')$ pour tout f' appartenant à l'ensemble des arêtes issues de Q dans la nouvelle configuration. La longueur d'une nouvelle arête f' est calculée en utilisant l'équation 4.83. Ceci suppose que f' soit proche de la surface représentée ici par le maillage de référence. Plus exactement, chaque élément créé par *collapse* d'arête doit être proche du maillage de référence, au sens de l'écart de distance A^0 et de l'écart d'angle A^1 (cf. section 4.3). Pour assurer cette condition de manière efficace, un algorithme calcule une valeur approchée (par excès) de la distance de Hausdorff [20].

Après ces opérations de *collapse*, les sommets du maillage simplifié sont déplacés de manière à améliorer la qualité en forme du maillage. À nouveau, les distances de Hausdorff sont utilisées pour garantir que la configuration après déplacement d'un sommet reste proche de la surface. Dans notre implémentation, ces opérations de *collapse* et de déplacement sont appliquées itérativement, en augmentant progressivement les seuils de tolérance par rapport à la géométrie.

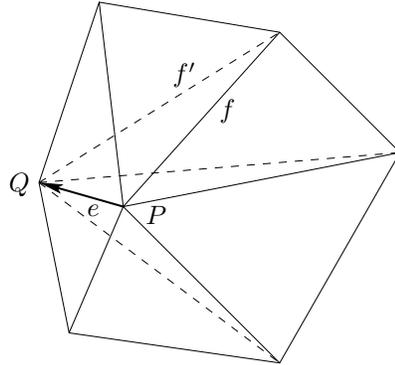


FIG. 4.25 – Exemple de *collapse* d'arête.

4.5.6 Applications (Dassault Aviation et Lectra)

À titre d'illustration, deux exemples sont proposés, fournis respectivement par Dassault Aviation et par Lectra. Les maillages surfaciques ont été réalisés par le logiciel BLSURF [90].

La figure 4.26 montre deux maillages d'un avion d'affaires de type Falcon. En haut, un maillage uniforme de taille 100, contient 26 899 triangles de qualité 0.995 en moyenne. En bas, un maillage géométrique d'écart 8° et de gradation 1.3 contient 147 500 triangles de qualité 0.975 en moyenne.

La figure 4.27 montre, à gauche, un maillage initial carreaux-dépendant correspondant à une partie de volant composée de 81 carreaux. Ce maillage contient des éléments étirés en raison des angles imposés par les contours des carreaux et des petites arêtes imposées par la frontière donnée. Il contient aussi des triangles dont la forme est imposée par le contour du carreau sous-jacent. À droite, le maillage transcarreaux obtenu par simplification contient des éléments de qualité visiblement supérieure.

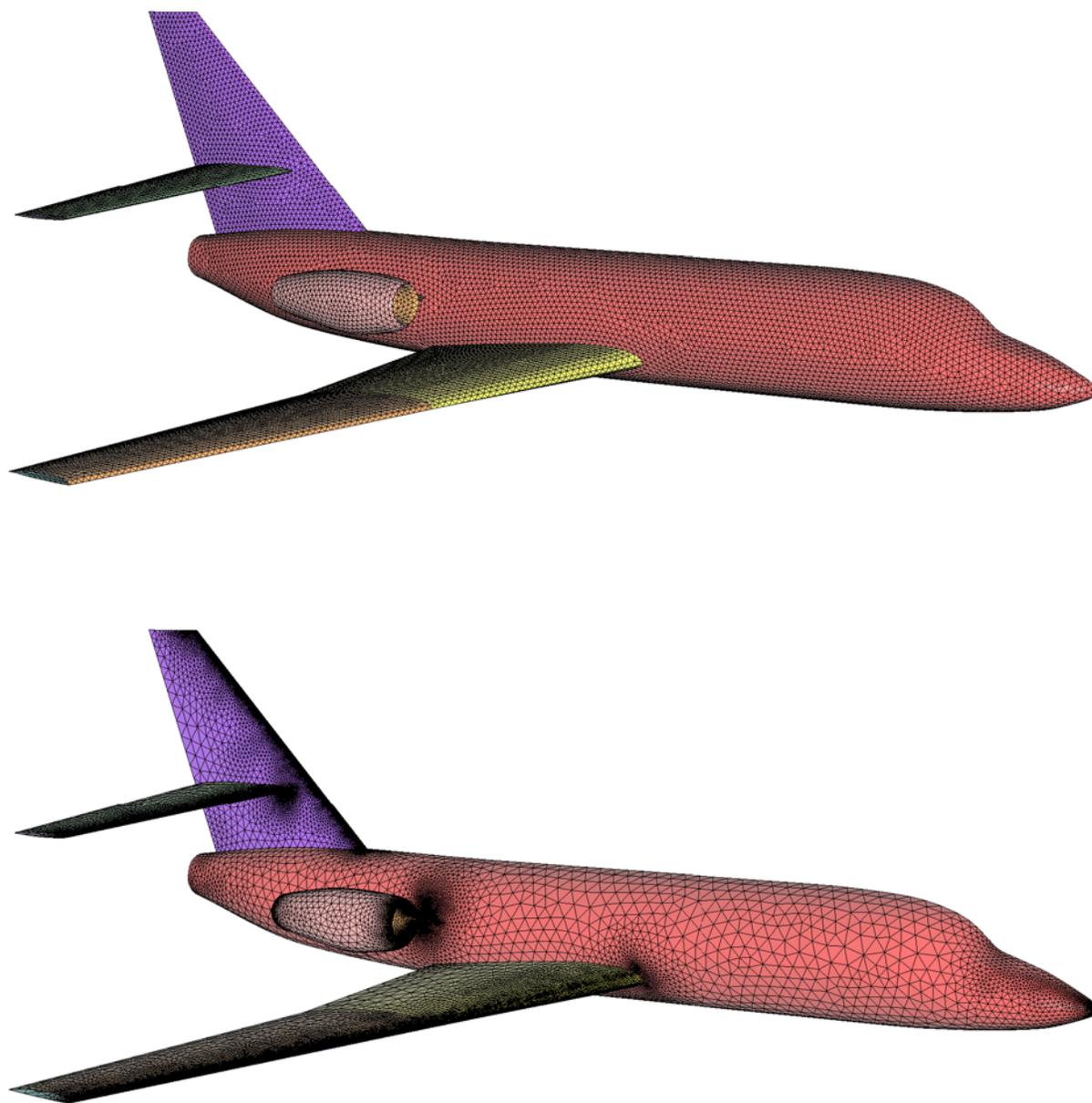


FIG. 4.26 – Maillage uniforme et maillage géométrique d'un avion d'affaires de type Falcon. © Dassault Aviation.

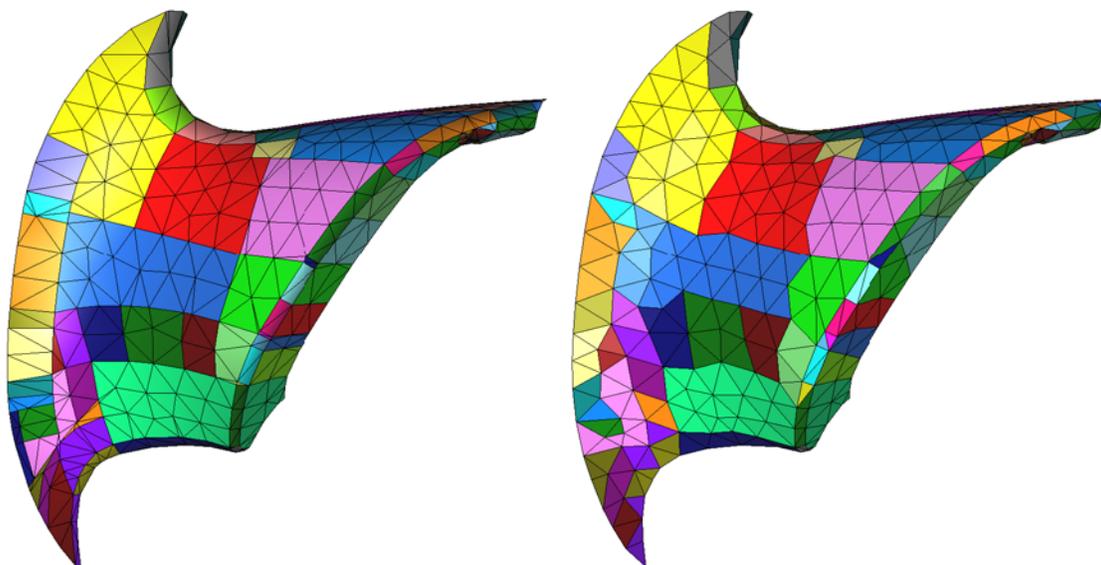


FIG. 4.27 – Maillage carreaux-dépendant (à gauche) et maillage transcarreaux (à droite) d'une partie de volant. © Lectra.

4.6 Surface sphérique ou moléculaire

Les deux sections précédentes proposent des méthodes de maillage pour une surface simple ou composée de plusieurs carreaux. La paramétrisation de cette surface ou de ces carreaux peut être prédéfinie dans un système de CAO, qui utilise généralement des représentations polynômiales, de Bézier, B-spline, NURBS, etc. Elle peut également être définie pour des besoins spécifiques, en particulier pour une surface sphérique ou composée de plusieurs portions sphériques. Cette section traite ce type particulier de surface, qui trouve de nombreuses applications dans le domaine de la chimie où chaque atome peut être idéalisé par une sphère.

4.6.1 Paramétrisation d'une sphère

Le problème est de définir une application σ , aussi régulière que possible, d'un domaine plan Ω vers une surface sphérique Σ . Inversement, nous pouvons chercher à définir une projection de Σ vers Ω , ce qui constitue un problème bien connu depuis Mercator en cartographie, afin de représenter au mieux le globe terrestre sur un atlas. Nous présentons ci-dessous deux types de paramétrisations, la première basée sur une projection orthogonale et la seconde stéréographique.

L'une des paramétrisations les plus simples découle de la projection orthogonale (voir figure 4.28, point P_o). Soit \mathcal{S} une sphère de centre $C = (0, 0, r)$ et de rayon r , et $P = (x, y, z)$ un point de \mathcal{S} . Alors la projection orthogonale de P sur un plan horizontal est le point $P_o = (u, v)$ tel que $u = x$ et $v = y$. Nous pouvons en déduire une application inverse σ_o , sachant que les coordonnées de P vérifient l'égalité $x^2 + y^2 + (z - r)^2 = r^2$

et en imposant la relation $z \leq r$:

$$\sigma_o : \Omega \rightarrow \Sigma, \quad u, v \mapsto \sigma_o(u, v) = \begin{pmatrix} x = u \\ y = v \\ z = r - \sqrt{r^2 - u^2 - v^2} \end{pmatrix} \quad (4.85)$$

où Ω est le disque centré à l'origine et de rayon r , et Σ l'hémisphère « Sud » de \mathcal{S} .

Cependant, cette paramétrisation a pour inconvénient d'être instable au voisinage de la frontière de Ω , car les dérivées partielles de σ_o par rapport à u et v tendent alors vers l'infini. Pour éviter cela, il est préférable de considérer une projection stéréographique (voir figure 4.28, point P_s). Si $N = (0, 0, 2r)$ est le « pôle Nord » de \mathcal{S} , la projection stéréographique du point P est définie comme l'intersection P_s de la droite (NP) avec le plan $z = 0$. Nous avons maintenant $P_s = (u, v)$ avec $u = \frac{2rx}{2r-z}$ et $v = \frac{2ry}{2r-z}$. Inversement, nous en déduisons une nouvelle paramétrisation par l'application σ_s ci-dessous :

$$\sigma_s : \Omega \rightarrow \Sigma, \quad u, v \mapsto \sigma_s(u, v) = \frac{2r}{u^2 + v^2 + 4r^2} \begin{pmatrix} x = 2ru \\ y = 2rv \\ z = u^2 + v^2 \end{pmatrix} \quad (4.86)$$

Le domaine de définition de σ_s est \mathbb{R}^2 , et son image est $\mathcal{S} - \{N\}$. Lorsque le point projeté $P_s = (u, v)$ s'éloigne indéfiniment de l'origine, $u^2 + v^2$ tend vers l'infini et on a $\lim_{u^2+v^2 \rightarrow \infty} \sigma_s(u, v) = (0, 0, 2r) = N$. Cependant, le domaine Ω devant être borné, il sera constitué en pratique par un disque centré à l'origine et de rayon suffisamment grand, de telle sorte que son image Σ représente la quasi-totalité de la sphère \mathcal{S} . Cette application σ_s est de classe C^∞ , ce qui rend la paramétrisation plus stable que précédemment, notamment lorsque le point P est au voisinage de l'équateur $z = r$. Enfin, on peut montrer que cette application conserve les angles (et non les distances), ce qui est une propriété intéressante pour la génération de maillages réguliers.

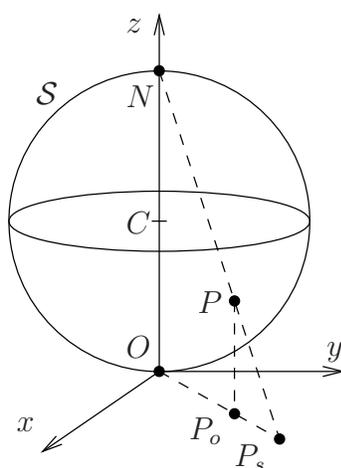


FIG. 4.28 – Schéma d'une projection orthogonale (P_o) et stéréographique (P_s).

4.6.2 Modélisation d'une surface moléculaire

Dans le domaine de la chimie, chaque atome d'une molécule M peut être assimilé à une boule A_i dont on connaît le centre de coordonnées (x_i, y_i, z_i) et le rayon r_i dit rayon de Van der Waals. Le comportement de cette molécule en présence d'un solvant peut être modélisé par des équations aux dérivées partielles sur le domaine $M = \cup A_i$, ou uniquement sur sa frontière $\Sigma = \partial M$ appelée surface moléculaire. En fait, la définition d'une surface moléculaire présente plusieurs variantes, les principales étant résumées ci-dessous (voir le schéma bidimensionnel de la figure 4.29) :

- La surface de Van der Waals (VWS) est effectivement la frontière du domaine $M = \cup A_i$. Elle est donc formée uniquement de portions sphériques.
- La surface accessible au solvant (SAS) met en jeu une « sphère d'essai » qui simule le solvant. La SAS est définie comme le lieu du centre de la sphère d'essai lorsque celle-ci « roule » sur la surface VWS. Cette définition est similaire à la précédente, le rayon de chaque atome étant augmenté par celui de la sphère d'essai.
- La surface exclue au solvant (SES), de continuité G^1 sauf cas particuliers, est tracée par la partie de la sphère d'essai dirigée vers la molécule. Elle est formée à la fois de portions de sphères convexes (lorsque la sphère d'essai est en contact avec un seul atome), de portions de tores concaves (contact avec exactement deux atomes), et de portions de sphères concaves (contact avec trois atomes ou plus).

La principale difficulté est de déterminer les courbes interfaces entre les portions de sphères ou de tores. Dans le cas VWS ou SAS, il s'agit de calculer les intersections entre des sphères S_i définies par leurs centres et leurs rayons, ce qui est effectué en plusieurs étapes :

1. Calculer les intersections des sphères $\{S_i\}$ deux à deux, donnant ainsi un ensemble de cercles $\{C_i\}$.
2. Calculer les intersections des sphères $\{C_i\}$ deux à deux, donnant ainsi un ensemble de points $\{P_k\}$.
3. Les différents points d'intersection calculés sur un cercle C_i définissent une partition de ce cercle en un ensemble d'arcs. Extraire l'ensemble des arcs qui sont à l'extérieur des sphères, donnant ainsi les courbes interfaces cherchées.

Ces trois étapes sont détaillées dans les références [6, 12]. À la suite de ce processus, les courbes interfaces sont discrétisées et reportées par projection stéréographique sur les domaines paramétriques concernés. Pour garantir la validité des frontières discrètes obtenues, il est nécessaire de vérifier et de rectifier les auto-intersections, les arêtes proches et les longueurs d'arêtes adjacentes, comme indiqué dans la section 3.3. Le maillage des domaines paramétriques fournit alors de manière indirecte le maillage complet de la surface moléculaire, selon la méthodologie de la section 4.5.

Dans le cas d'une surface SES, le processus diffère légèrement car les lignes vives des courbes interfaces sont remplacées par des portions de tores. Pour paramétrer chaque carreau torique, on considère qu'il est engendré par un arc tournant autour d'un axe situé dans son plan. Tout point du carreau est donc défini par un angle de rotation φ autour de cet axe et par un angle θ qui détermine sa position sur l'arc. Cependant, une paramétrisation basée directement sur les deux paramètres φ et θ n'est pas directement applicable, en particulier lorsque l'axe de révolution du tore coupe l'arc. La solution

retenue est d'utiliser, au lieu de ces deux angles, les abscisses curvilignes sur les arcs de cercles correspondants, ce qui a également pour effet de diminuer la distorsion entre les espaces 2D et 3D.

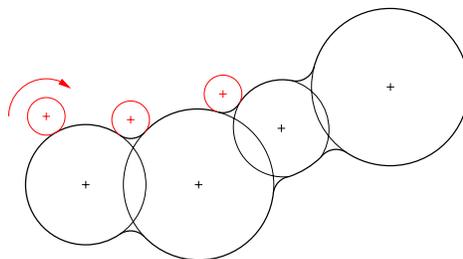


FIG. 4.29 – Schéma bidimensionnel montrant une molécule simplifiée de 4 atomes et une sphère d'essai roulant sur cette molécule, d'où résultent les définitions des surfaces moléculaires VWS, SAS et SES.

4.6.3 Application (fragment d'ADN)

L'ADN (acide désoxyribonucléique) est une longue molécule que l'on retrouve dans tous les organismes vivants et qui est considérée comme le support de l'hérédité. Sa structure présente la forme d'une double hélice. À partir de la description d'un fragment d'ADN formé de 637 atomes², un maillage surfacique a été généré³ comportant 154 220 sommets et 309 004 triangles (voir figure 4.30).

4.7 Surface interpolant une grille structurée

Pour définir une surface de manière simple et indépendante de tout système spécifique, il est courant d'utiliser une représentation discrète au moyen d'une grille structurée. Les deux principaux domaines d'applications sont ceux de la CAO et des appareils de mesures 3D. En effet, concernant la CAO, tout domaine de paramètres de forme rectangulaire peut facilement être subdivisé en une grille uniforme, et l'image tridimensionnelle de cette grille fournit une approximation de la surface modélisée. Lorsque le domaine de paramètres est de forme quelconque, l'approche est similaire à condition de « pixéliser » celui-ci. Concernant les appareils de mesure 3D, une technique classique consiste à déplacer un dispositif autour d'un objet et à récupérer ainsi les coordonnées de points répartis sur une grille. Une difficulté provient cependant du « bruit » causé par l'imprécision des mesures, et qui doit être éliminé par un lissage. Dans cette section, nous nous intéressons à ce problème de lissage d'une grille bruitée, à l'interpolation d'une grille de manière à produire une surface de continuité G^1 , et à la génération de maillages quelconques à partir de cette surface interpolante.

²Description fournie par le site Mathmol <http://www.nyu.edu/pages/mathmol>.

³Maillage généré par le logiciel BLSURF [90].

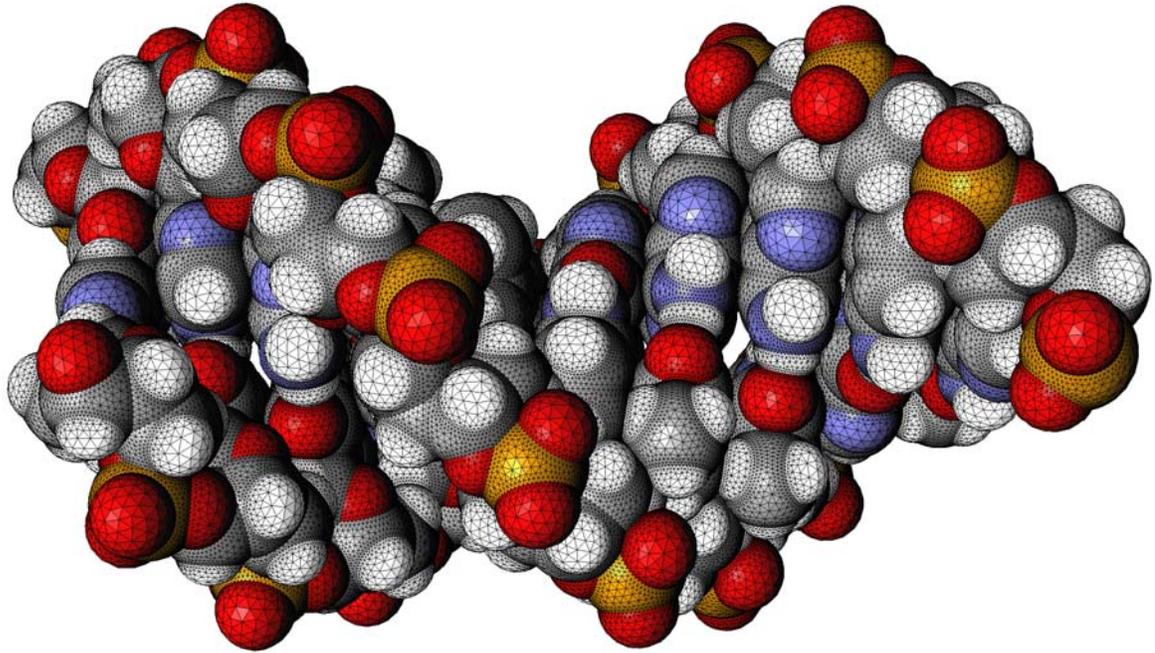


FIG. 4.30 – Maillage surfacique d'un fragment d'ADN.

4.7.1 Lissage d'une grille bruitée

Pour illustrer le problème du lissage d'une grille bruitée, supposons que la surface d'un objet soit échantillonnée par un dispositif tournant autour d'un axe vertical, par exemple de type *3D Videolaser* [SCH85]. Les points de mesure sont répartis selon des lignes horizontales et verticales formant une structure matricielle. Chaque élément de cette matrice représente, pour une hauteur donnée z et un angle de rotation θ , la distance $r(z, \theta)$ entre un point de la surface et l'axe de révolution. Cependant, en raison des erreurs de mesure sur ces distances, une grille passant par les points obtenus présente un aspect rugueux. La méthode classique de « lissage par laplacien » (*Laplacian smoothing*) ne convient pas car elle tend à diminuer le volume de l'objet. En revanche, l'algorithme de Taubin [TAU95], habituellement limité au lissage d'une courbe plane, évite ce rétrécissement en se comportant comme un filtre de hautes fréquences. Brièvement, si une courbe discrète est définie par une suite de points $(P_i)_{i=1, \dots, n}$, cet algorithme s'écrit en pseudo-code :

```

 $\bar{P}_1 = P_1$ 
pour  $i = 2, \dots, n - 1$ 
   $\bar{P}_i = P_i + \omega_1 (\text{moyenne}(P_i) - P_i)$ 
fin pour
 $\bar{P}(n) = P(n)$ 
pour  $i = 2, \dots, n - 1$ 
   $P_i = \bar{P}_i - \omega_2 (\text{moyenne}(\bar{P}_i) - \bar{P}_i)$ 
fin pour

```

où la fonction $\text{moyenne}(P_i)$ est définie par :

$$d_1 = \|P_i - P_{i-1}\|$$

$$d_2 = \|P_{i+1} - P_i\|$$

$$\text{moyenne} = \frac{d_2 P_{i-1} + d_1 P_{i+1}}{d_1 + d_2}$$

Ainsi, pour lisser la courbe discrète en un point P_i , on calcule une moyenne pondérée faisant intervenir les points adjacents P_{i-1} et P_{i+1} ainsi que leurs distances par rapport au point P_i . Au lieu de déplacer directement le point P_i vers cette moyenne, on utilise un coefficient de pénalisation ω_1 compris entre 0 et 1, ce qui donne un nouveau point \bar{P}_i . Dans une seconde phase, tous les points $(\bar{P}_i)_{i=1, \dots, n}$ sont déplacés dans une direction opposée, avec un coefficient de pénalisation ω_2 légèrement supérieur à ω_1 . Cet algorithme peut être répété plusieurs fois, le choix du nombre d'itérations et celui des coefficients (ω_1, ω_2) étant laissé à l'appréciation de l'utilisateur.

Pour étendre cet algorithme de lissage sans rétrécissement à notre problème initial, notre approche consiste à lisser toutes les lignes horizontales, puis toutes les lignes verticales, et à répéter ce processus autant de fois que nécessaire. Dans notre contexte, les distances d_1 et d_2 sont exprimées en fonction des rayons $r(z, \theta)$. Pour les lignes verticales, les extrémités P_1 et P_n restent fixes. En revanche, pour les courbes fermées horizontales, l'algorithme est modifié de manière à ce que le point de raccordement $P_1 = P_n$ puisse se déplacer comme les autres points.

Un exemple d'application est fourni par le visage de Voltaire dont des maillages ont été présentés en section 4.4.3. Cette surface est initialement définie par un échantillonnage de 180×144 points. Sur la partie gauche de la figure 4.31, on observe l'aspect rugueux de la grille passant par ces points. L'algorithme précédent est appliqué avec des coefficients $\omega_1 = 0.060$ et $\omega_2 = 0.061$, de valeurs assez faibles pour conserver les détails géométriques. Pour obtenir un résultat satisfaisant, 2000 itérations ont été effectuées. La partie droite de la figure montre cette nouvelle grille, d'aspect beaucoup plus lisse et de volume pratiquement identique.

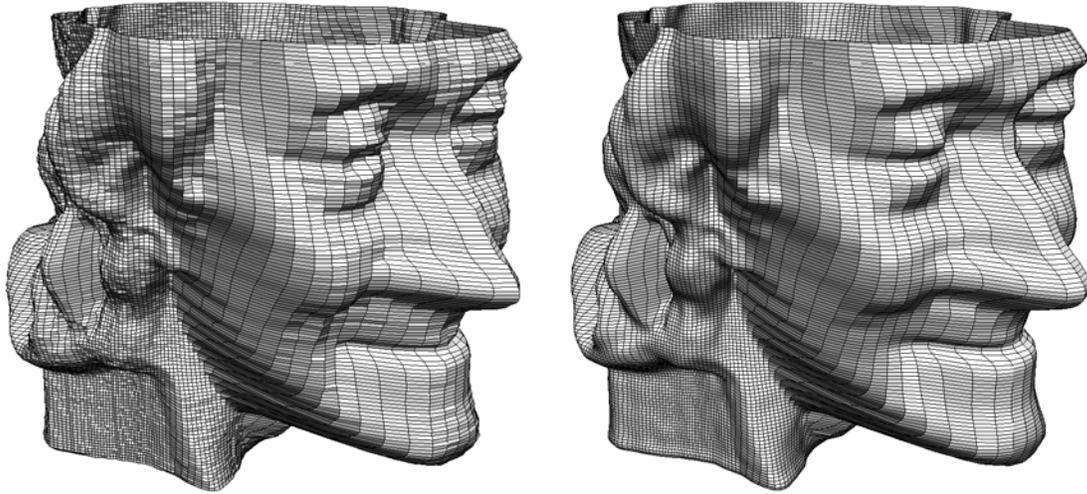


FIG. 4.31 – Visage de Voltaire. Grille initiale d'aspect « rugueux » (à gauche) et grille après lissage sans rétrécissement (à droite).

4.7.2 Interpolation par une surface de continuité G^1

Considérons une grille provenant d'un appareil de mesures 3D après lissage (voir section précédente) ou fournie directement par un système de CAO. Les quadrilatères élémentaires de cette grille forment une surface de continuité G^0 mais généralement non G^1 . Notre objectif est de définir une surface G^1 passant par tous les sommets de la grille donnée.

Soient $P(I, J)$ les sommets de cette grille, avec $I = 1, \dots, m$ et $J = 1, \dots, n$ (voir figure 4.32). Nous cherchons une fonction $\Sigma(U, V)$, définie sur le domaine rectangulaire $[1, m] \times [1, n]$, telle que $\Sigma(I, J) = P(I, J)$ pour $I = 1, \dots, m$ et $J = 1, \dots, n$.

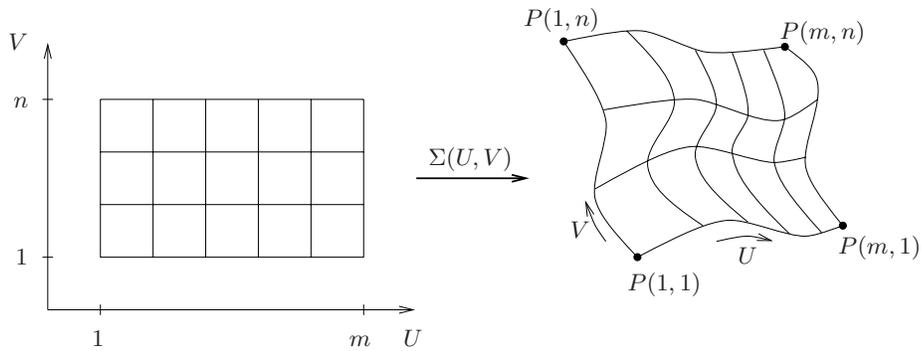


FIG. 4.32 – Surface définie par une grille de points.

Supposons que la fonction $\Sigma(U, V)$ soit bicubique par morceaux. Plus précisément, sur chaque carré $[I, I + 1] \times [J, J + 1]$, cette fonction est localement égale à une fonction polynômiale $\sigma(u, v)$ de degré trois en u et en v et définie sur le carré unité $[0, 1]^2$. Ce polynôme local σ possède donc 16 coefficients qui vont être déterminés par un nombre identique d'équations. Avec la notation $p(i, j) = P(I + i, J + j)$, les conditions précédentes donnent les quatre premières équations :

$$\sigma(i, j) = p(i, j), \quad i = 0, 1, \quad j = 0, 1 \quad (4.87)$$

Pour que la fonction Σ soit de continuité C^1 en chaque sommet $P(i, j)$, nous utilisons un schéma de différences finies donnant les dérivées partielles $\Sigma_U = \frac{\partial \Sigma}{\partial U}$ et $\Sigma_V = \frac{\partial \Sigma}{\partial V}$ en chacun de ces points. Avec des notations semblables aux précédentes, nous obtenons huit nouvelles conditions pour la fonction locale σ :

$$\begin{aligned} \sigma_u(i, j) &= p_u(i, j), & i = 0, 1, & \quad j = 0, 1 \\ \sigma_v(i, j) &= p_v(i, j), & i = 0, 1, & \quad j = 0, 1 \end{aligned} \quad (4.88)$$

Une première approche consisterait à utiliser la technique de Ferguson. Connaissant en chaque sommet du carré unité ses coordonnées 3D correspondantes $\sigma(i, j)$ et ses vecteurs tangents $\sigma_u(i, j)$ et $\sigma_v(i, j)$, cette technique donne effectivement une surface cubique d'aspect G^1 . Cependant, les dérivées croisées $\Sigma_{UV} = \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial U \partial V}$ aux quatre sommets sont alors nulles, ce qui a tendance à « aplatir » la surface au voisinage de ces points. Au lieu de cela, nous calculons les dérivées croisées Σ_{UV} aux sommets de la grille, en utilisant à nouveau un schéma de différences finies, ce qui donne quatre nouvelles conditions pour σ :

$$\sigma_{uv}(i, j) = p_{uv}(i, j), \quad i = 0, 1, \quad j = 0, 1 \quad (4.89)$$

Nous pouvons maintenant appliquer la technique de Coons, qui explicite la solution de ce système de 16 équations. Cette solution peut s'écrire $\sigma(u, v) = F(u)^T A F(v)$, où $F(u)$ et $F(v)$ sont des vecteurs contenant les polynômes d'Hermite de degré 3 :

$$F(t) = \begin{pmatrix} 2t^3 - 3t^2 + 1 \\ -2t^3 + 3t^2 \\ t^3 - 2t^2 + t \\ t^3 - t^2 \end{pmatrix} \quad (4.90)$$

et A est la matrice 4×4 contenant les coordonnées et les dérivées partielles :

$$A = \begin{pmatrix} \sigma(0, 0) & \sigma(0, 1) & \sigma_v(0, 0) & \sigma_v(0, 1) \\ \sigma(1, 0) & \sigma(1, 1) & \sigma_v(1, 0) & \sigma_v(1, 1) \\ \sigma_u(0, 0) & \sigma_u(0, 1) & \sigma_{uv}(0, 0) & \sigma_{uv}(0, 1) \\ \sigma_u(1, 0) & \sigma_u(1, 1) & \sigma_{uv}(1, 0) & \sigma_{uv}(1, 1) \end{pmatrix} \quad (4.91)$$

Pour illustrer cette méthode, on utilise un assemblage de 57 grilles fournies par un système de CAO et décrivant un Boeing 747. La partie gauche de la figure 4.33 montre une partie de ces grilles (aile, support et nacelle de réacteur) qui forment une surface non G^1 -continue. La technique de Coons permet de définir une surface interpolante de continuité G^1 représentée à droite de la figure 4.33.

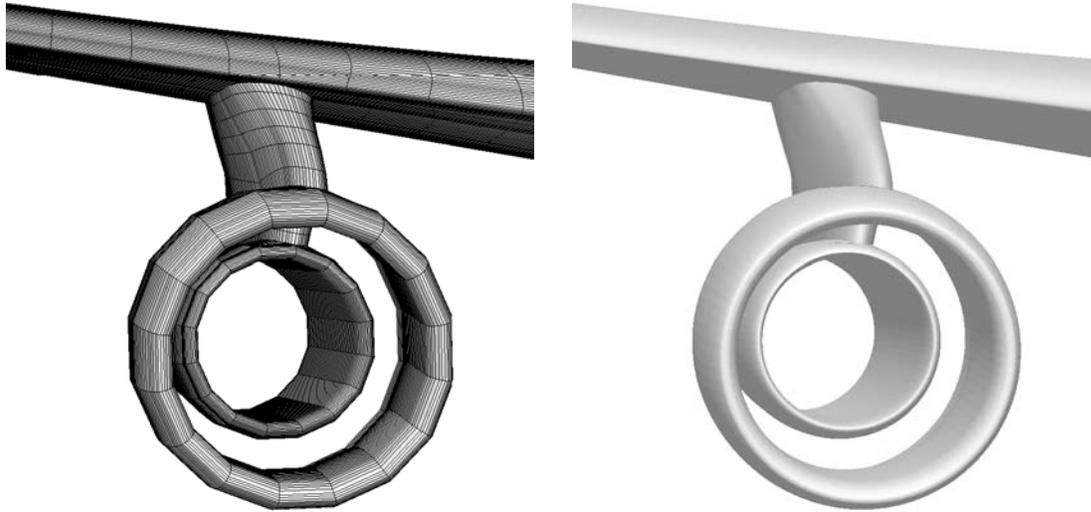


FIG. 4.33 – Boeing 747. À gauche, grilles de définition d'une partie de l'avion (aile, support et nacelle d'un réacteur). À droite, surface interpolante de continuité G^1 .

4.7.3 Maillage de surfaces interpolantes

Selon l'approche de la section précédente, une surface initialement définie par un assemblage de grilles discrètes est maintenant représentée par un assemblage de carreaux paramétrés, et peut donc être maillée (cf. section 4.5). Remarquons toutefois que des difficultés peuvent apparaître si les arêtes de la grille présentent de brusques variations de longueur, ce qui se traduit par un champ de taille irrégulier. Un remède consiste alors à modifier l'espace des paramètres en tenant compte des longueurs de ces arêtes.

4.7.4 Application (Boeing)

Un exemple est fourni par la définition précédente de la surface d'un Boeing 747, en y associant des spécifications inspirées de la mécanique des fluides. L'avion est entouré par un parallélépipède rectangle, et un champ de tailles isotrope est défini dans le volume ainsi délimité. Ce champ analytique spécifie une taille minimale au voisinage de deux surfaces paraboliques, et une taille croissante au fur et à mesure que l'on s'éloigne de ces surfaces. Pour construire un maillage respectant ce champ, nous utilisons un schéma adaptatif. À chaque itération, les tailles sont calculées uniquement aux sommets du maillage courant, et un nouveau maillage respectant cette carte discrète est construit.

La figure 4.34 montre le maillage initial uniforme et le maillage final adapté. Trois plans de coupe (parallèles à la face arrière du parallélépipède) montrent l'aspect du maillage volumique autour de l'avion. Le maillage initial contient environ 485 000 tétraèdres et le maillage final 2 900 000 tétraèdres. La qualité en forme moyenne est d'environ de 0.9 pour tous les maillages surfaciques (et 0.5 pour les maillages volumiques). Les logiciels utilisés sont BLSURF [90] pour les maillages surfaciques, GHS3D [GEO97] pour le maillage volumique initial, et GAMHIC3D [GEO00] pour les maillages volumiques adaptés.

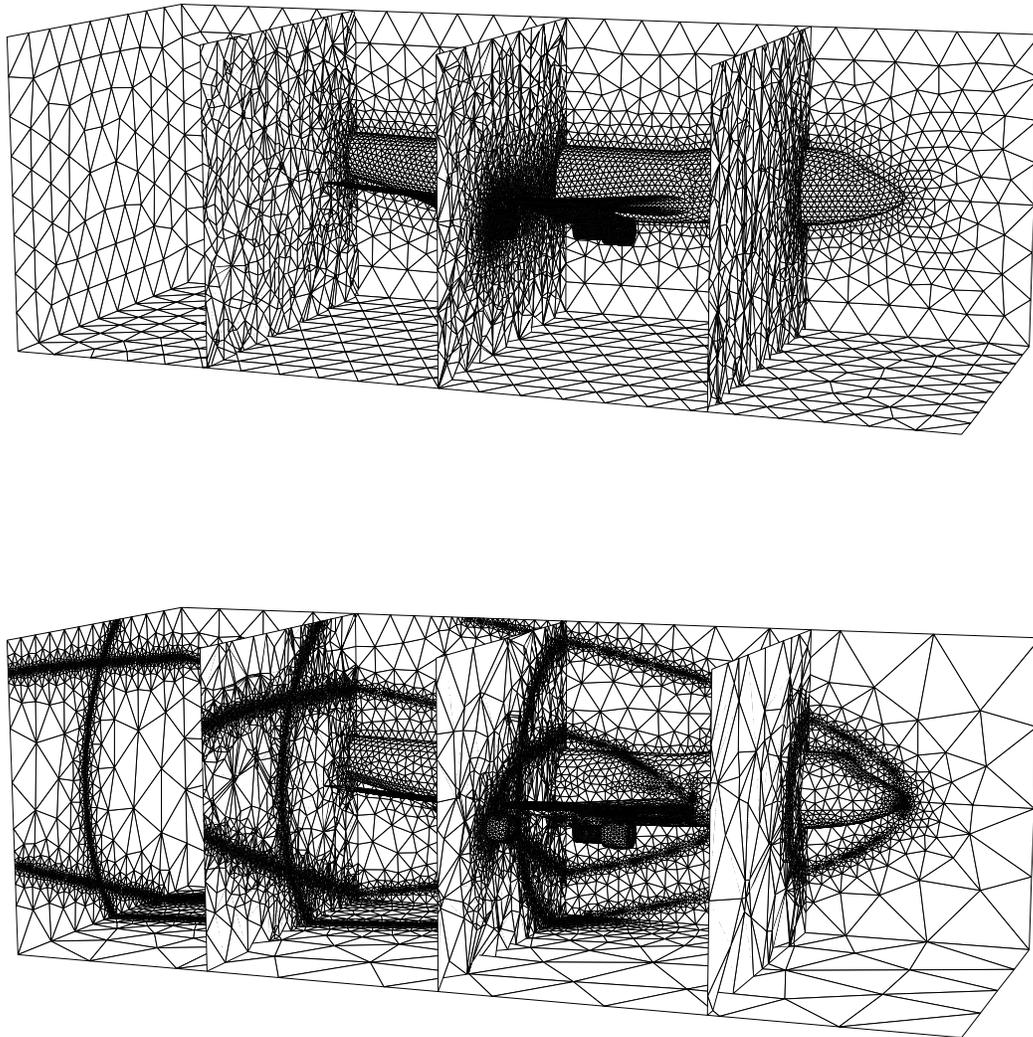


FIG. 4.34 – Boeing 747. Maillage initial uniforme (en haut) et maillage final adapté (en bas) de la surface de l'appareil et du volume englobant.

4.8 Surface cartésienne

Une surface cartésienne est un cas particulier de surface paramétrée (cf. équation 4.42) définie par une application σ de la forme :

$$\sigma : \Omega \rightarrow \Sigma, \quad u, v \mapsto \sigma(u, v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ f(u, v) \end{pmatrix} \quad (4.92)$$

où Ω est un domaine de \mathbb{R}^2 et Σ la surface cartésienne dans \mathbb{R}^3 . Ainsi, dans le repère cartésien usuel, les coordonnées (x, y) d'un point du domaine plan Ω définissent de manière univoque la hauteur z d'un point de la surface gauche Σ .

Les dérivées premières de σ par rapport à u et v s'écrivent :

$$\sigma_u(u, v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_u(u, v) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \sigma_v(u, v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_v(u, v) \end{pmatrix} \quad (4.93)$$

Le vecteur unitaire ν normal à la surface Σ est donc donné par :

$$\nu = \frac{\sigma_u \times \sigma_v}{\|\sigma_u \times \sigma_v\|} = \frac{1}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}} \begin{pmatrix} -f_u \\ -f_v \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.94)$$

L'équation 4.66 donne, à partir d'une métrique anisotrope \mathcal{M}_2 définie dans un plan tangent à Σ , l'expression de la métrique induite $\tilde{\mathcal{M}}$ dans le domaine Ω . Dans le cas d'une surface cartésienne, on remarque que l'ellipse représentant $\tilde{\mathcal{M}}$ est égale à la projection dans un plan horizontal de l'ellipse représentant \mathcal{M}_2 dans le plan tangent à Σ .

4.8.1 Estimation d'erreur géométrique

Un problème intéressant est de générer automatiquement un maillage surfacique qui représente le mieux possible une fonction cartésienne donnée. Dans notre approche, un schéma adaptatif est utilisé :

- Un maillage initial uniforme du domaine Ω est généré.
- Une estimation *a posteriori* de l'erreur d'interpolation fournit une carte de taille isotrope ou anisotrope aux sommets du maillage.
- Un nouveau maillage respectant ces spécifications est généré.
- Les deux dernières étapes sont répétées tant qu'un certain seuil d'erreur n'est pas atteint.

L'estimation d'erreur peut être basée sur le hessien, la courbure ou la déformation locale de la surface, selon les méthodes décrites en section 3.4.3.

4.8.2 Application (tangente hyperbolique et Safran/Snecma)

Pour illustrer cette approche, considérons la fonction cartésienne f :

$$f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad x, y \mapsto f(x, y) = \tanh\left(\frac{\sin(x) - y}{\varepsilon}\right) \quad \text{où } \varepsilon = 0.03 \quad (4.95)$$

définie sur le disque Ω centré à l'origine et de rayon 3.

Sur la figure 4.35, l'estimation d'erreur est basée sur la courbure maximale en tout point de la surface cartésienne Σ . Le maillage du domaine plan Ω et son application dans l'espace tridimensionnel sont représentés lors de trois étapes successives : le maillage initial uniforme (1 053 triangles), le maillage à la première itération (27 130 triangles), et le maillage à la cinquième itération (8 736 triangles). Ces derniers maillages sont anisotropes en 2D et isotropes en 3D (avec cependant des déformations importantes dues aux chocs de tailles).

La figure 4.36 montre des maillages finals, l'estimation d'erreur étant basée sur trois autres critères : les courbures minimale et maximale en tout point de la surface (maillage de 2 110 triangles, anisotrope en 2D et en 3D, ce qui explique le nombre réduit d'éléments), l'erreur relative évaluée d'après le hessien de f (maillage de 5 258 triangles, isotrope en 2D et anisotrope en 3D), et l'erreur absolue évaluée elle aussi d'après le hessien (maillage plus fin de 31 177 triangles, également isotrope en 2D et anisotrope en 3D). Dans tous les cas, le maillage capte en cinq itérations la brusque variation de hauteur de la surface cartésienne.

Dans l'exemple fourni par la société Snecma du groupe Safran (figure 4.37), le même procédé est appliqué pour mailler une surface représentant des propriétés physiques. Malgré les fortes singularités de cette surface, un maillage géométrique est obtenu automatiquement.

Tous les maillages décrits ci-dessus ont été générés par le mailleur bidimensionnel anisotrope BL2D [92].

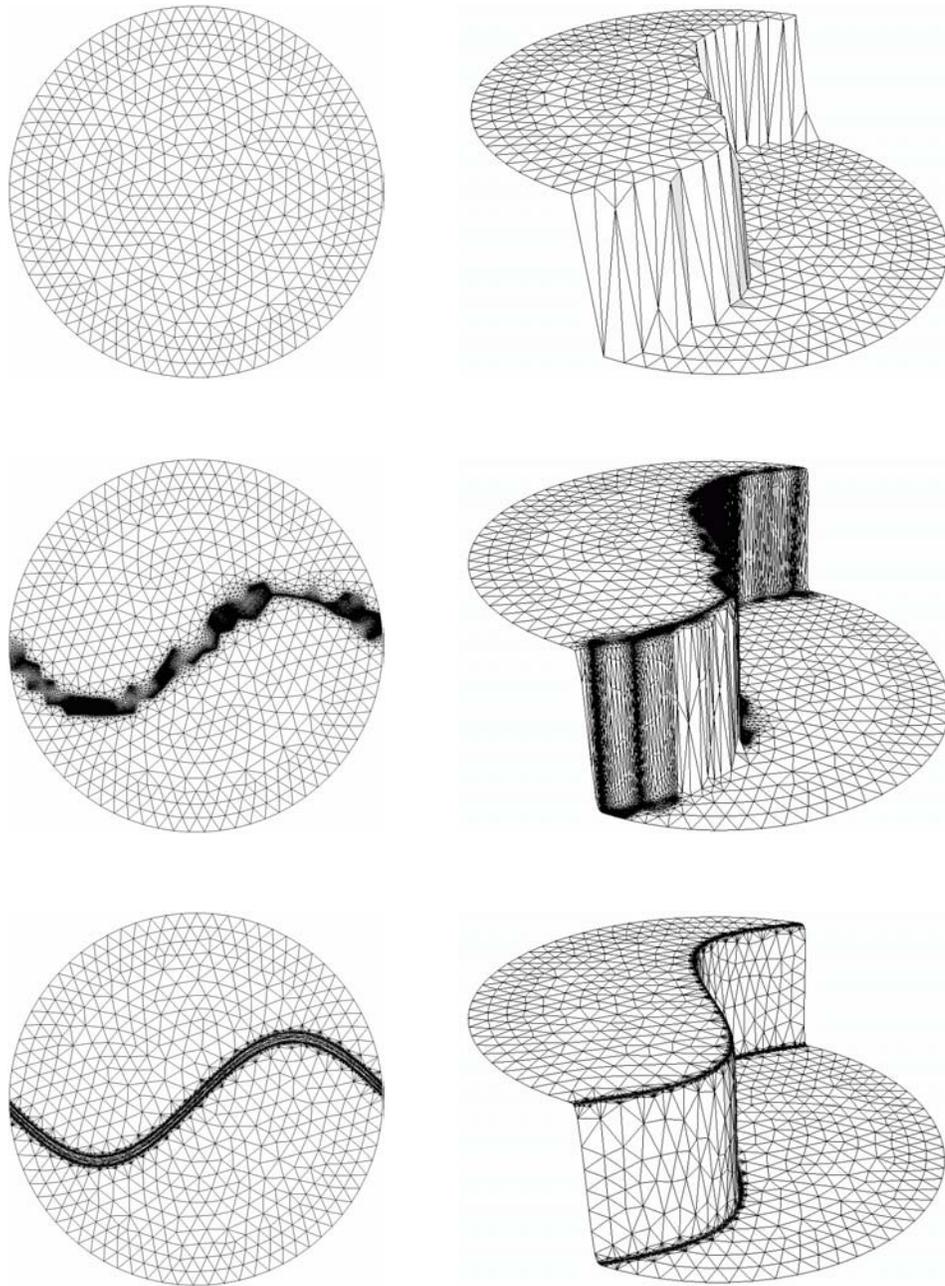


FIG. 4.35 – Maillage adaptatif d'une surface cartésienne à l'aide d'un estimateur d'erreur. De haut en bas : maillage initial uniforme (itération 0), maillage intermédiaire à l'itération 1 et maillage final à l'itération 5 lors d'une adaptation basée sur la courbure maximale. Les maillages 2D/3D sont respectivement « iso/aniso, aniso/iso et aniso/iso ».

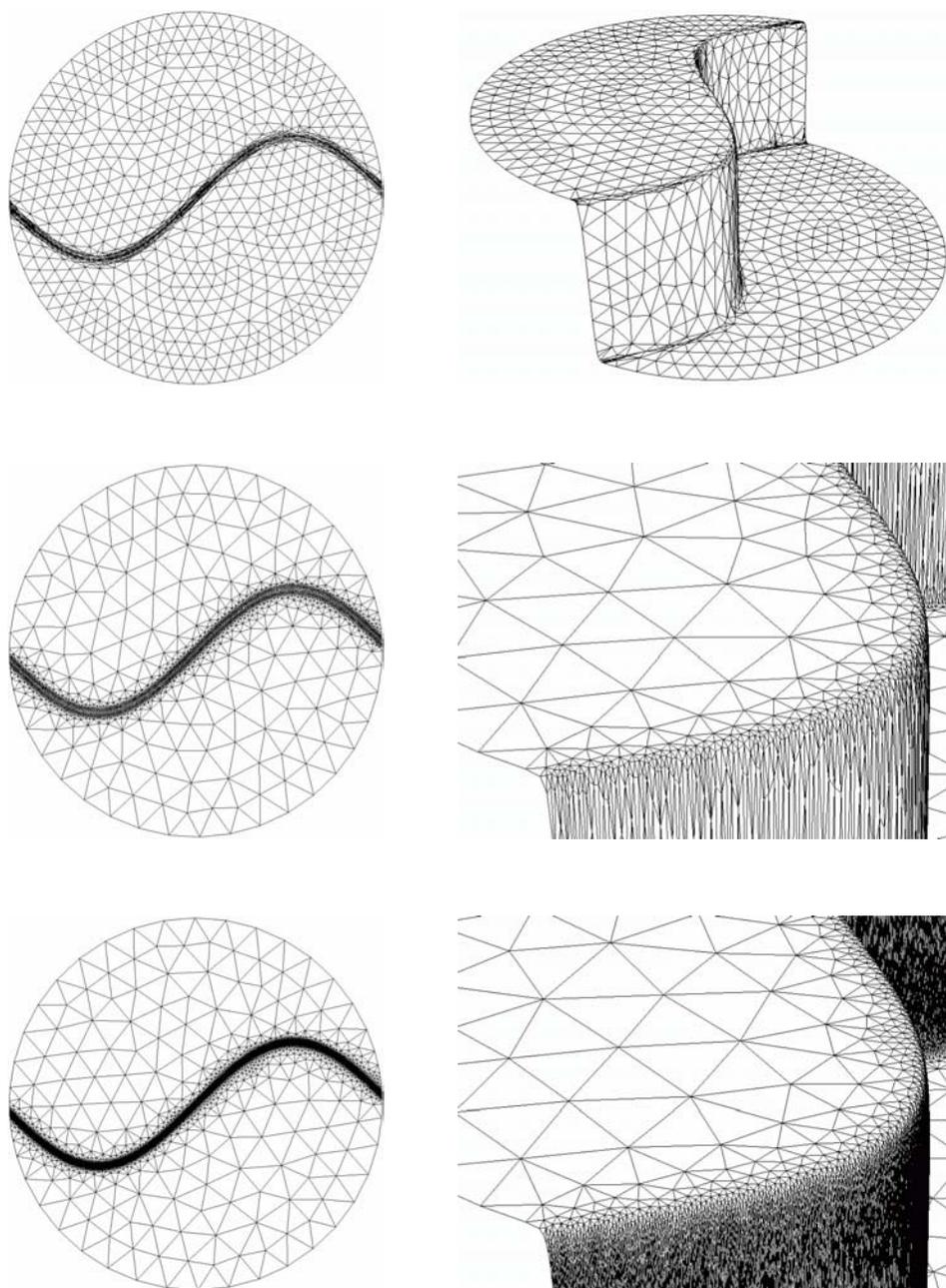


FIG. 4.36 – Maillage adaptatif d'une surface cartésienne à l'aide d'un estimateur d'erreur. De haut en bas : maillages finals (itération 5) après des adaptations basées respectivement sur les courbures principales, sur l'erreur relative et sur l'erreur absolue. Les maillages 2D/3D sont respectivement « aniso/aniso, iso/aniso et iso/aniso ».

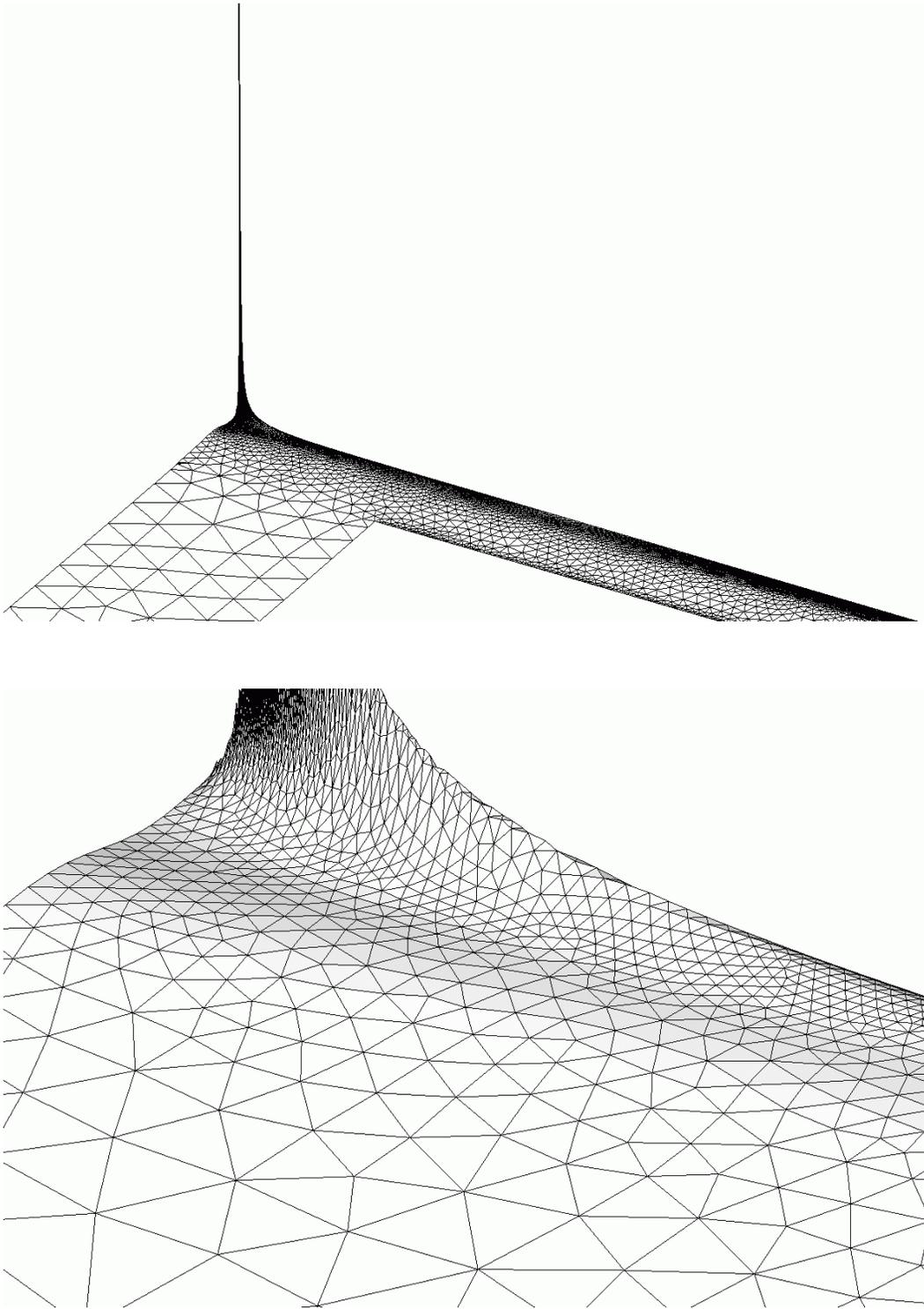


FIG. 4.37 – Maillage adaptatif d'une surface représentant des propriétés physiques.
© Safran/Snecma.

4.9 Surface discrète

Dans cette section, nous proposons une méthode de génération de maillages géométriques à partir d'un maillage initial de la surface appelé *maillage de référence*. La méthode comprend trois étapes : extraction des singularités géométriques, définition d'un support géométrique lisse, et raffinement adaptatif. Dans la première étape, les singularités géométriques telles que les lignes vives et les coins sont identifiées dans le maillage de référence. Pour cela, un ensemble initial d'arêtes vives est obtenu suivant un critère d'angle diédral et enrichi en appliquant un algorithme de suivi d'arêtes vives par voisinage. ensuite, dans la deuxième étape, un support géométrique lisse presque partout et interpolant les sommets du maillage de référence est défini par une extension de la méthode proposée par Walton et Meek [WAL96]. Enfin, dans la troisième étape, le maillage de référence est raffiné de manière adaptative afin de satisfaire un critère géométrique dépendant de la déviation des éléments par rapport aux plans tangents aux sommets. La procédure de raffinement est définie de manière à éviter la formation d'éléments étirés.

4.9.1 Extraction des caractéristiques géométriques

À partir d'un maillage surfacique, la géométrie de la surface d'origine peut être reconstruite avec précision à condition de disposer de certaines caractéristiques, en particulier les lignes vives, les coins et les normales aux sommets. Cependant, ces informations sont généralement perdues au cours de la discrétisation et il est donc crucial de pouvoir les reconstituer. À cette fin, les arêtes et les sommets du maillage peuvent être classés selon le nombre de régions surfaciques lisses auxquelles ils appartiennent. Si une arête d'un maillage triangulaire appartient à un seul triangle (frontalier) ou est partagée par au moins trois triangles, elle peut être classée comme une arête vive présentant une discontinuité d'ordre 1. Sinon, un traitement doit être établi pour définir les régions lisses parmi les éléments du maillage. À la suite de ce traitement, les lignes vives sont identifiées, et leurs extrémités communes déterminent les coins. Selon cette classification, plusieurs normales peuvent être définies en un sommet du maillage, à savoir une par région lisse le contenant. Dans ce qui suit, nous détaillons notre approche pour identifier les lignes vives et nous rappelons une formule d'approximation des normales aux sommets d'un maillage.

Identification des lignes vives

Nous supposons que chaque ligne vive est soit fermée, soit ouverte mais ayant ses deux extrémités communes avec d'autres lignes vives. Cette hypothèse implique que la surface est régulière « par morceaux » et ne contient aucune ligne vive évanescence. L'identification de ces lignes est contrôlée par deux paramètres angulaires, ω_v pour les arêtes vives et ω_c pour les coins. Elle est décomposée en deux phases appelées *initialisation* et *prolongation*.

La première phase (initialisation) a pour but de distinguer les arêtes vives potentielles (a.v.p.) des arêtes « régulières » (a.r.). De manière classique, elle consiste à calculer pour chaque arête du maillage l'angle entre les normales aux deux triangles adjacents. Si cet angle dépasse le seuil fixé ω_v , l'arête est classée comme a.v.p.

Dans la seconde phase (prolongation), toute a.v.p. isolée redevient classée comme a.r., tandis que toute suite d'a.v.p. est prolongée, si nécessaire, de manière à former des lignes vives. En effet, une a.v.p. isolée provient généralement d'une mauvaise approximation de la surface par le maillage de référence. Une procédure itérative permet de prolonger une ligne ouverte composée d'a.v.p. À chaque itération, une arête régulière devient classée arête vive et est ajoutée à l'une des extrémités de la ligne ouverte. Cette procédure est répétée jusqu'à ce que toutes les extrémités des lignes vives partagent au moins deux lignes vives. Pour prolonger une ligne vive ouverte en un point P désignant l'une de ses deux extrémités, on procède de la manière suivante :

- Déterminer, pour chaque arête régulière issue de P , l'écart angulaire maximal ω_{max} entre les normales aux triangles partageant cette arête.
- Sélectionner les arêtes dont l'écart angulaire ω est proche de ω_{max} .
- Choisir, parmi les candidates précédentes, celle qui forme l'angle le plus plat (proche de π) avec l'arête vive dont P est une extrémité.

Dans l'exemple de la figure 4.38, une suite de deux arêtes vives est représentée en traits épais à gauche du point P , et trois arêtes vives potentielles sont représentées à droite de ce point (numérotées de 1 à 3). L'arête 2 est retenue car l'angle correspondant (représenté par un arc de cercle) est proche de π .

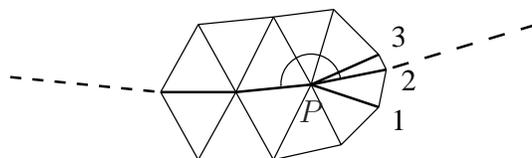


FIG. 4.38 – Prolongation d'une ligne vive.

Les coins sont généralement définis comme sommets joignant au moins trois lignes vives. Cependant, il convient de considérer comme coins particuliers les sommets « anguleux » d'arêtes vives. Ainsi, une extrémité commune à deux arêtes vives est classée coin particulier si l'angle ω entre ces deux arêtes vérifie $\omega < \omega_c$. Cette classification permettra de mieux calculer les tangentes en chaque sommet d'arêtes vives et, par conséquent, la représentation des carreaux s'appuyant sur ces arêtes.

Calcul des normales aux sommets

Une fois les arêtes vives et les coins identifiés, à chaque sommet du maillage est associé une ou plusieurs normales, suivant que le sommet est dans une zone sans ou avec discontinuité géométrique d'ordre 1. Plus exactement, une seule normale est associée à un sommet régulier, deux normales à un sommet sur une ligne vive si ce sommet n'est pas un coin (mais il peut être un coin particulier) et plusieurs normales à un coin, selon le nombre de régions lisses partageant ce coin. La normale en un sommet à une zone lisse peut être approchée par la moyenne des normales unitaires aux éléments partageant le sommet et appartenant à la zone lisse, pondérée par les angles d'éléments en ce sommet. Soit p . La normale unitaire \mathbf{n}_p en un sommet p du maillage et correspondant à une

zone lisse peut être approchée par :

$$\mathbf{n}_p = \frac{\sum_{K \ni p} \omega_K \mathbf{n}_K}{\left\| \sum_{K \ni p} \omega_K \mathbf{n}_K \right\|} \quad (4.96)$$

où \mathbf{n}_K est la normale unitaire au triangle K issu de p et appartenant à la région lisse, et ω_K est l'angle entre les deux arêtes du triangle K contenant p .

4.9.2 Une surface lisse presque partout

L'interpolation des sommets du maillage de référence par une surface lisse presque partout permet de placer « correctement » des points sur la surface. Cette phase est nécessaire durant l'étape du raffinement adaptatif du maillage de référence. Il existe plusieurs méthodes permettant de définir cette surface interpolante, parmi lesquelles on peut citer [PIP87, WAL96, RAS00, VLA01]. La méthode proposée par Walton et Meek [WAL96] a l'avantage d'être conceptuellement plus simple et plus adéquate à des fins de remaillage. Elle consiste à construire en premier lieu un réseau de segments courbes interpolant les sommets du maillage de référence et, en second lieu, un réseau de triangles gauches s'appuyant sur ces segments courbes. À l'origine, cette méthode ne s'applique qu'à des maillages surfaciques sans discontinuité géométrique d'ordre 1. Nous l'avons généralisée de manière à prendre en compte les lignes vives et les coins. Une autre amélioration consiste à déplier localement la surface interpolante lorsque des plis apparaissent autour d'un sommet.

Construction d'un réseau de segments courbes

Chaque segment courbe correspondant à une arête du maillage de référence est une cubique de Bézier définie à partir de ses extrémités et des tangentes en ses extrémités. Les deux extrémités étant celles de l'arête associée, la méthode construit les deux tangentes de manière à ce que le segment courbe interpole en plus les deux normales à la surface aux extrémités.

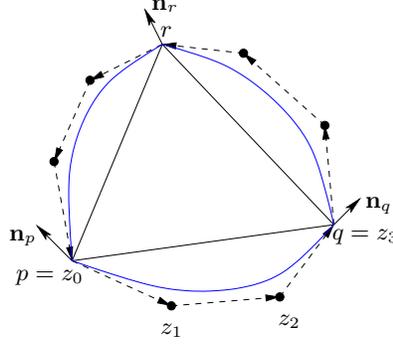
Soient pq une arête du maillage de référence appartenant au triangle pqr (voir figure 4.39), et \mathbf{n}_p et \mathbf{n}_q les normales unitaires aux sommets p et q à la zone contenant le triangle pqr . La cubique de Bézier correspondant à l'arête pq est déterminée par quatre points de contrôle z_0, z_1, z_2 et z_3 avec $z_0 = p$ et $z_3 = q$. La définition des points de contrôle z_1 et z_2 dépend de la nature de l'arête pq , comme indiqué ci-dessous.

Cas 1. Le segment pq n'est pas une arête vive.

Les points de contrôle z_1 et z_2 sont alors donnés par la relation suivante [WAL96] :

$$z_1 = p + \frac{\|\vec{pq}\|}{18} (6 \mathbf{u} - 2 \rho \mathbf{n}_p + \sigma \mathbf{n}_q) \quad (4.97)$$

$$z_2 = q - \frac{\|\vec{pq}\|}{18} (6 \mathbf{u} - 2 \sigma \mathbf{n}_q + \rho \mathbf{n}_p) \quad (4.98)$$

FIG. 4.39 – Cubiques de Bézier interpolant les sommets du triangle pqr .

où $\mathbf{u} = \frac{\vec{pq}}{\|\vec{pq}\|}$, $\rho = 6 \frac{2a_p + a a_q}{4 - a^2}$ et $\sigma = 6 \frac{2a_q + a a_p}{4 - a^2}$, avec $a = \mathbf{n}_p \cdot \mathbf{n}_q$, $a_p = \mathbf{n}_p \cdot \mathbf{u}$ et $a_q = \mathbf{n}_q \cdot \mathbf{u}$. La cubique ainsi définie est une courbe gauche naturelle : les dérivées première et seconde sont orthogonales aux extrémités p et q .

Cas 2. Le segment pq est une arête vive, et p et q ne sont pas tous deux des coins.

Le point z_1 est alors calculé de la façon suivante :

- Si p n'est pas un coin, la tangente en p au segment courbe associé à l'arête vive pq est définie comme

$$\vec{\tau}_p = \frac{\mathbf{n}_p \times \mathbf{n}'_p}{\|\mathbf{n}_p \times \mathbf{n}'_p\|} \quad (4.99)$$

où \mathbf{n}'_p est la normale au point p à la zone contenant le triangle adjacent au triangle pqr et partageant l'arête pq . En effet, le vecteur tangent $\vec{\tau}_p$ doit être orthogonal aux deux normales \mathbf{n}_p et \mathbf{n}'_p . On peut alors définir z_1 comme $z_1 = z_0 + \frac{1}{3} \|\vec{pq}\| \vec{\tau}_p$ (de cette manière, la courbe ne présente pas de boucle ou de point de rebroussement).

- Si p est un coin (donc q n'en est pas un), la courbe se réduit à une parabole et $z_1 = \frac{1}{2}(z_0 + z_2)$, où z_2 est défini plus bas.

De même, le point z_2 est calculé de la façon suivante :

- Si q n'est pas un coin, la tangente en q au segment courbe associé à l'arête vive pq est définie comme

$$\vec{\tau}_q = \frac{\mathbf{n}_q \times \mathbf{n}'_q}{\|\mathbf{n}_q \times \mathbf{n}'_q\|} \quad (4.100)$$

où \mathbf{n}'_q est la normale au point q à la même zone que précédemment. On peut alors définir $z_2 = z_3 - \frac{1}{3} \|\vec{pq}\| \vec{\tau}_q$.

- Si q est un coin (donc p n'en est pas un), la courbe se réduit à une parabole et $z_2 = \frac{1}{2}(z_1 + z_3)$.

Cas 3. Le segment pq est une arête vive, et p et q sont tous deux des coins.

Dans ce cas, il est impossible de calculer des tangentes en p ou en q , et la courbe se réduit à l'arête pq . On a donc $z_1 = z_0 + \frac{1}{3} \vec{pq}$ et $z_2 = z_3 - \frac{1}{3} \vec{pq}$.

Procédure de dépliage

Rappelons que le point de contrôle z_1 est directement lié à la tangente $\vec{\tau}_{pq}$ à la cubique en $p = z_0$, puisque celle-ci est égale à $3\vec{z}_0\vec{z}_1$. Cette remarque est utile pour éliminer des plis éventuels au voisinage d'un point. En effet, considérons toutes les arêtes pq_i issues du point p et ordonnées en suivant les adjacences des triangles partageant le sommet p , ainsi que leurs cubiques de Bézier interpolantes définies par les points de contrôle $z_{0,i} = p$, $z_{1,i}$, $z_{2,i}$ et $z_{3,i} = q_i$. La surface présente un pli en p si les vecteurs tangents $3\vec{p}\vec{z}_{1,i}$ en p à ces cubiques ne sont pas ordonnés dans le sens direct. En d'autres termes, il existe au moins un triangle dans la boule de p (composée des triangles partageant p) tel que l'angle en p des vecteurs tangents aux cubiques de Bézier correspondantes est négatif. Un tel triangle est « plié » et contient des arêtes pq_j et pq_{j+1} vérifiant :

$$(\vec{p}\vec{z}_{1,j} \times \vec{p}\vec{z}_{1,j+1}) \cdot \mathbf{n}_p < 0 \quad (4.101)$$

La procédure de dépliage consiste à appliquer des rotations aux vecteurs tangents $\vec{p}\vec{z}_{1,j}$ et $\vec{p}\vec{z}_{1,j+1}$ afin de rendre positif l'angle formé par ces deux vecteurs. Plus généralement, supposons que les triangles de la boule de p contenant les arêtes pq_j , pq_{j+1} , \dots , pq_{j+r} soient pliés. Désignons par β_k l'angle (signé) formé par les vecteurs tangents $\vec{p}\vec{z}_{1,k}$ et $\vec{p}\vec{z}_{1,k+1}$ en p aux cubiques pq_k et pq_{k+1} . Soit s le plus petit indice tel que l'angle formé par les vecteurs $\vec{p}\vec{z}_{1,j}$ et $\vec{p}\vec{z}_{1,j+r+s}$, égal à $\sum_{i=j}^{r+s-1} \beta_i$, soit positif. Le

dépliage consiste à répartir les angles β_k pour $j \leq k < r + s$ dans l'ouverture d'angle (positif) formé par les vecteurs $\vec{p}\vec{z}_{1,j}$ et $\vec{p}\vec{z}_{1,j+r+s}$. Soit \mathbf{u} le vecteur unitaire porté par $\vec{p}\vec{z}_{1,j}$, alors les points de contrôle $z_{1,k}$ pour $j < k < r + s$ sont repositionnés en $\tilde{z}_{1,k}$ définis par

$$\vec{p}\tilde{z}_{1,k} = \|\vec{p}\vec{z}_{1,k}\| \mathcal{R}_{\gamma_k}(\mathbf{u}) \quad (4.102)$$

où $\mathcal{R}_{\gamma_k}(\mathbf{u})$ est la rotation d'angle γ_k d'origine p appliquée à \mathbf{u} avec :

$$\gamma_k = \frac{\sum_{i=j}^{r+s-1} \beta_i}{\sum_{i=j}^{r+s-1} |\beta_i|} |\beta_k| \quad (4.103)$$

La procédure de dépliage avec $r = s = 2$ est illustrée par la figure 4.40.

La procédure de dépliage s'applique seulement à une courbe interpolante du cas 1 (arête régulière) qui apporte la propriété d'espace naturel. Elle ne peut pas s'appliquer à une arête vive, puisque dans ce cas la tangente est définie de manière unique.

Construction d'un réseau de triangles gauches

La construction d'un réseau de carreaux triangulaires s'appuyant sur le réseau de cubiques établi précédemment se fonde sur la méthode de Walton et Meek, dont nous rappelons ci-après les grandes lignes (pour plus de détails, voir [WAL96]). Le principe est de définir un ruban tangent le long de chaque courbe du réseau, puis de construire des

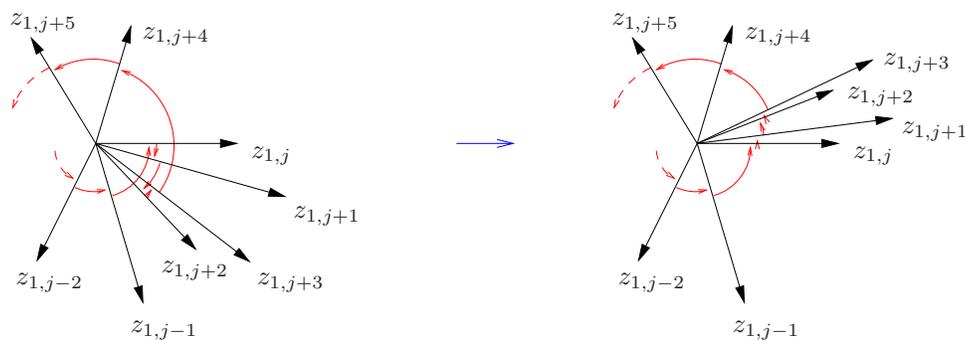


FIG. 4.40 – Procédure de dépliage.

carreaux de Gregory respectant ces rubans tangents à leurs frontières. Pour déconnecter partiellement les rubans tangents le long des courbes correspondant aux deux côtés d'un même triangle, chaque segment cubique de Bézier est redéfini comme quartique (par une procédure d'élévation de degré). Pour chaque courbe, le ruban tangent est défini par le plan engendré par la tangente et une interpolation des binormales aux extrémités. Ici, une interpolation quartique de Bézier pour les binormales est utilisée. Finalement, pour chaque triangle du maillage de référence, on construit un carreau de Gregory quartique triangulaire (défini par des fractions rationnelles de degré 4) qui interpole les courbes frontalières associées aux côtés du triangle et qui respecte les rubans tangents le long de ces courbes.

4.9.3 Raffinement adaptatif du maillage de référence

Le raffinement adaptatif permet d'améliorer l'approximation géométrique due au maillage, la géométrie étant celle définie dans la section précédente. Ici, on s'intéresse aussi à la préservation de la qualité en forme du maillage de référence durant le raffinement. Le procédé consiste à subdiviser de manière itérative certains éléments du maillage, précisément ceux qui se trouvent dans les zones courbes.

À chaque itération de raffinement, les triangles "courbés" (donc à raffiner) sont identifiés suivant un critère géométrique qui, pour un triangle donné, représente l'écart angulaire maximal entre la normale à ce triangle et la normale en chaque sommet. Un triangle est ainsi considéré comme courbé si l'écart angulaire correspondant est plus grand qu'un seuil donné (par exemple 8 degrés). Pour raffiner un tel triangle, le seul moyen de préserver la qualité en forme est le découpage homothétique en quatre, où un nouveau sommet est ajouté au milieu de chaque côté du triangle. Cependant, les triangles adjacents doivent aussi être subdivisés pour rétablir la conformité du maillage. Cette nouvelle subdivision ne peut être un découpage en quatre car cela entraînerait un découpage systématique de tous les triangles.

On considère donc, pour chaque triangle non subdivisé, les quatre cas possibles : 0, 1, 2 ou 3 nouveaux sommets sur les côtés du triangle (voir figure 4.41). Dans le cas 0, le triangle n'est pas subdivisé et reste inchangé. Dans le cas 1, le triangle est subdivisé en deux. C'est la seule subdivision possible (sans ajout d'autres sommets) qui garantisse l'arrêt de la propagation de la subdivision par adjacence. Dans le cas 2,

toutes les subdivisions possibles (sans ajout d'autres sommets) entraînent la formation de triangles de qualité médiocre (triangles étirés). Il convient alors de subdiviser aussi ce type d'élément en quatre, en ajoutant un nouveau sommet au milieu du côté vacant. Puisque cet ajout a des conséquences sur l'autre triangle partageant cette arête (s'il existe), cette opération de raffinement est répétée tant que de nouveaux sommets sont créés. Enfin, le cas 3 est résolu lui aussi par un découpage en quatre, mais à présent aucun triangle adjacent n'est affecté.

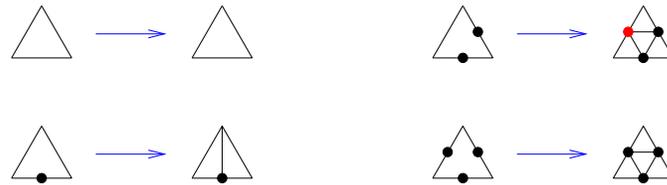
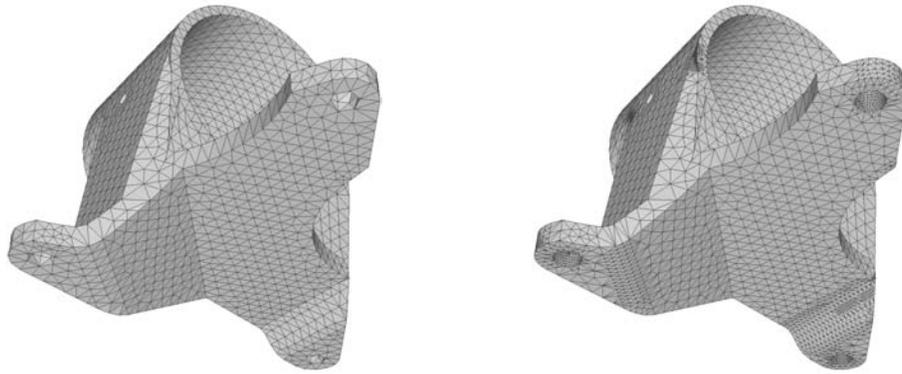


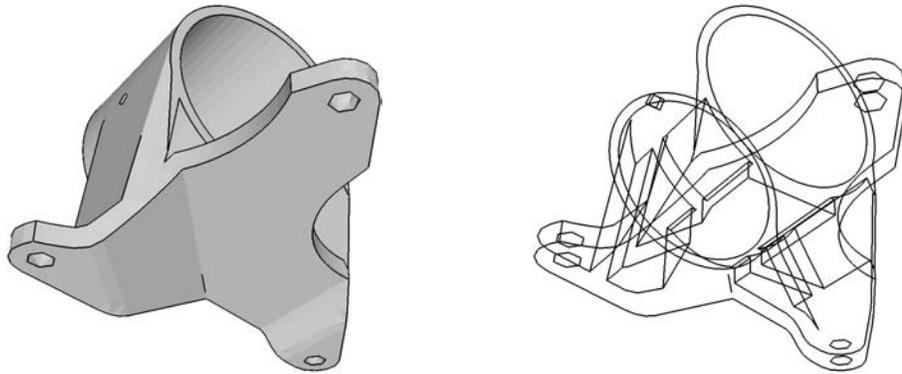
FIG. 4.41 – Opérations de subdivision dépendant du nombre de nouveaux sommets sur les côtés d'un triangle.

4.9.4 Application (pièce mécanique)

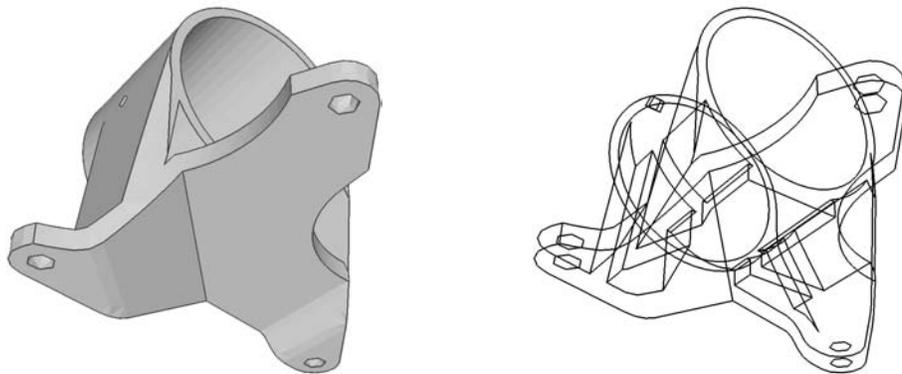
Dans cette section, nous présentons un exemple concernant une pièce mécanique conçue par un système de CAO (voir les six vues de la figure 4.42). La vue (a) à gauche montre le maillage de référence de cette pièce, qui présente en plusieurs endroits des discontinuités géométriques d'ordre 1. Les deux vues (b) montrent les arêtes vives potentielles obtenues pour un seuil ω_v de 45 degrés. En appliquant l'algorithme de prolongation, toutes les lignes vives sont reconnues, et par conséquent les coins, comme le montrent les deux vues (c). Finalement, la vue (a) à droite montre un maillage géométrique de la pièce pour un écart angulaire maximal de 11 degrés.



(a) Maillage de référence et maillage raffiné adapté.



(b) Arêtes vives potentielles (avec et sans faces ombrées).



(c) Lignes vives identifiées par prolongation (avec et sans faces ombrées).

FIG. 4.42 – Pièce mécanique. Raffinement d'une surface définie de manière discrète.

Chapitre 5

Conclusion et perspectives

Ce dernier chapitre dresse une conclusion sur les travaux présentés et met également en perspective la poursuite de ces recherches.

5.1 Conclusion

Ce mémoire constitue une synthèse de nos contributions concernant trois thèmes principaux : la *discrétisation d'une courbe* dans le plan ou dans l'espace tridimensionnel, le *maillage d'un domaine plan* dont les frontières sont fixes ou variables, et le *maillage d'une surface gauche* paramétrée, multicarreaux ou discrète. Ces contributions ont donné lieu aux publications énumérées plus loin (cf. annexe B) et au développement de plusieurs logiciels. En particulier, le mailleur plan BL2D (anisotrope et adaptatif) et le mailleur surfacique BLSURF sont exploités par divers organismes universitaires ou industriels. De nombreuses applications ont prouvé l'efficacité de ces logiciels et la pertinence des méthodes mises au point.

Concernant la *discrétisation d'une courbe*, notre approche consiste à construire préalablement un support linéaire par morceaux, permettant ainsi la mise en œuvre d'algorithmes rapides et précis. Ces algorithmes sont notamment utilisés lors de la discrétisation des courbes frontalières de domaines plans ou de surfaces gauches, ainsi que dans le contexte d'une méthode indirecte de maillage afin de reporter les courbes discrétisées dans les domaines de paramètres correspondants. Par ailleurs, le concept de métrique et le contrôle de l'approximation géométrique, introduits dans le cas des courbes, s'étendent par la suite aux cas des domaines plans et des surfaces gauches.

Le *maillage d'un domaine plan de géométrie fixe* s'appuie sur la discrétisation de son contour. Si nécessaire, une méthode originale est appliquée *a posteriori* pour détecter et rectifier les auto-intersections, les zones étroites et les variations de longueurs des arêtes adjacentes, de manière à garantir que le domaine est bien défini. Notre approche permet alors de construire un maillage de qualité, respectant des spécifications de tailles isotropes ou anisotropes, en insérant les points par une méthode frontale et en les connectant entre eux par une méthode de Delaunay généralisée. Dans le cas où la frontière du domaine est de *géométrie variable*, nous avons mis au point un schéma de remaillage adaptatif afin de traiter des problèmes physiques mettant en jeu de grandes déformations avec endommagement. De nombreux résultats numériques, en accord avec

les phénomènes constatés dans la réalité, ont montré la pertinence de cette approche.

Concernant le *maillage d'une surface gauche*, des spécifications isotropes ou anisotropes ont été définies de manière à contrôler l'approximation géométrique de la surface. Une méthode indirecte basée sur le concept de métrique a été introduite pour les surfaces paramétrées. Le problème se réduit alors à la génération d'un maillage anisotrope dans le domaine plan des paramètres. Cette approche a été étendue au maillage de surfaces multicarreaux discuté ci-dessous.

Dans le cas de *surfaces multicarreaux*, la topologie de la surface est reconstituée le cas échéant, puis les courbes interfaces sont discrétisées et les carreaux sont maillés selon notre approche indirecte. Le maillage résultant peut conserver ou non les contours discrétisés des carreaux, grâce à un processus de simplification avec contrôle explicite des distances de Hausdorff. Qu'il soit carreaux-dépendant ou transcarreaux, le maillage respecte le mieux possible des spécifications de tailles pouvant dépendre de la géométrie de la surface et du problème physique. La méthode proposée s'applique au calcul adaptatif. La taille est alors prescrite (par exemple *via* un estimateur d'erreur *a posteriori*) aux sommets d'un maillage de surface utilisé pour un calcul. En interpolant la taille sur ce maillage de fond, on obtient une carte continue permettant de générer un nouveau maillage surfacique. Cette procédure est itérée jusqu'à ce que la précision voulue soit atteinte. La qualité des maillages obtenus par cette nouvelle approche s'est montrée indispensable à la réalisation de certains processus industriels.

Le maillage d'une *surface moléculaire* quelconque (van der Waals, accessible au solvant ou exclue au solvant) est réalisé en deux temps. D'abord, la surface est définie sous forme d'un assemblage de carreaux paramétrés. Ensuite, l'approche précédente est appliquée à ce type particulier de carreaux. Les maillages réalisés ont notamment permis de simuler l'action d'un solvant sur un corps chimique.

Nous avons également proposé une méthode pour mailler des surfaces définies par un ensemble de *grilles structurées*. De telles surfaces sont définies par exemple par des systèmes de CAO ou des dispositifs de digitalisation 3D. Notre approche est basée à la fois sur une interpolation de la surface par la technique de Coons et sur le maillage de surfaces multicarreaux exposée plus haut. Elle permet de construire des maillages indépendamment de tout autre système.

Concernant les *surfaces cartésiennes*, une nouvelle approche fondée sur une estimation de l'erreur géométrique permet de représenter avec précision une surface quelconque, en particulier celles présentant de fortes singularités géométriques. Des applications industrielles sont en cours de développement.

Enfin, concernant les *surfaces discrètes*, nous avons présenté une méthode de génération de maillages géométriques à partir d'un maillage de référence. Tout d'abord, les lignes vives sont extraites à l'aide d'un algorithme de suivi d'arêtes. Ensuite, une surface lisse presque partout, interpolant les sommets du maillage initial, est construite. Finalement, le maillage initial est enrichi de manière adaptative et itérative dans les zones courbes, en plaçant de nouveaux sommets sur le support lisse. Ce procédé a été appliqué à la représentation d'objets mécaniques ou biomédicaux.

5.2 Perspectives

Il apparaît à ce jour que, si les méthodes de discrétisation des courbes sont relativement bien maîtrisées, de nombreux problèmes restent ouverts quant au maillage de domaines plans et surtout de surfaces gauches. Cette section présente différents sujets de recherche sur lesquels je travaille actuellement ou que je souhaite poursuivre dans le futur.

Un premier travail en cours (initié par le DEA de B. Cléménçon, actuellement poursuivi en thèse que je co-dirige avec H. Borouchaki) a pour objectif la prise en compte de caractéristiques géométriques et physiques dans la génération de maillages surfaciques. Les *lignes caractéristiques géométriques* (lignes vives, lignes de courbures maximales, ou lignes asymptotiques) permettent de bien représenter la « forme » de la surface. Leur présence dans un maillage garantit en partie la qualité géométrique de l'approximation quelle que soit la taille des éléments. Les *lignes caractéristiques physiques* permettent de représenter soit un phénomène directionnel, soit une variation très importante du champ physique, voire une « cassure physique » (discontinuité du champ physique associé aux points de la surface). Elles peuvent être calculées *a priori* (si le phénomène physique peut être prévu) ou *a posteriori* (sinon). La présence de ces lignes dans le maillage permet de bien suivre l'évolution du champ physique associé. L'objectif est donc d'identifier ces lignes caractéristiques géométriques et physiques afin de les insérer dans une procédure de maillage surfacique.

Un deuxième travail en cours (thèse de A. Benabbou, co-dirigée avec H. Borouchaki et J. Lu) concerne le maillage et le calcul par la méthode des éléments finis pour la simulation des nanomatériaux. Ces matériaux sont issus d'une gamme de procédés SMAT (*Surface Mechanical Attrition Treatment*) permettant de générer des nanostructures en surface, par des déformations plastiques aléatoires et cycliques. Cette technologie permet d'obtenir une nouvelle classe de matériaux ayant une structure composée de grains de 5 à 15 nanomètres environ ($1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m}$) sur une épaisseur d'une dizaine à une centaine de microns ($1 \mu\text{m} = 10^{-6} \text{ m}$). La distribution en taille de ces grains peut être déterminée expérimentalement. Le défi actuel est de modéliser un tel agrégat par un parallélépipède contenant une distribution donnée de grains, chaque grain étant approché par une sphère de rayon variable, puis de mailler l'espace situé entre les sphères. Le nombre total de sphères est de l'ordre de plusieurs milliards ($1\,000^3$). L'objectif suivant est de simuler les propriétés mécaniques de ces nouveaux matériaux.

Un autre sujet (DEA de M. Nasslahsen, co-encadré) consiste à développer une méthode de génération de *patrons à plat* de carreaux surfaciques maillés, permettant ainsi de définir une paramétrisation adéquate de ces surfaces. Des carreaux maillés de ce type sont généralement fournis par des bases de données d'objets tridimensionnels, ou sont obtenus par des méthodes de reconstruction surfacique à partir de mesures relevées sur un objet. Pour que la paramétrisation convienne au remaillage de la surface, la mise à plat des carreaux doit s'effectuer avec des déformations minimales. Plusieurs méthodes de minimisation (de nature locale et globale) ont été expérimentées sur des exemples simples et devront être étendues à des objets quelconques. À plus long terme, une décomposition automatique de la surface en carreaux sera également nécessaire.

Dans une étude récente (commencée dans le cadre du stage de 3^e année ENSEEIHT de A. Loseille, co-encadré), je me suis intéressé au problème du *shape from shading*,

ou reconstruction d'une surface à partir d'une seule image ombrée de celle-ci. Ce problème est aujourd'hui considéré comme étant mal posé et aucune solution satisfaisante n'est encore connue. Il peut être formalisé comme un problème d'optimisation ou plus précisément de minimisation d'énergie associée à la fonction d'ombrage, en supposant que cette dernière soit continue. Des premiers résultats ont été obtenus par des méthodes déterministes ou stochastiques, dans le cas particulier d'une image représentant un objet simple ou un visage éclairé orthogonalement. Des extensions par des méthodes hybrides sur des images plus complexes sont envisagées.

Concernant les maillages plans, deux études sont en cours. La première vise à améliorer la génération de triangles courbes quadratiques P^2 , en particulier lorsque des arêtes internes coupent la discrétisation de la frontière. La seconde concerne la génération de quadrilatères, au cours de laquelle une méthode d'appariement consiste à assembler des triangles deux à deux. Pour obtenir des quadrilatères de bonne qualité, la forme de ces triangles doit respecter des critères particuliers qui doivent être pris en compte lors du placement des points. En outre, des méthodes d'optimisation propres aux quadrilatères doivent être mises en place.

Dans le cas des maillages plans à frontière déformable, plusieurs points peuvent être améliorés. En premier lieu, le lissage des parties de la frontière du domaine obtenues par des déformations imposées réduirait de manière significative le nombre d'éléments du maillage. En deuxième lieu, une identification *a priori* des contacts en suivant une approche géométrique réduirait les temps de calcul. Enfin, les problèmes rencontrés étant souvent de nature tridimensionnelle, il s'avère nécessaire de généraliser en 3D ce schéma de résolution.

Dans le domaine des surfaces multicarreaux, notre méthode indirecte est capable de fournir des maillages géométriques ou physiques isotropes, ou des maillages géométriques anisotropes. Sa généralisation à des maillages respectant une carte physique anisotrope quelconque est actuellement considérée. Par ailleurs, il est indispensable de considérer plus attentivement la génération d'un maillage régulier dans certains cas extrêmes, notamment celui de dérivées dégénérées ou d'une fonction de paramétrisation fortement instable. En outre, du fait de notre approche indirecte, les améliorations prévues pour le maillage des domaines plans (voir plus haut) pourront s'appliquer au maillage des surfaces multicarreaux.

Dans des recherches futures sur les surfaces moléculaires, nous souhaitons appliquer notre méthode à de très grandes molécules (plusieurs centaines de milliers d'atomes) et à des problèmes dynamiques en grandes déformations. Des optimisations de temps-calcul ont déjà été effectuées pour ce type de surface (calcul des courbures sur les sphères et les tores, simplification du maillage, transfert des données par paramètres) et la parallélisation de la méthode est à l'étude. Il suffit en effet de mailler les courbes interfaces en premier lieu, puis de mailler chaque carreau indépendamment sur une machine parallèle, ce qui réduirait encore le temps-calcul de manière considérable.

Concernant les grilles structurées, des fonctions interpolantes améliorant la continuité des dérivées peuvent être définies. Par ailleurs, le cas beaucoup plus complexe des grilles non structurées est à étudier.

Quant aux surfaces cartésiennes, l'extension en trois dimensions ainsi que la validation sur des exemples concrets de problèmes posés en mécanique sont en cours.

Au sujet des surfaces discrètes, la méthode que nous proposons actuellement permet d'enrichir un maillage P^1 . Cependant, cette méthode peut s'étendre à la génération d'éléments surfaciques ou même volumiques de degré 2 de la façon suivante. Dans un premier temps, un maillage surfacique P^1 est extrait d'un maillage volumique linéaire donné. Ce maillage surfacique est transformé en maillage P^2 courbe par une variante de la méthode actuelle. Dans un second temps, des arêtes internes volumiques qui coupent le maillage surfacique P^2 sont générées et transformées en arêtes quadratiques courbes. Cette extension est actuellement à l'étude.

En résumé, les directions de recherche sur la génération de maillages de qualité, plans et surtout surfaciques, sont manifestement très nombreuses. Les pistes évoquées dans cette section, qui se situent dans le prolongement des travaux décrits dans les chapitres précédents, constituent des exemples significatifs de mes sujets de recherche présents et futurs.

A Bibliographie

- [AIN97] M. AINSWORTH, J.T. ODEN, A posteriori error estimation in finite element analysis, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 142 (1997) 1–88.
- [BER85] M.J. BERGER, A. JAMESON (1985), Automatic adaptive grid refinement for Euler equations, *AIAA J.*, Vol. 23, n° 4, p. 561-568.
- [BER99] M. BERZINS, Mesh Quality: A Function of Geometry, Error Estimates or Both?, *Engineering with Computers* 15 (1999) 236–247.
- [BOO78] C. DE BOOR, A practical guide to splines, Springer, 1978.
- [BOR97] H. BOROUCAKI ET P.J. FREY (1997), Maillage géométrique de surfaces. Partie II : appauvrissement , *RR-INRIA*, 3237.
- [BOR98] H. BOROUCAKI, F. HECHT, P. FREY (1998), Mesh Gradation Control. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 43, n° 6, 1143–1165
- [BOR01b] H. BOROUCAKI, 2001, La marche unité, Chapitre 4 in *Maillage et adaptation (sous la direction de P.L. George), traité Mécanique et Ingénierie des Matériaux, méthodes numériques*, Hermès, (2001) 139–171.
- [BOS96] BOSSEN FJ, HECKBERT PS, A Pliant Method for Anisotropic Mesh Generation. *5th International Meshing Roundtable '96 Proceedings* 1996:375-390.
- [BRI86] M.O. BRISTEAU AND J. PERIAUX (1986), Finite element methods for the calculation of compressible viscous flows using self-adaptive refinement, *VKI lecture notes on CFD*.
- [CAT74] E. CATMULL, R. ROM, A class of interpolating splines, *Computer Aided Geometric Design*, pp. 317-326, Academic Press, 1974.
- [CIA78] P.G. CIARLET, The finite element method for elliptic problems, *Collection "Studies in mathematics and its applications"*, North-Holland, 1978.
- [CIA03] P.G. CIARLET, *Elliptic boundary value problems*, In: P.G. Ciarlet and J.L. Lions (editors), "Handbook of Numerical Analysis", Volume II, North-Holland, Amsterdam, Netherlands, 2003, pp. 17–351.
- [COH96] J. COHEN, A. VARSHNAY, D. MANOCHA, G. TURK, H. WEBER, P. AGARWAL, F. BROOKS AND W. WRIGHT (1996), Simplification Envelopes, *Proc. Siggraph'96*, 119-128.
- [COU96] COUPEZ T, MARIE S, Parallel simulation of 3D forming processes, *EUROSIM '96. HPCN Challenges in Telecom and Telecom: Parallel Simulation of Complex Systems and Large-Scale Applications. Proceedings of the EUROSIM 1996*

- International Conference, Edited by Dekker L, Smit W, Zuidervaart JC, 1996, pp. 221-228 (Amsterdam: Elsevier).
- [COU97] COUPEZ T, MARIE S, From a direct solver to a parallel iterative solver in 3-D forming simulation, *International Journal of Supercomputer Applications and High Performance Computing*, Winter 1997, vol. 11, no. 4, pp. 277-285 (Sage Science Press).
- [COU00] COUPEZ T, DIGONNET H, DUCLOUX R, Parallel meshing and remeshing, *Applied Mathematical Modelling*, Dec. 2000, vol. 25, no. 2, pp. 153-175 (Elsevier).
- [CUI97] J.C. CUILLIÈRE, A direct method for the automatic discretization of 3D parametric curves, *Computer Aided Design* 29, no. 9, pp. 639-647, Sept. 1997.
- [DO04] DO TT, FOURMENT L, LAROUSSE M, Sensitivity analysis and optimization algorithms for 3D forging process design, *AIP Conference Proceedings*, 2004, no. 712, pt. 2, pp. 2026-2031.
- [DOL90] DOLENC A, MÄKELÄ I. Optimized triangulation of parametric surfaces. *Mathematics of Surfaces IV*, September 1990.
- [DOM01] DOMPIERRE J, LABBÉ P, VALLET M-G, GUIBAULT F, CAMARERO R., Critères de qualité pour les maillages simpliciaux. *Maillage et adaptation*, George P-L (ed.). Hermès: Paris, 2001; 311348.
- [ERN02] A. ERN, J.L. GUERMOND, *Éléments finis : théorie, applications, mise en œuvre*, collection *Mathématiques et Applications*, 36, ISBN 3-540-42615-9, 430 p., Springer, 2002.
- [FAR92] G. FARIN, *Courbes et surfaces pour la CGAO*, Masson, 1992.
- [FIL86] FILIP D, MAGEDSON R, MARKOT R. Surface algorithm using bounds on derivatives. *Comput.-Aided Geom. Des.* 1986; **3**:295-311.
- [FOL89] T.A. FOLEY, G.M. NIELSON, Knot Selection for Parametric Spline Interpolation, *Mathematical Methods in Computer Aided Geometric Design*, pp. 261-271, Academic Press, 1989.
- [FRE87] W.H. FREY, Selective refinement: A new strategy for automatic node placement in graded triangular meshes, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 24, 2183-2200, 1987.
- [FRE99] P.J. FREY ET P.L. GEORGE (1999), *Maillages, applications aux éléments finis*, Hermès Science Publications, Paris.
- [FRY94] J. FRYKESTIG, Advancing front mesh generation techniques with application to the finite element method, Chalmers University of Technology, Göteborg, Sweden, Publication 94:10, 1994.
- [GEO97] GEORGE PL. Improvements on Delaunay-based three-dimensional automatic mesh generator. *Finite Elements in Analysis and Design*, 25:297-317, 1997.
- [GEO00] GEORGE PL. GAMHIC3D, Adaptive Tetrahedral Mesh Generator. INRIA technical note, 2000.
- [GER86] GERMAIN Y, WEY E, CHENOT JL, FORGE2: program for simulating the hot-forging of metals by finite elements. Edited by Niku-Lari A. In: *Structural Analysis Systems. Software - Hardware - Capability - Compatibility - Applications*.

- Vols. 4 and 5. Proceedings of the SAS World Conference, 1986, pp. 149-165 vol. 4 (Oxford: Pergamon).
- [GOO01] OLLIVIER-GOOCH, C., BOIVIN, C. (2001) Guaranteed-Quality Simplicial Mesh Generation with Cell Size and Grading Control. *Engineering with Computers*, 17: 269–286
- [GUE96] A. GUÉZIEC (1996), Surface simplification inside a tolerance volume, *IBM Research Report*, RC-20440.
- [GUE04] GUERDOUX S, FOURMENT L, MILES M, SORENSEN C, Numerical simulation of the friction stir welding process using both Lagrangian and arbitrary Lagrangian Eulerian formulations, AIP Conference Proceedings, 2004, no. 712, pt. 2, pp. 1259-1264.
- [HAM94] B. HAMANN (1994), A data reduction scheme for triangulated surfaces, *Comp. Aided Geom. Des.*, **11**, 197-214.
- [HAR98] HARTMANN E. A marching method for the triangulation of surfaces. *The Visual Computer* 1998; **14**:95-108.
- [HEC95] P. HECKBERT, M. GARLAND (1995), Survey of polygonal surface simplification algorithms. Tech. Rep. CMU-CS-95-194, Carnegie Mellon University, <http://citeseer.nj.nec.com/heckbert97survey.html>.
- [HOP96] H. HOPPE (1996), Progressive Meshes, *Proc. Siggraph'96*, 99-108.
- [HOS92] M. HOSAKA, Modeling of Curves and Surfaces in CAD/CAM, Computer Graphics - Systems and Applications, Springer-Verlag, 1992.
- [JIN90] H. JIN, N.E. WIBERG, Two-dimensional mesh generation, adaptive remeshing and refinement, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 29, 1501–1526, 1990.
- [KAL96] A.D. KALVIN AND R.H. TAYLOR (1996), Superfaces: polygonal mesh simplification with bounded error, *IEEE Comp. Graphics and App.*, 64-77.
- [KWA98] S. KWAK, C. POZRIKIDIS, Adaptive triangulation of evolving, closed, or open surfaces by the advancing-front method, *Journal of Computational Physics* 145, no. 1, pp. 61–88, Sept. 1998.
- [LEE92] C.K. LEE AND S.H. LO (1992), An automatic adaptive refinement finite element procedure for 2D elastostatic analysis, *Int. Jour. Num. Meth. Eng.*, Vol. 35, p. 1967-1989.
- [LO85] S.H. LO (1985), A new mesh generation scheme for arbitrary planar domains, *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, vol. 21, no. 8, p. 1403-1426.
- [LO91] S.H. LO (1991), Automatic mesh generation and adaptation by using contours, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 31, p. 689-707.
- [LOH88] R. LÖHNER, P. PARIKH, Three-dimensional grid generation by the advancing-front method, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 8, 1135-1149, 1988.
- [LOH89] R. LÖHNER (1989), Adaptive remeshing for transient problems, *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng.*, vol. 75, p. 195-214.

- [LOH96] LÖHNER R., Regridding Surface Triangulations. *Jour. of Comput. Phys.* 1996; **126**(6):1-10.
- [LOR87] W.E. LORENSEN AND H.E. CLINE Marching cubes: a high-resolution 3D surface construction algorithm, Siggraph'87, Conf. Proc. Computer Graphics, volume 21 (4), pages 163–169, 1987.
- [LUE01] D.P. LUEBKE, A developer's survey of polygonal simplification algorithms, IEEE Computer Graphics and Applications, vol. 21, no. 3, 2001, pp. 2435.
- [MAH98] MAHAJAN P, FOURMENT L, CHENOT JL, Implicit scheme for contact analysis in non-steady state forming, Engineering Computations, 1998, vol. 15, no. 7, pp. 908-924 (MCB University Press).
- [MAV90] D.J. MAVRIPLIS, Adaptive mesh generation for viscous flows using Delaunay triangulation, Journal of Computational Physics, vol. 90, no. 2 (Oct. 1990), pp. 271–291.
- [MAV92] D.J. MAVRIPLIS (1992), An advancing front Delaunay triangulation, algorithm designed for robustness, *NASA Contractor Report 189719*, ICASE report n° 92-49.
- [MER91] M.L. MERRIAM (1991), An efficient advancing front algorithm for Delaunay triangulation, *AIAA* paper 91-0792.
- [MOL96] MOLE N, CHENOT JL, FOURMENT L, A velocity based approach including acceleration to the finite element computation of viscoplastic problems, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 30 Oct. 1996, vol. 39, no. 20, pp. 3439-3451 (Wiley).
- [MUL92] J.D. MÜLLER, P.L. ROE AND H. DECONINCK (1992), A frontal approach approach for node generation in Delaunay triangulations. Unstructured grid methods for advection dominated flows, *VKI Lecture notes, AGARD Publication R-787*, p. 91-97.
- [PER87] J. PÉRAIRE, M. VAHDATI, K. MORGAN, O.C. ZIENKIEWICZ, Adaptive remeshing for compressible flow computations, Journal of Computational Physics, vol. 72 (1987), pp. 449–466.
- [PER88] J. PÉRAIRE, J. PEIRO, L. FORMAGGIA, K. MORGAN, O.C. ZIENKIEWICZ, Finite element Euler computations in three dimensions, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 26, 2135-2159, 1988.
- [PIE95] L.A. PIEGL AND A.M. RICHARD Tessellating trimmed NURBS surfaces, Computer Aided Design, volume 27 (1), pages 16–26, 1995.
- [PIP87] B.R. PIPER, Visually smooth interpolation with triangular Bézier patches, Geometric modeling: algorithms and new trends, G. Farin Ed., SIAM, pages 221–233, 1987.
- [QUA04] W.R. QUADROS, S.J. OWEN, M. BREWER, K. SHIMADA, Finite element mesh sizing for surfaces using skeleton, *13th International Meshing Roundtable Proceedings*, pp. 389-400, 2004.
- [RAJ92] RAJ KH, FOURMENT L, COUPEZ T, CHENOT JL, Simulation of industrial forging of axisymmetrical parts, Engineering Computations, Oct. 1992, vol. 9, no. 5, pp. 575-586.

- [RAS00] A. RASSINEUX, P. VILLON, J.M. SAVIGNAT AND O. STAB, Surface remeshing by local Hermite diffuse interpolation, *Int. J. Numer. Methods. Engng.*, volume 49, pages 31–49, 2000.
- [REB91] S. REBAY (1991), Efficient unstructured mesh generation by means of Delaunay triangulation and Bowyer/Watson algorithm, *3rd Int. Conf. on numerical grid generation in Comp. Fluid Dyn.*, Barcelona, Spain.
- [RIV90] M.C. RIVARA (1990), Selective refinement/derefinement algorithms for sequences of nested triangulations, *Int. j. numer. methods eng.*, Vol. 28, n° 12, p. 2889-2906.
- [RYP02] D. RYPL, Z. BITTNAR, Triangulation of 3D surfaces: from parametric to discrete surfaces, In: B.H.V. Topping, Z. Bittnar, *Proceedings of the Third Conference on Engineering Computational Technology*, Stirling, UK, Civil-Comp Press, pp. 33–34, 2002.
- [SCH85] SCHMITT F, MAÎTRE H, CLAINCHARD A, LOPEZ-KRAHM J. Acquisition and representation of real object surface data. *SPIE Proceedings Vol. 602 of Biostereometrics'85 Conference*, Cannes, France, 2-6 December, 1985.
- [SCH92] W.J. SCHROEDER ET AL. (1992), Decimation of triangle meshes, *Computer Graphics (Proc. ACM Siggraph)*, **26**(2), 65-70.
- [SHEN92] X. SHENG AND B.E. HIRSCH Triangulation of trimmed surfaces in parametric space, *Computer Aided Design*, volume 24 (8), pages 437–444, 1992.
- [SHEP91] SHEPHARD MS, GEORGES MK. Automatic three-dimensional mesh generation technique by the finite octree technique. *Int. J. Numer. Methods Eng.* 1991; **32**:709-749.
- [SHEW99] SHEWCHUK, J.R. (1999) Lecture Notes on Delaunay Mesh Generation. University of California at Berkeley, Department of Electrical Engineering and Computer Science, September 20, 1999.
- [SHI97] SHIMADA K. Anisotropic Triangular Meshing of Parametric Surfaces *via* Close Packing of Ellipsoidal Bubbles. *6th International Meshing Roundtable '97 Proceedings* 1997:63-74.
- [SOY92] SOYRIS N, FOURMENT L, COUPEZ T, CESCUTTI JP, BRACHOTTE G, CHENOT JL, Forging of a connecting rod: 3D finite element calculations, *Engineering Computations*, Feb. 1992, vol. 9, no. 1, pp. 63-80.
- [TAU95] G. TAUBIN (1995), A Signal Processing Approach to Fair Surface Design, *Computer Graphics (Proceedings SIGGRAPH'95)*, 351–358.
- [TRI98] TRISTANO JR, OWEN SJ, CANANN SA. Advancing Front Surface Mesh Generation in Parametric Space Using a Riemannian Surface Definition. *7th International Meshing Roundtable '98 Proceedings* 1998:429-445.
- [TUR92] G. TURK (1992), Re-tiling polygonal surfaces, *Computer Graphics*, **26**(2), 55-64.
- [VAL92] M.G. VALLET, Génération de maillages éléments finis anisotropes et adaptatifs, Thèse de doctorat de Mathématiques, Université Paris VI, 30 septembre 1992.

- [VER96] R. VERFÜRTH, A Review of A Posteriori Error Estimation and Adaptive Mesh-Refinement Techniques, Wiley & Teubner (1996).
- [VER97] P. VÉRON AND J.C. LÉON (1997), Static polyhedron simplification using error measurements, *Comp. Aided Geom. Des.*, **29**(4), 287-298.
- [VLA01] A. VLACHOS, J. PETERS, C. BOYDS AND J.L. MITCHELL, Curved PN triangles, In Symposium on Interactive 3D Graphics, pages 159–166, 2001.
- [WAL96] D.J. WALTON AND D. S. MEEK, A triangular G^1 patch from boundary curves, *Computer Aided Design*, volume 28 (2), pages 113–123, 1996.
- [WEA94] N.P. WEATHERILL, M.J. MARCHANT, O. HASSAN AND D.L. MARCUM (1994), Grid adaptation using a distribution of sources applied to inviscid compressible flow simulations, *Int. Jour. Num. Meth. Eng.*, Vol. 19, p. 739-764.

B Publications de l'auteur

Ci-après, les 99 publications de l'auteur sont classées en six catégories :

- Livres et chapitres de livres : 7.
- Journaux avec comité de lecture : 18.
- Conférences avec actes (comportant des articles complets) : 32.
- Conférences sans actes (ou comportant des articles résumés) : 14.
- Rapports et guides édités par l'INRIA : 21.
- Autres supports : 7.

Dans chaque catégorie, elles sont listées par ordre chronologique, celles datant de 1995 et au-delà concernant plus particulièrement la génération de maillage.

B.1 Livres et chapitres de livres

– Avant 1995

- [1] D. LE VERRAND (nom collectif du groupe ADA de l'AFCEC, avec la collaboration de **P. LAUG**).
Le langage ADA – Manuel d'évaluation,
Éditeur Dunod, Paris, France, **1982**, 266 pages, 2^e éd. rev. et corr. 1984.
- [2] D. LE VERRAND (collective name of the ADA AFCEC group, with the support of **P. LAUG**).
Evaluating ADA,
Publisher North Oxford Academic, Oxford, UK, **1985**, 288 pages (cf. [1]).
- [3] M. BERNADOU, P.L. GEORGE, A. HASSIM, P. JOLY, **P. LAUG**, B. MULLER, A. PERRONNET, E. SALTEL, D. STEER, G. VANDERBORCK, M. VIDRASCU,
Modulef – Une bibliothèque modulaire d'éléments finis,
Éditeur INRIA, Rocquencourt, France, **1985**, 402 pages, 2^e éd. rev. et corr. 1988, 381 pages.
- [4] M. BERNADOU, P.L. GEORGE, A. HASSIM, P. JOLY, **P. LAUG**, A. PERRONNET, E. SALTEL, D. STEER, G. VANDERBORCK, M. VIDRASCU,
Modulef – A Modular Library of Finite Elements,
Publisher INRIA, Rocquencourt, France, **1986**, 351 pages (cf. [3]).

– Depuis 1995

- [5] H. BOROUCAKI, D. CHAPELLE, P.L. GEORGE, **P. LAUG**, P. FREY,
Estimateurs d'erreur géométriques et adaptation de maillages,

In : P.L. George (sous la direction de), *Traité en Mécanique et Ingénierie des Matériaux – Méthodes Numériques – Maillage et adaptation*, éditeur Hermès, Paris, France, **2001**, chap. 9, pp. 279–310.

- [6] J. TOMASI, B. MENNUCCI, P. LAUG,
The modeling and simulation of the liquid phase,
In: P.G. Ciarlet (editor), C. Le Bris (guest editor), “Handbook of Numerical Analysis”, Volume X, Special Volume on Computational Chemistry, ISBN: 0-444-51248-9, publisher North-Holland, Amsterdam, Netherlands, **2003**, pp. 271–375.
- [7] P.L. GEORGE, H. BOROUCAKI, P.J. FREY, P. LAUG, E. SALTEL,
Mesh Generation and Mesh Adaptivity: Theories and Techniques,
In: E. Stein, R. de Borst and T.J.R. Hughes ed., *Encyclopedia of Computational Mechanics*, Volume 1: Fundamentals, Chapter 17, pp. 497–523, ISBN 0-470-84699-2, Wiley InterScience, 2004.

B.2 Journaux avec comité de lecture

– Avant 1995

- [8] P. LAUG,
Un système expert pour le calcul scientifique,
Revue française de mécanique (RFM), numéro spécial “les systèmes experts et la mécanique”, no. 1990-2, ISSN 0373-6601, pp. 109–117, juin **1990**.
- [9] P. LAUG,
Domino – A knowledge-based system for the users of a finite element library,
Mathematics and Computers in Simulation (MCS), Elsevier, vol. 36, no. 4–6, pp. 293–301, Oct. **1994**.

– Depuis 1995

- [10] P. LAUG, H. BOROUCAKI, P.L. GEORGE,
Discrétisation adaptative des courbes,
Revue internationale de CFAO et d’informatique graphique (RCFAO), Hermès, vol. 11, no. 6, pp. 617–634, **1996**.
- [11] H. BOROUCAKI, P.L. GEORGE, F. HECHT, P. LAUG, E. SALTEL,
Delaunay Mesh Generation Governed by Metric Specifications – Part I: Algorithms,
Finite Elements in Analysis and Design (FEAD), Elsevier, vol. 25, no. 1–2, pp. 61–83, March **1997**.
- [12] P. LAUG, H. BOROUCAKI,
Maillage de l’enveloppe d’une réunion de sphères,
Revue internationale de CFAO et d’informatique graphique (RCFAO), Hermès, vol. 13, no. 1, pp. 43–64, **1998**.
- [13] H. BOROUCAKI, P. LAUG, P.L. GEORGE,
Parametric surface meshing using a combined advancing-front – generalized-Delaunay approach,

- International Journal for Numerical Methods in Engineering (IJNME), Wiley, vol. 49, no. 1–2, pp. 233–259, Sept. **2000**.
- [14] P.L. GEORGE, H. BOROUCAKI, P. LAUG,
An efficient algorithm for 3D adaptive meshing,
Advances in Engineering Software (AES), Elsevier, vol. 33, no. 7–10, pp. 377–387,
July-Oct. **2002**.
- [15] H. BOROUCAKI, A. CHEROUAT, K. SAANOUNI, P. LAUG,
Remaillage en grandes déformations. Applications à la mise en forme de structures 2D,
Revue Européenne des Éléments Finis (REEF), Hermès, vol. 11, no. 1, pp. 57–79,
2002.
- [16] P. LAUG, H. BOROUCAKI,
Molecular Surface Modeling and Meshing,
Engineering with Computers (EWC), Springer-Verlag, vol. 18, no. 3, pp. 199–210,
2002.
- [17] H. BOROUCAKI, A. CHEROUAT, P. LAUG, K. SAANOUNI,
Adaptive remeshing for ductile fracture prediction in metal forming,
Comptes Rendus de l'Académie des Sciences (CRAS), Paris, t. 330, Série II b,
pp. 709–716, Oct. **2002**.
- [18] P. LAUG, H. BOROUCAKI,
Interpolating and Meshing 3-D Surface Grids,
International Journal for Numerical Methods in Engineering (IJNME), Wiley,
vol. 58, no. 2, pp. 209–225, Sept. **2003**.
- [19] P. LAUG, H. BOROUCAKI,
Generation of Finite Element Meshes on Molecular Surfaces,
International Journal of Quantum Chemistry (IJQC), Wiley, vol. 93, no. 2, pp. 131-
138, **2003**.
- [20] H. BOROUCAKI, P. LAUG, *Simplification of Composite Parametric Surface
Meshes*, Engineering with Computers (EWC), Springer-Verlag, vol. 20, no. 3,
pp. 176-183, **2004**.
- [21] P. LAUG, H. BOROUCAKI,
Curve linearization and discretization for meshing composite parametric surfaces,
Communications in Numerical Methods in Engineering (CNME), Wiley, vol. 20,
no. 11, pp. 869-876, **2004**.
- [22] H. BOROUCAKI, P. LAUG, A. CHEROUAT, K. SAANOUNI,
Adaptive remeshing in large plastic strain with damage,
International Journal for Numerical Methods in Engineering (IJNME), Wiley,
vol. 63, no. 1, pp. 1-36, **2005**.
- [23] A. CHEROUAT, K. SAANOUNI, H. BOROUCAKI, P. LAUG,
Virtual metal forming with damage occurrence using adaptive remeshing,
International Journal of Forming Processes (IJFP), Hermès, Lavoisier, vol. 8, no. 2-
3, pp. 311-332, **2005**.
- [24] H. BOROUCAKI, J. VILLARD, P. LAUG, P.L. GEORGE,
Surface mesh enhancement with geometric singularities identification,

Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering (CMAME), Special Issue on Unstructured Mesh Generation, vol. 194, no. 48-49, pp. 4885-4894, **2005**.

- [25] A. CHEROUAT, H. BOROUCHAKI, K. SAANOUNI, **P. LAUG**,
Numerical methodology for metal forming processes using elastoplastic model with damage occurrence,
Journal of Materials Science and Technology, vol. 22, no. 2, **2006**.

B.3 Conférences avec actes (comportant des articles complets)

– Avant 1995

- [26] **P. LAUG**, A. PERRONNET,
Modulef : une expérience de programmation en éléments finis,
Conférence Internationale “Outils, méthodes et langages adaptés au calcul scientifique”, Paris, mai **1983**. Éditeur North-Holland, Amsterdam, Netherlands, 17 pages.
- [27] **P. LAUG**, M. VIDRASCU,
The Modulef Finite Element Library,
IFIP Working Conference on Problem Solving Environments for Scientific Computing, Sophia-Antipolis, Alpes-Maritimes, juin **1985**. In: B. Ford, F. Chatelin (editors), Proceedings. Publisher North-Holland, Amsterdam, Netherlands, pp. 67–79.
- [28] M. BERNADOU, P.L. GEORGE, A. HASSIM, **P. LAUG**, E. SALTEL, D. STEER, M. VIDRASCU,
Modulef: an Open Finite Element Library,
4th International Symposium on Innovative Numerical Methods in Engineering, Atlanta, Georgia, USA, March **1986**. In: R.P. Shaw, J. Periaux, A. Chaudouet, J. Wu, C. Marino, C.A. Brebbia (editors), Proceedings. Publisher Comput. Mech. Publications, Southampton, pp. 725–729.
- [29] M. BERNADOU, P.L. GEORGE, **P. LAUG**, M. VIDRASCU,
Modulef: a Library of Computer Procedures for Finite Element Analysis,
SAS World Conference, Paris, oct. **1986**. In: A. Niku-Lari (editor), “Structural Analysis Systems – Software, Hardware, Capability, Compatibility, Applications”, vol. 3, pp. 155–173. Publisher Pergamon Press, Oxford, UK.
- [30] **P. LAUG**,
An Expert System for the Finite Element Method,
1st IMACS Symposium on Artificial Intelligence, Expert Systems and Languages in Modelling and Simulation, Barcelona, Spain, juin **1987**. Publisher North-Holland, Amsterdam, Netherlands, pp. 67–70.
- [31] **P. LAUG**, A. PERRONNET,
Langages pour le calcul des structures : expérience INRIA-MODULEF,
Conférence GRECO/GIS “Calcul des Structures et Intelligence Artificielle”, Giens, Var, mai **1988**. Éditeur Pluralis, vol. 2, pp. 335–344.

- [32] P. LAUG, A. PERRONNET,
An Intelligent Environment for a Simulation Library,
In: R.C. Huntsinger, W.J. Karplus, E.J. Kerckhoffs, G.C. Vansteenkiste, “Simulation Environments and Symbol and Number Processing on Multi and Array Processors”, Proceedings of the European Simulation Multiconference, Nice, juin 1988. Publisher SCS Europe, Ghent, Belgium, pp. 169–172.
- [33] P. LAUG,
Représentation des connaissances dans le système Domino,
Conférence GRECO/GIS “Calcul des Structures et Intelligence Artificielle”, Giens, Var, mai 1989. Éditeur Pluralis, vol. 3, pp. 285–295.
- [34] A. HASSIM, P. LAUG,
Conception des matériaux composites à l’aide d’un système expert,
10^e Journées Internationales “Les systèmes experts et leurs applications”, Avignon, mai 1990. Éditeur EC2, vol. 2, pp. 891–905.
- [35] P. LAUG,
Un environnement logiciel pour le calcul des structures,
Colloque national en calcul des structures, Giens, Var, mai 1993. Éditeur Hermès, Paris, France, vol. 2, pp. 733–741.
- [36] P. LAUG,
Towards a knowledge-based system for structural optimization,
Structural Optimization 93, The World Congress on Optimal Design of Structural Systems, Rio de Janeiro, Brasil, août 1993. Publisher ABCM, vol. 2, pp. 475–482.
- [37] P. LAUG,
Spécification et implémentation de types abstraits pour le calcul scientifique,
26^e Congrès National d’Analyse Numérique, Les Karellis, Savoie, mai 1994. Éditeur Université Lyon 1, pp. 156–157.
- [38] P. LAUG,
Structuration des données dans les calculs par élément finis,
Congrès StruCoMe 94, Paris, nov. 1994. 11 pages.

– Depuis 1995

- [39] P. LAUG, H. BOROUCAKI,
Surface Grid Generation on Intersecting Spheres,
6th International Conference on Numerical Grid Generation in Computational Field Simulations, University of Greenwich, London, England, July 1998. Publisher ISGG, pp. 717–726.
- [40] H. BOROUCAKI, P. FREY, P.L. GEORGE, P. LAUG, E. SALTEL,
Mailleur auto-adaptatif de surfaces et de volumes,
Journées CETIM, Senlis, Oise, 18 pages, Oct. 1999.
- [41] P.L. GEORGE, H. BOROUCAKI, P. LAUG,
An Efficient Algorithm for 3-D Adaptive Meshing,
2nd International Conference on Engineering Computational Technology, Leuven, Belgium, Sept. 2000. In: B.H.V. Topping (Editor), Finite Elements: Techniques and Developments, Civil-Comp Press, Edinburgh, UK, pp. 1–11, 2000.

- [42] P. LAUG, H. BOROUCAKI,
Automatic Generation of Finite Element Meshes for Molecular Surfaces,
European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering, ECCOMAS 2000, Barcelona, Spain, CD-Rom ISBN 84-89925-70-4, 24 pages, Sept. **2000**.
- [43] P. LAUG, H. BOROUCAKI,
Adaptive Parametric Surface Meshing Based on Discrete Derivatives,
7th International Conference on Numerical Grid Generation in Computational Field Simulations, Whistler, British Columbia, Canada, pp. 719–728, Sept. **2000**.
- [44] H. BOROUCAKI, P. LAFON, P. LAUG, P.L. GEORGE,
Minimal Variational Surfaces and Quality Triangular Meshes,
9th International Meshing Roundtable, New Orleans, Louisiana, USA, pp. 217–225, Oct. **2000**.
- [45] H. BOROUCAKI, P. LAUG,
Mesh simplification made easy,
1st M.I.T. Conference on Computational Fluid and Solid Mechanics, Boston, Massachusetts, USA, June **2001**. In: K.J. Bathe (Editor), Computational Fluid and Solid Mechanics, Elsevier, Amsterdam, Netherlands, vol. 2, pp. 1530–1534, 2001.
- [46] P. LAUG, H. BOROUCAKI,
Molecular Surface Modeling and Meshing,
10th International Meshing Roundtable, Newport Beach, California, USA, pp. 31–41, Oct. **2001**.
- [47] H. BOROUCAKI, P. LAUG, A. CHEROUAT, K. SAANOUNI,
Remeshing process in large deformation – Application to 2D structure forming,
8th International Conference on Numerical Grid Generation in Computational Field Simulations, Honolulu, Hawaii, USA, pp. 549–560, June **2002**.
- [48] P.L. GEORGE, P.J. FREY, P. LAUG, H. BOROUCAKI,
Curve and Surface Meshing for Finite Element Applications,
Fifth International Conference on Curves and Surfaces, Saint-Malo, France, July **2002**. In: Curve and Surface Fitting: Saint-Malo 2002, editors A. Cohen, J.L. Merrien, L.L. Schumaker, publisher Nashboro Press, pp. 159–176, 2003.
- [49] A. CHEROUAT, H. BOROUCAKI, P. LAUG, K. SAANOUNI, J.F. MARIAGE,
An Efficient Remeshing Technique in Analysis of Large Plastic Deformation,
The fifth International Conference and Workshop on Numerical Simulation of 3D Sheet Forming process, Jeju Island, Korea, vol. 1, pp. 349–354, Oct. **2002**.
- [50] A. CHEROUAT, H. BOROUCAKI, K. SAANOUNI, P. LAUG,
Schéma adaptatif en grandes déformations avec endommagement : application à la mise en forme,
Les Quatrièmes Journées Scientifiques et Techniques en Mécanique et Matériaux – Les Procédés de Formage – Réalité et Simulation (JSTMM'2002), Monastir, Tunisie, pp. 127-134, Oct. **2002**.
- [51] A. CHEROUAT, H. BOROUCAKI, K. SAANOUNI, P. LAUG,
An adaptive remeshing procedure in elastoplastic deformation with ductile damage: application in metal forming processes,

The 6th International ESAFORM Conference on Material Forming, Salerno, Italy, pp. 619-622, Apr. **2003**.

- [52] **P. LAUG**, H. BOROUCAKI,
Automatic Remeshing of Deformed and Damaged Structures,
European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering, ECCOMAS 2004, CD-ROM ISBN 951-39-1868-8, Volume 1, 20 pages, Jyväskylä, Finland, July 2004.
- [53] L. GIRAUD-MOREAU, H. BOROUCAKI, A. CHEROUAT, **P. LAUG**,
New Adaptive Remeshing Technique for the Numerical Simulation of Thin Sheet Metal Forming, European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering, ECCOMAS 2004, Jyväskylä, Finland, July 2004.
- [54] **P. LAUG**, H. BOROUCAKI,
Improving Surface Meshes using Adaptive Refinement,
The Fourth International Conference on Engineering Computational Technology, ECT 2004, CD-ROM ISBN 0-948749-97-0, Paper 20, 15 pages, Lisbon, Portugal, Sept. 2004.
- [55] A. CHEROUAT, H. BOROUCAKI, **P. LAUG**, K. SAANOUNI,
Damage Effect in Metal Forming Processes using Adaptive Remeshing,
The Fourth International Conference on Engineering Computational Technology, ECT 2004, CD-ROM ISBN 0-948749-97-0, Paper 80, 16 pages, Lisbon, Portugal, Sept. 2004.
- [56] A. CHEROUAT, H. BOROUCAKI, K. SAANOUNI, **P. LAUG**,
Procédure adaptative pour le calcul des structures : application à la mise en forme des matériaux solides,
7^e Colloque National en Calcul des Structures, Giens, France, mai 2005.
- [57] **P. LAUG**,
Topologie et maillage des surfaces paramétrées à partir d'une modélisation B-Rep,
17^e Congrès Français de Mécanique, CFM 2005, conférence d'ouverture de la session C2 « Maillage adaptatif et estimation d'erreur », CD-ROM, article no. 1319, 12 pages, Troyes, France, août 2005.

B.4 Conférences sans actes (ou comportant des articles résumés)

– Avant 1995

- [58] D. BÉGIS, **P. LAUG**, A. PERRONNET, M. VIDRASCU,
Modulef : un logiciel efficace de comparaison des algorithmes numériques,
Colloque d'Analyse Numérique, Aussois, Savoie, mai **1981**. Éditeur INRIA.
- [59] **P. LAUG**,
Les normes de programmation Modulef,
Conférence GRECO/GIS "Calcul des Structures et Intelligence Artificielle", Giens, Var, mai **1986**.

- [60] **P. LAUG**,
Pilotage d'un code modulaire d'éléments finis par un système expert,
Conférence GRECO/GIS "Calcul des Structures et Intelligence Artificielle", Giens,
Var, mai **1987**.
- [61] **P. LAUG**,
Calcul des Structures avec Modulef,
Journée ISF "Utilisation des systèmes experts dans la mécanique", Paris, oct.
1987.
- [62] **P. LAUG**,
DOMINO : un système expert pour le calcul scientifique.
Journée "Les Systèmes Experts et la Mécanique", Société Française des
Mécaniciens, Paris, nov. **1989**.
- [63] **P. LAUG**,
Présentation du logiciel Domino,
Conférence GRECO/GIS "Calcul des Structures et Intelligence Artificielle", Giens,
Var, mai **1990**.
- [64] **P. LAUG**,
Domino : a knowledge-based system for the users of a finite element library,
3rd International Conference on Expert Systems for Scientific Computing, Purdue
University, West Lafayette, Illinois, USA, May **1993**.

– Depuis 1995

- [65] H. BOROUCAKI, **P. LAUG**, P.L. GEORGE,
About Parametric Surface Meshing,
5th US National Congress on Computational Mechanics (USNCCM), 2nd Sympo-
sium on Trends in Unstructured Mesh Generation (STUMG), University of Colo-
rado at Boulder, Colorado, USA, pp. 109–110, Aug. **1999**.
- [66] **P. LAUG**, H. BOROUCAKI,
Interpolating and Meshing 3-D Surface Grids,
6th US National Congress on Computational Mechanics (USNCCM), 3rd Sympo-
sium on Trends in Unstructured Mesh Generation (STUMG), Dearborn, Michigan,
USA, p. 313, Aug. **2001**.
- [67] H. BOROUCAKI, **P. LAUG**, A. CHEROUAT, K. SAANOUNI,
Remeshing process in large deformation – Application to 2D structure forming,
Fifth International Conference on Curves and Surfaces, Saint-Malo, France, July
2002 (cf. [47]).
- [68] **P. LAUG**, H. BOROUCAKI,
Simplification of Composite Parametric Surface Meshes,
7th US National Congress on Computational Mechanics (USNCCM), 4rd Sym-
posium on Trends in Unstructured Mesh Generation (STUMG), Part II, Albu-
querque, New Mexico, USA, p. 66, July **2003**.
- [69] **P. LAUG**, H. BOROUCAKI,
Maillages déformables : remaillage adaptatif pour la mise en forme des métaux,

deux sessions (orale et murale), 36^e Congrès national d'Analyse NUMérique, CANUM 2004, Obernai, France, 31 mai - 4 juin 2004

- [70] A. CHEROUAT, H. BOROUCAKI, K. SAANOUNI, **P. LAUG**,
Numerical methodology for metal forming processes using thermo-elastoplastic model with damage occurrence,
The 4th International Forum on Advanced Material Science and Technology, IFAMST 4, Troyes, France, July 4-7, 2004.
- [71] **P. LAUG**, H. BOROUCAKI,
Intégration de composants logiciels INRIA et UTT pour l'élaboration de mailleurs automatiques pour l'industrie automobile et aéronautique,
session "Pourquoi et jusqu'où faut-il faire confiance à la simulation?", MICAD 2005, Paris, France, 5-6-7 avril 2005

B.5 Rapports et guides édités par l'INRIA

– Avant 1995

- [72] **P. LAUG**,
Gestion des fichiers en accès direct – MEFDIR,
Rapport Modulef RM-42, juin **1977**.
- [73] **P. LAUG**,
Lecture des données en format libre,
Rapport Modulef RM-44, janv. **1979**.
- [74] **P. LAUG**,
Mise en œuvre de Modulef,
Rapport Modulef RM-83, mise à jour chaque année de **1982** à 1990.
- [75] **P. LAUG**,
Conversion de Modulef en Fortran 77,
Rapport technique INRIA RT-0034, avril **1984**.
- [76] P.L. GEORGE, **P. LAUG**, F. PISTRE,
Construction et modification de la structure de données NOPO,
Rapport Modulef RM-99, mai **1984**.
- [77] **P. LAUG**,
Les fonctions interprétées – Manuel d'utilisation, de programmation, de référence,
Rapport technique INRIA RT-0038, juin **1984**.
- [78] P.L. GEORGE, **P. LAUG**, B. MULLER, M. VIDRASCU,
Guide d'utilisation et normes de programmation,
Rapport Modulef RM-01, mars **1986**.
- [79] **P. LAUG**,
How to implement Modulef,
Rapport technique INRIA RT-0069, avril **1986**.
- [80] **P. LAUG**,
Pilotage d'un code modulaire d'éléments finis par un système expert,
Rapport de recherche INRIA RR-0653 et Rapport Modulef RM-38, mars **1987**.

- [81] **P. LAUG**, A. PERRONNET,
Évaluation des élément finis Modulef à l'aide du système expert Domino,
Rapport technique INRIA RT-0109, juil. **1989**.
- [82] P.L. GEORGE, **P. LAUG**,
Normes d'utilisation et de programmation,
Guide Modulef no. 2, 158 pages, janv. **1992**.
- [83] P.L. GEORGE, **P. LAUG**,
Programming and Utilization Standards,
Modulef Guide no. 2, 168 pages, March **1993** (cf. [82]).
- **Depuis 1995**
- [84] H. BOROUCAKI, P.L. GEORGE, F. HECHT, **P. LAUG**, E. SALTEL,
Mailleur bidimensionnel de Delaunay gouverné par une carte de métriques – Partie I : Algorithmes,
Rapport de recherche INRIA RR-2741, déc. **1995**.
- [85] H. BOROUCAKI, P.L. GEORGE, F. HECHT, **P. LAUG**, B. MOHAMMADI,
E. SALTEL,
Mailleur bidimensionnel de Delaunay gouverné par une carte de métriques – Partie II : Applications,
Rapport de recherche INRIA RR-2760, déc. **1995**.
- [86] H. BOROUCAKI, **P. LAUG**,
Le mailleur adaptatif bidimensionnel BL2D : manuel d'utilisation et documentation,
Rapport technique INRIA RT-0185, déc. **1995**.
- [87] **P. LAUG**, H. BOROUCAKI, P.L. GEORGE,
Maillage de courbes gouverné par une cartes de métriques,
Rapport de recherche INRIA RR-2818, mars **1996**.
- [88] **P. LAUG**, H. BOROUCAKI,
The BL2D Mesh Generator – Beginner's Guide, User's and Programmer's Manual,
Rapport technique INRIA RT-0194, July **1996** (cf. [86]).
- [89] **P. LAUG**, H. BOROUCAKI,
Maillage de l'enveloppe d'une réunion de sphères,
Rapport de recherche INRIA RR-3229, août **1997**.
- [90] **P. LAUG**, H. BOROUCAKI,
BLSURF – Mailleur de surfaces composées de carreaux paramétrés – Manuel d'utilisation,
Rapport technique INRIA RT-0232, juin **1999**.
- [91] **P. LAUG**, H. BOROUCAKI,
BLSURF – Mesh Generator for Composite Parametric Surfaces – User's Manual,
Rapport technique INRIA RT-0235, Nov. **1999** (cf. [90]).
- [92] **P. LAUG**, H. BOROUCAKI,
BL2D-V2 : mailleur bidimensionnel adaptatif,
Rapport technique INRIA RT-0275, Jan. **2003**.

B.6 Autres supports

– Avant 1995

- [93] **P. LAUG**,
Optimisation de l'implantation des programmes en milieu paginé,
Mémoire ENSEEIHT (École Nationale Supérieure d'Électrotechnique,
d'Électronique, d'Informatique et d'Hydraulique de Toulouse), filière Infor-
matique – Mathématiques Appliquées, juin **1976**, 55 pages.
- [94] **P. LAUG**,
Aide à l'utilisation des bibliothèques de programmes – Le système ALGEF,
Thèse de docteur-ingénieur, Université Paris VI, juin **1980**, 140 pages.
- [95] **P. LAUG**,
Le projet Modulef sur Multics : implémentation et principaux outils développés,
Bulletin de liaison de la recherche en informatique et en automatique no. 81, pp. 8–
10, nov. **1982**.
- [96] **P. LAUG**,
Un outil général : la méthode des éléments finis – Aspects informatiques,
Bulletin de liaison de la recherche en informatique et en automatique no. 98, p. 5,
déc. **1984**.
- [97] **P. LAUG**,
Domino, un “pré-préprocesseur” pour Modulef,
INRIA Information no. 26, déc. **1989**.

– Depuis 1995

- [98] H. BOROUCAKI, **P. LAUG**,
Maillages déformables – Deformable meshes,
DVD bilingue édité en 2000 exemplaires, réalisé par A. Paouri, dif-
fusé par la Direction de l'information scientifique et de la commu-
nication (DISC) de l'INRIA. Version RealPlayer disponible sur le site
<http://www.inria.fr/multimedia/Videothèque-fra.html>, avril **2004**.
- [99] F. BRETON, **P. LAUG**, H. BOROUCAKI,
Maillage pour l'industrie – Meshing for industry,
Inédit, La lettre d'information de l'INRIA, no. 44, mai **2004**.
Article repris par Yvelines Compétences (site du conseil général),
<http://www.yvelines-competences.com>, 20/04/2004.

C Sélection d'articles

Cette partie contient les dix articles suivants :

1. H. BOROUCAKI, **P. LAUG**, P.L. GEORGE, *Parametric surface meshing using a combined advancing-front – generalized-Delaunay approach*, International Journal for Numerical Methods in Engineering (IJNME), Wiley, vol. 49, no. 1–2, pp. 233–259, Sept. **2000** [13].
2. **P. LAUG**, H. BOROUCAKI, *Interpolating and Meshing 3-D Surface Grids*, International Journal for Numerical Methods in Engineering (IJNME), Wiley, vol. 58, no. 2, pp. 209–225, Sept. **2003** [18].
3. P.L. GEORGE, H. BOROUCAKI, **P. LAUG**, *An efficient algorithm for 3D adaptive meshing*, Advances in Engineering Software (AES), Elsevier, vol. 33, no. 7–10, pp. 377–387, July-Oct. **2002** [14].
4. H. BOROUCAKI, **P. LAUG**, A. CHEROUAT, K. SAANOUNI, *Adaptive remeshing in large plastic strain with damage*, International Journal for Numerical Methods in Engineering (IJNME), Wiley, vol. 63, no. 1, pp. 1-36, **2005** [22].
5. J. TOMASI, B. MENNUCCI, **P. LAUG**, *The modeling and simulation of the liquid phase*, In: P.G. Ciarlet (editor), C. Le Bris (guest editor), “Handbook of Numerical Analysis”, Volume X, Special Volume on Computational Chemistry, ISBN: 0-444-51248-9, publisher North-Holland, Amsterdam, Netherlands, **2003**, pp. 271–375 [6].
6. P.L. GEORGE, P.J. FREY, **P. LAUG**, H. BOROUCAKI, *Curve and Surface Meshing for Finite Element Applications*, Fifth International Conference on Curves and Surfaces, Saint-Malo, France, July **2002**. In: Curve and Surface Fitting: Saint-Malo 2002, editors A. Cohen, J.L. Merrien, L.L. Schumaker, publisher Nashboro Press, pp. 159–176, 2003 [48].
7. H. BOROUCAKI, **P. LAUG**, *Simplification of Composite Parametric Surface Meshes*, Engineering with Computers (EWC), Springer-Verlag, vol. 20, no. 3, pp. 176-183, **2004** [20].
8. H. BOROUCAKI, J. VILLARD, **P. LAUG**, P.L. GEORGE, *Surface mesh enhancement with geometric singularities identification*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering (CMAME), Special Issue on Unstructured Mesh Generation, vol. 194, no. 48-49, pp. 4885-4894, **2005** [24].
9. **P. LAUG**, H. BOROUCAKI, P.L. GEORGE, *Discrétisation adaptative des courbes*, Revue internationale de CFAO et d'informatique graphique (RCFAO), Hermès, vol. 11, no. 6, pp. 617–634, **1996** [10].

10. **P. LAUG**, H. BOROUCHAKI, *Curve linearization and discretization for meshing composite parametric surfaces*, Communications in Numerical Methods in Engineering (CNME), Wiley, vol. 20, no. 11, pp. 869-876, **2004** [21].