



HAL
open science

Approche par éléments discrets 3D du comportement de matériaux granulaires cohésifs faiblement contraints

Vincent Richefeu

► **To cite this version:**

Vincent Richefeu. Approche par éléments discrets 3D du comportement de matériaux granulaires cohésifs faiblement contraints. Mécanique [physics.med-ph]. Université Montpellier II - Sciences et Techniques du Languedoc, 2005. Français. NNT : . tel-00012112

HAL Id: tel-00012112

<https://theses.hal.science/tel-00012112>

Submitted on 11 Apr 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ MONTPELLIER 2
– Sciences et Techniques du Languedoc –

THÈSE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ MONTPELLIER 2

Discipline : Mécanique, Génie Mécanique, Génie Civil
Formation Doctorale : Mécanique des Matériaux et des Milieux Complexes,
des Structures et des Systèmes
École Doctorale : Information, Structures et Systèmes

Approche par éléments discrets 3D du comportement de matériaux granulaires cohésifs faiblement contraints

Présentée et soutenue publiquement par

Vincent RICHEFEU

le 14 décembre 2005

devant le jury composé de :

J.-C. BÉNET	Professeur à l'Université Montpellier 2	Président
M. JEAN	Directeur de Recherche émérite CNRS au LMA	Rapporteur
F. NICOT	Chargé de Recherche (HDR) au Cemagref	Rapporteur
C. BOHATIER	Professeur à l'Université Montpellier 2	Directeur
M. S. EL YOUSOUFI	Maître de Conférences à l'Université Montpellier 2	Co-directeur
R. PEYROUX	Chargé de Recherche CNRS au LMGC	Co-directeur
M. GRIMA	Ingénieur ICT, Correspondant DGA	Invité

Table des matières

Introduction générale	9
1 Présentation générale	13
1.1 Contexte de l'étude	14
1.1.1 Motivations	14
1.1.2 Particularités des sols de surface	15
1.1.3 État de la question	17
1.2 Éléments de base de mécanique des sols	21
1.2.1 Fractions volumiques et massiques des phases	21
1.2.2 Granularité	22
1.2.3 États hydriques d'un sol	23
1.3 Conclusion	24
2 Modélisation par éléments discrets 3D	25
2.1 Approche en éléments discrets	26
2.1.1 Aperçu rapide des différentes approches	26
2.1.2 Choix d'une approche	27
2.2 Modélisation des interactions locales	27
2.2.1 Lois de contact	28
2.2.2 Lois de cohésion	32

2.2.3	Lois de frottement	43
2.2.4	Synthèse	45
2.3	Approche numérique	45
2.3.1	Repères	46
2.3.2	Schéma d'intégration	50
2.3.3	Évolution tridimensionnelle de l'orientation des grains	52
2.3.4	Calcul des variables locales d'interaction	53
2.3.5	Frontières	56
2.3.6	Stabilité numérique	59
2.3.7	Optimisations	64
2.3.8	Outils numériques réalisés	66
2.4	Conclusion	68
3	Cisaillement de matériaux granulaires cohésifs. Cas de la capillarité	69
3.1	Hypothèses de distribution spatiale du liquide au sein du matériau	70
3.1.1	Modèle de distribution dite uniforme	70
3.1.2	Autres modèles de distribution	72
3.1.3	Synthèse	74
3.2	Cisaillement à la boîte de Casagrande normalisée	75
3.2.1	Dispositif expérimental	75
3.2.2	Matériaux d'étude	77
3.2.3	Confrontation expériences/simulations	80
3.2.4	Étude des lois d'interaction	83
3.2.5	Synthèse	89
3.2.6	Investigation expérimentale	90
3.3	Cisaillement à faibles contraintes	97
3.3.1	Expériences	97
3.3.2	Simulations numériques	105
3.3.3	Approche théorique micro-macro	110
3.4	Conclusion	115
4	Applications	117
4.1	Compression simple d'un matériau granulaire	118
4.1.1	Rappel des résultats expérimentaux	118

4.1.2	Étude numérique	119
4.2	Vidange d'un matériau granulaire cohésif	127
4.2.1	Préparation de l'échantillon	127
4.2.2	Influence de la cohésion locale sur le débit de matière	132
4.2.3	Influence de la cohésion locale sur l'angle de repos	137
4.2.4	Bilan	139
4.3	Étude de la traficabilité d'un engin chenillé	140
4.3.1	Influence de la force de cohésion entre les grains	140
4.3.2	Influence de la hauteur de l'échantillon	142
4.4	Conclusion	145
	Conclusions et perspectives	147
	Bibliographie	153
	A Expression explicite de la force de cohésion capillaire	159
	B Article à paraître dans Physical Review E	163

Remerciements

Ma rencontre avec *Jean-Claude Bénet* au cours de mes études a conditionné complètement mon parcours. Il m'a encouragé à enpreinter la voie de la recherche et m'a fait l'honneur d'être Président du jury de cette thèse. Pour ces raisons, je lui exprime ma profonde reconnaissance et je tiens à le remercier très sincèrement. Je souhaite également exprimer ma gratitude à *Gilles Fras* qui m'a permis de garder un pied dans un environnement de recherche avant que je ne puisse commencer ma thèse.

Une thèse étant bien évidemment une oeuvre collective, je souhaite remercier mes encadrants à commencer par M. *Claude Bohatier*, pour m'avoir donné une certaine liberté de travail ; *Robert Peyroux*, en particulier pour ses conseils de fin orateur ; et enfin *Saïd El Youssoufi*, qui a fait fonction de garde-fou dans la réalisation de ces travaux. Je lui adresse mes plus vifs remerciements pour son soutien et sa présence tout au long des trois années de thèse.

Bien que ne faisant pas officiellement partie de mon encadrement, *Farhang Radjaï* a également joué un rôle important dans l'avancement de ces travaux et les a donc influencés. Je le remercie pour son aide très précieuse. Je remercie Messieurs *Michel Jean* et *François Nicot* pour avoir bien voulu être rapporteurs de ces travaux et pour les discussions constructives que l'on a eues.

Merci à *Fabien Soulié*, *Jean-Yves Delenne* et *Frédéric Dubois* pour les discussions intéressantes qu'on a pu avoir dans le cadre de l'opération transversale « Solides Granulaires ».

Un grand merci aux personnes du LMGC avec qui j'ai partagé, dans un environnement de convivialité et de bonne humeur, des moments inoubliables. Le savoir-faire de *Reine*, lorsqu'il s'agit de s'occuper de ses « petits » (organisation, administration et gâteaux bien sûr), y est pour beaucoup. J'associe à mes remerciements *Alain*, *Gilles* et *Danielle* qui ont participé de façon ponctuelle ou plus persistante à la partie technique de ces travaux.

Je remercie bien évidemment *Céline* pour m'avoir aidé, supporté et encouragé aux différentes étapes de ma thèse.

Les dernières lignes de ces remerciements sont réservées à ma merveilleuse famille, ma belle-famille, et particulièrement à mes parents pour leur dévouement et pour m'avoir appuyé dans mes études. J'espère qu'ils savent combien je leur suis reconnaissant.

à mes parents,

Introduction

On trouve le plus souvent sous le vocable de « matériaux granulaires » toute une classe de matériaux qui présentent un caractère divisé. Ce caractère permet d'afficher une identité propre à chaque « grain » ou « particule », et par conséquent une cinématique et un comportement mécanique spécifiques à cette échelle. L'étude de ces milieux peut donc intégrer cette identité propre à chaque grain à travers ses propriétés de composition, de forme, de taille ou encore d'état de surface. Par ailleurs, une telle étude nécessite une définition rigoureuse des interactions de chaque grain avec ses voisins proches à travers le contact, le frottement ou encore la cohésion. Ces interactions dépendent de caractéristiques plus globales comme la granularité, la compacité ou encore l'anisotropie de l'empilement granulaire. Enfin, des actions extérieures comme l'humidité, la température et la pression peuvent également agir sur l'évolution de ces interactions. Toutes ces spécificités des matériaux granulaires incitent à développer des approches et des techniques adéquates afin d'appréhender toute leur complexité ainsi que leurs propriétés souvent surprenantes (Radjai et al., 2005; Duran, 2003).

L'intérêt des scientifiques pour cette classe de matériaux est justifié par la place très importante qu'ils occupent dans notre environnement naturel à travers des exemples comme les sols, les roches, les céréales etc. Par ailleurs, de multiples procédés industriels de transformations mettent en oeuvre des matériaux granulaires comme des comprimés pharmaceutiques, des produits agro-alimentaires, des matériaux de construction (Cleary and Sawley, 2002; Bika et al., 2001; Iveson et al., 2002).

Les travaux présentés dans cette thèse ont été initiés par des problématiques liées au comportement des « sols de surface » occupant les trente premiers centimètres. Plus précisément, il s'agissait d'analyser la réaction de ces sols à des opérations de scarification et de mobilité d'engins divers. La partie superficielle des sols a en effet des particularités bien spécifiques qui les distinguent nettement des sols profonds. Ces derniers ont été, par le

passé, beaucoup plus étudiés, notamment par la communauté de mécanique des sols ou de géotechnique en vue de dimensionnements d'ouvrages au contact du sol. Les particularités des sols de surface portent par exemple sur :

- la présence de racines et d'une micro faune qui confèrent à ces sols une forte hétérogénéité, et une anisotropie de formation et de déformation assez prononcées,
- les pressions de confinement peu élevées qui rendent l'étude de leur comportement mécanique au laboratoire assez délicate compte tenu de la gamme de contraintes inadéquates aux dispositifs classiques de mécanique des sols,
- le drainage quasi-systématique des liquides interstitiels vers les profondeurs, ou encore les échanges de matière avec l'environnement par évaporation. De tels phénomènes mettent ces sols dans un état hydrique non saturé, donc composé d'une phase solide (grains), d'une phase liquide (eau) et d'une phase gazeuse (air et vapeur d'eau). Les échanges de matière exposent ces sols à des phénomènes de retrait et de gonflement, ce qui conduit à la prise en compte de couplages entre mécanique et transferts de matières,
- le caractère clairement discret, surtout en présence de grandes variabilités des tailles de grains, qui devrait privilégier l'usage d'une approche qui s'appuie sur l'échelle locale,
- la présence d'éléments fins limoneux et/ou argileux qui peuvent constituer une sorte de « colle » entre les grains conduisant à la formation d'agglomérats plus ou moins cohérents,
- l'humidité qui se traduit souvent par la présence de ponts capillaires liant les grains et contribuant ainsi à une certaine cohésion,
- la présence éventuelle de solutés divers dans la phase liquide qui peuvent, lors de l'évaporation du liquide, cristalliser formant ainsi des liens cimentés entre les grains.

Ces travaux de thèse n'ont pas la prétention de prendre en considération toutes ces particularités dans l'étude du comportement mécanique des sols de surface. En effet, elles n'ont pas toutes le même degré d'importance ni le même degré de généralité. Par ailleurs, d'un point de vue mécanique, certains aspects présentent plus d'intérêt scientifique, dans la mesure où ils concernent les matériaux granulaires au sens large. Leur étude en priorité peut ainsi apporter des réponses à de multiples autres situations dans le domaine des matériaux granulaires. Les aspects les plus importants, dans notre cas, sont le caractère discret faiblement contraint et la cohésion. Ces deux aspects sont retenus dans une première approche. Bien que plusieurs modèles de cohésion seront utilisés dans cette thèse, une attention particulière sera accordée à la cohésion de type capillaire, due à la présence d'eau en faibles proportions dans le matériau.

Le comportement mécanique de ces matériaux cohésifs sous faibles contraintes peut être abordé à plusieurs échelles par des approches continues ou discrètes. Les approches continues reposent sur la notion de Volume Élémentaire Représentatif (VER) et sur des modélisations à cette échelle occultant le plus souvent le caractère discret du milieu. Les approches discrètes, ou en éléments discrets, s'intéressent à l'identité propre de chaque grain et aux interactions de ce grain avec ses voisins. Pour une texture initiale

et un chargement donné, la réponse macroscopique du milieu est le résultat de combinaisons entre les comportements locaux. En plus de cette réponse macroscopique, ces approches permettent d'avoir accès à la microstructure en terme de répartition des forces et d'évolution de la texture. Par ailleurs, les approches en éléments discrets permettent de prendre en compte, à travers les interfaces, de multiples phénomènes multiphysiques, comme la distribution locale d'eau ou d'un champ de température, sans aucune hypothèse a priori sur leur homogénéité. L'approche en éléments discrets, en configuration tridimensionnelle, a été choisie pour aborder la problématique du comportement mécanique de matériaux granulaires cohésifs faiblement contraints. Un code de calcul spécifique (nommé `tapio-K`) a été mis au point ainsi que plusieurs modules de pré-traitement, de post-traitement et de visualisation des résultats dans le cadre adapté.

Ce mémoire comporte quatre chapitres :

Le premier chapitre est une introduction aux problématiques à l'origine de ces travaux de thèse. Le contexte général de l'étude y est présenté ainsi qu'une présentation succincte de différents travaux expérimentaux et de modélisation sur le même sujet. Ensuite, quelques notions de base en mécanique des sols sont présentées pour permettre au lecteur non spécialiste une lecture plus aisée des chapitres suivants.

Le deuxième chapitre contient une part importante du travail effectué, dans la mesure où il présente tous les éléments de modélisation qui ont été nécessaires à la mise au point du code de calcul. Comme annoncé plus haut, une approche en éléments discrets a été utilisée. Dans le cadre d'une présentation générale de l'approche, on insiste sur les points importants et nouveaux en rapport avec ce travail. La description des interactions constitue un aspect essentiel de la modélisation car elle conditionne la prédiction du comportement global d'un matériau granulaire. Elle sera faite en prenant en considération les phénomènes physiques intervenant à l'échelle des grains et en particulier la cohésion. Enfin, l'approche numérique, liée à la méthode de résolution choisie, sera présentée dans le détail.

Le troisième chapitre est consacré à la validation de la modélisation proposée. Des comparaisons sont faites entre des essais numériques et des essais expérimentaux de cisaillement direct à la boîte de Casagrande. La validation concerne, d'une part, les aspects purement numériques du code de calcul `tapio-K` et, d'autre part, la pertinence des lois d'interaction. Une attention particulière est accordée à la loi de cohésion capillaire et à une réflexion sur les modes de distribution de liquide dans le matériau. Un dispositif, bien adapté au cisaillement de matériaux granulaires faiblement contraints, est réalisé pour les besoins de cette étude. Les résultats expérimentaux sont confrontés à ceux de la théorie et des simulations numériques dans le cas d'essais à faible confinement. Cette confrontation permet de mener une analyse micro-macro autour de l'influence de la teneur en eau et de la densité des ponts liquides dans le matériau.

Le quatrième chapitre présente, au travers de quelques cas tests d'applications, les possibilités du code de calcul `tapio-K`. Les cas tests choisis couvrent un vaste ensemble de problématiques posées dans le cas de matériaux granulaires faiblement contraints. Il s'agit

en particulier de l'étude de :

- l'influence de la redistribution locale du liquide sur la résistance à la compression simple (3D) ;
- l'influence de la cohésion locale sur l'écoulement et sur l'angle de repos (2D) ;
- l'influence de la cohésion locale sur la traficabilité d'un sol de surface (2D).

Les perspectives proposées, lors du bilan donné en conclusion, permettent de percevoir l'ouverture qu'offre le code de calcul pour aborder de multiples problèmes portant sur les couplages entre la mécanique et d'autres phénomènes multiphysiques dans les matériaux granulaires.

Présentation générale

1.1	Contexte de l'étude	14
1.1.1	Motivations	14
1.1.2	Particularités des sols de surface	15
1.1.3	État de la question	17
1.2	Éléments de base de mécanique des sols	21
1.2.1	Fractions volumiques et massiques des phases	21
1.2.2	Granularité	22
1.2.3	États hydriques d'un sol	23
1.3	Conclusion	24

Ce premier chapitre est une introduction à la problématique abordée dans cette thèse. Il présente le contexte général de l'étude ainsi que quelques notions de base en mécanique des sols. Ces notions permettent aux non spécialistes une lecture plus aisée des chapitres suivants.

1.1 Contexte de l'étude

1.1.1 Motivations

L'étude présentée dans ce mémoire a été initiée dans le cadre du Plan d'Etude Amont (PEA) « modélisation en grandes déformations des sols de surface et de leur écoulement en interaction avec des outils à géométrie complexe » mis en place par la Délégation Générale pour l'Armement (DGA) en 1998. Ce PEA, achevé en 2002, visait une meilleure compréhension du comportement des sols de surface avec l'objectif final de fiabiliser et d'optimiser les processus de déminage.

Il n'est, bien évidemment, pas question de revenir ici sur le détail de la démarche de recherche entreprise dans le cadre de ce PEA. On pourra au besoin consulter le rapport d'activité final ([Rapport final du PEA "Sols de Surface", 2002](#)) élaboré par le groupement thématique « Sols de Surface ». On retiendra seulement les aspects directement en rapport avec les motivations de ces travaux de thèse. Ces aspects concernent les sols de surface qui sont caractérisés par un faible confinement. Ces sols sont le siège d'opérations de déminage, d'une part, et de difficultés de mobilité d'engins, d'autre part.

Le **déminage** est réalisé par l'avancée d'une charrue placée à l'avant d'un buteur – le plus souvent un engin chenillé – comme le montre la figure 1.1. L'extraction des éventuelles mines antichar ou antipersonnel, dissimulées dans le sol de surface, est alors obtenue par la scarification du sol, sur une épaisseur d'environ 30 cm, associée à une évacuation du sol remanié vers les côtés. La scarification est assurée par des dents régulièrement espacées qui sont fixées sur une lame dont le rôle est de canaliser le flux de sol vers les côtés (figure 1.2). En définitive, lorsque l'opération de déminage se déroule bien, les mines se retrouvent à l'intérieur du talus de part et d'autre d'une brèche ouverte qui constitue alors un itinéraire sécurisé. À partir de là, on peut être confronté à des **difficultés de mobilité** d'engins au contact de sols remaniés.

Les objectifs du PEA ont donc été :

- l'étude du comportement des sols de surface lors du processus de déminage (scarification et évacuation du sol) ;
- la détermination de géométries optimales de l'outil interagissant avec le sol ;
- l'étude de la mobilité des engins pousseurs.

Des équipes de plusieurs laboratoires français étaient associées à ce PEA. Ces équipes ont été organisées en deux groupes. Le premier groupe développait des actions expérimentales à



FIG. 1.1: *Processus de déminage par scarification. Essais en vraie grandeur réalisés à l'Etablissement Technique d'Angers (ETAS)*

échelle 1 ou à échelle réduite en rapport avec les problématiques du PEA. Le second groupe, dont faisait partie le LMGC de Montpellier, s'intéressait aux aspects « modélisation et simulations numériques ».

1.1.2 Particularités des sols de surface

Les sols de surface, de par leur proximité de la surface libre, sont soumis à des pressions faibles comparées à celles qui s'exercent en profondeur. Ils sont également très rarement saturés car l'eau a souvent la possibilité d'être évaporée ou drainée vers les nappes plus

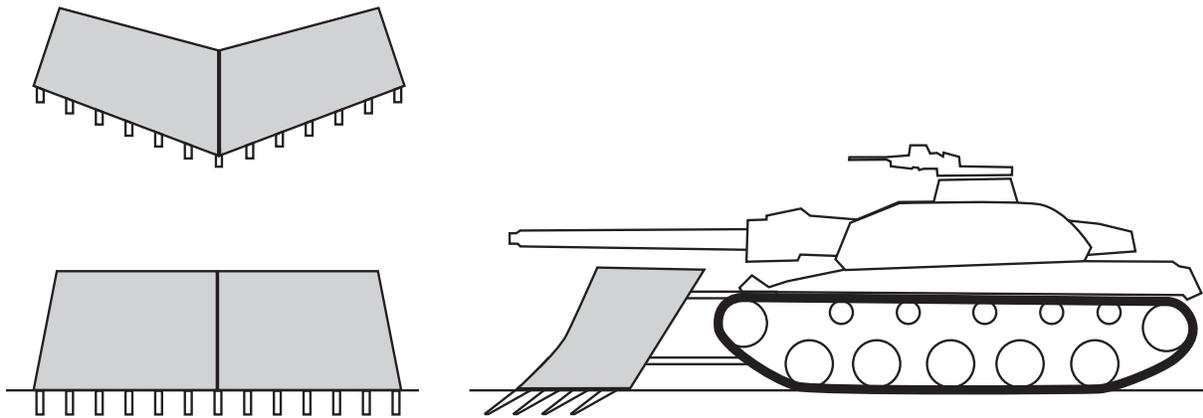


FIG. 1.2: Schématisation d'une charrue de déminage

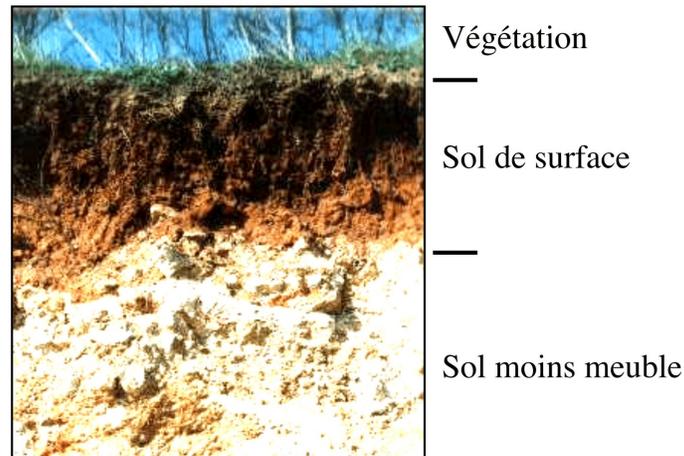


FIG. 1.3: Coupe d'un sol de surface

profondes. Les séchages et réhydrations à répétition font que ces sols ont une histoire mécanique complexe, d'autant plus que les micro-organismes vivants contribuent également à faire évoluer l'état du sol. Les sols de surface s'organisent donc, sous l'influence des conditions météorologiques et des micro-organismes vivants, en se stratifiant ce qui donne naissance à des couches (horizons) plus ou moins bien différenciées. Par ailleurs, la présence d'éléments végétaux aériens et terrestres vient rajouter un niveau de difficulté supplémentaire. En plus de l'hétérogénéité d'un sol à l'échelle des particules, les sols de surface présentent une hétérogénéité à une échelle supérieure du fait de leur configuration en couches et de la présence éventuelle de racines (figure 1.3).

La méconnaissance du comportement mécanique des sols de surface est due au fait que les géotechniciens s'y sont moins intéressés par le passé. Ces sols étaient simplement retirés car considérés de trop faible capacité portante. Ils n'étaient donc pas pris en compte

dans le dimensionnement de fondations. Dans d'autres domaines, pourtant, l'étude du comportement des sols de surface s'avère nécessaire. Il s'agit par exemple de l'étude de la traficabilité des engins du Génie Civil, agricoles ou militaires, et de l'amélioration des techniques de labourage.

1.1.3 État de la question

On peut dégager deux actions principales abordées dans le cadre du PEA :

- la caractérisation in situ des sols de surface dans le but de constituer une base de données ;
- la modélisation des interactions entre les outils ou engins et les sols de surface.

La réalisation de ces actions a nécessité des travaux de recherche couvrant les deux volets « expérimentation » et « modélisation et simulations numériques ». On présente, dans cette section, les points clés des recherches menées dans le cadre du groupement thématique. Cette présentation permettra de situer le sujet abordé dans ce mémoire par rapport à l'évolution de la problématique du PEA ce qui permet de comprendre le choix de l'approche adoptée.

1.1.3.1 Travaux d'expérimentation

On reprend dans cette section les points marquants des travaux d'expérimentation réalisés dans le cadre de ce PEA par le groupement thématique « Sols de Surface ». On n'a pas la prétention ici de rapporter tous les travaux effectués et le détail des résultats. On donne simplement quelques points d'ancrage en signalant au lecteur les sources bibliographiques qui contiennent tous les développements à la fois en terme d'instrumentation et d'expérimentation sur les dispositifs mis au point. Ces dispositifs couvrent les trois aspects : (1) essais de classification et de caractérisation, (2) essais sur modèle réduit, et (3) essais vraie grandeur.

Essais de classification et de caractérisation mécanique des sols

Afin de mener à bien une opération de déminage, il est avant tout nécessaire de caractériser le sol. Le comportement de celui-ci, en terme de résistance mécanique et d'écoulement, conditionne en effet l'avancement du boteur, l'écoulement du sol, et donc l'extraction des mines. Les différents acteurs du groupe de travail expérimentation ont donc mis au point divers appareillages spécifiques permettant de réaliser la caractérisation mécanique in situ du sol. Des essais en vraie grandeur ont permis la réalisation d'abaques qui, associées à la caractérisation sur le terrain, permettent de déterminer la faisabilité du déminage. Une multitude d'outils de caractérisation a été proposée. Le lecteur pourra se référer, pour plus d'informations, aux travaux de thèse de [Benoit \(2002\)](#) sur l'étude de la traficabilité. La figure 1.4 présente deux exemples d'appareils que sont l'indentomètre rotatif et le scléromètre. La liste complète des appareillages peut être consultée dans le rapport final du PEA

(2002). Un des objectifs du PEA a été de tester la pertinence de ces outils de caractérisation.



FIG. 1.4: Exemples d'appareils mis au point dans le cadre du PEA « sols de surface » pour la caractérisation mécanique des sols *in situ*. (a) l'indentomètre rotatif; (b) le scléromètre

Essais à échelle réduite en laboratoire

Concernant la scarification, une campagne d'essais en laboratoire au Lermes (CUST, Clermont-Ferrand) a été réalisée sur un banc de scarification à échelle réduite nommé OSCAR. Pour ce dispositif, l'échelle a été réduite pour l'outil mais pas pour les sols. L'objectif était de mettre en évidence l'effet des paramètres matériau (compacité et humidité du sol) sur l'effort de scarification. La description détaillée du dispositif est donnée dans le rapport final du PEA (2002). Deux séries d'essais ont été réalisées. La première a mis en oeuvre une dent et un ensemble de trois dents dans le but de qualifier l'effet de l'inclinaison de la dent, d'une part, et de l'espace entre les dents, d'autre part. La deuxième série d'essais a permis de mettre en place une méthode indirecte de caractérisation des sols. Cette deuxième série a été réalisée sur quatre sols types, et sur un sol contenant des éléments de végétation. Ces sols types ont été choisis par le groupement pour couvrir une large gamme de sols de surface.

Concernant la traficabilité, un dispositif expérimental de caractérisation (nommé DE-CART) a été développé au LIRIGM de Grenoble. Ce dispositif donne accès à deux types d'essais. Le premier, dit d'enfoncement de plaque, consiste à introduire dans le sol une plaque circulaire poussée par un vérin hydraulique à vitesse constante. Le second essai, dit de translation de plaque, consiste à déplacer horizontalement, et à vitesse constante, une plaque rigide soumise à un chargement vertical. Le détail de ces dispositifs ainsi que des essais réalisés, peut être consulté dans la thèse de Benoit (2002) et dans le rapport final du PEA (2002). L'objectif opérationnel était de définir une méthode permettant de juger des performances de la mobilité d'un engin chenillé sur les sols testés.

Essais à échelle réelle en laboratoire

En ce qui concerne la scarification, des essais en vraie grandeur, en conditions de labora-

toire, ont été réalisés par le Centre d'Expérimentation Routière (CER) de Rouen. Le but était de reproduire au mieux le phénomène de scarification, à la fois dans la configuration géométrique et dans les conditions d'essais. Le dispositif mis au point à l'échelle 1, nommé DIDEMEX, mettait en oeuvre cinq dents modèles avec un angle d'attaque variant de 30° à 60° et une lame. L'objectif des essais était de fournir des résultats de validation aux modèles sur charrue.

Dans le domaine de la traficabilité, des essais en vraie grandeur ont été réalisés avec l'objectif de mesurer la résistance totale à la mise en mouvement d'un engin. Cette résistance résulte, d'une part, des forces de frottement propres au train de roulement mais également à l'interaction chenille-sol à travers l'état du sol (compacité, humidité) et sa configuration géométrique (en particulier la pente du terrain).

Essais à échelle réelle in situ

Les essais de scarification à échelle 1 in situ ont été réalisés par l'ETAS (Etablissement Technique d'Angers) sur site naturel ou reconstitué. Ils ont permis de disposer de résultats expérimentaux sur charrues réelles en vue de la validation des approches développées par le groupement et testées au préalable sur modèle réduit.

1.1.3.2 Travaux de modélisation et de simulations numériques

Les travaux de modélisation ont pour objet de présenter des modèles de comportement adaptés à la modélisation du comportement des sols de surface soumis à une scarification. Ces modèles sont en particulier utilisés dans les approches numériques en éléments finis. En parallèle, des approches en éléments discrets ont été testées et comparées aux précédentes. On présente ci-dessous un bref aperçu des différents travaux de modélisation réalisés en rapport avec la problématique du PEA.

Modélisation du comportement des sols de surface

Les conditions de modélisation du comportement des sols de surface s'appuient sur les particularités suivantes :

- la sollicitation est essentiellement monotone de type mise en butée du sol ;
- la sollicitation génère une rupture du sol en grandes déformations ;
- la sollicitation provoque une forte destruction du sol donc un remaniement et un adoucissement avant l'évacuation sur les côtés ;
- la sollicitation est appliquée à un matériau faiblement contraint ;
- la sollicitation est appliquée à un milieu fortement hétérogène contenant un réseau racinaire qui conduit à une augmentation de la résistance mécanique et de la cohésion ;
- la sollicitation est appliquée à un milieu dont l'état hydrique est très variable selon les conditions atmosphériques.

Dans ce contexte, les travaux de [Kolmayer \(2001\)](#) ont porté sur l'étude de la pertinence de différentes modélisations continues du comportement des sols de surface. Ces modélisations

sont essentiellement inspirées des travaux de l'école centrale de Lyon (Elamrani, 1992; Cambou and Jafari, 1998; Maleki, 1998), et en particulier du modèle dit CJS hiérarchisé. Ce modèle a ensuite été testé en plusieurs variantes pour l'adapter à différents cas d'étude dans le cadre du PEA.

Simulations numériques en éléments finis

Les simulations numériques en éléments finis ont été réalisées dans le cadre des travaux de thèse de Renon (2002). Le code FORGE3, dédié à l'origine à la mise en forme des métaux, a été choisi, comme support numérique, en raison de sa capacité à prendre en compte des grandes déformations (notamment pour ses performances de remaillage automatique). Renon y a implémenté les lois de comportement étudiées dans la thèse de Kolmayer (2001). Le code a été utilisé pour la simulation de la scarification dans plusieurs cas et en particulier dans le cas d'un massif plastique semi-infini en utilisant (1) une scarification pour une dent avec lame, (2) une scarification multi-dent et (3) une scarification multi-dent avec lame. La confrontation des résultats des simulations à l'expérience a révélé de multiples difficultés liées essentiellement à la maîtrise des paramètres d'entrée, des temps de calcul très longs et surtout une inadaptation aux milieux de type granulaire. En d'autres termes, ces approches semblent mieux correspondre à des milieux cohérents (de type argileux par exemple).

Simulations numériques en éléments discrets

L'hypothèse de continuité, à la base des modélisations utilisées en éléments finis, conduit dans le cas des sols granulaires à un comportement moins perturbé qu'il ne l'est en réalité. Ceci justifie l'intérêt de l'approche en éléments discrets qui intègre comme préalable le caractère naturellement granulaire des sols. Ce caractère est en effet à la base de la modélisation puisque la phénoménologie est exprimée à l'échelle du grain et de ses liens avec ses voisins. De plus, ces approches semblent, au premier abord, mieux adaptées à la problématique du déminage. En effet, le sol est sollicité en grandes déformations lors de la scarification ce qui ne pose pas de difficulté particulière aux approches discrètes. Avec une approche continue, par contre, une procédure complexe et coûteuse de remaillage est nécessaire.

Dans le cadre du PEA, Nougier (1999) a réalisé des simulations des interactions outils-sol dans le cas pulvérulent (sans cohésion). Elle a simulé dans sa thèse le déplacement d'une lame à vitesse horizontale constante dans un échantillon numérique constitué de polygones en 2D et de sphères en 3D. Elle a mis en évidence la formation de bourrelet devant l'outil ainsi que la localisation de la déformation. L'approche utilisée par Nougier a également permis de souligner le caractère fortement discontinu de l'effort exercé sur l'outil. Ce caractère, dû à la nature granulaire du milieu, semble s'amplifier en présence de granularités grossières.

Ces résultats encourageants en faveur de l'approche en éléments discrets ont été nuancés par le fait que les sols de surface sont caractérisés par une assez forte cohésion non prise en compte par Nougier. Par ailleurs, l'application à un cas réel devrait mettre en oeuvre

un nombre considérable de grains, ce qui pose des problèmes de limitation des moyens de calcul. Avant d'atteindre ce stade, l'approche en éléments discrets reste un outil efficace d'exploration du comportement de matériaux granulaires. C'est la raison du choix de cette approche comme support d'étude numérique dans cette thèse.

1.2 Éléments de base de mécanique des sols

On introduit, dans cette section, les variables de description qui seront utilisées dans ce manuscrit dans le cas des sols et plus généralement des matériaux granulaires.

1.2.1 Fractions volumiques et massiques des phases

On considère en général qu'un sol granulaire est constitué de trois phases qui sont, chacune, associée à un volume et à une masse :

- la phase solide constituée d'un ensemble de grains de formes, de tailles, et de compositions minéralogiques diverses ;
- la phase liquide généralement constituée d'une solution aqueuse pouvant s'écouler librement ou, au contraire, être liée aux grains ;
- la phase gazeuse constituée d'air et le plus souvent de vapeur d'eau.

Dans cette étude, il s'agira d'eau pour la phase liquide et d'air pour la phase gazeuse.

On entend par « volume des vides » le volume de tout ce qui n'est pas solide, c'est-à-dire le volume des phases liquide et gazeuse. Les variables décrivant ces différentes fractions sont définies ci-après.

- La phase solide étant généralement considérée comme incompressible ($V_s = \text{constante}$), les mécaniciens des sols ont l'habitude de définir l'état de compaction d'un sol en terme de fraction de volume des vides $V_v = V_\ell + V_g$ par le volume de la phase solide V_s à travers l'*indice des vides* e :

$$e = \frac{V_v}{V_s} \quad (1.1)$$

où V est le volume total.

- La *porosité* n est définie par :

$$n = \frac{V_v}{V} = \frac{e}{1 + e} \quad (1.2)$$

- Lorsque l'on privilégie la phase solide – c'est le cas dans ce document – l'état de compaction peut être défini comme le rapport du volume de la phase solide par le volume total considéré. On définit ainsi la *compacité* ϕ également désignée *fraction*

solide par les physiciens :

$$\phi = \frac{V_s}{V} = \frac{1}{1 + e} = 1 - n \quad (1.3)$$

- La *masse volumique apparente* ρ_s de la phase solide, c'est-à-dire la masse de la phase solide par unité de volume total de sol, est reliée à la compacité et à la masse volumique **intrinsèque** ρ_s^* des grains de sol de la façon suivante :

$$\rho_s = \phi \rho_s^* \quad (1.4)$$

- La *teneur en liquide massique* w est définie comme de rapport de la masse liquide sur la masse solide :

$$w = \frac{m_\ell}{m_s} \quad (1.5)$$

- La *teneur en liquide volumique* ou *fraction volumique de la phase liquide* θ_ℓ est également utilisée par certains auteurs :

$$\theta_\ell = \frac{V_\ell}{V} = w \frac{\rho_s}{\rho_\ell^*} \quad (1.6)$$

où ρ_ℓ^* est la masse volumique spécifique de la phase liquide.

- Le *degré de saturation* S_r décrit la fraction volumique de liquide par rapport au volume des vides. Il est généralement donné en pourcentage, et s'exprime par la relation :

$$S_r = \frac{V_\ell}{V_v} = \frac{w \rho_s^*}{e \rho_\ell^*} \quad (1.7)$$

Dans ce document, on utilisera les termes de « teneur en liquide » ou encore « teneur en eau » pour faire référence de façon implicite à la teneur en liquide massique.

1.2.2 Granularité

L'analyse quantitative des différentes fractions de tailles (fractions granulométriques) peut être réalisée à partir d'un tamisage. On utilise une colonne de tamisage normalisée constituée de tamis à mailles rigoureusement calibrées suivant une suite géométrique de raison 1,25. Les tamis sont empilés de bas en haut par ordre de mailles croissantes. Une masse donnée de sol est placée dans le tamis supérieur et la colonne de tamis est soumise à des vibrations. Une fois l'opération de tamisage terminée, le contenu des différents tamis est pesé. À partir de ces mesures, il est possible de construire un histogramme de fréquence (barres blanches sur la figure 1.5) donnant, pour chaque fraction granulométrique, la masse du refus du tamis correspondant rapportée à la masse de matériau initialement introduite (en pourcentage). Une façon plus usuelle de présenter ces mesures est de cumuler les pourcentages de masses par ordre croissant des fractions granulométriques (barres grises sur la figure 1.5). La gamme de tailles des grains étant en général assez large, une échelle logarithmique est classiquement utilisée.

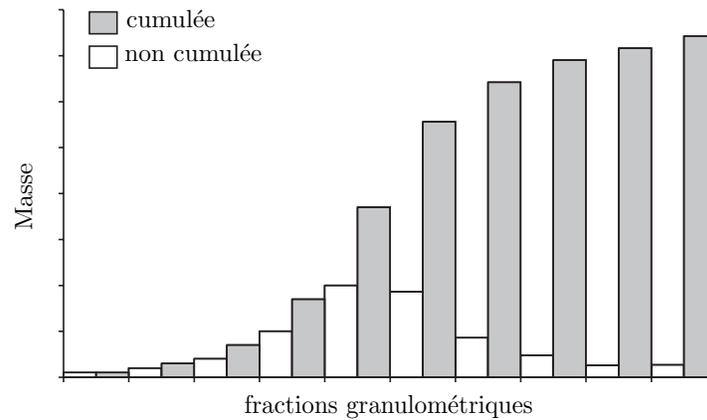


FIG. 1.5: Réalisation d'une courbe granulométrique en pourcentage de masse

Dans le cas de matériaux granulaires, et en particulier des sols dits grenus, cette courbe sert de base pour préciser le caractère bien gradué du matériau (granularité étalée) ou mal gradué (granularité uniforme). Lorsqu'il s'agit de sols granulaires, la courbe granulométrique permet de juger de la présence d'éléments fins argileux ou limoneux qui sont le plus souvent à l'origine d'une certaine cohésion du sol.

1.2.3 États hydriques d'un sol

Dans le cas d'un sol partiellement saturé d'eau, les phases liquide et gazeuse cohabitent dans l'espace poral. la distribution spatiale de ces deux phases est régie par différents phénomènes. Selon cette distribution, qui conditionne l'état de l'eau dans un sol, on peut distinguer différents régimes (figure 1.6).

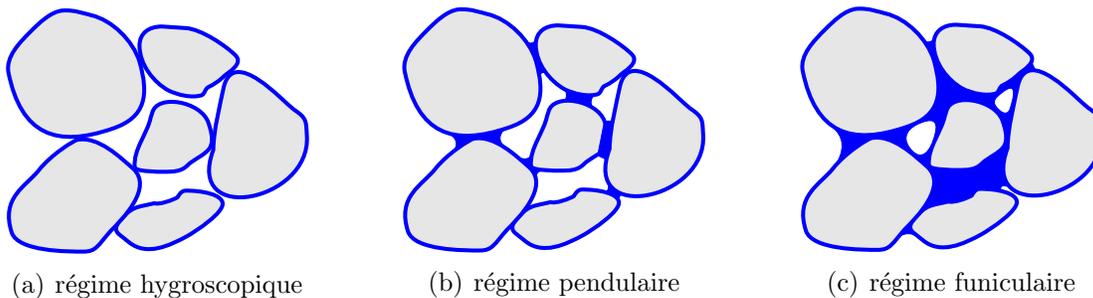


FIG. 1.6: Les différents régimes de l'eau dans un sol granulaire non saturé

Tout d'abord, l'eau peut être retenue au sein des aspérités et/ou de la microporosité des grains de sols. Cet état de l'eau correspond au *régime hygroscopique*. On parle dans ce cas d'eau *adsorbée*. Pour les sols granulaires tels que les sables, l'eau adsorbée représente une si faible quantité que le régime hygroscopique est quasiment inexistant.

Pour une quantité d'eau un peu plus importante, les phénomènes de tension superficielle aux interfaces eau/air et d'angle de contact aux lieux de rencontre des trois phases interviennent. Ces phénomènes physiques entraînent la formation de ménisques capillaires, entre des grains, qui caractérisent le *régime pendulaire*. Une particularité de ce régime est que la phase liquide n'est pas continue contrairement à la phase gazeuse.

Avec une quantité d'eau encore plus importante, cette tendance peut s'inverser : la phase liquide devient continue à une échelle supérieure à celle des grains, alors que l'air peut être piégé sous forme de bulles. Cet état correspond au *régime funiculaire*.

Selon le type de matériau granulaire concerné, ces trois régimes peuvent couvrir des plages plus ou moins importantes de la teneur en liquide. Par ailleurs, les techniques de mesure classiques ne permettent pas de bien cerner les teneurs en liquide qui délimitent ces régimes.

1.3 Conclusion

Le contexte de cette étude ainsi que l'état actuel des connaissances sur la problématique du déminage par scarification ont été brièvement présentés. L'intérêt d'une approche en éléments discrets a été argumenté tout en soulignant les limitations actuelles, notamment en ce qui concerne les simulations des essais à échelle réelle.

Les variables de caractérisation d'un sol non saturé ont été définies ainsi que les différents états hydriques dans le cas non saturé.

Modélisation par éléments discrets 3D

2.1	Approche en éléments discrets	26
2.1.1	Aperçu rapide des différentes approches	26
2.1.2	Choix d'une approche	27
2.2	Modélisation des interactions locales	27
2.2.1	Lois de contact	28
2.2.2	Lois de cohésion	32
2.2.3	Lois de frottement	43
2.2.4	Synthèse	45
2.3	Approche numérique	45
2.3.1	Repères	46
2.3.2	Schéma d'intégration	50
2.3.3	Évolution tridimensionnelle de l'orientation des grains	52
2.3.4	Calcul des variables locales d'interaction	53
2.3.5	Frontières	56
2.3.6	Stabilité numérique	59
2.3.7	Optimisations	64
2.3.8	Outils numériques réalisés	66
2.4	Conclusion	68

Comme annoncé dans le chapitre précédent, une approche en éléments discrets a été choisie. La particularité de cette approche est de calculer le mouvement de chacun des grains en prenant en compte les interactions avec ses voisins. La description des interactions constitue donc un aspect essentiel de la modélisation car elle conditionne la prédiction du comportement global d'un matériau granulaire.

Après une présentation générale de l'approche en éléments discrets, on s'intéressera à la description des interactions en prenant en considération les phénomènes physiques intervenant à l'échelle des grains. On détaillera ensuite, l'approche numérique liée à la méthode de résolution choisie. Les aspects purement numériques ont été volontairement réduits au stricte minimum.

2.1 Approche en éléments discrets

2.1.1 Aperçu rapide des différentes approches

Les principales méthodes en éléments discrets, qui consistent à intégrer le mouvement des grains (méthodes newtoniennes), peuvent être classées en deux grandes familles :

- les approches *Non Smooth-DEM* basées sur la mécanique non régulière qui prennent en compte les chocs sans interpénétration des grains ;
- les approches *Smooth-DEM* permettant l'interpénétration des grains.

L'objectif ici n'est pas d'opposer ces approches. On se contentera d'en donner une description sommaire.

Précisons tout d'abord que le terme anglais « smooth », qui signifie « lisse » ou encore « régulier », se réfère aux lois d'interaction qui permettent l'interpénétration des corps, ce qui leur confère un caractère mou. Les approches de type non smooth sont basées sur l'hypothèse de rigidité des corps. Une non-régularité apparaît alors dans le traitement d'inégalités et dans l'évolution des vitesses avant et après les chocs. Ainsi, toute interpénétration pouvant apparaître avec une approche de type non-régulière est considérée comme une « violation », et est donc indésirable. À l'inverse, une approche dite régulière intègre les interpénétrations à la description des lois de contact en considérant qu'une déformation locale des grains est possible.

Parmi les méthodes de type Non Smooth, on peut citer la méthode *Event Driven* (ED) qui ne gère qu'une seule interaction à la fois avec une discrétisation non régulière du temps. Elle est réservée à la simulation de gaz ou de systèmes de corps articulés. Pour les systèmes de corps où plusieurs interactions interviennent simultanément (systèmes denses), la méthode *Contact Dynamics* (CD), initiée par Moreau (Moreau, 1994, 2000; Jean, 1999; Radjaï, 1998), est mieux adaptée.

Les méthodes de type Smooth sont basées sur l'approche *Molecular Dynamics* (MD). Le lecteur peut se référer au livre de Allen and Tildesley (1987) qui en fait une présentation détaillée. Ces approches sont utilisées pour l'étude de liquides, de cristaux, ou encore de

macro-molécules à l'échelle des atomes. À cette échelle, les interactions sont essentiellement normales à distance et de type Lennard-John par exemple (Verlet, 1967; Gerschel, 1995). Cundall and Strack (1979) ont étendu cette approche au cas de corps solides par l'adjonction de lois de contact et de frottement. Aujourd'hui, cette approche est la plus employée et elle fait l'objet d'un grand nombre d'extensions (Iwashita and Oda, 1998), en particulier par l'adjonction de lois de cohésion (Delenne, 2002; Preechawuttipong, 2002).

2.1.2 Choix d'une approche

L'approche choisie dans cette thèse est une approche de type MD dans la mesure où l'objectif était de se focaliser sur la définition de lois d'interaction multiphysiques entre grains. Ces lois devraient à terme être en mesure de rendre compte des multiples couplages thermo-hydro-mécaniques dans les milieux complexes de type sols granulaires non saturés, éventuellement en présence de gradients thermiques. En fait, l'objectif ici est de privilégier la notion de « comportement mécanique local » à l'échelle des interactions. Ce comportement mécanique peut inclure par exemple des aspects purement rhéologiques du contact comme l'élasticité, la viscosité ou encore la plasticité et l'endommagement. Par ailleurs, ce comportement devra surtout tenir compte de l'influence de gradients de variables d'état comme la teneur en eau et la température, et l'impact que cela peut avoir sur le type d'interaction entre les grains et en particulier sur la cohésion. Dans ce dernier cas, par exemple, la prise en compte de la présence d'un soluté susceptible de se dissoudre ou de cristalliser dans la phase liquide, peut conduire à des degrés de cohésion variés qui peuvent aller de la capillarité à la cémentation.

Compte tenu de ce contexte de modélisations multi-physiques, les approches de type MD semblent mieux adaptées du fait qu'elles offrent un cadre d'implémentation plus aisé de la notion de comportement mécanique local. Néanmoins, il faut souligner que ce choix est le plus souvent contrarié par l'abandon d'avantages avérés des approches de type CD en particulier sur le plan de la stabilité et de la durée des calculs.

2.2 Modélisation des interactions locales

L'action d'un grain sur un autre est portée par une *force d'interaction* \vec{F} et un *moment d'interaction* \vec{M} . En considérant un plan π tangent au grain, on peut décomposer cette force d'interaction en une force \vec{F}_n normale au plan π et une force \vec{F}_π incluse dans ce plan; figure 2.1. Lorsque la force \vec{F}_n , agissant sur un grain, est orientée vers l'intérieur de celui-ci, son action est répulsive; dans ce cas, sa valeur F_n est choisie positive. Lorsqu'elle est orientée vers l'extérieur du grain sur lequel elle agit, son action est attractive et sa valeur est négative. En d'autres termes, on a $\vec{F}_n = F_n \vec{n}$ où \vec{n} est le vecteur unitaire normal au plan π et orienté vers l'intérieur du grain.

En reliant les composantes de la force \vec{F} et du moment \vec{M} à des variables locales, on

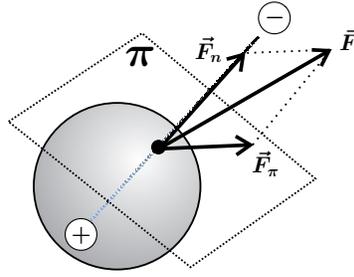


FIG. 2.1: *Décomposition de la force d'interaction*

définit des *lois d'interaction*. On s'intéresse plus particulièrement aux lois explicites qui permettent d'exprimer de façon directe et unique un tenseur d'interaction comme une **fonction** des variables locales : $\{\vec{F}, \vec{M}\} = \text{FONCTION}$ (variables locales). Bien qu'une fonction soit qualifiée ici de loi, la loi à proprement parler est en fait un ensemble de fonctions que l'on utilise ou non selon un statut d'interaction. En d'autres termes, à un statut d'interaction donné correspond une fonction d'interaction. Les changements de statut sont donnés par des critères qui seront détaillés par la suite lors de la définition des lois concernées.

L'implémentation des lois d'interaction dans un code de calcul numérique conduit à privilégier des lois simples ; en particulier les lois d'interaction nécessitant un nombre réduit d'opérations seront considérées avec attention par la suite. Bien entendu, ce choix de simplicité ne doit pas se faire au détriment de la qualité de la description des phénomènes physiques réels.

2.2.1 Lois de contact

On appelle force de contact la composante normale et **répulsive** de la force d'interaction. On admet qu'on peut la définir comme la somme d'une force élastique F_n^{el} et d'une force de dissipation F_n^{dis} . La dissipation est en général associée à une perte d'énergie cinétique des grains ou, plus rarement, à la plasticité du contact. Nous y reviendrons plus loin.

La force élastique de contact entre deux grains est nulle lorsque ces grains ne se touchent pas. En d'autres termes, si la *distance normale* D_n séparant les grains est strictement positive, alors la force élastique de contact est nulle. Par contre, lorsque des grains rigides se touchent ($D_n = 0$), cette force est nécessairement positive ou nulle. Ces conditions sont qualifiées de « *conditions de Signorini* » (figure 2.2a). Elles permettent de relier la force élastique de contact à la distance normale. Cependant elles ne permettent pas d'obtenir de façon directe et unique la force élastique de contact, car la relation force-distance n'est pas univoque. Notons que cette situation ne constitue pas un obstacle pour certaines méthodes numériques implicites comme la méthode CD (Moreau, 2000; Jean, 1999; Radjaï, 1998) qui utilisent un procédé itératif jusqu'à l'équilibre global d'un système de grains à chaque fois

que sa configuration change. La simplicité des conditions de Signorini est d'ailleurs plutôt un avantage mais la méthode numérique explicite qu'on emploie ici impose l'utilisation de lois sous une forme régularisée.

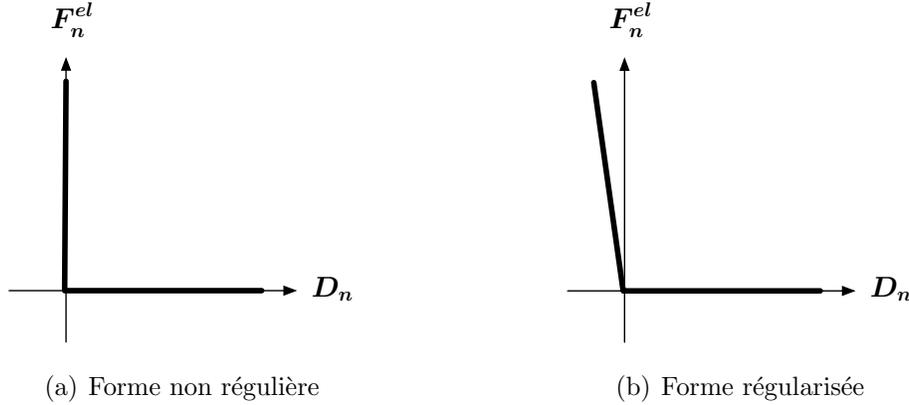


FIG. 2.2: *Graphe de Signorini*

Afin d'obtenir une fonction univoque à partir des conditions de Signorini, on « autorise » l'interpénétration des grains en contact. Les valeurs négatives de la distance D_n sont donc permises. On peut alors associer à chaque distance normale négative une force élastique de contact par le biais de la relation linéaire suivante :

$$F_n^{el} = -K_n D_n \quad (2.1)$$

où K_n est la raideur du contact. Pour les valeurs positives de la distance normale, il n'y a pas d'interaction de contact, donc $F_n^{el} = 0$. Cette loi est appelée *loi de contact linéaire*¹ (figure 2.2b). Le comportement rhéologique lié à cette loi est celui d'un ressort, mais bien qu'on puisse donner le sens physique d'une raideur au paramètre K_n , on doit garder à l'esprit l'aspect « numérique » de ce paramètre. Dans la section suivante, nous verrons en effet que la valeur du paramètre K_n ne peut pas être choisie indépendamment du pas de temps.

Sur la figure 2.3a, on peut visualiser par photo-élasticimétrie la distribution des contraintes à l'intérieur de disques, réalisés dans un matériau biréfringent, comprimés. La distribution des franges optiques peut être reliée à des niveaux de contraintes. En l'absence de déformation plastique, les gradients de couleurs nous indiquent donc que les déformations élastiques se localisent au niveau d'une zone de contact. Cette localisation peut être

¹Cette loi est parfois qualifiée de « loi de Signorini régularisée ». Il s'agit sûrement d'un abus de langage car il n'existe pas de loi mais plutôt des **conditions** de Signorini. Toutefois, on pourra parler de conditions de Signorini sous forme régularisée. Le paramètre K_n joue, dans ce cas, le rôle d'un coefficient de flexibilité rendant le contact moins rigide ce qui améliore la convergence numérique.

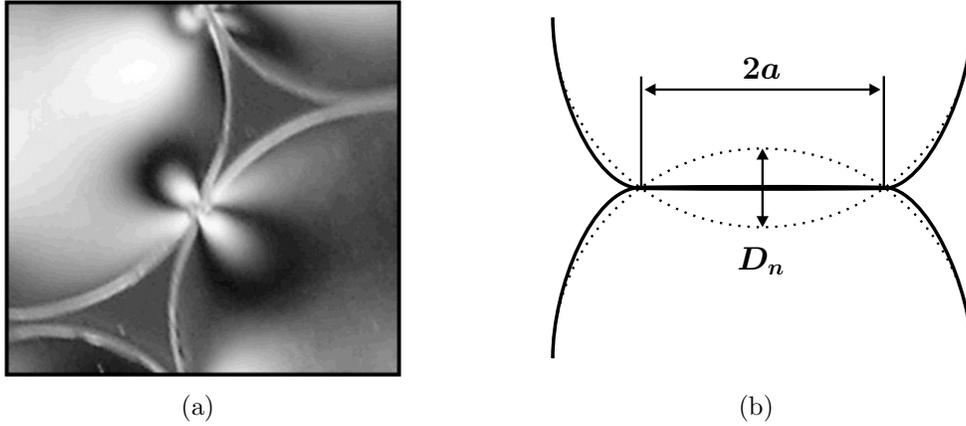


FIG. 2.3: (a) Vue photo-élastique des contraintes dans un disque comprimé; (b) Schématisation de l'interpénétration

prise en compte numériquement par une interpénétration ($D_n < 0$); figure 2.3b. Pour des grains sphériques, la surface de contact prend la forme d'un disque de rayon a sur lequel la pression est répartie de façon non-uniforme.

Avec les considérations suivantes :

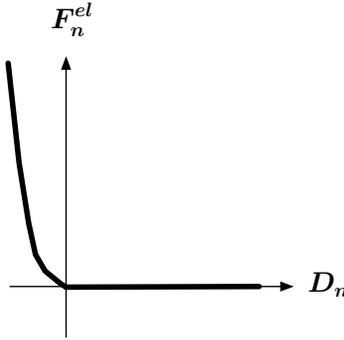
- les grains sont parfaitement lisses;
- ils ont un comportement élastique, isotrope;
- la composante tangentielle de la force d'interaction ne modifie pas la composante normale;
- l'interpénétration est petite devant le rayon de la surface de contact ($|D_n| \ll a$);

la loi de Hertz (Maugis, 1999) exprime la force élastique normale, lorsque la distance normale est négative, par la relation **non-linéaire** suivante :

$$F_n^{el} = \frac{4}{3} \left(\frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \right)^{-1} \sqrt{R} (-D_n)^{3/2} \quad (2.2)$$

où $R = R_1 R_2 / (R_1 + R_2)$ est le rayon réduit des grains en contact, E_1 et E_2 sont leurs modules d'Young, et ν_1 et ν_2 sont leurs coefficients de Poisson. La figure 2.4 donne une illustration de la loi de Hertz.

Imaginons une bille rigide venant percuter perpendiculairement une surface plane. La bille arrive sur la surface avec une certaine vitesse normale V^{n+} , et quitte la surface avec une vitesse V^{n-} amoindrie. Elle aura donc perdu une partie de son énergie cinétique. Le coefficient de restitution e_n , défini comme le rapport V^{n-}/V^{n+} , rend compte de cette dissipation. Sa valeur est comprise entre 0 et 1, la valeur 0 correspondant au cas où toute

FIG. 2.4: *Loi de Hertz*

l'énergie cinétique est dissipée (la bille ne rebondit pas), et la valeur 1 correspondant au cas où toute l'énergie cinétique est restituée (la bille repart avec la même vitesse en valeur absolue). Les phénomènes à l'origine de la perte d'énergie sont multiples. Il peut s'agir, en particulier, de propagation d'onde dans chacun des corps percutés. Le coefficient de restitution dépend donc du lieu de l'impact (Le Saux, 2002). Cependant, une forme de grain sphérique permet de s'affranchir de cette considération.

Lorsque le contact agit, les phénomènes de dissipation sont pris en compte par l'adjonction d'une force de dissipation sous la forme suivante :

$$F_n^{dis} = \nu_n V^n \quad (2.3)$$

où ν_n est le coefficient d'amortissement normal et V^n est la vitesse relative normale que l'on peut également définir comme la dérivée par rapport au temps de la distance normale. La force de dissipation peut être associée à un amortisseur. Nous verrons dans la section suivante que le paramètre ν_n peut être relié au coefficient de restitution e_n .

La déformation plastique des grains au niveau de la zone de contact est une autre cause de dissipation. On peut la prendre en compte, avec une loi de contact linéaire, en choisissant une raideur supérieure à la raideur de contact lorsque la force de contact diminue ; figure 2.5. Il est alors nécessaire de définir un *statut de chargement* Υ_{charge} pour savoir si le contact est chargé ou si il a été déchargé. Un contact a initialement le statut « chargé ». Tant que l'interpénétration augmente ou est maintenue à une valeur constante, ce statut est conservé. Si l'interpénétration diminue, le contact passe dans le statut « déchargé ». La raideur de contact est alors modifiée et elle conserve sa valeur tant que le statut de contact ne change pas. Pour repasser à un statut « chargé », la force de contact doit à nouveau atteindre sa précédente valeur maximale F_n^{max} . Lorsque la force normale devient nulle, le contact est perdu. Ceci signifie que les grains se sont plastifiés au niveau de leur zone de contact. L'hypothèse que le contact ne peut pas se reformer exactement au même endroit doit alors être faite. Ainsi, pour tout nouveau contact, la déformation plastique est nulle.

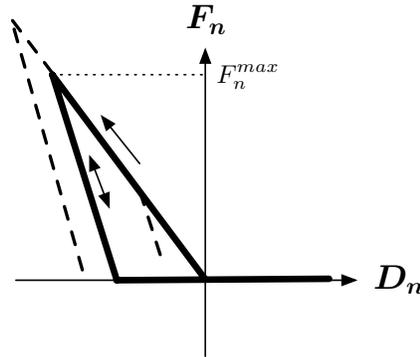
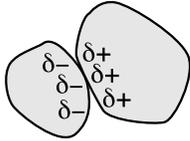
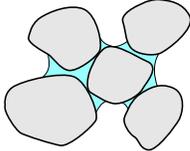
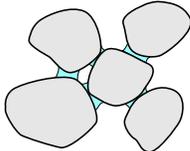
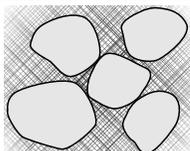
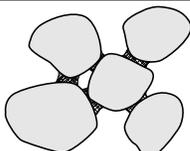


FIG. 2.5: *Exemple de loi de plastification du contact*

2.2.2 Lois de cohésion

Au sein d'un matériau granulaire, différents mécanismes d'interaction entre les grains peuvent donner naissance à une cohésion « observable » à l'échelle macroscopique. On peut distinguer les mécanismes de cohésion au contact (énergie de surface, ancrage des aspérités, soudage par diffusion de constituants ou réaction chimique...) des mécanismes de cohésion agissant à distance. Parmi ces derniers, on trouve la cohésion due à la présence de matière solide ou de liquide formant des jonctions entre les grains, et la cohésion due aux phénomènes électrostatiques et électrocinétiques. On peut également évoquer la cohésion due aux forces gravitationnelles entre les corps célestes ou encore aux forces de Van der Waals entre les particules de très faibles dimensions. On se rend bien compte que certains phénomènes peuvent être négligés selon, en particulier, la taille des grains considérés. Ainsi, les phénomènes de cohésion tels que les liaisons covalentes, ioniques, métalliques, ou les ponts hydrogènes par exemple, sortent du cadre des matériaux granulaires au sens où nous l'entendons. Dans ce manuscrit, on s'intéresse aux forces de cohésion pouvant intervenir entre des grains ayant une taille de l'ordre de quelques micromètres (poudres, poussières) jusqu'à une dizaine de millimètres (graviers). Le tableau 2.2 présente une liste de mécanismes de cohésion pouvant intervenir pour cette catégorie de matériaux granulaires.

On ne traite, dans un premier temps, que les forces de cohésion agissant dans la direction normale au plan d'interaction π (voir figure 2.1). Une telle force est prise en compte en ajoutant un terme **néгатif** F_{coh} à la composante normale F_n de la force d'interaction. Afin de ne pas alourdir inutilement l'écriture, on convient de ne pas mettre d'indice n à la force normale de cohésion et aux paramètres liés lorsque la cohésion n'agit que dans la direction normale.

<p><i>Forces de Van der Waals.</i> Ces forces résultent de la formation de dipôles (permanents ou induits) et de leur interaction.</p>	
<p><i>Liquide interstitiel.</i> Les actions de cohésion sont dues à la tension superficielle du liquide et à la différence de pression liquide/gaz. Ces deux mécanismes sont couplés.</p>	
<p><i>Ponts capillaires.</i> Cas particulier du mécanisme précédent. Les forces de cohésion agissent entre des paires de grains.</p>	
<p><i>Matrice solide.</i> Les grains sont noyés dans une matrice solide. Ce matériau peut être considéré comme granulaire si la matrice a une résistance mécanique très inférieure à celle des grains.</p>	
<p><i>Joints solides.</i> Les grains sont collés entre eux, deux à deux, par un matériau solide.</p>	

TAB. 2.2: Quelques mécanismes locaux de cohésion

Quel que soit le mécanisme de cohésion mis en jeu entre les grains, on peut considérer qu’au dessus d’une certaine distance normale de séparation D° , la force de cohésion devient nulle. La *loi de cohésion uniforme* rend compte de façon simple de la cohésion à l’échelle des grains en imposant une force de cohésion constante pour les distances normales inférieures à la distance D° . Cette force de cohésion s’écrit :

$$F_{coh} = -F^\circ \tag{2.4}$$

avec F° une valeur positive et constante de la force de cohésion.

Cette loi est définie comme étant complètement réversible (figure 2.6a) telle que les passages entre les états cohésif et non-cohésif se font à la même distance D° (que les grains se rapprochent ou qu’ils s’éloignent). On peut également considérer une hystérésis en fixant une distance de formation D_{form}° inférieure à la distance de rupture D_{rupt}° (figure 2.6b). Il faut noter que on entend par « formation » et « rupture » l’apparition et la perte de l’action de cohésion indépendamment du mécanisme physique qui la provoque. Afin de savoir si

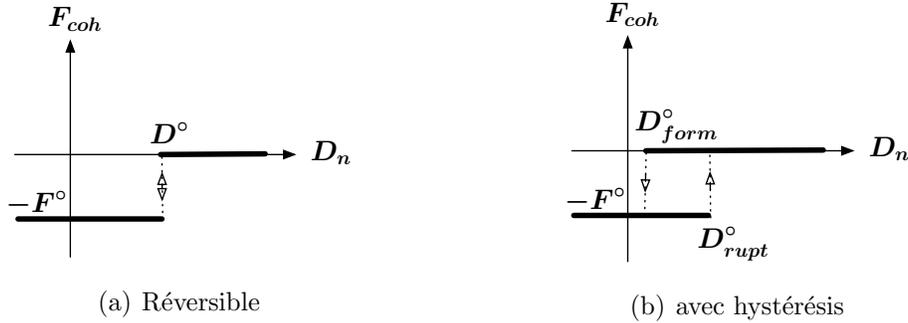


FIG. 2.6: Loi de cohésion uniforme

l'action cohésive doit apparaître ou disparaître, c'est-à-dire si une interaction est cohésive ou non, il est nécessaire de définir un *statut de cohésion* Υ_{coh} valant « actif » si la cohésion agit et « inactif » sinon.

Le modèle de cohésion que nous venons de définir, ne traduit pas directement l'évolution de la force de cohésion comme elle se produit dans la réalité. Elle rend simplement compte du travail nécessaire pour rompre la liaison entre deux grains : $W_{rupt} = F^o D^o$. Nous présentons ci-dessous des modèles de cohésion adaptés à des phénomènes physiques plus spécifiques.

2.2.2.1 Cohésion au contact

Le mécanisme de cohésion au contact est le suivant. Lorsque deux grains se rapprochent puis se touchent, la force normale d'interaction n'est pas forcément nulle. Elle peut être négative. Dans ce cas, les grains s'interpénètrent de plus en plus et la force normale de répulsion augmente bien qu'une force de cohésion agisse. À partir de cette configuration, la perte de contact intervenant lorsque l'on arrache un grain à l'autre ne se fait pas à une distance normale² nulle mais positive. La figure 2.7 illustre ce mécanisme de cohésion.

La force nécessaire à l'arrachement peut être prise en compte dans la loi de Hertz en ajoutant la force de cohésion suivante :

$$F_{coh} = -f\pi R\gamma \quad (2.5)$$

où γ est l'énergie de surface, R est le rayon réduit des grains, et f est un facteur numérique compris entre 1,5 et 2. La valeur $f = 1,5$ correspond au modèle JKR (Johnson, Kendall, Roberts) et la valeur $f = 2$ au modèle DMT (Derjaguin, Muller, Toporov) (Maugis, 1999). Le modèle JKR est plus approprié pour les grains mous de taille importante et une énergie

²il s'agit ici de la plus petite distance entre les grains en les considérant rigides.

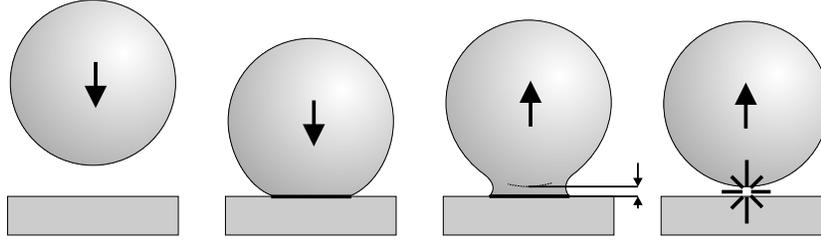


FIG. 2.7: Mécanisme de cohésion au contact

de surface importante agissant à l'intérieur de la zone de contact. Le modèle DMT convient mieux pour les grains rigides de faible taille et une faible énergie de surface autour de la zone de contact. Cette énergie de surface dépend de l'environnement interstitiel, ainsi, par exemple, en présence de liquide ou sous vide la valeur de γ ne sera pas la même (Restagno and Crassous, 2002). Les modèles JKR et DMT constituent une extension du modèle de contact de Hertz. Il n'est cependant pas aisé d'obtenir une expression de la force normale d'interaction en fonction de la distance normale. Pour y remédier, Preechawuttipong (2002) a proposé la *loi JKR simplifiée* (JKRs) en définissant la force normale³ comme suit :

$$F_n = K_n R^{1/2} (D_{rupt} - D_n)^{3/2} - \sqrt{6\pi\gamma K_n} R^{3/4} (D_{rupt} - D_n)^{3/4} \quad (2.6)$$

avec $D_{rupt} = \left(\frac{R(6\pi\gamma)^2}{4K_n^2} \right)^{1/3}$ la distance de rupture. Cette loi est illustrée sur la figure 2.8.

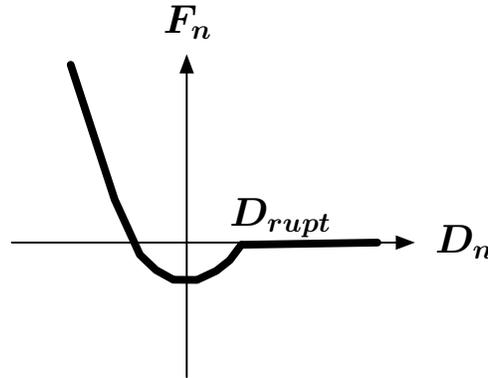


FIG. 2.8: Loi JKR simplifiée (Preechawuttipong, 2002)

Un autre cas de figure peut être envisagé : la déformation plastique des grains. Ceci

³Nous donnons l'expression complète de la force normale F_n car la force de cohésion de la loi JKR simplifiée ne peut pas être dissociée du contact hertzien. De plus, la distance de rupture a été rajoutée à l'expression de la force normale de façon à ce que la distance inter-granulaire d'équilibre soit nulle.

peut donner lieu à une « soudure » des grains. C'est ce qui se passe, par exemple, lors d'un procédé de frittage. Dans cette situation, une loi de contact avec plastification et cohésion, telle que celle illustrée sur la figure 2.9 peut être employée (Luding et al., 2001; Tykhoniuk et al., 2005; Martin and Bouvard, 2005). La loi proposée par Luding et al. (2005) permet en outre de prendre en compte une dépendance à la température et au temps (relaxation).

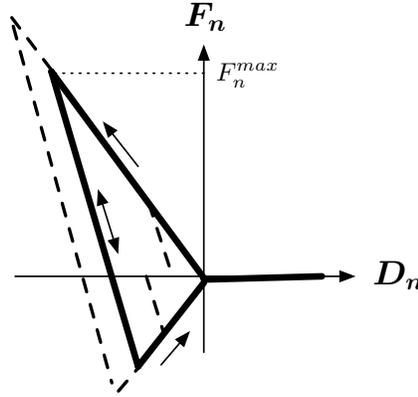


FIG. 2.9: Loi de contact avec plastification et cohésion (Luding et al., 2005)

2.2.2.2 Cohésion capillaire

En présence d'une quantité de liquide relativement faible dans un milieu granulaire, il se forme des jonctions liquides entre les grains. Cette configuration particulière correspond à un régime dit *pendulaire*. Bien que des jonctions liquides puissent exister entre plus de deux grains (Urso et al., 2002), nous faisons l'hypothèse que, dans le régime pendulaire, seules les jonctions entre paires de grains existent (ponts capillaires). La forme que prend un pont capillaire est schématisée sur la figure 2.10 pour des grains sphériques.

À volume liquide constant, la force de cohésion diminue lorsque la distance normale de séparation augmente. Nous pouvons, en première approximation, modéliser cette force par la *loi affine de cohésion capillaire* comme suit :

$$\begin{cases} F_{coh} = & -F^\circ & \text{si } D_n \leq 0 \\ F_{coh} = & (F^\circ/D^\circ)D_n - F^\circ & \text{si } D_n \in]0; D^\circ] \\ F_{coh} = & 0 & \text{si } D_n > D^\circ \end{cases} \quad (2.7)$$

La figure 2.11 donne une représentation de cette loi. Comme pour la loi de cohésion uniforme (figure 2.6), il est possible d'introduire une hystérésis en choisissant une distance de formation inférieure à la distance de rupture (toutes deux constantes) en gérant un statut de cohésion. On notera que le volume de liquide n'est pas pris en compte explicitement dans cette loi et que la rupture du pont capillaire correspond à une force de cohésion nulle.

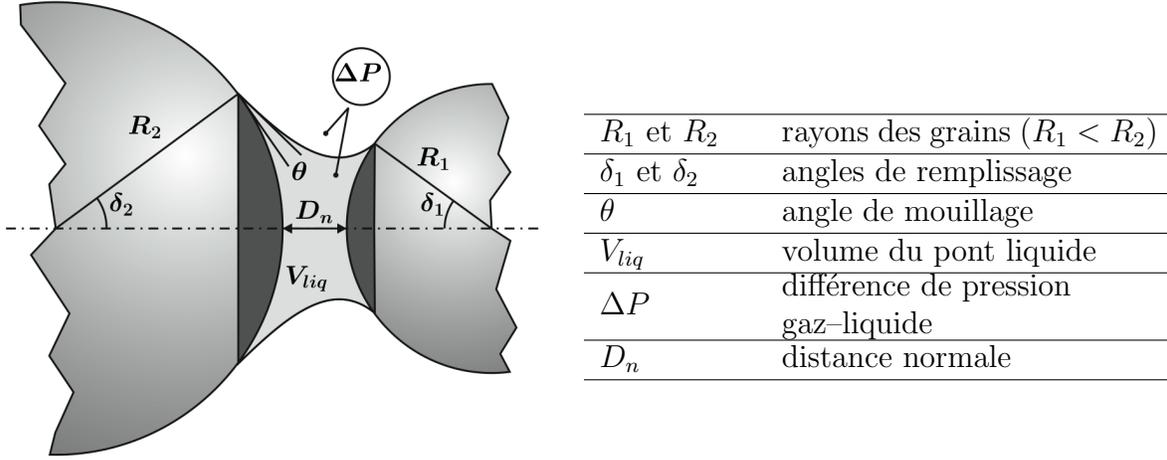


FIG. 2.10: Paramètres de description d'un pont liquide

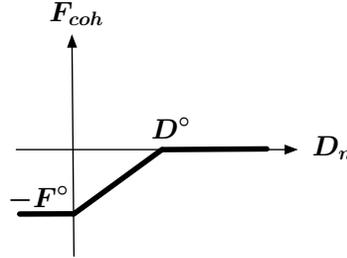


FIG. 2.11: Loi affine de cohésion capillaire

La phénoménologie liée à la présence d'un pont capillaire est plus complexe et doit être précisée. La force de cohésion capillaire résulte⁴ des actions couplées de la tension superficielle du liquide γ_L et de la différence de pression ΔP entre les phases gazeuse et liquide. La forme d'un pont capillaire peut être décrite par l'équation de Laplace :

$$\Delta P = \gamma_L \mathcal{C} \quad (2.8)$$

où \mathcal{C} est la courbure de la surface du ménisque (le signe de la courbure est donné par la définition de la différence de pression). La résolution numérique de cette équation permet d'obtenir la forme exacte (forme axisymétrique complexe) du ménisque en fonction de pa-

⁴Un troisième effet peut également intervenir, il s'agit de la force de flottabilité (Iveson et al., 2002; Fabretto et al., 2004) due à l'immersion partielle des grains dans la phase liquide. Cet effet est négligé ici.

ramètres géométriques et physiques. Ces paramètres sont l'angle de mouillage θ , les angles de remplissage δ_1 et δ_2 , les rayons des grains R_1 et R_2 , le volume du pont liquide V_{liq} , et la distance normale de séparation D_n (voir figure 2.10). La force de cohésion capillaire peut être calculée à partir de cette forme. Cependant, on n'obtient pas, en procédant ainsi, une loi d'interaction explicite. Afin d'obtenir une telle loi, il est nécessaire de déterminer une fonction paramétrée par des variables locales pertinentes. La relation 2.8 permet l'écriture d'une équation différentielle (annexe A) qui est la base d'un système couplé d'équations décrivant la configuration d'un pont liquide. En résolvant numériquement ce système d'équations pour un jeu de paramètres donné, il est possible d'obtenir un ensemble de valeurs $\{F_{coh}, V_{liq}, \theta, R_1, R_2\}$ correspondant à différents états d'équilibre. Une fonction donnant la force F_{coh} et permettant d'interpoler ces valeurs serait une « bonne candidate » pour une loi de cohésion capillaire exploitable d'un point de vue numérique. On trouve dans la littérature des fonctions de ce type (Mikami et al., 1998; Willett et al., 2000; Soulié et al., 2005b). On présente la *loi de cohésion capillaire* (figure 2.12) proposée par Soulié et al. (2005a) qui ont étendu l'expression proposée par Mikami et al. (1998) au cas polydisperse. En présence d'un pont capillaire, on a :

$$\begin{cases} F_{coh} = -\pi\gamma_L\sqrt{R_1R_2}(\exp(B) + C) & \text{si } D_n < 0 \\ F_{coh} = -\pi\gamma_L\sqrt{R_1R_2}(\exp(A\frac{D_n}{R_2} + B) + C) & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.9)$$

avec :

$$\begin{aligned} A &= -1,1 \left(\frac{V_{liq}}{R_2^3} \right)^{-0,53} \\ B &= (-0,148 \ln \left(\frac{V_{liq}}{R_2^3} \right) - 0,96)\theta^2 - 0,0082 \ln \left(\frac{V_{liq}}{R_2^3} \right) + 0,48 \\ C &= 0,0018 \ln \left(\frac{V_{liq}}{R_2^3} \right) + 0,078 \end{aligned} \quad (2.10)$$

où R_1 et R_2 sont les rayons des deux grains ($R_1 < R_2$).

Dans les autres lois de cohésion, la rupture et la formation de l'action de cohésion ont été définies par des valeurs constantes. Dans le cas monodisperse, cette loi est paramétrée par le volume du pont liquide et l'angle de mouillage θ du liquide sur la surface des grains. Le pont capillaire se rompt à partir d'une certaine distance, appelée *distance de rupture* D_{rupt} , qui dépend également de ces paramètres. Lian et al. (1993) ont proposé un critère de rupture en définissant la distance de rupture par la relation suivante :

$$D_{rupt} = (1 + 0,5\theta)V_{liq}^{1/3} \quad (2.11)$$

Soulié et al. (2005a) ont vérifié la validité de ce critère et de la loi de cohésion capillaire dans le cas polydisperse, en effectuant des essais de traction sur des ponts capillaires entre des billes de diamètres différents jusqu'à la rupture (figure 2.13). Dans ces essais, l'angle de mouillage était de l'ordre de 50° lorsque les billes étaient en contact, et diminuait jusqu'à

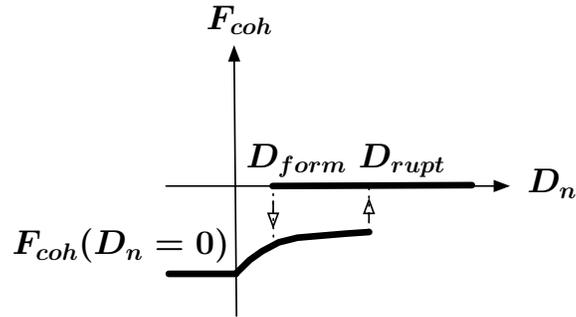


FIG. 2.12: Loi de cohésion capillaire avec hystérésis

une valeur quasiment nulle au moment de la rupture. Le critère de rupture est également représenté sur la figure 2.13, on peut constater que la relation 2.11 déterminée avec les angle de mouillage valant 0° et 50° donne un bon encadrement des point expérimentaux.

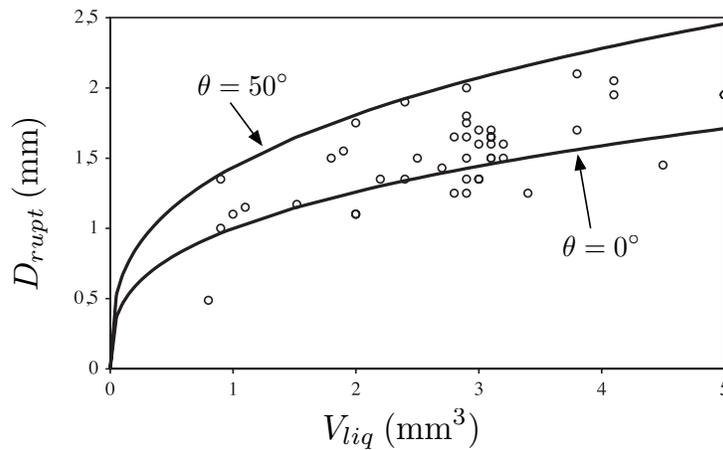


FIG. 2.13: Comparaison du modèle de rupture d'un pont capillaire avec l'expérience (Soulié et al., 2005a)

Pour compléter cette loi, il reste à définir un critère pour la formation d'un pont liquide. Un pont capillaire se forme (ou se reforme) à une distance inférieure à la distance D_{rupt} . Cependant, il est difficile de prédire cette distance car on ne connaît pas le volume de liquide présent à l'instant de la formation du pont liquide. En effet, lorsqu'un pont capillaire se rompt, le liquide qu'il contient n'est plus retenu entre les grains et peut alors être distribué dans son voisinage, c'est-à-dire dans les liens avoisinants qui existent déjà ou dans des nouveaux liens. La distance de formation d'un pont liquide ne peut donc pas être définie sans tenir compte de la distribution de liquide autour du grain et plus globalement dans l'échantillon. Dès lors, la distance de formation des ponts liquides doit être vue comme

un paramètre global. On choisit donc de définir le critère de formation de tous les ponts liquides par une distance de formation D_{form}^o constante, inférieure à de la distance de rupture moyenne. La prise en considération de cette distance permet également de rendre compte du phénomène d'hystérésis.

Le comportement d'un pont capillaire a été défini. Néanmoins, il a fallu considérer des états d'équilibre statique du pont capillaire pour définir la loi de cohésion capillaire. Aucune vitesse n'a donc été prise en compte. En d'autres termes, l'aspect « cinématique » du comportement a été négligé. Ceci implique que, d'une part, la vitesse de sollicitation d'un pont capillaire ne conditionne pas sa réponse mécanique et que, d'autre part, la résistance tangentielle d'un lien capillaire est nulle lorsque les grains ne sont pas en contact. On peut se demander si ces hypothèses sont justifiées pour un liquide tel que l'eau. On peut quantifier la contribution dynamique (viscosité du liquide ν_L) et statique (tension superficielle γ_L) de la force de cohésion capillaire en définissant le *nombre capillaire* $C_a = \nu_L V_{ij} / \gamma_L$ (Iveson et al., 2002; Mikami et al., 1998). Pour les valeurs du nombre capillaire supérieures à 1, l'effet de la viscosité est dominant et pour les valeurs petites devant 1 c'est le contraire. Concernant le cas de l'eau pure à 20°C, la tension superficielle est de l'ordre de 0,073 N/m et sa viscosité de l'ordre de 10^{-3} Pa.s. Il faudrait donc une vitesse relative de 73 m/s pour obtenir un nombre capillaire égal à 1, ce qui semble improbable pour les applications visées. On peut donc conclure qu'il est raisonnable de présumer que la vitesse de sollicitation d'un pont capillaire formé d'eau pure intervient peu (dans un cas quasistatique). Le pont capillaire ne présente donc quasiment aucune résistance au cisaillement et peut se mouvoir tangentiellement.

2.2.2.3 Cohésion solide

Nous qualifions la cohésion de « solide » lorsqu'un liant solide est présent entre les grains. Le joint solide ainsi formé est capable de résister à des sollicitations quelconques (quelle qu'en soit la direction). Il en résulte que le matériau granulaire se comporte également comme un solide : il ne s'écoule pas et peut acquérir un comportement élastique. Le béton, les roses des sables, l'albumen de blé et certaines roches sont des exemples de ce type de matériaux. Dans les sols, les liens de cohésion solide peuvent apparaître par précipitation ou cristallisation de constituants se trouvant initialement dans une phase liquide.

À titre d'exemple, on présente le modèle 2D de cohésion solide proposé par Delenne (2002). La sollicitation d'un joint solide est découplée en trois degrés de liberté : une distance D_n suivant la normale au plan π d'interaction, une distance tangentielle D_t dans le plan π , et une rotation α d'axe normal au plan des grains (en 2D). Ces trois degrés de liberté sont schématisés sur la figure 2.14; leur détermination sera détaillée dans le paragraphe 2.3.4.

Les actions mécaniques correspondant aux différents degrés de liberté D_n , D_t , et α sont respectivement la force normale F_n , la force tangentielle F_t , et le moment M_α . Ces actions sont, toutes les trois, appliquées aux points d'interaction les plus proches. En reliant

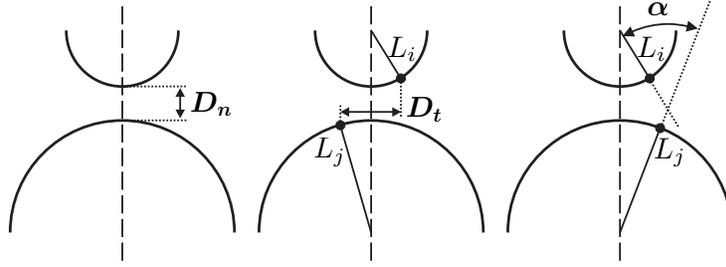


FIG. 2.14: Degrés de liberté d'un joint solide. Les points L_i et L_j sont des points matériels dont les positions (initialement confondues) sont suivies au cours du temps

ces actions mécaniques aux sollicitations élémentaires, on obtient une loi. Cependant, ce découplage de la sollicitation d'un joint solide ne peut être envisagé que lorsque les déplacements et la rotation sont petits. Dans un premier temps, un comportement élastique linéaire fragile est attribué au joint pour la traction-compression, le cisaillement et le clivage (sollicitation en rotation) avec des raideurs valant respectivement Ψ_n , Ψ_t , et Ψ_α . La loi de cohésion solide s'écrit alors :

$$\begin{pmatrix} F_n \\ F_t \\ M_\alpha \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \Psi_n & 0 & 0 \\ 0 & \Psi_t & 0 \\ 0 & 0 & \Psi_\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_n \\ D_t \\ \alpha \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

avec $\Psi_n = \Psi_n^{comp}$ pour la résistance du joint en compression ($D_n < 0$) et $\Psi_n = \Psi_n^{trac}$ pour une résistance en traction ($D_n \geq 0$). Le comportement en compression est analogue à celui du contact linéaire mais la raideur Ψ_n^{comp} rend compte à la fois de la résistance en compression du grain et de celle du joint solide. Le caractère fragile d'un joint solide est établi en définissant les seuils de rupture F_n^{rupt} , $\pm F_t^{rupt}$, $\pm M_\alpha^{rupt}$ pour les sollicitations respectives de traction, de cisaillement et de clivage. On considère que la rupture en compression ne peut pas être atteinte. La figure 2.15 illustre le comportement élastique fragile d'un joint solide pour chacun des trois degrés de liberté pris seul.

Dans le cas de sollicitations composées, Delenne et al. (2004) ont proposé un critère de rupture prenant en compte les trois degrés de liberté et les seuils de rupture associés. Tout d'abord, l'état de sollicitation d'un joint solide est donné par les forces F_n et F_t , et le moment M_α que l'on peut représenter dans un repère à trois axes. Une surface limite $\zeta = 0$ est définie à partir des différents seuils de rupture. Un paraboloïde a été choisi comme surface limite (Delenne et al., 2004). Cette surface est définie par la relation suivante :

$$\zeta(F_n, F_t, M_\alpha) = \left(\frac{F_t}{F_t^{rupt}} \right)^2 + \left(\frac{M_\alpha}{M_\alpha^{rupt}} \right)^2 + \frac{F_n}{F_n^{rupt}} + 1 \quad (2.13)$$

La rupture intervient alors dès que le point donnant l'état de sollicitation se trouve sur la

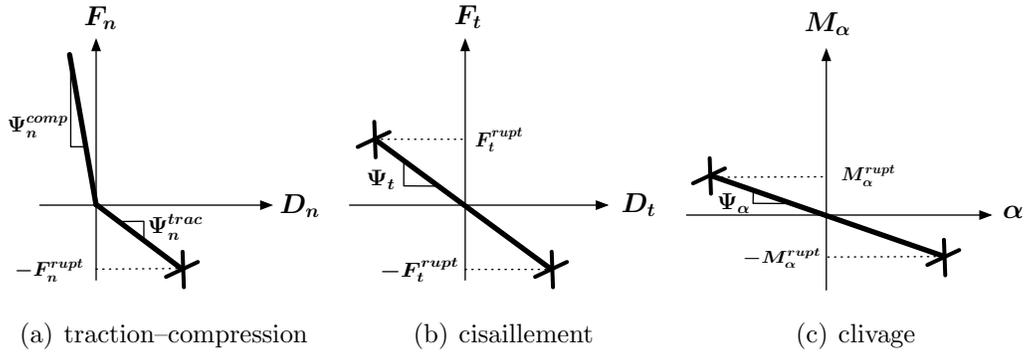


FIG. 2.15: Loi de cohésion solide

surface limite de rupture, c'est-à-dire lorsque $\zeta = 0$. La figure 2.16 donne une illustration de la surface limite de rupture. Une fois le joint solide rompu, celui-ci ne peut pas être reformé. Les grains concernés peuvent interagir par d'autres lois telles que le contact frottant ou la cohésion capillaire par exemple.

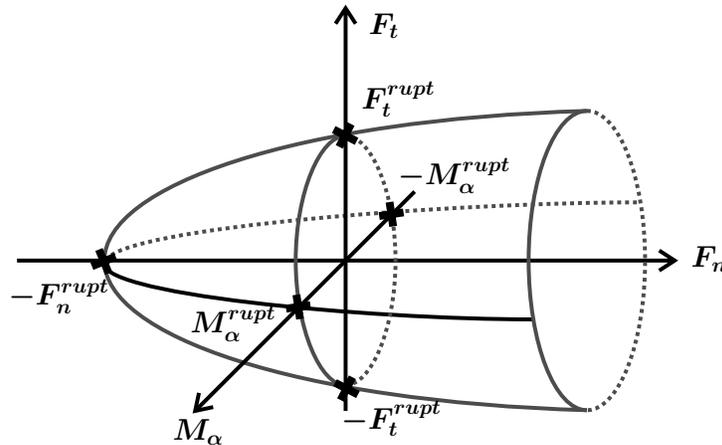


FIG. 2.16: Surface limite de rupture d'un joint solide (Delenne et al., 2004)

Parmi les enrichissements possibles de la loi de cohésion solide, on peut énoncer la possibilité de définir une surface de charge de façon équivalente à la surface limite de rupture. Cette nouvelle surface de charge correspondrait à la limite entre une zone élastique et une zone de plastification à l'instar des modèles continus de plasticité. On a également la possibilité de pré-contraindre chacun des liens solides en se servant de l'interpénétration initiale des grains et en déplaçant les points localisés d'interaction (voir la définition au paragraphe 2.3.1.5) pour définir les variables locales D_t et M_α . En effet, la loi est construite de telle sorte que la position de contact $D_n = 0$ corresponde à un état non sollicité du joint.

Il suffirait donc, afin de pré-solliciter un joint solide dans la direction normale par exemple, de le créer lorsque les grains ne sont pas en contact ou sont interpénétrés.

2.2.3 Lois de frottement

2.2.3.1 Frottement de glissement

Lorsque deux grains sont en contact sans cohésion, la force normale d'interaction est positive. Si les grains ne glissent pas l'un par rapport à l'autre, l'amplitude de la force tangente F_π est inférieure ou égale à un seuil de glissement μF_n proportionnel à la force normale de contact ; μ étant le *coefficient de frottement statique* (frottement de Coulomb). Ce seuil de glissement représente l'amplitude maximale que peut avoir la force tangente due au frottement. Le mouvement relatif des grains peut être représenté par la vitesse de glissement \vec{V}^{glis} : les grains glissent si la vitesse de glissement n'est pas nulle, sinon ils ne glissent pas. On peut donc se servir de la vitesse de glissement comme variable locale pour la détermination de la force de frottement. On définit la vitesse de glissement comme la projection sur le plan d'interaction de la vitesse d'un grain j par rapport au grain i sur lequel on cherche à déterminer la force de frottement. Puisque la force de frottement s'oppose au glissement, et compte tenu des remarques précédentes, il vient :

$$\begin{cases} \vec{F}_\pi = -\mu F_n \frac{\vec{V}^{glis}}{\|\vec{V}^{glis}\|} & \text{si } \|\vec{V}^{glis}\| > 0 \\ \|\vec{F}_\pi\| < \mu F_n & \text{si } \|\vec{V}^{glis}\| = 0 \end{cases} \quad (2.14)$$

Néanmoins, ces relations ne sont pas commodes pour les mêmes raisons que celles énoncées pour les conditions de Signorini (voir paragraphe 2.2.1). On régularise donc la loi en y introduisant un *coefficient de régularisation tangentielle* K_t :

$$\vec{F}_\pi = -\min\left(K_t \|\vec{V}^{glis}\|, \mu F_n\right) \frac{\vec{V}^{glis}}{\|\vec{V}^{glis}\|} \quad (2.15)$$

Il s'agit là de la *loi de Coulomb* dans le cas sans cohésion et sous sa forme régularisée. On peut remarquer que le coefficient K_t a la dimension d'une viscosité.

Lorsqu'une force normale de cohésion agit, la force F_n peut être négative. Or, le seuil de glissement μF_n doit être positif. Néanmoins, la force normale qui doit être utilisée dans la loi de frottement de Coulomb est en réalité la force de répulsion, c'est-à-dire $F_n^{el} + F_n^{dis}$. Lorsque le terme d'attraction, correspondant à F_{coh} , n'est pas nul, le seuil de glissement est fixé à la valeur $\mu(F_n - F_{coh})$ comme illustré sur la figure 2.17a (rappelons que la force F_{coh} est définie négative). La forme régularisée de la loi de Coulomb prenant en compte la cohésion est illustrée sur la figure 2.17b, elle s'écrit :

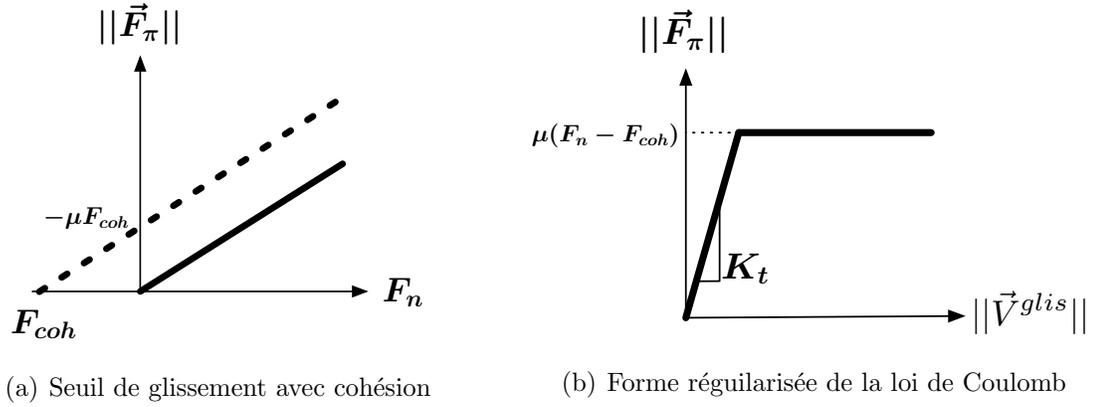


FIG. 2.17: *Forme régularisée de la loi de frottement de Coulomb avec prise en compte d'une force normale de cohésion*

$$\vec{F}_\pi = - \min \left(K_t \|\vec{V}^{glis}\|, \mu(F_n - F_{coh}) \right) \frac{\vec{V}^{glis}}{\|\vec{V}^{glis}\|} \quad (2.16)$$

Dans les situations quasi-statiques, la loi de frottement de Coulomb est parfois utilisée en remplaçant la vitesse de glissement par le déplacement de glissement.

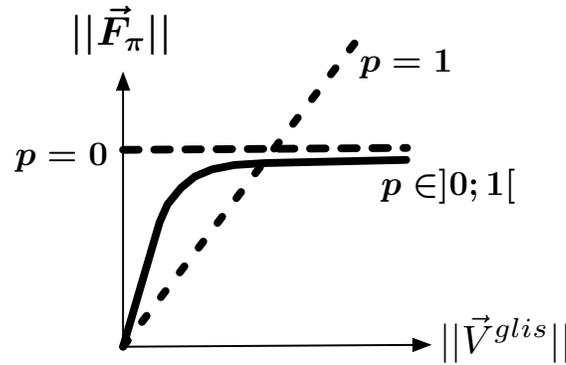


FIG. 2.18: *Loi de frottement de Norton-Hoff*

On peut également évoquer la loi de frottement de Norton-Hoff qui s'exprime par la relation suivante :

$$\vec{F}_\pi = -\mu(F_n - F_{coh}) \|\vec{V}^{glis}\|^{p-1} \vec{V}^{glis} \quad (2.17)$$

où p est un paramètre compris entre 0 et 1. La figure 2.18 donne une illustration de cette loi. Le cas $p = 0$ correspond à la loi de Coulomb non régularisée telle qu'elle a été décrite précédemment.

2.2.3.2 Frottement de roulement

Lorsqu'une bille roule sans glisser sur un plan horizontal, la force de frottement déterminée par la loi de Coulomb est nulle. Rien ne devrait donc l'empêcher de rouler infiniment. Pourtant, ce n'est pas le cas dans la réalité. Une des explications physiques avancées pour ce phénomène, est la formation d'un bourrelet au devant de la bille qui freinerait celle-ci. Afin de prendre cet aspect en considération, une *loi de frottement de roulement* peut être définie de façon analogue à la loi de frottement de Coulomb. La différence porte sur les variables mises en jeu : la force de frottement est remplacée par un couple \vec{M}_ω défini au centre de chacun des grains, et la vitesse de glissement est remplacée par la vitesse relative de rotation $\vec{\omega}^{roul}$ multipliée par le rayon R du grain considéré ($R = R_i$ ou $R = R_j$ selon que le couple est calculé sur le grain i ou j). La loi de frottement de roulement s'écrit :

$$\vec{M}_\omega = -\min(K_\omega \|\vec{\omega}^{roul}\|, \mu_\omega(F_n - F_{coh})) \frac{R\vec{\omega}^{roul}}{\|\vec{\omega}^{roul}\|} \quad (2.18)$$

où μ_ω est le coefficient de frottement de roulement, et K_ω est un coefficient de régularisation.

2.2.4 Synthèse

Plusieurs lois d'interaction ont été présentées. Le tableau dressé n'est, bien évidemment, pas exhaustif mais il donne une indication sur la manière dont sont prises en compte les différentes configurations d'interaction, c'est-à-dire les caractéristiques mécaniques des grains (rigide, élastique, plastique...), la présence de liquide ou bien d'un liant solide entre les grains.

Il faut garder à l'esprit que les lois d'interaction constituent le coeur des approches en éléments discrets. Les paramètres de ces lois sont ceux du problème étudié à l'échelle macroscopique. Certaines causes physiques d'un comportement macroscopique particulier peuvent ainsi être étudiées à l'échelle des interactions. En contrepartie, la détermination des paramètres des lois d'interaction est malheureusement parfois délicate sinon inaccessible.

2.3 Approche numérique

Dans cette section, on va s'intéresser de plus près aux aspects numériques de la modélisation discrète. Tout d'abord, quelques précisions sur le vocabulaire utilisé sont nécessaires. Les éléments discrets composant un matériau granulaire sont appelés *grains*. Ce terme a d'ailleurs déjà été employé. Rappelons qu'il s'agit, dans ce document, de disques ou de

sphères. Un ensemble de grains en interaction est appelé *échantillon*. Des conditions aux limites peuvent être imposées sur cet échantillon par l'intermédiaire d'éléments spéciaux de forme quelconque (segment, plan, cylindre...) que l'on nomme *parois*. Un *corps* peut désigner soit un grain, soit une paroi.

Lorsqu'on s'intéresse à un grain en particulier, on note celui-ci i . Les grains ou les parois susceptibles d'être en interaction avec ce grain i (i.e. les voisins) sont notés j .

2.3.1 Repères

2.3.1.1 Repère global

Le repère global est noté $\mathcal{R}_{glob} = (O, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$. Le vecteur \vec{X} est horizontal, le vecteur \vec{Y} est vertical, et le vecteur \vec{Z} est construit de façon à obtenir un repère \mathcal{R}_{glob} direct et orthonormé (figure 2.19). L'orientation du vecteur \vec{Y} suivant la verticale a pour but d'obtenir une similitude au niveau de l'écriture des équations en 2D et en 3D. En éliminant les composantes suivant \vec{Z} des relations tridimensionnelles on doit donc retrouver les relations bien établies en dimension 2. Avec cette définition du repère global (\vec{Z} perpendiculaire au plan 2D XY), on peut éviter certaines erreurs en développant les équations et les outils numériques qui les utilisent.

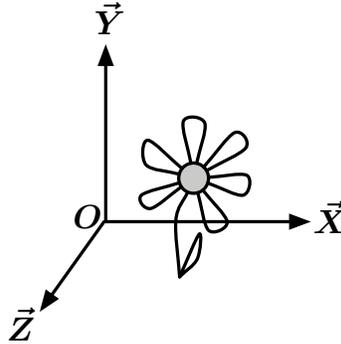


FIG. 2.19: Repère global

2.3.1.2 Repère local d'interaction

Le repère local d'interaction est noté $\mathcal{R}_{loc} = (P_i, \vec{n}, \vec{t}, \vec{s})$. Lorsqu'on se réfère à ce repère, on sous-entend l'existence de deux repères locaux, \mathcal{R}_{loc}^{ij} et \mathcal{R}_{loc}^{ji} , liés à chacun des grains. Ces deux repères sont donc respectivement attachés aux grains i et j . Ils sont définis par :

$$\mathcal{R}_{loc}^{ij} = (P_i, \vec{n}, \vec{t}, \vec{s}) = \mathcal{R}_{loc} \quad (2.19)$$

$$\mathcal{R}_{loc}^{ji} = (P_j, -\vec{n}, -\vec{t}, \vec{s}) \quad (2.20)$$

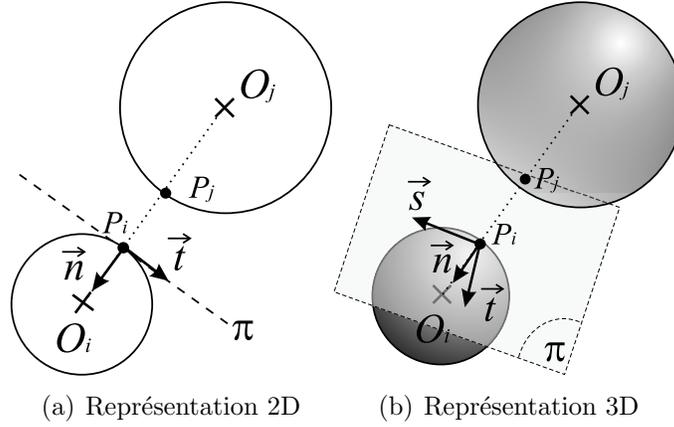


FIG. 2.20: *Repère local d'interaction entre deux grains*

Le vecteur unitaire \vec{n} est porté par la droite joignant les centres des grains. Il est orienté du grain j vers le grain i , et est défini par :

$$\vec{n} = \frac{O_j \vec{O}_i}{\|O_j \vec{O}_i\|} \quad (2.21)$$

L'orientation du vecteur \vec{n} est choisie de telle sorte qu'une force positive (i.e. répulsive) soit orientée vers l'intérieur du grain i . Pour que le repère local soit orthonormé, les vecteurs \vec{t} et \vec{s} doivent être perpendiculaires et inclus dans le plan π . Cette condition n'est pas suffisante pour définir de façon unique ces vecteurs. En effet, une infinité de vecteurs perpendiculaires deux à deux peuvent être définis dans le plan π . On choisit donc d'imposer au vecteur \vec{s} d'être orthogonal au plan contenant les vecteurs \vec{n} et \vec{Y} . Ce choix, tout à fait arbitraire, permet d'obtenir le vecteur \vec{s} de façon unique :

$$\vec{s} = \frac{\vec{Y} \wedge \vec{n}}{\|\vec{Y} \wedge \vec{n}\|} \quad (2.22)$$

Le vecteur \vec{t} est construit de sorte que le repère local soit direct et orthonormé :

$$\vec{t} = \vec{s} \wedge \vec{n} \quad (2.23)$$

Cependant un problème se pose dans la situation singulière où les vecteurs \vec{n} et \vec{Y} sont colinéaires (numériquement). Dans ce cas, le vecteur \vec{s} ne peut pas être défini par l'expression 2.22. On choisit alors de prendre le vecteur $\vec{s} = \vec{Z}$ et le vecteur \vec{t} est donné par :

$$\begin{cases} \vec{t} = -\vec{X} & \text{si } \vec{n} \cdot \vec{Y} > 0 \\ \vec{t} = \vec{X} & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.24)$$

2.3.1.3 Changements de repères

Nous avons vu que les lois d'interaction permettent d'obtenir, à partir des variables locales, les forces d'interaction entre les grains exprimées dans des repères locaux. Les variables locales, lorsqu'il s'agit de grandeurs non scalaires telles que le vecteur vitesse relative, doivent également être exprimées dans les repères locaux lorsqu'elles interviennent dans les lois d'interaction. À l'inverse, les forces déterminées par les lois d'interaction sont exprimées dans les repères locaux. Elles doivent être exprimées dans un repère commun, c'est-à-dire le repère global, pour permettre l'intégration du mouvement de chacun des grains.

Les composantes des vecteurs \vec{n} , \vec{t} , et \vec{s} d'un repère local sont respectivement notées $(n_X, n_Y, n_Z)^T$, $(t_X, t_Y, t_Z)^T$ et $(s_X, s_Y, s_Z)^T$ dans le repère global. Les composantes d'un vecteur \vec{A} quelconque, connues dans le repère global, peuvent être exprimées dans un repère local par la relation suivante :

$$\vec{A} \Big|_{\mathcal{R}_{loc}} = \mathbb{M}_{G \rightarrow L} \vec{A} \Big|_{\mathcal{R}_{glob}} \quad \text{avec} \quad \mathbb{M}_{G \rightarrow L} = \begin{pmatrix} n_X & n_Y & n_Z \\ t_X & t_Y & t_Z \\ s_X & s_Y & s_Z \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

La matrice de passage étant orthogonale, l'opération inverse s'effectue par la relation suivante :

$$\vec{A} \Big|_{\mathcal{R}_{glob}} = \mathbb{M}_{G \rightarrow L}^T \vec{A} \Big|_{\mathcal{R}_{loc}} \quad (2.26)$$

2.3.1.4 Repères liés aux grains

Chaque grain est considéré comme rigide⁵. On définit un repère $\mathcal{R}_i = (O_i, \vec{X}_i, \vec{Y}_i, \vec{Z}_i)$ lié à chacun des grains circulaires (2D) ou sphériques (3D) de centre O_i (figure 2.21). Compte tenu de l'hypothèse de rigidité des grains, la connaissance de la position des axes du repère lié à un grain suffit à déterminer sa position. La position d'un grain peut donc être donnée, à chaque instant t , par la position de son centre :

⁵La déformation au niveau des contacts est suffisamment faible pour être négligée à l'échelle du grains.

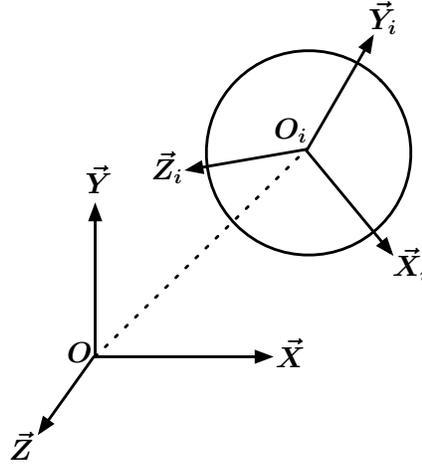


FIG. 2.21: Repère lié à un grain

$$O\vec{O}_i(t) = \vec{x}_i(t) = x_i^X(t)\vec{X} + x_i^Y(t)\vec{Y} + x_i^Z(t)\vec{Z} \quad (2.27)$$

L'orientation d'un grain est donnée par la *matrice d'orientation* $\mathbb{P}_i(t)$ qui permet le passage entre le repère lié au grain i entre les instants 0 et t si l'on considère leurs origines O_i confondues. Ainsi, la position d'un point matériel M_i appartenant au grain i est donnée à l'instant t par la relation suivante :

$$O\vec{M}_i(t) = \mathbb{P}_i(t)O_i\vec{M}_i(t=0) + \vec{x}_i(t) \quad (2.28)$$

Les composantes de la matrice \mathbb{P}_i décrivent les vecteurs \vec{X}_i , \vec{Y}_i et \vec{Z}_i du repère \mathcal{R}_i dans le repère \mathcal{R}_{glob} :

$$\mathbb{P}_i = \begin{pmatrix} X_i^X & Y_i^X & Z_i^X \\ X_i^Y & Y_i^Y & Z_i^Y \\ X_i^Z & Y_i^Z & Z_i^Z \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

Neuf termes sont donc nécessaires pour orienter un grain. Néanmoins, ces termes ne sont pas indépendants et peuvent être réduits à quatre moyennant quelques opérations afin de calculer les cinq autres.

On peut s'interroger sur les raisons d'utiliser neuf termes pour orienter un grain rigide alors que trois angles (les angles d'Euler par exemple) suffiraient. Cependant, il faut noter que la donnée de ces trois angles ne définit pas de façon unique l'orientation d'un grain même si une convention dans l'ordre « d'application » des angles est utilisée. Pour s'en convaincre, un exemple de singularité est illustré sur la figure 2.22 ; les rotations s'effectuent chronologiquement suivant les axes \vec{X} , \vec{Y} et puis \vec{Z} .

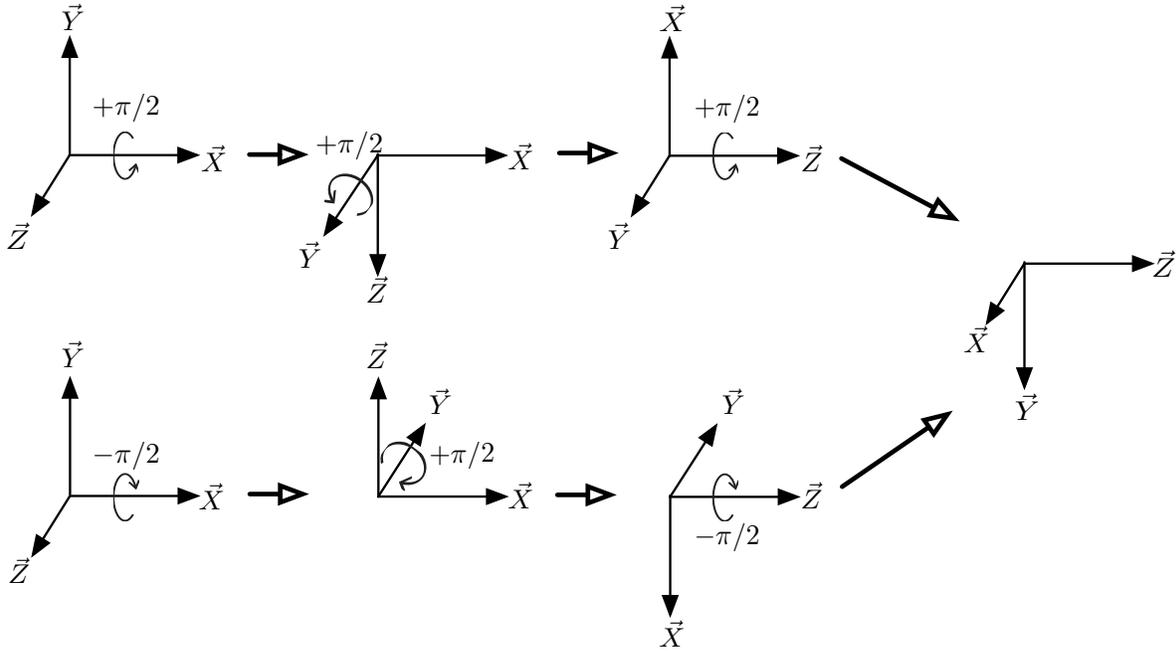


FIG. 2.22: Exemple de singularité avec l'emploi des angles d'Euler

2.3.1.5 Position des points d'interaction

On définit les points d'interaction de deux façons différentes (figure 2.23) selon le modèle d'interaction utilisé :

- Les *points instantanés d'interaction* sont les points les plus proches à chaque instant. Ils sont notés P_i et P_j .
- Les *points localisés d'interaction* sont les points les plus proches à l'instant initial. Ils sont notés L_i et L_j . On suit leurs positions au cours du temps.

2.3.2 Schéma d'intégration

Ayant établi la façon dont sont positionnés les grains, et les changements de repères étant précisés, le schéma d'intégration explicite Velocity Verlet peut être décrit. On connaît au temps t , la position \vec{x}_i , l'orientation \mathbb{P}_i , la vitesse \vec{v}_i , la vitesse de rotation $\vec{\omega}_i$, l'accélération \vec{a}_i , ainsi que l'accélération en rotation $\vec{\dot{\omega}}_i$ de chacun des grains. On estime alors la position des grains au temps $t + \delta t$ avec les relations suivantes :

$$\vec{x}_i(t + \delta t) = \vec{x}_i(t) + \vec{v}_i(t)\delta t + \frac{\vec{a}_i(t)}{2}\delta t^2 \quad (2.30)$$

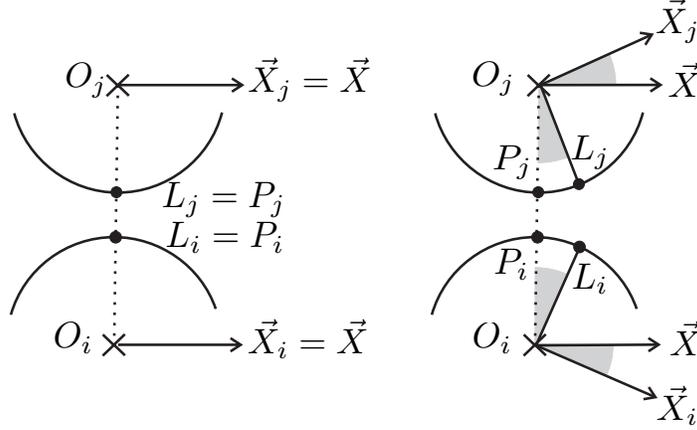


FIG. 2.23: Définition des points instantanés et localisés d'interaction

L'orientation \mathbb{P}_i des grains peut être calculée au temps $t + \delta t$ à l'aide d'une méthode qui sera décrite plus loin. La vitesse et la vitesse de rotation des grains au temps $t + \delta t/2$ sont également estimées :

$$\vec{v}_i(t + \delta t/2) = \vec{v}_i(t) + \frac{\vec{a}_i(t)}{2} \delta t \quad (2.31)$$

$$\vec{\omega}_i(t + \delta t/2) = \vec{\omega}_i(t) + \frac{\vec{\dot{\omega}}_i(t)}{2} \delta t \quad (2.32)$$

Ces nouvelles positions, vitesses et accélérations permettent d'obtenir, par l'intermédiaire des lois d'interaction, les forces agissant sur chacun des grains. La force $\vec{\mathcal{F}}_i$ et le moment $\vec{\mathcal{M}}_i$ résultant au centre des grains sont alors calculés. L'accélération et l'accélération en rotation sont obtenues par le principe fondamental de la dynamique :

$$\vec{a}_i = \frac{\vec{\mathcal{F}}_i}{m_i} + \vec{g} \quad (2.33)$$

$$\vec{\dot{\omega}}_i = \mathbb{I}_i^{-1} \vec{\mathcal{M}}_i \quad (2.34)$$

où \vec{g} est l'accélération gravitationnelle, m_i est la masse du grain i , et \mathbb{I}_i est la matrice d'inertie définie au centre du grain i . Pour une géométrie de révolution, cette matrice d'inertie s'écrit $\mathbb{I}_i = I_i \mathbb{1}$ avec $\mathbb{1}$ la matrice identité et $I_i = (2/5)m_i R_i^2$ ou $I_i = (1/2)m_i R_i^2$ selon que le grain est sphérique ou circulaire. L'inverse de la matrice d'inertie s'écrit donc $\mathbb{I}_i^{-1} = (1/I_i) \mathbb{1}$. Ceci simplifie considérablement l'expression 2.34 qui devient alors :

$$\vec{\dot{\omega}}_i = \frac{1}{I_i} \vec{\mathcal{M}}_i \quad (2.35)$$

On réajuste ensuite le calcul des vitesses des grains à partir de leurs vitesses et accélérations au temps $t + \delta t/2$:

$$\vec{v}_i(t + \delta t) = \vec{v}_i(t + \delta t/2) + \frac{\vec{a}_i(t + \delta t/2)}{2} \delta t \quad (2.36)$$

$$\vec{\omega}_i(t + \delta t) = \vec{\omega}_i(t + \delta t/2) + \frac{\vec{\dot{\omega}}_i(t + \delta t/2)}{2} \delta t \quad (2.37)$$

On passe à l'instant de calcul suivant et on recommence la séquence depuis la détermination des nouvelles positions des grains à partir des vitesses et accélérations actuelles.

2.3.3 Évolution tridimensionnelle de l'orientation des grains

Comme on l'a vu dans la section 2.3.1.4, la position angulaire d'un grain, par rapport au repère global, à l'instant t est donnée par la matrice $\mathbb{P}_i(t)$. Sur un pas de temps, la vitesse de rotation conduit à une rotation d'angle $\delta\alpha_i(t + \delta t) = \|\vec{\omega}_i(t)\| \delta t$ autour d'un vecteur unitaire $\vec{u}_{\omega_i}(t) = \vec{\omega}_i(t) / \|\vec{\omega}_i(t)\|$ de composantes $u_{\omega_i}^X$, $u_{\omega_i}^Y$ et $u_{\omega_i}^Z$. L'expression de la matrice liée à cette transformation est donnée ci-après :

$$\mathbb{R}_i(\vec{\omega}_i) = \begin{pmatrix} (u_{\omega_i}^X)^2 + C_i(1 - (u_{\omega_i}^X)^2) & u_{\omega_i}^X u_{\omega_i}^Y (1 - C_i) - u_{\omega_i}^Z S_i & u_{\omega_i}^X u_{\omega_i}^Z (1 - C_i) + u_{\omega_i}^Y S_i \\ u_{\omega_i}^X u_{\omega_i}^Y (1 - C_i) + u_{\omega_i}^Z S_i & (u_{\omega_i}^Y)^2 + C_i(1 - (u_{\omega_i}^Y)^2) & u_{\omega_i}^Y u_{\omega_i}^Z (1 - C_i) - u_{\omega_i}^X S_i \\ u_{\omega_i}^X u_{\omega_i}^Z (1 - C_i) - u_{\omega_i}^Y S_i & u_{\omega_i}^Y u_{\omega_i}^Z (1 - C_i) + u_{\omega_i}^X S_i & (u_{\omega_i}^Z)^2 + C_i(1 - (u_{\omega_i}^Z)^2) \end{pmatrix} \quad (2.38)$$

où $C_i = \cos(\delta\alpha_i)$ et $S_i = \sin(\delta\alpha_i)$.

L'orientation des grains au temps $t + \delta t$ peut être estimée à l'aide de la relation suivante :

$$\mathbb{P}_i(t + \delta t) = \mathbb{R}_i(\vec{\omega}_i(t)) \mathbb{P}_i(t) \quad (2.39)$$

Cette façon de procéder est assez grossière car elle entraîne une dérive des termes de la matrice \mathbb{P}_i qui doit alors être régulièrement corrigée. Malgré cela, il existe toujours une perte d'information : les programmeurs de jeux vidéo connaissent bien ce phénomène qui rend le mouvement des objets virtuels 3D saccadé (Van Den Berger, 2004).

Une autre possibilité est d'utiliser les *quaternions* (Martys and Mountain, 1999; Langston et al., 2004) qui permettent d'orienter un grain par le biais de quatre valeurs. L'orientation d'un grain i au temps t est donnée par le quaternion :

$$\mathbf{q}_i(t) = q_i^0(t) + q_i^a(t)\mathbf{i} + q_i^b(t)\mathbf{j} + q_i^c(t)\mathbf{k} \quad \text{avec} \quad \mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1 \quad (2.40)$$

où q_i^0 , q_i^a , q_i^b et q_i^c sont les composantes du quaternion $\mathbf{q}_i(t)$. Ce quaternion, que l'on note $[q_i^0(t), \vec{q}_i(t)]$, doit satisfaire à la contrainte de normalité :

$$q^0(t)^2 + q_i^a(t)^2 + q_i^b(t)^2 + q_i^c(t)^2 = 1 \quad (2.41)$$

La dérivée par rapport au temps d'un quaternion est donnée par la relation suivante :

$$\dot{\mathbf{q}}_i(t) = \frac{1}{2}\hat{\omega}_i(t)\mathbf{q}_i(t) \quad \text{avec} \quad \hat{\omega}_i(t) = [1, \vec{\omega}_i(t)] \quad (2.42)$$

Dans le schéma d'intégration Velocity Verlet (voir la section précédente), l'évolution de l'orientation d'un grain peut alors être obtenue par un développement limité. Un développement au premier ordre s'écrit :

$$\mathbf{q}_i(t + \delta t) = \mathbf{q}_i(t) + \frac{1}{2}\hat{\omega}_i(t)\mathbf{q}_i(t)\delta t \quad (2.43)$$

La matrice d'orientation est alors obtenue, à partir du quaternion normalisé, par la relation suivante :

$$\mathbb{P}_i = \begin{pmatrix} 1 - 2(q_i^b)^2 - 2(q_i^c)^2 & 2q_i^a q_i^b - 2q_i^0 q_i^c & 2q_i^a q_i^c + 2q_i^0 q_i^b \\ 2q_i^a q_i^b + 2q_i^0 q_i^c & 1 - 2(q_i^a)^2 - 2(q_i^c)^2 & 2q_i^b q_i^c - 2q_i^0 q_i^a \\ 2q_i^a q_i^c - 2q_i^0 q_i^b & 2q_i^b q_i^c + 2q_i^0 q_i^a & 1 - 2(q_i^a)^2 - 2(q_i^b)^2 \end{pmatrix} \quad (2.44)$$

Ainsi, l'intégration de l'orientation se fait sur quatre valeurs au lieu de neuf.

2.3.4 Calcul des variables locales d'interaction

Les lois d'interactions permettent de calculer les forces et les moments agissant sur chacun des grains. Ces lois sont données par des fonctions de variables locales. Dans cette section, la définition des variables locales est explicitée.

La distance normale D_n entre deux grains i et j est la plus petite distance les séparant. Dans le cas de grains sphériques ou circulaires de rayons R_i et R_j et de centre O_i et O_j , on a :

$$D_n = \|O_i \vec{O}_j\| - R_i - R_j \quad (2.45)$$

Lorsque cette distance est négative, les grains sont interpénétrés et la notion de « plus petite distance » n'a plus de sens car les grains s'intersectent. Dans ce cas, on utilisera tout

de même la relation 2.45 car elle donne une mesure de la plus petite distance suivant un axe normal aux deux sphères à la fois.

La définition de la distance normale entre un grain sphérique et une paroi⁶ est moins simple mais elle peut, dans tous les cas, être déterminée par la relation suivante :

$$D_n = \left\| \vec{P}_i \vec{P}_j \right\| \quad (2.46)$$

en veillant à ce que le vecteur $\vec{P}_i \vec{P}_j$ soit normal au grain et à la paroi à la fois. Afin d'obtenir un point P_j unique lorsque les courbures sont du même signe, la paroi doit avoir un rayon de courbures supérieur à celui du grain.

La distance tangentielle ne peut être définie que si la position des points d'interaction localisés L_i et L_j est connue. On a alors dans le cas bidimensionnel :

$$D_t = L_i \vec{L}_j \cdot \vec{t} \quad (2.47)$$

L'angle de rotation d'un joint solide, comme pour la distance tangentielle, ne peut être défini que si les points d'interactions localisés sont connus. Il est défini en 2D par :

$$\alpha = (\widehat{O_i \vec{L}_i, L_j \vec{O}_j}) \quad (2.48)$$

La vitesse relative $\vec{V}_{ij} = (V_{ij}^X, V_{ij}^Y, V_{ij}^Z)$ est la différence de vitesse des points d'interaction P_j et P_i . Elle est définie comme suit :

$$\vec{V}_{ij} = \vec{V}(P_j) - \vec{V}(P_i) \quad (2.49)$$

Les composantes de la vitesse relative dans le repère global s'expriment par :

$$\begin{aligned} V_{ij}^X &= V^X(O_j) - V^X(O_i) - R_j(N_Y \omega_j^Z - N_Z \omega_j^Y) - R_i(N_Y \omega_i^Z - N_Z \omega_i^Y) \\ V_{ij}^Y &= V^Y(O_j) - V^Y(O_i) - R_j(N_Z \omega_j^X - N_X \omega_j^Z) - R_i(N_Z \omega_i^X - N_X \omega_i^Z) \\ V_{ij}^Z &= V^Z(O_j) - V^Z(O_i) - R_j(N_X \omega_j^Y - N_Y \omega_j^X) - R_i(N_X \omega_i^Y - N_Y \omega_i^X) \end{aligned} \quad (2.50)$$

où $V^X(P)$, $V^Y(P)$ et $V^Z(P)$ sont les composantes de la vitesse du point P . L'obtention de ces composantes dans un repère local se fait à l'aide de la relation 2.25 de changement

⁶Rappelons qu'une paroi n'est pas nécessairement plane.

de repère.

La vitesse de glissement d'un grain j par rapport à un grain i correspond à la projection de la vitesse relative \vec{V}_{ij} précédemment définie sur le plan d'interaction π . Elle est caractérisée par

- une norme :

$$V_{ij}^{glis} = \sqrt{(V_{ij}^t)^2 + (V_{ij}^s)^2} \quad (2.51)$$

où V_{ij}^t et V_{ij}^s sont les composantes de la vitesse relative suivant respectivement les vecteurs \vec{t} et \vec{s} du repère local ;

- une direction et un sens donnés par un vecteur unitaire :

$$\vec{u}_{glis} = \frac{V_{ij}^t}{V_{ij}^{glis}} \vec{t} + \frac{V_{ij}^s}{V_{ij}^{glis}} \vec{s} \quad (2.52)$$

Le volume d'un pont liquide est tout simplement le volume de liquide contenu dans la jonction d'une paire de grains en interaction de cohésion capillaire. On doit toutefois veiller à ce que la quantité de liquide dans l'échantillon entier permette de qualifier son état de pendulaire. Le volume global de liquide est alors la somme des volumes des ponts liquides.

On a vu que la loi de cohésion capillaire (équation 2.9) et le critère de rupture (équation 2.11) sont dépendants du volume de liquide. Il faut donc connaître, à chaque instant, le volume de liquide de chacun des liens au sein d'un échantillon. Différents modes de distribution du liquide au sein de l'échantillon peuvent être envisagés. On peut considérer que le volume de liquide libéré lors d'une rupture de pont capillaire :

- est distribué dans l'échantillon de sorte que la teneur en liquide soit toujours globalement uniforme ;
- s'écoule vers les « liens » voisins en prenant en compte ou pas l'effet de la gravité ;
- est mis en réserve à la surface des grains.

Ces modes de distribution ne constituent que des hypothèses de travail car ils sont difficilement vérifiable expérimentalement à l'échelle des grains. Dans le chapitre 3, on donnera les idées de bases illustrées dans le cadre d'une répartition dite uniforme. On y présentera également, dans le détail, d'autres modes de distribution du liquide. Une comparaison avec des mesures macroscopiques issues de l'expérimentation sera effectuée au chapitre 3 dans le cas d'essais de cisaillement direct, et au chapitre 4 dans le cas d'essais de compression simple.

2.3.5 Frontières

2.3.5.1 Frontières rigides : les parois

Le rôle principal des parois rigides est de permettre la sollicitation mécanique d'un échantillon en imposant des conditions aux limites. On peut « piloter » ces parois en imposant leur position ou une force. Néanmoins, ces parois doivent être en équilibre mécanique à chaque pas du calcul. Elles peuvent donc également être utilisées afin de mesurer, à l'échelle de l'échantillon, des déplacements ou des forces. On a choisi de rendre inexistantes les interactions entre parois. Du point de vue numérique, les parois n'interagissent pas entre elles et ne peuvent interagir avec les grains que par du contact frottant. Les difficultés liées à la gestion numérique des parois portent donc essentiellement sur la définition des repères locaux d'interaction grains-parois, d'une part, et sur leur pilotage, d'autre part.

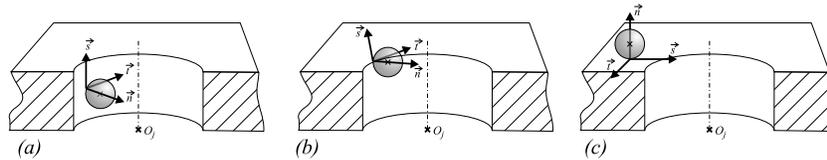


FIG. 2.24: Définition d'un repère d'interaction entre une sphère et une demi-boîte de cisaillement lors d'un contact avec la partie cylindrique (a), le bord (b), ou la partie plane (c)

Pour chacune des géométries données aux parois (plan infini, cylindre creux, segment, tige cylindrique...), une procédure de définition des repères locaux doit être mise en place. De plus, lorsqu'une paroi est elle-même composée de plusieurs « éléments de parois », l'arrête que forme l'intersection de ces éléments doit être prise en compte dans la gestion des interactions. La figure 2.24 illustre, à titre d'exemple, les trois cas de figure pour la définition d'un repère local d'interaction entre une sphère et une plaque trouée (il s'agit en fait de la paroi utilisée pour modéliser la partie inférieure d'une boîte de cisaillement comme on le verra dans le chapitre suivant). On ne détaillera pas ces procédures assez laborieuses car cet aspect relève de la gestion informatique. Toutefois, une attention particulière doit être portée à la définition de ces repères qui doit être faite sans ambiguïté.

Imposer une position à une paroi ne pose pas de difficulté numérique. Il suffit de la décrire par une *fonction de pilotage en position* dépendante du temps : $Pos(t)$. Trois fonctions sont données dans le tableau 2.3 (on peut bien entendu en imaginer d'autre).

Imposer une force à une paroi est un peu plus compliqué. Nous avons vu que le mouvement d'un élément était intégré à partir des positions, vitesses, et accélérations de celui-ci. Une masse doit être attribuée à la paroi afin d'en déduire son accélération à partir d'une force (voir équation 2.33) bien qu'une paroi numérique (un plan infini par exemple) n'ait pas de volume défini. Il existe deux cas de figure :

- soit l'expérience numérique mime une expérience réelle et on a accès à la masse de l'objet réel faisant office de paroi ;

$Pos(t) = constante$	position bloquée
$Pos(t) = V_{imp}t$	Vitesse constante imposée
$Pos(t) = A_{imp} \cos(\omega_{imp}t + \varphi_{imp})$	Déplacement cyclique : amplitude A_{imp} , pulsation ω_{imp} et déphasage φ_{imp} imposés

TAB. 2.3: *Fonction de pilotage en position*

- soit l'expérience numérique ne se réfère pas à une expérience réalisée et la masse de la paroi doit alors être estimée.

Dans cette dernière situation, on choisit une masse de paroi à peu près égale à la masse des grains qui interagissent avec elle. À titre d'exemple, l'estimation de la masse d'un plan infini est faite de la façon suivante. En considérant un échantillon cubique contenant n grains et de côté $n^{1/3}$ grains, le nombre de grains que contient une face est $n^{2/3}$. On affectera alors à un plan s'appuyant sur l'une des faces de l'échantillon une masse $n^{2/3}$ fois plus grande que la masse moyenne des grains. Moyennant ces quelques précautions sur le choix de la masse d'une paroi, la force imposée à la paroi peut être décrite par une *fonction de pilotage en force* dépendante du temps : $For(t)$. Cette fonction intervient dans le schéma d'intégration du mouvement au moment où les forces d'interaction sont calculées. Des exemples de fonctions sont donnés dans le tableau 2.4.

$For(t) = constante$	Force constante
$For(t) = \min(R_{imp}t, F_{seuil})$	Force uniformément augmentée jusqu'à un seuil : rampe de force R_{imp} et force maximale F_{seuil} imposées

TAB. 2.4: *Fonction de pilotage en force*

2.3.5.2 Frontières périodiques

Un problème récurrent avec la modélisation en éléments discrets est la difficulté à prendre en compte un grand nombre de grains. En effet, le nombre de grains qu'il est possible d'utiliser dans une simulation en éléments discrets est largement inférieur à celui que peut contenir un échantillon de sol dans un essai de laboratoire par exemple. Afin d'améliorer l'efficacité des calculs DEM, on a la possibilité d'utiliser des frontières périodiques. On détaille, dans cette section, la prise en compte de frontières mono-périodiques, c'est-à-dire la réplication à l'identique de l'échantillon dans une direction⁷. Les frontières de l'échantillon dans la direction de répétition ont alors la particularité de séparer l'échantillon de sa réplication. Tout se passe donc comme si les grains d'une frontière mono-périodique

⁷L'échantillon peut être un cadran cylindrique dans le cas du cisaillement dans une cellule de couette par exemple.

interagissaient avec ceux de la frontière opposée. Ceci permet, d'une part, de considérer un nombre infini de grains dans la direction périodique, et d'autre part, de se débarrasser de l'influence indésirable de la proximité des parois. La qualité des calculs numériques peut ainsi être améliorée.

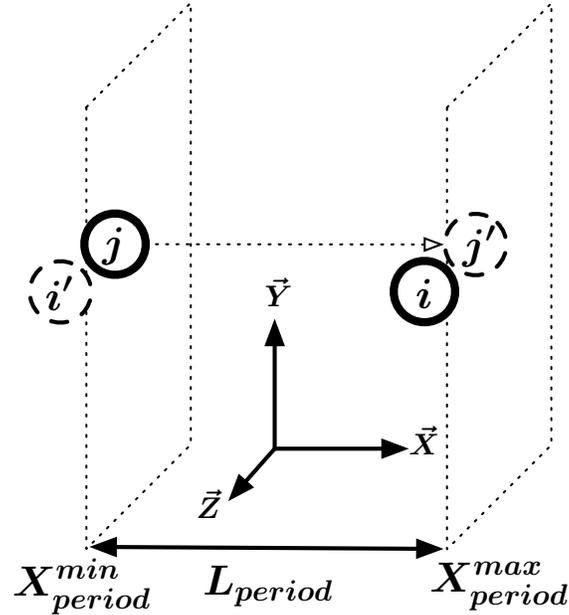


FIG. 2.25: Frontières mono-périodiques dans la direction du vecteur \vec{X}

En pratique, les frontières mono-périodiques illustrées sur la figure 2.25 sont implémentées avec les considérations suivante :

- Pour une périodicité dans la direction de l'axe \vec{X} par exemple, il est nécessaire de définir deux valeurs X_{period}^{min} et X_{period}^{max} indiquant les bornes de l'échantillon qui a alors une longueur de périodicité $L_{period} = X_{period}^{max} - X_{period}^{min}$.
- Lorsqu'un grain se rapproche d'une frontière périodique, celui-ci est susceptible d'interagir avec les grains de la frontière périodique opposée. On définit alors les *grains images*, c'est-à-dire des duplications des grains par translation de $\pm L_{period}$ suivant l'axe \vec{X} . Le signe de la translation est positif si le grain est proche de la frontière « max » et négatif si le grain est proche de la frontière « min ». Les grains images ont les mêmes vitesse et accélération que les grains originaux.
- Lorsque le centre d'un grain traverse une frontière périodique, celui-ci voit sa position translatée de $\pm L_{period}$ suivant l'axe \vec{X} . Le signe de la translation est négatif si c'est la frontière « max » qui est traversée et positif si c'est la frontière « min ».

2.3.6 Stabilité numérique

On discute dans cette section des précautions à prendre pour qu'un calcul numérique soit stable. L'argumentation se fait autour du problème d'un grain venant percuter un mur vertical. De ce fait, les développements peuvent également servir de test de validation (benchmark) pour un code de calcul en éléments discrets.

2.3.6.1 Choix du pas de temps

Afin d'obtenir une intégration « correcte » du mouvement des grains, le pas de temps doit être choisi judicieusement. Considérons, afin d'illustrer le propos, le scénario suivant : un grain est lancé contre une paroi verticale dans un champ uniforme de pesanteur avec une vitesse initiale donnée. Les paramètres du problème sont donnés dans le tableau 2.5. La paroi est positionnée de façon à ce que le grain la percute avec une vitesse horizontale. C'est la raison pour laquelle la position X de la paroi verticale, qui a été calculée analytiquement, est donnée avec six chiffres significatifs dans le tableau.

Rayon du grain (R_i)	10^{-2} m
Masse volumique spécifique du grain (ρ_s^*)	2500 kg/m ³
Composante X de la vitesse initiale (v_X^0)	1 m/s
Composante Y de la vitesse initiale (v_Y^0)	1 m/s
Accélération gravitaire (g)	9,81 m/s ²
Position X de la paroi verticale ($v_X^0 v_Y^0 / g + R_i$)	112,040816.10 ⁻³ m

TAB. 2.5: Paramètres du problème de test du pas de temps

La trajectoire se décompose en deux phases : l'aller entre les instants 0 et t_{choc} , et le retour entre les instants t_{choc} et t' , t_{choc} étant l'instant du choc⁸. On considère que l'énergie cinétique du grain est complètement restituée après le choc ce qui implique que le grain parcourt, à l'aller et au retour, le même chemin pour finalement revenir à la position de départ. On a donc $t' = 2t_{choc}$. La figure 2.26 montre la trajectoire théorique du grain ainsi que les trajectoires intégrées suivant le schéma Velocity Verlet avec les pas de temps 10^{-6} s et 10^{-5} s. On voit qu'avant le choc, la trajectoire du grain est bien approximée pour les deux pas de temps. Par contre, dans la seconde phase du parcours, la trajectoire calculée avec le pas de temps de 10^{-5} s n'est pas correcte.

L'estimation de l'accélération due à la force d'interaction entre la paroi et le grain a donc faussé la trajectoire du grain. On note D_e la distance entre la position finale du grain et la position qu'il aurait du avoir. Cette distance donne une indication sur la divergence du calcul numérique et elle est représentée sur la figure 2.27 en fonction du pas de temps.

⁸En réalité, la percussion du grain sur la paroi verticale a une durée non nulle. t_{choc} correspond dans notre cas à l'instant du début de percussion.

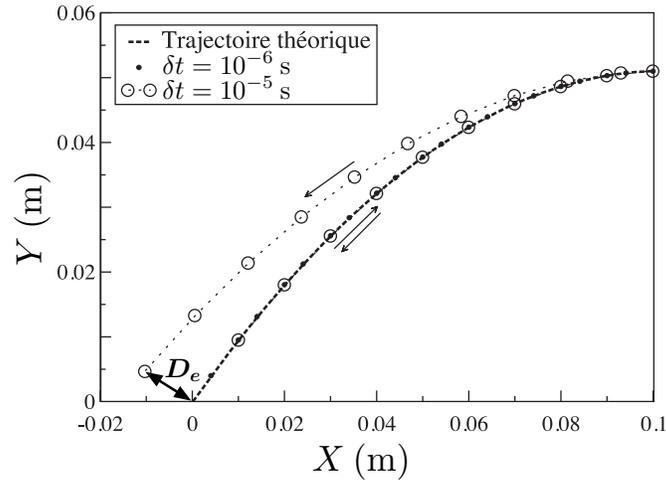


FIG. 2.26: Trajectoires d'un grain déterminées avec différents pas de temps et trajectoire théorique

On se rend compte que pour les pas de temps inférieurs à $\delta t^{max} = 2.10^{-6}$ s la position finale du grain est stable et proche de la valeur théorique. Cette valeur stable n'est cependant pas nulle. On peut attribuer ce fait à une perte numérique d'énergie cinétique liée à l'approche de non smooth utilisée.

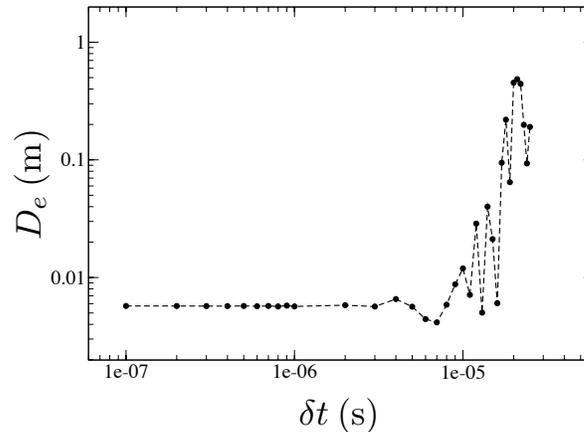


FIG. 2.27: Distance de la position finale du grain par rapport à sa position finale théorique en fonction du pas de temps

Les lois d'interaction donnant les forces les plus grandes sont les lois de contact. Dans le cas élastique linéaire, le contact agit comme un ressort de raideur K_n . La distance normale

D_n entre le grain et la paroi verticale obéit, tant que le contact persiste, à l'équation différentielle d'une masse oscillante autour de la position de contact sans interpénétration :

$$m\ddot{D}_n(t) + K_n D_n(t) = 0 \quad (2.53)$$

La solution de cette équation a la forme suivante :

$$D_n(t) = D_n^{max} \sin(\sqrt{K_n/m}(t - t_{choc})) \quad (2.54)$$

La durée de contact correspond donc à la différence de temps $\Delta t_c = \pi\sqrt{m/K_n}$ entre deux annulations de la distance normale. La figure 2.28 donne l'évolution de la distance normale pendant l'interaction grain/paroi pour chaque pas de temps. L'équation 2.54 y est également représentée. On peut constater que le modèle de masse oscillante donne une bonne prédiction de la durée du contact (la valeur de D_n^{max} a été ajustée). Afin de bien décrire l'évolution de la distance normale, le pas de temps devrait donc être choisi bien inférieur à Δt_c . Dans notre exemple, la durée de contact est de l'ordre de 2.10^{-5} s et le pas de temps maximum permettant d'obtenir une intégration correcte du mouvement est de l'ordre de 2.10^{-6} s, soit un rapport de 10 entre ces deux durées.

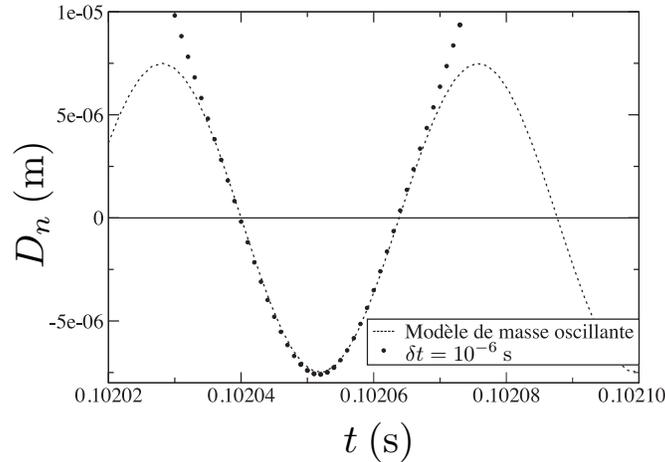


FIG. 2.28: Comparaison du modèle de masse oscillante au calcul numérique

Bien entendu, il ne s'agit là que d'une valeur indicative pour le choix d'un pas de temps, d'autant plus que les simulations traitent le plus souvent une multitude de contacts à la fois. Toutefois, un pas de temps de l'ordre de 5% à 10% de l'intervalle de temps Δt_c est généralement utilisé. Il est déterminé avec la masse la plus petite et la raideur normale la plus importante du système de grains.

2.3.6.2 Amortissement

Reprenons l'équation différentielle 2.53 permettant de décrire l'évolution de la distance normale lors du choc d'un grain de masse m sur une paroi fixe. Si ce choc est amorti, cette équation devient :

$$m\ddot{D}_n(t) + \nu_n\dot{D}_n(t) + K_nD_n(t) = 0 \quad (2.55)$$

La solution de cette équation dépend du déterminant $\Delta = \nu_n^2 - 4mK_n$ de son équation caractéristique. Cependant, les solutions acceptables sont celles qui annulent la vitesse relative normale afin de permettre au grain de repartir dans un temps fini. En d'autres termes, seules les solutions sous forme de sinusoides sous-amorties sont acceptables. Le déterminant Δ doit donc être strictement négatif ce qui implique la définition suivante d'un amortissement normal critique :

$$\nu_{crit} = 2\sqrt{mK_n} \quad (2.56)$$

Afin d'éviter les valeurs d'amortissement normal supérieures à la valeur critique, on introduit un *taux d'amortissement* α_n défini comme suit :

$$\nu_n = \alpha_n\nu_{crit} \quad \text{avec } \alpha_n \in [0; 1[\quad (2.57)$$

De plus, ce nouveau paramètre peut être relié à un coefficient de restitution normal. Dans l'exemple traité précédemment, on a accès au coefficient de restitution normal e_n en divisant les composantes horizontales des vitesses initiale et finale (aucun champ d'accélération horizontal n'existe). Des essais avec différents taux d'amortissement permettent alors d'obtenir les coefficients de restitution correspondants (figure 2.29). [Ting and Cor-kum \(1992\)](#) ont montré que le taux d'amortissement pouvait être relié au coefficient de restitution par la relation suivante :

$$\alpha_n = \frac{\ln e_n}{\sqrt{(\ln e_n)^2 + \pi^2}} \quad (2.58)$$

Cette relation est également représentée sur la figure 2.29. On voit que les points issus des expériences numériques respectent assez bien cette relation, en particulier pour les coefficients de restitution supérieurs à 0,5.

La figure 2.30 montre la trajectoire du grain calculée avec différents taux d'amortissement dont le taux $\alpha_n = 0,215$ correspondant à une restitution de 0,5. La trajectoire a également été analytiquement déterminée avec cette même restitution. On peut ainsi vérifier que le calcul numérique de la trajectoire du grain est correcte. Les trajectoires calculées avec les autres taux d'amortissement nous indiquent que ce paramètre les conditionne fortement et devrait avoir une grande influence sur le résultat des problèmes dynamiques.

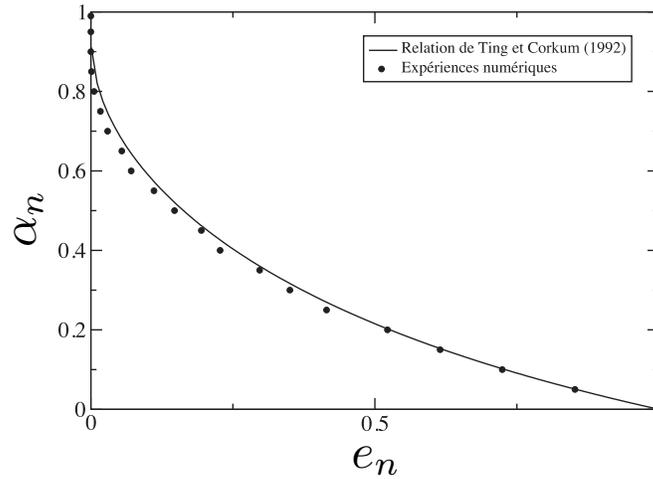


FIG. 2.29: Relation entre le coefficient d'amortissement et le coefficient de restitution

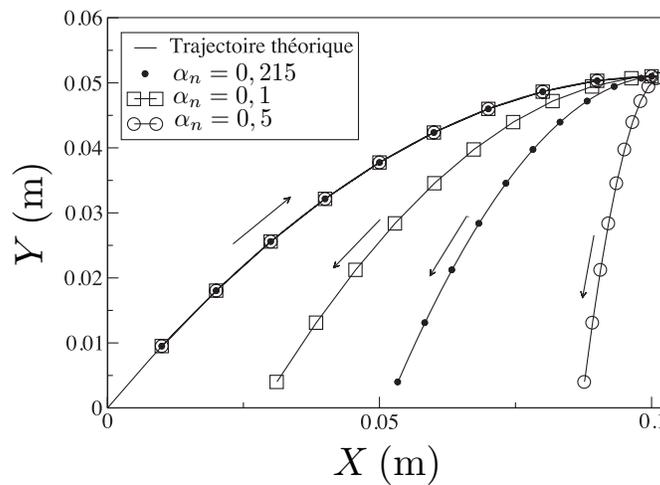


FIG. 2.30: Trajectoires d'un grain déterminées avec différents taux d'amortissement et trajectoire théorique déterminée avec un coefficient de restitution égal à 0,5

Dans les exemples précédents, on a traité le cas d'un grain venant percuter un mur fixe. Lorsque deux grains en interaction sont mobiles, la masse oscillante choisie est la *masse efficace* des grains définie par $m_{eff} = m_i m_j / (m_i + m_j)$.

2.3.6.3 Facteur de masse

On a vu dans la section 2.3.6.1 que le pas de temps est d'autant plus petit que les « raideurs » normales de contact sont élevées, et que la masse des grains est faible. Plus

précisément, il est proportionnel à la racine carrée de la plus petite masse, et inversement proportionnel à la racine carrée de la plus grande raideur. Il faut cependant noter que, à diamètre équivalent, la masse des grains sphériques est généralement plus faible que celle des grains circulaires. Ces derniers sont en fait des cylindres ayant, la plupart du temps, une longueur unitaire (1 mètre). Les grains ont habituellement un diamètre de l'ordre du millimètre dans les simulations. Le rapport de masses entre les grains 2D et 3D est donc voisin de 100.

Si la « raideur » est imposée, par exemple en utilisant la loi de contact de Hertz avec les paramètres réels du matériau constituant les grains, le pas de temps nécessaire à la bonne convergence des calculs numériques peut être très petit. Ceci peut conduire à une durée trop longue des calculs ainsi qu'à l'accumulation d'erreurs d'arrondi qui peut finir par rendre les résultats inexacts. Afin de rendre la durée des calculs raisonnable, on a la possibilité de multiplier la masse des grains par un *facteur de masse* κ_m . C'est notamment ce qui a été fait par Thornton and Antony (2000) ainsi que par Gröger et al. (2003). Ce facteur de masse doit être utilisé en faisant l'hypothèse d'une évolution quasistatique du système de grains.

2.3.7 Optimisations

Certaines améliorations de la vitesse de calcul (optimisations) ne sont pas dépendantes de l'ordinateur utilisé. D'autres, par contre, en dépendent. Ces dernières nous intéressent moins, d'autant plus qu'elles entraînent souvent une altération de la lisibilité des codes sources, ce qui facilite la compréhension du code par d'autres utilisateurs. On expose ici quelques techniques d'optimisation pour les méthodes d'éléments discrets qui sont valables quels que soient le(s) processeur(s) et le langage de programmation.

2.3.7.1 Liste de Verlet

En faisant l'hypothèse que les corps n'interagissent qu'avec leurs voisins immédiats, il est inutile de calculer les forces d'interactions, a priori nulles, entre des corps trop éloignés. On peut donc construire une liste de paire de corps, appelée *liste de Verlet*, en considérant une distance appelée *distance d'alerte* D_{alerte} en dessous de laquelle aucune interaction n'est possible (figure 2.31). Cette distance d'alerte doit bien évidemment être supérieure à la distance maximale d'interaction⁹ qui doit alors être estimée. Cette liste de Verlet est reconstruite tous les N_{regen} pas de temps. La vitesse des grains doit être prise en compte de sorte que la distance parcourue sur ces N_{regen} pas de temps soit inférieure à la distance d'alerte.

⁹La distance maximale de rupture d'un pont liquide peut, par exemple, être déterminée à partir d'une estimation du volume maximal qu'il peut avoir.

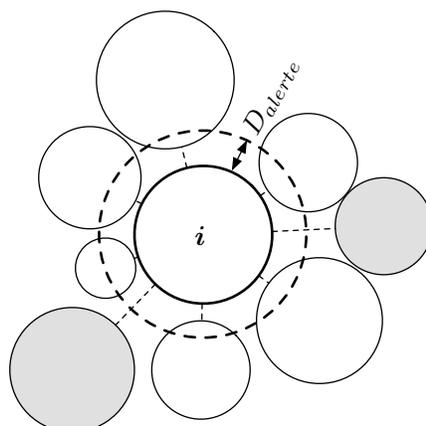


FIG. 2.31: *Distance d'alerte. Les grains gris ne font pas parti de la liste*

2.3.7.2 Parallélisation

La capacité des ordinateurs de bureau et des stations de travail actuelles, en terme de mémoire et de rapidité, limite le nombre de grains numériques à quelques dizaines de milliers. Pour effectuer des simulations avec un nombre plus important de grains (des centaines de milliers par exemple), il est profitable de recourir au calcul parallèle. On peut distinguer deux types d'architectures parallèles :

- L'architecture à mémoire distribuée¹⁰, où un ensemble de programmes « esclaves » font une partie du calcul sur chacun des processeurs avec leur propre mémoire. Il est donc nécessaire qu'un programme « maître » se charge de distribuer les tâches et de récupérer les résultats.
- L'architecture à mémoire partagée où les données sont stockées dans une mémoire commune et sont traitées par plusieurs processeurs.

Paralléliser un code pour une architecture à mémoire partagée est la solution la plus simple. Ce type de parallélisation a été réalisée. Compte tenu de l'algorithme de résolution choisi (Velocity Verlet), il suffit d'indiquer au compilateur de paralléliser la boucle principale du programme, c'est-à-dire la boucle du calcul des interactions.

La simulation d'applications industrielles faisant intervenir la matière en grains nécessite la prise en compte d'un nombre très élevé de grains (Cleary and Sawley, 2002). Cependant, il est important de noter que dans le contexte d'une recherche scientifique, paralléliser un code de calcul n'est pas indispensable pour la plus grande majorité des études. Il est souvent nécessaire d'effectuer une même simulation plusieurs fois en faisant varier un paramètre. Dans ce cas, il est plus intéressant, afin d'obtenir des temps de calcul plus courts, d'effectuer chacune des simulations en série sur différents processeurs plutôt que de les effectuer en

¹⁰Ce sont en général les bibliothèques MPI (Message Passing Interface) ou PVM (Parallel Virtual Machine) qui sont utilisées dans ce cas.

parallèle les uns après les autres.

2.3.7.3 Calculs superflus

Une façon incontestable de gagner du temps en calcul numérique est de ne pas effectuer des calculs inutiles. Deux optimisations particulières sont reportés ci-après.

- La géométrie d'un grain sphérique est invariante lorsque son orientation change. on peut donc économiser le calcul de l'orientation des grains sphériques si les variables locales utilisées dans les lois d'interaction ne font pas intervenir l'orientation de ces grains.
- Les distances sont souvent calculées comme la racine carrée de grandeurs au carré. Ces distances étant nécessairement positives et la fonction racine carrée étant croissante de façon monotone, les tests de comparaison peuvent être effectués sur les grandeurs au carré; c'est-à-dire en économisant le calcul d'une racine carrée.

2.3.8 Outils numériques réalisés

2.3.8.1 Code de calcul

Au cours de cette thèse, un code de calcul 2D/3D basé sur la Méthode des Éléments Discrets de type smooth et non-smooth a été développé¹¹. Il a été appelé `tapio-K`¹². Ce code, écrit en langage C ANSI¹³, se présente sous forme de modules pouvant être utilisés pour créer des programmes spécialisés dans le traitement de problèmes précis, c'est-à-dire avec des conditions aux limites et des lois d'interaction bien définies dans une configuration 2D ou 3D. En optant pour la solution « un problème à traiter = un programme de calcul », on obtient des codes sources plus simples à lire et des programmes plus rapides que si on avait réalisé un programme unique. L'objectif étant, dans un premier temps, de favoriser l'aspect scientifique des problèmes de micromécanique de matériaux granulaires. Dans une phase ultérieure, ces modules devraient inspirer d'autres initiatives pour le développement d'un code plus général.

2.3.8.2 Pré-traitement

Les principales opérations de pré-traitement consistent à :

¹¹Actuellement, la méthode de dynamique des contacts (non-smooth DEM) est également implémentée dans le code `tapio-K` en dimension 2 avec l'algorithme de Gauss-Seidel. Néanmoins, ce manuscrit ne présente aucune simulation réalisée avec cette approche.

¹²Ce nom a été choisi en rapport à l'aliment tapioca qui est granulaire, cohésif et d'une consistance gluante.

¹³Le C ANSI (ou C ISO) est un langage de programmation normalisé qui est donc théoriquement compatible avec tous les systèmes d'exploitation. Ceci a permis de compiler le code sur différents systèmes d'exploitation tels que des Unix, Windows et Mac OS X sans modification des sources.

- générer une distribution du diamètre des grains uniformément répartie entre deux valeurs ou suivant une loi normale ;
- préparer la réalisation d'un échantillon en plaçant les grains sur un réseau de telle sorte qu'ils ne s'interpénètrent pas ;
- convertir des fichiers de données.

Là encore, on n'a pas opté pour une solution englobant toutes les possibilités de pré-traitement. On a préféré réaliser des programmes en C au cas par cas en tirant profit de la structuration des données établie dans le code `tapio-K`.

D'autres opérations telles que les dépôts sous gravité ou l'ajustement de la compacité d'un échantillon peuvent être considérées comme étant du pré-traitement, mais elles sont en fait réalisées par une procédure de calcul de type Smooth-DEM.

2.3.8.3 Post-traitement

Les applications spécialisées dans le post-traitement de simulations **mécaniques** en éléments discrets sont rares. L'application `mgpost` a été développée pour répondre aux besoins de post-traitements. Elle est disponible sur Internet ([Richefeu, 2005](#)). Les principales fonctionnalités sont les suivantes :

- visualisation 2D ou 3D des résultats de simulations (position et géométrie des grains et parois, forces, vitesses...);
- calculs de post-traitements graphiques ou à partir d'un fichier de commande ;
- exportation d'images bitmaps (TIFF) ou vectorielles (EPS) en 2D ou en 3D ;
- exportation de séries d'images TIFF pour la réalisation d'animations ;
- exportation POVRAY pour la réalisation de rendus réalistes (images de synthèse)...

La communication entre le code de calcul et le programme de post-traitement `mgpost` passe par des fichiers au format XML. Il s'agit de fichiers « textes » structurés qui contiennent les données des corps (géométrie, position, vitesse...) et de leurs interactions (statut de cohésion, forces, vitesses relatives...) à des intervalles de temps fixés. Sans entrer dans les détails, l'intérêt du format XML réside dans sa structuration sous forme de « balises » hiérarchisées. Elles permettent au programme `mgpost` de continuer à lire les fichiers de données même si certaines informations lui sont inconnues. On peut ainsi faire évoluer le contenu des fichiers de données tout en conservant leur lisibilité par le programme de post-traitement. Inversement, l'évolution du programme de post-traitement ne l'empêche pas de pouvoir lire les fichiers issus « d'anciennes » simulations. Un autre intérêt du format XML vient du fait que les fichiers de données sont faciles à générer quel que soit le langage de programmation utilisé et que ces fichiers peuvent être lus par le programme `mgpost` lorsqu'ils sont compressés. Un espace disque non négligeable peut donc être économisé.

Pour finir, précisons que le format XML que nous avons établi permet d'interfacer le programme `mgpost` avec n'importe quel code de calcul. À ce jour, les codes MMGC ([Delenne, 2002](#)) et LMGC90 ([Dubois and Jean, 2003](#)) sont capables de générer des fichiers XML.

2.4 Conclusion

Dans ce chapitre, les éléments de modélisation nécessaires à la mise au point d'un code de calcul en éléments discrets ont été présentés. Dans un premier temps, des lois d'interaction liées à divers phénomènes physiques ont été décrites. On s'est intéressé, en particulier, à une loi de cohésion capillaire prenant en compte la présence d'eau sous forme de ponts liquides. L'approche numérique choisie (smooth DEM) a ensuite été présentée dans le détail pour la configuration 3D.

Cisaillement de matériaux granulaires cohésifs. Cas de la capillarité

3.1	Hypothèses de distribution spatiale du liquide au sein du ma-	
	tériau	70
3.1.1	Modèle de distribution dite uniforme	70
3.1.2	Autres modèles de distribution	72
3.1.3	Synthèse	74
3.2	Cisaillement à la boîte de Casagrande normalisée	75
3.2.1	Dispositif expérimental	75
3.2.2	Matériaux d'étude	77
3.2.3	Confrontation expériences/simulations	80
3.2.4	Étude des lois d'interaction	83
3.2.5	Synthèse	89
3.2.6	Investigation expérimentale	90
3.3	Cisaillement à faibles contraintes	97
3.3.1	Expériences	97
3.3.2	Simulations numériques	105
3.3.3	Approche théorique micro-macro	110
3.4	Conclusion	115

L'objectif, dans ce chapitre, est de valider la modélisation précédemment décrite en effectuant des comparaisons entre des essais numériques et des essais expérimentaux de cisaillement direct à la boîte de Casagrande. La validation concerne, d'une part, les aspects purement numériques du code de calcul `tapio-K` et, d'autre part, la pertinence des lois d'interaction. On portera une attention particulière à la loi de cohésion capillaire.

On propose dans la première section, une réflexion sur les modes de distribution de liquide dans le matériau. La seconde section comprend une étude portant sur l'essai de cisaillement de Casagrande classique. Cette étude a révélé l'incapacité du dispositif normalisé à rendre compte de l'effet de la cohésion capillaire sur les caractéristiques de résistance au cisaillement dans les conditions de notre étude. On propose dans la dernière section, un dispositif mieux adapté au cisaillement de matériaux granulaires faiblement contraints. Une confrontation entre théorie, simulation et expérimentation permet de mener une analyse micro-macro autour de l'influence de la teneur en eau et de la densité des ponts liquides dans le matériau.

3.1 Hypothèses de distribution spatiale du liquide au sein du matériau

3.1.1 Modèle de distribution dite uniforme

Afin de répartir numériquement le liquide entre les grains, il est nécessaire de définir une procédure de distribution. Cette procédure doit tenir compte des quelques règles présentées ci-après.

- La totalité du volume de liquide introduit dans l'échantillon doit contribuer à la formation des ponts liquides. La relation suivante doit donc être vérifiée à tout instant :

$$V_\ell = \sum V_{liq} \quad (3.1)$$

- Le volume d'un pont liquide est lié à la géométrie (donc aux rayons) des grains en interaction. Il semble, en effet, clair que ce sont les paires de grains de plus grande taille qui retiennent le plus de liquide.
- Des ponts liquides sont susceptibles de se former en dessous d'une certaine distance. Mais, n'ayant aucun moyen d'estimer cette distance, on a choisi dans un premier temps cette distance nulle. La présence ou non d'un pont liquide est mémorisée numériquement par une variable de statut Υ_{pont} valant « présent » ou « absent ».

On attribue, dans un premier temps, une valeur indicative à chacun des ponts liquides, c'est-à-dire à chacune des interactions dont le statut Υ_{pont} vaut « présent ». Ces valeurs, appelées *volumes indicatifs* V_{indic} , ont la dimension de volumes. Néanmoins, ils ne correspondent pas aux volumes réels des ponts liquides. Leur définition constitue le critère de distribution du liquide. Compte tenu des remarques précédentes, on définit les volumes indicatifs par la relation suivante :

$$V_{indic} = R_i R_j (R_i + R_j) \quad (3.2)$$

Le volume indicatif rapporté à la somme des volumes indicatifs donne alors la proportion prise sur le volume total de liquide. Ceci conduit à définir le volume d'un pont liquide comme suit :

$$V_{liq} = \frac{V_{indic}}{\sum V_{indic}} V_\ell \quad (3.3)$$

Il est à noter que la procédure de distribution basée sur les rayons des grains entraîne, avec les matériaux utilisés, une répartition globalement homogène du liquide comme on peut le voir sur la figure 3.1. En fait, cette situation est obtenue lorsque les grains de différents diamètres sont eux même répartis de façon homogène, c'est-à-dire qu'il n'y a globalement pas de ségrégation par taille. Par contre, à l'échelle d'une dizaine de grains, cette répartition n'est pas homogène car une hétérogénéité sur la taille des grains existe à ce niveau. À plus forte raison, à l'échelle des grains, la répartition de liquide n'est bien entendu pas homogène puisque la phase liquide est discontinue.

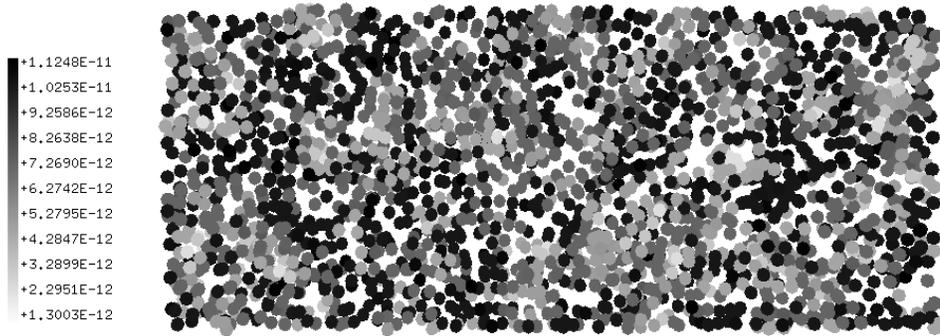


FIG. 3.1: Visualisation du volume des ponts liquides dans une tranche verticale d'un échantillon cylindrique. La position et l'intensité des points correspondent respectivement à la position et au volume de chacun des ponts liquides

La distribution du liquide entre les grains est effectuée à intervalles de temps réguliers afin de « remettre en circulation » le liquide issu des ponts rompus et d'attribuer un volume de liquide aux nouveaux ponts capillaires. Cette façon de procéder n'induit pas de fluctuations du volume global de liquide et la relation 3.1 est donc respectée. Toutefois, pour que la rupture et la formation des ponts puissent être effectuées avec une certaine dynamique, le liquide doit être redistribué avec une fréquence suffisamment importante. On a choisi d'effectuer cette redistribution à la même fréquence que la reconstruction de la liste de Verlet.

3.1.2 Autres modèles de distribution

Les modèles présentés dans la suite sont construits autour de différents phénomènes pouvant influencer la redistribution du liquide, à savoir :

- la formation de gouttes à la surface des grains après la rupture d'un pont liquide ;
- l'écoulement du liquide issu de la rupture vers des ponts capillaires (ou des contacts) situés à une altitude moindre sous l'action de la gravité ;
- la diminution du nombre de ponts capillaires lors des réarrangements granulaires.

On fait l'hypothèse que des amas de liquide ne se forment pas et que le liquide ne peut se situer qu'au niveau de ponts capillaires entre **deux** grains ou bien à la surface des grains.

3.1.2.1 Modèles avec réserve de liquide (gravité négligée)



FIG. 3.2: Formation de gouttes à la surface des grains après la rupture d'un pont liquide

La figure 3.2 montre la photo d'une goutte d'eau qui est « apparue » après la rupture d'un pont liquide. Au regard de cette figure, on peut supposer que, dans un matériau granulaire, le liquide reste sous forme de gouttes à la surface de chacun des grains concernés par la rupture d'un pont liquide. Avec cette hypothèse, il est nécessaire de définir un critère pour partager le volume du pont liquide en deux. Les deux parts de volume constituent alors les réserves de liquides V_{liq}^i et V_{liq}^j attribuées respectivement aux grains i et j concernés. En première approximation, on propose de relier les proportions de liquide retenues par les grains à leurs rayons par les relations suivantes :

$$V_{liq}^i = \frac{R_i}{R_i + R_j} V_{liq} \quad \text{et} \quad V_{liq}^j = \frac{R_j}{R_i + R_j} V_{liq} \quad (3.4)$$

La figure 3.3 donne une illustration de la partition du volume de ponts liquides rompus en fonction des rayons des grains.

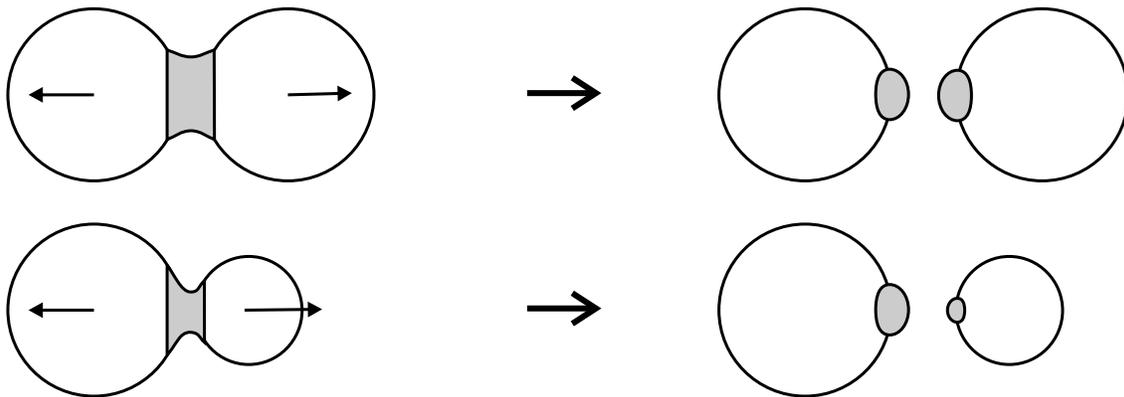


FIG. 3.3: *Partition du volume de liquide en deux volumes de réserve sous forme de gouttes à la surface des grains concernés par la rupture d'un pont capillaire. (a) cas monodisperse ; (b) cas polydisperse*

L'effet de la gravité n'est pas pris explicitement en compte. Néanmoins, on peut admettre que, dans une collection de grains humides de petite taille, les effets de succion ont plus d'importance que la gravité.

Lors de la formation d'un pont liquide, les réserves de liquide des grains concernés s'additionnent : $V_{liq} = V_{liq}^i + V_{liq}^j$; elles sont ensuite remises à zéro. Ceci sous-entend qu'un pont reformé doit se situer à peu près au même endroit qu'à la précédente rupture. Cette conséquence peut être assurée par l'exclusion stérique des grains (voir l'illustration 2D de la figure 3.4a). Cependant, en considérant que la goutte peut s'écouler, on n'exclut pas la formation d'un pont liquide à un nouvel endroit (figure 3.4b). Les écoulements du liquide au sein du matériau sont donc régis par les différents réarrangements granulaires.

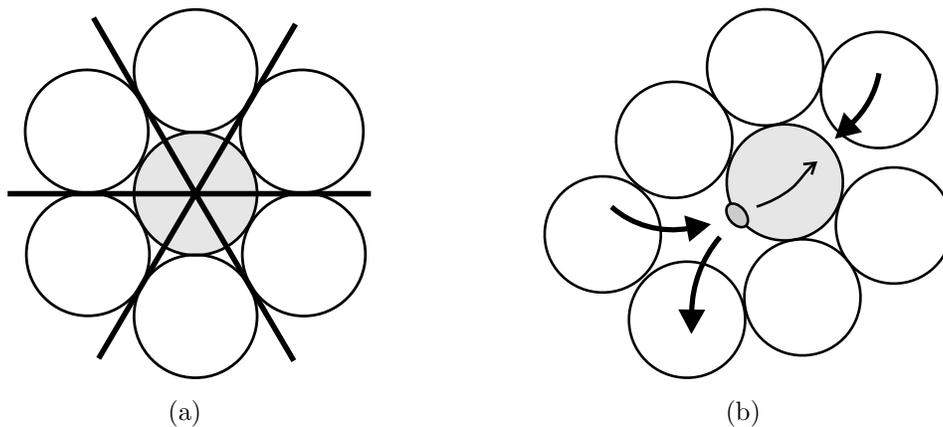


FIG. 3.4: (a) *Exclusion stérique ; (b) le pont liquide peut se reformer en tout autre point*

3.1.2.2 Modèles avec prise en compte de la gravité

Lorsque la gravité est prise en compte, le liquide issu de la rupture d'un pont n'est pas nécessairement gardé en réserve à la surface des grains. Il peut contribuer à augmenter le volume des ponts avoisinants ou même à créer de nouveaux ponts. Afin de prendre cette disposition en compte dans le code de calcul, on propose de créer une liste de ponts et de contacts qui est triée suivant un critère donné (altitude, proximité des lieux d'interaction...). Lors de la rupture d'un pont liquide, le volume de liquide est partagé suivant les relations 3.4, et les volumes de réserve sont attribués aux membres adjacents de la liste. On a choisi de trier la liste selon l'altitude des lieux d'interaction (ponts liquides et contacts) afin de prendre en compte l'effet de la gravité. La figure 3.5a donne une illustration de ce mécanisme d'écoulement.

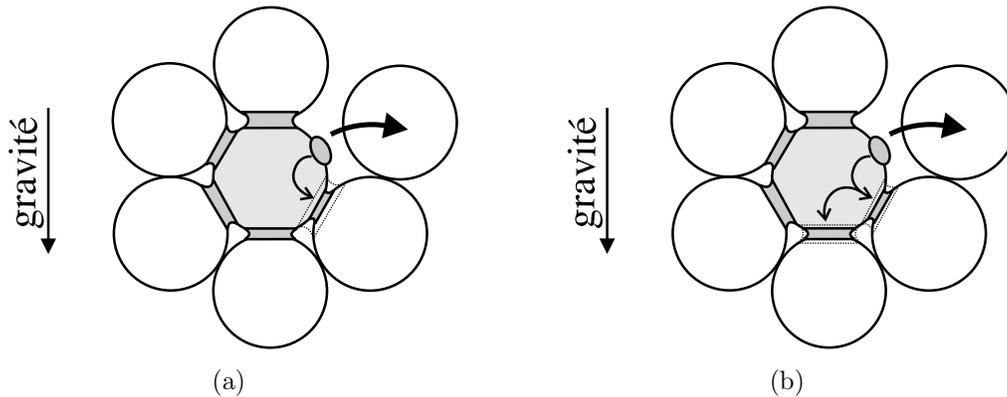


FIG. 3.5: (a) *Modèle d'écoulement par gravité*; (b) *prise en compte d'un volume maximal de pont liquide*

Le modèle d'écoulement local du liquide des ponts rompus peut être amélioré en attribuant un volume maximal aux ponts liquides. En effet, il est évident que le volume d'un pont liquide ne peut pas augmenter indéfiniment. La prise en compte de ce volume maximal permet une redistribution « en cascade » (figure 3.5b) du liquide issu de la rupture d'un pont et évite ainsi les valeurs non admissibles de volumes de liquide.

3.1.3 Synthèse

Cinq modèles de distribution du liquide ont été implémentés dans le code de calcul présenté au chapitre 2. Le tableau ci-dessous donne la dénomination et la description de chacun de ces modèles.

Dénomination	Description
RAY	La totalité du liquide est redistribuée à intervalles de temps réguliers entre les ponts liquides existants selon un critère basé sur les rayons des grains
RES+	Lors de la rupture d'un pont capillaire, le liquide est mis en réserve au niveau des grains concernés. Le partage du volume de liquide est effectué avec les relations 3.4. Si deux grains se remettent en contact, un pont capillaire a la possibilité de se reformer. Le volume de celui-ci est égal à la somme des volumes mis en réserve sur les grains.
RES0	Ce modèle est équivalent au modèle RES+ mis à part que la reformation des ponts capillaires n'est pas permise.
GRAV1	Lors de la rupture d'un pont capillaire, le volume de liquide est partagé (équation 3.4). Les volumes de liquide issus de ce partage sont affectés aux liens (contact sec ou pont liquide) immédiatement au dessous des lieux de rupture.
GRAV _n	Ce modèle est similaire au modèle GRAV1 sauf que lorsqu'un pont capillaire atteint un volume maximal, les excédents de liquide sont affectés aux liens inférieurs. Cette opération se répète au maximum jusqu'aux liens les plus bas. Les derniers excédents de liquide sont mis en réserve et ne sont plus jamais utilisés.

3.2 Cisaillement à la boîte de Casagrande normalisée

3.2.1 Dispositif expérimental

L'essai de cisaillement à la boîte de Casagrande normalisée est un essai de laboratoire utilisé en mécanique des sols pour déterminer la résistance au cisaillement d'un sol (Holtz and Kovacs, 1991). La figure 3.6 donne une illustration du principe de cet essai. L'échantillon, de forme cylindrique, est placé dans une boîte constituée de deux parties : la partie supérieure est fixe et la partie inférieure peut se déplacer horizontalement. Une force N de confinement est appliquée par l'intermédiaire du flasque supérieur de la boîte. La procédure de cisaillement consiste à imposer le déplacement de la partie inférieure de la boîte à une vitesse constante, ce qui a pour effet de conduire à la rupture de l'échantillon suivant le plan de cisaillement horizontal. La force N est maintenue constante durant l'essai. On mesure, sur la partie supérieure de la boîte, la force T de résistance au cisaillement et la variation de hauteur Δh de l'échantillon.

Afin de caractériser le comportement à la rupture du matériau indépendamment de la surface cisailée, on définit la contrainte moyenne normale $\sigma = N/S$ et la contrainte moyenne de cisaillement $\tau = T/S$. La section de l'échantillon étant supposée constante, la variation de volume de l'échantillon peut aisément être calculée à partir de la variation de

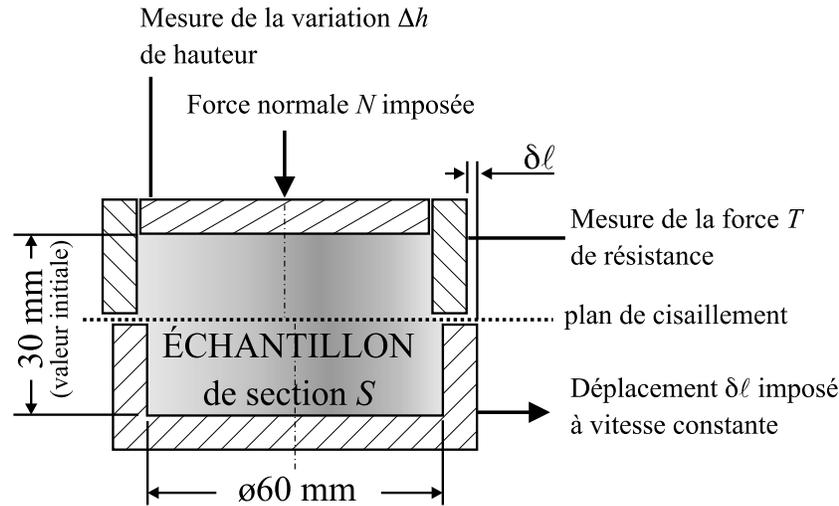


FIG. 3.6: Principe de l'essai de cisaillement et géométrie de la boîte de Casagrande

hauteur.

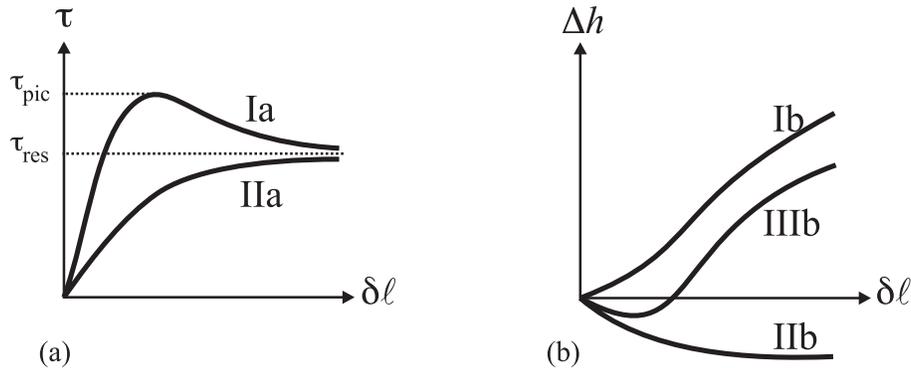


FIG. 3.7: Courbes types de résistance au cisaillement. (a) contrainte de cisaillement; (b) variation de hauteur

Une courbe de résistance au cisaillement a l'une des allures représentées sur la figure 3.7a selon la nature (forme, propriétés mécaniques des grains...) et l'état initial (densité, teneur en liquide, texture...) du matériau testé. La courbe Ia présente une valeur maximale τ_{pic} . Cette valeur correspond à la contrainte de rupture en cisaillement ($\tau_{rupt} = \tau_{pic}$). Lorsque le cisaillement se poursuit, la contrainte de cisaillement diminue et tend vers une valeur asymptotique appelée *contrainte résiduelle* τ_{res} indépendante de l'état initial du matériau. La courbe IIa tend de façon monotone vers une asymptote horizontale $\tau = \tau_{res}$. On définit dans ce cas la contrainte de rupture en fonction l'application visée. On peut considérer par exemple que la rupture s'opère pour une contrainte de cisaillement $\tau_{rupt} = \tau_{res}$ ou bien qu'elle s'opère pour une distance δl à partir de laquelle la contrainte

de cisaillement ne varie plus significativement. Les sables denses ainsi que les argiles non remaniées présentent le plus souvent un pic de résistance (courbe Ia). Par contre, les sables lâches et les argiles remaniées ont généralement un comportement asymptotique (courbe IIa).

La variation de hauteur de l'échantillon (et donc le changement de volume) a typiquement l'allure d'une des trois courbes présentées sur la figure 3.7b. Ces trois types d'évolution dépendent de l'état initial de compacité de l'échantillon. On définit la *compacité* ϕ d'un matériau granulaire comme de rapport du volume occupé par les grains solides V_s sur le volume total V de l'échantillon (identifié à celui de l'intérieur de la boîte), soit :

$$\phi = \frac{V_s}{V} = \frac{m_s / \rho_s^*}{S h} \quad (3.5)$$

où m_s est la masse des grains contenus dans la boîte, ρ_s^* est la masse volumique spécifique des grains solides et h est la hauteur de l'échantillon. La compacité tend toujours vers une même valeur limite indépendamment de sa valeur initiale. Cette valeur limite, intrinsèque au matériau, est appelée *compacité critique*. Pour les matériaux ayant une compacité initiale supérieure à leur compacité critique, le volume commence généralement par diminuer (contraction), avant d'augmenter (dilatation) comme le montre la courbe IIIb. Lorsque le matériau est très dense, la phase de contraction peut être inexistante (courbe Ib) et lorsqu'au contraire il est très lâche, c'est la phase de dilatation qui peut être absente (courbe IIb).

Afin de caractériser complètement la résistance au cisaillement du matériau, plusieurs essais doivent être réalisés pour différentes contraintes normales. Bien entendu, la densité initiale des échantillons doit être la même. On obtient alors, pour chaque essai, un couple de valeurs (σ, τ_{rupt}) . Ces valeurs, reportées sur un graphe de Mohr-Coulomb, peuvent le plus souvent être approchées par la droite de Coulomb :

$$\tau = c + \tan(\varphi) \sigma \quad (3.6)$$

où c est la cohésion macroscopique, et φ est l'angle de frottement interne. La figure 3.8 donne une illustration de cette droite et de la façon dont elle est obtenue.

3.2.2 Matériaux d'étude

Dans le but de valider le code de calcul, on a choisi de réaliser les essais expérimentaux et numériques sur des échantillons composés de billes de verre. L'intérêt de ce matériau porte, d'une part, sur la géométrie sphérique des grains, ce qui facilite leur modélisation numérique, et d'autre part, sur la connaissance que l'on peut avoir des propriétés de celui-ci (grains de même nature, absence de particules trop fines...). Bien entendu, ce matériau

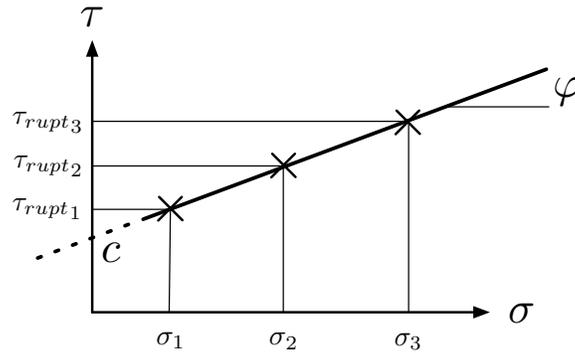


FIG. 3.8: Diagramme de rupture obtenu en effectuant trois essais de cisaillement avec des contraintes normales différentes sur trois échantillons de même densité initiale

« modèle » n'est qu'une représentation très simplifiée des matériaux naturels tels que les sables à cause, en particulier, de la forme des grains. Néanmoins, il permet, contrairement aux matériaux naturels, de comparer les résultats obtenus expérimentalement et les résultats numériques. Cette comparaison peut alors être envisagée avec des matériaux réels et virtuels aussi similaires que possible, c'est-à-dire que le nombre de grains, la compacité du matériau et les caractéristiques mécaniques des grains sont maîtrisés au mieux.

La comparaison est également rendue possible par le caractère tridimensionnel des simulations. En contrepartie, le nombre de grains ne doit pas être trop important afin d'obtenir des temps de simulation raisonnables. On a donc choisi d'utiliser des billes de verre de 3 mm de diamètre.

La taille importante des billes, a rendu aisée la détermination de leur masse volumique ($2500 \pm 50 \text{ kg.m}^{-3}$) à partir de la mesure au pied à coulisse du diamètre d'une centaine de billes et de leur masse totale. On a également pu observer une légère dispersion de l'ordre du centième de millimètre sur le diamètre des billes. Cette dispersion, bien qu'elle soit faible, a été prise en compte pour la réalisation du matériau numérique. L'emploi d'un matériau monodisperse permet également d'éviter l'apparition de phénomènes de ségrégation.

3.2.2.1 Réalisation des échantillons réels

Compte-tenu du nombre et du diamètre des billes et des dimensions de la boîte de Casagrande, la compacité du matériau choisi est de l'ordre de 0,6. Il s'agit d'une valeur qu'on peut atteindre sans peine. Les échantillons secs ont donc été réalisés avec une compacité de $0,60 \pm 0,01$ en introduisant la masse nécessaire de billes dans la boîte. Cette masse a été déterminée à partir de la relation 3.5 pour une hauteur $h = 30 \text{ mm}$ et une masse volumique réelle $\rho_s^* = 2500 \text{ kg.m}^{-3}$. On comprime ensuite l'échantillon par l'intermédiaire du flasque supérieur jusqu'à obtention du volume désiré.

3.2.2.2 Réalisation des échantillons numériques

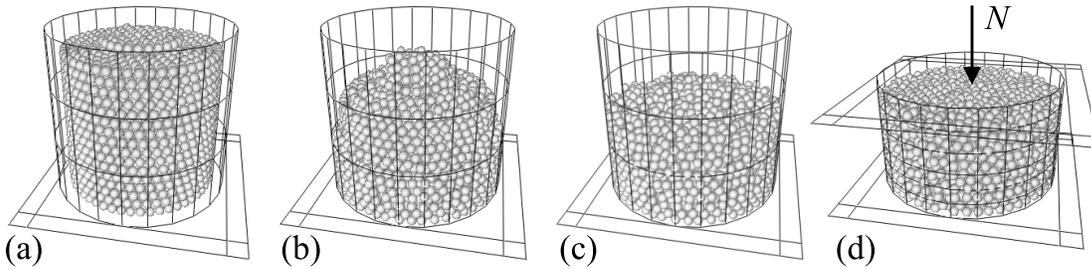


FIG. 3.9: Réalisation d'un échantillon numérique par sédimentation et compaction

L'état initial de l'échantillon numérique (cylindrique) est obtenu en deux phases :

- La première phase (phase de sédimentation) consiste à déposer par gravité les grains dans une boîte cylindrique. Les grains sont initialement placés sur un réseau à l'intérieur de la boîte de telle sorte qu'ils ne s'interpénètrent pas (figure 3.9a). Ils sont alors soumis à un champ de gravité conduisant à leur dépôt au fond de la boîte (figures 3.9b et 3.9c). Un coefficient de frottement non nul entre les grains est choisi pour la simulation de cette phase.
- La seconde phase (phase de compression) consiste à comprimer l'échantillon avec la force normale N choisie pour les essais de cisaillement jusqu'à ce que la compacité désirée soit atteinte (figure 3.9d).

Durant la phase de compression, la compacité est calculée en fonction de la hauteur h avec la relation suivante :

$$\phi(t) = \frac{\frac{4}{3}\pi \sum_i R_i^3}{S h(t)} \quad (3.7)$$

Pendant la compression, le coefficient de frottement entre les grains est réduit progressivement jusqu'à la valeur minimale nulle. Le matériau se comprime alors progressivement. Lorsque la compacité désirée est atteinte avec la précision voulue, le coefficient de frottement est remis à sa valeur initiale. La force normale N est maintenue un instant pour s'assurer que la compacité n'évolue pas au delà de la valeur souhaitée. La figure 3.10 montre comment évoluent la compacité et le coefficient de frottement pendant une phase de compression.

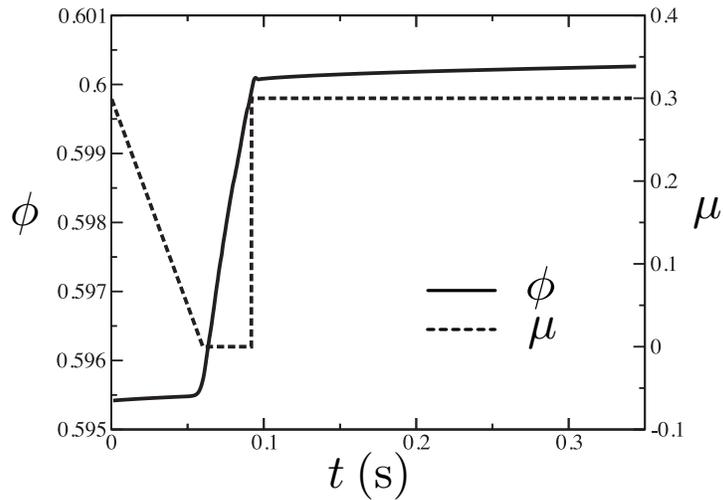


FIG. 3.10: Évolution de la compacité et du coefficient de frottement entre grains pendant une phase de compression

3.2.3 Confrontation expériences/simulations

L'objectif ici est d'effectuer une validation sur la modélisation en éléments discrets décrite au chapitre précédent en établissant des comparaisons entre des résultats issus de simulations 3D et des résultats expérimentaux (Richefeu et al., 2005b). À cette fin, on se base sur les résultats macroscopiques d'essais de cisaillement sur des échantillons réels et virtuels aussi similaires que possible. Les essais de cisaillement ont été effectués dans un premier temps sans cohésion. Cette première « vérification » du code de calcul porte donc uniquement sur la capacité de la modélisation à reproduire les comportements de résistance au cisaillement et de changement de volume. Elle a également permis la mise au point du code.

3.2.3.1 Configuration des essais

Les échantillons réels ont été réalisés avec la procédure décrite plus haut en choisissant les compacités initiales de 0,590, 0,595, 0,600 et 0,605. Ces différentes valeurs de compacité sont comprises dans la gamme de tolérance de la valeur expérimentale ($\phi = 0,60 \pm 0,01$). Les échantillons contiennent environ 3600 grains que ce soit dans le cas numérique ou réel. Il est important de noter que, malgré un nombre total de grains relativement faible, la taille choisie des grains a l'avantage de rendre la mesure des coefficients de frottement accessible. Les essais sont effectués avec des valeurs de contrainte normale de 50 kPa, 86 kPa, 120 kPa et 155 kPa.

3.2.3.2 Paramètres des lois d'interaction

Toujours dans le but d'obtenir une configuration numérique la plus proche possible de la configuration réelle, on a mesuré le coefficient de frottement entre les billes de verre et les parois de la boîte. La figure 3.11 donne une illustration du principe de cette mesure. La force normale est imposée en plaçant une masse étalonnée sur la plaque au-dessous de laquelle trois billes de verre sont fixées. Ces billes sont en contact avec le flasque supérieur de la boîte. Un déplacement tangentiel est imposé avec un appareil de traction/compression (texturomètre) par l'intermédiaire d'un système de poulie.

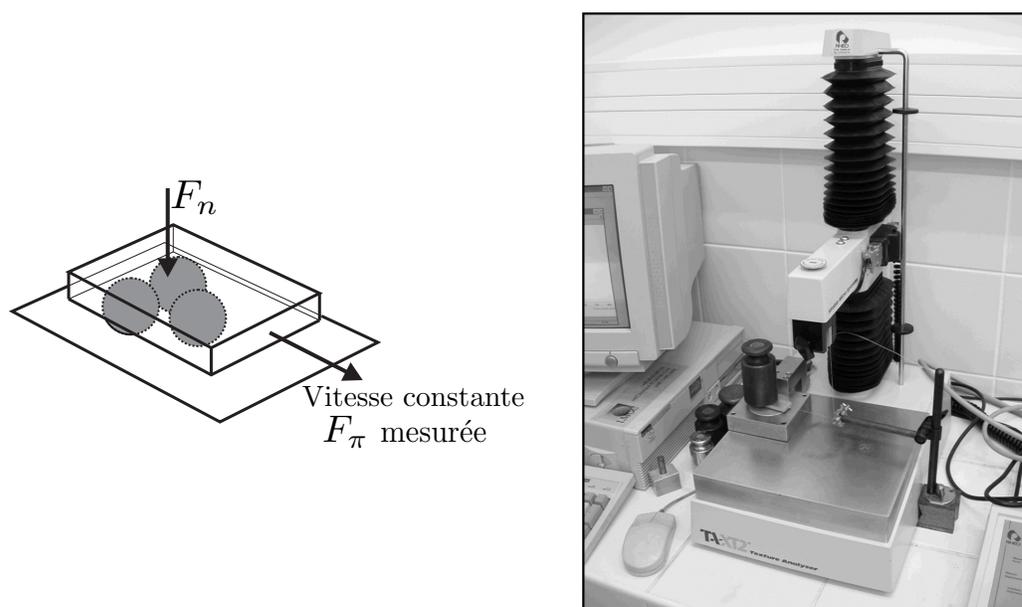


FIG. 3.11: *Dispositif de mesure du coefficient de frottement entre les billes de verre et les parois de la boîte de cisaillement*

Le texturomètre donne accès à la force de résistance au glissement des grains. Une série d'essais, réalisés avec différentes forces normales, permet alors d'obtenir la force maximale de résistance au glissement (figure 3.12a). Pour chaque force normale imposée, la force tangentielle initiant le glissement est prise égale, d'une part, à la force maximale enregistrée, et d'autre part, à la force moyenne dans la phase stabilisée (figure 3.12b). Une régression linéaire sur les points obtenus donne finalement accès à une estimation du coefficient de frottement ($\mu^\bullet \in [0, 118 ; 0, 162]$).

Le coefficient de frottement peut être modifié par la courbure des parois comme l'ont montré [Wenning and Müser \(2001\)](#). Pour autant, n'ayant pas la possibilité d'effectuer la mesure de résistance au frottement des billes sur la partie cylindrique de la boîte, on a pris un coefficient de frottement $\mu^\bullet = 0,15$ identique pour tous les contacts bille-paroi indépendamment de leur géométrie.

Ce dispositif nous a également permis de vérifier que la présence d'eau, sous forme de film ou en abondance, ne modifie pas significativement la résistance au glissement pour des forces normales supérieures à 1 N. Pour une force normale inférieure à cette valeur, on ne connaît pas, a priori, l'influence que peut avoir la présence d'eau sur la résistance au glissement.

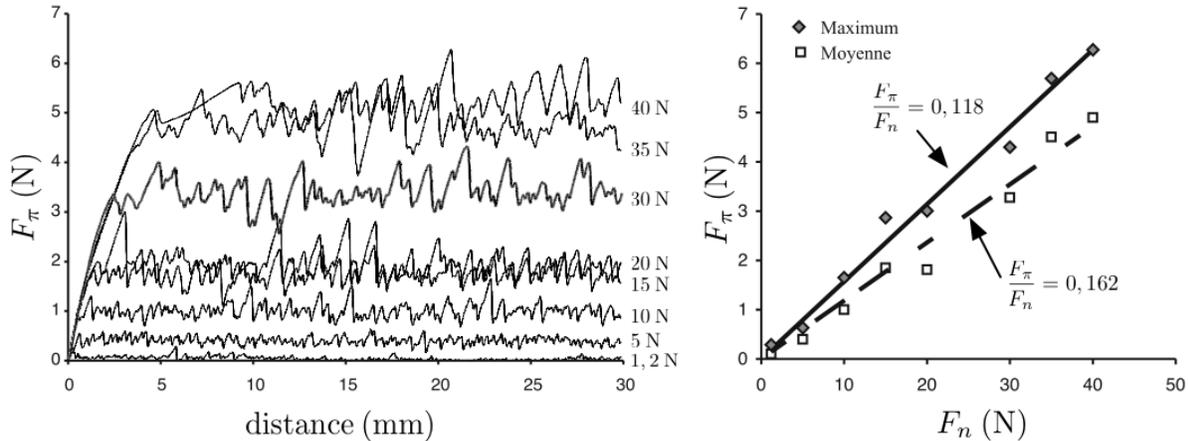


FIG. 3.12: Mesure du coefficient de frottement entre les billes de verre et les parois de la boîte de cisaillement

Un coefficient de frottement entre les billes de verre valant 0,3 a été choisi. Il s'agit de la valeur généralement utilisée dans la littérature. Les autres paramètres de simulation que sont le pas de temps, le facteur de masse, les taux de restitution, et les raideurs normales, sont donnés dans le tableau 3.1.

3.2.3.3 Analyse des résultats macroscopiques : influence de la compacité initiale

On présente ici les résultats de l'essai de cisaillement à la boîte de Casagrande. La Figure 3.13a montre les courbes de résistance au cisaillement obtenues numériquement sur les échantillons de compacités différentes. Les résultats numériques et expérimentaux sont en concordance aussi bien qualitative que quantitative. En particulier, la simulation utilisant l'échantillon de compacité égale à 0,605 donne les contraintes de cisaillement qui se rapprochent le plus de celles issues des mesures expérimentales. La Figure 3.13b montre les variations de volume de l'échantillon. Les résultats numériques reflètent correctement ce qui se passe expérimentalement bien que la phase initiale de contraction soit inexistante pour les échantillons les plus denses. L'état de compacité initiale de l'échantillon détermine donc très grandement l'évolution de son volume. En effet, une variation extrêmement faible de la compacité initiale peut modifier de façon significative le comportement du matériau.

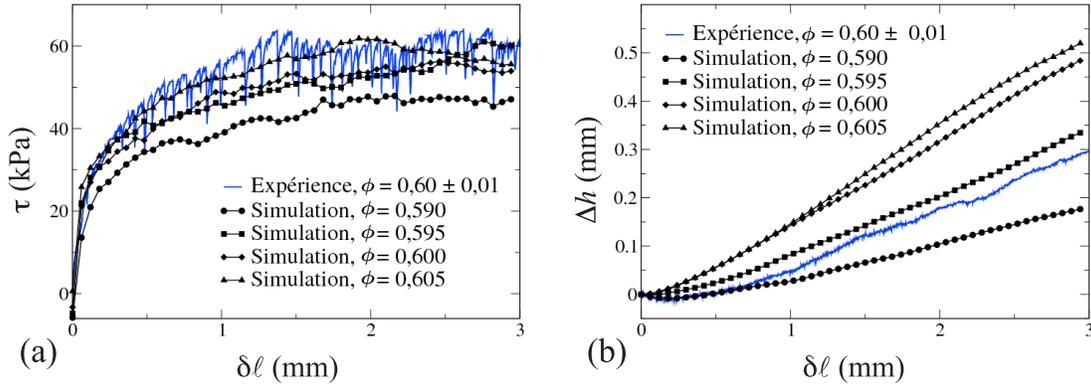


FIG. 3.13: Courbes numériques de cisaillement pour différentes compacités initiales ($\sigma=120$ kPa). Comparaison aux courbes expérimentales

3.2.4 Étude des lois d'interaction

L'objectif de cette section est de montrer l'impact du choix des lois d'interaction sur le résultat macroscopique de l'essai de cisaillement direct.

Deux lois de contact et trois lois de cohésion ont été étudiées (Richefeu et al., 2005a). Pour le contact, il s'agit de la loi de contact de Hertz, et la loi de contact linéaire que l'on note respectivement CTC1 et CTC2. Pour la cohésion, il s'agit de la loi de cohésion capillaire, la loi de cohésion affine, et la loi de cohésion uniforme que l'on note respectivement COH1, COH2, et COH3. Ces lois, présentées en détail dans le chapitre précédent, sont rappelées sur la figure 3.14.

3.2.4.1 Choix des paramètres de simulation

Les paramètres des lois sont choisis de la façon suivante.

- **loi de contact de Hertz** (CTC1). Des valeurs réalistes de module d'Young et de coefficient de Poisson, correspondant à celles du verre pour les billes et de l'acier pour les parois, sont choisies. Ainsi, les grains ont un module d'Young de 62 GPa et un coefficient de Poisson de 0,25. Les parois ont un module d'Young de 200 GPa et un coefficient de Poisson de 0,3. Ces valeurs sont celles généralement utilisées dans la littérature.
- **loi de contact linéaire** (CTC2). La raideur K_n des contacts grain-grain et grain-paroi est choisie égale à 10^6 N/m. Cette valeur a été choisie car elle engendre des interpénétrations suffisamment petites pour ne pas modifier significativement la compacité de l'échantillon. Aucune autre considération physique n'a été prise en compte dans le choix de cette valeur.
- **loi de cohésion capillaire** (COH1). On choisit d'utiliser une répartition de liquide

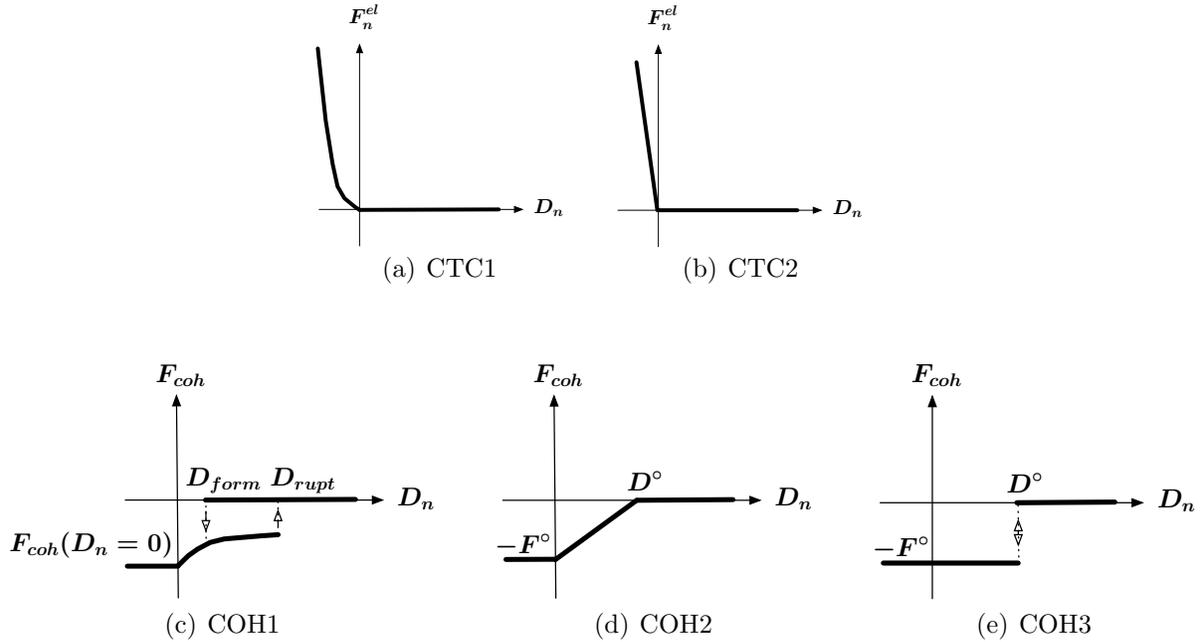


FIG. 3.14: Représentation graphique des lois étudiées

uniforme (voir paragraphe 3.1) avec un volume global de liquide dans l'échantillon de 3 ml ce qui correspond à un degré de saturation initial $S_r \simeq 8,9\%$ et une teneur en liquide $w \simeq 2,35\%$. L'angle de mouillage est pris nul.

- **loi de cohésion affine** (COH2) et **loi de cohésion uniforme** (COH3). La force constante de cohésion F° et la distance constante de rupture D° ont été déterminées en effectuant au préalable une simulation sur quelques pas de temps avec la loi de cohésion capillaire. La force moyenne de cohésion et la distance moyenne de rupture ont été calculées sur cette simulation (avec la loi COH1). Ce sont ces valeurs qui ont été attribuées à la force constante de cohésion et à la distance constante de rupture des lois COH2 et COH3.

Les trois lois de cohésion ont été utilisées en association avec la loi de contact linéaire. La loi de frottement utilisée est la loi de Coulomb régularisée. Les paramètres choisis pour les simulations sont récapitulés dans le tableau 3.1.

3.2.4.2 Résultats

La figure 3.15 donne les résultats macroscopiques (contrainte de cisaillement et variation de hauteur de l'échantillon) pour les différentes lois d'interaction testées. Il est intéressant de noter que leur effet sur la contrainte de cisaillement est limité comme on peut le voir sur la figure 3.15a. Par contre, l'évolution de la variation de hauteur de l'échantillon montre

Paramètre	Symbole	Valeur
Pas de temps	δt	10^{-6} s
Facteur de masse	κ_m	150
Gravité	g	9,81 m/s ²
Taux d'amortissement normal grain–grain	α_n	0,2
Taux d'amortissement normal grain–paroi	α_n^\bullet	0,2
Raideur normale de contact grain–grain	K_n	10^6 N/m
Raideur normale de contact grain–paroi	K_n^\bullet	10^6 N/m
Coefficient de frottement grain–grain	μ	0,3
Coefficient de frottement grain–paroi	μ^\bullet	0,15
Coefficient de régularisation tangentielle grain–grain	K_t	$0,6 \cdot 10^6$ Ns/m
Coefficient de régularisation tangentielle grain–paroi	K_t^\bullet	$0,6 \cdot 10^6$ Ns/m
Volume global de liquide (eau)	V_{liq}^{tot}	3 ml
Angle de mouillage	θ	0°
Tension superficielle liquide–gaz (eau–air)	γ_L	$73 \cdot 10^{-3}$ N/m
Module d'Young des grains	E	62 GPa
Module d'Young des parois	E^\bullet	200 GPa
Coefficient de Poisson des grains	ν	0,25
Coefficient de Poisson des parois	ν^\bullet	0,3
Force constante de cohésion	F°	$4,25 \cdot 10^{-3}$ N
Distance constante de rupture–formation	D°	0,7 mm

TAB. 3.1: Paramètres de simulation pour l'étude des lois d'interaction

que la dilatance est plus importante dans le cas non cohésif. L'augmentation de volume est limitée, dans le cas cohésif, par les forces cohésives entre les grains même si elles sont faibles. On peut également remarquer que les courbes obtenues avec les lois de contact (CTC), d'une part, et les courbes obtenues avec les lois de cohésion (COH), d'autre part, ne peuvent pas être distinguées. Concernant les lois de contact, on peut d'ores et déjà conclure que, dans la configuration choisie, la seule condition à respecter est une interpénétration limitée des corps (grains rigides). Cette condition peut être satisfaite avec une simple loi de contact linéaire. On n'a d'ailleurs pas observé de différence significative de la contrainte de cisaillement en utilisant des raideurs K_n jusqu'à 100 fois plus petites. En effet, ces raideurs engendrent des interpénétrations suffisamment faibles devant le diamètre des grains (avec un pas de temps $\delta t = 10^{-6}$ s) pour que la condition sur la rigidité des grains soit satisfaite.

Les deux lois de contact et les trois lois de cohésion mènent (les unes et les autres) à des résultats macroscopiques équivalents. On peut s'interroger sur l'évolution de la microstructure pour les différentes simulations avec les lois d'interaction CTC et COH. En effet, on a la possibilité d'analyser le réseau de forces de contact entre les grains. La figure 3.16 donne une représentation de ce réseau dans une tranche verticale de l'échantillon à un instant donné du cisaillement. Une comparaison graphique de ces réseaux de forces,

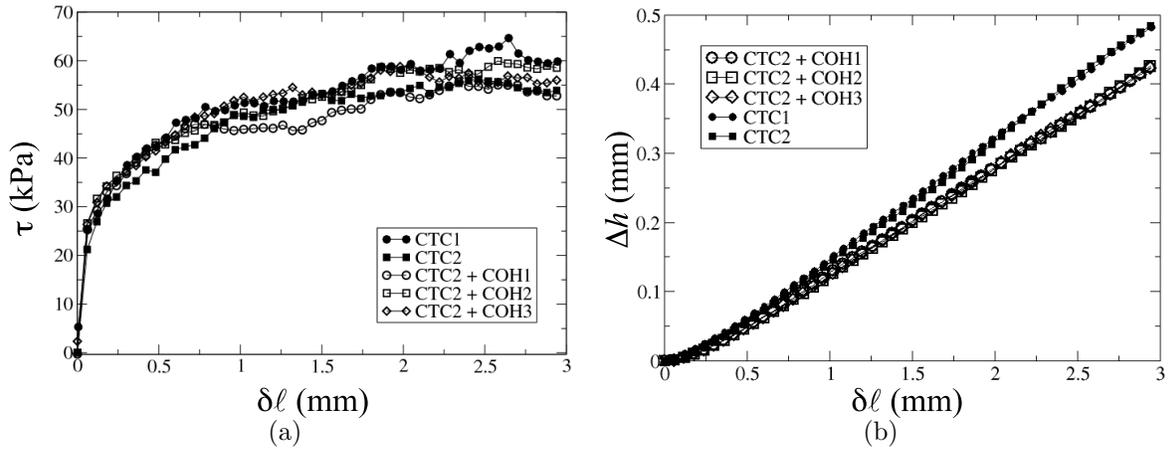


FIG. 3.15: Contrainte de cisaillement τ et variation de hauteur Δh de l'échantillon en fonction de la distance de cisaillement $\delta\ell$ pour les différentes lois d'interaction ($\sigma = 120$ kPa, $\phi = 0,6$)

obtenus au même instant, avec l'utilisation des différentes lois ne permet cependant pas l'observation de différences. Pour vérifier si ces différentes lois induisent des différences structurales, seule une méthode quantitative s'impose.

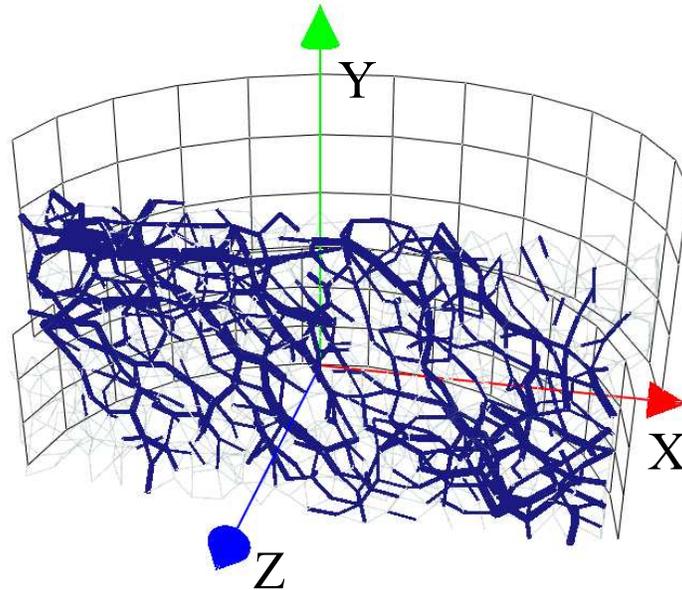


FIG. 3.16: Représentation du réseau de forces de contact supérieures à la force normale moyenne, dans une section verticale de l'échantillon au bout de 2,22 secondes de cisaillement (X est la direction de cisaillement)

Les variations de contraintes au sein du matériau granulaire induisent une évolution de sa texture (structure géométrique). Cette texture peut être quantifiée par le *tenseur de texture*¹ (Satake, 1982; Oda and Iwashita, 1999). Les neuf composantes sont définies à partir des vecteurs normaux des repères d'interaction comme suit :

$$F_{\alpha\beta} = \frac{1}{N_c} \sum_{\text{contacts}} n_\alpha n_\beta \quad \text{avec } \alpha, \beta = X, Y, \text{ ou } Z \quad (3.8)$$

où N_c est le nombre de contacts dans le volume considéré. En diagonalisant ce tenseur, on a accès aux directions principales d'anisotropie ainsi qu'à leurs valeurs propres. Ainsi, dans une configuration isotrope du point de vue des directions de contact, les trois directions d'anisotropie sont équivalentes (les valeurs propres sont égales). Pour les essais de cisaillement direct, la direction principale majeure (DPM) se trouve approximativement dans le plan vertical contenant la direction de cisaillement et forme un angle α_{DPM} avec l'horizontale (voir figure 3.17a). Les deux autres directions principales sont équivalentes. La figure 3.17b montre, pour chacune des lois étudiées, l'évolution de la direction principale majeure (donnée par l'angle α_{DPM}). Pour toutes les lois, l'angle α_{DPM} vaut initialement environ 80° . Cette valeur (proche de 90°) est due à l'action unique de la force normale N sur l'échantillon durant sa préparation. Les chaînes de forces fortes, c'est-à-dire supérieures à la force normale moyenne, ont donc pris une direction préférentielle verticale pour réagir à la sollicitation imposée. La direction des contacts est, dans notre cas, corrélée à celle des forces normales. Dès que l'essai de cisaillement commence, l'angle α_{DPM} décroît rapidement pour atteindre approximativement la valeur de 40° . L'absence de différence dans l'évolution de la direction principale majeure nous mène à la conclusion que toutes les lois testées mènent à la même évolution de la texture (en terme de direction des contacts) du matériau granulaire.

En résumé, la cohésion entre les grains n'influence que le changement de volume de l'échantillon durant le cisaillement : la dilatation est moindre dans le cas cohésif. La microstructure et, par voie de conséquence, la résistance au cisaillement du matériau ne sont quasiment pas affectées. Pourtant, chacun a déjà fait l'expérience de marcher sur du sable. Il est facile de se rendre compte que l'on s'enfonce moins dans du sable légèrement humide que dans du sable sec. En fait, la configuration des essais de cisaillement n'est pas la bonne pour observer une influence de la cohésion par capillarité. En effet, les forces cohésives sont relativement faibles comparées aux forces de contact (compressives). Afin de quantifier la contribution des forces attractives par rapport à un chargement extérieur, Radjai et al. (2000) ont défini un *indice de cohésion* η par la relation suivante :

$$\eta = \frac{\langle F_n^- \rangle}{\langle F_n^+ \rangle} \quad (3.9)$$

où $\langle F_n^- \rangle$ et $\langle F_n^+ \rangle$ représentent respectivement les forces normales attractives et compressives moyennées sur toutes les interactions. Dans une situation confinée, l'indice de

¹en anglais : Fabric tensor

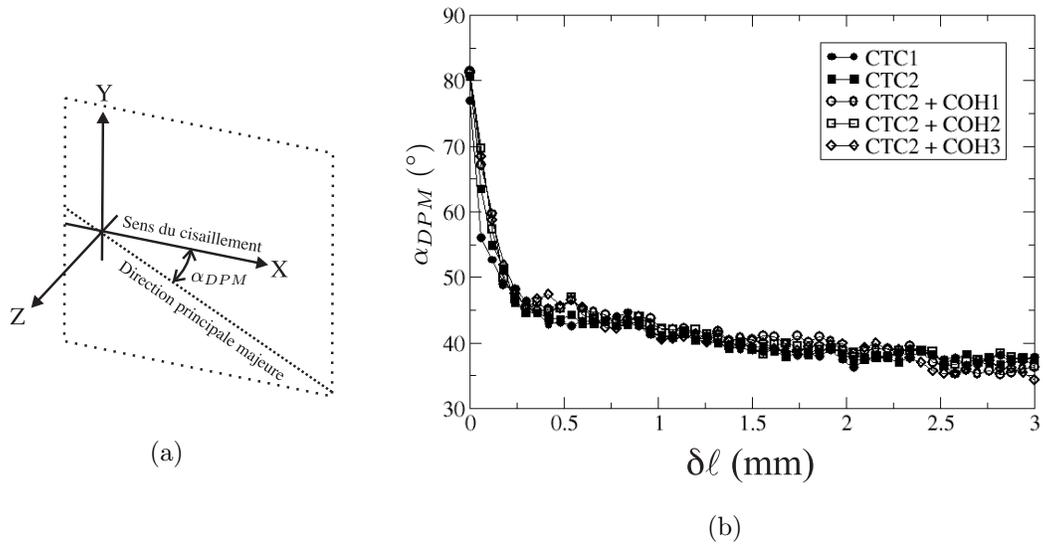


FIG. 3.17: Direction principale majeure du tenseur de texture pour les différentes lois

cohésion a une valeur comprise entre 0 et 1. On montre que les forces de cohésion ne « s'expriment » à l'échelle de l'échantillon qu'à partir des indices de cohésion très proches de 1 (supérieurs à 0,95). Cet état peut être obtenu en augmentant le nombre de grains, ainsi les interactions de contact sont plus nombreuses et les forces de contact plus petites à contrainte équivalente. Néanmoins, la quantité de grains est limitée pour des raisons de temps de calcul. Une autre solution consiste donc à diminuer le chargement extérieur, c'est-à-dire la force N dans notre cas. On reviendra sur cet aspect dans la section 3.3 consacrée à un appareillage adapté.

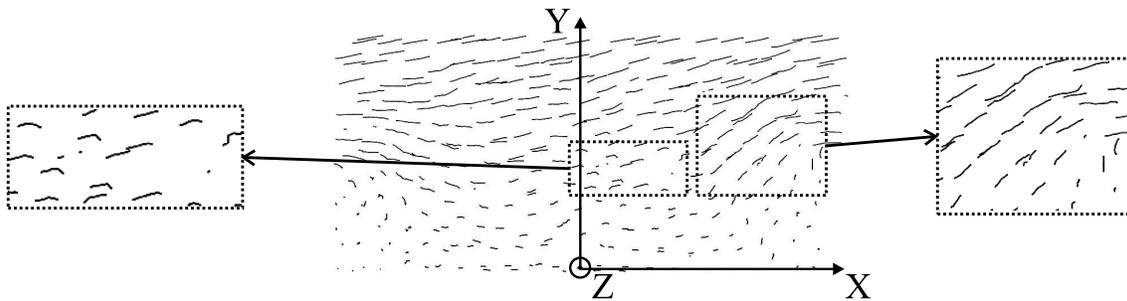


FIG. 3.18: Trajectoires des centres des grains situés dans une section verticale (dans le sens du cisaillement) de l'échantillon ayant une épaisseur de 2 fois le diamètre moyen des grains

Si on s'intéresse au parcours des billes au sein du matériau, on peut distinguer deux modes de déplacement (figure 3.18). Sur les bords de la boîte, des couches obliques de grains glissent les unes sur les autres. Au centre de la boîte, le réarrangement granulaire est plus important et on observe des contournements de grains. Une analyse tridimensionnelle des directions de contact permet de se rendre compte que le contournement des grains se fait préférentiellement par les côtés (Richefeu et al., 2005b). On peut également noter ce phénomène à partir des trajectoires des grains qui sont quasiment horizontales. Ce mode de réarrangement, qui a une influence sur la dilataance du matériau, n'est bien évidemment pas possible dans une configuration bidimensionnelle. C'est la raison pour laquelle les simulations 2D ne peuvent donner que des informations qualitatives sur les changements de volume.

Par ailleurs, on ne note pas de localisation de la déformation au sens strict mais plutôt un réarrangement des grains sur toute la partie centrale du matériau. La quantité de grains contenue dans l'échantillon est insuffisante pour qu'une bande de localisation puisse apparaître. En effet, les bandes de localisation ont typiquement des épaisseurs de 10 à 20 grains (Mühlhaus and Vardoulakis, 1987) ce qui représente à peu près la hauteur de l'échantillon. Les effets de bords sont donc ici très importants.

3.2.5 Synthèse

L'approche en éléments discrets 3D a permis de modéliser de manière satisfaisante des essais expérimentaux de cisaillement à la boîte de Casagrande réalisés sur un matériau modèle. Les simulations s'appuient sur un modèle simple d'interaction « réaliste ». Les coefficients de frottement entre les grains et les parois ont été déterminés à partir d'essais expérimentaux et le coefficient de frottement entre les grains a été tiré de la littérature. Une bonne estimation qualitative et quantitative des résultats macroscopiques a été obtenue mettant en évidence l'effet dominant de la compacité initiale. L'étude des relations entre les phénomènes microscopiques et les traits de comportement macroscopiques peut donc être envisagée.

Par ailleurs, on s'est intéressé à la pertinence de deux lois de contact et de trois lois de cohésion. On a vu que, dans la configuration choisie, les deux lois de contact donnaient les mêmes résultats. Ceci implique qu'un gain en temps de calcul peut être obtenu en utilisant la loi la plus simple (linéaire) sans modifier pour autant le comportement macroscopique et l'évolution de la micro-structure du matériau.

L'action dominante des forces de contacts, due en particulier au confinement de l'échantillon, masque l'influence que pourrait avoir les forces de cohésion capillaire sur la résistance au cisaillement. Le seul effet de la cohésion qui a pu être observé concerne les changements de volume. Les simulations ont par ailleurs permis d'étudier des champs locaux (réseaux de forces de contact et déplacements des billes). D'autres simulations avec plus de grains, une configuration polydisperse (pour augmenter le nombre total d'interactions), et surtout un confinement moins important doivent être réalisées afin de mettre en évidence l'effet de

de la cohésion à l'échelle macroscopique. La section 3.3 traitera de ces aspects.

3.2.6 Investigation expérimentale

Compte tenu de l'absence d'effet de la cohésion capillaire sur la résistance au cisaillement du matériau, on a effectué une investigation expérimentale en modifiant la configuration des essais. Les changements portent uniquement sur le matériau utilisé.

3.2.6.1 Choix du matériau et préparation des échantillons

Afin de se placer dans une meilleure configuration pour observer l'influence de la cohésion capillaire sur la résistance au cisaillement, on utilise un matériau granulaire constitué de billes de verres de diamètres compris entre 0,4 et 0,8 mm. Le choix de ce matériau est fait pour augmenter le nombre moyen de contacts par grain et donc le nombre de ponts liquides. En comparaison avec le matériau précédemment utilisé (billes de verres de 3 mm), ce matériau présente donc :

- une dispersion granulométrique plus importante ;
- un diamètre moyen des billes plus faible.

La procédure de préparation des échantillons est analogue à celle présentée dans la section 3.2.2.1. La différence vient de l'eau qui doit être introduite dans les bonnes proportions pour obtenir la teneur en eau massique souhaitée. On utilise la définition suivante afin de quantifier la teneur en eau :

$$w = \frac{\rho_\ell^* V_\ell}{m_s} \quad (3.10)$$

où V_ℓ est le volume total de l'eau introduite, m_s est la masse des billes contenues dans la boîte, et $\rho_\ell^* = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$ est la masse volumique spécifique de l'eau. Le volume d'eau est introduit à l'aide d'une seringue et le mélange est effectué au sein même de la boîte de cisaillement comme on peut le voir sur la figure 3.19.

Cette procédure simple nous permet d'avoir un meilleur contrôle de la compacité initiale. En effet, le volume initial de l'échantillon est imposé et la masse des billes est obtenue par pesée directe.

Ceci permet de mieux contrôler la compacité initiale tout en assurant une assez bonne précision sur la teneur en eau ($\simeq 0,2\%$).

Par ailleurs, pour obtenir un état hydrique du matériau correspondant à l'état pendulaire, des teneurs en eau faibles ($w \leq 6\%$) ont été utilisées. La teneur limite de rétention d'eau w_{ret} pour le matériau utilisé est de l'ordre de 22%. Cette teneur a été mesurée en dessaturant un échantillon de billes initialement saturé sous l'effet de la gravité. w_{ret} correspond à la teneur en eau résiduelle.

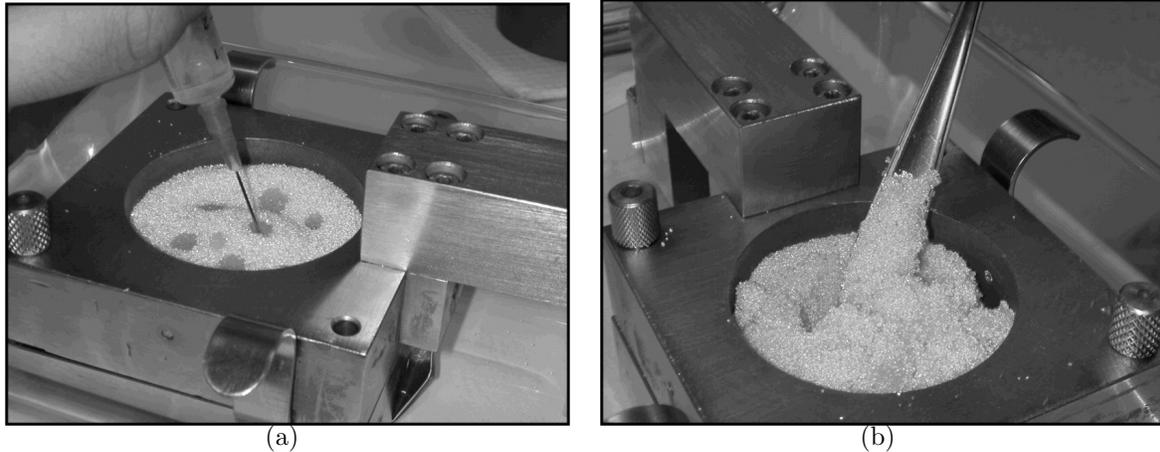


FIG. 3.19: Introduction de l'eau dans l'échantillon (a) et mélange (b)

3.2.6.2 Résultats

Des essais de cisaillement à la boîte de Casagrande ont été réalisés sur ce nouveau matériau avec différents teneurs en eau. La résistance au cisaillement est exprimée par le rapport τ/σ afin de pouvoir comparer les résultats indépendamment de la contrainte normale appliquée. La figure 3.20 montre l'évolution du rapport τ/σ en fonction de la distance de cisaillement $\delta\ell$ pour trois contraintes normales et pour différents teneurs en eau.

Ces résultats suscitent diverses remarques.

- Les valeurs de résistance au pic sont, comme on pouvait s'y attendre, plus importantes dans les cas humides que dans les cas secs. Cependant, on ne perçoit pas de règle permettant de relier les pics de résistance des matériaux aux différents teneurs en eau.
- La résistance au cisaillement est saccadée (régime de « stick-slip ») pour les matériaux secs. Ce comportement disparaît (régime de glissement continu) lorsque le matériau est humide. Ce phénomène est en général lié à la vitesse de sollicitation. Dans notre cas, tous les essais ont été réalisés avec la même vitesse de cisaillement. Une explication possible serait alors que la présence d'eau modifie le coefficient de frottement comme l'ont également suggéré Riedo et al. (2002).
- La teneur en eau semble modifier la résistance au cisaillement résiduelle. Ceci contraste avec le cas sec pour lequel cette résistance est intrinsèque au matériau et ne dépend même pas de la compacité initiale.
- L'écart entre les résistances au cisaillement au pic et résiduelle semble plus faible dans le cas sec que dans le cas humide.

Ces deux dernières remarques nous ont amené à représenter la résistance au cisaillement

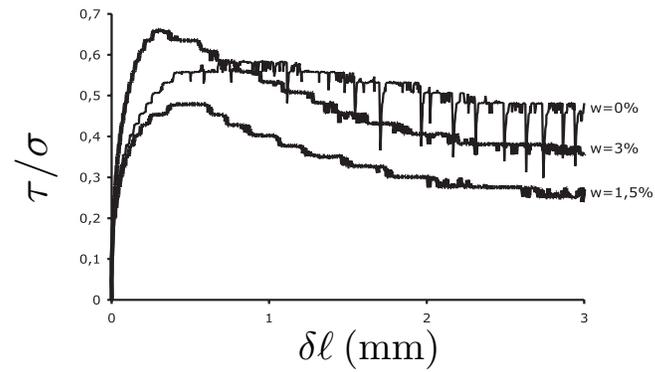
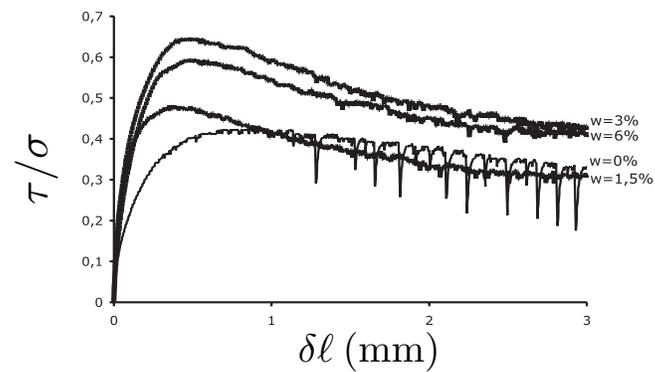
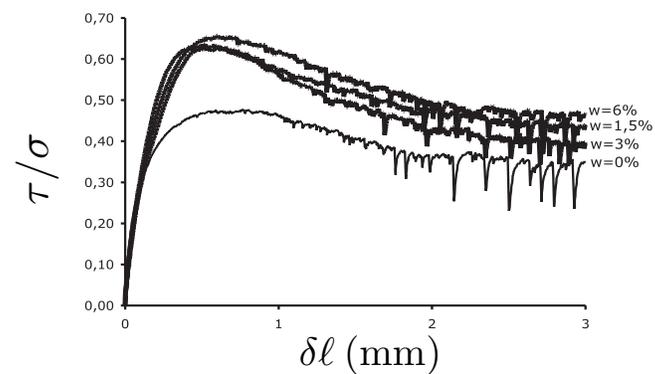
(a) $\sigma = 34$ kPa(b) $\sigma = 86$ kPa(c) $\sigma = 190$ kPa

FIG. 3.20: Influence de l'eau sur la résistance au cisaillement pour différentes contraintes normales

par la différence entre les valeurs au pic et résiduelle : $\tau_{pic} - \tau_{res}$. La figure 3.21 présente les variations de $(\tau_{pic} - \tau_{res})$ en fonction de la contrainte normale. On y a regroupé tous

les résultats relevés sur les courbes 3.20. On note que les points correspondant aux essais à $w = 0\%$ peuvent être approchés par une droite. Pour les teneurs en eau non nulles, les points expérimentaux semblent également pouvoir être approchés par une deuxième droite. Par contre, aucune distinction ne se dégage entre les différents teneurs en eau non nulles. On peut donc considérer que l'enveloppe de rupture représentée dans le plan $(\tau_{pic} - \tau_{res}, \sigma)$ prend la forme :

$$\tau_{pic} - \tau_{res} = \tan(\tilde{\varphi}) \sigma + \tilde{c} \quad (3.11)$$

où \tilde{c} et $\tilde{\varphi}$ sont les paramètres de résistance au cisaillement analogues respectivement aux paramètres c et φ .

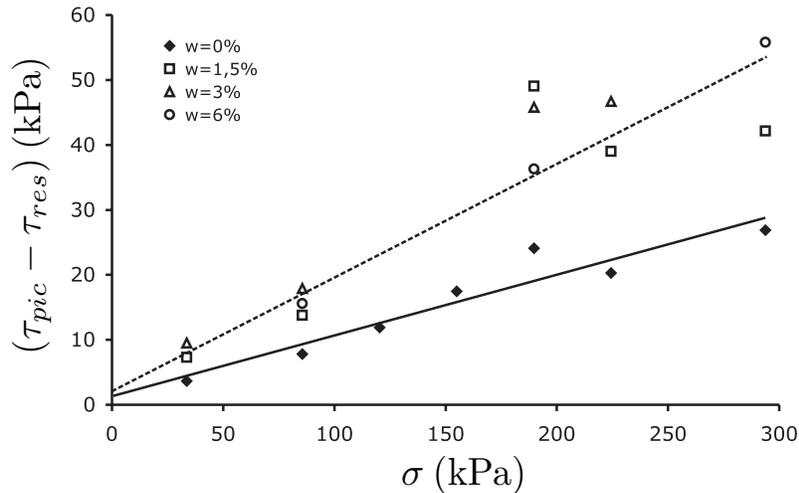


FIG. 3.21: Courbes $(\tau_{pic} - \tau_{res}, \sigma)$ dans les cas sec et humide

Les variations de hauteur des échantillons sont représentées sur la figure 3.22 en fonction de la distance de cisaillement pour trois contraintes normales et pour différentes teneurs en eau. On peut faire les remarques suivantes.

- La contractance est d'autant plus importante que la contrainte normale est élevée.
- Pour les contraintes normales les plus faibles ($\sigma = 34$ kPa et $\sigma = 86$ kPa), les matériaux humides se dilatent plus que le matériau sec avant la phase stabilisée. Pour $\sigma = 190$ kPa, c'est le contraire : les matériaux humides se dilatent moins.
- Les courbes de dilatance pour les cas secs, présentent des saccades qui sont corrélées au régime de « stick-slip » observé dans la résistance au cisaillement. Ces saccades suggèrent qu'il n'y a pas, dans le cas sec, de plan de rupture mais plutôt une zone de mobilisation assez large au sein de laquelle les réarrangements se répartissent de manière hétérogène (Vengeon et al., 1999). Les glissements se produiraient donc le

long d'une multitude de surfaces de formes complexes. Dans ce cas, chaque micro-contraction de l'échantillon pourrait correspondre à un blocage entraînant un « déplacement » des surfaces de rupture. Dans les cas humides, les forces de cohésion capillaire entre les billes de verre limitent les réarrangements, ce qui favoriserait la formation d'une bande de cisaillement.

La figure 3.23 illustre cette dernière remarque. Il s'agit de deux simulations numériques 2D de cisaillement direct réalisées sur la plateforme de calcul LMGC90 avec la méthode « Dynamique des Contacts ». On peut y voir les gradients de déplacements des grains dans les cas sec et cohésif. La loi de cohésion utilisée est de type cohésion uniforme avec une force constante de cohésion $F^\circ = 1$ N (environ 250 fois supérieure aux forces de cohésion capillaire pour des billes de même diamètre moyen) et une distance de rupture $D^\circ = 1$ mm. On remarque une large zone de mobilisation des grains dans le cas sec qui se réduit à une bande de localisation dans le cas cohésif. On peut également voir que cette bande de localisation n'est pas plane.

Revenons sur notre objectif premier qui était d'observer l'effet des forces capillaires sur le comportement global du matériau. Cette investigation expérimentale nous amène à penser que l'emploi d'un matériau mieux adapté ne suffit pas. Compte tenu des résultats ci-dessus, il semblerait que les niveaux de contraintes utilisés (expérimentalement et numériquement) ne permettent pas de mettre en évidence l'effet de la cohésion capillaire sur la résistance au cisaillement. Du moins, cet effet n'apparaît pas de façon systématique. Ceci a conduit à la conception et à la réalisation d'un nouveau dispositif mieux adapté à l'étude de la résistance au cisaillement de matériaux granulaires faiblement contraints.

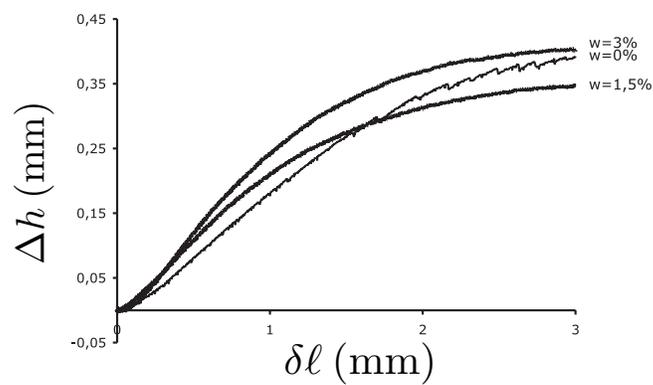
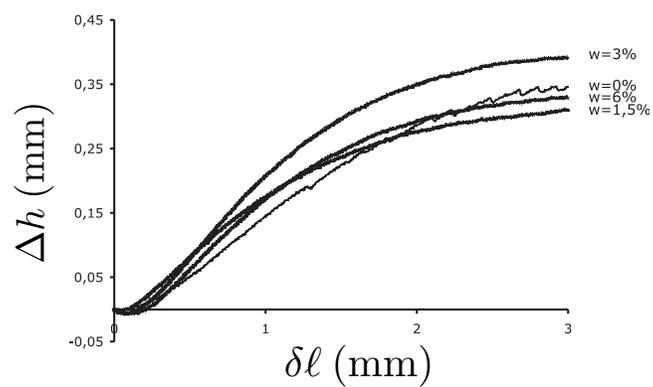
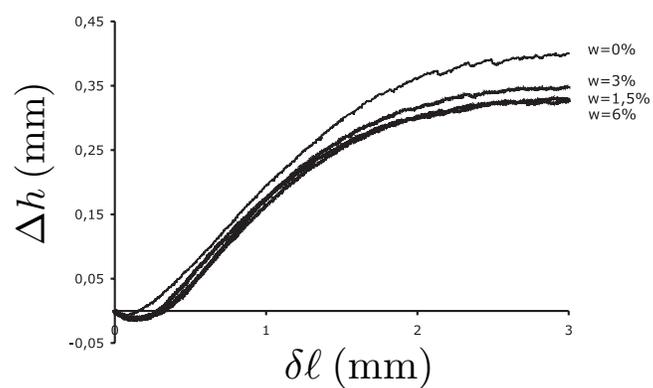
(a) $\sigma = 34$ kPa(b) $\sigma = 86$ kPa(c) $\sigma = 190$ kPa

FIG. 3.22: Influence de la teneur en eau sur la dilatance pour différentes contraintes normales

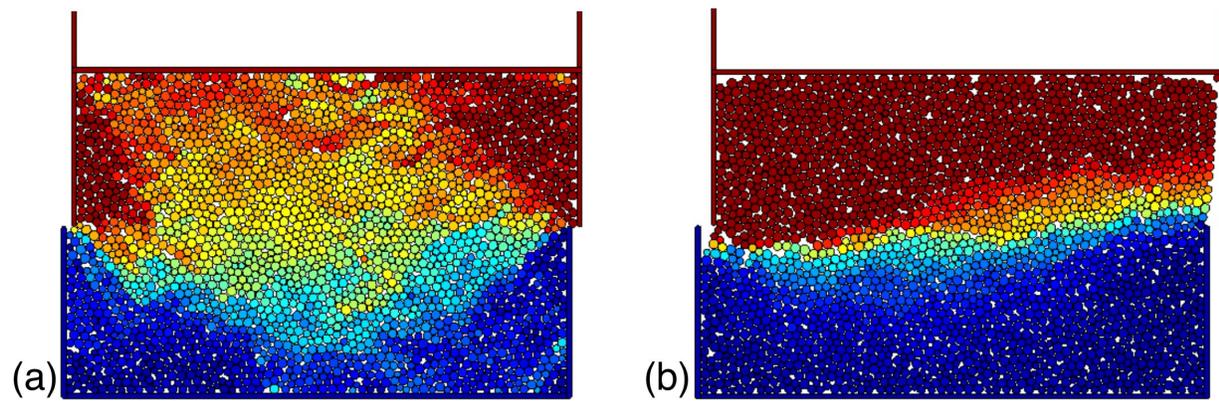


FIG. 3.23: *Essais de cisaillement direct bidimensionnels réalisés avec le code de calcul LMGC90. (a) cas sec ; (b) cas cohésif. La couleur bleue correspond aux plus faibles déplacements et la couleur rouge correspond aux plus grands déplacements.*

3.3 Cisaillement à faibles contraintes

Des modifications ont été apportées à l'essai de cisaillement à la boîte de Casagrande afin de mesurer la résistance au cisaillement de matériaux granulaires à des pressions de confinement très basses (inférieures à 1 kPa). On présente dans cette section le dispositif expérimental, les matériaux utilisés, le protocole de préparation des échantillons et les principaux résultats.

3.3.1 Expériences

3.3.1.1 Principe des essais et dispositif expérimental

Comme pour l'essai à la boîte de Casagrande, cet essai permet de mesurer la contrainte tangentielle nécessaire pour rompre un échantillon cylindrique selon un plan prédéterminé. La principale différence, par rapport à l'essai normalisé de Casagrande, porte sur la sollicitation de faible niveau : des incréments de force de cisaillement sont imposés plutôt qu'un déplacement à vitesse constante. La figure 3.24 schématise le principe de l'essai.

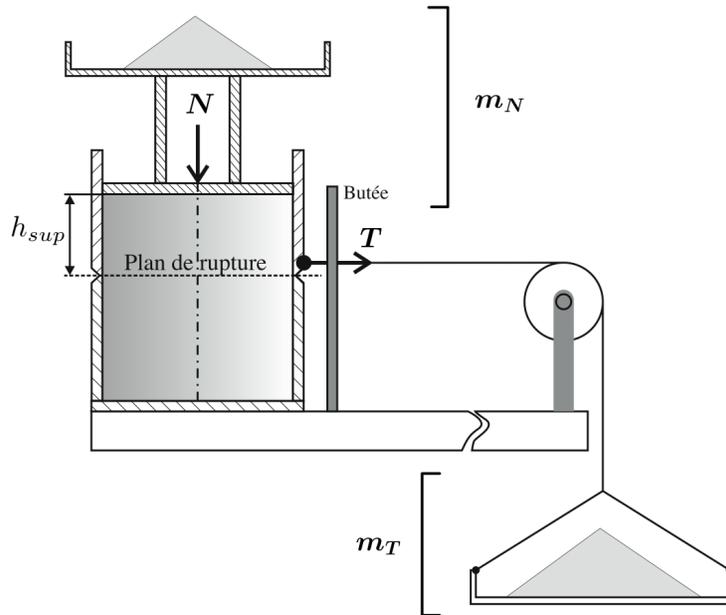


FIG. 3.24: Illustration de l'appareil de cisaillement à faibles contraintes

Une contrainte normale σ est appliquée à l'échantillon par l'intermédiaire d'un flasque. La masse de ce flasque peut-être modifiée en ajoutant des corps pesants (du sable par exemple) dans une coupelle prévue à cet effet. L'échantillon subit donc une force normale $N = m_N g$ au niveau de sa surface supérieure de section S ; m_N étant la masse totale du

flasque et du sable qu'il contient, et g l'accélération de la pesanteur. Compte tenu de l'ordre de grandeur de m_N , il est également important de prendre en compte la masse des grains se trouvant au dessus du plan de cisaillement. Ces considérations conduisent à l'expression suivante de la contrainte normale :

$$\sigma = \frac{g}{S}(m_N + \rho h_{sup} S) \quad (3.12)$$

où ρ est la masse volumique apparente² du matériau granulaire testé, est h_{sup} la hauteur des grains au dessus du plan de cisaillement. Ce mode opératoire, ainsi que la légèreté du dispositif, permettent de considérer des contraintes normales très faibles (inférieures à 1 kPa) comparées à celles des essais normalisés de cisaillement à la boîte de Casagrande.

Une force T de cisaillement est imposée par l'intermédiaire d'un système de poulie. En chargeant par incréments un réceptacle, on augmente la force de cisaillement $T = m_T g$, m_T étant la masse du réceptacle et de son contenu. La contrainte de cisaillement est alors donnée par la relation suivante :

$$\tau = \frac{m_T g}{S} \quad (3.13)$$

Le principe des expériences est donc d'augmenter progressivement la contrainte de cisaillement τ pour une valeur de contrainte normale σ fixée. Lorsque la contrainte de cisaillement maximale τ_m est atteinte, un glissement soudain de la partie supérieure de l'échantillon se produit. Le déplacement n'est pas enregistré.

La boîte de cisaillement réalisée est présentée sur la figure 3.25. On a choisi de la fabriquer en plexiglas afin de :

- pouvoir visualiser le matériau granulaire lors du cisaillement ;
- limiter l'amplitude des forces de frottement entre les grains et les parois ;
- réduire l'inertie de la boîte.

La boîte a un diamètre intérieur de 46 mm et la hauteur de la partie inférieure est de 15 mm. L'intérêt d'avoir un diamètre de la boîte plus petit est de réduire le nombre total de grains. L'objectif étant que la modélisation numérique se rapproche au mieux des essais expérimentaux.

La mise au point de l'appareillage a été effectuée en vérifiant les points suivants :

- Les bords des demi-boîtes en contact ont été chanfreinés afin de réduire leur surface de contact. La résistance de la boîte a été mesurée en effectuant des essais à vide, c'est-à-dire sans placer de matériau à l'intérieur de la boîte. On a ainsi pu vérifier que le frottement des deux parties de la boîte engendrait une erreur sur la mesure de résistance d'un matériau inférieure à quelques Pascals. Cette erreur a été jugée

²On suppose que la variation de ρ au cours du cisaillement est suffisamment faible pour ne pas en tenir compte dans la relation 3.12.

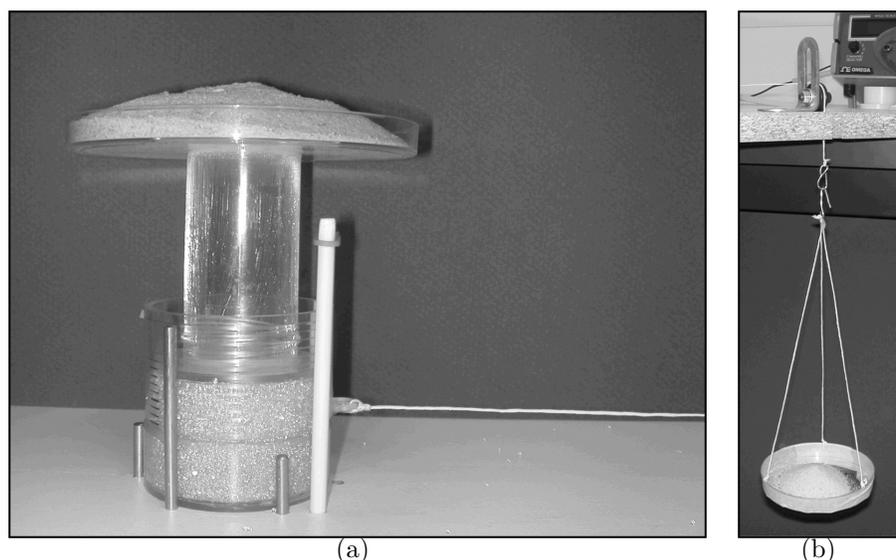


FIG. 3.25: *Appareil réalisé. (a) Boîte de cisaillement et réceptacle pour le chargement normal ; (b) réceptacle pour imposer la force de cisaillement*

acceptable pour des contraintes de cisaillement supérieures à une cinquantaine de Pascals.

- Une butée a été placée sur le dispositif pour arrêter la partie supérieure de la boîte à une distance de cisaillement de quelques millimètres.
- La contrainte normale étant due en partie au poids propre du matériau au dessus du plan de rupture, il convient de prendre une précaution supplémentaire. En effet, la pression ressentie à la base d'un tube contenant un matériau granulaire est différente du poids réel de ce matériau, car les grains peuvent être retenus par frottement sur les parois latérales (Ovarlez, 2003). Il s'agit de l'effet Janssen, bien connu des physiciens de la matière granulaire. En fait, il existe, pour chaque configuration (diamètre du tube, taille des grains, frottement grains-parois...), une hauteur de matériau en-dessous de laquelle il n'y a pas d'effet Janssen. Cette hauteur a été déterminée en réalisant l'expérience schématisée sur la figure 3.26 sur les billes de verre et sur un sable (sable S ci-dessous). Le principe est d'effectuer des pesées à la base du tube et hors du tube pour différentes hauteurs de matière. Les résultats obtenus sont représentés sur la figure 3.27. On a ainsi pu déterminer que la hauteur des échantillons placés dans l'appareil réalisé ne doit pas dépasser une trentaine de millimètres au-dessus du plan de cisaillement.

3.3.1.2 Matériaux d'étude et préparation des échantillons

On a utilisé quatre types de matériaux :

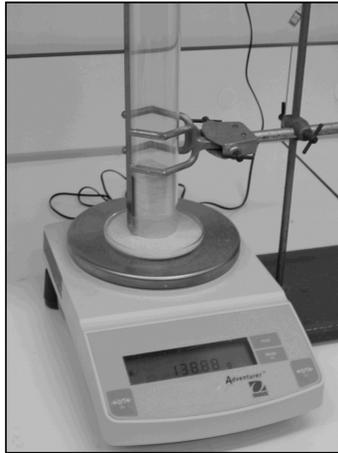


FIG. 3.26: Dispositif expérimental pour la détermination de la hauteur à partir de laquelle un effet Janssen apparaît

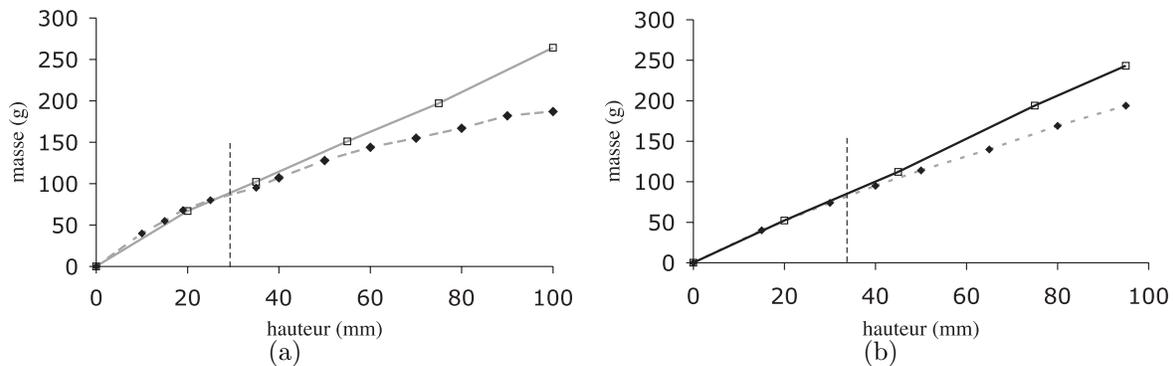


FIG. 3.27: Détermination de la hauteur à partir de laquelle un effet Janssen apparaît pour les billes de verre (a) et pour le sable (b). (□) pesées effectuées hors du tube ; (◆) pesées effectuées à la base du tube

1. **S** – un sable constitué de grains anguleux de diamètres compris entre 0,1 mm et 0,4 mm, et dont la répartition granulométrique est donnée sur la figure 3.28 ;
2. **BV45** – des billes de verre dont les diamètres sont compris entre 0,4 mm et 0,5 mm ;
3. **BV48** – des billes de verre dont les diamètres sont uniformément répartis entre 0,4 mm et 0,8 mm ;
4. **BV1** – des billes de verre de 1 mm de diamètre.

La teneur en eau désirée est obtenue en mélangeant les masses nécessaires de billes et d'eau. Une répartition homogène de l'eau est assurée par une forte agitation du mélange dans un récipient clos et étanche. On prend soin de préparer les matériaux avec une teneur

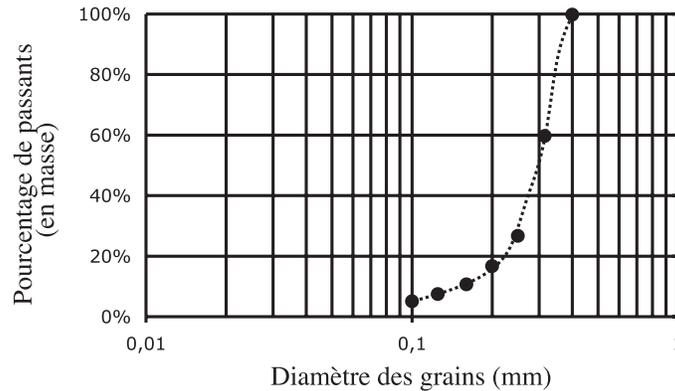


FIG. 3.28: *Courbe granulométrique du sable*

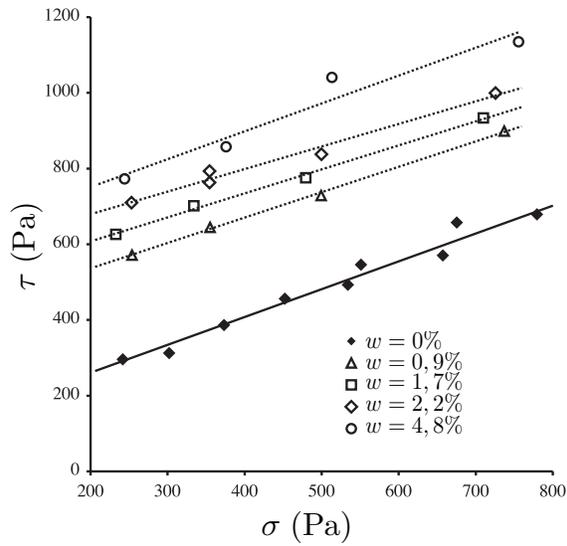
en eau légèrement supérieure à la valeur souhaitée car une petite évaporation est inévitable lors des manipulations. La valeur de teneur en eau qui est retenue est celle mesurée à la fin de l'essai. La procédure est la suivante : Une portion du matériau préparé est pesée avant et après son séchage dans une étuve à 105 °C ; la teneur en eau peut alors être calculée à partir de la détermination de la masse de l'eau et des billes.

3.3.1.3 Résultats expérimentaux

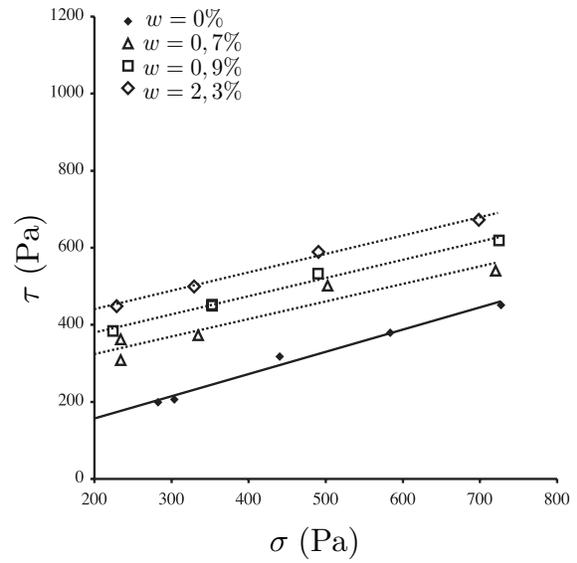
Plusieurs essais ont été réalisés sur les quatre matériaux présentés précédemment (S, BV45, BV48 et BV1). On fait varier la teneur en eau et la contrainte normale. La figure 3.29 présente, dans le plan de Mohr-Coulomb, les résultats de résistance au cisaillement obtenus pour les quatre matériaux. Les points de rupture sont bien alignés pour chacune des teneurs en eau. Ces points expérimentaux sont donc bien approchés par des droites, en accord avec le modèle de Mohr-Coulomb, ce qui permet de les caractériser par les deux paramètres c et φ . L'angle de frottement interne φ ne semble pas varier sensiblement en fonction de la teneur en eau dans la mesure où les droites de Mohr-Coulomb semblent à peu près parallèles.

Schellart (2000) a montré avec un dispositif expérimental similaire que l'enveloppe de rupture de matériaux granulaires secs s'incurve lorsque la contrainte normale tend vers 0, comme l'illustre la figure 3.30. La contrainte de cisaillement peut donc être considérée nulle lorsque la contrainte normale est nulle. Néanmoins, si on s'appuie sur les résultats de la figure 3.29 ($\sigma \geq 200$ Pa), la cohésion c au sens de Mohr-Coulomb n'est pas nulle.

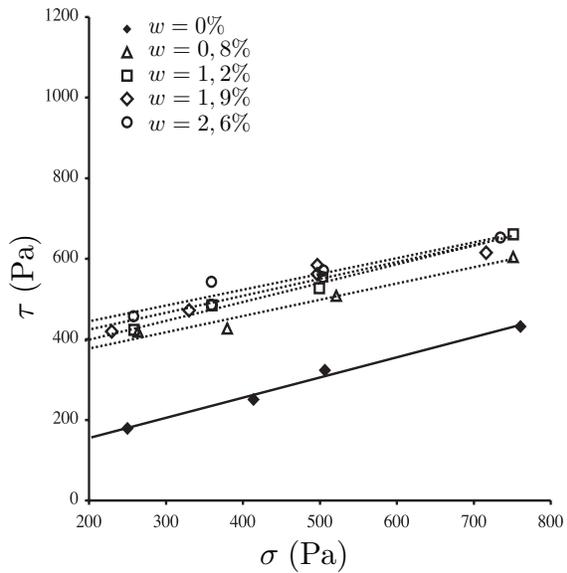
La figure 3.31 donne une représentation de l'évolution du paramètre c en fonction de la teneur en eau pour les quatre matériaux. On peut constater, pour chaque matériau, que la cohésion macroscopique augmente de façon non linéaire avec la teneur en eau et qu'elle se stabilise à une valeur $c = c_m$ à partir d'une teneur en eau $w = w_m$. Des estimations de ces valeurs ainsi que de l'angle de frottement sont reportées dans le tableau 3.2 pour les



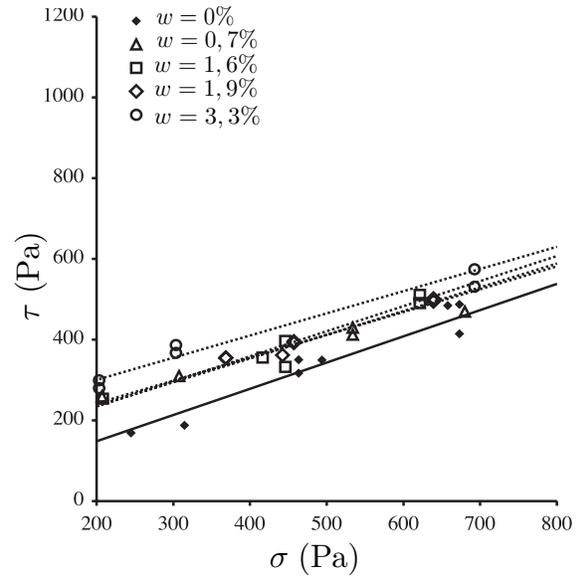
(a) S



(b) BV45



(c) BV48



(d) BV1

FIG. 3.29: Droites de Coulomb obtenues pour les quatre matériaux testés

quatre matériaux testés.

¹Cette valeur correspond au diamètre moyen relativement au nombre de particules. Il est déduit de la

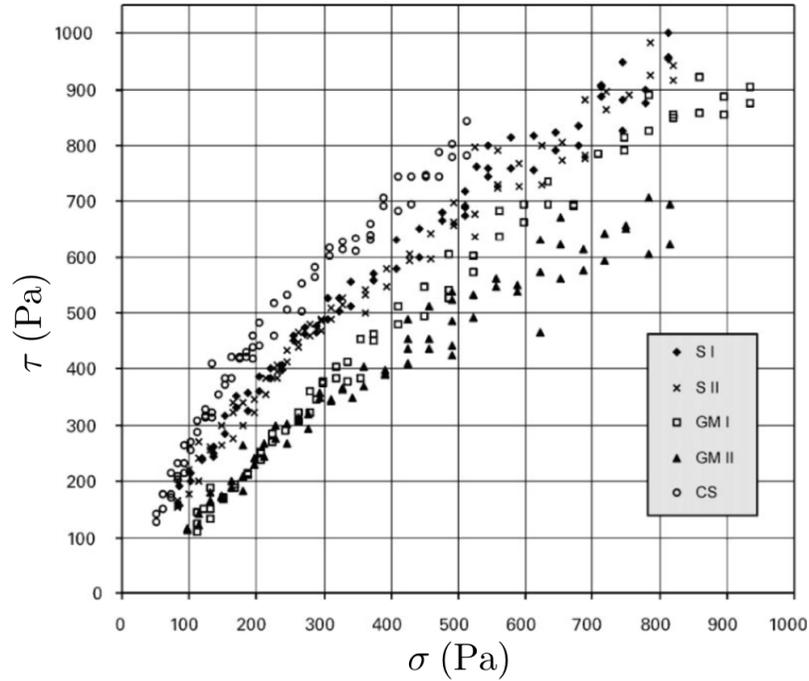


FIG. 3.30: Relation τ - σ obtenue sur des matériaux granulaires secs (Schellart, 2000). (S I et S II) sables. (GM I et GM II) micro-billes de verre. (CS) sucre

	$\langle D \rangle$	φ	c_m	w_m
S	0,16 ¹ mm	33°	600 Pa	3%
BV45	0,45 mm	30°	350 Pa	2,5%
BV48	0,6 mm	30°	300 Pa	1%
BV1	1 mm	25°	150 Pa	< 1%

TAB. 3.2: Synthèse des mesures expérimentales

Les valeurs de cohésion obtenues expérimentalement sur des matériaux composés de billes de verre (BV) à différentes teneurs en eau présentent des fluctuations plus importantes que pour le sable. Ces fluctuations sont certainement dues au fait que, pour les billes de verre, les niveaux de cohésion sont plus faibles, et que les distributions granulométriques sont plus serrées et plus grossières par rapport à celle du sable.

Les différences entre les valeurs de c_m peuvent être attribuées au diamètre moyen des grains. Pour le sable, la forme non sphérique des grains a probablement une contribution supplémentaire au niveau élevé de la valeur c_m . Cet aspect sera discuté plus bas. La teneur en eau w_m à partir de laquelle on observe une stabilisation de la cohésion semble dépendre

courbe granulométrique en supposant, en première approximation, que les grains sont sphériques.

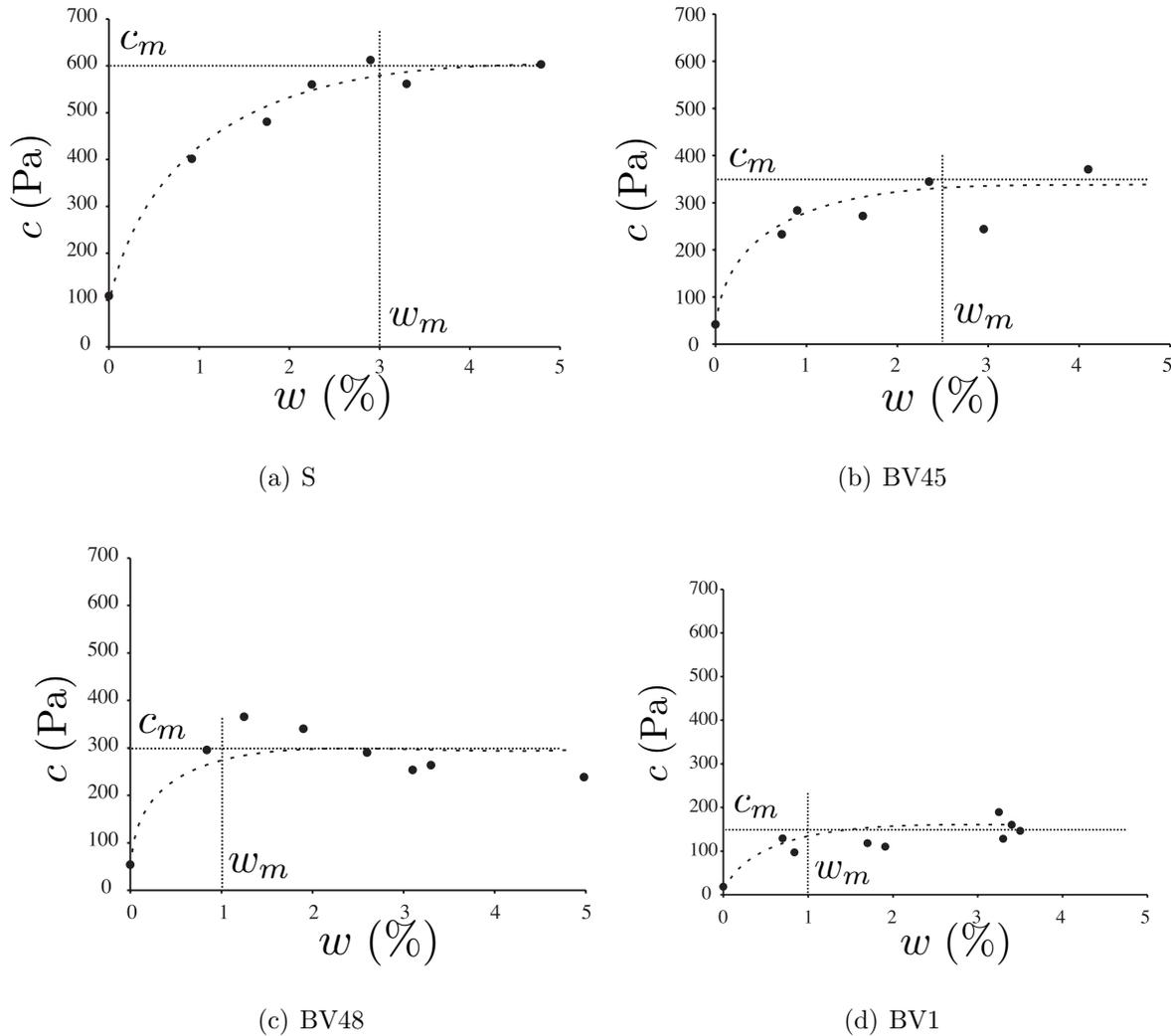


FIG. 3.31: Cohésion macroscopique en fonction de la teneur en eau pour les quatre matériaux testés

de deux facteurs :

- l'état de surface des grains (Halsey and Levine, 1998) ;
- la formation d'amas de liquide (Kohonen et al., 2004; Fournier et al., 2005).

Les grains de sable ont une surface beaucoup plus rugueuse que celle des billes de verre. Pour des grains de même taille moyenne, la formation d'un pont capillaire pour le sable nécessite un volume plus important d'eau. Par ailleurs, compte tenu d'un amoncellement partiel de la phase liquide pour les grains les plus petits (pour le sable dans notre cas) une quantité d'eau plus importante est nécessaire à la formation de ponts capillaires au sein du matériau.

3.3.2 Simulations numériques

Dans cette section, on présente les simulations de cisaillement correspondant aux essais expérimentaux précédents. Les essais numériques de cisaillement sont similaires, dans leur principe, à ceux présentés dans la section 3.2. La différence porte essentiellement sur les valeurs de contraintes normales utilisées et sur la granularité du matériau testé.

3.3.2.1 Échantillon numérique

La répartition granulométrique de l'échantillon numérique (tableau 3.3) a été choisie en respectant au mieux les deux conditions suivantes :

- le choix d'un facteur proche de 1 entre le diamètre moyen des grains numériques et des grains réels ;
- la nécessité d'avoir un nombre de grains raisonnable pour que les temps de simulations numériques ne soient pas excessifs.

Diamètre des grains	Pourcentage en nombre de grains
1 mm	20%
1,5 mm	30%
2 mm	50%

TAB. 3.3: Répartition granulométrique en nombre de grains de l'échantillon numérique

Un échantillon numérique de 7307 grains a été réalisé en utilisant la procédure décrite dans la section 3.2.2.2. L'échantillon a été mis en place à une compacité $\phi = 0,6$ en utilisant la loi de contact linéaire sans cohésion. À partir de cet échantillon, les différents teneurs en liquide ont été obtenues en distribuant le volume de liquide approprié avec un critère basé sur le rayon des grains (voir section 3.1). La texture initiale est donc la même pour les différents échantillons numériques « humides ».

Les paramètres des simulations sont donnés dans le tableau 3.4.

3.3.2.2 Présentation et analyse des résultats numériques

Une série de simulations numériques a été effectuée dans le but de déterminer la cohésion macroscopique et l'angle de frottement interne pour les teneurs en liquide comprises entre 0% et 2%. L'intérêt de ces simulations est de permettre une analyse microscopique approfondie des réseaux de forces. Une telle analyse prend encore plus d'importance dans le cas cohésif. En effet, dans ce cas, le statut d'une interaction peut être multiple. L'analyse statistique à partir des données microscopiques doit permettre d'améliorer la compréhension du comportement macroscopique du matériau granulaire cohésif.

Paramètre	Symbole	Valeur
Pas de temps	δt	10^{-6} s
Facteur de masse	κ_m	1
Taux d'amortissement normal grain–grain	α_n	0,8
Taux d'amortissement normal grain–paroi	α_n^\bullet	0,8
Raideur normale de contact grain–grain	K_n	1000 N/m
Raideur normale de contact grain–paroi	K_n^\bullet	1000 N/m
Coefficient de frottement grain–grain	μ	0,4
Coefficient de frottement grain–paroi	μ^\bullet	0
Coefficient de régularisation tangential grain–grain	K_t	1 Ns/m
Coefficient de régularisation tangential grain–paroi	K_t^\bullet	1 Ns/m
Angle de mouillage	θ	0°
Tension superficielle de l'eau	γ_L	$73 \cdot 10^{-3}$ N/m

TAB. 3.4: Paramètres des simulations pour les essais à faibles contraintes

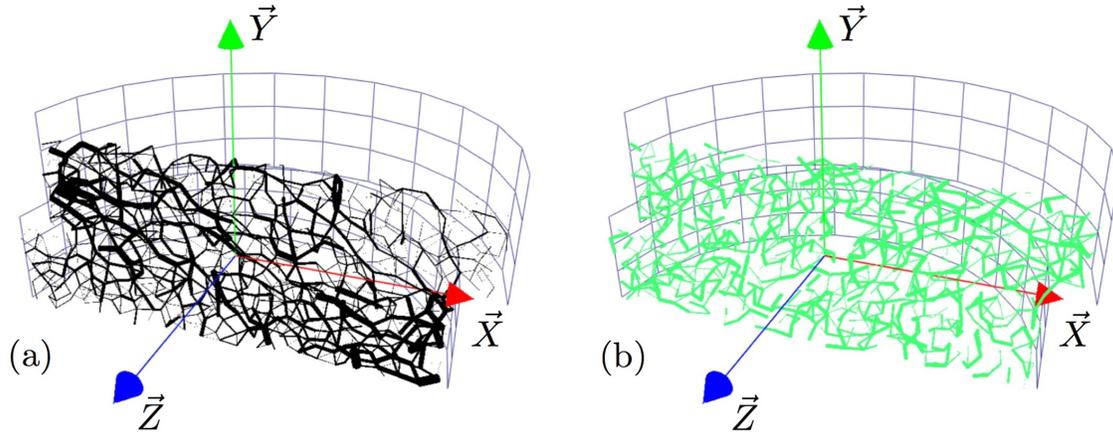


FIG. 3.32: Réseaux de forces de compression (a) et de traction (b) ($\sigma = 300$ Pa, $w = 2\%$)

La figure 3.32 montre un exemple type des réseaux de forces en compression et en traction dans une fine épaisseur parallèle au plan XY (X correspond à la direction de cisaillement et Y correspond à la direction verticale). On observe une transmission très inhomogène des forces de compression et des forces de traction. En moyenne, la plupart des liens en traction tendent à être perpendiculaires à la direction moyenne des contacts (liens en compression) comme le montre la figure 3.33.

La distribution statistique des forces normales d'interaction, dans une phase stabilisée du cisaillement, est présentée sur la figure 3.34a. $P(F_n)$ est la densité de probabilité d'avoir une force normale d'interaction F_n dans l'échantillon et $\langle F_n \rangle$ est la force normale moyennée

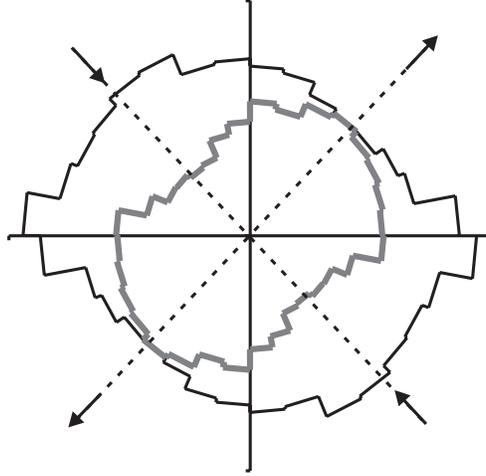


FIG. 3.33: Diagramme polaire de la fréquence des forces négatives et des forces positives en fonction de leurs directions (projetées sur le plan XY)

sur l'ensemble des interactions. La figure 3.34a donne $P(F_n)$ pour un rapport $F_n/\langle F_n \rangle$ allant jusqu'à 5. Cette valeur ne constitue pas une limite puisque les niveaux de force observés s'étendent jusqu'à 15 fois la force moyenne. Cependant, leur probabilité reste trop faible pour les faire apparaître sur la figure 3.34a. Pour les forces normales nulles ($F_n = 0$), on note un pic qui correspond à l'équilibre entre les forces d'attraction et de répulsion.

En fait, on peut distinguer trois classes de niveaux de force.

- La première classe concerne les forces négatives qui présentent une distribution statistique linéaire (figure 3.34b). Dans ce cas, la densité de probabilité $P(F_n)$ peut s'exprimer sous la forme :

$$P(F_n) \propto \gamma \frac{(F_n + F_{coh}^{seuil})}{\langle F_n \rangle} + P_0 \quad (3.14)$$

où F_{coh}^{seuil} est la force seuil de cohésion donnée par $F_{coh}^{seuil} = F_{coh}(D_n = 0)$, P_0 est une constante définie par $P_0 = P(F_{coh}^{seuil})$, et le signe \propto indique une relation de proportionnalité.

- La deuxième classe concerne les forces normales positives inférieures à la force normale moyenne $\langle F_n \rangle$. La figure 3.34c, présentée en échelle logarithmique, montre que ces forces sont distribuées suivant une loi de puissance :

$$P(F_n) \propto (F_n/\langle F_n \rangle)^{-\alpha}$$

avec $\alpha \simeq 0,4$ sur plus d'une décade. Ceci implique qu'il existe un très grand nombre de forces dans le réseau faible (Radjai et al., 1998).

- La troisième classe concerne les forces normales supérieures à $\langle F_n \rangle$. La figure 3.34d, représentée en échelle semi-logarithmique, montre que ces forces sont distribuées sui-

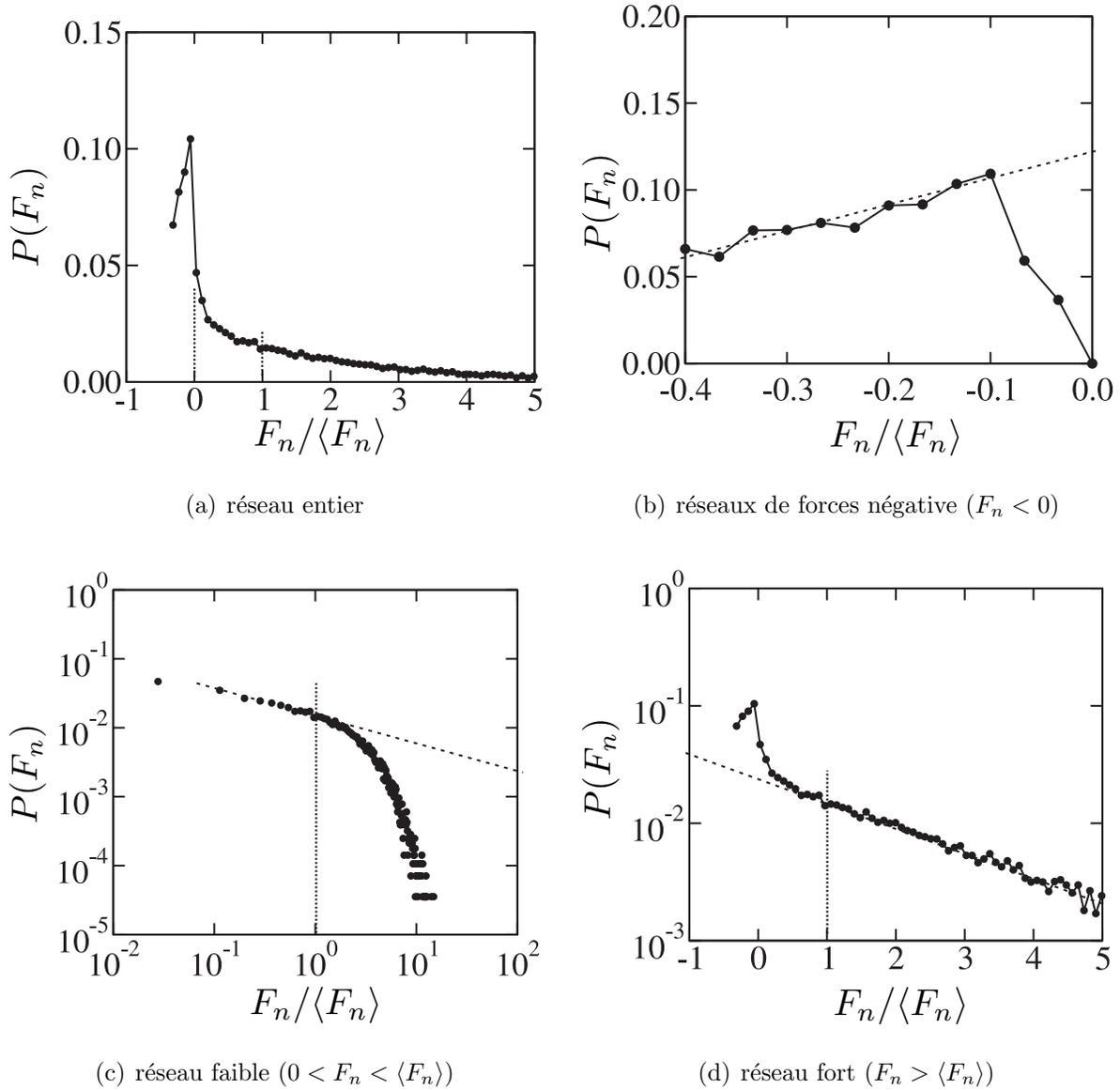


FIG. 3.34: *Distribution statistique des forces normales montrées sur la figure 3.32.*

vant une loi exponentielle :

$$P(F_n) \propto e^{-\beta(F_n/\langle F_n \rangle)}$$

avec $\beta \simeq 0,16$ pour les forces normalisées $F_n/\langle F_n \rangle$ variant de 1 à 5 et même au delà. Comme dans le cas sec (Radjai et al., 1996, 1997), la distribution dans cette classe rend compte de la grande inhomogénéité des forces et de la présence de chaînes de forces fortes tel qu'on peut le voir sur la figure 3.32.

Comme on l'a vu dans les expériences, les contraintes macroscopiques σ et τ sont mesurées aux parois. Ceci nous a conduit à calculer ces contraintes de la même manière dans les simulations. Il faut cependant noter qu'il est possible de calculer les termes du tenseur des contraintes à partir des forces entre les grains. Toutefois, dans nos simulations, les résultats issus de ces deux méthodes ne coïncident pas. La raison est que, pour le cisaillement direct, les effets de bords donnent lieu à des gradients importants de contrainte au sein du matériau. Ce point a été analysé en détail par Thornton and Zhang (2001). Nous avons utilisé, dans l'analyse qui suit, les contraintes calculées aux parois afin de pouvoir les comparer aux résultats des expériences.

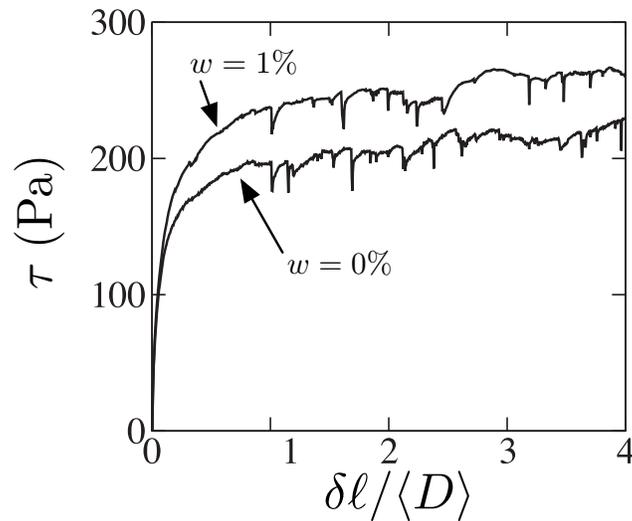


FIG. 3.35: Relation contrainte-déformation pour $w = 0\%$ et $w = 1\%$; $\sigma = 300 Pa$

La figure 3.35 présente les relations contrainte-déformation $\tau-(\delta\ell/\langle D\rangle)$ obtenues pour les échantillons secs et avec une teneur en liquide $w = 1\%$, $\langle D\rangle$ étant le diamètre moyen des grains. On peut voir que la résistance au cisaillement atteint une valeur résiduelle (stabilisée) sans passer par une valeur de pic. On a donc choisi de prendre la contrainte de rupture égale à la contrainte résiduelle de cisaillement. L'état stabilisé est atteint pour une distance de cisaillement de l'ordre d'un diamètre moyen pour toutes les teneurs en liquide. Il est également intéressant de noter que la déformation dans l'état résiduel comporte un grand nombre d'instabilités qui ont lieu dans tout le système et qui apparaissent sous la forme de chutes brutales de contrainte sur les courbes contrainte-déformation. En passant d'un matériau sec à un matériau humide, le nombre de ces instabilités semble diminuer.

Comme pour les expériences, on peut analyser l'évolution de la cohésion macroscopique en fonction de la teneur en eau. La figure 3.36a montre les estimations des enveloppes de rupture déterminées à partir de 15 simulations (trois contraintes normales et cinq teneurs

en eau). La cohésion macroscopique est représentée en fonction de la teneur en eau sur la figure 3.36b. Cette dernière est très similaire à la courbe expérimentale des billes de verre de 1 mm (figure 3.31c). En effet, on observe une stabilisation de la cohésion macroscopique pour une très faible teneur en eau ($w \simeq 0,1\%$). En outre, puisque la taille moyenne des grains est approximativement la même dans les simulations ($\langle D \rangle = 1,65$ mm) et pour le cas des billes de verre de 1 mm, la cohésion maximale c_m a pratiquement la même valeur $c_m = 120$ Pa dans le cas numérique et $c_m = 150$ Pa dans le cas expérimental. Ce résultat est conforme à la synthèse des résultats expérimentaux présentés dans le tableau 3.2 qui montre que si $\langle D \rangle$ augmente, c_m et w_m diminuent. Dans le cas des simulations effectuées $\langle D \rangle = 1,65$ mm. La comparaison avec les résultats expérimentaux pour BV1 ($\langle D \rangle = 1$ mm) obéit à cette règle. Des simulations supplémentaires, avec d'autres diamètres moyens des grains, sont nécessaires afin de confirmer ou d'infirmer ce résultat.

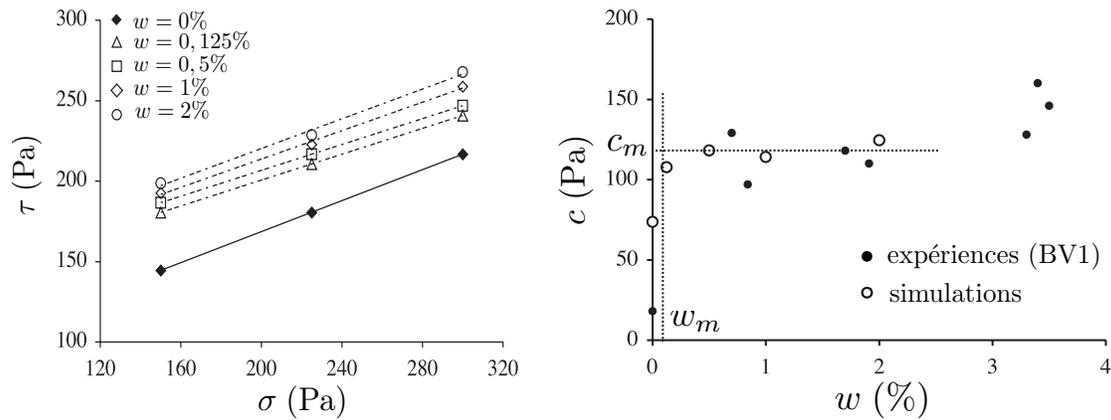


FIG. 3.36: (a) Estimation des enveloppes de rupture; (b) évolution de la cohésion macroscopique en fonction de la teneur en liquide

3.3.3 Approche théorique micro-macro

Dans cette section, on présente une analyse des comportements observés dans les expériences et les simulations (Richefeu et al., 2006). En particulier, la valeur de la cohésion macroscopique se sature lorsque la teneur en eau augmente. Ce phénomène peut paraître contre-intuitif puisqu'on s'attend à ce que le nombre de ponts liquides ainsi que les forces de cohésion soient augmentés lorsque la teneur en eau augmente. D'autres paramètres, tels que la taille des grains, la compacité et l'angle de frottement interne, influencent également la cohésion macroscopique. Des évaluations théoriques de la contrainte de rupture en traction (au lieu de la cohésion macroscopique dans notre cas) et leurs comparaisons avec des expériences ou des simulations peuvent être trouvées dans la littérature récente sur les matériaux granulaires humides (Bika

et al., 2001; Kim and Hwang, 2003). La question principale est de comprendre comment les contraintes se transmettent et de savoir quels sont les paramètres structurels pertinents.

Le tenseur des contraintes dans un matériau granulaire est une grandeur moyenne qui peut être déterminée à partir d'une expression bien établie (Christoffersen et al., 1981; Moreau, 1997) incluant les forces d'interaction \vec{F} et les vecteurs distance $\vec{\ell}$ entre les centres des grains :

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{V} \sum_{k \in V} F_{\alpha}^k \ell_{\beta}^k \quad \alpha, \beta = X, Y, Z \quad (3.15)$$

où α et β font référence aux composantes dans les trois directions X , Y et Z , et V est le volume dans lequel le tenseur de contrainte est calculé. L'établissement de cette expression est indépendante de la nature des interactions. La relation 3.15 reste donc valable avec les forces de cohésion capillaire. Dans ce cas, la liste des points de contact est simplement étendue pour prendre en compte les ponts capillaires. On peut montrer que le tenseur $\underline{\sigma}$ est symétrique si aucun couple n'est transmis au niveau des points d'interaction. À partir de la relation 3.15, la contrainte σ_{11} dans la direction d'extension est donnée par :

$$\sigma_{11} = n_L \langle F_1 \ell_1 \rangle_L \quad (3.16)$$

où n_L est le nombre de ponts liquides par unité de volume (densité de ponts liquides), F_1 et ℓ_1 sont les composantes selon la direction d'extension. Le symbole $\langle \dots \rangle_L$ doit être compris ici comme une moyenne sur tous les ponts liquides dans le volume V . Considérons \vec{n} et \vec{t} comme étant respectivement le vecteur unitaire normal et le vecteur unitaire tangentiel au niveau d'un lien donné. On a alors, $F_1 = F_n n_1 + F_t t_1$ et $\ell_1 = \ell n_1$ avec F_n et F_t les composantes normale et tangentielle de la force d'interaction, et ℓ la norme du vecteur $\vec{\ell}$. En posant $n_1 = \cos \Theta$ et $t_1 = \sin \Theta$, et en les remplaçant dans l'équation 3.16, on a :

$$\sigma_{11} = n_L \langle F_n \ell \cos^2 \Theta + F_t \ell \sin \Theta \cos \Theta \rangle_L \quad (3.17)$$

En faisant l'hypothèse que F_n et F_t sont indépendantes de la direction d'angle Θ , on obtient :

$$\sigma_{11} = n_L \langle F_n \ell \rangle_L \int_0^{\pi} \cos^2 \Theta P(\Theta) d\Theta \quad (3.18)$$

L'hypothèse d'un milieu isotrope ($P(\Theta) = 1/\pi$) conduit à l'expression suivante :

$$\sigma_{11} = \frac{1}{2} n_L \langle F_n \ell \rangle_L \quad (3.19)$$

On introduit un *seuil théorique de résistance à la traction* σ^{th} en remplaçant la force normale F_n dans la relation 3.19 par la force seuil de cohésion capillaire $F_{coh}^{seuil} = F_{coh} (D_n = 0)$:

$$\sigma^{th} = \frac{1}{2} n_L \langle F_{coh}^{seuil} \ell \rangle_L \quad (3.20)$$

Ceci revient à supposer que le seuil est atteint à tous les contacts au moment de la rupture. La densité de ponts liquides dans le matériau est donnée par :

$$n_L = \frac{Z_L}{2V_{Voronoi}} \quad (3.21)$$

où Z_L est le nombre moyen de ponts liquides par grain et $V_{Voronoi}$ est le volume moyen des cellules de Voronoi entourant des grains (figure 3.37). Ce dernier est simplement le volume moyen des grains divisé par la compacité du matériau, soit :

$$V_{Voronoi} = \frac{\pi \langle D^3 \rangle}{6\phi} \quad (3.22)$$

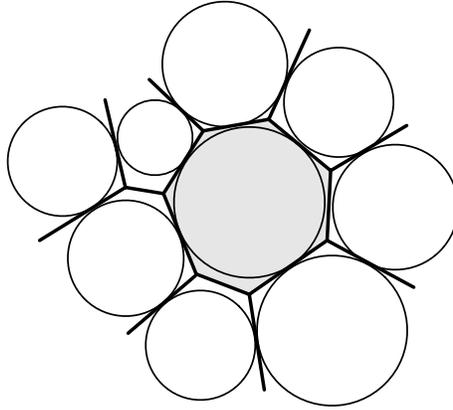


FIG. 3.37: Illustration 2D des cellules de Voronoi entourant les grains

Une particularité des forces capillaires vient du fait que la force seuil de cohésion ne dépend pas du volume du pont liquide. En effet, comme on peut le voir sur la figure 3.38, où la force seuil de cohésion est tracée en fonction de $\sqrt{R_1 R_2}$ pour différents volumes de ponts liquides, F_{coh}^{seuil} ne dépend que des rayons des grains :

$$F_{coh}^{seuil} = \kappa \sqrt{R_1 R_2} \quad (3.23)$$

où κ est un paramètre lié à la nature des interfaces liquide-gaz et liquide-solide. Dans le cas de l'eau, en prenant une tension superficielle $\gamma_L = 73.10^{-3}$ N/m et un angle de mouillage θ nul, le paramètre κ vaut 0,4 N/m.

En introduisant les expressions 3.21, 3.22 et 3.23 dans la relation 3.20, on obtient finalement :

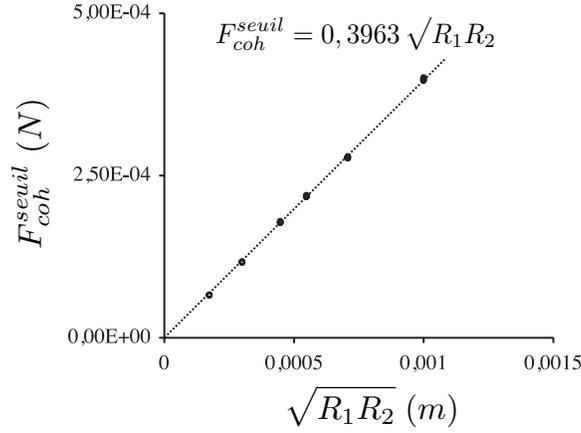


FIG. 3.38: Relation entre la force seuil de cohésion capillaire et la racine carré des rayons des grains pour différents volumes de ponts liquides

$$\sigma^{th} = \frac{3}{2\pi} \kappa \phi Z_L \frac{\langle (R_1 + R_2) \sqrt{R_1 R_2} \rangle}{\langle D^3 \rangle} \quad (3.24)$$

qu'on écrit sous la forme :

$$\sigma^{th} = s \frac{3}{4\pi} \frac{\kappa \phi Z_L}{\langle D \rangle} \quad (3.25)$$

avec s donné par :

$$s = \frac{\langle D^{1/2} \rangle \langle D \rangle \langle D^{3/2} \rangle}{\langle D^3 \rangle} \quad (3.26)$$

Afin d'établir cette relation, on a fait l'hypothèse que les valeurs des rayons R_1 et R_2 étaient indépendantes. Ceci signifie que les grains de chaque classe granulométrique sont distribués uniformément dans le matériau (pas de ségrégation). Pour une distribution uniforme des diamètres des grains, le paramètre s varie de 8/15 à 1 (1 correspondant au cas monodisperse). La relation 3.25 est similaire à l'expression proposée initialement par Rumpf (1970) et à celle qui a récemment été établie par Gröger et al. (2003). La différence tient au fait que l'équation 3.25 rend compte de la polydispersité (à travers le paramètre s) et de la corrélation entre la force seuil de cohésion capillaire et la taille des grains (à travers le paramètre κ).

Par définition, la cohésion macroscopique correspond à la contrainte de cisaillement à la rupture pour une pression de confinement nulle, c'est-à-dire pour le cas où les forces capillaires sont les seules à s'exercer au sein du matériau. Puisque les interactions de cohésion capillaire tendent à amener les grains au contact, la force de cohésion au niveau de

chaque contact est la force seuil F_{coh}^{seuil} . Ceci signifie que, en absence de contrainte normale de confinement, prendre $\sigma = \sigma^{th}$ est un choix plausible. Avec ces considérations, la *cohésion théorique* c^{th} est donnée par :

$$c^{th} = \tan(\varphi)\sigma^{th} = s \frac{3}{4\pi} \kappa \phi Z_L \frac{\tan(\varphi)}{\langle D \rangle} \quad (3.27)$$

On notera que la teneur en eau w n'apparaît pas dans l'expression de la cohésion théorique c^{th} ci-dessus. Le seul paramètre relatif à l'eau est κ qui caractérise la nature des interfaces liquide-solide et liquide-gaz. Ceci suggère que la teneur en eau intervient principalement à travers le nombre moyen de ponts liquides par grain Z_L (nombre de coordination liquide). En particulier, la valeur de saturation de la cohésion c_m correspond à la saturation du nombre de coordination liquide Z_L lorsque la teneur en eau augmente. En effet, lorsqu'une certaine quantité d'eau est distribuée de façon homogène dans tout l'échantillon conformément au critère de rupture, on trouve que Z_L augmente avec w et qu'il atteint sa valeur de saturation au-delà d'une teneur en eau $w = w_m$. La figure 3.39 illustre cette observation pour la configuration initiale des échantillons numériques.

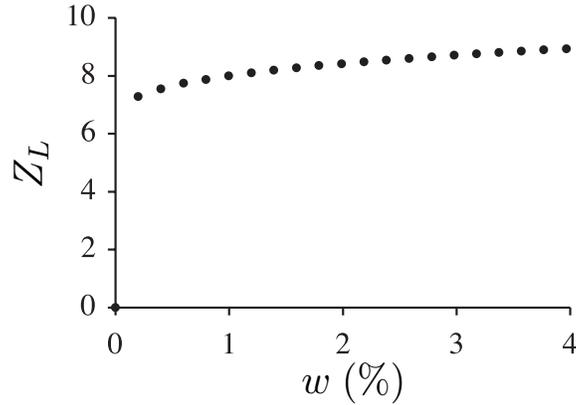


FIG. 3.39: Saturation rapide du nombre Z_L de ponts liquides par grain lorsque la teneur en eau augmente

La valeur initiale de Z_L dépend également du protocole de préparation. Puisque la valeur seuil de cohésion capillaire F_{coh}^{seuil} ne dépend pas du volume des ponts capillaires, une même quantité d'eau peut être distribuée de telle sorte que le nombre de ponts liquides soit réduit de moitié et donc que la cohésion soit également réduite. Cet effet est illustré sur la figure 3.40 représentant la relation contrainte-déformation pour deux configurations ne différant que par le nombre initial de ponts liquides (la teneur en eau étant par ailleurs identique) et une configuration sèche. On remarque que la valeur de τ au début du cisaillement est intermédiaire entre les deux premières courbes, ce qui correspond à une cohésion c plus faible. Aux plus grandes déformations, le nombre de ponts liquides augmente et la courbe

intermédiaire se rapproche de la courbe correspondant à un nombre de ponts deux fois plus élevé (courbe supérieure).

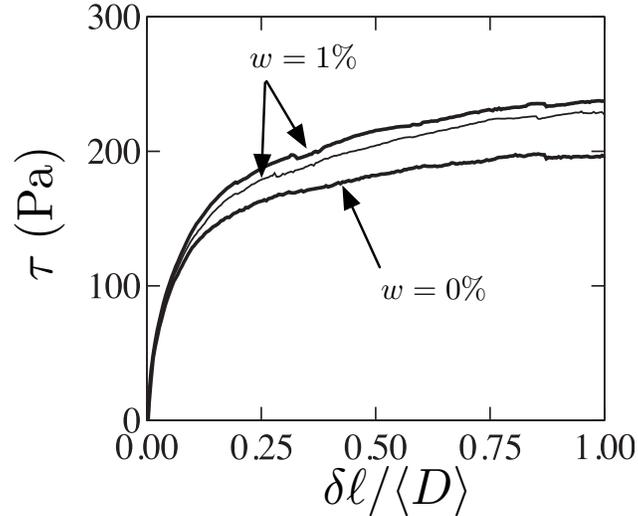


FIG. 3.40: Relation contrainte-déformation pour les teneurs en eau $w = 1\%$ et $w = 0\%$. La courbe intermédiaire correspond à un échantillon ($w = 1\%$) avec un nombre de ponts capillaires réduit de moitié

Le tableau 3.5 regroupe les estimations théoriques c^{th} ainsi que les mesures c_m de la valeur maximale du paramètre de cohésion pour tous les échantillons expérimentaux et l'échantillon numérique. Les paramètres de l'équation 3.27 y sont également rapportés. On peut remarquer une excellente concordance entre les valeurs c^{th} et c_m dans tous les cas. Notons que si le préfacteur s n'avait pas été incorporé à l'équation 3.27 (i.e. si l'équation de Rumpf avait été utilisée sans tenir compte de la polydispersité), la valeur mesurée de c_m aurait été inférieure à c^{th} d'un facteur s . Pour les expériences avec le sable et les billes de verre, on a pris $Z_L = 6$. Ce choix est raisonnable pour une distribution homogène de l'eau au niveau des points de contact (Kohonen et al., 2004; Fournier et al., 2005). La valeur du facteur de polydispersité s a été calculée à partir de la connaissance de distribution granulométrique des différents matériaux granulaires.

3.4 Conclusion

Une partie de ce chapitre, consacrée à l'essai de cisaillement à la boîte de Casagrande, constitue une validation de la modélisation présentée au chapitre 2. Cette validation a porté, d'une part, sur les aspects purement numériques du code de calcul réalisé et, d'autre part, sur la pertinence des lois d'interaction. Cette étude, associée à une investigation expérimentale, a permis de mettre en évidence la nécessité d'effectuer des essais de cisaillement

	S	BV45	BV48	BV1	Simulations
$\langle D \rangle$ (mm)	0,16	0,45	0,60	1,00	1,65
s	0,50	0,99	0,91	1,00	0,79
Z_L	6	6	6	6	9
ϕ	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6
$\tan \varphi$	0,66	0,58	0,58	0,46	0,48
c_m (Pa)	600	350	300	150	120
c^{th} (Pa)	709	438	302	158	118

TAB. 3.5: Paramètres mesurés et paramètres théoriques pour tous les échantillons expérimentaux et l'échantillon numérique.

sous faibles contraintes afin de laisser apparaître l'effet de la cohésion capillaire sur des grains de taille relativement importante. Un nouveau dispositif de cisaillement direct faiblement contraint a été mis au point en s'inspirant du dispositif normalisé de Casagrande. Une comparaison entre les résultats expérimentaux obtenus par ce nouveau dispositif et les résultats de simulations a permis la conduite d'une analyse micro-macro en se basant sur une approche théorique. Cette analyse a montré l'importance prépondérante de la densité de ponts liquides dans le matériau et donc de la distribution du liquide. De plus, l'influence de la polydispersité a pu être interprétée par l'introduction d'un nouveau paramètre s .

Applications

4.1	Compression simple d'un matériau granulaire	118
4.1.1	Rappel des résultats expérimentaux	118
4.1.2	Étude numérique	119
4.2	Vidange d'un matériau granulaire cohésif	127
4.2.1	Préparation de l'échantillon	127
4.2.2	Influence de la cohésion locale sur le débit de matière	132
4.2.3	Influence de la cohésion locale sur l'angle de repos	137
4.2.4	Bilan	139
4.3	Étude de la traficabilité d'un engin chenillé	140
4.3.1	Influence de la force de cohésion entre les grains	140
4.3.2	Influence de la hauteur de l'échantillon	142
4.4	Conclusion	145

L'objectif de ce dernier chapitre, est de présenter, au travers de quelques cas tests, les possibilités du code de calcul `tapio-K`. Les cas tests choisis couvrent un vaste ensemble de problématiques posées dans le cas de matériaux granulaires faiblement contraints. Il s'agit en particulier de l'étude de l'influence de :

- la redistribution locale du liquide sur la résistance à la compression simple (3D) ;
- la cohésion locale sur l'écoulement et sur l'angle de repos (2D) ;
- la cohésion locale sur la traficabilité d'un sol de surface (2D).

Comme souligné ci-dessus, la première application est traitée dans une configuration tridimensionnelle et les deux autres applications sont traitées dans une configuration bidimensionnelle. Les raisons de ce choix sont doubles :

- le programme `tapio-K` a été réalisé pour l'étude du comportement de matériaux granulaires cohésifs à la fois en configuration 2D et 3D. Il semblait donc naturel de proposer des illustrations dans les deux configurations.
- La mise au point du code constitue une part importante du travail réalisé en terme de durée, ce qui laisse moins de temps à l'étude d'applications. Des applications bidimensionnelles ont donc été privilégiées car elles nécessitent un temps de préparation des échantillons et de calcul largement plus faibles que dans le cas 3D.

4.1 Compression simple d'un matériau granulaire

L'objet de cette section est d'étudier l'influence de la teneur en eau sur la résistance à la compression simple d'un matériau granulaire. La compression simple présente l'avantage de mettre en oeuvre une résistance suffisamment faible, ce qui permet de mettre en évidence les effets capillaires. Cette étude comprend un volet numérique et un volet expérimental. Le volet expérimental est emprunté aux travaux de [Soulié \(2005\)](#). Dans ces travaux, Soulié a présenté une première confrontation entre simulation et expérimentation. Cette confrontation a permis de montrer la bonne adéquation entre simulations et expérimentations sur le plan qualitatif (allure des courbes et ordres de grandeur). Cependant, sur le plan quantitatif, elle a révélé un écart faible, mais non négligeable, entre les deux résultats. Une des explications avancée par l'auteur porte sur la distribution de l'eau dans le matériau qui ne correspondrait pas à la distribution dans l'échantillon réel. On se propose, dans cette section, de discuter cette confrontation à la lumière des différentes modélisations proposées pour la distribution de liquide (voir section [3.1](#)).

4.1.1 Rappel des résultats expérimentaux

Les essais expérimentaux sont effectués sur des échantillons de billes de verre dont les diamètres sont compris entre 0,8 mm et 1,3 mm. Les échantillons sont de forme cylindrique de 25 mm de diamètre et de 17 mm de hauteur. Les essais ont été effectués pour différentes teneurs en eau variant de 0,5% à 12%. Les échantillons humides sont obtenus par mélange

dans un récipient hermétique de 100 gramme de billes de verre sèches et de la quantité d'eau nécessaire à l'obtention de la teneur en eau désirée. La masse de billes humides nécessaire à la fabrication de l'échantillon est compactée dans un moule cylindrique. La figure 4.1 montre un exemple d'échantillon fabriqué pour une teneur en eau $w = 3\%$.



FIG. 4.1: Échantillon de billes de verre de diamètres compris entre 0,8 mm et 1,3 mm à une teneur en eau $w = 3\%$

Chaque échantillon est soumis à l'essai de compression simple jusqu'à la rupture. À la rupture, on relève la résistance à la rupture pour chaque teneur en eau initiale de l'échantillon. La figure 4.2 présente une synthèse des résultats expérimentaux obtenus par Soulié. Elle montre une augmentation de la résistance à la compression en fonction de la teneur en eau.

4.1.2 Étude numérique

4.1.2.1 Préparation des échantillons numériques

Les échantillons numériques, de forme cylindrique, sont constitués de 8000 grains dont les diamètres sont compris entre 0,8 mm et 1,3 mm. Les fractions granulométriques utilisées sont données dans le tableau 4.1.

Les paramètres de simulation pour la préparation des échantillons sont donnés dans le tableau 4.2. Dans la première étape de préparation, aucune cohésion entre les grains n'est utilisée. Cette étape consiste à déposer les grains sous l'action de la gravité dans une boîte constituée d'une paroi latérale cylindrique de 25 mm de diamètre et d'une paroi inférieure horizontale. La « mise en forme » de l'échantillon est ensuite obtenue en appliquant une

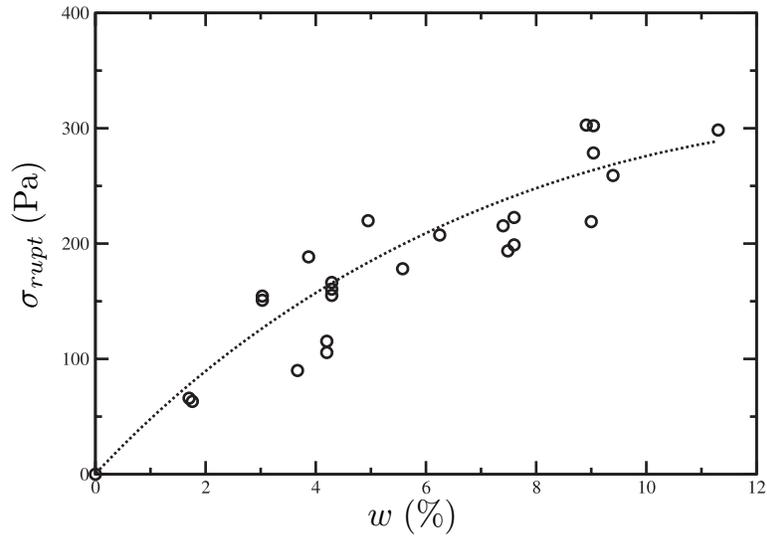


FIG. 4.2: Résistance à la rupture dans l'essai de compression en fonction de la teneur en eau. Résultats expérimentaux obtenus par Soulié (2005) sur des billes de verre de diamètres compris entre 0,8 mm et 1,3 mm

Diamètre de grains	Représentation en nombre de grains
0,8 mm	10%
0,9 mm	20%
1 mm	20%
1,1 mm	20%
1,2 mm	20%
1,3 mm	10%

TAB. 4.1: Fractions granulométriques du matériau numérique

pression verticale d'environ 2 kPa par l'intermédiaire d'une paroi supérieure. À la fin de cette étape, la paroi supérieure est maintenue à sa position, l'échantillon a alors une hauteur d'environ 17 mm et une compacité d'environ 0,62. En partant de cet état, la cohésion capillaire est « activée » entre les grains et, dans le même temps, la paroi cylindrique est retirée. L'échantillon se maintient grâce à la cohésion mais s'affaisse légèrement d'environ un dixième de millimètre sous l'effet de la gravité. Il conserve néanmoins sa forme cylindrique comme on peut le voir sur la figure 4.3.

Paramètre	Symbole	Valeur
Pas de temps	δt	10^{-6} s
Facteur de masse	κ_m	1
Taux d'amortissement normal	α_n et α_n^\bullet	0,5
Raideurs normales de contact	K_n et K_n^\bullet	10^3 N/m
Coefficient de frottement grain-grain	μ	0,2
Coefficient de frottement grain-paroi	μ^\bullet	0,3
Coefficients de régularisation tangentielle	K_t et K_t^\bullet	10^3 Ns/m
Angle de mouillage	θ	0°
Tension superficielle du liquide	γ_L	0,073 N/m
Gravité	$\ \vec{g}\ $	$9,8$ m/s ⁻²
Masse volumique des grains	ρ_s^*	2500 kg/m ³

TAB. 4.2: Paramètres des simulations de la compression simple

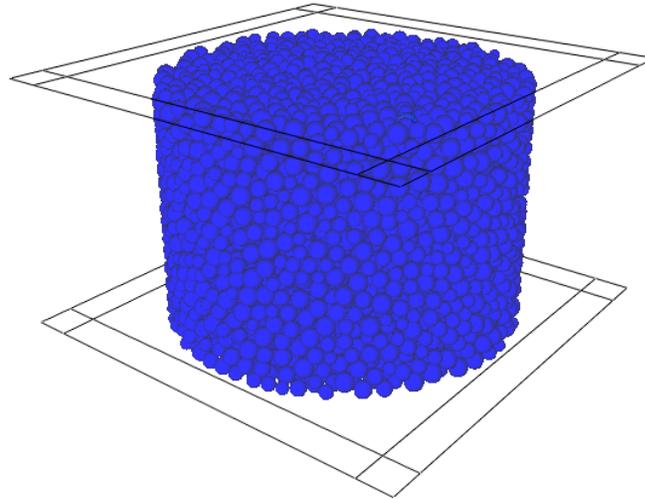


FIG. 4.3: État initial de l'échantillon numérique destiné à la compression simple

4.1.2.2 Essais de compression

Les essais de compression simple ont été réalisés pour les teneurs en eau $w = 2\%$, $w = 4\%$ et $w = 6\%$. Le cas d'une teneur en eau nulle ($w = 0\%$), qui correspond à un échantillon sans cohésion, est également pris en compte. Dans ce cas, l'échantillon n'a pas de tenue mécanique en l'absence de confinement latéral. On considèrera alors que la résistance à la compression est nulle pour une teneur en eau nulle.

Les essais numériques se déroulent en imposant à la paroi supérieure un déplacement à

la vitesse constante de 1 mm/s pendant 2 secondes.

Les simulations permettent d'accéder à des informations relatives à la microstructure et en particulier aux réseaux de forces. Elles donnent également l'évolution de la force globale en fonction du déplacement de la paroi supérieure. Concernant la microstructure, la figure 4.4 présente les réseaux de forces en compression et en traction représentés dans une section verticale d'une épaisseur d'environ quatre fois le diamètre moyen. Cette représentation permet de se rendre compte de l'avantage qu'offre l'essai de compression simple à mettre en exergue les forces capillaires. En effet, il est bien admis que cet essai conduit à des actions de compression (positives) dans le sens axial (figure 4.4a) et à des actions de traction (négatives) dans le sens latéral (figure 4.4b). Les actions négatives constituent une manifestation des forces capillaires qui sont à l'origine du maintien de l'échantillon sans confinement extérieur.

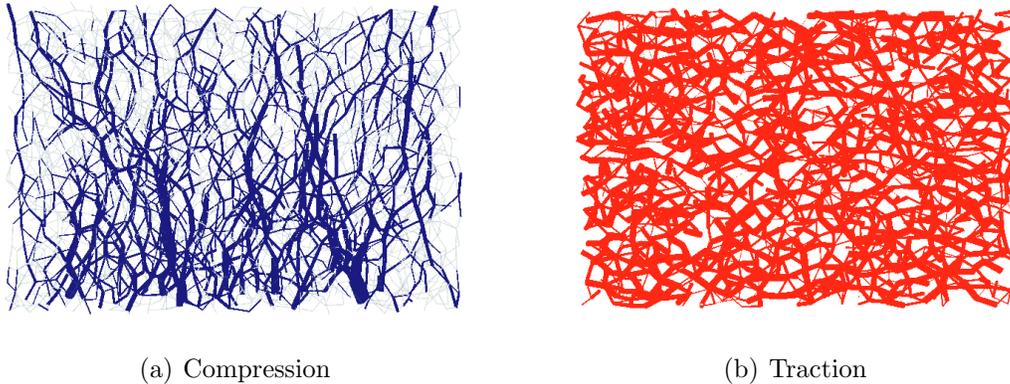


FIG. 4.4: *Réseaux de forces en compression et en traction*

Par ailleurs, les orientations privilégiées des forces positives et négatives, ainsi que leur fréquence, peuvent être visualisées sur la figure 4.5. Cette figure présente les diagrammes polaires des actions de cohésion capillaire et de contact projetées dans une section verticale. Contrairement aux essais de cisaillement faiblement contraint, la fréquence des forces négatives est supérieure à celle des forces positives. On distingue très nettement une forte densité des forces de cohésion dans la direction horizontale alors que les forces de contact sont orientées de façon préférentielle dans la direction de compression (verticale).

Durant les essais numériques, la résultante verticale des forces agissant sur la paroi supérieure est enregistrée. Cette force, rapportée à la surface circulaire initiale¹ de l'échantillon, correspond à la contrainte de compression σ . La figure 4.6 montre, pour le modèle de distribution de liquide dite uniforme, les courbes de résistance à la compression obtenues avec les trois teneurs en liquide choisies ($w = 2\%$, $w = 4\%$ et $w = 6\%$). Dans tous ces cas, la résistance à la compression est caractérisée par une augmentation jusqu'à une

¹La section circulaire de l'échantillon évolue peu dans les simulations.

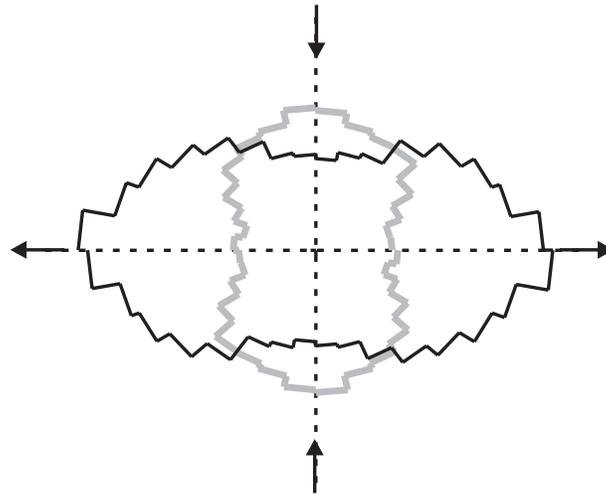


FIG. 4.5: Diagrammes polaires de la fréquence des actions de cohésion capillaire et de contact en fonction de leurs directions dans un essai numérique de compression simple

valeur maximale, que l'on considère comme la *contrainte de rupture* ou *résistance à la compression* σ_{rupt} . Par la suite, on note un adoucissement du matériau qui se traduit par une diminution progressive de la contrainte de compression.

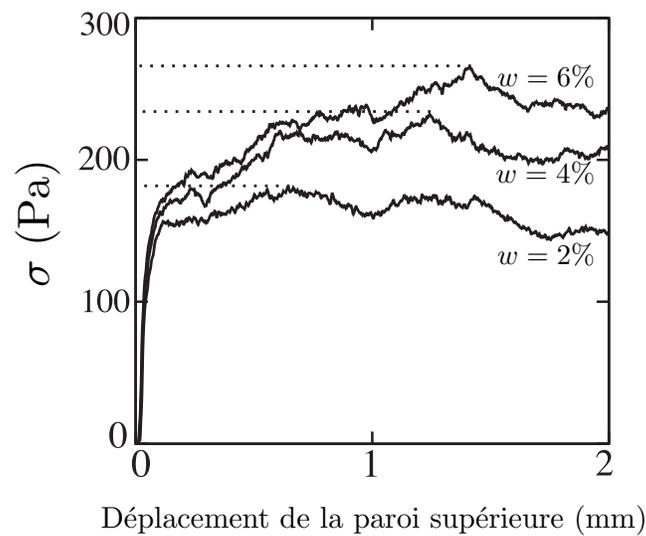


FIG. 4.6: Courbes de résistance à la compression pour différentes teneur en liquide

La figure 4.7 présente une représentation de l'échantillon numérique à $w = 2\%$ à la fin de la simulation ($t = 2$ s). On peut noter le profil de déformation en tonneau (figure 4.7a) comme c'est le cas pour des sols plastiques. Sur la figure 4.7b, on représente une coupe

verticale de l'échantillon qui met en évidence les zones à forte mobilité (zone jaune) et à faible mobilité (zone bleu). On notera ainsi la présence d'un cône immobile au centre bas de l'échantillon qui résulte, d'une part, de la sollicitation par le déplacement de la paroi supérieure, et d'autre part, de l'effet de la gravité.

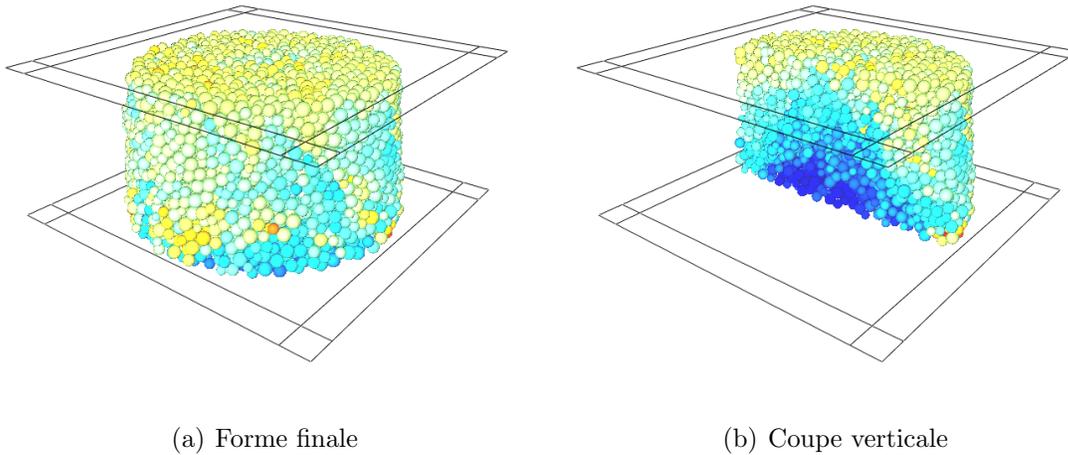


FIG. 4.7: *Échantillon numérique à la fin de la simulation ($w = 2\%$)*

Les contraintes de rupture relevées sur la figure 4.6, pour les simulations à différents teneurs en liquide, sont représentées sur la figure 4.8. On y a également inséré les résultats de précédentes simulations effectuées dans les mêmes conditions par Soulié (2005), ainsi que les résultats expérimentaux de la figure 4.2. La figure 4.8 suggère les remarques suivantes.

- Les résultats de simulation de Soulié présentent un écart non négligeable avec les résultats des expériences. Une des explications avancées par Soulié évoque l'hypothèse de la distribution de l'eau dans le matériau qui ne correspondrait pas à la distribution dans l'échantillon réel.
- Nos résultats de simulation diffèrent de ceux de Soulié et présentent un écart moins important avec les expériences. En effet, bien que les simulations aient été faites dans les mêmes conditions, quelques paramètres purement numériques ont été réajustés. Sans ce réajustement, des calculs préliminaires ont permis de retrouver exactement les résultats de Soulié.

Pour vérifier l'origine des écarts signalés entre expérience et simulation, les modèles de distribution de liquide présentés dans la section 3.1 ont été utilisés. Les résultats obtenus pour les différentes simulations correspondantes sont reproduits sur la figure 4.9.

On note que le type de modèle de distribution de liquide influe peu sur le comportement

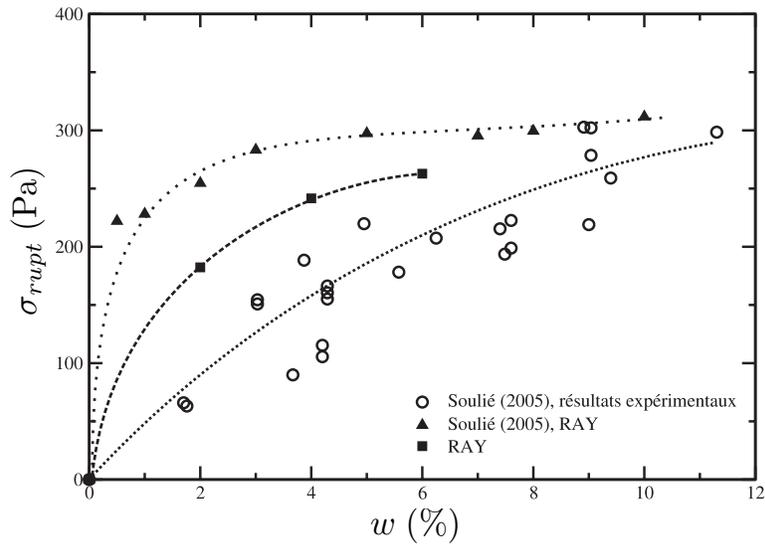


FIG. 4.8: Résistance à la rupture dans l'essai de compression en fonction de la teneurs en eau. Comparaison avec les résultats de Soulié (2005)

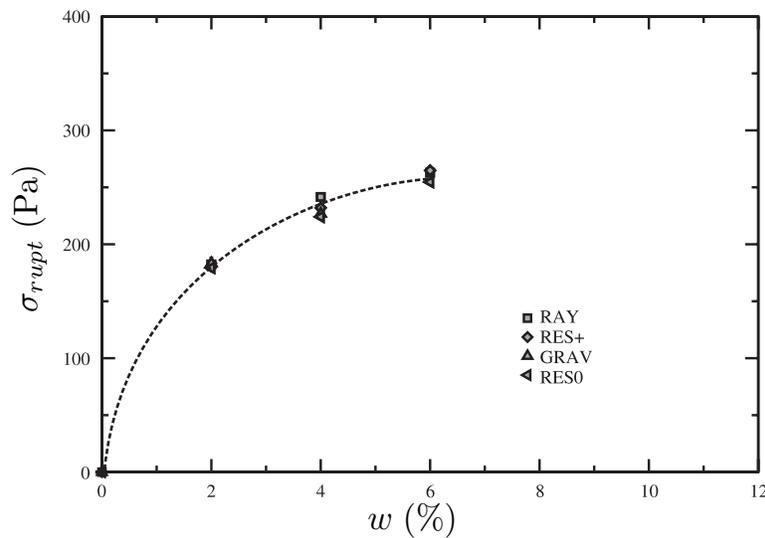


FIG. 4.9: Résistance à la rupture dans l'essai de compression en fonction de la teneur en eau. Simulation avec différents modèle de distribution de liquide

macroscopique. Ceci conforte l'analyse faite au chapitre 3 où on a montré que l'influence de la densité n_L des ponts liquides dans le matériau est largement prépondérante par rapport à celle du type de distribution (donc des volumes des ponts liquides). Cette remarque nous a conduit à proposer d'autres simulations numériques avec une densité plus faible de ponts

liquides. Par souci de simplicité, on a considéré le cas où cette densité est divisée par deux, mais en veillant à ce que la répartition initiale des ponts liquides reste globalement homogène. Le modèle de distribution de liquide avec réserve (RES+) a été utilisé pour ces nouvelles simulations. Les résultats, obtenus bien entendu dans les mêmes conditions de simulation, sont comparés à ceux des simulations précédentes et à l'expérience sur la figure 4.10.

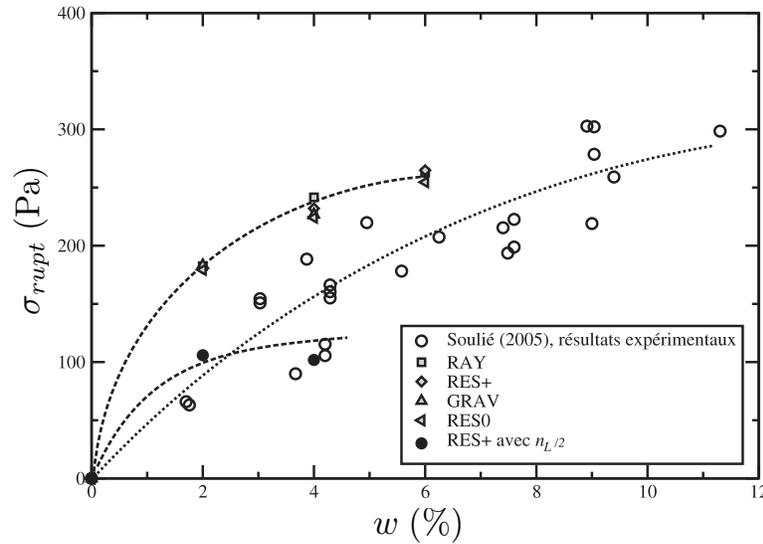


FIG. 4.10: Résistance à la rupture dans l'essai de compression en fonction de la teneur en eau. Influence de la densité des ponts liquides

On voit nettement que le paramètre densité de ponts liquides influence de façon significative les résultats et que son ajustement permet d'approcher les résultats expérimentaux. Il est évident que seule une méthode d'exploration de la distribution réelle de liquide dans le matériau pourrait permettre de quantifier ce paramètre (Kohonen et al., 2004; Fournier et al., 2005). En ce qui concerne le numérique, il est donc montré qu'il faut accorder une importance de premier plan à la densité de ponts liquides. Si des comparaisons sont faites avec l'expérience, il conviendra de veiller à une bonne homogénéité de la teneur en eau, plus particulièrement pour les teneurs en eau faibles.

4.2 Vidange d'un matériau granulaire cohésif

L'objectif de cette section est d'étudier l'influence de la cohésion locale sur l'écoulement d'un matériau granulaire ainsi que sur l'angle de repos après écoulement. À cette fin, des simulations bidimensionnelles ont été réalisées. Le principe de ces simulations est illustré sur la figure 4.11. Le matériau granulaire est disposé dans le compartiment supérieur d'une boîte à deux compartiments. La base de ce compartiment est munie d'une trappe qui permet de laisser s'écouler le matériau vers le compartiment inférieur. Le fond du compartiment supérieur est constitué d'une couche de grains circulaires dont la position est bloquée. Il présente ainsi une rugosité non nulle qui favorise la formation d'une pente. La largeur globale de la boîte est de 140 mm et la hauteur du dépôt est d'environ 36 mm. La trappe a une largeur de 20 mm. Pendant l'écoulement, le débit instantané de matériau, noté $Q(t)$, est mesuré à travers l'ouverture de la trappe à intervalles de temps réguliers. À la fin de l'essai, on a accès à l'angle de repos noté θ_R .

Pour cette investigation, la loi de cohésion uniforme sans hystérésis a été utilisée dans un premier temps. Cette loi de cohésion n'est cependant reliée à aucune phénoménologie particulière. On s'est donc également intéressé à l'influence de l'eau – dans un état pendulaire – sur l'écoulement et sur l'angle de repos du matériau. La loi de cohésion capillaire avec hystérésis a donc été utilisée. Toutefois, cette loi décrit l'évolution de la force de cohésion pour une configuration tridimensionnelle d'un pont liquide. Dans les simulations bidimensionnelles présentées dans cette section, les grains sont considérés sphériques lorsque la loi de cohésion capillaire est employée. Dans ce cas, les grains ne peuvent se mouvoir que suivant les trois degrés de libertés permis en 2D (translations suivant \vec{X} et \vec{Y} , et rotation d'axe \vec{Z}).

L'illustration de ces lois de cohésion est rappelée sur la figure 4.12.

4.2.1 Préparation de l'échantillon

Le matériau choisi pour cette étude est constitué de 5000 grains circulaires avec des diamètres variant de 0,6 mm à 1,4 mm. L'échantillon a été mis en place en lâchant, sous l'effet de la gravité, les grains initialement placés sur un réseau carré. Pendant la phase dépôt, les grains interagissent par du contact frottant. Néanmoins une force de cohésion agit à distance entre les grains durant les premiers pas de temps (une centaine). L'objectif est d'introduire un certain désordre dans la position des grains comme on peut le voir sur la figure 4.13.

Si on s'intéresse à l'orientation des contacts, on se rend compte que l'échantillon présente, dans sa configuration stabilisée après le dépôt, un déficit du nombre de contacts dans la direction horizontale (figure 4.14). Cette situation est engendrée par le mode de préparation utilisé, c'est-à-dire la chute **simultanée** de l'ensemble des grains dans le réceptacle supérieur. Les premiers contacts ont une direction non horizontale, et la

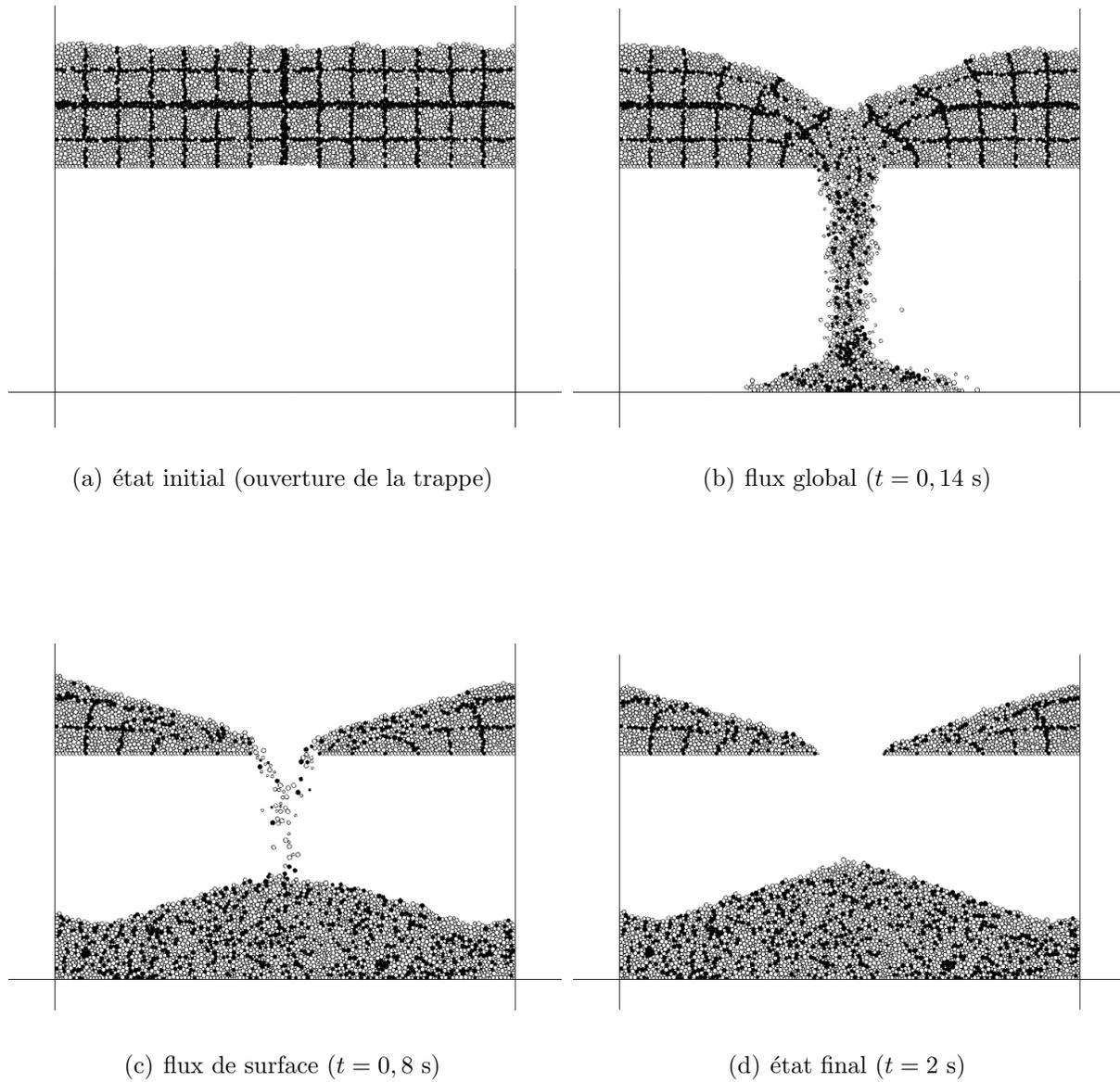


FIG. 4.11: Configuration du système à quatre instants d'une simulation réalisée sans cohésion

simultanéité induit des phénomènes de frustration bloquant les roulements.

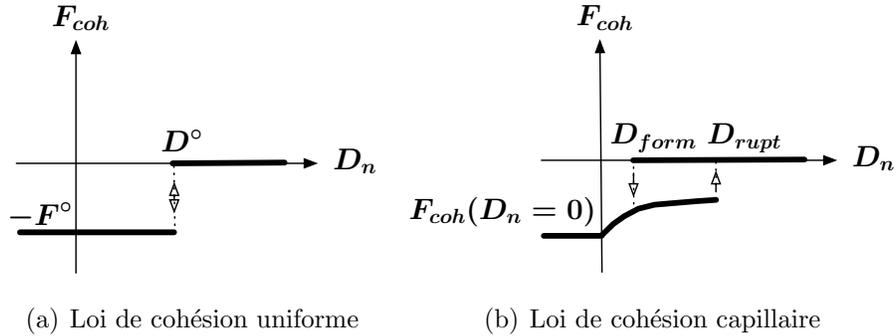


FIG. 4.12: *Lois de cohésion utilisées pour l'étude de l'écoulement et de l'angle de repos d'un matériau granulaire*

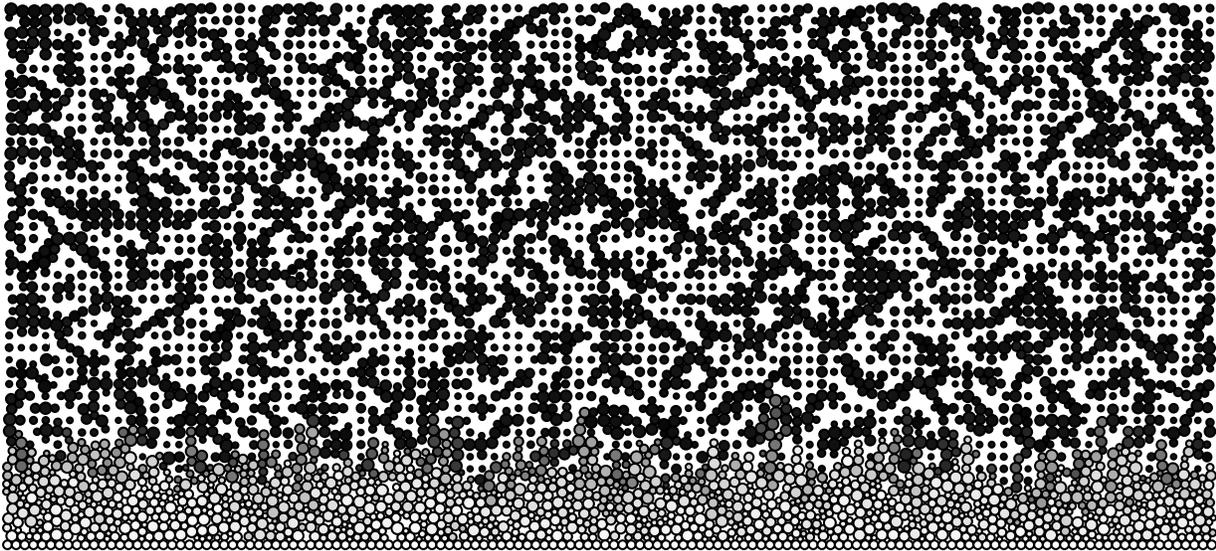


FIG. 4.13: *Dépôt sous gravité*

4.2.1.1 Stabilisation avec la loi de cohésion uniforme

L'échantillon initial a été stabilisé avec différentes forces de cohésion F° (constantes) en prenant, dans un premier temps, une distance de rupture/formation quasiment nulle $D^\circ = 10^{-3}$ mm. Par souci de simplicité, la distance D° sera désignée *distance de cohésion* par la suite. L'opération de stabilisation de l'échantillon a ensuite été répétée avec une distance de cohésion $D^\circ = 0,4$ mm. Les paramètres utilisés pour les simulations de stabilisation et de vidange sont donnés dans le tableau 4.3.

La figure 4.15 montre les indices de cohésion (voir section 3.2.4) obtenus en fonction des différentes forces de cohésion pour les deux distances de rupture choisies. On peut voir

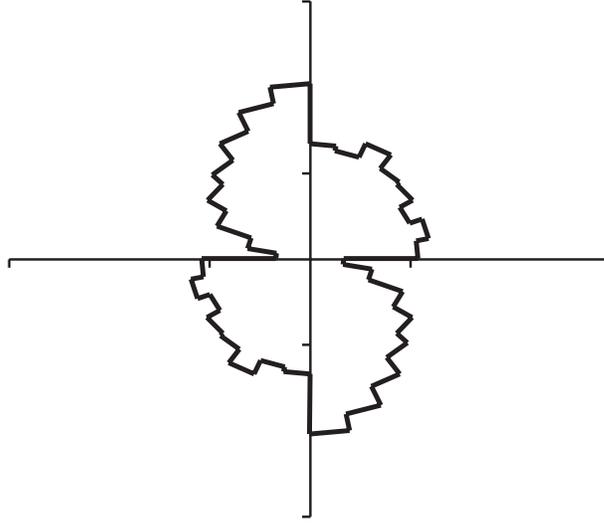


FIG. 4.14: *Diagramme polaire de la fréquence des directions de contacts à la fin du dépôt. La simulation a été réalisée sans cohésion*

Paramètre	Symbole	Valeur
Pas de temps	δt	10^{-6} s
Facteur de masse	κ_m	1
Taux d'amortissement normal	α_n et α_n^\bullet	0,5
Raideurs normales de contact	K_n et K_n^\bullet	10^6 N/m
Coefficients de frottement	μ et μ^\bullet	0,3
Coefficients de régularisation tangentielle	K_t et K_t^\bullet	10^6 Ns/m
Gravité	$\ \vec{g}\ $	$9,81$ m/s ⁻²
Masse volumique des grains	ρ_s^*	2500 kg/m ³

TAB. 4.3: *Paramètres communs aux simulations avec la loi de cohésion uniforme*

que la plus grande distance de cohésion induit les indices de cohésion les plus élevés. Ceci peut s'expliquer par une augmentation du nombre de liens cohésifs modifiant localement les états d'équilibre des grains. On peut également constater que l'indice de cohésion est limité à une valeur d'environ 0,7 obtenue pour une force de cohésion F° de l'ordre de 10 N.

Une analyse de la distribution statistique des forces normales d'interaction a été effectuée sur les échantillons stabilisés (figure 4.16). Les observations suivantes peuvent être faites.

- Pour la distance de cohésion $D^\circ = 10^{-3}$ mm, la force de cohésion ne modifie pas de façon significative la distribution statistique des forces normales d'interaction positives. Par contre, les forces négatives sont plus nombreuses pour les forces de cohésion

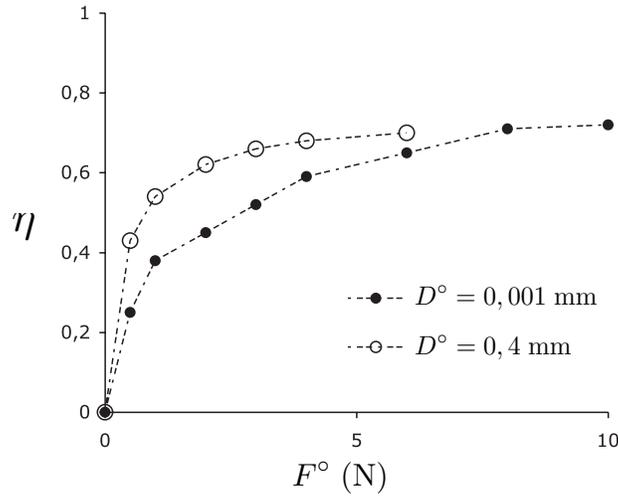


FIG. 4.15: Indice de cohésion en fonction de la force locale de cohésion

les plus élevées.

- o Pour la distance de cohésion $D^\circ = 0,4$ mm, la force d'interaction la plus probable correspond à la force de cohésion $F_{coh} = -F^\circ$. Il s'agit des liens où la cohésion agit sans qu'il y ait de contact. La répartition des autres forces est d'autant plus homogène que la force de cohésion est élevée.

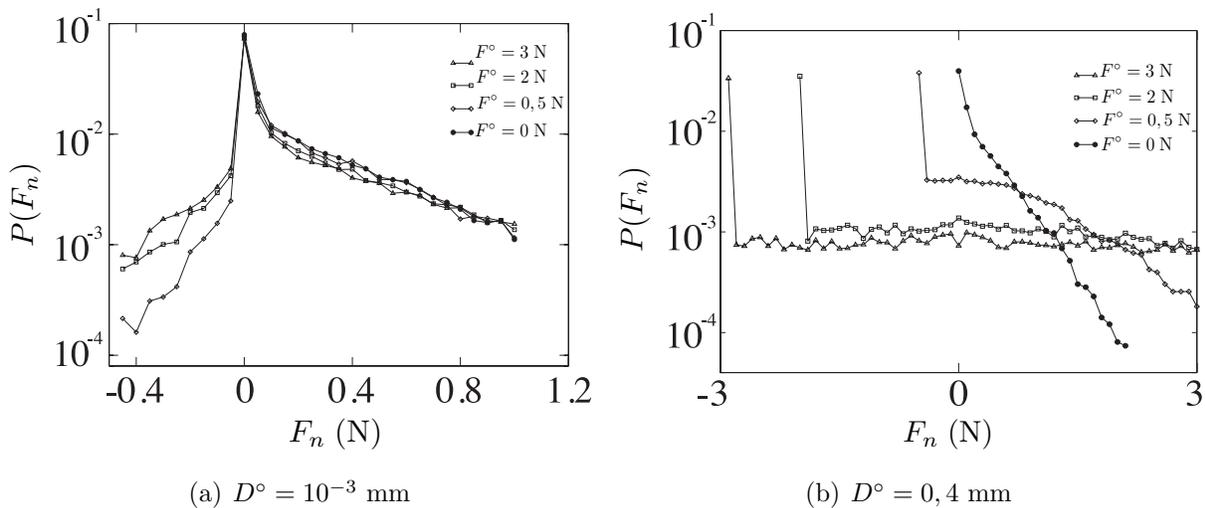


FIG. 4.16: Distribution statistique des forces normales d'interaction pour différentes forces locales de cohésion

Des simulations préliminaires d'écoulement ont montré qu'au delà d'un indice de co-

hésion $\eta \simeq 0,25$, la pente obtenue en fin de simulation ne permettait pas de mesurer un quelconque angle de repos. Il faut cependant noter que, bien que l'indice de cohésion soit calculé sur l'ensemble des interactions, il peut être localement supérieur à 1 pendant l'écoulement laissant ainsi apparaître des surfaces libres quasiment verticales. Plusieurs valeurs de force de cohésion ont donc été choisies de façon à obtenir des indices de cohésion (globaux) répartis dans une gamme de valeurs comprises entre 0 et 0,25.

4.2.1.2 Stabilisation avec la loi de cohésion capillaire

Les paramètres de simulation sont donnés dans le tableau 4.4. Le diamètre moyen des grains étant de l'ordre du millimètre, on a considéré – à partir d'observations expérimentales sur des billes de verre humides – qu'une teneur en eau inférieure à 6% correspondait à des états pendulaires.

Paramètre	Symbole	Valeur
Pas de temps	δt	10^{-6} s
Facteur de masse	κ_m	1
Taux d'amortissement normal	α_n et α_n^\bullet	0,5
Raideurs normales de contact	K_n et K_n^\bullet	10^3 N/m
Coefficients de frottement	μ et μ^\bullet	0,3
Coefficients de régularisation tangentielle	K_t et K_t^\bullet	10^3 Ns/m
Angle de mouillage	θ	0°
Tension superficielle du liquide	γ_L	0,073 N/m
Distance de (re)formation des ponts liquides	D_{form}	0 mm
Gravité	$\ \vec{g}\ $	$9,8$ m/s ⁻²
Masse volumique des grains	ρ_s^*	2500 kg/m ³

TAB. 4.4: Paramètres communs aux simulations avec la loi de cohésion capillaire

Une analyse microscopique de la texture et de la distribution des forces n'a pas été effectuée dans le cas de la stabilisation avec la loi de cohésion capillaire. Dans le cas de cette loi (3D), une telle analyse a été faite dans le détail pour le cas des simulations du cisaillement direct (voir section 3.3.2) qui ont été réalisées en configuration 3D.

4.2.2 Influence de la cohésion locale sur le débit de matière

Avant d'aborder l'influence de la cohésion sur le débit de matière, on s'intéresse à l'évolution de la direction des contacts durant l'écoulement dans un cas sec (figure 4.17). On peut voir que le déficit de contacts horizontaux diminue jusqu'à ce que l'échantillon ne présente quasiment plus d'anisotropie (figure 4.17c). Ce phénomène est sûrement lié au fait que le tas est formé, dans le réceptacle inférieur, à partir d'un « point source » et

donc par une succession d'avalanches favorisant une isotropie de la direction des contacts. Il faut noter ici que la statistique sur la direction des contacts est réalisée sur l'ensemble des contacts indépendamment de l'emplacement des grains (compartiment supérieur ou inférieur). L'observation de cette isotropie globale dépend donc du nombre de grains qui se sont écoulés.

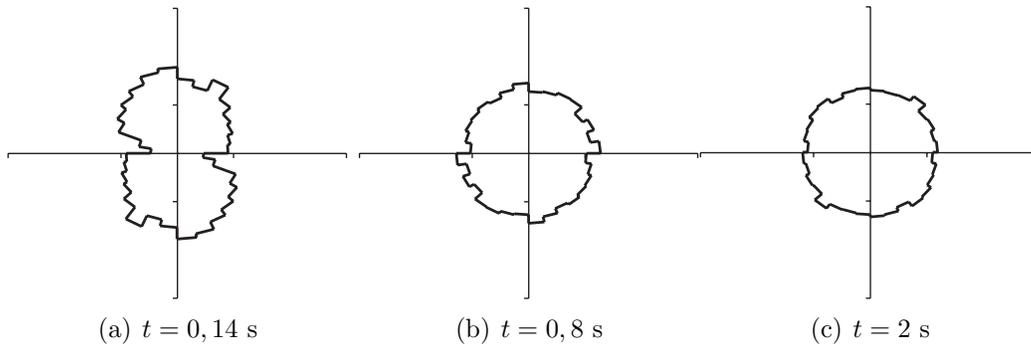


FIG. 4.17: Diagrammes polaires de la fréquence des directions de contacts à différents instants de la vidange. La simulation a été réalisée sans cohésion

4.2.2.1 Écoulement en présence de cohésion uniforme

L'aspect le plus frappant lorsque l'on visualise des simulations d'écoulement d'un matériau granulaire cohésif est la distinction entre différents « comportements » de l'écoulement. Pour chaque distance de cohésion choisie, on peut distinguer – de façon qualitative – trois régimes d'écoulement liés à la force de cohésion. Ces régimes, décrits ci-après, sont illustrés sur la figure 4.18.

- Le *régime d'écoulement granulaire* pour les forces de cohésion les plus faibles. Dans ce cas, on ne distingue pas de formation d'agglomérats. L'écoulement est similaire à celui du cas sec mais l'angle de repos en fin d'écoulement est supérieur. La surface libre est plane comme pour les tas secs.
- Le *régime d'écoulement aggloméré* pour les forces de cohésion assez fortes. L'écoulement est constitué d'agrégats de grains de tailles variables qui peuvent se faire et se défaire. La surface libre en fin d'écoulement présente une rugosité correspondant à la taille des agrégats.
- Le *régime d'écoulement plastique* pour les forces de cohésion les plus fortes. L'écoulement du matériau rappelle celui d'un fluide visqueux et s'effectue avec un mouvement d'ensemble cohérent des grains. Des ruptures peuvent apparaître suivant des plans de glissement nettement définis.

La littérature rapporte également l'existence de différents régimes. On peut citer les travaux de [Tegzes et al. \(1999\)](#) qui ont réalisé un nombre considérable de mesures d'angle

de repos avec un dispositif expérimental similaire au nôtre. Le matériau utilisé par ces auteurs est constitué de billes de verre et de différentes quantités d'huile.

L'évolution du nombre de grains dans la partie inférieure du dispositif correspond au *débit cumulé* $Q_c(t)$ de la matière granulaire. Pratiquement, le débit cumulé est calculé en sommant les débits instantanés $Q(t)$ déterminés à intervalles de temps réguliers (nombre de grains par unité de temps). Le *taux de passage* T_g des grains peut donc être obtenu à tout instant par la relation suivante :

$$T_g(t) = \frac{Q_c(t)}{N_g} \quad (4.1)$$

où N_g est le nombre de grains dans tout le dispositif. Les évolutions des taux de passage T_g obtenues avec la loi de cohésion uniforme, pour différentes forces de cohésion, sont représentées sur la figure 4.19 pour les deux distances de cohésion choisies.

La signature de différents régimes d'écoulement peut à nouveau être observée sur ces courbes.

- Tout d'abord, un régime sans intermittence (courbes lisses) correspondant au régime d'écoulement granulaire précédemment défini.
- Ensuite, un régime avec des intermittences repérables par une évolution saccadée du débit cumulé sous forme d'une succession de paliers rapprochés. Ce régime correspond au régime d'écoulement aggloméré.
- Enfin, un régime avec des paliers éloignés dans le temps caractérisant un écoulement par blocs de matière. Ce régime correspond au régime d'écoulement plastique.

L'intermittence de l'écoulement peut également être observée sur l'évolution de la *vitesse quadratique moyenne* $\langle \vec{v}^2 \rangle$ définie comme suit :

$$\langle \vec{v}^2 \rangle = \frac{1}{N_g} \sum_{i=1}^{N_g} \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i \quad (4.2)$$

où \vec{v}_i est le vecteur vitesse du grain i . La vitesse quadratique moyenne renseigne sur le débit instantané de la matière granulaire. En effet, on a pu vérifier que ces quantités sont corrélées dans ce problème. La vitesse quadratique est représentée sur la figure 4.20 pour différentes forces de cohésion et pour les deux distances de cohésion utilisées.

Encore une fois, on note, à travers l'évolution de la vitesse quadratique, l'apparition des trois régimes d'écoulement caractérisés par l'allure plus ou moins régulière des courbes de la figure 4.20.

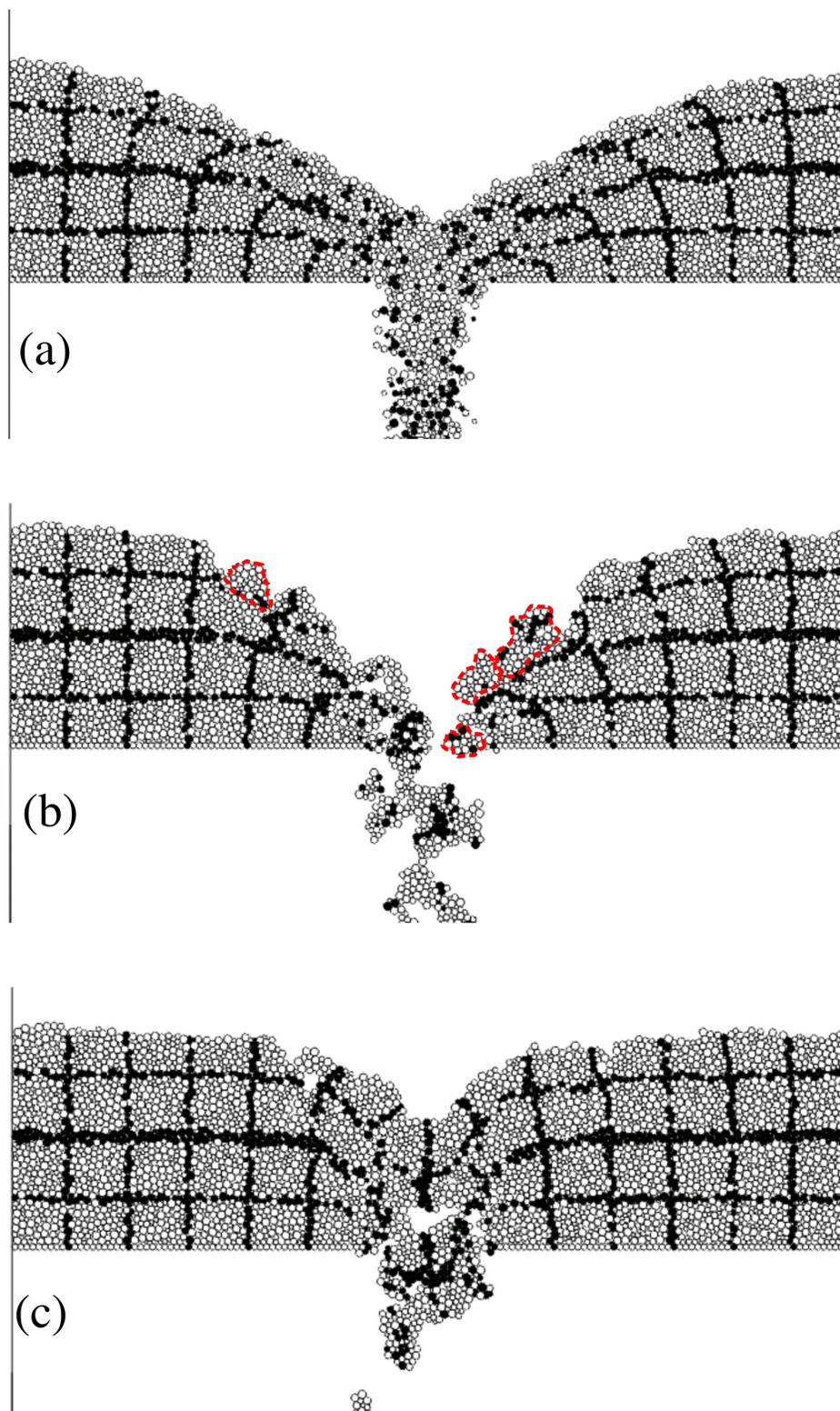


FIG. 4.18: Observation qualitative des trois régimes d'écoulement. (a) régime d'écoulement granulaire ; (b) régime d'écoulement aggloméré ; (c) régime d'écoulement plastique

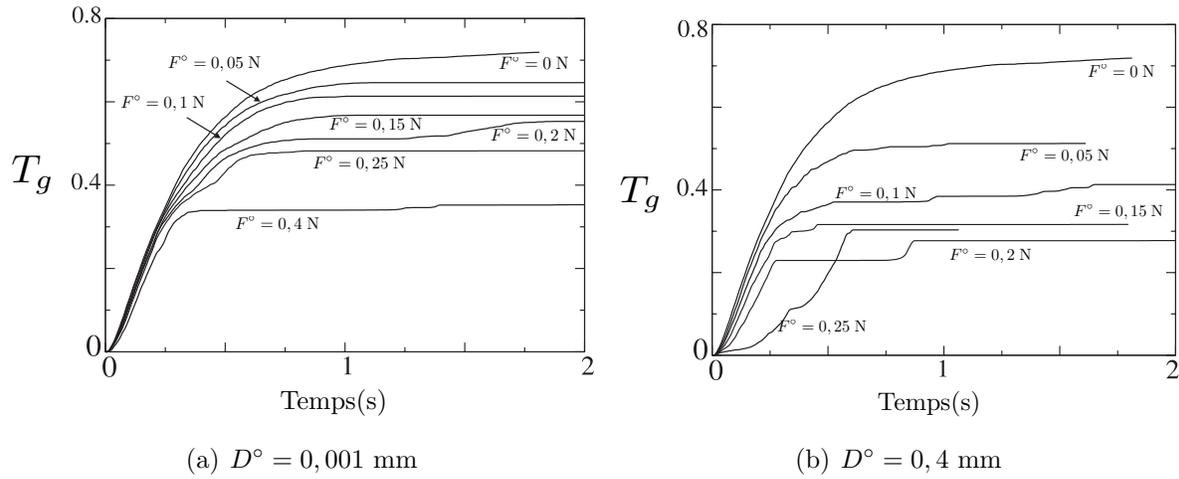


FIG. 4.19: Taux de passage des grains dans le réceptacle inférieur pour les différentes forces constantes de cohésion

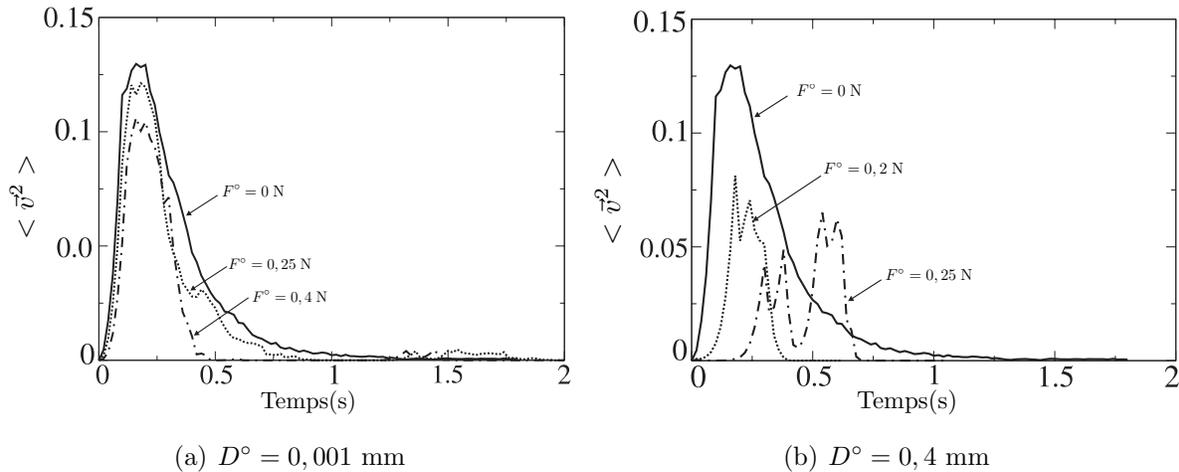


FIG. 4.20: Vitesse quadratique moyenne des grains pour les différentes forces constantes de cohésion

4.2.2.2 Écoulement en présence de cohésion capillaire

Des observations similaires peuvent être faites avec la loi de cohésion capillaire. Elles apparaissent néanmoins de façon moins nette comme on peut le voir sur la figure 4.21. Cette figure présente les variations dans le temps du taux de passage des grains T_g et de la vitesse quadratique moyenne $\langle \bar{v}^2 \rangle$. Ces variations sont données dans le cas sec ($w = 0\%$) et dans le cas humide (différents teneurs en eau $w > 0\%$). On remarquera que le cas sec ici ($w = 0\%$) correspond au cas avec $F^\circ = 0 \text{ N}$ dans le cas de la loi de cohésion uniforme. On

note une différence nette entre le cas sec et le cas humide. Par contre, aucune distinction n'est observée entre les différents teneurs en eau non nulles. Ceci suggère que, dans le cas de la cohésion capillaire, le régime d'écoulement aggloméré ou le régime d'écoulement plastique (pour des grains de diamètres inférieurs) peut avoir lieu à partir d'une teneur en eau proche de 0. Ceci confirme encore une fois les remarques formulées à propos de l'influence de la teneur en eau sur différentes propriétés en rapport avec la cohésion du matériau granulaire.

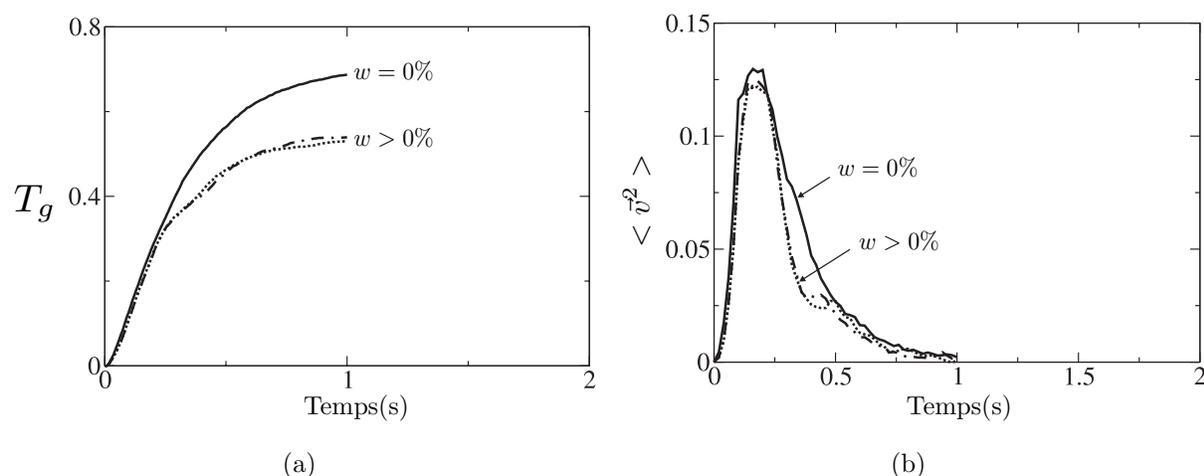


FIG. 4.21: Taux de passage des grains (a) et vitesse quadratique moyenne (b) pour différentes teneurs en eau

4.2.3 Influence de la cohésion locale sur l'angle de repos

Lorsque l'écoulement est terminé et que l'échantillon est à nouveau stabilisé, l'angle de repos est déterminé par mesure graphique à l'aide du logiciel ImageJ². On obtient, pour chaque simulation, deux valeurs d'angle de repos. L'angle retenu correspond à la moyenne de ces deux angles et la « variabilité » de cet angle est estimée comme étant la différence entre les deux angles mesurés. Toutefois, cette variabilité n'a pas la signification d'un écart type ; elle doit être considérée comme une indication sur la plage de variation de l'angle de repos.

4.2.3.1 Angles de repos avec la loi de cohésion uniforme

La figure 4.22a montre les angles de repos obtenus en fonction de la force de cohésion pour les deux distances de cohésion testées. On peut constater une tendance à l'augmen-

²Logiciel libre d'analyse et de traitement d'images écrit en Java et donc multiplateformes. Site officiel : <http://rsb.info.nih.gov/ij/>

tation de l'angle de repos lorsque la force de cohésion locale augmente. Par ailleurs, pour une même force de cohésion, l'angle de repos est plus élevé pour la distance de cohésion $D^\circ = 0,4$ mm. Si on représente l'angle de repos en fonction de l'indice de cohésion, on ne perçoit plus de dépendance vis-à-vis de la distance de cohésion. Ceci suggère que l'indice de cohésion est un paramètre plus pertinent dans l'évolution de l'angle de repos.

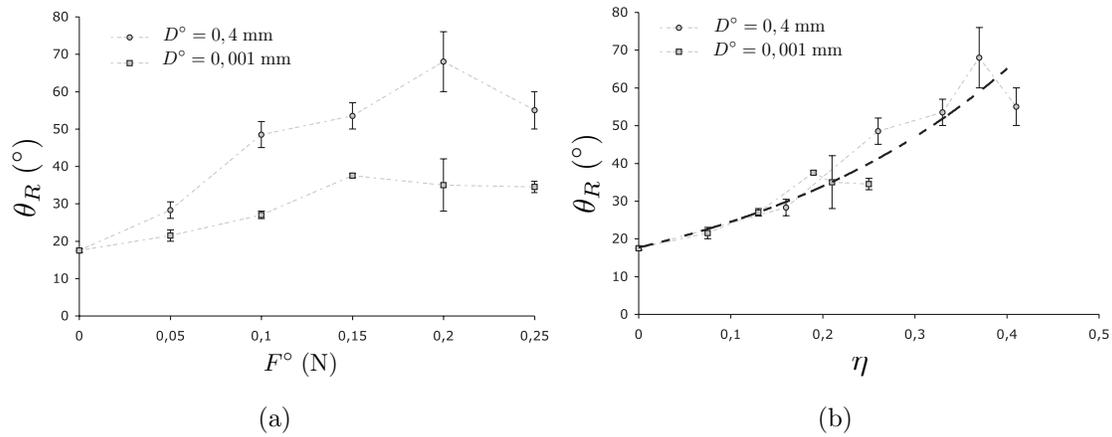


FIG. 4.22: Angle de repos en fonction de la force de cohésion (a) et de l'indice de cohésion moyenné pendant l'écoulement (b) pour deux distances de cohésion

4.2.3.2 Angles de repos avec la loi de cohésion capillaire

L'angle de repos est représenté sur la figure 4.23 en fonction de la teneur en eau. On note une augmentation rapide de l'angle de repos de 18° ($w = 0\%$) jusqu'à environ 35° dès les plus faibles teneurs en eau ($< 1\%$). Cette situation est, comme souligné déjà dans le chapitre 3, liée au fait que la force de cohésion capillaire ne dépend pas du volume du pont liquide lorsque les grains sont en contact. C'est la raison pour laquelle une infime quantité d'eau bien répartie dans un matériau granulaire tel que du sable de plage permet de « modeler celui-ci sous forme de boule ».

Dans les simulations avec la cohésion capillaire, aucune différence significative entre les indices de cohésion n'a été observée pour les différentes teneurs en eau testées. On constate encore une fois que l'indice de cohésion et l'angle de repos sont liés. Ce résultat montre que l'indice de cohésion est un paramètre plus pertinent dans l'évolution de l'angle de repos, pour les deux lois de cohésion, dans la mesure où il comprend implicitement les effets dus à la distance de cohésion, la force de cohésion ou encore de la teneur en eau.

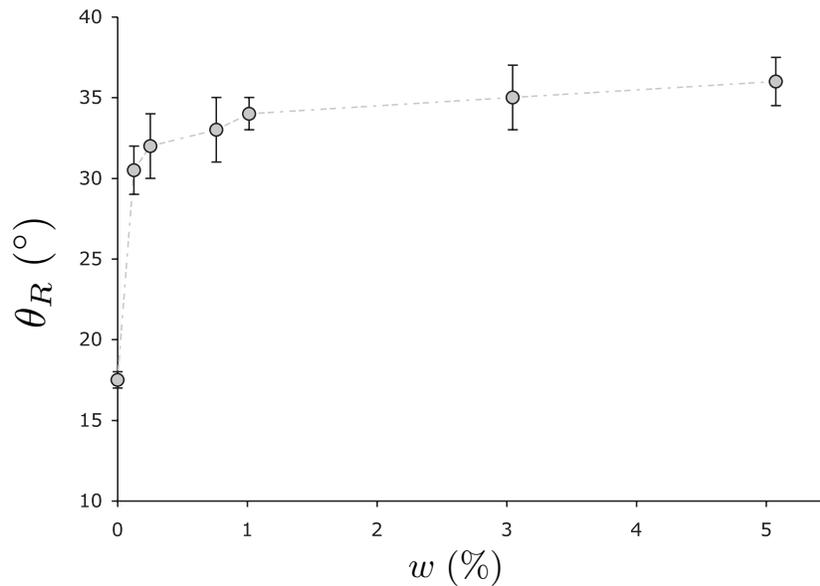


FIG. 4.23: Angle de repos en fonction de la teneur en liquide

4.2.4 Bilan

On a étudié, dans cette section, l'influence de la force locale de cohésion et de la distance de rupture sur l'angle de repos d'un système de particules en utilisant les lois de cohésion uniforme et capillaire. On a montré que l'indice de cohésion apparaît comme un paramètre pertinent pour l'étude de l'angle de repos d'un matériau granulaire cohésif.

On s'est également intéressé au débit de matière. L'analyse de ces données ainsi que des observations qualitatives a fait ressortir trois régimes d'écoulement pour les matériaux granulaires cohésifs : les régimes d'écoulements granulaire, aggloméré et plastique.

Cette application montre, encore une fois, que l'introduction de la cohésion entre les grains, et en particulier d'une cohésion capillaire, induit des comportements non triviaux à l'échelle globale. Elle confirme le résultat important du chapitre 3 sur la différence nette entre le cas sec et le cas humide. Elle montre, une fois de plus, qu'au delà d'une teneur en eau proche de 0, les propriétés du matériau se stabilisent.

4.3 Étude de la traficabilité d'un engin chenillé

Une préoccupation actuelle de la DGA est l'étude de la traficabilité des engins terrestres à chenilles sur différents sols de surface. L'objectif est ici de déterminer la résistance d'un sol à un déplacement horizontal imposé à la chenille. Ceci revient à déterminer la force nécessaire à l'avancement de l'engin sans que celui-ci ne patine.

On cherche dans un premier temps, avec cette application, à évaluer qualitativement l'effet d'une augmentation de la cohésion entre les grains sur la résistance du matériau granulaire (donc sur sa traficabilité). Le système numérique bidimensionnel utilisé est présenté sur la figure 4.24. Les bords de gauche et de droite représentent les frontières de périodicité. Cette périodicité signifie en pratique que l'échantillon se répète à l'identique à l'infini vers la gauche et vers la droite (voir section 2.3.5). Les grains de la frontière de droite interagissent donc avec ceux de la frontière de gauche et vice-versa. L'échantillon numérique a une largeur (dans la direction de périodicité) de 16 cm et une hauteur $h_0 \simeq 46$ cm.

L'échantillon est sollicité par l'intermédiaire d'un patin dont la forme est présentée sur la figure 4.24. La condition de périodicité de l'échantillon implique que ce patin se répète infiniment à l'identique dans la même direction que l'échantillon. Il constitue ainsi un maillon de chenille. Néanmoins, la périodicité limite le nombre de degrés de liberté de ce maillon. En effet, sa rotation doit être empêchée car une orientation non horizontale signifierait que tous les maillons de la chenille sont également tournés dans le même sens. La chenille est donc considérée comme rigide (non articulée). La couche de grains inférieure est caractérisée par un blocage des positions des grains qui la composent. Ceci permet de constituer une paroi rugueuse et ainsi d'empêcher le glissement de l'échantillon en bloc sur la paroi du bas.

Un essai numérique consiste à imposer une force normale N (verticale) sur le patin et à lui imposer un déplacement horizontal à une vitesse V_h constante. La distance d'avancement correspond à la distance horizontale que le patin a effectué. Dans tous les essais présentés dans cette section, on a pris $N = 1000$ N et $V_h = 10$ cm/s. La résistance horizontale R_h correspond à la valeur absolue de la somme des forces d'interaction entre les grains et le patin projetées sur la direction horizontale. La variation Δh de la position verticale du patin traduit les variations de volume du sol.

4.3.1 Influence de la force de cohésion entre les grains

Des simulations ont été réalisées en utilisant la loi de cohésion uniforme. Quatre valeurs de force de cohésion entre les grains ont été choisies : $F^\circ = 0$ N, $F^\circ = 1$ N, $F^\circ = 10$ N et $F^\circ = 20$ N. La figure 4.25a montre la résistance horizontale R_h obtenue pour ces quatre valeurs de cohésion. Le signal étant très perturbé, on a réalisé une moyenne mobile sur les données. Comme on peut s'y attendre, la résistance R_h augmente lorsque la force de cohésion entre les grains augmente. La résistance R_h présente des oscillations qui sont plus

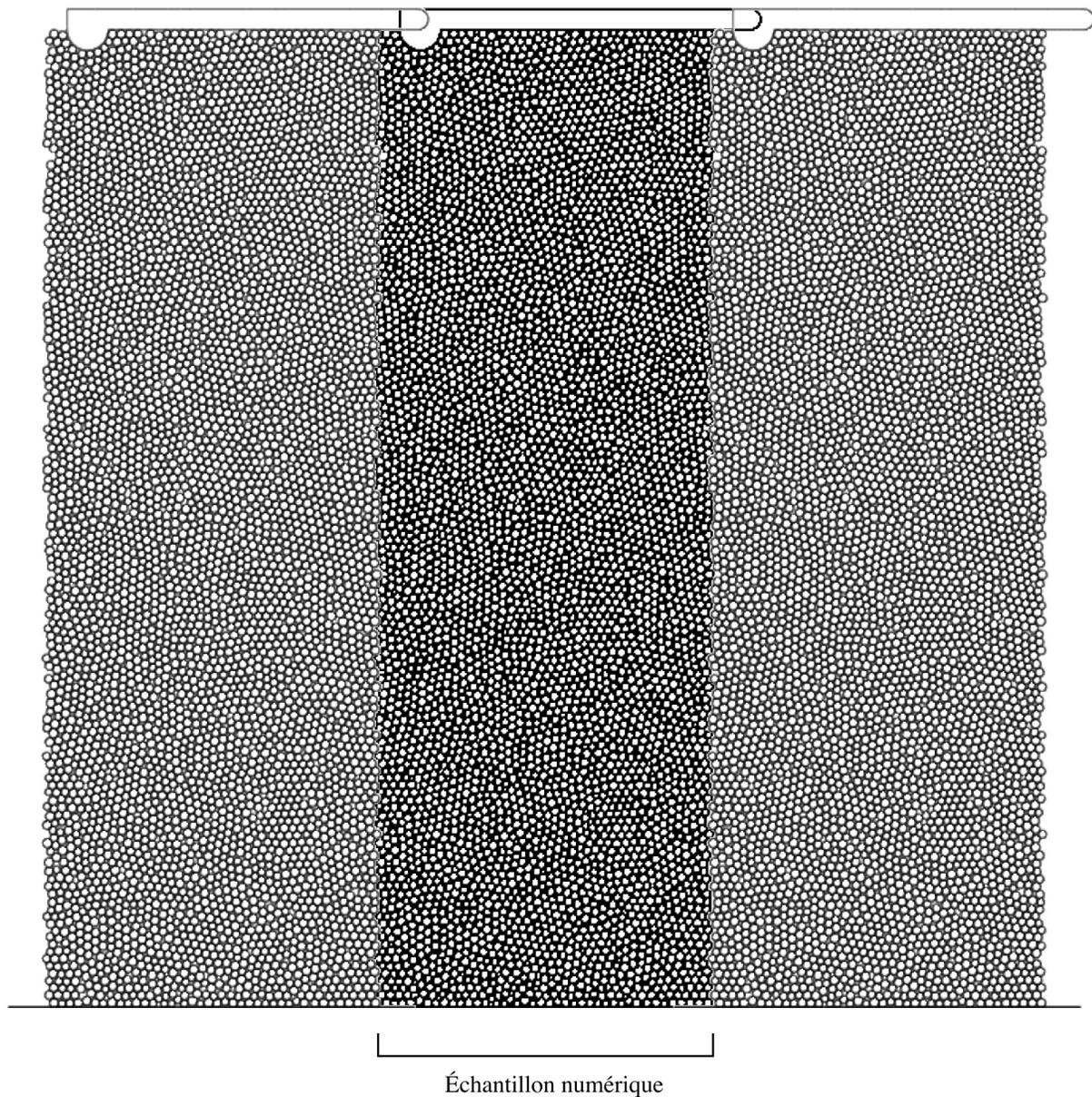


FIG. 4.24: *Échantillon numérique périodique*

accentuées dans les cas les plus cohésifs. En moyenne, la résistance horizontale semble être proportionnelle à la force F° comme le montre la figure 4.25b. Ce résultat est important car il permet de relier directement la résistance horizontale à la force de cohésion :

$$\langle R_h \rangle = K F^\circ \quad (4.3)$$

Cette relation est simple à caractériser car elle met en oeuvre un seul paramètre. Dans

le cas étudié, on a $K = 15$.

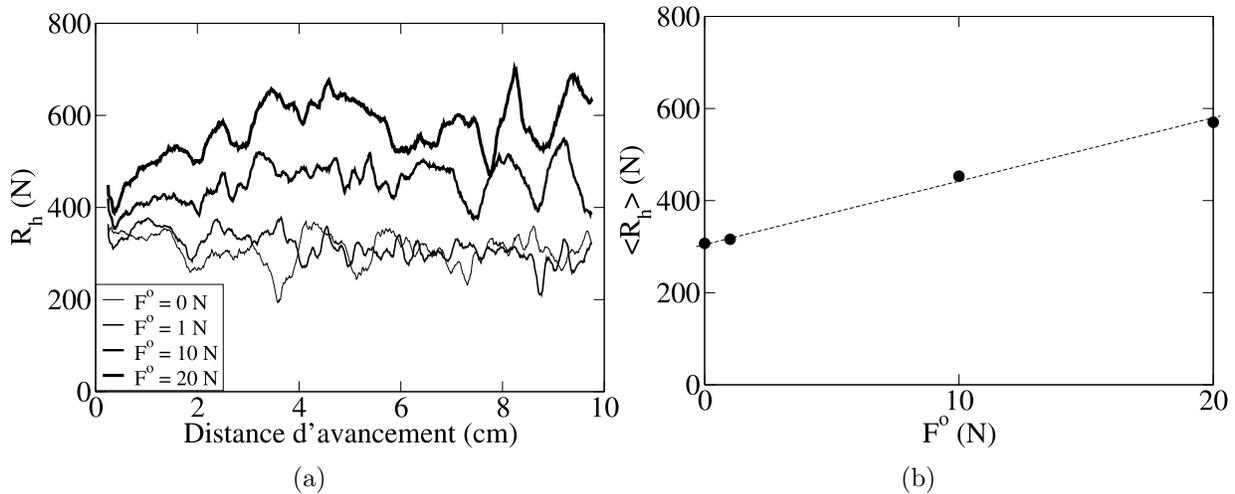


FIG. 4.25: (a) Évolution de la résistance horizontale pour différentes valeurs de la force de cohésion entre les grains ; (b) Résistance horizontale moyenne en fonction de la force de cohésion entre les grains

La figure 4.26 présente les variations de hauteur de l'échantillon pour les différentes valeurs de force de cohésion entre les grains. On se rend compte que le sol se dilate de moins en moins lorsque F^o augmente. Néanmoins, on note une dilatance plus élevée pour une cohésion plus forte. Ce résultat peut paraître surprenant dans la mesure où la cohésion contribue naturellement au confinement de l'échantillon et non à l'inverse. Cependant, il faut noter que le niveau de cohésion choisi ici est très élevé en comparaison au cas capillaire par exemple. Ceci a pour effet de former des agglomérats de grains fortement cohésifs qui ont tendance à se mouvoir en bloc. Ce type de cohésion s'apparente plus au cas de sols cimentés ou de roches tendres.

4.3.2 Influence de la hauteur de l'échantillon

On cherche, dans cette section, à évaluer l'influence de l'épaisseur du sol (distance entre une couche qui est considérée rigide et la surface libre) sur la résistance horizontale et les changements de volume du sol. À cette fin, des simulations ont été réalisées en bloquant le mouvement des grains inférieurs sur une hauteur donnée. On a ainsi effectué les simulations dans trois configurations :

1. Seuls les grains de la première ligne inférieure de l'échantillon sont bloqués. La hauteur de l'échantillon est alors $h_0 \simeq 46$ cm.
2. Les grains de la moitié inférieure de l'échantillon sont bloqués. La hauteur de l'échantillon est alors $h_0 \simeq 23$ cm.

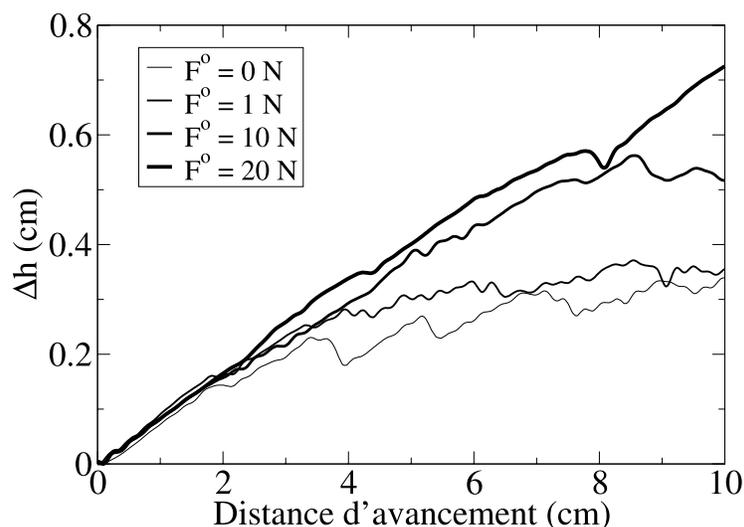


FIG. 4.26: Variation de la hauteur du patin pour différentes valeurs de la force de cohésion entre les grains

3. Les grains des 3/4 inférieurs de l'échantillon sont bloqués. La hauteur de l'échantillon est alors $h_0 \simeq 12$ cm.

La figure 4.27 montre l'évolution de la résistance horizontale R_h pour les trois configurations décrites ci-dessus avec une force de cohésion entre les grains $F^\circ = 10$ N. On ne note pas d'influence de l'épaisseur de sol sur la résistance horizontale. D'autre part, la variation de hauteur de l'échantillon présente une dépendance à l'épaisseur de sol comme le montre la figure 4.28. Ceci peut signifier que l'épaisseur de la couche de sol de surface influence la dilatance. Cette épaisseur est reliée à la proximité d'un sol plus dur à la surface. Par contre, les efforts développés semblent identiques pour les trois épaisseurs testées.

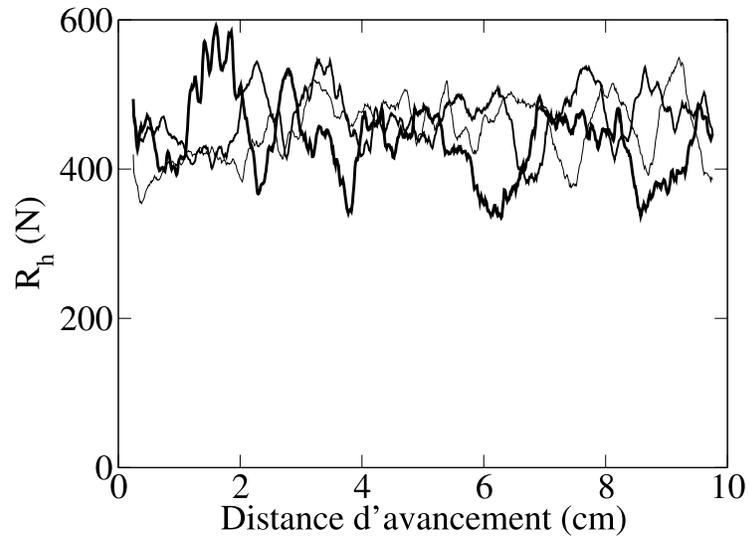


FIG. 4.27: Évolution de la résistance horizontale pour différentes épaisseurs de sol

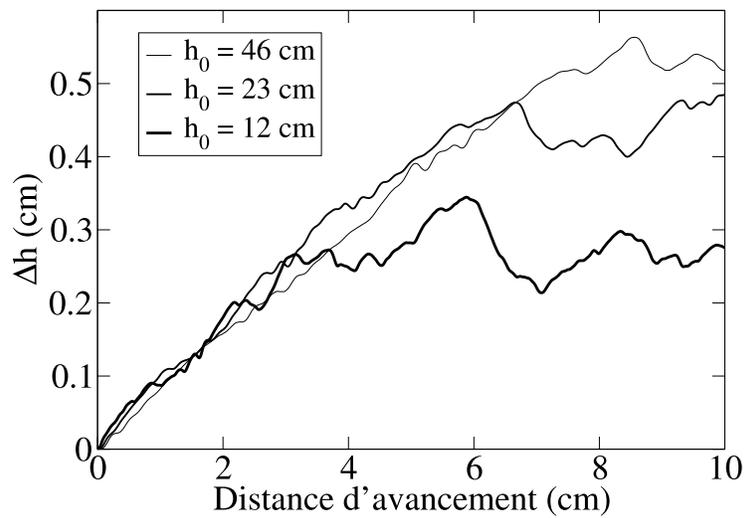


FIG. 4.28: Variation de la hauteur du patin pour différentes épaisseurs de sol

4.4 Conclusion

Dans ce chapitre, le code de calcul `tapio-K` a été utilisé pour différentes applications. Les études ont été menées de façon prospective. Bien qu'elles ne soient pas toutes très détaillées, elles permettent de se rendre compte des possibilités du code de calcul, et plus généralement, d'une approche en éléments discrets intégrant des lois de cohésion pour l'étude des comportements de la matière en grain (en particulier des sols).

Conclusions et perspectives

Les travaux présentés dans cette thèse ont été orientés sur la modélisation du comportement mécanique de matériaux granulaires cohésifs faiblement contraints. Le choix qui a été fait repose sur une approche en éléments discrets de type DEM en configuration tridimensionnelle. L'objectif final étant double ; d'une part, il s'agissait d'aboutir à un outil de simulations numériques qui permet en particulier :

- de prendre en compte différentes lois d'interaction de contact, de frottement et de cohésion,
- de prendre en compte la polydispersité du matériau, mais surtout une distribution inhomogène de la cohésion et notamment de la distribution de l'eau lorsqu'il s'agit de cohésion capillaire,
- de prendre en compte des sollicitations réellement tridimensionnelles, ce qui implique en particulier la prise en compte d'interactions avec des parois de différentes formes,
- de prédire le comportement macroscopique en terme de relations contraintes-déformations, mais également les ruptures, leur initiation et leur propagation,
- une préparation aisée des données de simulations à la fois en ce qui concerne les échantillons, les interactions et les sollicitations extérieures, avec des modules de prétraitement appropriés,
- un traitement efficace de l'information en sortie, à la fois à l'échelle macroscopique et à l'échelle de la microstructure, avec des modules de post-traitement appropriés,
- une visualisation claire, à la fois en temps réel et lors du post-traitement, des résultats des simulations en fonction du type de résultat attendu.

D'autre part, cet outil n'étant évidemment pas une fin en soi, le deuxième objectif était d'apporter une contribution à la compréhension du comportement de matériaux granulaires cohésifs.

Pour atteindre ces objectifs, différents aspects ont été abordés :

Développement d'un outil de simulation : code `tapio-K`

Le développement de cet outil a nécessité, bien en entendu, la mise en oeuvre de plusieurs phases qu'on peut résumer ainsi :

- Etude bibliographique sur les techniques numériques nécessaires à la réalisation de l'algorithme de calcul en éléments discrets en configuration tridimensionnelle. Cette phase a permis de prendre en main toute la procédure de programmation et d'isoler les principales difficultés relatives au cahier des charges défini plus haut. Elle a également permis le choix de l'environnement de programmation le mieux adapté à nos objectifs.
- Le choix du type d'éléments sphériques a été, dans un premier temps, motivé par un souci de simplicité. Compte tenu de la prise en compte de la cohésion entre grains, ce type d'éléments se révèle bien adapté à d'autres formes d'éléments. La technique consiste à constituer des agglomérats de grains (dits clusters dans la littérature) pouvant prendre de multiples formes, avec des niveaux de cohésion entre grains différents des niveaux de cohésion entre agglomérat.
- La modélisation des différentes interactions entre grains. Bien que le contact et le frottement soient relativement classiques, leur mise en oeuvre dans une configuration 3D n'est pas simple, et elle a nécessité une attention particulière. Par contre, on peut considérer que la part importante de modélisation a porté sur les différentes lois de cohésion utilisées et en particulier la loi de cohésion capillaire.
- La prise en compte de la texture initiale de l'échantillon numérique qui passe par la réalisation de l'échantillon initial. Ceci a nécessité, bien entendu, le contrôle de la granularité polydisperse, de l'arrangement granulaire et de la compacité. Par ailleurs, dans le cas de la cohésion capillaire, cette texture comprend également la distribution de l'eau au sein de l'échantillon qui constitue une grande originalité de ce travail. Différents modes de distribution ont ainsi été proposés.
- La prise en compte de conditions aux limites en 3D qui a nécessité la conception de plusieurs types de parois rigides, ainsi que des outils de reconnaissance de ces parois. Par ailleurs, et afin d'améliorer l'efficacité des calculs, on a la possibilité d'utiliser des frontières mono-périodiques c'est-à-dire la réplication à l'identique de l'échantillon dans une direction de l'espace.
- Enfin la phase de programmation des différentes séquences de calcul par l'approche numérique choisie (smooth DEM) a également nécessité un effort considérable de mise au point, et a occupé une large part du temps consacré à cette thèse.

Développement d'un outil de post-traitement et visualisation des résultats : module `mgpost`

L'application `mgpost` a été développée pour répondre aux besoins de post-traitements dans le cas de simulations en éléments discrets. Elle est disponible sur Internet ([Richefeu](#),

2005). La communication entre le code de calcul et le programme de post-traitement `mgpost` passe par des fichiers au format XML. Ce format permet d'interfacer le programme `mgpost` avec n'importe quel code de calcul capable de générer des fichiers XML.

Validation des outils `tapio-K` et `mgpost`

Cette validation a été réalisée sur l'exemple de l'essai de cisaillement direct à la boîte de Casagrande. Elle a porté, d'une part, sur les aspects purement numériques du code de calcul réalisé et, d'autre part, sur la pertinence des lois d'interaction et plus particulièrement de la loi capillaire. Une première investigation expérimentale, à partir de l'essai de cisaillement normalisé, a permis de mettre en évidence la nécessité d'effectuer des essais de cisaillement sous faibles contraintes afin de laisser paraître l'effet de la cohésion capillaire sur des grains de taille relativement importante. Un nouveau dispositif de cisaillement direct faiblement contraint a donc été mis au point en s'inspirant du dispositif normalisé de Casagrande. Une confrontation entre les résultats expérimentaux issus de ce nouveau dispositif et les résultats de simulations a montré une bonne adéquation qualitative et quantitative à l'échelle macroscopique. Par ailleurs, elle a permis la conduite d'une analyse micro-macro en se basant sur une approche théorique. Cette analyse a montré l'importance prépondérante de la densité de ponts liquides dans le matériau et donc de la distribution du liquide. De plus, l'influence de la polydispersité a pu être interprétée par l'introduction d'un nouveau paramètre s . Ces résultats originaux ont conduit à la rédaction d'un premier article (Richefeu et al., 2006).

Premières applications

Les premières applications du code de calcul `tapio-K` ont été menées de façon prospective. Bien qu'elles n'aient pas toutes été très détaillées, elles ont permis de se rendre compte des possibilités du code de calcul, et plus généralement, d'une approche en éléments discrets intégrant des lois de cohésion pour l'étude des comportements de la matière en grains (en particulier des sols). Les principaux résultats obtenus sont :

Essai de compression simple : cette application a permis d'améliorer les simulations effectuées par Soulié (2005) et de montrer l'importance de la distribution de l'eau à la fois en terme de répartition et de densité des ponts liquides. Elle a montré nettement que le paramètre densité des ponts liquides influence de façon significative les résultats et que son ajustement permet d'approcher les résultats expérimentaux. On a montré que les comparaisons avec l'expérience nécessitent que ces dernières soient réalisées avec une bonne homogénéité de la teneur en eau, plus particulièrement pour les teneurs en eau faibles.

Écoulement et angle de repos : cette application a permis d'analyser l'influence de la force locale de cohésion et de la distance de rupture sur l'angle de repos. Elle a été menée sur un système de particules, soumis à un écoulement à travers une trappe, en utilisant

les lois de cohésion uniforme et capillaire. On a montré que l'indice de cohésion apparaît comme un paramètre pertinent pour l'étude de l'angle de repos d'un matériau granulaire cohésif. Par ailleurs, une analyse qualitative des résultats, sur le débit de matière à travers la trappe, a fait ressortir trois régimes d'écoulement pour les matériaux granulaires cohésifs : les régimes d'écoulements granulaire, aggloméré et plastique. Cette application a montré, encore une fois, que l'introduction de la cohésion entre les grains, et en particulier d'une cohésion capillaire, induit des comportements non triviaux à l'échelle globale. Elle a permis de souligner la différence nette entre le cas sec et le cas humide. Elle a également montré, qu'au delà d'une teneur en eau proche de 0, les propriétés du matériau se stabilisent.

Traficabilité d'un engin chenillé : cette application a permis d'étudier la résistance d'un sol à un déplacement horizontal imposé à la chenille. On a montré que cette résistance augmente proportionnellement à la force de cohésion entre les grains. Ce résultat est important car il permet de relier directement la résistance horizontale à la force locale de cohésion. Cette application a également permis d'analyser l'influence de la hauteur de l'échantillon (ou encore de l'épaisseur de la couche de sol) sur les efforts développés dans le milieu et sur la dilatance. Les efforts ne semblent pas affectés par la hauteur de l'échantillon. Par contre, la dilatance semble très liée à cette hauteur.

Perspectives

Au terme de cette étude, de multiples perspectives permettent d'envisager des prolongements directs de ce travail à plus ou moins long terme. De façon générale, il nous semble que le comportement des matériaux granulaires cohésifs garde de multiples zones d'ombre qui méritent d'être explorées. De ce point de vue, l'outil de simulations mis au point, ainsi que tout le dispositif de post-traitement et de visualisation des résultats 3D, constitue un moyen efficace d'investigation et de découvertes de propriétés toujours surprenantes de ces matériaux.

Les prolongements de ce travail sont présentés ici en deux catégories. La première catégorie se rapporte à la poursuite du développement du code afin d'améliorer ses potentialités, en particulier dans la prise en compte de couplages multiphysiques. La seconde catégorie concerne l'exploitation ou la valorisation du code pour l'étude d'applications directes, surtout en ce qui concerne l'analyse de la microstructure afin de progresser dans la compréhension du comportement des matériaux granulaires.

Concernant la première catégorie dédiée à la poursuite du développement du code de calcul, un vaste domaine d'exploration se présente sur les aspects de couplages complexes dans les milieux granulaires. En effet, la possibilité de prendre en compte une distribution de l'eau ouvre la voie à la modélisation de multiples phénomènes associés comme par exemple :

- Les changements de phase, liés à des variations de température ou d'humidité relative. Ces changements de phase sont susceptibles de modifier la nature des interactions de

cohésion entre les grains. La prise en compte de ces changements de phase nécessite la prise en compte de propriétés physiques variables en fonction des conditions de transfert de matière. De plus, il est intéressant d'envisager la présence de solutés dans la phase liquide constituant les ponts capillaires. La cristallisation de ces solutés peut faire évoluer la cohésion capillaire progressivement vers une cohésion de type solide.

- Les retraits et gonflements de particules, dus respectivement au séchage et à l'hydratation, présentent un intérêt certain pour aborder les problèmes de fissuration au retrait ou encore les pressions de gonflement. L'étude de ces phénomènes pourra être réalisée si on prend en compte des évolutions dans le temps des gradients de teneurs en eau dans le milieu.

Concernant la deuxième catégorie dédiée à l'exploitation ou la valorisation du code, certaines applications sont d'ores et déjà envisagées. On peut citer par exemple :

- L'étude de modèles numériques équivalents. Cette application a pour objectif d'analyser les conditions qui permettent, pour une étude de cas donnée, de remplacer un échantillon numérique à grand nombre de grains par un échantillon équivalent à plus faible nombre de grains. L'intérêt étant évidemment de réduire les temps de calculs dans une configuration 3D.
- La modélisation de l'essai triaxial de révolution utilisé pour l'étude du comportement et de la résistance au cisaillement des sols. Ceci nécessitera un développement qui permet de prendre en compte une membrane élastique entourant l'échantillon. L'intérêt du code de calcul pour cette application est de permettre une analyse de la microstructure et en particulier des zones de localisation des déformations pour différentes granularités, compacités et teneurs en eau initiales.
- L'étude de l'écoulement d'un matériau granulaire humide dans un silo. L'intérêt étant d'analyser les phénomènes de blocage en fonction de la texture du matériau et en particulier de la distribution de la teneur en eau.
- L'étude de la stabilité de pentes dans un talus en matériau granulaire en fonction de l'humidité. Il s'agira d'analyser les corrélations entre les angles de repos et d'avalanches, d'une part, et les caractéristiques de texture, d'autre part. Là encore, la variable teneur en eau peut occuper une place centrale.

Bibliographie

- M.P. Allen & D.J. Tildesley. *Computer simulations of liquids*. Oxford Science Publications, 1987.
- O. Benoit. *Aptitude à la traficabilité des sols de surface remaniés aux engins chenillés : étude expérimentale et modélisations phénoménologiques*. Thèse de Doctorat, Université Joseph Fourier – Grenoble 1, 2002.
- D.G. Bika, M. Gentzler & J.N. Michaels. Mechanical properties of agglomerates. *Powder Technology*, 117 :98–112, 2001.
- B. Cambou & K. Jafari. Modèles de comportement des sols non cohérents. *Revue Française de Géotechnique*, 44 :43–55, 1998.
- J. Christoffersen, M. M. Mehrabadi & S. Nemat-Nasser. A micromechanical description of granular material behavior. *J. Appl. Mech.*, 48 :339–344, 1981.
- P.W. Cleary & M.L. Sawley. DEM modelling of industrial granular flows : 3d case studies and the effect of particle shape on hopper discharge. *Applied Mathematical Modelling*, 26 :89–111, 2002.
- P.A. Cundall & O.D.L. Strack. A discrete numerical model for granular assemblies. *Géotechnique*, 29(1) :47–65, 1979.
- J.-Y. Delenne. *Milieux granulaires à comportement solide - Modélisation, analyse expérimentale de la cohésion, validation et applications*. Thèse de Doctorat, Université Montpellier 2, 2002.

- J.-Y. Delenne, M. S. El Youssoufi, F. Cherblanc & J.-C. Bénéat. Mechanical behaviour and failure of cohesive granular materials. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 28 :1577–1594, 2004.
- F. Dubois & M. Jean. LMGC90 une plateforme de développement dédiée à la modélisation des problèmes d’interaction. In *Actes du sixième colloque national en calcul des structures, volume 1*, pages 111–118. CSMA-AFM-LMS, 2003.
- J. Duran. *Sables émouvants*. Belin, 2003.
- K. Elamrani. Contribution à la validation du modèle CJS pour les matériaux granulaires. Mémoire de D.E.A., Ecole Centrale de Lyon, 1992.
- M. Fabretto, J. Ralston & R. Sedev. Contact angle measurements using the wilhelmy balance for asymmetrically treated samples. *J. Adhesion Sci. Technol.*, 18(1), 2004.
- Z. Fournier, D. Gerimichalos, S. Herminghaus, M.M. Kohonen, F. Mugele, M. Scheel, M. Schulz, B. Schulz, C. Schier, R. Seemann & A. Shudelny. Mechanical properties of wet granular materials. *Applied Physics : Condensed Matter*, 17 :S477–S502, 2005.
- A. Gerschel. *Liaisons intermoléculaires*. Savoir actuel, Paris, France, 1995.
- T. Gröger, U. Tüzün & D.M. Heyes. Modelling and measuring of cohesion in wet granular materials. *Powder Technology*, 133 :203–215, 2003.
- T. C. Halsey & A. J. Levine. How sandcastles fall. *Phys. Rev. Lett.*, 80(14) :3141–3144, 1998.
- R.D. Holtz & W.D. Kovacs. *Introduction à la Géotechnique*. Edition de l’École Polytechnique de Montréal, 1991.
- S.M. Iveson, J.A. Beath & N.W. Page. The dynamic strength of partially saturated powder compacts : the effect of liquid properties. *Powder Technology*, 127 :149–161, 2002.
- K. Iwashita & M. Oda. Rolling resistance at contacts in simulation of shear band. development by DEM. *Journal of Engineering Mechanics*, 124(3) :285–292, 1998.
- M. Jean. The non-smooth contact dynamics method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 177 :235–257, 1999.
- T.H. Kim & C. Hwang. Modeling of tensile strength on moist granular earth material at low water content. *Engineering Geology*, 69 :233–244, 2003.
- M.M. Kohonen, D. Geromichalos, M. Scheel, C. Schier & S. Herminghaus. On capillary bridges in wet granular materials. *Physica A*, 339 :7–15, 2004.
- P. Kolmayer. *Rhéologie et modélisation des sols de surface pour l’interprétation in situ*. Thèse de Doctorat, Ecole Centrale de Lyon, 2001.

- P.A. Langston, M.A. Al-Awamleh, F.Y. Fraige & B.N. Asmar. Distinct element modelling of non-spherical frictionless particle flow. *Chemical Engineering Science*, 59 :425–435, 2004.
- C. Le Saux. *Modélisation numérique du pliage et du déploiement de systèmes spaciaux avec prise en compte des contacts et des frottements – cas des systèmes de tensegrité*. Thèse de Doctorat, Université Montpellier 2, 2002.
- G. Lian, C. Thornton & M. Adams. A theoretical study of the liquid bridge forces between two rigid spherical bodies. *Journal of Colloid and Interface Science*, 161 :138–147, 1993.
- S. Luding, M. Lätzel, W. Volk, S. Diebels & H.J. Herrmann. From discrete element simulations to a continuum model. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191 :21–28, 2001.
- S. Luding, K. Manetsberger & J. Muellers. A discrete model for long time sintering. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 53(2) :455–491, 2005.
- M. Maleki. Modélisation hiérarchisée du comportement des sols. Mémoire de D.E.A., Ecole Centrale de Lyon, 1998.
- C.L. Martin & D. Bouvard. The effect of contact plasticity on the elasticity, fracture and yielding of a particulate assembly. In R. García-Rojo, H.J. Herrmann & S. McNamara, editors, *Powders and Grains 2005*, pages 175–179, Stuttgart, 2005. A.A. Balkema.
- N.S. Martys & R.D. Mountain. Velocity Verlet algorithm for dissipative-particle-dynamics-based models of suspensions. *Phys. Rev. E*, 59(3) :3733–3736, 1999.
- D. Maugis. *Contact, adhesion and rupture of elastic solids*. Solid-State Sciences, Berlin, 1999.
- T. Mikami, H. Kamiya & M. Horio. Numerical simulation of cohesive powder behavior in fluidized bed. *Chemical Engineering Science*, 53(10) :1927–1940, 1998.
- J.J. Moreau. Some numerical methods in multibody dynamics : application to granular materials. *Eur. J. Mech.*, 13(4) :93–114, 1994.
- J.J. Moreau. Numerical investigation of shear zones in granular materials. In *Friction, Arching, Contact Dynamics*, pages 233–247, Singapore, 1997. World Scientific.
- J.J. Moreau. Contact et frottement en dynamique des systèmes de corps rigides. *Revue Européenne des Eléments Finis*, 9 :9–28, 2000.
- H.B. Mühlhaus & I. Vardoulakis. The thickness of shear bands in granular materials. *Géotechnique*, 37(3) :271–283, 1987.
- C. Nouguié. *Simulation des interactions outil-sol : application aux outils de traitement des sols*. Thèse de Doctorat, Université Montpellier 2, 1999.

- M. Oda & K. Iwashita. *Mechanics of granular materials : an introduction*. A.A. Balkema, 1999.
- G. Ovarlez. Propriétés mécaniques et rhéologiques d'un matériau granulaire confiné dans une colonne. *Rhéologie*, 3 :30–38, 2003.
- I. Preechawuttipong. *Modélisation du comportement mécanique de matériaux granulaires cohésifs*. Thèse de Doctorat, Université Montpellier 2, 2002.
- F. Radjai. Multicontact dynamics. In H.J. Herrmann, J.P. Hovi & S. Luding, editors, *Physics of Dry Granular Media*, pages 305–311, Dordrecht, 1998. Kluwer.
- F. Radjai, M. Jean, J. J. Moreau & S. Roux. Force distribution in dense two-dimensional granular systems. *Phys. Rev. Lett.*, 77(2) :274–277, 1996.
- F. Radjai, I. Preechawuttipong & R. Peyroux. Cohesive granular texture. In *Continuous and discontinuous modelling of cohesive frictional materials*, 2000.
- F. Radjai, V. Richefeu, J.-Y. Delenne, F. Soulié, A. Taboada & S. Nineb. Granuloscience, site internet dédié à la mécanique et la physique des matériaux granulaires, www.granuloscience.org, version juin, 2005.
- F. Radjai, D. E. Wolf, M. Jean & J.-J. Moreau. Bimodal character of stress transmission in granular packings. *Phys. Rev. Lett.*, 80(1) :61–64, 1998.
- F. Radjai, D. E. Wolf, S. Roux, M. Jean & J. J. Moreau. Force networks in granular packings. In D. E. Wolf & P. Grassberger, editors, *Friction, Arching and Contact Dynamics*, Singapore, 1997. World Scientific.
- Rapport final du PEA "Sols de Surface". Marché DGA n° 99 56 004 004704976, 2002.
- N. Renon. *Simulation numérique par éléments finis des grandes déformations dans le sol : application à la scarification*. Thèse de Doctorat, Ecole des Mines de Paris, 2002.
- F. Restagno & J. Crassous. Adhesion between weakly rough beads. *Physical Review E*, 65 :042301, 2002.
- V. Richefeu. mgpost, <http://www.lmgc.univ-montp2.fr/~richefeu/>, 2005.
- V. Richefeu, M. S. El Youssoufi, R. Peyroux & C. Bohatier. Frictional contact and cohesion laws for Casagrande's shear test on granular materials by 3D DEM – comparison with experiments. In R. García-Rojo, H.J. Herrmann & S. McNamara, editors, *Powders and Grains 2005*, pages 509–512, Stuttgart, 18-22 July 2005a. A.A. Balkema.
- V. Richefeu, R. Peyroux, M. S. El Youssoufi & C. Bohatier. Analyse micro-macro d'essais de cisaillement à la boîte de Casagrande. Expérimentation et simulation par éléments discrets 3D. In *17 ème Congrès Français de Mécanique 2005 (cdrom)*, Troyes, 2005b.

- V. Richefeu, M.S. El Youssoufi & F. Radjai. Shear strength properties of wet granular materials. *Phys. Rev. E*, à paraître, 2006.
- E. Riedo, F. Lévy & H. Brune. Kinetics of capillary condensation in nanoscopic sliding friction. *Phys. Rev. Lett.*, 88(18) :185505, 2002.
- H. Rumpf. Zur theorie der zugfestigkeit von agglomeraten bei kraftübertragung an kontaktpunkten. *Chemical Engineering Technology*, 42 :538–540, 1970.
- M. Satake. Fabric tensor in granular materials. In P.A. Vermeer & H.J. Luger, editors, *Deformation and failure of granular materials*, pages 63–68, Rotterdam, 1982. A.A. Balkema.
- W.P. Schellart. Shear test results for cohesion and friction coefficients for different granular materials : scaling implications for their usage in analogue modelling. *Tectonophysics*, 324 :1–16, 2000.
- F. Soulié. *Cohésion par capillarité et comportement mécanique de milieux granulaires*. Thèse de Doctorat, Université Montpellier 2, 2005.
- F. Soulié, F. Cherblanc, M. S. El Youssoufi & C. Saix. Influence of liquid bridges on the mechanical behaviour of polydisperse granular materials. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 29 :(à paraître), 2005a.
- F. Soulié, M. S. El Youssoufi, F. Cherblanc & C. Saix. Influence of water content on the mechanical behavior of granular assemblies. In R. García-Rojo, H.J. Herrmann & S. McNamara, editors, *Powders and Grains 2005*, pages 599–603, Stuttgart, 18-22 July 2005b. A.A. Balkema.
- P. Tegzes, R. Albert, M. Paskvan, A.L. Barabasi, T. Vicsek & P. Schiffer. Liquid-induced transition in granular media. *Physical Review E*, 60(5) :5823–5826, 1999.
- C. Thornton & S.J. Antony. Quasi-static shear deformation of soft particle system. *Powder Technology*, 109 :179–191, 2000.
- C. Thornton & L. Zhang. A DEM comparison of different shear testing devices. In Kishino, editor, *Powders and Grains 2001*, pages 183–190. A.A. Balkema, 2001.
- J.M. Ting & B.T. Corkum. A computational laboratory for discrete element geomechanics. *J. Comput. Civ. Eng. ASCE*, 6 :129–146, 1992.
- R. Tykhoniuk, J. Thomas, S. Luding, M. Kappl, L. Heim & H.J. Butt. Adhesion, inelastic contact behavior and simulation of shear dynamics of ultrafine cohesive powder. In R. García-Rojo, H.J. Herrmann & S. McNamara, editors, *Powders and Grains 2005*, pages 499–503, Stuttgart, 18-22 July 2005. A.A. Balkema.

- M.E.D. Urso, C.J. Lawrence & M.J. Adams. A two-dimensional study of the rupture of funicular liquid bridges. *Chemical Engineering Science*, 57 :677–692, 2002.
- G. Van Den Berger. *Collision detection in interactive 3D environments*. Interactive 3D Technology. Morgan Kaufmann Publishers, 2004.
- J.M. Vengeon, A. Giraud, P. Antoine & L. Rochet. Contribution à l’analyse de la déformation et de la rupture des grands versants rocheux en terrain cristallophyllien. *Can. Geotech. J.*, 36 :1123–1136, 1999.
- L. Verlet. Computer ”experiments” on classical fluids. I. thermodynamical properties of Lennard-Jones molecules. *Physical Review*, 159 :98–103, 1967.
- L. Wenning & M.H. Müser. Friction laws for elastic nanoscale contacts. *Europhysics Letters*, 54(5) :693–699, 2001.
- C. Willett, M. Adams, S. Johnson & J. Seville. Capillary bridges between two spherical bodies. *Langmuir*, 16 :9396–9405, 2000.

Expression explicite de la force de cohésion capillaire

Dans cette annexe, on présente succinctement la démarche qui a conduit à l'expression explicite de la force capillaire qui constitue la loi de cohésion capillaire utilisée dans ce manuscrit. Pour plus de détails, le lecteur pourra se référer à la thèse de [Soulié \(2005\)](#) consacrée en grande partie aux développements concernant cette loi.

La force capillaire entre deux grains résulte de la contribution de la tension superficielle du liquide au niveau de la ligne triple (commune aux trois phases), d'une part, et de la force due à la différence de pression Δp entre la phase gazeuse et la phase liquide, d'autre part. Les hypothèses retenues pour la détermination d'une expression explicite de la force capillaire sont les suivantes :

- les grains sont parfaitement sphériques et de même constitution ;
- la surface des grains ne présente pas d'aspérité ;
- la gravité est négligée ;
- les effets de viscosité du liquide sont négligés.

Un pont capillaire se présente comme un volume de liquide retenu par une membrane tendue dont l'équilibre est assuré par l'effet de la différence de pression Δp et de la tension superficielle γ_L . Géométriquement, ce pont présente une symétrie de révolution suivant l'axe x joignant les centres des grains (figure [A.1](#)). R_1 et R_2 sont les rayons des grains (avec $R_2 \geq R_1$), δ_1 et δ_2 sont les angles de remplissage, D_n est la distance normale entre les grains, et θ est l'angle de mouillage. La forme de la surface du pont liquide est décrite par le profil $y(x)$. Le rayon de gorge y_0 correspond au rayon de la plus petite section du pont

liquide. Le repère permettant de décrire le profil est positionné en prenant $y(0) = y_0$.

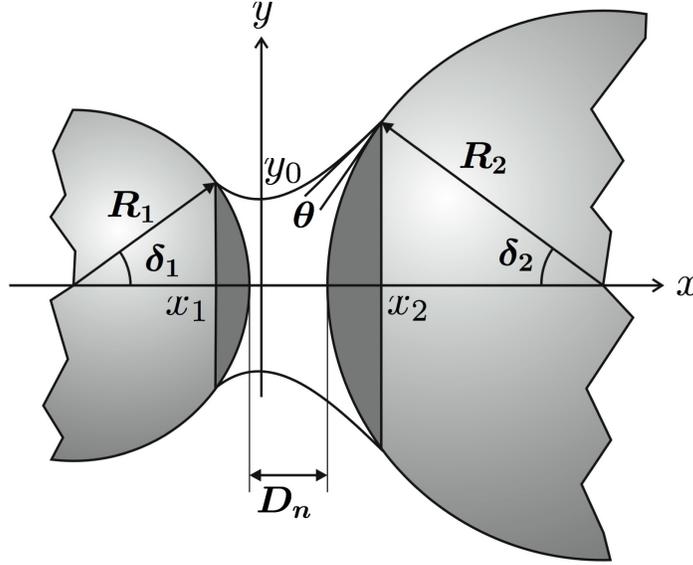


FIG. A.1: Géométrie d'un pont liquide dans le cas polydisperse

La force capillaire s'écrit :

$$F_{coh} = 2\pi y_0 \gamma_L + \pi y_0^2 \Delta p \quad (\text{A.1})$$

L'objectif est d'exprimer cette force capillaire de façon explicite en fonction des grandeurs D_n , V_{liq} , θ , γ_L , R_1 et R_2 . Pour cela, il faut déterminer la configuration géométrique du pont liquide dont le profil est défini par l'équation différentielle :

$$\Delta p y(x) + \gamma_L \frac{1 + y'^2(x) - y(x)y''(x)}{(1 + y'^2(x))^{3/2}} = 0 \quad (\text{A.2})$$

Afin d'établir un lien avec la teneur en liquide globale d'un échantillon, le volume d'un pont liquide est introduit à partir de la configuration géométrique du pont liquide :

$$V_{liq} = \pi \int_{x_1}^{x_2} y^2(x) dx - \frac{1}{3}\pi R_1^3(1 - \cos \delta_1)^2(2 + \cos \delta_1) - \frac{1}{3}\pi R_2^3(1 - \cos \delta_2)^2(2 + \cos \delta_2) \quad (\text{A.3})$$

où x_1 et x_2 sont les abscisses correspondant aux positions des lignes triples (figure A.1). La distance normale intergranulaire D_n est également introduite à partir de la configuration géométrique du pont liquide :

$$D_n = x_2 - R_2(1 - \cos \delta_2) - x_1 - R_1(1 - \cos \delta_1) \quad (\text{A.4})$$

Les équations ci-dessus montrent que la forme d'un pont liquide ainsi que la force capillaire qu'il engendre sur les grains sont interdépendants. La résolution numérique du système couplé d'équations (A.1 à A.4) est donc nécessaire à la détermination de la configuration géométrique du pont et de la force de cohésion capillaire. Pour cette résolution, les rayons R_1 et R_2 des grains, l'angle de mouillage θ et la tension superficielle γ_L du liquide sont des paramètres imposés. Des triplets de valeurs (D_n, V_{liq}, F_{coh}) qui satisfont le système d'équations sont déterminés pour différentes valeurs de différence de pression et d'angles de remplissage.

Dans le but de s'affranchir de l'influence de la taille des grains, les différentes grandeurs ont été adimensionnées. À partir d'un ajustement mathématique sur un ensemble de triplets adimensionnés, Soulié a proposé une relation explicite permettant de relier la force capillaire à la distance normale D_n et au volume V_{liq} du pont liquide (les rayons des grains, la tension superficielle du liquide et l'angle de mouillage étant fixés pour une paire de grains donnée au cours des simulations numériques). Cette relation explicite, qui constitue une extension au cas polydisperse du modèle proposé par Mikami et al. (1998) dans le cas monodisperse, s'écrit :

$$\begin{cases} F_{coh} = -\pi\gamma_L\sqrt{R_1R_2}(\exp(B) + C) & \text{si } D_n < 0 \\ F_{coh} = -\pi\gamma_L\sqrt{R_1R_2}(\exp(A\frac{D_n}{R_2} + B) + C) & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

avec :

$$\begin{aligned} A &= -1,1 \left(\frac{V_{liq}}{R_2^3} \right)^{-0,53} \\ B &= (-0,148 \ln \left(\frac{V_{liq}}{R_2^3} \right) - 0,96)\theta^2 - 0,0082 \ln \left(\frac{V_{liq}}{R_2^3} \right) + 0,48 \\ C &= 0,0018 \ln \left(\frac{V_{liq}}{R_2^3} \right) + 0,078 \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

ANNEXE **B**

Article à paraître dans
Physical Review E

Shear strength properties of wet granular materials

Vincent Richefeu,* Moulay Saïd El Youssoufi, and Farhang Radjaï

*Laboratoire de Mécanique et Génie Civil UMR CNRS 5508, Cc. 048, Université Montpellier 2,
Place Eugène Bataillon, 34095 Montpellier Cedex 5, France*

(Dated: April 11, 2006)

We investigate shear strength properties of wet granular materials in the pendular state (i.e. the state where the liquid phase is discontinuous) as a function of water content. Sand and glass beads were wetted and tested in a direct shear cell and under various confining pressures. In parallel, we carried out three-dimensional molecular dynamics simulations by using an explicit equation expressing capillary force as a function of interparticle distance, water bridge volume and surface tension. We show that, due to the peculiar features of capillary interactions, the major influence of water content over the shear strength stems from the distribution of liquid bonds. This property results in shear strength saturation as a function of water content. We arrive at the same conclusion by a microscopic analysis of the shear strength. We propose a model that accounts for the capillary force, the granular texture and particle size polydispersity. We find fairly good agreement of the theoretical estimate of the shear strength with both experimental data and simulations. From numerical data, we analyze the connectivity and anisotropy of different classes of liquid bonds according to the sign and level of the normal force as well as the bond direction. We find that weak compressive bonds are almost isotropically distributed whereas strong compressive and tensile bonds have a pronounced anisotropy. The probability distribution function of normal forces is exponentially decreasing for strong compressive bonds, a decreasing power-law function over nearly one decade for weak compressive bonds and an increasing linear function in the range of tensile bonds. These features suggest that different bond classes do not play the same role with respect to the shear strength.

I. INTRODUCTION

Capillary cohesion is known to influence strongly the strength and flow properties of granular materials. For example, sandcastles keep standing basically due to small amounts of water between sand grains [1, 2]. At low levels of water content, the water forms a discontinuous phase composed of interparticle bridges that are unevenly distributed in the bulk (the pendular state). Obviously, cohesion effects appear only at low confining pressures, e.g. in surface soils. It is a common observation that, when plowing a wet granular soil, large cohesive aggregates are formed. The largest capillary cohesion force for millimeter-size sand grains is about 4×10^{-4} N independently of meniscus volume. This force is nearly four times the grain weight, allowing thus for the formation of cohesive aggregates. Transformations involving primary particle agglomeration into coherent granules are of special interest in many applications in a wide range of industries such as pharmaceuticals, agronomic products and detergents [3, 4].

Although capillary phenomena at the interface between two solid bodies are well understood, it is much less clear how a collection of grains reacts to the presence of a liquid. The issue is basically the same as in cohesionless granular media where the influence of interparticle friction on the shear strength depends both on the features of the friction law itself and the granular structure. Similarly, the question here is the extent to

which the features of cohesion interactions are reflected in a global property such as shear strength. At least two factors seem to be important: the local force thresholds and the distribution of cohesive bonds in the bulk [2, 5]. There are reasons to think that the spatial distribution of water bonds should prevail over the absolute amount of water going to each bond. Our results, as we shall see in this paper, credit this point.

There is a vast literature dealing with the experimental behavior of wet granular media. In soil mechanics, where stability considerations are of primary importance, the influence of water content on unsaturated earth is mostly studied in shear tests through the Coulomb cohesion parameter representing the shear strength at zero confining stress [6]. On the other hand, the flowability of wet powders is expressed in terms of tensile strength measured as the fluidization threshold under vibration or air flow [7]. Direct measurements of tensile strength have been reported more recently [8–10]. In granular media, it is generally much more difficult to access local information such as contact forces or liquid bonds. Few investigations have recently been reported to visualize liquid bonds by means of the index matching technique [5, 11]. These observations underline the influence of the distribution of water bonds.

A detailed description of the behavior at the particle scale can be obtained by means of molecular dynamics (MD) simulations with an appropriate prescription of force laws. Recently, several simulations of wet granular media have been reported [12–14]. Mikami et al. used this type of simulation together with a regression expression for the liquid bridge force as a function of liquid bridge volume and separation distance between particles

*richefeu@lmgc.univ-montp2.fr

[15]. They mainly studied bubbling behavior and agglomerate formation in a fluidized bed and they found realistic results. Dense agglomerates were simulated by Gröger et al. using a cohesive discrete element method [16]. They found a good agreement with experimental data for the yield stress at all confining pressures down to the value of the tensile stress. Shear strength behavior of unsaturated granulates was also studied numerically by Jiang et al. as a function of suction (pressure difference between liquid and gas) [17].

In this paper, we investigate the cohesive behavior of wet dense granular packings under monotonous shearing by means of experiments and three-dimensional MD simulations. We also analyze the shear strength from a microscopic expression of the stress tensor. The experiments are described in section II. We study the Coulomb cohesion as a function of water content for four different materials. The simulations are presented in section III. We use an explicit expression of the capillary force as a function of interparticle distance, bridge volume and surface tension. The Coulomb cohesion is studied as a function of water content. We also investigate the bond connectivity and force distributions. In section IV, we propose a new expression for the shear strength that accounts for particle polydispersity as well as material and structural parameters. We finally compare the experimental and numerical results to the theoretical predictions.

II. EXPERIMENTS

The experiments were designed to measure the shear strength at low confining pressures (< 1 kPa). The principles of the device are similar to those used in several other investigations [18–21]. We present here the setup, the materials, the wetting protocol and our main results.

A. Experimental setup

A schematic representation of the shearing setup is shown in Fig. 1. The wet grains are poured in a plexiglas cylindrical cell and confined by means of a circular lid of area S placed on top of the material. The lid is equipped with a reservoir allowing to impose an overload by adding desired amount of sand. The total vertical force N acting on the sample is the sum of the weights of lid and sand (shown by A on the figure). The cell is composed of two disjoint parts kept together during sample preparation. The upper part can move horizontally with respect to the lower part by pulling on a rope attached to it and which supports a cupel through a pulley (shown by B on the figure). The pulling force T can be increased by adding sand into the cupel. The friction force between the two parts of the cell is reduced by water lubricating the rims and we checked that it remains negligibly small during shear. In order to reduce the friction force exerted by

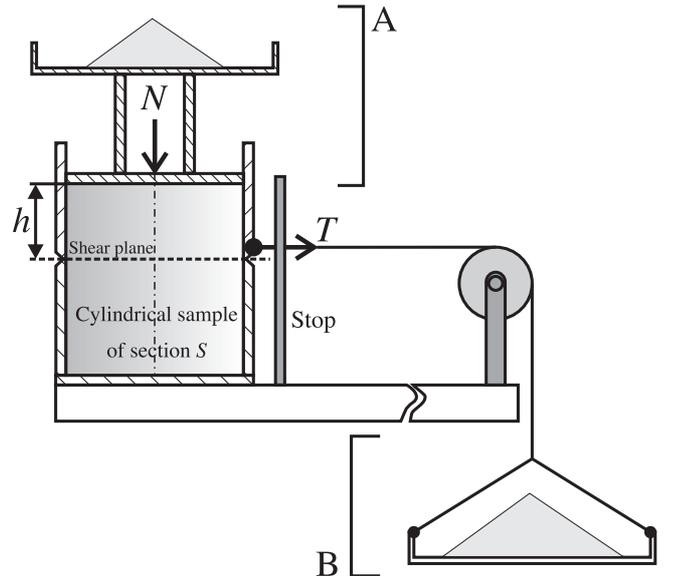


FIG. 1: Testing cell and shearing setup.

the material along the walls (Janssen effect), the thickness h of the upper part of the sample was taken to be below the diameter of the cell (46 mm). The heights of the upper and lower parts are about 10 mm and 15 mm respectively. The sample is sheared along the common section of the two parts of the cell. This shear plane is subjected to a tangential stress $\tau = T/S$ and a normal stress $\sigma = N/S + \rho gh$, where ρ is the bulk density and g is the gravity.

In the experiments, we gradually increase the shear stress τ for a fixed value of σ . Unstable shearing occurs when τ reaches the shear strength τ_m , resulting in a sudden slide of the upper part of the sample. The upper part is stopped by collision with two bars located 5 mm away from the cell. We did not measure the displacements. We recorded τ_m for different values of σ in the range varying from 200 Pa to 800 Pa, and for different values of water content.

B. Materials and wetting protocol

We used four types of materials: (1) a sand composed of angular grains with diameter in the range from 0.1 mm to 0.4 mm, (2) “tightly-graded” polydisperse glass beads with diameters from 0.4 mm to 0.5 mm, (3) “well-graded” polydisperse glass beads with diameters from 0.4 mm to 0.8 mm, and (4) monodisperse glass beads of diameter 1 mm.

In order to wet the grains, we add distilled water to dry material placed in a vessel which is then closed and energetically shaken for about one minute. The vessel used for mixing is transparent so that during shaking we can check visually whether the water is homogeneously mixed with the grains. In particular, we continue shaking

until all visible water clusters disappear. Increasing the duration of shaking beyond 1 minute did not change the measured values of the shear strength. After mixing, the wetted material is poured into the testing cell. The water content is evaluated by comparing the masses of a sample of the material before and after testing by means of a heat chamber used for drying the sample at 105°C. The water content is given by $w = m_w/m_s$, where m_w and m_s are the masses of water and grains, respectively. The wet materials were tested for water contents below 0.05 corresponding to the pendular state for our materials. The experiments were performed at ambient conditions. Each experiment lasted a few minutes. The loss of liquid was always below two percent. This loss is not only due to evaporation but also due to partial wetting of the internal walls of the cell. It is small enough to assume a constant liquid volume (as in simulations, see below).

C. Results

Figure 2(a) shows the yield loci τ - σ for the sand at several levels of water content w . Within experimental precision, the data are well fitted by a straight line, in agreement with the Mohr-Coulomb model

$$\tau = \mu\sigma + c, \quad (1)$$

where $\mu = \tan \varphi$ is the internal coefficient of friction and c is the Coulomb cohesion. It is remarkable that $\varphi \simeq 33^\circ$ is almost independent of w . On the other hand, the Coulomb cohesion increases nonlinearly with w and saturates at $c_m \simeq 600$ Pa at $w_m \simeq 0.03$, as shown in Fig. 2(b).

For tightly-graded polydisperse beads we get a similar behavior with $\varphi \simeq 30^\circ$; Figs. 3(a) and (b). However, saturation occurs at a lower level of water content ($w_m \simeq 0.025$) and cohesion ($c_m \simeq 350$ Pa). Figures 4(a) and (b) show the results for well-graded polydisperse beads. Saturation occurs at about $w_m \simeq 0.01$ and $c_m \simeq 300$ Pa. Enhance fluctuations observed in the data from glass beads, compared to the sand, may be attributed to a lower level of cohesion and a tighter size distribution of glass beads. In fact, a lower level of cohesion leads to larger mobility of the particles and the porosity increases as the particle sizes are less widely distributed. In the case of monodisperse beads, the cohesion jumps from zero for the dry material to a nonzero value ($c_m \simeq 150$ Pa) independently from water content; Figs. 5(a) and (b). Since we have few data points between $w = 0$ and $w \simeq 0.01$, the saturation level w_m should be below 0.01.

Notice that the shear tests provide quite reproducible results. We see that, in Figs. 2(a)-5(a), the Mohr-Coulomb line passes through most of data points. The very weak dispersion of the data points about this line shows the high reproducibility of the testing procedure. This means that the experimental measurement of the Coulomb cohesion is reliable. The different values of c_m

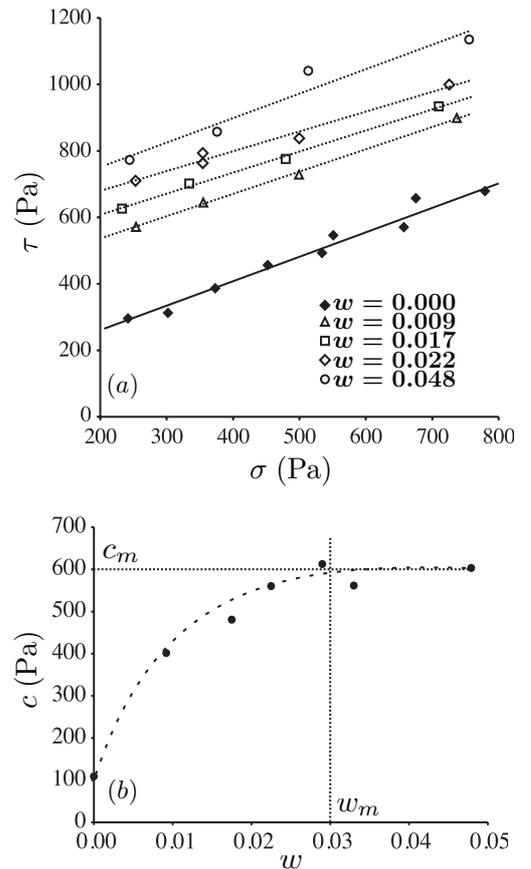


FIG. 2: (a) Yield loci τ - σ of sand for increasing level of water content; (b) the Coulomb cohesion as a function of water content. The dashed line is drawn as a guide to the eyes.

for different materials will be discussed in section IV (see also Table I).

The value of w_m is less clearly defined and it is likely to depend on two factors: (1) the surface state of the particles and (2) possible clustering of the liquid phase [2, 5, 11]. The sand grains have a rough surface requiring more water to form a meniscus than glass beads which are much more smooth. On the other hand, partial clustering of water may occur and this might require a larger amount of water for the formation of liquid bridges although we observed no clustering at the visible parts of the packing through the transparent walls of the testing cell. It is worth noting that it is not straightforward to evaluate the variability of w since each value results from several experiments. If the evaluation is based only on the measurement of the water content at the beginning and at the end of each test, the error would be as small as 2% and this can not be shown in the figures (it would be smaller than the size of the data point symbols).

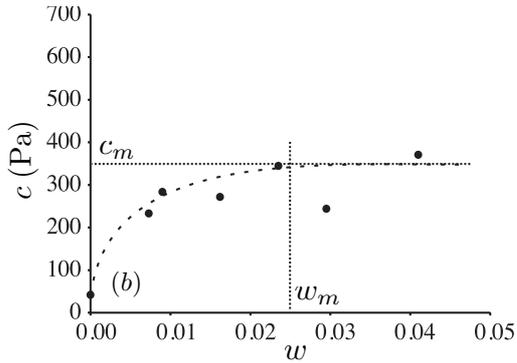
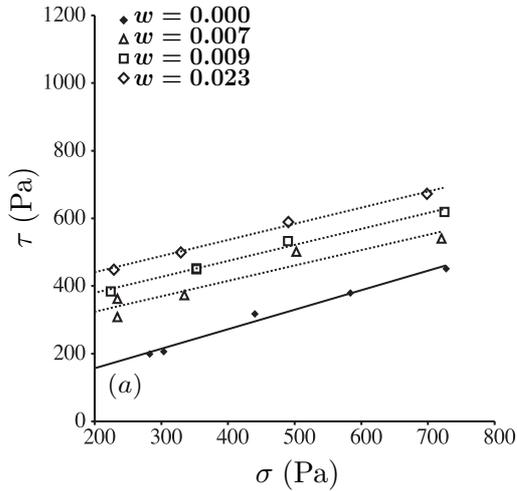


FIG. 3: (a) Yield loci τ - σ of tightly-graded glass beads for increasing level of water content; (b) the Coulomb cohesion as a function of water content.

III. SIMULATIONS

For the simulations, we employed the framework of the molecular dynamics method [22, 23]. This method is referred to as Distinct Element Method (DEM) in the geotechnical context. The heart of our simulations is, however, the model of capillary cohesion and its implementation, as well as the way liquid bridges are numerically distributed in the packing. These aspects are detailed below.

A. Molecular Dynamics

We implemented the basic molecular dynamics method for spherical particles. The equations of motion are integrated according to the velocity Verlet scheme. The normal force between two particles is the sum of a repulsive force as a linear function of the overlap and an attraction force due to the presence of a liquid bridge at contact or for a gap up to a rupture distance (see below). As usual in molecular dynamics simulations, normal dissipation is accounted for by viscous damping. The particles inter-

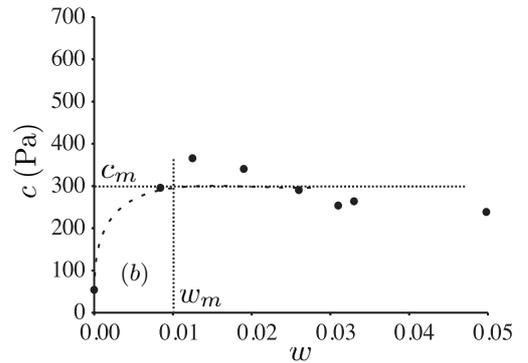
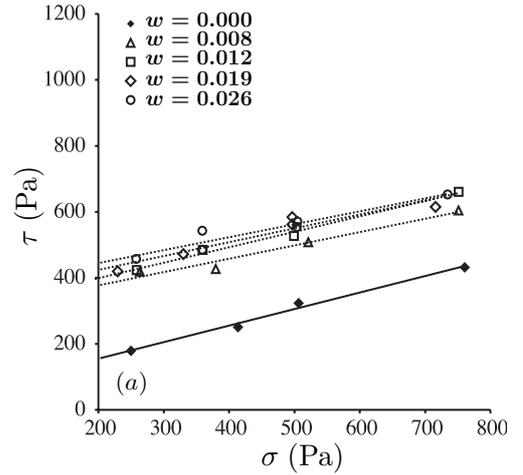


FIG. 4: (a) Yield loci τ - σ of well-graded glass beads for increasing level of water content; (b) the Coulomb cohesion as a function of water content.

act also through a Coulomb friction law with a viscous regularization at low sliding velocities. The material is sheared quasistatically in a direct shear cell in the presence of gravity and confining stresses. The damping parameter and the normal stiffness (force per unit overlap) were adjusted in order to get largest time step (10^{-6} s) and small overlaps within numerical stability. The normal stiffness and the interparticle coefficient of friction were 10^3 N/m and 0.4, respectively.

B. Capillary cohesion law

The capillary attraction force between two particles is a consequence of the liquid surface tension and the pressure difference between liquid and gas phases [24]. For efficient numerical calculation, we need an explicit expression of the capillary force f_n^c as a function of the interparticle gap δ_n . By extending the work of Mikami et al. [15], it was recently shown by Soulié et al. [25] that

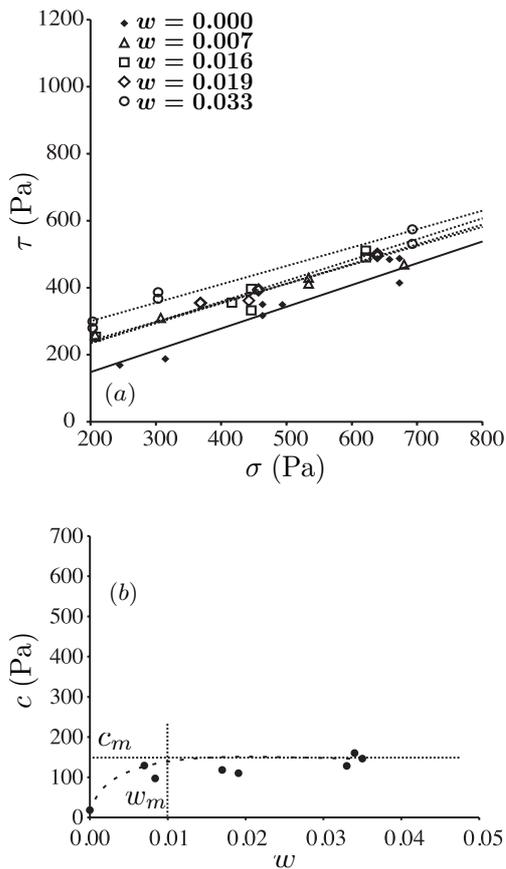


FIG. 5: (a) Yield loci τ - σ of monodisperse glass beads for increasing level of water content; (b) the Coulomb cohesion as a function of water content.

the capillary force can be cast in the following form:

$$f_n^c = \begin{cases} -\pi\gamma_s\sqrt{R_1R_2}\{\exp(A\delta_n^* + B) + C\} & \text{for } \delta_n^* > 0 \\ -\pi\gamma_s\sqrt{R_1R_2}\{\exp(B) + C\} & \text{for } \delta_n^* \leq 0 \end{cases}, \quad (2)$$

where R_1 and R_2 are the sphere radii ($R_1 \leq R_2$), γ_s is the liquid surface tension, $\delta_n^* = \delta_n/R_2$ (see Fig. 6). The parameters A , B and C are functions of the liquid volume V_b of the bond and the contact angle θ as follows

$$\begin{aligned} A &= -1.1(V_b^*)^{-0.53}, \\ B &= (-0.148 \ln V_b^* - 0.96)\theta^2 \\ &\quad - 0.0082 \ln V_b^* + 0.48, \\ C &= 0.0018 \ln V_b^* + 0.078, \end{aligned} \quad (3)$$

where $V_b^* = V_b/R_2^3$.

It can be shown that a liquid bond is stable as long as the gap is below a de-bonding distance δ_n^{max} given by [13]

$$\delta_n^{max} = (1 + 0.5\theta)V_b^{1/3}. \quad (4)$$

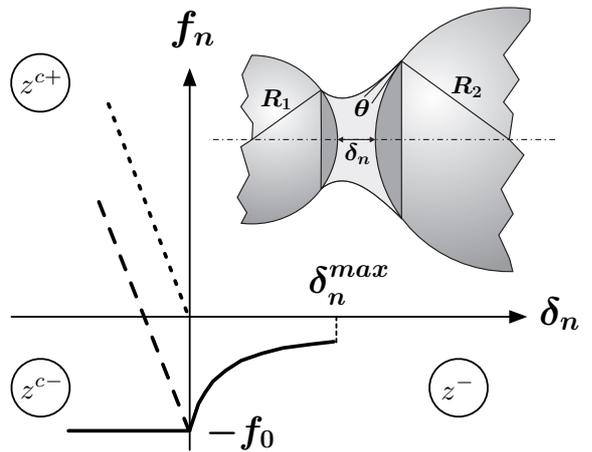


FIG. 6: Typical behavior of the capillary force f_n^c as a function of the gap δ_n (solid line). The elastic repulsive normal force as a result of overlapping ($\delta_n < 0$) is shown (short-dashed line). The resultant normal force in this range is shown as well (long-dashed line). z^{c+} , z^{c-} and z^- are the partial wet coordination numbers in this range. Inset: Geometry of a liquid bridge between two particles.

Figure 6 shows a schematic representation of the capillary force as a function of the gap. In Fig. 7 the capillary force f_n^c is displayed as a function of the gap δ_n according to Eq. 2 for different values of the liquid bridge volume V_b . These plots are in perfect agreement with those obtained by other authors by integration of the Laplace-Young equation and verified experimentally [26]. The largest absolute value f_0 of the capillary force occurs at $\delta_n = 0$. It is remarkable that f_0 is directly proportional to $\sqrt{R_1R_2}$ and only very weakly dependent on the liquid volume. This property, which might seem counter-intuitive, is important for the model that will be introduced in section IV. Hence, with a good approximation, we may write

$$f_0 = \kappa\sqrt{R_1R_2}, \quad (5)$$

where κ is a function only of the surface tension and the contact angle. In our case, with glass beads and water bridges, we have $\kappa = 0.4$ N/m. Let us underline here the fact that the capillary bond in the range $\delta_n > 0$ is unstable with respect to the forces acting on two particles. In other words, when pulling two particles apart from one another, the liquid bond fails at zero gap for $f_n = -f_0$. In our simulations, we find that the fraction of liquid bonds in the range $\delta_n > 0$ is always below 15% (see Fig. 11). This shows that the capillary failure threshold f_0 is far more important for the failure of a wet material than the de-bonding distance δ_n^{max} . This point will be discussed in more detail in section IV.

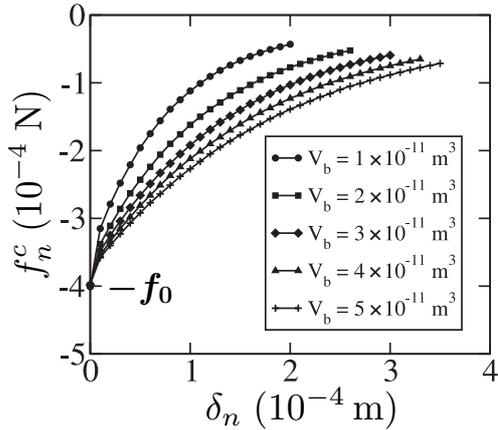


FIG. 7: Capillary force as a function of the gap according to Eq. 2 for increasing liquid volume V_b .

C. Sample preparation

The numerical samples are composed of spherical particles of three different diameters (2 mm, 1.5 mm and 1 mm) placed randomly in a cylindrical cell in appropriate proportions (50%, 30% and 20%) to represent one of our experimental samples composed of glass beads. The initial configuration is prepared under gravity without introducing capillary bonds. Then, we attribute a capillary bond to each pair of particles within the de-bonding distance. Finally, the sample is consolidated under the action of a vertical confining pressure with a zero coefficient of friction. The consolidation is stopped and the coefficient of friction set to 0.4 as soon as the solid fraction $\phi = 0.6$ is reached. The subsequent compaction is negligibly small.

The volume V_b attributed to a capillary bond between two particles is taken to be proportional to the particle diameters and the intercenter distance, and such that the total volume of all liquid bonds in the sample is equal to that of the added water. Since all particle pairs within the de-bonding distance are considered, the liquid coordination number z (i.e. the average number of liquid bonds per particle) obtained by this procedure has the highest possible value. For our sample we get $z = 8$ for $w = 0.01$ (see Fig. 14). In our simulations, the liquid bond volumes vary by a factor 8 from the contact between the smallest particles to that between the largest particles. On the other hand, the contact angle with a good approximation was set to zero. Moreover, since the de-bonding length varies as $V_b^{1/3}$, there is a factor 2 between the shortest and longest de-bonding distances.

During shearing, the number of liquid bonds evolves and the available liquid must be redistributed in the system. We used two different methods for redistribution: (1) we simply apply the above procedure every time the contact list is updated; (2) the volume of a broken liquid bond is split between the corresponding particles (pro-

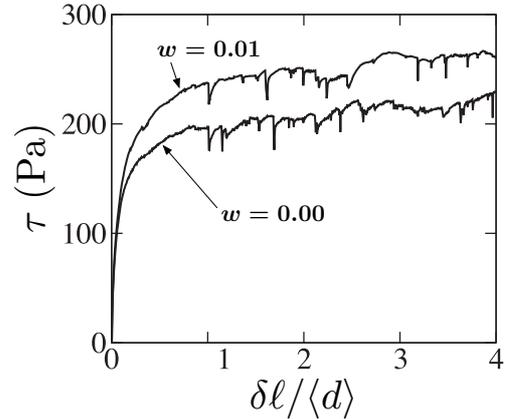


FIG. 8: The shear stress τ as a function of shearing distance $\delta\ell$ normalized by the average particle diameter $\langle d \rangle$ for a dry and a wet sample simulated by the molecular dynamics method. The confining stress is $\sigma = 300$ Pa.

portionally to their diameters) and conserved for the formation of new liquid bonds when a contact occurs with the same particles. In this method, the volume of free liquid left after de-bonding is kept with the two particles (and not distributed to the other bonds of the same particles) and used only if a new contact is formed. This implies that, if the initial liquid distribution is homogeneous, then it will remain so during deformation as in the first method. In other words, the liquid will not migrate considerably and one should expect quite similar results from both methods. Indeed, in different tests, we found that both methods lead to nearly identical results. Unless mentioned explicitly, all results presented in this section were obtained by the first method.

D. Boundary conditions and driving

As in experiments, the cylindrical cell is composed of two disjoint parts. The lower part is fixed whereas the upper part moves horizontally, giving rise to a shear plane along the common section of the two parts. We apply a constant vertical load σ , the same as in experiments, on top of the sample. However, in contrast to experiments, shearing is controlled by imposing a constant horizontal velocity on the upper part. The numerical sample has exactly the same dimensions as in experiments.

E. Results

Figure 8 shows the stress-strain plot for a dry and a wet sample with $w = 0.01$. The initial configuration is the same in both simulations. The initial elastic increase of τ (up to ~ 75 Pa) as a function of $\delta\ell$ is common between the two samples. We observe no stress peak in the

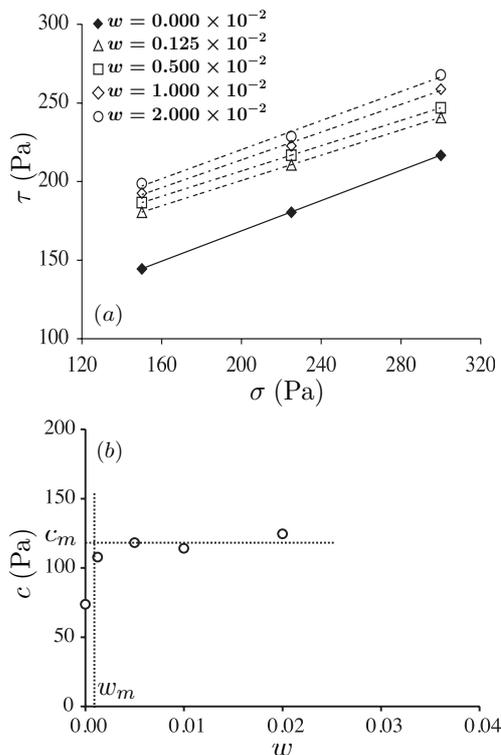


FIG. 9: (a) Yield loci τ - σ from 15 simulations for increasing level of water content; (b) the corresponding values of the Coulomb cohesion c as a function of water content.

wet case. The steady state (“critical state” in soils mechanics) is reached at $\delta l \simeq \langle d \rangle$ for all water contents. The steady state deformation involves numerous instabilities that occur throughout the system and appear in the form of rapid stress drops on the stress-strain plots. We see that in transition from dry to wet materials the frequency of such instabilities declines while their amplitudes grow.

We now turn to the evolution of the Coulomb cohesion as a function of w . Figure 9(a) shows fitted yield loci from 15 simulations involving three different values of the confining pressure σ and five different values of the water content w . The Coulomb cohesion c is drawn as a function of w in Fig. 9(b). The latter is very similar to the corresponding experimental plot (Fig. 5(b)) for monodisperse glass beads. We observe a saturation of c at still lower levels of water content ($w_m \simeq 0.001$). Note also that, while the average grain size is nearly the same in these simulations and in the case of monodisperse experimental glass beads, the maximum cohesion $c_m = 120$ Pa in the simulations is very close to that (150 Pa) for 1 mm glass beads.

In contrast to the experiments, where the stresses are measured at the walls, it is also possible to compute the stress tensor for grain-to-grain forces in the simulations (see below). However, we found that in our simulations, the results from these two methods do not coincide. This is because in direct shearing, wall effects give rise to large

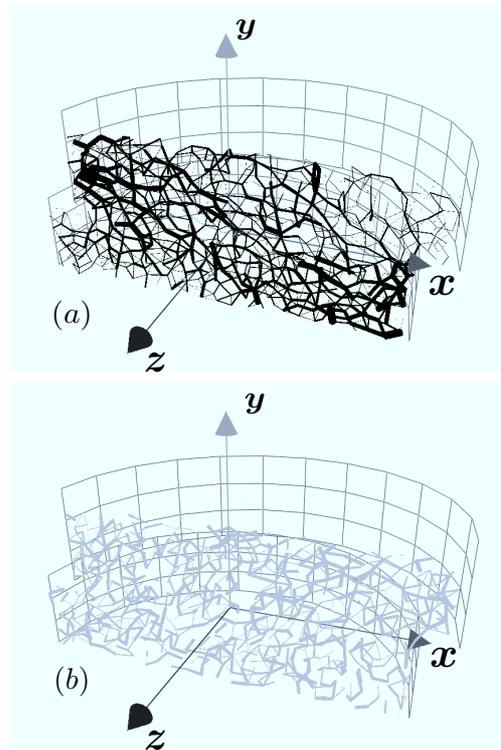


FIG. 10: (Color online) Compressive force network (a) and tensile force network (b) in a thin vertical layer. Weak forces are not shown. xz is the shear plane and y -axis points upward.

stress gradients in the bulk. This point has been analyzed in detail by Thornton and Zhang [27]. We used here the wall stresses τ and σ for comparison with the corresponding experimental values.

Figure 10 displays a typical example of the force network in a thin vertical layer (parallel to xy plane). We observe a strongly inhomogeneous transmission of both compressive and tensile forces. The liquid bonds belong to three different classes: (1) contacts carrying a compressive (positive) force; (2) contacts carrying a tensile (negative) force; (3) liquid bonds with no contact and thus carrying a tensile force. We denote the corresponding partial coordination numbers by z^{c+} , z^{c-} and z^- , respectively (see Fig. 6). Fig. 11 shows the evolution of these partial coordination numbers as a function of shear displacement. Interestingly, although the bonds are optimally distributed in the sample (according to the first redistribution method), z^- is only about one bond per particle. This means that the overall contribution of this class, involving a low number of bonds and rather weak forces, to stress transmission is marginal. The evolution of particle connectivity is mainly reflected in the regular fall-off of z^{c-} during shear. This class, with numerous contacts and a high force level, provides the largest contribution to the transmission of tensile stresses in the packing. The rather large and constant value of z^{c+} is a reflection of the fact that the packing is globally sub-

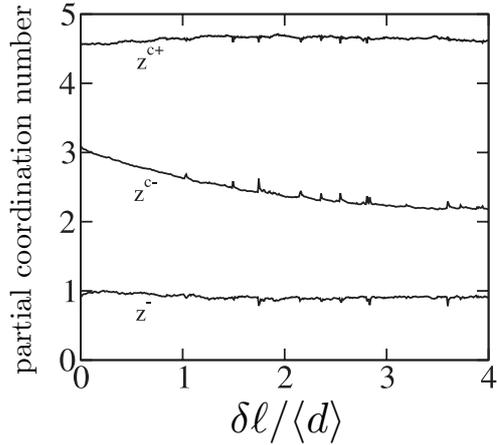


FIG. 11: Partial coordination numbers as a function of shearing distance.

jected to boundary compressive stresses.

The probability distribution function P of normal bond forces is shown in Fig. 12. The largest forces belong to the compressive network (involving no limiting threshold) whereas the tensile forces extend down to the capillary force threshold $-f_0$. The distribution reveals three different force intervals with different statistics in each interval:

$$P(f_n) \propto \begin{cases} e^{-\beta \frac{f_n}{\langle f_n \rangle}} & \text{for } f_n > \langle f_n \rangle \\ \left(\frac{f_n}{\langle f_n \rangle}\right)^{-\alpha} & \text{for } 0 < f_n < \langle f_n \rangle \\ \gamma \frac{f_n + f_0}{\langle f_n \rangle} + P_0 & \text{for } -f_0 < f_n < 0 \end{cases}, \quad (6)$$

where $\langle f_n \rangle$ is the average normal force, $\alpha \simeq 0.4$, $\beta \simeq 0.16$, $\gamma \simeq 0.15$ and $P_0 = P(-f_0)$. The distribution for compressive forces is reminiscent of that observed in dry granular media [28–30]. The exponent β has, however, a smaller value in the cohesive case. This means that tensile forces allow the packing to sustain stronger compressive force chains than in a cohesionless material. The power law distribution of weak compressive forces (the range $0 < f_n < \langle f_n \rangle$) over nearly one decade suggests that, in the presence of cohesive bonds, the contact network in this range is self-similar. These contacts are referred to as “weak contacts” and they play an important role in propping strong force chains in the complementary “strong network” (the range $f_n > \langle f_n \rangle$) [31]. The probability distribution P is robust and the exponents do not evolve during shear.

Figure 13(a) shows a polar diagram of the probability distribution function $P(\mathbf{n})$ of bond directions \mathbf{n} at the end of shearing for $w = 0.02$ (the distribution being similar in other cases). The distribution is nearly isotropic along the shear plane (xz plane in the figure) but it shows a pronounced anisotropy in the shear direction along the vertical plane (xy plane in the figure). Fig. 13(b) displays three separate polar diagrams of the strong, weak and

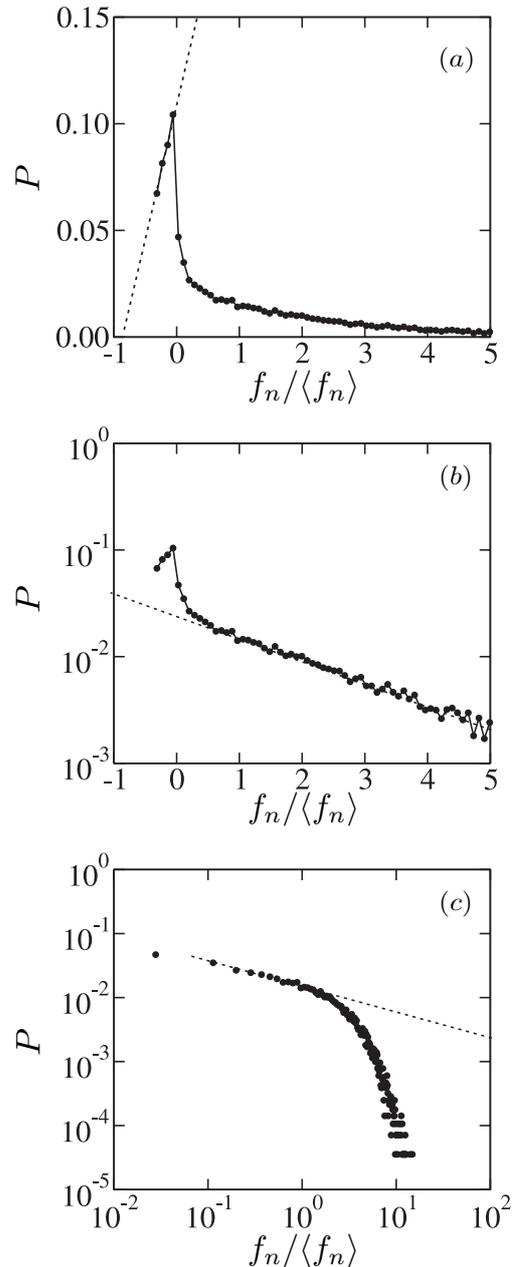


FIG. 12: Probability distribution function P of normal forces f_n normalized by the mean $\langle f_n \rangle$ represented on linear scale (a), log-linear scale (b) and log-log scale (c).

tensile bonds along the vertical plane. The strong compressive bonds form an anisotropic distribution with its longest axis oriented at 45° to the horizontal, as expected. The weak compressive bonds have a nearly isotropic distribution. Finally, the tensile bonds have an anisotropic distribution whose longest axis is perpendicular to that of strong compressive bonds. It has also been argued that the tensile forces play the same role in sustaining the strong force chains as the weak network [32].

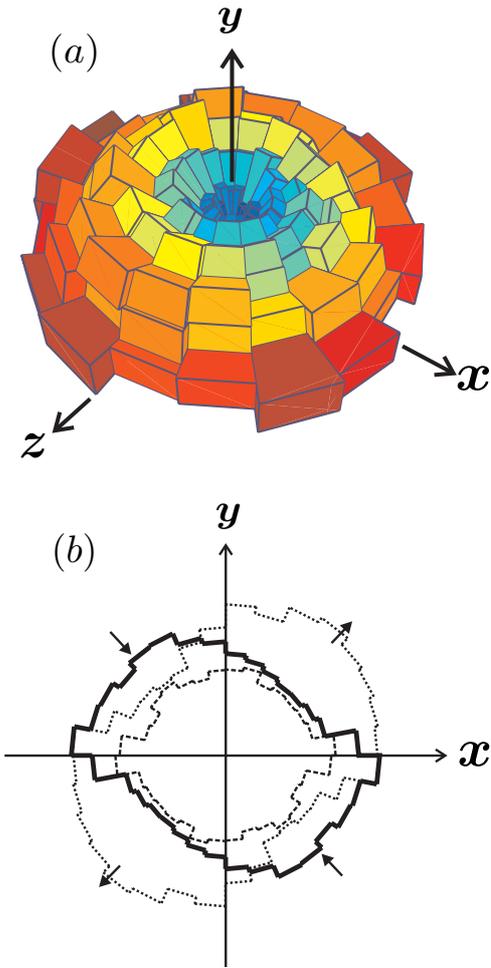


FIG. 13: (Color online) (a) Polar diagram of the probability distribution function of bond direction; (b) polar diagrams of strong (solid line), weak (dashed line) and tensile (dotted line) bonds along the vertical plane. The direction of extension and compression are represented (arrows).

IV. A MICROSCOPIC ANALYSIS

In this section, we would like to propose an expression for the Coulomb cohesion c as a function of parameters pertaining to the granular microstructure in the presence of liquid bonds. When the Mohr-Coulomb model (Eq. 1) is valid also in the range of negative stresses down to the tensile strength $-\sigma^t$, the Coulomb cohesion is related to the tensile strength by $c = \mu\sigma^t$. Keeping with this assumption, we therefore consider the tensile strength. Theoretical evaluation of the tensile strength and its comparison with experiments or simulations can be found in recent literature concerning wet granular materials [8, 16]. The first theoretical expression of tensile strength was proposed by Rumpf [33]. The key point is how capillary forces are mobilized in a wet material and what are the relevant structural parameters. Several pa-

rameters, such as the particle size and its distribution, the solid fraction ϕ and the internal coefficient of friction μ , influence the macroscopic cohesion. The effect of the water content w is somehow counter-intuitive. Indeed, the Coulomb cohesion saturates as the water content is increased while we expect that both the number of liquid bonds and the strength of each bond should increase with the water content and lead to higher cohesion.

In order to estimate the tensile strength from contact forces, we consider the general expression of the stress tensor σ in a granular material. This is an average quantity with a well-established expression involving contact forces f^k and inter-center distances ℓ^k [34, 35]:

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{V} \sum_{k \in V} f_i^k \ell_j^k, \quad (7)$$

where i and j refer to components and V is the control volume. The derivation of this expression is independent of the nature of interactions so that Eq. 7 holds also in the presence of capillary forces. In this case, the set of contact points is simply extended to cover capillary bridges. It can be shown that σ is symmetric if no torques are transmitted at the interaction points. From Eq. 7, the stress σ_{11} in the direction of extension is given by:

$$\sigma_{11} = n_w \langle f_1 \ell_1 \rangle_b, \quad (8)$$

where n_w is the number of bonds per unit volume, f_1 and ℓ_1 are the components along the direction of extension. The symbol $\langle \dots \rangle_b$ designates averaging over all bonds in the control volume V . Let \mathbf{n} and \mathbf{t} be the normal unit vector and a tangential unit vector, respectively, at a given bond. Then, $f_1 = f_n n_1 + f_t t_1$ and $\ell_1 = \ell n_1$ where f_n and f_t are the normal and tangential components of the force, and ℓ is the length of the branch vector ℓ . Let us set $n_1 = \cos \Theta$ and $t_1 = \sin \Theta$, where Θ is the angle between \mathbf{n} and the direction of extension. Substituting in Eq. 8 and assuming for simplicity that f_n and f_t are independent of Θ , we arrive at the following expression:

$$\sigma_{11} = \frac{1}{2} n_w \langle f_n \ell \rangle_b. \quad (9)$$

In solid state physics, a theoretical tensile strength σ^{th} is introduced from inter-atomic forces by assuming that the same failure threshold is reached simultaneously for all pairs of atoms in the direction of traction [36]. In a similar approach, we may introduce a theoretical tensile strength for a wet particle assembly by replacing f_n in Eq. 9 by the capillary force threshold f_0 :

$$\sigma^{th} = \frac{1}{2} n_w \langle f_0 \ell \rangle_b. \quad (10)$$

The bond density n_w is simply half the average number of bonds per particle divided by the free volume, i.e. the mean volume V_p of a Voronoi cell surrounding the particle. The latter is simply the average particle volume

$(1/6)\pi\langle d^3 \rangle$ divided by the solid fraction ϕ . Introducing these expressions in Eq. 10 and using Eq. 5, we get

$$\sigma^{th} = \frac{3}{2\pi} \kappa \phi z \frac{\langle (R_1 + R_2) \sqrt{R_1 R_2} \rangle}{\langle d^3 \rangle} = \frac{3}{4\pi} s \frac{\kappa \phi z}{\langle d \rangle}, \quad (11)$$

where z is the average number of bonds per particle and we have

$$s = \frac{\langle d^{1/2} \rangle \langle d \rangle \langle d^{3/2} \rangle}{\langle d^3 \rangle}. \quad (12)$$

In derivation of the expression of s , it was assumed that the particle radii R_1 and R_2 are not correlated. This means that various granulometric classes are homogeneously distributed in the bulk. It is easy to see that for a uniform size distribution, s varies from 8/15 to 1 as the smallest particle size increases from 0 to the mean particle size. For a monodisperse assembly, we have $s = 1$ (see Table I). Eq. 11 is similar to the expression proposed first by Rumpf [33] for monodisperse materials (so, without the s prefactor), and recently derived from the stress tensor by Gröger et al. [16]. Our equation 11 accounts in a simple way for polydispersity and the correlation between the capillary force threshold f_0 and the particle size d . For real polydisperse materials, the factor s is crucial for comparing the model with experiments.

By definition, the Coulomb cohesion is the yield shear stress at zero confining pressure in which case the capillary forces are the only forces acting in the material. In this limit, the normal stress σ on the shear plane is simply equal to the average capillary force divided by the sample section S . We have seen that ‘‘gap’’ liquid bonds (without contact) contribute only marginally to force transmission (z^- being below one bond per particle); see Fig. 11. It is thus reasonable to assume that the capillary force at each bond is f_0 . This means that, in the absence of confining stresses, we may set $\sigma = \sigma^{th}$. Then, the shear stress at yield is the theoretical cohesion c^{th} given by

$$c^{th} = \mu \sigma^{th} = \frac{3}{4\pi} \mu s \frac{\kappa \phi z}{\langle d \rangle}. \quad (13)$$

It is important to note that the water content does not enter the above expression of c^{th} . The only parameter related to water is κ . This suggests that the water content manifests itself mainly through the wet coordination number $z = z^- + z^{c-} + z^{c+}$. In particular, the cohesion c_m at saturation corresponds to the saturation of z as the water content w is increased. In fact, when a certain amount of water is homogeneously distributed in the whole sample within the de-bonding distance, one finds that z increases with w and saturates beyond $w = w_m$. This is shown in Fig. 14 for the initial configuration of our numerical samples. This is a purely geometrical effect related to steric exclusions among particles and it explains therefore the saturation of cohesion with water content according to Eq. 13.

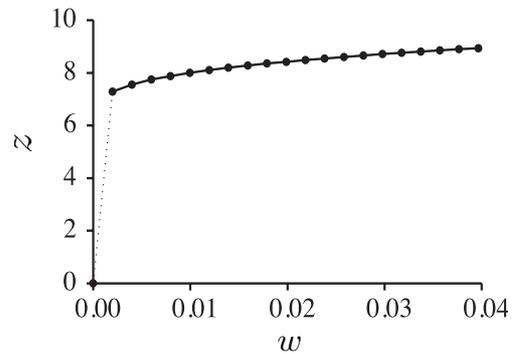


FIG. 14: The initial wet coordination number in simulations as a function of water content.

Although this geometrical saturation should dominate in the pendular state, it does not elude that other mechanisms might play a role in the experiments. In particular, as the liquid content is increased, the liquid bonds may coalesce at least locally, leading to bond saturation. We did not observe liquid bond clustering at the visible parts of our samples.

The initial value of z depends also on the preparation protocol. Since f_0 is independent of w , the same amount of water can be distributed in such a way as to produce a lower number of liquid bonds and thus a lower macroscopic cohesion. This effect is illustrated in Fig. 15 where the stress-strain plots are shown for two initially identical configurations differing only in the number of liquid bonds for the same water content. The simulation was carried out by using the second method of liquid redistribution (section III). In the sample where half of the water bonds has been removed, the wet coordination number increases with deformation. But in the initial stages of deformation, the cohesion is close to half that of the sample involving a double number of water bonds, and it increases as the wet coordination number grows.

We summarize in Table I the theoretical estimates c^{th} and the measured values c_m of the saturated Coulomb cohesion for all our experimental and numerical samples together with the values of the parameters involved in Eq. 13. The value of the polydispersity factor s was calculated from the knowledge of the particle size distributions. Note that c^{th} is in excellent agreement with c_m both for experiments and simulations. It is noteworthy that if the prefactor s were not incorporated in Eq. 13 (i.e. if Rumpf’s equation had been used), the measured value of c_m would be below c^{th} by a factor s .

This agreement between the theoretical estimate and experiments with sand and glass beads was obtained with $z = 6$ which is a reasonable value of the bond coordination number in the case of a homogeneous distribution of water in the bulk, and it is suggested by recent experimental observations [5, 11]. Note, however, that in the case of fine-grain samples (sand and GB1 in Table I) a closer agreement can be obtained with a lower value of z .

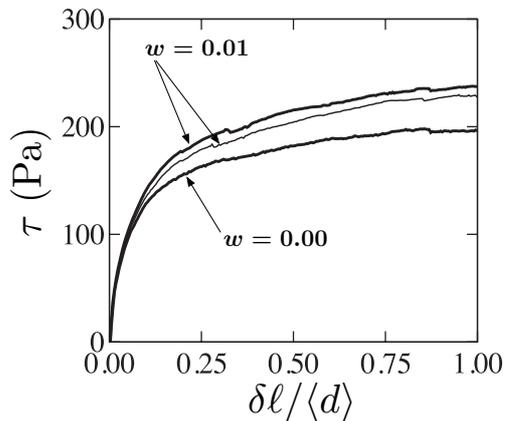


FIG. 15: The shear stress τ as a function of shearing distance $\delta\ell$ normalized by the average particle diameter $\langle d \rangle$ for a dry and two wet samples with different numbers of liquid bonds; see text. The confining stress is $\sigma = 300$ Pa.

TABLE I: Measured and theoretical parameters for all our experimental and numerical samples. The approximate value of the bond coordination number z for the experiments (indicated by a question mark) was suggested by the literature [5, 11].

	Sand	GB1 ^a	GB2 ^b	GB3 ^c	Simulations
$\langle d \rangle$ (mm)	0.16	0.45	0.60	1.00	1.65
s	0.50	0.99	0.91	1.00	0.79
z	6(?)	6(?)	6(?)	6(?)	9
ϕ	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6
μ	0.66	0.58	0.58	0.46	0.48
c_m (Pa)	600	350	300	150	120
c^{th} (Pa)	709	438	302	158	118

^atightly-graded polydisperse glass beads

^bwell-graded polydisperse glass beads

^cmonodisperse glass beads

This is suggestive in the sense that liquid bond clustering might indeed occur more frequently for fine grains and reduce thus the effective bond coordination number.

By construction, the theoretical estimate is an upper bound for cohesion. For brittle materials, failure is initiated by the breakdown of a few bonds and propagates subsequently into the material. When this mechanism works, the tensile strength is not controlled by the average stress (as assumed in the derivation of σ^{th}) but by the largest local stresses, and hence the effective strength is far below the theoretical one (in proportion to the stress concentration factor) [37]. Hence, the nice agreement of the theoretical estimate both with simulations and experiments suggests that the failure of our wetted granular materials is ductile and the shear strength is controlled by the mean tensile force.

V. CONCLUSION

We performed experiments and discrete element simulations to analyze the Coulomb cohesion of wet granular media in the pendular state. It was shown that the Coulomb cohesion increases with water content and saturates to a maximum value that depends only on the nature of the material. An interesting aspect that was partly investigated by simulations is that the cohesion is basically controlled by the number of liquid bonds. This suggests that the saturation of Coulomb cohesion occurs since new bonds are hardly formed beyond a certain amount of the water content. On the other hand, the capillary failure threshold is nearly independent of the local liquid volume.

Starting with the expression of the stress tensor, we also introduced a novel expression for the Coulomb cohesion as a function of material and structural parameters. This expression extends the classical model of Rumpf to polydisperse materials. We found that our model is in excellent agreement with experimental and numerical data.

From numerical data, we analyzed the connectivity and anisotropy of different classes of liquid bonds according to the sign and level of the normal force as well as the bond direction. We found that weak compressive bonds are almost isotropically distributed whereas strong compressive and tensile bonds have a pronounced anisotropy. It was shown that the probability distribution function of normal forces is exponentially decreasing for strong compressive bonds, a decreasing power-law function over nearly one decade for weak compressive bonds and an increasing linear function in the range of tensile bonds.

In the extension of this work, it is essential to evaluate the limits of the model by considering other materials and non monotonous loading paths. In particular, we would like to study the shear strength of granular media with a larger polydispersity than materials that were used in the present investigation. Since the distribution of liquid bonds seems to be a major parameter for the cohesion, it also merits to be investigated in more detail experimentally. Finally, an interesting application of the ideas put forward in this paper would be to examine by which mechanisms the cohesion of a sample of wet sand increases as a result of compactification.

Acknowledgments

We gratefully acknowledge J.-Y. Delenne, R. Peyroux and F. Soulié for interesting discussions. The first author would like to thank DGA (the french ministry of defense) for providing financial support for his PhD work.

-
- [1] D. J. Hornbaker, R. Albert, I. Albert, A.-L. Barabasi, and P. Schiffer, *Nature* **387**, 765 (1997).
- [2] T. C. Halsey and A. J. Levine, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 3141 (1998).
- [3] D. Bika, M. Gentzler, and J. Michaels, *Powder Technology* **117**, 98 (2001).
- [4] S. Iveson, J. Beathe, and N. Page, *Powder Technology* **127**, 149 (2002).
- [5] M. Kohonen, D. Geromichalos, M. Scheel, C. Schier, and S. Herminghaus, *Physica A* **339**, 7 (2004).
- [6] J. K. Mitchell and K. Soga, *Fundamentals of Soil Behavior, third edition* (Wiley, 2005).
- [7] A. Castellanos, J. M. Valverde, and M. A. S. Quintanilla, *Phys. Rev. E* **65**, 061301 (2002).
- [8] P. Pierrat and H. Caram, *Powder Technology* **91**, 83 (1997).
- [9] G. Betz, P. J. Bürgin, and H. Leuenberger, *International Journal of Pharmaceutics* **252**, 11 (2002).
- [10] T. Kim and C. Hwang, *Engineering Geology* **69**, 233 (2003).
- [11] Z. Fournier, D. Gerimichalos, S. Herminghaus, M. M. Kohonen, F. Mugele, M. Scheel, M. Schulz, B. Schulz, C. Schier, R. Seemann, et al., *Applied Physics: Condensed Matter* **17**, 477 (2005).
- [12] C. Thornton, M. T. Ciomocos, and M. J. Adams, *Powder Technology* **140**, 258 (2004).
- [13] G. Lian, C. Thornton, and M. J. Adams, *Chemical Engineering Science* **53**, 3381 (1998).
- [14] M. J. Rhodes, X. S. Wang, M. Nguyen, P. Stewart, and K. Liffman, *Chemical Engineering Science* **56**, 4433 (2001).
- [15] T. Mikami, H. Kamiya, and M. Horio, *Chemical Engineering Science* **53**, 1927 (1998).
- [16] T. Gröger, U. Tüzün, and D. Heyes, *Powder Technology* **133**, 203 (2003).
- [17] M. J. Jiang, S. Leroueil, and J. M. Konrad, *Computers and Geotechnics* **31**, 473 (2004).
- [18] M. K. Hubbert, *Bulletin of the Geological Society of America* **62**, 355 (1951).
- [19] W. Schellart, *Tectonophysics* **324**, 1 (2000).
- [20] D. Rossi and F. Storti, *Journal of Structural Geology* **25**, 1893 (2003).
- [21] J. van Mechelen, *Tectonophysics* **384**, 275 (2004).
- [22] P. A. Cundall and O. D. L. Strack, *Géotechnique* **29**, 47 (1979).
- [23] M. P. Allen and D. J. Tildesley, *Computer Simulation of Liquids* (Oxford University Press, Oxford, 1987).
- [24] G. Lian, C. Thornton, and M. Adams, *Journal of Colloid and Interface Science* **161**, 138 (1993).
- [25] F. Soulié, F. Cherblanc, M. S. El Yousoufi, and C. Saix, *Int. J. for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* (in press, <http://www3.interscience.wiley.com/cgi-bin/jissue/110435841>).
- [26] C. Willett, M. Adams, S. Johnson, and J. Seville, *Langmuir* **16**, 9396 (2000).
- [27] C. Thornton and L. Zhang, in *Powders and grains 2001*, edited by Y. Kishino (A.A. Balkema, 2001), pp. 183–190.
- [28] F. Radjaï, S. Roux, and J. J. Moreau, *Chaos* **9**, 544 (1999).
- [29] T. S. Majmudar and R. P. Behringer, *Nature* **435**, 1079 (2005).
- [30] D. M. Mueth, H. M. Jaeger, and S. R. Nagel, *Phys. Rev. E* **57**, 3164 (1998).
- [31] F. Radjaï, D. E. Wolf, M. Jean, and J. J. Moreau, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 61 (1998).
- [32] F. Radjaï, I. Preechawuttipong, and R. Peyroux, in *Continuous and discontinuous modelling of cohesive frictional materials*, edited by P. A. Vermeer, S. Diebels, W. Ehlers, H. J. Herrmann, S. Luding, and E. Ramm (2000).
- [33] H. Rumpf, *Chemical Engineering Technology* **42**, 538 (1970).
- [34] J. Christoffersen, M. M. Mehrabadi, and S. Nemat-Nasser, *J. Appl. Mech.* **48**, 339 (1981).
- [35] J. J. Moreau, in *Friction, Arching, Contact Dynamics* (World Scientific, Singapore, 1997), pp. 233–247.
- [36] M. S. El Youssoufi, J.-Y. Delenne, and F. Radjaï, *Phys. Rev. E* **71**, 051307 (2005).
- [37] H. J. Herrmann and S. Roux, *Statistical Models for Fracture in Disordered Media* (North Holland, Amsterdam, 1990).

Table des figures

1.1	Processus de déminage par scarification. Essais en vraie grandeur réalisés à l'Établissement Technique d'Angers (ETAS)	15
1.2	Schématisme d'une charrue de déminage	16
1.3	Coupe d'un sol de surface	16
1.4	Exemples d'appareils mis au point dans le cadre du PEA « sols de surface » pour la caractérisation mécanique des sols in situ. (a) l'indentomètre rotatif; (b) le scléromètre	18
1.5	Réalisation d'une courbe granulométrique en pourcentage de masse	23
1.6	Les différents régimes de l'eau dans un sol granulaire non saturé	23
2.1	Décomposition de la force d'interaction	28
2.2	Graphe de Signorini	29
2.3	(a) Vue photo-élastique des contraintes dans un disque comprimé; (b) Schématisation de l'interpénétration	30
2.4	Loi de Hertz	31
2.5	Exemple de loi de plastification du contact	32
2.6	Loi de cohésion uniforme	34
2.7	Mécanisme de cohésion au contact	35
2.8	Loi JKR simplifiée (Preechawuttipong, 2002)	35
2.9	Loi de contact avec plastification et cohésion (Luding et al., 2005)	36
2.10	Paramètres de description d'un pont liquide	37

2.11	Loi affine de cohésion capillaire	37
2.12	Loi de cohésion capillaire avec hystérésis	39
2.13	Comparaison du modèle de rupture d'un pont capillaire avec l'expérience (Soulié et al., 2005a)	39
2.14	Degrés de liberté d'un joint solide. Les points L_i et L_j sont des points matériels dont les positions (initialement confondues) sont suivies au cours du temps	41
2.15	Loi de cohésion solide	42
2.16	Surface limite de rupture d'un joint solide (Delenne et al., 2004)	42
2.17	Forme régularisée de la loi de frottement de Coulomb avec prise en compte d'une force normale de cohésion	44
2.18	Loi de frottement de Norton-Hoff	44
2.19	Repère global	46
2.20	Repère local d'interaction entre deux grains	47
2.21	Repère lié à un grain	49
2.22	Exemple de singularité avec l'emploi des angles d'Euler	50
2.23	Définition des points instantanés et localisés d'interaction	51
2.24	Définition d'un repère d'interaction entre une sphère et une demi-boîte de cisaillement lors d'un contact avec la partie cylindrique (a), le bord (b), ou la partie plane (c)	56
2.25	Frontières mono-périodiques dans la direction du vecteur \vec{X}	58
2.26	Trajectoires d'un grain déterminées avec différents pas de temps et trajectoire théorique	60
2.27	Distance de la position finale du grain par rapport à sa position finale théorique en fonction du pas de temps	60
2.28	Comparaison du modèle de masse oscillante au calcul numérique	61
2.29	Relation entre le coefficient d'amortissement et le coefficient de restitution	63
2.30	Trajectoires d'un grain déterminées avec différents taux d'amortissement et trajectoire théorique déterminée avec un coefficient de restitution égal à 0,5	63
2.31	Distance d'alerte. Les grains gris ne font pas parti de la liste	65
3.1	Visualisation du volume des ponts liquides dans une tranche verticale d'un échantillon cylindrique. La position et l'intensité des points correspondent respectivement à la position et au volume de chacun des ponts liquides	71
3.2	Formation de gouttes à la surface des grains après la rupture d'un pont liquide	72

3.3	Partition du volume de liquide en deux volumes de réserve sous forme de gouttes à la surface des grains concernés par la rupture d'un pont capillaire. (a) cas monodisperse; (b) cas polydisperse	73
3.4	(a) Exclusion stérique; (b) le pont liquide peut se reformer en tout autre point	73
3.5	(a) Modèle d'écoulement par gravité; (b) prise en compte d'un volume maximal de pont liquide	74
3.6	Principe de l'essai de cisaillement et géométrie de la boîte de Casagrande .	76
3.7	Courbes types de résistance au cisaillement. (a) contrainte de cisaillement; (b) variation de hauteur	76
3.8	Diagramme de rupture obtenu en effectuant trois essais de cisaillement avec des contraintes normales différentes sur trois échantillons de même densité initiale	78
3.9	Réalisation d'un échantillon numérique par sédimentation et compaction .	79
3.10	Évolution de la compacité et du coefficient de frottement entre grains pendant une phase de compression	80
3.11	Dispositif de mesure du coefficient de frottement entre les billes de verre et les parois de la boîte de cisaillement	81
3.12	Mesure du coefficient de frottement entre les billes de verre et les parois de la boîte de cisaillement	82
3.13	Courbes numériques de cisaillement pour différentes compacités initiales ($\sigma=120$ kPa). Comparaison aux courbes expérimentales	83
3.14	Représentation graphique des lois étudiées	84
3.15	Contrainte de cisaillement τ et variation de hauteur Δh de l'échantillon en fonction de la distance de cisaillement $\delta \ell$ pour les différentes lois d'interaction ($\sigma = 120$ kPa, $\phi = 0,6$)	86
3.16	Représentation du réseau de forces de contact supérieures à la force normale moyenne, dans une section verticale de l'échantillon au bout de 2,22 secondes de cisaillement (X est la direction de cisaillement)	86
3.17	Direction principale majeure du tenseur de texture pour les différentes lois	88
3.18	Trajectoires des centres des grains situés dans une section verticale (dans le sens du cisaillement) de l'échantillon ayant une épaisseur de 2 fois le diamètre moyen des grains	88
3.19	Introduction de l'eau dans l'échantillon (a) et mélange (b)	91
3.20	Influence de l'eau sur la résistance au cisaillement pour différentes contraintes normales	92
3.21	Courbes ($\tau_{pic} - \tau_{res}, \sigma$) dans les cas sec et humide	93

3.22	Influence de la teneur en eau sur la dilatance pour différentes contraintes normales	95
3.23	Essais de cisaillement direct bidimensionnels réalisés avec le code de calcul LMGC90. (a) cas sec ; (b) cas cohésif. La couleur bleue correspond aux plus faibles déplacements et la couleur rouge correspond aux plus grands déplacements.	96
3.24	Illustration de l'appareil de cisaillement à faibles contraintes	97
3.25	Appareil réalisé. (a) Boîte de cisaillement et réceptacle pour le chargement normal ; (b) réceptacle pour imposer la force de cisaillement	99
3.26	Dispositif expérimental pour la détermination de la hauteur à partir de laquelle un effet Janssen apparaît	100
3.27	Détermination de la hauteur à partir de laquelle un effet Janssen apparaît pour les billes de verre (a) et pour le sable (b). (\square) pesées effectuées hors du tube ; (\blacklozenge) pesées effectuées à la base du tube	100
3.28	Courbe granulométrique du sable	101
3.29	Droites de Coulomb obtenues pour les quatre matériaux testés	102
3.30	Relation τ - σ obtenue sur des matériaux granulaires secs (Schellart, 2000). (S I et S II) sables. (GM I et GM II) micro-billes de verre. (CS) sucre . . .	103
3.31	Cohésion macroscopique en fonction de la teneur en eau pour les quatre matériaux testés	104
3.32	Réseaux de forces de compression (a) et de traction (b) ($\sigma = 300$ Pa, $w = 2\%$)	106
3.33	Diagramme polaire de la fréquence des forces négatives et des forces positives en fonction de leurs directions (projetées sur le plan XY)	107
3.34	Distribution statistique des forces normales montrées sur la figure 3.32. . .	108
3.35	Relation contrainte-déformation pour $w = 0\%$ et $w = 1\%$; $\sigma = 300$ Pa . . .	109
3.36	(a) Estimation des enveloppes de rupture ; (b) évolution de la cohésion macroscopique en fonction de la teneur en liquide	110
3.37	Illustration 2D des cellules de Voronoi entourant les grains	112
3.38	Relation entre la force seuil de cohésion capillaire et la racine carré des rayons des grains pour différents volumes de ponts liquides	113
3.39	Saturation rapide du nombre Z_L de ponts liquides par grain lorsque la teneur en eau augmente	114
3.40	Relation contrainte-déformation pour les teneurs en eau $w = 1\%$ et $w = 0\%$. La courbe intermédiaire correspond à un échantillon ($w = 1\%$) avec un nombre de ponts capillaires réduit de moitié	115

4.1	Échantillon de billes de verre de diamètres compris entre 0,8 mm et 1,3 mm à une teneur en eau $w = 3\%$	119
4.2	Résistance à la rupture dans l'essai de compression en fonction de la teneur en eau. Résultats expérimentaux obtenus par Soulié (2005) sur des billes de verre de diamètres compris entre 0,8 mm et 1,3 mm	120
4.3	État initial de l'échantillon numérique destiné à la compression simple . . .	121
4.4	Réseaux de forces en compression et en traction	122
4.5	Diagrammes polaires de la fréquence des actions de cohésion capillaire et de contact en fonction de leurs directions dans un essai numérique de compression simple	123
4.6	Courbes de résistance à la compression pour différentes teneur en liquide .	123
4.7	Échantillon numérique à la fin de la simulation ($w = 2\%$)	124
4.8	Résistance à la rupture dans l'essai de compression en fonction de la teneurs en eau. Comparaison avec les résultats de Soulié (2005)	125
4.9	Résistance à la rupture dans l'essai de compression en fonction de la teneur en eau. Simulation avec différents modèle de distribution de liquide	125
4.10	Résistance à la rupture dans l'essai de compression en fonction de la teneur en eau. Influence de la densité des ponts liquides	126
4.11	Configuration du système à quatre instants d'une simulation réalisée sans cohésion	128
4.12	Lois de cohésion utilisées pour l'étude de l'écoulement et de l'angle de repos d'un matériau granulaire	129
4.13	Dépôt sous gravité	129
4.14	Diagramme polaire de la fréquence des directions de contacts à la fin du dépôt. La simulation a été réalisée sans cohésion	130
4.15	Indice de cohésion en fonction de la force locale de cohésion	131
4.16	Distribution statistique des forces normales d'interaction pour différentes forces locales de cohésion	131
4.17	Diagrammes polaires de la fréquence des directions de contacts à différents instants de la vidange. La simulation a été réalisée sans cohésion	133
4.18	Observation qualitative des trois régimes d'écoulement. (a) régime d'écoulement granulaire; (b) régime d'écoulement aggloméré; (c) régime d'écoulement plastique	135
4.19	Taux de passage des grains dans le réceptacle inférieur pour les différentes forces constantes de cohésion	136
4.20	Vitesse quadratique moyenne des grains pour les différentes forces constantes de cohésion	136

4.21	Taux de passage des grains (a) et vitesse quadratique moyenne (b) pour différentes teneurs en eau	137
4.22	Angle de repos en fonction de la force de cohésion (a) et de l'indice de cohésion moyenné pendant l'écoulement (b) pour deux distances de cohésion	138
4.23	Angle de repos en fonction de la teneur en liquide	139
4.24	Échantillon numérique périodique	141
4.25	(a) Évolution de la résistance horizontale pour différentes valeurs de la force de cohésion entre les grains ; (b) Résistance horizontale moyenne en fonction de la force de cohésion entre les grains	142
4.26	Variation de la hauteur du patin pour différentes valeurs de la force de cohésion entre les grains	143
4.27	Évolution de la résistance horizontale pour différentes épaisseurs de sol	144
4.28	Variation de la hauteur du patin pour différentes épaisseurs de sol	144
A.1	Géométrie d'un pont liquide dans le cas polydisperse	160

Liste des tableaux

2.2	Quelques mécanismes locaux de cohésion	33
2.3	Fonction de pilotage en position	57
2.4	Fonction de pilotage en force	57
2.5	Paramètres du problème de test du pas de temps	59
3.1	Paramètres de simulation pour l'étude des lois d'interaction	85
3.2	Synthèse des mesures expérimentales	103
3.3	Répartition granulométrique en nombre de grains de l'échantillon numérique	105
3.4	Paramètres des simulations pour les essais à faibles contraintes	106
3.5	Paramètres mesurés et paramètres théoriques pour tous les échantillons expérimentaux et l'échantillon numérique.	116
4.1	Fractions granulométriques du matériau numérique	120
4.2	Paramètres des simulations de la compression simple	121
4.3	Paramètres communs aux simulations avec la loi de cohésion uniforme . . .	130
4.4	Paramètres communs aux simulations avec la loi de cohésion capillaire . . .	132

Résumé : L'étude porte sur la modélisation du comportement mécanique de matériaux granulaires cohésifs sous faibles niveaux de chargement. Le sujet est abordé par des approches numérique (en éléments discrets), expérimentale et théorique. Un code de calcul tridimensionnel (nommé **tapio-K**) a été mis au point avec comme spécificité d'intégrer plusieurs lois de cohésion. La confrontation d'essais expérimentaux et numériques de cisaillement direct d'échantillons de billes de verre a permis la validation du code de calcul. En outre, cette confrontation a mis en évidence la nécessité de réaliser des essais faiblement contraints afin de juger de l'influence de la cohésion capillaire. Un nouveau dispositif a été réalisé à cette fin. Les mesures obtenues à l'aide de ce dispositif, les simulations numériques, ainsi qu'une analyse théorique ont permis de mettre en évidence l'importance de la distribution du liquide au sein d'un matériau granulaire humide (phase liquide discontinue) sur la résistance au cisaillement. Enfin, quelques cas tests d'application (compression simple, vidange d'un matériau granulaire humide, traficabilité d'un sol de surface) sont présentés pour montrer les possibilités du code de calcul.

Title : Approach by 3D discrete elements of the behavior of cohesive granular materials weakly stressed

Abstract : This work concerns the modelling of the mechanical behavior of granular materials at low loading levels. Numerical (Discrete Element Method), experimental and theoretical approaches are used. A three-dimensional numerical code (called **tapio-K**) which includes several cohesion laws has been developed. This code was validated by comparison between experimental and numerical shear tests. Furthermore, this comparison has shown that low stress tests are required to identify the influence of capillary cohesion. For this aim, a new experimental setup implementing low stresses was conceived. The measurements obtained from this setup, the simulation results and a theoretical analysis show the crucial role of liquid distribution in the bulk (discontinuous liquid phase) on the shear stress. Finally, few application cases (simple compression, discharge of a wet granular material, mobility on a surface soil) are presented in order to show the abilities of the code.

Mots-clés : matériaux granulaires cohésifs, capillarité, état non saturé, sols de surface, cisaillement direct, faibles contraintes, simulations, éléments discrets.