



HAL
open science

Outils de conception et d'analyse pour les assemblages de structures complexes.

Laurent Champaney

► **To cite this version:**

Laurent Champaney. Outils de conception et d'analyse pour les assemblages de structures complexes.. Mécanique [physics.med-ph]. Université de Versailles-Saint Quentin en Yvelines, 2004. tel-00012185

HAL Id: tel-00012185

<https://theses.hal.science/tel-00012185>

Submitted on 28 Apr 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

MÉMOIRE D'HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES
de l'Université de Versailles St Quentin (UVSQ)

Spécialité :
MÉCANIQUE - GÉNIE MÉCANIQUE - GÉNIE CIVIL

**Outils de conception et d'analyse
pour les assemblages de structures complexes**

Laurent CHAMPANEY

Présenté à l'Université de Versailles St Quentin en Yvelines
le 13 décembre 2004

devant le jury composé de :

Pierre LADEVÈZE	(Président)
Serge CESCOTTO	(Rapporteur)
Frédéric LEBON	(Rapporteur)
Dominique LEGUILLON	(Rapporteur)
Christian CORNUAULT	(Examinateur)
Raymonde DROUOT	(Examinateur)

Laboratoire d'Etudes Mécaniques des Assemblages
(UVSQ / CNRS FRE2481)
45 av des Etats Unis - 78035 Versailles Cedex

Résumé

Les travaux présentés dans ce document portent sur des méthodes de dimensionnement et d'analyse mécanique du comportement d'assemblages de structures complexes incluant des conditions de liaison de type contact, frottement, joints, collages, ... Les approches proposées sont basées sur une décomposition de l'assemblage en sous-structures modélisant les composants et interfaces modélisant les liaisons. Une méthode puissante de résolution est proposée et comparée à des approches plus classiques dans un cadre éléments finis. Des modèles d'interface décrivant le comportement de liaisons collées jusqu'à la rupture sont étudiés. Enfin, deux approches sont proposées pour la prise en compte des incertitudes sur les paramètres de liaison (jeux, coefficients de frottement, serrages, raideurs, ...). La première se base sur une technique de type multi-résolution pour construire des surfaces de réponses de l'assemblage. La deuxième est basée sur une technique de type éléments finis stochastiques et permet une description plus complète des incertitudes. Des exemples concernant des applications industrielles permettent d'apprécier l'apport des outils proposés.

Remerciements

Je tiens à remercier ici Pierre Ladevèze pour avoir accepté de suivre une partie de ces travaux et pour avoir été président de ce jury. J'exprime toute ma reconnaissance à Serge Cescotto, Frédéric Lebon et Dominique Leguillon pour avoir accepté aussi rapidement de rapporter sur ce travail. Merci à Christian Cornuault de sa participation au jury.

Je tiens tout particulièrement à exprimer ma gratitude envers Raymonde Drouot pour l'ensemble de ce qu'elle a fait pour moi ces dernières années à Versailles.

Je pense enfin à l'ensemble des membres et LMT Cachan, du LEMA et du département de Mécanique de Versailles pour leur chaleur et leur générosité avec une attention toute particulière pour mes quatre collègues Claude Blanzé, Pierre Alain Boucard, Hervé Lemoussu et Nunzianta Valoroso.

Table des matières

Résumé	iii
Remerciements	v
Introduction	1
1 Calculs d'assemblages de structures	5
1.1 Introduction	6
1.2 Approche LATIN pour les problèmes statiques	7
1.3 Première extension	8
1.3.1 Approche employée	8
1.3.2 Apports - limitations	8
1.4 Approche générale pour les problèmes quasi-statiques	9
1.4.1 Représentation de l'assemblage	9
1.4.2 Problème sur les sous-structures	9
1.4.3 Problème sur les interfaces	10
1.4.4 Algorithme LATIN	10
1.4.5 Interface de contact et de frottement	11
1.4.6 Discrétisation	12
1.4.7 Résolution de l'étape globale	13
1.5 Intérêts	13
1.6 Extension à la dynamique	14
1.7 Développements numériques	14
1.7.1 Logiciel COFAST	14
1.7.2 Calcul parallèle	15
1.8 Extensions	15
2 Modèles d'interfaces	17
2.1 Modèles d'interface plus évolués	18
2.2 Intégration du comportement	18
2.2.1 Approche incrémentale classique	19
2.2.2 Approche LATIN	19
2.2.3 Comportement de type plastique	20
2.2.4 Comportement adoucissant	20
2.3 Modèles d'interface pour les assemblages collés	21
2.3.1 Besoins - Idées	21
2.3.2 Modèle mécanique	22

2.3.3	Pilotage de l'algorithme	23
2.3.4	Identification	23
2.4	Extensions	26
3	Construction efficace de surfaces de réponse	27
3.1	Introduction	28
3.2	Analyses paramétriques	28
3.2.1	Objectifs	28
3.2.2	Représentation des incertitudes	28
3.2.3	Méthodes de résolution	29
3.2.4	Cadre de l'étude	31
3.3	Utilisation de la LATIN pour l'analyse paramétrique	31
3.3.1	Autres travaux	31
3.3.2	Approche proposée	31
3.3.3	Un exemple d'assemblage tridimensionnel	32
4	Prise en compte de comportements d'interfaces aléatoires	39
4.1	Introduction	40
4.2	Utilisation de la LATIN pour les réponses aléatoires	40
4.2.1	Cadre de l'étude	40
4.2.2	Approche proposée	40
4.2.3	Exemple à grand nombre d'inconnues	41
4.2.4	Apports - Limitations	42
4.3	Extension au cas du contact	42
4.4	Comparaison	44
4.4.1	Approche multi-résolution	45
4.4.2	Approche par expansion polynomiale	47
4.4.3	Comparaison des deux approches	47
	Conclusions	49
	Bibliographie	51
A	Preprint : Nouvelle approche pour le calcul des assemblages	55
B	Preprint : Modèle d'interface pour les interfaces collées	73
C	Preprint : Multi-résolution par l'approche LATIN	93
D	Preprint : Comportement d'interface aléatoire	119

Introduction

La simulation du comportement mécanique d'assemblages de structures complexes est de plus en plus courante aujourd'hui dans les bureaux d'études. Les récents progrès réalisés dans le domaine du calcul par éléments finis associés aux puissances toujours croissantes des calculateurs modernes permettent de conduire des calculs incluant de plus en plus de détails relatifs à la géométrie et au comportement mécanique d'une pièce seule. Les lois de comportement sont maintenant très évoluées et bien adaptées à la complexité du matériau (métallique, plastique ou composite) considéré. Les procédures d'identification des paramètres matériaux sont de plus en plus fiables. De même, le contrôle de la qualité des calculs par éléments finis est un domaine qui a fortement progressé ces dernières années. Même si de nombreux travaux sont encore nécessaires pour obtenir un contrôle des calculs dynamiques et/ou non linéaires [Ladevèze et Pelle 01], la plupart des codes de calculs actuels proposent des estimations d'erreurs de différentes natures qui augmentent la fiabilité des résultats numériques obtenus.

Néanmoins, on constate que les principales difficultés et erreurs rencontrées sont dues à la modélisation des conditions aux limites. Dans le calcul d'une pièce seule, la prise en compte de ses interactions avec le reste de l'assemblage est trop souvent réalisée de manière grossière. Pour palier ces difficultés, la plupart des industriels se tourne vers la modélisation complète de tous les composants d'un assemblage et de leurs interactions. Le problème de modélisation des conditions aux limites est alors reporté vers celui de la modélisation du comportement mécanique des liaisons entre pièces.

La modélisation par éléments finis d'assemblages de structures complexes demande de surmonter un nombre important de difficultés :

- les géométries considérées dans le calcul par éléments finis sont bien souvent directement issues de la CAO de l'assemblage et prennent généralement en compte un grand nombre de détails géométriques. Il en résulte que les modèles éléments finis manipulés sont de très grandes tailles et que leur traitement nécessite des puissances de calcul très importantes.
- les techniques d'assemblages les plus classiques (vissage, boulonnage, rivetage, ...) ou les plus modernes (soudage par point, collage, ...) nécessitent de prendre en compte des conditions unilatérales dans le comportement des liaisons en pièces. Ces conditions introduisent des non linéarités très fortes (de type contact ou de type frottement sec) dans le comportement mécanique des assemblages. Le traitement de ce type de non linéarités reste très délicat et nécessite l'utilisation de méthodes de résolution adaptées. Les surcoûts en temps de calcul dus à l'introduction de conditions unilatérales dans le comportement d'un assemblage tridimensionnel complexe sont faramineux.
- lorsqu'on considère des techniques d'assemblages évoluées (soudage par point, collage, ...), la modélisation réaliste du comportement de la liaison impose la prise en compte de non linéarités plus douces que les conditions unilatérales mais qui peuvent être très diverses : plasticité, viscoplasticité, endommagement, ... Ces non linéarités sont localisées dans la liaison mais ont une influence très forte sur le comportement global de l'assemblage.

- la modélisation du comportement des liaisons nécessite l'introduction de paramètres structuraux de natures très diverses : raideurs, coefficients de frottement ou d'adhérence, énergies de rupture, paramètres d'écrouissage, ... L'identification de ces paramètres est très difficile car elle ne peut se faire que par des essais sur structures (sur des assemblages en l'occurrence). Cette identification ne peut bien souvent se faire que par l'intermédiaire d'un dialogue entre essais délicats et calculs coûteux. Les procédures d'identification sont entâchées de nombreuses erreurs de mesure ou de calcul. Les paramètres structuraux sont alors obtenus avec une marge d'incertitude très forte et difficilement quantifiable.
- la prise en compte des incertitudes sur le comportement des liaisons dans des calculs par éléments finis sur des assemblage est bien souvent indispensable. On cherche alors à obtenir des réponses moyennes de l'assemblage ou mieux des surfaces de réponse lorsque les paramètres varient dans une plage importante. L'obtention de ces surfaces de réponse nécessite un nombre de calculs coûteux très important.

Les travaux présentés dans ce mémoire tentent d'apporter des réponses aux différents problèmes recensés ci-dessus en terme de modélisation et de calcul. Tous ces travaux ont pour point commun l'utilisation de modèles d'interface pour la modélisation des liaisons mécaniques entre les composants de l'assemblage. Ce parti pris en terme de modélisation est issu de constatations sur la faible épaisseur de la liaison par rapport au reste des autres composants : épaisseur nulle dans le cas du contact ou bien épaisseur très faible d'un troisième corps (joint, colle, ...) pour des liaisons plus complexes.

Dans la première partie, une approche généraliste pour la résolution de problèmes tridimensionnels complexes d'assemblages par contact et frottement est proposée. Il s'agit d'une extension de mes travaux de thèse [[Champaney 96](#)] aux cas de chargements thermomécaniques quasi-statiques. Dans ce travail, on utilise une décomposition généraliste de l'assemblage en sous-structures (les composants de l'assemblage) et en interfaces. Les interfaces sont les éléments clés de l'approche. Elles modélisent les liaisons mécaniques entre les composants de l'assemblage. Ce sont des entités mécaniques à part entière possédant leurs propres inconnues et leur propre comportement. Ce comportement contient toutes les non linéarités du problème. On s'intéresse principalement ici à des non linéarités de type contact et frottement, mais l'approche est suffisamment généraliste pour envisager tout type de comportement d'interface (plasticité, endommagement, ...). L'algorithme de résolution utilisé est du type LATIN méthode [[Ladevèze 99](#)]. Le traitement des problèmes d'évolution temporelle avec la LATIN méthode est présenté.

La deuxième partie traite du développement de modèles d'interface pour la modélisation de divers comportements de liaison. On s'intéresse en particulier au développement de modèles d'interface viscoplastique endommageable pour la prévision du comportement jusqu'à la ruine de liaisons par collage. Ces travaux ont été pour la plupart réalisés au Laboratoire d'Etudes Mécaniques des Assemblages de l'Université de Versailles St Quentin.

La troisième partie concerne la construction de surfaces de réponse d'un assemblage lorsque les paramètres des liaisons varient. Ce travail a été réalisé en collaboration avec P.A. Boucard et concerne surtout le cas des liaisons par contact pour lesquelles le coeffi-

cient de frottement est inconnu. L'approche généraliste développée dans la première partie a été étendue pour construire de manière rapide et efficace un grand nombre de solutions de problèmes voisins qui sont ceux obtenus lorsque les paramètres des liaisons varient. L'efficacité est due à l'indépendance des opérateurs relatifs aux sous-structures par rapport aux paramètres des liaisons ainsi qu'à la réutilisation de la solution d'un premier problème pour initialiser les suivants.

Dans la dernière partie, nous proposons une approche originale pour la détermination de la réponse d'un assemblage de structure élastique lorsque les paramètres des liaisons sont indéterminés. Ce travail réalisé en collaboration avec C. Blanzé, concerne l'utilisation de la LATIN méthode pour la résolution de problèmes avec liaisons aléatoires. La technique de représentation de la solution est une méthode spectrale empruntée aux techniques d'éléments finis stochastiques [Ghanem et Spanos 91]. Nous nous contentons ici d'étudier le cas d'assemblage de structures élastiques contenant des liaisons collées présentant des incertitudes fortes sur les raideurs élastiques. Nous présentons les avantages de la LATIN méthode en terme de réduction de la taille et des coûts de calcul pour l'obtention de la réponse aléatoire d'un tel assemblage lorsque le nombre de liaisons aléatoires peut être important.

Chapitre 1

Calculs d'assemblages de structures

Sommaire

1.1 Introduction	6
1.2 Approche LATIN pour les problèmes statiques	7
1.3 Première extension	8
1.3.1 Approche employée	8
1.3.2 Apports - limitations	8
1.4 Approche générale pour les problèmes quasi-statiques	9
1.4.1 Représentation de l'assemblage	9
1.4.2 Problème sur les sous-structures	9
1.4.3 Problème sur les interfaces	10
1.4.4 Algorithme LATIN	10
1.4.5 Interface de contact et de frottement	11
1.4.6 Discrétisation	12
1.4.7 Résolution de l'étape globale	13
1.5 Intérêts	13
1.6 Extension à la dynamique	14
1.7 Développements numériques	14
1.7.1 Logiciel COFAST	14
1.7.2 Calcul parallèle	15
1.8 Extensions	15

1.1 Introduction

La simulation numérique d'assemblages de structures est de plus en plus courante en bureau d'études. Il est devenu évident que le dimensionnement d'un composant d'un assemblage de pièces mécaniques peut rarement se faire correctement par une étude de la pièce seule. En effet, la modélisation de conditions aux limites représentatives de l'environnement de la pièce est très délicate surtout lorsque les pièces avoisinantes peuvent se déformer. Une modélisation complète de l'assemblage et des liaisons entre les composants est donc nécessaire.

La modélisation d'assemblages complexes – c'est-à-dire incluant un nombre important de pièces et de liaisons – pose un grand nombre de difficultés. Ce chapitre s'intéresse surtout aux aspects liés à la résolution numérique dans le cadre d'une modélisation par éléments finis. Les problèmes liés à la représentation géométrique et aux maillages de surfaces coïncidentes ne sont pas abordés dans ce document. Le chapitre 2 pose partiellement le problème de la modélisation des liaisons et propose quelques modèles pour des situations complexes. Les exemples de ce premier chapitre concernent surtout des situations d'assemblages par contact frottant même si l'approche proposée pour la résolution est générale et permet d'envisager tout type de liaison.

La résolution numérique de problèmes d'assemblage est un sujet délicat qui pose un certain nombre de difficultés :

- lorsque le nombre de zones de contact est important, la mise en données du problème (définition des zones de contact potentielles, ...) peut être fastidieuse.
- les conditions de type contact unilatéral et frottement introduisent de très fortes non-linéarités locales dans le problème. Ces non-linéarités mettent en échec beaucoup de codes de calcul industriels, en particulier lorsque le nombre de conditions est très important.
- le frottement est un phénomène d'évolution. Cela implique le traitement de problèmes dépendant du temps. La solution peut changer fortement d'un pas à un autre ce qui impose l'utilisation de techniques de calcul robustes.
- l'existence et l'unicité de solutions pour des situations simples de frottement de Coulomb restent un problème ouvert. Les recherches récentes dans le domaine des mathématiques appliquées tendent même à montrer l'infinité de solutions possibles pour les problèmes d'élasticité avec frottement de Coulomb [Hild 03, Ballard 05]. La mise au point de techniques de résolution pour les problèmes de frottement peut donc sembler être sans objet. Pourtant l'obtention de solutions multiples conduisant à des choix de dimensionnement différents n'est pas courante pour des problèmes industriels. Cela n'a jamais été rencontré sur les problèmes présentés dans ce mémoire.
- certains des éléments de l'assemblage peuvent être en équilibre uniquement sous l'action de force de contact et de frottement. On les appelle en général structures « flottantes ». Cela peut poser de graves problèmes d'équilibre et de stabilité des solutions obtenues.

Ce premier chapitre propose une technique de résolution développée dans le but de répondre aux problèmes cités ci-dessus. Il s'agit d'une extension de la méthode LATIN [Ladevèze 99] aux problèmes d'assemblages de structures. Cette technique de résolution a été développée spécifiquement pour les problèmes d'assemblages de structures élastiques sous de petites perturbations. On verra dans les chapitres suivants qu'elle présente d'autres intérêts en particulier pour l'étude d'influence des paramètres de liaison sur la solution.

Les paragraphes suivants proposent un rappel de cette technique dans le cas de chargements statiques et son extension aux problèmes quasi-statiques. Ils présentent les possibilités de cette approche et son intérêt dans le domaine du calcul d'assemblage.

1.2 Approche LATIN pour les problèmes statiques

Dans mes travaux de thèse, je m'étais intéressé à l'étude d'assemblages de structures tridimensionnelles en statique [Champany 96]. La particularité des assemblages étudiés était le grand nombre de zones de contact pris en compte.

Un assemblage est représenté par un ensemble de « sous-structures » (qui représentent les composants de l'assemblage) qui communiquent entre elles par l'intermédiaire d'« interfaces » (qui représentent les liaisons entre les éléments) (fig. 1.1). Les interfaces sous des entités mécaniques à part entière auxquelles sont associés des inconnues et un comportement (qui dépend du type de liaison à représenter). Un grand nombre de comportements différents peuvent être considérés mais nous nous intéressons ici surtout aux liaisons par contact frottant. De manière générale, les conditions aux limites sont aussi prises en compte par l'intermédiaire d'interfaces entre les sous-structures et l'extérieur. Deux sous-structures en contact sont appelées Ω_E et $\Omega_{E'}$ et l'interface qui les relie $\Gamma^{EE'}$.

Les variables associées aux interfaces sont des champs d'effort \underline{F}^E et $\underline{F}^{E'}$ (efforts de l'in-

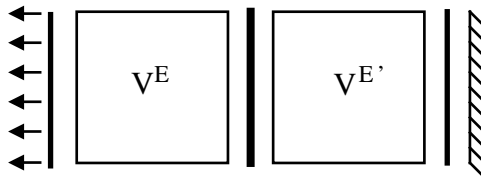


FIG. 1.1 – Décomposition de l'assemblage

terface sur les deux sous-structures) et leurs variables cinématiques duales. Dans les applications précédentes de cette approche pour des problèmes statiques, les variables duales étaient des déplacements (\underline{W}^E et $\underline{W}^{E'}$). Pour les applications quasi-statiques paramétrées par le temps envisagées ici, les variables cinématiques duales sont naturellement les vitesses $\underline{\dot{W}}^E$ et $\underline{\dot{W}}^{E'}$ (fig. 1.4).

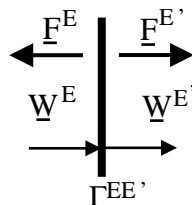


FIG. 1.2 – Variables d'interface

La plupart des assemblages étudiés était des assemblages par contact et frottement. L'hypothèse de chargement statique était très limitative pour ce type d'assemblage. En effet, dans un assemblage vissé ou boulonné, on procède généralement au serrage des vis

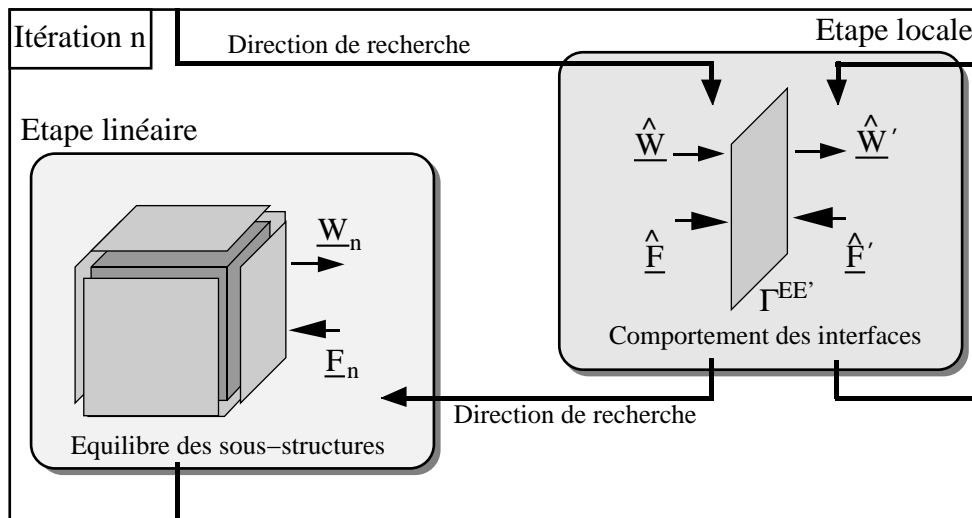


FIG. 1.3 – Algorithme LATIN

dans un premier temps, puis l'assemblage est sollicité en service dans un second temps. Dans les calculs statiques réalisés, les deux phases de précharge et de chargement étaient modélisées simultanément. Du point de vue du dimensionnement, cette façon de faire est « conservative ». En effet, la charge maximale admissible avant un glissement relatif des pièces calculée par cette approche est inférieure à celle qui serait obtenue par un calcul en deux étapes.

Pour accéder à une modélisation plus fine du comportement d'un assemblage et pour passer à des chargements complexes, il était nécessaire de pouvoir prendre en compte des étapes (« step ») successives dans le calcul.

1.3 Première extension

1.3.1 Approche employée

La première approche envisagée est d'adopter une démarche incrémentale et d'utiliser la méthode LATIN pour résoudre le problème non linéaire à chaque incrément. C'est la démarche adoptée dans le preprint proposé à l'annexe A. Cette approche permet d'accéder à des séquences de chargements plus réalistes tout en gardant l'efficacité de la méthode LATIN. On ne réalise qu'un seul incrément à chaque « step » de calcul. Cela permet de réduire fortement les coûts de calcul, la convergence étant assurée par la méthode LATIN même sur des grands incréments.

1.3.2 Apports - limitations

Cette première approche permet de prendre en compte une histoire du chargement sous forme de successions de chargements statiques. Elle permet d'obtenir une solution de manière rapide comme le montrent les exemples du preprint de l'annexe A. Il est bien évident qu'elle n'est pas suffisante lorsque la solution dépend du trajet de chargement sur un « step »

de calcul. Il est alors nécessaire de sous-découper le « step » comme on le ferait dans une approche incrémentale classique. La méthode LATIN permet le traitement de problèmes non linéaires d'évolution en calculant à chaque itération une solution approchée sur tout l'intervalle de temps. C'est donc cette approche qui est développée dans la suite.

1.4 Approche générale pour les problèmes quasi-statiques

1.4.1 Représentation de l'assemblage

Les variables associées aux interfaces sont des champs d'effort \underline{F}^E et $\underline{F}^{E'}$ (efforts de l'interface sur les deux sous-structures) et leurs variables cinématiques duales. Dans les applications précédentes de cette approche pour des problèmes statiques, les variables duales étaient des déplacements (\underline{W}^E et $\underline{W}^{E'}$). Pour les applications quasi-statiques paramétrées par le temps envisagées ici, les variables cinématiques duales sont naturellement les vitesses $\dot{\underline{W}}^E$ et $\dot{\underline{W}}^{E'}$ (fig. 1.4).

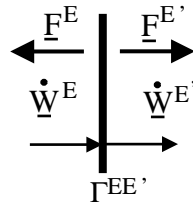


FIG. 1.4 – Variables d'interface

1.4.2 Problème sur les sous-structures

Le problème à résoudre sur une sous-structure est : trouver l'histoire du champ de déplacement $\underline{U}^E(M, t)$ et du champ de contrainte $\sigma^E(M, t)$ de la sous-structure Ω_E tels que :

- Conditions de liaison : $\forall M \in \partial\Omega_E$ et $\forall t \in [0, T]$,

$$\underline{U}^E(M, t) = \underline{W}^E(M, t) \quad (1.1)$$

- Équilibre : $\forall \dot{\underline{U}}^*$ et $\forall t \in [0, T]$,

$$\int_{\Omega_E} Tr(\sigma^E(M, t) \epsilon(\dot{\underline{U}}^*)) d\Omega_E - \int_{\Omega_E} \underline{f}_d \dot{\underline{U}}^* d\Omega - \int_{\partial\Omega_E} \underline{F}^E(M, t) \dot{\underline{U}}^* dS = 0 \quad (1.2)$$

- Comportement : $\forall M \in \Omega_E$ et $\forall t \in [0, T]$,

$$\sigma^E(M, t) = \mathbf{K} \epsilon(\underline{U}^E(M, t)) \quad (1.3)$$

où \mathbf{K} est l'opérateur de Hooke.

1.4.3 Problème sur les interfaces

Le problème à résoudre sur une interface est :
trouver les champs d'efforts ($\underline{F}^E(M, t)$ et $\underline{F}^{E'}(M, t)$) et de vitesse ($\underline{\dot{W}}^E(M, t)$ et $\underline{\dot{W}}^{E'}(M, t)$) de part et d'autre de l'interface tels que : $\forall M \in \Gamma^{EE'}$ et $\forall t \in [0, T]$,

– Équilibre :

$$\underline{F}^E(M, t) + \underline{F}^{E'}(M, t) = 0 \quad (1.4)$$

– Comportement :

$$\underline{F}^E(M, t) = \mathcal{R}(\underline{\dot{W}}^{EE'}(M, \tau), \tau \in [0, t]) \quad (1.5)$$

où le comportement est écrit sous forme d'une relation d'évolution éventuellement non linéaire entre les efforts et $\underline{\dot{W}}^{EE'}$ qui est le saut de déplacement à l'interface défini de la manière suivante :

$$\underline{\dot{W}}^{EE'} = \underline{\dot{W}}^{E'} - \underline{\dot{W}}^E \quad (1.6)$$

Par exemple, une liaison complète entre deux sous-structures est caractérisée par le comportement suivant :

$$\underline{\dot{W}}^{EE'}(M, t) = 0 \quad (1.7)$$

1.4.4 Algorithme LATIN

Pour la résolution du problème, on utilise un algorithme de type LATIN [Ladevèze 99]. La solution recherchée est un ensemble de processus-champs définis sur chacune des sous-structure et des interfaces connectées :

$$s = \sum_E s^E \quad ; \quad s^E = \left\{ \underline{U}^E(M, t), \sigma^E(M, t), \underline{\dot{W}}^E(M, t), \underline{F}^E(M, t) \right\} \quad t \in [0, T]$$

Cette approche est basée sur une séparation des difficultés de manière à éviter la simultanéité du caractère non-linéaire et du caractère global du problème. Les équations à satisfaire (eqn 1.1 à 1.5) sont séparées en deux groupes :

- l'ensemble \mathcal{A}_d des solutions s^E qui vérifient les équations linéaires (et éventuellement globales) relatives aux sous-structures (eqn 1.1 à 1.3)
- L'ensemble Γ des solutions s^E qui vérifient les équations locales (et éventuellement non-linéaires) relatives aux interfaces (eqn 1.4 et 1.5)

La recherche de la solution du problème (qui est l'intersection des deux ensembles) se fait de manière itérative en construisant des solutions s qui vérifient alternativement les deux groupes d'équations. Ainsi, une itération est composée de deux étapes :

Étape locale : $s_n \in \mathcal{A}_d$ connu, trouver \hat{s} tel que :

$$\hat{s} \in \Gamma \quad (\text{sous-structures}) \quad (1.8)$$

$$\hat{s} - s_n \in E^+ \quad (\text{direction de recherche}) \quad (1.9)$$

Étape globale : $\hat{s} \in \Gamma$ connu, trouver s_{n+1} tel que :

$$s_{n+1} \in \mathcal{A}_d \quad (\text{sous-structures}) \quad (1.10)$$

$$s_{n+1} - \hat{s} \in E^- \quad (\text{direction de recherche}) \quad (1.11)$$

Ici, le comportement des sous-structures étant linéaire, la solution interne (en déplacement $\underline{U}^E(M, t)$ et en contrainte $\sigma^E(M, t)$) d'une sous-structure peut être complètement définie à partir de la solution sur les bords ($\underline{\dot{W}}^E(M, t)$ et $\underline{F}^E(M, t)$). Dans la suite, on appelle solution l'ensemble des champs d'effort et de vitesse de part et d'autre des interfaces.

Les directions de recherche choisies sont celles pour lesquelles la convergence de l'algorithme est assurée [Ladevèze 99]. Elles sont conjuguées et dépendent du paramètre scalaire k_0 :

$$\hat{s} - s_n \in E^+ \quad \equiv \quad (\underline{\hat{F}}^E - \underline{F}_n^E) = k_0(\underline{\hat{W}}^E - \underline{\dot{W}}_n^E) \quad (1.12)$$

$$s_{n+1} - \hat{s} \in E^- \quad \equiv \quad (\underline{F}_{n+1}^E - \underline{\hat{F}}^E) = -k_0(\underline{\dot{W}}_{n+1}^E - \underline{\hat{W}}^E) \quad (1.13)$$

1.4.5 Interface de contact et de frottement

Problème de contact

On appelle \underline{N} la normale en tout point de l'interface et Π l'opérateur de projection dans le plan tangent.

Les conditions de contact s'écrivent :

- *Décollement* : si $\underline{N} \underline{\hat{W}}^{EE'} > 0$ alors $\underline{N} \underline{\hat{F}}^E = \underline{N} \underline{\hat{F}}^{E'} = 0$.
- *Contact* : si $\underline{N} \underline{\hat{W}}^{EE'} = 0$ alors $\underline{N} \underline{\hat{F}}^E + \underline{N} \underline{\hat{F}}^{E'} = 0$.

La vérification de ces conditions peut s'écrire :

- *Décollement* : $C_N > 0$.
- *Contact* : $C_N \leq 0$.

en définissant

$$C_N = \frac{1}{2} \underline{N} \underline{\hat{W}}^{EE'} - \frac{1}{2k_0} \underline{N} (\underline{\hat{F}}^{E'} - \underline{\hat{F}}^E) \quad (1.14)$$

Problème de frottement

Les conditions de frottement de Coulomb s'écrivent :

- *Adhérence* : si $\|\Pi \underline{\hat{F}}^E\| < \mu |\underline{N} \underline{\hat{F}}^E|$ alors $\Pi \underline{\hat{W}}^{EE'} = 0$.
- *Glissement* : si $\|\Pi \underline{\hat{F}}^E\| = \mu |\underline{N} \underline{\hat{F}}^E|$ alors $\exists \lambda > 0$ tel que $\Pi \underline{\hat{W}}^{EE'} = -\lambda \underline{\hat{F}}^E$.

La vérification de ces conditions peut s'écrire :

- *Adhérence* : $\|\underline{G}_T\| < \mu |\underline{N} \underline{\hat{F}}^E|$.
- *Glissement* : $\|\underline{G}_T\| \geq \mu |\underline{N} \underline{\hat{F}}^E|$.

en définissant

$$\underline{G}_T = \frac{k_0}{2} \Pi \underline{\hat{W}}^{EE'} - \frac{1}{2} \Pi (\underline{\hat{F}}^{E'} - \underline{\hat{F}}^E) \quad (1.15)$$

Résolution

La résolution se fait par projection de la solution de l'étape globale précédente sur les conditions de contact et de frottement en suivant les directions de recherche :

$$(\underline{\hat{F}}^E - \underline{F}_n^E) = k_0(\underline{\hat{W}}^E - \underline{\dot{W}}_n^E) \quad (1.16)$$

$$(\underline{\hat{F}}^{E'} - \underline{F}_n^{E'}) = k_0(\underline{\hat{W}}^{E'} - \underline{\dot{W}}_n^{E'}) \quad (1.17)$$

L'état (décollement ou contact, adhérence ou glissement) en chaque point de l'interface est indiqué de manière explicite. En effet, les indicateurs C_N et \underline{G}_T s'expriment en fonction de la solution connue de l'étape globale précédente.

L'indicateur de contact C_N ne peut être calculé directement par les directions de recherche car il est défini en déplacement et non en vitesse. Pour le calculer, on utilise une intégration implicite :

$$\widehat{W}_{(t+1)}^{EE'} = \widehat{W}_{(t)}^{EE'} + \Delta t \widehat{\dot{W}}_{(t+1)}^{EE'} \quad (1.18)$$

La condition initiale de cette intégration temporelle permet de prendre en compte un éventuel jeu initial.

L'indicateur est alors modifié sous la forme :

$$C_N = \frac{1}{2\Delta t} N \widehat{W}^{EE'} - \frac{1}{2k_0} N (\widehat{F}^{E'} - \widehat{F}^E) \quad (1.19)$$

de manière à obtenir, en utilisant l'intégration (eqn 1.18) puis les directions de recherche (eqn 1.16 et 1.17) :

$$\begin{aligned} C_{N(t+1)} &= \frac{1}{2\Delta t} N \widehat{W}_{(t+1)}^{EE'} - \frac{1}{2k_0} N (\widehat{F}_{(t+1)}^{E'} - \widehat{F}_{(t+1)}^E) \\ &= \frac{1}{2} N \widehat{\dot{W}}_{(t+1)}^{EE'} - \frac{1}{2k_0} N (\widehat{F}_{(t+1)}^{E'} - \widehat{F}_{(t+1)}^E) + \frac{1}{2\Delta t} N \widehat{W}_{(t)}^{EE'} \\ &= \frac{1}{2} N \dot{W}_{n(t+1)}^{EE'} - \frac{1}{2k_0} N (F_{n(t+1)}^{E'} - F_{n(t+1)}^E) + \frac{1}{2\Delta t} N \widehat{W}_{(t)}^{EE'} \end{aligned}$$

Ainsi, l'indicateur de contact est calculé de manière incrémentale à partir de la solution connue de l'étape globale. Par contre, l'indicateur de glissement \underline{G}_T défini par l'équation 1.15 est calculé sur la solution de l'étape globale précédente par l'intermédiaire des directions de recherche (eqn 1.16 et 1.17) :

$$\underline{G}_T = \frac{k_0}{2} \Pi \dot{W}_n^{EE'} - \frac{1}{2} \Pi (F_n^{E'} - F_n^E) \quad (1.20)$$

1.4.6 Discrétisation

On utilise une discrétisation "éléments finis" standard du déplacement sur les sous-structures :

$$U = N^t u \quad (1.21)$$

Sur les interfaces, on utilise une discrétisation compatible pour les vitesses :

$$\widehat{\dot{W}}^E = N^t \widehat{\dot{w}}^E \quad \text{et} \quad \dot{W}_n^E = N^t \dot{w}_n^E \quad (1.22)$$

Le choix des directions de recherche (eqn 1.12 et 1.13) nous conduit à prendre la même discrétisation pour les efforts interfaces que pour les vitesses :

$$\widehat{F}^E = N^t \widehat{f}^E \quad \text{et} \quad F_n^E = N^t f_n^E \quad (1.23)$$

A l'étape locale, les problèmes de contact et de frottement sont résolus directement sur les inconnues nodales. Ainsi, la représentation utilisée pour les efforts (eqn 1.23) joue un rôle de régularisation pour le problème de frottement de Coulomb.

1.4.7 Résolution de l'étape globale

A l'étape globale l'équation d'équilibre (eqn 1.2) dans laquelle sont prises en compte les conditions de liaison (eqn 1.1), de comportement (eqn 1.3) et la direction de recherche (eqn 1.13) s'écrit :

$$\int_{\Omega_E} Tr(\epsilon(\underline{U}_n^E) \epsilon(\dot{\underline{U}}^*)) d\Omega_E = \int_{\partial\Omega_E} (\widehat{\underline{F}}^E - k_0(\dot{\underline{U}}_n^E - \widehat{\underline{W}}^E)) \dot{\underline{U}}^* dS = 0 \quad (1.24)$$

$$\int_{\Omega_E} Tr(\epsilon(\underline{U}_n^E) \epsilon(\dot{\underline{U}}^*)) d\Omega_E + \int_{\partial\Omega_E} k_0 \dot{\underline{U}}_n^E \dot{\underline{U}}^* dS = \int_{\partial\Omega_E} (\widehat{\underline{F}}^E + k_0 \widehat{\underline{W}}^E) \dot{\underline{U}}^* dS = 0 \quad (1.25)$$

Après discrétisation l'équation d'équilibre 1.25 s'écrit :

$$k_0 \mathbf{h} \dot{u}(t) + \mathbf{K} u(t) = \mathbf{h}(\widehat{f}^E(t) + k_0 \widehat{w}^E(t)) \quad (1.26)$$

avec :

$$\mathbf{h} = \int_{\partial\Omega_E} N^t N ds \text{ et } \mathbf{K} = \int_{\Omega_E} \mathbf{B}^t \mathbf{K} \mathbf{B} d\Omega$$

\mathbf{K} est la matrice de rigidité classique de la sous-structure. \mathbf{h} est un terme bord relatif aux interfaces. Il est important de remarquer que ces deux opérateurs sont constants. Ils sont indépendants de l'itération et du comportement des interfaces. Le terme \mathbf{h} a un rôle régularisateur pour le problème.

Pour la résolution, on utilise un schéma d'intégration purement implicite :

$$u_{t+1}^E = u_t^E + \Delta t \dot{u}_{t+1}^E \quad (1.27)$$

ce qui donne pour l'équilibre :

$$(\mathbf{k} + \Delta t \mathbf{K}) \dot{u}_{t+1}^E = \mathbf{h}(\widehat{f}^E(t+1) + k_0 \widehat{w}^E(t+1)) - \mathbf{K} u_t^E \quad (1.28)$$

avec les conditions initiales $u_0^E = 0$. Puis les termes bords sont calculés à chaque instant :

$$\dot{w}_n^E = \dot{u}_t^E \text{ sur } \partial\Omega_E \quad (1.29)$$

$$f_n^E = \widehat{f}^E - k_0(\dot{w}_n^E - \widehat{w}^E) \quad (1.30)$$

Seuls les termes de vitesse et d'efforts sur le bord sont à sauvegarder pour les itérations suivantes.

Une schématisation d'une étape de l'algorithme est proposée sur la figure 1.5

1.5 Intérêts

Comme cela a été montré dans [Champaney 96], cette technique est du type Lagrangien augmenté et montre donc les intérêts et les avantages de cette méthode :

- la méthode est robuste : on peut voir en particulier que le problème à résoudre sur les sous-structures (eqn 1.28) est sain. La prise en compte de structures « flottantes » et de nombreuses sous-structures et interfaces de manière générale ne pose pas de problème.

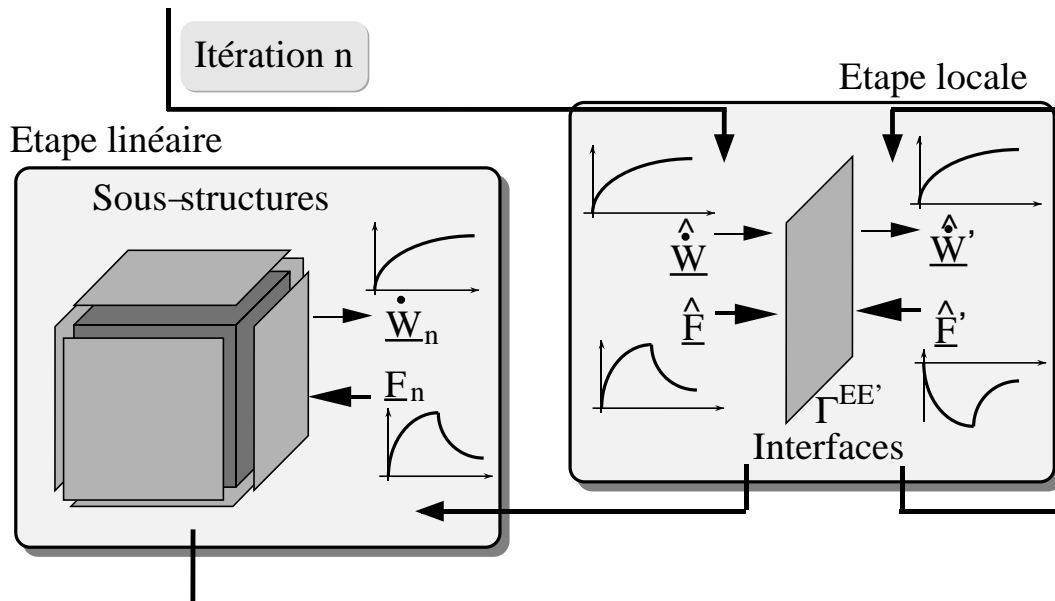


FIG. 1.5 – Algorithme LATIN

- la convergence est lente : le nombre d'itérations à effectuer peut être très important. Cependant, l'efficacité est garantie grâce au faible coût de chaque itération dû à l'utilisation d'opérateurs constants. La convergence peut être très fortement améliorée par l'adjonction d'une deuxième échelle comme cela est évoqué au paragraphe 1.8.

Une comparaison avec un code de calcul industriel est proposée au chapitre 3.

1.6 Extension à la dynamique

L'extension aux problèmes de dynamique se fait simplement en ajoutant les effets d'inertie dans la résolution de l'étape linéaire. C'est l'approche qui a été suivie dans les travaux de thèse de H. Lemoussu [Lemoussu 98, Ladevèze *et al.* 00].

1.7 Développements numériques

1.7.1 Logiciel COFAST

Le logiciel COFAST a été développé par moi-même au LMT Cachan pendant ma thèse de troisième cycle (dans laquelle il s'appelait encore CONTRAST). Il a depuis intégré les développements présentés dans ce mémoire [Champaney 00].

Les routines de calcul sont développées dans l'environnement du code de calcul CAST3M (développé par le CEA). Les routines de calcul sont écrites en *ESOPE* (langage de développement de CAST3M, fortran 77 et gestion dynamique de la mémoire). Les routines de pilotage sont écrites en *GIBIANE* (Langage utilisateur de CAST3M).

Le pré- et le post-traitement peuvent être réalisés dans l'interface graphique de CAST3M

à l'aide de menus. Ils peuvent aussi être réalisés à l'aide d'une interface graphique développée en perl/Tk.

Les sources de COFAST sont maintenues à l'aide du système CVS afin de permettre le développement coopératif du logiciel. Le tableau 1.1 présente les nombres de lignes et de commentaires des différentes routines de COFAST.

Routines	Nombre de lignes	Nombre de commentaires
Esope	26480	10383
Gibiane	11475	3634
Perl	6495	1121
Total	44450	15138

TAB. 1.1 – Nombres de lignes du logiciel COFAST

COFAST est actuellement disponible et utilisé sur les plateformes *Linux*, *HP-UX*, *SGI*, *DEC-Alpha* et *Windows*. Il peut être théoriquement utilisé sur toutes les plateformes pour lesquelles existent des versions de développement de CAST3M.

1.7.2 Calcul parallèle

La méthode LATIN est par nature parallèle. Le logiciel CONTRAST avait été parallélisé par D. Dureisseix et J.Y. Cognard [[Champany et al. 97](#), [Champany et Dureisseix 00](#)]. Les échanges de messages [[Champany et al. 96](#)] étaient réalisés à l'aide du système *PVM* (Parallel Virtual Machine).

Le logiciel COFAST a été parallélisé de manière simple avec échange de messages par fichiers permettant une utilisation sur machine parallèle ou sur cluster de machines. Chaque processeur gère une ou plusieurs sous-structures et les interfaces leur étant rattachées. Les calculs de l'étape locale sur les interfaces liant des sous-structures gérées par différents processeurs sont dupliqués.

L'échange de message par fichiers est peu efficace mais, dans l'approche LATIN, le volume d'informations à échanger est faible. Il s'agit uniquement des champs interfaces à chaque piquet de temps. Un exemple de calcul parallèle pour des problèmes avec incertitudes est proposé au chapitre 4.

1.8 Extensions

Cette approche de calcul d'assemblages par l'approche LATIN a été améliorée par l'adjonction d'une description multi-échelle de la structure. L'échelle grossière est associée à une cinématique simple des interfaces. La base de ces travaux proposés par P. Ladevèze et D. Dureisseix est donnée dans [[Ladevèze et Dureisseix 99](#)]. L'utilisation de cette approche pour le cas des structures hétérogènes est présentée dans [[Loiseau 01](#), [Ladevèze et al. 01](#)]. L'extension au cas du contact avec frottement est présentée dans [[Ladevèze et Nouy 03](#)]. L'extension aux cas de structures 3D n'a pas encore été réalisée.

Cette technique de calcul multi-échelle est utilisée dans les travaux de la thèse de P.A. Guidault que je co-encadre avec O. Allix [[Guidault 02](#), [Guidault et al. 04](#)].

Chapitre 2

Modèles d'interfaces

Sommaire

2.1 Modèles d'interface plus évolués	18
2.2 Intégration du comportement	18
2.2.1 Approche incrémentale classique	19
2.2.2 Approche LATIN	19
2.2.3 Comportement de type plastique	20
2.2.4 Comportement adoucissant	20
2.3 Modèles d'interface pour les assemblages collés	21
2.3.1 Besoins - Idées	21
2.3.2 Modèle mécanique	22
2.3.3 Pilotage de l'algorithme	23
2.3.4 Identification	23
2.4 Extensions	26

2.1 Modèles d'interface plus évolués

Dans la partie précédente, les comportements d'interface étudiés sont du type contact ou frottement. Le terme « interface » est employé de façon générique pour ces milieux bi-dimensionnels auxquels sont associées des variables cinématiques et statiques reliées par une relation de comportement.

Dans cette partie, on s'intéresse à des comportements plus complexes où on cherche à représenter par une interface le comportement d'une « interphase » matérielle de faible épaisseur comme un film de colle ou une couche de matrice entre deux plis d'un matériau composite stratifié. Le comportement de l'interface permettra de modéliser la dégradation de cette « interphase ».

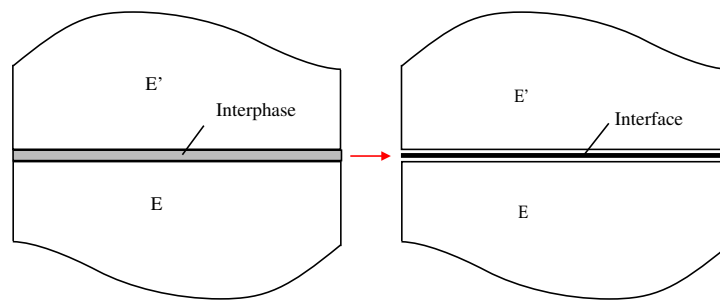


FIG. 2.1 – « Interphase » modélisée par une interface

A partir de comportements de type contact, des premiers modèles simples ont permis la représentation de tels phénomènes par une interface pouvant transiter brutalement d'un comportement de type parfait ou élastique (interface saine) vers un comportement de type contact frottant (interface totalement dégradée). On retrouvera ces modèles dans les travaux de L. Guitard [Guitard 00, Ladevèze *et al.* 00] ou de S. Letombe [Ladevèze *et Letombe* 00] qui ont utilisé le code COFAST au LMT Cachan pour leurs simulations.

2.2 Intégration du comportement

On note δ la discontinuité de déplacement à chaque instant :

$$\underline{\delta}_{(t)} = \underline{W}^{E'}(t) - \underline{W}^E(t) \quad (2.1)$$

qui est la variable cinématique qui exprime la déformation de l'interface.

Les efforts sont en équilibre :

$$\underline{F}_{(t)} = \underline{F}_{(t)}^E = -\underline{F}_{(t)}^{E'} \quad (2.2)$$

où, comme dans la partie précédente, \underline{F}^E et $\underline{F}^{E'}$ sont les efforts de l'interface sur les deux structures.

La relation de comportement s'écrit de manière générale :

$$\underline{F}_{(t)} = \mathcal{R}(\underline{\delta}(\tau), \tau \leq t) \quad (2.3)$$

où \mathcal{R} est non linéaire.

L'intégration du comportement va consister à calculer des variables statiques (les efforts sur l'interface ici) et des variables cinématiques (les sauts de déplacements) reliées par la relation de comportement à un instant $(t + 1)$ connaissant ces variables à l'instant (t) .

2.2.1 Approche incrémentale classique

Dans une approche « éléments finis » classique, l'interface est représentée par un « élément d'interface » sur lequel on fait une approximation (linéaire ou quadratique) du saut de déplacement. L'élément n'a pas d'épaisseur et dispose de couples de noeuds raccordés avec les éléments massifs voisins. L'intégration sur élément est réalisée à l'aide de points d'intégration répartis le long de l'élément. On trouvera dans [Schellekens et De Borst 93] des informations sur le type d'intégration numérique à réaliser sur de tels éléments.

Le problème non linéaire est résolu à l'aide d'algorithmes de type Newton (ou l'une de ses variantes). Cet algorithme impose une avancée pas par pas pendant le temps de chargement. A chaque pas, l'incrément de déformation $\Delta\delta$ est imposé par l'algorithme et le saut déplacement à l'instant à calculer est donc imposé :

$$\delta_{(t+1)} = \delta_{(t)} + \Delta\delta \quad (2.4)$$

L'intégration locale du comportement consiste donc à calculer les efforts à l'instant $(t + 1)$ en chaque point d'intégration des éléments finis d'interface.

2.2.2 Approche LATIN

Dans l'approche LATIN telle qu'elle est présentée au chapitre précédent, cette intégration est réalisée à l'étape locale. La donnée est la direction de recherche qui relie les efforts et les sauts de déplacements de part et d'autre de l'interface :

$$(\widehat{\underline{F}}^E - \underline{F}_n^E) = k_0(\widehat{\underline{W}}^E - \underline{W}_n^E) \quad (2.5)$$

$$(\widehat{\underline{F}}^{E'} - \underline{F}_n^{E'}) = k_0(\widehat{\underline{W}}^{E'} - \underline{W}_n^{E'}) \quad (2.6)$$

Ces deux équations reviennent à un instant t à :

$$\widehat{\underline{W}}_{(t)}^{EE'} = -\frac{2}{k_0}\widehat{\underline{F}}_{(t)}^E + \underline{A}_{n(t)} \quad \text{avec} \quad \underline{A}_n = (\underline{W}_n^{E'} - \underline{W}_n^E) - \frac{1}{k_0}(\underline{F}_n^{E'} - \underline{F}_n^E) \quad (2.7)$$

car l'équation d'équilibre impose :

$$\widehat{\underline{F}}^E + \widehat{\underline{F}}^{E'} = 0 \quad (2.8)$$

L'intégration temporelle s'écrit :

$$\widehat{\underline{W}}_{(t+1)}^{EE'} = \widehat{\underline{W}}_{(t)}^{EE'} + \Delta t \widehat{\underline{W}}_{(t+1)}^{EE'} \quad (2.9)$$

soit

$$\widehat{\underline{W}}_{(t+1)}^{EE'} = \widehat{\underline{W}}_{(t)}^{EE'} + \Delta t \left(-\frac{2}{k_0} \widehat{\underline{F}}_{(t+1)}^E + \underline{A}_{n(t+1)} \right) \quad (2.10)$$

qui avec les notations précédentes s'écrit :

$$\delta_{(t+1)} = \delta_{(t)} - \frac{2\Delta t}{k_0} \underline{F}_{(t+1)} + \frac{2\Delta t}{k_0} \underline{A}_{n(t+1)} \quad (2.11)$$

soit pour l'incrément de saut :

$$\Delta\delta = -\frac{2\Delta t}{k_0} \underline{F}_{(t+1)} + \frac{2\Delta t}{k_0} \underline{A}_{n(t+1)} \quad (2.12)$$

où la quantité $\underline{A}_{n(t+1)}$ est une donnée de l'étape globale précédente.

2.2.3 Comportement de type plastique

La figure 2.2 présente les deux techniques d'intégration locale pour un comportement unidimensionnel non adoucissant de type plasticité par exemple. Dans les deux cas, un premier effort (F_{trial}) est calculé en supposant une linéarité du comportement puis une correction est calculée.

Pour une approche classique, l'incrément de déformation $\Delta\delta$ est une donnée de l'intégration locale alors que dans l'approche LATIN, la direction de recherche (ddr) impose une relation linéaire entre $\Delta\delta$ et l'effort à l'interface (équation 2.12).

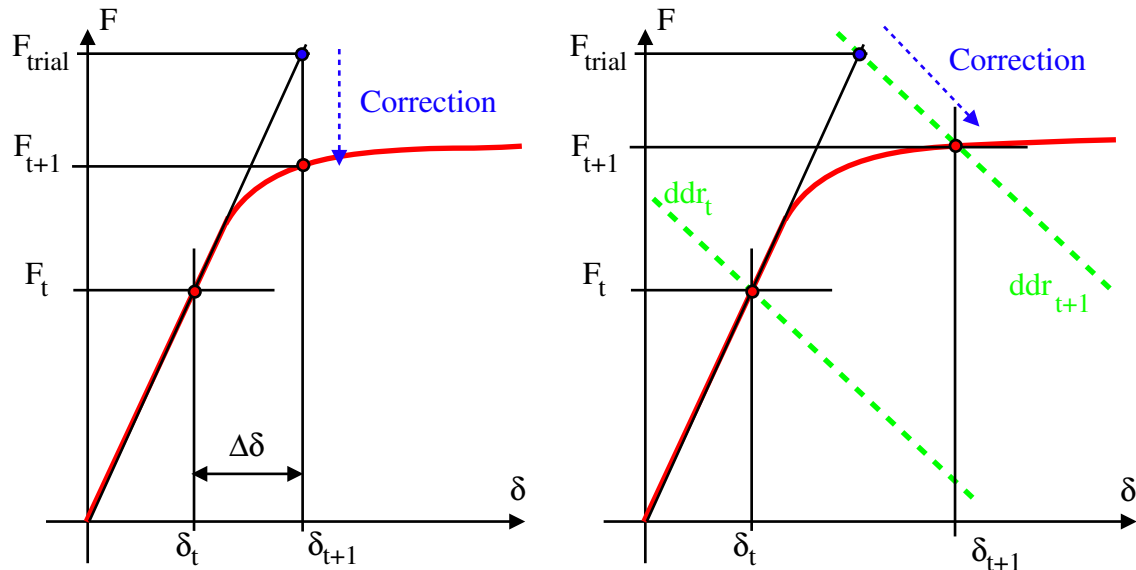


FIG. 2.2 – Intégration locale du comportement : approche incrémentale classique (gauche) et méthode LATIN (droite)

Une interface présentant un comportement de type plastique a été développée dans le logiciel COFAST et est présentée dans les travaux de H. Lemoussu [Lemoussu 98]. Elle était utilisée pour simuler la plastification de tiges de boulons précontraints à la traversée d'une onde de choc.

2.2.4 Comportement adoucissant

Lorsque le comportement de l'interface est adoucissant, la technique d'intégration locale ne change pas dans une approche incrémentale (figure 2.3). Par contre, dans la méthode LATIN, la direction de recherche (équation 2.12) peut présenter plusieurs points d'intersection avec la courbe de comportement. Il convient donc d'utiliser un algorithme de calcul de la correction capable de contrôler celle des solutions multiples qui doit être obtenue.

Cette situation de solutions multiples est similaire à celle obtenue par un effet de structure qui a été étudiée dans [Chaboche *et al.* 01] sous le nom « saut de solution ».

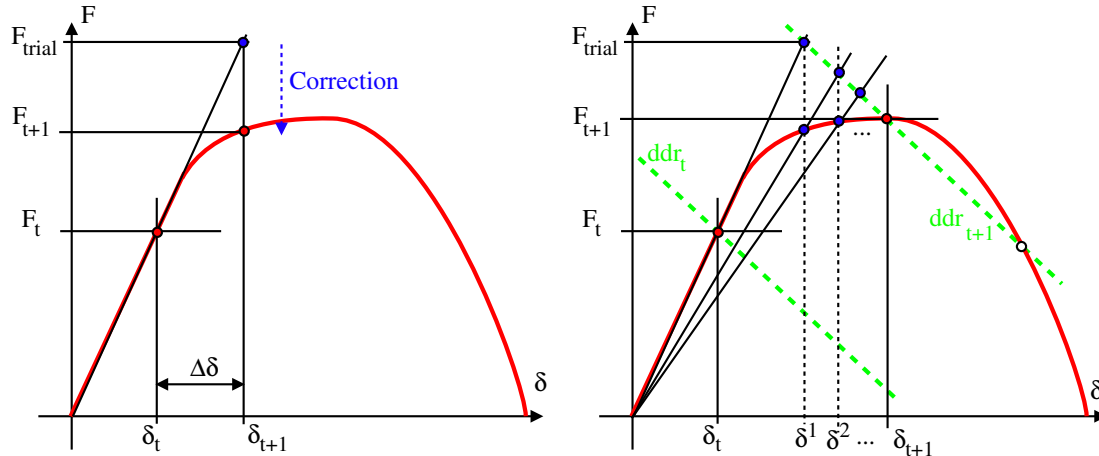


FIG. 2.3 – Intégration locale du comportement pour un modèle adoucissant : approche incrémentale classique (gauche) et LATIN méthode (droite)

2.3 Modèles d'interface pour les assemblages collés

Ces travaux ont été réalisés dans le cadre d'un projet ACI (« Action Concertée Incitative »). Ce projet de trois ans, intitulé « Prévion et Contrôle de la tenue des Assemblages collés », réunissait :

- des physico-chimistes spécialistes de l'adhésion (ESPCI Paris),
- des acousticiens théoriciens du Laboratoire de Modélisation en Mécanique (LMM, Paris) et des expérimentateurs du Laboratoire d'Acoustique Ultrasonore de l'Electronique (LAUE, Le Havre),
- des mécaniciens du Laboratoire d'Etudes Mécaniques des Assemblages (LEMA, Versailles).

Le but de ce projet était de développer des modèles mécaniques et acoustiques pour la modélisation des interfaces collées et des méthodes mécaniques et acoustiques expérimentales pour l'indentification de ces modèles.

Les travaux de ce groupe d'une dizaine de personnes ont été prolongés dans le cadre d'un projet FEDER [De Barros et Champany 03] ainsi que dans le cadre du GDR « Propagation d'Ondes en Milieux Hétérogènes » [Champany 03].

2.3.1 Besoins - Idées

L'objectif du travail présenté ici est de construire un modèle mécanique pour la prévision de la rupture des joints collés. Les phénomènes à modéliser sont les suivants :

- le comportement élastique du joint sain,
- la dégradation des caractéristiques élastiques par des phénomènes d'endommagement,

- la dissipation d'énergie par des phénomènes plastiques ou visco-plastiques pour les joints de forte épaisseur.

Notre choix s'est délibérément porté vers un modèle 2D d'interface plutôt que sur un modèle 3D de la couche de colle. En effet, dans le cadre de la simulation numérique d'assemblages de structures complexes, il ne semble pas envisageable de modéliser la colle par des éléments finis volumiques qui entraîneraient des difficultés de maillage et des coûts de calcul trop importants.

Les modèles qui sont proposés ici sont donc des extensions des modèles d'interface utilisés depuis déjà plusieurs années pour la représentation de la dégradation des interphases interlaminaires dans les matériaux composites.

La raideur élastique de l'interface a , dans le cas des collages, a une signification physique et pourrait être dérivée des caractéristiques élastiques volumiques de la colle. Diverses méthodes de passage à la limite ont été proposées pour calculer des raideurs d'interface pour des films minces [Klarbring 91]. Malheureusement, une résine placée sous forme de film mince peut présenter des modifications structurelles dans sa zone de liaison avec les substrats qui changent son comportement élastique.

Par ailleurs, pour ces matériaux quasi-incompressibles, un phénomène de confinement apparaît dans les zones situées le long des bords du collage. Ce phénomène a tendance à rigidifier l'interface collée. Il semble donc clair que les caractéristiques élastiques de l'interface collée doivent être mesurées sur le film mince en situation entre les deux substrats. Cette mesure est difficilement réalisable mécaniquement de par la faible influence de la raideur de la colle sur le comportement global de l'éprouvette. Dans le cadre du projet d'ACI, nous nous sommes tournés vers une mesure par méthode acoustique. Ces travaux portant sur les raideurs normales et transverses sont résumés dans [Vlasie et Rousseau 03].

Les phénomènes de perte de rigidité du joint de colle sont pris en compte par des modèles d'endommagement classiques pour lesquels l'évolution des variables d'endommagement est pilotée par des considérations énergétiques : énergie d'activation et énergie critique pour chacun des modes purs de sollicitation.

Les phénomènes de dissipation de type plastique peuvent être observés dans le cas de couches épaisses. Un premier modèle simple couplant endommagement et plasticité a été proposé dans le cadre du mémoire de DEA de D. Busson [Busson 98] co-encadré avec O. Allix. Un second modèle a été réalisé au LEMA en partenariat avec N. Valoroso de l'Université de Rome II [Champany et Valoroso 03]. Il permettait le couplage de l'endommagement à la plasticité dans un cadre thermodynamique cohérent. Le principal problème de ce type de modèle est l'identification qui requiert des essais mécaniques en charge et décharge donnant accès à des mesures sur l'interface de colle elle-même.

2.3.2 Modèle mécanique

Le modèle présenté ci-après a été développé dans le cadre d'une collaboration franco-italienne entre le LEMA, l'Université de Rome II et l'Université de Naples financée par un projet Galilé de l'Egide. Ce projet intitulé "Modélisation et Analyse des assemblages collés" avait pour but le développement et la validation d'un modèle d'interface pour la prévision de la tenue des assemblages collés.

Le détail du modèle proposé est présenté dans le preprint de l'annexe B qui correspond à une communication présentée au congrès ECCOMAS en 2004 [Valoroso et Champany 04].

Dans le cadre du projet franco-italien Galilée, ce modèle a été comparé à un modèle proposé par Alfano et Criesfield [Alfano et Criesfield 01, Alfano et Rosati 03]. Les résultats de la comparaison sont proposés dans [Alfano et al. 04].

Dans le cas de chargements en mode pur, ce modèle est une généralisation des modèles de Tvergaard [Tvergaard et Hutchinson 92], d'Allix et Ladevèze [Allix et Ladevèze 92] et d'Alfano et Criesfield [Alfano et Criesfield 01]. Il permet de les représenter tous dans un cadre thermodynamique unifié selon la valeur d'un exposant. Dans le cas de chargements en mode mixte, le modèle uniaxial est écrit dans la direction du chargement. La mixité du chargement peut être variable au cours du temps.

2.3.3 Pilotage de l'algorithme

Ce modèle a été développé dans le cadre d'une approche incrémentale classique. Il a été implanté et utilisé dans le code de calcul CAST3M [Cea 03]. Lorsque la fissure à l'interface doit pouvoir se refermer, une condition de contact unilatéral sans frottement est ajoutée sur les noeuds de l'interface.

Certaines situations de calcul de structures collées entraînent des effets dits de « snap back » pour lesquels la propagation stable d'une fissure dans l'interface entraîne une diminution simultanée de l'effort appliqué et du déplacement mesuré sur la courbe de réponse de la structure (voir par exemple le cas de la figure 2.5). Les algorithmes de type « Newton » sont en échec devant de telles situations. Pour cela, un algorithme de type « longueur d'arc » avec contrôle local a été développé dans Cast3m sur la base des travaux de Alfano et Criesfield [Alfano et Criesfield 03]. Dans un algorithme de ce type, la solution est calculée comme somme de deux termes (prédiction et correction). Le couplage avec des phénomènes de contact unilatéral n'est donc pas évident et reste un problème ouvert.

2.3.4 Identification

Cette section présente le cas d'une identification complète du modèle d'interface à partir d'essais acoustiques et d'essais mécaniques réalisée dans le cadre du projet ACI.

Caractéristiques élastiques

L'assemblage étudié est un collage aluminium/epoxy/aluminium. Les caractéristiques de l'aluminium sont $E = 75\,000\text{MPa}$ et $\nu = 0.3$.

Les caractéristiques élastiques de l'interface collée ont été identifiées à partir d'essais acoustiques non destructifs réalisés au LAUE du Havre et sur la base du modèle acoustique développé par V. Vlasie et M. Rousseau [Vlasie et Rousseau 03]. Cette identification a donné comme résultat $K_1 = 760\text{N/mm}^3$ et $K_2 = 810\text{N/mm}^3$.

Les caractéristiques d'endommagement ont, elles, été identifiées à partir de deux essais classiques en mécanique de la rupture : un essai ENF (End Notched Flexure) en mode II pure et un essai en mode mixte MMF (Mixed Mode Flexure).

Essai ENF - « End Notched Flexure »

Il s'agit d'un essai de flexion trois points réalisé à l'ESPCI sur des éprouvettes de 120mm de long et de 20mm de large. Chacune des deux plaques d'aluminium a 3mm d'épaisseur.

Les points d'appui sont sur la plaque inférieure (voir figure 2.4).

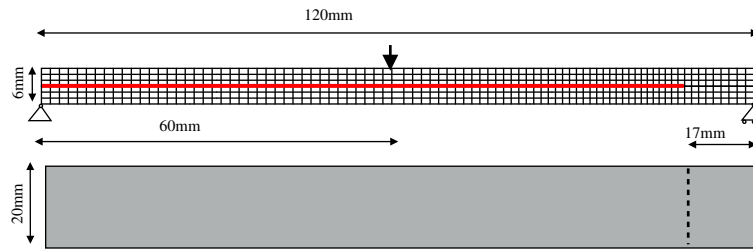


FIG. 2.4 – Essai ENF

Pour les simulations, le maillage utilisé est composé de 528 éléments quadratiques à huit nœuds (3 éléments dans l'épaisseur de chaque plaque) et de 74 éléments quadratiques d'interface.

La figure 2.5 donne la comparaison de la réponse expérimentale d'une éprouvette et de la réponse des trois modèles proposés après identification des paramètres d'endommagement en mode II. Les résultats des trois modèles sont très proches. Les différences ne sont pas visibles sur ce résultat macroscopique. Au moment de la première rupture du collage, des effets de propagation dynamique de la fissure, non représentés dans cette modélisation quasi-statique, empêchent la correcte représentation de la réponse.

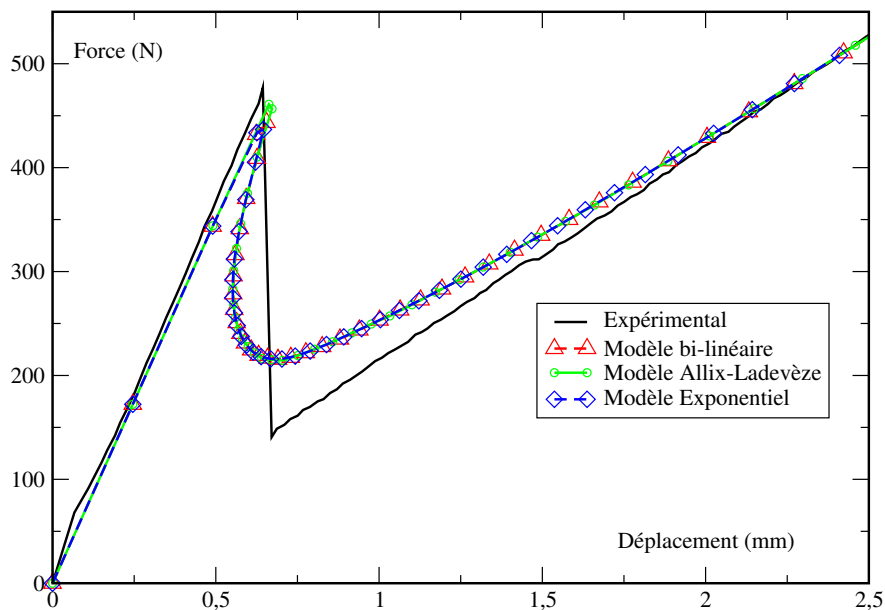


FIG. 2.5 – Essai ENF

Essai MMF - « Mixed Mode Flexure »

Il s'agit d'un essai de flexion trois points réalisé à l'ESPCI sur des éprouvettes de mêmes dimensions que celles de l'essai MMF. Il y a un point d'appui sur la plaque inférieure et un point sur la plaque supérieure (voir figure 2.6).

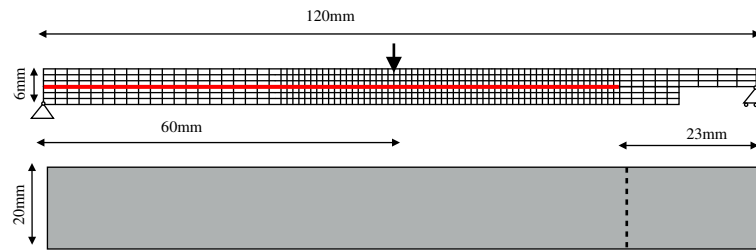


FIG. 2.6 – Essai MMF

Pour les simulations, le maillage utilisé est composé de 504 éléments quadratiques à huit noeuds (3 éléments dans l'épaisseur de chaque plaque) et de 77 éléments quadratiques d'interface.

La figure 2.7 donne la comparaison de la réponse expérimentale d'une éprouvette et de la réponse des trois modèles proposés après identification des paramètres d'endommagement en mode mixte. Les résultats des trois modèles sont très proches. Les différences ne sont pas visibles sur ce résultat macroscopique. Après la première rupture du collage, des effets de grands déplacements de la plaque inférieure non représentés dans cette modélisation HPP empêchent la correcte représentation de la réponse.

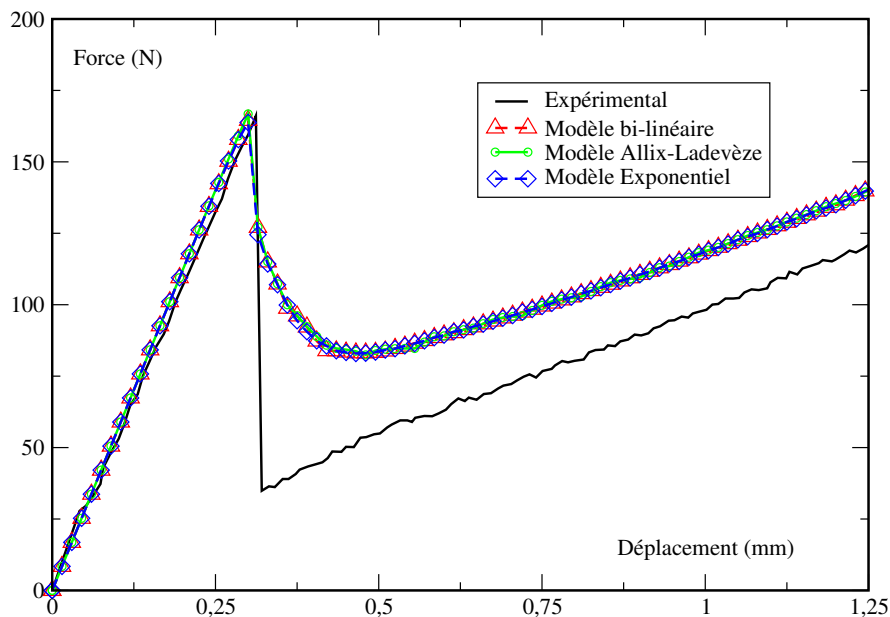


FIG. 2.7 – Essai ENF

Résultats

Au final, les paramètres du modèle d'interface identifié sont :

- $K_1 = 760\text{N/mm}^3$, $K_2 = 810\text{N/mm}^3$,
- $G_{c1} = 0.02\text{N/mm}$, $G_{01} = 0.4 * G_{c1}$,
- $G_{c2} = 0.09\text{N/mm}$, $G_{02} = 0.4 * G_{c2}$,

– $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 2$ et $\alpha_3 = 1$.

Les paramètres α_1 (forme du critère énergétique d'initiation de l'endommagement) et α_2 (forme du critère énergétique pour la rupture complète) n'ont pas d'influence notable pour cet exemple et ont été choisis par défaut à 2 (critères quadratiques).

2.4 Extensions

Le modèle présenté dans les paragraphes précédents permet la simulation de la dégradation de couches de colle pour une mixité modale fixe ou variable. Les extensions prévues concernent le couplage avec la plasticité et l'identification par des essais adaptés.

Des travaux ont déjà débuté pour l'introduction des effets de précontraintes dans le collage. Ces précontraintes, souvent issues de la fabrication, peuvent avoir un effet non négligeable sur le comportement du collage en service.

Chapitre 3

Construction efficace de surfaces de réponse

Sommaire

3.1 Introduction	28
3.2 Analyses paramétriques	28
3.2.1 Objectifs	28
3.2.2 Représentation des incertitudes	28
3.2.3 Méthodes de résolution	29
3.2.4 Cadre de l'étude	31
3.3 Utilisation de la LATIN pour l'analyse paramétrique	31
3.3.1 Autres travaux	31
3.3.2 Approche proposée	31
3.3.3 Un exemple d'assemblage tridimensionnel	32

3.1 Introduction

Dans les applications qui concernent ce mémoire, les problèmes sur les sous-structures sont des problèmes simples d'élasticité linéaire à paramètres déterministes. On peut en effet supposer que l'incertitude sur les paramètres d'élasticité reste faible.

Par contre, les paramètres associés au comportement des interfaces sont en général assez mal connus. En effet, ces paramètres sont souvent obtenus par des essais sur structures qui nécessitent une corrélation entre calculs et expérimentations. Ces corrélations nécessitent une très bonne maîtrise à la fois des essais et des simulations numériques. Les incertitudes sur ces paramètres peuvent donc être importantes. Par ailleurs, les non-linéarités locales du comportement des interfaces ont bien souvent un effet très fort sur le comportement global de l'assemblage. L'impact des incertitudes sur les paramètres des interfaces peut donc être fortement non négligeable.

Il est donc vital de pouvoir connaître l'influence de ces incertitudes sur la réponse globale de l'assemblage.

3.2 Analyses paramétriques

3.2.1 Objectifs

Il existe diverses méthodes permettant d'avoir des informations sur le comportement d'une structure en présence de paramètres incertains [Sudret et Der Kiureghian 02]. On peut les classer en fonction du type d'information qu'elles permettent d'obtenir :

- des informations de type moyenne et variance uniquement pour quelques paramètres dimensionnants,
- des informations de type fiabilité. On cherche pour cela des paramètres scalaires qui traduisent, pour un critère donné, la distance entre la solution pour les variables moyennes et la surface seuil du critère.
- la réponse complète de la structure, qui permet alors d'obtenir les deux types d'information précédents plus toute autre information statistique.

3.2.2 Représentation des incertitudes

Dans la plupart des situations, l'incertitude sur les paramètres est représentée par des lois de probabilité (du type, normale, log-normale, ...) (figure 3.1). L'aire sous la courbe donne la probabilité du paramètre d'être entre deux valeurs fixées.

Chaque paramètre structural peut être exprimé en fonction d'une variable aléatoire de fonction de probabilité choisie. Par exemple, une raideur est décrite par :

$$k = \bar{k}(1 + \delta\alpha_i) \quad (3.1)$$

où α_i est une variable normale centrée réduite. \bar{k} est la moyenne de k et δ est appelé coefficient de variation.

Il n'est pas forcément possible de représenter l'indétermination du problème sous forme d'incertitudes sur les paramètres (représentées par des lois de probabilité). Des techniques émergentes proposent de reporter l'incertitude sur les termes des opérateurs tout en gardant les propriétés de ces opérateurs. On parle alors de « Random Matrix Theory » [Soize 03].

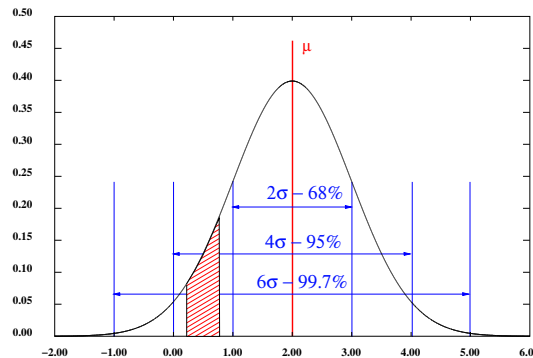


FIG. 3.1 – Loi normale centrée réduite d'un paramètre (cas où $\mu = 0$ et $\sigma = 1$)

3.2.3 Méthodes de résolution

La plus connue et la plus utilisée de ces méthodes reste la méthode de Monte Carlo qui permet d'obtenir la réponse complète au prix d'un nombre important de calculs. Elle consiste à faire des tirages aléatoires de jeux de paramètres et de faire un calcul par tirage. La convergence de la méthode (amélioration de la qualité de la solution apportée par l'ajout d'un nombre donné de tirages) peut être mesurée. Le coût de cette méthode peut être réduit en l'enrichissant à l'aide la technique « Latin Hypercube Sampling » [Iman *et al.* 81].

La méthode des perturbations [Benaroya et M. 98] consiste (par exemple sur un problème représenté par le système linéaire $\mathbf{K}U = F$) à faire un développement de Taylor des données par rapport aux variables aléatoires (normale centrée réduite et notées α_i).

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \mathbf{K}_0 + \sum_{i=1}^N \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \alpha_i} \alpha_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2 \mathbf{K}}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} \alpha_i \alpha_j + o(\|\alpha^2\|) \\ F &= F_0 + \sum_{i=1}^N \frac{\partial F}{\partial \alpha_i} \alpha_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} \alpha_i \alpha_j + o(\|\alpha^2\|) \end{aligned}$$

L'inconnue est elle aussi recherchée sous forme de développement de Taylor sur les variables aléatoires.

$$U = U_0 + \sum_{i=1}^N U_i \alpha_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N U_{ij} \alpha_i \alpha_j + o(\|\alpha^2\|)$$

Son introduction dans le système linéaire permet de calculer la moyenne U_0 et les premiers moments (U_i, U_{ij}) par identification en résolvant quelques systèmes linéaires.

La simplicité et l'efficacité de cette méthode lui donnent un grand intérêt. Elle a connu un grand nombre de développements et d'extensions notamment pour les problèmes non-linéaires [Legay et Combescure 02].

Pour le calcul d'informations fiabilistes, les techniques les plus utilisées sont les méthodes FORM et SORM. Elles consistent à approximer les surfaces seuil au premier (FORM) ou au deuxième ordre (SORM) dans un espace des paramètres normé afin de calculer des distances à ces surfaces (fig. 3.2) [Pendola *et al.* 00].

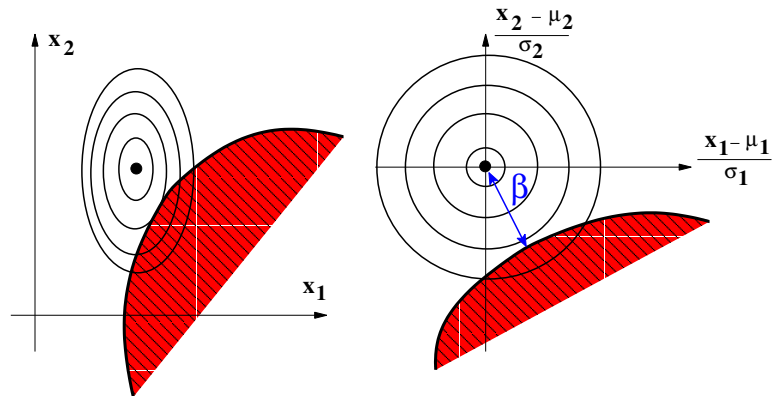


FIG. 3.2 – Fiabilité d'une structure (cas à deux paramètres aléatoires - zone de risque foncée). Définition de l'indice de fiabilité β dans l'espace normé.

Les méthodes de type « éléments finis stochastiques » utilisent un développement de la solution sur une base de fonctions des variables aléatoires. Elles permettent d'obtenir une approximation de la solution complète. Le principe de ces méthodes est évoqué au chapitre 4.

Lorsque la solution complète est obtenue (avec la la méthode de Monte Carlo, des éléments finis stochastiques ou avec l'approche proposée par la suite), les critères de dimensionnement peuvent être représentés sous forme de surfaces de réponse de la structure (fig. 3.3). La méthode RSM (« Response Surface Methodology » [Veneziano *et al.* 03]) peut alors être utilisée pour le calcul des informations statistiques désirées. En général, ces surfaces sont construites point par point. Une interpolation entre les points est utilisée pour les calculs des informations statistiques. Les outils de la RSM permettent de définir les zones de la surface éventuellement mal définies afin que de nouveaux points d'interpolation soient calculés.

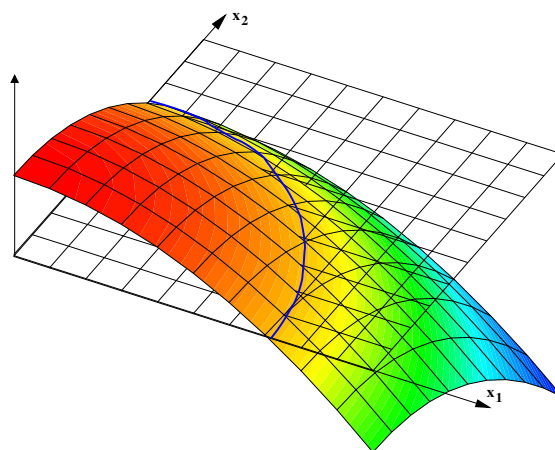


FIG. 3.3 – Surface de réponse d'un critère (cas à deux paramètres aléatoires)

3.2.4 Cadre de l'étude

Nous nous plaçons dans le cas des assemblages de structures étudiés au chapitre 1 où les interfaces peuvent éventuellement représenter des comportements complexes de liaison (chapitre 2). Les paramètres incertains sont représentés sous forme de fonction de variables aléatoires. Nous cherchons à obtenir la réponse complète de l'assemblage en fonction des variables aléatoires. Les critères de dimensionnement sont donc exprimés sous forme de surfaces de réponse et la méthode RSM est utilisée pour construire les informations statistiques sur ces paramètres. Ces surfaces de réponse sont construites point à point en utilisant un balayage systématique sur toute la plage de variation des paramètres.

L'algorithme de résolution employé est la méthode LATIN telle qu'elle est présentée au chapitre 1.

Les travaux présentés dans ce chapitre ont été réalisés en collaboration avec P.A. Boucard du LMT Cachan [Boucard 03].

3.3 Utilisation de la LATIN pour l'analyse paramétrique

3.3.1 Autres travaux

L'utilisation de la méthode LATIN pour l'étude de l'influence des incertitudes est ancienne. En effet, dans la plupart des applications de cette méthode (comportement visco-plastique, flambage, étude des structures composites), l'histoire de la solution en déplacement et en contrainte est recherchée sous forme d'une superposition de solutions radiales (produit d'une fonction du temps par une fonction d'espace). Les fonctions d'espace sont construites automatiquement et forment une base. Il est donc naturel d'imaginer utiliser cette base pour y rechercher la solution d'un problème proche pour lequel on a changé les paramètres du modèle.

Cette technique a été utilisée avec succès pour les problèmes de flambage de poutre ou pour les problèmes de visco-plasticité (dans le mémoire de DEA de H. Bavestrello encadré par moi-même et P.A. Boucard [Bavestrello 99]).

3.3.2 Approche proposée

Pour les applications de problèmes de structures élastiques en contact unilatéral frottant, la stratégie de résolution présentée dans la première partie de ce mémoire n'utilise pas de décomposition de la solution sous forme d'une superposition de solutions radiales. Les performances de l'approche pour ces situations particulières d'assemblages sont obtenues par l'utilisation d'opérateurs constants au cours des itérations.

Nous cherchons ici à introduire la possibilité de réaliser des études paramétriques tout en conservant les performances de l'approche. L'idée très simple mise en oeuvre dans le preprint de l'annexe B est la suivante : pour un jeu de paramètres d'interface donné, l'approche LATIN est capable de construire rapidement une solution convergée sur tout l'intervalle d'étude. Les paramètres d'interface interviennent uniquement dans les équations locales et donc leur modification n'entraîne pas de modification des opérateurs sur les sous-structures. On peut donc simplement changer leurs valeurs et continuer les itérations avec les mêmes opérateurs sans faire d'initialisation. Les équations locales sont, elles, modifiées.

A partir de cette modification, l'algorithme itère jusqu'à convergence. Ce nouveau calcul pour un second jeu de paramètres a donc été initialisé par la solution du premier calcul. Le nombre d'itérations pour atteindre la convergence est donc considérablement réduit.

La figure 3.4 présente l'algorithme LATIN pour la démarche multirésolution.

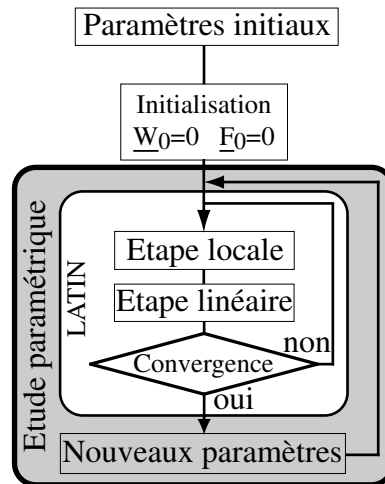


FIG. 3.4 – Algorithme LATIN multi-résolution

Pour des études paramétriques, un balayage systématique de tout l'intervalle de variation possible des paramètres d'interface est réalisé. Même si le nombre de calculs à effectuer est important, les performances de l'approche proposée sont importantes car, d'une part, les opérateurs utilisés sont toujours les mêmes et d'autre part, la solution d'un calcul est initialisée par celle du calcul précédent.

Ici, une surface de réponse d'un assemblage est construite point par point et une interpolation entre les points est réalisée. Par la suite, des méthodes classiques de type « RSM » (Response surface Methodology), sont utilisées pour déduire de la surface de réponse l'ensemble des informations statistiques désirées.

Le preprint de l'annexe B présente le détail de l'approche multi-résolution proposée et son application à des problèmes bidimensionnels de contact avec frottement. On pourra se reporter à [Boucard et Champany 04] pour d'autres exemples et en particulier le cas du contact de Hertz avec comparaison avec d'autres méthodes de résolution.

3.3.3 Un exemple d'assemblage tridimensionnel

Dans cette section, un exemple d'assemblage tridimensionnel est présenté. Il s'agit d'une liaison mécanique entre trois plaques assurée par deux boulons précontraints (figure 3.5).

La figure 3.6 présente les caractéristiques géométriques de l'assemblage.

Les boulons et les plaques sont composés du même matériau (Module d'Young $E = 20000\text{MPa}$ et coefficient de Poisson $\nu = 0.3$). La précharge des boulons est simulée par un déplacement axial relatif du corps et de la tête de chaque boulon. Les deux déplacements relatifs sont notés g_1 et g_2 (figure 3.5). Le coefficient de frottement est le même sur toutes les surfaces de contact. Il est noté μ .

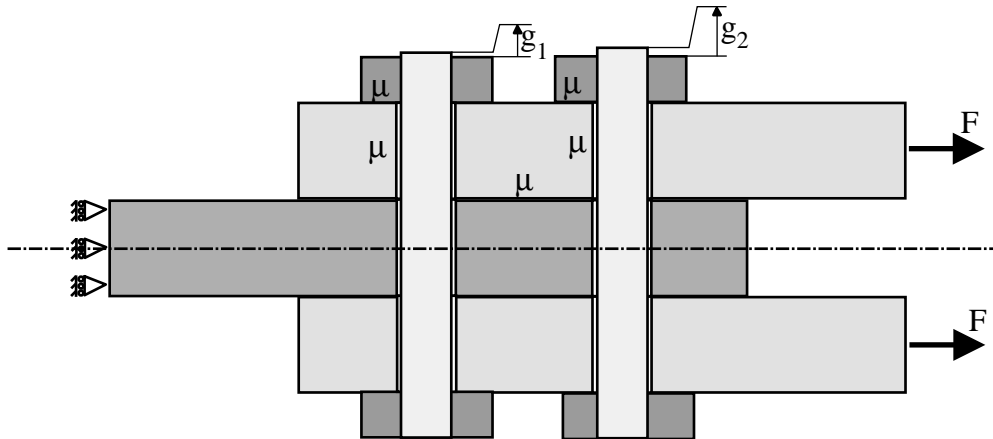


FIG. 3.5 – Géométrie

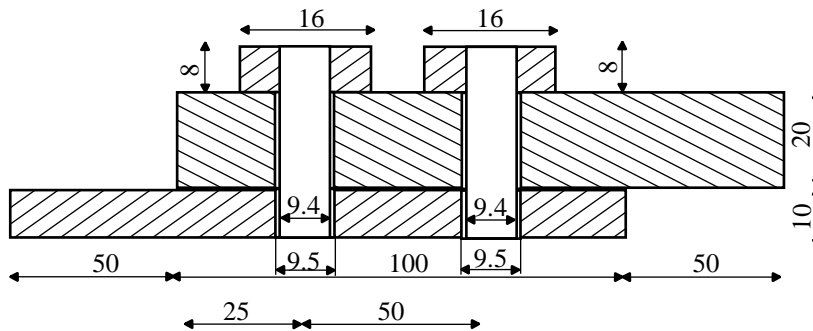


FIG. 3.6 – Dimensions de la structure – épaisseur : 40mm

Dans l'étude paramétrique proposée, on étudie l'influence de la précharge de chacun des boulons et du coefficient de frottement sur la transmission des efforts dans l'assemblage. Il y a donc trois paramètres différents : un coefficient de frottement et un paramètre de précharge dans chaque boulon. Le coefficient de frottement μ peut prendre 9 valeurs différentes (de 0.1 à 0.5 par pas de 0.05). Les paramètres de précharge peuvent chacun prendre 12 valeurs différentes (de 0.05mm à 0.3mm, par pas de 0.025mm). Ainsi, pour l'étude paramétrique complète, 1296 calculs distincts doivent être effectués.

Le même maillage a été utilisé pour tous les calculs. Il est représenté sur la figure 3.7. Il est composé de 10 705 éléments finis linéaires (pyramides ou briques) et 8 090 noeuds. Le nombre total de degrés de liberté est donc de 24 270. Ce nombre de degrés de liberté ne tient pas compte des éventuelles variables additionnelles (Multiplicateurs de Lagrange, ...).

Le calcul est mené en deux étapes (step) :

- step 1 : précharge des boulons : (durée 1s - 1 pas de temps demandé).
- step 2 : application de la charge (durée 1s - 10 pas de temps demandés).

Pour montrer l'efficacité de la méthode LATIN pour ce type de problème de contact avec frottement, une comparaison avec le code de calcul ABAQUS [Hibbit, karlson and sorensen, inc. 02] a été menée sur une des configurations de l'étude paramétrique ($g_1 = 0.05mm$, $g_2 = 0.025mm$

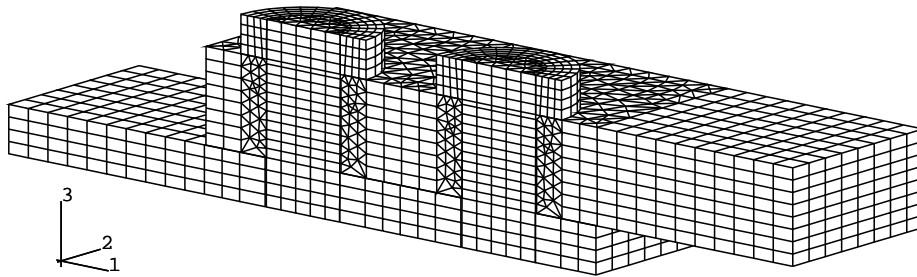
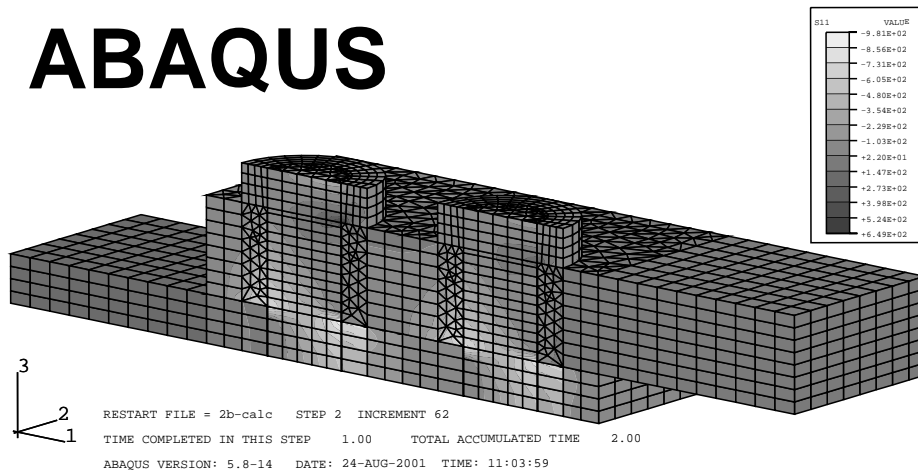


FIG. 3.7 – Maillage de l'assemblage – 10705 éléments – 8090 noeuds

et $\mu = 0.3$). La figure 3.8 présente la contrainte σ_{11} dans l'assemblage à la fin du deuxième step.

FIG. 3.8 – Contrainte σ_{11} dans l'assemblage

La figure 3.9 présente une comparaison de la réponse globale de l'assemblage (déplacement d'un point de la surface chargée). Les résultats ABAQUS et LATIN sont très proches.

Pour des raisons de convergence, le solveur ABAQUS effectue plus d'incrément de calcul que ce qui est demandé (10 pour le step 1 et 62 pour le step 2). Les résultats de la comparaison sont donnés dans le tableau 3.1. Les calculs ont été effectués sur une station de travail HP-J5000 (3.5Go RAM - Processeur PA8500).

On peut remarquer que, sur ce seul calcul, la méthode LATIN est dix fois plus efficace qu'un code de calcul classique. Cette efficacité, en terme d'encombrement mémoire et en terme de temps de calcul, a déjà été montrée en statique dans [Champaney *et al.* 99, Blanzé *et al.* 00].

La figure 3.10 résume tous les résultats de l'étude paramétrique. L'évolution de l'effort maximal transmissible avant un glissement relatif global des deux plaques est tracé pour chacune des valeurs du coefficient de frottement en fonction des précharges. Il est bien évident que, compte tenu des variations en fonction des paramètres, l'ordre de traitement des jeux de paramètres étudiés peut avoir une forte influence sur l'efficacité de l'approche.

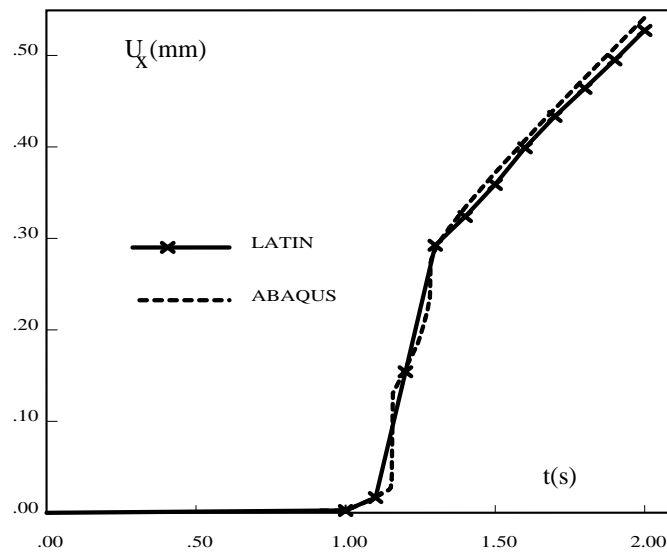


FIG. 3.9 – Déplacement d'un point de la surface chargée

	ABAQUS	LATIN Method
Pas de temps	72	11
Glissement élastique autorisé (mm)	1e-4	0
Temps CPU (mn)	374	38.1
Temps horloge (mn)	407	40

TAB. 3.1 – Comparaison avec Abaqus

Par ailleurs, cette méthode reste dédiée aux assemblages de structures élastiques pour lesquelles les non-linéarités et incertitudes sont localisées sur les interfaces.

Temps horloge	h	jours
Abaqus direct	8 791	366
LATIN direct	864	36
LATIN multi	168	7

TAB. 3.2 – Coûts de calcul - 1296 calculs

j_2	Init	25	50	75	100	125	150	175	200	225	250	275	300
Step 1													
Nb ite		196	90	80	65	56	47	42	42	36	32	30	25
Time (s)	28.	93.	50.	42.	36.	30.	27.	23.	23.	20.	18.	17.	15.
Step 2													
Nb ite		400	285	125	150	105	112	76	80	55	65	45	42
Temps (s)	32.	2100.	1570.	720.	870.	590.	620.	439.	467.	302.	384.	275.	250.

TAB. 3.3 – Coûts de l'étude paramétrique

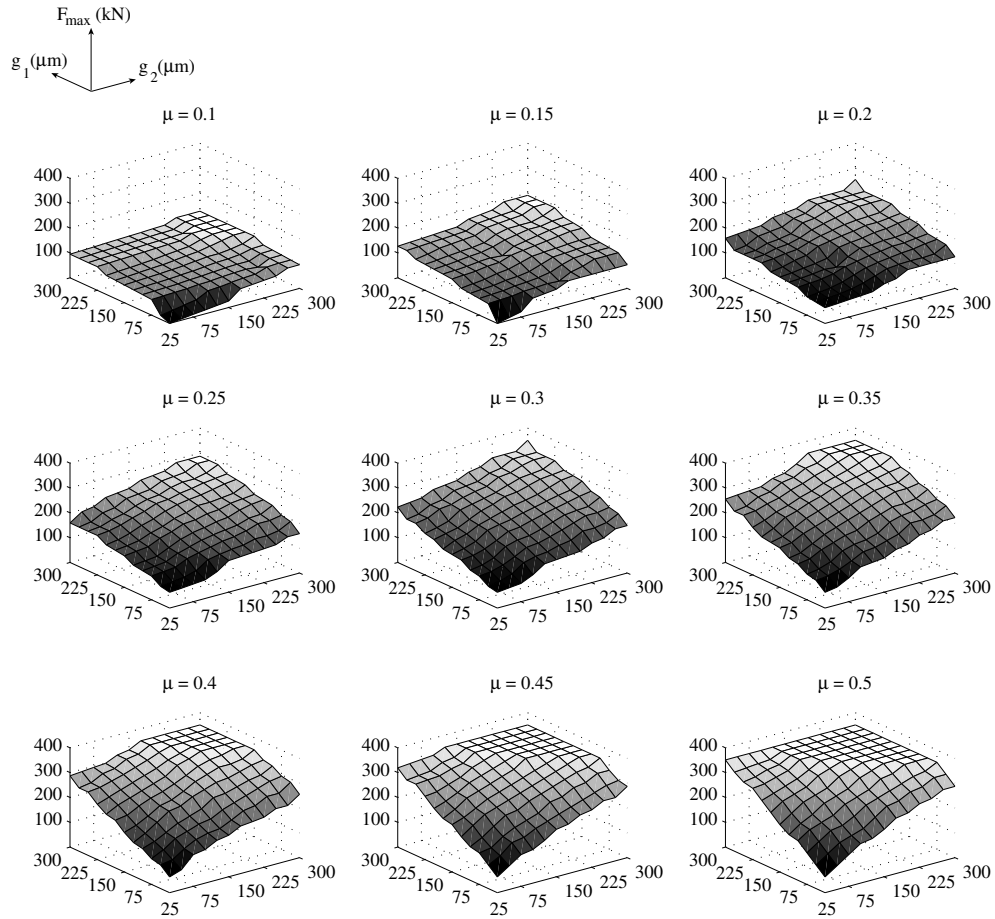


FIG. 3.10 – Présentation condensée de tous les résultats

Chapitre 4

Prise en compte de comportements d'interfaces aléatoires

Sommaire

4.1 Introduction	40
4.2 Utilisation de la LATIN pour les réponses aléatoires	40
4.2.1 Cadre de l'étude	40
4.2.2 Approche proposée	40
4.2.3 Exemple à grand nombre d'inconnues	41
4.2.4 Apports - Limitations	42
4.3 Extension au cas du contact	42
4.4 Comparaison	44
4.4.1 Approche multi-résolution	45
4.4.2 Approche par expansion polynomiale	47
4.4.3 Comparaison des deux approches	47

4.1 Introduction

L'approche développée dans la section précédente consiste à étudier l'influence des incertitudes sur la réponse d'un assemblage en faisant un balayage régulier des paramètres incertains. Les surfaces de réponse sont donc obtenues par interpolation entre les points calculés pour chacun des jeux de paramètres. Lorsque la plage de variation possible des paramètres est grande, un grand nombre de calculs est nécessaire pour construire la surface de réponse. La stratégie n'est donc pas forcément astucieuse, en particulier lorsque la solution ne varie pas beaucoup en fonction d'un paramètre mais que le nombre de points estimés pour la construction de la surface de réponse est grand.

On peut alors se demander s'il n'est pas possible d'introduire l'aspect aléatoire des données et de la solution plus tôt dans la modélisation à la manière des stratégies de type stochastique. C'est la démarche proposée dans cette section. La dernière partie propose une comparaison avec la méthode développée au chapitre précédent.

4.2 Utilisation de la LATIN pour les réponses aléatoires

4.2.1 Cadre de l'étude

Le cadre de l'étude est le même que celui du chapitre précédent. On s'intéresse à des assemblages de structures élastiques pour lesquels les incertitudes sont localisées sur les interfaces. Les paramètres incertains sont exprimés comme fonctions de variables aléatoires dont la loi de probabilité est donnée. On verra plus loin que la méthode est actuellement limitée à des comportements linéaires des interfaces. Les exemples proposés concernent des structures avec interfaces collées dont la raideur est incertaine.

Ce travail a été mené en collaboration avec Claude Blanzé du LMT Cachan [Blanzé 03].

4.2.2 Approche proposée

L'approche proposée est détaillée dans le preprint de l'annexe D. Dans ce preprint, elle est comparée à la méthode de Monte Carlo et à la méthode des éléments finis stochastiques.

L'idée générale est celle de la méthode des éléments finis stochastiques. La solution du problème est une fonction des variables aléatoires définissant les paramètres. On cherche une approximation de cette solution dans une base de fonctions des variables aléatoires ξ_i . Par exemple, le champ de déplacement est cherché sous la forme :

$$u(\xi_i) = \sum_{j=0}^P u_j \Psi_j(\xi_i) \quad \langle \Psi_i(\xi) \Psi_j(\xi) \rangle = c_i \delta_{ij} \quad (4.1)$$

où les fonctions de base $\Psi_j(\xi)$ ont des propriétés d'orthogonalité entre elles au sens de leur espérance. P est l'ordre de la décomposition. Pour les applications qui nous intéressent, ces polynômes sont du type Hermite-Legendre. Leur expression est donnée dans l'annexe du preprint.

Lorsque cette décomposition est introduite dans la méthode des éléments finis classique, cela conduit à la résolution d'un système linéaire de taille $P + 1$ fois la taille du problème élément finis déterministe [Ghanem 99]. Les inconnues sont les composantes u_i (modes). Le couplage entre les modes est dû à la présence de termes dépendant des paramètres aléatoires dans la matrice de rigidité. Pour des problèmes tridimensionnels, la taille du problème peut vite générer des coûts de calcul très importants. Cependant, la forme du système est particulière (voir preprint) et des techniques spécifiques de résolution ont été développées [Ghanem et Kruger 96].

Dans la méthode LATIN telle qu'elle est présentée au chapitre 1, les paramètres indéterminés sur les interfaces n'interviennent pas dans les opérateurs des sous-structures à l'étape globale. Il n'y a donc pas de couplage entre les modes dans les résolutions de l'étape globale qui sont les plus coûteuses pour les problèmes à grand nombre de degrés de liberté. L'étape locale est donc une résolution avec $P + 1$ seconds membres. Le couplage a lieu à l'étape locale mais sur des problèmes scalaires en chaque point de l'interface.

Cette approche permet donc une forte réduction des coûts par rapport à la méthode des éléments finis stochastiques classique et par rapport à la méthode de Monte Carlo, comme le montrent les exemples du preprint et l'exemple du paragraphe suivant.

4.2.3 Exemple à grand nombre d'inconnues

L'exemple de l'assemblage proposé sur la figure 10 du preprint de l'annexe B est repris dans une modélisation tridimensionnelle permettant de prendre en compte les effets de bord sur les zones collées. Le maillage étudié est présenté sur la figure 4.1. Il est composé de 62 672 noeuds soit 188 016 degrés de liberté pour le problème déterministe.

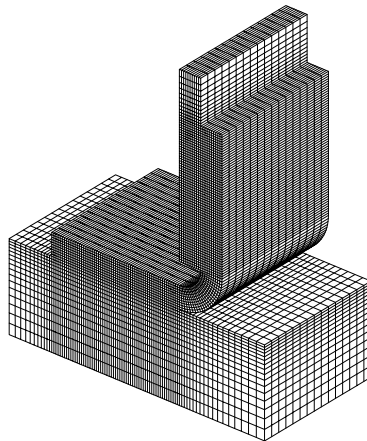


FIG. 4.1 – Assemblage collé 3D avec deux interfaces aléatoires

Lorsque les caractéristiques des deux interfaces collées sont supposées indéterminées et qu'on utilise un chaos polynomial d'ordre 3, il y a 10 fonctions de base. Le nombre d'inconnues est donc de 1 880 160.

La figure 4.2 présente la répartition de la contrainte équivalente de Von Mises pour les trois premiers modes de la solution. Le premier mode correspond à la moyenne.

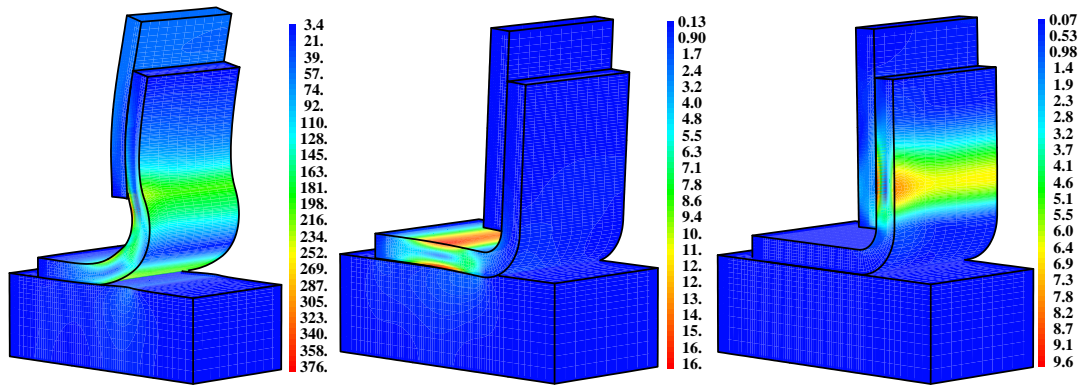


FIG. 4.2 – Contrainte de Von Mises pour les trois premiers modes (en MPa)

Le calcul a été effectué sur la machine parallèle *bacchus* du LMT Cachan (SGI Origin 2000 à 64 processeurs) en utilisant trois processeurs (un pour chacune des trois sous-structures). Le temps CPU du calcul est de 3h55.

4.2.4 Apports - Limitations

L'approche proposée dans les paragraphes précédents permet clairement une réduction des coûts de calcul par rapport aux approches classiques de type éléments finis stochastiques. De même, elle permet une réduction des coûts par rapport à l'approche multi-résolution proposée dans le chapitre précédent dans le cas de grandes plages de variation des inconnues.

On profite ici du fait que les incertitudes sont localisées sur les interfaces et que les comportements étudiés sont linéaires. La figure 4.3 présente la décomposition polynomiale de la solution en déplacement dans un cas unidimensionnel. Les fonctions de type Hermite-Legendre sont clairement adaptées aux problèmes étudiés.

Par contre, il est clair que l'utilisation de fonctions de base polynomiales de type Hermite-Legendre n'est pas adaptée au cas de non-linéarités fortes de type contact par exemple.

4.3 Extension au cas du contact

On considère le problème unidimensionnel avec condition de contact présenté sur la figure 4.4.

Dans ce cas, il s'agit de décomposer la solution dans un espace de fonctions de base aptes à représenter la discontinuité des efforts (changement d'état entre contact et décollement) en fonction de la valeur des paramètres aléatoires d'interface.

La solution en déplacement fonction de la variable aléatoire est donnée sur la figure 4.5. On remarque la présence d'un plateau pour les faibles valeurs de la raideur qui correspond au cas du contact. Le reste de la courbe correspond au cas sans contact.

La fonction densité de probabilité correspondante est donnée sur la figure 4.6. Elle présente un dirac pour la valeur du déplacement correspondant au contact.

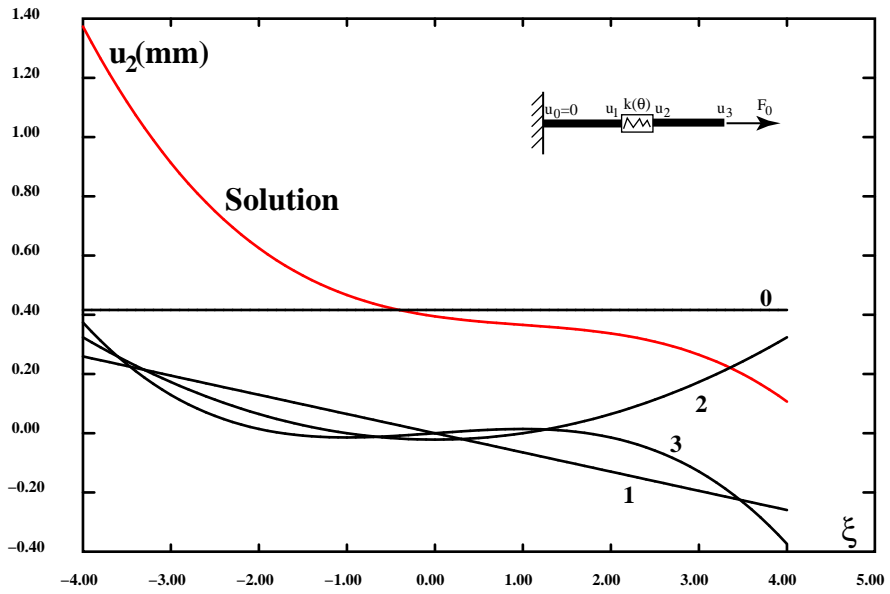


FIG. 4.3 – Décomposition polynomiale de la solution

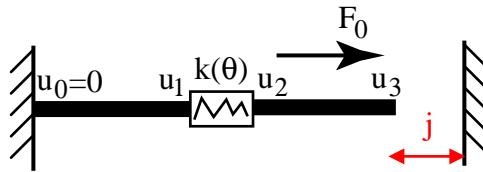


FIG. 4.4 – Problème unidimensionnel avec condition de contact unilatéral

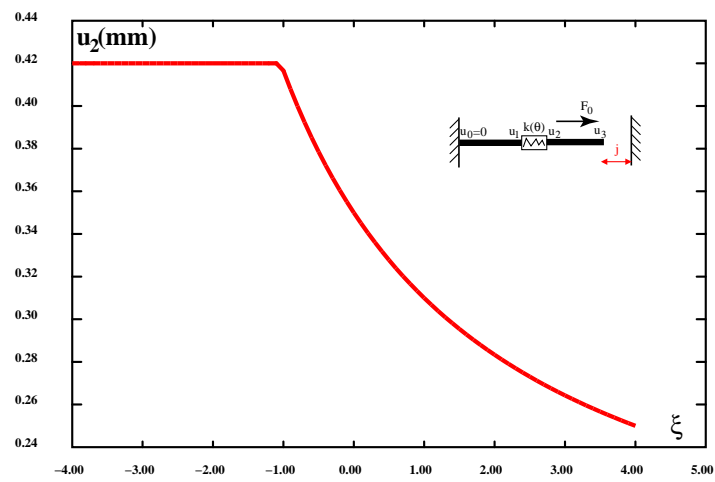


FIG. 4.5 – Solution du problème 1D de contact

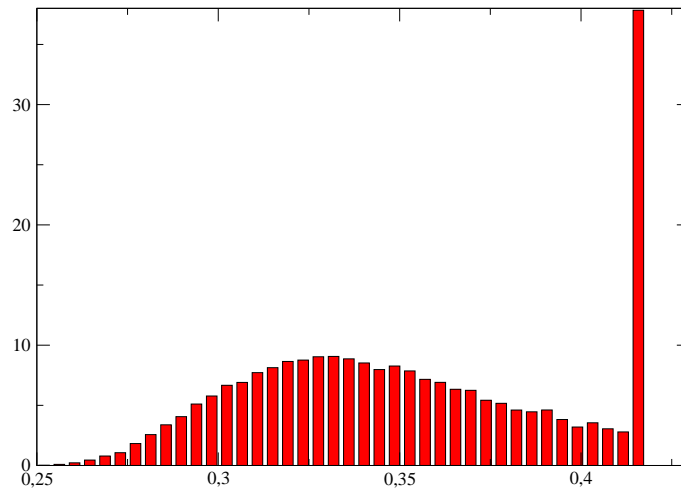


FIG. 4.6 – Densité de probabilité pour le problème 1D de contact

4.4 Comparaison

L'exemple suivant présente une comparaison entre les approches proposées aux chapitres 3 et 4 pour la prise en compte des comportements aléatoires d'interface.

Il s'agit d'un réservoir cylindrique soumis à une pression interne. Le réservoir est fermé par un bouchon maintenu par huit vis préchargées (fig. 4.7). L'étanchéité est assurée par un joint élastique placé entre le réservoir et le bouchon (fig. 4.8). On cherche ici à prévoir une perte d'étanchéité lorsque la raideur du joint et celle des vis sont incertaines.

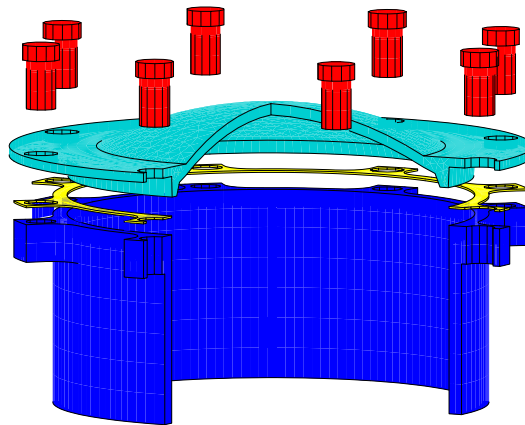


FIG. 4.7 – Assemblage complet

Le joint est modélisé par une interface élastique entre le cylindre et le bouchon. La raideur du joint est supposée incertaine. Les conditions de contact entre les vis et le cylindre ne sont pas prises en compte dans cette étude. Elles modifieraient la façon dont les vis se déforment. Pour représenter cet effet, la raideur des vis est supposée incertaine. Elle est modélisée par une interface élastique entre le corps et la tête de chaque vis.

Seule la partie supérieure du cylindre est modélisée. Pour des raisons de symétrie, 1/16ème seulement de l'assemblage est modélisé. La figure 4.8 présente les dimensions

du réservoir.

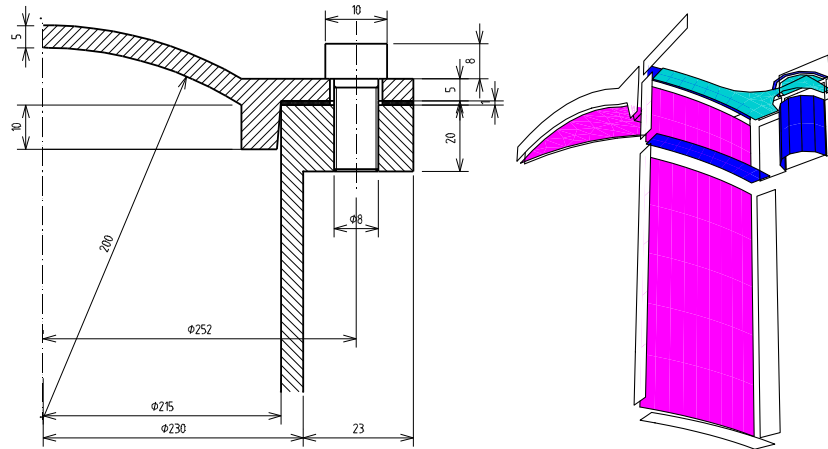


FIG. 4.8 – Dimensions et interfaces

Le cylindre, le bouchon et les vis sont en acier (Module d'Young $E = 200000\text{MPa}$ et coefficient de Poisson $\nu = 0.3$). La raideur d'une vis est exprimée par :

$$K = \bar{K}(1 + \delta_1 \xi_1) \quad \text{with } \bar{K} = 4.10^7 \text{N.m}^{-1} \text{ and } \delta_1 = 0.1$$

La raideur du joint est, elle, exprimée sous la forme :

$$k = \bar{k}(1 + \delta_2 \xi_2) \quad \text{with } \bar{k} = 5.10^2 \text{N.m}^{-1}.\text{m}^{-2} \text{ and } \delta_2 = 0.2$$

Le réservoir est soumis à une pression interne de 16bars. Les vis sont prédéformées en imposant un déplacement relatif $\Delta = 0.2\text{mm}$ de la tige par rapport à l'alésage.

Le modèle étudié ici se compose de 6 sous-structures et 20 interfaces. La figure 4.8 présente les différentes interfaces (bleu : liaison parfaite, blanc : symétrie, rose : pression, turquoise : liaison élastique). Le maillage est composé de 1836 éléments quadratiques pour un total de 7920 noeuds (23760 ddl).

Comme les conditions de contact entre le joint et le cylindre ne sont pas modélisées, le critère d'étanchéité utilisé est le fait que le joint reste en compression sous l'effet de la pression interne. Ainsi, dans cette étude, on cherche à savoir si le maximum de la répartition d'effort appliquée sur le joint peut devenir positif.

Les calculs ont été réalisés sur un PC disposant de 1.5Go de RAM et d'un processeur AMD Athlon (1.5GHz).

4.4.1 Approche multi-résolution

Pour l'étude par multi-résolution, le paramètre ξ_1 peut prendre 13 valeurs (entre -3 et 3 par pas de 0.5) et le paramètre ξ_2 peut prendre 7 valeurs (entre -3 et 3 par pas de 1.). Ainsi 91 calculs doivent être effectués.

La figure 4.9 présente l'évolution de l'indicateur d'erreur pendant les itérations. Chaque fois qu'un paramètre d'interface est modifié, l'indicateur augmente car les conditions de liaison ne sont plus vérifiées. Les pics les plus hauts correspondent aux changements du paramètre ξ_1 (raideur du joint) et les plus petits aux changements de ξ_2 (raideur des vis). On voit

ici que seul le calcul pour le premier jeu de paramètres demande un effort numérique. La ré-utilisation de solution conduit ici à une grande réduction du coût de calcul en particulier en ce qui concerne le paramètre ξ_2 qui a une influence moindre sur la solution.

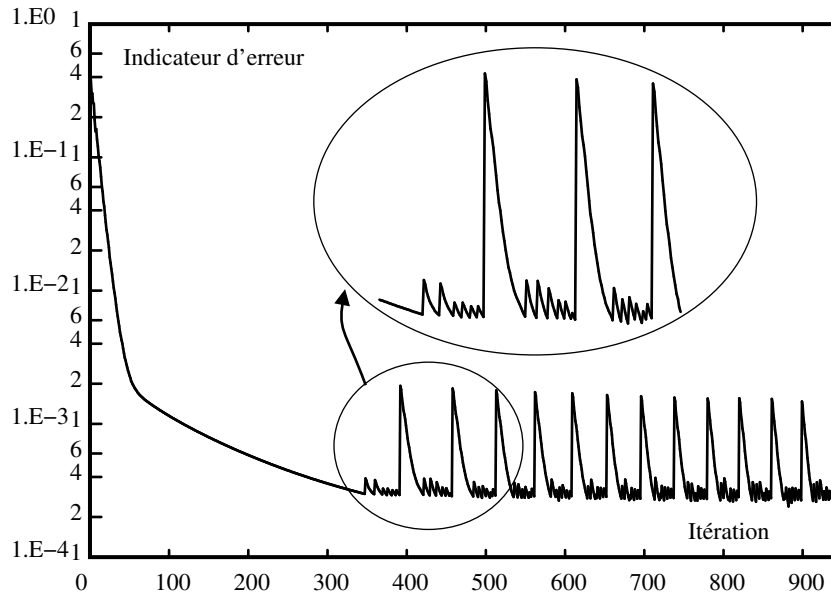


FIG. 4.9 – Multi-résolution : évolution de l'indicateur d'erreur pendant les itérations

La figure 4.10 donne la répartition des efforts normaux sur le joint pour la valeur moyenne des paramètres ($\xi_1 = 0$ et $\xi_2 = 0$). On peut remarquer que dans ce cas, le joint est en compression, il n'y a donc pas de risque de perte d'étanchéité.

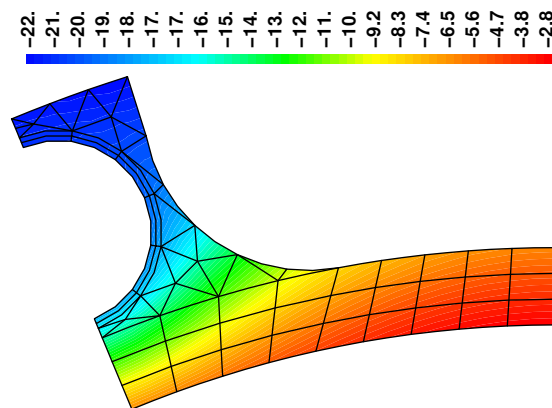


FIG. 4.10 – Effort normal sur le joint pour la valeur moyenne des coefficients

Le calcul pour le premier jeu de paramètres (350 itérations) dure 150s (CPU). Alors, il faut seulement 253s (CPU) pour faire les 90 calculs restants (pour un total de 585 itérations).

La figure 4.11 présente la surface de réponse obtenue pour la pression maximale sur le joint.

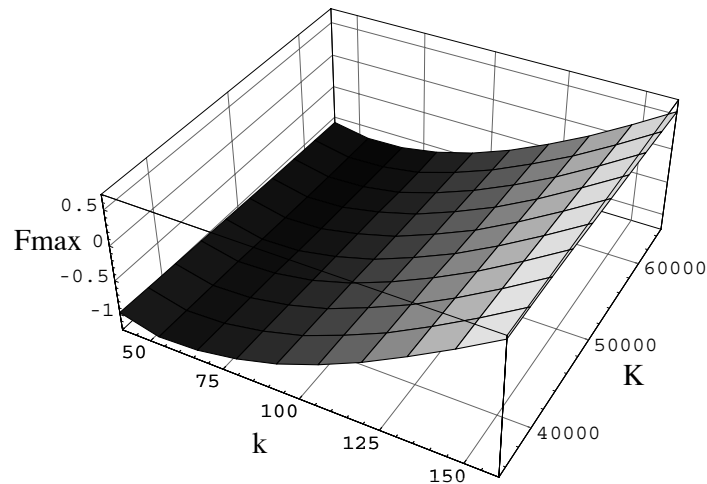


FIG. 4.11 – Surface de réponse de la pression maximale sur le joint

4.4.2 Approche par expansion polynomiale

Pour ce problème à deux variables aléatoires, un chaos polynomial d'ordre 3 est utilisé. C'est-à-dire que $P = 9$ et que 10 fonctions de base sont utilisées. Il y a donc 237600 inconnues. Il faut 1300s (CPU) pour réaliser les 310 itérations nécessaires pour obtenir la convergence.

La figure 4.12 présente les trois premiers modes de l'expansion polynomiale. Les échelles ont été adaptées pour permettre de comparer chaque mode.

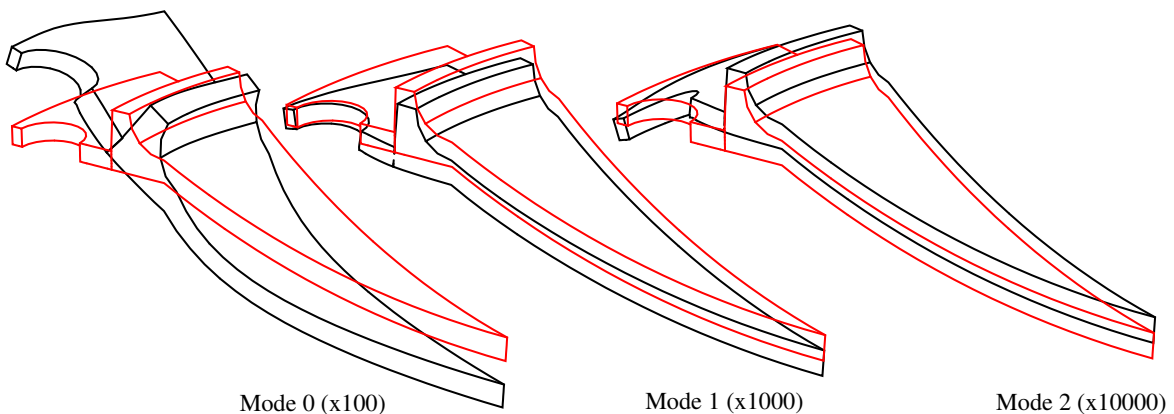


FIG. 4.12 – Trois premiers modes de l'expansion polynomiale (avec échelle adaptée)

4.4.3 Comparaison des deux approches

La figure 4.13 présente la fonction densité de probabilité de l'effort maximal sur le joint obtenue par les deux approches (chaos polynomiale en ligne et multi-résolution en histogramme). On peut voir qu'il y a risque d'obtention de traction sur le joint dans cette configuration. Cela veut dire qu'il y a possibilité de perte d'étanchéité.

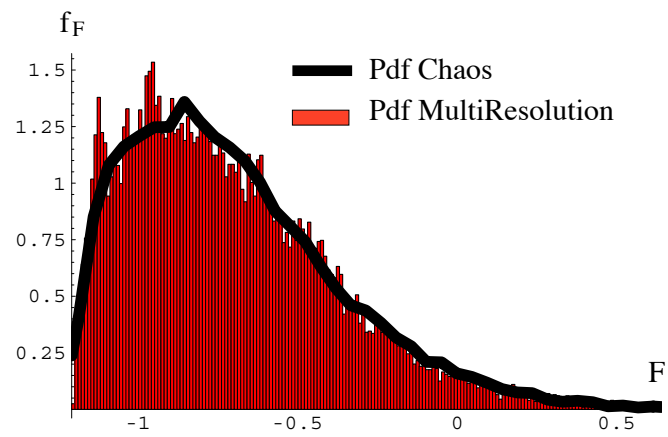


FIG. 4.13 – Fonctions densité de probabilité de l'effort maximal sur le joint obtenues par les deux approches proposées

Les deux résultats sont très proches. L'approche par multi-résolution présente ici un temps de calcul inférieur à l'approche par chaos polynomial.

Conclusions

Les travaux présentés dans ce mémoire concerne le dimensionnement d'assemblages de structures mécaniques incluant des liaisons à comportement plus ou moins complexes (contact frottant, collages, ... avec paramètres incertains). Plusieurs outils sont proposés pour une simulation numérique efficace du comportement non-linéaire et incertain de tels assemblage. Ces outils restent délibérément simples et ont vocation à être utilisés en bureau d'études dans le domaine du calcul de structures.

Ces études s'articulent autour de deux éléments de base. Le premier est une technique généraliste de résolution (la LATIN méthode) appliquée efficacement aux situations particulières de ces assemblages. Le deuxième est la généralisation de la notion d'interface pour la représentation de tout type de liaison dans un assemblage.

Comme cela a déjà été observé pour d'autres situations, la LATIN méthode est une technique efficace et robuste et dont les extensions peuvent être multiples. C'est l'emploi de cette technique spécifique pour ces problèmes d'assemblage qui permet une extension simple à tous types de comportement de liaison et une extension à la prise en compte du caractère indéterminé du problème. Le développement de modèle d'interface pour des modes d'assemblages complexes (tel que le collage) me semble être le seul moyen de prendre en compte ces types de liaison dans la simulation numérique en bureau d'études. L'identification de tels modèles est délicate mais devrait être rendue plus simple par les possibilités expérimentales modernes telle la mesure de champs, par exemple. Les techniques d'introduction des incertitudes dans le comportement des liaisons présentées ici semblent très prometteuses. Elles répondent à une attente industrielle réelle et forte.

Les extensions possibles de ce travail sont très nombreuses. Certaines, comme l'introduction d'une vision multi-échelle de l'assemblage, ont déjà été réalisées en 2D dans les travaux de O. Loiseau et A. Nouy au LMT Cachan. D'autres sont en cours dans le cadre de travaux de thèse. Elles se situent dans le cadre de l'introduction d'une description multi-échelle de l'assemblage avec enrichissement local (thèse de P.A. Guidault, Dassault), du développement et de l'identification de modèles d'interface (thèse de S. De Barros, Brésil) ou bien de l'application de ces techniques à des situations plus complexes d'assemblages (thèse de D. Terroba, Bic Services).

Les recherches dont les conclusions font l'objet de ce mémoire ont été réalisées en partie au LMT de l'ENS de Cachan et en partie au LEMA de l'Université de Versailles. Les travaux sur la méthode LATIN, réalisés au LMT Cachan jusqu'en 2002 et en collaboration avec P.A. Boucard et C. Blanzé du LMT Cachan depuis ont toujours été conduits dans le cadre de collaborations industrielles (EADS, CEA, Dassault, ...). Les travaux de l'équipe collage que j'anime au LEMA sont menés au travers de multiples collaborations industrielles ou scientifiques (ACI « Jeunes Chercheurs », projet « FEDER », projet Franco-Italien « Galilée », GdR « Ondes », ...). Les études sur les problèmes de contact et de frottement se font dans le cadre du groupe de travail de l'AFM/CSMA « Méthodes Numériques pour les problèmes de contact » que je co-anime avec D. Dureisseix. « Collaboration » a toujours été le maître mot de mon travail d'enseignant-chercheur.

Bibliographie

- [Alfano et Crisfield 01] Alfano G. et Crisfield M., Finite element models for the delamination analysis of composite structures : mechanical and computational issues, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, vol. 50, 2001, pp. 1701–1736. 23
- [Alfano et Crisfield 03] Alfano G. et Crisfield M., Solution strategies for the delamination analysis based on a combination of local-control arc-length and line searches, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, vol. 58, 2003, pp. 999–1048. 23
- [Alfano et Rosati 03] Alfano G. et Rosati L., Analysis of interface debonding through a damage/viscoplastic cohesive zone model, *VII International Conference on Computational Plasticity (COMPLAS), Barcelone, 2003.* 23
- [Alfano et al. 04] Alfano G., De Barros S., Champaney L. et Valoroso N., Comparison between two cohesive-zone models for the analysis of interface debonding, *proc. European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering, ECCOMAS 2004, Jyvaskyla, Finland, 24-28 July, 2004.* 23
- [Allix et Ladevèze 92] Allix O. et Ladevèze P., Interlaminar interface modelling for the prediction of delamination, *Int. J. Composite Struct.*, vol. 22, n° 4, 1992, pp. 235–242. 23
- [Ballard 05] Ballard P., Elastic problems with arbitrary small coulomb friction at the boundary admit, in general, a continuum of solutions, 2005, en préparation. 6
- [Bavestrello 99] Bavestrello H., *Multi-résolution avec la LATIN method*, Mémoire de DEA, DEA S3M, ENS de Cachan, juin 1999. 31
- [Benaroya et M. 98] Benaroya H. et M. Rehak, Finite element methods in probabilistic structural analysis : A selective review, *Applied Mechanics Review*, vol. 41, n° 5, 1998, pp. 201–213. 29
- [Blanzé 03] Blanzé C., *Stratégies de calcul de structures en présence de paramètres incertains*, Thèse d’habilitation à diriger des recherches, ENS de Cahan, 2003. 40
- [Blanzé et al. 00] Blanzé C., Champaney L. et Védrine P., Contact problems in the design of a superconducting quadrupole prototype, *Engineering Computations*, vol. 17, n° 2-3, 2000, pp. 136–153. 34
- [Boucard 03] Boucard P.A., *Sur les stratégies de calcul multirésolution en mécanique des structures*, Thèse d’habilitation à diriger des recherches, ENS de Cahan, 2003. 31
- [Boucard et Champaney 04] Boucard P.A. et Champaney L., Approche multirésolution pour l’étude paramétrique d’assemblages par contact et frottement, *Revue Europ. des Eléments Finis*, 2004, accepté, à paraître. 32
- [Busson 98] Busson D., *Modélisation de la tenue des collages thermostructuraux*, Mémoire de DEA, DEA S3M, ENS de Cachan, juin 1998. 22

- [Cea 03] CEA, *CAST3M user manual*, <http://www-cast3m.cea.fr>, 2003. 23
- [Chaboche et al. 01] Chaboche J.L., Feyel F. et Monerie Y., Interface debonding models : a viscous regularization with a limited rate dependency, *Int. J. Sol. Struct.*, vol. 38, n° 18, 2001, pp. 3127–3160. 21
- [Champany 96] Champany L., *Une nouvelle approche modulaire pour l'analyse d'assemblages de structures tridimensionnelles*, Thèse de 3ème cycle, ENS de Cachan, 1996. 3, 7, 13
- [Champany 00] Champany L., *Manuel d'utilisation du logiciel cofast*, LMT Cachan, janvier 2000, <http://wwwpriv.lmt.ens-cachan.fr/cofast3d>. 14
- [Champany 03] Champany L., Simulation éléments finis pour la propagation d'onde en présence de fissures, avril 2003, Groupe de Recherche "Propagation d'onde en milieux hétérogènes", LMM, Paris, France. 21
- [Champany et Dureisseix 00] Champany L. et Dureisseix D., Calcul de structures et parallélisme : un bilan et quelques développements récents, *Mécanique et Industries*, vol. 1, n° 1, 2000, pp. 43–60. 15
- [Champany et Valoroso 03] Champany L. et Valoroso N., Delamination analysis of adhesively bonded joints using damaging viscoplasticity interfaces, *VII International Conference on Computational Plasticity (COMPLAS)*, Barcelone, 2003. 22
- [Champany et al. 96] Champany L., Cognard J.Y., Dureisseix D. et Ladevèze P., Numerical experimentations of parallel strategies in structural non-linear analysis, *Calculateurs Parallèles*, vol. 8, n° 2, 1996, pp. 245–250. 15
- [Champany et al. 97] Champany L., Cognard J.Y., Dureisseix d. et ladevèze p., Large scale applications on parallel computers of a mixed domain decomposition method, *Computational Mechanics*, vol. 19, n° 4, 1997, pp. 253–263. 15
- [Champany et al. 99] Champany L., Cognard J.Y. et Ladevèze P., Modular analysis of assemblages of 3d structures with unilateral conditions, *Computers and Structures*, vol. 73, n° 1-5, 1999, pp. 249–266. 34
- [De Barros et Champany 03] De Barros S. et Champany L., *Modèle numérique pour les interfaces collées*, Rapport final, Projet FEDER-Hispano Suiza/LAUE-Le Havre, mai 2003. 21
- [Ghanem 99] Ghanem r., Ingredient for a general purpose stochastic finite elements implementation, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, vol. 168, 1999, pp. 19–34. 41
- [Ghanem et Kruger 96] Ghanem R.G. et Kruger R., Numerical solution of spectral stochastic finite element systems, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, vol. 129, 1996, pp. 289–303. 41
- [Ghanem et Spanos 91] Ghanem R.G. et Spanos P.D., *Stochastic finite elements : a spectral approach*, Berlin, Springer, 1991. 4
- [Guidault 02] Guidault P.A., *Sur une stratégie de calcul multiéchelle autorisant des zooms structuraux.*, Mémoire de DEA, DEA TACS, ENS de Cachan, 2002. 15
- [Guidault et al. 04] Guidault P.A., Allix A., Champany L. et Navarro J.P., A micro-macro approach for crack propagation with local enrichment, *Proc. 7th Int. Conf on Computational Structures Technology, CST 2004*, Lisbon, Portugal, 7-10 September, 2004. 15

- [Guitard 00] Guitard L., *Modélisation de l'endommagement dans les structures 4D*, Thèse de 3ème cycle, ENS de Cachan, 2000. 18
- [Hibbit, karlson and sorensen, inc. 02] Hibbit, Karlson and Sorensen, INC., *ABAQUS/Standard, version 6.3, Theory Manual*, 2002. 33
- [Hild 03] Hild P., An example of nonuniqueness for the continuous static unilateral contact model with coulomb friction, *C.R.A.S., Série I*, vol. 337, 2003, pp. 685–688. 6
- [Iman *et al.* 81] Iman R.L., Helton J.C. et Campbell J.E., An approach to sensitivity analysis of computer models : Part i. iintroduction, input variable selection and preliminary variable assessment., *J. Quality Technology*, vol. 13, 1981, pp. 174–183. 29
- [Klarbring 91] Klarbring a., Derivation of a model of adhesively bonded joints by the asymptotic expansion method, *Int. J. Eng. Sci.*, vol. 29, n° 4, 1991, pp. 493–512. 22
- [Ladevèze 99] Ladevèze P., *Nonlinear Computational Structural Mechanics - New Approaches and Non-Incremental Methods of Calculation*, Springer Verlag, 1999. 3, 6, 10, 11
- [Ladevèze et Pelle 01] Ladevèze P. et Pelle J.P., *La maîtrise du calcul en mécanique linéaire et non linéaire*, Hermes-Lavoisier, 2001. 2
- [Ladevèze *et al.* 00] Ladevèze P., Lemoussu H. et Boucard P., A modular approach to 3d impact computation with frictional contact, *Computers and Structures*, vol. 78, n° 1-3, 2000, pp. 45–52. 14
- [Ladevèze et Dureisseix 99] Ladevèze P. et Dureisseix P., Une nouvelle stratégie de calcul micro/macro en mécanique des structures, *C.R.A.S., Série Iib*, vol. 327, 1999, pp. 1237–1244. 15
- [Ladevèze et Letombe 00] Ladevèze P. et Letombe S., Recent advances on an anisotropic damage theory including unilateral effects, *International bimestre on damage mechanics - Symposium on Continuous Damage and Fracture, Cachan (France)*, éd. par Elsevier, 2000. 18
- [Ladevèze et Nouy 03] Ladevèze P. et Nouy A., On a multiscale computational strategy with time and space homogenization for structural mechanics, *Comp. Meth. Appl. Mech. & Engng*, vol. 192, n° 28/30, 2003, pp. 3061–3088. 15
- [Ladevèze *et al.* 00] Ladevèze P., Guitard L., Champaney L. et Aubard X., Debond modeling for multidirectional composites, *Compt. Methods. Appl. Mech. Engrg.*, vol. 185, 2000, pp. 109–122. 18
- [Ladevèze *et al.* 01] Ladevèze P., O. Loiseau et Dureisseix P., A micro-macro and parallel computational strategy for highly heterogeneous structures, *Int. J. Num. Meth. Engng*, vol. 52, n° 1/2, 2001, pp. 121–138. 15
- [Legay et Combescure 02] Legay A. et Combescure A., Efficient algorithms for parametric non-linear instability analysis, *Int. J. Non-Linear Mechanics*, vol. 37, n° 4-5, 2002, pp. 709–722. 29
- [Lemoussu 98] Lemoussu H., *Une nouvelle approche pour l'analyse et le calcul d'assemblages soumis à un choc*, Thèse de 3ème cycle, ENS de Cachan, 1998. 14, 20
- [Loiseau 01] Loiseau O., *Une stratégie de calcul multiéchelle pour les structures hétérogènes*, Thèse de 3ème cycle, ENS de Cachan, octobre 2001. 15

- [Pendola *et al.* 00] Pendola M., Mohamed A., Lemaire M. et Hornet P., Combination of finite element and reliability methods in nonlinear fracture mechanics, *Reliability Engineering and System Safety*, vol. 70, 2000, pp. 15–17. 29
- [Schellekens et De Borst 93] Schellekens J.C.J. et De Borst R., On the numerical integration of interface elements, *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 36, 1993, pp. 43–66. 19
- [Soize 03] Soize C., Random matrix theory and non-parametric model of random uncertainties in vibration analysis, *J. Sound Vibrations*, vol. 263, 2003, pp. 893–916. 28
- [Sudret et Der Kiureghian 02] Sudret B. et Der Kiureghian A., Comparison of finite element reliability methods, *Probabilistic Engineering Mechanics*, vol. 17, 2002, pp. 337–348. 28
- [Tvergaard et Hutchinson 92] Tvergaard V. et Hutchinson J.W., The relation between crack growth resistance and fracture process parameters in elastic-plastic solids, *J. Mech. and Phys. Solids*, vol. 40, n° 6, 1992, pp. 1377–1397. 23
- [Valoroso et Champaney 04] Valoroso N. et Champaney L., A damage model for simulating decohesion in adhesively bonded assemblies, *proc. European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering, ECCOMAS 2004*, Jyvaskyla, Finland, 24-28 July, 2004. 22
- [Veneziano *et al.* 03] Veneziano D., Casciati F. et Faravelli L., Method of seismic fragility for complicated systems, *Proceedings of the 2nd Specialistic Meeting on Probabilistic Methods in Seismic Risk Assessment for NPP, Committee on Safety of Nuclear Installations (CSNI), Livermore, California*, 2003. 30
- [Vlasie et Rousseau 03] Vlasie V. et Rousseau M., Acoustical validation of the rheological model for structural bond, *Wave Motion*, vol. 37, n° 4, 2003, pp. 333–349. 22, 23

Annexe A

Preprint : Nouvelle approche pour le calcul des assemblages

CONTACT PROBLEMS IN THE DESIGN OF A SUPERCONDUCTING QUADRUPOLE PROTOTYPE

Claude BLANZE*, Laurent CHAMPANEY* and Pierre VEDRINE**

* LMT Cachan

61, Av. du Pt. Wilson - 94235 Cachan Cedex - FRANCE

E-mail: Claude.Blanze@lmt.ens-cachan.fr

** CEA Saclay - DSM/DPANIA/STCM

91191 Gif-sur-Yvette Cedex - FRANCE

E-mail: vedrine@dapia.cea.fr

ABSTRACT

This paper focuses on the design of a superconducting quadrupole prototype. This structure includes many frictional contact zones, and the loading conditions are complex (mechanical, thermal and magnetic). A dedicated computational strategy, based on both a decomposition of the structure and an iterative resolution scheme, has been applied to solve this problem. A simplified approach is used to take complex loading conditions into account. The initial set of results, which are presented herein, demonstrates the interest of this approach with respect to classical finite element methods. This study was conducted within the framework of a joint research contract between the CEA (DSM/DPANIA/STCM) and LMT-Cachan.

Keywords: Contact, Friction, Substructuring, Iterative Scheme, Quadrupole

INTRODUCTION

A superconducting quadrupole constitutes a part of the high-energy accelerator built by the CEA in collaboration with the CERN. Magnetic coils must be adequately prestressed in order to withstand the magnetic forces without "quenching". The mechanical model of such a complex structural assembly must take into account the frictional contact between the various components so as to prevent against both displacement and warm peak.

The behavior of an assembly of three-dimensional elastic structures can be heavily nonlinear when frictional contact is taken into consideration (Kik., 1988). Classical Finite Element techniques apply an iterative process to the whole problem, an approach that could prove quite expensive, especially when the number of contact zones turns out to be rather high (Ala., 1991 ; Per., 1992 ; Cha., 1998 ; Rao., 1995). For this study, we will be using a modular approach which is particularly efficient when the structure is globally linear and when the nonlinearities have been localized on the connections. This method is based on two distinct approaches: the first introduces a partitioning of the structure into two mechanical entities - substructures and interfaces - while the second employs an iterative and completely parallel scheme.

This paper recalls the main aspects of both the approach (that were presented in (Bla., 1996)) and the treatment of contact problems. It presents a simplified technique for incorporating complex loading paths. The approach is specifically applied to the design of the quadrupole prototype; moreover, many computations are carried out in order to study the influence of friction parameters on the coil's stress state. A comparison with results from a classical finite element code demonstrates the value of this approach for such multi-computational problems.

PRESENTATION OF THE PROBLEM

The L.H.C. (Large Hadron Collider)

The L.H.C. is an accelerator which subjects protons to "head-on" collisions at higher levels of energy (14 TeV) than ever attained before. It will be built by the CERN and is to consist of two "colliding" synchrotrons, capable of accelerating protons to 7 on 7 TeV, after which the beams will counter-rotate for several hours, thereby producing collisions at the experimental stage.

High-energy L.H.C. beams require high magnetic bending fields. In order to bend 7 TeV protons around the ring, the L.H.C. dipoles and quadrupoles must be capable of producing fields of 8.2 T. Superconductivity has made this requirement feasible. The CERN and CEA/Saclay have established a joint program to carry out the design, construction and testing of a superconducting L.H.C. quadrupole prototype.

L.H.C. magnet coils

Two magnetic channels have been incorporated into a single iron yoke and cryostat and then cooled with a helium superfluid in order to attain the very high guide field required (Figure 1). The L.H.C. magnet coils tend to be long, approximately 14 meters, with an inner diameter of 56 mm; they are made of copper-clad Niobium-Titanium cables. The insulation is to be composed of two layers of Kapton.

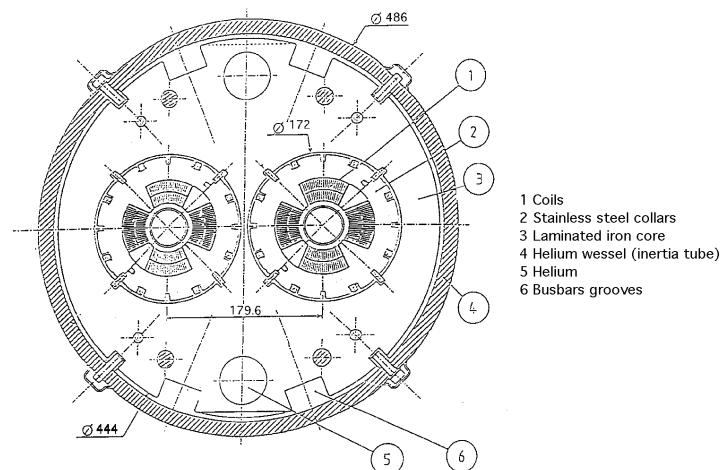


Figure 1: Quadrupole cross-section

The electromagnetic forces in the quadrupoles are contained by the collar structure. Collars are made of austenitic steel laminations of 2 mm in thickness. The pairs of half-collars are alternately turned by 90 degrees and completed by two separate pole pieces. Both the keying and prestressing of the assembly are conducted by eight lines of wedge-shaped stainless steel keys, which are inserted progressively into the grooves on the outside of the collars. Once the coil-collar assemblies have been prepared and the coil interconnections completed, the yoke is positioned around the two units. In order to stiffen the entire yoke assembly, a so-called inertia tube is placed around the yoke. This tube also serves as the helium vessel.

Mechanical problem

The mechanical structure of the quadrupoles has been designed both to withstand the strong forces being generated in the magnet and to limit, to the greatest extent possible, coil deformation over the entire operating range. The materials used for the most highly-stressed components therefore exhibit a high load-bearing capacity, high elastic moduli, a good level of fatigue endurance and good behavioral characteristics at cryogenic temperatures of as low as 1.9 K.

Whenever current is flowing in the cables, the coils must be under compressive stress to avoid the appearance of sudden cracks or movements. Coil displacements and deformations must be limited as much as possible. In order to satisfy these conditions, the relative dimensions of the structural components, the choice of materials and the level of prestressing all have to be carefully determined. Furthermore, the peak compressive stress in the coils at room temperature is to be minimized so as to avoid any creep of either the insulation or the copper. The main purpose herein is to optimize the adequate level of azimuthal prestress to avoid the appearance of coil movements during the magnet's operations. It is thus necessary to take frictional contact into account during the three following load sequences:

- collaring (prestress);
- cooling (from 293°K to 1.9°K); and
- excitation (at the nominal field).

PRESENTATION OF THE COMPUTATIONAL STRATEGY

Purpose

For this study, we have used a modular approach which is dedicated to the analysis of such complex situations involving 3D assemblies. It is referred to as the "COFAST3D" (COntact and Friction in Assemblies of 3D STructures) approach. The COFAST3D approach is based on both a formulation and a strategy which have been adapted to the use of parallel computers (Lad., 1998 ; Cha., 1997). With respect to the work conducted herein, this parallelism is being applied, above all else, in order to achieve a high level of modularity and flexibility in the problem description. Parallelism also leads to reducing the size of the models as well as the computational costs of their resolution, even when the approach is implemented on sequential computers.

A partitioning of the structure is performed so as to break down the problem from its global formulation; partitioning involves two distinct mechanical entities: substructures and interfaces. Each substructure is considered as a separate structure on its own (in this case, an elastic one) which only communicates with its adjoining interfaces. Interfaces, on the other hand, constitute the key elements to this approach; they are two-dimensional entities which exhibit their own individual behavior and which can be represented in a mixed manner on the displacement and force fields defined on both sides of the interface (Bla., 1996).

When only perfect connections are considered, this algorithm can be obtained by other approaches such as in (Lio., 1990) or (Glo., 1990). In the case of frictional contact conditions it is not very far from the augmented lagragian algorithms as presented in (Sim., 1985) or (Zar., 1999).

The COFAST3D approach

Decomposition of the structure

When considering an assembly of various components using linkage elements (bolts, screws, rivets, joints, etc.), a decomposition can be introduced. The components are separated, and the interfaces generated serve to model the connections existing between these elements: contact, friction, etc. Each component can also be separated into substructures in order to reduce the size of the corresponding model (Figure 2).

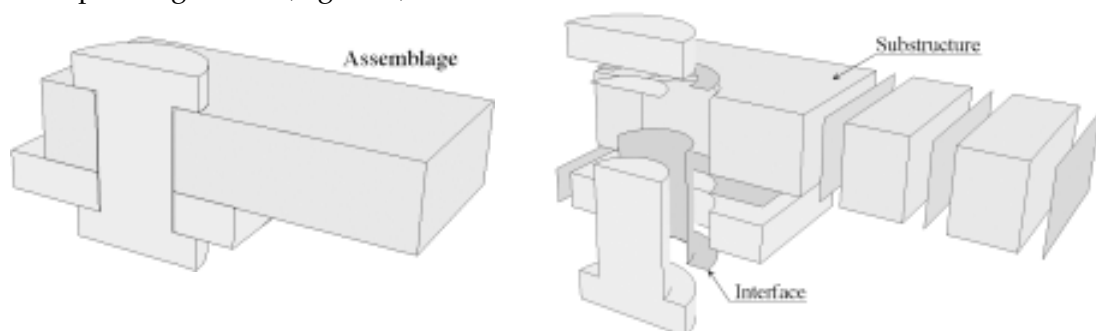


Figure 2: Decomposition of an assembly

Let the assembly be denoted as Ω , and the substructures as Ω^E , $\Omega^{E'}$, etc. ; $\gamma^{EE'}$ represents the interface existing between Ω^E and $\Omega^{E'}$. A displacement field \underline{W}^E and

a surface traction density field \underline{F}^E are defined on each side of an interface (\underline{F}^E represents the action of the interface on the substructure Ω^E).

Problem on one substructure

Since a given substructure Ω^E communicates only with interfaces, the problem to be solved consists of finding $\{\underline{\sigma}^E, \underline{U}^E\}$ that satisfies the following:

- Kinematic admissibility with the displacement on the interfaces:

$$\underline{U}^E|_{\partial\Omega^E} = \underline{W}^E, \underline{U}^E \in \mathbf{U}^E = (\underline{U}^* \text{ "regular" in } \Omega^E), \quad (1)$$

- Equilibrium equation under the force field on the interfaces:

$$\forall \underline{U}^* \in \mathbf{U}^{E,0} = (\underline{U}^*|_{\partial\Omega^E} = 0, \text{ "regular"})$$

$$\int_{\Omega^E} \text{Tr}[\underline{\sigma}^E \cdot \underline{\varepsilon}(\underline{U}^*)] d\Omega = \int_{\Omega^E} \underline{f}_d \cdot \underline{U}^* d\Omega + \int_{\partial\Omega^E} \underline{F}^E \cdot \underline{U}^* dS, \quad (2)$$

- Constitutive law (linear elasticity):

$$\underline{\sigma}^E = \mathbf{K}\underline{\varepsilon}(\underline{U}^E) \quad (\mathbf{K}: \text{Hooke's operator}), \quad (3)$$

where \underline{f}_d is the prescribed body forces, \underline{U}^E the displacement field being sought in Ω^E , $\underline{\sigma}^E$ the stress field being sought in Ω^E , and $\underline{\varepsilon}(\underline{U}^*)$ the strain field generated by the displacement \underline{U}^* .

Problem on one interface

The problem to be solved on one interface consists of finding both the force and displacement fields on both sides that satisfy the behavior of the modeled connection. The problem can then be expressed as a constitutive relation:

$$R(\underline{W}^E, \underline{F}^E, \underline{W}^{E'}, \underline{F}^{E'}) = 0 \quad (4)$$

For example, the relation that describes a perfect connection between two substructures Ω^E and $\Omega^{E'}$ is:

$$\underline{W}^E = \underline{W}^{E'}, \text{ continuity of displacement} \quad (5)$$

$$\underline{F}^E + \underline{F}^{E'} = 0, \text{ equilibrium of forces} \quad (6)$$

Iterative scheme

The iterative resolution scheme employed is based on the Large Time INcrement method ("LATIN" method) proposed by P. Ladevèze (Lad., 1998). The case presented herein refers to a degenerate condition of this method, whereby only the final configuration is being sought and whereby time is not taken into consideration. The LATIN method separates out the problem's difficulties; it enables avoiding the simultaneity of the problem's global and nonlinear aspects. Thus, it incorporates the mechanical properties of the equations in order to divide equations into two groups:

- local in space variable, and possibly nonlinear, equations; and
- linear and possibly global in space variable equations.

These groups serve to define two subspaces of elements, s , which denotes the set of unknowns for the entire problem. Since the only nonlinearities being studied are those defined on the interfaces and in order to obtain independent global linear problems on each substructure, the two subspaces are to be defined as follows:

$$\mathbf{A}_d = \{ s \in S \text{ satisfying } \forall \Omega^E: \begin{aligned} &\bullet \text{ the kinematic admissibility:} && \text{eq. (1)} \\ &\bullet \text{ the equilibrium equation:} && \text{eq. (2)} \\ &\bullet \text{ the constitutive law on } \Omega^E: && \text{eq. (3) } \end{aligned} \}$$

$$\Gamma = \{ s \in S \text{ satisfying } \forall M \in \gamma^{EE'}: \begin{aligned} &\bullet \text{ constitutive relation:} && \text{eq. (4) } \end{aligned} \}$$

The problem then consists of finding an element s_{0l} that satisfies both the behavior of the substructures ($s \in \mathbf{A}_d$) and the behavior of the interfaces ($s \in \Gamma$). The LARge Time INcrement method begins with s_0 , an element of \mathbf{A}_d , and builds elements s , belonging to Γ and \mathbf{A}_d , successively until reaching the solution s_{0l} . Since a substructure only communicates with interfaces, the initial solution $s_0 = 0$ is an element of \mathbf{A}_d .

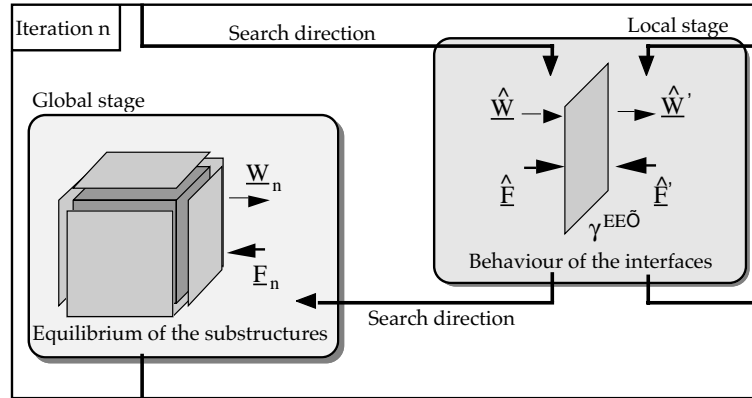


Figure 3: Representation of iteration n

Each iteration, i.e. the building of a new element s_{n+1} of \mathbf{A}_d from a given one s_n , requires two stages: the local stage and the linear global stage (Figure 3). The search directions used are:

$$\hat{F}^E - F_n^E = k_0 (\hat{W}^E - W_n^E) \quad \text{for the local stage}$$

$$F_{n+1}^E - \hat{F}^E = -k_0 (W_{n+1}^E - \hat{W}^E) \quad \text{for the global stage}$$

where the operator k_0 is taken so that $k_0 = k I_d$, where k is a scalar parameter of the method.

The local stage leads to independent nonlinear problems on each point of the interfaces, whereas the linear global stage leads to independent classical linear problems of structural analysis with a density of body forces and a density of surface traction on the substructures. These latter problems are then solved with a finite element discretization of the substructures. The discretized form of the equilibrium equation becomes:

$$[[K_e^E] + [h^E]]\{u_{n+1}^E\} = \{f\}, \quad (7)$$

where $[K_e^E]$ is the classical F.E. stiffness matrix and $[h^E]$ is a boundary stiffness matrix expressed using k_0 . $\{f\}$ is a force vector expressed by the displacement and force fields on the interfaces. It should be pointed out that the stiffness matrix of each substructure remains constant during the iterative process and thus gets factorized only once upon the first iteration.

Frictional contact conditions

In the case of a frictional contact connection between Ω^E and $\Omega^{E'}$, the resolution of the local stage is completely explicit. The solution along the normal direction (Table II), as well as the solution in the tangential plane (Table III), are calculated. As regards the perfect connection, the use of contact connections gradually increases the computational costs involved.

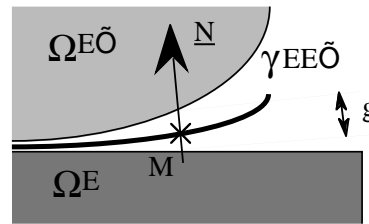


Figure 4: Contact

On the part of the boundary which is supposedly known as being susceptible to contact, \underline{N} denotes the external unit vector to Ω^E (Figure 4). The displacement field \underline{W}^E and the surface density traction \underline{F}^E can be written as:

$$\underline{W}^E = (\underline{N}\underline{W}^E)\underline{N} + \Pi\underline{W}^E \text{ and } \underline{F}^E = (\underline{N}\underline{F}^E)\underline{N} + \Pi\underline{F}^E$$

where Π denotes the tangential projection operator. μ denotes the Coulomb friction coefficient, which is assumed to be both constant and positive. For static or monotonous quasi-static cases, a displacement formulation is used (Duv., 1972) (Table I).

Separation:	If $(\hat{W}^{E'} - \hat{W}^E)\underline{N} > 0$, then $\hat{F}^E = \hat{F}^{E'} = 0$.
Contact:	If $(\hat{W}^{E'} - \hat{W}^E)\underline{N} = 0$, then $\hat{F}^{E'} + \hat{F}^E = 0$ and $\hat{F}^E \underline{N} \leq 0$.
Two cases are possible:	
<i>Sticking:</i>	If $\ \Pi\hat{F}^E\ < \mu \hat{F}^E \underline{N} $, then $\Pi(\hat{W}^{E'} - \hat{W}^E) = 0$
<i>Sliding:</i>	If $\ \Pi\hat{F}^E\ = \mu \hat{F}^E \underline{N} $ then $\lambda > 0$ exists
	such that that $\Pi(\hat{W}^{E'} - \hat{W}^E) = -\lambda\Pi\hat{F}^E$

Table I: Static formulation of frictional contact

Gap conditions can be easily included as well.

The search directions on each structure are as follows:

$$\hat{F}^E - \underline{F}_n^E = k(\hat{W}^E - \underline{W}_n^E)$$

$$\hat{F}^{E'} - \underline{F}_n^{E'} = k(\hat{W}^{E'} - \underline{W}_n^{E'})$$

Along the normal direction, a scalar contact indicator C_n (computed from the known solution \mathbf{s}_n) yields the solution:

$$C_n = \frac{1}{2} (\hat{W}^{E'} - \hat{W}^E) \underline{N} - \frac{1}{2k} (\hat{F}^{E'} - \hat{F}^E) \underline{N} = \frac{1}{2} (W_n^{E'} - W_n^E) \underline{N} - \frac{1}{2k} (F_n^{E'} - F_n^E) \underline{N}$$

Separation : $C_n > 0$ $((\hat{W}^{E'} - \hat{W}^E) \underline{N} > 0 \text{ and } \underline{N} \hat{F}^E = \underline{N} \hat{F}^{E'} = 0)$	Contact : $C_n \leq 0$ $((\hat{W}^{E'} - \hat{W}^E) \underline{N} = 0 \text{ and } \underline{N} \hat{F}^E = -\underline{N} \hat{F}^{E'} \leq 0)$
$\hat{F}^E = \hat{F}^{E'} = 0$ $\hat{W}^E = W_n^E - \frac{1}{k} F_n^E$ $\hat{W}^{E'} = W_n^{E'} - \frac{1}{k} F_n^{E'}$	$\hat{F}^E \underline{N} = -\hat{F}^{E'} \underline{N} = k C_n$ $\hat{W}^E \underline{N} = \frac{1}{2} \{ (W_n^E + W_n^{E'}) - \frac{1}{k} (F_n^E + F_n^{E'}) \} \underline{N}$ $\hat{W}^{E'} \underline{N} = \hat{W}^E \underline{N}$

Table II: Contact resolution

In the contact case, a sliding vectorial indicator, computed in the same fashion as C_n , gives the solution on the tangential components ($g = \mu |\hat{F}^E \underline{N}|$):

$$\underline{G}_n = \frac{1}{2} k \Pi (\hat{W}^{E'} - \hat{W}^E) - \frac{1}{2} \Pi (\hat{F}^{E'} - \hat{F}^E) = \frac{1}{2} k \Pi (W_n^{E'} - W_n^E) - \frac{1}{2} \Pi (F_n^{E'} - F_n^E)$$

Sticking : $\ \underline{G}_n\ < g$ $(\Pi (\hat{W}^{E'} - \hat{W}^E) = 0 \text{ and } \ \Pi \hat{F}^E\ = -\ \Pi \hat{F}^{E'}\ \leq g)$	Sliding : $\ \underline{G}_n\ \geq g$ $(\Pi (\hat{W}^{E'} - \hat{W}^E) = -\lambda \Pi \hat{F}^E \text{ and } \ \Pi \hat{F}^E\ = g)$
$\Pi \hat{F}^E = -\Pi \hat{F}^{E'} = \underline{G}_n$ $\Pi \hat{W}^E = \Pi W_n^E + \frac{1}{k} \Pi (\hat{F}^E - F_n^E)$ $\Pi \hat{W}^{E'} = \Pi \hat{W}^E$	$\Pi \hat{F}^E = -\Pi \hat{F}^{E'} = g \frac{\underline{G}_n}{\ \underline{G}_n\ }$ $\Pi \hat{W}^E = \Pi W_n^E + \frac{1}{k} \Pi (\hat{F}^E - F_n^E)$ $\Pi \hat{W}^{E'} = \Pi W_n^{E'} + \frac{1}{k} \Pi (\hat{F}^{E'} - F_n^{E'})$

Table III: Friction resolution

VALIDATION EXAMPLE

The well-known validation plane strain example presented herein concerns the treatment of frictional contact. An elastic specimen is submitted to both biaxial compression and unilateral contact with friction ($\mu = 1$) using a rigid part (Figure 5). This example is interesting because the contact zone is divided into a separation part, a sliding part and a sticking part (Figure 6).

The structure is meshed with $32 \times 16 = 512$ four-node elements. The normal and tangential decomposition of forces is then compared to that provided by the industrial F.E. code ABAQUS (Hib., 1996) (Figure 7). The force distributions are equivalent for the two computations.

These results are equivalent to those provided in (Fen., 1995) and (Rao., 1998).

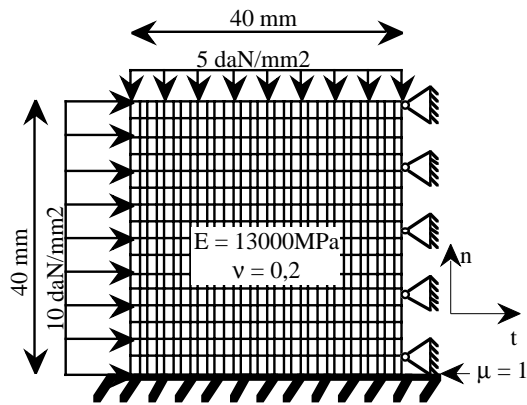


Figure 5: Problem and mesh

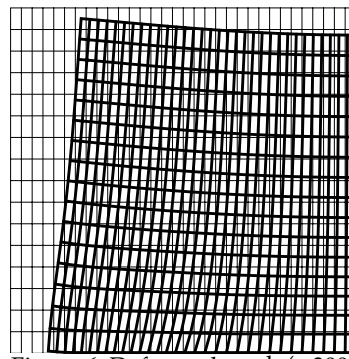


Figure 6: Deformed mesh (x 300)

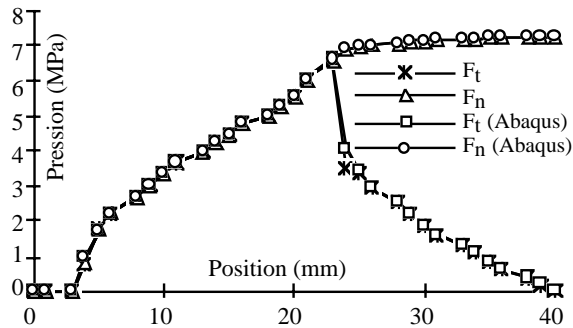


Figure 7: Forces on the contact zone

TAKING MORE COMPLEX LOADING CONDITIONS INTO ACCOUNT

When the quasi-static loading paths become more complex, and especially when unloadings need to be treated, the static treatment of the friction problem presented can lead to an incorrect solution. In the case of the quadrupole prototype, this condition would imply that the three successive loads (prestress, cooling and excitation) are applied simultaneously.

For such conditions, a simplified approach is thus proposed, whereby the loading path is divided into large increments on which a radial loading assessment is conducted. Therefore, only the solution at the end of each large increment is being sought.

Let's consider an initial loading step, which is represented by the external loads f_{d0} (body forces), F_{d0} (prescribed forces) or U_{d0} (prescribed displacements). The solution can then be written as:

$$\begin{array}{l|l} \underline{U}_0, s_0, e_0 & \text{in the different domains.} \\ \underline{W}_0 = \underline{U}_0 & \text{on the connections.} \\ \underline{F}_0 = s_0 \underline{n} & \end{array}$$

The second step is represented by an increment of external loads: Δf_{d0} , ΔF_{d0} or ΔU_{d0} . The solution increment is written as:

$$\begin{array}{l|l} \Delta \underline{U}, \Delta s, \Delta e & \text{in the different domains.} \\ \Delta \underline{W} = \Delta \underline{U} & \text{on the connections.} \\ \Delta \underline{F} = \Delta s \underline{n} & \end{array}$$

The complete solution can thus be expressed as follows:

$$\underline{U} = \underline{U}_0 + \Delta \underline{U}; s = s_0 + \Delta s; \underline{W} = \underline{W}_0 + \Delta \underline{W} \dots$$

Linear problems are solved at the global stage; therefore, these problems can be easily written with the increments of unknowns, without changing the formulation.

On the other hand, nonlinear problems are solved at the local stage. Thus, the results of the previous step do prove necessary.

The unknowns at the local stage are written as:

$$\begin{array}{l} \hat{W}^E = \hat{W}_0^E + \Delta \hat{W}^E \quad \text{and} \quad \hat{W}^{E'} = \hat{W}_0^{E'} + \Delta \hat{W}^{E'} \\ \hat{F}^E = \hat{F}_0^E + \Delta \hat{F}^E \quad \text{and} \quad \hat{F}^{E'} = \hat{F}_0^{E'} + \Delta \hat{F}^{E'} \end{array}$$

and the search directions are:

$$\begin{array}{l} \Delta \hat{F}^E - \Delta F_n^E = k(\Delta \hat{W}^E - \Delta W_n^E) \\ \Delta \hat{F}^{E'} - \Delta F_n^{E'} = k(\Delta \hat{W}^{E'} - \Delta W_n^{E'}) \end{array}$$

The contact problem must be written over the complete set of unknowns:

Separation:	If $(\hat{W}^{E'} - \hat{W}^E) \underline{N} > 0$,	then $\hat{F}^E = \hat{F}^{E'} = 0$.
Contact:	If $(\hat{W}^{E'} - \hat{W}^E) \underline{N} = 0$,	then $\hat{F}^{E'} + \hat{F}^E = 0$ and $\hat{F}^E \underline{N} \leq 0$.
Two cases are possible:		
<i>Sticking:</i>	If $\ \Pi \hat{F}^E\ < \mu \hat{F}^E \underline{N} $,	then $\Pi(\Delta \hat{W}^{E'} - \Delta \hat{W}^E) = 0$.
<i>Sliding:</i>	If $\ \Pi \hat{F}^E\ = \mu \hat{F}^E \underline{N} $,	then $\lambda \geq 0$ exists such $\Pi(\Delta \hat{W}^{E'} - \Delta \hat{W}^E) = -\lambda \Pi \hat{F}^E$

Table IV: Frictional contact conditions over the complete set of unknowns

In an incremental form:

Separation:	If $(\Delta \hat{W}^{E'} - \Delta \hat{W}^E) \underline{N} > -(\hat{W}_0^{E'} - \hat{W}_0^E) \underline{N}$,	then $\Delta \hat{F}^E = -\hat{F}_0^E$.
Contact:	If $(\Delta \hat{W}^{E'} - \Delta \hat{W}^E) \underline{N} = -(\hat{W}_0^{E'} - \hat{W}_0^E) \underline{N}$,	then $\hat{F}^{E'} + \hat{F}^E = -(\hat{F}_0^{E'} + \hat{F}_0^E)$,
Two cases are possible:		
<i>Sticking:</i>	If $\ \Pi(\hat{F}_0^E + \Delta \hat{F}^E)\ < \mu (\hat{F}_0^E + \Delta \hat{F}^E) \underline{N} $	then $\Pi(\Delta \hat{W}^{E'} - \Delta \hat{W}^E) = 0$
<i>Sliding:</i>	If $\ \Pi(\hat{F}_0^E + \Delta \hat{F}^E)\ = \mu (\hat{F}_0^E + \Delta \hat{F}^E) \underline{N} $	then there is $\lambda \geq 0$ such that $\Pi(\Delta \hat{W}^{E'} - \Delta \hat{W}^E) = -\lambda \Pi(\hat{F}_0^E + \Delta \hat{F}^E)$

Table V: Incremental form of frictional contact conditions

The resolution is carried out in the same manner as above with the known indicators C_n and G_n which are:

$$C_n = \left[\begin{array}{l} \frac{1}{2} (\Delta W_n^{E'} - \Delta W_n^E) N - \frac{1}{2k} (\Delta F_n^{E'} - \Delta F_n^E) N + \\ \frac{1}{2} k \Pi (\Delta W_n^{E'} - \Delta W_n^E) - \frac{1}{2} \Pi (\Delta F_n^{E'} - \Delta F_n^E) + \\ \text{(given by the global stage)} \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} \frac{1}{2} (\hat{W}_0^{E'} - \hat{W}_0^E) N - \frac{1}{2k} (\hat{F}_0^{E'} - \hat{F}_0^E) N \\ \frac{1}{2} k \Pi (\hat{W}_0^{E'} - \hat{W}_0^E) - \frac{1}{2} \Pi (\hat{F}_0^{E'} - \hat{F}_0^E) \\ \text{(given by the previous step)} \end{array} \right]$$

Only a minimal amount of data is thereby required for transmission from one step to the next: the force and displacement fields on the contact connections. A correct representation of the loading path is thus provided, and the radial loading assessment does allow for a reduction in computational costs.

VALIDATION: THE BIAXIAL COMPRESSION SPECIMEN

This procedure is validated on the biaxial compression specimen for which a second step is considered. During this second step, an unloading of the 10 daN/mm² lateral load is carried out.

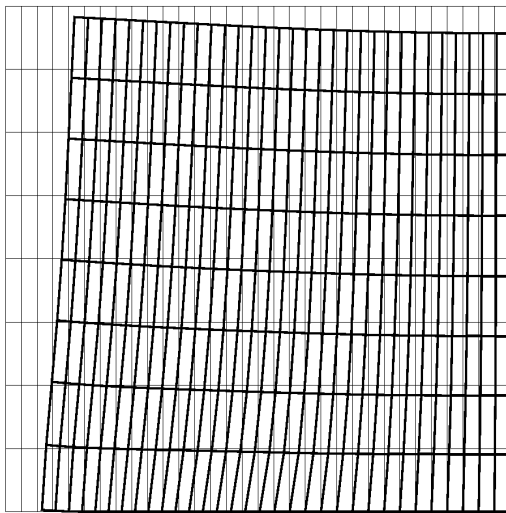


Figure 8: End of the first step:
Lateral and upper loads

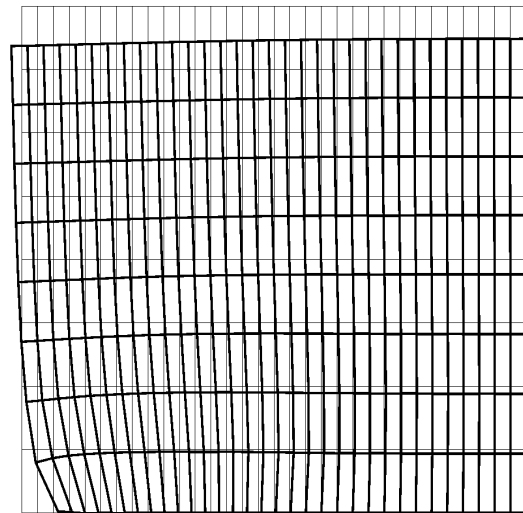


Figure 9: End of the second step:
Only the upper load

The results of the first step have been incorporated into the second step (Figures 8 and 9): the points which had slid during the loading are now sticking during the unloading.

NUMERICAL STUDY OF THE QUADRUPOLE

Model

The model under study is restricted to 1/8th of the quadrupole (Figure 10). It includes two levels of collars, one key, the coil, one-half of a pole piece and the insulation. Friction is considered on all of the contact zones. A 3D mesh of the structure has been developed.

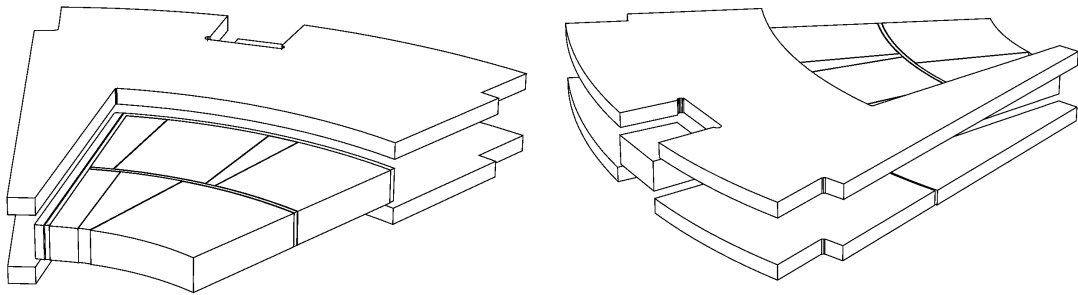


Figure 10: Applied model

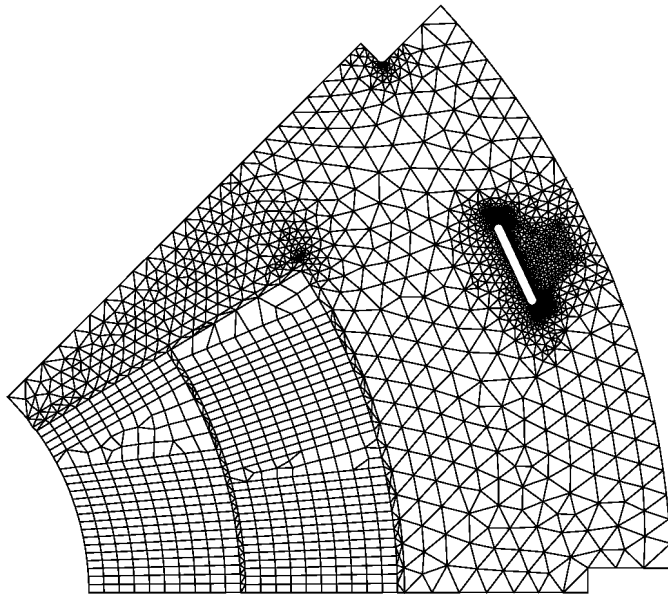


Figure 11: Mesh (6,556 elements)

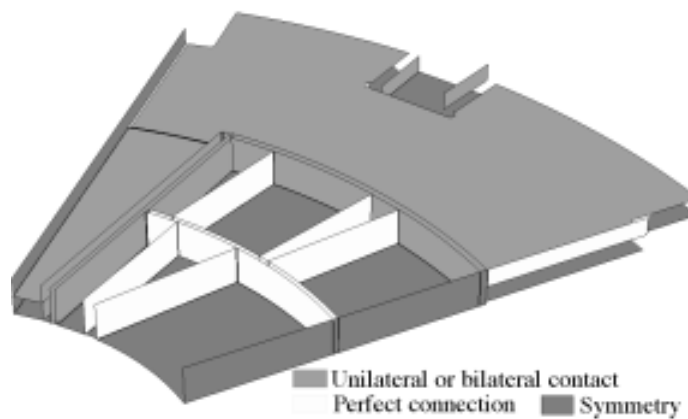
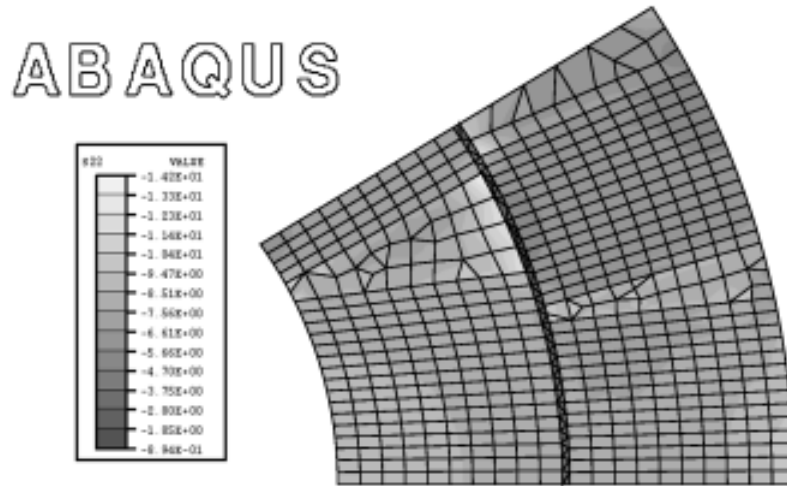


Figure 12: Interfaces

Comparison with an industrial F.E. code

The COFAST3D computational strategy has been compared with an industrial Finite Element code (ABAQUS). Frictional contact conditions are prescribed in ABAQUS using "master" surfaces and "slave" nodes. The same mesh has been utilized for both computations. Table VI presents some of the results from the comparison conducted for just the first prestressed loading case (Figure 13). The ABAQUS number of ddl also includes Lagrange multipliers.

Figure 13: σ_{yy} on the coil

	ABAQUS	COFAST3D
Number of ddl	24,228	23,709
Problem size	95.4 Mb	26 Mb
No. of inc./iterations	20 increments	400 iterations
CPU time (HP 735)	8,237 sec.	718 sec.
Clock time	4.7 hr.	13 min.
Reaction force on the lower side of the coil	258 daN	252 daN

Table VI: Comparison with ABAQUS

The two results turn out to be very similar. The significant reduction in computational costs (with respect to both size and time) provided by the COFAST3D approach is very advantageous for such optimization computations.

Results for the three successive loads

The three successive loads have been applied to the structure. The pre-load is then applied by prescribing an artificial gap between the sides of the key and the collars. Cooling from 293°K to 1.9°K is modeled by an applied thermal body force over the entire structure. Afterwards, the excitation can be modeled by a pre-computed body force field on the coil. The material properties change during the cooling process. Thus, the stiffness matrices have to be updated between the first and second loading cases; however, these matrices remain constant between the

second and third loading cases. The total computation time is less than 30 minutes on an HP 735 workstation.

The results for two different pre-loads are presented: 0.2 mm on each side of the key, and then 0.4 mm on each side. The coil's stress state has also been shown. Table VII indicates the $\sigma_{\theta\theta}$ stress on the coil at the end of the three successive loads for two different pre-loads. The given reaction is computed from the contact pressure on the upper side of the coil. For the first pre-load (0.2 mm on each side of the key), the top of the coil is unloaded once the magnetic field has been applied; opening occurs on the contact surfaces - the prestress is kept low. Additional computations need to be carried out to study the influence of the friction coefficient on the stress state of the coil at the end of the third load.


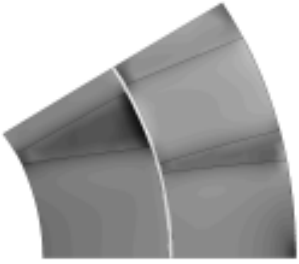


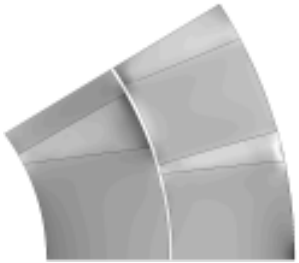

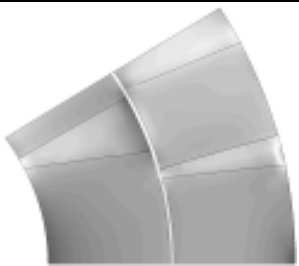
	Pre-load = 0.2 mm	$\sigma_{\theta\theta}$	Pre-load = 0.4 mm
Prestress (collaring)	 Reaction : -452 daN		 Reaction : -905 daN
Cooling from 293°K to 1.9°K	 Reaction : -164 daN	daN/mm ² 	 Reaction : -580 daN
Excitation at nominal field	 Reaction : 0 daN		 Reaction : -345 daN

Table VII: $\sigma_{\theta\theta}$ (in daN/mm²) at the end of the three loads for two different pre-loads

Table VIII displays the contact pressure distribution on the upper side of the coil. For the first pre-load, the gap occurs over the entire contact zone at the end of the loading path. For the second pre-load, the gap occurs on the left part of the contact zone. This second pre-load may be insufficient due to coil vibrations.

Influence of the friction parameters

The influence of the friction coefficient on the stress state of the coil is shown in Figure 14. Two sorts of friction coefficients are considered: on the steel/steel contact zones, and on the steel/insulation contact zones. The value of the first coefficient has been set at twice that of the second. The steel/steel coefficient varies between 0 and 0.5, and the pre-load varies between 0.2 and 0.7 mm on each side of the key. Figure 14 shows the evolution of the reaction contact force on the upper side of the coil as both the friction coefficient and the pre-load vary. A strong reduction in the final load state appears as the friction coefficients increase.





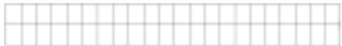

	Pre-load = 0.2 mm	p	Pre-load = 0.4 mm
Prestress	 Reaction : -452 daN	daN/mm ² 0 -1 -2 -3 -4 -5 -6 -7 -8 -9 -10 -11	 Reaction : -905 daN
Cooling	 Reaction : -164 daN		 Reaction : -580 daN
Excitation	 Reaction : 0 daN		 Reaction : -345 daN

Tableau VIII: Contact pressure (daN/mm²) and reaction (daN) on the coil at the end of each loading step, for two different pre-loads

It is important to note that the thirty-six computations considered herein (six different friction coefficients for six pre-loads) have all been carried out on the same factorized stiffness matrices. Thus, due to the capabilities of the approach, a major reduction in computational costs is possible for such studies of the influence of design parameters.

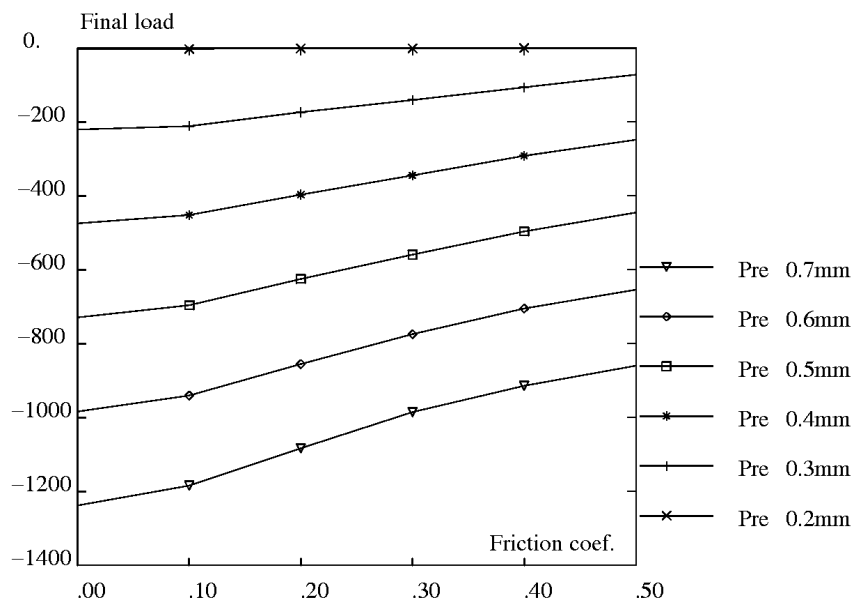


Figure 14: Influence of friction on the load (daN) of the coil at the end of the loading path

CONCLUSION

We have presented the application of a strategy dedicated to the design of a superconducting quadrupole prototype. The structure studied includes different materials, a large number of frictional contact zones and complex loading conditions: a mechanical prestress and cooling, followed by magnetic excitation. It is well known that frictional contact nonlinearities often lead to very difficult problems. The dedicated strategy employed herein is based on both a modular decomposition of the structure and a parallel-resolution scheme. Contact nonlinearities get treated locally. A special radial loading assessment has been used in order to model the complex loading path. The COFAST3D strategy generates a sizable reduction in computational costs, a feature which has been demonstrated by means of comparison with an industrial F.E. code. This reduction is very significant within the framework of a mechanical design for which many optimization loops can be created.

The results presented are highly encouraging and have served to validate the application of such an approach to complex situations of this type. Computations have been performed in order to assess the influence of the model's various parameters (friction coefficients and pre-loads). These assessments have shown the outstanding capabilities of the COFAST3D approach for such complex multi-computational studies.

REFERENCES

- Alart, P. and Curnier, A. (1991), "A mixed formulation for frictional contact problems prone to Newton like methods", *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol. 92, no. 3, pp. 353-375.
- Blanzé, C., Champaney, L., Cognard J.Y. and Ladevèze, P. (1996), "A modular approach to structure assembly computations: Application to contact problems", *Engineering Computations*, Vol. 13, no. 1, pp. 15-32.

- Chabrand, P., Dubois, F. and Raous, M. (1998), "Various numerical method for solving unilateral contact problems with friction", *Math. Comp. Mod.*, Vol. 28, pp. 97-108.
- Champaney, L., Cognard, J.Y., Dureisseix, D. and Ladevèze, P. (1997), "Large scale applications on parallel computers of a mixed domain decomposition method", *Computational Mechanics*, Vol. 19, no. 4, pp. 253-263.
- Duvaut G. and Lions, J.L. (1972), *Inequalities in Mechanics and Physics*, Springer, Berlin.
- Feng, Z.Q. (1995), "2D or 3D frictional contact algorithms and applications in a large deformation context", *Com. Numer. Methods Eng.*, Vol. 11, pp. 409-416.
- Glowinski, R. and Le Tallec, P. (1990), "Augmented Lagrangian Interpretation of the Non-overlapping Schwarz Alternating Method: Domain decomposition methods", SIAM, pp. 224-231, Philadelphia.
- Hibbitt, Karlsson and Sorensen, Inc. (1996), *Abaqus/Standard Version 5.6 Manuals*.
- Kikuchi, N. and Oden, J.T.. (1988), *Contact problems in elasticity : A study of Variational Inequalities and Finite Element Methods*, SIAM, Philadelphia.
- Ladevèze, P. (1985), "Algorithmes adaptés aux calculs vectoriels et parallèles pour des méthodes de décomposition de domaine", *Proceedings of Tendances actuelles en calcul des structures*, pp. 893-907, November 6-8, 1985.
- Ladevèze, P. (1998), *Structural nonlinear mechanics: New approach and non-incremental computational method*, Springer, New York.
- Lions, P.L. (1990), "On the Schwarz Alternating Method III: A variant for non-overlapping sub-domains", *Proceedings of Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations* (Chan, T., Glowinski, R., Périaux, J. and Windlun, O., Eds.), SIAM, Philadelphia.
- Peric, D. and Oden, D.R. (1992), "Computational model for 3D contact problems with friction based on the penalty method", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 35, pp 1289-1309.
- Raous, M., Jean, M. and Moreau, J.J. (Eds.) (1995), *Proc. Second Contact Mechanics International Symposium*, Plenum Press, New York.
- Simo, J.C. and Laursen, T.A. (1992), "An augmented lagrangian treatment of contact problems involving friction", *Comput. Struct.*, Vol. 42, pp. 97-116.
- Verpaux, P., Charras, T. and Millard, A., "CASTEM 2000 une approche moderne du calcul des structures", *Calcul des structures et intelligence artificielle* (Fouet, J.M., Ladevèze, P., Ohayon, R., Eds.), Pluralis, pp. 261-271, 1988.
- Zavarise, G. and Wriggers, P. (1999), "A superlinear convergent augmented Lagrangian procedure for contact problems", *Engineering Computations*, Vol. 16, no. 1, pp. 88-119.

Annexe B

Preprint : Modèle d'interface pour les interfaces collées

European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering
ECCOMAS 2004
P. Neittaanmäki, T. Rossi, K. Majava, and O. Pironneau (eds.)
R. Owen and M. Mikkola (assoc. eds.)
Jyväskylä, 24–28 July 2004

A DAMAGE MODEL FOR SIMULATING DECOHESION IN ADHESIVELY BONDED ASSEMBLIES

Nunziante Valoroso* and Laurent Champaney†

* Istituto per le Tecnologie della Costruzione
Consiglio Nazionale delle Ricerche
Viale Marx 15, 00137 Roma, Italy
e-mail: nunziante.valoroso@itc.cnr.it

† Laboratoire d'Etudes Mécaniques des Assemblages
Université de Versailles Saint-Quentin-en-Yvelines
45, Avenue des Etats Unis, 78035 Versailles Cedex, France
e-mail: laurent.champaney@meca.uvsq.fr

Key words: Adhesive joints, decohesion, damage, interfaces, mixed-mode.

Abstract. *In this work use is made of a cohesive-zone approach for the simulation of adhesive damage in adhesively bonded joints. The interface relationship relating tractions to displacement discontinuities is derived within the framework of damage mechanics and the constitutive model is formulated in a way that the advancement of the decohesion front takes place when the absorbed traction-separation work equals a critical fracture energy.*

For the mixed-mode case two interaction criteria expressed in terms of material parameters measurable in single mode delamination tests are adopted for determining the onset and growth of decohesion. Numerical simulations are presented for a typical test problem in which the adhesive layer is modelled via interface elements.

1 INTRODUCTION

Adhesive bonding represents a fascinating technique to join members of a structure as it can offer a greater flexibility in design and lower maintenance costs with respect to mechanical fastening [1]; moreover, especially for composites, the use of structural adhesives is highly desirable since unfavorable stress concentrations due to the presence of bolted or riveted joints can be reduced.

Adhesive damage is one of the major causes of failure in adhesive joints and its effective prediction require the different damage modes to be accounted for.

In this paper use is made of a cohesive-zone approach to develop zero-thickness interface elements for the simulation of decohesion. Cohesive-zone models have been extensively used for the analysis of interface debonding in past years [2–11] and for general loading conditions, they could successfully account for the variation of the experimentally measured fracture toughness as function of mode-mixity [12–18].

The interface model proposed in this work relies upon a formulation that allows to recover several earlier interface models as special cases. In particular, characteristic features of the model are that the constitutive relationship for damage is indirectly connected with fracture mechanics in that the decohesion propagation condition is based upon the LEFM energy balance, and that the mixed-mode case is dealt with by making reference to an equivalent energy release rate.

Unlike other models, the equivalent energy release rate is here not introduced at the outset but is derived within a quite general damage mechanics framework, thus allowing an effective definition and evaluation of the model parameters entering the interaction criteria adopted for determining the onset and growth of decohesion.

The outline of the paper is as follows. In Section 2 the one-dimensional model is first introduced and its extension to the mixed-mode case is then discussed in Section 2.2. The results of the numerical simulations for a mixed-mode test are presented in Section 3. Summary and conclusions are finally given in Section 4.

2 INTERFACE MODEL

As a model problem reference is made to an assembly consisting of two elastic bodies (adherends) joined by a plane adhesive layer whose thickness is assumed to be negligible compared to both that of the joined bodies and to its in-plane dimensions. These features enable the adhesive layer to be conveniently schematized as an interface, i.e. as a zero-thickness surface entity ensuring stress transfer between the adherends, see Figure 1.

In the cohesive-zone approach the description of a state of damage along an interface relies upon the definition of a traction-separation law incorporating the dependence of the surface tractions on the corresponding displacement discontinuities $[\mathbf{u}] = \mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^-$ and the damage criterion to be met for the cohesive process zone to grow and the crack to advance.

 Nunziante Valoroso and Laurent Champaney

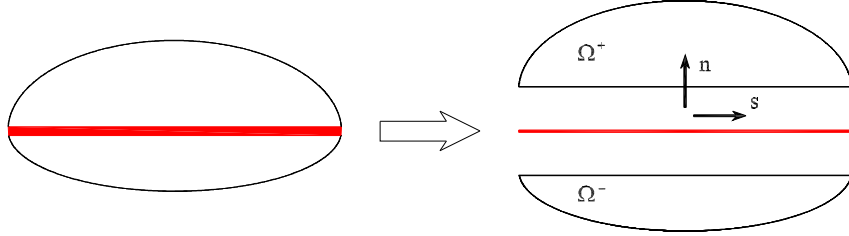


Figure 1: Interface schematization.

2.1 One-dimensional model

To begin with, start by considering the one-dimensional (mode I) case, for which the stored energy function is postulated as:

$$\psi([u], D) = \frac{1}{2}(1 - D)k^+ \langle [u] \rangle_+^2 + \frac{1}{2}k^- \langle [u] \rangle_-^2 \quad (1)$$

where $D \in [0, 1]$ denotes a scalar damage variable in the usual sense [19], the symbols $\langle \cdot \rangle_+$ and $\langle \cdot \rangle_-$ stand for the positive and negative part of the argument $\langle \cdot \rangle$, defined as $\langle x \rangle_{\pm} = 1/2(x \pm |x|)$, while k^+ and k^- are the undamaged interface stiffnesses in tension and compression respectively, the latter representing a penalty stiffness accounting for the impenetrability constraint.

In the classical approach the damageable stiffness k^+ is taken as a penalty stiffness parameter that is used to ensure an acceptable pre-crack behaviour. Having in mind the analysis of an adhesively bonded assembly, in this study we shall however consider the damageable interface stiffnesses as model parameters, since they can be estimated via acoustic measurements; for further details on this issue see e.g. [20–22] and references therein.

The constitutive equations for the model follow from standard continuum thermodynamics [23] and from the expression of the mechanical dissipation as:

$$\begin{aligned} t &= \frac{\partial \psi}{\partial [u]} = (1 - D)k^+ \langle [u] \rangle_+ + k^- \langle [u] \rangle_- \\ Y &= -\frac{\partial \psi}{\partial D} = \frac{1}{2}k^+ \langle [u] \rangle_+^2 \end{aligned} \quad (2)$$

and identify the interface traction t and the work-conjugate Y of the damage variable D as the damage energy release rate.

As in classical internal variables theories, the damage-driving force is assumed to be bounded by a critical value. This can be expressed by means of a damage criterion of the form:

$$\phi = Y - Y^* \leq 0 \quad (3)$$

where Y^* denotes the critical damage-driving force, which has the meaning of an instantaneous energy threshold; prior to the application of any loading it is assumed $Y^* = G_o \geq 0$, that represents the elastic energy corresponding to damage onset.

Maximum dissipation yields the normal evolution for damage:

$$\dot{D} = \dot{\gamma} \frac{\partial \phi}{\partial Y} \quad (4)$$

along with the Kuhn-Tucker conditions:

$$\phi \leq 0; \quad \dot{\gamma} \geq 0; \quad \phi \dot{\gamma} = 0 \quad (5)$$

It is worth noting the interpretation of the above relationships for the situation of increasing damage ($\dot{\gamma} > 0$); in this case the critical energy Y^* is obtained as:

$$Y^*(t) = \max \left\{ G_o, \max_{(\tau \leq t)} \{Y(\tau)\} \right\} \quad (6)$$

where $t \in [0, T]$ denotes a pseudo-time parameter.

The damage model is completely characterized by the relationship between the energy threshold Y^* and D . In this respect, a basic condition to be accounted for is given by the energy criterion of fracture mechanics, i.e. by the requirement that the dissipated energy during the decohesion process equals the critical fracture energy G_c of the material:

$$\int_0^{+\infty} Y \dot{D} dt = G_c \quad (7)$$

The simplest non-smooth model defined as:

$$\begin{cases} Y^* = G_c & \text{if } D \in [0, 1[\\ Y^* = \max_{\tau \leq t} Y(\tau) & \text{if } D = 1 \end{cases} \quad (8)$$

trivially satisfies the criterion (7).

In principle, the cohesive-zone approach amounts to a regularization of (8); furthermore, when recast into a damage mechanics framework, a cohesive model can be given the general form:

$$\begin{cases} Y^* = G_o & \text{if } D = 0 \\ Y^* = F(D) & \text{if } D \in]0, 1[\\ Y^* = \max_{\tau \leq t} Y(\tau) & \text{if } D = 1 \end{cases} \quad (9)$$

where, owing to the irreversibility of damage, the function F defining the critical damage driving force has to be taken positive, monotone non-decreasing and vanishing on \mathfrak{R}_0^- .

Typical forms of F are that of power laws or exponential functions, and their explicit expressions are constructed in a way to fulfill the condition (7).

In particular, the standard procedure amounts to introducing more or less explicitly in the expression of the function F a characteristic value Y_f of the damage driving force, that may well be the one corresponding to the complete decohesion, and by computing it by enforcing (7) for a prescribed loading path, which is usually taken as the radial one.

As shown in [18], the damage model yielding the widely used bi-linear traction-relative displacement law can be obtained by taking :

$$\begin{cases} Y^* = G_o & \text{if } D = 0 \\ Y^* = \frac{Y_f^2 G_o}{[G_o D + Y_f(1 - D)]^2} & \text{if } D \in]0, 1[\\ Y^* = \max_{\tau \leq t} Y(\tau) & \text{if } D = 1 \end{cases} \quad (10)$$

whereby, for radial loading, the characteristic value of the damage-driving force Y_f is found from (7) as:

$$Y_f = G_c \quad (11)$$

so to obtain

$$F_A(D) = \frac{(1 - \eta)G_c}{(1 - \eta D)^2} \quad (12)$$

where:

$$\eta = 1 - \frac{G_o}{G_c} \quad (13)$$

plays the role of a regularizing parameter.

More sophisticated damage models, in which one has more than one regularizing parameter, can be characterized in a way similar to the one discussed above. For instance, the Allix & Ladèveze model, originally introduced in [4, 6, 8], follows from the following definition of the critical energy Y^* :

$$\begin{cases} Y^* = G_o & \text{if } D = 0 \\ Y^* = G_o + (Y_f - G_o)D^{1/N} & \text{if } D \in]0, 1[\\ Y^* = \max_{\tau \leq t} Y(\tau) & \text{if } D = 1 \end{cases} \quad (14)$$

and the damage function is obtained from the energy balance (7) as:

$$F_B(D) = (1 - \eta)G_c + \left[\frac{N + 1}{N} \eta G_c \right] D^{1/N} \quad (15)$$

where, besides the parameter η given by (13), the exponent ($N > 0$ and not necessarily integer) acts as a regularizing parameter as well.

Nunziante Valoroso and Laurent Champaney

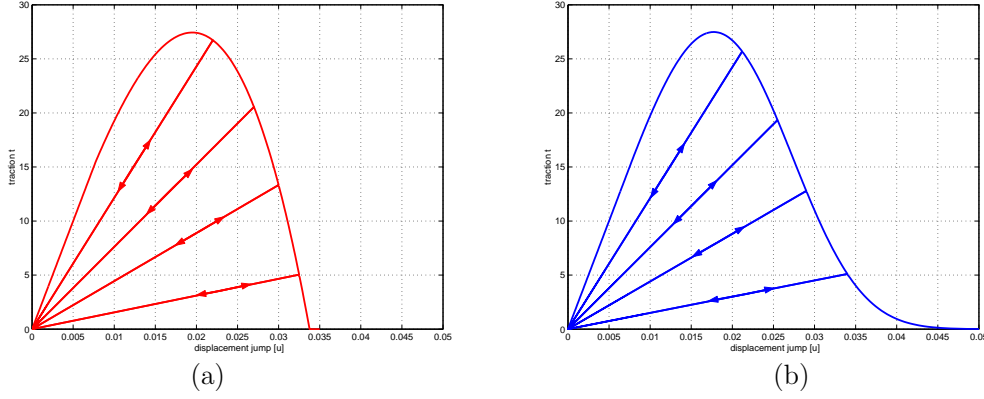


Figure 2: Traction-separation relationships for the Allix & Ladèveze (a) and exponential model (b)

Following the same path of reasoning, an exponential damage model can be obtained by taking:

$$\begin{cases} Y^* = G_o & \text{if } D = 0 \\ Y^* = G_o + (Y_f - G_o)[- \log(1 - D)]^N & \text{if } D \in]0, 1[\\ Y^* = \max_{\tau \leq t} Y(\tau) & \text{if } D = 1 \end{cases} \quad (16)$$

for which the damage function is computed as:

$$F_C(D) = (1 - \eta)G_c + \frac{1}{\Gamma(N + 1)}\eta G_c [- \log(1 - D)]^N \quad (17)$$

Γ being the Gamma function [24, 25], i.e. the function extending the definition of the factorial to the whole complex plane (except for negative integers).

The traction-separation laws corresponding to the damage functions F_B and F_C are depicted in figure (2).

2.2 Two-dimensional model

As opposite to the one-dimensional (single-mode) case, where the criteria used for determining damage onset and propagation up to complete failure only involve one single component of the energy release rate, when considering mixed-mode conditions the total energy released during decohesion:

$$G_T = G_I + G_{II} \quad (18)$$

results from the interplay of the I and II pure-mode contributions that evolve together as a consequence of the interaction between the traction-displacement jump relationships in the normal and tangential directions.

Nunziante Valoroso and Laurent Champaney

Substantially, two ways appear to be suggested in the literature to describe the mixed-mode situation, relying either on the definition of an equivalent energy release rate [6, 8, 10, 16] or on the introduction of an equivalent displacement parameter [3, 12, 14, 15, 17, 18].

In the sequel we shall make use of these equivalent quantities for the mixed-mode model; they will not be introduced at the outset but derived in the damage mechanics framework outlined in the previous section for the one-dimensional interface model.

To this end consider the stored energy function:

$$\psi([\mathbf{u}], D) = \frac{1}{2}(1 - D) [k_n^+ \langle [u_n] \rangle_+^2 + k_s [u_s]^2] + \frac{1}{2} k_n^- \langle [u_n] \rangle_-^2 \quad (19)$$

whereby the constitutive equations follow as:

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= \frac{\partial \psi}{\partial [\mathbf{u}]} = (1 - D) [k_n^+ \langle [u_n] \rangle_+ \mathbf{n} + k_s [u_s] \mathbf{s}] + k_n^- \langle [u_n] \rangle_- \mathbf{n} \\ Y_m &= -\frac{\partial \psi}{\partial D} = \frac{1}{2} k_n^+ \langle [u_n] \rangle_+^2 + \frac{1}{2} k_s [u_s]^2 \end{aligned} \quad (20)$$

that generalize those pertaining to the one-dimensional model introduced in the previous section.

Here $[u_n]$ and $[u_s]$ denote the normal and sliding components of the displacement jump vector $[\mathbf{u}]$, \mathbf{n} and \mathbf{s} are respectively the outward unit normal and the unit tangent vector to the interface, and the subscript m stands for mixed-mode.

Based on the above relationships, the mixed-mode energy release rate Y_m can be equivalently expressed as

$$Y_m = \frac{1}{2} k_n^+ \delta^2 \quad (21)$$

where δ represents an equivalent opening displacement defined as:

$$\delta = (\langle [u_n] \rangle_+^2 + \alpha^2 [u_s]^2)^{1/2} \quad (22)$$

being

$$\alpha = \sqrt{\frac{k_s}{k_n^+}} \quad (23)$$

the parameter giving different weights to the normal and sliding components.

Introducing the loading angle as:

$$\varphi = \arctan \left[\frac{[u_s]}{\langle [u_n] \rangle_+} \right] \in [0, +\pi/2] \quad (24)$$

a mode-mixity parameter β can thus be defined as:

$$\beta = \alpha \tan(\varphi) \quad (25)$$

so that the pure-mode contributions to the energy release rate (21) can be given the expressions:

$$\begin{aligned} Y_I &= \frac{1}{1 + \beta^2} Y_m \\ Y_{II} &= \frac{\beta^2}{1 + \beta^2} Y_m \end{aligned} \quad (26)$$

respectively representing the mode *I* (opening) and mode *II* (sliding) components.

By ruling out the penalty term accounting for non-interpenetration, the cohesive relationship can be then rephrased as:

$$t_\delta = (1 - D)k_n^+ \delta \quad (27)$$

where t_δ is an equivalent scalar traction given by:

$$t_\delta = \left(t_n^2 + \frac{1}{\alpha^2} t_s^2 \right)^{1/2} \quad (28)$$

being

$$\begin{aligned} t_n &= \langle \mathbf{t} \cdot \mathbf{n} \rangle_+ = \frac{1}{(1 + \beta^2)^{1/2}} t_\delta \propto t_\delta \cos(\varphi) \\ t_s &= \mathbf{t} \cdot \mathbf{s} = \frac{\alpha\beta}{(1 + \beta^2)^{1/2}} t_\delta \propto \alpha^2 t_\delta \sin(\varphi) \end{aligned} \quad (29)$$

the normal and sliding components of the traction vector.

Introducing the damage criterion as:

$$\phi_m = Y_m - Y_m^* \leq 0 \quad (30)$$

Y_m^* being the critical energy release rate, the normal damage evolution is expressed by:

$$\phi_m \leq 0; \quad \dot{D} \geq 0; \quad \phi_m \dot{D} = 0 \quad (31)$$

Unlike one-dimensional situations, where damage onset is determined by comparing the energy release rate with the initial pure-mode threshold G_o , under mixed-mode loading damage can occur before any single-mode component attain its initial allowable. Accordingly, the definition of the critical damage driving force for a mixed-mode model, that at least formally may not differ from that pertaining to the single mode case:

$$\begin{cases} Y_m^* = Y_{mo} & \text{if } D = 0 \\ Y_m^* = F_m(D) & \text{if } D \in]0, 1[\\ Y_m^* = \max_{\tau \in [0, T]} Y_m(\tau) & \text{if } D = 1 \end{cases} \quad (32)$$

since the damage function F_m can be taken in the same way as for the one-dimensional model, requires the determination of two model parameters, Y_{mo} and Y_{mf} , to be computed based on the interaction criteria adopted for determining damage onset and decohesion propagation.

In particular, assuming that the initiation of damage can be predicted using an interaction criterion of the type:

$$\left(\frac{Y_I}{G_{oI}}\right)^{\alpha_1} + \left(\frac{Y_{II}}{G_{oII}}\right)^{\alpha_2} - 1 = 0 \quad (33)$$

where G_{oI} and G_{oII} are the initial pure-mode damage thresholds, for a given loading angle (24) the initial mixed-mode threshold Y_{mo} can be obtained from (33) that, on account of (26), can be given the form:

$$c_I (Y_m)^{\alpha_1} + c_{II} (Y_m)^{\alpha_2} - 1 = 0 \quad (34)$$

for

$$c_I = \left[\frac{1}{(1 + \beta^2)G_{oI}} \right]^{\alpha_1}; \quad c_{II} = \left[\frac{\beta^2}{(1 + \beta^2)G_{oII}} \right]^{\alpha_2} \quad (35)$$

For α_1 and α_2 both positive and not lower than unity the function (33) is convex and the interaction between mode I and mode II components is positive; accordingly, it turns out to be $Y_{mo} > \min\{G_{oI}, G_{oII}\}$ and its computation simply requires a local iteration scheme. Furthermore, for the particular case of $\alpha_2 = \alpha_1$ equation (34) can be solved in closed form to get:

$$Y_{mo} = \frac{(1 + \beta^2)G_{oI}G_{oII}}{[(G_{oII})^{\alpha_1} + (\beta^2 G_{oI})^{\alpha_1}]^{1/\alpha_1}} \quad (36)$$

whence the pure-mode threshold energies G_{oI} and G_{oII} are easily recognized to be recovered in the limit as $\varphi \rightarrow 0$ and $\varphi \rightarrow \pi/2$ respectively.

As for damage onset, under mixed-mode loading the dependence of the fracture toughness on the mode ratio has to be properly accounted for. In this respect the adopted failure condition, stemming from one of the most widely used criteria to predict the propagation of delamination in composites, is a generalized ellipse-like criterion [26]:

$$\left(\frac{G_I}{G_{cI}}\right)^{\beta_1} + \left(\frac{G_{II}}{G_{cII}}\right)^{\beta_2} - 1 = 0 \quad (37)$$

where the mode I and mode II released energies are given by:

$$G_i = \int_0^{+\infty} Y_i \dot{D} dt; \quad i \in \{I, II\} \quad (38)$$

Nunziante Valoroso and Laurent Champaney

From (26) it follows that, for proportional loading, the ratio between G_{II} and G_I is constant and equals β^2 . Accordingly, from (37) one has the nonlinear equation:

$$d_I (G_T)^{\beta_1} + d_{II} (G_T)^{\beta_2} - 1 = 0 \quad (39)$$

where G_T is defined by (18) and the coefficients d_I and d_{II} have the same expression as in (34) except for G_{oI} and G_{oII} being replaced by G_{cI} and G_{cII} .

Hence, for $\beta_2 = \beta_1$ the propagation of decohesion takes place for:

$$G_T = \frac{(1 + \beta^2)G_{cI}G_{cII}}{[(G_{cII})^{\beta_1} + (\beta^2 G_{cI})^{\beta_1}]^{1/\beta_1}} \quad (40)$$

where G_T is computed as the total work of separation:

$$G_T = \int_0^{+\infty} Y_m^* \dot{D} dt \quad (41)$$

whose expression depends upon that of the function F_m defining the critical damage-driving force in the range $D \in]0, 1[$.

Taking for F_m one of the forms used in the one-dimensional case, i.e.

$$F_m(D) = \begin{cases} \frac{Y_{mf}^2 Y_{mo}}{[Y_{mo}D + Y_{mf}(1 - D)]^2} \\ Y_{mo} + (Y_{mf} - Y_{mo})D^{1/N} \\ Y_{mo} + (Y_{mf} - Y_{mo})[-\log(1 - D)]^N \end{cases} \quad (42)$$

upon comparison of (40) and (41) the expression of the characteristic value of the mixed-mode energy release rate Y_{mf} for the three models is then obtained as:

$$Y_{mf} = \begin{cases} G_T \\ \frac{1}{N}[(N + 1)G_T - Y_{mo}] \\ Y_{mo} + \frac{1}{\Gamma(N + 1)}[G_T - Y_{mo}] \end{cases} \quad (43)$$

The complete traction-relative displacement relationships corresponding to the damage functions (42)₂ and (42)₃, that respectively yield the mixed-mode generalization of the Allix & Ladèveze and exponential models, are shown in Figures 3 and 4.

The surfaces represent the equivalent traction given by (28) computed for proportional loading paths for $\varphi \in [0, +\pi/2]$ and are plotted versus the two pure-mode relative-displacement components $[u_n]$ and $[u_s]$.

Nunziante Valoroso and Laurent Champaney

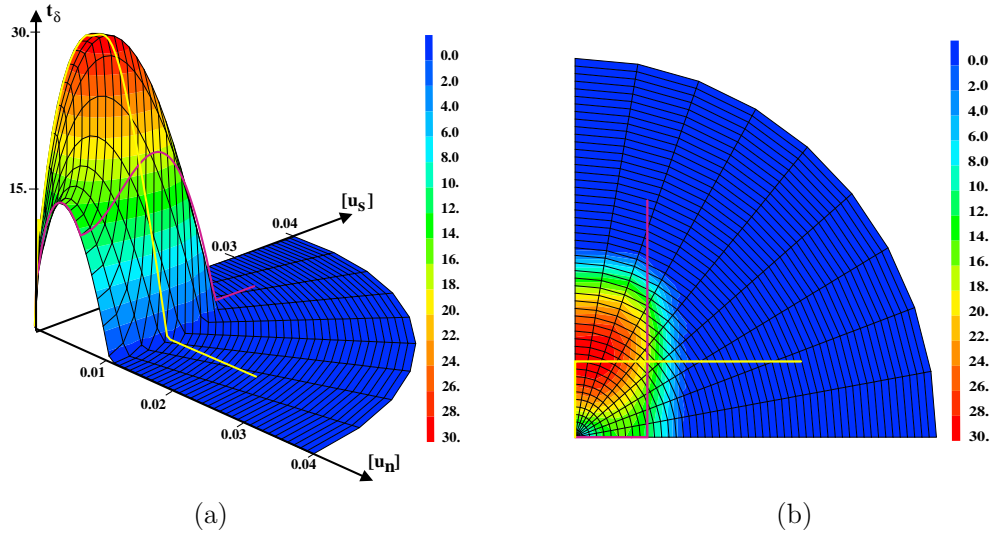


Figure 3: Traction-separation surface for the Allix & Ladèveze model. Side (a) and top (b) views.

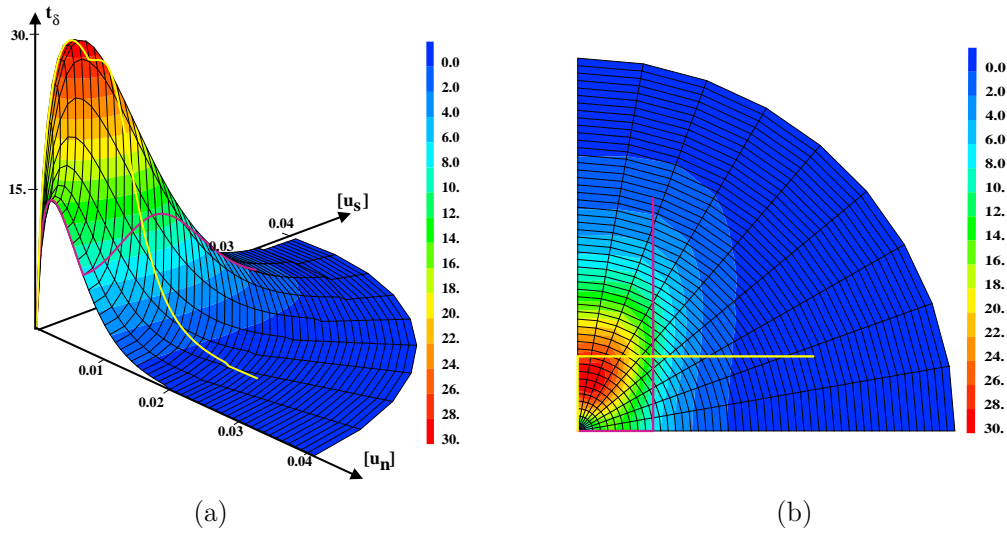


Figure 4: Traction-separation surface for the exponential model. Side (a) and top (b) views.

The two non-proportional loading paths evidenced are:

$$[u_s] = 0, [u_n] = t, t \leq 0.008; \quad [u_s] = t, [u_n] = 0.08, t \geq 0.008$$

$$[u_s] = t, [u_n] = 0, t \leq 0.008; \quad [u_s] = 0.008, [u_n] = t, t \geq 0.008$$

Nunziante Valoroso and Laurent Champaney

3 NUMERICAL EXAMPLE

The interface models briefly described in the previous sections have been implemented in a customized version of the finite element code CAST3M [27], developed by the CEA (Commissariat à l'Energie Atomique). For the numerical example described below computations have been carried out by using a varying step size and a local-control-based arc-length algorithm as discussed in [28].

The example concerns the mixed-mode flexure test (MMF) originally proposed in [29], see Figure 5 where the geometry of the specimen is depicted. In particular, in the simulation are considered the mixed-mode versions of the Allix-Ladevèze and exponential models discussed in the previous section; an extended set of numerical examples in which is included also the bi-linear model can be found in a companion paper [30].

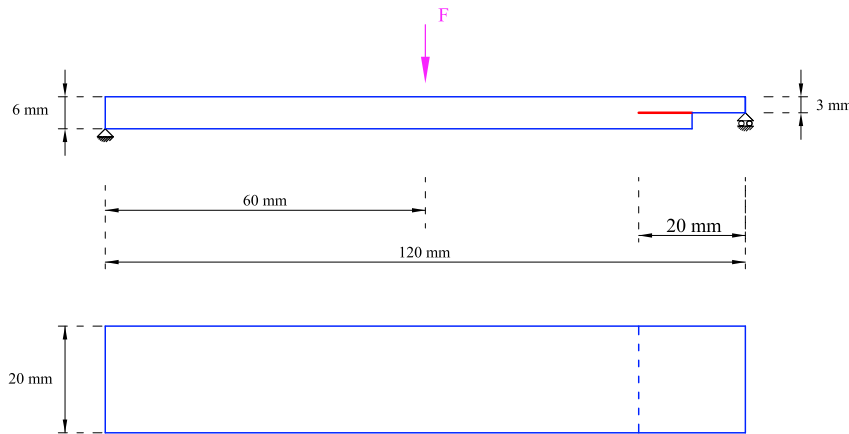


Figure 5: MMF test. Model problem.

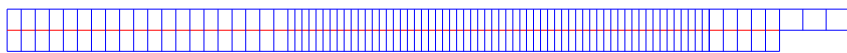


Figure 6: MMF test. FE mesh.

The material data for the problem examined is given in Table 1. The values of the exponents N pertaining to the two models have been chosen in a way to get equal values of the local peak tractions in pure-modes.

The load-deflection curves, shown in Figure 7, have been computed by using the FE mesh given in Figure 6, consisting of 173 8-noded plane strain quadrilaterals and 80 6-noded interface elements for which Newton-Cotes integration is adopted.

Nunziante Valoroso and Laurent Champaney

<i>Bulk material</i>	$E = 70 \text{ (GPa)} \quad \nu = 0.3$			
<i>Interface</i>	$k_n^+ \text{ (N/mm}^3\text{)}$	$G_{oI} \text{ (N/mm)}$	$G_{oII} \text{ (N/mm)}$	$\alpha_2 = \alpha_1$
	1.000E+04	2.813E-03	1.125E-02	2.000E+00
	$k_s \text{ (N/mm}^3\text{)}$	$G_{cI} \text{ (N/mm)}$	$G_{cII} \text{ (N/mm)}$	$\beta_2 = \beta_1$
	1.000E+04	1.250E-01	5.000E-01	2.000E+00

Table 1: MMF test. Material data.

No substantial difference appears between the two global responses in Figure 7, that are in fairly good agreement.

This fact confirms what is found for other numerical examples reported in [30], i.e. that for a relatively flexible specimen use of a sufficiently fine mesh and of an adequate time increment size gives results that are quite insensitive with respect to the detail of the different traction-separation laws.

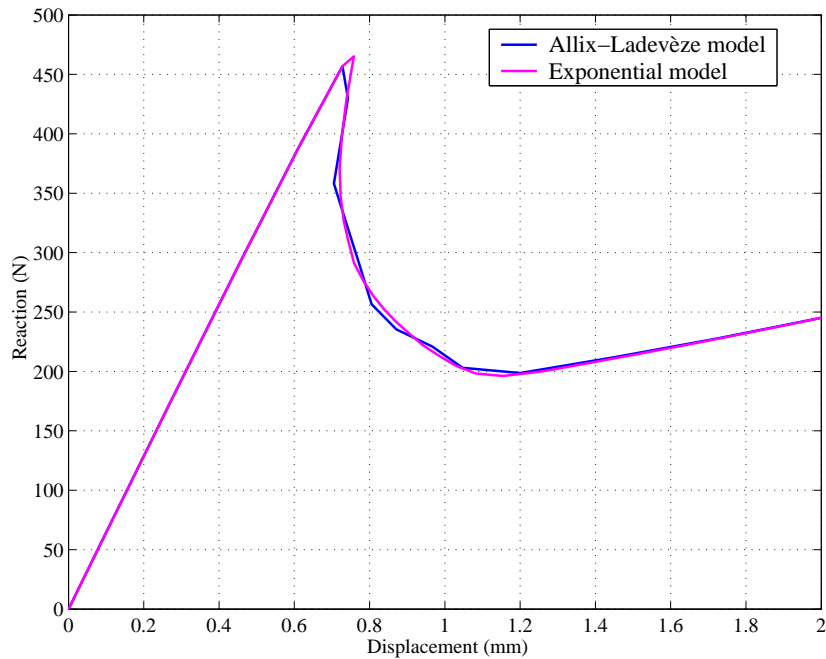


Figure 7: MMF test. Computed load-deflection curves.

The results of the calculations are also shown in Figures 10-9 in terms of the evolution of the traction profiles along the interface, and of the damage process zone for which a more pronounced difference can be appreciated.

Nunziante Valoroso and Laurent Champaney

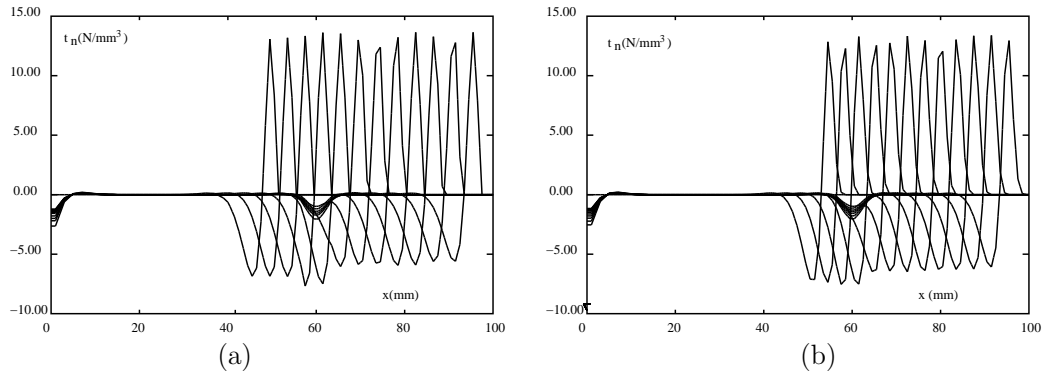


Figure 8: MMF test. Evolution of traction t_n . Allix & Ladèveze (a) and exponential model (b).

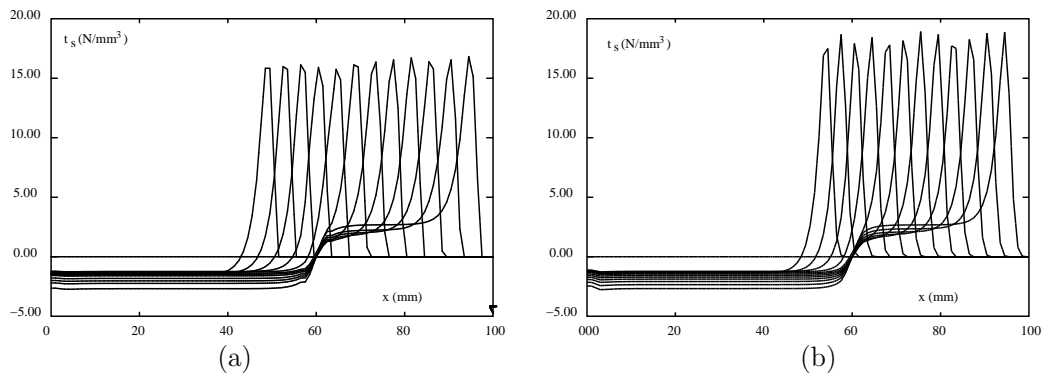


Figure 9: MMF test. Evolution of traction t_s . Allix & Ladèveze (a) and exponential model (b).

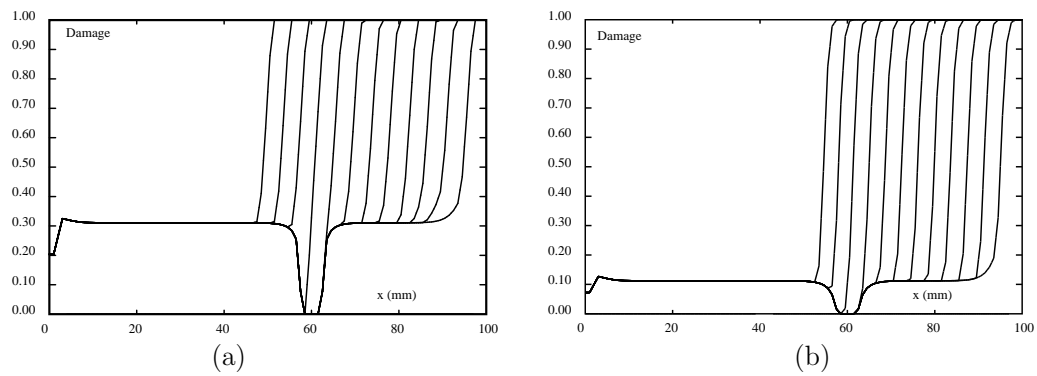


Figure 10: MMF test. Damage evolution. Allix & Ladèveze (a) and exponential model (b).

4 SUMMARY AND CONCLUSIONS

In this work a cohesive-zone model has been used to simulate both single-mode and mixed-mode failure of adhesively bonded assemblies. As opposite to other approaches based on fracture mechanics, this does not require the presence of an initial crack and allows for efficient implementations in a finite element setting.

The proposed model relies upon a formulation that allows to recover several earlier interface models as particular cases, and in this work has been implemented with polynomial and exponential damage laws; these are only indirectly connected to fracture mechanics in that the total traction-separation work absorbed during decohesion equals a critical fracture energy.

The mixed-mode case is dealt with by making reference to an equivalent energy release rate, that is not introduced at the outset but derived within a quite general damage mechanics framework. In the authors' opinion this has the advantage of making more clear the meaning of the equivalent variables and of allowing an effective definition and evaluation of the model parameters entering both the damage onset criterion and the decohesion propagation condition.

Numerical simulations have been carried out for a typical mixed-mode problem in which the adhesive layer is simulated by means of zero-thickness interface elements.

Further work is currently under way to refine the model so to account for plasticity and rate-dependency and for its validation through experimental tests.

ACKNOWLEDGEMENTS

This work has been partly carried out within the framework of the activities of the *Laboratoire Lagrange*, an European research group gathering CNR, CNRS, Università di Roma "Tor Vergata", Université de Montpellier II, ENPC, LCPC.

NV also acknowledges the Italian National Research Council (CNR) and the Italian Ministry of Education, University and Research (MIUR) for the financial support through the Cofin 2003 research program.

REFERENCES

- [1] L. Tong and G. Steven. *Analysis and Design of Structural Bonded Joints*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1999.
- [2] A. Needleman. An analysis of tensile decohesion along an interface. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 38(3):289–324, 1990.
- [3] V. Tvergaard and J.W. Hutchinson. The relation between crack growth resistance and fracture process parameters in elastic-plastic solids. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 40(6):1377–1397, 1992.
- [4] O. Allix and P. Ladevèze. Interlaminar interface modelling for the prediction of delamination. *Composite Structures*, 22(4):235–242, 1992.
- [5] A. Corigliano. Formulation, identification and use of interface models in the numerical analysis of composite delamination. *International Journal of Solids and Structures*, 30(20):2779–2811, 1993.
- [6] L. Daudeville and P. Ladevèze. A damage mechanics tool for laminate delamination. *Computers & Structures*, 25:547–555, 1993.
- [7] X.P. Xu and A. Needleman. Numerical simulations of fast crack growth in brittle solids. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 42:1397–1434, 1994.
- [8] O. Allix, P. Ladevèze, and A. Corigliano. Damage analysis of interlaminar fracture specimens. *Composite Structures*, 31(1):61–74, 1995.
- [9] J.L. Chaboche, R. Girard, and A. Schaff. Numerical analysis of composite systems by using interphase/interface models. *Computational Mechanics*, 20:3–11, 1997.
- [10] O. Allix, D. Lévêque, and L. Perret. Identification and forecast of delamination in composite laminates by an interlaminar interface model. *Composites Science and Technology*, 58(5):671–678, 1998.
- [11] A. Corigliano and M. Ricci. Rate-dependent interface models: formulation and numerical applications. *International Journal of Solids and Structures*, 38(4):547–576, 2001.
- [12] V. Tvergaard. Effect of fibre debonding in a whisker-reinforced metal. *Materials Science and Engineering*, A125:203–213, 1990.
- [13] J.W. Hutchinson and Z. Suo. Mixed mode cracking of layered materials. *Advances in Applied Mechanics*, 29:63–191, 1992 or 1991. Academic Press, New York.

Nunziante Valoroso and Laurent Champaney

- [14] V. Tvergaard and J.W. Hutchinson. The influence of plasticity on mixed mode interface toughness. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 41(6):1119–1135, 1993.
- [15] G.T. Camacho and M. Ortiz. Computational modelling of impact damage in brittle materials. *International Journal of Solids and Structures*, 33(20–22):2899–2938, 1996.
- [16] O. Allix and A. Corigliano. Modeling and simulation of crack propagation in mixed-modes interlaminar fracture specimens. *International Journal of Fracture*, 77:111–140, 1996.
- [17] Y. Mi, M.A. Crisfield, G.A.O. Davies, and H.B. Hellweg. Progressive delamination using interface elements. *Journal of Composite Materials*, 32(14):1246–1272, 1998.
- [18] G. Alfano and M.A. Crisfield. Finite element interface models for the delamination analysis of laminated composites: mechanical and computational issues. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50(7):1701–1736, 2001.
- [19] J. Lemaitre and Chaboche J.L. *Mechanics of Solids Materials*. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [20] A.I Lavrentyev and S.I. Rokhlin. Ultrasonic spectroscopy of imperfect contact interfaces between a layer and two solids. *Journal of the Acoustical Society of America*, 103(2):657–664, 1998.
- [21] M.J.S. Lowe, R.E. Challis, and C.W. Chan. The transmission of Lamb waves across adhesively bonded lap joints. *Journal of the Acoustical Society of America*, 107(3):1333–1345, 2000.
- [22] V. Vlasie and M. Rousseau. Acoustical validation of the rheological models for a structural bond. *Wave Motion*, 37(4):333–349, 2003.
- [23] C. Truesdell and W. Noll. The non-linear field theories of mechanics. In S. Flügge, editor, *Handbuch der Physik Band III/3*, Berlin, 1965. Springer.
- [24] M. Abramowitz and I.A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions*, volume 55 of *Applied Mathematics Series*. Dover Publications, New York, 2nd edition, 1968.
- [25] G.E. Andrews and R. Roy. *Special functions*. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [26] J.R. Reeder. An evaluation of mixed-mode delamination failure criteria. Technical Memorandum 104210, NASA, 1992.
- [27] CEA, <http://www-cast3m.cea.fr/cast3m/>. *CAST3M - User Manual*, 2003.

Nunziante Valoroso and Laurent Champaney

- [28] G. Alfano and M.A. Crisfield. Solution strategies for the delamination analysis based on a combination of local-control arc-length and line searches. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 58:999–1048, 2003.
- [29] A.J. Russell and K.N. Street. Moisture and temperature effects on the mixed-mode delamination fracture of unidirectional graphite/epoxy. In W.S. Johnson, editor, *Delamination and Debonding of Materials*, ASTM STP 876, pages 349–370, Philadelphia, 1985. American Society for Testing Materials.
- [30] G. Alfano, S. de Barros, L. Champaney, and N. Valoroso. Comparison between two cohesive-zone models for the analysis of interface debonding. In P. Neittaanmäki, T. Rossi, K. Majava, and O. Pironneau, editors, *European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering*, Jyväskylä, 2004.

Annexe C

Preprint : Multi-résolution par l'approche LATIN

A suitable computational strategy for the parametric analysis of problems with multiple contact

P. A. Boucard*, L. Champaney

*LMT Cachan, ENS de Cachan/CNRS/PARIS VI
61 Avenue du Président Wilson, 94235 Cachan Cedex, France
Pierre-Alain.Boucard@lmt.ens-cachan.fr
Laurent.Champaney@lmt.ens-cachan.fr*

SUMMARY

The aim of the present work is to develop an application of the LARge Time INcrement (LATIN) approach [1] for the parametric analysis of static problems with multiple contacts. The methodology adopted was originally introduced to solve viscoplastic and large-transformation problems [2, 3]. Here, the applications concern elastic, quasi-static structural assemblies with local nonlinearities such as unilateral contact with friction. Our approach is based on a decomposition of the assembly into substructures and interfaces. The interfaces play the vital role of enabling the local nonlinearities, such as contact and friction, to be modeled easily and accurately. The problem on each substructure is solved by the finite element method and an iterative scheme based on the LATIN method is used for the global resolution. More specifically, the objective is to calculate a large number of design configurations. Each design configuration corresponds to a set of values of all the variable parameters (friction coefficients, prestress) which are introduced into the mechanical analysis. A full computation is needed for each set of parameters. Here we propose, as an alternative to carrying out these full computations, to use the capability of the LATIN method to re-utilize the solution to a given problem (for one set of parameters) in order to solve similar problems (for the other sets of parameters).

Copyright © 2000 John Wiley & Sons, Ltd.

KEY WORDS: parametric uncertainties; contact; friction; nonincremental method; substructuring method; multiresolution

1. INTRODUCTION

For structural engineers, the incorporation of the system's parametric uncertainties into a problem represents a challenge; however, without this information, the structural response could not be analyzed accurately. These parametric system uncertainties may affect the material's mechanical properties (modulus and strength, etc.), the geometric properties (cross-sectional properties and dimensions), the boundary conditions (including contact with friction), the magnitude and distribution of loads, etc. In order to take these uncertainties into account, it is necessary to calculate the response of the structure for each set of values of the design parameters. Typically, in our case, the design parameters are the friction coefficients and the prestress. Upon completion of these calculations, response parameters (maximum stress,

Copyright © 2000 John Wiley & Sons, Ltd.

reaction force...) are obtained and associated with the values of the input parameter. Then, the design space can be explored and defined by sampling parameter values within defined limits. Exploring this design space taking these parametric uncertainties into consideration is much more difficult than solving the general parametric field problem because one must take into consideration nonlinear structural behavior (in our case, unilateral contact with friction). The perturbation method [4, 5] is one of the main approaches used to obtain such structural responses. In recent years, many researchers have focused on the stochastic finite element method, which can deal with the system's parametric uncertainties mentioned above [33]. The objective of the work presented here is to develop a strategy suitable for multi-resolution problems. Therefore, the choice of an appropriate and efficient computational method is of vital importance. Some multi-resolution strategies have been proposed for optimization problems [6]. In our case, the optimized structural topology at a certain resolution level is used as an initial guess for the optimization at the next level. This provides an efficient implementation of the multi-resolution optimization technique.

The LATIN method [1] is nonincremental by nature in the sense that it accounts for the whole loading process in a single time increment which is not limited *a priori*. To give an idea of the step length, several loading cycles (or even several thousand cycles) can be simulated in a single time increment. This is an iterative method which differs drastically from the usual step-by-step procedures. Thus, it appears to be a promising approach, since its underlying principles tend to be more generally applicable than those of most conventional incremental algorithms. The strategy proposed here is based on the LATIN method and, more specifically, on its capability to re-utilize the solution obtained for one set of parameters in order to solve similar problems (for the other sets of parameters). This approach has already been used for viscoplastic and large-deformation problems [2, 3] and is now also being used for structural identification problems [7]. It allows one to reduce significantly the total computing cost of determining the design space.

In this paper, we consider the case of assemblies of elastic structures connected with frictional contact conditions and we limit ourselves to quasi-static loading conditions.

Contact problems are characterized by constraints such as non-penetration conditions, and an active area of contact - that is, an area where contact effectively occurs - that is unknown *a priori*. For these reasons, these problems lead to stiff non-linear systems of equations. Several approaches exist for solving static contact problems [8, 9, 10]. In most of them, the numerical methods that are employed for enforcing the contact constraints can be grouped into Lagrange multiplier and penalty methods [11]. The penalty methods [12, 13] are closely related to the regularization of the contact constraints. They are usually formulated in terms of the displacement variables, and therefore are primal methods. They allow treating contact as a material behavior, as exemplified by the method of joint finite elements [14]. Penalty methods can experience various numerical difficulties, especially ill-conditioning, when a too large or too small penalty parameter is introduced. Lagrange multiplier methods are dual methods where the multipliers, which represent the contact reaction forces, are introduced in order to enforce exactly the non-penetration conditions. Augmented Lagrange multiplier methods [15, 16, 17, 18] result in mixed formulations involving both displacement and force unknowns. The numerical solution schemes underlying both the Lagrange multiplier and augmented Lagrange multiplier methods are often related to the Uzawa algorithm [19, 20, 21].

Uniqueness of finite element solutions for frictional elastic problem have never been proved in the literature for general cases in elasticity. Some examples of non unique solutions have

been obtained for non analytical non smooth loading conditions on very simple systems in [22]. Uniqueness of continuum and finite element solutions have been proved for quasi-static frictional contact problems when a non local friction law is used and for small friction coefficient only [23, 24]. The friction law that is used in this paper is the classical Coulomb's law. A finite element discretisation of the contact forces leads to a regularised non local treatment of the friction conditions. Moreover, the loss of adherence on a contact zone during the application of the external load can lead to the existence of critical points. When critical points exist, classical incremental methods must use specific continuation techniques [25, 26, 27]. As the LATIN method build an approximation of the solution on the whole time interval at each increment, it can be seen as a continuation technique when the problems contains critical points. This particular aspect on the LATIN method have successfully been applied to large displacement problems where snap throw appears [3]. The examples that are proposed in this paper do not contain any situations of critical points.

2. THE LATIN METHOD

Here, we will review only the main aspects of the LATIN method. The details of the method itself can be found in [1] and those of its particular application to computational contact problems in [28, 29].

2.1. Decomposition of an assembly

An assembly is composed of a set of *substructures* (each substructure is a component of the assembly) which communicate with one another through *interfaces* (each interface represents a connection), see Fig. 1. Each interface is a mechanical entity with its own variables and its specific behavior which depends on the type of connection. Many different connection types can be modeled by this approach, but in this paper we consider only classical contact connections. Two connected substructures are denoted Ω_E and $\Omega_{E'}$ and the associated interface is designated by $\Gamma^{EE'}$.

The interface variables are two force fields \mathbf{f}^E and $\mathbf{f}^{E'}$ and two dual velocity fields $\dot{\mathbf{w}}^E$ et $\dot{\mathbf{w}}^{E'}$

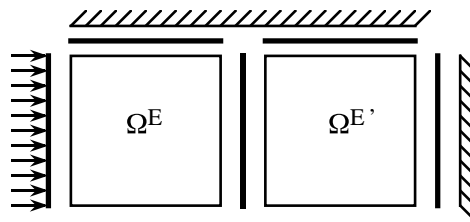


Figure 1. Decomposition of an assembly

(Fig. 2). By convention, \mathbf{f}^E and $\mathbf{f}^{E'}$ are the actions of the interface on the substructures and $\dot{\mathbf{w}}^E$ et $\dot{\mathbf{w}}^{E'}$ are the velocities of the substructures seen from the interface.

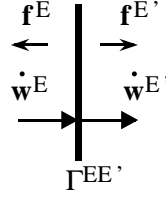


Figure 2. Interface variables

2.2. The problem in the substructures

The displacement field at any point M of Ω_E and at any time t of $[0, T]$ is $\mathbf{u}^E(M, t)$; the associated space is $\mathcal{U}^{[0, T]}$. ϵ is the strain field and the current state of the structure is characterized by the stress field σ^E .

The mechanical problem to be solved in each substructure is:

Find the histories of the displacement field $\mathbf{u}^E(M, t)$ and stress field $\sigma^E(M, t)$ such that:

- Kinematic admissibility:

$$\epsilon = \epsilon(\mathbf{u}^E); \quad \mathbf{u}^E(M, t)|_{\partial\Omega_E} = \mathbf{w}^E(M, t); \quad \mathbf{u}^E \in \mathcal{U}^{[0, T]} \quad (1)$$

- Equilibrium: $\forall \dot{\mathbf{u}}^* \in \mathcal{U}_0^{[0, T]}$

$$\int_{\Omega_E} Tr(\sigma^E \epsilon(\dot{\mathbf{u}}^*)) d\Omega_E - \int_{\Omega_E} \mathbf{f}_d \cdot \dot{\mathbf{u}}^* d\Omega - \int_{\partial\Omega_E} \mathbf{f}^E \cdot \dot{\mathbf{u}}^* dS = 0 \quad (2)$$

where $\mathcal{U}_0^{[0, T]}$ is the set of finite-energy velocity fields on Ω_E which vanish on $\partial\Omega_E$ and $\dot{\mathbf{u}}^*$ a virtual velocity field.

- Elastic behavior: $\forall M \in \Omega_E$ and $\forall t \in [0, T]$,

$$\sigma^E(M, t) = \mathbf{D}\epsilon(\mathbf{u}^E(M, t)) \quad (3)$$

where \mathbf{D} is Hooke's operator.

2.3. The problem on the interfaces

The mechanical problem to be solved on each interface is:

Find the histories of the force fields ($\mathbf{f}^E(M, t)$ and $\mathbf{f}^{E'}(M, t)$) and of the velocity fields ($\dot{\mathbf{w}}^E(M, t)$ and $\dot{\mathbf{w}}^{E'}(M, t)$) such that:

- Equilibrium: $\forall M \in \Gamma^{EE'}$ and $\forall t \in [0, T]$,

$$\mathbf{f}^E(M, t) + \mathbf{f}^{E'}(M, t) = \mathbf{0} \quad (4)$$

- Behavior: $\forall M \in \Gamma^{EE'}$ and $\forall t \in [0, T]$,

$$\mathbf{f}^E(M, t) = \mathcal{R}(\dot{\mathbf{w}}^{EE'}(M, \tau), \tau \in [0, t]) \quad (5)$$

where the behavior is expressed as a nonlinear evolution law \mathcal{R} between the forces and the rate $\dot{\mathbf{w}}^{EE'}$ of jump in displacement across the interface which is defined by:

$$\dot{\mathbf{w}}^{EE'} = \dot{\mathbf{w}}^{E'} - \dot{\mathbf{w}}^E \quad (6)$$

For example, a perfect connection between two substructures would be modeled by the following behavior:

$$\dot{\mathbf{w}}^{EE'}(M, t) = 0 \quad (7)$$

The form of the evolution law \mathcal{R} in the case of frictional contact conditions is described in section 2.5.

2.4. The LATIN algorithm

A LATIN (LArge Time INcrement) approach [1] is used to solve the problem. The solution s of the problem is written as a set of time-dependent fields on each substructure and related interfaces:

$$s = \sum_E s^E \quad ; \quad s^E = \{\mathbf{u}^E(M, t), \sigma^E(M, t), \dot{\mathbf{w}}^E(M, t), \mathbf{f}^E(M, t)\} \quad t \in [0, T]$$

The LATIN approach is based on the idea of isolating the difficulties in order not to have to solve a global problem and a nonlinear problem at the same time. The equations are split into two groups with the following two sets of solutions:

- the set \mathcal{A}_d of solutions s^E to the linear equations related to the substructures (Eq. 1 to 3)
- the set Γ of solutions s^E to the local equations (which may be nonlinear) related to the interfaces (Eq. 4 to 5)

The search for the overall solution (i.e. the intersection of the two sets) is conducted iteratively by constructing approximate solutions s which verify the two groups of equations alternatively on the complete time history. Thus, each iteration in the process is composed of two stages:

Local stage: for $s_n \in \mathcal{A}_d$ known, find \hat{s} such that:

$$\hat{s} \in \Gamma \quad (\text{interfaces}) \quad (8)$$

$$\hat{s} - s_n \in E^+ \quad (\text{search direction}) \quad (9)$$

Global stage: for $\hat{s} \in \Gamma$ known, find s_{n+1} such that:

$$s_{n+1} \in \mathcal{A}_d \quad (\text{substructures}) \quad (10)$$

$$s_{n+1} - \hat{s} \in E^- \quad (\text{search direction}) \quad (11)$$

In our particular case of linear elastic substructures, the inner solution (in displacement $\mathbf{u}^E(M, t)$ and in stress $\sigma^E(M, t)$) can easily be calculated from the boundary values ($\dot{\mathbf{w}}^E(M, t)$ and $\mathbf{f}^E(M, t)$). Therefore, from here on, a solution s will be represented only by the force and velocity fields on both sides of an interface.

The search directions are chosen such that the convergence of the algorithm is ensured [1]. These conjugate search directions depend on the scalar parameter k_0 :

$$\widehat{s} - s_n \in E^+ \quad \equiv \quad (\widehat{\mathbf{f}}^E - \mathbf{f}_n^E) = k_0(\widehat{\dot{\mathbf{w}}}^E - \dot{\mathbf{w}}_n^E) \quad (12)$$

$$s_{n+1} - \widehat{s} \in E^- \quad \equiv \quad (\mathbf{f}_{n+1}^E - \widehat{\mathbf{f}}^E) = -k_0(\dot{\mathbf{w}}_{n+1}^E - \widehat{\dot{\mathbf{w}}}^E) \quad (13)$$

The solution of the problem does not depend on the value of the parameter k_0 . It only affects the convergence rate of the algorithm. For quasistatic cases, which are studied here, k_0 is given by :

$$k_0 = \frac{E}{TL_c}$$

where E is the Young's modulus, $[0, T]$ is the studied time interval and L_c the largest dimension of the structure. An error indicator is used to control the convergence of the algorithm. This indicator is an energy measure of the distance between the two solutions s_n and \widehat{s} .

2.5. The frictional contact interface

The following sections describe the form of \mathcal{R} evolution law in the case of frictional contact conditions.

2.5.1. The contact problem. The outward normal at each point of an interface is designated by \mathbf{n} . The projection operator on the tangential plane P is defined by :

$$P\mathbf{w} = \mathbf{w} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{w})\mathbf{n}$$

The non-penetrating contact conditions are:

- *Open*: if $\mathbf{n} \cdot \widehat{\mathbf{w}}^{EE'} > 0$ then $\mathbf{n} \cdot \widehat{\mathbf{f}}^E = \mathbf{n} \cdot \widehat{\mathbf{f}}^{E'} = 0$.
- *Contact*: if $\mathbf{n} \cdot \widehat{\mathbf{w}}^{EE'} = 0$ then $\mathbf{n} \cdot (\widehat{\mathbf{f}}^E + \widehat{\mathbf{f}}^{E'}) = 0$.

These conditions can be written simply as:

- *Open*: $c_n > 0$.
- *Contact*: $c_n \leq 0$.

where the contact indicator c_n is:

$$c_n = \frac{1}{2}\mathbf{n} \cdot \widehat{\mathbf{w}}^{EE'} - \frac{1}{2k_0}\mathbf{n} \cdot (\widehat{\mathbf{f}}^{E'} - \widehat{\mathbf{f}}^E) \quad (14)$$

2.5.2. The friction problem. Coulomb's friction conditions can be written as:

- *Stick*: if $\|P\widehat{\mathbf{f}}^E\| < \mu|\mathbf{n} \cdot \widehat{\mathbf{f}}^E|$ then $P\widehat{\mathbf{w}}^{EE'} = 0$.
- *Slip*: if $\|P\widehat{\mathbf{f}}^E\| = \mu|\mathbf{n} \cdot \widehat{\mathbf{f}}^E|$ then $\exists \lambda > 0$ such that $P\widehat{\mathbf{w}}^{EE'} = -\lambda\widehat{\mathbf{f}}^E$.

These conditions can be written simply as:

- *Stick*: $\|\mathbf{g}_t\| \geq \mu|\mathbf{n} \cdot \widehat{\mathbf{f}}^E|$.
- *Slip*: $\|\mathbf{g}_t\| < \mu|\mathbf{n} \cdot \widehat{\mathbf{f}}^E|$.

where the slip indicator \mathbf{g}_t is:

$$\mathbf{g}_t = \frac{k_0}{2}P\widehat{\mathbf{w}}^{EE'} - \frac{1}{2}P(\widehat{\mathbf{f}}^{E'} - \widehat{\mathbf{f}}^E) \quad (15)$$

2.5.3. *Resolution.* The resolution is carried out by projecting the solution of the previous global stage onto the contact and friction conditions following the search directions:

$$(\widehat{\mathbf{f}}^E - \mathbf{f}_n^E) = k_0(\widehat{\mathbf{w}}^E - \dot{\mathbf{w}}_n^E) \quad (16)$$

$$(\widehat{\mathbf{f}}^{E'} - \mathbf{f}_n^{E'}) = k_0(\widehat{\mathbf{w}}^{E'} - \dot{\mathbf{w}}_n^{E'}) \quad (17)$$

The status (*Open*, *Contact*, *Stick* or *Slip*) of each point of the interface is obtained explicitly since the indicators c_n and \mathbf{g}_t can be derived from the previous solution. An implicit time integration scheme is used to calculate the contact indicator c_n expressed in terms of the displacements (see Eq. 14):

$$\widehat{\mathbf{w}}_{(t+1)}^{EE'} = \widehat{\mathbf{w}}_{(t)}^{EE'} + \Delta t \widehat{\mathbf{w}}_{(t+1)}^{EE'} \quad (18)$$

The initial condition of the time integration is used to take into account the initial gap. Thus, the contact indicator is written as:

$$c_n = \frac{1}{2\Delta t} \mathbf{n} \cdot \widehat{\mathbf{w}}^{EE'} - \frac{1}{2k_0} \mathbf{n} \cdot (\widehat{\mathbf{f}}^{E'} - \widehat{\mathbf{f}}^E) \quad (19)$$

in order to obtain using the time integration (Eq. 18) and the search directions (Eq. 16 and 17):

$$\begin{aligned} c_{n(t+1)} &= \frac{1}{2\Delta t} \mathbf{n} \cdot \widehat{\mathbf{w}}_{(t+1)}^{EE'} - \frac{1}{2k_0} \mathbf{n} \cdot (\widehat{\mathbf{f}}_{(t+1)}^{E'} - \widehat{\mathbf{f}}_{(t+1)}^E) \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{n} \cdot \widehat{\mathbf{w}}_{(t+1)}^{EE'} - \frac{1}{2k_0} \mathbf{n} \cdot (\widehat{\mathbf{f}}_{(t+1)}^{E'} - \widehat{\mathbf{f}}_{(t+1)}^E) + \frac{1}{2\Delta t} \mathbf{n} \cdot \widehat{\mathbf{w}}_{(t)}^{EE'} \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{w}}_{n(t+1)}^{EE'} - \frac{1}{2k_0} \mathbf{n} \cdot (\mathbf{f}_{n(t+1)}^{E'} - \mathbf{f}_{n(t+1)}^E) + \frac{1}{2\Delta t} \mathbf{n} \cdot \widehat{\mathbf{w}}_{(t)}^{EE'} \end{aligned}$$

Thus, the contact indicator is calculated incrementally from the known solution to the previous global stage. The slip indicator \mathbf{g}_t (Eq. 15) is calculated explicitly using the search directions (Eq. 16 and 17):

$$\mathbf{g}_t = \frac{k_0}{2} P \dot{\mathbf{w}}_n^{EE'} - \frac{1}{2} P (\mathbf{f}_n^{E'} - \mathbf{f}_n^E) \quad (20)$$

2.6. Discretization

Standard Finite Element discretization is used for the displacement field in the substructures:

$$\mathbf{u} = [N]\{u\} \quad \text{and} \quad \epsilon(\mathbf{u}) = [B]\{u\} \quad (21)$$

On the interfaces, a compatible discretization is applied to the velocity fields:

$$\widehat{\mathbf{w}}^E = [N]\{\dot{w}^E\} \quad \text{and} \quad \dot{\mathbf{w}}_n^E = [N]\{\dot{w}_n^E\} \quad (22)$$

The search directions considered (Eq. 12 and 13) lead one to choose the same discretization for the forces and for the velocity:

$$\widehat{\mathbf{f}}^E = [N]\{\widehat{f}^E\} \quad \text{and} \quad \mathbf{f}_n^E = [N]\{f_n^E\} \quad (23)$$

At the local stage, the contact equations are solved directly in terms of the nodal forces and velocities. Moreover, this representation of the forces (Eq. 23) plays a regularizing role for Coulomb's frictional problem : the friction law becomes thus non local [23, 24].

2.7. Resolution for the global stage

At the global stage, the equilibrium equation (Eq. 2), which also takes into account kinematic admissibility (Eq. 1), the behavior (Eq. 3) and the search direction (Eq. 13), becomes:

$$\int_{\Omega_E} Tr(\epsilon(\mathbf{u}_n^E) \mathbf{D} \epsilon(\dot{\mathbf{u}}^*)) d\Omega_E = \int_{\partial\Omega_E} (\hat{\mathbf{f}}^E - k_0(\dot{\mathbf{u}}_n^E - \hat{\mathbf{w}}^E)) \cdot \dot{\mathbf{u}}^* dS \quad (24)$$

$$\int_{\Omega_E} Tr(\epsilon(\mathbf{u}_n^E) \mathbf{D} \epsilon(\dot{\mathbf{u}}^*)) d\Omega_E + \int_{\partial\Omega_E} k_0 \dot{\mathbf{u}}_n^E \cdot \dot{\mathbf{u}}^* dS = \int_{\partial\Omega_E} (\hat{\mathbf{f}}^E + k_0 \hat{\mathbf{w}}^E) \cdot \dot{\mathbf{u}}^* dS \quad (25)$$

After discretization, Eq. 25 becomes:

$$k_0 [\mathbf{h}^E] \{\dot{u}(t)\} + [\mathbf{K}^E] \{u(t)\} = [\mathbf{h}^E] \left(\{\{\hat{f}^E\}(t)\} + k_0 \{\{\hat{w}^E\}(t)\} \right) \quad (26)$$

where

$$[\mathbf{h}^E] = \int_{\partial\Omega_E} [N]^t [N] ds \text{ and } [\mathbf{K}^E] = \int_{\Omega_E} [\mathbf{B}]^t \mathbf{D} [\mathbf{B}] d\Omega$$

$[\mathbf{K}^E]$ is the classical finite element stiffness matrix of substructure Ω_E and $[\mathbf{h}^E]$ is the boundary term related to the interfaces.

For the resolution of the differential equation (Eq. 26), a Euler implicit time integration scheme is used. Then, the boundary terms are calculated at each time step:

$$\{\dot{w}_n^E\} = [\mathbf{R}] \{\dot{u}_n^E\} \quad (27)$$

where $[\mathbf{R}]$ is the restriction operator on $\partial\Omega_E$. The forces are obtained using the search direction:

$$\{f_n^E\} = \{\hat{f}^E\} - k_0(\{\dot{w}_n^E\} - \{\hat{w}^E\}) \quad (28)$$

Finally, the algorithm can be summarize as shown in table I.

2.8. Remarks

When only static cases and perfect connections are considered, this algorithm can be obtained by other approaches such as in Lions [35] or Glowinski and Le Tallec [36]. In the case of frictional contact static cases it is not very far from augmented lagrangian algorithms as presented by Simo and Laursen [20] or Zavarise and Wriggers [37].

As augmented lagrangian algorithms the number of iterations can be elevated. But here, the operators \mathbf{K} and \mathbf{h} remain constant and independent of the iteration and of the contact status. Thus the cost of each iteration is low.

Moreover, it is very important to observe that the velocity and force fields on the interfaces constitute the only information needed for the subsequent iterations.

3. THE STRATEGY FOR THE PARAMETRIC STUDY

At each iteration, the LATIN method leads to an approximate solution to the problem over the whole time interval. Therefore, the trick is to reuse this approximation to find the solution

Initialize
Loop on the substructures (E) Compute $[K^E]$ and $[h^E]$. Factorization. Loop on the interfaces $\{\dot{w}_0^E\} = \{\dot{w}_0^{E'}\} = \{\hat{w}^E\} = \{\hat{w}^{E'}\} = \{0\}$ $\{f_0^E\} = \{f_0^{E'}\} = \{\hat{f}^E\} = \{\hat{f}^{E'}\} = \{0\}$
Iterate $n = 1, 2, \dots$ until convergence
Global stage : loop on the substructures (E) Assemble the right hand side in equation 26 Integrate $\{\dot{u}(t)\}$ (eqn 26) Compute $\{\dot{w}_n^E\}$ (eqn 27) Compute $\{f_n^E\}$ (eqn 28)
Local stage : loop on the interfaces (EE') Compute c_n (eqn 19) Compute the normal part of $\{\hat{w}^E\}$, $\{\hat{w}^{E'}\}$, $\{\hat{f}^E\}$ and $\{\hat{f}^{E'}\}$ with respect to the sign of c_n . Compute \mathbf{g}_ε (eqn 20) Compute the tangential part of $\{\hat{w}^E\}$, $\{\hat{w}^{E'}\}$, $\{\hat{f}^E\}$ and $\{\hat{f}^{E'}\}$ with respect to the value of $\ \mathbf{g}_\varepsilon\ $.
Convergence test

Table I. Algorithm

to a problem similar to the one for which it was calculated in the first place. The multiple-solution method uses the fact that the LATIN algorithm can be initialized with any solution (usually an elastic solution) provided that it verifies the admissibility conditions. Therefore, the key to our technique is to initialize the process associated with the similar problem (the "perturbed" structure) using the results of the calculation carried out on the "initial" structure. In this manner, a first approximation of the solution to the perturbed problem with a strong mechanical content is immediately available from the start.

In this particular case of elastic structures in contact, the interfaces play a vital role: they enable one to initiate the calculation on the perturbed structures without having to save all data on the substructures as well as to search for the solution of the perturbed problem with an initial solution well-suited to the target problem. In the best-case scenario, only a few iterations are necessary: the solution to the problem is obtained at low cost. If the solutions to the "initial" and "perturbed" problems are close enough, the latter can still be derived at a significantly lower cost than by using a full calculation.

For a simple parametric study, we just change the parameters between iterations. Thus, the new computation is initialized by the solution to the previous one. The algorithm of the full parametric study is summarized in Table II. If the parameters change slowly, the two solutions are close and only a few iterations are needed to reach convergence in the new calculation.

Initialize
Loop on the substructures (E) Compute $[K^E]$ and $[h^E]$ and factorize. Loop on the interfaces $\{\dot{w}_0^E\} = \{\dot{w}_0^{E'}\} = \{\hat{w}^E\} = \{\hat{w}^{E'}\} = \{0\}$ $\{f_0^E\} = \{f_0^{E'}\} = \{\hat{f}^E\} = \{\hat{f}^{E'}\} = \{0\}$
Define limits of parameter sets
Loop $k = 1, 2, \dots$ number of parameter sets
Restore quantities on the interfaces
Iterate until convergence
Global stage : see table I Local stage : see table I Convergence test
Save interface solution for k^{th} parameter set

Table II. Algorithm for the parametric study with the LATIN Method

4. EXAMPLES

4.1. A simple example

Let us consider the simple example of a cube subjected to frictional contact against a rigid body. This $40 \times 40 \times 40$ mm cube is subjected to friction on plane ($z = 0$). Symmetry conditions are prescribed at planes ($x = 0$) and ($y = 0$). The cube is pressed against the rigid body through the application of a pressure $P_1 = 5MPa$ on its upper side. The other two sides are successively loaded and unloaded ($P_2 = 10MPa$ and $P_3 = 10MPa$) in order to generate friction on the contact surface. The geometry and loading conditions are detailed in Figure 3. We consider the quasi-static, small-perturbation problem with an elastic material (Young's modulus $E = 130000MPa$ and Poisson's coefficient $\nu = 0.2$). The mesh is composed of 100 eight-node brick elements (460 degrees of freedom).

Figure 4 shows the deformed shape of the cube (magnified 400 times) for a friction coefficient $\mu = 0.4$ after completion of the five loading stages (application of P_1 , application of P_2 , application of P_3 , removal of P_2 and removal of P_3). Each loading stage was completed in 10 time steps.

The problem's parameter is the friction coefficient μ , which varies from 0 to 2 in increments of 0.1. We studied the displacements of Point A (Figure 3) in the contact plane ($z = 0$). Figure 5 shows the paths followed by Point A for the 21 values of μ .

The parametric study was initialized with the value $\mu = 0$. Figure 6 shows the evolution of the error indicator which increases every time the friction coefficient changes.

The cost of the computation was compared with the cost of a direct approach using ABAQUS. Figure 7 shows the cost of each of the 21 computations. One can observe that in the direct calculations using ABAQUS the computational cost increased with the friction

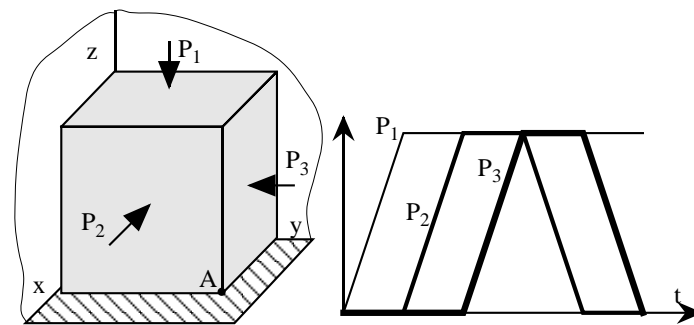


Figure 3. Cube example: the model and loading conditions

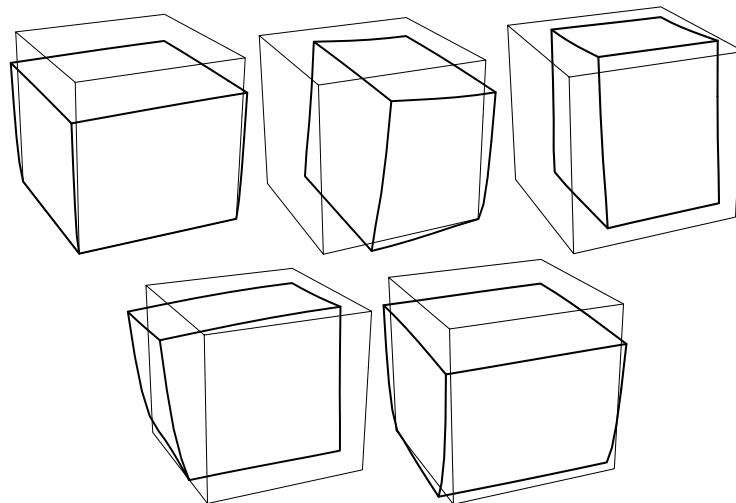


Figure 4. Cube example : deformed shape

coefficient. In the parametric study using the LATIN method, the computational cost decreased because the results of the successive computations were very close (as shown by Figure 5). Thus, even though the first calculation cost three times as much as the direct method, the global cost of the parametric study using the LATIN method was lower by a factor of 1.5. The calculations were carried out on a HP-J5000 workstation (Proc. PA8500 440Mhz - RAM 3.5Gb).

4.2. Parametric study : a multi-parameter example

On this quasi-static academic example, the influence of friction on two different contact zones was studied. The model is presented on Fig. 8. Three square parts ($h = 50\text{mm}$, Young's modulus $E = 2.1 \cdot 10^5 \text{MPa}$, Poisson coefficient $\nu = 0.3$) are in contact. The Coulomb friction coefficients on the contact zones are denoted μ_1 and μ_2 . A vertical load F_1 ($F_{1max} = 50\text{Mpa}$)

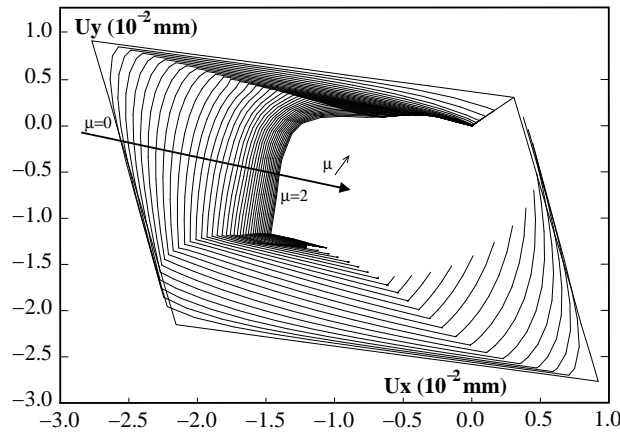


Figure 5. Cube example: movement of Point A

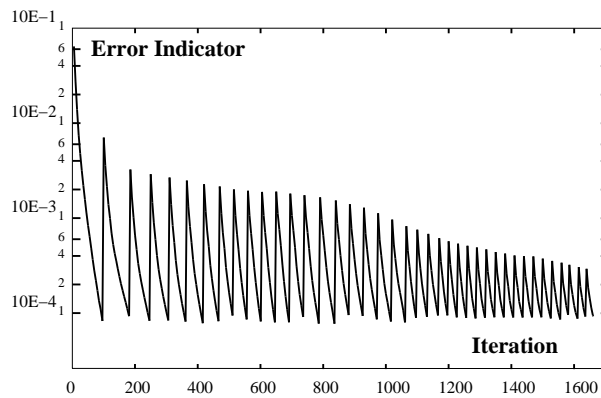


Figure 6. Cube example: evolution of the error indicator during the parametric study

was applied to the upper part in order to create a pressure load on the contact zones. A horizontal load F_2 ($F_{2max} = 30\text{Mpa}$) was applied to the middle part in order to make it slide until it strikes a rigid wall. The initial distance between the middle part and the rigid wall was $j = 0.04\text{mm}$.

A 25×25 finite element mesh (linear four-noded elements) was used for each part. The total number of elements is 1875 and the total number of degrees of freedom was 4056. The system's evolution was studied over 20 time steps.

Fig. 9 shows the deformed structure during the application of the lateral load in the case $\mu_1 = 0.1$ and $\mu_2 = 0.3$. Fig. 10 shows the history of displacement and pressure in two points of the structure for the same friction coefficients. In the following parametric study, the friction coefficients μ_1 and μ_2 were given 13 different values between 0. and 0.6 (step 0.05) and we

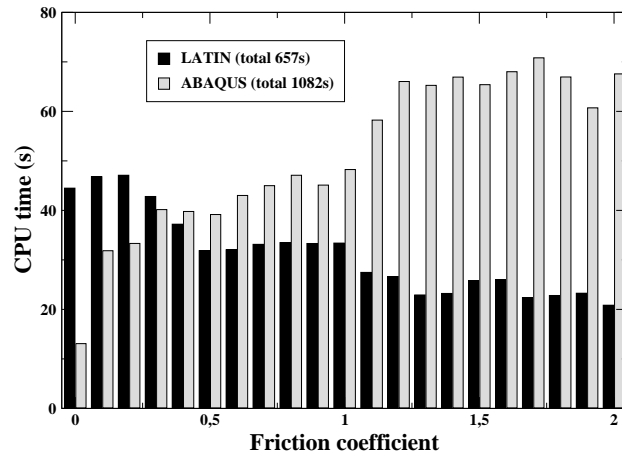


Figure 7. Cube example: cost of each calculation

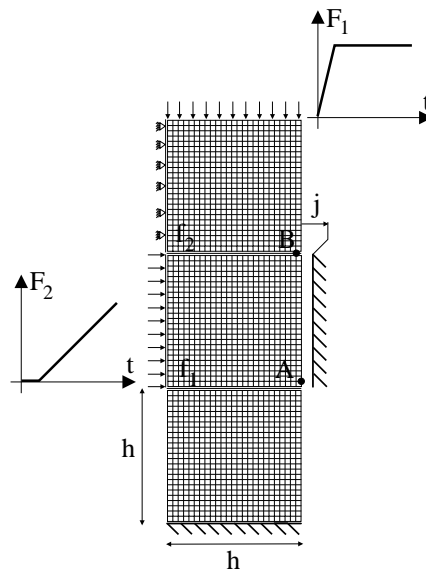


Figure 8. The model

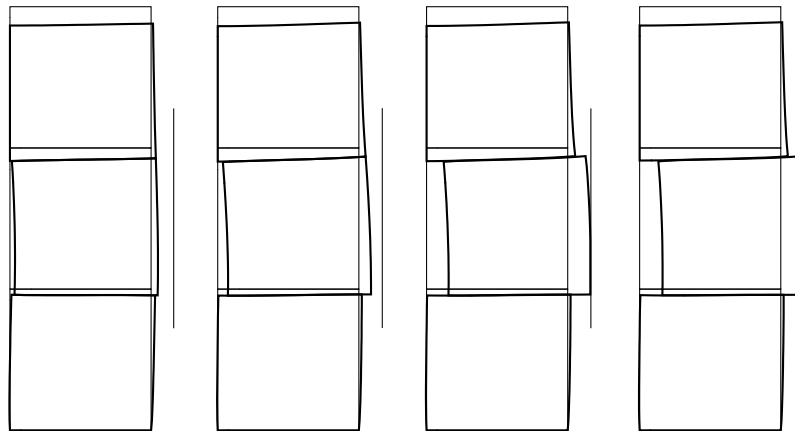


Figure 9. Deformed shape during the application of the lateral load

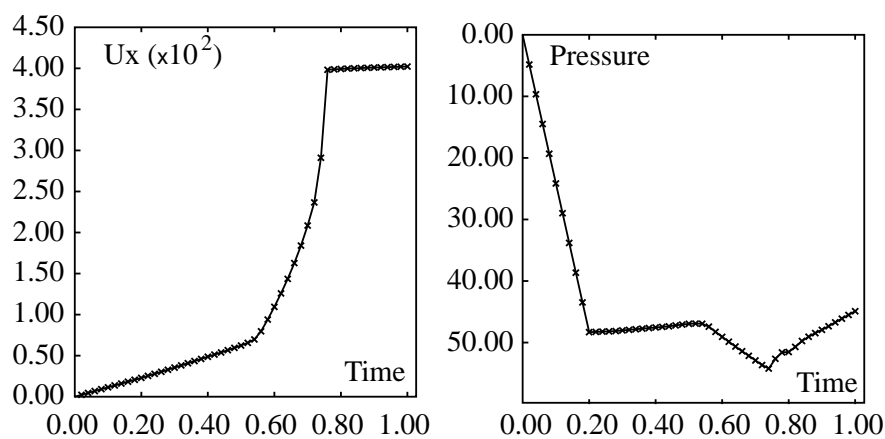


Figure 10. Horizontal displacement (mm) at point A and pressure (MPa) at point B

calculated the reaction force on the rigid wall. The reaction force varied from zero (incomplete sliding of the middle part) to the full (1500N) applied lateral load (no friction).

We carried out 13 different calculations following the strategy described previously (Tab. II). Each used a fixed value of μ_1 while the value of μ_2 was modified during the iterations. Fig. 11 shows the evolution of the error indicator during the process. Each change of μ_2 increased the error indicator, but the number of iterations needed decreased. For the highest values of μ_2 , the solutions were so close that only one or two iterations were needed to obtain a new value of the friction coefficient.

Table III shows the computation cost for each value of μ_2 . The calculations for each value

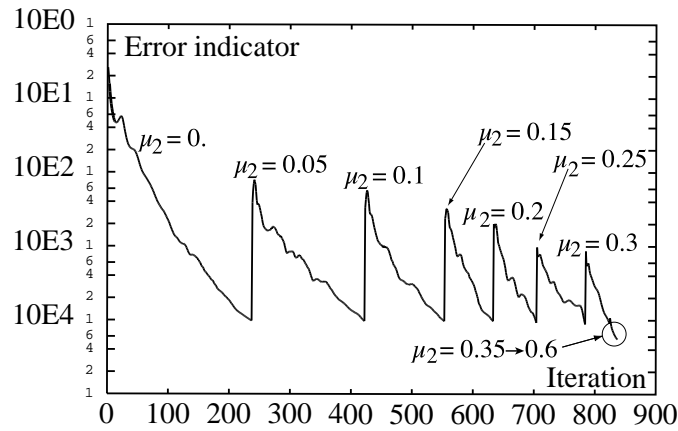


Figure 11. Error indicator during the iterations

of μ_1 can be carried out concurrently on different processors. Table IV shows a comparison of the costs of different types of calculations: a direct approach (169 calculations for each couple (μ_1, μ_2)), sequential parametric approach (13 calculations for each value of μ_1 with μ_2 modified during the iterations) and parallel parametric approach (13 concurrent calculations). The calculations were carried out on a PC (Proc. AMD Athlon(tm) 1.GHz - RAM 512Mb).

μ_2	0.00	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60
Nb ite	236	183	130	79	70	79	40	2	1	1	1	1	1
Time (s)	136.	106.	65.	46.	40.	46.	23.	1.2	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6

Table III. Cost of the parametric calculation

Calculation	Cost (s)	Cost (h)
LATIN direct	22980	6.4
LATIN parametric	6060	1.7
LATIN parametric (parallel)	466	0.13

Table IV. Cost comparison for different calculations

In order to apply the Response Surface Methodology (RSM), we plotted the response surface from the previous results describing the evolution of the reaction force on the rigid wall with respect to the friction coefficients μ_1 and μ_2 (Fig. 12). The RSM was developed initially by Veneziano et al. [30]. It has become a widely-accepted procedure in structural reliability analysis [31]. Schueller et al. [32] used the RSM to model the actual limit state function of

large structures subject to static and dynamic loading.

The influence of a particular perturbation on the value of the reaction force can be examined by using the response surface (Fig. 12). With these results, one can carry out a Monte-Carlo simulation using the response surface to determine the probability that the reaction force is greater than a given value. The results are plotted on Fig. 13.

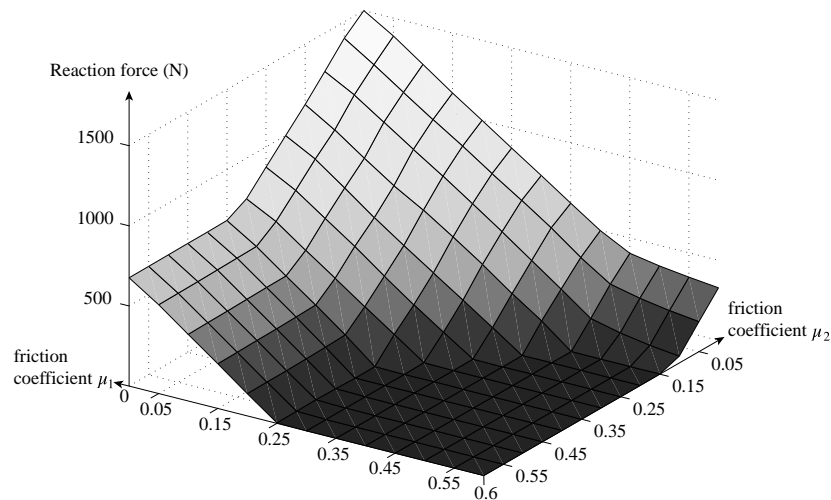


Figure 12. Response surface of the reaction force on the rigid wall

In the first case, we assumed a Gaussian distribution of both friction coefficients μ_1 and μ_2 . The second curve is based on a uniform random distribution of coefficients μ_1 and μ_2 . For both cases, ten thousand draws were carried out to obtain the probability that the reaction force exceed a given value as a function of this given value.

4.3. Parametric study :example of an assembly

This example deals with a bidimensional model of the section of a quadrupole prototype that was presented in [28].

Two magnetic channels are incorporated into a single iron yoke and cryostat and cooled with a helium superfluid in order to attain the very high guide field required (Fig. 14). The magnet coils tend to be long (approximately 14 meters) with an inner diameter of 56 mm; they are made of copper-clad Niobium-Titanium cables. The insulation is composed of two layers of Kapton.

The electromagnetic forces in the quadrupoles are contained by the collar structure. The collars are made of 2 mm thick austenitic steel laminations (Fig. 15). Every other pair of half-collars is turned 90 degrees and completed by two separate pole pieces. The keying and prestressing of the assembly is achieved by eight lines of wedge-shaped stainless steel keys which are progressively inserted into the grooves on the outside of the collars (Fig. 16). Once the coil-collar assemblies have been prepared and the coil interconnections completed, the yoke is positioned around the two units. In order to stiffen the entire yoke assembly, a so-called inertia

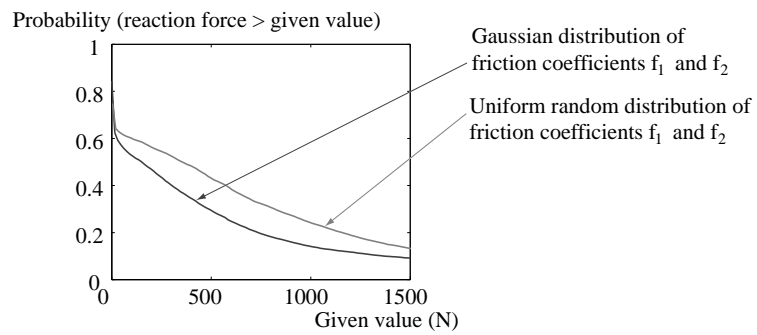
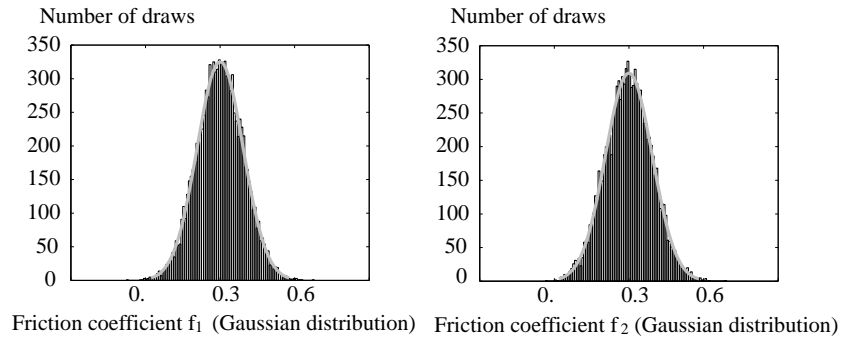


Figure 13. Probabilistic study

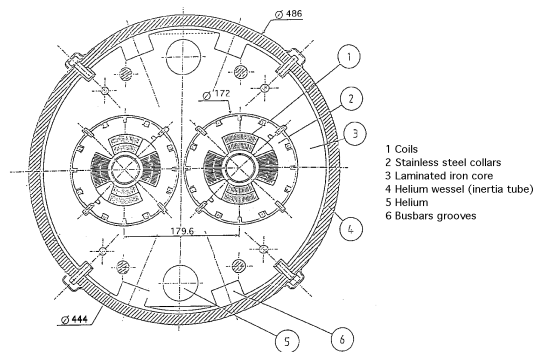


Figure 14. Quadrupole cross section

tube is placed around the yoke. This tube also serves as the helium vessel.

We only studied one cross section of a quadrupole in which we modeled the bobbin and two collars. The two collars were in the same plane. The relative motion of the collars was such that the preload was applied not only on the sides of the bobbin but also on its external radius.

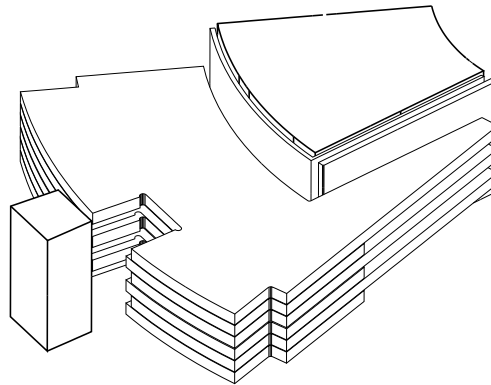


Figure 15. View of the collars

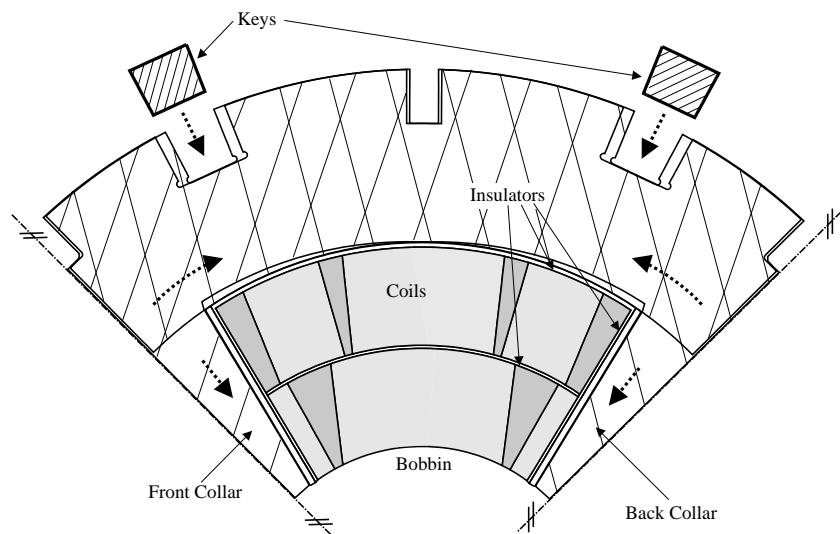


Figure 16. Model of the quadrupole

The mechanical structure of the quadrupoles was designed both to withstand the strong forces generated in the magnet and to limit, as far as possible, coil deformations over the entire operating range. Therefore, the materials used for the most highly-stressed components must have a high load-bearing capacity, a high elastic modulus, a good level of fatigue endurance and

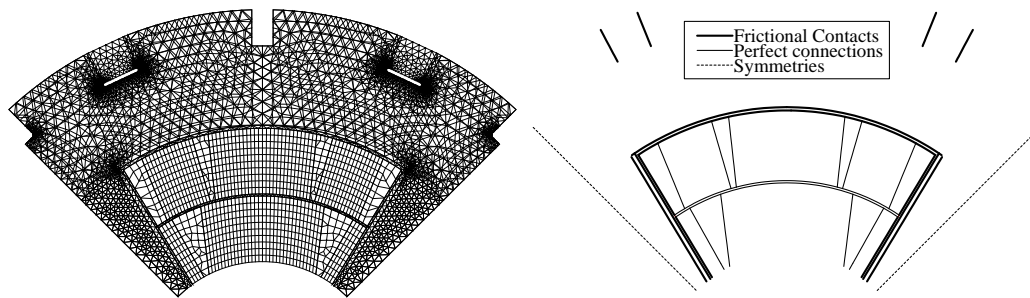


Figure 17. Mesh and interfaces

good behavioral characteristics at cryogenic temperatures as low as $1.9^{\circ}K$. Whenever current flows in the cables, the coils must be under compressive stress in order to avoid the occurrence of sudden cracks or movements. Coil displacements and deformations must be as small as possible. In order to satisfy these conditions, the relative dimensions of the structural components, the choice of materials and the level of prestressing must all be determined carefully. Furthermore, the peak compressive stress in the coils at room temperature must be minimized in order to prevent creeping both in the insulation and in the copper. Our main objective was to optimize the level of azimuthal prestress in order to avoid the occurrence of coil movements during the operation of the magnet. Thus, it was necessary to take frictional contact into account during the following three successive loading sequences (loading steps):

- preload due to the introduction of the keys: the introduction of the keys was not modeled completely. The keys enter the collars at the beginning of the step with a prescribed penetration which decreases to zero during the step.
- cooling down to the working temperature, i.e. from 293K to 1.9K. The material properties (Young's modulus and thermal expansion coefficient) were assumed to be temperature-dependent.
- application of the magnetic field: a Lorentz body force field was applied to the coils. This field had been determined in a previous calculation.

The influence of the preload (angular gap α between the keys and the collars) and of the friction (coefficient μ) on the lateral load (N) of the bobbin was studied. The mesh used (8424 elements, 5624 nodes and 11248 degrees of freedom) is shown on Fig. 17. Five time steps were used for each loading increment.

16 values of the preload parameter of the keys (angular gap α) and 19 values of the friction coefficient (μ) were considered. This means that 304 different calculations had to be carried out for the parametric study. These were divided into 16 different sessions (one for each value of α) which were carried out sequentially or concurrently. Fig. 19 shows the evolution of the error indicator during the three loading steps of one of the parametric studies ($\alpha = 0.3$). A great reduction of the number of iterations (with respect to the first calculation) was obtained for the last values of μ . Fig. 19 also shows the evolution of the lateral load N on the bobbin during the loading steps. This load is the result of the introduction of the keys and decreases during the cooling and the application of the magnetic field.

Table V shows a comparison of the computational costs of the different strategies:

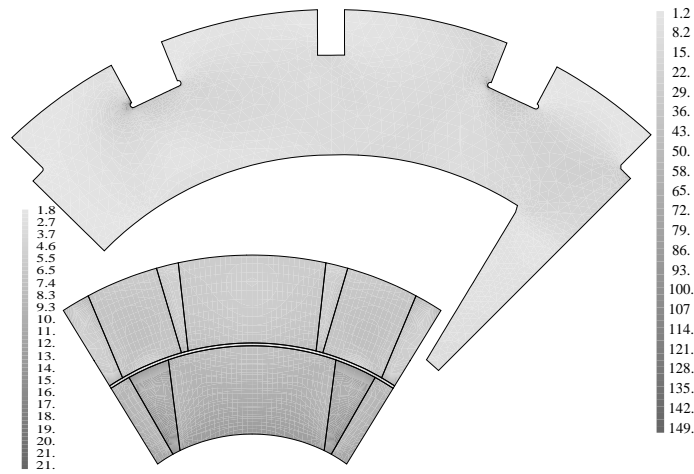


Figure 18. Von Mises' equivalent stress in the bobbin and in the back collar

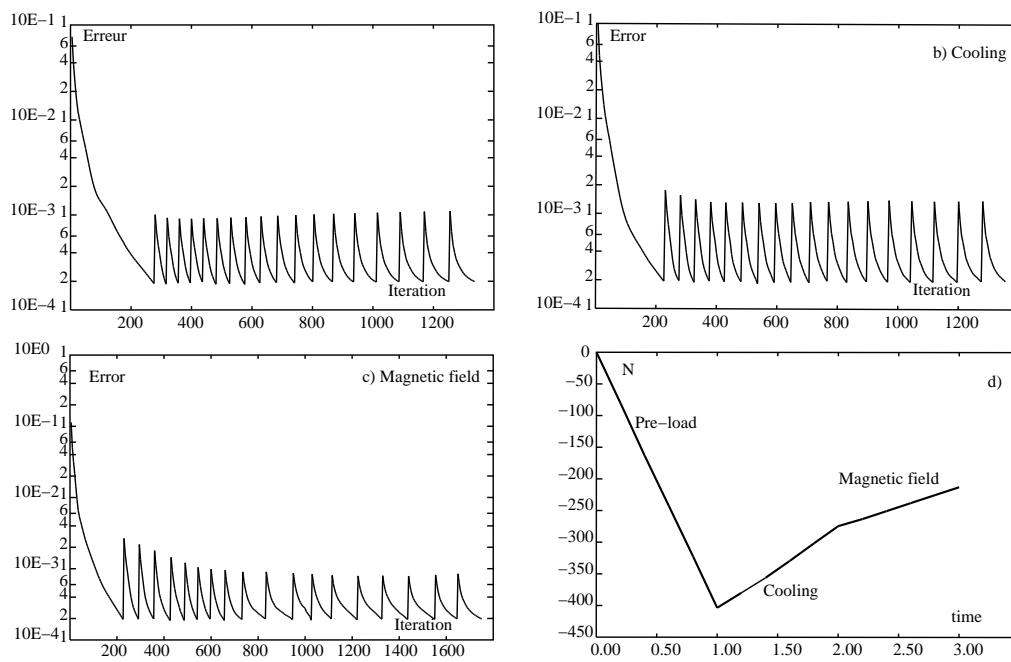


Figure 19. Evolution of the error indicator during the iteration of the multi-resolution process: preload step (a), cooling step (b) and magnetic field step (c). Evolution of the lateral load N during the three steps (d) for one case ($\mu = 0.2$ and $\alpha = 0.3$).

- the 304 different calculations carried out on a single processor (direct LATIN).
- the 16 parametric strategies (one for each value of α) carried out sequentially on one processor.
- the same 16 parametric strategies carried out concurrently on 16 processors.

The calculations were carried out on a PC (Proc. AMD Athlon(tm) 1.GHz - RAM 512Mb). Using the previous results, we plotted the response surface describing the evolution of the

Calculation	Cost (s)	Cost (h)
Direct LATIN	103,660	29
Parametric LATIN (sequential)	34,480	9.5
Parametric LATIN (parallel)	2,155	0.6

Table V. Comparison of the costs of different calculations

lateral load N in terms of the friction coefficient μ and the angular gap α (Fig. 20). This surface shows that the response is strongly influenced by the angular gap.

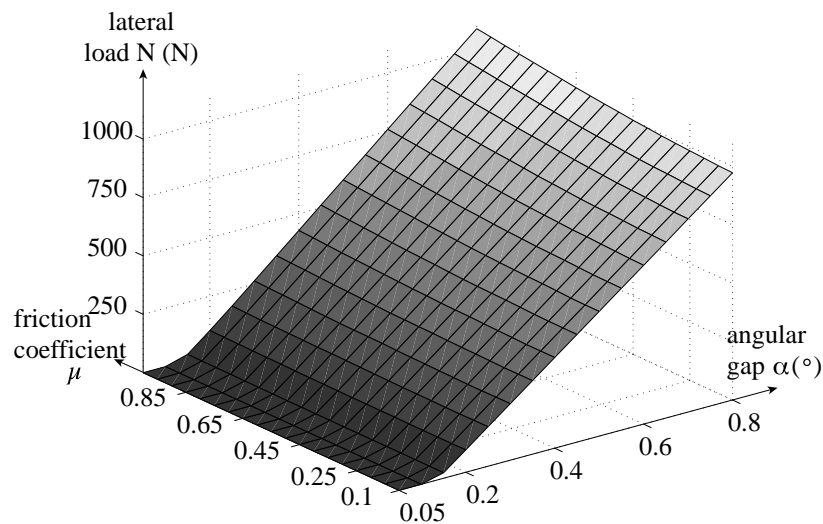


Figure 20. Response surface for the section of the quadrupole

Using the response surface, one can examine the influence of a particular perturbation on the value of the load N . A Monte-Carlo simulation was carried out to determine the probability that the load N exceed a given value (Fig. 21).

In the first case, we assumed Gaussian distributions for both the friction coefficient μ and the angular gap α . The second curve is based on a uniform random distribution of these two parameters. In both cases, ten thousand draws were carried out to obtain the probability curve.

These results follow the same trend as those presented in [34] where buckling and viscoelastic problems were considered. The use of the LATIN method combined with the RSM technique

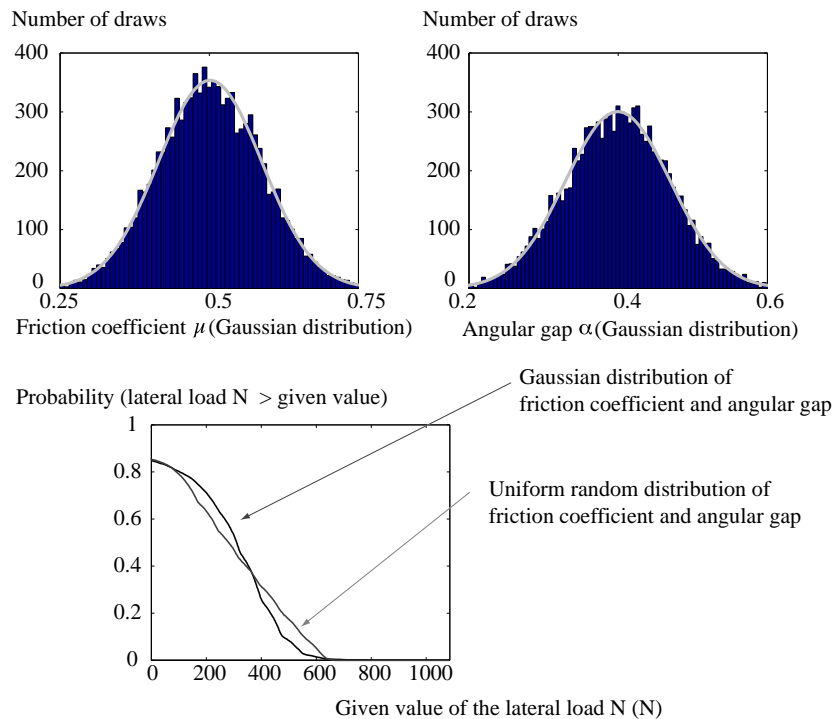


Figure 21. Monte-Carlo simulation

enabled us to calculate probabilities very effectively: the LATIN method generated the response surface inexpensively and the RSM technique combined with Monte Carlo calculation allowed us to estimate the probability that the middle part strike the rigid wall with a given force (static example) or that the lateral force N exceed a given force (assembly example).

5. CONCLUSIONS

The strategy proposed here is based on the LATIN method and, more specifically, on its capability to reuse the solution to a given problem in order to solve similar problems. Initial numerical examples showed the very good behavior of the algorithm applied to the case of multiple resolutions in the analysis of static and dynamic problems with contact and friction. The solution to the initial problem is a very good starting point for the calculations conducted on perturbed problems provided that these calculations do not exert excessive perturbations on the response. Moreover, as has already been explained, the interfaces play a vital role in allowing a considerable reduction of the computation costs. This first study was carried out on small academic problems; the next step will be to apply this strategy to large 3D structures, taking into account variations of the friction coefficient and also of the geometry and the material properties. Finally, this approach is quite general by nature and should

be applicable to a number of other nonlinear problems which require multiple solutions.

REFERENCES

1. Ladevèze P., *Nonlinear Computational Structural Mechanics - New Approaches and Non-Incremental Methods of Calculation*. Springer Verlag, 1999.
2. Boucard P.-A. and Ladeveze P., An application of the LATIN method to multiple calculation of nonlinear structural problems (in french). *Revue européenne des Éléments Finis*, **8**(8), 903–920, 1999.
3. Boucard P.-A. and Ladeveze P., A multiple solution method for non-linear structural mechanics. *Mechanical Engineering*, **50**(5), 317–328, 1999.
4. Benaroya H. and Rehak M., Finite element methods in probabilistic structural analysis: A selective review. *Applied Mechanics Reviews*, **41**(5), 201–213, 1998.
5. Macias O.F. and Lemaire M., Stochastic Finite Elements and fiability. Application to fracture mechanis (in french). *Revue française de génie civil*, **1**(2), 1997.
6. Kim Y.Y. and Yoon G.H. Multi-resolution multi-scale topology optimization : a new paradigm *Int. J. Solids Structures*, **37**(39), 5529–5559, 2000.
7. Allix O. and Vidal P. A new multi-solution approach suitable for structural identification problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **191**, 2727–2758, 2002.
8. Kikuchi N. and Oden J. T. (Eds) Contact problems in elasticity: a study of variational inequalities and finite element methods. *SIAM*, Philadelphia, 1988.
9. Zhong Z. and Mackerle J. Static contact problems : a review. *Engineering Computations*, (9), 3–37, 1992.
10. Wriggers P. Finite element algorithms for contact problems. *Archives of Computational Methods in Engineering*, (2), 1–49, 1995.
11. Wriggers P. et al. Penalty and augmented Lagrangian formulations for contact problems. *Proc. NUMETA Conf.*, Swansea, 1985.
12. Kikuchi N. Penalty/finite element approximations of a class of unilateral contact problems. *In Penalty method and finite element method*. ASME, New York, 1982.
13. Armero F. and Petcz E. Formulation and analysis of conserving algorithms for dynamic contact / impact problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, (158), 269–300, 1998.
14. Alart P. and Curnier A. A mixed formulation for frictional contact problems prone to Newton like solution methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, (92), 253–375, 1991.
15. Arora J.S., Chahande A.I., Paeng J.K. Multiplier methods for engineering optimization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, (32), 1485–1525, 1991.
16. A. Klarbring Mathematical programming and augmented lagrangian methods for frictional contact problems. *Proceedings of the Contact Mechanics International Symposium*, Curnier A. (ed.), Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 409–422, 1992.
17. Radi B., Baba O. A., Gelin J.C. Treatment of the frictional contact via a Lagrangian formulation. *Mathematical and Computer Modelling*, Rodin E.Y., Shillor M. (Eds.), Pergamon Press: Oxford, (28), 407–412, 1998
18. Chabrand P., Dubois F., Raous M. Various numerical methods for solving unilateral contact problems with friction. *Mathematical and Computer Modelling*, Rodin E.Y., Shillor M. (Eds.), Pergamon Press: Oxford, (28), 97–108, 1998
19. Arrow K.J., Hurwicz L., Uzawa H. Studies in nonlinear programming. *University Press*, Stanford, CA, 1958.
20. Simo J.C. and Laursen T.A., An augmented lagrangian treatment of contact problems involving friction, *Computers and Structures*, **42**, 97–116, 1992.
21. Champaney L., Cognard J.-Y., Ladevze P. Modular analysis of assemblages of three-dimensional structures with unilateral contact conditions. *Computers & Structures*, (73), 249–266, 1999.
22. Ballard P., A counter-example to uniqueness in quasi-static contact *Int. J. Engng Sci.*, (37), 163–178, 1999.
23. Cocu M., Pratt E., Raous M. Formulation and Approximation of Quasistatic Frictional Contact; *Int. J. Engng Sci.*, (34), 783–798, 1996.
24. Hild P., On finite element uniqueness studies for Coulomb’s frictional contact model, *Appl. Math. Comp.i*, (12), 41–50, 2002
25. Wempner G.A., Discrete Approximation Related to Nonlinear Theories of Solids. *International Journal of Solids and Structures*, (17), 1581–1599, 1971.
26. Riks E., The application of Newton’s method to the problem of elastic stability. *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 1060–1065, 1972.

27. Crisfield M.A., A Fast Incremental/Iterative Solution Procedure That Handles "Snap-Through". *Computers and Structures*, (13), 55-62, 1981.
28. Blanzé C., Champany L. and Védrine P., Contact problems in the design of a superconducting quadrupole prototype. *Engineering Computations*, **17**(2/3), 136-153, 2000.
29. Blanzé C., Champany L., Cognard J.Y. and Ladevèze P., A modular approach to structure assembly computations. Application to contact problems, *Engineering Computations*, **13**(1), 15-32, 1995.
30. Veneziano D., Casciati F. and Faravelli L. Method of seismic fragility for complicated systems. *Proceedings of the 2nd Specialistic Meeting on Probabilistic Methods in Seismic Risk Assessment for NPP, Committee on Safety of Nuclear Installations (CSNI)*, Livermore, California, 1983.
31. Faravelli L., Response-surface approach for reliability analysis. *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, **115**(12), 1989.
32. Schueller G.I., Bucher C.G. and Pradlwarter HJ. The response surface method, an efficient tool to determine the failure probability of large structural systems. *Proceedings of the International Conference on Spacecraft Structures and Mechanical Testing*, Noordwijk, The Netherlands, 24-26 April, ESA SP-321, 247-251, 1991.
33. Kleiber M. and Hien T.D. *Basic perturbation technique and computer implementation* John Willey & Sons, 1992.
34. Boucard P.-A., Application of the LATIN method to the calculation of response surfaces. *Proceeding of the First MIT Conference on Computational Fluid and Solid Mechanics*, Cambridge, USA, 12-15 June, K.J. Bathe Editor, **Vol. 1**, 78-81, 2001.
35. Lions P.L., On the Schwartz alternating method III: a variant for non-overlapping subdomains, in Chan T., Glowinski R., Périaux J. and Windlun O. (Eds), *Proceedings of Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations*, SIAM, Philadelphia, PA, 1990.
36. Glowinski R. and Le Tallec P., Augmented lagrangian interpretation of the non-overlapping Schwarz alternating method: domain decomposition method, *SIAM*, 224-231, 1990.
37. Zavarise G. and Wriggers P., A super linear convergent augmented lagrangian procedure for contact problems, *Engineering Computations*, **16**(1), 88-119, 1999.

Annexe D

Preprint : Comportement d'interface aléatoire

A Computational Strategy for the Random Response of Assemblies of Structures

C. Blanzé and L. Champaney

LMT Cachan, ENS de Cachan/CNRS/PARIS VI

61, av. du Pt Wilson - F94235 Cachan Cedex

Claude.Blanze@lmt.ens-cachan.fr

Laurent.Champaney@lmt.ens-cachan.fr

Abstract

This paper presents a dedicated approach to the calculation of the random response of assemblies with uncertain interface characteristics. The random response is constructed using a Polynomial Chaos Expansion (PCE). A decomposition of the assemblies into substructures and interfaces is defined and associated with a dedicated computational strategy which leads to a local/global algorithm enabling the treatments of the substructure and of the interface problems to be uncoupled. Since the only uncertain parameters are those which appear in the interface equations, this approach results in a drastic reduction of the computational costs. This paper first presents the classical stochastic finite element strategy for this kind of problem, then details the proposed dedicated approach. The applications concern structures assembled with uncertain elastic bonded joints. The proposed approach is compared to the Monte Carlo method and to the stochastic finite element method.

1 Introduction

Finite element calculations of structural assemblies are being used more and more in the industrial world (Blanzé et al., 2000). The recent progress in industrial finite element codes associated with the efficiency of modern computers enable one to carry out increasingly detailed calculations on individual parts of an assembly. It has become possible to take into account very complex geometries and material behavior. Nevertheless, a critical aspect of such calculations is the modeling of the boundary conditions. Therefore, it is necessary to calculate complete assemblies. Thus, the boundary condition problem is replaced by the problem of modeling the mechanical behavior of the connections between structural parts. These interactions between parts are often modeled by means of interface entities. Models of interface behavior have been

developed for contact, friction, joints, adhesives (Ladevèze et al., 2000)... The identification of the mechanical parameters of an interface's behavior (stiffness and friction coefficients, fracture energies,...) is a complicated task because one cannot perform experimental tests on a single interface: these are always performed on a simple assembly containing the interface. Thus, the identification process must assume complete knowledge of the rest of the assembly and is very often coupled with numerical calculations. Consequently, considerable uncertainties can affect the mechanical parameters measured (Tong and Steven, 1999; van Straalen et al., 1998).

The aim of the work presented here is to propose an efficient approach for the prediction of the random response of an assembly when significant uncertainties affect the parameters of the connections.

Starting with the assumption that the material properties of a particular interface can be modeled within the framework of probability theory, a very rich mathematical background is available to completely characterize the probabilistic behavior and evolution of the structure under external perturbations. Thus, the treatment presented in this paper adheres to a probabilistic framework. The theory is based on the L_2 properties of second-order random variables and the possibility of treating these variables as elements of a particular Hilbert space (Wiener, 1938; Loeve, 1977; Ghanem, 1999). Effective analytical methods for stochastic nonlinear systems are applicable only in some simple cases. When dealing with more complex systems, approximate methods and numerical integration are necessary. If the uncertainties are small, perturbation theory is a very valuable tool for analyzing their effects (Kleiber and Hien, 1992). If they are larger, then perturbation theory is not applicable. One obvious way to deal with Stochastic Partial Differential Equations (SPDEs) is the Monte Carlo method. This is an expensive technique, especially if some higher-order accuracy is sought for the mean values, standard variations, queues of distributions, etc... Various numerical methods for solving SPDEs have been proposed in the literature (Ghanem and Kruger, 1996). Ghanem and Spanos (1991) and Ghanem (1999) advocate a hybrid finite element and spectral approach, which we will refer to as the Spectral Stochastic Finite Element Method (SSFEM), while the monograph by Kleiber and Hien (1992) uses a perturbation approach. Elishakoff and Ren (1999) examine engineering finite element methods for structures with large stochastic variations and point to limitations in some of the approaches. Deb et al. (2001) present a theory of *a posteriori* error estimation and corresponding adaptive approaches. More complete descriptions of works on computational methods for SPDEs used to model stochastic behavior in mechanical problems can be found in the books by Kleiber and Hien (1992) and Ghanem and Spanos (1991). Review articles were written by Vanmarcke (1983), Lin et al. (1986), Vanmarcke et al. (1988) and Matthies et al. (1997). The application of the Spectral Stochastic Finite Element Method (SSFEM) for the analysis of randomly fluctuating proper-

ties of an interface between two elastic media was addressed by Ghanem and Brzakala (1996) and concern a geotechnical application.

Our computational strategy to solve the problem is based on the LATIN method. This method is a general strategy which was developed initially for the analysis of nonlinear structural problems (Ladevèze, 1999). It has been successfully extended to the calculation of assemblies of structures involving many types of connections (Blanzé et al., 1995, 2000; Ladevèze et al., 2000). In order to deal with such problems, the technique is associated with a decomposition of the problem into substructures and interfaces. The LATIN method is based on a decomposition of the problem into local, possibly nonlinear, equations describing the behavior of the interfaces and linear equations expressing the global equilibrium. Thus, since the only uncertain parameters reside in the local equations of the behavior at the interfaces, this strategy results in the treatment of the uncertainties and the treatment of the global problem being uncoupled.

In the following sections, the reference problem for a decomposition of an assembly into substructures and interfaces will be presented first. The classical stochastic finite element procedure in which interface finite elements are used to model the connection will be described. Then, the proposed approach will be developed for the case of uncertain elastic behavior at the interfaces. A comparison of the Monte Carlo method, the SSFEM and our iterative approach will be shown for a simple one-dimensional example. Finally, a two-dimensional industrial example comprising two adhesively bonded joints will be presented.

2 The reference problem

Here, we are considering structural assembly problems in which both the behavior of the components and the external loads are deterministic. The randomness of the response comes from the random behavior of the connections. In general, random uncertainties are modeled using a parametric approach. Recently, a nonparametric model of random uncertainties for reduced matrix models in structural dynamics was proposed by Soize (2000). The information used in this model does not require the description of the uncertain local parameters. This approach is based on a probability model for symmetric, positive definite random matrices deduced from the entropy optimization principle (Jaynes, 1957).

Here, the system's parameters, calibrated using experimental data, are modeled as random variables or processes which span a Hilbert space \mathcal{H}_G . Assuming that the data are properly defined by a set of random variables $\{\xi(\theta)\}$, where

θ belongs to the space of random events Ω , the state of the system, which is itself modeled as a random variable or process, lies in the Hilbert space $\mathcal{H}_{\mathcal{L}}$. A set of basis functions $\{\Psi\}$ of this space will be identified in the section dealing with Polynomial Chaos Expansion (PCE). In order to isolate the random aspect of the problem, we will be using a decomposition of the assembly; therefore, let us present the reference problem on a decomposed structure.

2.1 Decomposition of an assembly

An assembly is composed of a set of *substructures* (each of which is a component of the assembly) which communicate with one another through *interfaces* (each interface representing a connection): see Fig. 1. Each interface is a mechanical entity with its own variables and its specific behavior which depends on the type of connection. Many different types of connections can be modeled by this approach, but in this paper we are considering only joints with a random elastic behavior. Two connected substructures are denoted with superscript E and E' . Each domain is designed by V^E (resp. $V^{E'}$) and their interface is designated by $\Gamma^{EE'}$.

The interface variables are two force fields \vec{f}^E and $\vec{f}^{E'}$ and two dual displace-

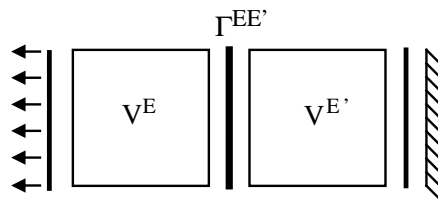


Fig. 1. Decomposition of an assembly

ment fields \vec{w}^E and $\vec{w}^{E'}$ (Fig. 2). By convention, \vec{f}^E and $\vec{f}^{E'}$ are the actions of the interface on the substructures and \vec{w}^E and $\vec{w}^{E'}$ are the displacements of the substructures at the interface.

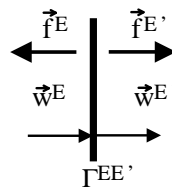


Fig. 2. Interface variables

2.2 The problem in the substructures

We assume that the displacements and strains remain small during the evolution and, therefore, we make the assumption of small perturbations. The displacement field at any point M of V^E is a random field $\vec{u}^E(M, \theta)$; the associated space is \mathcal{U} . The strain field is $\epsilon(\vec{u}^E(M, \theta))$ and the current state of the structure is characterized by the stress field $\sigma^E(M, \theta)$.

The mechanical problem to be solved in each substructure is: find the displacement field $\vec{u}^E(M, \theta)$ and the stress field $\sigma^E(M, \theta)$ such that:

- Kinematic admissibility: $\forall M \in V^E, \forall \theta \in \Omega$

$$\epsilon = \epsilon(\vec{u}^E); \quad \vec{u}^E|_{\partial V^E} = \vec{w}^E \quad (1)$$

- Equilibrium: $\forall \vec{u}^* \in \mathcal{U}_0, \forall \theta \in \Omega$

$$\int_{V^E} Tr(\sigma^E \epsilon(\vec{u}^*)) dV^E - \int_{V^E} \vec{f}_d \cdot \vec{u}^* dV - \int_{\partial V^E} \vec{f}^E \cdot \vec{u}^* dS = 0 \quad (2)$$

where \mathcal{U}_0 is the set of finite-energy displacement fields on V^E with zero value on ∂V^E , \vec{u}^* a virtual displacement field and \vec{f}_d a deterministic field of body forces.

- Elastic behavior: $\forall M \in V^E, \forall \theta \in \Omega$

$$\sigma^E = \mathbf{D}\epsilon(\vec{u}^E) \quad (3)$$

where \mathbf{D} is Hooke's operator, which, in our case, is deterministic.

2.3 The problem at the interfaces

The mechanical problem to be solved at each interface is: find the force fields ($\vec{f}^E(M, \theta)$ and $\vec{f}^{E'}(M, \theta)$) and the displacement fields ($\vec{w}^E(M, \theta)$ and $\vec{w}^{E'}(M, \theta)$) such that:

- Equilibrium: $\forall M \in \Gamma^{EE'}, \forall \theta \in \Omega$

$$\vec{f}^E(M, \theta) + \vec{f}^{E'}(M, \theta) = 0 \quad (4)$$

- Behavior: $\forall M \in \Gamma^{EE'}, \forall \theta \in \Omega$

$$\vec{f}^E(M, \theta) = \mathcal{R}(\vec{w}^{EE'}(M, \theta), \alpha(\theta)) \quad (5)$$

where the behavior is expressed in the form of a behavior law \mathcal{R} among the forces and a displacement jump across the interface $\vec{w}^{EE'}$ defined by:

$$\vec{w}^{EE'} = \vec{w}^{E'} - \vec{w}^E \quad (6)$$

and $\alpha(\theta)$ is a random material parameter. For example, a perfect connection between two substructures would be modeled as the following behavior:

$$\vec{w}^{EE'}(M, \theta) = 0 \quad (7)$$

In the case of random elastic conditions, the form of the behavior law \mathcal{R} is:

$$\vec{f}^E(M, \theta) = \mathbf{k}(\alpha(\theta))\vec{w}^{EE'}(M, \theta) \quad (8)$$

where \mathbf{k} is the interface's stiffness operator, which depends on a random material parameter $\alpha(\theta)$.

2.4 Discretization

Standard finite element discretization is used for the displacement field in the substructures:

$$\vec{u}^E(M, \theta) = \mathbf{N}_s(M)\mathbf{u}^E(\theta) \quad \text{and} \quad \epsilon(\vec{u}^E) = \mathbf{B}\mathbf{u}^E(\theta) \quad (9)$$

where \mathbf{u}^E is the vector of nodal displacements and \mathbf{N}_s are the classical finite element basis functions.

At the interfaces, a compatible discretization of the displacement fields is performed:

$$\vec{w}^E(M, \theta) = \mathbf{N}_i(M)\mathbf{w}^E(\theta) \quad \text{and} \quad \mathbf{w}^{EE'} = \mathbf{w}^{E'} - \mathbf{w}^E \quad (10)$$

where \mathbf{N}_i are the finite element basis functions at the interfaces (Schellekens and De Borst, 1993).

2.5 Global resolution

When the reference problem described above is solved by classical global resolution, the interfaces are modeled by means of interface elements (Fig. 3). The nodal displacements at the interfaces \mathbf{w}^E do not constitute additional variables, but are the restrictions of the substructure's displacements \mathbf{u}^E at the boundary:

$$\mathbf{R}\mathbf{u}^E(\theta) = \mathbf{w}^E(\theta); \quad (11)$$

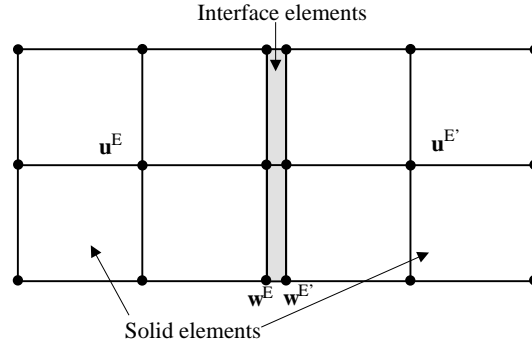


Fig. 3. Mesh used for global resolution

where \mathbf{R} is the Boolean operator for the restriction at the interfaces. Then, the global problem is written as:

$$\mathbf{K}(\alpha(\theta))\mathbf{u}(\theta) = \mathbf{f} \quad (12)$$

where $\mathbf{u}(\theta)$ is the global vector of the nodal displacements and \mathbf{f} is the deterministic vector of the nodal external forces. The global stiffness matrix $\mathbf{K}(\theta)$ is the assembly of the deterministic stiffness matrices of the substructures:

$$\mathbf{K}^E = \int_{V^E} \mathbf{B}^t \mathbf{D} \mathbf{B} dV^E \quad (13)$$

and of the random stiffness matrices of the interfaces (Schellekens and De Borst, 1993):

$$\mathbf{K}^{EE'}(\alpha(\theta))$$

3 Polynomial Chaos Expansion (PCE)

Since the resolution process depends on the material properties of the interfaces, the nodal solution variables $\mathbf{u}(\theta)$ can be formally expressed as a non-linear functional of the set $\{\xi_j(\theta)\}$ used to represent the material's stochastic properties. It has been shown (Cameron and Martin, 1947) that this functional dependence can be expanded in terms of Polynomial Chaos (P-C). Then, the truncated P-C expansion of the response takes the form:

$$\mathbf{u}(\theta) = \sum_{i=0}^P \mathbf{u}_i \Psi_i(\theta) \quad (14)$$

where $\{\Psi_i(\theta)\}$ are polynomials in the Gaussian random variables $\{\xi_i\}$. $\{\Psi_i(\theta)\}$ are Fourier-Hermite polynomials: they are orthogonal in the sense that their inner product $\langle \Psi_j \Psi_k \rangle$, which is defined as the statistical average of their product, is equal to $c_j \delta_{jk}$. Moreover, one can show that they constitute a complete

basis in the space of second-order random variables. Therefore, once the *deterministic* nodal solutions \mathbf{u}_i have been calculated, one obtains a complete probabilistic characterization of the process $\mathbf{u}(\theta)$. The number of polynomials (P) depends on the order p of the PCE and on the number L of stochastic parameters. The expressions of the polynomials used in this paper are given in Appendix A.

In the following sections, we will assume that the material parameters are constant throughout an interface. If they were not constant as well as non-deterministic, one could easily use a Karhunen-Loeve expansion to represent the spatial randomness of the interface's characteristics (Ghanem and Kruger, 1996).

4 The Spectral Stochastic Finite Element Method

The random character of the material property α is made explicit by its argument θ . The stochastic material property $\alpha(\theta)$ is represented by:

$$\alpha(\theta) = \bar{\alpha}(1 + \delta\xi(\theta)) \quad (15)$$

where $\bar{\alpha}$ is the mathematical expectation of $\alpha(\theta)$, δ the coefficient of variation (standard deviation divided by the expectation) and $\xi(\theta)$ the standard normal random variable: $\xi(\theta) \sim N(0, 1)$. For non-Gaussian material properties, the PCE is used to represent the material properties: the Gaussian process is a particular case chosen for the sake of simplicity (Ghanem, 1999). Following the traditional FE assembly procedure, this leads to the corresponding expansion of the stiffness matrix:

$$\mathbf{K} = \sum_{i=0}^L \xi_i \mathbf{K}_i \quad (16)$$

where \mathbf{K}_0 denotes the stiffness matrix for the mean material properties and the other terms correspond to the random fluctuations about the mean. The number of stochastic parameters is L . Expanding the nodal solution $\mathbf{u}(\theta)$ with respect to the polynomial chaos basis:

$$\mathbf{u}(\theta) = \sum_{j=0}^P \mathbf{u}_j \Psi_j(\theta) \quad (17)$$

and substituting Eqs. (16) and (17) into Eq. (12) leads to:

$$\sum_{j=0}^P \sum_{i=0}^L \xi_i \Psi_j(\theta) \mathbf{K}_i \mathbf{u}_j = \mathbf{f} \quad (18)$$

An equality, in a weak sense, can be derived by projecting Eq. (18) onto the subspace spanned by the polynomial chaos subset used in the approximation;

this process results in the following equations:

$$\sum_{j=0}^P \sum_{i=0}^L \langle \xi_i \Psi_j(\theta) \Psi_k(\theta) \rangle \mathbf{K}_i \mathbf{u}_j = \langle \Psi_k(\theta) \rangle \mathbf{f} \quad k = 0, 1, \dots, P, \quad (19)$$

The last equation can be rewritten as:

$$\sum_{j=0}^P \sum_{i=0}^L c_{ijk} \mathbf{K}_i \mathbf{u}_j = \delta_{0k} \mathbf{f} \quad k = 0, 1, \dots, P, \quad (20)$$

where the coefficients c_{ijk} denote $\langle \xi_i \Psi_j(\theta) \Psi_k(\theta) \rangle$ and can be calculated only once. This system of linear equations must be solved for the unknown \mathbf{u}_j of the PCE. The details of the above procedure were published in Ghanem and Spanos (1991). The implementation issues were addressed in a number of other references (Ghanem, 1999; Ghanem and Kruger, 1996). These equations can be assembled into a matrix of size $(P+1).n \times (P+1).n$ (n being the number of degrees of freedom) of the form:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K}^{(00)} & \mathbf{K}^{(01)} & \dots & \dots & \mathbf{K}^{(0P)} \\ \cdot & \cdot & \dots & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \mathbf{K}^{(jk)} & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \dots & \cdot \\ \mathbf{K}^{(P0)} & \mathbf{K}^{(P1)} & \dots & \dots & \mathbf{K}^{(PP)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_0 \\ \cdot \\ \mathbf{u}_k \\ \cdot \\ \mathbf{u}_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_0 \\ \cdot \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} \quad (21)$$

where

$$\mathbf{K}^{(jk)} = \sum_{i=0}^L \langle \xi_i \Psi_j(\theta) \Psi_k(\theta) \rangle \mathbf{K}_i \quad (22)$$

In summary, this approach consist of expanding the random response process about a basis of the Hilbert space of random variables and of calculating the coefficients of the expansion. The result is a convergent expansion of the response in terms of multidimensional orthogonal polynomials. Although the methodology used is becoming widespread, serious obstacles have been encountered, from a computational point of view, in practical implementations. In large and realistic problems, the methodology is either cumbersome or computationally intensive. Some numerical strategies, such as iterative algorithms, have been devised to overcome the numerical difficulties arising in this context (Pellissetti and Ghanem, 2000). The proposed approach uses the localization of the random characteristics in order to solve this type of problem more efficiently.

5 A dedicated approach

5.1 Discretization for a mixed method

In order to avoid solving a large problem when polynomial expansion is being used, we are proposing a dedicated approach which separates the treatment of the substructures from that of the interfaces. Here, the interface equations are treated in a mixed manner. Thus, we introduce a finite element discretization of the forces:

$$\bar{\mathbf{f}}^E(M, \theta) = \mathbf{N}_i(M) \mathbf{f}^E(\theta) \quad (23)$$

The discrete form of the problem becomes: find the solution

$$s = \sum_E s^E \quad ; \quad s^E = \{ \mathbf{u}^E(\theta), \mathbf{w}^E(\theta), \mathbf{f}^E(\theta) \}$$

such that on each substructure, $\forall \theta \in \Omega$,

- Kinematic admissibility: (discrete form of Eq. (1))

$$\mathbf{R} \mathbf{u}^E(\theta) = \mathbf{w}^E(\theta); \quad (24)$$

where \mathbf{R} is the deterministic Boolean operator for the restriction at the interfaces.

- Equilibrium and elastic behavior: (discrete form of Eqs. (2) and (3))

$$\mathbf{K}^E \mathbf{u}^E(\theta) = \mathbf{h} \mathbf{f}^E(\theta) \quad (25)$$

with \mathbf{K}^E the classical FE stiffness matrix which is here deterministic (see Eq. (3)) and

$$\mathbf{h} = \int_{\Gamma^{EE'}} \mathbf{N}_i^t \mathbf{N}_i d\Gamma$$

- Interface equilibrium: (discrete form of Eq. (4))

$$\mathbf{f}^E(\theta) + \mathbf{f}^{E'}(\theta) = 0 \quad (26)$$

- Interface behavior: (discrete form of Eq. (5))

$$\mathbf{f}^E(\theta) = \mathcal{R}(\mathbf{w}^{EE'}(\theta), \alpha(\theta)) \quad (27)$$

5.2 The LATIN method

To solve the problem, we use the LARge Time INcrement (LATIN) approach (Ladevèze, 1999). The LATIN approach is based on the idea of separating the difficulties in order not to have to solve a problem which is both global and random. The equations are split into two groups with two corresponding sets of solutions:

- the set \mathcal{A}_d of the solutions s^E to the linear deterministic equations related to the substructures (Eqs. (24) to (25))
- the set Γ of the solutions s^E to the local equations related to the interfaces (Eqs. (26) to (27), which may be non-deterministic equations).

The search for the overall solution (i.e. the intersection of the two sets) is conducted iteratively by constructing approximate solutions s which verify the two groups of equations alternatively over the whole time history. Thus, each iteration in the process consists of two stages:

the local stage: for $s_n \in \mathcal{A}_d$ known, find \hat{s} such that:

$$\hat{s} \in \Gamma \quad (\text{interfaces}) \quad (28)$$

$$\hat{s} - s_n \in E^+ \quad (\text{search direction}) \quad (29)$$

the global stage: for $\hat{s} \in \Gamma$ known, find s_{n+1} such that:

$$s_{n+1} \in \mathcal{A}_d \quad (\text{substructures}) \quad (30)$$

$$s_{n+1} - \hat{s} \in E^- \quad (\text{search direction}) \quad (31)$$

In our particular case of linear deterministic elastic substructures, the internal solution (displacement $\mathbf{u}^E(\theta)$) can be easily calculated from the boundary values ($\mathbf{w}^E(\theta)$ and $\mathbf{f}^E(\theta)$). Therefore, from this point on, we will represent a solution s only by the force and displacement fields on both sides of an interface.

The search directions are chosen such that convergence of the algorithm is ensured (Ladevèze, 1999). These conjugate search directions depend on the scalar parameter k_0 :

$$\hat{s} - s_n \in E^+ \quad \equiv \quad (\hat{\mathbf{f}}^E - \mathbf{f}_n^E) = k_0(\hat{\mathbf{w}}^E - \mathbf{w}_n^E) \quad (32)$$

$$s_{n+1} - \hat{s} \in E^- \quad \equiv \quad (\mathbf{f}_{n+1}^E - \hat{\mathbf{f}}^E) = -k_0(\mathbf{w}_{n+1}^E - \hat{\mathbf{w}}^E) \quad (33)$$

The resolution algorithm can be represented as shown on Fig. 4. The solution s to the problem is the intersection of the sets \mathcal{A}_d and Γ .

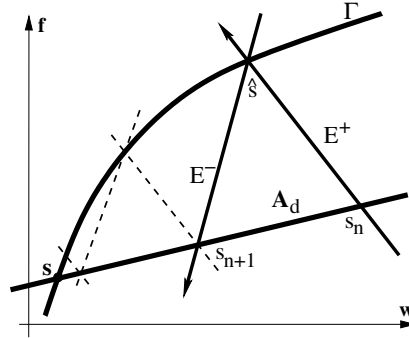


Fig. 4. The LATIN algorithm

The solution to the problem does not depend on the value of the parameter k_0 . This parameter affects only the convergence rate of the algorithm. For the quasi-static cases which interest us here, k_0 is given by:

$$k_0 = \frac{E}{L_c} \quad (34)$$

where E is the average Young's modulus and L_c the largest dimension of the structure. An error indicator is used to control the convergence of the algorithm. This indicator is an energy measure of the distance between the two solutions s_n and \hat{s} . PCE is used to represent all the problem's variables:

$$\mathbf{u}^E(\theta) = \sum_{i=0}^P \mathbf{u}_i^E \Psi_i(\theta) \quad (35)$$

$$\mathbf{w}_n^E(\theta) = \sum_{i=0}^P \mathbf{w}_{in}^E \Psi_i(\theta) \quad ; \quad \hat{\mathbf{w}}^E(\theta) = \sum_{i=0}^P \hat{\mathbf{w}}_i^E \Psi_i(\theta) \quad (36)$$

$$\mathbf{f}_n^E(\theta) = \sum_{i=0}^P \mathbf{f}_{in}^E \Psi_i(\theta) \quad ; \quad \hat{\mathbf{f}}^E(\theta) = \sum_{i=0}^P \hat{\mathbf{f}}_i^E \Psi_i(\theta) \quad (37)$$

For convenience, we note $\mathbf{w}^{EE'} = \mathbf{w}^E - \mathbf{w}^{E'}$ the jump of displacement at the interface :

$$\mathbf{w}_n^{EE'}(\theta) = \mathbf{w}_n^E(\theta) - \mathbf{w}_n^{E'}(\theta) = \sum_{i=0}^P (\mathbf{w}_{in}^E - \mathbf{w}_{in}^{E'}) \Psi_i(\theta) = \sum_{i=0}^P \mathbf{w}_{in}^{EE'} \Psi_i(\theta) \quad (38)$$

$$\hat{\mathbf{w}}^{EE'}(\theta) = \hat{\mathbf{w}}^E(\theta) - \hat{\mathbf{w}}^{E'}(\theta) = \sum_{i=0}^P (\hat{\mathbf{w}}_i^E - \hat{\mathbf{w}}_i^{E'}) \Psi_i(\theta) = \sum_{i=0}^P \hat{\mathbf{w}}_i^{EE'} \Psi_i(\theta) \quad (39)$$

5.3 Resolution of the local stage

At the local stage, the quantities $\mathbf{f}_n^E(\theta)$, $\mathbf{f}_n^{E'}(\theta)$, $\mathbf{w}_n^E(\theta)$ and $\mathbf{w}_n^{E'}(\theta)$ are known from the previous global stage. They are described by the coefficients of their

chaos expansion: \mathbf{f}_{in}^E , $\mathbf{f}_{in}^{E'}$, \mathbf{w}_{in}^E and $\mathbf{w}_{in}^{E'}$, $i = 0 \dots P$.

In the case of a random elastic interface, the problem which must be solved at the local stage is expressed by the following system.

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{f}}^E(\theta) + \hat{\mathbf{f}}^{E'}(\theta) = 0 \\ \hat{\mathbf{f}}^E(\theta) = \mathbf{k}(\alpha(\theta))\hat{\mathbf{w}}^{EE'}(\theta) \\ (\hat{\mathbf{f}}^E(\theta) - \mathbf{f}_n^E(\theta)) = k_0(\hat{\mathbf{w}}^E(\theta) - \mathbf{w}_n^E(\theta)) \\ (\hat{\mathbf{f}}^{E'}(\theta) - \mathbf{f}_n^{E'}(\theta)) = k_0(\hat{\mathbf{w}}^{E'}(\theta) - \mathbf{w}_n^{E'}(\theta)) \end{cases} \quad (40)$$

We assumed the stiffness to be constant along the interface. As mentioned in section 3, if they were not constant as well as nondeterministic, one could easily use a Karhunen-Loeve expansion to represent the spatial randomness of the interface's characteristics (Ghanem and Kruger, 1996). Then, the problem is composed of a set of independent problems at each node of the interface. The interface's stiffness \mathbf{k} consists of a normal stiffness and a tangential stiffness. The normal and tangential problems are uncoupled. Therefore, we are presenting only the resolution in one direction. We designate by $(\hat{f}^E, \hat{f}^{E'}, \hat{w}^{EE'} = \hat{w}^{E'} - \hat{w}^E)$ the unknowns at one node and in one direction. $(f_n^E, f_n^{E'}, w_n^E, w_n^{E'})$ are the associated variables known from the previous global stage. We assume that the behavior along the direction considered depends on a single random stiffness parameter $k_i(\theta)$. $i \in [1 \dots L]$, L being the total number of random parameters.

Then, the problem is expressed in the form of the following scalar system:

$$\begin{cases} \hat{f}^E(\theta) + \hat{f}^{E'}(\theta) = 0 \\ \hat{f}^E(\theta) = k_i(\theta)\hat{w}^{EE'}(\theta) \\ (\hat{f}^E(\theta) - f_n^E(\theta)) = k_0(\hat{w}^E(\theta) - w_n^E(\theta)) \\ (\hat{f}^{E'}(\theta) - f_n^{E'}(\theta)) = k_0(\hat{w}^{E'}(\theta) - w_n^{E'}(\theta)) \end{cases} \quad (41)$$

where the random stiffness k_i is expressed according to Eq. (15):

$$k_i(\theta) = \bar{k}_i(1 + \delta\xi_i(\theta)) \quad (42)$$

System (41) reduces to the following equation:

$$(2k_i(\theta) + k_0)\hat{w}^{EE'}(\theta) = k_0(w_n^{E'}(\theta) - w_n^E(\theta)) - (f_n^{E'}(\theta) - f_n^E(\theta)) = \tilde{g}_n(\theta) \quad (43)$$

where the second member, denoted $\tilde{g}_n(\theta)$, is known from the previous global

stage. The variables are expanded over the polynomial chaos.

$$\widehat{w}^{EE'} = \sum_{j=0}^P \widehat{w}_j^{EE'} \Psi_j(\theta) \quad \text{and} \quad \tilde{g}_n = \sum_{j=0}^P \tilde{g}_{jn} \Psi_j(\theta) \quad (44)$$

Eq. (43) becomes:

$$(2\bar{k}_i(1 + \delta\xi_i(\theta)) + k_0) \sum_{j=0}^P \widehat{w}_j^{EE'} \Psi_j(\theta) = \sum_{j=0}^P \tilde{g}_{jn} \Psi_j(\theta) \quad (45)$$

A weak equality can be established by projecting this equation onto the subspace spanned by the Polynomial Chaos subset used in the approximation; this process results in the following equation:

$$(2\bar{k}_i + k_0) \sum_{j=0}^P \widehat{w}_j^{EE'} c_{jk} + 2\bar{k}_i \delta \sum_{j=0}^P \widehat{w}_j^{EE'} c_{ijk} = \sum_{j=0}^P \tilde{g}_{jn} c_{jk}, \quad k = 0, 1, \dots, P \quad (46)$$

where $c_{ijk} = \langle \xi_i(\theta) \Psi_j(\theta) \Psi_k(\theta) \rangle$ and $c_{jk} = \langle \Psi_j(\theta) \Psi_k(\theta) \rangle$ (according to Eq. (20)).

Using the orthogonality properties of the basis functions, we obtain:

$$(2\bar{k}_i + k_0) c_{kk} \widehat{w}_k^{EE'} + 2\bar{k}_i \delta \sum_{j=0}^P c_{ijk} \widehat{w}_j^{EE'} = c_{kk} \tilde{g}_{kn}, \quad k = 0, 1, \dots, P \quad (47)$$

and corresponds to a scalar system of size $(P + 1)$. Then, the remaining variables are calculated using the following system:

$$\begin{cases} \widehat{f}_k^{E'} = -\widehat{f}_k^E = \frac{1}{2}(k_0 \widehat{w}_k^{EE'} + \tilde{g}_{kn}) \\ \widehat{w}_k^E = w_{kn}^E + \frac{1}{k_0}(\widehat{f}_k^E - f_{kn}^E) \\ \widehat{w}_k^{E'} = w_{kn}^{E'} + \frac{1}{k_0}(\widehat{f}_k^{E'} - f_{kn}^{E'}) \end{cases}, \quad k = 0, 1, \dots, P \quad (48)$$

Thus, the resolution of the local stage consists of solving a series of small independent systems of size $(P + 1)$ at each point and along each direction.

5.4 Resolution for the global stage

At the global stage, the quantities $\widehat{\mathbf{f}}^E(\theta)$, $\widehat{\mathbf{f}}^{E'}(\theta)$, $\widehat{\mathbf{w}}^E(\theta)$ and $\widehat{\mathbf{w}}^{E'}(\theta)$ are known from the previous local stage. They are described by the coefficients of their chaos expansion: $\widehat{\mathbf{f}}_i^E$, $\widehat{\mathbf{f}}_i^{E'}$, $\widehat{\mathbf{w}}_i^E$, $\widehat{\mathbf{w}}_i^{E'}$, $i \in [0 \dots P]$.

At the global stage, the equilibrium equation Eq. (25), which also takes into account the search direction (Eq. (33)), becomes:

$$\mathbf{K}^E \mathbf{u}_{n+1}^E = \mathbf{h}(\widehat{\mathbf{f}}^E - k_0(\mathbf{w}_{n+1}^E - \widehat{\mathbf{w}}^E)) \quad (49)$$

which, once kinematic admissibility (Eq. (24)) has been included, becomes:

$$[\mathbf{K}^E + k_0 \mathbf{hR}] \mathbf{u}_{n+1}^E = \mathbf{h}(\hat{\mathbf{f}}^E + k_0 \hat{\mathbf{w}}^E) \quad (50)$$

where $\tilde{\mathbf{K}}^E = [\mathbf{K}^E + k_0 \mathbf{hR}]$ is a deterministic matrix.

Using the PCE (Eqs. (35) to (37)), we obtain:

$$\tilde{\mathbf{K}}^E \sum_{i=0}^P \mathbf{u}_{i n+1}^E \Psi_i(\theta) = \sum_{i=0}^P \mathbf{h}(\hat{\mathbf{f}}_i^E + k_0 \hat{\mathbf{w}}_i^E) \Psi_i(\theta) \quad (51)$$

where $\tilde{\mathbf{f}}_i^E = \mathbf{h}(\hat{\mathbf{f}}_i^E + k_0 \hat{\mathbf{w}}_i^E)$ on the right-hand side is known from the previous local stage. Since $\tilde{\mathbf{K}}^E$ is deterministic, a term-by-term identification of Eq. (51) leads to the following $(P + 1)$ independent equations:

$$\tilde{\mathbf{K}}^E \mathbf{u}_{k n+1}^E = \tilde{\mathbf{f}}_k^E, \quad k = 0, 1, \dots, P \quad (52)$$

Once these independent problems have been solved, the boundary terms are calculated (kinematic admissibility (Eq. (24)):

$$\mathbf{w}_{i n+1}^E = \mathbf{R} \mathbf{u}_{i n+1}^E, \quad i = 0, 1, \dots, P \quad (53)$$

The forces are obtained using the search direction (Eq. (33)):

$$\mathbf{f}_{i n+1}^E = \hat{\mathbf{f}}_i^E - k_0 (\mathbf{w}_{i n+1}^E - \hat{\mathbf{w}}_i^E), \quad i = 0, 1, \dots, P \quad (54)$$

It is important to observe that the matrices appearing in System Eq. (52) remain constant throughout the iterations and, therefore, need to be factorized only once before the first iteration. An even more important point is that the problems within the substructures are completely independent of one another and could be solved in parallel very efficiently.

6 1D example: traction of two beams with an uncertain connection

In this section, we present a simple 1D example. We will derive the exact solution (appendix B) and give the details of the SSFEM (appendix C) and of our proposed approach (appendix D). Let us consider the assembly of two substructures (each substructure being a beam with deterministic behavior) connected by an interface whose stiffness $k(\theta)$ is assumed to be random (Fig. 5).

The assembly is subjected to uniaxial tension. The only quantities used to represent the behavior of the beams are their respective tractional stiffness

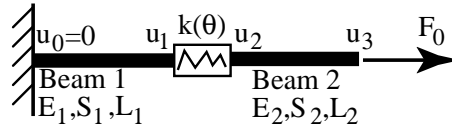


Fig. 5. The two beams connected by a random interface

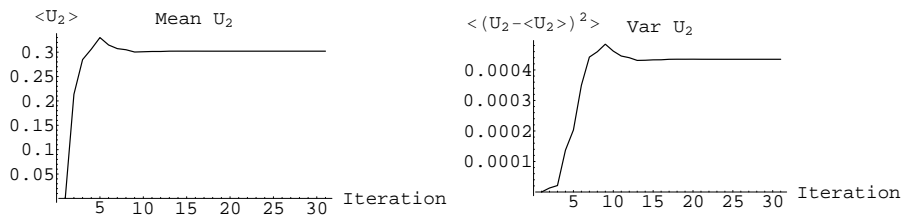
coefficients k_1 and k_2 , which are derived from the material and geometric parameters:

$$k_i = \frac{E_i S_i}{L_i}; \quad i = 1, 2$$

where E_i is the Young's modulus, S_i the cross-section and L_i the length of the beam i .

6.1 Convergence rate

The displacements converge rapidly toward the displacement calculated using the global method (Fig. 6).

Fig. 6. Convergence for the mean and variance of the nodal displacement u_2

6.2 Comparison of different methods

Fig. 7 presents the variation of the expectation and the variance of u_2 with respect to the coefficient of variation δ , as obtained respectively with the exact solution, the perturbation method, the direct SSFEM and the LATIN method. The LATIN method converges to the same solution as the direct SSFEM. The results of the perturbation method are valid only for small coefficients of variation, whereas the PCE (with order $p = 3$) is able to yield good results for larger values of the coefficient.

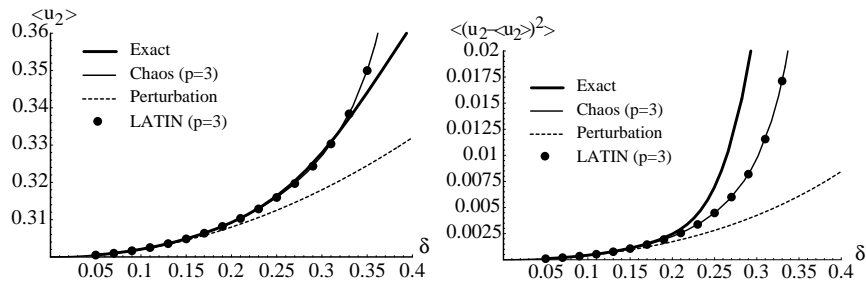


Fig. 7. Polynomial Chaos: order 3 $\delta = 0.25$

6.3 Cost comparison between the direct method and the iterative method

In order to compare the computational costs of the different strategies, we studied a 2D version of the previous 1D example. The behavior is still one-dimensional, but the 2D mesh makes it easy to vary the total number of degrees of freedom and the number of degrees of freedom at the interface. For the direct SSFEM resolution, we use a standard Finite Element solver : no special adaptation of the code was made to improve the efficiency of the resolution.

Fig. 8 shows the evolution of the computational costs of the direct SSFEM and of our proposed approach when the number of degrees of freedom increases. The order of the PCE is $p = 3$ and there is only one random variable, i.e. the number of functions in the expansion is 4 ($P = 3$). Our approach becomes much more efficient than the direct SSFEM when the number of degrees of freedom exceeds 1,000.

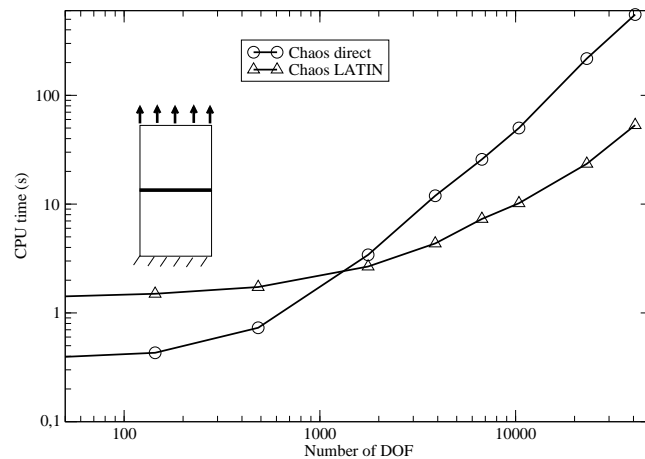


Fig. 8. Comparison between the direct and LATIN calculations: problem with a single interface (PC: Pentium III proc. 1.1GHz, 512 MB RAM)

Fig. 9 presents the same type of example, this time with two interfaces. In this case, the number of random variables is $L = 2$ and the order of the PCE is $p = 3$. Thus, there are ten functions ($P = 9$) in the expansion (see Appendix A). The higher efficiency of the LATIN method is also observed on this example.

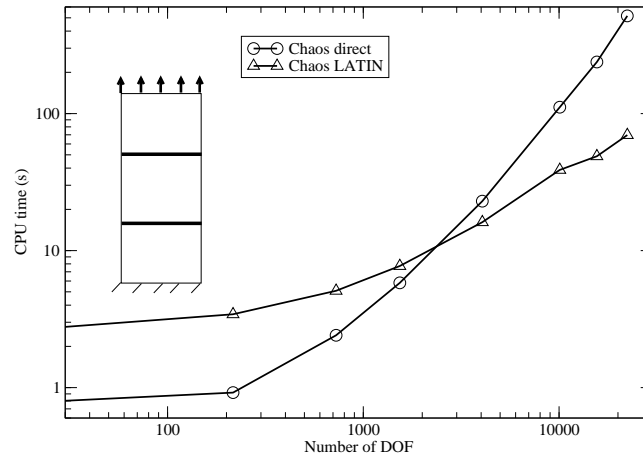


Fig. 9. Comparison between the direct and LATIN calculations: problem with two interfaces (PC: Pentium III proc. 1.1GHz, 512 MB RAM)

7 2D example

Let us consider an assembly of three parts (Fig. 10) with two adhesively bonded joints (Tong and Steven, 1999; van Straalen et al., 1998).

The dimensions, in millimeters, are shown on Fig. 10. The three parts have different material properties: the base (1) is made of cast iron ($E_1 = 120GPa$, $\nu_1 = 0.3$), the L-shaped connecting part (2) of steel ($E_2 = 200GPa$, $\nu_2 = 0.3$) and the vertical part (3) of aluminium ($E_3 = 70GPa$, $\nu_3 = 0.3$). Part (3) is subjected to a vertical traction force $F = 250N$. The quantities of interest are the displacement of point A at the top of Part (3) and the maximum stresses in the bonded joints.

The adhesively bonded joints (denoted *I* and *II* on Fig. 10) are modeled by interfaces. The normal (k_n) and tangential (k_t) stiffness of each interface can be derived from the adhesive's characteristics:

$$k_n = \frac{E}{e} \quad ; \quad k_t = \frac{E}{2(1 + \nu)e}$$

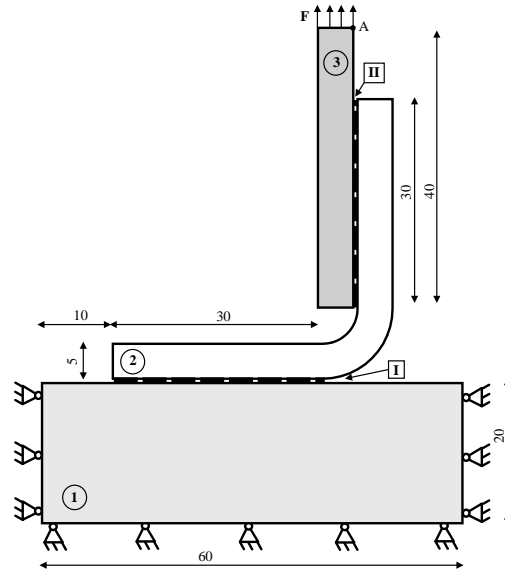


Fig. 10. The assembly with two bonded joints

where E is the Young's modulus, ν the Poisson's coefficient and e the thickness of the adhesive. The Young's modulus is assumed to be random:

$$E(\theta) = \bar{E}(1 + \delta\xi(\theta))$$

The two bonded joints (I and II) have the following characteristics:

$$\begin{aligned} \bar{E}_I &= 500MPa; & \nu_I &= 0.45; & e_I &= 0.3mm \\ \bar{E}_{II} &= 1,000MPa; & \nu_{II} &= 0.45; & e_{II} &= 0.3mm \end{aligned}$$

The mesh is composed of 17,820 four-node elements and contains 37,174 degrees of freedom.

Fig. 11 shows the probability density functions of the displacements at Point A obtained by the LATIN method. These are compared to the solution obtained by a classical Monte Carlo method (10,000 draws). The results are very close. The LATIN results are the same as those obtained by direct resolution using the PCE.

Tab. 1 compares the computational costs of the Monte Carlo method, the direct PCE and the LATIN method. One can appreciate how considerably shorter the computation time is using the LATIN method for this type of problem.

Fig. 12 shows the probability density functions of the maximum forces on the

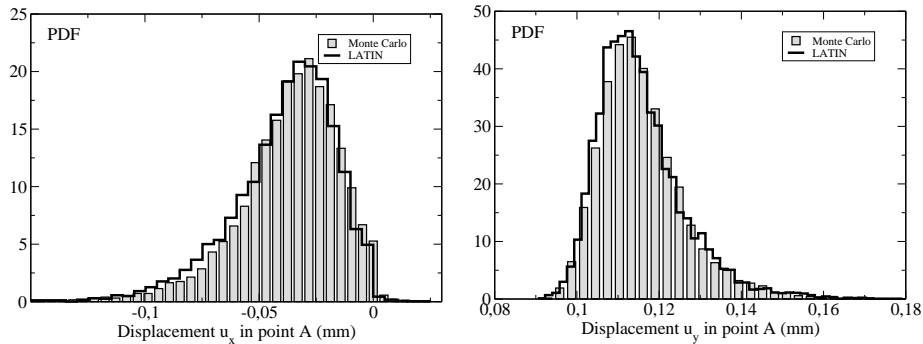


Fig. 11. Probability density functions of the displacements at Point A ($\delta_I = 0.2$ and $\delta_{II} = 0.25$): comparison between the LATIN solution and the Monte Carlo solution (10,000 draws)

Calculation	CPU time (s)
Monte Carlo (10,000 draws)	75,700
Polynomial expansion - Direct	780
Polynomial expansion - LATIN	185

Table 1

Comparison of the computation costs on a PC (AMD Athlon proc. 1.4GHz, 1.6Gb RAM)

two interfaces. The construction of these functions requires no computational effort because the forces are explicit variables (represented using the PCE) in the LATIN resolution. These probability density functions were obtained using 20,000 Monte Carlo draws of the variable ξ .

Fig. 13 shows the evolutions of the expectation and standard deviation of the displacement U_y at point A when the coefficients of variation δ_I and δ_{II} vary between 0 (deterministic problem) and 0.4. One can observe that this displacement is influenced by the stochasticity of both interface variables but the influence of the interface I is more significant because its stress type is dominating for the displacement at point A .

Fig. 14 shows the evolutions of the expectation and standard deviation of the maximum normal force F_n at interface I when the coefficients of variation δ_I and δ_{II} vary between 0 and 0.4. Since the boundary conditions are expressed in terms of prescribed forces, one can observe that the stochasticity of the variable at interface II has nearly no influence upon the maximum forces at interface I .

As in the one-dimensional example (see Fig. 7), the results obtained by the LATIN method and by the direct SSFEM are the same. Therefore, they are not valid for large coefficients of variations.

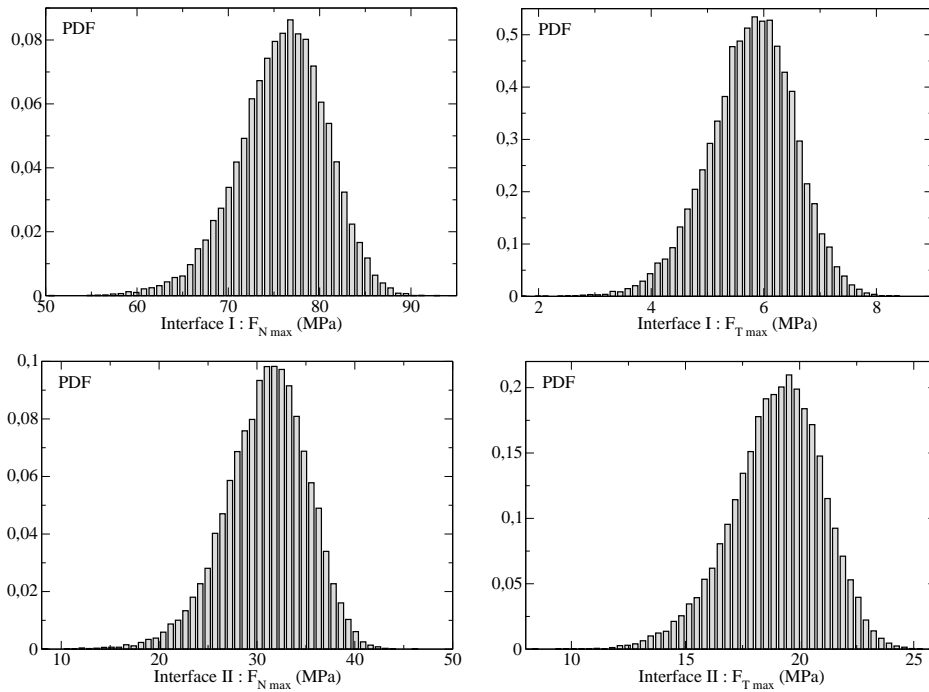


Fig. 12. Probability density functions of the maximum normal (F_N) and tangential (F_T) forces at the interfaces ($\delta_I = 0.2$ and $\delta_{II} = 0.25$)

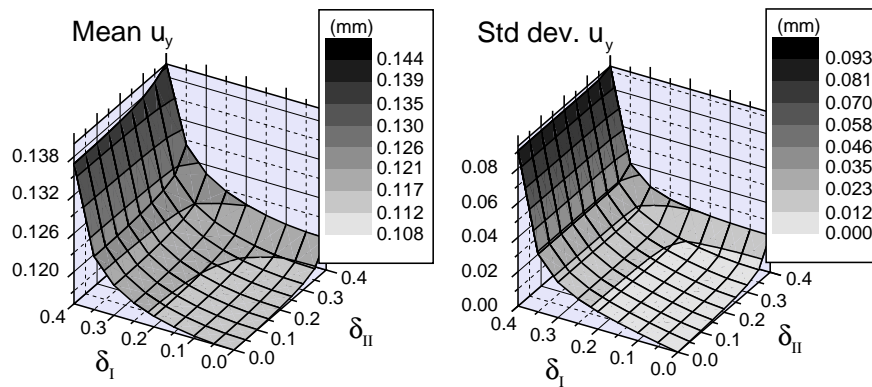


Fig. 13. Evolutions of the expectation and standard deviation of displacement U_y at point A with the coefficients of variation

8 CONCLUSIONS

We presented a computational strategy suitable for the calculation of the random response of assemblies of structures containing non-deterministic connections. This method is based on a decomposition of the assembly into sub-structures and interfaces. Our computational strategy, based on the LATIN

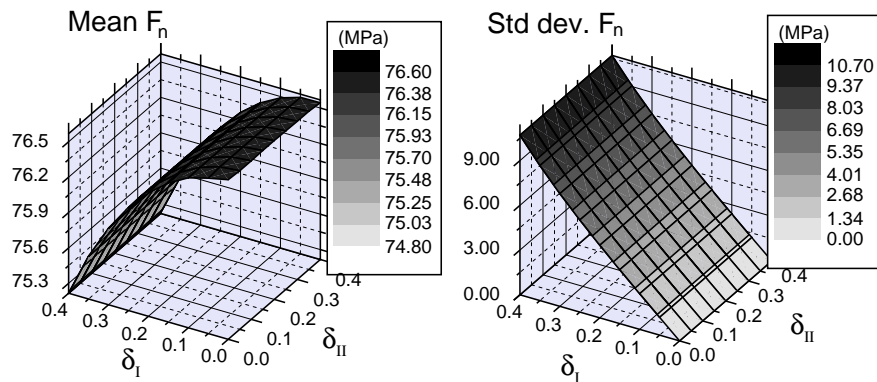


Fig. 14. Evolutions of the expectation and standard deviation of the maximum normal force F_n at interface I with the coefficients of variation

method, allows the treatments of the random problem and of the global problem to be uncoupled. A Polynomial Chaos Expansion is used to obtain the random solutions. The examples presented showed the numerical efficiency of the proposed approach compared to the Monte Carlo method and to the direct SSFEM for two-dimensional assemblies containing random elastic bonded joints.

Since the uncoupled treatments of the local and global problems lead to a drastic reduction in problem size, the numerical efficiency of the proposed approach can be very high. Another important point is that the linear systems for the substructures are independent of one another and could be solved in parallel very efficiently. The prolongation of this work will address nonlinear interface behavior, such as contact and friction conditions.

References

- Blanzé, C., Champaney, L., Cognard, J., Ladevèze, P., 1995. A modular approach to structure assembly computations. application to contact problems. *Engineering Computations* 13 (1), 15–32.
- Blanzé, C., Champaney, L., Védrine, P., 2000. Contact problems in the design of a superconducting quadrupole prototype. *Engineering Computations* 17 (2-3), 136–153.
- Cameron, R., Martin, W., 1947. The orthogonal development of non linear functionals in series of fourier-hermite functionals. *Ann. Math.* 48 (16), 385–392.
- Deb, M. K., Babuska, I. M., Oden, J. T., 2001. Solution of stochastic partial differential equations using galerkin finite element techniques. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 190 (1-4), 6359–6372.
- Elishakoff, I., Ren, Y., 1999. The bird's eye view on finite element method for

- structures with large stochastic variations. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 168 (1-4), 51–61.
- Ghanem, R., 1999. Ingredient for a general purpose stochastic finite elements implementation. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 168, 19–34.
- Ghanem, R., Brzakala, W., April 1996. Stochastic finite-element analysis of soil layers with random interface. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE* 122 (4), 361–369.
- Ghanem, R., Kruger, R., 1996. Numerical solutions of spectral stochastic finite element systems. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 129, 289–303.
- Ghanem, R., Spanos, P., 1991. *Stochastic Finite Elements: A Spectral Approach*. Springer, Berlin.
- Jaynes, E., 1957. Information theory and statistical mechanics. *Physical Review* 106 (4), 620–630.
- Kleiber, M., Hien, T., 1992. *The Stochastic Finite Element Method. Basic Perturbation Technique and Computer Implementation*. John Wiley & Sons.
- Ladevèze, P., 1999. *Nonlinear Computational Structural Mechanics - New Approaches and Non-Incremental Methods of Calculation*. Springer Verlag.
- Ladevèze, P., Guitard, L., Champaney, L., Aubard, X., 2000. Debond modeling for multidirectional composites. *Compt. Methods. Appl. Mech. Engrg.* 185, 109–122.
- Lin, Y., Kozin, F., Wen, Y., Casciati, F., Schueller, G., Kiureghian, A. D., Ditlevsen, O., Vanmarcke, E., 1986. *Methods of stochastic structural dynamics*. *Structural Safety* 3, 167–194.
- Loeve, M., 1977. *Probability Theory*, 4th edn. Springer, New York.
- Matthies, H. G., Brenner, C. E., Bucher, C. G., Guedes Soares, C., 1997. Uncertainties in probabilistic numerical analysis of structures and solids — stochastic finite elements. *Structural Safety* 19 (3), 283–336.
- Pellisetti, M., Ghanem, R., 2000. Iterative solution of systems of linear equations arising in the context of the stochastic fem. *Journal of Advances in Engineering Software* 31, 607–616.
- Schellekens, J., De Borst, R., 1993. On the numerical integration of interface elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 36, 43–66.
- Soize, C., 2000. A nonparametric model of random uncertainties for reduced matrix models in structural dynamics. *Probabilistic Engineering* 15 (3), 277–294.
- Tong, L., Steven, G., 1999. *Analysis and Design of Structural Bonded Joints*. Kluwer Academic Publisher, Dordrecht.
- van Straalen, I., Wardenier, J., Vogelesang, L., Soetens, F., 1998. Structural adhesive bonded joints in engineering – drafting design rules. *International Journal of Adhesion & Adhesives* 18, 41–49.
- Vanmarcke, E., 1983. *Random Fields: Analysis and Synthesis*. The MIT Press, Cambridge, Massachusetts.
- Vanmarcke, E., Shinozuka, M., Nakagiri, S., Schueller, G., Grigoriu, M., 1988. Randoms fields and stochastic finite elements. *J. Struct. Safety*, 143–166.

Wiener, N., 1938. The homogeneous chaos. Am. J. Math. 60, 897–936.

A Basis functions of the Polynomial Chaos Expansion

Tab. A.1 presents the expressions of the basis functions of the PCE for the orders $p = 0$ to $p = 4$ when only one random variable ξ is used ($L = 1$).

i	Ψ_i	$\langle \Psi_i^2 \rangle$	p
0	1	1	0
1	ξ	1	1
2	$-1 + \xi^2$	2	2
3	$\xi(-3 + \xi^2)$	6	3
4	$3 - 6\xi^2 + \xi^4$	24	4

Table A.1

One-dimensional Polynomial Chaoses and their variances ($L = 1$)

Tab. A.2 presents the expressions of the basis functions of the PCE for the orders $p = 0$ to $p = 3$ when two random variables ξ_1 and ξ_2 are used ($L = 2$).

i	Ψ_i	$\langle \Psi_i^2 \rangle$	p
0	1	1	0
1	ξ_1	1	1
2	ξ_2	1	
3	$-1 + \xi_1^2$	2	2
4	$\xi_1 \xi_2$	1	
5	$-1 + \xi_2^2$	2	
6	$\xi_1(-3 + \xi_1^2)$	6	3
7	$(-1 + \xi_1^2)\xi_2$	2	
8	$\xi_1(-1 + \xi_2^2)$	2	
9	$\xi_2(-3 + \xi_2^2)$	6	

Table A.2

Two-dimensional Polynomial Chaoses and their variances ($L = 2$)

B 1D example : the reference solution

In this particular case, an exact solution is available and can be used to check the accuracy of various numerical techniques. The characteristic equation of the uncertain interface is given by:

$$k(\theta)(u_2(\theta) - u_1) = F_0 \quad \text{with} \quad u_1 = \frac{F_0}{k_1} \quad (\text{B.1})$$

$k(\theta)$ is the interface stiffness, which depends on a random material parameter $\xi(\theta)$. A standard normal distribution $\xi(\theta) \sim N(0, 1)$ is chosen for ξ and δ represent the coefficient of variation according to Eq. (15).

$$k(\theta) = \bar{k}(1 + \delta\xi(\theta)) \quad \text{with} \quad \langle \xi(\theta) \rangle = 0 \quad \text{and} \quad \langle \xi(\theta)^2 \rangle = 1 \quad (\text{B.2})$$

The displacement u_2 is an explicit function of the random variable ξ :

$$u_2 = g(\xi) = F_0 \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{\bar{k}(1 + \delta\xi)} \right) \quad \text{and} \quad \xi = g^{-1}(u_2)$$

The distribution of u_2 is known and its density function f_{u_2} is related to the density function f_ξ by the following equation:

$$f_{u_2}(u_2) = \frac{f_\xi(\xi)}{\left| \frac{dg(\xi)}{d\xi} \right|}$$

The expectation of u_2 is given by:

$$\langle u_2(\theta) \rangle = \bar{u}_2 = F_0 \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{\bar{k}} \langle Y \rangle \right) \quad \text{with} \quad Y = \frac{1}{1 + \delta\xi}$$

and the standard deviation of u_2 by:

$$\langle (u_2(\theta) - \bar{u}_2)^2 \rangle = \left(\frac{F_0}{\bar{k}} \right)^2 \langle (Y - \langle Y \rangle)^2 \rangle$$

Fig. B.1 presents the density function f_ξ of the standard normal variable $\xi(\theta)$ and the density function f_{u_2} of the displacement u_2 . The Monte Carlo results (10,000 draws) for the two variables are also presented on the same figure.

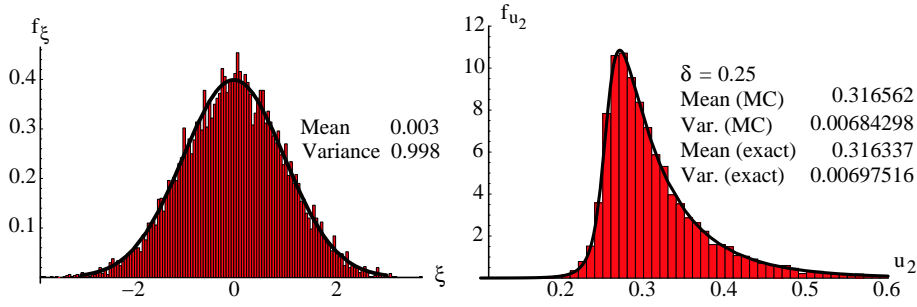


Fig. B.1. Exact Probability Density Functions f_ξ and f_{u_2} and the corresponding Monte Carlo results

C 1D example : direct resolution using the Polynomial Chaos Expansion

Let us interpolate the displacement $u(x, \theta)$ between the nodal displacement vector $\mathbf{u}(\theta)$ and the shape function vector $\mathbf{N}(x)$:

$$u(x, \theta) = \sum_{i=1}^n N_i(x) u_i(\theta) = \mathbf{N}(x) \mathbf{u}(\theta)$$

By applying the strain-displacement relationship, we obtain:

$$[(\mathbf{K}_0 + \xi(\theta) \mathbf{K}_1)] \mathbf{u}(\theta) = \mathbf{f} \quad (\text{C.1})$$

The stiffness matrices \mathbf{K}_0 and \mathbf{K}_1 , obtained from the element stiffness matrices, are given by:

$$\mathbf{K}_0 = \begin{pmatrix} k_1 + \bar{k} & -\bar{k} & 0 \\ -\bar{k} & k_2 + \bar{k} & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{pmatrix} ; \quad \mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} \bar{k}\delta & -\bar{k}\delta & 0 \\ -\bar{k}\delta & \bar{k}\delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{u}(\theta)$ is the global vector of the unknown nodal displacements and \mathbf{f} is the deterministic vector of the external forces:

$$\mathbf{u}(\theta) = [u_1(\theta) \ u_2(\theta) \ u_3(\theta)]^T ; \quad \mathbf{f} = [0 \ 0 \ F_0]^T$$

The PCE of order $p = 3$ ($P = 3$, see appendix A) yields:

$$\mathbf{u}(\theta) = \sum_{i=0}^3 \mathbf{u}_i \Psi_i(\theta) \quad (\text{C.2})$$

The vectors \mathbf{u}_i represent the magnitude of the projections of the nodal displacement vector $\mathbf{u}(\theta)$ onto the spaces spanned by the successive Polynomial Chaoses $\Psi_i(\theta)$. The dimension of each \mathbf{u}_i correspond of the number of dof

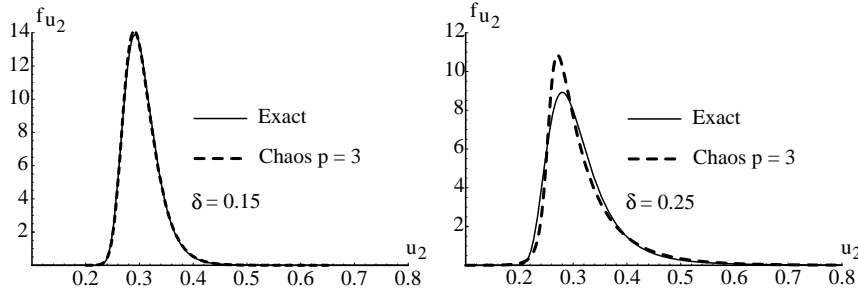


Fig. C.1. density function f_{u_2} for $\delta = 0.15$ and $\delta = 0.25$ (expansion order $p = 3$)

of the deterministic Finite Element problem. Eq. (C.2) leads to the following global linear system (equivalent to System Eq. (21)):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_0 & \mathbf{K}_1 & 0 & 0 \\ \mathbf{K}_1 & \mathbf{K}_0 & 2\mathbf{K}_1 & 0 \\ 0 & 2\mathbf{K}_1 & 2\mathbf{K}_0 & 6\mathbf{K}_1 \\ 0 & 0 & 6\mathbf{K}_1 & 6\mathbf{K}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_0 \\ \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

The statistical moments can be obtained directly from the Polynomial Chaos representation of the solution.

The mean response vector is given by :

$$\langle \mathbf{u}(\theta) \rangle = \mathbf{u}_0$$

and the covariance matrix $\mathbf{R}_{\mathbf{u}\mathbf{u}}$ of the response by :

$$\mathbf{R}_{\mathbf{u}\mathbf{u}} = \langle (\mathbf{u} - \langle \mathbf{u} \rangle)(\mathbf{u} - \langle \mathbf{u} \rangle)^H \rangle = \sum_{i=1}^3 \langle \Psi_i^2(\xi(\theta)) \rangle \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^H$$

where superscript H denotes hermitian transpose.

Fig. C.1 presents the results of the calculation of the density function f_{u_2} for two different values of the coefficient of variation δ using the SSFEM. These results are compared with the exact solution. When the coefficient of variation is relatively small ($\delta = 0.15$), the SSFEM gives an almost exact solution. For a larger value of the coefficient ($\delta = 0.25$), the SSFEM solution is less accurate. The complete comparison is shown on Fig. 7.

D 1D Example : LATIN method

We will merely review the main equations of the two stages of the LATIN method for this simple 1D example.

D.1 Local stage: the interface with a random stiffness

We must solve Eq. (43)

$$(2k(\theta) + k_0)(\hat{u}_2(\theta) - \hat{u}_1(\theta)) = \tilde{g}_n(\theta) \quad (\text{D.1})$$

The variables are expanded over the polynomial chaos:

$$(\hat{u}_2(\theta) - \hat{u}_1(\theta)) = \hat{u}^{12}(\theta) = \sum_{j=0}^P \hat{u}_j^{12} \Psi_j(\theta) \quad \text{and} \quad \tilde{g}_n = \sum_{j=0}^P \tilde{g}_{jn} \Psi_j(\theta) \quad (\text{D.2})$$

If the order of the PCE is $p = 3$, the size of the linear scalar system to be solved is $(P + 1) = 4$:

$$\begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 \\ b & a & 2b & 0 \\ 0 & 2b & 2a & 6b \\ 0 & 0 & 6b & 6a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_0^{12} \\ \hat{u}_1^{12} \\ \hat{u}_2^{12} \\ \hat{u}_3^{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{g}_{0n} \\ \tilde{g}_{1n} \\ \tilde{g}_{2n} \\ \tilde{g}_{3n} \end{bmatrix} \quad (a = k_0 + 2\bar{k}; b = 2\bar{k}\delta)$$

Then, the remaining variables are calculated from the system Eq. (48):

$$\begin{cases} \hat{f}_k^2 = -\hat{f}_k^1 = \frac{1}{2}(k_0 \hat{u}_k^{12} + \tilde{g}_{kn}) \\ \hat{u}_k^1 = u_{kn}^1 + \frac{1}{k_0}(\hat{f}_k^1 - f_{kn}^1) \\ \hat{u}_k^2 = u_{kn}^2 + \frac{1}{k_0}(\hat{f}_k^2 - f_{kn}^2) \end{cases}, \quad k = 0, \dots, 3$$

D.2 Resolution for the global stage

All the quantities \hat{f} and \hat{u} are known from the previous local stage. The system Eq. (52) must be solved for each substructure i :

$$\left[\begin{pmatrix} k_i & -k_i \\ -k_i & k_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_0 & 0 \\ 0 & k_0 \end{pmatrix} \right] \begin{bmatrix} u_{in}^1 \\ u_{in}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{f}_i^1 + k_0 \hat{u}_i^1 \\ \hat{f}_i^2 + k_0 \hat{u}_i^1 \end{bmatrix}$$