



**HAL**  
open science

# METHODE NUMERIQUE HYBRIDE POUR L'ETUDE DU RAYONNEMENT ACOUSTIQUE D'ECOULEMENTS TURBULENTS PARIETAUX

Florent Margnat

► **To cite this version:**

Florent Margnat. METHODE NUMERIQUE HYBRIDE POUR L'ETUDE DU RAYONNEMENT ACOUSTIQUE D'ECOULEMENTS TURBULENTS PARIETAUX. Mécanique [physics.med-ph]. Université de Poitiers, 2005. Français. NNT: . tel-00012176

**HAL Id: tel-00012176**

**<https://theses.hal.science/tel-00012176>**

Submitted on 24 Apr 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THESE

pour l'obtention du Grade de

**Docteur de l'Université de Poitiers**

**ÉCOLE SUPÉRIEURE d'INGÉNIEURS DE POITIERS**

(Diplôme National - Arrêté du 30 mars 1992)

Ecole Doctorale : Sciences pour l'Ingénieur

SPÉCIALITÉ

Acoustique et Dynamique des Écoulements Instationnaires

Présentée par

**Florent MARGNAT**

## Méthode numérique hybride pour l'étude du rayonnement acoustique d'écoulements turbulents pariétaux

Directeur de thèse : **Yves GERVAIS**

Co-directeur de thèse : **Véronique MORINIÈRE**

Soutenue le 21 novembre 2005

### JURY

<b>E. LAMBALLAIS</b>	Professeur, Université de Poitiers	Président
<b>C. BAILLY</b>	Professeur, Ecole Centrale de Lyon	Rapporteur
<b>P. SAGAUT</b>	Professeur, Université Pierre et Marie Curie, Paris VI	Rapporteur
<b>Y. AURÉGAN</b>	Chargé de Recherches, CNRS	Examineur
<b>Y. GERVAIS</b>	Professeur, Université de Poitiers	Examineur
<b>V. MORINIÈRE</b>	Maître de Conférences, Université de Poitiers	Examineur
<b>E. MANOHA</b>	Ingénieur de Recherches, ONERA	Invité



# MERCI

- à Jean-Paul Bonnet pour avoir accueilli et présenté ce projet de thèse auprès du CNRS et de la Région Poitou-Charentes, ainsi qu'à tous les membres permanents ou transitoires du laboratoire d'études aérodynamiques de Poitiers où il s'est concrétisé ;
- à Messieurs Christophe Bailly et Pierre Sagaut qui ont bien voulu être rapporteurs du jury, pour m'avoir prodigué critiques bienveillantes et explications techniques ; à Messieurs Yves Aurégan et Eric Manoha, membres du jury, pour l'intérêt qu'ils ont manifesté à l'égard du travail présenté ;
- à Yves Gervais, directeur de thèse, pour sa confiance sans cesse renouvelée et ses encouragements ; à Véronique Morinière, pour avoir eu la patience de m'encadrer au quotidien et d'endurer mon impertinence, et pour sa compréhension ;
- à Eric Lamballais, pour son assistance technique dans le domaine des techniques numériques, pour sa disponibilité et pour son soutien vif et chaleureux ; à François Golanski, pour m'avoir précédé dans la jungle hostile du code Incompact3D et m'avoir initié à ses subtilités, pour le temps et l'attention consacrés à écouter mes problèmes et à éprouver mes théories fumeuses, et pour ses sages conseils ; à Carlos Moser, Philippe Parnaudeau et Sylvain Laizet, compagnons d'aventures par-delà les frontières virtuelles et l'espace spectral ;
- à Jean-Christophe Vergez pour son empressement à soigner des bobos informatiques d'une diversité insoupçonnée ; à Suzette Maye pour son sourire et sa réactivité dans le domaine administratif ;
- à mes collocataires de bureau : Edouard, Michel, Marc-Edouard et Thomas, pour tout ce qu'il m'ont fait découvrir, et à Damien pour les résultats obtenus pendant son stage ingénieur ; à mes chers voisins de palier du bâtiment K : par désordre d'apparition : Romuald, Cyrille, Nadia, Jeff, Franck, Peter, François, Jérôme, Gaëlle, François, Ludovic, Estelle, Carlos, Anthony, Jean-Baptiste, Solenn, Ludovic, Pierre-Gaël, Yann, Laurent, Marie, Stéphanie, Jérémie, David, Gildas, Philippe, Hélène, pour leur contribution à la vitalité des lieux, propice à l'épanouissement scientifique, personnel et musical des résidents ;
- à ma famille, mes amis, et à toutes les personnes dont la présence a été réconfortante.



à Hedwige et Nicolas  
à ma grande soeur Florence  
à mes professeurs B. Pradeau, J. Coirier et Y. Gervais



Lucky Luke, Tome 45, Le fil qui chante, Morris & Goscinnny, Dargaud Editeur, 1977.



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Contexte de l'étude</b>	<b>5</b>
1.1 Aéroacoustique . . . . .	5
1.1.1 Mécanique des fluides et acoustique . . . . .	5
1.1.2 Phénomènes en jeu . . . . .	7
1.1.3 Outils d'analyse . . . . .	8
1.2 Simulations numériques . . . . .	10
1.2.1 Résolution des équations de l'aéroacoustique . . . . .	10
1.2.2 Problématiques usuelles . . . . .	11
1.3 Problématiques spécifiques aux écoulements de paroi . . . . .	12
1.3.1 Interactions fluide-structure . . . . .	12
1.3.2 Développements analytiques . . . . .	13
1.3.3 Ecoulements avec décollement et recollement . . . . .	15
1.3.4 Positionnement du présent travail . . . . .	22
<b>2 La méthode des frontières virtuelles</b>	<b>23</b>
2.1 Sur la modélisation de paroi par forçage . . . . .	24
2.1.1 Principe . . . . .	24
2.1.2 Mise en oeuvre numérique . . . . .	26
2.1.3 Conclusion . . . . .	35
2.2 Les frontières virtuelles en tant qu'asservissement . . . . .	35
2.3 Comportement de la méthode des frontières virtuelles . . . . .	37
2.3.1 Présentation . . . . .	37
2.3.2 Régime de lâcher . . . . .	39
2.3.3 Phase d'établissement . . . . .	45
2.3.4 Régime oscillant . . . . .	48
2.3.5 Influence des paramètres numériques . . . . .	53
2.3.6 Conclusion . . . . .	53
<b>3 Ecoulements incompressibles - Pression</b>	<b>55</b>
3.1 Avancement temporel de la simulation . . . . .	56
3.1.1 Le schéma de Runge-Kutta d'ordre 3 . . . . .	56

3.1.2	Equations d'évolution discrétisées en temps . . . . .	57
3.2	Modèle temporel . . . . .	58
3.2.1	Définition et propriété des modes singuliers . . . . .	59
3.2.2	Solution de l'équation de Poisson . . . . .	60
3.3	Application à la simulation de canal . . . . .	61
3.3.1	Présentation de l'écoulement . . . . .	61
3.3.2	Présentation de la simulation . . . . .	63
3.3.3	Résultats pour les champs de vitesse . . . . .	64
3.3.4	Résultats pour le champ de pression . . . . .	69
3.4	Modèle spatial . . . . .	70
3.4.1	Définition et propriété des modes singuliers . . . . .	72
3.4.2	Solution de l'équation de Poisson . . . . .	72
3.5	Applications en modèle spatial . . . . .	74
3.5.1	Constriction Dissymétrique . . . . .	74
3.5.2	Décollement sur une plaque plane épaisse . . . . .	76
3.6	Discussion - Conclusion . . . . .	77
<b>4</b>	<b>Présentation du calcul acoustique</b>	<b>83</b>
4.1	Equation intégrale . . . . .	83
4.1.1	Formalisme de Curle . . . . .	84
4.1.2	Autres formalismes . . . . .	92
4.2	Mise en oeuvre numérique . . . . .	93
4.2.1	Calcul des sources . . . . .	93
4.2.2	Problématiques pour la programmation . . . . .	95
4.2.3	Calcul en temps avancé . . . . .	95
4.3	Principales caractéristiques du code de calcul . . . . .	99
4.3.1	Domaine source et domaine observateur . . . . .	99
4.3.2	Equation intégrale . . . . .	101
4.3.3	Méthode d'interpolation et schémas de dérivation . . . . .	103
4.3.4	Tests de validation . . . . .	104
4.3.5	Prise en compte des effets de troncature . . . . .	105
4.4	Conclusion . . . . .	111
<b>5</b>	<b>Application à la plaque plane</b>	<b>113</b>
5.1	Simulation de l'écoulement . . . . .	113
5.1.1	Configuration étudiée . . . . .	113
5.1.2	Etablissement de l'écoulement . . . . .	115
5.1.3	Topologie - champs moyens . . . . .	116
5.1.4	Analyse des mouvements tourbillonnaires . . . . .	120
5.2	Rayonnement acoustique pour une source compacte . . . . .	123
5.2.1	Contribution des différents termes sources . . . . .	124
5.2.2	Rayonnement total . . . . .	126
5.2.3	Sur la position de la surface de contrôle . . . . .	126

5.3	Source non-compacte . . . . .	127
5.3.1	Observation du rayonnement acoustique . . . . .	127
5.3.2	Analyse de l'évaluation au temps retardé . . . . .	128
5.4	Conclusion . . . . .	131
	<b>Conclusion</b>	<b>135</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>137</b>
<b>A</b>	<b>Discrétisation spatiale</b>	<b>147</b>
A.1	Généralités . . . . .	147
A.2	Formulation matricielle . . . . .	149



# Introduction

- *Faut-il un droit (philosophique) pour penser que telle chose est vraie, telle autre fausse ?*

- *Vous savez bien, répondit-il, que rien n'est vrai de par la pure raison, puisque les affirmations contraires se défendent par des arguments égaux. La logique ne peut juger que de l'enchaînement des propositions, non de la vérité des principes, lesquels, par définition, ne s'enchaînent à rien. Ainsi donc, toute théorie est un casse-tête futile, un passe-temps sans gaité. La seule chose qui démontre la vérité de ce qu'un philosophe affirme, c'est cela qu'il est capable d'en réaliser par tous les actes de sa vie, par sa puissance et par son rayonnement. La vérité étant tout, c'est de tout son être que l'homme doit comprendre et exprimer la vérité. Elle lui appartient de telle façon qu'il appartient à elle et dans la même mesure. Tel est ce droit.*

*Lanza del VASTO, Le Pèlerinage aux Sources, 1943.*

Il y avait à Athènes, au temps de Jules César, un astronome syrien nommé Andronicos, qui bâtit dans l'Agora une structure octogonale de marbre blanc, appelée "Tour des Vents". Alimentée en eau par une source jaillie du flanc de l'Acropole, elle tint lieu de clepsydre, et, ornée sur ses huit faces de sculptures d'Aquilon, Borée, Sciron, Zéphyr et leurs confrères, elle tint lieu de compas. A vrai dire, nul ne sait si la volonté fluide du Souffle primitif se laisse discrétiser de la sorte. De leur côté, poissons et oiseaux, ces grands navigateurs, n'ont jamais édifié ni horloges ni girouettes. Et les ailes d'Icare eurent certes moins à craindre les tempêtes que le feu du soleil. Quant à nous-autres, hommes modernes, depuis que nous savons faire travailler le feu, nous n'avons plus de faveurs à attendre des vents pour pouvoir voyager, et à vol d'oiseau s'il vous plaît !

Il arrive cependant que notre soif de vitesse l'emporte sur notre aspiration à nous élever toujours plus haut vers la lumière, quand on ne se siffle pas carrément la bouteille de vinasse, en oubliant de goûter l'eau-de-vie ou le spiritueux. Ah ! si seulement on entendait alors, à la place d'un glou-glou vulgaire, ne serait-ce qu'un tirect de Larigot ! Mais avec des Si, même mineurs, on vivrait un peu mieux aux environs des aéroports de Paris. Il nous faut donc aujourd'hui compter avec le bruit des transports aériens et terrestres, et il faut bien avouer que certaines voix d'Eole demeurent impénétrables.

C'est le cas du rayonnement acoustique dû à un écoulement turbulent, qui intervient dans de nombreux problèmes pratiques de nature variée. Par exemple, le jet produit par un réacteur d'avion est un écoulement en général très bruyant, ce dont chacun a déjà eu l'occasion de se rendre compte. Aussi, la cavité du pantographe d'un TGV roulant à grande vitesse est une source de bruit importante, qui, couplée à des phénomènes de vibrations de structures, entraîne une fatigue ou même un endommagement de certains organes. On peut aussi citer les problèmes de bruit produit en sortie d'une cheminée de turbine à gaz, ou encore ceux observés dans les circuits de vapeur des centrales nucléaires. Du fait du durcissement de la réglementation en matière d'émission sonore, les différents acteurs industriels doivent réfléchir à la conception de systèmes moins bruyants.

Le problème du bruit d'écoulement en présence ou non de parois solides associe par nature l'étude de l'écoulement et l'acoustique, qui se trouvent étroitement imbriqués dans la plupart des systèmes industriels. Cette problématique s'appelle l'aéroacoustique et fait donc l'objet d'un intérêt croissant depuis les travaux de Lighthill (bruit des écoulements libres) et de Curle (bruit d'écoulement avec parois) dans les années 1950.

Dans l'évolution de l'aéroacoustique, on observe un avancée importante avec l'utilisation de calculs numériques de l'écoulement. L'étude de la turbulence a été bouleversée depuis longtemps par l'apparition d'outils numériques performants alors que l'aéroacoustique numérique est plus récente. D'un certain point de vue, les méthodes numériques ne sont qu'un outil pour l'étude des mécanismes physiques. Cependant, leur utilisation ouvre des perspectives nouvelles et modifie en profondeur la thématique du bruit d'écoulements en présence de parois solides. En effet, dans les écoulements pariétaux, la mesure d'un champ de fluctuation de pression requiert le développement de capteurs spécifiques et l'utilisation d'un grand nombre de capteurs pour accéder à une information précise et complète du champ. Cela demande d'importantes ressources expérimentales, dont la simulation numérique devient aujourd'hui complémentaire du fait des progrès réalisés dans le domaine des serveurs de calcul.

Les différentes approches numériques sont les suivantes :

- la plus simple formellement consiste en un calcul de simulation directe, c'est-à-dire résoudre complètement les équations de Navier-Stokes aussi loin que l'on veut calculer le champ acoustique. C'est une méthode très ambitieuse, qui nécessite de capter des échelles de longueur et d'énergie très différentes, ce qui implique des grands nombres de mailles et une très grande précision. Ces calculs restent extrêmement chers et il sera encore nécessaire d'attendre plusieurs années avant de pouvoir raisonnablement les appliquer à des écoulements de grand nombre de Reynolds ;
- l'utilisation de la formulation de Kirchhoff, où, à partir de la connaissance du champ sur une surface qui englobe l'écoulement, on peut théoriquement extrapoler le champ acoustique. Le grand intérêt de cette technique réside dans le fait qu'il suffit de stocker le champ aérodynamique instationnaire sur une surface, un avantage qui pourrait s'avérer intéressant pour des calculs tri-dimensionnels. Cependant, la principale

contrainte vient du fait qu'il faut calculer un champ aérodynamique compressible dans un volume suffisant pour que l'extrapolation soit justifiée ;

- il reste enfin l'utilisation d'une analogie aéroacoustique traditionnelle, qui reconstruit le champ acoustique à partir du rayonnement des termes sources basés sur les fluctuations turbulentes et pariétales de l'écoulement. L'analogie de Curle n'est pas nécessairement la méthode retenue. On peut aussi citer par exemple des travaux basés sur l'utilisation de la formulation de Ffowcs-Williams & Hawkings.

En fonction du type de calcul, on peut distinguer plusieurs voies. Il est possible d'utiliser un calcul stationnaire obtenu à partir d'un modèle de turbulence classique. On ne dispose alors que d'une description moyenne du terme source, à partir de laquelle il est possible d'évaluer les propriétés statistiques des intégrales de l'analogie. Il est également possible d'envisager un calcul de macrosimulation (ou LES) où seules les grosses structures organisées de l'écoulement sont représentées. Enfin on peut associer un calcul par simulation directe à un algorithme aux temps avancés permettant notamment l'avancement parallèle du calcul de l'écoulement et de celui du champ sonore.

Pour la simulation numérique directe de l'écoulement, les méthodes de modélisation de parois solides par forçage ouvrent d'intéressantes perspectives pour les écoulements à géométrie complexe. Les travaux présentés dans ce document s'inscrivent dans ce cadre et s'intéressent plus particulièrement à l'application d'une méthode hybride (DNS+analogie) à l'étude du rayonnement acoustique de l'écoulement sur une plaque plane épaisse semi-infinie.

## Objectifs de la thèse

- Implanter la méthode des frontières virtuelles pour la modélisation d'une condition d'adhérence dans un code initialement conçu pour le calcul d'écoulements libres, en prenant en compte trois aspects principaux : la contrainte supplémentaire sur le pas de temps introduite par l'utilisation de cette méthode ; l'influence de la discontinuité à l'interface fluide-paroi sur la résolution numérique ; la définition et la représentation d'une arête vive.
- Valider cette implantation pour la simulation d'écoulements pariétaux instationnaires. Notamment, extraire le champ de pression dans la résolution de l'équation de Poisson permettant l'avancement temporel par la méthode à pas fractionnaire.
- Contribuer à la compréhension du bruit des écoulements séparés recollés en proposant une méthode hybride dont la partie aérodynamique est une simulation numérique directe incompressible avec frontières virtuelles, et dont la partie acoustique est construite à partir de l'analogie de Curle.

## Plan de l'étude

Le contexte scientifique et industriel évoqué en introduction dans lequel s'inscrit cette étude est développé au premier chapitre. Une revue bibliographique est effectuée au sujet du rayonnement acoustique des écoulements turbulents, en particulier en présence de parois solides et de régions décollées.

Au second chapitre, les frontières virtuelles sont replacées dans le cadre des méthodes de modélisation de paroi par forçage. Une étude de leur fonctionnement est ensuite proposée, au moyen de tests dans la configuration bi-dimensionnelle d'un cylindre à section carrée. Le processus de réalisation de la condition d'adhérence est détaillé.

La capacité de l'utilisation de cette méthode à représenter le comportement d'écoulements turbulents pariétaux est examinée au troisième chapitre, notamment par la simulation de l'écoulement en canal plan et sur une plaque plane épaisse. Un effort particulier est porté sur l'obtention du champ instantané de pression hydrodynamique.

La formulation intégrale de Curle pour le rayonnement acoustique des écoulements en présence de frontières solides est présentée au quatrième chapitre. Un algorithme de programmation en temps avancés y est proposé. La configuration du calcul acoustique et les hypothèses relatives aux termes sources sont discutées.

Enfin, au cinquième chapitre, la méthode hybride développée est appliquée à l'écoulement décollé sur une plaque plane épaisse semi-infinie. Les résultats obtenus permettent d'analyser les mouvements tourbillonnaires au niveau du recollement, ainsi que le rayonnement acoustique associé.

# Chapitre 1

## Contexte de l'étude : simulations numériques pour l'étude aéroacoustique des écoulements de paroi

*Dans la vie d'un homme, les vérités simplement crues demeurent beaucoup plus nombreuses que celles qu'il acquiert par sa vérification personnelle. Qui, en effet, serait en mesure de soumettre à la critique les innombrables résultats des sciences sur lesquels se fonde la vie moderne? Qui pourrait contrôler le flux des informations qui jour après jour parviennent de toutes les parties du monde et que l'on tient généralement pour vraies? Qui, enfin, pourrait parcourir les chemins d'expérience et de pensée par lesquels se sont accumulés les trésors de sagesse et de religiosité de l'humanité? L'homme, être qui cherche la vérité, est aussi celui qui vit de croyance.*

*Jean Paul II, Lettre Encyclique - Fides et Ratio, 1998.*

### 1.1 Aéroacoustique

#### 1.1.1 Mécanique des fluides et acoustique

Les mouvements de fluide rencontrés dans la nature ou dans l'industrie sont d'une très grande diversité. Pourtant, ils sont tous gouvernés par le même jeu d'équations, pour autant que les fluides concernés satisfassent l'hypothèse de milieu continu et de comportement newtonien. Pour ces équations de Navier-Stokes, qui traduisent le bilan de masse, de quantité de mouvement et d'énergie d'un domaine fluide, on ne connaît de solution analytique que lorsqu'on effectue de nombreuses hypothèses simplificatrices. En supposant, par

exemple, des conditions aux limites simples et un écoulement laminaire, bi-dimensionnel et incompressible, il existe des cas où la solution est connue, mais il s'agit de situations plus simples que la plupart des écoulements réels, qui sont bien souvent tri-dimensionnels, turbulents, compressibles, voire réactifs.

Un cas particulier de mouvement de fluide est celui correspondant à la propagation d'une onde sonore dans un milieu par ailleurs au repos. Ce phénomène, sauf lorsque les niveaux sonores considérés sont extrêmement élevés, peut être décrit de manière très réaliste en faisant les hypothèses de mouvements de faible amplitude, de viscosité quasiment nulle et d'isentropie. Les grandeurs caractéristiques du fluide sont alors solution de l'équation d'onde homogène classique, dont la difficulté de résolution apparaît surtout lorsque les conditions aux limites ne sont plus triviales. Une autre particularité du son est qu'il affecte de grands espaces, il peut être perçu à de très grandes distances, bien que le phénomène qui en est la source soit très localisé et que les mouvements de fluide associés soient d'amplitude très faible. Aussi fait-on généralement apparaître cette source directement dans les équations de bilan, comme une source de masse, une source de quantité de mouvement ou un apport de chaleur, en désignant par conditions aux limites uniquement ce qui est de l'ordre de la réponse des frontières du domaine à l'onde acoustique. Par exemple, lorsque des coups sont frappés à la porte d'un hall, l'apport impulsif de quantité de mouvement constitue une source de son, au sens où il est entendu dans tout le hall. Mais il s'agit davantage d'une condition aux limites instationnaire que d'une source de quantité de mouvement. Pourtant, le calcul du rayonnement acoustique dans le hall se fera en considérant une source ponctuelle et des murs réfléchissant les ondes acoustiques. On voit donc que la notion de source sonore peut être ambiguë. De plus, on est obligé de distinguer l'espace source de l'espace sonore. En effet, on parle de son lorsque la partie de fluide considérée est gouvernée par l'équation d'onde homogène qui peut s'écrire :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \Delta \phi = 0 \quad (1.1)$$

Or l'équation d'onde inhomogène, c'est-à-dire lorsque l'on y a inclus une source, s'écrit :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \Delta \phi = Q \quad (1.2)$$

Par conséquent, à l'endroit où se trouve une source,  $Q$  n'est pas nul et l'équation, n'étant plus homogène, ne peut décrire un mouvement de propagation sonore, autrement dit ce n'est pas du son que l'on considère. De même, là où a lieu un tel mouvement,  $Q$  est nul c'est-à-dire qu'il y a absence de source. Aussi l'espace source et l'espace sonore sont-ils disjoints.

L'aéroacoustique s'intéresse à la cohabitation, au sein du même domaine de fluide, d'un mouvement gouverné par les équations particulières de l'acoustique, et d'un mouvement qui en paraît la source, gouverné par les équations générales de la mécanique des fluides. Bien sûr, en réalité, les deux mouvements, l'ensemble du domaine fluide se comporte suivant les équations de Navier-Stokes, mais ils sont correctement décrits par leurs équations simplifiées respectives. En général, on considère un écoulement d'air, du vent, un jet, ou le

déplacement d'un corps solide dans l'air, qui n'affecte qu'une petite zone de l'ensemble du domaine fluide, mais dont une partie de l'agitation turbulente associée se propage selon un mouvement acoustique vers un observateur-auditeur qui se trouve éloigné, toujours dans le domaine fluide mais à l'extérieur de l'écoulement. On a coutume d'ailleurs de distinguer les fluctuations de pression perçues de cette manière par l'observateur, qui sont clairement du son, des fluctuations de pression que percevrait un observateur placé au sein même de l'écoulement, que l'on appelle pseudo-son. "Pseudo" seulement, car bien que perçues par l'oreille ou quelque microphone, elles ne se propagent pas selon l'équation d'onde classique.

Avec un certain pessimisme, on peut dire que l'aéroacoustique combine les difficultés liées à la notion de source acoustique et celles provenant de la complexité des écoulements décrits par les équations de Navier-Stokes. Les considérations de ce paragraphe et du suivant sont principalement inspirées des synthèses de Dowling et Ffowcs-Williams [24, 30, 31, 32, 19] et Crighton [18], et du travail original de Lighthill [75].

### 1.1.2 Phénomènes en jeu

A travers la description générale qui précède, on conçoit les différentes problématiques de l'aéroacoustique. En effet, une onde acoustique transporte de l'énergie provenant de sa source, une première problématique donc est celle du mécanisme et du taux de conversion de l'énergie de l'écoulement en énergie acoustique. Pourquoi certaines fluctuations de pression sont simplement convectées avec l'écoulement alors que d'autres se propagent à la vitesse du son ? Comment les effets de compressibilité de l'écoulement excitent-ils le milieu qui l'entoure ? Et, comme il paraît délicat de séparer avec précision le domaine source constitué par l'écoulement et le milieu acoustique, que se passe-t-il à l'interface ? autrement dit dans le champ proche des sources de bruit d'origine aérodynamique ?

Une deuxième problématique est la manière dont s'effectue la propagation acoustique au sein de l'écoulement, dans ses parties plus ou moins agitées. Quel est l'effet d'un cisaillement de vitesse ? Comment tenir compte des variations de la vitesse du son locale et des phénomènes de réfraction associés ? En quoi la diffraction ou la réflexion d'une onde acoustique à une paroi sont-elles perturbées par l'écoulement ?

Enfin, lorsque l'écoulement est rapide, ou lorsqu'il comporte d'importants gradients de température, les effets de la compressibilité sont plus importants. Notamment, les longueurs d'onde acoustiques deviennent de l'ordre de grandeur des échelles caractéristiques de l'écoulement. Il est alors difficile de considérer l'acoustique seulement comme une conséquence de la turbulence. Les fluctuations de pression dues aux ondes acoustiques peuvent modifier sensiblement l'écoulement, en pilotant par exemple des mécanismes de lâcher tourbillonnaire. Comment observer, décrire et prévoir de tels phénomènes d'interaction entre l'acoustique et l'écoulement ?

Bien que d'importants progrès aient déjà été réalisés dans cette jeune discipline qu'est l'aéroacoustique, ces phénomènes ne sont pas encore pleinement maîtrisés. Outre leur aspect fondamental, ils sont d'un intérêt grandissant en ce qui concerne principalement la réduction des nuisances sonores, en particulier le bruit du jet à la sortie des réacteurs d'avion, et le bruit de pales d'hélicoptère. Plus généralement, le bruit aérodynamique des

véhicules de transport s'accroît au fur et à mesure que les puissances et le trafic augmentent. Un autre enjeu concerne le confort à l'intérieur de l'habitacle automobile, ou au sein d'un local occupé par des ordinateurs, dont les cartes électroniques sont refroidies par ventilation. Les études aéroacoustiques apportent par ailleurs de nouveaux éléments de compréhension en ce qui concerne le fonctionnement des instruments de musique à vent, qui est principalement affaire de couplage et de résonance entre le mouvement de la colonne d'air et la structure de l'instrument, l'anche, l'embouchure, le corps du musicien, etc.

### 1.1.3 Outils d'analyse

Les travaux de Lighthill [75, 76], bien que quinquagénaires et jugés imparfaits, constituent une solide base pour approcher les problématiques de l'aéroacoustique. En effet, ils proposent une théorie pour le mécanisme de conversion de l'énergie cinétique contenue dans les fluctuations de l'écoulement en énergie acoustique. En fait, à défaut de considérer l'ensemble du milieu fluide comme gouverné par les complexes équations de Navier-Stokes, on le considère comme un milieu acoustique uniforme au repos, dans lequel la présence de l'écoulement est regardée comme une contrainte extérieure, c'est-à-dire comme une source de quantité de mouvement, qui apparaît donc comme une source acoustique lorsque l'on écrit l'équation de propagation. L'analogie repose sur le fait qu'un domaine fluide dans le milieu acoustique au repos est soumis à la contrainte du champ de pression hydrostatique, c'est-à-dire  $p = -c_0^2 \rho$  si  $c_0$  est la célérité du son,  $p$  la pression et  $\rho$  la masse volumique. Par ailleurs, l'équation de bilan de quantité de mouvement, exprimée sous forme conservative, montre qu'un domaine fluide considéré au repos dans l'écoulement voit sa quantité de mouvement varier sous l'effet conjugué des contraintes visqueuses et de pression, soit  $p_{ij}$ , et des débits de quantité de mouvement, ces derniers pouvant être aussi vus comme une contrainte d'intensité  $\rho u_i u_j$ . Par conséquent, les fluctuations de masse volumique dans l'écoulement sont les mêmes que celles qui apparaîtraient dans un milieu acoustique uniforme au repos soumis à la contrainte extérieure égale à la différence

$$T_{ij} = (\rho u_i u_j + p_{ij}) - c_0^2 \rho \delta_{ij} \quad (1.3)$$

entre la contrainte effective dans l'écoulement réel et la contrainte dans le milieu acoustique. Si l'on fait apparaître cette contrainte extérieure dans l'approximation des équations de Navier-Stokes qui conduit à l'équation de propagation des ondes dans un milieu fluide uniforme au repos, on obtient :

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_k \partial x_k} = \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} \quad (1.4)$$

En ceci consiste l'*analogie* de Lighthill, concept fondateur de l'aéroacoustique. Ainsi, en effet, le fait que l'écoulement fasse du bruit est traduit par une source dans le formalisme acoustique classique. Une fois cette source spécifiée, les outils de résolution peuvent être utilisés pour calculer le rayonnement sonore. Cette formulation, dont une grande force est

qu'elle peut également être obtenue par une combinaison exacte des équations de Navier-Stokes, prédit correctement des observations expérimentales telles que la puissance acoustique proportionnelle à  $M^8$ , où  $M$  est le nombre de Mach, rayonnée par certains jets subsoniques .

Du point de vue de la compréhension des phénomènes aéroacoustiques, là où l'analogie de Lighthill a eu besoin d'être dépassée, c'est que supposant des sources dans un milieu uniforme au repos, on risque de considérer comme sources des mécanismes qui correspondent en fait à l'influence de la présence de l'écoulement sur la propagation. Ce risque est faible lorsque la région source, c'est-à-dire la zone où  $T_{ij}$  ne peut être considéré comme nul, est acoustiquement compacte. Ainsi, l'équation proposée par Phillips [92] a pour objectif d'inclure dans l'opérateur de propagation les effets de l'écoulement tels qu'une célérité non uniforme ou la convection des ondes, et ainsi d'isoler un peu plus les véritables termes sources. Lilley [77] va au bout de cette logique en affirmant que l'opérateur correct de propagation acoustique en écoulement n'est obtenu que s'il contient tous les termes linéaires par rapport à la perturbation acoustique qui apparaissent dans l'équation d'analogie.

Par ailleurs, le formalisme de Lighthill ne fait pas intervenir l'équation de bilan d'énergie, ce qui peut conduire à une interprétation faussée du terme source  $(p - c_0^2 \rho) \delta_{ij}$  qualifié habituellement d'entropique, comme le présente Lilley [78]. Dans le même esprit, pour approcher de plus près les mécanismes de génération sonore, Powell [94] s'inspire des études antérieures relatives d'une part au sifflement des câbles téléphoniques, d'autre part aux allées tourbillonnaires dans le sillage d'un cylindre. Il note l'équivalence entre le champ de vitesse incompressible induit par un anneau de vorticité et celui dû une distribution uniforme de dipôles sur la surface définie par l'anneau. Le raisonnement conduit à écrire une analogie aéroacoustique dans laquelle le terme source est basé sur les mouvements de vorticité. Howe [45] généralise ce point de vue au cas d'un mouvement moyen arbitraire, en écrivant une analogie pour l'enthalpie spécifique de stagnation, avec un terme source confiné dans les régions de l'écoulement où les vecteurs vorticité et gradient d'entropie sont non-nuls.

La résolution de l'équation de Lighthill (1.4), et plus généralement des équations issues d'une démarche analogique, suppose que le terme source soit connu. Du fait de la complexité des mouvements fluides considérés, il n'est pas toujours possible d'accéder à tout instant et en tout point aux grandeurs de l'écoulement qui apparaissent dans les termes sources. Cela est d'autant plus problématique que seulement une faible fraction d'énergie de l'écoulement est convertie en énergie acoustique. En effet, une erreur dans l'évaluation de l'écoulement peut conduire à une évaluation acoustique trop peu précise, voire physiquement erronée. Ainsi, on tente actuellement [55] d'optimiser la modélisation du comportement spectral et spatial des termes sources à partir des grandeurs accessibles de la turbulence, par l'intermédiaire des coefficients de corrélation et des fonctions de cohérence.

L'effort est également mis sur l'interprétation des différents termes qui apparaissent lorsque l'on effectue une décomposition des grandeurs de l'écoulement. La décomposition de Reynolds, désormais classique en turbulence, consiste à écrire les composantes de la vitesse sous la forme d'une partie moyenne et d'une partie fluctuante. Pour l'approximation  $\rho_0 u_i u_j$

du tenseur de Lighthill, on obtient alors trois termes : le produit des parties moyennes, qui ne produit donc aucune fluctuation acoustique ; le produit des parties fluctuantes, dont la contribution acoustique est appelée bruit propre ; les produits croisés, dont la contribution acoustique est appelée bruit de cisaillement.

Le fait que pour un écoulement supposé incompressible le champ de vitesse soit à divergence nulle et que les mouvements acoustiques puissent être considérés irrotationnels invite à analyser les phénomènes aéroacoustiques à l'aide de la décomposition de Helmholtz. Celle-ci consiste à écrire le champ de vitesse comme la somme d'un champ incompressible et d'un champ irrotationnel. Une telle analyse est notamment proposée par Cabana *et al* [11].

En ce qui concerne les mécanismes de transfert d'énergie, la décomposition de Chu & Kovásznay [15] propose une représentation des interactions entre différents types de mouvements. En considérant les grandeurs représentatives d'un écoulement visqueux, compressible et anisotherme comme composées chacune d'une partie incompressible, d'une partie acoustique et d'une partie entropique, il est possible d'écrire un système d'équations pour chaque partie. Les systèmes obtenus décrivent alors la production, la convection et la dissipation de petites perturbations respectivement de vorticité, de pression acoustique et de température. L'intérêt de cette décomposition est qu'elle permet d'écrire des systèmes linéaires identiques pour chaque ordre de grandeur de fluctuation, avec des termes sources exprimés à l'aide des ordres inférieurs. De plus, elle donne une idée de l'effet de tel type de fluctuation sur l'évolution des deux autres.

Sur le terrain expérimental, la caractérisation simultanée d'un écoulement et du champ acoustique qu'il rayonne permet d'approcher les mécanismes qui les relie. En ce qui concerne la mesure de signaux acoustiques au sein même de l'écoulement [7], une difficulté réside dans le fait qu'à partir d'une mesure de vitesse par exemple, il n'est pas facile d'extraire la composante acoustique tant celle-ci est faible devant celle de l'écoulement. On est souvent obligé de travailler à des faibles vitesses d'écoulement et   d'importants niveaux acoustiques. Enfin, la caractérisation des champs de pression pariétale [69] et de vitesse nécessite l'utilisation de moyens expérimentaux lourds (capteurs de pression spécifiques, PIV, LDV, etc.). Le développement des capacités des ordinateurs rend les simulations numériques de plus en plus performantes, qui deviennent ainsi un outil complémentaire des expériences. Comme il s'agit de la méthode d'investigation utilisée dans le présent travail, la partie suivante lui est réservée.

## 1.2 Simulations numériques

### 1.2.1 Résolution des équations de l'aéroacoustique

S'il est un outil attirant en aéroacoustique, c'est bien la simulation des mouvements fluides dans tout le domaine étudié, c'est-à-dire un domaine qui est la réunion du domaine source où a lieu l'écoulement et du domaine où se produit simplement la propagation

acoustique linéaire. Dans ce cas, afin de reproduire tous les mécanismes en jeu, aucune hypothèse simplificatrice n'est effectuée sur les équations de Navier-Stokes. En particulier le milieu doit être considéré comme compressible et aucune modélisation de la turbulence ne doit être effectuée. Or le rapport d'échelle entre le mouvement turbulent et le mouvement acoustique est déterminé par le nombre de Mach. Plus celui-ci est faible, plus les écarts d'échelles seront importants, par conséquent plus le coût d'une simulation prenant en compte les deux échelles sera élevé. C'est la condition pour avoir accès à tout instant et en tout point à toutes les grandeurs représentant le fluide, c'est-à-dire être un observateur privilégié de tous les phénomènes qui se produisent. Cela n'est actuellement possible que pour des écoulements relativement académiques tels que la couche de mélange ou la cavité, et pour des nombres de Reynolds bien inférieurs à ceux des écoulements réels qui intéressent l'industrie. Pour l'évaluation du rayonnement acoustique de ces écoulements, les analogies acoustiques, et plus généralement les méthodes dites hybrides, sont développées et constituent des outils performants.

Appliquant le principe des analogies, on délimite à l'intérieur du domaine global une région qui est censée contenir les sources acoustiques. Le problème est alors scindé en un problème de calcul d'écoulement source et un problème de propagation. En ce qui concerne la propagation, on distingue en général deux familles de résolutions : premièrement, la résolution des équations d'analogie, soit directement, soit par l'intermédiaire des solutions intégrales ; deuxièmement, la résolution des équations du mouvement acoustique, dont les plus connues sont les équations d'Euler linéarisées (EEL). Notons la contribution récente de Goldstein [41] qui propose une linéarisation des équations de Navier-Stokes autour d'un écoulement de base, faisant apparaître un jeu d'EEL inhomogènes pour des variables bien choisies. Cet outil a vocation à fournir des prédictions qui soient suffisamment sensibles à de faibles changements dans l'écoulement source afin de tester les systèmes développés pour réduire le bruit. En ce qui concerne l'écoulement source, l'idéal est d'utiliser des données expérimentales ou des données issues de simulations numériques directes compressibles tri-dimensionnelles. Ces dernières, bien que toujours très coûteuses, demeurent nettement plus faciles à obtenir que dans le cas où l'ensemble du domaine acoustique doit être simulé. Mais pour des configurations réalistes, il est encore nécessaire d'avoir recours à des hypothèses simplificatrices concernant la turbulence. Les familles de simulations sont nombreuses. Les plus couramment présentées sont la simulation incompressible, la simulation grandes échelles (SGE, ou LES pour *Large Eddy Simulation*), le RANS conjugué à des modèles stochastiques de turbulence, etc.

### 1.2.2 Problématiques usuelles

La première problématique en simulation numérique est le compromis permanent entre réalisme physique et coût de calcul. Sur ce point, la revue de Moin & Mahesh [86] apporte un éclairage précieux, notamment en ce qui concerne l'utilité de la simulation numérique directe. Les contraintes sont principalement liées au nombre de points et d'instantanés à calculer, qui influent d'une part sur le nombre d'opérations à effectuer, et donc directement sur le temps de calcul ; d'autre part sur la taille des tableaux utilisés, qui se traduit par

l'espace mémoire requis pendant le calcul et pour le stockage des résultats. La prise en compte de ces contraintes nécessite un soin tout particulier dans l'écriture des algorithmes et le choix des méthodes utilisées. En ce domaine, le savoir-faire acquis est souvent un allié précieux.

Le traitement des conditions initiales et des conditions aux limites utilisées pour la résolution numérique des équations différentielles est une problématique cruciale. Il s'agit de concilier les objectifs de représentation physique de la configuration simulée, de déstabiliser l'écoulement pour déclencher la turbulence sans déstabiliser la simulation, d'assurer la convergence statistique des résultats dans des temps raisonnables, etc. Pour les simulations d'écoulement en développement spatial, c'est-à-dire présentant des frontières ouvertes, la génération de la condition d'entrée est en soi un sujet de recherche de même que l'évacuation des structures tourbillonnaires ou des couches limites en sortie de domaine. Pour les simulations compressibles, le problème de l'évacuation des ondes acoustiques n'est pas une mince affaire.

Enfin, pour l'utilisation des méthodes hybrides, la problématique de la définition des termes sources est la plus importante. Outre leur définition analytique intrinsèque à la formulation de l'analogie ou du propagateur utilisé, la discussion repose sur les hypothèses effectuées dans leur calcul, et sur les phénomènes qu'ils prennent en compte et ceux qu'ils négligent. L'hypothèse d'incompressibilité, notamment, est fréquemment examinée.

## 1.3 Problématiques spécifiques aux écoulements de paroi

### 1.3.1 Interactions fluide-structure

Dans le paragraphe 1.1.3, les modèles théoriques représentant les mécanismes physiques qui président à la production de bruit par un volume de fluide en écoulement ont été brièvement évoqués. Dans de très nombreux cas pratiques, la présence de parois solides aux frontières du domaine fluide ou au sein même de l'écoulement ne peut être négligée pour l'étude du problème aéroacoustique considéré. La figure 1.1, proposée par Blake [5], présente l'exemple classique d'une surface portante dans un écoulement instationnaire. Celui-ci est caractérisé par la présence d'une turbulence libre dont l'échelle moyenne des tourbillons est  $\Lambda_\tau$ , d'une turbulence de couche limite générée sur le corps solide et d'échelle  $\Lambda_f$ , d'une séparation de l'écoulement au bord de fuite et des perturbations associées dans le sillage à l'échelle moyenne  $\Lambda_s$ . Toutes ces perturbations au voisinage de la surface engendrent des pressions pariétales  $p_h$ . Notamment, celles générées par le détachement tourbillonnaire au bord de fuite peuvent être tonales en fonction de la régularité du phénomène. En réponse à cela, le solide connaît éventuellement une vibration d'une longueur d'onde  $\lambda_p$ . Des ondes acoustiques peuvent donc être rayonnées par la turbulence elle-même, par les efforts distribués sur la surface, ou par le mouvement du corps solide. Le rayonnement acoustique global dépend des amplitudes et des phases relatives de chaque contribution.

On peut voir que l'effet acoustique de l'interaction entre un obstacle et un écoulement

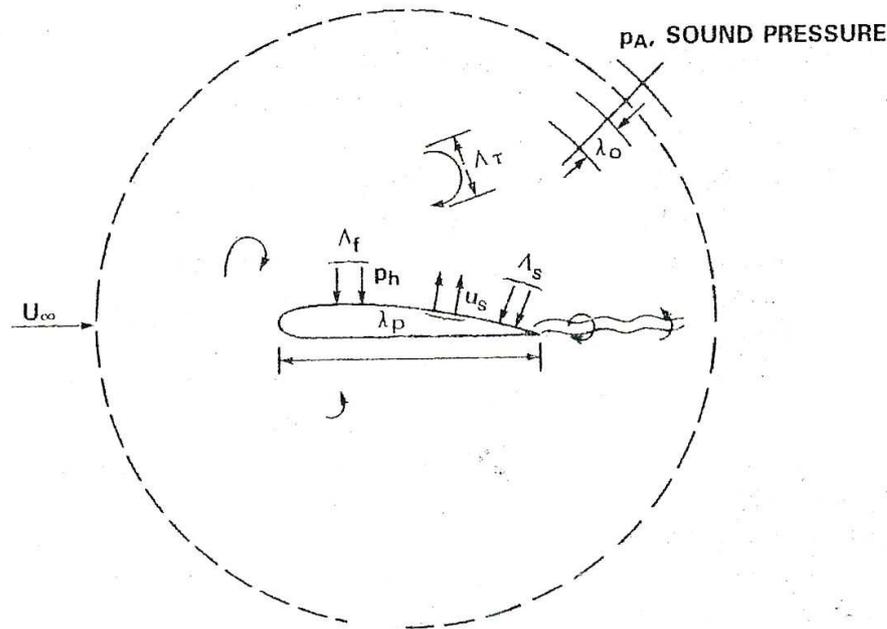


FIG. 1.1 – Schéma d'un corps solide immergé dans un écoulement de perturbation turbulente  $\Lambda_\tau$ ;  $u_s$  est la vibration du solide avec la longueur d'onde  $\lambda_p$  résultant de la pression surfacique  $p_h$ . Blake [5].

dans lequel il est placé peut revêtir deux formes : premièrement, le solide peut réfléchir ou diffracter les ondes acoustiques rayonnées par la turbulence libre ; deuxièmement, le solide modifie l'écoulement et crée ainsi de nouvelles perturbations aérodynamiques qui vont être sources de rayonnement acoustique. Dans certaines configurations, celui-ci peut à son tour modifier l'écoulement, donnant ainsi naissance à un couplage. L'ensemble de ces interactions est synthétisé sur la figure 1.2, où sont représentés à la fois les mécanismes directs et les mécanismes de rétroaction. La complexité des phénomènes mis en jeu se retrouve dans les études expérimentales et théoriques menées sur le sujet.

### 1.3.2 Développements analytiques

La prise en compte de frontières solides dans l'estimation du bruit rayonné par les écoulements turbulents a été réalisée par Curle [20] dans la continuité directe des travaux de Lighthill, en considérant justement la solution générale de l'équation d'onde inhomogène en espace non-libre. Une recombinaison des intégrales surfaciques et volumiques montre deux mécanismes qui apparaissent comme générateurs de bruit en plus du bruit de turbulence en volume donné par les résultats de Lighthill : le déplacement de matière par une éventuelle vibration de la surface, et l'effort à la paroi. Pour une surface fixe et rigide, le premier, de nature monopolaire, est nul. Si la surface est acoustiquement compacte, le second se réduit à un dipôle d'intensité proportionnelle à la résultante des efforts surfaciques. Une analyse

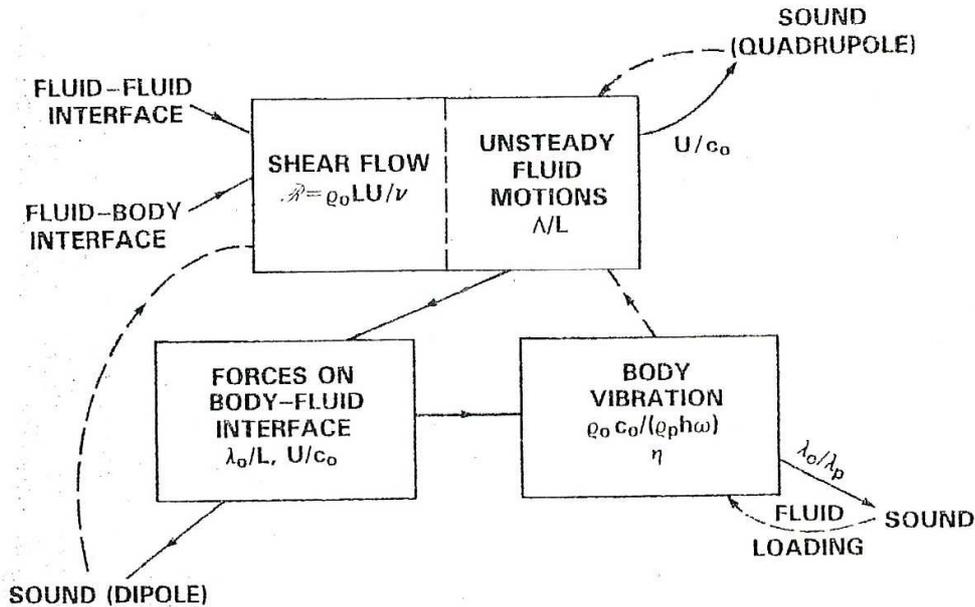


FIG. 1.2 – Diagramme des interactions fluide-structure responsables de mouvements relatifs et de son. Les pointillés indiquent des possibilités de couplage. Blake [5].

aux ordres de grandeurs montre que la puissance acoustique rayonnée de cette manière évolue comme  $M^6$ . Par conséquent, à faible nombre de Mach, les sources surfaciques ont un rayonnement supérieur à celui des sources volumiques dont l'évolution est en  $M^8$ .

Assez rapidement après les travaux de Curle la question de la nature véritable des sources surfaciques est posée. Powell [93] remarque notamment que pour une surface fixe, l'effort surfacique ne produit pas de travail, et ne peut donc pas être lui-même à l'origine d'énergie acoustique. Pour le cas particulier d'une plaque plane rigide, il montre également, en utilisant le formalisme des sources images, que le terme source dipolaire dû aux pressions pariétales représente uniquement l'effet de la réflexion des sources quadripolaires volumiques définies par Lighthill. Dans ses travaux, la contribution de la contrainte visqueuse n'est pas prise en compte.

Malgré cette difficulté, encore insurmontée, à isoler le mécanisme de production sonore, qui est finalement le lot des analogies, la formulation de Curle, généralisée par Ffowcs-Williams & Hawkings [34] pour des surfaces en mouvement quelconque, demeure un outil prédictif très largement utilisé. C'est la méthode de calcul qui est retenue dans le présent travail pour l'évaluation du rayonnement acoustique. Elle sera présentée en détails au chapitre 4 de ce document. Elle fait appel au champ instantané de fluctuations de pression pariétale, qui y apparaissent en tant que terme source. La modélisation de celles-ci, telle que présentée dans le travail original de Corcos [17] ou la revue de Bull [10] en ce qui concerne principalement la turbulence, revêt donc également un intérêt en aéroacoustique.

### 1.3.3 Écoulements avec décollement et recollement

La présence d'une arête vive contournée par l'écoulement donne lieu à une séparation de celui-ci afin de compenser la discontinuité de l'obstacle. Une couche de mélange est alors générée, dont le comportement est une caractéristique importante de l'écoulement considéré. Dans le cas d'un décollement à un bord de fuite, la couche de mélange (ou la couche cisailée) sépare les écoulements extradados et intrados dont les vitesses sont différentes. Les fluctuations peuvent déstabiliser la couche de mélange et créer un phénomène de battement, de mouvement tourbillonnaire, de rayonnement acoustique tonal avec diffraction par le bord de fuite, etc... Dans le cas d'une cavité, la couche cisailée sépare l'écoulement principal qui décolle au bord amont et l'écoulement interne à la cavité, et génère des structures tourbillonnaires qui vont impacter le bord aval. Un fort couplage est observé entre le rayonnement acoustique de l'impact et le déclenchement des instabilités dans la couche de mélange issue du bord amont. Dans le cas d'un écoulement sur marche montante, marche descendante, ou bord d'attaque de plaque plane suffisamment longue, le décollement donne lieu à une recirculation de fluide sous la couche de mélange et cette dernière recolle à la paroi un peu plus loin en aval. Ces trois cas d'écoulement constituent des problèmes spécifiques, que ce soit du point de vue purement aérodynamique ou lorsque que l'on s'intéresse au rayonnement acoustique. Le présent travail concerne le troisième cas, c'est-à-dire l'étude du recollement.

Pour la conception de formes ayant vocation à être immergées dans un écoulement subsonique, les arêtes vives sont en général évitées et les profils retenus sont ceux qui s'adaptent le mieux possible à la déviation globale de l'écoulement. Si bien que dans ce type d'écoulement, les détachements qui apparaissent malgré tout sont principalement dus à des gradients de pression adverses. Ils sont alors la cause de phénomènes problématiques tels que la chute de portance d'une aile, ou le pompage dans les machines tournantes, quand les incidences deviennent trop élevées. Cependant, les arêtes vives ne peuvent pas toujours être évitées. On les rencontre par exemple pour les corps automobiles, les changements de section en conduite, certains composants électroniques refroidis par convection forcée, des bâtiments ou des massifs montagneux en présence de vent, etc. De plus, elles constituent souvent une étape préliminaire à l'étude d'écoulements sur des formes à courbures plus complexes.

#### Marche descendante

Les phénomènes de décollement et de recollement ont été étudiés dans un premier temps sur la configuration de marche descendante. Les mesures de Eaton & Johnston [25] font apparaître un battement basse fréquence de la couche de mélange, qui entraîne une oscillation du point de recollement sur une amplitude d'environ deux hauteurs de marche. Les simulations de Silveira Neto *et al* [98] montrent une forte ressemblance entre les structures tourbillonnaires de cet écoulement et celles des couches de mélange planes. A la suite d'une simulation numérique directe à  $Re = 5100$  basé sur la hauteur de marche  $h$  et la vitesse de l'écoulement libre amont, Le *et al* [71] observent qu'à  $20h$  en aval du recollement le profil

de couche limite n'est pas encore retrouvé. Les auteurs fournissent également une grande quantité de données statistiques sur les bilans des tensions de Reynolds. L'utilisation des visualisations à l'aide du critère  $Q$  sur des simulations grandes échelles permet à Delcayre [22] de proposer le mécanisme tourbillonnaire suivant : la déformation qui suit l'appariement des tourbillons de Kelvin-Helmholtz générés au décollement conduit à la formation de tourbillons en forme de  $\Lambda$  qui se réfléchissent sur la paroi inférieure dans la zone de rattachement puis sont transportés vers l'aval. Pour évaluer le rayonnement acoustique de cet écoulement à  $Re = 37000$ , Huang et Beguier [49] développent une méthode hybride qui combine une simulation grandes échelles et l'analogie de Curle. Le calcul séparé des contributions respectives du bruit propre, du bruit de cisaillement et du bruit de paroi, montre que ce dernier est largement prépondérant sur les deux autres, ce qui va dans le sens des prédictions de Curle. Cependant, sur les directivités présentées, on constate que la contribution du bruit de paroi est nulle dans l'axe de l'écoulement, et que par conséquent c'est le bruit de cisaillement qui y est prépondérant.

On trouve dans Moss & Baker [88] des mesures effectuées sur une marche montante, sur une marche descendante et sur un bloc rectangulaire qui est donc la succession d'une marche montante et d'une marche descendante. Le principal objet de l'étude est la recirculation et le recollement : taux de recirculation, intensité de turbulence au recollement, forme de la couche cisailée. Sur la figure 1.3 de Farabee & Casarella [27], les principales caractéristiques de ces deux types d'écoulement sont schématiquement représentées. On y remarque notamment la présence d'une deuxième recirculation au pied de la marche montante. Ces auteurs mettent l'accent sur les fluctuations de pression pariétale, et mesurent à proximité du recollement des valeurs RMS respectivement 5 et 10 fois plus élevées pour les marches descendante et montante que pour un écoulement de couche limite turbulente développée. Des statistiques fréquentielles sont également présentées, qui permettent de relier ces fortes valeurs à l'existence d'une région de fluctuations de vitesse cohérentes hautement énergétiques située près de la paroi, diffusée et écartée de la paroi par la convection vers l'aval. Le lent retour au profil de couche limite est également souligné. Dans l'article de Ko [61], l'auteur effectue la validation numérique d'un modèle développé pour ce type d'écoulement à partir des modèles de turbulence pariétale. La comparaison avec la simulation numérique directe de Le *et al* est de bonne qualité, ainsi que la comparaison avec les mesures de Moss & Baker.

Une étude complète de l'écoulement et du rayonnement acoustique pour la succession marche montante - marche descendante est réalisée conjointement par Leclercq *et al* [72] et Talotte *et al* [101]. Il s'agit d'une part de mesures dans l'écoulement par anémométrie Laser Doppler et prises de pression pariétale et de mesures acoustiques, et d'autre part d'une simulation par une méthode hybride simulation grandes échelles - équations d'Euler linéarisées. La configuration retenue présente un obstacle suffisamment long pour que le recollement de la couche générée au bord d'attaque se produise avant le bord de fuite. Le rayonnement acoustique est le plus important au dessus de deux régions principales d'émission : la première, plus intense, est située au milieu de la bulle de recirculation correspondant à la marche montante ; la deuxième, plus diffuse, est localisée légèrement avant le recollement en aval de la marche descendante.

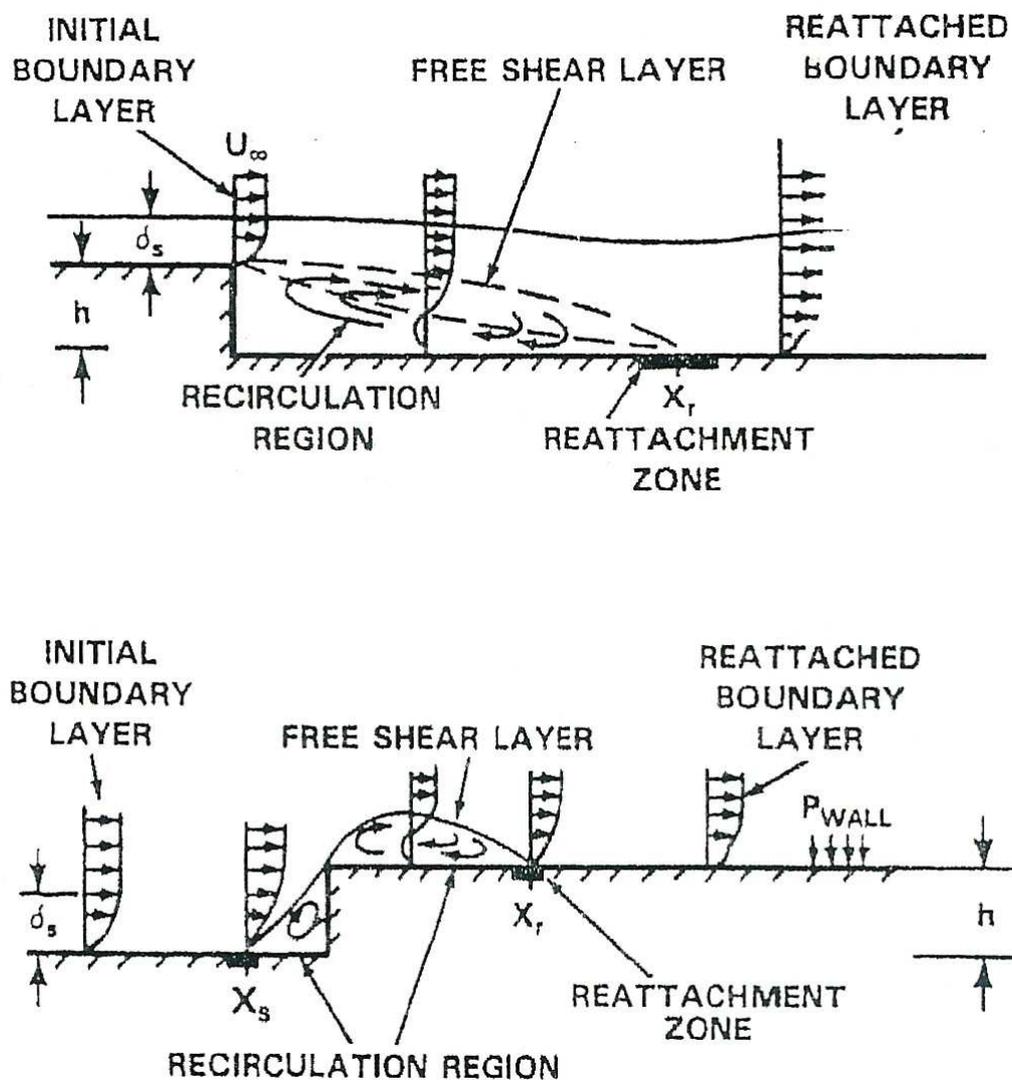


FIG. 1.3 – Topologie des écoulements sur marche descendante (en haut) et marche montante (en bas), Farabee & Casarella [27].

### Marche montante

Les contributions de Stüer *et al* [99] et Wilhelm *et al* [104, 103] au cas spécifique de la marche montante apportent un éclairage sur le mécanisme de franchissement et le comportement de la bulle de recirculation au pied de la marche, dans un écoulement de canal laminaire. La figure 1.4 montre des lignes de courant calculées à partir de données obtenues par Particle Tracking Velocimetry. On peut y voir la bifurcation de l'écoulement en un mouvement hélicoïdal dans la direction latérale. Des visualisations par bulles d'hydrogène montrent une alternance de zones de bifurcation et de franchissement, avec une périodicité de l'ordre de 3 à 5 hauteurs de marche. Wilhelm étudie numériquement la variation de la longueur des bulles de recirculation en fonction du nombre de Reynolds ; il montre par ailleurs que le caractère tri-dimensionnel du franchissement de la marche est proportionnel au taux de perturbation tri-dimensionnelle contenue dans l'écoulement amont.

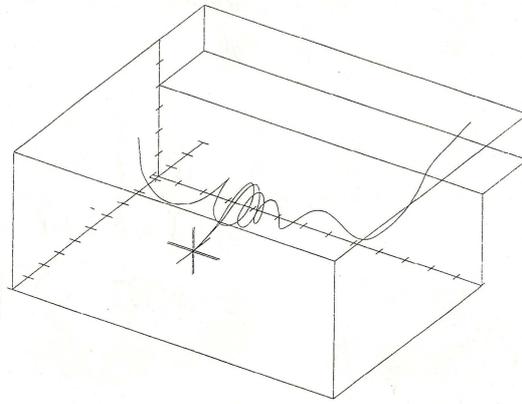


FIG. 1.4 – Mécanisme de franchissement de marche montante, Stüer *et al* [99].

Un calcul de corrélations pression-vitesse à partir de mesures par fil-chaud et prises de pression pariétale permet à Largeau [69] de relier les fluctuations en surface à la turbulence située au dessus. Deux principales zones d'influence émergent : la fin de la bulle de recirculation et la partie haute de la couche de mélange. L'écoulement sur marche montante, tout comme celui sur bord d'attaque de plaque plane, est réputé dépendre assez fortement de la configuration choisie. La longueur de recollement, notamment, présente des variations suivant le nombre de Reynolds, l'épaisseur de l'éventuelle couche limite amont, le taux de constriction ou blocage ainsi que la nature libre ou pariétale en haut du domaine considéré, le confinement en envergure, etc. C'est pourquoi les résultats concernant les écoulements avec recollement, comme les marches montante ou descendante et la plaque plane tronquée, sont généralement présentés en utilisant la longueur de recollement comme référence, plutôt que la hauteur de marche ou l'épaisseur de plaque.

Une transformation du plan permet de ramener la ligne brisée de la marche montante sur l'axe des abscisses, avec des points singuliers en  $-1$  et  $+1$ . Ceci est exploité par Kiya *et al* [60] afin d'évaluer si la méthode du potentiel complexe et des points de vortacité

peut être appliquée à ce type d'écoulement. Bien qu'il s'agisse d'un calcul bi-dimensionnel non-visqueux, les effets de déformation tri-dimensionnelle et de dissipation des filaments de vorticité sont modélisés en introduisant une réduction de leur circulation en fonction du temps  coule  depuis leur génération. Les valeurs moyennes et rms de la vitesse et de la pression pariétale sont correctement prédites, mais cette modélisation demeure insuffisante en ce qui concerne la contrainte de Reynolds de cisaillement dans la zone de recollement.

Bien qu'il ne s'agisse alors pas exactement du bruit lié au recollement, ce passage dans le plan complexe permet également d'étudier l'influence de la séparation sur le rayonnement résultant de l'interaction entre la marche et les points de vorticité contenus dans l'écoulement amont, tel que présenté par Howe [48] ou Conlisk & Veley [16]. De même, Howe [46] montre qu'une partie de l'énergie d'un champ acoustique est dépensée dans la création de vorticité au coin. La présence de l'écoulement entraîne alors la convection de la vorticité cr e e, ce qui l'empêche d'interagir significativement avec le champ acoustique. Le schéma idéal de marche montante est également utilisé par Howe [47] pour modéliser le passage sur un tronçon de paroi rugueuse. Le fait que la couche limite s'épaississe est dans ce cas identifié comme un mécanisme source important.

### Plaque plane de longueur finie ou semi-infinie

L'écoulement sur une plaque plane à bord d'attaque rectangulaire est, dans ce mémoire, la configuration d'application des méthodes qui y sont développées. La figure 1.5 donne une idée de sa topologie, déterminée principalement par l'évolution de la couche de mélange générée par le décollement au bord d'attaque en structures tourbillonnaires relâchées en aval. En dessous de la couche de mélange, se trouve une bulle de recirculation. Cependant ce terme ne peut que désigner un comportement global : en effet, aussi bien les expériences de Kiya & Sasaki [58, 59]    $Re \approx 26000$  que la simulation numérique directe 2D    $Re = 1000$  de Tafti & Vanka [100], font apparaître à certains instants une zone de vitesse longitudinale positive en proche paroi séparant deux zones de vitesse négative. Ainsi, à l'intérieur de la bulle de recirculation, c'est-à-dire en amont du point dit de recollement, il peut y avoir une zone pariétale où le frottement est positif. C'est d'ailleurs à cet endroit de l'écoulement que Hwang *et al* [50] mesurent le minimum de transfert de masse dans un écoulement à  $1200 \leq Re \leq 8000$ .

En ce qui concerne la bulle de recirculation, dont la longueur est habituellement de l'ordre de 6 épaisseurs de plaque, un important raccourcissement en est observé par Hillier & Cherry [42] lorsqu'une turbulence de grille est introduite dans l'écoulement amont. Cependant, cette conséquence semble moins résulter d'un effet de la turbulence amont sur le déclenchement de la transition à la turbulence dans la couche de mélange que sur le développement ultérieur de structures déjà turbulentes.

  l'aide de mesures effectuées à  $10000 \leq Re \leq 80000$ , Cherry *et al* [14] montrent que jusqu'à 60% de la longueur de recollement, le développement de la couche cisailée est semblable à celui d'une couche de mélange plane. D'après Kiya & Sasaki [59], des tourbillons y sont alors formés par suite du développement des instabilités de Kelvin-Helmholtz. La simulation grandes échelles de Abdalla & Yang [1]    $Re = 6500$  montre plusieurs évolutions

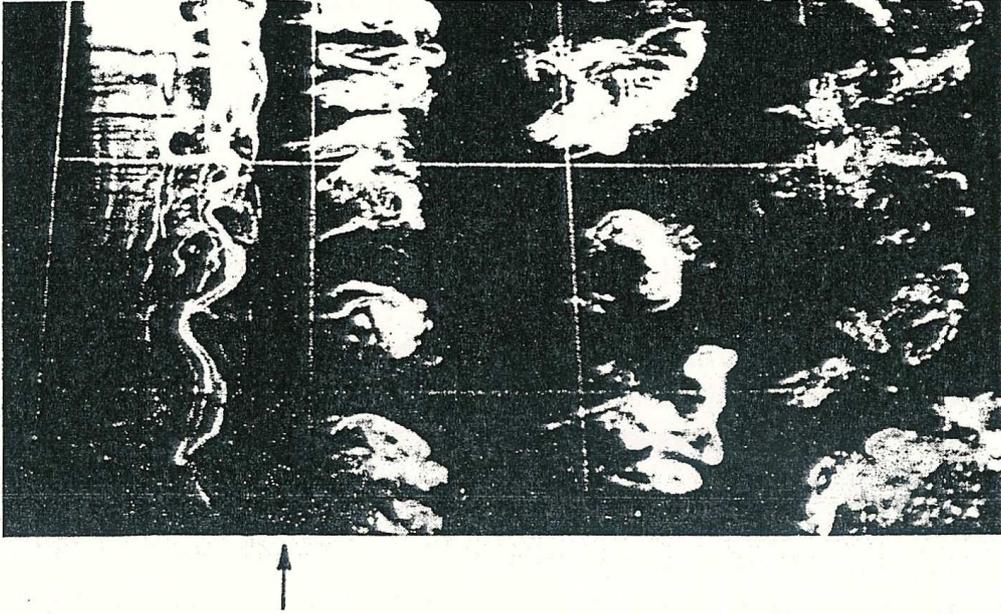


FIG. 1.5 – Visualisation par bulles d’hydrogène d’un écoulement sur plaque plane à  $Re = 630$ . L’écoulement va de la gauche vers la droite. La flèche indique la position moyenne de recollement. Kiya & Sasaki [58].

possibles pour ces tourbillons : appariement, transformation en structures de type épingle à cheveux ou transformation en rouleaux longitudinaux. Ces derniers avaient déjà été observés par Kiya & Sasaki [58] bien qu’espacés en envergure d’environ 0.6 fois la longueur de recollement, ce qui est supérieur à ce qu’on peut voir sur les visualisations de Abdalla & Yang.

Les différentes structures tourbillonnaires ainsi formées sont ensuite relâchées vers l’aval. Un trait rapporté par l’ensemble des auteurs cités, bien que particulièrement représenté par les visualisations de Hwang *et al* [51] à  $1200 \leq Re \leq 8000$ , est que le mécanisme de *shedding* peut prendre différentes formes : la coalescence d’une structure en fin de bulle comme alimentée en vorticité par l’enroulement de la couche de mélange ; l’appariement de deux tourbillons générés séparément mais évacués ensemble ; l’échappement brusque d’une structure de petite échelle. Le mécanisme est pseudo-périodique au sens où ces différentes formes se répètent mais alternent les unes avec les autres. Une fréquence globale est évaluée comme  $0.6U_\infty/x_R$  où  $x_R$  est la longueur de recollement, soit donc environ  $0.1U_\infty/h$  si  $h$  est l’épaisseur de la plaque. Le lâcher des structures de plus grande taille est précédé par une augmentation lente de la longueur de recollement et suivi par son brusque rétrécissement, ce qui se traduit par un phénomène de battement (*flapping*). Cette relaxation décrite par Cherry *et al* [14] est ressentie au début de la bulle de recirculation, c’est-à-dire immédiatement en aval du bord d’attaque et du décollement, comme une instationnarité basse-fréquence, à environ  $0.12U_\infty/x_R$  selon l’évaluation de Kiya &

Sasaki [59]. Lorsque la plaque n'est pas semi-infinie, le lâcher tourbillonnaire au bord de fuite exerce une rétroaction importante qui entretient ce battement près du bord d'attaque. Cependant, hormis les simulations de Hourigan et Tan [44, 102] à  $600 \leq Re \leq 1000$  qui y sont particulièrement consacrées, les contributions référencées ici traitent d'une plaque effectivement semi-infinie en ce qui concerne les simulations numériques, et suffisamment longue pour l'être considérée en ce qui concerne les mesures.

Le point de recollement correspond dans les faits à l'endroit où les structures tourbillonnaires se séparent de la couche de mélange. C'est également l'endroit où sont observés les plus forts transferts de masse, d'après Hwang *et al* [50]. Enfin, Cherry *et al* [14] indiquent que l'écoulement présente un caractère tri-dimensionnel avant le recollement et peu influencé par celui-ci. Une fois relâchées, les structures tourbillonnaires sont convectées avec peu de déformation, comme rapporté par Kiya & Sasaki [58]. Tafti & Vanka précisent que leur passage entraîne un frottement négatif sur la plaque.

A notre connaissance, l'étude du rayonnement acoustique lié au recollement n'a pas été effectuée pour cet écoulement. Bies *et al* [4] ont réalisé des mesures acoustiques du bruit rayonné par une plaque finie, longue d'environ 4 épaisseurs et de faible envergure, placée dans le sillage d'une autre plaque de même épaisseur et à bord de fuite rectangulaire. L'évolution de l'intensité acoustique en fonction de la vitesse de l'écoulement se situe entre le modèle de Curle pour une surface rigide et le modèle de la sphère vibrante. Les deux modèles proposent un rayonnement dipolaire, mais la nature des efforts surfaciques est différente.

Pour la configuration de plaque plane semi-infinie d'épaisseur infiniment mince, Ffowcs-Williams & Hall [33] proposent une modélisation de la diffraction des ondes acoustiques générées par l'écoulement turbulent. Le formalisme repose sur l'utilisation d'une fonction de Green adaptée donnée par Macdonald [79] pour la résolution de l'équation de Lighthill. Il résulte que le paramètre déterminant est  $2kr_0$  où  $k$  est le nombre d'onde et  $r_0$  est la distance entre le centre d'une structure turbulente considérée et le coin. Pour des structures vérifiant  $2kr_0 \ll 1$ , c'est-à-dire proches du coin relativement à la longueur d'onde, l'intensité acoustique rayonnée en champ lointain par les quadripôles associés à un mouvement perpendiculaire à la paroi varie en  $U^5$  où  $U$  est une vitesse caractéristique du fluide. Le rayonnement ainsi produit par la turbulence à proximité de l'arête est donc plus intense à la fois que celui de la turbulence libre donné par Lighthill et que celui en présence de frontières solides donné par Curle. Cependant, le coin n'influe pas sur le rayonnement acoustique des structures qui en sont éloignées. Manoha *et al* [80] font appel à cette méthode pour évaluer le bruit de bord de fuite d'une plaque plane semi-infinie d'épaisseur finie. Les données issues de simulations grandes échelles montrent deux zones où les sources quadripolaires sont importantes, une en aval de chaque coin. Ainsi, des résultats intéressants sont obtenus par l'application de la méthode de Ffowcs-Williams & Hall en considérant successivement les deux coins comme l'extrémité d'une plaque mince.

Pour conclure ce paragraphe relatif aux écoulements avec décollement et recollement, on peut dire que leur apparente simplicité géométrique ne leur confère cependant pas le statut de configurations académiques. Bien que soit commun le phénomène principal qu'est la présence d'une bulle de recirculation sous une couche de mélange relâchant des struc-

tures tourbillonnaires vers l'aval, la topologie et le déroulement précis varient beaucoup d'une configuration à l'autre; et même pour des configurations identiques, les conditions de simulation ou d'expérience entraînent des disparités non-négligeables. Par ailleurs, la compréhension de ce phénomène n'est pas encore complète, et le rayonnement acoustique de ces écoulements est très peu traité dans la littérature.

### 1.3.4 Positionnement du présent travail

Au sein du Laboratoire d'Etudes Aérodynamiques, où il s'est déroulé, le présent travail s'inscrit dans un triple contexte. L'étude du bruit aérodynamique des écoulements pariétaux en est une des thématiques. Des configurations telles que la cavité, la marche montante et le profil NACA0012 ont fait l'objet d'études aéroacoustiques sur le plan expérimental, par Chatellier [13], Largeau [69] et Bonamy. Parallèlement, dans le cadre de problématiques liées à la prise en compte des effets de la température sur le rayonnement acoustique des écoulements, le développement d'outils numériques pour les simulations directes d'écoulements libres, en incompressible, compressible, approximation faible nombre de Mach, a été réalisé, notamment par Lardeau [68], Fortuné [35] et Golanski [38]. L'idée est donc d'effectuer l'étude numérique d'un écoulement pariétal, et de concevoir les outils de prédiction acoustique associés. Enfin, un investissement étant actuellement réalisé au laboratoire sur les méthodes de modélisation de paroi par forçage, il est intéressant d'évaluer dans quelle mesure ce type de condition d'adhérence est utilisable en vue d'une étude acoustique. Ces méthodes étant pour l'instant développées en incompressible, l'effort est mis sur le calcul de sources pour une méthode hybride.

La configuration de plaque plane est préférée à celle de marche montante pour économiser le délicat problème d'une condition d'entrée de couche limite. Elle concilie les différents aspects présentés ci-dessus : l'implantation de la méthode des frontières virtuelles dans un code de calcul d'écoulements libres, pour la simulation de géométries à angles vifs; l'étude aéroacoustique d'un écoulement avec décollement et recollement par une méthode hybride DNS incompressible - analogie de Curle - Ffowcs-Williams & Hawkings. Cette méthode hybride est couramment employée, mais à notre connaissance l'utilisation d'une méthode de frontières virtuelles dans le contexte de l'aéroacoustique est originale. Le chapitre suivant présente cette méthode et les travaux effectués pour en améliorer les performances.

# Chapitre 2

## La méthode des frontières virtuelles

*Quand on veut noyer son chien, on dit qu'il a la rage.*

Proverbe

L'utilisation d'un champ de forces extérieures pour simuler la présence d'une paroi dans un milieu fluide est apparue dans le domaine de la biomécanique, à l'initiative de Peskin [90, 91] au début des années 70. Il s'agissait à l'origine de reproduire l'écoulement dont une valve cardiaque est le siège. La complexité géométrique d'un tel phénomène, associée au couplage fluide-membrane qui a lieu, encourage l'utilisation d'une méthode qui permette de s'affranchir d'une adaptation permanente du maillage. Une telle méthode présente également un avantage indiscutable dans les simulations qui considèrent une paroi sujette à des déformations, même si l'interaction avec le fluide n'est pas modélisée. En effet, la prise en compte du mouvement de la paroi conduit à une coûteuse modification permanente du maillage.

Dans le cas de parois fixes mais de géométrie complexe, l'intérêt d'une modélisation de paroi par forçage demeure car cela évite une génération soignée du maillage (raffinement près des singularités, adaptation aux contours solides), qui représente à elle seule un coût important. En simulation numérique directe, et également en simulation grandes échelles, l'avantage est encore plus fort. En effet, l'adaptation du maillage à la géométrie peut conduire à de fortes distorsions sur les mailles au voisinage des irrégularités des surfaces; il en résulte une dégradation de la qualité des résultats dans ces zones, difficilement acceptable en simulation numérique directe où une grande précision est requise sur une vaste gamme d'échelles tourbillonnaires. De plus, la mise en oeuvre et l'optimisation de schémas de haute précision sont grandement facilitées par l'utilisation d'un maillage le plus simple possible.

On voit que pour des géométries relativement complexes, entre une simulation utilisant un maillage simplifié combiné à une méthode de modélisation de parois par forçage et une simulation associant un maillage sophistiqué à un traitement classique de la paroi, l'arbitrage va se faire entre une résolution luxueuse mais plus précise et à faible coût par point de grille d'une part, et une résolution optimisée mais plus lourde à mettre en oeuvre et plus chère par point de grille d'autre part. Le contexte d'une simulation numérique directe

invite à choisir la première option. Outre qu'un maillage cartésien n'impose pas *a priori* à l'écoulement de directions privilégiées, dans ce contexte, la zone où le maillage peut être relâché est plus faible dans la mesure où les structures turbulentes occupent une plus grande portion du domaine de calcul.

Dans le cadre de notre travail, qui concerne une géométrie certes singulière mais sans grande complexité puisqu'elle se trouve alignée sur un maillage cartésien, le choix d'utiliser une méthode de modélisation par forçage a été effectué au regard de deux aspects : d'une part la simplicité d'implantation dans un code de simulation numérique directe d'écoulements libres développé au laboratoire ; d'autre part le souhait de tester cette méthode dans le cadre de l'aéroacoustique numérique. En effet, s'il s'avère que les données aérodynamiques fournies par cette méthode peuvent d'une manière fiable être utilisées comme entrées d'un calcul de rayonnement acoustique par extraction de sources, la prédiction aéroacoustique d'une grande diversité de géométries serait envisageable.

Plusieurs méthodes de modélisation de paroi par forçage existent, notamment les méthodes de frontières immergées [90, 91], pénalisation [2], frontières virtuelles [39], forçage direct [26, 82, 83]. Celles-ci ont toutes en commun le fait qu'elles évitent de traiter les conditions à la paroi par modification locale des schémas de différentiation spatiale. Des parentés entre ces différentes méthodes ont été mises en évidence par Lamballais [65], avec un souci d'homogénéisation terminologique. En ce qui nous concerne, bien que des liens avec les autres méthodes seront effectués de temps à autre, nous consacrons ce chapitre à la méthode des frontières virtuelles présentée par Goldstein [39], sur laquelle a été réalisé un travail bibliographique, conceptuel et expérimental.

## 2.1 Sur la modélisation de paroi par forçage

Dans cette section, il sera question des principales contributions apportées à la méthode des frontières virtuelles, présentes dans la littérature en notre connaissance.

### 2.1.1 Principe

Considérons un domaine de calcul  $\Omega$ , partagé en deux domaines solides  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  et un domaine fluide  $\Omega_f$ , comme indiqué sur la figure 2.1. L'objectif de la méthode des frontières virtuelles est d'assurer une condition d'adhérence à la frontière  $\partial\Omega_1$  de  $\Omega_1$  et à l'interface entre  $\Omega_f$  et  $\Omega_2$ , notée  $\partial\Omega_{2f}$ , en ajoutant un champ de force sur les domaines  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ .

Une simulation avec un traitement classique de la paroi résoudrait les équations de Navier-Stokes sur  $\Omega_f$ , en imposant une condition d'adhérence aux interfaces avec  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ , et une autre condition aux limites du domaine de calcul  $\Omega$ . Une simulation avec frontières virtuelles résout les équations de Navier-Stokes sur l'intégralité de  $\Omega$ , avec les conditions aux limites adéquates, mais avec un champ de force extérieur, source volumique dans l'équation de bilan de quantité de mouvement, dont le rôle est de conduire à une vitesse nulle dans le domaine solide. Pour un écoulement incompressible, les équations à résoudre peuvent alors s'écrire sous la forme suivante, pour une masse volumique unitaire :

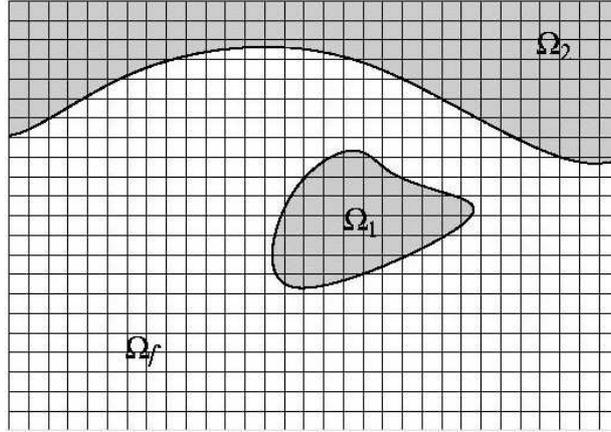


FIG. 2.1 – Partition d'un domaine de calcul en domaines solides et fluide.  $\Omega = \Omega_f \cup \Omega_1 \cup \Omega_2$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \pi - \vec{\omega} \times \vec{u} + \nu \vec{\Delta} \vec{u} + \vec{f} \quad (2.1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \quad (2.2)$$

Formellement, les méthodes de modélisation de parois par forçage diffèrent par leur définition propre du terme source  $\vec{f}$ . Dans le cas de la méthode des frontières virtuelles développée par Goldstein [39], l'expression proposée est :

$$\vec{f}(\vec{x}, t) = \epsilon(\vec{x}, t) \left[ \alpha \int_0^t \vec{u}(\vec{x}, \tau) d\tau + \beta \vec{u}(\vec{x}, t) \right] \quad (2.3)$$

L'association d'un terme intégral et d'un terme proportionnel au terme de dérivée temporelle de la vitesse forme un système du second ordre qui suggère le comportement d'un oscillateur harmonique amorti.

Dans l'expression du terme de forçage,  $\epsilon(\vec{x}, t)$  permet d'exprimer la localisation du forçage. Pour retrouver les équations de Navier-Stokes habituelles, il faut imposer  $\epsilon = 0$  sur  $\Omega_f$ ; à l'interface avec les domaines solides, il faut  $\epsilon = 1$ ; enfin, à l'intérieur des domaines solides, un habile réglage de  $\epsilon$  permet d'atténuer les conséquences fâcheuses de la discontinuité qu'il introduit, et ainsi parvenir à une modélisation optimale des parois par forçage; ce point, ainsi que d'autres considérations relatives à  $\epsilon$  seront développés au paragraphe suivant. En plus de celle évoquée pour la définition de  $\epsilon$ , l'utilisateur dispose d'une certaine liberté pour la consigne à appliquer au champ de vitesse sur les domaines solides. Trivialement, celle-ci peut-être le champ nul, mais ce n'est pas une condition nécessaire; dans le cas d'une condition d'adhérence à une paroi fixe, la seule condition nécessaire est d'avoir  $\vec{u}(\vec{x}, t) = \vec{0}$  pour  $\vec{x} \in \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_{2f}$ . Dans le cas d'une condition de non-glissement à une paroi mobile, la condition devient  $\vec{u}(\vec{x}, t) = \vec{u}_0(\vec{x}, t)$  où  $\vec{u}_0(\vec{x}, t)$  est la vitesse de la paroi. Un travail sur le champ des vitesses à l'intérieur du domaine solide, appelé champ

cible, peut permettre d'améliorer le comportement de certaines méthodes, notamment en forçage direct [89].

Dans l'expression 2.3,  $\alpha$  et  $\beta$  sont des constantes négatives et qui ne sont pas sans dimension. Une telle expression permet de bien sentir le fonctionnement de la méthode : en un point où  $\epsilon \neq 0$ , l'existence d'une vitesse non-nulle, ou, plus généralement, différente du champ cible, engendre une force qui s'oppose à cette vitesse et contraint ainsi le fluide à l'immobilité. Au sujet des paramètres  $\alpha$  et  $\beta$ , Lamballais [65] relève des similitudes intéressantes entre les 4 méthodes de modélisation de paroi par forçage présentées ; la méthode des frontières immergées, formulée à l'origine par une relation entre la vitesse lagrangienne de la paroi et la vitesse eulérienne locale du fluide, correspond au cas où  $\beta = 0$  ; la méthode de pénalisation, qui s'inspire de la modélisation des parois poreuses, correspond au cas où  $\alpha = 0$  ; et la méthode de forçage direct correspond au cas où  $\beta \rightarrow -\infty$ . Cependant, ces similitudes sont simplement formelles et perdent de leur pertinence lors de la mise en oeuvre numérique des différentes méthodes.

### 2.1.2 Mise en oeuvre numérique

Si les avantages des méthodes de modélisation de paroi par forçage ont pu être évoqués d'une manière globale, chaque méthode ne révèle son caractère véritable que dans sa mise en oeuvre. C'est ici que les différences se manifestent, au travers des difficultés numériques qu'elles entraînent et des traitements nécessaires. Cependant, l'appréhension de ces méthodes est relativement indépendante de la discrétisation spatiale. Dans le présent travail, la méthode des frontières virtuelles a été implantée dans un code de calcul initialement développé par S. Lardeau [68] pour des écoulements libres. Ce code utilise des schémas compacts pour les dérivations spatiales, qui sont présentés en annexe A, avec des maillages cartésiens uniformes, collocalisés pour la vitesse et la pression. On verra que cette configuration initiale n'est pas sans poser quelques problèmes.

#### Intégration temporelle

Schématiquement, pour les avancements temporels explicites, la discrétisation peut s'écrire de la façon suivante, entre les instants d'indices  $k$  et  $k + 1$  :

$$\frac{\vec{u}^{k+1} - \vec{u}^k}{\Delta t} = a_k \vec{F}^k + b_k \vec{F}^{k-1} - c_k \vec{\nabla} \tilde{\pi}^{k+1} \quad (2.4)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u}^{k+1} = 0 \quad (2.5)$$

où  $\vec{u}$  est la vitesse,  $\Delta t$  est le pas de temps,  $\pi$  est la pression modifiée,  $a_k$ ,  $b_k$  et  $c_k$  sont des coefficients qui dépendent du schéma utilisé, et  $\vec{F}$  est défini par :

$$\vec{F} = -\overline{rot(\vec{u})} \times \vec{u} + \nu \vec{\Delta} \vec{u} \quad (2.6)$$

où  $\times$  est le produit vectoriel. On a également noté :

$$\tilde{\pi}^{k+1} = \frac{1}{c_k \Delta t} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \pi dt \quad (2.7)$$

La vérification de la condition d'incompressibilité 2.5 est obtenue en introduisant un champ de vitesse intermédiaire  $\vec{u}^*$  et en écrivant le fractionnement suivant :

$$\frac{\vec{u}^* - \vec{u}^k}{\Delta t} = a_k \vec{F}^k + b_k \vec{F}^{k-1} \quad (2.8)$$

$$\frac{\vec{u}^{k+1} - \vec{u}^*}{\Delta t} = -c_k \vec{\nabla} \tilde{\pi}^{k+1} \quad (2.9)$$

En effet, en appliquant l'opérateur divergence à l'équation 2.9, on obtient une équation de Poisson entre le champ de pression modifiée à l'instant  $t_{k+1}$  et le champ  $\vec{u}^*$  :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \tilde{\pi}^{k+1} = \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{u}^*}{c_k \Delta t} \quad (2.10)$$

dont la résolution donne accès au champ de pression modifiée, ce qui permet l'avancement de l'étape 2.9. Nous reviendrons en détail sur les équations discrètes du code de calcul ici utilisé, au chapitre consacré au calcul de la pression.

Une manière simple d'implanter un terme de forçage dans un tel code de calcul consiste à l'intégrer temporellement en même temps que les termes convectifs et diffusifs. Comme proposé par Lamballais & Silvestrini [67], l'avancement temporel peut alors s'écrire sous la même forme qu'en l'absence de forçage, en posant  $\vec{G} = \vec{F} + \vec{f}$  :

$$\frac{\vec{u}^{k+1} - \vec{u}^k}{\Delta t} = a_k \vec{G}^k + b_k \vec{G}^{k-1} - c_k \vec{\nabla} \tilde{\pi}^{k+1} \quad (2.11)$$

Nous voyons ici tout l'intérêt de la méthode des frontières virtuelles, et des méthodes de modélisation de paroi par forçage en général, dans ce qu'elles comportent de simplicité en regard de leur philosophie et de leur écriture formelle : une fois la localisation de la paroi définie par  $\epsilon$ , le schéma de résolution est le même que pour une simulation d'écoulement libre. Hélas, quatre principaux écueils attendent ceux qui choisissent de les utiliser : d'abord, cette forme de modélisation implique que la frontière entre domaine solide et domaine fluide n'est pas une ligne mathématique et dépend de la manière d'appliquer le forçage sur les points de grille ; ensuite, la condition d'adhérence, c'est-à-dire la condition de vitesse nulle par rapport à la paroi, n'est réalisée que de manière approchée ; en troisième lieu, l'avancement temporel présenté ci-dessus peut entraîner l'obligation d'utiliser un pas de temps bien inférieur à celui requis par un critère de type *Courant-Friedrichs-Lewy* (*CFL*) ; enfin, au passage de l'interface entre un domaine solide et un domaine fluide, le champ de vitesse présente une discontinuité plus ou moins accusée qui peut perturber la résolution numérique si aucune précaution n'est prise. Ces quatre problèmes, ainsi que les solutions disponibles, sont développés dans les paragraphes suivants.

### Pondération spatiale

La localisation de la paroi fait l'objet d'une incertitude liée à la manière d'appliquer le terme de forçage. Saiki & Biringen [97], Fadlun *et al* [26], de même que Moser [87] insistent bien sur le fait que cette problématique de la localisation et de l'application du forçage est indépendante de celle de la définition du terme de forçage qui sera traitée plus loin. Dans le cas sommaire où la fonction de pondération spatiale  $\epsilon$  est binaire, c'est-à-dire qu'elle ne prend pas d'autres valeurs que 0 ou 1, on peut considérer que les points de grille où  $\epsilon = 0$  font partie du domaine fluide, et que ceux où  $\epsilon = 1$  font partie du domaine solide. Dans ce cas, l'interface entre ces deux domaines, que l'on peut nommer paroi solide, passe quelque part entre deux points ayant des valeurs de  $\epsilon$  différentes. Par conséquent, cette interface est positionnée avec une incertitude de l'ordre du pas de discrétisation spatiale  $\Delta x$  ou  $\Delta y$  ou  $\Delta z$ .

Par ailleurs, notamment pour des simulation de parois courbes, il peut être intéressant d'arriver à une définition de paroi moins grossière que celle de type pixellique, en dissociant la position théorique de la paroi d'avec la grille de maillage. Le schéma qui en résulte est donné sur la figure 2.2. Il s'agit ici de définir une vitesse en chaque point de la paroi fictive à

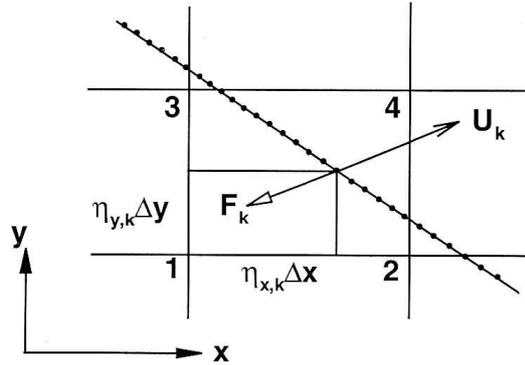


FIG. 2.2 – Distinction entre point de grille et point de paroi, Lee [73].

partir de celle calculée aux points de grille, qui va être alors utilisée pour calculer la valeur du terme de forçage à la paroi; et il faut ensuite définir la manière dont ce forçage va être réparti sur les points de grille. Ces deux étapes d'interpolation peuvent être faites de différentes manières. Saiki et Biringen [97] proposent une interpolation bilinéaire pondérée par les surfaces, où l'on a schématiquement :

$$\vec{u}_k = (1 - \eta_{x,k})(1 - \eta_{y,k})\vec{u}_1 + \eta_{x,k}(1 - \eta_{y,k})\vec{u}_2 + (1 - \eta_{x,k})\eta_{y,k}\vec{u}_3 + \eta_{x,k}\eta_{y,k}\vec{u}_4 \quad (2.12)$$

Le forçage en un point de grille est alors obtenu en additionnant les contributions de chaque point de la surface qui l'affecte, en utilisant la même pondération que pour la vitesse. Pour la figure 2.2, on a par exemple :

$$\vec{f}_1 = \sum_k (1 - \eta_{x,k})(1 - \eta_{y,k})\vec{f}_k \quad (2.13)$$

où  $k$  décrit l'ensemble des points de la surface contenus dans le carré formé par les 4 points de grille considérés. Pour obtenir la valeur de  $\vec{f}$  aux points 2, 3 et 4, il faut ajouter les contributions des points de la surface contenus dans les carrés alentours. D'après Saiki & Biringen [97], cette manière d'appliquer le forçage est précise à l'ordre 1.

Fadlun *et al* [26] proposent trois méthodes d'application du forçage, présentées sur la figure 2.3. La première, la plus simple, consiste à appliquer le terme de forçage au point de grille le plus proche de la paroi fictive, comme si celle-ci passait par celui-là. En fait, il n'y a ici aucune interpolation, et la paroi est décrite d'une manière pixellique (*stepwise*). La seconde manière consiste à calculer pour chaque cellule de volume  $\Psi$  la fraction de volume  $\Psi_b/\Psi$  occupée par le domaine solide. Le forçage est alors appliqué au point de grille le plus proche de la paroi avec une pondération égale à  $\Psi_b/\Psi$ . Enfin, la troisième méthode part d'une idée identique à celle de Saiki & Biringen : elle consiste à calculer par une approximation linéaire la vitesse que le point de grille adjacent à la paroi aurait si celle-ci réalisait parfaitement la consigne de vitesse. Le forçage en ce point est alors obtenu en utilisant dans l'expression 2.3 cette vitesse approximée. A l'aide de tests mettant en scène des grilles plus ou moins fines, les auteurs montrent que la première méthode est d'ordre inférieur à 1, que la deuxième est environ d'ordre 1 et que la troisième est environ d'ordre 2.

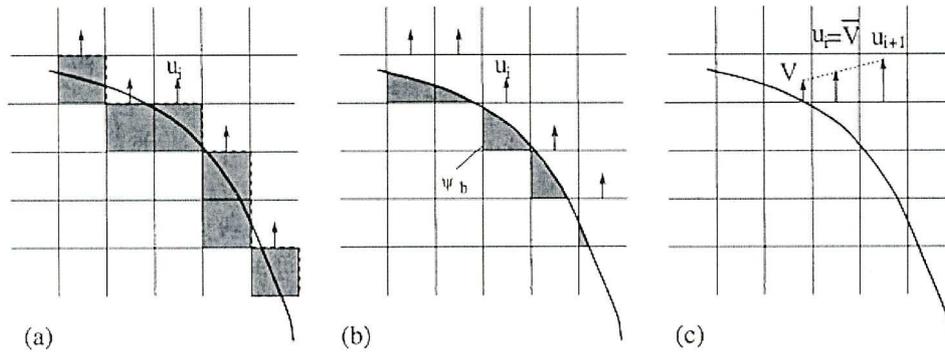


FIG. 2.3 – Procédures d'interpolations : a) pas d'interpolation (géométrie pixellique), b) pondération par fraction volumique, c) interpolation sur la vitesse ; Fadlun *et al* [26].

S'il est vrai qu'il est souhaitable d'arriver à une localisation de la paroi la plus précise possible, l'objectif premier de la simulation est de reproduire fidèlement les caractéristiques de l'écoulement étudié. En particulier, une représentation correcte est exigée pour des décollements éventuels, des séparations à des coins, ainsi que des champs turbulents en proche paroi. Dans cette optique, et d'une manière finalement assez paradoxale, les ordres formels de précisions présentés ci-dessus n'imposent pas leur condition. Parnaudeau [89] a montré notamment que même si les méthodes de modélisation de paroi par forçage ne peuvent aujourd'hui présenter des erreurs de troncature d'ordres supérieurs à 2, l'utilisation d'un schéma de différenciation précis à l'ordre 6 conduit à de bien meilleurs résultats pour les champs turbulents que l'utilisation d'un schéma d'ordre 2. On peut dire que la faible

précision de telles modélisations de la paroi contamaine peu la précision de la simulation dans le reste de l'écoulement.

### Présence de vitesses résiduelles

Outre que la localisation de la paroi fait l'objet d'une incertitude, la condition d'adhérence ne peut pas être parfaitement réalisée. Il s'agit plutôt d'une consigne qui est plus ou moins bien suivie. Pour commenter la définition 2.3 du terme de forçage, Goldstein *et al* [39] montrent que si l'on fait abstraction du terme  $-\vec{\nabla}\pi - \vec{\omega} \times \vec{u} + \nu\vec{\Delta}\vec{u}$  dans l'équation 2.1, celle-ci se ramène à celle d'un oscillateur harmonique amorti, dont la fréquence naturelle des oscillations est pilotée par le paramètre  $\alpha$ , tandis que leur amortissement est piloté par le paramètre  $\beta$ . Il en découle que ces deux paramètres doivent avoir une valeur absolue suffisamment élevée pour assurer une bonne convergence vers la consigne de vitesse nulle à la paroi en répondant aux sollicitations provenant d'éventuelles fluctuations turbulentes dans l'écoulement. Autrement dit, la frontière virtuelle doit avoir un temps de réponse faible devant les temps caractéristiques de l'écoulement. Ce temps de réponse dépend du degré de précision que l'on souhaite obtenir pour la réalisation de la consigne. Dans le cas de la modélisation d'une condition d'adhérence, il est souhaitable que le champ de vitesse résiduel à la paroi soit de plusieurs ordres de grandeur inférieur au champ de vitesse au sein du fluide. *A priori*, cet objectif sera d'autant mieux réalisé que les paramètres de forçage  $\alpha$  et  $\beta$  sont élevés.

### Contraintes sur le pas temps

Cependant, cette performance peut se payer très cher. Goldstein *et al* [39] observent qu'en pratique, la solution des équations 2.1, 2.2 et 2.3 est instable pour de trop grandes valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$ , mais est stable pour des valeurs modérées et n'est pas très sensible à leurs valeurs précises. En particulier, pour un schéma d'avancement temporel d'Adams-Bashforth d'ordre deux, ils trouvent une limite de stabilité pour le pas de temps donnée par :

$$\Delta t < \frac{-\beta - \sqrt{\beta^2 - 2\alpha k}}{\alpha} \quad (2.14)$$

où  $k$  est une constante de l'ordre de 1 et dépendante du problème. Cette restriction est draconienne, car une réalisation acceptable de la condition d'adhérence requiert ici un pas de temps qui peut être très inférieur à ce qu'il serait nécessaire pour satisfaire le critère *CFL*.

Dans l'inégalité 2.14, le paramètre  $\beta$  contraint le plus le pas de temps. Pour s'affranchir de cette contrainte, Fadlun *et al* [26] proposent un nouveau mode d'intégration temporelle du forçage, reposant sur le traitement implicite du terme  $\epsilon\beta\vec{u}$ , facilité par la nature simplement algébrique de ce dernier. Cette méthode autorise l'emploi de pas de temps 10 fois plus grands que ceux imposés par une méthode purement explicite, pour des vitesses résiduelles identiques. Ce gain est loin d'être négligeable, mais c'est à Mohd Yussof [82, 83] que l'on doit la définition d'un terme de forçage qui n'introduit aucune contrainte sur le pas de

temps. Considérons en effet la discrétisation temporelle 2.11 sous la forme suivante :

$$\vec{u}^{k+1} = \vec{u}^k + \Delta t \left( \vec{H} + \vec{f} \right) \quad (2.15)$$

où l'on a regroupé dans  $\vec{H}$  les termes  $a_k \vec{F}^k + b_k \vec{F}^{k-1} - c_k \vec{\nabla} \tilde{\pi}^{k+1}$ . Une manière simple d'atteindre la condition  $\vec{u}^{k+1} = \vec{0}$  est d'imposer  $\vec{f} = -\vec{H} - \frac{\vec{u}^k}{\Delta t}$ . C'est ce qui est désigné habituellement par méthode de forçage direct. En effet, l'adhérence est imposée directement sans l'intervention d'un processus dynamique. Un premier avantage de cette définition est que la consigne sera réalisée de la même manière pour toutes les fréquences de l'écoulement, et donc que toute contrainte supplémentaire sur le pas de temps est supprimée. On voit également que les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  ne figurent plus dans la définition du terme de forçage, ce qui permet de s'affranchir de leur réglage. De plus, en pratique, cela revient à affecter la valeur 0 à la vitesse aux points pour lesquels  $\epsilon = 1$ , c'est-à-dire qu'il n'y a plus à calculer le terme de forçage. Cependant, à cause du traitement de l'incompressibilité, la mise en oeuvre numérique de cette méthode conduit à un double fractionnement, dans lequel le forçage doit être appliqué sur un champ de vitesse intermédiaire  $\vec{u}^*$ . Ceci a pour conséquence inévitable la présence de vitesses résiduelles.

Au sujet de la contrainte supplémentaire imposée sur le pas de temps par la méthode des frontières virtuelles, une importante contribution est celle de Lee [73]. En effet, cet auteur a mené l'étude de stabilité d'une équation d'évolution de type  $\frac{du}{dt} = \alpha \int_0^t u(\tau) d\tau + \beta u(t)$  dans le cadre de la pondération spatiale de Saiki & Biringen [97], pour des systèmes 1D, 2D et 3D et pour de nombreux schémas d'avancement temporel. Sa démarche est la suivante : par la double interpolation 2.12 et 2.13, un système exprime la dérivée temporelle de la vitesse en chaque sommet d'une cellule traversée par la paroi fictive en fonction des vitesses et de leur intégration temporelle de tous les sommets de cette cellule. Le système est donc initialement de deux équations en 1D, de 4 équations en 2D et de 8 équations en 3D, comme l'indique la figure 2.4.

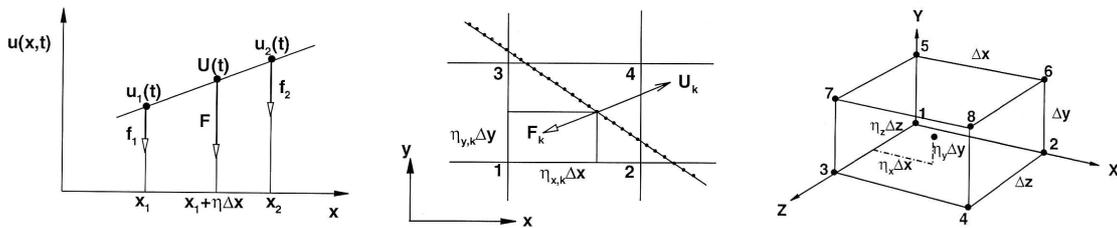


FIG. 2.4 – Insertion de paroi dans une grille, Lee [73].

Les systèmes possèdent les valeurs propres les plus élevées lorsque la paroi est alignée sur la grille. Dans ce cas, ils se simplifient, et conduisent aux systèmes diagonaux suivants :

$$\left( \frac{du^*(t)}{dt} \right) = \left( \alpha \int_0^t u^*(\tau) d\tau + \beta u^*(t) \right) \quad (2.16)$$

en 1D avec  $u^*(t) = u_1(t)$  ou  $u^*(t) = u_2(t)$  ;

$$\begin{pmatrix} \frac{du_1^*(t)}{dt} \\ \frac{du_3^*(t)}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \int_0^t u_1^*(\tau) d\tau + \beta u_1^*(t) \\ \alpha \int_0^t u_3^*(\tau) d\tau + \beta u_3^*(t) \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

en 2D avec  $u_1^*(t) = u_1(t) + u_3(t)$  et  $u_3^*(t) = u_1(t) - u_3(t)$  ;

$$\begin{pmatrix} \frac{du_1^*(t)}{dt} \\ \frac{du_3^*(t)}{dt} \\ \frac{du_5^*(t)}{dt} \\ \frac{du_7^*(t)}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{36} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \int_0^t u_1^*(\tau) d\tau + \beta u_1^*(t) \\ \alpha \int_0^t u_3^*(\tau) d\tau + \beta u_3^*(t) \\ \alpha \int_0^t u_5^*(\tau) d\tau + \beta u_5^*(t) \\ \alpha \int_0^t u_7^*(\tau) d\tau + \beta u_7^*(t) \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

en 3D avec les vecteurs propres donnés par :

$$\begin{pmatrix} u_1^*(t) \\ u_3^*(t) \\ u_5^*(t) \\ u_7^*(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_3(t) \\ u_5(t) \\ u_7(t) \end{pmatrix}$$

Précisons ici que dans le cadre de notre travail, nous avons jusqu'à présent toujours appliqué le forçage directement sur les points de grille, considérant une paroi définie de manière pixellique, c'est-à-dire que quelle que soit la simulation que nous effectuons, nous nous retrouvons dans le cas 1D vis-à-vis du problème de la stabilité. Pour chacun des trois systèmes 2.16, 2.17 et 2.18, l'étude de stabilité doit être menée pour la première équation puisqu'il s'agit de celle correspondant au mode le plus dangereux avec la plus grande valeur propre. On peut réunir ces trois équations dans une seule formulation :

$$\frac{du^*}{dt}(t) = \frac{1}{2^{D-1}} \left( \alpha \int_0^t u^*(\tau) d\tau + \beta u^*(t) \right) \quad (2.19)$$

si  $D$  est le nombre de dimensions du problème considéré. Cette expression fait l'hypothèse que les points de la paroi sont répartis de manière dense par rapport aux cellules, ce qui permet de sommer en un point de grille les forçages provenant des points de la paroi. Rappelons également que l'équation 2.19 n'est valable que dans le cadre de l'interpolation de Saiki & Biringen ; si des interpolations d'ordre supérieur sont utilisées, la limite de stabilité sera plus sévère.

Lee [73] examine donc les caractéristiques de l'équation 2.19 en stabilité pour divers schémas de discrétisation temporelle, selon la forme  $u_{n+1} = u_n + \Delta t \cdot g(u_n, u_{n-1}, u_{n-2}, \dots, u_1, u_0)$ . Il s'agit de considérer le comportement de  $r$  défini comme  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ , en écrivant  $u_n = u_0 r^n$ . La condition de stabilité est alors  $|r| \leq 1$ . Pour un schéma d'avancement temporel d'Adams-Bashforth d'ordre 2, par exemple, cette condition conduit à la contrainte suivante sur le pas de temps :

$$-\frac{\alpha \Delta t^2}{2^{D-1}} - \frac{2\beta \Delta t}{2^{D-1}} \leq 2 \quad (2.20)$$

En notant  $k = 2^{D-1}$ , la contrainte impose donc que le trinome  $\alpha\Delta t^2 + 2\beta\Delta t + 2k$  soit positif. Or  $\alpha$  étant négatif et  $k$  étant positif, il a des racines de signes opposés, donc il sera nécessairement positif si  $\Delta t$  est inférieur à la plus grande des deux, c'est-à-dire pour :

$$\Delta t \leq \frac{-\beta - \sqrt{\beta^2 - 2\alpha k}}{\alpha}$$

On reconnaît ici l'expression 2.14 dont Lee a montré l'origine et explicité la constante  $k$  qui vaut 1 dans le cas 1D, 2 dans le cas 2D et 4 dans le cas 3D. On y voit que lorsque le nombre de dimensions augmente, la contrainte sur le pas de temps devient moins sévère. L'étude est menée également pour d'autres schémas d'avancement temporel, ce qui permet à Lee de fournir le diagramme dans le cas 3D que nous reproduisons sur la figure 2.5. On constate que les schémas d'Adams-Bashforth possèdent la zone de stabilité la plus réduite. Pour lutter contre ce point faible de la méthode des frontières virtuelles, il est donc préférable d'utiliser des schémas d'avancement temporel permettant une réduction importante de ce caractère pénalisant.

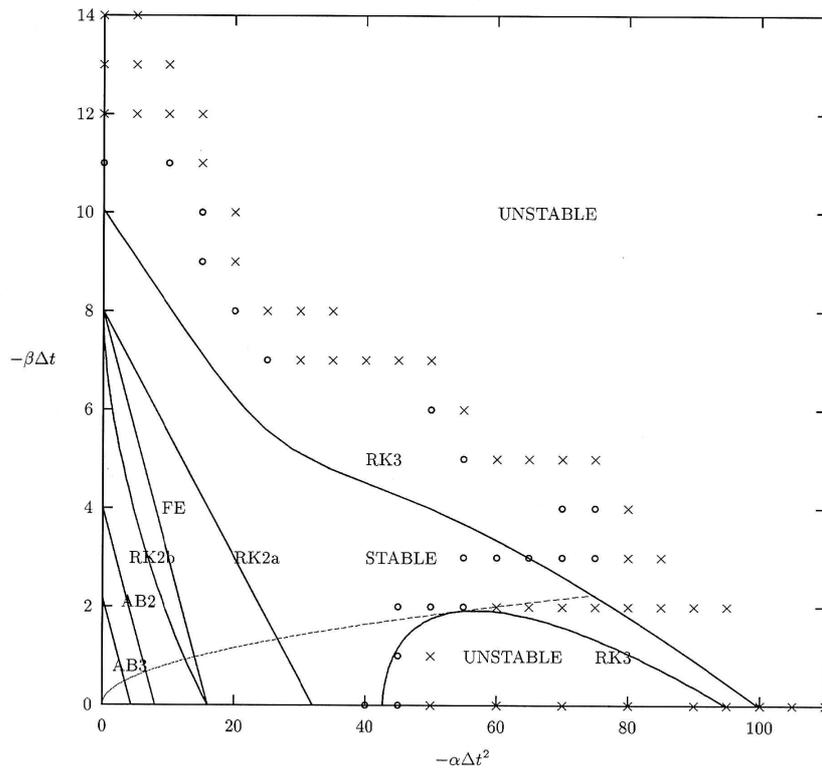


FIG. 2.5 – Diagramme de stabilité de la méthode des frontières virtuelles pour différents schémas d'avancement temporel (cas 3D), Lee [73].

### Traitement de la discontinuité

Sur la figure 2.3-a, on peut dire que les cases grisées sont des cellules où  $\epsilon = 1$  et que les autres voient une valeur 0. De même, la partition du domaine de calcul en domaines solides et fluides, présentée figure 2.1, introduit inévitablement une surface de discontinuité entre les domaines où  $\epsilon = 1$  et ceux où  $\epsilon = 0$ . Dans le premier cas (figure 2.3-a), le forçage est appliqué seulement à la paroi, dans le second (figure 2.1), il est appliqué sur tout le domaine solide. Dans les deux cas, la discontinuité met à mal la résolution numérique, notamment les opérateurs de dérivation spatiale qui utilisent des schémas de précision spectrale ou quasi-spectrale. En effet, bien que le profil de vitesse soit continu à la paroi, il y a toutes les chances pour que sa dérivée ne le soit pas. La conséquence est notamment l'apparition d'oscillations maille à maille connues sous le nom de phénomène de Gibbs. Pour remédier à ce problème, plusieurs solutions ont été proposées. Lamballais & Silvestrini [67], ainsi que Moser [87], suggèrent par exemple de faire prendre à  $\epsilon$  des valeurs intermédiaires entre 0 et 1, en définissant  $\epsilon$  comme une gaussienne centrée à la paroi, mais tronquée au-delà d'un certain nombre de points, le plus souvent trois. Ainsi, le forçage est réparti sur 3 points au sein du domaine fluide, et la discontinuité est atténuée. L'inconvénient est que la localisation de la paroi est plus diffuse. De plus, bien qu'elle ne concerne que des valeurs déjà très faibles de  $\epsilon$ , de l'ordre de  $10^{-3}$ , la troncature conservée est quand même "vue" par les schémas de dérivation.

Une autre manière de s'affranchir de la discontinuité au sein du domaine de calcul est de laisser se développer un écoulement au sein du domaine solide. Cela est proposé notamment par Goldstein *et al* [39], il s'agit d'affecter à  $\epsilon$  la valeur 1 seulement à la paroi, et la valeur 0 ailleurs; on conserve ainsi la condition d'adhérence à la paroi, le domaine fluide est inchangé, mais à l'intérieur de la paroi, le "solide" est libre de circuler. On peut pousser cette idée encore plus loin en imposant volontairement un mouvement au fluide à l'intérieur de la paroi. On parle alors d'imposer un champ cible, noté habituellement  $\vec{u}_0$ . La valeur triviale pour ce champ cible est le champ nul, ce qui correspond à un solide, mais qui on l'a vu engendre des problèmes de continuité à la paroi. Plus subtilement, pour conserver la continuité des gradients de vitesse, Mohd Yussof [82, 83] propose, pour la composante tangentielle, de prendre l'opposé du champ image par rapport à la paroi, et de garder la même composante normale, ce qui revient à imposer un point d'arrêt local. Pour le calcul de l'écoulement autour d'un cylindre, Parnaudeau [89] propose le champ cible suivant :

$$\vec{u}_0(r, \theta, z, t) = -f(r)\vec{u}(D - r, \theta, z, t) \quad (2.21)$$

où la fonction de modulation est donnée par

$$f(r) = \sin(2\pi r^2/D^2) \quad (2.22)$$

avec  $D$  le diamètre et  $(r, \theta, z)$  les coordonnées cylindriques. Ceci lui permet d'obtenir des champs plus réguliers et moins sujets à des oscillations parasites. Il obtient également de meilleurs résultats au niveau des grandeurs caractéristiques du sillage. L'auteur utilise une méthode de forçage direct, ce qui le conduit à une mise en oeuvre en deux fractionnements pour le traitement de l'incompressibilité, le champ cible n'étant pas *a priori* à divergence nulle.

### 2.1.3 Conclusion

Au vu de ces considérations bibliographiques, on note qu'un important savoir-faire existe aujourd'hui pour l'utilisation des méthodes de modélisation de paroi par forçage. Des solutions sont développées pour résoudre les principaux problèmes initialement posés par ces méthodes, tels que l'obtention d'une condition d'adhérence, les contraintes supplémentaires sur le pas de temps ou les discontinuités introduites dans le domaine de calcul. Finalement, le coût supplémentaire apporté par l'implantation d'une méthode de modélisation de paroi par forçage dans un code de calcul d'écoulements libres vient du calcul de l'écoulement aux points du domaine solide, où la vitesse est déjà connue par hypothèse. Dans le cas de la méthode des frontières virtuelles, se rajoute la conséquence de la diminution du pas de temps. Ces coûts supplémentaires sont à mettre en comparaison avec le gain réalisé en évitant l'utilisation de maillages adaptés aux géométries étudiées et en rendant possible l'emploi de méthodes spectrales.

## 2.2 Les frontières virtuelles en tant qu'asservissement

L'expression d'un oscillateur harmonique amorti proposée par Goldstein *et al* [39] invite à prolonger cette intuition originale selon laquelle les frontières virtuelles sont chargées de réagir à la présence d'une vitesse dans le domaine fluide, de l'amener à zéro, et de la contrôler. Il nous est donc apparu nécessaire d'arriver à une description plus précise de ce comportement. Celle-ci a été réalisée pour une configuration test et est présentée dans la section suivante. Auparavant, un couple de paramètres plus judicieux que  $(\alpha, \beta)$  doit être introduit, comme présenté ci-dessous.

### Motivations pour une formulation en $(\omega_n, z)$

On peut donc considérer les méthodes de modélisation de paroi par forçage comme des systèmes d'asservissement de la vitesse à une valeur cible pour les points du domaine solide. On parlera dans ce cas de consigne à suivre pour la vitesse, au moyen de termes correcteurs venant compenser les perturbations extérieures dues à l'écoulement. Il apparaît alors que la méthode la plus à même de réaliser cette consigne est *a priori* la méthode de forçage direct, qui comme on l'a vu au paragraphe 2.1.2, définit un terme de forçage conduisant immédiatement à la condition recherchée. Cependant, pour satisfaire l'hypothèse d'incompressibilité, cette réalisation idéale de la consigne n'est possible que pour le champ de vitesse intermédiaire  $\vec{u}^*$ . Après l'étape de correction par le gradient de pression, le champ de vitesse réel ne sera pas exactement nul aux points où le forçage direct est appliqué. Finalement, on peut dire que la méthode des frontières virtuelles réalise imparfaitement la consigne sur le bon champ de vitesse, tandis que la méthode de forçage direct réalise parfaitement la consigne mais sur un champ de vitesse inadéquat. Dans les deux cas, des vitesses résiduelles ne peuvent être évitées. En forçage direct, des techniques récemment développées permettent de les diminuer, en pratiquant une pré-correction. En frontières virtuelles, une étude sur les coefficients  $\alpha$  et  $\beta$  est intéressante afin d'envisager une réduction

de ces vitesses résiduelles qui ne soit pas contraignante vis-à-vis du pas de temps. En effet,  $\beta$  contrôlant l'amortissement des oscillations éventuelles lors de la réponse du système, on peut penser que les vitesses résiduelles seront réduites en imposant une grande valeur à ce paramètre. A l'inverse, pour tous les schémas d'avancement temporel sauf le schéma de Runge-Kutta d'ordre 3 lorsqu'il est appliqué à nombre  $CFL$  constant, Lee [73] suggère d'imposer  $\beta$  nul afin de se libérer pleinement de son caractère trop contraignant pour le pas de temps.

Si la formulation en  $(\alpha, \beta)$  permet de piloter indépendamment le terme intégral et le terme proportionnel dans la définition 2.3 du terme de forçage, elle n'est cependant pas adaptée au fonctionnement d'un oscillateur harmonique amorti classique, dans lequel ce sont l'amortissement et la fréquence naturelle qui sont les paramètres de contrôle. C'est pourquoi l'étude des performances de la méthode des frontières virtuelles est mieux adaptée si elle est faite en fonction de ces deux paramètres, notés  $z$  et  $\omega_n$ , définis par :

$$\alpha = -\omega_n^2 \quad \text{and} \quad \beta = -2z\omega_n \quad (2.23)$$

où  $\omega_n$  a la dimension d'une fréquence et  $z$  est sans dimension. Une première conséquence de la formulation en  $(\omega_n, z)$  est qu'elle conduit à une séparation des paramètres dans l'expression 2.14 qui devient :

$$\Delta t \leq \frac{1}{2\omega_n} \left( -z + \sqrt{z^2 + k/2} \right) \quad (2.24)$$

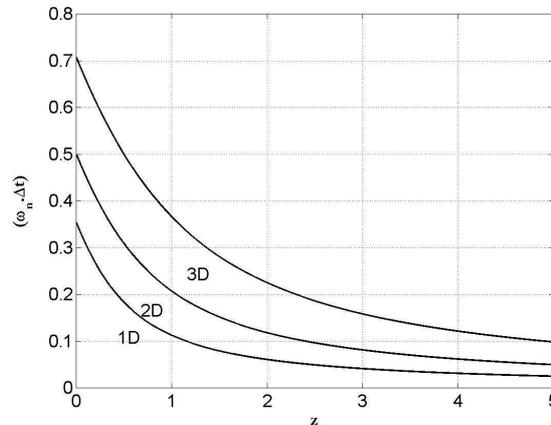


FIG. 2.6 – Contrainte sur le pas de temps en frontières virtuelles, pour un schéma d'Adams-Bashforth d'ordre 2

Sur la figure 2.6, on a représenté cette limite du pas de temps, pour les cas  $k = 1$  (1D),  $k = 2$  (2D) et  $k = 4$  (3D). On constate l'intérêt qu'il peut y avoir pour le pas de temps à choisir la plus faible valeur possible pour  $z$ . Néanmoins, ce n'est pas la valeur optimale pour atteindre la valeur cible. Pour l'oscillateur harmonique amorti, correspondant à l'équation différentielle  $\frac{d^2u}{dt^2} + 2z\omega_n \frac{du}{dt} + \omega_n^2 u = 0$ , la valeur optimale pour l'amortissement

est 1 pour les mathématiciens, et 0.7 pour les sciences de l'ingénieur où l'on s'autorise un léger dépassement afin de gagner en rapidité. Au paragraphe suivant, nous présentons les résultats d'une étude visant à décrire l'influence du couple  $(\omega_n, z)$  sur le comportement d'un domaine solide modélisé au moyen de frontières virtuelles.

## 2.3 Comportement de la méthode des frontières virtuelles

### 2.3.1 Présentation

Nous nous inspirons ici des tests présentés par Goldstein *et al* [39], dans lesquels, au sein d'un écoulement initialement uniforme  $(u_x, u_y) = (1, 0)$ , un point de grille est brusquement soumis à une condition d'adhérence par frontières virtuelles. Les auteurs observent alors la réponse temporelle de la vitesse en ce point, présentée ici sur la figure 2.7. Lorsque  $\beta$  est nul, les oscillations de la vitesse sont amorties par la viscosité. Elles peuvent être encore plus amorties si l'on diminue le nombre de Reynolds de l'écoulement basé sur la taille de la cellule, ou bien en augmentant la valeur absolue de  $\beta$ .

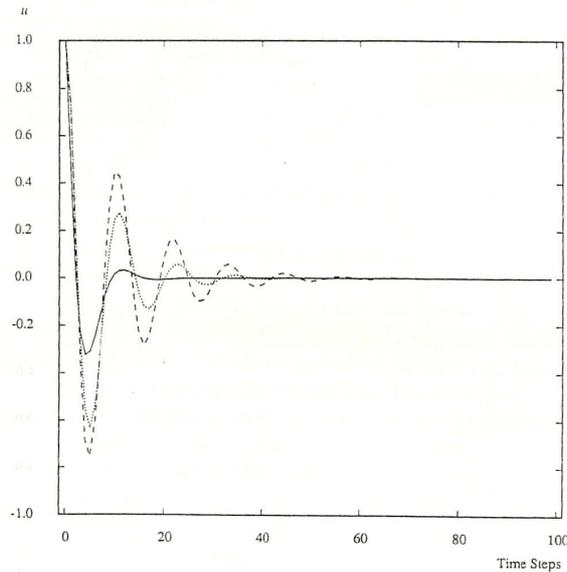


FIG. 2.7 – Réponse temporelle de la vitesse en un point de grille soumis brusquement à une condition d'adhérence [39]. Tirets :  $\alpha = -100$ ,  $\beta = 0$ ,  $Re_{cell} = 100$ ; points :  $\alpha = -100$ ,  $\beta = 0$ ,  $Re_{cell} = 2$ ; trait continu :  $\alpha = -100$ ,  $\beta = -10$ ,  $Re_{cell} = 2$

Dans le cadre de notre travail, nous avons souhaité préciser le comportement de cette réponse temporelle en fonction du couple  $(\omega_n, z)$ . De plus, il nous a paru important d'étudier la variation de cette réponse au sein du domaine solide, ainsi que la capacité des frontières

virtuelles à engendrer un contour solide anguleux. La configuration retenue pour tester la méthode des frontières virtuelles est donc celle présentée sur la figure 2.8 : un écoulement sur un cylindre à section carrée, en deux dimensions. L'unité de longueur de la simulation est le côté du carré  $h$ , l'unité de vitesse est la vitesse uniforme amont  $U_0$ . Le nombre de Reynolds  $Re$  basé sur ces deux grandeurs unitaires vaut 500, définissant ainsi la viscosité cinématique. Le domaine de calcul a une longueur de  $15h$  dans le sens de l'écoulement, et de  $10h$  dans la direction transverse. Le repère cartésien est centré sur le carré ; ainsi, l'entrée est à l'abscisse  $-5h$ , la sortie est à l'abscisse  $10h$ , et les frontières latérales du domaine de calcul sont à l'ordonnée  $\pm 5h$ . Le nombre de mailles est  $n_x \times n_y = 385 \times 257$ , c'est-à-dire que le côté du carré est discrétisé par 26 points. Nous prenons  $\epsilon = 1$  pour les points à l'intérieur du carré, et  $\epsilon = 0$  à l'extérieur. Ceci équivaut à se placer dans le cas 1D de l'étude de Lee [73] présentée au paragraphe 2.1.2, puisque chaque point solide correspond à un point de grille.

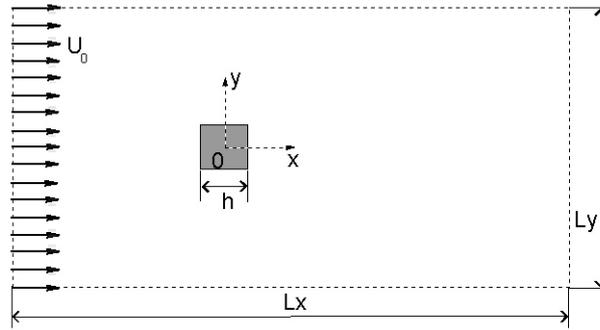


FIG. 2.8 – Paramètres pour l'écoulement sur un cylindre à section carrée de côté  $h$ .

Sur la base des valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$  proposées par Goldstein *et al* [39] et Lamballais & Silvestrini [67] pour des écoulements analogues, 9 jeux de paramètres  $(\omega_n, z)$  ont été retenus, et sont présentés dans le tableau 2.1, avec les valeurs de  $(\alpha, \beta)$  correspondantes.

Le tableau présente également le pas de temps limite fourni par la condition 2.24. Par ailleurs, pour cette configuration d'écoulement, le critère  $CFL$  requiert un pas de temps inférieur à  $17.10^{-3}h/U_0$ . De fait, pour le premier jeu de paramètres  $(\omega_n, z)$ , ce dernier critère est limitant, et non plus la condition 2.24. En pratique, pour les couples  $(30, 0.7)$  et  $(30, 1)$ , le pas de temps a été forcé à  $9.10^{-3}h/U_0$  pour éviter la divergence de la simulation à l'interface entre les deux tourbillons de recirculation au moment de leur déstabilisation.

L'objectif étant ici d'observer la manière dont le solide émerge au milieu d'un écoulement initialement uniforme, l'écoulement en lui-même ne sera que peu étudié et documenté. Cependant, à ce nombre de Reynolds, le sillage 2D est une allée tourbillonnaire périodique. La réponse fournie par les frontières virtuelles sera découpée en trois phases : d'abord, les premiers pas de temps de la simulation, où la vitesse passe brusquement de la valeur 1 à des valeurs de l'ordre de  $10^{-2}$  ; puis un temps d'établissement au cours duquel la vitesse

$\omega_n$	$z$	$\alpha$	$\beta$	$1000.\Delta t_{lim}$
30	0.7	-900	-42	19.667
30	1.	-900	-60	11.986
30	3.	-900	-180	4.384
50	0.7	-2500	-70	9.440
50	1.	-2500	-100	7.192
50	3.	-2500	-300	2.631
70	0.7	-4900	-98	6.743
70	1.	-4900	-140	5.137
70	3.	-4900	-420	1.879

TAB. 2.1 – Jeux de paramètres et pas de temps limite (dans le cas d’une intégration temporelle avec un schéma d’Adams-Bashforth d’ordre 2, en 1D) pour les tests sur la méthode de frontières virtuelles.

décroit encore, où l’on observe le développement de la recirculation en aval du carré jusqu’à sa déstabilisation ; enfin, un régime oscillant qui sollicite périodiquement la paroi.

### 2.3.2 Régime de lâcher

Nous proposons ici de comparer la réponse temporelle fournie par la méthode des frontières virtuelles, solution du système suivant (où l’on a supposé négligeables les termes correspondant à la viscosité, à la convection et au gradient de pression, bien qu’ils soient présents dans la simulation) :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}(\vec{x}, t) &= -\omega_n^2 \int_0^t \vec{u}(\vec{x}, \tau) d\tau - 2\omega_n z \vec{u}(\vec{x}, t) \\
u(0) &= 1 \\
\dot{u}(0) &= 0
\end{aligned} \tag{2.25}$$

à celle d’un oscillateur harmonique amorti en régime de lâcher, solution du système suivant :

$$\begin{aligned}
\frac{\ddot{u}}{\omega_n^2} + \frac{2z}{\omega_n} \dot{u} + u &= 0 \\
u(0) &= 1 \\
\dot{u}(0) &= 0
\end{aligned} \tag{2.26}$$

Bien que ces deux systèmes soient d’ordre deux, il faut dériver une fois le premier par rapport au temps pour retrouver le deuxième. En fait, le premier s’applique à la vitesse eulérienne du fluide, tandis que le second s’applique au déplacement lagrangien d’un point matériel de masse unitaire. L’étude du régime de lâcher permet d’obtenir une première illustration du comportement des frontières virtuelles analogue à celui d’un oscillateur harmonique amorti.

### Comportement théorique d'un système du second ordre

L'équation homogène du système 2.26 a pour discriminant  $\Delta = \omega_n \sqrt{z^2 - 1}$ . Dans le cas où  $z > 1$ , la solution est de la forme

$$u(t) = A'e^{r_1 t} + B'e^{r_2 t}$$

ou bien

$$u(t) = e^{-z \cdot \omega_n t} \left[ A \cdot \operatorname{ch} \left( \omega_n \sqrt{z^2 - 1} \cdot t \right) + B \cdot \operatorname{sh} \left( \omega_n \sqrt{z^2 - 1} \cdot t \right) \right]$$

avec

$$\begin{aligned} r_1 &= -z\omega_n + \omega_n \sqrt{z^2 - 1} \\ r_2 &= -z\omega_n - \omega_n \sqrt{z^2 - 1} \end{aligned}$$

Les conditions initiales imposent  $A' + B' = 1$  et  $r_1 A' + r_2 B' = 0$  ou encore  $A = 1$  et  $B \cdot \omega_n \sqrt{z^2 - 1} = 0$ . D'où :

$$u(t) = \frac{r_2 e^{r_1 t} - r_1 e^{r_2 t}}{r_2 - r_1} = e^{-z \cdot \omega_n t} \cdot \operatorname{ch} \left( \omega_n \sqrt{z^2 - 1} \cdot t \right) \quad (2.27)$$

Si  $z = 1$ , on a  $r = -z \cdot \omega_n = -\omega_n$  et  $u(t) = (At + B)e^{rt}$ . Les conditions initiales imposent  $B = 1$  et  $A + rB = 0$ , d'où :

$$u(t) = (1 + \omega_n t)e^{-\omega_n t} \quad (2.28)$$

Enfin, si  $z < 1$ , la solution est de la forme

$$u(t) = e^{-z\omega_n t} \left[ A \cdot \cos \left( \omega_n \sqrt{1 - z^2} \cdot t \right) + B \cdot \sin \left( \omega_n \sqrt{1 - z^2} \cdot t \right) \right]$$

avec

$$\begin{aligned} r_1 &= -z\omega_n + i \cdot \omega_n \sqrt{1 - z^2} \\ r_2 &= -z\omega_n - i \cdot \omega_n \sqrt{1 - z^2} \end{aligned}$$

et les conditions initiales imposent  $A = 1$  et  $B \cdot \omega_n \sqrt{1 - z^2} = 0$ . D'où :

$$u(t) = e^{-z\omega_n t} \cdot \cos \left( \omega_n \sqrt{1 - z^2} \cdot t \right) \quad (2.29)$$

Ces solutions sont récapitulées dans le tableau 2.2, qui regroupe également les expressions avec la formulation en  $(\alpha, \beta)$  :

Il est intéressant de noter la dépendance en  $\omega_n t$ . Ainsi, pour un coefficient d'amortissement  $z$  fixé, l'augmentation ou la diminution de  $\omega_n$  est équivalente à une contraction ou à une dilatation proportionnelle du temps de réponse. Or la même dépendance en  $\omega_n t$  a été observée dans la condition sur le pas de temps (2.24). On peut dire que celle-ci fixe le nombre de points nécessaires pour discrétiser le temps  $\frac{1}{\omega_n}$ , en fonction de  $z$ . Par conséquent, on ne pourra pas diminuer le coût d'un calcul en augmentant  $\omega_n$ , car cela diminuera certes le temps de réponse, mais le pas de temps étant diminué dans la même proportion, le nombre de pas de temps nécessaires pour atteindre la même réponse sera identique.

$\beta > 2\sqrt{\alpha}$	$u(t) = e^{-\frac{\beta}{2}t} \cdot ch\left(t\frac{\sqrt{\beta^2-4\alpha}}{2}\right)$	$z > 1$	$u(t) = e^{-z\omega_n t} \cdot ch(\omega_n t\sqrt{z^2-1})$
$\beta = 2\sqrt{\alpha}$	$u(t) = \left(1 + \frac{\beta t}{2}\right)e^{-\frac{\beta}{2}t}$	$z = 1$	$u(t) = (1 + \omega_n t)e^{-\omega_n t}$
$\beta < 2\sqrt{\alpha}$	$u(t) = e^{-\frac{\beta}{2}t} \cos\left(t\frac{\sqrt{4\alpha-\beta^2}}{2}\right)$	$z < 1$	$u(t) = e^{-z\omega_n t} \cdot \cos(\omega_n t\sqrt{1-z^2})$

TAB. 2.2 – Expression de l'évolution temporelle d'un oscillateur amorti du second ordre en régime de lâcher. A gauche : formulation en  $(\alpha, \beta)$  ; à droite : formulation en  $(\omega_n, z)$ .

### Comparaison avec la réponse d'une frontière virtuelle

On compare maintenant la réponse de la frontière virtuelle dans un écoulement à celle du système théorique (2.26). On étudie tout d'abord le comportement au centre du carré, présenté sur la figure 2.9. Ce point est le plus favorisé car il est largement entouré par d'autres points solides. C'est celui qui aura la réponse la plus proche du régime théorique de lâcher.

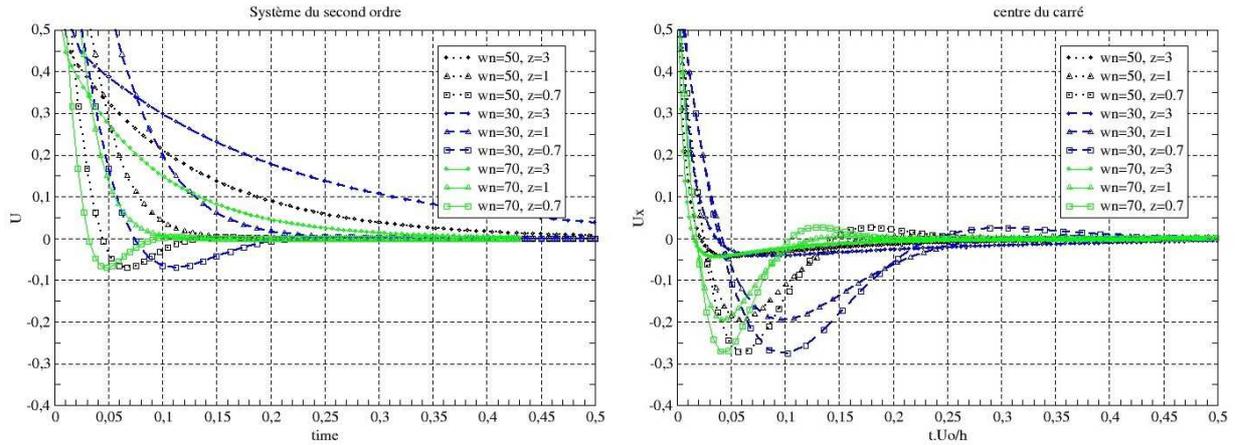


FIG. 2.9 – Evolution de  $u_x$  au centre du carré - Influence de  $\omega_n$  et  $z$ .

Pour la réponse théorique, on vérifie qu'à  $z$  fixé, une variation de  $\omega_n$  correspond à une simple dilatation temporelle. Un dépassement est observé pour  $z = 0.7$ ,  $z = 1$  correspond au cas limite, tandis que  $z = 3$  donne une convergence plus lente vers la valeur 0 mais sans dépassement. S'agissant de la réponse réelle, des dépassements sont observés pour les 3 valeurs de  $z$ , et ils sont plus prononcés. La dépendance en  $\omega_n$  est tout à fait conforme au comportement théorique, à savoir que les réponses sont simplement dilatées dans le temps quand  $\omega_n$  diminue. On note également que les dépassements de la réponse réelle dans le cas  $z = 0.7$  se produisent quasiment aux mêmes instants que ceux de la réponse théorique. Cependant, lorsque  $z$  augmente, les dépassements se font moins prononcés, la réponse se fait plus rapidement, contrairement à ce qui se passe théoriquement.

Sur la figure (2.10), les réponses en des points du contour du carré sont présentées : au centre des faces avant, arrière et supérieure, ainsi qu'aux deux coins supérieurs. On peut faire les mêmes observations qu'au centre du carré, à savoir le rôle presque uniquement temporel de  $\omega_n$ , les oscillations moins amorties que dans le cas théorique, et une plus grande rapidité quand  $z = 3$ . Le milieu de la face supérieure est celui qui se rapproche le plus du comportement au centre du carré et du comportement théorique, tout en étant plus rapide. Les faces avant et arrière ont des réponses similaires ; pour la face avant, on note cependant une légère diminution du dépassement quand  $\omega_n$  diminue.

Les réponses aux coins ont une forme moins régulière. Les dépassements sont moins importants qu'au milieu des faces verticales, mais ils se produisent environ deux fois plus tard. On peut supposer que ces réponses sont perturbées par la singularité qui conduit à une vitesse élevée de l'écoulement à proximité.

### Influence des termes négligés et des points alentour

Les différences de comportement observées entre la réponse d'une frontière virtuelle dans un écoulement et le système oscillant théorique du second ordre ont deux origines : premièrement, la présence des termes associés au rotationnel de vitesse, à la viscosité et au gradient de pression ; deuxièmement, l'influence des points alentour. L'observation de l'évolution des termes dont la somme est égale à la dérivée temporelle de la vitesse, définis aux équations 2.1 et 2.3, tracée figure 2.11, montre qu'au centre du carré et au milieu du front, l'hypothèse de la prépondérance des termes de forçage est valide, au moins pour le tout début de la réponse. En revanche, le terme visqueux n'est plus tout à fait négligeable pour le milieu de la paroi supérieure et pour le coin frontal. Ce dernier a également un terme rotationnel important. Les termes rotationnel et visqueux étant des dérivées spatiales du champ de vitesse, leur influence ressemblerait *a priori* davantage à celle d'un terme en  $\beta u$  qu'à celle d'un terme en  $\alpha \int u dt$ . Ceci pourrait expliquer qu'ils ne perturbent pas le rôle du paramètre  $\omega_n$ , observé ci-dessus pour l'ensemble des points considérés, comme étant limité à une contraction de l'axe du temps.

On a vu que l'augmentation du paramètre  $z$  entraîne une diminution du caractère oscillatoire de la réponse. A cet égard, la réponse au coin supérieur gauche semble montrer que le terme rotationnel conduit à une augmentation de la valeur réelle du coefficient d'amortissement : en ce point, le dépassement est certes plus important que dans le cas théorique mais demeure moins prononcé que pour les autres points. Cette conclusion rejoint celle de Goldstein *et al* [39] pour qui les termes négligés devant le forçage conduisent à un plus grand amortissement des oscillations.

Remarquons également qu'à la fin de la tranche temporelle représentée, la somme des termes n'est pas nulle au coin supérieur gauche et au milieu du front, principalement à cause du terme intégral. Ainsi, la dérivée temporelle de la vitesse n'est pas nulle, c'est-à-dire que l'équilibre n'est pas atteint. Ceci traduit vraisemblablement une erreur statique en ces points, qui sont sollicités en permanence par l'écoulement.

En ce qui concerne l'influence de points non-forcés alentour, il semblerait d'après Goldstein *et al* [39] qu'ils introduisent une masse supplémentaire pour l'oscillateur, ce qui a

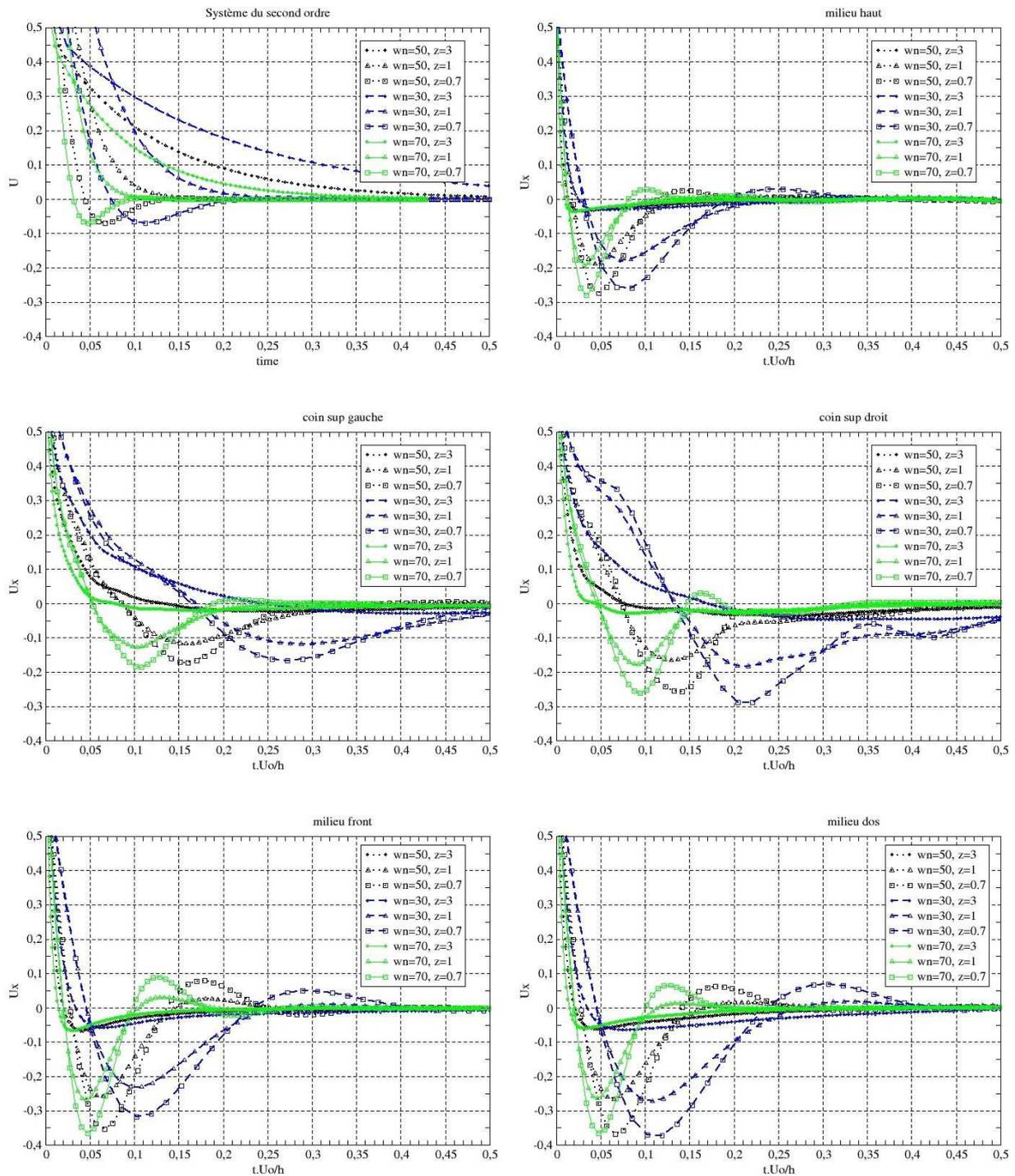


FIG. 2.10 – Evolution de  $u_x$  sur le contour du carré - Influence de  $\omega_n$  et  $z$ .

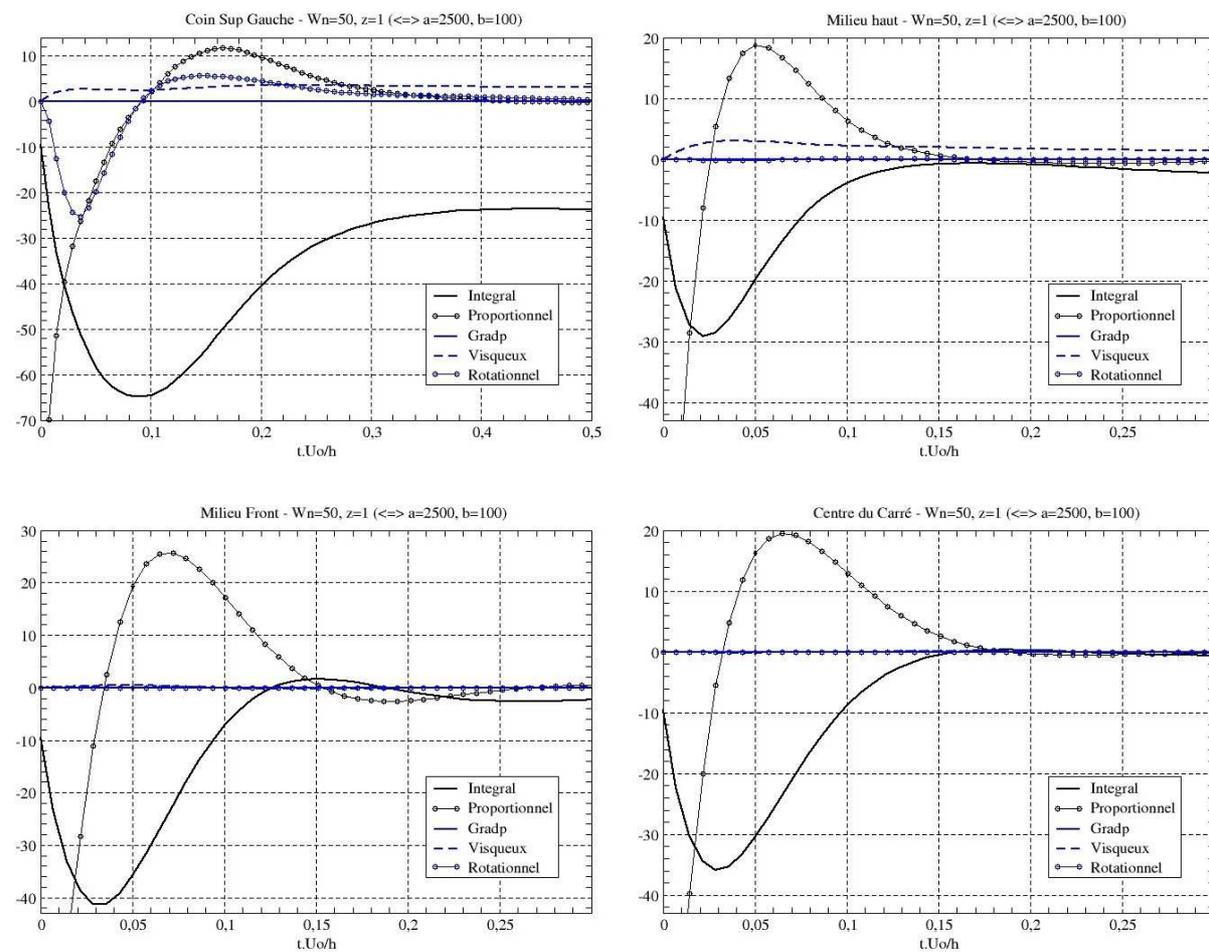


FIG. 2.11 – Importance relative des termes de variation de quantité de mouvement, dans la direction  $x$ .  $\omega_n = 50$ ,  $z = 1$ .

pour effet de réduire la fréquence des oscillations. Dans le cas présent, au milieu de la paroi supérieure, on observe une contraction de l'axe du temps plus importante que celle du cas théorique et du centre du carré, ce qui traduit une valeur réelle de  $\omega_n$  plus importante que celle spécifiée. Cependant, ce trait n'est pas visible sur les deux autres faces et sur les coins.

L'idée d'une inertie supplémentaire pourrait expliquer les dépassements plus importants du système réel observés notamment au centre du carré, qui traduisent une valeur effective du coefficient d'amortissement plus faible que celle spécifiée. Mais comment expliquer alors que cette inertie n'entraîne pas parallèlement une diminution de  $\omega_n$ ? De plus, les points voisins étant également forcés, il est difficile d'envisager qu'ils viennent freiner la convergence de la vitesse à zéro.

Sur la figure 2.12, on a tracé l'évolution de la réponse en  $u_y$  pour les deux coins et le milieu de la face supérieure. La condition initiale spécifiée pour cette composante de la vitesse est la valeur nulle. Ainsi il ne s'agit pas d'un régime de lâcher. Au centre du carré, ainsi qu'au milieu du front et du dos,  $u_y$  demeure absolument nulle car la symétrie initiale n'est pas encore détruite par les instabilités du sillage. En revanche, sur les courbes présentées, on voit que la vitesse verticale présente un sursaut initial avant de tendre vers la valeur cible nulle, selon un type de réponse analogue à la composante  $u_x$ . On retrouve ici le couplage entre les composantes de la vitesse par l'intermédiaire du terme rotationnel dans les équations de Navier-Stokes.

### Conclusion sur le régime de lâcher

L'ensemble de ces observations des premiers instants de la réponse d'une frontière virtuelle dans un écoulement initialement uniforme conduit à deux conclusions intéressantes. En premier lieu, dans la réponse théorique d'un système harmonique amorti du second ordre en régime de lâcher, apparaît une dépendance en  $\omega_n t$  qui se retrouve bien dans la réponse de la frontière virtuelle. A  $z$  constant, on observe simplement un ralentissement ou une accélération de la réponse selon que  $\omega_n$  diminue ou augmente. Pour ce régime, le rôle du paramètre  $\omega_n$  est donc presque exclusivement de définir un temps caractéristique. En second lieu, la valeur effective du coefficient d'amortissement  $z$  semble dans tous les cas être plus faible que celle spécifiée, puisque des dépassements plus importants sont observés. Un effet contraire est observé aux coins : l'influence du terme rotationnel, similaire à celle d'une augmentation de  $z$ , n'est plus négligeable.

### 2.3.3 Phase d'établissement

On s'intéresse maintenant à la phase d'établissement de l'écoulement. Il s'agit d'évaluer le rôle des paramètres  $\omega_n$  et  $z$  sur la façon dont la géométrie du carré se dessine. Comme on peut le voir sur la figure 2.13, deux tourbillons de recirculation symétriques sont engendrés en aval du carré. Ils se développent jusqu'à leur déstabilisation qui intervient vers  $t = 100.h/U_0$ . Au delà, un phénomène de lâcher tourbillonnaire périodique est observé. Ce déroulement est le même quel que soit le jeu de paramètres  $(\omega_n, z)$ .

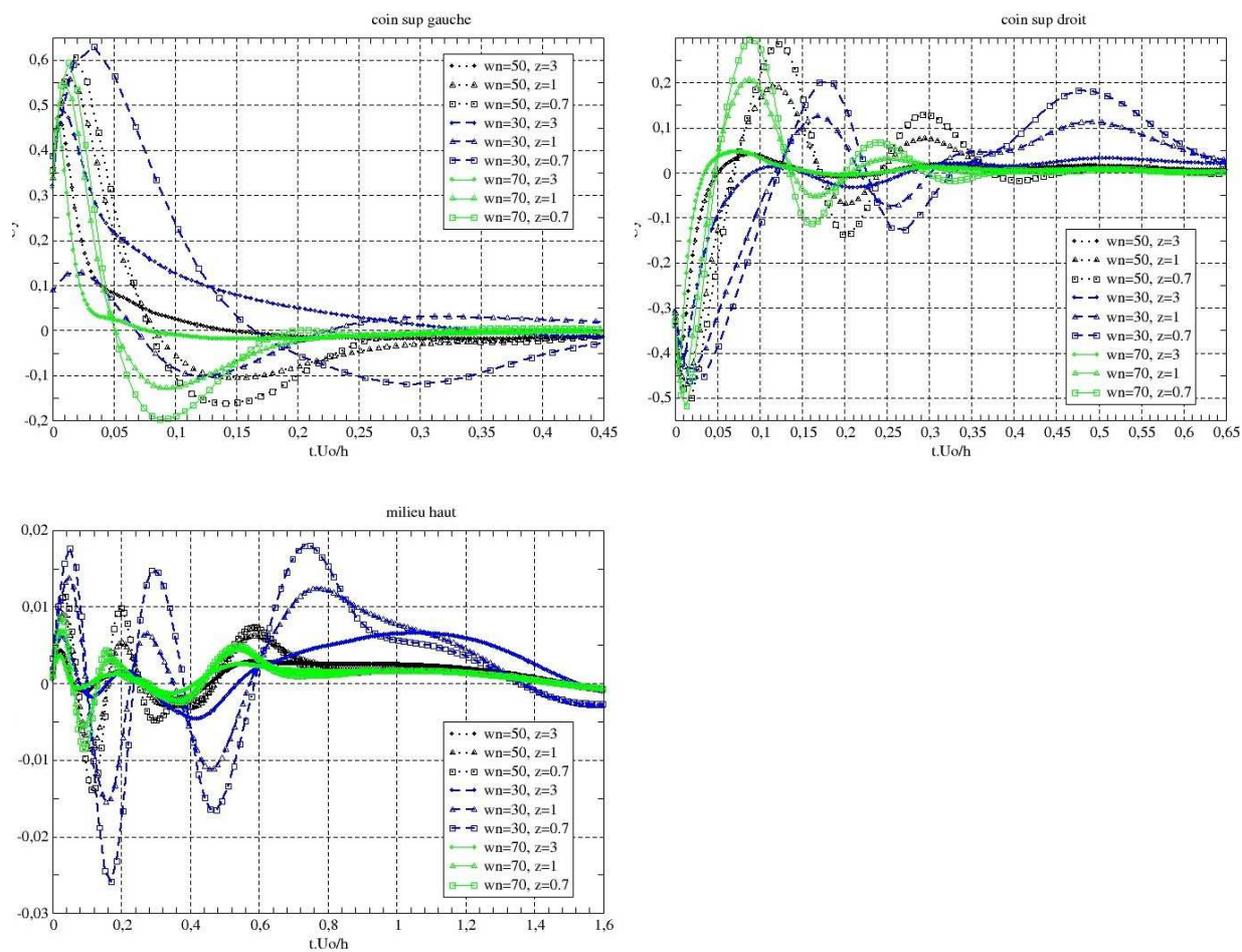


FIG. 2.12 – Evolution de  $u_y$  sur la paroi supérieure - Influence de  $\omega_n$  et  $z$ .

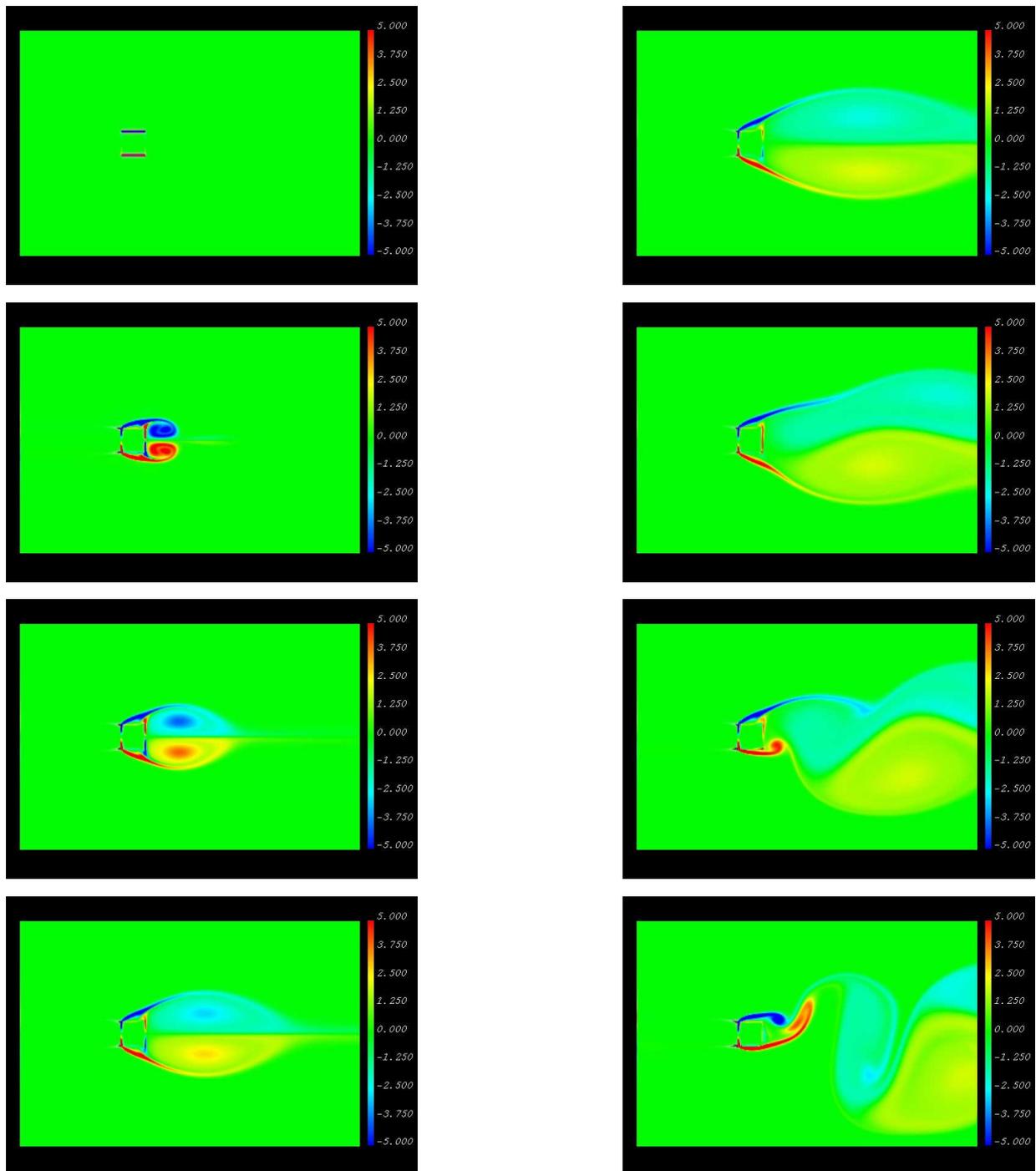


FIG. 2.13 – Isovaleurs de la composante transverse du rotationnel de vitesse,  $\omega_n = 50$ ,  $z = 1$ . Instants représentés :  $[0.007, 5.8, 20.1, 48.9, 92.1, 103.6, 106.4, 109.3]h/U_0$ . Niveaux de saturation :  $\pm 5.U_0/h$ .

L'évolution de la norme de la vitesse au cours de la phase d'établissement, tracée figure 2.14 aux points caractéristiques du carré pour les jeux de paramètres  $(\omega_n, z)$  spécifiés, montre que le coefficient d'amortissement n'a aucune influence au cours de cette phase. En effet, quel que soit le point observé, pour chaque valeur de  $\omega_n$  les trois courbes correspondant aux différentes valeurs de  $z$  sont quasiment superposées. Ceci est très intéressant puisque la valeur de  $z$  la moins contraignante pour le pas de temps peut ainsi être choisie sans entraîner une performance inférieure. On peut vérifier par ailleurs que la valeur des coefficients de forçage n'affecte pas le processus général de déstabilisation, notamment à travers le fait que les fluctuations de vitesse résiduelle qui y sont associées apparaissent au même instant.

Au milieu de la face frontale, on remarque que la pente devient quasiment nulle assez rapidement. Cela se remarque aussi au coin supérieur gauche, un peu plus tard. De plus, pour ces deux points, l'influence de  $\omega_n$  est faible. On retrouve ici l'erreur statique mentionnée pour ces points en fin de régime de lâcher.

Pour les autres points, l'influence de  $\omega_n$  est plus marquée : pour les 3 valeurs de ce paramètre, on observe une évolution analogue, mais cette évolution est d'autant plus rapide que  $\omega_n$  est élevé. Les pics visibles témoignent d'une oscillation autour de la valeur nulle. Si l'établissement se poursuivait indéfiniment, il est probable que l'on observerait plusieurs pics successifs, à une fréquence proportionnelle à  $\omega_n$ . Dans le cas présent, après les pics, la vitesse résiduelle demeure globalement indépendante de  $\omega_n$ .

L'étude de cette phase d'établissement est intéressante d'un point de vue de la simulation d'un écoulement laminaire en présence de parois modélisées par frontières virtuelles. Dans la plage de couples  $(\omega_n, z)$  étudiée, la valeur exacte de ces paramètres n'a finalement pas beaucoup d'importance sur la qualité de la condition d'adhérence obtenue. Les vitesses résiduelles observées sont inférieures à  $10^{-3}U_0$  pour les milieux des faces frontale et dorsale, et inférieures à  $10^{-4}U_0$  pour les autres points étudiés. Remarquons qu'il est paradoxal d'obtenir un meilleur résultat aux coins, car c'est à proximité de ces points que la vitesse extérieure est la plus importante.

Un critère global pour la condition d'adhérence est de calculer la valeur rms de la norme de vitesse de l'ensemble des points formant le contour du carré. L'évolution temporelle de cette quantité est tracée sur la figure 2.15. La vitesse résiduelle avant la déstabilisation est ici de l'ordre de  $3 \cdot 10^{-4}U_0$ , et l'influence de  $(\omega_n, z)$  est faible. Il serait intéressant d'étudier s'il est possible de diminuer encore la valeur de  $z$  afin de pouvoir utiliser un pas de temps plus grand. On a vu qu'une valeur plus grande pour  $\omega_n$  permettait d'aller plus vite, mais au prix d'un pas de temps inversement plus faible, donc le gain final est nul.  $\omega_n$  sera donc choisi de manière à avoir une condition sur le pas de temps qui impose une contrainte du même ordre que les autres critères entrant en compte.

### 2.3.4 Régime oscillant

Abordons maintenant le régime quasi-périodique de détachement tourbillonnaire, qui se retrouve fréquemment en simulation numérique directe d'écoulements turbulents. Pour l'écoulement sur le carré, on observe l'évolution présentée sur la figure 2.16. Les visualisa-

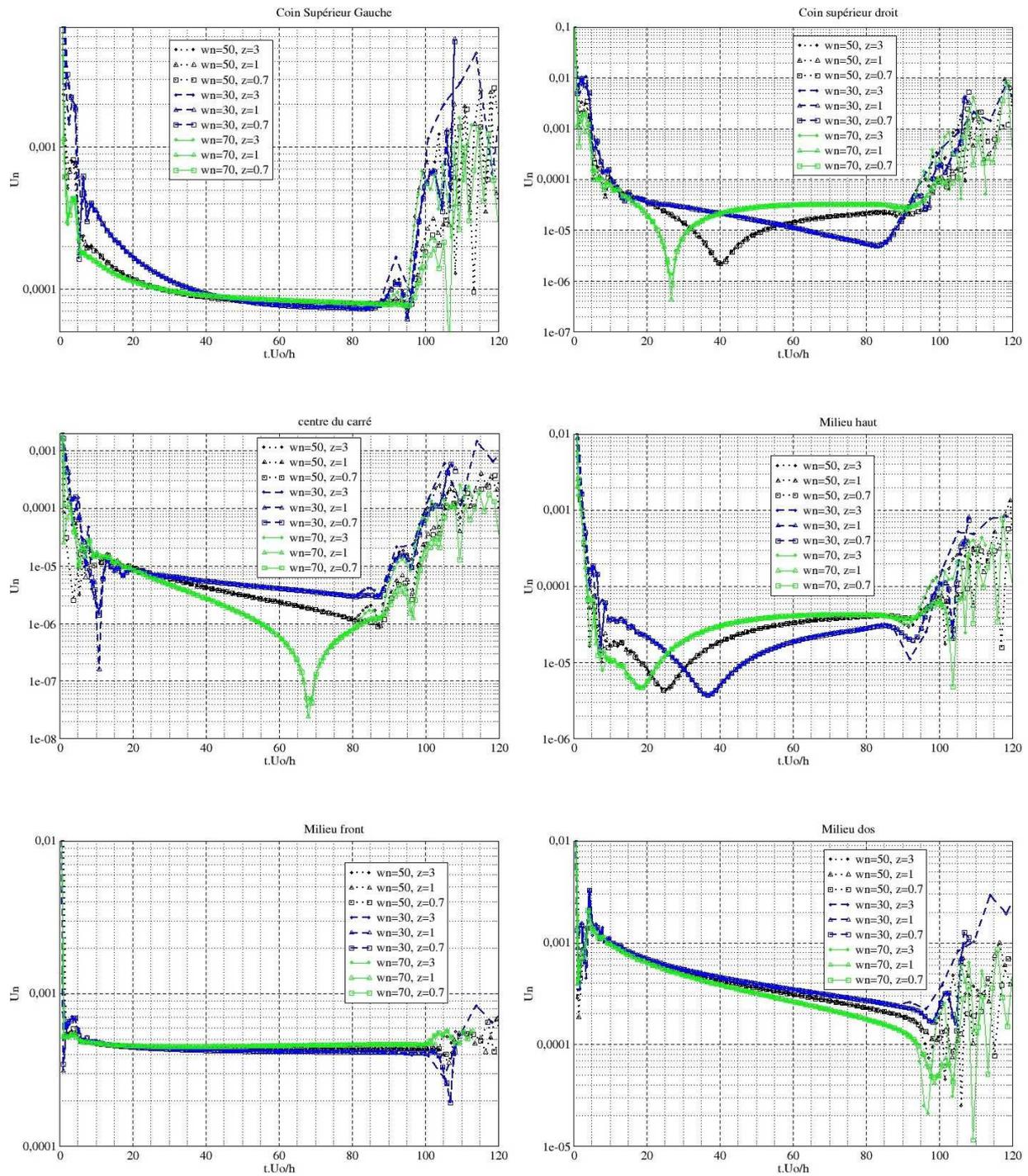


FIG. 2.14 – Evolution de la norme de la vitesse au cours de l'établissement - Influence de  $\omega_n$  et  $z$ .

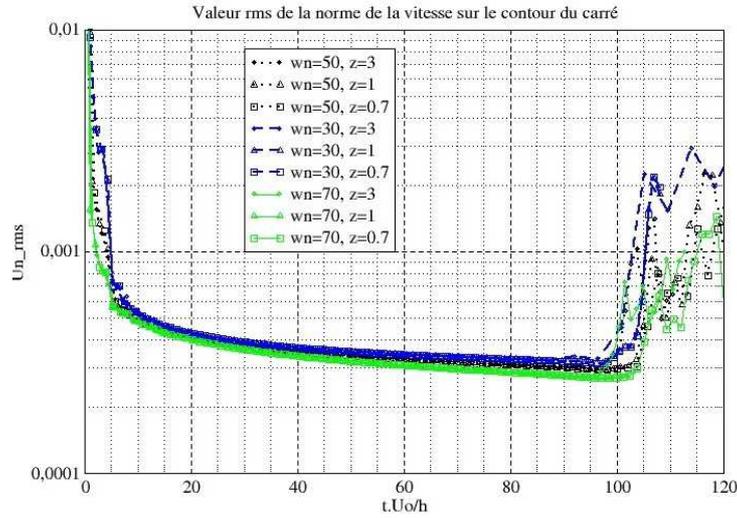


FIG. 2.15 – Evolution temporelle de la norme de la vitesse au cours de l'établissement - valeur rms sur l'ensemble des points du contour ; influence de  $\omega_n$  et  $z$ .

tions couvrent une durée d'environ  $10U_0/h$ , et correspondent globalement à un cycle. La fréquence principale de l'écoulement est donc de l'ordre de  $0.1h/U_0$ . Cette instationnarité du sillage entraîne des variations de la vitesse à proximité de la paroi. Pour la méthode des frontières virtuelles, il ne s'agit donc plus d'un régime de lâcher. Il ne s'agit pas non plus de fournir une réponse à une entrée oscillatoire. L'enjeu va être au contraire de maintenir la condition d'adhérence, c'est-à-dire de conserver des vitesses résiduelles les plus faibles possibles, malgré ces perturbations extérieures.

Observons donc ces vitesses résiduelles pendant le régime oscillant, pour les jeux de paramètres  $(\omega_n, z)$  considérés. La valeur rms sur le temps de la norme de la vitesse, le long du contour du carré, c'est-à-dire les points où est appliqué le forçage qui sont en contact avec l'écoulement, est tracée sur la figure 2.17. On constate, de la même manière que pour les régimes de lâcher et d'établissement, que le résultat dépend fortement du type de point considéré : les milieux des faces réalisent mieux la consigne que les coins. La forte accélération au voisinage de ces derniers conduit à des vitesses résiduelles plus importantes. Entre les différentes faces, le front réalise mieux la condition d'adhérence que les faces horizontales et que le dos, ce dernier étant le moins performant. Cette évolution le long du contour est observée pour chaque couple de paramètres. Concernant l'influence de ceux-ci, il est remarquable que celle de  $z$  est presque inexistante. En revanche, on note que la performance de la frontière virtuelle est directement liée à la valeur de  $\omega_n$  : plus la fréquence propre est élevée, plus la vitesse résiduelle est faible. Pour  $\omega_n = 30$  les coins aval présentent une vitesse résiduelle d'environ  $0.015U_0$ , contre  $0.0025U_0$  pour  $\omega_n = 70$ . Au milieu du dos, le résultat est d'environ  $0.0025U_0$  pour  $\omega_n = 30$  contre  $0.0008U_0$  pour  $\omega_n = 70$ . Pour la face frontale, les différences entre les 3 valeurs de  $\omega_n$  sont moins marquées.

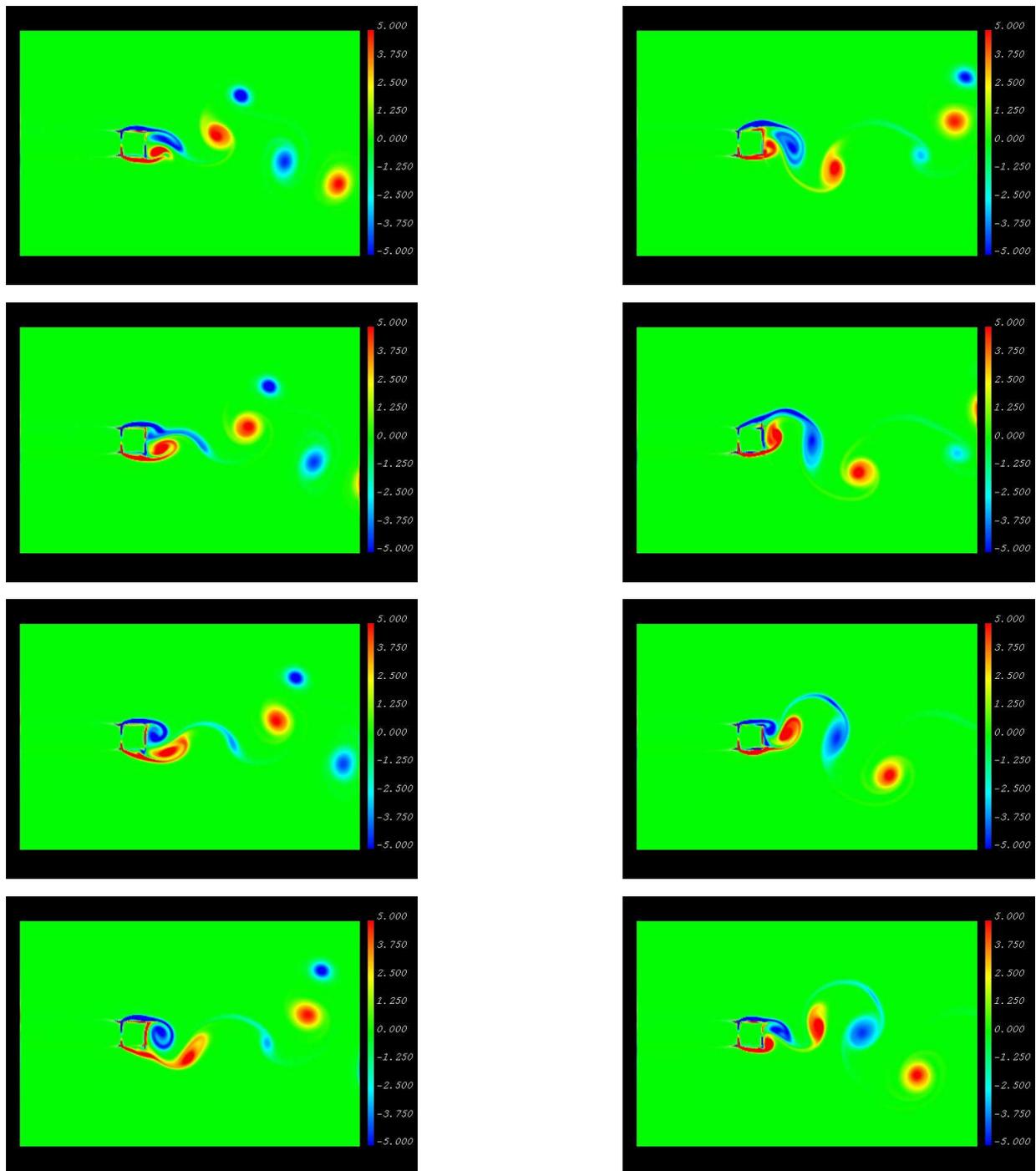


FIG. 2.16 – Isocouleurs de la composante transverse du rotationnel de vitesse,  $\omega_n = 50$ ,  $z = 1$ . Instants représentés : à partir de  $217U_0/h$ , par pas de  $1.44U_0/h$ . Niveaux de saturation :  $\pm 5.U_0/h$ .

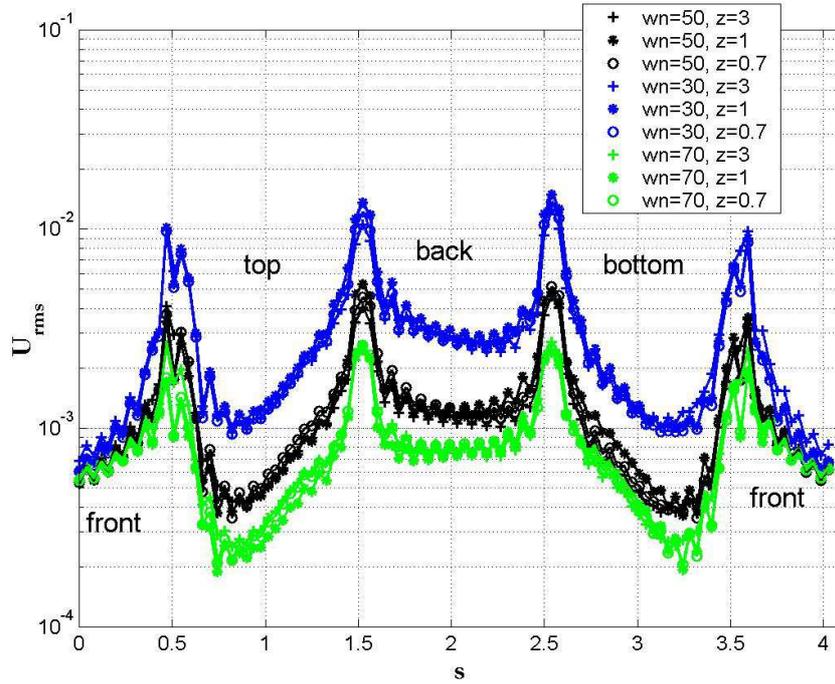


FIG. 2.17 – Valeur rms (sur le temps) de la norme vitesse en fonction de l’abscisse curviligne le long du contour (dont l’origine est prise au milieu du front, et l’unité est  $h$ ).

En régime de lâcher, on a vu que  $\omega_n$  correspond à la rapidité de la réponse (même si, pour la résolution numérique, le coût demeure identique). Ici, en régime oscillant, cette rapidité correspond à un écart de fréquence : plus  $\omega_n$  est élevé par rapport aux fréquences de l’écoulement qui sollicitent la paroi, plus la consigne d’adhérence est respectée. Pour conclure pratiquement sur ce régime, on peut donc dire qu’il convient de donner une valeur faible à  $z$  puisque ceci permet d’augmenter le pas de temps sans diminuer les performances. Lee [73] aboutit à des conclusions similaires à l’issue de son étude de stabilité. En ce qui concerne  $\omega_n$ , ce paramètre sera choisi en fonction de la tolérance autorisée pour les vitesses résiduelles, sachant qu’une tolérance faible devra se payer par une diminution du pas de temps.

Des oscillations sont observées le long du contour. Elles semblent résulter de l’absence de traitement apporté aux singularités géométriques que constituent les 4 coins du carré. En particulier, le maillage n’est pas raffiné à proximité. L’absence de filtrage dans les simulations réalisées ainsi que l’emploi de schémas centrés d’ordre élevé accentuent ces oscillations.

### 2.3.5 Influence des paramètres numériques

Des tests ont été réalisés afin de vérifier la stabilité du comportement des frontières virtuelles en différents points du domaine solide, pour les régimes décrits dans les paragraphes précédents. On a pu ainsi observer que l'augmentation de la taille du domaine de calcul à l'entrée ou à la sortie, l'utilisation d'une condition aux limites périodique dans la direction  $y$ , ou un pas de temps quatre fois plus faible, ne changent pas ces comportements. Une légère modification du régime d'établissement est observée lorsqu'on augmente la taille du domaine de calcul dans la direction  $y$ . En effet, les tourbillons de recirculation sont de plus grande taille et d'intensité moindre, à cause du confinement moins important. Ainsi, leur déstabilisation est moins brutale et conduit à de plus faibles contraintes à la paroi.

Le paramètre numérique qui a ici le plus d'influence sur le comportement de la frontière virtuelle est le raffinement du maillage. Une simulation a été effectuée pour le couple  $(\omega_n, z) = (50, 1)$  en doublant le nombre de points dans chaque direction. Pour cette configuration, le critère  $CFL$  et le critère des frontières virtuelles fournissent quasiment le même pas de temps limite, de l'ordre de  $0.008h/U_0$ . En pratique, cette valeur a été divisée par deux pour éviter la divergence de la simulation à l'interface entre les deux tourbillons de recirculation au moment de leur déstabilisation. Tous les autres paramètres de la simulation restent les mêmes que ceux présentés au paragraphe 2.3.1. Les différences par rapport à la simulation de comparaison sont principalement visibles aux coins : en régime de lâcher, le dépassement initial est plus important ; en régime d'établissement, la chute de vitesse est plus rapide ; en régime oscillant, les vitesses résiduelles sont significativement plus importantes.

Les oscillations visualisées en régime oscillant sont réduites lorsque la grille est raffinée, bien que toujours présentes. Cependant, les arêtes vives donnent lieu à des séparations, et des couches de mélange sont formées dont l'épaisseur initiale pilote en partie les mécanismes d'instabilité dans le sillage. Or un maillage plus fin entraîne une meilleure définition de la paroi, et donc une singularité plus marquée, c'est-à-dire des arêtes plus vives, et par conséquent des couches de mélange plus minces. Outre que ceci rend les études de convergence en maillage particulièrement délicates à mener, l'accélération de l'écoulement au voisinage du coin est plus importante si l'arête est plus vive donc avec un maillage raffiné. C'est ainsi que peuvent s'expliquer les vitesses résiduelles plus importantes observées pour la simulation utilisant la grille plus fine.

### 2.3.6 Conclusion

Dans cette section, une évaluation des performances de la méthode des frontières virtuelles en tant que système d'asservissement de la vitesse à la valeur cible nulle a été réalisée. Pour cela, une formulation propre aux oscillateurs du second ordre, utilisant la pulsation propre  $\omega_n$  et le coefficient d'amortissement  $z$ , a été proposée. Un champ de vitesse uniforme étant la condition initiale de nombreuses simulations d'écoulements d'obstacles modélisés par frontières virtuelles, la pertinence de la formulation a été évaluée à travers l'étude d'un essai de lâcher, dans le cas théorique d'un système du second ordre et dans le

cas d'un écoulement 2D sur un cylindre à section carrée. Le lien existant dans la réponse théorique entre la pulsation propre et l'évolution temporelle en tout début de simulation est observé pour l'ensemble des points forcés, bien que cette évolution présente des comportements qui varient d'un point à l'autre de la section du carré. Les dépassements sont davantage prononcés que dans le cas théorique, ce qui traduit que l'amortissement effectif est moins important que celui spécifié par la valeur de  $z$ .

L'influence du couple  $(\omega_n, z)$  sur la réalisation de la condition d'adhérence a également été étudiée au cours de l'établissement de l'écoulement, et en présence d'un régime pseudo-périodique de lâcher tourbillonnaire. La norme de la vitesse a servi de critère pour évaluer les vitesses résiduelles, sur lequel le paramètre  $z$  s'est avéré n'avoir pratiquement pas d'influence. Du fait de l'accélération de l'écoulement au voisinage des coins, les vitesses résiduelles sont plus importantes en ces points. En régime oscillant, le paramètre  $\omega_n$  a une influence décisive : plus il est élevé, mieux la condition d'adhérence est modélisée. Les observations effectuées ont pour conséquence pratique qu'il vaut mieux privilégier les faibles valeurs de  $z$ , ce qui permet de se libérer de son caractère contraignant pour le pas de temps sans en payer le prix par des vitesses résiduelles plus élevées. Le paramètre  $\omega_n$  réduit celles-ci d'autant plus qu'il est supérieur aux fréquences principales de l'écoulement, cette performance s'accompagnant nécessairement d'une réduction du pas de temps. Une part d'arbitraire demeure dans la définition de vitesses résiduelles acceptables, ainsi on pourra être amené à choisir une valeur de  $\omega_n$  qui conduise à un pas de temps de l'ordre de celui requis par les autres critères de la simulation numérique, de type *CFL* ou visqueux par exemple.

Au-delà de la modélisation d'une condition d'adhérence, il pourrait être intéressant de rechercher des moyens d'utiliser le calcul des termes de forçage pour une étude plus globale de l'interaction fluide-structure. En effet, le calcul de l'écoulement aux points du domaine solide ne sert à rien si l'on ne considère que l'intérêt de la mécanique des fluides. Développer des relations entre les termes de forçage et les contraintes dans le solide permettrait peut-être de ne pas les calculer inutilement. Par ailleurs, ayant observé que la vitesse est correctement maintenue à zéro dans le domaine solide par les frontières virtuelles, il convient de s'assurer maintenant que la représentation de l'écoulement dans le domaine fluide est également d'une bonne qualité. Ceci fait l'objet du chapitre suivant, où un accent particulier est mis sur le calcul de la pression hydrodynamique, dont la connaissance permet l'évaluation du rayonnement acoustique des écoulements de paroi au moyen des analogies.

## Chapitre 3

# Écoulements incompressibles et frontières virtuelles - Pression hydrodynamique

*Oh! comme nous sommes heureux, nous les hommes de la connaissance, pour peu que nous sachions au moins nous taire assez longtemps!*  
*Friedrich NIETZSCHE, Zur Genealogie der Moral, 1887.*

Ce chapitre présente les résultats de simulations d'écoulements incompressibles comportant des parois modélisées par frontières virtuelles. Des comparaisons sont effectuées avec des données obtenues dans la littérature, pour la configuration de canal plan 3D turbulent, pour la constriction dissymétrique dans un canal plan 2D et pour la configuration de plaque plane, afin de valider les champs obtenus ici.

Nous présentons en détail la manière d'obtenir la pression hydrodynamique, qui, avec les champs de vitesse, sera utilisée en tant que terme source en entrée du calcul acoustique. La pression présente deux caractéristiques importantes ici : d'abord, pour les écoulements turbulents subsoniques en présence de parois solides, les lois en puissance prévoient que les sources dites surfaciques ont un rayonnement acoustique supérieur à celui des sources dites volumiques, d'un rapport égal à l'inverse du nombre de Mach au carré. Or les sources surfaciques s'expriment principalement avec la pression. L'importance de la pression dans le rayonnement sonore oblige donc à en maîtriser le calcul. D'autant plus que, second aspect, pour un écoulement incompressible, il est possible d'effectuer une simulation de l'évolution des champs de vitesses sans faire apparaître la pression en tant que variable de calcul, ou en se contentant de l'utiliser comme une variable dite "incompressibilisante" sans chercher à résoudre pleinement son évolution.

Le code de calcul utilisé ici ayant été conçu pour la simulation d'écoulements libres et incompressibles, quelques opérations supplémentaires ont été introduites afin d'obtenir l'évolution temporelle du champ de pression. Le processus global d'avancement de la simulation est donc décrit ici, en insistant sur l'extraction de la pression dans le cas d'une condition de périodicité dans la direction principale de l'écoulement et dans le cas

contraire. On observera notamment l'interaction entre la méthode des frontières virtuelles et la résolution de l'équation de Poisson.

## 3.1 Avancement temporel de la simulation

### 3.1.1 Le schéma de Runge-Kutta d'ordre 3

Le schéma de Runge-Kutta fait partie des schémas explicites, il permet de résoudre des équations où la dérivée temporelle d'une grandeur peut être exprimée en fonction des dérivées spatiales de cette grandeur. On considère un temps discrétisé de la manière suivante :

$$[t_1, t_2, t_3, \dots, t_k, t_{k+1}, \dots, t_{p-1}, t_p] = [t_k]_p \quad \text{avec} \quad t_{k+1} = t_k + \Delta t$$

Chaque pas de temps est ensuite divisé en trois sous-pas de temps, selon les définitions :

$$\forall k, \quad t_k = t_{k_1}, \quad t_{k_2} = t_k + \delta t_1, \quad t_{k_3} = t_{k_2} + \delta t_2, \quad t_{k_4} = t_{k+1} = t_{k_3} + \delta t_3$$

soit  $\delta t_i = t_{k_{i+1}} - t_{k_i}$  et  $\delta t_1 + \delta t_2 + \delta t_3 = \Delta t$ .

Le schéma utilisé s'appuie sur la propriété que pour toute fonction  $\phi$  du temps, l'intégrale entre deux instants intermédiaires peut s'exprimer avec une précision d'ordre 3 en fonction des valeurs prises aux instants discrets :

$$\int_{t_{k_i}}^{t_{k_{i+1}}} \phi(t) dt = a_i \Delta t \cdot \phi(t_{k_i}) + b_i \Delta t \cdot \phi(t_{k_{i-1}}) \quad (3.1)$$

en utilisant par exemple les coefficients donnés par Williamson [105] :

$$a_1 = \frac{8}{15}, \quad b_1 = 0$$

$$a_2 = \frac{5}{12}, \quad b_2 = -\frac{17}{60}$$

$$a_3 = \frac{3}{4}, \quad b_3 = -\frac{5}{12}.$$

Comme une propriété du schéma de Runge-Kutta est que  $a_i + b_i = \delta t_i$ , on a :

$$\delta t_1 = \frac{8}{15} \Delta t \quad \text{soit} \quad t_{k_2} = t_k + \frac{8}{15} \Delta t$$

$$\delta t_2 = \frac{2}{15} \Delta t \quad \text{soit} \quad t_{k_3} = t_k + \frac{2}{3} \Delta t$$

$$\delta t_3 = \frac{5}{15} \Delta t \quad \text{soit} \quad t_{k+1} = t_k + \Delta t$$

### 3.1.2 Equations d'évolution discrétisées en temps

Considérons les équations du mouvement incompressible, pour une masse volumique unitaire :

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \pi - \vec{\omega} \times \vec{u} + \nu \vec{\Delta} \vec{u} + \vec{f} \quad (3.2)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \quad (3.3)$$

où  $\pi = p + \frac{\rho \|\vec{u}\|^2}{2}$  est la pression modifiée. L'application du schéma de Runge-Kutta requiert l'intégration de (3.2) entre les instants  $t_{k_i}$  et  $t_{k_{i+1}}$  :

$$\int_{t_{k_i}}^{t_{k_{i+1}}} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} dt = \int_{t_{k_i}}^{t_{k_{i+1}}} \vec{F}[\vec{u}(t)] dt - \int_{t_{k_i}}^{t_{k_{i+1}}} \vec{\nabla} \pi(t) dt \quad (3.4)$$

avec

$$\vec{F}(\vec{u}) = -\vec{\omega} \times \vec{u} + \nu \vec{\Delta} \vec{u} + \vec{f}$$

En gardant à l'esprit que  $\vec{u}$  est évalué aux instants discrets et que  $\vec{F}$  est un opérateur sur cette vitesse, les notations peuvent être allégées en écrivant  $\vec{u}(t_{k_i}) = \vec{u}^{k_i}$  et  $\vec{F}[\vec{u}(t_{k_i})] = \vec{F}^{k_i}$ . Alors, dans (3.4), le membre de gauche s'écrit trivialement :

$$\int_{t_{k_i}}^{t_{k_{i+1}}} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} dt = \vec{u}^{k_{i+1}} - \vec{u}^{k_i} \quad (3.5)$$

De son côté, la première intégrale du membre de droite de (3.4) s'exprime à l'aide de la propriété (3.1) :

$$\int_{t_{k_i}}^{t_{k_{i+1}}} \vec{F}[\vec{u}(t)] dt = a_i \Delta t \vec{F}^{k_i} + b_i \Delta t \vec{F}^{k_{i-1}} \quad (3.6)$$

Quant à la pression, pour laquelle on ne dispose pas d'équation d'avancement du fait de l'hypothèse d'incompressibilité, elle ne peut être calculée qu'*a posteriori* et on est amené à noter :

$$\tilde{\pi}^{k_{i+1}} = \tilde{\pi}(t_{k_{i+1}}) = \frac{1}{t_{k_{i+1}} - t_{k_i}} \int_{t_{k_i}}^{t_{k_{i+1}}} \pi(t) dt = \frac{1}{\delta t_i} \int_{t_{k_i}}^{t_{k_{i+1}}} \pi(t) dt \quad (3.7)$$

$\tilde{\pi}$  est donc la valeur moyenne de la pression modifiée entre deux instants intermédiaires.

La discrétisation temporelle de l'équation (3.4) s'écrit finalement :

$$\forall k \in [1..p], \forall i \in [1, 2, 3, 4] : \vec{u}^{k_{i+1}} - \vec{u}^{k_i} = a_i \Delta t \vec{F}^{k_i} + b_i \Delta t \vec{F}^{k_{i-1}} - \delta t_i \vec{\nabla} \tilde{\pi}^{k_{i+1}}$$

avec l'obligation de vérifier (3.3) pour tout  $k$  et pour tout  $i$ , c'est-à-dire :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u}^{k_i} = 0 \quad (3.8)$$

La vérification de cette condition d'incompressibilité s'obtient en définissant un champ de vitesse intermédiaire  $\vec{u}^*$ , qui permet d'écrire le fractionnement suivant :

$$\vec{u}^* - \vec{u}^{k_i} = a_i \Delta t \vec{F}^{k_i} + b_i \Delta t \vec{F}^{k_{i-1}} \quad (3.9)$$

$$\vec{u}^{k_{i+1}} - \vec{u}^* = -\delta t_i \vec{\nabla} \tilde{\pi}^{k_{i+1}} \quad (3.10)$$

En effet, en appliquant l'opérateur divergence à l'équation (3.10), on obtient une équation de Poisson entre le champ de pression modifiée à l'instant  $t_{k_{i+1}}$  et le champ  $\vec{u}^*$ , puisque par hypothèse  $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}^{k_{i+1}} = 0$  :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \tilde{\pi}^{k_{i+1}} = \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{u}^*}{\delta t_i} \quad (3.11)$$

La résolution de l'équation de Poisson (3.11) n'est pas conduite de la même manière selon les conditions aux limites fixées dans la direction principale de l'écoulement. Dans la suite, nous la présentons donc pour le modèle temporel dans un premier temps, puis pour le modèle spatial.

## 3.2 Résolution de l'équation de Poisson en modèle Temporel

Dans ce modèle, l'écoulement est périodique dans la direction principale, et périodique ou en glissement libre dans les autres directions. L'équation de Poisson (3.11) peut alors être résolue complètement dans le domaine spectral. La vitesse est donc écrite selon sa décomposition de Fourier, telle que :

$$\vec{u}[x(i), y(j), z(k)] = \sum_l \sum_m \sum_n \hat{u}(l, m, n) \cdot e^{i[k_x(l)x(i) + k_y(m)y(j) + k_z(n)z(k)]} \quad (3.12)$$

où  $i^2 = -1$ ,  $(i, j, k)$  sont les indices de discrétisation spatiale et  $(l, m, n)$  sont les indices de décomposition modale. Avec cette définition, l'équation de Poisson (3.11) et l'équation d'avancement (3.10) s'écrivent, pour chaque mode  $(l, m, n)$  :

$$[-k_x^2(l) - k_y^2(m) - k_z^2(n)] \hat{\pi}^{k_{i+1}}(l, m, n) = \frac{1}{\delta t_i} [ik_x \hat{u}_x^* + ik_y \hat{u}_y^* + ik_z \hat{u}_z^*](l, m, n) \quad (3.13)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{u}_x^{k_{i+1}}(l, m, n) = \hat{u}_x^*(l, m, n) - \delta t_i \cdot ik_x(l) \hat{\pi}^{k_{i+1}}(l, m, n) \\ \hat{u}_y^{k_{i+1}}(l, m, n) = \hat{u}_y^*(l, m, n) - \delta t_i \cdot ik_y(m) \hat{\pi}^{k_{i+1}}(l, m, n) \\ \hat{u}_z^{k_{i+1}}(l, m, n) = \hat{u}_z^*(l, m, n) - \delta t_i \cdot ik_z(n) \hat{\pi}^{k_{i+1}}(l, m, n) \end{array} \right\} \quad (3.14)$$

Il faut observer ici que la combinaison des étapes (3.13) et (3.14) est souvent désignée par le terme de méthode de projection ou étape d'incompressibilisation plutôt que de méthode à pas fractionnaire ou de correction par le gradient de pression. En effet, dans le domaine de Fourier, l'équation de continuité (2.5) s'écrit à l'instant  $t_{k_{i+1}}$  :

$\forall(l, m, n), \quad k_x(l) \cdot \widehat{u}_x^{k_{i+1}}(l, m, n) + k_y(m) \cdot \widehat{u}_y^{k_{i+1}}(l, m, n) + k_z(n) \cdot \widehat{u}_z^{k_{i+1}}(l, m, n) = 0$   
soit en notation indicielle :

$$k_q \widehat{u}_q^{k_{i+1}} = 0 \quad (3.15)$$

Assurer l'incompressibilité à l'instant  $t_{k_{i+1}}$  équivaut donc à projeter le champ de vitesse intermédiaire  $\widehat{\vec{u}}^*$  dans un plan orthogonal à  $\vec{k}$ . Cette projection revient à retrancher de  $\widehat{\vec{u}}^*$  sa composante colinéaire à  $\vec{k}$  qui s'exprime par :

$$\frac{\widehat{\vec{u}}^* \cdot \vec{k}}{k^2} \vec{k} \quad (3.16)$$

Le résultat de cette projection est le champ de vitesse  $\widehat{\vec{u}}^{k_{i+1}}$  soit

$$\widehat{\vec{u}}^{k_{i+1}} = \widehat{\vec{u}}^* - \frac{\widehat{\vec{u}}^* \cdot \vec{k}}{k^2} \vec{k} \quad (3.17)$$

On retrouve bien ici la combinaison en une seule étape de l'équation de Poisson (3.13) et de l'équation d'avancement (3.14). Cela signifie que le passage par une variable contenant le véritable champ de pression modifiée n'est pas nécessaire si l'on souhaite connaître seulement l'évolution des champs de vitesse. On peut montrer, voir par exemple Ferziger & Perić [29], que le rôle de la pression est celui joué par un multiplicateur de Lagrange introduit dans la recherche du champ de vitesse le plus proche de  $\widehat{\vec{u}}^*$  qui satisfasse la condition de continuité.

### 3.2.1 Définition et propriété des modes singuliers

Les modes singuliers sont associés aux triplets  $(l, m, n)$  qui conduisent à une singularité pour l'équation (3.13). Ils doivent donc recevoir un traitement spécifique. On les note  $(l_0, m_0, n_0)$ , et ils sont tels que :

$$[k_x^2(l_0) + k_y^2(m_0) + k_z^2(n_0)] = 0 \quad (3.18)$$

c'est-à-dire  $k_x(l_0) = 0$ ,  $k_y(m_0) = 0$  et  $k_z(n_0) = 0$ , car  $k_x$ ,  $k_y$  et  $k_z$  sont des nombres réels.

On a donc, pour toute fonction  $\phi$  :

$$\begin{aligned} \phi[x(i), y(j), z(k)] &= \sum_{l \neq l_0} \sum_{m \neq m_0} \sum_{n \neq n_0} \widehat{\phi}(l, m, n) \cdot e^{i[k_x(l)x(i) + k_y(m)y(j) + k_z(n)z(k)]} \\ &+ \sum_{l=l_0} \sum_{m=m_0} \sum_{n=n_0} \widehat{\phi}(l_0, m_0, n_0) \end{aligned} \quad (3.19)$$

où l'on voit que la dérivée partielle de  $\phi$  par rapport à l'une des variables spatiales ne dépendra pas des modes singuliers  $\widehat{\phi}(l_0, m_0, n_0)$ . Appliqué à la pression modifiée  $\widetilde{\pi}$ , cela

veut dire que toute opération sur ces modes sera transparente pour l'étape d'avancement (3.14) qui n'utilise que son gradient.

Dans le code, afin de préserver l'équivalence entre les dérivations calculées dans l'espace physique et les dérivations calculées dans l'espace de Fourier, on utilise les nombres d'onde modifiés  $k_m$  tels que définis par Lele [74]. Les schémas compacts en maillage collocalisé ont un comportement quasi-spectral jusqu'à un certain degré dans les petites longueurs d'onde. Cependant,  $k_m$ , jusque-là proche du nombre d'onde observé pour un schéma purement spectral, retombe vers 0, et vaut précisément 0 pour le plus petit harmonique acceptable par le maillage, à savoir  $2\Delta d$ , où  $\Delta d$  est la taille de maille dans la direction  $d$ . Par conséquent, l'ensemble des modes singuliers est constitué du mode constant, correspondant à la valeur moyenne, et de tout mode comportant le plus petit harmonique dans l'une au moins des directions spatiales.

### 3.2.2 Solution de l'équation de Poisson

Dans (3.13), le cas singulier  $[k_x^2(l_0) + k_y^2(m_0) + k_z^2(n_0)] = 0$  peut être traité en forçant  $\widehat{\pi}^{k_{i+1}}(l_0, m_0, n_0) = 0$ . La solution  $\widetilde{\pi}$  ne contient alors plus le terme

$$\sum_{l=l_0} \sum_{m=m_0} \sum_{n=n_0} \widehat{\phi}(l_0, m_0, n_0)$$

Ce dernier étant une constante des variables d'espace,  $\widetilde{\pi}$  est donc définie à une constante près.

Pour tout triplet  $(l, m, n) \neq (l_0, m_0, n_0)$ , la pression modifiée, solution de (3.13), s'écrit :

$$\widehat{\pi}^{k_{i+1}}(l, m, n) = \frac{-\imath [k_x \widehat{u}_x^* + k_y \widehat{u}_y^* + k_z \widehat{u}_z^*](l, m, n)}{\delta t_i [k_x^2(l) + k_y^2(m) + k_z^2(n)]} \quad (3.20)$$

En pratique, on n'effectue pas la multiplication par  $\frac{1}{\imath \delta t_i}$  dans (3.20) puisqu'une multiplication par son inverse  $\imath \delta t_i$  doit ensuite être effectuée pour l'avancement (3.14). C'est cette économie qui entraîne que  $\widehat{\pi}$  n'est finalement pas le véritable champ de pression modifiée.

Donc, sur la base de ces observations, lors de la sauvegarde de la pression, il convient :  
 – d'effectuer la multiplication par  $-\imath$ , c'est-à-dire de réaliser les affectations suivantes :

$$\begin{aligned} Re[\widehat{\pi}] &\leftarrow Im[\widehat{\pi}] \\ Im[\widehat{\pi}] &\leftarrow -Re[\widehat{\pi}] \end{aligned}$$

Cette opération dépend de la manière dont sont rangées les parties réelle et imaginaire des modes dans les procédures de transformation de Fourier utilisées. Dans cette étude, cela revient à effectuer, pour tout  $(m, n)$  et pour tout  $l$  variant de 1 à  $n_x$  par

pas de 2 :

$$\begin{aligned}\pi_t &\leftarrow \widehat{\pi}(l+1, m, n) \\ \widehat{\pi}(l+1, m, n) &\leftarrow -\widehat{\pi}(l, m, n) \\ \widehat{\pi}(l, m, n) &\leftarrow \pi_t\end{aligned}$$

- où  $\pi_t$  est un scalaire tampon ;
- d’effectuer la division par  $\delta t_i$  ;
  - après retour dans l’espace physique, de retrancher  $\frac{\rho \|\vec{u}\|^2}{2}$  ;
  - de s’affranchir de l’indétermination de la constante en considérant l’écart par rapport à une pression de référence définie au préalable.

### 3.3 Application à la simulation de canal

Dans la mesure où nous souhaitons utiliser la méthode des frontières virtuelles dans le contexte de l’aéroacoustique, il nous a paru important d’étudier leur aptitude à simuler correctement un écoulement instationnaire. Le canal plan turbulent 3D est de ce point de vue intéressant puisqu’il s’agit d’un écoulement relativement académique et bien documenté.

#### 3.3.1 Présentation de l’écoulement

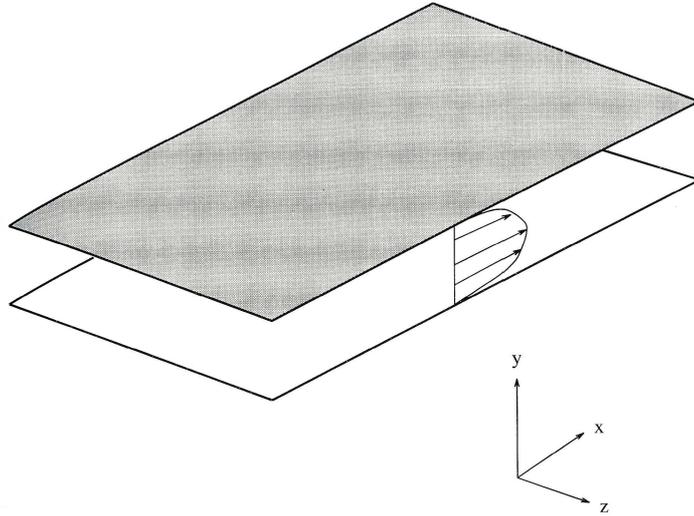


FIG. 3.1 – Configuration pour la simulation de canal plan.

On considère un domaine fluide compris entre les plans  $y = +h$  et  $y = -h$ , et s’écoulant principalement dans la direction  $x$ , selon la configuration de la figure 3.1. En faisant les

hypothèses d'un écoulement incompressible et stationnaire, et d'un champ de vitesse de la forme  $\vec{U} = (u_x(y), 0, 0)$ , l'équation de continuité est automatiquement vérifiée, et le bilan de quantité de mouvement s'écrit pour l'unité de masse :

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \\ 0 &= -\frac{\partial p}{\partial y} \end{aligned} \quad (3.21)$$

En adoptant les conditions aux limites :

$$\begin{aligned} p(x=0) &= p_0 \\ u_x(y=0) &= U_c \\ u_x(y=\pm h) &= 0 \end{aligned} \quad (3.22)$$

la solution obtenue est le profil parabolique de Poiseuille :

$$\begin{aligned} u_x(y) &= \left(1 - \frac{y^2}{h^2}\right) U_c \\ p(x) &= p_0 - 2\mu x \frac{U_c}{h^2} \end{aligned} \quad (3.23)$$

Le gradient de pression dans la direction  $x$ , égal à  $-2\mu \frac{U_c}{h^2}$ , constitue le moteur de l'écoulement.

Le nombre de Reynolds de l'écoulement est défini par

$$Re_c = \frac{hU_c}{\nu} \quad (3.24)$$

La solution (3.23) est vérifiée expérimentalement pour  $Re_c < 1000$ . Pourtant, en théorie, si on superpose à ce profil une perturbation infinitésimale, on peut montrer par une analyse de stabilité neutre qu'elle ne peut s'amplifier que pour  $Re_c > 5772$ . Des études de stabilité prenant en compte d'autres types de perturbations permettent de décrire certains processus de transition vers la turbulence observés expérimentalement et se produisant pour  $Re_c < 5772$ .

Pour faciliter l'étude du régime turbulent, on distingue habituellement deux régions dans un écoulement pariétal :

- la région externe, dominée par les effets d'inertie ;
- la région de proche paroi, dominée par les effets de viscosité.

On observe expérimentalement que la région de proche paroi s'étend jusqu'à environ 30 unités de parois. Celles-ci sont définies par l'intermédiaire de la contrainte visqueuse tangente à la paroi, en notant :

$$\begin{aligned} u_\tau &= \sqrt{\nu \frac{\partial u_x}{\partial y}(y = \pm h)} \\ \delta &= \nu / u_\tau \end{aligned} \quad (3.25)$$

$u_\tau$  est appelé vitesse de frottement, et  $\delta$  est la longueur de référence. On note  $y^+$  la distance à la paroi exprimée en unités pariétales, c'est-à-dire, pour les parois inférieure et supérieure respectivement :

$$\begin{aligned} y^+ &= \frac{y+h}{\delta} \\ y^+ &= \frac{y-h}{\delta} \end{aligned} \quad (3.26)$$

De la même manière, on note  $U^+ = U/u_\tau$ .

Dans la sous-couche visqueuse  $0 \leq y^+ \leq 5$ , on observe la loi suivante :

$$U^+ = y^+ \quad (3.27)$$

Pour  $5 \leq y^+ \leq 30$ , on observe un raccordement avec le début de la région externe, où un profil logarithmique est observé, de la forme :

$$U^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + B^+ \quad (3.28)$$

où  $\kappa$ , la constante de Karman, et  $B^+$  sont des constantes supposées universelles, déterminées empiriquement, dont les valeurs approximatives sont respectivement 0.4 et 5 dans le cas du canal plan.

De nombreux auteurs se sont penchés sur l'organisation des écoulements turbulents pariétaux, notamment sur la définition et la forme de structures tourbillonnaires cohérentes et sur les mouvements de fluide entre les zones interne et externe. Le recours à la simulation numérique, par l'intermédiaire de modèles de turbulence dans un premier temps, a notamment permis la reproduction de l'essentiel de la dynamique de l'écoulement. Mentionnons ici les simulations grandes échelles de Moin & Kim [84, 85], les premières simulations numériques directes (Kim *et al* [56], et les analyses de Mansour *et al* [81]), ainsi que la revue de Robinson [96].

### 3.3.2 Présentation de la simulation

La configuration de canal plan que nous retenons présente les caractéristiques suivantes :

- utilisation du modèle temporel ; en effet, contrairement à la couche limite qui s'épaissit du fait de l'absence de confinement, l'écoulement moyen est parallèle en canal turbulent. Ainsi, une hypothèse de périodicité dans la direction longitudinale peut être effectuée, ce qui permet d'employer un domaine de calcul spatialement réduit et de s'affranchir des problèmes liés à la spécification de la condition d'entrée.
- cette condition de périodicité entraîne l'absence d'un gradient de pression moteur dans la direction longitudinale ; pour maintenir quand même l'écoulement, on impose donc un débit constant. Ceci entraîne que les nombres de Reynolds basés sur la vitesse de débit ou la vitesse au centre d'un profil de Poiseuille de même débit demeurent constants. Dans le cas présent, on spécifie

$$Re_c = \frac{hU_c}{\nu} = 3750$$

ce qui correspond à

$$Re_m = \frac{2hU_m}{\nu} = \frac{2h^{\frac{2}{3}}U_c}{\nu} = 5000$$

Dean [21] propose une relation empirique entre  $Re_c$  et le nombre de Reynolds basé sur la vitesse de frottement  $Re_\tau$  :

$$Re_\tau = \frac{hu_\tau}{\nu} = 0.123Re_c^{\frac{7}{8}} \quad (3.29)$$

c'est-à-dire  $Re_\tau \approx 165$  ici.

- l'organisation d'un écoulement de canal présente en outre des caractères périodiques dans la direction transverse ; les dimensions du domaine de calcul dans les directions de périodicité doivent être suffisamment grandes pour contenir au moins un jeu de structures pariétales ; suivant à ce sujet les indications de Jiménez & Moin [54], nous spécifions  $L_x = \pi h$  et  $L_z = \frac{\pi h}{2}$ , sachant que l'on a de toutes façons  $L_y = 2h$ .
- le maillage est uniforme et le nombre de points de grille vaut  $(n_x \times n_y \times n_z) = (50 \times 180 \times 50)$  ; cela correspond à  $(\Delta x^+, \Delta y^+, \Delta z^+) \approx (10, 1.8, 5)$ .
- de même que pour la simulation de la constriction dissymétrique, une condition de périodicité est spécifiée également dans la direction  $y$  ; 4 points sont occupés par chacune des parois, celles-ci étant modélisées par frontières virtuelles. On prend par ailleurs  $(\omega_n, z) = (35, 0.7)$ , soit  $(\alpha, \beta) = (1225, 49)$ .
- à l'instant initial, un profil de Poiseuille avec 2.5% de bruit blanc aléatoire est imposé dans tout le domaine ; pour atteindre plus rapidement l'état de turbulence développée, on démarre la simulation en canal plan tournant pour lequel les taux d'amplification des perturbations sont supérieurs, comme indiqué par Lamballais [64]. En pratique, cela revient à ajouter dans l'équation de bilan de quantité de mouvement le terme de Coriolis  $(-2\Omega u_y, 2\Omega u_x, 0)$ , où  $\Omega$  est l'intensité de la rotation d'ensemble autour de l'axe transversal  $z$ . On choisit un nombre de Rossby global de 18, soit  $\Omega = \frac{U_c}{18h}$ . Une fois la transition suffisamment engagée, ce terme supplémentaire est retiré ; les données utilisées pour observer les statistiques de l'écoulement peuvent être sauvegardées dès que le développement de la turbulence a atteint les deux parois d'une manière similaire.

### 3.3.3 Résultats pour les champs de vitesse

Observons tout d'abord l'évolution temporelle de  $Re_\tau$ . Lorsqu'on cherche à résoudre les équations de Navier-Stokes pour l'unité de masse d'un écoulement moyen stationnaire, unidimensionnel, homogène dans la direction  $z$  et homogène dans la direction  $x$  sauf pour la pression, on obtient notamment que (pour l'unité de masse) :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{u_\tau^2}{h} \quad (3.30)$$

où  $P$  est la valeur moyenne de la pression sur le temps et dans la direction transverse. Si donc, dans une simulation comportant une transition, on maintient le débit constant plutôt

que le gradient de pression constant, la vitesse de frottement varie, traduisant notamment la déformation du profil de vitesse longitudinale.

Notons, par ailleurs, qu'on parle parfois de  $h^+$  plutôt que de  $Re_\tau$ , car il s'agit de la même grandeur :

$$h^+ = \frac{h}{\delta} = h \frac{u_\tau}{\nu} = Re_\tau \quad (3.31)$$

Sur la figure 3.2, on peut observer l'évolution de cette grandeur au cours de la simulation, pour chaque paroi du canal. Il s'agit à chaque instant d'une moyenne dans les directions homogènes. Pour le calcul de la vitesse de frottement, la pente du profil de vitesse longitudinale moyenne est évaluée par une approximation linéaire entre le dernier point solide et le premier point fluide. On voit rapidement augmenter  $Re_\tau$  du côté inférieur, où la transition s'effectue en premier du fait de la rotation d'ensemble. Celle-ci est arrêtée à  $t = 80h/U_c$ . Les deux courbes se rejoignent ensuite, témoignant de ce que l'ensemble du canal est affecté par la transition. A  $t = 205h/U_c$ , on considère que l'état de turbulence est établi ; les données sur lesquelles sont calculées les statistiques sont donc sauvegardées à partir de cet instant.

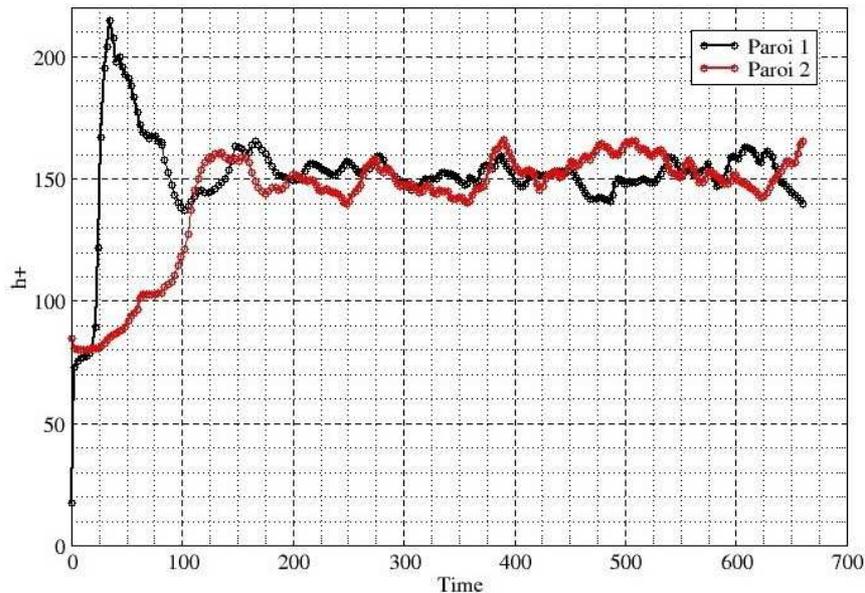


FIG. 3.2 – Evolution temporelle de  $Re_\tau$ . L'unité de temps est  $h/U_c$ . Le terme de rotation d'ensemble est enlevé à  $t = 80h/U_c$ .

La valeur moyenne globale de  $Re_\tau$ , c'est-à-dire prise sur le temps, dans les directions homogènes et entre les deux parois, est 152. Elle est inférieure d'environ 10% à la valeur prédite à partir de  $Re_c$  par la relation 3.29 de Dean [21]. Cet écart peut traduire un mauvais comportement général de la simulation, mais peut simplement être dû à une mauvaise évaluation de la vitesse de frottement, c'est-à-dire soit une sous-estimation de la chute de

vitesse  $dU$  entre le premier point fluide et la paroi, soit une surestimation de l'écart  $dy$  entre ces points. Pour quantifier les vitesses résiduelles en paroi, on définit les normes suivantes :

$$\begin{aligned}
 N_1(u_i) &= \frac{1}{n_p} \sum_{k=1}^{n_p} |u_i(x_k, y_k)| \\
 N_2(u_i) &= \frac{1}{n_p} \sqrt{\sum_{k=1}^{n_p} u_i^2(x_k, y_k)} \\
 N_\infty(u_i) &= \max_k (|u_i(x_k, y_k)|)
 \end{aligned} \tag{3.32}$$

où  $u_i$  est la composante du vecteur vitesse dans la direction  $i$ ,  $\{(x_k, y_k)\}$  est le produit de l'ensemble des points de la paroi, c'est-à-dire l'ensemble des points forcés ayant au moins un point voisin dans le domaine fluide, et de tous les instants sauvegardés, et  $n_p$  est le nombre total de points ainsi considérés. Les résultats obtenus pour ces normes sont présentés dans le tableau 3.1.

	$N_1/U_c$	$N_2/U_c$	$N_\infty/U_c$
$u_x$	$4.755 \cdot 10^{-05}$	$9.319 \cdot 10^{-04}$	$1.714 \cdot 10^{-03}$
$u_y$	$8.633 \cdot 10^{-05}$	$1.577 \cdot 10^{-03}$	$1.682 \cdot 10^{-03}$
$u_z$	$4.409 \cdot 10^{-05}$	$8.397 \cdot 10^{-04}$	$1.697 \cdot 10^{-03}$

TAB. 3.1 – Vitesses résiduelles pour le canal plan turbulent.

La norme infinie de  $u_y$  vaut environ 2% de la vitesse moyenne au premier point fluide calculé qui vaut elle  $0.0715U_c$ . Ce n'est pas complètement négligeable, mais c'est plutôt la norme un qu'il faut considérer pour le calcul de la vitesse de frottement ; or là, la proportion descend à 0.12%, ce qui rend difficile l'explication de la faible valeur de  $Re_\tau$  par une sous-estimation de  $dU$ . D'ailleurs, un calcul de  $u_\tau$  en prenant une vitesse parfaitement nulle au point forcé donne un résultat quasiment égal à  $Re_\tau = 152$ .

En revanche, il est possible que l'on soit confronté à l'incertitude sur la position de la paroi. Dans ce qui précède, on a supposé qu'elle commence au premier point solide. Cependant, les points calculés sont espacés de  $dy$ . Si, par exemple, la position géométrique de la paroi se trouvait en fait au milieu des deux, on aurait :

$$\frac{\partial u}{\partial y}(paroi) \approx \frac{u(y_{1f}) - 0}{dy/2} \tag{3.33}$$

où  $y_{1f}$  est la position du premier point fluide, ce qui revient à multiplier la valeur précédente de  $Re_\tau$  par  $\sqrt{2}$ , la faisant passer de 152 à 225. Dans la mesure où  $Re_\tau$  est une grandeur de normalisation lors des comparaisons, il convient d'arriver à une approximation plus fine. Pour cela, on calcule le profil moyen de  $\partial u_x / \partial y$  évalué linéairement par le schéma de différenciation avant :

$$\frac{\partial u_x}{\partial y}(y_k) \approx \frac{u_x(y_{k+1}) - u_x(y_k)}{dy} \quad (3.34)$$

Le résultat est donné sur la figure 3.3, et comparé avec celui obtenu à partir des données de Lamballais *et al* [66]. Le dernier point forcé est celui qui se trouve à la position  $y/h = 0$ . En ce point, on visualise l'erreur commise lorsqu'on utilise la formule 3.34 au dernier point solide pour évaluer la vitesse de frottement. Cependant, le bon comportement des résultats présents au sein du domaine fluide, jusqu'au point le plus proche du domaine solide, peut être utilisé en extrapolation : en très proche paroi, la vitesse longitudinale variant linéairement avec  $y$ , la pente de son profil ne change pas, par conséquent on peut évaluer la vitesse de frottement à la paroi en appliquant la formule 3.34 au premier point fluide. On obtient alors  $Re_\tau = 161.5$ . Si à partir de cette même idée, on prolonge le profil de  $u_x$  vers le domaine solide, la vitesse nulle est atteinte à environ  $0.1dy$  du point forcé. Cette position peut être considérée comme celle de la paroi.

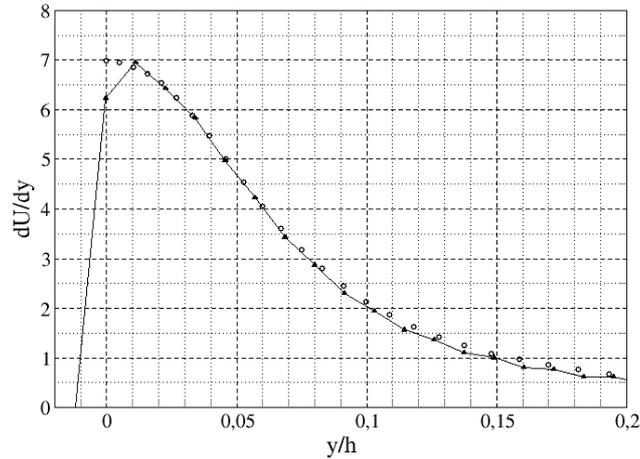


FIG. 3.3 – Profil moyen de  $\partial u_x / \partial y$ , approximation linéaire de type  $u'_x(y_k) = (u_x(y_{k+1}) - u_x(y_k)) / dy$ . Cercles : données de Lamballais *et al* [66]; triangles : résultats en frontières virtuelles.

Les profils statistiques obtenus pour la vitesse longitudinale, la valeur rms des fluctuations des composantes de la vitesse et de son rotationnel, et la tension de cisaillement  $-u'_x u'_y$  sont présentés sur la figure 3.4, en fonction de la distance à la paroi exprimée en unités pariétales  $y^+$ . Pour chaque grandeur, il s'agit de moments statistiques pris sur le temps et dans les directions homogènes. Les vitesses sont normalisées par  $u_\tau$ , le rotationnel par  $u_\tau / \delta$ , l'énergie et le cisaillement par  $u_\tau^2$ . Les unités pariétales sont calculées à partir de la valeur  $Re_\tau = 161.5$ . Les résultats présents sont comparés à ceux fournis par Lamballais [66].

Le comportement en proche paroi conserve une bonne qualité, malgré le faible raffinement utilisé ici qui transparaît notamment sur les courbes du rotationnel de vitesse dont

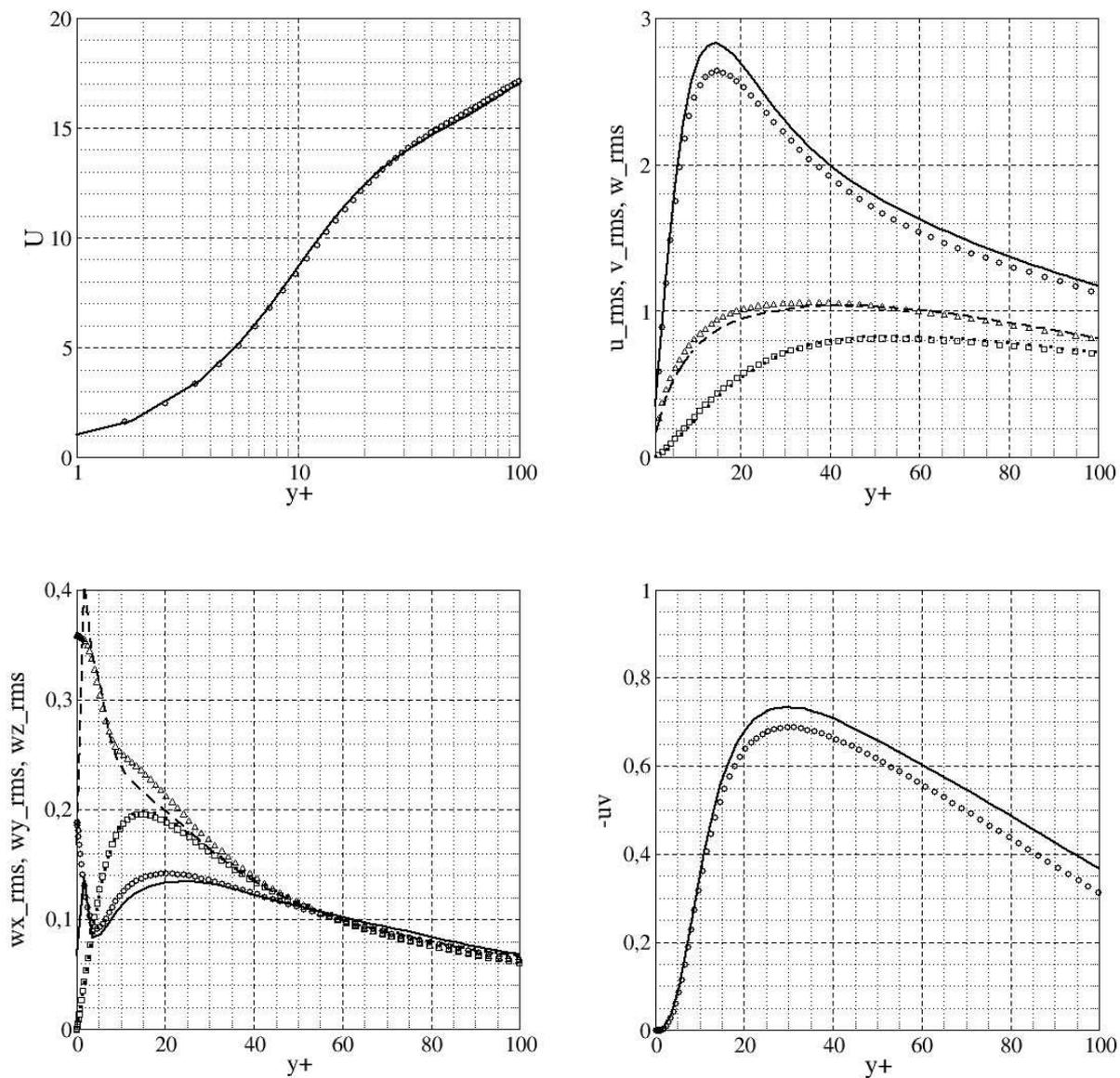


FIG. 3.4 – Comparaison statistique des résultats. Symboles : résultats fournis par Lamballais *et al* [66]; Lignes : résultats en frontières virtuelles. Pour les graphes avec trois courbes, trait plein : composante  $x$ ; points : composante  $y$ ; tirets : composante  $z$ . Données exprimées en unités pariétales.

les évolutions sont rapides. Les écarts les plus significatifs sont rencontrés dans la zone  $10 < y^+ < 30$ . Ces résultats statistiques témoignent de la capacité des frontières virtuelles à modéliser une condition d'adhérence pour un écoulement turbulent.

### 3.3.4 Résultats pour le champ de pression

Les résultats relatifs à la pression sont ici comparés aux données de référence de Iwamoto *et al* [52, 53] et Lamballais *et al* [66], dont les simulations concernent des écoulements à  $Re_\tau = 150$  et  $Re_\tau = 162$  respectivement. Pour un écoulement turbulent stationnaire en moyenne, unidirectionnel dans la direction  $x$ , et homogène selon  $x$  (sauf pour la pression) et  $z$ , l'équation qui régit le comportement de la vitesse moyenne s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} &= \frac{d}{dy} \left( -\langle u'_x u'_y \rangle + \nu \frac{dU_x}{dy} \right) \\ \frac{\partial}{\partial y} (P + \rho \langle u'_y u'_y \rangle) &= 0 \end{aligned} \quad (3.35)$$

où on a considéré les grandeurs moyennes et fluctuantes de Reynolds définies par :

$$u_i = U_i + u'_i \quad (3.36)$$

et calculées sur l'ensemble des instants et des points des directions homogènes. L'intégration du système (3.35) conduit à l'expression du champ de pression moyenne :

$$P = -\rho u_\tau^2 \left( \frac{x}{h} \right) - \rho \langle u'_y u'_y \rangle \quad (3.37)$$

Dans le modèle d'écoulement temporel, on remplace la dépendance linéaire en  $x$  par la condition de débit. On doit donc avoir identité entre le profil de pression moyenne et celui de  $-\langle u_y u_y \rangle$ . Ces deux profils sont tracés sur la figure 3.5, où l'on voit que cette identité est respectée, ce qui donne une première validation du schéma de calcul de la pression. Par rapport au profil de référence, l'allure est sensiblement la même, mais on note un léger écart quand on s'éloigne de la paroi, ce qui peut être la conséquence de la taille minimale du domaine de calcul, d'après Jiménez & Moin [54].

Le profil de pression moyenne présente des oscillations de très petite longueur d'onde, dont l'amplitude diminue lorsqu'on s'éloigne de la paroi. On sait qu'en maillage collocalisé, la réalisation de l'incompressibilité jusqu'au zéro machine conduit à l'apparition de modes parasites. Cependant, la résolution de l'équation de Poisson est ici réalisée dans l'espace spectral où les modes singuliers de  $\widehat{\pi}$  définis plus haut sont forcés à zéro. C'est pourquoi nous pensons que les oscillations observées sur le profil de pression moyenne correspondent aux modes pour lesquels le nombre d'onde modifié est très faible sans être pour autant des modes singuliers. En effet, pour de tels modes, on a, de manière très schématique :

$$\widehat{\pi}^{k_{i+1}} \sim \frac{k_m \widehat{u}^*}{k_m^2} \sim \frac{\widehat{u}^*}{k_m} \quad (3.38)$$

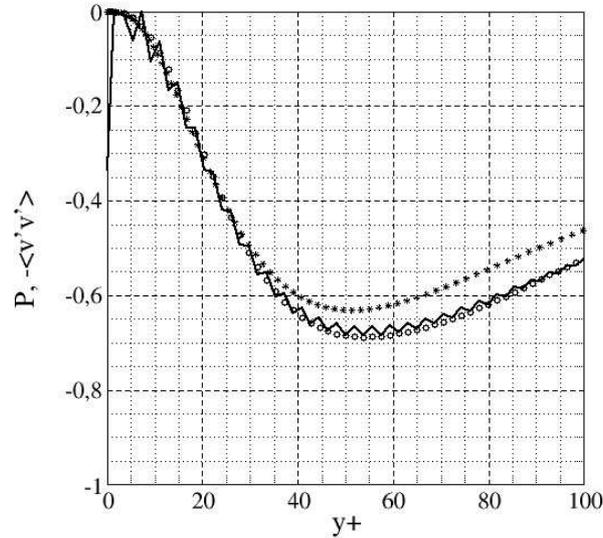


FIG. 3.5 – Profils de pression moyenne. Trait plein : résultats presents, étoiles : Iwamoto *et al* [52, 53]; cercles : profil moyen de  $-u_y^2$ .

Or, si la résolution est suffisamment fine,  $\hat{u}^*$  tend vers zéro pour de tels modes, donc même en divisant par un  $k_m$  faible, il ne devrait pas résulter une valeur finie... sauf si  $\hat{u}^*$  est sur-évalué, par exemple dans le cas d'un phénomène de Gibbs dû à la méthode des frontières virtuelles en l'absence de traitement de la discontinuité introduite par la fonction binaire  $\epsilon$ . Le fait que les oscillations observées ici soient plus importantes à proximité de la paroi va dans le sens de cette hypothèse explicative.

Dans la mesure où les schémas de dérivation ne sont pas capables de restituer des longueurs d'ondes aussi petites, ces oscillations ne sont pas visibles sur le champ de vitesse puisque c'est seulement le gradient de pression qui est utilisé pour son avancement. Les oscillations du profil de pression ont une faible contribution instationnaire : elles sont peu visibles sur le profil de pression fluctuante présenté figure 3.6. En comparaison des profils de référence, la courbure du profil présent est sous-estimée, ce qui conduit à un maximum local près de  $y^+ = 30$  dont la valeur est plus faible.

### 3.4 Résolution de l'équation de Poisson en modèle spatial

Dans ce modèle, les conditions aux limites dans la direction principale sont dites "de frontières ouvertes", ce qui, dans le code utilisé, ne permet pas de se placer dans l'espace spectral dans les trois directions lors de la résolution de l'équation de Poisson (3.11). On

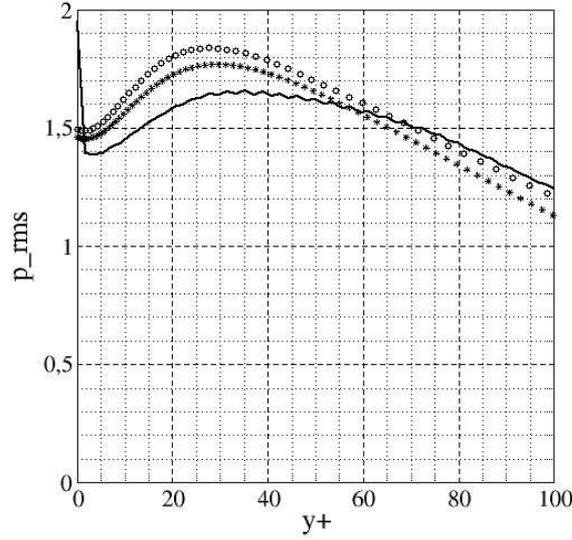


FIG. 3.6 – Profils de pression fluctuante. Trait plein : résultats presents, étoiles : Iwamoto *et al* [52, 53]; cercles : Lamballais *et al* [66].

utilise donc la décomposition suivante :

$$\vec{u}[x(i), y(j), z(k)] = \sum_m \sum_n \widehat{u}(x(i), m, n) \cdot e^{i[k_y(m)y(j) + k_z(n)z(k)]} \quad (3.39)$$

$$\widetilde{\pi}[x(i), y(j), z(k)] = \sum_m \sum_n \widehat{\pi}(x(i), m, n) \cdot e^{i[k_y(m)y(j) + k_z(n)z(k)]} \quad (3.40)$$

Il s'agit donc d'une décomposition de Fourier dans chaque plan  $(y, z)$ , et chaque mode spectral d'indice  $(m, n)$  dépend de la variable spatiale  $x$ . Avec cette décomposition, l'équation de Poisson (3.11) s'écrit :

$$\frac{\partial^2 \widehat{\pi}}{\partial x^2}(x(i), m, n) - [k_y^2(m) + k_z^2(n)] \widehat{\pi}(x(i), m, n) = \frac{1}{\delta t_i} \left[ \frac{\partial \widehat{u}_x^*}{\partial x} + \frac{\partial \widehat{u}_y^*}{\partial y} + \frac{\partial \widehat{u}_z^*}{\partial z} \right] (x(i), m, n) \quad (3.41)$$

L'opérateur discret de dérivation spatiale par rapport à  $x$  s'écrit :

$$A_x \widetilde{\pi}' = B_x \widetilde{\pi}, \quad \text{avec} \quad \widetilde{\pi}' = \frac{\partial \widetilde{\pi}}{\partial x}$$

où  $A_x$  et  $B_x$  sont des matrices de dimension  $n_x \cdot n_x$ , respectivement tridiagonale et pentadiagonale pour le schéma compact utilisé, initialement proposé par Lele [74] et Lardeau [68]. On regroupe donc (3.41) et (3.4) sous la forme d'un système ayant pour inconnue

$(\widehat{\pi}', \widehat{\pi})$  :

$$\begin{aligned} A_x^{-1} B_x \widehat{\pi}' - [k_y^2(m) + k_z^2(n)] \widehat{\pi}(x(i), m, n) &= \frac{1}{\delta t_i} \left[ A_x^{-1} B_x \widehat{u}_x^* + \frac{\partial \widehat{u}_y^*}{\partial y} + \frac{\partial \widehat{u}_z^*}{\partial z} \right] (x(i), m, n) \\ A_x \widehat{\pi}' - B_x \widehat{\pi} &= 0 \end{aligned} \quad (3.42)$$

En ayant vérifié que pour toute fonction  $\phi$

$$\widehat{\phi}' = \frac{\partial \widehat{\phi}}{\partial x} = \frac{\partial \widehat{\phi}}{\partial x} = \widehat{\phi}' \quad (3.43)$$

il est plus rapide numériquement d'effectuer la résolution en considérant la première équation du système (3.42) multipliée par  $A_x$  et ne comportant ainsi plus de matrices inverses. Soit pour chaque mode  $(m, n)$  le système de taille  $2 \cdot n_x$  :

$$\begin{bmatrix} B_x & -A_x (k_y^2(m) + k_z^2(n)) \\ A_x & -B_x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \widehat{\pi}' \\ \widehat{\pi} \end{bmatrix} (m, n) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\delta t_i} \left( B_x \widehat{u}_x^* + A_x \frac{\partial \widehat{u}_y^*}{\partial y} + A_x \frac{\partial \widehat{u}_z^*}{\partial z} \right) \\ 0 \end{bmatrix} (m, n) \quad (3.44)$$

### 3.4.1 Définition et propriété des modes singuliers

Ici, une singularité survient pour les couples  $(m_0, n_0)$  tels que :

$$[k_y^2(m_0) + k_z^2(n_0)] = 0 \quad (3.45)$$

c'est-à-dire  $k_y(m_0) = 0$  et  $k_z(n_0) = 0$ .

On a donc, pour toute fonction  $\phi$  :

$$\begin{aligned} \phi[x(i), y(j), z(k)] &= \sum_{m \neq m_0} \sum_{n \neq n_0} \widehat{\phi}(x(i), m, n) \cdot e^{i[k_y(m)y(j) + k_z(n)z(k)]} \\ &+ \sum_{m=m_0} \sum_{n=n_0} \widehat{\phi}(x(i), m_0, n_0) \end{aligned} \quad (3.46)$$

Chaque mode singulier est donc une fonction de  $x$  et une constante dans un plan  $(y, z)$ . De plus, la dérivée partielle de  $\phi$  par rapport à  $y$  ou  $z$  ne dépend pas des modes singuliers  $\widehat{\phi}(x, m_0, n_0)$ . Par conséquent, une opération sur les modes singuliers de la pression n'affecte pas l'avancement en  $u_y$  ou  $u_z$  qui ne fait intervenir que le gradient dans ces directions.

### 3.4.2 Solution de l'équation de Poisson

Pour tout  $(m, n) \neq (m_0, n_0)$ ,  $\widehat{\pi}(x(i), m, n)$  est obtenu par résolution du système (3.44), où le cas singulier est ici encore forcé à 0. Comme on l'a vu ci-dessus, ces modes suffisent à

eux-seuls pour l'avancement de  $u_y$  et  $u_z$ , qui est effectué après retour dans l'espace physique, en calculant pour tout  $x$  le gradient de

$$\sum_{m \neq m_0} \sum_{n \neq n_0} \widehat{\pi}(x(i), m, n) \cdot e^{i[k_y(m)y(j) + k_z(n)z(k)]}$$

En revanche, l'avancement de la composante  $u_x$  s'effectue dans l'espace spectral. En effet pour tout  $(m, n) \neq (m_0, n_0)$  et tout  $i$  :

$$\widehat{u}_x^{k_{i+1}}(x(i), m, n) = \widehat{u}_x^*(x(i), m, n) - \delta t_i \widehat{\pi}'(x(i), m, n) \quad (3.47)$$

où  $\widehat{\pi}'(x(i), m \neq m_0, n \neq n_0)$  est calculé directement dans la résolution du système (3.44).

Pour l'avancement des modes singuliers de  $u_x$ , il convient de repartir de l'équation de Poisson (3.41) qui s'écrit pour tout  $(i, m_0, n_0)$  :

$$\frac{\partial^2 \widehat{\pi}}{\partial x^2}(x(i), m_0, n_0) = \frac{1}{\delta t_i} \frac{\partial \widehat{u}_x^*}{\partial x}(x(i), m_0, n_0) \quad (3.48)$$

Une première intégration de cette équation par rapport à  $x$  conduit à :

$$\frac{\partial \widehat{\pi}}{\partial x}(x(i), m_0, n_0) = \frac{1}{\delta t_i} \widehat{u}_x^*(x(i), m_0, n_0) + \psi(m_0, n_0) \quad (3.49)$$

où  $\psi(m_0, n_0)$  est une constante propre à chaque mode singulier. Ainsi l'avancement de  $\widehat{u}_x(x(i), m_0, n_0)$  s'écrit :

$$\widehat{u}_x^{k_{i+1}}(x(i), m_0, n_0) = -\psi(m_0, n_0) \quad (3.50)$$

En pratique, la condition d'entrée sur la vitesse est définie dans l'espace physique, puis sa transformée de Fourier dans le plan spectral est effectuée. Pour un profil d'entrée uniforme, un seul mode sera non nul : celui donnant la vitesse moyenne. Ainsi, l'avancement (3.50), qui affecte la même valeur de vitesse moyenne en chaque  $x$ , s'apparente à une condition de débit constant dans la direction de l'écoulement.

Ces étapes suffisent donc à l'avancement de la simulation du champ de vitesse. La résolution du système (3.44) donne accès aux modes  $(m \neq m_0, n \neq n_0)$ . Une intégration supplémentaire de (3.49) est nécessaire si on veut accéder aux modes singuliers du champ de pression :

$$\widehat{\pi}(x(i), m_0, n_0) = \frac{1}{\delta t_i} \int [\widehat{u}_x^*(\chi(i), m_0, n_0) + \psi(m_0, n_0)] d\chi + \varphi(m_0, n_0) \quad (3.51)$$

La mise en oeuvre numérique de cette intégration se fait en utilisant de manière inversée le schéma de dérivation spatiale, soit, pour une fonction quelconque  $\phi$  :

$$\phi(x) = B_x^{-1} A_x \cdot \phi'(x) \quad (3.52)$$

Dans (3.51),  $\psi$  est déterminée par la condition d'entrée sur la vitesse. De son côté,  $\varphi$  est choisie de manière à obtenir une pression de référence nulle à l'entrée. En pratique, cette procédure est effectuée en post-traitement, après transformation de Fourier inverse de la pression comprenant tous ses modes.

## 3.5 Applications en modèle spatial

### 3.5.1 Constriction Dissymétrique

Il s'agit ici d'étudier la modélisation par frontières virtuelles dans le cas d'un écoulement laminaire contournant un coin, puisque cela s'approche de la configuration finale de la présente étude. La constriction dissymétrique dans un canal plan s'approche également de la configuration de marche montante; dans ce cas, les paramètres importants sont l'épaisseur de la couche limite amont par rapport à la hauteur de la constriction ou de la marche, ainsi que le confinement c'est-à-dire le fait qu'il y ait ou non une paroi supérieure plus ou moins éloignée.

Nous reproduisons ici la simulation effectuée par Wilhelm & Kleiser [104, 103] à la suite des expériences réalisées par Stüer [99]. Les notations pour la configuration sont données sur la figure 3.7 :  $H$  est la hauteur du canal à l'entrée, tandis que  $h$  est la hauteur de la marche; de même que Wilhelm & Kleiser [104] nous retenons le rapport  $h/H = 1/4$ . A l'entrée, l'écoulement est un profil parabolique de Poiseuille, dont la vitesse au centre est notée  $U_c$ ; ainsi, la vitesse débitante est  $U_Q = 2/3.U_c$ . La longueur de référence est  $h$ , tandis que la vitesse de référence est  $U_c$ . Le nombre de Reynolds basé sur ces deux grandeurs vaut 330, ce qui correspond à  $Re = 495$  en utilisant la hauteur de marche et la vitesse au centre, à  $Re = 1880$  en utilisant  $H$  et  $U_c$ , et à  $Re = 1320$  en utilisant  $H$  et  $U_Q$ . Le domaine de calcul s'étend sur  $50h$ , la marche est placée à  $x = 20h$ .

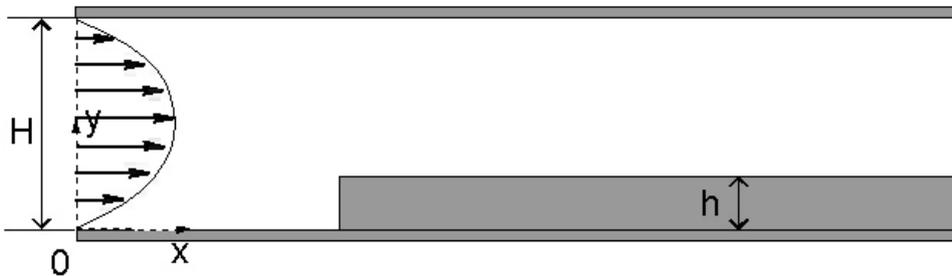


FIG. 3.7 – Notations pour la configuration de constriction dissymétrique en canal plan 2D.

Wilhelm utilise une méthode d'éléments spectraux avec une condition d'adhérence à la paroi. Le maillage est raffiné à proximité du coin, avec  $\Delta x_{min} = \Delta y_{min} = 0.00425$ . Pour notre simulation, bien que cela soit pénalisant du point de vue du coût de calcul, nous utilisons un maillage uniforme avec  $\Delta x = 0.02441$  et  $\Delta y = 0.01068$ ; le nombre de points de grille est donc de  $n_x \times n_y = 2049 \times 384$ . Ainsi, la hauteur  $h$  de la marche est discrétisée par 94 points; notons que de part et d'autre du canal, 5 points sont utilisés pour représenter le domaine solide. Cette valeur est choisie afin de ne pas calculer trop de points inutiles à l'observation de l'écoulement fluide, tout en ayant une bande solide suffisamment large pour englober les conditions aux limites sur les schémas de dérivation spatiale. Le fait que les deux limites horizontales du domaine de calcul soient des bandes solides permet

d'utiliser également une condition de périodicité dans la direction  $y$ . Les paramètres de forçage sont  $(\omega_n, z) = (70, 0.7)$  soit  $(\alpha, \beta) = (4900, 98)$ . Le critère CFL requiert un pas de temps de 0.0106, tandis que les frontières virtuelles requièrent  $dt = 0.00843$ . Le champ de vitesse initial est le profil de Poiseuille, ce profil étant également imposé en entrée dans la suite du calcul. La constriction va donc devoir émerger au sein de l'écoulement.

Un aspect important de la modélisation par frontières virtuelles est que le résultat dépend du temps. Cela a été évoqué en partie dans la présentation des tests réalisés sur le cylindre à section carrée, en ce qui concerne l'établissement de l'écoulement. En régime laminaire, on considère seulement cette phase d'établissement ; l'écoulement solution est celui obtenu lorsque l'on n'observe plus de variations temporelles. Or, si la frontière virtuelle atteint rapidement des niveaux de vitesse résiduelle de l'ordre de  $10^{-4}U_c$  c'est-à-dire une condition d'adhérence acceptable, elle n'en continue pas moins de s'approcher de la valeur cible nulle. A ce niveau-là, l'écoulement n'en ressent guère les conséquences, sans que celles-ci soient tout à fait invisibles. Il demeure donc une part d'arbitraire quand on considère si l'écoulement laminaire est établi ou non.

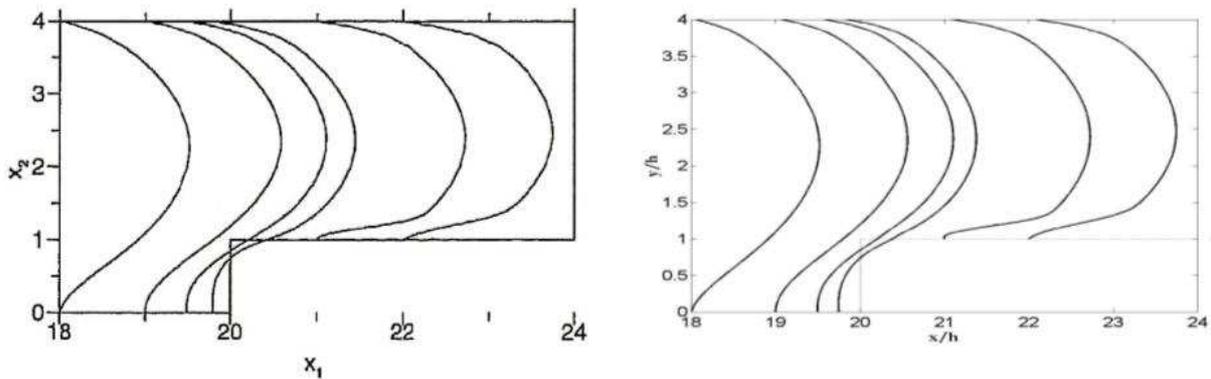


FIG. 3.8 – Profils de vitesse longitudinale. Gauche : résultats de Wilhelm & Kleiser [104] ; droite : résultats en frontières virtuelles.

Sur la figure 3.8, on a tracé les profils de vitesse longitudinale à proximité de la marche. On peut notamment observer le ralentissement de l'écoulement en amont du coin, ainsi que le début du retour à un profil symétrique une fois le franchissement effectué. Un bon accord est obtenu entre les deux simulations, de même qu'en ce qui concerne les caractéristiques de la zone de recirculation au pied de la marche, présentées figure 3.9. Au point d'arrêt, on note que la ligne de courant qui y aboutit pénètre dans le milieu solide pour la simulation en frontières virtuelles, ce qui témoigne des vitesses résiduelles. Celles-ci sont évaluées en utilisant les normes définies plus haut (3.32), et on obtient les valeurs présentées dans le tableau 3.2.

Compte-tenu de ce que l'écoulement est bien représenté comme on peut le voir sur les figures 3.8 et 3.9, on peut dire que ces niveaux de vitesse résiduelle sont acceptables pour la modélisation correcte de la condition d'adhérence.

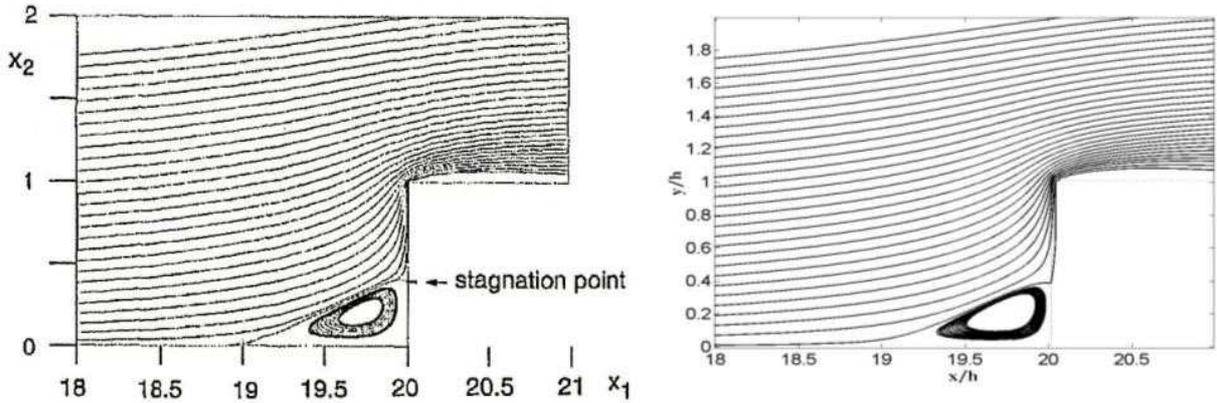


FIG. 3.9 – Lignes de courant au pied de marche. Gauche : résultats de Wilhelm & Kleiser [104] ; droite : résultats en frontières virtuelles.

	$N_1/U_c$	$N_2/U_c$	$N_\infty/U_c$
$u_x$	$1.170 \cdot 10^{-05}$	$1.797 \cdot 10^{-04}$	$3.584 \cdot 10^{-03}$
$u_y$	$8.271 \cdot 10^{-07}$	$1.206 \cdot 10^{-05}$	$4.822 \cdot 10^{-04}$

TAB. 3.2 – Vitesses résiduelles pour la constriction dissymétrique en canal laminaire.

Sur la figure 3.10, on donne l'évolution de la pression le long de la ligne horizontale  $y = h + dy$ , où  $h$  est la hauteur de la marche, calculée selon le procédé présenté pour un écoulement en développement spatial. En comparaison avec le résultat de Wilhelm & Kleiser [104], le saut de pression au passage de la constriction est davantage marqué, tandis que la suction en haut de la marche est légèrement plus faible. Des oscillations maille à maille sont également observées ici, mais le nombre important de points de grille fait qu'elles sont très rapprochées et en masque l'affichage.

### 3.5.2 Décollement sur une plaque plane épaisse

En ce qui concerne la simulation de l'écoulement impactant le bord d'attaque rectangulaire d'une plaque plane semi-infinie, les résultats en pression pariétale moyenne et fluctuante sont présentés sur les figures 3.11 et 3.12 respectivement, en fonction de la position longitudinale normalisée par la longueur de recollement. Les résultats présents, normalisés par  $\frac{U_0^2}{2}$  sont comparés aux mesures de Hillier & Cherry [42] dans un écoulement à  $Re = 5 \times 10^4$ , et aux simulations de Tafti & Vanka [100] à  $Re = 1000$ . Il est remarquable que les trois sources de résultats affichent le même coefficient de pression au point de recollement. On note une légère tendance des simulations numériques à retourner une valeur plus importante en sortie de domaine de calcul, particulièrement dans le cas présent. Le pic

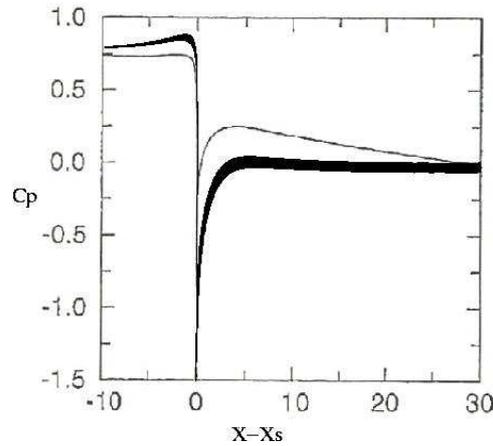


FIG. 3.10 – Pression sur une ligne  $y = h + dy$ . Trait fin : résultats de Wilhelm & Kleiser [104] ; trait fort : résultats en frontières virtuelles.

de suction apparaît également un peu plus en aval, et avec plus d'intensité ; ce dernier trait peut être attribué au fait qu'il s'agit de simulations bidimensionnelles et à relativement faible nombre de Reynolds.

Les oscillations maille à maille sont encore visibles, principalement à proximité du coin. Notons que seulement un point de grille sur cinq est représenté, afin d'en rendre l'affichage visible. Leur amplitude demeure faible devant la variation du coefficient de pression le long du profil. Leur composante instationnaire est faible, comme il apparaît sur la courbe des fluctuations de pression pariétale. Pour cette grandeur, les données de Tafti & Vanka se limitent à quatre points en aval du coin, où les valeurs concordent avec nos résultats. Les résultats expérimentaux montrent des niveaux de fluctuations plus faibles à cause de la tridimensionnalité. Cependant, il est remarquable que le maximum de fluctuations soit atteint au même endroit, légèrement en amont du point de recollement. Les caractéristiques du champ de pression pour cette configuration seront examinées plus précisément, avec les champs de vitesse, dans le chapitre 5.

## 3.6 Discussion - Conclusion

Au début du chapitre précédent, l'intérêt des méthodes de modélisation de paroi par forçage a été présenté, qui consiste principalement en leur potentiel en ce qui concerne la simulation numérique directe d'écoulements à géométrie complexe. Les travaux rencontrés dans la littérature s'attachent désormais à résoudre leurs principales difficultés que sont l'incertitude sur la position de la paroi, la présence de vitesses résiduelles, la contrainte sur le pas de temps dans le cas de la méthode des frontières virtuelles, et le traitement de la discontinuité.

Le travail présenté ici illustre cet intérêt montrant les résultats de simulations dans 3 configurations d'écoulements de paroi : le cylindre à section carrée, la constriction dis-

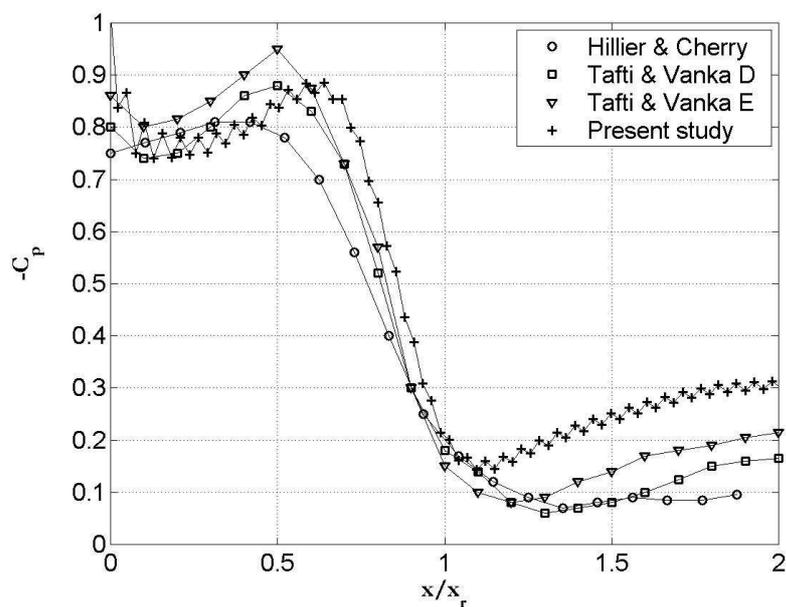


FIG. 3.11 – Pression moyenne pariétale. Concernant les données de Tafti & Vanka [100], le cas D présente une résolution deux fois plus fine dans chaque direction que le cas E. Traits pleins pour l'aide visuelle seulement.

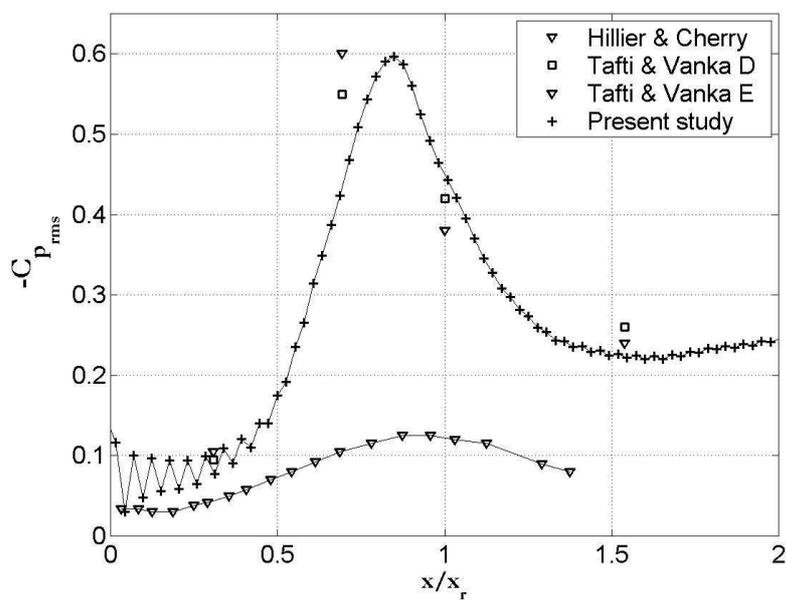


FIG. 3.12 – Valeur *rms* des fluctuations de pression pariétale. Traits pleins pour l'aide visuelle seulement.

symétrique en canal 2D et le canal plan 3D, à partir d'un code de calcul initialement conçu pour des écoulements libres, avec une condition d'adhérence correctement modélisée et une bonne représentation de l'écoulement.

En considérant la méthode des frontières virtuelles comme un système d'asservissement de la vitesse à une valeur cible nulle, une formulation exploitant la théorie de l'oscillateur harmonique amorti du second ordre a été proposée, puis éprouvée au travers de tests réalisés sur la simulation de l'écoulement sur un cylindre à section carrée. Ainsi, le rôle des paramètres de forçage a été examiné, ce qui a permis d'arriver à des réglages qui réduisent les vitesses résiduelles sans entraîner de contrainte supplémentaire trop importante sur le pas de temps. Cette configuration a également été utilisée pour étudier le comportement de la condition d'adhérence en présence d'arêtes vives.

Dans ce chapitre, l'examen détaillé de l'avancement temporel du code de calcul - schéma de Runge-Kutta, méthode de pas fractionnaire, résolution d'une équation de Poisson dans l'espace de Fourier, correction de la vitesse par le gradient de pression - a montré le rôle spécifique de la pression dans ces simulations d'écoulements incompressibles. La présentation du modèle temporel a permis de préciser le caractère incomplet de la pression utile au calcul des champs de vitesse en incompressible. La simulation de l'écoulement de canal plan a fait apparaître le problème du positionnement géométrique de la paroi entre le domaine fluide et le domaine solide. Un soin particulier doit être apporté au calcul des unités pariétales, qui a été effectué à partir d'une extrapolation linéaire des données du domaine fluide en proche paroi.

Les champs de pression présentés font apparaître des oscillations parasites à des longueurs d'onde de l'ordre de la taille de maille. Leur origine est double : d'une part, la réalisation de l'incompressibilité jusqu'au zéro machine en maillage collocalisé ; d'autre part la présence d'une singularité géométrique pour laquelle le code ne comporte pas de traitement spécifique. Dans le cas de l'écoulement de canal, qui ne présente pas de singularité et pour lequel la résolution de l'équation de Poisson dans l'espace de Fourier permet *a priori* de s'affranchir des modes parasites, elles ont pour origine une interaction entre le comportement du nombre d'onde modifié des schémas compacts pour les petites longueurs d'onde et la discontinuité introduite par la méthode des frontières virtuelles.

L'observation de ces oscillations n'empêche cependant pas un bon accord quantitatif avec la littérature. De plus, celles résultant de l'utilisation d'un maillage collocalisé présentent une composante instationnaire de faible amplitude, et celles résultant de la singularité sont relativement confinées à proximité du coin, où l'écoulement est quasiment stationnaire. C'est pourquoi nous pensons que les champs de pression obtenus ici peuvent être utilisés comme données sources pour les calculs acoustiques, et être un bon outil notamment pour l'étude du bruit de l'écoulement sur plaque épaisse.

Au laboratoire, un travail est actuellement mené par S. Laizet [63, 62] pour développer un solveur de Poisson utilisant un maillage décalé pour la pression. Une comparaison a donc pu être effectuée avec le solveur de Poisson utilisant un maillage collocalisé. Dans

les deux cas, la méthode des frontières virtuelles est utilisée pour modéliser la paroi. Les isocontours des champs de pression obtenus sont tracés sur les figures 3.13 et 3.14.

Le champ de pression en maillage collocalisé, présente d'importantes oscillations parasites dans la direction de l'écoulement, sur l'ensemble du domaine. En fait, pour cet écoulement en développement spatial, la résolution de l'équation de Poisson est réalisée dans l'espace physique pour la direction longitudinale. Ceci empêche de pouvoir forcer à zéro les modes singuliers, comme cela a été réalisé dans le cas du canal. On peut voir l'efficacité du décalage du maillage à résoudre ce problème. Cependant, on note que des oscillations résultant vraisemblablement de l'absence de traitement de la singularité sont encore présentes à proximité du coin.

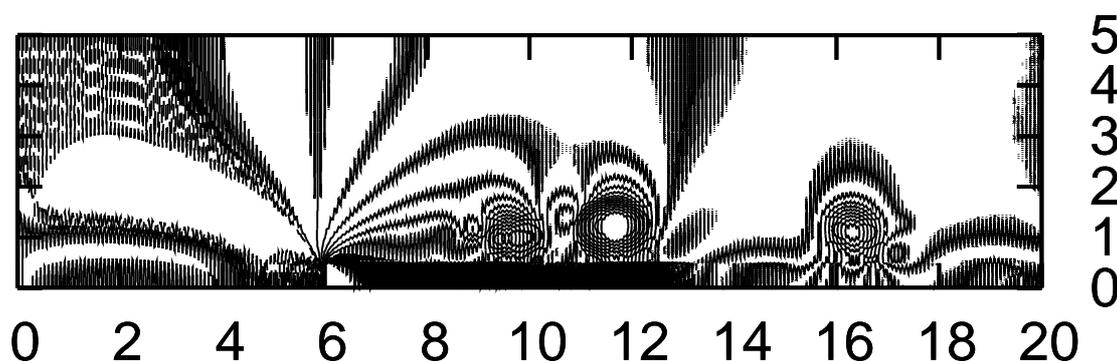


FIG. 3.13 – Isocontours de pression avec un maillage collocalisé. Traits pleins : valeurs négatives, depuis  $-1.5$  par pas de  $0.1$ ; Traits pointillés : valeurs positives, jusqu'à  $1.5$  par pas de  $0.1$ .

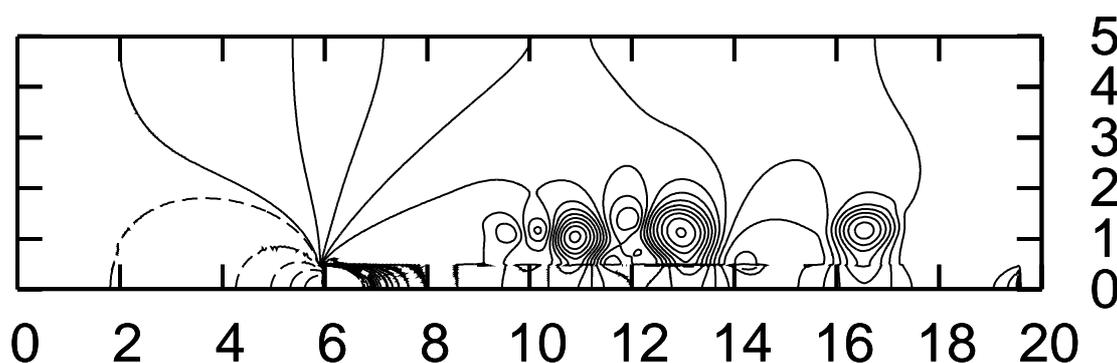


FIG. 3.14 – Isocontours de pression avec un maillage décalé. Traits pleins : valeurs négatives, depuis  $-1.5$  par pas de  $0.1$ ; Traits pointillés : valeurs positives, jusqu'à  $1.5$  par pas de  $0.1$ .

Finalement, la principale difficulté rencontrée avec les frontières virtuelles demeure leur dépendance avec le maillage et avec le temps. En effet, on a vu que les arêtes vives sont d'autant plus singulières que le maillage est fin, ce qui n'est pas sans conséquences sur le comportement des couches de mélange issues des décollements de l'écoulement. De plus, la

singularité augmente au cours du temps du fait de la tendance des vitesses résiduelles à diminuer indéfiniment. Ces deux aspects rendent délicates les études concernant la génération de ces couches de mélange. Ce trait n'est pas observé dans le cas du canal qui ne comporte pas de singularités : un équilibre est atteint entre la sollicitation périodique de la paroi par la turbulence et la consigne d'adhérence, ce qui stabilise les vitesses résiduelles.



# Chapitre 4

## Présentation du calcul acoustique

*A beau mentir qui vient de loin.*

Proverbe

Les deux précédents chapitres nous ont permis de présenter la partie aérodynamique de notre méthode hybride, à savoir la simulation numérique directe d'écoulements pariétaux instationnaires. Dans ce chapitre, la partie acoustique de la méthode hybride est présentée : connaissant un écoulement, il s'agit d'en extraire des sources acoustiques que l'on va faire rayonner afin d'obtenir le champ sonore. Cela est effectué dans le cadre de l'analogie de Curle [20], cas particulier des surface fixes de l'analogie Ffowcs-Williams & Hawkings [34].

Comme les formulations intégrales déduites de ces analogies sont nombreuses, et les développements analytiques mettent en jeu des concepts mathématiques relativement évolués, nous présentons d'abord en détail les étapes de calcul qui conduisent à l'équation intégrale utilisée. La mise en oeuvre numérique et ses différentes problématiques sont ensuite considérées. Les principales caractéristiques que nous avons retenues pour notre programme de calcul sont alors décrites, avant la présentation de quelques résultats des tests de validation.

### 4.1 Equation intégrale pour le bruit d'obstacles en écoulement

A l'origine des multiples équations intégrales permettant de calculer le rayonnement acoustique d'écoulements en espace non libre, on trouve les apports respectifs de Lighthill [75, 76] et Kirchhoff [57]. Lighthill, en introduisant le concept d'analogie aéroacoustique, initie les recherches relatives aux sources de bruit d'origine aérodynamique. En effet, le lien entre l'aérodynamique et l'acoustique est effectué en partant des équations de conservation qui régissent l'écoulement pour écrire une équation d'onde inhomogène, dont la résolution à l'aide du formalisme des fonctions de Green conduit au champ acoustique. Kirchhoff, quant à lui, propose une méthode qui permet de calculer le champ qui se propage au sein d'un volume à partir de la donnée de ce champ sur les frontières du volume considéré. Ces deux travaux fondateurs ont fait et font encore l'objet d'une abondante littérature, à commencer

par la contribution de Curle [20] qui écrit la solution de l'équation de Lighthill en présence de frontières solides, conduisant à une offre très diversifiée de formulations intégrales, dont la sophistication répond à la complexité des problèmes posés par l'ingénierie actuelle.

Les opérations les plus classiques consistent à calculer la double divergence du tenseur de Lighthill soit dans le domaine source soit dans le domaine observateur, ou encore de changer les dérivations spatiales en dérivations temporelles, voir Larsson [70]. Il est également possible d'écrire des formulations dans le domaine temporel ou dans le domaine des fréquences. Une autre opération est le passage d'une écriture en repère fixe à une écriture en repère mobile, soit une équation convectée, dont un exemple est donné par Gloerfelt *et al* [37]. Les contributions qui ont offert d'importantes perspectives, notamment pour le bruit de pales, sont celles permettant de prendre en compte des parois en mouvement, à savoir celle de Ffowcs-Williams & Hawkings [34] pour le formalisme de Lighthill et celle de Farassat & Myers [28] pour le formalisme de Kirchhoff. Toutes les deux font appel aux propriétés des fonctions généralisées. Enfin, Di Francescantonio [23] propose une formulation croisée de ces deux dernières contributions, qui peut être appliquée indépendamment du caractère linéaire ou non-linéaire de la propagation à l'extérieur de la surface. Un colossal travail de synthèse de tous ces développements est réalisé dans la thèse de X. Gloerfelt [36]. Chacune de ces différentes formulations a été développée en réponse à un besoin particulier.

Les enjeux scientifiques, c'est-à-dire le problème de l'identification des termes sources, s'ajoutent à ceux propres à l'analogie de Lighthill. Bien que des comparaisons entre les formulations de Ffowcs-Williams & Hawkings et de Kirchhoff aient déjà été effectuées par Brentner & Farassat [9] et Prieur & Rahier [95], notamment pour les termes quadripolaires, des questions telles que la signification des sources surfaciques ou leur prépondérance sur les sources volumiques demeurent en suspens.

Pour la présente étude, nous souhaitons analyser le bruit rayonné par un écoulement en présence d'une paroi fixe. Ce problème peut donc être traité à l'aide du travail initial de Curle, dont le cheminement est retracé ci-après.

### 4.1.1 Formalisme de Curle

Le raisonnement de Curle est tout d'abord fondé sur l'équation de Lighthill. Celle-ci s'écrit à partir des équations du mouvement exprimées sous forme conservative :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i) = 0 \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_i u_j + P_{ij}) = 0 \quad (4.2)$$

avec

$$P_{ij} = p\delta_{ij} - \tau_{ij} = p\delta_{ij} - \mu \left[ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} \right] \quad (4.3)$$

L'élimination de  $\rho u_i$  entre les deux équations donne :

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(\rho u_i u_j + P_{ij}) \quad (4.4)$$

et en retranchant  $c_0^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_i \partial x_i}$  on obtient l'équation d'onde inhomogène suivante :

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (\rho u_i u_j + P_{ij} - c_0^2 \rho \delta_{ij}) \quad (4.5)$$

L'expression notée

$$T_{ij} = \rho u_i u_j + P_{ij} - c_0^2 \rho \delta_{ij} \quad (4.6)$$

est appelée tenseur de Lighthill.

En espace libre, l'équation (4.5) a pour solution générale :

$$(\rho - \rho_0)(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi c_0^2} \int_V \left[ \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial y_i \partial y_j} \right] \frac{dV_y}{|\vec{x} - \vec{y}|} \quad (4.7)$$

où  $V$  est *a priori* l'ensemble de l'espace mais peut être réduit au volume sur lequel le terme source est non-nul.  $dV_y = dy_1 dy_2 dy_3$  est l'élément différentiel de ce volume. Curle montre que la double dérivation du tenseur de Lighthill peut être effectuée dans le milieu observateur et donc extraite de l'intégrale.

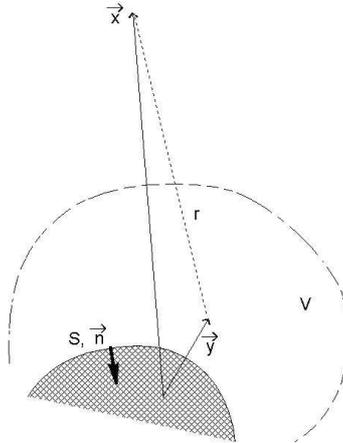


FIG. 4.1 – Notations pour un calcul acoustique par analogie en espace non-libre.

Lorsqu'on ne se trouve pas en espace libre, l'équation (4.5) a pour solution générale, en utilisant les notations de la figure 4.1 :

$$(\rho - \rho_0)(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi c_0^2} \int_V \left[ \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial y_i \partial y_j} \right] \frac{dV_y}{|\vec{x} - \vec{y}|} + \frac{1}{4\pi} \int_S \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial \rho}{\partial n} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial n} \rho + \frac{1}{rc_0} \frac{\partial r}{\partial n} \frac{\partial \rho}{\partial t} \right] dS_y \quad (4.8)$$

où  $dS_y$  est l'élément de surface de  $S$ ,  $r = |\vec{x} - \vec{y}|$ ,  $n$  est la normale à la surface, orientée du fluide vers le solide. Les quantités notées entre crochets doivent être évaluées à  $t - r/c_0$ . L'intégrale surfacique traduit les conditions aux limites. L'intégrale volumique est identique

à celle de la solution générale en espace libre. Cependant si l'on souhaite en extraire les dérivations pour les effectuer dans le milieu observateur, la présence des frontières fait apparaître des intégrales surfaciques supplémentaires lors de l'application du théorème de flux-divergence.

La solution en espace non-libre peut être calculée directement si on connaît toutes les grandeurs mises en jeu dans les intégrales, à savoir le tenseur de Lighthill dans le volume mais également  $\rho$  et ses dérivées normale et temporelle sur la surface. Cependant  $\rho$  est une grandeur difficile à mesurer, et ne peut évidemment pas être obtenue en simulation numérique incompressible. Pour contourner ce problème, des intégrales contenant des grandeurs plus accessibles peuvent être obtenues en combinant l'intégrale surfacique de l'équation (4.8) avec celles qui apparaissent lorsqu'on extrait les dérivations de l'intégrale volumique. Le formalisme proposé ci-dessous est celui de l'article original de Curle [20], qui est également présenté dans l'ouvrage de synthèse de Blake [5], mais la manière d'obtenir les formules 4.24 et 4.31 n'y est pas précisément indiquée. De ce fait, nous présentons dans la suite le développement mathématique conduisant à la formulation de Curle utilisée. Les étapes sont les suivantes :

- énoncé de propriétés mathématiques concernant le temps retardé ;
- extraction de la première dérivée de l'intégrale volumique ;
- extraction de la deuxième dérivée de l'intégrale volumique ;
- opérations sur l'intégrale surfacique de l'équation (4.8) ;
- combinaison des intégrales surfaciques et obtention de l'équation de Curle.

### Propriétés mathématiques

Une difficulté est l'évaluation des grandeurs au temps retardé  $t - r/c_0$ . En effet, celles-ci sont fonction du temps  $\tau$  et de l'espace  $\vec{y}$  dans le domaine source. Or le champ acoustique est une fonction du temps  $t$  et de l'espace  $\vec{x}$  dans le domaine observateur. Il ne dépend pas de  $\vec{y}$  par suite de l'intégration, et il ne dépend pas de  $\tau$  parce que celui-ci s'exprime à l'aide des trois autres variables considérées, à savoir  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$  et  $t$ . La présence de  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$  dans la variable temporelle des grandeurs sous l'intégrale nécessite quelques précautions dans le calcul des dérivations partielles. C'est pourquoi les définitions et propriétés mathématiques suivantes sont présentées.

Pour une fonction  $g : (\vec{y}, \tau) \longrightarrow g(\vec{y}, \tau)$ , on définit  $\hat{g}$  telle que :

$$\hat{g} : (\vec{x}, \vec{y}, t) \longrightarrow \hat{g}(\vec{x}, \vec{y}, t) = g\left(\vec{y}, t - \frac{r(\vec{x}, \vec{y})}{c_0}\right)$$

où  $r$  est l'application définie par :

$$r : (\vec{x}, \vec{y}) \longrightarrow |\vec{x} - \vec{y}| = \sqrt{\sum_i (x_i - y_i)^2} \quad (4.9)$$

et qui a donc la propriété suivante :

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i - y_i}{r} = -\frac{y_i - x_i}{r} = -\frac{\partial r}{\partial y_i} \quad (4.10)$$

Les formes différentielles de  $g$  et  $\widehat{g}$  s'écrivent :

$$\begin{aligned} dg &= \sum_i \frac{\partial g}{\partial y_i} dy_i + \frac{\partial g}{\partial \tau} d\tau \\ d\widehat{g} &= \sum_i \frac{\partial \widehat{g}}{\partial x_i} dx_i + \sum_i \frac{\partial \widehat{g}}{\partial y_i} dy_i + \frac{\partial \widehat{g}}{\partial t} dt \end{aligned} \quad (4.11)$$

Si  $\tau : (r, t) \longrightarrow t - r/c_0$ , la forme différentielle de  $\tau$  s'écrit, puisque l'on considère un observateur et une source fixes :

$$d\tau = dt - \frac{1}{c_0} dr = dt - \frac{1}{c_0} \sum_i \left( \frac{\partial r}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial r}{\partial y_i} dy_i \right) \quad (4.12)$$

Lorsqu'on se trouve au point  $(\vec{x}, \vec{y}, t)$  pour l'application  $\widehat{g}$  et au point  $(\vec{y}, \tau) = (\vec{y}, t - r/c_0)$  pour l'application  $g$ , on a  $dg = d\widehat{g}$  et il vient :

$$\begin{aligned} dg &= \sum_i \frac{\partial g}{\partial y_i} dy_i - \frac{1}{c_0} \frac{\partial g}{\partial \tau} \sum_i \frac{\partial r}{\partial x_i} dx_i - \frac{1}{c_0} \frac{\partial g}{\partial \tau} \sum_i \frac{\partial r}{\partial y_i} dy_i + \frac{\partial g}{\partial \tau} dt \\ &= d\widehat{g} = \sum_i \frac{\partial \widehat{g}}{\partial x_i} dx_i + \sum_i \frac{\partial \widehat{g}}{\partial y_i} dy_i + \frac{\partial \widehat{g}}{\partial t} dt \end{aligned}$$

d'où les identifications suivantes, valables pour tout  $i$  :

$$\frac{\partial g}{\partial \tau} = \frac{\partial \widehat{g}}{\partial t} \quad (4.13)$$

$$-\frac{1}{c_0} \frac{\partial g}{\partial \tau} \frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{\partial \widehat{g}}{\partial x_i} \quad (4.14)$$

$$\frac{\partial g}{\partial y_i} - \frac{1}{c_0} \frac{\partial g}{\partial \tau} \frac{\partial r}{\partial y_i} = \frac{\partial \widehat{g}}{\partial y_i} \quad (4.15)$$

### Application pour l'extraction de la première divergence

Pour revenir à la formulation de Curle, on considère l'application scalaire suivante :

$$f : (\vec{x}, t) \longrightarrow f(\vec{x}, t) = \int_V \frac{1}{r(\vec{x}, \vec{y})} \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial y_i \partial y_j} \left( \vec{y}, \tau = t - \frac{r(\vec{x}, \vec{y})}{c_0} \right) dV_y \quad (4.16)$$

où la convention de sommation des indices répétés est utilisée, et on définit les applications  $T_1$  et  $\widehat{T}_1$  telles que :

$$T_1 : (\vec{y}, \tau) \longrightarrow T_1(\vec{y}, \tau) = \frac{\partial T_{ij}}{\partial y_j}(\vec{y}, \tau) \quad (4.17)$$

$$\widehat{T}_1 : (\vec{x}, \vec{y}, t) \longrightarrow \widehat{T}_1(\vec{x}, \vec{y}, t) = T_1 \left( \vec{y}, t - \frac{r(\vec{x}, \vec{y})}{c_0} \right) = \frac{\partial T_{ij}}{\partial y_j} \left( \vec{y}, t - \frac{r(\vec{x}, \vec{y})}{c_0} \right)$$

$T_1$  est donc le vecteur divergence du tenseur de Lighthill, indexé par  $i$ , et  $\widehat{T}_1$  est son expression au temps retardé. Les propriétés du paragraphe précédent énoncées pour  $g$  et  $\widehat{g}$  vont pouvoir leur être appliquées pour transformer la divergence dans le milieu source en une divergence dans le milieu observateur. En effet, on peut écrire :

$$f(\vec{x}, t) = \int_V \frac{1}{r(\vec{x}, \vec{y})} \sum_i \frac{\partial T_1}{\partial y_i} \left( \vec{y}, t - \frac{r(\vec{x}, \vec{y})}{c_0} \right) dV_y \quad (4.18)$$

En utilisant l'identité (4.15), il vient, en notant  $r = r(\vec{x}, \vec{y})$  et en omettant le signe de sommation :

$$f(\vec{x}, t) = \int_V \frac{\partial \widehat{T}_1}{\partial y_i}(\vec{x}, \vec{y}, t) \frac{dV_y}{r} + \int_V \frac{1}{c_0} \frac{\partial T_1}{\partial \tau} \frac{\partial r}{\partial y_i} \left( \vec{y}, \tau = t - \frac{r}{c_0} \right) \frac{dV_y}{r} \quad (4.19)$$

La deuxième intégrale étant notée  $I_1$ , on décompose la première à l'aide de la propriété  $U \operatorname{div} \vec{V} = \operatorname{div}(U \vec{V}) - \vec{V} \cdot \operatorname{grad} U$  pour obtenir :

$$f(\vec{x}, t) = \int_V \frac{\partial}{\partial y_i} \left( \frac{\widehat{T}_1}{r} \right) dV_y - \int_V \widehat{T}_1 \frac{\partial}{\partial y_i} \left( \frac{1}{r} \right) dV_y + I_1 \quad (4.20)$$

L'application de la propriété (4.10) de  $r$ , puis une décomposition similaire, donnent successivement :

$$f(\vec{x}, t) = \int_V \frac{\partial}{\partial y_i} \left( \frac{\widehat{T}_1}{r} \right) dV_y + \int_V \widehat{T}_1 \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{r} \right) dV_y + I_1 \quad (4.21)$$

$$f(\vec{x}, t) = \int_V \frac{\partial}{\partial y_i} \left( \frac{\widehat{T}_1}{r} \right) dV_y + \int_V \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\widehat{T}_1}{r} \right) dV_y - \int_V \frac{\partial \widehat{T}_1}{\partial x_i} \frac{dV_y}{r} + I_1 \quad (4.22)$$

L'identité (4.14), puis à nouveau la propriété (4.10), permettent d'écrire que :

$$\frac{\partial \widehat{T}_1}{\partial x_i} = -\frac{1}{c_0} \frac{\partial T_1}{\partial \tau} \frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{1}{c_0} \frac{\partial T_1}{\partial \tau} \frac{\partial r}{\partial y_i}$$

donc le troisième terme s'annule avec  $I_1$  définie en (4.19). En appliquant le théorème flux-divergence d'Ostrogradski au vecteur  $\widehat{T}_1/r$  dans le premier terme, et en remarquant qu'on peut extraire du deuxième la dérivation par rapport à  $x_i$  puisque l'intégrale s'applique à  $\widehat{T}_1$  et porte sur  $\vec{y}$ , on obtient finalement :

$$f(\vec{x}, t) = \int_S n_i \frac{\widehat{T}_1}{r} dS_y + \frac{\partial}{\partial x_i} \int_V \frac{\widehat{T}_1}{r} dV_y \quad (4.23)$$

où  $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$  est la normale à  $S$  orientée du fluide vers le solide. C'est-à-dire, en reprenant les définitions (4.16) et (4.17) pour revenir au tenseur de Lighthill et en notant entre crochets les grandeurs qui doivent être évaluées à  $\tau = t - \frac{r}{c_0}$  :

$$\int_V \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial y_i \partial y_j} \right] dV_y = \int_S \frac{n_i}{r} \left[ \frac{\partial T_{ij}}{\partial y_j} \right] dS_y + \frac{\partial}{\partial x_i} \int_V \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial T_{ij}}{\partial y_j} \right] dV_y \quad (4.24)$$

### Application pour l'extraction de la deuxième divergence

On effectue de nouveau les opérations du paragraphe précédent, pour transformer la dérivation par rapport à  $y$  en une dérivation par rapport à  $x$  dans le dernier terme de l'équation (4.24), en posant cette fois :

$$\begin{aligned} h_i : (\vec{x}, t) &\longrightarrow h_i(\vec{x}, t) = \int_V \frac{1}{r} \frac{\partial T_{ij}}{\partial y_j} \left( \vec{y}, \tau = t - \frac{r}{c_0} \right) dV_y \\ T_{ij} : (\vec{y}, \tau) &\longrightarrow T_{ij}(\vec{y}, \tau) = T_{ij}(\vec{y}, \tau) \\ \widehat{T}_{ij} : (\vec{x}, \vec{y}, t) &\longrightarrow \widehat{T}_{ij}(\vec{x}, \vec{y}, t) = T_{ij} \left( \vec{y}, t - \frac{r}{c_0} \right) \end{aligned} \quad (4.25)$$

ce qui donne en utilisant l'identité (4.15) :

$$h_i(\vec{x}, t) = \int_V \frac{\partial \widehat{T}_{ij}}{\partial y_j}(\vec{x}, \vec{y}, t) \frac{dV_y}{r} + \int_V \frac{1}{c} \frac{\partial T_{ij}}{\partial \tau} \frac{\partial r}{\partial y_j} \left( \vec{y}, \tau = t - \frac{r}{c_0} \right) \frac{dV_y}{r} \quad (4.26)$$

puis en décomposant le premier terme et en notant  $I_0$  le second :

$$h_i(\vec{x}, t) = \int_V \frac{\partial}{\partial y_j} \left( \frac{\widehat{T}_{ij}}{r} \right) dV_y - \int_V \widehat{T}_{ij} \frac{\partial}{\partial y_j} \left( \frac{1}{r} \right) dV_y + I_0 \quad (4.27)$$

et en utilisant la propriété (4.10) de  $r$  :

$$h_i(\vec{x}, t) = \int_V \frac{\partial}{\partial y_j} \left( \frac{\widehat{T}_{ij}}{r} \right) dV_y + \int_V \widehat{T}_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{1}{r} \right) dV_y + I_0 \quad (4.28)$$

La décomposition du second terme permet d'écrire :

$$h_i(\vec{x}, t) = \int_V \frac{\partial}{\partial y_j} \left( \frac{\widehat{T}_{ij}}{r} \right) dV_y + \int_V \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\widehat{T}_{ij}}{r} \right) dV_y - \int_V \frac{\partial \widehat{T}_{ij}}{\partial x_j} \frac{dV_y}{r} + I_0 \quad (4.29)$$

Enfin, l'identité (4.14) permet d'écrire :

$$\frac{\partial \widehat{T}_{ij}}{\partial x_j} = -\frac{1}{c_0} \frac{\partial T_{ij}}{\partial \tau} \frac{\partial r}{\partial x_j} = \frac{1}{c_0} \frac{\partial T_{ij}}{\partial \tau} \frac{\partial r}{\partial y_j} \quad (4.30)$$

La troisième intégrale de (4.29) s'annule alors avec  $I_0$ . Finalement, après application du théorème d'Ostrogradski au tenseur  $\widehat{T}_{ij}/r$  dans le premier terme, on obtient :

$$\int_V \left[ \frac{\partial T_{ij}}{\partial y_j} \right] \frac{dV_y}{r} = \int_S n_j [T_{ij}] \frac{dS_y}{r} + \frac{\partial}{\partial x_j} \int_V [T_{ij}] \frac{dV_y}{r} \quad (4.31)$$

Les expressions (4.24) et (4.31) peuvent alors donner l'expression suivante pour l'intégrale volumique de la solution générale (4.8) :

$$\begin{aligned} \int_V \left[ \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial y_i \partial y_j} \right] \frac{dV(y)}{r} &= \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \int_V [T_{ij}] \frac{dV(y)}{r} \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_i} \int_S n_j [T_{ij}] \frac{dS(y)}{r} + \int_S n_i \left[ \frac{\partial T_{ij}}{\partial y_j} \right] \frac{dS(y)}{r} \end{aligned} \quad (4.32)$$

Deux intégrales surfaciques sont donc apparues du fait de la présence des frontières, représentant la similarité flux-divergence.

### Opérations sur l'intégrale surfacique

Les opérations effectuées maintenant sur l'intégrale surfacique de (4.8) ont pour objectif d'y faire apparaître des termes qui vont se combiner avec  $T_{ij}$  et  $\frac{\partial T_{ij}}{\partial y_j}$  contenus dans les intégrales surfaciques de (4.32). On considère donc  $I_S$  définie par :

$$I_S = \int_S \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial \rho}{\partial n} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial n} \rho + \frac{1}{rc_0} \frac{\partial r}{\partial n} \frac{\partial \rho}{\partial t} \right] dS_y \quad (4.33)$$

En utilisant les définitions

$$\frac{\partial U}{\partial n} = \vec{n} \cdot \vec{grad} U = n_i \frac{\partial U}{\partial y_i}$$

et

$$\rho : (\vec{y}, \tau) \longrightarrow \rho(\vec{y}, \tau) \quad (4.34)$$

on peut écrire :

$$I_S = \int_S n_i \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial \rho}{\partial y_i} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial y_i} \rho + \frac{1}{rc_0} \frac{\partial r}{\partial y_i} \frac{\partial \rho}{\partial \tau} \right] dS_y \quad (4.35)$$

et avec la propriété (4.10) de  $r$ , on a :

$$I_S = \int_S \frac{n_i}{r} \left[ \frac{\partial \rho \delta_{ij}}{\partial y_j} \right] dS_y - \int_S n_i \left[ \frac{\partial r}{\partial x_i} \left( \frac{\rho}{r^2} + \frac{1}{rc_0} \frac{\partial \rho}{\partial \tau} \right) \right] dS_y \quad (4.36)$$

Pour simplifier la deuxième intégrale, nous introduisons à nouveau une fonction de  $(\vec{x}, \vec{y}, t)$ , afin d'écrire des relations entre les dérivations partielles. Considérons donc l'application suivante :

$$\phi : (\vec{x}, \vec{y}, t) \longrightarrow \phi(\vec{x}, \vec{y}, t) = \left[ \frac{\rho}{r} \right] = \frac{1}{r} \rho \left( \vec{y}, \tau = t - \frac{r}{c_0} \right) \quad (4.37)$$

Sa différentielle s'écrit :

$$\begin{aligned} d\phi &= \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial \phi}{\partial y_i} dy_i + \frac{\partial \phi}{\partial t} dt \\ &= d\left(\frac{1}{r}\right)\rho + \frac{1}{r}d\rho \\ &= \rho \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_i} dx_i + \rho \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y_i} dy_i + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho}{\partial y_i} dy_i + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho}{\partial \tau} d\tau \\ &= \rho \frac{-1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x_i} dx_i + \rho \frac{-1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial y_i} dy_i + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho}{\partial y_i} dy_i + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho}{\partial \tau} dt - \frac{1}{c_0 r} \frac{\partial \rho}{\partial \tau} \frac{\partial r}{\partial x_i} dx_i - \frac{1}{c_0 r} \frac{\partial \rho}{\partial \tau} \frac{\partial r}{\partial y_i} dy_i \end{aligned} \quad (4.38)$$

où l'équation (4.12) a été utilisée pour exprimer  $d\tau$ . On a donc les identités suivantes :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_i} = - \left( \frac{\rho}{r^2} + \frac{1}{c_0 r} \frac{\partial \rho}{\partial \tau} \right) \frac{\partial r}{\partial x_i} \quad (4.39)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial y_i} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \rho}{\partial y_i} - \left( \frac{\rho}{r^2} + \frac{1}{c_0 r} \frac{\partial \rho}{\partial \tau} \right) \frac{\partial r}{\partial y_i} \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \rho}{\partial \tau} \end{aligned} \quad (4.40)$$

Et en remplaçant (4.39) dans (4.36), on obtient :

$$I_S = \int_S \frac{n_i}{r} \left[ \frac{\partial \rho \delta_{ij}}{\partial y_j} \right] dS_y + \frac{\partial}{\partial x_i} \int_S n_j \left[ \frac{\rho \delta_{ij}}{r} \right] dS_y \quad (4.41)$$

### Equation intégrale de Curle

En divisant l'équation (4.32) par  $4\pi c_0^2$  et l'équation (4.41) par  $4\pi$ , la somme conduit à la nouvelle forme de la solution (4.8), où les intégrales surfaciques sont regroupées :

$$\begin{aligned} \rho - \rho_0 &= \frac{1}{4\pi c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \int_V [T_{ij}] \frac{dV(y)}{r} \\ &+ \frac{1}{4\pi c_0^2} \int_S \frac{n_i}{r} \left[ \frac{\partial (T_{ij} + c_0^2 \rho \delta_{ij})}{\partial y_j} \right] dS_y \\ &+ \frac{1}{4\pi c_0^2} \frac{\partial}{\partial x_i} \int_S \frac{n_j}{r} [T_{ij} + c_0^2 \rho \delta_{ij}] dS_y \end{aligned} \quad (4.42)$$

En utilisant la définition du tenseur (4.6) de Lighthill et la conservation de la quantité de mouvement (4.2), on aboutit à l'équation obtenue par Curle exprimant le rayonnement acoustique d'un écoulement en présence de surfaces :

$$\begin{aligned} \rho - \rho_0 &= \frac{1}{4\pi c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \int_V [T_{ij}] \frac{dV(y)}{r} \\ &- \frac{1}{4\pi c_0^2} \frac{\partial}{\partial t} \int_S \frac{n_i}{r} [\rho u_i] dS_y \\ &+ \frac{1}{4\pi c_0^2} \frac{\partial}{\partial x_i} \int_S \frac{n_j}{r} [\rho u_i u_j + P_{ij}] dS_y \end{aligned} \quad (4.43)$$

Notons que la dérivation temporelle a pu être extraite de la deuxième intégrale grâce à la propriété (4.40). Cette équation intégrale n'est valable que dans le cas où la surface et l'observateur sont immobiles, mais la surface peut être perméable. Trois mécanismes sources de bruit apparaissent dans cette formulation :

- le mécanisme décrit par Lighthill pour l'acoustique au sein du volume qui est le siège de l'écoulement ;
- la présence d'un débit masse à travers la surface ;
- la présence d'un débit de quantité de mouvement à travers la surface, sous forme de vitesse ou de pression, voire de viscosité.

Ces trois mécanismes apparaissent comme étant respectivement de nature quadripolaire, monopolaire et dipolaire. Toutefois, comme ils sont répartis dans le volume et sur la surface, cela ne signifie pas que le rayonnement acoustique résultant sera d'une nature ou d'une autre.

### 4.1.2 Autres formalismes

Dans l'ouvrage de synthèse de Dowling & Ffowcs-Williams [24], la démonstration de l'équation de Curle est également effectuée sans faire appel aux fonctions de Green. Cependant, certaines étapes ne sont pas triviales pour le lecteur et le cheminement est légèrement différent. Les auteurs partent de la solution générale en espace libre (4.7), et expriment la contribution quadripolaire à l'intérieur d'un volume  $V_0$  comprenant le corps solide au moyen de contributions dipolaires et monopolaires sur la surface frontière. Le rayonnement total est donc la somme de ces contributions surfaciques et de la contribution quadripolaire à l'extérieur de  $V_0$ .

En revanche, dans les ouvrages de Goldstein [40] et Hirschberg & Rienstra [43], la démonstration fait appel aux propriétés des fonctions de Green. Ceci permet notamment de s'affranchir des difficultés liées au temps retardé, qui sont englobées dans la fonction de Green  $G$ . Les opérations d'intégration par parties sont donc effectuées plus simplement entre  $G$  et  $T_{ij}$ . Les évaluations au temps retardé n'apparaissent qu'ensuite, lorsque l'on exprime  $G$  en tant que réponse à une impulsion.

Comme évoqué en introduction, une autre manière d'aboutir à l'équation intégrale (4.43) est de considérer le cas particulier de surfaces fixes dans l'équation de Ffowcs-Williams & Hawkings [34]. Celle-ci est obtenue en utilisant le concept des fonctions généralisées, sur lesquelles sont reportées les discontinuités dues à la présence des frontières, afin d'écrire une équation d'onde valable en espace libre. Dans le cas de surfaces en mouvement arbitraire, les auteurs proposent une approche prenant véritablement en compte l'évolution spatio-temporelle des sources au moyen d'une distribution en dimension 4 qui ne saurait être écrite ici de manière rigoureuse. Dans la littérature, notamment dans Hirschberg & Rienstra [43] ou Gloerfelt [36], l'équation intégrale de Ffowcs-Williams & Hawkings est généralement présentée sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
\rho - \rho_0 &= \frac{1}{4\pi c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \int_V \left[ \frac{1}{r|1 - M_r^S|} T_{ij} \right] \frac{dV(y)}{r} \\
&- \frac{1}{4\pi c_0^2} \frac{\partial}{\partial t} \int_S \left[ n_i \frac{\rho_0 U_i + \rho(u_i - U_i)}{r|1 - M_r^S|} \right] dS_y \\
&+ \frac{1}{4\pi c_0^2} \frac{\partial}{\partial x_i} \int_S \left[ n_j \frac{\rho u_i (u_j - U_j) + P_{ij}}{r|1 - M_r^S|} \right] dS_y
\end{aligned} \tag{4.44}$$

où  $U_i$  correspond à la vitesse de déplacement de la surface et  $M_r^S$  est le nombre de Mach de ce déplacement dans la direction de  $r$ . Lorsque la surface est fixe, ces deux quantités sont nulles, et on retrouve l'équation de Curle présentée précédemment.

L'apparente diversité des formalismes qui conduisent à l'équation intégrale de Curle pour le rayonnement acoustique d'écoulements de paroi masque un peu le fait qu'il sont tous issus de la prise en compte de conditions limites dans la résolution d'une équation d'onde inhomogène dont le terme source est déduit des équations du mouvement. Ils ne contiennent donc pas plus d'information sur les mécanismes physiques de génération sonore en présence de frontières solides que l'équation de Lighthill n'en contient pour le bruit des écoulements libres. Cependant, les modèles prédictifs construits par analogie fournissent l'évaluation d'un champ acoustique rayonné dont l'analyse, conjuguée à celle de l'écoulement, peut permettre un progrès dans la compréhension de ces mécanismes.

## 4.2 Mise en oeuvre numérique

### 4.2.1 Calcul des sources

Lorsque les données sources de l'analogie sont données par une simulation numérique de l'écoulement, il convient d'examiner les hypothèses sur lesquelles repose cette simulation afin d'évaluer leurs conséquences pour le calcul du rayonnement acoustique. En général, on considère qu'une simulation grandes échelles est suffisante pour représenter correctement les sources, dans la mesure où les grosses structures sont les plus bruyantes. Utilisant une

simulation directe, nous ne sommes pas concernés par cette hypothèse, pour autant que la discrétisation soit assez fine. Dans le cas des écoulements à grand nombre de Reynolds, l'effet de la viscosité est faible, et on néglige les termes sources d'origine visqueuse. Cependant, sans avoir recours à l'hypothèse d'un grand nombre de Reynolds, Crighton [18] montre que le rayonnement de ces termes est nul. En effet, les contraintes visqueuses s'expriment à l'aide de dérivées spatiales du champ de vitesse, donc le théorème flux-divergence peut leur être appliqué une fois de plus qu'au terme  $\rho u_i u_j$ . Le volume source étant fermé par une surface sur laquelle  $T_{ij} = 0$ , l'intégrale surfacique qui en résulte s'annule. Ainsi, bien qu'étant à faible nombre de Reynolds, nous négligerons le rayonnement acoustique des sources volumiques visqueuses.

L'hypothèse d'incompressibilité nécessite un examen tout particulier. En effet, d'après Bogey *et al* [6], pour que l'analogie de Lighthill conduise à l'estimation correcte du rayonnement acoustique, le tenseur de Lighthill doit être connu sur un volume comprenant toutes les sources acoustiques et toutes les interactions entre l'acoustique et l'écoulement. Pour que ces interactions soient prises en compte, il est nécessaire que la simulation soit capable de traduire les effets de la compressibilité. Par conséquent, si on fait l'hypothèse d'incompressibilité, il faut supposer qu'il n'y a pas d'interaction entre l'acoustique et l'écoulement. Cette hypothèse représente assez bien la réalité d'un écoulement à faible nombre de Mach. Cependant, le terme source de l'équation de Lighthill s'écrit :

$$\frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (\rho u_i u_j + (p - c_0^2 \rho) \delta_{ij} - \tau_{ij}) \quad (4.45)$$

donc, si on suppose un écoulement incompressible,  $\rho$  est uniforme et l'équation de continuité fournit :

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$$

Alors, en utilisant la définition (4.3) de  $\tau_{ij}$ , le terme source s'écrit :

$$\frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} = \rho_0 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_i} \quad (4.46)$$

Or en prenant la divergence de l'équation de bilan de quantité de mouvement (4.2), on retrouve l'expression ci-dessus qui apparaît comme égale à zéro. Larsson [70] conclue que si on utilise des données incompressibles, il ne faut garder du terme source que  $\rho_0 u_i u_j$ . Cela revient à négliger le bruit des termes sources que Lighthill désigne par entropiques et visqueux. Puisque nous utilisons des données issues de simulations incompressibles, nous appliquerons cela pour l'évaluation de l'intégrale volumique qui met en jeu le tenseur de Lighthill dans l'équation de Curle (4.43).

Par ailleurs, lorsqu'on utilise une analogie avec une surface de contrôle, les termes surfaciques sont censés représenter le rayonnement acoustique des sources contenues dans le volume qu'elle englobe. Or en incompressible, on peut se demander ce qu'il advient de la propagation entre ces sources et la surface de contrôle. Un élément de réponse est fourni

par Dowling & Ffowcs-Williams [24]. En effet, d'un côté, pour un mouvement linéaire de fluide irrotationnel et non-visqueux, le potentiel de vitesse  $\varphi$  satisfait l'équation d'onde :

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \nabla^2 \varphi = 0 \quad (4.47)$$

Dans l'hypothèse d'incompressibilité,  $c_0$  tend vers l'infini donc l'équation d'onde qui régit  $\varphi$  tend vers l'équation de Laplace :

$$-\nabla^2 \varphi = 0 \quad (4.48)$$

De l'autre côté, à proximité d'une source de petite dimension,  $\varphi$  varie comme  $r^{-\alpha}$  où  $\alpha$  est positif et  $r$ , qui tend vers 0, est la distance à la source.  $\partial^2 \varphi / \partial t^2$  a le même comportement, mais  $\nabla^2 \varphi$  varie comme  $r^{-\alpha-2}$ , donc l'équation d'onde se ramène encore à l'équation de Laplace. On voit ainsi qu'un mouvement incompressible irrotationnel non-visqueux a le même comportement qu'un mouvement acoustique en champ proche. Par conséquent, les sources provenant d'une simulation incompressible devraient être prises en compte lorsqu'elles sont englobées par une surface de contrôle placée en champ proche. Cependant, il est possible que l'hypothèse de mouvement linéaire, irrotationnel et non-visqueux soit trop forte.

## 4.2.2 Problématiques pour la programmation

L'écriture d'un algorithme pour le calcul des solutions intégrales nécessite de résoudre ce qui est désigné par un problème aux temps retardés, c'est-à-dire la prise en compte de la différence entre le temps d'émission et le temps de réception. La revue de Brentner [8] à ce sujet distingue trois principales familles d'algorithmes : les algorithmes aux temps retardés, les algorithmes de *collapsing sphere* et les algorithmes de surface d'émission. Bien qu'elle ne soit pas très bien adaptée lorsqu'il existe un mouvement supersonique de la source, la première est la plus robuste et la plus efficace. C'est également celle qui découle le plus rapidement de la formulation mathématique : pour calculer le rayonnement en un point observateur  $\vec{x}$  à l'instant  $t$ , il faut additionner la contribution des points sources  $\vec{y}$  en considérant pour chacun le temps d'émission  $t - r/c$  où  $r = |\vec{x} - \vec{y}|$ . Cependant cette simplicité formelle n'affranchit pas du problème de l'accès aux données sources. Il y a deux alternatives : soit toutes les données d'un terme source sont sauvegardées dans une variable  $p(\vec{y}, t)$ , soit elles sont sauvegardées dans un fichier pour chaque instant. Dans le premier cas, se pose rapidement le problème de la taille de la variable en question, d'autant plus que s'agissant d'un calcul par accumulation, cela peut nécessiter de travailler en double précision. Dans le second cas, il est nécessaire, pour chaque point et instant d'observation, de réaliser une lecture d'un fichier différent pour chaque point source.

## 4.2.3 Calcul en temps avancé

Dans notre travail, en vue d'évaluer le rayonnement acoustique non seulement en quelques points mais sur un champ, et, à terme, à partir de données 3D, pour un nombre

d'instants significatifs, il nous est apparu nécessaire d'effectuer le calcul de l'intégrale aux temps retardés en prenant pour référence le temps d'émission. Pour signifier cette inversion de référence, on parle de calcul en temps avancé, comme présenté par Casalino [12]. Son principal avantage est de permettre une seule lecture des données, donc d'autoriser un calcul parallèle de l'écoulement et de l'acoustique. Pour expliciter cette façon d'imbriquer les différentes boucles, on peut dire qu'en temps avancé on s'intéresse à ce que perçoit un observateur à un instant donné, tandis qu'en temps retardé, on s'intéresse à ce que rayonne la source.

Le principe de ces deux méthodes est précisé à l'aide des schémas présentés sur les figures 4.2, 4.3 et 4.4. On considère une ligne source discrétisée par 7 points sources. Cela peut représenter une source surfacique dans une simulation bi-dimensionnelle. Pour chaque point source, on dispose d'une donnée source, par exemple la pression, à 9 instants discrets. Le graphique de la figure 4.2 présente la fonction  $P(y, \tau)$ . A un instant donné, l'intégrale de la pression sur la source, c'est-à-dire la résultante de l'effort surfacique en l'absence de viscosité, est l'aire coloriée en rose sur la figure 4.3. Lorsque les écarts de temps de retard sont négligeables entre les différents points, le rayonnement est celui d'un dipôle d'intensité proportionnelle à cette intégrale.

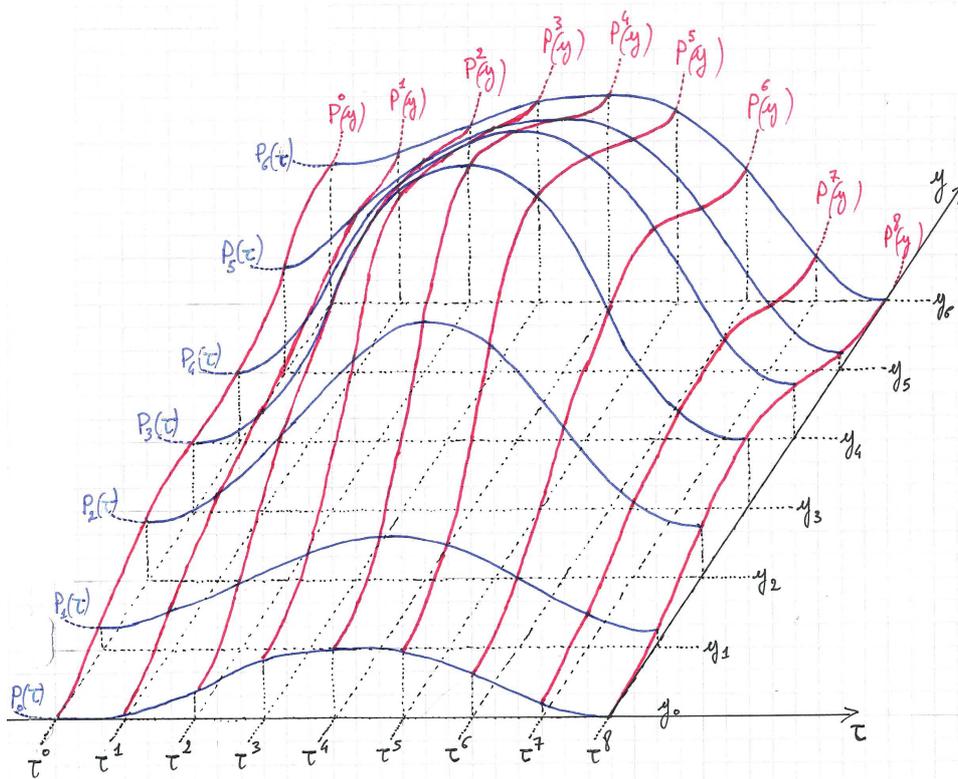


FIG. 4.2 – Notations :  $y$  est une ligne source discrétisée en 7 points ;  $\tau$  est le temps à la source discrétisé en 9 instants ;  $P$  est le terme source, par exemple la pression .

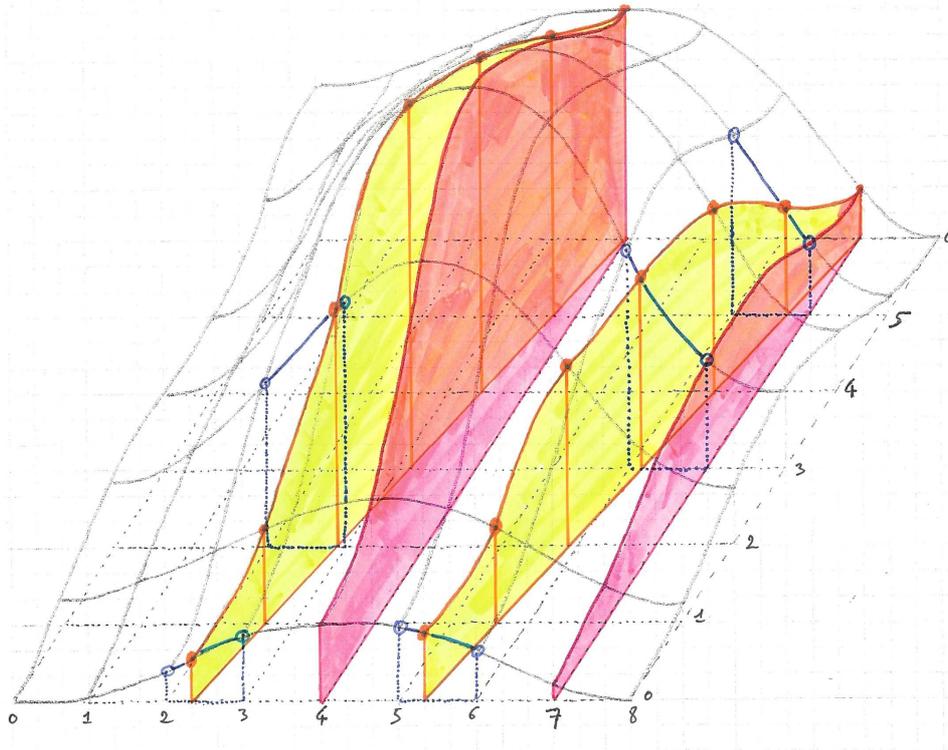


FIG. 4.3 – Principe de calcul en temps retardé. En rose, résultante de la pression sur la ligne à un instant donné ; en jaune, intégrale au temps retardé.

La droite oblique matérialise le décalage qui existe entre les temps d'émissions de deux points sources dont la contribution arrive en même temps au même point d'observation. A noter qu'en pratique, il ne s'agit d'une droite que si ces trois points sont alignés. L'aire coloriée en jaune est donc l'intégrale aux temps retardés, c'est-à-dire celle conduisant au rayonnement acoustique lorsque ceux-ci ne sont plus négligeables, à ceci près que l'élément différentiel d'intégration demeure  $dy$ . On voit que la différence entre les deux aires n'est pas la même pour les deux instants représentés : cela provient de ce que la variation de la grandeur source autour de l'instant  $\tau^6$  est plus importante que celle autour de l'instant  $\tau^3$ . La différence entre les aires rose et jaune provient également de la valeur de  $c_0$  : plus celle-ci est élevée, plus les deux pentes seront proches ; plus  $c_0$  est faible plus l'intégrale aux temps retardés fera appel à des instants éloignés entre les points sources. C'est donc la combinaison entre les variations spatio-temporelles de la grandeur source et la valeur de  $c_0$  qui détermine l'influence des temps retardés.

Pour calculer le rayonnement, on commence par choisir les temps d'observation : ici la convention est que le temps d'observation correspond au temps d'émission pour le point source d'indice 6. L'évaluation numérique de l'intégrale au temps retardé pour le rayonnement perçu à l'instant  $\tau^7$  s'effectue en interpolant la grandeur source entre les instants  $\tau^6$

et  $\tau^7$  pour les points sources d'indice 3 à 6, et entre les instants  $\tau^5$  et  $\tau^6$  pour les points sources d'indice 0 à 2.

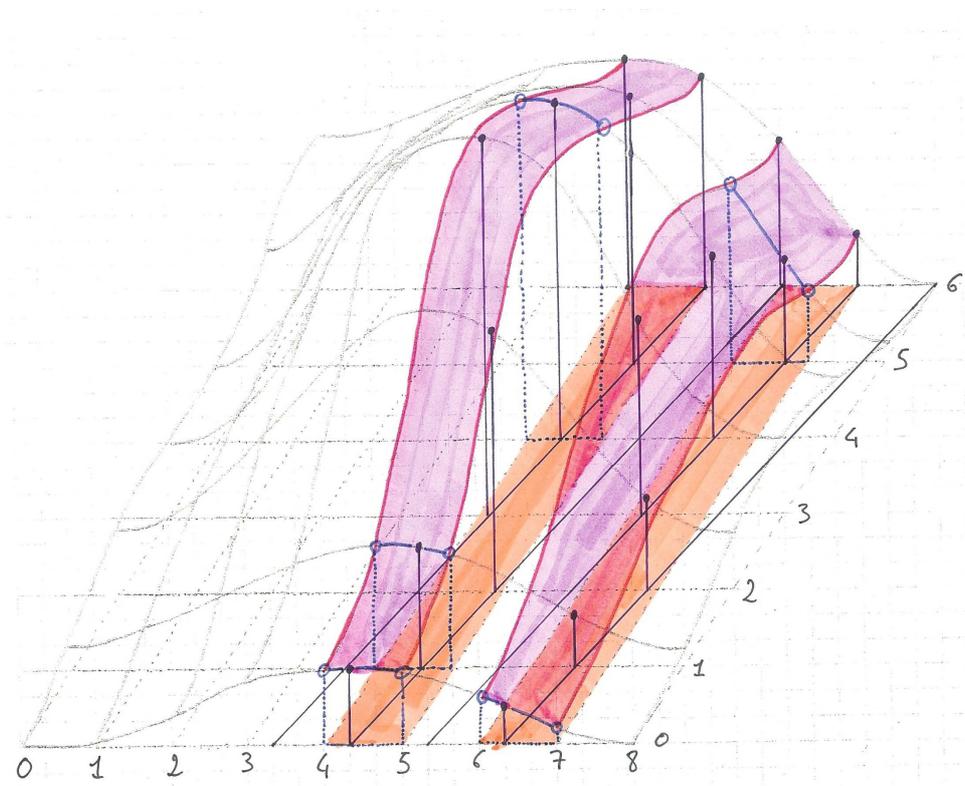


FIG. 4.4 – Principe de calcul en temps avancé.

La méthode des temps avancés, comme on peut le voir sur la figure 4.4 repose sur une vision différente du rayonnement. On considère les données sources dans la tranche temporelle  $]\tau^6, \tau^7]$  et pour chaque source on regarde quelle droite oblique passe dans cette tranche. Lorsque le pas de temps hydrodynamique et le pas de temps acoustique sont égaux, cette droite est unique. L'interpolation est effectuée dans cette tranche pour tous les points sources, c'est-à-dire à partir des mêmes champs hydrodynamiques, mais la contribution des points d'indice 3 à 6 est à mettre au crédit de l'instant observateur correspondant à  $\tau^7$ , tandis que celle des points d'indice 0 à 2 est à mettre au crédit de l'instant observateur correspondant à  $\tau^8$ .

L'algorithme en temps avancé qui a été développé dans le cadre de notre travail peut s'écrire de la manière suivante : dans la tranche temporelle  $[\tau^{k_h}, \tau^{k_h} + 1[$ , pour un point source  $\vec{y}$  et un point observateur  $\vec{x}$  tels que  $r = |\vec{x} - \vec{y}|$ , on recherche l'instant  $\tau$  tel que :

$$\tau + r/c_0 = (k_a - 1)\Delta t \quad (4.49)$$

Les indices  $a$  et  $h$  renvoient respectivement à l'acoustique et à l'hydrodynamique,  $\Delta t$  est le pas de temps de discrétisation des données sources.  $k_a$  doit être un entier afin que les

contributions des termes sources arrivent aux mêmes instants discrets. Si le pas de temps à la réception est égal à celui des données sources, cela revient à rechercher  $\alpha \in [0, 1]$  tel que :

$$(k_h - 1 + \alpha) + \frac{r}{c_0 \Delta t} = (k_a - 1) \quad (4.50)$$

En posant

$$\bar{\alpha} = \frac{r}{c_0 \Delta t} - E \left( \frac{r}{c_0 \Delta t} \right)$$

où  $E$  est la partie entière, on obtient :

$$k_a = k_h + \alpha + \bar{\alpha} + E \left( \frac{r}{c_0 \Delta t} \right) \quad (4.51)$$

Le nombre  $\alpha$  qui détermine l'instant d'interpolation et l'indice de l'instant auquel le rayonnement est perçu sont alors donnés par :

$$\begin{cases} \bar{\alpha} = 0 & \Rightarrow & \alpha = 0, & k_a = k_h + E \left( \frac{r}{c_0 \Delta t} \right) \\ \bar{\alpha} \neq 0 & \Rightarrow & \alpha = 1 - \bar{\alpha}, & k_a = k_h + E \left( \frac{r}{c_0 \Delta t} \right) + 1 \end{cases}$$

## 4.3 Principales caractéristiques du code de calcul

### 4.3.1 Domaine source et domaine observateur

Le domaine source est constitué de la majorité du domaine de calcul aérodynamique. Pour la configuration de plaque plane épaisse, ce dernier est présenté en détails au chapitre suivant, paragraphe 5.1.1. Le domaine source est celui de la figure 4.5. La normale à la surface est orientée vers l'extérieur du volume, c'est-à-dire vers l'intérieur de la plaque en ce qui concerne  $S$ . Ainsi, on a toujours  $\vec{n} = -\vec{e}_y$  si  $\vec{e}_y$  est le vecteur unitaire dans la direction  $y$ .

Le domaine de calcul acoustique est présenté sur la figure 4.6. Il est centré sur la plaque à  $13h$  en aval du coin, c'est-à-dire à peu près au niveau du recollement. Un point du domaine observateur est repéré par ses coordonnées  $(X, Y)$  et un point source par  $(x, y)$ . Le champ acoustique est calculé sur un domaine demi-circulaire, entre les rayons  $100h$  et  $300h$ . La discrétisation est effectuée selon des coordonnées polaires, de manière à exploiter la forme du rayonnement. Les dimensions du domaine et la taille des mailles sont choisies en fonction de la longueur d'onde principale du rayonnement. Celle-ci découle de la valeur retenue pour la célérité du son, qui comporte une part d'arbitraire lorsque l'on utilise des données issues d'une simulation d'écoulement incompressible. Si  $c_0$  est trop grande devant  $U_0$ , c'est-à-dire si le nombre de Mach est trop faible, les temps de retards au sein du domaine source deviennent négligeables, et leur prise en compte, coûteuse pour l'application des méthodes intégrales, ne devient guère utile. Si le nombre de Mach est trop élevé, le résultat obtenu n'est plus très représentatif car les interactions entre l'acoustique et l'écoulement ne

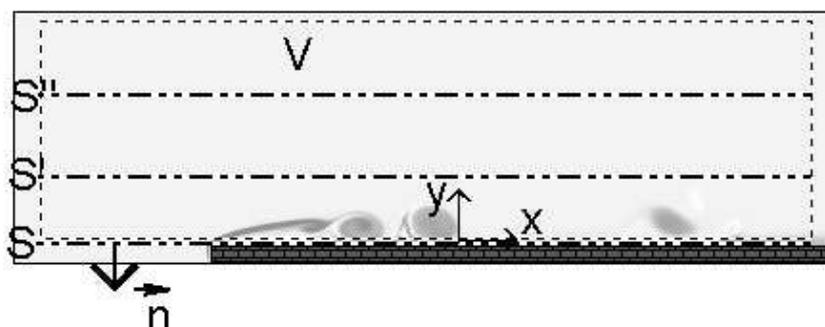


FIG. 4.5 – Domaine source. Le rectangle en pointillés est la zone source volumique  $V$  lorsque la zone source surfacique est  $S$  représentée en trait mixte fort. Quand il s'agit de  $S'$  ou de  $S''$ , la source volumique est la partie supérieure correspondante de  $V$ .

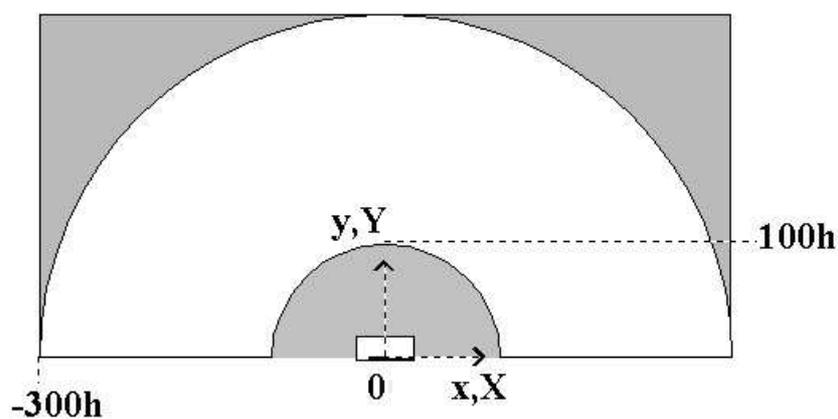


FIG. 4.6 – Domaine de calcul acoustique. Le rectangle blanc est le domaine de calcul hydrodynamique ou domaine source.

sont plus négligeables. En prenant  $c_0 = 2.5U_0$  soit  $M = 0.4$  pour le calcul du rayonnement acoustique d'un écoulement incompressible, on fait donc l'hypothèse qu'au sein du domaine source les phases sont prises en compte mais qu'elles n'ont pas d'influence sur l'écoulement. Comme la fréquence globale de l'écoulement que nous observons ici est d'environ  $0.05U_0/h$ , une étendue radiale de  $200h$  pour le domaine contient environ 4 longueurs d'onde avec cette valeur de  $c_0$ . Pour la discrétisation, on prend alors  $\Delta r = h$  et  $\Delta\theta = \pi/100$ , soit 100 points pour chaque coordonnée. L'affichage des champs calculés est effectué par l'intermédiaire d'une grille en coordonnées cartésiennes avec  $\Delta X = 2h = \Delta Y$ , soit respectivement 300 et 150 points.

### 4.3.2 Equation intégrale

L'équation intégrale (4.43) est utilisée dans l'approximation de champ lointain, pour laquelle on a :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \approx -\frac{1}{c_0} \frac{x_i}{r} \frac{\partial}{\partial t} \quad (4.52)$$

Cette approximation est valable sous les hypothèses suivantes :

- $|\vec{x}| \gg |\vec{y}|$  soit  $r \approx |\vec{x}|$ ;
- et  $\lambda_0 \gg l_0$  où  $\lambda_0$  est la longueur d'onde acoustique caractéristique, et  $l_0$  est la dimension caractéristique de la source.

La présence du signe moins provient de ce qu'on considère une propagation en  $f(t - r/c_0)$ . En effet, on peut définir les applications suivantes :

$$\begin{aligned} f : u &\longrightarrow f(u) \\ h : (t, x_i) &\longrightarrow h(t, x_i) = f(u = t - |\vec{x}|/c) \end{aligned} \quad (4.53)$$

dont les différentielles s'écrivent :

$$\begin{aligned} df &= f'(u)du = f'(u) \left[ dt - \frac{1}{c} \sum_i \frac{\partial |\vec{x}|}{\partial x_i} dx_i \right] = f'(u) \left[ dt - \frac{1}{c} \sum_i \frac{x_i}{|\vec{x}|} dx_i \right] \\ dh &= \frac{\partial h}{\partial t} dt + \sum_i \frac{\partial h}{\partial x_i} dx_i \end{aligned} \quad (4.54)$$

d'où les identifications suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} &= f'(u) \\ \frac{\partial h}{\partial x_i} &= -\frac{1}{c} \frac{x_i}{|\vec{x}|} f'(u) \end{aligned} \quad (4.55)$$

qui conduisent à l'approximation de champ lointain (4.52). Ainsi, avec les notations présentées au paragraphe précédent, la formulation intégrale programmée est la suivante :

$$\begin{aligned}
p^a(X, Y, t) &= \frac{X^2}{4\pi R^3 c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{L_y} \int_{L_x} (\rho u_x u_x)(x, y, t - \frac{r}{c_0}) dx dy \\
&+ \frac{Y^2}{4\pi R^3 c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{L_y} \int_{L_x} (\rho u_y u_y)(x, y, t - \frac{r}{c_0}) dx dy \\
&+ \frac{2XY}{4\pi R^3 c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{L_y} \int_{L_x} (\rho u_x u_y)(x, y, t - \frac{r}{c_0}) dx dy \\
&+ \frac{1}{4\pi R} \frac{\partial}{\partial t} \int_{L_x} (\rho u_y)(x, y_s, t - \frac{r}{c_0}) dx \\
&+ \frac{X}{4\pi R^2 c_0} \frac{\partial}{\partial t} \int_{L_x} \left( \rho u_x u_y - \mu \frac{\partial u_x}{\partial y} - \mu \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) (x, y_s, t - \frac{r}{c_0}) dx \\
&+ \frac{Y}{4\pi R^2 c_0} \frac{\partial}{\partial t} \int_{L_x} \left( p + \rho u_y u_y - 2\mu \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) (x, y_s, t - \frac{r}{c_0}) dx
\end{aligned} \tag{4.56}$$

où  $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$ ,  $r = \sqrt{(X-x)^2 + (Y-y)^2}$ ,  $L_x$  et  $L_y$  sont les dimensions du domaine source, et  $y_s$  est l'ordonnée de  $S$ . Les termes de débits ne concernent que la direction  $y$  puisque la surface est parallèle à la direction  $x$ . On voit que chaque terme de cette équation intégrale est le produit d'une fonction de décroissance directionnelle, d'une ou deux dérivations par rapport au temps et d'une intégrale aux temps retardés. Les dérivées temporelles peuvent si besoin être calculées à l'intérieur de l'intégrale, en vertu de l'identité (4.13) entre  $\frac{\partial}{\partial t}$  et  $\frac{\partial}{\partial \tau}$ . Les fonctions de décroissance, bien qu'issues de la nature des termes sources, sont purement géométriques et ne dépendent pas de l'écoulement. Il est facile de remarquer que les axes du domaine sont les droites d'annulation. Bien que cela attire moins immédiatement l'attention, il n'est guère plus difficile de remarquer, dans la partie de l'espace qui correspond à notre domaine d'observation, que  $X$  et  $XY$  sont antisymétriques entre l'amont et l'aval de l'écoulement. Cela est visible sur la figure 4.7 où elles sont représentées pour chaque terme dans le domaine observateur. A part les droites d'annulation, qui demeurent quel que soit le comportement de la source, ces enveloppes de directivité se conjuguent avec les effets qui peuvent apparaître du fait du calcul au temps retardé. Si ceux-ci ne sont pas pris en compte, l'intégrale prend la même valeur en tout point du domaine observateur et la directivité est déterminée uniquement par les fonctions de décroissance.

La solution intégrale (4.56) est écrite pour une zone source bi-dimensionnelle à partir d'une formulation tri-dimensionnelle de la solution générale de l'équation d'onde inhomogène. En toute rigueur, la solution utilisée aurait dû être adaptée au problème bi-dimensionnel, par l'intermédiaire de la fonction de Green en 2D notamment, ou, ce qui d'après Avital [3] est analytiquement équivalent, en répliquant à l'infini le plan source en envergure. Cependant, la formulation 3D a été conservée par souci de simplicité en vue de calculs utilisant des données sources tri-dimensionnelles.

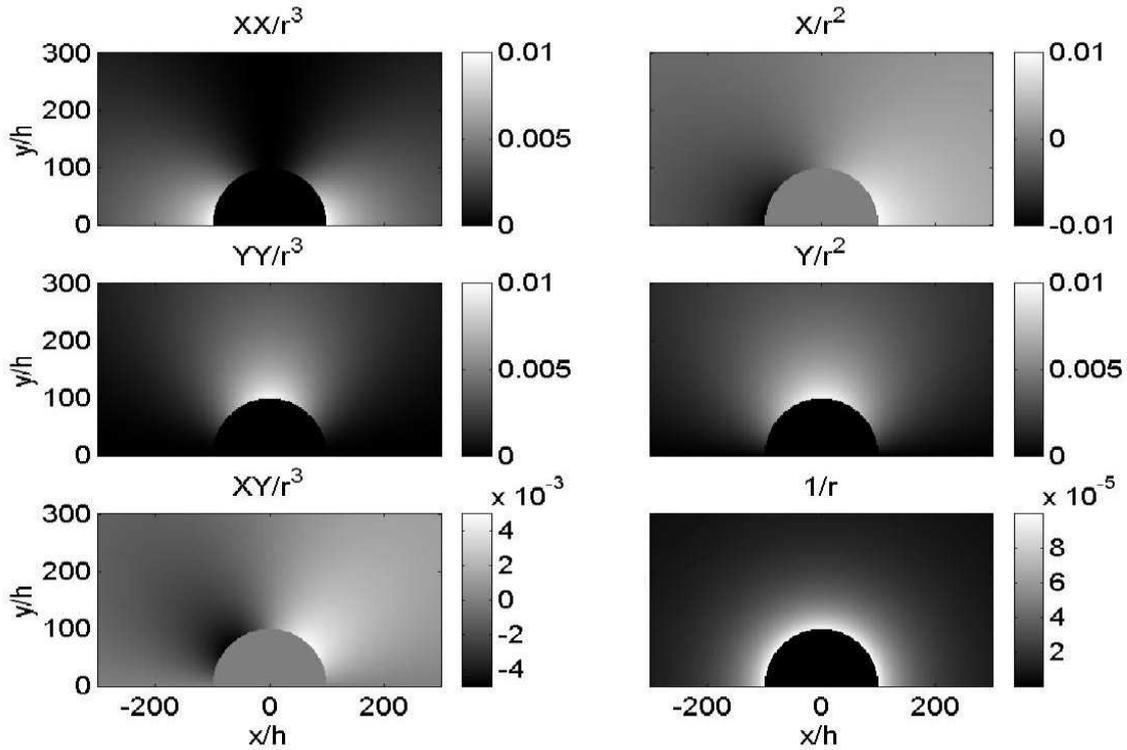


FIG. 4.7 – Fonctions de décroissance au-delà de  $R = 100h$  pour les différentes natures de termes sources.

### 4.3.3 Méthode d'interpolation et schémas de dérivation

Compte-tenu de la faible discrétisation temporelle lors de la sauvegarde des données hydrodynamiques, une interpolation linéaire n'est pas suffisamment précise pour l'évaluation au temps retardé. Une interpolation de Hermite est donc préférée, pour laquelle :

$$f(\tau + \alpha d\tau) = h_1(\alpha)f(\tau) + h_2(\alpha)f(\tau + d\tau) + [h_3(\alpha)f'(\tau) + h_4(\alpha)f'(\tau + d\tau)] d\tau \quad (4.57)$$

avec  $\alpha \in [0, 1]$  et

$$\begin{aligned} h_1(\alpha) &= 2\alpha^3 - 3\alpha^2 + 1 \\ h_2(\alpha) &= -2\alpha^3 + 3\alpha^2 \\ h_3(\alpha) &= \frac{1}{2}\alpha^3 - \alpha^2 + \frac{1}{2}\alpha \\ h_4(\alpha) &= \frac{1}{2}\alpha^3 - \frac{1}{2}\alpha^2 \end{aligned} \quad (4.58)$$

Pour le calcul des valeurs de la dérivée en  $\tau$  et  $\tau + d\tau$ , une approximation centrée à

l'ordre deux est utilisée.

Pour le calcul des termes surfaciques visqueux, la dérivée par rapport à  $y$  est évaluée par un schéma décentré, afin de n'utiliser que des points situés à l'intérieur du volume, à l'ordre trois, soit :

$$\frac{\partial u}{\partial y}(y_0) = \frac{1}{\Delta y} \left[ -\frac{11}{6}u(y_0) + 3u(y_1) - \frac{3}{2}u(y_2) + \frac{1}{3}u(y_3) \right] \quad (4.59)$$

De son côté, la dérivée par rapport à  $x$  est évaluée par le schéma centré à l'ordre quatre classique :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_k) = \frac{-1}{12} \frac{u(x_{k+2}) - u(x_{k-2})}{\Delta x} + \frac{2}{3} \frac{u(x_{k+1}) - u(x_{k-1})}{\Delta x} \quad (4.60)$$

C'est également ce schéma qui est utilisé pour le calcul de la dérivée première par rapport au temps, en ce qui concerne les termes sources monopolaire et dipolaires, l'approximation centrée à l'ordre deux s'étant avérée insuffisante. Enfin, pour la dérivée seconde par rapport au temps qui intervient dans le calcul du rayonnement dû aux sources volumiques, c'est également le schéma centré à l'ordre quatre qui est retenu, soit :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}(t_k) = \frac{-5}{2} \frac{p(t_k)}{\Delta t^2} + \frac{4}{3} \frac{p(t_{k-1}) + p(t_{k+1})}{\Delta t^2} - \frac{1}{2} \frac{p(t_{k-2}) + p(t_{k+2})}{\Delta t^2} \quad (4.61)$$

#### 4.3.4 Tests de validation

Afin de valider les solutions numériques retenues, le traitement des différents types de terme source a été testé, en comparant le résultat fourni par le code développé et celui obtenu analytiquement, pour une définition harmonique des grandeurs sources.

On considère donc le rayonnement dû à un point source placé en  $x_0 = -5h$  (soit  $8h$  en aval du coin),  $y_0 = 1.8h$ , où la vitesse et la pression connaissent les évolutions suivantes :

$$\begin{aligned} p(x_0, y_0, \tau) &= \sin \left( \frac{2\pi}{T_0} [\tau - \tau_0] \right) \\ u_x(x_0, y_0, \tau) &= 1 + \frac{1}{2} \sin \left( \frac{2\pi}{T_0} [\tau - \tau_0] \right) \\ u_y(x_0, y_0, \tau) &= \frac{1}{2} \cos \left( \frac{2\pi}{T_0} [\tau - \tau_0] \right) \end{aligned} \quad (4.62)$$

avec  $T_0 = 20$ . Pour le calcul avec le code, on utilise le même pas de temps que celui correspondant à la sauvegarde des données réelles, c'est-à-dire  $dt = d\tau \approx 1.106h/U_0$ . Les contributions respectives des termes surfaciques en  $u_y$  et en  $p$  et du terme volumique en  $2u_x u_y$  sont déduites de la formule (4.56) :

$$\begin{aligned}
p_{u_y}^a(X, Y, t) &= \frac{-dx}{4RT_0} \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} \left[t - \frac{r}{c_0} - \tau_0\right]\right) \\
p_p^a(X, Y, t) &= \frac{Y dx}{2c_0 R^2 T_0} \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \left[t - \frac{r}{c_0} - \tau_0\right]\right) \\
p_{2u_x u_y}^a(X, Y, t) &= \frac{-\pi XY dx dy}{c_0^2 R^3 T_0^2} \left[ \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \left[t - \frac{r}{c_0} - \tau_0\right]\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} 2 \left[t - \frac{r}{c_0} - \tau_0\right]\right) \right]
\end{aligned} \tag{4.63}$$

où

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

et

$$r = \sqrt{(X - x_0)^2 + (Y - y_0)^2}$$

Sur la figure 4.8, on compare les champs acoustiques fournis par le code à ceux obtenus directement avec les expressions ci-dessus. Ces dernières sont évaluées avec un pas de temps égal à  $dt/10$  et un pas d'espace égal à  $\Delta r/5$ . Sur la figure 4.9, on compare les évolutions temporelles au centre du domaine acoustique pour les sources surfaciques, et en  $(X, Y) = (150, 75)$  pour le terme volumique. Enfin, sur la figure 4.10, la décroissance radiale est observée dans les directions caractéristiques. Comme il n'y a qu'un seul point source, il n'y a pas d'effet des temps de retard. Par conséquent, les directivités et décroissances observées sont précisément celles de la figure 4.7. Le fait que les champs acoustiques ne soient pas parfaitement circulaires provient de ce que le point source n'est pas situé précisément au centre du repère. De légers écarts sont visibles notamment pour les amplitudes élevées, mais en définitive, malgré la discrétisation temporelle relativement grossière, les résultats demeurent en bon accord.

### 4.3.5 Prise en compte des effets de troncature

Lors de la simulation numérique du rayonnement des écoulements turbulents, une difficulté apparaît : la simulation est réalisée sur un domaine borné qui contient rarement la totalité des sources acoustiques. Celles-ci se trouvent donc tronquées. Ce fenêtrage engendre un rayonnement qui n'a pas de réalité physique. Il est donc nécessaire d'assurer la continuité des sources entre le domaine de calcul et l'extérieur où elles sont supposées nulles.

Pour illustrer l'effet de la troncature, l'évolution temporelle de la distribution de pression sur la paroi est tracée sur la figure 4.11. Plus précisément, il s'agit de la quantité  $\frac{\partial p}{\partial t}$ , dont l'intégrale est un terme source dans l'approximation de champ lointain (4.56) et en ne prenant pas en compte les temps de retard. Les instants de l'écoulement qui sont représentés rayonnent au même instant à la distance  $R$  indiquée au-dessus de chaque graphe.

Au cours de la plage temporelle considérée, on peut voir une impulsion qui témoigne du passage d'un tourbillon au-dessus de cette position. On constate que cette impulsion présente un front positif et un front négatif qui se compensent en grande partie lorsque

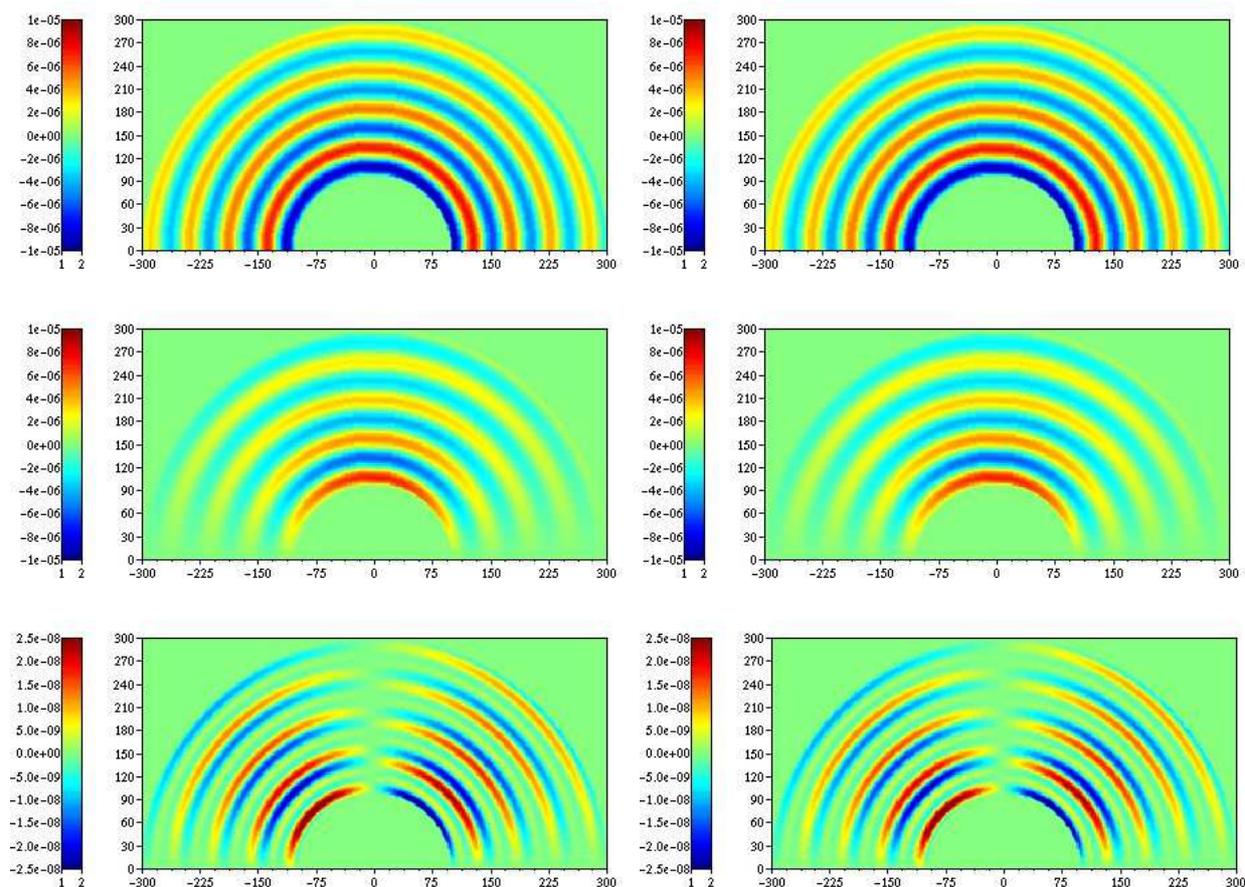


FIG. 4.8 – Champs acoustiques rayonnés pour un point source placé en  $y = (10h, h)$ . Le centre du repère est sur la plaque à  $13h$  en aval du coin. En haut, terme monopolaire en  $u_y$  ; au milieu, terme dipolaire en  $p$  ; en bas, terme quadripolaire en  $2u_x u_y$ . A gauche, calcul analytique ; à droite, calcul numérique.

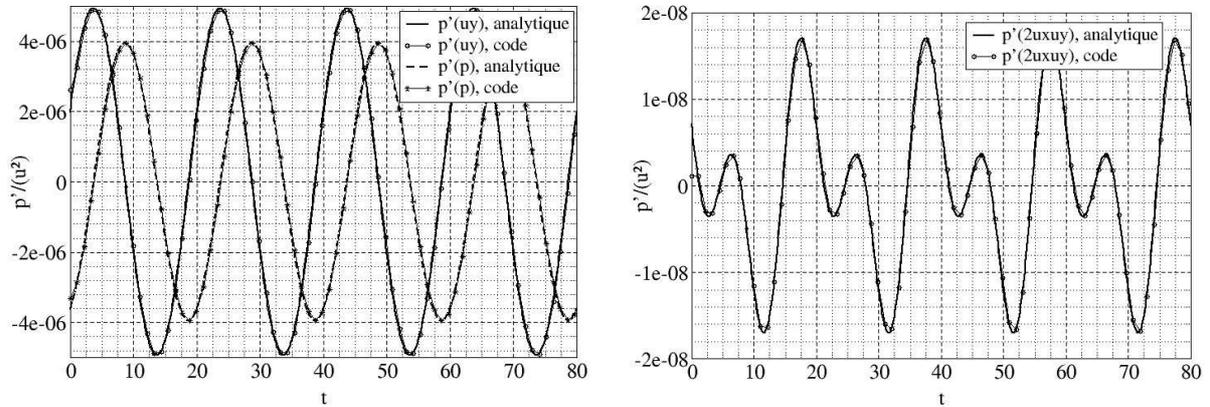


FIG. 4.9 – Evolution temporelle de la pression acoustique pour le test de validation. A gauche, termes sources surfaciques, pour le point  $x = (0, 150)$ ; à droite, terme source volumique au point  $x = (150, 75)$ .

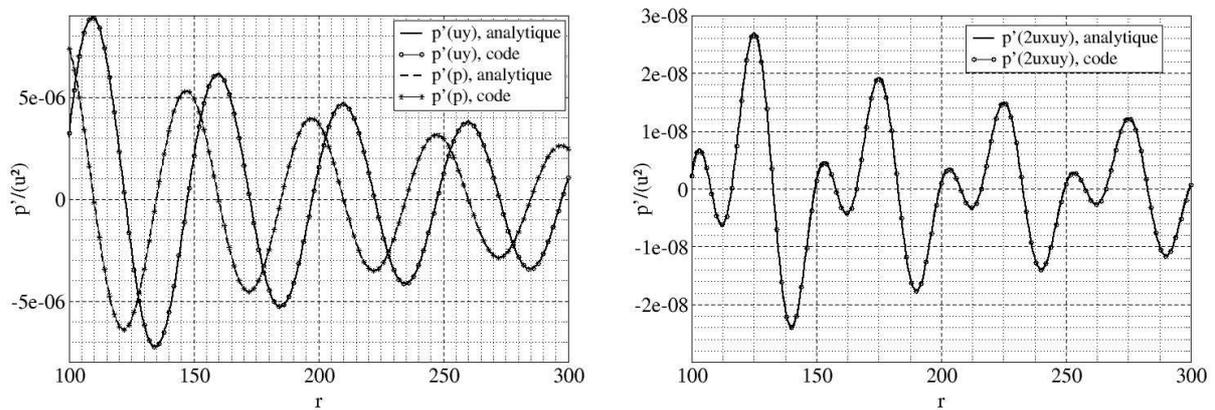


FIG. 4.10 – Evolution radiale de la pression acoustique pour le test de validation. A gauche, termes sources surfaciques dans la direction  $\theta = 90^\circ$ ; à droite, terme source volumique dans la direction  $\theta = 45^\circ$ .

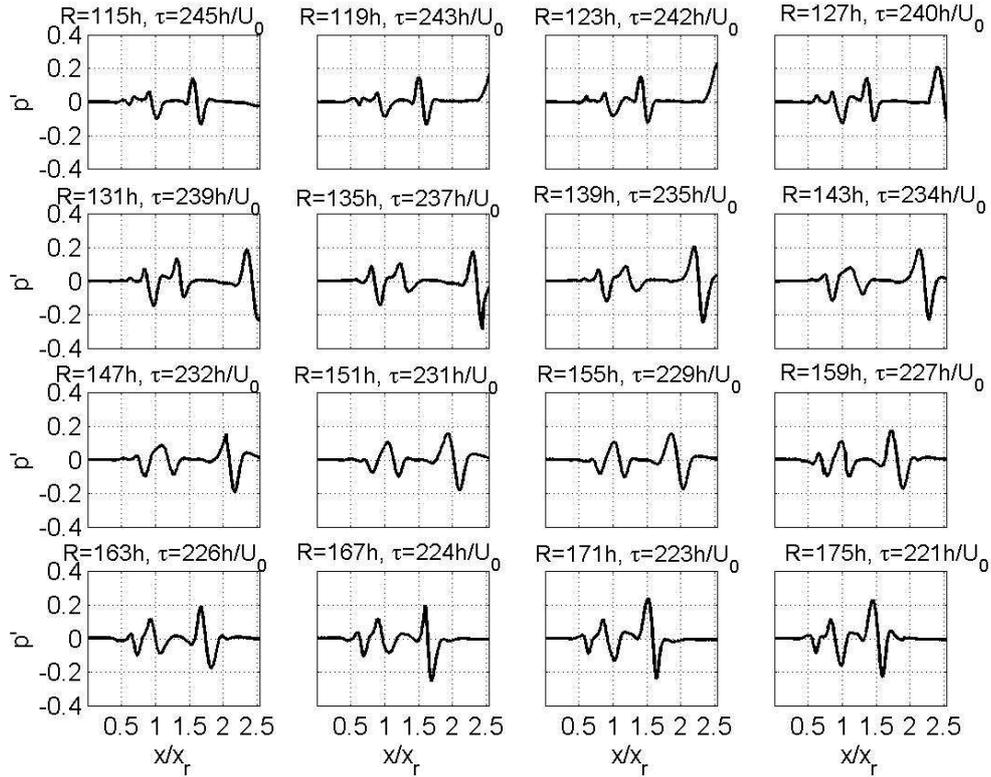


FIG. 4.11 – Distribution de la quantité  $\frac{\partial p}{\partial t}$  sur la paroi à des instants successifs  $\tau$  mais dont le rayonnement est perçu en même temps à la distance  $R$  indiquée au-dessus de chaque graphe. Les graphes sont classés par  $R$  croissants et donc par  $\tau$  décroissants. Sur cette figure, l'origine des abscisses est au coin.  $x_r$  est la longueur de recollement.  $U_0$  est la vitesse de l'écoulement amont,  $h$  est la demi-épaisseur de la plaque.

l'intégrale suivant  $x$  est calculée... sauf quand le tourbillon passe la sortie. Dans ce cas, la troncature occasionnée empêche cette compensation. Par ailleurs, des compensations sont également visibles dans la distribution au niveau du recollement ce qui entraîne que l'aire totale est dominée par l'aire d'un front de l'impulsion. Ainsi, un front d'onde intense est émis lorsque l'impulsion traverse la sortie. On le retrouve à la position  $R \approx 130h$  sur le champ acoustique correspondant à cette plage temporelle d'émission, représenté sur la figure 4.12, à gauche.

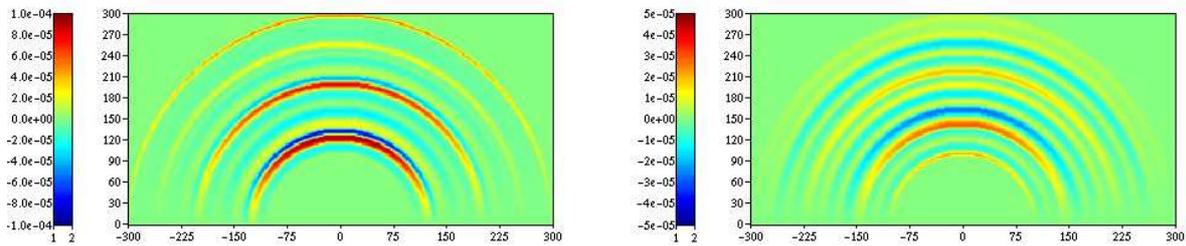


FIG. 4.12 – Illustration du problème de troncature des termes sources : champ acoustique rayonné par la pression pariétale, sans amortissement du terme source en sortie (à gauche) et avec (à droite).

Pour éviter l'apparition de ce type de front d'onde, les termes sources sont pondérés par la fonction  $f$  suivante :

$$f : \bar{x} \longrightarrow f(\bar{x}) = -3\bar{x}^4 + 4\bar{x}^3 + 1 \quad (4.64)$$

appliquée entre  $x_p$  et la fin de la zone source  $x_s$  tels que

$$\bar{x} = \frac{x - x_p}{x_s - x_p}$$

Cette expression assure une continuité de la dérivée seconde par rapport à  $x$  au début de la zone d'amortissement et en sortie. Elle est représentée sur la figure 4.13, prolongée jusqu'au coin avec la valeur unitaire, pour  $x_p = 1.5x_r$  et  $x_s = 2.5x_r$ . Cette position de  $x_p$  se trouve dans une plage où elle n'influence pas le calcul de l'intégrale. En effet, au-delà de  $1.6x_r$  et en deçà de  $1.4x_r$ , celui-ci est sensiblement modifié lorsque  $x_p$  est déplacé. On peut voir l'action de la pondération sur la figure 4.14, où est tracée l'évolution temporelle de trois grandeurs : l'intégrale de  $\frac{\partial p}{\partial t}$  le long de la plaque calculée avec pondération, la même intégrale mais calculée sans pondération, et la valeur de  $\frac{\partial p}{\partial t}$  en  $x_s$ . Bien que ces grandeurs n'aient pas la même dimension, il se trouvent qu'elles présentent des valeurs numériques du même ordre de grandeur, ce qui permet d'en comparer les variations qualitatives. Les pics de l'intégrale sans pondération suivent ceux de la valeur en sortie. Cela n'est pas le

cas de l'intégrale avec pondération, qui de plus suit l'intégrale sans pondération en dehors de ces événements. Cet effet est visible sur le champ acoustique rayonné présenté sur la figure 4.12, à droite. Les niveaux plus faibles que ceux de l'image de gauche montrent une distribution des fronts d'onde qui n'est plus la simple trace de la sortie de tourbillon, ce qui témoigne du bon comportement du traitement réalisé.

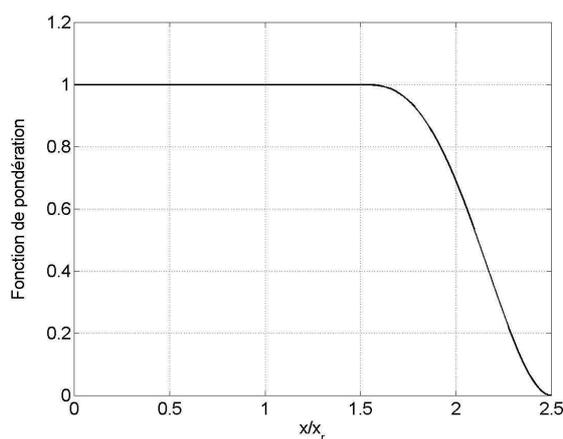


FIG. 4.13 – Fonction de pondération des sources acoustiques.

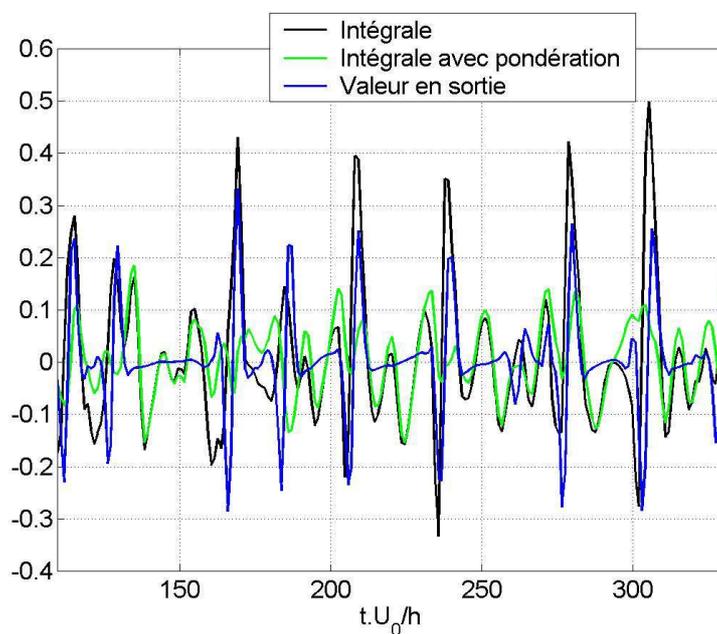


FIG. 4.14 – Action d'une pondération des sources acoustiques en sortie de domaine, évaluée pour le terme  $\frac{\partial p}{\partial t}$  en  $x_s$ .

## 4.4 Conclusion

Nous venons d'exposer dans ce chapitre la partie acoustique de notre méthode hybride. Le cheminement analytique conduisant à l'équation intégrale utilisée a été détaillé. Les hypothèses effectuées lors du calcul des termes sources ont été discutées, en particulier le caractère incompressible des données générées par la simulation de l'écoulement. Un algorithme de résolution par la méthode des temps avancés a été proposé. Enfin, les méthodes numériques retenues pour le calcul du champ acoustique ont été présentées, notamment le traitement de la troncature des termes sources.

Dans le chapitre suivant, l'écoulement sur une plaque plane épaisse, dans ses aspects aérodynamique et acoustique, est présenté et analysé, avec les méthodes numériques développées précédemment.



# Chapitre 5

## Application au décollement-recollement sur une plaque plane épaisse

*Imagination is more important than knowledge.*  
Albert EINSTEIN, Lettre, 1926.

Les méthodes développées aux chapitres précédents sont maintenant appliquées à l'écoulement impactant une plaque plane épaisse semi-infinie. Au bord d'attaque, dont le profil est rectangulaire, une séparation a lieu, ce qui génère une couche de mélange au dessus d'une bulle de recirculation. On observe alors des phénomènes de *flapping* et de *shedding*, sensiblement influencés par le recollement de l'écoulement à la paroi. Dans ce qui suit, nous proposons de caractériser ces phénomènes, par l'étude des mouvements tourbillonnaires et du rayonnement acoustique associé.

Dans un premier temps, la simulation de l'écoulement sur une plaque plane modélisée par frontières virtuelles est présentée. Le rayonnement acoustique est ensuite calculé dans l'hypothèse d'une source compacte puis en utilisant l'algorithme de temps avancés décrit au chapitre précédent.

### 5.1 Simulation de l'écoulement

#### 5.1.1 Configuration étudiée

On s'intéresse à la plaque semi-infinie d'épaisseur  $2h$  présentée sur la figure 5.1, dans une configuration bi-dimensionnelle. Le terme de forçage provenant des frontières virtuelles est appliqué sur le domaine solide avec  $\epsilon = 1$ ; partout ailleurs,  $\epsilon = 0$ . L'écoulement amont a un profil de vitesse uniforme  $U_0$  sans perturbation.  $U_0$  et  $h$  sont les grandeurs de référence pour l'adimensionnalisation. Par conséquent, si on impose un nombre de Reynolds  $Re = U_0 2h / \nu = 1000$ , on obtient un coefficient de viscosité cinématique  $\nu = 2/Re = 0.002$ .

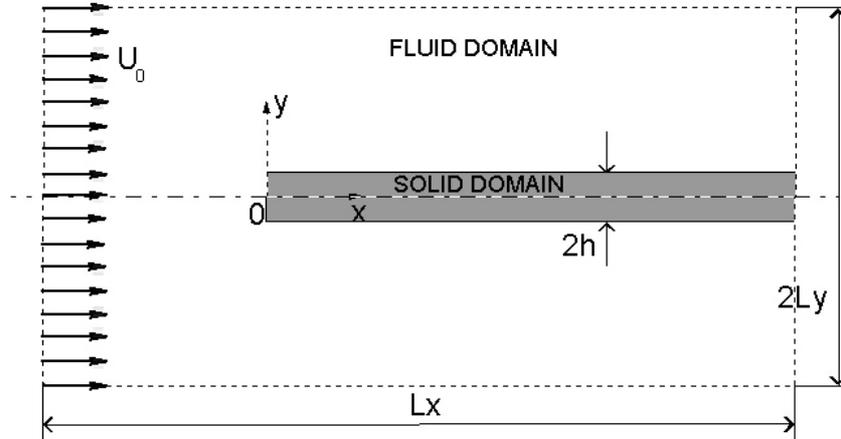


FIG. 5.1 – Configuration de plaque plane semi-infinie.

On choisit de discrétiser la longueur unitaire  $h$  à l'aide de 13 points dans le plan de la plaque, et à l'aide de 26 points dans la direction normale. Par conséquent, les tailles de mailles sont respectivement  $\Delta x = 0.078$  et  $\Delta y = 0.034$ . A l'endroit où la contrainte de frottement (vitesse de frottement) est la plus importante, c'est-à-dire de part et d'autre du recollement, cela conduit à un  $\Delta y^+$  d'environ 1.5. Le maillage est uniforme, ce qui implique un sur-raffinement lorsqu'on s'éloigne de la plaque. Comme il a été évoqué au sujet de la simulation de l'écoulement sur le cylindre à section carrée, le raffinement du maillage entraîne une arête plus vive, ce qui a une influence notoire sur le développement de la couche cisailée. Ainsi, la convergence n'est pas totalement réalisée en ce qui concerne le maillage, cependant les dimensions retenues permettent une bonne représentation de l'écoulement pariétal et de la dynamique tourbillonnaire.

Le pas de temps  $\Delta t$  est d'environ  $0.02h/U_0$ . Si l'on utilise un pas de temps plus élevé, les oscillations dans la frontière virtuelle font diverger le calcul en début de simulation. Cependant, une fois l'écoulement établi et la condition de non-glissement satisfaite, un pas de temps plus élevé conduit également à la divergence du calcul mais avec visiblement pour cause un nombre  $CFL$  trop élevé, bien que la limite de stabilité soit théoriquement  $\Delta t \leq \frac{\sqrt{3}\Delta x}{1.989U_0} \approx 0.07$  avec les schémas utilisés. Ainsi, on constate que l'utilisation de la méthode des frontières virtuelles n'est pas beaucoup plus pénalisante pour le pas de temps que le critère  $CFL$ .

### Conditions aux limites

Sur les frontières supérieure et inférieure du domaine, une condition de glissement libre est appliquée, à savoir :

$$\begin{cases} u_y(x, L_y) = 0 \\ \frac{\partial u_y}{\partial y}(x, L_y) = 0 \end{cases} \quad (5.1)$$

Des simulations ont été réalisées pour l'écoulement sur la plaque entière d'épaisseur

$2h$  (figure 5.1). L'allure de l'écoulement, ainsi que les moments statistiques d'ordre 1 et 2, demeurent globalement les mêmes de part et d'autre de la plaque, bien que des différences temporelles soient observées. Le point de stagnation, sur la face frontale, ne fluctue pas, contrairement à ce qui se passe pour l'écoulement sur le cylindre. Pour cette raison, par la suite, l'hypothèse de symétrie a été effectuée, et seulement la partie supérieure du domaine a été simulée. La frontière supérieure du domaine a été le plus souvent positionnée à  $L_y = 10h$ , ce qui assure un faible blocage. Cependant, afin d'obtenir une longueur de rattachement plus courte, et également pour pallier la lente décroissance en  $u_y$ ,  $L_y$  peut être portée jusqu'à  $20h$ .

La frontière d'entrée doit être placée suffisamment loin du front de la plaque afin d'éviter une interaction trop forte entre la condition d'entrée et la singularité. Un positionnement en  $-12h$  est retenu, soit :

$$\begin{cases} u_x(x_E, y) = U_0 \\ u_y(x_E, y) = 0 \end{cases} \quad (5.2)$$

Enfin la condition de sortie assure le transport des structures à l'extérieur du domaine, soit :

$$\begin{cases} \frac{\partial u_x}{\partial t}(x_S, y) + U_c \frac{\partial u_x}{\partial x}(x_S, y) = 0 \\ \frac{\partial u_y}{\partial t}(x_S, y) + U_c \frac{\partial u_y}{\partial x}(x_S, y) = 0 \end{cases} \quad (5.3)$$

On prend  $x_S > 30h$ , ce qui correspond à au moins deux fois la longueur de recollement. Au niveau de la couche limite, cette condition n'est pas suffisante pour assurer la sortie de l'écoulement. En effet, on observe une interaction entre la paroi et la condition de convection, qui se traduit par l'émergence d'un tourbillon assez intense, de hauteur  $h$  et de largeur environ  $3h$ , dont simplement la moitié amont se trouve dans le domaine de calcul. Ce problème est traité empiriquement en enlevant le terme intégral des frontières virtuelles sur les 10 derniers points du domaine.

### 5.1.2 Etablissement de l'écoulement

A l'instant initial, on impose  $(u_x, u_y) = (U_0, 0)$  en tout point du domaine. Après une durée d'environ  $60h/U_0$ , la bulle de recirculation est formée, ainsi que le profil de couche limite en aval, et le mécanisme de lâcher tourbillonnaire a débuté. On peut donc considérer que l'écoulement est établi. Cependant, jusqu'à environ  $3h$  en aval du coin, l'écoulement demeure stationnaire, conformément aux observations expérimentales relevées dans la littérature. Par conséquent, les vitesses résiduelles continuent de tendre oscillatoirement vers 0 en amont de cette position, comme cela a été évoqué en ce qui concerne les simulations en régime laminaire. Ainsi, la singularité continue de varier, et l'écoulement n'est pas parfaitement établi : on observe un allongement, léger mais continu, de la bulle de recirculation, qui s'accompagne d'une diminution de l'intensité des structures tourbillonnaires qui sont relâchées. Ceci est illustré sur la figure 5.2, où est tracée l'évolution des

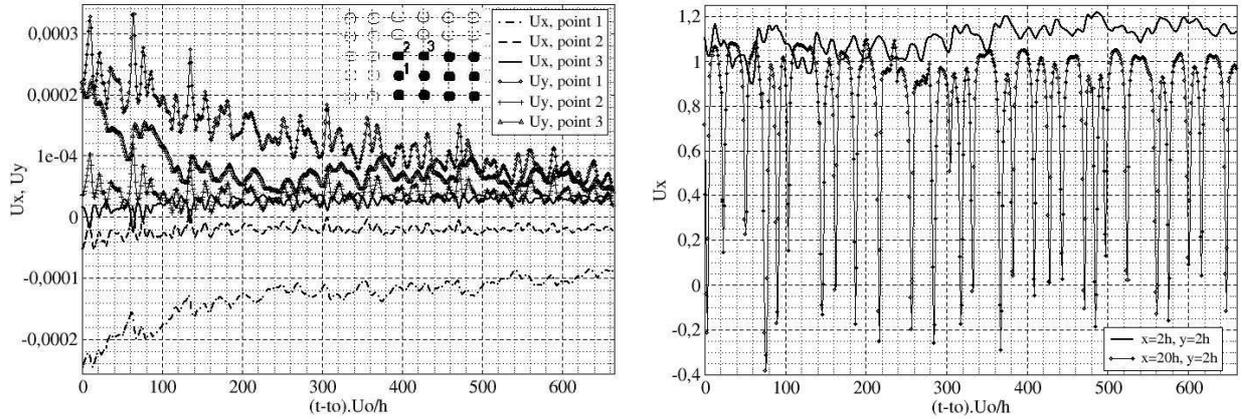


FIG. 5.2 – Evolution temporelle de la vitesse en différents points, après  $t_0 \approx 250$ . A gauche, vitesses résiduelles à proximité du coin - les points en noirs sont forcés ( $\epsilon = 1$ ), les points en blancs sont du domaine fluide ( $\epsilon = 0$ ); à droite, vitesse longitudinale en début de couche de mélange et en aval du recollement.

vitesses résiduelles au niveau du coin, et celle de la vitesse longitudinale en  $y = 2h$ , pour la fenêtre temporelle sur laquelle sont réalisées les statistiques. On peut voir notamment que les fluctuations de vitesse en aval du recollement ont une amplitude qui diminue légèrement.

Malgré ce défaut d'établissement, qui dépend des valeurs des paramètres du forçage, les grandeurs statistiques donnent accès à une bonne représentation de l'écoulement. L'intervalle d'étude s'étend sur une durée d'environ  $650h/U_0$ , pendant laquelle 28 lâchers tourbillonnaires sont observés. Les données sont sauvegardées tous les  $1.11h/U_0$ .

### 5.1.3 Topologie - champs moyens

#### Longueur de recollement $x_r$

Il s'agit de la première caractéristique présentée lorsqu'on étudie des écoulements décollés, car elle donne la taille moyenne de la bulle de recirculation. Il existe quatre manières de la déterminer : (a) par la position où la vitesse longitudinale moyenne  $U_x = 0$  le long de la première ligne de points fluides; (b) par la position où le cisaillement pariétal  $\frac{\partial U_x}{\partial y}$  s'annule; (c) à l'aide de la ligne de courant séparatrice; et (d) par la position où la fraction d'écoulement inverse (*reverse flow fraction*) vaut 0.5, le long de la première ligne de points fluides. Cette fonction est définie par :

$$RFF(x/h) = \frac{1}{T} \int_0^T f(x/h, t) dt \quad (5.4)$$

où  $f(x/h, t)$  vaut 1 si  $u_x(x/h, t) < 0$  et 0 sinon. Ces quatre critères sont tracés sur la figure 5.3. On y remarque que la longueur de recollement varie légèrement selon les

critères, autour de  $x_r = 13h$ . Kiya & Sasaki [58] mesurent  $x_r = 10.1h$ , tandis que Tafti & Vanka [100] et Abdalla & Yang [1] obtiennent respectivement  $x_r = 12.6h$  et  $x_r = 13h$  par simulation numérique. Le résultat obtenu ici s'accorde donc bien avec ces deux derniers. Le désaccord avec la mesure semble vraisemblablement provenir d'un effet du nombre de Reynolds. Cependant, dans nos simulations et dans la littérature, nous avons pu constater que la longueur de recirculation dépend souvent de la configuration étudiée. Le nombre de Reynolds, le rapport de blocage, l'extension en envergure, la turbulence amont, et, en ce qui nous concerne, l'évolution de la singularité, influent sur cette dimension, entraînant une incertitude de l'ordre de  $h$  à  $2h$ . C'est pourquoi les caractéristiques de ce type d'écoulements sont le plus souvent analysées en fonction de  $x_r$  plutôt que de  $h$ . Ceci permet par ailleurs la comparaison avec les bulles de recirculation observées sur marche montante, marche descendante, etc...

### Profils de vitesse longitudinale

Sur la figure 5.4, on a tracé les profils de vitesse longitudinale moyenne. On distingue nettement les profils moyens avec un point d'inflexion caractéristiques de la couche séparatrice de mélange entre l'écoulement principal et la recirculation. Entre  $x = 4h$  et  $x = 8h$ , on observe une vitesse moyenne positive, près de la paroi, au sein de la bulle de recirculation. Ceci est visible sur les évolutions de frottement et de fraction d'écoulement inverse présentés sur la figure 5.3. Ce phénomène, qui s'apparente à une recirculation secondaire comme cela apparaît sur les lignes de courant moyennes, est également rapporté par Tafti & Vanka [100] et Kiya & Sasaki [58], bien que l'origine n'en soit pas clairement identifiée.

En aval du recollement, les profils moyens reprennent l'allure de profils de couche limite. Cependant, la vitesse infinie est supérieure à  $U_0$ , du fait de l'accélération globale due à la diminution de section au passage de la plaque. De plus, ces profils présentent une inflexion due au passage des structures tourbillonnaires.

Le maximum global de fluctuation, qui sert de référence pour la normalisation des profils de vitesse fluctuante (valeur quadratique moyenne) tracés sur la figure 5.5, est atteint à la position  $(9.8h, 0.17h)$ . Sur ces profils, on retrouve le fait que l'écoulement est quasiment stationnaire jusqu'à environ  $3h$  en aval du coin. Chacun de ces profils turbulents présente également deux maxima locaux, dont les distributions longitudinales dessinent deux lignes : l'une suit la ligne de maximum de vitesse moyenne, qui s'élève depuis le coin et jusqu'à  $3h$  au-dessus de la plaque en  $x = 20h$  ; l'autre correspond au développement de deux couches limites de part et d'autre du point de maximum global.

Pour chaque abscisse, la valeur maximale (parmi les ordonnées) de  $\overline{(u'_x)^2}$  est reportée sur la figure 5.6, à gauche. Sont également représentées la valeur maximale de  $\overline{(u'_y)^2}$  et celle de  $\overline{|u'_x u'_y|}$ . Sur le graphe d'à-côté, est tracée l'évolution longitudinale de la valeur *rms* de la fluctuation de pression pariétale, reproduction de la figure déjà présentée au chapitre 3. On constate que les tensions de Reynolds sont les plus intenses autour de la position  $x = 0.8x_r$ , et qu'elles conservent un niveau important en aval du recollement. Plus précisément, le pic

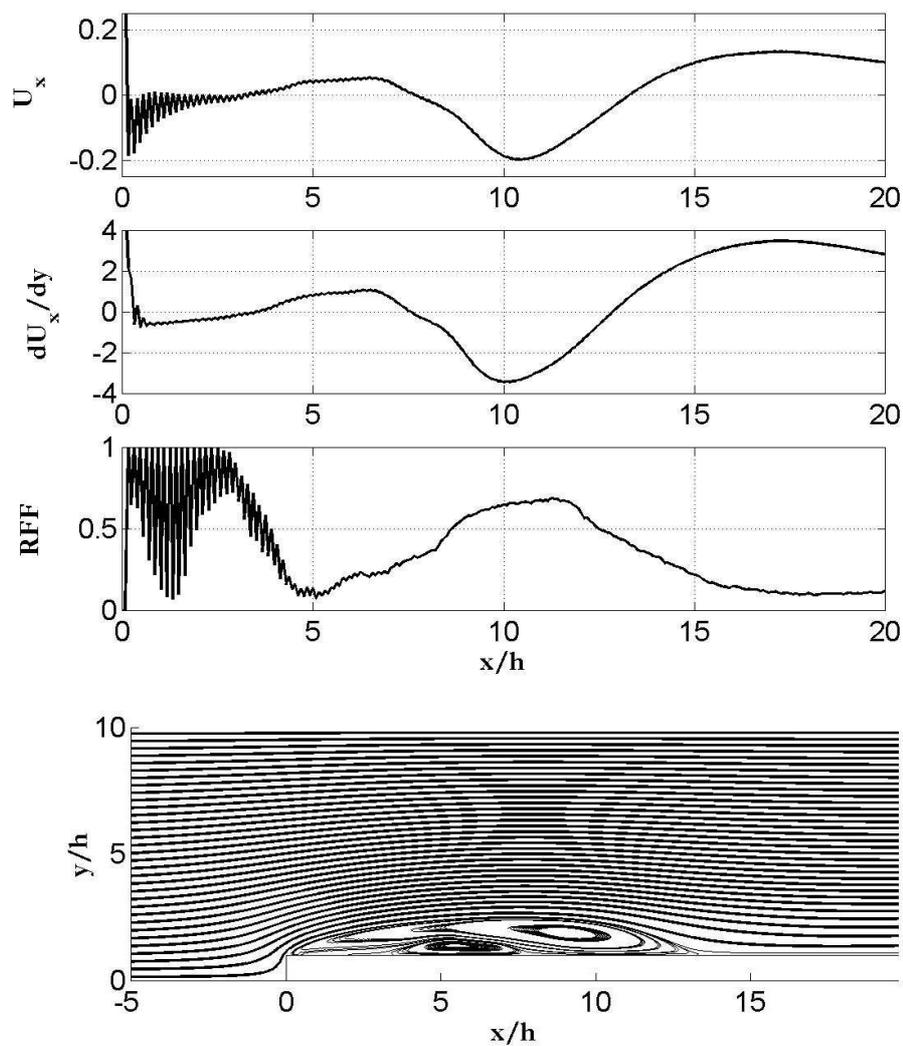


FIG. 5.3 – Les quatre manières de déterminer la longueur de recollement. De haut en bas : vitesse longitudinale moyenne au premier point fluide, frottement moyen, fraction d'écoulement inverse, lignes de courant moyennes.

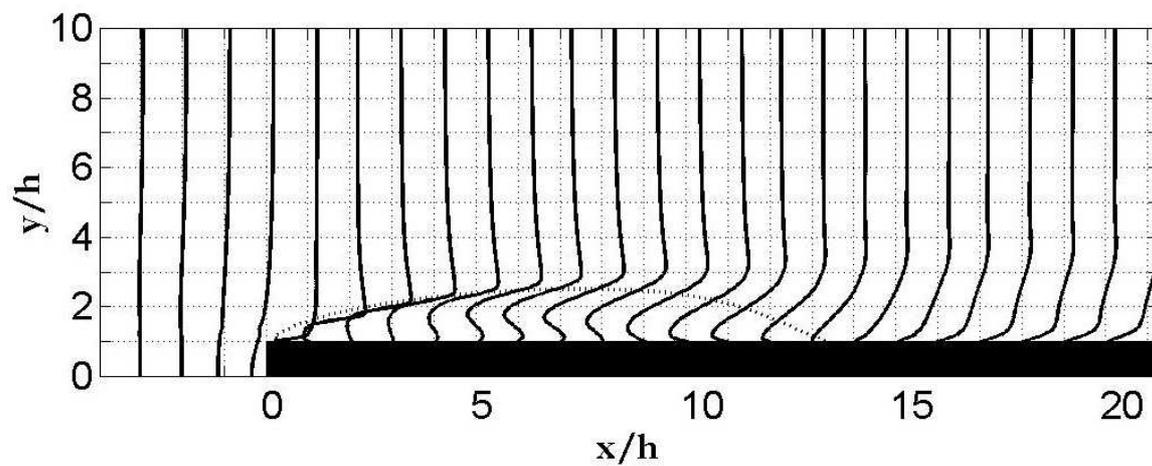


FIG. 5.4 – Profils de vitesse : profils moyen de  $u_x$ . En pointillés est représentée la séparatrice.

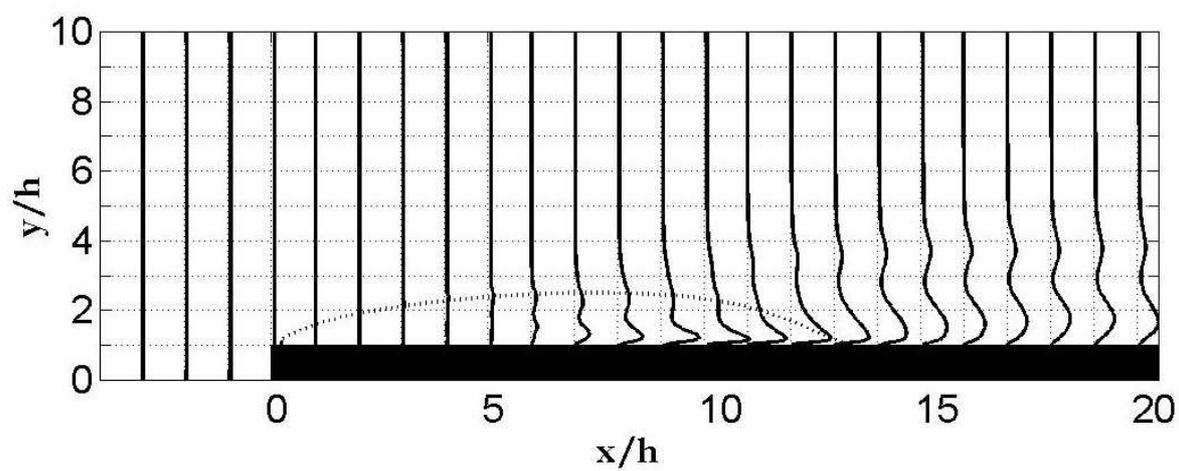


FIG. 5.5 – Profils de vitesse : profil moyen de  $(u'_x)^2$  normalisé par rapport à son maximum global. En pointillés est représentée la séparatrice.

de  $(u'_x)^2$  en  $0.75x_r$  correspond à  $x = 9.75h$  qui est la position de frottement maximal (en valeur absolue et dans la bulle), comme cela est visible sur la figure 5.3. En  $0.9x_r$ , on rencontre un second pic, d'intensité légèrement plus faible. Entre les deux, se situe le pic de fluctuation de pression pariétale. Comme on le verra au paragraphe suivant, cette zone  $[0.7x_r, x_r]$  est le lieu de la génération des tourbillons issus de l'enroulement de la couche cisailée. Ainsi le pic de fluctuation de pression semble être la trace pariétale de l'activité tourbillonnaire en fin de bulle de recirculation.

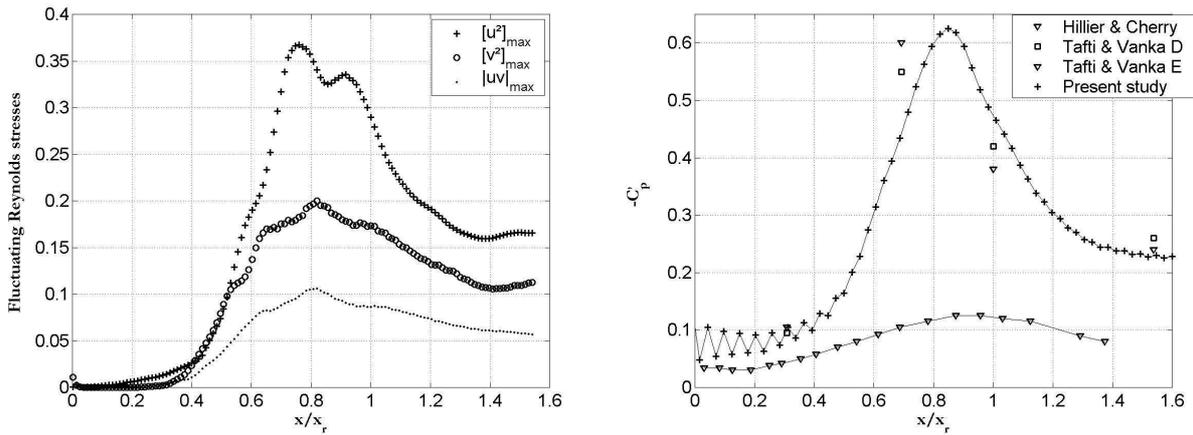


FIG. 5.6 – À gauche : évolution longitudinale du maximum de contrainte de Reynolds ; à droite, évolution longitudinale de la valeur *rms* de la fluctuation de pression pariétale.

### 5.1.4 Analyse des mouvements tourbillonnaires

L'écoulement décollé-recollé sur le bord d'attaque de plaque plane donne lieu à un phéno-mène de lâcher de structures tourbillonnaires, issues de l'instabilité de la couche cisailée et convectées vers l'aval. Sur la figure 5.2, on peut constater que la vitesse longitudinale, mesurée en un point situé en aval du recollement, n'évolue pas de manière périodique : des pics négatifs très prononcés traduisent le passage de structures tourbillonnaires, mais il est difficile d'identifier une fréquence principale, contrairement au phénomène observé dans le sillage d'un cylindre, par exemple, et qui donne naissance au sifflement aéolien.

En effet, toutes les structures observées en aval du recollement ne sont pas formées de la même manière, ainsi qu'illustré sur les figures 5.7 et 5.8. Autour de la position  $x = 0.45x_r$ , la couche de mélange issue de la séparation s'enroule pour donner naissance à une zone circulaire où le rotationnel de vitesse présente une forte intensité, couramment appelée tourbillon ou *vortex*. Celui-ci peut être ainsi relâché seul en aval, ou être emporté par appariement avec le tourbillon issu de l'enroulement suivant. Il arrive que cet appariement lui-même ne soit pas immédiatement relâché en aval, mais emporté par un troisième enroulement. Le jeu des *pairing* et des *shedding* est responsable du *flapping* de la couche de mélange : en effet, lorsqu'un tourbillon n'est pas relâché, il forme comme un obstacle que

la couche de mélange tend à surmonter ; en revanche, lorsqu'une structure est relâchée, la couche de mélange connaît un recul et se rabat sur la plaque. Différents mécanismes de *shedding* sont donc en jeu dans ces mouvements tourbillonnaires, dont il est difficile d'isoler un enchaînement régulier. On peut dire cependant que l'appariement et le lâcher de deux tourbillons issus d'enroulement successifs est celui qui présente le plus d'occurrences.

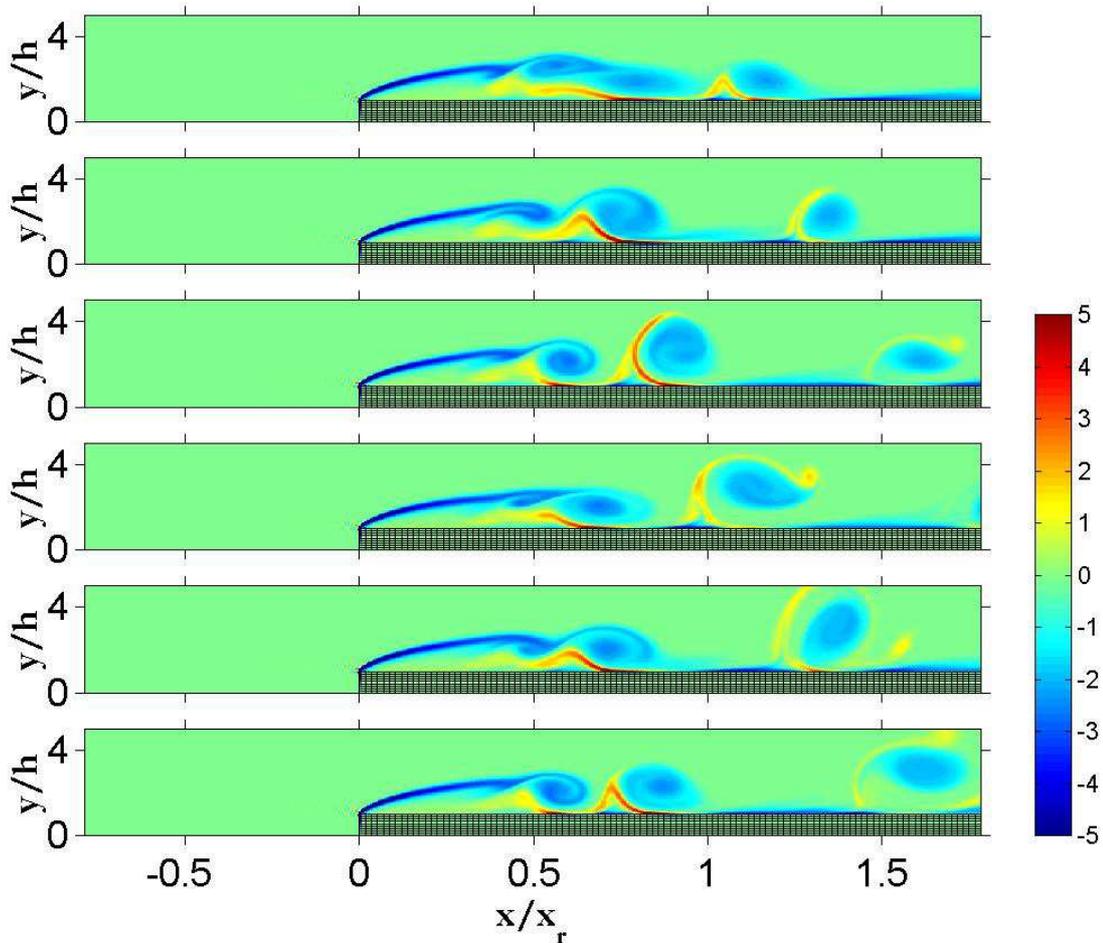


FIG. 5.7 – Champs instantanés de vorticité. Deux tourbillons lâchés ensemble, puis un tourbillon lâché après absorption de vorticité au tourbillon suivant. Les vues sont espacées de  $4.4h/U_0$

L'observation des lâchers tourbillonnaires montre un nombre de Strouhal global de 0.042 basé sur la vitesse amont  $U_0$  et la demi-épaisseur de plaque  $h$ . Si la référence de longueur est la longueur de recollement, cela correspond à  $St \approx 0.59$ , qui est la fréquence mesurée par Kiya & Sasaki [58] pour le lâcher des tourbillons de grande échelle.

Nous avons conscience que ces mécanismes tourbillonnaires sont fortement conditionnés par le caractère bi-dimensionnel de nos simulations, bien qu'ils présentent des similitudes

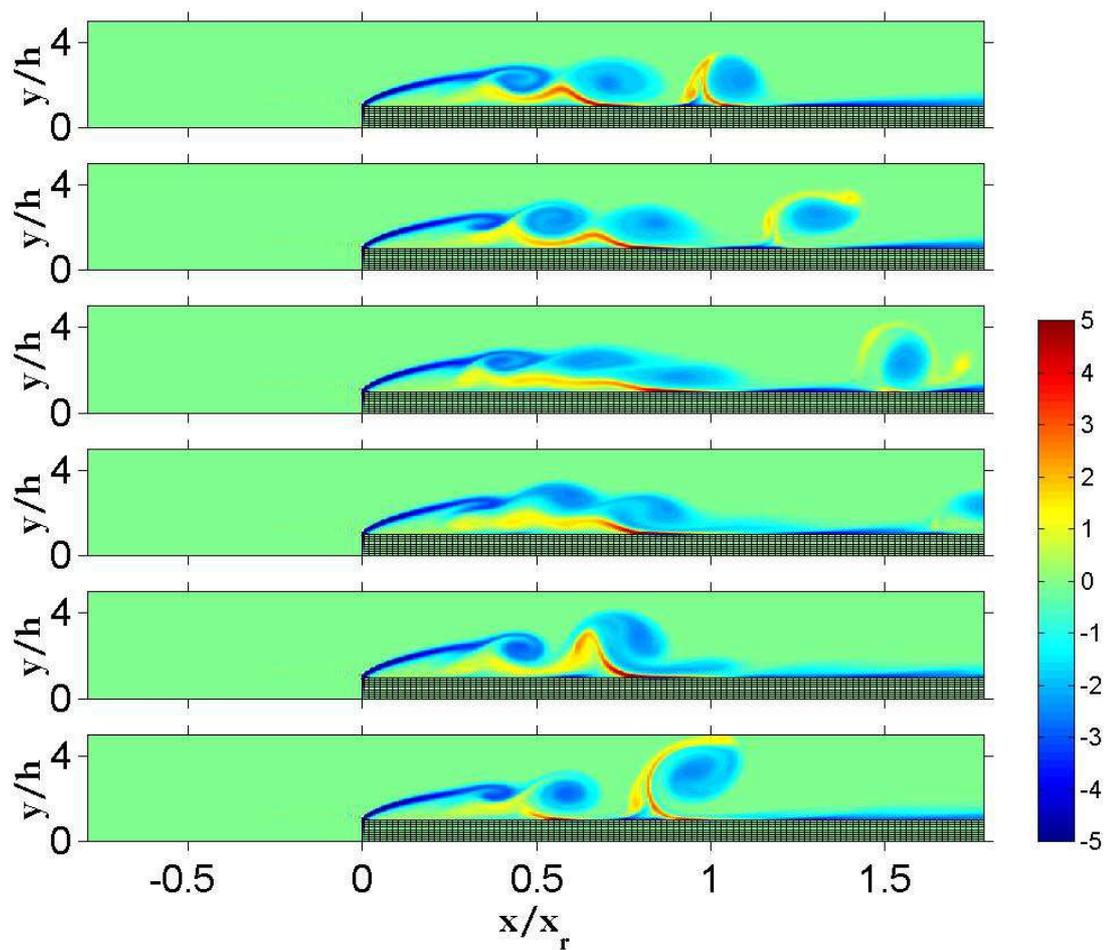


FIG. 5.8 – Champs instantanés de vorticité. Trois tourbillons lâchés ensemble après enroulement. Les vues sont espacées de  $4.4h/U_0$

avec les visualisations de Hwang *et al* [51] à  $Re = 1120$ . Les simulations grandes échelles de Abdalla & Yang [1] pour la plaque plane et de Delcayre [22] pour la marche descendante montrent une forte tridimensionalisation des structures issues de l'enroulement de la couche de mélange. Cependant, Delcayre identifie plusieurs fréquences principales : celle associée au lâcher périodique de tourbillons de Kelvin-Helmholtz par la couche de mélange ; le sous-harmonique correspondant aux appariements de ces derniers ; et une troisième fréquence, plus faible, qui émerge dans la zone de rattachement. Pour expliquer cette troisième fréquence, l'auteur étudie l'évolution temporelle de la longueur de recirculation moyennée sur l'envergure. Il observe alors pour cette longueur le phénomène périodique d'une croissance progressive suivie d'une décroissance brutale. Ce type de comportement est associé, notamment par Kiya & Sasaki [58], à des lâchers de grosses structures vortici-taires advectées en aval de la zone de recirculation, qui se traduiraient par l'apparition de la troisième fréquence. On peut rapprocher ces considérations de l'observation des structures lâchées après trois ou quatre enroulements de la couche de mélange dans nos simulations. Ainsi, les simulations bi-dimensionnelles, bien qu'insuffisantes, permettent d'appréhender certaines caractéristiques de l'écoulement.

## 5.2 Rayonnement acoustique pour une source compacte

Nous présentons maintenant les résultats obtenus pour le champ lointain de pression acoustique, en utilisant les données générées par les simulations de l'écoulement sur une plaque plane épaisse pour l'évaluation des termes sources apparaissant dans la formulation intégrale présentée au chapitre 4 (4.56).

Dans un premier temps, le rayonnement acoustique obtenu en faisant l'hypothèse d'une source compacte est calculé. Dans ce cas, on néglige les différences de temps de retard entre les points de la zone source. La source acoustique est donc donnée à chaque instant par l'intégrale des termes sources, et se trouve localisée au centre du repère. Par conséquent, il ne peut y avoir d'effets de compensation par interférences, et la directivité du rayonnement dépend uniquement des fonctions de décroissance liées à la nature des termes sources et des amplitudes respectives de ces derniers.

Cette hypothèse est en cohérence avec l'approximation de champ lointain et avec l'hypothèse d'un écoulement incompressible. Cependant, il peut être utile d'étudier le rayonnement obtenu sans négliger les différences de temps de retard, en se plaçant dans le cas fictif d'un nombre de Mach non-infinitement petit devant 1. Il faut supposer que les effets de la compressibilité sur l'écoulement sont faibles. On peut alors obtenir un aperçu des effets de la phase dans l'écoulement sur le rayonnement acoustique. Ceci sera effectué au paragraphe suivant.

### 5.2.1 Contribution des différents termes sources

#### Allure des termes surfaciques

Les contributions des termes visqueux et de débit de quantité de mouvement sont représentées sur les figures 5.9 et 5.10. La surface de contrôle est placée au premier point non-forcé (surface  $S$  de la figure 4.5). Comme cela a été observé dans le cas du canal, les contraintes visqueuses en ce point et à la paroi sont pratiquement égales, du fait de l'évolution linéaire de la vitesse dans la sous-couche visqueuse. Bien que le nombre de Reynolds de l'écoulement soit relativement faible, les contributions acoustiques d'origine visqueuse sont d'intensité 50 à 500 fois inférieure à celle du rayonnement total, et peuvent donc être tenues pour négligeables.

Par ailleurs, au premier point non-forcé, la vitesse demeure faible même si elle n'est pas résiduelle. De plus, l'écoulement qui traverse  $S$  en amont de la plaque est quasiment stationnaire. Ainsi, les termes de débit de quantité de mouvement ont un rayonnement d'intensité faible, et il en va de même pour la contribution du terme de débit, de nature monopolaire, présentée sur la figure 5.11.

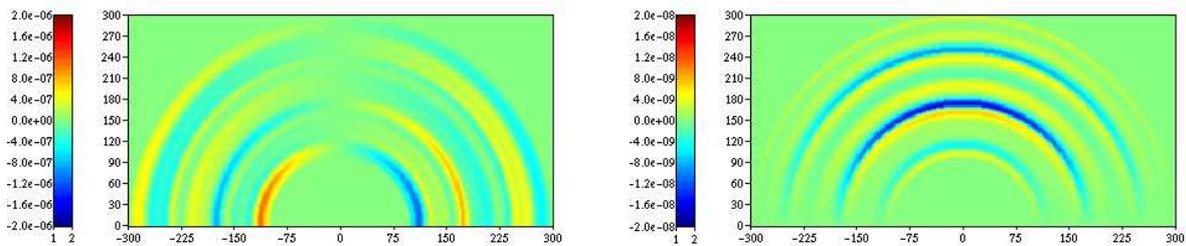


FIG. 5.9 – Contributions des termes visqueux au rayonnement : à gauche, terme lié à  $\tau_{xy}$  ; à droite, terme lié à  $\tau_{yy}$ . Source compacte, surface de contrôle en  $y = h$ .

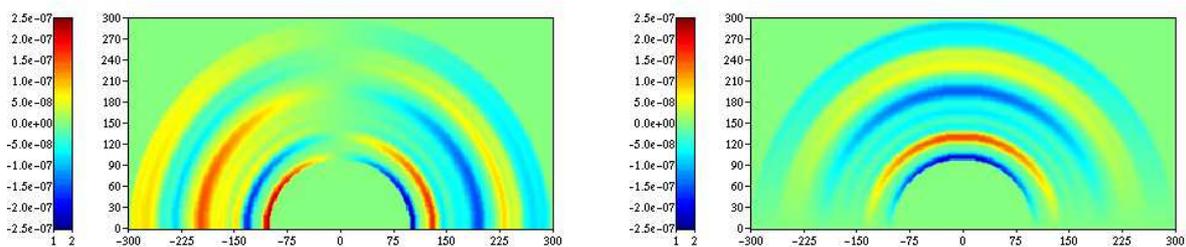


FIG. 5.10 – Contributions des termes de débit de quantité de mouvement au rayonnement : à gauche, terme lié à  $u_x u_y$  ; à droite, terme lié à  $u_y u_y$ . Source compacte, surface de contrôle en  $y = h$ .

Par conséquent, pour cette position de la surface de contrôle, la contribution totale des termes surfaciques provient presque exclusivement du terme de pression, comme le montre la figure 5.12. Pour cette contribution, on observe une alternance des fluctuations positives

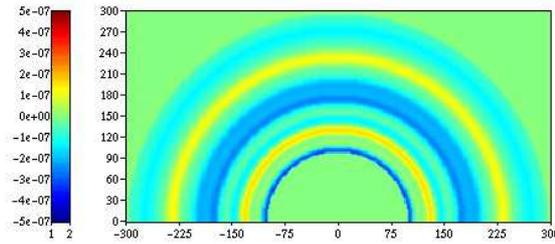


FIG. 5.11 – Contributions du terme de débit massique au rayonnement. Source compacte, surface de contrôle en  $y = h$ .

et négatives de la pression acoustique, mais l'intensité de ces fronts d'ondes est variable. Une intense fluctuation négative est suivie d'une intense fluctuation positive lorsqu'un tourbillon est relâché.

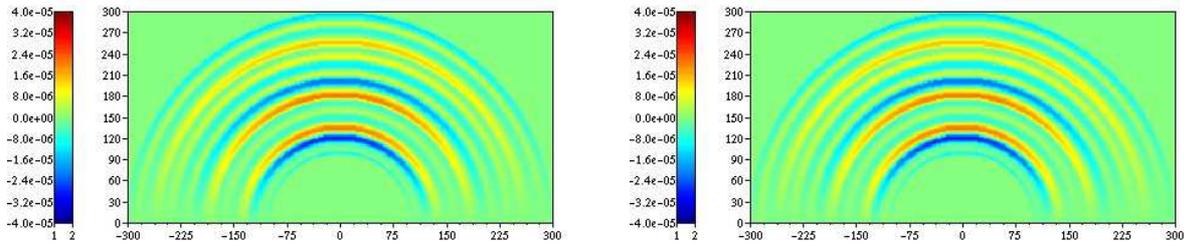


FIG. 5.12 – A gauche : contribution du terme de pression ; à droite, contribution totale des termes surfaciques. Source compacte, surface de contrôle en  $y = h$ .

### Allure des termes volumiques

La contribution de chaque terme source volumique et leur contribution totale sont présentées sur la figure 5.13, où l'on constate d'abord que les niveaux des différents termes sont similaires, et du même ordre de grandeur que ceux du terme de pression, quoique légèrement supérieurs. Cependant, la contribution totale surfacique dans sa direction maximale est moins intense que la contribution totale volumique. Cette dernière montre une directivité orientée à environ  $60^\circ$  en aval de l'écoulement. Elle provient de l'anti-symétrie de la fonction de décroissance du terme croisé  $2u_x u_y$ , combinée à la symétrie de celle du terme de vitesse normale  $u_y u_y$ . En effet, ces deux contributions se renforcent en aval et s'annulent en amont. On remarque également que les fronts d'onde les plus intenses sont les mêmes pour les trois termes volumiques mais qu'ils sont émis légèrement avant ceux du terme de pression. Ils sont également un peu plus fins. On peut donc penser que le rayonnement des termes volumiques est principalement généré lors de la formation des tourbillons en fin de bulle de recirculation, par appariement ou autre mécanisme, et que celui du terme de pression est généré lors du lâcher.

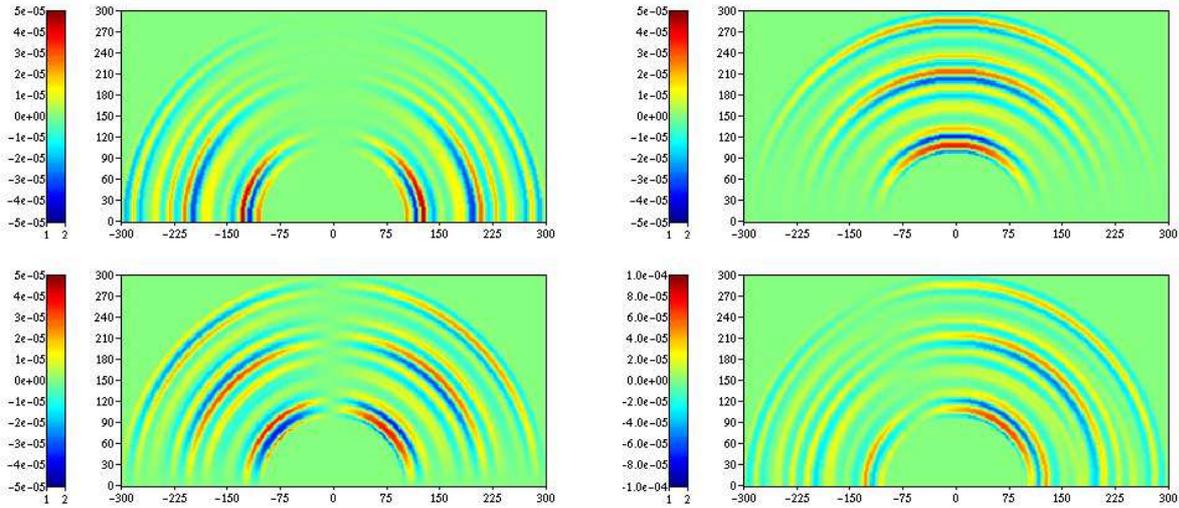


FIG. 5.13 – Contribution des termes volumiques. En haut : à gauche, terme en  $u_x u_x$  ; à droite, terme en  $u_y u_y$ . En bas : à gauche terme en  $2u_x u_y$  ; à droite, contribution totale des termes volumiques. Source compacte, surface de contrôle en  $y = h$ .

## 5.2.2 Rayonnement total

Dans l'hypothèse d'une source compacte, et pour une surface de contrôle placée en  $y = h$ , les contributions additionnées de chaque terme source de la formule (4.56) conduisent donc au champ de pression acoustique représenté sur la figure 5.14. On constate un faisceau d'intensité maximale entre  $30^\circ$  et  $90^\circ$  d'inclinaison par rapport à l'axe de l'écoulement. Dans ce faisceau, le rayonnement entre environ  $30^\circ$  et  $60^\circ$  d'inclinaison est principalement dû au terme  $2u_x u_y$  des sources volumiques. Entre  $60^\circ$  et  $90^\circ$  d'inclinaison, il résulte de la combinaison additive du terme de pression pariétale et du terme volumique de vitesse normale  $u_y u_y$ . Dans la direction horizontale, il est exclusivement produit par le terme volumique de vitesse longitudinale  $u_x u_x$ , compte-tenu de ce qu'il est la seule contribution non-négligeable qui ne s'y annule pas. Enfin, la direction inclinée à environ  $120^\circ$  est la moins bruyante, bien qu'elle ne soit pas complètement silencieuse à cause du rayonnement du terme de pression.

## 5.2.3 Sur la position de la surface de contrôle

L'analogie très générale de Ffowcs-Williams & Hawkins prend en compte le cas de surfaces éventuellement en mouvement, et éventuellement perméables. Le cas particulier de l'équation de Curle est celui pour lequel les surfaces sont fixes, mais peuvent être perméables, comme en témoigne la présence des termes de débit massique et de débit de quantité de mouvement. Habituellement, le calcul du champ acoustique rayonné lorsque l'on déplace la surface de contrôle a pour objectif de comparer l'analogie de Ffowcs-williams & Hawkins avec celle de Kirchhoff, et de montrer qu'elles deviennent équivalentes seule-

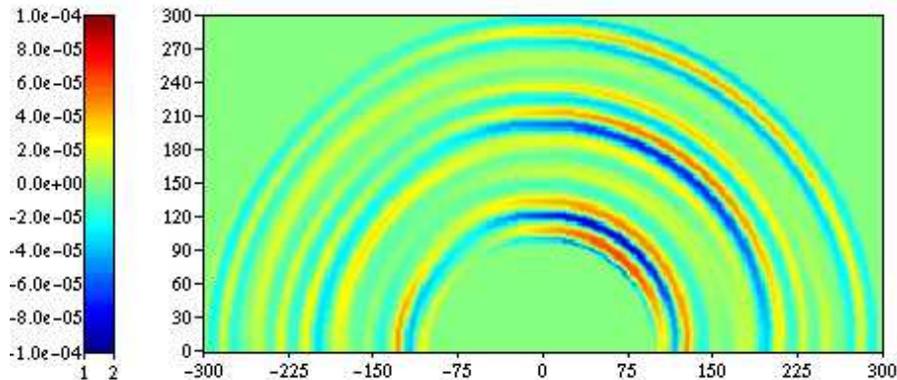


FIG. 5.14 – Champ instantané de pression acoustique rayonné par un écoulement sur plaque épaisse placée à l’origine du repère. Source compacte, surface de contrôle en  $y = h$ .

ment lorsque la surface de contrôle est placée assez loin de l’écoulement pour englober toutes les non-linéarités. Si tel est le cas, il n’y a plus de terme source volumique, et le temps de calcul est beaucoup moins long. Dans l’objectif, à terme, de calculer le rayonnement d’un écoulement à partir de données tri-dimensionnelles, il est intéressant de connaître la position de la surface de contrôle à partir de laquelle la contribution des sources volumiques devient négligeable. En théorie, le rayonnement total est inchangé et il peut être complètement déterminé en connaissant les sources surfaciques.

Dans notre configuration, ce comportement n’est pas retrouvé, comme le montre la figure 5.15 où est représenté le rayonnement avec les contributions de tous les termes sources, pour deux autres positions de la surface de contrôle présentées au chapitre précédent sur la figure 4.5 :  $y = 5h$  et  $y = 10h$ , la limite supérieure du domaine source volumique étant placée en  $y = 15h$ . Par comparaison avec le cas où la surface est en  $y = h$ , on observe en effet des différences de directivité et de niveau, qui pourraient provenir de la mise en défaut des hypothèses réalisées. Par exemple, le fait de ne pas prendre en compte le rayonnement des structures tourbillonnaires une fois qu’elles sont sorties de la zone source, l’hypothèse d’incompressibilité qui ne permettrait pas d’écarter la surface de contrôle de l’écoulement, ou enfin le caractère bi-dimensionnel de toutes nos observations.

## 5.3 Source non-compacte

### 5.3.1 Observation du rayonnement acoustique

Comme indiqué en introduction du paragraphe précédent, l’influence de la différence de marche des fluctuations acoustiques émises par les différents points sources est maintenant étudiée. L’algorithme en temps avancés est donc utilisé pour calculer le champ acoustique, avec une célérité du son fixée à  $c_0 = 2.5U_0$ , soit un nombre de Mach de 0.4. Il s’agit de

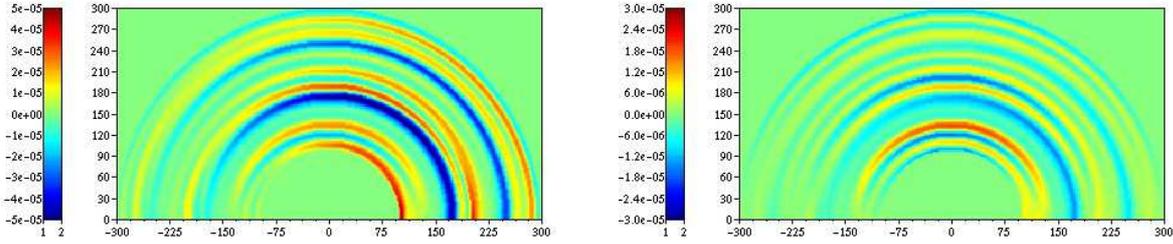


FIG. 5.15 – Rayonnement total lorsque la surface de contrôle est placée en  $y = 5h$ , à gauche ;  $y = 10h$ , à droite.

la même valeur que pour les résultats présentés concernant la source compacte, mais ici elle n'est plus seulement en facteur de la fonction de décroissance car elle intervient dans le calcul de l'intégrale à travers l'évaluation du temps avancé. Plus  $c_0$  est élevée, plus est grand le décalage temporel entre les émissions des points sources. Autrement dit, la fluctuation acoustique perçue en un point observateur à un instant donné est composée de contributions émises sur une plage de temps plus élevée.

Les contributions des termes volumiques dans ce cas d'une source non-compacte sont présentées sur la figure 5.16. Des oscillations parasites sont visibles en amont, d'un niveau globalement faible devant le reste de l'émission. Elles ne semblent pas concerner le terme de vitesse normale, bien qu'il soit difficile d'en juger au vu du faible rayonnement de ce terme vers l'amont. Leur origine est incertaine mais peut résider dans le fait que la double dérivation temporelle provient au départ d'une double divergence. Or à proximité de la paroi, la méthode des frontières virtuelles ne garantit pas la continuité des dérivées spatiales de la vitesse.

Par rapport au rayonnement de la source compacte, la succession des fronts d'onde est identique, mais on observe que la symétrie ou l'anti-symétrie par rapport à la verticale est détruite et que l'intensité est globalement plus importante. Le rayonnement est en grande partie reporté vers l'aval. Ce phénomène est toutefois un peu moins marqué pour le terme de vitesse normale  $u_y u_y$ . Il est inversé pour le terme de pression, comme on peut le voir sur la figure 5.17, où cette fois, le rayonnement est reporté vers l'amont. Compte-tenu de la prépondérance des termes volumiques, le champ total résultant demeure malgré tout principalement orienté vers l'aval, mais dans un secteur angulaire plus faible.

### 5.3.2 Analyse de l'évaluation au temps retardé

Afin de comprendre les effets de la non-compacité observés ci-dessus, une analyse du comportement de l'intégration au temps retardé a été menée pour le terme source en pression. On s'intéresse donc à la quantité :

$$I(R, \theta, t) = \int_{L_x} \frac{\partial p}{\partial \tau}(x, y = y_s, t - r/c_0) dx \quad (5.5)$$

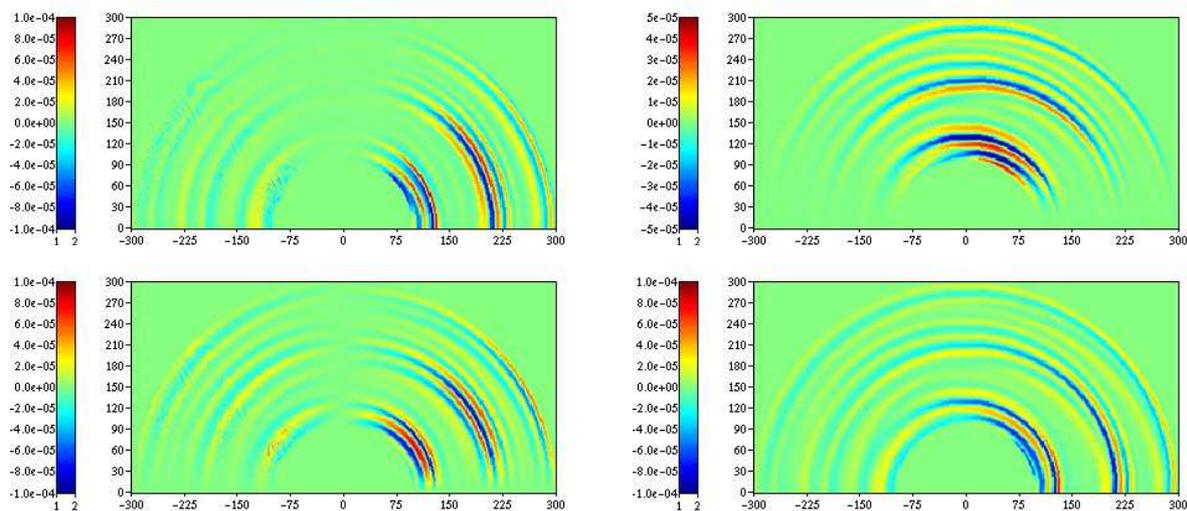


FIG. 5.16 – Contributions des termes volumiques influencées par la différence des temps retardés. En haut : à gauche, terme en  $u_x u_x$  ; à droite, terme en  $u_y u_y$ . En bas : à gauche terme en  $2u_x u_y$  ; à droite, contribution totale des termes volumiques. Surface de contrôle en  $y = h$ . NB : les niveaux de saturation sont deux fois plus faibles pour le terme en  $2u_x u_y$ .

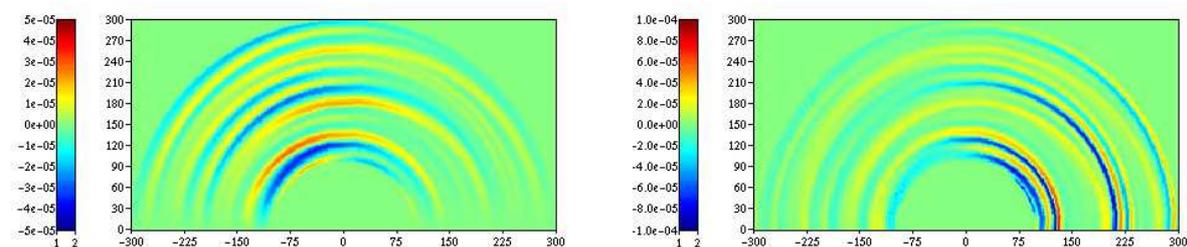


FIG. 5.17 – À gauche : contribution du terme de pression ; à droite, champ acoustique total. Source non-compacte, surface de contrôle en  $y = h$ .

La dérivation partielle par rapport à  $\tau$  s'applique pour

$$p : (x, y, \tau) \longrightarrow p(x, y, \tau)$$

Pour alléger les notations, on définit  $p'$  telle que :

$$p' : (x, \tau) \longrightarrow \frac{\partial p}{\partial \tau}(x, y = y_s, \tau) \quad (5.6)$$

L'évolution de  $p'$  en fonction de  $x$  et de  $\tau$  est tracée sur la figure 5.18 pour la plage temporelle correspondant aux champs acoustiques présentés précédemment. Les ondulations en rouge témoignent de la convection des tourbillons. Lorsqu'on réalise une coupe selon les temps de retard dans la surface obtenue, l'aire de la courbe obtenue est  $I$ .

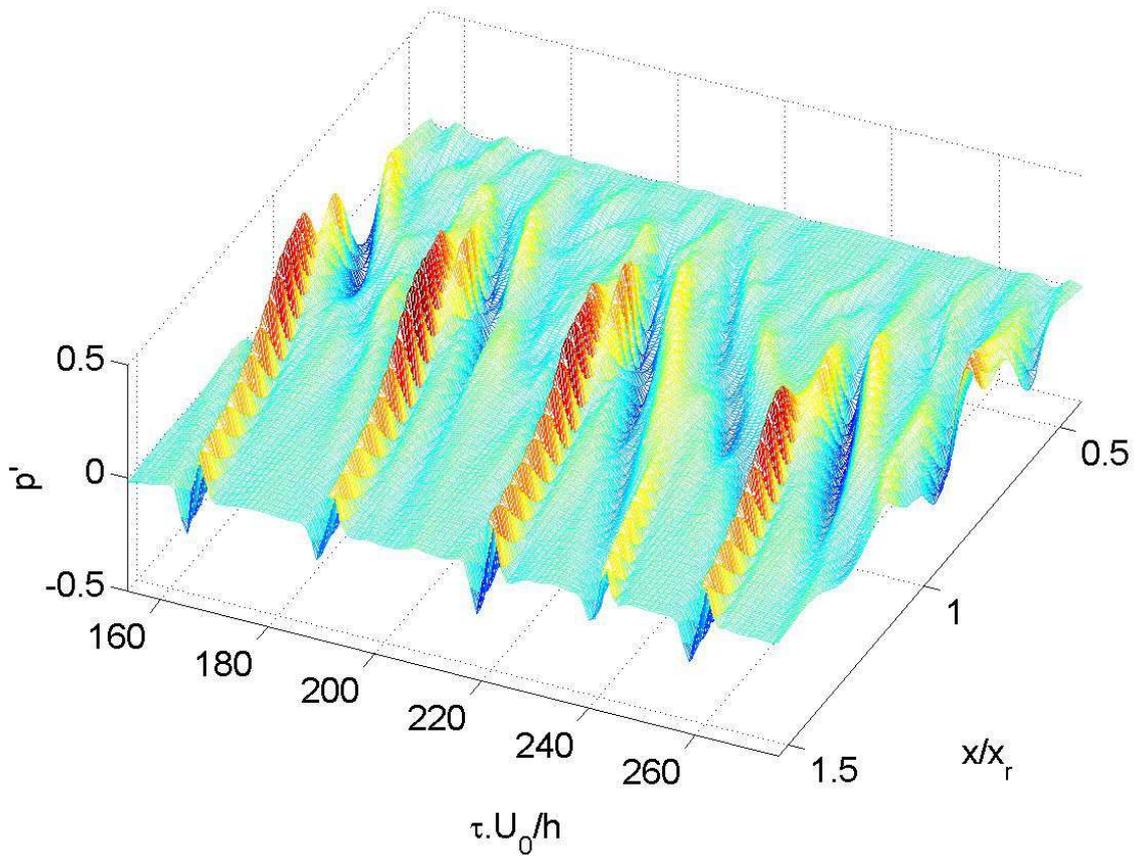


FIG. 5.18 – Evolution spatio-temporelle de  $\frac{\partial p}{\partial \tau}$ .

En effet, avec la définition de  $p'$ , on a :

$$I(R, \theta, t) = \int_{L_x} p'(x, \tau = t - r/c_0) dx \quad (5.7)$$

Or, pour un point et un instant observateurs fixés,  $t - r/c_0$  ne dépend que de  $x$ , donc on peut définir  $\bar{\tau}_{R,\theta,t}$  et  $t_{ret}$  tels que :

$$\bar{\tau}_{R,\theta,t} : x \longrightarrow \bar{\tau}_{R,\theta,t}(x) = t + t_{ret} = t - r/c_0 = t - \frac{\sqrt{R^2 + x^2 - 2xR \cos \theta}}{c_0} \quad (5.8)$$

Ainsi, dans le plan  $(x, \tau)$ ,  $\bar{\tau}_{R,\theta,t}$  est le support de la coupe réalisée dans la surface de la figure 5.18. Hormis dans le cas où l'observateur se trouve sur l'axe des abscisses, c'est-à-dire pour  $\theta = k\pi$  avec  $k$  entier, il ne s'agit pas d'une droite. Des exemples en sont donnés sur la figure 5.19, pour  $t = 0$ , dans différentes directions d'émission. Toutes les courbes correspondant à une valeur de  $R$  donnée prennent la même valeur en  $x = 0$  car le terme directionnel disparaît alors dans l'expression de  $\bar{\tau}_{R,\theta,t}(x)$ . Ces exemples montrent que les écarts de temps retardé entre les différents points sources augmentent lorsqu'on s'écarte de part et d'autre de la direction verticale. Ceci peut expliquer que la contribution du terme  $u_x u_x$  soit celle qui est la plus affectée par la non-compacité, puisque son rayonnement est par nature le plus élevé dans la direction horizontale.

L'écart maximal entre les bornes d'abscisses du domaine représenté vaut environ  $15h/U_0$  ce qui est de l'ordre d'une demi-période de lâcher tourbillonnaire. Enfin, remarquons que si  $c_0$  augmente, les écarts se réduisent, jusqu'à devenir nuls pour l'hypothèse de compacité.

Sur la figure 5.20, l'évolution de  $p'(x, \bar{\tau}_{R,\theta,t}(x))$  est tracée pour différentes valeurs de  $R$  dans les directions  $\theta = 45^\circ$  (en noir) et  $\theta = 135^\circ$  (en bleu), et pour l'instant  $t$  correspondant au champ acoustique de la figure 5.17. Par construction, les deux courbes se trouvent superposées au centre du repère de la zone source, qui se trouve légèrement en amont du recollement. A cause des diverses variations, les courbes présentées ne permettent pas de détecter l'origine de l'écart constaté entre les aires. En fait, cet écart de niveau entre les deux directions considérées, bien que visible sur le champ acoustique correspondant, est relativement faible. En termes de conséquences sur le champ total, les différences de niveau dues aux natures des termes sources semblent un facteur plus important.

Cependant, bien que cela soit rendu plus difficile par son caractère volumique, il serait intéressant d'effectuer le même type d'analyse pour l'influence de la différence de temps retardé sur le terme de vitesse longitudinale  $u_x u_x$ . En effet, comme mentionné ci-dessus, celui-ci est le plus affecté par la non-compacité. De ce fait, c'est lui qui est à l'origine de la principale différence observée ici entre les cas de sources compacte et non-compacte, à savoir la direction d'intensité maximale.

## 5.4 Conclusion

Dans ce chapitre, les résultats de la simulation d'un écoulement à  $Re = 1000$  sur plaque plane épaisse semi-infinie modélisée par frontières virtuelles ont été exposés. La longueur de recirculation peut varier selon certains paramètres de simulation, à cause notamment

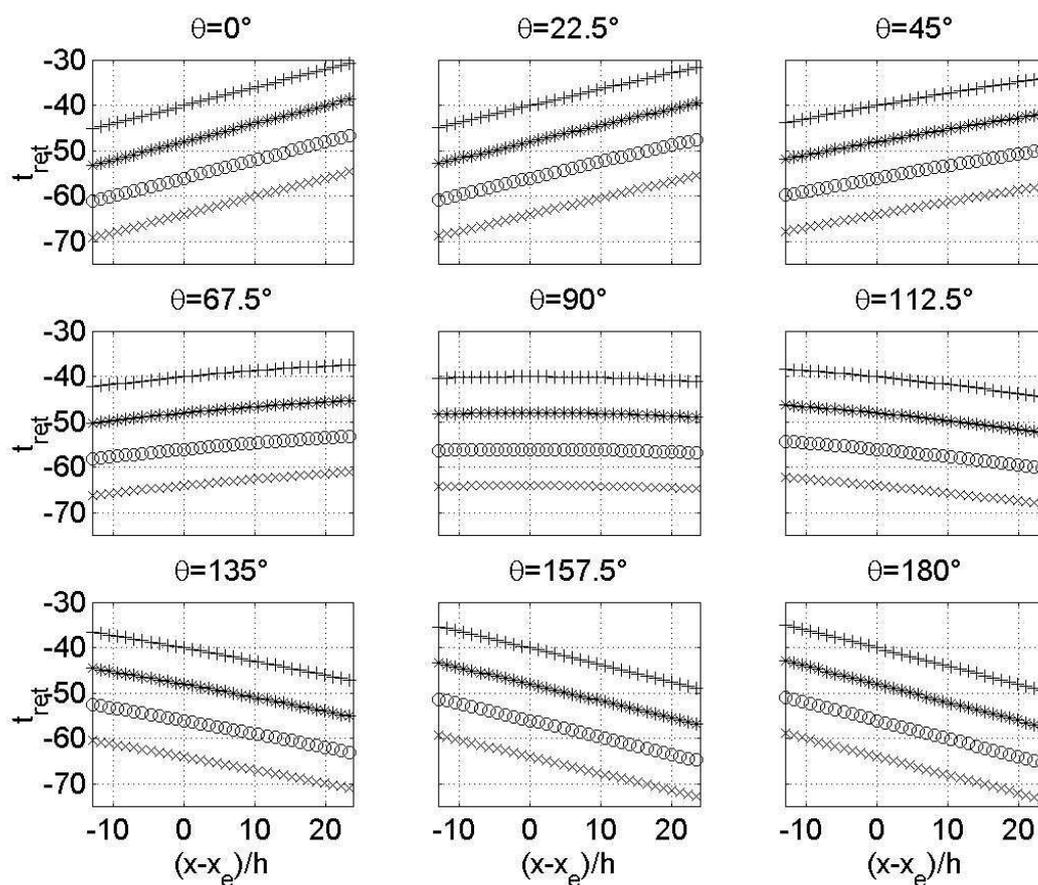


FIG. 5.19 – Evolution de  $t_{ret}$  en fonction de l'abscisse  $x$  dans la zone source, pour différentes directions d'émission.  $x_e$  est l'abscisse du centre du repère;  $(x - x_e)/h = -13$  correspond au coin. +++ :  $R = 100h$ ; \*\*\* :  $R = 120h$ ; ooo :  $R = 140h$ ; xxx :  $R = 160h$ .

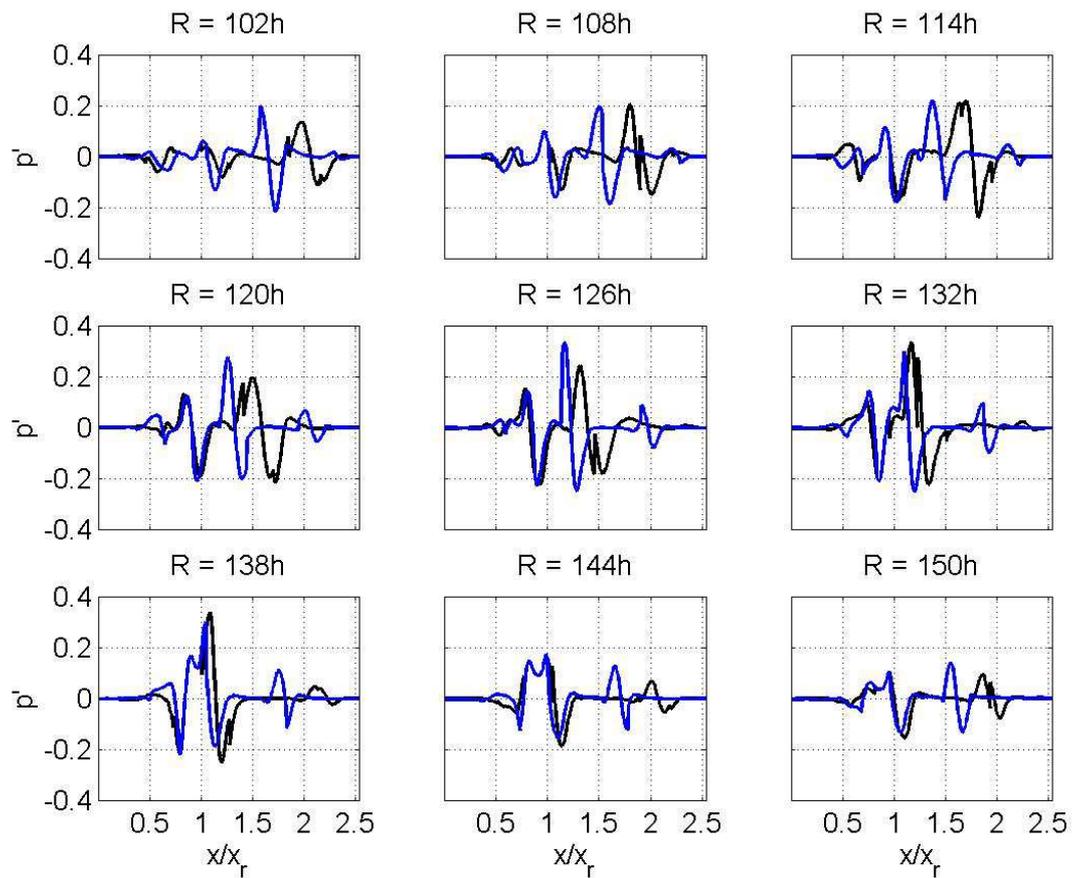


FIG. 5.20 – Distribution du terme source  $\frac{\partial p}{\partial \tau}$  le long de la plaque, évaluée aux temps retardés. En noir,  $\theta = 45^\circ$ ; en bleu :  $\theta = 135^\circ$ .

du caractère stationnaire de l'écoulement à proximité du coin, qui entraîne une singularité non-établie. Malgré le caractère bi-dimensionnel de la simulation, l'activité tourbillonnaire au niveau du recollement s'approche de certaines observations expérimentales mentionnant plusieurs mécanismes de lâcher tourbillonnaire.

Les résultats du calcul du rayonnement acoustique en champ lointain ont ensuite été exposés, d'abord dans l'hypothèse d'une source compacte, puis en prenant en compte les différences de temps de retard entre les points sources. Dans les deux cas, une prépondérance des termes sources volumiques a été constatée, ainsi qu'une émission maximale vers l'aval. Pour une source non-compacte, la prise en compte de la différence de marche entraîne l'atténuation du rayonnement en amont au profit de l'aval en ce qui concerne les sources volumiques, et un effet inverse pour la source de pression. Une étude de l'intégrale au temps retardé ouvre des pistes pour la mise en relation des événements tourbillonnaires dans l'écoulement et du rayonnement acoustique associé.

# Conclusion

*"Somme toute"; nous ne pourrons jamais nous passer de cette réserve, si fréquente dans la bouche de l'homme d'action, si odieuse à tout esprit systématique.*

*William JAMES, The Varieties of the Religious Experience, 1902.*

Au cours de ce travail de thèse, le développement d'un outil de calcul du rayonnement acoustique par des écoulements pariétaux a été réalisé. Il s'agit d'une méthode hybride. La partie aérodynamique est une simulation numérique directe d'écoulements incompressibles en présence de parois solides où la condition d'adhérence est obtenue à l'aide de la méthode des frontières virtuelles. La partie acoustique est une application de l'équation de Curle.

Les méthodes de modélisation de paroi par forçage sont performantes pour la simulation d'écoulements en géométrie complexe. En effet, elles sont affranchies de la nécessité d'adapter le maillage à la géométrie, ce qui permet l'utilisation de méthodes spectrales. Dans le cadre de la présente étude, le comportement de la méthode des frontières virtuelles a été analysé en étudiant son caractère de système d'asservissement de la vitesse à une valeur cible. Une formulation en  $(\omega_n, z)$  a été proposée, qui a permis de mieux comprendre le processus de réalisation de la consigne de vitesse nulle et le rôle des coefficients. En conséquence, pour les simulations réalisées, la contrainte supplémentaire sur le pas de temps a pu être ramenée au même niveau que celle du critère  $CFL$  tout en conservant des vitesses résiduelles suffisamment faibles.

Pour les simulations d'écoulements laminaires, et pour les zones stationnaires des écoulements turbulents, il a été noté que, dans l'absolu, l'établissement ne peut être atteint. En effet, aux points où est appliqué le terme de forçage, les vitesses résiduelles tendent indéfiniment vers la valeur nulle. Ceci accentue la singularité des arêtes vives éventuellement présentes dans l'écoulement. Notamment, la couche cisailée issue du décollement ne présente pas une épaisseur initiale constante. De même, l'utilisation d'un maillage plus fin rend les arêtes plus vives, ce qui perturbe l'établissement ou la déstabilisation éventuelle.

Malgré ces difficultés d'utilisation, et malgré l'apparition d'oscillations parasites dues à la présence de singularités géométriques et à l'emploi d'un maillage collocalisé, la méthode des frontières virtuelles a montré de bonnes aptitudes pour la représentation des écoulements

turbulents pariétaux. Les simulations de l'écoulement de canal plan et de plaque plane épaisse ont permis de valider leur implantation dans un code d'écoulements libres. En particulier, l'extraction du champ de pression instationnaire a été réalisée, et un bon accord a été obtenu avec des données existant dans la littérature. Ainsi, cette modélisation de la condition d'adhérence a pu être utilisée dans le contexte de l'aéroacoustique, ce qui présente un caractère original.

Ceci a été effectué dans le cadre de l'analogie de Curle. Le formalisme conduisant à l'équation intégrale a été précisé, en explicitant les opérations mathématiques qui mettent en jeu des dérivations spatiales dans les intégrales évaluées au temps retardé. Le calcul numérique du rayonnement acoustique en champ lointain a été programmé en temps avancé.

La méthode aéroacoustique hybride ainsi développée a été appliquée à l'écoulement sur une plaque plane épaisse semi-infinie à  $Re = 1000$ , dans une configuration bi-dimensionnelle. Cet écoulement, relativement peu étudié en simulation numérique directe, met en jeu une séparation au bord d'attaque. La déstabilisation de la couche cisailée située au dessus de la bulle de recirculation donne naissance à un phénomène de lâcher de structures tourbillonnaires. Celui-ci peut se dérouler de différentes manières selon le nombre de tourbillons générés à la fin de la couche de mélange avant d'être relâchés ensemble. Les résultats obtenus ici montrent un nombre de Strouhal global de l'ordre de  $0.6U_0/x_r$  où  $x_r$  est la longueur de recollement. Les tensions de Reynolds sont maximales autour de la position  $x = 0.8x_r$ , légèrement en amont du maximum de fluctuations de pression pariétale, observé à  $0.85x_r$ .

L'analyse des contributions des différents termes sources au champ acoustique rayonné dans l'hypothèse d'une source compacte conduit à penser que le rayonnement du terme de pression est principalement généré au moment des lâchers de structures tourbillonnaires, tandis que le rayonnement des termes volumiques est généré lors de la formation de celles-ci. Ce dernier rayonnement est prépondérant, ce qui entraîne une directivité orientée principalement vers l'aval, dans un faisceau élevé de  $30^\circ$  à  $90^\circ$  par rapport à la direction horizontale. L'addition des contributions du terme en  $u_y u_y$  et du terme en  $2u_x u_y$  détermine cette direction d'émission maximale.

La prépondérance de la contribution volumique par rapport à la contribution surfacique contredit l'évaluation aux ordres de grandeurs effectuée sur la formule de Curle. En effet, selon cette évaluation, pour un écoulement subsonique, le rapport des puissances acoustiques rayonnées par ces deux types de sources est en  $M^2$ , où  $M$  est le nombre de Mach, c'est-à-dire au profit des sources surfaciques. Outre le fait que cela n'est pas vérifié par les résultats présentés ici, il a également été constaté que les rayonnements associés à ces sources ne présentent pas les mêmes directivités. Les comparaisons entre les intensités respectives des termes dipolaires et quadripolaires doivent donc en tenir compte.

Le calcul du rayonnement en prenant en compte les temps de retard pour un nombre de Mach de 0.4 a été réalisé. Par rapport au cas de la source compacte, on observe que pour chaque terme volumique le rayonnement est atténué vers l'amont et renforcé vers l'aval.

L'effet inverse est observé pour le terme surfacique de pression. Cet effet étant le plus important pour le terme volumique de vitesse longitudinale, il en résulte que le faisceau d'émission maximal se trouve plus proche de la direction horizontale.

Les observations effectuées dans le cadre du présent travail montrent la nécessité de certains développements. En ce qui concerne l'écoulement, des simulations tri-dimensionnelles doivent être menées afin de parvenir à une meilleure représentation des mécanismes physiques au niveau du recollement. De plus, une caractérisation fréquentielle du lâcher tourbillonnaire doit être réalisée. En effet, ces deux aspects sont importants à l'égard de la compréhension et éventuellement de la conception d'outils prédictifs du rayonnement acoustique.

En ce qui concerne celui-ci, l'analyse réalisée sur le terme de pression au sujet de l'intégrale au temps retardé pourrait être étendue aux termes volumiques. Une caractérisation plus fine des mécanismes tourbillonnaires devrait montrer les effets de compensation entre les différentes fluctuations sur les intégrales des termes sources.

Enfin, compte-tenu de la souplesse d'utilisation des frontières virtuelles, la méthode hybride développée ici pourrait être appliquée à d'autres écoulements de parois, tels que les sillages, et ainsi contribuer à la compréhension de leur rayonnement acoustique.



# Bibliographie

- [1] I. E. Abdalla & Z. Yang, Numerical study of the instability mechanism in transitional separating-reattaching flow, *International Journal of Heat and Fluid Flow*, **25**, pp. 593–605, 2004.
- [2] E. Arquís & J. P. Caltagirone, Sur les conditions hydrodynamiques au voisinage d’une interface milieu-fluide-milieu poreux : application à la convection naturelle, *Comptes-Rendus de l’Académie des Sciences*, **299(1)**, pp. 1–4, 1984.
- [3] E. Avital, Private communication, 2005.
- [4] D. A. Bies, J. M. Pickles & D. J. J. Leclercq, Aerodynamic noise generation by a stationary body in a turbulent air stream, *Journal of Sound and Vibration*, **204(4)**, pp. 631–643, 1997.
- [5] W. K. Blake, *Mechanics of flow induced sound and vibration*, Academic Press, Inc, 1986.
- [6] C. Bogey, X. Gloerfelt & C. Bailly, Illustration of the inclusion of sound-flow interactions in Lighthill’s equation, *AIAA Journal*, **41(8)**, pp. 1604–1606, 2003.
- [7] R. Boucheron, *Propagation acoustique en présence d’écoulement : développement de techniques laser, traitement du signal et étude analytique*, Thèse de doctorat, Université de Poitiers, 2004.
- [8] K. S. Brentner, Numerical algorithms for acoustic integrals - the devil is in details, *AIAA paper*, **96-1706**, 1996.
- [9] K. S. Brentner & F. Farassat, Analytical comparison of the acoustic analogy and Kirchhoff formulation for moving surface, *AIAA Journal*, **36-8**, pp. 1379–1386, 1998.
- [10] M. K. Bull, Wall-pressure fluctuations beneath turbulent boundary layers : some reflections on forty years of research, *Journal of Sound and Vibration*, **190(3)**, pp. 299–315, 1996.
- [11] M. Cabana, V. Fortuné, P. Jordan, F. Golanski, E. Lamballais & Y. Gervais, Helmholtz decomposition of velocity field of a mixing layer : application to the analysis of acoustic sources, dans *ERCOFTAC Workshop : Direct and Large-Eddy Simulation - 6, Poitiers, France, September, 2005*.
- [12] D. Casalino, An advanced time approach fo acoustic analogy predictions, *Journal of Sound and Vibration*, **261**, pp. 583–612, 2003.

- [13] L. Chatellier, *Modélisation et contrôle actif des instabilités aéroacoustiques en cavité sous écoulement affleurant*, Thèse de doctorat, Université de Poitiers, 2002.
- [14] N. J. Cherry, R. Hillier & M. E. M. P. Latour, Unsteady measurements in a separated and reattaching flow, *Journal of Fluid Mechanics*, **144**, pp. 13–46, 1984.
- [15] B.-T. Chu & L. S. G. Kovásznyai, Non-linear interactions in a viscous heat-conducting compressible gas, *Journal of Fluid Mechanics*, **3(5)**, pp. 494–515, 1958.
- [16] A. T. Conlisk & D. Veley, The generation of noise in impinging vortex motion past a step, *Physics of Fluids*, **28(10)**, pp. 3004–3011, 1985.
- [17] G. M. Corcos, The structure of the turbulent pressure field in boundary layer flows, *Journal of Fluid Mechanics*, **18**, pp. 353–378, 1964.
- [18] D. J. Crighton, Basic principles of aerodynamic noise generation, *Prog. Aerospace Sci.*, **16(1)**, pp. 31–96, 1975.
- [19] D. Crighton, A. Dowling, J. Ffowcs Williams, M. Heckel & F. Leppington, Noise source mechanisms, dans *Modern methods in analytical acoustics*, pp. 313–354, Springer-Verlag, Second edition, 1994.
- [20] N. Curle, The influence of solid boundaries upon aerodynamic sound, *Proceedings of the Royal Society of London*, **A231**, pp. 505–514, 1955.
- [21] R. B. Dean, Reynolds number dependence of skin friction and other bulk flow variables in two-dimensional rectangular duct flow, *Journal of Fluids Engineering*, **100**, pp. 215–223, 1978.
- [22] F. Delcayre, *Étude par simulation grandes échelles d'un écoulement décollé : la marche descendante*, Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1999.
- [23] P. Di Francescantonio, A new boundary integral formulation for the prediction of sound radiation, *Journal of Sound and Vibration*, **202(4)**, pp. 491–509, 1997.
- [24] A. P. Dowling & J. E. Ffowcs Williams, *Sound and sources of sound*, Westergate : Horwood publishing, 1983.
- [25] J. K. Eaton & J. P. Johnston, Low frequency unsteadiness of a reattaching turbulent shear layer, dans F. W. Schmidt, L. J. Bradbury, F. Durst, B. E. Launder & J. H. Whitelaw, rédacteurs, *Turbulent Shear Flow 3*, Springer-Verlag, 1982.
- [26] E. A. Fadlun, R. Verzicco, P. Orlandi & J. Mohd-Yusof, Combined immersed-boundary finite-difference methods for three-dimensional complex flow simulations, *Journal of Computational Physics*, **161**, pp. 35–60, 2000.
- [27] T. M. Farabee & M. J. Casarella, Measurements of fluctuating wall pressure for separated/reattached boundary layer flows, *ASME Journal of Vibration, Stress and Reliability in Design*, **108**, pp. 301–307, 1986.
- [28] F. Farassat & M. K. Myers, Extension of Kirchhoff's formula to radiation from moving surfaces, *Journal of Sound and Vibration*, **202(4)**, pp. 491–509, 1988.

- [29] J. H. Ferziger & M. Perić, *Computational methods for fluid dynamics*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg NewYork, 2002.
- [30] J. E. Ffowcs Williams, Hydrodynamic noise, *Annual Review of Fluid Mechanics*, **1**, pp. 197–222, 1969.
- [31] J. E. Ffowcs Williams, Aeroacoustics, *Annual Review of Fluid Mechanics*, **9**, pp. 447–68, 1977.
- [32] J. E. Ffowcs Williams, Les mécanismes d'émission de bruit dans les écoulements instationnaires, *Revue d'acoustique*, **58**, pp. 134–142, 1981.
- [33] J. E. Ffowcs Williams & L. H. Hall, Aerodynamic sound generation by turbulent flow in the vicinity of a scattering half plane, *Journal of Fluid Mechanics*, **40(4)**, pp. 657–670, 1970.
- [34] J. E. Ffowcs Williams & D. L. Hawkings, Sound generation by turbulence and surfaces in arbitrary motion, *Proceedings of the Royal Society of London A*, **264**, pp. 321–342, 1969.
- [35] V. Fortuné, *Étude par simulation numérique directe du rayonnement acoustique de couches de mélange isothermes et anisothermes*, Thèse de doctorat, Université de Poitiers, 2000.
- [36] X. Gloerfelt, *Bruit rayonné par un écoulement affleurant une cavité : simulation aéroacoustique directe et application de méthodes intégrales*, Thèse de doctorat, École centrale Lyon, 2001.
- [37] X. Gloerfelt, C. Bailly & D. Juvé, Direct computation of the noise radiated by a subsonic cavity flow and application of integral methods, *Journal of Sound and Vibration*, **266**, pp. 119–146, 2003.
- [38] F. Golanski, *Méthode hybride pour le calcul du rayonnement acoustique d'écoulements anisothermes à faible nombre de Mach*, Thèse de doctorat, Université de Poitiers, 2004.
- [39] D. Goldstein, R. Handler & L. Sirovich, Modeling a no-slip flow boundary with an external force field, *Journal of Computational Physics*, **105**, pp. 354–366, 1993.
- [40] M. E. Goldstein, *Aeroacoustics*, Mc Graw Hill International, 1976.
- [41] M. E. Goldstein, A generalized acoustic analogy, *Journal of Fluid Mechanics*, **488**, pp. 315–333, 2003.
- [42] R. Hillier & N. J. Cherry, The effects of stream turbulence on separation bubbles, *Journal of Wind Engineering and Industrial Aeronautics*, **8**, pp. 49–58, 1981.
- [43] A. Hirschberg & S. Rienstra, *Elements of aeroacoustics*, Technische universiteit Eindhoven, 1994.
- [44] K. Hourigan, M. C. Thompson & B. T. Tan, Self-sustained oscillations in flows around long blunt plates, *Journal of Fluids and Structures*, **15**, pp. 387–398, 2001.
- [45] M. S. Howe, Contributions to the theory of aerodynamic sound, with applications to excess jet noise and the theory of the flute, *Journal of Fluid Mechanics*, **71(4)**, pp. 625–673, 1975.

- [46] M. S. Howe, The dissipation of sound at an edge, *Journal of Sound and Vibration*, **70(3)**, pp. 407–411, 1980.
- [47] M. S. Howe, Sound produced by turbulent boundary layer flow over a finite region of wall roughness and over a forward-facing step, *Journal of Fluids and Structures*, **3**, pp. 83–96, 1989.
- [48] M. S. Howe, Influence of separation on sound generation by vortex-step interaction, *Journal of Fluids and Structures*, **11**, pp. 857–872, 1997.
- [49] S. Huang & C. Beguier, Aerodynamic noise calculation of a detaching flow, dans *ASME international mechanical engineering congress and exposition. 4th international symposium on fluid structure interactions, aeroelasticity, flow induced vibration and noise*, 1997.
- [50] K. S. Hwang, H. J. Sung & J. M. Hyun, Mass transfer measurements from a blunt-faced flat plate in a uniform flow, *International Journal of Heat and Fluid Flow*, **17**, pp. 179–182, 1996.
- [51] K. S. Hwang, H. J. Sung & J. M. Hyun, Visualizations of large-scale vortices in flow about a blunt-faced flat plate, *Experiments in Fluids*, **29**, pp. 198–201, 2000.
- [52] K. Iwamoto, *Database of Fully Developed Channel Flow - THTLAB Internal Report No. ILR-0201*, Rapport technique, THTLAB, Dept. of Mech. Eng., The Univ. of Tokyo., 2002.
- [53] K. Iwamoto, Y. Suzuki & N. Kasagi, Reynolds number effect on wall turbulence : Toward effective feedback control, *International Journal of Heat and Fluid Flow*, **23**, pp. 678–689, 2002.
- [54] J. Jiménez & P. Moin, The minimal flow unit in near-wall turbulence, *Journal of Fluid Mechanics*, **225**, pp. 213–240, 1991.
- [55] F. Kerhervé, *Caractérisation statistique des sources aéroacoustiques en jets supersoniques par vélocimétrie laser effet Doppler : application à la prédiction du bruit de jet*, Thèse de doctorat, Université de Poitiers, 2004.
- [56] J. Kim, P. Moin & R. Moser, Turbulent statistics in fully-developed channel flow at low reynolds number, *Journal of Fluid Mechanics*, **177**, pp. 133–166, 1987.
- [57] G. R. Kirchhoff, Toward a theory of light rays, *Annalen der Physik und Chemie*, **18**, pp. 663–695, 1883.
- [58] M. Kiya & K. Sasaki, Structure of a turbulent separation bubble, *Journal of Fluid Mechanics*, **137**, pp. 83–113, 1983.
- [59] M. Kiya & K. Sasaki, Structure of large-scale vortices and unsteady reverse flow in the reattaching zone of a turbulent separation bubble, *Journal of Fluid Mechanics*, **154**, pp. 463–491, 1985.
- [60] M. Kiya, K. Sasaki & M. Arie, Discrete-vortex simulation of a turbulent separation bubble, *Journal of Fluid Mechanics*, **120**, pp. 219–244, 1982.

- [61] S. H. Ko, Computation of turbulent flows over backward and forward-facing steps using a near-wall reynolds stress model, *Annual Research Briefs*, pp. 75–89, 1993.
- [62] S. Laizet, *Développement d'un code de calcul combinant des schémas de haute précision avec une méthode de frontière immergée pour la simulation des mouvements tourbillonnaires en aval d'un bord de fuite*, Thèse de doctorat, Université de Poitiers, 2005.
- [63] S. Laizet & E. Lamballais, Compact schemes for the dns of incompressible flows : in what context the quasi-spectral accuracy is really useful?, dans *IV Escola de Primavera Transição e Turbulência*, Porto Alegre, Brésil, Septembre, 2004.
- [64] E. Lamballais, *Simulations numériques de la turbulence dans un canal plan tournant*, Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1996.
- [65] E. Lamballais, *Simulation numérique des mouvements tourbillonnaires dans les fluides. Habilitation à Diriger des Recherches*, Université de Poitiers, 2003.
- [66] E. Lamballais, O. Métais & M. Lesieur, Spectral-dynamic model for large-eddy simulations of turbulent rotating channel flow, *Theoretical Computational Fluid Dynamics*, **12**, pp. 149–177, 1998.
- [67] E. Lamballais & J. H. Silvestrini, Direct numerical simulation of interations between a mixing layer and a wake around a cylinder, *Journal of Turbulence*, **3**, pp. 028, 2002.
- [68] S. Lardeau, *Simulation numérique directe du contrôle d'écoulements cisailés libres par injection de fluide*, Thèse de doctorat, Université de Poitiers, 2001.
- [69] J.-F. Largeau, *Analyse Expérimentale de la dynamique tourbillonnaire et du rayonnement acoustique d'un écoulement sur marche montante*, Thèse de doctorat, Université de Poitiers, 2004.
- [70] J. Larsson, *Computational Aero Acoustics for Vehicle Applications*, Thèse de doctorat, Department of Thermo and Fluid Dynamics, Chalmers University of Technology, Gteborg, Sweden, 2002.
- [71] H. Le, P. Moin & J. Kim, Direct numerical simulation of turbulent flow over a backward-facing step, *Journal of Fluid Mechanics*, **330**, pp. 349–374, 1997.
- [72] D. J. J. Leclercq, M. C. Jacob, A. Louisot & C. Talotte, Forward-backward facing step pair : aerodynamic flow, wall pressure and acoustic characterisation, *AIAA paper*, **2249**, 2001.
- [73] C. Lee, Stability characteristics of the virtual boundary method in three-dimensional applications, *Journal of Computational Physics*, **184**, pp. 559–591, 2003.
- [74] S. K. Lele, Compact finite difference schemes with spectral-like resolution, *Journal of Computational Physics*, **103**, pp. 16–42, 1992.
- [75] M. J. Lighthill, On sound generated aerodynamically I. general theory, *Proceedings of the Royal Society of London*, **A211**, pp. 564–587, 1952.
- [76] M. J. Lighthill, On sound generated aerodynamically II. turbulence as a source of sound, *Proceedings of the Royal Society of London*, **A222**, pp. 1–32, 1954.

- [77] G. Lilley, The generation and radiation of supersonic jet noise. Vol IV : Theory of turbulence generated jet noise, noise radiation from upstream sources and combustion noise, *AFAPL report*, **53**, 1972.
- [78] G. M. Lilley, Jet noise classical theory and experiments, dans H. H. Hubbard, rédacteur, *Aeroacoustics of flight vehicles : Theory and practice. Vol. 1 : Noise sources.*, pp. 211–289, NASA technical report 90-3052, 1991.
- [79] H. M. Macdonald, A class of diffraction problems, *Proceedings of the London Mathematical Society*, **2(14)**, pp. 410–427, 1915.
- [80] E. Manoha, B. Troff & P. Sagaut, Trailing-edge noise prediction using large-eddy simulation and acoustic analogy, *AIAA Journal*, **38(4)**, pp. 575–583, 2000.
- [81] N. N. Mansour, J. Kim & P. Moin, Reynolds-stress and dissipation-rate budgets in a turbulent channel flow, *Journal of Fluid Mechanics*, **194**, pp. 15–44, 1988.
- [82] J. Mohd-Yusof, Combined immersed boundary / b-spline methods for simulations of flow in complex geometries, *Center for Turbulence Research Annual Research Briefs*, **105**, pp. 317–327, 1997.
- [83] J. Mohd-Yusof, Development of immersed boundary methods for complex geometries, *Center for Turbulence Research Annual Research Briefs*, **105**, pp. 325–336, 1998.
- [84] P. Moin & J. Kim, Numerical investigation of turbulent channel flow, *Journal of Fluid Mechanics*, **118**, pp. 341–377, 1982.
- [85] P. Moin & J. Kim, The structure of the vorticity field in turbulent channel flow. part 1 analysis of instantaneous fields and statistical correlations, *Journal of Fluid Mechanics*, **155**, pp. 441–464, 1982.
- [86] P. Moin & K. Mahesh, Direct numerical simulation : A tool in turbulence research, *Annual Review of Fluid Mechanics*, **30**, pp. 539–578, 1998.
- [87] C. A. Moser, *Numerical simulation on the transition of the cylinder wake based on the virtual boundary technic*, Master's thesis, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2002.
- [88] W. D. Moss & S. Baker, Re-circulating flows associated with two-dimensional steps, *Aeronautical Quarterly*, pp. 151–172, 1980.
- [89] P. Parnaudeau, D. Heitz, E. Lamballais & J. H. Silvestrini, Combination of the immersed boundary method with compact schemes for dns of flows in complex geometry, dans *Direct and Large Eddy Simulation-5, Munich, Germany, August*, 2003.
- [90] C. S. Peskin, Flow patterns around heart valves : a numerical method, *Journal of Computational Physics*, **10**, pp. 252–271, 1972.
- [91] C. S. Peskin, Numerical analysis of blood flow in the heart, *Journal of Computational Physics*, **25**, pp. 220–252, 1977.
- [92] O. Phillips, On the generation of sound by supersonic turbulent shear layer, *Journal of Fluid Mechanics*, **9(1)**, pp. 1–28, 1960.

- [93] A. Powell, Aerodynamic noise and the plane boundary, *Journal of the Acoustical Society of America*, **32-8**, pp. 982–990, 1960.
- [94] A. Powell, Theorie of vortex sound, *Journal of the Acoustical Society of America*, **36**, pp. 177–195, 1964.
- [95] J. Prieur & G. Rahier, Comparison of flowcs williams-hawkings and kirchhoff rotor noise calculations, *AIAA paper*, **98-2376**, 1998.
- [96] S. K. Robinson, Coherent motions in the turbulent boundary layer, *Annual Review of Fluid Mechanics*, **23**, pp. 601–639, 1991.
- [97] E. M. Saiki & S. Biringen, Numerical simulation of a cylinder in uniform flow : application of virtual boundary method, *Journal of Computational Physics*, **123**, pp. 450–465, 1996.
- [98] A. Silveira Neto, D. Grand, O. Métais & M. Lesieur, A numerical investigation of the coherent vortices in turbulence behind a backward-facing step, *Journal of Fluid Mechanics*, **256**, pp. 1–25, 1993.
- [99] H. Stürer, A. Gyr & W. Kinzelbach, Laminar separation on a forward facing step, *European Journal of Mechanics B/Fluids*, **18**, pp. 675–692, 1999.
- [100] D. K. Tafti & S. P. Vanka, A numerical study of flow separation and reattachment on a blunt plate, *Physics of Fluids*, **A 3(7)**, pp. 1749–1759, 1991.
- [101] C. Talotte, Y. Addad, D. Laurence, M. Jacob, H. Giardi & F. Crouzet, Comparison of large eddy simulation and experimental results of the flow around a forward-backward facing step, dans *Proceedings of the ASME FEDSM'02*, tome FEDSM2002-31337, 2002.
- [102] B. T. Tan, M. C. Thompson & K. Hourigan, Simulated flow around long rectangular plates under cross flow perturbations, *International Journal of Fluid Dynamics*, **2**, 1998.
- [103] D. Wilhelm, C. Härtel & L. Kleiser, Computational analysis of the two-dimensional-three-dimensional transition in forward-facing step flow, *Journal of Fluid Mechanics*, **489**, pp. 1–27, 2003.
- [104] D. Wilhelm & L. Kleiser, Application of a spectral element method to two-dimensional forward-facing step flow, *Journal of Scientific Computing*, **17(1-4)**, pp. 619–627, 2002.
- [105] J. H. Williamson, Low-storage runge-kutta schemes, *Journal of Computational Physics*, **35**, pp. 48–56, 1980.



# Annexe A

## Discrétisation spatiale

Le code de calcul où a été implantée la méthode des frontières virtuelles dans le cadre de ce travail a été initialement développé pour des écoulements libres par S. Lardeau [68]. La discrétisation spatiale y est effectuée en utilisant les schémas aux différences finies hermitiens, appelés aussi schémas compacts, étudiés en détail par Lele [74]. Les schémas compacts ont la propriété d’avoir un comportement quasi-spectral, autrement dit, ils permettent de garder une très bonne approximation de la dérivée sur une large gamme de nombres d’ondes. De plus, pour un ordre donné, leur domaine de dépendance est plus faible que celui des schémas explicites classiques, d’où leur dénomination de schémas “compacts”. Pour un même domaine de dépendance, l’erreur commise sur la vitesse de phase et la vitesse de groupe reste proche de zéro sur une plus large gamme de nombres d’ondes que pour les opérateurs explicites classiques et optimisés.

La contrepartie à toutes ces qualités est une augmentation du coût de calcul par rapport aux schémas explicites. Cependant, ce sur-coût peut être compensé par le fait que les schémas explicites nécessitent un maillage plus fin que les schémas compacts pour représenter un phénomène couvrant un registre de longueurs d’ondes donné avec une précision donnée.

### A.1 Généralités

Soit une distribution uniforme de points d’indices  $i$  tels que  $\xi_i = (i - 1)\Delta\xi$ . Les schémas compacts permettent d’exprimer la dérivée première d’une fonction  $f$  aux noeuds  $\xi_i$ ,  $f'_i = f'(\xi_i) = \frac{df}{d\xi}(\xi_i)$  en fonction des valeurs prises par  $f$  aux noeuds voisins par

$$\alpha f'_{i-1} + f'_i + \alpha f'_{i+1} = a \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{\Delta\xi} + b \frac{f_{i+2} - f_{i-2}}{\Delta\xi}. \quad (\text{A.1})$$

Cette formulation est appelée formulation implicite car pour déterminer  $f'_i$ , il faut connaître les valeurs de  $f'_{i-1}$  et  $f'_{i+1}$ . Ceci implique un calcul simultané de toutes les dérivées pour tous les noeuds de la grille (le cas  $\alpha = 0$  conduit à un schéma explicite).

De la même façon, on peut obtenir une approximation de la dérivée seconde  $f''_i = f''(\xi_i) = \frac{d^2 f}{d\xi^2}(\xi_i)$  par

$$\alpha f''_{i-1} + f''_i + \alpha f''_{i+1} = a \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{\Delta\xi^2} + b \frac{f_{i+2} - 2f_i + f_{i-2}}{\Delta\xi^2}. \quad (\text{A.2})$$

L'ordre de ces approximations varie selon le choix de  $(\alpha, a, b)$  et peut aller jusqu'à six. Ces approximations ne peuvent être utilisées qu'à partir du troisième nœud. Selon les conditions de frontières utilisées, différentes solutions sont adoptées pour les évaluations des dérivées aux nœuds 1 et 2 (et par symétrie aux nœuds  $n_\xi - 1$  et  $n_\xi$ ). Trois possibilités sont envisagées dans les codes utilisés ici : les conditions de frontières peuvent être périodique, de glissement libre ou quelconque.

La **condition périodique** est utilisée dans le modèle temporel et correspond à  $f_{n_\xi+2} = f_2$ ,  $f_{n_\xi+1} = f_1$  et  $f_0 = f_{n_\xi}$  (les mêmes relations sont utilisées pour les dérivées première et seconde). Dans ce cas, les approximations (A.1, A.2) peuvent être utilisées sur tous les nœuds du domaine.

La **condition de glissement libre** est utilisée aux frontières supérieure et inférieure du domaine pour les calculs dynamiques. Cette condition correspond au glissement sans frottement. Suivant les composantes calculées, cette condition peut être vue comme une symétrie ou une antisymétrie locale. Les grandeurs qui s'annulent à cette frontière ( $u_y$  en  $y = \pm \frac{L_y}{2}$ ) sont considérées comme localement impaires et celles dont le gradient dans la direction normale à la frontière s'annule ( $u_x$  en  $y = \pm \frac{L_y}{2}$ ) sont considérées comme localement paires. Ces exemples sont schématisés sur la figure (A.1). Ce cas permet, comme le cas périodique,

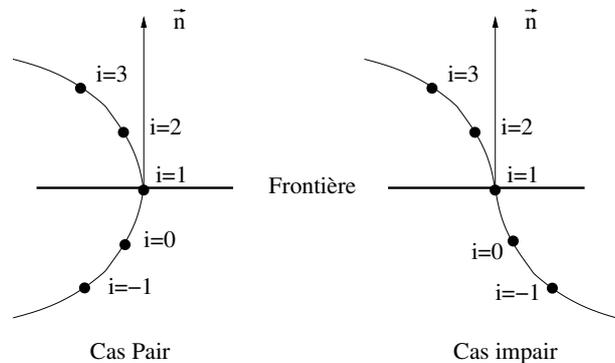


FIG. A.1 – Représentation graphique des deux types de conditions pour le glissement libre

de conserver le même schéma sur tout le domaine.

Enfin, une **condition d'entrée-sortie** est utilisée pour les frontières amont et aval des écoulements dans les codes CFD et acoustique. Ces conditions permettent d'adapter n'importe quel modèle physique en frontière de domaine sans préjuger du comportement des variables. Ces conditions nécessitent de dégrader les schémas à l'approche de la frontière.

Aux nœuds 2 et  $n_x - 1$  on utilise (A.1, A.2) dans lesquels on impose  $b = 0$ . Aux nœuds 1

et  $n_\xi$ , il est nécessaire de décentrer les schémas. Nous utilisons alors les schémas d'ordre deux

$$f'_1 + \alpha_1 f'_2 = \frac{1}{\Delta\xi} (a_1 f_1 + b_1 f_2 + c_1 f_3) \quad (\text{A.3})$$

$$f''_1 + \alpha_1 f''_2 = \frac{1}{\Delta\xi^2} (a_1 f_1 + b_1 f_2 + c_1 f_3 + d_1 f_4). \quad (\text{A.4})$$

## A.2 Formulation matricielle

La nature implicite de ces schémas conduit à une détermination simultanée de tous les  $f'_i$  (et de tous les  $f''_i$ ). Le calcul des dérivées revient donc à résoudre des systèmes linéaires dont les  $f'_i$  (et les  $f''_i$ ) sont les inconnues. La représentation matricielle s'impose alors naturellement pour formaliser ces résolutions.

Pour une direction  $\xi$  donnée, les systèmes d'équations donnant les valeurs des dérivées première et seconde s'écrivent

$$\mathbf{A}'_\xi \mathbf{f}' = \frac{1}{\Delta\xi} \mathbf{B}'_\xi \mathbf{f} \quad (\text{A.5})$$

$$\mathbf{A}''_\xi \mathbf{f}'' = \frac{1}{\Delta\xi^2} \mathbf{B}''_\xi \mathbf{f} \quad (\text{A.6})$$

où  $\mathbf{f}$ ,  $\mathbf{f}'$  et  $\mathbf{f}''$  sont les vecteurs de dimension  $n_\xi$  dont les composantes sont respectivement les valeurs de  $f$ ,  $f'$  et  $f''$  aux nœuds d'indices  $i$ .  $\mathbf{A}'_\xi$ ,  $\mathbf{A}''_\xi$ ,  $\mathbf{B}'_\xi$  et  $\mathbf{B}''_\xi$  sont des matrices de dimensions  $n_\xi \times n_\xi$ . Leur composition varie en fonction de la condition de frontière utilisée dans la direction  $\xi$ .

Pour une **Condition périodique**,  $\mathbf{A}'_\xi$  et  $\mathbf{B}'_\xi$  sont respectivement tridiagonale et pentadiagonale cycliques et s'écrivent

$$\mathbf{A}'_\xi = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & & & & & & & \alpha \\ \alpha & 1 & \alpha & & & & & & \\ & \alpha & 1 & \alpha & & & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\ & & & \alpha & 1 & \alpha & & & \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & & & \alpha & 1 & \alpha & \\ & & & & & & \alpha & 1 & \alpha \\ \alpha & & & & & & & & \alpha & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.7})$$





