



HAL
open science

Résultats de généricité en analyse multifractale

Aurélia Fraysse

► **To cite this version:**

Aurélia Fraysse. Résultats de généricité en analyse multifractale. Mathématiques [math]. Université Paris XII Val de Marne, 2005. Français. NNT : . tel-00012156

HAL Id: tel-00012156

<https://theses.hal.science/tel-00012156v1>

Submitted on 18 Apr 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

présentée par

Aurélia FRAYSSE

pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PARIS XII

Spécialité : Mathématiques

Titre : *Résultats de généricité en analyse multifractale*

Soutenue le 14 Décembre 2005 devant le jury composé de

M. Julien BARRAL	Rapporteur
M. Yanick HEURTEAUX	Examineur
M. Stéphane JAFFARD	Directeur de thèse
M. Jean-Pierre KAHANE	Président du jury
M. Yves MEYER	Examineur
M. Claude TRICOT	Rapporteur

Remerciements

Ma première pensée va naturellement à mon directeur de thèse, Stéphane Jaffard, pour la confiance qu'il m'a accordée. Je le remercie pour le sujet intéressant et stimulant qu'il m'a proposé. Mais je lui suis aussi reconnaissante pour la liberté qu'il m'a laissée et qui m'a permis d'explorer mes propres pistes tout en me faisant profiter de son expérience et de sa grande intuition.

Je tiens aussi à exprimer ma plus sincère reconnaissance à Julien Barral pour ses précieuses remarques. Grâce à lui, ce manuscrit a gagné beaucoup en clarté et en lisibilité. Il n'a été nulle part pris en défaut dans la qualité de sa lecture et je le remercie pour le temps qu'il a consacré à mon travail. Je remercie aussi Claude Tricot pour les bons moments passés lors de ce séjour en Tunisie, et pour avoir su apprécier mes qualités aquatiques. Il a mis autant de gentillesse et de talent à rapporter mes activités terrestres. J'apprécie aussi le travail qu'il a effectué sur ma thèse et ses remarques pertinentes.

J'ai été très honorée que Jean-Pierre Kahane se soit intéressé à mon travail. Nos discussions ont été pour moi très enrichissantes et je le remercie d'avoir accepté de faire partie de mon jury. Je remercie aussi Yves Meyer et Yanick Heurteaux d'avoir accepté d'être membre de ce jury. J'ai beaucoup appris à chacune de nos rencontres et c'est un honneur pour moi qu'ils aient voulu s'intéresser à mon travail.

Dès mon mémoire de DEA, Clothilde Melot m'a aidé à poser mes premiers pas dans le monde de la recherche. Notre collaboration sur le projet LISA ou le chapitre 6 de cette thèse m'a beaucoup apporté.

Je tiens aussi à adresser un grand merci à Jean-Marie Aubry et à Stéphane Seuret pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail. Je les remercie entre autre pour le temps qu'ils ont consacré à relire et corriger mon manuscrit de thèse.

Une bonne ambiance de travail étant un atout important pour la qualité de la recherche, je remercie toute l'équipe du laboratoire d'analyse et de mathématiques appliquées de l'université Paris 12. J'ai vraiment eu de la chance de tomber sur une équipe aussi agréable et sympathique. Je suis particulièrement reconnaissante à son directeur, Frank Pacard, qui m'a donné des conditions de travail idylliques. Je remercie entre autres David et Jacques qui m'ont dépannée plus d'une fois. Mais aussi Colette Guillopé, Benoît Daniel et Marie-Odile Perrain pour m'avoir

accordé le plaisir d'enseigner à leur cotés. Et puis il y a aussi tous les étudiants en thèse, Mohamed, Arnaud, Hassen, Fethi, Marianne, Boris, Abdel, Jing, Habib et Saida, dont le soutien et les conseils avisés m'ont été très précieux.

Un grand merci aussi à tous ceux que j'ai pu côtoyer tout au long de cette thèse et avec qui nous avons partagé la même galère, et avec qui on s'est mutuellement aidé à rester à flot. Je pense aux thésards bien sûr, Erwan, Renaud, Stéphane, Bassarab, Eulalia, Victor. Je remercie aussi tous ceux qui m'ont soutenue tout au long de cette thèse, comme Eva, Stéphanie ou Pierre. Mais je pense aussi aux plus "grands", comme Jacques Istas, Albert Cohen ou Vlad Bally, qui ont éclairé ma route grâce à leur conseils.

J'avoue que j'ai toujours eu la chance dans mes démarches de tomber sur des personnes compétentes et prêtes à se plier en quatre pour rendre service. Je pense notamment à Brigitte David, Stéphanie Judee, Josette Da Costa mais je remercie globalement l'ensemble du personnel administratif de l'université.

Et puis, il y a ces relations de travail qui deviennent des relations d'amitiés au fur et à mesure... Un très grand merci à Céline Lacaux, Marguerite Zani et Hermine Bierme pour le travail que nous avons effectué ensemble mais surtout pour leur soutien de tous les instants.

Merci aussi à Hermine et à Anne Estrade pour le travail que nous avons effectué ensemble en dehors de cette thèse. C'est un réel plaisir de travailler avec elles.

Ce travail n'aurait sans doute pas abouti sans le soutien de ma famille et de mes amis. J'ai aussi une pensée émue pour ma mère ou ma soeur qui ont toujours écouté mes plaintes, mais aussi pour ma grand-mère dont le soutien inconditionnel m'a été d'un très grand secours.

Pour finir, je n'aurai jamais de mots assez fort pour d'écrire ma reconnaissance à Fabrice et Isabelle, pour cette épaule qu'ils m'ont offerte à chaque occasion.

Ce livre est toute ma jeunesse ;
Je l'ai fait sans presque y songer.
Il y paraît, je le confesse,
Et j'aurais pu le corriger.
Mais quand l'homme change sans cesse,
Au passé pourquoi rien changer ?
Va-t'en, pauvre oiseau passager ;
Que Dieu te mène à ton adresse !
Qui que tu sois, qui me liras,
Lis-en le plus que tu pourras,
Et ne me condamne qu'en somme.
Mes premiers vers sont d'un enfant,
Les seconds d'un adolescent,
Les derniers à peine d'un homme.

(Au lecteur des deux volumes de vers de l'auteur, Premières poésies. Alfred de Musset)

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	3
1. Préliminaires : Régularité, ondelettes et espaces fonctionnels	9
1.1. Introduction	9
1.2. Notions de régularité	9
1.3. Les ondelettes	13
1.4. Injections entre les différents espaces fonctionnels	23
2. Les ensembles petits en analyse	25
2.1. Introduction	25
2.2. Définitions et premières propriétés	28
2.3. Quelques exemples	54
2.4. Interversions des presque partout et presque sûr	58
2.5. Les autres notions	63
3. Régularité prévalente dans un espace de Sobolev donné	69
3.1. Introduction	69
3.2. Le cas régulier	73
3.3. Le cas critique, $s - \frac{d}{p} = 0$	85
3.4. Les fonctions non localement bornées	90
4. Approche prévalente de la validité du formalisme multifractal ...	95
4.1. Introduction	95
4.2. Formalisme multifractal dans un Besov	98
4.3. Le formalisme multifractal	106
5. Peut-on faire mieux ?	117
5.1. Introduction	117
5.2. Les unions de compacts	117
5.3. Les ensembles nuls au sens gaussien de Phelps	120
5.4. Le cadre HP-typique : La bonne notion ?	122

5.5. Démonstration du théorème.....	123
6. Espaces de Besov et p-spectre.....	127
6.1. Introduction.....	127
6.2. Régularité de la fonction de saturation.....	134
6.3. Prévalence et spectre T_u^p	142
7. Sur les séries entières.....	149
7.1. Introduction.....	149
7.2. Comportement prévalent.....	151
Annexe B.....	155
Compatibilité des notions de porosité et d'ensembles Haar-nuls.....	156
Un ensemble de première catégorie qui n'est pas σ -poreux.....	159
Bibliographie.....	163

INTRODUCTION

*«Je me détourne avec horreur et effroi de cette plaie lamentable
des fonctions continues qui n'ont pas de dérivée.»*

(Correspondance de Hermite à Stieltjes ([54]))

Au risque cependant de décevoir Hermite, Banach dans [10] et Mazurkiewicz dans [70] prouvaient que la plupart, au sens des catégories de Baire, des fonctions continues étaient nulle part dérivables. Cette notion de "plupart" fondée sur les catégories de Baire, apparue il y a un siècle, [9], était liée à l'origine à des études de régularité, et plus exactement aux problèmes de prolongement analytique des séries de Taylor. Cette théorie qui permet d'appréhender la taille des objets a depuis été utilisée dans d'autres domaines de l'analyse, par exemple dans des problèmes de convexité. Elle présente cependant l'inconvénient d'être purement topologique. En effet, si elle donne bien un aperçu d'un comportement dominant, elle ne permet pas de «quantifier» la taille des ensembles. En dimension finie, cette quantification peut se faire grâce à la théorie de la mesure de Lebesgue. Or, un ensemble peut être grand au sens topologique de Baire mais de mesure de Lebesgue nulle.

Il n'existe cependant pas d'équivalent de la théorie de la mesure de Lebesgue en dimension infinie. Dans le cadre des systèmes dynamiques, Kolmogorov soulève le problème d'obtenir alors une notion liée à la théorie de la mesure dans des espaces de fonctions. Il a souligné dès 1954, dans [60] que les outils de type Baire fournissaient une notion de généricité peu satisfaisante dans les applications, et il a proposé d'introduire en dimension infinie des outils conceptuellement proches de la notion d'ensembles de mesure de Lebesgue nulle.

Il faut attendre 1972 avec les travaux de Christensen [21] pour avoir une extension au sens de la notion d'ensembles de mesure de Lebesgue nulle dans un

espace de dimension infinie. Le principe de la théorie de Christensen est de considérer comme petit un ensemble tel qu'on puisse trouver une mesure vérifiant que toutes les translatées de cet ensemble sont de mesure nulle. La définition donnée par Christensen se ramène, dans les cas qui nous occuperont, à la suivante.

Définition. — *Soit E un espace vectoriel métrique complet. Un borélien B de E est dit Haar-nul s'il existe une mesure borélienne et positive μ vérifiant*

$$\exists K \text{ compact tel que } 0 < \mu(K) < \infty$$

et

$$\forall x \in E \quad \mu(B + x) = 0.$$

Un sous-ensemble de E est Haar-nul si il est contenu dans un borélien Haar-nul. Le complémentaire d'un ensemble Haar-nul est dit prévalent.

Nous verrons que dans un espace polonais, autrement dit un espace métrique complet et séparable, la première condition sur la mesure μ devient inutile.

C'est le début de la théorie de la prévalence. Cette théorie a depuis été utilisée dans divers champs d'applications. Par exemple, on retrouve dans [13] des exemples d'applications aux études de différentiabilité de fonctions lipschitziennes entre deux espaces de Banach. Dans [39], on peut encore en trouver d'autres applications à l'étude de variétés riemanniennes.

En ce qui nous concerne, nous nous intéressons plus particulièrement à des problèmes de régularité dans des espaces de fonctions.

L'analyse de la régularité de fonctions est un outil très utilisé dans bon nombre de domaines des mathématiques et de la physique. Dès le début du vingtième siècle, les mathématiciens se sont intéressés à des fonctions ayant une faible régularité en chaque point. C'est à cette époque qu'on a commencé à regarder des fonctions nulle part dérivables, voire plus irrégulières comme la fonction de Weierstrass ou le mouvement brownien dans les années 70. Dans le contexte de la turbulence pleinement développée, B. Mandelbrot a proposé les cascades multiplicatives comme modèles de dissipation d'énergie d'un fluide, [65] et [66]. La régularité de ces cascades varie fortement d'un point à un autre. De même, on peut regarder la vitesse d'un écoulement d'air turbulent, comme il a été fait dans la soufflerie de Modane. Dans cet exemple, la mesure de la vitesse de refroidissement d'un fil chaud placé dans un écoulement d'air donne des résultats qui semblent très irréguliers dans certaines régions et plus réguliers dans d'autres, [32].

Depuis cette époque, il a été démontré que les cascades de Mandelbrot étaient un exemple typique de comportement multifractal [37].

De leur côté, U. Frisch et G. Parisi, dans [30] et [31], ont proposé une interprétation d'une quantité classique calculée en turbulence, qui est la fonction d'échelle, que nous définirons dans le chapitre 4. On déduisait des travaux de Kolmogorov que cette fonction d'échelle devait être affine. Mais les résultats expérimentaux ont montré une fonction strictement concave. Frisch et Parisi ont alors proposé une explication de ce phénomène par la présence de singularités höldériennes dans la vitesse. Plus précisément, ils ont proposé une formule, appelée formalisme multifractal, qui relie cette fonction d'échelle aux singularités à l'aide d'une transformée de Legendre. Ce formalisme, ou plutôt ses extensions, apparaissent être applicables aussi pour d'autres fonctions et signaux, comme ceux ayant des propriétés d'autosimilarité. Depuis, cette méthode pratique fournie par l'analyse multifractale est largement utilisée dans le cadre de la théorie de la turbulence [1, 5], du traitement du signal ou du traitement d'image [63], mais aussi dans l'étude de processus [8, 43]...

Tous ces objets ont un comportement irrégulier, au sens où ils ont un exposant de régularité faible, et leur régularité ponctuelle est elle-même irrégulière : elle varie en effet d'un point à un autre. De plus, si l'on considère des lignes de niveau suivant un exposant de régularité donné, on tombe sur un ensemble fractal. On appelle alors "spectre de singularités" l'application qui à cet exposant associe la dimension fractale de son ensemble de niveau. On dit des objets possédant de telles propriétés qu'ils sont multifractals.

La formule heuristique de Frisch et Parisi a été vérifiée sous une forme analogue par de grandes classes de mesures auto-similaires, comme dans [11], [12], [18] ou [79]. Elle a aussi été étudiée sous plusieurs formes essentiellement dans les applications aux fonctions. On peut notamment citer les travaux de S. Jaffard [44] et [51], qui a regardé la validité d'une extension de formalisme pour des ensembles de seconde catégorie au sens de Baire. Plusieurs travaux ont aussi cherché à déterminer quelles pouvaient être les causes de la non-validité de ce formalisme. L'une de ces causes maintenant bien comprise est la présence de singularités oscillantes, voir [72], [87].

Si les propriétés locales, voire ponctuelles, des fonctions seront omniprésentes par la suite, il ne faut pas perdre de vue l'importance d'une vision globale des objets. Le formalisme multifractal fait en effet le lien entre la régularité ponctuelle

d'une fonction et les espaces fonctionnels auxquels celle-ci appartient. En effet, la fonction d'échelle donne une information sur les espaces fonctionnels, espaces de Sobolev, que nous définirons dans le chapitre 1 ou espaces d'oscillations [46], auxquels appartient la fonction. Afin de comprendre la validité du formalisme multifractal il est important pour nous de déterminer à quels espaces de Sobolev les distributions appartiennent.

Un dernier exemple classique de problème lié à la régularité est de déterminer les domaines d'holomorphie d'une fonction d'une variable complexe. En effet, si une fonction d'une variable complexe est holomorphe sur le disque unité, il est possible qu'elle soit prolongeable au delà de son cercle de convergence. Plusieurs études ont voulu caractériser l'ensemble des fonctions vérifiant cette propriété. Dès 1896, Emile Borel cherche à donner un cadre générique au problème de prolongement au delà du cercle de convergence, [16]. La première démonstration probabiliste d'un tel résultat date de 1929 et des travaux de Steinhaus, [91]. De même, les résultats de Kahane [52] et de Kierst et Szpilrajn [58] montrent la possibilité que pour "beaucoup", au sens topologique du terme, de fonctions le cercle unité forme une frontière naturelle. Tous ces résultats laissent à penser que l'ensemble des fonctions dont le cercle de convergence forme une frontière naturelle doit être grand. Il est alors cohérent de chercher dans quel sens grand peut alors être entendu.

Si dans tout ce qui précède et notamment dans le cas du formalisme multifractal, la minoration de l'exposant de régularité ponctuelle d'une fonction donnée est fournie par les hypothèses faites sur l'espace fonctionnel E auquel la fonction appartient, il n'existe en général pas de majoration non triviale de cet exposant valable pour toutes les fonctions de E . Par exemple, dans le cas des fonctions continues, certaines sont différentiables, d'autres pas. On peut cependant espérer qu'il existe des résultats d'irrégularités valables pour "presque toutes" les fonctions de E ; c'est à dire en un sens générique à préciser.

Le but de cette thèse est avant tout de déterminer quelle régularité est valable pour un ensemble générique de distributions appartenant à un espace de distributions donné. Comme nous l'avons dit, dans les cas qui nous occupent, aucun résultat n'est valide pour toutes les fonctions. Nous utiliserons alors la notion de «presque partout» au sens de la prévalence. Ensuite, nous chercherons parmi les notions d'ensembles "petits" qui ont été introduites dans le passé lesquelles se prêtent aux problèmes que nous étudierons. Nous comparerons alors les résultats

de type prévalence obtenus avec ceux antérieurs de type Baire.

Dans un premier temps nous rappellerons au chapitre 1 des notions sur la régularité ponctuelle de fonctions, principalement dans les espaces de Sobolev, et présenterons l'outil fondamental que nous utiliserons par la suite, à savoir les ondelettes. Le chapitre 2 sera consacré à la définition des ensembles Haar-nuls, et aux autres ensembles petits qui seront utilisés par la suite. Nous regarderons les différentes propriétés de tels ensembles. Nous en profiterons aussi pour tester ces différentes notions sur quelques problèmes "d'école" classiques en analyse.

Dans le chapitre 3, nous étudierons la régularité ponctuelle dans un espace de Sobolev donné à l'aide de la prévalence. Nous démontrons que dans certains espaces de Sobolev, presque toutes les fonctions sont multifractales. Ce résultat peut sembler surprenant, le comportement multifractal étant en effet historiquement associé à des hypothèses d'auto-similarité qui semblent au contraire très contraignantes. Il l'est moins si on le compare aux travaux de S. Jaffard qui montre dans [44] qu'on a le même résultat dans le cadre des catégories de Baire.

Les chapitres suivants sont consacrés à la généralisation de ce premier résultat. Dans un premier temps, au chapitre 4 nous étudierons une intersection d'espaces de Sobolev. Ainsi, nous nous intéresserons au formalisme multifractal et à la conjecture de Frisch et Parisi. Nous démontrerons que cette formule est valide dans un espace de Sobolev donné. Nous ne ferons pas ici une étude exhaustive de tous les espaces de Sobolev. Autrement dit, contrairement au chapitre 3, nous oublierons le cas des espaces critiques. Nous verrons aussi que des restrictions doivent être faites quand on se place dans un cadre plus général. Le chapitre 5 est consacré aux différentes notions d'ensembles petits. Nous chercherons donc alors quelle notion serait "optimale" pour l'étude de la régularité Höldérienne ponctuelle.

Dans le chapitre 6, nous étudierons un autre type d'exposant de régularité. Nous comparerons les vertus de l'exposant de Hölder et des exposants T_u^p de Calderón et Zygmund. Nous chercherons alors quel spectre T_u^p est optimal au sens prévalent dans un espace de Sobolev donné. Une fois encore, nous ferons ici une étude plus modeste que dans les chapitres précédents. Nous "oublierons" donc les espaces critiques.

Finalement, dans le chapitre 7, nous nous intéresserons aux domaines d'holomorphie d'une fonction de variables complexes. Nous montrerons que presque toute fonction développable en séries de Taylor sur le disque unité n'est pas

prolongeable par une fonction holomorphe ailleurs. Autrement dit, son cercle de convergence forme une frontière naturelle. Ce problème d'école sera un autre exemple sur lequel nous pourrons comparer de façon significative différentes notions de généricité.

Tout au long de cette thèse, nous nous concentrerons sur deux axes de recherche principaux. Nous allons en effet effectuer des tests croisés pour comparer différentes notions de généricité et des problèmes classiques d'analyse. En considérant un problème comme celui de l'analyse multifractale dans les espaces de Sobolev, nous cherchons quelle notion optimale d'ensembles petits peut donner des résultats intéressants. Dans le même temps, nous allons considérer les notions connues de généricité et les "tester" sur des problèmes classiques d'analyse, comme celui des fonctions continues nulle part dérivables ou sur le problème de prolongement des séries de Taylor.

Les divers problèmes que nous avons présentés proviennent tous de l'analyse multifractale ou de questions classiques d'analyse fonctionnelle. Une autre de leur caractéristiques communes sera la suivante : la moins bonne régularité possible est génériquement la plus fréquente ; on retrouve ici l'heuristique classique attachée aux catégories de Baire. Notons à ce propos que tous les résultats de prévalence ne suivent pas cette heuristique. J-P. Kahane en a récemment fourni des contre-exemples remarquables dans [55].

CHAPITRE 1

PRÉLIMINAIRES : RÉGULARITÉ, ONDELETTES ET ESPACES FONCTIONNELS

1.1. Introduction

Avant de parler d'ensembles petits et de rentrer dans le coeur du sujet, nous devons de redéfinir les problèmes sur lesquels nous allons travailler.

La majeure partie de ce qui suit a pour but de déterminer quelle régularité ponctuelle peut s'obtenir de façon prévalente dans les espaces de Sobolev. Pour plus de clarté, nous allons donner ici les cadres mathématiques et les outils que nous utiliserons dans la suite.

1.2. Notions de régularité

Dans ce qui suit, nous nous plaçons dans \mathbb{R}^d . Dans cette partie, nous allons regarder différentes notions de ce que l'on appelle la régularité de fonctions. Dans un premier temps nous allons voir la notion classique de régularité Höldérienne et de régularité ponctuelle. Dans un second temps, nous définirons les espaces fonctionnels dans lesquels nous travaillerons.

Commençons par définir les espaces de Hölder homogènes.

Définition 1.1. — Soit $\alpha > 0$. Une fonction $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ appartient à $\dot{C}^\alpha(\mathbb{R}^d)$ s'il existe une constante $c > 0$ et un polynôme P de degré inférieur à $[\alpha]$ tels que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^d$,

$$(1.1) \quad |f(x) - P(x - y)| \leq c|x - y|^\alpha.$$

On va par ailleurs définir la régularité ponctuelle à partir de cette notion. La régularité ponctuelle d'une fonction autour d'un point x_0 se mesure à l'aide de l'exposant de Hölder ponctuel.

Définition 1.2. — Soit $x_0 \in \mathbb{R}^d$ et soit $\alpha > 0$. Une fonction localement bornée $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ appartient à $C^\alpha(x_0)$ s'il existe une constante $C > 0$ et un polynôme P de degré inférieur à $[\alpha]$ tel que sur un voisinage de x_0 ,

$$(1.2) \quad |f(x) - P(x)| \leq C|x - x_0|^\alpha.$$

L'exposant de Hölder de f en x_0 est

$$h_f(x_0) = \sup\{\alpha : f \in C^\alpha(x_0)\}.$$

Dans les applications, l'utilisation de l'exposant de Hölder permet la classification de certains types de signaux.

Il possède cependant certains inconvénients. Tout d'abord, même si dans la définition, il n'est pas nécessaire que la fonction soit continue, en pratique la caractérisation de cet exposant à l'aide d'ondelettes nécessite un minimum de régularité Höldérienne uniforme, comme nous le verrons dans la proposition 1.3. Il faut aussi remarquer que cet exposant ne prend pas en compte le comportement oscillant de la fonction au voisinage du point étudié. Ainsi, pour $x = 0$, on voit que des comportements de type "cusp" en $x \mapsto |x|^\alpha$ ou des fonctions oscillantes comme $x \mapsto |x|^\alpha \sin(1/x)$ ont le même exposant de Hölder ponctuel.

De plus cet exposant peut être très instable. On peut en effet construire des fonctions qui soient continues et dont l'exposant de Hölder est partout discontinu, [41]. Dans le cadre de l'analyse multifractale, c'est d'ailleurs le genre de fonctions que l'on rencontre fréquemment. En pratique on considère que l'information pertinente que l'on cherche à extraire d'un signal n'est pas la valeur prise en chaque point par l'exposant de Hölder mais seulement les dimensions de ses ensembles de niveau. D'où la définition suivante.

Définition 1.3. — Soit f une fonction de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R} . On note $E_H := \{x : h_f(x) = H\}$ l'ensemble des points où l'exposant de Hölder vaut H (remarquons que H peut prendre la valeur $+\infty$). Le spectre de singularité de f (noté $d(H)$) est l'application qui à H associe la dimension de Hausdorff de E_H .

Le support du spectre de singularités est l'ensemble des valeurs finies H qui sont des exposants de Hölder de f .

Une fonction f est dite multifractale si le support de son spectre de singularités n'est pas réduit à un point.

Pour que cette définition soit complète, rappelons ce qu'est la dimension de Hausdorff et comment nous l'utiliserons par la suite, cf [28].

Définition 1.4. — Soit E un sous ensemble de \mathbb{R}^d et $s \geq 0$. $\forall \delta > 0$ on définit

$$\mathcal{H}_\delta^s(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |\text{diam}(U_i)|^s : \{U_i\} \text{ est un recouvrement de } E \text{ tel que } \text{diam}(U_i) \leq \delta \right\}$$

$\mathcal{H}^s(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(E)$ est la mesure de Hausdorff s -dimensionnelle de E .

Cette mesure s -dimensionnelle est décroissante en s . De plus, elle vérifie les propriétés suivantes. Si $\mathcal{H}^s(E) > 0$ alors $\forall s' < s$, $\mathcal{H}^{s'}(E) = \infty$ et si $\mathcal{H}^s(E) = 0$, $\forall s' > s$, $\mathcal{H}^{s'}(E) = 0$. Il existe alors une valeur critique de s pour laquelle \mathcal{H}^s passe de $+\infty$ à 0, c'est la dimension de Hausdorff de E .

Remarque : Si F est un borélien de \mathbb{R}^d alors il existe une constante $c_d > 0$ telle que

$$\mathcal{H}^d(F) = c_d \text{vol}^d(F).$$

Définition 1.5. — Soit $E \subset \mathbb{R}^d$. La dimension de Hausdorff de E est

$$(1.3) \quad \dim_H(E) = \sup\{s, \mathcal{H}^s(E) = \infty\} = \inf\{s, \mathcal{H}^s(E) = 0\}.$$

Une généralisation de l'exposant de Hölder ponctuel est donnée par le module de continuité d'une fonction.

Définition 1.6. — Soit $x_0 \in \mathbb{R}^d$. Soit $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ continue en x_0 . Soit θ une fonction strictement croissante, continue de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R}^+ et vérifiant les conditions suivantes :

$$(1.4) \quad \begin{aligned} \theta(0) &= 0 \\ \exists C > 0 \quad \theta(2x) &\leq C\theta(x). \end{aligned}$$

Alors θ est un module de continuité de f en x_0 si il existe une constante $c > 0$ et un polynôme P tels que, dans un voisinage de x_0

$$(1.5) \quad |f(x) - P(x - x_0)| \leq c\theta(|x - x_0|).$$

θ est un module de continuité uniforme si l'estimation (1.5) a lieu pour tout x_0 et si la constante c ne dépend pas de x_0 .

Cette notion de module de continuité est en fait une généralisation de la notion de régularité Höldérienne. En effet, si l'on prend $\theta(x) = |x|^\alpha$ est un module de continuité pour une fonction f , alors on vérifie aisément qu'on peut prendre P de degré inférieur à α et la condition (1.5) se ramène donc à $f \in C^\alpha(x_0)$.

Si l'exposant de Hölder sera le principal objet d'étude dans la suite, d'autres notions de régularité seront aussi utilisées. Tout d'abord, regardons l'exposant de Hölder local, défini par S. Seuret et J. Levy-Vehel dans [88].

Définition 1.7. — Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ fixé et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $(\mathcal{O}_i)_{i \in I}$ une famille décroissante d'ouverts telle que $\cap \mathcal{O}_i = \{x_0\}$. Posons

$$(1.6) \quad \alpha_l(x_0) = \sup\{\alpha_l(\mathcal{O}_i) : i \in I\},$$

où $\alpha_l(\mathcal{O}) = \sup\{s : f \in C^s(\mathcal{O})\}$.

Nous verrons par la suite que dans le cas des fonctions multifractales, les ensembles de points ayant une certaine régularité sont le plus souvent des ensembles denses de mesure de Lebesgue nulle. Une étude locale ne permet donc pas de les distinguer. L'exposant de Hölder local donne quant à lui une information locale sur le comportement uniforme de la fonction. Par conséquent dans ce cas il fournit moins d'informations que l'exposant de Hölder ponctuel. Nous verrons d'ailleurs dans la partie 3, que dans le cas d'une fonction multifractale, il peut être partout constant, contrairement à l'exposant de Hölder ponctuel.

Un autre exposant que nous étudierons par la suite est le p -exposant de Calderón-Zygmund, définis dans [19].

Définition 1.8. — Soit $p \in [1, \infty]$, une fonction $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ appartient à $L_{loc}^p(\mathbb{R}^d)$ si pour tout compact K de \mathbb{R}^d , $f \in L^p(K)$.

Définition 1.9. — Soit $p \in [1, \infty]$ et $u \geq -\frac{d}{p}$. Soit $f \in L_{loc}^p$. On dit que f appartient à $T_u^p(x_0)$ s'il existe un réel $R > 0$, un polynôme P de degré inférieur ou égal à la partie entière de $u + \frac{d}{p}$ et $c > 0$ tels que si $p < \infty$:

$$(1.7) \quad \forall \rho \leq R : \left(\frac{1}{\rho^d} \int_{|x-x_0| \leq \rho} |f(x) - P(x)|^p dx \right)^{1/p} \leq c\rho^u.$$

et pour $p = \infty$

$$(1.8) \quad \forall \rho \leq R : \sup_{|x-x_0| \leq \rho} |f(x) - P(x-x_0)| \leq c\rho^u.$$

On définit le p -exposant de f en x_0 par $u_f^p(x_0) = \sup\{u : f \in T_u^p(x_0)\}$.

Remarque :

- Le polynôme P est unique. C'est le polynôme de Taylor (généralisé) de f en x .
- La condition $f \in L_{loc}^p$ entraîne que si (1.7) est vraie pour $R > 0$ donné, elle est vraie pour n'importe quel $R' > 0$.
- Si f appartient à $C^u(x_0)$, alors, $\forall p \geq 1$, f appartient à $T_u^p(x_0)$.

Remarque :

- L'exposant correspondant à $p = \infty$ est l'exposant de Hölder usuel.
- Comme les fonctions de L^p_{loc} appartiennent à $T^p_{-\frac{d}{p}}(x_0)$, le p -exposant est toujours supérieur à $-d/p$.

Cet exposant offre de multiples avantages par rapport à l'exposant de Hölder, et nous en ferons une étude détaillée par la suite. Il faut tout de même remarquer que comme pour l'exposant de Hölder, il est trop instable pour permettre une étude directe. C'est pourquoi, nous utiliserons plutôt par la suite le p -spectre, $d_p(u)$, qui correspond à l'application qui à u associe la dimension de Hausdorff de l'ensemble des points où le p -exposant vaut u .

Définition 1.10. — Soit $p \geq 1$. Pour toute application $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ on appelle spectre T^p_u ou p -spectre, l'application :

$$(1.9) \quad d_p(u) = \dim_H(\{x \in \mathbb{R}^d \text{ tel que } u_f^p(x) = u\}).$$

1.3. Les ondelettes

Dans les démonstrations que nous allons faire, l'outil de base est la décomposition en ondelettes de fonctions ou de distributions. Une base d'ondelettes est une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R}^d)$ ayant une localisation optimale dans le plan temps-fréquence. Grâce aux ondelettes, nous obtenons en effet des conditions simples qui permettent d'estimer la régularité ponctuelle ainsi que sur l'appartenance de fonctions à certains espaces fonctionnels. Rappelons donc ici la définition des bases d'ondelettes.

Historiquement, les bases d'ondelettes remontent aux travaux de Haar [34] et de Stromberg [92]. Largement utilisées ensuite en traitement du signal elles offrent l'avantage, par rapport à l'analyse de Fourier, d'être bien localisées en temps et en fréquence. Elles permettent également de "voir" directement sur les coefficients les singularités des fonctions, ce que ne permet pas la transformée de Fourier.

Commençons par définir une analyse multirésolution, voir [24, 64, 75].

Définition 1.11. — Une analyse multirésolution sur \mathbb{R}^d est une suite $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ de sous-espaces de $L^2(\mathbb{R}^d)$ qui vérifie les conditions suivantes :

- Pour tout $j \in \mathbb{Z}$, $V_j \subset V_{j+1}$.
- $f(x) \in V_j$ si et seulement si $f(2x) \in V_{j+1}$.
- $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$.
- $\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j = L^2(\mathbb{R}^d)$.

- Il existe une fonction $g \in V_0$ telle que la famille des $g(x - k)_{k \in \mathbb{Z}^d}$ forme une base de Riesz de V_0 .

On parle d'une analyse multirésolution r -régulière si la fonction g est C^r et si les $\partial^\alpha g$, pour $|\alpha| \leq r$ sont à décroissance rapide.

Intéressons nous maintenant à la fonction g donnée dans la dernière propriété de la définition précédente. A partir de cette fonction, on peut construire une fonction d'échelle φ , telle que les $(\varphi(x - k))_{k \in \mathbb{Z}^d}$ forment une base orthonormée de V_0 . De plus la fonction φ est aussi régulière que g et ses dérivées sont aussi à décroissance rapide. Une ondelette ψ est alors obtenue, [24, 75, 64] à partir de la fonction φ . Comme $V_j \subset V_{j+1}$ dans un espace de Hilbert, il existe W_j , supplémentaire orthogonal de V_j dans V_{j+1} . On construit alors $2^d - 1$ fonctions $(\psi^{(i)})_{i=1, \dots, 2^d}$ appartenant à W_j telle que les $2^{j/2} \{\psi^{(i)}(2^j x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}^d, i=1, \dots, 2^d}$ forment une base orthonormée de W_j . Ces fonctions ψ sont les "mères" des ondelettes. Si l'analyse multirésolution est r -régulière, ces "mères" vérifient les propriétés suivantes, développées dans [75].

1. Quelque soit $i = 1, \dots, 2^d$, $\varphi^{(i)}$ est C^r , et ses dérivées $\partial^\alpha \varphi$ sont à décroissance rapide.
2. Elles ont au moins $r \geq 1$ moments nuls.

En utilisant le fait que l'union des V_j est dense dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ et que l'on passe de l'un à l'autre par dilatation, on obtient finalement que les $\{2^{dj/2} \psi^{(i)}(2^j x - k); j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^d, i = 1, \dots, 2^d - 1\}$ forment une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Une fonction f appartenant à $L^2(\mathbb{R}^d)$ peut alors se décomposer sous la forme

$$(1.10) \quad f = \sum_{i,j,k} c_{j,k}^{(i)} \psi_{j,k}^{(i)}$$

où $\psi_{j,k}^{(i)} = \psi^{(i)}(2^j x - k)$ et

$$(1.11) \quad c_{j,k}^{(i)} = 2^{dj} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \psi_{j,k}^{(i)}(x) dx.$$

Remarquons que si nous avons utilisé la normalisation $L^2(\mathbb{R}^d)$ dans la définition des coefficients un facteur $2^{dj/2}$ serait apparu. Celui-ci étant gênant par la suite, nous utilisons donc une normalisation $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ dans les ondelettes dans (1.10) pour éliminer ce facteur.

Pour simplifier les notations, nous "oublierons", quand il ne peut y avoir de confusion, l'indice i . De plus, nous noterons parfois $\lambda = \{x : 2^j x - k \in [0, 1]^d\}$ le cube dyadique de volume 2^{-dj} indexé par le couple (j, k) et c_λ le coefficient d'ondelette correspondant. Nous noterons aussi parfois Λ l'ensemble des cubes

dyadiques et Λ_j l'ensemble des cubes à l'échelle j .

Donnons un exemple de base d'ondelettes avec la base de Haar. La mère des ondelettes de cette base est donnée par $\psi(x) = \mathbb{1}_{[0, \frac{1}{2}[} - \mathbb{1}_{[\frac{1}{2}, 1[}$. Cette fonction est bien d'intégrale nulle. De plus, les translatées, dilatées $(2^{j/2}\psi(2^j x - k))_{j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}}$ forment une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$.

Dans la suite, nous utiliserons aussi une base pouvant s'apparenter à une base d'ondelettes, à savoir la base de Schauder. Ici la "mère" n'a pas de moments nuls et n'engendre pas de base orthonormée (ou en tout autre sens) de $L^2(\mathbb{R})$. La "mère" est la fonction Λ , de support $[0, 1]$ et donnée par :

$$(1.12) \quad \Lambda(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq \frac{1}{2} \\ 1 - x & \text{sinon} \end{cases}.$$

Graphiquement, cette fonction correspond à une "tente" sur $[0, 1]$. La base de Schauder est alors construite en prenant les translatées et les dilatées de cette fonction, $\Lambda_{j,k} = \Lambda(2^j x - k)$. La décomposition d'une fonction f continue sur $[0, 1]$ et nulle en 0 et en 1 se fait sur cette base de manière simple en prenant les différences secondes de la fonction. Plus explicitement :

$$f = \sum c_{j,k} \Lambda_{j,k} \quad \text{où} \quad c_{j,k} = 2f\left(\frac{k+1/2}{2^j}\right) - f\left(\frac{k}{2^j}\right) - f\left(\frac{k+1}{2^j}\right).$$

La série converge uniformément vers f , cf [24]. Nous aurons aussi besoin de majorer la norme dans $(\mathcal{C}([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$ à l'aide de la décomposition dans la base de Schauder.

Lemme 1.1. — *Soit f une fonction quelconque de $(\mathcal{C}([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$ et nulle en 0 et en 1. Alors :*

$$(1.13) \quad \|f\|_\infty \leq \sum_j \sup_k |c_{j,k}|$$

Démonstration : Soit $f(x) = \sum_j \sum_k c_{j,k} \Lambda_{j,k}(x)$, une fonction continue. Dans ce cas,

$$\begin{aligned} \|f\|_\infty &= \left\| \sum_j \sum_k c_{j,k} \Lambda_{j,k} \right\|_\infty \\ &\leq \sup_{x \in [0,1]} \left(\sum_j \sum_k |c_{j,k}| |\Lambda_{j,k}(x)| \right) \\ &\leq \sup_{x \in [0,1]} \left(\sum_j \sup_k |c_{j,k}| \sum_k |\Lambda_{j,k}(x)| \right) \\ &\leq \sup_{x \in [0,1]} \sum_j \left(\sup_k |c_{j,k}| \right) \\ &\leq \sum_j \sup_k |c_{j,k}| \end{aligned}$$

car $\sum_k \Lambda(2^j x - k) \leq 1$. □

Nous allons voir maintenant que la localisation en temps et en fréquence des ondelettes donne certaines conditions sur la régularité ponctuelle.

1.3.1. Ondelettes et régularité ponctuelle. — Dans la suite, nous supposons en général que les ondelettes $\psi^{(i)}$ sont dans la classe de Schwartz.

Regardons tout d'abord comment la régularité höldérienne de fonctions peut être caractérisée par des conditions sur les coefficients d'ondelette, [73].

Proposition 1.1. — Soit $\alpha > 0$, une fonction f appartient à $\dot{C}^\alpha(\mathbb{R}^d)$, l'espace de Hölder homogène, si et seulement s'il existe $c > 0$ telle que pour tout j, k, i :

$$(1.14) \quad |c_{j,k}^{(i)}| \leq c 2^{-\alpha j}.$$

La régularité ponctuelle d'une fonction nous donne la condition suivante sur les coefficients d'ondelette [40].

Proposition 1.2. — Soit $x_0 \in \mathbb{R}^d$. Soit $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$. Si f appartient à $C^\alpha(x_0)$, il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout j, k, i :

$$(1.15) \quad |c_{j,k}^{(i)}| \leq c 2^{-\alpha j} (1 + |2^j x_0 - k|)^\alpha.$$

Dans la suite nous dirons aussi qu'une fonction f est (c, α) régulière si elle vérifie l'équation (1.15) pour un c fixé.

Même si nous ne l'utiliserons pas par la suite, il est bon de noter, voir [40] que cette proposition n'est pas une caractérisation.

Proposition 1.3. — Soit $x \in \mathbb{R}^d$ fixé. Soit $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée dont les coefficients d'ondelette vérifient :

$$\exists c > 0, \quad \forall j, k \quad |c_{j,k}| \leq c2^{-\alpha j}(1 + |2^j x - k|)^\alpha$$

et si de plus il existe un $\varepsilon > 0$ tel que $f \in C^\varepsilon(\mathbb{R}^d)$, alors il existe $c > 0$ tel que

$$(1.16) \quad \forall y \in \mathbb{R}^d \quad |f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^\alpha \log(|x - y|^{-1}).$$

Cette proposition montre en fait qu'il y a une perte de régularité logarithmique quand on passe de la condition sur les coefficients d'ondelettes à l'étude de l'exposant de Hölder ponctuel d'une fonction.

Reprenons l'équation (1.15). Dans [41], S. Jaffard prouve que si la fonction est au moins $C^\varepsilon(\mathbb{R}^d)$ pour un $\varepsilon > 0$ nous avons :

$$(1.17) \quad h_f(x_0) = \liminf_{(j,k2^{-j}) \rightarrow (+\infty, x_0)} \frac{\log |c_{j,k}|}{\log(2^{-j} + |x_0 - k2^{-j}|)}.$$

Définition 1.12. — Soit $x_0 \in \mathbb{R}^d$. On appelle cône d'influence au dessus de x_0 et de taille $L > 0$ l'ensemble, noté $\mathcal{K}_{x_0}(L)$, des couples (j, k) tels que

$$\left| \frac{k}{2^j} - x_0 \right| \leq \frac{L}{2^j}$$

Grâce à cette définition, nous pouvons énoncer ce corollaire de la proposition 1.2.

Lemme 1.2. — Soient $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $x_0 \in \mathbb{R}^d$. Si f est $C^\alpha(x_0)$, il existe $C'(L)$ tel que, dans le cône d'influence de taille L au dessus de x_0 ,

$$|c_{j,k}| \leq C'(L)2^{-\alpha j}$$

où $C'(L)$ depend seulement de L et de l'ondelette choisie.

Une autre façon d'utiliser le cône d'influence pour obtenir une idée de la régularité ponctuelle d'une fonction à l'aide ses coefficients d'ondelette est d'utiliser les "wavelets leaders".

Définition 1.13. — Soit $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de coefficients d'ondelette $c_{j,k}$. Pour $x_0 \in \mathbb{R}^d$ fixé, on note

$$(1.18) \quad d_j(x_0) = \sup_{j' \geq j, (j',k) \in \mathcal{K}_{x_0}(2)} |c_{j',k}|.$$

Proposition 1.4. — Soit $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $\alpha > 0$. Si f appartient à $C^\alpha(x_0)$ alors il existe $c > 0$ tel que

$$(1.19) \quad \forall j \geq 0 \quad d_j(x_0) \leq c2^{-\alpha j}.$$

Réciproquement, si il existe $\varepsilon > 0$ tel que $f \in C^\varepsilon(\mathbb{R}^d)$ et si f vérifie (1.19) alors f appartient à $C^{\alpha'}(x_0)$ pour tout $\alpha' < \alpha$.

Un module de continuité est une généralisation de l'exposant de Hölder ponctuel. Par conséquent, il est naturel de chercher une caractérisation par ondelettes du module de continuité de la même façon que nous avons regardé la régularité ponctuelle à l'aide des ondelettes. Cette caractérisation est donnée par la proposition suivante, [50] :

Proposition 1.5. — Soit $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$. Si θ est un module de continuité pour f en x_0 alors :

$$(1.20) \quad \exists c > 0 \quad \forall j, k \quad |c_{j,k}| \leq c \left(\theta(2^{-j}) + \theta\left(|x_0 - \frac{k}{2^{-j}}|\right) \right).$$

Un autre résultat qui va nous être utile est celui-ci, [50], concernant la régularité uniforme.

Définition 1.14. — Soient $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ et $\theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$. Si la fonction θ vérifie : Il existe un entier $N > 0$ et une constante $c > 0$ tels que $\forall J \geq 0$:

$$(1.21) \quad \begin{cases} \sum_{j=J}^{\infty} 2^{Nj} \theta(2^{-j}) \leq c 2^{NJ} \theta(2^{-J}) \\ \sum_{j=0}^J 2^{(N+1)j} \theta(2^{-j}) \leq c 2^{(N+1)J} \theta(2^{-J}) \end{cases}$$

et

$$(1.22) \quad \exists c > 0 \quad \forall j, k \quad |c_{j,k}| \leq c \theta(2^{-j})$$

alors θ est un module de continuité régulier pour f .

Typiquement, la fonction $\theta(x) = x^n$ n'est pas un module de continuité régulier. En effet, si n est un entier, la première condition de (1.21) implique qu'on doit prendre N tel que $n > N$ et la deuxième que $n < N+1$. Par contre, en utilisant une légère correction, du type $\theta(x) = x^n \log(x)^a$, on obtient un module de continuité régulier.

Nous verrons dans la suite que quand on a un exposant de Hölder prévalent, α , on n'a pas de module de continuité plus "grand" que $\theta(h) = |h|^\alpha$ pour un ensemble prévalent de fonctions.

Proposition 1.6. — Soit $f = \sum c_{j,k} \psi_{j,k}$ une fonction de $B_p^{s,q}$, et $s - \frac{d}{p} > 0$. Soit θ un module de continuité régulier vérifiant

$$(1.23) \quad \forall j \geq 0 \quad \sup_k |c_{j,k}| \leq \theta(2^{-j}).$$

Alors θ est un module de continuité uniforme de f .

Disons maintenant quelques mots sur la caractérisation en ondelettes du p -exposant de Calderón-Zygmund de la définition 1.9. Nous allons voir comment la condition d'appartenance à des espaces T_u^p peut être liée à des conditions sur les coefficients d'ondelette.

Pour cela, nous utiliserons les espaces $X_{x_0}^{s,s',p,q}$, qui sont des espaces de Besov à poids.

Définition 1.15. — Soient s, s' des réels et p et q des réels positifs. Une distribution tempérée f appartient à $X_{x_0}^{s,s',p,q}$ si ses coefficients d'ondelette vérifient

$$(1.24) \quad \sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{(s-\frac{d}{p})qj} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |c_\lambda|^p (1 + |k - 2^j x_0|)^{s'p} \right)^{\frac{q}{p}} < +\infty.$$

Les espaces $X_{x_0}^{s,s',p,q}$ ont été introduits par Meyer et Xu dans [77, 95] dans le but d'étudier localement les comportements oscillants. Dans plusieurs cas, ils coïncident avec des espaces classiques.

- Si $s' = 0$, $X_{x_0}^{s,0,p,q}$ est indépendant de x_0 et coïncide avec l'espace de Besov $B_p^{s,q}$.
- Si $p = q = +\infty$, la condition (1.24) devient

$$\sup_{j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^d} 2^{sj} |c_{j,k}| (1 + |k - 2^j x_0|)^{s'} < \infty.$$

Ce qui signifie que $X_{x_0}^{s,s',\infty,\infty}$ coïncide avec l'espace deux-microlocal $C^{s,s'}(x_0)$.

Remarquons que nous avons déjà rencontré une condition de ce type. En effet, (1.15) est la condition deux-microlocal $C^{\alpha,-\alpha}(x_0)$.

Ces espaces ont une version locale définie de la façon suivante.

Définition 1.16. — Une distribution tempérée f appartient à $\dot{X}_{x_0}^{s,s',p,q}$ s'il existe $A > 0$ tel que

$$\sum_{j \geq 0} 2^{(s-\frac{d}{p})qj} \left(\sum_{|k-2^j x_0| \leq A2^j} |c_\lambda|^p (1 + |k - 2^j x_0|)^{s'p} \right)^{\frac{q}{p}} < +\infty.$$

Les espaces $X_{x_0}^{s,s',p,q}$ et leur version locale $\dot{X}_0^{s,s',p,q}$ ne dépendent pas de la base d'ondelettes choisie, [77, 95]. Le théorème suivant de [71] montre que la régularité $T_u^p(x_0)$ est liée à ces conditions.

Théorème 1.1. — Soient $p \geq 1$, $s \geq 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^d$ et $f \in L_{loc}^p$.

1. Si f appartient à $\dot{X}_{x_0}^{s,-s,p,1}$, alors f appartient à $T_{s-\frac{d}{p}}^p(x_0)$.

2. Si $f \in T_{s-\frac{d}{p}}^p(x_0)$, alors $\exists A, C > 0$ tels que les coefficients d'ondelette de f vérifient

$$(1.25) \quad \exists C \forall j \quad 2^{j(sp-d)} \sum_{|k-2^j x_0| \leq A2^j} |c_{j,k}|^p (1 + |k - 2^j x_0|)^{-sp} \leq Cj.$$

Soit $p \geq 1$, et $f \in L_{loc}^p$; pour A suffisamment petit, on pose

$$(1.26) \quad \Sigma_j^p(s, A) = 2^{j(sp-d)} \sum_{|k-2^j x_0| \leq A2^j} |c_{j,k}|^p (1 + |k - 2^j x_0|)^{-sp}$$

et

$$(1.27) \quad i_p(x_0) = \sup \left\{ s : \liminf \frac{\log (\Sigma_j^p(s, A)^{1/p})}{-j \log 2} \geq 0 \right\}.$$

Le théorème suivant de [71] montre que le p -exposant peut se déduire des coefficients d'ondelette.

Théorème 1.2. — Soit $f \in L_{loc}^p$ pour un $p \geq 1$; alors

1. $i_p(x_0)$ est positif et indépendant de A et de la base d'ondelette choisie;
2. l'inégalité suivante est toujours vraie

$$(1.28) \quad u_f^p(x_0) \leq i_p(x_0) - \frac{d}{p};$$

3. s'il existe $\delta > 0$ tel que $f \in B_p^{\delta,p}$, alors

$$(1.29) \quad u_f^p(x_0) = i_p(x_0) - \frac{d}{p}.$$

Les espaces fonctionnels dans lesquels nous travaillerons pas la suite sont les espaces de Sobolev et de Besov. Voyons alors leur caractérisation en ondelettes.

1.3.2. Ondelettes et espaces fonctionnels. — Dans la suite, nous travaillerons essentiellement dans les espaces du type Sobolev ou Besov.

Commençons par donner les définitions des espaces de Sobolev que l'on trouve dans [2].

Définition 1.17. — Soient $s \in \mathbb{R}$ et $1 < p < \infty$. Alors f appartient à l'espace de Sobolev non homogène $L^{p,s}$ si la distribution g définie par $\hat{g}(\xi) = (1 + |\xi|^2)^{s/2} \hat{f}(\xi)$ est une fonction de L^p .

Les espaces de Sobolev, $L^{p,s}$ ont la caractérisation suivante en terme de coefficients d'ondelette, voir [73]. Si $1 \leq p < \infty$ et $s > 0$:

$$(1.30) \quad f \in L^{p,s} \Leftrightarrow \left(\sum_{\lambda \in \Lambda} |c_\lambda|^2 (1 + 4^{j_s}) \mathbf{1}_\lambda(x) \right)^{1/2} \in L^p(\mathbb{R}^d),$$

où $\mathbb{1}_\lambda(x)$ est la fonction indicatrice du cube dyadique λ et Λ est l'ensemble de tous les cubes dyadiques.

Comme nous le montre l'équation (1.30), étudier l'appartenance de fonctions à ces espaces de Sobolev à l'aide de coefficients d'ondelette est relativement malaisé du fait de la présence de normes L^p . C'est pourquoi ce sont en général les espaces de Besov que nous utiliserons. Ils présentent en effet l'avantage d'avoir une caractérisation en ondelettes plus simple. De plus, contrairement aux espaces de Sobolev, les espaces de Besov sont bien définis pour $0 < p < 1$, où ils forment encore des espaces métriques complets et séparables mais ils ne sont pas localement convexes. Dans [74], on trouve la caractérisation suivante des espaces de Besov homogènes, que nous prendrons comme définition (on vérifie que cette caractérisation ne dépend pas de la base d'ondelettes choisie)

Définition 1.18. — Soient $s \in \mathbb{R}$, $0 < p < \infty$ et $0 < q < \infty$. Alors $f = \sum c_{j,k} \psi_{j,k}$ appartient à $B_p^{s,q}(\mathbb{R}^d)$ si :

$$(1.31) \quad \left[\sum_{j \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{k \in \{0, \dots, 2^j - 1\}^d} |c_{j,k} 2^{(s-\frac{d}{p})j}|^p \right)^{\frac{q}{p}} \right]^{1/q} < \infty.$$

De même, on définit pour $q = \infty$ l'espace $B_p^{s,\infty}(\mathbb{R}^d)$ par :

$$(1.32) \quad \exists c > 0 \text{ tel que } \forall j \in \mathbb{Z} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |c_{j,k}|^p 2^{(sp-d)j} \leq c.$$

Et pour $p = \infty$ l'espace $B_\infty^{s,q}(\mathbb{R}^d)$ est donné par :

$$(1.33) \quad \exists c > 0 \text{ tel que } \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sup_{k \in \mathbb{Z}^d} |c_{j,k} 2^{sj}| \leq c.$$

Comme on peut le vérifier dans [94], si $1 \leq p, q < \infty$ ces espaces de Besov sont des espaces de Banach séparables, cf [84]. Si $p = \infty$ ou $q = \infty$ ils ne sont par contre pas séparables. Dans le cas où $p < 1$, (1.31) ne définit plus une norme mais une quasi-norme dans le sens où l'inégalité triangulaire n'est plus vérifiée qu'à une constante près. C'est à dire qu'il existe $c > 0$ telle que

$$\forall f, g \in B_p^{s,q}, \quad \|f + g\|_{B_p^{s,q}} \leq c(\|f\|_{B_p^{s,q}} + \|g\|_{B_p^{s,q}}).$$

On peut cependant définir une métrique sur cet espace pour laquelle il soit complet. Plus exactement, si l'on prend $f, g \in B_p^{s,q}$, de coefficients d'ondelette respectivement $c_{j,k}$ et $d_{j,k}$, comme dans [24], on définit la distance d entre f et g par :

$$(1.34) \quad d(f, g) = \left(\sum_{j \geq 0} \left(\sum_{k \in \{0, \dots, 2^j - 1\}^d} |(c_{j,k} - d_{j,k}) 2^{(s-\frac{d}{p})j}|^p \right)^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{\min(p,q)}{q}}$$

où $0 < p < 1$, $s \in \mathbb{R}$ et $0 < q < \infty$. Pour $q = \infty$, on définit de la même manière :

$$d_1(f, g) = \left(\sup_{j \geq 0} \left(\sum_{k \in \{0, \dots, 2^j - 1\}^d} |(c_{j,k} - d_{j,k}) 2^{(s-\frac{d}{p})j}|^p \right) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Proposition 1.7. — Soient $0 < p < 1$, $s \in \mathbb{R}$ et $0 < q < \infty$. L'application d donnée par (1.34) définit bien une distance sur $B_p^{s,q}$.

Démonstration : Le seul point non trivial à montrer ici est l'inégalité triangulaire.

Pour démontrer ce point, nous prenons trois fonctions $f = \sum c_{j,k} \psi_{j,k}$, $g = \sum d_{j,k} \psi_{j,k}$ et $h = \sum \tilde{d}_{j,k} \psi_{j,k}$ et nous comparons $d(f, g)$ et $d(f, h) + d(h, g)$. Dans un premier temps traitons le cas $0 < q < p < 1$. Dans ce cas,

$$d(f, g) = \sum_{j \geq 0} \left(\sum_{k \in \lambda_j} |(c_{j,k} - d_{j,k}) 2^{(s-\frac{d}{p})j}|^p \right)^{\frac{q}{p}}.$$

Remarquons qu'ici $p < 1$ et $0 < \frac{q}{p} < 1$. Donc, comme se sont des séries à termes positifs, pour montrer ce résultat, il suffit de montrer que :

$$\sum_{j \geq 0} (a_j + b_j)^r \leq \sum_{j \geq 0} a_j^r + \sum_{j \geq 0} b_j^r$$

pour $r < 1$ et où les suites $(a_j)_j$ et $(b_j)_j$ sont positives et $\sum_{j \geq 0} a_j^r$ converge. Autrement dit, il suffit de montrer que :

$$(a + b)^r \leq a^r + b^r$$

En posant $s = \frac{1}{r} > 1$, $a = x^s$ et $b = y^s$, cette inéquation se ramène à :

$$x^s + y^s \leq (x + y)^s$$

ce qui est donné par la décroissance des normes l^s .

On applique ce résultat une première fois à $r = p$ et $a_j = |(c_{j,k} - d_{j,k}) 2^{(s-\frac{d}{p})j}|^p$, $b_j = |(d_{j,k} - \tilde{d}_{j,k}) 2^{(s-\frac{d}{p})j}|^p$. Puis, on prend $r = \frac{q}{p}$ et $a_j = \sum_{k \in \lambda_j} |(c_{j,k} - d_{j,k}) 2^{(s-\frac{d}{p})j}|^p$, $b_j = \sum_{k \in \lambda_j} |(d_{j,k} - \tilde{d}_{j,k}) 2^{(s-\frac{d}{p})j}|^p$. On obtient ainsi que d est une distance.

Traitons maintenant le cas $0 < p \leq q$. Dans ce cas, d est définie par :

$$d(f, g) = \left(\sum_{j \geq 0} \left(\sum_{k \in \lambda_j} |(c_{j,k} - d_{j,k}) 2^{(s-\frac{d}{p})j}|^p \right)^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{p}{q}}.$$

On pose $r = \frac{q}{p} \geq 1$, $a_j = \sum_{k \in \lambda_j} |(c_{j,k} - d_{j,k})2^{(s-\frac{d}{p})j}|^p$ et $b_j = \sum_{k \in \lambda_j} |(d_{j,k} - \tilde{d}_{j,k})2^{(s-\frac{d}{p})j}|^p$. Vérifier l'inégalité triangulaire pour la distance d telle qu'elle est notée ci-dessus revient alors à montrer que :

$$\left(\sum_{j \geq 0} |a_j + b_j|^r \right)^{1/r} \leq \left(\sum_{j \geq 0} |a_j|^r \right)^{1/r} + \left(\sum_{j \geq 0} |b_j|^r \right)^{1/r}.$$

Or l'inégalité précédente n'est autre que l'inégalité triangulaire pour la norme l^r pour $r \geq 1$. Elle est donc vérifiée et on obtient que d est une distance dans tous les cas. \square

1.4. Injections entre les différents espaces fonctionnels

Rappelons maintenant les différentes injections que nous avons entre espaces de Besov. Cette proposition est issue de [90].

Proposition 1.8. — Soient $s_0 \in \mathbb{R}$, $0 \leq p_0, q_0, \leq \infty$.

Si $p \leq p_0$:

$$(1.35) \quad B_{p_0}^{s_0, q_0}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow B_p^{s_0, q_0}(\mathbb{R}^d).$$

Si $p \geq p_0$ et $s_0 \leq s$:

$$(1.36) \quad B_{p_0}^{s_0, q_0}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow B_p^{s, q_0}(\mathbb{R}^d) \quad \text{si } s - \frac{d}{p} = s_0 - \frac{d}{p_0}.$$

Rappelons aussi le théorème d'interpolation de Marcinkiewicz, voir [94].

Proposition 1.9. — Soient $1 \leq p_0, q_0, p_1 \leq \infty$, $1 \leq q_1 < \infty$ et $s_0, s_1 > 0$. Si $f \in B_{p_0}^{s_0, q_0}(\mathbb{R}^d) \cap B_{p_1}^{s_1, q_1}(\mathbb{R}^d)$, alors $f \in B_p^{s, q}(\mathbb{R}^d)$ dès que $s = \alpha s_0 + (1 - \alpha)s_1$ où $\frac{1}{p} = \frac{\alpha}{p_0} + \frac{1-\alpha}{p_1}$ et $\frac{1}{q} = \frac{\alpha}{q_0} + \frac{1-\alpha}{q_1}$.

Les propositions suivantes rassemblent les liens qui existent entre les espaces de Besov et les espaces fonctionnels classiques.

Proposition 1.10. — Soient $0 \leq p_0, q_0 \leq \infty$ et $s_0 \geq 0$. Alors : Si $s_0 - \frac{d}{p_0} > 0$, $B_{p_0}^{s_0, q_0}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow C^{s_0 - \frac{d}{p_0}}(\mathbb{R}^d)$.

Si $s_0 - \frac{d}{p_0} = 0$ et $0 < q_0 \leq 1$, alors $B_{p_0}^{s_0, q_0}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$.

Pour finir, regardons les injections entre espaces de Sobolev et espaces de Besov.

Proposition 1.11. — Soient $p \geq 1$ et $s > 0$. Alors :

$$(1.37) \quad B_p^{s, 1}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^{s, p}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow B_p^{s, \infty}(\mathbb{R}^d)$$

De plus, pour tout $0 < q < \infty$ et quelque soit $\varepsilon > 0$,

$$(1.38) \quad B_p^{s-\varepsilon, q}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^{s, p}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow B_p^{s+\varepsilon, q}(\mathbb{R}^d)$$

Grâce à la théorie des ensembles petits que nous développerons dans le chapitre suivant, nous allons étudier les problèmes de régularité à l'aide des outils que nous venons de définir.

CHAPITRE 2

LES ENSEMBLES PETITS EN ANALYSE

2.1. Introduction

Dans un espace vectoriel de dimension finie, on dit qu'une propriété est vérifiée presque partout quand l'ensemble des points où elle ne l'est pas est de mesure de Lebesgue nulle. Cette notion est très utilisée pour étudier certaines propriétés n'ayant pas de caractère global. Le rôle privilégié tenu par la mesure de Lebesgue dans cette définition est justifié par le fait que c'est la seule mesure σ -finie et invariante par translation. Dans un espace localement compact, une mesure vérifiant ces propriétés de la mesure de Lebesgue est appelée une mesure de Haar. Mais dans un espace métrique de dimension infinie, notamment dans les espaces de Banach séparables il n'existe pas de mesure possédant ces propriétés. Pour voir cela, nous utilisons le théorème suivant.

Théorème 2.1. — (Riesz) Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé de dimension infinie. Soit M un sous-espace fermé propre de E . Alors :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_\varepsilon \in E \text{ tel que } \|x_\varepsilon\| = 1 \text{ et } \inf_{m \in M} \|x_\varepsilon - m\| > 1 - \varepsilon.$$

Rappelons la démonstration de ce théorème.

Démonstration : Soit $y \in X \setminus M$. Comme M est fermé, $\text{dist}(y, M) = \inf_{m \in M} \|y - m\| = \alpha > 0$. Soit $0 < \varepsilon < 1$ fixé, comme $\frac{\alpha}{1-\varepsilon} > \alpha$, il existe $m_\varepsilon \in M$ tel que

$$\|y - m_\varepsilon\| \leq \frac{\alpha}{1-\varepsilon}.$$

En renormalisant le vecteur $y - m_\varepsilon$, on obtient un vecteur x_ε de norme 1 et tel que $\forall m \in M$:

$$\begin{aligned} \|x_\varepsilon - m\| &= \left\| \frac{y - m_\varepsilon}{\|y - m_\varepsilon\|} - m \right\| \\ &= \left\| \frac{y - m_\varepsilon - m(\|y - m_\varepsilon\|)}{\|y - m_\varepsilon\|} \right\| \\ &= \left\| \frac{y - \tilde{m}}{\|y - m_\varepsilon\|} \right\| \quad \text{où } \tilde{m} = m_\varepsilon + m(\|y - m_\varepsilon\|) \in M \\ &\geq \frac{\alpha}{\|y - m_\varepsilon\|} \\ &\geq 1 - \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Grâce à ce théorème, nous pouvons démontrer le résultat suivant, [39].

Proposition 2.1. — *Dans un espace de Banach séparable de dimension infinie, il n'existe pas de mesure non nulle σ -finie invariante par translation.*

Démonstration : Supposons qu'il existe une mesure μ possédant une telle propriété. Elle vérifie alors que toute boule ouverte est de mesure infinie. Dans le cas contraire, il existerait ε tel que la boule B de rayon ε soit de mesure finie. L'espace étant séparable et de dimension infinie, on peut recouvrir cette boule par une infinité de boules disjointes de rayon $\varepsilon/4$.

L'existence de ces boules est une conséquence du théorème de Riesz. En effet, soit $x_0 \in X$ non nul tel que $\|x_0\| \leq 1$ et $V_0 = \text{Vect}(\{x_0\})$. D'après le théorème de Riesz, en prenant $\varepsilon < \frac{1}{2}$, il existe alors un vecteur $x_1 \in X \setminus V_0$ tel que $\|x_1\| = 1$ et $\text{dist}(x_1, V_0) > \frac{1}{2}$. De même, si x_0, \dots, x_n sont construits, en appliquant encore une fois ce théorème on peut trouver un vecteur x_{n+1} tel que $\|x_{n+1}\| = 1$ et $\text{dist}(x_1, V_n) > \frac{1}{2}$ où $V_n = \text{Vect}(\{x_0, x_1, \dots, x_n\})$. On obtient ainsi une suite infinie d'éléments de $B(0, 1)$ telle que les boules $B(x_n, \frac{1}{4})$ soient disjointes.

Si μ est invariante par translation, ces boules ont toutes la même mesure et la somme infinie de ces mesures est finie, elle est donc nulle. Comme l'espace est séparable, B peut être recouvert par des boules de rayon $\varepsilon/4$, et sa mesure est elle aussi nulle.

□

Dans [33], Gelfand montre même que dans un espace de Banach séparable de dimension infinie, on ne peut pas trouver de mesure "quasi-invariante", c'est à dire, de mesure σ -finie et positive μ vérifiant la propriété suivante :

Pour tout A borélien de X ,

$$\mu(A) = 0 \Rightarrow \mu(A + x) = 0 \quad \forall x \in X.$$

On ne dispose donc pas dans ces espaces de notion naturelle de presque partout invariante par translation. Il serait pourtant intéressant d'obtenir ce type de propriétés afin de caractériser certains comportements. C'est notamment ce qu'on aimerait faire quand on s'intéresse à l'ensemble des fonctions continues nulle part dérivables. On sait que de telles fonctions existent, comme la fonction de Weierstrass. Cependant, cette absence de régularité est-elle due à certaines propriétés particulières, ou cet ensemble de fonctions correspond-il à "presque toutes les fonctions continues" ? Une première réponse à cette question a été fournie par d'autres types de notions de généricité. On utilise notamment des propriétés purement topologiques, et plus particulièrement le théorème de Baire que nous rappelons ici.

Théorème 2.2. — (Baire) Soit X un espace métrique complet. Soit $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fermés d'intérieur vide. Alors l'union des F_n est aussi d'intérieur vide. Dans ce cas, $F = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ est dit de première catégorie.

Plus généralement, on dit qu'un ensemble est de première catégorie quand il peut s'écrire comme une union dénombrable de A_n où pour tout n , A_n est inclus dans un ensemble fermé d'intérieur vide. Cette propriété correspondrait à une idée de "petit" dans les espaces métriques complets. On parle aussi de propriété quasi-sûre quand elle est vérifiée sur un ensemble dont le complémentaire est de première catégorie. Cependant, étant de nature topologique, ce théorème ne donne aucune information sur la mesure d'un tel ensemble. C'est d'autant plus gênant que même en dimension finie certains ensembles de première catégorie peuvent être de mesure non nulle, voire avoir un complémentaire de mesure nulle. Nous allons voir un tel ensemble dans la partie 2.3.1.

Avant de définir les classes d'ensembles qui vont nous intéresser tout au long de ce chapitre, nous allons donner les propriétés indispensables qu'elles devront vérifier.

Définition 2.1. — (Propriété \mathcal{H}_1)

Soit X un espace métrique. On appelle classe un ensemble d'ensembles.

On dit qu'une classe \mathcal{C} définie sur X est un σ -idéal si :

- $\forall B \subset A$, si $A \in \mathcal{C}$ alors $B \in \mathcal{C}$.
- Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de \mathcal{C} , alors l'union des A_n appartient aussi à \mathcal{C} .

Nous dirons qu'une classe vérifie \mathcal{H}_1 si elle forme un σ -idéal et si tous les éléments de cette classe sont d'intérieur vide.

Proposition 2.2. — *La classe des ensembles de mesure nulle de \mathbb{R}^n vérifie la propriété \mathcal{H}_1 .*

Proposition 2.3. — *Soit X un espace métrique complet. La classe des ensembles de première catégorie dans X vérifie la propriété \mathcal{H}_1 .*

Démonstration : De la même manière que dans la proposition précédente, dans la classe \mathcal{C} des ensembles de première catégorie, les ensembles sont d'intérieur vide d'après le théorème de Baire. Par définition, \mathcal{C} est stable par union dénombrable. De plus cette classe est stable pour l'inclusion. En effet, si A est de première catégorie et $B \subset A$ alors A peut s'écrire $A = \bigcup_n A_n$ et $\text{int}(A_n) = \emptyset$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc $B = \bigcup_n (A_n \cap B) \subset \bigcup_n A_n$ et pour tout n , $\text{int}(A_n \cap B) = \text{int}(A_n) \cap \text{int}(B) = \emptyset$.

□

L'autre propriété qui nous intéresse et qui est à la base de la théorie que nous allons développer maintenant est donnée par la définition suivante.

Définition 2.2. — *(Propriété \mathcal{H}_2) Soit X un espace vectoriel métrique complet. On dit qu'une classe A vérifie la propriété \mathcal{H}_2 si elle est invariante par translation et par dilatation.*

Une fois encore, la classe des ensembles de mesure nulle au sens de la mesure de Lebesgue, et la classe des catégories de Baire vérifient la propriété \mathcal{H}_2 .

Pour pallier le fait qu'il n'existe pas de mesure de Haar en dimension infinie, une autre définition, mise en évidence par Christensen [22] et par Hunt, Sauer et Yorke [39], est celle d'ensembles Haar-nuls. Cette propriété est liée directement à la théorie de la mesure.

2.2. Définitions et premières propriétés

2.2.1. Les ensembles Haar-nuls. — Avant de passer au vif du sujet, rappelons la définition d'un espace polonais.

Définition 2.3. — *Un espace vectoriel topologique X est polonais s'il est métrique, complet et séparable.*

On définit un ensemble Haar-nul, voir [39], par :

Définition 2.4. — *Soit X un espace vectoriel métrique complet. Un borélien B de X est dit Haar-nul s'il existe une mesure de Borel μ telle que*

$$(2.1) \quad \exists K \subset X \text{ compact tel que } 0 < \mu(K) < \infty$$

$$(2.2) \quad \forall x \in X \quad \mu(B + x) = 0.$$

Dans ce cas on dit que la mesure μ est transverse à B .

Un sous-ensemble de X est Haar-nul s'il est contenu dans un borélien Haar-nul.

Le complémentaire d'un ensemble Haar-nul est un ensemble prévalent.

Remarque :

- La définition des ensembles Haar-nuls de [22] est donnée dans le cadre des espaces polonais. Dans ce cas l'hypothèse (2.1) est automatiquement vérifiée. En effet, si l'espace est séparable, le théorème de Prohorov (théorème 2.8) permet d'affirmer que toute mesure est tendue, et il existe un compact sur lequel elle est positive.
- Suivant les références, la terminologie liée à la notion de prévalence change. En effet, Christensen parle d'ensembles Haar-nuls, tandis que Hunt, Sauer et Yorke appelle ces ensembles des ensembles timides. Ils appellent prévalent le complémentaire d'un ensemble timide. Une propriété est dite "presque-sûre" si elle est vérifiée sur un ensemble prévalent d'éléments de X . Nous avons choisi ici de parler d'un ensemble Haar-nul quand il vérifie les propriétés de la définition 2.4, et d'appeler son complémentaire un ensemble prévalent. Nous dirons aussi qu'une propriété a lieu presque-partout, ou presque-sûrement s'il n'y a pas de confusion possible, quand elle est vérifiée sur un ensemble prévalent.
- Si $E \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ est un espace fonctionnel, se donner une mesure de probabilité μ sur E est équivalent à choisir un processus $X_t, t \in \mathbb{R}^d$, dont les trajectoires sont presque sûrement dans E . On peut alors redéfinir la prévalence de la façon suivante : Soit \mathcal{P} une propriété dont on cherche à montrer qu'elle n'est vérifiée que sur un ensemble Haar-nul de E . Notons

$$A = \{f \in E \text{ tel que } \mathcal{P}(f) \text{ est vérifiée}\}.$$

La condition $\mu(f + A) = 0$ signifie que $\mathcal{P}(X_t - f)$ est de probabilité nulle. Par conséquent vérifier (2.2) se ramène à vérifier que

$$(2.3) \quad \forall f \in E, \text{ p.s. } X_t + f \text{ ne vérifie pas } \mathcal{P}.$$

En pratique, nous utiliserons régulièrement la définition suivante qui nous donne un critère simple pour obtenir un ensemble Haar-nul.

Définition 2.5. — Soit X un espace vectoriel métrique complet de dimension infinie. Un espace de dimension finie P est appelé espace sonde pour un ensemble $T \subset X$ si la mesure de Lebesgue restreinte à P est transverse au complémentaire de T . Autrement dit

$$(2.4) \quad \forall x \in X \quad \mathcal{L}_P(x + T^c) = 0.$$

On vérifie aisément le lemme technique suivant.

Lemme 2.1. — *Soit X un espace vectoriel métrique complet. Pour que $T \subset X$ soit prévalent, il suffit qu'il possède un espace sonde.*

Remarque : La mesure engendrée par un espace sonde n'est pas une mesure de probabilité à support compact. Par contre si, dans la définition de l'espace sonde, on restreint la mesure de Lebesgue à la boule unité de P , on obtient bien une mesure possédant la propriété (2.1). De plus, en utilisant l'invariance par translation, il est équivalent de considérer comme mesure transverse la mesure de Lebesgue sur P tout entier, ou de regarder des translations entières de la mesure de Lebesgue restreinte à la boule unité de P .

Les propriétés fondamentales de la classe des ensembles Haar-nuls sont rassemblées dans la proposition ci-dessous et sont démontrées dans [21, 39].

Théorème 2.3. — *Soit X un espace vectoriel métrique complet.*

1. *La classe des ensembles Haar-nuls dans X vérifie les propriétés \mathcal{H}_1 et \mathcal{H}_2 .*
2. *Si $\dim(X) < \infty$, alors S est un ensemble Haar-nul si et seulement si $\mathcal{L}(S) = 0$ où $\mathcal{L}(S)$ est la mesure de Lebesgue de S .*
3. *Si X est un espace de Banach de dimension infinie, tous les compacts de X sont Haar-nuls.*

Reprenons de [21] et de [39] les démonstrations du théorème 2.3.

Démonstration : • Point 1 : regardons tout d'abord la propriété \mathcal{H}_1 . La stabilité par inclusion est donnée par la définition des ensembles Haar nul.

Démontrons maintenant la stabilité par union dénombrable. Pour démontrer ce point nous allons d'abord rappeler ce théorème sur le produit infini de mesures, [15]. Mais pour cela, nous avons d'abord besoin de la définition suivante.

Définition 2.6. — *Soit X un espace métrique complet. Une famille \mathcal{C} de parties de X est une algèbre de Boole si elle contient X et si elle est stable par complémentaire et par réunion finie.*

Théorème 2.4. — *(Kolmogorov) Soit $(X_n, \mathcal{A}_n, \mu_n)$ une suite d'espaces de probabilités. On se place sur l'espace produit $X = \prod X_n$ muni de l'algèbre de Boole :*

$$\mathcal{C} = \left\{ A \times \prod_{k \geq n+1} X_k, A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \dots \otimes \mathcal{A}_n, n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

Et on pose pour tout $n \in \mathbb{N}^$ et pour tout $A \in \mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n$,*

$$\nu \left(A \times \prod_{k \geq n+1} X_k \right) = (\mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \dots \otimes \mu_n)(A).$$

Ceci définit une probabilité sur \mathcal{C} qui se prolonge de façon unique sur la tribu $\sigma(\mathcal{C}) = \otimes_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_n$.

Un autre point que nous rappelons pour plus de clarté est la définition du produit de convolution de deux mesures.

Définition 2.7. — Soit X un espace vectoriel métrique complet. Soient μ_1 et μ_2 deux mesures de probabilités sur $(X, \mathcal{B}(X))$. La convolution $\mu_1 * \mu_2$ est définie comme la mesure image de la mesure produit $\mu_1 \otimes \mu_2$ sur $(X \times X, \mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(X))$ par l'application :

$$\begin{aligned} X \times X &\rightarrow X \\ (x, y) &\mapsto x + y. \end{aligned}$$

Autrement dit, pour tout $A \in \mathcal{B}(X)$,

$$\mu_1 * \mu_2(A) = \int \int \mathbf{1}_A(x + y) d\mu_1(x) \otimes d\mu_2(y).$$

Soit $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille dénombrable de boréliens Haar-nuls dans X . Il existe donc une famille de mesures de probabilités à support compact $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $\forall i$ μ_i est transverse à B_i . On appelle U_1, U_2, \dots les supports de μ_1, μ_2, \dots . Quitte à réduire le support, on peut supposer que chaque U_n est de diamètre au plus 2^{-n} . En effet, pour chaque mesure on a $\mu_i(U_i) > 0$, et chaque U_i est compact. Par conséquent, U_i peut être recouvert par un nombre fini de boules de rayon 2^{-i} , et l'une au moins de ces boules est de mesure positive, pour la mesure μ_i . On note V_i cette boule et on définit $\tilde{\mu}_i$ la restriction de μ_i à V_i . Cette mesure est encore une mesure à support compact, transverse à B_i . On note $B = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i$ et on cherche une mesure de probabilité à support compact μ transverse à B . Grâce au théorème 2.4, on peut définir une mesure ν sur $(X^{\otimes \mathbb{N}}, \mathcal{B}(X^{\otimes \mathbb{N}}))$ comme étant le produit infini des μ_i , c'est à dire $\forall A \subset X^{\otimes \mathbb{N}}$, $\nu(A) = \mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \dots(A)$. De plus, d'après le théorème de Tychonoff, un produit cartésien de compacts muni de la topologie produit est compact et cette mesure est à support dans un compact, qui est le produit des U_i . Comme le diamètre de U_i ne dépasse pas 2^{-i} , l'application :

$$\begin{aligned} \prod U_i &\rightarrow X \\ (x_1, x_2, \dots) &\mapsto x_1 + x_2 + \dots \end{aligned}$$

est une application continue et μ est la convolution infinie des μ_i . On peut par conséquent définir une mesure μ comme l'image de ν par cette fonction. L'image du support de ν est donc un compact comme image d'un compact. Et par associativité et commutativité du produit de convolution de mesures, on peut écrire $\forall i$ $\mu =$

$\mu_i * \nu_i$ où $\nu_i = \mu_1 * \mu_2 * \dots * \mu_{i-1} * \mu_{i+1} * \dots$. Par conséquent, pour tout i :

$$\mu(B_i + x) = \int_X \mu_i(B_i + x - y) d\nu_i(y) = 0$$

Donc μ est transverse à chaque B_i et par conséquent, $\mu(B + x) \leq \sum_i \mu(B_i + x) = 0$ donc μ est transverse à B . Autrement dit on obtient bien que B est un ensemble Haar-nul.

Pour finir de démontrer que cette classe vérifie la propriété \mathcal{H}_1 , il reste à montrer qu'un ensemble Haar-nul est d'intérieur vide. Pour cela on prend B un borélien Haar-nul de X et μ transverse à B . Supposons que B ne soit pas d'intérieur vide, il existe alors un $x \in B$ et un ε_0 tels que $B(x, \varepsilon_0) \subset B$. On note ν la restriction de μ à un compact K pour lequel $0 < \mu(K) < \infty$, ce compact existe par définition et ν est aussi transverse à B . Comme K est compact, il peut être recouvert par un nombre fini de boules de rayons ε_0 . Alors l'intersection entre la fermeture d'une boule de rayon ε_0 et K est encore un compact. Soit V l'une de ces intersections vérifiant de plus que $\nu(V) > 0$. On note alors $\tilde{\mu}$ la restriction de ν à V , elle forme encore une mesure transverse à B . Mais par construction de $\tilde{\mu}$, il existe $y \in X$ tel que $V \subset B(x + y, \varepsilon_0)$ et $\tilde{\mu}(B(x + y, \varepsilon_0)) > 0$. Or $\tilde{\mu}(B + y) = 0$, car B est Haar-nul, et par conséquent pour tout $\varepsilon > 0$, $B(x, \varepsilon) \not\subset B$ et B est d'intérieur vide.

Montrons maintenant que la classe des ensembles Haar-nuls vérifie aussi la propriété \mathcal{H}_2 . La stabilité par translation découle immédiatement de la définition. Supposons que S soit Haar-nul et pour $\lambda > 0$, montrons que λA est aussi Haar-nul. Si A est Haar-nul, il existe une mesure μ finie et à support dans un compact telle que pour tout $x \in X$, $\mu(A + x) = 0$. En composant μ avec l'application qui à y associe $\frac{1}{\lambda}y$, nous avons encore une mesure $\tilde{\mu}$ finie et à support dans un compact qui n'est autre que la dilatée du support de μ . De plus, quelque soit $x \in X$, $\tilde{\mu}(\lambda A + x) = \mu(A + \frac{1}{\lambda}x) = 0$. Par conséquent, la classe des ensembles Haar-nuls est invariante par dilatation.

• Point 2 : La réciproque est évidente par définition, en utilisant la mesure de Lebesgue comme mesure transverse. Démontrons le sens direct pour les boréliens de \mathbb{R}^N . Soit B un borélien Haar-nul de \mathbb{R}^N . Par définition, il existe une mesure de probabilité positive sur un compact μ telle que $\forall x \in \mathbb{R}^N \quad \mu(B + x) = 0$. En utilisant le théorème de Fubini, on a :

$$0 = \int_{\mathbb{R}^N} \mu(B - y) d\mathcal{L}(y) = \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{L}(B - y) d\mu(y) = \mathcal{L}(B) \mu(\mathbb{R}^N)$$

Et par définition, $\mu(\mathbb{R}^N) > 0$ donc $\mathcal{L}(B) = 0$.

• Point 3 : pour démontrer ce point, on va utiliser la technique d'espace sonde définie plus haut. On suppose que X est un espace de Banach réel et S est un compact de V . On définit la fonction $f : \mathbb{R} \times S \times S \rightarrow X$ par :

$$f(\alpha, x, y) = \alpha(x - y).$$

Soit v un vecteur n'appartenant pas à l'image de f . Ce vecteur v existe bien car $\text{Vect}(f) \neq X$. En fait on va montrer que $\text{Vect}(f)$ est d'intérieur vide. Si on pose $N \in \mathbb{N}$, alors $[-N, N] \times S \times S$ est compact comme produit cartésien de compacts. La fonction f étant continue, l'image par f d'un compact est compact. Donc $\text{Vect}(f)$ peut s'écrire comme union sur les N de l'image des $[-N, N] \times S \times S$, donc comme union dénombrable de compacts. Comme les compacts d'un espace de Banach de dimension infinie sont d'intérieur vide, ce qu'on reverra dans le théorème 2.10, $\text{Vect}(f)$ est d'intérieur vide. Alors la droite engendrée par v et chacune de ses translatées rencontre S en au plus un point. En effet, dans le cas contraire, il existerait une droite $\{y = \lambda v + x, \lambda \in \mathbb{R}\}$ et $y_1, y_2 \in S$ tels que

$$\exists \lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} y_1 = \lambda_1 v + x \\ y_2 = \lambda_2 v + x \end{cases}$$

Donc $v = (\lambda_1 - \lambda_2)^{-1}(y_1 - y_2)$ et v appartient à l'image de f . Donc la droite L engendrée par v est une sonde pour le complémentaire de S . \square

Nous allons voir maintenant un exemple d'application de la prévalence dans un espace de dimension infinie. Cet exemple est traité d'une manière différente dans [38]. Dans cet article, B. Hunt prouve que l'ensemble des fonctions de $C([0, 1])$ qui sont dérivables en au moins un point est un ensemble Haar-nul. Nous démontrons le même résultat ici, mais comme nous le ferons par la suite dans des cadres différents, à l'aide des ondelettes. D'une part, cela nous permettra de préparer le terrain pour les démonstrations que nous ferons dans toute cette thèse. D'autre part, en utilisant les ondelettes, on peut directement généraliser le résultat de [38] à la dimension d quelconque.

Dans ce qui suit, on ne regarde plus ce qu'il se passe sur $[0, 1]^d$ mais sur le tore $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d / \mathbb{Z}^d$. On construit alors les ondelettes périodisées de la façon suivante. Si ψ est une des $2^d - 1$ ondelettes construites en dimension d dans la classe de Schwartz, pour $j \geq 0$ et $k \in \{0, \dots, 2^j - 1\}^d$:

$$\tilde{\psi}_{j,k} = \sum_{l \in \mathbb{Z}^d} \psi(2^j(x - l) - k).$$

et pour $j < 0$ on prend la fonction $x \mapsto 1$. On obtient ainsi une base orthonormée de $L^2(\mathbb{T}^d)$. De plus, les résultats de régularité que nous avons dans le chapitre 1 restent vérifiés dans ce cadre.

Exemple. — *Presque toutes les fonctions de $C([0, 1]^d)$ sont nulle part dérivables sur $[0, 1]^d$. En fait on va montrer le résultat un peu plus fort, qui est que pour presque toute fonction f de $C([0, 1]^d)$, pour tout $x \in [0, 1]^d$, f n'est pas $C^\gamma(x)$ pour tout $\gamma > d/2$.*

Démonstration : On fixe $\gamma > 0$. Pour démontrer le résultat dans ce cas, on utilise un espace sonde P de dimension 2. Cet espace est engendré par les deux fonctions

$$(2.5) \quad g(x) = \sum_{j \geq 1, k \in \{0, \dots, 2^j - 1\}^d} \frac{1}{j^2} \tilde{\psi}(2^j x - k)$$

$$(2.6) \quad h(x) = \sum_{j \geq 1, k \in \{0, \dots, 2^j - 1\}^d} \frac{(-1)^{|k|}}{j^2} \tilde{\psi}(2^j x - k)$$

où $k = (k_1, \dots, k_d)$ et $|k| = k_1 + k_2 + \dots + k_d$. Ici, $\tilde{\psi}$ est l'une des $2^d - 1$ ondelettes périodisées dans la classe de Schwartz construites en dimension d et on notera $c_{j,k}$ les coefficients sur cette ondelette. Les fonctions g et h étant continues sur \mathbb{R}^d , on prend alors comme base de l'espace sonde g et h restreintes à $[0, 1]^d$. Ces deux fonctions g et h étant linéairement indépendantes, l'espace P est de dimension 2.

Nous n'allons pas considérer directement l'ensemble des fonctions continues dérivables en au moins un point. En effet, il est démontré dans [69] qu'un tel ensemble n'est pas borélien. Nous allons cependant montrer qu'il est inclus dans une union dénombrable de boréliens Haar-nuls. Soient $i \in \mathbb{N}$ et $l \in \mathbb{Z}^d$. On découpe le cube $[0, 1]^d$ en 2^{di} sous cubes dyadiques de volume 2^{-di} . Par la suite, on note $I_{i,l}$ le cube dyadique fermé $I_{i,l} := \prod_{p=1}^d \left[\frac{l_p}{2^i}, \frac{l_p+1}{2^i} \right]$.

Notons $M_{i,l}^c$ l'ensemble :

$$M_{i,l}^c = \left\{ f \in C([0, 1]^d) \text{ tel que } \left\{ \begin{array}{l} \exists x \in I_{i,l} \text{ tel que } \forall j, \forall k \\ |c_{j,k}| \leq c 2^{-\gamma j} (1 + |2^j x - k|)^\gamma \end{array} \right. \right\}.$$

Nous allons d'abord montrer que ces ensembles sont boréliens, et même fermés dans $C([0, 1]^d)$. En effet, supposons qu'une suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ appartienne à un ensemble $M_{i,l}^c$ et qu'elle converge dans $C([0, 1]^d)$ vers une fonction \tilde{f} . Notons $c_{j,k}^n$ les coefficients d'ondelette de f_n et $d_{j,k}$ ceux de \tilde{f} . Grâce à la définition (1.11) des coefficients, la convergence de f_n vers \tilde{f} implique que

$$(2.7) \quad \forall j, k \quad c_{j,k}^n \rightarrow d_{j,k}.$$

Comme pour chaque n , $f_n \in M_{i,l}^c$, il existe alors une suite $(x_n) \in I_{i,l}$ telle que pour tout n ,

$$(2.8) \quad \forall j, \forall k \quad |c_{j,k}^n| \leq c2^{-\gamma j} (1 + |2^j x_n - k|)^\gamma.$$

$I_{i,l}$ étant compact, il existe un $x \in I_{i,l}$ tel que, quitte à prendre une sous-suite, $x_n \rightarrow x$. En passant à la limite dans (2.8), et en utilisant (2.7), nous obtenons que $\tilde{f} \in M_{i,l}^c$. Cet ensemble est donc fermé et par conséquent borélien.

Soit f une fonction quelconque de $C([0, 1]^d)$ de coefficients d'ondelette $c_{j,k}$. On définit l'ensemble S_c pour $c > 0$ par

$$S_c = \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } \left\{ \begin{array}{l} \exists x \in [0, 1]^d \text{ tel que } \forall j, \forall k \\ \left| c_{j,k} + \frac{\alpha}{j^2} + (-1)^{|k|} \frac{\beta}{j^2} \right| \leq c2^{-\gamma j} (1 + |2^j x - k|)^\gamma \end{array} \right. \right\}.$$

et $S = \bigcup_{c \in \mathbb{N}^*} S_c$. D'après la proposition 1.2, on a :

$$(\exists x : f + \alpha g + \beta h \in C^\gamma(x)) \implies (f + \alpha g + \beta h \in S)$$

On fixe $c \in \mathbb{N}^*$ et on se place dans S_c . On veut montrer que la mesure de Lebesgue de S_c dans \mathbb{R}^2 est nulle. Pour cela, on pose :

$$(2.9) \quad J_{i,l}^c = \left\{ (\alpha, \beta) \in S_c \text{ tels que } \left\{ \begin{array}{l} \exists x \in I_{i,l} \text{ tel que } \forall j, \forall k \\ \left| c_{j,k} + \frac{\alpha}{j^2} + (-1)^{|k|} \frac{\beta}{j^2} \right| \leq c2^{-\gamma j} (1 + |2^j x - k|)^\gamma \end{array} \right. \right\}.$$

Et pour tout $i \in \mathbb{N}$, on note $S_i = \bigcup_l J_{i,l}^c$. Soit $i \in \mathbb{N}$ fixé.

On considère maintenant deux éléments (α_1, β_1) et (α_2, β_2) dans $J_{i,l}^c$, ce qui signifie par définition qu'il existe x_1 et x_2 dans $I_{i,l}$ tels que $f_1 = f + \alpha_1 g + \beta_1 h$ et $f_2 = f + \alpha_2 g + \beta_2 h$ vérifient :

$$(2.10) \quad \left| \tilde{c}_{j,k}^{(1)} \right| \leq c2^{-\gamma j} (1 + |2^j x_1 - k|)^\gamma$$

$$(2.11) \quad \left| \tilde{c}_{j,k}^{(2)} \right| \leq c2^{-\gamma j} (1 + |2^j x_2 - k|)^\gamma$$

où $\tilde{c}_{j,k}^{(1)}$, respectivement $\tilde{c}_{j,k}^{(2)}$, sont les coefficients d'ondelette de f_1 , respectivement f_2 .

On va considérer les coefficients d'ondelette de f_1 et f_2 correspondants à $j = i$ et aux k tels que $|2^i x_1 - k| < 2$. Comme x_1 et x_2 appartiennent au même ensemble $I_{i,l}$, il existe au moins deux valeurs adjacentes $k_1 = l$ et $k_2 = l + (1, 0, 0, \dots, 0)$ de k qui vérifie de plus que $|2^i x_2 - k| < 2$. La valeur de k qui nous servira sera

déterminée ultérieurement. Pour ces coefficients, (2.10) et (2.11) impliquent pour $k = k_1, k_2$:

$$(2.12) \quad \left| \tilde{c}_{i,k}^{(1)} \right| \leq 3^\gamma c 2^{-\gamma i}$$

et

$$(2.13) \quad \left| \tilde{c}_{i,k}^{(2)} \right| \leq 3^\gamma c 2^{-\gamma i}.$$

En utilisant les résultats précédents, on obtient :

$$\begin{aligned} \left| \tilde{c}_{i,k}^{(1)} - \tilde{c}_{i,k}^{(2)} \right| &\leq \left| \tilde{c}_{i,k}^{(1)} \right| + \left| \tilde{c}_{i,k}^{(2)} \right| \\ &\leq 3^\gamma c 2^{-\gamma i} + 3^\gamma c 2^{-\gamma i} \\ &\leq 3^\gamma 2 c 2^{-\gamma i} \end{aligned}$$

et, par définition de f_1 et f_2 :

$$\begin{aligned} (2.14) \quad \left| c_{i,k} + \frac{\alpha_1}{i^2} + \frac{(-1)^{|k|}\beta_1}{i^2} - c_{i,k} - \frac{\alpha_2}{i^2} - \frac{(-1)^{|k|}\beta_2}{i^2} \right| &\leq 3^\gamma 2 c 2^{-\gamma i} \\ \Rightarrow \left| \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{i^2} + (-1)^{|k|} \frac{\beta_1 - \beta_2}{i^2} \right| &\leq 3^\gamma 2 c 2^{-\gamma i} \\ \Rightarrow |(\alpha_1 - \alpha_2) + (-1)^{|k|}(\beta_1 - \beta_2)| &\leq 3^\gamma 2 c 2^{-\gamma i} i^2 \end{aligned}$$

De plus, on choisit k de telle sorte que $(-1)^{|k|}(\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_1 - \beta_2)$ soit toujours positif. Dans ce cas (2.14) devient :

$$(2.15) \quad |\alpha_1 - \alpha_2| + |\beta_1 - \beta_2| \leq 3^\gamma 2 c 2^{-\gamma i} i^2.$$

Et donc a fortiori :

$$(2.16) \quad \sqrt{(\alpha_1 - \alpha_2)^2 + (\beta_1 - \beta_2)^2} \leq 3^\gamma 2 c 2^{-\gamma i} i^2$$

Donc $J_{i,l}^c$ peut être inclus dans une boule de rayon $3^\gamma 2 c 2^{-\gamma i} i^2$ et ce quelle que soit la valeur de l choisie. Si on note $B_{i,l}^c$ cette boule, on a :

$$S_c \subset \bigcup_l J_{i,l}^c \subset \bigcup_l B_{i,l}^c.$$

et donc

$$(2.17) \quad \mathcal{L}(S_c) \leq \sum_{l \in \{0, \dots, 2^i - 1\}^d} \mathcal{L}(B_{i,l}^c)$$

$$(2.18) \quad \leq 4 \cdot 3^{2\gamma} c^2 \sum_{l \in \{0, \dots, 2^i - 1\}^d} 2^{-2\gamma i} i^4$$

$$(2.19) \quad \Rightarrow \mathcal{L}(S_c) \leq 3^{2\gamma} 4 c^2 2^{di} 2^{-2\gamma i} i^4 = 3^{2\gamma} 4 c^2 2^{i(d-2\gamma)} i^4$$

Comme on a pris $\gamma > d/2 \Rightarrow 2\gamma - d > 0$ donc en faisant tendre i vers l'infini on obtient que la mesure de Lebesgue de S_c vaut 0.

De plus, c étant quelconque :

$$S \subset \bigcup_{c \in \mathbb{N}} S_c \Rightarrow \mathcal{L}(S) \leq \sum_{c \in \mathbb{N}} \mathcal{L}(S_c) = 0.$$

Autrement dit S est de mesure nulle. Donc, en utilisant la stabilité par inclusion, l'ensemble des fonctions $C^\gamma(x)$ en un point $x \in [0, 1]^d$ est Haar-nul.

□

Dans la démonstration, nous n'avons utilisé que deux fonctions g et h pour avoir une base de l'espace sonde. L'utilisation de n fonctions g_1, \dots, g_n nous donnerait clairement une majoration de l'indice de régularité par $\gamma = \frac{d}{n}$. En augmentant la dimension de l'espace sonde, on peut donc par la même technique généraliser ce cas au cas des fonctions continues et nulle part C^ε quelque soit $\varepsilon > 0$.

Nous allons maintenant mettre en oeuvre une autre technique pour montrer que presque toutes les fonctions continues sont nulle part C^α pour tout $\alpha > 1/2$, en dimension 1, qui revient à utiliser la mesure définie sur $\mathcal{C}([0, 1])$ par le pont brownien, voir [36].

Autre démonstration. — Soit μ la mesure gaussienne sur l'espace des fonctions continues sur $[0, 1]$, définie par le pont brownien sur $[0, 1]$ que nous noterons B_t . Cette mesure μ est bien borélienne, comme il est démontré dans [15]. On note aussi S l'ensemble des fonctions continues et höldériennes d'ordre $\alpha > \frac{1}{2}$ en au moins un point. On veut alors montrer qu'elle vérifie que

$$(2.20) \quad \forall f \in \mathcal{C}([0, 1]) \quad \mu(S + f) = 0.$$

S'agissant d'une mesure définie à l'aide d'un processus, nous avons déjà remarqué que démontrer (2.20) revient à démontrer que, presque sûrement, les trajectoires du processus $B + f$ n'appartiennent pas à S , voir (2.3). Nous allons en fait démontrer le lemme suivant qui est un peu plus précis.

Lemme 2.2. — *Soit $f \in \mathcal{C}([0, 1])$ quelconque et $(B_t)_{t \in [0, 1]}$ le pont brownien standard sur $[0, 1]$. Alors, avec probabilité 1,*

$$(2.21) \quad \forall x_0 \in [0, 1] \quad \limsup_{x \rightarrow x_0} \frac{|B(x) + f(x) - (B(x_0) + f(x_0))|}{\sqrt{|x - x_0|}} > 0.$$

Démonstration du lemme. — On sait, d'après [23], que le pont brownien s'écrit sur la base de Schauder, que nous avons définie dans la partie 1.3,

$$B_t = \sum_{j,k} 2^{-j/2} \xi_{j,k} \Lambda_{j,k}(t)$$

où les $(\xi_{j,k})$ sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi $\xi_{j,k} \sim \mathcal{N}[0, 1]$. De même, nous avons vu dans la partie 1.3 que toute fonction f de $\mathcal{C}([0, 1])$ et nulle en 0 et en 1 s'écrit $f = \sum_{j,k} c_{j,k} \Lambda_{j,k}$. Soit $x_0 \in [0, 1]$. Supposons que x_0 ne vérifie pas (2.21). Dans ce cas,

(2.22)

$\forall c > 0, \exists j_0 > 0$ tel que pour tout $x \in [0, 1]$ vérifiant $|x - x_0| < 2^{-j_0}$

$$|B(x) + f(x) - (B(x_0) + f(x_0))| \leq c\sqrt{|x - x_0|}.$$

Supposons donc que (2.22) est vérifiée au point x_0 . Comme dans le chapitre 1, on note $\mathcal{K}_{x_0}(2)$, le cône d'influence au dessus de x_0 défini par

$$\mathcal{K}_{x_0}(2) := \{j \geq 0; k : |x_0 - \frac{k}{2^{-j}}| < 2 \cdot 2^{-j}\}.$$

La proposition 1.2 réécrite dans le cadre des coefficients sur la base de Schauder, cf [47], implique que les coefficients de Schauder de $B_t + f(t)$ pour $j \geq j_0$ et le couple (j, k) dans ce cône d'influence vérifient :

(2.23) $|2^{-j/2} \xi_{j,k} + c_{j,k}| \leq 2c2^{-j/2}.$

La probabilité de cet événement est égale à la probabilité qu'une variable aléatoire $\zeta_{j,k}$ de loi $\mathcal{N}(2^{j/2}c_{j,k}, 1)$ vérifie

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|\xi_{j,k} + 2^{j/2}c_{j,k}| \leq c) &= \mathbb{P}(|\zeta_{j,k}| \leq c) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-c}^c e^{-\frac{(x - 2^{j/2}c_{j,k})^2}{2}} dx \\ &\leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} c. \end{aligned}$$

Soit $J \geq 1$ fixé. Pour que x_0 vérifie l'équation (2.22), il faut qu'à partir d'un certain rang j_1 , pour tous les intervalles dyadiques $[\frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j}]$, $j_1 \leq j \leq J$ qui contiennent x_0 , on ait $|\xi_{j,k} + 2^{j/2}c_{j,k}| \leq c$. Notons $A_{k,J}$ l'événement : "l'intervalle dyadique $[\frac{k}{2^J}, \frac{k+1}{2^J}]$ contient un point x_0 vérifiant (2.21)."

Les variables aléatoires $\zeta_{j,k}$ sont indépendantes, car les $\xi_{j,k}$ le sont.

Par conséquent, pour k fixé, la probabilité $P_{k,J}$ de l'événement $A_{k,J}$ vérifie :

$$\begin{aligned} P_{k,J} &\leq \prod_{j=j_1}^J \mathbb{P}(|2^{-j/2}\xi_{j,k} + c_{j,k}| \leq c) \\ &\leq \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}c\right)^J. \end{aligned}$$

Et la probabilité qu'il existe un $x_0 \in [0, 1]$ tel que (2.21) est vérifiée est donc majorée par :

$$\sum_{k=0}^{2^J-1} P_{k,J} \leq 2^J \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}c\right)^J.$$

Mais si $c < \sqrt{\frac{\pi}{8}}$, cette majoration tend vers zéro quand $J \rightarrow \infty$. \square

Reprenons la démonstration de l'exemple. Si avec une probabilité positive, $(B_t + f(t))_t \in S$, cela signifie, d'après (1.2) que

$$\exists x_0 \in [0, 1] \exists c > 0 \forall |x - x_0| < 1; |B(x) + f(x) - (B(x_0) + f(x_0))| \leq c|x - x_0|^\alpha.$$

Mais dans ce cas,

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} \frac{|B(x) + f(x) - (B(x_0) + f(x_0))|}{\sqrt{|x - x_0|}} \leq \limsup_{x \rightarrow x_0} \frac{c|x - x_0|^\alpha}{\sqrt{|x - x_0|}} = 0$$

car $\alpha > 1/2$. D'après le lemme 2.2, cet événement a lieu avec probabilité nulle. Donc presque sûrement $f + B \notin S$.

On peut généraliser ce résultat en utilisant le mouvement brownien fractionnaire de paramètre de Hurst H . En utilisant la décomposition en ondelettes adaptées à B_t^H de [76], pour $j \geq 1$ les coefficients de B_t^H sont encore des gaussiennes indépendantes et par le même raisonnement, on obtient que presque sûrement, pour toute fonction f continue, $f + B^H$ est nulle part C^ε quelque soit $\varepsilon > H$. \square

2.2.2. Porosité et σ -porosité. — Les notions d'ensembles Haar-nuls et de première catégorie n'ont a priori aucun lien. Le théorème suivant, démontré par Kaufman, [57] dans le cadre Baire et par Kahane, [55] dans le cadre prévalent, nous donne un exemple pour lequel les résultats de généricité sont différents suivant le cadre dans lequel on se place. Cet exemple, ainsi que les définitions correspondantes sont traités dans [29].

Définition 2.8. — *Un ensemble de Kronecker sur \mathbb{R} est un compact K tel que toute fonction continue et de module 1 sur K soit approximable uniformément par des exponentielles imaginaires.*

Théorème 2.5. — *Soit $E = \mathcal{C}(\mathbb{R})$, K un ensemble de Cantor et μ une mesure portée par K .*

1. Dans le cadre des catégories de Baire, Pour quasi-toute fonction f de E , $f(K)$ est un ensemble de Kronecker et $\mu \circ f^{-1}$ est une mesure singulière.
2. Dans le cadre de la prévalence, pour presque toute fonction f de E , $f(K)$ est presque sûrement l'adhérence de son intérieur et $\mu \circ f^{-1}$ est une mesure absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue dont la densité appartient presque-sûrement à une classe non quasi-analytique de fonctions C^∞ donnée.

Les résultats obtenus dans le cadre des catégories de Baire ne s'étendent pas dans le cadre de la prévalence. Mais nous pouvons définir une autre notion de genericité de nature topologique, qui, elle, va renforcer la notion de catégories de Baire, à savoir la porosité, introduite dans [26, 27] en dimension finie. Suivant les définitions de [4, 96], rappelons la définition d'un ensemble poreux.

Définition 2.9. — Soit (X, d) un espace métrique, A un sous ensemble de X et $x \in X$. Pour $R > 0$, on définit :

$$\gamma(x, R, A) = \sup\{r > 0 / \exists z \in X B(z, r) \subset B(x, R) \setminus A\}$$

$$p(x, A) = \limsup_{R \rightarrow 0^+} \frac{\gamma(x, R, A)}{R}.$$

On dit que A est poreux en x si $p(x, A) > 0$. A est dit poreux si il est poreux en x pour tout $x \in A$. Finalement, A est dit σ -poreux s'il peut s'écrire comme une union dénombrable d'ensembles poreux.

Ou, de manière équivalente,

Définition 2.10. — Soit (X, d) un espace métrique. $A \subset X$ est poreux en x si il existe $\rho > 0$ tel que $\forall \varepsilon > 0$, il existe $R > 0$, avec $0 < R \leq \varepsilon$ et $\exists z \in X$ tels que

$$(2.24) \quad B(z, \rho R) \subseteq B(x, R) \setminus A.$$

Remarque : En dimension finie, Mattila dans [68], parle d'ensembles poreux au sens faible. Il définit alors un ensemble A fortement poreux en x par

$$\tilde{p}(x, A) = \liminf_{R \rightarrow 0^+} \frac{\gamma(x, R, A)}{R} > 0.$$

Proposition 2.4. — Soit (X, d) un espace métrique complet. La classe des ensembles σ -poreux de X vérifie les propriétés \mathcal{H}_1 et \mathcal{H}_2 .

Démonstration : Montrons d'abord que cette classe forme un σ -idéal. Par définition elle est stable par union dénombrable. Pour montrer qu'elle est stable pour l'inclusion, on utilise la caractérisation (2.24). Pour cela, on suppose que $A = \cup A_n$ est σ -poreux et $B \subset A$, alors on peut écrire $B = \cup(A_n \cap B)$. Soit $B_n = A_n \cap B$

on va montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, B_n est poreux. Pour cela on remarque que $B_n \subset A_n$ donc $A_n^c \subset B_n^c$ et pour tout $x \in B_n$, pour tout $R > 0$:

$$\gamma(x, R, A_n) = \sup\{r > 0 / \exists z \in X \quad B(z, r) \subset B(x, R) \setminus A_n\} > 0.$$

Donc si $B(z, r) \cap A_n = \emptyset$, forcément $B(z, r) \cap B_n = \emptyset$ et $\gamma(x, R, B_n) \geq \gamma(x, R, A_n)$. Donc $p(x, B_n) \geq p(x, A_n) > 0$ donc B_n est bien poreux. Nous verrons dans la proposition 2.5 qu'un ensemble poreux est aussi d'intérieur vide.

Vérifions maintenant que les ensembles σ -poreux satisfont les propriétés \mathcal{H}_2 , dans le cas où la distance est compatible avec la structure d'espace vectoriel. Pour cela, supposons qu'un ensemble A soit poreux et pour $x_0 \in X$, considérons l'ensemble $B = A + x_0$. Soit $y \in B$. Dans ce cas, $y - x_0 \in A$ et par définition, quelque soit $R > 0$, il existe $z \in B(y - x_0, R)$ et $0 < r < R$ tels que $B(z, r) \subset B(y - x_0, R) \setminus A$. Mais alors si l'on note $z = \tilde{z} - x_0$ cela signifie que $B(\tilde{z} - x_0, r) \cap A = \emptyset$ et $\tilde{z} \in B(y, R)$ quelque soit R , donc B est poreux.

Montrons maintenant l'invariance par dilatation. Pour cela, nous supposons que A est poreux et que $\lambda > 0$. Soient $x \in A$ et $R > 0$ fixés. Par définition, il existe une boule $B(z, r) \subset B(x, R) \setminus A$. Mais si $z \in B(x, R)$, alors $\lambda z \in B(\lambda x, \lambda R)$, et pour tout $y \in B(\lambda z, \lambda r)$, $\frac{1}{\lambda}y \in B(z, r)$. Par conséquent, $\frac{1}{\lambda}y \notin A$ et $y \notin \lambda A$. Donc $B(\lambda z, \lambda r) \subset B(\lambda x, \lambda R) \setminus \lambda A$. \square

On peut trouver dans [96] d'autres notions liées à la porosité, ainsi que leurs applications. Nous ne définirons ici que celles utilisées par la suite, dans la proposition 2.7 ou dans le théorème 2.16.

Définition 2.11. — *Soit X est un espace métrique. En reprenant les notations précédentes, on dit qu'un ensemble A de X est c -globalement très poreux si $\gamma(x, R, A) > cR$ pour tout $x \in X$ et $R > 0$.*

On dit de manière équivalente que A est c -globalement très poreux si pour tout $c' \in (0, c)$ pour tout $x \in X$ et $r > 0$, il existe une boule $B = B(y, c'r)$ où $y \in B(x, r)$ telles que $B \cap A = \emptyset$. A est dit σ - c -globalement très poreux s'il peut s'écrire comme l'union dénombrable d'ensembles c -globalement très poreux.

Remarque : Si un ensemble A est c -globalement très poreux, alors

$$p(x, A) = \liminf_{R \rightarrow 0} \frac{\gamma(x, R, A)}{R} \geq c > 0.$$

Donc A est poreux.

Une des raisons de la définition des ensembles poreux en dimension infinie est que cette notion est plus forte que celle de première catégorie déjà connue.

Proposition 2.5. — *Soit X un espace métrique complet et A un ensemble de X . Si A est σ -poreux, alors il est de première catégorie au sens de Baire. La réciproque est fautive en général.*

Démonstration : Rappelons qu'un ensemble est de première catégorie au sens de Baire s'il est inclus dans l'union dénombrable de fermés d'intérieur vide. Soit A un ensemble poreux. D'après la définition, pour tout $x \in A$, $p(x, A) > 0$. Or, $p(x, A) = \limsup \frac{\gamma(x, R, A)}{R}$; autrement dit, il existe une suite R_n telle qu'à partir d'un certain rang n_0 , $\gamma(x, R_n, A) > 0$. En repartant de la définition, on peut traduire cela par :

$$\forall x \in A, \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 \exists r > 0 \exists z \in X B(z, r) \subset B(x, R_n) \setminus A.$$

Autrement dit pour tout $x \in A$ et pour n assez grand, la boule de centre x et de rayon R_n n'est pas incluse dans A . Comme R_n décroît vers zéro, on obtient :

$$\forall x \in A \quad \forall R > 0 \quad B(x, R) \not\subset A$$

donc A est d'intérieur vide. De plus ; \overline{A} est aussi d'intérieur vide. Supposons qu'il existe un point x appartenant à l'intérieur de \overline{A} . Dans ce cas, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset \overline{A}$. Mais dans ce cas, il existe une suite $(x_n)_n \in A$ telle que $x_n \rightarrow x$ et à partir d'un certain rang, $x_n \in B(x, r)$. Dans ce cas, il existe r_0 tel que $B(x_n, r_0) \subset B(x, r)$. Mais comme $x_n \in A$, et comme A est poreux, il existe une boule $B(z, \varepsilon) \subset B(x_n, r_0)$ telle que $B(z, \varepsilon) \cap A = \emptyset$. Donc, $B(z, \varepsilon) \subset \partial A$, et $B(z, \varepsilon) \cap A = \emptyset$. Ceci est impossible, par définition de l'adhérence. Donc si A est poreux, \overline{A} est d'intérieur vide. Un ensemble σ -poreux est une union d'ensembles poreux. Il est donc inclus dans une union de fermés d'intérieur vide.

La démonstration de l'absence de réciproque sera faite ultérieurement dans le cadre de la dimension finie. □

Corollaire. — *Soit X un espace métrique complet. Un ensemble σ -poreux de X est d'intérieur vide.*

Démonstration : Si X est un espace métrique complet, c'est un espace de Baire. Le corollaire est alors une conséquence immédiate de la proposition précédente et du théorème de Baire. □

Dans un espace métrique complet, il n'y a pas forcément de lien entre les notions de porosité et de prévalence comme le montre le théorème de Preiss-Tišer, que nous verrons dans le paragraphe suivant. En effet, dans ce théorème, il est montré qu'on peut écrire tout espace de Banach séparable de dimension infinie comme l'union d'un ensemble Haar-nul et d'un ensemble σ -poreux.

Comme nous l'avons fait dans le cadre fourni par la prévalence, nous allons montrer que pour un point $x_0 \in \mathbb{R}^d$ fixé, l'ensemble des fonctions continues qui sont $C^\alpha(x_0)$, pour un $\alpha > 0$ est un ensemble σ -poreux. Ceci nous donnera un exemple d'utilisation de bases d'ondelettes dans des démonstrations de porosité. Ce résultat avait auparavant été démontré en dimension 1. Grâce aux ondelettes, nous le généraliserons à une dimension d quelconque. Cette démonstration présente aussi l'avantage, en comparaison avec celle de [4], de ne pas se restreindre seulement aux propriétés de dérivabilité mais de déterminer aussi l'exposant de Hölder ponctuel de quasi-toute fonction.

Exemple. — Soit E l'espace des fonctions continues sur \mathbb{R}^d , bornées, muni de la norme infinie. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^d$ et $\alpha > 0$ fixés. L'ensemble des fonctions de E sur \mathbb{R}^d et d'exposant de Hölder α en x_0 forme un ensemble σ -poreux.

Démonstration : Soit $x_0 \in [0, 1]^d$ fixé, et $\alpha > 0$ quelconque. Comme dans le chapitre 1, on définit $\mathcal{K}_{x_0}(2) = \{(j, k) : |2^j x_0 - k| < 2\}$, le cône d'influence au dessus de x_0 . Remarquons qu'à chaque échelle j , il y a au plus 5 d -uplets appartenant à ce cône. On prend aussi une ondelette ψ définie sur \mathbb{R}^d et de norme L^1 égale à 1. D'après le lemme 1.2, si une fonction $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$ vérifie que $f \in C^\alpha(x_0)$, elle appartient à l'ensemble :

$$B = \left\{ f = \sum c_{j,k} \psi_{j,k} \in \mathcal{C}([0, 1]^d) \text{ tel que } \exists c > 0 \exists m > 0 \forall j \geq m \forall k \in \mathcal{K}_{x_0}(2) |c_{j,k}| \leq c 2^{-\alpha j} \right\}.$$

Cet ensemble est lui-même inclus dans l'union sur un ensemble dénombrable de $c > 0$ et de $m \in \mathbb{N}$ de

$$B_{c,m} = \left\{ f = \sum f_{j,k} \psi_{j,k} \in \mathcal{C}([0, 1]^d) \text{ tel que } \forall j \geq m \forall k \in \mathcal{K}_{x_0}(2) |c_{j,k}| \leq c 2^{-\alpha j} \right\}.$$

Montrons que $B_{c,m}$ est poreux.

Soient $c > 0$ et $m \in \mathbb{N}$ fixés. Soit $f \in B_{c,m}$ quelconque. Pour $\beta < \alpha$ fixé et pour tout $J \in \mathbb{N}$, on considère la suite R_J donnée par $R_J = 10c \|\psi\|_\infty 2^{-\beta J}$. On définit alors une fonction g_J de la manière suivante :

$$g_J(x) = \sum_{j \geq J, k \in \mathcal{K}_{x_0}(2)} d_{j,k} \psi_{j,k}(x) = \sum_{j \geq J, k \in \mathcal{K}_{x_0}(2)} 2c \operatorname{sign}(f_{j,k}) 2^{-\beta j} \psi_{j,k}(x).$$

De plus,

$$\begin{aligned}
\|g_J\|_{\mathcal{C}([0,1]^d)} &= \sup_{x \in [0,1]^d} \left| \sum_{j \geq J} \sum_{k \in \mathcal{K}_{x_0}(2)} 2c \operatorname{sign}(f_{j,k}) 2^{-\beta j} \psi_{j,k}(x) \right| \\
&\leq \sum_{j \geq J} \sum_{k \in \mathcal{K}_{x_0}(2)} 2c 2^{-\beta j} \sup_{x \in [0,1]^d} |\psi_{j,k}(x)| \\
&\leq \sum_{j \geq J} 5 \sup_{k \in \mathcal{K}_{x_0}(2)} 2c 2^{-\beta j} \|\psi\|_\infty \\
&\leq 10c \|\psi\|_\infty \sum_{j \geq J} 2^{-\beta j} \\
&\leq 10c \|\psi\|_\infty 2^{-\beta J}.
\end{aligned}$$

Par construction, $f + g_J$ appartient à la boule de centre f et de rayon R .

Et par définition des coefficients d'ondelette,

$$(2.25) \quad |d_{j,k}| = \left| \int g_J(x) \psi_{j,k}(x) dx \right| \leq \|g_J\|_{\mathcal{C}([0,1]^d)} \|\psi\|_{L^1}.$$

Par conséquent, $\sup |d_{j,k}| \leq \|g_J\|_{\mathcal{C}([0,1]^d)}$ et $\|g_J\|_{\mathcal{C}([0,1]^d)} \geq 2c 2^{-\beta J}$.

On prend maintenant $r = c \cdot 2^{-\beta J}$ et on considère la boule $B(f + g_J, r)$. On veut montrer que cette boule n'intersecte pas $B_{c,m}$. Pour cela, on suppose qu'il existe au moins une fonction y de coefficients $(c_{j,k})_{j,k}$ dans cette boule et appartenant aussi à $B_{c,m}$. Mais dans ce cas, par définition de $B_{c,m}$, pour $j \geq m$ et $(j, k) \in \mathcal{K}_{x_0}(2)$:

$$(2.26) \quad |c_{j,k} - f_{j,k}| \leq |c_{j,k}| + |f_{j,k}| \leq 2c 2^{-\alpha j}.$$

L'estimation (2.25) est valable pour toute fonction de $\mathcal{C}([0,1]^d)$, et comme y appartient aussi à $B(f + g_J, r)$, quelque soit j et k :

$$|c_{j,k} - f_{j,k} - d_{j,k}| \leq \|y - f - g_J\|_{\mathcal{C}([0,1]^d)} \leq r$$

Ce qui nous donne, pour les coefficients d'ondelette de $y - f$:

$$\begin{aligned}
|c_{j,k} - f_{j,k}| &= |c_{j,k} - f_{j,k} - d_{j,k} + d_{j,k}| \\
&\geq |d_{j,k}| - |c_{j,k} - f_{j,k} - d_{j,k}| \\
&\geq 2c 2^{-\beta J} - c \cdot 2^{-\beta J} \geq c \cdot 2^{-\beta J}
\end{aligned}$$

En combinant la majoration et la minoration des coefficients ainsi obtenues, en prenant les coefficients dans le cône d'influence, nous obtenons l'inégalité suivante, pour $j = J$ et $(j, k) \in \mathcal{K}_{x_0}(2)$:

$$2c 2^{-\alpha J} \geq c \cdot 2^{-\beta J}.$$

Comme $\beta < \alpha$, ceci est impossible pour J assez grand. Par conséquent, $B(f + g_J, r) \cap B_{c,m} = \emptyset$. De plus, quelque soit $J > 0$,

$$\frac{r}{R_J} = \frac{1}{10c\|\psi\|_\infty} = \frac{\gamma(f, R_J, B_{c,m})}{R_J} > 0.$$

Donc $p(f, B_{c,m}) > 0$ quelque soit $f \in B_{c,m}$. Cet ensemble est poreux. En utilisant les propriétés de σ -idéal de la porosité, ceci implique alors que l'ensemble des fonctions continues sur $[0, 1]^d$ qui sont $C^\alpha(x_0)$ est σ -poreux.

Ce résultat étant vrai quelque soit $\alpha > 0$, et en utilisant la stabilité par union dénombrable, l'ensemble des fonctions continues telles qu'il existe un $\alpha > 0$ vérifiant que $f \in C^\alpha(x_0)$ est aussi σ -poreux.

Pour la démonstration que nous venons de faire, nous nous sommes restreints au cube $[0, 1]^d$. Cependant, nous pouvons aussi prendre n'importe quel cube $[l, l+1]^d$ de longueur 1. En utilisant une fois encore la stabilité par union dénombrable, nous obtenons ainsi que quelque soit $x_0 \in \mathbb{R}^d$, l'ensemble des fonctions continues ayant un exposant de Hölder strictement positif en x_0 est σ -poreux. \square

Pour le résultat générique valable partout, correspondant à l'exemple que nous avons vu pour la prévalence, nous pouvons citer un résultat de V. Anisiu, dans [4], qui montre que l'ensemble des fonctions de $(\mathcal{C}(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{L^\infty})$ ayant une dérivée en au moins un point de \mathbb{R} est σ -poreux.

Bien que les notions d'ensembles Haar-nuls et de porosité correspondent à des "qualités" différentes d'un ensemble dans un espace, qu'il soit de dimension finie ou non, on peut se demander s'il n'y aurait pas cependant une certaine corrélation entre ces deux notions. En toute généralité, la réponse à cette question est négative comme nous le verrons dans la partie 2.3.1. Un autre résultat intéressant, démontré dans [80] en dimension finie et dans [82] dans le cas des espaces de Banach, nous montre qu'elles peuvent même être antinomiques. C'est ce que nous allons voir dans le théorème suivant, que nous démontrons dans l'annexe B.

Théorème 2.6. — *Soit X un espace de Banach séparable.*

1. *Si $\dim X < \infty$, X peut s'écrire comme l'union d'un ensemble de mesure nulle, au sens de Lebesgue, et d'un ensemble de première catégorie au sens de Baire.*
2. *Si $\dim X = \infty$, X peut s'écrire comme l'union d'un ensemble Haar-nul et d'un ensemble σ -poreux.*

Dans les deux cas, il existe donc un ensemble de première catégorie au sens de Baire qui soit aussi prévalent.

Remarque :

- Notons que la conclusion du théorème dans le cas de la dimension finie est plus faible que dans l'autre cas. En effet, en dimension finie il ne peut en être autrement car un ensemble poreux est aussi Haar-nul, comme nous le verrons dans le paragraphe 2.3.1. Donc, si nous obtenions la même conclusion, cela signifierait donc que l'espace X est de mesure de Lebesgue nulle, ce qui est absurde.
- Le résultat que nous allons montrer en dimension infinie est plus fort que celui énoncé, puisque nous allons montrer que $X = U \cup V$ avec V σ -poreux et U nul au sens de Aronszajn que nous définirons dans la partie 2.5.

2.2.3. Les ensembles HP-petits. — Si les deux notions de prévalence et de non-porosité ne sont pas nécessairement liées, elles ne sont pas pour autant contradictoires. L'intersection de la classe des ensembles Haar-nuls et celle des ensembles σ -poreux n'est pas vide puisqu'elle contient toutes deux l'ensemble vide. De plus nous verrons qu'il existe de nombreuses propriétés qui soient génériques à la fois au sens de la prévalence et de la porosité. Une question légitime est alors de se demander s'il existe une notion naturelle d'ensembles petits qui soient à la fois Haar-nuls et de première catégorie. J. Kolář, [59] apporte une réponse à cette question en définissant ce qu'il appelle les ensembles HP-petits. Cette classe est en effet incluse dans cette intersection et nous permet déjà d'établir certains liens entre les propriétés des ensembles Haar-nuls et poreux.

Définition 2.12. — Soit A un sous ensemble d'un espace de Banach séparable X et $c \in (0, 1]$. On dit que A a la propriété $HP_{(c)}$ si pour tout $c' \in (0, c)$ et $r > 0$ il existe $K > 0$ et une suite infinie de boules $\{B_i\} = \{B(y_i, c'r)\}$ avec $\|y_i\| \leq r$ tels que pour tout $x \in X$:

$$(2.27) \quad \text{card}\{i \in \mathbb{N} : (x + B_i) \cap A \neq \emptyset\} \leq K.$$

L'ensemble A est dit HP-petit, H pour Haar-nul et P pour poreux, s'il peut s'écrire comme l'union dénombrable d'ensembles A_n tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une constante $c_n \in (0, 1]$, telle que A_n appartienne à $HP_{(c_n)}$.

Une propriété est dite HP-typique si l'ensemble des points où elle n'est pas vérifiée est HP-petit.

Proposition 2.6. — Soit X un espace de Banach séparable. La classe des ensembles HP-petits dans X vérifie les propriétés \mathcal{H}_1 et \mathcal{H}_2 .

Démonstration : Montrons d'abord qu'elle est stable pour l'inclusion. Pour cela on prend $B \subset A$ et A est $\text{HP}_{(c)}$. On veut montrer qu'alors B vérifie aussi la propriété $\text{HP}_{(c)}$. On reprend donc les termes de la définition et on regarde l'équation (2.27). Mais si A vérifie cette équation pour une suite (g_i) et une constante K , il est facile de voir que

$$\text{card}\{i \in \mathbb{N} : (x + B_i) \cap B \neq \emptyset\} \leq \text{card}\{i \in \mathbb{N} : (x + B_i) \cap A \neq \emptyset\} \leq K$$

donc B est aussi $\text{HP}_{(c)}$. La stabilité par réunion dénombrable vient directement de la définition. Nous verrons par la suite qu'un ensemble $\text{HP}_{(c)}$ est aussi poreux, par conséquent il est d'intérieur vide.

En ce qui concerne l'invariance par translation, elle est donnée par la définition. Montrons maintenant que cette classe est invariante par dilatation. Soit A un ensemble $\text{HP}_{(c)}$ et $\lambda > 0$ quelconque. Comme A est $\text{HP}_{(c)}$, quelque soit $c' \in (0, c)$ et $r > 0$, il existe une suite (g_i) de norme inférieure à r et K tel que

$$\text{card}\{i \in \mathbb{N} : (x + B_i) \cap A \neq \emptyset\} \leq K.$$

Dans le cas $\lambda > 1$, on pose $\tilde{g}_i = \frac{1}{\lambda}g_i$. Alors $\|\tilde{g}_i\| \leq \frac{r}{\lambda} \leq r$ et quelque soit $x \in X$, $\text{card}\{i \in \mathbb{N} : x + B(\tilde{g}_i, c'r) \cap \lambda A \neq \emptyset\} \leq K$. Donc λA est aussi $\text{HP}_{(c)}$. Dans le cas $\lambda \leq 1$, on pose $r' = \frac{r}{\lambda}$ et $\tilde{g}_i = \frac{1}{\lambda}g_i$. Dans ce cas, $\|\tilde{g}_i\| \leq r'$. De plus, si $y \in (x + B_i) \cap \lambda A$, cela implique que $y \in x + B(\tilde{g}_i, c'r') \cap A$. L'équation (2.27) étant vraie quelque soit $r > 0$, ça ne peut être vrai que pour K valeurs de i . \square

Comme nous l'avons dit dans la définition, une propriété importante de ces ensembles "HP-petit" est qu'ils sont à la fois Haar-nuls et poreux, comme nous allons le démontrer tout de suite en nous inspirant de [59]. Pour cette démonstration, nous utiliserons le théorème suivant issu de [67] :

Théorème 2.7. — (Matouškova) Soit X un espace de Banach séparable et $A \subset X$ un borélien. Alors A est Haar-nul si et seulement si pour tout $\delta > 0$ et $r > 0$ il existe une probabilité μ avec $\text{supp } \mu \subset \overline{B(0, r)}$ telle que $\mu(A + x) \leq \delta$ pour tout $x \in X$.

Avant de démontrer ce résultat, on a besoin de quelques outils de théorie de la mesure que nous rappelons ici. Pour plus de détails sur ces outils et les démonstrations correspondantes on peut se référer à [15].

Définition 2.13. — Soit E un espace métrique. Une mesure de probabilité μ est dite tendue si

$$(2.28) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists K_\varepsilon \text{ compact } \subset E \quad \mu({}^c K_\varepsilon) < \varepsilon.$$

On dit de même qu'une suite $\{\mu_n\}_n$ de mesures de probabilités sur E est tendue si :

$$(2.29) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists K_\varepsilon \text{ compact } \subset E \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \mu_n({}^c K_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Définition 2.14. — Soit E un espace métrique complet. Soit $\{\mu_n\}_n$ une suite de probabilités définies sur E . On dit que la suite $\{\mu_n\}_n$ converge étroitement vers une probabilité $\{\mu\}$ dans l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des probabilités de E si pour toute fonction f continue, bornée de E dans \mathbb{R} et de norme $\|f\|_\infty \leq 1$:

$$(2.30) \quad \lim_n \int f d\mu_n = \int f d\mu.$$

Dans la suite, on appellera B l'ensemble des fonctions de E dans \mathbb{R} continues bornées et de norme inférieure à 1.

De la même manière, on dit qu'une suite de probabilités converge faiblement vers μ si pour toute fonction f continue de E dans \mathbb{R} et tendant vers zéro à l'infini :

$$(2.31) \quad \lim_n \int f d\mu_n = \int f d\mu.$$

On note alors $\mu_n \Rightarrow \mu$.

Théorème 2.8. — (Prohorov) Soient E un espace métrique complet et $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de mesures de probabilités sur E .

- Si la suite $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est tendue alors elle est séquentiellement relativement étroitement compacte, c'est à dire :

$$(2.32) \quad \forall \phi(n) \nearrow, \exists \psi(n) \nearrow \text{ tq } \mu_{\phi(\psi(n))} \rightarrow \mu.$$

- Dans un espace séparable, toute mesure de probabilité μ est tendue.

Lemme 2.3. — Soit X un espace métrique complet et séparable. Soit \mathcal{M} l'ensemble des mesures de probabilités boréliennes sur X . Cet ensemble muni de la topologie de la convergence étroite est métrisable, avec une distance d définie pour tout $\mu, \nu \in \mathcal{M}$ par :

$$(2.33) \quad d(\mu, \nu) = \sup_{f \in B} \left(\int_X f d\mu - \int_X f d\nu \right).$$

Alors (\mathcal{M}, d) est complet et séparable. On remarque de plus que \mathcal{M} muni de la convolution forme un semi-groupe abélien ayant la mesure de Dirac δ comme élément neutre.

Démonstration du théorème 2.7. — Montrons d'abord la réciproque. Soit A un borélien de X . Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe une mesure de probabilité μ_n avec $\text{supp } \mu_n \subset B(0, \frac{1}{n})$ et telle que $\mu_n(A + x) \leq \frac{1}{n}$, $\forall x \in X$. Montrons

qu'alors A est Haar-nul.

La suite des μ_n converge alors étroitement vers la mesure δ . En effet, si l'on prend n'importe quelle fonction f continue et bornée, on a l'encadrement suivant :

$$\inf_{t \in \overline{B}(0,1/n)} (f(t)) \leq \int_{\overline{B}(0,1/n)} f(t) \mu_n(dt) \leq \sup_{t \in \overline{B}(0,1/n)} (f(t))$$

La fonction f étant continue, $\inf_{t \in \overline{B}(0,1/n)} (f(t)) \rightarrow f(0)$ et $\sup_{t \in \overline{B}(0,1/n)} (f(t)) \rightarrow f(0)$. Par conséquent, la suite $(\mu_n)_n$ converge étroitement vers la mesure de Dirac. δ étant l'élément neutre pour la convolution, on peut en déduire que pour tout $\alpha \in \mathcal{M}$, $d(\alpha * \mu_n, \alpha) \rightarrow 0$, autrement dit à une sous suite près, $d(\alpha * \mu_n, \alpha) < 2^{-n}$ à partir d'un certain rang. En particulier on peut définir par récurrence une sous suite $(\mu_{\phi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ telle que pour $\alpha_n = \mu_{\phi(1)} * \mu_{\phi(2)} * \dots * \mu_{\phi(n-1)}$, on ait $d(\alpha_n * \mu_n, \alpha_n) < 2^{-n}$. En effet, si $\mu_{\phi(1)}$ est donnée, comme $d(\mu_{\phi(1)} * \mu_n, \mu_{\phi(1)}) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$, on peut trouver un $\phi(2)$ pour lequel $d(\mu_{\phi(1)} * \mu_{\phi(2)}, \mu_{\phi(1)}) < \frac{1}{4}$. Supposons que $\mu_{\phi(1)}, \dots, \mu_{\phi(n-1)}$ soient déjà construits. En posant alors $\alpha = \mu_{\phi(1)} * \dots * \mu_{\phi(n-1)}$, on obtient une mesure fixée dans \mathcal{M} . Par conséquent, il existe $d(\alpha * \mu_n, \alpha) \rightarrow 0$ et il existe un $\phi(n)$ tel que $d(\alpha_n * \mu_{\phi(n)}, \alpha_n) < 2^{-n}$. Ce qui signifie que la suite formée par les convolutions successives des $\mu_{\phi(i)}$ est de Cauchy dans (\mathcal{M}, d) qui est complet, donc elle est convergente dans (\mathcal{M}, d) . On regarde maintenant les mesures $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ et μ où :

$$\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_{\phi(1)} * \mu_{\phi(2)} * \dots * \mu_{\phi(k)} \quad \beta_n = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_{\phi(n+1)} * \mu_{\phi(n+2)} * \dots * \mu_{\phi(n+k)}$$

et $\gamma_n = \alpha_n * \beta_n$. D'après ce que nous venons de dire, toutes ces quantités sont bien définies.

La mesure de probabilité $\mu \in \mathcal{M}$ peut s'écrire $\mu = \alpha_n * \mu_{\phi(n)} * \beta_n$ pour tout n et, en utilisant l'associativité et la commutativité du produit de convolution :

$$\begin{aligned} \mu(A+z) &= (\alpha_n * \mu_n * \beta_n)(A+z) = (\mu_n * \gamma_n)(A+z) \\ &= \int \mu_n(A+z-x) d\gamma_n(x) \leq \sup_{x \in X} \mu_n(A+z-x) \leq \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Donc, en faisant tendre n vers l'infini, on obtient bien que $\mu(A+z) = 0$ pour tout $z \in X$. Comme X est séparable, μ est tendue et donc positive sur un compact. Donc A est un ensemble Haar-nul.

Montrons maintenant le sens direct par contraposition. Supposons qu'il existe r et δ tels que pour toute probabilité μ à support dans $B(0, r)$ il existe $x \in X$ tel que $\mu(A+x) \geq \delta$. Soit μ une mesure appartenant à \mathcal{M} . Comme X est un espace

de Banach séparable, c'est un espace polonais et $\{\mu\}$ est tendue, autrement dit il existe un compact $K \subset X$ tel que $\mu(K) > 0$. En prenant un recouvrement fini de K par des boules de rayon inférieur à r et on peut trouver un $C \subset K$ tel que le diamètre de C soit inférieur à r et $\mu(C) > 0$. On définit $\mu'(F) = \frac{\mu(F \cap C)}{\mu(C)}$ pour tout borélien F de X . Alors μ' est une mesure de probabilité sur C et il existe $x \in X$ tel que $\mu'(A+x) \geq \delta$ donc $\mu(A+x) > 0$ et A n'est pas un ensemble Haar-nul. \square

Remarque : Dans la démonstration de ce théorème nous n'utilisons pas l'hypothèse que X est un espace de Banach. Il peut donc s'étendre facilement aux espaces polonais.

On peut maintenant démontrer la propriété annoncée des ensembles HP-petits.

Proposition 2.7. — *Soit X un espace de Banach séparable. Tous les ensembles HP-petits de X sont à la fois σ -poreux et Haar-nul.*

Démonstration : Soit A un ensemble $\text{HP}_{(c)}$, montrons que A est c -globalement très poreux. Soient $\forall c' \in (0, c)$ et $r > 0$ fixés. Par définition, pour tout $x \in A$ il y a au moins une boule $x + B(y_i, c'r)$ qui soit disjointe de A . Si on note $z = x + y_i$, on obtient que $B(z, c'r) \cap A = \emptyset$ donc $B(z, c'r) \subset B(x, 2r) \setminus A$ et $\gamma(z, 2r, A) > c'r$ quelque soit $c' \leq c$. Donc A est $\frac{c}{2}$ -globalement très poreux, et par conséquent poreux. Donc si un ensemble B est HP-petit, il peut s'écrire comme une union d'ensembles poreux, il est donc σ -poreux.

On fixe c', r et $\delta > 0$ et on prend l'ensemble des boules $\{B_i\}$ comme dans la définition d'un ensemble $\text{HP}_{(c)}$. Soit $n > \frac{K}{\delta}$ et $\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{y_i}$. Alors, comme $\|y_i\| \leq r$, $\text{supp } \mu \subset \overline{B(0, r)}$ et pour tout $x \in X$, $\mu(A+x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{y_i}(A+x) \leq \frac{K}{n} < \delta$. Donc, en appliquant le théorème 2.7, on obtient que A est Haar-nul.

De plus, si A est $\text{HP}_{(c)}$ alors \bar{A} l'est aussi. Soient $c' \in (0, c)$ et $r > 0$ fixés. Soient (g_i) une suite d'éléments de X , $B_i = B(g_i, c'r)$ et $K > 0$ tels que pour tout $x \in X$:

$$\text{card}\{i \in \mathbb{N} : (x + B_i) \cap A \neq \emptyset\} \leq K.$$

Pour i fixé, regardons l'ensemble des $y \in \bar{A}$ tels que $y \in (x + B_i)$. Soit $y \in A$, soit $y \in \dot{A}$. Mais dans ce cas, il existe une suite (y_n) telle que $\forall n, y_n \in A$ et $y_n \rightarrow y$. On suppose que $\|y - (x + g_i)\| < c'r$ et on pose $\varepsilon = c'r - \|y - (x + g_i)\|$. Dans ce cas,

$$\exists N_0 \forall n \geq N_0 \quad \|y_n - (x + g_i)\| \leq \|y_n - y\| + \|y - (x + g_i)\|$$

$$\exists N_0 \forall n \geq N_0 \quad \|y_n - (x + g_i)\| \leq c'r - \|y - (x + g_i)\| + \|y - (x + g_i)\| < c'r.$$

Donc si $(x + B_i) \cap \bar{A} \neq \emptyset$, il en est de même pour $(x + B_i) \cap A$ et \bar{A} est $HP_{(c)}$.

Par conséquent, un ensemble $HP_{(c)}$ est inclus dans un borélien Haar-nul, il est donc Haar-nul.

□

Nous allons maintenant regarder les différentes propriétés des ensembles HP-petits.

Proposition 2.8. — *Soit X un espace de Banach séparable et $c \in [0, 1]$, $A \subset X$ un ensemble ayant la propriété $HP_{(c)}$ et $B \subset X$ un compact. Alors $A + B := \{x + y, x \in A, y \in B\}$ a la propriété $HP_{(c)}$.*

Cette proposition est importante dans ce cadre. D'une part, elle implique qu'un compact est HP-petit, et d'autre part elle nous servira à démontrer la proposition 2.9.

Démonstration : Soit c' et $r > 0$ fixés. On choisit un $c'_A \in (c', c)$ et on pose $\varepsilon = r(c'_A - c')$. Il existe $K_A > 0$ et une famille $\{y_i\}$ telles que pour tout $x \in X$:

$$\text{card}\{i \in \mathbb{N} : (x + B(y_i, c'_A r)) \cap A \neq \emptyset\} \leq K_A.$$

Comme B est compact et X est un espace de Banach, il existe $z_1, z_2, \dots, z_n \in X$ tels que $B \subset \bigcup_{i=1}^n B(z_i, \varepsilon)$. Maintenant, on regarde l'ensemble des $i \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $x \in X$

$$(2.34) \quad (x + B(y_i, c'_A r)) \cap (A + B) \neq \emptyset.$$

Si (2.34) est vérifiée, ils existent $z \in B$ et $y \in A$ tels que $y + z \in (x + B(y_i, c'_A r))$. Mais comme $z \in B$, il existe $j \in \{1, \dots, n\}$ tel que $z \in B(z_j, \varepsilon)$. Mais si (2.34) est vérifiée, il existe $y \in A$ tel que

$$\begin{aligned} \|y - (x - z + y_i)\| &\leq c'r \\ \text{donc } \|y - (x - z_j + y_i)\| &= \|y - (x - z_j + y_i - z) + z\| \\ &\leq \|y - (x - z + y_i)\| + \|z - z_j\| \\ &\leq c'r + \varepsilon = c'_A r \end{aligned}$$

Par conséquent, $((x - z_j) + B(y_i, c'_A r)) \cap A \neq \emptyset$. Mais comme A vérifie la propriété $HP_{(c)}$, on sait que le cardinal de l'ensemble des i vérifiant cette propriété est inférieur à K_A . Donc

$$\begin{aligned}
& \text{card}\{i \in \mathbb{N} : (x + B(y_i, c'_A r)) \cap (A + B) \neq \emptyset\} \\
& \leq \sum_{j=1, \dots, n} \text{card}\{i \in \mathbb{N} : (x - z_j + B(y_i, c'_A r)) \cap A \neq \emptyset\} \\
& \leq nK_A.
\end{aligned}$$

Donc $A + B$ vérifie $HP_{(c)}$. □

Corollaire. — Soit X un espace de Banach séparable de dimension infinie. Les compacts de X sont des ensembles HP -petits.

Démonstration : On applique le lemme 2.34 avec $A = \{0\}$. Comme on est en dimension infinie, A est bien $HP_{(1)}$. □

Proposition 2.9. — Soit X un espace de Banach séparable et A un sous-ensemble de X . Si $P : X \rightarrow X$ est une projection continue telle que $\dim \text{Ker } P < \infty$ alors on a équivalence entre :

1. A est HP -petit ;
2. $P(A)$ est HP -petit dans X ;
3. $P(A)$ est HP -petit dans $P(X)$.

Cette proposition nous donnera directement le contre exemple 2.10

Démonstration : Par définition de la projection, on sait que $A \subset P(A) + \text{Ker } P$ et $P(A) \subset A + \text{Ker } P$. De plus $\dim \text{Ker } P < \infty$, donc quelque soit $N \in \mathbb{N}$, $\text{Ker } P \cap B(0, N)$ est compact. Par conséquent, en prenant une union sur $N \in \mathbb{N}$, $\text{Ker } P$ est inclus dans une union de compacts. Donc en appliquant la proposition précédente, comme la classe des ensembles HP -petits est un σ -idéal, on a l'équivalence entre 1 et 2.

Pour l'équivalence 2 \Leftrightarrow 3, on procède en deux temps. D'abord 3 \Rightarrow 2, pour cela on prend $c' \in [0, 1]$ et $r > 0$ fixés. On sait qu'il existe une suite $\{y_i\}$ et $K > 0$ tels que pour tout $x \in X$:

$$\text{card}\{i \in \mathbb{N} : (P(x) + B(P(y_i), c'r)) \cap P(A) \neq \emptyset\} \leq K$$

Or $(x + B(y_i, \|P\|c'r)) \cap P(X) \subset P(x) + B(P(y_i), c'r)$, où $\|P\|$ désigne la norme de l'opérateur P . En effet, si $z \in (x + B(y_i, \|P\|c'r)) \cap P(X)$ alors $z \in P(X)$ donc $z = P(z)$ et $\|z - (x + y_i)\| \leq c'r$. En appliquant l'opérateur linéaire P on obtient

$$\|P(z) - (P(x) + P(y_i))\| \leq \|P\| \|z - (x + y_i)\| \leq \|P\| c'r.$$

Et par conséquent

$$\begin{aligned} \text{card}\{i \in \mathbb{N} : (x + B(y_i, c'r)) \cap P(A) \neq \emptyset\} &\leq \text{card}\{i \in \mathbb{N} : P(x) + B(P(y_i), c'r) \cap P(A) \neq \emptyset\} \\ &\leq K \end{aligned}$$

donc si $P(A)$ est HP-petit dans $P(X)$, il est HP-petit dans X .

Il reste à montrer que $2 \Rightarrow 3$. On repart de la définition. Soit $P(A)$ un ensemble $HP_{(c)}$ dans X . Soit $c' \in (0, c)$ et $r_0 > 0$ fixés. On pose $r = \frac{r_0}{\|P\|}$ et $B = \text{Ker } P \cap B(0, (1 + \|P\|)r)$. Comme $\text{Ker } P$ est de dimension finie, B est compact. D'après la proposition 2.8, $P(A) + B$ est $HP_{(c)}$. Par conséquent, il existe une suite $(y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ dans X telle que $\|y_i\| \leq r$ et une constante $K > 0$ tels que pour tout $x \in X$:

$$\text{card}\{i \in \mathbb{N} : (x + B(y_i, c'r)) \cap P(A) + B \neq \emptyset\} \leq K.$$

On pose $x \in X$, soit $\tilde{y}_i = P(y_i)$ pour tout $i \in \mathbb{N}$ et $\tilde{x} = P(x)$. Alors $\tilde{y}_i = P(y_i) = y_i + \tilde{y}_i - y_i$. Or $\tilde{y}_i - y_i \in \text{Ker } P$ et $\|\tilde{y}_i - y_i\| \leq \|y_i\| + \|\tilde{y}_i\| \leq (1 + \|P\|)\|y_i\| \leq (1 + \|P\|)r$. Par conséquent $\tilde{y}_i \in B$. Et si $B(\tilde{x} + \tilde{y}_i, c'r) \cap P(A) \neq \emptyset$ alors $B(\tilde{x} + y_i, c'r) \cap P(A) + B \neq \emptyset$. Comme B est compact, on en déduit que

$$\text{card}\{i \in \mathbb{N} : B(\tilde{x} + \tilde{y}_i, \frac{c'}{\|P\|}r_0) \cap A \neq \emptyset\} \leq K.$$

Donc $P(A)$ est $HP_{c/\|P\|}$ dans $P(X)$. □

Cette notion naturelle d'ensembles HP-petits implique entre autre des notions d'ensembles nuls au sens de la théorie de la mesure et au sens topologique. Nous allons voir maintenant que cette notion est en fait plus forte qu'une simple superposition des propriétés d'ensembles Haar-nuls et σ -poreux.

Proposition 2.10. — *Soit E un espace de Banach séparable de dimension infinie. Tout hyperplan fermé H de E est σ -poreux et Haar nul mais n'est pas HP-petit.*

Démonstration : Soit E un espace de Banach séparable de dimension infinie. Soit H un hyperplan fermé de E . Tout d'abord remarquons qu'un hyperplan fermé dans un espace de Banach peut s'écrire sous la forme $H = \{x \in E : \phi(x) = \alpha\}$ où ϕ est une forme linéaire continue. Montrons que cet ensemble est Haar-nul. Tout d'abord, H est borélien comme fermé. En prenant $\tilde{\phi}(x) = \phi(x) - \alpha$, on se ramène au cas $H = \{x \in E : \phi(x) = 0\}$. Soit $x_0 \in E$ un point n'appartenant pas à H , autrement dit $\phi(x_0) \neq 0$. Alors pour tout $x \in E$, on regarde l'ensemble $\{\lambda \in \mathbb{R} : x + \lambda x_0 \in H\}$. Si λ appartient à cet ensemble, $\phi(x + \lambda x_0) = 0 \Leftrightarrow \phi(x) + \lambda \phi(x_0) = 0$ donc $\lambda = \frac{\phi(x)}{\phi(x_0)}$ et la mesure de Lebesgue de cet ensemble est nulle. Donc H est Haar nul.

De plus, d'après la proposition précédente, si un ensemble A est HP-petit dans X , alors pour toute projection P , $P(A)$ est HP-petit dans $P(X)$. En particulier, si l'on prend P la projection sur H , qui existe bien car un hyperplan est convexe et H est fermé, et si H était HP-petit alors $P(H)$ serait HP-petit dans $P(X) = H$ ce qui est absurde.

Pour terminer ce cas, il reste à montrer que H est 1-globalement très poreux. Soit $c' \in [0, 1]$, $x \in X$ et $r > 0$ fixés. Il existe un $y \in B(x, r)$ tel que $\phi(y) \neq 0$, car dans le cas contraire, on aurait $B(x, r) \subset H$. Or H est d'intérieur vide, c'est donc impossible. On pose alors $y' = \frac{\|\phi\|r}{\phi(y)}y + x$. Dans ce cas, $\|y' - x\| \leq r$ et $\phi(y') = \|\phi\|r$. Soit alors $z \in B(y', c'r)$, alors :

$$\begin{aligned} \|y' - z\| &< c'r \\ \Rightarrow |\phi(y') - \phi(z)| &< c'r\|\phi\|_{\mathcal{L}(E, \mathbb{R})} \\ \Rightarrow c'r\|\phi\| &< \phi(z) - \phi(y') < c'r\|\phi\| \\ \Rightarrow \phi(z) &> \phi(y') - c'r\|\phi\| \\ \Rightarrow \phi(z) &> r\|\phi\|(1 - c') > 0 \end{aligned}$$

Donc pour tout $z \in B(y', c'r)$, $z \notin H$ et H est 1-globalement très poreux. \square

Pour conclure sur la définition de la notion des ensembles HP-petit, nous pouvons glisser quelques mots sur les fonctions continues dans \mathbb{R} . Nous verrons dans chapitre 5, que dans un espace de Sobolev, en dehors d'un ensemble HP-petit l'exposant ponctuel obtenu point par point est le pire exposant possible. Il en est de même dans l'espace des fonctions continues sur \mathbb{R} . Si on se fixe un point x_0 , HP-quasi toute fonction continue n'est pas $C^\alpha(x_0)$, et ce quelque soit $\alpha > 0$. Dans [59], Kolar prouve même que pour un ensemble HP-typique de fonctions continues, il n'y a nulle part d'exposant de Hölder ponctuel strictement positif.

2.3. Quelques exemples

2.3.1. Le cas de la dimension finie. — Dans cette partie, nous allons comparer les différentes notions que nous avons vues précédemment dans des cas où les ensembles petits sont déjà connus. En effet, dans un espace vectoriel de dimension finie, on sait caractériser des propriétés valables presque partout. Ces exemples nous donneront de plus une idée concrète des différents liens pouvant exister entre les classes d'ensembles petits.

Nous allons commencer par regarder un exemple classique d'ensembles de mesure nulle. L'intérêt de cet exemple est renforcé par le fait qu'il est "gros" au sens

des catégories de Baire. Cet exemple est celui des nombres de Liouville et il est traité dans [80].

Exemple. — *L'ensemble de Liouville est défini par*

$$E = \left\{ z \in \mathbb{R} : z \notin \mathbb{Q} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N} \exists p, q, q > 1 \text{ tels que } \left| z - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^n} \right\}.$$

Cet ensemble E est de mesure de Lebesgue nulle, il est même de dimension de Hausdorff nulle. Cependant il est de deuxième catégorie au sens de Baire.

Démonstration : Montrons d'abord que le complémentaire de cet ensemble est de première catégorie au sens de Baire. Pour cela, on définit à k fixé l'ensemble

$$G_k = \bigcup_{q=2}^{\infty} \bigcup_{p=-\infty}^{\infty} \left] \frac{p}{q} - \frac{1}{q^k}, \frac{p}{q} + \frac{1}{q^k} \right[.$$

On a alors $E = \mathbb{Q}^c \cap (\bigcap_{n \in \mathbb{N}} G_n)$ ou par passage au complémentaire, $E^c = \mathbb{Q} \cup (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_n^c)$. Et G_n est une union dénombrable d'ouverts, il est donc ouvert. De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}$, G_k contient toutes les fractions de la forme $\frac{p}{q}$. Par conséquent $\mathbb{Q} \subset G_k$, G_k est dense dans \mathbb{R} et G_k^c est d'intérieur vide. Donc E^c peut s'écrire comme l'union dénombrable de fermés d'intérieur vide, il est donc de première catégorie d'après le théorème de Baire.

Soit $s > 0$ fixé. Calculons maintenant la mesure de Hausdorff s -dimensionnelle de E , voir définition 1.4.

Une première décomposition de E peut être faite en prenant $E = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} (E \cap (-m, m))$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. On peut aussi utiliser la décomposition de E qui a été faite plus haut, c'est à dire que E peut s'écrire $E = \mathbb{Q}^c \cap (\bigcap_{k \in \mathbb{N}} G_k)$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un q_0 pour lequel $\frac{2}{q_0^k} < \varepsilon$, et

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\varepsilon^s(E) &\leq \sum_{q \geq q_0} \sum_{m \in \mathbb{N}} \sum_{p=-mq}^{mq} \left(\frac{2}{q^k} \right)^s \\ &\leq 2^s \sum_{q \geq q_0} \sum_{m \in \mathbb{N}} \sum_{p=-mq}^{mq} q^{-sk} \\ &\leq 2^s \sum_{q \geq q_0} \sum_{m \in \mathbb{N}} (2mq + 1) q^{-sk} \\ &\leq 2^s \sum_{q \geq q_0} \sum_{m \in \mathbb{N}} (2m + 1) q^{1-sk} \end{aligned}$$

A partir d'un certain rang k_0 , on obtient $ks > 2$ et $1 - sk < 0$

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_\varepsilon^s(E) &\leq 2^s \sum_{m \in \mathbb{N}} (2m+1)2^{1-sk} \\ &\leq \varepsilon\end{aligned}$$

Donc pour tout $s > 0$, $\mathcal{H}^s(E) = \lim \mathcal{H}_\varepsilon^s(E) = 0$. Par conséquent n'importe quelle mesure de Hausdorff s -dimensionnelle s'annule. En particulier, pour $s = 1$ la mesure de Lebesgue de l'ensemble de Liouville est nulle. \square

Dans ce qui suit, on se place dans \mathbb{R}^n .

Commençons par regarder les ensembles Haar-nuls. Pour ceux là, le point 2 de la proposition 2.3 nous donne exactement une caractérisation. En effet, être Haar-nul dans \mathbb{R}^n équivaut à être de mesure de Lebesgue nulle.

Mais qu'en est-il pour les autres notions ? C'est ce que nous allons voir dans les deux propositions qui suivent.

Proposition 2.11. — *Dans \mathbb{R}^n , un ensemble poreux est à la fois de première catégorie et de mesure nulle. La réciproque est fautive en général. En effet, il existe des ensembles de mesures nulles et de première catégorie qui ne sont pas poreux.*

Pour montrer cette proposition, nous aurons besoin du théorème de densité de Lebesgue, [86].

Définition 2.15. — *Soit A un borélien de \mathbb{R}^n . Pour tout $x \in A$, on définit la densité de x en A par :*

$$(2.35) \quad d(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}(A \cap B(x, h))}{h^n}.$$

Théorème 2.9. — *(Théorème de densité de Lebesgue) Si A est un ensemble borélien de \mathbb{R}^n , pour presque tout $x \in A$, la densité de x en A vaut 1.*

Démonstration de la proposition 2.11. — Le fait qu'un ensemble poreux est de première catégorie a déjà été démontré dans n'importe quel espace. Le seul point à montrer ici est qu'un ensemble poreux est de mesure de Lebesgue nulle. Soit A un ensemble poreux dans \mathbb{R}^n . Par définition, cela signifie que $p(x, A) > 0$. Il existe donc une constante $\varepsilon > 0$ et une suite $R_n \rightarrow 0$ telle que $\gamma(x, R_n, A) > \varepsilon R_n$ pour n assez grand. Or $\gamma(x, R_n, A) = \sup(r > 0 \exists z \in \mathbb{R}^n B(z, r) \subset B(x, R_n) \setminus A)$. Il existe donc $z \in B(x, R_n)$ tel que $B(z, \varepsilon R_n) \subset B(x, R_n) \setminus A$. La boule $B(z, \varepsilon R_n)$ est de mesure de Lebesgue $C\varepsilon^n R_n^n$. Or $\mathcal{L}(B(x, R_n)) = \mathcal{L}(B(x, R_n) \cap A) + \mathcal{L}(B(x, R_n) \setminus A)$. Par conséquent :

$$\mathcal{L}(B(x, R_n) \cap A) = \mathcal{L}(B(x, R_n)) - \mathcal{L}(B(x, R_n) \setminus A) \leq R_n^n(1 - \varepsilon^n).$$

En particulier,

$$(2.36) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{L}(B(x, R_n) \cap A)}{R_n^n} = 1 - \varepsilon^n < 1.$$

Mais si $\mathcal{L}(A) > 0$, pour presque tout $x \in A$, la densité de x en A serait 1, d'après le théorème de densité de Lebesgue. Ce qui est en contradiction avec (2.36). Donc $\mathcal{L}(A) = 0$. \square

L'absence de réciproque dans la proposition 2.11 sera démontrée dans l'annexe B.

Proposition 2.12. — *Le seul ensemble HP-petit de \mathbb{R}^n est l'ensemble vide.*

Démonstration : Soit A un ensemble HP-petit dans \mathbb{R}^n . D'après la proposition 2.9, c'est équivalent à $P(A) := A'$ est HP-petit dans \mathbb{R} , où P est la projection sur la première coordonnée.

Si A' est HP-petit dans \mathbb{R} , il est de mesure de Lebesgue nulle. Regardons si un singleton $\{x\}$ peut être HP-petit. Reprenons la définition des ensembles HP-petits : pour tout $c' \in (0, c)$ et $r > 0$ il existe $K > 0$ et une suite infinie de boules $\{B_i\} = \{B(y_i, c'r)\}$ avec $\|y_i\| \leq r$ tels que pour tout $z \in \mathbb{R}$:

$$(2.37) \quad \text{card}\{i \in \mathbb{N} : (z + B_i) \cap \{x\} \neq \emptyset\} \leq K.$$

Comme on est dans \mathbb{R} , on prend $y_i \in \mathbb{R}$ tels que $|y_i| \leq r$. Par conséquent, la suite (y_i) est bornée dans \mathbb{R} et elle possède une sous-suite $(y_{\phi(i)})$ convergeant vers un certain y . Si on pose $z = x + y$, quelque soit $c' > 0$, à partir d'un certain rang I_0 , $|y - y_i| < c'r$ donc $x \in B(z + y_{\phi(i)}, c'r)$ quelque soit $i > I_0$. Donc la propriété (2.37) n'est pas vérifiée en x . Par conséquent le seul ensemble HP-petit dans \mathbb{R} , et dans \mathbb{R}^n est l'ensemble vide. \square

A la lumière de ces deux propriétés, nous voyons que la porosité est encore plus restrictive que la mesure nulle. De plus, il est intéressant de voir qu'en dimension n , un ensemble poreux est aussi Haar-nul, ce qui n'est plus le cas en dimension infinie, d'où la définition des ensembles HP-petits. Bien que les ensembles poreux soient aussi Haar-nuls, donc forment une classe plus importante, on voit ici que la classe des ensembles HP-petits est beaucoup plus restrictive que simplement l'intersection de ces deux classes.

2.3.2. Qu'en est-il des compacts ? — Une autre classe d'ensembles connus pour être petits sont les compacts en dimension infinie. En effet, le théorème suivant célèbre en analyse fonctionnelle nous donne un ordre d'idée de la "taille" que peut avoir un compact dans un espace de Banach de dimension infinie.

Théorème 2.10. — *Soit X un espace de Banach. La boule unité de X est compacte si et seulement si X est de dimension finie.*

En fait, ce résultat implique que les compacts sont d'intérieur vide.

Comme dans l'exemple précédent, on va regarder les propriétés des compacts à l'aide des différentes notions définies dans la première partie. Dans le théorème 2.3, le point 3 tend à confirmer cette intuition. En effet, tous les compacts d'un espace de Banach sont Haar-nuls, autrement dit ils sont petits au sens de la prévalence. En ce qui concerne la classe des ensembles HP-petits, le résultat dans ce cas est donné par la proposition 2.8. En effet, si l'on prend pour A le singleton zéro, cet ensemble est trivialement HP-petit et si K est un compact, alors $A + K = K$ donc K est un ensemble HP-petit. Une fois encore, les compacts forment un ensemble "petit" respectivement à cette classe. En ce qui concerne la porosité, on reprend le résultat suivant de [3].

Proposition 2.13. — *Soit X un espace de Banach séparable de dimension infinie. Si K est un compact inclus dans X alors K est poreux.*

2.4. Intersion des presque partout et presque sûr

Maintenant que nous avons défini les différentes notions liées à la prévalence et à la porosité, nous allons regarder si les propriétés que nous connaissons dans la théorie de la mesure peuvent se généraliser dans ces cas. En particulier, peut-on appliquer la plus utilisée d'entre elles, à savoir la conséquence du théorème de Fubini qui permet d'inverser l'ordre des intégrations, et par conséquent d'obtenir facilement des résultats presque sûrs dans des espaces produits. Comme la notion de prévalence est une généralisation de notions probabilistes, il semble alors naturel et utile de se demander si une telle propriété est vérifiée dans ce cadre.

Dans un cadre probabiliste, si l'on considère un espace $E = E_1 \times E_2$ où E_1 et E_2 sont deux espaces vectoriels munis de mesures, alors le théorème suivant exprime le fait qu'une propriété presque-sûre dans l'espace produit est, pour presque tout $x_2 \in E_1$, presque sûre sur $E_2 \times \{x_2\}$ et vice-versa. L'équivalent de ce théorème dans le cadre des catégories de Baire est donné par le théorème de Kuratowski-Ulam, que nous rappellerons ultérieurement.

Théorème 2.11. — *Soient X et Y deux espaces métriques complets. Soit ν une mesure σ -finie sur X et ν' une mesure σ -finie sur Y . On note alors μ la mesure produit sur $X \times Y$. Si E est un ensemble de $X \times Y$ de mesure zéro alors la section suivant la direction $x \in X$, $E_x = \{y \in Y : (x, y) \in E\}$ est de mesure nulle pour*

ν' pour $d\nu$ presque tout x et de même la section $E_y := \{x \in X : (x, y) \in E\}$ est de mesure nulle pour ν pour $d\nu'$ presque tout y .

Dans [21], Christensen montre que cette propriété ne s'étend pas aux ensembles Haar-nuls. En effet il montre un contre exemple à l'application de ce théorème dans le cadre de la prévalence.

Proposition 2.14. — *Soit X un espace de Banach séparable et T la boule unité dans le plan complexe. Il existe un borélien B dans l'espace produit $X \times T$ tel que*

- *Pour tout $x \in X$ le complémentaire de l'ensemble $B(x) = \{t \in T / (x, t) \in B\}$ est de mesure de Lebesgue nulle sur T .*
- *Pour tout $t \in T$ l'ensemble $B(t)$ est Haar-nul dans X .*
- *Le complémentaire de B est Haar-nul dans l'espace produit.*

Nous ne reprendrons pas la démonstration de Christensen de ce résultat, en effet nous allons voir un autre contre-exemple dans le cadre multifractal. Le théorème 3.2 du chapitre 3 montrera que :

Soit $L^{p,s}$ un espace de Sobolev tel que $s - \frac{d}{p} > 0$. Alors :

- Pour presque toute fonction $f \in L^{p,s}$, pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, l'exposant de Hölder de f en x vaut $h_f(x) = s$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, pour presque toute fonction f de $L^{p,s}$, l'exposant de Hölder de f en x vaut $h_f(x) = s - \frac{d}{p}$.

Autrement dit, suivant l'ordre des quantificateurs, on peut montrer qu'un même ensemble est Haar-nul dans une direction et prévalent dans l'autre. En réalité, même si le théorème 2.11 n'admet pas d'extensions dans le cadre de la prévalence, avec certaines hypothèses supplémentaires, si l'un des espaces considérés est localement compact et avec une définition plus restrictive des ensembles Haar-nuls, un résultat partiel peut être obtenu, cf [17].

Théorème 2.12. — *Soient H et T deux espaces vectoriels métriques complets. Si T est localement compact, de mesure de Haar μ et $B \subset H \times T$ est un borélien, si toutes les mesures transverses considérées sont des mesures de Radon, on a équivalence entre :*

1. *La section $B(h)$ est Haar-nul μ -presque partout sur T pour presque tout $h \in H$.*
2. *L'ensemble B est Haar nul dans $H \times T$.*

Avant de démontrer ce résultat, nous avons besoin de quelques résultats préliminaires.

Définition 2.16. — Soit X un espace topologique. On appelle mesure de Radon sur X toute mesure ν définie sur la tribu borélienne et telle que :

- $\nu(K) < \infty$ pour tout K compact de T .
- $\nu(A) = \sup\{\nu(K); K \text{ compact inclus dans } A\}$ pour tout A borélien de T .

A l'aide de cette définition, nous pouvons énoncer le résultat suivant, [15].

Théorème 2.13. — (Radon-Nikodym) Soit X un espace métrique complet localement compact. Soient μ et ν deux mesures σ -finies sur X . Supposons de plus que ν est une mesure de Haar.

Si μ est absolument continue par rapport à ν , il existe une fonction $f \in L^1(X, \nu)$ telle que $\forall A \in \mathcal{B}(X)$:

$$(2.38) \quad \mu(A) = \int_A f d\nu.$$

Réciproquement, si il existe $f \in L^1(X, \nu)$ telle que pour tout $A \in \mathcal{B}(X)$, (2.13) est vérifiée, alors ν est absolument continue par rapport à ν .

Un autre résultat important est celui-ci, démontré dans [14].

Théorème 2.14. — Soient X et Y deux espaces métriques et soit μ (respectivement ν) une mesure de Radon sur X (respectivement Y). Alors :

1. si A est un ensemble borélien de $X \times Y$, et si μ et ν sont σ -finies, alors l'application $x \mapsto \nu(A_x)$ est borélienne sur X . De même, l'application $y \mapsto \mu(A_y)$ est borélienne sur X . De plus, d'après la théorème de Radon-Nikodym, il existe une unique mesure de Radon sur $X \times Y$ notée $\mu \otimes \nu$ telle que :

$$(2.39) \quad \int_A d(\mu \otimes \nu) = \int_X \nu(A_x) d\mu = \int_Y \mu(A_y) d\nu.$$

2. Si f est une application continue de X dans Y et $\mu(X) < \infty$ alors la mesure $\mu_f(A) := \mu(f^{-1}(A))$ définit une mesure de Radon sur Y .

Remarquons que les énoncés des théorèmes 2.38 et 2.14 sont donnés dans le cadre des espaces métriques, ce cadre étant celui qui nous intéresse pour la démonstration. Ils sont cependant aussi vrais dans des espaces topologiques.

Démonstration du théorème 2.12. — Comme T est localement compact, il existe une mesure de Haar sur T , notée μ . On note alors p_T une mesure de probabilité de Radon sur T équivalente à μ .

• $1 \Rightarrow 2$ Soit B tel que $B(h) = \{t \in T : (h, t) \in H \times T\}$ soit de mesure nulle pour μ . Soit $B_H = \{h \in H : \mu(B(h)) = 0\} = \{h \in H : p_T(B(h)) = 0\}$, par définition de p_T . Cet ensemble est Haar-nul dans H donc il existe une mesure de

probabilité p sur H telle que $\forall h \in H \ p(h + B_H) = 0$. Comme p_T est une mesure de Radon, et p est σ -finie par définition, d'après le théorème 2.14, il existe une unique mesure de Radon sur $H \times T$ définie par :

$$\int_B d(p \otimes p_T) = \int_T p(B(h)) dp_T = \int_H p_T(B(t)) dp.$$

Soit $(h_0, t_0) \in H \times T$ on va calculer maintenant $p \otimes p_T((h_0, t_0) + B)$:

$$p \otimes p_T((h_0, t_0) + B) = \int_{B+(h_0, t_0)} d(p \otimes p_t) = \int_{H+h_0} p_T(t_0 + B(h)) dp = 0.$$

Car $\mu(B(h)) = \mu(t_0 + B(h)) = 0$ donc $p_T(t_0 + B(h)) = 0$. Et A est bien un borélien de $H \times T$ muni de la mesure $p \otimes p_T$. On a donc une mesure transverse à B donc B est Haar-nul.

• 2 \Rightarrow 1 Soit δ la mesure de Dirac sur H . On définit sur $H \times T$ la mesure $\mu = \delta \otimes p_T$. Soit p une mesure transverse à B . On définit B_H comme précédemment, et on définit une mesure $p_H(A) = p(A \times T)$ pour tout borélien $A \subset H$. Soit $h_0 \in H$ fixé, alors :

$$0 = \mu * p((h_0, 0) + B) = \int_{H \times T} \mu(B + (h_0 - h, -t)) dp(h, t)$$

Or l'application $(h, t) \mapsto p_T((B + (0, -t))_H(h - h_0)) = \mu(B + (h_0 - h, -t))$, est borélienne sur $(h_0 + B_H) \times T$. $\mu(h_0 + B_H) = p((h_0 + B_H) \times T) = 0$. Donc $B(h)$ est Haar-nul. On a donc le résultat annoncé. □

L'équivalent du théorème 2.11 est donné par le théorème de Kuratowski-Ulam, cf [80], dans le cas des ensembles de première catégorie par

Théorème 2.15. — *Soient X et Y deux espaces métriques complets. Si E est un ensemble de $X \times Y$ de première catégorie alors pour tout $x \in X$ hors d'un ensemble de première catégorie, $E_x := \{y \in Y : (x, y) \in E\}$ est de première catégorie. Le même résultat est vrai pour $E_y := \{x \in X : (x, y) \in E\}$ pour quasi-tout $y \in Y$.*

Une fois encore ce théorème n'a pas d'équivalent dans le cadre de la porosité. Cette fois le résultat de Preiss et Zajíček [83] est beaucoup plus fort car même en dimension finie, on ne trouve pas de version forte du théorème de Kuratowski-Ulam. Ils donnent même un contre-exemple :

Proposition 2.15. — *Il existe un ensemble $M \subset \mathbb{R}^2$ σ -poreux tel que l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}; \mathcal{L}(\mathbb{R} \setminus M_x) = 0\}$ est de seconde catégorie.*

Un ensemble de mesure nulle étant aussi d'intérieur vide, d'après cette proposition, il existe un ensemble σ -poreux dans \mathbb{R}^2 tel que sa section dans \mathbb{R} soit

dense. En particulier, celle-ci n'est pas poreuse.

Dans le cas des ensembles Haar-nuls, nous avons regardé si nous pouvions trouver une version faible du théorème 2.11 en faisant quelques restrictions quand à l'espace que nous utilisons. Pour cela, nous considérons des espaces ayant certaines propriétés métriques. Dans le cas présent, nous allons chercher si avec des hypothèses supplémentaires sur l'espace, nous pouvons trouver une version faible du théorème de Kuratowski-Ulam. Une fois encore, ce résultat est démontré dans [83].

Avant de donner le résultat, rappelons les définitions des différentes notions de porosité que nous utilisons :

Définition 2.17. — Soient (X, ρ) et (Y, ν) deux espaces métriques et $X \times Y$ muni de la distance somme ω . Soit $c > 0$ une constante fixée. On dit que $A \subset X \times Y$ est c -poreux dans la direction de X en un point $a = (a_1, a_2) \in X \times Y$ si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $b \in X$ et $r > 0$ tels que $\omega(a, (b, a_2)) < \varepsilon$, $r > c\omega(a, (b, a_2))$ et $B((b, a_2), r) \cap A = \emptyset$.

Théorème 2.16. — Soient (X, ρ) et (Y, μ) deux espaces métriques. Soit $X \times Y$ le produit de ces deux espaces muni de la distance somme. Soit $A \subset X \times Y$ un ensemble σ -poreux et $0 < c < 1$ donné. Alors A peut s'écrire $A = A_1 \cup A_2$ où A_1 est σ - c -poreux dans la direction de X et A_2 est σ - c -poreux dans la direction de Y .

Ce théorème est une conséquence du lemme suivant.

Lemme 2.4. — Soient (X, ρ) et (Y, ν) deux espaces métriques et $X \times Y$ muni de la distance somme ω et soit $0 < \alpha < 1/2$ donné. Si un ensemble $A \subset X \times Y$ est $(1 - \alpha)$ -poreux en un point $a = (a_1, a_2) \in X \times Y$, alors ou bien A est $(1 - 2\alpha)$ -poreux en a dans la direction de X ou A est $(1 - 2\alpha)$ -poreux en a dans la direction de Y .

Démonstration : Soit $a = (a_1, a_2) \in X \times Y$ fixé. Supposons que le lemme ne soit pas vrai. Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $(b_1, b_2) \in X \times Y$, et $\forall (r_1, r_2) > 0$ on ait à la fois :

$$\begin{cases} \text{si } B((b_1, a_2), r_1) \cap A = \emptyset \text{ et } \rho(a_1, b_1) < \varepsilon, & r_1 \leq (1 - 2\alpha)\rho(a_1, b_1) \\ \text{si } B((a_1, b_2), r_2) \cap A = \emptyset \text{ et } \nu(a_2, b_2) < \varepsilon, & r_2 \leq (1 - 2\alpha)\nu(a_2, b_2) \end{cases}$$

Nous allons maintenant réécrire la phrase : A est $(1 - \alpha)$ -poreux en a . A est $(1 - \alpha)$ -poreux si $\forall \varepsilon > 0, \exists y \in X \times Y$ et $r > (1 - \alpha)\omega(a, y)$ tels que $\omega(a, y) < \varepsilon$

et $A \cap B(y, r) = \emptyset$. Il existe donc un point $(b_1, b_2) \in X \times Y$ et $r > (1 - \alpha)\omega(a, b)$ tels que $\omega(a, b) < \varepsilon$ et $A \cap B(b, r) = \emptyset$. Comme r_1 et r_2 peuvent prendre n'importe quelle valeurs, on peut fixer $r_1 = r - \nu(a_2, b_2)$ et $r_2 = r - \rho(a_1, b_1)$. Supposons que $r_1 > 0$, et considérons $z \in B((b_1, a_2), r_1)$. Dans ce cas,

$$\begin{aligned}\omega(z, (b_1, a_2)) &< r_1 \\ \rho(z_1, b_1) + \nu(z_2, a_2) &< r_1 \\ \rho(z_1, b_1) + \nu(z_2, a_2) &< r - \nu(a_2, b_2) \\ \rho(z_1, b_1) + \nu(z_2, a_2) + \nu(a_2, b_2) &< r \\ \rho(z_1, b_1) + \nu(z_2, b_2) &< r\end{aligned}$$

et $B((b_1, a_2), r_1) \subset B((b_1, b_2), r)$, donc $B((b_1, a_2), r_1) \cap A = \emptyset$ et $\rho(a_1, b_1) < \omega(a, b) < \varepsilon$. De plus,

$$\begin{aligned}r - \nu(a_2, b_2) &\leq (1 - 2\alpha)\rho(a_1, b_1) \\ r - \rho(a_1, b_1) &\leq (1 - 2\alpha)\nu(a_2, b_2) \\ r &\leq (1 - \alpha)\omega(a, b)\end{aligned}$$

Ce qui est en contradiction avec l'hypothèse que A est $(1 - \alpha)$ -poreux en a . Donc soit A est $(1 - 2\alpha)$ -poreux en a dans la direction de X soit il est $(1 - 2\alpha)$ -poreux en a dans la direction de Y .

Pour en déduire le théorème, il suffit de remarquer que A peut donc se décomposer en un ensemble poreux dans la direction de X et d'un ensemble poreux dans la direction de Y . Comme on a pris une valeur fixée de α dans $(0, 1/2)$ le résultat reste vrai si A est poreux. Par stabilité par union dénombrable, on a aussi la même chose si A est σ -poreux. \square

Pour ce qui est des ensembles HP-petits, la question est encore irrésolue. Peut-on appliquer une version faible, voire une version forte, du théorème 2.11 à cette classe d'ensembles? Nous allons voir dans le chapitre 5, et plus exactement dans le théorème 5.1, qu'en toute généralité la réponse à cette question est négative.

2.5. Les autres notions

Pour clore ce chapitre, nous pouvons dire deux mots sur d'autres classes d'ensembles petits. Nous verrons dans le chapitre 5 si elles sont adaptées aux problèmes de régularité.

Nous avons déjà mentionné les notions purement topologique liées à la porosité et que l'on peut trouver dans [96].

Nous pouvons tout d'abord remarquer, d'après les exemples que nous avons vus, qu'en dimension infinie les compacts sont petits, et ce quelque soit la définition de "petit" que nous prenons parmi celles que nous avons définies dans ce chapitre. Si nous rajoutons à cette remarque les propriétés de σ -idéal requises, nous pouvons alors naturellement définir dans un espace de Banach de dimension infinie une classe d'ensembles pouvant être inclus dans une union dénombrable de compacts. En effet, si A est un tel ensemble, il est borélien comme union de fermés, et comme les compacts sont d'intérieur vides et fermés, A est de première catégorie au sens de Baire. De plus, les compacts sont Haar-nuls.

Notons \mathcal{C} la classe des ensembles inclus dans une union de compacts. Alors si A et B appartiennent à \mathcal{C} , $A \cup B$ aussi par définition. De plus si $A \in \mathcal{C}$ et $B \subset A$, alors B est aussi inclus dans une union dénombrable de compacts. La classe \mathcal{C} vérifie donc bien la propriété de σ -idéal. De plus tous les éléments de \mathcal{C} sont d'intérieur vide, par le théorème de Riesz.

Comme nous le verrons dans le chapitre 5, cette classe \mathcal{C} est en général trop restrictive pour les problèmes qui nous intéressent. Nous verrons cependant quelques propriétés génériques en ce sens.

Passons maintenant aux notions de théorie de la mesure telles que les ensembles nuls au sens gaussien de Phelps, voir [81], ou les ensembles nuls au sens de Aronszajn, cf [7]. Ces ensembles offrent un cadre plus fort que celui des ensembles Haar nul, mais n'ont aucun lien avec les notions de porosité ou d'ensembles HP-petits.

Définition 2.18. — *Soit X un espace de Banach séparable et λ une mesure de probabilité borélienne sur X ; λ est une mesure gaussienne si pour tout $f \in X^*$, $f \neq 0$, la mesure $\mu = \lambda \circ f^{-1}$ est une mesure gaussienne non-dégénérée sur \mathbb{R} .*

Définition 2.19. — *Soit X un espace de Banach séparable. Un borélien B de X est dit nul au sens gaussien de Phelps si $\mu(B) = 0$ pour toute mesure gaussienne non-dégénérée μ sur X .*

Voyons maintenant quelques propriétés de ces ensembles, que nous ne démontrerons pas ici.

Proposition 2.16. — *Soit X un espace de Banach séparable.*

1. *La classe des sous-ensembles de X nuls au sens gaussien de Phelps forme un σ -idéal (cf [81]).*
2. *Si B est nul au sens gaussien de Phelps, alors B est Haar-nul (cf [89]).*
3. *En dimension finie, nul au sens gaussien de Phelps \Leftrightarrow nul pour la mesure de Lebesgue.*
4. *En dimension infinie, il existe un compact qui ne soit pas nul au sens gaussien de Phelps ([81]).*

Remarque :

- La démonstration du point 3 est triviale. Il suffit pour cela de remarquer qu'en dimension finie, une mesure gaussienne est à densité par rapport à la mesure de Lebesgue.
- Le point 4 de la proposition précédente est déjà gênant en lui-même. Il paraît en effet naturel de demander qu'un compact en dimension infinie soit un ensemble petit pour les notions que nous utilisons. Il semblerait alors que cette notion de généricité ne soit pas assez restrictive. On verra dans le chapitre 5 d'autres exemples confirmant cette impression.

Voyons maintenant les ensembles nuls au sens de Aronszajn.

Définition 2.20. — *Soit X un espace de Banach séparable. Un sous-ensemble S de X est dit nul au sens de Aronszajn si pour toute suite $\{e_1, \dots, e_n, \dots\}$ engendrant un sous-espace vectoriel dense de X , il existe une partition de $S = \bigcup_i S_i$, où les S_i sont des ensembles boréliens, tels que pour tout i , la mesure de Lebesgue engendrée par e_i est transverse à S_i .*

Dans [25], M. Csörnyei a démontré que ces notions d'ensembles nuls au sens de Phelps et au sens d'Aronszajn coïncident dans les espaces de Banach séparables.

En reprenant l'exemple du mouvement brownien fractionnaire dans le cadre des ensembles nuls au sens gaussien de Phelps, nous allons voir comment il peut s'appliquer à l'exemple des fonctions continues nulle part C^ε .

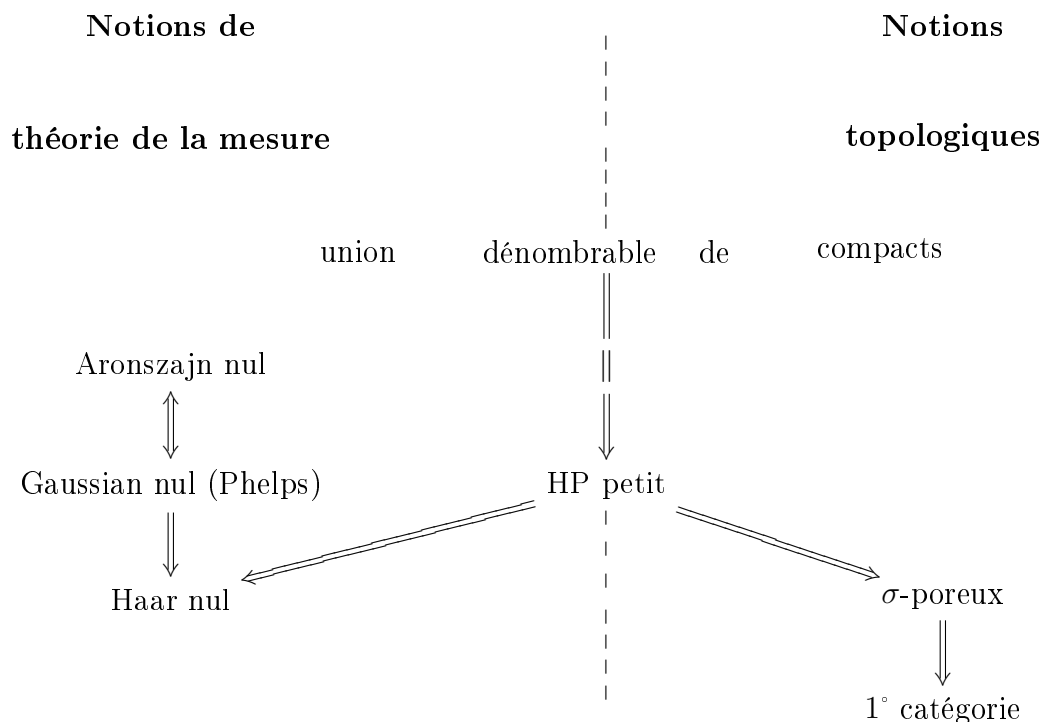
Exemple. — *Quelque soit $\varepsilon > 0$, l'ensemble des fonctions continues et bornées sur $[0, 1]^d$ et C^ε en au moins un point de $[0, 1]^d$ n'est pas nul au sens gaussien de Phelps.*

Démonstration : En effet, le mouvement brownien fractionnaire définit une mesure gaussienne sur $\mathcal{C}([0, 1]^d)$. Si on considère alors un mouvement brownien fractionnaire de paramètre de Hurst $\alpha > \varepsilon/2$, il est $C^\varepsilon(x)$ quelque soit $x \in [0, 1]^d$.

Il existe donc une mesure gaussienne sur $\mathcal{C}([0, 1]^d)$ pour laquelle l'ensemble des fonctions $C^\varepsilon([0, 1]^d)$ n'est pas de mesure nulle. \square

D'autres classes d'ensembles, tels que les ensembles nuls au sens de Preiss et Tišer, cf [82], ou les ensembles Γ -nuls, cf [61, 62], ont été introduits plus récemment pour généraliser encore ces notions.

A titre de résumé par rapport à tout ce que nous venons de dire, les liens entre les différentes notions de genericité peuvent formellement se schématiser de la façon suivante.



Avec la convention $A \Rightarrow B$: un ensemble petit pour la notion A est petit pour la notion B .

Comme nous l'avons vu tout au long de ce chapitre, nous testons ces différentes notions sur des exemples classiques d'analyse. Les trois problèmes fondamentaux que nous regardons sont :

- Les fonctions continues sont-elles dérivables ?
- Dans un espace de Banach de dimension infinie, les compacts sont-ils négligeables ?
- Les fonctions analytiques sur le disque unité admettent-elles le cercle comme frontière naturelle ?

Il semble en effet naturel de considérer les compacts d'un espace de Banach en dimension infinie. On sait qu'ils sont de première catégorie au sens de Baire, pourquoi alors ne seraient-ils pas petits dans d'autres cadres. De même, les deux autres problèmes sont des exemples classiques, puisque historiquement, ce sont ceux qui ont été mis en avant dans les prémisses des problèmes de genericité.

Les deux premières questions ont déjà été évoquées tout au long de ce chapitre. Nous développerons la dernière dans le chapitre 7.

CHAPITRE 3

RÉGULARITÉ PRÉVALENTE DANS UN ESPACE DE SOBOLEV DONNÉ

3.1. Introduction

Quand on s'intéresse à un espace fonctionnel, la question de la régularité de ses éléments vient naturellement à l'esprit. Dans un espace fonctionnel donné, par exemple dans l'espace des fonctions continues et bornées sur \mathbb{R} , on peut exhiber des fonctions ayant des propriétés de régularité ponctuelle différentes. Il existe aussi bien des fonctions ayant partout un exposant de Hölder fini donné, la fonction de Weierstrass par exemple, ou des fonctions dont l'exposant de Hölder varie, comme la fonction de Riemann. On ne peut donc évidemment pas espérer avoir des résultats de régularité ponctuelle non triviaux valables pour toutes les fonctions de l'espace. Par contre, nous allons voir qu'ils existent souvent des résultats précis de régularité ponctuelle valable génériquement sur ces espaces.

Dans un espace de Sobolev, la difficulté est accrue du fait qu'ils ne sont pas nécessairement inclus dans l'espace des fonctions continues. En effet, si certains espaces de Sobolev s'injectent naturellement dans des espaces de Hölder classiques, ce n'est pas le cas pour tous. Et dans tous les cas, le problème que l'on rencontre dans le cas des espaces de fonctions continues se pose encore. Certaines fonctions seront C^∞ alors que d'autres seront le moins régulières possibles. Comment et dans quel sens donner alors la régularité optimale dans un espace fonctionnel ? Un premier pas vers la réponse fut donné dans le cas des fonctions continues par S. Banach, dans [10] et par Mazurkiewicz, [70], qui montrèrent que dans $\mathcal{C}(\mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions qui sont partout C^1 est un ensemble de première catégorie au sens de Baire. Une étude ponctuelle, au sens de Baire, s'est ensuite développée avec notamment les travaux de Zamfirescu. Depuis, avec [38], nous savons que ce résultat est aussi valable au sens de la prévalence.

En ce qui concerne les espaces de Sobolev, nous allons montrer que presque toutes les fonctions, au sens de la prévalence sont multifractales, et nous allons

donner leur spectre de singularités. Ce résultat pourrait a priori être surprenant. En effet, jusqu'à peu, les fonctions multifractales, étaient vues comme exceptionnelles. Celles qui ont été étudiées avaient en général un caractère d'auto-similarités ou étaient des cascades multiplicatives. Dans le cadre de la turbulence, cadre qui servi de précurseur au sujet, de tels phénomènes d'auto-similarité était en effet présents. Il semblait alors "normal" de lier ces caractéristiques d'auto-similarités et de comportement multifractal. Cependant, dans [44], S. Jaffard montre déjà que dans un espace de Sobolev quasi-toutes, au sens de Baire, les fonctions sont multifractales. Dans ce cas, le théorème 3.1 nous semble moins étonnant. D'autant moins que si l'on regarde [50], où une majoration du spectre est donnée pour toutes les fonctions d'un espace de Sobolev, le résultat qui va suivre revient alors à dire que le pire cas possible est aussi celui qui arrive le plus souvent. Là encore, ce résultat pourrait paraître paradoxal. On peut en effet voir la notion de prévalence comme une généralisation de l'étude probabiliste des trajectoires de processus. Or on peut construire, comme nous le ferons dans la partie 5.3, des processus ayant la meilleure régularité possible. Mais on peut voir dans [13] que ce genre de comportement est celui qu'on observe le plus souvent dans le cadre de la prévalence.

Le théorème suivant nous donne la régularité de presque toutes les fonctions d'un espace de Sobolev au sens de la prévalence. Remarquons que ce résultat est le même que celui de [44] mais qu'il est obtenu dans un cadre différent. Nous ne démontrerons en fait pas ce théorème mais nous indiquerons tout à l'heure comment il peut se déduire du théorème 3.2.

Théorème 3.1. — *Soient $1 < p < \infty$ et $s > 0$.*

1. *Si $s - \frac{d}{p} \leq 0$, presque toute fonction de $L^{p,s}$ est nulle part localement bornée, et son spectre de singularités n'est pas défini.*
2. *Si $s - \frac{d}{p} > 0$, l'exposant de Hölder ponctuel de presque toutes les fonctions de $L^{p,s}$ est à valeurs dans $[s - \frac{d}{p}, s]$ et :*

$$(3.1) \quad \forall H \in [s - \frac{d}{p}, s] \quad d(H) = (H - s)p + d.$$

De plus pour presque tout f , pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, $h_f(x) = s$.

3. *Si $s - \frac{d}{p} > 0$, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^d$ fixé, pour presque tout $f \in L^{p,s}$, $h_f(x_0) = s - \frac{d}{p}$.*

Dans la suite, nous nous placerons dans le cadre des espaces de Besov plutôt que dans celui défini par les Sobolev. Il nous permettra en plus des autres avantages dont nous avons déjà parlé dans le chapitre 1 de donner une caractérisation borélienne des ensembles que nous étudions. Ce caractère est indispensable à l'étude de la prévalence. En effet, si nous ne regardons que les ensembles de

fonctions ayant une certaine régularité ponctuelle, ceux-ci ne sont pas forcément borélien. Pour s'en convaincre, nous renvoyons le lecteur à [69], où il est montré que dans l'ensemble des fonctions continues, celles qui sont différentiables en au moins un point ne forment pas un ensemble borélien. Dans la suite, à chaque fois que nous voudrions montrer qu'un ensemble est petit, nous utiliserons le fait qu'il est inclus dans un ensemble donné par des conditions sur les coefficients d'ondelette. Comme l'application qui à une fonction d'un espace de Besov ou de Sobolev associe ses coefficients d'ondelette est continue, on peut ainsi se ramener plus facilement à des ensembles dénombrables.

Une fois que nous sommes convaincus de l'intérêt d'utiliser les ondelettes, il semble logique de regarder aussi les espaces de Besov. En effet, grâce aux injections entre les espaces de Besov et de Sobolev, $B_p^{s,1} \hookrightarrow L^{p,s} \hookrightarrow B_p^{s,\infty}$, [94], la démonstration est la même dans ces espaces, et ils offrent l'avantage d'avoir une caractérisation en ondelettes plus simple. De plus, dans le cas des espaces de Besov, certains résultats peuvent être raffinés. En jouant sur le troisième indice des espaces de Besov, nous pouvons en effet trouver des résultats différents dans les cas critiques. En effet, dans le théorème que nous venons d'énoncer, on peut constater que dans ce cas, les fonctions d'un espace de Sobolev sont presque toutes irrégulières. Nous allons voir dans le théorème suivant que suivant les valeurs des indices, presque toutes les fonctions de certains espaces de Besov critiques sont encore multifractales. A l'aide des notations du chapitre 1, nous pouvons énoncer le théorème suivant, qui est le point central de ce chapitre.

Théorème 3.2. — *Soient s, p, q trois réels vérifiant $0 < p \leq \infty$, $0 < q \leq \infty$ et $s > 0$.*

1. *Si $s - \frac{d}{p} > 0$, ou si $s - \frac{d}{p} = 0$ et $0 < q \leq \inf(p, 1)$. Alors pour presque toute fonction de $B_p^{s,q}$, le spectre de singularités est défini sur $[s - \frac{d}{p}, s]$, où il est donné par :*

$$(3.2) \quad \forall H \in [s - \frac{d}{p}, s] \quad d(H) = (H - s)p + d.$$

En particulier, pour presque toute fonction de $B_p^{s,q}$, pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, $h_f(x) = s$.

2. *Si $s - \frac{d}{p} < 0$ ou $s - \frac{d}{p} = 0$ et $q > 1$, alors presque toute fonction de $B_p^{s,q}$ est nulle part localement bornée.*
3. *Si $s - \frac{d}{p} = 0$ et $0 < p \leq q \leq 1$, alors le spectre de singularités de presque toute fonction de $B_p^{s,q}$ appartient à $[0, \frac{d}{q}]$ et*

$$(3.3) \quad \forall H \in [0, \frac{d}{q}] \quad d(H) = Hq.$$

4. Soient $0 < p < \infty$, $0 < q < \infty$ et $s - \frac{d}{p} > 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, pour presque toute fonction f de $B_p^{s,q}$, l'exposant de Hölder de f en x vaut $h_f(x) = s - \frac{d}{p}$.

Remarque : Si nous comparons les points 1 et 4 de ce théorème, nous voyons que suivant l'ordre des quantificateurs, le résultat que nous obtenons est totalement différent. En effet, dans le premier cas, la régularité de presque toute fonction en presque tout point vaut s , qui est la meilleure que nous pouvons obtenir. Dans le deuxième cas, du fait de l'injection $B_p^{s,q} \hookrightarrow C^{s-\frac{d}{p}}$ nous voyons que nous avons la pire possible. Ce résultat confirme ce que montrait [21], et que nous avons rappelé dans la partie 2.11, à savoir qu'il n'y a pas d'équivalent du théorème de Fubini dans le cas de la prévalence.

Ce résultat se raffine d'ailleurs avec le module de continuité. Nous allons le voir dans la partie 3.2.3.

Grâce aux injections entre espaces de Besov et de Sobolev donnés par la proposition 1.11, pour obtenir le théorème 3.1, il faut prendre $q = 1$ dans la démonstration du théorème 3.2.

Pour pouvoir démontrer le théorème 3.2, nous aurons besoin de la proposition suivante, qui est démontrée dans [50].

Proposition 3.1. — Soit $f \in B_p^{s,\infty}(\mathbb{R}^d)$ alors :

1. Si $\alpha > s - \frac{d}{p} > 0$, alors :

$$(3.4) \quad \dim_H(\{x \in \mathbb{R}^d \text{ tel que } f \notin C^\alpha(x)\}) \leq (\alpha - s)p + d.$$

2. Si $s - \frac{d}{p} = 0$, alors :

$$(3.5) \quad \dim_H(\{x \in \mathbb{R}^d \text{ tel que } f \notin C^\alpha(x)\}) \leq \alpha p.$$

3. Si $s - \frac{d}{p} < 0$, et si il existe $\beta > 0$ tel que f appartient aussi à $C^\beta(\mathbb{R}^d)$ alors :

$$(3.6) \quad \dim_H(\{x \in \mathbb{R}^d \text{ tel que } f \notin C^\alpha(x)\}) \leq \frac{\alpha}{\beta}(d - (s - \beta)p).$$

Démontrons maintenant le théorème. Nous en profiterons, dans un second temps, pour regarder d'autres notions de régularité, comme l'exposant de Hölder local, défini dans [88], ou le module de continuité ponctuel. Nous ne ferons que la démonstration dans le cadre des espaces de Besov, le cas Sobolev s'obtenant en prenant $q = 1$ dans la suite.

3.2. Le cas régulier

3.2.1. Démonstration du point 1. — Dans ce qui suit, nous nous plaçons dans un espace de Besov $B_p^{s,q}$ où $s - \frac{d}{p} > 0$ et $0 < q \leq \infty$, $0 < p \leq \infty$. Si $0 < p \leq 1$, ces espaces ne définissent plus des espaces de Banach, mais munis de la distance (1.34) ce sont tout de même des espaces vectoriels métriques complets et séparables, et comme nous l'avons déjà vu ceci nous suffit pour appliquer la prévalence.

Pour démontrer cette partie, nous allons passer par la technique de l'espace sonde, que nous avons déjà définie. Cet espace sonde nous donnera alors comme mesure transverse la mesure de Lebesgue portée par la boule unité en dimension finie, qui est bien borélienne et à support compact.

Le résultat que nous cherchons à montrer est du type multifractal. Pour mettre cela en évidence, nous allons utiliser certaines propriétés des réels, à savoir leur vitesse d'approximation par des dyadiques, ce qui fera alors intervenir des ensembles fractals.

Définition 3.1. — On dit qu'un point $x_0 \in \mathbb{R}^d$ est α -approximable par des dyadiques s'il existe une suite infinie $((k_n, j_n))_{n \in \mathbb{N}}$, $k_n \in \mathbb{Z}^n$ et $j \in \mathbb{Z}$ telle que :

$$(3.7) \quad \left| x_0 - \frac{k_n}{2^{j_n}} \right| \leq \frac{1}{2^{\alpha j_n}}$$

L'exposant dyadique de x_0 est défini par :

$$\alpha(x_0) = \sup \{ \alpha : x_0 \text{ est } \alpha\text{-approximable par des dyadiques} \}$$

Remarquons dans cette définition que l'exposant dyadique est forcément plus grand que 1. En effet, pour $\alpha = 1$ on obtient juste que x_0 appartient à un cube dyadique.

Définition 3.2. — Soit $\alpha \in [1, \infty)$ fixé. On note

$$(3.8) \quad F_\alpha = \left\{ x : \exists \text{ deux suites } (k_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ et } (j_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ telles que } j_n \rightarrow \infty \text{ et } \left| x - \frac{k_n}{2^{j_n}} \right| \leq \frac{1}{2^{\alpha j_n}} \right\}.$$

On peut aussi définir F_α par :

$$(3.9) \quad F_\alpha = \limsup_{j \rightarrow \infty} F_\alpha^j$$

où $F_\alpha^j = \bigcup_{\chi} \chi + \left[-\frac{1}{2^{\alpha j}}; \frac{1}{2^{\alpha j}} \right]^d$ (χ désigne ici le point dyadique $(\frac{k_1}{2^j}, \dots, \frac{k_n}{2^j})$).

Dans la suite on notera $F_\alpha^{i,l}$ le cube $\frac{l}{2^i} + \left[-\frac{1}{2^{\alpha j}}; \frac{1}{2^{\alpha j}} \right]^d$.

Nous utiliserons aussi la proposition suivante, issue de [44].

Proposition 3.2. — *Quelque soit $\alpha \geq 1$,*

$$(3.10) \quad \dim_H(F_\alpha) \geq \frac{d}{\alpha}.$$

Remarque : A partir de l'équation (3.9), on voit que la suite $(F_\alpha^j)_{j \in \mathbb{N}}$ est décroissante en α , donc en passant à la limite supérieure on sait que F_α est décroissante en α .

Dans un premier temps, nous allons travailler sur $[0, 1]^d$. Une fois le théorème démontré dans ce cas, il est aussi vrai pour n'importe quel cube unité de \mathbb{R}^d et par stabilité de la prévalence par intersection dénombrable le résultat est vrai sur \mathbb{R}^d tout entier. Dans la suite, on note λ le cube dyadique $\lambda = \frac{k}{2^j} + [0, 2^{-j}]^d$.

Dans la plus grande partie de la démonstration nous travaillerons à $\alpha \geq 1$ fixé. Nous verrons à la fin comment déduire le point 1 des résultats obtenus dans ce cas. Soit donc $\alpha \geq 1$ fixé. Pour tout $\varepsilon > 0$, on pose $N = 2^{dn} > \left[\frac{d}{\alpha\varepsilon}\right] + 1$. On construit alors un espace sonde P engendré par les fonctions $\{g_1, \dots, g_N\}$ définies de la façon suivante.

On découpe chaque cube dyadique λ de taille 2^{-dj} en 2^{dn} sous-cubes $m(\lambda)$. On pose $a = \frac{1}{p} + \frac{2}{q}$. Soit $J \leq j$ et $K \in \mathbb{Z}^d$ défini par $\frac{K_i}{2^J} = \frac{k_i}{2^j}$ et tel qu'il existe un indice i pour lequel $\frac{K_i}{2^J}$ est une fraction irréductible. Pour $m = 1, \dots, N$ on définit les coefficients d_λ^m de la fonction g_m par :

$$(3.11) \quad \begin{cases} \forall \lambda, & d_{m(\lambda)}^m = j^{-a} 2^{\left(\frac{d}{p}-s\right)j} 2^{-\frac{d}{p}J} \\ d_{l(\lambda)}^i = 0 & \text{si } l \neq m(\lambda) \end{cases}.$$

Autrement dit, pour chaque sous-cube λ' de volume $2^{-d(n+j)}$, une seule fonction g_m a un coefficient non nul. Les deux lemmes qui suivent énoncent les propriétés des fonctions g_m dont nous aurons besoin.

Lemme 3.1. — $\forall m = 1, \dots, N \quad g_m \in B_p^{s,q}$.

Démonstration :

$$\begin{aligned}
g_m \in B_p^{s,q} &\Leftrightarrow \sum_{j \geq 0} \left(\sum_{k \in \{0, \dots, 2^j - 1\}^d} |c_{j,k} 2^{(s-\frac{d}{p})j}|^p \right)^{\frac{q}{p}} < \infty \\
&\Leftrightarrow \sum_{j \geq 0} \left(\sum_{J=0}^j \sum_{K \in \{0, \dots, 2^J - 1\}^d} \frac{1}{j^{ap}} 2^{-dJ} \right)^{\frac{q}{p}} < \infty \\
&\Leftrightarrow \sum_{j \geq 0} \left(\sum_{J=0}^j \frac{1}{j^{ap}} \right)^{\frac{q}{p}} < \infty \\
&\Leftrightarrow \sum_{j \geq 0} j^{\frac{q}{p} - aq} < \infty \\
&\Leftrightarrow \frac{q}{p} - aq < -1 \\
&\Leftrightarrow a > \frac{1}{p} + \frac{1}{q}.
\end{aligned}$$

Pour chaque $\lambda = \lambda(j, k) = \frac{k}{2^j} + [0, 2^{-j}[^d$ est associé $K \in \mathbb{Z}^d$ tel que :

$$(3.12) \quad \begin{cases} \frac{k}{2^j} = \frac{K}{2^J} \\ \text{l'une au moins des coordonnées de } K \text{ est impaire} \end{cases}.$$

On peut donc découper la somme en λ suivant les valeurs prises par J , $0 \leq J \leq j$. On notera par la suite $J = J(j, k)$ et $K = K(j, k)$ l'ensemble des $J \leq j$ et des K tels que (3.12) soit vérifiée.

Pour un J donné on a 2^{dJ} éléments dont la somme donne

$$\sum_{\lambda \in \Lambda_j} 2^{-Jd} \leq \sum_{J=0}^j \sum_{\lambda \in \Lambda_J} 2^{-dJ} \leq j.$$

Donc $\|g_m\| \leq \sup_j \frac{1}{j^{pa-1}} < \infty$. Donc on a bien $g_m \in B_p^{s,q}$.

□

Lemme 3.2. — *Pour $m = 1, \dots, N$, les fonctions g_m ont toutes le même exposant de Hölder ponctuel :*

$$\forall x \in \mathbb{R}^d \quad h_g(x) = s - \frac{d}{p} + \frac{d}{\alpha(x)p}$$

où $\alpha(x)$ est donné dans la définition 3.1.

Démonstration : Comme les fonctions g_m sont dans $B_p^{s,q}$ et que $s > \frac{d}{p}$, elles sont uniformément höldériennes et on peut calculer leur exposant de Hölder à

l'aide de la formule (1.17). Soit donc $x_0 \in \mathbb{R}^d$ un point α -approximable, et considérons l'ensemble des sous-suites (K_n, J_n) de la définition 3.1. Dans ce cas en prenant $j = [\alpha J_n]$ et k tel que $k2^{-j} = K_n 2^{-J_n}$ on obtient dans (1.17) : $h_g(x_0) = \liminf_{\lambda \rightarrow x_0} \frac{\log |c_{j,k}|}{\log(2^{-j} + |x_0 - \lambda|)} \leq s - \frac{d}{p} + \frac{d}{\alpha p}$; par définition de $\alpha(x_0)$ on en déduit donc :

$$(3.13) \quad h_g(x_0) \leq s - \frac{d}{p} + \frac{d}{\alpha(x_0)p}.$$

Pour obtenir la minoration de l'exposant de Hölder ponctuel des g_m , nous allons utiliser les "wavelet leaders" définis par (1.18). Soit (j, k) dans le cône d'influence en x_0 . Par construction, si le cube $\lambda' \subset \lambda$, on a $\frac{k}{2^j} = \frac{k'}{2^{j'}}$, $j' \geq j$, et donc, si l'on note $J(j)$ l'entier J défini par (3.12), on a $J(j) \leq J(j')$, et donc $c_{j',k'} \leq c_{j,k}$; d'où, finalement, $d_j(x_0) = c_{j,k}$.

De plus, comme $\alpha(x_0)$ est la borne supérieure de l'ensemble des α tels que x_0 soit α -approximable, on a par définition :

$$(3.14)$$

$\forall \varepsilon > 0$ il existe une suite (K_n, J_n) telle que $J_n \rightarrow \infty$ et $\frac{1}{2^{(\alpha+\varepsilon)J_n}} < \left| x_0 - \frac{K_n}{2^{J_n}} \right| \leq \frac{1}{2^{\alpha J_n}}$.

Si J est tel que $\frac{k}{2^j} = \frac{K}{2^J}$, comme (j, k) est dans le cône d'influence en x_0 ,

$$2 \cdot 2^{-j} \geq \left| x_0 - \frac{k}{2^j} \right| = \left| x_0 - \frac{K}{2^J} \right| \geq \frac{C}{2^{(\alpha(x_0)+\varepsilon)J}},$$

donc il existe C' tel que $j - C' \leq (\alpha(x_0) + \varepsilon)J$. On en déduit que

$$c_{j,k} = \frac{1}{j^a} 2^{(\frac{d}{p}-s)j} 2^{-\frac{d}{p}J} \leq \frac{C}{j^a} 2^{(\frac{d}{p}-s)j} 2^{\frac{-dj}{p(\alpha(x_0)+\varepsilon)}}.$$

La proposition 1.4 implique alors que $h_{g_m}(x_0) \geq s - \frac{d}{p} + \frac{d}{p(\alpha(x_0) + \varepsilon)}$, pour tout $\varepsilon > 0$. \square

Passons maintenant à la démonstration du point 1 du théorème 3.2.

Lemme 3.3. — Soient $0 < p \leq \infty$, $0 < q \leq \infty$ et $s > 0$ tels que $s - \frac{d}{p} > 0$. Soit $\alpha \in [1, \infty)$ fixé. Soit $H(\alpha) = s - \frac{d}{p} + \frac{d}{\alpha p}$. Alors l'ensemble C défini par

$$C := \{f \in B_p^{s,q} \text{ tel que } \exists x \in F_\alpha \ h_f(x) \leq H(\alpha)\}$$

est prévalent.

Démonstration : Soit $\varepsilon > 0$ fixé et $\gamma = H(\alpha) + \varepsilon$. Dans un premier temps, nous allons montrer que l'ensemble S des fonctions C^γ en un point de F_α est Haar-nul. Nous utiliserons le lemme 1.2 qui permet de déterminer la régularité ponctuelle

d'une fonction à partir des modules de ses coefficients d'ondelette. L'ensemble S est inclus dans l'union dénombrable sur $c > 0$ et sur $\varepsilon > 0$ de :

$$S_{c,\varepsilon} := \left\{ f = \sum_{j,k} c_{j,k} \psi_{j,k} \in B_p^{s,q} \text{ tel que } \exists x \in F_\alpha \forall j, k \in \mathcal{K}_x(2) \quad |c_{j,k}| \leq c 3^\alpha 2^{-\gamma j} \right\}.$$

En utilisant (3.9), notons que F_α s'écrit comme la limite supérieure en i , d'une union de 2^{di} cubes. Soit :

$$S_{c,\varepsilon}(i, l) = \left\{ f \in B_p^{s,q} \text{ tel que } \exists x \in F_\alpha^{(i,l)}, \quad \forall j, k \in \mathcal{K}_x(2) \quad |c_{j,k}| \leq c 3^\alpha 2^{-\gamma j} \right\}$$

alors

$$S_{c,\varepsilon} \subset \limsup_{i \rightarrow \infty} \bigcup_{l \in \{0, \dots, 2^i - 1\}^d} S_{c,\varepsilon}(i, l).$$

Pour montrer que ces ensembles sont boréliens nous allons vérifier qu'ils sont fermés. En effet, considérons une suite $f_n \in S_{c,\varepsilon}(i, l)$, qui converge dans $B_p^{s,q}$. Dans ce cas, il existe une suite $(x_n)_n \in (0, 1)^d$, telle que la fonction f_n soit (c, γ) régulière en x_n . Mais $F_\alpha^{(i,l)}$ est compact dans \mathbb{R}^d donc il existe une sous-suite $(x_{i_n})_{n \in \mathbb{N}}$ de la suite x_n qui converge vers $x \in F_\alpha^{(i,l)}$. L'application qui à f associe un coefficient d'ondelette, donnée par (1.11), est continue dans $B_p^{s,q}$. Les coefficients d'ondelette $c_{j,k}^n$ de f_n convergent donc vers les coefficients $c_{j,k}$ de f .

Soit J fixé. Pour n assez grand, on a $|x_{i_n} - x| \leq 2^{-J}$ et

$$\forall \varepsilon > 0 \forall j \leq J \text{ et } k \text{ tels que } (j, k) \in \mathcal{K}_x(3) \quad |c_{j,k}^n - c_{j,k}| \leq \varepsilon 2^{-\gamma j}.$$

Et $|c_{j,k}^n| \leq c 3^\gamma 2^{-\gamma j}$ car $(j, k) \in \mathcal{K}_x(3)$. On en déduit donc que

$$\forall j \leq J \text{ et } k \text{ tels que } (j, k) \in \mathcal{K}_x(3) \quad |c_{j,k}| \leq (c 3^\gamma + \varepsilon) 2^{-\gamma j}.$$

Quand $J \rightarrow \infty$ et $\varepsilon \rightarrow 0$, on en déduit l'estimation recherchée pour les $c_{j,k}$. Donc f est (c, γ) régulière en x , donc elle appartient à $S_{c,\varepsilon}(i, l)$. Par conséquent, les ensembles $S_{c,\varepsilon}(i, l)$ et donc $S_{c,\varepsilon}$ sont boréliens.

Soient $i \in \mathbb{N}$ et $l \in \{0, \dots, 2^i - 1\}^d$ fixés. Considérons maintenant une fonction f quelconque dans $B_p^{s,q}$ de coefficients d'ondelette c_λ . On veut montrer que P est un espace sonde, et donc que la mesure de Lebesgue de $(f + P) \cap S_{c,\varepsilon}$ est nulle. Pour cela nous allons estimer la mesure de Lebesgue de $(f + P) \cap S_{c,\varepsilon}(i, l)$. Soient f_1 et f_2 deux fonctions de $f + P$, il existe donc $\beta_1 \in \mathbb{R}^N$ et $\beta_2 \in \mathbb{R}^N$ tels que, si l'on note $f_\beta = f + \sum_{m=1}^N \beta^m g_m$, les fonctions $f_1 = f_{\beta_1}$ et $f_2 = f_{\beta_2}$ appartiennent à $S_{c,\varepsilon}(i, l)$. Il existe alors x_1 et x_2 appartenant à $F_\alpha^{i,l}$ tels que :

$$\begin{cases} \forall j, \lambda \in \mathcal{K}_{x_1}(2) & |c_\lambda + \sum_m \beta_1^m d_\lambda^m| \leq c 3^\alpha 2^{-\gamma j} \\ \forall j, \lambda \in \mathcal{K}_{x_2}(2) & |c_\lambda + \sum_m \beta_2^m d_\lambda^m| \leq c 3^\alpha 2^{-\gamma j}. \end{cases}$$

Comme x_1 et x_2 appartiennent au même cube $F_\alpha^{i,l}$, $|x_1 - x_2| \leq \frac{2}{2^{\alpha i}}$. Par conséquent, à l'échelle $j = [\alpha i]$, il existe un λ appartenant à la fois à $\mathcal{K}_{x_1}(2)$ et $\mathcal{K}_{x_2}(2)$. En effet, si $\lambda \in \mathcal{K}_{x_1}(2)$, $|x_1 - \lambda| < \frac{2}{2^j}$, comme $|x_1 - x_2| \leq \frac{2}{2^{\alpha i}} < \frac{2}{2^j}$, $|x_2 - \lambda| \leq \frac{2}{2^j}$. Mais si on pose $j' = j + n$, il existe λ' pouvant s'écrire comme un $i(\lambda)$, où λ est un cube dyadique de volume 2^{-dj} appartenant au cône $\mathcal{K}_{x_1}(2)$ et au cône $\mathcal{K}_{x_2}(2)$. Considérons maintenant le coefficient d'ondelette de $f_{\beta_1} - f_{\beta_2}$ correspondant à ce cube λ' . Celui-ci vérifie que quelque soit $m = 1, \dots, N$:

$$(3.15) \quad |c_{m(\lambda)} + \sum_m \beta_m^1 d_m^m(\lambda) - (c_{m(\lambda)} + \sum_i \beta_m^2 d_m^m(\lambda))| \leq 2c2^{\gamma n} 3^\alpha 2^{-\gamma j'}$$

Par définition des fonctions g_m pour chaque $m(\lambda')$, un seul coefficient $d_{m(\lambda')}^{m_0}$ est non nul. Par conséquent,

$$|c_{m(\lambda')} + \sum_m \beta_m^1 d_m^m(\lambda') - (c_{m(\lambda')} + \sum_m \beta_m^2 d_m^m(\lambda'))| = |\beta_1^{m_0} - \beta_2^{m_0}| d_{m_0(\lambda')}^{m_0}.$$

Donc en utilisant (3.11) et (3.15), et en prenant comme norme dans \mathbb{R}^N , la norme du sup des coordonnées,

$$\|\beta^1 - \beta^2\| \leq 2c2^{\gamma n} 3^\alpha 2^{-(\gamma-H)j} j^a$$

Donc la mesure de l'ensemble des β tels que f_β appartienne à $S_{c,\varepsilon}(i,l)$ est inférieure à $(2c2^{\gamma n} 3^\alpha 2^{-(\gamma-H)\alpha i} (\alpha i)^a)^N$. Calculons maintenant la mesure de Lebesgue de l'ensemble des β tels que f_β soit (c, γ) régulière en un x appartenant à F_α . A une échelle i donnée, la mesure de Lebesgue de l'ensemble des β tels que f_β soit (c, γ) régulière en un x de F_α^i est la somme sur les $l \in \{0, \dots, 2^i\}^d$ cubes possibles. Autrement dit, cette mesure est inférieure à

$$\sum_{l \in \{0, \dots, 2^i\}^d} (2c2^{\gamma n} 3^\alpha 2^{-(\gamma-H)\alpha i} (\alpha i)^a)^N = (2c2^{\gamma n} 3^\alpha (\alpha i)^a)^N 2^{-N(\gamma-H)\alpha i + di}.$$

Or nous avons choisi N de sorte que $-N(\gamma - H)\alpha + d < 0$. Comme les $M_c(i, l)$ sont décroissants en i , on obtient :

$$\mathcal{L}(M_c) = \mathcal{L} \left(\limsup_i \bigcup_{l \in \{0, \dots, 2^i - 1\}^d} M_c(i, l) \right) = 0.$$

L'ensemble des fonctions (c, γ) régulières en un point de F_α est donc Haar-nul. En prenant l'union sur une suite c_n , et sur une suite γ_n tendant vers $H(\alpha)$ en décroissant, nous obtenons, en utilisant la propriété de σ -idéal que :

$$S(\alpha) := \{f \in B_p^{s,q} \text{ tel que } \exists x \in F_\alpha \ h_f(x) > H(\alpha)\}$$

est Haar-nul. □

Reprenons maintenant la démonstration du point 1 du théorème 3.2. Nous prenons une suite $(\alpha_n)_n$ dense dans $(1, \infty)$. L'union dénombrable S des $S(\alpha_n)$ est aussi Haar-nul. Par passage au complémentaire, l'ensemble :

$$M := \{f \in B_p^{s,q} \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N} \ \forall x \in F_{\alpha_n} \ h_f(x) \leq H(\alpha_n)\}$$

est un sous-ensemble prévalent de $B_p^{s,q}$.

Pour finir la démonstration du point 1 du théorème 3.2, il nous reste à calculer le spectre de singularités de presque toutes les fonctions de $B_p^{s,q}$. Pour cela, prenons $\alpha \in [1, \infty)$ quelconque. Soit $(\alpha_{k_n})_n$ une sous-suite croissante de la suite α_n qui tend vers α . Comme nous l'avons remarqué dans la définition 3.2, la suite $F_{\alpha_{k_n}}$ est alors décroissante. Donc $F_\alpha \subset F_{\alpha_{k_n}}$, quelque soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $F_\alpha \subset \bigcap_n F_{\alpha_{k_n}}$. On note $E_\alpha = \bigcap_n F_{\alpha_{k_n}}$.

De plus $H(\alpha) = s - \frac{d}{p} + \frac{d}{p\alpha}$, l'application $\alpha \mapsto H(\alpha)$ est donc décroissante et continue et $H(\alpha_{k_n}) \rightarrow H(\alpha)$. Donc pour tout $f \in M$, et pour tout $x \in E_\alpha$, pour tout n , $h_f(x) \leq H(\alpha_{k_n})$. En passant à la limite, on a

$$\forall f \in M \ \forall \alpha \geq 1 \ \forall x \in E_\alpha, \ h_f(x) \leq H(\alpha).$$

D'après l'équation (3.10), la dimension de Hausdorff de F_α est supérieure à $\frac{d}{\alpha}$, par conséquent la dimension de Hausdorff de E_α est supérieure à $\frac{d}{\alpha}$. Nous obtenons donc finalement,

$$\text{Pour presque tout } f \in B_p^{s,q} \ \dim_H(\{x \text{ tel que } h_f(x) \leq H\}) \geq (H - s)p + d.$$

De plus, dans le point 3.4 de la proposition 3.1, quelque soit $f \in B_p^{s,q}(\mathbb{R}^d)$,

$$\dim_H(\{x \text{ tel que } h_f(x) \leq H\}) \leq (H - s)p + d.$$

Et il est démontré dans [50] que la mesure de Hausdorff $\frac{d}{\alpha}$ -dimensionnelle de $\{x \text{ tel que } h_f(x) < H(\alpha)\}$ est nulle.

Par conséquent l'ensemble $\{x : h_f(x) < H\}$ est de mesure de Hausdorff $\frac{d}{\alpha}$ -dimensionnelle nulle. De plus, d'après [42] la mesure de Hausdorff $\frac{d}{\alpha}$ -dimensionnelle de F_α est strictement positive. Donc

$$\mathcal{H}_\alpha^{\frac{d}{\alpha}}(E_\alpha) \geq \mathcal{H}_\alpha^{\frac{d}{\alpha}}(F_\alpha) > 0.$$

Et

$$d(H) = \mathcal{H}_\alpha^{\frac{d}{\alpha}}(\{x \text{ tel que } h_f(x) = H\}) = \mathcal{H}_\alpha^{\frac{d}{\alpha}}(E_\alpha \setminus \{x \text{ tel que } h_f(x) < H\}) > 0.$$

Ce qui implique que pour tout $f \in M$:

$$(3.16) \quad \forall H \in [s - \frac{d}{p}, s] \quad d(H) = (H - s)p + d.$$

Ce qui achève la démonstration.

3.2.2. Exposant de Hölder et exposant local. — Pour finir sur ce cas, nous pouvons glisser quelques mots sur l'exposant de Hölder local, défini par S. Seuret et J. Levy-Vehel dans [88]. Pour cela, comme ses auteurs nous nous plaçons en dimension 1 et nous allons déterminer l'exposant de Hölder local de presque toute fonction d'un espace de Besov $B_p^{s,q}$ avec $s - \frac{1}{p} > 0$. Rappelons d'abord quelques uns de leurs résultats.

Définition 3.3. — Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ fixé et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $(\mathcal{O}_i)_{i \in I}$ une famille décroissante d'ouverts telle que $\cap \mathcal{O}_i = \{x_0\}$. Posons

$$(3.17) \quad \alpha_l(x_0) = \sup\{\alpha_l(\mathcal{O}_i) : i \in I\},$$

où $\alpha_l(\mathcal{O}) = \sup\{s : f \in C^s(\mathcal{O})\}$.

Remarquons que pour une fonction globalement höldérienne, ce qui est notre cas ici, l'exposant de Hölder local est inférieur ou égal à l'exposant de Hölder ponctuel. Mais en l'occurrence, ce qui nous intéresse est de déterminer l'exposant de Hölder local pour un ensemble prévalent de fonctions de $B_p^{s,q}$ et de comparer avec le résultat obtenu avec l'exposant ponctuel. Pour cela, nous avons besoin de la proposition suivante, elle aussi issue de [88].

Proposition 3.3. — Soit I un intervalle inclus dans \mathbb{R} et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit h_f et α_l respectivement les fonctions de Hölder ponctuelles et locales de f . Alors, pour tout $x \in I$

$$\alpha_l(x) \leq \min(h_f(x), \liminf_{t \rightarrow x} h_f(t)).$$

En reprenant la démonstration précédente et l'ensemble

$$S = \{f \in B_p^{s,q} \text{ tel que } \exists n \in \mathbb{N} \exists x \in F_{\alpha_n} \ h_f(x) > H(\alpha_n)\}$$

que nous avons défini plus haut des fonctions de $B_p^{s,q}$ dont le spectre de singularité est donné par 3.2, on voit que l'exposant de Hölder local d'une fonction f de S^c est exactement $\alpha_l(x) = s - \frac{1}{p}$ pour tout $x \in (0, 1)$. En effet, l'exposant de Hölder ponctuel d'un point dyadique vaut exactement $s - \frac{1}{p}$, ces points étant denses dans $(0, 1)$, quelque soit x , il existe une suite de dyadiques convergeant vers x d'où le résultat.

Ce résultat nous conforte dans l'impression que nous avons déjà qu'un formalisme multifractal ne peut être construit sur cet exposant de Hölder local car aucune différence n'apparaît entre deux points.

3.2.3. Le module de continuité. — On va maintenant raffiner les résultats de la partie précédente en déterminant le module de continuité d'un ensemble prévalent de fonctions de $B_p^{s,q}$ pour $s - \frac{d}{p} > 0$. Pour ce faire, on va dans un premier temps regarder si l'on peut trouver un ensemble prévalent de fonctions ayant un certain module de continuité presque sûr sur $(0, 1)^d$. Puis, dans un deuxième temps, on va regarder si, pour tout $x \in (0, 1)^d$, on peut trouver un ensemble prévalent de fonctions ayant une fonction θ donnée comme module de continuité en x .

3.2.3.1. Module de continuité presque sûr. — Nous allons maintenant finir la démonstration du point 1 du théorème 3.2 en regardant l'exposant presque-sûr de presque-toutes fonctions d'un espace de Besov régulier. Nous allons en fait montrer plus, puisque nous allons obtenir des modules de continuité de presque toutes fonctions.

Proposition 3.4. — *Soit $s > 0$ tel que $s - \frac{d}{p} > 0$ et θ un module de continuité tel que $\theta(2^{-j}) = 2^{-sj}\omega_j$ où $(\omega_j)_j$ est une suite non nulle de l^q . Alors pour presque toute fonction de $B_p^{s,q}$, pour presque tout x le module de continuité de f en x n'est pas un $o(\theta(2^{-j}))$.*

Remarquons que le fait que la fonction θ soit un module de continuité entraîne qu'elle est strictement croissante et donc que quelque soit $j > 0$, $\omega_j \neq 0$.

Démonstration : Par abus de langage, on notera dans la suite $k = \{k_1, \dots, k_d\}$ les cubes dans \mathbb{R}^d . Pour démontrer ce résultat, on considère le processus :

$$X_x = \sum_{i=1}^d \sum_{j \geq 0} \sum_{k \in \{0, \dots, 2^j - 1\}^d} \varepsilon_{j,k} 2^{-sj} \omega_j \psi^{(i)}(2^j x - k)$$

où les $(\varepsilon_{j,k})_{j,k}$ forment une suite de Rademacher. Autrement dit, ils forment une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi :

$$\forall j, k \quad \varepsilon_{j,k} = \begin{cases} 1 & \text{avec probabilité } \frac{1}{2} \\ -1 & \text{avec probabilité } \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Il est immédiat que le processus X_x appartient bien à $B_p^{s,q}$. Montrons qu'il définit une mesure borélienne sur $B_p^{s,q}$. La mesure μ engendrée par la suite de Rademacher est clairement borélienne de $\{-1, 1\}^{\mathbb{N}^{d+1}}$ à valeurs dans \mathbb{R}^+ . Il nous suffit donc de montrer que l'application ξ définie par :

$$\begin{aligned} \{-1, 1\}^{\mathbb{N}^{d+1}} &\rightarrow B_p^{s,q} \\ (\varepsilon_{j,k}) &\mapsto X_x(\varepsilon) \end{aligned}$$

est continue.

On prend comme distance sur l'ensemble $\{-1, 1\}^{\mathbb{N}^{d+1}}$ celle donnée par :

$$\forall \varepsilon, \tilde{\varepsilon} \in \{-1, 1\}^{\mathbb{N}^{d+1}}, \quad d(\varepsilon, \tilde{\varepsilon}) = 2^{-\inf\{j: \exists k, \varepsilon_{j,k} \neq \tilde{\varepsilon}_{j,k}\}}.$$

Quelque soit $N > 0$ on considère ε et $\tilde{\varepsilon}$, deux éléments de l'ensemble $\{-1, 1\}^{\mathbb{N}^{d+1}}$ tels que $d(\varepsilon, \tilde{\varepsilon}) < 2^{-N}$. Dans ce cas, $X(\varepsilon)$ et $X(\tilde{\varepsilon})$ ont les mêmes coefficients d'ondelette jusqu'à l'échelle $j = N$. La norme dans $B_p^{s,q}$ de $X(\varepsilon) - X(\tilde{\varepsilon})$ vérifie alors

$$\begin{aligned} \|X(\varepsilon) - X(\tilde{\varepsilon})\|^q &= \sum_{j \geq 0} \left(\sum_{k \in \{0, \dots, 2^j - 1\}^d} |\varepsilon_{j,k} - \tilde{\varepsilon}_{j,k}|^p 2^{-sjp} 2^{(sp-d)j} |\omega_j|^p \right)^{\frac{q}{p}} \\ &= \sum_{j \geq N+1} |\omega_j|^q \left(\sum_{k \in \{0, \dots, 2^j - 1\}^d} |\varepsilon_{j,k} - \tilde{\varepsilon}_{j,k}|^p 2^{-dj} \right)^{\frac{q}{p}} \\ &\leq \sum_{j \geq N+1} |\omega_j|^{q2^q}. \end{aligned}$$

Mais comme la suite $(\omega_j)_{j \in \mathbb{N}}$ appartient à l^q , cette quantité tend vers zéro quand N tend vers l'infini. Par conséquent, l'application ξ est continue et la mesure engendrée par le processus X est borélienne.

De plus, cet espace est compact et l'image d'un compact par une application continue est compacte. Donc μ est à support compact.

Grâce à (2.3), on veut montrer que pour toute fonction $f \in B_p^{s,q}$, presque-sûrement, pour presque tout x , $(f(x) + X_x)_{x \in (0,1)^d}$ n'a pas de module de continuité en x en $o(\theta)$. Dans le cas présent, on peut appliquer le théorème de Fubini, et inverser le presque-sûrement et pour tout x . On fixe une fonction f dans $B_p^{s,q}$ et un point $x \in (0, 1)^d$. Supposons que ϑ tel que $\vartheta(2^{-j}) = o(\theta(2^{-j}))$ soit un module de continuité de f en x . On considère alors les coefficients de $(f(x) + X_x)_{x \in (0,1)^d}$ correspondants aux indices j et k_i tels que $|2^j x - k_i| < 2$. Ceux-ci vérifient :

$$(3.18) \quad c_{j,k} + \varepsilon_{j,k} 2^{-sj} \omega_j = o(\theta(2^{-j})).$$

Par conséquent,

$$\varepsilon_{j,k} = \frac{-c_{j,k} 2^{sj}}{\omega_j} + o(1).$$

Autrement dit $\varepsilon_{j,k} \rightarrow \frac{-c_{j,k} 2^{sj}}{\omega_j}$ quand $j \rightarrow \infty$. Donc à partir d'un certain rang J_0 , les $\varepsilon_{j,k}$ situés dans le cône au dessus de x sont déterministes. Ceci correspond à la probabilité de l'intersection d'événements indépendants et de probabilité $\frac{1}{2}$. Donc la probabilité qu'une infinité de $\varepsilon_{j,k}$ soit égales est nulle. On en déduit que pour

tout x , la probabilité que ϑ soit un module de continuité de $(f(x) + X_x)_{x \in (0,1)}$ est nulle. Ce qui peut se traduire, en utilisant le théorème de Fubini, par :
 Pour presque tout f , presque sûrement, quelque soit $x \in [0, 1]^d$, ω n'est pas un module de continuité de f en x .

La démonstration précédente est vraie sur $[0, 1]^d$ mais elle est tout aussi vraie sur n'importe quel cube unité de \mathbb{R}^d . La classe des ensembles prévalents étant stable par intersection dénombrable, le résultat est vrai sur \mathbb{R}^d tout entier. \square

3.2.3.2. Module de continuité ponctuel. — Nous allons maintenant montrer le dernier point du théorème 3.2, et plus exactement, nous allons montrer que, si $s - \frac{d}{p} > 0$, si nous nous plaçons en un point fixé dans \mathbb{R}^d , le module de continuité d'un ensemble prévalent de fonctions n'est pas inférieur à un $o(|x|^{s-\frac{d}{p}})$.

Après avoir regardé quel module de continuité pouvait correspondre à presque toutes les fonctions, presque partout, il serait intéressant de regarder comment, pour x fixé, évolue le module de continuité d'un ensemble prévalent de fonctions. Le résultat que nous allons donner tout de suite permet en outre de répondre par la négative à une possibilité d'appliquer le théorème de Fubini dans notre étude.

Proposition 3.5. — Soient $0 < p \leq \infty$, $0 < q \leq \infty$ et $s - \frac{d}{p} > 0$. Soit θ un module de continuité en $o(|x|^{s-\frac{d}{p}})$. Pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^d$, l'ensemble des fonctions f de $B_p^{s,q}$ telles que il existe un polynôme P vérifiant :

$$|f(x) - P(x - x_0)| = \mathcal{O}(\theta(|x - x_0|))$$

est un ensemble Haar-nul.

Démonstration : Soit $x_0 \in \mathbb{R}^d$ fixé.
 Soit θ un module de continuité qui soit un $o(|x|^{s-\frac{d}{p}})$. Il peut alors s'écrire, en ne considérant que les dyadiques :

$$\theta(2^{-j}) = a_j 2^{-(s-\frac{d}{p})j}$$

où $a_j \rightarrow 0$ quand j tend vers l'infini. Pour montrer le résultat, nous allons utiliser le lemme suivant.

Remarque : Quelque soit la suite (a_j) tendant vers zéro à l'infini, il existe une suite $(b_j) \in l^q$ et une sous-suite (j_n) telle que

$$a_{j_n} = o(b_{j_n}).$$

En effet, comme la suite a_j tend vers zéro, on peut en extraire une sous-suite (j_n) telle que $|a_{j_n}| \leq 2^{-n}$ et on prend $b_{j_n} = 2^{-n/2}$ et $b_j = 0$ sinon. Alors

$$\left| \frac{a_{j_n}}{b_{j_n}} \right| \leq 2^{-n/2} \rightarrow 0.$$

Grâce à cette remarque, nous définissons une fonction g en prenant ses coefficients d'ondelette égaux à

$$d_{j,k} = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq j_n \\ 2^{-(s-d/p)j_n} b_{j_n} & \text{si } j = j_n \text{ et pour un cube } k_n \text{ tel que } |2^{j_n} x_0 - k_n| \leq 2 \end{cases}.$$

A chaque échelle, nous avons un seul coefficient non nul. Si nous calculons la norme de g dans $B_p^{s,q}$, nous obtenons :

$$\|g\|_{B_p^{s,q}}^q = \sum_j \left(\sum_k |d_{j,k} 2^{(s-\frac{d}{p})j}|^p \right)^{q/p} = \sum_n b_{j_n}^q < \infty.$$

Dans ce qui suit nous allons utiliser l'espace sonde de dimension 1, engendré par g . Comme précédemment, la mesure que nous utilisons est une mesure de probabilité borélienne et à support compact. De plus, en utilisant la proposition 1.20, et la continuité de la transformée en ondelettes dans un espace de Besov, l'ensemble que nous considérons est inclus dans un borélien.

Soit f une fonction arbitraire de $B_p^{s,q}$ de coefficients d'ondelettes $c_{j,k}$. Et soit $\beta_1 \neq \beta_2$ tels que pour $l = 1, 2$ $f + \beta_l g$ ait θ comme module de continuité en x_0 . Les coefficients d'ondelette de ces fonctions sont alors en $\mathcal{O}(\theta(2^{-j}))$ dans le cône $|2^j x_0 - k| \leq 2$. Ce qui se traduit par, il existe $c, c' > 0$ tels que :

$$\begin{aligned} |c_{j,k} + \beta_1 d_{j,k}| &\leq c\theta(2^{-j}) \\ |c_{j,k} + \beta_2 d_{j,k}| &\leq c'\theta(2^{-j}) \end{aligned}$$

mais dans ce cas,

$$|\beta_1 - \beta_2| |d_{j_n, k_n}| \leq (c + c')\theta(2^{-j}) = (c + c')a_{j_n} 2^{-(s-d/p)j_n}.$$

Donc, après simplification par $2^{-(s-d/p)j_n}$, $|\beta_1 - \beta_2| |b_{j_n}| \leq (c + c')a_{j_n}$. Ce qui n'est possible que si $\beta_1 = \beta_2$. L'ensemble des fonctions ayant un module de continuité en $\mathcal{O}(\theta)$ en x_0 est par conséquent Haar-nul. \square

3.3. Le cas critique, $s - \frac{d}{p} = 0$

Pour être tout à fait complet dans notre étude, nous nous devons d'étudier les cas critiques dans les espaces de Besov $B_p^{s,q}$ où $s - \frac{d}{p} = 0$. Ici plusieurs cas se présentent suivant les positions de p et de q . Tout d'abord si $q > 1$, nous allons voir dans ce qui suit que presque toutes les fonctions ne sont nulle part localement bornées. Contentons nous maintenant de regarder uniquement le cas $q \leq 1$. Dans ce cas, nous avons vu dans la proposition 1.10 que toutes les fonctions de $B_p^{s,q}$ sont continues. Elles n'ont cependant pas d'exposant de régularité uniforme. On ne peut donc pas appliquer dans cette partie le critère de régularité par les ondelettes tel quel. Cependant, comme nous avons encore des majorations de spectre, nous n'aurons pas besoin de ce critère, et nous n'utiliserons que le critère d'irrégularité donné par la proposition 1.2.

3.3.1. $0 < q \leq p$ et $q \leq 1$. — Passons maintenant au cas où $s - \frac{d}{p} = 0$ et $0 < q \leq p$. Pour démontrer ce point, nous allons utiliser la proposition suivante, démontrée dans [51].

Proposition 3.6. — Soient p et q deux réels tels que $0 < q \leq p$ et $0 < q \leq 1$. Quelque soit $f \in B_p^{\frac{d}{p},q}$, le spectre de singularités de f vérifie :

$$(3.19) \quad d(H) \leq pH \quad \forall H \in [0, \frac{d}{p}].$$

Soit $\alpha \geq 1$ et $\varepsilon > 0$ fixés. On pose $H(\alpha) = \frac{d}{p\alpha}$ et $\gamma = H(\alpha) + \varepsilon$. On pose $N = 2^{dn} > [\frac{d}{\alpha\varepsilon}] + 1$. On découpe maintenant chaque cube dyadique λ à l'échelle j en 2^{dn} sous cubes $m(\lambda)$. Comme précédemment, on construit un espace sonde P de dimension N en considérant le sous-espace vectoriel engendré par les fonctions g_m définies par leur coefficients d'ondelette d_λ^m :

$$\begin{cases} \forall \lambda \quad d_{m(\lambda)}^m = \frac{2^{-\frac{d}{p}J}}{j^a} \\ d_{l(\lambda)}^m = 0 \quad \text{si } l \neq m \end{cases}$$

où $a = \frac{1}{p} + \frac{2}{q}$. On a pris $J \leq j$ et $K \in \mathbb{Z}^d$ définis par (3.12).

Ces fonctions g_m appartiennent bien à $B_p^{\frac{d}{p},q}$. Soit $x \in F_\alpha$. Par définition de F_α , il existe une infinité de J, K pour lesquels :

$$\left| x - \frac{k}{2^j} \right| \leq \frac{1}{2^{\alpha J}}.$$

On pose alors $j_1 = [\alpha J]$ et k tel que $k2^{-j_1} = K2^{-J}$. On obtient que $2k$ appartient au cône $\mathcal{K}_x(2)$ et pour $j = j_1 + 1$:

$$(3.20) \quad |d_{m(\lambda)}^m| > \frac{1}{j^{2/q}} 2^{-H(\alpha)j}$$

Comme dans la partie précédente, on note :

$$S_{c,\varepsilon} = \{f = \sum_{j,k} c_{j,k} \psi_{j,k} \in B_p^{d/p,q} \text{ tel que } \exists x \in F_\alpha \forall j, k \in \mathcal{K}(2) |c_{j,k}| \leq c3^\gamma 2^{-\gamma j}\}.$$

Et

$$S_{c,\varepsilon}(i, l) = \{f = \sum_{j,k} c_{j,k} \psi_{j,k} \in B_p^{d/p,q} \text{ tel que } \exists x \in F_\alpha^{i,l} \forall j, k \in \mathcal{K}(2) |c_{j,k}| \leq c3^\gamma 2^{-\gamma j}\}.$$

L'ensemble des fonctions C^γ en au moins un point de F_α est inclus dans l'union dénombrable sur $c > 0$ des ensembles $S_{c,\varepsilon}$. Il nous suffit donc ici de montrer que $S_{c,\varepsilon}$ est Haar-nul. Pour cela, nous remarquons qu'il est inclus dans la limite supérieure en i de l'union sur l des ensembles $S_{c,\varepsilon}(i, l)$. Nous allons donc regarder ces $S_{c,\varepsilon}(i, l)$.

Nous avons déjà vu que $S_{c,\varepsilon}(i, l)$ est borélien. Soit $f \in B_p^{d/p,q}$ quelconque. Soit

$$M_c(i, l) = \{\beta \in \mathbb{R}^N; f + \sum \beta^i g_m \in S_{c,\varepsilon}(i, l)\}.$$

Considérons deux éléments β_1 et β_2 dans $M_c(i, l)$. Il existe alors deux points x_1 et x_2 dans $F_\alpha^{i,l}$ tels que $f_1 = f + \sum \beta_1^m g_m$ est (c, γ) régulière en x_1 et $f_2 = f + \sum \beta_2^m g_m$ est (c, γ) régulière en x_2 .

Comme x_1 et x_2 appartiennent au même cube $F_\alpha^{i,l}$, à l'échelle $j = [\alpha i]$ les cônes $\mathcal{K}_{x_1}(2)$ et $\mathcal{K}_{x_2}(2)$ ont une intersection non vide. Pour les coefficients indexés par les cubes appartenant à cette intersection on a :

$$|c_{m(\lambda)} + \sum_m \beta_1^m d_{m(\lambda)}^m - (c_{m(\lambda)} + \sum_m \beta_2^m d_{m(\lambda)}^m)| \leq 2c3^\gamma 2^{-\gamma j}.$$

Et grâce à la définition des g_m et à l'équation (3.20), on a aussi :

$$|c_{m(\lambda)} + \sum_m \beta_1^m d_{m(\lambda)}^m - (c_{m(\lambda)} + \sum_m \beta_2^m d_{m(\lambda)}^m)| = |(\beta_1^m - \beta_2^m) d_{m(\lambda)}^m| \geq |(\beta_1^m - \beta_2^m) j^{-a} 2^{-H(\alpha)j}|.$$

En combinant la majoration et la minoration ainsi obtenues, et en remarquant qu'à chaque échelle, un seul $d_{m(\lambda)}$ est non nul, on obtient finalement que :

$$\|\beta_1 - \beta_2\|_\infty \leq 2c3^\gamma 2^{-(\gamma-H)j} j^a.$$

En faisant l'union sur l on obtient que la mesure de Lebesgue de l'ensemble des β tels que $f + \sum_i \beta^i g_m$ soit (c, γ) régulière en un point de F_α^i est inférieure à :

$$\sum_{l \in \{0, \dots, 2^i - 1\}^d} (2c3^\gamma 2^{-(\gamma-H)\alpha i} (\alpha i)^a)^N = (2c3^\gamma (\alpha i)^a)^N 2^{-N(\gamma-H)\alpha i + id}.$$

Et, comme on a des ensembles décroissants en i , on peut passer à la limite en i :

$$\mathcal{L}(\{\beta; f + \sum_m \beta^m g_m \in S_{c,\varepsilon}\}) \leq \lim (2c3^\gamma (\alpha i)^a)^N 2^{-N(\gamma-H)\alpha i + id} = 0.$$

Donc $S_{c,\varepsilon}$ est Haar-nul.

Prenons l'union des $S_{c,\varepsilon}$ sur une suite $\gamma_n \rightarrow H(\alpha)$. Nous obtenons alors que pour tout $\alpha \geq 1$:

$$\{f \in B_p^{s,q}(\mathbb{R}^d) \text{ tel que } \forall x \in F_\alpha \ h_f(x) \leq H(\alpha)\}$$

est prévalent.

On prend l'intersection sur une suite α_n dense dans \mathbb{R} . Finalement, l'ensemble M défini par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \forall x \in F_{\alpha_n} \ h_f(x) \leq H(\alpha_n)$$

est prévalent.

Soit $f \in M$ et soit α quelconque. Il existe alors une suite croissante $(\alpha_{\phi(n)})$ qui converge vers α . Et nous avons vu que, si $E_\alpha = \cap F_{\alpha_{\phi(n)}}$, pour $f \in M$,

$$\forall x \in E_\alpha \text{ tel que } h_f(x) \leq H(\alpha).$$

En utilisant la proposition 3.6 et la démonstration précédente, on obtient que pour presque toute fonction f de $B_p^{\frac{d}{p},q}$ le spectre de singularités de f est donné par

$$d(H) = pH \quad \forall H \in [0, \frac{d}{p}]$$

3.3.2. $0 < p < q \leq 1$. —

Proposition 3.7. — Soient s, q et p trois réels tels que $s - \frac{d}{p} = 0$ et $0 < p < q \leq 1$, alors presque toutes les fonctions de $B_p^{s,q}$ sont multifractales et leur spectre de singularités est défini sur $[0, \frac{d}{q}]$ où il vaut :

$$(3.21) \quad d(H) = Hq.$$

Démonstration : Dans [51], il est déjà montré que si $s - \frac{d}{p} = 0$ et $0 < p < q < 1$, la majoration de spectre de singularité valable pour toutes fonctions de $B_p^{s,q}$ est :

$$(3.22) \quad \forall H \in [0, \frac{d}{q}] \quad d(H) \leq Hq.$$

Il ne nous reste donc qu'à montrer que cette majoration est optimale pour un ensemble prévalent de fonctions.

Rappelons qu'un point $x_0 \in (0, 1)^d$ est α -approximable à l'échelle r_n si il existe une infinité de valeurs de n et k_n tels que :

$$(3.23) \quad \left| x_0 - \frac{k_n}{2r_n} \right| \leq \frac{c}{2^{\alpha r_n}}.$$

Notons F_α l'ensemble des points α -approximables à l'échelle r . Cet ensemble peut s'écrire sous la forme $F_\alpha = \limsup_{r \rightarrow \infty} \bigcup_{k \in \{0, \dots, 2^r - 1\}^d} F_\alpha(r, l)$ où $F_\alpha(r, l) = \frac{l}{2^r} + [-\frac{1}{2^r}, \frac{1}{2^r}]^d$.

Fixons $\alpha \geq 1$. Pour tout $\varepsilon > 0$, posons $H = \frac{d}{\alpha q} + \varepsilon$. Nous voulons montrer que l'ensemble des fonctions qui sont H régulières en un point de F_α est Haar-nul. Pour cela nous passons par une condition sur les coefficients d'ondelette. Posons

$$A = \left\{ g \in B_p^{s,q}, g(x) = \sum c_{j,k} \psi(2^j x - k) \text{ tel que } \left\{ \begin{array}{l} \exists x \in F_\alpha, \exists c > 0 : \\ |c_{j,k}| < c 2^{-Hj} (1 + |2^j x - k|)^H \end{array} \right. \right\}.$$

Cet ensemble peut s'écrire comme l'union sur les $c > 0$ des ensembles $A_c = \{g \in B_p^{s,q}, \exists x \in F_\alpha, |c_{j,k}| < c 2^{-Hj} (1 + |2^j x - k|)^H\}$.

Une fois encore, on définit

$$A_c(r, l) = \{g \in B_p^{s,q}, \exists x \in F_\alpha(r, l), \forall j, k \quad |c_{j,k}| < c 2^{-Hj} (1 + |2^j x - k|)^H\}.$$

Alors

$$A_c \subset \limsup_{r \rightarrow \infty} \bigcup_{l \in \{0, \dots, 2^r - 1\}^d} A_c(r, l)$$

Par la même démonstration que celle de la partie 3.2, cet ensemble est fermé donc borélien.

Choisissons maintenant $N = 2^{dn} > \left[\frac{d}{\alpha \varepsilon}\right] + 1$ et construisons N fonctions g_i de la façon suivante.

Pour tout $j \geq 2$ on pose

$$a(j) = \frac{1}{(j(\log j)^2)^{\frac{1}{q}}}$$

et

$$g_i(x) = \sum_j \varepsilon_j a(j) \psi(2^j x - m_{i,j}).$$

où les suites $(m_{i,j})$ et (ε_j) sont définies de la façon suivante : on construit une suite (r_n) en prenant $r_1 = 1$ et quelque soit $n > 1$, $r_{n+1} = dr_n + 1$. Pour j vérifiant

$$2^{r_n} < j \leq 2^{r_{n+1}} + 2^{dr_n}$$

et quelque soit $i \in \mathbb{N}$ on prend $m_{i,j}$ de sorte que $\frac{m_{i,j}}{2^j}$ prenne toutes les valeurs $\frac{k}{2^{r_n}}$, pour $k \in \{0, \dots, 2^{r_n} - 1\}^d$. Remarquons que j prend 2^{dr_n} valeurs. A chaque échelle on ne prend alors qu'un coefficient $m_{i,j}$ non nul. On impose de plus que

$$\forall j \quad i \neq i' \Rightarrow m_{i,j} \neq m_{i',j} \quad \text{mais} \quad |m_{i,j} - m_{i',j}| \leq N.$$

De plus, on prend $\varepsilon_j = 1$ s'il existe n tel que $j \in [2^{r_n} + 1, 2^{dr_n} + 2^{r_n}]$ et 0 sinon.

La construction de la suite (r_n) est telle que les intervalles $[2^{r_n} + 1, 2^{dr_n} + 2^{r_n}]$ ne s'intersectent pas et la famille (g_i) est alors une famille libre.

On obtient donc ici une série lacunaire d'ondelettes, dans le sens où à chaque échelle j les fonctions g_i ont au plus un coefficient non nul. Leur norme dans $B_p^{s,q}$ est alors majorée par :

$$\|g_i\|_{B_p^{s,q}} \leq \sum_{j>1} (j(\log j)^2)^{-1} < \infty.$$

De plus, à chaque échelle où g_i a un coefficient non nul, on a $j \leq 2^{r_n} + 2^{dr_n}$, donc :

$$(3.24) \quad (j(\log j)^2)^{-1} \geq 2^{-\frac{d}{q}r_n} (dr_n)^{-\frac{2}{q}}.$$

Remarquons qu'ici les fonctions ne sont pas uniformément C^ε pour un $\varepsilon > 0$. On ne pourrait donc plus utiliser la formule (1.17) pour calculer exactement leur exposant de Hölder ponctuel. Cependant, comme on a déjà une majoration du spectre, seule une majoration de l'exposant nous est utile.

Soit $f = \sum c_\lambda \psi_\lambda$ une fonction arbitraire dans $B_p^{s,q}$. Regardons l'ensemble des β tels que $f_\beta = f + \sum \beta_i g_i$ appartienne à A_c . Si β_1 et β_2 appartiennent à cet ensemble, il existe deux points x_1 et x_2 appartenant au même cube dyadique tel que f_{β_i} soit (H, c) régulière en x_i .

De plus, par définition de $m_{i,j}$, il existe $m_{i_0,j}$ tel que $\frac{m_{i_0,j}}{2^j} = \frac{k_n}{2^{r_n}}$. L'équation (3.23) peut alors être réécrite sous la forme

$$(3.25) \quad \left| x_0 - \frac{k_n}{2^{r_n}} \right| = \left| x_0 - \frac{m_{i_0,j}}{2^j} \right| \leq \frac{c}{2^{\alpha r_n}}.$$

Les coefficients d'ondelette des fonctions f_{β_i} vérifient alors :

$$\forall k \quad |c_{j,k} + \sum_i \beta_i^1 d_{j,k}^i| \leq c(2^{-j} + |x_i - \frac{k}{2^j}|)^H$$

Par conséquent, la fonction $f_{\beta_1} - f_{\beta_2}$ vérifie pour tout k :

$$|c_{j,k} + \sum_i \beta_i^1 d_{j,k}^i - (c_{j,k} + \sum_i \beta_i^2 d_{j,k}^i)| \leq c(2^{-j} + |x_1 - \frac{k}{2^j}|)^H + c(2^{-j} + |x_2 - \frac{k}{2^j}|)^H.$$

Par conséquent,

$$|\sum_i \beta_i^1 d_{j,k}^i - \sum_i \beta_i^2 d_{j,k}^i| \leq c(2^{-j} + |x_1 - \frac{k}{2^j}|)^H + c(2^{-j} + |x_2 - \frac{k}{2^j}|)^H.$$

En prenant alors $k = m_{i_0,j}$

$$|\beta_{i_0}^1 - \beta_{i_0}^2| d_{j,m_{i_0,j}} \leq c 2^{-H\alpha r_n}$$

grâce à (3.25) et au fait que $j > 2^r$. Par définition des fonctions g_i , et en utilisant (3.24), cela nous donne :

$$\|\beta_1 - \beta_2\| \leq c_0 2^{-\alpha \varepsilon r_n}.$$

Donc

$$\mathcal{L}(\{\beta \in \mathbb{R}^N \mid f + \sum \beta^i g_i \in A_c(r, l)\}) \leq (c_0)^N 2^{-N\alpha \varepsilon r}$$

Comme précédemment on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\{\beta \in \mathbb{R}^N \mid f + \sum \beta^i g_m \in A_c\}) &\leq \limsup_{r \rightarrow \infty} \mathcal{L}\left(\bigcup_l \{\beta \in \mathbb{R}^N \mid f + \sum \beta^i g_m \in A_c(r, l)\}\right) \\ &\leq \limsup_{r \rightarrow \infty} \sum_l \mathcal{L}(\{\beta \in \mathbb{R}^N \mid f + \sum \beta^i g_m \in A_c(r, l)\}) \\ &\leq \limsup_{r \rightarrow \infty} (c_0)^N 2^{dr - N\alpha \varepsilon r} \end{aligned}$$

Et cette quantité tend vers zéro quand r tend vers l'infini. Donc la mesure de Lebesgue des β tels que f_β appartienne à A_c est nulle. Donc A_c est Haar-nul. En prenant l'union sur une suite c_n , et sur $\varepsilon_n \rightarrow 0$ nous obtenons finalement que l'ensemble des fonctions ayant en un point de F_α une régularité supérieure à $\frac{d}{\alpha q}$ est Haar-nul. En prenant l'union sur une suite (α_n) dense, puis en utilisant la majoration de spectre, on obtient un ensemble prévalent de fonctions dont l'exposant de Hölder est exactement $H(\alpha)$ sur un ensemble de dimension de Hausdorff $\frac{d}{\alpha q}$. Ce qui nous donne le résultat de la proposition. \square

3.4. Les fonctions non localement bornées

3.4.1. Le cas $s - \frac{d}{p} < 0$. — Dans le cas $s - \frac{d}{p} < 0$, on va d'abord regarder si l'on peut avoir un exposant de Hölder ponctuel. En effet, dans le cas précédent l'injection $B_p^{s,q} \hookrightarrow C^{s - \frac{d}{p}}$ nous assurait que les fonctions de $B_p^{s,q}$ étaient uniformément höldériennes et donc continues. Dans le cas présent, une telle injection n'ayant pas lieu, rien ne nous assure l'existence d'un exposant de Hölder ponctuel. D'après [90] et [94], nous savons déjà qu'il existe au moins une fonction dans cet espace qui est nulle part localement bornée. Le but que nous nous fixons maintenant est de montrer que ce comportement n'est pas exceptionnel mais qu'il est partagé par presque toutes les fonctions de cet espace.

Proposition 3.8. — *L'ensemble des fonctions f telles que :*

$$\exists x_0 \in (0, 1)^d \quad f \text{ est bornée au voisinage de } x_0$$

est Haar-nul dans $B_p^{s,q}$.

Démonstration de la proposition : Pour montrer cette proposition, nous allons utiliser le lemme suivant, [44] :

Lemme 3.4. — Soit $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Si f est bornée au voisinage de x_0 , $\exists r, C > 0$ et $J \in \mathbb{N}$ tels que si $j \geq J$ et $|\lambda - x_0| \leq r$, $|c_\lambda| \leq C$.

Grâce à ce lemme, nous pouvons étudier l'ensemble suivant $S = \{f \in B_p^{s,q} \text{ tel que } \exists x \in (0,1)^d : \exists r_0, c_0 > 0, \exists J \in \mathbb{N} \forall j > J |\lambda - x| < r_0 \text{ et } |c_\lambda| < c_0\}$. Cet ensemble est borélien car l'application qui à une fonction associe ses coefficients d'ondelette est continue dans $B_p^{s,q}$. De plus, si nous considérons une suite $(x_n)_n$ dense, quelque soit $r_n > 0$ nous pouvons recouvrir le cube $(0,1)^d$ par un union dénombrable de boules ouvertes de rayon r_n . Par conséquent l'ensemble S est inclus dans l'union dénombrable de l'ensemble des fonctions dont les coefficients d'ondelette sont bornés sur $B(x_n, r_n)$ qui est clairement fermé.

Pour montrer qu'il est Haar-nul, considérons $c_0 > 0$, un $r_n > 0$ et un $J > 0$ fixés et regardons l'ensemble des fonctions dont les coefficients d'ondelette au delà de l'échelle J sont bornées par c_0 sur une boule de rayon r_n . Pour construire la mesure transverse à notre ensemble, nous construisons une fonction g définie par :

$$(3.26) \quad d_\lambda = \begin{cases} j & \text{si chaque } k_i \text{ est un multiple de } \frac{2^j}{j} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Cette fonction appartient clairement à $B_p^{s,q}$. Prenons maintenant comme mesure la mesure de Lebesgue sur la boule unité de l'espace vectoriel engendré par g .

Soit f une fonction quelconque de $B_p^{s,q}$. Supposons qu'il existe un ensemble non dénombrable de $\beta \in \mathbb{R}$ tels que les coefficients de $f + \beta g$ soient bornés sur une boule de rayon r_n . Comme notre ensemble n'est pas dénombrable, il existe au moins β_1 et β_2 tels que les boules $B(x_1, r_n)$ et $B(x_2, r_n)$ s'intersectent. Notons I cette intersection. Les coefficients d'ondelette de $f + \beta_1 g$ et de $f + \beta_2 g$ vérifient sur I que :

$$\begin{cases} |c_\lambda + \beta_1 d_\lambda| \leq c_0 \\ |c_\lambda + \beta_2 d_\lambda| \leq c_0 \end{cases}$$

Dans ce cas, $|\beta_1 - \beta_2| |d_\lambda| \leq 2c_0$. Mais il existe au moins un λ_0 tel que $d_{\lambda_0} = j$. Ce coefficient tend vers l'infini pour j suffisamment grand, ce qui est impossible. Par conséquent l'ensemble des β tels que les fonctions $f + \beta g$ aient des coefficients bornés est au plus dénombrable, et donc de mesure nulle. En prenant l'union sur des c_n , sur r_n et sur J , on obtient grâce à la propriété de σ -idéal que l'ensemble des fonctions bornées au voisinage d'au moins un point est Haar-nul. \square

3.4.2. Le cas $s - \frac{d}{p} = 0$ et $q > 1$. — Comme dans le cas précédent, nous allons montrer que presque toutes les fonctions de $B_p^{s,q}$ où $s - \frac{d}{p} = 0$ et $q > 1$ sont nulle part localement bornées. Cependant, la démonstration diffère un peu de la précédente. En effet, ici au lieu d'utiliser un lemme intermédiaire sur les coefficients d'ondelette, nous allons utiliser propriété semblable mais cette fois sur l'opérateur de projection sur une analyse multirésolution. Plus exactement, nous pouvons définir l'opérateur de projection P_j sur le sous espace V_j par :

$$\forall f \in B_p^{s,q} \quad P_j(f) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} 2^{dj} \int f(t) \varphi(2^j t - k) dt \varphi(2^j x - k).$$

Les ondelettes que nous considérons dans cette partie sont supposées à support compact.

Commençons par construire une fonction appartenant à $B_p^{s,q}$ et qui servira de vecteur directeur à l'espace sonde que nous utiliserons ensuite.

Lemme 3.5. — *Soit f une fonction de L^1 ; si f est bornée au voisinage de x_0 , alors il existe $r > 0$ tel que la suite $(P_j(f))_j$ est uniformément bornée sur $B(x_0, r)$.*

Démontrons d'abord le lemme.

Démonstration : Soit $f \in B_p^{s,q}$ quelconque. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^d$ fixé. L'opérateur P_j étant la projection sur V_j on a $P_j(f)(t) = \sum_k e_{j,k} \varphi(2^j t - k)$ avec

$$(3.27) \quad e_{j,k} = 2^{dj} \int f(t) \varphi(2^j t - k) dt.$$

Si f est bornée au voisinage de x_0 , alors (3.27) implique que $|e_{j,k}| \leq c \|f\|_\infty$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} \|P_j f\|_\infty &= \sup_{t \in B(x_0, r)} \left| \sum_k e_{j,k} \varphi(2^j t - k) \right| \leq \sup_{t \in B(x_0, r)} \left| \sum_k c \|f\|_\infty \varphi(2^j t - k) \right| \\ &\leq c \|f\|_\infty \sup_{t \in B(x_0, r)} \sum_k |\varphi(2^j t - k)| \leq cc' \|f\|_\infty \end{aligned}$$

car φ est à décroissance rapide. □

A l'aide de ce lemme, nous allons démontrer la proposition suivante.

Proposition 3.9. — *Soit $0 \leq p \leq \infty$, $s_0 > 0$ et $1 < q \leq \infty$ tels que $s - \frac{d}{p} = 0$. Presque toutes les fonctions de $B_p^{s,q}$ sont nulle part localement bornées.*

Démonstration : Commençons par construire une fonction qui ne soit pas bornée au voisinage d'un point x_0 . Comme les $2^d - 1$ ondelettes sont continues, à support compact et de moment nul, il en existe au moins une, que nous noterons ψ vérifiant

qu'il existe un cube dyadique μ_0 inclus dans $(0, 1)^d$, de côté 2^{-l} et une constante $c > 0$, qui ne dépend que de ψ , tels que :

$$\forall x \in \mu_0 \quad \psi(x) \geq c.$$

On peut de plus supposer, quitte à augmenter la valeur de l , que le support de $\psi(2^l x)$ est inclus dans un cube dyadique de longueur inférieure à $1/2$. Soit $j = nl$ un multiple de l , soit μ_n le cube dyadique sur lequel le coefficient est non nul. Ainsi, $P_0(f) \geq c$ sur μ_0 , et à l'échelle $j = l$, on prend comme coefficient non nul celui indexé par μ_0 . Il existe alors un cube $\mu_1 \subset \mu_0$ sur lequel $\psi_{\mu_0} \geq c$. Et sur μ_1 , on prend comme coefficient $d_\lambda = \frac{1}{2}$. On continue cette procédure par récurrence. On obtient ainsi une suite de cubes dyadiques μ_n sur lesquels $\psi_{\mu_{n-1}} \geq c$ et $d_\lambda = \frac{1}{n}$. On définit les coefficients d'ondelette de f de la façon suivante :

$$d_\lambda = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si il existe } n \text{ tel que } j = nl \text{ et pour } \lambda = \mu_j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Alors :

$$(3.28) \quad \forall x \in \mu_n \quad P_{nl}(f)(x) \geq c \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

En passant à la limite en n , il existe au moins un point $x_0 \in \lim \mu_n$ au voisinage duquel les $P_j(f)$ ne sont pas uniformément bornées. De plus, si l'on calcule la norme Besov de f , on obtient :

$$\|f\|^q = \sum_n \frac{1}{n^q} < \infty$$

car $q > 1$.

Nous devons maintenant construire une fonction $g = \sum c_{j,k} \psi_{j,k}$ dont la suite des projections sur l'analyse multirésolution n'est pas uniformément bornée au voisinage de n'importe quel point. Grâce à l'équation (3.28), il existe une échelle J_1 au delà de laquelle $P_{J_1}(f)(x) \geq 1$ sur le cube μ_{J_1} . Jusqu'à l'échelle J_1 , on pose alors $c_\lambda = d_\lambda$. On prend donc les mêmes coefficients que f . De plus, nous remarquons que la fonction $f - P_{J_1}(f)$ ($= c_{J_1}(f) \psi_{J_1}$) a son support inclus dans un cube de taille $1/2$. Notons \tilde{f}_i les $2^d - 1$ fonctions obtenues en translatant $f - P_{J_1}(f)$. Chaque \tilde{f}_i correspond à une translation du support de $f - P_{J_1}(f)$ de longueur $1/2$ dans une des directions. Et la fonction $P_{J_1}(f) + 4^{-d} \sum \tilde{f}_i$ est supérieure à 1 sur 2^d cubes dyadiques, à savoir sur μ_{J_1} et ses translatés. De plus, il existe une échelle J_2 et 2^d sous-cubes de chaque translatée de μ_{J_1} de volume 2^{-dJ_2} sur lequel cette fonction est supérieure à 2. Jusqu'à l'échelle J_2 , on prend les coefficients d'ondelette de g égaux à ceux de $P_{J_1}(f) + 4^{-d} \sum \tilde{f}_i$. En itérant cette procédure, nous obtenons finalement une fonction qui appartient bien à $B_p^{d/p,q}$ car

ses coefficients d'ondelette sont du même ordre de grandeur que ceux de f , à une constante 2^{-d} près, et qui n'est nulle part localement bornée. En effet, pour tout $x \in (0, 1)^d$ dès qu'on prend un voisinage de x , il existe un rang à partir duquel il intersecte un cube μ_n (ou un de ses translatés) et sur lequel $P_j(g) \rightarrow \infty$ pour j suffisamment grand.

Notons maintenant

$$M = \{f \in B_p^{s,q}; \exists x \in \mathbb{R}^d \exists r > 0 \exists c > 0 \sup_{j \geq 0, t \in B(x,r)} |P_j(f)(t)| \leq c\}.$$

Cet ensemble est borélien. L'opérateur $P_j(f)$ étant continu, on peut voir M comme l'union sur une suite dense x_n et sur des r_n , et c_n d'ensembles fermés.

Soit $r > 0$ et c_0 fixés. Soit f quelconque. On regarde l'ensemble S des β tels que $f + \beta g \in M$. Si S n'était pas dénombrable, il existerait β_1 et β_2 tels que $f + \beta_i g$ appartiendrait à M et les boules $B(x_1, r)$ et $B(x_2, r)$ s'intersecteraient. Mais dans ce cas, sur l'intersection on a $|P_j(f + \beta_1 g - f + \beta_2 g)| = |\beta_1 - \beta_2| |P_j(g)|$ qui serait uniformément borné. Or la suite $|P_j(g)|$ explose. Ce qui contredit l'hypothèse, donc S est dénombrable et presque toute fonction de $B_p^{s,q}$ est nulle part localement bornée. \square

CHAPITRE 4

APPROCHE PRÉVALENTE DE LA VALIDITÉ DU FORMALISME MULTIFRACTAL

4.1. Introduction

Issue d'expériences sur les écoulements d'air turbulents, l'analyse multifractale est reliée à l'étude des irrégularités de certains types de fonctions. En pratique, elle consiste à déterminer les propriétés fractales d'ensembles de points ayant une régularité donnée. Nous avons déjà vu que cette régularité est trop instable pour être étudiée directement. C'est pour cette raison que l'on passe par le spectre de singularités. Mais ce spectre étant directement lié à cet exposant de Hölder, il est tout aussi difficile à obtenir numériquement. C'est pourquoi le formalisme multifractal a été introduit. Il a pour but de relier ce spectre à des quantités calculables. Dans [31], U. Frisch et G. Parisi l'ont émis, suivant des arguments heuristiques, la conjecture que le spectre de singularités vérifiait la relation suivante :

$$(4.1) \quad d(H) = \inf_p (pH - \eta_f(p) + d)$$

où $\eta_f(p)$ est la fonction d'échelle de f , correspondant au comportement de $\int |f(x+l) - f(x)|^p dx \sim |l|^{\eta_f(p)}$ quand l tend vers zéro, sous réserve que la limite de $\frac{\log(\int |f(x+l) - f(x)|^p dx)}{\log(|l|)}$ existe. Numériquement, cette fonction peut se calculer facilement à l'aide des coefficients d'ondelette, voir [1, 6]. Mathématiquement, si $p > 0$ cette fonction correspond au comportement d'un module de continuité L^p . On peut alors définir mathématiquement η_f à l'aide des normes de type Sobolev ou Besov par :

$$(4.2) \quad \eta_f(p) = \sup\{s : f \in B_p^{s,1/\infty}\}.$$

Comme dans le cas de la généricité nous nous limitons à des espaces fonctionnels, nous ne regarderons donc que la partie croissante du spectre définie pour $p > 0$. Si on regarde la fonction $s(q) = q\eta(1/q)$, on peut relier cette fonction d'échelle au domaine de Besov de la fonction considérée. En effet, si l'on définit le domaine de Besov de f comme l'ensemble des couples (q, s) tels que $f \in B_{1/q}^{s,1/q}$, la frontière de ce domaine est donnée par le graphe de la fonction s .

Les fonctions $\eta(p)$ de la forme (4.2) sont des fonctions particulières puisqu'elles vérifient toujours que la fonction $s(q) = q\eta(1/q)$ est concave, croissante et que $0 \leq s'(q) \leq d$. Ces conditions caractérisant la fonction d'échelle, il semble naturel d'utiliser la définition suivante.

Définition 4.1. — *Une fonction $\eta(p)$ est dite admissible si $s(q) = q\eta(1/q)$ est concave et vérifie $0 \leq s'(q) \leq d$. Elle est fortement admissible si $s(0) > 0$.*

Nous pouvons utiliser ces fonctions admissibles notamment grâce à la proposition suivante, issue de [44].

Proposition 4.1. — *Toute fonction concave s vérifiant que $0 \leq s'(q) \leq d$ définit le domaine de Besov d'au moins une distribution f .*

Soit $\eta(p)$ une fonction admissible. On dit qu'une distribution f appartient à $B_{p,loc}^{(\eta(p)-\varepsilon)/p,p}$ si pour toute fonction ϕ , C^∞ à support compact, $f\phi$ appartient à $B_p^{(\eta(p)-\varepsilon)/p,p}$.

On associe à η un espace fonctionnel, noté V et défini par

$$(4.3) \quad V = \bigcap_{\varepsilon > 0, 0 < p < \infty} B_{p,loc}^{(\eta(p)-\varepsilon)/p,p}$$

et on peut se demander si génériquement les fonctions de V vérifient le formalisme multifractal.

Dans [44], S. Jaffard montre que dans le cadre générique des catégories de Baire, quasi-toute fonction de cet espace V vérifiait la relation :

$$(4.4) \quad d(H) = \inf_{p \geq p_c} (pH - \eta(p) + d)$$

où p_c est l'unique point critique tel que $\eta(p) = d$.

Il a montré de plus que pour quasi-toutes fonctions de V , la fonction d'échelle vérifiait pour tout p positif, $\eta_f(p) = \eta(p)$. Par conséquent, quasi-sûrement, (4.4) correspond au formalisme multifractal.

Notre but ici est de montrer le même type de résultat dans le cadre de la prévalence. Pour ce faire, commençons par donner un cadre mathématique à notre étude à l'aide de quelques définitions tirées de [44].

Théorème 4.1. — *Soit η une fonction fortement admissible et V l'espace défini par :*

$$(4.5) \quad V = \bigcap_{\varepsilon > 0, 0 < p < \infty} B_{p,loc}^{(\eta(p)-\varepsilon)/p,p}$$

alors presque toute fonction f de V vérifie pour tout p , $\eta_f(p) = \eta(p)$ et :

$$(4.6) \quad d_f(H) = \inf_{p \geq p_c} (pH - \eta_f(p) + d).$$

Remarque : Nous prenons sur η une condition de forte admissibilité. Elle est nécessaire pour nous car elle implique que la fonction de saturation, que nous définirons dans la partie 4.3.1 est uniformément höldérienne.

Avant de démontrer ce théorème et pour donner une idée plus précise de la preuve, nous allons commencer par regarder ce qu'il se passe pour un espace de Besov donné.

Théorème 4.2. — Soient $p > 0$, $q > 0$ et $s > 0$.

1. Si $s - \frac{d}{p} > 0$ alors pour presque toute fonction de $B_p^{s,q}$, ou de $L^{p,s}$ le spectre de singularités est défini sur $[s - \frac{d}{p}, s]$, où il est donné par :

$$\forall H \in [s - \frac{d}{p}, s] \quad d(H) = (H - s)p + d.$$

2. Si $s - \frac{d}{p} < 0$ alors presque toute fonction de $B_p^{s,q}$ ou de $L^{p,s}$ est nulle part localement bornée.
3. Soit $\gamma > 0$. Si $s - \frac{d}{p} < 0$ alors le spectre de singularités de presque toute fonction de $B_p^{s,q} \cap C^\gamma$ ou de $L^{p,s} \cap C^\gamma$ est donné par :

$$d(H) = \begin{cases} \frac{d+(\gamma-s)}{\gamma} H & \text{si } H \in \left[\gamma, \frac{d\gamma}{d+(\gamma-s)p} \right] \\ -\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarque :

1. Nous aurons besoin par la suite des trois résultats du théorème 4.2. Cependant les points 1 et 2 sont déjà démontrés dans le chapitre précédent. Nous nous contenterons donc de montrer le point 3.
2. Comme nous pouvons le voir dans le point 2, pour $s - \frac{d}{p} < 0$, la plupart des fonctions de $B_p^{s,q}$ sont nulle part localement bornées. Elles n'appartiennent donc certainement pas à C^γ . L'ensemble que nous considérons dans le point 3 est donc petit, mais pas forcément inexistant, dans $B_p^{s,q}$. Cette restriction sur l'ensemble considéré nous permet de déterminer un spectre de singularité et de regarder le formalisme multifractal.
3. Comme pour le chapitre précédent, nous ne ferons que la démonstration dans $B_p^{s,q}$, le résultat dans les espaces de Sobolev s'obtenant de la même façon en prenant $q = 1$.

4.2. Formalisme multifractal dans un Besov

Pour déterminer la validité du formalisme multifractal dans un espace de Besov, on doit résoudre deux problèmes distincts.

Premièrement, quel exposant de Hölder ponctuel peut-on obtenir et quel spectre de singularité est valable pour presque toute fonction, c'est l'énoncé du théorème 4.2.

Dans un second temps, on s'attache à la fonction d'échelle. Encore une fois, on cherche à déterminer le comportement de cette fonction pour un ensemble prévalent de distributions.

4.2.1. Preuve du théorème 4.2 : Le cas $B_p^{s,q} \cap C^\gamma$. — Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, si l'on prend $s - \frac{d}{p} < 0$, presque toute fonction de $B_p^{s,q}$ n'est nulle part localement bornée, on ne peut donc pas en général définir de spectre de singularités dans ces espaces.

Cependant si l'on restreint notre étude à un cadre plus petit, autrement dit si l'on impose un minimum de régularité globale aux fonctions que l'on étudie, peut-on contourner cet obstacle ? C'est ce que nous allons voir dans la proposition suivante.

Dans la suite, on fixe $s - \frac{d}{p} < 0$ et $0 < \gamma < s$. Nous allons étudier le spectre de singularités de presque toute fonction de $B_p^{s,q} \cap C^\gamma$.

Le lemme suivant issu de la proposition 3.1 nous donne déjà une majoration du spectre.

Lemme 4.1. — Soient $0 \leq p < \infty$, $s > 0$ et $0 < \gamma < s$. Si $s - \frac{d}{p} < 0$ alors pour toutes f appartenant à $B_p^{s,q} \cap C^\gamma$, l'ensemble $\{x : f \notin C^\alpha(x)\}$ a une dimension de Hausdorff inférieure à $\frac{d+(\gamma-s)}{\gamma}\alpha$.

Pour montrer qu'au sens de la prévalence, cette majoration est optimale, nous avons besoin de modifier légèrement la définition 3.1 de la façon suivante.

Définition 4.2. — On définit l'ensemble J_α par :

$$(4.7) \quad J_\alpha = \left\{ x : \text{tel qu'il existe une infinité de } j \text{ et de } k \text{ vérifiant } \left\{ \begin{array}{l} \text{chaque } k_i = l_i 2^{j-L} \\ \text{et } \frac{1}{2^j} + \left| x - \frac{k}{2^j} \right| < \frac{1}{2^{\alpha L}} \end{array} \right. \right\}.$$

où $L := \left\lceil \frac{(d+(\gamma-s)p)j}{d} \right\rceil$. On définit alors $\alpha'(x) = \sup\{\alpha : x \in J_\alpha\}$, l'exposant dyadique de x . On peut encore définir J_α de la manière suivante :

$$(4.8) \quad J_\alpha(i, l) = \frac{l}{2^j} + \left[-\frac{1}{2^{\alpha L}}, \frac{1}{2^{\alpha L}} \right]^d.$$

Et

$$(4.9) \quad J_\alpha = \limsup_i \bigcup_{l \in \{0, \dots, 2^j - 1\}^d} J_\alpha(i, l).$$

Remarquons que pour que cette définition soit cohérente, on doit prendre $\alpha \in [1, \frac{d}{d+(\gamma-s)p}]$ et, comme on peut le voir dans [42], la dimension de Hausdorff de l'ensemble J_α vaut $\frac{d}{\alpha}$.

Commençons maintenant la preuve du point 3 du théorème 4.2. Soit $\varepsilon > 0$ et $N = 2^{dl} > \frac{d^2}{\alpha\varepsilon(d+(\gamma-s)p)} + 1$ fixés. Chaque cube dyadique peut se décomposer en 2^l sous-cubes de taille $2^{-(j+l)d}$. Si on indexe par $i(\lambda)$ de tels sous-cubes, on peut définir N fonctions g_r à l'aide de leur coefficients d'ondelette d_λ^r où λ désigne le cube dyadique $\frac{k}{2^j}$ et $k = (k_1, \dots, k_d)$:

$$(4.10) \quad d_\lambda^r = \begin{cases} j^{-2/q} 2^{-\gamma j} & \text{si chaque } k_i \text{ est multiple de } 2^{j-L} \text{ et } r = i(\lambda) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour chaque j on note $L = \left\lfloor \frac{(d+(\gamma-s)p)j}{d} \right\rfloor$.

On prend alors comme espace sonde le sous-espace vectoriel de dimension N engendré par les fonctions g_r . Remarquons que ces fonctions appartiennent bien à $B_p^{s,q} \cap C^\gamma$. En effet $\forall r = 1, \dots, N, g_r \in B_p^{s,q}$, en effet :

$$\begin{aligned} \|g_r\|_{B_p^{s,q}} &= \sum_{j \geq 0} \sum_{i=1}^d \left| \sum_{k \in \{0, \dots, 2^j - 1\}^d} |d_\lambda^r 2^{(s-\frac{d}{p})j}|^p \right|^{\frac{q}{p}} \\ &= \sum_{j \geq 0} \left| \sum_{i=1}^d \sum_{k_i \equiv r[2^{j-L}N]} |j^{-\frac{2}{q}} 2^{-\gamma j} 2^{(s-\frac{d}{p})j}|^p \right|^{\frac{q}{p}} \\ &\leq \sum_{j \geq 0} \left| 2^L j^{-\frac{2p}{q}} 2^{-\gamma p j} 2^{(s-\frac{d}{p})p j} \right|^{\frac{q}{p}} \\ &\leq \sum_{j \geq 0} j^{-2} 2^{((1+(\gamma-s)p) - \gamma p + (sp-d))j} \\ &\leq \sum_{j \geq 0} j^{-2} < \infty. \end{aligned}$$

De plus, on a :

$$\forall j \geq 0 \forall k \quad |d_\lambda^r 2^{\gamma j}| = j^{-2/q} < \infty.$$

Donc $\forall r = 1, \dots, N \quad g_r \in C^\gamma$.

Soit $\alpha \in \left[1, \frac{d}{d+(\gamma-s)p}\right]$ fixé. On pose $H(\alpha) = \frac{d\gamma}{\alpha(d+(\gamma-s)p)}$ et $\beta(\alpha) = H(\alpha) + \varepsilon$. D'après l'équation (1.15) que nous avons vu dans le chapitre 1, montrer qu'une

fonction n'est pas C^H en un point peut se traduire par une condition sur les coefficients d'ondelette.

Par conséquent, nous allons regarder si

$$S(\alpha) = \{f = \sum c_\lambda \psi_\lambda \in B_p^{s,q} \cap C^\gamma : \exists x \in J_\alpha \exists c > 0 \forall j, k \ |c_\lambda| \leq c 2^{-\beta(\alpha)j} (1 + |2^j x - k|)^{\beta(\alpha)}\}$$

est Haar-nul. Cet ensemble est inclus dans l'union dénombrable des

$$S_c(\alpha) = \{f = \sum c_\lambda \psi_\lambda \in B_p^{s,q} \cap C^\gamma : \exists x \in J_\alpha \forall j, k \ |c_\lambda| \leq c 2^{-\beta(\alpha)j} (1 + |2^j x - k|)^{\beta(\alpha)}\}.$$

Dans un premier temps, nous devons montrer que les ensembles que nous étudions sont bien inclus dans des boréliens. Pour cela on démontre que $S_c(\alpha)$ est bien borélien. En effet, en utilisant la propriété de σ -idéal, cela entraînera le résultat pour tous les ensembles que nous regarderons par la suite. D'après la définition (4.9) de J_α , on peut écrire $S_c(\alpha)$ comme l'union sur les $i > i_0$, et $l \in \{0, \dots, 2^i - 1\}^d$ de

$$S_c(\alpha)^{i,l} = \{f = \sum c_\lambda \psi_\lambda \in B_p^{s,q} \cap C^\gamma : \exists x \in J_\alpha(i, l) \forall j, k \ |c_\lambda| \leq c 2^{-\beta(\alpha)j} (1 + |2^j x - k|)^{\beta(\alpha)}\}.$$

En fait, on va montrer que $S_c(\alpha)^{i,l}$ est fermé. Pour cela, on considère une suite $(f_n) \in S_c(\alpha)^{i,l}$ telle que $f_n \rightarrow f$ dans $B_p^{s,q} \cap C^\gamma$. Si $f_n \in S_c(\alpha)^{i,l}$ il existe une suite $x_n \in J_\alpha(i, l)$ telle que pour tout n :

$$|c_\lambda^n| \leq c 2^{-\beta(\alpha)j} (1 + |2^j x_n - k|)^{\beta(\alpha)}.$$

Or $J_\alpha(i, l)$ est fermé et borné en dimension finie, il est donc compact. Par la propriété de Bolzano-Weierstrass, la suite $(x_n)_n$ admet au moins une valeur d'adhérence x . De plus, si l'on note c_λ les coefficients d'ondelette de la fonction f , par continuité de la transformée en ondelettes dans $B_p^{s,q}$, $c_\lambda^n \rightarrow c_\lambda$ quelque soit λ . En passant à la limite dans l'équation précédente (comme l'application $x \mapsto c 2^{-\beta(\alpha)j} (1 + |2^j x - k|)^{\beta(\alpha)}$ est continue car $\beta(\alpha) > 0$) on obtient :

$$|c_\lambda| \leq c 2^{-\beta(\alpha)j} (1 + |2^j x - k|)^{\beta(\alpha)}.$$

Autrement dit, $f \in S_c(\alpha)^{i,l}$ et $S_c(\alpha)^{i,l}$ est fermé donc borélien. Par stabilité de la tribu par union dénombrable, $S_c(\alpha)$ est aussi borélien.

En utilisant les propriétés de σ -idéal des ensembles Haar-nuls, montrer que $S(\alpha)$ est Haar-nul revient à montrer que quelque soit $c > 0$, $S_c(\alpha)$ est Haar-nul.

Soit $f \in B_p^{s,q} \cap C^\gamma$ quelconque. Pour i, l donnés on note $M(i, l) = \{\delta \in \mathbb{R}^N; \exists x \in J_\alpha(i, l) \ f + \sum \delta^i g_i \in S_c(\alpha)^{i,l}\}$. Soient δ_1 et δ_2 appartenant à $M(i, l)$. Par définition,

il existe deux points $x_1 \in J_\alpha(i, l)$ et $x_2 \in J_\alpha(i, l)$ tels que pour $n = 1, 2$ et pour $j = i + 1$:

$$(4.11) \quad |c_\lambda + \sum \delta_n^i d_\lambda^i| \leq c2^{-\beta(\alpha)j}(1 + |2^j x_l - k|)^{\beta(\alpha)} \leq c2^{-\alpha\beta(\alpha)L}.$$

Par définition de l'ensemble J_α . Par conséquent, pour les cubes λ vérifiant que chaque coordonnée de k est un multiple de 2^{j-L} .

$$(4.12) \quad \begin{aligned} |d_\lambda^i| &> \frac{1}{j^{2/q}} 2^{-\gamma \frac{j}{L} L} \\ &> \frac{1}{j^{2/q}} 2^{-\frac{\gamma}{d+(\gamma-s)p} L} \\ &> \frac{1}{j^{2/q}} 2^{-\alpha H(\alpha)L}. \end{aligned}$$

En reprenant l'équation (4.11), on obtient ;

$$|c_\lambda + \sum \delta_1^i d_\lambda^i - (c_\lambda + \sum \delta_2^i d_\lambda^i)| \leq 2c2^{-\alpha\beta(\alpha)L}$$

et avec l'équation (4.12), comme pour chaque λ on a un seul d_λ^i non nul :

$$\begin{aligned} |c_\lambda + \sum \delta_1^i d_\lambda^i - (c_\lambda + \sum \delta_2^i d_\lambda^i)| &= \left| \sum (\delta_1^i - \delta_2^i) d_\lambda^i \right| \\ &\geq \|\delta_1 - \delta_2\|_{\mathbb{R}^N} 2^{-\alpha H(\alpha)L} j^{2/q} \end{aligned}$$

(on prend la norme infinie dans \mathbb{R}^N). En combinant la majoration et la minoration ainsi obtenues on a finalement :

$$\|\delta_1 - \delta_2\|_{\mathbb{R}^N} \leq 2cj^{-2/q} 2^{-\alpha\varepsilon L}.$$

Par conséquent, la mesure de Lebesgue de $M(i, l)$ vérifie :

$$\mathcal{L}(M(i, l)) \leq (2cj^{-2/q})^N 2^{-N\alpha\varepsilon L}$$

On prend ensuite M_i , l'union sur $l = \{0, \dots, 2^i - 1\}^d$ des ensembles $M(i, l)$. Cet ensemble est de mesure :

$$\mathcal{L}(M_i) \leq \sum_{l \in \{0, \dots, 2^i - 1\}^d} \mathcal{L}(M(i, l)) \leq (2cj^{-2/q})^N 2^{-N\varepsilon\alpha L + di} \leq (2cj^{-2/q})^N 2^{-N\varepsilon\alpha \frac{(d+(\gamma-s))i}{d} + di}.$$

Or on a pris $N > \frac{d^2}{d+(\gamma-s)} \frac{1}{\alpha\varepsilon}$, et en faisant tendre j , et par conséquent L vers l'infini on obtient que

$$\mathcal{L}(M) \leq \limsup \mathcal{L}(M_i) = 0.$$

La mesure de Lebesgue de M est nulle. Par conséquent, l'ensemble $S(\alpha)$ est Haar-nul.

Donc quelque soit $\beta(\alpha) > H(\alpha)$, l'ensemble des fonctions $(\beta(\alpha), c)$ -régulières en au moins un point de F_α est Haar-nul, car il est inclus dans $S(\alpha)$. L'union sur $c_n > 0$ de ces ensembles nous donne donc que quelque soit $\beta(\alpha)$, l'ensemble des

fonctions telles qu'il existe un point $x \in F_\alpha$ et $f \in C^{\beta(\alpha)}(x)$ est aussi Haar-nul. En prenant une union dénombrable sur une suite décroissante $\beta_n(\alpha) \rightarrow H(\alpha)$ et par stabilité pour l'inclusion, on obtient :

$$\forall \alpha \in \left[1, \frac{d}{d + (\gamma - s)p}\right] \text{ pp dans } B_p^{s,q} \cap C^\gamma \quad \forall x \in J_\alpha \quad h_f(x) \leq H(\alpha).$$

On prend une suite (α_n) dense dans $\left[1, \frac{d}{d + (\gamma - s)p}\right]$ et en utilisant la stabilité par union dénombrable, presque partout dans $B_p^{s,q} \cap C^\gamma$,

$$(4.13) \quad \forall n \quad \forall x \in J_{\alpha_n} \quad h_f(x) \leq H(\alpha_n).$$

On se place maintenant dans l'ensemble des fonctions vérifiant la propriété (4.13). Si on prend un α quelconque, il existe une sous-suite croissante (α_{ϕ_n}) qui converge vers α et l'intersection des $J_{\alpha_{\phi_n}}$, que l'on note \tilde{J}_α contient J_α . De plus la dimension de Hausdorff de \tilde{J}_α est supérieure à $\frac{d}{\alpha}$, donc si l'on note $G_H = \{x : h_f(x) \leq H\}$, en utilisant ce qui vient d'être dit et le lemme 4.1, on obtient que la dimension de Hausdorff de G_H vaut exactement $\frac{d + (\gamma - s)p}{\gamma} H$. Mais, toujours en utilisant le lemme 4.1, la mesure de Hausdorff $\frac{d}{\alpha}$ -dimensionnelle de l'ensemble $\{x : h_f(x) < H\}$ est nulle. Comme la mesure de Hausdorff $\frac{d}{\alpha}$ dimensionnelle de G_H est strictement positive, on en déduit le théorème 4.2.

4.2.2. La fonction d'échelle. — Comme nous l'avons dit au début de cette partie, pour obtenir le formalisme multifractal, le spectre de singularité n'est pas suffisant. Nous cherchons aussi le lien entre celui-ci et la fonction d'échelle des distributions. Dans la proposition suivante nous voyons, suivant les différentes valeurs des paramètres, quels sont les espaces de Besov auxquels presque toute fonction de $B_p^{s,q}$ peut appartenir.

Proposition 4.2. — Soient s_0 et p_0 fixés tels que $s_0 - \frac{d}{p_0} > 0$. Pour presque toute $f \in B_{p_0}^{s_0, \infty}$, au sens de la prévalence, on a :

$$(4.14) \quad \eta_f(p) = \begin{cases} p^{s_0} & p \leq p_0 \\ d + p(s_0 - \frac{d}{p_0}) & p > p_0. \end{cases}$$

Dans le cas où $s_0 - \frac{d}{p_0} < 0$, presque partout dans $B_{p_0}^{s_0, p_0} \cap C^\gamma$:

$$(4.15) \quad \eta_f(p) = \begin{cases} p^{s_0} & p \leq p_0 \\ \gamma p + p_0(s_0 - \gamma) & p > p_0. \end{cases}$$

Démonstration : Dans ce cas, les ensembles que nous considérons sont des unions de fermés, ils sont donc boréliens.

Pour obtenir la borne inférieure on utilise la proposition 1.8, voir [90]. En fait on sait que $B_{p_0}^{s_0, \infty} \hookrightarrow B_p^{s_0, \infty}$ dès que $p \leq p_0$, d'après (1.35). Donc $\frac{\eta_f(p)}{p} \geq s_0 \Rightarrow \eta_f(p) \geq ps_0$, pour toute fonction $f \in B_{p_0}^{s_0, \infty}$. Dans le cas $p > p_0$, on utilise (1.36), on sait que :

$$(4.16) \quad \forall 0 \leq p_1 \leq p_2 \text{ et } s_1 \geq s_2 \quad B_{p_1}^{s_1, \infty} \hookrightarrow B_{p_2}^{s_2, \infty} \quad \text{si } s_1 - \frac{d}{p_1} = s_2 - \frac{d}{p_2}.$$

Par conséquent, comme $p > p_0$, si $f \in B_{p_0}^{s_0, \infty} \hookrightarrow B_p^{s_0, \infty}$ dès que $s_0 - \frac{d}{p_0} = s - \frac{d}{p}$, donc $\frac{\eta_f(p)}{p} \geq s_0 - \frac{d}{p_0} + \frac{d}{p}$.

Pour obtenir la borne supérieure on passe par l'espace sonde P engendré par la fonction de saturation :

$$(4.17) \quad g(x) = \sum_{j \geq 0} \sum_{\lambda \in \Lambda_j} \frac{1}{j^a} 2^{(\frac{d}{p_0} - s_0)j} 2^{-\frac{d}{p_0}J} \psi_\lambda^{(i)}(x).$$

où $J = J(j, k)$ et $K = K(j, k)$ sont donnés par (3.12). On définit $\tilde{s}(p) := \begin{cases} s_0 + \varepsilon & p \leq p_0 \\ \frac{d}{p} + s_0 - \frac{d}{p_0} + \varepsilon & p > p_0. \end{cases}$. Soit $f \in B_{p_0}^{s_0, \infty}$ quelconque, on considère :

$$M(p) = \{\alpha \in \mathbb{R} : (f + \alpha g) \in B_p^{\tilde{s}, \infty}\}$$

Soient α_1 et α_2 dans $M(p)$, en regardant les coefficients d'ondelette de $f + \alpha_1 g$ et de $f + \alpha_2 g$ et en utilisant (1.31) et la définition (4.17) de g , on obtient pour $p \neq p_0 : \exists c > 0/$

$$\begin{aligned} & \|f + \alpha_1 g - (f + \alpha_2 g)\|_{B_p^{\tilde{s}, \infty}} \leq \|f + \alpha_1 g\|_{B_p^{\tilde{s}, \infty}} + \|f + \alpha_2 g\|_{B_p^{\tilde{s}, \infty}} \leq c \\ \Leftrightarrow & \forall j \sum_{k \geq 0} \left| \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{j^a} 2^{(\tilde{s} - \frac{d}{p})j} 2^{(\frac{d}{p_0} - s_0)j} 2^{-\frac{d}{p_0}J} \right|^p \leq c \\ \Leftrightarrow & \forall j \left| \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{j^a} \right|^p \sum_{J=0}^j \sum_{\lambda \in \Lambda_J} 2^{-\frac{dJ}{p_0}} \leq c 2^{(-\tilde{s} + \frac{d}{p})pj} 2^{(-\frac{d}{p_0} + s_0)pj} \\ \Leftrightarrow & \forall j \left| \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{j^a} \right|^p \sum_{J=0}^j 2^{(d - \frac{dJ}{p_0})J} \leq c 2^{(-\tilde{s} + \frac{d}{p} - \frac{d}{p_0} + s_0)pj} \\ \Leftrightarrow & \forall j \left| \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{j^a} \right|^p \frac{1 - 2^{j(d - \frac{dJ}{p_0})}}{1 - 2^{(d - \frac{dJ}{p_0})}} \leq c 2^{(-\tilde{s} + \frac{d}{p} - \frac{d}{p_0} + s_0)pj} \\ \Leftrightarrow & \forall j \left| \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{j^a} \right| \leq c 2^{(-\tilde{s} + \frac{d}{p} - \frac{d}{p_0} + s_0)j} \left| \frac{1}{1 - 2^{j(d - \frac{dJ}{p_0})}} \right|^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

On a alors deux cas possibles :

- Soit $p < p_0$ alors $\tilde{s}(p) = s_0 + \varepsilon$ et $|1 - 2^{j(d - \frac{p}{p_0})}| \sim 2^{j(d - \frac{p}{p_0})}$ pour j assez grand. Dans ce cas on a :

$$\begin{aligned} \left| \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{j^a} \right| &\leq c 2^{(-s_0 - \varepsilon + \frac{d}{p} - \frac{d}{p_0} + s_0 - \frac{d}{p} + \frac{d}{p_0})j} \\ &\leq c 2^{-\varepsilon j} \\ \Rightarrow |\alpha_1 - \alpha_2| &\leq c j^a 2^{-\varepsilon j} \end{aligned}$$

donc en faisant tendre j vers l'infini, on obtient $\alpha_1 = \alpha_2$.

- Soit $p > p_0$ alors $\tilde{s}(p) = \frac{d}{p} + s_0 - \frac{d}{p_0} + \varepsilon$ et $|1 - 2^{j(d - \frac{p}{p_0})}| \sim 1$. On a alors :

$$\begin{aligned} \left| \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{j^a} \right| &\leq c 2^{(-s_0 - \frac{d}{p} + \frac{d}{p_0} - \varepsilon + \frac{d}{p} - \frac{d}{p_0} + s_0 - \frac{d}{p} + \frac{d}{p_0})j} \\ &\leq c 2^{-\varepsilon j} \\ \Rightarrow |\alpha_1 - \alpha_2| &\leq c j^a 2^{-\varepsilon j} \end{aligned}$$

Et de même, à l'infini, on obtient $\alpha_1 = \alpha_2$.

Regardons maintenant le cas $p = p_0$. Dans ce cas, $\tilde{s}(p) = s_0 + \varepsilon$ et

$$\begin{aligned} \|f + \alpha_1 g - (f + \alpha_2 g)\|_{B_{p_0}^{\tilde{s}, \infty}} &= \sup_j \sum_k \left| \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{j^a} 2^{(\tilde{s} - \frac{d}{p_0})j} 2^{(\frac{d}{p_0} - s_0)j} 2^{-\frac{d}{p_0} J} \right|^{p_0} \\ &= \sup_j \sum_k \left| \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{j^a} 2^{\varepsilon j} 2^{-\frac{d}{p_0} J} \right|^{p_0} \\ &= \sup_j \left| \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{j^a} \right|^{p_0} 2^{p_0 \varepsilon j} \sum_{J=0}^j \sum_{k \in \{0, \dots, 2^J - 1\}^d} 2^{-dJ} \\ &= \sup_j \left| \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{j^{a-1}} \right|^{p_0} 2^{p_0 \varepsilon j}. \end{aligned}$$

Donc pour que $\|f + \alpha_1 g - (f + \alpha_2 g)\|_{B_{p_0}^{\tilde{s}, \infty}} < \infty$, il faut nécessairement que $\alpha_1 = \alpha_2$.

Dans les deux cas, l'ensemble $M(p)$ est réduit à un point, il est donc de mesure de Lebesgue nulle. Ce qui nous donne la fonction d'échelle pour un ensemble prévalent de fonctions de $B_{p_0}^{s_0, \infty}$.

Dans le cas où $s_0 - \frac{d}{p_0} < 0$, on regarde $B_{p_0}^{s_0, \infty} \cap C^\gamma$. Même si le résultat est identique dans le premier cas, la conclusion n'est pas possible pour $p > p_0$. En effet, on ne connaît pas le signe du terme de gauche dans l'inégalité $\tilde{s}(p) = \frac{d}{p} + s_0 - \frac{d}{p_0} + \varepsilon$.

Pour donner le résultat dans ce cas, on passe par un autre espace sonde engendré par la fonction g définie par :

$$(4.18) \quad d_\lambda = \begin{cases} j^{-2}2^{-\gamma j} & \text{si pour chaque } i = 1, \dots, d \text{ } k_i \equiv 0 [2^{j-L}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

L est défini par $L := \left\lceil \frac{(d+(\gamma-s)p)j}{d} \right\rceil$. On fixe $\tilde{s} = \gamma + (s_0 - \gamma)\frac{p_0}{p} + \varepsilon$, et une fonction $f \in B_{p_0}^{s_0, \infty} \cap C^\gamma$ quelconque. Donc si l'on considère deux points α_1 et α_2 appartenant à $M(p)$, on a :

$$\begin{aligned} \exists c > 0 / \quad & \|f + \alpha_1 g - f + \alpha_2 g\|_{B_p^{\tilde{s}, \infty}} \leq \|f + \alpha_1 g\|_{B_p^{\tilde{s}, \infty}} + \|f + \alpha_2 g\|_{B_p^{\tilde{s}, \infty}} \leq c \\ \Leftrightarrow \quad & \forall j \sum_{k \geq 0} \left| \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{j^2} 2^{(\tilde{s} - \frac{d}{p})j} 2^{-\gamma j} \right|^p \leq c \\ \Leftrightarrow \quad & \forall j \left(\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{j^2} \right) 2^{L(-\gamma p + \tilde{s} p - d)j} \leq c \\ \Leftrightarrow \quad & \forall j \left(\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{j^2} \right) 2^{j + \gamma j p_0 - s_0 p_0 j - \gamma p j + \tilde{s} p j - j} \leq c \\ \Leftrightarrow \quad & \forall j \left(\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{j^2} \right) 2^{\gamma j p_0 - s_0 p_0 j - \gamma p j + (\gamma + (s_0 - \gamma)\frac{p_0}{p} + \varepsilon)p j} \leq c \\ \Leftrightarrow \quad & \forall j \left(\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{j^2} \right) 2^{\varepsilon p j} \leq c \\ \Leftrightarrow \quad & \forall j \left(\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{j^2} \right) \leq c 2^{-\varepsilon p j} \end{aligned}$$

Quand on fait tendre j vers l'infini, on obtient bien que $\eta_f(p) \leq \gamma p + (s_0 - \gamma)p_0$ pour un ensemble prévalent de fonctions de $B_{p_0}^{s_0, \infty} \cap C^\gamma$. Pour l'autre inégalité, on utilise la proposition 1.9. En effet, comme $f \in B_{p_0}^{s_0, \infty} \cap C^\gamma$, alors $f \in B_p^{s, \infty}$ si en posant $\theta = \frac{p_0}{p} \in (0, 1)$, on a $s = \theta s_0 + (1 - \theta)\gamma$. Par conséquent, $\frac{\eta(p)}{p} \geq \frac{p_0}{p}(s_0 - \gamma) + \gamma$. D'où le résultat. \square

En prenant le spectre de singularités dans le théorème 4.2, on peut conclure cette partie par la proposition :

Proposition 4.3. — Soient $s_0 > 0$, $0 < p_0 \leq \infty$ et $0 < q_0 \leq \infty$.

– Si $s_0 - \frac{d}{p_0} > 0$, alors pour un ensemble prévalent de fonctions de $B_{p_0}^{s_0, q_0}$ on a :

$$(4.19) \quad \forall H \in \left[s_0 - \frac{d}{p_0}, s_0 \right] \quad d(H) = \inf_{p > 0} (d - \eta(p) + Hp) = d - p_0 s_0 + Hp_0.$$

- Si $s_0 - \frac{d}{p_0} < 0$, et $\gamma > 0$ alors pour un ensemble prévalent de fonctions de $B_{p_0}^{s_0, q_0} \cap C^\gamma$ on a :

$$(4.20) \quad \forall H \in [\gamma, s_0] \quad d(H) = \inf_{p>0} (d - \eta(p) + Hp) = d - p_0 s_0 + H p_0.$$

Ce résultat coïncide avec l'équation (4.1). Nous obtenons donc bien la partie croissante du spectre de singularités conformément à la formule donnée par Parisi et Frisch.

4.3. Le formalisme multifractal

Le but de cette partie est d'obtenir les mêmes résultats que précédemment afin d'obtenir un spectre de singularités prévalent dans l'espace :

$$V = \bigcap_{\varepsilon>0, 0<p<\infty} B_{p,loc}^{(\eta(p)-\varepsilon)/p,p}.$$

Cet espace V est un espace vectoriel topologique. Nous avons vu dans le chapitre 1 que, comme p peut être pris inférieur à 1, V n'est pas une intersection d'espaces de Banach. Ce n'est donc pas un espace de Banach, mais c'est tout de même bien un espace métrique complet. En effet, grâce aux injections de Sobolev, voir la proposition 1.8, on peut écrire

$$V = \bigcap_n B_{p_n,loc}^{(\eta(p_n)-\varepsilon_n)/p_n,p_n}.$$

Dans ce cas, on définit sur V la distance :

$$\forall f, g \in V \quad d(f, g) = \sum \frac{1}{2^n} \frac{d_n(f, g)}{1 + d_n(f, g)},$$

où $d_n(f, g)$ est la distance de f à g dans $B_{p_n,loc}^{(\eta(p_n)-\varepsilon_n)/p_n,p_n}$. On a ainsi défini une distance sur V . De plus V muni de cette distance est complet car chaque $B_{p_n,loc}^{(\eta(p_n)-\varepsilon_n)/p_n,p_n}$ l'est.

Par contre, ce n'est pas un espace séparable car p et q prennent aussi des valeurs infinies. Mais, comme la mesure que nous utilisons est engendrée par un espace sonde, elle est donc à support compact et nous pouvons parler de prévalence sur V .

Nous allons démontrer par conséquent le théorème 4.1. A savoir que le spectre de singularités de presque toutes les fonctions de V vérifie :

$$d(H) = \inf_{p \geq p_c} (pH - \eta_f(p) + d).$$

4.3.1. L'espace sonde. — Commençons par déterminer l'espace sonde qui pourrait être adapté au problème. Pour cela, on pose :

$$a(j, k) = \inf_{p>0} \left(\frac{d(j - J) - \eta(p)j}{p} \right)$$

et g est définie par ses coefficients d'ondelette :

$$(4.21) \quad d_{j,k} = \frac{1}{j^a} 2^{a(j,k)}$$

où $a = a_j = \log j$ et $J = J(j, k)$ et $K = K(j, k)$ sont donnés par (3.12).

On cherche maintenant les propriétés de cette fonction g , c'est-à-dire qu'on commence par regarder quel est son spectre multifractal, sa fonction d'échelle, de manière à s'assurer qu'ils vérifient bien la condition (4.6). Le résultat suivant est démontré dans [44].

Lemme 4.2. — *La fonction d'échelle de g vaut exactement $\eta_g(p) = \eta(p)$, pour tout p .*

Démonstration : Soit $p > 0$ fixé. Tout d'abord, on va montrer que $\eta_g(p) \geq \eta(p)$, en montrant que $g \in B_p^{\eta(p)/p, \infty}$.

$$\begin{aligned} \|g\|_{B_p^{\eta(p)/p, \infty}} &= \sup_{j \geq 1} \left(\sum_{\lambda \in \Lambda_j} \left| d_\lambda 2^{(\frac{\eta(p)}{p} - \frac{d}{p})j} \right|^p \right) \\ &= \sup_j \left(\sum_{\lambda \in \Lambda_j} |d_\lambda|^p 2^{(\eta(p) - p)j} \right) \\ &= \sup_j \frac{1}{j^{pa}} \left(\sum_{\lambda \in \Lambda_j} 2^{pa(j,k) + (\eta(p) - p)j} \right) \\ &\leq \sup_j \frac{1}{j^{pa}} \left(\sum_{\lambda \in \Lambda_j} 2^{d(j-J) - \eta(p)j + \eta(p)j - dj} \right) \\ &\leq \sup_j \frac{1}{j^{pa}} \left(\sum_{\lambda \in \Lambda_j} 2^{-Jd} \right) \end{aligned}$$

Pour chaque $\lambda = \lambda(j, k) = \frac{k}{2^j} + [0, 2^{-j}[^d$ est associé $K \in \mathbb{Z}^d$ tel que :

$$\begin{cases} \frac{k}{2^j} = \frac{K}{2^J} \\ \text{l'une au moins des coordonnées de } K \text{ est impaire} \end{cases} .$$

On peut donc découper la somme en sur λ suivant les valeurs prises par J ($0 \leq J \leq j$). Pour un J donné on a 2^{dJ} éléments dont la somme donne

$$\sum_{\lambda \in \Lambda_j} 2^{-Jd} = \sum_{J=0}^j \sum_{\lambda \in \Lambda_J} 2^{-dJ} = \sum_{J=0}^j 2^{-dJ} 2^{dJ} = j$$

Donc $\|g\| \leq \sup_j \frac{1}{j^{pa-1}} < \infty$.

On a donc bien la minoration. Pour obtenir la majoration, on pose $q = \frac{1}{p}$, on considère $\omega = \eta(p)/p + \varepsilon$ et on calcule la norme de g dans $B_p^{\omega, \infty}$. Pour cela, on pose $s(q) = \frac{\eta(1/q)}{q}$, cette fonction s est concave par définition. De plus, on voit alors que $a(j, k) = \inf_p \left(\frac{d(j-J) - \eta(p)j}{p} \right) = \inf_q (d(j-J)q - s(q)j)$. Mais :

$$\begin{aligned} a(j, k) + \omega j - dqj &= \inf_q ((d(j-J)q - s(q)j) + \omega j - dqj) \\ &\geq \inf_q (d(j-J)q - s(q)j + \omega j - dqj) \\ &\geq \inf_q (d(j-J)q - s(q)j + s(q)j - dqj + \varepsilon j) = \inf_q (-dJq + \varepsilon j). \end{aligned}$$

Ce qui nous donne, pour la norme de g dans $B_p^{\omega, \infty}$:

$$\begin{aligned} \|g\|_{B_{1/q}^{\omega, \infty}} &= \sup_j \sum_{\lambda \in \Lambda_j} |d_\lambda 2^{(\omega - dq)j}|^{1/q} \\ &= \sup_j \sum_{\lambda \in \Lambda_j} \left| \frac{1}{j^a} 2^{a(j,k)} 2^{(\omega - dq)j} \right|^{1/q} \\ &= \sup_j \frac{1}{j^{a/q}} \sum_{\lambda \in \Lambda_j} |2^{a(j,k) + \omega j - dqj}|^{1/q} \\ &\geq \sup_j \frac{1}{j^{a/q}} \left(\sum_{J=0}^j \sum_{\lambda \in \Lambda_J} \inf_q 2^{j\varepsilon + dJq} \right)^{1/q} \\ &\geq \sup_j \frac{1}{j^{a/q-1}} 2^{\varepsilon j} = \infty \end{aligned}$$

Ce qui nous donne l'égalité recherchée. \square

Nous allons maintenant calculer l'exposant de Hölder ponctuel de la fonction g . Celui-ci dépend de l'approximation d'un point de $(0, 1)^d$ par des dyadiques, nous devons donc d'abord reprendre les notations du chapitre 3, et nous notons

$$(4.22) \quad F_\alpha = \limsup_{j \rightarrow \infty} F_\alpha^j$$

où $F_\alpha^j = \bigcup_\chi \chi + [-\frac{1}{2^{\alpha j}}; \frac{1}{2^{\alpha j}}]^d$ (χ désigne ici le point dyadique $(\frac{k_1}{2^j}, \dots, \frac{k_n}{2^j})$).

Reprenons la démonstration du lemme suivant, faite dans [44].

Lemme 4.3. — *L'exposant de Hölder ponctuel de la fonction g est donné par :*

$$(4.23) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d \quad h_g(x) = \frac{1}{\alpha(x)} \inf_{\omega \geq \alpha(x)} \sup_q (\omega(s(q) - dq) + dq).$$

Démonstration : Avant de démontrer le lemme 4.3, regardons si nous pouvons utiliser l'équation (1.17). Pour cela, il faut qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que g appartient à $C^\varepsilon(\mathbb{R}^d)$. Mais

$$a(j, k) = \inf_p \left(\frac{d(j - J)}{p} - j \frac{\eta(p)}{p} \right).$$

Donc en remplaçant $\eta(p)/p = s(1/p)$ on obtient que

$$a(j, k) = - \sup_{q > 0} (s(q)j - qd(j - J)).$$

Comme $j - J \geq 0$, par définition de J , et que la condition d'admissibilité sur η nous assure que s est croissante, on a la majoration suivante de $a(j, k)$:

$$a(j, k) \leq - \sup_{q > 0} (s(q)j) \leq -s(0)j.$$

Donc si η est fortement admissible, autrement dit si $s(0) > 0$, on a :

$$\sup_k |d_\lambda| = \sup_k \frac{2^{a(j,k)}}{j^a} \leq \frac{2^{-s(0)j}}{j^a}.$$

Et d'après la proposition 1.1, f est uniformément höldérienne d'exposant $s(0)$.

Soit $x \in (0, 1)^d$ fixé. On regarde d'abord les coefficients de g correspondant aux j et k tels que $|2^j x - k| < 1$. En remarquant que $a(j, k) = \inf_q (q(d(j - J) - \eta(1/q)j)) \Rightarrow -a(j, k) = \sup_q (q(d(J - j) + \eta(1/q)j))$ On a alors :

$$\begin{aligned} \liminf_{j \rightarrow \infty} \frac{\log |d_\lambda|}{\log(2^{-j} + |x - \lambda|)} &\geq \liminf_{j \rightarrow \infty} \liminf_{j \rightarrow \infty} \frac{-a \log j}{-j \log 2} + \frac{a(j, k)}{-j \log 2} \\ &\geq \liminf_{j \rightarrow \infty} \frac{-a(j, k)}{j} \\ &\geq \liminf_{j \rightarrow \infty} \frac{\sup_q (q(d(J - j) + q\eta(1/q)j))}{j} = \liminf_{J \rightarrow \infty} \sup_q (-dq + \frac{dJ}{j} + s(q)) \end{aligned}$$

Et on prend J dans la suite définie dans (3.8) et j tel que $j \leq (\alpha(x) + \varepsilon)J$. On a alors :

$$\liminf \frac{\log |d_\lambda|}{\log(2^{-j} + |x - \lambda|)} \geq \sup_q (-dq + \frac{d}{\alpha(x) + \varepsilon} + s(q)).$$

On reconnaît dans le terme de droite l'expression de (4.23) prise pour $\omega = \alpha(x)$.

On a donc la bonne minoration, en faisant tendre ε vers 0.

Si on regarde maintenant les coefficients correspondant aux (k, j) tels que $|2^j x - k| \geq 1$. Pour ces coefficients on a deux cas possibles :

– Si $\frac{j}{J} \geq \alpha(x)$ alors :

$$\begin{aligned} \liminf \frac{\log |d_\lambda|}{\log(2^{-j} + |x - \lambda|)} &\geq \liminf \frac{-a \log j}{\log |x - \lambda|} + \frac{a(j, k) \log 2}{\log |x - \lambda|} \\ &\geq \liminf \frac{\sup_q (qd(J - j) + s(q)j) \log 2}{-\log |x - \lambda|} \\ &\geq \liminf \frac{\sup_q (qd(J - j) + s(q)j) \log 2}{(\alpha(x)J) \log 2} \\ &\geq \liminf \sup_q \left(\frac{j}{J} \frac{-qd + s(q)}{\alpha(x)} + \frac{qd}{\alpha(x)} \right) \\ &\geq \liminf \frac{1}{\alpha(x)} \sup_q \left(\frac{j}{J} (-qd + s(q)) + qd \right) \end{aligned}$$

Donc

$$h_g(x) \geq \frac{1}{\alpha(x)} \inf_{a \geq \alpha(x)} \sup_q (a(-qd + s(q)) + qd).$$

– Si $\frac{j}{J} \leq \alpha(x)$:

$$\begin{aligned} \liminf_{j \rightarrow \infty} \frac{\log |d_\lambda|}{\log(2^{-j} + |x - \lambda|)} &\geq \frac{\sup_q (q(d(J - j) + s(q)j)) \log 2}{(\alpha(x)J) \log 2} \\ &\geq \liminf_{j \rightarrow \infty} \frac{\sup_q (q(d(J - j) + s(q)j)) \log 2}{j \log 2} \\ &\geq \liminf_{j \rightarrow \infty} \sup_q (s(q) - qd + qd \frac{J}{j}) \\ &\geq \liminf_{j \rightarrow \infty} \sup_q (s(q) - qd + qd \frac{1}{\alpha(x)}) \\ &\geq \frac{1}{\alpha(x)} \sup_q (\alpha(x)(s(q) - qd) + qd) \end{aligned}$$

On a donc encore la minoration $h_g(x) \geq \frac{1}{\alpha(x)} \inf_{a \geq \alpha(x)} \sup_q (a(-qd + s(q)) + qd)$.

Pour démontrer la majoration, on reprend la sous-suite des (K_n, J_n) définie dans la définition 3.1. On a alors, en posant $j = [\alpha(x_0)J_n]$,

$$h_g(x) \leq \frac{1}{\alpha(x)} \inf_{a \geq \alpha(x) - \varepsilon} \sup_q (a(-qd + s(q)) + qd),$$

ce qui nous donne le résultat en faisant tendre ε vers 0. □

Proposition 4.4. — *Le spectre de singularité de la fonction g est défini sur l'intervalle $[s(0), d/p_c]$ où il est donné par :*

$$(4.24) \quad d(H) = \inf_{p \geq p_c} (Hp - \eta(p) + d)$$

où p_c est l'unique point tel que $\eta(p) = d$.

Avant de commencer la démonstration, on va commencer par donner la définition de la transformée de Legendre, qui sera utilisée ultérieurement.

Définition 4.3. — Soit f une fonction semi-continue inférieurement définie sur E un espace vectoriel normé. Alors la transformée de Legendre de f est donnée par :

$$(4.25) \quad f^*(x) = \sup_{y \in E} (f(y) - xy).$$

Cette fonction est semi-continue inférieurement et convexe.

Démonstration : Pour cela, on remarque que la fonction

$$h_g(x) = \frac{1}{\alpha(x)} \inf_{a \geq \alpha(x)} \left(\sup_q (a(-qd + s(q)) + qd) \right)$$

peut s'écrire sous la forme

$$h_g(x) = H(\alpha) = \frac{1}{\alpha(x)} \inf_{a \geq \alpha(x)} G(a)$$

où $G(a) = \sup_q (a(-qd + s(q)) + qd) = a \sup_q (qd(-1 + \frac{1}{a}) + s(q)) = a s^*(d(1 - \frac{1}{a}))$. La fonction s^* est convexe par définition de la transformée de Legendre. De plus, elle vérifie les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} s^*(h) = +\infty & \text{si } h < s'(+\infty) \\ s^*(h) = s(0) & \text{si } h > s'(0) \end{cases}.$$

En effet, si à q fixé, on note $f(h) = s(q) - hq$, cette fonction est décroissante. De plus, comme s est concave, quelque soit q , $\frac{s(q)}{q} > s'(+\infty)$, donc $f(h) > (\frac{s(q)}{q} - s'(+\infty))q$ quelque soit $h < s'(+\infty)$. Par conséquent, $f(h) > cq$, qui n'a pas de supremum en q . De l'autre côté, pour $h > s'(0)$, quelque soit $q \geq 0$, $f(h) \leq -cq$, par un argument similaire. Donc le supremum est obtenu pour $q = 0$, c'est à dire $s^*(h) = s(0)$. Par conséquent, G vérifie aussi que :

$$(4.26) \quad \begin{cases} G(a) = +\infty & \text{si } a < \frac{d}{d-s'(+\infty)} \\ G(a) = as(0) & \text{si } a > \frac{d}{d-s'(0)} \end{cases}.$$

On suppose de plus que s^* est deux fois dérivable, sinon on peut voir dans [35] la démonstration en dimension 1 dans le cas où s^* n'est pas deux fois dérivable. On a alors :

$$G'(a) = s^* \left(d \left(1 - \frac{1}{a} \right) \right) + \frac{d}{a} (s^*)' \left(d \left(1 - \frac{1}{a} \right) \right)$$

et :

$$\begin{aligned} G''(a) &= \frac{d}{a^2} (s^*)' \left(d \left(1 - \frac{1}{a} \right) \right) - \frac{d}{a^2} (s^*)' \left(d \left(1 - \frac{1}{a} \right) \right) + \frac{d^2}{a^3} (s^*)'' \left(d \left(1 - \frac{1}{a} \right) \right) \\ &= \frac{d^2}{a^3} (s^*)'' \left(d \left(1 - \frac{1}{a} \right) \right) \geq 0. \end{aligned}$$

La fonction G est donc elle aussi convexe et il existe un a_0 tel que $G(a_0) = \inf_{a \geq 0} G(a)$, la valeur de a_0 étant donnée par $G'(a_0) = 0$. De plus, d'après (4.26), $a_0 \in (\frac{d}{d-s'(+\infty)}, \frac{d}{d-s'(0)})$ qui est un intervalle inclus dans $[0, \infty[$, car η est admissible donc $0 \leq s' \leq d$.

D'un autre côté, on peut aussi écrire G sous la forme $G(a) = \sup_q(\tilde{s}(q))$ où

$$\tilde{s}(q) = a(s(q) - qd) + qd.$$

De plus, la fonction \tilde{s} est concave, comme somme de fonctions concaves, et elle possède une borne supérieure q_0 donnée par $\tilde{s}'(q_0) = -da + as'(q_0) + d = 0$, autrement dit $s'(q_0) = \frac{da-d}{a}$. On voit aussi que la valeur de q_0 dépend de la valeur de a que l'on considère, autrement dit $q_0 = q(a)$. Par conséquent $h_g(x)$ peut se réécrire sous la forme

$$h_g(x) = \frac{1}{\alpha(x)} \inf_{a \geq \alpha(x)} (a(-q(a)d + s(q(a))) + q(a)d) = \frac{1}{\alpha(x)} \inf_{a \geq \alpha(x)} G(a).$$

On regarde maintenant la fonction $G(a) = a(-q(a)d + s(q(a))) + q(a)d$, cette fonction est deux fois dérivable et sa dérivée est donnée par :

$$\begin{aligned} G'(a) &= (-q(a)d + s(q(a))) + q'(a)d + aq'(a)s'(q(a)) - daq'(a) \\ &= q'(a)(d - da + as'(q(a))) + s(q(a)) - dq(a) \\ &= s(q(a)) - dq(a). \end{aligned}$$

Autrement dit, pour $a = a_0$, la borne inférieure de la fonction G , on a : $G'(a_0) = s(q(a_0)) - dq(a_0) = 0 \Rightarrow s(q(a_0)) = dq(a_0)$. Donc $q(a_0) = q_c = 1/p_c$ est tel que $s(q_c) = dq_c$. De plus, la fonction G étant convexe et atteignant son minimum en a_0 , on sait qu'elle est décroissante pour $a \leq a_0$ et croissante pour $a \geq a_0$. Ce qui signifie, si l'on regarde la forme de la fonction $h_g(x)$ qu'on a plusieurs cas possibles suivant la valeur de $\alpha(x)$. Rappelons que l'ensemble des points qui vérifient $\alpha(x) = \alpha$ a pour dimension $\frac{d}{\alpha}$.

- Si $\alpha(x) \geq \frac{d}{d-s'(0)}$ alors $G(\alpha(x)) = \alpha(x)s(0)$ et $H(\alpha) = s(0)$. Dans ce cas, $d(s(0)) = d - s'(0)$.
- Si $\alpha(x) \leq a_0$ et

$$\inf_{a \geq \alpha(x)} G(a) = G(a_0) = (a_0(-q_c d + s(q_c)) + q_c d) = dq_c.$$

Ce qui implique que :

$$H(\alpha) = \frac{1}{\alpha(x)} \inf_{a \geq \alpha(x)} G(a) = \frac{dq_c}{\alpha(x)}$$

Donc, h_g est défini sur l'intervalle $[\frac{dq_c}{a_0}, dq_c]$ et sur cet intervalle on obtient :

$$d(H) = \frac{H}{q_c}.$$

De plus $a \mapsto q(a)$ est décroissante. Par conséquent, si $\alpha \leq a_0$, alors $q \geq q_c$ et $s(q) \leq dq$. Par conséquent, pour tout $q \geq q_c$

$$d(H) \leq \frac{H}{q} + dq - s(q).$$

En passant à l'infimum, on obtient pour tout $H \in [\frac{dq_c}{a_0}, dq_c]$:

$$d(H) \leq \inf_{q \geq q_c} \frac{H}{q} + dq - s(q).$$

– Si $a_0 \leq \alpha(x) \leq \frac{d}{d-s'(0)}$, on a alors :

$$\inf_{a \geq \alpha(x)} G(a) = G(\alpha(x)) = \alpha(x) \sup_q \left(-qd + s(q) + \frac{qd}{\alpha(x)} \right).$$

Et dans ce cas,

$$H(\alpha) = \sup_q \left(-qd + s(q) + \frac{qd}{\alpha(x)} \right).$$

Et la dimension d'un tel ensemble est $\frac{d}{\alpha}$. Donc (comme $p = \frac{1}{q}$)

$$\forall p \quad H \geq -\frac{d}{p} + \frac{\eta(p)}{p} + \frac{d(H)}{p}.$$

Donc pour tout p , $d(H) \leq Hp - \eta(p) + d$. En passant à l'infimum, on obtient :

$$d(H) \leq \inf_p (Hp - \eta(p) + d).$$

De plus, si l'on reprend la forme de la fonction \tilde{s} , on sait que pour tout a , la borne supérieure est définie par $s'(q(a)) = d \left(1 - \frac{1}{a}\right)$, et s étant concave, la fonction s' est décroissante. Considérons deux points $a < b$, on a alors $s'(q(a)) < s'(q(b))$, ce qui signifie que $q(a) > q(b)$. Or dans le cas présent on a pris $a = \alpha(x)$ et $b = a_0$ donc $q(\alpha(x)) \geq q(a_0) = q_c$. Autrement dit, dans la forme de $H(\alpha)$ on peut prendre :

$$H(\alpha) = \sup_{q \geq q_c} \left(-qd + s(q) + \frac{qd}{\alpha(x)} \right).$$

Avec égalité pour $\alpha(x) = \frac{d}{d-s'(0)}$. Cette fois, l'exposant $H(\alpha)$ appartient à l'intervalle $[s(0), \frac{dq_c}{a_0}]$, et pour tout H dans cet intervalle on a :

$$d(H) = \inf_{p \geq p_c} (pH - \eta(p) + d).$$

En combinant tous ces résultats, on obtient finalement que pour tout $H \in [s(0), \frac{dq_c}{a_0}]$,

$$d(H) = \inf_{p \geq p_c} (pH - \eta(p) + d).$$

□

4.3.2. Spectre de singularités prévalent. — Passons maintenant à la démonstration du point important de cette étude, à savoir le spectre de singularité de presque toutes les fonctions de V .

Proposition 4.5. — *Le spectre de singularité de presque tout $f \in V$ vérifie :*

$$(4.27) \quad \forall H \in [s(0), \frac{d}{p_c}] \quad d(H) = \inf_{p \geq p_c} (Hp - \eta(p) + d).$$

Démonstration : La démonstration de cette proposition suit la même trame que celle du théorème 4.2.

Dans un premier temps, on fixe $\alpha \in (1, \infty)$ et on note F_α l'ensemble des points de $(0, 1)^d$ α -approximables par des dyadiques. Pour $\varepsilon > 0$ fixé, on pose

$$H(\alpha) = \frac{1}{\alpha} \sup_{\omega \geq \alpha} \left(\omega \sup_{q > 0} (s(q) - d(1 - \frac{1}{\omega})q) \right)$$

et $\gamma(\alpha) = H(\alpha) + \varepsilon$. Soit $N = 2^{dl} > \frac{d}{\varepsilon\alpha} + 1$ fixé. On construit un espace sonde P en prenant N fonctions (g_i) obtenues en décomposant la fonction g sur des sous-cubes $i(\lambda)$ de taille $2^{-d(j+l)}$. Dans un premier temps, on veut montrer que l'ensemble des fonctions dont l'exposant de Hölder en un point de F_α est supérieur ou égal à $\gamma(\alpha)$ est Haar nul. Comme précédemment, cet ensemble est inclus dans une union dénombrable d'ensembles

$$S_c(\alpha) = \{f = \sum c_\lambda \psi_\lambda : \exists x \in F_\alpha \forall j, k |c_\lambda| \leq c2^{-\gamma(\alpha)j}(1 + |2^j x - k|)^{\gamma(\alpha)}\}.$$

On va donc montrer qu'à c fixé ces ensembles $S_c(\alpha)$ sont Haar-nul. Pour cela, on remarque en reprenant la définition de la fonction g que nous avons étudiée au début de cette partie que

$$H(\alpha) = \frac{1}{\alpha} \sup_{\omega \geq \alpha} \left(\omega \sup_{q > 0} (s(q) - d(1 - \frac{1}{\omega})q) \right) \geq -a(j, k)$$

pour certaines valeurs de j et de k .

Par conséquent, si l'on prend $x \in F_\alpha$ fixé et que l'on considère les coefficients indexés par les cubes dyadiques tels que $|x - \lambda| \leq A$ pour $A > 2N$, on obtient pour tout i :

$$(4.28) \quad |d_\lambda^i| \geq \frac{c(A)}{j^a} 2^{-H(\alpha)j}.$$

Soit $f \in V$ quelconque.

Si on prend un cube $F_\alpha^{i,l}$ à l'échelle i , tels qu'ils sont définis dans l'équation (6.9), on peut alors découper l'ensemble $S_c(\alpha)$ en 2^{di} ensembles

$$S_c(\alpha)^{i,l} \{f = \sum c_\lambda \psi_\lambda : \exists x \in F_\alpha^{i,l} \forall j, k |c_\lambda| \leq c2^{-\gamma(\alpha)j}(1 + |2^j x - k|)^{\gamma(\alpha)}\}.$$

Chaque ensemble $S_c(\alpha)^{i,l}$ est fermé, donc borélien. Fixons un i , et pour $l \in \{0, \dots, 2^i - 1\}^d$ et regardons ce qu'il en est pour $S_c(\alpha)^{i,l}$. On prend deux points β_1 et β_2 tels que les fonctions $f + \sum \beta_1^i g^i$ et $f + \sum \beta_2^i g^i$ appartiennent à cet ensemble, il existe alors deux points x_1 et x_2 tels que la différence des deux fonctions vérifie dans le cône de longueur $2N$ au dessus simultanément de x_1 et de x_2 pris à l'échelle $j = [\alpha i]$:

$$|c_\lambda + \sum \beta_1^i d_\lambda^i - (c_\lambda + \sum \beta_2^i d_\lambda^i)| \leq 2c2^{-\gamma(\alpha)j}.$$

Or,

$$|c_\lambda + \sum \beta_1^i d_\lambda^i - (c_\lambda + \sum \beta_2^i d_\lambda^i)| = |\sum \beta_1^i d_\lambda^i - \beta_2^i d_\lambda^i|$$

et d'après (4.28),

$$|\sum \beta_1^i d_\lambda^i - \beta_2^i d_\lambda^i| \geq |\sum \beta_1^i - \beta_2^i| \frac{c(A)}{j^a} 2^{-H(\alpha)j}.$$

En reprenant la majoration et la minoration, on obtient,

$$\|\beta_1 - \beta_2\|_{\mathbb{R}^N} \leq \tilde{c} j^a 2^{-\varepsilon j}.$$

Par conséquent :

$$\mathcal{L}(\{\beta : f + \beta g \in S_c(\alpha)^{i,l}\}) \leq (\tilde{c} i^a)^N 2^{-N\varepsilon \alpha i}.$$

Donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\{\beta : f + \beta g \in S_c(\alpha)^i\}) &\leq \sum_{k \in \{0, \dots, 2^i - 1\}^d} \mathcal{L}(\{\beta : f + \beta g \in S_c(\alpha)^{i,l}\}) \\ &\leq (\tilde{c} i^a)^N 2^{-N\varepsilon \alpha i + di}. \end{aligned}$$

Comme on a choisit $N > \frac{d}{\varepsilon \alpha}$, en passant à la limite supérieure, on obtient

$$\mathcal{L}(\{\beta : f + \beta g \in S_c(\alpha)\}) \leq \lim (\tilde{c} i^a)^N 2^{-N\varepsilon \alpha i + di} = 0.$$

Par conséquent $S_c(\alpha)$ est Haar-nul.

On fait ensuite l'union sur les $c_n > 0$ des ensembles $S_c(\alpha)$, comme l'ensemble des fonctions de V ayant un exposant de Hölder supérieur ou égal à $\gamma(\alpha)$ est inclus dans cette union, il est aussi Haar-nul. En prenant une suite (ε_n) qui tend en décroissant vers zéro, on obtient finalement que pour tout $\alpha \geq 1$ l'ensemble des fonctions de V ayant un exposant de Hölder ponctuel supérieur à $H(\alpha)$ en un point de F_α est Haar-nul.

On considère une suite (α_n) dense dans $(1, \infty)$ et on prend l'union sur les α_n . On obtient que l'ensemble

$$(4.29) \quad M = \{f \in V : \forall n \quad \forall x \in F_{\alpha_n} \quad h_f(x) \leq H(\alpha)\}$$

est prévalent. Soit $f \in M$ quelconque et soit $\alpha \geq 1$. Il existe une sous-suite $\alpha_{\phi(n)}$ qui converge en croissant vers α et l'intersection \tilde{F}_α des F_{α_n} contient F_α car ces

ensembles sont décroissants en α . De plus la dimension de \tilde{F}_α est supérieure ou égale à $\frac{d}{\alpha}$ et pour tout $x \in \tilde{F}_\alpha$, $h_f(x) \leq H(\alpha)$.

De plus nous avons vu, quand nous avons fait l'étude de la fonction g dans la partie 4.3.1, que la fonction $H(\alpha)$ vérifiait :

$$\begin{cases} H(\alpha) = \frac{d}{p_c} & \text{si } \alpha \leq a_0 \\ H(\alpha) = \sup_{q \geq q_c} (-qd + s(q) + \frac{qd}{\alpha}) & \text{sinon} \end{cases}$$

Dans le premier cas, $\dim_H(\{x : h_f(x) \leq H\}) \geq p_c H$ et dans le deuxième cas $\dim_H(\{x : h_f(x) \leq H\}) \geq \inf_{p \geq p_c} (Hp - \eta(p) + d)$.

De plus, comme il est dit dans [44], le spectre de singularités de toutes les fonctions de V vérifient

$$(4.30) \quad d(H) \leq \inf_{p \geq p_c} (pH - \eta(p) + d).$$

En particulier, l'ensemble des points tels que $\{x : h_f(x) < H\}$ est de dimension de Hausdorff strictement inférieure à $\frac{d}{\alpha}$ et donc de mesure de Hausdorff $\frac{d}{\alpha}$ -dimensionnelle nulle. Comme la mesure de $\{x : h_f(x) \leq H\}$ est strictement positive, on en déduit que :

$$d(H) \geq \inf_{p \geq p_c} (pH - \eta(p) + d).$$

En combinant ce résultat avec (4.30), on obtient donc le résultat de la proposition. \square

Proposition 4.6. — *Pour presque toutes fonctions f de V , la fonction d'échelle est donnée par :*

$$\eta_f(p) = \eta_g(p) = \eta(p).$$

Démonstration : La deuxième égalité étant déjà démontrée, il faut uniquement regarder la première. Pour cela on pose $\varepsilon > 0$, p fixé, $s = \frac{\eta(p)}{p} + \varepsilon$ et P l'espace sonde engendré par la fonction g . Soit f une fonction de V quelconque. On regarde l'ensemble $M(p) = \{\alpha \in \mathbb{R} : f + \alpha g \in B_p^{s, \infty}\}$. On suppose que cet ensemble est de mesure non nulle et on considère deux réels $\alpha_2 \neq \alpha_1$ dans $M(p)$. On a alors, $f + \alpha_1 g \in B_p^{s, \infty}$ et $f + \alpha_2 g \in B_p^{s, \infty}$, ce qui signifie que :

$$\begin{aligned} \|f + \alpha_1 g - f + \alpha_2 g\|_{B_p^{s, \infty}} &\leq \|f + \alpha_1 g\|_{B_p^{s, \infty}} + \|f + \alpha_2 g\|_{B_p^{s, \infty}} \leq c \\ \|f + \alpha_1 g - f + \alpha_2 g\|_{B_p^{s, \infty}} &= |\alpha_1 - \alpha_2| \|g\|_{B_p^{s, \infty}} = \infty \end{aligned}$$

Car g n'appartient pas à $B_p^{s, \infty}$ et $\alpha_1 - \alpha_2 \neq 0$. on obtient donc que $\eta_f(p) \leq \eta(p)$ pour tout p . Comme, de plus, f appartient à V , il appartient à tous les espaces $B_p^{s, \infty}$ si s est plus petit que $\eta(p)/p$. \square

CHAPITRE 5

PEUT-ON FAIRE MIEUX ?

5.1. Introduction

En ce qui concerne la régularité ponctuelle, nous avons constaté dans les chapitres précédents que l'utilisation de différents points de vue aboutissait aux mêmes conclusions. En effet, que ce soit dans les espaces de Sobolev ou dans l'espace des applications continues, l'approche topologique des catégories de Baire ou l'approche théorie de la mesure définie par la prévalence donnent les mêmes exposants de Hölder. Dans le cas des espaces de Besov, nous obtenons même dans ces deux cas les mêmes formalismes multifractals pour un grand ensemble de fonctions, et ce quel que soit le sens de "grand" utilisé. Comme nous l'avons vu dans le chapitre 2, d'autres généralisations de ces notions d'ensembles petits existent. Nous allons donc maintenant faire le tour de quelques unes de ces notions, pour voir comment elles peuvent s'adapter aux problèmes de la régularité ponctuelle dans les espaces de Besov et du formalisme multifractal.

5.2. Les unions de compacts

Comme nous l'avons déjà signalé dans l'introduction, les résultats que nous avons établis ici ont déjà été démontrés dans un cadre différent, à savoir celui des catégories de Baire. Peut-on alors trouver une autre théorie généralisant les deux précédentes et sur laquelle on puisse faire la même étude ?

Une classe d'ensembles vérifiant qu'ils sont à la fois nuls au sens, topologique, de Baire et nuls au sens de la prévalence est donnée par les ensembles pouvant être inclus dans une union dénombrable de compacts dans un espace métrique séparable de dimension infinie. De plus cette classe vérifie les propriétés voulues pour un ensemble petit.

Proposition 5.1. — *Soit X un espace de Banach séparable de dimension infinie. La classe \mathcal{C} des ensembles pouvant s'inclure dans une union dénombrable de compacts vérifie les propriétés \mathcal{H}_1 et \mathcal{H}_2 .*

Démonstration : En effet, si A peut s'écrire comme une union dénombrable de compacts, il est borélien comme union de fermés, et comme les compacts sont d'intérieur vides et fermés, A est de première catégorie au sens de Baire. De plus, les compacts sont Haar-nuls. Notons \mathcal{C} la classe des ensembles inclus dans une union de compacts. Alors si A et B appartiennent à \mathcal{C} , $A \cup B$ aussi par définition. De plus si $A \in \mathcal{C}$ et $B \subset A$, alors B est aussi inclus dans une union dénombrable de compacts. La classe \mathcal{C} vérifie donc bien la propriété de σ -idéal. De plus tous les éléments de \mathcal{C} sont d'intérieur vide, par le théorème de Riesz. La classe \mathcal{C} vérifie donc la propriété \mathcal{H}_1 .

Comme nous sommes dans un espace de Banach, donc métrique complet, on peut utiliser la propriété de Bolzano-Weierstrass. Autrement dit, un ensemble B est compact si de toute suite d'éléments de B on peut extraire une sous-suite qui converge dans B . Supposons que A est inclus dans une union dénombrable de compacts. Il existe alors une famille de compacts K_i tels que $A \subset \bigcup K_i$. Soit i_0 fixé, et $x \in X$ quelconque. Considérons une suite (x_n) appartenant à $K_{i_0} + x$. La suite (y_n) définie par pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_n = x_n - x$ appartient alors à K_{i_0} . Elle possède donc une sous-suite $\phi(n)$ telle que $y_{\phi(n)}$ converge vers un $y \in K_{i_0}$. Mais dans ce cas, $x_{\phi(n)} \rightarrow y + x$. Donc la suite (x_n) possède une sous-suite qui converge dans $K_{i_0} + x$ et celui-ci est compact. De plus, si $A \subset \bigcup K_i$ alors $A + x \subset \bigcup K_i + x$. Et quelque soit $i \in N$, quelque soit $x \in X$, $K_i + x$ est compact. Donc si A appartient à \mathcal{C} , $A + x$ appartient aussi à \mathcal{C} .

De même, quelque soit $\lambda > 0$, λB_n est aussi ouvert et $\lambda A \subset \bigcup \lambda B_n$. Par conséquent la classe \mathcal{C} est aussi invariante par dilatation. \square

Dans ce qui suit, nous aimerions savoir si les ensembles que nous avons étudiés auparavant peuvent s'écrire comme unions dénombrables de compacts. La réponse à cette question est mitigée. En effet, nous allons voir que pour les problèmes liés à la fonction d'échelle, on peut très simplement appliquer ce genre de théorie. Sur un contre-exemple, nous montrerons que pour les problèmes de régularité ponctuelle, ce cadre n'est pas adapté.

5.2.1. La fonction d'échelle. — Dans la proposition 5.7 nous avons montré que pour presque toute fonction f de V , la fonction d'échelle de f valait exactement $\eta(p)$. Nous allons redémontrer ce résultat dans le cadre que nous venons de définir.

Les autres résultats concernant la fonction d'échelle, ceux de la partie 4.2.2, se démontrent de la même manière.

Proposition 5.2. — *Soit η une fonction fortement admissible et $V(= V_\eta)$ l'espace fonctionnel que lui est associé par (4.3). L'ensemble des fonctions de V vérifiant que*

$$\exists p > 0 \quad \eta_f(p) \neq \eta(p)$$

est inclus dans une union dénombrable de compacts.

Démonstration : Comme $V = \bigcap_{\varepsilon > 0, 0 < p < \infty} B_{p,loc}^{(\eta(p)-\varepsilon)/p,p}$, quelque soit $f \in V$ sa fonction d'échelle est toujours supérieure ou égale à $\eta(p)$ quelque soit p . Il nous faut donc montrer que l'ensemble des fonctions pour laquelle elle est supérieure est inclus dans une union dénombrable de compacts. Soit p quelconque et $\tau > 0$, pour $k = (k_1, \dots, k_d)$ on note

$$M_p(c)_k = \{f \in V; \|f\|_{B_{p,loc}^{(\eta(p)+\tau)/p,p}([k,k+1])} \leq c\}.$$

L'ensemble des fonctions appartenant à $B_{p,loc}^{(\eta(p)+\tau)/p,p}$ peut alors s'écrire comme l'union sur les (c_n) positifs et sur $k \in \mathbb{Z}^d$ des $M_p(c_n)_k$, autrement dit comme une union d'ensembles bornés dans $B_{p,loc}^{(\eta(p)+\tau)/p,p}$. Or l'injection entre les espaces de Sobolev, sur un domaine borné, à savoir $[k, k+1]$ est une injection compacte, comme on peut le voir dans [2]. En utilisant la continuité de l'injection $B_{p,loc}^{\eta(p)/p,p} \hookrightarrow L^{\eta(p)-\varepsilon/2/p,p}$, on obtient donc que l'injection entre les espaces de Besov $B_{p,loc}^{(\eta(p)+\tau)/p,p}$ et $B_{p,loc}^{(\eta(p)-\varepsilon)/p,p}$ est compacte. Donc quelque soit $c > 0$ quelque soit $k \in \mathbb{Z}^d$ et quelque soit p , $M_p(c)_k$ est compact dans $B_{p,loc}^{(\eta(p)-\varepsilon)/p,p}$.

En prenant l'union sur $k \in \mathbb{Z}^d$ et sur les $c > 0$, on obtient que l'ensemble des fonctions de $B_{p,loc}^{(\eta(p)-\varepsilon)/p,p}$ appartenant à $B_{p,loc}^{(\eta(p)+\tau)/p,p}$ est une union dénombrable de compacts. En prenant ensuite l'union sur des τ_n qui décroissent vers zéro, on obtient que l'ensemble des fonctions f de V pour lesquelles il existe un p tel que $\eta_f(p) > \eta(p)$ est inclus dans une union dénombrable de compacts. Par conséquent l'ensemble des fonctions f pour lesquelles $\eta_f(p) \neq \eta(p)$ est inclus dans une union dénombrable de compacts.

□

5.2.2. La régularité ponctuelle. — Nous allons voir sur un exemple que nous ne pouvons pas utiliser les unions de compacts pour étudier la régularité ponctuelle.

Dans ce qui suit, on se place dans $C^\alpha([0, 1]^d)$ et pour $\varepsilon > 0$ fixé, on va regarder l'ensemble des fonctions appartenant à l'ensemble

$$M = \{f \in C^\alpha([0, 1]^d) \text{ tel que } \exists x \in [0, 1]^d, f \in C^{\alpha+\varepsilon}(x)\}.$$

Supposons qu'il existe une famille K_i de compacts tels que M soit inclus dans l'union des K_i , $M \subset \cup K_i$. Comme $C^\alpha([0, 1]^d)$ est un espace de Banach, on peut appliquer la propriété de Bolzano-Weierstrass. Autrement dit, pour montrer qu'un sous-ensemble de M est compact il suffit de montrer que de toute suite d'éléments de M on peut extraire une sous-suite qui converge. On construit une suite $(f_n)_n$ à l'aide de la transformée en ondelettes. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on note $f_n(x) = \sum_{j,k,i} d_{j,k}^n \psi_{j,k}^{(i)}(x)$ où $d_{j,k}^n$ sont définis de la façon suivante :

$$d_{j,k}^n = \begin{cases} 2^{-(\alpha+\varepsilon)j} & \text{si } j \geq n \\ 2^{-(\alpha-\varepsilon)j} & \text{si } j < n \end{cases}.$$

On voit aisément que tous les éléments de cette suite (f_n) appartient à M . Si M était inclus dans une union de compacts, il existerait donc au moins un compact K_{i_0} et une sous-suite $(f_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $f_{k_n} \in K_{i_0}$. Et, par la propriété de Bolzano-Weierstrass, il existerait une sous-suite $\phi(k)$ de la suite $(f_{k(n)})$ qui convergerait dans K_{i_0} . Or

$$\sup_j 2^{\alpha j} |d_{j,k}^n| = \sup_j 2^{\varepsilon j} = \infty.$$

La limite de la suite (f_n) , et donc de toutes ses sous-suites, n'appartient pas à $C^\alpha(\mathbb{R}^d)$. Donc $f \notin K_{i_0}$ et par conséquent, M ne peut pas s'écrire comme une union de compacts.

Même si nous avons un résultat positif pour la fonction d'échelle, à cause de cette lacune au niveau de la régularité ponctuelle, cette notion d'ensemble pouvant s'inclure dans une union de compacts n'est pas une bonne notion pour l'analyse multifractale.

5.3. Les ensembles nuls au sens gaussien de Phelps

Comme nous l'avons vu auparavant, les ensembles nuls au sens gaussien de Phelps représentent un cadre très restrictif de notion d'ensembles petits. En effet, si les compacts en dimension infinie peuvent ne pas être petits dans ce cas, qu'en est-il des ensembles que nous regardons ? Nous avons déjà vu dans un exemple que ce cadre ne semble pas le mieux adapté. Pour nous en convaincre une fois encore, regardons la régularité ponctuelle dans les ensembles de Sobolev à travers cette lunette. En fait, l'exemple suivant confirme bien l'impression donnée dans le chapitre 2, à savoir que le cadre donné par les ensembles nuls au

sens gaussien est trop fort et que nous ne pouvons pas l'utiliser dans le cas présent.

Soient $\chi_{j,k}$ des variables aléatoires gaussiennes, indépendantes et identiquement distribuées. Nous considérons dans la suite le processus gaussien :

$$X(x) = \sum_{j,k} \chi_{j,k} 2^{-j^2} 2^{-|k|} \psi_{j,k}(x).$$

X est bien un processus gaussien dans $B_p^{s,q}$. Pour entrer dans le cadre des ensembles nuls au sens gaussien, nous devons vérifier que la mesure engendrée par ce processus, notée μ , est bien une mesure gaussienne borélienne non dégénérée. Pour cela, nous commençons par montrer que la variance de cette mesure est non nulle. Soit $f = \sum c_{j,k} \psi_{j,k}$ une fonction appartenant au dual de $B_p^{s,q}$ quelconque. Dans ce cas, la variable aléatoire $\mu \circ f^{-1}$ est donnée par $\sum_{j,k} \chi_{j,k} 2^{-j^2} 2^{-|k|} c_{j,k}$. Cette variable aléatoire réelle est gaussienne, centrée et de variance

$$\mathbb{E}((\mu \circ f^{-1})^2) = \sum_{j,k} 2^{-2j^2} 2^{-2|k|} |c_{j,k}|^2,$$

qui est non nul si f est non nulle.

De plus la mesure μ est bien borélienne. Pour montrer ce résultat, nous allons utiliser le lemme suivant.

Lemme 5.1. — *Soit E un espace métrique séparable localement convexe. Alors la σ -algèbre engendrée par*

$$(5.1) \quad \{x \in E \mid (f_1(x), \dots, f_n(x)) \in A\} \quad A \in B^n \text{ and } f_j \in E^*$$

coïncide avec l'algèbre engendrée par les boréliens de E .

Prenons pour E l'espace de Hilbert défini à l'aide des ondelettes par

$$f = \sum c_{j,k} \psi_{j,k} \in E \Leftrightarrow \sum |c_{j,k}|^2 2^{2|j|} 2^{|k|} < \infty.$$

Nous allons donc regarder si les ensembles $\{x \in E \mid (f_1(x), \dots, f_n(x)) \in A\}$ sont mesurables pour la mesure induite par X .

Mais $f_i = \sum c_{j,k}^i \psi_{j,k}$ appartient à $E^* = E$. En prenant alors $x = \sum d_{j,k} \psi_{j,k}$, l'événement $(f_1(x), \dots, f_n(x)) \in A$ est donné par :

$$\left(\sum c_{j,k}^1 d_{j,k} 2^{2|j|} 2^{|k|}, \dots, \sum c_{j,k}^n d_{j,k} 2^{2|j|} 2^{|k|} \right) \in A.$$

La probabilité de cette événement sous la mesure μ est donnée par la probabilité de $(\sum c_{j,k}^1 \chi_{j,k}, \dots, \sum c_{j,k}^n \chi_{j,k}) \in A$. Comme les $\chi_{j,k}$ sont indépendants, $(\sum c_{j,k}^1 \chi_{j,k}, \dots, \sum c_{j,k}^n \chi_{j,k})$ est un vecteur gaussien dans \mathbb{R}^n et A est mesurable. Par conséquent, μ est une mesure borélienne dans E . De plus, l'espace E s'injecte dans

$L^{p,s}$, par conséquent μ définit une mesure borélienne sur $L^{p,s}$.

Regardons maintenant la régularité des trajectoires de X . Comme les variables aléatoires $\chi_{j,k}$ sont gaussiennes,

$$\mathbb{P}(|\chi_{j,k}| \geq (1 + |j|)(1 + |k|)) \leq e^{-j}e^{-k}.$$

En utilisant l'indépendance, nous pouvons utiliser le lemme de Borel-Cantelli, qui nous donne que

$$\mathbb{P}(\limsup |\chi_{j,k}| \geq (1 + |j|)(1 + |k|)) = 0.$$

Autrement dit, à partir d'un certain j assez grand, $|\chi_{j,k}| \leq (1 + |j|)(1 + |k|)$. Si nous nous concentrons maintenant sur les trajectoires du processus X , nous obtenons alors quelque soit x :

$$\begin{aligned} |X(x)| &\leq \sum_{j,k} |\chi_{j,k} 2^{-j^2} 2^{-|k|} \psi_{j,k}(x)| \\ &\leq \sum_{j,k} (1 + |j|)(1 + |k|) 2^{-j^2} 2^{-|k|} |\psi_{j,k}(x)| \end{aligned}$$

La régularité de ce processus est alors donné par la régularité de l'ondelette choisie. Si nous prenons une ondelette ψ qui soit C^r , pour r strictement plus grand que s , les trajectoires de X sont elles aussi C^r .

Il existe donc au moins un processus gaussien dans $B_p^{s,q}$ dont les trajectoires ne sont pas multifractales. De plus, comme un ensemble nul au sens gaussien de Phelps est aussi Haar-nul, si une régularité était générique dans ce cas, elle serait aussi prévalente. Par conséquent, on ne peut avoir de résultat vrai pour le complémentaire d'un ensemble nul au sens gaussien. Ce qui nous assure que le cadre des ensembles nuls au sens gaussien de Phelps représentent un cadre inadapté à l'étude que nous avons entreprise jusqu'ici.

5.4. Le cadre HP-typique : La bonne notion ?

Les résultats obtenus sous les notions de généricité au sens de la prévalence et des catégories de Baire concordent, comme nous l'avons vu, quand on parle de régularité ponctuelle. Que ce soit dans l'ensemble des fonctions continues ou dans les espaces de Sobolev, à chaque fois nous obtenons des ensembles petits tant au sens topologique qu'au sens théorie de la mesure. Il serait dans ce cas naturel de chercher un cadre alliant ces deux théories. Dans [59], J. Kolář montre que dans le cas des fonctions continues les ensembles HP-petit se prêtent bien à l'étude de la régularité ponctuelle. Il montre ainsi que les fonctions continues dont l'exposant

de Hölder ponctuel en un point de \mathbb{R} est strictement positif est un ensemble nul au sens HP-petit. Il nous paraît alors naturel de nous demander si c'est la même chose dans le cas des espaces de Sobolev, ou de Besov.

Nous ne pouvons malheureusement pas donner une réponse complète à cette question. Si dans un sens nous avons un résultat affirmatif, nous ne savons a priori pas dire si nous pouvons obtenir le même comportement multifractal que dans le chapitre 3.

Théorème 5.1. — Soient $0 < p, q < \infty$ et $s - \frac{d}{p} > 0$.

1. Soit H un réel. HP-quasi toute fonction f de $B_p^{s,q}$ vérifie :

$$\exists x \in \mathbb{R}^d \quad h_f(x) \neq H$$

2. Quelque soit $x_0 \in \mathbb{R}^d$, pour HP-quasi toute fonction f de $B_p^{s,q}$, l'exposant de Hölder ponctuel vaut $h_f(x_0) = s - \frac{d}{p}$.

Remarque :

- Comme nous l'avons vu dans le chapitre 2, la définition des ensembles HP-petits n'est valable que dans un espace séparable. On ne peut donc a priori pas considérer les cas $p = \infty$ ou $q = \infty$.
- Comme nous l'avons vu dans la partie 2.3.1, le seul ensemble HP-typique dans \mathbb{R}^d est l'espace tout entier. Le point 1 de ce théorème répond donc par la négative à la question de la possibilité d'inverser les quantificateurs dans le cas présent.
- Un ensemble HP-typique étant aussi de seconde catégorie, le point 2 de ce théorème implique aussi que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, quasi-toute fonction de $B_p^{s,q}$ a exactement $s - \frac{d}{p}$ comme exposant de Hölder ponctuel en x .

Pour démontrer ce théorème nous reprendrons les notations des chapitres 1 et 3. La définition des ensembles HP-petits est donnée par 2.12.

5.5. Démonstration du théorème

Proposition 5.3. — Soit $s - \frac{d}{p} > 0$ et soit $x_0 \in \mathbb{R}^d$ fixé. L'ensemble

$$(5.2) \quad S = \left\{ f \in B_p^{s,q} : h_f(x_0) > s - \frac{d}{p} \right\}$$

est HP-petit.

Démonstration :

Soient $p, q \geq 0$ et $s > d/p$ fixés. Soit $x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^d)$ un point de \mathbb{R}^d quelconque. On note dans la suite $k_j = ([2^j x_0^1], \dots, [2^j x_0^d])$. Soit $H > s - d/p$, nous voulons démontrer que l'ensemble

$$\{f \in B_q^{p,s}; \exists J_0 > 0 \forall j \geq J_0 \quad |c_{j,k_j}| \leq 2^{-Hj}\}$$

est HP-petit. Comme nous l'avons vu à plusieurs reprises, l'ensemble des fonctions dont l'exposant de Hölder est plus grand que $s - d/p$ en x_0 est inclus dans

$$\bigcup_{J_0 \in \mathbb{N}, H > s - d/p} A(J_0, H).$$

Cette union peut s'écrire sous la forme d'une union dénombrable, nous allons juste montrer que $A(J_0, H)$ est HP-petit.

Dans la suite, nous noterons $k_j = [2^j x_0]$. Soit $H > s - d/p$ et J_0 fixés. Soit $A (= A(J_0, H))$ l'ensemble

$$A(J_0, H) = \{f \in B_q^{p,s}; \forall j \geq J_0 \quad |c_{j,k_j}| \leq 2^{-Hj}\}.$$

Nous allons maintenant démontrer que l'ensemble A est $HP_{(1/4)}$. Soit $c' \in (0, \frac{1}{4})$ et $r > 0$ fixés. Définissons K comme étant le plus petit entier vérifiant

$$(5.3) \quad K > J_0 \quad \text{et} \quad 2^{(H-s+\frac{d}{p})(K-1)} \geq \frac{4}{r}.$$

Quelque soit $i \in \mathbb{N}$, posons y_i la fonction définie par ses coefficients d'ondelette, $d_{j,k}^i$, où :

$$\begin{aligned} \text{Si } k = k_j \text{ et } j = i, \quad \text{alors } d_{j,k}^i &= r 2^{-(s-\frac{d}{p})j} \\ \text{sinon } d_{j,k}^i &= 0. \end{aligned}$$

Chaque y_i a un seul coefficient non nul et $\|y_i\|_{B_p^{s,q}} = r$. Supposons alors qu'il existe une fonction $f \in B_p^{s,q}$ telle que

$$\text{card}\{i : (f + B(y_i, c'r)) \cap A \neq \emptyset\} > K.$$

Dans ce cas, il existe des fonctions $f_{i_1}, \dots, f_{i_{K+1}}$ telles que, $\forall l = 1, \dots, K$,

$$(5.4) \quad f - f_{i_l} \in B(y_{i_l}, c'r),$$

$$(5.5) \quad f_{i_l} \in A.$$

Soient $f_{j,k}^{i_l}$ les coefficients d'ondelette des fonctions f_{i_l} . Comme il existe K fonctions distinctes f_{i_l} , au moins deux indices, i_l et i_m sont plus grands que K . Dans la suite, nous supposons que $i_l > i_m$. Regardons maintenant les coefficients d'ondelette des fonctions f_{i_l} et f_{i_m} , indexés par (j, k_j) où $j = i_l$ ou $j = i_m$. D'après (5.5),

$$(5.6) \quad \begin{cases} |d_{i_l, k_{i_l}}^{i_l}| \leq 2^{-H i_l} \\ |d_{i_m, k_{i_m}}^{i_m}| \leq 2^{-H i_m}, \end{cases}$$

Or l'équation (5.4) nous donne

$$\|(f_{i_l} - f_{i_m}) - (y_{i_l} - y_{i_m})\| \leq 2c'r.$$

La caractérisation en ondelettes des normes Besov implique alors

$$(5.7) \quad \forall j, \quad |f_{j,k_j}^{i_l} - f_{j,k_j}^{i_m} - (d_{j,k_j}^{i_l} - d_{j,k_j}^{i_m})| \leq 2c'r2^{-(s-\frac{d}{p})j}.$$

Regardons maintenant le coefficient A_l indexé par le couple $(j, k) = (i_l, k_{i_l})$.

$$A_l = -r2^{-(s-\frac{d}{p})i_l} + c_{i_l, k_{i_l}}^{i_l} - d_{i_l, k_{i_l}}^{i_m}.$$

On note dans la suite $B_l = d_{i_l, k_{i_l}}^{i_l} - d_{i_l, k_{i_l}}^{i_m}$; alors $A_l = -r2^{-(s-d/p)i_l} + B_l$, et l'équation (5.6) implique :

$$|B_l| \leq 2.2^{-Hi_l}.$$

Mais comme $i_l \geq K$, en utilisant (5.3), on en déduit que $r2^{-(s-d/p)i_l} \geq 2|B_l|$; et $|A_l| \geq \frac{r}{2}2^{-(s-d/p)i_l}$. Ceci est en contradiction avec (5.7), et nous donne le deuxième point du théorème 5.1. □

Pour démontrer le premier point du théorème 5.1, nous allons utiliser la proposition suivante, qui est une conséquence simple des propriétés des espaces de Besov.

Proposition 5.4. — *Si $s - \frac{d}{p} > 0$ et $f \in B_p^{s,q}$ alors pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, $f \in C^s(x)$.*

Démonstration : Définissons $\varphi(x) = (1 + |x|)^{-a}$ avec $d < a < sp$, de telle sorte que $\varphi \in L^1$. Soit

$$(5.8) \quad g(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda} |c_\lambda|^p 2^{spj} \varphi(2^j x - k),$$

où on note c_λ les coefficients d'ondelette de la fonction f et Λ est l'ensemble des cubes dyadiques. Comme tous les termes de (5.8) sont positifs,

$$\|g\|_{L^1} = C \sum_{\lambda} |c_\lambda|^p 2^{(sp-d)j},$$

est fini car $f \in B_p^{s,p}$. Notons que $C = \|\varphi\|_{L^1}$, est bien fini car $a > d$. Par conséquent, (5.8) est fini presque partout. Donc pour presque tout x , nous obtenons

$$K := \sum_{\lambda \in \Lambda} |c_\lambda|^p \frac{2^{spj}}{(1 + |2^j x - k|)^a} < \infty.$$

En particulier,

$$\forall \lambda, \quad |c_\lambda| \leq K^{1/p} 2^{-sj} (1 + |2^j x - k|)^{a/p}.$$

Comme de plus $a/p < s$, d'après la proposition 1.2, $f \in C^s(x)$. □

En prenant l'union dénombrable sur une suite dense $(x_n)_n$ dans la proposition 5.3, nous voyons que pour HP-presque toutes fonctions f de $B_p^{s,q}$, pour tout n , f appartient au mieux à $C^{s-\frac{d}{p}}(x_n)$. Or d'après la proposition 5.4, si f appartient à cet ensemble il est $C^s(x)$ pour presque tout x .

Comme le seul ensemble HP-typique de \mathbb{R}^d est l'espace tout entier nous voyons qu'il n'y a pas d'exposant de Hölder valable pour HP-presque tout f et HP-presque tout x .

CHAPITRE 6

ESPACES DE BESOV ET p -SPECTRE

6.1. Introduction

Comme nous l'avons déjà vu, l'exposant de Hölder ponctuel est un outil très utile quand il s'agit de caractériser la régularité de fonctions. Cependant dans certains cas, et notamment en l'absence d'un minimum de régularité uniforme, il devient inefficace. Le premier défaut de l'exposant de Hölder ponctuel est qu'il ne peut pas se caractériser par ondelettes. Nous avons en effet vu dans la proposition 1.3 que la condition suffisante n'était pas satisfaite. Ensuite, il ne donne aucune information sur la géométrie du domaine sur lequel la fonction est définie.

Or, certaines études, comme par exemple celle du phénomène d'instabilité de Raleigh-Taylor, mène à regarder des fonctions qui ne sont pas continues et où la géométrie tiens une place importante. Le phénomène de Raleigh-Taylor est celui observé quand on place dans le même récipient deux fluides non miscibles. On voit alors l'apparition de filaments dont le bord a une structure fractale, les détails se trouvent dans [78]. Si on veut étudier la fonction indicatrice du bord de ces mélanges, l'exposant de Hölder n'est pas suffisant. En effet, une fonction caractéristique n'est pas a priori continue. De plus, dans l'exemple de Raleigh-Taylor, la présence de filaments et la géométrie de l'interface sont liés à la rugosité du mélange. Cependant l'exposant de Hölder ne rend pas compte de la géométrie du domaine considéré. Par contre, si l'on considère la fonction d'échelle d'une telle fonction, elle est de l'ordre de 1 sur les zones régulières et de 2^{2j} sur les points de rebroussement. Le formalisme multifractal que nous avons vu jusqu'à présent ne s'applique pas dans ce cas. Dans le cas de ces fonctions indicatrices, il serait pourtant intéressant de déterminer un exposant de régularité qui prenne en compte la géométrie du domaine considéré. Les espaces T_u^p peuvent alors être utilisés pour l'étude de ces fonctions indicatrices, comme le montrent S. Jaffard et C. Melot dans [48, 49]. En effet, dans cet exemple, l'exposant de Hölder ponctuel vaut zéro sur la frontière alors que le p -exposant peut a priori

prendre toutes valeurs positives. On peut dans ce cas faire une analyse similaire à l'analyse multifractale avec le p -exposant.

Comme nous l'avons fait auparavant dans l'étude de la régularité ponctuelle, nous n'allons pas étudier le p -exposant explicitement, mais nous allons dans la suite regarder le " p -spectre de singularités" à savoir la dimension de Hausdorff des lignes de niveau parcourues par cet exposant.

Nous allons maintenant démontrer que, avec un minimum de régularité globale, presque toutes les fonctions d'un espace de Besov donné ont le même p -spectre quelque soit la valeur prise par p . En particulier, le p -spectre donne le même résultat que le spectre de singularités, quand celui-ci existe. Dans le cas contraire, nous allons déterminer le p -spectre de presque toutes les fonctions dans un espace de Besov donné. Ce résultat nous permet de caractériser la régularité de presque toutes les fonctions définies dans un espace de fonctions non continues.

Nous avons déjà vu dans la définition 1.9 comment était construit le p exposant pour $p \geq 1$. La définition donnée par Calderón et Zygmund est donnée pour $p \geq 1$. Dans ce cas, il est bien défini dans un espace de Banach de distributions.

Regardons maintenant l'apport de ces p -exposants par rapport à l'exposant de Hölder dans les espaces de Besov. Dans un premier temps, remarquons que cet exposant permet de considérer des singularités d'exposants négatifs, qui correspondent à des comportements en $|x - x_0|^{-\beta}$ si $\beta > 0$. Pour cela, nous allons nous intéresser à un p -spectre valable pour presque toutes les fonctions d'un espace de Besov, au sens de la prévalence. Nous allons voir dans le théorème suivant que dans les cas $s_0 - \frac{d}{p_0} > 0$, dans lesquels l'exposant de Hölder ponctuel est bien défini, le spectre obtenu avec le p -exposant coïncide avec le spectre de singularités.

Par contre, dans le cas où $s_0 - \frac{d}{p_0} < 0$, où nous avons vu que pour un ensemble prévalent, les fonctions n'étaient nulle part localement bornées, et donc le spectre de singularité n'était pas défini, nous obtenons un p -spectre valable pour presque toutes les fonctions. Remarquons que nous ne parlerons pas du cas $B_{p_0}^{s_0, \infty} \cap C^\gamma$. En effet, dans le chapitre 4 nous avons besoin d'un minimum de régularité uniforme pour pouvoir calculer un spectre de singularités. Or l'intérêt du p -spectre est aussi d'obtenir un spectre sans hypothèses de régularité uniforme. Il est donc inutile ici d'imposer de régularité minimale.

Dans la suite, nous utiliserons les notations de la définition 1.9 et des suivantes.

Dans la littérature, plusieurs majorations de spectre T_u^p , dans des espaces de Besov ou de Sobolev, ont vu le jour.

6.1.1. Majoration du p -spectre. — Tout d'abord, nous avons la majoration suivante donnée par [48, 49].

Proposition 6.1. — Soient $0 < p_0 \leq \infty$, $s_0 > 0$ et soit $p \geq 1$ tel que $s_0 \geq \frac{d}{p_0} - \frac{d}{p}$. Soit $f \in B_{p_0}^{s_0, p_0}(\mathbb{R}^d)$. Si il existe $\delta > 0$ tel que $f \in B_p^{\delta, p}(\mathbb{R}^d)$ alors le p spectre est défini sur $[s_0 - \frac{d}{p_0}, s_0]$

$$(6.1) \quad \forall u \in [s_0 - \frac{d}{p_0}, s_0] \quad d_p(u) \leq p_0 u + d - s_0 p_0.$$

Nous avons aussi la majoration suivante, que l'on peut retrouver dans [97].

Proposition 6.2. — Soient $p \geq 1$ et $k, u \in \mathbb{N}$ tels que $0 \leq u \leq k$ et $(k-u)p < d$. Soit $f \in L^{k, p}(\mathbb{R}^d)$. Alors, le p spectre de f est défini sur $[0, k]$ où il vérifie

$$(6.2) \quad d_p(u) \leq d - (k-u)p.$$

Le but de la proposition suivante est de comparer les majorations données par la proposition 6.1 et la proposition 6.2. Nous allons voir que dans tous les cas, la proposition 6.1 est plus précise.

Proposition 6.3. — Soient $s_0 > 0$ et $0 < p_0 \leq \infty$. Quelque soit $p \geq 1$, pour tout k tel que $B_{p_0}^{s_0, p_0} \hookrightarrow L^{k, p}$ et quelque soit $u \in [s_0 - \frac{d}{p_0}, s_0]$,

$$p_0 u + d - s_0 p_0 \leq d - (k-u)p.$$

Démonstration : Dans le cas qui nous occupe, nous nous situons dans un espace de Besov donné $B_{p_0}^{s_0, p_0}$. Nous voyons que dans la deuxième proposition, l'espace qui est pris est un $L^{k, p}$ ou $B_p^{k, p}$. A partir des injections entre les espaces de Besov, que nous avons vus dans la proposition 1.8, nous pouvons prendre pour valeur de k :

$$\begin{cases} k \geq s_0 & \text{si } p \leq p_0 \\ k = \frac{d}{p} + (s_0 - \frac{d}{p_0}) & \text{si } p \geq p_0 \end{cases}.$$

En réinjectant ce résultat dans (6.2), nous obtenons que pour toute fonction $f \in B_{p_0}^{s_0, p_0}$:

$$d_p(m) \leq \begin{cases} d - (s_0 - m)p & \text{si } p \leq p_0 \\ (m + \frac{d}{p} - s_0)p & \text{si } p \geq p_0 \end{cases}.$$

Il nous reste alors à comparer les majorations de (6.1) et de (6.2). Tout d'abord si $p \leq p_0$, comme $s_0 - m > 0$ alors $d - (s_0 - m)p \geq d - (s_0 - m)p_0$. Donc (6.1) nous donne une meilleure majoration que (6.2). Dans le cas où $p \geq p_0$, la condition $k - m < \frac{d}{p}$ devient en remarquant que dans ce cas, $k = \frac{d}{p} + (s_0 - \frac{d}{p_0})$,

$$\frac{d}{p} + s_0 - \frac{d}{p_0} - m < \frac{d}{p} \Rightarrow m + \frac{d}{p_0} - s_0 > 0.$$

Par conséquent, $(m + \frac{d}{p_0} - s_0)p \geq (m + \frac{d}{p_0} - s_0)p_0$. Une fois encore la première majoration est plus fine que la deuxième.

□

Remarquons que dans les deux majorations que nous venons de voir il est fait une hypothèse d'appartenance à un espace de Besov $B_p^{\delta,p}$. Cette hypothèse est en effet nécessaire dans les démonstrations, notamment pour avoir une relation entre la condition sur les coefficients d'ondelette et l'appartenance aux $T_u^p(x)$. Pour pouvoir nous affranchir de cette hypothèse, nous allons démontrer maintenant que, dans le cas $p = 2$, la majoration (6.1) reste vraie. Pour cela, nous allons regarder la caractérisation du p -exposant à l'aide des "wavelet leaders", issue de [45]. Rappelons tout d'abord quelques définitions.

Définition 6.1. — Soit $x_0 \in \mathbb{R}^d$ et $j \geq 0$. On note $\lambda_j(x_0)$ l'unique cube dyadique de volume 2^{-dj} contenant x_0 . On note aussi

$$3\lambda_j(x_0) = \lambda_j(x_0) + \left[-\frac{1}{2^j}, \frac{1}{2^j} \right]^d.$$

Grâce à cette définition, on peut définir la fonction carrée locale.

Définition 6.2. — Soient $p \geq 1$ et $u > -\frac{d}{p}$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^d$. Pour tout $j \geq 0$, la fonction "carrée locale" associée à chaque fonction f est alors définie par :

$$S_f(j, x_0)(x) = \left(\sum_{\lambda \subset 3\lambda_j(x_0)} |c_\lambda|^2 \mathbf{1}_\lambda(x) \right)^{1/2}.$$

A l'aide de ces définitions, nous avons la proposition suivante.

Proposition 6.4. — Soient $p \geq 1$ et $u > -\frac{d}{p}$. Si $f \in T_u^p(x)$ il existe $c > 0$ tel que pour tout $j \geq 0$,

$$(6.3) \quad \|S_f(j, x_0)\|_{L^p} \leq c2^{-j(u+d/p)}.$$

Réciproquement, si (6.3) est vérifiée et si $u \notin \mathbb{N}$, alors $f \in T_u^p(x_0)$.

Remarque : Si $u \in \mathbb{N}$, et si (6.3) est vérifiée, alors pour tout $\eta > 0$, $f \in T_{u-\eta}^p(x_0)$. Les résultats suivants restent donc vrais, à une correction logarithmique près.

Comme nous pouvons le constater, cette caractérisation des espaces T_u^p à l'aide des ondelettes fait intervenir des normes L^p . Or, en dehors du cas $p = 2$, il devient très technique de les utiliser avec les coefficients d'ondelette. C'est pourquoi, nous ne considérerons que le cas $p = 2$ dans la suite.

Démontrons donc maintenant la proposition suivante.

Proposition 6.5. — Soient $s_0 > 0$, $0 < p_0 < \infty$ et $s_0 - \frac{d}{p_0} \geq -\frac{d}{2}$. Soit $\alpha \in [s_0 - \frac{d}{p_0} + \frac{d}{2}, s_0 + \frac{d}{2}]$ quelconque non entier. Soit $D \geq 0$ et tel que $D = p_0(\alpha - s_0 + \frac{d}{p_0} - \frac{d}{2})$, alors quelle que soit $f \in B_{p_0}^{s_0, p_0}$, la mesure de Hausdorff D -dimensionnelle de l'ensemble $\{x_0 : f \notin T_{\alpha - \frac{d}{2}}^2(x_0)\}$ est nulle.

Corollaire. — Soient $s_0 > 0$ et $s_0 - \frac{d}{p_0} \geq -\frac{d}{2}$. Quelque soit $\alpha \in [s_0 - \frac{d}{p_0}, s_0]$ non entier,

$$(6.4) \quad d_2(\alpha) \leq p_0\alpha + d - s_0p_0.$$

Démonstration : Admettons pour l'instant la proposition et démontrons le corollaire. Pour cela, posons $\alpha' = \alpha + \frac{d}{2}$. Dans ce cas, $\alpha' \in [s_0 - \frac{d}{p_0} + \frac{d}{2}, s_0 + \frac{d}{2}]$. En posant $D = p_0(\alpha' - s_0 + \frac{d}{p_0} - \frac{d}{2})$, d'après la proposition 6.5 ;

$$\mathcal{H}^D(\{x : f \notin T_{\alpha' - \frac{d}{2}}^2(x_0)\}) = \mathcal{H}^D(\{x : u_f^p(x) \leq \alpha' - \frac{d}{2}\}) = 0.$$

Par définition de la dimension de Hausdorff,

$$\dim_H(\{x : u_f^p(x) \leq \alpha' - \frac{d}{2}\}) \leq D = p_0(\alpha' - s_0 + \frac{d}{p_0} - \frac{d}{2}).$$

En remplaçant α' par $\alpha + \frac{d}{2}$, on obtient finalement,

$$\dim_H(\{x : u_f^p(x) \leq \alpha\}) \leq p_0(\alpha - s_0 + \frac{d}{p_0}).$$

Remarquons que $\{x : u_f^p(x) = \alpha\} \subset \{x : u_f^p(x) \leq \alpha\}$. La dimension de Hausdorff étant croissante, on obtient finalement, pour $\alpha \in [s_0 - \frac{d}{p_0}, s_0]$

$$d_p(\alpha) \leq p_0(\alpha - s_0 + \frac{d}{p_0}).$$

□

Démonstration de la proposition 6.5. — Commençons par construire un ensemble V inclus dans \mathbb{R}^d de mesure D -dimensionnelle nulle.

Pour cela, nous procédons de la façon suivante. Si $f \in B_{p_0}^{s_0, p_0}$, alors :

$$(6.5) \quad \exists c > 0 \text{ tel que } \forall j \quad \sum_{k \in \{0, \dots, 2^j - 1\}^d} (|c_{j,k}| 2^{(s_0 - \frac{d}{p_0})j})^{p_0} \leq c\varepsilon_j$$

où $(\varepsilon_j) \in l^1$.

Notons alors $d_{j,k} = (|c_{j,k}| 2^{(s_0 - \frac{d}{p_0})j})^{\frac{p_0}{D}}$. Si on note $B_{j,k}$ le cube de centre $\frac{k}{2^j}$ et de

diamètre $d_{j,k}$ nous avons alors :

$$\begin{aligned} \forall j \quad \sum_{k \in \{0, \dots, 2^j - 1\}^d} |\text{diam}(B_{j,k})|^D &= \sum_{k \in \{0, \dots, 2^j - 1\}^d} |d_{j,k}|^D \\ \forall j \quad \sum_{k \in \{0, \dots, 2^j - 1\}^d} (|c_{j,k}| 2^{(s_0 - \frac{d}{p_0})j})^{p_0} &\leq c \varepsilon_j \end{aligned}$$

Par conséquent, $\sum_k \text{diam}(B_{j,k})^D \rightarrow_{j \rightarrow \infty} 0$. Soit

$$V = \limsup_j \bigcup_k B_{j,k} = \bigcap_{l \in \mathbb{N}} \bigcup_{j \geq l} \bigcup_k B_{j,k},$$

nous obtenons que

$$\sum_{j \geq l} \sum_{k \in \{0, \dots, 2^j - 1\}^d} |\text{diam}(B_{j,k})|^D \leq c \sum_{j \geq l} \varepsilon_j.$$

Par définition de V , $\forall j \geq l$, $\bigcup_k B_{j,k} \supset V$. Par ailleurs, puisque $\sum_k \text{diam}(B_{j,k})^D \rightarrow_{j \rightarrow \infty} 0$, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un l tel que $\sum_k \text{diam}(B_{j,k})^D \leq \varepsilon$. on a donc un ε -recouvrement de V . En faisant tendre ε vers zéro, nous obtenons que V est de mesure D -dimensionnelle nulle.

Considérons maintenant un $x \notin V$. Par définition de V , il existe alors l tel que $\forall j \geq l$, $\forall k$ $x \notin B_{j,k}$. Et la condition $x \notin B_{j,k}$ s'écrit :

$$\begin{aligned} |x - \frac{k}{2^j}| &\geq |d_{j,k}| \\ \Rightarrow |x - \frac{k}{2^j}| &\geq (|c_{j,k}| 2^{(s_0 - \frac{d}{p_0})j})^{\frac{p_0}{D}} \\ \Rightarrow |c_{j,k}| &\leq 2^{-(s_0 - \frac{d}{p_0})j} |x - \frac{k}{2^j}|^{\frac{D}{p_0}} \end{aligned}$$

Regardons alors comment cette condition peut être utilisée dans (6.3). Pour cela, prenons $j > l$ et regardons $\|S_f(j, x_0)\|_2$

$$\|S_f(j, x_0)\|_2^2 = \int \sum_{\lambda' \subset 3\lambda_j(x_0)} |c_{\lambda'}|^2 \mathbf{1}_{\lambda'}(x) dx \leq \sum_{\lambda' \subset 3\lambda_j(x_0)} 2^{-dj'} |c_{\lambda'}|^2$$

où $j' > j$ et λ' est le cube $\frac{k'}{2^{j'}} + \left[0, \frac{1}{2^{j'}}\right]^d$ de taille $2^{-dj'}$ et $k' \in \mathbb{Z}^d$. Ce qui nous donne, si $x \notin V$ pour $j \geq l$,

$$\|S_f(j, x)\|_2^2 \leq \sum_{\lambda' \subset 3\lambda_j(x_0)} 2^{-dj'} 2^{-2(s_0 - \frac{d}{p_0})j'} |x - \frac{k'}{2^{j'}}|^2 \frac{D}{p_0}.$$

Or, si $\lambda' \in 3\lambda_j(x_0)$, on peut dire que $|x - \frac{k'}{2^{j'}}| \leq \frac{3}{2^j}$. Ce qui nous donne dans l'équation précédente,

$$\|S_f(j, x)\|_2^2 \leq \sum_{\lambda' \subset 3\lambda_j(x_0)} 2^{-dj'} 2^{-2(s_0 - \frac{d}{p_0})j'} 2^{-2\frac{D}{p_0}j}.$$

On découpe alors la somme en λ' suivant des couronnes, autrement dit :

$$\begin{aligned} \|S_f(j, x)\|_2^2 &\leq \sum_{j' \geq j} 2^{-dj'} 2^{-2(s_0 - \frac{d}{p_0})j'} \sum_{l=j}^{j'} \sum_{2^{-l} \leq |x - \frac{k'}{2^{j'}}| \leq 2 \cdot 2^{-l}} \left|x - \frac{k'}{2^{j'}}\right|^{2\frac{D}{p_0}} \\ &= \sum_{j' \geq j} 2^{-dj'} 2^{-2(s_0 - \frac{d}{p_0})j'} \sum_{l=j}^{j'} 2^{-2\frac{D}{p_0}l}. \end{aligned}$$

Or, $-d - 2(s_0 - \frac{d}{p_0}) = -2(\frac{d}{2} + s_0 - \frac{d}{p_0}) \leq 0$ par hypothèse et $D \geq 0$. Par conséquent,

$$\sum_{j' \geq j} 2^{(-d - 2(s_0 - \frac{d}{p_0}))j'} \leq 2^{(-d - 2(s_0 - \frac{d}{p_0}))j}$$

et

$$\sum_{l=j}^{j'} 2^{-2\frac{D}{p_0}l} \leq c 2^{-2\frac{D}{p_0}j}$$

et nous obtenons finalement :

$$\|S_f(j, x)\|_2^2 \leq 2^{(-2\frac{D}{p_0} - d - 2(s_0 - \frac{d}{p_0}))j}.$$

Reprenons la valeur de D donnée dans l'énoncé, $D = p_0(\alpha - s_0 + \frac{d}{p_0} - \frac{d}{2})$ et :

$$\|S_f(j, x)\|_2^2 \leq 2^{(-2(\alpha - s_0 + \frac{d}{p_0} - \frac{d}{2}) - d - 2(s_0 - \frac{d}{p_0}))j} = 2^{-2\alpha j}.$$

Si nous reprenons l'équation (6.3), ce qui précède équivaut à $f \in T_{\alpha - \frac{d}{2}}^2(x)$. Ce qui signifie que l'ensemble des points x tels que $f \notin T_{\alpha - \frac{d}{2}}^2(x)$ est inclus dans V . La proposition est donc démontrée. \square

Il nous reste maintenant à vérifier que (6.1) est optimale. Nous allons en fait voir dans le théorème suivant qu'elle l'est et pour un ensemble prévalent de fonctions.

Théorème 6.1. — Soient $s_0 > 0$ et $0 \leq p_0 \leq \infty$. Alors

- Pour $s_0 - \frac{d}{p_0} > -\frac{d}{p}$, et $s_0 - \frac{d}{p_0} \neq 0$, presque toutes les fonctions de $B_{p_0}^{s_0, p_0}$ ont un p -spectre de singularités défini sur $[s_0 - \frac{d}{p_0}; s_0]$ où il est donné par :

$$(6.6) \quad \forall u \in [s_0 - \frac{d}{p_0}; s_0] \quad d_p(u) = p_0 u + d - s_0 p_0.$$

- Pour $p = 2$, $s_0 - \frac{d}{p_0} \neq 0$ et $s_0 - \frac{d}{p_0} \geq -\frac{d}{2}$ presque toutes les fonctions de $B_{p_0}^{s_0, p_0}$ ont un 2-spectre de singularités défini sur $[s_0 - \frac{d}{p_0}; s_0]$ où il est donné par :

$$(6.7) \quad \forall u \in [s_0 - \frac{d}{p_0}; s_0] \quad d_2(u) = p_0 u + d - s_0 p_0.$$

Remarque : Les hypothèses de ce théorème peuvent sembler surprenantes. Notamment la séparation entre le cas $p = 2$ et p quelconque. En fait, la démonstration est exactement la même dans les deux cas. Cependant pour avoir la bonne majoration de spectre, l'hypothèse $s_0 - \frac{d}{p_0} > -\frac{d}{p}$, nous assure, grâce aux injections de Sobolev, qu'il existe un $\delta > 0$ tel que $f \in B_p^{\delta,p}$. Mais nous avons démontré que pour $p = 2$ nous pouvons nous passer de cette hypothèse et considérer aussi le cas $s_0 - \frac{d}{p_0} = \frac{d}{2}$.

6.2. Régularité de la fonction de saturation

On considère dans $B_{p_0}^{s_0,p_0}$ la fonction g dite "de saturation", introduite dans [44], par ses coefficients en ondelettes $d_{j,k}$ comme suit

$$(6.8) \quad d_{j,k} = \frac{1}{j^{1/p_0}} 2^{(\frac{d}{p_0} - s_0)j} 2^{-\frac{d}{p_0}J}$$

avec $J = J(j, k)$ et $K = K(j, k)$ définis par (3.12). Dans la proposition qui suit nous devons utiliser la définition de l'exposant dyadique d'un point $x \in \mathbb{R}^d$. Nous utiliserons encore une fois les notations du chapitre 3, et nous appellerons F_α l'ensemble

$$(6.9) \quad F_\alpha = \limsup_{j \rightarrow \infty} F_\alpha^j$$

où $F_\alpha^i = \bigcup_{\chi} \chi + [-\frac{1}{2^{\alpha i}}; +\frac{1}{2^{\alpha i}}]^d$ et $F_\alpha^{i,l} = \frac{l}{2^i} + [-\frac{1}{2^{\alpha j}}; \frac{1}{2^{\alpha j}}]^d$.

Tous les outils que nous avons mis en place nous permettent d'établir la proposition suivante.

Proposition 6.6. — *Soit g la fonction de saturation définie par (6.8). Dans la suite on note $u_g^p(x) = \sup(\{u : g \in T_u^p(x)\})$.*

1. *Si $s_0 > d/p_0$, alors $u_g^p(x_0) = h_g(x_0)$ pour tout $p \geq 1$ où $h_g(x)$ est l'exposant de Hölder de g en x .*
2. *Si $0 < s_0 < d/p_0$, quel que soit $p \geq 1$, $u_g^p(x_0) = s_0 - \frac{d}{p_0} + \frac{d}{\alpha p_0}$ où α est l'exposant dyadique de x_0 .*

Remarquons que la forme de u_g^p est la même dans les deux cas. Cependant, dans le deuxième cas, nous avons vu que $h_g(x_0)$ n'était pas défini pour un ensemble prévalent de fonctions.

Dans la suite, on prendra $x_0 \in (0, 1)^d$ quelconque et on notera α son exposant dyadique.

Démonstration : Nous allons traiter dans un premier temps le cas $s_0 - \frac{d}{p_0} > 0$ et $p \geq 1$ quelconque.

6.2.0.1. *Cas* $s_0 - \frac{d}{p_0} > 0$. — Une conséquence immédiate de la définition 1.9 est la minoration

$$\forall x_0, \quad u_g^p(x_0) \geq h_g(x_0).$$

Il ne nous reste donc plus qu'à montrer que $u_g^p(x_0) = h_g(x_0)$, autrement dit que quelque soit $\varepsilon > 0$, $u_g^p(x_0) < h_g(x_0) + \varepsilon$.

Si $f \in B_p^{\delta,p}$, on peut utiliser la caractérisation (1.27) du p -exposant, ce qui revient à montrer que

$$i_p(x_0) = \sup \left\{ s : \liminf \frac{\log(\Sigma_j^p(s, A)^{1/p})}{-j \log 2} \geq 0 \right\} < h_g(x_0) + \varepsilon.$$

Autrement dit,

$$(6.10) \quad \liminf \frac{\log(\Sigma_j^p(h_g(x_0) + \varepsilon + \frac{d}{p}, A)^{1/p})}{-j \log 2} < 0.$$

Comme nous étudions la \liminf de la suite, il nous suffit de montrer qu'il existe une sous-suite de la suite $(\frac{\log(\Sigma_j^p(h_g(x_0) + \varepsilon + \frac{d}{p}, A)^{1/p})}{-j \log 2})_j$ qui tend vers une valeur négative.

Posons $a = \frac{1}{p_0}$ et étudions $\Sigma_j^p(h_g(x_0) + \varepsilon + \frac{d}{p}, A)$.

On sait que l'exposant de Hölder de la fonction de saturation g en tous les points de F_α est exactement

$$h_g(x_0) = s_0 - \frac{d}{p_0} + \frac{d}{p_0 \alpha}$$

On peut donc remplacer $h_g(x_0)$ par cette valeur dans ce qui suit. Dans la suite, on pose $s = h_g(x_0) + \varepsilon + \frac{d}{p}$.

Cela nous donne donc

$$\begin{aligned}
(6.11) \quad \Sigma_j^p(s, A) &= 2^{j(h_g(x_0)p + \varepsilon p)} \sum_{|k - 2^j x_0| \leq A 2^j} |d_{j,k}^i|^p (1 + |2^j x_0 - k|)^{-sp} \\
&= 2^{j(s_0 p - \frac{dp}{p_0} + \frac{dp}{p_0 \alpha} + \varepsilon p)} \sum_{|k - 2^j x_0| \leq A 2^j} \left| \frac{1}{j^a} 2^{(\frac{d}{p_0} - s_0)j} 2^{-\frac{d}{p_0} J} \right|^p (1 + |2^j x_0 - k|)^{-sp} \\
&= 2^{j((s_0 - \frac{d}{p_0} + \frac{d}{p_0 \alpha})p + \varepsilon p)} \sum_{|k - 2^j x_0| \leq A 2^j} \frac{1}{j^{pa}} 2^{(\frac{d}{p_0} - s_0)pj} 2^{-\frac{d}{p_0} pJ} (1 + |2^j x_0 - k|)^{-sp} \\
&= \left(\frac{1}{j^a} \right)^p 2^{-jp(-s_0 + \frac{d}{p_0} - \frac{d}{p_0 \alpha} + s_0 - \frac{d}{p_0} - \varepsilon)} \sum_{|k - 2^j x_0| \leq A 2^j} 2^{-\frac{d}{p_0} pJ} (1 + |2^j x_0 - k|)^{-sp} \\
&= \left(\frac{1}{j^a} \right)^p 2^{-jp(-\varepsilon - \frac{d}{p_0 \alpha} + s)} \sum_{|\frac{k}{2^j} - x_0| \leq A} 2^{-\frac{d}{p_0} pJ} (2^{-j} + |x_0 - \frac{k}{2^j}|)^{-sp}
\end{aligned}$$

On considère une suite (K_n, J_n) de la définition 3.1, autrement dit telle que quelque soit $\varepsilon > 0$:

$$(6.12) \quad \frac{1}{2^{(\alpha + \varepsilon)J_n}} < \left| x_0 - \frac{K_n}{2^{J_n}} \right| \leq \frac{1}{2^{\alpha J_n}}.$$

et $j_n = [\alpha(x)J_n]$. En prenant cette suite dans (6.12), la partie de droite devient :

$$\left| x_0 - \frac{K_n}{2^{J_n}} \right| \leq \frac{1}{2^{j_n}}$$

ce qui nous permet de minorer $\Sigma_{j_n}^p(s, A)$, dans le sens où :

$$\begin{aligned}
\Sigma_{j_n}^p(s, A) &= \left(\frac{1}{j_n^a} \right)^p 2^{j_n p(\varepsilon + \frac{d}{p_0 \alpha} - s)} \sum_{|\frac{K}{2^{J_n}} - x_0| \leq 2^{-j_n}} 2^{-\frac{d}{p_0} pJ_n} (2^{-j_n} + |x_0 - \frac{K}{2^{J_n}}|)^{-sp} \\
&\geq \left(\frac{1}{j_n^a} \right)^p 2^{j_n p(\varepsilon + \frac{d}{p_0 \alpha})} 2^{-\frac{d}{p_0} p \frac{J_n}{j_n}} 2^{-spj_n} 2^{spj_n} \\
&\geq \left(\frac{1}{j_n^a} \right)^p 2^{j_n p(\varepsilon + \frac{d}{p_0 \alpha})} 2^{-\frac{d}{p_0 \alpha} p j_n} = \left(\frac{1}{j_n^a} \right)^p 2^{j_n p \varepsilon}
\end{aligned}$$

Ce qui nous donne

$$\begin{aligned}
\liminf \frac{\log(\Sigma_j^p(s, A)^{1/p})}{-j \log 2} &\leq \lim_n \frac{\log(\Sigma_{j_n}^p(s, A)^{1/p})}{-j_n \log 2} \\
&\leq \lim_n \frac{\log 2^s \frac{1}{j_n^a}}{-j_n \log 2} - \varepsilon \\
&\leq -\varepsilon < 0
\end{aligned}$$

Ce qui nous donne l'égalité quelque soit $x \in (0, 1)^d$, $\forall p \geq 1$, $u_g^p(x) = h_g(x)$.

6.2.0.2. Cas $s_0 - \frac{d}{p_0} < 0$. — Pour finir, regardons le cas $s_0 - \frac{d}{p_0} < 0$ et $s_0 > 0$.

On sait que pour $s_0 - \frac{d}{p_0} < 0$, la fonction de saturation g n'est pas localement bornée et le coefficient de Hölder en x_0 n'est donc pas défini.

Posons $u = s_0 - \frac{d}{p_0} + \frac{d}{p_0\alpha} - \varepsilon'$. Nous voulons montrer dans un premier temps que si x_0 est fixé et $\alpha \geq 1$ est son exposant dyadique, pour $u = s_0 - \frac{d}{p_0} + \frac{d}{p_0\alpha} - \varepsilon'$, $g \in T_u^p(x_0)$.

D'autre part pour pouvoir utiliser la formule (1.29), qui permet de passer des coefficients d'ondelette au p -exposant, il faut que g appartienne à $B_p^{\delta,p}$ pour un $\delta > 0$. En utilisant l'équation (1.36) de la proposition 1.8, si $p \geq p_0$, il faut qu'il existe $\delta > 0$ vérifiant :

$$s_0 - \frac{d}{p_0} \geq \delta - \frac{d}{p}.$$

D'où la condition nécessaire

$$(6.13) \quad s_0 - \frac{d}{p_0} > -\frac{d}{p}.$$

Si $p < p_0$, on utilise (1.35), mais alors $-\frac{d}{p_0} > -\frac{d}{p}$. Comme de plus $s_0 > 0$, la condition (6.13) est aussi vérifiée.

On pose $s = u + \frac{d}{p} = s_0 - \frac{d}{p_0} + \frac{d}{p_0\alpha} - \varepsilon' + \frac{d}{p}$.

En reprenant (1.26) et (1.29), nous voulons donc montrer que :

$$\exists C, A, \forall j \quad 2^{j(sp-d)} \sum_{|k-2^j x_0| \leq A2^j} |d_{j,k}|^p (1 + |k - 2^j x_0|)^{-sp} \leq C\varepsilon_j \text{ avec } \varepsilon_j \in l^1$$

Calculons

$$2^{j(sp-d)} \sum_{|k-2^j x_0| \leq A2^j} |d_{j,k}|^p (1 + |k - 2^j x_0|)^{-sp}$$

Remplaçons s par $s_0 - \frac{d}{p_0} + \frac{d}{p_0\alpha} - \varepsilon' + \frac{d}{p}$.

Notons I l'ensemble des fractions irréductibles. Notre calcul est formellement identique à celui du cas précédent, nous pouvons reprendre le résultat obtenu à la

fin de (6.11) en remplaçant ε par ε' , ce qui donne

$$\begin{aligned}
& 2^{j(sp-d)} \sum_{|k-2^j x_0| \leq A 2^j} |d_{j,k}|^p (1 + |k - 2^j x_0|)^{-sp} \\
&= \left(\frac{1}{j^{ap}} \right) 2^{-jp(\varepsilon' - \frac{d}{p_0 \alpha} + s)} \sum_{|\frac{k}{2^j} - x_0| \leq A} 2^{-\frac{d}{p_0} p J} (2^{-j} + |x_0 - \frac{k}{2^j}|)^{-sp} \\
&= \left(\frac{1}{j^{ap}} \right) 2^{-jp(\varepsilon' - \frac{d}{p_0 \alpha} + s)} \sum_{J \leq j} 2^{-\frac{d}{p_0} p J} \sum_{\substack{| \frac{K}{2^J} - x_0 | \leq A, \\ \frac{k}{2^j} = \frac{K}{2^J}, \frac{K}{2^J} \in I}} (2^{-j} + |x_0 - \frac{k}{2^j}|)^{-sp} \\
&= \left(\frac{1}{j^{ap}} \right) 2^{-jp(\varepsilon' - \frac{d}{p_0 \alpha} + s)} \sum_{J \leq j/(\alpha + \varepsilon)} 2^{-\frac{d}{p_0} p J} \sum_{\substack{| \frac{K}{2^J} - x_0 | \leq A, \\ \frac{k}{2^j} = \frac{K}{2^J}, \frac{K}{2^J} \in I}} (2^{-j} + |x_0 - \frac{k}{2^j}|)^{-sp} \\
&+ \left(\frac{1}{j^{ap}} \right) 2^{-jp(\varepsilon' - \frac{d}{p_0 \alpha})} \sum_{J \geq j/(\alpha + \varepsilon)} 2^{-\frac{d}{p_0} p J} 2^{-spj} \sum_{\substack{| \frac{K}{2^J} - x_0 | \leq A, \\ \frac{k}{2^j} = \frac{K}{2^J}, \frac{K}{2^J} \in I}} (2^{-j} + |x_0 - \frac{k}{2^j}|)^{-sp}
\end{aligned}$$

Séparons la somme en J en deux termes. Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Notons B_1 la somme sur les termes $J \leq j/(\alpha + \varepsilon)$ et B_2 l'autre somme.

Commençons par étudier B_1 .

Remarquons que la condition $J \leq j/(\alpha + \varepsilon)$ donne $2^{-j} \leq 2^{-J(\alpha + \varepsilon)}$. De plus pour J assez grand on a, d'après la définition de l'exposant dyadique,

$$\frac{1}{2^{(\alpha + \varepsilon)J}} \leq \left| \frac{K}{2^J} - x_0 \right|$$

Dans tous les cas on peut donc écrire

$$B_1 = \left(\frac{1}{j^{ap}} \right) 2^{-jp(\varepsilon' - \frac{d}{p_0 \alpha} + s)} \sum_{J \leq j/(\alpha + \varepsilon)} 2^{-\frac{d}{p_0} p J} \sum_{\substack{\frac{1}{2^{(\alpha + \varepsilon)J}} \leq | \frac{K}{2^J} - x_0 | \leq A}} (2^{-j} + |x_0 - \frac{k}{2^j}|)^{-sp}$$

On effectue maintenant un recouvrement de la couronne de rayon intérieur $2^{-J(\alpha + \varepsilon)}$ et extérieur A par des couronnes dyadiques de rayon intérieur 2^{-l-1} et extérieur 2^{-l} .

On prend c entier relatif tel que $2^{-c-1} \leq A \leq 2^{-c}$.

Et la condition $J \leq j/(\alpha + \varepsilon)$ nous donne

$$(6.14) \quad \frac{1}{2^j} \leq \frac{1}{2^{(\alpha+\varepsilon)J}} \leq \left| \frac{K}{2^J} - x_0 \right|$$

On a donc en appliquant la condition (6.14)

$$\begin{aligned} B_1 &\leq \left(\frac{1}{j^{ap+1}} \right) 2^{-jp(\varepsilon' - \frac{d}{p_0\alpha} + s)} \sum_{J \leq j/(\alpha+\varepsilon)} 2^{-\frac{d}{p_0}pJ} \sum_{c \leq l \leq J(\alpha+\varepsilon)} \sum_{2^{-(l+1)} \leq \left| \frac{K}{2^J} - x_0 \right| \leq 2^{-l}} (2^{-j} + \left| x_0 - \frac{K}{2^J} \right|)^{-sp} \\ &\leq c \left(\frac{1}{j^{ap}} \right) 2^{-jp(\varepsilon' - \frac{d}{p_0\alpha} + s)} \sum_{J \leq j/(\alpha+\varepsilon)} 2^{-\frac{d}{p_0}pJ} 2^{-spj} \sum_{c \leq l \leq J(\alpha+\varepsilon)} 2^{l(sp-d)} \\ &\leq c \left(\frac{1}{j^{ap}} \right) 2^{-jp(\varepsilon' - \frac{d}{p_0\alpha} + s)} \sum_{J \leq j/(\alpha+\varepsilon)} 2^{-\frac{d}{p_0}pJ} [2^{J(\alpha+\varepsilon)(sp-d)} + 2^{-(c+1)(sp-)}] \\ &\leq c \left(\frac{1}{j^{ap}} \right) 2^{-jp(\varepsilon' - \frac{d}{p_0\alpha} + s)} \left(2^{-(c+1)(sp-)} \sum_{J \leq j/(\alpha+\varepsilon)} 2^{-\frac{d}{p_0}pJ} + \sum_{J \leq j/(\alpha+\varepsilon)} 2^{-\frac{d}{p_0}pJ} 2^{J(\alpha+\varepsilon)(sp-d)} \right) \end{aligned}$$

Or on a

$$(6.15) \quad (\alpha + \varepsilon)(sp - d) - \frac{d}{p_0}p = (\alpha + \varepsilon)p \left(s_0 - \frac{d}{p_0} + \frac{d}{p_0\alpha} - \varepsilon' - \frac{d}{p_0(\alpha + \varepsilon)} \right)$$

et par hypothèse on a $s_0 - \frac{d}{p_0} < 0$. Donc pour ε' assez petit on a

$$(6.16) \quad (\alpha + \varepsilon)(sp - d) - \frac{d}{p_0}p = (\alpha + \varepsilon)p \left(s_0 - \frac{d}{p_0} - \varepsilon' - \frac{d}{p_0(\alpha + \varepsilon)} + \frac{d}{p_0\alpha} \right) < 0$$

D'où on peut écrire

$$(6.17) \quad B_1 \leq c \left(\frac{1}{j^{ap}} \right) 2^{-jp(\varepsilon' - \frac{d}{p_0\alpha} + s)}$$

Or

$$\begin{aligned} s + \varepsilon' - \frac{d}{p_0\alpha} &= s_0 - \frac{d}{p_0} + \frac{d}{p_0\alpha} - \varepsilon' + \frac{d}{p} + \varepsilon' - \frac{d}{p_0\alpha} \\ &= s_0 - \frac{d}{p_0} + \frac{d}{p} \end{aligned}$$

et la condition (6.13) donne

$$(6.18) \quad s + \varepsilon' - \frac{d}{p_0\alpha} > 0$$

Donc B_1 appartient à l^1 .

Estimons maintenant B_2 :

$$\begin{aligned}
B_2 &= \left(\frac{1}{j^{ap}} \right) 2^{-jp(\varepsilon' - \frac{d}{p_0\alpha} + s)} \sum_{J=j/(\alpha+\varepsilon)}^j 2^{-\frac{d}{p_0}pJ} \sum_{|\frac{K}{2^J} - x_0| \leq A} (2^{-j} + |x_0 - \frac{k}{2^j}|)^{-sp} \\
&= \left(\frac{1}{j^{ap}} \right) 2^{-jp(\varepsilon' - \frac{d}{p_0\alpha} + s)} \sum_{J=j/(\alpha+\varepsilon)}^j 2^{-\frac{d}{p_0}pJ} * \left(\sum_{\frac{1}{2^j} < |\frac{K}{2^J} - x_0| \leq A} (2^{-j} + |x_0 - \frac{k}{2^j}|)^{-sp} \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{1}{j^{ap}} \right) 2^{-jp(\varepsilon' - \frac{d}{p_0\alpha} + s)} \sum_{J=j/(\alpha+\varepsilon)}^j 2^{-\frac{d}{p_0}pJ} \sum_{\frac{1}{2(\alpha+\varepsilon)J} < |\frac{K}{2^J} - x_0| \leq \frac{1}{2^j}} (2^{-j} + |x_0 - \frac{k}{2^j}|)^{-sp} \right).
\end{aligned}$$

On traite le premier terme de cette somme, que nous noterons $B_{2,1}$, comme nous l'avons fait dans le cas précédent en prenant des sommes sur les couronnes :

$$\begin{aligned}
B_{2,1} &= \left(\frac{1}{j^{ap}} \right) 2^{-jp(\varepsilon' - \frac{d}{p_0\alpha} + s)} \sum_{J=j/(\alpha+\varepsilon)}^j 2^{-\frac{d}{p_0}pJ} \sum_{\frac{1}{2^j} < |\frac{K}{2^J} - x_0| \leq A} (2^{-j} + |x_0 - \frac{k}{2^j}|)^{-sp} \\
&\leq \left(\frac{1}{j^{ap+1}} \right) 2^{-jp(\varepsilon' - \frac{d}{p_0\alpha} + s)} \sum_{J=j/(\alpha+\varepsilon)}^j 2^{-\frac{d}{p_0}pJ} \sum_{c \leq l \leq j} \sum_{2^{-(l+1)} \leq |\frac{K}{2^J} - x_0| \leq 2^{-l}} (2^{-j} + |x_0 - \frac{K}{2^J}|)^{-sp} \\
&\leq c \left(\frac{1}{j^{ap+1}} \right) 2^{-jp(\varepsilon' - \frac{d}{p_0\alpha} + s)} \sum_{J=j/(\alpha+\varepsilon)}^j 2^{-\frac{d}{p_0}pJ} \sum_{c \leq l \leq j} 2^{l(sp-d)} \\
&\leq c \left(\frac{1}{j^{ap+1}} \right) 2^{-jp(\varepsilon' - \frac{d}{p_0\alpha} + s)} \sum_{J=j/(\alpha+\varepsilon)}^j 2^{-\frac{d}{p_0}pJ} (2^{c(sp-d)} + 2^{j(sp-d)}) \\
&\leq \left(\frac{1}{j^{ap}} \right) 2^{-jp(\varepsilon' - \frac{d}{p_0\alpha} + s)} 2^{-\frac{d}{p_0}p\frac{j}{\alpha+\varepsilon}} (2^{c(sp-d)} + 2^{j(sp-d)}) \\
&\leq c \left(\frac{1}{j^{ap+1}} \right) 2^{-jp(\varepsilon' - \frac{d}{p_0\alpha} + s)}
\end{aligned}$$

car

$$(6.19) \quad sp - d - \frac{dp}{p_0(\alpha + \varepsilon)} < 0$$

D'après (6.18) on a bien $B_{2,1}$ dans l^1 .

Quand au deuxième terme $B_{2,2}$ on obtient

$$\begin{aligned}
B_{2,2} &= \left(\frac{1}{j^{ap}} \right) 2^{-jp(\varepsilon' - \frac{d}{p_0\alpha} + s)} \sum_{J=j/(\alpha+\varepsilon)}^j 2^{-\frac{d}{p_0}pJ} \sum_{\frac{1}{2(\alpha+\varepsilon)J} < |\frac{K}{2^J} - x_0| \leq \frac{1}{2^J}} (2^{-j} + |x_0 - \frac{k}{2^j}|)^{-sp} \\
&\leq c \frac{1}{j^{ap+1}} 2^{-jp(\varepsilon' - \frac{d}{p_0\alpha} + s)} \sum_{J=j/(\alpha+\varepsilon)}^j 2^{-\frac{d}{p_0}pJ} (2^{-(J(\alpha+\varepsilon))} + 2^{-j})^{-sp+d}.
\end{aligned}$$

Deux cas se présentent alors :

– Si $sp - d < 0$ alors :

$$(2^{-j} + 2^{-J(\alpha+\varepsilon)})^{d-sp} \leq 2^{j(sp-d)}.$$

Et

$$\begin{aligned}
B_{2,2} &\leq c \frac{1}{j^{ap+1}} 2^{-jp(\varepsilon' - \frac{d}{p_0\alpha} + s)} \sum_{J=j/(\alpha+\varepsilon)}^j 2^{-\frac{d}{p_0}pJ} 2^{j(sp-d)} \\
&\leq c \frac{1}{j^{ap+1}} 2^{-jp(\varepsilon' - \frac{d}{p_0\alpha} + s)} 2^{j(sp-d - \frac{dp}{p_0(\alpha+\varepsilon)})} \\
&\leq c \frac{1}{j^{ap+1}} 2^{-j(p\varepsilon' + d + \frac{dp}{p_0(\alpha+\varepsilon)} - \frac{dp}{p_0\alpha})}.
\end{aligned}$$

En prenant $\varepsilon' < \frac{d}{\alpha p_0}$, on voit que ce terme est borné, il tend même vers zéro.

– Si $sp - d \geq 0$ alors :

$$(2^{-j} + 2^{-J(\alpha+\varepsilon)})^{d-sp} \leq 2^{J(\alpha+\varepsilon)(sp-d)}.$$

Et

$$\begin{aligned}
B_{2,2} &\leq c \frac{1}{j^{ap+1}} 2^{-jp(\varepsilon' - \frac{d}{p_0\alpha} + s)} \sum_{J=j/(\alpha+\varepsilon)}^j 2^{-\frac{d}{p_0}pJ} 2^{J(\alpha+\varepsilon)(sp-d)} \\
&\leq \frac{1}{j^{ap+1}} 2^{-jp(\varepsilon' - \frac{d}{p_0\alpha} + s)} 2^{j(\alpha+\varepsilon)(sp-d - \frac{dp}{p_0(\alpha+\varepsilon)})} \\
&\leq \frac{1}{j^{ap+1}} + 2^{-j(p\varepsilon' - \frac{dp}{p_0\alpha} + sp - (\alpha+\varepsilon)(sp-d - \frac{dp}{p_0(\alpha+\varepsilon)})}
\end{aligned}$$

Donc d'après (6.18) et (6.19), cette somme est bornée.

En combinant les deux cas, on voit que $B_{2,2}$ appartient aussi à l^1 .

Ce qui nous donne finalement la majoration de B_2 :

$$B_2 \leq B_{2,1} + B_{2,2} \leq C\varepsilon_j$$

où C est une constante indépendante de j .

En regroupant les termes $B_1 + B_2$, on obtient donc que

$$2^{j(sp-d)} \sum_{|k-2^j x_0| \leq A2^j} |d_{j,k}|^p (1 + |k - 2^j x_0|)^{-sp} \leq C\varepsilon_j$$

pour une certaine constante C et une suite (ε_j) dans l^1 .

On a donc montré que pour ε' assez petit et $u = s_0 - \frac{d}{p_0} + \frac{d}{p_0\alpha} - \varepsilon'$, $g \in T_u^p(x_0)$.

$$\text{Donc } u_g^p(x_0) \geq s_0 - \frac{d}{p_0} + \frac{d}{p_0\alpha}.$$

D'autre part la démonstration du cas $s_0 - \frac{d}{p_0} > 0$ reste valable pour montrer qu'on a exactement

$$u_g^p(x_0) = s_0 - \frac{d}{p_0} + \frac{d}{p_0\alpha}$$

D'où le résultat. □

6.3. Prévalence et spectre T_u^p

A partir du résultat que nous avons obtenu dans la partie précédente nous allons regarder le spectre de singularités des ensembles prévalents de fonctions dans un espace de Besov donné $B_{p_0}^{s_0, p_0}$ pour s_0 et p_0 quelconques.

On se fixe alors un $p \geq 1$ tel que $s_0 - \frac{d}{p_0} > -\frac{d}{p}$ et un $\alpha \geq 1$. Comme précédemment, on note F_α l'ensemble des points qui sont α -approximables par des dyadiques. Nous voulons dans un premier temps montrer que si x est un point quelconque appartenant à F_α , le p -exposant d'un ensemble prévalent de fonctions n'est pas plus grand que celui de la fonction de saturation en x .

Plus concrètement, si l'on se fixe un $\varepsilon > 0$ et que l'on note $\tilde{s} = s_0 - \frac{d}{p_0} + \frac{d}{p_0\alpha} + \frac{d}{p} + \varepsilon$, le but ici est de montrer que l'ensemble des fonctions appartenant à $T_{\tilde{s} - \frac{d}{p}}^p$ en au moins un point de F_α est Haar-nul.

Soit $M(A, c)$ l'ensemble des fonctions de $B_{p_0}^{s_0, p_0}(\mathbb{R}^d)$ dont les coefficients d'ondelette vérifient :

$$\exists x \in F_\alpha \quad \forall j \quad 2^{j(\tilde{s}p-d)} \sum_{|k-2^j x| \leq A2^j} |c_\lambda|^p (1 + |k - 2^j x|)^{-\tilde{s}p} \leq C.$$

En utilisant les propriétés de σ -idéal des ensembles Haar-nuls et l'équation (1.25), il nous suffit de montrer que quelque soit $A > 0$ et $c > 0$ l'ensemble $M(A, c)$ est Haar-nul.

En effet, l'union sur c et A des ensembles $M(A, c)$ contient l'ensemble des fonctions appartenant à $T_p^{\tilde{s} - \frac{d}{p}}$ en au moins un point de F_α . Comme $F_\alpha = \limsup_i \cup_l F_\alpha^{i,l}$,

cet ensemble est inclus dans la limite supérieure sur les $i \geq 0$ et l'union sur $l \in \{0, \dots, 2^i - 1\}^d$ des $M_{i,l}(A, c)$ définis comme étant l'ensemble des fonctions de $B_{p_0}^{s_0, p_0}(\mathbb{R}^d)$ telles que :

$$\exists x \in F_\alpha^{i,l} \quad \forall j \quad 2^{j(\bar{s}p-d)} \sum_{|k-2^j x| \leq A2^j} |c_\lambda|^p (1 + |k - 2^j x|)^{-\bar{s}p} \leq C.$$

Commençons par montrer que cet ensemble est bien borélien dans $B_{p_0}^{s_0, p_0}$. Pour cela, on part de la caractérisation suivante de ce que nous voulons montrer, à savoir que si f appartient à $M_{i,l}(A, c)$ il existe un point $x \in F_\alpha^{i,l}$ tel que les coefficients d'ondelette de f vérifient :

$$(6.20) \quad \forall j \quad 2^{j(\bar{s}p-d)} \sum_{|k-2^j x| \leq A2^j} |c_\lambda|^p (1 + |k - 2^j x|)^{-\bar{s}p} \leq C$$

Considérons une suite convergente (f_n) appartenant à $M_{i,l}(A, c)$. Il existe alors une suite (x_n) telle que pour tout n , f_n vérifie la condition (6.20) en x_n . Mais $x_n \in F_\alpha^{i,l}$ qui est compact, donc elle possède une sous-suite $(x_{\phi(n)})$ qui converge vers un certain x . De plus, l'application qui a une fonction de $B_{p_0}^{s_0, p_0}$ associe ses coefficients d'ondelette est continue. Soit $n \in \mathbb{N}$, réécrivons alors (6.20) pour la fonction $f_{\phi(n)}$:

$$\forall j \quad 2^{j(\bar{s}p-d)} \sum_{|k-2^j x_{\phi(n)}| \leq A2^j} |c_\lambda^{\phi(n)}|^p (1 + |k - 2^j x_{\phi(n)}|)^{-\bar{s}p} \leq C.$$

Nous voyons que l'ensemble des cubes sur lesquels la somme est prise dépend de $x_{\phi(n)}$, donc de n . On considère une suite $k_{\phi(n)}$ telle que

$$\forall n \quad \left| \frac{k_{\phi(n)}}{2^j} - x_{\phi(n)} \right| \leq A.$$

Mais quelque soit $n \in \mathbb{N}$, $\frac{k_{\phi(n)}}{2^j} \in [0, 1]$, qui est compact, donc il existe une sous-suite $(k_{\varphi(\phi(n))})$ et $k \in \{0, \dots, 2^j - 1\}^d$ tels que pour tout $\varepsilon > 0$, pour $n \geq N_0$, $\left| \frac{k_{\phi(n)}}{2^j} - \frac{k}{2^j} \right| < \varepsilon$ (en fait $\frac{k_{\phi(n)}}{2^j} = \frac{k}{2^j}$ à partir d'un certain rang). Mais dans ce cas,

$$\left| \frac{k}{2^j} - x \right| \leq \left| \frac{k_{\varphi(\phi(n))}}{2^j} - \frac{k}{2^j} \right| + \left| \frac{k_{\varphi(\phi(n))}}{2^j} - x_{\varphi(\phi(n))} \right| + |x_{\varphi(\phi(n))} - x|.$$

Comme $(x_{\varphi(\phi(n))})$ est une sous-suite de la suite $(x_{\phi(n)})$, elle converge vers x . Et, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N_1 > 0$, tel que pour tout $n \geq N_1$,

$$\left| \frac{k}{2^j} - x \right| \leq A + 2\varepsilon.$$

Quand $\varepsilon \rightarrow 0$, $\left| \frac{k}{2^j} - x \right| \leq A$.

Comme de plus $1 + |k - 2^j x_{\varphi(\phi(n))}| > 1$, la fonction $(1 + |k - 2^j x_{\varphi(\phi(n))}|)^{-\tilde{s}p}$ est continue par rapport à $x_{\varphi(\phi(n))}$ et par rapport à $k_{\varphi(\phi(n))}$. Par conséquent,

$$\forall j \quad 2^{j(\tilde{s}p-d)} \sum_{|k_{\varphi(\phi(n))} - 2^j x_{\phi(n)}| \leq A2^j} |c_{\lambda}^{\varphi(\phi(n))}|^p (1 + |k_{\varphi(\phi(n))} - 2^j x_{\varphi(\phi(n))}|)^{-\tilde{s}p} \leq C.$$

En faisant tendre n vers l'infini, on obtient :

$$\forall j \quad 2^{j(\tilde{s}p-d)} \sum_{|k-2^j| \leq A2^j} |c_{\lambda}|^p (1 + |k - 2^j x|)^{-\tilde{s}p} \leq C.$$

Donc la limite f des f_n vérifie la condition (6.20) en x . Par conséquent, $M_{i,l}(A, c)$ est fermé, donc borélien.

Montrons maintenant que, pour certaines valeurs de i , cet ensemble $M_{i,l}(A, c)$ est Haar-nul. Soit $\alpha \geq 1$ fixé. On construit un espace sonde P de dimension $N = 2^{dl} \Rightarrow \frac{d}{\varepsilon\alpha} + 1$. Cet espace est engendré par les fonctions g_m définies à partir de la fonction de saturation de la façon suivante.

A chaque échelle j , on découpe le cube dyadique de taille 2^{-j} en 2^{dl} sous-cubes de taille 2^{-dj-dl} . Sur chacun de ces sous-cubes, les coefficients d'ondelette de chaque fonction g_m vont être,

$$d_{\lambda}^{m(\lambda)} = \begin{cases} \frac{1}{j^{1/p}} 2^{(\frac{d}{p}-s)j} 2^{-\frac{d}{p}J} & \text{pour } m = m(\lambda) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où J est défini comme précédemment.

Nous voulons montrer que la mesure de Lebesgue sur cet espace de dimension N est une mesure transverse à l'ensemble des fonctions de $B_{p_0}^{s_0, p_0}$ appartenant à $M_{i,l}(A, c)$. Pour cela, on prend une fonction $f \in B_{p_0}^{s_0, p_0}$ quelconque, de coefficients d'ondelettes c_{λ} et on considère deux points $\gamma_1 \in \mathbb{R}^N$ et $\gamma_2 \in \mathbb{R}^N$ tels que $f + \sum \gamma_1^m g_m$ et $f + \sum \gamma_2^m g_m$ appartiennent toutes les deux à $M_{i,l}(A, c)$. Il existe alors deux points x_1 et x_2 tels que pour $a = 1, 2$:

$$\forall j \quad 2^{j(\tilde{s}p-d)} \sum_{|k-2^j x_a| \leq A2^j} |c_{\lambda} + \sum \gamma_a^m d_{\lambda}^m|^p (1 + |k - 2^j x_a|)^{-\tilde{s}p} \leq C$$

On voit que cette condition implique la suivante :

$$\forall j \quad 2^{j(\tilde{s}p-d)} \sum_{|k-2^j x_a| \leq A2^j} |c_{\lambda} + \sum \gamma_a^m d_{\lambda}^m|^p (1 + A2^j)^{-\tilde{s}p} \leq C$$

De plus, comme x_1 et x_2 appartiennent au même intervalle de longueur $2^{-\alpha i}$, pour l'échelle $j = [\alpha i]$, si $|k - 2^j x_1| \leq A2^j$, on a aussi $|k - 2^j x_2| \leq A2^j$. Ce qui revient à dire que les sommes précédentes, même si elles dépendent de x_1 et de x_2

portent sur les mêmes termes. Ce qui s'interprète sur $f_1 - f_2$ par :

$$\begin{aligned}
& 2^{j(\tilde{s}p-d)} \sum_{|\frac{k}{2^j}-x_1|\leq A} \left| \sum_m (\gamma_1^m - \gamma_2^m) d_\lambda^m \right|^p 2^{-\tilde{s}pj} (2^{-j} + A)^{-\tilde{s}p} \\
&= 2^{j(\tilde{s}p-d)} \sum_{|k-2^j x_1|\leq A 2^j} \left| \sum_m (\gamma_1^m - \gamma_2^m) d_\lambda^m \right|^p (1 + A 2^j)^{-\tilde{s}p} \\
&= 2^{j(\tilde{s}p-d)} \sum_{|k-2^j x_a|\leq A 2^j} \left| c_\lambda + \sum_m \gamma_1^m d_\lambda^m - (c_\lambda + \sum_m \gamma_2^m d_\lambda^m) \right|^p (1 + A 2^j)^{-\tilde{s}p} \\
&\leq 2^{j(\tilde{s}p-d)} \sum_{|k-2^j x_1|\leq A 2^j} \left| c_\lambda + \sum_m \gamma_1^m d_\lambda^m \right|^p (1 + A 2^j)^{-\tilde{s}p} \\
&+ 2^{j(\tilde{s}p-d)} \sum_{|k-2^j x_2|\leq A 2^j} \left| c_\lambda + \sum_m \gamma_2^m d_\lambda^m \right|^p (1 + A 2^j)^{-\tilde{s}p} \\
&\leq 2C
\end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned}
& 2^{j(\tilde{s}p-d)} \sum_{|\frac{k}{2^j}-x_1|\leq A} \left| \sum_i (\gamma_1^m - \gamma_2^m) d_\lambda^m \right|^p 2^{-\tilde{s}pj} (2^{-j} + |\frac{k}{2^j} - x_1|)^{-\tilde{s}p} \\
&\geq 2^{j(\tilde{s}p-d)} \sup_{|\frac{k}{2^j}-x_1|\leq A} \left| \sum_m (\gamma_1^m - \gamma_2^m) d_\lambda^m \right|^p 2^{-\tilde{s}pj} (2^{-j} + |\frac{k}{2^j} - x_1|)^{-\tilde{s}p}
\end{aligned}$$

Or nous avons vu dans (6.10) que les coefficients d'ondelette de la fonction de saturation vérifiaient :

$$(6.21) \quad |d_\lambda^m| > \tilde{c} \frac{1}{j^a} 2^{-(s_0 - \frac{d}{p_0} + \frac{d}{p_0 \alpha})j}.$$

Comme de plus, pour chaque k choisi, une seule fonction g_m a un coefficient d_λ^m non nul,

$$\begin{aligned}
& 2^{j(\tilde{s}p-d)} \sup_{|\frac{k}{2^j}-x_1|\leq A} \left| \sum_m (\gamma_1^m - \gamma_2^m) d_\lambda^m \right|^p 2^{-\tilde{s}pj} (2^{-j} + |\frac{k}{2^j} - x_1|)^{-\tilde{s}p} \\
&\geq |\gamma_1^m - \gamma_2^m|^p \tilde{c}^p \frac{1}{j^{pa}} 2^{p\varepsilon j} \sup_{|\frac{k}{2^j}-x_1|\leq A} 2^{-\tilde{s}pj} (2^{-j} + |\frac{k}{2^j} - x_1|)^{-\tilde{s}p}
\end{aligned}$$

Comme $\tilde{s} > 0$, on obtient finalement,

$$\begin{aligned}
& 2^{j(\tilde{s}p-d)} \sum_{|\frac{k}{2^j}-x_1|\leq A} |\gamma_1^m - \gamma_2^m|^p \tilde{c}^p \frac{1}{j^{pa}} 2^{-(s_0 - \frac{d}{p_0} + \frac{d}{p_0 \alpha})pj} 2^{-\tilde{s}pj} (2^{-j} + |\frac{k}{2^j} - x_1|)^{-\tilde{s}p} \\
&\geq |\gamma_1^m - \gamma_2^m|^p \tilde{c}^p \frac{1}{j^{pa}} 2^{p\varepsilon j}
\end{aligned}$$

En prenant dans \mathbb{R}^N la norme du sup, cela nous donne quand on injecte cette inégalité dans les résultats précédents :

$$\|\gamma_1 - \gamma_2\|_{\mathbb{R}^N}^p \leq 2c\tilde{c}j^a 2^{(s_0 - \frac{d}{p_0} + \frac{d}{p_0 \alpha})pj} n^{-(s_0 - \frac{d}{p_0} + \frac{d}{p_0 \alpha} + \varepsilon)pj}.$$

Donc

$$\|\gamma_1 - \gamma_2\|_{\mathbb{R}^N} \leq (2c)^{1/p} \tilde{c} j^a 2^{-\varepsilon j}.$$

Autrement dit la mesure de Lebesgue de l'ensemble $B_{i,l}(A, c)$ des γ_a tels que $f + \sum \gamma_a^m g_m$ appartient à $M_{i,l}(A, c)$ est majorée par $((2c)^{1/p} \tilde{c} [\alpha i])^N 2^{-N\varepsilon[\alpha i]}$.

En prenant l'union sur $l \in \{0, \dots, 2^i - 1\}^d$, on obtient

$$\mathcal{L}(B_i(A, c)) \leq \sum_{l \in \{0, \dots, 2^i - 1\}^d} \mathcal{L}(B_{i,l}(A, c)) \leq ((2c)^{1/p} \tilde{c} [\alpha i])^N 2^{-N\varepsilon[\alpha i] + di}.$$

Soit

$$B(A, c) = \{\gamma \in \mathbb{R}^N \text{ tel que } f + \sum \gamma^i g_i \in M(A, c)\}.$$

Comme N est choisi de sorte que $-N\varepsilon[\alpha i] + di < 0$, nous obtenons donc

$$\mathcal{L}(B(A, c)) = 0.$$

Par conséquent, $M(A, c)$ est Haar-nul. Ce qui implique, en prenant l'union dénombrable sur des $c_n > 0$ et $A_n > 0$, que l'ensemble des fonctions de p -exposant supérieur à \tilde{s} en un point de F_α est Haar-nul. Or $\tilde{s} = s_0 - \frac{d}{p_0} + \frac{d}{p_0\alpha} + \frac{d}{p} + \varepsilon$. En prenant l'union sur une suite décroissante $\varepsilon_n \rightarrow 0$, on obtient que l'ensemble suivant :

$$\forall \alpha \geq 1 \quad \left\{ f \in B_{p_0}^{s_0, p_0} \text{ tel que } \forall x \in F_\alpha \quad u_f^p(x) \leq s_0 - \frac{d}{p_0} + \frac{d}{p_0\alpha} \right\}$$

est un ensemble prévalent.

En prenant une union sur une suite dense (α_n) et en utilisant la stabilité par union dénombrable, on peut inverser les quantificateurs, à savoir

$$M = \left\{ f \in B_{p_0}^{s_0, p_0} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in F_{\alpha_n} \quad u_f^p(x) \leq s_0 - \frac{d}{p_0} + \frac{d}{p_0\alpha_n} \right\}$$

est aussi un ensemble prévalent.

Soit $\alpha \geq 1$ quelconque. La suite que nous avons considérée étant dense, on peut en extraire une sous-suite convergant en croissant vers α et l'intersection E_α des F_{α_n} contient F_α . Sa dimension de Hausdorff est donc supérieure ou égale à $\frac{d}{\alpha}$. Pour tout point $x \in E_\alpha$ et pour toute fonction f dans M , le p -exposant est inférieur ou égal à $s_0 - \frac{d}{p_0} + \frac{d}{p_0\alpha}$.

Avant de pouvoir conclure, il nous faut une majoration du p -spectre. Nous prendrons celle de la proposition 6.1 ou de la proposition 6.5 pour $p = 2$. Dans les deux cas, nous avons l'équation suivante.

$$(6.22) \quad d_p(u) \leq p_0 u + d - s_0 p_0.$$

Cette majoration nous assure que l'ensemble des points dont le p -exposant est strictement inférieur à $s_0 - \frac{d}{p_0} + \frac{d}{p_0\alpha}$ est de dimension de Hausdorff $\frac{d}{\alpha}$ -dimensionnelle

nulle. Comme la mesure de $\{x : u_p(x) \leq s_0 - \frac{d}{p_0} + \frac{d}{p_0\alpha}\}$ est strictement positive, ceci nous assure que

$$(6.23) \quad d_p(u) = p_0u + d - s_0p_0.$$

Ce qui termine la démonstration du théorème.

CHAPITRE 7

SUR LES SÉRIES ENTIÈRES

7.1. Introduction

Comme nous l'avons déjà annoncé dans le chapitre 2, notre but est de regarder quelles propriétés de généricité peuvent être utilisées dans des problèmes classiques d'analyse. Nous avons déjà regardé quelques exemples, et dans ce chapitre nous nous proposons de tester les différentes notions que nous avons sur les séries de Taylor.

Dans tout ce qui précède, nous nous sommes intéressés à différentes notions de régularité dans des espaces de fonctions à valeurs réelles. Dans le cas complexe, le problème que nous allons considérer est de déterminer si une fonction holomorphe "générique" définie sur un disque peut ou non être prolongée au delà.

Dans ce cas, nous allons regarder ce qu'il en est pour les séries de Taylor. En effet, ces séries sont holomorphes à l'intérieur d'un disque de convergence. On sait aussi qu'elles divergent à l'extérieur de ce disque. En ce qui concerne la frontière entre ces deux domaines, appelé "cercle de convergence", on aimerait savoir si la fonction considérée est prolongeable en une fonction holomorphe. Si on sait qu'il existe au moins un point de ce cercle singulier, on ne peut pas dire en général s'il existe des arcs de ce cercle au delà desquels la fonction serait prolongeable analytiquement. Or nous savons que certaines fonctions peuvent être prolongées hors du cercle de convergence, alors que d'autres non.

En 1896 dans [16], E. Borel a cependant émis l'hypothèse que le cercle de convergence était "en général" une frontière naturelle. Même s'il ne le dit pas explicitement, on considère que E. Borel entendait le terme "en général" au sens probabiliste, [52].

Dans ce sens, un premier résultat a été donné par Steinhaus dans [91] en 1929, où il a montré que le résultat était vrai pour un modèle de séries de Taylor

aléatoires. D'autres résultats ont été démontrés dans ce sens notamment dans [52]. L'étude générique au sens des catégories de Baire date elle de Kierst et Szpilrajn en 1930, [58] ou [53]. Une fois encore, le cercle de convergence est une frontière naturelle pour un ensemble de seconde catégorie au sens de Baire de fonctions analytiques.

Il nous paraît alors naturel de nous demander si le même type de résultat peut être obtenu pour les notions de généricité que nous avons considérées auparavant. Nous allons donc ici regarder ce problème sous le point de vue de la prévalence.

Avant cela, définissons plus explicitement le cadre mathématique à partir duquel nous allons travailler. La plupart des résultats classiques se trouvent dans [20].

7.1.1. Fonctions analytiques et points réguliers. — Dans cette partie, nous allons considérer des fonctions de la forme

$$(7.1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Ces fonctions sont définies sur le plan complexe et sont convergentes sur un domaine ouvert, le disque de convergence défini par $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$, où le rayon de convergence r est donné par

$$|z| < r \Rightarrow \sum_0^{\infty} |a_n z^n| < \infty.$$

et

$$|z| > r \Rightarrow \sup_n |a_n z^n| = \infty.$$

Pour déterminer la valeur du rayon de convergence, on utilise en général le critère d'Hadamard qui donne exactement sa valeur en fonction des coefficients de la série :

$$(7.2) \quad r = (\limsup |a_n|^{\frac{1}{n}})^{-1}.$$

Dans la suite, nous nous limiterons au cas où le rayon de convergence r vérifie $0 < r < \infty$.

Avant de partir plus avant dans l'étude prévalente de telles fonctions, rappelons quelques unes de leurs propriétés. Tout d'abord pourquoi parle-t-on de disque de convergence, et quelle est la nature même du problème que nous allons traiter ?

Remarquons que la nature même du rayon de convergence nous amène à nous poser une première question, à savoir que se passe-t-il sur le cercle de convergence

$\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$. Pour apporter quelques éléments de réponse à cette question, commençons par rappeler les éléments d'analyse complexe que nous allons utiliser par la suite. Tout d'abord, on dit qu'un point $a \in \Gamma$ est régulier s'il existe un disque ouvert D_a centré en a tel que f admette un prolongement analytique dans $D \cup D_a$. Un point $a \in \Gamma$ qui n'est pas régulier est dit singulier. De plus, rappelons le théorème d'Abel, sous sa forme non tangentielle qui permet de caractériser le comportement d'une fonction au voisinage d'un point régulier.

Théorème 7.1. — (*Abel non tangentiel*) Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in]0, \infty[$; on suppose que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$ converge pour un $z_0 \in \Gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R\}$, soit $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}[$ et $\rho \in [0, 2 \cos \varphi[$ et $\Delta(z_0, \rho, \varphi)$ le secteur définie par

$$\Delta(z_0, \rho, \varphi) = \{z; z = z_0(1 - re^{i\theta}) \text{ avec } 0 \leq r \leq \rho \text{ } |\theta| \leq \varphi\}.$$

Alors $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge uniformément sur $\Delta(z_0, \rho, \varphi)$.

La dernière remarque que nous allons faire sur le cercle de convergence est la suivante : il existe au moins un point singulier sur ce cercle.

On définit notre espace métrique de la manière suivante.

Définition 7.1. — Soit $H(D)$ l'espace des fonctions analytiques sur le domaine $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Cet espace est muni de la famille de semi-normes :

$$(7.3) \quad p_n(f) = \sup_{z \in K_n} \{|f(z)|\}$$

où $(K_n)_n$ est une famille croissante de compacts définis par $K_n = \{z : |z| \leq 1 - \frac{1}{n}\}$. L'espace $H(D)$ muni de cette famille de semi-normes est un espace de Fréchet, autrement dit il est métrisable et complet.

De plus, on définit sur $H(D)$ la distance d définie pour tout $f, g \in H(D)$ par

$$(7.4) \quad d(f, g) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2^n} \frac{p_n(f - g)}{1 + p_n(f - g)}.$$

Dans la suite, on note $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

7.2. Comportement prévalent

Comme nous l'avons déjà annoncé dans l'introduction, nous allons faire ici l'étude prévalente de la prolongeabilité des fonctions analytiques sur le bord du domaine Γ .

Théorème 7.2. — *L'ensemble des fonctions $f \in H(D)$ telles que $\exists a \in \Gamma$ et a est régulier pour f est un ensemble Haar-nul. Autrement dit, pour presque toutes fonctions de $H(D)$, l'ensemble $\Gamma = \{|z| = 1\}$ est une frontière naturelle.*

Démonstration :

En reprenant la technique introduite par la propriété (2.3) et développée au chapitre 3, nous prendrons pour mesure transverse sur $H(D)$ la mesure définie par un processus aléatoire gaussien dont les trajectoires appartiennent presque sûrement à $H(D)$. Soit :

$$(7.5) \quad F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n z^n.$$

où les ξ_n sont des variables aléatoires gaussiennes indépendantes et identiquement distribuées centrées et réduites.

Lemme 7.1. — *Presque sûrement, $F(z) \in H(D)$ et $r(F) = 1$.*

Démonstration : Les ξ_n étant des gaussiennes centrées réduites,

$$\mathbb{P}(|\xi_n| \leq \frac{1}{n^2}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\frac{1}{n^2}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{n^2}$$

et par l'inégalité de Bienaymé-Tchebycheff,

$$\mathbb{P}(|\xi_n| \geq n) \leq \frac{1}{n^2}.$$

Les ξ_n étant indépendantes, on applique le lemme de Borel-Cantelli et

$$\text{p.s. } \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N \quad \frac{1}{n^2} < |\xi_n| < n.$$

Or $\limsup |n|^{1/n} = 1$ et $\limsup \left| \frac{1}{n^2} \right|^{1/n} = 1$. D'où le lemme. \square

Pour montrer le théorème 7.2, nous allons utiliser le résultat suivant de Ryll-Nardzewski, [85], qui nous permet de déterminer le comportement d'une série aléatoire sur son cercle de convergence. Dans la suite de cette démonstration, pour toute fonction $f \in H(D)$, on note $r(f)$ le rayon de convergence de la série f .

Théorème 7.3. — *A toute série entière aléatoire $F(z, \omega) = \sum X_n(\omega) z^n$, à coefficients indépendants on peut associer une série déterministe $f_0(z)$ telle que la série :*

$$(7.6) \quad H(z) = F(z) + f_0(z).$$

vérifie avec probabilité 1 les propriétés suivantes :

(i) $r(F + f) \leq r(H)$ pour toute série déterministe $f(z)$.

(ii) Le cercle $\{|z| = r(H)\}$ est une frontière naturelle pour la série H .

(iii) Si une série $f \in H(D)$ vérifie l'équation $r(F + f) = r(H)$ alors le cercle $\{|z| = r(F + f)\}$ est une frontière naturelle pour la série $F + f$.

Enfin si les X_n sont des variables aléatoires symétriques, on peut choisir $f_0(z) = 0$.

Revenons à la démonstration du théorème 7.2. Les variables aléatoires ξ_n étant centrées, on peut choisir $f_0(z) = 0$ dans le théorème 7.3. Soit maintenant $f(z) = \sum a_n z^n$ une série entière déterministe de $H(D)$. On a donc $r(f) \geq 1$ et a priori, presque sûrement, $r(f + F) \geq 1$. Le point (i) du théorème 7.3 implique donc que

$$\text{p.s. } r(F + f) = 1.$$

Le point (iii) du théorème permet alors d'affirmer que le cercle Γ est presque sûrement une frontière naturelle pour $f + F$. Ce qui achève la démonstration du théorème. \square

Remarque : Pour obtenir un résultat prévalent, nous n'avons besoin que d'une mesure μ . Dans la démonstration précédente, nous voyons que le résultat est plus fort, dans le sens où n'importe quelle mesure gaussienne à coefficients indépendants dont le cercle de convergence est Γ satisfait la propriété recherchée. Il est naturel alors de se demander si la théorie de Phelps, et des ensembles nuls au sens gaussien peut être appliquée.

La réponse à cette question est malheureusement négative. Il est possible en effet de construire une série gaussienne appartenant à $H(D)$ et dont le rayon de convergence serait infini, en prenant par exemple $F(z) = \sum X_n \frac{z^n}{n!}$ et (X_n) est une suite de variables aléatoires gaussiennes indépendantes et identiquement distribuées de variance 1.

ANNEXE B

COMPLÉMENTS AU CHAPITRE 2

Compatibilité des notions de porosité et d'ensembles Haar-nuls

Théorème 7.4. — *Soit X un espace de Banach séparable.*

1. *Si $\dim X < \infty$, X peut s'écrire comme l'union d'un ensemble de mesure nulle, au sens de Lebesgue, et d'un ensemble de première catégorie au sens de Baire.*
2. *Si $\dim X = \infty$, X peut s'écrire comme l'union d'un ensemble Haar-nul et d'un ensemble σ -poreux.*

Dans les deux cas, il existe donc un ensemble de première catégorie au sens de Baire qui soit aussi prévalent.

Démonstration :

1. Dans le cas $\dim X < \infty$ ou plutôt $\dim X = n$, on reprend la démonstration de [80]. Soient a_1, a_2, \dots une suite de points de \mathbb{R}^n à coordonnées dense de rationnels. Soit $i = (i_1, \dots, i_n)$ et $I_{i,j} = a_i +]-\frac{1}{2 \cdot 2^{i+j}}, +\frac{1}{2 \cdot 2^{i+j}}[$. On note $G_j = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_{i,j}$ et $B = \bigcap_j G_j$. $\forall \varepsilon > 0$, on choisit j tel que $\varepsilon > \frac{1}{2^{nj}}$. Comme $\forall j, B \subset \bigcup_i I_{i,j}$, on sait que

$$\mathcal{L}(B) \leq \sum_i \mathcal{L}(I_{i,j}) \leq 2^{-nj} \sum_i 2^{-ni} < 2\varepsilon$$

où \mathcal{L} désigne la mesure de Lebesgue dans \mathbb{R}^n . Donc $\mathcal{L}(B) = 0$. Et les G_j forment une suite d'ouverts denses de \mathbb{R}^n . En passant au complémentaire, G_j^c est fermé d'intérieur vide et le complémentaire de B dans \mathbb{R}^n est une union dénombrable de fermés d'intérieur vide.

2. Comme dans [82], pour $\dim X = \infty$, commençons par démontrer le lemme suivant.

Lemme 7.2. — *Soit X un espace de Banach séparable de dimension infinie. Il existe un ensemble dénombrable $Z \subset X$ tel que les boules $(B(z, 1))_{z \in Z}$ forment un recouvrement de X et quelle que soit la droite affine $D \subset X$*

$$\limsup_{s \rightarrow \infty} \sup_{x, y \in D, \|y-x\| \geq s} \left(\frac{\mathcal{L}([x, y] \cap (\bigcup_z B(z, 1)))}{\|y-x\|} \right) = 0.$$

Remarque : Autrement formulé, d'après ce lemme, quelque soit la droite D que l'on considère, et quelque soit le segment dans D aussi grand que l'on veut, dont la taille est indépendante de D , la mesure de l'intersection entre ce segment et l'union des boules $B(z, 1)$ est de mesure nulle. Donc, quelque soit D , quelque soit $x, y \in D$, il existe une suite (s_n) telle que $\mathcal{L}([x, y] \cap \bigcup_z B(z, 1)) < 2^{-n} \|x-y\|$ dès que $\|x-y\| > s_n$.

Démonstration : Comme X est séparable, il existe une suite $(x_n)_n$ dense dans X . On pose alors $z_0 = x_0$ et on construit une autre suite (z_n) dense dans X . Supposons que (z_0, \dots, z_{k-1}) soit déjà construit. D'après le théorème de Hahn-Banach, comme la dimension de X est infinie, il existe un $x^* \in X^*$ de norme 1 tel que $\langle x^*, x \rangle = 0$ pour tout élément de $\text{Vect}(z_0, \dots, z_{k-1})$ et tel que $\langle x^*, x \rangle$ soit positif pour tout x appartenant à un convexe n'intersectant pas $\text{Vect}(z_0, \dots, z_{k-1})$. Donc on peut choisir x^* tel que $\|x^*\| = 1$ et $\langle x^*, z_i \rangle = 0$ pour tout $i < k$ et $\langle x^*, x_k \rangle \geq 0$. Comme $\|x^*\| = 1 = \sup_{\|x\|=1} \langle x^*, x \rangle$, on peut trouver un x de norme 1 pour lequel $\langle x^*, x \rangle > \frac{5}{6}$. On pose alors $z_k = x_k + 6x$. On obtient que

(7.7)

$$\begin{aligned} \text{dist}(z_k, \text{Vect}(z_0, \dots, z_{k-1})) &= \inf_{z \in \text{Vect}(z_0, \dots, z_{k-1})} \|z_k - z\| \\ &= \inf_{z \in \text{Vect}(z_0, \dots, z_{k-1})} \sup_{x^* \in X^*} |\langle x^*, z_k - z \rangle| \\ &\geq \inf_{z \in \text{Vect}(z_0, \dots, z_{k-1})} |\langle x^*, z_k - z \rangle| \geq |\langle x^*, z_k \rangle| \\ &= |\langle x^*, x_k + 6x \rangle| > 6|\langle x^*, x \rangle| > 5 \end{aligned}$$

et que $\|z_n - x_n\| = 6\|x\| = 6$. Comme la suite (x_n) est dense, les boules $B(z_k, 7)$ forment un recouvrement de X .

On considère alors une droite p appartenant à X et $n_1 < n_2 < \dots$ tous les indices tels que $\text{dist}(z_{n_i}, p) \leq 1$. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, on pose w_i le point appartenant à p et tel que $\|w_i - z_{n_i}\| \leq 1$. On a alors

$$(7.8) \quad \forall i < j < k \quad \text{dist}(w_k, [w_i, w_j]) > \|w_i - w_j\|.$$

En effet si $\text{dist}(w_k, [w_i, w_j]) \leq \|w_i - w_j\|$, comme $w_k \in p$, on peut écrire $w_k = \alpha w_i + \beta w_j$ avec $|\alpha| \leq 2$ et $|\beta| \leq 2$. Dans ce cas :

$$\begin{aligned} \text{dist}(z_{n_k}, \text{Vect}(z_0, \dots, z_{n_k-1})) &\leq \|z_{n_k} - (\alpha z_{n_i} + \beta z_{n_j})\| \\ &\leq \|z_{n_k} - w_k + w_k + (\alpha z_{n_i} + \beta z_{n_j})\| \\ &\leq \|z_{n_k} - w_k\| + \alpha \|w_i - z_{n_i}\| + \beta \|w_j - z_{n_j}\| \leq 5. \end{aligned}$$

Ce qui est contraire à la définition de z_{n_k} .

Pour tout $n \geq 2$, on peut choisir un sous-ensemble $\{w_1, \dots, w_j\}$ ayant au moins n éléments. Dans ce cas, nous pouvons montrer par récurrence que $\text{diam}[w_1 - w_j] > 2^{n-1}$. En effet, pour $n = 2$: $\|w_i - w_j\| \geq \|z_{n_i} - z_{n_j}\| - \|z_{n_i} - w_i\| - \|z_{n_j} - w_j\| \geq \|z_{n_i} - z_{n_j}\| - 2 > 2$. Pour $n > 2$, on considère le segment composé de $[w_{i_1}, w_{i_{n-1}}]$ et on sait d'après (7.8) que w_n n'appartient pas à ce segment. De plus, on peut choisir

une direction sur la droite p , ce qui permet de considérer le réordonnement croissant des w_{i_n} . L'hypothèse de récurrence nous assure que $\|w_{i_{n-1}} - w_{i_1}\| > 2^{n-2}$. En utilisant une fois encore (7.8), on obtient $\|w_n - w_{i_1}\| = \|w_n - w_{i_{n-1}}\| + \|w_{i_{n-1}} - w_{i_1}\| > 2\|w_{i_{n-1}} - w_{i_1}\| > 2^{n-1}$. Ce résultat est donc vrai pour tout n .

Soient deux points x et y appartenant à la droite p . On peut supposer qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $2^{m-2} < \|x - y\| < 2^{m-1}$ et $\mathcal{L}([x, y] \cap \cup B(z, 1)) > 2m + 2$. Comme la deuxième condition implique que le segment $[x, y] \subset p$ contient au moins une sous-suite de m éléments de la suite (w_i) , on obtient que $\|x - y\| > 2^{m-1}$ ce qui est contraire à l'hypothèse. Par suite :

$$\frac{\mathcal{L}([x, y] \cap \bigcup_z B(z, 1))}{\|y - x\|} \leq (m + 1)2^{-m+3}.$$

□

On regarde maintenant l'ensemble G obtenu en prenant l'union des boules ouvertes de centres $z \in Z$ et de rayons 1. D'après le lemme 7.2, il existe une suite (s_n) tendant vers l'infini telle que $\mathcal{L}([x, y] \cap G) < 2^{-n}\|x - y\|$ dès que $\|x - y\| \geq s_n$. Si on définit $G_n = \{z/s_n / z \in G\}$, alors $\mathcal{L}([x, y] \cap G_n) < 2^{-n}\|x - y\|$ dès que $\|y - x\| > 2^{-n}$. Soit

$$U = \bigcap_{k=0}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} G_n$$

Alors quel que soit x et y et quel que soit k tel que $\|x - y\| > 2^{-k}$,

$$\mathcal{L}([x, y] \cap U) \leq \sum_{n \geq k} \mathcal{L}([x, y] \cap G_n) < \sum_{n \geq k} 2^{-n}\|x - y\| < 2^{-k+1}\|x - y\|$$

Donc, en faisant tendre k vers l'infini, nous obtenons que la mesure de Lebesgue de U sur chaque ligne est nulle, donc U est Haar-nul.

De plus, si l'on note $V = X \setminus U$, V peut s'écrire comme l'union sur k des $X \setminus \bigcup_{n=k}^{\infty} G_n$ qui sont des ensembles fermés. Soit $x \in V$ quelconque. Comme l'union des boules de centre $z \in Z$ et de rayon 7 recouvrent X , il existe $z_0 \in Z$ tel que $\|x - z_0\| \leq 7$. De plus, quelque soit $R > 0$, il existe n tel que $R > 7 \frac{2^{-n}}{s_n}$, cette suite tendant vers 0. Donc $\forall x \in X$ et pour tout $R > 0$, il existe n et z_n appartenant à G_n tels que $z_n \in B(x, R)$. Mais dans ce cas la boule $B(z_n, \frac{2^{-n}}{s_n}) \subset G_n$. Autrement dit $\forall R > 0 \quad \gamma(z, R, X \setminus \bigcup_{n=k}^{\infty} G_n) > \frac{R}{7}$ et cet ensemble est poreux. Comme V est l'union des $X \setminus \bigcup_{n=k}^{\infty} G_n$ il est σ -poreux.

□

Un ensemble de première catégorie qui n'est pas σ -poreux

Tout d'abord, réécrivons ce lemme, issu de [93], dont nous aurons besoin dans la démonstration.

Lemme 7.3. — Soit $c \in]0, 1]$. Alors tout ensemble A σ -poreux dans \mathbb{R} peut s'écrire comme l'union de A_n où chaque A_n est poreux et quelque soit $n \in \mathbb{N}$, quelque soit $x \in A_n$, $p(A_n, x) \geq c$.

Exemple. — On va voir un exemple, issu de [93], d'ensemble inclus dans \mathbb{R} qui soit de mesure nulle et de première catégorie mais qui ne soit pas σ -poreux.

Démonstration : Reprenons la démonstration de [93].

Pour cela on se place sur l'intervalle $[0, 1]$ et on choisit une suite $\alpha = \{\alpha_n\} \in (0, 1/2)$. Plus exactement, on prend la suite définie par pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n = \frac{n}{2n+1}$. On va adapter la construction de l'ensemble de Cantor à un cadre un peu différent. A la première étape, on pose

$$C_1 = [0, \alpha_1] \cup [1 - \alpha_1, 1] = J_1^1 \cup J_1^2,$$

où on définit $J_1^1 = [0, \alpha_1]$, et $J_1^2 = [1 - \alpha_1, 1]$, ce sont les "intervalles blancs" de [56]. On définit de la même manière $I_1^1 = [\alpha_1, 1 - \alpha_1]$, l'intervalle "noir" correspondant. A la deuxième étape on découpe chaque intervalle blanc en deux intervalles de longueur $\alpha_1\alpha_2$. On obtient ainsi :

$$C_2 = [0; \alpha_1\alpha_2] \cup [\alpha_1 - \alpha_1\alpha_2, \alpha_1] \cup [1 - \alpha_1, 1 - \alpha_1 + \alpha_1\alpha_2] \cup [1 - \alpha_1\alpha_2, 1] = J_2^1 \cup J_2^2 \cup J_2^3 \cup J_2^4.$$

On appelle alors I_2^1 et I_2^2 les intervalles noirs obtenus à cette itération. On réitère cette construction, de sorte qu'à la n -ème itération, on ait 2^n intervalles blancs J_n^i de longueur $\alpha_1 \dots \alpha_n$ et on définit $C = \bigcap_n C_n$.

Calculons d'abord la mesure de Lebesgue de C .

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(C) &= \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \prod_{i=1}^n \frac{i}{2i+1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \prod_{i=1}^n \frac{i2i}{2i(2i+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \frac{(n!)^2 2^n}{(2n+1)!} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{2n} \frac{(n!)^2}{(2n+1)2n!} \end{aligned}$$

En utilisant la formule de Stirling, on a

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(C) &= \frac{2^{2n} 2\pi n^{2n+1} e^{-2n}}{(2n+1)\sqrt{2\pi}(2n)^{2n+1/2} e^{-2n}} (1 + o(1)) \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{n}}{2n+1} (1 + o(1))\end{aligned}$$

qui tend vers zéro quand n tend vers l'infini. Donc C est de mesure nulle.

De plus, comme pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'ensemble C_n s'écrit comme l'union des intervalles J_n^i , C s'écrit comme intersection de fermés et est donc fermé. C'est donc un fermé de mesure nulle, il est donc d'intérieur vide.

Montrons maintenant que C n'est pas σ -poreux. Pour cela, supposons le contraire. Le lemme 7.3 implique qu'il existe une famille G_n d'ensembles poreux de constante de porosité 1 tels que $C = \bigcup_n G_n$. On peut mettre d'un côté les éventuels points isolés $\{x_{n_1}, \dots, x_{n_k}, \dots\}$ et il reste des ensembles E_n , poreux, de constante de porosité 1 et sans points isolés. Comme la suite $\alpha_n \rightarrow 1/2$, on peut dire que :

$$(7.9) \quad \forall n > 0 \quad \exists k(n) > 0 \quad \forall k' > k(n) \quad |1 - 2\alpha_{k'}| < \frac{1}{3^{n+2}}$$

On va obtenir une contradiction en construisant une suite de compacts $(F_n)_n$ de C non vides tels que $\forall n \quad x_n \notin F_n$ et F_n n'intersecte pas E_n . Pour $n = 1$, on sait qu'il existe un $k(1)$ tel que pour tout $k' > k(1)$, (7.9) soit vérifiée. Deux cas se présentent alors :

- Si E_1 est dense dans C , alors on pose $k'(1) = k(1)$ et on prend pour $J(1)$ un intervalle de la forme $J_{k'(1)}^i$ ne contenant pas x_1 .
- Si E_1 n'est pas dense dans C , il existe $k'(1) > k(1)$ et un intervalle $J_{k'(1)}^i$ n'intersectant pas E_1 et ne contenant pas x_1 . On note alors $J(1)$ cet intervalle.

Par hypothèses sur E_1 , on sait que $p(x, E_1) = 1$ pour tout $x \in E_1$. Autrement dit, il existe une suite R_n et il existe $z \in B(x, R_n)$ vérifiant $B(z, R_n) \cap E_1 = \emptyset$. On note alors F_1 l'ensemble

$$(7.10) \quad F_1 = J(1) \setminus \left(\bigcup_{k' > k'(1)} \bigcup_{i=1}^{2^{k'-1}-1} \{\tilde{I}_{k'}^i; \text{ où } I_{k'}^i \subset J(1)\} \right)$$

où $\tilde{I}_{k'}^i$ est l'intervalle obtenu en prenant l'intervalle noir $I_{k'}^i$ et en multipliant sa longueur par 3. Par construction F_1 est inclus dans $J(1)$. Cet ensemble F_1 est fermé comme complémentaire d'un ouvert dans un fermé. De plus, F_1 est non vide. En

effet, en regardant la mesure de Lebesgue, et en utilisant (7.9) on voit que :

$$\mathcal{L} \left(\bigcup_{i=1}^{2^{k'-1}-1} \tilde{I}_{k'}^i \right) = 3\alpha_1 \dots \alpha_{k'-1} (1 - 2\alpha_{k'}) \leq \frac{\alpha_1 \dots \alpha_{k'-1}}{3^2}.$$

Quand on regarde alors l'union des $I_{k'}^i$ sur toutes les tailles possibles on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left(\bigcup_{k' > k'(1)} \bigcup_{i=1}^{2^{k'-1}-1} \tilde{I}_{k'}^i \right) &\leq \sum_{k' > k'(1)} \mathcal{L} \left(\bigcup_{i=1}^{2^{k'-1}-1} \tilde{I}_{k'}^i \right) \\ &\leq 3 \sum_{k' > k'(1)} \frac{\alpha_1 \dots \alpha_{k'-1}}{3^{n+2}} \\ &\leq \frac{\alpha_1 \dots \alpha_{k'(1)}}{3^2} \sum_{k' > k'(1)} \alpha_{k'(1)+1} \dots \alpha_{k'} \\ &\leq \frac{\alpha_1 \dots \alpha_{k'(1)}}{3^2} \frac{1}{2^{k'(1)}}. \end{aligned}$$

Car quelque soit n , $0 < \alpha_n < \frac{1}{2}$ par construction donc $\alpha_{k'(1)+1} \dots \alpha_{k'} \leq \frac{1}{2^{k'}}$.

Par conséquent, la longueur de ce qu'on retire à $J(1)$ dans la construction de F_1 est de l'ordre de $\frac{\mathcal{L}(J(1))}{3^2}$, et F_1 est de mesure positive.

Si E_1 n'est pas dense dans C , il est évident par construction que F_1 n'intersecte pas E_1 . Si E_1 est dense dans C , on peut supposer que E_1 intersecte $J(1)$. Soit x un point d'intersection. Comme E_1 est poreux de constante de porosité supérieure à 1, il existe une suite R_n telle que $\lim_{R_n} \frac{\gamma(x, R_n, E_1)}{R_n} = 1$. Autrement dit, il existe r_n et z tels que $B(z, r_n) \subset B(x, R_n)$ et $B(z, r_n) \cap E_1 = \emptyset$. Mais E_1 est inclus dans C . Comme les intervalles noirs $I_{k'}^i$ correspondent au complémentaire de C dans $J(1)$, quelque soit $n \in \mathbb{N}$, il existe k' et i tel que $B(z, r_n) \subset I_{k'}^i$. Par conséquent, $B(z, r_n) \cap F_1 = \emptyset$. Mais comme la constante de porosité de E_1 vaut 1, $\lim_{R_n} \frac{r_n}{R_n} = 1$ et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe n assez grand tel que $x \in B(z, r_n + \varepsilon)$. Mais en prenant $\varepsilon_0 < \mathcal{L}(I_{k'}^i)$ on obtient, par construction de $\tilde{I}_{k'}^i$ que $B(z, r_n + \varepsilon_0) \subset \tilde{I}_{k'}^i$. Par conséquent, il existe k' et i tel que $x \in \tilde{I}_{k'}^i$. Donc $x \notin F_1$.

On réitère cette construction une infinité de fois. Supposons que $k'(m)$ et $J(m)$ soient définis et que les ensembles F_1, \dots, F_m soient construits et construisons F_m . On sait qu'il existe $k(m)$ telle que pour tout $k \geq k(m)$ la condition (7.9) soit vérifiée. Si E_m est dense dans F_m , on pose $k'(m) = \max(k'(m-1), k(m)) + 1$ et on note $J(m)$ un intervalle de la forme $J_{k'(m)}^i \subset J(m-1)$ ne contenant pas x_m . Si E_{m+1} n'est pas dense dans F_m , il existe $k'(m) > \max(k'(m-1), k(m))$ et un intervalle $J_{k'(m)}^i \subset J(m-1)$ tel que $J_{k'(m)}^i$ n'intersecte pas E_m . On note alors $J(m)$

cet intervalle. On note alors :

$$(7.11) \quad F_m = J(m) \setminus \left(\bigcup_{k' > k'(m)} \bigcup_{i=1}^{2^{k'-1}-1} \{\tilde{I}_{k'}^i; \text{ où } \tilde{I}_{k'}^i \subset J(1)\} \right)$$

où $\tilde{I}_{k'}^i$ est l'intervalle contenant $I_{k'}^i$ et de mesure $3^m \mathcal{L}(I_{k'}^i)$. F_m est inclus dans F_{m-1} , il est compact car fermé dans un compact. Il est de mesure de Lebesgue non nulle. En effet, comme tout à l'heure,

$$\mathcal{L} \left(\bigcup_{i=1}^{2^{k'-1}-1} \tilde{I}_{k'}^i \right) = 3^m \alpha_1 \dots \alpha_{k'-1} (1 - 2\alpha_{k'}) \leq 3^m \frac{\alpha_1 \dots \alpha_{k'-1}}{3^{m+2}} = \frac{\alpha_1 \dots \alpha_{k'-1}}{3^2}.$$

Et par le même calcul que pour F_1 , on obtient que la mesure de Lebesgue des intervalles noirs dilatés est inférieure à $\frac{\mathcal{L}(J(m))}{3^2}$.

Si E_m n'est pas dense dans F_{m-1} , F_m n'intersecte pas E_m par construction. Si E_m est dense, en utilisant encore une fois l'argument de porosité, F_m n'intersecte pas non plus E_m .

On arrive ainsi à construire un ensemble $F = \bigcap F_n$ non vide dans C et disjoint de $\{x_1, \dots, x_n, \dots\} \cup (\bigcup E_n) = C$ ce qui est impossible. Donc C n'est pas σ -poreux.

Donc C est à la fois de première catégorie et de mesure nulle. Pourtant il n'est pas σ -poreux. \square

BIBLIOGRAPHIE

- [1] P. Abry, *Ondelettes et turbulences. Multirésolutions, algorithmes de décomposition, invariance d'échelle et signaux de pression*, Nouveaux Essais. Paris : Diderot , 1997.
- [2] R. Adams, *Sobolev spaces*, Pure and Applied mathematics, 1975.
- [3] S. Agronsky and A. Bruckner, *Local compactness and porosity in metric spaces*, Real Analysis Exchange **11** (1985-86), 365–379.
- [4] V. Anisiu, *Porosity and continuous, nowhere differentiable functions*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. **2** (1993), no. 6, 5–14.
- [5] A. Arneodo, *Ondelettes, multifractales et turbulences : De l'ADN aux croisances cristallines*, inconnu, 1980.
- [6] A. Arnéodo, E. Bacry, and J.F. Mazy, *The thermodynamics of fractals revisited with wavelets*, Physica A. **213** (1995), 232–275.
- [7] N. Aronszajn, *Differentiability of Lipschitz functions in Banach spaces*, Studia Math. **57** (1976), 147–160.
- [8] J-M. Aubry and S. Jaffard, *Random wavelet series*, Comm. Math. Phys. **227** (2002), 483–514.
- [9] R. Baire, *Sur la théorie des ensembles*, C. R. Acad. Sci. Paris **129** (1899), 946–949.
- [10] S. Banach, *Über die Baire'sche Kategorie gewisser Funktionenmengen*, Studia Math. **3** (1931), 174–179.
- [11] J. Barral and B. B. Mandelbrot, *Multifractal products of cylindrical pulses*, Probab. Theory Relat. Fields **124** (2002), no. 3, 409–430.

- [12] J. Barral and S. Seuret, *From multifractal measures to multifractal wavelet series*, Journal of Fourier Analysis and Applications (2005).
- [13] Y. Benyamini and J. Lindenstrauss, *Geometric nonlinear functional analysis. Volume 1*, Colloquium Publications. American Mathematical Society (AMS), 2000.
- [14] C. Berg, J. Christensen, and P. Ressel, *Harmonic analysis on semigroups. Theory of positive definite and related functions.*, Graduate Texts in Mathematics , 1984.
- [15] P. Billingsley, *Convergence of probability measures*, Wiley edition, 1999.
- [16] E. Borel, *Sur les séries de Taylor*, C. R. Acad. Sciences Series A **123** (1896), 1051–1052.
- [17] J. Borwein and W. Moors, *Null sets and essentially smooth Lipschitz functions*, SIAM J. Optim. **8** (1998), no. 2, 309–323.
- [18] G. Brown, G. Michon, and J. Peyrière, *On the multifractal analysis of measures*, J. Stat. Phys. **66** (1992), no. 3-4, 775–790.
- [19] A. Calderón and A. Zygmund, *Local properties of solutions of elliptic partial differential equations*, Studia Math. **20** (1961), 171–227.
- [20] H. Cartan, *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*, Enseign. des sciences. Paris : Hermann & Cie. , 1961.
- [21] J.P.R. Christensen, *On sets of Haar measure zero in Abelian Polish groups*, Israel J. Math. **13** (1972), 255–260.
- [22] ———, *Topology and Borel structure*, North Holland, Amsterdam, 1974.
- [23] Z. Ciesielski, *On orthogonal expansions of almost all functions from the Wiener space*, Ph.D. thesis, Adam Mickiewicz University, 1959.
- [24] A. Cohen, *Numerical analysis of wavelet methods*, Studies in mathematics and applications, 2003.
- [25] M. Csörnyei, *Aronszajn null and Gaussian null sets coincide*, Isr. J. Math. **111** (1999), 191–201.
- [26] A. Denjoy, *Sur une propriété de séries trigonométriques.*, Amst. Ak. Versl. **29** (1920), 628–639.

- [27] E. Dolzenko, *Boundary properties of arbitrary functions*, Math. USSR, Izv. **1** (1967), 1–12.
- [28] K. Falconer, *Fractal Geometry*, Wiley, New-York, 1990.
- [29] A. Fraysse, S. Jaffard, and J-P. Kahane, *Some generic properties in analysis*,. (*Quelques propriétés génériques en analyse.*), C. R., Math., Acad. Sci. Paris **340** (2005), no. 9, 645–651.
- [30] U. Frisch and G. Parisi, *Fully developed turbulence and intermittency*, Proc. Int. Summer school Phys. Enrico Fermi, North-Holland, 1985, pp. 84–88.
- [31] ———, *On the singularity structure of fully developed turbulence*, Proc. Int. Sum. School E. Fermi, North Holland (1998), 84–88.
- [32] Y. Gagne, *Etude expérimentale de l'intermittence et des singularités dans le plan complexe en turbulence pleinement développée*, Ph.D. thesis, Université de Grenoble, 1987.
- [33] Gelfand and Vilenkin, *Generalized functions, Vol 4 : Applications of harmonic analysis*, Academic Press, 1964.
- [34] A. Haar, *Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme. (Erste Mitteilung.)*, Math. Ann. **69** (1910), 331–371.
- [35] J.-B. Hiriart-Urruty and C. Lemaréchal, *Convex analysis and minimization algorithms. Part 1 : Fundamentals.*, Springer- Verlag, 1993.
- [36] P. Holicky and L. Zajíček, *Nondifferentiable functions, Haar null sets and Wiener measure*, Acta Univ. Carolin. Math. Phys. **41** (2000), no. 2, 7–11.
- [37] R. Holley and E. Waymire, *Multifractal dimensions and scaling exponents for strongly bounded random cascades.*, Ann. Appl. Probab. **2** (1992), no. 4, 819–845.
- [38] B. Hunt, *The prevalence of continuous nowhere differentiable function*, Proceed. A.M.S **122** (1994), no. 3, 711–717.
- [39] B. Hunt, T. Sauer, and J. Yorke, *Prevalence : A translation invariant "almost every" on infinite dimensional spaces*, Bull. A.M.S **27** (1992), no. 2, 217–238.
- [40] S. Jaffard, *Pointwise smoothness, two-microlocalisation and wavelet coefficients*, Pub. Mat. **35** (1991), 155–168.

- [41] ———, *Multifractal formalism for functions*, SIAM J. Math. Anal **28** (1997), 944–970.
- [42] ———, *Old friends revisited : The multifractal nature of some classical functions*, J. Four. Anal. App **3** (1997), no. 1, 1–22.
- [43] ———, *The multifractal nature of Lévy processes*, Probab. Theory Relat. Fields **114** (1999), no. 2, 207–227.
- [44] ———, *On the Frisch-Parisi conjecture*, J. Math. Pures Appl **79** (2000), 525–552.
- [45] ———, *Pointwise regularity criteria*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I **336** (2003).
- [46] ———, *Beyond Besov spaces. II : Oscillation spaces.*, Constructive Approximation **21** (2005), no. 1, 29–61.
- [47] S. Jaffard and B. Mandelbrot, *Local regularity of nonsmooth wavelet expansions and application to the Polya function.*, Adv. Math. **120** (1996), no. 2, 265–282.
- [48] S. Jaffard and C. Melot, *Wavelet analysis of fractal boundaries. Part 1 : Local exponents*, à paraître dans Comm. Math. Phys.
- [49] ———, *Wavelet analysis of fractal boundaries. Part 2 : Multifractal formalism*, à paraître dans Comm. Math. Phys.
- [50] S. Jaffard and Y. Meyer, *Wavelet methods for pointwise regularity and local oscillations of functions*, Mem. Amer. Math. Soc. **123** (1996), no. 587.
- [51] ———, *On the pointwise regularity in critical Besov spaces*, J. Funct. Anal **175** (2000), 415–434.
- [52] J.-P. Kahane, *Some random series of functions, 2nd edition*, Cambridge Univ. Press, 1993.
- [53] ———, *Baire’s category theorem and trigonometric series*, J. Anal. Math. **80** (2000), 143–182.
- [54] ———, *Probabilities and Baire’s theory in harmonic analysis*, Byrnes, James S. (ed.), Twentieth century harmonic analysis—a celebration. Proceedings of the NATO Advanced Study Institute, Il Ciocco, Italy, July 2-15, 2000., 2001.

- [55] ———, *Propriétés prévalentes versus génériques des images continues*, pré-publication (2005).
- [56] J.-P. Kahane and R. Salem, *Ensembles parfaits et séries trigonométriques*, Actualités Scientifiques et Industrielles., 1963.
- [57] R. Kaufman, *A functional method for linear sets*, Isr. J. Math. **5** (1967), 185–187.
- [58] S. Kierst and E. Szpilrajn, *Sur certaines singularités des fonctions analytiques uniformes*, Fund. Math. **21** (1933), 267–294.
- [59] J. Kolář, *Porous sets that are Haar null, and nowhere approximately differentiable functions*, Proceed. Amer. Math. Soc. **129** (2000), no. 5, 1403–1408.
- [60] A.N. Kolmogorov, *Selected works of A. N. Kolmogorov. Volume I : Mathematics and mechanics.*, Mathematics and Its Applications, Soviet Series, 25., 1991.
- [61] J. Lindenstrauss and D. Preiss, *A new proof of Frechet differentiability of Lipschitz functions*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **2** (2000), no. 3, 199–216.
- [62] ———, *On Frechet differentiability of Lipschitz maps between Banach spaces*, Ann. Math. **157** (2003), no. 2, 257–288.
- [63] J. Lévy-Véhel, *Introduction to the multifractal analysis of images*, Fisher, Yuval (ed.), Fractal image encoding and analysis. Proceedings of the NATO ASI, Trondheim, Norway, July 8-17, 1995. Berlin : Springer. NATO ASI Ser., Ser. F, Comput. Syst. Sci. 159, 299-341 , 1998.
- [64] S. Mallat, *A wavelet tour of signal processing*, San Diego, CA : Academic Press. xxiv, 1998.
- [65] B. Mandelbrot, *Intermittent turbulence in self-similar cascades : divergence of high moments and dimension of the carrier*, J. Fluid Mech. **62** (1974), 331–358.
- [66] ———, *Multiplications aléatoires itérées et distributions invariantes par moyenne pondérée aléatoire*, C. R. Acad. Sci. Serie A **278** (1974), 289–292.
- [67] E. Matoušková, *The Banach-Saks property and Haar null sets*, Comment. Math. Univ. Carolinae **39** (1998), no. 1, 71–80.

- [68] P. Mattila, *Geometry of sets and measures in Euclidean spaces. Fractals and rectifiability.*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 1995.
- [69] R. D. Mauldin, *The set of continuous nowhere differentiable functions*, Pac. J. Math. **83** (1979), 199–205.
- [70] S. Mazurkiewicz, *Sur les fonctions non derivables*, Stud. Math. **3** (1931), 92–94.
- [71] C. Melot, *Sur les singularités oscillantes et le formalisme multifractal*, Ph.D. thesis, Université Paris 12, 2002.
- [72] ———, *Oscillating singularities in Besov spaces*, J. Math. Pures Appl **83** (2004), 367–416.
- [73] Y. Meyer, *Ondelettes et opérateurs*, Hermann, 1990.
- [74] ———, *Ondelettes et opérateurs, 2*, Hermann, 1990.
- [75] ———, *Wavelets, vibrations and scalings*, CRM series AMS **9** (1998).
- [76] Y. Meyer, F. Sellan, and M. Taqqu, *Wavelets, generalized white noise and fractional integration : the synthesis of fractional Brownian motion*, J. Fourier Anal. Appl. **5** (1999), no. 5, 465–494.
- [77] Y. Meyer and H. Xu, *Wavelet analysis and chirps*, J. Appl. Comput. Harmon. Anal. **4** (1997), no. 4, 366–379.
- [78] S. Mimouni, *Analyse fractale d’interfaces pour les instabilités de Raleigh-Taylor*, Ph.D. thesis, Ecole Polytechnique, 1995.
- [79] L. Olsen, *A multifractal formalism*, Adv. Math. **116** (1995), no. 1, 82–196.
- [80] J. Oxtoby, *Measure and category*, second edition ed., Springer-Verlag, 1980.
- [81] R. Phelps, *Gaussian null sets and differentiability of Lipschitz map on Banach spaces*, Pacific Journal of math. **77** (1978), no. 2, 523–531.
- [82] D. Preiss and J. Tišer, *Two unexpected examples concerning differentiability of Lipschitz functions on Banach spaces*, Operator theory, Advances and Applications **77** (1995), 219–238.
- [83] D. Preiss and L. Zajíček, *Sigma-porous sets in products of metric spaces and sigma-directionally porous sets in Banach spaces*, Real Analysis Exchange **24** (1998), no. 1, 295–314.

- [84] T. Runst and W. Sickel, *Sobolev spaces of fractional order, Nemytskij operators and nonlinear partial differential equations*, de Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications. 3. , 1996.
- [85] C. Ryll-Nardzewski, *D. Blackwell's conjecture on power series with random coefficients*, *Studia Math.* **13** (1953), 30–36.
- [86] S. Saks, *Theory of the integral.*, New York, 1937.
- [87] S. Seuret, *Detecting and creating oscillations*, preprint (2003).
- [88] S. Seuret and J. Levy-Vehel, *The local Hölder function of a continuous function*, *Appl. Comput. Harmon. Anal.* **13** (2002), no. 3, 263–276.
- [89] H. Shi, *Measure-theoretic notions of prevalence*, Ph.D. thesis, Simon Fraser University, 1997.
- [90] E. Stein, *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton University Press, 1970.
- [91] H. Steinhaus, *Über die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Konvergenzkreis einer Potenzreihe ihre natürliche Grenze ist*, *M. Z.* **31** (1929), 408–416.
- [92] J.O. Stromberg, *A modified Franklin system and higher-order spline systems on \mathbb{R}^n as unconditional bases for Hardy spaces*, *Conference in Harmonic Analysis in honor of Antony Zygmund (Beckner, ed.)*, vol. 2, 1983, pp. 475–493.
- [93] B. Thomson, *Real Functions*, *Lect. Notes in Math.*, no. 1170, Springer-Verlag, 1985.
- [94] H. Triebel, *Theory of function spaces II*, Birkhauser, 1992.
- [95] H. Xu, *Généralisation de la théorie des chirps à divers cadres fonctionnels et applications à leur analyse par ondelettes*, Ph.D. thesis, Université Paris 9 Dauphine, 1996.
- [96] L. Zajíček, *Porosity and σ -porosity*, *Real. Anal. Exchange* **13** (1987), 314–350.
- [97] W. Ziemer, *Weakly differentiable functions. Sobolev spaces and functions of bounded variation*, *Graduate Texts in Mathematics*, 120. Berlin etc. : Springer-Verlag. , 1989.

INDEX

- Algèbre de Boole, 30
- Analyse multirésolution, 13
- Base de Schauder, 15
- Catégories de Baire, 27
- Classe, 27
- Conjecture de Parisi-Frisch, 95
- Convergence étroite, 48
- Dimension de Hausdorff, 11
- Ensemble de
 - Kronecker, 39
- Ensemble de Liouville, 55
- Ensembles
 - Haar-nuls, 28
 - HP-petit, 28
 - HP-petits, 46
 - nuls au sens de Aronszajn, 64
 - nuls au sens gaussien, 64
- Espace
 - polonais, 28
 - sonde, 29
- Espaces
 - de Besov, 21
 - de Hölder, 9, 16
 - de Sobolev, 20
 - de Xu, 19
- Exposant
 - de Calderón-Zygmund, 12, 19
 - de Hölder, 9, 17
 - de Hölder local, 12, 80
 - dyadique, 73
- Fonction
 - d'échelle, 95
- Fonction
 - admissible, 96
- Fonction multifractale, 10
- Frontière naturelle, 149
- Injections de Sobolev, 23
- Mesure
 - de Lebesgue, 28
 - de Radon, 59
 - quasi-invariante, 27
 - tendue, 47
- Mesure de Hausdorff s -dimensionnelle, 11
- Module de continuité, 11, 81
- Ondelettes, 14
- Porosité, 28, 40
- Prévalence, 28
- Propriété de σ -idéal, 27
- Séries de Taylor, 149
- Spectre T_u^p , 13
- Spectre de singularités, 10
- Théorème d'Abel, 151
- Théorème de
 - Baire, 27
 - interpolation de Marcinkiewicz, 23
 - Kolmogorov, 30
 - Kuratowski-Ulam, 61
 - Matouskova, 47
 - Preiss-Tišer, 45, 156
 - Prohorov, 48
 - Riesz, 25
 - Ryll-Nardzewski, 152
- Théorème de densité de Lebesgue, 56
- Transformation de Legendre, 110
- Vitesse d'approximation par des dyadiques,
73, 87

Résumé

L'étude de phénomènes d'irrégularité à l'aide des catégories de Baire date du début des années 1930. Cette notion de généricité donnée par Baire est de nature purement topologique et ne permet donc pas de quantifier la taille d'un ensemble. C'est pour remédier à cette lacune que Christensen définit une autre notion de généricité basée sur la théorie de la mesure, la prévalence. D'autres notions de généricité liées à ces deux premières ont vu le jour. Cette thèse a deux buts. Tout d'abord, regarder la régularité des fonctions d'un espace de Sobolev dans le cadre de la prévalence. Nous montrons que presque-toutes les fonctions sont multifractales, leur exposant de Hölder varie en effet d'un point à un autre. Le même résultat dans des espaces de Besov nous donne le formalisme multifractal utilisé dans les applications. Dans un second temps, nous comparons les différentes notions de généricité en les appliquant au problème déjà cité ou à des problèmes classiques d'analyse fonctionnelle.

Abstract

The first result involving Hölder regularity and the Baire's categories theorem goes back to 1931. This first notion of genericity supplied by Baire's categories is of a topological nature, and can not permit to understand the size of sets considered. To fill this gap, Christensen defined the measure-theoretic notion of prevalence. There exist also stronger notions of genericity linked with those two first ones. This thesis has two purposes. On one hand, we want to know how smooth are functions in a Sobolev space, for a prevalent set. We show that almost every function is multifractal, as its Hölder exponent changes widely from point to point. We also make the link between the same result in an intersection of Besov spaces and the multifractal formalism given by applications. On the other hand, we compare notions of genericity, testing them with the previous example but also with classical problems from functional analysis.