

Convexité dans le plan discret. Application à la tomographie

Alain Daurat

11 décembre 2000

Plan de l'exposé

Tomographie discrète

Plan de l'exposé

Tomographie discrète

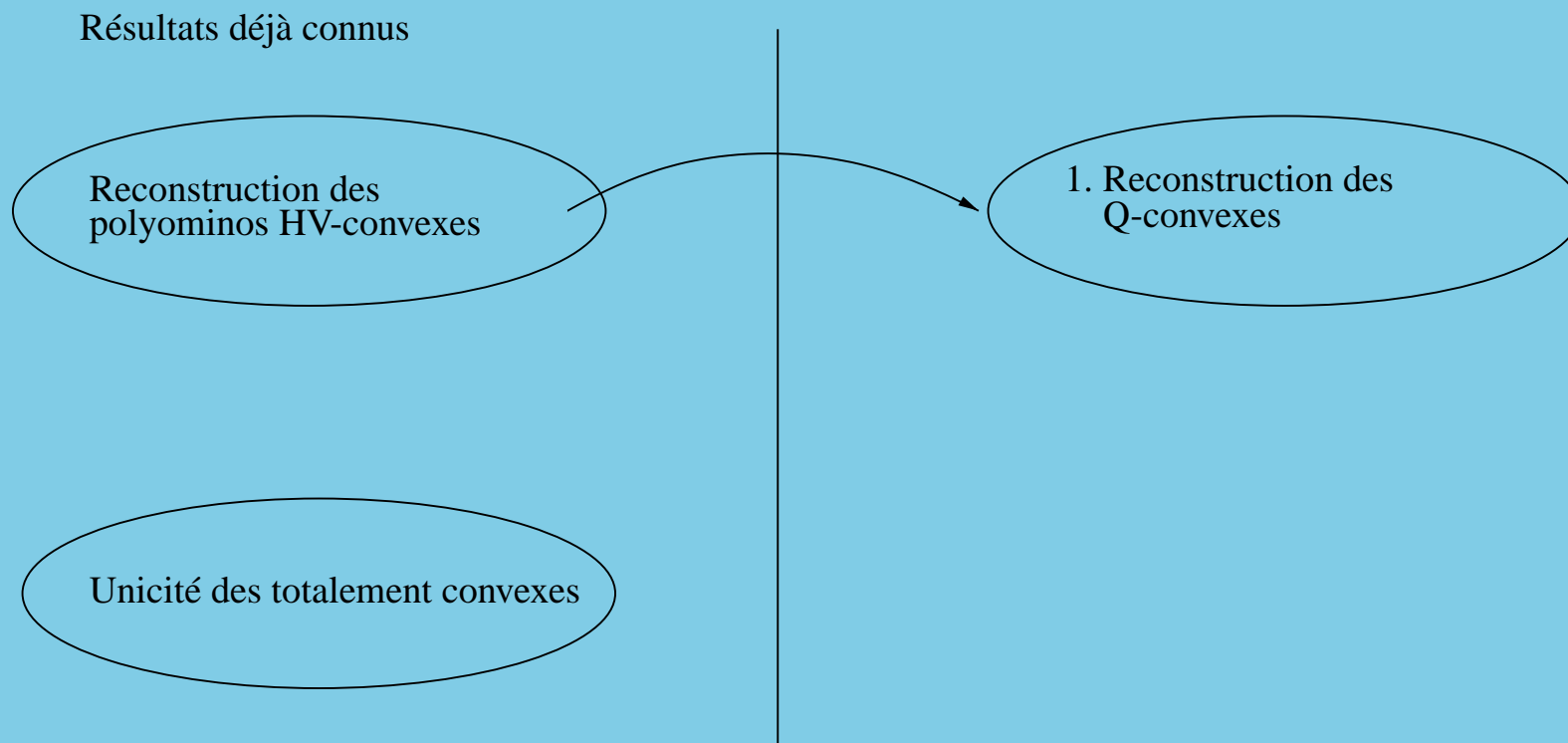
Résultats déjà connus

Reconstruction des
polyominos HV-convexes

Unicité des totalement convexes

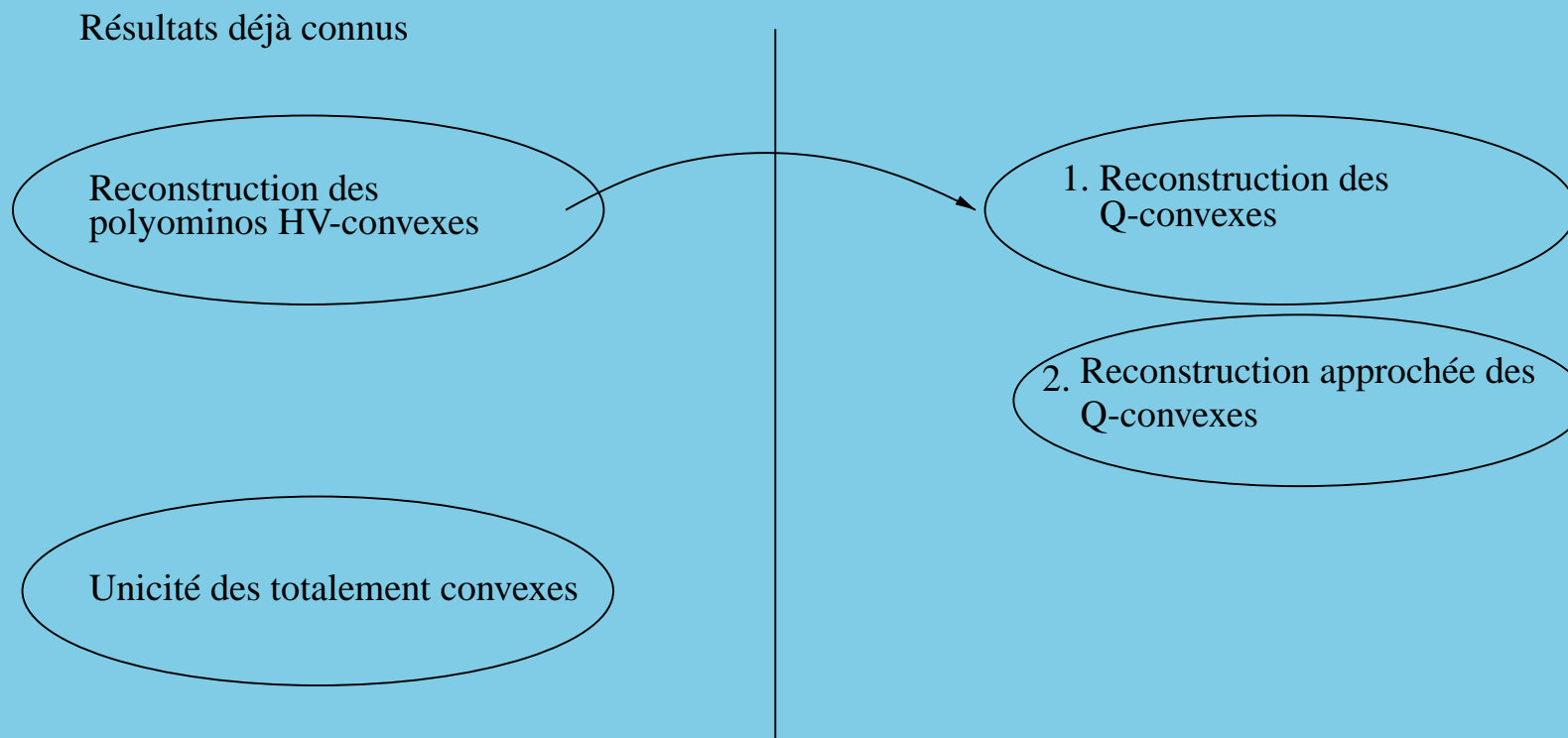
Plan de l'exposé

Tomographie discrète



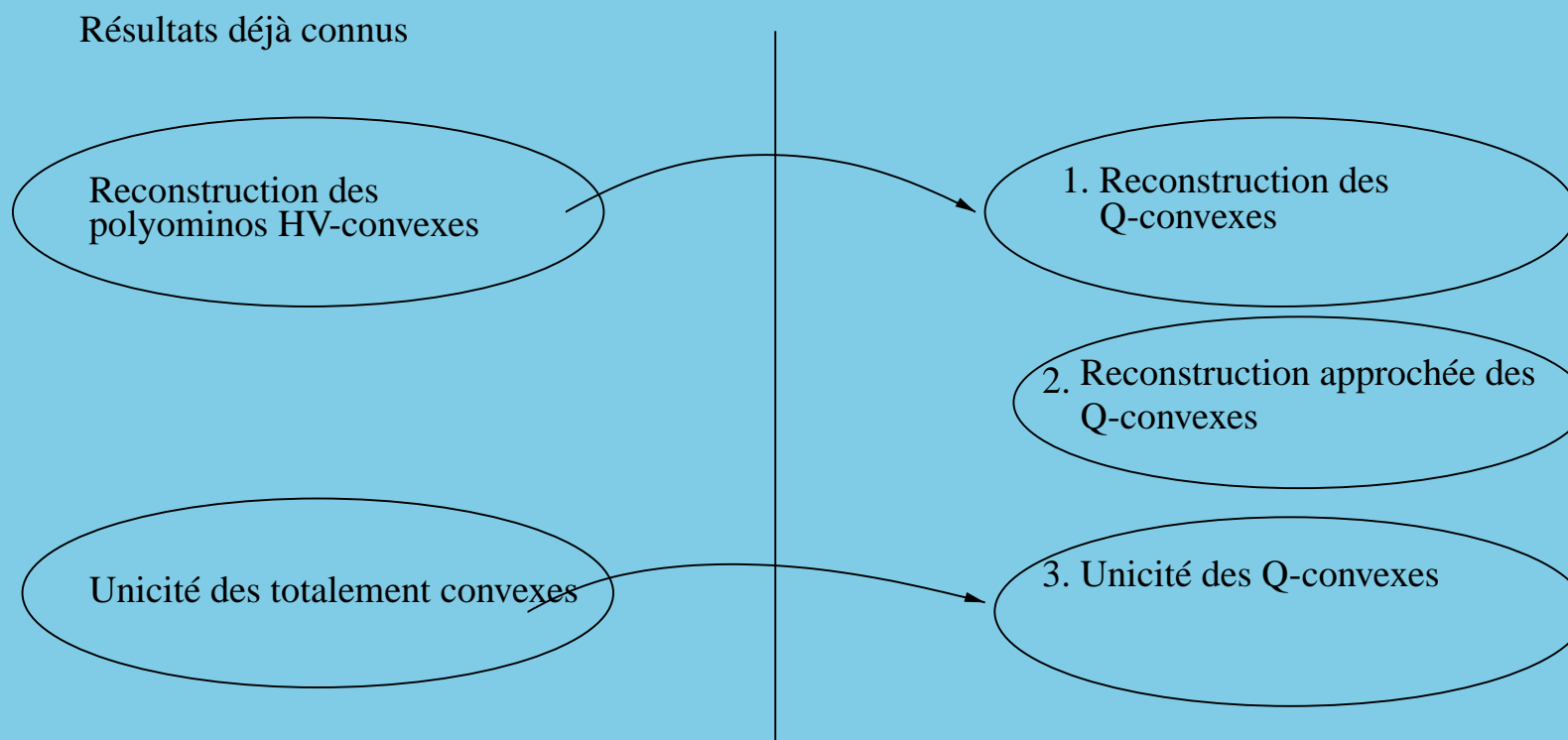
Plan de l'exposé

Tomographie discrète



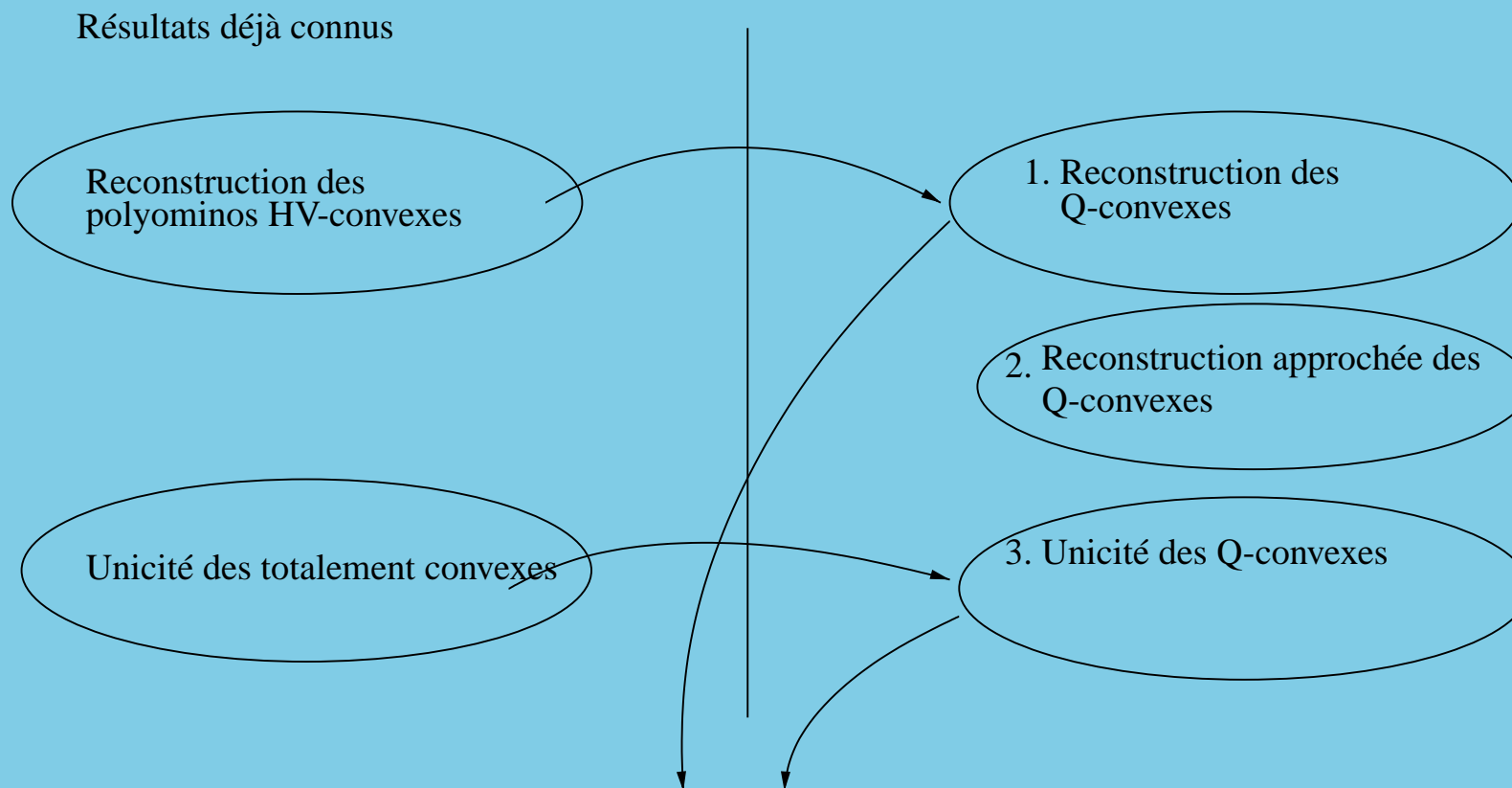
Plan de l'exposé

Tomographie discrète



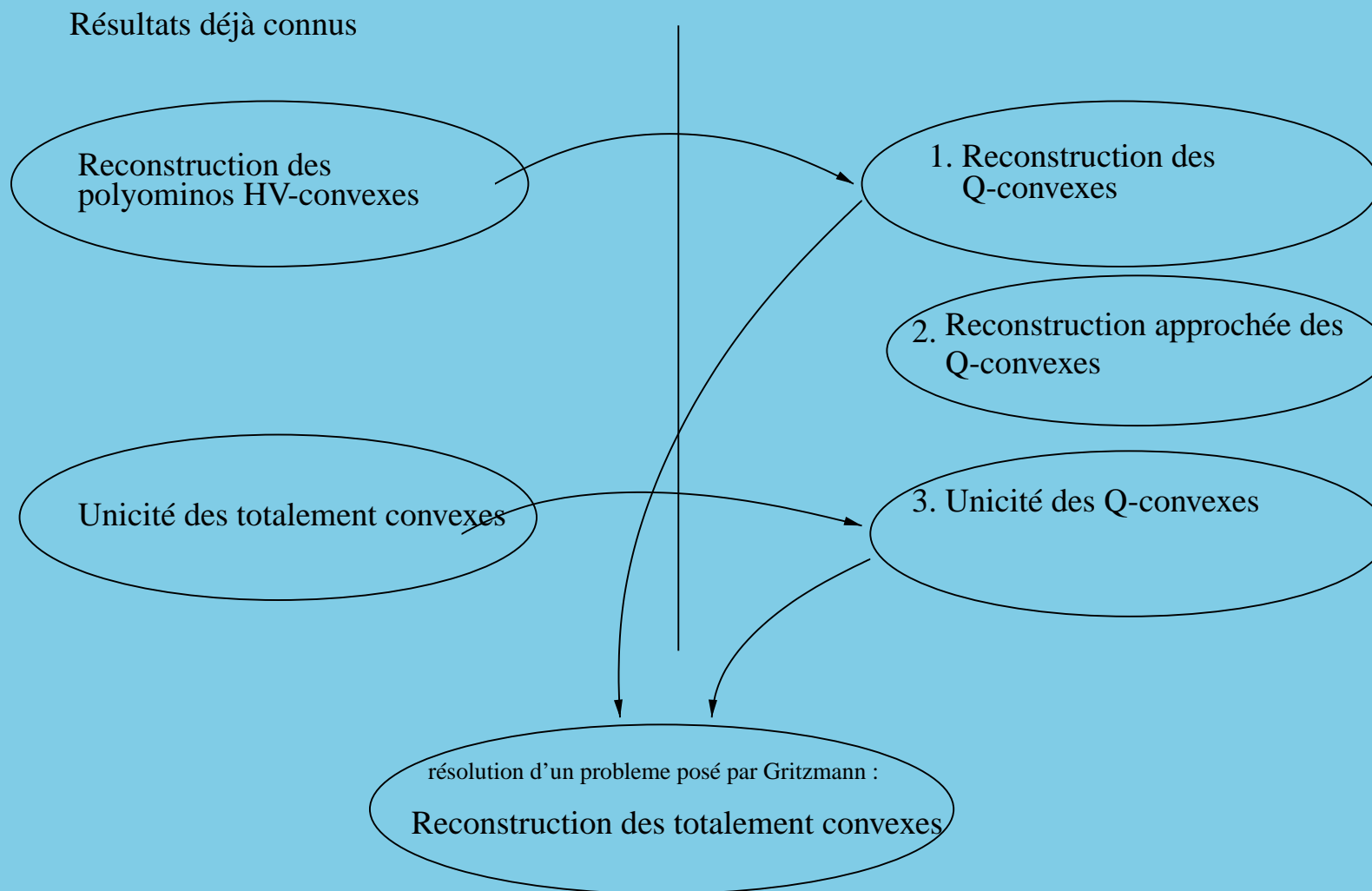
Plan de l'exposé

Tomographie discrète



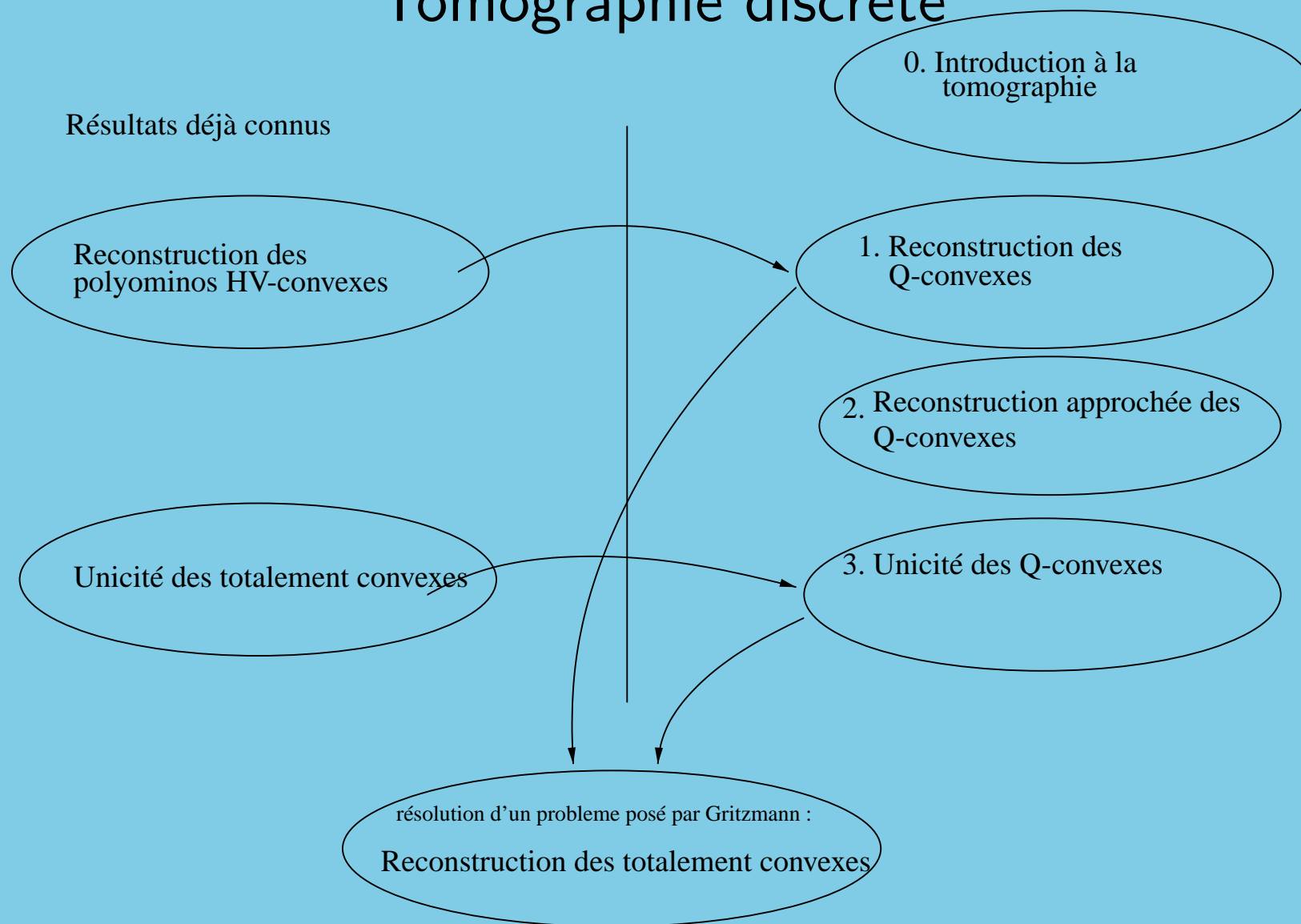
Plan de l'exposé

Tomographie discrète



Plan de l'exposé

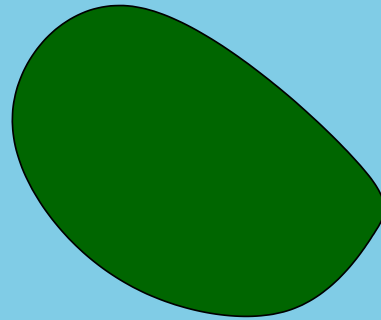
Tomographie discrète



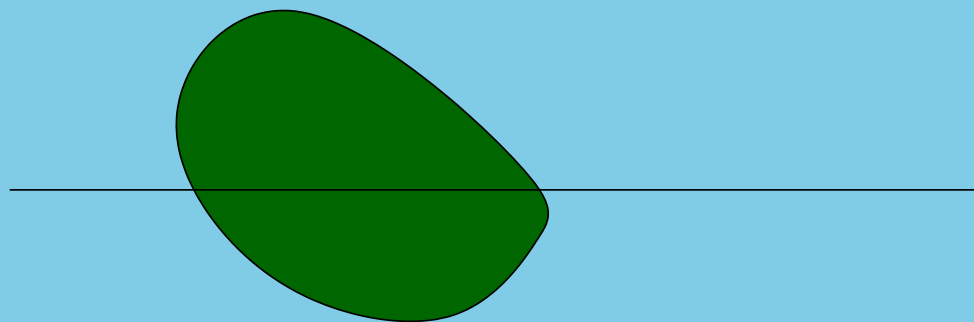
0. Introduction à la tomographie

Tomographie géométrique

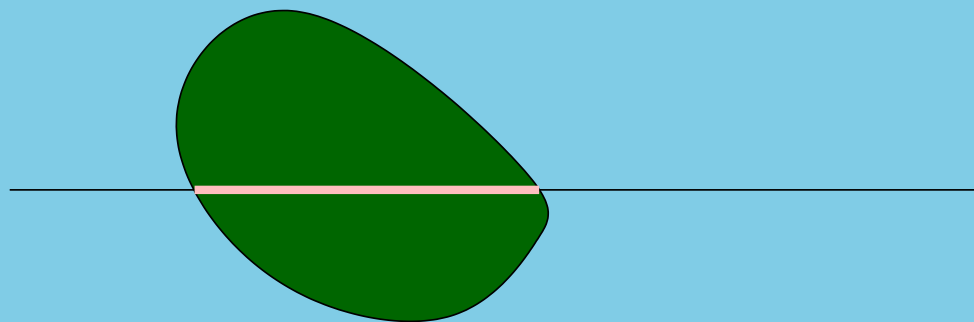
Tomographie géométrique

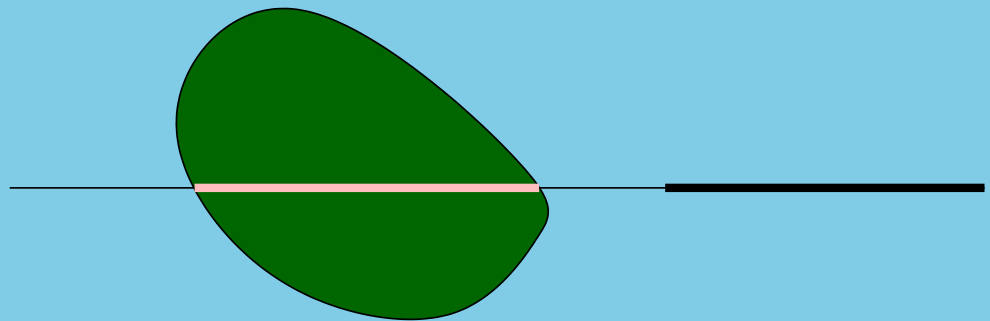


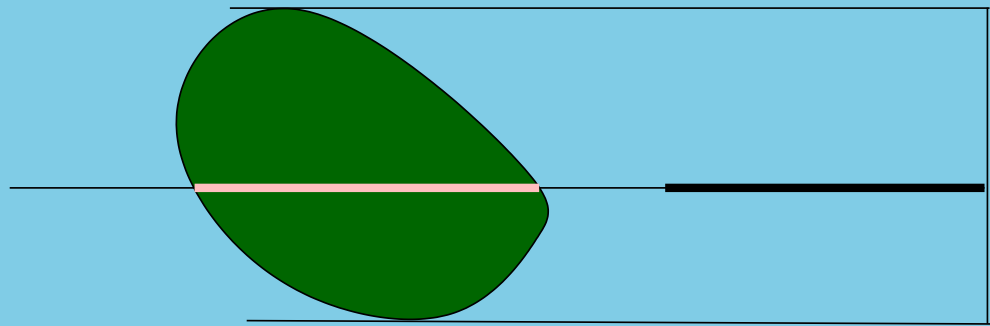
Tomographie géométrique

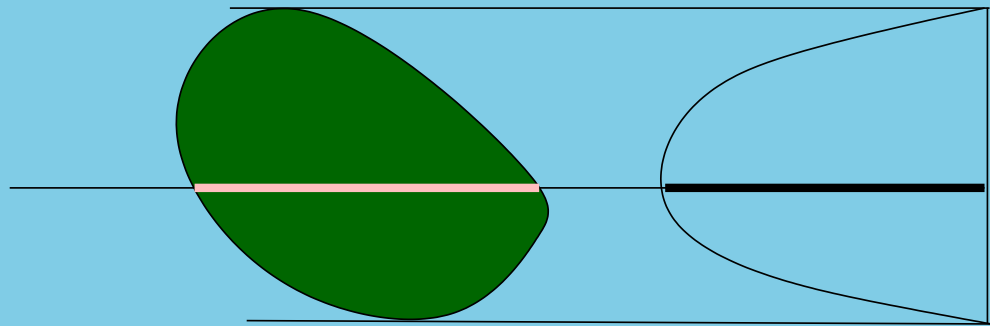


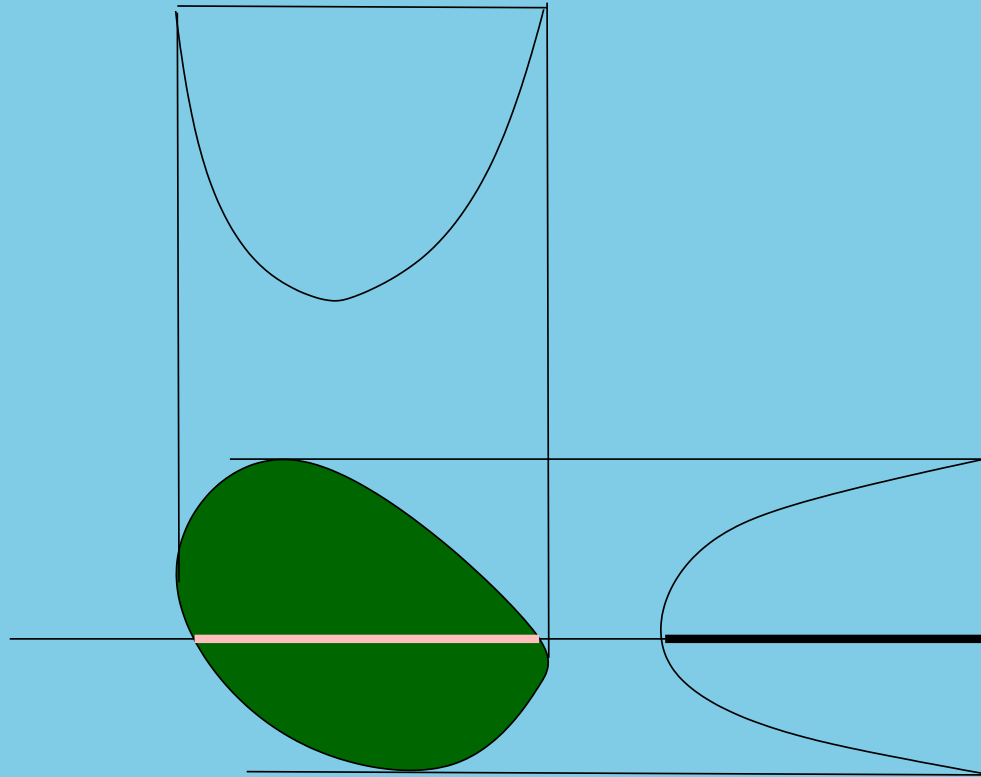
Tomographie géométrique

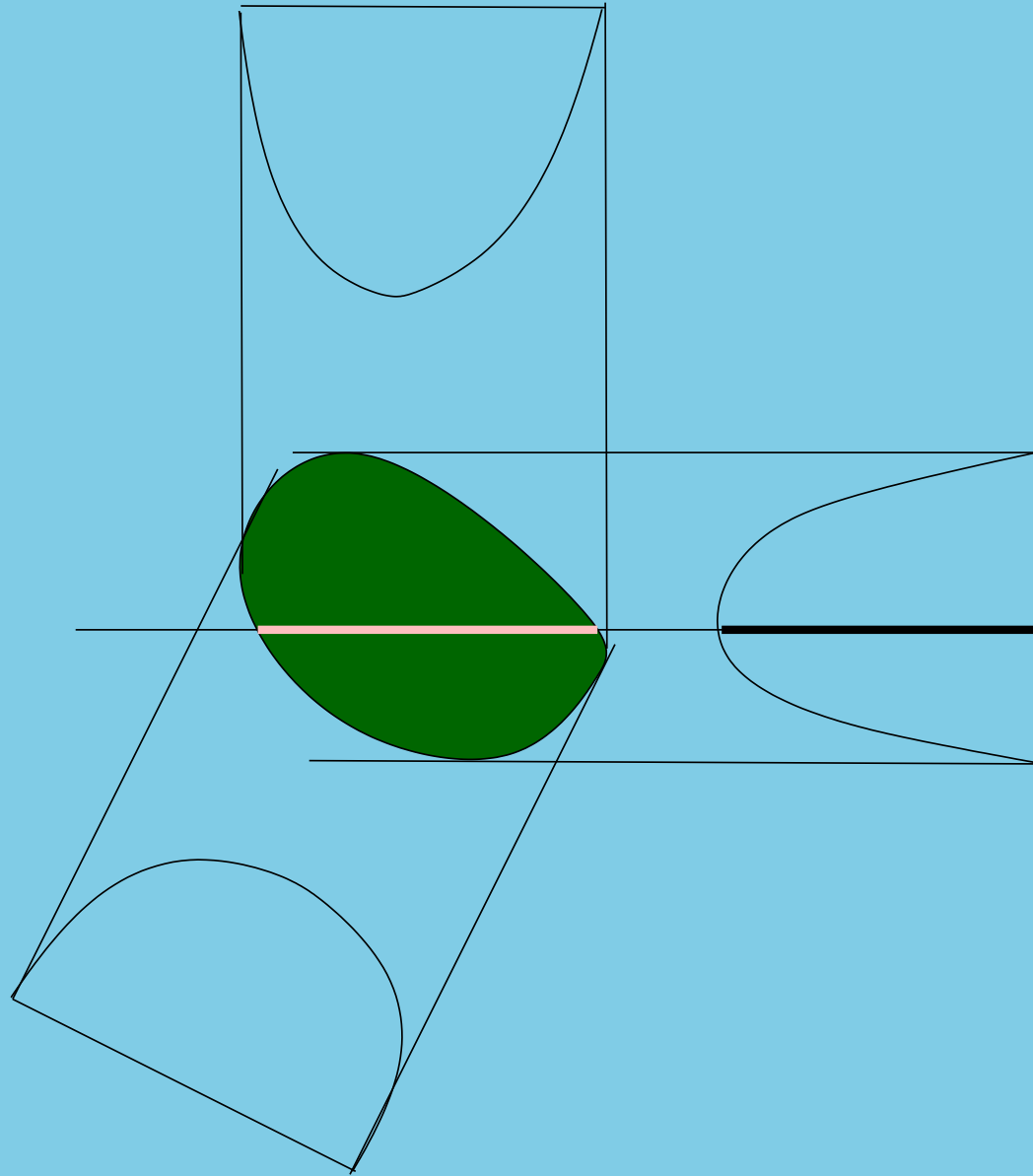




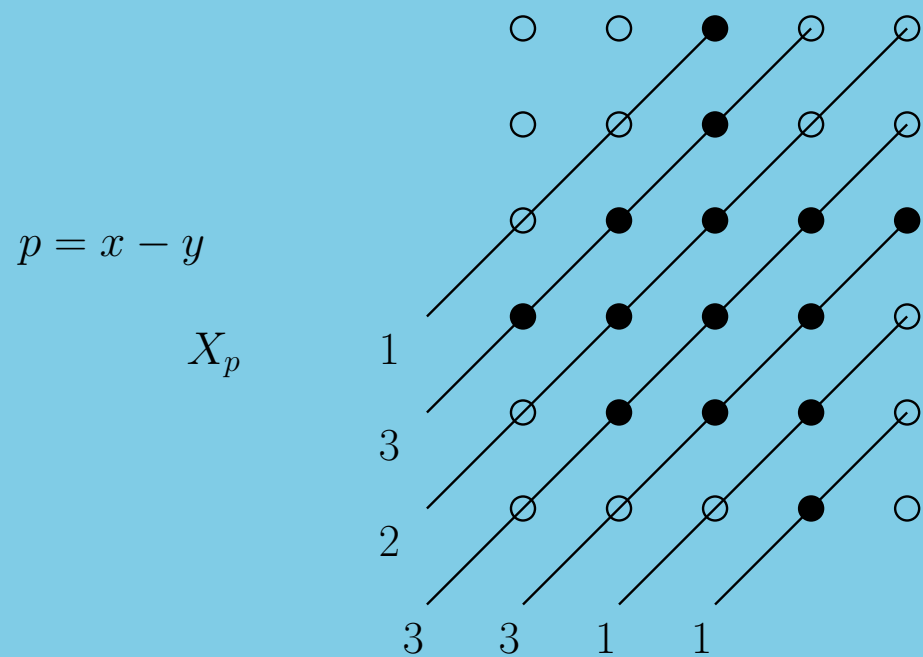






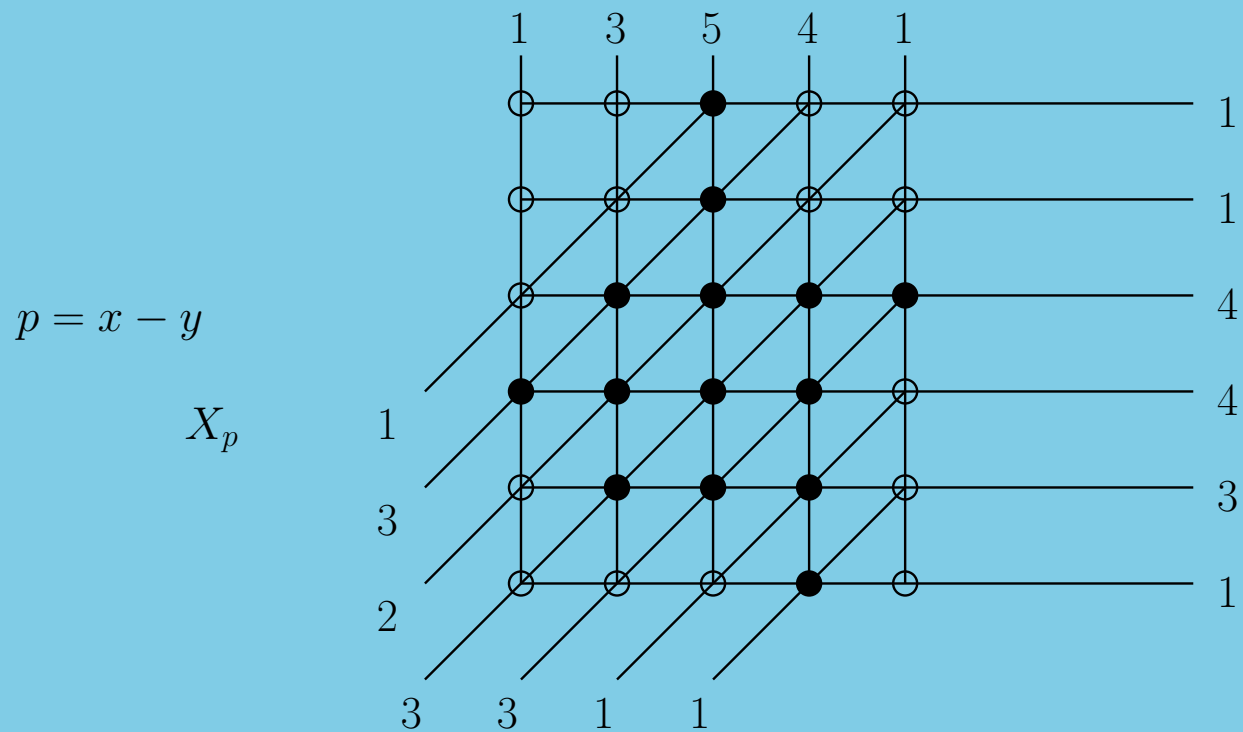


Tomographie discrète



$$X_p E(i) = |\{M \in E : p(M) = i\}|.$$

Tomographie discrète



$$X_p E(i) = |\{M \in E : p(M) = i\}|.$$

Reconstruction

On se fixe un ensemble \mathcal{D} de directions

RECONSTRUCTION(\mathcal{D})

Donnée : $|\mathcal{D}|$ vecteurs $(p_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ pour $p \in \mathcal{D}$.

Sortie : Une partie $E \subset \mathbb{Z}^2$, si elle existe, dont les projections vérifient

$$\forall p \in \mathcal{D} \forall i \in \mathbb{Z} X_p E(i) = p_i.$$

- Si $|\mathcal{D}| = 2$ alors $\text{RECONSTRUCTION}(\mathcal{D})$ peut être résolu en temps polynomial. (Gale, Ryser 1957).
- Si $|\mathcal{D}| \geq 3$ alors le problème existentiel associé à RECONSTRUCTION est NP-complet (GGP97).

Reconstruction avec hypothèses géométriques

7

On se fixe un ensemble \mathcal{D} de directions et une classe \mathcal{F} contenue dans les parties de \mathbb{Z}^2 .

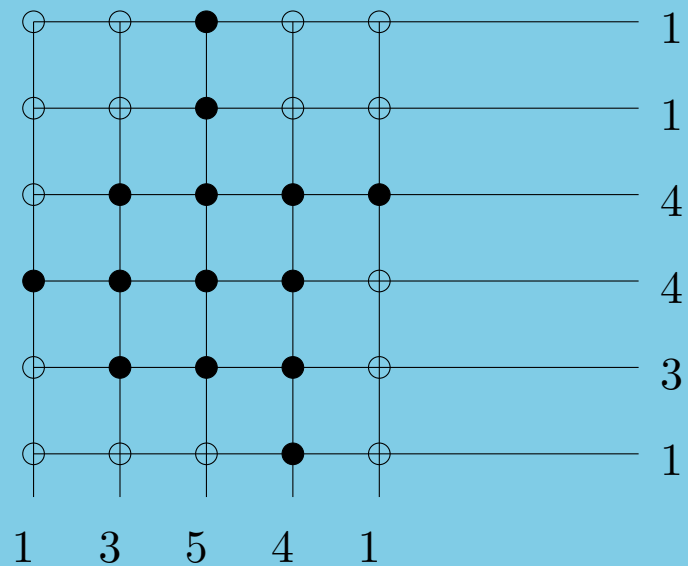
RECONSTRUCTION(\mathcal{F}, \mathcal{D})

Donnée : $|\mathcal{D}|$ vecteurs $(p_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ pour $p \in \mathcal{D}$.

Sortie : Un ensemble $E \in \mathcal{F}$, si il existe, dont les projections vérifient

$$\forall p \in \mathcal{D} \forall i \in \mathbb{Z} X_p E(i) = p_i.$$

Reconstruction des polyominos HV-convexes



Si

- $\mathcal{D} = \{x, y\}$ (directions horizontales et verticales.)
- \mathcal{F} est la classe des polyominos HV-convexes.

alors RECONSTRUCTION(\mathcal{F}, \mathcal{D}) peut être résolu en temps polynomial ([BDLNP96]).

Si

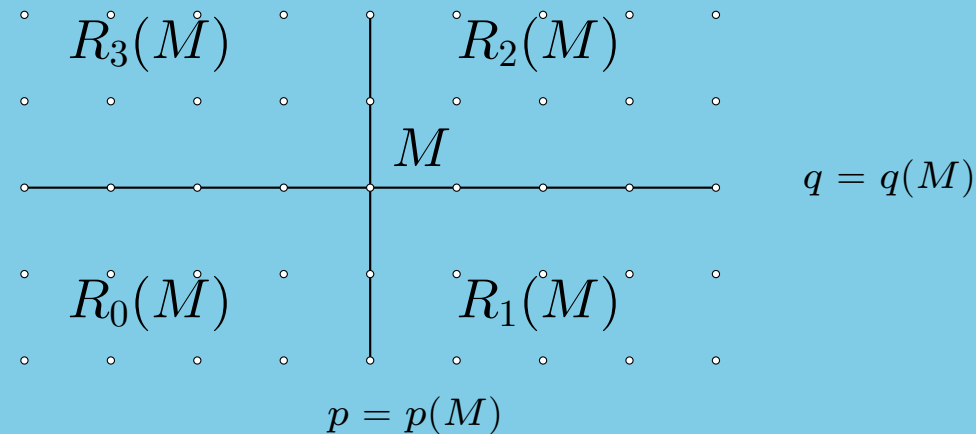
- $\mathcal{D} = \{x, y\}$ (directions horizontales et verticales.)
- \mathcal{F} est la classe des polyominos HV-convexes.

alors RECONSTRUCTION(\mathcal{F}, \mathcal{D}) peut être résolu en temps polynomial ([BDLNP96]).

Extension à des directions quelconques?

1. Reconstruction des Q -convexes

Q-convexité



Les quatre quadrants :

$$R_0^{pq}(M) = \{N \in \mathbb{Z}^2 / p(N) \leq p(M) \text{ et } q(N) \leq q(M)\}$$

$$R_1^{pq}(M) = \{N \in \mathbb{Z}^2 / p(N) \geq p(M) \text{ et } q(N) \leq q(M)\}$$

$$R_2^{pq}(M) = \{N \in \mathbb{Z}^2 / p(N) \geq p(M) \text{ et } q(N) \geq q(M)\}$$

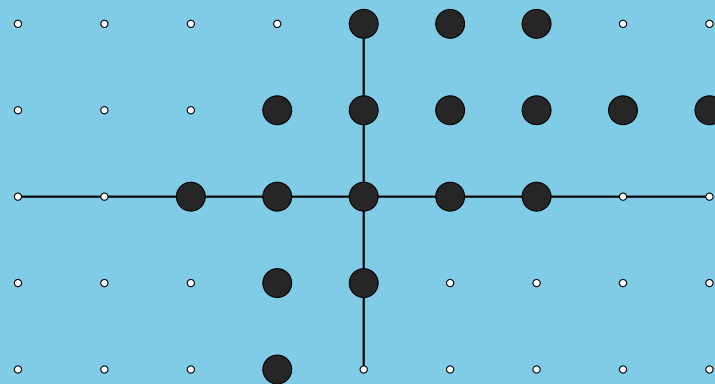
$$R_3^{pq}(M) = \{N \in \mathbb{Z}^2 / p(N) \leq p(M) \text{ et } q(N) \geq q(M)\}$$

Définition. Un ensemble F est Q -convexe selon les directions p et q si pour tous $M \in \mathbb{Z}^2$:

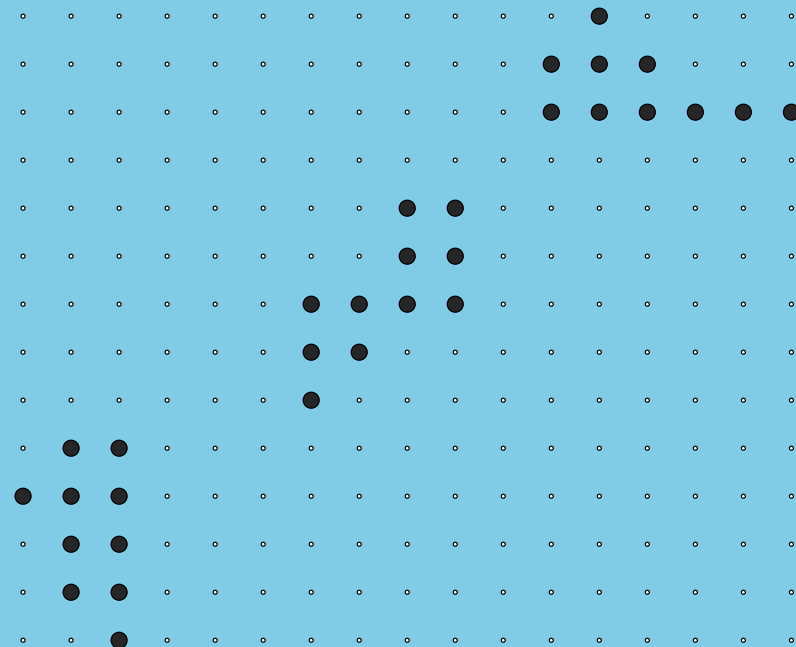
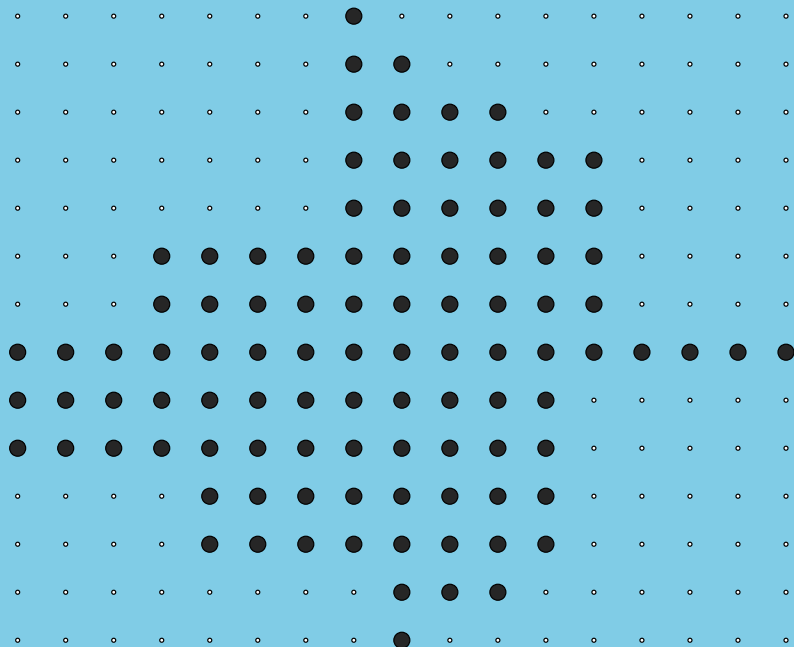
$$\forall i R_i^{pq}(M) \cap F \neq \emptyset \implies M \in F.$$

De manière équivalente

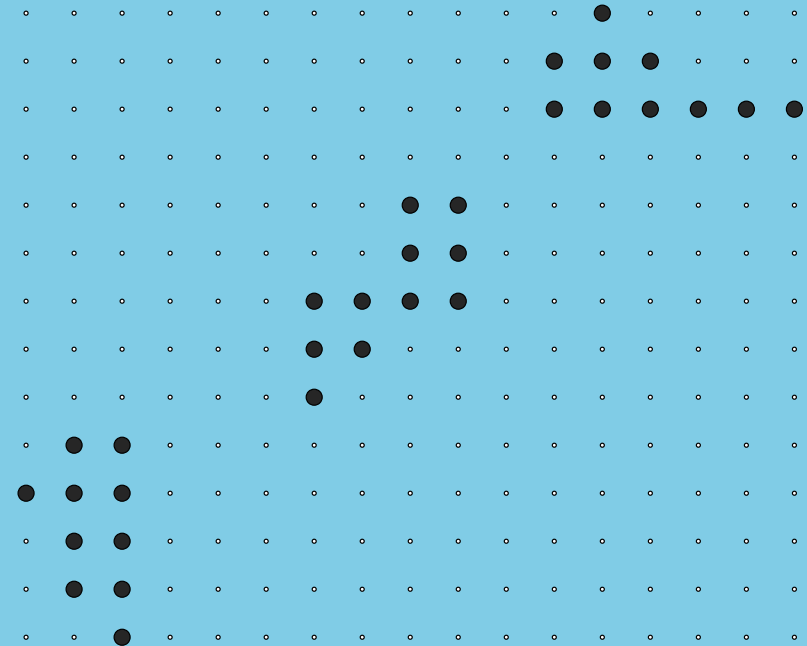
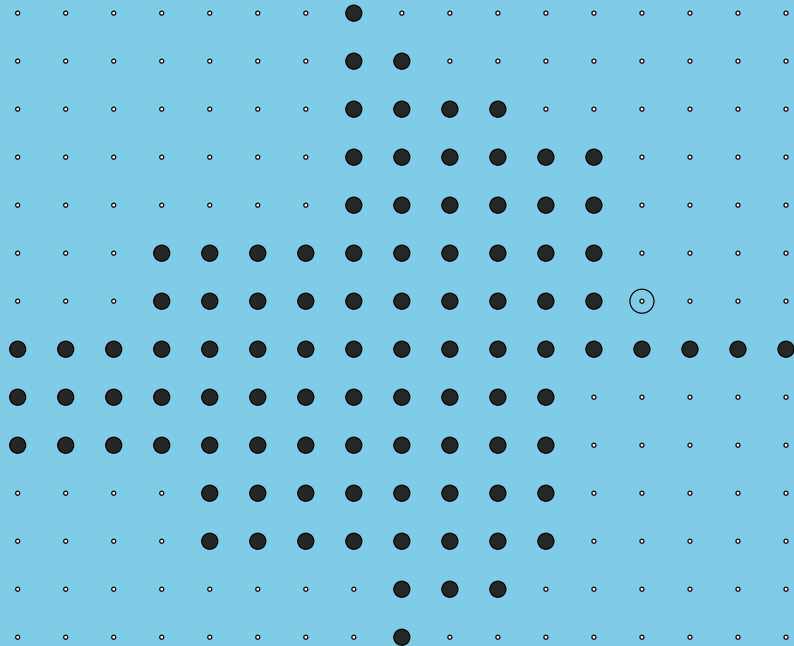
$$\forall M \in \mathbb{Z}^2 \setminus E \quad \exists i \quad R_i(M) \cap E = \emptyset$$



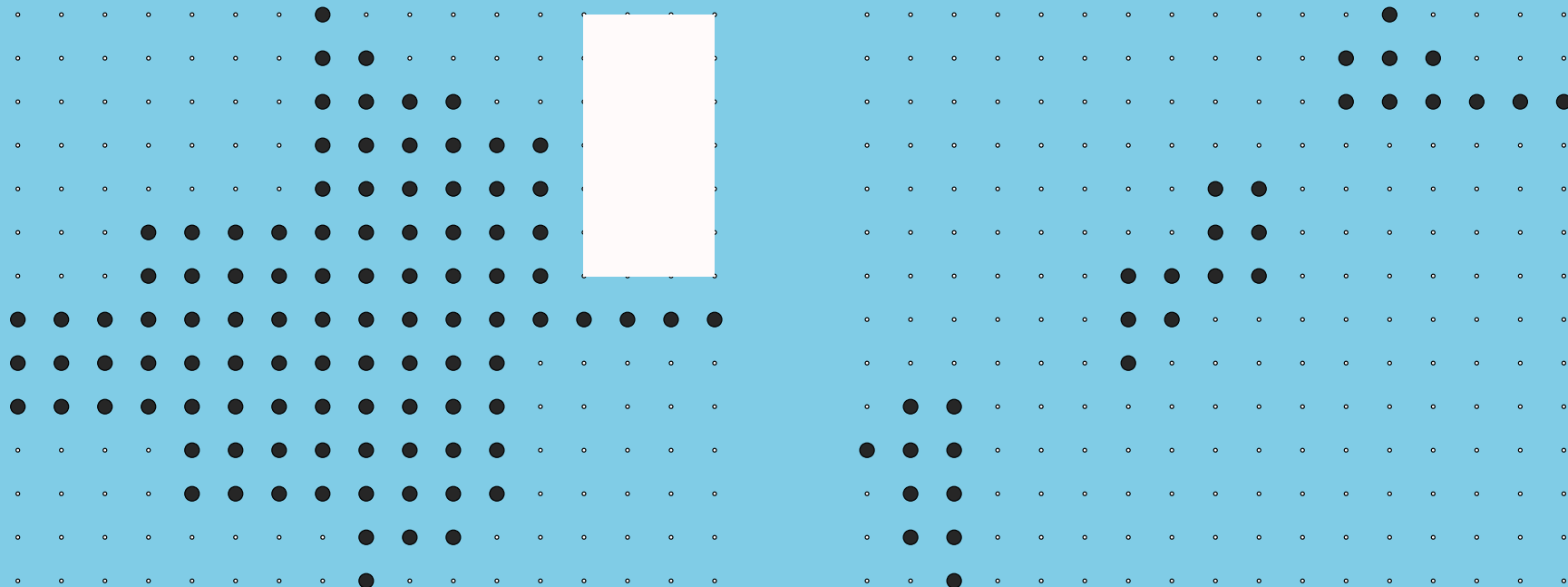
Deux ensembles Q -convexes selon x et y



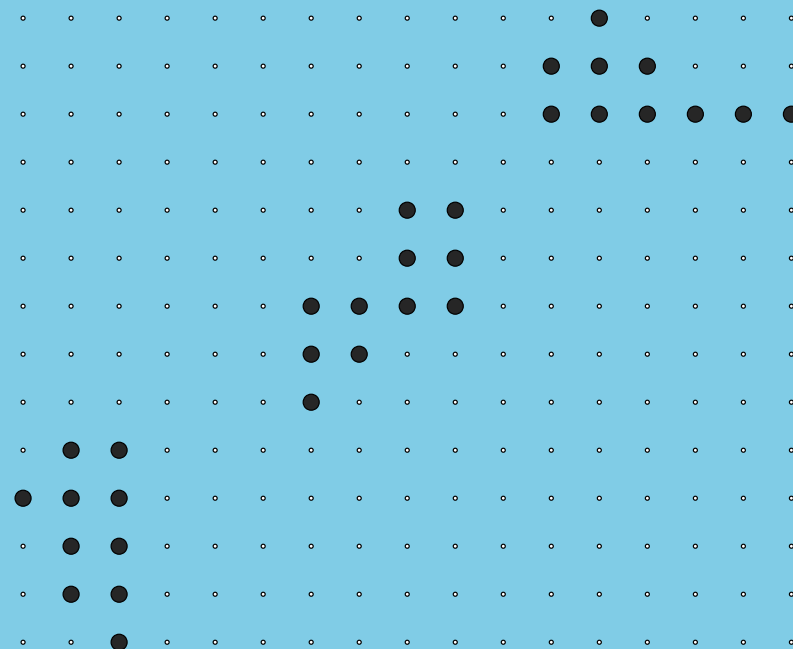
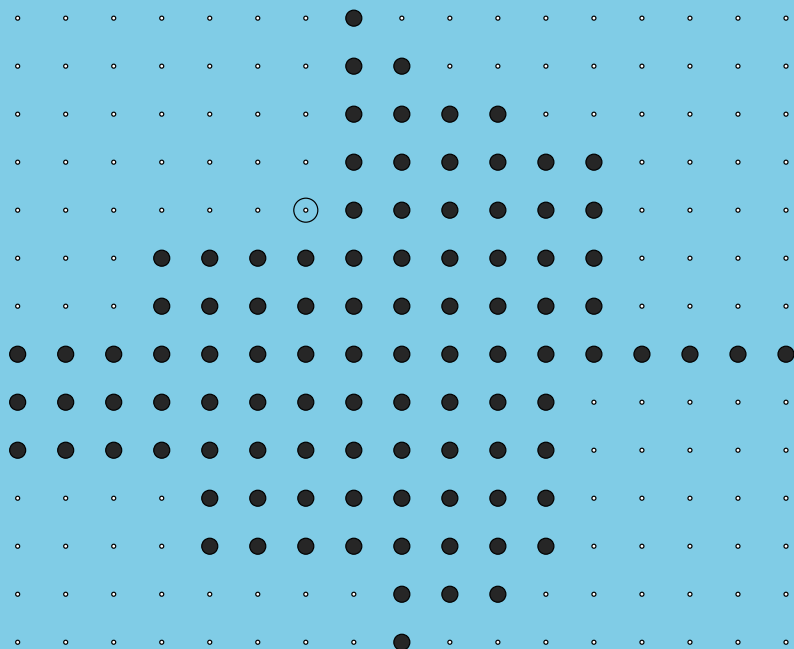
Deux ensembles Q-convexes selon x et y



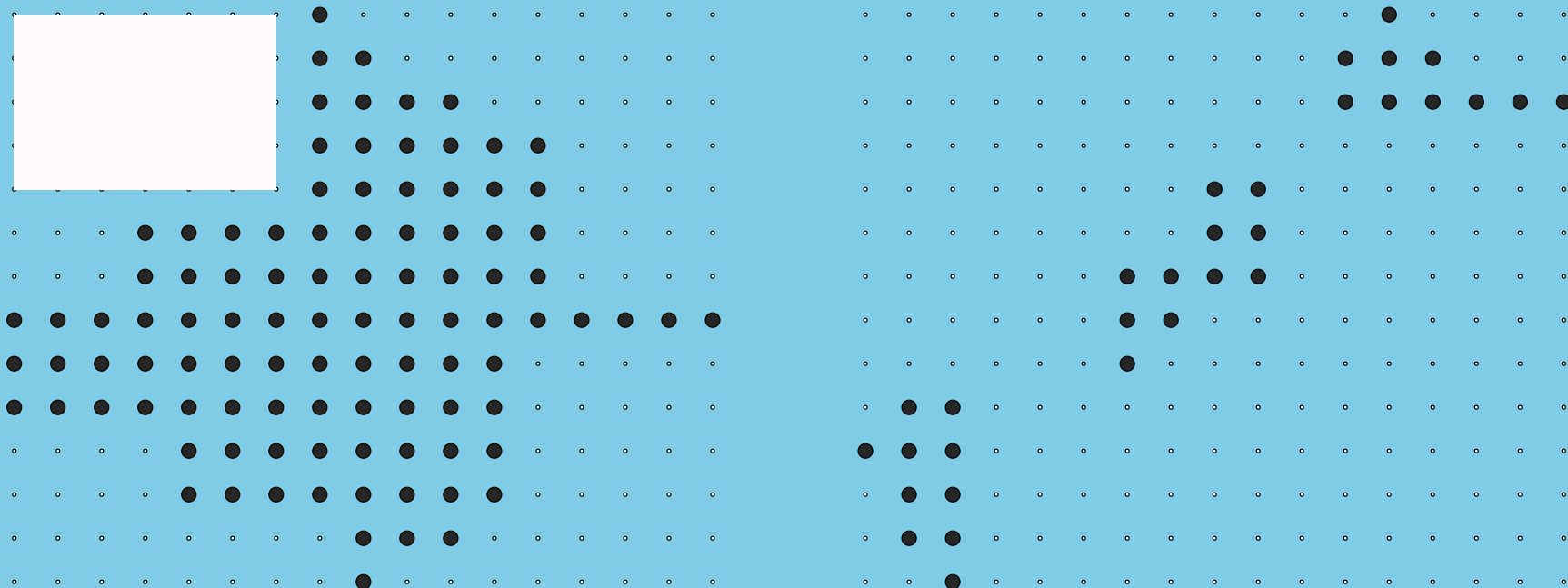
Deux ensembles Q-convexes selon x et y



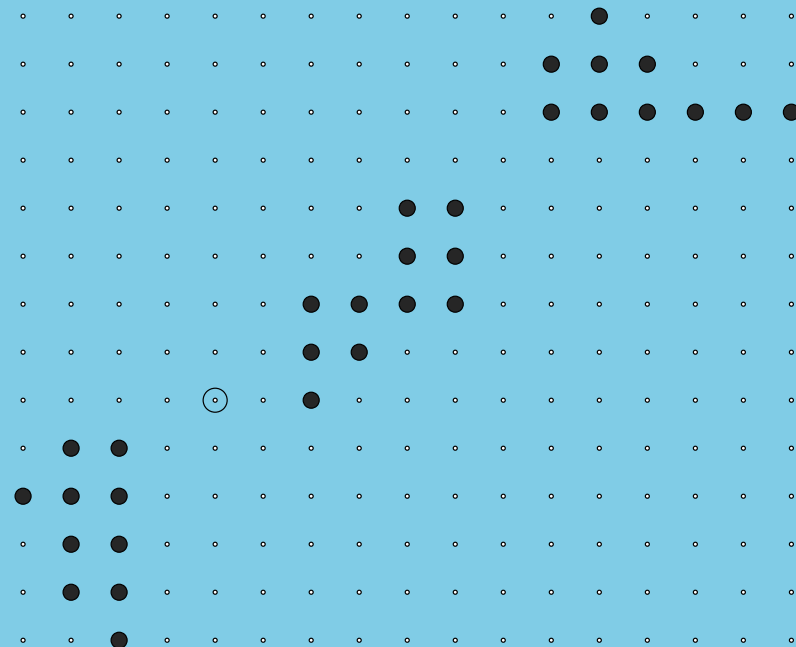
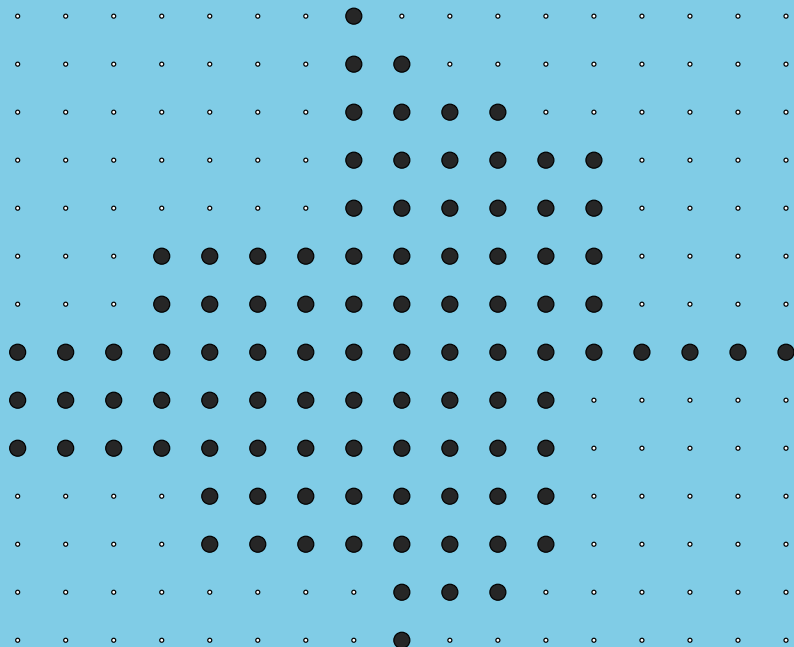
Deux ensembles Q-convexes selon x et y



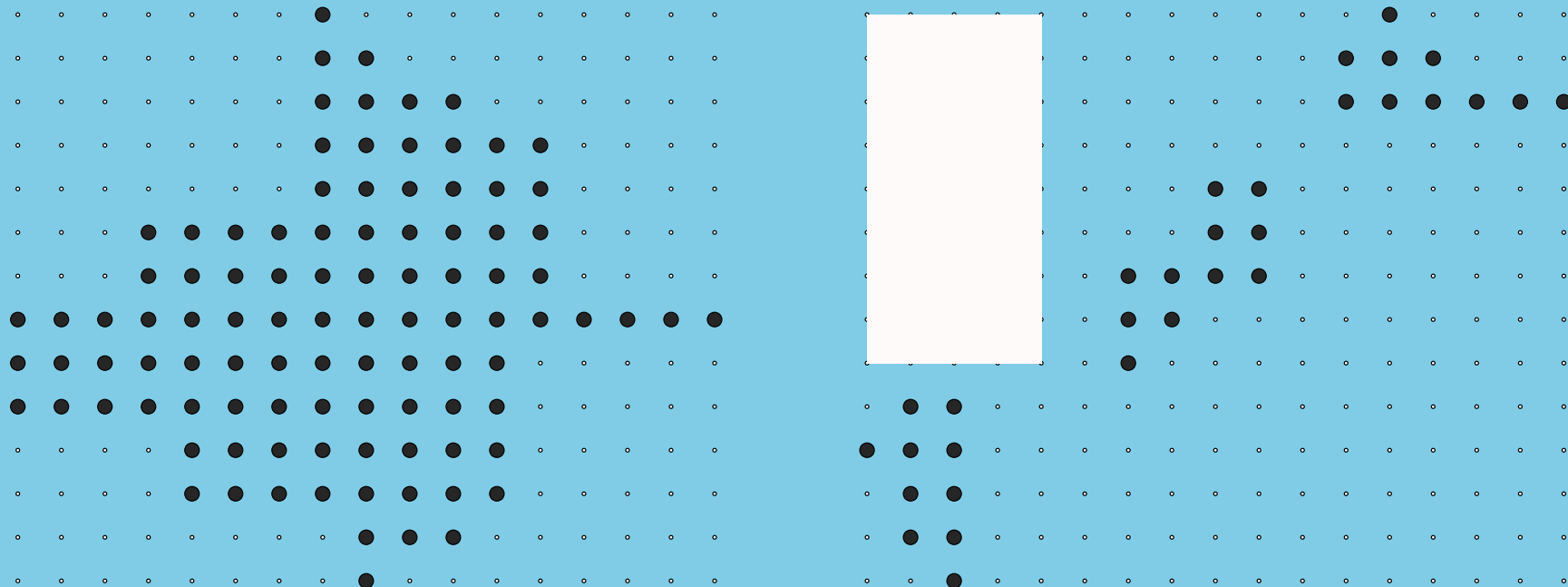
Deux ensembles Q-convexes selon x et y



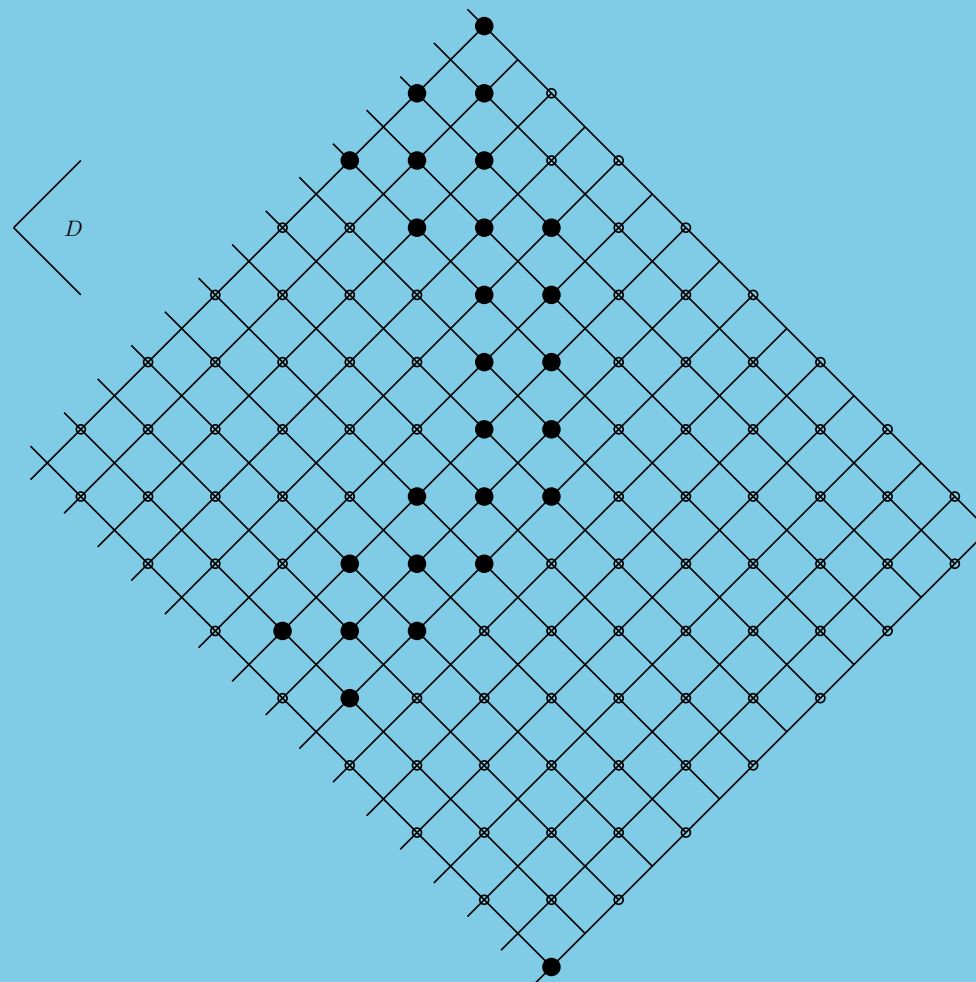
Deux ensembles Q-convexes selon x et y



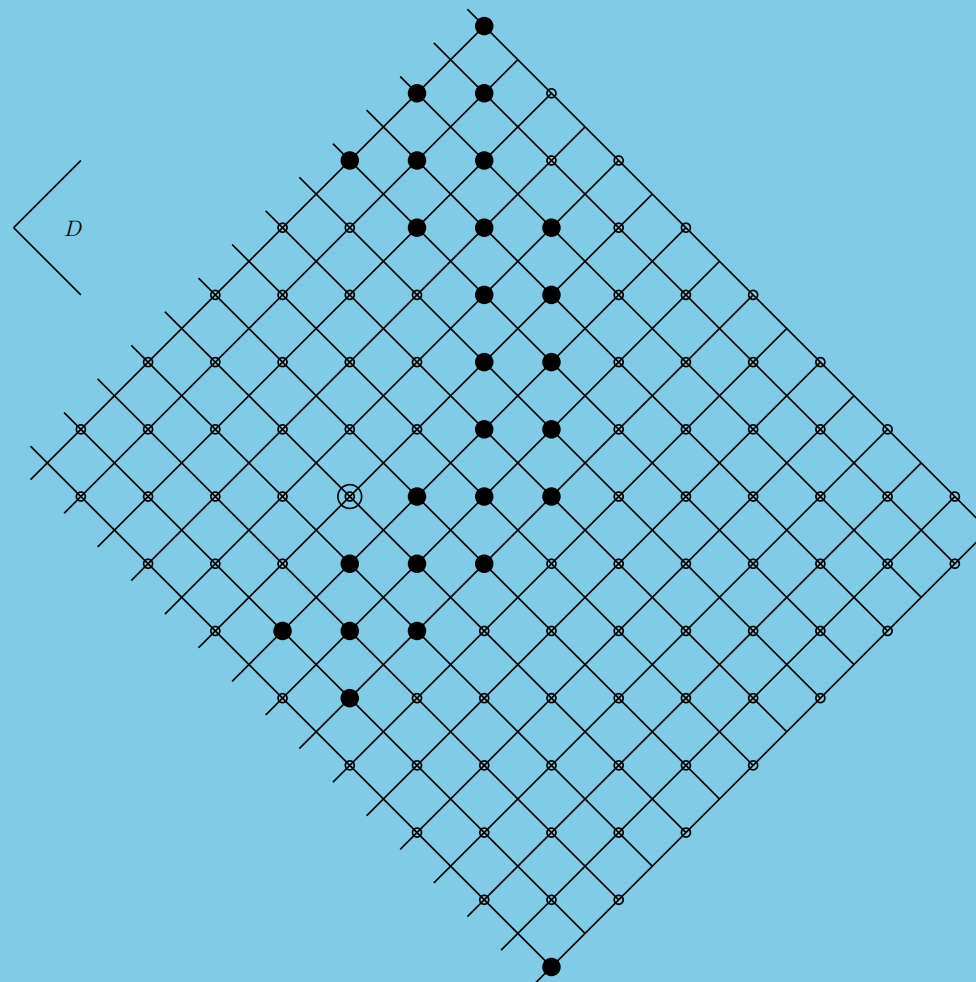
Deux ensembles Q-convexes selon x et y



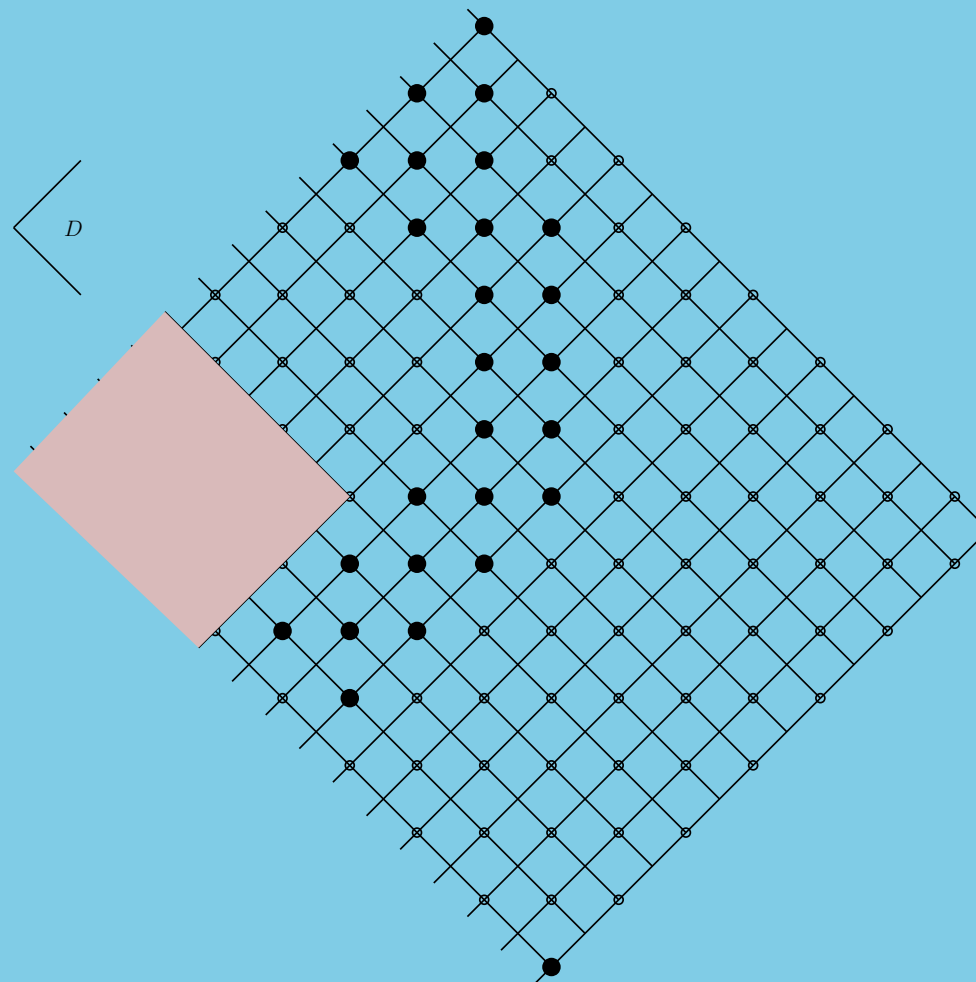
Un ensemble \mathbb{Q} -convexe selon $x + y$ et $x - y$



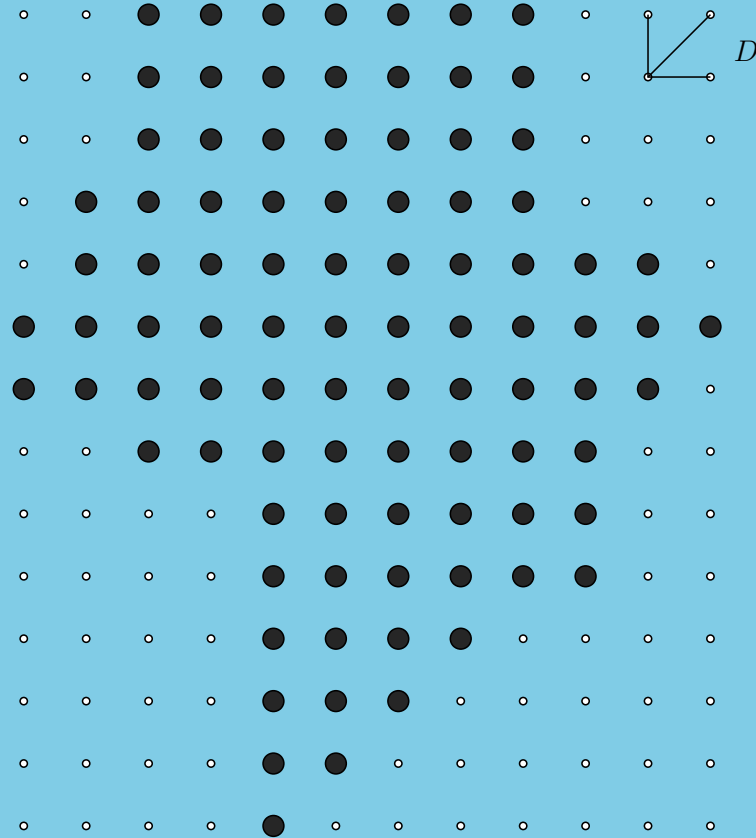
Un ensemble Q -convexe selon $x + y$ et $x - y$



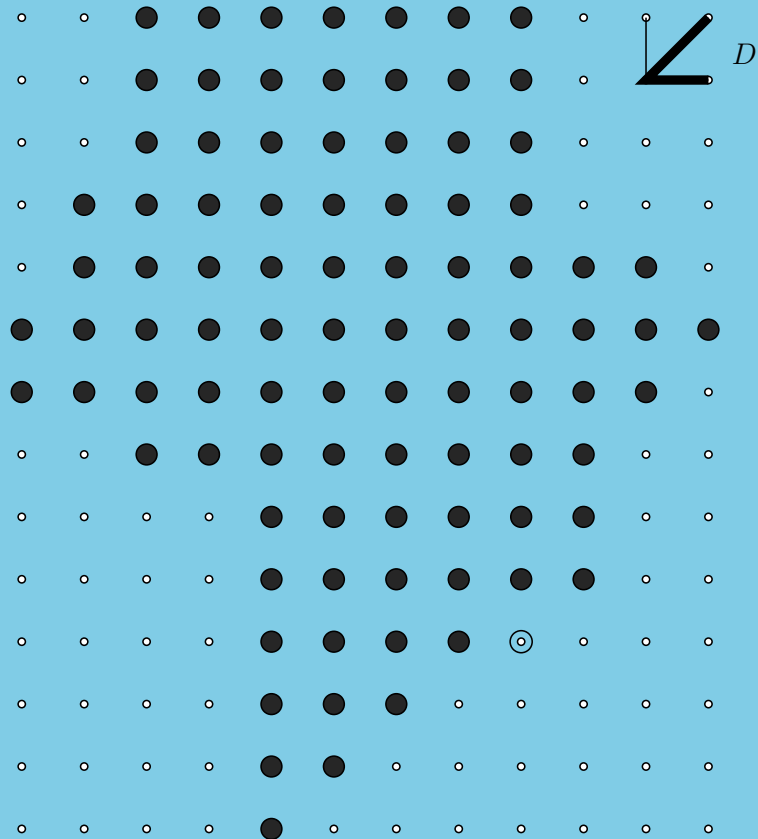
Un ensemble \mathbb{Q} -convexe selon $x + y$ et $x - y$



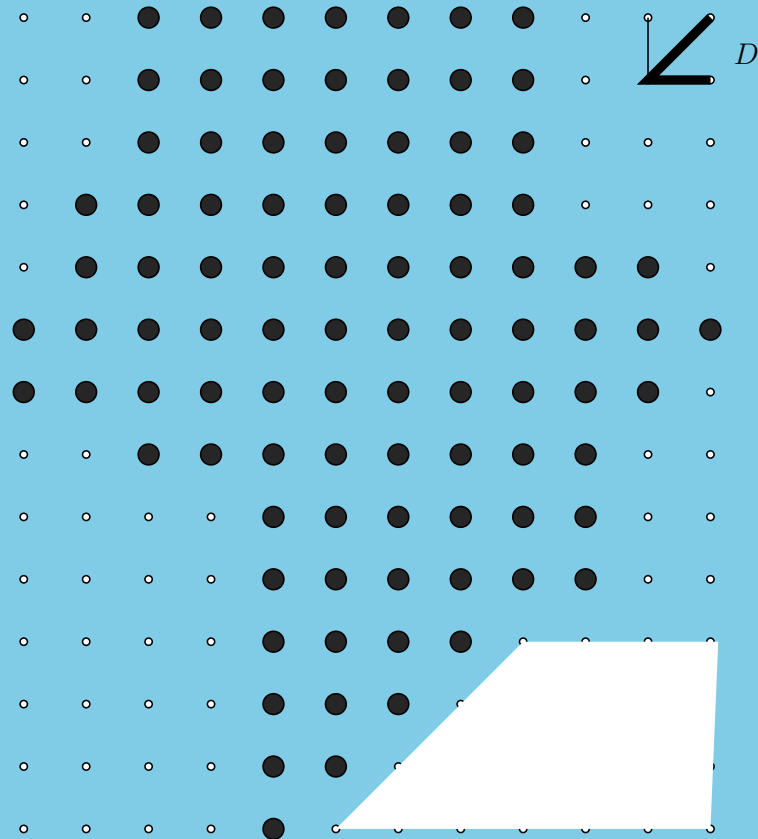
Un ensemble Q -convexe selon $x, y, x - y$



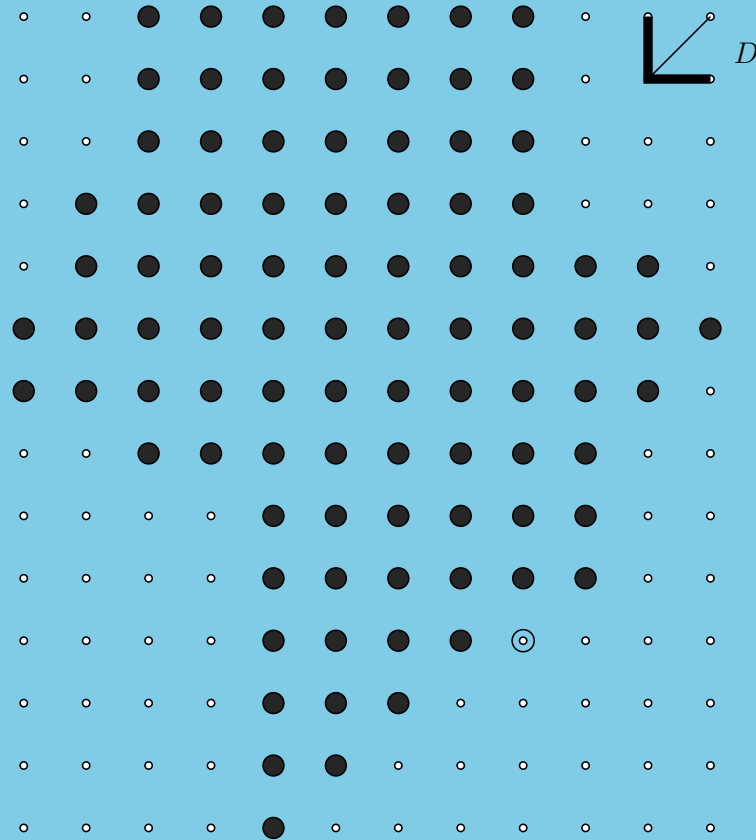
Un ensemble Q -convexe selon $x, y, x - y$



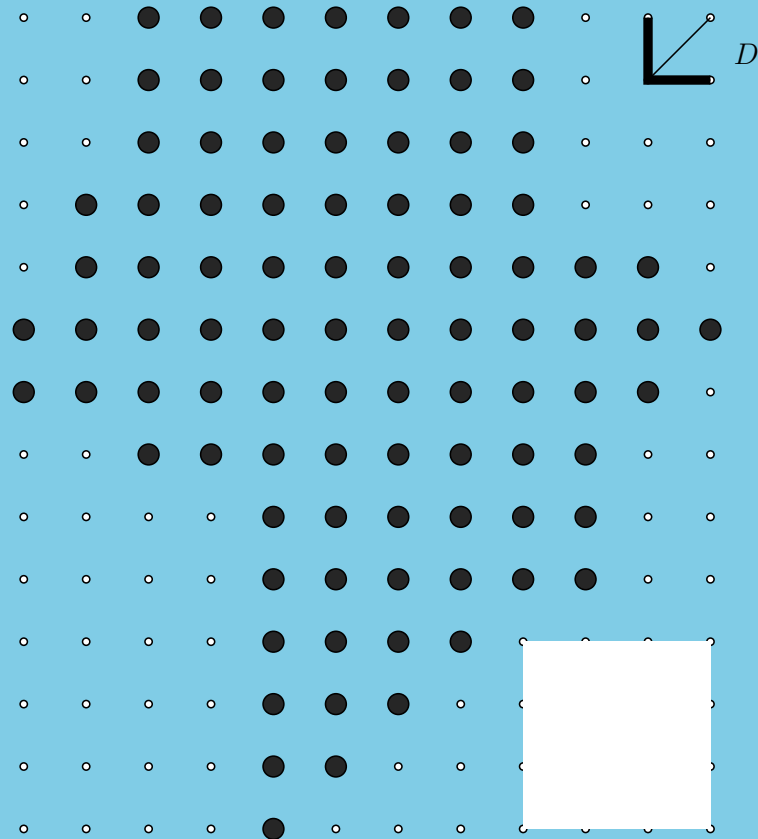
Un ensemble Q -convexe selon $x, y, x - y$



Un ensemble Q -convexe selon $x, y, x - y$



Un ensemble Q -convexe selon $x, y, x - y$



Enveloppe Q-convexe

L'intersection de deux Q-convexes selon \mathcal{D} est Q-convexe.

Enveloppe Q-convexe

L'intersection de deux Q-convexes selon \mathcal{D} est Q-convexe.

On peut donc définir l'enveloppe Q-convexe d'une partie quelconque de \mathbb{Z}^2 . [Le programme](#)

Reconstruction

Si $\mathcal{Q}(\mathcal{D})$ est la classe des Q-convexes selon \mathcal{D} alors
RECONSTRUCTION($\mathcal{Q}(\mathcal{D}), \mathcal{D}$) peut être résolu en $O(n^7)$
opérations.

Démo

- Essai générique

Reconstruction

Si $\mathcal{Q}(\mathcal{D})$ est la classe des Q-convexes selon \mathcal{D} alors
RECONSTRUCTION($\mathcal{Q}(\mathcal{D}), \mathcal{D}$) peut être résolu en $O(n^7)$
opérations.

Démo

- Essai générique
- directions diagonales

Reconstruction

Si $Q(\mathcal{D})$ est la classe des Q-convexes selon \mathcal{D} alors
RECONSTRUCTION($Q(\mathcal{D}), \mathcal{D}$) peut être résolu en $O(n^7)$
opérations.

Démo

- Essai générique
- directions diagonales
- Cas où 2-SAT est nécessaire

Reconstruction

Si $Q(\mathcal{D})$ est la classe des Q-convexes selon \mathcal{D} alors
RECONSTRUCTION($Q(\mathcal{D}), \mathcal{D}$) peut être résolu en $O(n^7)$
opérations.

Démo

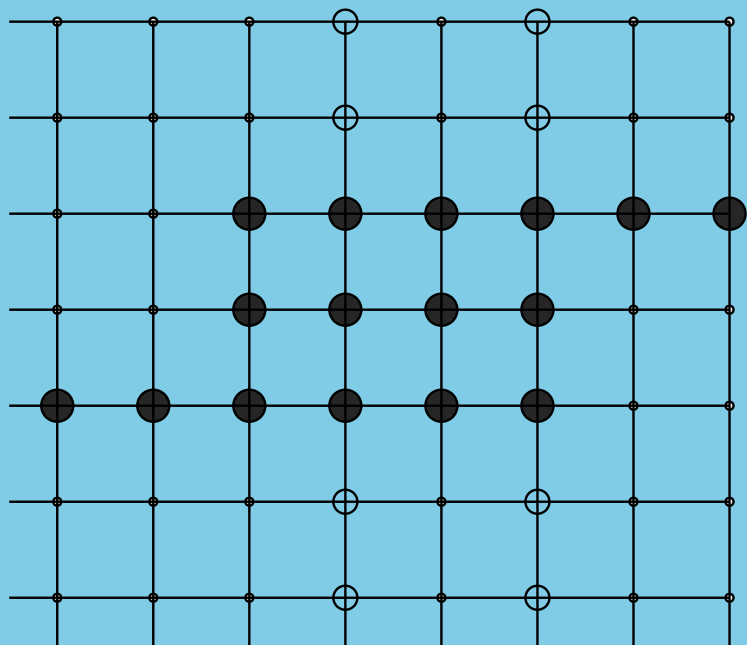
- Essai générique
- directions diagonales
- Cas où 2-SAT est nécessaire
- autre cas

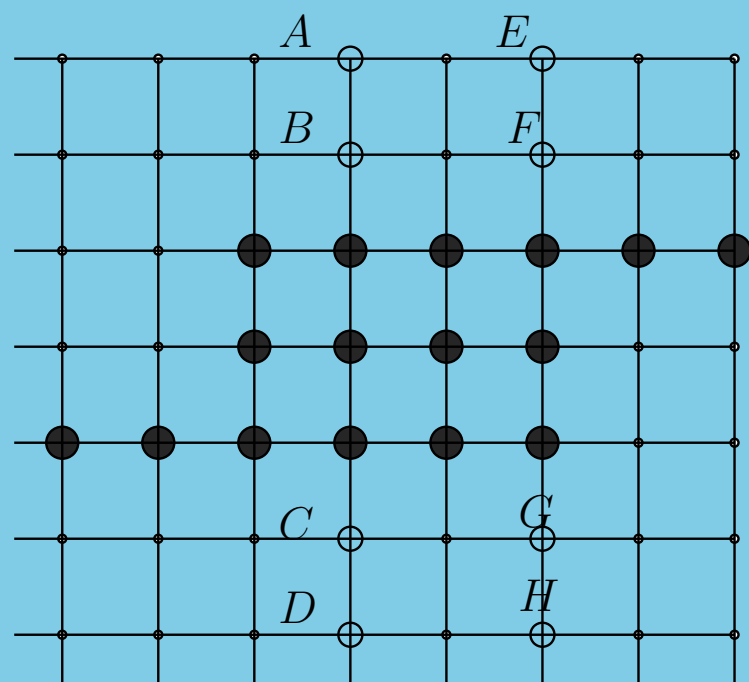
Reconstruction

Si $Q(\mathcal{D})$ est la classe des Q-convexes selon \mathcal{D} alors
RECONSTRUCTION($Q(\mathcal{D}), \mathcal{D}$) peut être résolu en $O(n^7)$
opérations.

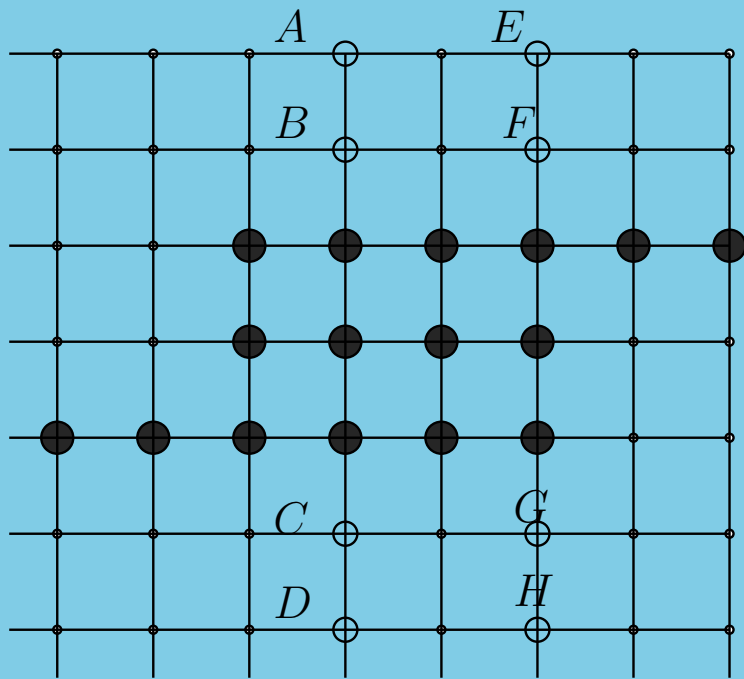
Démo

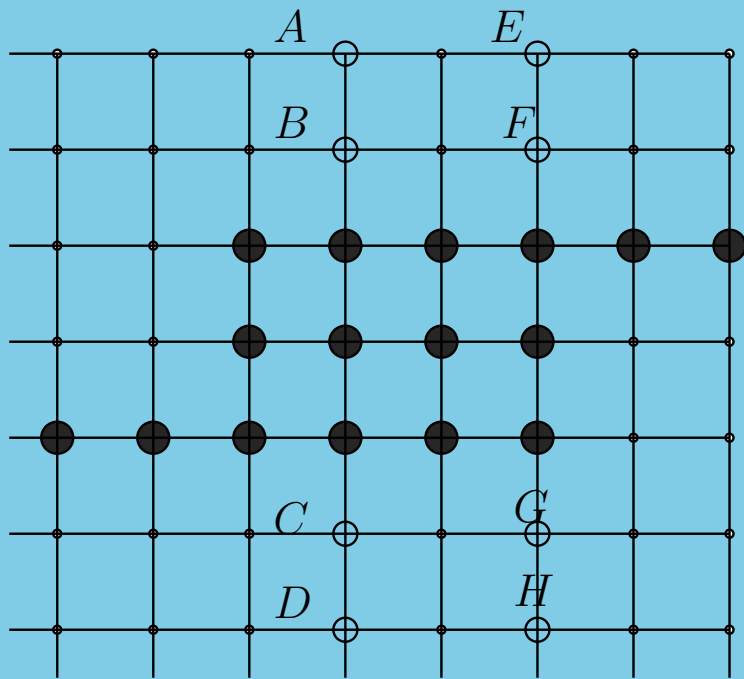
- Essai générique
- directions diagonales
- Cas où 2-SAT est nécessaire
- autre cas
- Cas où la Q-convexité intervient dans la phase finale.





Projections verticales :

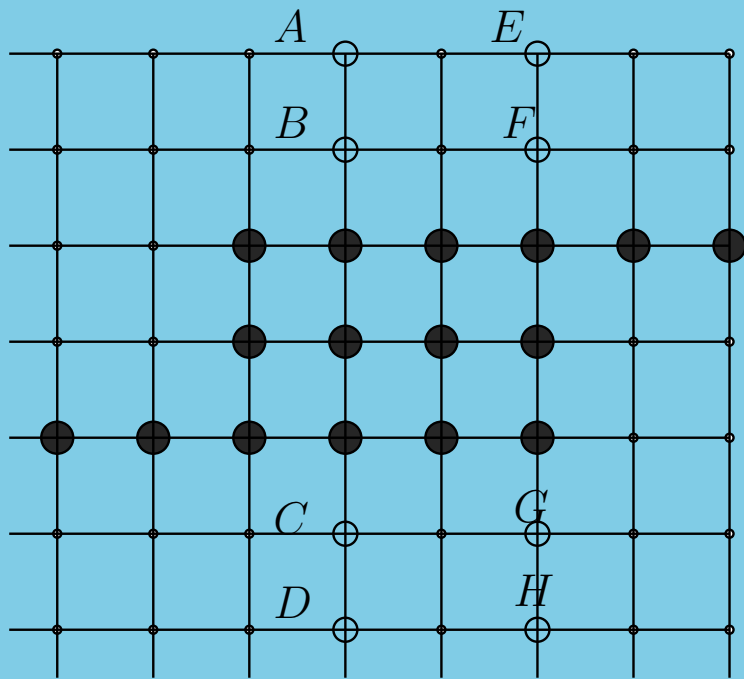




Projections verticales :

$$A \Leftrightarrow \neg C, B \Leftrightarrow \neg D,$$

$$E \Leftrightarrow \neg G, F \Leftrightarrow \neg H.$$



Projections verticales :

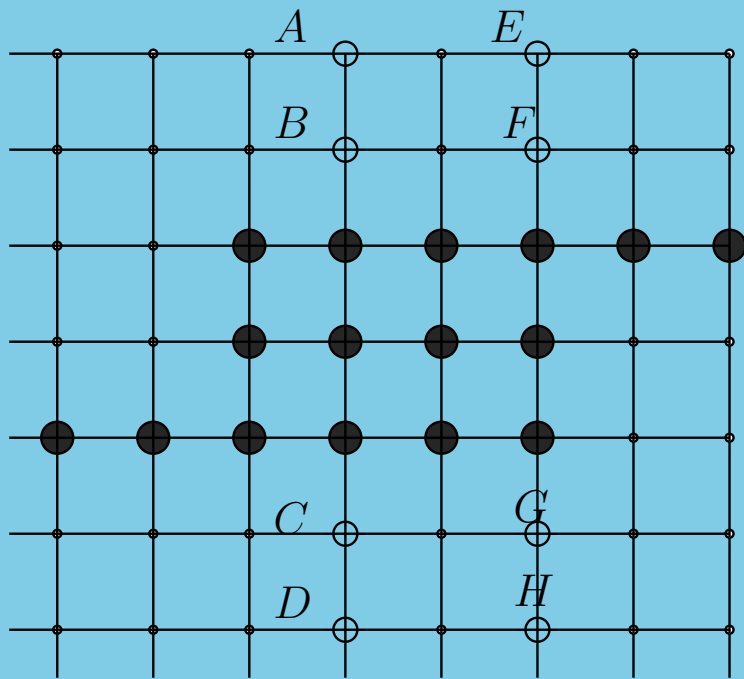
$$A \Leftrightarrow \neg C, B \Leftrightarrow \neg D,$$

$$E \Leftrightarrow \neg G, F \Leftrightarrow \neg H.$$

Projections horizontales :

$$A \Leftrightarrow \neg E, B \Leftrightarrow \neg F,$$

$$C \Leftrightarrow \neg G, D \Leftrightarrow \neg H.$$



Projections verticales :

$$A \Leftrightarrow \neg C, B \Leftrightarrow \neg D,$$

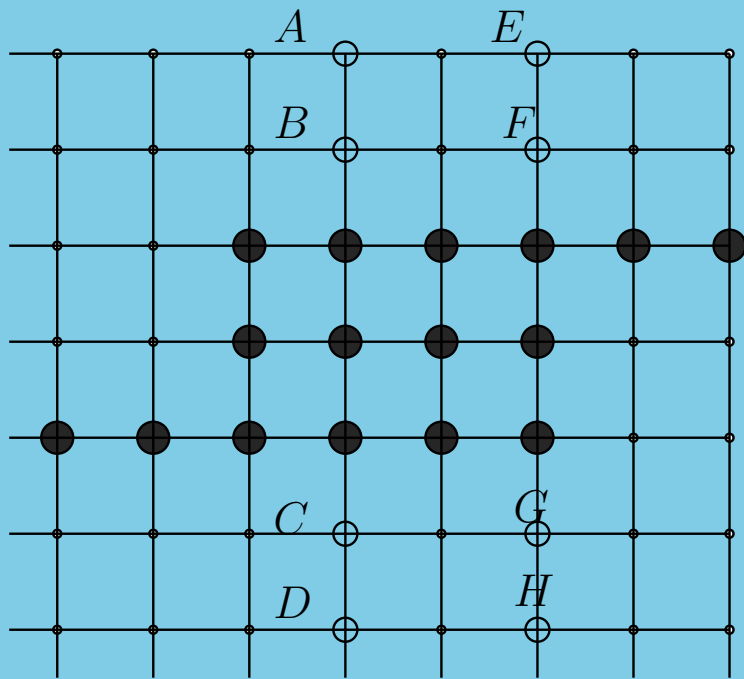
$$E \Leftrightarrow \neg G, F \Leftrightarrow \neg H.$$

Projections horizontales :

$$A \Leftrightarrow \neg E, B \Leftrightarrow \neg F,$$

$$C \Leftrightarrow \neg G, D \Leftrightarrow \neg H.$$

Convexité:



Projections verticales :

$$A \Leftrightarrow \neg C, \quad B \Leftrightarrow \neg D,$$

$$E \Leftrightarrow \neg G, \quad F \Leftrightarrow \neg H.$$

Projections horizontales :

$$A \Leftrightarrow \neg E, \quad B \Leftrightarrow \neg F,$$

$$C \Leftrightarrow \neg G, \quad D \Leftrightarrow \neg H.$$

Convexité:

$$A \Rightarrow B, \quad D \Rightarrow C,$$

$$E \Rightarrow F, \quad H \Rightarrow G,$$

- Choix des pieds. ($O(n^2)$)
- Liaison des pieds en utilisant la Q-convexité. ($O(n^2)$)
- Opérations de complétions utilisant la convexité selon chacune des directions ($O(n^5)$)
- Réduction du problème à 2-SAT ($O(n^5)$).

- Choix des pieds. ($O(n^2)$)
- Liaison des pieds en utilisant la Q-convexité. ($O(n^2)$)
- Opérations de complétions utilisant la convexité selon chacune des directions ($O(n^5)$)
- Réduction du problème à 2-SAT ($O(n^5)$).

Dernièrement, les deux dernières étapes ont été réduites à $O(n^3)$ →
algorithme global en $O(n^5)$.

2. Reconstruction approchée des Q-convexes

RECAPPRO(\mathcal{F}, \mathcal{D})

Donnée : $2|\mathcal{D}|$ vecteurs $(p_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ et $(p'_i)_{i \in \mathbb{Z}^2}$ pour
 $p \in \mathcal{D}$.

Sortie : Un ensemble $E \in \mathcal{F}$, si il existe, dont
les projections vérifient

$$\forall p \in \mathcal{D} \quad \forall i \in \mathbb{Z} \quad p_i \leq X_p E(i) \leq p'_i.$$

Si $|\mathcal{D}| = 2$ alors $\text{RECAPPRO}(\mathcal{Q}(\mathcal{D}), \mathcal{D})$ peut être résolu en $O(n^6)$ opérations.

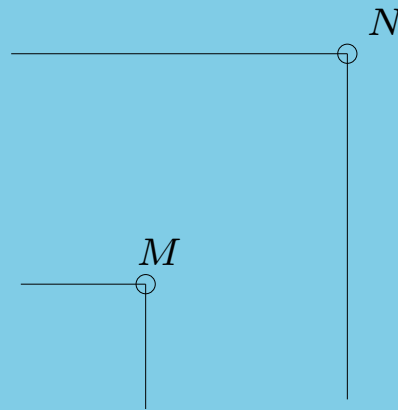
- Choix de quatre pieds.
- Réduction directe du problème à 2-SAT en utilisant quatre variables $V_0(M), V_1(M), V_2(M), V_3(M)$ pour chaque point M . La variable $V_i(M)$ signifiant “ $R_i(M) \cap E = \emptyset$ ”.

E peut se calculer à partir de V :

$$E = \{M \in \Delta \mid \neg V_0(M) \wedge \neg V_1(M) \wedge \neg V_2(M) \wedge \neg V_3(M)\}.$$

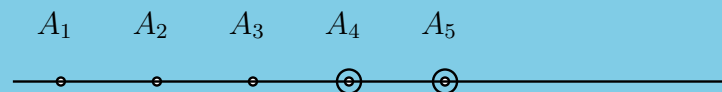
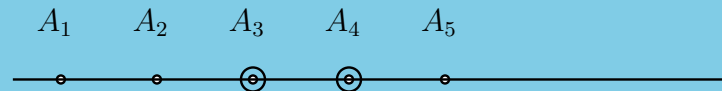
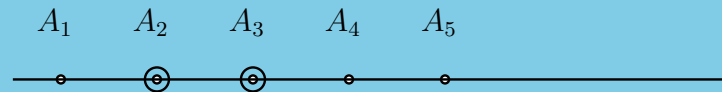
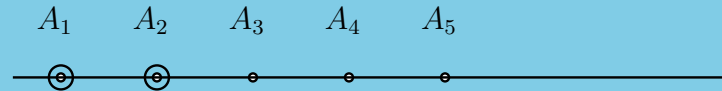
Expression de la Q-convexité.

Si $R_i(M) \subset R_i(N)$ alors $V_i(N) \implies V_i(M)$.



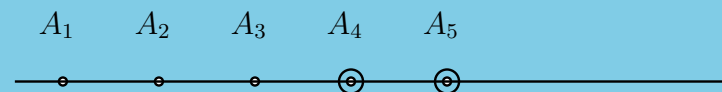
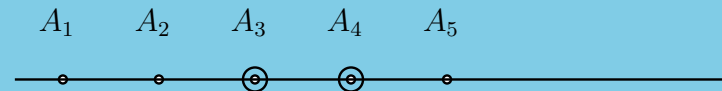
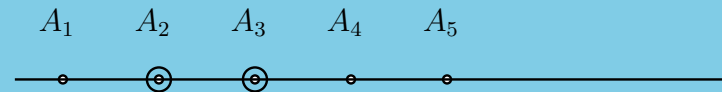
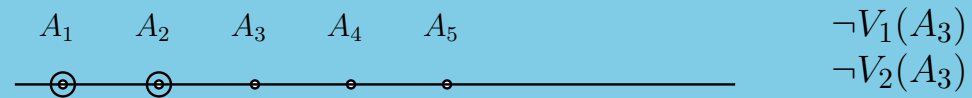
Borne inférieure

Expression par une 2-formule que $X_q E(j) \geq 3$



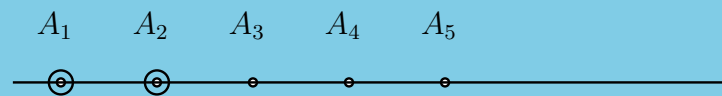
Borne inférieure

Expression par une 2-formule que $X_q E(j) \geq 3$



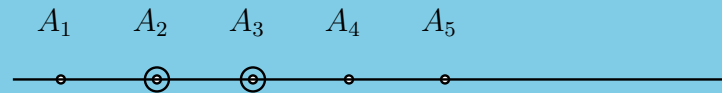
Borne inférieure

Expression par une 2-formule que $X_q E(j) \geq 3$



$$\neg V_1(A_3)$$

$$\neg V_2(A_3)$$

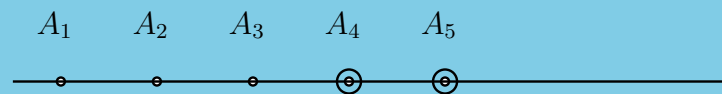
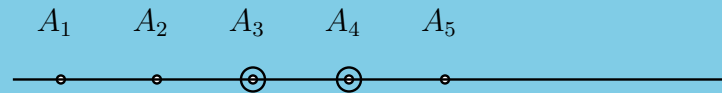


$$\neg V_0(A_1) \vee V_1(A_4)$$

$$\neg V_0(A_1) \vee V_2(A_4)$$

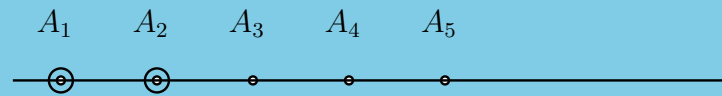
$$\neg V_3(A_1) \vee V_1(A_4)$$

$$\neg V_3(A_1) \vee V_2(A_4)$$



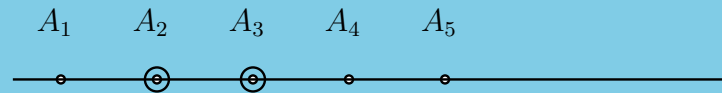
Borne inférieure

Expression par une 2-formule que $X_q E(j) \geq 3$



$$\neg V_1(A_3)$$

$$\neg V_2(A_3)$$

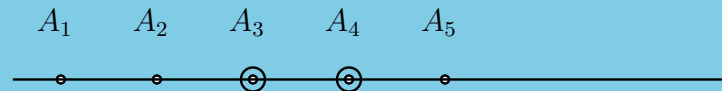


$$\neg V_0(A_1) \vee V_1(A_4)$$

$$\neg V_0(A_1) \vee V_2(A_4)$$

$$\neg V_3(A_1) \vee V_1(A_4)$$

$$\neg V_3(A_1) \vee V_2(A_4)$$

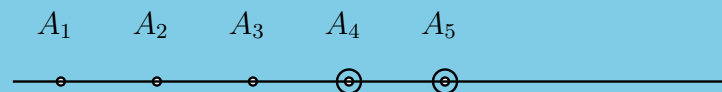


$$\neg V_0(A_2) \vee V_1(A_5)$$

$$\neg V_0(A_2) \vee V_2(A_5)$$

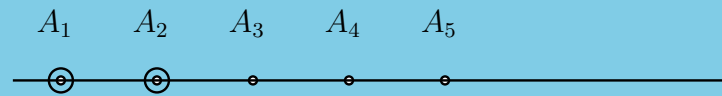
$$\neg V_3(A_2) \vee V_1(A_5)$$

$$\neg V_3(A_2) \vee V_2(A_5)$$



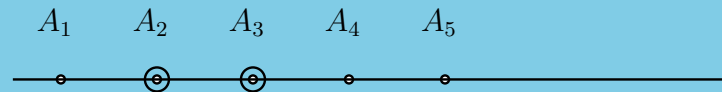
Borne inférieure

Expression par une 2-formule que $X_q E(j) \geq 3$



$$\neg V_1(A_3)$$

$$\neg V_2(A_3)$$

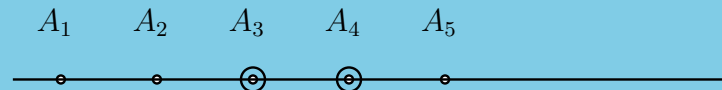


$$\neg V_0(A_1) \vee V_1(A_4)$$

$$\neg V_0(A_1) \vee V_2(A_4)$$

$$\neg V_3(A_1) \vee V_1(A_4)$$

$$\neg V_3(A_1) \vee V_2(A_4)$$

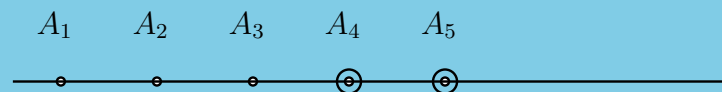


$$\neg V_0(A_2) \vee V_1(A_5)$$

$$\neg V_0(A_2) \vee V_2(A_5)$$

$$\neg V_3(A_2) \vee V_1(A_5)$$

$$\neg V_3(A_2) \vee V_2(A_5)$$



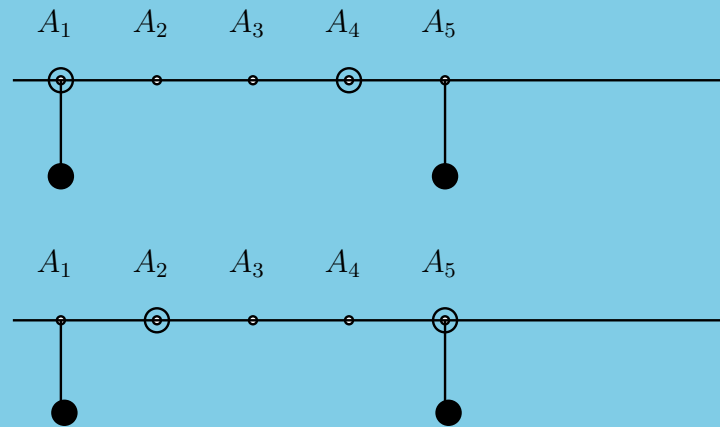
$$\neg V_0(A_3)$$

$$\neg V_3(A_3)$$

Borne supérieure

Expression par une 2-formule que $X_q E(j) \leq 3$

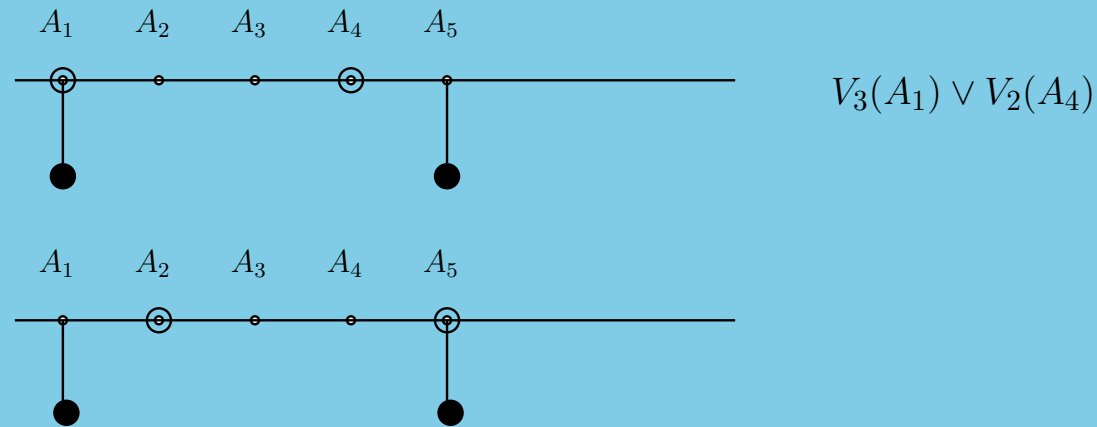
On doit fixer des points qui extrémisent p .



Borne supérieure

Expression par une 2-formule que $X_q E(j) \leq 3$

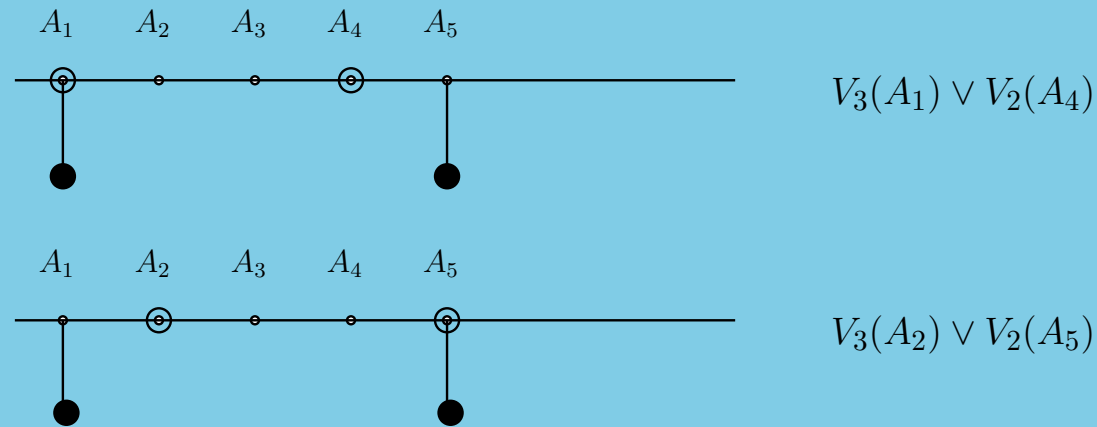
On doit fixer des points qui extrémisent p .



Borne supérieure

Expression par une 2-formule que $X_q E(j) \leq 3$

On doit fixer des points qui extrémisent p .

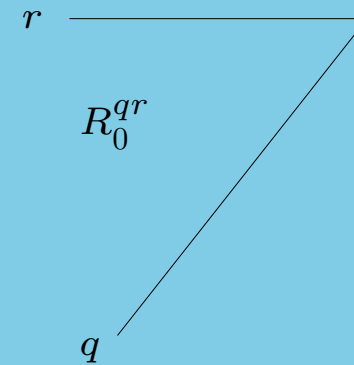
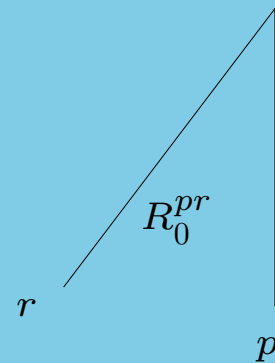
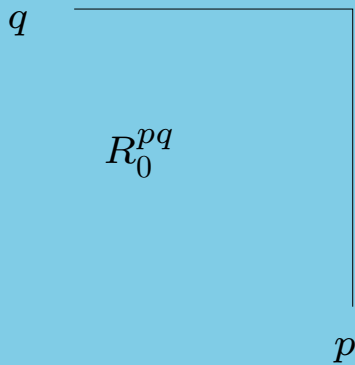


Extension à plusieurs directions

L'algorithme précédent ne s'étend pas facilement pour les Q -convexes selon plus de trois directions

Extension à plusieurs directions

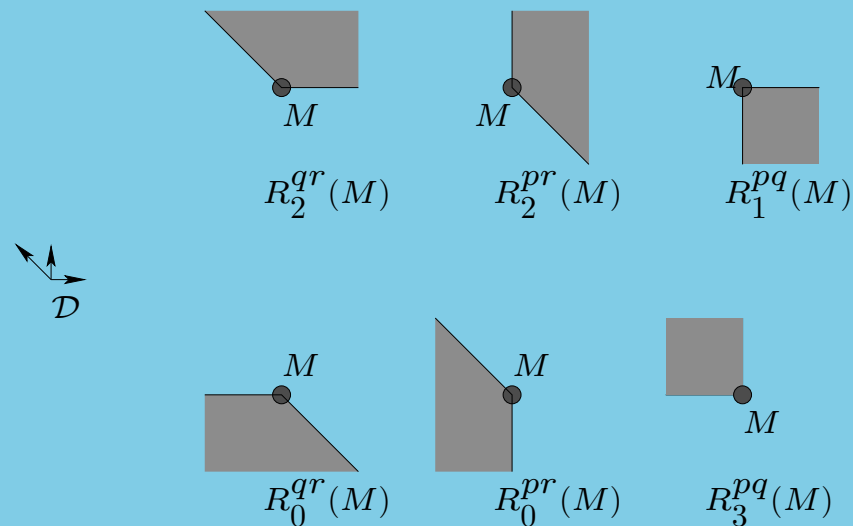
L'algorithme précédent ne s'étend pas facilement pour les Q-convexes selon plus de trois directions



$$V_0^{pq} \Leftrightarrow V_0^{pr} \vee V_0^{qr}$$

Les ASP (presque-demi-plans)

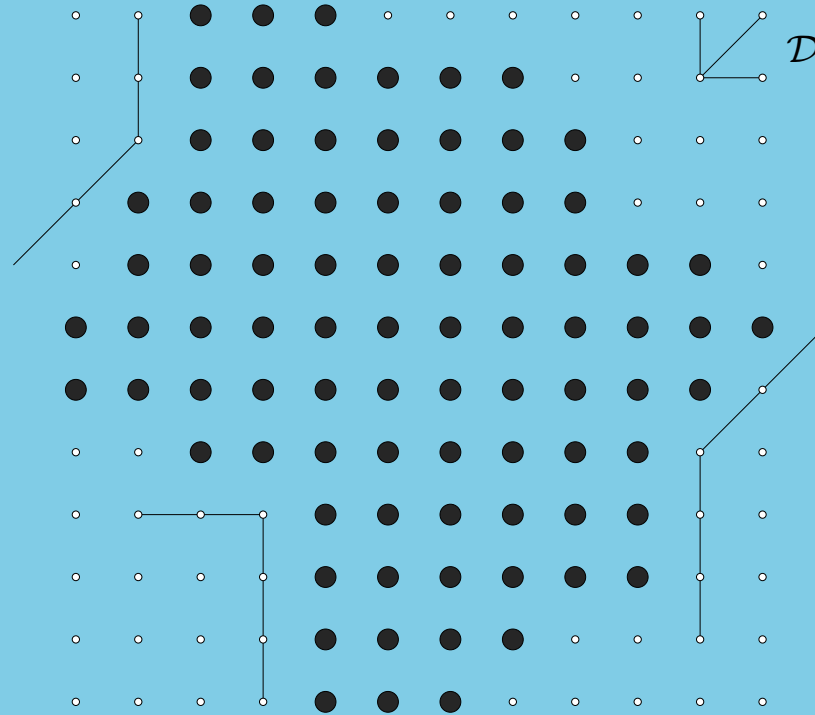
Définition. *Un ASP selon \mathcal{D} est un quadrant maximal parmi les quadrants selon deux directions de \mathcal{D} .*



Les six ASP autour d'un point pour $\mathcal{D} = \{x, y, x + y\}$.

Q-convexes forts

Un ensemble $E \subset \mathbb{Z}^2$ est Q-convexe fort si pour tout $M \notin E$ il existe un ASP autour de M qui ne contient aucun point de E .



Si $Q\mathcal{F}(\mathcal{D})$ désigne la classe des Q-convexes forts selon \mathcal{D} alors $\text{RECAPPRO}(Q(\mathcal{D}), \mathcal{D})$ peut être résolu en $O(n^{2+2d})$ opérations.

3. Unicité

Unicité

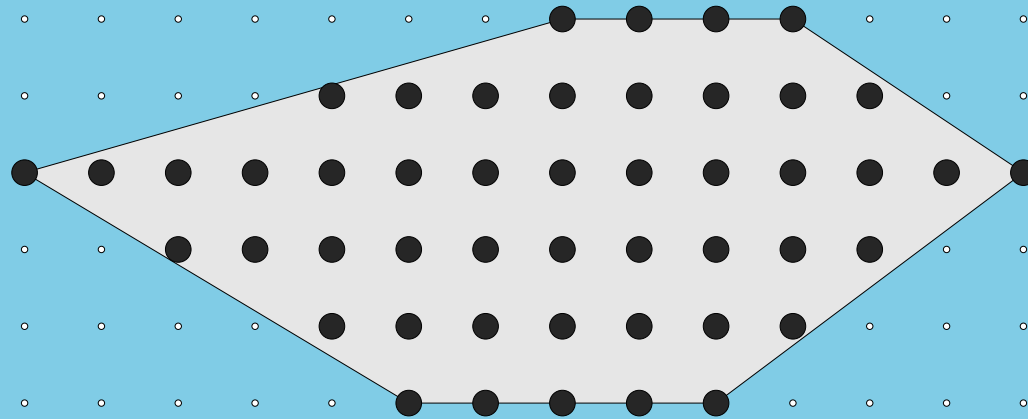
Définition. *L'ensemble de directions \mathcal{D} caractérise la classe \mathcal{E} si pour tous ensemble E_1 et E_2 de \mathcal{E} on a :*

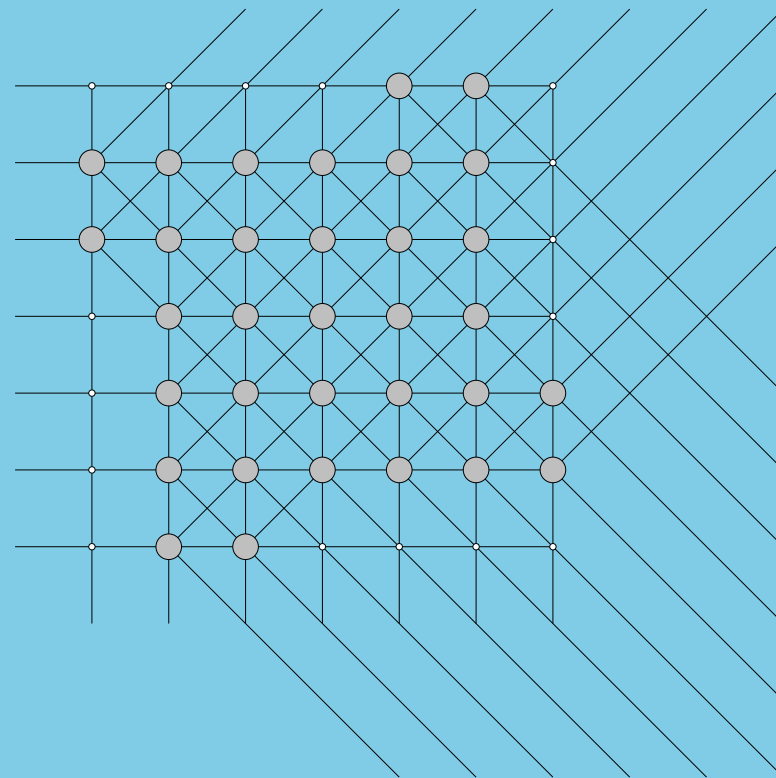
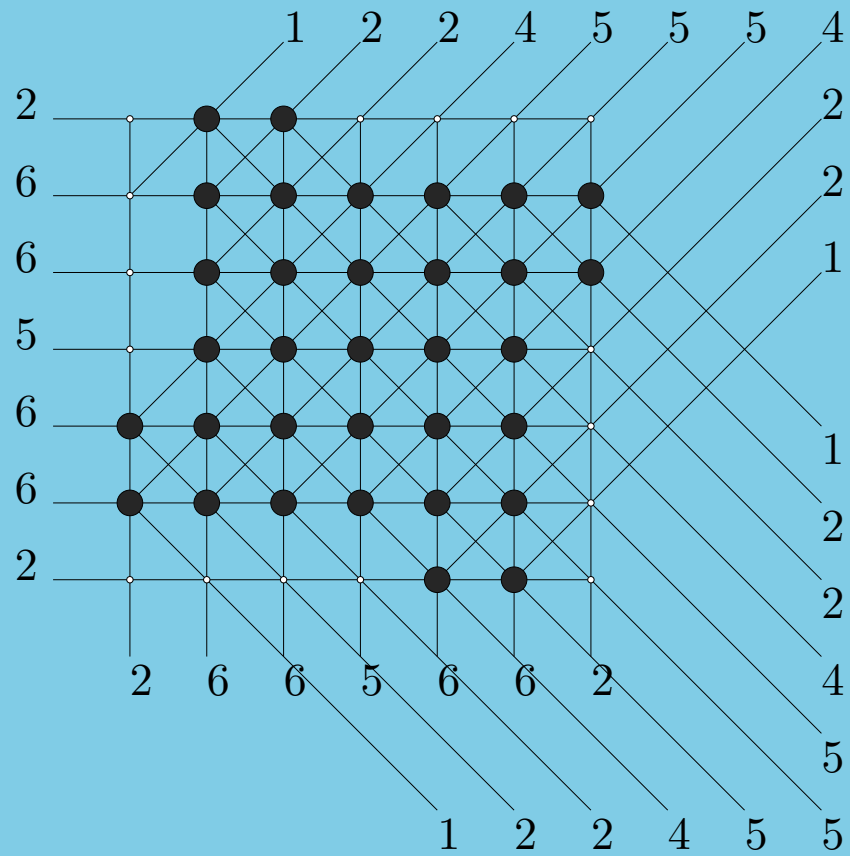
$$(\forall p \in \mathcal{D} X_p E_1 = X_p E_2) \implies E_1 = E_2$$

Résultat négatif ([**BDLNP**]): Aucun ensemble fini de directions caractérise la classe des parties quelconques de \mathbb{Z}^2 .

Ensembles totalement convexes

Un ensemble $E \subset \mathbb{Z}^2$ est totalement convexe si
 $E = \mathbb{Z}^2 \cap \text{conv}E$.





$$\mathcal{D} = \{x, y, x + y, x - y\}$$

Caractérisation des ensembles totalement convexes

Théorème. **[[GG97]]** *Si un birapport de quatre directions de \mathcal{D} n'est pas dans $\{\frac{4}{3}, \frac{3}{2}, 2, 3, 4\}$ alors \mathcal{D} caractérise la classe des totalement convexes.*

Caractérisation des ensembles totalement convexes

Théorème. **[[GG97]]** *Si un birapport de quatre directions de \mathcal{D} n'est pas dans $\{\frac{4}{3}, \frac{3}{2}, 2, 3, 4\}$ alors \mathcal{D} caractérise la classe des totalement convexes.*

$$\text{Birapport : } \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{bmatrix} = \frac{p_3 - p_1}{p_3 - p_2} \cdot \frac{p_4 - p_1}{p_4 - p_2} = \frac{(p_3 - p_1)(p_4 - p_2)}{(p_3 - p_2)(p_4 - p_1)}$$

Caractérisation des ensembles totalement convexes

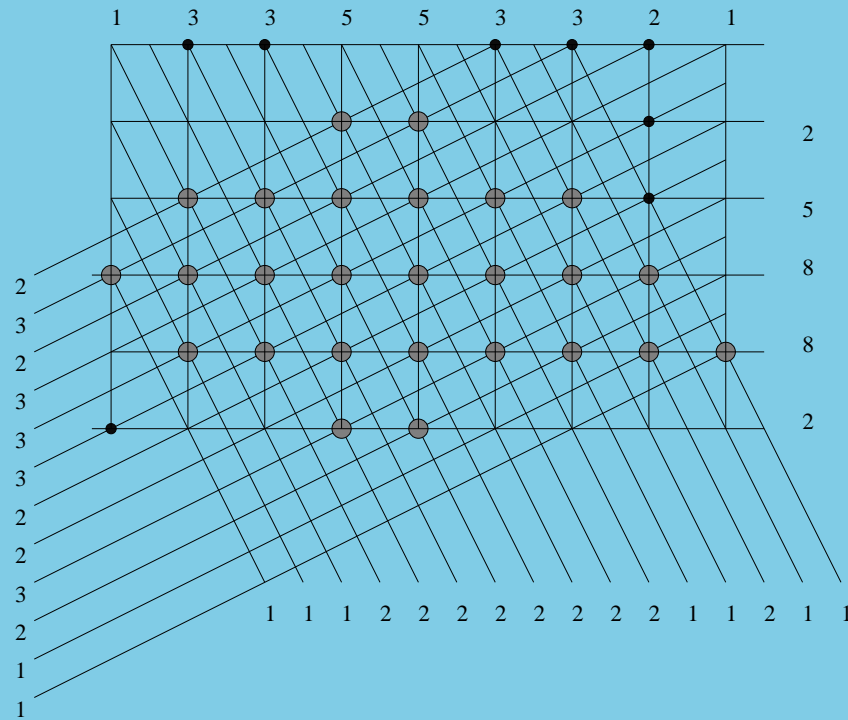
Théorème. **[[GG97]]** *Si un birapport de quatre directions de \mathcal{D} n'est pas dans $\{\frac{4}{3}, \frac{3}{2}, 2, 3, 4\}$ alors \mathcal{D} caractérise la classe des totalement convexes.*

$$\text{Birapport: } \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{bmatrix} = \frac{p_3 - p_1}{p_3 - p_2} \cdot \frac{p_4 - p_1}{p_4 - p_2} = \frac{(p_3 - p_1)(p_4 - p_2)}{(p_3 - p_2)(p_4 - p_1)}$$

Corollaire. *Si $\|\mathcal{D}\| \geq 7$ alors \mathcal{D} caractérise les totalement convexes*

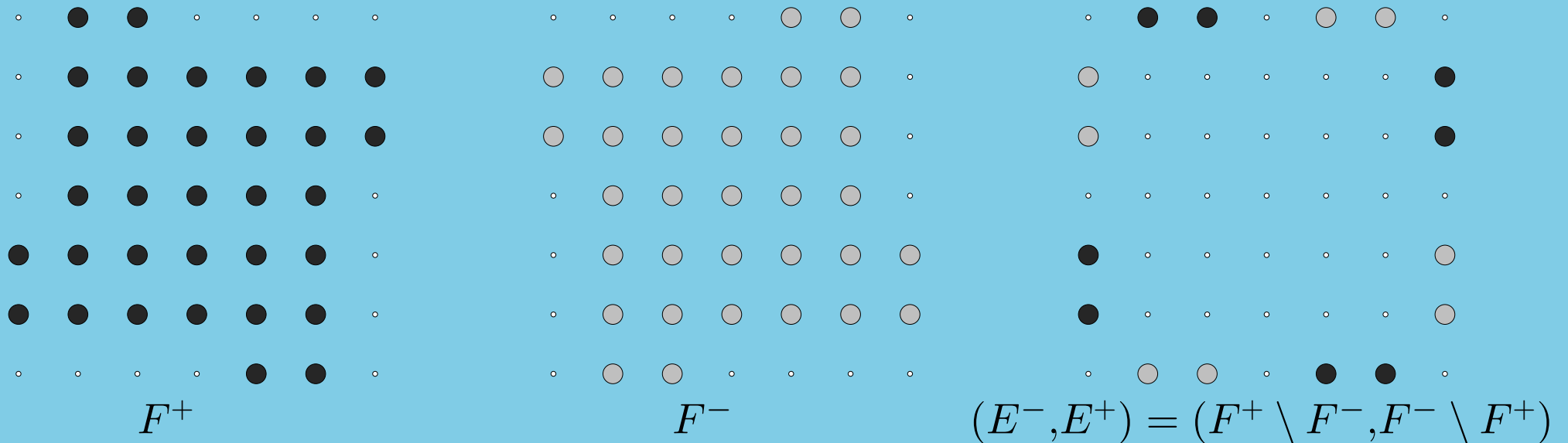
Exemple : $\mathcal{D} = \{x, y, 2x + y, x - 2y\}$, $\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ \frac{1}{2} & \infty \end{bmatrix} = 5 \notin \{\frac{4}{3}, \frac{3}{2}, 2, 3, 4\}$

Exemple : $\mathcal{D} = \{x, y, 2x + y, x - 2y\}$, $\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ \frac{1}{2} & \infty \end{bmatrix} = 5 \notin \{\frac{4}{3}, \frac{3}{2}, 2, 3, 4\}$



Switching-component

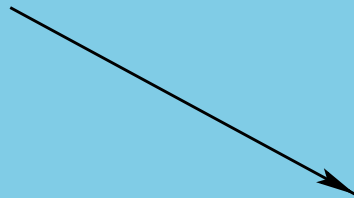
Définition. *Un switching-component selon \mathcal{D} est la différence de deux ensembles qui ont les mêmes projections selon \mathcal{D} .*



Switching de totalement convexes



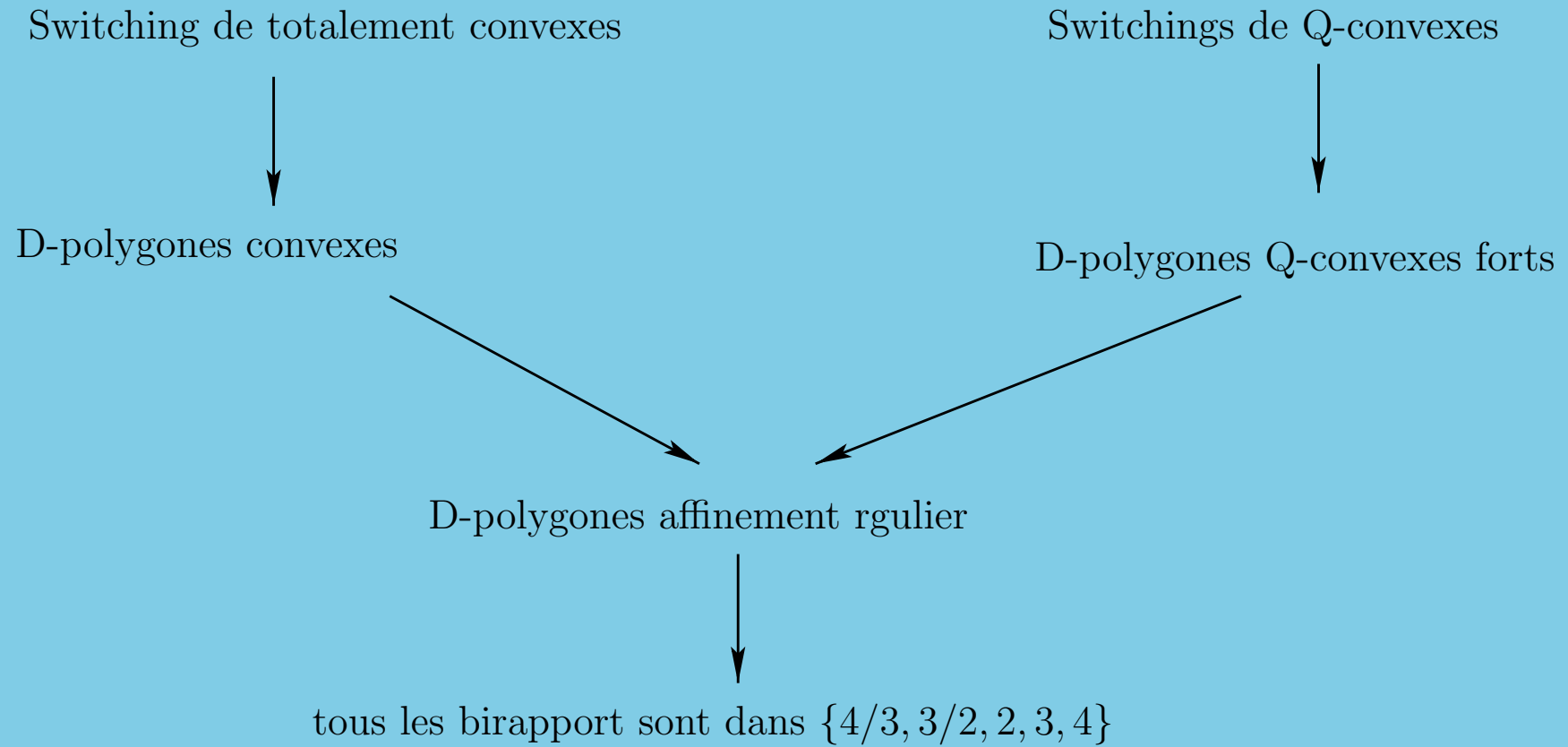
D-polygones convexes

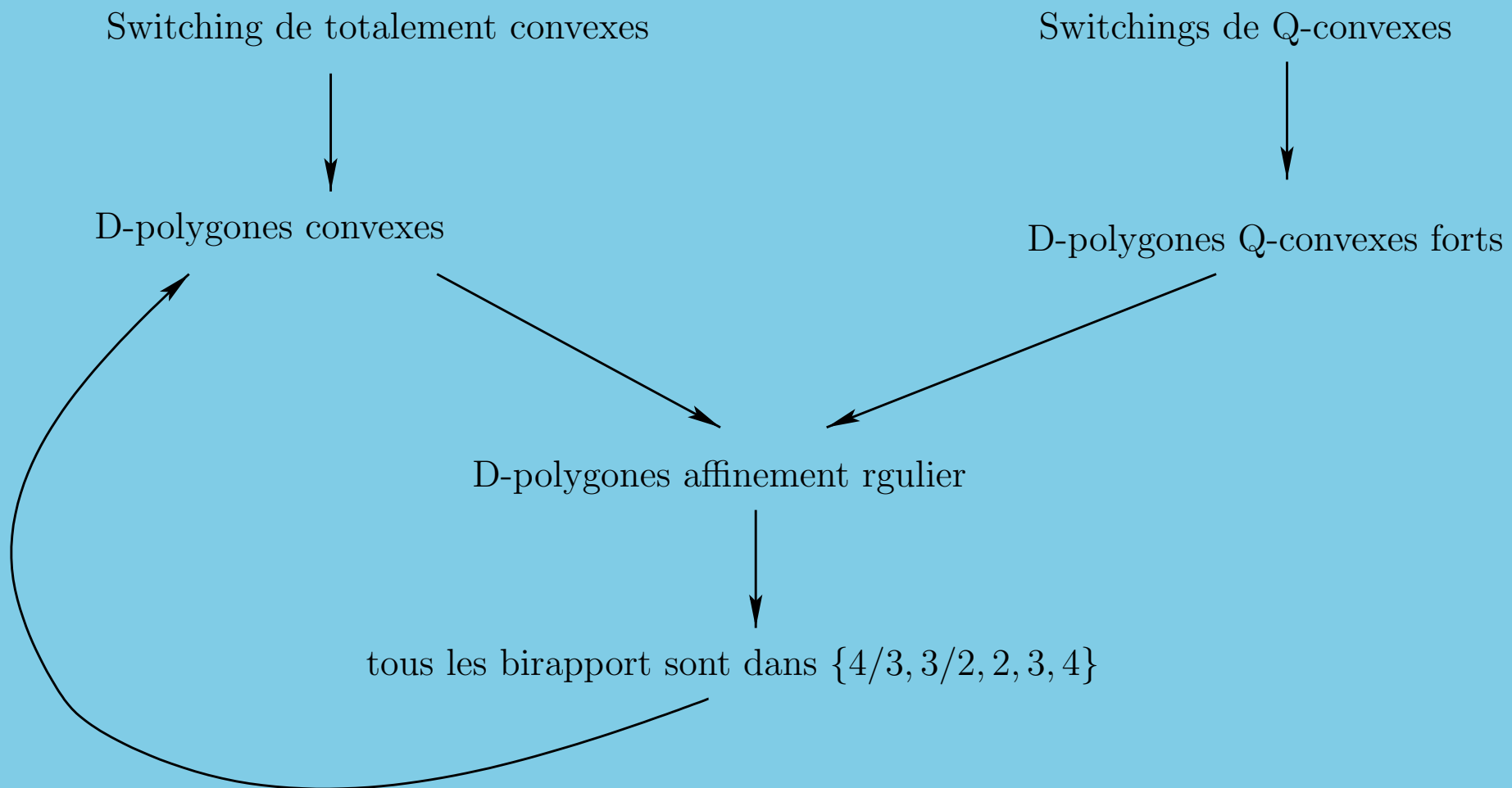


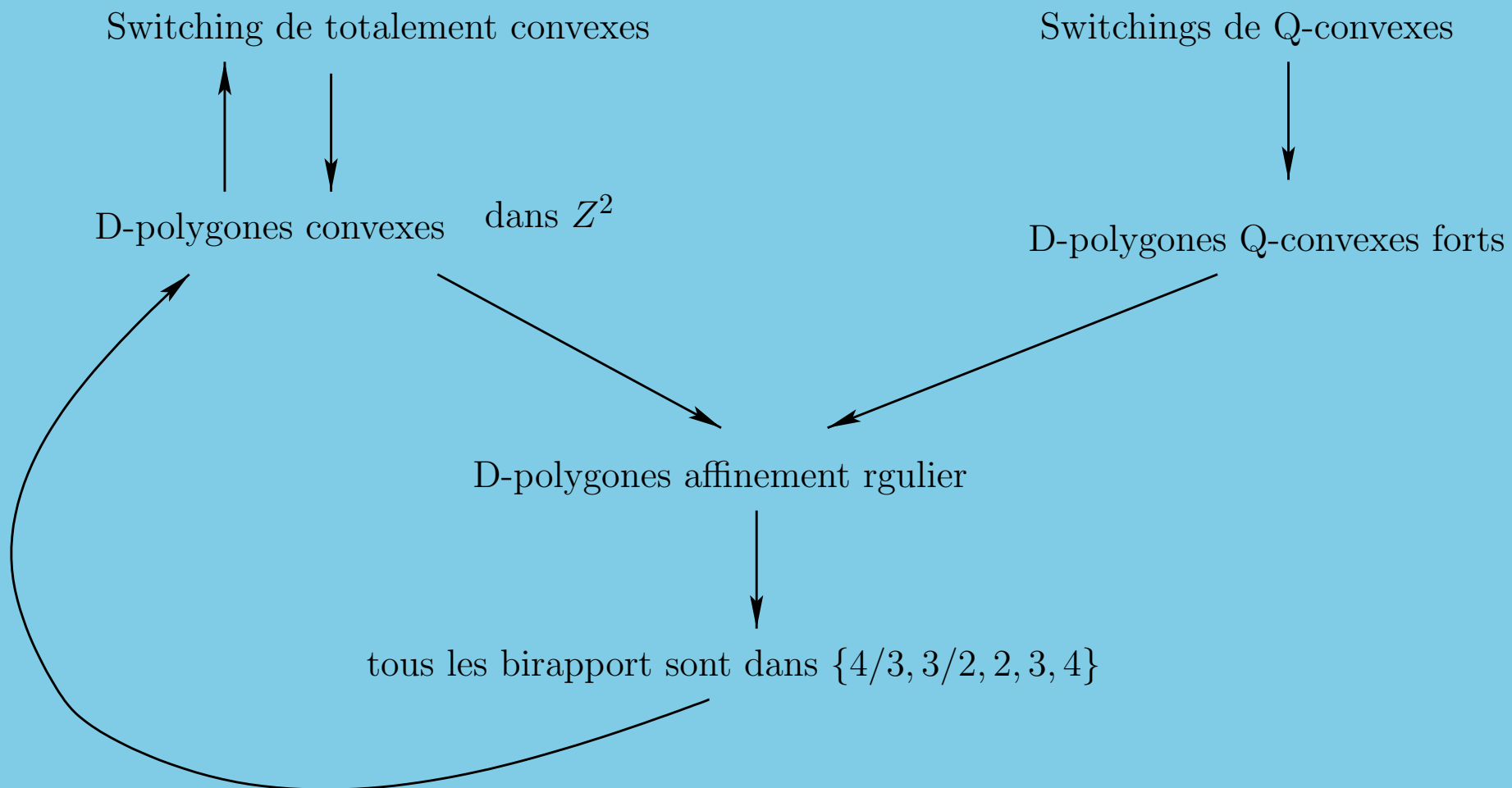
D-polygones affinement rgulier

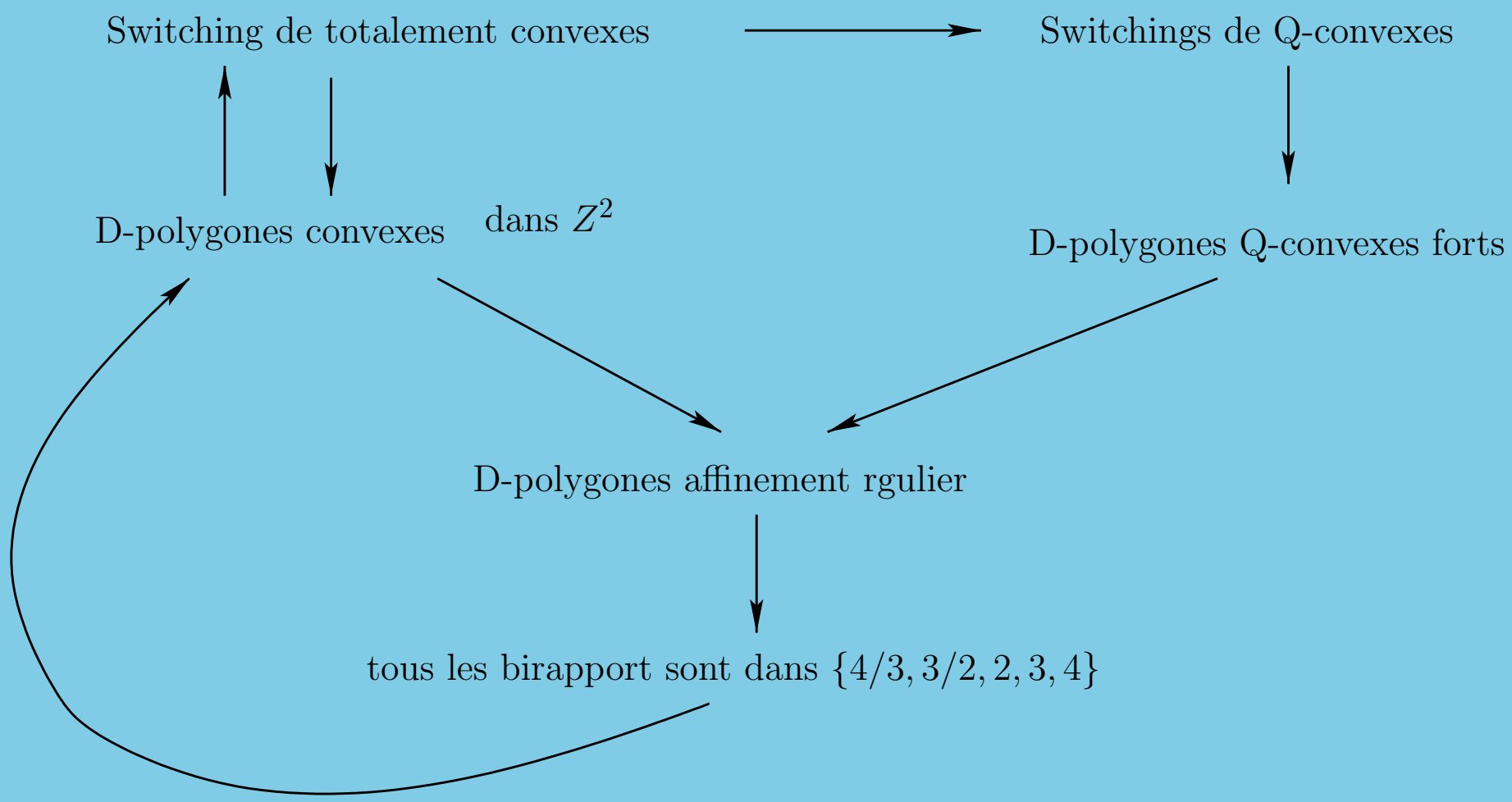


tous les birapport sont dans $\{4/3, 3/2, 2, 3, 4\}$









Unicité de la reconstruction des Q-convexes

Théorème. \mathcal{D} caractérise la classe des Q-convexes selon \mathcal{D} si et seulement si \mathcal{D} caractérise la classe des totalement convexes.

Directions Classes	$ \mathcal{D} \leq 3$ ou tous les birapports dans $\{\frac{4}{3}, \frac{3}{2}, 2, 3, 4\}$	$ \mathcal{D} \geq 4$ avec un birapport $\notin \{\frac{4}{3}, \frac{3}{2}, 2, 3, 4\}$
quelconque	NON [BDLNP]	
H-convexe 4-connexe	NON [BDLNP]	
HV-convexe	NON [BDLNP]	
Q-convexes selon \mathcal{D}	NON [BDLNP]	OUI
totalement convexes		OUI [GG97]

$\mathcal{F} \backslash \mathcal{D}$	$\{x,y\}$	$ \mathcal{D} = 2$	$ \mathcal{D} \geq 3$	$ \mathcal{D} \geq 7$ ou birapport \notin $\{\frac{4}{3}, \frac{3}{2}, 2, 3, 4\}$
quelconque	$O(n^2)$		NP-comp	
HV-convexe	NP-comp	?	?	?
4-connexe	NP-comp	?	?	?
HV-convexe 4-connexe	$O(n^4)$?	?	?
Q-convexe	?			
tot. convexe	?	?	?	?

$\mathcal{F} \backslash \mathcal{D}$	$\{x,y\}$	$ \mathcal{D} = 2$	$ \mathcal{D} \geq 3$	$ \mathcal{D} \geq 7$ ou birapport \notin $\{\frac{4}{3}, \frac{3}{2}, 2, 3, 4\}$
quelconque	$O(n^2)$		NP-comp	
HV-convexe	NP-comp	?	?	?
4-connexe	NP-comp	?	?	?
HV-convexe 4-connexe	$O(n^4)$?	?	?
Q-convexe	$O(n^5)$			
tot. convexe	?	?	?	?

$\mathcal{F} \backslash \mathcal{D}$	$\{x, y\}$	$ \mathcal{D} = 2$	$ \mathcal{D} \geq 3$	$ \mathcal{D} \geq 7$ ou birapport \notin $\{\frac{4}{3}, \frac{3}{2}, 2, 3, 4\}$
quelconque	$O(n^2)$		NP-comp	
HV-convexe	NP-comp	?	?	?
4-connexe	NP-comp	?	?	?
HV-convexe 4-connexe	$O(n^4)$?	?	?
Q-convexe	$O(n^5)$			
tot. convexe	?	?	?	

$\mathcal{F} \backslash \mathcal{D}$	$\{x,y\}$	$ \mathcal{D} = 2$	$ \mathcal{D} \geq 3$	$ \mathcal{D} \geq 7$ ou birapport \notin $\{\frac{4}{3}, \frac{3}{2}, 2, 3, 4\}$
quelconque	$O(n^2)$		NP-comp	
HV-convexe	NP-comp	?	?	?
4-connexe	NP-comp	?	?	?
HV-convexe 4-connexe	$O(n^4)$?	?	?
Q-convexe	$O(n^5)$			
tot. convexe	?	?	?	$O(n^5)$

Conclusion et perspectives

- Découverte d'une notion très adaptée à la tomographie discrète.

Conclusion et perspectives

- Découverte d'une notion très adaptée à la tomographie discrète.
- Est-ce une notion utile dans la pratique?

Conclusion et perspectives

- Découverte d'une notion très adaptée à la tomographie discrète.
- Est-ce une notion utile dans la pratique?
 - Angiographie.
 - Microscopie électronique

Conclusion et perspectives

- Découverte d'une notion très adaptée à la tomographie discrète.
- Est-ce une notion utile dans la pratique?
 - Angiographie.
 - Microscopie électronique
- La Q-convexité dans d'autres domaines? (Combinatoire).

Références

- [BDLNP] E. Barcucci, A. Del Lungo, M. Nivat, et R. Pinzani. X-rays characterizing some classes of discrete sets. preprint.
- [BDLNP96] E. Barcucci, A. Del Lungo, M. Nivat, et R. Pinzani. Reconstructing convex polyominoes from horizontal and vertical projections. *Theor. Comp. Sci.*, 155(2):321–347, 1996.
- [DV84] M. Delest et G. Viennot. Algebraic languages and polyomino enumeration. *j-THEOR-COMP-SCI*, 34:168–206, 1984.
- [Gar95] R. J. Gardner. *Geometric Tomography*, volume 58 de *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, 1995.
- [GG97] R. J. Gardner et P. Gritzmann. Discrete tomography: Determination of finite sets by X-rays. *Trans. Am. Math. Soc.*, 349(6):2271–2295, 1997.
- [GGP99] R. J. Gardner, P. Gritzmann, et D. Prangenberg. On the computational complexity of reconstructing lattice sets from their x-rays. *Disc. Math.*, 202:45–71, 1999.
- [Ham63] P. C. Hammer. Unsolved problems. Dans *Proc. Symp. Pure Math.*, vol 7: *Convexity*, p. 498–499. Amer. Math. Soc., 1963.
- [KKV89] D. Kölzow, A. Kuba, et A. Volčič. An algorithm for reconstructing convex bodies from their projections. *Disc. and Comp. Geom.*, 4:205–237, 1989.
- [Rys63] H. J. Ryser. *Combinatorial Mathematics*. Mathematical Association of America, 1963.
- [Vol87] A. Volčič. Tomography of convex bodies and inscribed polygons. *Ricerche Mat.*, 36:185–192, 1987.
- [Woe96] G. H. Woeginger. The reconstruction of polyominoes from horizontal and vertical projections. Technical report SFB-65, TU Graz, Graz, 1996.