



Approche expérimentale de la turbulence par mesures de viscosité apparente dans les fluides en rotation. Application au couplage visco-magnétique de l'interface noyau-manteau.

Bérangère Deleplace

► To cite this version:

Bérangère Deleplace. Approche expérimentale de la turbulence par mesures de viscosité apparente dans les fluides en rotation. Application au couplage visco-magnétique de l'interface noyau-manteau.. Géophysique [physics.geo-ph]. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 2005. Français. NNT: . tel-00012097

HAL Id: tel-00012097

<https://theses.hal.science/tel-00012097>

Submitted on 7 Apr 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

OBSERVATOIRE DE GRENOBLE
LABORATOIRE DE GEOPHYSIQUE INTERNE ET TECTONOPHYSIQUE

Thèse

présentée par
Bérangère DELEPLACE

le 3 octobre 2005

pour obtenir le grade de
Docteur de l'Université Joseph Fourier
spécialité : **Géophysique**

Approche expérimentale de la turbulence par mesures de viscosité apparente dans les fluides en rotation Application au couplage visco-magnétique de l'interface noyau-manteau

Composition du jury :

Véronique Dehant	Observatoire Royal de Belgique (Bruxelles)	Rapporteur
Arnaud Chiffaudel	Centre d'Etudes Atomiques de Saclay	Rapporteur
Marianne Greff-Lefftz	Institut de Physique du Globe de Paris	Examineur
Peter L. Read	University of Oxford (Grande Bretagne)	Examineur
Joël Sommeria	Institut National Polytechnique (Grenoble)	Examineur
Anne Paul	Université Joseph Fourier (Grenoble)	Examineur
Philippe Cardin	Université Joseph Fourier (Grenoble)	Directeur de thèse

Abstract

Eddy viscosity in rotating fluids : an experimental study - Consequences on the visco-magnetic torque at the Core Mantle Boundary (CMB)

We present an experimental method to estimate the eddy viscosity in rotating bounding fluids. By measures of the azimuthal component of the velocity during spin-up/spin-down experiments, we retrieve the viscosity (using the linear theory of Greenspan). Differences between laminar and turbulent regimes give an estimate of the momentum transport between fluid and boundaries operated by eddies.

Works have been done on four experiments in order to evaluate the impact of the geometry and the contribution of turbulent mechanisms. Both interact in the change of eddy viscosity. In experiments of thermal convection in spherical shell, the increase of eddy viscosity is explained by a scaling law in $\frac{Ra}{Ra_c} E^{1/3}$. For the remainder experiments, the change in viscosity is not uniform in the volume and no global quantities can modelize this effect. This change may be explained by the turbulent mechanism (experiment of differential rotation) or by instabilities that develop during convective spin-up (experiment of convection in cylindrical geometry).

Theoretical work has also been done. Differential rotation between core and mantle induce torques and we derive the visco-magnetic torque at the CMB for spin over motions. We estimate the influence of eddy viscosity, electrical conductivity of the mantle, geometry and intensity of the magnetic field on the visco-magnetic torque.

The value of the coupling constant given by nutation models shows that apparent viscosity $10^{-2} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$ (10^4 bigger that the liquid iron molecular viscosity) is needed to explain nutation's data.

Key words : geophysical fluids, turbulence, velocity measurements (ultrasonor technic and tracking particles), thin boundary layers, viscous and magnetic torques, core mantle boundary, nutations.

Résumé

Approche expérimentale de la turbulence par mesures de viscosité apparente dans les fluides en rotation - Application au couplage visco-magnétique de l'interface noyau-manteau

Nous développons une méthode pour mesurer la viscosité apparente dans les fluides en rotation rapide. Celle-ci consiste à mesurer la vitesse azimutale du fluide pendant le régime transitoire de synchronisation qui apparaît lors des expériences de spin-up/spin-down (augmentation ou diminution de la vitesse de rotation du récipient). Les différences observées entre les régimes laminaires et les régimes turbulents donnent une information sur la contribution de la turbulence dans le transport de quantité de mouvement entre le fluide et la paroi.

Quatre dispositifs expérimentaux ont été utilisés afin d'évaluer l'impact de la géométrie du récipient et des mécanismes de forçage de la turbulence sur ces mesures de viscosité apparente. L'étude montre que tous deux contribuent fortement à la modification de viscosité apparente observée. Dans le cas d'expériences de convection thermique en géométrie sphérique, afin d'expliquer l'augmentation uniforme de la viscosité apparente, une loi d'échelle faisant intervenir l'écart au seuil et le nombre d'Ekman est proposée. En ce qui concerne les autres expériences (Convection thermique sphérique en gallium, couette sphérique, convection thermique en géométrie cylindrique), la modification de viscosité n'est pas uniforme dans le volume et ne peut être reliée à des grandeurs globales. Dans ce deuxième cas, l'origine de la modification vient du mécanisme de forçage ou du développement d'instabilités associées au mouvement de spin-up en régime turbulent.

Au delà de cette étude expérimentale, nous avons calculé le couplage visco-magnétique à l'interface noyau liquide - manteau solide d'une Terre en nutation. Nous avons fait varier dans ce calcul la viscosité apparente du fluide et la conductivité électrique du manteau afin d'analyser les contributions des couples magnétiques et visqueux au couplage de l'interface. Différentes modélisations du champ magnétique terrestre sont envisagées afin d'estimer la contribution des petites échelles du champ à ces couplages. La confrontation de ce calcul aux valeurs des constantes de couplage des modèles de nutations permet d'obtenir une estimation de la viscosité efficace nécessaire dans le noyau. Une viscosité efficace de $10^{-2} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ dans le noyau terrestre est nécessaire pour expliquer les données de nutations.

Mots clefs : fluides géophysiques, turbulence, mesure de vitesse (technique Doppler ultrasonore / suivi de particules), couches limites, couplage visqueux et magnétique, CMB, nutations.

Remerciements

Je remercie tout d'abord les membres de l'équipe géodynamo, Philippe, Dominique, Daniel, Henri-Claude, Jean-Paul, Nicolas, Nathanaël et Gédéon pour m'avoir accueillie lors de mon arrivée au sein de leur 'dream team'. Merci à Philippe pour m'avoir encadrée et soutenue tout au long de ces trois années, sa grande pédagogie et sa patience ont pesé lourd dans l'aboutissement de ce travail. Je remercie également Dominique pour sa collaboration et son attitude positivement critique concernant le volet théorique de ces travaux. Mes remerciements à Daniel, pour m'avoir fait découvrir les joies et aléas du travail expérimental. Un grand merci également à Jean-Paul, sans qui l'équipe géodynamo ne pourrait développer toutes ces recherches expérimentales, merci pour avoir su si bien maintenir en état les trois dispositifs que, bien malgré moi, je maltraçais jour après jour. Je souhaite une longue cohésion à cette équipe qui ne cesse de s'agrandir, ainsi qu'elle garde le dynamisme et la bonne ambiance qu'on lui connaît actuellement.

Merci aux membres du jury d'avoir accepté de juger ce travail et merci aux organisateurs et participants du GDR dynamo qui ont constitués un véritable groupe de travail.

Mes remerciements aux nombreux collègues et amis du L.G.I.T : Catherine, Gislain, nos chirurgiens réseau, Gédéon notre hotline Latex, Florent el salsero, Nicolas le philosophe, Nathanaël et Eric les thésards que j'ai le plus souvent croisé pendant ces trois années.

Merci à Peter Read pour son accueil lors de mes séjours outre Manche, merci aux techniciens, ingénieurs et chercheurs du département de Physique de l'Université d'Oxford pour leur collaboration. Je souhaite également une bonne continuations aux doctorants présents là-bas, Ana, Richard, Fiona, Edgard...

Merci et bonne chance dans vos rédactions respectives, vous les amis MMGE avec qui j'ai partagés les émerveillements et les coups dur de la vie de thésard : Merci à Magali, ma meilleure binôme de montagne, merci à Laëtitia, Martin, Christophe et Mathieu pour les nombreuses escapades nature, merci à tous les autres pour les nombreuses pauses gastronomico-politico-culturelles qui ont toujours su nous réunir autour d'un verre.

Il est maintenant temps de remercier mes trois familles, la vraie, la belle et les Montgaillards. Merci en particulier à Raymond, toujours très soucieux de 'la réussite' de sa petite fille, merci à lui qui, en m'ayant initiée très tôt à la résolution de problèmes physiques concrets, est probablement à l'origine de mon goût prononcé pour les sciences expérimentales. Enfin je voulais remercier Jean-Vincent, pour sa patience et sa compréhension ainsi que pour son soutien quotidien tout au long de ce parcours.

Table des matières

I	Introduction générale	11
1	Introduction géophysique	13
1.1	La Terre interne : système dynamique bien contraint ?	14
1.1.1	Dynamique et dynamo dans le noyau liquide	17
1.1.2	Propriétés de l'interface noyau-manteau	19
1.2	Les paradoxes	20
1.3	Apport de la géophysique externe	22
1.4	Approche du problème	23
2	Concepts de mécanique des fluides et mise en équation	25
2.1	Mécanique des fluides en rotation	25
2.1.1	Équation de la dynamique et conservation de la masse	26
2.1.2	L'adimensionnement	26
2.1.3	La contrainte de Proudman-Taylor	27
2.2	Les couches limites	29
2.2.1	Avant propos	29
2.2.2	Les couches d'Ekman	30
2.2.3	Le pompage d'Ekman	33
2.3	La théorie du spin-up et du spin-down	35
2.3.1	Description qualitative du mouvement de spin-up	35
2.3.2	Spin-up linéaire en géométrie sphérique	37
2.3.3	Application et discussion	40
2.3.4	Une variante : théorie des frontières oscillantes	42
2.4	Notions sur la Turbulence	46
2.4.1	Le concept de viscosité apparente	47
2.4.2	Couches limites laminaires/turbulentes et turbulence en volume	53
2.5	Écoulement et champ magnétique	54
2.5.1	L'équation de l'induction	54
2.5.2	Force de Lorentz et équations de la dynamique	55
2.5.3	Écriture adimensionnée et nombres caractéristiques	56
2.5.4	Électromagnétique et conditions de passages	56

II	Etudes expérimentales	57
3	Introduction : protocole expérimental	59
3.1	Contexte	59
3.2	Les problématiques	60
3.3	Le protocole	60
3.4	Méthode d'inversion	60
4	Expériences de convection en géométrie sphérique	63
4.1	L'expérience de convection	63
4.1.1	Description du dispositif expérimental	63
4.1.2	Mesures de vitesse par effet Doppler	65
4.2	Convection en eau : rappel des premiers résultats	68
4.2.1	Validation de la théorie pour les expériences en isotherme	68
4.2.2	Comparaison des expériences isothermes et des expériences convectives	71
4.2.3	Interprétations et lois d'échelles sur la viscosité efficace	72
4.3	Expériences de convection en gallium	76
4.3.1	Quelques similitudes et des différences	76
4.3.2	Expériences isothermes : toujours un viscosimètre d'assez forte sensibilité	77
4.3.3	Les expériences convectives : une viscosité efficace négligeable	80
4.3.4	Discussion	81
4.4	Conclusions	88
4.4.1	Perspectives expérimentales : expériences oscillantes en gallium	90
5	Expériences de rotation différentielle	93
5.1	Descriptif de l'expérience	93
5.2	Les régimes observables et leurs mécanismes	96
5.2.1	Les couches de Stewartson	97
5.2.2	Les mécanismes de déstabilisation	98
5.2.3	Les différents régimes turbulents et leurs caractéristiques	99
5.2.4	État de base hydrodynamique	100
5.3	Particularité des inversions	102
5.3.1	Inversions locales de la viscosité	102
5.3.2	Expériences de références et zone d'inversion	102
5.4	Les expériences de Spin-Up	105
5.4.1	Spin-Up dans le cadre purement linéaire : des résultats peu exploitables	105
5.4.2	Spin-Up réalisés hors du régime strictement linéaire $\frac{\Delta\Omega}{\Omega} > 0.1$	105
5.5	Expériences oscillantes	106

5.5.1	Résultats	107
5.5.2	Discussion	111
5.6	Conclusions et comparaisons avec la convection thermique	115
6	Expériences en géométrie cylindrique	119
6.1	Convection thermique dans un cylindre en rotation	119
6.1.1	Caractéristiques générales de l'écoulement	119
6.1.2	Détermination du seuil de convection	120
6.2	Les particularités de la géométrie cylindrique vis-à-vis de la théorie du Spin-Up	121
6.3	Dispositif expérimental	124
6.3.1	Description	124
6.3.2	Le Traitement des données sur la vitesse	126
6.4	Les résultats	129
6.4.1	Les limitations du régime de paramètre et la fiabilité des mesures	129
6.4.2	Expériences de spin-up/spin-down isothermes	131
6.4.3	Expériences de spin-up/spin-down en présence de convection . .	133
6.4.4	Expériences oscillantes	133
6.4.5	Expériences de spin-up et spin-down, réalisées à $\Omega = 0.5 \text{ s}^{-1}$. .	134
6.5	Discussion	136
6.6	Bilan sur les expériences de convection en géométrie cylindrique	138
III	Couplage visco-magnétique à l'interface noyau manteau	141
7	Application au couplage noyau manteau	143
7.1	Introduction	143
7.1.1	La rotation de la Terre	143
7.1.2	Précession et Nutations	145
7.1.3	Des nutations à l'intérieur de la Terre	145
7.1.4	Couplages à l'interface noyau-manteau	149
7.1.5	Description des mouvements	149
7.2	Formulation mathématique du couplage magnéto-visqueux	151
7.2.1	Les approximations	152
7.2.2	Notations complexes	155
7.2.3	Conditions aux limites	156
7.2.4	Calcul des couples	156
7.3	Les modèles asymptotiques	157
7.3.1	Le modèle de Greenspan	158
7.3.2	Le modèle de champ faible	160
7.4	Le modèle visco-magnétique	162

7.4.1	Couplage et champ magnétique imposé	164
7.4.2	plan de l'article	168
7.5	Visco-magnetic torque at the core mantle boundary	169
7.5.1	Introduction	169
7.5.2	Mathematical formulation of the torques	172
7.5.3	Magnetic field at the CMB	175
7.5.4	Viscous effects at the CMB	178
7.5.5	Electrical conductivity at the bottom of the mantle	180
7.5.6	Discussion	183
7.5.7	Appendix : Torque formulation	185
7.6	Résultats et discussions	187
7.7	Conclusions et perspectives	189
IV	Conclusion générale et perspectives	191
8	Conclusion générale	193
9	Perspectives	195
9.1	Quelques pistes pour le prolongement du travail expérimental	195
9.2	Complémentarité essentielle de l'approche numérique à réaliser en parallèle	196
9.3	Et pour aller plus loin...	197
9.4	Aspects nutations et couplages	197
A	Notations	199
B	A propos de l'expérience DTeau	201
B.1	Expériences de Spin-Up linéaires	201
B.2	Expériences oscillantes	203
B.2.1	La chaîne de Traitement	203
B.2.2	Incertitudes et fiabilité	205
B.2.3	Précautions expérimentales	208
B.2.4	Précautions lors du traitement des données	209
B.2.5	Détermination à posteriori de l'angle α	211
C	Couplage à la CMB	213
C.1	Formules de changement de repère	213
C.2	Calcul du couple	213
	Bibliographie	217

Première partie

Introduction générale

Chapitre 1

Introduction géophysique

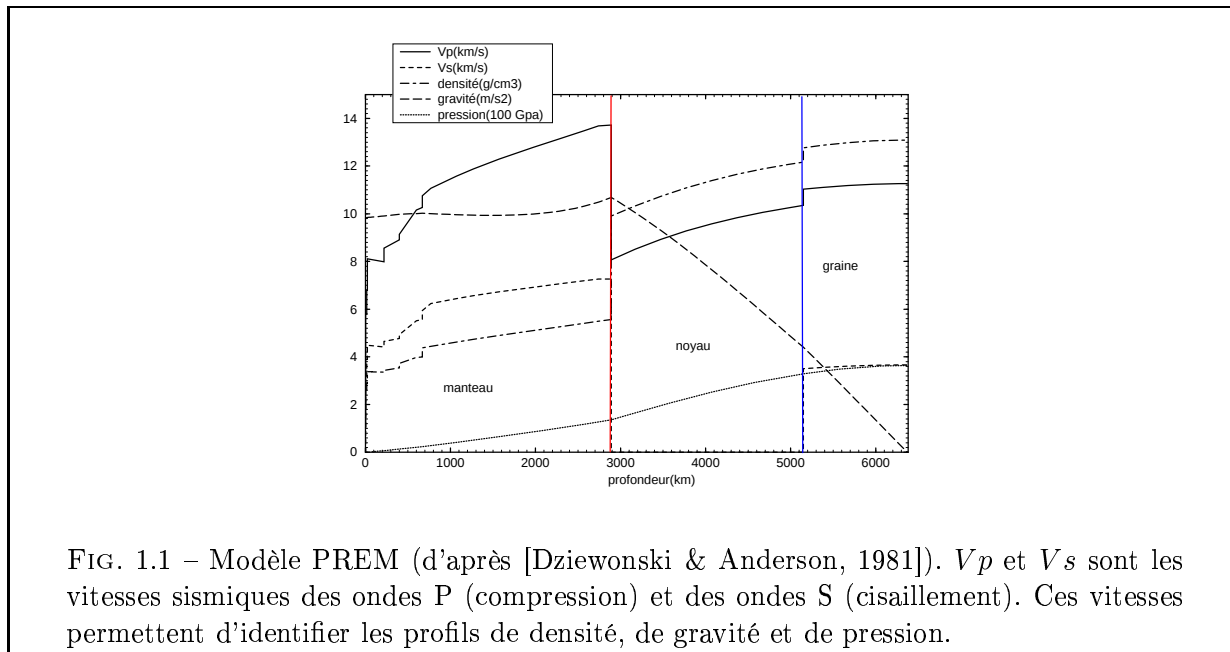
Le travail présenté ici s'ajoute aux nombreux travaux concernant la compréhension des mouvements des fluides en rotation. Le contexte se veut « géophysiquement universel » puisqu'il concerne aussi bien les océans que l'atmosphère, mais également une partie de l'intérieur de certaines planètes : celles possédant un noyau liquide. La description dynamique de ces fluides est très riche, elle implique de nombreuses échelles d'espaces et de temps et il est loin d'être évident de leur attribuer des comportements généraux. L'observation des uns et les modélisations des autres peuvent nous aider à identifier les processus physiques qui expliquent leur comportement. Dans notre cas, nous nous sommes attachés à décrire la réponse d'un fluide en rotation lorsque les conditions de rotation du récipient dans lequel il est contenu sont modifiées. Est ce que la réponse aux perturbations sera la même que l'on soit dans un régime stable et laminaire ou en régime turbulent ? Quels rôles jouent les frontières ? Influencent-elles l'écoulement par leur forme, leur rugosité ? Quelle est la part due au forçage (thermique ou mécanique) responsable des mouvements turbulents ? En filigrane de ces questionnements, nous avons cherché à relier les résultats de nos expériences à une éventuelle application au noyau liquide terrestre. Ces problématiques ont été abordées en évoquant sans trop le dire et de manière un peu naïve probablement, un certain principe de modélisation de la turbulence : le concept de viscosité apparente.

Ce concept se base sur l'idée suivante. L'écoulement d'un fluide visqueux comme une lave peut être considéré comme un écoulement visqueux. Chaque molécule de fluide agit sur ses voisines et ainsi par viscosité moléculaire une contrainte exercée en un point va se transmettre de proche en proche à l'autre bout de la masse fluide. Dans le cas d'un fluide turbulent, la transmission est assurée de manière plus efficace par les tourbillons présents au sein du fluide. On modélise cette action comme une viscosité macroscopique, la viscosité apparente ou encore turbulente. On peut voir sous cette idée, une certaine modélisation de la dissipation engendrée par la turbulence. La question est de savoir comment exploiter ce principe de manière appropriée pour modéliser le comportement des fluides géophysiques.

Au départ, cette thèse se voulait très générale sur le thème d'une modélisation de la turbulence des fluides géophysiques aussi bien les océans que le noyau liquide. Dans le

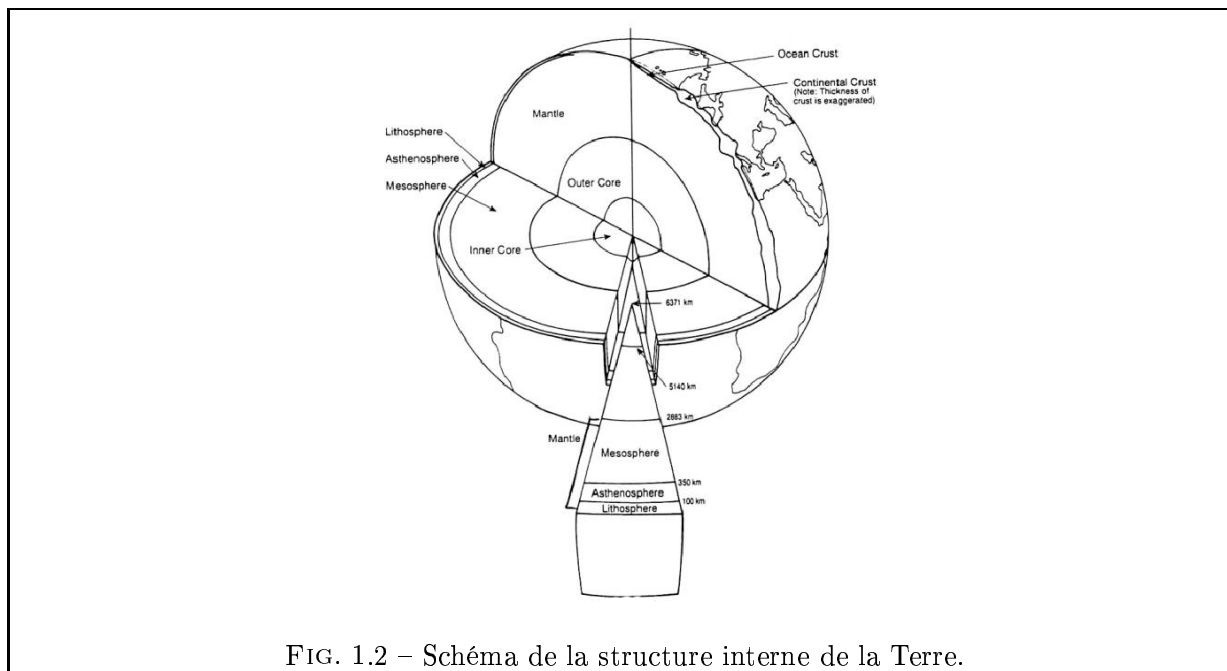
contexte de l'équipe grenobloise avec laquelle je travaille et en vue du temps qui m'a été accordé pour réaliser cette étude, je me suis focalisée plus particulièrement sur une application au noyau liquide. Alors avant de décrire plus spécifiquement l'étude qui a été menée, voyons en premier lieu quelles sont les contraintes de notre objet d'étude : la Terre. La Terre en tant qu'objet physique, présente encore actuellement de nombreux problèmes physiques souvent mal résolus. Avec une connaissance du système qui s'affine, les scientifiques arrivent cependant à converger vers un certain modèle de Terre.

1.1 La Terre interne : système dynamique bien contraint ?



Les observations sismologiques

Que connaissons-nous de ce système ? Quelles sont les certitudes et les paradoxes physiques ? Depuis le début du XX^{ème} siècle et l'avènement de la sismologie, les scientifiques ont mis en évidence que la Terre présentait différentes enveloppes concentriques. Ils ont utilisé le fait que la propagation des ondes sismiques dépende des caractéristiques du milieu mais aussi que les diverses réflexions soient les signatures de discontinuités. Lors d'importants séismes (Chili en 1960 ou Sumatra en 2004), certains modes propres de la Terre peuvent également être excités. Les fréquences de résonance de ces modes ainsi que leur dissipation, nous renseignent sur la distribution de densité et sur le caractère solide ou fluide des différentes enveloppes. Ainsi en construisant des modèles théoriques de propagation, et en les comparant aux observations, il est possible de déduire des propriétés physiques de la Terre à différentes profondeurs. En 1914, B. Gutenberg trouve la présence d'une interface majeure dans la structure interne : la transition noyau-manteau



(C.M.B pour Core Mantle Boundary). En 1926, Jeffreys combine observations sismologiques et étude des marées terrestres pour avancer l'hypothèse d'un noyau liquide. Et en 1936, Lehmann trouve une région (le noyau interne ou graine) dont les propriétés sont différentes de celles du noyau (réflexion des ondes P à l'interface graine-noyau, analyse des ondes PKiKP). Les grandes lignes de la Terre interne étaient dès lors tracées (figure 1.2).

La compilation des différents modèles qui peuvent expliquer au mieux ces observations permet d'aboutir à un modèle de Terre, comme le modèle PREM [Dziewonski & Anderson, 1981]. La figure 1.1 illustre les profils de densité, de gravité et de pression obtenus par ce modèle. La prise en compte de nouvelles données permettent également d'affiner les modèles de Terre. On cherche de nos jours à résoudre des échelles d'espaces plus fines, présentant notamment des hétérogénéités latérales. Pour cela, l'hypothèse de modèle à symétrie radiale (type PREM) est relaxée, et on passe à une utilisation intensive de modèles numériques à 3 dimensions, la tomographie 3D appliquée à l'ensemble du manteau peut voir le jour.

Ces observations sismologiques qui ne contraignent que partiellement le système sont complétées par d'autres types d'observations :

Les observations gravimétriques

Les mouvements des satellites qui gravitent autour de la Terre, nous renseignent sur la répartition de masse de cette dernière. Depuis peu de temps le développement des gravimètres supra-conducteurs permet d'enregistrer le champ de gravité à la surface de la Terre avec une excellente précision. L'enregistrement sur de longues périodes de

temps permet d'identifier les perturbations de gravité dues aux phénomènes de marées ainsi que l'identification de certains modes propres de la Terre lorsqu'ils sont excités [Hinderer & Crossley, 2000]. Dans ce contexte géophysique, les mesures de gravité sont souvent comparées aux observations de la rotation de la Terre (nutations/précession). Ces dernières permettent également d'inverser de nombreuses propriétés de l'intérieur de la Terre comme nous pourrons le voir au chapitre 7.

Les observations géochimiques

Les informations sur la pression, les répartitions de masses et températures amenées par les modèles sismologiques contraignent en partie la gamme de matériaux envisageable à l'intérieur de la Terre mais en partie seulement. L'analyse chimique des météorites est une science complémentaire qui va permettre d'évaluer les matériaux constitutifs de notre planète. En faisant l'hypothèse qu'avant sa différenciation la Terre était de composition sensiblement égale aux météorites indifférenciées, on peut connaître les constituants de la Terre primitive. Les éléments lourds migrent au centre progressivement. Ainsi on peut expliquer les répartitions de masse par un noyau constitué de fer pur (Fe) à 80 – 90 % et d'éléments légers (Si, O, S, Ni), alors que le manteau est constitué principalement de silicates de magnésium ($Mg - SiO_3$) et de silicates de fer ($Fe - SiO_3$), voir [Poirier, 1994] pour plus de détails. Au niveau des températures qui règnent dans le noyau, le fer est dans un état liquide. Mais sous l'effet antagoniste de la pression qui augmente avec la profondeur, le fer se solidifie pour des rayons inférieurs à 1220 km marquant la présence de la graine solide. L'identification des éléments va permettre ensuite d'en déduire des propriétés électriques ainsi que des degrés de compatibilité chimique entre les espèces pour les différentes enveloppes. Dans ce domaine, on assiste à de nombreuses controverses ([Morse, 2001]).

Les observations magnétiques

Le champ magnétique mesuré à la surface de la Terre est essentiellement d'origine interne. L'enregistrement de son évolution sur des temps géologiques grâce au magnétisme rémanent présent dans les laves, les sédiments et les fonds océaniques, permet de reconstituer un certain historique de notre planète et de formuler des hypothèses supplémentaires sur son évolution. Bien qu'on ne sache pas encore exactement comment fonctionnent tous les mécanismes à l'origine de la dynamo, on explique néanmoins la présence d'un champ magnétique par les mouvements du fluide conducteur que constitue le fer à l'intérieur du noyau liquide (voir ci-après). Ainsi, malgré l'inaccessibilité de l'intérieur de la Terre, nous obtenons une image assez précise de notre système. Pour les besoins de notre étude les deux zones qui présentent le plus d'intérêt et sur lesquelles je vais m'attarder un peu plus longtemps sont le noyau liquide et la discontinuité majeure que constitue la CMB.

1.1.1 Dynamique et dynamo dans le noyau liquide

L'observation du champ magnétique se fait depuis le XVI^{eme} siècle. Au début les physiciens attribuaient ce champ à la présence d'aimants permanents situés à l'intérieur de la Terre, mais rapidement ils se sont aperçus qu'au vu des températures qui règnent à l'intérieur de la Terre², on ne pouvait rassembler assez de matière aimantée pouvant expliquer une telle intensité de champ. Gauss en 1835 montra par l'introduction de la décomposition du champ magnétique en harmoniques sphériques que le champ était essentiellement d'origine interne. La présence de fer liquide mise en évidence au début du XX^{eme} siècle était l'ingrédient essentiel pour développer la théorie dynamo auto-excitée qui actuellement explique le mieux les observations. Cette théorie attribue l'origine du champ magnétique aux courants électriques circulant dans le noyau. Le fluide dont les mouvements sont entretenus par la convection est, en présence du champ ambiant, le siège de courants induits. Cette théorie dynamo est compatible avec l'observation des variations séculaires du champ magnétique ainsi que les phénomènes spectaculaires que constituent les inversions de champ. Quelles contraintes supplémentaires sur le noyau liquide amènent ces observations magnétiques ?

Elles sont de plusieurs types. Tout d'abord de manière qualitative, l'enregistrement paléomagnétique atteste de la présence d'un champ magnétique depuis quelques 3 milliards d'années. Ce temps est long devant le temps de diffusion magnétique à travers le noyau estimé à environ 10 000 ans. Le champ magnétique doit être alors entretenu ce qui amène à considérer un certain équilibre entre les mécanismes sources de génération du champ magnétique, l'induction de courant par les mouvements et la diffusion de ce dernier. Le nombre de Reynolds magnétique qui permet de quantifier ces deux effets est alors estimé comme étant de l'ordre de 100 pour la Terre. Les propriétés électriques du fer nous donnent une diffusivité magnétique de l'ordre de $1 \text{ m}^2/\text{s}$, ce qui permet d'identifier une vitesse caractéristique d'écoulement de l'ordre de 0.1 mm/s . Quelles sont les mécanismes qui peuvent générer ces mouvements ? Certains avancent l'hypothèse de mouvements générés par la précession, mais le candidat le plus sérieux semble être la convection. On s'intéresse alors à la thermique de notre planète et à savoir quels sont les moyens d'évacuer la chaleur accumulée lors de la phase d'accrétion. La convection générée par des différences de densité est un mécanisme efficace d'évacuation de cette chaleur. La Terre en se refroidissant se solidifie au centre, dégage de la chaleur latente ce qui permet d'entretenir les mouvements de convection thermique par le renouvellement d'une couche limite thermique chaude (de faible densité) à la surface de la graine. Cette solidification s'accompagne d'un rejet d'éléments légers dans la phase liquide qui vont participer de manière plus active encore à un deuxième type de convection dite compositionnelle (différence de densité amenée par la différence d'espèces chimiques). On a déjà une idée plus précise de la complexité et de la richesse que vont constituer les études de la dynamique du noyau, mais à ce titre beaucoup de choses restent mal contraintes. Notamment pour déterminer la vigueur de la convection, on a besoin de connaître de manière précise les températures qui bornent le système.

²Les températures du noyau sont bien supérieures aux températures de Curie au delà desquelles toutes roches perdent leurs propriétés ferromagnétiques

Or les températures de l'interface graine-noyau comme celles de la CMB restent inversées par des modèles de pression-densité. Elles constituent donc seulement des valeurs indicatives ($\approx 4000K \pm 1000K$ pour la CMB et $\approx 5000K \pm 1000K$ pour l'ICB (Inner Core Boundary)). De plus nous ne savons peu (voire pas) évaluer la disparité latérale de températures qui pourrait également entretenir d'importants flux de chaleur latéraux. Au vu des faibles valeurs de viscosité du fer liquide ($\nu \approx 10^{-7}m^2/s$), on peut s'attendre à ce que le noyau soit animé de mouvements turbulents. En effet à partir du nombre de Reynolds magnétique estimé précédemment, on peut déduire un nombre de Reynolds hydrodynamique, caractérisant l'état de turbulence, de 10^8 pour le noyau. Nous reparlerons en détails de la signification de ces nombres dans le chapitre 2. Le comportement aléatoire des variations du champ magnétique pourrait être le résultat d'une dynamique complexe. Les mouvements de petites échelles variant rapidement sont actuellement impossibles à étudier de manière numérique, mais leur influence sur la dynamique globale ne doit pas être ignorée. C'est dans ce contexte là qu'une certaine place reste accordée aux démarches expérimentales comme la nôtre.

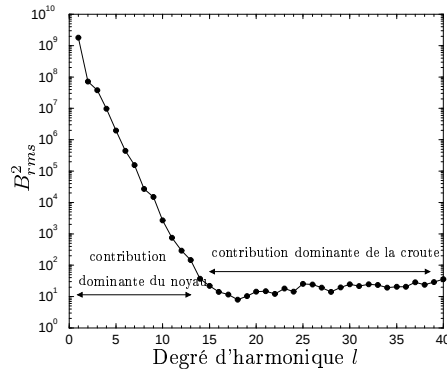


FIG. 1.3 – Spectre d'énergie magnétique d'origine interne à la surface de la Terre ($B^2_{rms}(l) = (l + 1) \sum_{m=0}^l ((g_l^m)^2 + (h_l^m)^2)$) déduit des observations d'après le modèle de [Sabaka *et al.*, 2004]

Dans un deuxième temps, de manière plus quantitative, les observations magnétiques permettent de contraindre par inversion le champ magnétique présent à la surface du noyau ainsi que le champ de vitesse surfacique. Les vitesses inversées vont venir compléter les hypothèses de mouvements convectifs. Tout ce travail nécessite de nombreuses étapes. La première étape est de reconstituer le champ magnétique d'origine interne en tous points de la surface du globe. Des séries correctes d'observations du champ magnétique sont disponibles depuis le début du $XX^{\text{ème}}$ siècle, grâce au développement d'observatoires un peu partout à la surface du globe. Ces séries ont comme avantage de constituer un enregistrement sur de longues périodes de temps, et permettent de détecter les lentes variations temporelles du champ magnétique (variations séculaires). Cependant la répartition géographique des observatoires ne permet pas une résolution spatiale fine et peut amener des biais dans la détermination des coefficients de Gauss issus de ces observations. Depuis une vingtaine d'années les observations

spatiales faites grâce aux magnétomètres embarqués permettent une observation du champ à des échelles plus fines. Après un filtrage des contributions d'origine externe, on peut créer un modèle analytique de champs qui reflète au mieux toutes les données dont on dispose. Pour cela on utilise une décomposition en harmoniques sphériques. V , fonction potentielle telle que $\mathbf{B} = -\mu_0 \nabla V$ contraint le champ en dehors des sources magnétiques :

$$V(r, \theta, \varphi) = R_T \sum_{l=0}^{l=+\infty} \sum_{m=0}^{m=l} (l+1) \left(\frac{R_T}{r}\right)^{l+1} (g_l^m \cos(m\varphi) P_l^m(\cos \theta) + h_l^m \sin(m\varphi) P_l^m(\cos \theta)) \quad (1.1)$$

où g_l^m, h_l^m sont les coefficients de gauss et P_l^m la base des polynômes associés de Legendre (voir la thèse de [Eymin-Petot-Tourtollet, 2004] pour la représentation géométrique de cette décomposition), R_T le rayon de la surface de la Terre et (r, θ, φ) les coordonnées sphériques du point considéré. A partir de ce modèle de champ magnétique interne, il faut ensuite isoler les contributions venant de la croûte (magnétisme rémanent) de celles venant du noyau. La figure 1.3 présente une cassure de pente. La partie plate du spectre indique que les sources magnétiques sont proches de la mesure, cette partie est donc attribuée au magnétisme de la croûte. L'extrapolation du champ magnétique à la surface du noyau ne peut donc se faire que pour les grandes échelles. Sous l'hypothèse d'un manteau isolant, on peut déduire alors une carte magnétique du champ à l'interface noyau manteau pour les échelles allant jusqu'à $l = 13$. L'allure plate du spectre à la CMB nous conforte dans l'hypothèse d'une équipartition magnétique sur l'ensemble du noyau et de la théorie dynamo qui va avec. Pour la partie de plus petite échelle, non visible, plusieurs hypothèses peuvent être envisagées. Certains prolongeraient volontiers la tendance observée pour les grandes échelles, d'autres envisagent un ou plusieurs pics d'énergie magnétique aux échelles d'injection d'énergies cinétiques (injection dynamo). Différentes configurations sont, à ce titre, envisagées au chapitre 7.

Il est à noter qu'on ne voit à la surface qu'une partie du champ magnétique présent dans le noyau en utilisant l'hypothèse de flux gelé. Celle correspondant au champ poloïdal. Le champ toroïdal a priori de forte intensité n'apparaît pas à la surface en raison de sa géométrie (les lignes de courant ne sortent pas du noyau).

La contrainte des mouvements de surface se fait par l'interprétation du champ magnétique à la surface du noyau. Les variations séculaires du champ magnétique permettent d'obtenir des cartes de vitesses à grande échelle, mais la non unicité des solutions amène souvent des débats dans la communauté.

1.1.2 Propriétés de l'interface noyau-manteau

Là encore les méthodes sismologiques apportent une vision particulière de cette interface même s'il n'est pas toujours très facile d'expliquer par des processus physiques l'imagerie faite par les ondes. Ainsi juste au dessus de la CMB on modélise une couche nommée D'' épaisse de $250 \pm 100 \text{ km}$ correspondant à une zone de faible vitesse de propagation

(Ultra Low Velocity Zone), avec de l'anisotropie sismique et des réflexions ([Lay *et al.*, 1998]). Ces caractéristiques ne sont pas présentes partout et en même temps, on fait la distinction entre des zones à ULVZ, avec de l'anisotropie et sans discontinuité et d'autres où c'est l'inverse. Il y a donc beaucoup de chose à dire sur cette couche (pour une revue voir [Garnero, 2000]). Tout d'abord par rapport au reste du manteau, cette couche présente de fortes variabilités latérales (hétérogénéités chimiques, topographie?). Ensuite la ULVZ peut s'interpréter comme une zone plus chaude ou chimiquement différente. Plusieurs interprétations sont alors possibles, certains l'expliquent par la présence d'une nouvelle phase de perovskite (la post-perovskite) dont les propriétés sont encore peu connues [Duffy, 2004; Murakami *et al.*, 2004]. D'autres y voient une zone partiellement fondue qui pourrait contenir certains alliages de fer dans le manteau [Manga & Jeanloz, 1996]. Devant les nombreuses incertitudes minéralogiques d'une telle zone il est délicat d'en déduire une certitude sur les propriétés magnétiques de cette même couche. Ainsi nous avons une contrainte faible sur ce paramètre. On peut travailler avec des modèles correspondants à une couche de silicate similaire d'un point de vue magnétique au reste du manteau isolant ([Poirier *et al.*, 1998]), ou imaginer une couche de très forte conductivité électrique (jusqu'à atteindre celle du noyau liquide) à la base de cette D'' ([Buffett *et al.*, 2002]). La différence entre ces deux modèles va fortement influencer les résultats de notre modélisation du couplage à l'interface noyau manteau (chapitre 7). De plus les hétérogénéités latérales peuvent avoir de l'influence non seulement sur les courants induits mais également sur l'écoulement du noyau liquide aux abords de cette couche.

La sismologie permet de résoudre les irrégularités topographiques de la CMB à grande échelle [Sze & van der Hilst, 2003]. On peut avoir à l'esprit que le contraste physique et chimique de cette zone est similaire au contraste entre l'océan et le plancher océanique. Les petites échelles ne sont pas encore résolues, mais déjà certains auteurs avancent l'hypothèse d'une rugosité ([Narteau *et al.*, 2001]). Ces irrégularités pourraient être le siège de phénomènes de précipitations des éléments légers ([Morse, 2001; Buffett *et al.*, 2000]). La CMB est donc sujet à controverse, particulièrement pour le côté manteau. Par analogie avec les nombreuses différences entre le manteau et la D'' , il est légitime de se poser la question de savoir si de telles différences existent entre l'intérieur du noyau et la couche limite proche de la frontière notamment en terme de viscosité. Néanmoins, la vigueur de la convection et donc du mélange, ne devrait pas nous amener à considérer un fluide radicalement différent entre l'intérieur et la couche limite.

1.2 Les paradoxes

Nous venons de voir quelles étaient les observables (principalement le champ magnétique pour le noyau et la sismologie pour le manteau). Nous avons également abordé les processus admis (convection dans le noyau, dynamo). L'intervention des modèles numériques en mécanique des fluides est devenu un outil incontournable pour relier la physique et les observables. Ainsi depuis le milieu des années 90, on voit aboutir des « modèles dynamo » dont le comportement global ressemble à certaines observables

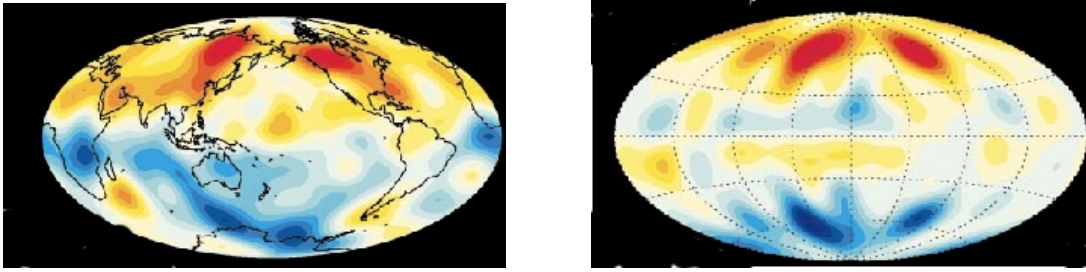


FIG. 1.4 – Composante poloïdale du champ magnétique à la C.M.B. (a) déduit des observations à partir des données de 1980 (b) déduit du modèle numérique de [Christensen *et al.*, 1999] pour $E \approx 10^{-4}$, $Re \approx 100$ et $Pm \approx 1$.

de la Terre comme le champ magnétique. Le modèle de [Glatzmaier & Roberts, 1995] reproduit un champ magnétique plus ou moins stable sur de longues périodes de temps (champ entretenu), présentant des phénomènes d'inversions. D'autres modèles ont vu le jour, parfois reproduisant des géométries dipolaires ou quadripolaires et ce dans une large gamme de paramètres. Cependant la physique présente derrière ces modèles est assez loin de celle admise pour la Terre (figure 1.4). La raison fondamentale est que malgré le développement des gros calculateurs, il n'est pas possible numériquement de décrire intégralement les mouvements de turbulence qui s'opèrent à toutes les échelles d'espace et sur des constantes de temps très rapides ($Re \approx 10^8$). Les couches limites sont également un problème. Pour le noyau, l'ordre de grandeur de la couche limite visqueuse serait d'un mètre, sa prise en compte est donc difficile dans des modèles où les mailles représentent au mieux la dizaine de kilomètres. Et pourtant dans le cadre des écoulements dominés par la rotation, ces couches jouent un rôle fondamental (paragraphe 2.2.2). Plusieurs contournements de la difficulté sont envisageables. Au sein de l'équipe géodynamo, les numériciens ont pris le parti de miser sur le caractère 2D de l'écoulement en séparant les grilles relatives à la vitesse de celles relatives aux champs magnétiques dans leurs simulations. Ces modèles commencent à donner quelques résultats [Schaeffer & Cardin, 2005] mais restent loin des paramètres de la Terre (avec des viscosités un million de fois plus fortes). Pour les simulations plus traditionnelles, la technique la plus répandue consiste à utiliser l'hypothèse d'une viscosité forte. Ces modèles utilisent des nombres d'Ekman, caractéristiques du rapport entre les effets visqueux et les effets de la rotation, de l'ordre de 10^{-5} , soient des systèmes 10^{10} fois plus visqueux que ne l'est le noyau. Des techniques permettant d'augmenter la viscosité en fonction de l'échelle du mouvement (hypothèses d'hyper viscosité voir 2.4.1) sont également utilisées. La justification physique reste délicate. Certains peuvent y voir la modélisation de l'absence de prise en compte de la turbulence (modèle de viscosité turbulente). Mais il faut garder à l'esprit que ces modèles sont construits à la base avec une certaine part de paramétrisation, faute de pouvoir faire mieux. Finalement il est presque étonnant que les champs magnétiques produits par ces modèles soient si proches de ceux de la Terre. Peut-on si facilement s'affranchir des mouvements de petites échelles ? Ces régimes dynamo n'ont-ils en commun avec la Terre, que l'observation d'un champ magnétique partiellement identifié ou sont-ils réellement semblables d'un

point de vue plus global. Ce type de questionnement nourrit notre volonté de découvrir de manière expérimentale l'influence de la turbulence sur les systèmes en rotation.

1.3 Apport de la géophysique externe

La dynamique des noyaux planétaires est assez similaire à celle des atmosphères et océans en raison de la prédominance des effets liés à la rotation de la planète. Les idées et concepts développés en océanographie peuvent donc nous être utiles. La modélisation de la turbulence est pour les atmosphériciens un souci permanent, puisqu'on leur demande non seulement d'être capables de décrire l'évolution du temps à des périodes de temps plus ou moins longues (du jour pour les prévisions météorologiques à la centaine d'années pour l'évolution climatique) et cela pour des résolutions de plus en plus fines (mailles équivalentes au kilomètre quand la dynamique du noyau est évaluée à la dizaine de kilomètres près). Leur avantage non négligeable réside en une observation plus directe de la dynamique, permettant de développer plus facilement une paramétrisation adéquate et des techniques d'assimilation de données (incrémentations des champs de vitesses, pressions, températures).

Ainsi historiquement, l'idée du modèle simple de viscosité turbulente a pu trouver un support dans l'observation des couches d'Ekman océaniques (couches limites avec l'atmosphère ou les côtes). L'épaisseur théorique de ces couches visqueuses (voir paragraphe 2.2.2) est proportionnelle à la racine carrée de la viscosité moléculaire. Dans le cas des océans leurs épaisseurs typiques devraient être de l'ordre du centimètre alors que l'observation conclue à des épaisseurs beaucoup plus grandes amenant des viscosités apparentes jusqu'à six ordres de grandeurs supérieures à celle de l'eau. Toujours par le biais des observations, il est possible d'évaluer le mélange de traceurs par les tourbillons d'échelles moyennes. Pour les océans on peut trouver des valeurs typiques de diffusion horizontale de l'ordre de 100 à 1000 $m^2 s^{-1}$ à comparer avec la viscosité de l'eau valant seulement $10^{-6} m^2 s^{-1}$. Alliant ces observations à des modèles plus sophistiqués, tenant compte notamment des propriétés de la turbulence bidimensionnelle, les océanographes peuvent élaborer une paramétrisation efficace de la turbulence dans leurs modèles de simulation ([Tréguier, 2002; Chassignet & Verron, 1990]).

En matière d'observation des couches d'Ekman présentes aux limites du noyau, le géophysicien interne fait preuve d'une certaine cécité. La sismologie ne permet pas de résoudre des échelles inférieures au kilomètre à cette distance-là de la surface, et même si elle le pouvait, les ondes sont sensibles aux différences de densité, peu aux modifications de l'écoulement entre la couche et l'intérieur du fluide. Dès lors il faut développer une autre technique d'approche. Pour notre part nous avons choisi la modélisation expérimentale. Il s'agit donc de développer un protocole mettant en jeu les processus de recirculation dans les couches limites visqueuses afin d'en déduire une mesure représentative du mélange efficace (pour des régimes plus ou moins turbulents).

1.4 Approche du problème

La tradition expérimentale était très forte au sein de l'équipe géodynamo. Julien Aubert et Nicolas Gillet ont consacré une partie de leur thèse à travailler respectivement sur la convection thermique dans un système en rotation et sur ce même système en présence de champ magnétique. L'expérience de convection constituait un premier dispositif capable de générer de la turbulence que nous allions pouvoir utiliser avec de l'eau ou du gallium. En préambule à l'expérience DTS (Derviche Tourneur Sodium) qui consiste en une expérience de Couette sphérique en rotation rapide avec du champ magnétique, a été construit DTeau. Cet analogue, vise à étudier l'hydrodynamique d'un système sphérique soumis à la rotation différentielle, particulièrement dans le cas où l'on s'éloigne du seuil d'instabilité. Nathanaël Schaeffer a consacré une grande partie de sa thèse sur la simulation numérique de cet écoulement, travail qui fût complété par des mesures expérimentales. L'utilisation de ce dispositif permet de compléter l'étude réalisée avec l'expérience de convection, en isolant un autre mécanisme de génération de la turbulence : le forçage mécanique induit par une rotation différentielle.

Au début de cette thèse, nous avons comme volonté d'identifier une réaction des fluides tournants vis-à-vis de la turbulence, à caractère universel. Ainsi nous avons cherché à développer une collaboration avec des mécaniciens de fluides travaillant sur une application aux écoulements externes (atmosphères et océans). Dans cette optique nous avons travaillé sur un dispositif expérimental élaboré dans l'équipe de mécanique des fluides du département de physique d'Oxford¹, sous la supervision de Peter L. Read. Ce dispositif utilise comme forçage la convection thermique entre un fond chaud et un couvercle froid, dans un récipient de forme cylindrique, toujours en rotation. La comparaison avec le résultat des expériences précédentes devrait permettre d'isoler la contribution de la géométrie du récipient dans le processus d'échange de quantité de mouvement entre les parois et le fluide.

L'approche expérimentale n'est pas la plus répandue dans le domaine de la turbulence géophysique qui présente certaines caractéristiques propres au caractère globalement bidimensionnel de l'écoulement (voir paragraphe 2.4.1).

Certaines expériences sur des systèmes turbulents plus classiques servent néanmoins de références pour les géophysiciens. Parmi elles, celle de [Lathrop *et al.*, 1992] présente des résultats de mesure de couplage sur les parois d'un système de Couette Taylor cylindrique. Pour des régimes faiblement turbulents le couplage G est proportionnel à $Re^{1.5}$ où Re est le nombre de Reynolds, rapport des effets d'inertie sur les effets visqueux. Lorsque le système évolue vers des régimes fortement turbulents ($10^3 < Re < 10^6$), l'auteur montre que les contraintes exercées sur la paroi ne peuvent plus s'exprimer comme une puissance fixe du nombre de Reynolds. La puissance augmente à mesure que Re augmente. Une mesure des quantités fluctuantes lui permet de corrélérer cette augmentation nette des contraintes sur la paroi à l'augmentation des fluctuations.

Une autre étude portant sur les diffusions d'encre dans un système en rotation [Tam & Swinney, 1987] présente par ailleurs le même type de comportement (augmentation

¹A.O.P.P. (Atmospheric, Oceanic and Planetary Physics) Department.

de la puissance dans la loi $D_{eff} = Re^\alpha$). Ces validations expérimentales trouvent un très bon écho auprès de la communauté travaillant sur l'accrétion des disques proto-planétaires, qui pour expliquer le transport de moment angulaire ont eux aussi besoin d'une viscosité efficace beaucoup plus grande que la viscosité moléculaire ([Dubrulle & Knobloch, 1992]). Plus proche de nous, [Brito *et al.*, 2004] avec l'expérience de convection en eau estime le temps de synchronisation du fluide consécutif aux expériences de spin-up (augmentation de la vitesse de rotation du récipient). Dans un régime au delà du seuil de convection, il montre que la viscosité efficace augmente à mesure que l'on s'éloigne du seuil. Ces résultats seront repris plus en détail au chapitre 4.

Ce document s'articule ainsi en trois parties. Dans la première partie, nous introduisons les concepts mathématiques utilisés par la suite. Ce chapitre présente donc les équations formelles qui permettent de faire la relation entre les vitesses d'écoulement que nous allons mesurer et la viscosité du fluide. J'ai également cherché à passer en revue les modèles de viscosité apparente les plus simples à ma connaissance. Ces premières modélisations sont directement utilisées pour interpréter de manière qualitative certains de nos résultats.

La deuxième partie traite du volet expérimental de cette thèse. Après une description du protocole mis en place et des critères de qualité qui y sont associés, je présente successivement les travaux réalisés sur les 3 dispositifs expérimentaux. Une conclusion présentant les résultats propres à chaque dispositif figure en fin de chaque sous partie. Une synthèse générale pour mettre en vis-à-vis les résultats propres à chaque dispositif est proposée à la fin du document.

La troisième partie est une application du concept de viscosité apparente à la dynamique du noyau. Le chapitre présente un modèle de couplage de l'interface noyau-manteau. Celui-ci se base sur l'imbrication d'une couche limite visqueuse et d'une couche limite magnétique à la CMB apparaissant en réponse à une différence de rotation entre le noyau liquide et le manteau. Différents régimes de couplage sont envisagés. Ceux-ci s'étendent entre deux cas extrêmes : couplage totalement visqueux ou couplage totalement magnétique. Les modèles de nutations permettent à partir de l'interprétation des données VLBI sur la position de l'axe de rotation de la Terre, de contraindre une constante de couplage de la CMB. Il est possible d'évaluer alors les régimes magnéto-visqueux envisageables aux abords de la frontière noyau-manteau.

La quatrième et dernière partie présente une synthèse des conclusions et perspectives de ce travail de thèse.

Dans tout ce manuscrit, les quantités en caractères **gras** représentent des vecteurs. En principe, chaque symbole utilisé est expliqué lors de sa première apparition. Néanmoins il vous sera probablement utile de consulter l'annexe (A) qui reprend la signification des symboles de ce document.

Chapitre 2

Concepts de mécanique des fluides et mise en équation

2.1 Mécanique des fluides en rotation

L'étude de certains fluides géophysiques, tels que les océans, les atmosphères et les noyaux liquides nécessite un certain savoir faire en terme de changement de repère. On pourrait étudier la dynamique de ces fluides en se plaçant dans un référentiel galiléen, mais l'homme étant lui même à la surface d'une planète tournante, il lui est beaucoup plus facile de comprendre et d'écrire les mouvements et conditions aux limites dans le référentiel attaché à la rotation de la Terre, Ω . Soit $\mathcal{R}_T$, le référentiel lié à la rotation de la Terre et $\mathcal{R}_a$, un référentiel absolu. La vitesse relative dans le repère tournant se déduit de la vitesse absolue par la formule suivante :

$$(\mathbf{v})_{\mathcal{R}_a} = (\mathbf{v})_{\mathcal{R}_T} + \Omega \times \mathbf{r} \quad (2.1)$$

$$\left(\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_a} = \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_T} + 2\Omega \times \mathbf{v} + \Omega \times \Omega \times \mathbf{r} + \frac{\partial \Omega}{\partial t} \times \mathbf{r} \quad (2.2)$$

Cette expression fait apparaître l'accélération de Coriolis et l'accélération centrifuge (deuxième et troisième termes du membre de droite de l'équation 2.2). Le terme de Coriolis joue un rôle essentiel dans la dynamique des fluides cités plus haut. Parfois contre intuitive, cette accélération va favoriser certains mouvements par rapport à l'axe de rotation plutôt que d'autres. Le dernier terme (connu sous le nom d'accélération de Poincaré) est, dans la plupart des cas, négligeable puisque pour les échelles de temps qui nous concernent, on supposera Ω indépendant du temps.

Nom	Symbole	Signification
Nombre d'Ekman	$E = \frac{\nu}{\Omega R^2}$	forces visqueuses / forces de Coriolis
Nombre de Rossby	$Ro = \frac{U}{\Omega R}$	forces inertielles / forces de Coriolis
Nombre de Reynolds	$Re = \frac{UR}{\nu}$	forces inertielles / forces visqueuses
Nombre de Prandtl	$Pr = \frac{\nu}{\kappa}$	viscosité / diffusivité thermique
Nombre de Rayleigh	$Ra = \frac{\alpha \rho g \Delta T R^3}{\nu \kappa}$	forces d'Archimède / effets dissipatifs (visqueux et thermiques)
Nombre de Prandtl magnétique	$Pm = \frac{\nu}{\eta}$	viscosité / diffusivité magnétique
Nombre d'Elsasser	$\Lambda = \frac{\sigma B^2}{\rho \Omega}$	forces magnétiques / forces de Coriolis
Nombre de Reynolds magnétique	$Re_m = \frac{UR}{\eta}$	effets convectifs / diffusion magnétique

TAB. 2.1 – Nombres sans dimension

2.1.1 Équation de la dynamique et conservation de la masse

L'équation de la dynamique des fluides (ou équation de Navier-Stokes) exprimée dans le référentiel $\mathcal{R}_T$, pour un fluide incompressible s'écrit :

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \right) = -\nabla P + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{f} \quad (2.3)$$

où $\mathbf{v}$ est le champ de vitesse, ρ est la densité et μ la viscosité dynamique du fluide. P désigne la pression et $\mathbf{f}$ regroupe toutes les autres forces qui agissent sur le fluide. Parmi elles, nous aurons par la suite à prendre en compte les forces d'Archimède ainsi que les forces de Lorentz si le fluide est conducteur. Certaines forces dérivent d'un potentiel. C'est le cas notamment de la force centrifuge qui peut se mettre sous la forme $\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) = \nabla \left(\frac{1}{2} \Omega^2 r_\Delta^2 \right)$. Nous notons Π le terme de pression corrigée qui regroupe la pression dynamique du fluide et la force centrifuge.

Une deuxième loi permet de contraindre davantage le système, il s'agit de la conservation de la masse. Dans le cas d'un écoulement incompressible on exprime cette équation de la manière suivante :

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2.4)$$

2.1.2 L'adimensionnement

Au vu du nombre de termes présents dans l'équation de Navier-Stokes, il est particulièrement utile de pouvoir quantifier l'importance des différents membres de l'équation afin d'en négliger certains devant d'autres et espérer pouvoir résoudre cette équation.

L'information est contenue dans les nombres sans dimension que nous allons créer à partir des grandeurs caractéristiques. Pour un problème donné, par exemple la Terre, nous choisissons une échelle de longueur R qui pourrait être le rayon terrestre, ou encore le rayon du noyau liquide et nous prenons pour le temps Ω^{-1} . Ces deux grandeurs associées permettent d'obtenir une vitesse caractéristique ΩR . En prenant l'équation 2.3, et en normalisant les quantités dimensionnées par leurs valeurs caractéristiques, on obtient l'équation suivante :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + 2\mathbf{e}_z \times \mathbf{v} = -\nabla \Pi + E \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{f}_{\text{adim}} \quad (2.5)$$

avec

$$E = \frac{\nu}{\Omega R^2} \quad (2.6)$$

où $\nu = \mu/\rho$ est la viscosité cinématique, et $(\mathbf{v}, r, t)$ le champ de vitesse, le rayon et le temps adimensionnés. Le nombre d'Ekman E mesure le rapport entre les forces visqueuses et les forces de Coriolis. Nous aurions pu également choisir une vitesse caractéristique U , une échelle de longueur R et construire notre temps caractéristique à partir de l'association des deux grandeurs précédentes. L'équation précédente aurait fait alors apparaître deux autres nombres sans dimension : le nombre de Rossby $Ro = \frac{U}{\Omega R}$ qui quantifie le rapport des forces d'inerties et des forces de Coriolis ainsi que le nombre de Reynolds $Re = \frac{UR}{\nu}$.

De manière générale, les différents nombres vont nous permettre de définir l'état d'un système. Si deux systèmes différents sont décrits par la même combinaison de nombres caractéristiques (valeurs identiques pour E , Re ...), alors l'écoulement de l'un pourra se déduire de l'écoulement de l'autre puisqu'ils obéiront à la même équation sans dimension. Néanmoins, dans la réalité il est difficile d'obtenir une similitude parfaite et là est l'enjeu du dimensionnement d'expériences. Le tableau 2.1 présente différents nombres sans dimension que nous rencontrerons tout au long de ce manuscrit. On peut se référer à l'annexe (A) pour obtenir la signification des symboles non explicités dans le tableau. Quelques valeurs de nombres sans dimension associés à divers fluides géophysiques sont présentées dans le tableau 2.2. Tous présentent des nombres d'Ekman faibles. Bien que leurs comportements thermiques puissent être différents (nombres de Prandtl variable), une caractéristique semblable des différents systèmes semble être leur nombre de Reynolds. Si le dimensionnement est pertinent (ici on se base sur l'épaisseur de la couche), au vu des valeurs fortes de Re , on peut supposer que ces systèmes géophysiques sont dans des régimes turbulents.

2.1.3 La contrainte de Proudman-Taylor

En prenant le rotationnel de l'équation 2.5, on obtient l'équation de la vorticité χ qui a comme avantage d'éliminer le terme de pression :

Ordre de grandeur pour	noyau liquide terrestre	océan	atmosphère jovienne
E	10^{-16}	10^{-8}	10^{-8}
Ro	10^{-4}	10^{-1}	10
Re	$10^8 - 10^{12}$	10^7	10^9
Pr	0.1	7	1
Ra	10^{30}	10^{21}	10^{24}
Pm	10^{-5}	—	—
Λ	0.1 — 1	—	—
Re_m	1 — 100	—	—

TAB. 2.2 – Nombres caractéristiques pour différents objets géophysiques d’après [Nataf & Sommeria, 2000] et [Boubnov & Golitsyn, 1995].

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} + ((\mathbf{v} \cdot \nabla) \chi - (\chi \cdot \nabla) \mathbf{v}) - 2 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} = E \nabla^2 \chi \quad (2.7)$$

La dynamique des fluides en rotation rapide dans un récipient de surface rigide, montre un caractère particulier, celui de tendre vers un écoulement bidimensionnel dans le plan perpendiculaire à l’axe de rotation. Cette propriété se déduit de l’équation 2.7.

Supposons que le terme de transport convectif soit faible ($Ro \ll 1$) et que l’écoulement soit quasi-stationnaire, ce qui permet de négliger les trois premiers termes de l’équation 2.7. Supposons maintenant le fluide très peu visqueux $E \ll 1$, la contrainte de Proudman Taylor s’écrit :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} = \mathbf{0} \quad (2.8)$$

Ce résultat pourrait se décomposer en un mouvement bidimensionnel dans le plan perpendiculaire à l’axe de rotation et une translation parallèle à ce même axe, tous deux indépendants de z . Aussi, si les conditions aux limites imposent une vitesse verticale nulle au bord (et c’est souvent le cas), on aura $v_z = 0$ et le mouvement sera alors bidimensionnel. On qualifie ces écoulements de mouvements géostrophiques et les écoulements étudiés expérimentalement seront soumis à cette contrainte forte. Les expériences présentées dans la thèse de Nathanaël Schaeffer (Schaeffer [2004]), montrent que pour $(Ro_d < 0.26)$ ¹ et $(E < 10^{-4})$, les structures observées tendent à rester parallèles à l’axe de rotation, exhibant de ce fait le caractère quasi - bidimensionnel de l’écoulement.

¹La définition prise pour le nombre de Rossby caractéristique de la rotation différentielle est $Ro_d = \frac{\Delta \Omega R_i}{\Omega R}$, où R_i est le rayon de la sphère interne et R le rayon moyen du récipient, voir le paragraphe 5 pour plus de précision sur le dispositif expérimental associé.

2.2 Les couches limites

2.2.1 Avant propos

Pour des écoulements à faible nombre d'Ekman le comportement du fluide loin des parois peut s'apparenter à l'écoulement d'un fluide parfait (le modèle géostrophique en est une illustration). Néanmoins ces solutions doivent se raccorder aux conditions imposées aux limites, notamment celles de non-glissement sur les parois (condition propre à tous fluides réels). Ceci se fait via les couches limites visqueuses. Dans le cas des fluides en rotation, nous parlons de couches d'Ekman.

Au cours de cette ouvrage nous allons également rencontrer des couches limites thermiques, lorsque nous parlerons des mouvements engendrés par convection thermique, mais aussi de couches limites magnétiques, lorsque nous aborderons le problème de couplage visco-magnétique à l'interface noyau-manteau. De manière générale une couche limite visqueuse, thermique ou magnétique est caractérisée tout d'abord par son épaisseur. Là encore les nombres sans dimension vont jouer un rôle important puisqu'ils vont nous permettre d'évaluer l'épaisseur caractéristique de chaque couche. Pour le problème dynamique, l'épaisseur de la couche limite visqueuse est de l'ordre de $\delta_\nu \sim (\nu/\Omega)^{1/2}$ (la dynamique de cette couche sera détaillée dans le paragraphe suivant).

Pour ce qui concerne les couches limites magnétiques, on peut en distinguer deux sortes : les couches limites magnétiques type effet de peau et les couches limites d'Hartman. Les premières correspondent à des couches purement diffusives, qui apparaissent dans tout milieu conducteur, en présence d'un champ fluctuant externe. Soit ω la pulsation de l'onde magnétique et η la diffusivité magnétique du milieu. On définit par $\delta_m \sim (2\eta/\omega)^{1/2}$ l'épaisseur de peau sur laquelle l'onde magnétique incidente pénètre dans le milieu. Un autre type de couche magnétique constitue les couches d'Hartman. On les trouve dans les écoulements réels (visqueux). Elles résultent de l'équilibre entre les forces de Laplace qui apparaissent dans un écoulement en présence de champ magnétique (paragraphe 2.5.2) et les forces visqueuses. On définit $Ha^2 = \frac{\sigma B_o^2 h^2}{\rho \nu}$ le carré du nombre d'Hartman caractéristique du rapport des deux forces précédentes. Quand $Ha \gg 1$, ces couches sont très fines d'épaisseurs adimensionnées $\delta_{Ha} \sim Ha^{-1}$.

La notion de couche limite thermique est à manipuler avec un peu plus de finesse. Elle intervient dans l'évaluation des transferts de chaleur. Ces couches résultent de l'association des effets de la convection de la chaleur par le champ de vitesse et du transfert diffusif transverse. Le transfert par diffusion peut être assuré par le transfert diffusif de chaleur ou par le transfert de quantité de mouvement, d'où l'importance du nombre de Prandtl ($P = \nu/\kappa$) dans l'évaluation de la nature de la diffusion. On peut considérer qu'à l'intérieur de la couche thermique les échanges de chaleur diffusifs dominent. Ces couches apparaissent en présence de convection développée comme interface nécessaire entre un milieu interne où la température est rendue homogène par la convection, et les conditions aux limites de températures imposées. Par analogie avec les couches limites visqueuses et son gradient de vitesse, le gradient de température est très important à

l'intérieur de la couche. On définit le nombre de Nusselt Nu comme le rapport entre le flux en présence de l'écoulement et celui qui serait obtenu sans effet convectif (flux total sur flux diffusif). Les simulations de Nicolas Gillet ([Gillet, 2004]) réalisées loin du seuil dans une sphère en rotation ainsi que les travaux expérimentaux de [Sumita & Olson, 2003] réalisés à $P \gg 1$ évaluent l'épaisseur des couches limites thermiques à $\delta_T \sim Nu^{-1}$. $Nu = \frac{Q_t D}{\kappa \Delta T}$ est le nombre de Nusselt, rapport du flux total de chaleur évacuée (Q_t) sur la chaleur évacuée par conduction. C'est une mesure de l'amplification locale du transfert de chaleur dans le fluide due à ses mouvements.

Il est à noter que l'on ne parlera de couches limites que lorsque les épaisseurs de ces dernières sont faibles, c'est à dire $\delta_x \ll 1$. Dans ce cas là, nous pourrons faire les hypothèses suivantes :

1. les variations de grandeurs dans la direction perpendiculaire aux parois sont fortes devant les variations parallèles à la paroi. Si l'on prend l'exemple simple d'une paroi plane dans le repère cartésien (u_x, u_y, u_z) défini par le plan $z = 0$, alors cette première hypothèse nous donne :

$$\frac{\partial}{\partial z} \gg \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \quad (2.9)$$

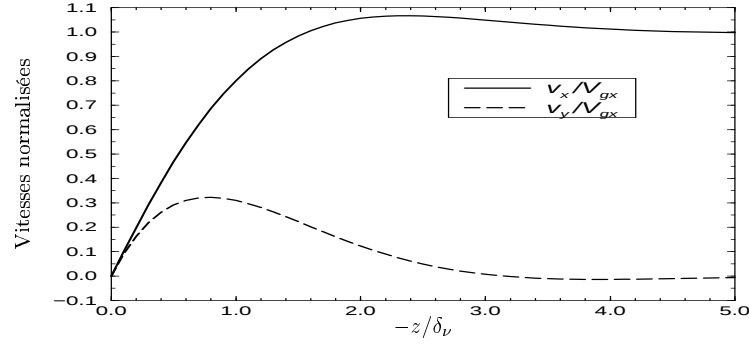
2. Par ailleurs lorsqu'il y aura conservation du flux (exemple $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ ou encore $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$), cette première caractéristique aura comme conséquence de rendre la composante perpendiculaire à la paroi d'ordre inférieur aux composantes parallèles.

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_y}{\partial y} \Rightarrow v_z \ll v_x, v_y \quad (2.10)$$

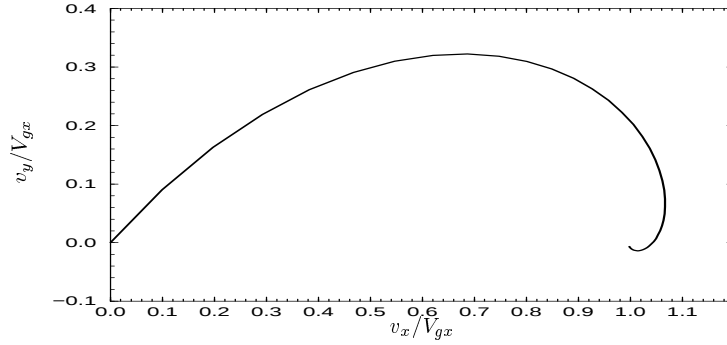
Ces caractéristiques générales concernant les couches limites vont être utiles pour la résolution des équations du problème. Néanmoins, il est important de souligner que dès lors que nous aurons à traiter un problème faisant apparaître différents phénomènes (par exemple un problème dynamique/thermique ou dynamique/magnétique), les effets pourront se coupler et lorsque les épaisseurs de couches seront de même ordre, il ne sera pas toujours possible de traiter les deux problèmes indépendamment. Par ailleurs la présence d'un écoulement turbulent loin des parois pourra également modifier la dynamique de ces couches, en les rendant instables. Il sera donc important de caractériser ces couches en fonction de l'écoulement dominant. Dans un premier temps, voyons plus précisément la dynamique associée aux couches d'Ekman, dans le cas laminaire.

2.2.2 Les couches d'Ekman

Prenons un fluide en rotation rapide ($E \ll 1$) et en régime stationnaire contenu dans un récipient. On étudie dans un premier temps le cas linéaire en se plaçant à $Ro \ll$



a



b

FIG. 2.1 – (a) Exemple de profils de vitesse dans la couche d'Ekman pour $\delta_\nu = 10^{-4}$. (b) Hodogramme où l'on visualise la spirale d'Ekman

1. Nous notons $\mathbf{n}$ la normale à la surface de ce récipient pointant en direction du fluide. À l'intérieur du fluide, là où les gradients de vitesse sont faibles, règne l'équilibre géostrophique. Cet équilibre respecte la condition de non pénétration à la frontière $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$. En revanche elle ne garantit pas la condition de non glissement sur les parois que doivent respecter tous fluides visqueux $\mathbf{v} \times \mathbf{n} = \mathbf{0}$. La modélisation des couches d'Ekman intervient pour respecter cette nouvelle contrainte, à l'intérieur de cette couche règne un équilibre entre les forces de Coriolis et les forces visqueuses. Dans cette couche on écrit l'équation (2.5) ainsi :

$$2\mathbf{e}_z \times \mathbf{v} = -\nabla \Pi + E \nabla^2 \mathbf{v}. \quad (2.11)$$

Le terme de Coriolis met en évidence l'importance de l'angle entre le vecteur rotation d'ensemble $\Omega \mathbf{e}_z$ et la normale à la paroi qui intervient dans l'expression de la condition aux limites sur la vitesse $\mathbf{v} \times \mathbf{n} = \mathbf{0}$. Dans le cas d'un récipient sphérique tel que la Terre cet angle varie. Néanmoins étudions la dynamique de la couche dans un cas simplifié où l'angle entre les deux vecteurs est constant. Cette approche se justifie par

le fait que pour un fluide en rotation rapide, la couche d'Ekman est suffisamment fine, pour que localement on puisse faire abstraction des termes de courbures et considérer la paroi comme infiniment plane. Plaçons nous tout d'abord dans le cas où $\Omega \mathbf{e}_z$ est perpendiculaire à la paroi, nous généraliserons l'étude au cas de la Terre par la suite.

L'étude porte sur une couche plane en géométrie cartésienne, où le fluide occupe l'espace défini par $z > 0$. L'opération de zoom sur la paroi consiste à dilater la coordonnée z de sorte que l'écoulement à l'intérieur du fluide impose une condition aux limites en $z = +\infty$. La contrainte de Proudman-Taylor nous indique que dans l'intérieur du fluide, la vitesse est indépendante de z et située dans le plan x, y . Nous notons V_{gx}, V_{gy} cet écoulement géostrophique. En appliquant les approximations de couche limite l'équation 2.11 donne [Pedlosky, 1987] :

$$-2v_y = -\frac{\partial \Pi}{\partial x} + E \frac{\partial^2 v_x}{\partial^2 z} \quad (2.12)$$

$$2v_x = -\frac{\partial \Pi}{\partial y} + E \frac{\partial^2 v_y}{\partial^2 z} \quad (2.13)$$

$$0 = -\frac{\partial \Pi}{\partial z} \quad (2.14)$$

La troisième relation nous montre que le terme de pression est indépendant de z à l'intérieur de la couche. Le gradient de pression dans la couche sera donc fixé par la condition aux limites en $z = +\infty$, celle-ci nous donne :

$$-2V_{gy} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x} \quad (2.15)$$

$$2V_{gx} = -\frac{\partial \Pi}{\partial y} \quad (2.16)$$

Remplaçons maintenant le terme de pression dans les équations associées à la couche (2.12 et 2.13) :

$$-2v_y = -2V_{gy} + E \frac{\partial^2 v_x}{\partial^2 z} \quad (2.17)$$

$$2v_x = 2V_{gx} + E \frac{\partial^2 v_y}{\partial^2 z} \quad (2.18)$$

On introduit la vitesse complexe $u'^\star = (v_x - V_{gx}) + i(v_y - V_{gy})$, et l'équation précédente devient :

$$2iu'^{\star} = E \frac{\partial^2 u'^{\star}}{\partial^2 z} \quad (2.19)$$

Les conditions aux limites s'écrivent $u'_{(z \rightarrow +\infty)} = 0$ et $u'_{(z=0)} = -(V_{gx} + iV_{gy})$. La solution de l'équation est donc :

$$u'^{\star}(z) = -(V_{gx} + iV_{gy})e^{\frac{-z}{\sqrt{E}}(1+i)} \quad (2.20)$$

En introduisant $\delta_\nu = E^{1/2}$, on obtient :

$$v_x - V_{gx} = e^{\frac{-z}{\delta_\nu}} \left(-V_{gx} \cos \frac{z}{\delta_\nu} - V_{gy} \sin \frac{z}{\delta_\nu} \right) \quad (2.21)$$

$$v_y - V_{gy} = e^{\frac{-z}{\delta_\nu}} \left(V_{gx} \sin \frac{z}{\delta_\nu} - V_{gy} \cos \frac{z}{\delta_\nu} \right) \quad (2.22)$$

La figure 2.1 (a) représente l'amplitude des vitesses v_x, v_y lorsque l'on prend $V_{gy} = 0$. On remarque que loin de la paroi, on atteint exponentiellement la vitesse géostrophique sur la distance de l'ordre de δ_ν correspondant à l'épaisseur de la couche d'Ekman. On représente de manière paramétrique la variation des composantes v_x et v_y en fonction de $\frac{z}{\delta_\nu}$ (figure 2.1(b)). Cet hodograme fait apparaître la fameuse spirale d'Ekman. En substance cette figure nous montre que, l'action des forces de Coriolis dans la couche à tendance à induire une composante de vitesse perpendiculaire à la vitesse de forçage géostrophique (composante selon y ici). Proche de la paroi, la vitesse du fluide fait un angle de 45° avec le gradient de pression. Par ailleurs la vitesse géostrophique n'est pas la valeur maximale de la composante v_x . Celle-ci est en effet obtenue pour une distance à la paroi telle que $\cos \frac{z}{\delta_\nu} \sim \pi$.

2.2.3 Le pompage d'Ekman

Nous venons de caractériser l'écoulement horizontal dans la couche d'Ekman. La prochaine étape est de s'intéresser aux mouvements verticaux. La divergence de la vitesse étant égale à zéro (conservation de la masse), on obtient une information sur la vitesse verticale, celle-ci sera de faible amplitude devant les vitesses horizontales, mais participera néanmoins de manière efficace à la redistribution de moment cinétique de l'intérieur du fluide aux parois ou inversement.

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = - \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) \quad (2.23)$$

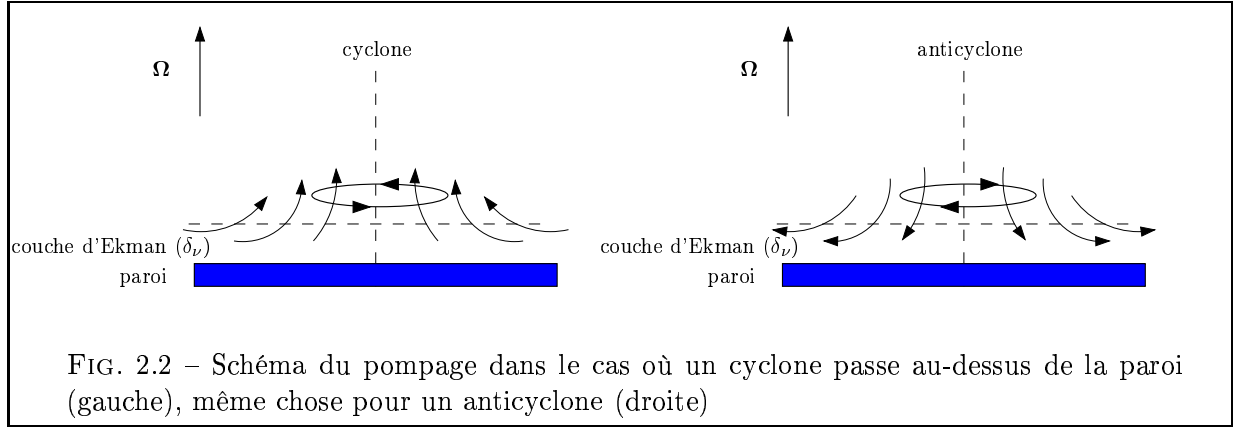


FIG. 2.2 – Schéma du pompage dans le cas où un cyclone passe au-dessus de la paroi (gauche), même chose pour un anticyclone (droite)

En remplaçant les vitesses par leurs expressions (2.21) et (2.22) et en gardant à l'esprit l'invariance en z des vitesses géostrophiques, on obtient :

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = \chi_z \sin \frac{z}{\delta_\nu} e^{\frac{-z}{\delta_\nu}} \quad (2.24)$$

ou χ_z est la vorticité verticale de l'écoulement géostrophique. En intégrant l'équation 2.24 on obtient :

$$v_z = \frac{\delta_\nu}{2} \chi_z \left(1 - e^{\frac{-z}{\delta_\nu}} \left(\cos \frac{z}{\delta_\nu} - \sin \frac{z}{\delta_\nu} \right) \right) \quad (2.25)$$

Cette vitesse verticale, bien que plus faible à mesure que l'on s'éloigne de la paroi n'est pas identiquement nulle en dehors de la couche d'Ekman. On remarquera qu'elle est proportionnelle à la vorticité locale immédiatement au-dessus de la couche. Ainsi si l'on a une colonne de fluide cyclonique (à vorticité positive) à l'intérieur du fluide, le fluide sera aspiré des parois à l'intérieur. Inversement, si une colonne anticyclonique passe au-dessus de la couche, du fluide sera rejeté dans la couche d'Ekman (figure 2.2). Le cas général est développé dans [Greenspan, 1968]. La formule du pompage dans le cas de la sphère est :

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = -\frac{E^{1/2}}{2} \mathbf{n} \cdot \nabla \times \left(\frac{1}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_z} (\mathbf{n} \times (\mathbf{v} - \mathbf{V}_g)) + \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_z}{\|\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_z\|} (\mathbf{v} - \mathbf{V}_g) \right) \quad (2.26)$$

Une singularité apparaît lorsque $\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_z = 0$, c'est à dire en présence de parois parallèles à l'axe de rotation d'ensemble. Dans le cas de la sphère cette région se réduit à l'équateur. En reprenant l'équation de base 2.11, on voit pour cet angle particulier que les forces visqueuses ne peuvent plus être équilibrées par les forces de Coriolis qui sont

alors nulles. A ce phénomène est associé une singularité de la couche limite visqueuse. Il faut alors prendre en compte des termes de l'équation qui avaient été négligés devant l'action de la force de Coriolis. Ceci fait apparaître une couche limite plus épaisse ($E^{2/5}$), sur une distance latérale de ($E^{1/5}$) [Roberts & Stewartson, 1963; Noir, 2000]. Le pompage associé est alors plus intense, en ($E^{1/5}$), mais sur une zone qui reste relativement fine dans le cas de la sphère. Pour le cylindre nous verrons par la suite, que bien que le pompage soit similaire, une modélisation propre des couches latérales est alors nécessaire.

Les résultats présentés en régime stationnaire, restent vrais dans le cas non stationnaire mais sous certaines conditions. En effet si brusquement une différence de vitesse existe entre les parois et l'intérieur du fluide, une couche d'Ekman va se former sur une échelle de temps de l'ordre de la période de rotation. Pendant cette phase, les effets inertiels doivent être pris en compte. Ensuite la conservation de la masse va alors actionner le pompage d'Ekman. Si une différence de vorticité n'est pas entretenue entre l'intérieur et les parois, la couche va tendre à disparaître. La formule du pompage sera donc valide pour des mouvements dits quasi-stationnaires, c'est à dire ne faisant pas intervenir des échelles de temps de variations de vitesse grandes devant Ω^{-1} .

Pour résumer ces couches visqueuses extrêmement fines sont le siège d'un équilibre entre les forces de Coriolis et les forces visqueuses. L'hypothèse d'incompressibilité amène un écoulement secondaire désigné sous le nom de pompage d'Ekman. Ce mécanisme est à la base des mouvements de spin-up et spin-down que nous avons étudiés et que nous vous présentons maintenant.

2.3 La théorie du spin-up et du spin-down

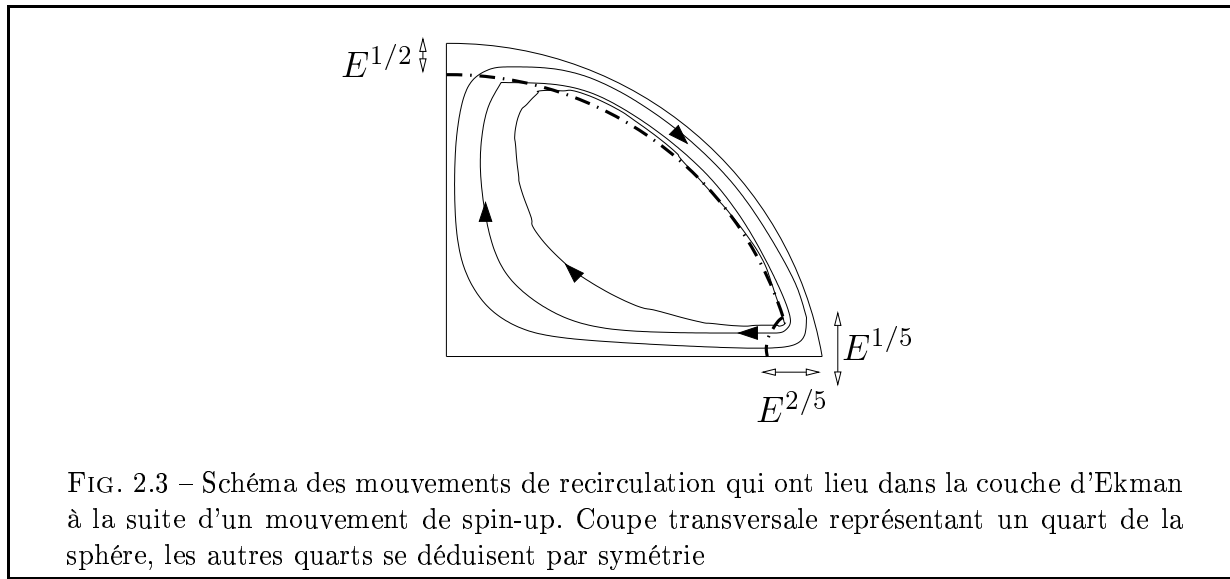
Un des objectifs de cette thèse était de décrire l'ajustement d'un fluide visqueux aux sollicitations engendrées par les parois, toujours dans le cas d'un système en rotation rapide. La synchronisation du fluide s'explique par un mouvement de recirculation des parois vers l'intérieur qui est responsable du transfert efficace de quantité de mouvement. En faisant le lien avec les couches d'Ekman et la notion de pompage, on a maintenant une idée plus précise de l'origine de cet écoulement secondaire.

2.3.1 Description qualitative du mouvement de spin-up

Nous utilisons l'hypothèse de fluide en rotation, dans un état stationnaire, c'est à dire en équilibre avec son environnement. A un instant donné, ($t = 0$), on accélère soudainement la vitesse de rotation du récipient contenant le fluide. On observe un régime transitoire où le fluide se synchronise progressivement avec le récipient pour enfin retrouver un nouvel état d'équilibre. La question que l'on se pose est : Quelles sont les forces mises en jeu dans ce régime transitoire ? A quoi correspond ce temps de synchronisation ? Le processus d'accélération (resp. décélération) de la paroi selon l'axe de rotation initial est

connu sous le nom de spin-up (resp. spin down). Par opposition nous parlons également de mouvement de Spin Over lorsqu'il s'agit d'un changement de taux de rotation dans une direction perpendiculaire à l'axe principal de rotation (Ce mouvement sera étudié au chapitre 7). Les paramètres importants qui vont influencer la réponse du fluide sont encore une fois le nombre d'Ekman, E , et le nombre de Rossby, $Ro = \frac{\Delta\Omega}{\Omega}$, paramètre associé à l'augmentation du taux de rotation relatif pendant le spin up.

La dynamique de ce mouvement a été très étudiée par Greenspan [1968]. Pour les cas de récipients axisymétriques et pour un écoulement à faible nombre de Rossby, il a mis en évidence l'importance du temps de spin-up en $\Omega^{-1}E^{1/2}$. Par la suite les études du spin-up se sont étendues à des domaines plus larges, à des géométries de récipients plus complexes, aux cas non-linéaires où encore en application aux fluides stratifiés. Des articles de revues sont parus sur le sujet Benton & Clark [1974] et plus récemment Duck & Foster [2001].



La description générale du mouvement de spin-up nécessite la prise en compte de différentes échelles de temps. Pour les fluides homogènes que nous étudions, on distingue trois échelles de temps, Ω^{-1} , $\Omega^{-1}E^{1/2}$ et $\Omega^{-1}E$. Pour des faibles nombres d'Ekman, ces trois échelles de temps sont distinctes, on peut alors décrire l'évolution de l'écoulement dans un récipient axisymétrique de la manière suivante :

A la suite de l'accélération de la paroi, les particules de fluide situées au contact de celle-ci sont alors accélérées à leur tour. Ce phénomène donne naissance à une couche limite d'Ekman qui s'établit sur une échelle de temps correspondant à une rotation. Les particules de fluide dans la couche possèdent alors une vorticité plus forte que leurs homologues situées en dehors de la couche. Le pompage aura alors comme action de prendre du fluide de l'intérieur, à faible moment cinétique, et de l'injecter dans la couche afin de compenser le départ du fluide, à fort moment cinétique, qui a été éjecté vers les extrémités du récipient. Du fluide à forte vorticité venant de la couche est lui r -éjecté à l' quateur. Ce mouvement de recirculation se termine naturellement quand tout le fluide à faible moment cinétique a transit  dans la couche limite visqueuse, et de fait,

a gagné la vorticité du récipient (figure 2.3). Ce régime transitoire s'effectue sur une échelle de temps en relation avec l'épaisseur de la couche d'Ekman, c'est à dire sur un temps correspondant à $\Omega^{-1}E^{1/2}$. Enfin tous les mouvements résiduels sont dissipés par diffusion visqueuse sur une échelle de temps correspondant à la dissipation en $\Omega^{-1}E$.

Cette relation entre le régime transitoire et l'épaisseur des couches d'Ekman est de toute importance pour notre étude expérimentale et l'évaluation de la viscosité effective de l'écoulement que nous tirons d'une mesure de vitesse. Ayant en tête ce processus on devine que la géométrie du récipient va être un paramètre de contrôle important. Pour notre étude nous avons travaillé avec deux géométries, la géométrie sphérique et la géométrie cylindrique. Quelques différences majeures existent entre ces deux géométries, notamment la prise en compte des couches visqueuses parallèles à l'axe de rotation (les couches de Stewartson) pour la géométrie cylindrique. Néanmoins, le principe d'écoulement qui vient d'être décrit reste le même pour les deux géométries. Nous présentons maintenant le détail des équations qui donnent une expression du champ de vitesse au cours du spin-up dans le cas de la géométrie sphérique. Les expressions obtenues pour la géométrie cylindrique seront évoquées et décrites de manière qualitative au cours du chapitre (6). Là encore, on peut trouver une littérature abondante sur le sujet en consultant les articles de Greenspan [1968]; Weidman [1976a]; Duck & Foster [2001].

2.3.2 Spin-up linéaire en géométrie sphérique

Pour résoudre ce problème on se place dans le référentiel de rotation associé à $\mathbf{e}_z = \Omega/\Omega$, en utilisant un repère de géométrie cylindrique (u_s, u_θ, u_z) ¹. $(\Omega)^{-1}$ est le temps caractéristique et R le rayon de la sphère. On note $\mathbf{v}_M$ la vitesse de la frontière sphérique. Au temps $(t = 0)$, la frontière passe d'un taux de rotation $\mathbf{e}_z$ au taux de rotation $(1 + Ro)\mathbf{e}_z$ avec $Ro = \frac{\Delta\Omega}{\Omega}$.

Dans ce problème, on ne considère que les variations temporelles lentes (Ω^{-1}). Ceci implique que notre solution ne modélise qu'imparfaitement le fluide sur l'échelle de temps (Ω^{-1}) qui suit le spin-up. On considère le problème linéaire ($Ro \ll 1$). L'équation de Navier-Stokes s'écrit alors :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + 2\mathbf{e}_z \times \mathbf{v} - E\nabla^2 \mathbf{v} = -\nabla P \quad (2.27)$$

$$(2.28)$$

On prend le rotationnel pour obtenir l'équation de la vorticité χ . La projection sur $\mathbf{e}_z$ de cette équation nous donne :

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} - 2\frac{\partial v_z}{\partial z} - E\Delta\chi = 0 \quad (2.29)$$

¹Ce choix de repère se justifie par la présence de la contrainte de Proudman-Taylor, l'intérieur du fluide conservera le principe d'invariance selon z pour l'écoulement. Seule l'expression de la vitesse du récipient est légèrement plus complexe, à priori, que dans le cas où nous l'aurions exprimée dans un système de coordonnées sphériques.

où v_z est la composante verticale de la vitesse et $\chi = \mathbf{e}_z \cdot \boldsymbol{\chi}$. Dans l'intérieur du fluide la diffusion visqueuse peut être négligée. L'écoulement de spin up est principalement azimutal en volume et on a $\chi = \frac{1}{s} \frac{\partial s v_\varphi}{\partial s}$.

On peut noter qu'en appliquant le théorème de Stokes sur un disque de rayon s dans un cylindre géostrophique, on obtient :

$$\int \int_{\text{disque}} \chi dS = 2\pi s v_\varphi(s)$$

On s'intéresse aux variations lentes de l'écoulement. L'écoulement en volume est géostrophique ($E = 0$ dans l'équation 2.29), ce qui implique que la vorticité χ est invariante en z . On intègre l'équation 2.29 en z en tenant compte de la symétrie équatoriale de l'écoulement.

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} = \frac{1}{L} [v_z]_{-L}^L = \frac{2}{L} v_z(L) \quad (2.30)$$

où $L = \sqrt{1 - s^2}$ est la demi-hauteur de la colonne. Le terme $v_z(L)$ peut être tiré de la formule du pompage d'Ekman. Le pompage d'Ekman, perpendiculaire à la paroi vaut :

$$\mathbf{v}^1 \cdot \mathbf{n} = -\frac{E^{1/2}}{2} \mathbf{n} \cdot \nabla \times \left[\frac{\mathbf{n} \times (\mathbf{v} - \mathbf{v}_M) - (\mathbf{v} - \mathbf{v}_M)}{\sqrt{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_z|}} \right]$$

où $\mathbf{n}$ est la normale à la sphère dirigée du fluide vers la paroi.

La conservation de la masse nous assure l'égalité suivante :

$$\int \int_{\text{disque}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \int \int_{\text{disque}} v_z dS = \int \int_{\text{calotte sphérique}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \int \int_{\text{calotte sphérique}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS$$

On peut évaluer cette dernière integrale par le théorème de Stokes.

$$\int \int_{\text{calottesphérique}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{C(s)} \frac{E^{1/2}}{2} \left[\frac{\mathbf{n} \times (\mathbf{v} - \mathbf{v}_M) - (\mathbf{v} - \mathbf{v}_M)}{\sqrt{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_z|}} \right] \cdot \mathbf{e}_\varphi dl$$

où $C(s)$ est le cercle de rayon s touchant la paroi supérieure.

On développe cette expression vectorielle. On a $[\mathbf{n} \times (\mathbf{v} - \mathbf{v}_M)] \cdot \mathbf{e}_\varphi = 0$ d'où l'expression :

$$\int \int_{\text{calotte sphérique}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{\pi s E^{1/2}}{\sqrt{L}} (v_M - v_\varphi) \quad (2.31)$$

L'équation 2.30 s'écrit maintenant :

$$v_z(L) = \frac{L}{2} \frac{\partial \chi}{\partial t}$$

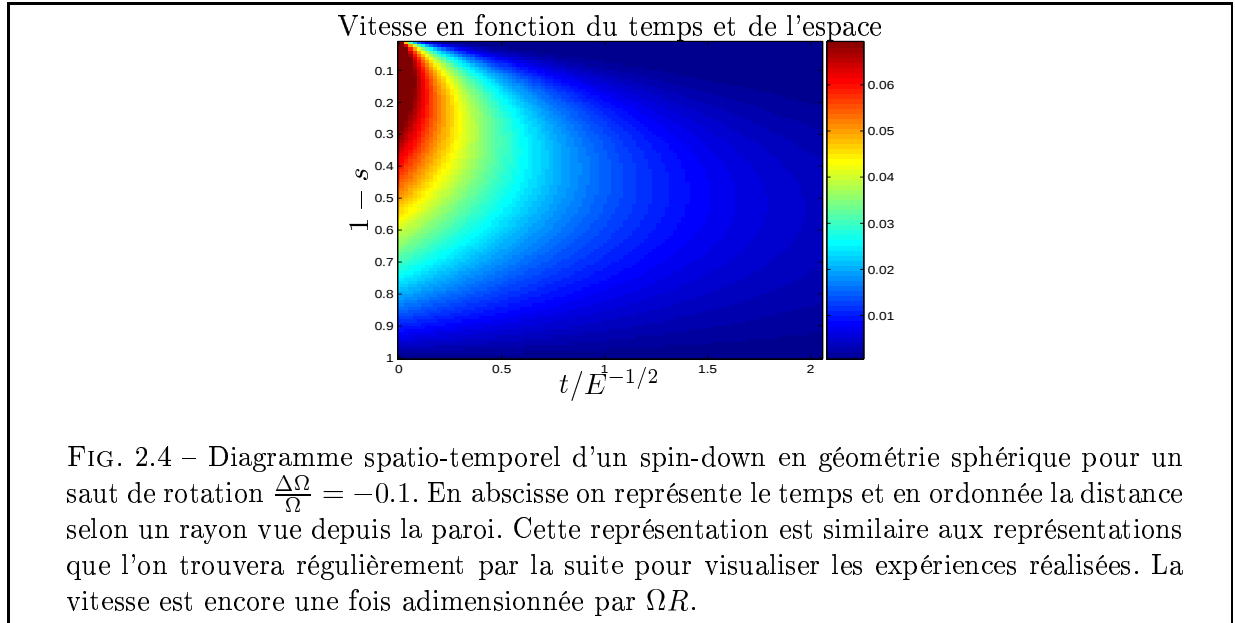
On intègre cette équation sur le disque porté par $C(s)$ et on obtient :

$$\int \int_{\text{disque}} v_z dS = \int \int_{\text{disque}} \frac{L}{2} \frac{\partial \chi}{\partial t} dS = \frac{L}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int \int_{\text{disque}} \chi dS = L\pi s \frac{\partial v_\varphi}{\partial t} \quad (2.32)$$

en utilisant (2.32) et (2.31), l'équation en v_φ devient :

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} = \frac{E^{1/2}}{L^{3/2}} (v_M - v_\varphi) \quad (2.33)$$

Dans cette expression v_M peut dépendre de s et du temps. Ceci va conditionner l'expression finale obtenue pour notre inconnue v_φ . Nous n'avons pas fait d'hypothèses explicites sur la viscosité, ν , dans la plupart des cas c'est un paramètre constant. Néanmoins à priori si ν ne dépend que de s , l'expression reste valide et l'intégration est toujours possible.



Dans le cas du spin-up instantané, on change la vitesse angulaire de la frontière à $t = 0$ de la valeur Ω à $\Omega + \Delta\Omega$. On a alors une vitesse azimutale $v_M = \frac{s\Delta\Omega}{\Omega}$ où s est le rayon cylindrique adimensionné. On introduit la variable $v_{mes\varphi} = v_\varphi - v_M$. Cette vitesse correspond à la vitesse vue par un observateur en rotation avec le récipient (figure 2.4). C'est donc la vitesse que devront mesurer les sondes embarquées. À $t = 0$,

$v_{mes_\varphi} = -v_M$. La solution est exponentielle avec une forme $v_{mes_\varphi} = A \exp(t/\tau)$. On a alors :

$$\frac{A}{\tau} = -\frac{E^{1/2}}{L^{3/2}} A \quad (2.34)$$

d'où la solution en utilisant la condition à $t = 0$:

$$v_{mes_\varphi} = -s \frac{\Delta\Omega}{\Omega} \exp\left(-t \frac{E^{1/2}}{(1-s^2)^{3/4}}\right) \quad (2.35)$$

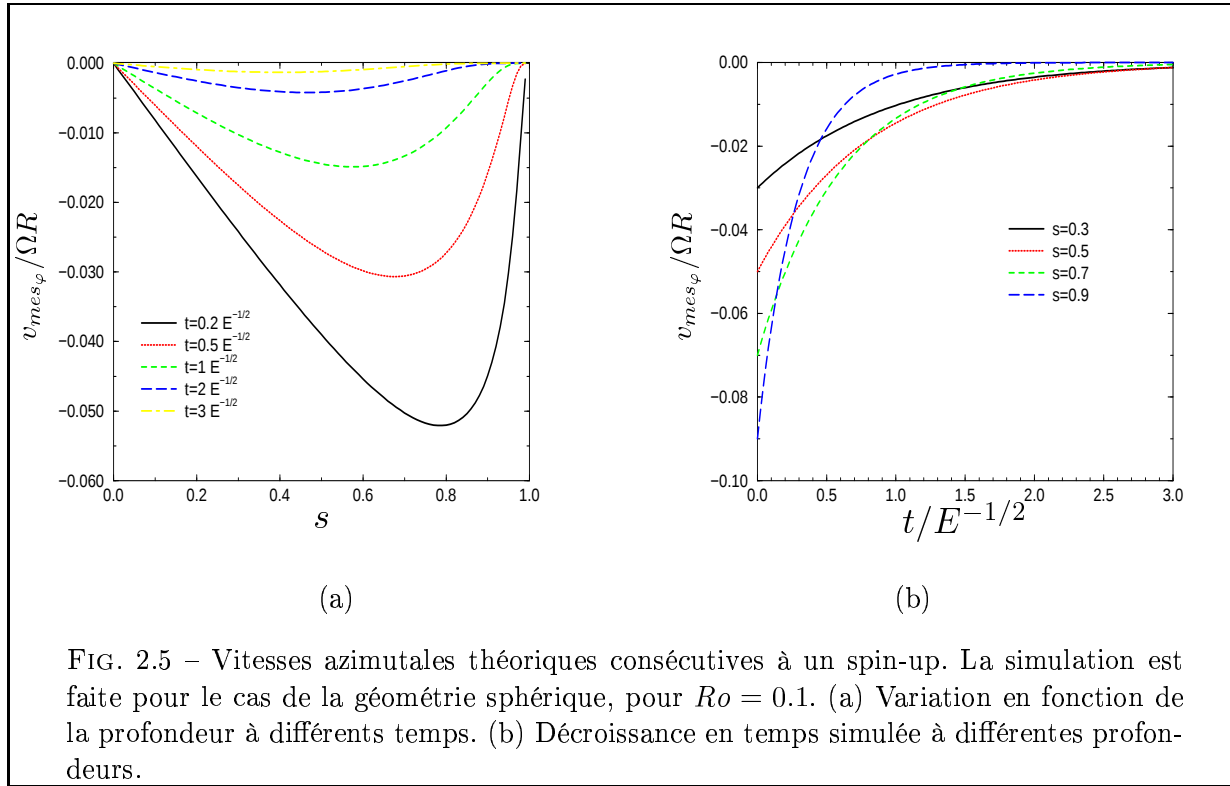


FIG. 2.5 – Vitesses azimutales théoriques consécutives à un spin-up. La simulation est faite pour le cas de la géométrie sphérique, pour $Ro = 0.1$. (a) Variation en fonction de la profondeur à différents temps. (b) Décroissance en temps simulée à différentes profondeurs.

Le temps de spin-up τ , proportionnel à $E^{-1/2}$, dépend du rayon cylindrique s à travers la demi-hauteur L de la colonne de fluide à synchroniser. La synchronisation est plus immédiate pour des particules situées proches de la paroi externe. Une particule de fluide située à l'intérieur du fluide sera synchronisée plus tardivement (Figures 2.5).

2.3.3 Application et discussion

Avec la théorie précédente on peut donc obtenir à partir des mesures du champ de vitesse azimutale une estimation indirecte de la viscosité du fluide. J'attire l'attention sur le fait que les hypothèses fortes qui permettent de pousser le calcul analytique

jusqu'au bout restreignent par la même occasion le domaine d'étude. Il est notamment légitime de se poser la question sur la validité de ces relations lorsque l'on considère un paramètre de viscosité effective qui peut dépendre de la température, du temps et de l'espace et être donc à priori non homogène dans nos expériences. Dans ce cas, la viscosité de la couche limite est cruciale puisque le coeur du fluide est géostrophique. Dans le cas des expériences de convection en géométrie sphérique, il s'agit d'une couche limite chaude¹. On peut également s'interroger sur la validité de ces équations lorsque l'on s'éloigne des cas asymptotiques ($Ro \ll 1$, $E \ll 1$).

Validations expérimentales trouvées dans la littérature

Au premier ordre on trouve un bon accord entre les expériences et la théorie asymptotique (Greenspan [1968]; Benton & Clark [1974]; Weidman [1976b]). De nombreuses études ont complété ces premiers travaux et il peut être intéressant lorsque l'on analyse nos propres résultats expérimentaux d'avoir également à l'esprit les résultats expérimentaux et les améliorations de la théorie suivants :

Les ondes et oscillations inertielles

Le mouvement de spin-up est susceptible également d'exciter de nombreuses ondes inertielles. Elles sont néanmoins de faibles amplitudes et n'altèrent pas le processus de spin-up. La théorie non-linéaire de (Greenspan & Weinbaum [1965]) semble être en excellent accord avec les résultats expérimentaux et numériques de (Warn-Varnas *et al.* [1978]). On peut donc s'attendre expérimentalement à voir de telles oscillations dans la courbe de décroissance de la vitesse azimutale (pour le cas du spin-up) qui pour autant ne doivent pas modifier le temps en $E^{-1/2}$. [Noir *et al.*, 2001] ont vérifié numériquement que les ondes inertielles ne transportent pas de quantité de mouvement.

Spin-up non-linéaire

Une théorie quasi-linéaire est développée pour le cas où Ro est de l'ordre ou plus grand que $E^{1/4}$ (Duck & Foster [2001]; Benton & Clark [1974]). Ce cas correspond au cas où le terme non linéaire $((\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v})$ est du même ordre de grandeur que le terme visqueux à l'intérieur de la couche d'Ekman. Ceci amène un terme correctif à l'expression linéaire. Cette théorie sera utilisée pour l'inversion des expériences effectuées en géométrie cylindrique. Ensuite il existe une distinction entre deux régimes non-linéaires. Celui où $Ro \leq 0.5$ est qualitativement identique au cas linéaire. Pour des nombres de Rossby plus grand et dans le cas de la géométrie cylindrique (chapitre 6), la couche de Stewartson semble se déstabiliser et se propager dans l'intérieur du fluide, on parle alors de couche de cisaillement verticale détachée (Benton & Clark [1974]), théoriquement celle-ci est prédite par une discontinuité de vitesse qui se propage à l'intérieur du fluide au cours du temps. De nombreuses études consistent à regarder ce qui se passe à proximité de ce front d'onde. Les études expérimentales et numériques sur le sujet semblent être en assez bon accord (Weidman [1976a,b]). Toutes deux semblent montrer que les temps de

¹A garder en tête car ν diminue fortement avec la température dans le cas de l'eau.

spin-up et spin-down sont légèrement plus longs que ceux prédits par la théorie linéaire et que le processus de spin-up non-linéaire est plus rapide que le spin-down non-linéaire. Globalement les meilleurs accords entre théories et expériences sont validés lorsque l'on s'éloigne du temps ($t = 0$).

Instabilités associées au spin-down.

Le processus de spin-down ne doit pas être vu comme le parfait symétrique de l'expérience de spin-up. En effet bien que d'un point de vue dynamique, les mouvements de recirculation vont se faire de la couche à faible vorticité vers l'intérieur du fluide aux pôles et inversement à l'équateur, le fait de décélérer la coquille sphérique va entraîner une centrifugation instantanée d'une partie des particules fluides du coeur (celles situées proche des couches limites plutôt que proche de l'axe). C'est ce que l'on nomme l'instabilité centrifuge (Duck & Foster [2001]). Elle a pour conséquence sur le temps de spin-down que celui-ci soit légèrement plus court que celui du spin-up effectué dans un même régime ².

2.3.4 Une variante : théorie des frontières oscillantes

Le spin-up constitue un moyen de transformer nos expériences tournantes en bon viscosimètre, mais ce n'est pas le seul. Certains résultats expérimentaux (paragraphe 4.3) ont montré que le processus de Spin Up instantané était parfois trop violent même dans le cas linéaire pour maintenir les états de turbulence que nous souhaitons étudier. Dans ce contexte là nous avons donc développé une variante du modèle de spin-up qui consiste à étudier la réponse du fluide à une stimulation harmonique de la frontière. Pour l'intérieur du fluide, ceci garantit une transition plus douce, tout en s'appuyant sur les mêmes principes de recirculation. Nous allons voir également que cette technique permet d'obtenir une information sur la viscosité par deux mesures indépendantes, celles de la phase et de l'amplitude du signal de vitesse.

Dans le référentiel lié à la rotation d'ensemble $\mathbf{e}_z$, le taux de rotation de la sphère $\Omega_M(t)$ va maintenant osciller en temps à la pulsation $\omega_f = 2\pi f_f$ avec f_f la fréquence de forçage. Afin que l'on puisse conserver les hypothèses précédentes et utiliser l'équation établie en (2.33), il faut rester dans l'hypothèse de mouvement lents, c'est-à-dire $\omega_f \ll \Omega$. Dans ce référentiel tournant à la vitesse $\Omega \mathbf{e}_z$, on exprime le taux de rotation comme :

$$\Omega_M(t) = \Omega_M \sin \omega_f t \quad (2.36)$$

La vitesse azimutale de la frontière sera alors :

$$v_M = s\Omega_M \sin \omega_f t \quad (2.37)$$

²On peut remarquer ici que cet effet dans le cas linéaire semble inverse par rapport au cas non linéaire remarqué par Weidman [1976a] dans le cas de la géométrie cylindrique.

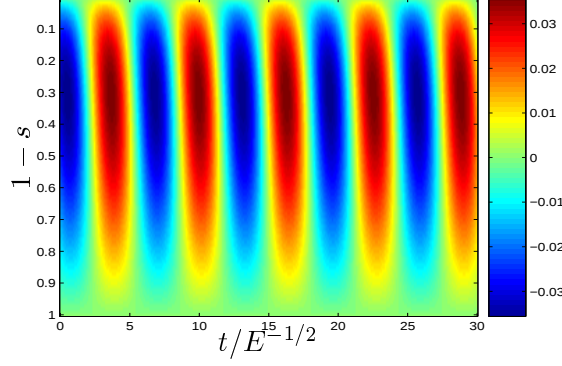


FIG. 2.6 – Diagramme spatio-temporel de la vitesse azimutale selon la théorie oscillante en géométrie sphérique. Ici la pulsation de forçage est telle que $\omega_f = E^{1/2}$ et $Ro = 0.1$. On observe une spiralisation des oscillations proches de la paroi qui sont une conséquence de la géométrie sphérique.

Le système étant linéaire, la réponse du fluide va osciller à la même fréquence que l'excitation. On écrit la solution sous forme $V_\varphi = A \exp(i\omega_f t)$, V_φ étant la forme complexe de la vitesse v_φ telle que $v_\varphi = \text{Im}(V_\varphi)$. De même V_M est telle que $v_M = \text{Im}(V_M)$. L'équation (2.33) prend la forme :

$$i\omega_f A = \frac{E^{1/2}}{L^{3/2}}(s\Omega_M - A) \quad (2.38)$$

donc

$$A = \frac{s\Omega_M}{1 + i\omega_f \frac{L^{3/2}}{E^{1/2}}} = \frac{s\Omega_M}{1 + \omega_f^2 \frac{L^3}{E}} \left(1 - i\omega_f \frac{L^{3/2}}{E^{1/2}}\right)$$

soit un module $|A|$ et une phase φ_0

$$|A| = \frac{E^{1/2} s\Omega_M}{(E + \omega_f^2 L^3)^{1/2}}, \quad \varphi_0 = \arctan\left(-\frac{\omega_f L^{3/2}}{E^{1/2}}\right)$$

d'où la solution dans l'espace réel (partie imaginaire) :

$$v_\varphi = \frac{E^{1/2} s\Omega_M}{(E + \omega_f^2 L^3)^{1/2}} \sin\left(\omega_f t + \arctan\left(-\frac{\omega_f L^{3/2}}{E^{1/2}}\right)\right) \quad (2.39)$$

dans les expériences, nous mesurons $v_{mes\varphi} = v_\varphi - v_M$, nous pouvons exprimer cette vitesse comme (figure 2.6) :

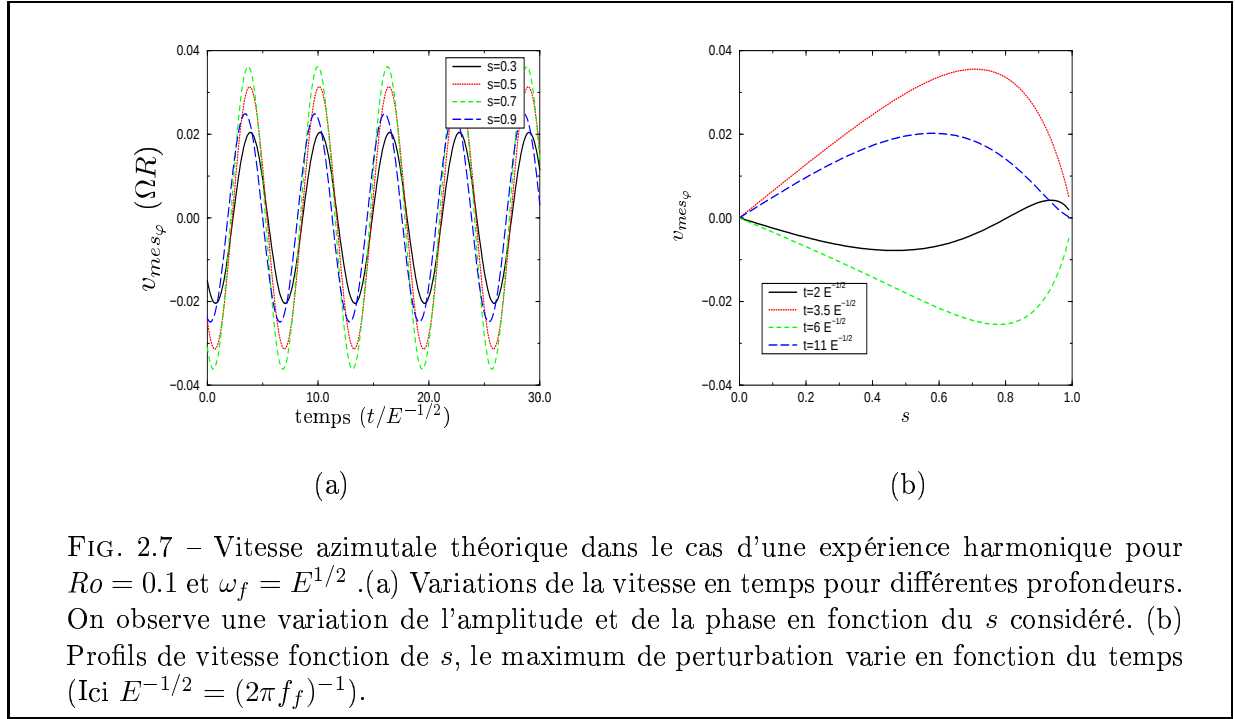


FIG. 2.7 – Vitesse azimutale théorique dans le cas d’une expérience harmonique pour $Ro = 0.1$ et $\omega_f = E^{1/2}$. (a) Variations de la vitesse en temps pour différentes profondeurs. On observe une variation de l’amplitude et de la phase en fonction du s considéré. (b) Profils de vitesse fonction de s , le maximum de perturbation varie en fonction du temps (Ici $E^{-1/2} = (2\pi f_f)^{-1}$).

$$V_{mes\varphi} = (A - s\Omega_M) \exp(i\omega_f t) = A' \exp(i\omega_f t) = \frac{\Omega_M s}{E + \omega_f^2 L^3} (-\omega_f^2 L^3 - i\omega_f L^{3/2} E^{1/2}) \exp(i\omega_f t) \quad (2.40)$$

d’où un module et une phase qui s’exprime (figure 2.6) :

$$|A'| = \frac{\Omega_M \omega_f L^{3/2} s}{(E + \omega_f^2 L^3)^{1/2}}, \quad \varphi'_0 = \arctan\left(\frac{E^{1/2}}{\omega_f L^{3/2}}\right) + \pi$$

et l’expression théorique pour V mesurée dans l’expérience devient (figure 2.7) :

$$v_{mes\varphi} = \frac{\Omega_M \omega_f L^{3/2} s}{(E + \omega_f^2 L^3)^{1/2}} \sin\left(\omega_f t + \arctan\left(\frac{E^{1/2}}{\omega_f L^{3/2}}\right) + \pi\right) \quad (2.41)$$

En utilisant les notations cylindriques (s est le rayon cylindrique), nous avons $L = \sqrt{1 - s^2}$.

$$v_{mes\varphi} = \frac{\Omega_M \omega_f s (1 - s^2)^{3/4}}{(E + \omega_f^2 (1 - s^2)^{3/2})^{1/2}} \sin\left(\omega_f t + \arctan\left(\frac{E^{1/2}}{\omega_f (1 - s^2)^{3/4}}\right) + \pi\right) \quad (2.42)$$

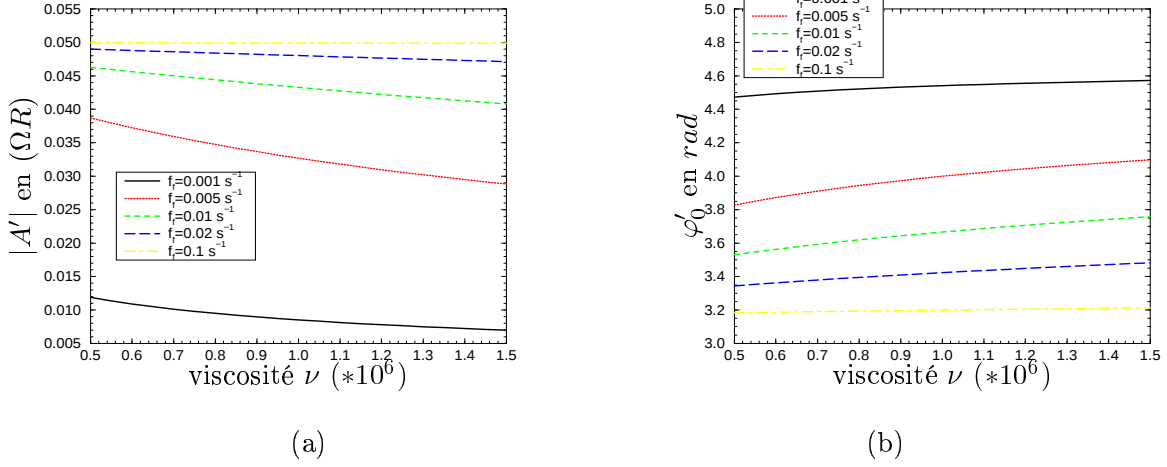


FIG. 2.8 – Variations de l'amplitude et de la phase du signal en fonction de la viscosité. Cette simulation correspond aux paramètres de l'expérience DTeau ($\Omega = 13.4 \text{ rad.s}^{-1}$, $\Delta\Omega = 1.9 \text{ rad.s}^{-1}$, et $\nu_{mol}(eau) \approx (0.8 - 1.3) \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ à température ambiante). Nous avons choisi une représentation à $s = 0.5$. Pour donner un ordre d'idée, $f_f = 0.005 \text{ s}^{-1}$ correspond pour cette expérience-là, à $w_f \approx E^{1/2}$. Un compromis doit être trouvé entre une bonne sensibilité à la variation de viscosité et une amplitude de fluctuation suffisante pour pouvoir détecter correctement des signaux avec nos méthodes de mesure de vitesse.

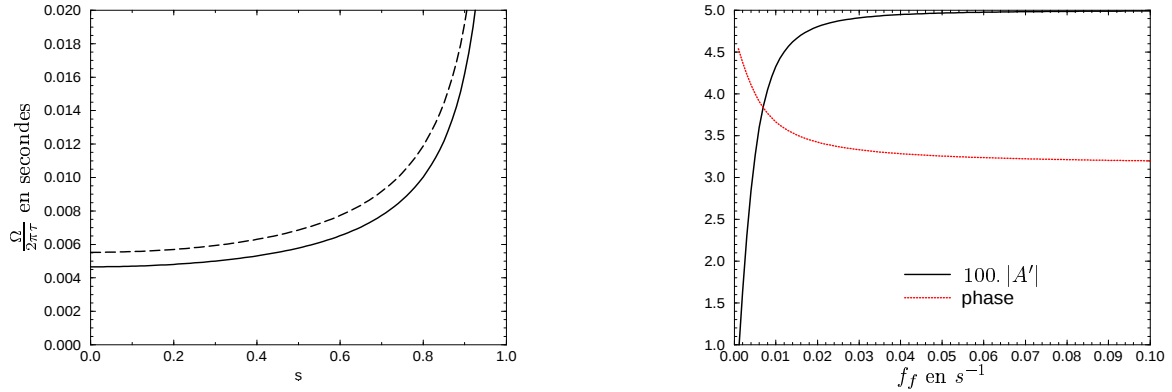


FIG. 2.9 – (a) 'Fréquence' du spin-up ($\frac{\Omega}{2\pi\tau}$ en secondes avec τ le temps de spin-up) en fonction de la profondeur pour les deux vitesses de rotation testées sur DTeau ($\Omega = 13.4 \text{ rad.s}^{-1}$ (trait plein) et $\Omega = 18.9 \text{ rad.s}^{-1}$ (trait pointillé)). (b) Variations de l'amplitude ($|A'|$ en (ΩR) multiplié par 100 pour visualiser les courbes en simultanées) et de la phase en fonction de la fréquence de forçage pour $\nu_{mol}(eau) = 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ et $\Omega = 13.4 \text{ rad.s}^{-1}$. La zone de sensibilité maximale de ϕ_0' et de $|A'|$ à la fréquence, est obtenue pour une fréquence de forçage de l'ordre de $\frac{\Omega}{2\pi\tau}$. Il en est de même pour la sensibilité vis à vis de la viscosité, c'est ce que montre la figure 2.8

Par analyse de la phase et de l'amplitude de la vitesse mesurée, nous pouvons théoriquement avoir deux informations sur la viscosité qui dans le meilleur des cas doivent se recouper. La sensibilité de la mesure sera nettement différente selon que l'on se place dans un régime où la fréquence de forçage est grande ou petite par rapport au nombre d'Ekman (figures 2.8).

cas où $\omega_f \ll E^{1/2}$

Pour ce premier cas, l'amplitude de la vitesse vaut ($|A'| \approx \frac{\Omega_M \omega_f s (1-s^2)^{3/4}}{E^{1/2}} + \mathcal{O}\left(\left(\frac{\omega_f (1-s^2)^{3/4}}{E^{1/2}}\right)^2\right)$).

Elle est donc inversement proportionnelle à la racine carrée de la viscosité. L'amplitude étant également proportionnelle à la fréquence de forçage on a quand même intérêt à ce qu'elle reste la plus grande possible, afin de réduire le rapport signal sur bruit de nos mesures expérimentales.

cas où $E^{1/2} \ll \omega_f \ll 1$

Dans ce deuxième cas, l'amplitude devient de l'ordre de ($|A'| \approx \Omega_M s \left(1 + \frac{E}{\omega_f^2 (1-s^2)^{3/2}}\right) + \mathcal{O}\left(\left(\frac{E^{1/2}}{\omega_f (1-s^2)^{3/4}}\right)^2\right)$), l'amplitude est peu sensible à la variation de viscosité, seul le déphasage du signal peut nous apporter une information utile.

Pour la phase, la sensibilité est à priori également plus forte dans le premier cas, puisqu'en se souvenant que $\arctan(x) + \arctan(1/x) = \pi/2$, on obtient dans le premier cas une phase $\varphi'_0 \approx \frac{3\pi}{2} - \frac{\omega_f (1-s^2)^{3/4}}{E^{1/2}}$ et dans le deuxième $\varphi'_0 \approx \pi + \frac{E^{1/2}}{\omega_f (1-s^2)^{3/4}}$.

Expérimentalement, il était difficile de travailler rigoureusement dans le cas où $\omega_f \ll E^{1/2}$. Nous avons donc cherché un compromis entre faisabilité des expériences et sensibilité forte à la viscosité. L'annexe B présente les résultats des tests numériques qui nous ont poussés à travailler à des fréquences situées autour de $10^{-2} s^{-1}$.

2.4 Notions sur la Turbulence

Dans cette étude la turbulence est considérée comme un état particulier de l'écoulement des fluides que nous avons étudiés. Nous n'avons pas cherché à caractériser l'écoulement de manière locale, ni tenté d'obtenir expérimentalement des spectres d'énergie, d'entrophie qui pourraient caractériser notre état de turbulence. L'approche a été beaucoup plus phénoménologique. Nous avons cherché à comparer des expériences en régime laminaire ou les quantités moléculaires dominant avec des expériences en régime 'turbulent', où les propriétés de mélange doivent jouer un rôle non négligeable que nous avons cherché à quantifier. Nos états turbulents se caractérisent par un écoulement non prévisible (fluctuations rapides en temps) ainsi que par des échelles spatiales très différentes.

2.4.1 Le concept de viscosité apparente

Dès la première moitié du vingtième siècle, certains scientifiques se sont intéressés aux comportements non prédictifs qu'exhibaient les fluides qui nous entourent. Tout l'enjeu consistait à pouvoir prendre en compte et modéliser les termes non linéaires de l'équation de Navier-Stokes. Historiquement le problème a été abordé de la manière suivante, en introduisant le concept de 'viscosité turbulente'.

Pour comprendre ce concept de manière physique, on peut raisonner par analogie avec la viscosité moléculaire. La viscosité moléculaire, propriété intrinsèque du fluide est due à l'effet des collisions entre particules à l'échelle moléculaire. Cette aptitude à contrôler une instabilité de cisaillement peut être fonction des conditions de pression et de température et va dépendre de la nature physico-chimique du fluide que l'on considère. Cependant une fois toutes ces données établies, la viscosité du fluide peut être déterminée théoriquement ou expérimentalement, et pour les fluides newtoniens que nous considérons, cette grandeur représente un paramètre de nos expériences qui ne peut dépendre en aucun cas du type d'écoulement.

Pour la viscosité 'turbulente' ou encore 'apparente' il en est tout autrement. L'analogie vient du fait que si précédemment le mouvement se transmettait par l'intermédiaire des particules à l'échelle des molécules, maintenant le transport de quantité de mouvement est rendu plus efficace par l'interaction des tourbillons à l'échelle des particules fluides. Ainsi l'action des cellules de différentes tailles va accélérer ce mélange, l'écoulement réagit alors apparemment comme si la viscosité 'macroscopique' ou apparente était plus grande. Pour les développements qui vont suivre, nous avons suivi les grandes lignes du livre d'hydrodynamique général de ([Guyon & Hulin, 2001]).

Les équations de Reynolds

Cette approche physique a probablement aidé les premiers scientifiques s'intéressant au problème pour modéliser certains termes des équations de Reynolds (équation de la dynamique appliquée à la turbulence). Le cheminement pour arriver à l'expression mathématique de la viscosité turbulente passe par une description statistique de l'écoulement. En effet les écoulements turbulents présentent des fluctuations aléatoires de vitesse. Nous décomposons celle-ci en utilisant une valeur moyenne et des fluctuations. Cette décomposition dite de Reynolds appliquée à la composante de vitesse v_i s'écrit sous la forme :

$$v_i = \bar{v}_i + v'_i \quad \bar{v}'_i = 0 \quad (2.43)$$

La vitesse moyenne étant une moyenne sur le temps définie par :

$$\bar{v}_i(x) = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} v_i(x, t) dt \quad (2.44)$$

Nous nous intéressons à l'écriture de lois de mouvements concernant la vitesse moyenne à partir des équations de la dynamique. En remplaçant 2.43 dans l'équation de Navier Stokes 2.3 ⁷ nous obtenons :

$$\frac{\partial(\bar{v}_i + v'_i)}{\partial t} + (\bar{v}_i + v'_i) \frac{\partial(\bar{v}_i + v'_i)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\bar{p} + p')}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2(\bar{v}_i + v'_i)}{\partial^2 x_j} + f_i \quad (2.45)$$

En moyennant cette équation on obtient une équation proche de l'équation habituelle de la dynamique. En effet une bonne partie des termes de fluctuation disparaît lors du moyennage. Seul le produit $\overline{v'_j \frac{\partial v'_i}{\partial x_j}}$ qui est généralement non nul diffère de l'équation de Navier Stokes.

$$\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \bar{v}_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \overline{v'_j \frac{\partial v'_i}{\partial x_j}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{v}_i}{\partial^2 x_j} + f_i \quad (2.46)$$

Le travail consiste à trouver une forme équivalente du produit $\overline{v'_j \frac{\partial v'_i}{\partial x_j}}$ qui pourra être relié à la vitesse moyenne. En utilisant la condition d'incompressibilité $\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_i} = 0$ et $\frac{\partial v'_i}{\partial x_i} = 0$ nous pouvons écrire la relation suivante :

$$\overline{v'_j \frac{\partial v'_i}{\partial x_j}} = \frac{\partial \overline{v'_j v'_i}}{\partial x_j} - \overline{v'_i \frac{\partial v'_j}{\partial x_j}} = \frac{\partial \overline{v'_j v'_i}}{\partial x_j} \quad (2.47)$$

En passant ce terme à gauche dans l'équation 2.46 on obtient :

$$\rho \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\sigma}_{ij} - \rho \bar{v}_i \bar{v}_j - \rho \overline{v'_i v'_j}) + \rho f_i \quad (2.48)$$

où :

$$\bar{\sigma}_{ij} = -\bar{p} \delta_{ij} + \rho \nu \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.49)$$

On nomme tenseur de Reynolds la quantité $\tau_{ij} = -\rho \overline{v'_i v'_j}$. C'est le seul terme restant de l'équation de la dynamique qui implique des quantités fluctuantes.

⁷Nous avons ici gardé volontairement les équations sous leur forme dimensionnée car l'approche consiste à exprimer mathématiquement le terme homogène à une viscosité

C'est la modélisation de ce terme qui débouche sur le concept de viscosité turbulente. Les composantes non diagonales de ce tenseur, appelé aussi tenseur des contraintes turbulentes jouent un rôle prépondérant puisqu'elles correspondent aux contraintes de cisaillement qui favorisent l'apparition de nouveaux tourbillons. On remarquera à cette étape que par rapport au cas laminaire, on garde le même nombre d'équation, alors que nous avons augmenté le nombre d'inconnues. D'où la nécessité de relier les inconnues que sont τ_{ij} aux quantités moyennes.

Fermeture des équations et modèle de viscosité turbulente

En raison de la présence du terme non linéaire de l'équation de Navier-Stokes, nous ne pouvons pas obtenir un système fermé (même nombre de variables (les inconnues) que d'équations). Nous procédons à la fermeture des équations en cherchant à relier le tenseur τ_{ij} aux gradients de vitesses $\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j}$. L'inconvénient majeur de cette technique est qu'elle ne repose pas sur des bases physiques universelles. Les relations obtenues font alors souvent intervenir des paramètres qui seront ajustables d'un écoulement à l'autre. Cependant certains de ces modèles à la base théoriques, ont montré une bonne validation expérimentale.

Le modèle de Boussinesq

Ce premier modèle introduit par boussinesq en 1890 repose sur l'idée d'augmentation de la friction et du transport de quantité de mouvement que nous avons énoncé en introduction de cette partie. Pour cela il introduit un paramètre de viscosité apparente ν_t qui par analogie avec la viscosité moléculaire, relie le tenseur des contraintes turbulentes au gradient de vitesse moyen :

$$\tau_{ij} = \frac{\rho \nu_t}{2} \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.50)$$

ν_t ne repose pas sur des bases physiques a priori. Il faudra, dans le pire des cas, le déterminer en fonction du type d'écoulement mais également en fonction de l'endroit de mesure au sein de l'écoulement.

Le modèle de Prandtl

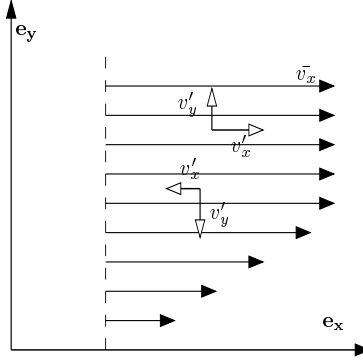


FIG. 2.10 – Schéma de l'écoulement turbulent plan, exemple pédagogique pour expliquer le modèle de Prandlt (d'après [Guyon & Hulin, 2001])

L'approche est légèrement différente. Ce modèle repose sur la prise en compte d'une longueur caractéristique de mélange pour modéliser le tenseur de Reynolds; Cette théorie peut se concevoir en analogie avec la notion de libre parcours moyen de la théorie cinétique des gaz. Prenons le cas simplifié d'un écoulement turbulent plan (figure 2.10). La vitesse peut s'écrire sous la forme suivante ($v_x = \bar{v}_x + v'_x$, $v_y = \bar{v}_y + v'_y$). Considérons de plus le cas d'un cisaillement moyen tel que $\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} > 0$. On nomme y_0 le niveau à partir duquel nous allons observer les fluctuations du mouvement et leurs origines. Pour une particule convectée par une fluctuation de vitesse ($v'_y < 0$) arrivant d'un niveau $y > y_0$, de vitesse moyenne $\bar{v}_x(y) > \bar{v}_x(y_0)$ sur ce niveau y_0 , la fluctuation de vitesse $v'_x(y_0)$ sera positive au niveau observé. De même un départ de particule de niveau inférieur amènera une contribution négative. On a donc en moyenne une contribution $\overline{v'_x v'_y}$ négative pour un gradient moyen de vitesse $\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y}$ négatif. De plus on remarque, qu'il y a une certaine corrélation entre v'_x et v'_y . On écrit :

$$v'_x \approx v_x(y_0) - v_x(y_0 + \Delta y) = -\Delta y \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} \quad (2.51)$$

$$\tau_{xy} = -\rho \overline{v'_x v'_y} = \rho \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} \overline{\Delta y v'_y} \quad (2.52)$$

On formule alors une corrélation entre $\overline{\Delta y v'_y}$ et une certaine longueur de mélange l

$$\overline{\Delta y v'_y} = \kappa l \sqrt{v_y'^2} \quad (2.53)$$

où $\sqrt{v_y'^2}$ est la vitesse quadratique moyenne des fluctuations et κ un coefficient numérique à déterminer. Finalement :

$$\tau_{xy} = -\rho \overline{v'_x v'_y} = \rho \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} \kappa l \sqrt{v_y'^2} \quad (2.54)$$

l représente la longueur sur laquelle la vitesse d'un élément fluide reste corrélée ; selon le type d'écoulement cette distance, définie de manière locale, représentera la distance à la paroi. L'analogie avec la théorie cinétique des gaz existe à travers l'expression de $\sqrt{v_y'^2}$ qui représenterait la vitesse d'agitation thermique et l qui serait l'analogie du libre parcours moyen des molécules. Cependant l'analogie s'arrête ici en raison de la non séparation d'échelle entre les mouvements de fluctuations turbulents et l'échelle de l'écoulement. Cette théorie a encore un bon support expérimental mais l reste à paramétriser selon les expériences.

Modèles plus récents et simulations numériques

Les modèles présentés plus haut constituent une base de modélisation mais ne sont pas ou peu utilisés tels quels, dans les modélisations actuelles d'écoulements turbulents. Du point de vue des numériciens, leur intérêt serait donc surtout pédagogique. De notre point de vue, plutôt expérimentateur, ils constituent une référence physiquement compréhensible pour l'interprétation de nos résultats. Cependant pour faire le lien entre les travaux numériques actuels et nos résultats expérimentaux, il peut être utile d'avoir connaissance des approches numériques de la turbulence. De manière simplifiée probablement, nous distinguons tout d'abord trois grandes familles de modélisations de la turbulence.

Le premier axe de modélisation numérique regroupe les *DNS* (Direct Numérical Simulation). Toutes les échelles spatio temporelles pertinentes sont calculées. Elles constituent les modèles de turbulence les plus précis mais nécessitent des calculateurs puissants ainsi que beaucoup de place mémoire. Toutes ces contraintes font que la simulation numérique directe d'écoulements reste limitée à des écoulements à géométries simples et à des nombres de Reynolds faibles . Une paramétrisation de la turbulence est nécessaire si l'on veut aborder des écoulements plus complexes.

La première voie de paramétrisation de la turbulence regroupe les modèles types $(K - \epsilon)$ qui tentent de lier la turbulence inhomogène (ex : écoulement avec conditions aux limites - quasigéostrophiques) à la turbulence homogène et isotrope où l'on applique les lois de Kolmogorov. L'idée est de relier le tenseur de Reynolds non seulement aux cisaillements principaux mais également à l'intensité de la turbulence ($E_c(K)$) et à la dissipation ($\epsilon(K)$). Ainsi on peut aboutir à des formulations du type $\nu_T \approx \frac{K^2}{\epsilon}$ où on voit apparaître une viscosité turbulente qui dépend de l'échelle considérée. Ces modèles nécessitent une certaine paramétrisation (notamment la détermination de la constante de proportionnalité). Leur principal point faible semble être une surestimation du transport turbulent près des parois, aussi ils sont souvent couplés à des modèles de lois

de parois (type loi logarithmique de la vitesse). Un autre point faible peut apparaître lors de simulations d'écoulement à fort cisaillement moyen, où la formulation classique de ν_T surestime l'effet dissipatif des tourbillons. Néanmoins cette première voie de modélisation qui permet d'aboutir à la branche des modèles statistiques d'écoulement (Reynolds-Averaged Navier Stokes [*RANS*]) est en cours d'évolution [Shih *et al.*, 1995]. Ainsi, ces simulations devraient pouvoir s'appliquer à une plus grande variété d'écoulements dont les écoulements géophysiques, soumis à la rotation.

La deuxième voie de paramétrisation se base sur des modèles issus de celui de Prandtl. Ce sont les types de modèles qui apparaissent dans les *LES* (Large Eddy Simulation). De manière simplifiée, on peut dire que pour résoudre les équations du mouvement, on effectue une opération de filtrage sur les échelles plus fines qu'une certaine largeur Δx choisie judicieusement. Les fluctuations de grandes longueurs d'onde sont résolues numériquement tandis que l'on modélise les fluctuations sous maille (Subgrid Scale model *SGS*). La modélisation se fait en modélisant l'action dissipative des petites échelles sur les grandes échelles, au moyen d'une viscosité tourbillonnaire (modèles type 'Smagorinsky') faisant intervenir la longueur de coupure Δx et le taux de cisaillement [Feby, 2002]. Ainsi

$$\nu_T = (C_s \Delta x)^2 \left(2 \frac{\bar{v}_i}{\partial x_j} \frac{\bar{v}_j}{\partial x_i} \right)^{1/2} \quad (2.55)$$

Ces modèles numériques constituent un compromis entre l'approche *RANS* et l'approche *DNS*. Une amélioration des méthodes LES arrive avec l'apparition des méthodes *DML* (Dynamic Multi Level method).

Particularité de la turbulence géostrophique

Les particularités de la turbulence géostrophique viennent de la prépondérance des structures bidimensionnelles. Julien Aubert dans le chapitre d'introduction de sa thèse reprend les démonstrations que l'on trouvera dans les ouvrages de [Pedlosky, 1987] ou [Rhines, 1975]. Deux résultats importants qui permettent de caractériser cette turbulence sont :

La conservation de l'enstrophie ($\approx \omega^2/2$) exigeant qu'un transfert d'énergie ($\approx v^2/2$), de l'échelle d'injection vers les petites échelles soit accompagné d'un transfert plus grand en sens inverse. Il en résulte une cascade d'énergie vers les grandes échelles (cascade inverse).

L'enstrophie cascade en sens direct de l'échelle d'injection vers les petites échelles.

Dans l'espace physique, ceci se traduit par l'apparition de mouvements de grandes échelles (type vent zonaux) par cascade inverse entre l'échelle d'injection et la taille de l'écoulement. On assiste également à l'apparition de fils de vorticité. La viscosité

moléculaire ne jouera un rôle qu'aux extrémités du spectre : aux petites longueurs d'onde, elle va dissiper l'énergie de la vorticité. Aux grandes longueurs d'onde par l'intermédiaire du frottement d'Ekman sur les parois, elle va dissiper l'énergie des modes les plus petits. Dans le cadre des expériences réalisées en géométrie sphérique, l'influence de la pente a un rôle non négligeable sur la nature de la turbulence géostrophique. Ainsi l'effet β limite la cascade d'énergie vers les grandes échelles à l'échelle dite de Rhines dont le nombre d'onde est définie par $K_\beta = \sqrt{\frac{\beta}{2\Omega R}}$. Dans le cas de la sphère β variant, le nombre d'onde limite va dépendre de la distance à l'axe.

Nathanaël Schaeffer, Julien Aubert et Nicolas Gillet, ont pu mettre en évidence des spectres associés à ce type de turbulence, à travers la comparaison entre leurs modèles numériques et les expériences annexes . Pour les expériences que j'ai réalisées, j'ai donc cherché à rester dans le cadre stricte des régimes de paramètres où ces comportements ont été mis en évidence.

Le mécanisme de spin-up ainsi que les équations qui vont avec, reposent sur l'hypothèse forte que présente la contrainte de Proudman-Taylor. Aussi il est à noter que globalement, bien que dans le cas de la turbulence géostrophique les structures de grandes tailles semblent respecter cette bi-dimensionnalité, la contrainte de Proudman-Taylor s'affaiblit à mesure que l'échelle des mouvements considérés devient petite. Le nombre de Rossby qui quantifie l'influence des effets non-linéaires par rapport à la rotation peut donner une information sur le caractère des structures qui vont briser la contrainte. Ainsi en définissant $v(l)$ la vitesse associée à un tourbillon et l sa largeur caractéristique, on remarquera que les tourbillons, dont le temps de retournement $v(l)/l$ est inférieur à la rotation d'ensemble, ne sentiront pas les effets de la force de Coriolis.

Dans notre application d'une théorie linéaire (spin-up)    une certaine modélisation de la turbulence qu'est la viscosité turbulente, apparaît la problématique des limites d'applications de cette théorie. Au vu de la géométrie globalement bidimensionnelle de l'écoulement et de la turbulence, on peut également s'interroger sur la valeur scalaire que l'on affecte à la viscosité apparente telle qu'elle a été modélisée. Une amélioration du modèle consisterait à séparer la contribution de la diffusion verticale (probablement faible) de celle réalisée par les structures de différentes échelles dans le plan perpendiculaire à l'axe de rotation. Une autre question adressée, réside dans la prise en compte des petites structures (non influencées par la rotation) opérant probablement une diffusion isotrope. Est-il légitime de les modéliser par une viscosité accrue pour contourner la difficulté de leur prise en compte dans la théorie du spin-up ? Quelle contribution ont ces petites structures dans l'efficacité du mélange ? Cette contribution est-elle dominante sur le mélange associé aux structures de grande taille plus énergétiques ? Et enfin quelle est l'influence des effets liés à la pente dans l'équilibre de ces contributions ?

2.4.2 Couches limites laminaires/turbulentes et turbulence en volume

Reprenons ici l'exemple des océans pour illustrer nos propos. La couche d'Ekman, présente à la surface de l'océan, est le lieu d'importants échanges avec l'atmosphère. La

structure théorique prédit une structure en spirale des courants. Cependant la turbulence dans la couche mélangée est complexe et intermittente, ce qui nécessite une paramétrisation très avancée dans les modèles numériques [Chassignet & Verron, 1990]. Les différences fondamentales entre couches limites laminaires et couches limites turbulentes semblent être des contraintes à la paroi plus élevées, et des vitesses atteignant plus lentement la valeur de l'écoulement extérieur. D'après des mesures en laboratoire une formulation quadratique des vitesses semblerait plus réaliste, mais cependant l'approche qui consiste à augmenter la viscosité apparente pour simuler l'augmentation du frottement liée à la turbulence de petite échelle reste utilisée dans certains cas. Dans le cadre de nos expériences, nous n'avons pas pu, pour des raisons principalement techniques, observer les profils de vitesses dans les couches limites, celles-ci étant d'une épaisseur trop fine par rapport à la résolution de nos techniques de mesure aussi près des parois. C'est par l'intermédiaire du transport global de quantité de mouvement que nous pourrions évaluer le caractère turbulent ou non de nos couches limites. La question associée pourrait être : quelle est la contribution de la turbulence en volume par rapport à la turbulence de la couche limite si les deux jouent un rôle ? Quelles sont alors les mécanismes de déstabilisation de cette dernière ?

2.5 Écoulement et champ magnétique

Au cours du travail expérimental nous avons seulement abordé des problèmes relatifs à l'hydrodynamique pure. Dans l'optique d'appliquer nos résultats au cas terrestre, nous avons dans un deuxième temps voulu analyser l'effet de la prise en compte du concept de viscosité efficace dans le calcul du couplage à l'interface noyau-manteau, couplage en partie électromagnétique faisant intervenir les mécanismes d'induction.

2.5.1 L'équation de l'induction

Cette équation nous donne l'évolution temporelle du champ magnétique comme étant la contribution conjointe d'un terme source d'advection du champ magnétique par l'écoulement et d'un terme de diffusion. Sa formulation passe par la manipulation des quatre équations de Maxwell qui décrivent le champ électromagnétique :

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.56)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \quad (2.57)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{\rho_e}{\varepsilon_0} \quad (2.58)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.59)$$

où $\mathbf{B}$ désigne le champ magnétique, $\mathbf{E}$ le champ électrique, $\mathbf{j}$ la densité de courant électrique et ρ_e la densité de charge électrique. On définit la vitesse de la lumière dans le vide, $(\varepsilon_0\mu_0)^{-1} = c^2$ où ε_0 est la permittivité électrique du vide et μ_0 la perméabilité magnétique du vide.

Pour un fluide conducteur d'électricité, la loi d'Ohm, qui traduit à l'échelle macroscopique, l'effet de l'équilibre entre les forces de Lorentz et les forces de collisions entre les porteurs d'électricité (électrons et ions) de l'échelle microscopique, nous donne :

$$\mathbf{j} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (2.60)$$

où σ est la conductivité électrique du métal et $\mathbf{v}$ la vitesse de ce dernier. En remplaçant $\mathbf{j}$ par l'expression 2.60 dans le rotationnel de la deuxième loi de Maxwell (Loi d'Ampère), on obtient :

$$-\nabla^2 \mathbf{B} = \mu_0 \left(\sigma \nabla \times \mathbf{E} + \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \varepsilon_0 \frac{\partial \nabla \times \mathbf{E}}{\partial t} \right) \quad (2.61)$$

La dernière étape consiste à remplacer $\nabla \times \mathbf{E}$ par $-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ (équation 2.56). Dans les fluides que nous étudions, les diffusivités magnétiques $\eta \equiv (\mu_0\sigma)^{-1}$ sont de l'ordre du $m^2.s^{-1}$. Ainsi le dernier terme de l'équation précédente peut être négligé pour toutes les fréquences temporelles d'évolution du champ magnétique inférieures à la valeur $f \approx c^2/\eta$ (environ 10^{16} Hz), on a :

$$\frac{\eta}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} \ll \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.62)$$

on obtient alors l'équation d'induction magnétique :

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \eta \nabla^2 \mathbf{B} \quad (2.63)$$

2.5.2 Force de Lorentz et équations de la dynamique

Pour les fréquences considérées, les forces électriques sont négligeables devant les forces magnétiques, la loi d'Ohm relie alors directement la densité de courant $\mathbf{j}$ au champ magnétique : $\mu_0 \mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{B}$. Cette relation permet d'écrire la force de Lorentz $\mathbf{F}_L = \mathbf{j} \times \mathbf{B}$ en fonction de $\mathbf{B}$, ainsi $\mathbf{F}_L = \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}$. Nous ajoutons cette nouvelle force dans l'équation de la dynamique :

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \right) = -\nabla P + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \quad (2.64)$$

2.5.3 Écriture adimensionnée et nombres caractéristiques

En prenant comme grandeur caractéristique B l'intensité moyenne du champ magnétique $\mathbf{B}$, on fait apparaître le nombre d'Elssasser dynamique Λ_d qui quantifie le rapport entre les forces de Lorentz et la force de Coriolis :

$$\Lambda_d = \frac{\sigma B^2}{\rho \Omega} \frac{\eta}{\Omega R^2} = \frac{B^2}{\Omega^2 R^2 \mu_0 \rho} \quad (2.65)$$

En introduisant le nombre de Prandtl magnétique Pm , défini comme le rapport de la viscosité dynamique sur la diffusivité magnétique, on obtient pour les fluides conducteurs le système d'équations adimensionnées suivant :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + 2\mathbf{e}_z \times \mathbf{v} = -\nabla \Pi + E \nabla^2 \mathbf{v} + \Lambda_d (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \quad (2.66)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \frac{Ek}{Pm} \nabla^2 \mathbf{B} \quad (2.67)$$

2.5.4 Électromagnétique et conditions de passages

On définit donc un domaine (1) et un domaine (2) dont les propriétés électromagnétiques sont différentes. On note $\mathbf{E}_1, \mathbf{B}_1, \mathbf{E}_2$ et $\mathbf{B}_2$ les champs associés aux deux domaines et $\mathbf{n}$ la normale à la surface de jonction orientée vers le domaine (2). La non modélisation des couches limites fait apparaître une densité de courant surfacique à l'interface des deux domaines défini par $\mathbf{j}_s = \rho_s \mathbf{v}_s$. Les conditions de passage d'un domaine à l'autre s'obtiennent grâce aux équations de Maxwell et aux théorèmes de circulation :

$$\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1 = \mu_0 \mathbf{j}_s \times \mathbf{n} \quad (2.68)$$

$$\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1 = \frac{\rho_s}{\varepsilon_0} \mathbf{n} \quad (2.69)$$

En écriture scalaire cette expression rend compte d'une discontinuité apparente de la composante tangentielle à la paroi du champ magnétique ainsi que de la composante normale du champ électrique.

Deuxième partie

Etudes expérimentales

Chapitre 3

Introduction : protocole expérimental

3.1 Contexte

La démarche expérimentale présente de nombreux intérêts comme celui de pouvoir s'interroger sur la nature physique de certains résultats sans les modéliser par avance. Les expériences sont le siège de phénomènes nouveaux pour lesquels on cherchera une interprétation basée sur nos connaissances antérieures du problème. Les expériences réalisées au cours de cette thèse visaient à observer une modification du transport de la quantité de mouvement (la viscosité efficace) lorsque la turbulence augmente.

Plusieurs dispositifs expérimentaux conçus pour l'étude des écoulements en rotation rapide ont été mis à notre disposition. Tous présentaient une certaine complémentarité, dans leur forme, leur technique de mesure ainsi que dans les mécanismes de forçages. Une liste indicative de leurs caractéristiques principales est présentée dans le tableau 3.1. L'objet de cette partie vise à recenser les apports de chaque expérience dans la compréhension du transport efficace de quantité de mouvement.

Nom	Caractéristiques	Re	Forçage
Expérience de convection Eau	géométrie sphérique convection thermique - fort P	1-100	$Ra_c-80 Ra_c$
Expériences de convection Gallium	géométrie sphérique convection thermique - faible P	1-1000	$Ra_c-5 Ra_c$
Expérience DTeau	géométrie sphérique rotation différentielle	1-1000	$Ro_c-20 Ro_c$
Expérience de convection Oxford	géométrie cylindrique convection thermique	1 -1000	$Ra_c-100 Ra_c$

TAB. 3.1 – Présentation des différents montages expérimentaux

3.2 Les problématiques

Nous avons tout d'abord considéré que la modification de la viscosité efficace était liée à l'intensité de turbulence ; ceci pouvait se quantifier via des nombres de Reynolds ou des écarts au seuil de convection. Cette première modélisation qui faisait suite aux résultats de convection thermique en eau n'a pu être généralisé simplement. Aussi la comparaison de diverses expériences a permis de s'interroger sur les mécanismes efficaces de transport dans les systèmes en rotation rapide. Par exemple la comparaison des expériences en géométrie sphérique avec celles en géométrie cylindrique devait permettre d'isoler la contribution de l'effet de la pente (effet β). De même, la comparaison entre les expériences de convection thermique en eau et celles en gallium renseignent sur l'importance de la diffusion thermique. L'expérience de rotation différentielle en eau, amène quant à elle, un forçage mécanique auquel est associé une turbulence "d'ondes". Ces différents dispositifs permettent-ils d'identifier l'origine de la viscosité efficace : turbulence en volume ou instabilité de couches limites ? A la suite de toutes ces expériences, nous aurions espéré isoler des mécanismes et proposer un loi générale de viscosité efficace pour les systèmes dynamiques en rotation rapide. Malheureusement ceci n'est pas possible à ce jour.

La comparaison de résultats issus de dispositifs expérimentaux différents est délicate. C'est pourquoi, afin de faciliter notre étude, nous utilisons le même protocole et la même méthode d'inversion pour chaque montage expérimental. Il subsiste néanmoins de nombreuses différences qui peuvent poser problème.

3.3 Le protocole

L'idée s'articule autour de la réalisation des expériences de spin-up, spin-down et des expériences d'oscillation du conteneur qui déterminent le couplage entre la paroi et le fluide.

Dans un premier temps, on réalise ces expériences en régime laminaire ; nous retrouvons alors la viscosité moléculaire du fluide. Les mesures de vitesse permettent d'évaluer les nombres d'Ekman associés à nos expériences (section 2.3). Ces expériences permettent de calibrer les dispositifs.

Dans un deuxième temps on réalise des expériences similaires en présence de turbulence ; cette turbulence est générée par convection thermique ou rotation différentielle. La mesure des vitesses apporte alors une information sur la viscosité efficace du système qui, dans certains cas, pourra être sensiblement différente de la viscosité moléculaire mesurée auparavant.

3.4 Méthode d'inversion

L'inversion des vitesses mesurées mène à une estimation locale du nombre d'Ekman. Elle repose sur une méthode de moindres carrés. Pour le Spin-Up, on s'attend à ce que

les vitesses mesurées soient de la forme :

$$v_{mes\varphi} = s\Delta\Omega \exp\left(\frac{-t}{\tau(s, E)}\right) \quad (3.1)$$

où $s\Delta\Omega = V_0(s)$ est le saut de vitesse initiale, τ le temps caractéristique de synchronisation et s le rayon de la sphère. La technique de moindres carrés consiste à inverser les couples de valeur $(V_{0min}(s), \tau_{min}(s))$. Ces valeurs sont telles que pour toutes les quantités $V_0(s), \tau(s)$, que l'on fait varier sur une gamme de valeurs appropriées, on aie :

$$\min \left(\sum_{t=t_0}^{t=t_1} \left(v_{mes\varphi}(s) - V_0(s) \exp\left(\frac{-t}{\tau(s)}\right) \right)^2 \right) \Rightarrow (V_{0min}(s), \tau_{min}(s))$$

La qualité des inversions va dépendre de plusieurs facteurs. Le plus fondamental est la qualité des données qui peut varier fortement d'une expérience à l'autre et d'un dispositif à l'autre. Une estimation de la réussite de ses inversions se fait par la visualisation des données et également grâce à la fonction coût $Q_{inv}(s)$ correspondant à l'écart quadratique moyen entre le signal mesuré et la fonction inversée :

$$Q_{inv}(s) = \frac{\min \left(\sum_{t=t_0}^{t=t_1} \left(v_{mes\varphi}(s) - V_0(s) \exp\left(\frac{-t}{\tau(s)}\right) \right)^2 \right)}{N} \quad (3.2)$$

N étant le nombre de valeurs de vitesse prises en compte dans l'inversion sur l'intervalle de mesure $[t_0, t_1]$. Cet intervalle correspond aux temps tels que la vitesse passe de $V_0(s)$ à $V_0(s)/e$.

La valeur du saut de vitesse initial V_0 est connue. Plus cette inversion sera proche du saut de vitesse imposé, meilleure sera la confiance en notre inversion de τ . La précision de ces inversions va dépendre à la fois de l'échantillonnage des mesures (en temps et en espace), et du pas d'échantillonnage avec lequel on fait varier les quantités inversées $V_0(s), \tau(s)$. Ces remarques qualitatives seront reprises de manière quantitative lorsque l'on étudiera chaque expérience en particulier.

J'aimerais attirer l'attention sur le fait que l'on obtient pour chaque rayon (s) une estimation du temps de synchronisation $\tau(s)$, et ce de manière indépendante d'une profondeur à l'autre. A partir de là deux possibilités s'offrent à nous. La première est de faire une inversion globale de la viscosité en cherchant le meilleur compromis en nombre d'Ekman correspondant aux valeurs inversées à chaque profondeur. L'hypothèse implicite dans ce cas est une hypothèse de viscosité efficace constante dans le volume. On obtient alors un nombre d'Ekman moyen.

La deuxième possibilité consiste à regarder localement à quelle valeur de viscosité correspond chaque temps de synchronisation inversé. Cette deuxième méthode apporte une information locale sur la viscosité apparente. La qualité des données n'étant pas

égale d'une profondeur à l'autre cette deuxième approche permet de définir des zones privilégiées où la confiance en nos inversions sera maximum.

Pour les expériences oscillantes le principe est analogue, la fonction est de la forme :

$$v_{mes_\varphi} = A(E, \omega_f, \Delta\Omega_M, s) \sin(\omega_f t + \phi(E, \omega_f, s)) \quad (3.3)$$

A est l'amplitude des vitesses et ϕ est le déphasage par rapport à l'oscillation forcée de la sphère à la fréquence ω_f . ($A_{min}(s)$ et $\phi_{min}(s)$) s'obtiennent grâce à la minimisation entre le signal mesuré est la fonction, soit :

$$\min \left(\sum_{t=t_0}^{t=t_1} (v_{mes_\varphi}(s) - A(s) \sin(\omega_f t + \phi(s)))^2 \right) \Rightarrow (A_{min}(s), \phi_{min}(s))$$

Chapitre 4

Expériences de convection en géométrie sphérique

Le travail expérimental a été réalisé en collaboration avec Jean-Paul Masson et Daniel Brito. Nous avons effectué des expériences sur deux dispositifs qui avaient pour but d'étudier la convection thermique en eau pour le premier et en gallium pour le deuxième (thèses de [Aubert, 2001],[Gillet, 2004]). Dans toutes les expériences réalisées nous avons cherché à rester dans le cadre de la turbulence quasigéostrophique, c'est à dire avec un écoulement dominant qui respecte globalement la condition de Proudman-Taylor (invariance selon z).

4.1 L'expérience de convection

4.1.1 Description du dispositif expérimental

Le dispositif est le suivant (figure 4.1) : nous disposons d'une sphère de rayon ($R_2 = 110\text{ mm}$) faite en Polycarbonate pour les expériences en eau et en cuivre pour les expériences en gallium. Toutes les deux sont traversées par un manchon en cuivre de rayon ($R_1 = 40\text{ mm}$). L'ensemble peut tourner à des vitesses de rotation allant jusqu'à 1000 tours par minute (*tpm*) soit 105 rad.s^{-1} , entraîné par un moteur de 1.4 kW . On impose une différence de température entre le manchon intérieur et la sphère extérieure afin de créer des mouvements de convection. Pour cela on refroidit la partie interne en faisant circuler de l'eau froide à l'intérieur du manchon. L'ensemble du dispositif est maintenu dans une enceinte thermostatée afin de contrôler la température de la sphère externe (cas de l'eau). Pour les expériences en gallium qui doivent être maintenues au dessus de la température de cristallisation de celui-ci ($T = 29.7^\circ$), une spirale de résistance chauffante est installée sur la sphère de cuivre afin d'augmenter le chauffage de manière plus efficace.

Suivant les idées développées par [Busse & Carrigan, 1976], ce dispositif exploite le

caractère instable du système soumis aux forces d'Archimède dues au gradient de température positif entre l'axe et le bord externe et aux forces centrifuges. Au delà d'un certain seuil (Ra_c), des mouvements de convection vont apparaître. Le gradient de température de notre système est opposé à celui présent dans le noyau liquide de la Terre. Dans le cas de la Terre la présence d'instabilité convective s'explique par la contribution des forces d'Archimède et de la gravité.

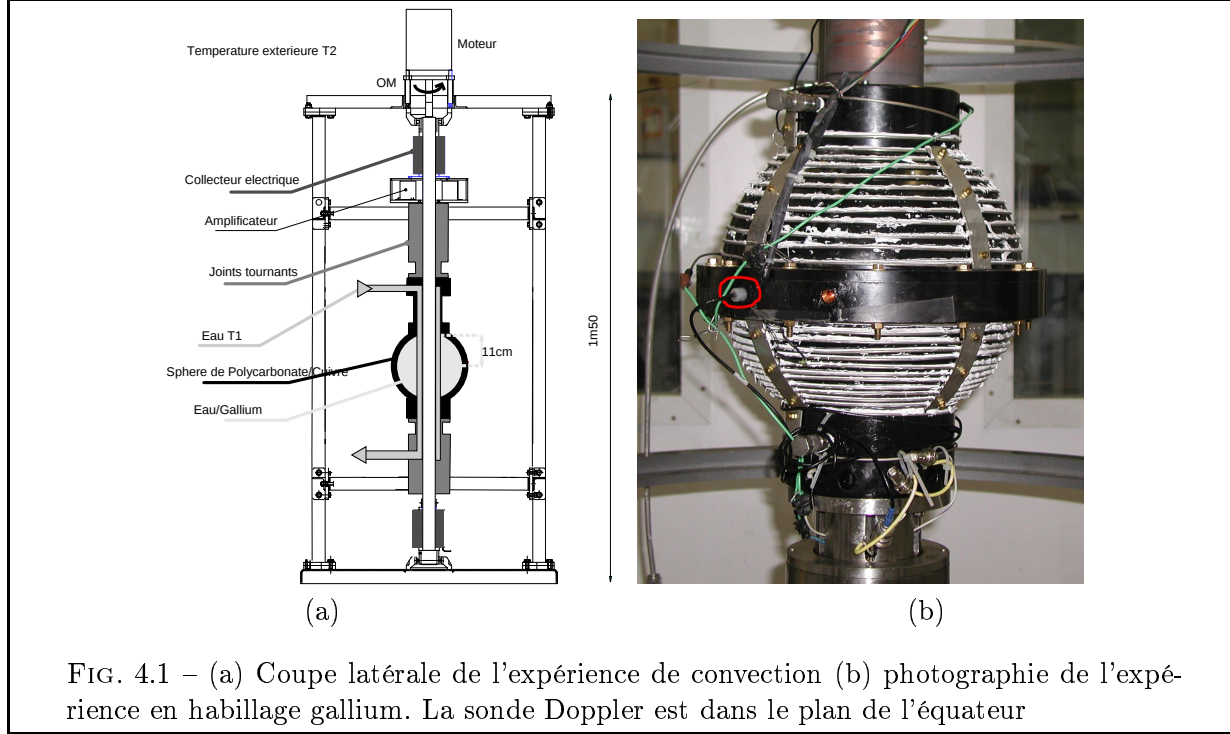


FIG. 4.1 – (a) Coupe latérale de l'expérience de convection (b) photographie de l'expérience en habillage gallium. La sonde Doppler est dans le plan de l'équateur

Pour ces expériences, nous faisons l'hypothèse que le champ de gravité terrestre est faible devant la gravité centrifuge. Cette condition est réalisée dès lors que nous tournons à des vitesses supérieures à 200 rpm ([Gillet, 2004]).

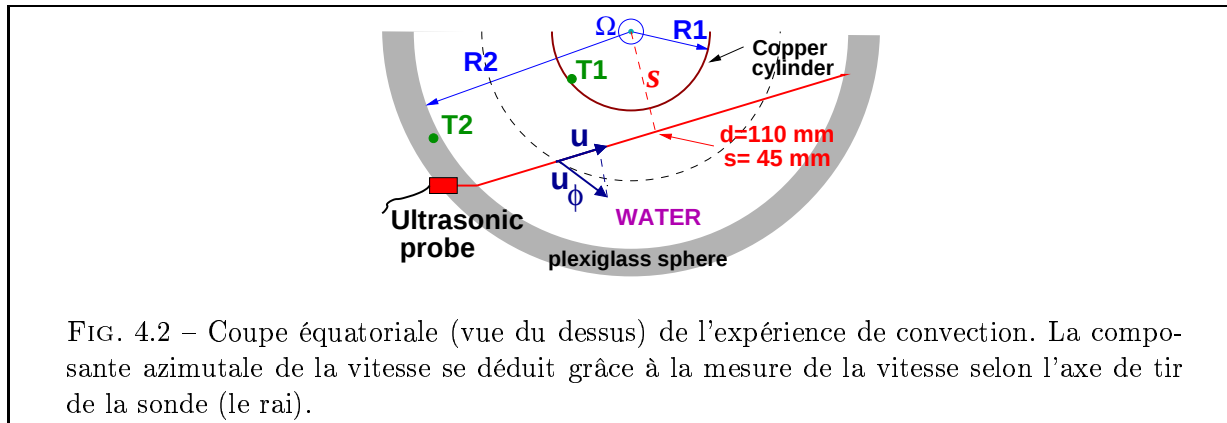
On définit ΔT_c par rapport au nombre de Rayleigh critique : $Ra_c = \frac{\alpha g_c \Delta T_c D^3}{\kappa \nu}$ avec $D = R_2 - R_1$. En rotation rapide le seuil de convection Ra_c évolue en $\Omega^{4/3}$ [Chandrasekhar, 1953]. La gravité est du type centrifuge ($\mathbf{g}_c = \Omega^2 \mathbf{r}$) si bien que $\Delta T_c \sim \Omega^{-2/3}$. Ainsi ΔT_c diminue quand la rotation augmente. Pour explorer des régimes très développés ($\frac{\Delta T}{\Delta T_c} \gg 1$), nous avons fort intérêt à travailler à forte rotation d'ensemble. La différence de température maximum réalisable avec cette expérience est de 30°C.

Les mesures de température se font grâce à des thermocouples embarqués (sonde constantan/platine ou constantan/fer). L'un est placé à la surface du manchon interne, l'autre dans la sphère externe, ils sont situés à proximité de l'équateur et leur précision est estimée à 0.1°C.

Toutes les connections électriques des appareils embarqués (sondes de températures, sonde Doppler (section 4.1.2)) se font par l'intermédiaire de collecteurs électriques tournants. Un réseau d'amplificateurs est placé en amont de ceux-ci afin d'amplifier certains signaux faibles (les différences de potentiels associés aux températures) et

diminuer la détérioration du signal pendant leur transmission. Néanmoins, de nombreux bruits électromagnétiques intégrés principalement lors des différentes connections viennent perturber le signal et diminuer la qualité de nos mesures.

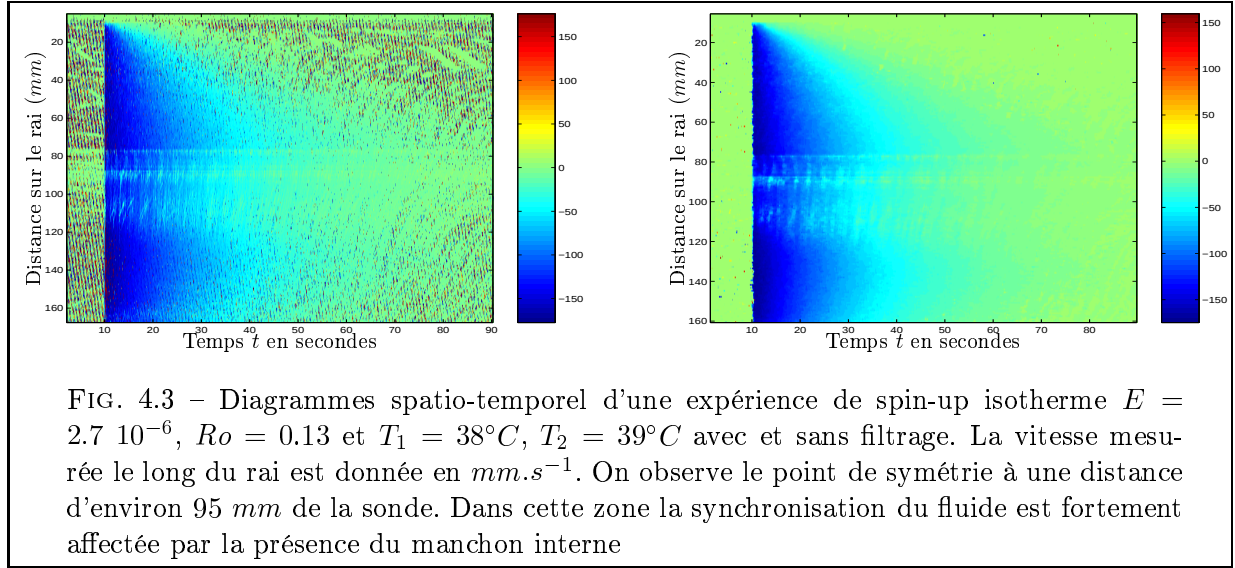
4.1.2 Mesures de vitesse par effet Doppler



Les mesures de vitesses sont faites grâce à une technique de vélocimétrie Doppler ultrasonore. Le principe est le suivant : une sonde piézoélectrique placée à l'équateur émet un train d'onde ultrasonore qui va aller se réfléchir sur des particules en suspension dans le fluide étudié. Cette sonde embarquée de 8 mm de diamètre envoie un signal à 4 Mhz. Les signaux associés aux ondes rétrodiffusées dans la direction de la sonde émetteur-récepteur sont alors enregistrés et transmis au système d'analyse (le *Dop1000* ou le *Dop2000* de 'Signal Processing' selon les expériences). Le temps de trajet de l'onde, connaissant sa vitesse (1500 m.s^{-1} dans l'eau et 2860 m.s^{-1} dans le gallium), nous renseigne sur la distance qui sépare la particule de la sonde. Le décalage en fréquence entre l'onde émise et l'onde reçue nous donne la valeur de la vitesse de la particule dans la direction de tir (figure 4.2).

Afin de cartographier précisément l'écoulement il faut que les particules soient de densité égale à celle du fluide étudié pour qu'elles puissent être complètement passives dans l'écoulement (en suspension). Elles doivent être réparties de manière homogène dans tout le volume et en nombre suffisant. De plus elles doivent posséder des caractéristiques phoniques adéquates (différence d'impédance), pour réfléchir suffisamment le signal. Pour l'eau la particule idéale semble être le pollen. Bien que ses caractéristiques n'aient pas complètement été établies, on assiste à une légère centripétation des particules qui nous indique que le pollen est plus dense que l'eau. Cet effet de centripétation, à différence de densité par ailleurs constante, sera proportionnel à la taille de la particule. On aura alors tout intérêt à travailler avec des particules de faible taille. Le pollen utilisé à une taille caractéristique de l'ordre de $80 \mu\text{m}$. Pour le gallium (densité ≈ 6), on utilise les oxydes qui peuvent se former (GaO_2 de densité 4.77 et Ga_2O_3 de densité 6.44). La subtilité pour le Gallium consiste à travailler avec un fluide ni trop 'propre' (sans particules réfléchissantes), ni trop 'sale'¹. La fenêtre de mesure s'étend alors entre une demi-journée et deux semaines après le remplissage de la sphère qui se

fait sous atmosphère d'argon afin d'éviter l'oxydation trop rapide du gallium. L'effet de la centripétation des particules sur l'incertitude de la mesure de vitesse a été estimé par Nicolas Gillet dans sa thèse ([Gillet, 2004]). Pour les tirs que nous effectuons (proche azimutal), nous retiendrons que l'erreur d'imprécision est faible devant les autres types d'erreurs. Le problème majeur dans notre cas, vient plutôt du fait que s'il n'y a pas remobilisation des particules par des mouvements de recirculation dans tout le volume, on observe alors une perte de signal pour les grandes distances à l'axe (effet en $\Delta\rho\Omega^2r$) et pour les vitesses de rotation importantes. Des compromis doivent être alors trouvés selon les cas de figure.



Une donnée importante du problème est la connaissance précise de l'angle de tir. Sur l'expérience convection il existe deux emplacements pour la sonde. L'un est destiné aux tirs radiaux pour mesurer les vitesses radiales. L'autre est une position dite 'azimutale', bien qu'il s'agisse d'un tir selon une corde (figure 4.2), et permet d'obtenir la vitesse azimutale connaissant l'angle de tir. Celui-ci peut être estimé grâce aux lois de l'optique géométrique, mais cette information peut être confortée expérimentalement en évaluant l'écho du bord externe de la sphère vu par la sonde, ou n'importe quelle distance par ailleurs connue¹. Ces angles ont été estimés à $\alpha = 21.5^\circ \pm 1.5^\circ$ pour les expériences en eau et $\alpha = 24.3^\circ \pm 1.5^\circ$ pour les expériences en gallium ([Aubert *et al.*, 2001]).

Caractéristiques techniques du Dop et précision.

Il est possible de régler de nombreux paramètres en entrée d'analyse sur le Dop1000 ou 2000. Ceux-ci vont contribuer à augmenter ou diminuer la précision de nos mesures mais aussi la qualité de celles-ci². Bien qu'en pratique le réglage se fasse de manière semi-empirique, l'article ([Brito *et al.*, 2001]) nous présente de manière méthodique

¹La présence de particules en excès et un dépôt sur les parois entraînent une forte augmentation des rapports signaux sur bruit

²comme par exemple l'image du milieu suite aux expériences de spin-up sur les diagrammes spatio-temporels, figure 4.3.

les éventuels biais dûs à la technique Doppler. En s'inspirant de ce travail appliqué aux régimes étudiés dans les expériences, il me paraît important d'expliquer certains réglages qui influencent la précision de nos mesures.

1. *réglage de la prf (pulse repetition frequency)* : Il s'agit de la période qui sépare deux trains d'ondes. La période temporelle associée va déterminer la longueur maximum du profil ainsi que la vitesse maximum mesurable. Le rapport signal sur bruit est fortement dépendant de la prf sans pour autant qu'il soit possible de déterminer de manière univoque la prf optimum. Ainsi lorsque les expériences étaient de moindre qualité, il fallait l'ajuster. Pour les vitesses mesurées dans nos expériences (jusqu'à 200 mm.s^{-1}), l'erreur maximum imputable au changement de prf est de $\pm 6 \text{ mm.s}^{-1}$. Ceci constitue une erreur importante, bien que ce ne soit en rien comparable avec les biais observés pour des vitesses plus importantes ([Brito *et al.*, 2001]). Néanmoins, dès que cela était possible nous avons cherché à comparer des expériences à même prf pour s'affranchir de cette erreur systématique.
2. *réglage de la prf/profil* : La prf/profil permet de régler le nombre de tir à prendre en compte pour établir un profil de vitesse. L'acquisition d'un profil va ainsi varier entre 0.02 s et 0.1 s (pour des prf/profil de 64 à 128). Cette incertitude sur le temps est à comparer avec le temps global de spin-up pour les expériences correspondantes qui peut varier typiquement entre 15 s et une minute. Pour certaines expériences (particulièrement en gallium), nous avons opéré des médianes glissantes (basées sur 5 à 40 profils temporels) ce qui diminue théoriquement la résolution temporelle. Néanmoins la comparaison entre des inversions à partir de profils bruts et des traitements par médianes n'a pas d'influence majeure sur le τ et Vo inversés. La reproductibilité de différentes expériences réalisées dans les mêmes conditions montre que les τ inversés présentent un écart moyen de $\pm 0.5 \text{ s}$. Ceci se situe bien en deçà de l'incertitude théorique. Pour les expériences oscillantes et en vue des fréquences d'oscillations utilisées (entre 0.005 et 0.001 Hz), la précision temporelle est largement suffisante pour déterminer sans ambiguïté la phase du signal.

La résolution spatiale est limitée par les sondes utilisées. Dans la direction du tir, la résolution dépend de la longueur d'onde de l'onde ultrasonore émise (4 MHz). Pour une onde analysée sur 8 cycles, on obtient une résolution de l'ordre de 3 mm dans l'eau et 6 mm en gallium. Dans la direction perpendiculaire au tir, la résolution est déterminée par le colimatage du faisceau (8 mm ici). Une mesure de vitesse en un point donné résulte ainsi de la moyenne des vitesses de particules situées dans un cylindre de 8 mm de diamètre et de 3 ou 6 mm de hauteur. Cette opération est répétée le long du rai à plusieurs distances de la sonde avec un échantillonnage en espace variant entre 0.75 mm et 1.5 mm .

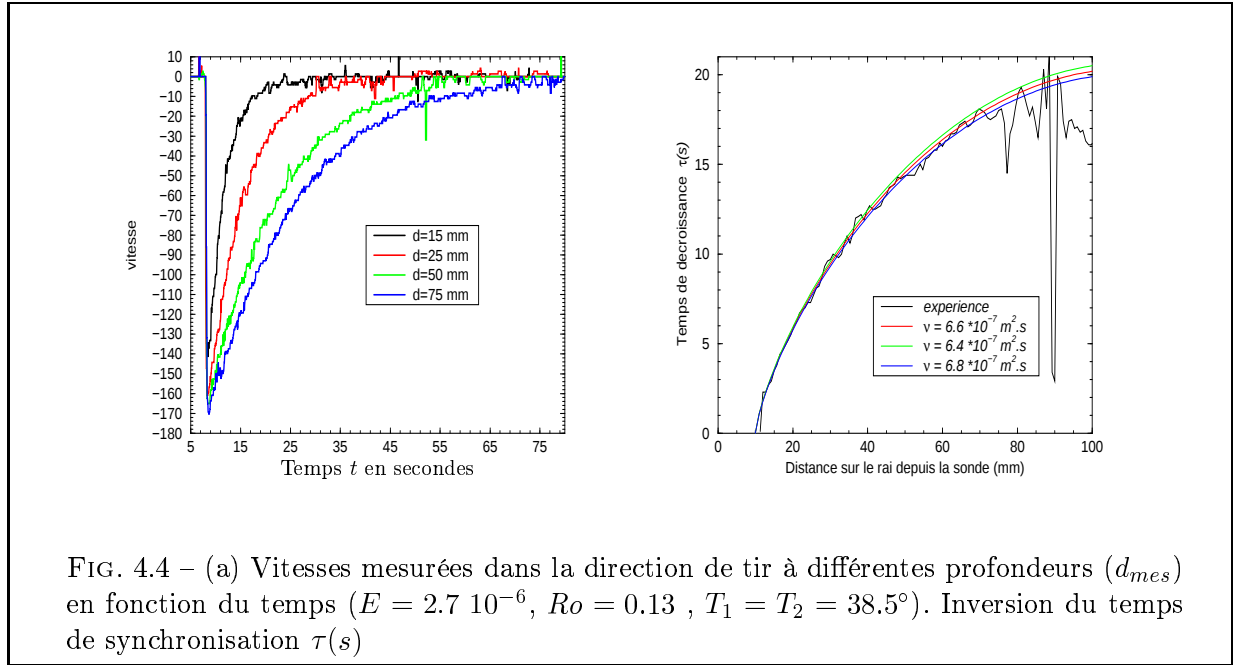
²La réactivité aux bruits électromagnétiques est fonction des paramètres d'entrée.

4.2 Convection en eau : rappel des premiers résultats

Toutes ces expériences ont été réalisées par Daniel Brito et Jonathan Aurnou en 2002. L'ensemble des résultats est rapporté dans [Brito *et al.*, 2004]. Je présente ici un résumé des résultats de ces expériences en eau et rappelle les questions qu'ils ont alors suscitées. Pour ce premier dispositif, seules des expériences de spin-up et de spin-down ont été réalisées à ce jour. Les paramètres modulables sont la rotation d'ensemble Ω , la température moyenne T_{moy} , l'écart de température entre la sphère et le manchon ΔT et le nombre de Rossby ($Ro = \frac{\Delta\Omega}{\Omega}$). Ce dernier varie entre 0.05 et 0.2 ce qui nous place à la limite de $Ro \ll 1$ pour les sauts de vitesse. ΔT fixe la vigueur de la convection.

4.2.1 Validation de la théorie pour les expériences en isotherme

L'analyse des profils de vitesses



A partir des profils de vitesse obtenus (figure 4.4), on obtient après inversion (chapitre 3), les triplés de valeurs $V_0(s)$, $\tau(s)$, $Q_{inv}(s)$ pour chaque profondeur (figure 4.4 et 4.5). Pour cela on extrait tout d'abord la vitesse azimutale v_φ qui dans la mesure où les vitesses azimutales sont très grandes devant les vitesses radiales ($v_{mes}(d) = v_r(d) \cos(\alpha + \varphi) + v_\varphi \sin(\alpha + \varphi)$), se déduit de la vitesse mesurée le long du tir par l'expression (figure 4.2) :

$$v_\varphi(r) = \frac{v_{mes}(d)r(d)}{R_2 \sin(\alpha)} \quad (4.1)$$

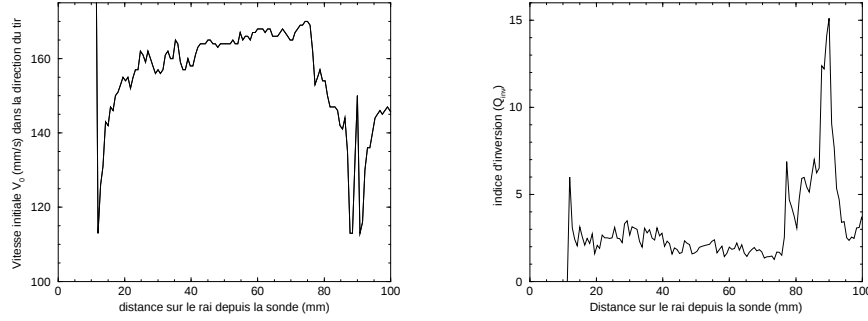


FIG. 4.5 – Inversion d'un fichier isotherme $\Omega = 33.5 \text{ rad.s}^{-1}$, $E = 1.7 \cdot 10^{-6}$, $Ro = 0.13$ et $T_1 = T_2 = 38.5^\circ$: à gauche $V_0(s)$ et à droite $Q_{inv}(s)$

avec

$$r^2 = R_2^2 + d^2 - 2R_2 d \cos \alpha \quad (4.2)$$

Seul $\tau(s)$ est nécessaire pour déduire la viscosité efficace, mais les deux autres grandeurs inversées permettent d'avoir une information sur la confiance que l'on peut avoir en ces inversions. La figure (4.5) présente le résultat d'une telle inversion. La comparaison des trois quantités nous permet d'apprécier les profondeurs auxquelles l'inversion semble cohérente et celles qu'il ne faut pas privilégier. La dernière étape consiste à faire correspondre la courbe $\tau(s)$ théorique avec une valeur de viscosité constante. On remarquera qu'il existe un décalage à l'origine de 10 mm que nous avons corrigé pour faire correspondre la théorie et les expériences. Ce décalage spatial s'explique par les multiples réfractions dans l'épaisseur du matériau. Cet effet a déjà été observé par les études précédentes ([Gillet, 2004]). Lorsque la sonde est en contact directe avec le fluide (chapitre 5) ce décalage disparaît.

Les résultats des expériences isothermes

Le tableau (4.1) présente les résultats des expériences isothermes. En se basant sur des profondeurs allant de $d = 5 \text{ mm}$ jusqu'à $d = 65 \text{ mm}$, Daniel Brito a inversé des expériences isothermes pour lesquelles les températures variaient entre 16°C et 38°C . Les inversions de spin-up permettent de retrouver les valeurs de la viscosité moléculaire de l'eau à la température de l'expérience, dans un intervalle de confiance estimé à 2% ¹. Les inversions de spin-down donnent des valeurs de viscosité plus fortes.

¹Ces résultats ont été obtenus en prenant $\Omega_{moy} = \frac{\Omega_i + \Omega_f}{2}$ où Ω_i et Ω_f sont les taux de rotation initial et final. En théorie, le saut de vitesse étant infinitésimal, il faudrait en toute rigueur prendre la vitesse initiale. Notre choix de travailler à partir de Ω_{moy} est motivé par le fait que l'ensemble des expériences isothermes abouti à des meilleures estimations de la viscosité moléculaire de l'eau en inversant par Ω_{moy} .

Exp.	T_{moy} (°C)	Ω_{moy} (rad.s ⁻¹)	Ro	$\nu_{eff}(10^{-6} \text{ m}^2.\text{s}^{-1})$	ν_{eff}/ν
Spin-Up	38	23	0.18	0.68	1.00
	38.8	33.5	0.13	0.69	1.03
	17.3	23	0.18	1.1	1.04
	19.2	17.8	0.24	1	1.03
	40.2	23	0.18	0.68	1.03
	16.1	33.5	0.13	1.1	1.01
	16.3	54.5	0.08	1.1	1.04
	37.2	33.5	0.13	0.72	1.04
	19.1	7.3	0.57	1.0	1.01
Spin-Down	17.6	23	-0.18	1.2	1.14
	38.7	39.8	-0.11	0.81	1.21
	16.7	54.5	-0.08	1.2	1.10
	16.1	33.5	-0.13	1.2	1.13
	40.6	23	-0.18	0.76	1.17
	19.2	17.8	-0.24	1.2	1.19
	19.1	7.3	-0.57	1.4	1.41

TAB. 4.1 – Caractéristiques de quelques expériences de spin-up et Spin-down réalisées. Pour ses expériences isothermes la différence de température (T_1, T_2) n'excède jamais plus de 2°C (valeurs de viscosité moléculaire $\nu(T)$) d'après [Lide, 1995].

Discussion

La viscosité de l'eau varie beaucoup entre 16°C et 38°C (figure 4.6 (a)). Aussi, la précision avec laquelle Daniel Brito a inversé la viscosité moléculaire d'après les spin-up confère une excellente confiance en ce protocole. J'ai repris l'analyse d'une partie des expériences réalisées sur ce dispositif à l'aide de routines de calculs basées sur la méthodologie expliquée au chapitre 3. L'utilisation de ces routines constitue une amélioration par rapport aux premières inversions réalisées manuellement. Les résultats de ces nouvelles inversions sont cohérents avec les résultats des précédentes. Pour les faibles viscosités (eau à haute température), je retrouve des viscosités sous estimées de l'ordre de 3%. Cette différence s'explique par un traitement plus systématique à partir de fichiers filtrés. Le processus d'automatisation m'oblige à revoir à la baisse la précision de ces inversions en l'estimant à 5%.

A partir des expériences de spin-up, on remarque que la théorie reste valide pour des nombres de Rossby importants. On en déduit que la théorie linéaire s'applique au delà de son domaine strict de validité.

Alors que l'on retrouve les valeurs de viscosité moléculaire pour les expériences de spin-up, celle de spin-down donnent systématiquement des temps de synchronisation plus faibles que la théorie. Cette observation avait déjà été faites par (Duck & Foster [2001]). On remarquera que l'écart à la viscosité moléculaire semble augmenter lorsque l'on augmente le nombre de Rossby ce qui semble démontrer que l'instabilité centrifuge serait responsable de cet écart en améliorant le transport de quantité de mouvement (figure 4.6 (b)). Malheureusement, cette instabilité n'a pas été étudié en géométrie

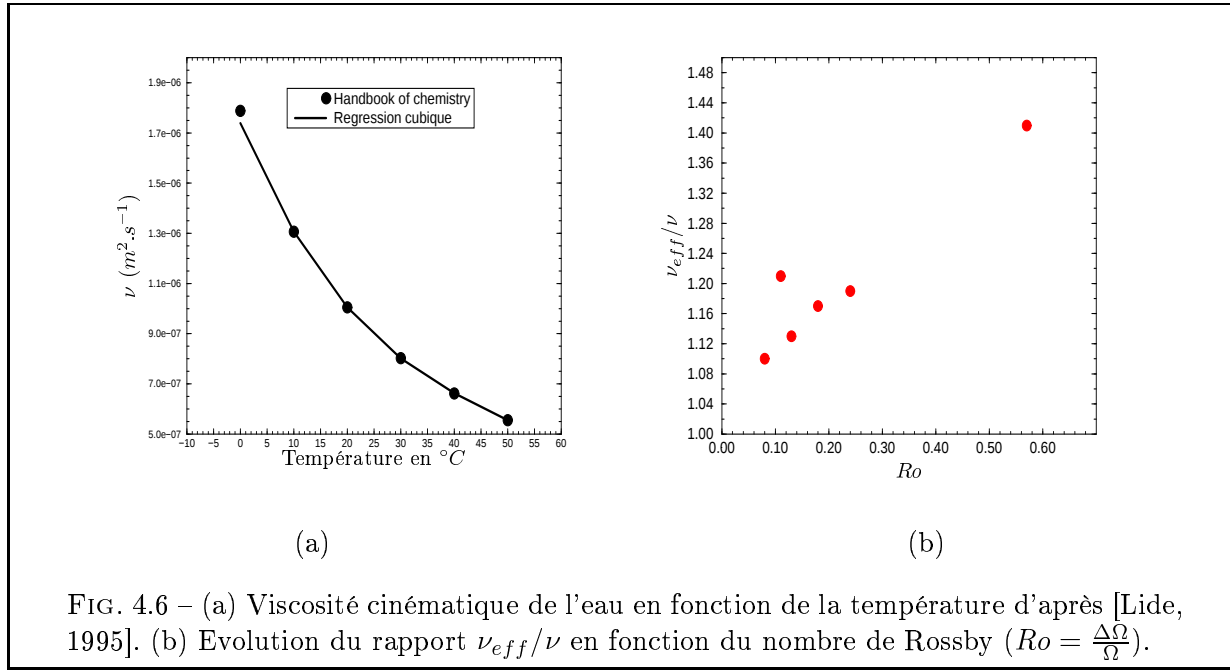


FIG. 4.6 – (a) Viscosité cinématique de l'eau en fonction de la température d'après [Lide, 1995]. (b) Evolution du rapport ν_{eff}/ν en fonction du nombre de Rossby ($Ro = \frac{\Delta\Omega}{\Omega}$).

sphérique. Les mécanismes de déstabilisation peuvent ne pas être similaires à ceux identifiés pour la géométrie cylindrique (Weidman [1976a]).

4.2.2 Comparaison des expériences isothermes et des expériences convectives

Le tableau (4.2) rappelle les principales valeurs de viscosité effective inversées à partir des expériences convectives. On observe une augmentation de la viscosité efficace par rapport aux expériences analogues isothermes. La figure (4.7) montre la comparaison entre les temps caractéristiques de spin-up à chaque profondeur entre l'expérience de spin-up isotherme et son homologue convective. En raison du filtrage utilisé ici la précision de l'inversion sur $\tau(d)$ est estimé à $(\pm 0.5 \text{ s})$. La qualité des inversions reste néanmoins excellente (précision sur la viscosité de l'ordre de 10 %).

A paramètre équivalent les expériences de spin-down convectives présentent des viscosités plus fortes par rapport aux expériences de spin-up convectives.

Bien que la qualité des inversions soit similaire au cas isotherme on remarque sur la figure (4.8) que la zone de confiance semble être élargie vers les grandes distances par rapport à la sonde (proche du manchon interne).

Une légère différence peut être également remarqué sur les inversions de V_0 . En effet de manière reproductible pour des expériences comparables (ici $\Omega = 33.5 \text{ rad.s}^{-1}$ en spin-up) on observe une inversion de valeurs de $V_0(d)$ plus faible que les inversions des expériences isothermes. Cet effet peut s'expliquer par la présence d'un vent zonal dû à la convection. La tendance montrerait alors que celui-ci est globalement prograde et d'amplitude inférieure à 4 mm/s .

Exp.	T_1 (°C)	T_2 (°C)	T_{moy} (°C)	Ω_{moy} ($rad.s^{-1}$)	Ro	ν_{eff} ($10^6 * m^2.s^{-1}$)	ν_{eff}/ν	Ra/Ra_c
Spin-Up	4	30	21.3	33.5	0.13	1.4	1.43	50.7
	4	31.5	22.3	54.5	0.08	1.4	1.49	78.2
	4	36	25.3	39.8	0.11	1.4	1.54	73.4
	12	33	26	33.5	0.13	1.2	1.36	40.9
	12	38	29.3	54.5	0.08	1.1	1.4	68.1
	12	36	28	39.8	0.11	1.1	1.35	52
	22	34	30	33.5	0.13	0.92	1.16	24.1
	22	38	32.6	54.5	0.08	0.90	1.19	40.8
	22	36	31.3	39.8	0.11	0.91	1.18	29.2
Spin-Down	4	30.5	21.6	33.5	-0.13	1.4	1.47	50.7
	4	33	23.3	54.5	-0.08	1.4	1.54	78.2
	4	34	24	39.8	-0.11	1.4	1.51	73.4
	12	34	26.6	33.5	-0.13	1.2	1.46	40.9
	12	38	29.3	54.5	-0.08	1.2	1.47	68.1
	12	36	28	39.8	-0.11	1.2	1.44	52
	22	34.5	30.3	33.5	-0.13	0.98	1.25	24.1
	22	37.5	32.3	54.5	-0.08	0.91	1.2	40.8
	22	36.5	31.6	39.8	-0.11	1.0	1.3	29.2

TAB. 4.2 – Viscosités efficaces déduites des expériences convectives.

Sur la figure (4.7), le temps de synchronisation est environ 30% plus petit que celui basé sur la viscosité moléculaire du fluide à la température considérée. Cette approximation se base sur une viscosité moléculaire à la température moyenne T_{moy} . Cette température est calculée à l'aide d'un modèle numérique pour la sphère et elle est donnée par la formule $T_{moy} = T_1 + 1.33 * (T_2 - T_1)/2$. On pourrait considérer que la température pertinente est celle de la couche externe, puisque les mouvements de recirculation ont lieu dans cette couche. Dans ce cas-là, la viscosité moléculaire serait plus faible puisqu'il s'agit de la couche limite chaude. On obtiendrait alors des rapports de viscosité supérieurs.

La différence entre les expériences de spin-up et celles de spin-down est remarquable. Elles vont dans le même sens que dans les expériences en isotherme ce qui permet d'affirmer que l'instabilité centrifuge est aveugle à la convection et que les deux contributions s'ajoutent pour rendre le mélange plus efficace.

4.2.3 Interprétations et lois d'échelles sur la viscosité efficace

En observant le tableau (4.2), on remarque une certaine correspondance entre l'augmentation de la viscosité caractérisée par (ν_{eff}/ν) et l'augmentation du forçage convectif caractérisé par $(N = Ra/Ra_c)$. Dès lors possédant des lois d'échelles tirées des travaux effectués par Julien Aubert sur ce même dispositif (Aubert *et al.* [2001]), nous avons la possibilité de créer une loi d'échelle reliant ν_{eff}/ν aux vitesses fluctuantes par l'inter-

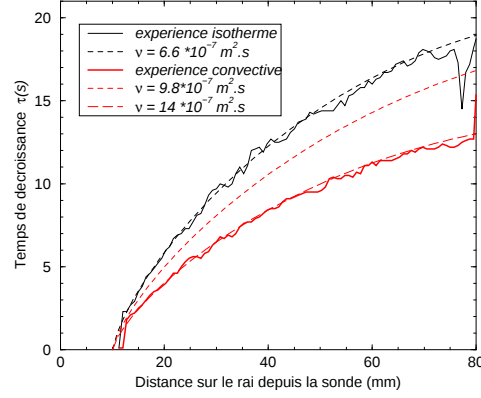


FIG. 4.7 – Comparaison des temps de synchronisation de l'expérience isotherme précédente ($\Omega = 33.5 \text{ rad.s}^{-1}$, $E = 1.7 \cdot 10^{-6}$, $Ro = 0.13$, $T_1 = T_2 = 39^\circ$) avec un cas convectif ($\Omega = 33.5 \text{ rad.s}^{-1}$, $\nu_{eff}/\nu = 1.43$, $Ro = 0.13$, $T_1 = 4^\circ\text{C}$, $T_2 = 30^\circ\text{C}$). Cet exemple reflète parfaitement la qualité des inversions réalisées en moyenne.

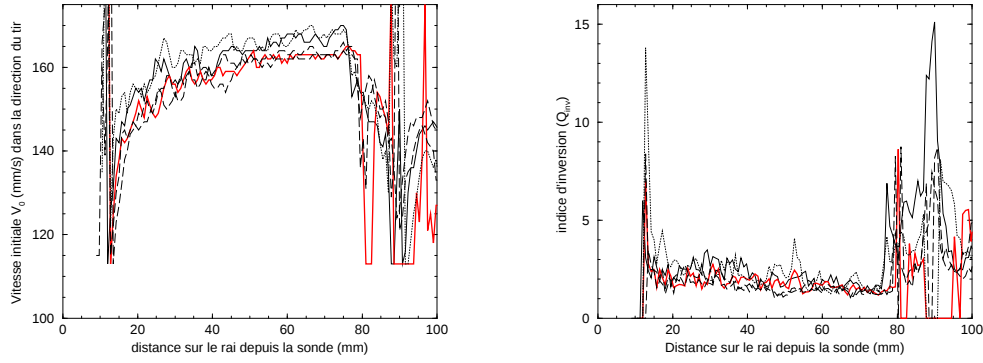


FIG. 4.8 – Comparaison des isothermes ($\Omega = 33.5 \text{ rad.s}^{-1}$, $E = 1.7 \cdot 10^{-6}$, $Ro = 0.13$) avec un cas convectif en rouge ($\Omega = 33.5 \text{ rad.s}^{-1}$, $\nu_{eff}/\nu = 1.43$, $Ro = 0.13$, $T_1 = 4^\circ\text{C}$, $T_2 = 30^\circ\text{C}$). A gauche, l'inversion de $V_0(d)$ et à droite celles de $Q_{inv}(d)$.

médiaire du nombre de Reynolds local Re_l de nos expériences. Une autre loi portant sur le nombre de Reynolds global Re^1 est aussi possible. Ces premières tentatives se révéleront infructueuses, aucune tendance claire, basée sur une compréhension physique de la dynamique du système, ne peut expliquer ce phénomène d'augmentation. On pourrait garder en vue une certaine tendance mettant en relation (Re_l) et (ν_{eff}/ν) ce qui nous orienterait vers une augmentation globale de la quantité de mouvement liée à de la turbulence en volume, mais la correspondance est loin d'être nette (figure 4.9).

Sans prêter attention dans un premier temps à la physique qui se cache derrière, la

¹ Re est formée à partir du vent zonal résultant de l'interaction des petites échelles

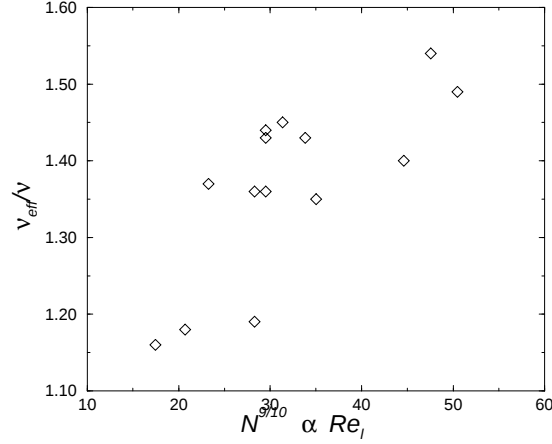


FIG. 4.9 – loi d'échelle donnant $\frac{\nu_{eff}}{\nu}$ en fonction de Re_l

tendance mathématique qui se dégageait de ces premiers résultats pouvait être une loi en $(\Delta T \Omega^{1/3})$ soit en adimensionné une loi du type (figure 4.10) :

$$\frac{\nu_{eff}}{\nu} \propto \frac{Ra}{Ra_c} E^{1/3} \quad (4.3)$$

Dans cette loi, nous avons exprimé la dépendance de Ra en $\Delta T \Omega^2$ car nos expériences sont réalisées en convection type 'centrifuge'. Extrapoler une loi en $\Delta T \Omega^{1/3}$ pour la Terre peut se révéler incorrect car la dépendance thermique du système est différent. L'utilisation d'une loi adimensionnée est ici préférable bien que $\frac{Ra}{Ra_c}$ soit mal contraint pour le noyau de la Terre. Malheureusement, il nous est bien difficile de justifier une telle loi par des arguments physiques simples. L'intuition qui consiste à interpréter l'augmentation de la viscosité efficace par l'augmentation des fluctuations de vitesse ne transparaît pas dans une telle loi.

Cette loi appliquée à la Terre donnerait une viscosité efficace faible ($\nu_{eff}/\nu \approx 1$), si le régime thermique du noyau était tel que $\frac{Ra}{Ra_c} \ll 10^5$. L'imprécision sur les températures du noyau ne permet pas de dire si la Terre est dans un tel régime. De faibles écarts de températures par rapport à l'adiabatique ¹ peuvent en effet amener rapidement à des écarts au seuil supérieur à cette valeur.

Par des arguments liés aux observations, une valeur faible de viscosité efficace nous paraît peu probable (chapitre 7).

En restant sur l'idée d'une relation existante entre l'augmentation de ν_{eff}/ν et la dynamique locale qui d'après la loi d'échelle de Julien Aubert s'écrit ([Aubert, 2001]) :

¹Le profil adiabatique de température correspond à la variation de température due aux phénomènes de compression/décompression. Les variations de température du noyau permettant de dire s'il y a convection thermique ou pas doivent être comparé au profil adiabatique. Un écart de température supérieur à l'adiabatique est une condition nécessaire au démarrage de la convection

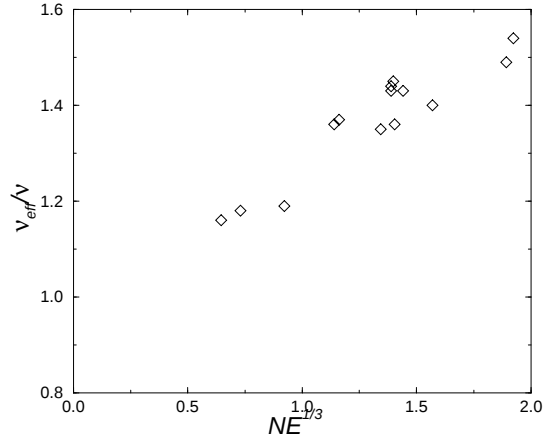


FIG. 4.10 – Loi d'échelle donnant $\frac{\nu_{eff}}{\nu}$ en fonction de $NE^{1/3}$ avec $N = \frac{Ra}{Ra_c}$

$$Re_l \propto \left(\frac{Ra}{Ra_c} \right)^{9/10} \quad (4.4)$$

On s'aperçoit que avant de statuer sur la non relation possible entre Re_l et ν_{eff}/ν , il serait bénéfique d'explorer une gamme moins restreinte de Re_l ($Re_{l_{max}} \approx 100$ pour les expériences réalisées en eau). En effet si on suivait cette loi d'échelle, le nombre de Reynolds local pour la Terre serait estimé à 10^6 , il peut donc paraître très ambitieux de chercher une loi d'échelle pour le noyau de la Terre à partir de l'extrapolation d'une demi-décade. Aubert [2001] montre que cette loi présente une dépendance en P^{-2} , où P est le nombre de Prandlt. Il nous a paru pertinent de continuer les expériences en Gallium, ce qui permettrait d'atteindre des régimes où le nombre de Reynolds local $Re_l \propto \left(\frac{(\frac{Ra}{Ra_c})^{3/2}}{P^2} \right)^{3/5}$ gagnerait plus d'une décade ($Re_{l_{max}} \approx 1000$ en gallium).

4.3 Expériences de convection en gallium

4.3.1 Quelques similitudes et des différences

Les expériences de convection thermique en gallium sont les expériences les plus proches de celles réalisées en eau. Mis à part le fait que la sphère utilisée soit maintenant faite de cuivre, les seules différences résident dans les propriétés des deux fluides (gallium et eau). Ces deux types d'expériences devraient donc être les plus faciles à comparer. Les principales contraintes techniques auxquelles nous devons faire face sont :

1. un maintien de la température au dessus de celle de cristallisation ($T = 29.7^\circ$). L'ensemble du système ne pouvant atteindre des températures supérieures à 60° (problèmes liés à l'étanchéité du circuit de refroidissement), nous avons travaillé à des différences de températures entre l'extérieur et l'intérieur de $\Delta T = 25^\circ$ au maximum.
2. La technique de mesure restant la même nous sommes de nouveau confrontés au problème d'ensemencement correct du volume. Dans le cas du gallium au delà de 35 rad.s^{-1} le signal obtenu était de très mauvaise qualité (beaucoup de bruit électromagnétique) et ne permettait pas de mesurer la vitesse sur l'ensemble du volume.

Exp.	$T_{moy} (^\circ\text{C})$	$\Omega_{moy} (\text{rad.s}^{-1})$	Ro	$\nu_{eff} (10^7 * \text{m}^2.\text{s}^{-1})$	Ra/Ra_c
Spin-Up	33	33.5	0.13	2.7	—
	33	33	0.1	2.7	—
	40	33	0.1	2.6	—
	40	33.5	0.13	2.6	—
Spin-Down	33	33.5	-0.13	3.0	—
	33	33	-0.1	3.0	—
	40	33.5	-0.13	2.9	—
	40	33	-0.1	2.9	—
Spin-Up convection	48.3	33	0.1	2.4	2.2
	50.2	33.5	0.13	2.4	2.4
	51.1	33.5	0.13	2.4	2.4
	42.5	33	0.1	2.5	1.75
	42.6	33	0.1	2.5	1.75
Spin-Down convection	50	33	-0.1	2.6	2.3
	51.7	33.5	-0.13	2.4	2.65
	42.3	33.5	-0.13	2.5	1.8
	41.9	33.5	-0.13	2.4	1.9

TAB. 4.3 – Caractéristiques de quelques expériences de spin-up et spin-down réalisées en gallium (avril 2003).

Exp.	T_{moy} (°C)	Ω_{moy} (rad.s ⁻¹)	Ro	$\nu_{eff}(10^7 * m^2.s^{-1})$	Ra/Ra_c
Spin-Up	35	17.3	0.18	2.8	—
	35.2	33	0.1	2.8	—
Spin-Down	35	17.3	-0.18	3.4	—
	35.2	33	-0.1	3.1	—
Spin-Up convection	49	33	0.1	2.6	2.15
	54.3	33	0.1	2.9	2.4
Spin-Down convection	49	33	-0.1	2.5	2.3
	54.3	33	-0.1	2.9	2.5

TAB. 4.4 – Caractéristiques de quelques expériences de spin-up et spin-down réalisées en gallium (juillet 2003).

La combinaison de ces deux contraintes a donc limité notre étude à des régimes convectifs compris entre $Ra = Ra_c$ et $Ra = 3Ra_c$. Cette forte limitation en terme d'écart au seuil ne diminue a priori pas l'intérêt des expériences en gallium puisque malgré ce faible écart, on atteint des régimes 50 fois plus turbulents qu'en eau si l'on se base sur les valeurs de Re_l .

Physiquement cette différence peut se traduire par une notion d'efficacité du transport de la chaleur par convection (Gillet [2004]). A turbulence égale, les particules d'eau transporteront leur chaleur d'un point chaud vers un point froid sans trop en perdre pendant le transport. Dans le cas du gallium, bien que la quantité de mouvement soit forte, peu de chaleur est transportée par convection. Le gallium tendra vers un profil de température proche du profil conductif, sans que les couches limites thermiques soient réellement prononcées.

Une autre différence par rapport à l'eau réside dans le temps de mise en place de la convection. En effet, pour les expériences en eau, le temps minimum pour atteindre un régime stationnaire de convection était de l'ordre de la seconde, alors qu'en gallium pour de faibles écarts au seuil et compte tenu du fait que la diffusivité thermique du gallium soit forte, le temps de mise en place de la convection est de l'ordre de 5 minutes. Nous avons donc pris soin de réaliser nos expériences en convection après visualisation de l'apparition des cellules de convection.

4.3.2 Expériences isothermes : toujours un viscosimètre d'assez forte sensibilité

Le bilan général sur l'ensemble des expériences réalisées montre que la qualité des données sur la vitesse est médiocre comparée aux expériences réalisées en eau. Il en résulte un filtrage plus fort des signaux (médianes glissantes réalisées sur 10 à 30 points), d'où une imprécision temporelle plus forte sur l'estimation du temps de synchronisation est donc de la viscosité. Une différence de viscosité efficace inférieure à 20% sera délicate à visualiser en théorie. Néanmoins en pratique on décelle quelques tendances reproductibles se situant dans cette barre d'incertitude.

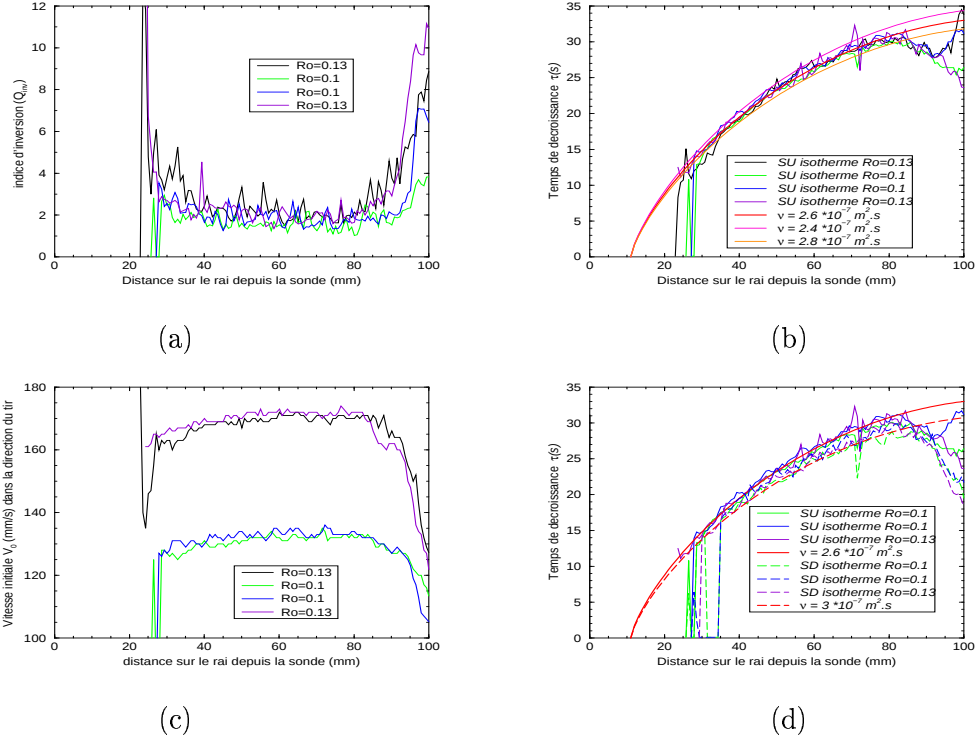


FIG. 4.11 – Expériences de spin-up réalisées en avril 2003 ($\Omega = 33$ et 33.5 rad.s^{-1} $E \approx 7 \cdot 10^{-7}$, $Ro = 0.13$ et $Ro = 0.1$, $T_1 = T_2 = 39^\circ$ et $T_1 = T_2 = 32^\circ$). (a) Indice d'inversion permettant de délimiter la zone de comparaison à $d_{mes} \in [40; 85]$. (b) Temps de décroissance des spin-up τ fonction de d_{mes} . (c) Vitesses initiales des spin-up inversées. (d) Comparaison entre les τ de spin-up et ceux de spin-down. Ces expériences sont reproductibles et permettent d'inverser des valeurs de viscosité constante à $\pm 10\%$ près sur l'intervalle $[40; 85]$.

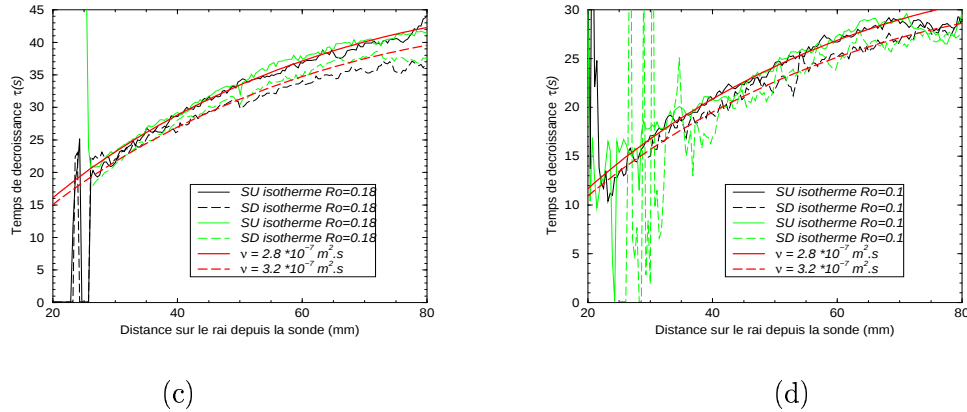


FIG. 4.12 – Inversions d'expériences réalisées en juillet 2003. (a) ($\Omega = 17.3 \text{ rad.s}^{-1}$, $Ro = 0.18$, $T_1 = T_2 = 35^\circ$ et $T_1 = T_2 = 34.8^\circ$). (b) ($\Omega = 33 \text{ rad.s}^{-1}$, $Ro = 0.1$, $T_1 = T_2 = 35.2^\circ$). L'inversion de la viscosité est robuste face à la rotation (même résultats pour des vitesses de rotation différentes)

Différentes campagnes de mesures ont été réalisées entre janvier 2003 et juillet 2004. Les tableaux 4.3 et 4.4 présentent les résultats des campagnes d'avril 2003 et juillet 2003. Nos analyses sont basées sur les expériences qui présentaient le meilleur indice Q_{inv} . De nombreuses expériences n'ont pu aboutir à une estimation correcte de la viscosité en raison du mauvais signal de vitesse.

Les inversions d'une même campagne présentent des résultats reproductibles avec une dispersion de l'ordre de 10 % (figures 4.11). Elles permettent d'estimer la valeur de la viscosité moléculaire à partir des expériences isothermes de spin-up.

On ne retrouve pas la même valeur de viscosité pour des expériences réalisées à quelques mois d'intervalles (figures 4.12 et 4.11). Nous devons alors nous contenter de comparer les expériences relatives à une même série.

Les expériences d'avril ont suivi une période de nettoyage à l'acide du gallium. Nous expliquons la différence de viscosité par un fluide de composition différente; le degré d'impureté n'est pas identique d'une période à l'autre. Ce type de changement apparaît sur des constantes de temps longues. Ceci a été vérifié avec la campagne de juillet qui est réalisée sur plus de dix jours. Les valeurs de viscosité inversées ne changeant pas entre le premier et le dernier jour, nous en déduisons que la modification de viscosité du gallium s'effectue sur des périodes plus longues que l'échelle de la semaine.

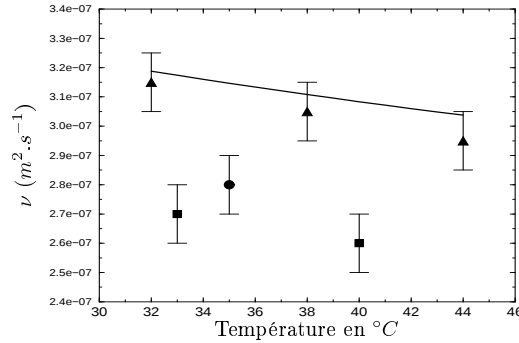
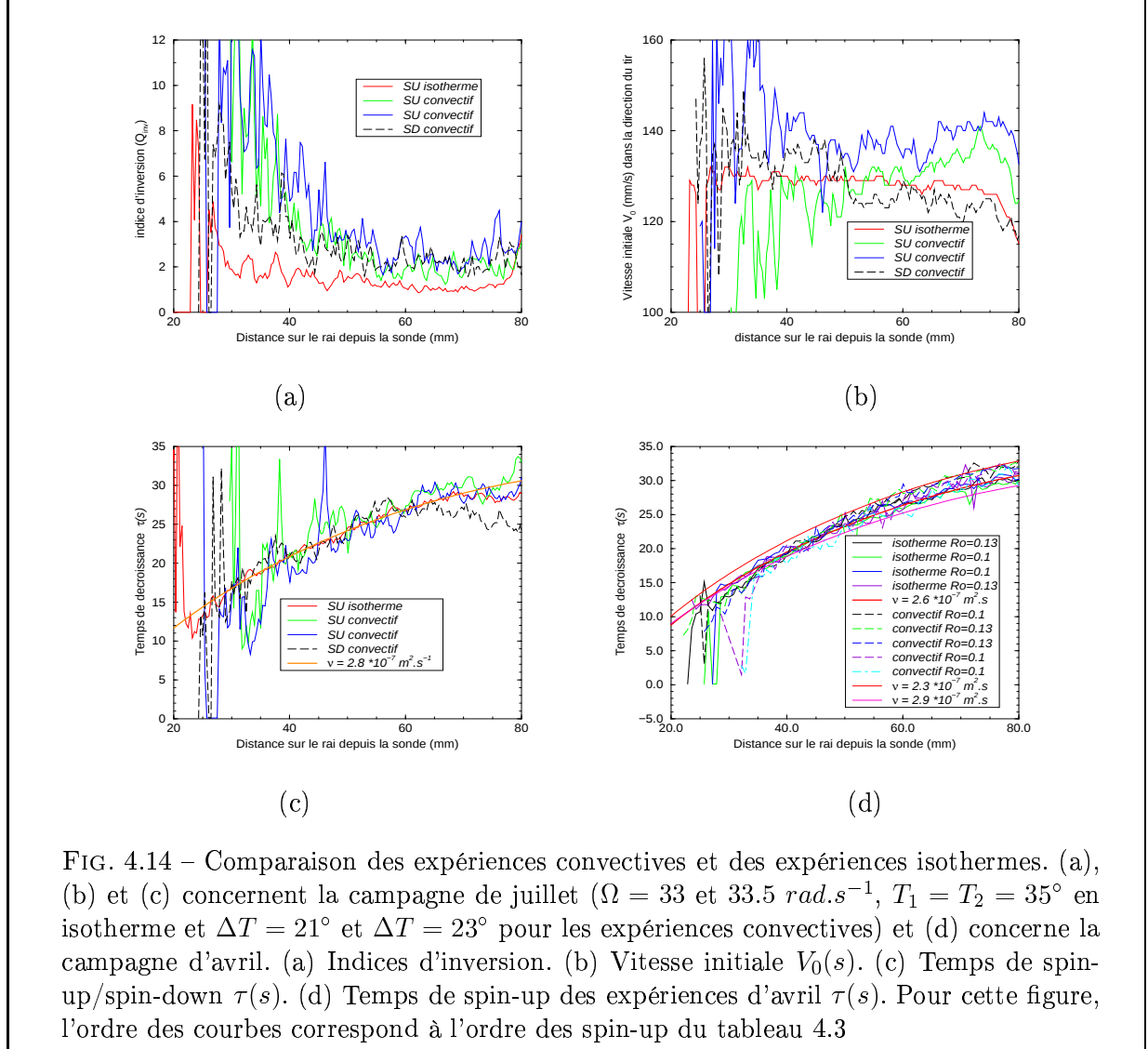


FIG. 4.13 – Viscosité en fonction de la température moyenne ($T_{moy} = T_1 + 1.33(T_2 - T_1)/2$). Les triangles (▲) sont les résultats d'une série d'expériences réalisées en janvier 2003; (■) est la série d'avril 2003 et (●) celle de juillet 2003. La courbe en trait plein est une extrapolation de la loi donnée par [Spells, 1936]. La tendance globalement décroissante ($< 10\%$) permet de valider le protocole en gallium.

La figure 4.13 montre des valeurs de viscosité inversées en fonction de la température. Une légère décroissance de la viscosité en fonction de la température moyenne est retrouvée comme Spells [1936] l'a déjà observé. Ce premier résultat donne une certaine confiance en la validation du protocole pour les expériences de gallium. Les valeurs de viscosité inversées par les expériences de spin-up isothermes servent de référence pour la comparaison aux expériences convectives. Ce choix est motivé par la composition incertaine de notre gallium qui ne nous permet pas d'exploiter les courbes $\nu(T)$ de la littérature, hormis pour les expériences réalisées en janvier 2003.

Pour les expériences isothermes de spin-down, on retrouve les tendances observées en eau, c'est-à-dire un temps de synchronisation plus court dans le cas du spin-down (figures 4.11, 4.12). La figure 4.15 présente l'augmentation de la viscosité efficace obtenue lors des expériences de spin-down en gallium et en eau. Le rapport ν_{eff}/ν est comparable à celui de l'eau (augmentation de viscosité jusqu'à 15% entre le spin-down et le spin-up).



4.3.3 Les expériences convectives : une viscosité efficace négligeable

Sur l'ensemble des expériences convectives (tableaux 4.3 et 4.4), la viscosité inversée est comparable aux expériences isothermes (figures 4.14 (c) et (d)).

La comparaison des expériences isothermes et convectives est plus délicate qu'en eau. L'indice de confiance pour les expériences convectives n'est pas optimum (figure 4.14

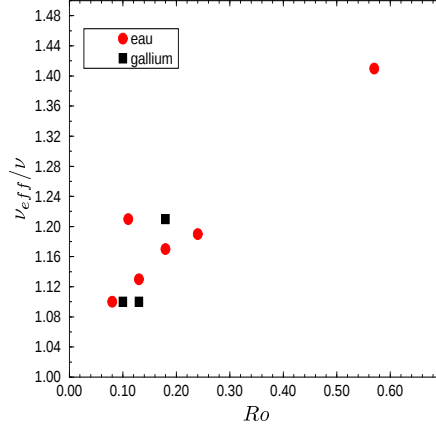


FIG. 4.15 – Evolution du rapport ν_{eff}/ν en fonction du nombre de Rossby ($Ro = \frac{\Delta\Omega}{\Omega}$).

(a)) et la zone de mesure est réduite à d_{mes} entre 50 et 70 mm au lieu de $[40; 85]$ pour les isothermes.

Les vitesses initiales inversées $V_0(s)$ présentent de nombreuses fluctuations. L'analyse des expériences convectives fait apparaître la présence d'un vent zonal rétrograde dans la partie proche du manchon (entre $d_{mes} = 60$ mm et $d_{mes} = 80$ mm) est estimé à plus de 5 $mm.s^{-1}$ (figure 4.14 (b)). Cette analyse est confortée par les profils de vents zonaux mesurés par [Gillet, 2004] comme l'illustre la figure 4.16.

Il est difficile de statuer sur l'origine des fortes fluctuations qui sont vraisemblablement la combinaison d'une mauvaise qualité de données et peut être dans une moindre mesure, le passage de cellules de convection. On remarque que l'inversion de $V_0(s)$ a un impact sur l'inversion de $\tau(s)$ qui se retrouve réduite à une précision de l'ordre de 20%.

Les différences maximales de la température moyenne entre les expériences convectives et les expériences isothermes peuvent justifier d'une augmentation de la viscosité moléculaire jusqu'à 10 %. Ainsi, nous estimons que la différence entre la viscosité efficace et la viscosité moléculaire mesurée dans le cas des expériences en gallium est inférieure à 20%. Ce résultat surprenant amène à se poser la question sur le rôle des aspects thermiques dans le transport de quantité de mouvement.

4.3.4 Discussion

Les quelques nouveaux points mesurés en gallium permettent de prolonger les lois d'échelles établies précédemment en eau (figure 4.17).

La première loi en $NE^{1/3}$ montre que les expériences en gallium prolongent la tendance observée en eau. Néanmoins nous n'obtenons pas de nouvelles informations sur un régime hors de la zone déjà explorée en eau puisque l'ordre de grandeur du paramètre $NE^{1/3}$ pour les expériences en gallium reste de l'ordre de 1.

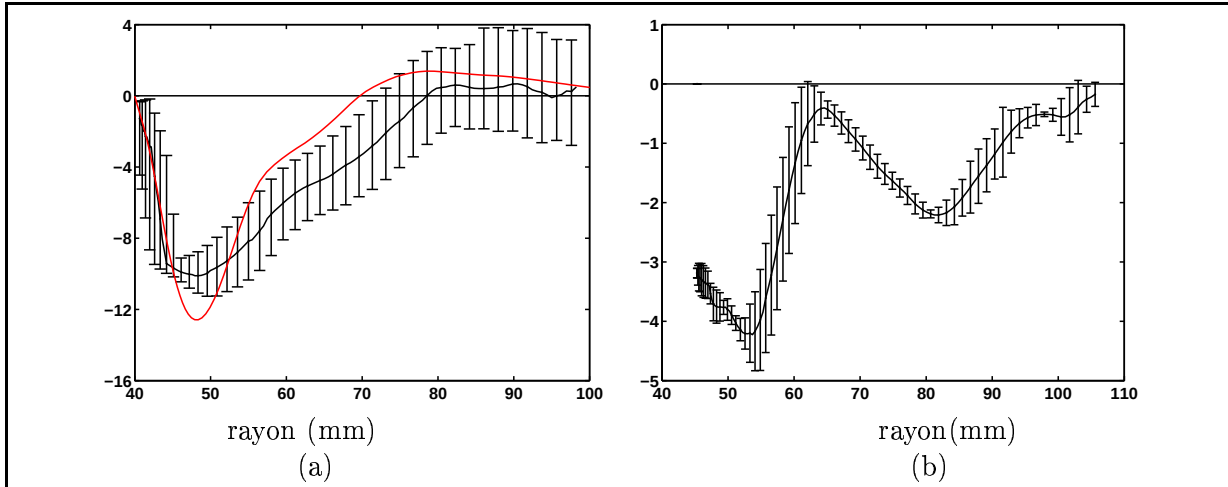


FIG. 4.16 – Profils de vents zonaux en ($mm.s^{-1}$) d'après des mesures expérimentales (en noir) et à partir du modèle numérique (en rouge) d'après [Gillet, 2004]. (a) cas du gallium ($E = 9.74 \cdot 10^{-7}$, $\frac{Ra}{Ra_c} = 2.4$, $P = 0.025$). (b) cas de l'eau ($E = 6.5 \cdot 10^{-6}$, $\frac{Ra}{Ra_c} = 40$, $P = 7$)

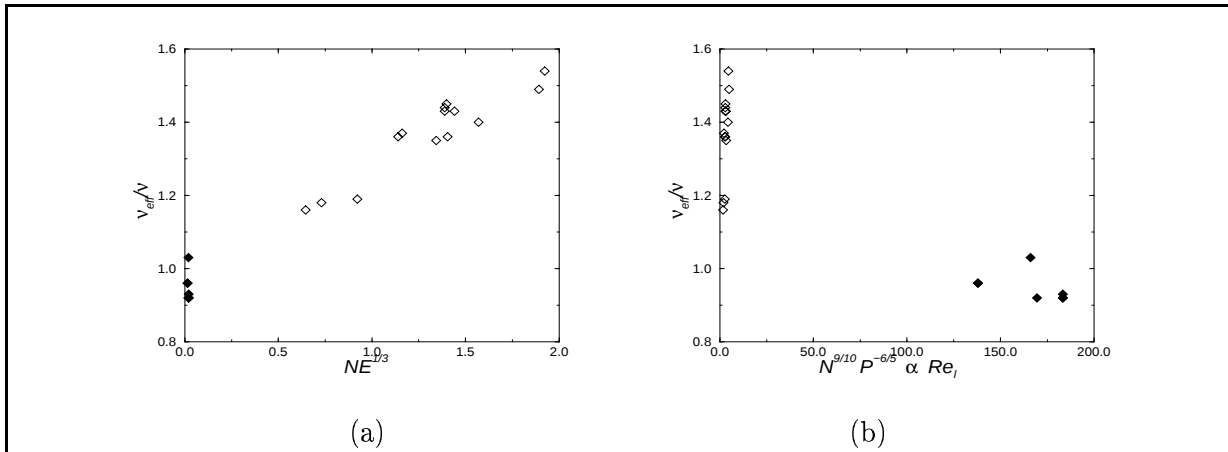


FIG. 4.17 – (a) Meilleure correspondance (mathématique) de ν_{eff}/ν fonction de $NE^{1/3}$ avec $N = \frac{Ra}{Ra_c}$ (b) ν_{eff}/ν fonction de Re_l . Les losanges pleins correspondent aux expériences en gallium

Pour la deuxième loi, on peut dans un premier temps conclure que le comportement observé en eau n'est pas applicable au gallium. Quel peut être l'origine de cette différence de comportement ? Leur nombre de Prandtl sont très différents ($P = 7$ pour l'eau et $P = 0.025$ pour le gallium), les interactions entre les phénomènes thermiques et la dynamique peuvent ainsi être différentes.

Dans la théorie de Greenspan, seule l'équation de la dynamique est prise en compte, l'équation de la chaleur n'intervient pas dans le problème théorique. Une hypothèse que nous avons faite, en supposant que notre protocole pouvait nous permettre d'obtenir une information sur les propriétés de mélange de notre système, était que l'on supposait que le processus de spin-up ne modifiait pas l'état de base considéré (isotherme ou convectif). D'un point de vue dynamique, on imagine en effet qu'une perturbation infinitésimale (le $\Delta\Omega$), ne va pas engendrer de mouvements autres que la réponse transitoire établie pour le régime isotherme. Cependant, pouvons nous affirmer la même chose en ce qui concerne l'état de base en convection, c'est à dire faire l'hypothèse que la convection observée avant et après le spin-up ($Ra > Ra_c$) est préservée tout au long de l'expérience ? Est ce que au contraire le régime transitoire permet d'éteindre la convection ($Ra < Ra_c$ pendant le transitoire), et si tel est le cas quel en est l'origine ?

Stabilité de l'état convectif pendant le spin-up

Pour répondre à cette première question quelques expériences complémentaires ont été menées. Jusqu'à présent nous avons réalisées des expériences en tir azimutal. Sur cette composante de la vitesse l'amplitude associée au spin-up est de l'ordre de 200 mm.s^{-1} . Cette amplitude est à comparer aux vitesses typiques des cellules de convection qui peuvent au mieux pour le gallium atteindre 10 mm.s^{-1} . La différence entre une oscillation du signal qui est la signature d'une cellule de convection défilant devant la sonde et une oscillation due au bruit électromagnétique est délicate sur cette composante. En revanche, l'observation de la composante radiale de la vitesse pendant le spin-up permet d'isoler le signal de vitesse d'origine convective puisque le régime transitoire associé au spin-up est purement azimutal. La figure 4.18(a) montre le champ de vitesse en tir radial lors d'un spin-up. La vitesse mesurée est théoriquement ($v_{mes}(d) = v_r(d)$). Or on observe que lors du spin-up on mesure un signal de vitesse globalement positif. Le tir radial capte ainsi une partie du signal de vitesse azimutale. Ceci peut être dû à un angle de tir différent de 0° par rapport à la normale (angle estimé à environ 4° dans la direction rétrograde) ou encore une conséquence de la diffusion du faisceau. La partie mesurée de la composante selon v_φ étant de même ordre de grandeur que celle mesurée selon v_r , il n'est alors plus possible d'isoler l'une de l'autre. Néanmoins, l'amplitude de v_φ projetée étant faible (20 mm.s^{-1}), il est possible d'identifier la convection de manière qualitative. On voit notamment que la convection semble très affaiblie sur le premier tiers du temps de spin-up et renaît de manière vigoureuse aux deux tiers de celui-ci (figure 4.18(b) et (c)). De cette observation nous affirmons que le processus de Spin-up éteint la convection thermique dans le gallium.

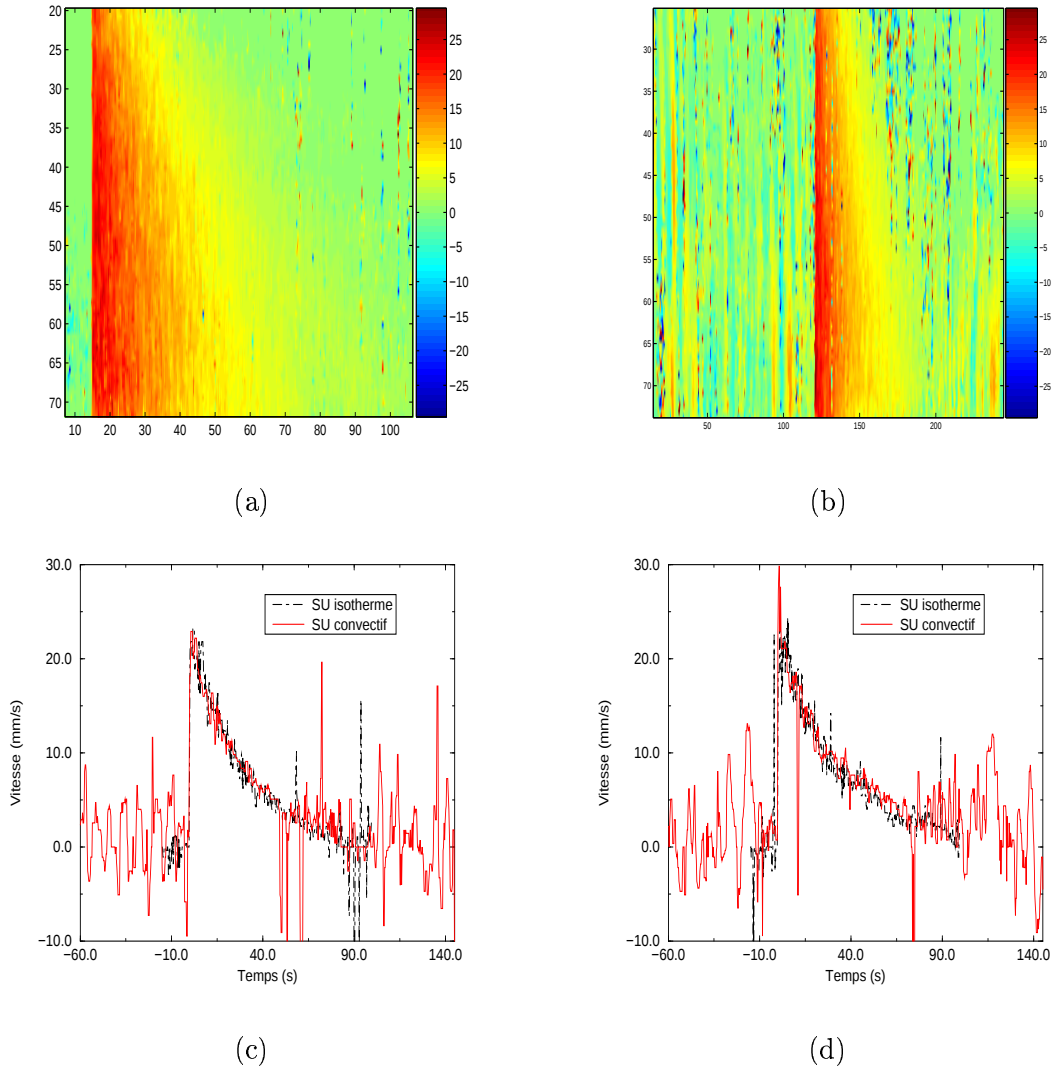
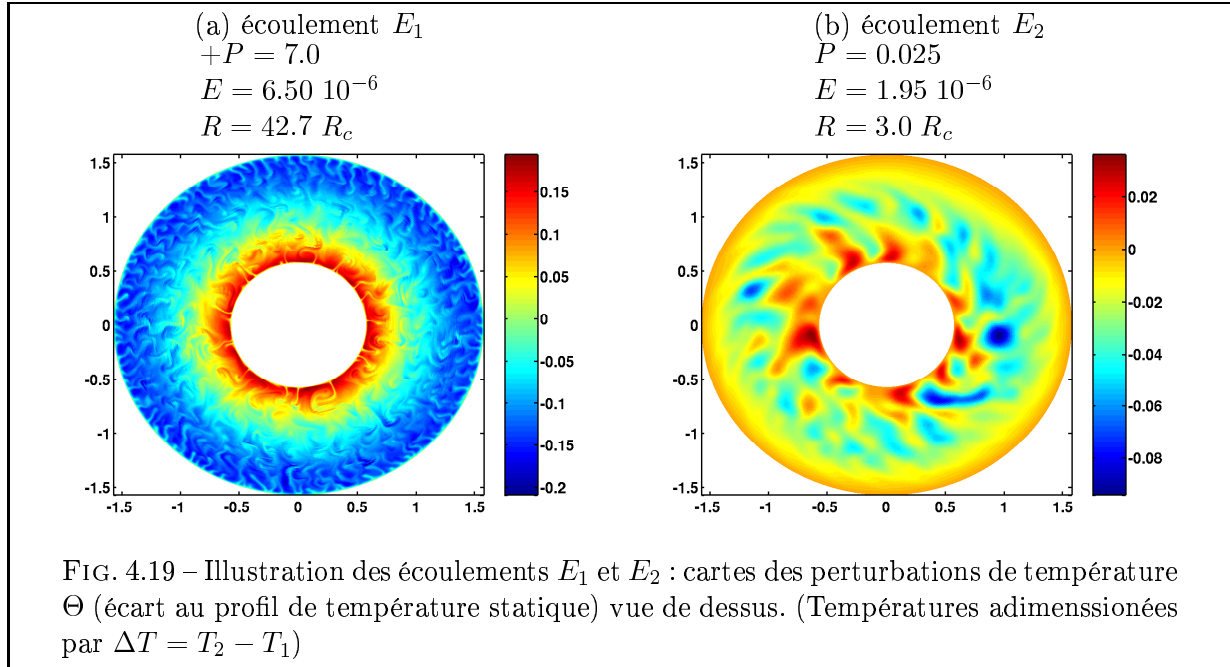


FIG. 4.18 – Mesures de vitesses en tir radial pour des expériences de spin-up ($\Omega = 33 \text{ rad.s}^{-1}$, $Ro = 0.1$, $T_1 = T_2 = 33^\circ$ ou $T_1 = 62^\circ$ et $T_2 = 32^\circ$ pour l'expérience en convection). (a) Diagramme spatio-temporel du spin-up isotherme (vitesse en mm.s^{-1}), le tir radial capte environ 10% de la vitesse azimutale, (b) diagramme de l'expérience en convection, les cellules de convection sont plus vigoureuses près du manchon (d grands), (c) et (d), comparaison entre le spin-up isotherme et celui en convection à respectivement $d = 50$ mm et $d = 68$ mm. La convection diminue fortement pendant le spin-up (réapparition de cellules vigoureuses à la fin du SU)

Interprétation thermique

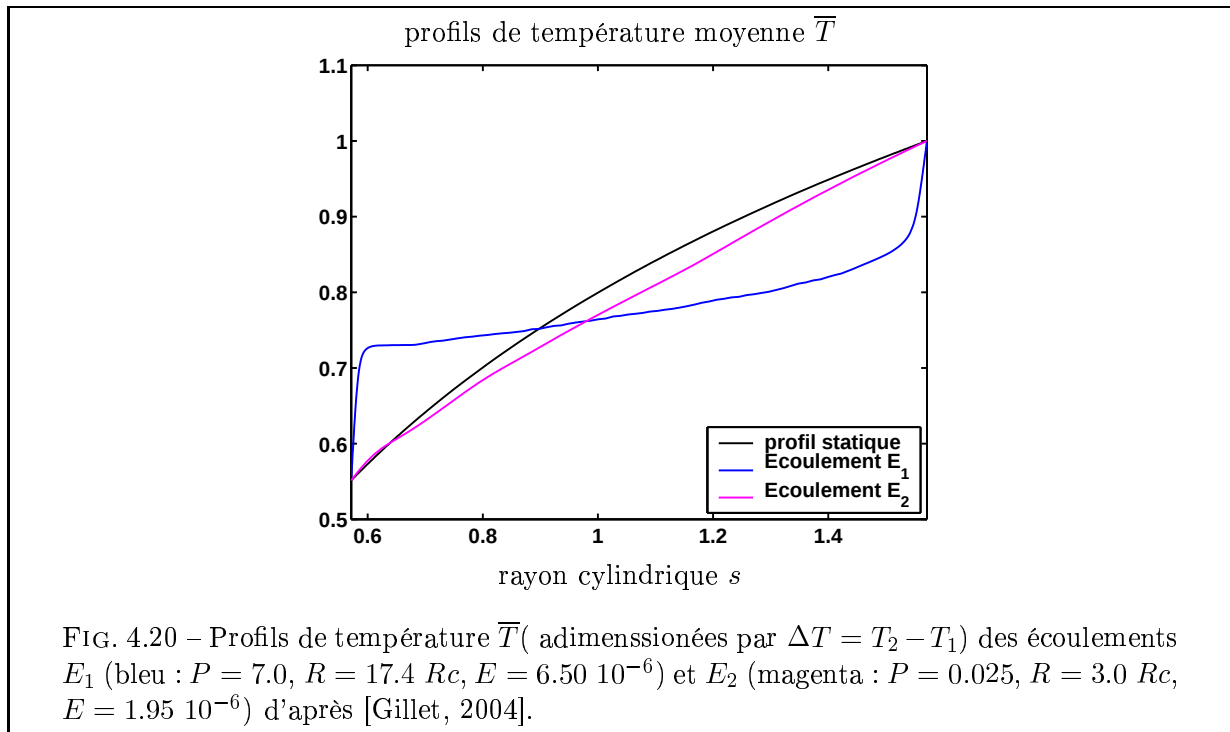
Pour interpréter ce résultat nous nous sommes orientés vers une comparaison des effets diffusifs (thermiques et dynamiques). L'effet dynamique est plutôt bien maîtrisé, nous savons quantifier l'épaisseur des couches limites visqueuses et l'échelle temporelle de retour au régime stationnaire qui n'est autre que le temps de spin-up. Pour les phénomènes thermiques, l'échelle de longueur caractéristique peut être la taille des structures ou encore la taille de la couche limite thermique. Une connaissance plus approfondie du système est alors nécessaire.



Les simulations numériques réalisées par Nicolas Gillet (figure 4.19) nous renseignent sur la structure thermique de ces écoulements. Bien que les nombres de Reynolds atteints dans les expériences de gallium soient grands devant ceux obtenus en eau, on remarque que d'un point de vue thermique, nous n'observons pas les structures filamenteuses, type panaches que nous visualisons en eau. Les écarts de température par rapport au profil conductif sont également plus faibles (4°C en gallium contre 9°C en eau). Le profil thermique des expériences réalisées en gallium reste proche d'un profil conductif (figure 4.20). Pour interpréter l'extinction de la convection en gallium pendant le processus de spin-up, plusieurs approches probablement complémentaires sont envisageables :

Les temps caractéristiques

Pour le problème du spin-up en convection deux temps caractéristiques peuvent être pris en compte. Le temps de spin-up $\tau \sim \frac{E^{-1/2}}{\Omega}$ est de l'ordre de 20 secondes en eau et de 35 secondes en gallium. Ce premier temps peut être comparé avec le temps de diffusion thermique $\tau_T \sim \frac{\delta_T^2}{\eta}$ où δ_T est une longueur caractéristique du système. Pour la diffusion de la chaleur une longueur adéquate peut correspondre à la taille des structures



thermiques présentes dans le système. Pour les deux cas présentés en $E1$ et $E2$ Nicolas Gillet trouve un nombre d'onde critique de 22 pour $E1$ et 13 pour $E2$. Pour le gallium, étant très proche du seuil, on peut garder cette taille caractéristique pour obtenir un $\delta_T \approx 1 \text{ cm}$. Pour l'eau on peut surévaluer cette taille critique étant loin du seuil. Au vue de la carte présentée à la figure 4.19, on peut évaluer δ_T de l'eau à 0.5 cm . Ceci nous donne pour le gallium un temps de diffusion thermique de 8 secondes ($\eta = 1.3 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$) et de 180 secondes pour l'eau ($\eta = 1.4 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$). On voit dès lors que dans le cas du gallium, la diffusion thermique s'opère à des échelles de temps plus rapides que le temps de spin-up. Au contraire pour les expériences en eau, le temps de diffusion thermique est plus grand que le temps caractéristique de spin up. Ainsi en gallium lors du spin-up, les panaches isolés de leur source peuvent s'éteindre bien avant la fin du spin-up.

Un autre temps caractéristique fondamental apparaît également dans l'étude de ce régime transitoire. C'est celui lié à l'apparition de la convection. Ce temps est lié à l'écart au seuil. Plus l'établissement des couches limites thermiques sera rapide et marqué, plus ce temps sera court. Expérimentalement, nous évaluons ce temps à 5 minutes pour le gallium et à quelques secondes pour l'eau, lorsque nous démarrons les expériences en les amenant de 0 à 300 tpm (ΔT étant stabilisé). La perturbation lié au spin-up est moins forte mais elle reste notable de sorte que le temps de réapparition en gallium semble être de 20 secondes. Pour l'eau, nous n'avons pas réalisé d'expériences permettant d'observer une éventuelle disparition des structures. L'écart au seuil étant grand, celle-ci n'a probablement pas lieu d'être. Néanmoins il serait envisageable de le vérifier par des observations en tir radial du spin-up. Par une étude plus poussée de ce phénomène

nous devrions pouvoir déterminer une loi du type $\tau_{App} \sim f\left(\frac{\Delta\Omega}{\Omega}, \left(\frac{Ra}{Ra_c}\right)^{-1}\right)$.

Ainsi l'extinction de la convection dans le cas du gallium s'explique par un temps diffusif thermique court et une réapparition lente des structures convectives par rapport au temps de spin-up.

Les couches limites

Les deux expériences réalisées en eau et en gallium, diffèrent grandement du point de vue des couches limites. Pour les expériences en eau, les couches limites thermiques et dynamiques (visqueuses) sont approximativement du même ordre de grandeur, de 0.7 mm pour la couche thermique (paragraphe 2.2) et de 0.3 mm pour la couche d'Ekman [Gillet, 2004]. Pour ce premier cas, le mélange qui s'opère dans la couche d'Ekman peut avoir comme effet de rendre plus actif encore les créations des panaches. L'action de la couche d'Ekman peut être de déstabiliser en quelque sorte la couche limite thermique imbriquée. On peut également envisager une rétroaction de la couche limite thermique sur l'écoulement, amenant finalement à une déstabilisation de l'ensemble thermique/dynamique. L'activité de ces couches aiderait ainsi à maintenir et même éventuellement augmenter la convection pendant la durée du spin-up.

Pour le gallium, la structure est très différente. La couche limite thermique est dans nos expériences plus grande que la taille du récipient. La couche limite visqueuse est de l'ordre de 0.1 mm soit infiniment petite devant la couche limite thermique. Il n'y a donc pas, contrairement aux expériences en eau, d'interactions entre les couches limites thermiques et visqueuses. Par contre la création déjà délicate de différentiel de chaleur au sein du fluide, sera probablement modifiée par la présence de ce fort cisaillement visqueux à la racine des sources de chaleur.

Si l'effet d'augmentation de la viscosité apparente est interprété en terme de déstabilisation de la couche limite visqueuse et non plus en terme de mélange turbulent en volume, alors la non présence de couche limite thermique dans le cas du gallium peut expliquer les différences de comportement entre l'eau et le gallium.

Effets inertiels

Le transport efficace de quantité de mouvement dans le gallium apparaît paradoxalement comme un handicap à une mesure de la viscosité apparente avec ce protocole expérimental. En effet, nous souhaitons obtenir des informations sur la viscosité apparente à fort Re_l . Pour l'eau, les mouvements actionnés par le spin-up créent un mélange qui homogénéise en partie la température. Néanmoins, la viscosité étant plus forte et dès lors le Re_l plus faible, ce mélange reste modéré et n'a probablement pas d'impact fort sur la convection. Pour le gallium, le cas est diamétralement opposé puisque les Re_l sont forts et la diffusivité thermique aussi. L'homogénéisation de la température est alors très efficace. Voilà donc deux conditions réunies pour rendre la convection difficile à maintenir pendant l'intervalle de spin-up.

Longueur de décrochement

Cette longueur doit jouer un certain rôle dans le problème, bien que sa prédominance par rapport aux analyses faites précédemment ne soit pas encore très bien établie. Je

la définis comme étant le déplacement initial d'une particule proche de la couche d'Ekman, par rapport à la paroi externe. Dans le cas du spin-up, la couche s'établissant sur un temps caractéristique Ω^{-1} , on peut estimer ce déplacement comme étant de l'ordre de $\delta_c \sim (\Delta\Omega R)\Omega^{-1}$ soit ~ 1 cm pour nos expériences. Ce déplacement correspond au cisaillement instantané que subissent les structures thermiques à proximité de l'extérieur de la sphère. Cette longueur caractéristique devrait intervenir dans l'évaluation de la diffusion thermique. Si δ_c est très petit devant la taille thermique des structures, alors le spin-up est 'invisible' d'un point de vue thermique. Les structures restent non perturbées par ce déplacement. Dans le cas contraire, les structures isolées de leur base vont diffuser rapidement de la chaleur dans leur nouvel environnement. L'échelle de temps de diffusion reste alors basée sur le rapport entre la taille quadratique des structures et la diffusivité thermique du fluide.

Pour notre géométrie d'écoulement, les phénomènes sont certainement plus complexes. Néanmoins, ces considérations permettent de mettre en avant l'intérêt que présente le protocole oscillant pour les expériences en gallium. En effet l'amplitude des oscillations vue par la paroi est de $\frac{\Delta\Omega R\omega_f}{\Omega E^{1/2}}$. Au paragraphe 2.3.4, nous avons vu que les régimes favorables à une inversion de la viscosité apparente se situaient autour de $\omega_f \sim (0.1-1)E^{1/2}$. Ainsi on peut ramener le déplacement maximum associé aux expériences oscillantes à $0.1(\Delta\Omega R)\Omega^{-1}$. Ces expériences devraient, par le plus faible déplacement de particules qu'elles entraînent, être plus favorable à un maintien de la convection, même pour de faibles écarts au seuil.

4.4 Conclusions

Avec le protocole de spin-up, nous avons développé une méthode de mesure de la viscosité apparente dans les fluides confinés en rotation rapide. La technique Doppler utilisée pour mesurer les vitesses, rend possible l'étude de fluides opaques tels que le gallium, ce que n'aurait pas permis des techniques optiques traditionnelles.

En régime laminaire, cette méthode permet de retrouver la viscosité moléculaire des fluides étudiés pour différentes températures. La gamme explorée va de 16°C à 40°C pour l'eau et de 33°C à 40°C pour le gallium. Ces inversions de viscosité moléculaire à différentes températures, en gallium comme en eau, confèrent une confiance certaine en cette méthode.

En régime développé, nous distinguons deux cas qui n'amènent pas aux mêmes conclusions, autant sur la légitimité de ce protocole que sur les résultats observés.

Pour les expériences réalisées à $\frac{Ra}{Ra_c} \gg 1$, ce qui est le cas des expériences en eau, nous avons observé une augmentation de la viscosité apparente. Cette augmentation a pu être corrélée, sur une demi-décade, au coefficient $\left(\frac{Ra}{Ra_c}\right)^{9/10}$ qui est proportionnel au nombre de Reynolds local Re_l . Re_l est basé sur les vitesses des cellules de convection présentes dans le volume. L'origine de l'augmentation de la viscosité apparente serait

alors plutôt en lien avec la turbulence en volume. Néanmoins, nous n'avons pas actuellement d'arguments contre une éventuelle contribution plus forte de cette couche si celle-ci était déstabilisée. Afin de résoudre cette question, nous pourrions envisager d'effectuer des mesures de vitesse dans la couche limite par une méthode autre que celle utilisée actuellement (mesure par fil chaud par exemple). En effet la méthode Doppler ne permet pas de mesurer ces vitesses si proches de la paroi.

Une autre loi d'échelle peut également expliquer ces résultats. Il s'agit d'une loi en $\frac{Ra}{Ra_c} E^{1/3}$. Nous pouvons concevoir qu'une meilleure efficacité du transport soit en lien avec la vigueur de la convection (traduit par $\frac{Ra}{Ra_c}$). Par contre le rôle de $E^{1/3}$ dans le transport efficace n'est pas compris à ce jour.

Devant ces deux lois d'échelles possibles, et ne pouvant justifier physiquement la deuxième loi, nous avons travaillé sur le prolongement de la première loi. Re_l présentant une dépendance en $P^{-6/5}$ ([Aubert *et al.*, 2001]), nous avons choisi de réaliser des expériences en gallium ($P = 0.025$).

Pour les expériences réalisées à $\frac{Ra}{Ra_c} \sim 1$, ce qui est le cas des expériences en gallium, le protocole de spin-up n'est pas adéquate pour estimer le transport de quantité de mouvement amené par la turbulence car l'état de base convectif se trouve être modifié par le spin-up. Les raisons pour lesquelles la convection n'est pas maintenue peuvent être multiples. L'amplitude de spin-up et la diffusivité thermique du fluide jouent un rôle. Certaines mesures expérimentales manquent pour isoler les contributions. On pourrait notamment vérifier si pour les expériences oscillantes en gallium (paragraphe suivant), la convection est préservée malgré un $\frac{Ra}{Ra_c}$ faible grâce à des mesures de vitesses radiales. Pour permettre une meilleure compréhension de la dynamique des régimes transitoires (spin-up ou oscillant), il serait intéressant de mettre à profit le code quasi-géostrophique développé par [Aubert *et al.*, 2001; Gillet, 2004] pour le vaste sujet de la convection en rotation rapide dans la géométrie sphérique. Nous pourrions alors avoir une idée plus quantitative de la diminution de l'écart au seuil et de celle de Re_l associé aux expériences de spin-up. Ceci permettrait de mieux justifier pourquoi nous n'observons pas d'augmentation de la viscosité apparente en gallium. L'utilisation de ce code numérique pour les expériences oscillantes devrait permettre de dire si, pour les expériences en gallium $\frac{Ra}{Ra_c} \sim 1$, la modification du Re_l lors du transitoire est faible ou forte. Si celle-ci reste faible, nous pourrions utiliser ce nouveau protocole pour mesurer la viscosité apparente du gallium proche du seuil.

Sur l'ensemble des expériences réalisées en eau, nous avons vérifié que les temps de synchronisation des spin-down sont plus rapides que ceux des spin-up (figure 4.6 et tableau 4.2). Ce résultat montre que l'instabilité centrifuge reste présente en régime laminaire comme en régime turbulent. Cette instabilité amène une contribution au transport de quantité de mouvement indépendante de celle de la turbulence en volume. L'analyse des expériences isothermes en gallium confirme ce résultat (figure 4.15).

Enfin la deuxième loi d'évolution de la viscosité apparente en fonction de $\frac{Ra}{Ra_c} E^{1/3}$ n'a pas été invalidée par les expériences réalisées en gallium malgré le fait que le protocole se soit révélé défaillant. Ceci peut s'expliquer par le fait que entre un écart au seuil de l'ordre de 3 et une valeur sous le seuil, le prolongement de la courbe préalablement

établie pour des $\frac{Ra}{Ra_c} \gg 1$ ne s'en trouve pas modifiée. Ce n'est évidemment pas le cas pour la courbe en Re_l . En effet, entre une expérience sous critique est une expérience trois fois surcritique en gallium, le nombre de Reynolds varie de 1 à 1700 (estimation d'après les simulations numériques d'un régime trois fois surcritique en gallium).

Afin d'observer des régimes où le coefficient $\frac{Ra}{Ra_c} E^{1/3}$ est supérieurs aux valeurs obtenues en eau, nous avons une alternative. La première possibilité est de travailler à partir de fluides plus visqueux (car $\frac{Ra}{Ra_c} E^{1/3} \propto \nu^{2/3}$). La deuxième serait de réaliser des expériences à rotation d'ensemble plus élevée (car $\frac{Ra}{Ra_c} E^{1/3} \propto \Omega^{1/3}$). Ceci serait possible dans la mesure où l'on réussirait à améliorer la qualité des mesures de vitesse pour les fortes rotations. Cette deuxième possibilité aurait de plus comme avantage d'explorer en même temps des régimes plus turbulents et ainsi d'étudier simultanément le prolongement de la première loi d'échelle.

4.4.1 Perspectives expérimentales : expériences oscillantes en gallium

Les expériences de gallium ont mis en évidence que le protocole de spin-up n'est pas des plus adapté pour mesurer la viscosité efficace dans des régimes proches du seuil de convection. Nous n'avons pu alors conclure sur la relation établie en eau entre le nombre de Reynolds et la viscosité effective mesurée. Deux orientations pour la suite sont alors possibles.

L'une consiste à améliorer le dispositif expérimental pour permettre des mesures à plus forte rotation d'ensemble afin d'atteindre des écarts au seuil plus important en gallium. Il n'est pas exclu que pour des écarts au seuil de l'ordre de 50 comme ceux obtenus en eau, l'état convectif soit stable au cours du spin-up. Le protocole permettrait alors de mesurer la viscosité efficace du régime convectif permanent et non pas le transport de quantité de mouvement d'un état transitoire.

Une deuxième orientation se tourne vers le protocole oscillant. Des premiers tests ont été réalisés en ce sens afin de valider la méthode (figure 4.21). Pour la fréquence de forçage testée $f_f = 0.0016 \text{ s}^{-1}$, nous avons inversé des valeurs correctes de viscosité. Cependant la sensibilité vis-à-vis de l'amplitude est faible, une variation de viscosité inférieure à 50 % est difficilement identifiable. Il faudrait pouvoir utiliser l'information sur la phase. Malheureusement une perte du signal observé après moins de deux périodes rend la mesure non réalisable à ce jour. Des efforts supplémentaires doivent être fait sur l'aspect purement technique à cette fin. Nous devons en effet être en mesure de diminuer le bruit électromagnétique et limiter la centrifugation des particules. Néanmoins dès lors que ces problèmes techniques seront résolus, le protocole oscillant devrait diminuer l'effet d'extinction de la convection, et ceux même pour de faibles écarts au seuil. Une mesure précise de la viscosité apparente du système serait alors réalisable.

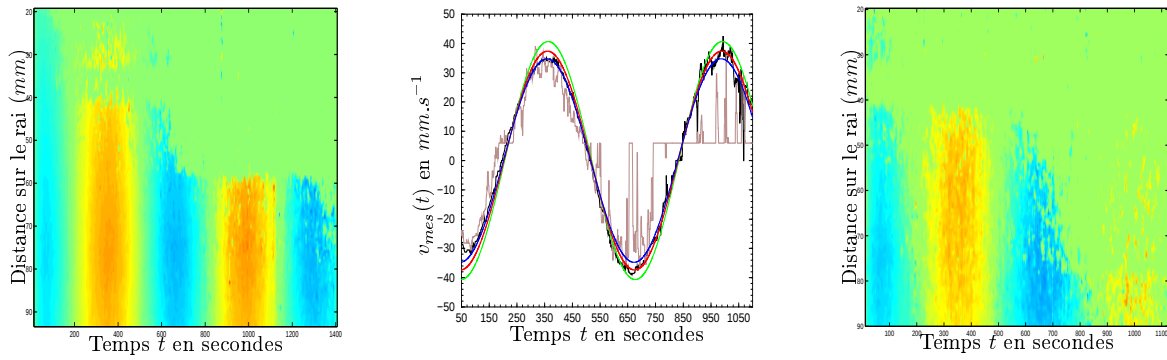


FIG. 4.21 – Expériences oscillantes ($\Omega = 31.5 \text{ rad.s}^{-1}$, $\Delta\Omega = 3.15 \text{ rad.s}^{-1}$, $f_f = 0.0016 \text{ s}^{-1}$). À gauche expérience isotherme ($T_{moy} = 32^\circ\text{C}$), à droite expérience convective ($\Delta T = 25^\circ\text{C}$). La perte du signal s’observe après seulement deux périodes. Au centre on représente la vitesse mesurée à la profondeur de $d = 72 \text{ mm}$. Les courbes synthétiques sont celles obtenues pour une viscosité de $2.5, 3$ et $3.5 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$ (La valeur de viscosité de référence est de $2.7\text{-}3 \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$).

Chapitre 5

Expériences de rotation différentielle

Ce dernier dispositif clôt le cycle d'expériences réalisées en géométrie sphérique. Au vu des questionnements qui sont apparus vis-à-vis des compétitions possibles entre effets thermiques et effets dynamiques, ce nouveau cas présente l'intérêt de pouvoir s'affranchir du problème thermique. Les mouvements turbulents sont en effet obtenus par forçage mécanique (rotation différentielle).

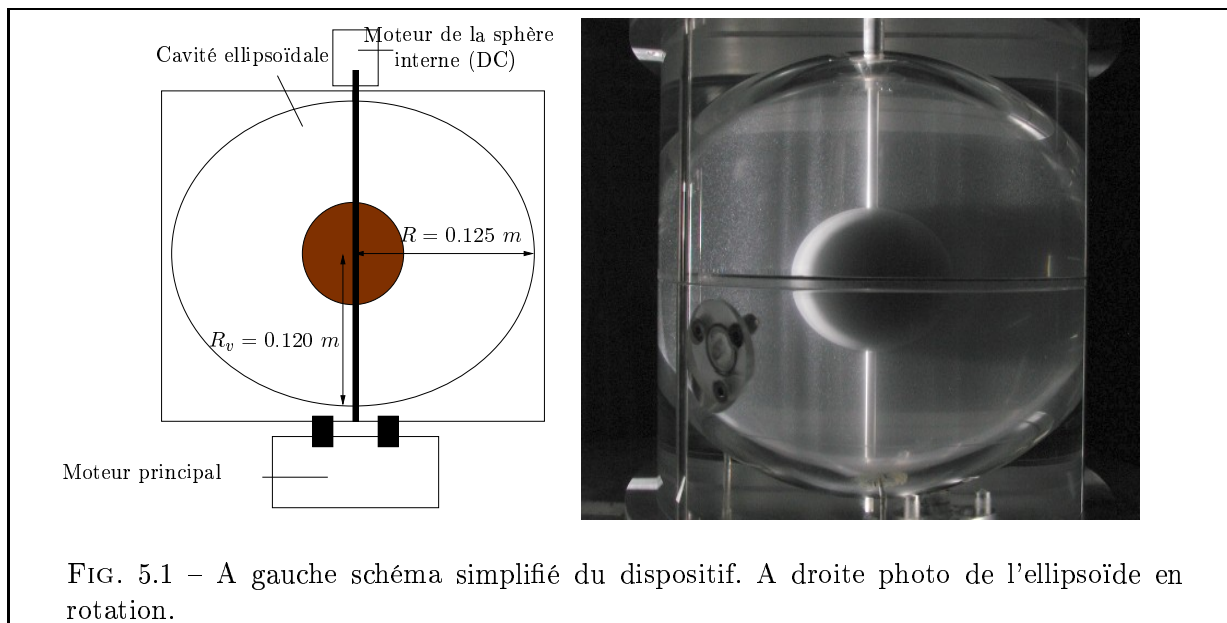
5.1 Descriptif de l'expérience

Ce dispositif a été initialement élaboré pour étudier les mouvements de précession lors de la thèse de Jérôme Noir [Noir, 2000]. Un recyclage habile du dispositif a ensuite été réalisé pour étudier des mouvements de rotation différentielle entre une sphère interne (la graine) et une sphère externe toutes deux en rotation ([Schaeffer, 2004]). Cette expérience de Couette Taylor en géométrie sphérique est un prototype de l'expérience DTS¹. L'expérience DTeau (Derviche Tourneur Eau) a été réalisée et instrumentée par J-P Masson.

Le dispositif expérimental de DTeau est constitué de deux entités (figures 5.1) :

Le récipient : Il s'agit d'une pièce de plexiglas cylindrique dont l'axe est confondu avec l'axe de rotation du récipient. Cette pièce a été usinée pour contenir une cavité ellipsoïdale $\eta = 1/25$ (Figure 5.1). Le rayon dans le plan équatorial est de 12.5 ± 0.02 cm, celui selon l'axe à 12 ± 0.02 cm. Dans la configuration des expériences réalisées, le récipient garde donc l'hypothèse de récipient axisymétrique par rapport à l'axe de rotation. Ce récipient est entraîné par un moteur (YASKAWA) de 3 kilowatts, régulé en vitesse. Sa vitesse maximale est de 1600 tours par minute (tpm). Néanmoins nous l'utiliserons dans une gamme de vitesse plus réduite. En effet ce dispositif permettait

¹DTS pour Derviche Tourneur Sodium est actuellement utilisée dans l'équipe afin d'explorer les régimes magnéto-hydrodynamiques (influence d'un champ magnétique sur un écoulement en rotation rapide et inversement) dans un système en rotation différentielle qui génère des mouvements turbulents.



initialement d'étudier la précession. Ce mouvement était réalisé à partir de la rotation de la table tournante et du récipient dont l'axe de rotation était basculé dans un plan différent de l'axe vertical. Dans ce contexte le collecteur électrique avait été placé en dessous de la sphère proche des moteurs. Malheureusement la prédominance des bruits électromagnétiques ne permettant pas d'utiliser ce collecteur pour la mesure Doppler, il a fallu créer une sortie par le haut de la sphère. Cette solution n'était pas compatible avec une structure d'arbre rigide. C'est pourquoi la transmission des signaux Doppler entre le référentiel tournant et le référentiel du laboratoire se fait par l'intermédiaire d'un arbre mou (flexible), relié au collecteur tournant supérieur. L'utilisation de ce flexible limite l'utilisation du moteur à une gamme de rotation allant jusqu'à 300 *tpm*. Le pilotage du moteur est réalisé par interface Labview. Le remplissage et la vidange de la cavité ellipsoïdale se font par l'intermédiaire de trous usinés à la base de celle-ci. Le fluide étudié est de l'eau à pression et température ambiantes. Globalement de nombreuses perforations ont été réalisées afin d'instrumenter l'ellipsoïde notamment en capteurs de pression et en sondes Doppler. Des bouchons étanches épousant les formes de la cavité ont été réalisés pour limiter les irrégularités topographiques qui auraient pu émerger de l'instrumentation.

La deuxième entité est la sphère interne responsable de la rotation différentielle, de rayon 4.06 ± 0.05 cm, elle avoisine le tiers de celui du récipient (similarité avec le rapport entre les rayons de la graine et du noyau liquide de la Terre). Cette sphère interne est traversée par un axe de diamètre 3 mm entraîné par un moteur placé sur le cylindre de plexiglas c'est à dire dans le référentiel de rotation. Il s'agit d'un moteur à courant continu (tension nominale 12 Volts) délivrant des vitesses de rotation entre 0 et 150 tours par minute. Néanmoins afin de rester dans une gamme de vitesse où la réponse du moteur est linéaire en tension, nous avons choisi de rester à des tensions supérieures au tiers de la tension nominale. La stabilité de ce moteur n'a pas été rigoureusement déterminée. Néanmoins nous estimons les fluctuations de celui-ci inférieures à 10%. Le

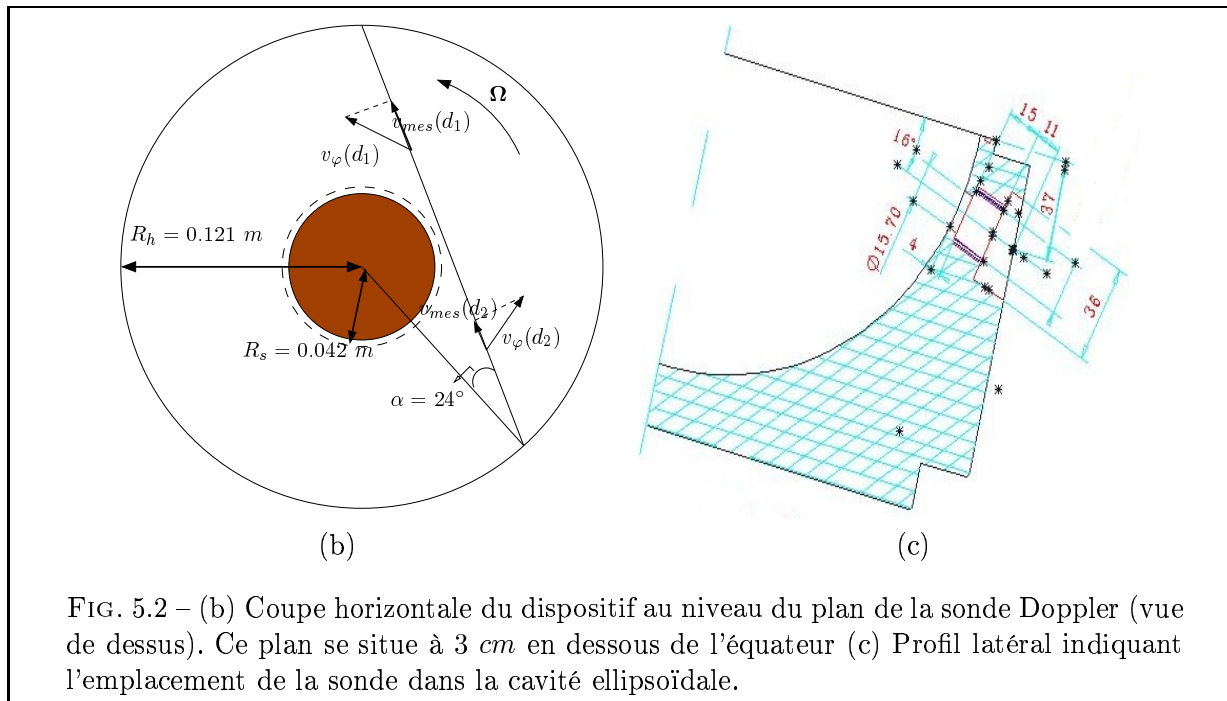


FIG. 5.2 – (b) Coupe horizontale du dispositif au niveau du plan de la sonde Doppler (vue de dessus). Ce plan se situe à 3 cm en dessous de l'équateur (c) Profil latéral indiquant l'emplacement de la sonde dans la cavité ellipsoïdale.

dispositif permet d'étudier des régimes de rotation différentielle prograde (rotation de la sphère interne vue du référentiel tournant dans le même sens que la rotation d'ensemble) ou rétrograde (rotation de la sphère interne vue du référentiel tournant dans le sens inverse de la rotation d'ensemble). Le choix du moteur à courant continu a été fait pour tenir compte des contraintes techniques liées aux mesures par effet Doppler. En effet comme dans les expériences de convection, ces mesures sont très sensibles aux bruits électromagnétiques. La diminution maximum de ces bruits a été rendue possible par le remplacement du moteur initial actionnant la sphère interne (moteur type pas à pas) par ce nouveau moteur.

Le dispositif initial n'était pas prévu pour effectuer des mesures de vitesse azimutale, quelques modifications du dispositif ont donc été réalisées dans ce but précis. Pour l'entretien du dispositif le sphéroïde est constitué de deux pièces jointes au niveau de l'équateur, il n'était donc pas possible de placer notre sonde Doppler dans le plan de l'équateur contrairement aux expériences précédentes. Celle-ci a donc été placée à $3 \pm 0.1 \text{ cm}$ en dessous de l'équateur, directement au contact de l'eau. Par un jeu de construction géométrique en 3 dimensions, nous avons fait en sorte que le rai passe au plus près de la sphère interne afin de sonder toutes les profondeurs du fluide et ce de manière horizontale (figure 5.1(b) et (c)). L'angle théorique de la pièce usinée est de 24° . Lors des premières mises en route du dispositif nous avons estimé cet angle en mesurant la distance séparant la sonde et l'image du point milieu donné par l'écho Doppler (point de symétrie dans les diagrammes spatio-temporels). L'angle mesuré est de $22.5^\circ \pm 2^\circ$. Néanmoins, l'ensemble des inversions des vitesses mesurées ont été réalisées en considérant l'angle théorique de 24° ¹. De manière analogue au dispositif précédent,

¹A posteriori, il aurait mieux valu travailler avec un angle proche de 20° (voir le paragraphe B.2.5)

les vitesses azimutales se déduisent à partir des vitesses mesurées à la distance d le long du rai Doppler par la formule (équation 4.1) :

$$v_\varphi(r) = \frac{v_{mes}(d) r(d)}{R_h \sin(\alpha)} \quad (5.1)$$

où R_h est le rayon horizontal de la cavité dans le plan de mesure ($R_h = 0.121 \text{ m}$). Ici la vitesse $v_\varphi(r)$ théorique est légèrement différente de celle donnée pour le cas de la sphère (équations 2.35 et 2.42). La demi-hauteur L , est en raison de la géométrie elliptique de cette expérience, égale à $\frac{R_v}{R} \sqrt{(1 - s^2)}$ où R_v est le rayon vertical de l'ellipse et R le rayon horizontal pris pour l'adimensionnement (ellipsoïde de révolution autour de $\mathbf{e}_z$). Ainsi les deux formules de référence de la vitesse azimutale mesurée sont :

$$v_{mes_\varphi} = s\Delta\Omega \exp\left(-t \frac{E^{1/2}}{(\frac{R_v^2}{R^2}(1 - s^2))^{3/4}}\right) \quad (5.2)$$

$$v_{mes_\varphi} = \frac{\Omega_M \omega_f s (\frac{R_v^2}{R^2}(1 - s^2))^{3/4}}{(E + \omega_f^2 (\frac{R_v^2}{R^2}(1 - s^2))^{3/2})^{1/2}} \sin\left(\omega_f t + \arctan\left(\frac{E^{1/2}}{\omega_f (\frac{R_v^2}{R^2}(1 - s^2))^{3/4}}\right) + \pi\right) \quad (5.3)$$

La transmission des informations se fait par l'intermédiaire de collecteurs tournants. Celui du bas est dédié au contrôle du moteur de l'ellipsoïde¹. Celui du haut permet le contrôle du petit moteur associé à la sphère interne. Dans ce même collecteur transitent les signaux haute fréquence associés aux mesures Doppler.

5.2 Les régimes observables et leurs mécanismes

Pour l'expérience DTeau, les états de turbulence sont obtenus par un mécanisme de rotation différentielle. La sphère interne peut tourner à une vitesse différente du récipient, une zone de cisaillement génératrice de vorticité se développe alors à l'interface. Les caractéristiques de cette zone ainsi que les mécanismes de déstabilisation de cette couche ont été étudiés par Nathanaël Schaeffer dans son travail de thèse [Schaeffer, 2004]. Il prolonge ainsi les travaux concernant les couches de cisaillement dans les fluides en rotation rapide, réalisés d'abord de manière théorique par Proudman [Proudman, 1956] puis par Stewartson [Stewartson, 1966] sur diverses géométries ainsi que les travaux expérimentaux en géométrie cylindrique de Fr h et Read [Fr h & Read, 1999]. Afin

¹Le dispositif initial visait à étudier les mouvements de précession, c'est pourquoi l'ellipso ide utilisé est placé sur une table tournante (pour nos expériences elle est néanmoins rest e immobile). Ceci explique la présence du collecteur du bas.

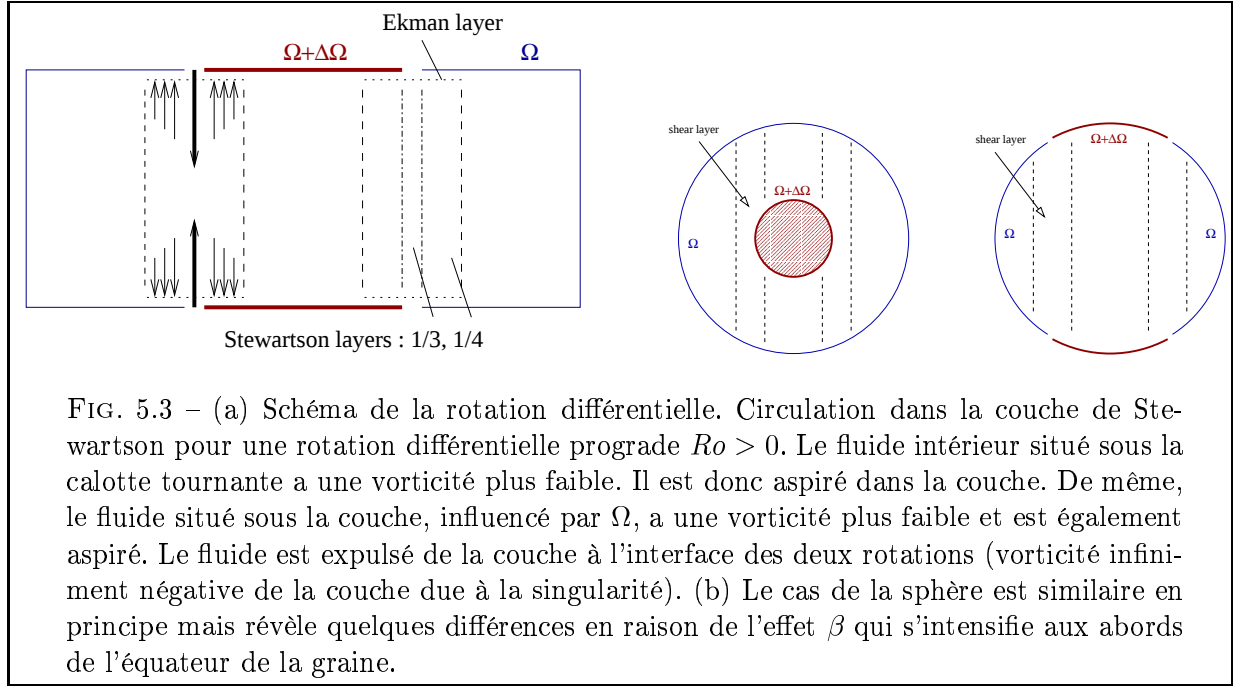


FIG. 5.3 – (a) Schéma de la rotation différentielle. Circulation dans la couche de Stewartson pour une rotation différentielle prograde $Ro > 0$. Le fluide intérieur situé sous la calotte tournante a une vorticité plus faible. Il est donc aspiré dans la couche. De même, le fluide situé sous la couche, influencé par Ω , a une vorticité plus faible et est également aspiré. Le fluide est expulsé de la couche à l'interface des deux rotations (vorticité infiniment négative de la couche due à la singularité). (b) Le cas de la sphère est similaire en principe mais révèle quelques différences en raison de l'effet β qui s'intensifie aux abords de l'équateur de la graine.

de traiter et de pouvoir interpréter les mesures de vitesse, il est fondamental d'avoir à l'esprit les caractéristiques de l'écoulement de base de l'expérience de rotation différentielle. Ainsi, je rappelle ici de manière succincte, certains des résultats établis par Nathanaël Schaeffer, dont fait objet l'article [Schaeffer & Cardin, 2005].

5.2.1 Les couches de Stewartson

Un cas analogue à notre système permet d'avoir une vision synthétique de l'écoulement généré par la rotation différentielle et des mécanismes mis en jeu (figure 5.3). La calotte interne tourne à une vitesse $\Omega + \Delta\Omega$, le reste du récipient tourne à Ω . Une couche de cisaillement se crée à l'interface des deux zones (celle influencée par $\Omega + \Delta\Omega$ et celle influencée par Ω). Cette couche est une couche de Stewartson. A l'intérieur de la couche règne un équilibre entre le pompage d'Ekman qui tend à minimiser l'écart de vorticité entre l'intérieur du fluide et la paroi et les forces de viscosité en volume. Cet équilibre pour l'écoulement azimuthal s'écrit ([Schaeffer, 2004]) :

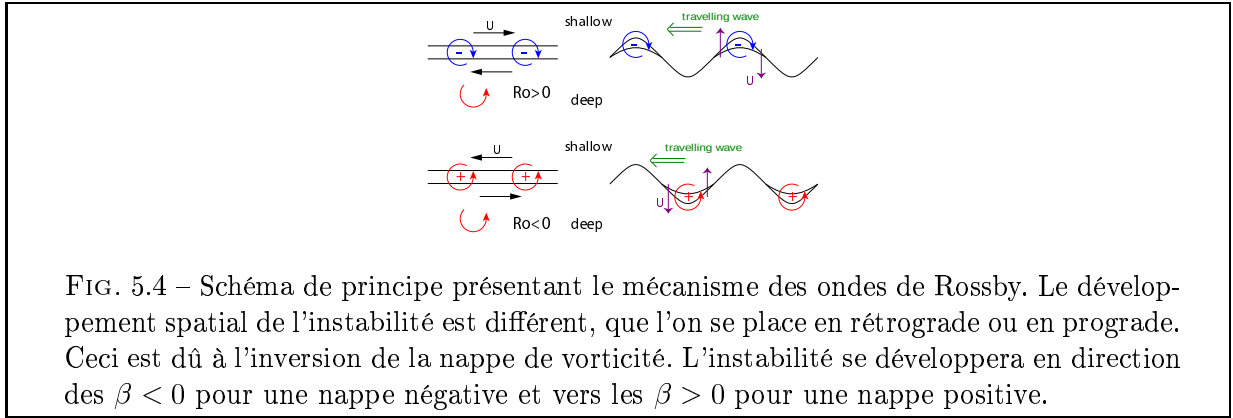
$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\varphi v_r}{r} \right) + 2v_r = E(\nabla^2 v_\varphi - \frac{v_\varphi}{r^2}) \quad (5.4)$$

v_r se déduit de la formule du pompage 2.26 et ainsi :

$$v_r = \frac{E^{1/2}}{2L} \left(1 + \left(\frac{dL}{dr} \right) \right)^{1/4} (v_\varphi - U_b) \quad (5.5)$$

avec L la demi-hauteur de fluide au point r considéré et U_b la vitesse azimutale du récipient. On voit que selon la géométrie l'effet de la pente $\beta = \frac{1}{L} \frac{dL}{dr}$ aura plus ou moins d'importance. La résolution de cette équation lorsque l'on néglige les termes non-linéaires ($Ro \ll 1$) se fait de manière analytique et fait apparaître une épaisseur caractéristique de couche de l'ordre de $\Delta_{st} = L^{1/2} \left(\frac{\nu}{\Omega}\right)^{1/4}$. Au centre de la couche apparaît une singularité du pompage en raison du saut latéral de vorticité. Ce problème se résout en modélisant une couche d'épaisseur plus fine (en $E^{1/3}$). L'écoulement dans cette couche interne ne respecte pas la contrainte de Proudman-Taylor. Ceci peut poser un problème dans la correspondance entre régime transitoire et viscosité pour la zone cisailée puisque le mouvement de spin-up repose sur cette contrainte. Néanmoins les mouvements de recirculation associés à la couche de Stewartson montrent que ceux-ci s'effectuent en boucle sur la couche (figure 5.3). Ainsi le reste du fluide ne devrait pas au premier ordre subir les effets associés à cette couche interne non modélisée. Dès lors le temps de synchronisation ne devrait pas être modifié.

5.2.2 Les mécanismes de déstabilisation



Nous venons de voir que les couches de Stewartson amenaient une nappe de vorticité négative pour un différentiel de rotation prograde, $Ro > 0$ (resp. positive pour $Ro < 0$). Celles-ci vont être le siège de perturbations qui, au seuil, se présentent sous la forme d'ondes de Rossby. Dans le cas de la sphère, les structures vont apparaître en spirale en raison d'un effet β qui dépend de la distance à l'axe. Les résultats numériques obtenus à partir d'un modèle quasi-géostrophique de calotte sphérique montrent que l'instabilité a tendance à se développer dans la partie externe au cylindre tangent pour les $Ro > 0$ et plutôt à l'intérieur de celui-ci pour les $Ro < 0$. Cette dissymétrie peut s'expliquer avec un mécanisme d'ondes de Rossby (figure 5.4). Les études théoriques et numériques permettent d'obtenir des lois d'échelles qui vont caractériser les ondes au seuil (répartition dans l'espace, fréquences, relation de dispersion, atténuation), et ce, en fonction des paramètres du système (E, β) . Ainsi, nous avons une première idée sur les caractéristiques de notre écoulement. Cette approche est complétée par une étude expérimentale, notamment celle du seuil d'instabilité. Pour les besoins de notre étude, nous retiendrons les résultats suivants :

Le seuil d'instabilité évolue en loi de puissance du nombre d'Ekman et de la pente ($Ro_c \sim 2E^{1/2}\beta$) et la fréquence temporelle en $f \sim \frac{2\beta}{m}$ où m est le mode azimuthal qui se développe au seuil ($m \sim E^{-1/4}$, comparable à l'épaisseur de la couche de cisaillement). Ces lois asymptotiques sont globalement reproduites par le modèle numérique. Bien que la caractérisation de la turbulence soit déduite des études numériques, ce sont les valeurs expérimentales de détermination du seuil que nous choisirons comme références.

Expérimentalement, le seuil d'instabilité est atteint plus facilement en rotation prograde qu'en rotation rétrograde (dans ce deuxième cas, le seuil est atteint pour des nombres de Rossby trois fois plus forts que ceux estimés par le modèle numérique) et les auteurs le justifie par une pente plus favorable pour la rotation prograde du fait de la présence de la sphère interne. Les Rossby critiques associés à ces seuils d'instabilités sont typiquement de $Ro_c = -0.05$ (rétrograde) et $Ro_c = 0.02$ pour les expériences réalisées¹ [Schaeffer, 2004].

Contrairement aux instabilités convectives qui se développent principalement aux niveaux du manchon interne et s'atténuent rapidement à mesure que l'on s'éloigne de l'axe, les structures générées ici s'atténuent beaucoup moins et restent présentes dans l'ensemble du volume.

5.2.3 Les différents régimes turbulents et leurs caractéristiques

Afin de rester dans l'hypothèse de mouvements de turbulence influencés fortement par la rotation, nous avons limité notre étude à des nombres de Rossby faibles. $Ro \ll 1$ impose théoriquement de travailler avec des nombres de Rossby différentiels maximum de 0.1. En pratique la visualisation des structures de l'écoulement par des particules en suspension ('Kalliroscope AQ 1000') montre qu'à $E \approx 10^{-5}$, les vortex même instables semblent invariant selon l'axe z jusqu'à des nombres de Rossby différentiels de 0.25. Les structures 3D commencent à être clairement visibles pour des valeurs de Rossby de 0.5. Ainsi la plupart des expériences réalisées ont été faites à Ro_d entre 0.1 et 0.3, avec des extensions pour quelques expériences vers des régimes à 0.4. Pour ces régimes nous atteignons des valeurs de nombre de Rossby de 1 à 20 fois le nombre de Rossby critique qui caractérise le seuil d'instabilité pour les expériences rétrogrades. Pour les progrades nous réalisons des expériences de 3 à 15 fois critiques.

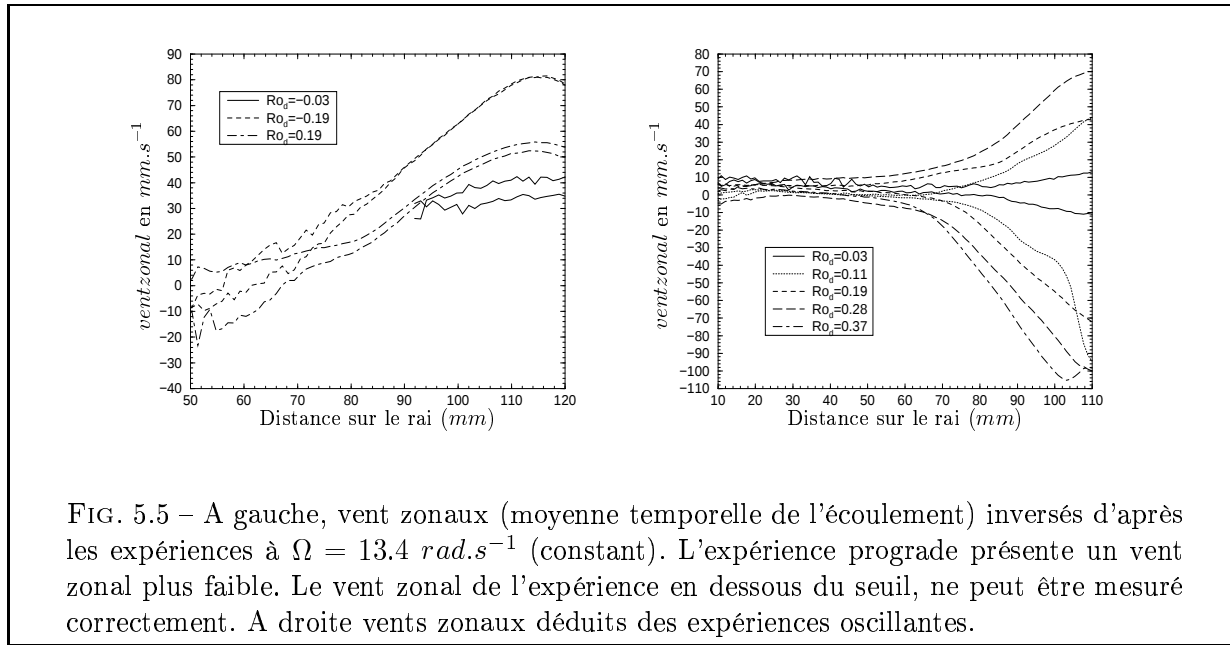
A l'aide des résultats numériques fournis par le code quasi-géostrophique et pour des écarts au seuil similaires aux nôtres, nous obtenons une valeur du nombre de Reynolds, basée sur la valeur *rms* des vitesses en sortie du modèle, de l'ordre de 10^3 . Ceci donne une idée de la différence qui peut exister entre l'écoulement associé aux écarts aux seuils obtenus dans les expériences de convection et celui pour les mêmes écarts au seuil avec ce dispositif. On a des intensités de fluctuation des vitesses qui expérimentalement dépassent les 10 mm.s^{-1} .

¹Nous définissons le nombre de rossby associé à la rotation différentielle comme $Ro_d = \Delta\Omega_s R_s / (\Omega R)$, où $\Delta\Omega_s$ est la rotation de la sphère interne et R_s son rayon. Ro_c est la valeur de Ro_d au seuil

Les caractéristiques de l'écoulement énoncées pour l'étude au seuil restent au premier ordre similaire. On note néanmoins que d'après les résultats du modèle numérique et sa validation par quelques comparaisons expérimentales au dessus du seuil, on peut s'attendre à observer un épaississement de la zone de cisaillement par rapport au cas asymptotique énoncé plus haut et ce, d'autant plus qu'on augmente le forçage. On assiste à une turbulence d'onde de Rossby. Les périodes temporelles caractéristiques des ondes restent de l'ordre de 2 – 4 secondes avec diminution du nombre d'onde au fur est à mesure que l'on s'éloigne du seuil.

5.2.4 État de base hydrodynamique

Les figures 5.7 présentent tout d'abord deux observations des ondes de Rossby en rétrograde et en prograde. A partir de ces diagrammes spatio-temporels nous vérifions qualitativement que l'état de base est stationnaire et nous quantifions également le vent zonal (figure 5.5). Pour mesurer les états proches du seuil et en deçà, on utilise le protocole oscillant qui permet une bonne remobilisation des particules. Nos estimations du seuil (figure 5.5) sont en accord avec ceux déterminés par [Schaeffer & Cardin, 2005]. On retrouve également l'ordre de grandeur du vent zonal estimé par le modèle numérique de [Dormy *et al.*, 1998], comme le montre la figure 5.6.



La différence notable entre le modèle numérique et nos expériences semble être du point de vue du vent zonal. On observe une différence entre les expériences progrades et les expériences rétrogrades à nombre de Rossby équivalent (figure 5.5). Au dessus du seuil, les vents zonal rétrogrades sont jusqu'à 35 % plus forts que les progrades. A proximité du seuil, la différence devient négligeable (figure 5.5). Bien que le résultat

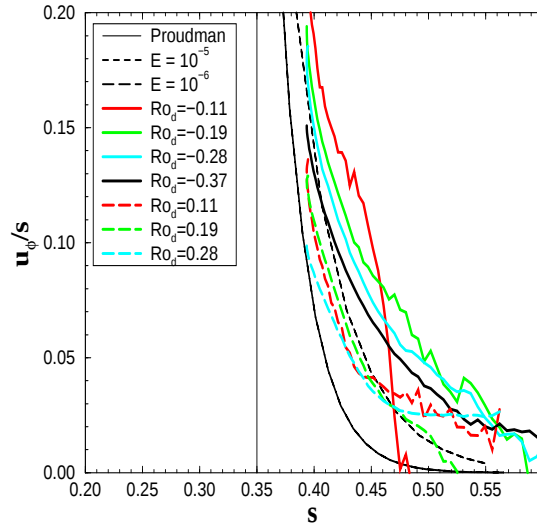


FIG. 5.6 – Comparaisons entre le modèle numérique de [Dormy *et al.*, 1998] et les expériences ($E = 4.7 \cdot 10^{-6}$) pour différents Ro_d . Ici u_Φ est adimensionnée par $\Delta\Omega_d R$. La correspondance entre les coordonnées d et s est donnée à la figure 5.9 de droite

de modèle présenté à la figure 5.6 soit un calcul du vent zonal en dessous du seuil, la comparaison avec les expériences rétrogrades montre que celles-ci ont un vent zonal plus fort que celui prédit par la théorie. On peut interpréter cette modification comme un résultat de l'interaction des non-linéarités associées aux ondes de Rossby. Il est par contre difficile d'avancer un processus qui expliquerait que la contribution des non-linéarités est essentiellement rétrograde. Nous ne savons pas non plus si le phénomène est présent dans les deux types de rotation différentielle ou uniquement en rotation différentielle rétrograde.

Associé à la turbulence des ondes de Rossby, on observe sur les figures 5.5 et 5.6 un épaississement de la zone de cisaillement à mesure que l'on augmente le forçage.

Une dernière tendance peut être dégagée de l'observation de la zone hors cisaillement (proche de la paroi externe). On observe en rétrograde comme en prograde une légère recirculation prograde (de l'ordre de 10 mm.s^{-1}) qui peut renforcer la dissymétrie entre les expériences progrades et rétrogrades. Cette amplitude est faible et résulte d'un moyennage du signal sur une temps relativement long. Ainsi une partie de cette amplitude mesurée peut aussi provenir d'un biais lié au Doppler qui mesure difficilement les faibles vitesses.

Les aspects de cet écoulement de base diffèrent d'un simple mouvement de rotation solide. Le vent zonal moyen devra ainsi être retranché des mesures de vitesse afin de pouvoir inverser la viscosité apparente.

Nous avons pu vérifier que l'état de base hydrodynamique n'était pas fondamentalement modifié par le forçage oscillant. La figure 5.7(bas) montre une advection des ondes de

Rossby par l'écoulement induit par le forçage, ce qui en théorie pourrait perturber cet état en modifiant périodiquement la valeur du seuil. En fait les vents zonaux déduits des expériences oscillantes étant similaires à ceux déduits d'une expérience à Ω constant (voir annexe B.2.3), nous en déduisons que l'état de base turbulent n'est pas modifié par l'oscillation.

5.3 Particularité des inversions

5.3.1 Inversions locales de la viscosité

Pour ces expériences nous avons choisi d'inverser la valeur de viscosité de manière locale. Auparavant la méthode employée consistait à inverser un temps de synchronisation τ à chaque profondeur. Ensuite nous déduisons une valeur moyenne de la viscosité à partir de cette estimation locale. Pour ce nouveau dispositif nous avons choisi de ne plus considérer cette valeur moyenne mais de traduire $\tau(s)$ en $\nu(s)$ de manière indépendante. La raison de cette différence de traitement vient du fait que nous n'avons pas observé de viscosité apparente uniforme, il était donc nécessaire d'inverser une valeur précise à chaque profondeur. Les figures 5.8 illustrent cette méthode à l'aide des expériences oscillantes ($\Omega = 13.4 \text{ rad.s}^{-1}$, $Ro = 0.14$). Exceptionnellement, nous avons ici retraduit la viscosité apparente, inversée d'après la phase du signal oscillant, en temps de synchronisation adimensionné ($\tau = \sqrt{\left(\frac{R_v}{R} \sqrt{(1-s^2)}\right)^3 / E}$). Nous avons fait cela dans le but de comparer ces courbes avec les courbes relatives aux dispositifs précédents. Nous nous intéressons à l'allure générale de ces courbes. On observe, pour les expériences au-dessus du seuil, que le temps de synchronisation ne correspond pas aux $\tau(s)$ théoriques calculables à partir d'une viscosité constante. Entre $d = 70$ et $d = 85 \text{ mm}$, le temps de synchronisation chute brusquement. Ceci correspond à une augmentation de près de 50 % de la viscosité (figure 5.8(b)).

5.3.2 Expériences de références et zone d'inversion

Les expériences réalisées sans rotation différentielle permettent de définir la région du volume où expérimentalement la théorie de Greenspan est validée (figure 5.9). Cette région débute à $d = 35 \text{ mm}$ (ou $s = 0.73$) et s'étend jusqu'à $d = 85 \text{ mm}$ (soit $s = 0.44$). Il est possible que cette théorie s'étende vers des d plus petits, mais nous n'obtenons pas de signaux corrects de vitesses pour ces distances-là. Au deçà de cette distance les variations de viscosité peuvent s'expliquer par une mauvaise qualité des données en raison de l'absence des particules, celles-ci sont en effet centripétées. La couche limite externe bien qu'épaissie près de l'équateur et qui, à la hauteur de mesure devrait s'étendre jusqu'à $s = 0.96$, reste relativement fine. Elle n'est donc pas une explication de la limitation des mesures pour les faibles distances. Par contre, pour les grandes distances, $d > 85 \text{ mm}$, on pénètre dans la zone proche de la couche limite visqueuse

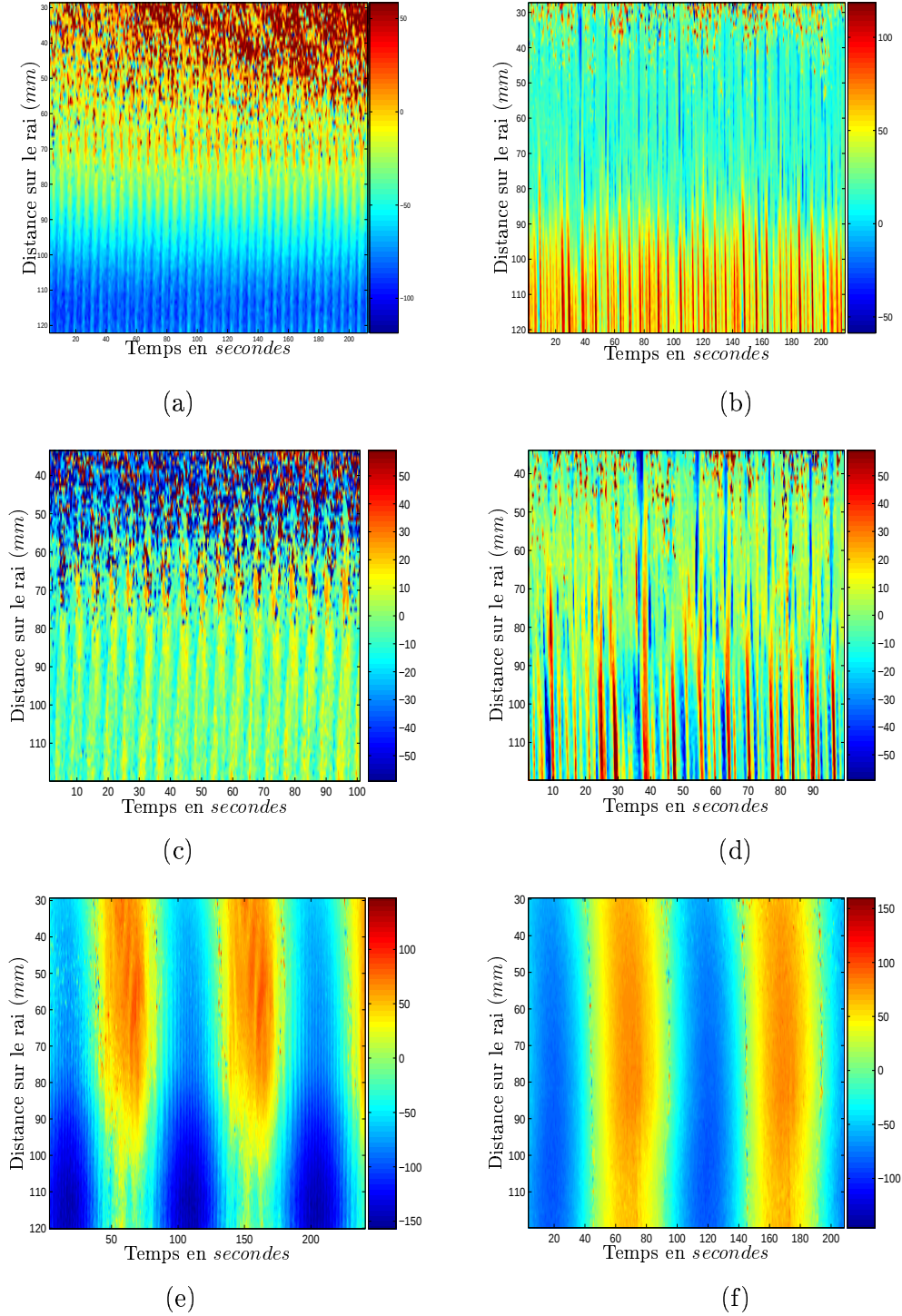


FIG. 5.7 – Diagrammes spatio-temporels (vitesse en $mm.s^{-1}$) des expériences rétrogrades ((a) et (c)) et progrades ((b) et (d)) réalisées à $\Omega = 13.4 rad.s^{-1}$ et $Ro_d = \pm 0.19$. (c) et (d) sont des diagrammes, zoomés sur la zone qui présente un intérêt, sur lesquels nous avons soustrait le vent zonal. Les rétrogrades sont globalement plus stables mais la remobilisation des particules est moins efficace. (e) et (f) Expériences oscillantes ($\Omega = 13.4 rad.s^{-1}$, $Ro_d = 0.14$ et $f_f = 0.01 s^{-1}$). (e), $Ro_d = -0.19$, nous observons le passage des ondes avec une variation de la fréquence des ondes de Rossby par effet Doppler. (f) $Ro_d = -0.03$ (en dessous du seuil), il n'y a pas d'ondes de Rossby. La remobilisation des particules engendrée par les oscillations permet de mesurer le vent zonal à toutes les profondeurs.

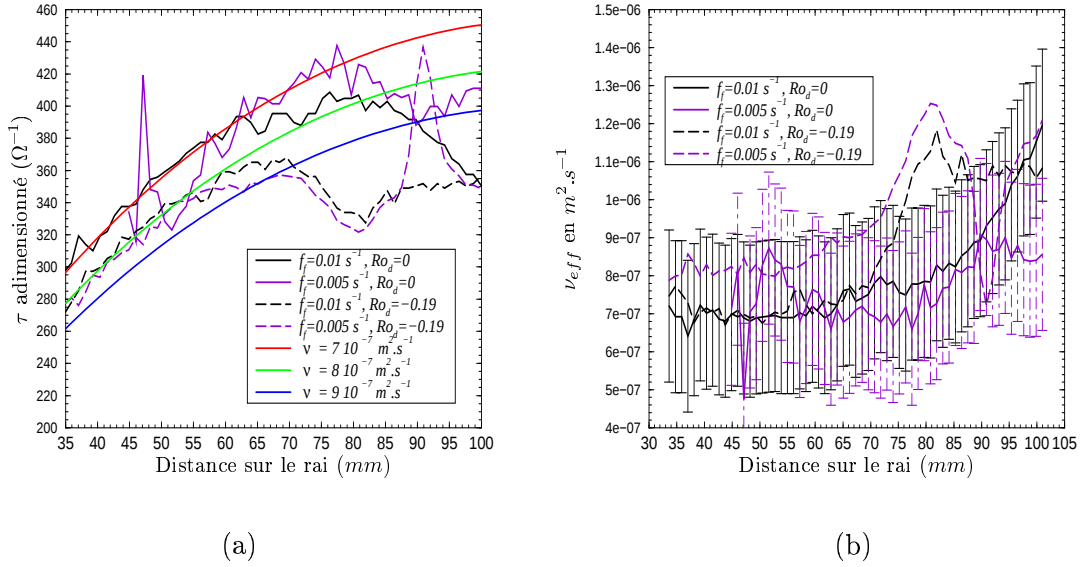


FIG. 5.8 – Exemples à partir d'expériences oscillantes ($\Omega = 13.4 \text{ rad.s}^{-1}$, $Ro = 0.14$). (a) $\tau(s)$. Les expériences réalisées à $Ro_d = -0.19$ ne permettent pas d'inverser une viscosité constante. (b) On visualise la viscosité apparente correspondante inversée à chaque profondeur. Les barres d'erreur ont été estimées à $\pm 1.5 - 2 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ d'après les tests que nous présentons à l'annexe B.2

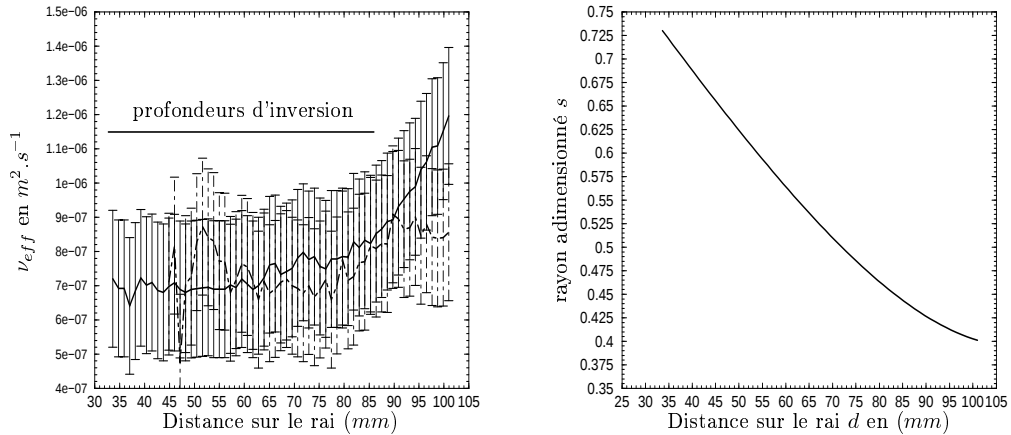


FIG. 5.9 – A gauche, expériences oscillantes ($\Omega = 13.4 \text{ rad.s}^{-1}$, $Ro = 0.14$) réalisées à $f_f = 0.01 \text{ s}^{-1}$ en trait plein et $f_f = 0.005 \text{ s}^{-1}$ en traits courts. A droite, correspondance entre rayon adimensionné et distance mesurée.

de la sphère interne. Cette couche limite visqueuse n'est pas prise en compte dans la théorie. On observe alors une forte augmentation dans l'inversion de la viscosité, aussi bien avec que sans rotation. Cette zone limite donc la mesure vers les fortes distances

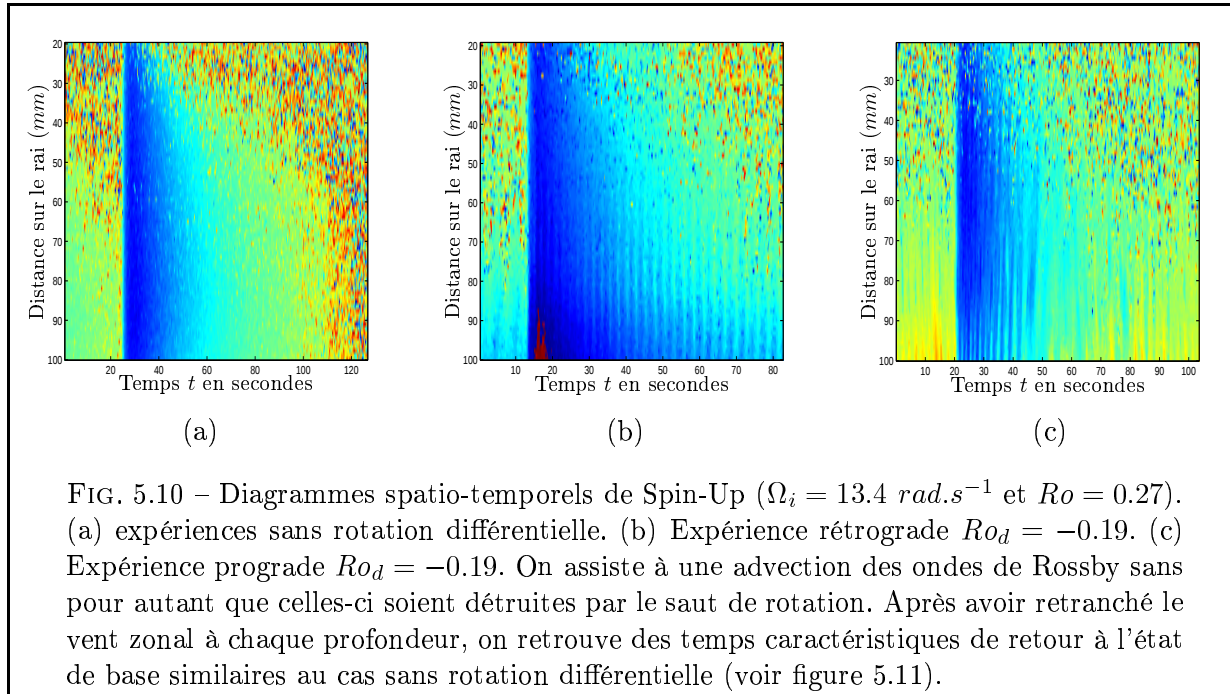
(s petits). Finalement la zone définie par $d \in [35 : 85]$, est la zone sur laquelle nous allons pouvoir comparer les expériences avec et sans rotation différentielle.

5.4 Les expériences de Spin-Up

5.4.1 Spin-Up dans le cadre purement linéaire : des résultats peu exploitables

En raison de la centripétation des particules et de la présence de l'arbre mou, il n'a pas été possible d'explorer des vitesses au delà de 180 tpm. Cette vitesse d'ensemble impose de travailler avec des sauts de vitesse maximum de 20 tpm, pour lesquels la précision des mesures ne permet pas de déceler des différences de viscosité inférieures à 60 % (annexe B.1). De plus nous avons observé une réponse non instantanée du moteur¹ ce qui limite d'autant plus la validité de l'utilisation de notre formule analytique basée sur une hypothèse de saut instantané de vitesse de rotation. Une description plus détaillée des raisons pour lesquelles nous n'avons pu exploiter plus abondamment ces premières expériences est présentée également en annexe.

5.4.2 Spin-Up réalisés hors du régime strictement linéaire $\frac{\Delta\Omega}{\Omega} > 0.1$



¹On observe en effet une rampe montante qui s'étale sur 3 secondes ce qui représente déjà un dixième du temps de Spin Up pour ces vitesses d'ensemble.

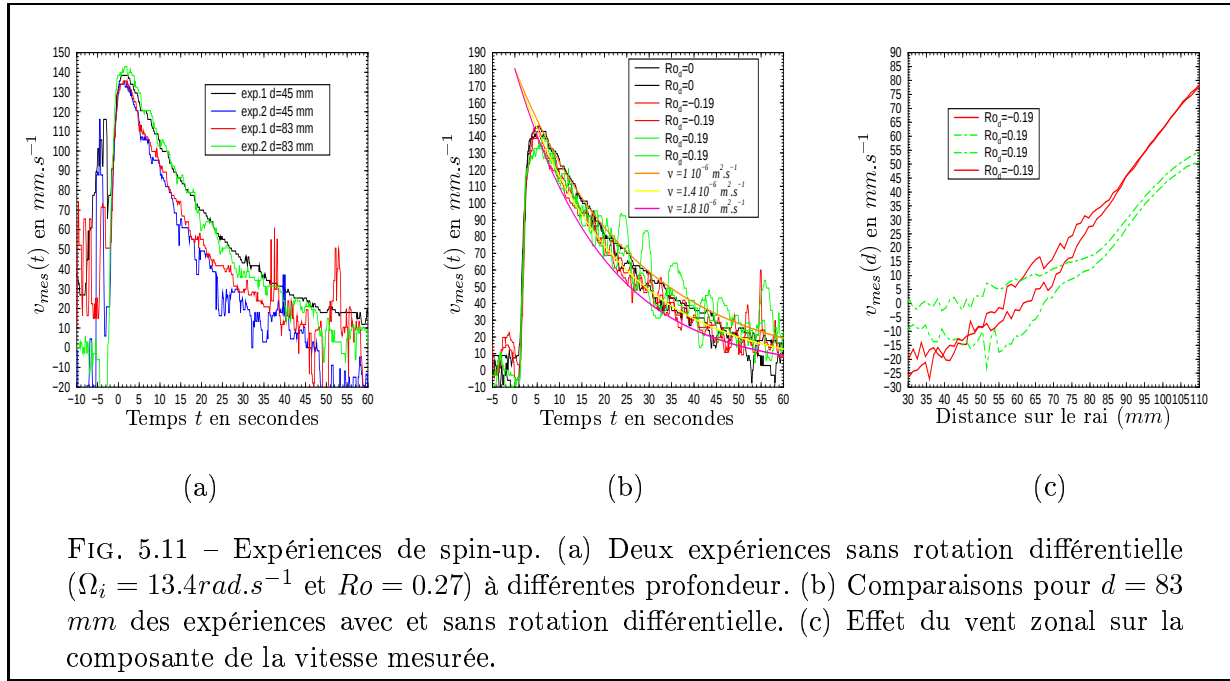


FIG. 5.11 – Expériences de spin-up. (a) Deux expériences sans rotation différentielle ($\Omega_i = 13.4 rad.s^{-1}$ et $Ro = 0.27$) à différentes profondeurs. (b) Comparaisons pour $d = 83$ mm des expériences avec et sans rotation différentielle. (c) Effet du vent zonal sur la composante de la vitesse mesurée.

Pour les expériences de spin-up réalisées à des nombres de Rossby supérieurs (ici $Ro = 0.27$), le signal est de meilleure qualité en raison d'une remobilisation correcte des particules (figure 5.10). Les expériences réalisées sont reproductibles (figure 5.11(a)) et permettent d'obtenir une estimation de la viscosité de manière approximative. Les expériences avec et sans rotation différentielle ne sont pas clairement différenciables. Pour la zone hors cisaillement de vitesse, on ne voit pas de différence. Pour la zone où l'on obtient le maximum de variation de viscosité avec les expériences oscillantes (voir paragraphe suivant), on pourrait voir une décroissance légèrement plus rapide sur la courbe 5.11(b), mais ceci peut être aussi attribué à une mauvaise estimation du vent zonal. En effet la figure 5.11(c) montre que l'imprécision sur la mesure de ce dernier n'est pas négligeable. Elle peut perturber la comparaison entre spin-up avec et sans rotation différentielle. Ceci confère une confiance médiocre dans l'estimation de la viscosité à partir des expériences de spin-up. Les spin-up de la courbe 5.11(b) s'inversent avec des viscosités comprises entre 1 et $1.8 \cdot 10^{-6} m^2.s^{-1}$. Là encore malgré un saut de rotation plus fort il est toujours difficile d'évaluer des différences de viscosité inférieures à 30 %.

5.5 Expériences oscillantes

Ces expériences ont nécessité de nombreuses précautions expérimentales et des traitements de données brutes parfois lourds. Le lecteur trouvera tous les compléments nécessaires à la bonne compréhension du travail réalisé lors de ces expériences dans l'annexe B.2. Pour réaliser ces expériences, le dispositif DTeau a été automatisé grâce à un nouvel ordinateur équipé d'une carte d'acquisition. L'envoi et la réception des signaux venant du dispositif se font par une interface Labview. Cette automatisation

permet de piloter le moteur et ainsi d'imposer une rotation harmonique à ce dernier. Le système Doppler a été relié à l'ordinateur de commande afin de connaître précisément les temps d'enregistrement des vitesses par rapport aux mouvements du dispositif. Ainsi le temps t_0 marquant l'origine des phases est connu avec une précision de 0.1 seconde. Pour les expériences oscillantes un nouveau paramètre intervient. Il s'agit de la fréquence du forçage oscillant ($f_f = \frac{1}{P_f}$). La sensibilité de l'amplitude $A(s)$ et de la phase $\varphi(s)$ ne seront pas les mêmes que l'on se place à forte ou faible fréquence. Aussi la fréquence obtenant le meilleur compromis se situe autour de $f_f = 0.01 - 0.005 \text{ s}^{-1}$ (annexe B.2). Nous avons donc choisi d'effectuer nos mesures à ces fréquences.

Avec une précision de $\pm 2 - 3 \text{ mm/s}$ sur les vitesses nous pouvons espérer détecter des différences de viscosité de l'ordre de $0.3 - 0.4 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ (soit 30 à 40 %) ¹ à partir de l'amplitude, ce qui reste assez semblable à notre précision pour les expériences de spin-up/spin-down. Pour ce qui est de la phase, l'erreur temporelle maximum est évaluée à 0.1 seconde. A partir de l'inversion de la phase du signal nous devrions être en mesure de détecter des différences de viscosité de l'ordre de $0.1 - 0.2 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ (soit 10 à 20 %), ce qui confirme l'intérêt de mettre en place ces mesures. Par ailleurs les tests de bruit synthétiques réalisés, montrent que la phase reste très peu sensible aux fluctuations du signal alors que l'inversion de l'amplitude révèle des écarts de 30% entre un signal pur et un signal bruité (annexe B.2). Ceci confère donc un deuxième avantage à la mesure de viscosité réalisée d'après la phase.

5.5.1 Résultats

Toutes les expériences présentées dans le tableau 5.1 ont été réalisées à la même vitesse d'ensemble ($\Omega = 13.4 \text{ rad.s}^{-1}$ soit $E_{mol} = 4.8 \cdot 10^{-6}$) et à même saut de rotation ($\Delta\Omega = 1.9 \text{ rad.s}^{-1}$ soit $Ro = 0.14$). L'utilisation des données brutes a nécessité certains traitements qui sont détaillés dans l'annexe B.2.

Séries d'expériences à $f_f = 0.01 \text{ s}^{-1}$

Pour cette première série, l'analyse à partir de l'amplitude est délicate, seule l'information sur la phase est donc prise en compte pour dégager certaines tendances. Ces expériences réalisées sur plusieurs jours sont bien reproductibles (figure 5.12(a)). On distingue d'ores et déjà deux zones aux comportements différents : une zone située hors cisaillement ($d \in [35 : 45]$) où la viscosité efficace reste similaire à la viscosité de référence (ν_{mol}) et une zone où les variations de viscosité sont fortes ($d \in [70 : 90]$). Entre ces deux zones, pour $d \in [45 : 70]$, la viscosité inversée diffère progressivement de la viscosité moléculaire à mesure que le forçage augmente.

Les seules expériences de rotation différentielle réalisées sous le seuil sont celles à $Ro_d = -0.03$. Malgré la présence du vent zonal, on inverse, toujours d'après la phase,

¹En pratique la présence des ondes de Rossby amène une fluctuation de vitesse supérieure ($\approx 10 \text{ mm.s}^{-1}$), néanmoins un filtrage permet de diminuer une partie de ces fluctuations. Des tests de sensibilité et de fiabilité des inversions ont été réalisés et sont présentés dans l'annexe B.2

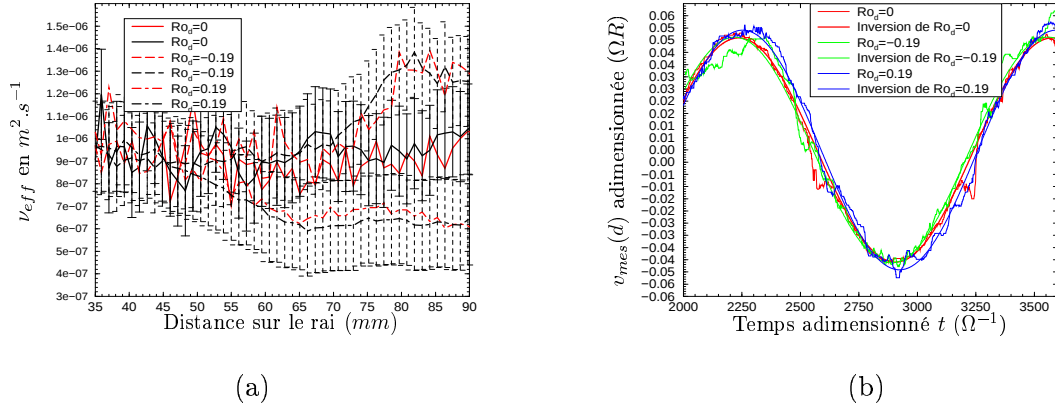


FIG. 5.12 – Paramètres communs ($\Omega = 13.4 \text{ rad.s}^{-1}$ et $Ro = 0.14$). (a) Viscosité inversée d'après la phase. (b) Visualisation des vitesses mesurées à la profondeur $d = 83 \text{ mm}$

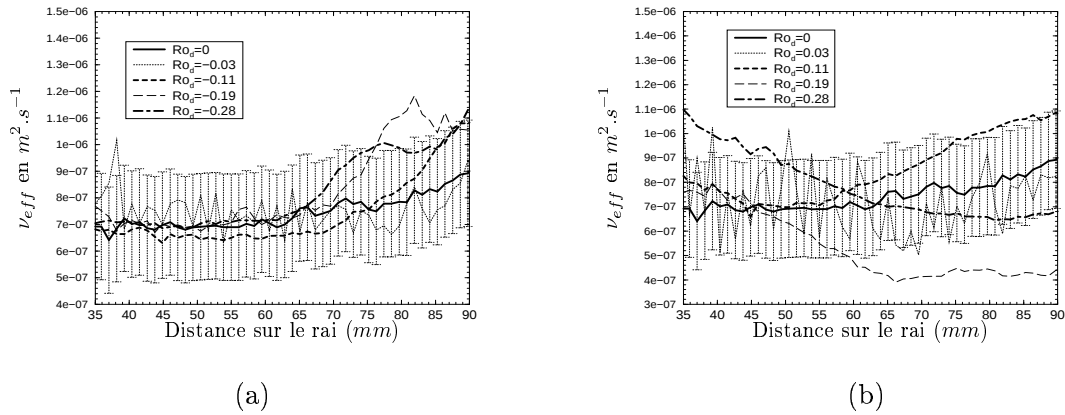


FIG. 5.13 – Inversions de la viscosité d'après la phase du signal. (a) Expériences rétrogrades. La série des traits fins, correspond à des expériences qui ont eu lieu à une température ambiante plus faible, aussi pour corriger cet effet j'ai diminué artificiellement sur la courbe la viscosité de ces expériences de $(2.10^{-7} \text{ m}^2.s^{-1})$; Le but ici est de pouvoir graphiquement les comparer aux autres expériences. (b) Expériences réalisées en rotation prograde.

Forçage	Ro_d	$\frac{Ro_d}{Ro_c}$	ν_{eff} (hors zone de variation)	Valeur maximum de ν_{eff}/ν_{ref}	Zone de variation
$f_f = 0.01$ s^{-1}	0	--	0.75	1.07	--
	-0.03	0.6	1	1	--
	-0.11	2.2	0.7	1.35	75 mm
	-0.19	3.7	0.95	1.37	70 mm
	-0.28	5.5	1	1.33	70 mm
	-0.37	7.25	0.9	1	--
	0.03	1.8	1	1.05	--
	0.11	6.5	0.7	1.42	55 mm
	0.19	11.2	0.95	0.63	45 mm
	0.28	16.5	0.95	0.63	48 mm
$f_f = 0.005$ s^{-1}	0	--	0.75	1	--
	-0.03	0.6	1	1	--
	-0.11	2.2	0.85	1.5	72 mm
	-0.19	3.7	0.95	1.3	68 mm
	-0.28	5.5	0.95	1.3	61 mm
	0.03	1.8	0.9	~ 1	--
	0.11	6.5	0.95	~ 1	--
	0.19	11.2	1	~ 1	--
	0.28	17.5	0.8	~ 1	--

TAB. 5.1 – Caractéristiques de quelques expériences oscillantes réalisées. Le nombre de Rossby critique vient des études expérimentales du seuil faites par Nathanaël Schaeffer. Pour ce nombre d'Ekman, $Ro_c(\text{rétrograde}) = -0.051$ et $Ro_c(\text{prograde}) = 0.017$. Dans le tableau ν_{eff} est inversée d'après la phase du signal. La précision sur sa valeur est de $\pm 0.15 \cdot 10^{-6} m^2 \cdot s^{-1}$. Nous désignons zone de variation la zone de fluide où nous visualisons un écart significatif de viscosité apparente entre les expériences avec et sans rotation différentielle. Pour certaines expériences cette zone n'est pas présente (—), pour d'autres on observe un épaississement de la zone corrélable à l'augmentation du forçage

une viscosité sensiblement égale à la viscosité inversée pour les expériences sans rotation différentielle (figure 5.13(a)).

Les expériences rétrogrades sont plus robustes que les progrades. Les tendances d'augmentation de la viscosité en fonction du forçage apparaissent très clairement dans le cas rétrograde (figure 5.13(a)).

Certaines expériences progrades (celles à $Ro_d = 0.11$ et $Ro_d = 0.28$), n'amènent pas aux mêmes inversions pour des expériences réalisées dans des conditions pourtant identiques. Nous avons donc choisi de conserver et de présenter uniquement celles qui présentaient la fonction coût la plus faible (figure 5.13(b)). La tendance observée va vers une diminution de la viscosité quand le forçage augmente. La zone de variation de la viscosité apparente est plus large par rapport aux expériences similaires réalisées en rétrograde. Néanmoins, cette diminution n'est pas toujours vérifiée notamment pour les faibles forçages.

On observe une certaine corrélation spatiale entre l'augmentation de la zone de varia-

tion de la viscosité apparente et un élargissement de la zone de cisaillement que nous avons mis en évidence dans un paragraphe précédent (figure 5.5 du paragraphe 5.2.4).

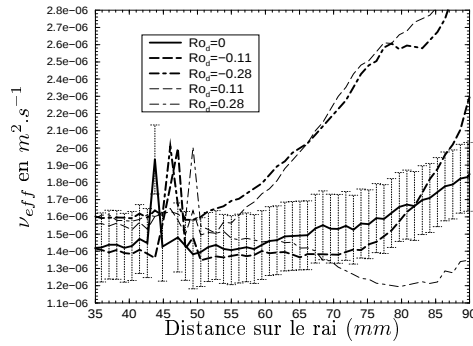


FIG. 5.14 – Inversions de la viscosité d'après l'amplitude du signal. Seules les expériences à $Ro_d = 0, 0.11, 0.28$ ont pu être analysées. Les pics observés ne sont pas représentatifs et ne doivent pas être pris en compte. Ils correspondent à une saturation du signal Doppler observée sur cette journée d'expériences.

L'information sur la viscosité recueillie d'après l'amplitude ne présente pas de tendance claire. Elle est de plus, pour certaines expériences, contradictoire avec les inversions réalisées à partir de la phase (figure 5.14). L'inversion à partir de l'amplitude fournit de plus des valeurs de viscosité plus fortes que celles attendues. Ainsi pour chaque journée d'expériences, on estime la différence entre viscosité inversée d'après la phase et viscosité inversée d'après l'amplitude à plus de 50 %. Cependant cet écart systématique peut être corrigé en prenant un angle de tir de 20° lors de l'inversion (voir annexe B.2.5). Pour cette première série d'expériences réalisées à $f_f = 0.01 \text{ s}^{-1}$, la différence observable sur les signaux de vitesse reste relativement faible même pour des écarts de viscosité allant jusqu'à 30 % (figure 5.12 (b)).

Séries d'expériences à $f_f = 0.005 \text{ s}^{-1}$

Les résultats obtenus à partir des expériences réalisées à $P_f = 200$ secondes sont cohérents avec les résultats précédents. La reproductibilité est excellente autant sur la phase que sur l'amplitude (figure 5.15) pour des expériences réalisées le même jour. Pour les expériences rétrogrades, l'augmentation de la viscosité apparente est validée par la phase et par l'amplitude (figure 5.15). On observe plus clairement encore la progression dans l'intérieur du fluide de la zone de forte variation de viscosité à mesure que le forçage augmente (figures 5.16).

Pour les expériences progrades, la tendance d'une diminution de viscosité quand le forçage augmente n'est encore une fois pas systématique. A partir de l'amplitude, la diminution est bien visible (figure 5.17 (b)) par contre à partir de la phase, ce n'est déjà

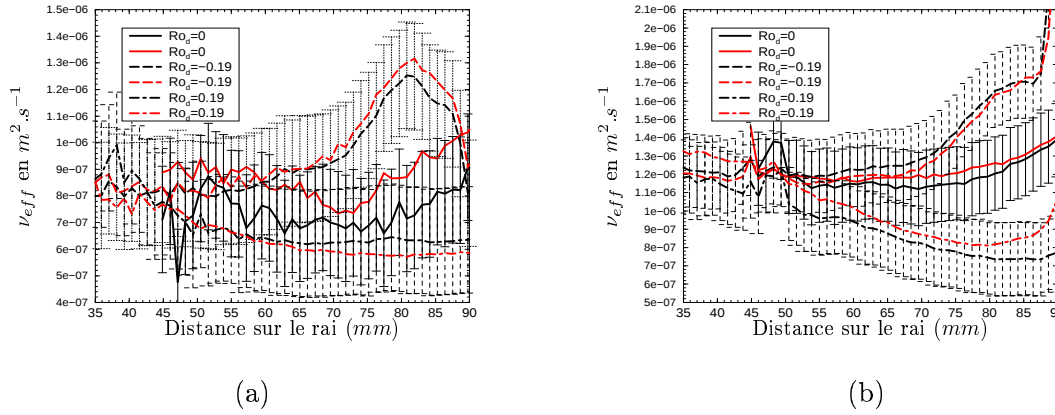


FIG. 5.15 – (a) Viscosité inversée d'après la phase.(b) Viscosité inversée d'après l'amplitude.

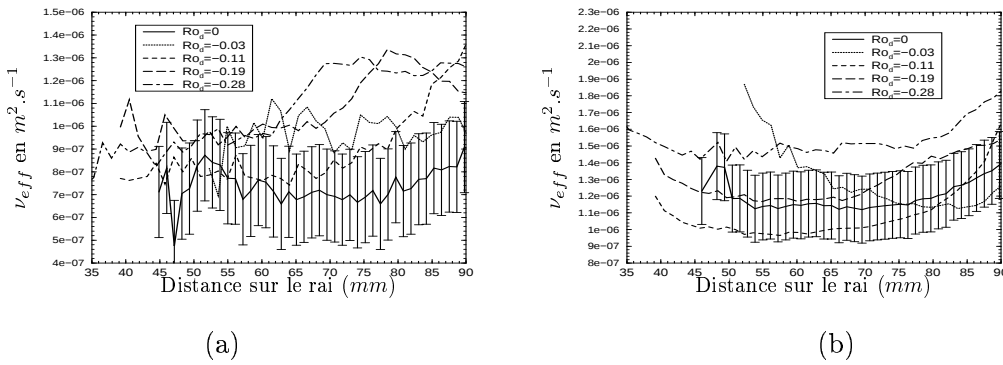


FIG. 5.16 – Comparaison des différentes expériences retrogrades. L'expérience de référence ($Ro_d = 0$) n'a pas été réalisé le même jour. (a) Viscosités inversées d'après la phase.(b) Viscosités inversées d'après l'amplitude.

plus le cas (figure 5.17 (a)) . Cette série d'expérience serait éventuellement à reprendre. Les vitesses mesurées correspondant aux différences maximum de 30 % de viscosité sont présentées à la figure 5.15. Pour cette fréquence, un écart de 30 % est plus facilement identifiable sur le signal de vitesse. Ceci confère une meilleure confiance en la mesure et en son inversion.

5.5.2 Discussion

Le protocole oscillant permet de mesurer la viscosité moléculaire du fluide pour des expériences sans rotation différentielle. La correction de l'angle α (voir annexe B.2.5) permet de recouper quantitativement l'information fournie par la phase avec celle fournie par l'amplitude. Néanmoins lorsqu'un désaccord existe, l'information recueillie d'après la phase doit être privilégiée car celle-ci est plus fiable et plus robuste. Une certaine

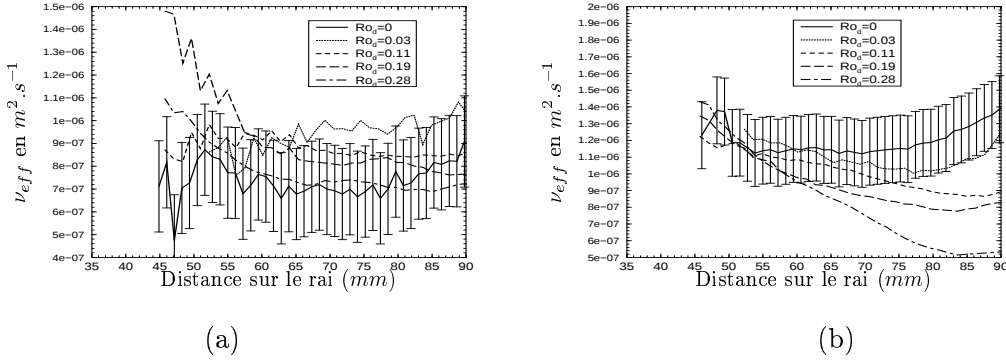


FIG. 5.17 – Comparaison des expériences progrades (a) Viscosité inversées d'après la phase.(b) Viscosité inversées d'après l'amplitude.

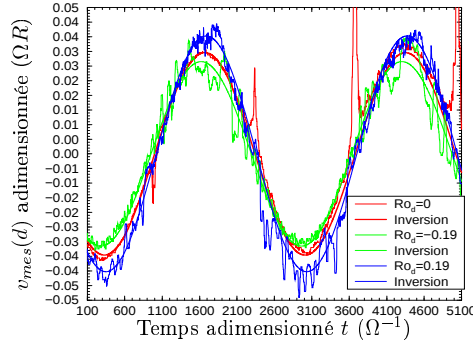


FIG. 5.18 – Visualisation des vitesses mesurées à la profondeur $d = 83 \text{ mm}$.

modification de la viscosité apparente a été observée pour les expériences de rotation différentielle réalisées au dessus du seuil de stabilité. Est ce que cette modification peut être attribuée entièrement à une efficacité du transport turbulent ? Voyons quels sont les divers arguments pouvant expliquer ce phénomène.

Nous pouvons avancer quelques arguments qui permettent de mettre en lien ces mesures avec l'état de turbulence. Tout d'abord la modification de la viscosité ne peut être directement attribuée à la présence du vent zonal puisque la viscosité inversée pour des expériences en rotation différentielle sous le seuil d'instabilité ne diffère pas de la viscosité inversée à partir des expériences sans rotation différentielle. Par contre, pour des expériences effectuées au delà du seuil, la viscosité apparente est systématiquement modifiée.

Ensuite, l'écart de viscosité dans la zone de cisaillement augmente globalement avec l'écart au seuil. Cette écart au seuil pouvant être relié avec l'intensité de la turbulence, on peut mettre en vis-à-vis la modification de la viscosité avec l'efficacité du mélange turbulent.

La zone de modification de la viscosité augmente également avec l'écart au seuil, ceci

peut être en lien avec l'augmentation de la zone de cisaillement. En regardant les diagrammes spatio-temporels des états turbulents (figures 5.7), on voit que cette zone de cisaillement correspond à la zone où les amplitudes des ondes de Rossby sont les plus fortes.

Enfin, la relative stabilité des structures dans les expériences rétrogrades peut être corrélée à la reproductibilité des mesures faites. Dans le cas prograde, comme déjà vu à la figure 5.7 d, les crêtes des ondes ne sont pas identiques, on peut alors distinguer des structures dominantes par rapport à d'autres. Il est possible que ces structures dominantes n'apparaissent pas systématiquement. Ceci pourrait constituer une première explication au fait que les mesures progrades soient relativement moins stables. A travers cette explication, on pourrait relier encore une fois cette mesure de viscosité apparente au transport engendré par les tourbillons.

Une dernière interprétation repose sur la différence observée entre les vents zonaux progrades et rétrogrades. Dans ces régimes non-linéaires, alors que l'intensité du vent prograde reste similaire à celle simulée pour des régimes sous critiques (figure 5.6), les effets non linéaires semblent accroître au contraire le vent zonal des expériences rétrogrades. Nous savons par ailleurs que la propagation des ondes vu du référentiel fluide¹ est rétrograde. La vitesse de phase au seuil peut être estimée de la manière suivante. En estimant que Ω_Φ (vitesse angulaire de phase) est de l'ordre de $\frac{\omega_c}{m_c}$ où ω_c est la pulsation critique et m_c le nombre d'onde azimutal, on peut grâce aux valeurs numériques de ω_c et m_c fournies par [Schaeffer & Cardin, 2005] déterminer Ω_Φ . Celle-ci est de 0.2 rad.s^{-1} pour les expériences progrades et trois fois plus faible pour les expériences rétrogrades réalisées. Dans la zone de cisaillement ($d = 75 \text{ mm}$), ceci correspond à des vitesses de propagation de l'ordre de 25 mm.s^{-1} pour les expériences progrades et $8 - 10 \text{ mm.s}^{-1}$ pour les rétrogrades. En ayant conscience de ces propagations, concentrons nous tout d'abord sur l'interprétation des expériences rétrogrades.

Nous partons de l'hypothèse que même au delà du seuil, la vitesse de phase reste de l'ordre de 10 mm.s^{-1} dans le référentiel fluide. Au delà du seuil, le vent zonal mesuré est de 10 à 15 mm.s^{-1} plus intense que celui prédit par la théorie linéaire pour les nombres de Rossby considérés (figure 5.6). Ainsi on peut s'attendre à ce que les particules de fluides soient finalement en phase avec l'onde. En d'autre termes, dans le nouveau référentiel fluide surcritique que nous définissons par analogie avec le précédent, l'onde est quasiment stationnaire dans la zone de cisaillement. Ainsi une particule présente dans cette zone pourra être efficacement aspirée par le tourbillon qui l'entoure. Les échanges entre la paroi et le fluide s'en trouveront améliorés.

Prenons maintenant le cas des expériences progrades en imaginant un scénario analogue. Au delà du seuil, le vent zonal prograde mesuré est similaire à celui attendu au seuil. La vitesse de propagation des ondes reste de 25 mm.s^{-1} dans le nouveau référentiel fluide qui n'est pas différent de celui au seuil. Une particule de fluide sera alors alternativement aspirer par des cyclones puis par des anticyclones qui transitent en sa position initiale. Elle oscillera alors autour d'une position sans créer d'échanges avec les parois.

Ce mécanisme permettrait d'expliquer la différence observée dans la zone de cisaille-

¹Ce référentiel est défini comme étant celui du vent zonal moyen au seuil.

ment entre les expériences progrades et les expériences rétrogrades et ce, par la présence des petites échelles. Pour la zone non cisailée, souvenons nous que la pulsation de ces ondes augmente avec l'effet de la pente. Ainsi les vitesses de phase et de groupe seront très différentes et les ondes de Rossby étant moins intenses, on peut comprendre que le phénomène de pompage alternatif deviennent neutre vis-à-vis du transport.

Certains des arguments avancés précédemment peuvent aussi présenter des aspects qui vont à l'encontre de l'idée d'une évaluation du mélange à travers cette inversion de viscosité apparente. Il y a particulièrement deux considérations pouvant faire défaut. La première repose sur les aspects théoriques : quels sont les mouvements non modélisés autres que les tourbillons de petites échelles qui pourraient contribuer à une augmentation ou à une diminution du pompage ? D'autre part, quels sont les mouvements incompatibles avec les hypothèses émises pour construire la théorie spin-up/oscillante ? La deuxième considération repose sur les aspects techniques : quels peuvent être les biais du dispositif qui se révèlent principalement pendant les expériences à fort taux de rotation différentielle ? Quels sont les biais liés à l'utilisation de la méthode d'inversion pour les expériences en régime turbulent ?

Le premier argument qui limite la corrélation entre ces mesures et l'état de turbulence, réside dans le fait que la modification de viscosité n'apparaît pas dans l'ensemble du volume. Les structures tourbillonnaires sont certes plus présentes dans la zone de cisaillement, mais elles s'étendent jusqu'aux extrémités de la sphère. Cependant l'amplitude des vitesses des tourbillons décroît très fortement entre la zone de cisaillement et le bord.

Si la modification de viscosité n'était imputable qu'à la présence des tourbillons, alors l'effet du pompage devrait être visible sur l'ensemble du volume extérieur au cylindre tangent comme cela semble être le cas pour les expériences de convection en eau. Les nombres de Reynolds associés aux expériences de rotations différentielles réalisées dans cette étude sont de l'ordre de 1000 comme le montrent les résultats numériques de [Schaeffer & Cardin, 2005]. Par rapport à la convection thermique en eau, nous sommes donc à des régimes plus turbulents. L'effet de viscosité apparente devrait dès lors être au moins aussi intense.

La corrélation entre la modification de viscosité et le vent zonal mesuré amène également des arguments contre l'hypothèse d'une explication du phénomène par le mélange opéré par les structures tourbillonnaires.

Le premier contre argument vient de l'analyse des biais relatifs à la méthode d'inversion utilisée en présence de fort cisaillement. Cette méthode d'inversion repose sur une estimation correcte du vent zonal. Si le signal à inverser présente une moyenne non nulle, alors l'inversion de l'amplitude amènera systématiquement à des viscosités plus fortes. Je n'ai pas d'analyse quantitative de l'influence d'une telle erreur sur l'inversion de la phase qui se fait en parallèle, mais il pourrait être intéressant de chercher à évaluer cet effet. En revanche je ne vois pas de défauts dans l'inversion qui amènerait à des viscosités amoindries. Un deuxième biais qui perturberait l'inversion serait la transformation du signal théoriquement périodique en signal apériodique par la présence de ce vent. L'advection des ondes est différente entre les phases de spin-up et celles de spin-down, si bien qu'un signal harmonique peut devenir difficilement inversable. Néanmoins ces

contre arguments techniques ne peuvent expliquer que certaines tendances prises indépendamment les unes des autres. Ils n'expliquent en aucun cas l'ensemble des résultats. Un autre contre argument plus solide, toujours en lien avec le vent zonal, vient de l'aspect dynamique. Les épaississements de la zone de cisaillement observés en expériences rétrogrades comme progrades voient leur origine dans des effets non-linéaires que nous n'avons pas modélisé dans notre problème théorique. L'augmentation du vent zonal rétrograde est aussi une résultante de ces effets. Est-il dès lors légitime de considérer que ces mouvements n'intéragissent pas de manière non linéaire avec la perturbation harmonique imposée ? Dans le cas où il y aurait interactions, alors nos mesures de viscosité apparente refléteraient principalement le couplage entre le vent zonal d'origine non-linéaire et le pompage induit par le mouvement oscillant et non pas le transport assuré par les petites échelles. La création d'un mouvement moyen non-linéaire, rétrograde ou prograde, pourrait alors avoir un effet inverse sur la viscosité apparente mesurée.

Les deux derniers aspects pouvant remettre en cause les liens directs entre nos inversions et la turbulence en volume sont basés sur des aspects généraux de l'écoulement que nous n'avons également pas modélisés. Tout d'abord, il y a la présence de cette couche interne à la couche de Stewartson. En régime laminaire, il est établi que le pompage associé à ces deux couches s'effectue en boucle sur le cylindre tangent. Pour des régimes au-delà du seuil nous ne connaissons pas très bien l'impact de cette recirculation interne sur l'écoulement. Il n'est pas dit que son influence soit limitée uniquement au cylindre tangent. L'épaississement de la couche de Stewartson associé à la turbulence pourrait être une conséquence d'échanges entre la couche interne et le fluide extérieur au cylindre tangent. Rappelons que l'écoulement de cette couche interne ne respecte pas la contrainte de Proudman-Taylor. La contribution de cette couche devenant importante pour la recirculation dans le volume, la théorie du spin-up (ou sa variante oscillante) pourrait alors être brisée localement.

Enfin la présence d'une recirculation externe prograde, mise en évidence sur la figure 5.5 (gauche), apporte une dissymétrie entre les expériences progrades et rétrogrades, dissymétrie probablement d'origine non-linéaire également. Là encore cet écoulement moyen peut éventuellement interagir non-linéairement avec la perturbation harmonique.

5.6 Conclusions et comparaisons avec la convection thermique

Les expériences réalisées sur DTeau ont permis d'éclairer d'un nouveau regard le problème de viscosité apparente dans les fluides en rotation. L'augmentation de la viscosité pour les expériences rétrogrades ainsi que sa diminution pour les expériences progrades constituent des résultats délicats à interpréter. S'agit-il d'une contribution des petites échelles qui, par un principe ondulatoire inverse, améliore le transport de quantité de mouvement pour les expériences rétrogrades et le diminue pour les progrades ? S'agit-il au contraire du résultat net des interactions non-linéaires entre la perturbation imposée et les mouvements moyens créés par effets non-linéaires ?

Si l'hypothèse retenue est cette deuxième solution alors les valeurs de viscosité inversées,

refléteraient la présence et l'action des mouvements moyens non-modélisés en amont. Avec cette interprétation, on pointe le fait que la manière dont nous introduisons de la turbulence dans le système à un certain impact sur la mesure de viscosité apparente. En effet, le forçage différentiel qui participe au développement des ondes de Rossby, repose sur des échanges de quantité de mouvement entre la paroi et le fluide. En régime turbulent, l'épaississement de la zone cisailée et la forte intensité du vent zonal créent leurs propres pompes. Dès lors la mesure de viscosité apparente dans cette zone ne peut être dissociée des structures de grandes échelles et donc du mécanisme de forçage. Il est possible qu'une partie de la valeur de la viscosité apparente soit attribuable à la petite échelle. Néanmoins aucune réelle modification n'étant observée par ailleurs, on peut en conclure que la part des petites échelles reste faible.

Il devient alors intéressant de mettre en vis-à-vis les expériences de convection thermique en eau avec ces nouvelles expériences. Est ce que notre première interprétation des expériences convectives qui consistait à mettre en parallèle la turbulence en volume avec l'augmentation de la viscosité apparente, est mis à mal par ce nouveau résultat ? Quels est l'importance des mouvements non linéaires à l'échelle globale dans l'expérience de convection thermique ?

[Gillet, 2004] relate la présence de jet multiples pour les régimes en eau que nous avons étudiés. L'intensité de ces vents équatoriaux reste faible par rapport à ceux de l'expérience DTeau. Aussi, leur alternance de sens, nous fait conclure à une contribution nette dans les échanges de quantité de mouvement avec la paroi probablement faible de la part de ces grandes structures. Par contre à proximité du manchon interne, il existe un vent rétrograde fort dont l'interaction avec la recirculation engendrée par le spin-up pourrait expliquer une partie de la viscosité apparente inversée entre 60 et 80 *mm* de distance à la sonde.

Dès lors pourquoi dans les expériences de convection thermique, les structures convectives participent à l'amélioration du transport alors que dans l'expérience DTeau, celles-ci ne sont pas actives sur l'ensemble du volume ?

La réponse à cette question peut provenir en partie de la première interprétation des expériences DTeau qui se base sur l'explication de la modification de viscosité par le caractère ondulatoire de la turbulence. Pour les expériences de convection thermique, les structures tourbillonnaires présentes sous forme d'ondes de Rossby thermiques ont des vitesses de propagation beaucoup plus faibles. Elles constituent ainsi des 'ascenseurs' efficaces pour le fluide. On peut grâce à cette interprétation opposer les deux dispositifs non plus en terme de forçage thermique et mécanique mais en terme de caractérisation de la turbulence engendrée. L'expérience de convection thermique amène une turbulence active d'un point de vue du transport de quantité de mouvement, alors que l'expérience DTeau produit une petite échelle passive vis-à-vis des échanges de quantité de mouvement avec la paroi.

Au regard de cette première comparaison entre les résultats issus de deux dispositifs différents, on pointe d'ores et déjà le fait que le phénomène de viscosité apparente dans les fluides en rotation rapide n'a pas le caractère universel qu'on espérait lui trouver à l'origine. Nos premières interprétations penchent vers une forte influence de l'origine de la turbulence sur les mesures effectuées. Dans ce contexte, les lois d'échelles comme celles que nous avons formulées au chapitre 4 doivent être maniées avec précaution.

Nos premières interprétations sont qualitatives et demanderaient un meilleur support quantitatif pour être validées. La reproduction de ses expériences par voie numérique pourrait amener à une meilleure compréhension du problème. Elle permettrait également d'isoler les contributions des mouvements moyens non-linéaires, des structures de petites échelles voir même de l'éventuelle déstabilisation des couches limites dans la modification de la viscosité apparente. Cette distinction est en effet difficile à percevoir par nos simples expériences.

Pour terminer l'étude expérimentale, voyons maintenant un dernier dispositif qui permet d'étudier le transport turbulent dans le cadre de la géométrie cylindrique.

Chapitre 6

Expériences en géométrie cylindrique

Ces expériences complètent l'étude faite en géométrie sphérique. Les expériences ont été réalisées au département de physique de l'université d'Oxford (Atmospheric, Oceanic and Planetary Physics department), sous la direction de Pr. P.L. Read. Il s'agit d'une expérience de convection thermique dans un cylindre en rotation. La convection s'opère entre une plaque chauffée, constituant le fond du récipient, et une plaque froide maintenue par un bain thermostatée à son sommet. Les parois latérales sont en plexi-glass et constituent ainsi un isolant thermique relativement efficace. Cette expérience réalisée en eau permet d'isoler l'influence de la pente (effet β) en comparant l'ensemble des résultats obtenus sur les expériences en géométrie sphérique avec ces nouvelles expériences.

6.1 Convection thermique dans un cylindre en rotation

6.1.1 Caractéristiques générales de l'écoulement

Les nombres caractéristiques de ce problème sont similaires à ceux rencontrés dans le problème de convection thermique en géométrie sphérique, moyennant quelques subtilités. Ainsi nous définirons le nombre d'Ekman à partir de la demi-hauteur $L = H/2$, $E = \frac{\nu}{\Omega L^2}$ et le nombre de Rayleigh comme $Ra = \frac{\alpha g \Delta T H^3}{\kappa \nu}$. Pour des valeurs de ΔT excédant la valeur critique ΔT_c , la couche de fluide située à proximité de la source chaude devient instable, et la convection démarre. La chaleur est alors advectée et non plus uniquement diffusée par conduction dans le fluide comme c'est le cas pour des différences de température inférieures à la valeur critique. [Vorobieff & Ecke, 2002] définissent le nombre de Rossby convectif $Ro_{cv} = \frac{\sqrt{g \alpha \Delta T / H}}{2 \Omega}$, à l'aide duquel ils identifient différents régimes convectifs dans cette géométrie.

Pour ce dispositif les forces présentes sont principalement les forces d'Archimède, les forces de Coriolis et la gravité. Contrairement aux expériences réalisées précédemment,

ici les forces centrifuges sont négligeables devant la gravité terrestre. Aussi dans l'évaluation faite du nombre de Rayleigh nous prendrons $g = 9.8 \text{ m}^2.s^{-1}$.

Ce type de convection thermique a été étudiée historiquement d'abord de manière théorique par [Chandrasekhar, 1953]. Ont suivi des études expérimentales, notamment celles réalisées par [Nakagawa & Frenzen, 1955; Rossby, 1969]. Pour décrire les caractéristiques de l'écoulement, nous nous sommes très largement inspiré du livre de [Boubnov & Golitsyn, 1995] ainsi que de l'étude expérimentale présentée dans [Vorobieff & Ecke, 2002].

Vorobieff distingue deux régimes de convection développée. Le premier à $Ro_{cv} \gg 1$ est un régime où les forces de flottabilités dominent. Le second $Ro_{cv} \ll 1$ est un régime où l'influence de la rotation est forte. Pour ce deuxième cas, il observe des structures en colonnes se prolongeant des couches limites inférieures aux couches limites supérieures. Ces structures sont alignées avec l'axe de rotation (dominance de la contrainte de Proudman-Taylor) et sont organisées de manière régulière sur l'ensemble du volume. Pour des $Ro_{cv} \leq 0.2$, il observe un nombre de structures cycloniques et anticycloniques équivalent. Pour de plus grands nombres de Rossby, l'écoulement est dominé par des structures cycloniques puis pour des $Ro_{cv} \gg 1$ les traditionnels panaches thermiques de la convection classique de Rayleigh-Bénard font leur apparition.

Pour les expériences que nous réalisons, les Rossby maximum sont de 0.3 pour les expériences où $\Omega \geq 1 \text{ s}^{-1}$. Certaines expériences à $\Omega = 0.5 \text{ s}^{-1}$ sont réalisées dans une zone critique et seront donc analysées de manière indépendante.

6.1.2 Détermination du seuil de convection

La détermination du seuil faite par analyse linéaire [Chandrasekhar, 1953] amène une loi d'échelle du type $Ra_c = 8.7 E^{-4/3}$. Une étude menée par [Veronis, 1968] par une méthode d'amplitude finie amène à une loi d'échelle du type $Ra_c \propto P^2 E^{-1}$. Cette deuxième loi attire l'attention sur l'importance relative des couches limites thermiques et visqueuses, à travers la présence du nombre de Prandtl P .

Dans ce problème, les nombres sans dimension ne contraignent que partiellement le régime dynamique. Ainsi les conditions aux limites (flux de chaleur constant ou température constante) et la géométrie du récipient (caractérisé par le rapport d'aspect $\delta = \frac{R}{H}$) influencent également le seuil de convection. [Buell & Catton, 1983] montrent qu'avec des parois latérales isolantes thermiquement, le comportement du seuil évolue en E^{-1} . Ce résultat rend compte du rôle non neutre des parois latérales dans la dynamique du système. De manière expérimentale ils réalisent également une étude sur l'influence du rapport d'aspect. Pour un rapport d'aspect de 1, il trouve pour des nombres d'Ekman entre 10^{-1} et 10^{-6} , des seuils de convection légèrement plus faible que ceux déduits de la loi de Chandrasekhar. Les différentes lois expérimentales présentées dans [Boubnov & Golitsyn, 1995] suivent globalement bien la tendance $Ra_c \propto E^{-4/3}$ pour des $E \ll 10^{-2}$. N'ayant pas déterminé le seuil de convection expérimentalement, j'utiliserai cette loi pour évaluer les écarts au seuils dans les expériences, sachant que pour ce dispositif les valeurs déduites de cette loi constituent une surestimation du seuil.

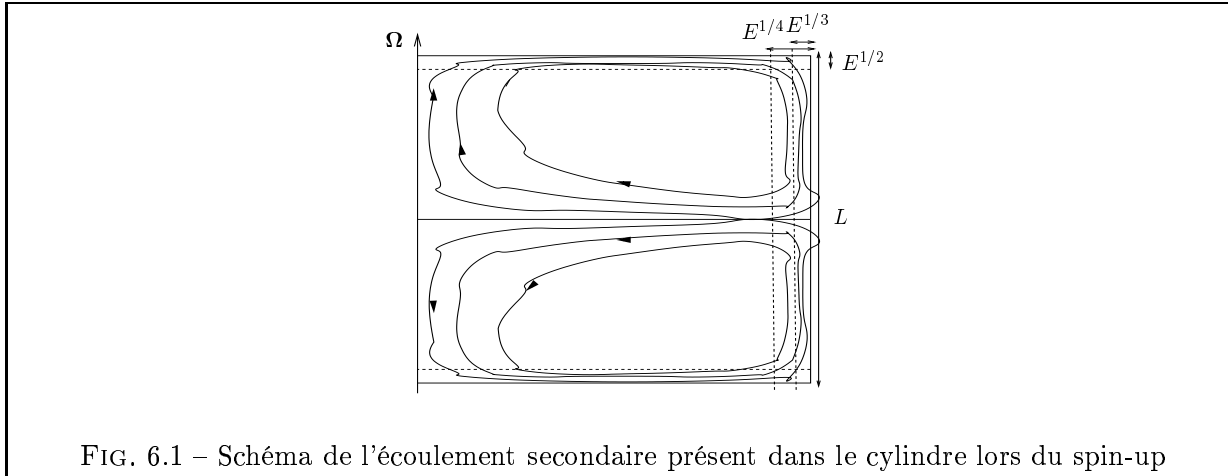
Dans ces expériences où la gravité terrestre domine, $Ra_c \propto \Omega^{4/3}$. Ainsi contrairement au dispositif de convection thermique en géométrie sphérique, pour lesquelles les forces centrifuges jouent un rôle fondamental, ici la rotation a tendance à faire augmenter le seuil de convection.

Ce dispositif n'a pas fait l'objet d'une étude systématique de l'état de turbulence comme cela a été le cas pour les dispositifs précédents [Aubert, 2001; Gillet, 2004; Schaeffer, 2004]. Nous n'avions donc ni étude numérique ni loi d'échelles à notre disposition, nous permettant d'évaluer les nombres de Reynolds locaux associés aux expériences. De manière approximative, en se basant sur les travaux numériques de [Julien *et al.*, 1996] qui évaluent $Nu \approx 4 \cdot 10^{-4} Ra^{2/3}$ et en utilisant une relation établie entre le nombre de Nusselt et le nombre de Reynolds basé sur les vitesses r.m.s horizontales d'expériences [Boubnov & Golitsyn, 1995], on obtient :

$$Re = 1.7 P(NuRa)^{1/2} E^{1/2} \quad \text{soit} \quad Re = 0.03 P Ra^{5/6} E^{1/2} \quad (6.1)$$

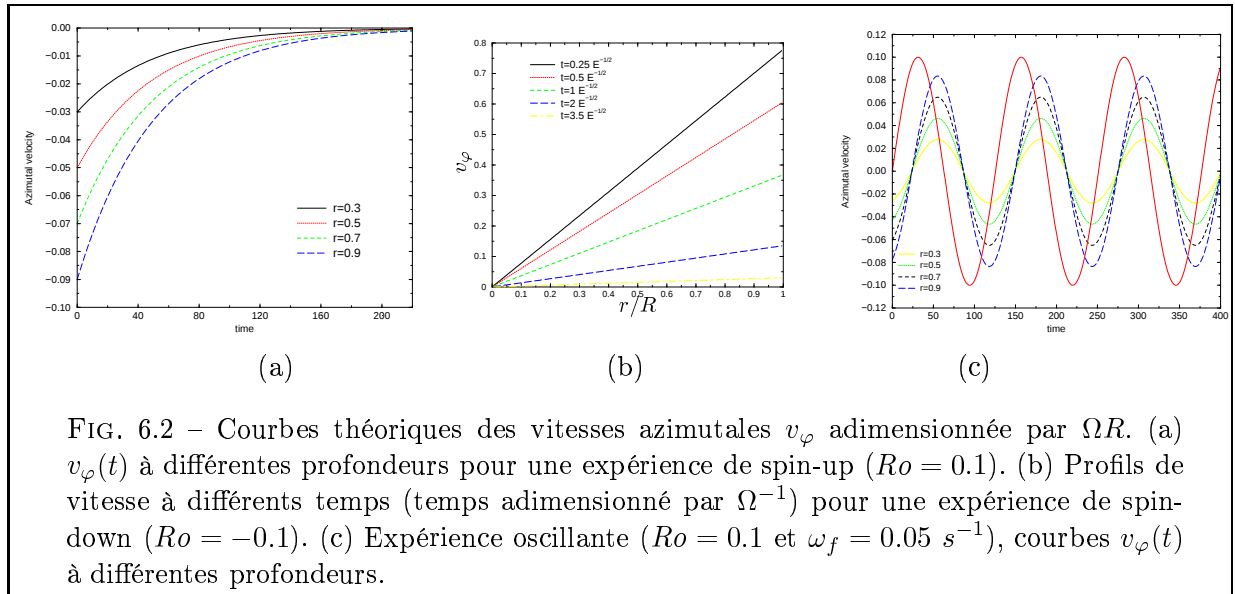
En prenant un $P = 7$, pour ces expériences réalisées en eau, on devrait obtenir approximativement des nombres de Reynolds entre 2000 et 5000 pour nos régimes convectifs. Cependant, expérimentalement nous n'observons pas distinctement les vitesses convectives lors du spin-up, qui génère des vitesses instantanées de l'ordre de $50 - 100 \text{ mm.s}^{-1}$. On peut ainsi considérer qu'au moins un ordre de grandeur sépare ces deux vitesses et que nos vitesses convectives ne sont jamais supérieures à $5 - 1 \text{ mm.s}^{-1}$. Cette estimation nous donnerait des nombres de Reynolds de l'ordre de 10^3 au mieux.

6.2 Les particularités de la géométrie cylindrique vis-à-vis de la théorie du Spin-Up



La particularité des expériences de spin-up en géométrie cylindrique réside dans la présence de parois parallèles à l'axe de rotation. L'équilibre des forces présent dans les

couches d'Ekman (forces de pressions, forces visqueuses et forces de Coriolis) ne peut être respecté pour la composante verticale de l'écoulement dans la couche parallèle. En effet les forces de Coriolis n'ont pas d'action sur les vitesses parallèles à l'axe de rotation. L'ajustement du fluide présent à l'intérieur du récipient aux deux conditions aux limites que sont la non pénétration ($u_r = 0$) et la continuité des vitesses ($u_\varphi = (\Omega + \Delta\Omega)R$) se fait alors par la présence d'une double couche de cisaillement connue sous le nom de couches de Stewartson [Greenspan, 1968; Benton & Clark, 1974]. Ces deux couches sont plus épaisses que la couche d'Ekman, la première se met à l'échelle $E^{1/4}$, la deuxième à l'échelle $E^{1/3}$ (figure 6.1). Pour une description qualitative de l'écoulement dans ces couches on pourra se référer à l'article de revue [Benton & Clark, 1974] sur le spin-up. Pour autant que ces couches présentent une dynamique particulière, leur présence ne change pas le temps caractéristique de spin-up qui reste à l'échelle $E^{1/2}$ pour le spin-up linéaire. Pour des nombres de Rossby $Ro = \frac{\Delta\Omega}{\Omega}$ supérieurs à 0.5, la couche de Stewartson en $E^{1/4}$ se détache de la paroi et converge lentement en direction de l'axe de rotation. [Venezian, 1970] étend la théorie de [Wedemeyer, 1964] et montre que ce front existe pour tous les nombres de Rossby positifs, mais que la vitesse de propagation du front tends vers zéro quand Ro devient infiniment petit. Le temps de spin-up reste inchangé par rapport au cas linéaire, mais la dynamique n'est pas aussi uniforme en espace. Aussi on distingue analytiquement l'écoulement de la zone amont de celui de la zone aval au front de propagation de la couche en $E^{1/4}$.



En repartant de l'équation 2.33, pour le spin-up linéaire, on obtient la vitesse dans le repère tournant à la vitesse Ω de la manière suivante :

$$v(r, t) = V_0(r)(1 - \exp(-\frac{t}{\tau})) = \Delta\Omega r(1 - \exp(-E^{1/2}\Omega t)) \quad (6.2)$$

Cette exponentielle décroissante fait apparaître un temps caractéristique proportionnel

à $E^{-1/2}$ qui contrairement à la géométrie sphérique est indépendant du rayon (figure 6.2 (a) et (b)). Ceci est une conséquence de la géométrie cylindrique.

Ce premier cas purement linéaire a été complété par l'étude d'un cas dit quasi-linéaire, pour le cas où $Ro = \Delta\Omega/\Omega \ll E^{1/4}$. Ces travaux ont été initiés par [Wedemeyer, 1964] puis complétés par [Weidman, 1976a], les articles de revue de ce sujet sont [Benton & Clark, 1974; Duck & Foster, 2001].

L'ensemble des expériences réalisées à Oxford sont dans ce régime. Aussi nous avons inversé ν dans un premier temps en utilisant la théorie linéaire et la théorie non linéaire pour arriver à deux conclusions : la viscosité inversée des expériences isothermes par la théorie quasi-linéaire est plus proche de la viscosité moléculaire estimée. La reproductibilité maximum est obtenue avec cette même théorie quasi-linéaire en définissant le nombre d'Ekman à partir de la vitesse initiale de rotation : Ω^1 . L'expression utilisée est celle correspondante à la variation de vitesse azimuthale en amont du front de propagation de la couche parallèle, dans le référentiel tournant à Ω :

$$v(r, t) = RoV_0(r) \frac{(1 - \exp(-\frac{t}{\tau}))}{(1 + Ro \exp(-\frac{t}{\tau}))} \quad (6.3)$$

L'équation du front d'onde [Weidman, 1976a] est défini par $r_0(t) = R \left(\frac{1 + \frac{\Delta\Omega}{\Omega} \exp(-\frac{t}{\tau})}{1 + \frac{\Delta\Omega}{\Omega}} \right)^{1/2}$. On remarque que pour des temps longs, le front atteint des rayons de l'ordre de $0.9R$ pour des expériences où le saut maximum de rotation est de 20%. Ainsi la zone d'inversion que nous considérons en utilisant cette formulation se limite théoriquement à $[0; 0.9R]$. Dans le référentiel lié à la rotation instantanée du cylindre, on obtient la formule de vitesse suivante :

$$v_{mes}(r, t) = -V_0(r) \frac{\exp(-\frac{t}{\tau})(1 + Ro)}{1 + Ro \exp(-\frac{t}{\tau})} \quad (6.4)$$

Dans le cas d'une frontière dont le mouvement est décrit par la formule $v_b(r, t) = \Delta\Omega r \sin(\omega_f t)$, l'expression du champ de vitesse est :

$$v(r, t) - v_b(r, t) = A(r) \sin(\omega_f t - \varphi) = -\frac{\Delta\Omega r \omega_f}{(E\Omega^2 + \omega_f^2)^{1/2}} \sin(\omega_f t - \arctan(-\frac{\omega_f}{E^{1/2}\Omega})) \quad (6.5)$$

Le déphasage est indépendant du rayon (figure 6.2 (c))

¹L'inversion est donc différente par rapport aux inversions des expériences en géométrie sphérique faites par rapport à Ω_{moy} .

6.3 Dispositif expérimental

6.3.1 Description

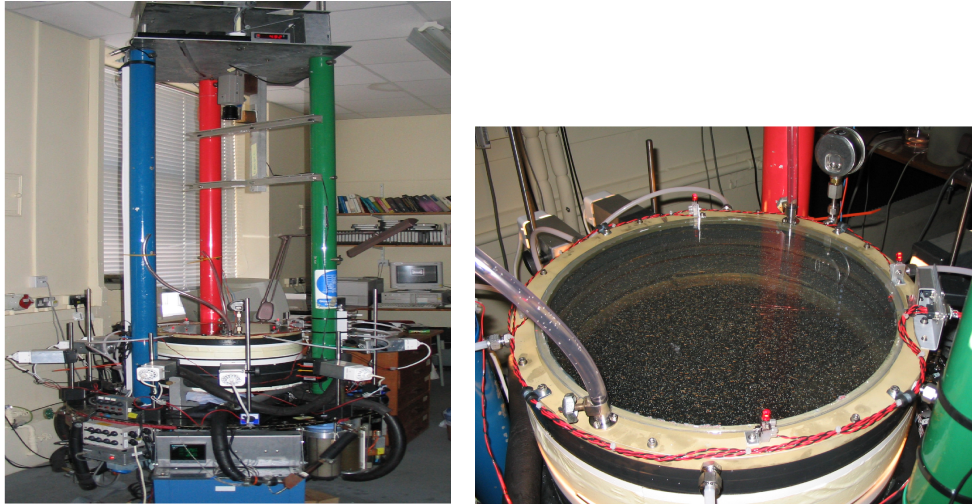


FIG. 6.3 – Dispositif expérimental utilisé. (a) Vue d'ensemble présentant les trois niveaux d'équipement (instrumentations lourdes sous la table, niveau du cylindre et de la caméra, collecteur électrique sur le haut). (b) Zoom sur la surface supérieure du cylindre où l'on peut visualiser les points de référence.

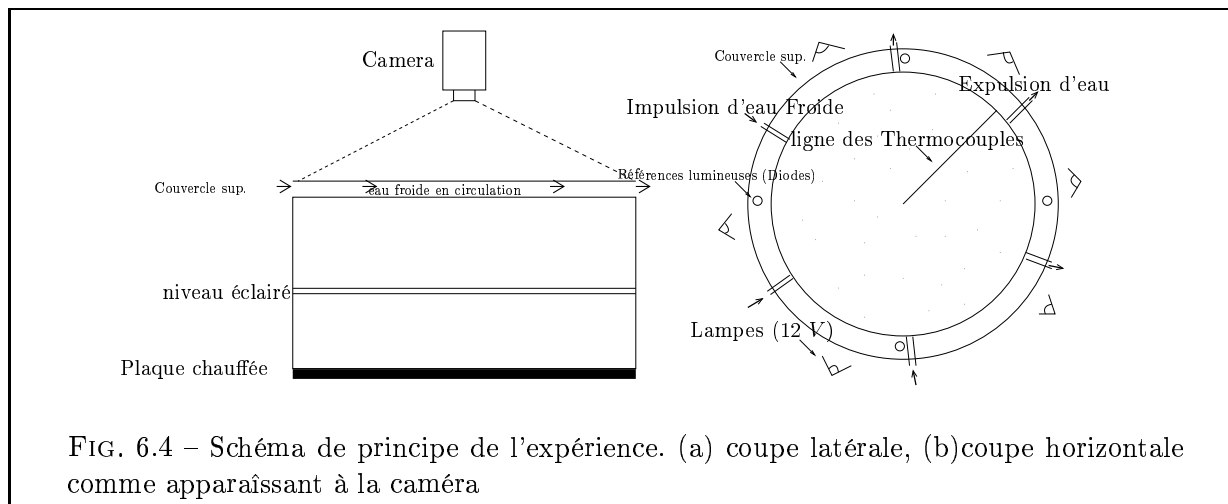
Le dispositif est composé d'une table tournante d'une vitesse maximum de 4 rad.s^{-1} (figure 6.3), la description par niveau de ce dispositif est le suivant :

Niveau inférieur : Ce niveau comporte tous les utilitaires qui vont servir aux systèmes de contrôle de température des frontières inférieures et supérieures de l'expérience. L'écoulement d'eau se fait par deux circuits indépendants comportant chacun une pompe d'une capacité maximale de 4 L.s^{-1} . Celle-ci est alimentée par un circuit thermostaté, contrôlé par le système Eurotherme 900 EPC, d'une précision de l'ordre de $0.5 \text{ }^{\circ}\text{C}$. Le tout est piloté par interface Labview.

Niveau intermédiaire : c'est celui de l'expérience proprement dite :

Le cylindre : d'une hauteur de 21 cm (± 0.3) et d'un diamètre de 40 cm (± 0.4), repose sur trois trépieds réglables en hauteur et dans le plan horizontal (figure 6.4).

Le cylindre est fait de plexiglas d'une épaisseur de 2.5 cm . Le fond du cylindre est une plaque de cuivre, chauffée par un système hydraulique, les mesures des températures de la plaque inférieure se font par l'intermédiaire de six thermocouples également répartis au fond de la plaque. La partie délicate à concevoir pour ce dispositif a été le couvercle supérieur (figures 6.3). En effet pour les mesures de vitesse souhaitées sur ce dispositif, utilisant une technique de visualisation de particules, il était impératif d'avoir un couvercle transparent et parfaitement plat. Pour cela, nous avons choisi de faire transiter un circuit d'eau froide, entre deux plaques de verre d'épaisseur respective 4 mm pour



celle du haut et 6 *mm* pour celle du bas. Le verre a été choisi pour sa forte conductivité thermique et son faible taux de dilatation. L'eau pénètre entre les deux plaques à travers trois entrées. L'amélioration du dispositif par rapport à celui initialement utilisé (vitres en plexiglass + circuit alimenté par un seul couple entrée/sortie) vise à favoriser la circulation de sorte à homogénéiser la température sur la surface du couvercle. La température de la plaque supérieure est également mesurée grâce à un réseau de thermocouples en contact avec le fluide étudié, ainsi qu'un thermocouple en contact avec le fluide du circuit de refroidissement permettant de vérifier la continuité des températures à travers le verre inférieur. Tous les thermocouples utilisés ont une précision évaluée à 0.4°C. A la périphérie du couvercle sont fixées quatre diodes lumineuses qui nous serviront de points de référence pour l'analyse des images de l'écoulement (figure 6.4 (b)).

L'éclairage : 6 à 9 lampes de 12 Watts permettent d'éclairer l'expérience selon une coupe horizontale. Le faisceau lumineux est focalisé grâce à des lentilles cylindriques (dimensions 25 *mm* * 50 *mm*), montées sur chaque lampe. Excepté pour la zone de mesure, les faces latérales du cylindre sont recouvertes d'un masque opaque, de sorte à ce que la lumière ne pénètre que sur une tranche lumineuse. L'épaisseur latérale de fluide éclairé est évaluée à 2.2 *cm* (± 0.3), et à une hauteur de 9.8 *cm* par rapport au fond du cylindre.

Niveau supérieur : Outre les différents systèmes d'alimentation des lampes et d'amplification des signaux provenant des thermocouples, le niveau supérieur soutient une caméra optique (marque COHU high performance CCD), reliée au collecteur, permettant une visualisation et un enregistrement en temps réel de l'écoulement.

Cette table est reliée à un moteur que l'on pilote par interface Labview, avec une précision supérieure à 0.01 *rad/s*.

La transmission du signal entre le repère tournant et le repère du laboratoire se fait par l'intermédiaire de deux collecteurs, le collecteur inférieur permet de piloter les différents outils de la table, le collecteur supérieur servant à recueillir les différentes mesures.

6.3.2 Le Traitement des données sur la vitesse

La technique de suivi de particules

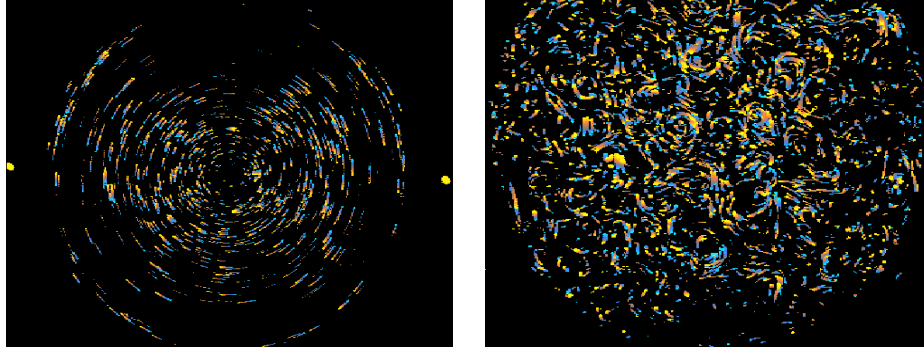


FIG. 6.5 – Image digitalisée de l'expérience de Spin-Up. Les diodes de références sont situées sur les extrémités du cylindre. A droite, on observe les cellules de convection visibles entre deux expériences.

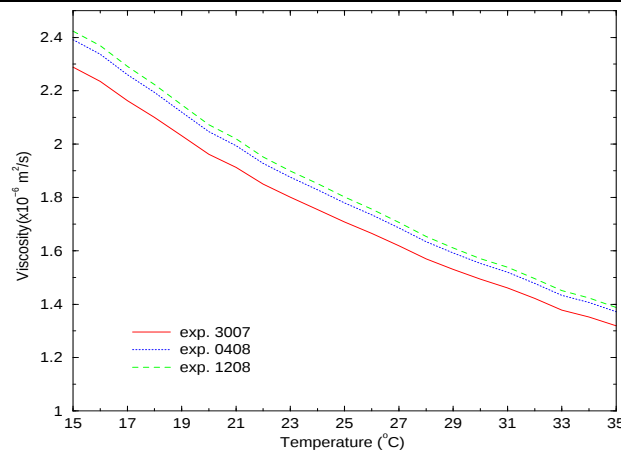


FIG. 6.6 – Extrapolation de la viscosité en fonction de la température pour différents mélanges de glycerol-eau. Ces courbes correspondent à différentes campagnes de mesures

La PTIV (Particules Tracking Image Velocimetry) disponible à Oxford a pour principe l'analyse du trajet de particules individuelles. Par rapport à des méthodes de PIV traditionnelles (Particle Image Velocimetry), qui consistent à corréler des parcelles d'images sur différents pas de temps, cette méthode a comme avantage, de pouvoir être utilisée avec une densité de particules plus faible, sans pour autant diminuer la résolution spatiale. Elle ne nécessite pas non plus l'utilisation d'une source lumineuse puissante et

ultrafocalisée ¹. Son principal inconvénient est la génération d'une grille irrégulière de vecteurs, basés sur le trajet de chaque particule. Les particules présentes à l'intérieur du fluide, doivent être de même densité. Afin de réaliser cette première condition, nous utilisons un mélange d'eau desionisée et de glycérol (24% en proportion), de sorte que la densité du fluide soit proche de 1.043 à 20 ° C. Avant toutes expériences, une mesure de la densité et de la température est effectuée afin de connaître l'état du fluide, et notamment la viscosité moléculaire, déduite par interpolation des données expérimentales de [Fowlis & Rossby, 1964] (figure 6.6). Au vu de la taille de notre expérience et de la résolution optique de la caméra, la taille optimum de particules à utiliser doit être comprise entre 400 et 800 μm , nous avons donc utilisé des particules de Piolite (billes de polystyrène) données pour une taille entre 715 et 800 μm .

Le logiciel Digimage

Durée de suivi	De 0.8 à 1.04 secondes
échantillonnage des images à capturer	0.08 secondes (minimum possible)
échantillonnage des champs de vitesse	De 0.6 à 1.2 secondes
période de mesure	De 4 à 10 minutes

TAB. 6.1 – Paramètres utilisés pour le traitement d'images

Ce logiciel développé à DAMTP (Department of Applied Mathematics and Theoretical Physics, Cambridge, UK), permet de suivre le trajet des particules en temps réel, à partir d'image SVHS vidéo. Ces images enregistrées et digitalisées, peuvent ensuite être analysées afin d'obtenir une mesure quantitative des vitesses des particules dont le trajet se situe dans le plan de vue de la camera. Pour cela, le logiciel doit tout d'abord digitaliser les images à analyser, localiser les particules sur chaque image, et enfin relier les bonnes particules d'une image à l'autre. De nombreux paramètres sont ajustés par l'utilisateur afin de correspondre au mieux à l'expérience réalisée. Les résultats optimaux des expériences de spin-up ont été obtenus avec les sets de paramètres donnés dans le tableau 6.1.

Au vu du caractère transitoire de notre écoulement, le temps de trajet permettant une évaluation de la vitesse a été fixé à un maximum de 1.2 secondes pour toutes nos expériences de spin-up/spin-down, temps sur lequel un minimum de 10 images était souhaitable, afin d'obtenir des données robustes de vitesse (trajets pris en compte pour un minimum de 5 images consécutives de la particule identifiée). L'échantillonnage quant à lui variait entre un champ de vitesse mesuré toutes les 0.8 à 1.4 secondes. Les autres paramètres relatifs à l'identification des particules tels que les facteurs de formes ou la luminosité, n'ont pas été changés par rapport aux valeurs données par défaut. Les éventuelles vibrations de la caméra dans le repère tournant sont également automatiquement corrigées, grâce à l'analyse des diodes de références.

¹la source lumineuse nécessaire est dans la plupart des cas un laser.

Pour une expérience de spin-up d'une durée de 5 minutes, nous obtenons jusqu'à 600 champs de vitesse qui résultent de l'analyse de 6000 images, sur lesquelles le logiciel identifie jusqu'à 2000 particules par image. Le volume des données à traiter ainsi que le temps d'analyse de ces données sont donc considérables, et ceci constitue la plus grande faiblesse du dispositif. En effet, il faut compter entre 6 et 24 heures de traitement pour obtenir des fichiers bruts d'une seule et même expérience. Pour l'utilisation que nous souhaitons faire du dispositif, celui-ci a été poussé à ses limites en terme de traitement des données de vitesse (résolution maximum en temps et en espace permises par le logiciel), et la durée du traitement a nécessité un choix restreint de dépouillement par rapport aux nombres d'expériences réalisées. (1 sur 6 en moyenne). Néanmoins, par comparaison aux expériences faites à Grenoble ¹ ([Brito *et al.*, 2004]), le dispositif d'Oxford a comme avantage de produire une visualisation bidimensionnelle de l'écoulement.

Visualisation et diagrammes spatio-temporels

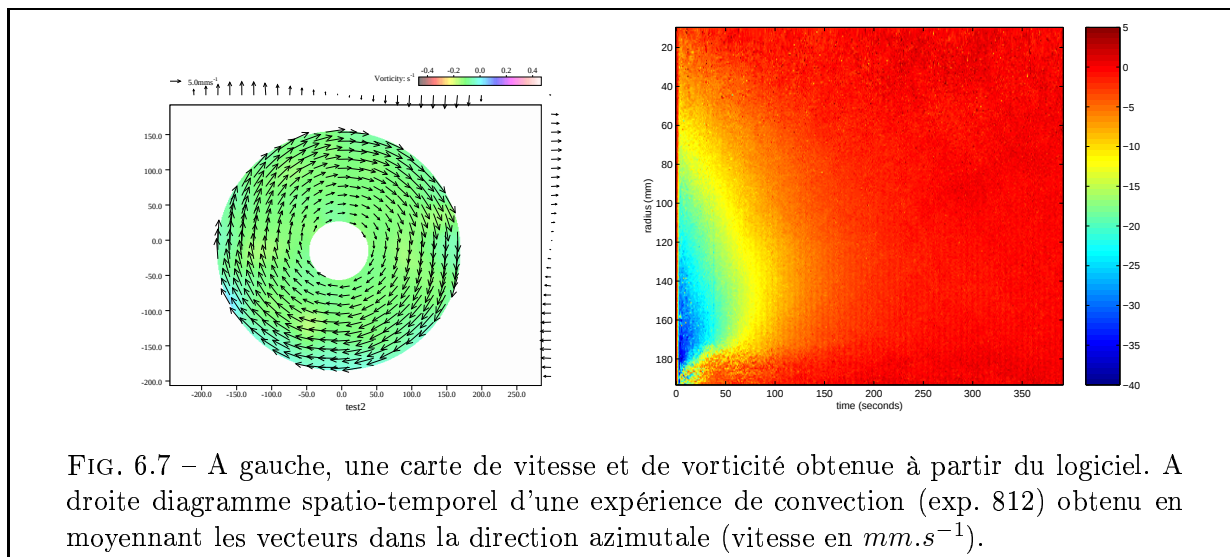


FIG. 6.7 – A gauche, une carte de vitesse et de vorticité obtenue à partir du logiciel. A droite diagramme spatio-temporel d'une expérience de convection (exp. 812) obtenu en moyennant les vecteurs dans la direction azimutale (vitesse en $mm.s^{-1}$).

Les fichiers de vitesse obtenus grâce au logiciel Digimage forment une grille irrégulière de vecteurs dans le plan de vision de la caméra (figure 6.7). Sur ce champ de vitesse brute, j'effectue un moyennage et un filtrage dans la direction azimutale, afin d'obtenir une grille régulière en rayon, de la vitesse azimutale. Les diagrammes spatio-temporels obtenus ainsi, nous présentent une vue d'ensemble de l'évolution de la synchronisation du fluide en fonction de la distance par rapport à la paroi (figure 6.7). Pour chaque rayon, une évolution temporelle de la vitesse théorique est comparée à celle mesurée ; De cette comparaison nous obtenons pour chaque profondeur une estimation du couple (V_0, τ) dans le cas du SU/SD, et $(A(r))$ dans le cas des expériences oscillantes².

¹La technique Doppler ne permet qu'une mesure selon l'axe du tir mais son avantage principal est d'obtenir des mesures quantitatives de la vitesse en temps réel.

²Aucune mesure de phase n'a été réalisée sur ce dispositif. Pour en avoir une, il aurait fallu relier la base de temps de la caméra de mesure avec le pilotage du moteur.

6.4 Les résultats

6.4.1 Les limitations du régime de paramètre et la fiabilité des mesures

Préambule

Cette sous partie a pour but de porter l'attention sur l'extrême nécessité de cadrer correctement le domaine d'étude afin de ne pas se perdre dans des interprétations de données non comparables. Les différents paramètres libres (E , Ra , ...) permettent une infinité de combinaisons et les différentes contraintes expérimentales et théoriques ne nous permettent d'observer qu'une petite portion de l'espace des paramètres. Il était sûrement ambitieux voir naïf de notre part de vouloir tirer, d'après les seuls résultats de [Brito *et al.*, 2004], une loi générale sur le transport de quantité de mouvement. Ceci reste le premier enseignement après analyse des expériences faites à Oxford.

Domaines d'étude favorables d'après la théorie

Au moins deux ingrédients sont nécessaires pour espérer faire une mesure franche et fiable de la viscosité apparente du système : être dans un régime de paramètres où il est possible de comparer expériences convectives et expériences isothermes et être dans un régime de paramètres où la précision de mesure de la viscosité apparente reste acceptable pour espérer une différenciation entre les deux catégories d'expérience.

1. Limitations théoriques obtenues par l'estimation du Ra de l'expérience

Le ΔT critique de ces expériences est déduit de la loi $Ra_c = 8.7E^{-4/3}$ [Chandrasekhar, 1953] comme déjà discuté au paragraphe 6.1.2. L'évaluation de Ra/Ra_c est donc approximative. Sous cette géométrie, la rotation est un effet stabilisateur de l'écoulement. Ainsi à ΔT fixé, la vigueur de la convection sera d'autant plus forte que le taux de rotation sera faible.

2. Limitations obtenues par l'analyse de la dépendance de $v_\varphi(r, t)$ vis-à-vis des paramètres.

Cas du spin-up, spin-down

Avec la méthode d'inversion que nous utilisons, on peut remarquer que la précision relative maximum pour la viscosité apparente est obtenue pour une forte rotation d'ensemble, un important saut de vitesse, (tout en restant dans la limite $\Delta\Omega \ll \Omega$), et pour de grandes distances par rapport à l'axe de rotation. Cela va nous donner un indice de confiance pour les résultats obtenus, selon le type d'expériences faites et l'endroit d'observation.

Cas des expériences oscillantes

L'assertion précédente reste vrai. A cela s'ajoute une contrainte supplémentaire

tx. de rotation	nbr. d'Ekman	nbr. de Rayleigh crit.	ΔT corresp.	Ra à ΔT_m
$\Omega \text{ (rad.s}^{-1}\text{)}$	$E = \frac{\nu}{\Omega L_h^2}$	$Ra_c = 8.7E^{-4/3}$	$\Delta T_c \text{ (}^\circ\text{C)}$	$Ra = \frac{\alpha g \Delta T L^3}{\kappa \nu}$
0.5	$4.5 * 10^{-5}$	$5.34 * 10^6$	0.08	$122Ra_c$
1	$2.3 * 10^{-5}$	$1.34 * 10^7$	0.2	$48Ra_c$
2	$1.1 * 10^{-5}$	$3.43 * 10^7$	0.5	$19Ra_c$
3	$7.6 * 10^{-6}$	$6 * 10^7$	0.9	$11Ra_c$
3.5	$6.5 * 10^{-6}$	$7.25 * 10^7$	1.12	$9Ra_c$

TAB. 6.2 – Tableau des régimes de convection accessibles avec ce dispositif

qui vient de l'expression de l'amplitude. Comme pour le cas de la géométrie sphérique, deux cas de figure se présentent : $\omega_f \ll E^{1/2}$ ou $E^{1/2} \ll \omega_f \ll 1$, le meilleur compromis pour nos expériences se situant entre les deux domaines.

3. Limitations théoriques (ou expérimentales) d'un point de vue thermique et dynamique

Cette dernière catégorie est le résultat des conclusion portant sur la différence des expériences en gallium et en eau en géométrie sphérique. Il semblerait que lorsque la turbulence est forcée de manière thermique, il faille prendre en compte l'importance relative du transport de chaleur de manière diffusive par rapport au transport de chaleur convectif consécutif au saut de vitesse du spin-up. En effet, il faut s'assurer que le mélange immédiat provoqué par le spin-up ne détruise pas instantanément l'état convectif. Plus le saut de vitesse sera faible, plus la convection aura des chances de durer pendant le processus de spin-up. Ceci confère un nouvel avantage aux expériences oscillantes qui permettent de lever cette ambiguïté.

Domaines limités par l'expérience

Bien que théoriquement il soit possible de maintenir une différence de température de l'ordre de 25 °C entre le bas et le haut du cylindre, il n'a pas été possible d'obtenir une différence de plus de 10 °C dans nos expériences. Ceci peut s'expliquer par le fait que le circuit de refroidissement ne pouvait maintenir la température de la plaque supérieure aussi basse que souhaité, en raison du débit d'eau limité par la faible épaisseur entre les deux plaques. Ce faible ΔT mesuré ne permet d'obtenir un fort régime convectif que dans une faible région de l'espace des paramètres (tableau 6.2).

Après analyse des données, une légère oscillation semblant provenir de la rotation du dispositif, amène une oscillation régulière d'amplitude 2 mm/s au maximum. Afin de garder une faible variation de vitesse, par rapport aux vitesses mesurées, il est préférable de travailler avec des amplitudes de mouvement relativement forte ($\Delta\Omega \approx 0.1 \text{ rad.s}^{-1}$ au minimum). En conclusion, l'indice de confiance optimum sera obtenu pour les expériences situées dans la zone favorable de la figure 6.8, pour des rayons $\frac{r}{R} > 0.6$.

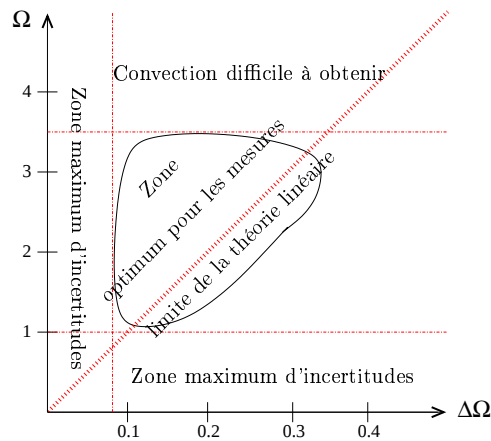


FIG. 6.8 – Schéma représentant les domaines de confiance relatifs aux expériences réalisées. Les vitesses de rotation sont en rad.s^{-1} . La zone de mesure est relativement restreinte.

6.4.2 Expériences de spin-up/spin-down isothermes

Campagne de mesures de novembre 2003

Sur les 12 expériences réalisées entre $\Omega = 1$ et 2 rad.s^{-1} de rotation d'ensemble et pour des $\Delta\Omega$ de 0.1 à 0.2 rad.s^{-1} , on retrouve systématiquement la viscosité du mélange à 10% près. Toutes ces expériences ont été réalisées à des températures entre 18 et 20°C . La robustesse de ces résultats permet de valider l'ensemble : dispositif expérimental, technique de mesure et méthode d'inversion. En utilisant l'expression donnée par 6.2, on compare $\Delta\Omega$ observé à $\Delta\Omega$ imposé, la précision du moteur se trouve être de l'ordre de 1 %. Par ailleurs bien que le saut de vitesse ne soit pas complètement instantané, le temps associé n'est jamais supérieur à 2 secondes, ce qui reste faible devant $E^{-1/2}$ (temps du spin-up).

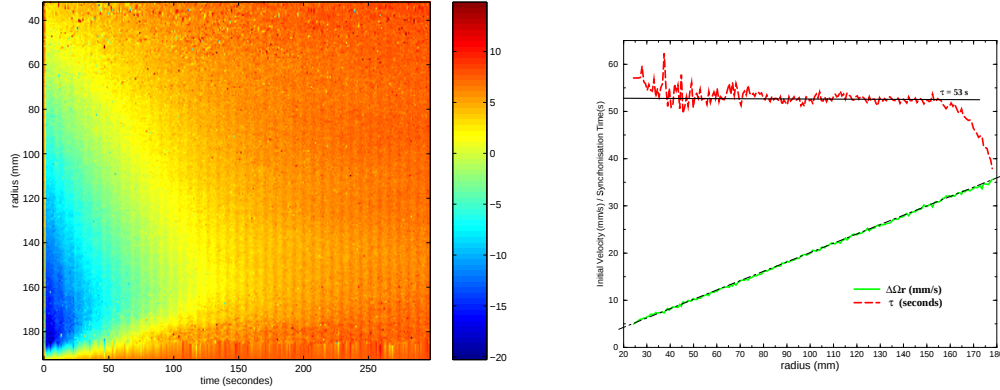
Pour cette première campagne de mesures nous n'avons pas obtenu de fichiers convectifs exploitables. En effet à l'occasion des expériences faites en convection, le couvercle supérieur étant fait de plexiglass, s'est déformé de manière irréversible. La topographie non-axisymétrique du couvercle modifié, ne permettait plus d'utiliser les formules analytiques reliant la viscosité aux vitesses azimutales. Dès lors, nous avons choisi de remplacer les plaques de plexiglass par des plaques de verre. L'enseignement de cet accident a été que dès que l'on s'écarte légèrement de la géométrie régulière imposée, les conséquences sur l'écoulement mesuré ne sont plus du tout négligeables.

Campagne de mesures de août 2004

Gardant à l'esprit les résultats de novembre, seules quelques expériences isothermes ont été effectuées ; Plusieurs températures ont été explorées cette fois-ci, le tableau 6.3

Exp. n°	Ω (s^{-1})	$\Delta\Omega$ ($rad.s^{-1}$)	τ (s)	$\nu_{obs}(10^{-6}m^2/s)$	T ($^{\circ}C$)	ν_{obs}/ν_{th}
701	2	0.2	52.7 ± 0.5	2.02 ± 0.04	16	0.92
704	1	0.1	70 ± 2	2.29 ± 0.1	12	0.95
810	3.5	0.2	45 ± 1	1.58 ± 0.07	19	0.75

TAB. 6.3 – Expériences isothermes réalisées en Août 2004

FIG. 6.9 – A gauche, diagramme spatio-temporel d'une expérience isotherme (exp. 704), la vitesse est en $mm.s^{-1}$. A droite résultats de l'inversion isotherme (exp 701)

présente les caractéristiques de ces expériences. Le diagramme d'évolution de la viscosité en fonction de la température fourni par [Fowles & Rossby, 1964] est utilisé comme référence par rapport aux viscosités obtenues par inversion.

Les expériences à $\Omega \leq 0.5 \text{ rad.s}^{-1}$, ne permettent pas d'inverser des temps de synchronisation en accord avec la théorie.

Pour toutes les autres expériences et de manière semblable aux expériences de novembre 2003, on retrouve un temps de synchronisation constant en fonction du rayon (figure 6.9), conformément à la théorie, pour des valeurs adimensionnées $\frac{r}{R}$ comprises entre 0.4 et 0.75. Pour $\frac{r}{R} < 0.4$, les larges fluctuations retrouvées dans le temps de synchronisation peuvent être attribuées au fait que la précision sur la vitesse de départ est bien moindre que pour des rayons plus forts. De plus le fait de moyenner dans la direction azimutale, proche du centre, peut augmenter l'imprécision en espace cette fois-ci. Pour les $\frac{r}{R} > 0.75$, il semble que la zone d'influence de la frontière soit pour nos expériences plus forte que celle estimée par la théorie (solution de l'expression validée dans le cas quasi-linéaire jusqu'à $r/R = \frac{1}{1 + \frac{\Delta\Omega}{\Omega}})^{1/2} \approx 0.9$), et dans le cas linéaire hors couche de Stewartson, c'est à dire pour $r/R \approx 0.97$. Nous reviendrons plus en détail sur l'interprétation de cette zone dans la discussion.

Le tableau récapitulatif des expériences isothermes montre que la viscosité moléculaire est retrouvée dans tous les cas à 10% près pour l'ensemble des expériences réalisées le 30 juillet 2004 (expériences 7xx). Une moins bonne précision est obtenue pour les

Exp.n°	$\Omega(s^{-1})$	$\Delta\Omega(s^{-1})$	τ (s)	$\nu_{obs}(10^{-6}m^2/s)$	$T_{moy}(^{\circ}C)$	ν_{obs}/ν_{th}	Ra
702	2	0.2	52.5 ± 0.5	2	18.5	1	$19Ra_c$
703	2	0.05	55 ± 8	1.86	18.5	0.93	$19Ra_c$
705	1	0.1	75 ± 8	2	18.5	1	$48Ra_c$
812	1	0.2	75 ± 5	2	21.5	1.03	$48Ra_c$

TAB. 6.4 – Expériences en présence de convection réalisées en Aout 2004

expériences du 04 août 2004 (expériences $8xx$)¹.

6.4.3 Expériences de spin-up/spin-down en présence de convection

Deux tendances sont observées pour ces expériences.

Pour certaines expériences le temps de synchronisation est indépendant du rayon. La vitesse initiale inversée reste très similaire à celle observée en isotherme. Dans le cas de l'expérience présentée à la figure 6.10 (a), on retrouve une valeur de viscosité apparente semblable à son homologue isotherme (tableau 6.4). La différence notable entre ces deux expériences se situe au niveau de la zone proche de la paroi. Le temps de synchronisation chute de manière beaucoup plus forte par rapport au cas isotherme. On remarque également que cette diminution du temps de synchronisation s'amorce sur une zone plus profonde du fluide. Ainsi pour $\frac{r}{R} \in [0.7; 0.75]$ la viscosité apparente augmente jusqu'à 20 % par rapport aux valeurs inversées des expériences isothermes. Cette tendance est confirmée pour d'autres expériences convectives.

D'autres expériences convectives ne présentent plus un temps de synchronisation complètement indépendant de r dans l'intérieur du fluide (figure 6.10 (b)). On observe des variations amples et une légère augmentation de τ avec le rayon. Néanmoins en moyenne on retrouve la viscosité correspondante aux cas isothermes.

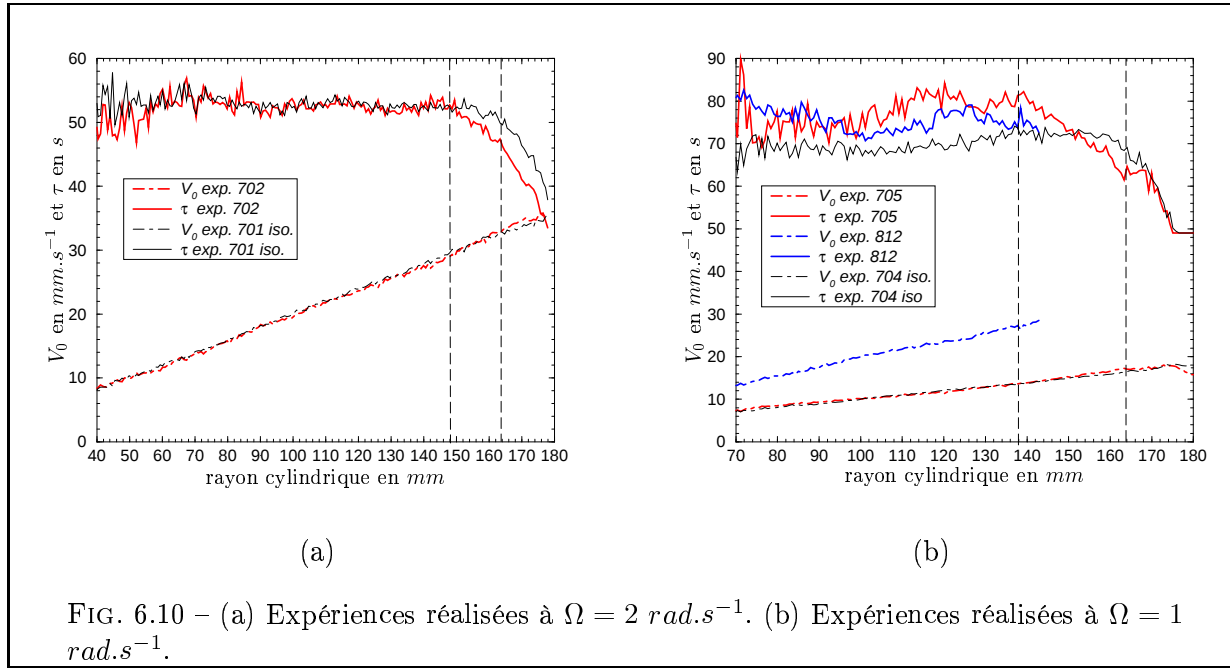
A partir de $\frac{r}{R} \sim 0.6 - 0.7$, le temps de synchronisation chute jusqu'à des valeurs plus faibles que celles obtenues en isothermes. Pour $\frac{r}{R} > 0.75$, on retrouve également une viscosité plus forte comme pour le cas précédent.

Là aussi, seules les expériences où $\Omega > 0.5 \text{ rad.s}^{-1}$ sont exploitables de manière quantitative.

6.4.4 Expériences oscillantes

Peu d'expériences ont été réalisées à ce jour, et seulement quatre d'entre elles ont été analysées. Les figures 6.11(a) et (b) montrent que la phase est globalement indépen-

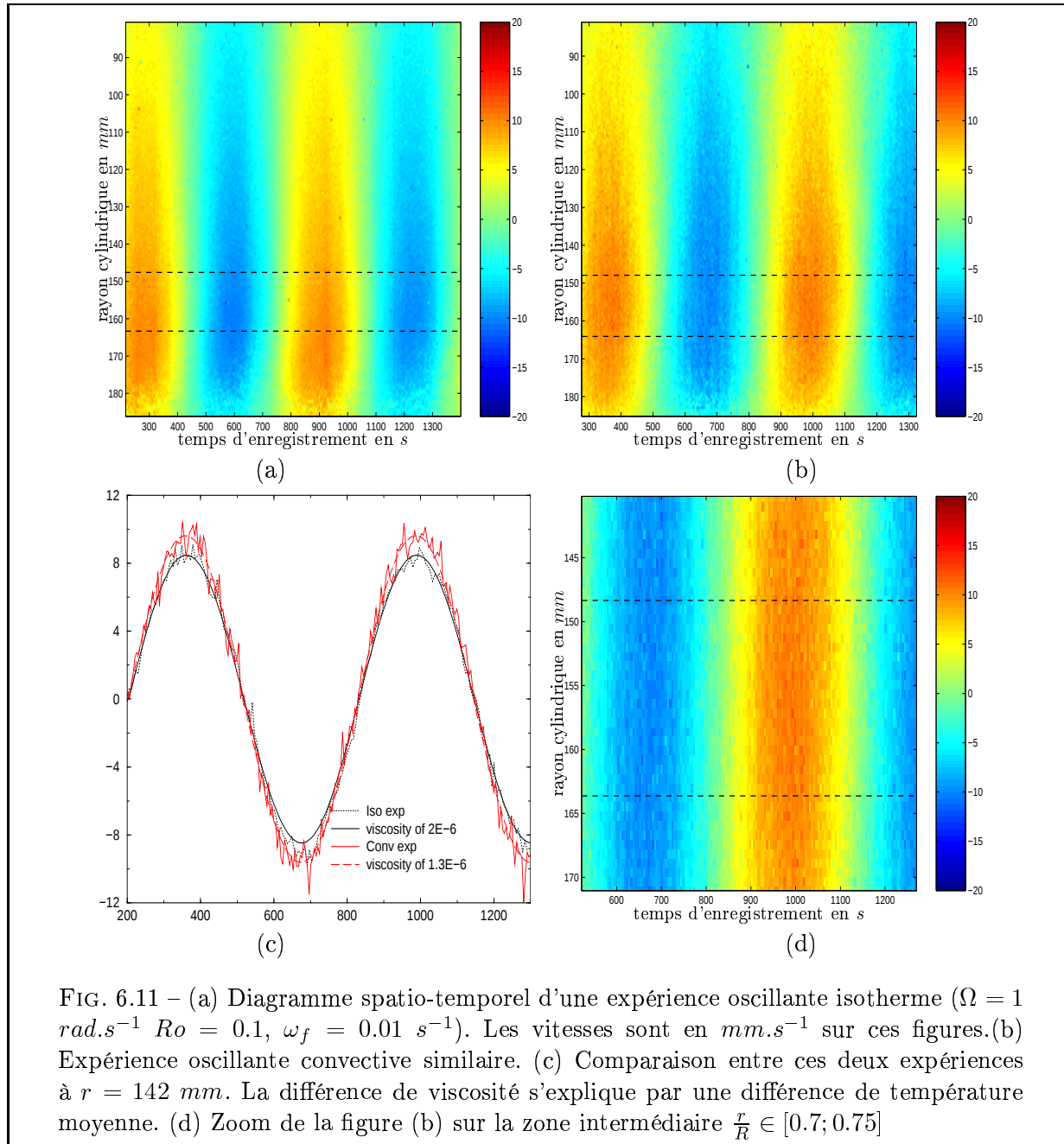
¹Cette conclusion n'est basée que sur une expérience dépouillée qui n'est peut être pas représentative des autres expériences de cette journée là. Néanmoins cette différence de précision pourrait s'expliquer par l'ajout de 3 lampes supplémentaires plus puissantes que les premières, pour cette journée du 04 août. La légère augmentation d'épaisseur de la tranche lumineuse, aurait comme tendance d'augmenter la contribution des faibles mouvements verticaux des particules dans le plan de mesure, et donc de diminuer la précision sur les mesures de vitesses dans ce plan.



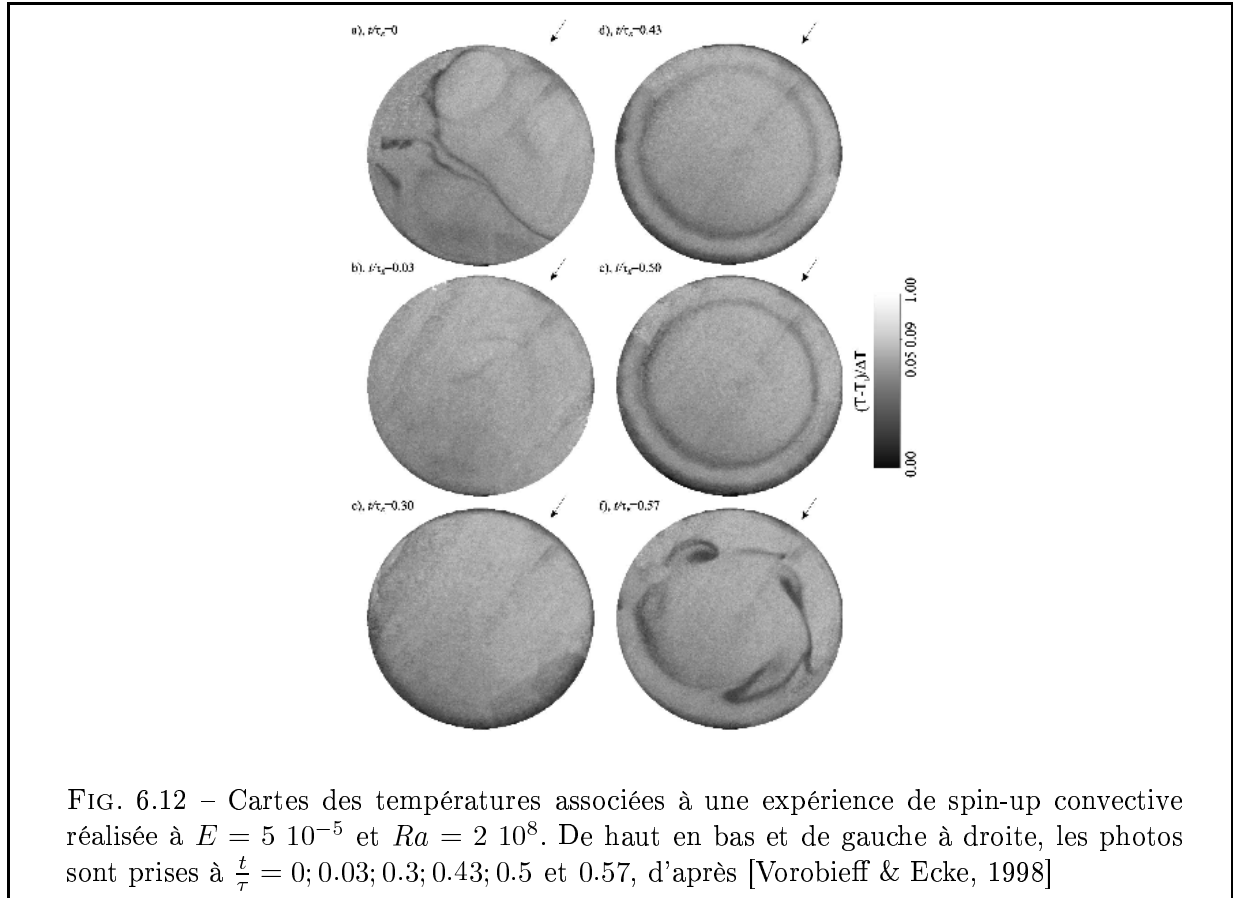
dante du rayon sur l'intervalle $\frac{r}{R} \in [0.5; 0.7]$. Cette remarque est qualitative car la phase n'a pas été déterminée par rapport à une origine des temps absolu. Pour la zone intermédiaire $\frac{r}{R} \in [0.7; 0.75]$, il est difficile de distinguer si la phase varie pour l'expérience convective (figure 6.11(d)). On pourrait observer une légère diminution de la phase, mais il est délicat de conclure sur cet aspect là, à partir d'un unique fichier. Une inversion est réalisée à partir de l'amplitude du signal $A(r)$ (6.11(c)). Il ne s'agit pas d'une inversion complète sur toutes les profondeurs comme dans le cas du spin-up/spin-down, mais d'un pointage manuel à quelques profondeurs choisies entre $\frac{r}{R}$ 0.4 et 0.75. A partir de ces inversions, on retrouve globalement la viscosité moléculaire. Pour des pulsations de forçage $(\frac{\omega_f}{\Omega})^2 \gg E$, il n'est pas possible, vu la précision de nos mesures, de différencier le cas isotherme du cas convectif (cas d'expériences réalisées à $\omega_f = 0.05 \text{ s}^{-1}$). Pour les expériences faites à plus faible pulsation de forçage ($\omega_f = 0.01 \text{ s}^{-1}$), on retrouve une viscosité plus faible pour les expériences convectives (figure 6.11(c)). Cette différence devra être analysée en terme de différence de température moyenne avant de conclure sur une diminution de la viscosité due à la turbulence en volume.

6.4.5 Expériences de spin-up et spin-down, réalisées à $\Omega = 0.5 \text{ s}^{-1}$

Les temps d'inversions obtenus pour ces expériences ne correspondent pas du tout à ceux prédits par la théorie. On obtient des temps correspondants à une viscosité jusqu'à 3 fois plus faible. Les éventuelles fluctuations dans la fonction $\tau(r)$ sont encore plus présents et on remarque également que l'inversion de $\Delta\Omega r$ est beaucoup moins précise. Une comparaison qualitative des exponentielles obtenues pour les expériences convectives et isothermes, montre que τ est plus grand dans le cas convectif.



6.5 Discussion



Sur l'ensemble des expériences réalisées à $\Delta\Omega > 0.5 \text{ s}^{-1}$, la viscosité efficace est constante sur l'intervalle de mesures où $\frac{r}{R} \in [0.4; 0.7]$.

Globalement la valeur de viscosité inversée pour les expériences convectives est similaire à celle des expériences isothermes sur ce même intervalle. Pour certaines des expériences de spin-up et des expériences oscillantes convectives, les temps de synchronisation peuvent différer de plus de 20 %, mais la différence de viscosité associée s'explique par le fait que la température moyenne de ces expériences est plus élevée que celle des expériences isothermes (figure 6.11(c)).

Le résultat sur lequel nous portons le plus d'attention est celui concernant la zone de mesure comprise entre $\frac{r}{R} = 0.6$ et $\frac{r}{R} = 0.8$. Alors qu'en isotherme, la théorie reste valide jusqu'à $\frac{r}{R} = 0.75$, on remarque que dans le cas convectif, la viscosité apparente inversée dans cette zone est jusqu'à 20 % plus forte que pour une expérience isotherme. S'agit-il d'un mélange partiel du volume qui ne s'opère que dans cette zone proche de la paroi ? Quelles comparaisons pouvons nous faire avec les expériences en géométrie sphérique ? Pour répondre à la première question les travaux réalisés par [Vorobieff & Ecke, 1998] peuvent nous être d'une certaine utilité. Ces auteurs ont réalisé des expériences de spin-up en convection thermique assez similaires aux nôtres. Les nombres d'Ekman explorés sont de l'ordre de $10^{-4} - 10^{-5}$ et les nombres de Rayleigh de l'ordre de $10^7 - 10^8$.

La grande différence entre les deux études vient du fait que [Vorobieff & Ecke, 1998] étudient des spin-up non linéaires partant du repos $\Omega_i = 0$. La contrainte de Proudman-Taylor n'est donc pas valable sur l'ensemble de la durée du spin-up pour leurs expériences. Nous ne pourrions pas exploiter les aspects quantitatifs qu'ils ont démontrés, nous nous limiterons à décrire leurs résultats de manière phénoménologique. Ils réalisent des mesures de vitesse et de température dans un plan proche de la couche limite thermique supérieure. A l'aide de ces mesures, ils mettent en évidence l'apparition d'un anneau thermique à $\frac{r}{R} \sim 0.75$ qui se propage de bas en haut bien avant la fin du temps de spin-up. Cet anneau semble associé à une déstabilisation de la couche thermique chaude [Julien *et al.*, 1996]. Elle n'est pas propre à la dynamique du spin-up car l'anneau n'est pas observé dans les expériences isothermes. Dans certains cas, plusieurs anneaux apparaissent entre la paroi et la distance de $0.75R$, une déstabilisation de la couche supérieure peut aider à la formation d'un anneau froid descendant. Ces structures auxquelles sont associées une diminution locale de la vorticité se déstabilisent avant la fin du spin up comme le montre les figures extraites de l'article de [Vorobieff & Ecke, 1998]. La présence de telles structures dans nos expériences pourrait justifier l'augmentation locale de la viscosité apparente dans la zone intermédiaire.

[Vorobieff & Ecke, 1998] observent également une disparition des panaches thermiques dans les premiers instants du spin-up et justifient cela par une modification brusque de la couche limite thermique supérieure associée au fort cisaillement radial qu'opère la circulation du spin-up. Pour nos expériences nous n'avons pas fait d'observation concernant la stabilité de la convection pendant le spin-up. Si l'on se réfère à la discussion du chapitre 4, on devrait pour de tels écarts au seuil avoir une convection plutôt stable pendant le spin-up. Néanmoins la viscosité inversée n'est pas différente de celle des expériences isothermes dans la zone interne. Ce résultat est-il dû à la disparition des cellules convectives ? Est-il sinon le résultat d'un écrantage du transport de quantité de mouvement entre les parois latérales et l'intérieur du fluide, par le fait que la présence de l'anneau thermique constitue une barrière à la circulation ?

La deuxième hypothèse a le mérite d'expliquer la légère augmentation du temps de synchronisation pour des distances situées à proximité de $\frac{r}{R} \sim 0.75$ dans l'intérieur du fluide, ce résultat étant obtenu pour les écarts au seuil maximum que nous avons observés. Dans le cas de la géométrie cylindrique, la déstabilisation des couches limites thermiques aurait deux effets antagonistes sur le transport de quantité de mouvement : celui d'augmenter le pompage dans la zone externe et de le diminuer dans la zone interne.

La présence des couches limites latérales peut également jouer un rôle dans l'augmentation de la viscosité apparente dans la zone externe. La zone d'influence de ces couches en $E^{-1/4}$ est expérimentalement plus large que ne le prévoit la théorie quasi-linéaire comme le montre l'étude isotherme. On peut associer ce premier effet à un biais du dispositif, peut être en raison d'une rugosité de parois ou alors à cause d'une imparfaite symétrie autour de l'axe. Néanmoins, il n'y a pas de raison pour que ces effets soient accentués pour les expériences convectives. Dès lors il est possible que la turbulence en volume déstabilise les couches latérales. La zone pour laquelle le temps de synchronisation commence à chuter pourrait correspondre à un tel épaississement. Est ce que cela à un sens d'évaluer le rapport de ces épaisseurs et d'en déduire un rapport de viscosité

efficace pour cette zone ? Si cela s'avérait légitime on pourrait en déduire phénoménologiquement une viscosité apparente augmentée de l'ordre de $\left(\frac{\delta_{conv}}{\delta_{iso}}\right)^{-4} \sim 3 \pm 1$ pour la zone externe.

Enfin pour les expériences réalisées à $\Omega = 0.5 \text{ s}^{-1}$, nous n'avons pas inversé de temps de synchronisation compatibles avec les viscosités moléculaires. Ceci peut s'expliquer par la difficulté de déterminer avec précision la vitesse de départ en vue des incertitudes liées aux dispositifs (voir section 6.4.1). En effet pour ces faibles taux de rotation nous n'avons réalisé que des expériences à $Ro = 0.1$ ce qui limitait également le saut de vitesse. Néanmoins les nombres d'Ekman étant faiblement petits devant l'unité, on peut également s'interroger sur la validité de la théorie de spin-up pour ces expériences. De plus [Vorobieff & Ecke, 1998] montre que pour des nombres de Rossby convectifs de l'ordre de 0.3 comme obtenus ici, les structures bidimensionnelles ne sont plus dominantes. Les structures convectives ne respectant plus la contrainte de Proudman Taylor, il n'est plus forcément légitime d'appliquer la théorie du spin-up au régime convectif obtenu pour $\Omega = 0.5 \text{ s}^{-1}$.

6.6 Bilan sur les expériences de convection en géométrie cylindrique

A l'aide d'une méthode optique de mesure de vitesse, nous avons pu réaliser une évaluation de la viscosité du mélange eau-glycérol. Ces mesures ont mobilisé chercheurs ingénieurs et techniciens et ont nécessité beaucoup d'énergie au regard des maigres réponses auxquelles elles ont répondu. Le dispositif ainsi que le logiciel de traitement ont été poussés aux limites de leur utilisation pour l'étude du spin-up. Notre difficulté à analyser les résultats montre également que ce n'est pas seulement sur l'aspect technique que les régimes transitoires sont difficiles à appréhender.

Néanmoins, nous avons pu retrouver les viscosités moléculaires du mélange pour des expériences réalisées à différentes températures entre 10 et 25°C. La comparaison de ces expériences avec des expériences réalisées en régime turbulent a montré que :

1. Dans une zone centrale ($\frac{r}{R} < 0.7$), la turbulence n'avait pas d'effet sur le transport de quantité de mouvement.
2. Dans la zone où $\frac{r}{R} > 0.7$, une augmentation de la viscosité apparente a été observée.

Il n'a pas été possible d'identifier clairement l'origine de cette augmentation. Plusieurs hypothèses sont envisageables. La première peut venir d'un maintien de la convection thermique uniquement dans la zone externe et la deuxième est à mettre en lien avec une éventuelle déstabilisation des couches latérales. Enfin la dernière est à relier à la forme de déstabilisation des couches limites thermiques sous l'action du spin-up, ce qui forment un anneau thermique qui pourrait agir comme une barrière au transport dans

la zone interne.

Ces expériences ont également mis en évidence les limites d'application de la théorie linéaire ou quasi-linéaire aux spin-up convectifs. Celles-ci s'appliquent pour des taux de rotation suffisants et des régimes convectifs dominés par la rotation. Néanmoins, des améliorations du dispositif pourraient permettre d'explorer des régimes différents, comme ceux à plus forte rotation ou encore des régimes où les écarts au seuil sont plus élevés.

Il est à noter également que la qualité de notre analyse est limitée par une très mauvaise connaissance du régime transitoire. Il semble que le processus de spin-up et la convection dans cette géométrie ne puissent être associés de manière linéaire. Les formes d'instabilités observées ici semblent très différentes de celles associées à la convection thermique en géométrie sphérique. Cette conclusion vient du fait que la viscosité apparente augmente de manière uniforme dans le volume sphérique alors qu'ici cette augmentation est limitée à une zone externe. Au regard de cet anneau thermique qui se développe à un rayon donné pour les expériences cylindriques, est-il possible que le spin-up convectif en géométrie sphérique induise de telles structures de grandes échelles sur l'ensemble du volume? Il pourrait être intéressant de regarder ce point précis par des méthodes optiques permettant une description qualitative de la thermique et de la dynamique sur l'ensemble du volume sphérique.

Notre difficulté à interpréter ces nouveaux résultats montre encore une fois que nous sommes bien loin d'une loi universelle des systèmes en rotation vis-à-vis de la modélisation de la turbulence. Un simple paramètre scalaire ne suffit pas pour expliquer le transport de quantité de mouvement qui a lieu dans ces expériences. Dans ce contexte nous n'avons pas cherché à formuler de nouvelles lois d'échelles même pour la zone extérieure qui revêtait pourtant un caractère particulier.

L'approche expérimentale ne permet pas de conclure sur l'objectif qui consistait à évaluer la viscosité apparente du noyau liquide à partir des lois d'échelles que nous aurions pu trouver. Voyons maintenant ce qu'apporte certaines observations géophysiques dans une possible évaluation de la viscosité apparente du noyau liquide.

Troisième partie

Couplage visco-magnétique à l'interface noyau manteau

Chapitre 7

Application au couplage noyau manteau

7.1 Introduction

Le chapitre d'introduction faisait déjà apparaître le fait que la viscosité du fer sous les conditions de pression et de température qui règnent à l'interface noyau-manteau n'était pas contrainte précisément. Et pourtant dans la plupart des modèles utilisant cette donnée on a tendance à oublier cette incertitude. Que peut-on dire alors de la prise en compte du phénomène de viscosité turbulente qui reste absent lui aussi des analyses géophysiques concernant le noyau liquide ? En effet, les résultats expérimentaux présentés précédemment montrent que le comportement des fluides en présence de turbulence est modifié de manière non négligeable. D'autres modélisations des fluides géophysiques amènent également à une modification de la viscosité apparente par l'action des petites échelles. Ainsi l'idée développée ici a été de reprendre les calculs de couplage à la CMB sans contraindre la valeur de viscosité du noyau liquide a priori. La confrontation des résultats de ces calculs à certaines observables que sont la rotation de la Terre et le champ magnétique observé, permet d'inverser des combinaisons de paramètres déterminant la dynamique de la CMB située à 2890 *km* sous la surface.

7.1.1 La rotation de la Terre

L'évolution d'un objet en rotation est décrit par la conservation du moment cinétique qui exprime que la variation temporelle de moment cinétique résulte des couples exercés sur l'objet considéré. Ainsi les couplages extérieurs ont de l'influence sur la rotation de notre planète. Bien qu'au premier ordre la rotation de la Terre apparaissent stable (période actuelle de rotation de 86164 secondes selon un axe formant un angle de 23.5° par rapport au plan de l'écliptique), la rotation de la Terre n'est pas complètement constante ; En effet les astres environnants, principalement le soleil et la lune, exercent des forces gravitationnelles sur notre planète. Les forces appliquées sur le bourrelet

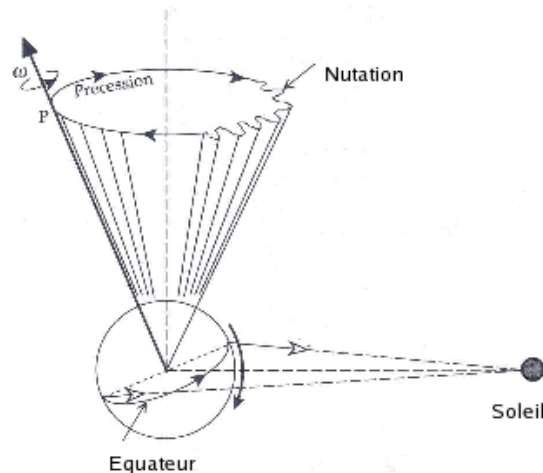


FIG. 7.1 – Schéma de principe des mouvements de précession-nutation de la Terre adapté de [Lowrie, 1997]. Le soleil exerce un couple sur le bourrelet équatorial de la Terre ce qui tend à faire basculer son axe de rotation perpendiculairement au plan de l'écliptique. En réponse à ce forçage et par conservation du moment cinétique, l'axe de rotation de la Terre évolue le long du cône de précession. Les perturbations temporelles dues aux diverses révolutions Terre-Lune-Soleil induisent des oscillations autour du cône de précession que sont les nutations de l'axe.

équatorial de la Terre induisent des couples. Constituée de trois enveloppes majeures, dont l'une liquide, la Terre ne réagirait pas aux forçages externes de manière identique si elle était complètement rigide. Les différents couplages aux interfaces, les marées, et les répartitions de masse (atmosphère, océan, manteau) variables en temps sont autant de processus qui perturbent sa rotation.

On peut faire une distinction entre différents types de mouvement de l'axe de rotation. Le taux de rotation de la Terre peut varier sans pour autant que l'axe de rotation évolue en espace, on parlera alors de variations de la longueur du jour. Du point de vue de la dynamique du noyau liquide, ce mouvement peut s'apparenter aux mouvements de spin-up traités dans le chapitre précédent. La direction de l'axe de rotation peut évoluer dans le temps, il résultera alors des mouvements de précession-nutation et des oscillations du pôle. La différence entre ces deux derniers types de mouvements résulte du fait que les oscillations du pôle correspondent à des mouvements de longues périodes vus du référentiel terrestre ¹. Il s'agit plutôt d'oscillations de la Terre autour de l'axe de rotation que de larges mouvements de l'axe de rotation visibles du référentiel absolu ([Wahr, 1996]). Ces mouvements apparaissent alors comme des oscillations quasi diurnes dans le référentiel absolu. Les oscillations sont principalement excitées par des phénomènes terrestres. Certaines oscillations de longues périodes dans le référentiel d'inertie voient leurs origines dans le rebond post-glaciaire. D'autres annuelles et semi-annuelles (d'amplitude 0.1 arc-secondes vu du référentiel terrestre) sont dues à la variation annuelle du moment d'inertie de la Terre consécutive aux mouvements

de l'atmosphère et aux régimes des vents. La plus connue, l'oscillation de Chandler (Chandler Wobble, CW) de période 14 mois, correspond à un mode propre de rotation de la Terre ; l'excitation de ce mode n'est encore pas complètement compris, la contribution des océans et de l'atmosphère n'expliquant qu'en partie les données observées. Une autre oscillation libre est celle de la graine (Inner Core Wobble, ICW). Son observation dépendra du fait qu'il existe ou non un phénomène qui puisse exciter ce mode.

7.1.2 Précession et Nutations

Dans cette étude, les données que nous exploitons sont issues des observations des mouvements de précession-nutation (figure 7.1), mouvements de longues périodes vus du référentiel absolu, soit presque diurne vu du référentiel terrestre. Dès lors on exprime généralement les périodes dans le référentiel absolu. La précession est le résultat d'un équilibre entre le couplage gravitationnel exercé par le couple luni-solaire sur le bourrelet équatorial de la Terre et son accélération centrifuge. L'axe de rotation décrit un cône, dont le demi angle est de 23.5° , et la période de révolution de 26000 ans. A ce mouvement majeur se superpose, des mouvements de plus faibles amplitudes et de périodes plus courtes, ce sont les nutations. Certaines de celle-ci résultent du forçage externe, les principales étant de périodes de 18,6 (nutation de Bradley d'amplitude 9.2 secondes d'arcs), 9,3 ans¹ et 0,5 ans ainsi que 14 jours, ce qui correspond à des phénomènes tels que la variation de l'axe de révolution de la lune autour de la terre par rapport à l'écliptique, ou certaines résonances dans le mouvement des planètes. D'autres, les nutations libres sont le résultat de l'excitation des modes propres de la Terre. Parmi les modes propres de la terre, nous identifions la nutation libre de la graine (Free Inner Core Nutation, FICN) et la nutation libre du noyau (Free Core Nutation, FCN). Les nutations sont intéressantes dans le sens où leurs périodes propres, dans le référentiel terrestre, sont presque diurnes. Elle peuvent alors être excitées par les phénomènes de marées. La détermination de la période correspondant à la FCN et son amplitude théorique est fonction du modèle de Terre que l'on prendra en compte. A l'heure actuelle l'estimation théorique, basée sur des modèles simples serait de $(1 \pm \frac{1}{460})$ cycles/jour soit 460 jours et l'observation donne une période 430 jours. L'enjeu consiste alors à inclure divers phénomènes qui pourraient changer le modèle et donc sa prédiction théorique pour expliquer les périodes observées.

7.1.3 Des nutations à l'intérieur de la Terre

On observe les mouvements de l'axe de rotation de la Terre depuis l'antiquité. Néanmoins ce n'est que récemment que des mesures précises permettent de détecter les mouvements de nutations prévues par les théories. Avant les années 60 – 80 et l'avènement des techniques spatiales, on déterminait la rotation de la Terre par l'observation du transit des étoiles par rapport à la verticale du point de mesure. Cette technique

¹Le référentiel terrestre correspond à un référentiel en rotation avec la planète par opposition au référentiel absolu, supposé fixe aux échelles de temps que l'on considère.

permettait d'obtenir en divers observatoires les fluctuations (apparentes) de longitude et de latitude, qui se traduisaient en variations de l'axe de rotation de la Terre dans le référentiel absolu que constitue les étoiles lointaines. Cette technique a permis d'obtenir des enregistrements de la position de l'axe du début du 19^{me} siècle jusqu'au milieu des années soixante avec une précision estimée à $0.1 - 1$ secondes d'arcs [Wahr, 1996], ce qui correspond à $3 - 30$ m d'erreur sur une position à la surface de la Terre (à comparer avec la nutation principale de seulement 9.2 secondes d'arcs). Depuis de nombreuses techniques satellitaires permettent d'obtenir de meilleures précisions. On distingue parmi elles celles qui se basent sur la mesure des distances entre un satellite et un point de la surface du globe. Il s'agit notamment de la LLR (Lunar Laser Ranging) qui fournit des enregistrements depuis les années soixante, des techniques GPS (Global Positioning System), et des techniques laser types LAGEOS (Laser Geodetic Satellite). Mais la technique la plus utilisée en géophysique est la technique V.L.B.I (Very Long Baseline Interferometry) qui compare en différents endroits du globe des signaux radio émis par des objets très lointains. Ces objets sont des quasars, les différences de phases recueillies en différents observatoires (une douzaine actuellement), permettent d'obtenir une mesure instantanée de la position de l'axe de rotation de la Terre. L'intérêt principal du VLBI est qu'il fournit directement les informations dans le référentiel terrestre et s'affranchit du coup des erreurs liées à l'imprécision des orbites des satellites en gravitation autour de la Terre. A ce titre l'observation des nutations depuis la Terre peut se décomposer en la superposition de deux mouvements contrarotatifs. Ainsi pour l'observation d'une nutation, on parle de composante prograde et composante rétrograde. La technique VLBI est d'une précision de l'ordre de $0.1 \text{ mms} - \text{arcs}$ ([Robertson, 1991]) ce qui permet avec des séries de plus en plus longues de détecter des mouvements de nutations de faibles amplitudes telles que l'amplitude de la nutation annuelle rétrograde $\approx 30 \text{ mms} - \text{arcs}$ ([Dehant & Defraigne, 1997]). Ces observations sont ensuite comparées à des modèles de nutations qui conjointement à l'amélioration des modèles de Terre, ont vu leur précision améliorée jusqu'à la $\mu\text{s} - \text{arcs}$ et même en deçà [Mathews *et al.*, 2002]. Néanmoins, toutes les grandeurs utilisées dans les modèles ne sont pas forcément bien contraintes. Ainsi par ajustement du modèle aux observations, on peut en déduire par inversion, des informations sur la structure interne de la Terre, informations qui viendront compléter les autres méthodes d'observations géophysiques (sismologie, gravimétrie). Dans notre cas ce qui va nous préoccuper, c'est d'avoir une estimation des propriétés de l'interface noyau manteau.

Modèles de nutations

Depuis le début des années 80, de nombreux modèles théoriques sur les mouvements de nutation ont vu le jour. Les modèles de nutation sont basés sur les équations du moment cinétique. Celles-ci peuvent s'exprimer dans différents référentiels, mais afin de minimiser le nombre de termes à prendre en compte, il est important de choisir un référentiel approprié. Pour un développement théorique de la dynamique, on peut choisir le référentiel de Tisserand ². Les équations d'Euler dans ce référentiel, pour un

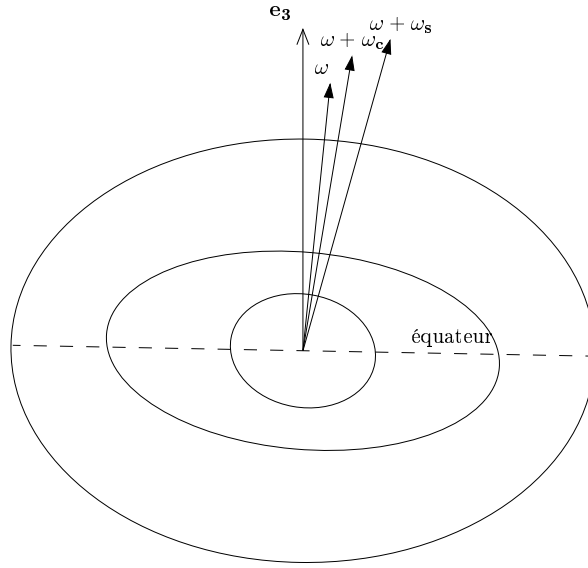


FIG. 7.2 – Modèle schématique d’une Terre à trois couches. $\mathbf{e}_3$ désigne l’axe du repère associé au référentiel de Tisserand, ω la rotation du manteau dans ce référentiel, $\omega + \omega_c$ celle du noyau et $\omega + \omega_s$ celle de la graine

modèle à trois couches s’écrivent [Greff-Lefftz *et al.*, 2000] :

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \omega \times \mathbf{H} = \mathbf{L} \quad (7.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}^c}{\partial t} + \omega \times \mathbf{H}^c = \mathbf{L}^c \quad (7.2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}^s}{\partial t} + \omega \times \mathbf{H}^s = \mathbf{L}^s \quad (7.3)$$

Pour la partie gauche de l’équation $\mathbf{H}$, $\mathbf{H}^c$, $\mathbf{H}^s$ sont respectivement, les moments cinétiques de la terre, du noyau et de la graine. $\omega = (\omega_1, \omega_2, \Omega + \omega_3)$ est la rotation de la Terre, $\Omega = \langle \omega \rangle$ étant définie comme la rotation sidérale (rotation moyenne diurne de la Terre) et $\langle \omega_1 \rangle = \langle \omega_2 \rangle = \langle \omega_3 \rangle = 0$. On peut définir les vecteurs ω^c et ω^s comme étant les différences de rotation du noyau liquide (respectivement du noyau solide) par rapport à la rotation de la Terre (figure 7.2). La première étape est d’exprimer le moment cinétique de chaque partie. Les variations de celui-ci seront fonction des forçages externes et de la rhéologie choisie pour le modèle de Terre ([Lambeck, 1988]). Pour la partie gauche $\mathbf{L}$, $\mathbf{L}^c$, $\mathbf{L}^s$ correspondent aux différents couples exercés sur le système, respectivement sur la Terre, le noyau liquide et la graine, qu’ils soient d’origine externe (forces de marées luni-solaires), ou en réponse à un état de non équilibre entre les différentes enveloppes (couplages inertiels, couplages magnéto-visqueux

²Ce référentiel correspond strictement à une minimisation des mouvements résiduels de rotation de la Terre. On peut l’associer au référentiel attaché à la rotation d’un modèle moyen de terre rigide.

aux interfaces...). À partir de là, de nombreuses étapes interviennent (modélisations-approximations-linéarisations partielles), étapes qui varient selon les modèles pour obtenir une formulation du type :

$$(A) \begin{pmatrix} \omega \\ \omega_c \\ \omega_s \end{pmatrix} = (F) \quad (7.4)$$

où A est une matrice contenant les paramètres internes de la Terre et F correspond à une matrice de forçage externe. La détermination des modes propres se fait en résolvant l'équation précédente avec $(F) = 0$. La coïncidence entre les modes propres du modèle théorique et les modes de résonance observés (si ceux-ci sont excités) sera d'autant plus grande que le modèle pourra prendre en compte le plus grand nombre de phénomènes géophysiques. Par ailleurs, connaissant la matrice de forçage, on peut par le biais de l'observation des nutations, contraindre certains coefficients de la matrice A (Wahr [1981]; Mathews *et al.* [2002]). À ce stade tout va dépendre des 'ingrédients' qui seront intégrés dans le modèle.

Au départ ces modèles tenaient compte d'une Terre rigide axisymétrique, puis progressivement les modèles évoluèrent avec la prise en compte d'un modèle de Terre élastique. Au début des années 80 c'est donc le modèle de nutation de ([Wahr, 1981]) qui fut adopté par la communauté scientifique, basé sur un ellipsoïde de révolution en rotation uniforme comprenant un manteau et une graine élastique et un noyau liquide. Depuis d'autres modèles tenant compte des couplages gravitationnels et inertiels entre la graine et le noyau ([Mathews *et al.*, 1991a,b])) des effets atmosphériques et océaniques ou encore des effets de l'anélasticité du manteau ont vu le jour [Dehant & Defraigne, 1997]. Ce sont les résultats des modèles de [Mathews *et al.*, 2002] qui tiennent compte des marées d'océans et des couplages aux différents interfaces que nous utiliserons. Ce nouveau modèle ne résout pas toutes les différences entre les nutations observées et celles modélisables, mais il réduit néanmoins considérablement certaines des différences observées auparavant. En particulier, celle concernant la nutation annuelle rétrograde (différence entre observation et théorie ramenée à 0.01 mas au lieu de 0.44 mas pour les modèles précédents ([Buffett *et al.*, 2002])) grâce à l'introduction d'une nouvelle constante de couplage à la frontière noyau-manteau. Une méthode de moindre différence entre la théorie et ce modèle permet de contraindre 7 paramètres de la structure interne de la Terre, dont la constante complexe de couplage à l'interface noyau-manteau K^{CMB} et à l'interface graine-noyau K^{ICB} . Dans le formalisme utilisé la partie imaginaire de la constante $Im(K^{CMB})$ se déduit de l'observation de la composante hors phase des nutations (composante associée à la dissipation). La composante en phase par rapport au forçage (potentiel de marée responsable de l'entraînement) permet elle d'inverser $Re(K^{CMB})$ et l'ellipticité du noyau liquide mais sans les dissocier (voir paragraphe 7.1.4). Bien qu'il soit possible d'estimer cette ellipticité à une valeur approchée, l'incertitude reste grande. Aussi la technique consiste alors à utiliser comme résultat des modèles de nutation la constante $Im(K^{CMB})$, de calculer le couple responsable d'une

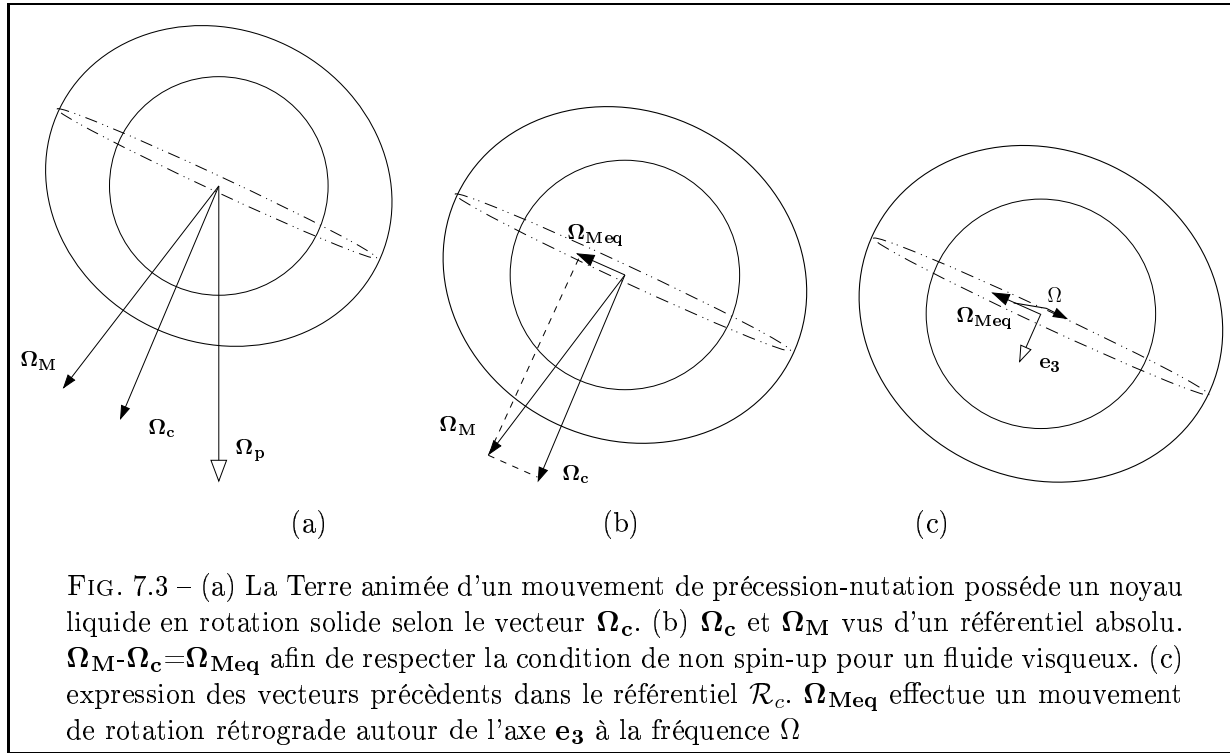
telle constante, d'en déduire alors la valeur de $Re(K^{CMB})$ d'après ce calcul et enfin d'ajuster l'ellipticité du noyau liquide pour expliquer la composante en phase des nutations observées maintenant que $Re(K^{CMB})$ est fixé. Ainsi la sortie du modèle de Mathews que nous utiliserons se réduit à être $Im(K^{CMB}) = (1.85 \pm 0.1) * 10^{-5}$.

7.1.4 Couplages à l'interface noyau-manteau

Plusieurs types de couplages peuvent exister à la frontière noyau-manteau. Il existe un couplage dit inertiel qui résulte des pressions exercées par le fluide sur le manteau. Les axes instantanés de rotation entre le noyau et le manteau sont non-alignés, ainsi la forme ellipsoïdale du manteau apparaît comme un obstacle à la rotation en bloc du noyau. Le couple de pression résultant va tendre à diminuer l'angle qui sépare les deux rotations. Ce premier couple explique en grande partie la composante en phase de la nutation. Les différences entre les valeurs observées et celles du modèle peuvent se réduire efficacement en augmentant ou diminuant la valeur de l'ellipticité du manteau. Un ajustement pourrait aussi se faire en prenant en compte des frictions magnéto-visqueuses (augmentation ou diminution de $Re(K^{CMB})$), mais celles-ci modifient peu la composante en phase. C'est pour cela que pour déterminer quel couple est prépondérant à la CMB, on utilise dans cette étude uniquement la constante $Im(K^{CMB})$. On peut considérer trois types de couples dissipatifs, il s'agit des couples topographiques, des couples visqueux et magnétiques. Un couple topographique pourrait résulter d'une irrégularité à grande échelle de la C.M.B [Kuang & Chao, 2001]. Néanmoins, les résultats des études tomographiques estiment une irrégularité qui ne devrait pas dépasser les 10% (amplitude de 2 km sur une échelle de l'ordre de 1000 à 3000 km ([Sze & van der Hilst, 2003],[Garnero, 2000])). Nous n'avons donc pas considéré un tel couplage dans l'étude qui suit. En revanche, l'effet de la topographie de petite échelle peut être intégré dans le paramètre de viscosité efficace. En effet tout comme les vents sont modifiés par la végétations et les montagnes, on peut imaginer que les fluides proches de la CMB sont perturbés par la rugosité de l'interface. Nous avons calculé les couples visqueux et magnétiques à l'interface noyau-manteau qui résultent de la perturbation du champ de vitesse et du champ magnétique induit par la différence de rotation entre les deux domaines.

7.1.5 Description des mouvements

La description du mouvement d'un fluide passe par la description des forces qui agissent sur lui et les conditions aux limites auxquelles il est soumis. La première étape est donc de décrire le mouvement du noyau liquide contenu dans la cavité en précession que forme le manteau de la Terre. Pour ce type de mouvement auquel on cherche une solution stationnaire, Poincaré [1910] a montré que le mouvement du fluide se décompose en une rotation en bloc dont l'axe est inclu dans le plan défini par (Ω_p, Ω_M) (figure 7.3 (a)) et un écoulement irrotationnel¹. Ce résultat a été validé expérimentalement et numériquement, notamment par Jérôme Noir au cours de sa thèse ([Noir, 2000]) et s'applique complètement aux cas de faibles ellipticités et faibles taux de précession comme



celui de la Terre. Nous choisissons comme référentiel d'étude celui attaché à la rotation solide noté $\mathcal{R}_c$. L'état de rotation solide du noyau, dans le cas des fluides visqueux, implique une nouvelle contrainte : la projection du vecteur rotation associé au manteau terrestre sur l'axe de rotation du noyau doit être égal à celui ci (condition de non spin-up). En effet si tel n'était pas le cas, pour un observateur placé dans le référentiel $\mathcal{R}_c$, le manteau serait en rotation positive ou négative et l'ajustement de la vitesse du fluide aux parois détruirait instantanément l'état de rotation solide hypothétiquement décrit (apparition d'un mouvement de spin-up / spin-down). Nous notons Ω la norme de Ω_c qui nous donne la fréquence de rotation du fluide égale à $7.29 \cdot 10^{-5} \text{ rad s}^{-1}$. Ainsi, le mouvement de rotation de la frontière dans le référentiel $\mathcal{R}_c$ est purement équatorial ou encore identifié comme mouvement de Spin-Over. Vu du référentiel céleste, le phénomène de nutation-précession induit une différence d'orientation entre les vecteurs associés à la rotation du noyau et du manteau qui apparaît comme fixe sur des courtes échelles de temps (échelles diurnes). Si l'on se place maintenant dans $\mathcal{R}_c$, le vecteur rotation du manteau, va se situer dans le plan équatorial, tournant dans le sens rétrograde, à la fréquence Ω (figure 7.3 (b) et (c)). Des variations temporelles de vitesse et de champ magnétique à proximité de l'interface vont apparaître en réponse à ce forçage diurne.

¹L'écoulement irrotationnel est là pour vérifier la condition de non-pénétration aux parois elliptiques incompatibles avec la rotation en bloc. Cette écoulement est proportionnel à l'ellipticité

Symboles	paramètres	définitions	valeurs
R	rayon à la C.M.B		$3.48 \cdot 10^6 \text{ m}$
Ω	période de rotation de la Terre		$7.29 \cdot 10^{-5} \text{ rad s}^{-1}$
ρ	densité		10^4 kg m^{-3}
η	diffusivité magnétique du noyau		$1.6 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$
η_M	diffusivité magnétique du manteau		$1.6 - 1600 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$
ν	viscosité dynamique du noyau		$7.0 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$
B_0	champ magnétique à la C.M.B		$0.46 \cdot 10^{-3} \text{ T}$
K^{CMB}	constante de couplage	$\frac{\Gamma_{dim}}{iT\delta\omega_M}$	$-1.85 \cdot 10^{-5}$
E	nombre d'Ekman	$\frac{\nu}{\Omega R^2}$	$8.0 \cdot 10^{-15}$
E_m	nombre d'Ekman magnétique du noyau	$\frac{\eta}{\Omega R^2}$	$1.8 \cdot 10^{-9}$
E_m^M	nombre d'Ekman magnétique du manteau	$\frac{\eta_M}{\Omega R^2}$	$1.8 \cdot 10^{-9} - 1.8 \cdot 10^{-6}$
Λ	nombre d'Elsasser	$\frac{\sigma B_0^2}{\rho \Omega}$	0.14
P_m	nombre de Prandtl magnétique	$\frac{\nu}{\eta}$	$4.5 \cdot 10^{-6}$

TAB. 7.1 – Propriétés physiques et nombres sans dimensions utilisés dans cette étude.

7.2 Formulation mathématique du couplage magnéto-visqueux

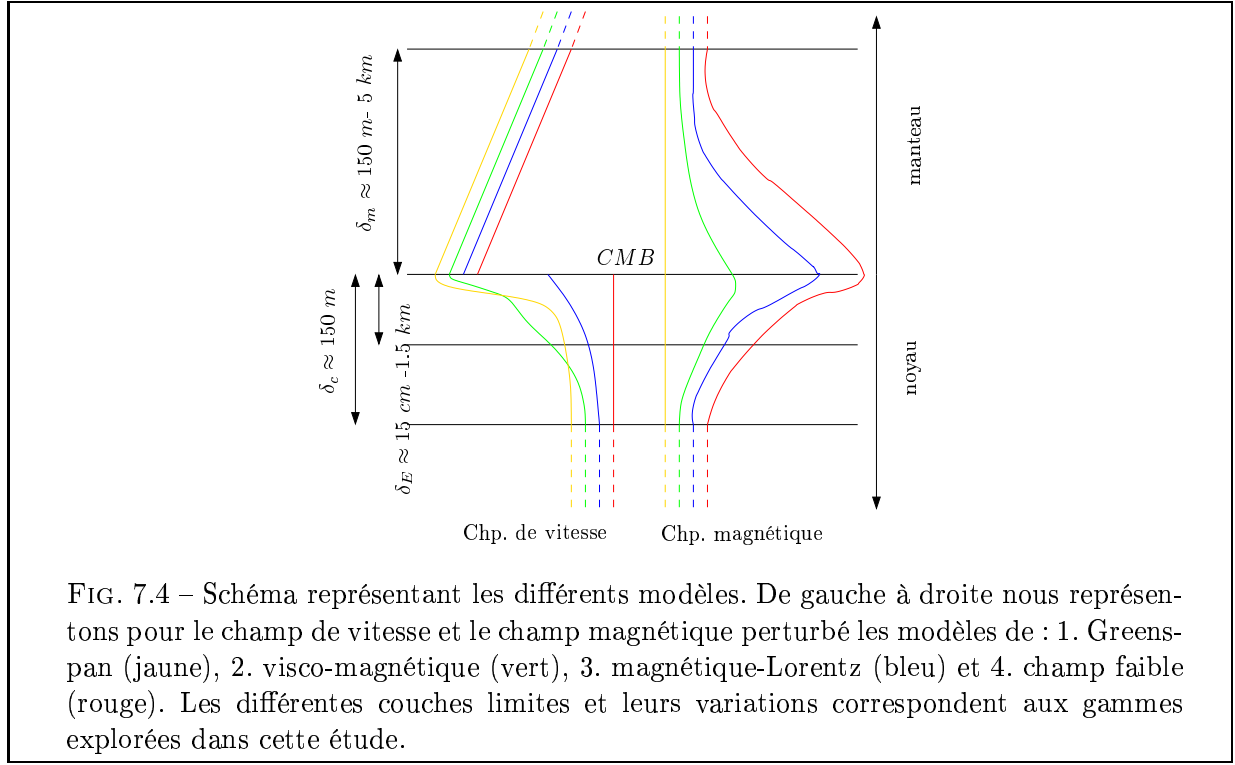
Les équations que nous allons considérer sont les équations de Navier-Stokes et d'induction (2.67). Nous les présentons ici dans une forme adimensionnalisée, faisant intervenir les grandeurs et les nombres sans dimensions présentés dans le tableau 7.2.

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{B} = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{v} + E_m \Delta \mathbf{B} \quad (7.5)$$

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} + 2\mathbf{e}_z \times \mathbf{v} + \mathbf{e}_z \times (\mathbf{e}_z \times \mathbf{r}) + \frac{\partial \mathbf{e}_z}{\partial t} \times \mathbf{r} = -\nabla P + E_m \Lambda (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} + E \Delta \mathbf{v} \quad (7.6)$$

$\mathbf{B}$ désigne le champ magnétique, $\mathbf{v}$ le champ de vitesse et $\mathbf{e}_z = \frac{\Omega \mathbf{c}}{\Omega}$. Il peut être intéressant de rappeler la signification des différents termes de l'équation de la dynamique. Pour la partie droite de l'équation nous voyons apparaître successivement le terme de pression, les forces de Lorentz et les forces visqueuses. Pour le terme de gauche, on voit apparaître successivement le terme d'inertie $\frac{D\mathbf{v}}{Dt}$ qui va faire apparaître un terme non-linéaire, l'accélération de Coriolis et l'accélération centrifuge pour ces équations développées dans un référentiel tournant. Le dernier terme, l'accélération de Poincaré $\frac{\partial \mathbf{e}_z}{\partial t} \times \mathbf{r}$ est négligeable dans ce problème, on peut le démontrer en la comparant à l'accélération de Coriolis dont la contribution est fondamentale dans le problème ; les mouvements de nutation sont de fréquence diurne dans le référentiel d'étude, or à cette échelle de temps là, les variations de Ω liées aux nutations sont faibles. La valeur $\frac{\partial \Omega}{\partial t}$ de la nutation la plus ample (nutation de Bradley), est estimée à $\approx 10^4 \text{ ms} - d'arcs \text{ par an}$ ce qui est équivalent à environ 10^{-11} s^{-2} . Ω^2 de son côté vaut $5 \cdot 10^{-9} \text{ s}^{-2}$. La nutation annuelle rétrograde quant à elle a une amplitude de 4 ordres de grandeurs inférieurs à la nutation de Bradley. Ainsi l'accélération de Coriolis est $\approx 10^3$ plus grande que l'accélération de Poincaré.

7.2.1 Les approximations



Les termes des équations précédentes à conserver vont dépendre des approximations que nous allons faire sur la dynamique de l'interface. La question est de savoir quelles forces vont pouvoir équilibrer les forces de Coriolis si la dynamique joue un rôle et comment exprimer les termes d'induction et de diffusion du champ magnétique lorsque ce dernier rentre en jeu dans le problème. Plusieurs études ont déjà été réalisées sur le sujet ([Rochester, 1976; Loper, 1975; Buffett, 1992; Buffett *et al.*, 2002]). On peut considérer tout d'abord deux cas extrêmes, le premier sans champ magnétique (régime purement visqueux, $\Lambda_d = 0$), le deuxième sans viscosité (régime purement magnétique, $E = 0$). Considérons tout d'abord le premier cas qui a été résolu par [Greenspan, 1968; Loper, 1975]. Sans champ magnétique, seule l'équation de la dynamique sans forces de Lorentz va gouverner l'écoulement, un cisaillement de vitesse apparaîtra sur l'épaisseur correspondant à la couche d'Ekman (en $\sqrt{\frac{\nu}{\Omega}}$) et le couplage entre le noyau liquide et le manteau sera un couplage purement visqueux. Nous nommons ce premier modèle, modèle de Greenspan.

A l'inverse on peut étudier l'hypothèse d'un régime purement magnétique (sans viscosité). Dans ce deuxième cas, une distinction est à faire entre l'hypothèse de champ magnétique faible ([Buffett, 1992]) et l'hypothèse de champ fort ([Buffett *et al.*, 2002]). En allant du plus simple au plus complexe, on peut dans un premier temps ne considérer qu'un régime purement magnétique, où les mouvements de la frontière vont induire des courants sur une épaisseur de peau correspondant à $\sqrt{\frac{\eta_m}{\Omega}}$ dans le manteau et à $\sqrt{\frac{\eta_c}{\Omega}}$ dans le noyau. Ce premier cas correspond à une configuration où le champ magné-

tique ambiant est assez faible pour que les forces de Laplace n'aient pas d'influence sur l'écoulement dans le noyau. La présence d'un champ magnétique induit est uniquement dû à la présence de la discontinuité de vitesse à l'interface noyau-manteau. Ce premier système se réduit à considérer l'équation d'induction avec des conditions aux limites qui feront apparaître la discontinuité de vitesse à travers l'expression des conditions de passage sur le champ électromagnétique (2.69).

Un deuxième cas apparaît lorsque le champ magnétique est d'intensité plus forte $\Lambda_d \mathcal{O}(1)$ ([Buffett *et al.*, 2002]) , et où les forces de Lorentz équilibrent celles de Coriolis. Il faut alors résoudre l'équation de la dynamique. Dans ce cas les forces de Lorentz vont induire un cisaillement de vitesse à la frontière. A leur tour, ces gradients de vitesse (différents d'une simple rotation) vont induire des courants dans la couche (système couplé par les forces de Lorentz). Bien qu'il y ait un cisaillement de vitesse d'origine magnétique, avec l'hypothèse de viscosité nulle, la discontinuité de vitesse qui apparaissait dans le problème précédent est conservée. Pour ces deux modélisations de la CMB, on obtient un couplage purement magnétique faisant intervenir les propriétés électromagnétiques de chaque domaine.

Le modèle que nous proposons est de prendre en compte le modèle de champ fort en y rajoutant le terme de viscosité. L'influence visqueuse de la frontière va se faire sentir sur une épaisseur $\sqrt{\frac{\nu}{\Omega}}$ dans le noyau et l'influence magnétique sur une épaisseur $\sqrt{\frac{\eta_c}{\Omega}}$. Le nombre de Prandtl magnétique qui caractérise le rapport de ces deux épaisseurs $\frac{\nu}{\eta_c}$ va donc être un paramètre fondamental de notre problème. Dans la zone de chevauchement de ces deux couches, l'écoulement va être maintenant sensible aux forces visqueuses et aux forces de Lorentz. Les deux types de couplage seront à considérer. Tout d'abord un couplage visqueux basé sur un écoulement de vitesse d'origine magnéto-visqueuse (c'est à dire produit par un champ de vitesse soumis aux forces visqueuses et magnétiques). Ensuite un couplage magnétique basé sur un champ induit par un cisaillement de vitesse dû aux forces visqueuses et magnétiques.

Quelle approximation prendre en compte pour la CMB ?

Pour pouvoir choisir entre les trois premiers modèles proposés, il faut pouvoir évaluer de nombreuses quantités relatives à l'interface, telles que l'intensité du champ magnétique, la valeur de la viscosité du fer, les conductivités électriques des deux domaines. Ces valeurs ne sont pas toujours très bien contraintes. Dans l'optique de savoir si une dynamo générée par la précession était envisageable pour la Terre, ([Loper, 1975]) a déterminé pour un mouvement de spin-over le couplage visqueux, avec les hypothèses du modèle de Greenspan, et le couplage magnétique avec les hypothèses de champ faible en se basant sur la viscosité moléculaire du fer estimée à $10^{-6} m^2 s^{-1}$. Dans cette première étude il déduisait une prédominance forte du couplage magnétique. A partir des années 90, les études sur le couplage de l'interface noyau manteau sont reprises pour tenter de contraindre les quantités de la CMB qui peuvent maintenant être inversées à partir de l'observation des nutations ([Mathews *et al.*, 1991a]). Ainsi ([Buffett, 1993]) développe le modèle de champ faible à des géométries de champ magnétique plus proche de celui de l'interface noyau manteau. Malgré une hypothèse de conductivité électrique égale

de part et d'autre de l'interface, hypothèse controversée par certains auteurs ([Poirier *et al.*, 1998]) l'intensité du champ magnétique inversé s'avère être plus importante que la valeur déduite des observations ([Langel & Estes, 1988; Olsen, 2002]). L'introduction des forces de Lorentz avec le modèle de champ fort ([Buffett *et al.*, 2002]) aggrave le problème. Et pourtant la question portant sur l'interprétation de la constante de couplage ImK^{CMB} en terme de couplage purement magnétique semblait résolue dès lors que l'on se basait sur la viscosité moléculaire du fer. En effet l'épaisseur de la couche d'Ekman est de 30 cm et négligeable devant celle de peau qui est de l'ordre de 150 m. Néanmoins si la viscosité moléculaire du problème est remplacée par un terme de viscosité apparente qui prend en compte le mélange efficace de la turbulence en volume ou encore l'influence de la rugosité de surface sur l'écoulement, il est possible d'avoir des épaisseurs de couches limites bien plus grandes que celles estimées par la valeur moléculaire. En constatant que finalement de nombreuses situations étaient envisageables et qu'il n'était a priori pas possible de statuer définitivement sur l'un des trois modèles, nous avons choisi de développer un modèle complet. Ainsi la confrontation des résultats de ce modèle complet à la constante ImK^{CMB} permet d'inverser tout un ensemble de paramètres (ν, η_m, B) qui représentent un ensemble de solutions possibles pour l'interface noyau manteau parmi lesquelles on retrouve les solutions des modèles précédents.

Théories de couches limites

Nous allons utiliser une approche de couche limite pour la zone proche de l'interface noyau-manteau. Cela se traduit par des fortes variations de quantités dans la direction perpendiculaire à la couche (ici la direction radiale $\mathbf{r}$). Ainsi :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial r} \gg \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \theta}, \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \varphi} \quad \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial r} \gg \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \theta}, \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \varphi} \quad (7.7)$$

La conservation de la masse pour un fluide incompressible ($\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$) ainsi que la conservation du flux magnétique dans la couche ($\nabla \cdot \mathbf{b} = 0$) induisent également des restrictions sur les quantités elles-mêmes.

$$b_\theta, b_\varphi \gg b_r \quad v_\theta, v_\varphi \gg v_r \quad (7.8)$$

Nous nous placerons par ailleurs dans le cas où les vitesses $\mathbf{v}$ et le champ magnétique $\mathbf{b}$ induits par les couches sont faibles par rapport à la vitesse de rotation et au champ magnétique de la dynamo.

$$\mathbf{v} \ll \Omega \mathbf{r} \quad \mathbf{b} \ll \mathbf{B}_0 \quad (7.9)$$

soit en adimensionné :

$$\mathbf{b}, \mathbf{v} \ll \mathcal{O}(1) \quad (7.10)$$

7.2.2 Notations complexes

Le moteur de ces mouvements est la rotation équatoriale du manteau. Nous exprimons la vitesse de la frontière dans le référentiel $\mathcal{R}_c$ ¹ auquel on affecte le repère cartésien $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ et le repère sphérique $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi)$. Le vecteur rotation équatoriale est défini alors de la manière suivante :

$$\delta\omega_M(t) = \delta\omega_M[\mathbf{e}_x \cos t - \mathbf{e}_y \sin t] \quad (7.11)$$

où $\delta\omega_M = \frac{\Omega_{Meq}}{\Omega}$, est la rotation adimensionnée équatoriale du manteau. La vitesse de la frontière devient (figure 7.3) :

$$\mathbf{v}_M = \delta\omega_M \times \mathbf{r}_M = -\delta\omega_M[\mathbf{e}_\theta \sin(t + \varphi) + \mathbf{e}_\varphi \cos \theta \cos(t + \varphi)] \quad (7.12)$$

car en adimensionnée r_M le rayon du noyau est égale à 1. Nous introduisons de nouvelles variables complexes (variables dites d'Elsasser) qui vont permettre de simplifier l'écriture des équations de la dynamique (Buffett *et al.* [2002]). Nous les notons $v_+ = v_\theta + iv_\varphi$ et $v_- = v_\theta - iv_\varphi$. Avec cette notation la vitesse du manteau est :

$$v_{M\pm} = \frac{i\delta\omega_M}{2}[(1 \mp \cos(\theta)) \exp i(t + \varphi) - (1 \pm \cos(\theta)) \exp -i(t + \varphi)] \quad (7.13)$$

On peut décomposer cette condition aux limites en deux parties, celle notée (+), correspondant à la perturbation temporelle $\exp(it)$ et celle (−) correspondant à $\exp(-it)$. La manipulation des équations 7.5 permet par le biais des notations complexes d'obtenir des équations scalaires (v_+, b_+ et v_-, b_-) découplées. Dans un deuxième temps l'expression 7.12 permet de séparer les équations 7.5 en quatre équations indépendantes, correspondantes aux forçages induits par $v_+^{(+)}, v_+^{(-)}, v_-^{(-)}, v_-^{(+)}$. Les dérivées en temps présentes dans les équations s'écrivent alors simplement de la forme :

$$\text{forage}(-) \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} = -i \quad (7.14)$$

$$\text{forage}(+) \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} = +i \quad (7.15)$$

¹ $\mathcal{R}_c$ est le référentiel attaché à la rotation en bloc du noyau

7.2.3 Conditions aux limites

Le nombre de conditions aux limites nécessaires pour résoudre le problème augmente avec l'ordre des équations différentielles qui lui varie selon les modèles. Ainsi pour le problème de Greenspan seulement deux conditions sont nécessaires sur le champ de vitesse alors que pour le modèle complet on a besoin de six conditions aux limites (résolution conjointes des champs magnétiques induits dans le noyau et dans le manteau ainsi que du champ de vitesse) . Deux conditions concernent le champ de vitesse $\mathbf{v}$ qui doit d'un côté se raccorder à la vitesse du manteau et de l'autre tendre vers la vitesse imposée par la rotation solide du coeur du fluide ; quatre concernent le champ électromagnétique perturbé ; tout d'abord celui-ci s'annule en dehors des couches limites (coté manteau et coté noyau). Ensuite pour la frontière nous exploitons la continuité du champ magnétique et la continuité des courants qui s'avèrent être respectées selon toutes les composantes puisque le problème de couche limite est entièrement résolu.

7.2.4 Calcul des couples

Couplages visqueux et magnétiques se déterminent à partir des champs perturbés. Le couple visqueux Γ_v se détermine à partir du tenseur des contraintes visqueuses σ_v (voir C.2) :

$$\Gamma_v = \iint_S \mathbf{r} \times \sigma_v d\mathbf{S} \quad (7.16)$$

On exprime tout d'abord σ_v en coordonnées sphériques ($\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi$) afin de l'exprimer en fonction des vitesses (v_+, v_-). L'intégration s'effectue sur la surface de la base du manteau dont la forme est considérée sphérique ($d\mathbf{S} = \mathbf{n} r_M \sin \theta d\theta d\varphi$ où $\mathbf{n}$ est la normale à la surface considérée pointant en direction du manteau ($r_M = 1$). Cette approximation par rapport à la forme ellipsoïdale de l'interface noyau-manteau amène une erreur dont la contribution est négligeable par rapport à la valeur totale du couple (ellipticité de l'interface de l'ordre de $e_f \approx 0.003$). On introduit la notation suivante $\bar{\Gamma} = \Gamma_x + i\Gamma_y$, pour obtenir un couple complexe qui sera facilement exploitable pour la confrontation avec les résultats des modèles de nutation. Après quelques étapes détaillées dans l'annexe C, on obtient l'expression suivante :

$$\bar{\Gamma}_v = \frac{i}{2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left[(1 + \cos \theta) \frac{\partial v_+}{\partial r} + (1 - \cos \theta) \frac{\partial v_-}{\partial r} \right] \exp(i\varphi) \sin \theta d\theta d\varphi \quad (7.17)$$

La démarche pour déterminer le couple magnétique est assez analogue. Le couplage magnétique résulte de l'intégration de tous les courants induits par la différence de

rotation entre les deux domaines et des cisaillements de vitesse associés dans les couches limites de part et d'autre de la frontière :

$$\Gamma_m = \int \int \int_{V_{lim}} (\mathbf{r} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{B}_0)) dV_{lim} \quad (7.18)$$

$$(7.19)$$

où $\mathbf{B}_0$ est le champ ambiant et $\mathbf{j}$ les courants induits dans la couche. Une formule proposée par Rochester [1962] permet d'écrire l'expression 7.18 comme une simple intégrale de surface des valeurs du champ magnétique à l'interface. L'écriture vectorielle de cette formule est la suivante :

$$\Gamma_m = \int \int_S (\mathbf{r} \times \mathbf{b})(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{n}) dS \quad (7.20)$$

$$(7.21)$$

Avec le même formalisme que précédemment on obtient l'expression complexe suivante pour le couple magnétique :

$$\bar{\Gamma}_m = (\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y) \cdot \int \mathbf{r} \times (\beta \mathbf{b}) dS \quad (7.22)$$

$$= \frac{i}{2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \beta [(1 + \cos \theta)b_+ + (1 - \cos \theta)b_-] \exp(i\varphi) \sin \theta d\theta d\varphi \quad (7.23)$$

L'intégration sur la sphère va pouvoir se résoudre de manière analytique ou numérique, dès lors que la fonction $\beta(\theta, \varphi)$, composante radiale adimensionnée du champ magnétique imposé, sera définie sur toute cette sphère et que le champ $\mathbf{b}$ sera résolu.

7.3 Les modèles asymptotiques

La démarche qui vient d'être développée peut aboutir à un développement analytique complet des champs $\mathbf{v}$ et $\mathbf{b}$ dans le cas des deux premières approximations d'un couplage purement visqueux ou purement magnétique. Ces deux modèles nous servent également de référence pour valider notre modèle visco-magnétique dans les régimes asymptotiques ($\Lambda = 0$ et $E = 0$)

7.3.1 Le modèle de Greenspan

On cherche à obtenir des équations qui nous permettront de résoudre le champ de vitesse parallèle à la couche v_θ, v_φ . Ce problème est analogue au problème résolu au paragraphe 2.3 dans le cadre du spin over cette fois-ci.

On utilise uniquement l'équation de la dynamique, pour laquelle on intègre la force centrifuge dans le terme de pression corrigée Π :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + 2\mathbf{e}_z \times \mathbf{v} = -\nabla \Pi + E \Delta \mathbf{v} \quad (7.24)$$

Afin d'éliminer Π , on applique l'opérateur rotationnel à l'équation précédente. En ne conservant que les termes dominants de l'équation dans notre approche linéaire de couche limite, on obtient les deux relations suivantes :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\varphi}{\partial t} + \cos(\theta) v_\theta \right) = E \frac{\partial^3 v_\varphi}{\partial^3 r} \quad (7.25)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{\partial t} - \cos(\theta) v_\varphi \right) = E \frac{\partial^3 v_\theta}{\partial^3 r} \quad (7.26)$$

qui se trouvent être les composantes selon e_θ et e_φ de $(\nabla \times 7.24)$. L'utilisation des notations complexes nous fait aboutir à deux équations, l'une en v^+ , l'autre en v^- :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial}{\partial t} \pm 2i \cos(\theta) - E \frac{\partial^2}{\partial^2 r} \right) v^\pm = 0 \quad (7.27)$$

Les variations temporelles imposées par la frontière, nous permettent d'écrire quatre équations d'évolution des vitesses :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(i \pm 2i \cos(\theta) - E \frac{\partial^2}{\partial^2 r} v_\pm^{(+)} \right) = 0 \quad (7.28)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(-i \pm 2i \cos(\theta) - E \frac{\partial^2}{\partial^2 r} v_\pm^{(-)} \right) = 0 \quad (7.29)$$

On voit apparaître une équation différentielle du second ordre en r à coefficient constant ($A\ddot{v} + Bv = 0$), dont les racines complexes conjuguées sont notées Z_i . La résolution de ces équations permettra d'obtenir le champ de vitesse à une constante près (condition de jauge). Il reste à exploiter les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{aligned}
\lim_{rE^{-1/2} \rightarrow -\infty} v_{\pm} &= 0 \\
\text{en } r = 1, \quad v_{\pm} &= v_{M\pm} \\
&= \frac{i\delta\omega_M}{2} [(1 \mp \cos(\theta)) \exp i(t + \varphi) - (1 \pm \cos(\theta)) \exp -i(t + \varphi)]
\end{aligned} \tag{7.30}$$

La première limite impose de conserver uniquement la racine Z_i telle que $Re(Z_i) > 0$. On obtient finalement les champs de vitesses perturbés suivants :

$$v_{(+)}^{\pm} = \frac{i\delta\omega_M}{2} (1 \mp \cos(\theta)) \exp i(t + \varphi) \exp \left(-\sqrt{\frac{i(1 \pm 2 \cos(\theta))}{E}} (1 - r) \right) \tag{7.32}$$

$$v_{(-)}^{\pm} = \frac{-i\delta\omega_M}{2} (1 \pm \cos(\theta)) \exp -i(t + \varphi) \exp \left(-\sqrt{\frac{i(-1 \pm 2 \cos(\theta))}{E}} (1 - r) \right) \tag{7.33}$$

La dernière étape consiste à intégrer le champ de vitesse dans la formule du couple visqueux (7.17). La dépendance en φ de la vitesse montre que pour le couple de Greenspan seules les vitesses complexes $v_{(-)}^{\pm}$ vont jouer un rôle. Ainsi le calcul du couple donnera :

$$\bar{\Gamma}_v = \frac{\pi\delta\omega_M}{2\sqrt{E}} \exp(-it) \int_0^{\pi} [(1 + \cos \theta)^2 \sqrt{i(-1 + 2 \cos(\theta))} + (1 - \cos \theta)^2 \sqrt{i(-1 - 2 \cos(\theta))}] \sin \theta d\theta \tag{7.34}$$

Cette intégrale peut se résoudre de manière formelle, Bruno Lehouque actuellement en thèse sur les couplages dans un ellipsoïde en présence d'une graine (application aux mouvements de Venus) trouve pour le couple de Greenspan :

$$\bar{\Gamma}_v = \frac{\pi\delta\omega_M}{2\sqrt{E}} \exp(-it) \left(\frac{2\sqrt{2}}{35} (19 + 9\sqrt{3}) + i \frac{2\sqrt{2}}{35} (19 - 9\sqrt{3}) \right) \tag{7.35}$$

On retrouve les résultats établis par (Greenspan [1968], Loper [1975]), faisant apparaître les deux grandeurs caractéristiques approchées du frottement d'Ekman ($2.62 + i0.259$).

Revenons un instant à la constante de couplage des nutations. Maintenant que tout le formalisme mathématique a été abordé nous pouvons relier directement cette constante au couplage (en écriture complexe) présent à la CMB, qu'il soit d'origine magnétique ou visqueux :

$$K^{CMB} = \frac{\bar{\Gamma}_{dim}}{iI\delta\omega_M} \tag{7.36}$$

avec I , moment d'inertie du noyau ($I = 0.06 \cdot 10^{36} \text{ kgm}^2$). $\bar{\Gamma}_v$ ayant été adimensionné par $\rho R^5 \Omega^2 E$, on récupère un couple dimensionné qui évolue en $\sqrt{\nu}$, dont l'action est principalement dissipative (rapport d'un ordre de grandeur entre la contribution pour $Im(K^{CMB})$ et $Re(K^{CMB})$). Pour expliquer les observations des nutations avec un couple purement visqueux, on a recours à un nombre d'Ekman de $1.6 \cdot 10^{-9}$ soit une viscosité efficace estimée à $1.44 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ avec ce modèle. Cette valeur sera discutée avec les résultats des modèles suivants.

7.3.2 Le modèle de champ faible

Le deuxième modèle asymptotique est l'approximation de champ faible abordé dans l'article Buffett [1992]. Ce premier modèle nous a permis entre autre de comparer et valider notre modèle global et de comprendre les motivations qui ont poussé leur auteur à conclure sur la présence d'un champ magnétique fort dans les petites échelles spatiales pour expliquer les données observées.

L'hypothèse de champ faible se résume aux équations d'induction :

$$\forall r < 1, \quad \frac{\partial b_{c\pm}}{\partial t} - E_m \frac{\partial^2}{\partial r^2} b_{c\pm} = \beta \frac{\partial v_{\pm}}{\partial r} \quad (7.37)$$

$$\forall r > 1, \quad \frac{\partial b_{M\pm}}{\partial t} - E_m^M \frac{\partial^2}{\partial r^2} b_{M\pm} = 0 \quad (7.38)$$

où b_M désigne le champ induit dans le manteau et b_c le champ induit dans le noyau liquide. $E_m = \frac{\eta_m}{\Omega R^2}$ est le nombre d'Ekman magnétique du noyau et E_m^M celui du manteau. L'induction magnétique est ici uniquement due au mouvement de la frontière (effet de peau). Les conditions aux limites sont celles de continuité du champ magnétique qu'une relation entre les dérivées radiales des champs b que nous déduisons de l'intégration de l'équation d'induction à travers la CMB. (section 2.5).

$$En \quad r = 1, \quad b_{c\pm} = b_{M\pm} \quad (7.39)$$

$$En \quad r = 1, \quad \beta v_{M\pm} = E_m^M \frac{\partial^2}{\partial r^2} b_{M\pm} - E_m \frac{\partial}{\partial r} b_{c\pm} \quad (7.40)$$

$$\lim_{r E_m^{-1/2} \rightarrow -\infty} b_{c\pm} = 0 \quad (7.41)$$

$$\lim_{r E_m^M^{-1/2} \rightarrow +\infty} b_{M\pm} = 0 \quad (7.42)$$

Les deux autres conditions aux limites sont l'annulation du champ magnétique associé à la couche loin de l'épaisseur de peau. L'expression du champ magnétique perturbé se réduit à :

$$b_{\pm}^{(+)} = \frac{\beta}{\sqrt{-iE_m} + \sqrt{-iE_m^M}} v_{\pm}^{(+)} \quad (7.43)$$

$$b_{\pm}^{(-)} = \frac{\beta}{\sqrt{iE_m} + \sqrt{iE_m^M}} v_{\pm}^{(-)} \quad (7.44)$$

Contrairement au champ de vitesse précédent, dont uniquement la forme $v_{\pm}^{-}$ avait une contribution au couple, ici l'expression générale du couple magnétique fait intervenir toutes les composantes du champ magnétique. Ainsi on note :

$$\bar{\Gamma}_m = \bar{\Gamma}_m^{(+)} + \bar{\Gamma}_m^{(-)} \quad (7.45)$$

avec :

$$\bar{\Gamma}_m^{(\pm)} = \frac{1}{2\sqrt{\mp i}} \frac{\delta\omega}{\sqrt{E_m} + \sqrt{E_m^M}} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \beta^2 (\cos(\theta)^2 \mp 1) \exp(\pm i(t + \varphi)) \exp(i\varphi) d\varphi d\theta \quad (7.46)$$

Le résultat de cette expression va dépendre des valeurs de β considérées. Dans certaines configurations il est possible de pousser le calcul analytiquement jusqu'au bout.

Pour une application de ce calcul au cas de la Terre, on peut considérer une première approximation que le champ est principalement dipolaire. Dans ce cas β s'écrit sous la forme $\beta = \cos \theta$, et l'expression du couple devient :

$$\bar{\Gamma}_m = \bar{\Gamma}_m^{(+)} = \frac{\pi(1-i)}{\sqrt{2}(\sqrt{E_m} + \sqrt{E_m^M})} \exp(-it) \int_0^{\pi} \cos(\theta)^2 (\cos(\theta)^2 + 1) d\theta \quad (7.47)$$

$$= \frac{7\pi^2(1-i)}{8\sqrt{2}(\sqrt{E_m} + \sqrt{E_m^M})} \exp(-it) \quad (7.48)$$

On retrouve le résultat de Buffett [1992], où le couple résultant amène une contribution égale sur les parties réelle et imaginaire de la constante K^{CMB} (déphasage de $\frac{\pi}{4}$ par rapport à la composante hors phase des nutations. Physiquement, on peut expliquer le phénomène par le fait qu'un forçage qui s'exerce à un instant t selon une direction, entraînera une perturbation à la profondeur δx que $(\delta x)^2 \eta^{-1}$ plus tard. La contribution totale sur l'ensemble de la sphère entraîne que le couplage résultant est en retard de phase par rapport au forçage. Pour des champs magnétiques à géométrie plus complexe et notamment dans le cas d'un champ non axisymétrique les choses se compliquent. En effet la combinaison du forçage dans le plan de l'équateur avec un champ non axisymétrique ne permet plus d'obtenir un couplage à déphasage constant. Il est néanmoins encore possible pour ce modèle et par certaines règles de symétries,

d'identifier les harmoniques sphériques du champ qui vont contribuer au couplage magnétique. On remarque à ce titre que seul, une partie des harmoniques d'ordre m et n tels que $m + n = 0$ et $m + n = 2$ vont avoir une contribution dans le calcul du couple magnétique. De manière plus générale le couple magnétique va être sensible à l'intensité et à la géométrie du champ magnétique ambiant. L'intensité du champ est important en terme de Forces de Lorentz qui ne sont pas prises en compte dans ce premier modèle. La pertinence de l'approche diminue lorsque l'on considère un champ magnétique fort ($\Lambda_d = 1$). Ensuite la géométrie du champ magnétique est également fondamentale car l'interaction de champs à certaines géométries avec la géométrie préférentielle de l'écoulement peut modifier sensiblement le couplage.

L'utilisation de ce modèle par Buffett [1992] pour expliquer les données de nutation avait été le suivant. La composante dipolaire du champ magnétique étant relativement bien contrainte par les observations, l'auteur choisit donc de fixer ce paramètre et de modéliser le reste du champ magnétique par un champ globalement constant (indépendant des coordonnées de l'espace) sur l'épaisseur de la couche limite. Une hypothèse forte dans son utilisation du modèle est de supposer une couche à haute conductivité électrique à la base du manteau ce qui favorise le couplage ($\bar{\Gamma}_m \approx \frac{1}{\sqrt{E_m} + \sqrt{E_m^M}}$). La grandeur qu'il déduit est une valeur *RMS* du champ hors composante dipolaire. Pour autant la valeur qu'il inverse pour ce champ est $B_{rms} = 0.44 \text{ mT}$ soit un champ total de $B_{rms} = 0.49 \text{ mT}$ ce qui surestime la valeur déduite de l'extrapolation des observations magnétiques qui peut être évaluée à environ $B_{rms} = 0.44 \text{ mT}$ ([Langel & Estes, 1988]). On observe ici un parallèle entre la dépendance du couple de Greenspan vis à vis de la viscosité $\sqrt{\nu}$ et de ce couple magnétique vis à vis du rapport de diffusivités magnétiques $\frac{\sqrt{\eta}}{1 + \sqrt{\frac{\eta M}{\eta}}}$.

7.4 Le modèle visco-magnétique

Ce modèle fait l'objet de l'article présenté au paragraphe suivant. Dans cette partie nous allons simplement donner un complément d'explication sur la construction du modèle, et sur les choix qui ont orienté notre étude, notamment en terme de géométrie du champ magnétique. Le modèle visco-magnétique nécessite la résolution complète du système d'équations couplées 7.5, où l'on considère les forces visqueuses et les forces de Lorentz. Avec les mêmes étapes de simplifications que pour les modèles précédents (linéarisation et approximation de couche limite), on obtient le système d'équation suivant :

$$\forall r < 1, \quad \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} - E_m \frac{\partial^2}{\partial r^2} \mathbf{b} = \beta \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial r} \quad (7.49)$$

$$\forall r < 1, \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + 2\mathbf{e}_z \times \mathbf{v} - E \frac{\partial^2}{\partial r^2} \mathbf{v} = -\nabla \Pi + E_m \Lambda \left(\beta \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial r} - \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial r} \mathbf{e}_r \right) \quad (7.50)$$

$$\forall r > 1, \quad \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} - E_m^M \frac{\partial^2}{\partial r^2} \mathbf{b} = 0 \quad (7.51)$$

la première correspondant à l'induction dans le noyau, la deuxième à l'équation de la dynamique du noyau liquide et la dernière à l'induction dans le manteau. Toujours en exploitant les composantes parallèles à la couche, du rotationnel de l'équation 7.50, on obtient deux relations couplant les composantes v_θ, v_φ et b_θ, b_φ . En substituant $\mathbf{b}$ dans cette nouvelle équation par son expression en $\mathbf{v}$ donnée dans l'équation ??, et en utilisant à nouveau les notations complexes, on obtient une seule équation sur la vitesse :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - E \frac{\partial^2}{\partial r^2}\right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - E_m \frac{\partial^2}{\partial r^2}\right) (\nabla \times \mathbf{v}) - 2 \cos \theta \left(\frac{\partial}{\partial t} - E_m \frac{\partial^2}{\partial r^2}\right) \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial r} = E_m \Lambda \beta^2 \frac{\partial (\nabla \times \mathbf{v})}{\partial r}$$

La vitesse du manteau impose les variations en temps des équations précédentes. De manière analogue aux modèles précédents, nous obtenons une équation différentielle en r pour la vitesse toujours à coefficients constant du type $(A \partial_4 v + B \partial_2 v + C v = 0)$. La résolution de cette équation nécessite quatre conditions aux limites sur la vitesse. Nous en obtenons deux directement par continuité des vitesses aux limites du domaine. Les deux autres vont s'obtenir à partir des contraintes de continuité du champ magnétique et des courants électriques. Ainsi on formule les six conditions suivantes :

$$\begin{aligned} \lim_{r E^{-1/2} \rightarrow -\infty} v &= 0 \\ \lim_{r (E_m^M)^{-1/2} \rightarrow \infty} b &= 0 \\ \lim_{r (E_m)^{-1/2} \rightarrow -\infty} b &= 0 \\ En \quad r = 1 \quad v_{c\pm} &= v_{M\pm} \\ En \quad r = 1 \quad b_{c\pm} &= b_{M\pm} \\ En \quad r = 1 \quad E_m^M \frac{\partial^2}{\partial r^2} b_{M\pm} &= E_m \frac{\partial}{\partial r} b_{c\pm} \end{aligned}$$

Le détail des calculs est présenté dans l'article qui suit. On obtient les champs $\mathbf{v}$ et $\mathbf{b}$ en tous points en fonction des paramètres du problème (E, E_m, E_m^M, Λ) . La figure 7.5 présente les profils obtenus pour différentes valeurs de E (tout autres paramètres constants par ailleurs). On observe notamment l'augmentation de l'influence des effets visqueux à mesure que l'on force le nombre d'Ekman. Cette tendance était clairement attendu sur le profil de vitesse, mais on remarque que ceci influence également le champ magnétique induit. Le pic de perturbation est d'abord amoindri. Par ailleurs ce maximum de perturbation se déplace en direction de l'intérieur du fluide toujours sous l'action de la viscosité et le champ induit pénètre moins loin dans le manteau. Le couplage magnétique va sensiblement être diminuer par la présence des forces visqueuses. En observant

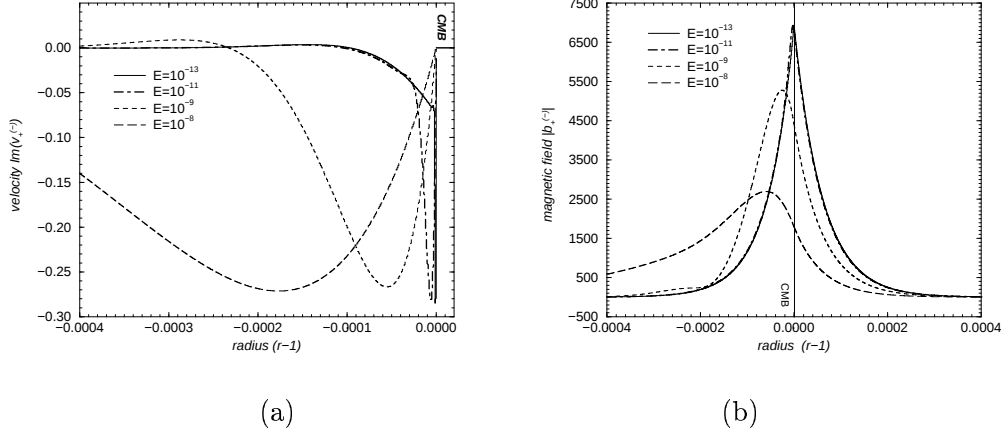


FIG. 7.5 – Profiles obtenus à une latitude de 46° . Le champ imposé est dipolaire d'intensité maximum $B_0 = 0.46 \cdot 10^{-3}$ (cas terrestre). $E_m^M = 1.8 \cdot 10^{-9}$, les autres paramètres sont ceux du tableau 7.2

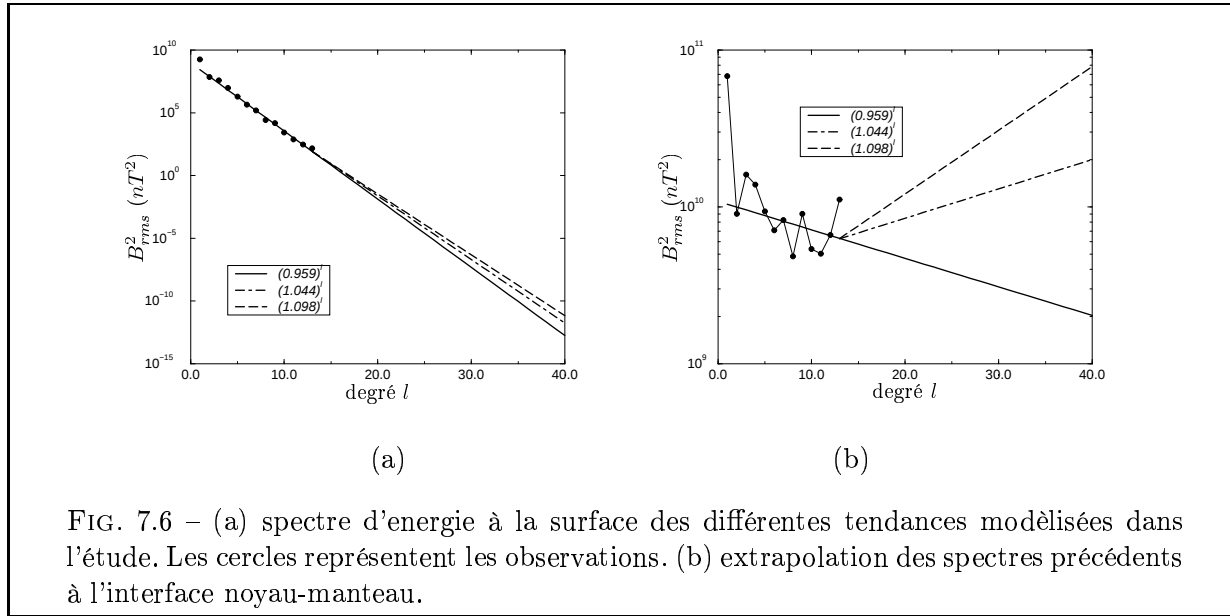
les allures des courbes à $E = 10^{-9}$ et $E = 10^{-11}$ on peut identifier l'imbrication des couches présentées au paragraphe 7.2.1. Dans la première zone au plus proche de la CMB, forces visqueuses et magnétiques jouent un rôle équivalent. Le reste du profile est affecté principalement par les phénomènes magnétiques. Cette deuxième zone se réduit jusqu'à disparaître pour des nombres d'Ekman de 10^{-8} .

7.4.1 Couplage et champ magnétique imposé

Les profils précédents ont été obtenus pour des géométries simples du champ magnétique. L'application au cas terrestre peut être plus poussée dès lors que l'on modélise des degrés supérieures d'harmoniques sphériques. L'intervention de β^2 dans les équations montre que la géométrie du champ magnétique ambiant va intervenir non seulement au niveau de la formulation des champs induits mais également fortement au niveau du couplage magnétique dont la dépendance en β est quadratique. Voyons quelles modifications du couplage magnétique peut amener une géométrie de champ ambiant plus complexe.

Le Champ magnétique imposé

En annonce dans l'introduction, nous parlions du fait que le champ magnétique observable provenant du noyau était contraint jusqu'au degré d'harmonique $l = 13$. Pour des échelles plus fines, l'écrantage du manteau empêche toute observation de ce champ. Par prolongement du potentiel jusqu'à l'interface noyau manteau, et en supposant le manteau isolant, il est donc possible de reconstituer le champ magnétique à l'interface noyau-manteau jusqu'au degré 13 et de l'utiliser pour notre modèle. Ainsi, nous avons



utilisé les données provenant de IAGA (International Association of Geomagnetism and Aeronomy) qui à partir des données satellitaires reconstruisent le modèle de champ en harmoniques sphériques et fournissent dès lors les coefficients de Gauss g_n^m et h_n^m . Ainsi jusqu'à $l = 13$, β est donné par :

$$\beta = \sum_{l=0}^{l=l_{max}} \sum_{m=0}^{m=l} \beta_l^m Y_l^m(\theta, \varphi) \quad (7.52)$$

$$= \frac{1}{B_0 \mu_0} \sum_{l=0}^{l=13} \sum_{m=0}^{m=l} (l+1) \left(\frac{R_T}{R}\right)^{n+2} P_l^m(\theta) (g_l^m \cos(m\varphi)_l^m \sin(m\varphi)) \quad (7.53)$$

Que peut-on dire de la contribution du champ de plus petite échelle ? Celui-ci peut s'estimer par l'extrapolation des données visibles aux petites échelles. L'extrapolation peut être faite à partir du spectre d'énergie magnétique visible, extrapolé à la CMB, on peut donc utiliser la loi de puissance extrapolée par Stacey [1992] :

$$Rst(l) = 1.085 * 10^{10} * (0.959)^l \quad (7.54)$$

pour les harmoniques supérieures à 13. La première remarque au sujet de cette loi serait que son estimation n'est pas unique. L'opération de prolongement du champ magnétique à la CMB donne une information sur le champ avec une certaine imprécision qui augmente à mesure que l'échelle est petite. Ainsi nous avons choisi de tester d'autres types de spectres basés également sur une loi puissance (figure 7.6). Le premier correspond à l'équivalent de 10 fois plus d'énergie magnétique pour le degré 30, le deuxième à 10 fois plus d'énergie pour le degré 25. Leurs équations sont les suivantes :

$$Rst_1(l) = 3.580 * 10^9 * (1.044)^l \quad Rst_2(l) = 1.865 * 10^9 * (1.098)^l \quad (7.55)$$

Le choix de spectres favorisant les petites échelles vient de notre volonté de comparer ces résultats aux hypothèses formulées par [Buffett *et al.*, 2002] de forte contribution des petites échelles du champ magnétique pour expliquer les nutations. On se place ainsi dans le meilleur cas de figure pour un fort couplage magnétique. Cette situation est envisageable dans le cas où l'échelle d'injection de l'énergie magnétique par le processus dynamo est au delà de $l=13$. Dans le cas contraire on devrait assister à une plus forte décroissance du spectre magnétique.

Nous avons vérifié que ces spectres restaient acceptables d'un point de vue énergétique pour simuler le champ magnétique de la CMB en terme d'énergie dissipée. En effet le flux d'énergie à la base du manteau ne peut pas dépasser n'importe quel seuil, cela impose une contrainte supplémentaire sur le spectre d'énergie du champ magnétique présent à l'interface. L'estimation de la dissipation par effet joule associée au champ magnétique se fait à partir des modèles issus de [Gubbins, 1975]. Pour cela, l'auteur résoud l'équation de la diffusion sur une sphère, dont les solutions font apparaître les fonctions de Bessel sphériques. Afin de contraindre de manière supplémentaire le champ magnétique tel qu'il soit solution des équations de la MHD, on obtient une dissipation minimum du champ toroïdal d'après la formule de [Moffatt, 1978] donnée dans [Roberts *et al.*, 2003] :

$$\mathcal{Q}_{min} = \sum_{l=1}^{l=\infty} q_l = \sum_{l=1}^{l=\infty} \frac{2\pi\eta_c R \alpha_{l-1}^4 Rst_i(l)}{\mu_0 l(2 * l + 1)} \quad (7.56)$$

avec α_l correspondent aux premiers zéros des fonctions de Bessel de degré l :

$$\alpha_l \approx (l + \frac{1}{2}) + 1.85576(l + \frac{1}{2})^{1/3} + (l + \frac{1}{2}) + 1.03315(l + \frac{1}{2})^{-1/3} \quad (7.57)$$

Les calculs de couple ont été effectués avec une troncature minimum sur le champ magnétique correspondant au degré $l = 40$. Pour le pire cas de figure correspondant au spectre $Rst_2(l)$ pour les degrés supérieurs à 13, on atteint déjà une dissipation minimale pour le champ poloïdal de l'ordre de 0.03 TW (10^{12} Watts) en tronquant celui-ci à 40. Avec une estimation communément admise qui nous donne une dissipation associée au champ toroïdale 10 fois plus forte que celle associée au champ poloïdal, on obtient une dissipation ohmique totale qui constitue déjà une limite supérieure à celle supposée entre 1 et 10 TW pour un champ présent à toutes les échelles ([Anderson, 2002; Buffett, 2002]). Cette configuration extrême est donc déjà peu probable.

Les données énergétiques ne contraignent que partiellement le champ magnétique, ainsi des hypothèses supplémentaires sont nécessaires pour contraindre chaque β_l^m . Plusieurs configurations de champ peuvent se présenter. Nous avons dans un premier temps voulu calculer la valeur du couplage issu d'une equipartition d'énergie sur tous les coefficients, c'est à dire :

$$Rst_i(l) = (l+1) \sum_{m=0}^{m=l} (g_m^l{}^2 + h_m^l{}^2) = (l+1)(2l+1)\bar{g}^2 \quad (7.58)$$

où $\pm\bar{g}$, est la valeur donnée à chaque coefficient g_m^l et h_m^l . Cette première modélisation a permis de mettre en évidence certaines différences entre l'approximation de champ faible et le modèle complet dans un régime de paramètre où les deux modèles sont comparables, c'est à dire pour des nombres d'Ekman très faible. Buffett *et al.* [2002] avait déjà montré que l'intervention des forces de Lorentz avait comme effet d'amoin-drir le couplage magnétique à même nombre d'Elsasser, par rapport à l'approximation de champ faible. Cet effet semble être d'autant plus critique, que l'échelle du champ magnétique est faible. En effet l'étude montre que la valeur du couplage magnétique est expliquée à 80% par la partie visible du spectre, contre seulement 20% dans l'approximation du champ faible. Cette première analyse a mis en évidence l'importance des non-linéarités amenés par les forces de Lorentz.

Dans un deuxième temps nous avons voulu vérifier que les valeurs du couple calculé n'étaient pas modifiées par l'hypothèse d'équipartition d'énergie que nous avons faite plus haut. Nous avons alors relaxé cette hypothèse, en testant plusieurs configurations de champ respectant la loi de puissance des spectres d'énergie pour les degrés non observés.

Pour cela nous avons utilisé tout d'abord une répartition du type loi normale, très utilisée par les paléomagnéticiens pour simuler les composantes du champ magnétique sur de longues périodes. Elle consiste à prendre une densité de probabilité du type gaussienne centrée sur 0 et d'écart-type $\bar{g}$. Cette répartition favorise l'apparition de coefficients de faible intensité. Nous n'avons pas corrigé cette tendance par une renormalisation des coefficients. En effet la somme des carrés des coefficients respecte statistiquement suffisamment le spectre d'énergie Eymin-Petot-Tourtollot [2004]. Dans un deuxième temps, nous avons choisi une répartition s'éloignant de l'hypothèse d'équipartition en travaillant avec une répartition uniforme sur l'intervalle $[-\sqrt{Rst(l)}, \sqrt{Rst(l)}]$. Celle-ci permet d'avoir un spectre étalé de valeurs sur l'intervalle $[0, \sqrt{Rst(l)}]$ pour certain tirage (choix de valeurs positives pour les coefficients) où sur l'intervalle $[-\sqrt{Rst(l)}, \sqrt{Rst(l)}]$. Dans les deux cas, nous avons imposé que la somme des carrés des coefficients soit rigoureusement égale au spectre d'énergie :

$$Rst(l) = (l+1) \sum_{m=0}^{m=l} (g_m^l{}^2 + h_m^l{}^2) \quad (7.59)$$

7.4.2 plan de l'article

Les résultats du modèle visco-magnétique sont présentés dans l'article qui suit. Le plan de l'article est le suivant. Après une brève introduction, suivi de l'explication que nous venons de voir concernant les hypothèses permettant de mener à bout le calcul du couplage visqueux et du couplage magnétique, nous regardons dans un premier temps l'impact de la géométrie du champ magnétique sur le calcul du couple. Pour cette première étude, on se place sous l'hypothèse d'une faible viscosité. Le couplage magnétique est alors dominant. L'analyse statistique du champ magnétique (avec une répartition type loi normale) montre que l'hypothèse d'équipartition de l'énergie est une hypothèse valable. En effet, la moyenne du spectre obtenu à partir de 30 tirages de spectres représentatifs ¹ donne un couple magnétique équivalent au couple obtenu par équipartition. On remarque que ces tirages donnent des couples magnétiques pouvant variés d'un peu plus de 10% autour de la valeur moyenne. Bien que statistiquement peu probable, les cas présentant des coefficients de Gauss étant de même signe amène à des couples magnétiques peu dépendant des petites échelles. Ainsi pour le premier modèle simplifié tel que tous les coefficients égaux à $|\bar{g}|$ nous obtenions un couplage magnétique indépendant des échelles supérieures à $l = 20$. Dans toute cette étude, malgré une hypothèse de forte conductivité dans le manteau, nous ne pouvons atteindre des valeurs pour la constante de couplage magnétique compatible avec la valeur de la constante de couplage $Im(K^{CMB})$ qu'avec l'hypothèse supplémentaire d'un champ magnétique très intense dans les petites échelles. Sous l'hypothèse d'un champ prologéant la tendance du spectre visible, nous pouvons uniquement expliquer 40% de la constante $Im(K^{CMB})$.

La suite de l'article consiste à utiliser le modèle visco-magnétique en fixant le champ magnétique ambiant. Le champ pris en compte est l'extrapolation à la CMB du champ visible jusqu'au degré 40 avec un tirage produisant un couplage de valeur proche de la moyenne. Deux études paramétriques sont faites : la première sur l'influence de la viscosité du noyau, la deuxième sur l'influence de la conductivité électrique à la base du manteau. Ces deux études permettent d'isoler les régimes extrêmes à considérer pour l'interface noyau-manteau. En discussion nous faisons apparaître les couples de valeurs E, E_M^m pour les trois spectres de champ testés qui rendent compte de la constante de couplage observée.

Cet article est actuellement en révision

¹ Vu le nombre de combinaisons d'harmoniques possibles, 30 tirages ne sont pas représentatifs en tant que tels, mais nous avons vérifié sur 3×30 séries différentes que nous obtenions qualitativement les mêmes résultats.

7.5 Visco-magnetic torque at the core mantle boundary

Visco-magnetic torque at the core mantle boundary

Bérangère Deleplace and Philippe Cardin

submitted to Geophysical Journal international,
Mars 2005

Summary

A magneto-hydrodynamic model of boundary layers at the Core-Mantle Boundary (CMB) is derived and used to compute the viscous and electromagnetic torques generated by the Earth's nutation forcing. The predicted electromagnetic torque alone cannot account for the dissipation estimated from the observations of the free core nutation. The presence of a viscous boundary layer in the electromagnetic skin layer at the CMB, with its additional dissipative torques, may explain the geodetic data. An apparent Ekman number at the top of the core between 3 and $5 \cdot 10^{-11}$ is inferred depending on the electrical conductivity of the mantle.

7.5.1 Introduction

Detailed models of coupling at the Core Mantle Boundary (CMB) have been put forward to explain the more and more accurate measurements of the nutations of the Earth [Wahr, 1981; Dehant & Defraigne, 1997; Mathews *et al.*, 2002]. The nutations of the Earth induce a differential rotation, about an equatorial axis, between the mantle and the core [Sasao *et al.*, 1980; Buffett, 1992]. This differential rotation at the CMB generates both a viscous torque [Greenspan, 1968; Loper, 1975; Rochester, 1976] and an electromagnetic torque due to the shear of the poloidal magnetic field lines [Rochester, 1960; Toomre, 1974; Sasao, 1977]. Buffett and his colleagues developed sophisticated models of the electromagnetic torque at the CMB [Buffett, 1992, 1993; Buffett *et al.*, 2002] in order to fit the spatial geodetic observations. First, Buffett [1992] introduced a weak magnetic field theory where the Lorentz forces associated to the skin magnetic effect are too small to generate any motion in the boundary layer. His magnetic analysis requires the presence of a very good electrically conducting layer in the lowermost

mantle (same electrical conductivity as the core) to get an adequate amplitude of the torque. Moreover, Buffett [1992] invoked an enhanced magnetic field at the CMB (4 times larger than the observed one) to account for the small scales of the magnetic field. The value of the small scales of the magnetic field at the CMB (spherical harmonic degree $l > 13$) cannot be measured at the surface of the Earth because the crustal magnetic field is dominant at these wavelengths [Bloxham, 1995; Stacey, 1992]. He estimated their effect using an extrapolation of the low-degree non dipole part of the poloidal magnetic spectrum to higher degrees. Then, Buffett [1993] investigated the role of a toroidal magnetic field on the electromagnetic torque at the CMB. Its effects are weak and do not increase the dissipation of magnetic origin at the CMB. Moreover, his results are rather speculative as measurements of the toroidal magnetic field in the Earth's core are not available. Buffett *et al.* [2002] improved the 1992's model by relaxing the weak field approximation. Thus, they solved the inviscid dynamics of the skin layer in the presence of Lorentz forces. The ratio of the velocity induced by the Lorentz forces in the skin layer and the velocity jump at the CMB is of the order of the Elsasser number (defined below). Its value, at the top of the core, is comprised between 0.1 and 1 so that the weak field approximation is not valid. The presence of this dynamical effect reduces the amplitude of the electromagnetic torque at the CMB. This is the reason why, in order to fit the improved observational constraints [Mathews *et al.*, 2002], Buffett *et al.* [2002] invoked the presence of a constant magnetic field modeling the non dipole component (small scale magnetic field), three times greater than the dipole value at the CMB. In all their studies, Buffett and his colleagues introduced a thin electrically conducting layer at the base of the mantle. Its presence remains necessary to get the correct amplitude of the electromagnetic torque.

For rapidly rotating fluids, viscosity plays a role mainly in thin boundary layers, the so-called Ekman layers [Greenspan, 1968]. The depth of these layers is $\sqrt{\nu/\Omega}$ where ν is the kinematic viscosity of the fluid and Ω the angular velocity of the Earth. As the magnetic skin depth is $\sqrt{\eta/\Omega}$, where η is the magnetic diffusivity of the core, the ratio of the two lengths is given by $\sqrt{P_m}$ where $P_m = \nu/\eta$ is the magnetic Prandtl number. Table 7.2 contains the values of the molecular diffusivities for the core [Poirier, 1994]. We evaluate $P_m = 4 \cdot 10^{-6}$ in the core, making the viscous layer 500 times thinner than the magnetic skin layer.

Recent numerical simulations of the geodynamo have been successful in reproducing some features of the magnetic field of the Earth [Dormy *et al.*, 2000]. They have in common to use a very high viscosity (Ekman number greater than 10^{-6}) so as to avoid numerical resolution problems. Glatzmaier & Roberts [1995] advocated the use of an eddy viscosity for dynamical core modeling as it is generally done in numerical modeling of the oceanic or atmospheric sciences [Pedlosky, 1987]. Brito *et al.* [2004] have found evidence of apparent viscosity from an experiment of thermal convection in a rapidly rotating spherical shell filled with water using a spin-up technique. They interpret their observations by arguing that turbulent motions in the bulk of the core increase the efficiency of the exchange of angular momentum between the Ekman layers and the geostrophic volume. These non-linear effects at small scale may be modeled by an eddy viscosity at large scale. A turbulent viscosity at the top of the core between $10^{-4} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$

	parameter	value
R	core radius	$3.48 \cdot 10^6 \text{ m}$
Ω	rotation rate of the Earth	$7.29 \cdot 10^{-5} \text{ rad s}^{-1}$
ρ	density	10^4 kg m^{-3}
η	magnetic diffusivity of the core	$1.6 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$
η_M	magnetic diffusivity of the mantle	$1.6 - 1600 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$
ν	kinematic viscosity of the core	$7.0 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$
B_0	magnetic field at the CMB	$0.46 \cdot 10^{-3} \text{ T}$
K^{CMB}	coupling constant at the CMB	$-1.85 \cdot 10^{-5}$
E	Ekman number $\frac{\nu}{\Omega R^2}$	$8.0 \cdot 10^{-15}$
E_m	magnetic Ekman number of the core $\frac{\eta}{\Omega R^2}$	$1.8 \cdot 10^{-9}$
E_m^M	magnetic Ekman number of the mantle $\frac{\eta_M}{\Omega R^2}$	$1.8 \cdot 10^{-9} - 1.8 \cdot 10^{-6}$
Λ	Elsasser number $\frac{\sigma B_0^2}{\rho \Omega}$	0.14
P_m	magnetic Prandtl number $\frac{\nu}{\eta}$	$4.5 \cdot 10^{-6}$

TAB. 7.2 – Physical properties and associated dimensionless numbers used in this study.

and $10^{-1} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ is possible. Such eddy viscosities increase the magnetic Prandtl number and decreases the ratio between the "viscous" and magnetic layer depths. Under these conditions, viscous effects have to be incorporated in the dynamical equation of the layer. With such a theory, the quality factor of the free core nutation, deduced from the geodetic data, is a constraint on the apparent viscosity at the top of the core for the diurnal frequency.

Recently, two related studies [Mathews & Guo, 2005; Palmer & Smylie, 2005] have been published. Their approaches are very similar to the work presented here and lead also to the prediction of a viscosity value at the top of the core from nutations data. From their own data analysis, Palmer & Smylie [2005] use a pure viscous model to infer a viscosity. Mathews & Guo [2005] introduce a magneto-viscous model similar to ours and determine the viscosity from the observational data analysis of Mathews *et al.* [2002]. Both papers give a value of viscosity which is close to the one proposed in this paper. However, our analysis proposes a complete calculation with all spectral components of the magnetic field with different extrapolated tendencies for the hidden part ($l > 13$) of the magnetic field at the CMB. Moreover, a physical description of the magnetic and viscous boundary layers is shown. We also give a complete study of the variations of the electrical conductivity at the base of the mantle which enables us to invert the observational data to obtain trade-offs between the mantle electrical conductivity effect and the viscous effect at the CMB.

This paper presents a derivation of a magneto-hydrodynamic boundary layer attached to the mantle taking into account the Lorentz, Coriolis and viscous forces (section 2). In section 3, we discuss the influence of the geometry (small scales) and amplitude of the magnetic field at the CMB on the electromagnetic torque. Section 4 describes the effects of a viscous layer on the visco-magnetic torques at the CMB and an Ekman number is estimated at the top of the core. The variations of the electrical conductivity in the lowermost mantle are studied in section 5. A final discussion ends the paper.

7.5.2 Mathematical formulation of the torques

At first order [Poincaré, 1910], the response of the rotating fluid core to Earth's nutations is a rigid body rotation. This approximation was checked experimentally [Vanyo *et al.*, 1995] and stays valid for large forcings [Noir *et al.*, 2003]. In the computation of the torques at the core mantle boundary (CMB), we may neglect the flow induced by the ellipticity of the CMB [Sasao *et al.*, 1980; Buffett *et al.*, 2002] and we describe the main flow in the outer core by an angular velocity Ω . We consider the magnetohydrodynamical equations in the frame of reference $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ rotating with the fluid outer core at the angular velocity vector Ω , $\mathbf{e}_z$ being defined by $\mathbf{e}_z = \Omega/\Omega$. The equations are made dimensionless using Ω^{-1} as time scale, R the radius of the core as length scale and a typical magnitude of the radial component of the magnetic field B_0 as magnetic field scale. The magnetic field and the flow velocity in the core ($r < 1$) are governed by the following dimensionless equations :

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{B} = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{v} + E_m \Delta \mathbf{B}, \quad (7.60)$$

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} + 2\mathbf{e}_z \times \mathbf{v} + \frac{\partial \Omega}{\partial t} \times \mathbf{r} + \Omega \times (\Omega \times \mathbf{r}) = -\nabla P + E_m \Lambda (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} + E \Delta \mathbf{v} \quad (7.61)$$

where

$$E = \frac{\nu}{\Omega R^2}$$

is the Ekman number and ν the kinematic viscosity.

$$E_m = \frac{\eta}{\Omega R^2} = \frac{\eta}{\nu} E$$

is the magnetic Ekman number which is Ekman number over the magnetic Prandtl number (ν/η) where η is the magnetic diffusivity.

$$\Lambda = \frac{\sigma B_0^2}{\rho \Omega}$$

is the Elsasser number, $\sigma = (\mu_0 \eta)^{-1}$ is the electrical conductivity of the core and ρ the density of the core fluid.

In the above defined frame of coordinates, the motion of the mantle is a rigid body rotation $\delta\omega_M$ rotating at $-\mathbf{e}_z$ defined by :

$$\delta\omega_M(t) = \delta\omega_M[\mathbf{e}_x \cos t - \mathbf{e}_y \sin t]$$

The angular velocity of the mantle is equatorial (no spin-up contribution) [Busse, 1968; Noir *et al.*, 2003]. The dimensionless velocity in the mantle is described by :

$$\mathbf{v}_M = \delta\omega_M \times \mathbf{r} = -r\delta\omega_M[\mathbf{e}_\theta \sin(t + \varphi) + \mathbf{e}_\varphi \cos \theta \cos(t + \varphi)] \quad (7.62)$$

where $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi)$ is the spherical coordinate system directly associated to $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$. The magnetic field in the mantle ($r > 1$) is then described by the induction equation :

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{v}_M \cdot \nabla) \mathbf{B} = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{v}_M + E_m^M \Delta \mathbf{B} \quad (7.63)$$

where

$$E_m^M = \frac{\eta_M}{\Omega R^2}$$

is the magnetic Ekman number of the mantle and η_M is the magnetic diffusivity of the mantle.

When $\delta\omega_M = 0$, the solution of (7.60) and (7.63) is a diffusive poloidal magnetic field denoted $\mathbf{B}_0$. As $\delta\omega_M$ increases, magneto-viscous boundary layers develop around the core mantle boundary ($r = 1$). The induced magnetic field in these boundary layers is denoted $\mathbf{b}$. As $\delta\omega_M \ll 1$, we have $b \ll B_0 = O(1)$. The width of the magnetic skin layer at the top of the core (at the bottom of the mantle) is of order $E_m^{1/2}$ ($(E_m^M)^{1/2}$) which is very small compared to 1. The viscous layer of size $E^{1/2}$ is even smaller. Consequently, only radial derivatives of b and v have to be considered in the magneto hydrodynamic equations in the boundary layers. Moreover, $\mathbf{B}_0$ and $\mathbf{v}_M$ have no radial variation inside these thin boundary layers. A linearisation of equations (7.60),(7.61),(7.63) with the above boundary layer assumptions leads to :

$$\forall r < 1, \quad \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} - E_m \frac{\partial^2}{\partial r^2} \mathbf{b} = \beta \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial r} \quad (7.64)$$

$$\forall r < 1, \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + 2\mathbf{e}_z \times \mathbf{v} - E \frac{\partial^2}{\partial r^2} \mathbf{v} = -\nabla \Pi + E_m \Lambda \left(\beta \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial r} - \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial r} \mathbf{e}_r \right) \quad (7.65)$$

$$\forall r > 1, \quad \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} - E_m^M \frac{\partial^2}{\partial r^2} \mathbf{b} = 0 \quad (7.66)$$

where $\beta(\theta, \varphi) = \mathbf{B}_0(r=1) \cdot \mathbf{e}_r$ is the radial component of the imposed magnetic field.

Taking the curl of the motion equation (7.65) to eliminate pressure and using equation (7.64) to eliminate $\mathbf{b}$, we obtain the following equation :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - E \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - E_m \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) (\nabla \times \mathbf{v}) - 2 \cos \theta \left(\frac{\partial}{\partial t} - E_m \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial r} = E_m \Lambda \beta^2 \frac{\partial (\nabla \times \mathbf{v})}{\partial r}$$

Under our assumptions, $\nabla \times \mathbf{v} = -\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \mathbf{e}_\varphi$ and it is convenient to use the complex variables $v_+ = v_\theta + i v_\varphi$, and $v_- = v_\theta - i v_\varphi$ to rewrite the last equation :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} - E \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - E_m \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) v_\pm \pm 2i \cos \theta \left(\frac{\partial}{\partial t} - E_m \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) v_\pm \right] = E_m \Lambda \beta^2 \frac{\partial^3 v_\pm}{\partial r^3}, \quad (7.67)$$

with the imposed velocity (in terms of complex variables) as boundary condition ($r = 1$) deduced from equation (7.62) :

$$v_{M\pm} = \frac{i\delta\omega_M}{2} [(1 \mp \cos \theta) \exp i\varphi - (1 \pm \cos \theta) \exp -i\varphi].$$

The boundary condition imposes a time dependence of the form $\exp \pm it$ which leads to a set of four differential equations deduced from (7.67). We use the exponent $(\pm)$ to denote the sign of the time dependence and we define :

$$v_\pm = v_\pm^{(+)} \exp it + v_\pm^{(-)} \exp -it$$

In the following, we solve explicitly the problem for one component of the velocity $v_+^{(-)}$ and the other three components of the velocity may be easily deduced from it. The equation for $v_+^{(-)}$ is :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[E E_m \frac{\partial^4}{\partial r^4} + (iE + iE_m - 2iE_m \cos \theta - E_m \Lambda \beta^2) \frac{\partial^2}{\partial r^2} + 2 \cos \theta - 1 \right] v_+^{(-)} = 0 .$$

The associated polynomial function has four roots Z_i corresponding to four exponential elementary solutions which can be written (thanks to M. Greff) :

$$\begin{aligned} Z_i = & \pm (2E E_m)^{-1/2} \left[-iE - E_m(i - 2i \cos \theta - \Lambda \beta^2) \right. \\ & \left. \pm [-E^2 + 2E E_m(1 - 2 \cos \theta - i \Lambda \beta^2) + \right. \\ & \left. E_m^2(4 \cos \theta - 1 - 2i \Lambda \beta^2 - 4 \cos^2 \theta + 4i \cos \theta \Lambda \beta^2 + \Lambda^2 \beta^4)]^{1/2} \right]^{1/2} \end{aligned}$$

As the velocity field must vanish far away from the boundary layer ($\lim_{r \rightarrow -\infty} v = 0$), both roots with a positive real value are retained and the solution may be written :

$$\forall r < 1, \quad v_+^{(-)} = X_1 \exp(Z_1(r - 1)) + X_2 \exp(Z_2(r - 1)) ,$$

where X_1 and X_2 are constants to be determined.

The equation (7.64) gives us the solution for $b_+^{(-)}$:

$$\forall r < 1, \quad b_+^{(-)} = -\frac{\beta Z_1}{i + E_m Z_1^2} X_1 \exp(Z_1(r - 1)) - \frac{\beta Z_2}{i + E_m Z_2^2} X_2 \exp(Z_2(r - 1)) .$$

Using $\lim_{r \rightarrow -\infty} b = 0$, the solution for the magnetic field in the mantle may be deduced directly from (7.66) :

$$\forall r > 1, \quad b_+^{(-)} = X_3 \exp(Z_3(r - 1)) ,$$

where $Z_3 = -(1 + i)/\sqrt{2E_m^M}$.

We use the continuity of the velocity, the magnetic field and the electrical currents at the core mantle boundary ($r = 1$) to determine the constants X_1, X_2, X_3 .

$$\begin{aligned} X_1 + X_2 &= \frac{i\delta\omega_M}{2}(1 + \cos \theta) , \\ X_3 &= -\frac{\beta Z_1}{i + E_m Z_1^2} X_1 - \frac{\beta Z_2}{i + E_m Z_2^2} X_2 , \\ E_m^M X_3 Z_3 &= E_m \left[-\frac{\beta Z_1^2}{i + E_m Z_1^2} X_1 - \frac{\beta Z_2^2}{i + E_m Z_2^2} X_2 \right] . \end{aligned}$$

With the solutions to this set of equations, the velocity and the magnetic field are fully determined within the boundary layers. With our scaling, the magnetic torque

Γ_m scales with $\rho R^5 \Omega^2 E_m \Lambda$ and the viscous torque Γ_v with $\rho R^5 \Omega^2 E$. Here, we use the complex notation by introducing $\bar{\Gamma} = \Gamma_x + i\Gamma_y$. The derivation of the viscous torque is given in Appendix A.

$$\bar{\Gamma}_v = (\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y) \cdot \int \int_S \mathbf{r} \times \sigma_{\mathbf{v}} d\mathbf{S}, \quad (7.68)$$

$$= \frac{i}{2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} [(1 + \cos \theta) \frac{\partial v_+}{\partial r} + (1 - \cos \theta) \frac{\partial v_-}{\partial r}] \exp(i\varphi) \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (7.69)$$

The magnetic torque could be calculated by a surface integral [Rochester, 1962] similarly to the viscous torque. The magnetic torque could be deduced from the perturbed magnetic field $\mathbf{b}$ at $r = 1$:

$$\bar{\Gamma}_m = (\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y) \cdot \int \mathbf{r} \times (\beta \mathbf{b}) dS, \quad (7.70)$$

$$= \frac{i}{2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \beta [(1 + \cos \theta) b_+ + (1 - \cos \theta) b_-] \exp(i\varphi) \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (7.71)$$

It is of some use to introduce the coupling constant K deduced from the torque to compare with the observed data [Mathews *et al.*, 2002] :

$$K = \frac{\bar{\Gamma}}{iI\delta\omega_M},$$

where I is the dimensionless moment of inertia of the core.

Both torques are integrated numerically using a (θ, φ) grid where $\beta(\theta, \varphi)$ is prescribed.

For a very weak magnetic field (the Lorentz forces tend to vanish) Toomre [1974] predicted that the torque is pointing $\pi/4$ away from the direction of the imposed angular velocity $\delta\omega$. For very low Elsasser and Ekman numbers, the solution follows this asymptotic behavior ($Im(K) = -Re(K)$). For a large and dipolar magnetic field, we compare successfully our results for a very low Ekman number ($E = 10^{-16}$) with the coupling constants found by Buffett *et al.* [2002] in their inviscid study. In the limit of large Ekman numbers and low Elsasser numbers, we check that the computed torque tends toward the spin-over torque [Greenspan, 1968].

7.5.3 Magnetic field at the CMB

Even though the magnetic field at the CMB is dominated by the axial dipole component, all spherical harmonic components contribute to the electromagnetic torque. The spatial magnetic power spectrum (Mauersberger-Lowes spectrum) of the magnetic field at the Earth surface is deduced from observations [Langel & Estes, 1988; Voorhies *et al.*, 2002]. At the CMB, this spectrum is fitted by the power law $1.085 \cdot 10^{10} (0.959)^l n T^2$ [Stacey, 1992] if one excepts the dipole component ($l = 1$). This is a relatively flat

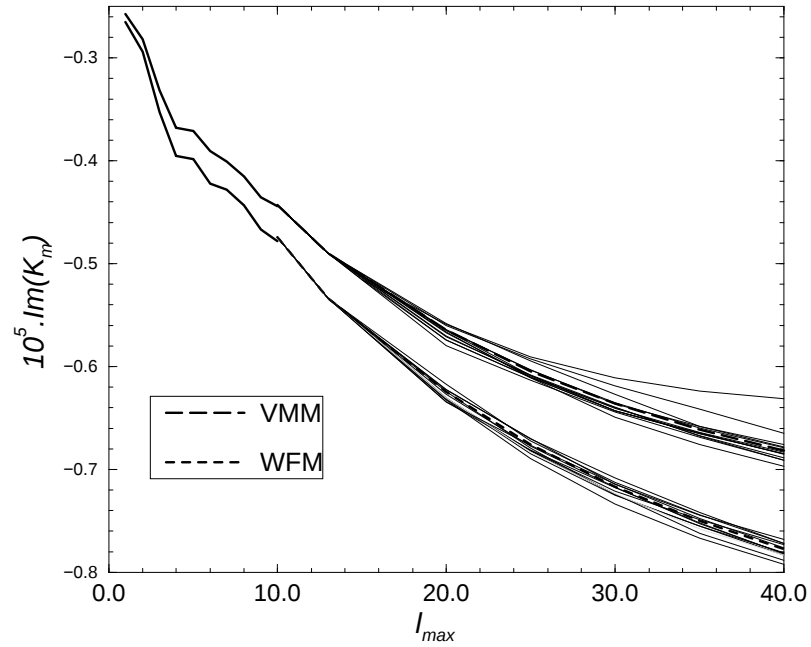


FIG. 7.7 – Imaginary part of the electromagnetic coupling constant versus the truncature level l_{max} of the magnetic field at the core boundary. The observed geomagnetic spectra is extrapolated randomly with a power law $(0.959)^l$ for $l > 13$ and the coupling constant is computed with the visco-magnetic model (VMM) or with the weak field model (WFM). Each line represents a set of spherical harmonic coefficients satisfying the spectra dependence. The bold lines show the mean values of both model.

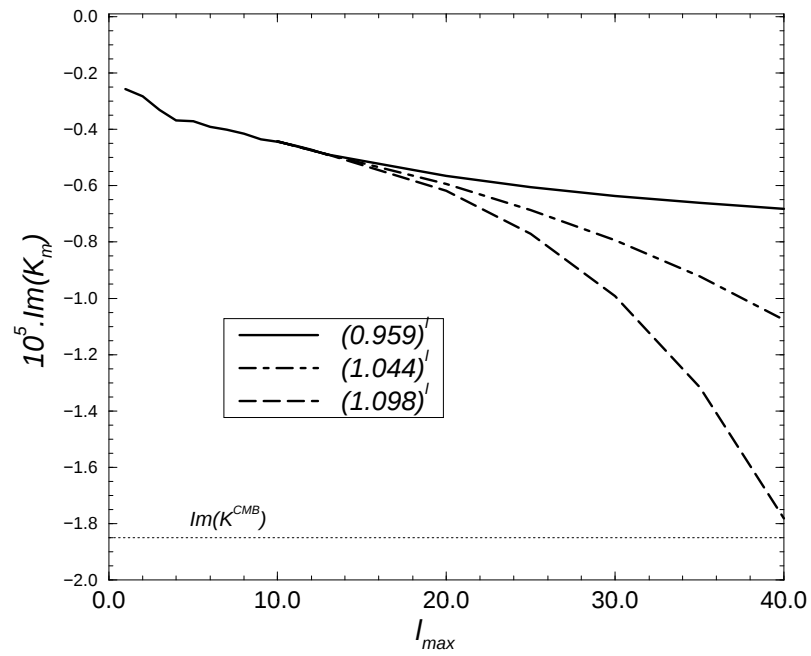


FIG. 7.8 – Imaginary part of a mean electromagnetic coupling constant versus the truncature level l_{max} of the magnetic field at the core boundary. The coupling constant is computed with the visco-magnetic model with three different extrapolated spectra for $l > 13$.

magnetic spectrum which has to become stiffer at very large l to satisfy energetic arguments [Roberts *et al.*, 2003; Christensen & Tilgner, 2004]. Taking the same electrical conductivity for the core and the mantle ($E_m = E_m^M = 1.8 \cdot 10^{-9}$) and a very low Ekman number ($E = 10^{-16}$), we compute the electromagnetic coupling constant using the first l_{max} degrees of the magnetic field (higher degree coefficients are set to zero). Figure 7.7 illustrates possible contributions of the small scales ($l > 13$) of the magnetic field to the amplitude of the electromagnetic torque. Different random sets of spherical harmonic coefficients matching the spectra dependence, give comparable contribution to the torque (variations lower than 10%). Consequently, the mean value of the coupling constant is representative of what could happen at the CMB and in the following, we keep only the mean value to present the results.

The contribution of the large degrees of the spherical harmonics of the magnetic field in the visco-magnetic model is smaller than the one associated with the weak field model [Buffett, 1992]. The back reaction of the Lorentz forces on the flow is to reduce the electromagnetic torque at the boundary. This effect is emphasised for the small scales of the magnetic field. In some cases (for example, all coefficients positive), the contribution of the large degree is negligible and the coupling constant curve becomes flat (highest curve in Figure 7.7).

Figure 7.8 shows that the mean electromagnetic torque associated with the observed magnetic field at the CMB ($(0.959)^l$) is too low to fit the imaginary part of the observed coupling constant ($-1.85 \cdot 10^{-5}$). Following the ideas of Buffett [1992]; Buffett *et al.* [2002], we explore the effect of an increase of the magnetic field at small scales. We studied two different power laws for the spectra ($l > 13$): $(1.044)^l$ giving an magnetic energy 10 times greater than the standard one at degree 40, and $(1.098)^l$ corresponding to an energy 10 times greater than the standard one at degree 30. An increase by a factor 10 in energy at degree 40, increases the overall coupling constant less than a factor 2 which remains too small to match the observed value. In Figure 7.8, we see that only the largest spectrum could explain the observed data. From a geophysical point of view, the largest spectrum is unlikely as it dissipates a large amount of energy. Using the result of Roberts *et al.* [2003] (eq 2.7 page 104), we found a ohmic dissipation of $0.03TW$ for $l < 40$. This is large compared to the dissipation associated to dipolar component alone which is $0.08GW$. According to the scaling deduced from numerical dynamos [Buffett, 2002; Roberts *et al.*, 2003; Christensen & Tilgner, 2004] which takes into account the dissipation of the toroidal part of the magnetic field and the contribution of small scales of the magnetic field, this largest spectrum is too dissipative. For example, with a dissipation of $1.32GW$ associated to the large scale magnetic spectrum, Roberts *et al.* [2003] estimate a total ohmic power loss between 1 and $2TW$.

Another dissipative process is thus needed to explain the nutation data.

7.5.4 Viscous effects at the CMB

In this section, we assume the electrical conductivity in the core and in the mantle to be the same [Buffett *et al.*, 2002] and focus on viscous effects. Figure 7.9 shows

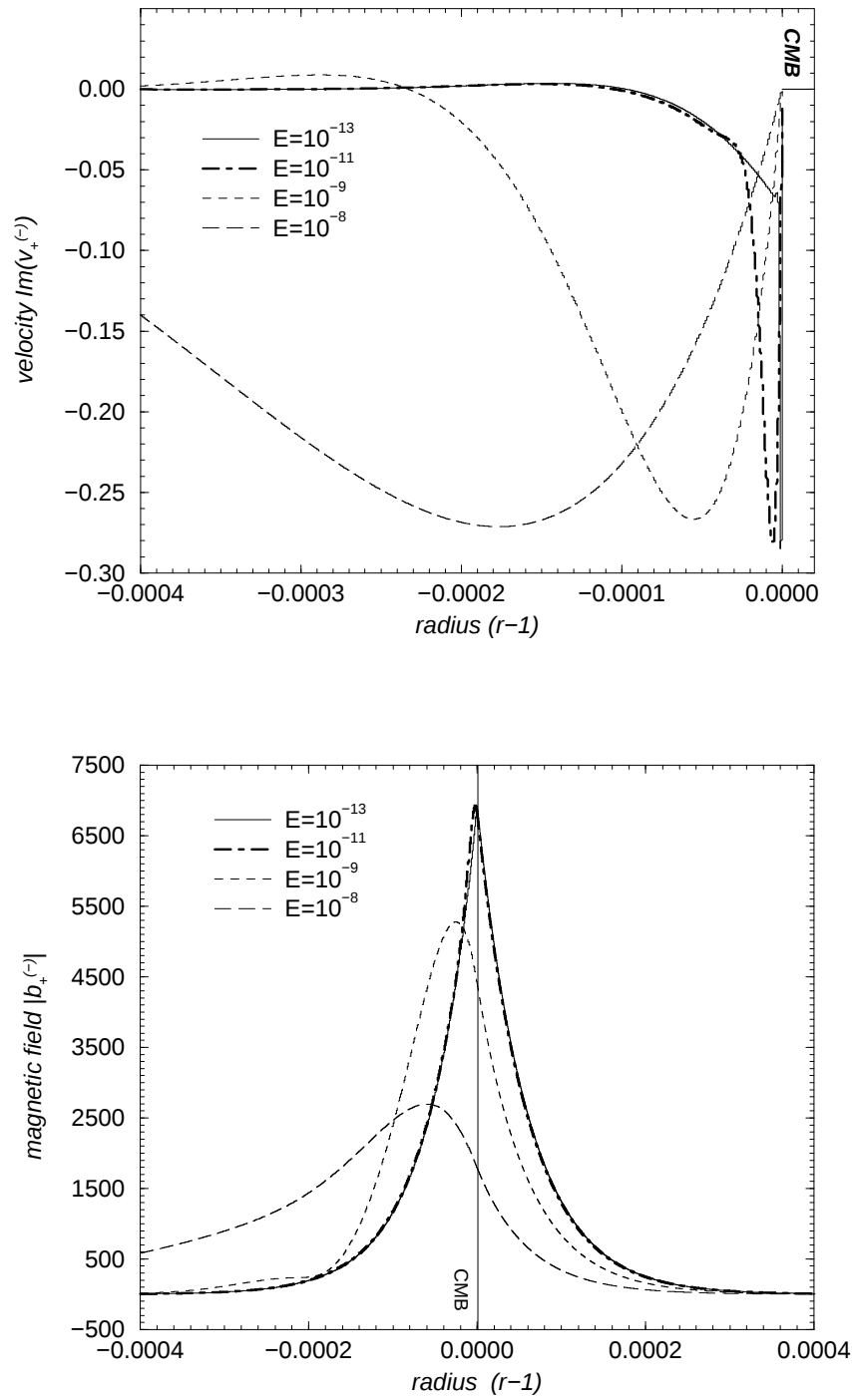


FIG. 7.9 – Velocity $Im(v_+^{(-)})$ and magnetic $|b_+^{(-)}|$ perturbed fields at the core-mantle boundary for $E_m = E_m^M = 1.8 \cdot 10^{-9}$ and different Ekman numbers.

components of the velocity and perturbed magnetic fields in the boundary layers for $E_m = E_m^M = 1.8 \cdot 10^{-9}$ (see table 7.2) and different Ekman numbers. For very low Ekman numbers, the viscous layer is very narrow ($E^{1/2}$) and the magnetic field (symmetry and amplitude) is nearly unchanged by the presence of the Ekman layer. For Ekman numbers comparable to the magnetic Ekman number, the width of the viscous layer becomes as large as the magnetic skin depth ($E_m^{1/2}$) and magnetic field is induced deeper into the core. Consequently, the perturbed magnetic field loses its symmetry and its value at the CMB decreases.

This physical behavior is summarised on figure 7.10. The magnetic torque does not vary for very low Ekman number ($E < 10^{-11}$) and both components decrease as the Ekman number approaches the magnetic Ekman number. As expected, the viscous torque increases with the Ekman number. The imaginary part of the magnetic and viscous coupling constants become comparable for $E \approx 2 \cdot 10^{-12}$ while their real parts match for a larger Ekman number ($E \approx 4 \cdot 10^{-10}$). This difference results directly from the geometry of the spin over viscous torque which exhibits a very low imaginary part (0.259) compared to the real one (2.62) [Greenspan, 1968]. As a conclusion, the resulting torque at the CMB is largely modified by a viscous shear layer for $E > 10^{-12}$ even if the depth of the viscous layer is much smaller than the magnetic one (Figure 7.9a) and its effect barely changes the induced magnetic field at the boundary (Figure 7.9b).

In order to fit the imaginary part of the observed coupling constant ($-1.85 \cdot 10^{-5}$), an Ekman number of $4 \cdot 10^{-11}$ is necessary as shown on figure 7.10. With such a value, the viscous dissipative process represents 85% of the whole dissipation at the CMB but the real part of the coupling constant is still dominated (75%) by the magnetic torque.

7.5.5 Electrical conductivity at the bottom of the mantle

In the visco-magnetic model for CMB parameters, the influence of the electrical conductivity of the lowermost mantle is secondary. Figure 7.11 shows the evolution of the coupling constant as the electrical resistivity is increased up to 10000 times the electrical resistivity of the core for an Ekman number of $3 \cdot 10^{-11}$. The imaginary part of the coupling constant varies less than 20% but the real part of the coupling constant is divided by 3. As expected, for large magnetic Ekman number in the mantle, the torque is mainly dominated by the viscous part of the torque.

A trade off between viscous and magnetic torque could be found in order to fit the observational data of nutations. On figure 7.12, for each value of the electrical conductivity of the mantle (E_m^M), we plot the Ekman number (E) corresponding to a total torque in agreement with the observational constraint $Im(K^{CMB}) = -1.85 \cdot 10^{-5}$. For the nearly flat standard spectra $(0.959)^l$ (corresponding to the magnetic field at the CMB), Ekman numbers between 2 and $5 \cdot 10^{-11}$ are retrieved from the inversion whatever the conductivity at the bottom layer of the mantle. For the largest increasing spectra $(1.098)^l$, Ekman numbers vary more significantly with the conductivity of the

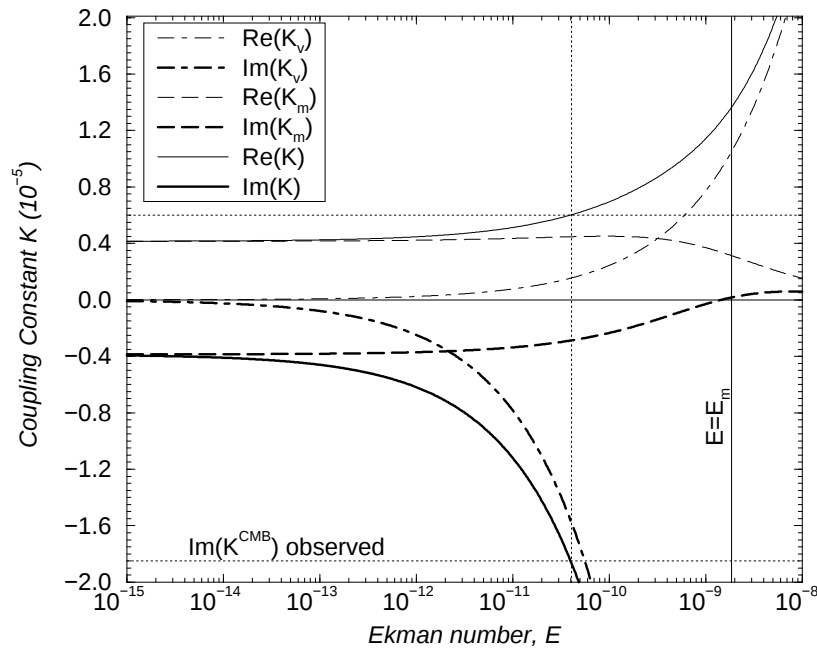


FIG. 7.10 – Variations of the coupling constant K as a function of the Ekman number. K_v (K_m) is the viscous (magnetic) component of the coupling constant

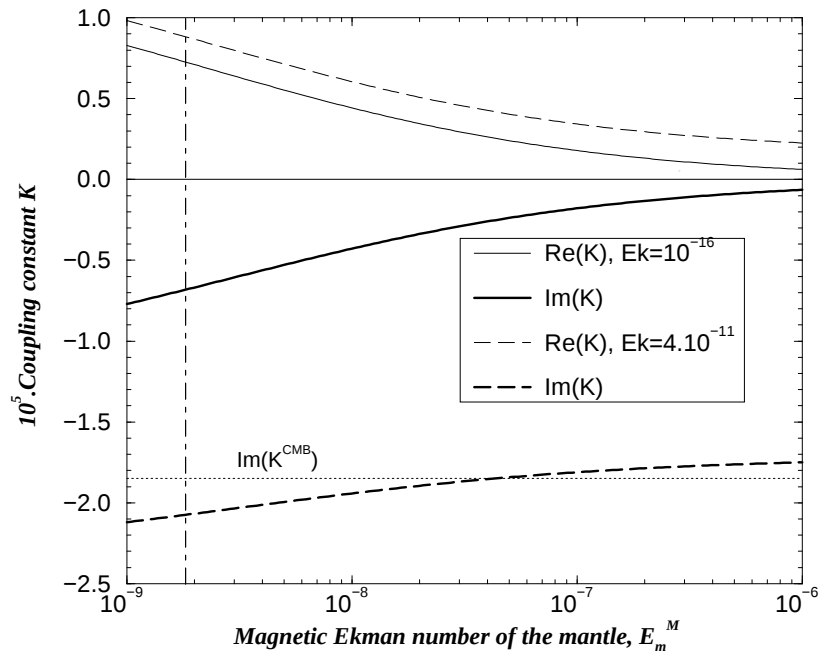


FIG. 7.11 – Variations of the coupling constant with the Ekman magnetic number of the mantle.

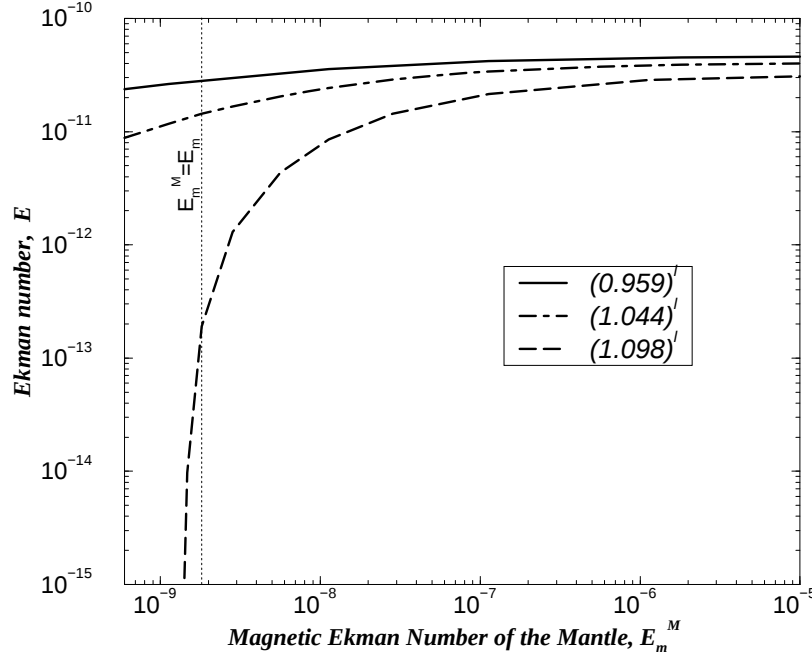


FIG. 7.12 – Curves in the plan (E, E_m^M) on which $Im(K^{CMB}) = -1.85 \cdot 10^{-5}$, for $E_m = 1.8 \cdot 10^{-9}$ and the three different spectra for $(l > 13)$. The observed magnetic field at the CMB corresponds to the nearly flat spectra $(0.959)^l$.

lowermost mantle and very low Ekman numbers are retrieved when the electromagnetic torque becomes significant (comparable electrical conductivity on both sides of the CMB).

The electrical conductivity at the bottom of the mantle is difficult to determine. Theoretical analysis and experimental measurements indicate that silicate rocks have a lower electrical conductivity than the liquid metal of the core [Poirier & Le Mouél, 1992; Shankland & Poirier, 1993]. Discoveries of new phases of perovskite, such as post perovskite [Iitaka *et al.*, 2004], or metal alloys of silicates may change this statement. The resistivity may even present lateral variations as shown by seismic lateral variations in the lowermost mantle [Lay *et al.*, 1998]. Except in the case of both a large electrical conductivity at the base of the mantle and a large magnitude of a hidden magnetic field at the CMB, the Ekman number needed to explain the observational data is around 10^{-11} .

7.5.6 Discussion

The real part of the coupling constant is not dissipative and directly influences the period of the nutations [Dehant & Defraigne, 1997; Hinderer & Crossley, 2000; Mathews

et al., 2002] and could have been used to determine the nature of the dissipative process at the CMB. But the discrepancy between the theoretical and observed periods of the free core nutation (FCN) is too large to be explained only by the dissipative torque at the CMB. Hence, a dynamic ellipticity of a few hundred meters at the CMB has been introduced to account for this discrepancy. Then, the real part of the coupling constant cannot be used anymore as an observational constraint to determine the nature of the dissipative torque at the CMB. It is true, though, that a visco-magnetic dynamic model of the CMB reduces the real part of the coupling constant compared to a weak field model and consequently tends to increase by 10% the estimate of the dynamic ellipticity at the CMB.

The visco-magnetic model of the magnetic skin layer shows that the small scales of the magnetic field at the CMB, that cannot be directly inferred from magnetic observations, do not contribute significantly to the electromagnetic torque between the core and the mantle. With a flat or decreasing power magnetic spectrum at the CMB, the electromagnetic torque is too weak to explain the coupling constant $Im(K^{CMB}) = -1.85 \cdot 10^{-5}$, even if the electrical conductivity of the lower most mantle is comparable to the core one.

The visco-magnetic model of the boundary layers at the CMB using the observed geomagnetic field imposes the presence of viscous dissipative effects. Apparent Ekman numbers between 3 and $5 \cdot 10^{-11}$ are needed to fit the observational constraint (corresponding to a turbulent viscosity of $3.5 \cdot 10^{-2} m^2 s^{-1}$). This observational constraint may change as the quality of the data and their treatment improve [Florsch & Hinderer, 2000]. Only a reduction of the value of $Im(K^{CMB})$ by a factor 3 would make viscous effects unnecessary to explain the observations. However, the recent study of Palmer & Smylie [2005] gives an Ekman number of $7 \cdot 10^{-11}$ using their own analysis of VLBI data of the free core nutation and a pure viscous model of coupling at the CMB. The agreement is also very good with the results of Mathews & Guo [2005] which states that an Ekman number larger than $5 \cdot 10^{-11}$ is needed at the CMB. Such values of the Ekman number at the CMB are also compatible with the dissipation needed to account for the relaxation of torsional oscillations in the core [Zatman & Bloxham, 1997; Jault, 2003].

At this stage, we like to see this observational constraint as a measurement of an apparent viscosity at the top of the core. The visco-magnetic model suggests an effective viscosity five thousand times larger than the expected molecular viscosity of iron at the core conditions. We would like to stress that an apparent viscosity is space and time dependent whereas, it is defined here on the whole surface of the CMB at the diurnal frequency. Consequently, this value of viscosity ($3.5 \cdot 10^{-2} m^2 s^{-1}$) may not be generalized to the bulk of the core, at small scales and at different time scales. This is large but comparable to effective viscosities used in fluid dynamics of the ocean or the atmosphere. In these fields, a large apparent viscosity is the net result of the turbulent transport due to the small scales of the flow on the large scale flow. Such an explanation may be valid in the Earth's core even though we do not have any evidence for the action of small scales at the CMB. As discussed by Davis & Wahler [1997], the effective transport of momentum may be generated by convective motions associated to the dynamo process

or by surfacic flows such as topographic winds, unstable boundary layers motions, or chemical/compositional fluxes.

This work has been financed by the program DyETI and PNP of CNRS/INSU. The authors would like to thank Thierry Alboussière, Dominique Jault and the reviewers for very helpful comments and suggestions.

7.5.7 Appendix : Torque formulation

The viscous torque is computed from the viscous forces at the core mantle boundary :

$$\Gamma_v = \iint_S \mathbf{r} \times \sigma_v dS$$

where σ_v is the viscous stress tensor. In our geometry and within the boundary layer approach, the viscous stress on a sphere may be written : $\sigma_v = \sigma_{v_r\theta} \mathbf{e}_\theta + \sigma_{v_r\varphi} \mathbf{e}_\varphi = \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} \mathbf{e}_\varphi$. At $r = 1$, we have :

$$\mathbf{r} \times \sigma_v = (-\sigma_{v_r\varphi} \cos \theta \cos \varphi - \sigma_{v_r\theta} \sin \varphi) \mathbf{e}_x + (-\sigma_{v_r\varphi} \cos \theta \sin \varphi + \sigma_{v_r\theta} \cos \varphi) \mathbf{e}_y + \sigma_{v_r\varphi} \sin \theta \mathbf{e}_z$$

Introducing $\bar{\Gamma} = \Gamma_x + i\Gamma_y$, the dimensionless complex viscous torque at the CMB is :

$$\bar{\Gamma}_v = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left[i \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \cos \theta \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} \right] \exp(i\varphi) \sin \theta d\theta d\varphi$$

which in terms of v_+ and v_- may be expressed :

$$\bar{\Gamma}_v = \frac{i}{2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left[(1 + \cos \theta) \frac{\partial v_+}{\partial r} + (1 - \cos \theta) \frac{\partial v_-}{\partial r} \right] \exp(i\varphi) \sin \theta d\theta d\varphi$$

which is the expression shown in equation (7.69). Equation (7.70) being similar to equation (7.68), the derivation of the magnetic torque is similar to that of the viscous torque.

7.6 Résultats et discussions

Les discussions vont porter sur les deux principaux résultats de l'étude :

1. une inversion de viscosité correspondant à un nombre d'Ekman de l'ordre de 10^{-11} .
2. une modélisation d'un champ magnétique complet indiquant l'influence de sa géométrie sur la valeur du couplage.

Quelles justifications physiques pour une telle valeur de viscosité à l'interface ?

La question reste délicate et comme pour l'ensemble des expériences, nous avons malheureusement peu d'éléments pouvant nous orienter sur une interprétation unique. Néanmoins, nous pouvons déjà penser qu'il ne s'agit pas d'une viscosité au sens moléculaire du terme. Tout d'abord celle-ci serait en désaccord avec les modèles théoriques sur les propriétés physiques du fer donnant des valeurs autour de $10^{-6} m^2 s^{-1}$. Ensuite les extrapolations des expériences faites à hautes pressions et hautes températures ne vont pas non plus en direction de telles valeurs. Cependant, la présence envisageable de particules solide en suspension pourrait augmenter la viscosité d'ensemble du mélange fluide. La question est de savoir si ce mélange biphasique est présent sur une épaisseur suffisante pour jouer un rôle. Les observations risquent de ne pas permettre une analyse aussi précise sur la composition du fluide avant quelque temps. Dès lors nous écartons l'hypothèse d'une inversion concernant la viscosité moléculaire. Nous préférons interpréter ce résultat en terme de viscosité efficace dont les origines peuvent être multiples.

La première explication peut venir de l'état de rugosité de surface présent à la CMB. Malgré un important développement des techniques tomographiques pour identifier les hétérogénéités du manteau inférieur, la sismologie actuelle ne permet pas de résoudre les irrégularités de surface à la CMB d'échelles plus fines que l'ordre du kilomètre ([Garnero, 2000]). [Narteau *et al.*, 2001] développe ainsi un modèle numérique de simulation de l'évolution d'une frontière correspondant à un manteau composé de silicates et d'oxydes et un noyau liquide saturé ou non en éléments légers. Une rugosité de l'ordre d'une dizaine de centimètres apparaît spontanément à l'interface et des ondulations de l'ordre de la dizaine de mètres sont envisageables dans certains cas de figures. Dès lors, la longueur caractéristique de rugosité étant grande devant la couche limite visqueuse basée sur la viscosité moléculaire, la longueur caractéristique de rugosité doit être celle qui influence le plus largement l'écoulement. Ainsi, on peut modéliser l'effet de la rugosité sur l'écoulement par la viscosité efficace en prenant un nombre d'Ekman E entre 10^{-14} et 10^{-9} . Si l'interprétation de notre inversion se fait uniquement en terme de rugosité, on peut voir en ce résultat une mesure indirecte de la topographie de l'interface donnant une échelle caractéristique d'irrégularité de l'ordre de 20 ou 30 mètres.

La deuxième explication peut venir de la turbulence présente dans le système. Le cisaillement de vitesse peut se faire sentir sur une distance caractéristique pouvant être

reliée à la taille des tourbillons et à la vigueur de ceux-ci. Il reste cependant difficile d'évaluer cet impact quantitativement. Nous pouvons considérer la turbulence en volume associée à la convection thermique et compositionnelle du noyau liquide. Celle-ci présente probablement de larges structures capables d'entretenir un mélange efficace, mais nous n'avons pas actuellement une idée précise de leur interaction avec les couches limites du système. Peuvent-ils pénétrer dans la couche, modifient-ils la structure de l'écoulement ? Nous pouvons également assister à une destabilisation de la couche limite vers un état de couche limite turbulente. Dans ce cas là, le profil de vitesse peut être modifié et le mélange peut s'opérer par d'importantes fluctuations de vitesse dans la couche limite. Les fluctuations peuvent être excitées par des contraintes extérieures comme un fort cisaillement de vitesse (mouvement de précession ou turbulence en volume), ou alors par les propriétés de l'interface, telles que la rugosité.

Bien que les mécanismes physiques ne sont pas forcément décrits de manière universelle, on peut placer une description phénoménologique de tous ces processus sous le terme de viscosité apparente. Cette manière d'opérer est communément admise en océanographie physique pour expliquer le mélange côtier, la multiplication des observations indirectes de l'interface noyau manteau pourrait amener aux mêmes considérations. Ainsi ce résultat pourrait être rapproché des inversions de viscosité apparente faites à partir de l'analyse du temps de spin-up déduit de l'enregistrement des jerks magnétiques. Dans cette étude réalisée par [Davis & Wahler, 1997], les auteurs inversent une viscosité apparente de $7 \text{ m}^2 \text{s}^{-1}$ soit deux ordres de grandeurs supérieurs à nos inversions. Une autre étude portant sur une interprétation indépendante des données VLBI [Palmer & Smylie, 2005] amène une valeur similaire de viscosité. Les grandes disparités obtenues entre diverses études permettent également de pointer le fait que ce paramètre de viscosité efficace peut être complètement dépendant de l'échelle spatiale et temporelle d'observation.

Couplage visco-magnétique et interprétation de la constante de couplage en présence de champ magnétique non-axisymétrique

Cette partie fait écho à l'article de [Mathews & Guo, 2005] qui décrit la même étude ¹. La grande majorité de nos résultats sont en accord avec les leurs. Néanmoins notre point de vue sur la prise en compte de la partie non-axisymétrique du champ magnétique diverge. La contribution de la partie non-axisymétrique du champ magnétique apparaît à plusieurs niveaux dans le couplage. Elle apparaît dans l'expression du couplage visqueux à travers le champ de vitesse qui s'exprime comme une fonction de $\beta(\varphi)^2$. On peut qualifier cette contribution de contribution faible dans le sens où la valeur de $\bar{\Gamma}_v^{(-)}$ est forte devant la valeur de $\bar{\Gamma}_v^{(+)}$. Ceci s'explique par le fait que la géométrie du champ magnétique n'intervient qu'à travers le champ de vitesse perturbé. Pour le couplage magnétique il en est tout autrement puisque la géométrie intervient à deux niveaux : tout d'abord dans l'expression du champ magnétique perturbé qui au premier ordre présente une dépendance presque linéaire en β mais surtout dans l'expression de la force électromagnétique qui est aussi proportionnelle à β . Ainsi le couplage obtenu est de la forme $\bar{\Gamma} = \bar{\Gamma}^{(-)} + \bar{\Gamma}^{(+)}$ et nous le comparons à la constante K^{CMB} inversée

à partir des séries de nutations apparentes progrades (+) comme rétrogrades (−). Il est fondamental de garder cette notion de 'propagation apparente'. En effet dans les séries de nutations observées, comme pour le calcul du couplage effectué, l'apparition de variations en $\exp i(t + \varphi)$ et $\exp -i(t + \varphi)$ (ω très proche de 1 avec notre adimensionnement) vient de l'utilisation d'une notation particulière qui correspond à une seule et même réalité : celle d'une variation rétrograde du vecteur rotation équatoriale Ω_{Meq} dans le référentiel $\mathcal{R}_c$ (voir paragraphe 7.1.5). Par cet argument, notre interprétation de la partie du couple visco-electromagnétique à prendre en compte pour expliquer la valeur de $\text{Im}(K^{CMB})$ est différente de celle présentée dans l'article de [Mathews & Guo, 2005]. Ce que j'interprète comme une erreur dans leur papier est justement une certaine confusion entre la propagation réelle de Ω_{Meq} et l'écriture complexe correspondante. Néanmoins quantitativement, leur étude converge vers la même valeur de viscosité efficace. Ceci s'explique par le fait que les contributions 'apparentes progrades' du couplage sont faibles devant les contributions rétrogrades. Pour le couplage visqueux, quinze ordres de grandeurs différencient les deux contributions, contre seulement deux pour le couplage magnétique. Bien que ces contributions progrades ne jouent pas de rôle important pour l'application à la CMB, on peut se poser la question de savoir pourquoi leurs valeurs sont-elles positives pour la partie correspondant à $\text{Im}(K^{CMB})$? Est ce une tendance générale? Est ce que sous d'autres configurations de champ magnétique, ces contributions progrades peuvent aboutir à une annulation de la composante $\text{Im}(K^{CMB})$?

7.7 Conclusions et perspectives

Beaucoup d'études parallèles sont et devraient être menées pour contraindre de manière plus forte les quantités relatives à l'interface noyau-manteau, tant sur le volet des observations indirectes, que sur l'amélioration des modèles. Concernant les nutations, bien que les valeurs des constantes de couplage déduites d'observations puissent évoluer, le calcul du couplage à la CMB présenté ici en est indépendant et reste donc un outil applicable à différents cas de figure. En effet les hypothèses utilisées permettent de couvrir une large gamme de paramètres physique applicable à différents interfaces (pour la Terre mais aussi pour d'autres planètes). C'est pourquoi, l'intérêt de ce modèle réside plus dans sa construction en tant que modèle théorique que dans son application faite pour la CMB, dont les résultats risquent d'être 'modèle de nutation dépendant'. En particulier, il serait délicat voir dangereux d'utiliser la valeur de viscosité inversée dans n'importe quelle cas de figure, comme cela a pu être fait pour la valeur de conductivité 'déduite de l'observation' des nutations depuis une dizaine d'année. Bien que nos motivations premières aient été d'obtenir à partir de ce modèle une mesure de la viscosité du noyau, nous nous apercevons que même si tel était le cas, ce ne serait que l'évaluation de ce paramètre à une échelle d'espace et de temps données.

¹Cette étude a été publiée alors que nous achevions l'écriture de l'article présenté en amont. Le développement mathématique est identique. Nous avons pris le parti de travailler uniquement sur la CMB alors qu'ils développent l'étude également à l'ICB. En contre partie, nous présentons une étude complète sur les diverses géométries de champ magnétique envisageables

C'est une des raisons pour lesquelles nous n'avons pas souhaité étendre cette étude à l'interface graine-noyau. En effet la caractérisation de cette interface reste encore peu connu, il est tout aussi difficile de contraindre précisément l'intensité et la géométrie du champ magnétique de cet interface qui interviennent dans le calcul. Devant tant de liberté concernant les autres paramètres, nous pourrions inverser n'importe quelle valeur de viscosité. De plus notre interprétation de ce paramètre étant principalement lié à la dynamique de petites échelles, il n'y a aucune raison pour que la viscosité inversée à l'ICB ait un lien quelconque avec celle inversée à la CMB. Cette étude pourra être menée a bien plus tard dans la perspective où par ailleurs cette interface sera mieux connue.

Par contre, un aspect que nous n'avons pas développé et qui pourrait avoir une certaine rétroaction sur l'interprétation des nutations, et la prise en compte d'une viscosité efficace à ces fréquences temporelles particulières pour la caractérisation des modes propres de la Terre et notamment la FCN pour laquelle la viscosité du noyau devrait avoir une certaine influence. La dépendance fréquentielle de différents paramètres à été prise en compte pour de nombreux paramètres dans le modèle de [Mathews *et al.*, 2002]. Cependant l'inversion des 7 paramètres qu'il fait se base sur l'ensemble des nutations observées. Ainsi K^{CMB} reste valable pour n'importe quelle 'fréquences apparentes' dans la bande diurnale prograde ou rétrograde. Devant la disymétrie du couplage vis à vis de ces deux domaines, on peut se poser la question de savoir si l'inversion aurait été semblable que celle-ci se fasse à partir d'une part des nutations forcées 'apparentes progrades' et d'autre part à partir des nutations forcées 'apparentes retrogrades'. Si tel n'était pas le cas, on pourrait alors plus facilement isoler la contribution du couple magnétique puisque celui-ci expliquerait essentiellement la constante issue de l'observation des 'apparentes progrades'. En effet la contribution du couplage magnétique est treize ordres de grandeurs supérieur au couplage visqueux pour la partie 'apparente prograde' quand les deux couples sont égaux sur 'l'apparente rétrograde'.

Quatrième partie

Conclusion générale et perspectives

Chapitre 8

Conclusion générale

Au cours de ce travail de thèse, nous avons mis au point un protocole expérimental qui permet d'accéder quantitativement aux propriétés de mélange de fluide en rotation en régime turbulent. Des perturbations dans la vitesse d'entraînement des récipients induisent des vitesses dans le fluide par un mécanisme de recirculation qui s'opère sur une constante de temps proportionnelle à $E^{-1/2}\Omega^{-1}$. Une mesure des vitesses associées à ces régimes transitoires permet d'obtenir une estimation de la viscosité apparente du fluide. La comparaison entre expériences réalisées en régime laminaire et expériences réalisées en régime turbulent permet d'apprécier la modification de viscosité apparente occasionnée par la turbulence.

Quatre types d'expériences ont été réalisées. En explorant différentes géométries, différents mécanismes de forçage de la turbulence et différents régimes hydrodynamiques, nous espérons pouvoir déterminer un caractère général de l'impact de la turbulence géostrophique sur le transport de quantité de mouvement entre les parois du récipient et le fluide. Cet impact s'est finalement révélé très inhomogène d'un dispositif à l'autre. Nous avons mis en évidence que la caractérisation de la turbulence ne suffisait pas, à elle seule, à expliquer les mesures de viscosité apparente. Pour des couples de valeurs (Ra, Re_l, E, P) identiques, les mesures réalisées sur différents dispositifs ne coïncident pas. La géométrie du récipient et surtout les mécanismes de forçage (convection thermique - rotation différentielle) jouent des rôles prépondérants. Trois origines de modification de la viscosité apparente ont été évoquées pour expliquer ces résultats. La première, qui est celle que nous souhaitons modéliser, résulte de la contribution des petites échelles dans le transport de quantité de mouvement. La deuxième vient des interactions non-linéaires entre le mouvement moyen en régime turbulent et la réponse du fluide à la perturbation imposée. La dernière marque la déstabilisation des couches limites (thermiques et dynamiques) en réponse au régime transitoire. Par cette approche expérimentale, il n'a pas été possible d'isoler ces trois contributions et bien que nous ayons tenté de dégager des dominantes sur chaque dispositif, nos conclusions restent en partie spéculatives.

Ainsi l'utilisation de la théorie linéaire de Greenspan s'est avérée plus limitée que ce que nous le pensions au début. Dans plusieurs cas, la mesure de viscosité apparente ne correspond pas à l'action du régime turbulent caractérisé en amont du phénomène

transitoire. C'est le cas notamment lorsque la robustesse de la turbulence est mise à défaut par la perturbation (cas des expériences en gallium), ou quand certaines instabilités apparaissent en réponse à la perturbation (cas de la géométrie cylindrique). La poursuite du protocole oscillant sur les expériences en gallium ou sur la géométrie cylindrique devrait permettre d'atténuer les effets de mélange liés aux régimes transitoires au profit d'une meilleure visualisation des effets liés à la turbulence en volume.

Dans ce contexte, il n'a pas été possible de prolonger les lois d'échelles établies en eau, qui reliaient la viscosité apparente mesurée au nombre de Reynolds local Re_l ou à l'écart au seuil Ra/Ra_c . Nous ne proposerons donc pas de valeur de viscosité apparente pour le noyau liquide de la Terre émanant d'une synthèse des travaux expérimentaux. Les raisons sont d'abord que la gamme de Re_l couverte uniquement par la convection en eau, a été faible pour permettre une extrapolation aux Re_l du noyau. Ensuite des mesures complémentaires seraient nécessaires pour déterminer si le spin-up réalisé dans ces conditions n'entretient pas une quelconque forme d'instabilité comme c'est le cas en géométrie cylindrique, et si ainsi, notre mesure est uniquement corrélée à Re_l ou Ra/Ra_c .

Néanmoins, une valeur de viscosité apparente pour le noyau liquide peut être accessible par le biais des observations. Le modèle visco-magnétique développé ici constitue le maillon intermédiaire pour une telle inversion. À partir des données actuelles nous estimons ainsi une viscosité apparente de l'ordre de $10^{-2} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$ soit quatre ordres de grandeur au dessus de la viscosité moléculaire du fer liquide. Cette valeur reflète typiquement les ordres de grandeur auxquels nous pouvons nous attendre pour un paramètre de mélange. Nous aurions souhaité asseoir cette valeur par une comparaison aux travaux expérimentaux mais malheureusement cela n'a pas été réalisé. C'est pourquoi nous ne pouvons déterminer si cette inversion correspond à un phénomène de rugosité de surface, à une déstabilisation de la couche limite ou à une conséquence de la turbulence en volume.

De plus l'importance de ce travail théorique réside plutôt dans la constitution du modèle visco-magnétique que dans les combinaisons de paramètres (E, E_M, E_M^m, B_0) auxquels il permet d'aboutir. Ces combinaisons sont sujettes à changement car leurs valeurs dépendent des observations et des modèles de nutation. Le modèle visco-magnétique en est lui indépendant et peut donc s'adapter à d'autres cas de figures. On peut notamment envisager de l'appliquer aux interfaces des autres planètes et satellites possédant leur propre champ magnétique (Mercure, Venus) ou baignés dans un champ extérieur (Europe)

Chapitre 9

Perspectives

On peut classer deux types de perspectives. Tout d'abord les perspectives immédiates qui sont la continuité de ce travail. Ensuite, il y a les perspectives plus générales qui sortent de tous les questionnements qui n'ont pas aboutis dans cette thèse et, qui sont nombreux.

9.1 Quelques pistes pour le prolongement du travail expérimental

Bien que le travail expérimental représente la plus grosse partie du temps consacré à ce travail de recherche, les résultats qui en découlent ont amené peu de réponse au problème envisagé. Notre vision du problème de la viscosité apparente était probablement trop naïve, ce qui à l'époque ne nous avait pas alerté contre les difficultés à mener de front quatre expériences en parallèle sur un sujet si vaste. Dès lors un cahier des charges non exhaustif peut être dressé pour chaque dispositif afin de tenter de répondre aux nombreuses interrogations qu'a suscité chaque expérience

Nous commencerons par l'expérience de convection en eau en géométrie sphérique. Des mesures de vitesse radiale sont à faire pour voir si la convection est stationnaire pendant le spin-up. Une visualisation globale, notamment par la méthode des paillettes réfléchissantes, peut également être envisagée dans un avenir proche pour voir si des instabilités de grande échelle se développent comme dans le cas de la convection en géométrie cylindrique. Au vu des résultats de ces expériences, nous devrions être en mesure de dire si la totalité de l'augmentation de la viscosité apparente observée en eau est attribuable à la turbulence en volume.

Pour les expériences en gallium, l'alternative déjà évoquée repose sur une amélioration du dispositif afin d'être en mesure d'explorer des régimes plus fortement surcritique et d'utiliser le protocole oscillant.

Il n'y a pas de nouvelles expériences envisagées avec DTeau, non que le sujet soit épuisé, mais ce dispositif semble inadapté au protocole. La raison est double : le mécanisme de

forçage amène un cisaillement renforcé par les non-linéarités qui semble interagir avec les mouvements de circulation. La turbulence de petite échelle à caractère ondulatoire ne semble pas transporter de quantité de mouvement. Par contre, les mesures de vents zonaux seraient à confirmer en explorant différent nombre d'Ekman. La dissymétrie entre les vents zonaux progrades et rétrogrades, pour des régimes au delà du seuil, n'est en effet pas comprise actuellement. Elle n'est également pas reproduite dans les modèles numériques. On peut alors s'interroger sur la modélisation physique qui a été omise dans ces modèles qui ne permettent pas de reproduire ce phénomène de grande échelle.

Enfin l'utilisation de l'expérience cylindrique a été limité par deux facteurs : le traitement des données long et laborieux et une connaissance imparfaite de l'état de base. Avec un nouvel outil d'acquisition (une chaîne de traitement plus performante), il faudrait dans un premier temps déterminer expérimentalement le seuil de convection et ensuite pouvoir caractériser plus quantitativement l'état de turbulence en régime permanent ainsi que pendant le transitoire. Ensuite, on pourrait vérifier que les instabilités que nous suspectons (par analogie avec l'expérience de [Vorobieff & Ecke, 2002] sont bien à l'origine de l'augmentation de viscosité apparente observée dans la zone externe. Existe-elle toujours pour les expériences oscillantes ?

Enfin, en améliorant le système de refroidissement, nous devrions pouvoir atteindre des régimes davantage surcritique. Est ce que l'augmentation de la viscosité sera toujours localisée à la zone externe ? Pourquoi la convection thermique dans cette géométrie ne contribue pas au mélange de quantité de mouvement alors que celui-ci semble efficace pour la convection thermique en eau en géométrie sphérique ? Toutes ces expériences complémentaires devraient permettre de nous éclairer sur ce genre de questions.

9.2 Complémentarité essentielle de l'approche numérique à réaliser en parallèle

Une grande absente de cette étude est la modélisation numérique que nous aurions pu faire pour l'étude des régimes transitoires. Ce n'est pas qu'elle n'avait pas été envisagée mais encore une fois, la mise en place des dispositifs expérimentaux, ou même simplement leur amélioration, ont pris beaucoup plus de temps que ce qui avait été pensé à la base. Les modèles quasi-géostrophiques de la convection thermique en géométrie sphérique [Aubert, 2001; Gillet, 2004] ainsi que celui développé pour la rotation différentielle [Schaeffer, 2004] ont été d'une grande utilité pour définir l'état de base turbulent. Cependant, nous aurions pu, moyennant quelques modifications, les utiliser pour étudier les régimes transitoires.

Ainsi nous pourrions vérifier la stabilité de l'état convectif de petite échelle pendant le régime transitoire et étudier de manière quantitative les phénomènes thermiques que nous avons envisagé en gallium..... La discontinuité de vitesse pendant le spin-up représente probablement un déficit technique pour les numériciens, aussi l'étude préliminaire des expériences oscillantes peut constituer une première étape.

9.3 Et pour aller plus loin...

Le protocole mis en place a révélé de nombreux biais vis-à-vis de la correspondance que nous souhaitions faire entre mesure de viscosité apparente et turbulence en volume, mais par des études complémentaires déjà envisagées, nous devrions être en mesure de cibler précisément les dispositifs adéquates pour une telle étude. Le but général de ce travail étant d'aider à la caractérisation de la turbulence dans les noyaux liquides, une étape ultérieure pourrait consister en la mise en place d'expériences en présence de champ magnétique. Les régimes magnétohydrodynamiques influencent fortement les mécanismes du spin-up [Benton & Clark, 1974], à travers la présence des forces électromagnétiques. On peut dès lors s'attendre à des comportements de la turbulence très différents en présence de champ (en particulier en terme d'anisotropie).

Est-il ensuite envisageable d'utiliser ce protocole à des fins géophysiques par les observations ? Cela impose de nombreuses conditions : tout d'abord il faut qu'un tel phénomène existe (modification soudaine de la vitesse de rotation d'une planète ou oscillation autour d'une position d'équilibre), ensuite il faut pouvoir l'observer et observer également la réponse de l'écoulement. Dans le cas de la Terre, ceci peut être envisager à travers l'observation du champ magnétique par lequel on déduit les mouvements de fluide à l'interface noyau-manteau [Eymin-Petot-Tourtollot, 2004]. Une modification soudaine peut être occasionnée par un brusque changement dans le moment d'inertie de la planète, suite à un fort séisme ou à l'impacte d'un astéroïde, ce qui restent des phénomènes relativement exceptionnels. En revanche une oscillation autour d'une position d'équilibre est assez commune notamment sous l'action des couplages exercés par les autres astres. On peut ainsi citer le cas de Mercure. Cette planète à une vitesse de rotation moyenne en résonance (3 : 2) par rapport à sa révolution autour du soleil. Le couple gravitationnel exercé par le soleil induit une oscillation du manteau autour de cette rotation moyenne. Le fluide présent dans le noyau liquide doit ainsi évoluer selon le principe de recirculation étudié pour le protocole oscillant. La recirculation d'Ekman et le frottement qui y est associé, pourraient dans un premier temps être pris en compte dans l'analyse des oscillations principales de l'axe qui est faite dans les modèles [Rambaux & Bois, 2004]. Par ailleurs, les missions Messenger et Bepi Colombo vont permettre des mesures des paramètres de rotation de la planète ainsi que des mesures du champ magnétique. Dans un avenir sans doute beaucoup plus lointain, on pourrait éventuellement, à partir de l'inversion des vitesses qui pourrait être faite à partir du champ magnétique, accéder à la viscosité apparente de l'intérieur de Mercure.

9.4 Aspects nutations et couplages

Le modèle analytique présenté dans ce travail a fourni une nouvelle interprétation aux données de nutations. L'étude est relativement complète (par comparaison au travail expérimental), mais néanmoins de nouveaux axes de recherche peuvent être développés. Il serait envisageable, d'adapter ce modèle à d'autres cas que celui de l'interface noyau-

manteau (par exemple l'interface graine-noyau ou des interfaces d'autres planètes, Mercure, Europe...). Cependant, avant de pouvoir utiliser cet outil pour inverser des propriétés aux interfaces concernées, il faut être en mesure de détenir des observations précises des nutations et des modèles de nutations adaptés. Nous sommes loin actuellement d'avoir ces deux conditions réunies pour un astre autre que la Terre.

On peut également étudier la stabilité des écoulements calculés. A partir de quels forçages en fréquence et en amplitude ces écoulements de couche limite deviennent-ils instables? Est ce que la couche de peau peut se destabiliser au même titre que la couche d'Ekman?

Une troisième étude pourrait porter sur l'influence du champ magnétique sur le champ de vitesse hors couche limite. Jusqu'à quand l'hypothèse de rotation en bloc est-elle valide?

Enfin ce même exercice pourrait être fait pour l'étude du spin-up. Quel serait le couplage magnétique associé au spin-up en fonction de la géométrie du champ magnétique? Enfin cette étude du couplage visco-magnétique à l'interface noyau-manteau pourrait être mis en relation avec les travaux de [Légaut, 2005] qui portent sur les ondes de torsions dans le noyau. Peuvent-elles rentrer en jeu dans le transfert de quantité de mouvement dans le noyau et comment? Notre approche de couche limite reste-elle pertinente en présence de ces ondes? Peut-on alors utiliser les conditions limites inversées par notre modèle visco-magnétique pour le modèle de propagation des ondes de torsion.

Sur une autre thématique nous avons évoqué la prise en compte d'une irrégularité majeure à l'interface noyau-manteau. Son impact pourrait être évaluée en terme de couple topographique, mais nous pourrions aussi dans un premier temps regarder l'impact produit sur l'écoulement global et la modification dans le couplage magnéto-visqueux que cette irrégularité induit.

Annexe A

Notations

Ici sont repris de manière peut être non exhaustive les différents symboles utilisés dans ce manuscrit.

A, A'	amplitudes des expériences oscillantes
α	coefficient d'expansion thermique
$\mathbf{B}$	champ magnétique imposé
$\mathbf{b}$	champ magnétique
χ	vorticité
δ_m	épaisseur de peau
δ_ν	épaisseur de la couche visqueuse
δ_T	épaisseur de la couche limite thermique
$\delta\omega_{\mathbf{M}}$	vecteur rotation équatoriale
E	nombre d'Ekman
E_m, E_m^M	nombres d'Ekman magnétiques du noyau et du manteau
$\mathbf{e}_z$	vecteur unitaire selon l'axe de rotation
$\mathbf{E}$	champ électrique
ε_0	permittivité électrique
f_f	fréquence de forçage oscillant
$\mathbf{F}_L$	forces de Lorentz
φ, φ'_0	phases des expériences oscillantes
η, η_c, η_M	diffusivité magnétique, du noyau, du manteau
g	champ de gravité
g_l^m, h_l^m	coefficients de Gauss
$\bar{\Gamma}_v, \bar{\Gamma}_m$	couples complexes visqueux et magnétiques
Ha	nombre d'Hartman
I	moment d'inertie du noyau
$\mathbf{j}$	vecteur densité de courant
K^{CMB}	constante de couplage
κ	diffusivité thermique

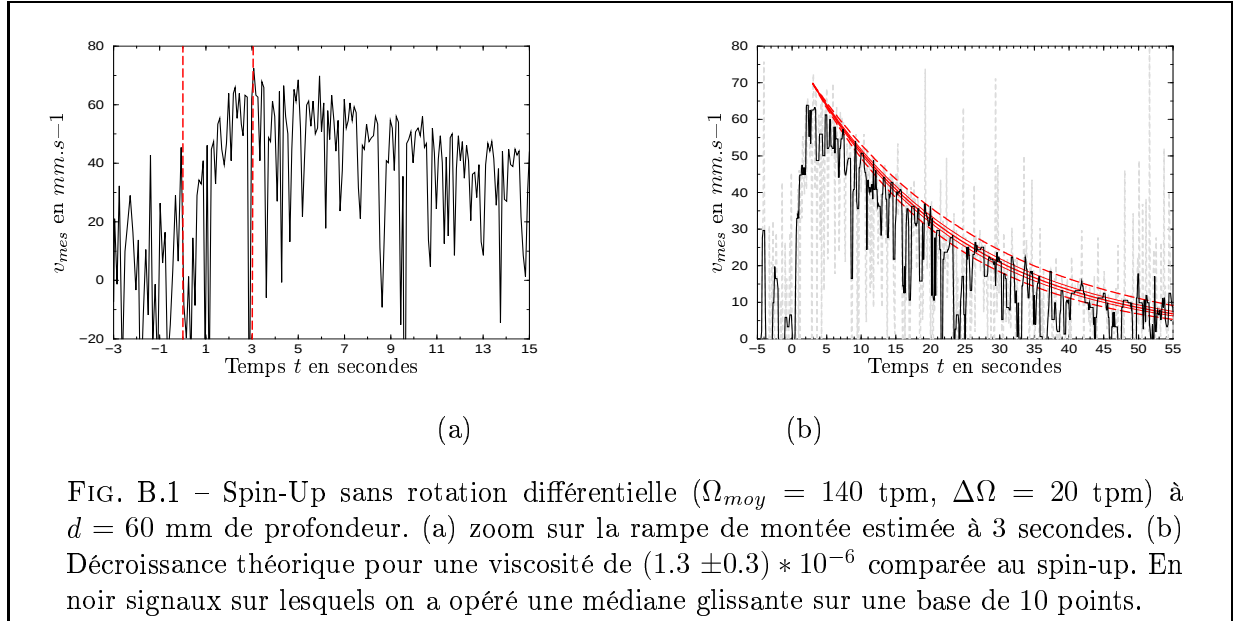
Λ	nombre d'Elssasser
Λ_d	nombre d'Elssasser dynamique
μ	viscosité dynamique
μ_0	perméabilité magnétique
ν	viscosité cinématique
ω_f	pulsation de forçage oscillant
Ω	vecteur rotation
$\mathbf{P}$	pression hydrostatique
Pr	nombre de Prandlt
Pm	nombre de Prandlt magnétique
Π	pression modifiée
$P_l^m(\cos \theta)$	polynomes associés de Legendre
Q_{inv}	fonction coût
Ro	nombre de Rossby
$\mathcal{R}_T$	référentiel terrestre
$\mathcal{R}_a$	référentiel absolu
Re	nombre de Reynolds
Re_m	nombre de Reynolds magnétique
Ro_d	nombre de Rossby associé à la rotation différentielle
R_i	rayon de la sphère interne
R_T	rayon terrestre
$Rst_i(l)$	spectre d'énergie magnétique
ρ	densité
ρ_e	charge électrique
$(r_\Delta, \theta_\Delta, z_\Delta)$	coordonnées polaires
(r, θ, φ)	coordonnées sphériques
s	rayon cylindrique adimensionné
T	température
T_1	temp. manchon interne dans l'exp. de conv. therm.
T_2	temp. de la sphère externe dans l'exp. de conv. therm.
τ	temps de spin-up
(u_x, u_y, u_z)	vecteurs unitaires cartésiens
$(u_{r_\Delta}, u_{\theta_\Delta}, u_{z_\Delta})$	vecteurs unitaires polaires
$(u_r, u_\theta, u_\varphi)$	vecteurs unitaires sphériques
$\mathbf{v}$	vecteur de vitesse
V_0	vitesse initiale dans les inversions de spin-up
$V(r, \theta, \varphi)$	potentiel magnétique
$\mathbf{v}_\pm, \mathbf{b}_\pm$	champs complexes
(V_{gx}, V_{gy})	vitesse géostrophiques
(x, y, z)	coordonnées cartésiennes
∇	opérateur divergence

Annexe B

A propos de l'expérience DTeau

Cette partie expérimentale a nécessité de nombreuses réflexions et divers tests que nous ne pouvons détailler dans la partie concernant ce dispositif. Néanmoins, afin que les lecteurs puissent mieux comprendre notre démarche, il m'a paru pertinent de présenter les diverses précautions et évaluations que nous avons réalisées sur ces expériences sous la forme d'une annexe que voici.

B.1 Expériences de Spin-Up linéaires



Malgré une forte diminution du bruit environnant grâce à la présence d'un moteur à courant continu pour entrainer la graine, le signal de vitesse reste fortement bruité. On observe notamment une amplitude de battement de l'ordre de ± 5 mm/s de fréquence

similaire à la fréquence de rotation du moteur. En regardant le spectre d'énergie associé, on observe également ses fortes oscillations dans le signal qui peuvent être interprétées en terme de surpression sur la sonde Doppler. Ce phénomène qui peut être le résultat d'un mauvais équilibrage du système en rotation n'a pu être corrigé, nous devons donc nous contenter d'exploiter des données dont la précision sera diminuée à $\pm 5 \text{ mm/s}$. Les diagrammes spatio-temporels de l'énergie donne également une information quantitative sur l'encementement du volume. Plus le taux de rotation d'ensemble est fort plus la zone d'énergie maximum reçue est diminuée. Ceci s'accompagne d'une diminution de la zone de mesure fiable des vitesses. Compte-tenu de cette observation et bien que nous puissions en théorie explorer des vitesses allant jusqu'à 300 rpm , nous avons dû limiter notre étude à des vitesses entre 125 rpm et 180 rpm .

Dans ces conditions, nous avons testé des sauts de rotation allant jusqu'à $\Delta\Omega = 20 \text{ rpm}$ soit $Ro \approx 0.1$. La figure B.1 est le résultat d'une mesure de vitesse obtenue à une profondeur proche de la vitesse maximum mesurée. Dans ce régime, on remarque que la sensibilité à la viscosité n'est pas optimum. En effet la dépendance en temps du signal de vitesse peut aussi bien s'expliquer par une viscosité de l'ordre de $10^{-6} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$ (viscosité de l'eau aux températures et pression de l'expérience) que par une viscosité de l'ordre de $1.6 * 10^{-6} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$. La sensibilité à la viscosité augmente lorsque l'on augmente le $\Delta\Omega$ du spin-up si bien que l'on peut espérer observer des différences de viscosité inférieures à 60% pour des $\Delta\Omega$ entre 40 et 50 rpm. Pour de tels sauts de rotation nous resterions dans la théorie linéaire que pour des vitesses d'ensemble supérieures à 400 rpm , vitesses que nous n'explorons pas pour les raisons énoncées plus haut.

Un dernier problème technique est apparu lors du dépouillement des données. La figure B.1 semble montrer que le temps de réponse du moteur n'est pas immédiat. Nous nous attendions en effet à ce que, comme dans le cas du dispositif de convection, nous ayons un temps de montée du Spin-Up quasi-instantané (en fait on l'estime à moins de 0.5 s pour les expériences de convection). Ici il est clairement de l'ordre de 2 ou 3 s ce qui ne peut plus être considéré comme instantané par rapport au temps caractéristique du Spin-Up (de l'ordre de 30 s pour les expériences réalisées sur DTeau). Bien qu'au premier ordre et compte-tenu de nos marges d'imprécisions, on reste dans une estimation correcte de la viscosité moléculaire de l'eau, en toute rigueur nous devrions faire appel dans nos inversions à un modèle non plus analytique d'excitation instantanée. Il faudrait au contraire faire correspondre nos expériences aux résultats de modélisations numériques nécessairement en 3 dimensions (à cause des mouvements de recirculation) d'expériences de spin-up à rampe de montée progressive. Nous ne possédons pas de tels codes actuellement et bien que leur élaboration puisse être d'un certain intérêt, il est peut être plus pertinent de tenter d'améliorer le dispositif expérimental pour palier ce problème si l'on veut espérer obtenir des résultats à plus court terme concernant la viscosité efficace.

La comparaison entre les expériences de spin-up sans rotation différentielle et avec rotation différentielle, amène globalement aux mêmes temps caractéristiques (figure B.2). Les conclusions sont donc que ce dispositif, sous cette utilisation permet, dans une zone centrale, d'inverser des valeurs de viscosités compatibles avec celles de l'eau (avec une précision de l'ordre de $\pm 6 * 10^{-7} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$). La comparaison des expériences

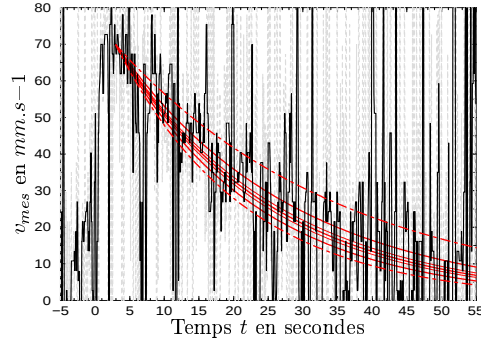


FIG. B.2 – Spin-up avec rotation différentielle ($\Omega_{moy} = 140$ tpm, $\Delta\Omega = 20$ tpm, $\Omega_m = 75$ tpm) à $d = 60$ mm de profondeur. Décroissance théorique pour une viscosité de $(1.3 \pm 0.6) * 10^{-6} m^2.s^{-1}$. L'imprecision excède ici les 60%.

réalisées nous laisse penser que l'effet de viscosité efficace dans ce système est inférieur à $\pm 6 \cdot 10^{-7} m^2.s^{-1}$) de la viscosité moléculaire pour les forçages considérés.

Devant ces contraintes techniques, j'ai choisi de passer rapidement au nouveau protocole oscillant qui devrait malgré ces mêmes contraintes techniques sur l'amplitude des vitesses, permettre au moins à travers la détermination de la phase du signal, d'accéder à une mesure de la viscosité efficace avec une meilleure précision. Il est à noter néanmoins que dès que l'un des deux problèmes liés à la mesure seront résolus (diminution du battement observé ou augmentation possible de la vitesse d'ensemble), nous avons toujours bon espoir d'explorer des régimes linéaires favorables à l'augmentation de la viscosité efficace.

B.2 Expériences oscillantes

B.2.1 La chaîne de Traitement

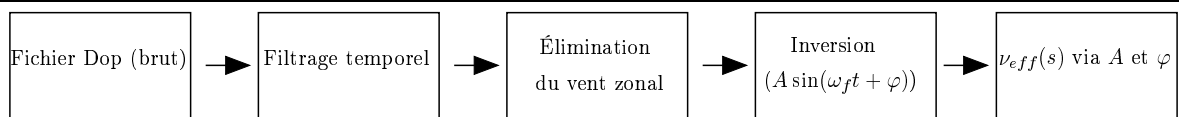
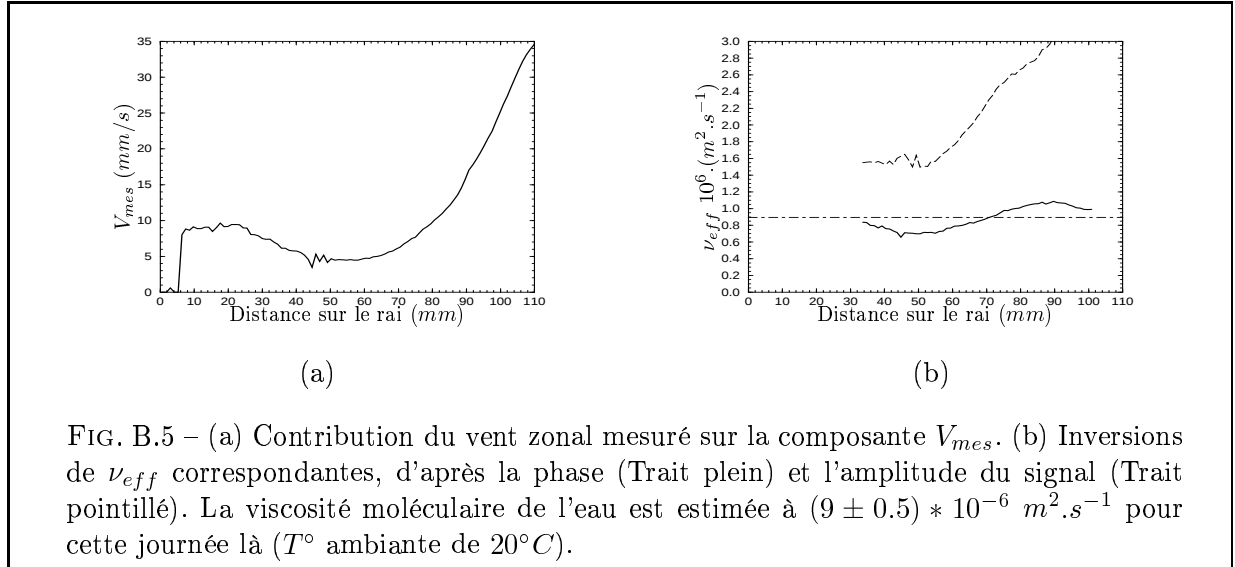
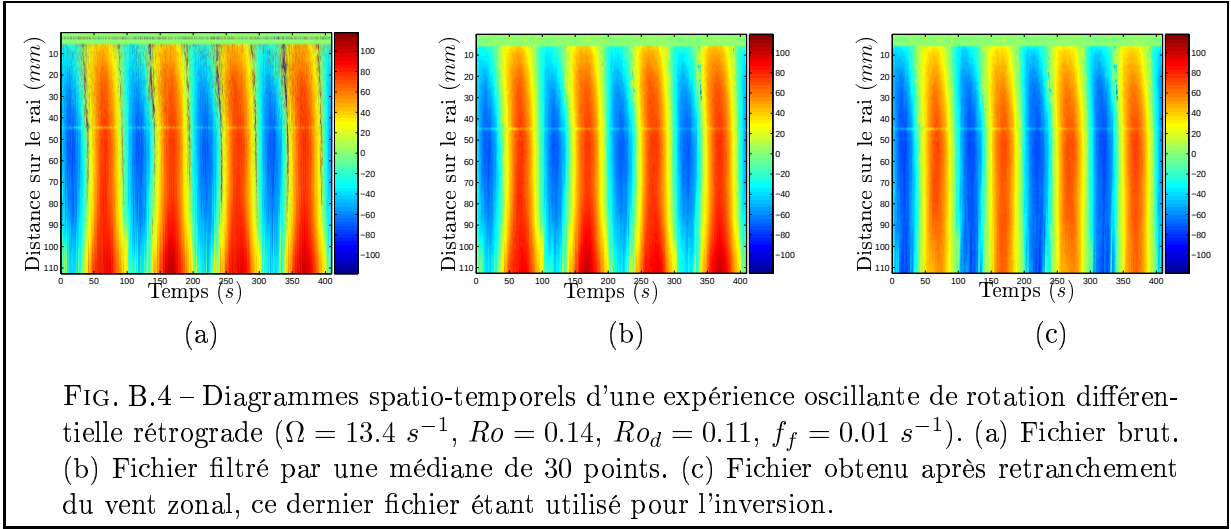
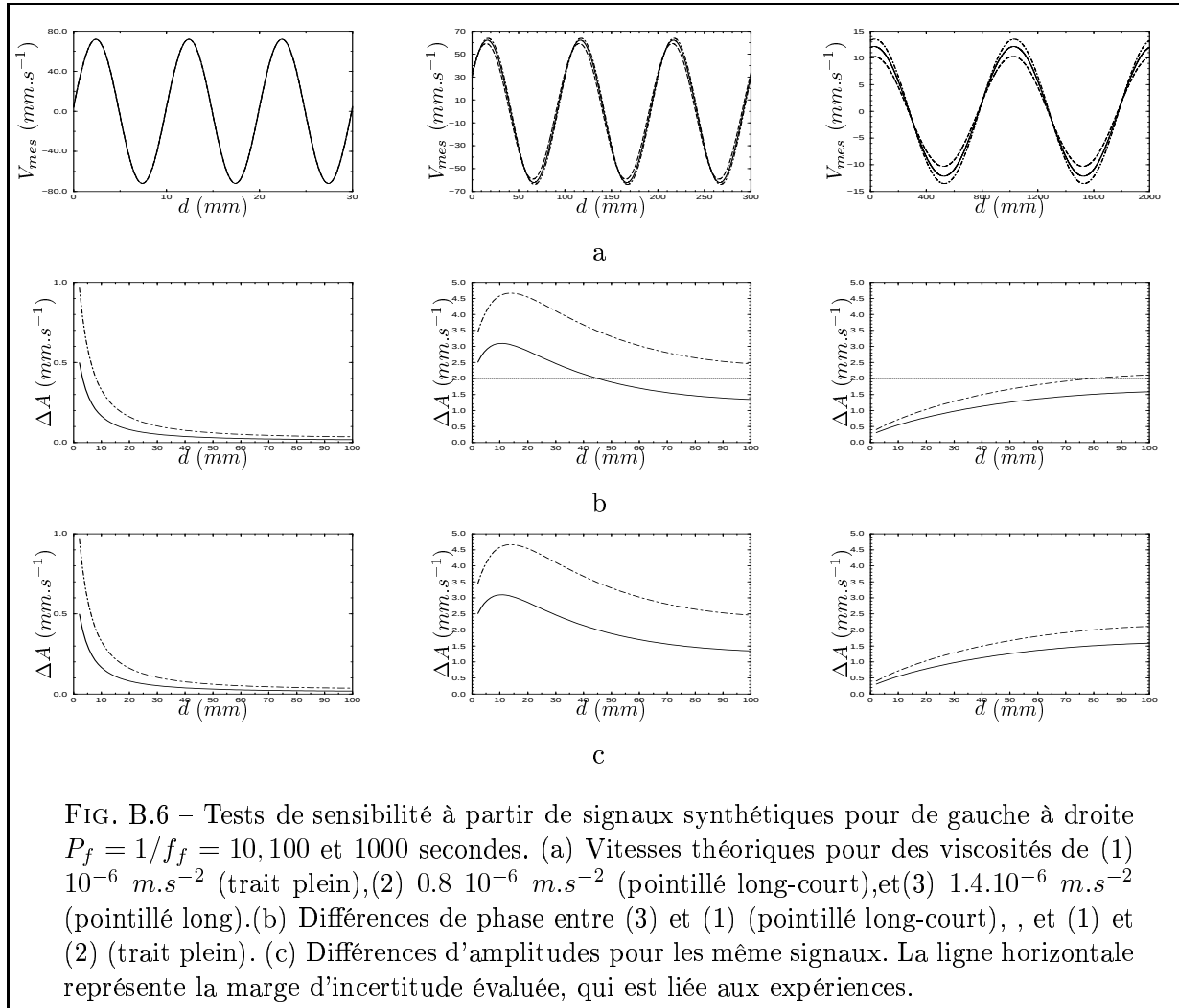


FIG. B.3 – Schéma de principe décrivant les différents traitements qui permettent à partir du champ de vitesse mesuré d'obtenir une évaluation de la viscosité efficace ν_{eff} à chaque profondeur.

Le dispositif expérimental permet d'obtenir une mesure de vitesse pour différentes distances au centre allant de 0.4 à 0.95 rayon adimensionné. La première étape consiste à opérer sur le fichier de données brutes une médiane glissante temporelle afin de filtrer



les points aberrants, celle-ci s'effectuant sur 5 à 40 points selon la qualité des mesures qui diffère d'une journée à l'autre. Une fois ce filtrage réalisé nous retranchons la valeur du vent zonal estimé grâce à la moyenne du signal mesurée sur un nombre de périodes entières (entre 2 et 10 selon les fichiers). Nous obtenons alors ainsi un fichier inversable par la fonction $A \sin(\omega_f t + \varphi)$. Une double estimation de la viscosité efficace ν_{eff} est ensuite réalisée grâce aux expressions analytiques de (A) et de (φ) données par l'équation (5.3). Les différentes étapes sont schématisées par la figure (B.3), un cas concret est présenté aux figures (B.4) et (B.5).



B.2.2 Incertitudes et fiabilité

Étude de sensibilité

Les formules analytiques du paragraphe 2.3.4 restreignent déjà en partie l'étude. Il s'agit maintenant de mettre des valeurs précises derrière ces estimations pour évaluer si il est possible de déterminer la viscosité efficace à partir des mesures de vitesse avec la précision souhaitée. Les diverses contraintes expérimentales nous donnent une incertitude sur la vitesse mesurée de l'ordre de $\pm 1\text{-}2 \text{ mm.s}^{-1}$ si l'on regarde sur les grandes échelles de temps¹. L'échantillonnage du signal varie entre 50 et 100 ms. La plupart des fichiers de vitesse sont pré-traités avec une médiane glissante en temps sur une base de 5 à 40 points. Néanmoins cette médiane ne semble pas affecter l'incertitude sur

¹Les fluctuations autour d'une valeur moyenne pouvant se réduire par des filtrages ne sont pas prises en compte dans cette évaluation d'incertitude; néanmoins cette contribution pouvant être non négligeable, nous en évaluons l'effet au paragraphe suivant.

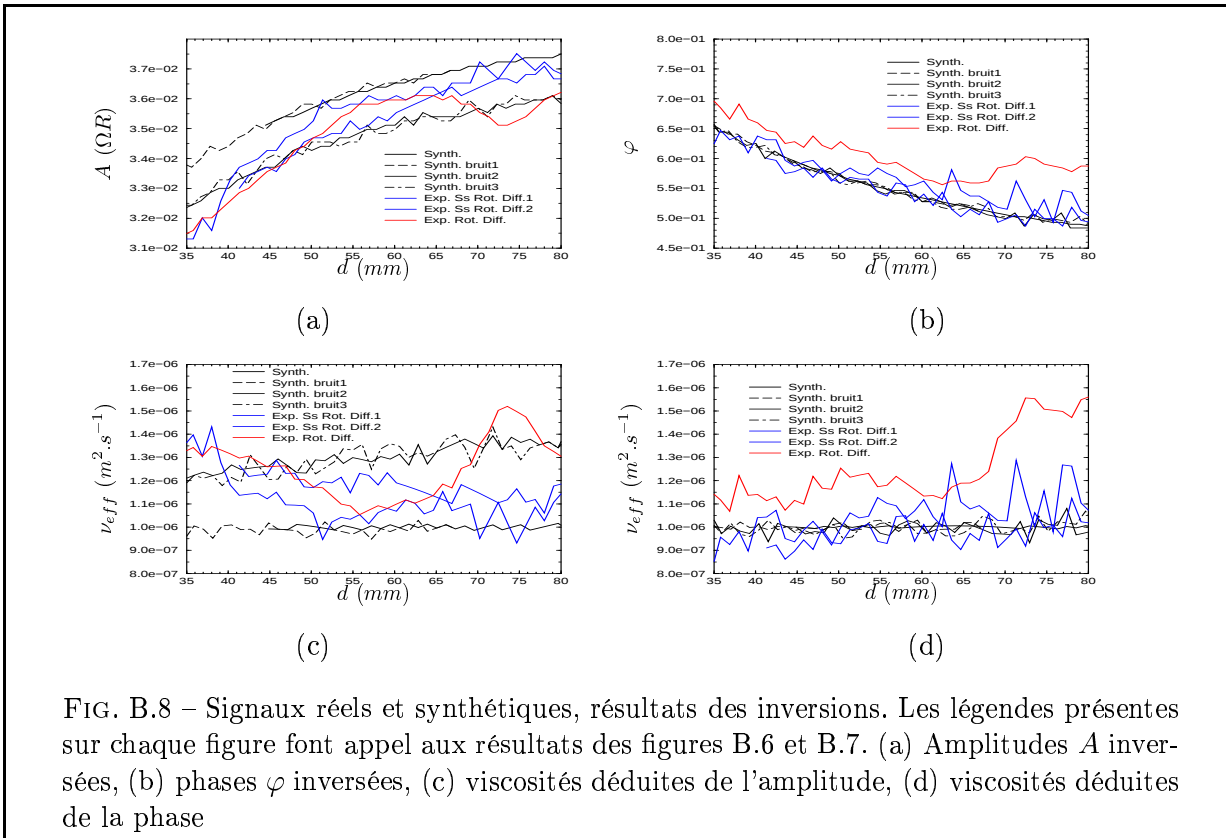
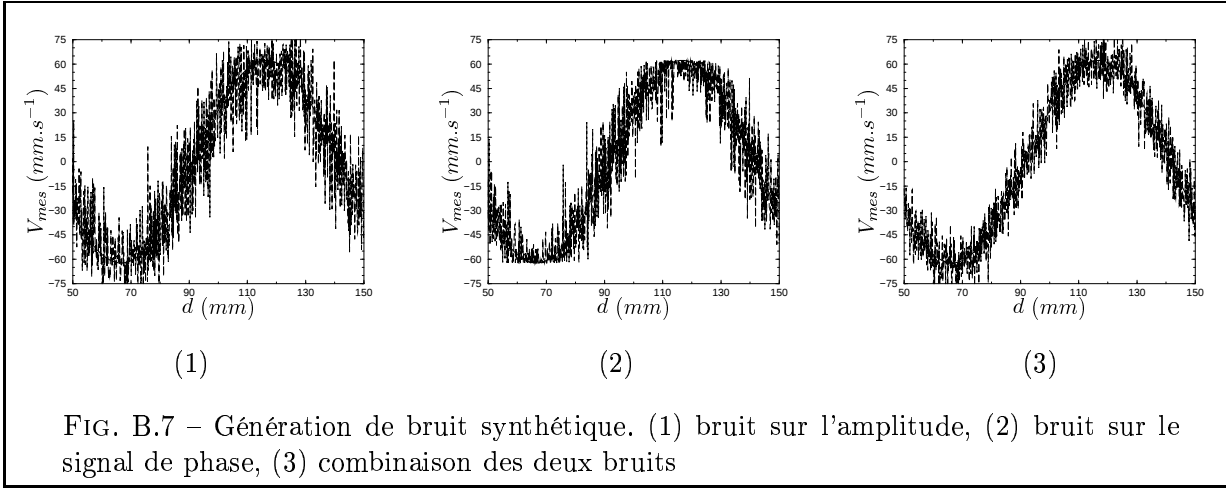
le temps. La référence du temps initial t_0 qui permet d'identifier le décalage de phase entre le fluide et la sphère est estimée avec une précision similaire (0.1 secondes). Ainsi on considère une incertitude globale sur le temps de 0.1 s et sur la vitesse de 2 mm.s^{-1} . On obtient une incertitude théorique² sur la phase de $\Delta\varphi = 0.02$. Ceci correspond à un $\Delta\varphi/\omega_f = 0.3$ pour la fréquence intermédiaire ce qui est trois fois plus que l'estimation basique que l'on pourrait faire en considérant que $\Delta\varphi \approx \omega_f \Delta t$. En terme de viscosité efficace nous pouvons en théorie détecter des différences de viscosité de l'ordre de $1.5 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$ avec la phase.

La figure B.6, présente les signaux de vitesse que nous devrions obtenir pour trois fréquences différentes. Les expériences à haute fréquence ($f_f = 0.1 \text{ s}^{-1}$) présentent l'intérêt d'obtenir une amplitude de signal assez forte pour obtenir une bonne incertitude relative. Néanmoins nous remarquons que pour cette fréquence, la sensibilité de l'amplitude aux différences de viscosité est très faible et il en va de même pour la phase. La fréquence $f_T = 0.001 \text{ s}^{-1}$ est très intéressante puisqu'à toutes les profondeurs nous pouvons a priori détecter des différences de viscosité de l'ordre de 5% d'après la phase. Néanmoins l'amplitude des ondes de Rossby devenant ici du même ordre de grandeur que l'amplitude de l'oscillation forcée, nous pouvons être confrontés à quelques difficultés lors des inversions. De plus le temps de réalisation de ces expériences sera de l'ordre de 30 minutes au moins, en gardant le même échantillonnage en temps pour ne pas perdre la précision sur la phase, on se retrouve ainsi à manipuler des quantités de données beaucoup plus importantes pour un résultat pas forcément plus pertinent. C'est pourquoi une fréquence intermédiaire paraît un bon compromis. En réalisant des expériences à des fréquences de 0.01 s^{-1} et 0.005 s^{-1} , nous gardons une précision sur la phase qui devrait nous permettre de déterminer la viscosité à $0.1\text{-}0.2 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$, information qui pourra être confirmée avec l'évaluation de l'amplitude du signal qui nous donnera une viscosité efficace avec une précision moindre $0.4\text{-}0.5 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$.

Impacts des bruits synthétiques

Afin d'évaluer la robustesse des inversions, nous avons testé nos routines d'inversion avec des fichiers synthétiques et des fichiers synthétiques bruités simulant des fluctuations assez similaires à celles que nous observons. Ainsi deux types de bruits ont été évalués (B.7) : un bruit gaussien d'écart type de 10 mm/s sur l'amplitude, un bruit gaussien d'écart type 0.3 rad sur la phase, qui reflète assez bien les cas où les zones de faibles vitesses sont plus bruitées que les zones de fortes vitesses³ et une combinaison des deux types de bruits qui viennent d'être décrits. Les inversions de ces fichiers font apparaître des fonctions coût dont les valeurs sont globalement indépendantes de la profondeur d , valeurs comprises entre $8 \cdot 10^{-5} (\Omega R)$ et $1.5 \cdot 10^{-4} (\Omega R)$ soit entre 5 et 10 % de la valeur maximale de la vitesse. Ces valeurs de fonction coût vont nous permettre de définir des niveaux de références pour différencier les expériences dont les inversions sont exploitables de celles qui ne le sont pas. Par ailleurs les résultats des inversions

²Cette estimation a été réalisée en utilisant la formule $\Delta\varphi = \sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2 (\Delta v)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 (\Delta t)^2}$ pour $s = 0.5$ $f_f = 0.01 \text{ s}^{-1}$, correspondant à un cas typique de nos expériences. L'hypothèse implicite est que l'on considère les erreurs liées à Ω , $\Delta\Omega$ et s comme des erreurs systématiques qui ne diffèrent pas d'une expérience à l'autre.



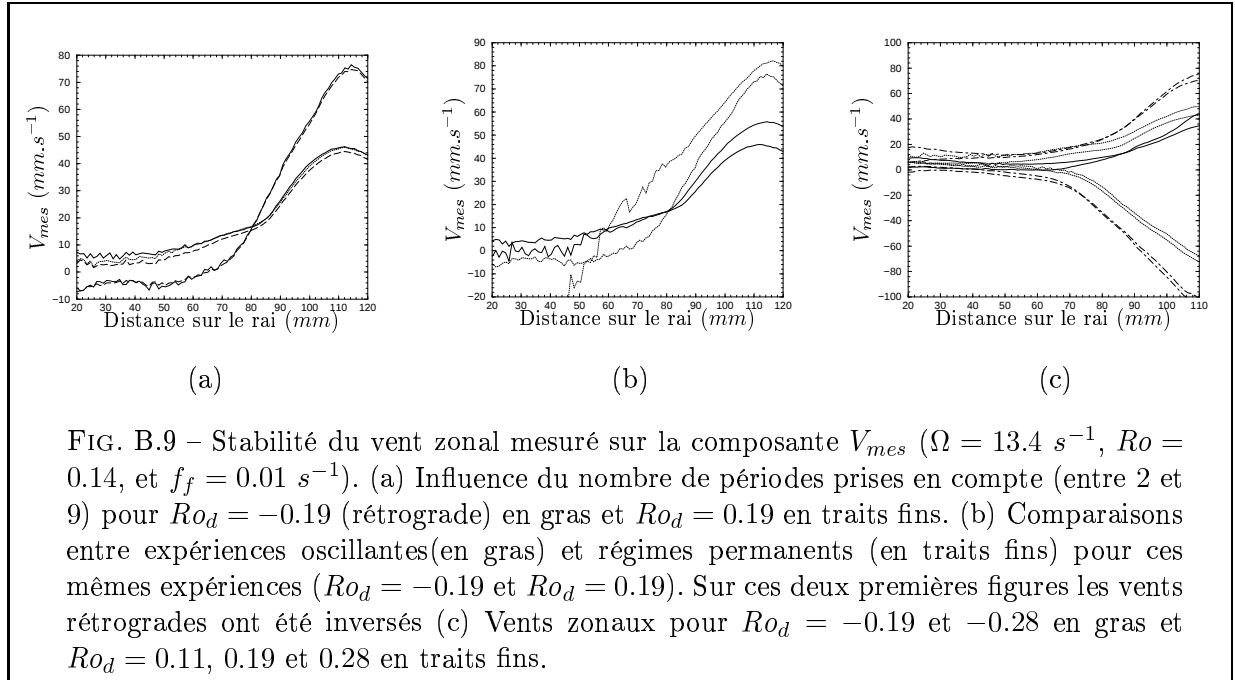
montrent que des erreurs jusqu'à 20% (variation de viscosité correspondante de l'ordre de 30%) sur l'amplitude peuvent être attendues en raison du bruit, alors que la phase, reste peu sensible à ce type de bruit (B.8)⁴. Nous avons donc un double intérêt à travailler à partir de la phase du signal plutôt qu'à partir de son amplitude.

³Ce qui est parfois notre cas en raison de la technique de mesure de vitesse utilisée.

⁴Cette étude a été réalisée en comparaison avec des premières expériences (courbes bleu et rouge) pour lesquelles la sonde n'était pas parfaitement placée en tir horizontal. Ces expériences préliminaires ne sont pas pris en compte dans la synthèse des résultats, mais néanmoins les tests de robustesse réalisés sur ces expériences

B.2.3 Précautions expérimentales

En prenant en compte l'analyse du temps de spin-up, nous pouvons espérer obtenir un régime oscillant stationnaire après une période de l'ordre de 30 secondes (correspondant à l'ordre de grandeur du temps de spin-up des expériences réalisées). Néanmoins le temps d'apparition des ondes de Rossby peut, quant à lui, être très différent de ce premier temps. Les études de Schaeffer [2004] montrent que ce temps de mise en place d'un régime stationnaire au delà du seuil, diminue avec l'augmentation de l'écart à ce dernier. Des expériences réalisées à $Ro_d/Ro_c = 1.35$ montrent une apparition des ondes après seulement 50 s, nous avons donc pris comme première précaution de toujours démarrer nos enregistrements après 200 s.



Pour les expériences oscillantes nous remarquons par ailleurs que la prise en compte de une ou plusieurs périodes a peu d'influence sur l'estimation du vent zonal (figure B.9 (a)). La différence est faible devant les disparités que nous pouvons trouver entre deux expériences similaires réalisées à quelques heures d'intervalles. La figure B.9 (c) montre néanmoins que ces expériences sont assez reproductibles, particulièrement pour les forçages rétrogrades. La stabilité du vent zonal qui se traduit à travers la reproductibilité des expériences, semble augmenter avec le forçage différentiel. Dans l'enregistrement d'expériences en rotation différentielle sans oscillation forcée, nous n'avons pas observé de structures dominantes (type 'tache rouge') qui pourraient modifier le vent zonal périodiquement ; néanmoins la comparaison entre ces vents zonaux et ceux inversés à

restent valable pour les expériences suivantes. Qualitativement on remarque également la tendance confirmée par la suite qui révèle une viscosité efficace sensiblement égale à la viscosité moléculaire du fluide dans la majeure partie du volume et une nette augmentation de la viscosité efficace dans la zone proche de la sphère interne (grande distance sur le rai) pour les expériences fortement rétrogrades

partir des expériences oscillantes, montre que de manière quasi-systématique l'intensité du vent zonal est amoindri par le forçage (figure B.9 (b)). On remarquera également sur l'ensemble de ces courbes qu'à forçage équivalent, les vents zonaux rétrogrades sont plus forts que les progrades, bien que ces régimes rétrogrades sont plus faiblement au delà du seuil, par rapport aux régimes progrades. Cette différence peut être dû à des effets non-linéaires comme déjà évoqué au paragraphe 5.2.4. Les différences observées sur les vents zonaux peuvent avoir une certaine influence sur le résultat de nos inversions, notamment en terme d'inversion sur l'amplitude. Il est important de garder ces notions à l'esprit lorsque viendra l'interprétation des résultats en terme de viscosité efficace.

Une précaution, d'ordre technique cette fois-ci, a également été prise : celle de travailler à mêmes paramètres de réglage du système d'acquisition Doppler (même résolution spatiale, même prf, même prf/profil). En effet des tests réalisés après les premières séries d'expériences ont montré un 'offset' de plus de 5 mm/s sur les vitesses entre différentes prf, rendant peu fiable les inversions de la viscosité d'après l'amplitude.

B.2.4 Précautions lors du traitement des données

Si autant de test ont été réalisés, c'est bien que de nombreuses inversions se sont révélés délicates, et que aujourd'hui tous les résultats ne sont pas exploitables, sans que nous comprenions complètement l'origine des difficultés rencontrées.

Anomalies temporelles

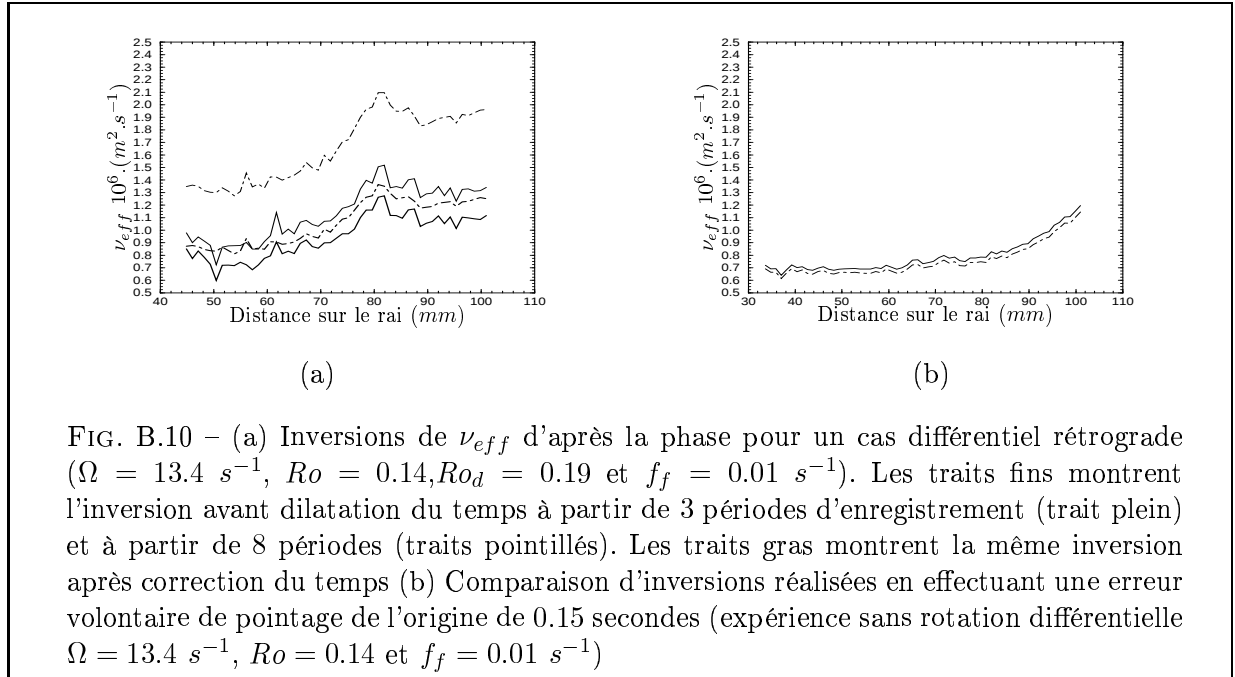


FIG. B.10 – (a) Inversions de ν_{eff} d'après la phase pour un cas différentiel rétrograde ($\Omega = 13.4 \text{ s}^{-1}$, $Ro = 0.14$, $Ro_d = 0.19$ et $f_f = 0.01 \text{ s}^{-1}$). Les traits fins montrent l'inversion avant dilatation du temps à partir de 3 périodes d'enregistrement (trait plein) et à partir de 8 périodes (traits pointillés). Les traits gras montrent la même inversion après correction du temps (b) Comparaison d'inversions réalisées en effectuant une erreur volontaire de pointage de l'origine de 0.15 secondes (expérience sans rotation différentielle $\Omega = 13.4 \text{ s}^{-1}$, $Ro = 0.14$ et $f_f = 0.01 \text{ s}^{-1}$)

Au cours des premiers traitements des données nous avons remarqué une certaine disparité en terme de niveau absolu de viscosité inversée. Celui-ci était bien au delà du seuil de précision que nous espérons atteindre notamment lorsque nous réalisons des inversions sur un nombre différent de périodes. Par ailleurs, nous avons observé que l'échantillonnage en temps du système Doppler, était peu constant. Sur des enregistrements de 900 secondes, nous observons un décalage temporel du signal reçu, allant jusqu'à 4 secondes par rapport à un signal théorique simulant la période imposée ($P_f = 100$ ou 200 secondes). Sans être complètement persuadé qu'il s'agisse d'une erreur linéaire du Doppler¹, nous avons néanmoins pu corriger une grande partie du décalage observé sur la figure en 'dilatant/compressant' la base de temps (jusqu'à $\pm 0.5\%$). La figure B.10(a) montre les inversions réalisées à partir de 3 et 8 périodes avant et après la correction de la base temporelle. On remarque sur la figure B.10(b), que le pas d'échantillonnage en temps n'est pas le facteur limitant la précision sur la phase.

Malgré l'opération de dilatation/compression du temps qui ne s'effectue pas avec une grande précision (estimation visuelle), il reste des variations modérées du niveau moyen de la viscosité apparente pour des expériences réalisées dans des conditions identiques. Néanmoins les variations de la viscosité efficace d'une profondeur à l'autre ne sont pas affectée par cette anomalie temporelle et les tendances observées peuvent être donc considérées comme fiables.

Effet du filtrage

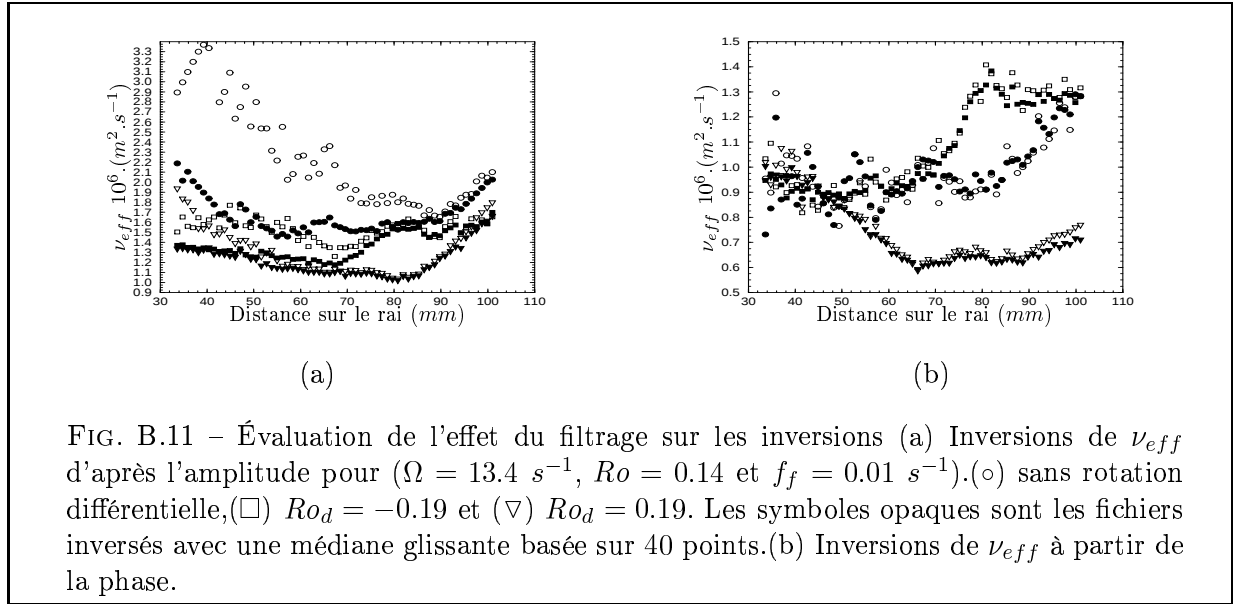
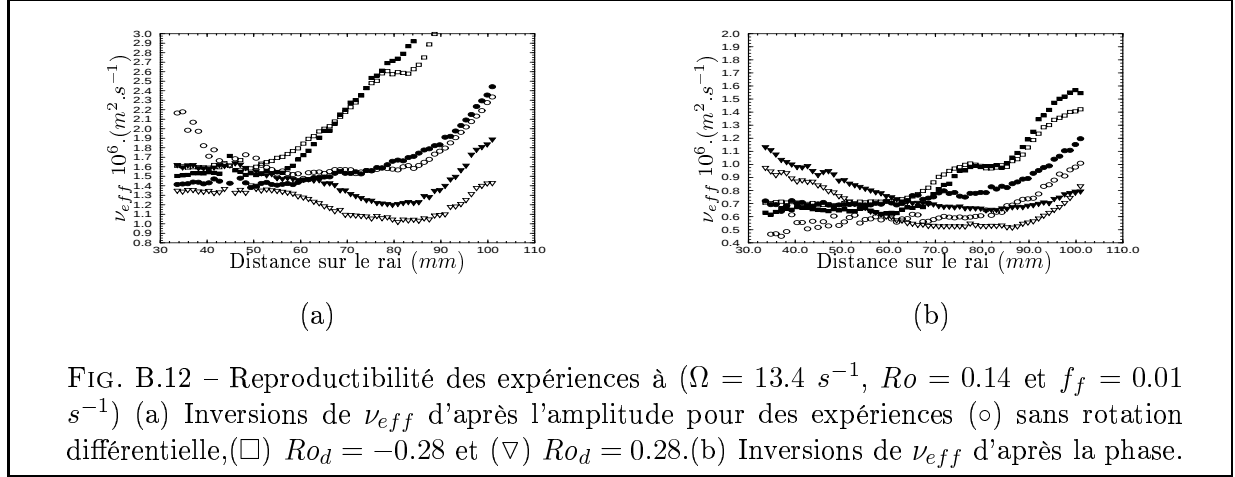


FIG. B.11 – Évaluation de l'effet du filtrage sur les inversions (a) Inversions de ν_{eff} d'après l'amplitude pour ($\Omega = 13.4 \text{ s}^{-1}$, $Ro = 0.14$ et $f_f = 0.01 \text{ s}^{-1}$). (○) sans rotation différentielle, (□) $Ro_d = -0.19$ et (▽) $Ro_d = 0.19$. Les symboles opaques sont les fichiers inversés avec une médiane glissante basée sur 40 points. (b) Inversions de ν_{eff} à partir de la phase.

La figure (B.11) présente l'impact d'un filtrage fort de nos données sur les valeurs de viscosité que nous inversons. L'impact sur l'inversion faite d'après la phase est faible.

¹Nous avons vérifié que le moteur réagissait avec une précision suffisante et en effet nous retrouvons la période de l'oscillation imposée à 0.01 secondes près. Il reste à lever l'incertitude sur le fait que le décalage en temps peut venir soit d'un problème lié à l'acquisition, soit d'une réponse du fluide (où de la mesure que l'on en fait) qui serait apériodique.

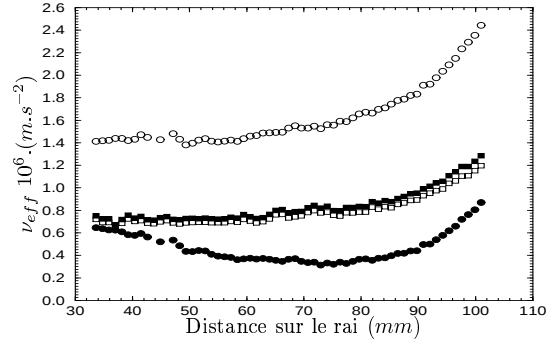
Ceci nous conforte dans l'idée que la mesure d'après la phase reste robuste malgré une médiane temporelle appliquée sur un intervalle de temps allant jusqu'à 4 secondes. Par contre l'impact sur l'amplitude reste fort lorsque l'ensemencement du volume est médiocre. La figure (B.11 (a)) montre en effet que sans turbulence ($\circ$), seul le fichier filtré permet une estimation correcte de la viscosité. A partir du fichier brut, le nombre important d'absence de mesures (générant de nombreux zéros), force l'inversion vers un signal de vitesse plus faible donc une viscosité plus forte. Cette courbe montre également la fragilité de la mesure si celle ci est uniquement faite à partir de l'amplitude du signal.



Les inversions basées à partir d'expériences réalisées avec les mêmes paramètres montrent une forte reproductibilité, autant sur l'amplitude que sur la phase, lorsque l'on s'attache à observer l'allure des courbes (figure B.12). Néanmoins, nous observons (notamment sur la courbe (∇)) un décalage systématique de viscosité efficace à toutes les profondeurs que nous n'avons pu corrigé puisque nous ne connaissons pas exactement l'origine de cet 'offset'.

B.2.5 Détermination à posteriori de l'angle α

Les tests réalisés ci-dessus ont montré une certaine disparité entre les différentes inversions de viscosité effectuées dont certaines ont pu être minimisées. Néanmoins, on remarquera que globalement les inversions fournies d'après l'amplitude donnent des viscosités globalement plus forte par rapport à l'information donnée par la phase. Cet effet peut se corriger en changeant le paramètre de l'angle de tir. Celui-ci a été estimé à $22.5^\circ \pm 2^\circ$ alors que les inversions sont réalisées à partir de l'angle théorique fixé à 24° . Un test visant à estimer la sensibilité de l'inversion par rapport à l'angle de tir est présenté à la figure (B.13). Il s'avère encore une fois que la phase est plutôt robuste alors que l'inversion à partir de l'amplitude chute d'un facteur 2/3. Pour des raisons de temps, je n'ai pas entrepris de corriger toutes les inversions en fonction du meilleur recoupement des informations phase/amplitude qui me donnerait alors un angle de tir proche de 20° . J'ai fait le choix de garder l'angle théorique et d'analyser les résultats en terme de ν_{eff}/ν_{mol} où ν_{mol} représente la valeur de viscosité inversé à partir des



(a)

(b)

FIG. B.13 – Effet du changement d'angle dans les inversions, test sur l'expérience sans rotation différentielle réalisée à ($\Omega = 13.4 \text{ s}^{-1}$, $Ro = 0.14$ et $f_f = 0.01 \text{ s}^{-1}$) (a) Inversions de ν_{eff} d'après l'amplitude (○) et la phase (□) avec l'angle théorique de 24° . Les courbes en plein sont des inversions réalisées avec un angle de 20° .

expériences de références que constituent les expériences sans rotation différentielle. L'analyse des inversions de l'amplitude se fera à partir de $\nu_{mol}(A)$, celle pour la phase à partir de $\nu_{mol}(\varphi)$.

Annexe C

Couplage à la CMB

C.1 Formules de changement de repère

Ces formules sont utiles à plusieurs occasions au cours de cette thèse. Soit $\mathbf{x} = \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z$ et $\mathbf{r} = \mathbf{e}_r + \mathbf{e}_\theta + \mathbf{e}_\varphi$. Soit A la matrice de transformation telle que $\mathbf{r} = \mathbf{A}\mathbf{x}$:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \sin(\theta) \cos(\varphi) & \sin(\theta) \sin(\varphi) & \cos(\theta) \\ \cos(\theta) \cos(\varphi) & \cos(\theta) \sin(\varphi) & -\sin(\theta) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \end{pmatrix}$$

Ces premières formules permettent de jongler entre les deux repères physiques. On a également introduit la notation $\pm$ qui désigne des quantités complexes. Soit B_θ et B_φ qui servent à construire B_+ et B_- . Pour passer d'une quantité à l'autre, nous utilisons les formules suivantes :

$$B_+ = B_\theta + iB_\varphi \quad B_- = B_\theta - iB_\varphi \quad (\text{C.1})$$

$$B_\theta = (B_+ + B_-)/2 \quad B_\varphi = (B_+ - B_-)/2i \quad (\text{C.2})$$

C.2 Calcul du couple

Le couple visqueux s'obtient par l'intégration du tenseur des contraintes visqueuses $\sigma_{\mathbf{v}}$ sur l'ensemble de la surface $\mathbf{S}$ que compose la frontière noyau-manteau :

$$\Gamma_v = \iint_S \mathbf{r} \times \sigma_{\mathbf{v}} d\mathbf{S} \quad (\text{C.3})$$

En géométrie sphérique la partie symétrique du tenseur des taux de déformation $\mathbf{S}_v$ prend la forme suivante [Rieutord, 1997] :

$$\mathbf{S}_v = \begin{pmatrix} S_{rr} & S_{\theta r} & S_{\varphi r} \\ S_{r\theta} & S_{\theta\theta} & S_{\varphi\theta} \\ S_{r\varphi} & S_{\theta\varphi} & S_{\varphi\varphi} \end{pmatrix}$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} S_{rr} = \frac{\partial v_r}{\partial r} \\ S_{r\theta} = S_{\theta r} = \frac{1}{2} \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \\ S_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right] \\ S_{r\varphi} = S_{\varphi r} = \frac{1}{2} \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\varphi}{r} \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \right] \\ S_{\theta\varphi} = S_{\varphi\theta} = \frac{1}{2r} \left[\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{v_\varphi}{\sin \theta} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} \right] \\ S_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + v_r + \frac{v_\theta}{\tan \theta} \right] \end{array} \right\}$$

Pour un fluide newtonien, le tenseur des contraintes visqueuses se déduit du tenseur des déformations par la formule : $\sigma_v = 2\mu \mathbf{S}_v$. On se place dans un cas de géométrie sphérique tel que ($d\mathbf{S} = \mathbf{n}dS$), où $\mathbf{n}$ est orienté en direction du manteau. Avec les approximations de couche limite seules les composantes suivantes vont jouer un rôle, dans l'écriture de la force visqueuse qui s'exerce à la surface :

$$\sigma_v \cdot \mathbf{n} = \sigma_{v_{r\theta}} \mathbf{e}_\theta + \sigma_{v_{r\varphi}} \mathbf{e}_\varphi$$

avec

$$\sigma_{v_{r\theta}} \mathbf{e}_\theta = \mu \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\mathbf{v}_\theta}{r} \right) \approx \mu \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \mathbf{e}_\theta$$

et $\sigma_{v_{r\varphi}} \mathbf{e}_\varphi \approx \mu r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} \mathbf{e}_\varphi$, étant donné qu'au voisinage de la couche limite les termes de courbures sont négligeables. Le produit scalaire de $\mathbf{r}$ par la force donne :

$$\mathbf{r} \times [\sigma_v \cdot \mathbf{n}] = -(\mu r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r}) \mathbf{e}_\theta + (\mu r \frac{\partial v_\theta}{\partial r}) \mathbf{e}_\varphi$$

En utilisant les formules pour passer du repère sphérique au repère cartésien, on obtient en adimensionnalisant les expressions précédentes ($r = 1$) :

$$\mathbf{r} \times [\sigma_v \cdot \mathbf{n}] = (-\sigma_{v_{r\varphi}} \cos \theta \cos \varphi - \sigma_{v_{r\theta}} \sin \varphi) \mathbf{e}_x + (-\sigma_{v_{r\varphi}} \cos \theta \sin \varphi + \sigma_{v_{r\theta}} \cos \varphi) \mathbf{e}_y + \sigma_{v_{r\varphi}} \sin \theta \mathbf{e}_z \quad \text{C.4}$$

On introduit la notation suivante $\bar{\Gamma} = \Gamma_x + i\Gamma_y$, pour exprimer le couple qui s'exerce sur la CMB dans le plan équatorial. Un réarrangement de l'équation C.3 sous la forme complexe avec l'expression C.4 de la force visqueuse donne :

$$\bar{\Gamma}_v = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left[i \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \cos \theta \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} \right] \exp(i\varphi) \sin \theta d\theta d\varphi$$

On exprime enfin cette dernière équation en terme de v_+ et v_- (C.2) :

$$\bar{\Gamma}_v = \frac{i}{2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left[(1 + \cos \theta) \frac{\partial v_+}{\partial r} + (1 - \cos \theta) \frac{\partial v_-}{\partial r} \right] \exp(i\varphi) \sin \theta d\theta d\varphi$$

Le travail à effectuer pour le couple magnétique est complètement similaire dès lors que la formule de Rochester [1962] est établie :

$$\Gamma_m = \int \int_S (\mathbf{r} \times \mathbf{b})(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{n}) dS$$

Par analogie, on remplace $\mathbf{b}(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{n})$ par $\sigma_v \cdot \mathbf{n}$ et on en déduit :

$$\bar{\Gamma}_m = \frac{i}{2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \beta [(1 + \cos \theta) b_+ + (1 - \cos \theta) b_-] \exp(i\varphi) \sin \theta d\theta d\varphi$$

Bibliographie

- ANDERSON, O. 2002 The power balance of the core-mantle boundary. *Phys. Earth Planet. Inter.* **131**, 1–17.
- AUBERT, J. 2001 Modeles experimentaux et numeriques de la convection dans le noyau de la Terre. *These de l'UJF-grenoble I*.
- AUBERT, J., BRITO, D., NATAF, H.-C., CARDIN, P. & MASSON, J.-P. 2001 A systematic experimental study in rapidly rotating spherical convection in water and liquid gallium. *Phys. Earth Planet. Inter.* **128**, 51–74.
- BENTON, E. & CLARK, A. 1974 Spin-up. *Ann. Rev. Fluid Mech.* **6**, 257–280.
- BLOXHAM, J. 1995 Global magnetic field. In *Global Earth Physics* (ed. T. Arhens), pp. 47–65. AGU.
- BOUBNOV, B. & GOLITSYN, G. 1995 *Convection in Rotating Fluids*. Kluwer, Dordrecht.
- BRITO, D., AURNOU, J. & P. CARDIN 2004 Turbulent viscosity measurements relevant to planetary core-mantle dynamics. *Phys. Earth Planet. Inter.* **141**, 3–8.
- BRITO, D., NATAF, H., CARDIN, P., AUBERT, J. & MASSON, J. 2001 Ulstrasonic Doppler velocimetry in liquid gallium. *Exp. Fluid* **31**, 653–663.
- BUELL, J. C. & CATTON, I. 1983 Effect of rotation on the stability of a bounded cylindrical layer of fluid heated from below. *Physics of Fluids* **26**, 892–896.
- BUFFETT, B. 1992 Constraints on magnetic energy and mantle conductivity from the forced nutations of the Earth. *J. Geophys. Res.* **97**, 19,581–19,597.
- BUFFETT, B. 1993 Influence of a toroidal magnetic field on the nutations of the Earth. *J. Geophys. Res.* **98**, 2105–2117.
- BUFFETT, B. 2002 Estimates of heat flow in the deep mantle based on the power requirements for the geodynamo. *Geophys. Res. Lett.* **29**, 12,1556,10,1029/2001.
- BUFFETT, B., GARNERO, E. & JEANLOZ, R. 2000 Sediments at the top of Earth's core. *Science* **290**, 1338–1342.
- BUFFETT, B., MATHEWS, P. & HERNING, T. 2002 Modeling of nutation and precession : Effects of electromagnetic coupling. *J. Geophys. Res.* **107**, 10,1029/2000.
- BUSSE, F. & CARRIGAN, C. 1976 Convection induced by centrifugal buoyancy. *J. Fluid Mech.* **62**, 579–592.

- BUSSE, F. H. 1968 Steady fluid flow in a precessing spheroidal shell. *J. Fluid Mech.* **33**, 739–751.
- CHANDRASEKHAR, S. 1953 The instability of a layer of a fluid heated from below and subject to Coriolis forces. *Proc. R. Soc. London, Ser. A* **217**, 306.
- CHASSIGNET, E. & VERRON, J. 1990 *Ocean Modeling and parametrisation*. volume 516 of NATO Science series, Kluwer Academic Publisher, Cambridge.
- CHRISTENSEN, U., OLSON, P. & GLATZMAIER, G. 1999 Numerical modelling of the geodynamo : a systematic parameter study. *Geophys. J. Int.* **138**, 393–409.
- CHRISTENSEN, U. & TILGNER, A. 2004 Power requirement of the geodynamo from ohmic losses in numerical and laboratory dynamos. *Nature* **429**, 169–171.
- DAVIS, R. & WAHLER, K. 1997 The 1969 geomagnetic impluse and spin-up of the Earth's liquid core. *Phys. Earth Planet. Inter.* **103**, 181–194.
- DEHANT, V. & DEFRAIGNE, P. 1997 New transfer functions for nutations of a non-rigid Earth. *J. Geophys. Res.* **102**, 27,659–27,687.
- DORMY, E., CARDIN, P. & JAULT, D. 1998 Mhd flow in a slightly differentially rotating spherical shell, with conducting inner core, in a dipolar magnetic field. *Earth and Planetary Science Letters* **160**, 15–30.
- DORMY, E., VALET, J.-P. & COURTILOT, V. 2000 Numerical models of the geodynamo and observational constraints. *G-cubed* **1**, 62.
- DUBRULLE, B. & KNOBLOCH, E. 1992 On the local stability of accretion disks. *Astronomy and Astrophysics* **256**, 673–678.
- DUCK, P. & FOSTER, M. 2001 Spin-up of homogeneous and stratified fluids. *Annu. Rev. Fluid Mech.* **33**, 231–263.
- DUFFY, T. S. 2004 Deeper understanding. *Nature* **430**, 409–410.
- DZIEWONSKI, A. & ANDERSON, D. 1981 Preliminary reference Earth model PREM. *Phys. Earth Planet. Inter.* **25**, 297–356.
- EYMIN-PETOT-TOURTOLLET, C. 2004 Etude des mouvements à la surface du noyau terrestre : du 17ème au 21ème siècle. *Thèse de l'IPG (Paris)* .
- FEBY, A. 2002 Variational multiscale method for turbulence modeling. www.mems.rice.edu/feby/vms.pdf .
- FLORSCH, N. & HINDERER, J. 2000 Bayesian estimation of the free core nutation parameters from the analysis of precise tidal gravity data. *Phys. Earth Planet. Inter.* **117**, 21–35.
- FOWLIS & ROSSBY 1964 A compilation of selected data on the temperature dependance of some physical properties of water, glycerol-water solutions and mercury. *Technical report, copy kept in GFD-group, AOPP, Oxford Univ.* .
- FRÜH, W. & READ, P. 1999 Experiments on a barotropic rotating shear layer. part i. instability and steady vortices. *J. Fluid Mech.* **383**, 143–173.
- GARNERO, E. J. 2000 Heterogeneity of the lowermost mantle. *Annu. Rev. Earth Planet. Sci.* **28**, 509–537.

- GILLET, N. 2004 Magnéto-convection dans une sphère en rotation rapide : approches numérique et expérimentale de la convection dans les noyaux planétaires. *These de l'UJF-grenoble I*.
- GLATZMAIER, G. & ROBERTS, P. 1995 A three dimensional self-consistent computer simulation of a geomagnetic reversal. *Nature* **377**, 203–208.
- GREENSPAN, H. 1968 *The theory of Rotating Fluids*. Cambridge Univ. Press, Cambridge UK.
- GREENSPAN, H. & WEINBAUM, H. 1965 On nonlinear spin-up of a rotating fluid. *J. Fluid Mech.* **44**, 66–85.
- GREFF-LEFFTZ, M., LEGROS, H. & DEHANT, V. 2000 Influence of the inner core viscosity on the rotational eigenmodes of the Earth. *Phys. Earth Planet. Inter.* **122**, 187–204.
- GUBBINS, D. 1975 Can the Earth's magnetic field be sustained by core oscillations? *Geophys. Res. Lett.* **2**, 9–409–412.
- GUYON, E. & HULIN, J. 2001 *Hydrodynamique physique*. CNRS éditions, Paris, France.
- HINDERER, J. & CROSSLEY, D. 2000 Time variations in gravity and inferences on the Earth's structure and dynamics. *Surveys in Geophysics* **21**, 1–45.
- IITAKA, T., HIROSE, K., KAWAMURA, K. & MURAKAMI, M. 2004 The elasticity of the MgSiO₃ post-perovskite phase in the Earth's lowermost mantle. *Nature* **430**, 442–445.
- JAULT, D. 2003 Electromagnetic and topographic coupling, and lod variations. In *Earth's core and lower mantle* (ed. A. S. C.A. Jones & K. Zhang), pp. 56–76. Taylor and Francis.
- JULIEN, K., LEGG, S., WILLIAMS, J. & WERNE, J. 1996 Rapidly rotating turbulent Rayleigh-Bénard convection. *J. Fluid Mech.* **322**, 242–273.
- KUANG, W. & CHAO, B. 2001 Topographic core-mantle coupling in geodynamo modeling. *Geophys. Res. Lett.* **28**, 1871–1874.
- LAMBECK, K. 1988 Geophysical geodesy, the slow deformations of the Earth. *Clarendon press, Oxford*.
- LANGEL, R. & ESTES, R. 1988 A geomagnetic field spectrum. *Geophys. Res. Lett.* **9**, 250–253.
- LATHROP, P., FINEBERG, J. & SWINNEY, H. 1992 Transition to shear-driven turbulence in Couette-Taylor flow. *Americ. Phys. Soc.* **46**, 10,6390–6405.
- LAY, T., WILLIAMS, Q. & GARNERO, E. 1998 The core-mantle boundary layer and deep Earth dynamics. *Nature* **392**, 2 avril 1998, 461–468.
- LIDE, D. 1995 *Handbook of Chemistry and Physics*. CRC Press, Boca Raton.
- LOPER, D. 1975 Torque balance and energy budget for the precessionally driven dynamo. *Phys. Earth Planet. Inter.* **11**, 43–60.
- LOWRIE, W. 1997 Fundamentals of geophysics. *Cambridge Univ. Press, Cambridge UK*.

- LÉGAUT, G. 2005 Ondes de torsion dans le noyau terrestre. *Thèse de l'UJF-grenoble I*.
- MANGA, M. & JEANLOZ, R. 1996 Implications of a metal-bearing chemical boundary layer in D'' for mantle dynamics. *Geophys. Res. Lett.* **23**, 3091–3094.
- MATHEWS, P., BUFFETT, B., HERRING, T. & SHAPIRO, I. 1991a Forced nutation of the Earth : Influence of inner core dynamics 1. theory. *J. Geophys. Res.* **96**, 8219–8242.
- MATHEWS, P., BUFFETT, B., HERRING, T. & SHAPIRO, I. 1991b Forced nutation of the Earth : Influence of inner core dynamics 2. numerical results and comparisons. *J. Geophys. Res.* **96**, 8243–8257.
- MATHEWS, P. & GUO, J. 2005 Viscoelectromagnetic coupling in precession-nutation theory. *J. Geophys. Res.* **110**, B02402, doi :10.1029/2003JB002915.
- MATHEWS, P., HERRING, T. & BUFFETT, B. 2002 Modeling of nutation and precession : New nutation series for nonrigid Earth, and insights into the Earth interior. *J. Geophys. Res.* **107**, (B4),2068,doi :10.1029/2001JB000390.
- MOFFATT, H. 1978 *Magnetic field generation in electrically conducting fluids*. Cambridge University Press, Cambridge.
- MORSE, S. 2001 Porous sediments at the top of Earth's core? *Science* **291**,16 march, 2090–2091.
- MURAKAMI, M., HIROSE, K., KAWAMURA, K., SATA, N. & OHISHI, Y. 2004 Post-perovskite phase transition in $MgSiO_3$. *Science* **304**, 855–858.
- NAKAGAWA, Y. & FRENZEN, P. 1955 A theoretical and experimental study of cellular convection in rotating fluids. *Tellus* **7**, 1–21.
- NARTEAU, C., MOUËL, J. L., POIRIER, J., SÉPULVEDA, E. & M., S. 2001 On a small-scale roughness of the core-mantle boundary. *Earth and Planetary Science Letters* **191**, 49–60.
- NATAF, H. & SOMMERIA, J. 2000 *La physique de la Terre*. BELIN,CNRS edition.
- NOIR, J. 2000 Ecoulements d'un fluide dans une cavité en précession approches numérique et expérimentale. *Thèse de l'UJF-grenoble I*.
- NOIR, J., CARDIN, P. & JAULT, D. 2003 Experimental evidence of non linear resonance effects between retrograde precession and the tilt over mode within a spheroid. *Geophys. J. Int.* **154**, 407–416.
- NOIR, J., JAULT, D. & CARDIN, P. 2001 Numerical study of the motions within a slowly precessing sphere, at low Ekman number. *Geophys. J. Int.* **437** 283–299, 283–299.
- OLSEN, N. 2002 A model of the geomagnetic field and its secular variation for epoch 2000 estimated from Ørsted data. *Geophys. J. Int.* **149**, 454–462.
- PALMER, A. & SMYLIE, D. 2005 V.L.B.I observations of free core nutations and viscosity at the top of the core. *Phys. Earth Planet. Inter.* **148**, 285–301.
- PEDLOSKY, J. 1987 Geophysical fluid dynamics, 2nd ed. *Springer, New York*.
- POINCARÉ, R. 1910 Sur la précession des corps déformables. *Bull. Astr.* **27**, 321–356.

- POIRIER, J.-P. 1994 Physical properties of the Earth's core. *C. R. Acad. Sci. Paris* **318**, 341–350.
- POIRIER, J.-P. & LE MOUËL, J.-L. 1992 Does infiltration of core material into the lower mantle affect the observed geomagnetic field? *Phys. Earth Planet. Inter.* **73**, 29–37.
- POIRIER, J.-P., MALAVERGNE, V. & MOUEL, J. L. 1998 Is there a thin electrically conducting layer at the base of the mantle? *Geodynamics* **28**, 131–197.
- PROUDMAN, I. 1956 The almost-rigid rotation of viscous fluid between concentric spheres. *J. Fluid Mech.* **1**, 505–516.
- RAMBAUX, N. & BOIS, E. 2004 Theory of the mercury's spin-orbit motion and analysis of its main librations. *Astronomy and Astrophysics* **413**, 383–393.
- RHINES, P. 1975 Wave and turbulence on a beta-plane. *J. Fluid Mech.* **122**, 417–443.
- RIEUTORD, M. 1997 *Une introduction à la dynamique des fluides*. Masson, Paris.
- ROBERTS, P. & STEWARTSON, K. 1963 On the stability of Maclaurin spheroid of small viscosity. *Astrophys. J.* **137**, 777–790.
- ROBERTS, P. H., JONES, C. A. & CALDERWOOD, A. 2003 Energy fluxes and ohmic dissipation in the Earth's core. In *Earth's core and lower mantle* (ed. A. S. C.A. Jones & K. Zhang), pp. 100–129. Taylor and Francis.
- ROBERTSON, D. 1991 Geophysical applications of very-long-baseline interferometry. *Rev. Mod. Phys.* **63**, 899–918.
- ROCHESTER, M. 1960 Geomagnetic westward drift and irregularities in the Earth's rotation. *Phil. Trans. R. Soc. Lond.* **252**, 531–555.
- ROCHESTER, M. 1962 Geomagnetic core-mantle coupling. *J. Geophys. Res.* **67**, 4833–4838.
- ROCHESTER, M. 1976 The secular decrease of obliquity due to dissipative core-mantle coupling. *Geophys. J. R. Astr. Soc.* **46**, 109–126.
- ROSSBY, H. 1969 A study of Bénard convection with and without rotation. *J. Fluid Mech.* **36**, 309–335.
- SABAKA, T., OLSEN, N. & PURUCKER, M. E. 2004 Extending comprehensive models of the Earth's magnetic field with Ørsted and champ. *Geophys. J. Int.* **159**, 521–547.
- SASAO, T. 1977 Dissipative core-mantle coupling and nutational motion of the Earth. *publ. Astron. Soc. Jap.* **29**, 83–105.
- SASAO, T., OKUBO, S. & SAITO, M. 1980 A simple theory on the dynamical effects of a stratified fluid core upon the nutational motions of the Earth. In *in Nutation and Earth's Rotation : Symposium Number 78* (ed. D. Reidel), pp. 165–183. Norwell.
- SCHAEFFER, N. 2004 Instabilités, turbulence et dynamo dans une couche de fluide cisailée en rotation. *These de l'UJF-grenoble I*.
- SCHAEFFER, N. & CARDIN, P. 2005 Quasi-geostrophic model of the instabilities of the stewartson layer. *J. Fluid Mech.* **(submitted)**.
- SHANKLAND, T.-J. & POIRIER, J.-P. 1993 Electrical conductivity of the Earth's lower mantle. *Nature* **366**, 453–455.

- SHIH, T., LIOU, W., SHABIR, A., YANK, Z. & ZHI, J. 1995 Quasi-geostrophic model of the instabilities of the Stewartson layer. *Computers Fluids* **24-3**, 227–238.
- SPELLS, K. 1936 The determination of the viscosity of liquid gallium over an extended range of temperature. *Proc. Phys. Soc.* **48**, 299–311.
- STACEY, F. 1992 Physics of the Earth. *Third Edition, Brookfield Press*.
- STEWARTSON, K. 1966 On almost rigid rotations. part ii. *J. Fluid Mech.* **26**, 131–144.
- SUMITA, I. & OLSON, P. 2003 Experiments on highly supercritical thermal convection in a rapidly rotating hemispherical shell. *J. Fluid Mech.* **492**, 271–287.
- SZE, E. & VAN DER HILST, R. 2003 Core mantle boundary topography from short period pcp, pkp, and pkkp data. *Phys. Earth Planet. Inter.* **135**, 27–46.
- TAM, W. Y. & SWINNEY, H. L. 1987 Mass transport in turbulent Couette-Taylor flow. *Phys. Rev. A* **36**, 1374–1381.
- TOOMRE, A. 1974 On the nearly diurnal wobble of the Earth. *J. R. Astron. Soc.* **38**, 335–348.
- TRÉGUIER, A. 2002 Modélisation numérique pour l'océanographie physique. *Annales mathématiques Blaise Pascal, tome 9* **2**, 345–361.
- VANYO, J., WILDE, P., CARDIN, P. & OLSON, P. 1995 Experiments on precessing flows in the Earth's liquid core. *Geophys. J. Int.* **121**, 136–142.
- VENEZIAN, G. 1970 Nonlinear spin-up. *Top. Ocean Eng.* **2**, 87–96.
- VERONIS, G. 1968 Large amplitude Bénard convection in a rotating fluid. *J. Fluid Mech.* **31**, 113–139.
- VOORHIES, C. V., SABAKA, T. J. & PURUCKER, M. 2002 On magnetic spectra of Earth and Mars. *Journal of Geophysical Research (Planets)* **107**, 1–1.
- VOROBIEFF, P. & ECKE, R. 1998 Transient states during spin-up of a Rayleigh-Bénard cell. *Phys. Fluid* **10**, 2525–2538.
- VOROBIEFF, P. & ECKE, R. 2002 Turbulent rotating convection : an experimental study. *J. Fluid Mech.* **458**, 191–218.
- WAHR, J. 1981 The forced nutations of an elliptical, rotating, elastic and oceanless Earth. *Geophys. J. R. Astr. Soc.* **64**, 705–727.
- WAHR, J. 1996 Geodesy and gravity. *class notes published by Samizdat Press, Colorado, USA* pp. 1–291.
- WARN-VARNAS, A., FOWLIS, W., PIACSEK, S. & LEE, S. 1978 Numerical solutions and Laser-Doppler measurements of spin-up. *J. Fluid Mech.* **78**, 609–639.
- WEDEMEYER, E. 1964 The unsteady flow within a spinning cylinder. *J. Fluid Mech.* **20**, 383–399.
- WEIDMAN, D. 1976a On the spin-up and spin-down of a rotating fluid. part.1. extending the wedemeyer model. *J. Fluid Mech.* **77**, 685–708.
- WEIDMAN, D. 1976b On the spin-up and spin-down of a rotating fluid. part.2. measurements and stability. *J. Fluid Mech.* **77**, 709–735.
- ZATMAN, S. & BLOXHAM, J. 1997 Torsional oscillations and the magnetic field within the Earth's core. *Nature* **388**, 760–763.