



HAL
open science

Méthode de raffinement de maillage adaptatif pour la mécanique des fluides incompressibles

Stephanie Delage Santacreu

► **To cite this version:**

Stephanie Delage Santacreu. Méthode de raffinement de maillage adaptatif pour la mécanique des fluides incompressibles. Sciences de la Terre. Université Sciences et Technologies - Bordeaux I, 2006. Français. NNT: . tel-00012193v1

HAL Id: tel-00012193

<https://theses.hal.science/tel-00012193v1>

Submitted on 29 Apr 2006 (v1), last revised 24 Oct 2006 (v3)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

présentée à

L'UNIVERSITÉ BORDEAUX I

ÉCOLE DOCTORALE DE SCIENCES PHYSIQUES ET DE L'INGÉNIEUR

par **Stéphanie DELAGE SANTACREU**

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR

SPÉCIALITÉ : Mécanique

**Méthode de raffinement de maillage adaptatif pour la mécanique des fluides
numérique**

J-P. Caltagirone, Professeur, Université Bordeaux I

Directeur

S. Vincent, Maître de conférence, Université Bordeaux I

co-

Directeur

- 2006 -

Table des matières

Nomenclature	1
1 Partie Théorique	5
1.1 Modélisation des équations de conservation	5
1.1.1 Equations de Navier-Stokes	5
1.1.2 Equation de conservation de l'énergie	10
1.1.3 Equation de transport d'espèce	11
1.2 Méthodes numériques	11
1.2.1 Méthode des volumes finis	11
1.2.2 Discrétisation et résolution de l'équation de l'énergie et de transport d'espèces	12
1.2.3 Discrétisation et résolution de l'équation de Navier-Stokes	14
1.2.4 Discrétisation et résolution du transport d'interface	18
1.2.5 Traitement des limites	19
1.2.6 Interpolation et éléments finis	20
1.3 Mise en place de l' <i>AMR</i>	29
1.3.1 Stratégies de maillage existantes	30
1.3.2 la méthode One-Cell Local Multigrid <i>OCLM</i>	35
2 Améliorations apportées à la méthode <i>OCLM</i>	43
2.1 Principe de connexion	43
2.1.1 Traitement des noeuds scalaires	44
2.1.2 Traitement des noeuds vitesses	49
2.2 Gestion dynamique de l' <i>AMR</i>	56
2.3 Opérateurs de prolongement	64
2.3.1 Interpolations non conservatives	64

2.3.2	Méthode Flux Correction Interfaces (<i>FIC</i>) pour les noeuds scalaires	72
2.4	Opérateurs de restriction	75
2.5	Traitement des noeuds fins aux limites physiques	76
2.6	Contribution de l' <i>AMR</i> dans un solveur implicite	79
3	Résultats en 2D	83
3.1	Résultats préliminaires sur un écoulement de Poiseuille 2D	83
3.1.1	Influence du degré du polynôme d'interpolation	84
3.1.2	Influence du nombre de niveaux <i>AMR</i>	86
3.1.3	Influence du coefficient de raffinement	87
3.1.4	Influence du maillage	89
3.2	Résultats numériques sur l'équation de conservation de l'énergie: applica- tion au cas de Whitaker	90
3.2.1	Traitement des limites scalaires	91
3.2.2	Méthode <i>AMR</i> et précision des solutions	93
3.2.3	Choix des opérateurs de restriction et de prolongement	96
3.3	Résultats numériques sur l'équation de transport d'espèce: application au cas d'une tache cisailée	108
3.3.1	Influence du type d'interpolation appliqué à la concentration massique	110
3.3.2	Capacité de l' <i>AMR</i> à réduire la diffusion numérique.	111
3.3.3	Choix du critère de raffinement	114
3.3.4	Calcul du champ de vitesse	116
3.3.5	Ordre de convergence de la méthode <i>AMR</i>	120
3.3.6	Performances en temps CPU et mémoire de l' <i>AMR</i>	124
3.4	Résultats numériques sur l'équation de transport d'interface: application au cas d'une tache cisailée	134
3.4.1	Couplage <i>AMR</i> et <i>VOF</i>	135
3.4.2	Couplage <i>AMR</i> et <i>TVD</i>	137
3.5	Résultats numériques sur l'équation de Navier-Stokes 2D: application au cas du tourbillon de Green-Taylor	143
3.5.1	Interpolations non conservatives et condition d'incompressibilité . .	144
3.5.2	Capacité de l' <i>AMR</i> à réduire la diffusion numérique	144
3.5.3	Performances de l' <i>AMR</i> en taille mémoire et temps <i>CPU</i>	144

3.6	Résultats numériques sur les équations de Navier-Stokes couplées à celle de transport : application au cas d'un remplissage de cavité	145
3.7	Résultats numériques sur les équations de Navier-Stokes : application au cas de la cavité entraînée	148
4	Résultats en 3D	155
4.1	Résultats sur l'équation de transport d'espèce: Tache cisailée par un tourbillon centré dans la cavité	155
4.1.1	Tache cisailée autour de l'axe y	156
4.1.2	Tache cisailée autour de l'axe z	160
4.1.3	Tache cisailée autour de l'axe x	161
4.2	Résultats sur l'équation de transport d'interface: Tache cisailée par un champ tournant périodique	163
	Annexes	169
A	Solutions analytiques	169
A.1	Écoulement de Poiseuille 2D	169
A.2	Conduction 2D dans un rectangle dont les bords sont chauffés à des températures différentes	170
A.2.1	Cas où f est constante par morceaux	170
A.2.2	Cas où f est de classe C^1	172
	Bibliographie	175

Nomenclature

Variables de la mécanique des fluides diphasique

Éléments physiques

c_p	:	capacité calorifique massique à pression constante ...	$W.m^{-2}.K^{-1}$
h	:	coefficient d'échange thermique	$W.m^{-2}.K^{-1}$
p	:	pression	Pa
t	:	temps	s
E_c	:	énergie cinétique	J
E_i	:	énergie interne	J
F_{TS}	:	force de tension superficielle	N
\vec{g}	:	accélération de gravité	$m.s^{-2}$
\vec{V}	=:	vecteur vitesse	$m.s^{-1}$
(u, w, v)			
\vec{V}_{int}	:	vecteur vitesse	$m.s^{-1}$
S_p	:	concentration massique	$kg.m^{-3}$
T	:	température	K
C	:	fonction de phase, fraction volumique ou fonction couleur	
Re	:	nombre de Reynolds	$\frac{\rho L u_0}{\mu}$
μ	:	viscosité dynamique	$kg.m^{-1}.s^{-1}$
μ_T	:	viscosité dynamique turbulente	$kg.m^{-1}.s^{-1}$
κ	:	courbure de l'interface	m^{-1}
ρ	:	masse volumique	$kg.m^{-3}$
Φ	:	inconnue générique	

Éléments mathématiques

Ω	:	domaine d'étude	
$\partial\Omega$:	Frontière du domaine d'étude	
x, y, z	:	coordonnées de \mathfrak{R}^3	m
$d\Sigma$:	élément de surface	m^2
$d\Omega$:	élément de volume	m^2
\vec{n}	:	normale sortante	$m.s^{-2}$
Éléments numériques			
G_L	:	niveau L d'AMR	
RAF	:	coefficient de raffinement	
$\Delta x, \Delta z, \Delta y$:	pas d'espace suivant x, z, y	m
$\Delta x_L, \Delta z_L, \Delta y_L$:	pas d'espace de niveau G_L suivant x, z, y	m
i, j, k	:	indices de discrétisation	
A	:	matrice des coefficients de discrétisation	
B	:	second membre	

Introduction

Une des problématiques en mécanique des fluides numérique est la capacité à simuler des écoulements à différentes échelles de temps et/ou d'espace. En effet, dans de nombreux cas, la description correcte du comportement global d'un écoulement passe par la prise en compte d'écoulements locaux.

Cette thèse de doctorat s'inscrit dans ce cadre, à savoir la simulation d'écoulements de fluides incompressibles multiphasiques multi-échelles. L'objectif est de pouvoir décrire finement à la fois les écoulements de petites échelles et le suivi dynamique des interfaces. En particulier, est traité le suivi de transport d'espèces faiblement diffusives dans des écoulements turbulents de fluides incompressibles non miscibles, cas pour lequel l'obtention de solutions précises est décisive pour interpréter les résultats. Dans cette optique, a été développée une méthode numérique originale basée sur une stratégie de maillage, qui permet de simuler ces écoulements avec des ressources informatiques limitées. Cette méthode porte le nom de méthode *AMR* (Adaptive Mesh Refinement) et consiste à augmenter localement la densité de points du maillage dans les zones du maillage où il est indispensable de calculer la solution avec une précision plus grande que dans le reste du domaine. [BERGER 84] ont été les premiers à introduire le concept de raffinement de maillage pour la résolution des équations différentielles partielles hyperboliques en 1984. [BERGER 89a] ont ensuite proposé une version adaptative du raffinement de maillage en $2D$ pour les lois de conservation et ont montré l'efficacité de l'*AMR* pour la dynamique des gaz en 1989. Celle-ci a été étendue au $3D$ deux ans après par [J. B. BELL et al.]. [M. SUSSMAN 99] ont ensuite proposé un couplage entre la méthode *AMR* et une approche de level set pour traiter des écoulements incompressibles à surface libre en 1999. Plus récemment, la méthode *AMR* a été adaptée à plusieurs domaines de la physique comme la dynamique des fluides compressible et incompressible, la mécanique des solides, la combustion... En s'inspirant de cette méthode, [VINCENT 99] a développé une méthode de raffinement de maillage adaptée au maillage décalé (méthode *OCLM*, i. e. One Cell Local Multigrid). Une des

difficultés apparaissant lors du suivi d'espèces faiblement diffusives est l'introduction de diffusion numérique inhérente aux schémas utilisés, masquant la diffusion physique (moléculaire et turbulente).

Une solution est d'utiliser un maillage très fin, de façon à ce que la diffusion physique se propage sur une distance plus grande que la diffusion numérique. Cependant, le nombre de points à résoudre devient très vite prohibitif en 3D, et il est alors impossible de traiter des cas réalistes compte tenu de la taille mémoire et du temps de simulation nécessaires à celles-ci. Il est donc indispensable de mettre en place une stratégie de maillage pour optimiser les deux facteurs limitants : taille mémoire et temps de simulation.

Dans le premier chapitre, on explicitera les équations utilisées ainsi que les méthodes numériques associées pour les résoudre. On détaillera aussi les stratégies de maillage existantes et les raisons qui nous ont poussées à améliorer la méthode *OCLM*. Dans le deuxième chapitre, on détaille la technique utilisée, pour des écoulements incompressibles. La mise en place de cette méthode se décompose en trois parties : La première concerne la structure même du maillage *AMR*, qui est constitué d'un emboîtement strict des niveaux *AMR*, chaque niveau est constitué d'un ensemble d'entités, les cellules *AMR*. Il a donc fallu connecter les noeuds d'un même niveau *AMR* (c'est à dire connecter les cellules *AMR*), imposer des conditions aux limites de chaque niveau *AMR* sous forme d'interpolation, mais aussi connecter les niveaux entre eux afin que le maillage *AMR* constitue une seule entité. La deuxième partie consiste à implémenter la méthode *AMR*, c'est-à-dire à introduire la contribution des noeuds de limite des niveaux *AMR* dans le solveur implicite. La résolution de l'ensemble des noeuds du maillage *AMR* en une seule étape permet de conserver une bonne précision de la solution. La troisième partie est consacrée à la recherche de critères physiques de raffinement-déraffinement de maillage les plus adaptés au problème traité. Dans les troisième et quatrième chapitres, on s'intéresse à la capacité de la méthode *AMR* à réduire la diffusion numérique tout en optimisant le temps de calcul et la taille mémoire, a été validée pour les équations de conservation d'énergie et de concentration massique en 2D et 3D. Ont été traités plusieurs cas académiques difficiles : fluide chauffé par une extrémité, tache cisailée autour d'un axe de rotation, tache cisailée par un champ tournant périodique. Elle a aussi été validée en 2D pour les équations de Navier-Stokes sur le cas de la cavité entraînée. Enfin, une validation du couplage entre les équations de Navier-Stokes et celle de transport a été effectuée sur un cas d'injection de polluant inerte dans une cavité 2D.

Chapitre 1

Partie Théorique

1.1 Modélisation des équations de conservation

On s'intéresse à des écoulements multiphasiques avec transport d'espèces inertes. Ceci se traduit par le couplage des équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de la concentration massique. On s'intéressera aussi à l'équation de conservation d'énergie.

Soient $\vec{V} = (u, w, v)$ le vecteur vitesse, ρ la masse volumique, p la pression, μ la viscosité dynamique, \vec{g} le vecteur gravité, T la température, λ le coefficient de conduction, c_p la capacité calorifique massique, S_p la concentration massique d'espèces, D le coefficient de diffusion moléculaire et C la fonction de phase (aussi appelée fonction couleur).

1.1.1 Equations de Navier-Stokes

On considère un domaine Ω de limites $\partial\Omega$ dans lequel évolue un fluide newtonien (figure à faire). Dans le cas où deux fluides évoluent dans le domaine Ω , on note Ω_1 (respectivement Ω_2) le domaine occupé par le *fluide*₁ (respectivement *fluide*₂).

La zone séparant les deux milieux porte un nom différent suivant la nature des deux milieux. On appelle interface, la surface qui limite deux phases condensées et surface libre celle qui sépare une phase condensée d'un gaz. Pour éviter d'alourdir le texte, on utilisera le mot interface pour désigner indifféremment l'interface ou la surface libre. Celle-ci est considérée comme une surface de contact de mesure nulle à l'échelle du milieu continu.

La frontière Γ , représentant l'interface, délimite Ω_1 et Ω_2 (voir figure à faire).

Soit un fluide incompressible, la conservation de la masse se réduit à l'équation :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \quad (1.1)$$

L'équation de conservation de la quantité de mouvement ou principe fondamental de la dynamique s'écrit :

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} \right) = \rho \vec{g} - \vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \cdot (\mu (\vec{\nabla} \vec{V} + \vec{\nabla} \vec{V}^T)) \quad (1.2)$$

$\rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$ représente la variation temporelle, $\rho (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V}$ la variation spatiale encore appelée terme d'advection ou d'inertie, $\rho \vec{g}$ la force de gravité, $\vec{\nabla} p$ les forces de pression et $\vec{\nabla} \cdot (\mu (\vec{\nabla} \vec{V} + \vec{\nabla} \vec{V}^T))$ les forces dues au tenseur des contraintes de viscosité. Le système (1.1)-(1.2), appelé équations de Navier-Stokes permet de décrire l'écoulement d'un fluide newtonien incompressible (cas monophasique).

Écoulement diphasique

Pour un écoulement diphasique incompressible, c'est à dire faisant intervenir deux fluides séparés par une interface, les équations de Navier-Stokes restent vérifiées dans chacun des fluides *fluide*₁ et *fluide*₂. On indicera par 1 (respectivement 2) les caractéristiques du *fluide*₁ (respectivement *fluide*₂). L'écoulement peut être décrit par les équations de Navier-Stokes dans chacune des phases, ce qui donne :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{V}_1 &= 0 \quad \text{dans } \Omega_1 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{V}_2 &= 0 \quad \text{dans } \Omega_2 \\ \rho_1 \left(\frac{\partial \vec{V}_1}{\partial t} + (\vec{V}_1 \cdot \vec{\nabla}) \vec{V}_1 \right) &= \rho_1 \vec{g} - \vec{\nabla} p_1 + \vec{\nabla} \cdot (\mu_1 (\vec{\nabla} \vec{V}_1 + \vec{\nabla} \vec{V}_1^T)) \quad \text{dans } \Omega_1 \\ \rho_2 \left(\frac{\partial \vec{V}_2}{\partial t} + (\vec{V}_2 \cdot \vec{\nabla}) \vec{V}_2 \right) &= \rho_2 \vec{g} - \vec{\nabla} p_2 + \vec{\nabla} \cdot (\mu_2 (\vec{\nabla} \vec{V}_2 + \vec{\nabla} \vec{V}_2^T)) \quad \text{dans } \Omega_2 \end{aligned} \quad (1.3)$$

On remarque que le système (1.3) permet de prendre en compte l'évolution de chaque fluide, mais de manière séparée. Or ces deux fluides étant en contact via l'interface, ils évoluent de façon couplée. L'ajout de conditions à l'interface, traduisant la continuité du flux de masse et du flux de quantité de mouvement, permet de connecter les deux phases. On suppose que l'interface se déplace à une vitesse \vec{V}_{int} .

Dans le cas de deux fluides non miscibles, la continuité du flux de masse donne la relation suivante :

$$[\rho(\vec{V} - \vec{V}_{int})] \cdot \vec{n} = 0 \quad (1.4)$$

Dans le cas où il n'y a pas de changement de phase, l'interface se déplace perpendiculairement à elle-même et donc :

$$\vec{V}_{int} = \vec{V}_1 \cdot \vec{n} = \vec{V}_2 \cdot \vec{n}$$

. La relation (1.4) se réduit alors à :

$$[\vec{V}] \cdot \vec{n} = 0 \quad (1.5)$$

La continuité du flux de quantité de mouvement s'obtient en appliquant le principe fondamental de la dynamique sur un petit volume de contrôle entourant l'interface.

Celle-ci est soumise à des forces volumiques (gravité), surfaciques (pression, contraintes de viscosités et interfaciales). La tension interfaciale, γ , traduit la cohésion de l'interface et la force associée, $\vec{\Sigma}_{int}$, a pour expression

$$\vec{\Sigma}_{int} = 2\gamma\kappa\vec{n} + \vec{\nabla}_s\gamma$$

avec $\kappa = -\frac{1}{2}\vec{\nabla}_s\vec{n}$, le rayon de courbure moyen et $\vec{\nabla}_s$ l'opérateur gradient restreint à la surface de l'interface.

L'épaisseur de l'interface étant très faible, les forces associées aux forces volumiques sont négligeables devant celles associées aux forces surfaciques et linéiques. On suppose de plus que le *fluide*₁ ne glisse pas par rapport au *fluide*₂, ce qui annule la composant tangentielle (le long de la surface de l'interface) de la tension interfaciale. La conservation de la quantité de mouvement à travers un petit volume de contrôle autour de l'interface donne donc la relation de saut :

$$[-p\vec{n} + \mu(\vec{\nabla}(\vec{V} - \vec{V}_{int}) + \vec{\nabla}(\vec{V} - \vec{V}_{int})^T) \cdot \vec{n}] = 2\gamma\kappa\vec{n} \quad (1.6)$$

La résolution des équations du système (1.3), (1.4) et (1.6) permet de décrire un écoulement incompressibles de deux fluides non miscibles (voir [DELHAYE 74]).

Modèle 1-fluide

La formulation 1-fluide d'un écoulement diphasique consiste à modéliser l'ensemble $\{\textit{fluide}_1, \textit{fluide}_2\}$ par un seul fluide 'hybride'. Celle-ci a été introduite par [KATAOKA 86]

en 1986 et permet de résoudre des problèmes diphasiques en utilisant des outils numériques qui ont été développés pour des cas monophasiques.

Soit χ^k l'indicateur de phase k , $k \in [1, 2]$, défini par $\chi^k = 1$ dans la phase k et $\chi^k = 0$ sinon. Notons δ_s le Dirac centré sur l'interface de surface s , \vec{n}^k la normale sortante à la phase k et \vec{n} la normale à l'interface. L'indicateur de phase vérifie les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^2 \chi^k &= 1 \\ \chi^k \chi^j &= \delta_{kj} \chi^k \\ \vec{\nabla} \chi^k &= -\vec{n}^k \delta_s \\ \frac{\partial \chi^k}{\partial t} &= \vec{V}_{int} \cdot \vec{n}^k \delta_s \end{aligned}$$

La variable 1-fluide Φ est définie comme la somme des phases k pondérées par l'indicateur de phase χ^k , i.e. :

$$\Phi = \sum_{k=1}^2 \chi^k \Phi^k.$$

Ainsi la conservation de la masse pour la variable 1-fluide devient, après sommation sur toutes les phases,

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \left(\sum_{k=1}^2 \chi^k \vec{\nabla} \vec{V}^k \right) &= \sum_{k=1}^2 \vec{\nabla} \vec{V}^k \cdot \vec{\nabla} \chi^k \\ &= - \sum_{k=1}^2 \vec{\nabla} \vec{V}^k \cdot \vec{n}^k \delta_s \\ &= -[\vec{V}] \cdot \vec{n} \end{aligned} \quad (1.7)$$

En utilisant la relation de saut (1.5) l'équation (1.7) se réduit à :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \quad (1.8)$$

Après sommation sur toutes les phases de l'équation de conservation de mouvement et utilisation de la relation de saut associée (1.6), on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla})(\rho \vec{V}) &= \rho \vec{g} - \vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \cdot (\mu (\vec{\nabla} \vec{V} + \vec{\nabla} \vec{V}^T)) + \vec{\nabla}_s \cdot (\gamma \vec{n}^k \delta_s \vec{n}^k) \\ &= \rho \vec{g} - \vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \cdot (\mu (\vec{\nabla} \vec{V} + \vec{\nabla} \vec{V}^T)) + 2\gamma \kappa \delta_s \vec{n} \end{aligned} \quad (1.9)$$

Ainsi, par rapport à l'équation 1.2, l'équation 1.9 fait apparaître un terme supplémentaire, liée aux forces interfaciales, $2\gamma \kappa \delta_s \vec{n}$.

Écoulement turbulent

On adopte l'approche de la simulation des grandes échelles (*LES*) pour modéliser un écoulement turbulent. Celle-ci considère que l'intégralité de l'agitation turbulente cesse d'être aléatoire (se référer à [CHASSAING 00]). Ainsi, les structures supérieures à la taille d'une maille caractéristique sont calculées explicitement tandis que les structures de taille inférieure à cette maille caractéristique (structures de sous maille) sont modélisées.

Dans le cas d'un écoulement turbulent, la vitesse instantanée \vec{V} se décompose comme la somme de la vitesse moyenne de l'écoulement $\bar{\vec{V}}$ et des fluctuations de vitesses \vec{v} . En introduisant le concept de viscosité turbulente μ_t , les équations de Navier-Stokes peuvent alors se mettre sous la forme (cf [CHASSAING 00]):

$$\begin{aligned}\bar{\nabla} \cdot \vec{V} &= 0 \\ \rho \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \bar{\nabla}) \vec{V} \right) &= \rho \vec{g} - \bar{\nabla} p + \bar{\nabla} \cdot ((\mu + \mu_t)(\bar{\nabla} \vec{V} + \bar{\nabla} \vec{V}^T))\end{aligned}\quad (1.10)$$

La modélisation de la viscosité turbulente μ_t , introduite par *Smagorinsky* en 1963 ([SMAGORINSKY 63]), consiste à écrire :

$$\mu_t = \rho C_s^2 \bar{\Delta}^2 (\bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij})^{0.5}$$

avec C_s la constante du modèle de *Smagorinsky*, $\bar{\Delta} = (\Delta x \Delta y \Delta z)^{\frac{1}{3}}$ le filtre et \bar{S}_{ij} le tenseur des déformations.

Le système à résoudre devient :

$$\begin{aligned}\bar{\nabla} \cdot \vec{V} &= 0 \\ \rho \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \bar{\nabla}) \vec{V} \right) &= \rho \vec{g} - \bar{\nabla} p + \bar{\nabla} \cdot ((\mu + \mu_t)(\bar{\nabla} \vec{V} + \bar{\nabla} \vec{V}^T))\end{aligned}\quad (1.11)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \vec{V} \cdot \bar{\nabla}(C) = 0 \quad (1.12)$$

et prend la forme globale :

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \bar{\nabla} \cdot \vec{V} d\Omega &= 0 \\ \int_{\Omega} \left(\rho \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \bar{\nabla}) \vec{V} \right) \right) d\Omega &= \int_{\Omega} \left(\rho \vec{g} - \bar{\nabla} p + \bar{\nabla} \cdot ((\mu + \mu_t)(\bar{\nabla} \vec{V} + \bar{\nabla} \vec{V}^T)) \right) d\Omega \\ \int_{\Omega} \left(\frac{\partial C}{\partial t} + \vec{V} \cdot \bar{\nabla}(C) \right) d\Omega &= 0\end{aligned}\quad (1.13)$$

1.1.2 Equation de conservation de l'énergie

Celle-ci s'établit en utilisant le premier principe de la thermodynamique. Celui-ci stipule que la variation d'énergie interne E_i et cinétique E_c d'un système fermé entre deux états (en équilibre thermodynamique) successifs 1 et 2 est due aux échanges d'énergies mécanique (sous forme de travail δW_{1-2}) et thermique (δQ_{1-2}). Le premier principe s'écrit alors :

$$\frac{D}{Dt}(E_i + E_c) = \frac{D}{Dt}(\delta W_{1-2}) + \frac{D}{Dt}(\delta Q_{1-2}) \quad (1.14)$$

La puissance mécanique provient des forces volumiques \vec{F} et surfaciques (tenseur des contraintes $\vec{\Sigma} = -\vec{\nabla}p + \vec{\tau}$, avec $\vec{\tau} = ((\mu + \mu_t)(\vec{\nabla}\vec{V} + \vec{\nabla}\vec{V}^T))$).

Dans notre cas, la puissance thermique échangée avec l'extérieur se réduit aux transferts de chaleur de type conductif. Ceux-ci suivent la loi de Fourier $\vec{q} = -\lambda\vec{\nabla}T$, avec \vec{q} le vecteur densité de flux de chaleur.

Par ailleurs, dans un fluide incompressible, l'énergie interne s'écrit :

$$E_i = \int_{\Omega} \rho c_v T d\Omega$$

où c_v est la capacité calorifique massique à volume constant. Vu que pour un fluide incompressible, les capacités calorifiques massiques à pression constante (c_p) et à volume constant (c_v) sont équivalentes, on considère $c = c_p \sim c_v$ la capacité calorifique massique du fluide incompressible.

En combinant l'équation 1.14 et celle de conservation de l'énergie cinétique (déduite de l'équation (1.2)) on obtient l'équation de conservation de l'énergie :

$$\int_{\Omega} (\rho c (\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} T)) d\Omega = \int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot (\lambda \vec{\nabla} T) d\Omega + \int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\tau} \cdot \vec{\nabla} \vec{V}) d\Omega \quad (1.15)$$

Sa forme locale est :

$$\rho c (\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} T) = \vec{\nabla} \cdot (\lambda \vec{\nabla} T) + \tau_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \quad (1.16)$$

La prise en compte du changement de phase fusion/solidification se traduit par l'ajout d'un terme source $S = -\rho L_{fs} \frac{\partial FRS}{\partial t}$ qui modélise l'énergie latente du changement de phase, où L_{fs} est la chaleur latente lors de la fusion (ou solidification) et FRS la fraction solide.

1.1.3 Equation de transport d'espèce

Cette équation traduit la conservation de la concentration massique de l'espèce considérée S_p , soit :

$$\frac{\partial S_p}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla}(S_p) = \vec{\nabla} \cdot (D \vec{\nabla}(S_p)) \quad (1.17)$$

Sa forme globale est :

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial S_p}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla}(S_p) \right) d\Omega = \int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot (D \vec{\nabla}(S_p)) d\Omega \quad (1.18)$$

1.2 Méthodes numériques

1.2.1 Méthode des volumes finis

Les équations (1.16), (1.18), (1.2) et (1.43) sont constituées d'un terme de variation temporelle $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)$, d'un terme d'advection $(\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\Phi$ où \vec{V} est la vitesse à laquelle est advectée la quantité Φ , d'un terme de diffusion $(\vec{\nabla} \cdot (K \vec{\nabla} \Phi))$ et de termes sources, où Φ est l'inconnue représentant \vec{V} , T , C ou S_p et K un coefficient de diffusion.

Un bilan de flux Φ donne l'équation :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\Phi = \vec{\nabla} \cdot (K \vec{\nabla} \Phi) \quad (1.19)$$

On peut écrire ces équations sous la forme globale :

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\Phi \right) d\Omega = \int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot (K \vec{\nabla}(\Phi)) d\Omega \quad (1.20)$$

On précise que l'équation 1.20 n'est autre qu'un bilan de flux Φ dans le domaine Ω . Celle-ci est discrétisée à partir de la méthode des volumes finis comme indiqué dans [PATANKAR 80].

Elle se décompose en trois étapes :

1. On définit les volumes de contrôle sur lesquels on va faire des bilans de flux Φ . Prenons un maillage cartésien à N noeuds. On définit pour chaque noeud $i \in [1, N]$ un volume de contrôle V_i centré en i de telle façon que $\bigcup_{i=1}^N V_i = \Omega$ et $V_i \cap_{i \neq j} V_j = \text{face}_{ij}$. face_{ij} est la face *contigüe* aux deux volumes de contrôle V_i et V_j .
2. Un bilan de flux Φ est fait dans chaque volume de contrôle V_i , $i \in [1, N]$

$$\int_{V_i} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla}(\Phi) \right) dV_i = \int_{V_i} \vec{\nabla} \cdot (K \vec{\nabla}(\Phi)) dV_i \quad (1.21)$$

On remarque que si on somme (1.21) sur $i \in [1, N]$, on retrouve l'équation (1.20).

3. L'équation (1.21) doit être discrétisée sachant que Φ est connue aux noeuds de discrétisation $i \in [1, N]$. Les flux se calculant sur les faces $face_{ij}$, $(i, j) \in [1, N][1, N]$, il est nécessaire d'interpoler Φ . La nature de l'interpolation dépend du terme de l'équation (1.21) (cf [PATANKAR 80])

L'utilisation des volumes finis sur un maillage unique donne de bons résultats lorsqu'on veut résoudre l'équation de l'énergie ou celle du transport d'espèce. Il en est autrement pour l'équation de Navier-Stokes. [PATANKAR 80] explique que l'utilisation des volumes finis dans ces conditions ne permet pas de traiter le terme du gradient de pression dans l'équation (1.2) correctement. En effet, la variation de pression prise en compte ne se fait pas entre deux noeuds successifs mais d'un noeud sur deux. En utilisant l'exemple 1D d'une pression en *zigzag*, [PATANKAR 80] montre que le terme $\frac{dp}{dx}$ est considéré comme nul et donc que la pression est uniforme, ce qui est faux. [PATANKAR 80] propose alors comme solution l'utilisation d'un maillage décalé introduit par *Harlow* quand il a présenté la méthode *MAC* (Marker And Cells) [HARLOW 65].

1.2.2 Discrétisation et résolution de l'équation de l'énergie et de transport d'espèces

On considère l'équation 1.19, où Φ représente la température ou la concentration massique. Sa discrétisation implicite en temps s'écrit :

$$\frac{\Phi^{n+1}}{\Delta t} + (\vec{V}^n \cdot \vec{\nabla})\Phi^{n+1} + Bi_{\Phi}(\Phi^{n+1} - \Phi_{\infty}) = \vec{\nabla} \cdot (K^n \vec{\nabla} \Phi^{n+1}) \quad (1.22)$$

En ce qui concerne le terme d'advection des équations scalaires (1.16) et (1.18), l'utilisation de schémas implicites d'ordre élevé tel *Lax-Wendroff* ou centré donne des solutions précises lorsque celle-ci est régulière. Par contre, quand la solution devient irrégulière, la discrétisation du terme d'advection avec des schémas implicites d'ordre élevé est à proscrire car ils provoquent la formation d'oscillations qui se développent. La solution finit alors par diverger [HIRSCH 90] (cf figure 1.1 droite).

Les schémas implicites d'ordre peu élevé, comme le schéma *UPWIND*, par exemple, permettent d'éviter les oscillations, mais ils sont très diffusifs (cf figure 1.1 gauche). Donc la qualité de la solution est fortement dégradée [HIRSCH 90]. Une idée est donc d'implémenter un schéma *WENO* (Weighted Essentially Non-Oscillatory) ou *TVD* (Total Variation

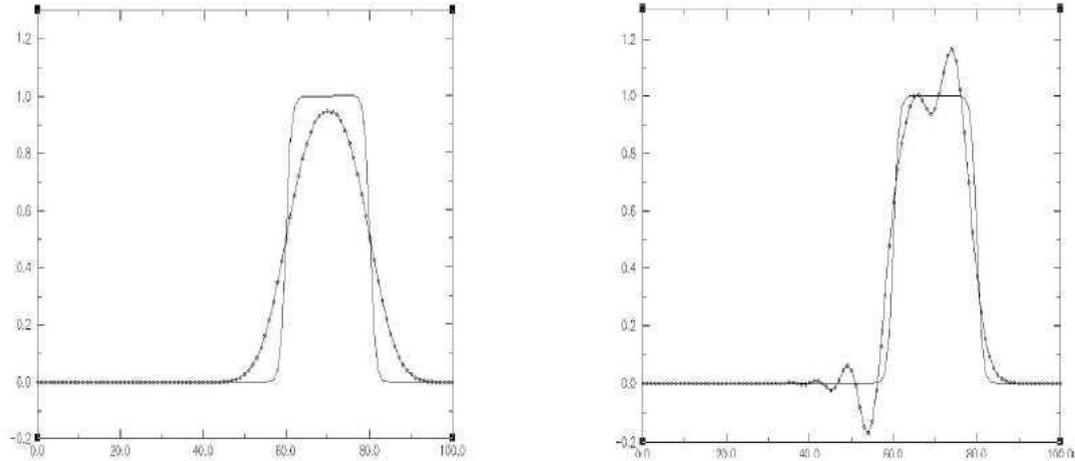


Figure 1.1 : Propagation d'une fonction $C(x) = (0.5 + 0.5 \tanh(80 * (x - 0.1)))$.
 Comparaison entre le schéma Upwind à gauche et Lax-Wendroff à droite.

Diminishing) [X. D. LIU 94] et [LEVEQUE 92], qui permet d'obtenir un ordre de schéma satisfaisant tout en évitant les oscillations en présence de champ discontinu. Ce sont des schémas explicites car la version implicite demande une *CFL* (Courant-Friedrich-Levy) aussi restrictive.

Le terme de diffusion des équations scalaires (1.16) et (1.18) est traité avec un schéma implicite centré tant que le coefficient de diffusion moléculaire (respectivement le coefficient de conduction) de l'équation (1.18) (respectivement (1.16)) est supérieur à une valeur critique. Plus précisément, si on écrit l'équation (1.16) ou (1.18), sous la forme d'un système linéaire à résoudre, on obtient $A^{n+1}\Phi^{n+1} = B^n$ où B^n est le second membre à l'itération n , Φ^{n+1} l'inconnue (température ou concentration massique) à l'itération $n + 1$ et A^{n+1} la matrice de discrétisation à l'itération $n + 1$. Les termes diagonaux de A^{n+1} sont de l'ordre de $\frac{1}{\Delta t}$ tandis que ceux extra-diagonaux sont de l'ordre de $\frac{K}{\Delta x^2}$. Si $K \ll \frac{\Delta x^2}{\Delta t}$, alors le solveur implicite devient inefficace. Donc si $K \ll \frac{\Delta x^2}{\Delta t}$, on utilisera plutôt un schéma explicite centré pour résoudre le terme de diffusion des équations (1.16) et (1.18). Dans le cas d'une résolution implicite de ce terme de diffusion, le solveur utilisé est l'algorithme itératif du *Bi - CGStab* (Bi-Conjugate Gradient Stabilized) avec un préconditionnement de *JACOBI*.

1.2.3 Discrétisation et résolution de l'équation de Navier-Stokes

Dans cette partie nous allons décrire brièvement la discrétisation des équations de Navier-Stokes exprimées en vitesse-pression. On rappelle qu'il s'agit de calculer à chaque instant le couple (vitesse, pression) vérifiant à la fois la conservation de la quantité de mouvement et la contrainte d'incompressibilité.

Avant de présenter l'algorithme de calcul de la pression et de la vitesse, nous allons présenter la discrétisation spatio-temporelle.

Discrétisation temporelle

L'intégration temporelle est réalisée de manière classique via un schéma d'Euler retardé d'ordre 1 ou 2. L'approximation spatiale est, quant à elle, implicite et hybride car elle couple un schéma upwind et un schéma centré pour le terme d'inertie [PATANKAR 80]. Concernant les termes visqueux, un schéma implicite centré d'ordre 2 est utilisé. Le choix de ces schémas implicites est valable pour un champ de vitesse continu sous la contrainte d'incompressibilité.

Une fois discrétisé en temps et à l'ordre 1, le problème continu devient : connaissant \vec{V}^n , \vec{V}^{n-1} et p^n , chercher \vec{V}^{n+1} et p^{n+1} solutions de

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{V}^{n+1} &= 0 \\ \rho^n \left(\frac{\vec{V}^{n+1}}{\Delta t} + (\vec{V}^n \cdot \vec{\nabla}) \vec{V}^{n+1} \right) + B_{i\vec{V}}^{\bar{\bar{}}} (\vec{V}^{n+1} - \vec{V}_\infty) &= \rho^n \vec{g} \\ -\vec{\nabla} p^{n+1} + \vec{\nabla} \cdot (\mu^n (\vec{\nabla} \vec{V}^{n+1} + \vec{\nabla}^T \vec{V}^{n+1})) + \rho^n \left(\frac{\vec{V}^n}{\Delta t} \right) & \end{aligned} \quad (1.23)$$

où $B_{i\vec{V}}^{\bar{\bar{}}}$ est un tenseur d'ordre deux lié à la méthode de pénalisation pour traiter les conditions aux limites (voir sous section 1.2.5).

On note que la pression et la vitesse sont couplées, ce qui rend le le coût de résolution du système algébrique final prohibitif, notamment quand il s'agira de simuler des écoulements instationnaires et complexes. Pour contourner cette difficulté, plusieurs algorithmes sont proposés dans la littérature afin de réaliser un découplage, le plus consistant et précis possible. On se contente par la suite de donner un résumé de l'algorithme utilisé dans le cadre de ce travail.

Méthode du Lagrangien augmenté

La méthode dite de Lagrangien augmenté fait partie de la famille des algorithmes mélangeant à la fois la minimisation sous contrainte et l'accélération de convergence via un terme du type pénalisation.

La prise en compte de la contrainte est assurée par le biais d'un multiplicateur de Lagrange (la pression). Le découplage de la vitesse et de la pression est implicite en vitesse et explicite en pression ([FORTIN 82]).

Notons :

$$\begin{aligned} L^2(\Omega) &= \{f \text{ tel que } \int_{\Omega} |f|^2 d\Omega < \infty\} \\ H_0^1(\Omega) &= \{f \in L^2(\Omega), \frac{\partial f}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \quad i \in [1, 3], \quad f|_{\partial\Omega} = 0\} \end{aligned}$$

Plus précisément, on définit une fonctionnelle $J(\vec{V})$ pour tout $\vec{V} \in H_0^1(\Omega)$, issue de la formulation faible de l'équation de conservation de la quantité de mouvement. Il s'agit de minimiser cette fonctionnelle sous la contrainte $M = \{\vec{V} \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que } \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0\}$. Cela correspond à trouver $\vec{U} \in M$ tel que :

$$J(\vec{U}) = \min_{\vec{V} \in M} (J(\vec{V})) \quad (1.24)$$

On transforme ce problème de minimisation sous contrainte en un problème de minimisation sans contrainte, en introduisant la pression q , comme un multiplicateur de Lagrange. On définit le Lagrangien comme :

$$\begin{aligned} L : M \times L^2 &\rightarrow \mathfrak{R} \\ (\vec{V}, q) &\mapsto L(\vec{V}, q) = J(\vec{V}) - \int_{\Omega} q \vec{\nabla} \cdot \vec{V} d\Omega \end{aligned} \quad (1.25)$$

Le problème de minimisation (1.24) consiste à trouver le point selle $(\vec{U}, p) \in M \times L^2$ du Lagrangien (1.25), c'est à dire trouver le couple $(\vec{V}, q) \in M \times L^2$ vérifiant :

$$\begin{aligned} L(\vec{U}, p) &= \min_{\vec{V} \in M} (\max_{q \in L^2} (L(\vec{V}, q))) \\ &= \max_{q \in L^2} (\min_{\vec{V} \in M} (L(\vec{V}, q))) \end{aligned} \quad (1.26)$$

Afin d'améliorer les propriétés de convergence (cf [FORTIN 82]), on introduit un terme de pénalisation faisant apparaître la contrainte, soit : $\frac{dr}{2} |\vec{\nabla} \cdot \vec{V}|^2$, $\vec{V} \in H_0^1(\Omega)$, $dr \in \mathfrak{R}$.

Notons le Lagrangien augmenté :

$$\begin{aligned} L_r : M \times L^2 &\rightarrow \mathfrak{R} \\ (\vec{V}, q) &\mapsto L(\vec{V}, q) = J(\vec{V}) - \int_{\Omega} q \vec{\nabla} \cdot \vec{V} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{dr}{2} |\vec{\nabla} \cdot \vec{V}|^2 d\Omega \end{aligned} \quad (1.27)$$

Le problème de minimisation (1.25) consiste alors à trouver le point selle $(\vec{U}, p) \in M \times L^2$ du Lagrangien (1.27), c'est à dire trouver le couple $(\vec{V}, q) \in M \times L^2$ vérifiant :

$$\begin{aligned} L_r(\vec{U}, p) &= \min_{\vec{V} \in M} (\max_{q \in L^2} (L_r(\vec{V}, q))) \\ &= \max_{q \in L^2} (\min_{\vec{V} \in M} (L_r(\vec{V}, q))) \end{aligned} \quad (1.28)$$

En revenant à la formulation forte du problème, on montre que le point selle est aussi solution du problème :

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} \right) = \rho \vec{g} - \vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \cdot (\mu (\vec{\nabla} \vec{V} + \vec{\nabla} \vec{V}^T)) - dr \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) \quad (1.29)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \quad (1.30)$$

La discrétisation implicite du système (1.29)-(1.30) s'écrit :

$$\begin{aligned} \rho^n \left(\frac{\vec{V}^{n+1}}{\Delta t} + (\vec{V}^n \cdot \vec{\nabla}) \vec{V}^{n+1} \right) + Bi_{\vec{V}} (\vec{V}^{n+1} - \vec{V}_\infty) &= \rho^n \vec{g} - \vec{\nabla} p^{n+1} \\ &+ \vec{\nabla} \cdot (\mu^n (\vec{\nabla} \vec{V}^{n+1} + \vec{\nabla}^T \vec{V}^{n+1})) \\ &+ \rho^n \left(\frac{\vec{V}^n}{\Delta t} \right) + dr \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}^{n+1}) \end{aligned} \quad (1.31)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V}^{n+1} = 0 \quad (1.32)$$

Le système (1.31)-(1.32), montre qu'il n'existe aucune équation explicite permettant le calcul de la pression. Toute la difficulté réside donc dans la détermination de la pression à partir du système (1.31)-(1.32). Notons le système (1.31)-(1.32) sous la forme :

$$A \vec{V}^{n+1} + G p^{n+1} = F \quad (1.33)$$

$$D \vec{V}^{n+1} = 0 \quad (1.34)$$

A étant inversible, l'équation (1.33) donne :

$$\vec{V}^{n+1} + A^{-1} G p^{n+1} = A^{-1} F \quad (1.35)$$

Après injection de l'équation (1.35) dans l'équation (1.34), on obtient :

$$D\vec{V}^{n+1} + DA^{-1}Gp^{n+1} = DA^{-1}F \quad (1.36)$$

or $D\vec{V}^{n+1} = 0$, donc on peut calculer la pression en résolvant le système (on reconnaîtra l'opérateur d'*Uzawa* : $DA^{-1}G$):

$$DA^{-1}Gp^{n+1} = DA^{-1}F \quad (1.37)$$

Le système algébrique issu de (1.37) peut être résolu par différentes méthodes itératives. On choisit celle de Richardson qui consiste à déterminer p^{n+1} de la façon suivante. Notons m l'itération en cours de l'algorithme itératif :

$$p_{m+1}^{n+1} = p_m^{n+1} - dp(DA^{-1}F - DA^{-1}Gp_m^{n+1}) \quad (1.38)$$

or $DA^{-1}F - DA^{-1}Gp_m^{n+1} = D\vec{V}_m^{n+1}$, donc :

$$p_{m+1}^{n+1} = p_m^{n+1} - dpD\vec{V}_{m+1}^{n+1} \quad (1.39)$$

Précisons que la matrice A étant non symétrique et mal conditionnée, la résolution du système algébrique (1.33) est réalisée grâce à l'algorithme *BiCGStabII* introduit par [VORST 92] préconditionné par une factorisation *MILU* ([GUSTAFSSON 78]).

La résolution du système (1.33)-(1.34) est insérée dans une boucle en itérations de Lagrangien Augmenté k , qui permet de faire diminuer la valeur moyenne de la divergence div_{moyen} . Ces itérations cessent dès que div_{moyen} a atteint une valeur suffisamment faible. Notons k_{max} , le nombre d'itérations en Lagrangien Augmenté qu'il faut effectuer pour atteindre cette valeur, l'algorithme du Lagrangien Augmenté s'écrit :

1. Initialisation : $\vec{V}^{k=0} = \vec{V}^n$ et $p^{k=0} = p^n$

2. Itérations : pour k allant de 0 à $k_{max} - 1$

$$\begin{aligned} \rho^n \left(\frac{\vec{V}^{k+1}}{\Delta t} + (\vec{V}^k \cdot \vec{\nabla}) \vec{V}^{k+1} \right) + Bi_{\vec{V}} (\vec{V}^{k+1} - \vec{V}_\infty) &= \rho^n \vec{g} - \vec{\nabla} p^k \\ &+ \vec{\nabla} \cdot (\mu^n (\vec{\nabla} \vec{V}^{k+1} + \vec{\nabla}^T \vec{V}^{k+1})) \\ &+ \rho^n \left(\frac{\vec{V}^k}{\Delta t} \right) + dr \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}^{k+1}) \end{aligned} \quad (1.40)$$

$$p^{k+1} = p^k - dp \vec{\nabla} \cdot \vec{V}^{k+1} \quad (1.41)$$

3. Couple solution : $\vec{V}^{n+1} = \vec{V}^{k=k_{max}}$ et $p^{k=k_{max}} = p^{n+1}$

On remarquera que la résolution explicite de la pression, obtenue avec l'équation (1.39), nous évite d'imposer des conditions aux limites pour celle-ci. L'évaluation des paramètres dp et dr est délicate car les équations utilisées ne sont pas adimensionnées. Des travaux récents ont été effectués par [S. VINCENT 04] pour les déterminer de façon automatique.

1.2.4 Discrétisation et résolution du transport d'interface

Pour un écoulement diphasique, le modèle 1 – *fluide* est utilisé pour la résolution des équations de Navier-Stokes. Le transport de l'interface est réalisé par la méthode *VOF – TVD* (Volume Of Fluids) ([HIRSCH 90], [LEVEQUE 90], [VINCENT 99]). Cette méthode consiste à repérer chaque fluide $i \in [1, 2]$ par une fonction de phase, appelée fonction de phase ou encore fonction couleur C_i , propre à chaque fluide i , $i \in [1, 2]$, définie par,

$$\begin{aligned} C_i(M, t) &= 1, \forall M \in \text{fluide}_i \\ C_i(M, t) &= 0, \forall M \text{ sinon.} \end{aligned} \quad (1.42)$$

Elle permet de représenter la fraction de *fluide* _{i} dans chaque maille et donc de calculer la position de l'interface au cours du temps grâce à l'équation d'advection :

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla}(C_i) = 0 \quad (1.43)$$

La masse volumique et la viscosité sont directement recalculées à partir de la valeur de la fonction couleur.

On peut résoudre l'équation (1.43) de plusieurs façons :

- la première méthode consiste à la discrétiser en utilisant un schéma *TVD* ou *WENO* de préférence (se référer à la sous section 1.2.1). Celle-ci introduit de la diffusion numérique sur deux à trois mailles autour de l'interface. On ne connaît donc la position de l'interface qu'approximativement.
- la deuxième méthode, appelée *VOF – CIAM*, développée par [ZALESKI], utilise l'équation (1.43) pour reconstruire géométriquement l'interface. Ceci permet de connaître l'interface de manière très précise. Cependant, cette méthode a tendance à fractionner l'interface lorsque celle-ci est trop fine ou fortement cisailée.

La prise en compte des tensions superficielles se fait par l'ajout de la force de tension superficielle F_{TS} comme terme source de l'équation 1.2 (cf [J. U. BRACKBILL 92] et [VINCENT 99]):

$$F_{TS} = -\gamma \nabla C \nabla \cdot \left(\frac{\nabla C}{\|\nabla C\|} \right) \quad (1.44)$$

avec γ le coefficient de tension superficielle.

1.2.5 Traitement des limites

L'imposition des conditions aux limites se fait via une méthode de pénalisation qui a été développée au laboratoire *TREFLE* par [ANGOT 89] et [KHADRA 94]. Celle-ci s'applique aux différents types de conditions aux limites: Dirichlet, Neumann, Fourier. Considérons Φ l'inconnue scalaire représentant les vitesses suivant chaque direction d'espace, la température ou la concentration massique. Posons $\Phi_\infty(M, t)$ la valeur de Φ en un point M quelconque à l'extérieur du domaine Ω de frontière $\partial\Omega$. La méthode consiste à exprimer les conditions aux limites sous la forme d'un flux surfacique :

$$-\left(\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right)_{\partial\Omega} = Bi_\Phi(\Phi_{\partial\Omega} - \Phi_\infty) \quad (1.45)$$

Bi_Φ est un réel qui est soit nul, soit infini.

- Si $Bi_\Phi = 0$ alors $\left(\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right)_{\partial\Omega} = 0$. C'est donc une condition de Neumann qui est imposée.
- Si $Bi_\Phi \rightarrow \infty$ alors $\Phi_{\partial\Omega} = \Phi_\infty$. C'est donc une condition de Dirichlet qui est imposée.

La condition aux limites est directement introduite dans l'équation (??) en lui ajoutant le terme $Bi_\Phi(\Phi_{\partial\Omega} - \Phi_\infty)$, ce qui permet d'avoir une formulation générique de l'équation (??). Il suffit d'agir sur le paramètre Bi_Φ pour imposer les conditions aux limites souhaitées. Le système à résoudre devient alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Phi}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\Phi + Bi_\Phi(\Phi_{\partial\Omega} - \Phi_\infty) &= \vec{\nabla} \cdot (K \vec{\nabla} \Phi) \quad \text{dans } \Omega \\ \left(\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right) &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{aligned} \quad (1.46)$$

Plus particulièrement, l'application de la méthode de pénalisation sur les équations de conservation d'énergie, concentration massique et mouvement, engendre respectivement

les systèmes à résoudre suivants :

$$\begin{aligned} \rho c \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} T \right) + Bi_T (T_{\partial\Omega} - T_\infty) &= \vec{\nabla} \cdot (\lambda \vec{\nabla} T) \quad \text{dans } \Omega \\ \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right) &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{aligned} \quad (1.47)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_p}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} (S_p) + Bi_{S_p} (S_{p\partial\Omega} - S_{p\infty}) &= \vec{\nabla} \cdot (D \vec{\nabla} (S_p)) \quad \text{dans } \Omega \\ \left(\frac{\partial S_p}{\partial n} \right) &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{aligned} \quad (1.48)$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{V} &= 0 \quad \text{dans } \Omega \\ \rho \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} \right) + Bi_{\vec{V}} (\vec{V}_{\partial\Omega} - \vec{V}_\infty) &= \rho \vec{g} - \vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \cdot (\mu (\vec{\nabla} \vec{V} + \vec{\nabla} \vec{V}^T)) \quad \text{dans } \Omega \\ \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial n} \right) &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{aligned} \quad (1.49)$$

1.2.6 Interpolation et éléments finis

L'idée de base consiste à approcher une fonction u (vitesse, pression,...) qui est, soit connue analytiquement mais inexploitable, soit, connue en un nombre fini de points. Appelons $X \in \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ cet ensemble de points.

La fonction d'approximation f de la fonction u peut se construire de deux façons différentes :

- Soit on force f à être égale à u aux points où cette dernière est connue i.e. pour tout point x de X , $f(x) = u(x)$,
- soit on force f à être proche de u aux points où cette dernière est connue i.e. pour tout point x de X , $\|f(x) - u(x)\| < \epsilon$, ϵ très petit.

On s'intéresse par la suite à la première construction qui porte le nom d'interpolation. On précise que la fonction d'interpolation sera construite à partir des polynômes de Lagrange. Notons que les fonctions qui seront utilisées ultérieurement seront par exemple la pression, la température, la concentration massique ou les vitesses.

Soit dim la dimension d'espace. On s'est inspiré des éléments finis de Lagrange dans \mathfrak{R}^{dim} pour construire les fonctions d'interpolation. On définit un élément fini de la façon suivante :

- soit K une partie de \mathfrak{R}^{dim} compacte d'intérieur non vide,

- Soit $\Sigma = \{a_j\}_{j=1,N}$ un ensemble de N points distincts de K ,
- Soit P un espace vectoriel de fonctions $f : K \rightarrow \mathfrak{R}$, de dimension fini. Ici, ce sont des fonctions polynômiales.
- Σ est unisolvant, ie : si $\{\alpha_j\}_{j=1,N}$ sont donnés, $\exists ! f \in P$ tel que $f(a_j) = \alpha_j, j = 1, N$. La base adaptée est alors $\{f_j\}_{j=1,N}, f \in P$ tel que $f_i(a_j) = \delta_{ij}$. δ est le symbole de Kronecker caractérisé par $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ et $\delta_{ij} = 0$ sinon.

soit u une fonction définie sur $K, \exists ! f \in P$ tel que $u(a_j) = f(a_j), j = 1, N$. f interpole u en un point $a \in \Omega$ de coordonnées $a = (x, z)$ en $2D$ ou $a = (x, z, y)$ en $3D$:

$$f(a) = \sum_{j=1}^N u(a_j) f_j(a).$$

On commence par construire un élément de référence (K, Σ, P) . On lui applique ensuite une transformation affine pour parcourir l'ensemble du domaine étudié. Ayant besoin d'utiliser des maillages à pas d'espace variables (ex : *Chebitchev*, exponentiel, ...), il est indispensable de choisir des éléments de référence à pas d'espace variables. On précise que les mailles sont quadrangulaires. On teste donc des interpolations de type Q_i , où i est le degré du polynôme d'interpolation f . Les fonctions à interpoler sont soit des scalaires (température, concentration, pression, ... sur la grille de pression), soit des vecteurs (vitesses, ... sur les grilles de vitesses respectives) (1.2).

Interpolation pour des pas d'espace variables en 2D

Considérons dx_1, dx_2, dx_3 trois pas d'espace suivant x et dz_1, dz_2, dz_3 trois pas d'espace suivant z . On donne ci-après les éléments de références (K, Σ, P) propre à chaque interpolation, ainsi qu'une représentation graphique sur une grille quelconque (pression ou vitesses).

Interpolation Q1

L'élément de référence représenté sur la figure 1.3 s'écrit :

$$K = [0, dx_1][0, dz_1],$$

$$P = Q1 = \text{vect}\{1, x, z, xz\},$$

$$\Sigma = \{a_j\}_{j=1,4}.$$

Interpolation Q2

L'élément de référence choisi est (voir aussi la figure 1.4) :

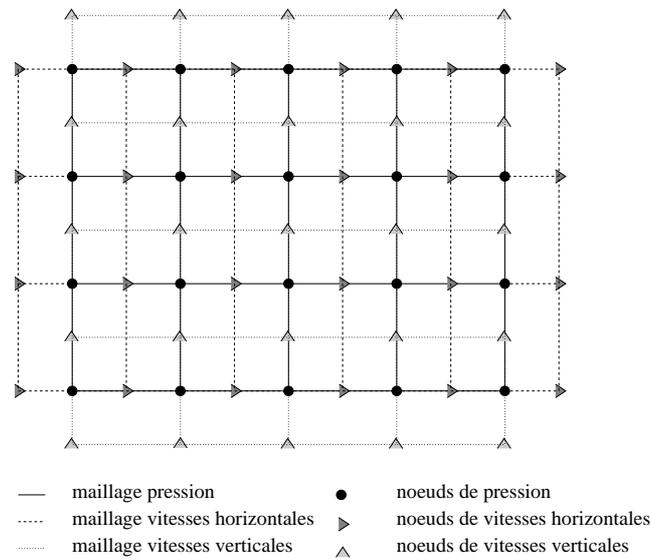


Figure 1.2 : maillage MAC

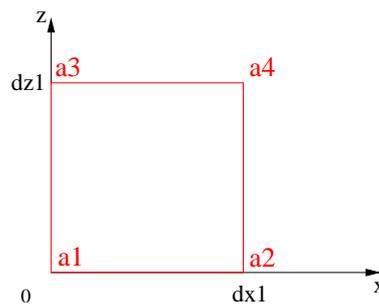


Figure 1.3 : Élément de référence pour l'interpolation Q1

$$K = [0, dx_1 + dx_2][0, dz_1 + dz_2],$$

$$P = Q2 = \text{vect}\{x^j z^k\} \quad j, k \in 0, \dots, 2,$$

$$\Sigma = \{a_j\}_{j=1,9}.$$

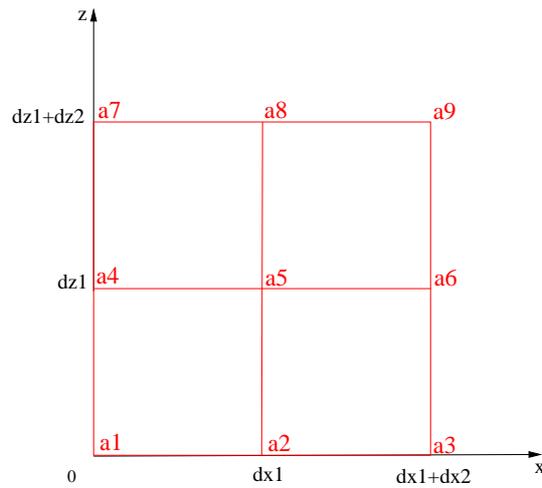
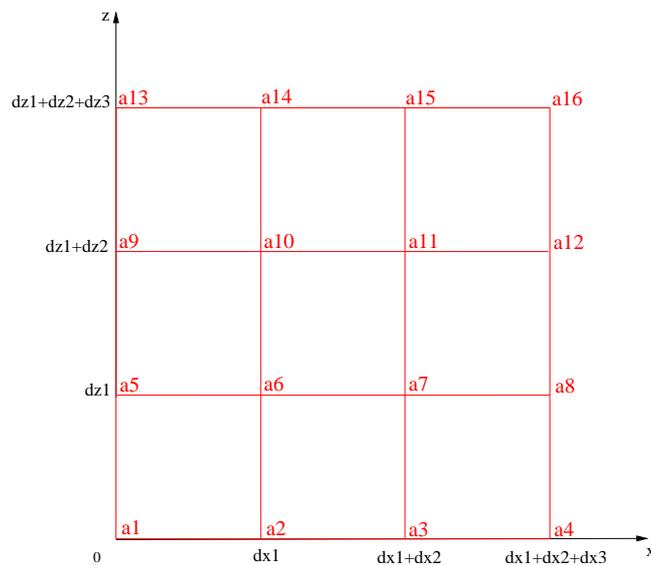
Interpolation Q3

L'élément de référence, représenté sur la figure 1.5 est composé de :

$$K = [0, dx_1 + dx_2 + dx_3][0, dz_1 + dz_2 + dz_3],$$

$$P = Q3 = \text{vect}\{x^j z^k\} \quad j, k \in 0, \dots, 3,$$

$$\Sigma = \{a_j\}_{j=1,16}.$$

Figure 1.4 : *Élément de référence pour l'interpolation Q2*Figure 1.5 : *Élément de référence pour l'interpolation Q3*

Interpolation pour des pas d'espace variables en 3D

Considérons dx_1, dx_2, dx_3 trois pas d'espace suivant x , dz_1, dz_2, dz_3 trois pas d'espace suivant z et dy_1, dy_2, dy_3 trois pas d'espace suivant y . Comme dans le cas 2D, on donne ci-après les éléments de références (K, Σ, P) propre à chaque type d'interpolation, ainsi qu'une représentation graphique sur une grille représentant aussi bien celle de pression que celles des vitesses.

Interpolation Q1

L'élément de référence, représenté sur la figure 1.6 est construit comme suit :

$$K = [0, dx_1][0, dz_1][0, dy_1],$$

$$P = Q1 = \text{vect}\{x^j z^k y^m\} \quad j, k, m \in 0, \dots, 1,$$

$$\Sigma = \{a_j\}_{j=1,8}.$$

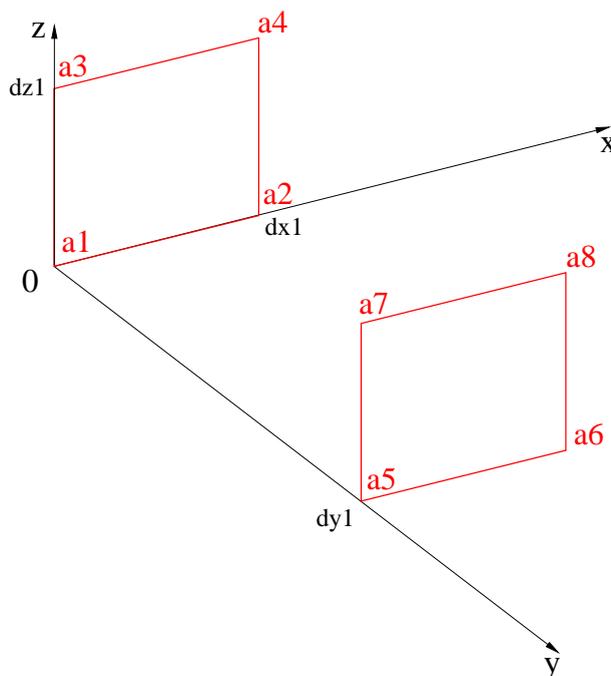


Figure 1.6 : Éléments de référence pour l'interpolation $Q1$

Interpolation $Q2$

On écrit l'élément de référence de la façon suivante (voir aussi la figure 1.7) :

$$K = [0, dx_1 + dx_2][0, dz_1 + dz_2][0, dy_1 + dy_2],$$

$$P = Q2 = \text{vect}\{x^j z^k y^m\} \quad j, k, m \in 0, \dots, 2,$$

$$\Sigma = \{a_j\}_{j=1,27}.$$

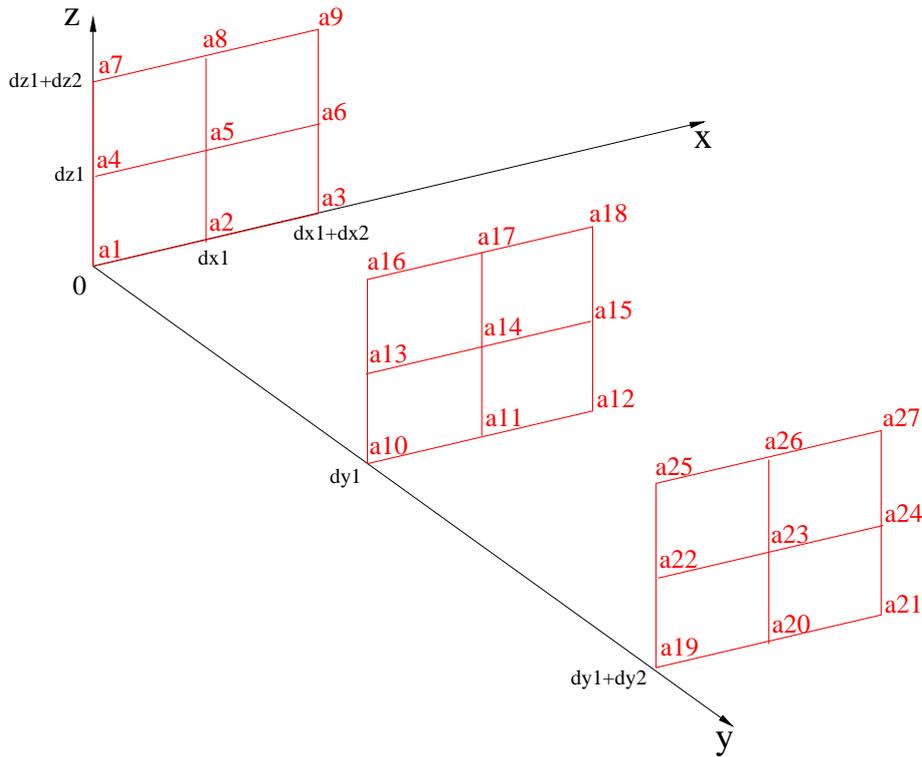
Interpolation $Q3$

L'élément de référence, représenté sur la figure 1.8 s'écrit :

$$K = [0, dx_1 + dx_2 + dx_3][0, dz_1 + dz_2 + dz_3][0, dy_1 + dy_2 + dy_3],$$

$$P = Q3 = \text{vect}\{x^j z^k y^m\} \quad j, k, m \in 0, \dots, 3,$$

$$\Sigma = \{a_j\}_{j=1,64}.$$

Figure 1.7 : Éléments de référence pour l'interpolation Q_2

Détermination des polynômes de base

en 2D

Soit n l'ordre du polynôme d'interpolation f . On rappelle que $Q = \text{vect}(x^l y^m)$ pour tout $l \in [0, n]$ et $m \in [0, n]$, c'est à dire qu'il existe un ensemble de réels λ_{jk}^i , $j \in [0, 3]$, $k \in [0, 3]$ pour chaque polynôme de base f_i tel que, $\forall a \in \Omega$ de coordonnées $a = (x, z)$:

$$f_i(a) = f_i(x, z) = \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^n \lambda_{jk}^i x^j z^k$$

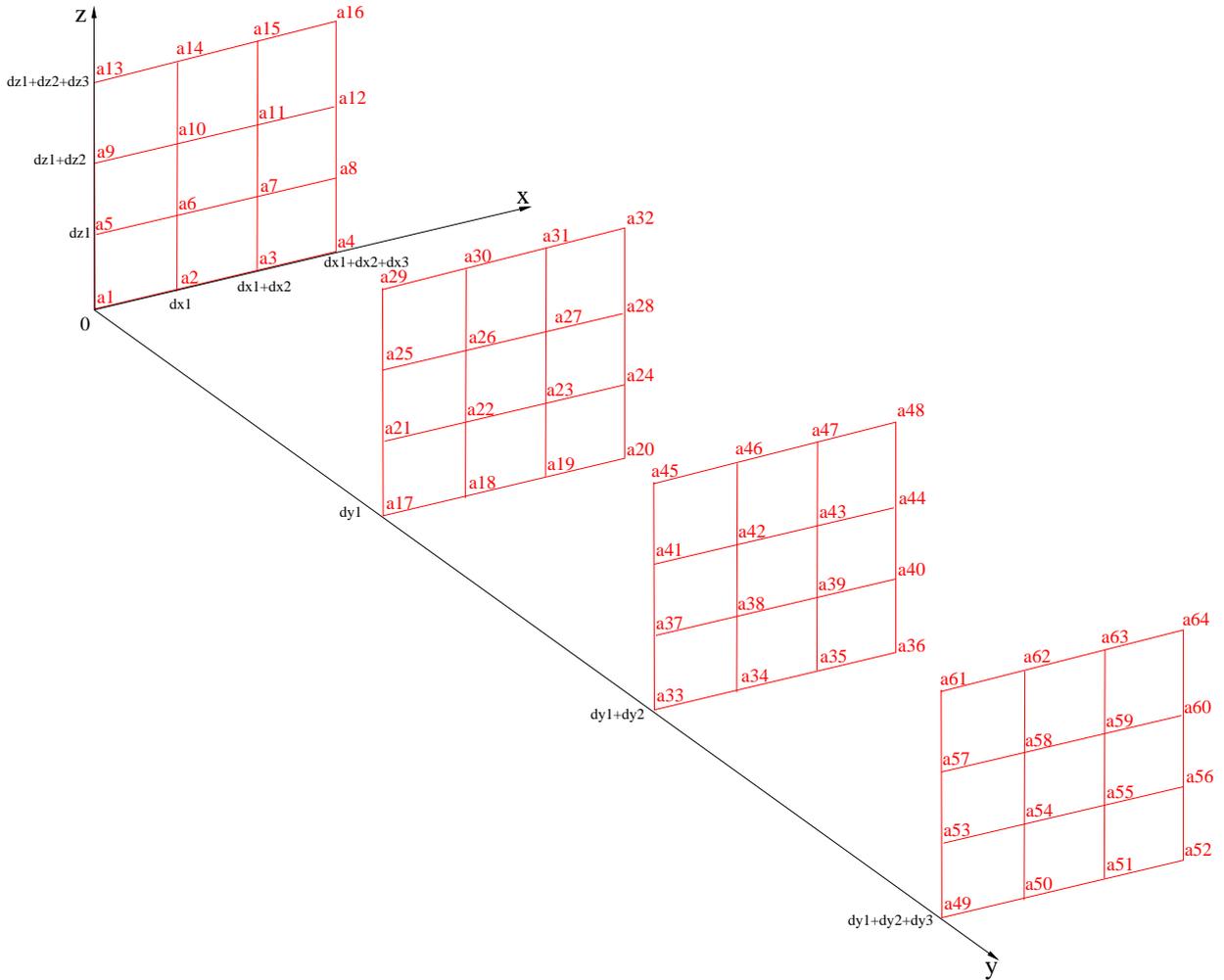
Chaque polynôme f_i vérifie $f_i(x_m, z_m) = \delta_{im}$ où (x_m, z_m) représentent les coordonnées du noeud a_m de la cellule de référence et δ le symbole de Kronecker.

Étant donné que la cellule de référence est constituée de $(n+1)^2$ noeuds, il suffit de résoudre pour chaque polynôme f_i , $i \in [1, (n+1)^2]$ les $(n+1)^2$ équations

$$f_i(x_m, z_m) = \delta_{im}, m \in [1, (n+1)^2]$$

pour trouver les inconnues λ_{jk}^i , $j \in [0, n]$, $k \in [0, n]$.

En 2D, la résolution de ces systèmes peut se faire avec le logiciel MAPLE, les résultats

Figure 1.8 : Éléments de référence pour l'interpolation Q_3

étant obtenus instantanément et étant de taille raisonnable pour être ensuite inscrits dans un code en *Fortran90*. Soulignons qu'on obtient une formulation analytique des λ_{jk}^i , $j \in [0, n]$, $k \in [0, n]$.

en 3D

Posons de nouveau n l'ordre du polynôme d'interpolation. On rappelle que $Q = \text{vect}(x^l y^m z^q)$ pour tout $l \in [0, n]$, $m \in [0, n]$ et $q \in [0, n]$. Pour chaque polynôme de base f_l , $l \in [1, (n+1)^3]$ tel que $\forall a \in \Omega$ de coordonnées $a = (x, z, y)$:

$$f_l(a) = f_l(x, z, y) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^n \lambda_{ijk}^l x^i y^j z^k$$

Notons que chaque polynôme de base p_l vérifie $p_l(x_m, z_m, y_m) = \delta_{lm}$, $l \in [1, (n+1)^3]$, $m \in [1, (n+1)^3]$ où (x_m, z_m, y_m) représentent les coordonnées du noeud a_m de la cellule de

référence.

Sachant qu'il y a $(n+1)^3$ noeuds dans la cellule de référence, on doit résoudre un système de $(n+1)^3$ équations à $(n+1)^3$ inconnues pour chaque polynôme de base. Donc, il faut résoudre en tout $(n+1)^3 * (n+1)^3$ équations à $(n+1)^3 * (n+1)^3$ inconnues :

$$f_l(x_m, z_m, y_m) = \delta_{lm}, \forall l \in [1, (n+1)^3], \forall m \in [1, (n+1)^3]$$

.

Cela revient à résoudre le système :

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^n \lambda_{ijk}^l x^i y^j z^k = \delta_{lm}, \forall l \in [1, (n+1)^3], \forall m \in [1, (n+1)^3]. \quad (1.50)$$

Pour le cas 3D, le logiciel *MAPLE* réussit à résoudre les systèmes de façon analytique mais les résultats obtenus sont inutilisables du fait de leur taille trop conséquente. En effet, cela représente environ 100000 lignes de code. Cela reste donc très fastidieux. Il faut alors trouver une méthode qui résolve le système de manière exacte.

Seules les méthodes directes peuvent y répondre. Nous avons donc choisi la méthode d'inversion *LU* fourni par *Numerical Recipes*.

Cette méthode consiste à décomposer une matrice A en un produit de deux matrices L triangulaire inférieure et U triangulaire supérieure. Donc, au lieu de résoudre le système $AX = B$ où X est l'inconnue, B le second membre, on résout dans un premier temps le système $LY = B$ (descente) puis $UX = Y$ (remontée).

Rappelons que cette méthode s'applique à des matrices à diagonale fortement dominante. La matrice que nous utilisons ne possède malheureusement pas cette propriété à cause de la présence de zéros sur la diagonale principale. Pour contrer cette difficulté, il faut rechercher des pivots, ce qui revient en gros à échanger des lignes ou des colonnes afin de se débarrasser des zéros gênants. Cela revient donc à faire des permutations, ce qui se traduit sous forme matricielle par la multiplication à gauche de la matrice A par une matrice de permutation P . Il s'agit ainsi de résoudre le système $PAX = PB$. C'est alors la matrice PA qu'on décompose sous la forme LU .

Afin de fixer les idées, nous allons représenter les différents systèmes à résoudre sous forme matricielle. Déterminer les $\lambda_{ijk}^l, i \in [0, n], j \in [0, n], k \in [0, n]$ de chaque polynôme de base f_l de la relation 1.50 correspond à résoudre le système matriciel de la figure 1.9.

$L(x_L, z_L, y_L)$ représente les coefficients $x^i y^j z^k$, $(i, j, k) \in ([0, n])^3$ associés aux noeuds de pression de coordonnées $a_L = (x_L, z_L, y_L)$.

$$\begin{bmatrix} L(x_1, y_1, z_1) \\ L(x_2, y_2, z_2) \\ \vdots \\ L(x_L, y_L, z_L) \\ \vdots \\ L(x_{(n+1)^3}, y_{(n+1)^3}, z_{(n+1)^3}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{000}^1 \\ \lambda_{100}^1 \\ \vdots \\ \lambda_{nnn}^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow \text{ligne L}$$

Figure 1.9 : Système à résoudre pour chaque polynôme de base f_i

Pour trouver l'ensemble des coefficients associés aux polynômes de base, on résout le système $LA_{0INT} = B$ de la figure 1.10 :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} L(x_1, y_1, z_1) \\ L(x_2, y_2, z_2) \\ \vdots \\ L(x_i, y_i, z_i) \\ \vdots \\ L(x_{(n+1)^3}, y_{(n+1)^3}, z_{(n+1)^3}) \end{bmatrix}}_L \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_{000}^1 & \lambda_{000}^i & \lambda_{000}^{(n+1)^3} \\ \lambda_{100}^1 & \lambda_{100}^i & \lambda_{100}^{(n+1)^3} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_{nnn}^1 & \lambda_{nnn}^i & \lambda_{nnn}^{(n+1)^3} \end{bmatrix}}_{A_{0int}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}}_B$$

Figure 1.10 : Système global à résoudre

1.3 Mise en place de l'AMR

Dans le cas d'un écoulement diphasique, le transport de l'interface se fait grâce à une méthode *VOF*. On rappelle que celle-ci permet de connaître la position de l'interface de façon très précise. Cependant, lorsque l'interface est fortement cisailée, cette méthode a tendance à la fractionner. On peut éviter cette difficulté en utilisant un maillage très fin. Dans le cas d'un écoulement monophasique avec transport d'espèce faiblement diffusives, la méthode *VOF* est à proscrire puisqu'elle ne peut pas traiter le terme diffusif de l'équation de transport. On est donc amené à résoudre l'équation (1.18) avec un schéma *TVD*. Vu que ce schéma diffuse sur deux à trois mailles, il faut travailler sur un maillage assez fin de façon à ce que la diffusion physique soit supérieure strictement à ces deux mailles pour connaître l'interface de manière précise.

Dans les deux cas, se pose le problème de la faisabilité compte tenu des moyens informatiques qui sont à notre disposition. Leurs capacités en taille mémoire et notre durée d'attente de résultats acceptable étant de dimension finie, il est indispensable de les optimiser. On peut citer quelques méthodes possibles telles la parallélisation des codes de calculs, l'utilisation de méthodes de raffinement de maillage adaptatif (*AMR*), ou un couplage de ces deux méthodes.

La méthode parallèle rend possible la résolution d'équation sur des maillages très fins car la taille mémoire nécessaire est distribuée sur plusieurs processeurs. Ainsi le temps de calcul (temps *CPU*) devient très intéressant par rapport à un calcul en monoprocesseur. Si on traite des cas où l'utilisation d'un maillage très fin n'est réellement utile que dans certaines zones du domaine, il est dommage de le raffiner en entier. C'est pour ce type de problème que l'utilisation d'une méthode *AMR* devient décisive. En effet, on ne raffine que les zones qui nécessitent un traitement plus fin, et ceci de manière adaptative dans le temps. Ainsi, des cas qui dépassent les capacités d'une machine monoprocesseur standard à cause d'un nombre de noeuds à résoudre trop important, peuvent être réalisés en utilisant une méthode *AMR*. Pour certains cas où l'approche *AMR* ne suffit plus, l'utilisation d'une méthode parallèle en plus de l'*AMR* serait une solution appropriée.

Prenons l'exemple simplifié d'un écoulement turbulent dans le quel se trouvent un gros et un petit tourbillon. La méthode classique consiste à prendre un maillage assez fin pour pouvoir capter les deux tourbillons, ce qui est très coûteux en taille mémoire et en temps *CPU* (cf figure (1.11) gauche). Par ailleurs le gros tourbillon aurait pu être capté avec beaucoup moins de points, ce qui aurait permis d'utiliser moins de mémoire. En effet, le

maillage de la figure (1.11) droite est suffisant pour capter la grosse structure, mais il ne peut appréhender la petite. L'idée de la méthode *AMR* consiste à utiliser un maillage qui permettent de capter les deux structures tout en utilisant un maillage adapté aux différentes zones du domaine et en temps pour suivre le petit tourbillon (cf figure (1.12)).

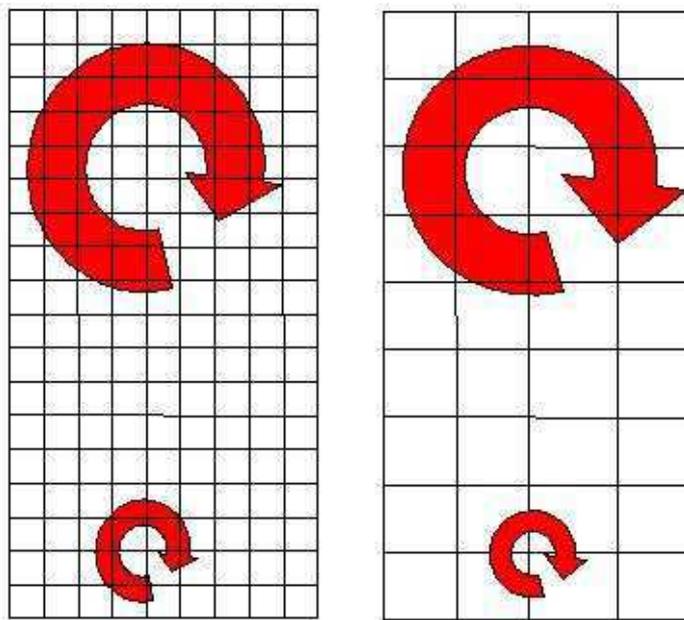


Figure 1.11 : *Résolution sur un maillage classique.*

1.3.1 Stratégies de maillage existantes

Plusieurs méthodes de raffinement de maillage ont été développées pour capter des phénomènes locaux qui apparaissent de façon quelconque dans le temps. Cependant, chaque méthode est efficace pour traiter un problème spécifique. Il convient donc de choisir la méthode la mieux adaptée au problème qui nous intéresse.

- Méthode p: Le maillage reste fixe ainsi que le nombre de noeuds du maillage. La précision de la solution est obtenue en augmentant l'ordre du schéma dans les zones de plus forte erreur. Celle-ci a été développée par [BASU 83] pour des solutions continues dans des écoulements 1-fluide. Son utilisation reste difficile pour des solutions

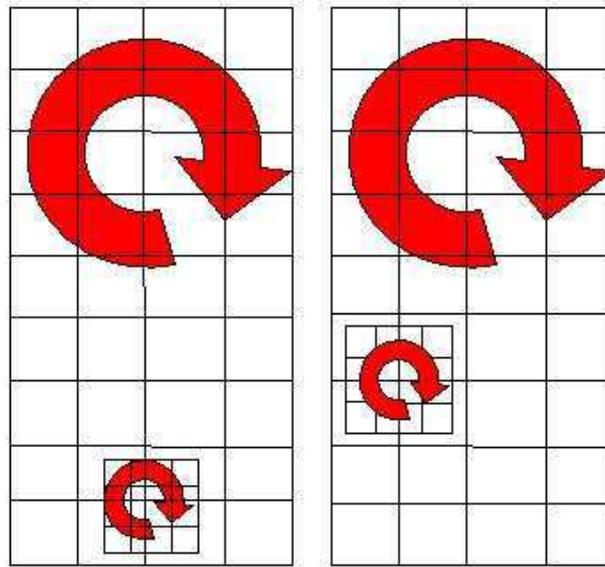


Figure 1.12 : Résolution sur maillage adaptatif en espace et en temps.

discontinues à cause de l'oscillation des schémas d'ordre élevé (cf [BAKER 97]). Cette méthode reste très utilisée dans le cadre des éléments finis.

- Méthode r: L'ordre du schéma et le nombre de noeuds du maillage restent fixes. Il suffit de déplacer les noeuds du maillage dans les zones qui requièrent d'être raffinées pour obtenir la précision souhaitée. Cette méthode est performante dans le cas d'écoulements non visqueux compressibles sur des maillages non structurés (cf [PALMERIO 88] et [PALMERIO 94]). Cette méthode rendant le maillage fortement non-orthogonal, les termes visqueux ne sont pas traités correctement (voir [PIRZADEH 99]). La figure 1.13 montre la déformation dynamique du maillage pour suivre l'évolution des champs de température et de vitesse pour le problème de *Stefan* ([R. T. TENCHEV 05]).
- Méthode h: C'est actuellement la méthode la plus répandue dans la communauté scientifique. Elle consiste à fixer l'ordre du schéma tandis que le maillage et le nombre de noeuds varient au cours du temps. Des noeuds sont ajoutés dans les zones de plus forte erreur pour améliorer la précision de la solution. De la même

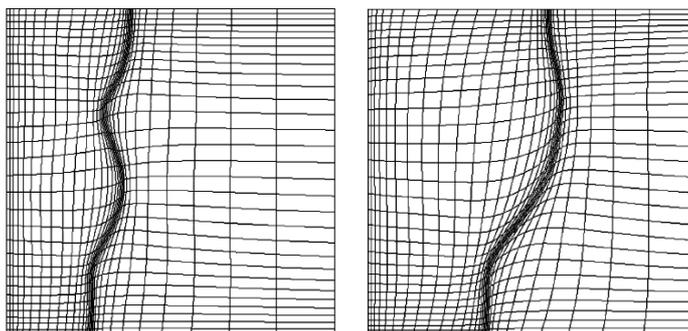


Figure 1.13 : *Raffinement de maillage par la méthode r*

façon, des noeuds sont enlevés des régions où le maillage est considéré trop fin. La figure 1.14 donne un exemple de raffinement utilisant la méthode h . Comme le montre cette figure, cette méthode transforme le maillage initialement structuré en un maillage non structuré. Elle a été mise au point par [BERGER 89b] pour des écoulements incompressibles. Elle a ensuite été utilisée, par exemple, par [HAY 04] pour des écoulements compressibles turbulents puis pour des écoulements diphasique (cf [HAY 05]).

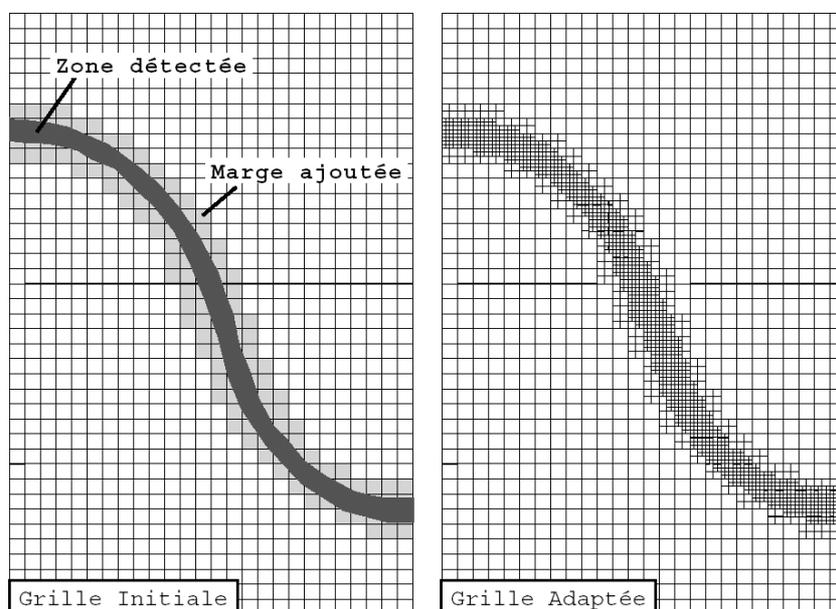


Figure 1.14 : *Raffinement de maillage par la méthode h ([HAY 04])*

- Méthode *OCLM*: Elle a été développée par [VINCENT 99] qui s'est inspiré des travaux de [BERGER 89b]. L'objectif était de résoudre des écoulements incompressibles diphasiques avec un maillage structuré. C'est dans cette optique que la méthode *OCLM* a été conçue. Elle peut être considérée comme la combinaison de la méthode *h* et d'une méthode multigrille classique (voir [P. LASCAUX 00] et [U. TROTTEBERG 01]). L'idée consiste à raffiner le volume de contrôle d'un noeud P appartenant au maillage grossier et non pas les mailles grossières dont un des sommets est P (voir la figure 1.15). Le raffinement du maillage grossier génère une grille fine déconnectée de la grille grossière. Les connexions entre ces deux grilles se font uniquement par l'intermédiaire d'opérateur de prolongement et de restriction, comme on peut le rencontrer dans les méthodes multigrilles classiques. La figure 1.16 montre à la fois la conservation d'un maillage structuré par niveau et sa structure par niveau.

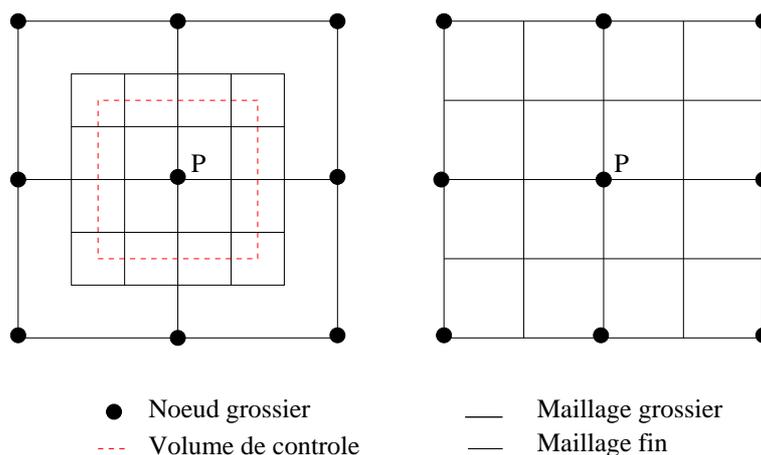


Figure 1.15 : *Raffinement de maillage par la méthode OCLM à gauche et par une méthode AMR classique à droite.*

Des couplage entre les différentes méthodes *AMR* ont été mises en place pour bénéficier des avantages de chacune. Par exemple, [B. GUO 86] a présenté une *h - p* méthode. Parmi les personnes qui utilisent cette méthode, on peut citer [J. ODEN 89], [L. DEMKOWICZ 89] ou [W. RACHOWICZ 89].

Un couplage entre la méthode *h* et *r* a aussi été testée par [W. HABASHI 98], [D. AIT-ALI-YAHA 00], [N. PIERCE 03] entre autre. Elle consiste à adapter le maillage en deux étapes : dans la première on applique un raffinement de type *p*, puis dans la deuxième un raffinement de

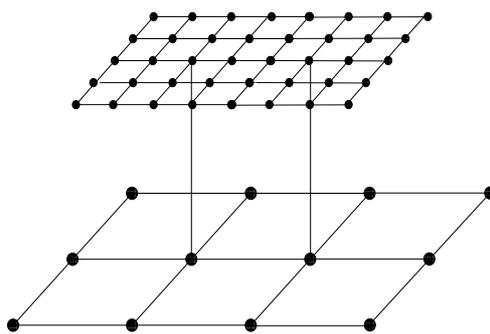


Figure 1.16 : *Raffinement de maillage par la méthode OCLM*

type h .

Les méthodes h et $OCLM$ sont adaptées pour le type de problème que l'on souhaite traiter. Souhaitant garder un maillage localement structuré, nous devons abandonner la méthode h au profit de la méthode $OCLM$. Nous allons donc la détailler dans la sous section suivante.

Ayant précisé le type de raffinement choisi, il convient d'expliciter la manière de générer le maillage adaptatif. Deux techniques sont possibles :

Soit on décide d'adapter le maillage de façon statique, c'est à dire qu'on va utiliser successivement le code de calcul et un mailleur. Dans la première étape, une simulation est faite pour déterminer la taille maximale des mailles pour atteindre la précision désirée. Dans la deuxième étape, le mailleur tient compte de cette contrainte pour générer un nouveau maillage. On applique successivement les deux étapes jusqu'à obtention de la solution finale. Cette méthode est utilisée par Elle permet d'avoir un maillage de très bonne qualité, cependant elle est pénible d'utilisation et grosse consommatrice en temps (à chaque début de simulation, il faut recalculer les métriques,...) (cf [VENDITTI 02]) ou [J. HETU 92], par exemple).

Soit on utilise une adaptation dynamique de maillage, i.e. le maillage est généré par le code lui-même. Lors de la simulation, la vérification de certains critères permet d'adapter la taille des mailles de façon à atteindre la précision souhaitée. Cette méthode est connue sous le nom de méthode AMR (Adaptive Mesh Refinement). Elle génère des maillages de moins bonne qualité qu'avec l'utilisation d'un mailleur mais contrôle la taille des mailles de façon plus précise. De plus, elle permet de réduire l'intervention de l'utilisateur et le nombre de calculs lié au passage d'informations code-mailleur ([BERGER 84], [BERGER 89a], [R. PEMBER 95]).

On choisira donc d'utiliser une méthode *AMR*.

1.3.2 la méthode One-Cell Local Multigrid *OCLM*

Cette approche consiste à augmenter la densité des points à proximité de l'interface afin de mieux la localiser, ce qui est indispensable pour diminuer la diffusion numérique des schémas qui filtre la turbulence et déforme les interfaces. Plus précisément, il s'agit de générer des grilles fines à partir d'une grille grossière (cf figure 1.19) à proximité de l'interface lorsque celle-ci subit de fortes déformations. Ces grilles fines sont générées lorsque des critères de raffinement sont vérifiés. On cite à titre indicatif deux types d'indicateurs : soit, on calcule l'erreur d'approximation [HAY 04], soit on utilise la variation de variables physiques (gradient, seuil,...). On a choisi le second critère qui paraît plus adapté aux problèmes physiques étudiés dans ce travail. Lorsqu'un noeud scalaire $P_{m,l-1}$ du niveau G_{L-1} vérifie ce critère, le volume de contrôle autour de ce point est raffiné (cf figure 2.40). La grille fine ainsi créée sera appelée cellule *AMR*. Le niveau G_L est alors construit. En maillage décalé, on utilise un découpage impair pour assurer une connexion conforme entre les cellules *AMR* d'un même niveau. Le coefficient de raffinement *RAF*, indique le rapport entre le pas d'espace de niveau G_{L-1} et celui de niveau G_L . Avoir un pas d'espace de niveau G_L trois fois plus petit que celui de niveau G_{L-1} , revient à imposer $RAF = 3$. La figure 1.17 montre à gauche une cellule *AMR* avec $RAF = 3$ et à droite avec $RAF = 5$.

Seuls les noeuds intérieurs aux cellules *AMR* de niveau G_L peuvent à leur tour créer une cellule *AMR* de niveau G_{L+1} . Il en résulte une structure emboîtée des niveaux, ie $G_L, G_{L+1}, G_{L+2}, \dots$. On crée des niveaux de plus en plus fin jusqu'à obtenir la précision requise (voir figure 1.18).

On note aussi la structure en arbre des niveaux *AMR* sur la figure 1.20. Cette structure signifie que chaque noeud LP , de niveau G_L a des fils appartenant au niveau G_{L+1} , LP a un père de niveau G_{L-1} .

On précise que pour déterminer l'inconnu pression P_m d'un niveau G_L à partir des équations de discrétisation, nous avons besoin des informations contenues dans les noeuds voisins de pression de même niveau (P_e, P_w, P_s, P_n), vitesse de même niveau (U_e, U_w, V_s, V_n) et viscosité de même niveau ($M_{ne}, M_{nw}, M_{se}, M_{sw}$) comme le montre la figure 1.21. Les inconnues vitesses U_m et V_m sont déterminées de la même façon (figures 1.22 et 1.23). Considérons une cellule *AMR* de niveau G_L . Les noeuds de pression de cette cellule

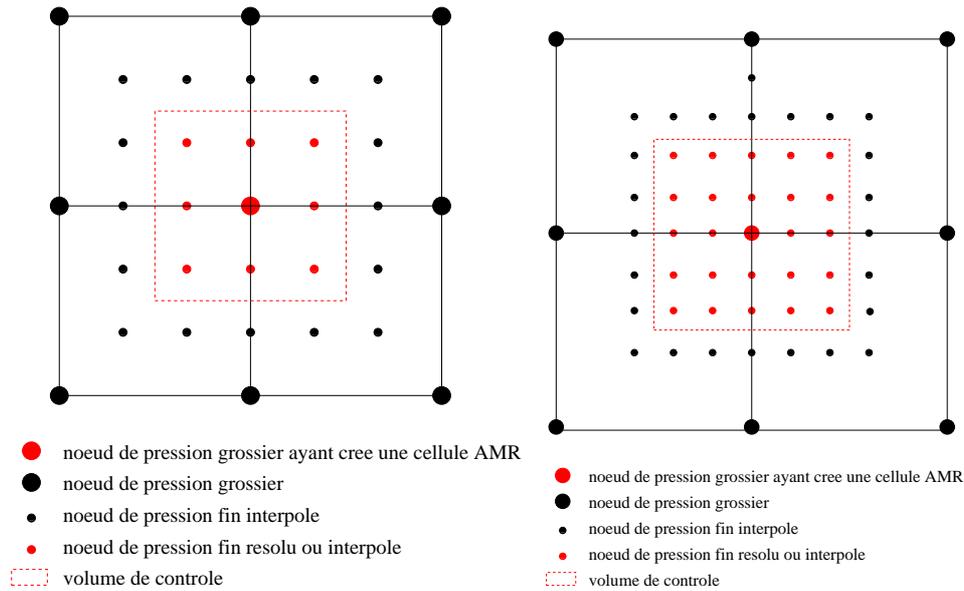


Figure 1.17 : *coefficient de raffinement 3 à gauche et 5 à droite*

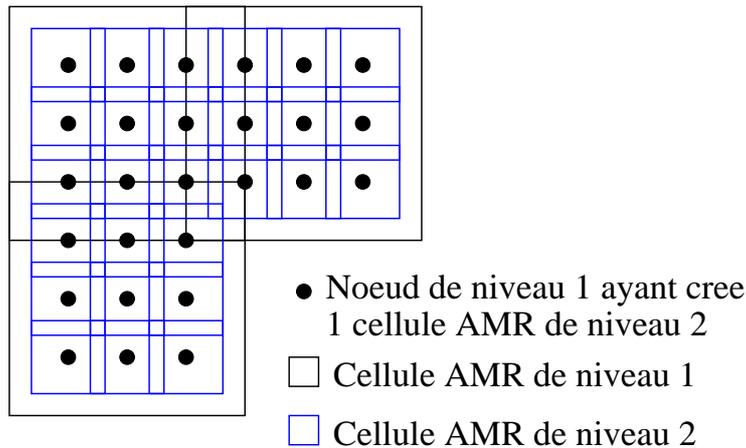


Figure 1.18 : *Construction du niveau 2 à partir du niveau 1.*

AMR sont créés dès que le critère de raffinement est vérifié par le noeud de pression de niveau G_{L-1} . Les noeuds vitesses fins et viscosités fins sont ensuite créés comme voisins fins des noeuds de pression de la cellule AMR . La figure 1.24 montre le traitement des différents noeuds de pression et de vitesse. Les noeuds aux limites de la cellule sont interpolés (interpolation Q_1), tandis que ceux à l'intérieur sont calculés à partir des équations de conservation discrétisées. Le choix du traitement des noeuds fins se fait conformément aux schémas de discrétisation : les noeuds pression et vitesses représentés en noir sur la

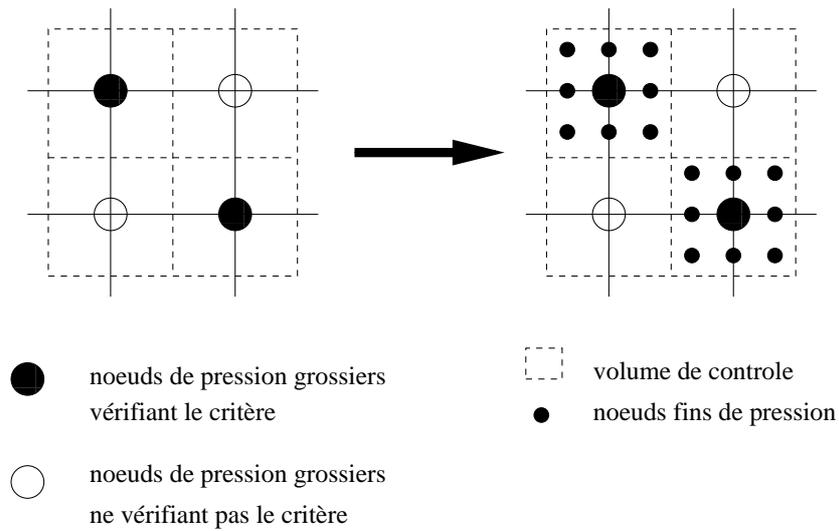


Figure 1.19 : création d'un niveau de grille fin

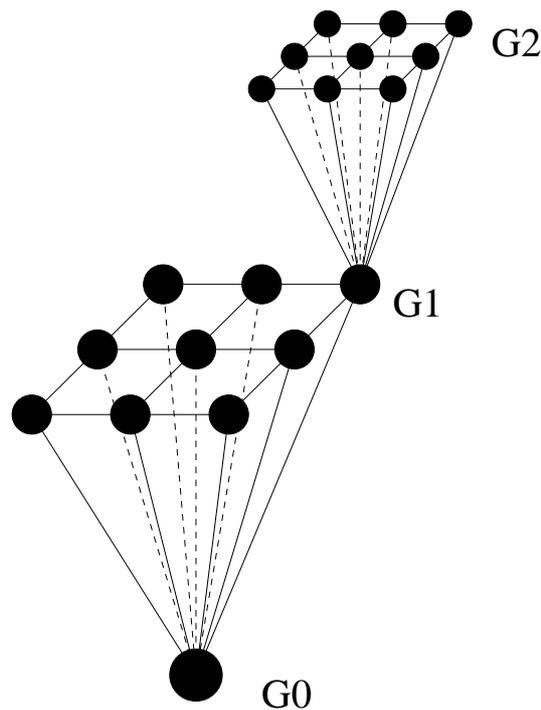
Figure 1.20 : Liens de parenté entre des noeuds de différents niveaux AMR pour un coefficient de raffinement $RAF = 3$.

figure 1.24 ont au moins un voisin manquant, ce qui nous conduit à les interpoler.

Soit t_0 le temps initial où les grandeurs physiques et autres paramètres sont initialisés. La

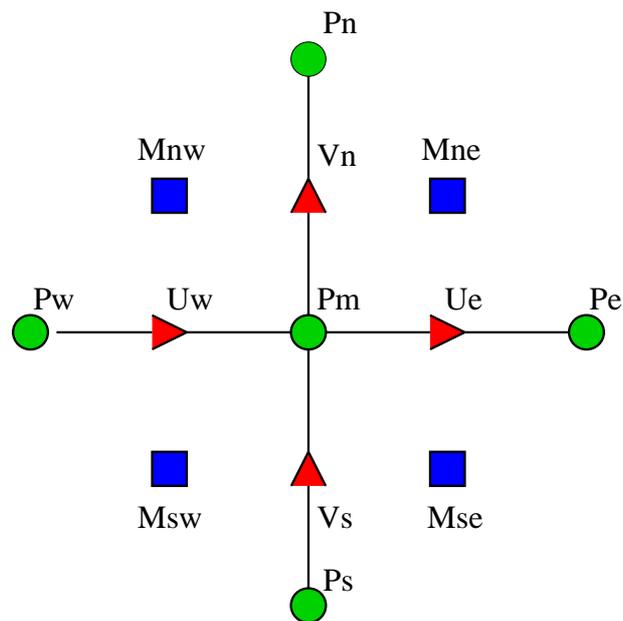


Figure 1.21 : Schéma de discrétisation pour les noeuds de pression

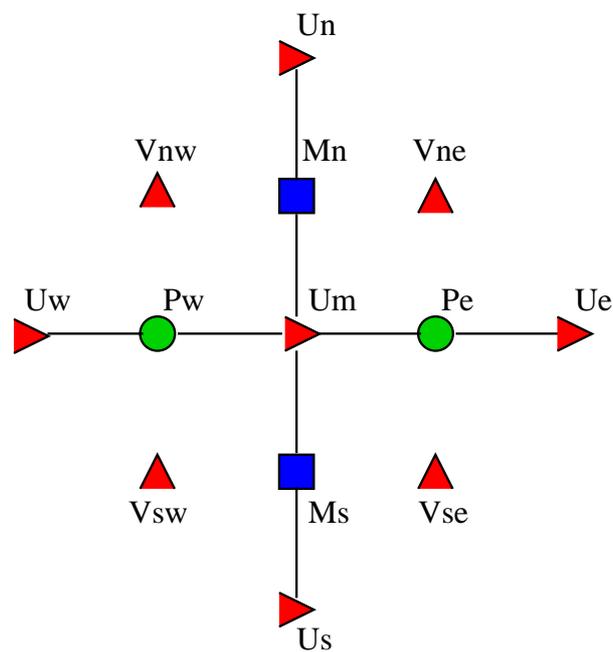


Figure 1.22 : Schéma de discrétisation pour les noeuds de vitesses horizontales

phase d'initialisation de l'AMR se fait soit en interpolant la solution du niveau grossier sur le niveau fin quand les cellules AMR sont créées à partir d'un temps $t > t_0$; soit de la

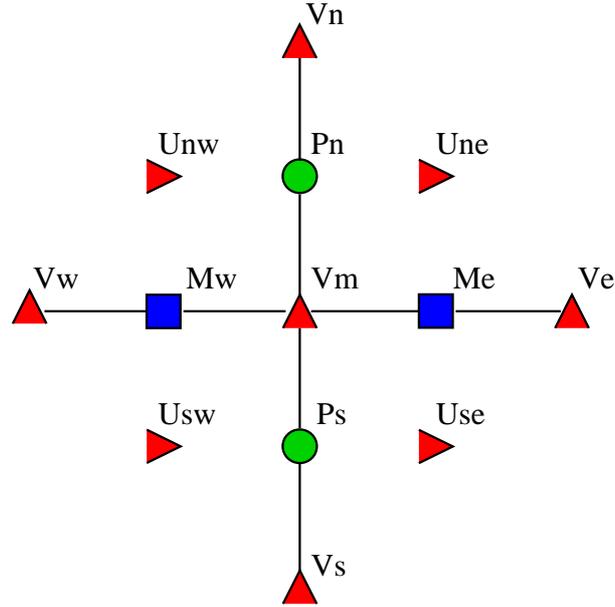


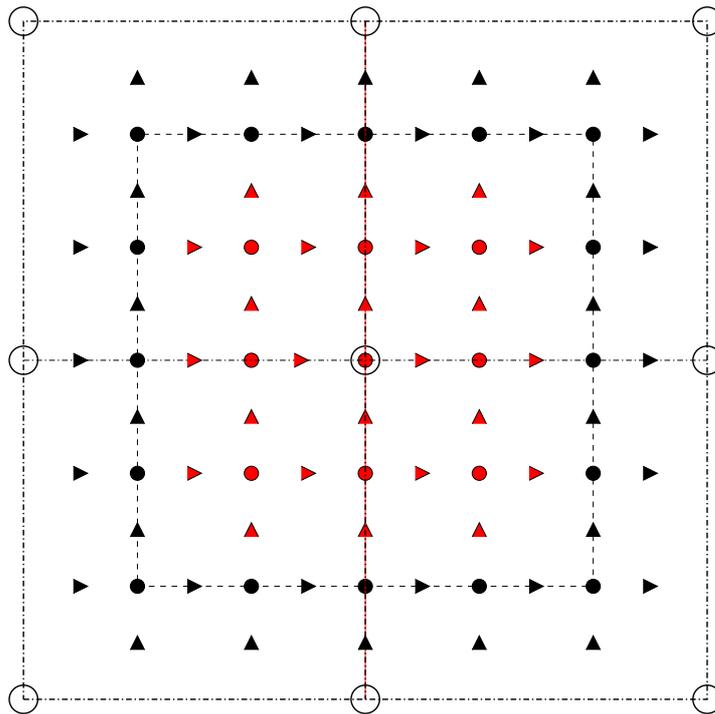
Figure 1.23 : Schéma de discrétisation pour les noeuds de vitesses verticales

même façon que les autres éléments du maillage grossier G_0 quand les cellules AMR sont créées à partir d'un temps $t = t_0$.

La solution obtenue sur un niveau fin G_L est restreinte sur un niveau grossier G_{L-1} par la méthode Full Weighting Interface Control Volume ($FWICV$) [HACKBUSH 85]. Cette méthode est utilisée pour la fonction de phase dans un écoulement diphasique car elle assure la conservation de la masse. L'injection conservative consiste à enrichir la solution d'un noeud père en lui imposant la formule (2.6).

Cependant, la méthode $OCLM$ montre des faiblesses. Une d'elles correspond au découplage de la procédure d'interpolation et du solveur implicite. Quand on cherche la solution Φ_l^{n+1} sur le niveau fin G_L au temps $t^{n+1} = (n+1)\delta t$, la première étape consiste à interpoler les noeuds des limites des cellules AMR à partir de la solution connue au temps $t^n = (n)\delta t$. Donc la solution Φ_l^{n+1} sur les noeuds des limites des cellules AMR est une combinaison linéaire de la solution Φ_{l-1}^n au temps $t^n = (n)\delta t$. Ceci provoque une première erreur car la solution Φ_l^{n+1} en ces noeuds de limites ne représente pas réellement la solution au temps t^{n+1} , mais plutôt au temps t^n .

Dans la deuxième étape, on utilise un solveur implicite pour trouver la solution Φ_l^{n+1} sur les noeuds intérieurs aux cellules AMR . En considérant les schémas de discrétisation des



- noeuds de pression sur le maillage grossier
- noeuds de pression calculés par interpolation
- noeuds de pression calculés par résolution des équations
- ▶▲ noeuds de vitesse calculés par résolution des équations
- ▶▲ noeuds de vitesse calculés par interpolation

Figure 1.24 : détermination de l'inconnue sur les noeuds fins

figures 1.21, 1.22 et 1.23, on se rend compte que la plupart de ces noeuds intérieurs ont au moins un voisin qui est un noeud interpolé. Donc l'erreur qui a été commise sur ces noeuds interpolés se propage sur ceux à l'intérieur des cellules *AMR*. Une première correction à apporter à cette méthode est de rendre l'interpolation implicite dans le but de déterminer Φ_l^{n+1} sur les noeuds intérieurs et aux limites des cellules *AMR* en une seule étape. Donc on interpole la solution Φ_l^{n+1} à partir de la solution Φ_{l-1}^{n+1} et non plus Φ_{l-1}^n (l'implication de l'interpolation est détaillée dans la section 2.6).

La méthode *AMR* ainsi développée devient plus efficace que la méthode *OCLM*. Elle représente réellement la solution Φ_l^{n+1} au temps t^{n+1} . Cependant la résolution des équations discrétisées est une méthode plus précise que l'interpolation. Comme on interpole tous les

noeuds appartenant aux limites des cellules *AMR*, on se retrouve avec un grand nombre de noeuds à interpoler par rapport à ceux résolus par les équations de discrétisation. La deuxième amélioration consiste donc à connecter les cellules *AMR* entre-elles. Ceci permet le passage d'informations de cellule en cellule. On verra par la suite comment cela permet de réduire considérablement le nombre de noeuds à interpoler et donc d'obtenir une bonne précision de la solution Φ_l^{n+1} .

Chapitre 2

Améliorations apportées à la méthode *OCLM*

2.1 Principe de connexion

Dans la méthode One-Cell Local Multigrid (*OCLM*) développée par [VINCENT 00], les cellules *AMR* d'un même niveau G_L sont indépendantes les unes des autres. Ainsi les informations contenues dans chacune d'elle proviennent d'une résolution locale et des informations du niveau plus grossier G_{L-1} . En aucun cas il n'y a passage d'information d'une cellule *AMR* à l'autre. Le nombre de points interpolés a donc une action significative sur la précision de la solution. Comme cela a été expliqué dans la première partie, une des améliorations à apporter à la méthode *OCLM* est la mise en place d'une technique de connexion entre cellules *AMR*.

On rappelle que les noeuds d'une cellule *AMR* sont traités différemment selon leur position dans la cellule : les noeuds aux limites sont résolus par interpolation tandis que ceux à l'intérieur sont résolus par discrétisation des équations de conservation. L'objectif est de minimiser le nombre de noeuds interpolés.

On expose ci-dessous la technique de connexion pour les noeuds scalaires et ceux de vitesses. Globalement, la démarche est la même, cependant quelques nuances apparaissent concernant le choix des noeuds à résoudre. On décide donc de détailler le principe pour les noeuds scalaires et de se restreindre à l'explication des nuances de la technique pour les noeuds vitesses. Les principes décrits dans les parties suivantes sont généralisables à trois dimensions d'espace et à plusieurs niveaux d'*AMR*. Le principe de parcours des noeuds est valable pour tout type de maillages curvilignes structurés orthogonaux.

2.1.1 Traitement des noeuds scalaires

On prend le cas de deux noeuds voisins d'un même niveau G_{L-1} . Lorsque chacun d'eux génère une cellule *AMR* de niveau G_L , il y a recouvrement (voir figure 2.1). Les noeuds appartenant aux limites des cellules *AMR* et étant dans la zone de recouvrement ne sont plus résolus. Tandis que ceux appartenant à l'intérieur (strict) des cellules *AMR* et étant dans la zone de recouvrement sont connectés à des noeuds appartenant à l'intérieur (strict) de la cellule voisine. Prenons le cas d'un noeud P_M^G appartenant à l'intérieur (strict) de la cellule *AMR* de gauche et étant dans la zone de recouvrement (se référer à la figure 2.1). Pour simplifier la démarche, on suppose que dans le schéma de discrétisation, il est nécessaire de connaître l'inconnue aux noeuds voisins Ouest P_W^G , Est P_E^G , Nord P_N^G et Sud P_S^G , pour déterminer l'inconnue P_M^G . En utilisant la figure (2.1), on observe que le noeud P_E^G appartient à la fois aux limites de la cellule *AMR* gauche et à la zone de recouvrement, il n'est donc pas résolu. La figure 2.1 montre qu'un autre noeud appartenant à l'intérieur de la cellule de droite et étant dans la zone de recouvrement, P_E^D , a les mêmes coordonnées que le noeud P_E^G . P_E^D devient le nouveau voisin Est de P_M^G . On suit une démarche similaires pour tous les autres noeuds appartenant à l'intérieur (strict) des cellules *AMR* et à la zone de recouvrement. On connecte ainsi les deux cellules *AMR*. Seuls les noeuds appartenant aux limites des cellules *AMR* et n'étant pas dans la zone de recouvrement sont interpolés.

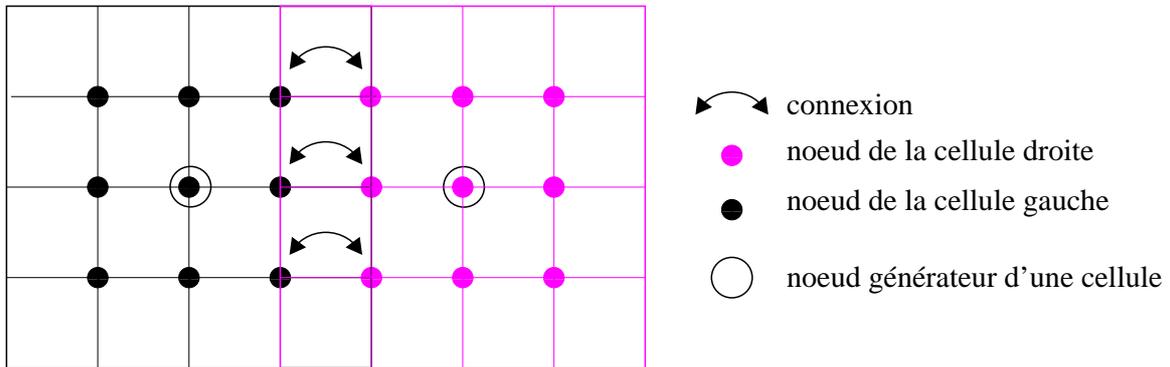


Figure 2.1 : Connexion des noeuds scalaires de deux cellules *AMR*.

On généralise le cas à plusieurs cellules *AMR* d'un même niveau G_L sur la figure 2.2. Chaque cellule *AMR* conserve son identité, à savoir son numéro de cellule, les numéros des noeuds fins, sa position, les pas d'espaces associés à chaque noeud, ... On peut ainsi gérer le raffinement et le déraffinement de manière adaptative en temps et en espace.

L'originalité de cette technique réside dans le fait que cette succession de cellules AMR est traitée comme un unique bloc lors de la résolution. Le passage d'informations entre cellules d'un même niveau est donc établi.

On note aussi que le nombre de noeuds de pression interpolés devient très petit devant le nombre de noeuds de pression résolus, ce qui permet d'avoir une meilleure précision de la solution.

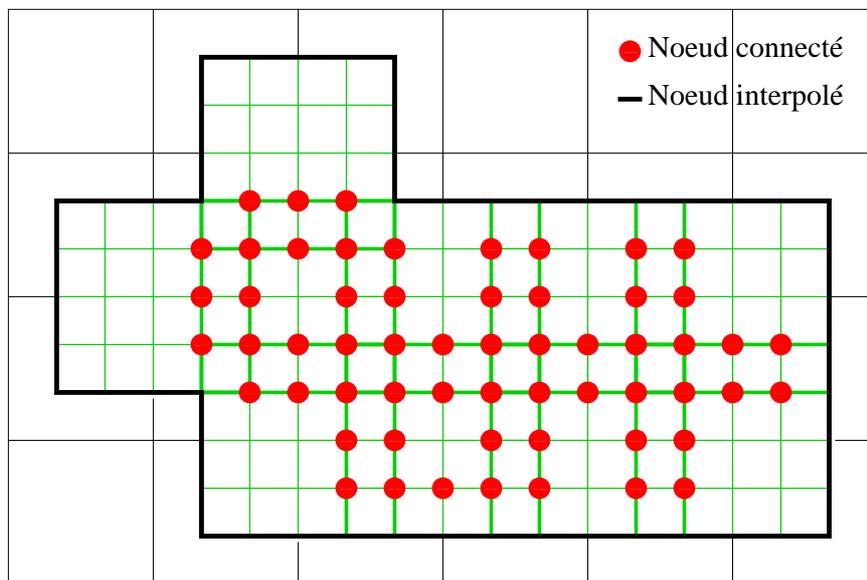


Figure 2.2 : Connexion de plusieurs cellules AMR .

On ajoute que seuls les noeuds appartenant à l'intérieur (strict) de chaque cellule AMR de niveau G_L peuvent générer à leur tour une cellule AMR de niveau G_{L+1} (cf figure 2.3). En effet, si on suppose qu'un des noeuds de la figure 2.1, appartenant à la limite de la cellule AMR gauche et étant dans la zone de recouvrement génère une cellule, il existe un noeud appartenant à l'intérieur (strict) de la cellule droite qui a les mêmes coordonnées que le premier noeud. Ces deux noeuds étant superposés, si chacun d'eux crée une cellule AMR de niveau supérieur, on se retrouve alors avec deux cellules identiques l'une superposée à l'autre. C'est pour cela que nous interdisons la création de cellules AMR de niveau G_{L+1} à partir d'un noeud appartenant à la limite d'une cellule AMR de niveau G_L . Le niveau G_{L+1} est donc emboîté dans le niveau G_L .

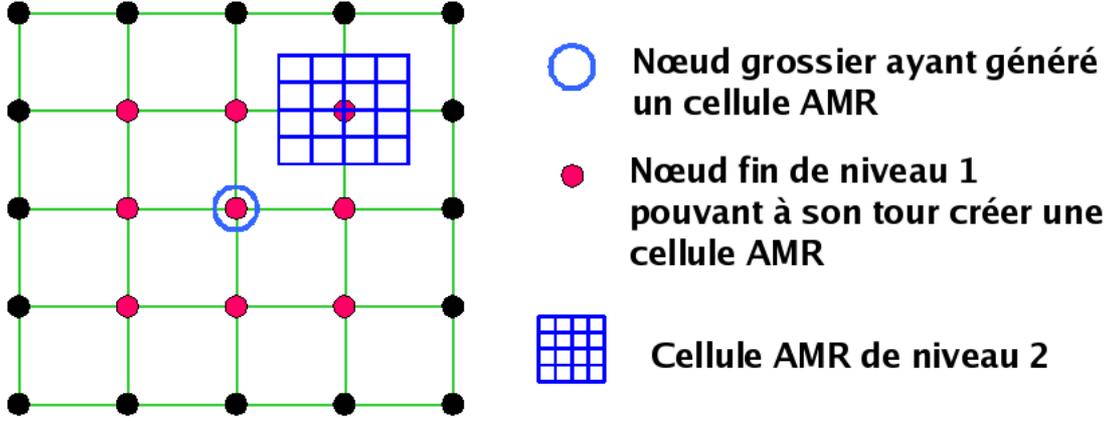
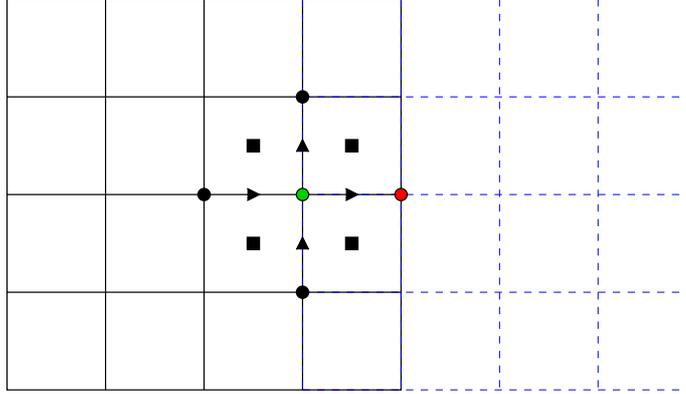


Figure 2.3 : Création d'un niveau deuxième niveau d'AMR.

Techniquement, on stocke dans un tableau *BLIM* tous les noeuds scalaires appartenant aux limites de chaque cellule *AMR*. C'est assez simple à réaliser puisque chacune d'entre-elles a conservé son identité. Il en est de même pour les noeuds scalaires eux-même. Ainsi, le numéro d'un noeud scalaire fin dans la numérotation globale est $LTP = KKTI + (IC - 1)DIMTT + I + K(RAF + 2) + 1$, où $KKTI$ est le nombre de noeuds scalaires sur G_0 , IC le numéro de cellule courant, $DIMTT$ le nombre de noeuds scalaires fin par cellule *AMR*, RAF le coefficient de raffinement, $I \in \{0, RAF + 1\}$ l'indice de parcours horizontal des noeuds et $K \in \{0, RAF + 1\}$ l'indice de parcours vertical. Ainsi les noeuds aux limites de chaque cellule *AMR* de niveau G_L sont :

- $P_{G,I,K}^L$ tel que $\{I = 0, K \in \{1, RAF\}\}$ pour la limite gauche.
- $P_{D,I,K}^L$ tel que $\{I = RAF + 1, K \in \{1, RAF\}\}$ pour la limite droite.
- $P_{B,I,K}^L$ tel que $\{K = 0, I \in \{1, RAF\}\}$ pour la limite inférieure.
- $P_{H,I,K}^L$ tel que $\{K = RAF + 1, I \in \{1, RAF\}\}$ pour la limite supérieure.
- $P_{BG,I,K}^L$ tel que $\{K = 0, I = 0\}$ pour le coin bas gauche.
- $P_{BD,I,K}^L$ tel que $\{K = 0, I = RAF + 1\}$ pour le coin bas droit.
- $P_{HG,I,K}^L$ tel que $\{K = RAF + 1, I = 0\}$ pour le coin haut gauche.

- $P_{HD,I,K}^L$ tel que $\{K = RAF + 1, I = RAF + 1\}$ pour le coin haut droit.



- noeud de pression de la cellule1 à connecter à la cellule2
- ► noeuds de la cellule1 intervenant dans la discrétisation du noeud de pression ●
- ► noeuds de la cellule2 nécessaires a la discrétisation du noeud de pression ●

Figure 2.4 : Détermination des voisins d'un noeud de pression par connexion en suivant le schéma de discrétisation.

Une fois que nous connaissons la liste des noeuds fins du niveau G_L appartenant aux limites de chaque cellule AMR , il faut déterminer ceux qui sont sur l'interface G_{L-1}/G_L . Pour cela, on utilise la structure en arbre de l' AMR (cf figure 1.20).

On considère une cellule AMR de niveau G_L générée par un noeud de pression grossier P_m^{L-1} . Pour les noeuds de pression fins $P_{D,I,K}^L$ (resp : $P_{G,I,K}^L, P_{B,I,K}^L, P_{H,I,K}^L$), on regarde si le noeud P_m^{L-1} possède un voisin Est P_e^{L-1} (resp : West P_w^{L-1} , Sud P_s^{L-1} , Nord P_n^{L-1}) ayant généré une cellule AMR . Si c'est le cas, les deux cellules AMR sont connectées, sinon ces noeuds $P_{D,I,K}^L$ (resp : $P_{G,I,K}^L, P_{B,I,K}^L, P_{H,I,K}^L$) appartiennent à la limite droite (resp : gauche, inférieure, supérieure) de l'interface G_{L-1}/G_L .

Les coins sont des noeuds particuliers car ils appartiennent à deux limites. Il convient donc de regarder si le noeud P_m^{L-1} possède deux voisins ayant généré une cellule AMR . Soit P_{HD}^L le coin haut droit. Si aucun des voisins P_e^{L-1} et P_n^{L-1} de P_m^{L-1} n'ont généré une cellule, alors P_{HD}^L reste un coin de l'interface G_{L-1}/G_L . Si seul P_n^{L-1} a généré une cellule AMR , alors P_{HD}^L devient un noeud de la limite droite de l'interface G_{L-1}/G_L . La détection des seuls voisins Est, Ouest, Sud et Nord suffit d'après le schéma de discrétisation des noeuds de pression 2.4 et 1.21. On rappelle que l'absence d'un seul voisin scalaire, vitesse ou viscosité du noeud qui est en cours de traitement provoque son interpolation. Plusieurs

cas de figure sont possibles. La cellule *AMR* traitée peut avoir entre zéro et huit cellules voisines. On note que quand celle-ci a un nombre de cellules voisines supérieur ou égal à 4, aucun des noeuds fins appartenant à ses limites ne sont interpolés. Lorsque la cellule *AMR* traitée possède une voisine (respectivement deux, trois voisines), plusieurs combinaisons (position des cellules *AMR* voisines par rapport à celle traitée) sont possibles. Seuls quelques cas sont représentés ci-dessous pour illustration (cf figures 2.5, 2.6 et 2.7). Les noeuds scalaires fins de la cellule *AMR* traitée sont représentés en vert quand il faut les interpoler. Le cas avec quatre voisins ne figure pas parmi les schémas suivants car aucun noeud scalaire fin n'est interpolé.

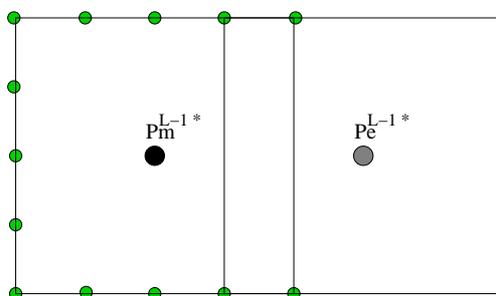


Figure 2.5 : Une seule voisine a généré une cellule *AMR*. Noeuds interpolés représentés en vert.

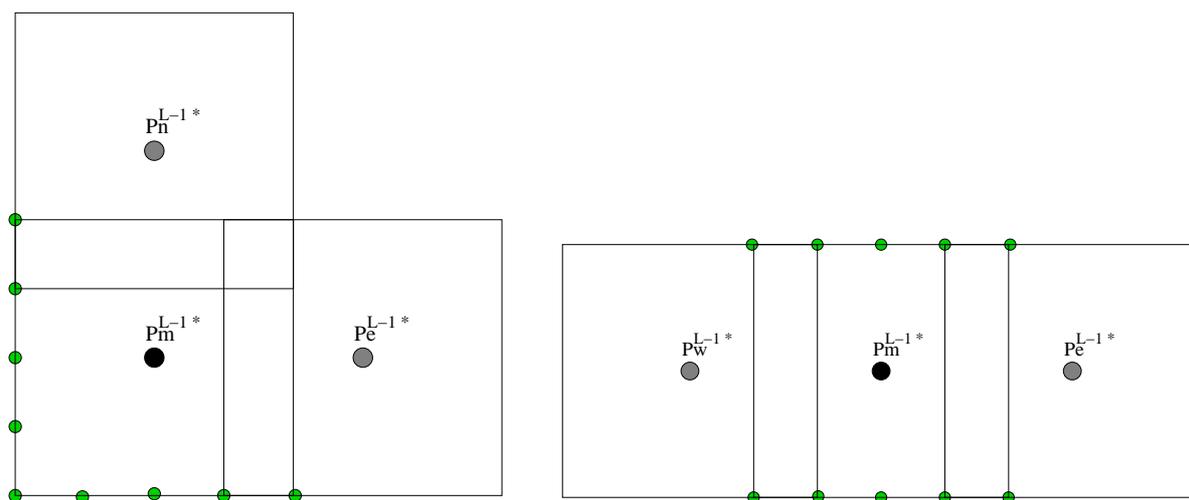


Figure 2.6 : Deux voisines ont généré une cellule *AMR*. Noeuds interpolés représentés en vert.

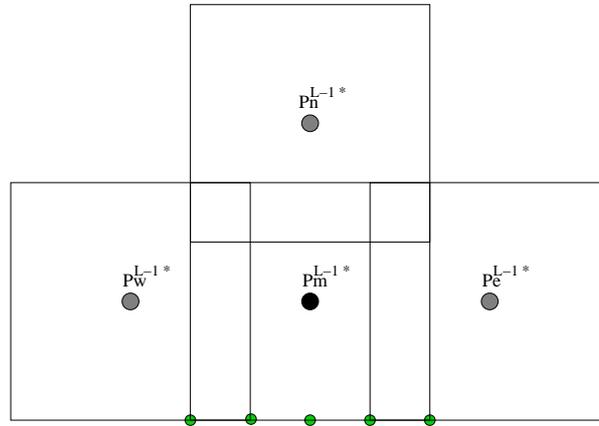


Figure 2.7 : Trois voisines ont généré une cellule *AMR*. Noeuds interpolés représentés en vert.

2.1.2 Traitement des noeuds vitesses

Le raisonnement pour les noeuds vitesses fins est un peu différent de celui fait pour les noeuds fins scalaires. Ceci est dû au fait qu'une cellule *AMR* de niveau G_L est créée à partir d'un noeud de pression P_m^{L-1} , du niveau G_{L-1} .

On prend le cas d'un noeud scalaire de niveau G_{L-1} , P_m^{L-1} ayant généré une cellule *AMR* de niveau G_L . On suppose que son voisin Est, P_E^{L-1} , a lui aussi créé une cellule *AMR*. On a vu dans la sous-section précédente qu'il y a une zone de recouvrement pour les noeuds scalaires (cf figure (2.1)). Étant donné que chaque cellule *AMR* a la structure d'un maillage décalé de type *MAC*, il existe aussi une zone de recouvrement pour les noeuds vitesses selon l'axe x (voir figure 2.8) et selon l'axe z (voir figure 2.9). La démarche pour les noeuds vitesses est similaire à celle des noeuds scalaires. On souhaite que dans la zone de recouvrement, un seul des noeuds superposés soit résolu. On rappelle qu'un noeud appartenant à l'intérieur (strict) d'une cellule *AMR* est toujours prioritaire devant un noeud de limite de la cellule *AMR* voisine, superposé au premier (voir figures (2.8) et (2.9)). Pour les noeuds vitesses u de la figure (2.8), il existe aussi dans la zone de recouvrement, des noeuds vitesses superposés, qui appartiennent tous les deux à l'intérieur strict d'une cellule *AMR* différente. Il faut donc choisir de façon arbitraire lequel des deux on va résoudre. On note $M_1 = \{\text{noeuds appartenant à la fois à l'intérieur strict d'une cellule } AMR, \text{ à la zone de recouvrement et ayant un voisin appartenant à la limite de la même cellule et à la zone de recouvrement}\}$. La figure (2.8) montre que les noeuds vitesses de la cellule gauche appartenant à M_1 sont superposés à ceux de la cellule de droite appartenant

à M_1 . On choisit de résoudre ceux de la cellule de gauche.

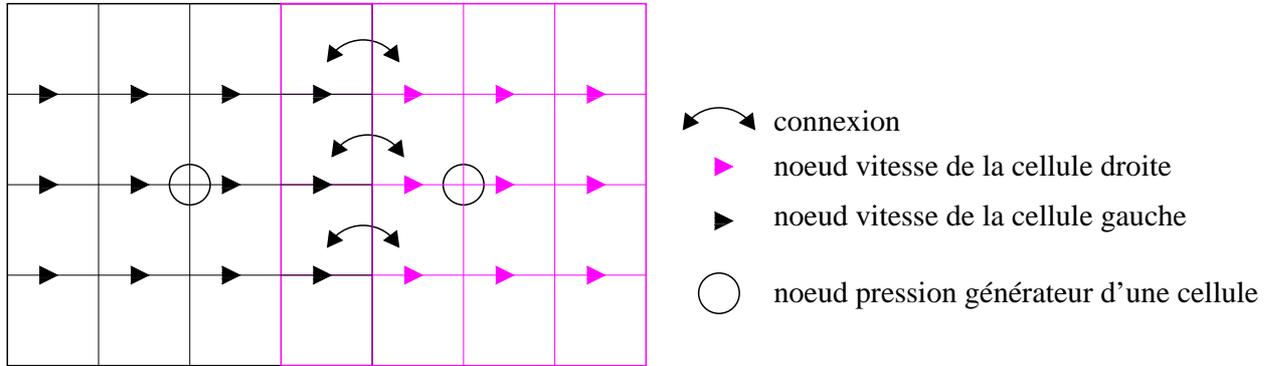


Figure 2.8 : Connexion des noeuds vitesses selon l'axe x de deux cellules *AMR* générées par un noeud scalaire et son voisin Est. Noeuds interpolés représentés en vert.

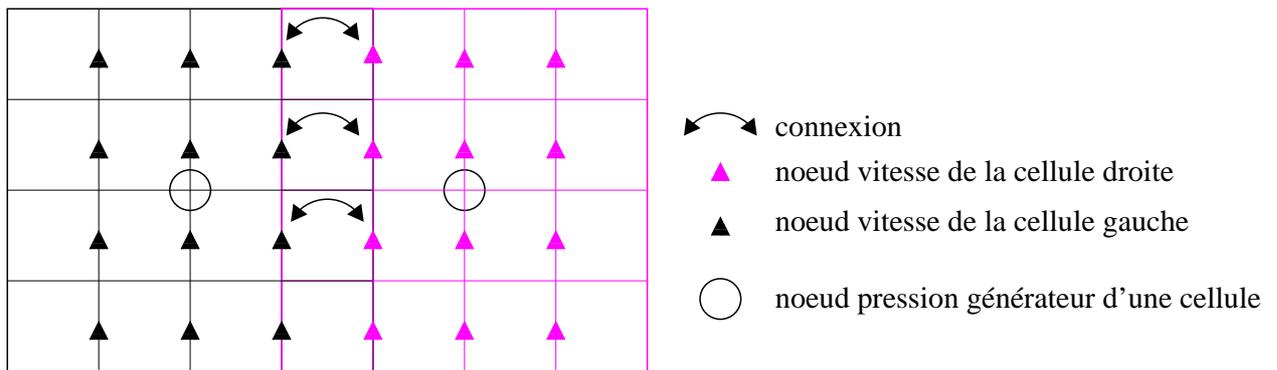


Figure 2.9 : Connexion des noeuds vitesses selon l'axe z de deux cellules *AMR* générées par un noeud scalaire et son voisin Est. Noeuds interpolés représentés en vert.

On considère maintenant le cas d'un noeud scalaire de niveau G_{L-1} , P_m^{L-1} ayant généré une cellule *AMR* de niveau G_L . Son voisin Sud, P_S^{L-1} , a lui aussi créé une cellule *AMR*. On note sur les figures (2.10) et (2.11) une zone de recouvrement. Les noeuds appartenant à la fois à l'intérieur (strict) d'une cellule *AMR* et à la zone de recouvrement est toujours prioritaire devant ceux superposés aux premiers et appartenant aux limites de la cellule *AMR* voisine. De même que précédemment, on observe pour les noeuds vitesses w de la figure (2.11), qu'il existe aussi dans la zone de recouvrement, des noeuds vitesses superposés, qui appartiennent tous les deux à l'intérieur strict d'une cellule *AMR* différente. En adoptant les mêmes notations et en suivant un raisonnement identique, on choisit de résoudre les noeuds de la cellule du bas appartenant à M_1 .

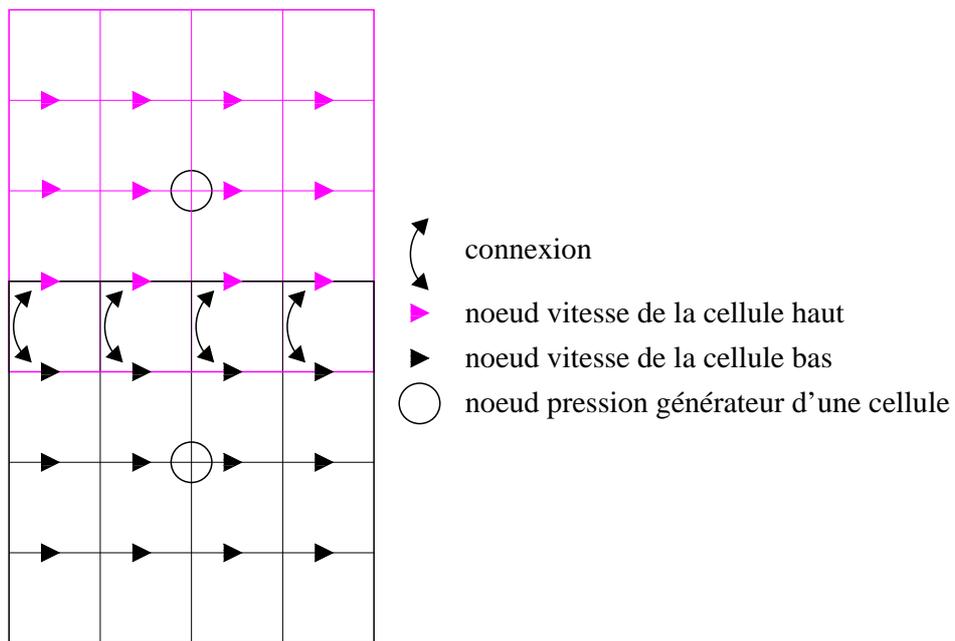


Figure 2.10 : Connexion des noeuds vitesses selon l'axe x de deux cellules AMR générées par un noeud scalaire et son voisin Sud.

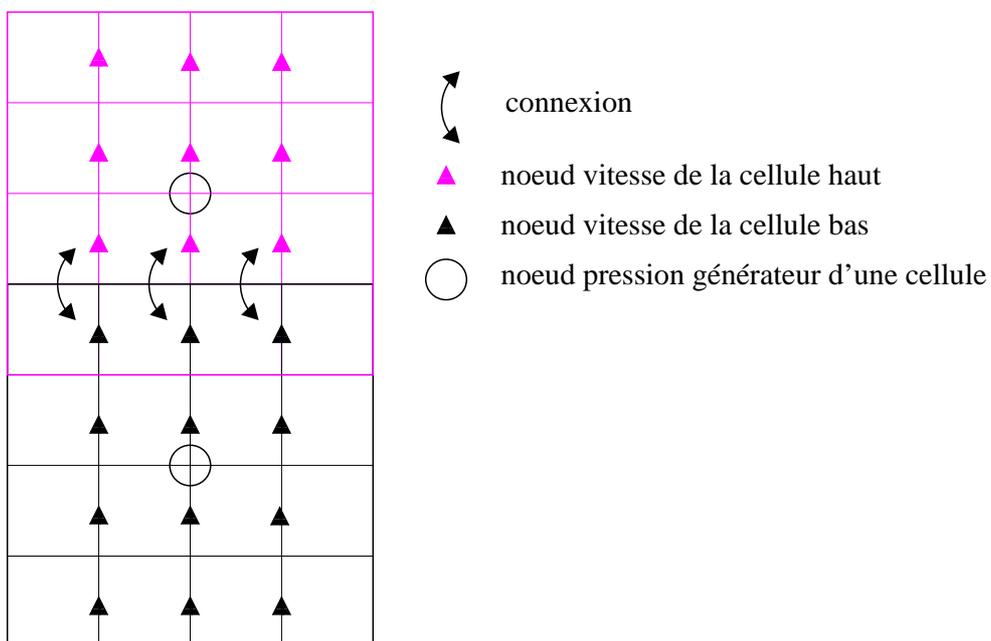
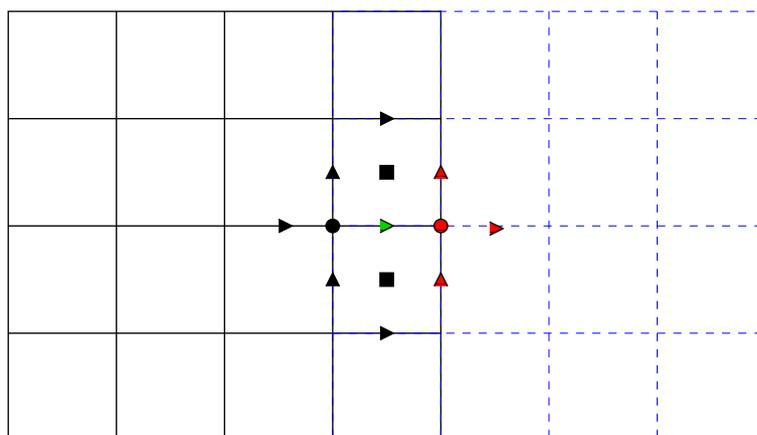
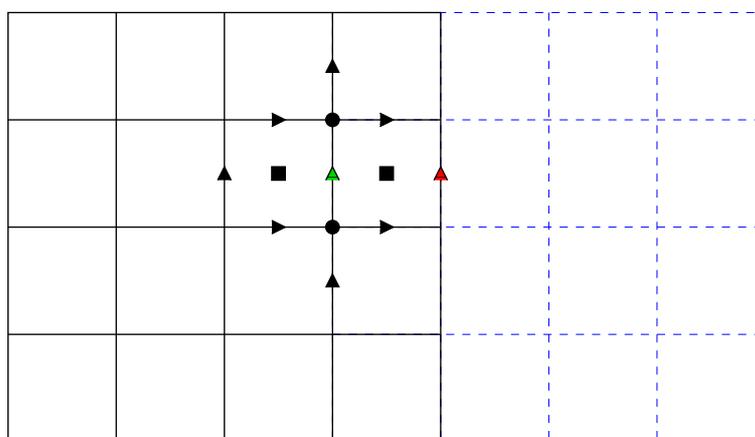


Figure 2.11 : Connexion des noeuds vitesses selon l'axe z de deux cellules AMR générées par un noeud scalaire et son voisin Sud.



- ▶ noeud vitesse de la cellule1 à connecter à la cellule2
- ▶ noeuds de la cellule1 intervenant dans la discrétisation du noeud vitesse ▶
- ▶ noeuds de la cellule2 nécessaires à la discrétisation du noeud vitesse ▶

Figure 2.12 : Détermination des voisins d'un noeud de vitesse horizontale par connexion en suivant le schéma de discrétisation.



- ▲ noeud vitesse verticale sur la limite de la cellule1
- ▶ noeuds de la cellule1 intervenant dans la discrétisation du noeud vitesse ▲
- ▶ noeuds de la cellule2 nécessaires a la discrétisation du noeud vitesse ▲

Figure 2.13 : Détermination des voisins d'un noeud de vitesse verticale par connexion en suivant le schéma de discrétisation.

La conservation d'identité de chaque noeud fin d'une cellule *AMR* permet de connaître le numéro global des noeuds vitesses horizontales *U* et verticales *V*. Sachant qu'on parcourt

pour chaque cellule *AMR* les vitesses *U* puis *V*, le numéro global est : $LVP1 = KKVI + (IC - 1)DIMTV + I + K(RAF + 3) + 1$ pour *U* et $LVP2 = KKVI + (IC - 1)DIMTV + I + K(RAF + 2) + 1 + (RAF + 3)(RAF + 2)$ pour *V*. Avec *KKVI* le nombre de noeuds vitesses sur G_0 , *IC* le numéro de cellule courant, *DIMTV* le nombre de noeuds vitesses fins par cellule *AMR*, *RAF* le coefficient de raffinement, $I \in \{0, RAF + 2\}$ pour *U* (resp $I \in \{0, RAF + 1\}$ pour *V*) l'indice de parcours horizontal des noeuds et $K \in \{0, RAF + 1\}$ pour *U* (resp $K \in \{0, RAF + 2\}$ pour *V*) l'indice de parcours vertical des noeuds. Les noeuds vitesses appartenant aux limites des cellules *AMR* de niveau G_L sont pour *U* :

- $U_{G,I,K}^L$ tel que $\{I = 0, K \in \{1, RAF\}\}$ pour la limite gauche.
- $U_{D,I,K}^L$ tel que $\{I = RAF + 2, K \in \{1, RAF\}\}$ pour la limite droite.
- $U_{B,I,K}^L$ tel que $\{K = 0, I \in \{1, RAF + 1\}\}$ pour la limite inférieure.
- $U_{H,I,K}^L$ tel que $\{K = RAF + 1, I \in \{1, RAF + 1\}\}$ pour la limite supérieure.
- $U_{BG,I,K}^L$ tel que $\{K = 0, I = 0\}$ pour le coin bas gauche.
- $U_{BD,I,K}^L$ tel que $\{K = 0, I = RAF + 2\}$ pour le coin bas droit.
- $U_{HG,I,K}^L$ tel que $\{K = RAF + 1, I = 0\}$ pour le coin haut gauche.
- $U_{HD,I,K}^L$ tel que $\{K = RAF + 1, I = RAF + 2\}$ pour le coin haut droit.

et pour *V* :

- $V_{G,I,K}^L$ tel que $\{I = 0, K \in \{1, RAF + 1\}\}$ pour la limite gauche.
- $V_{D,I,K}^L$ tel que $\{I = RAF + 1, K \in \{1, RAF + 1\}\}$ pour la limite droite.
- $V_{B,I,K}^L$ tel que $\{K = 0, I \in \{1, RAF\}\}$ pour la limite inférieure.
- $V_{H,I,K}^L$ tel que $\{K = RAF + 2, I \in \{1, RAF\}\}$ pour la limite supérieure.
- $V_{BG,I,K}^L$ tel que $\{K = 0, I = 0\}$ pour le coin bas gauche.
- $V_{BD,I,K}^L$ tel que $\{K = 0, I = RAF + 1\}$ pour le coin bas droit.
- $V_{HG,I,K}^L$ tel que $\{K = RAF + 2, I = 0\}$ pour le coin haut gauche.
- $V_{HD,I,K}^L$ tel que $\{K = RAF + 2, I = RAF + 1\}$ pour le coin haut droit.

Une fois la liste de ces noeuds établie, on doit déterminer ceux qui appartiennent à l'interface G_{L-1}/G_L . Celle-ci est déterminée à partir de la liste des noeuds de pression appartenant à l'interface G_{L-1}/G_L . Soit $P_{m,i}^{L-1*}$ $i \in \{1, KKT\}$ l'ensemble des noeuds de pression grossiers ayant généré une cellule *AMR* dont au moins une limite est incluse dans l'interface G_{L-1}/G_L . Considérons $P_{m,i}^{L*}$ $i \in \{1, DIMTT\}$ l'ensemble des noeuds créés par un noeud P_m^{L-1*} . Lorsque $P_{m,i}^{L*}$ ne sont pas des coins, la recherche des quatre voisins grossiers de P_m^{L-1*} suffit pour savoir si on doit interpoler les noeuds vitesses fins des limites de chaque cellule *AMR*. Pour les noeuds de pression se trouvant aux coins d'une cellule *AMR*, ce n'est plus suffisant (cf schémas de discrétisation des noeuds de vitesse 2.12 et 2.13), il faut aussi tester les voisins obliques. Ainsi, pour le coin bas gauche (resp droit) on teste le voisin $P_{sw,i}^{L-1*}$ (resp $P_{se,i}^{L-1*}$). Pour le coin haut gauche (resp droit), on teste le voisin $P_{nw,i}^{L-1*}$ (resp $P_{ne,i}^{L-1*}$). Les noeuds de vitesses fins qui sont interpolés sont représentés en vert sur les figures 2.14, 2.15, 2.16, 2.17 et 2.18.

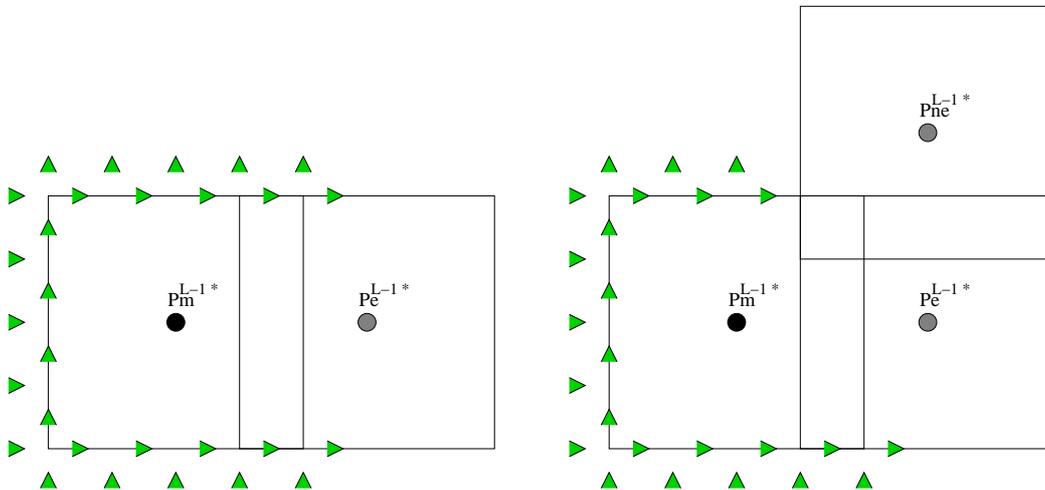


Figure 2.14 : Un seul voisin Est a généré une cellule *AMR*. Aucun voisin oblique (gauche), un voisin oblique (droite). Noeuds interpolés représentés en vert.

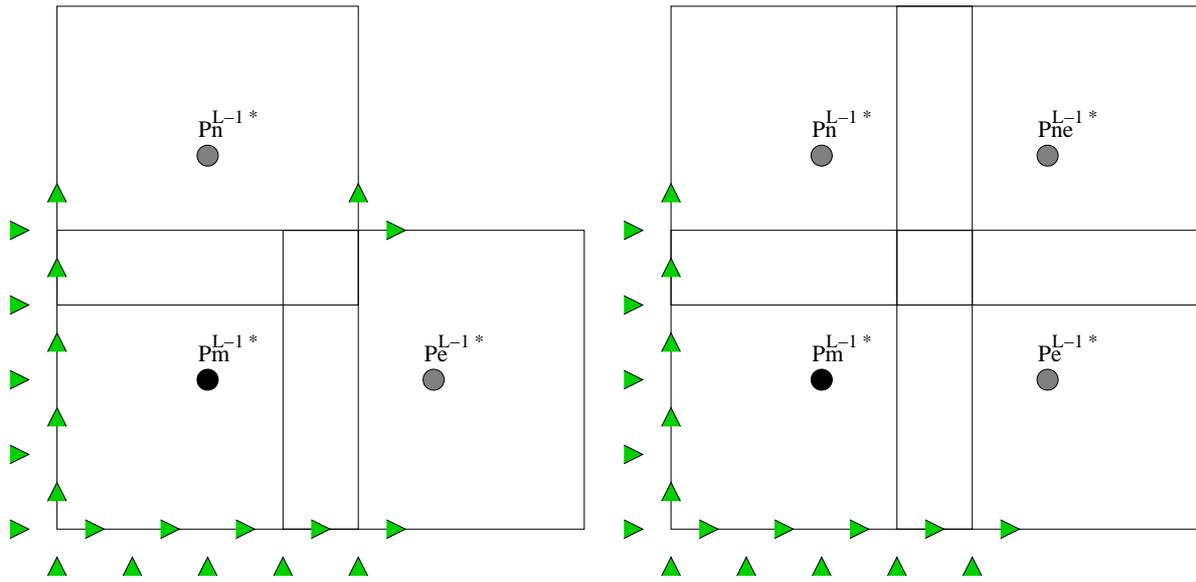


Figure 2.15 : Deux voisins ont généré une cellule AMR. Aucun voisin oblique (gauche), un voisin oblique (droite). Noeuds interpolés représentés en vert.

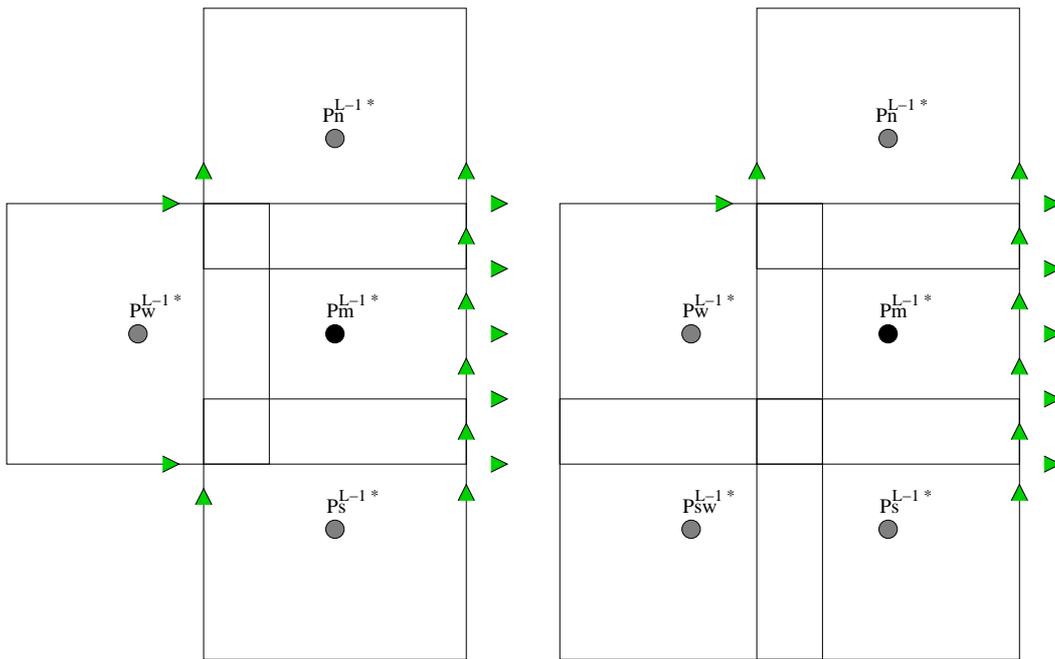


Figure 2.16 : Trois voisins ont généré une cellule AMR. Aucun voisin oblique (gauche), un voisin oblique (droite)

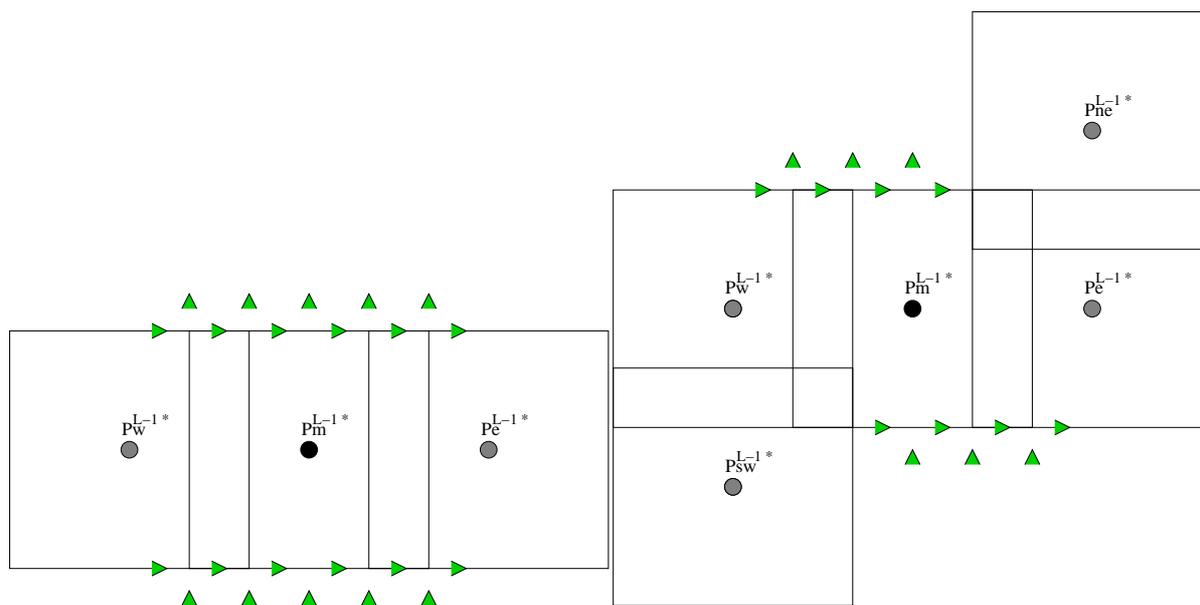


Figure 2.17 : Deux voisins ont généré une cellule AMR. Aucun voisin oblique (gauche), deux voisins obliques (droite). Noeuds interpolés représentés en vert.

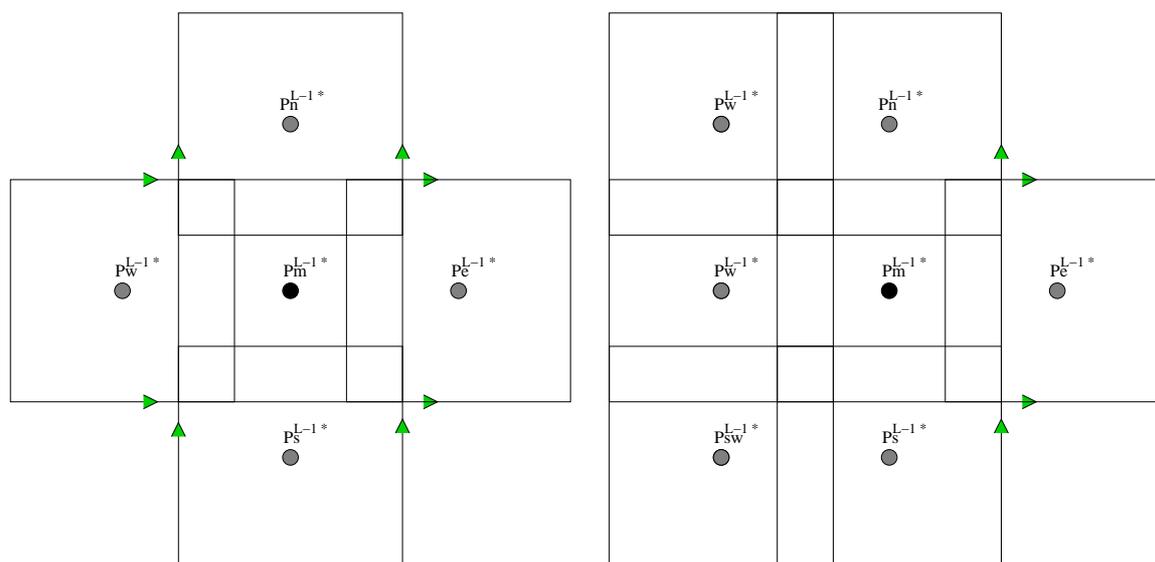


Figure 2.18 : Quatre voisins ont généré une cellule AMR. Aucun voisin oblique (gauche), deux voisins obliques (droite). Noeuds interpolés représentés en vert.

2.2 Gestion dynamique de l'AMR

La construction des niveaux AMR et la résolution sur les noeuds fins ont été décrites respectivement dans les sections 2.1 et 2.1.1. Reste à savoir quand et comment ces cel-

lules *AMR* vont être créées ou détruites pour construire des niveaux *AMR* qui ont des géométries dynamiques les mieux adaptées au cas traité.

La gestion du raffinement-déraffinement se fait au travers de l'introduction de critères de raffinement-déraffinement. Le critère de raffinement consiste à générer une cellule *AMR* de niveau G_L lorsqu'un noeud de niveau inférieur G_{L-1} vérifie ce critère. Quand l'écoulement est instationnaire, il se peut que des cellules *AMR* deviennent obsolètes. Il convient donc de les détruire. C'est pourquoi, un critère de déraffinement, cette fois, est défini. Comme son nom l'indique, celui-ci commande la destruction d'une cellule *AMR* de niveau G_L si ces noeuds fins vérifient le critère et s'ils ne sont pas générateurs de cellules *AMR* de niveau G_{L+1} .

Plusieurs types de critères de raffinement-déraffinement existent dans la littérature. En général, des estimations d'erreurs a posteriori sont utilisées pour gérer le raffinement-déraffinement ([BERGER 89b]), [HAY 04]). Des erreurs a priori peuvent aussi être choisies comme indicateur (C.BERNARDI). Récemment, des critères de raffinement-déraffinement faisant intervenir la taille mémoire ont été introduits. Il s'agit de trouver le meilleur compromis entre la précision souhaitée et le coût maximum accepté (taille mémoire). Ce type de critère est utilisé entre autre par [E. BELLENGER 05].

On a décidé d'utiliser ici des critères de raffinement-déraffinement physiques, ie : basés sur les caractéristiques des fluides et des écoulements étudiés (se référer à [VINCENT 00]). Ils dépendent donc du type de cas traité.

Plusieurs critères de raffinement sont mis en place :

- Le premier, appelé *critere_seuil* est basé sur les valeurs de Φ . Il regroupe un seuil minimum $seuil_{min}$ et un seuil maximum $seuil_{max}$. Si un noeud P de niveau G_L a une valeur $\Phi(P) \in [seuil_{min}, seuil_{max}]$ alors le noeud P génère une cellule *AMR* de niveau G_{L+1} .
- On définit un deuxième critère de raffinement *critere_grad* : pour chaque noeud P de niveau G_L , on calcule les variations de Φ relativement à la distance dans quatre directions d'espace (horizontale, verticale, première et deuxième bissectrice).

Conformément à la figure 2.19, on calcule les variations :

$$\left| \frac{\Phi(S) - \Phi(P)}{dist(S - P)} \right|, \left| \frac{\Phi(P) - \Phi(N)}{dist(P - N)} \right|, \left| \frac{\Phi(E) - \Phi(P)}{dist(E - P)} \right|, \left| \frac{\Phi(P) - \Phi(W)}{dist(P - W)} \right|,$$

$$\left| \frac{\Phi(P) - \Phi(NW)}{\text{dist}(P - NW)} \right|, \left| \frac{\Phi(SE) - \Phi(P)}{\text{dist}(SE - P)} \right|, \left| \frac{\Phi(P) - \Phi(NE)}{\text{dist}(P - NE)} \right|, \left| \frac{\Phi(SW) - \Phi(P)}{\text{dist}(SW - P)} \right|$$

On choisit un seuil minimum pour les variations de Φ relativement à la distance, seuil_{grad} .

Si $\text{Max}(\text{variations calculées}) \geq \text{seuil}_{grad}$, alors le noeud P génère une cellule AMR de niveau G_{L+1} .

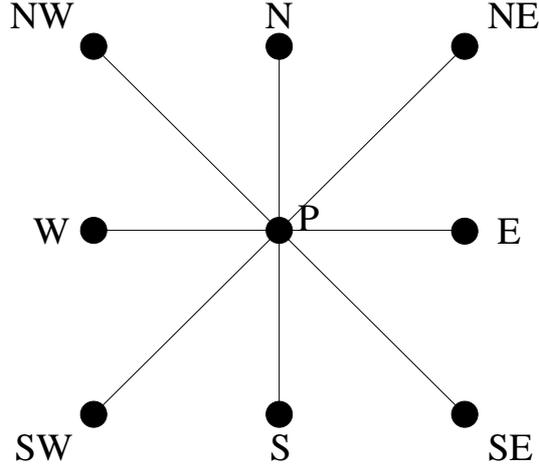


Figure 2.19 : Voisins du noeud P utilisés pour le critère de raffinement basé sur les variations de Φ relativement à la distance.

- Le troisième critère de raffinement $\text{criter}_{gradlarg}$ est défini de la façon suivante : l'idée consiste à utiliser le deuxième critère criter_{grad} en remplaçant les calculs des variations de Φ relatives à la distance entre voisins directs (N, S, E, SE, SW, NE, NW) d'un noeud P par des calculs de variations relatives aux distances entre voisins de second degré ($SS, NN, EE, WW, WSS, ENN, WWSS, EENN, EES, WWN, WWNN, EESS, WNN, ESS$). La position des noeuds utilisés pour le critère est explicitée sur la figure 2.20. Donc pour chaque noeud P , on raffine si

$$\text{Max} \left(\left| \frac{\Phi(SS) - \Phi(P)}{SS - P} \right|, \left| \frac{\Phi(P) - \Phi(NN)}{P - NN} \right|, \left| \frac{\Phi(EE) - \Phi(P)}{EE - P} \right|, \left| \frac{\Phi(P) - \Phi(WW)}{P - WW} \right|, \right. \\ \left. \left| \frac{\Phi(EEN) - \Phi(P)}{EEN - P} \right|, \left| \frac{\Phi(P) - \Phi(WWS)}{P - WWS} \right|, \left| \frac{\Phi(EENN) - \Phi(P)}{EENN - P} \right|, \right. \\ \left. \left| \frac{\Phi(P) - \Phi(WWSS)}{P - WWSS} \right|, \left| \frac{\Phi(ENN) - \Phi(P)}{ENN - P} \right|, \left| \frac{\Phi(P) - \Phi(WSS)}{P - WSS} \right|, \right)$$

$$\left| \frac{\Phi(ESS) - \Phi(P)}{ESS - P} \right|, \left| \frac{\Phi(P) - \Phi(WNN)}{P - WNN} \right|, \left| \frac{\Phi(EESS) - \Phi(P)}{EESS - P} \right|, \\ \left| \frac{\Phi(P) - \Phi(WWNN)}{P - WWSS} \right|, \left| \frac{\Phi(EES) - \Phi(P)}{EES - P} \right|, \left| \frac{\Phi(P) - \Phi(WWN)}{P - WWN} \right| \geq \text{seuil}_{grad}$$

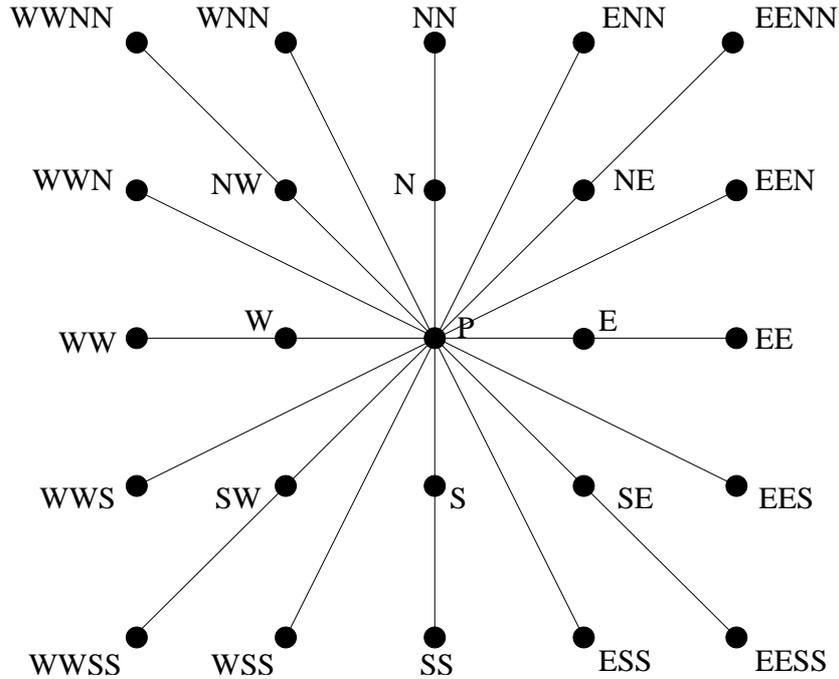


Figure 2.20 : Voisins du noeud P utilisés pour le critère de raffinement $\text{criter}_{gradlarg}$ basé sur les variations de Φ relativement à la distance.

Suivant le cas étudié, on utilise soit le premier critère, soit le second, soit le troisième. Des combinaisons entre le premier et le deuxième critère ou le premier et le troisième sont possibles.

Le premier critère, basé sur la valeur de Φ , criter_{seuil} est adapté pour des profils de concentration dont la variation locale de la valeur est faible. Supposons qu'on utilise ce critère pour suivre un profil de concentration faiblement ou pas diffusive (ou une interface en diphasique), c'est à dire un front très raide.

- Soit le maillage est assez fin, de façon à ce que la largeur du front L_{int} vérifie $L_{int} > \sqrt{ndim} * \text{Min}(\Delta x, \Delta z, \Delta y)$, où $ndim$ est la dimension de l'espace, Δx (respectivement $\Delta z, \Delta y$) le pas d'espace suivant x (respectivement z, y). Dans ce cas, les noeuds disposés sur le front ont des valeurs qui varient faiblement localement.

Il y a donc assez de noeuds sur le front vérifiant le critère. Il y a donc création de cellules *AMR* au niveau du front. Ceci reste néanmoins insatisfaisant car le raffinement de ses extrémités est impossible du fait des seuils minimum et maximum qui ont été imposés. Les extrémités sont prises en compte si $seuil_{min} = 0g.m^{-3}$ et $seuil_{max} = 1g.m^{-3}$. Ce qui sous entend la possibilité de raffiner l'ensemble du domaine. Autant utiliser un maillage fin équivalent sans *AMR*, ce sera moins coûteux.

- Soit le maillage est trop grossier, de telle manière que $L_{int} < \sqrt{ndim} * Min(\Delta x, \Delta z, \Delta y)$. Le front possède alors très peu ou pas de points, ce qui provoque un raffinement inexistant ou insuffisant au niveau de celui-ci.

Pour plus de clarté, on considère un domaine $\Omega = [0, 1]$, $1D$ et une fonction créneau $\Phi(x) = 1$ si $x \in [0.2, 04]$, $\Phi(x) = 0$ sinon au temps initial. Φ se déplace à la vitesse a vérifiant la *CFL* sur le niveau le plus fin $a < \frac{\Delta x_{fin}}{\Delta t}$. On utilise comme critère $criter_{seuil}$. On impose $seuil_{min} = 0.0001$ et $seuil_{max} = 1$. La figure (2.21) représente la fonction Φ sur un maillage grossier ($L_{int} < \sqrt{ndim} * Min(\Delta x, \Delta z, \Delta y)$), au temps initial. On note que seuls les noeuds de couleur rouge vérifient le critère. Donc seuls ceux-ci peuvent créer des cellules *AMR*, ce qui est insuffisant pour suivre le front de concentration.

Étant donné le profil de concentration, il est inutile de raffiner les zones loin du front où la concentration est constante. On peut donc imposer $seuil_{min} = 0.0001$ et $seuil_{max} = 0.99$. Si on se réfère toujours à la figure (2.21), on réalise qu'aucun noeud ne vérifie le critère.

Lorsque le front a légèrement diffusé, le nombre de noeuds ayant généré une cellule *AMR* reste encore insuffisant (cf figure 2.22), et ce jusqu'à ce que le maillage vérifie $L_{int} > \sqrt{ndim} * Min(\Delta x, \Delta z, \Delta y)$. La figure 2.23 montre que dans ces conditions et avec $seuil_{min} = 0.0001g.m^{-3}$ et $seuil_{max} = 1g.m^{-3}$, la zone du front est raffinée sauf à ses extrémités dont la valeur est proche de zéro. Donc à moins de raffiner partout, ce critère est inadapté pour suivre des profils de concentration faiblement diffusif. Ce critère peut cependant être utile à ce type de problème s'il est nécessaire de raffiner la zone où la concentration vaut $1g.m^{-3}$, ou plus généralement une zone où la concentration massique a une valeur constante.

Contrairement au critère $criter_{seuil}$, le deuxième critère, $criter_{grad}$, basé sur la variation

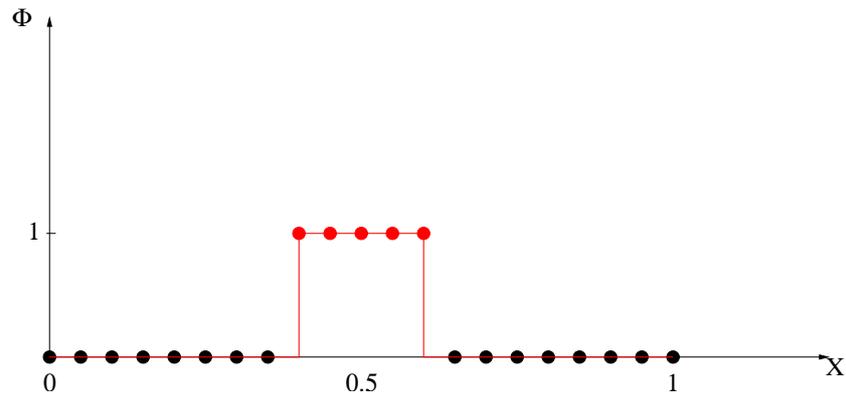


Figure 2.21 : Profil de concentration Φ au temps initial et détection des noeuds créant une cellule AMR.

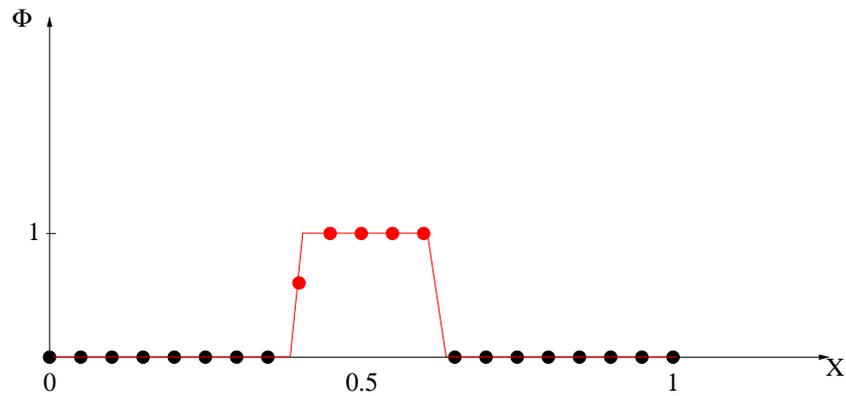


Figure 2.22 : Profil de concentration Φ à un temps quelconque et détection des noeuds créant une cellule AMR.

de Φ relativement à la distance semble mieux adapté au suivi de profil de concentration faiblement ou pas diffusif. En effet, la création de cellules AMR est liée à la variation locale de concentration, et ce quelque soit sa valeur au noeud P considéré. Ceci permet donc de prendre en compte la totalité du front, extrémités comprises.

Reprenons l'exemple de la fonction créneau Φ dans le domaine $\Omega = [0, 1]$. La figure 2.24 représente Φ au temps initial sur un maillage quelconque. On impose $seuil_{grad} = 0.01$. Les noeuds coloriés en rouge sont ceux qui vérifient le critère. On conclut dans ce cas que la zone du front est entièrement raffinée. Ceci montre que ce critère est tout à fait adapté à ce genre de problème.

On peut remarquer que dans la zone où la fonction Φ vaut 1 uniformément, aucune cellule ne peut être créée. Donc si pour une raison ou pour une autre, il est nécessaire de raffiner

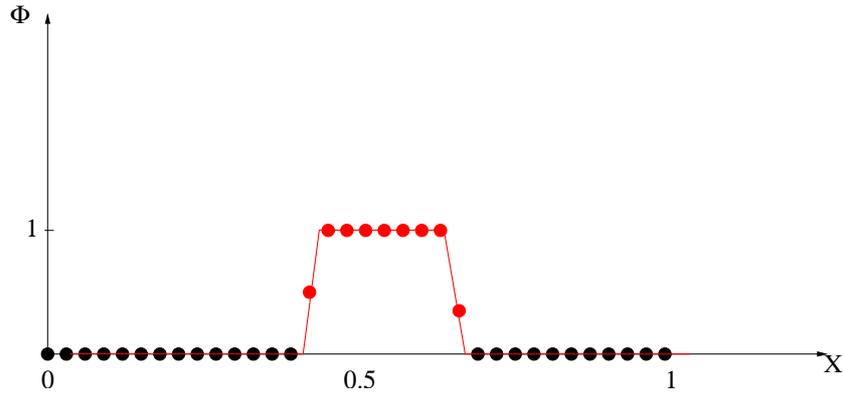


Figure 2.23 : Profil de concentration Φ à un temps quelconque et détection des noeuds créant une cellule AMR.

cette zone, il est faut utiliser le deuxième critère combiné au premier (avec $seuil_{max} = 1$).

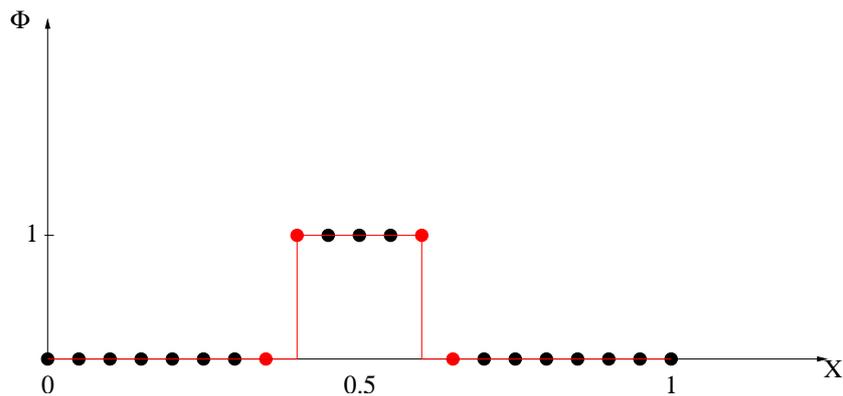


Figure 2.24 : Profil de concentration Φ au temps initial et détection des noeuds créant une cellule AMR.

Quant au troisième critère, il fonctionne de la même façon que le deuxième. Étant donné qu'il compare des variations de Φ relatives à la distance sur des longueurs plus grandes (voisins du second degré), le raffinement prend en compte le front dans sa totalité ainsi qu'une épaisseur de mailles fines supplémentaire.

Reprenons l'exemple de la fonction créneau Φ dans le domaine $\Omega = [0, 1]$. La figure 2.25 représente Φ au temps initial sur un maillage quelconque. On impose $seuil_{gradlarg} = 0.01$. Les noeuds coloriés en rouge sont ceux qui vérifient le critère. De même que pour le deuxième critère, on conclue que ce critère est tout à fait adapté au suivi de profil de Φ

faiblement ou pas diffusif.

Nous allons détailler dans ce qui suit dans quel cas il est plus intéressant de choisir le

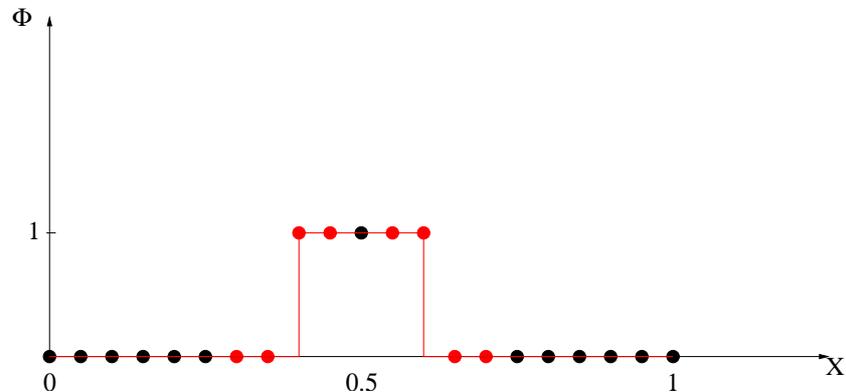


Figure 2.25 : Profil de concentration Φ au temps initial et détection des noeuds créant une cellule AMR.

deuxième ou le troisième critère.

Le choix et le paramétrage des critères de raffinement ainsi que le respect de la CFL sur le niveau le plus fin, quand des schémas explicites sont utilisés (TVD , $WENO$), permettent une gestion spatiale et temporelle du raffinement satisfaisante. Un autre paramètre important est l'initialisation des cellules AMR. Celle-ci se fait à la première itération en temps et lorsque de nouvelles cellules AMR sont créées au cours du temps.

Lors de la première itération $NT = 1$, tous les niveaux AMR sont initialisés de la même façon que le niveau grossier, ce qui suppose qu'on connaît la forme de la solution initialement (cercle, sphere, ...).

Lorsqu'une cellule AMR est créée à une itération $NT > 1$, deux types d'initialisations sont possibles, Q_1 et binaire. L'interpolation Q_1 donne des résultats satisfaisants sur le transport d'espèce faiblement diffusive quand les nouvelles cellules AMR sont générées à plusieurs mailles du front. En effet, si un des noeuds servant à l'interpolation est trop proche du front, il apparaît une diffusion numérique supplémentaire qui dégrade la solution. Donc pour limiter la diffusion du front due à l'interpolation Q_1 , il est nécessaire de raffiner sur une plus grande largeur de bande de part et d'autre du front de Φ .

Il est donc indispensable d'utiliser le troisième critère de raffinement avec une initialisation de type Q_1 .

Dans un souci d'optimisation du temps CPU et de la taille mémoire, il est plus intéressant de combiner le deuxième critère de raffinement avec une interpolation binaire

qui consiste à imposer les noeuds de la cellule *AMR* à 0 si le père possède une valeur strictement inférieure à 0.5 et 1 sinon car celle-ci n'introduit. Celle-ci limite fortement la diffusion numérique. Cette initialisation n'est valable que pour des fronts très raides.

En faisant une analogie avec un écoulement diphasique, l'interface peut être considérée comme un front raide. On peut alors utiliser le deuxième critère avec une interpolation binaire sur la fonction de phase pour suivre l'interface.

2.3 Opérateurs de prolongement

2.3.1 Interpolations non conservatives

Soit Ω le domaine étudié. Notons $\dot{\Omega}$ l'intérieur de ce domaine et $\partial\Omega$ ses bords. On construit un premier maillage grossier G_0 (resp : G_{V0}) sur Ω pour les noeuds de pression (resp : de vitesses). Soit \dot{G}_0 (resp : \dot{G}_{V0}), l'ensemble des noeuds de pression P_m^0 (resp : de vitesse \vec{V}_m^0) du maillage G_0 (resp : G_{V0}) appartenant à $\dot{\Omega}$.

Soit ∂G_0 (resp : ∂G_{V0}), l'ensemble des noeuds grossiers de pression P_{lim}^0 (resp : de vitesse \vec{V}_{lim}^0) du maillage G_0 (resp : G_{V0}) appartenant à $\partial\Omega$. Les noeuds P_m^0 (resp : \vec{V}_m^0) sont traités par résolution des équations discrétisées. Quant aux noeuds P_{lim}^0 (resp : \vec{V}_{lim}^0), on leur impose des conditions aux limites de type Dirichlet ou Neumann par une méthode de pénalisation.

Étant donné qu'on travaille sur un maillage décalé *MAC*, les noeuds de vitesses \vec{V}_{lim}^0 sont à l'extérieur du domaine physique. Il faut donc ramener les conditions aux limites sur les bords ∂G_0 .

Pour les niveaux plus fins G_L (resp : G_{VL}), $l > 0$, on distingue trois types de noeuds de pression (resp : de vitesses) : les premiers, notés P_m^L (resp : \vec{V}_m^L), appartiennent à l'intérieur du niveau G_L ; les deuxièmes, notés $P_{l/l-1}^L$ (resp : $\vec{V}_{l/l-1}^L$), appartiennent à l'interface G_L/G_{L-1} . Les troisièmes, notés P_{lim}^L (resp : \vec{V}_{lim}^L), sont sur les limites du domaine physique. On a donné dans la section dédiée à la méthode *OCLM*, le traitement des noeuds P_m^L (resp : \vec{V}_m^L) (résolution des équations ou interpolation) et $P_{l/l-1}^L$ (resp : $\vec{V}_{l/l-1}^L$) (interpolation). L'interpolation de ces noeuds fins de niveau G_L se fait différemment suivant la position du noeud de niveau G_{L-1} , générateur de la cellule *AMR*. Trois cas sont possibles : le noeud générateur est sur le bord du domaine Ω (couronne 1), à une maille du domaine (couronne 2) ou à plus de deux mailles du bord du domaine. Ces cas sont représentés sur

la figure 2.26.

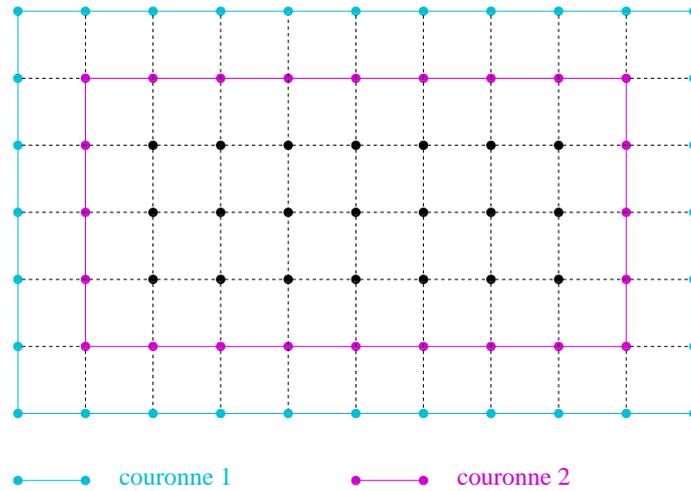


Figure 2.26 : grille des noeuds de pression

Quant aux noeuds P_{lim}^L (resp : \vec{V}_{lim}^L), leur traitement sera expliqué dans ce qui suit.

Noeuds générateurs à l'intérieur d'un niveau

On représente ci-après la position des noeuds appartenant à Σ (défini dans la section 1.2.6) par rapport aux noeuds d'une cellule AMR , en 2D puis 3D.

Interpolation Q1

Concernant les noeuds fins de pression, la cellule de référence pour le Q_1 couvre un quart de la cellule AMR . Il faut donc utiliser une cellule de référence différente pour chaque quart de cellule AMR (figure 2.27).

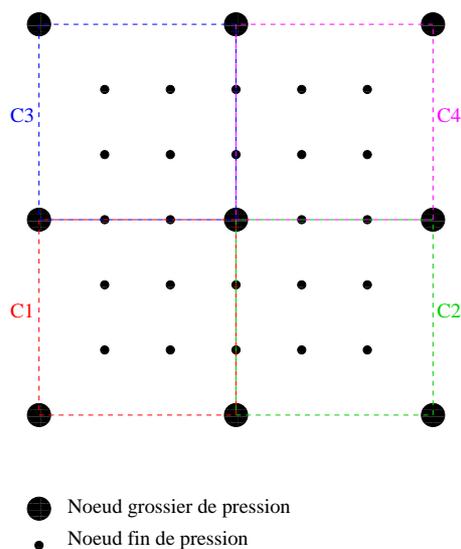
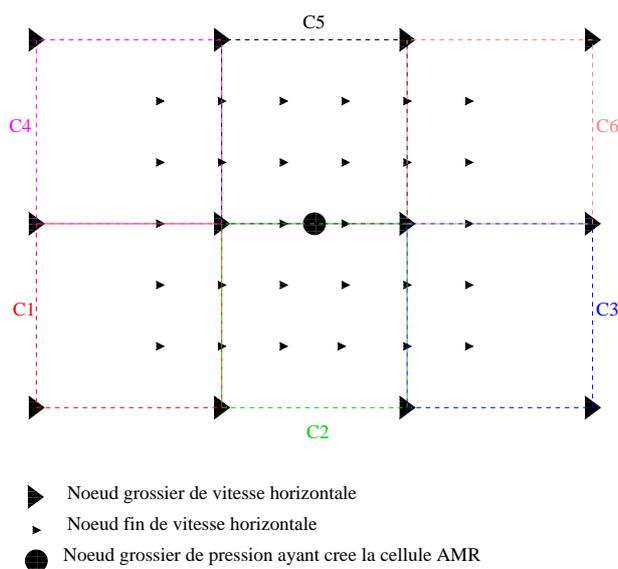
Les noeuds fins de vitesses se répartissent sur six cellules de référence (voir figure 2.28). Donc suivant la position des noeuds fins, on interpolera à partir d'une des cellules de références.

Pour ce type d'interpolation, aucun traitement spécial est nécessaire.

Interpolation Q2

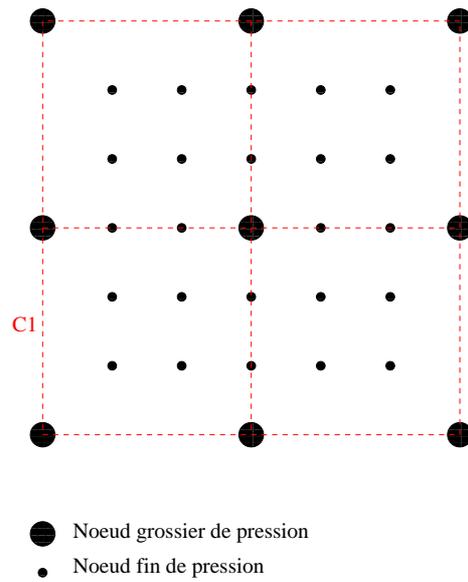
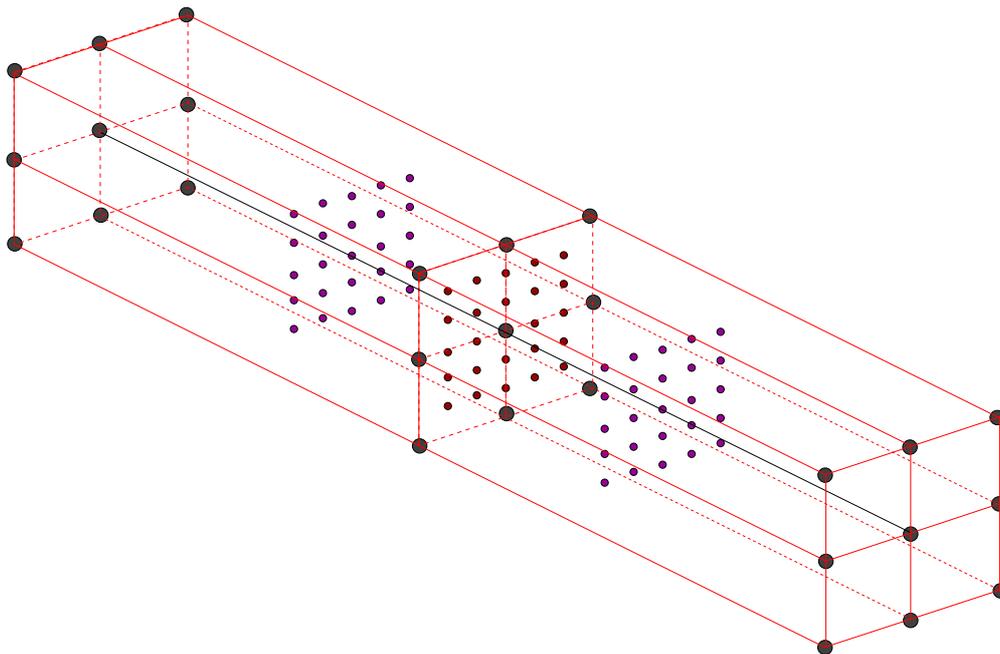
Pour interpoler les noeuds fins de pression, une seule cellule de référence est nécessaire (cf figure 2.29 pour le 2D et figure 2.30 pour le 3D).

Par contre, pour les noeuds fins de vitesse, une cellule de référence ne peut recouvrir la

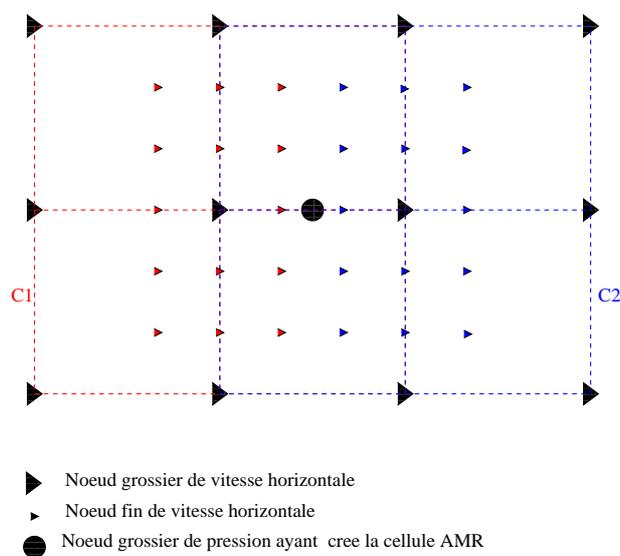
Figure 2.27 : *Interpolation Q_1 sur les noeuds de pression*Figure 2.28 : *Interpolation Q_1 sur les noeuds de vitesse horizontale*

totalité de la cellule *AMR*. On a en effet besoin de 2 cellules de références (cf figure 2.31). Pour des raisons de symétrie on a choisi d'interpoler les noeuds vitesses fins en rouge par la cellule de référence gauche et ceux en bleu par la cellule de référence à droite.

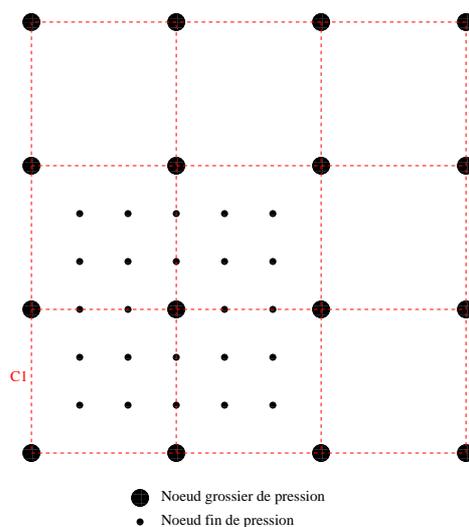
Interpolation Q_3

Figure 2.29 : *Interpolation Q_2 sur les noeuds de pression*Figure 2.30 : *Interpolation Q_2 sur les noeuds de pression en 3D*

Pour interpolier les noeuds fins de pression comme de vitesses, un seul élément de référence est nécessaire puisque celui-ci couvre l'ensemble des noeuds à interpoler. La figure 2.32(resp : 2.34) montre l'élément de référence pour la grille de pression en 2D (resp : 3D).

Figure 2.31 : *Interpolation Q_2 sur les noeuds de vitesse horizontale*

Celui pour la grille de vitesse horizontale en 2D est représenté sur la figure 2.33.

Figure 2.32 : *Interpolation Q_3 sur les noeuds de pression*

Noeuds générateurs sur la couronne 2 d'un niveau

Ce qui a été présenté dans la sous section 2.3.1 reste valable tant que tous les noeuds de Σ sont dans le domaine Ω . Cette sous section concerne uniquement le type d'interpolation Q_3 . Les figures 2.35 et 2.36 montrent que pour ce type d'interpolation, certains noeuds de

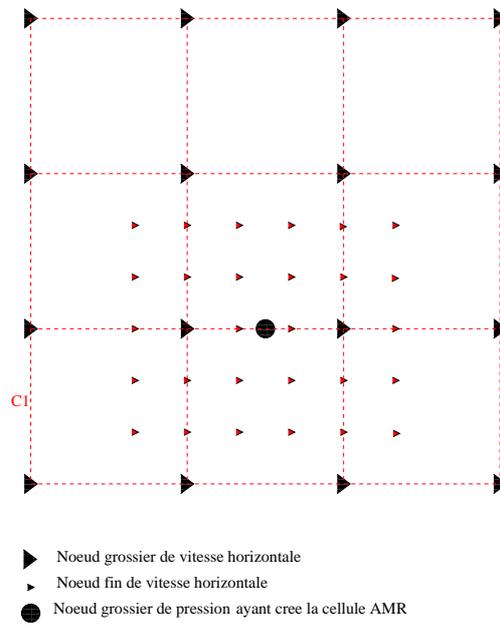


Figure 2.33 : *Interpolation Q_3 sur les noeuds de vitesse horizontale*

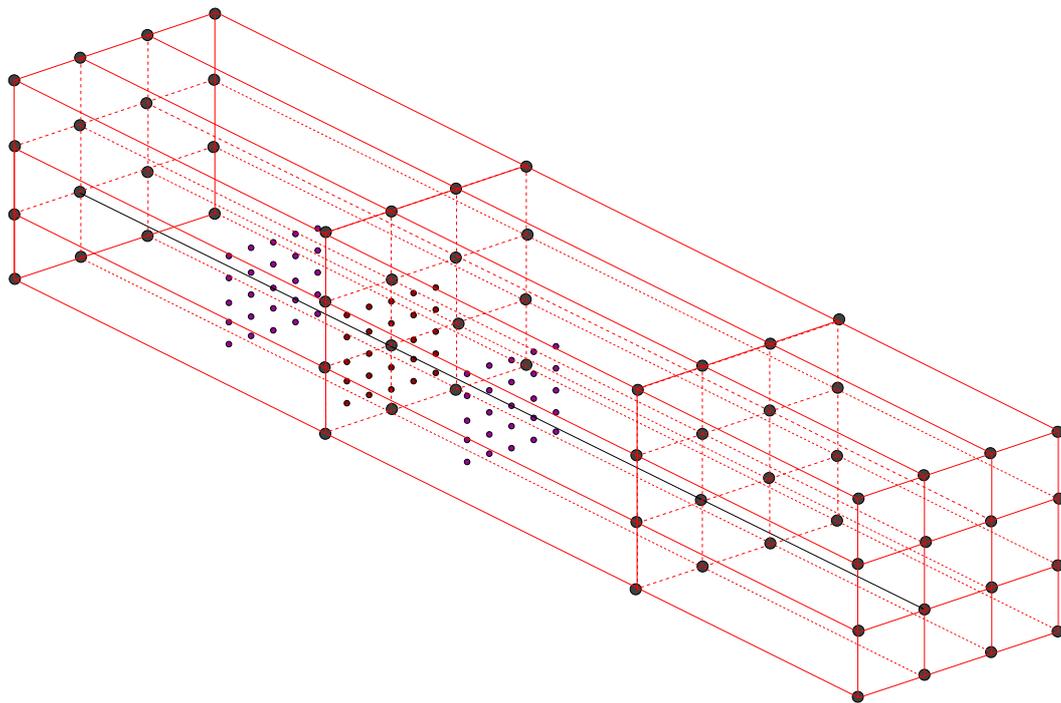


Figure 2.34 : *Interpolation Q_3 sur les noeuds de pression en 3D*

Σ (défini dans la section 1.2.6) n'existent pas (ils sont représentés à l'extérieur du domaine Ω sur les figures 2.35 et 2.36). Il convient alors de décentrer l'élément de référence, comme le montrent les figures 2.35 et 2.36, pour que tous les noeuds scalaires de l'élément de référence soient dans le domaine en 2D. Le raisonnement est le même pour les noeuds vitesses et en 3D.

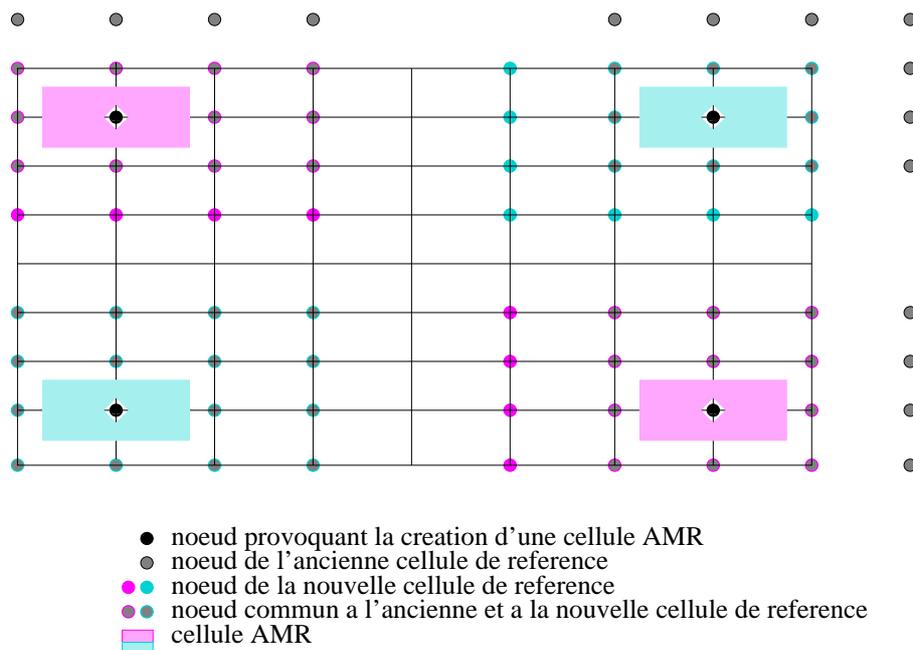


Figure 2.35 : *Élément de référence pour les noeuds de pression sur les coins de la couronne2 pour l'interpolation Q_3*

Noeuds générateurs sur la couronne 1 d'un niveau

On s'intéresse dans cette section aux noeuds situés sur l'interface des niveaux G_L/G_{L-1} , $l \geq 1$. Donc, seules les interpolations de type Q_2 et Q_3 sont concernées. Les figures 2.37 et 2.38 montrent que pour l'interpolation Q_3 certains noeuds scalaires de Σ n'existent pas dans le domaine Ω . Comme pour les noeuds générateurs sur la couronne2, il convient de décentrer l'élément de référence de façon à ce que tous les noeuds de Σ existent dans le domaine. Il suffit de suivre la même démarche pour les noeuds de vitesses, l'interpolation Q_2 et en 3D.

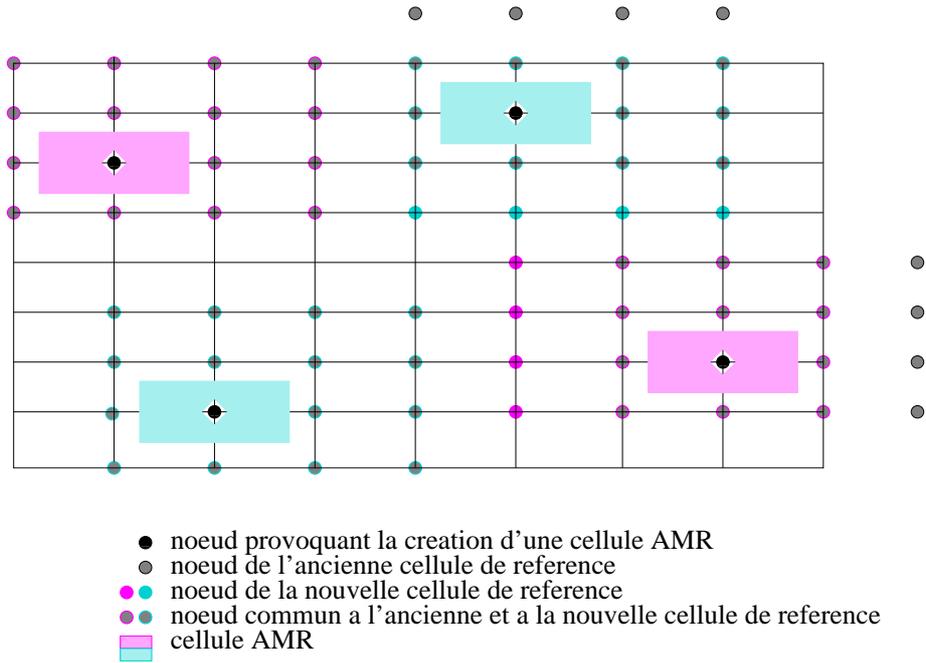


Figure 2.36 : Élément de référence pour les noeuds de pression sur le reste de la couronne2 pour l'interpolation Q_3

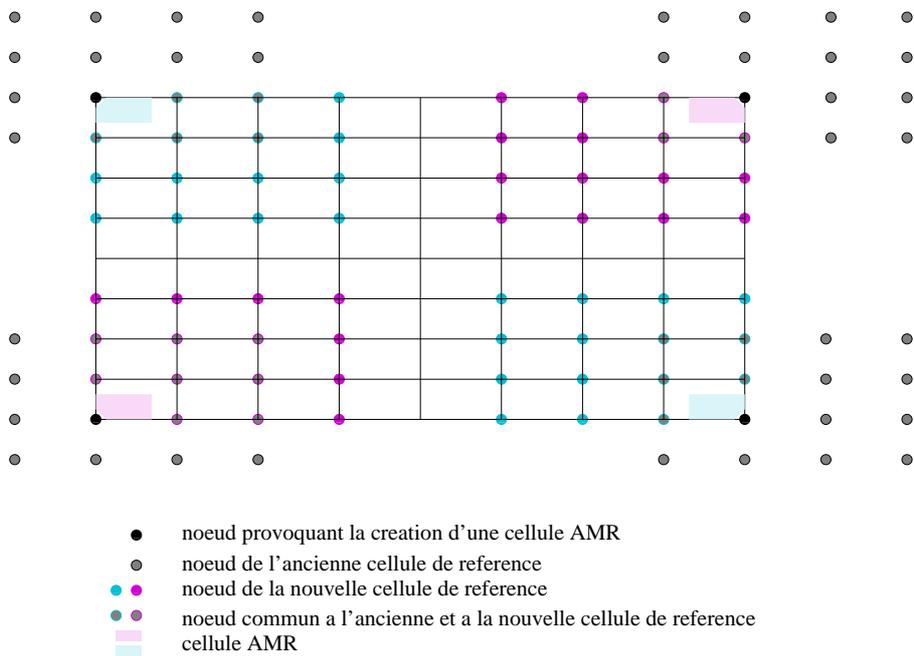


Figure 2.37 : Élément de référence pour les noeuds de pression sur les coins de la couronne1 pour l'interpolation Q_3

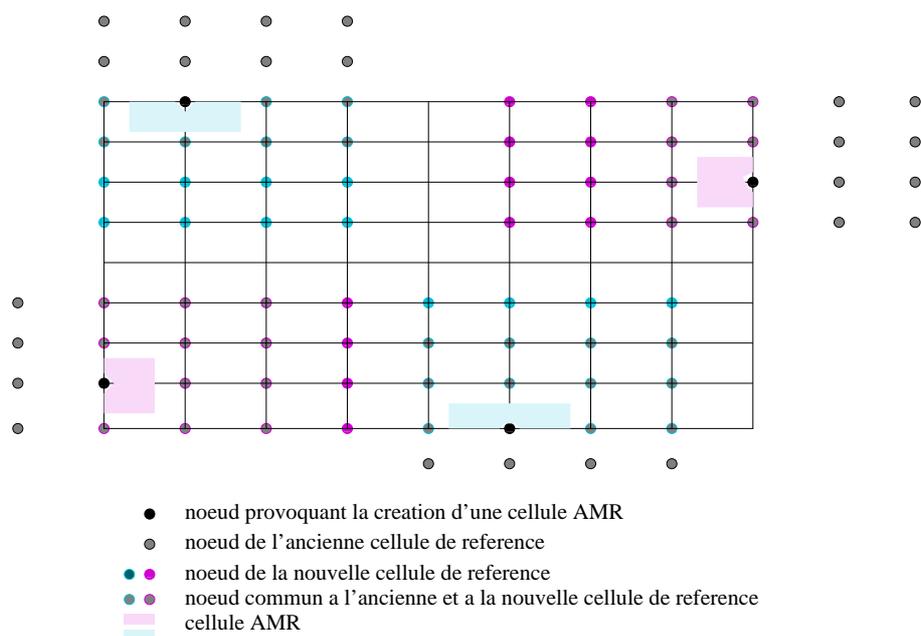


Figure 2.38 : Élément de référence pour les noeuds de pression sur le reste de la couronne1 pour l'interpolation Q_3

2.3.2 Méthode Flux Correction Interfaces (*FIC*) pour les noeuds scalaires

La méthode *FIC* a été introduite par [P. ANGOT 92] dans le cas d'une méthode de raffinement de maillage de type multigrille, pour corriger le flux à l'interface de deux niveaux G_{L-1}/G_L . Son principe est de satisfaire une relation de continuité des flux, au sens faible, associés à la solution entre deux niveaux G_{L-1}/G_L , sur les volumes de contrôle de niveau G_L , dont au moins une des faces appartient à l'interface G_{L-1}/G_L . Ceci permet de raccorder les sous domaines emboîtés de manière conservative.

Cette méthode se traduit ici par la détermination des noeuds de niveau G_L , dont au moins une des faces appartient à l'interface G_{L-1}/G_L , en faisant un bilan de flux composites. En effet, certains flux font intervenir des noeuds de même niveau G_L , tandis que d'autres font intervenir des noeuds de niveau G_{L-1} . Ceci dépend directement de la position de chaque face d'un volume de contrôle de niveau G_L . Si cette face appartient à l'interface des deux niveaux, le flux la traversant fait intervenir des noeuds de niveaux G_{L-1} . Sinon, le flux traversant la face fait intervenir des noeuds de niveau G_L .

On détaille la démarche en s'appuyant sur la figure 2.39. Celle-ci représente le maillage

noeud $p \in G_L$ à l'équation 2.2, on obtient :

$$\int_{\Omega_L^p} (\Phi^{k+1} - \Phi^k) d\Omega_L^p + \Delta t \int_{\Omega_L^p} (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \Phi^{k+1} d\Omega_L^p - \Delta t \int_{\Omega_L^p} \vec{\nabla} \cdot (K \vec{\nabla} \Phi^{k+1}) d\Omega_L^p = 0 \quad (2.3)$$

Soit $\Sigma_{N,L}^p$ (respectivement $\Sigma_{S,L}^p$, $\Sigma_{W,L}^p$, $\Sigma_{E,L}^p$) la face Nord (respectivement Sud, Ouest, Est) de Ω_L^p et Σ une face générique. Pour simplifier le calcul, on suppose qu'on travaille à pas d'espace constant. Ceux de niveau G_L sont notés Δx_L et Δz_L respectivement selon l'axe x et z . On note \vec{n} la normale sortante à une face Σ et $(u_{\Sigma}^L, w_{\Sigma}^L)$ le vecteur vitesse au centre de la face Σ appartenant au niveau G_L .

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} (\Phi_p^{k+1} - \Phi_p^k) \Delta x_L \Delta z_L + \int_{\Sigma_{S,L}^p} \Phi^{k+1} \vec{V} \cdot \vec{n} d\Sigma_{S,L}^p + \int_{\Sigma_{N,L}^p} \Phi^{k+1} \vec{V} \cdot \vec{n} d\Sigma_{N,L}^p \\ + \int_{\Sigma_{W,L}^p} \Phi^{k+1} \vec{V} \cdot \vec{n} d\Sigma_{W,L}^p + \int_{\Sigma_{E,L}^p} \Phi^{k+1} \vec{V} \cdot \vec{n} d\Sigma_{E,L}^p \\ - \int_{\Sigma_{S,L}^p} K \overrightarrow{\Phi^{k+1}} \cdot \vec{n} d\Sigma_{S,L}^p - \int_{\Sigma_{N,L}^p} K \overrightarrow{\Phi^{k+1}} \cdot \vec{n} d\Sigma_{N,L}^p \\ - \int_{\Sigma_{W,L}^p} K \overrightarrow{\Phi^{k+1}} \cdot \vec{n} d\Sigma_{W,L}^p - \int_{\Sigma_{E,L}^p} K \overrightarrow{\Phi^{k+1}} \cdot \vec{n} d\Sigma_{E,L}^p = 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Soit $F_I = + \int_{\Sigma_{I,L}^p} \Phi^{k+1} \vec{V} \cdot \vec{n} d\Sigma_{I,L}^p - \int_{\Sigma_{I,L}^p} K \overrightarrow{\Phi^{k+1}} \cdot \vec{n} d\Sigma_{I,L}^p$, le flux traversant la face Σ_I , $I \in \{N, S, E, W\}$. L'équation 2.4 se réécrit sous la forme :

$$\frac{1}{\Delta t} (\Phi_p^{k+1} - \Phi_p^k) \Delta x_L \Delta z_L + F_E + F_W + F_N + F_S = 0 \quad (2.5)$$

– Discrétisation du flux à travers la face Ouest : F_W

$$F_W = - \frac{\Phi_W^{k+1} + \Phi_{LP}^{k+1}}{2} u_{\Sigma_{W,L}^p}^{L-1} \frac{\Delta z_{L-1}}{3} + K \frac{\Phi_{LP}^{k+1} - \Phi_W^{k+1}}{\Delta x_{L-1}} \frac{\Delta z_{L-1}}{3}$$

– Discrétisation du flux à travers la face Est : F_E

$$F_E = \frac{\Phi_e^{k+1} + \Phi_p^{k+1}}{2} u_{\Sigma_{E,L}^p}^L \Delta z_L - K \frac{\Phi_e^{k+1} - \Phi_p^{k+1}}{\Delta x_L} \Delta z_L$$

– Discrétisation du flux à travers la face Nord : F_N

$$F_N = \frac{\Phi_n^{k+1} + \Phi_p^{k+1}}{2} w_{\Sigma_{N,L}^p}^L \Delta x_L - K \frac{\Phi_n^{k+1} - \Phi_p^{k+1}}{\Delta z_L} \Delta x_L$$

– Discrétisation du flux à travers la face Sud : F_S

$$F_S = - \frac{\Phi_p^{k+1} + \Phi_s^{k+1}}{2} w_{\Sigma_{S,L}^p}^L \Delta x_L + K \frac{\Phi_p^{k+1} - \Phi_s^{k+1}}{\Delta z_L} \Delta x_L$$

Après avoir injecté les formes discrétisées des flux dans l'équation 2.5 et après avoir regroupé les contributions des termes Φ_n^{k+1} , Φ_s^{k+1} , Φ_e^{k+1} , Φ_W^{k+1} , Φ_{LP}^{k+1} et Φ_p^{k+1} , on remplit la matrice de discrétisation et le second membre. On peut ainsi déterminer Φ_p^{k+1} à l'aide d'un solveur implicite.

2.4 Opérateurs de restriction

Il existe deux types d'opérateurs de restriction : l'injection conservative (*FWICV*) et l'injection directe.

Notons LP un noeud de niveau G_L ayant généré une cellule *AMR* (qui est constitué de $(RAF + 2)(RAF + 2)$ fils).

- L'injection *FWICV* consiste à approcher l'inconnue Φ_{L-1} du niveau G_{L-1} par une solution plus précise Φ_L du niveau G_L , définie comme suit (cf aussi figure 2.40) :

$$\int_{V_{father}} \Phi_{L-1} dvol \sim \sum_{i=1}^{raf^{dim}} \int_{V_{son(i)}} \Phi_L dvol. \quad (2.6)$$

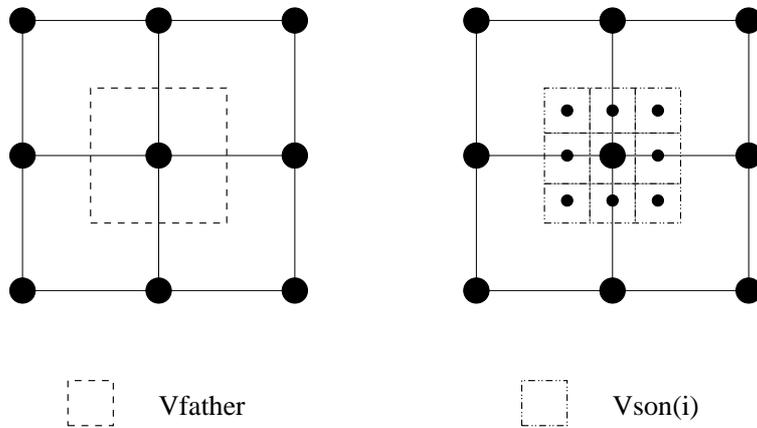


Figure 2.40 : Procédure d'injection en 2D, pour un coefficient de raffinement $raf = 3$.

- Dans l'injection directe, on impose au noeud LP la valeur de son fils de mêmes coordonnées.

On cherche à savoir qu'elle est l'injection la plus adaptée au type de problème traité. L'efficacité de l'injection *FWICV* a déjà été montrée pour les problèmes à très fort gradient (suivi de fronts ou d'interface) car elle assure la conservation de la masse. On se

demande si l'injection directe pourrait être utilisable dans le cas de gradients d'intensité plus faible. En effet, l'injection directe assure l'obtention d'une solution précise, mais assure-t-elle la conservation de la quantité $\int_{\Omega} \Phi d\Omega$?

On suppose que Φ est connue en $2N$ points d'un maillage (1D) de pas d'espace Δx . On considère un maillage grossier de pas d'espace $2\Delta x$ contenant N points, de tel façon que chacun de ces noeuds coïncide avec un noeud du maillage fin. La solution étant connue en chaque point du maillage fin, on l'injecte sur les noeuds du maillage grossier qui coïncident avec ceux du maillage fin. Ainsi, la solution sur les noeuds du maillage grossier a la même précision que sur le maillage fin. Cependant, la solution entre deux noeuds du maillage grossier est approchée par une droite, alors que la solution analytique ne l'est pas forcément. Ainsi, l'aire sous la courbe numérique est différente de celle sous la courbe analytique. La figure 2.41 illustre ce problème sur un maillage grossier à trois points. Pour essayer de répondre à cette question, on teste les différents opérateurs de

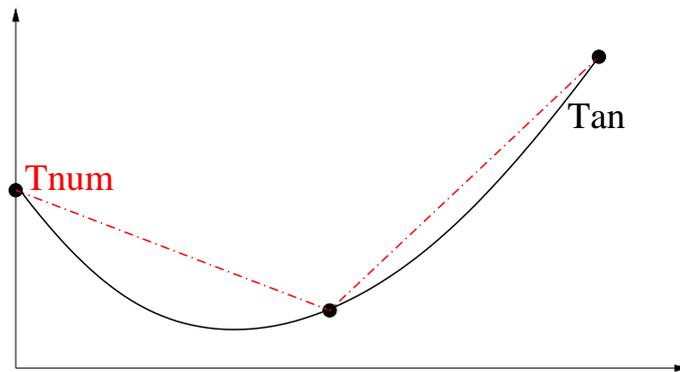


Figure 2.41 : Comparaison de deux courbes identiques en des points connus et d'aires différentes.

restriction sur le cas de Whitaker (cf sous-section 3.2.3).

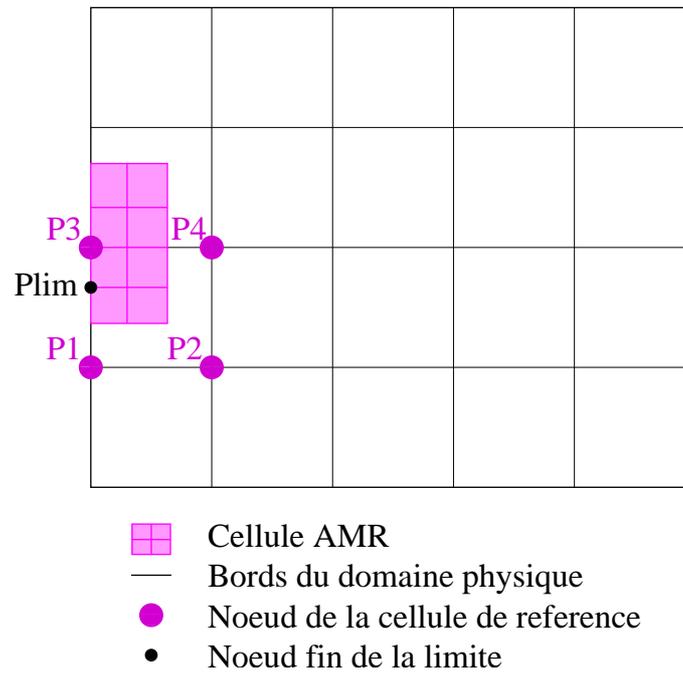
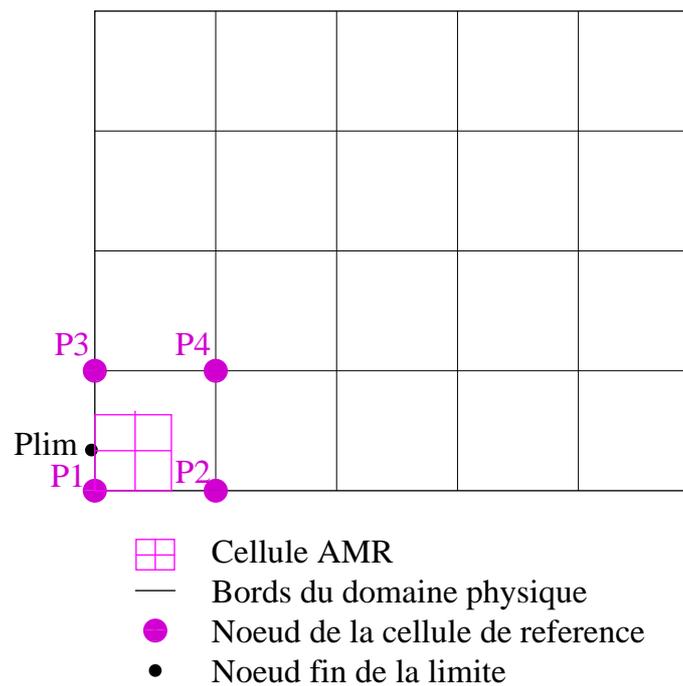
2.5 Traitement des noeuds fins aux limites physiques

Soit $N_{l,lim}$ le nombre de noeuds de niveau G_L sur les limites du domaine. Lorsqu'un noeud $P_{lim,k}^{l-1} \in G_{L-1}$, $k \in [1, \dots, N_{l,lim}]$, crée une cellule *AMR*, certains noeuds fins de cette cellule de niveau G_L sont à l'extérieur du domaine d'étude. Seuls les noeuds $P_K^L = P_m^L \cup P_{lim}^L$ sont traités. Parmi les noeuds P_K^L , seuls ceux vérifiant la condition évoquée dans la sous section ?? sont susceptibles de créer une cellule *AMR* à leur tour.

La démarche étant la même pour les noeuds de pression et ceux de vitesses, on montre le raisonnement à suivre uniquement pour les noeuds scalaires. Prenons l'ensemble des noeuds de pression P_{lim}^L , de niveau G_L appartenant à $\partial\Omega$. Trois méthodes ont été appliquées pour traiter ce type de noeuds.

La première consiste à interpoler P_{lim}^L à partir des noeuds de l'élément de référence de niveau G_{L-1} . Elle nécessite donc très peu de développements informatiques supplémentaires. Prenons par exemple une interpolation de type Q_1 . Suivant la figure 2.42 P_1^{l-1} , P_2^{l-1} , P_3^{l-1} et P_4^{l-1} constituent l'élément de référence. $P_{lim}^L \in [P_1^{l-1} P_3^{l-1}]$. Donc les pondérations associées aux noeuds P_1^{l-1} et P_3^{l-1} sont prépondérantes devant celles associées à P_2^{l-1} ou P_4^{l-1} . Ainsi cette méthode est très satisfaisante pour des conditions aux limites de type Dirichlet. Elle reste toutefois très contraignante puisqu'il faut imposer une seule valeur constante à l'ensemble des bords $\partial\Omega$. La création d'une discontinuité sur $\partial\Omega$ rend la méthode défailante. Prenons par exemple un domaine Ω rectangulaire. On impose sur la paroi gauche une valeur C_0 , et sur les autres parois une valeur $C_1 \neq C_0$. Supposons, comme l'indique la figure 2.43 qu'une cellule *AMR* ait été créée dans le coin bas gauche (ie: au voisinage de la discontinuité), le noeud P_1^{l-1} a donc pour valeur C_0 tandis que le noeud P_3^{l-1} a pour valeur imposée C_1 . Le noeud P_{lim}^L appartenant à la paroi de gauche acquière comme valeur interpolée une combinaison linéaire des noeuds P_1^{l-1} et P_3^{l-1} , ce qui biaise la valeur de la condition aux limites qu'on aurait voulu imposer à P_{lim}^L (figure 2.43).

On décide donc d'utiliser une seconde méthode moins contraignante concernant les conditions aux limites de type Dirichlet. Celle-ci est plus naturelle mais impose un développement informatique plus important que la première. Elle consiste à imposer aux noeuds P_{lim}^L de niveau G_L les mêmes conditions aux limites que celles imposées sur le niveau G_{L-1} . Il faut tout d'abord repérer à quelle limite appartient P_{lim}^L pour imposer la bonne condition aux limites. Pour cela, il suffit de déterminer le(s) voisin(s) manquant de son père $P_{pre}^{L-1} \in \partial\Omega$. La démarche est quelque peu différente suivant que le père appartient au niveau grossier G_0 ou G_{L-1} , $l > 1$. Pour les noeuds P_{pre}^{L-1} , $L > 1$, les noeuds à l'extérieur du domaine Ω existent mais ne sont pas traités. Un tableau indique pour chacun d'eux s'il appartient au domaine (true) ou s'il est à l'extérieur (false). Pour les noeuds P_{pre}^0 , seuls les noeuds appartenant à Ω existent (ceci est propre au code de calcul *AQUILON* et permet de traiter différentes conditions aux limites sans avoir à changer la matrice de discrétisation). Donc pour savoir si $P_{pre}^0 \in \partial G_0$, il suffit de voir s'il possède

Figure 2.42 : *Traitement des noeuds de pression fins appartenant aux limites de Ω* Figure 2.43 : *Traitement des noeuds de pression fins appartenant aux coins limites de Ω*

au moins deux fois le même voisin.

Cette méthode reste efficace tant que les conditions aux limites restent de type Dirichlet (valeurs imposées sur ∂G . En effet, celle-ci montre des défaillances pour des conditions aux limites de type Neumann (ou adiabatique) ie: $\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}$, où \mathbf{n} est la normale sortante à Ω . Celles-ci sont en partie dues à la structure du code. A l'intérieur du domaine Ω , ils ont effectivement le même nombre de voisins. Ce n'est pas le cas pour les noeuds des limites $\partial G_L, l \in [1, N]$. La structure du code imposant que tous les noeuds aient le même nombre de voisins, on désigne les voisins manquant par une symétrie centrale par rapport au noeud étudié (appelé effet miroir). Supposons, par exemple, que le voisin Ouest n'existe pas, alors le voisin Est (existant) est désigné comme étant aussi le voisin Ouest du noeud en question.

Cette structure pose des problèmes dans la mesure où un noeud P_{lim} appartenant à la fois à la limite du domaine physique et à l'interface G_L/G_{L-1} est discrétisé et non interpolé. Du fait des effets miroirs, les voisins de P_{lim} intervenant dans la discrétisation sont en partie des voisins désignés. Ceci entraîne une mauvaise estimation de la valeur en P_{lim} . Imaginons un noeud P_{lim} sur la limite gauche de Ω et à l'interface G_1/G_0 . Supposons que son voisin Sud n'existe pas. On attribue alors au voisin Nord, le voisin Sud. On fait de même avec le voisin Ouest. Si le flux à travers la limite gauche est constant le long de cette limite, on obtient une bonne estimation de la valeur en P_{lim} . Sinon, elle est erronée car la valeur prise par le voisin Sud n'est autre que celle prise par le voisin Nord. Elle est donc elle-même erronée. Donc la valeur calculée en P_{lim} par discrétisation devient fausse.(figure à faire)

On décide donc d'utiliser une troisième méthode qui est une combinaison entre la première et la deuxième. Il s'agit d'interpoler les noeuds P_{lim} appartenant à la fois à la limite du domaine physique et à l'interface G_L/G_{L-1} et d'appliquer la deuxième méthode aux autres.

2.6 Contribution de l'AMR dans un solveur implicite

On a montré dans la sous section 1.2.1 la nécessité d'utiliser un solveur implicite en fonction des paramètres des différentes équations à résoudre et de la régularité des solutions. on rappelle que lorsqu'on choisit une méthode itérative implicite, les équations discrétisées peuvent se mettre sous la forme d'un système linéaire à résoudre: $A^{n+1}\Phi^{n+1} = B^n$ où B^n est le second membre à l'itération n , Φ^{n+1} l'inconnue à l'itération $n + 1$ et A^{n+1}

la matrice à inverser à l'itération $n + 1$.

D'autre part, on a évoqué dans la sous section 1.3.2 les limites de la méthode *OCLM*, liées au découplage de la procédure d'interpolation et du solveur implicite.

Pour contrer cette difficulté, on procède à l'implication de l'interpolation. Cette méthode consiste à insérer les contributions de cette dernière dans la matrice A^{n+1} à inverser.

Lorsque la méthode *AMR* est utilisée, l'inconnue X rassemble les noeuds des différents niveaux G_0 à $G_{N_{max}}$, avec N_{max} le nombre de niveaux *AMR*. Soit KKT_0 le nombre de noeuds sur le maillage grossier G_0 , KKT_j , le nombre de noeuds sur le niveau G_j et KKT le nombre de noeuds total. Φ se décompose de la façon suivante: $\Phi = (\dots X_j^{niv})^t$, $j \in [1, KKT_{niv}]$, $niv \in [1, N_{max}]$. La matrice A d'élément $(A_{j,i})$, $j \in [1, KKT]$, $i \in [1, KKT]$, est construite en conséquence.

Il faut ensuite s'occuper des lignes de la matrice correspondant aux noeuds à interpoler. D'après la section 1.2.6, l'inconnue est approchée par un polynôme d'interpolation. Si X_j^{niv} , $j \in [1, KKT_{niv}]$, représente X^{niv} au noeud a_j ,

$$X_j^{niv} = \sum_{i=1}^N X_i^{niv-1} f_i(a_j).$$

N est le nombre de noeuds nécessaires à l'interpolation. Soit $f_i(a_j)$, $(i, j) \in [1, N]$, les nouveaux coefficients $(A_{j,i})$ de la matrice A là où l'interpolation remplace la discrétisation des équations. Notons $AA_{j,i}$ ces éléments. On obtient alors

$$X_j^{niv} - \sum_{i=1, i \neq j}^N X_i^{niv-1} AA_{j,i} \sim 0 \quad (2.7)$$

On note BB le nouveau second membre correspondant à B auquel on a remplacé les lignes correspondant à des noeuds interpolés par 0. Il vient alors :

$$\sum_{i=1}^N AA_{j,i} X_i^{niv-1} = BB_j \quad (2.8)$$

On note AA^{n+1} la nouvelle matrice à inverser, BB^n le nouveau second membre, chacun contenant la contribution de l'interpolation et celle des équations discrétisées. le nouveau système à résoudre est donc $AA^{n+1}X^{n+1} = BB^n$.

On a représenté sur la figure 2.44 le système initial à résoudre, i.e. avant l'implication de l'interpolation. Les sous matrices A_0 , A_1 , A_2 et A_3 représentent respectivement les coefficients de la matrice A sur les niveaux G_0 , G_1 , G_2 et G_3 . Les mêmes notations sont

adoptées pour l'inconnue X et le second membre B . La figure 2.45 illustre de manière simplifiée la démarche suivie pour impliciter l'interpolation.

Partant de la matrice A représentée sur la figure 2.44, on remplace les lignes de chaque niveau correspondant à des noeuds à interpoler par les coefficients d'interpolation. Ceux-ci sont représentés dans la nouvelle matrice de la figure 2.45 par des lignes fuchsia.

On remarque aussi que pour chaque niveau G_L , la matrice initiale A fait intervenir uniquement des noeuds de même niveau. Par contre, dans la matrice finale AA , les coefficients d'interpolation d'un noeud de niveau G_L fait intervenir des noeuds de niveau G_{L-1} . Cela se traduit par un prolongement des lignes fuchsia d'un niveau G_L sur le niveau inférieur G_{L-1} . La contribution de l'interpolation dans le second membre se traduit aussi par l'insertion de lignes fuchsia. Remarquons que ces termes sont nuls (cf equation 2.7).

Cette démarche permet donc de calculer en une seule étape les noeuds déterminés à partir des coefficients provenant de la discrétisation des équations et ceux provenant de l'interpolation. On lève ainsi un des problèmes rencontrés dans la méthode *OCLM*.

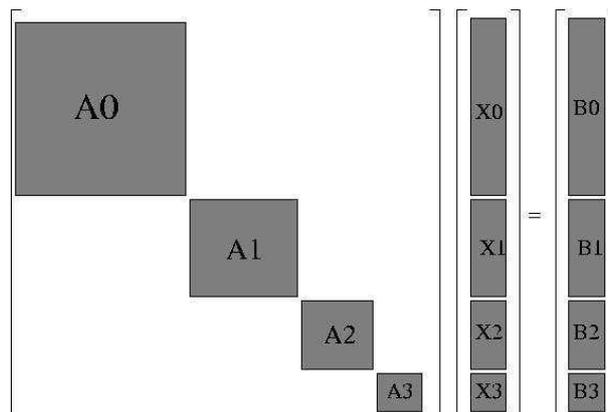
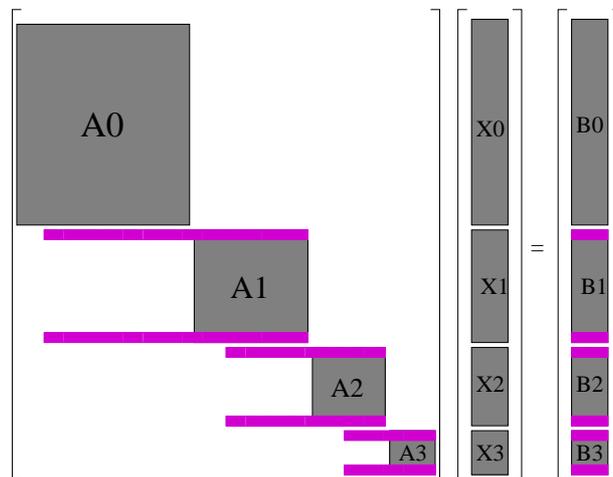


Figure 2.44 : *Système initial à résoudre.*

Figure 2.45 : *Système final à résoudre.*

Chapitre 3

Résultats en 2D

On cherche à montrer l'efficacité de la méthode *AMR* à réduire la diffusion numérique et à optimiser les coûts en temps CPU et espace mémoire.

3.1 Résultats préliminaires sur un écoulement de Poiseuille 2D

L'objectif de cette section est de tester la méthode *AMR* sur les équations de Navier-Stokes. On va donc étudier son influence sur le comportement des solutions, via le changement de plusieurs paramètres.

On considère un écoulement de Poiseuille 2D, sur une longueur $L = 1m$, entre deux plans parallèles séparés d'une distance $h=0.02m$ (voir figure 3.1). La vitesse moyenne est $U_{moyen} = 0.1m.s^{-1}$.

On choisit de simuler cet écoulement pendant une durée de $60s$ (temps au bout duquel le régime stationnaire a été atteint), avec un pas de temps $\Delta t = 1s$. On étudie l'évolution de l'erreur entre la solution numérique et analytique au cours du temps.

La solution numérique sur les niveaux *AMR* est calculée comme cela a été indiqué dans la sous-section 2.1.1, à savoir que les noeuds de limite de niveau sont interpolés tandis que ceux à l'intérieur sont discrétisés. On utilise la méthode du Lagrangien augmenté pour résoudre les équations de Navier-Stokes (cf sous-section 1.2.3). On note (u_{ex}, w_{ex}) le vecteur vitesse analytique ou exact, calculé comme dans l'annexe A, et (u_{res}, w_{res}) le vecteur vitesse obtenu numériquement. On définit l'erreur en norme L^2 , de la manière

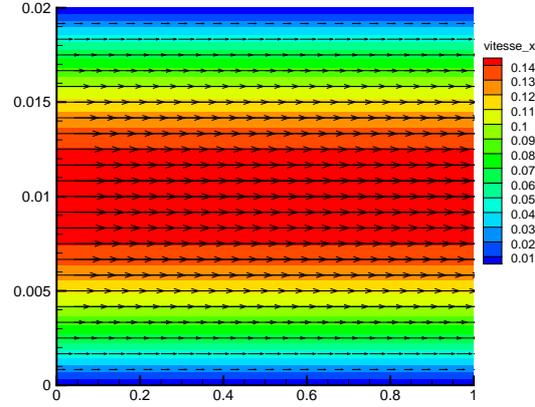


Figure 3.1 : *Écoulement de Poiseuille sur un maillage $G = 24 * 24$: représentation du champ de vitesse et de son amplitude.*

suivante :

$$erreur^2 = \frac{\int_{\Omega} |u_{ex}(x, z) - u_{res}(x, z)|^2 + |w_{ex}(x, z) - w_{res}(x, z)|^2}{\int_{i, j \in \Omega} |u_{ex}(x, z)|^2 + |w_{ex}(x, z)|^2}$$

soit sous forme discrétisée :

$$erreur^2 = \frac{\sum_{i, j \in \Omega} |u_{ex}(x_i, z_j) - u_{res}(x_i, z_j)|^2 + |w_{ex}(x_i, z_j) - w_{res}(x_i, z_j)|^2}{\sum_{i, j \in \Omega} |u_{ex}(x_i, z_j)|^2 + |w_{ex}(x_i, z_j)|^2}$$

3.1.1 Influence du degré du polynôme d'interpolation

On cherche à déterminer l'évolution de l'erreur en fonction de l'ordre d'interpolation (Q_1 , Q_2 et Q_3) des noeuds de limite de niveau *AMR*. Pour cela, un niveau d'*AMR* est construit dans la zone bornée $[0.3, 0.7][0.007, 0.011]$ avec un coefficient de raffinement $RAF = 3$ (voir figure 3.2). On montre sur la figure 3.3 l'évolution temporelle de l'erreur sur le niveau G_1 (figure 3.3) jusqu'au temps $t = 60s$. Les erreurs au temps final sont indiquées dans le tableau 3.1.

On note une évolution identique pour l'interpolation Q_2 et Q_3 jusqu'au temps $t = 45s$, où l'erreur est de l'ordre de 10^{-13} . Ceci s'explique par le fait que la solution analytique

est un polynôme de degré 2 (cf annexe A.2) et donc on attribue aux noeuds interpolés la solution analytique via l'interpolation Q_2 ou Q_3 . Ensuite, on observe un phénomène de saturation de l'erreur à 10^{-13} pour l'interpolation Q_3 , qui est due aux termes de degré 3 du polynôme d'interpolation Q_3 qui sont théoriquement nuls, mais qui sont égaux à 10^{-16} numériquement. Quant à l'interpolation Q_1 , on a une erreur de l'ordre de 10^{-1} , ce qui est normal puisque qu'on a approché la solution par un polynôme de degré un.

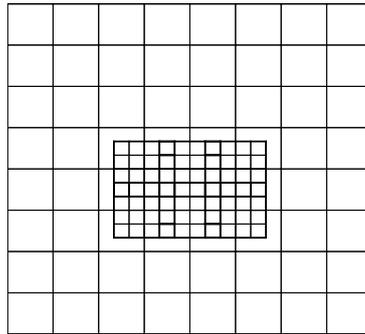


Figure 3.2 : Maillage global avec un niveau d'AMR.

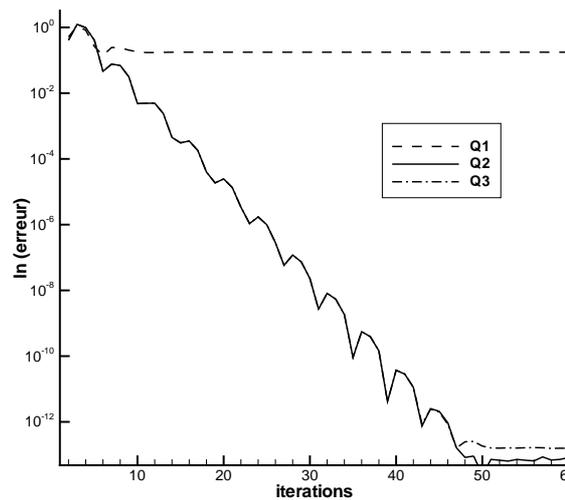


Figure 3.3 : Evolution de l'erreur sur le niveau G_1 pour différents types d'interpolation

	Q_1	Q_2	Q_3
Erreur sur G_1	0.17	$8.2 \cdot 10^{-14}$	$1.6 \cdot 10^{-13}$

Tableau 3.1 : Erreur sur G_1 , à $t = 60s$ pour 3 types d'interpolation

3.1.2 Influence du nombre de niveaux AMR

On cherche à savoir comment se comporte l'évolution de l'erreur quand le nombre de niveaux AMR varie. On décide donc de construire successivement un, deux puis trois niveaux d' AMR dans la zone bornée $[0.3, 0.7][0.007, 0.011]$, avec un coefficient de raffinement $RAF = 3$ et une interpolation de type Q_2 (voir figure 3.5 pour un maillage à deux niveaux d' AMR).

On observe sur la figure 3.4 une évolution temporelle de l'erreur, très similaire quelque soit le nombre de niveaux utilisé. On compare ce comportement à celui obtenu sur un maillage $G = 8 * 8$ sans AMR . On note encore une évolution similaire aux autres courbes sur la figure 3.4. La méthode AMR donne donc des résultats satisfaisants indépendamment du nombre de niveaux AMR choisi. Ceci est confirmé par les résultats du tableau 3.2, qui montre les erreurs obtenues au temps $t = 60s$ sur les différents niveaux AMR .

Erreur sur $G = 8 * 8$	Erreur sur G_1	Erreur sur G_2	Erreur sur G_3
$5.5 \cdot 10^{-14}$	$7.3 \cdot 10^{-14}$	$2 \cdot 10^{-13}$	$6.5 \cdot 10^{-13}$

Tableau 3.2 : Erreur sur chaque niveau à $t = 60s$ avec une interpolation Q_2

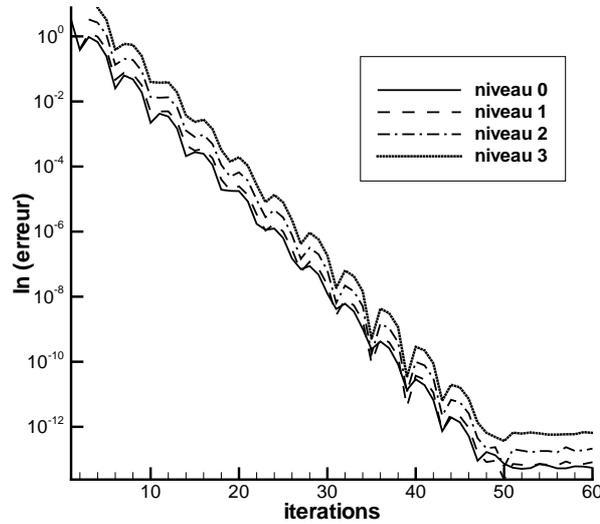


Figure 3.4 : Evolution de l'erreur sur différents niveaux pour une interpolation Q_2

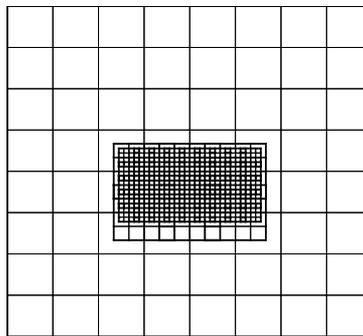


Figure 3.5 : Maillage avec deux niveaux d'AMR

3.1.3 Influence du coefficient de raffinement

On souhaite déterminer l'influence du coefficient de raffinement, RAF , sur la précision de la solution. Dans cette optique, on fait varier le paramètre RAF , sur un puis deux niveaux d'AMR dans la zone bornée $[0.3, 0.7][0.007, 0.011]$. Pour plus de clarté, on a représenté sur les figures 3.2 et 3.6, les maillages utilisés avec un niveau AMR et un coefficient de raffinement égal à 3, 5, puis 7. On montre l'évolution des erreurs au bout

d'un temps $t = 60s$ avec une interpolation de type Q_2 , sur le niveau le plus fin sur la figure 3.7.

On constate que les erreurs sont faiblement dépendantes du coefficient de raffinement (malgré une légère détérioration avec RAF sur la figure 3.7 droite), et ce, aussi bien pour un que pour deux niveaux d' AMR (voir figure 3.7). Ainsi, la méthode AMR reste satisfaisante quand le coefficient de raffinement RAF varie, ce que vient confirmer quantitativement le tableau 3.3.

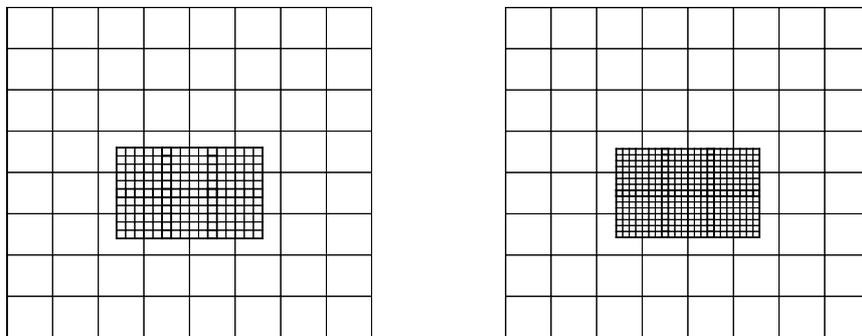


Figure 3.6 : Maillage avec un niveau d' AMR pour $RAF = 5$ à gauche et $RAF = 7$ à droite.

	Erreur sur G_1	Erreur sur G_2
$raf = 3$	$7.3 \cdot 10^{-14}$	$2 \cdot 10^{-13}$
$raf = 5$	$8.9 \cdot 10^{-14}$	$4.5 \cdot 10^{-13}$
$raf = 7$	$2 \cdot 10^{-13}$	$9 \cdot 10^{-13}$

Tableau 3.3 : Erreur sur chaque niveau à $t = 60s$ avec une interpolation Q_2

Dans la suite du document, on utilisera un coefficient de raffinement $RAF = 3$.

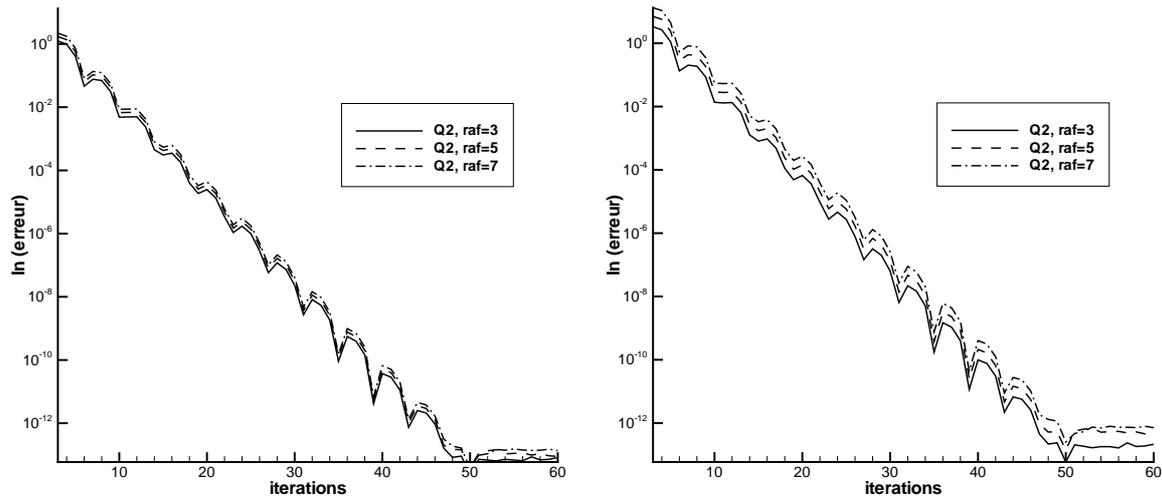


Figure 3.7 : Evolution de l'erreur sur le niveau G_1 (gauche) et G_2 (droite) pour une interpolation de type Q_2 et un coefficient de raffinement variable.

3.1.4 Influence du maillage

On cherche à savoir comment évolue l'erreur en fonction du pas d'espace du maillage, lorsqu'on utilise la méthode *AMR*. Pour cela, on construit deux niveaux *AMR* dans la zone bornée $[0.3, 0.7][0.007, 0.011]$, avec un coefficient de raffinement $RAF = 3$, à partir de $G_0 = 8 * 8$, $G_0 = 16 * 16$ puis $G_0 = 32 * 32$.

On observe sur la figure 3.8, une bonne convergence de la solution jusqu'à $t = 45s$ puis une saturation. Cependant, le même phénomène est observé sans *AMR* (cf tableaux 3.4 et 3.5). Ceci montre que la méthode *AMR* ne dégrade pas plus la solution qu'une approche sans *AMR* quand le maillage varie.

maillage	Erreur sur G_1	Erreur sur G_2
$G_0 = 8 * 8$	$7.3 \cdot 10^{-14}$	$2 \cdot 10^{-13}$
$G_0 = 16 * 16$	$3 \cdot 10^{-13}$	$8.7 \cdot 10^{-13}$
$G_0 = 32 * 32$	$3.5 \cdot 10^{-12}$	$1 \cdot 10^{-11}$

Tableau 3.4 : Erreur sur chaque niveau à $t = 60s$ avec une interpolation Q_2

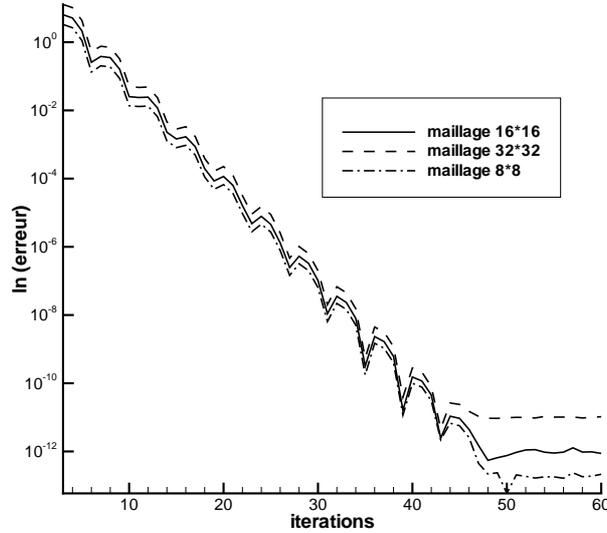


Figure 3.8 : Evolution de l'erreur sur le niveau G_2 pour différents pas d'espace et une interpolation de type Q_2

maillage	Erreur sur G
$G = 8 * 8$	$5.5 \cdot 10^{-14}$
$G = 16 * 16$	$3.8 \cdot 10^{-13}$
$G = 32 * 32$	$5.2 \cdot 10^{-12}$

Tableau 3.5 : Erreur sur différents maillages à $t = 60s$ sans AMR

3.2 Résultats numériques sur l'équation de conservation de l'énergie : application au cas de Whitaker

On considère un fluide incompressible dans un domaine rectangulaire de hauteur H et de longueur b . Les bords gauche, droit et inférieur sont maintenus à une température constante T_0 , tandis que le bord supérieur est maintenu à une température $T_f(x)$ de classe C_1 . La vitesse est nulle dans tout le domaine. L'équation de conservation de l'énergie (équation 1.16) se réduit donc aux termes de variation temporelle et de diffusion (cf [WHITAKER 83]). La figure (3.9) illustre le cas traité. On s'intéresse dans cet exemple au régime stationnaire. La température imposée sur le bord supérieur vérifie les critères

suivants :

$$T(0, H) = T(b, H) = T_0$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}(0, H) = \frac{\partial T}{\partial x}(b, H) = 0$$

La fonction T_f vérifie les mêmes conditions, on utilise la forme décrite dans l'annexe A.2. On a représenté sur la figure (3.10) la répartition analytique de la température dans le domaine sur un maillage $G = 48 * 48$. On a fixé $T_0 = 10^\circ C$ et $T_1 = 100^\circ C$. La forme analytique de la température est détaillée dans l'annexe A.2.

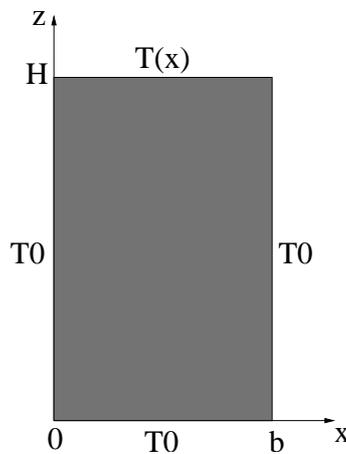


Figure 3.9 : Conduction 2D dans un rectangle dont les bords sont chauffés à des températures différentes.

Dans un premier temps, on cherche à estimer l'influence de la méthode *AMR* sur la précision d'une solution. On désire ensuite déterminer comment le traitement des limites sur les niveaux *AMR* agit sur la qualité des solutions.

3.2.1 Traitement des limites scalaires

On a exposé dans la sous-section 2.5 différentes techniques de traitement des conditions aux limites pour les niveaux *AMR*. On désire montrer ici leur influence sur la précision de la solution via le cas de Whitaker.

Trois cas sont alors comparés. Dans le premier, la répartition de la température dans le domaine est obtenue sur un maillage $G = 48 * 48$ sans *AMR*. Dans le deuxième cas, on calcule la répartition de la température sur un niveau d'*AMR*, à partir d'un maillage

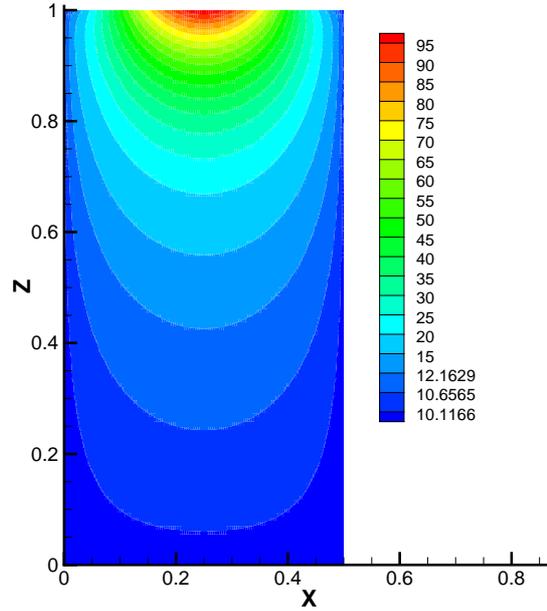


Figure 3.10 : Répartition analytique de la température sur un maillage $G = 48 * 48$.

$G_0 = 16 * 16$, qui s'étend sur tout le domaine et les conditions aux limites sont traitées par interpolation Q_2 . Le troisième cas est identique au deuxième excepté le traitement des conditions aux limites; celles-ci sont imposées sur le niveau G_1 d'*AMR* par une méthode de pénalisation comme cela est fait sur le niveau grossier G_0 . Pour chaque cas, on représente la répartition de l'erreur $e_r(x, z), \forall (x, z) \in \Omega$. Celle-ci est déterminée pour tout couple $(x, z) \in \Omega$, par :

$$e_r(x, z) = \frac{|T_{num}(x, z) - T_{an}(x, z)|}{|T_{an}(x, z)|}$$

avec T_{num} la température numérique et T_{an} celle analytique.

La figure 3.11 compare les deux cas avec 1 niveau d'*AMR*. A gauche, la température sur les bords du domaine est interpolée alors qu'à droite, on impose les mêmes conditions aux limites sur les deux niveaux. On note sur la figure 3.11 gauche, une erreur plus importante sur le bord supérieur (oscillations) que celle sur la figure de droite. La figure 3.12 gauche représente la répartition de l'erreur dans le cas *AMR* avec conditions aux limites imposées sur le niveau G_1 . Celle de droite montre le cas sans *AMR*. Comme on pouvait s'y attendre, la répartition de l'erreur est la même dans les deux cas.

Les trois cas que l'on vient d'exposer montrent que lorsque les températures imposées sur les bords du domaine sont de classe C_1 , l'imposition des conditions aux limites sur le

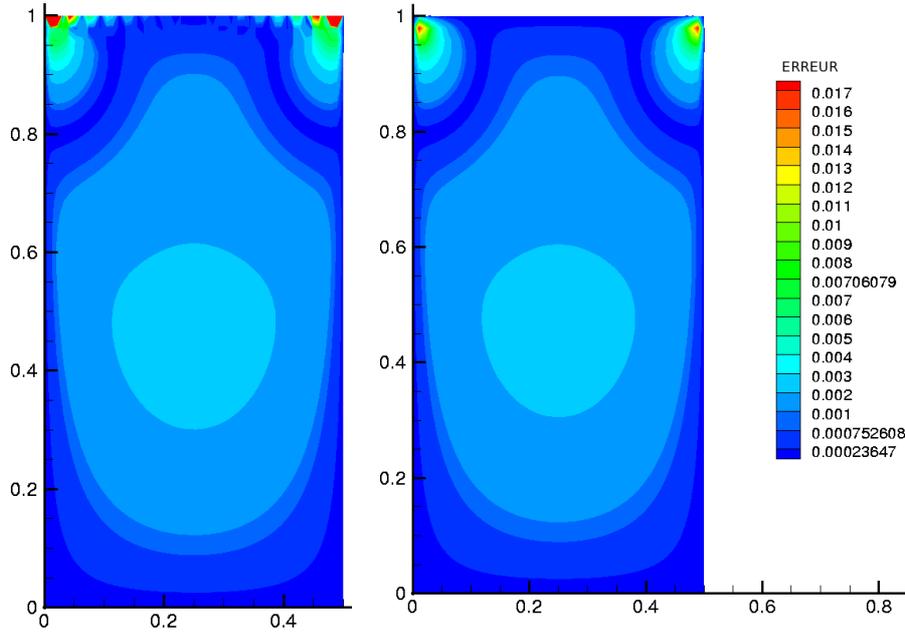


Figure 3.11 : Répartition de l'erreur e_r lorsque la température est imposée sur les bords du domaine à droite et interpolée à gauche. Maillage $G_0 = 16 * 16$ avec 1 niveau d'AMR.

niveau d'AMR est plus efficace que l'interpolation. Plus précisément, on a remarqué que l'interpolation introduit des erreurs supplémentaires sur le bord supérieur. Par contre, si on impose les conditions aux limites de la même façon sur les niveaux fin et grossier (i.e. par la méthode de pénalisation décrite dans la sous-section 1.2.5), on observe une conservation de la précision de la solution; cette approche est utilisée dans la suite du document.

3.2.2 Méthode AMR et précision des solutions

Notons T_{an} , la température analytique, T_{num1} , la température calculée sans AMR sur un maillage G , et T_{num2} , celle obtenue par la méthode AMR. On souhaite déterminer la précision de la méthode AMR. Pour cela, on compare les erreurs obtenues entre les solutions T_{num1} et T_{an} à celles obtenues entre les solutions T_{num2} et T_{an} .

Soient L_x (respectivement L_z) la longueur du domaine suivant x (respectivement z), N_x (respectivement N_z) le nombre de noeuds suivant x (respectivement z) et $N = N_x N_z$ le nombre de points. On travaille à pas d'espace constant. Posons Δx (respectivement Δz) le pas d'espace suivant x (respectivement z), défini par $\Delta x = \frac{L_x}{N_x}$ (respectivement

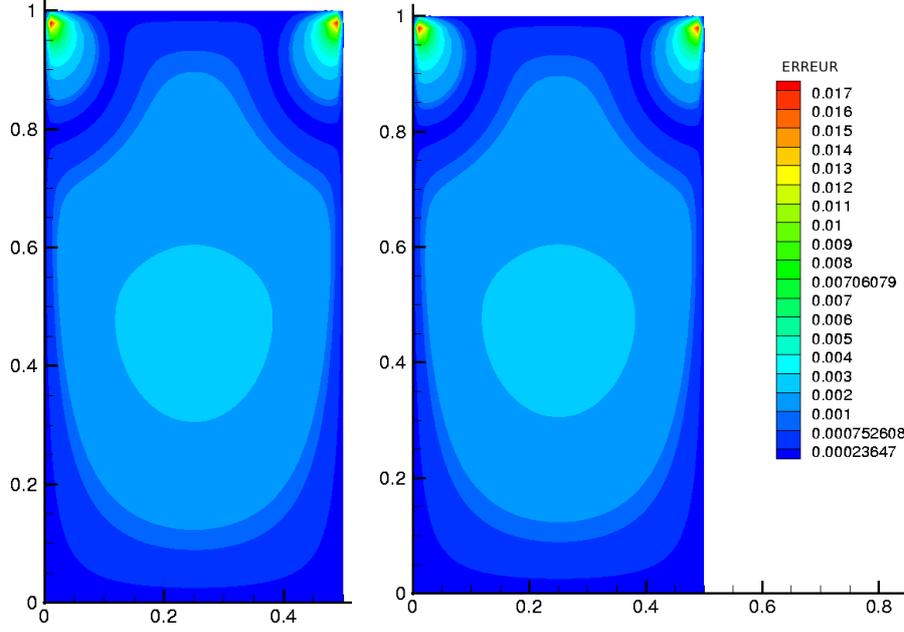


Figure 3.12 : Répartition de l'erreur e_r lorsque la température est imposée sur les bords du domaine avec 1 niveau d'AMR ($G_0 = 16 * 16$) à droite et sans AMR ($G = 48 * 48$) à gauche.

$\Delta z = \frac{L_z}{N_z}$). On définit h par $h = \sqrt{\Delta x \Delta z}$. On note T_{num} la solution numérique représentant T_{num1} ou T_{num2} .

L'erreur ϵ est définie par :

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{\|T_{num} - T_{an}\|_2}{\|T_{an}\|_2} \\ \epsilon &= \frac{[\int_V |T_{num}(x, z) - T_{an}(x, z)|^2 dx dz]^{\frac{1}{2}}}{[\int_V |T_{an}(x, z)|^2 dx dz]^{\frac{1}{2}}} \\ \epsilon &\sim \frac{[\sum_{i,j} |T_{num}(x_i, z_j) - T_{an}(x_i, z_j)|^2 \Delta x_i \Delta z_j]^{\frac{1}{2}}}{[\sum_{i,j} |T_{an}(x_i, z_j)|^2 \Delta x_i \Delta z_j]^{\frac{1}{2}}}, i \in [1, N_x], j \in [1, N_z] \end{aligned}$$

La démarche consiste à faire un test de convergence en maillage pour le cas sans AMR (tableau 3.6), pour celui avec un niveau d'AMR (tableau 3.7) et pour celui avec deux niveaux d'AMR (tableau 3.8), i.e. : calculer des erreurs ϵ propres à chaque maillage $G = (N_x - 1)(N_z - 1)$, pour chaque cas. Sachant que l'erreur ϵ évolue suivant la relation $\epsilon = k(\frac{L}{\sqrt{N}})^q$, il suffit de tracer la courbe $\ln(\epsilon) = \ln(k) - q \ln(\frac{L}{\sqrt{N}})$, où k est une constante, $L = \sqrt{(L_x L_z)}$ et q l'ordre de convergence, pour déterminer les ordres locaux de conver-

gence. Ceux-ci tendent vers un ordre limite.

On précise que ce cas n'est pas propice à la valorisation de la méthode *AMR* concernant l'ordre de convergence, l'optimisation du temps *CPU* et de la taille mémoire car on raffine sur tout le domaine. Étant donné qu'on calcule la solution sur tous les niveaux fins, on utilise plus de noeuds avec que sans *AMR* pour une solution de précision similaire. On ne peut donc ni espérer une amélioration de l'ordre de convergence, ni un gain en temps *CPU* ou taille mémoire via la méthode *AMR* dans ce cas. On cherche seulement à montrer que l'*AMR* conserve la précision des solutions et l'ordre de convergence.

On montre sur la figure (3.13) les ordres de convergence successifs obtenus sans *AMR* et calculés à partir des résultats du tableau 3.6. On observe une convergence en maillage quasi linéaire tendant vers l'ordre limite $q = 2$. Ce résultat est en concordance avec l'ordre théorique des schémas utilisés.

On calcule maintenant les ordres de convergence obtenus avec l'approche *AMR*, pour savoir si la méthode ne dégrade pas l'ordre de convergence des schémas. On commence donc par évaluer les ordres de convergences successifs avec un niveau d'*AMR* et un maillage grossier de départ de pas d'espace variable. La figure 3.14 (s'appuyant des résultats du tableau 3.7) permet de noter une convergence quasi linéaire et un ordre de convergence tendant vers $q = 2$. On réitère cette démarche avec deux niveaux d'*AMR*. On obtient de nouveau un ordre limite $q = 2$ (voir figure 3.14 et tableau 3.8), ce qui est très satisfaisant. Ainsi, aux vues des résultats obtenus sur un et deux niveaux d'*AMR*, on peut conclure que cette approche conserve l'ordre de convergence des schémas.

maillage	N	ϵ
8 * 8	81	1.2998 10 ⁻²
16 * 16	289	4.2915 10 ⁻³
32 * 32	1089	1.2316 10 ⁻³
64 * 64	4225	3.2712 10 ⁻⁴
128 * 128	16641	8.3961 10 ⁻⁵
256 * 256	65536	2.1340 10 ⁻⁵

Tableau 3.6 : *Etude de convergence en maillage sans AMR pour le cas de Whitaker*

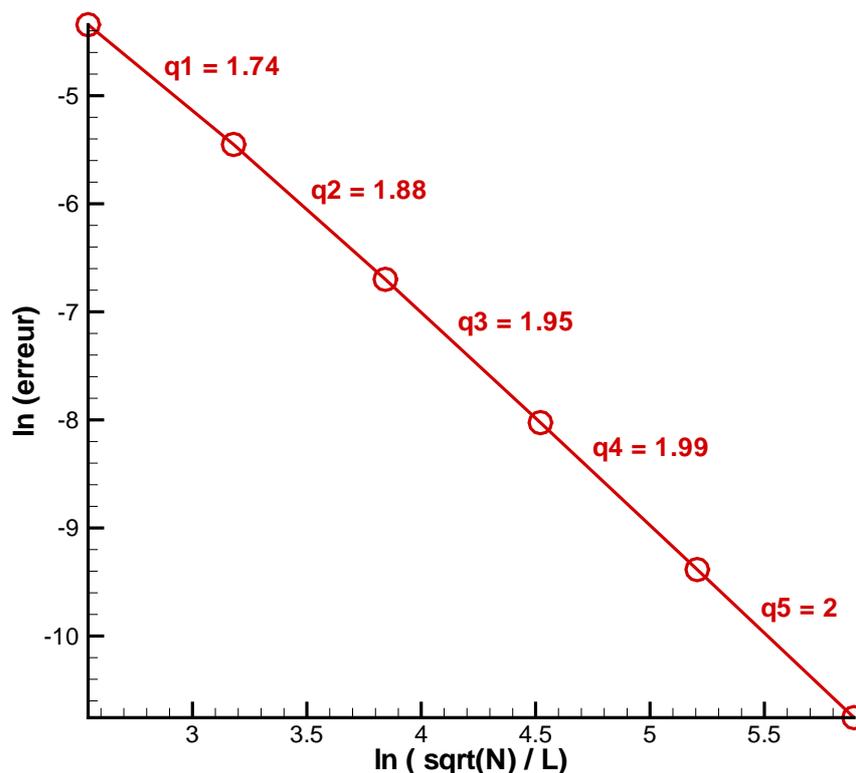


Figure 3.13 : *Ordres de convergence successifs sans AMR. Les données proviennent du tableau 3.6.*

On décide de faire une dernière étude de convergence qui consiste à prendre un maillage grossier fixe ($G_0 = 4 * 4$) et d'augmenter le nombre de niveaux *AMR* pour réduire le pas d'espace sur le niveau *AMR* le plus fin. Le tableau 3.9 montre l'erreur ϵ sur le niveau *AMR* le plus fin et le nombre de noeuds résolus correspondants. La figure 3.16, montre une convergence en maillage quasi linéaire. On estime l'ordre limite à $q = 2$. La méthode *AMR* permet donc de conserver l'ordre de convergence des schémas.

3.2.3 Choix des opérateurs de restriction et de prolongement

On cherche les opérateur de restriction et prolongement les mieux adaptés au cas de Whitaker (i.e. cas pour lequel les gradients sont situés dans l'ensemble du domaine Ω), en ce qui concerne la conservation de l'énergie et l'obtention de résultats satisfaisants en termes d'erreurs.

maillage G_0	maillage G_1	N	ϵ
4 * 4	12 * 12	194	6.933 10 ⁻³
8 * 8	24 * 24	706	2.094 10 ⁻³
12 * 12	36 * 36	1538	9.871 10 ⁻⁴
24 * 24	72 * 72	5954	2.601 10 ⁻⁴
40 * 40	120 * 120	16322	9.537 10 ⁻⁵
70 * 70	210 * 210	49562	3.147 10 ⁻⁵

Tableau 3.7 : *Etude de convergence en maillage avec la méthode AMR et un niveau fin pour le cas de Whitaker*

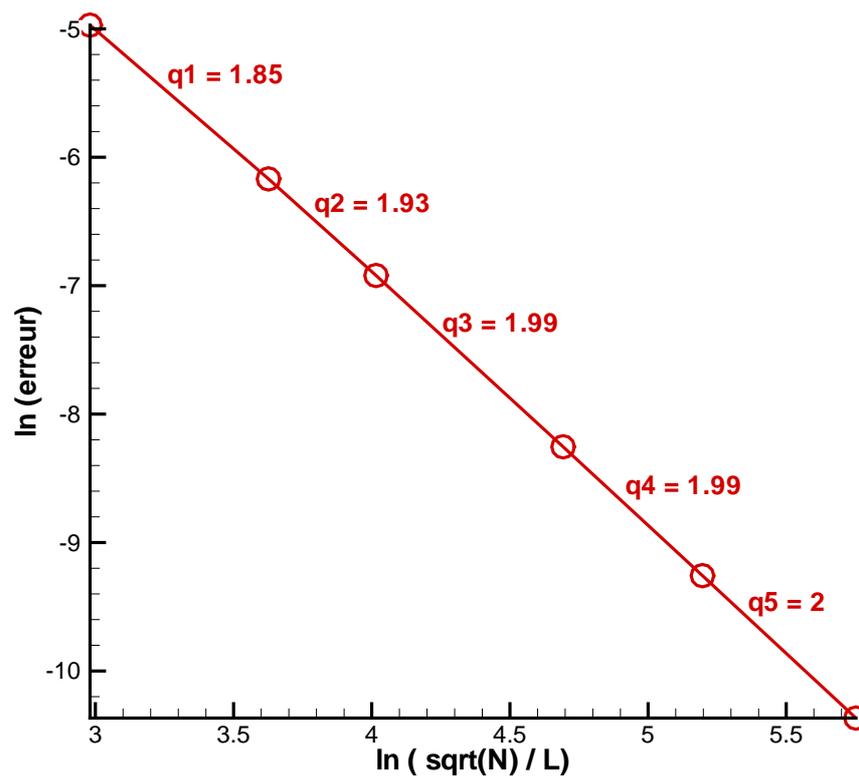


Figure 3.14 : *Convergence en maillage avec un niveau d'AMR. Les données proviennent du tableau 3.7.*

maillage G_0	maillage G_2	N	ϵ
4 * 4	36 * 36	1563	9.87 10 ⁻⁴
8 * 8	72 * 72	6035	2.601 10 ⁻⁴
12 * 12	108 * 108	13419	1.1740 10 ⁻⁴
16 * 16	144 * 144	23715	6.651 10 ⁻⁵
24 * 24	216 * 216	53043	2.980 10 ⁻⁵

Tableau 3.8 : *Etude de convergence en maillage avec la méthode AMR et deux niveaux fins pour le cas de Whitaker*

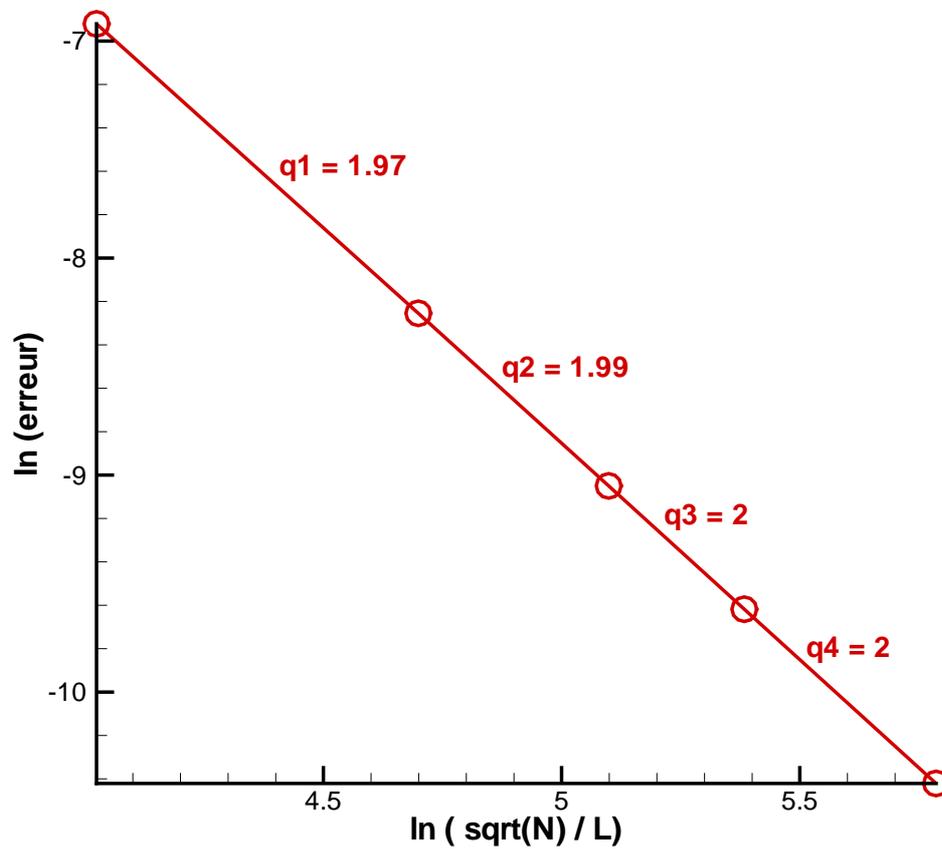


Figure 3.15 : *Convergence en maillage avec deux niveaux d'AMR. Les données proviennent du tableau 3.8.*

Niveau le plus fin	N	ϵ
G_1	194	6.933110^{-3}
G_2	1563	$9.87 \cdot 10^{-4}$
G_3	13444	$1.174 \cdot 10^{-4}$
G_4	119069	$1.328 \cdot 10^{-5}$

Tableau 3.9 : Etude de convergence en maillage avec la méthode AMR pour un maillage grossier $G_0 = 4 * 4$ et un nombre de niveaux fins variable, pour le cas de Whitaker

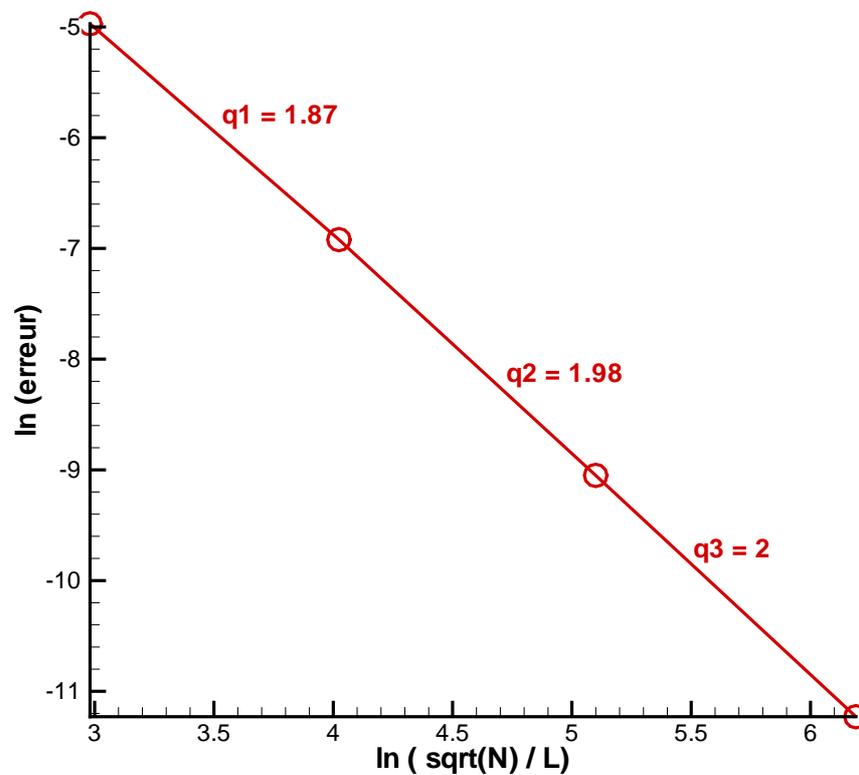


Figure 3.16 : Convergence de l'AMR en augmentant le nombre de niveaux. Les données proviennent du tableau 3.9.

Opérateurs de restriction

On souhaite tester deux opérateurs de restriction, à savoir l'injection conservative (*FWICV*) et l'injection directe pour savoir lequel est le mieux adapté à ce cas test.

Notons LP un noeud de niveau G_L ayant généré une cellule AMR (qui est constituée de $(RAF + 2)(RAF + 2)$ fils).

Dans un premier temps, on raffine l'ensemble du domaine avec un niveau d' AMR , en partant d'un maillage grossier $G_0 = 16*16$. On remarque sur le tableau 3.10 que l'injection conservative dégrade la solution sur le niveau grossier. L'injection directe améliore la répartition de la température sur le maillage grossier car l'erreur ϵ est divisée par 9 par rapport au cas sans injection. Donc l'injection directe semble plus adaptée pour améliorer la précision des solutions. La figure 3.17 vient confirmer le fait que l'injection directe paraît appropriée à ce cas particulier en terme d'erreur. Mais qu'en est-il de la conservation de l'énergie?

maillage	ϵ avec injection <i>FWICV</i>	ϵ avec injection directe	ϵ sans injection
G_0	$3.8 \cdot 10^{-2}$	$4.97 \cdot 10^{-4}$	$4.29 \cdot 10^{-3}$
G_1	$5.7 \cdot 10^{-4}$	$5.7 \cdot 10^{-4}$	$5.7 \cdot 10^{-4}$

Tableau 3.10 : *Comparaison des erreurs entre la solution numérique et analytique, avec et sans injection. Maillage $G_0 = 16 * 16$, un niveau d' AMR sur la totalité du domaine Ω .*

On calcule maintenant l'erreur faite sur la conservation de l'énergie lorsque le régime stationnaire est atteint. Connaissant la température analytique T_{an} et numérique T_{num} , on peut calculer l'énergie analytique E_{an} ,

$$E_{an} = \int_{\Omega} \rho c T_{an}(x, z) dx dz$$

et la comparer à l'énergie E_{num} , obtenue numériquement. Pour obtenir une valeur de E_{an} la plus précise possible, on la calcule sur un maillage fin, $G = 400 * 400$. D'après les résultats du tableau 3.11, on calcule une erreur entre E_{an} et E_{num} de 0.156% pour l'injection conservative et de 0.772% pour l'injection directe. Ceci montre que dans le cas particulier de Whitaker, les deux injections donnent des résultats correctes car l'énergie est assez bien conservée dans les deux cas : l'erreur ne dépasse pas 1%. Cependant, on commet une erreur sur la conservation de l'énergie, cinq fois plus élevée avec l'injection directe qu'avec l'injection conservative. Il est donc dangereux d'utiliser l'injection directe pour un cas plus compliqué à résoudre que celui de Whitaker. De plus, on utilise une méthode de volumes finis qui est basée sur la conservation de l'énergie. Il est donc recommandé d'utiliser une

injection conservative .

	E_{num} , injection FWICV	E_{num} , injection directe	E_{an} sur $G = 400 * 400$
$maillageG_0$	8.9848	9.0033	8.9734
ϵ	0.156 %	0.772 %	0 %

Tableau 3.11 : Comparaison des énergies avec injection à l'énergie analytique. Maillage $G_0 = 16 * 16$, un niveau d'AMR sur la totalité du domaine Ω .

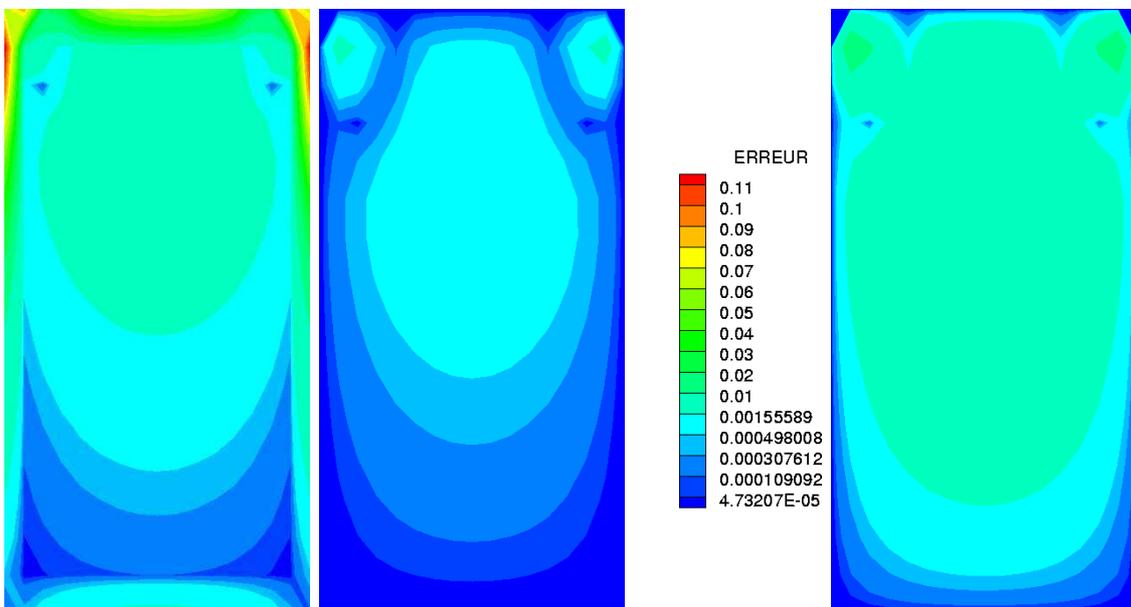


Figure 3.17 : Erreurs entre la solution analytique et numérique sur le niveau grossier $G_0 = 16 * 16$ avec une injection FWICV (gauche), directe (centre) sans injection (droite) lorsque l'ensemble du domaine est raffiné.

Opérateurs de prolongement

On s'intéresse maintenant à l'impact que peut avoir l'injection FWICV sur l'interpolation non conservative (Q_1 , Q_2 ou Q_3). Pour cela, on raffine une partie du domaine Ω , soit la zone $[0, 0.5][0.8, 1]$ (voir figure 3.18). On étudie le comportement de l'erreur sur le niveau grossier lorsque différents types d'opérateurs de prolongement et restriction sont

testés.

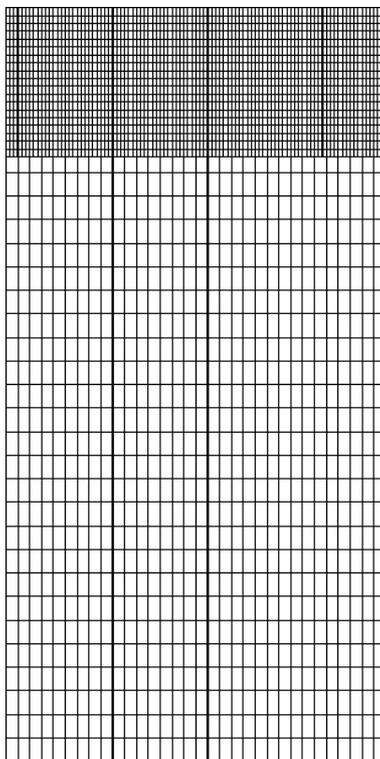


Figure 3.18 : *Maillage raffiné sur la zone $[0, 0.5][0.8, 1]$.*

Pour comprendre l'influence que peut avoir la combinaison d'une interpolation non conservative et d'une injection conservative sur la répartition de la température, on considère une cellule *AMR* appartenant au niveau G_L , générée par le noeud père *LP* et dont la partie inférieure est interpolée (cf figure 3.19).

Si on utilise une injection conservative (*FWICV*), les noeuds intérieurs à la cellule *AMR* interviennent pour imposer au noeud *LP* une nouvelle valeur. Parmi ces noeuds fins, certains ont un voisin interpolé, ils sont donc fortement influencés par l'interpolation. Cette dernière étant non conservative, elle donne des solutions moins bonnes que si l'équation de conservation de l'énergie discrétisée avait été résolue. On impose alors au noeud *LP* une valeur influencée par l'interpolation. Or le noeud *LP* intervenant dans l'interpolation des noeuds de la limite inférieure de la cellule *AMR*, les valeurs en ces noeuds (interpolés) sont à leur tour dégradées. Ce qui dégrade à son tour la valeur injectée au

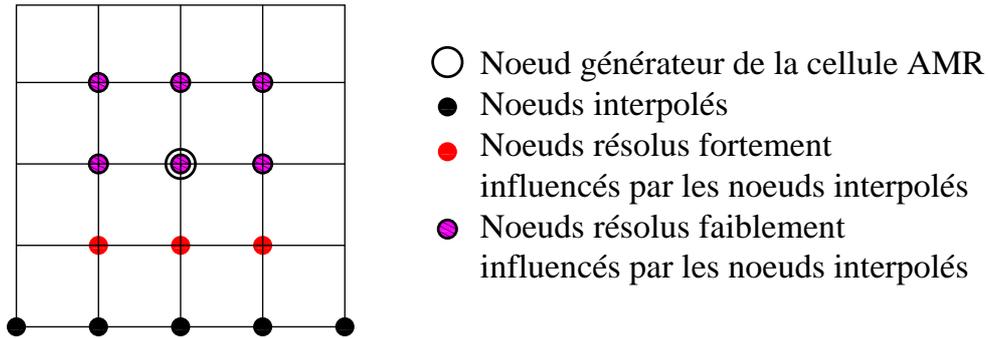


Figure 3.19 : Influence de l'interpolation Q_2 sur les noeuds résolus par discrétisation.

noeud LP . De proche en proche, la dégradation se propage vers l'intérieur du niveau AMR (voir la propagation de l'erreur avec une interpolation Q_2 sur la figure 3.20). Cette propagation est moins prononcée en utilisant une injection directe car la valeur injectée au noeud LP dépend faiblement de l'interpolation (ceci peut être observé sur la figure (3.20) de droite). Le phénomène de propagation lié à la combinaison de l'injection conservative et de l'interpolation Q_2 est beaucoup moins marqué avec une interpolation Q_1 , car très peu de noeuds intervenant dans l'interpolation subissent une injection $FWICV$ (voir figure 3.21).

Notons ϵ_{G_1} (respectivement ϵ_{G_0}) l'erreur obtenue sur le niveau G_1 (G_0) et $\epsilon_{composite}$ celle

Injection-Interpolation	ϵ_{G_1}	ϵ_{G_0}	$\epsilon_{composite}$	E_{num} sur G_0
$FWICV - Q_1$	$6.92 \cdot 10^{-3}$	$3.88 \cdot 10^{-2}$	$7.145 \cdot 10^{-3}$	9.0369
$FWICV - Q_2$	$9.61 \cdot 10^{-4}$	$3.8 \cdot 10^{-2}$	$1.29 \cdot 10^{-3}$	8.9937
$directe - Q_1$	$5.57 \cdot 10^{-3}$	$5.92 \cdot 10^{-3}$	$5.714 \cdot 10^{-3}$	9.049
$directe - Q_2$	$7.41 \cdot 10^{-4}$	$1.01 \cdot 10^{-3}$	$8.06 \cdot 10^{-4}$	9.01

Tableau 3.12 : Comparaison des erreurs et de l'énergie pour différents opérateurs de restriction et de prolongement. Maillage $G_0 = 16 * 16$, un niveau d'AMR sur la zone bornée $[0, 0.5][0.8, 1]$.

obtenue en ne comptabilisant que les noeuds résolus par discrétisation ou pénalisation (noeuds des limites physiques de Ω) et n'ayant pas généré de cellules AMR . On a rassemblé dans le tableau 3.12 ces erreurs ainsi que l'énergie numérique obtenue sur le niveau

grossier.

On observe que pour une même injection, l'interpolation Q_2 donne de meilleurs résultats en termes d'erreur et de conservation d'énergie que l'interpolation Q_1 . Si on considère les cas avec une interpolation Q_2 , on note que l'injection conservative donne des erreurs un peu plus élevées que celles obtenues avec une injection directe, tout en restant satisfaisantes. Par contre, l'injection *FWICV* permet de mieux conserver l'énergie. En effet, on calcule une erreur sur l'énergie de 0.23% pour l'injection *FWICV* contre 0.36% pour l'injection directe. Compte tenu des résultats du tableau 3.12, on conclue que l'utilisation d'une injection *FWICV* combinée avec une interpolation Q_2 semble le mieux adapté au cas de Whitaker. Cependant, le phénomène de propagation des erreurs (du aux interpolations) inhérent à ce choix reste préoccupant.

Quelques propositions peuvent être faites pour éviter ce problème :

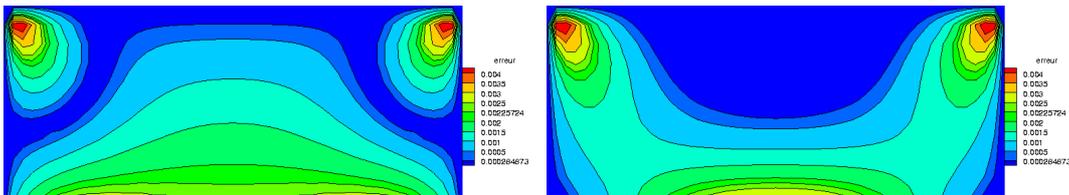


Figure 3.20 : Répartition de l'erreur sur le niveau fin avec interpolation Q_2 et injection conservative sur la gauche puis injection directe sur la droite.

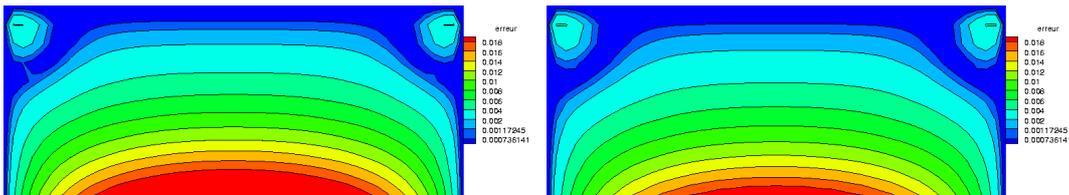


Figure 3.21 : Répartition de l'erreur sur le niveau fin avec interpolation Q_1 et injection conservative sur la gauche puis injection directe sur la droite.

- Soit l'effet de l'interpolation devient négligeable quand le nombre de noeuds résolus par discrétisation de l'équation de conservation d'énergie, devient important devant celui des noeuds résolus par interpolation.
- Soit on utilise des interpolations conservatives comme cela est déjà fait pour les méthodes multigrilles adaptatives (cf [U. TROTTENBERG 01], [T. WASHIO 00]),

la décomposition de domaine (cf [J. CADAFALCH 99])

ou le multibloc (cf [J. CADAFALCH 98]). Cette méthode consiste à faire un premier bilan de flux composite sur chaque volume de contrôle, de niveau G_{L+1} , dont au moins une des faces est à l'interface $G_{L+1} - G_L$. Ces faces n'étant pas conjointes à celles du niveau G_L , on détermine le flux composite via un deuxième bilan fait sur un volume de contrôle du niveau G_{L+1} qui correspond au premier volume de contrôle dont les dimensions ont été prolongées jusqu'à ce que ses faces (seulement celles sur l'interface des deux niveaux) soient contiguës à celles des volumes de contrôle du niveau G_L (pour plus de détails voir [U. TROTTEBERG 01]).

- Soit on utilise une méthode *FIC* (Flux Interface Conservation), proposée par [P. ANGOT 92], qui consiste à faire des bilans de flux composites (flux provenant de deux niveaux G_L ou G_{L+1} suivant que la face du volume de contrôle est située à l'interface des deux niveaux ou non) sur les volumes de contrôles des noeuds situés à l'interface de deux niveaux.

Dans notre cas, la somme (au sens de l'union) des volumes de contrôle de chaque cellule *AMR* de niveau G_{L+1} est confondue avec celui du père de niveau G_L . Ainsi les faces des volumes de contrôles de niveau G_{L+1} appartiennent à l'interface $G_{L+1} - G_L$ sont contiguës à celles des volumes de contrôle de niveau G_L appartenant à l'interface $G_{L+1} - G_L$. Donc l'interpolation conservative proposée par [U. TROTTEBERG 01] revient ici à une méthode *FIC* proposée par [P. ANGOT 92].

On décide donc de comparer l'opérateur de prolongement *FIC* à l'interpolation Q_2 . Pour cela, on calcule les erreurs ϵ_{G_1} , ϵ_{G_0} et $\epsilon_{composite}$, ainsi que l'énergie avec un niveau d'*AMR* dans la zone bornée $[0, 0.5][0.8, 1]$, en partant d'un niveau G_0 de finesse différente. On note N le nombre de noeuds utilisés pour la résolution.

Le tableau 3.13 montre que l'utilisation de l'opérateur de prolongement *FIC* avec celui de restriction *FWICV* est très performante en terme de conservation d'énergie et d'erreur (à condition d'avoir pris un maillage de départ assez fin). On note de plus que pour un maillage $G_0 = 32 * 32$, par exemple, l'erreur ϵ_{G_0} est la même avec l'interpolation Q_2 qu'avec la méthode *FIC* (tableau 3.13). Par contre, la répartition de cette erreur diffère suivant l'opérateur de prolongement choisi (voir figure 3.22 sur un maillage $G_0 = 32 * 32$). Sachant que l'énergie est conservée à 0.001% près pour la méthode *FIC* contre 0.086% près pour l'interpolation Q_2 , on en déduit qu'on peut obtenir deux solutions identiques à 10^{-2} près, qui ont des propriétés de conservation différentes. On note de plus, que les

G_0	Interpolation	N	ϵ_{G_1}	ϵ_{G_0}	$\epsilon_{composite}$	E_{num} sur G_0
16 * 16	$FWICV - Q_2$	907	$9.61 \cdot 10^{-4}$	$3.8 \cdot 10^{-2}$	$1.29 \cdot 10^{-3}$	8.9937
	$FWICV - FIC$	828	$2.148 \cdot 10^{-3}$	$3.8 \cdot 10^{-2}$	$2.133 \cdot 10^{-3}$	8.9738
32 * 32	$FWICV - Q_2$	3188	$5.762 \cdot 10^{-4}$	$1.48 \cdot 10^{-2}$	$6.561 \cdot 10^{-4}$	8.9811
	$FWICV - FIC$	3029	$5 \cdot 10^{-4}$	$1.48 \cdot 10^{-2}$	$5 \cdot 10^{-4}$	8.9735
48 * 48	$FWICV - Q_2$	6845	$3.3 \cdot 10^{-4}$	$8.33 \cdot 10^{-3}$	$3.67 \cdot 10^{-4}$	8.977
	$FWICV - FIC$	6606	$2.174 \cdot 10^{-4}$	$8.31 \cdot 10^{-3}$	$2.168 \cdot 10^{-4}$	8.97346
64 * 64	$FWICV - Q_2$	11878	$2.09 \cdot 10^{-4}$	$5.498 \cdot 10^{-3}$	$2.306 \cdot 10^{-4}$	8.9758
	$FWICV - FIC$	11559	$1.211 \cdot 10^{-4}$	$5.48 \cdot 10^{-3}$	$1.208 \cdot 10^{-4}$	8.9734
96 * 96	$FWICV - Q_2$	26939	$1 \cdot 10^{-4}$	$3.042 \cdot 10^{-3}$	$1.092 \cdot 10^{-4}$	8.9745
	$FWICV - FIC$	26460	$5.05 \cdot 10^{-5}$	$3.037 \cdot 10^{-3}$	$5.049 \cdot 10^{-5}$	8.9734

Tableau 3.13 : Comparaison des erreurs et de l'énergie pour deux opérateurs de prolongement et une injection $FWICV$. Maillage G_0 variable, un niveau d'AMR sur la zone bornée $[0, 0.5][0.8, 1]$.

erreurs ϵ_{G_1} et $\epsilon_{composite}$ sont meilleures avec une méthode FIC qu'avec une interpolation Q_2 , excepté pour le maillage $G_0 = 16 * 16$.

On décide de calculer l'ordre de convergence des deux méthodes : $FIC - FWICV$ et $Q_2 - FWICV$. Pour cela, on représente sur la figure (3.23) le logarithme népérien de l'erreur $\epsilon_{composite}$ en fonction du logarithme népérien de la quantité $\sqrt{(\frac{N}{L_x L_z})}$, où N représente le nombre de noeuds nécessaires à la résolution. On note que les deux méthodes permettent d'atteindre l'ordre limite $q = 2$. Cependant, l'utilisation d'une interpolation Q_2 freine l'obtention de cet ordre limite car l'ordre local n'est que de 1.8 contre 2.1 avec un prolongement FIC . De plus, si on se réfère à l'ordre local équivalent obtenu sans AMR (voir figure 3.13), on note qu'il est égal à 1.99.

L'ensemble de ces résultats nous amène à conclure qu'il est impératif d'utiliser un opérateur de restriction et de prolongement conservatifs pour des phénomènes globaux, afin d'obtenir des résultats satisfaisants en terme d'erreur et de convergence tout en conservant l'énergie. Néanmoins, on peut envisager d'utiliser un opérateur de prolongement à

condition d'utiliser un maillage grossier de départ très fin.

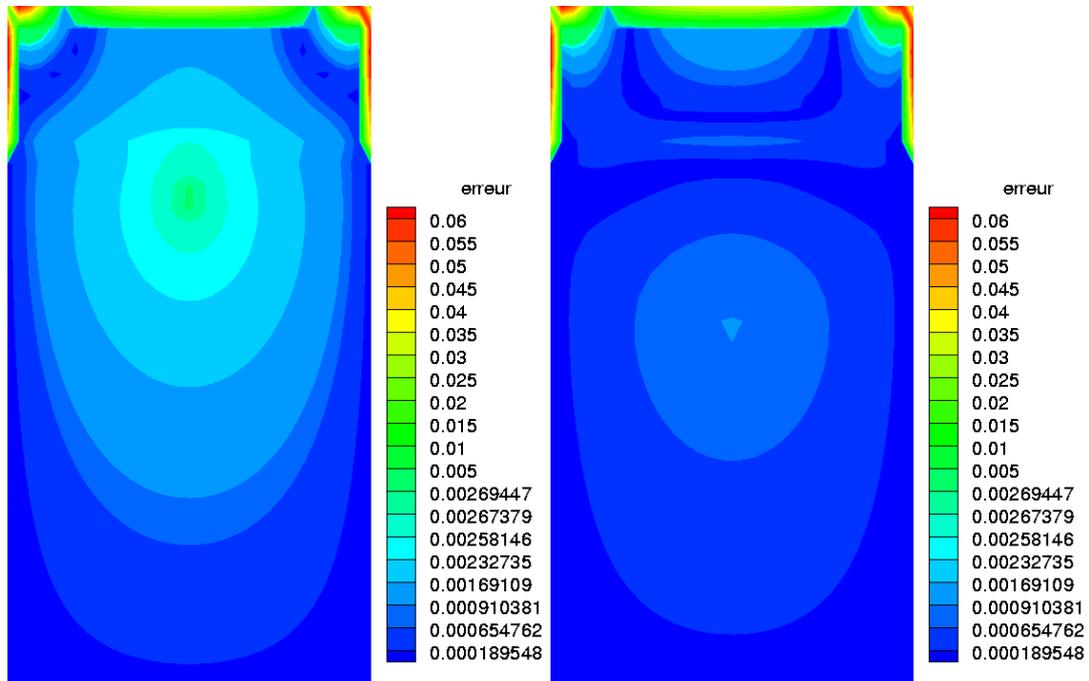


Figure 3.22 : Répartition de l'erreur sur le niveau $G_0 = 32 * 32$ avec interpolation Q_2 sur la gauche puis une interpolation conservative (FIC) sur la droite. Injection FWICV.

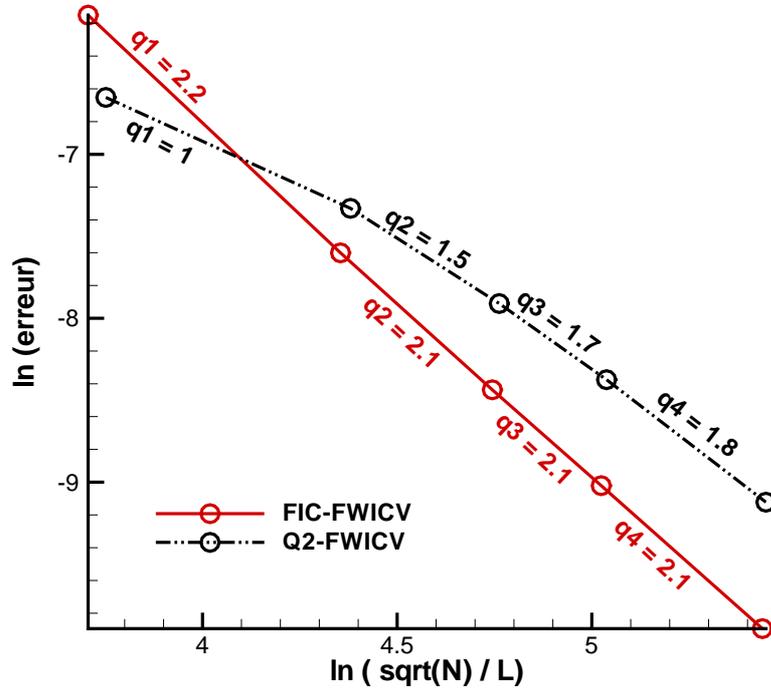


Figure 3.23 : Comparaison des ordres de convergence obtenus avec une interpolation Q_2 à ceux obtenus avec une interpolation conservative (FIC). Injection FWICV.

3.3 Résultats numériques sur l'équation de transport d'espèce : application au cas d'une tache cisailée

On évalue les performances de l'AMR sur la résolution de l'équation de transport d'espèces en deux dimensions d'espace :

$$\frac{\partial S_p}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla}(S_p) = \vec{\nabla} \cdot (D \vec{\nabla}(S_p))$$

avec S_p la concentration massique, $\vec{V}(x, z) = (u(x, z), w(x, z))$ le champ de vitesse et D le coefficient de diffusion moléculaire.

On considère un domaine carré d'arête $0.1m$ dans lequel on place un disque de concentration massique $1g.m^{-3}$ submergé dans un fluide de concentration massique nulle (figure 3.24).

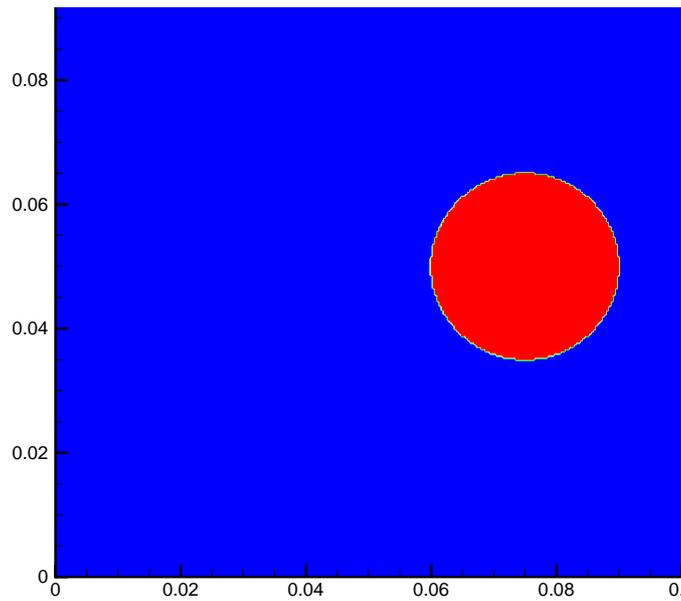


Figure 3.24 : Répartition initiale de la concentration massique.

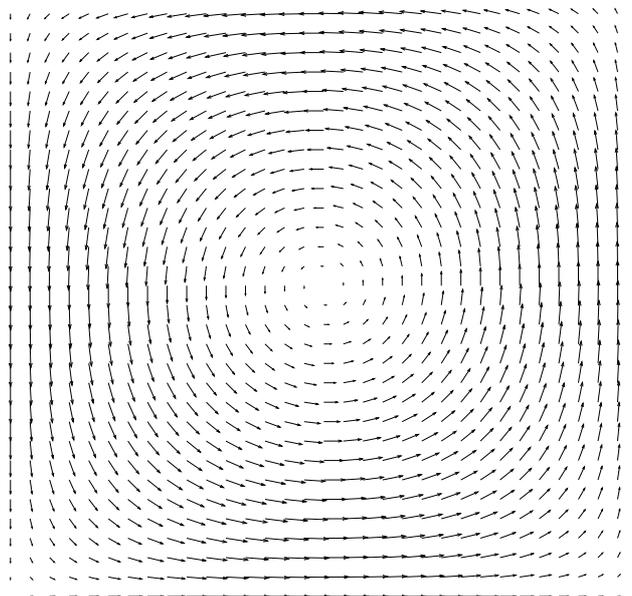


Figure 3.25 : Champ de vitesses imposé.

On impose un champ de vitesse tournant d'intensité moyenne $V_{moyen} = 0.1m.s^{-1}$ et de forme analytique (voir aussi figure 3.25):

$$\begin{aligned}
u(x, z) &= -V_{moyen} \cos\left(\frac{\pi(x - x_0)}{L}\right) \sin\left(\frac{\pi(z - z_0)}{L}\right) \\
w(x, z) &= V_{moyen} \sin\left(\frac{\pi(x - x_0)}{L}\right) \cos\left(\frac{\pi(z - z_0)}{L}\right)
\end{aligned} \tag{3.1}$$

$(x_0 = 0.05m, z_0 = 0.05m)$ sont les coordonnées du centre du domaine. On précise que le disque a initialement un rayon r de $0.015m$ et un centre $(x = 0.075m, z = 0.05m)$. Dans cette section, la partie diffusion de l'équation de transport est traitée de manière implicite.

3.3.1 Influence du type d'interpolation appliqué à la concentration massique

On cherche à savoir quel effet peut avoir l'interpolation sur la qualité de la solution. On teste alors différents types d'interpolations Q_1 , Q_2 et Q_3 sur la concentration massique. On calcule son évolution sur un maillage grossier $G_0 = 16 * 16$ avec deux niveaux d'*AMR*, soit un maillage fin équivalent sans *AMR*, $G = 144 * 144$. On choisit un pas de temps égal à $\Delta t = 0.001s$ et une durée de simulation de $0.2s$.

On observe sur la figure 3.26 la formation d'oscillations qui se développent. Ce comportement est connu sous le nom de phénomène de *Gibbs*. Ces oscillations ont une amplitude d'autant plus forte que le degré du polynôme d'interpolation est élevé. On constate que l'interpolation Q_1 permet de réduire ces oscillations. On en conclue que lorsque les solutions sont discontinues, il est indispensable d'utiliser des polynômes d'interpolation de plus petit degré possible.

On vient de montrer que l'interpolation Q_1 permet d'éviter les oscillations. Considérons un noeud LP_{lim} de limite de niveau *AMR*, G_1 , devant être interpolé. Si les noeuds $(a_1, a_2, a_3, a_4) \in G_0$ intervenant dans l'interpolation Q_1 ont tous une valeur nulle, il en sera de même pour le noeud LP_{lim} . Si il existe au moins un noeud a_i , $i \in [1, 4]$ tel que $S_p(a_i) > 0$ (i.e. le noeud *LP* est trop proche du front), alors $S_p(LP_{lim}) > 0$.

Or sur un maillage fin équivalent, sans *AMR*, le noeud correspondant à LP_{lim} a une valeur nulle. Donc l'interpolation Q_1 peut introduire une légère diffusion s'il existe au moins un noeud LP_{lim} trop proche du front. La figure 3.27 compare l'iso-concentration $S_p = 0.5g.m-3$ obtenue avec une interpolation Q_1 sur les limites de niveau à celle obtenue avec une interpolation binaires sur les limites de niveau. Dans les deux cas, un critère de gradient de concentration a été choisi. L'iso-concentration avec *AMR* et interpolation

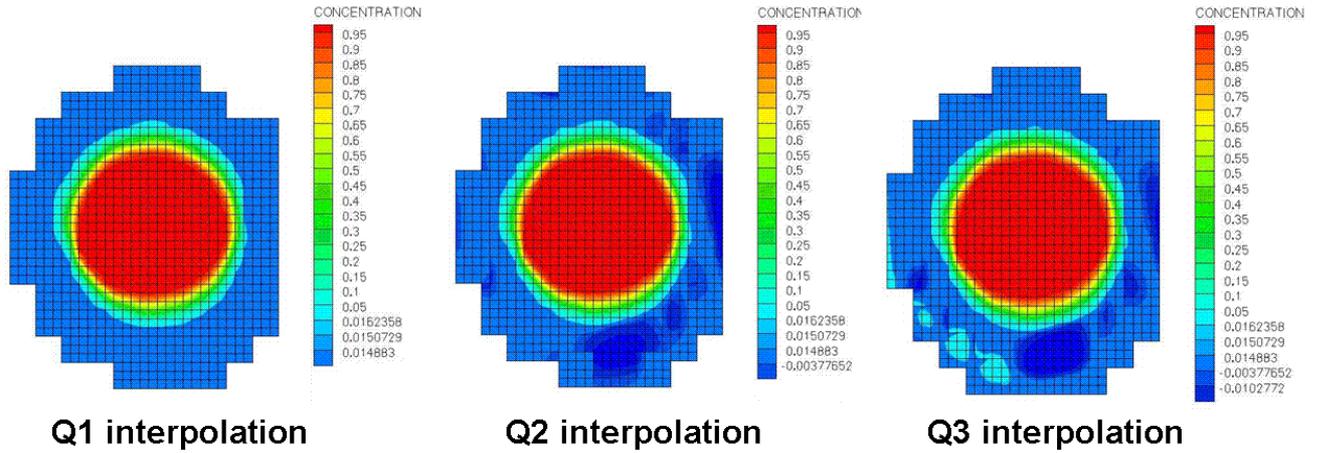


Figure 3.26 : Phénomène de Gibbs : interpolation Q_1 (gauche), Q_2 (centre) et Q_3 (droite).

binaires, est confondue avec celle sans AMR . Par contre, on observe une dégradation de cette iso-concentration lorsque l'interpolation Q_1 est utilisée (voir tête et queue de la tache de la figure 3.27).

Pour palier à ce problème, on peut élargir le niveau AMR , G_1 , de façon à ce que les noeuds à interpoler soient assez éloignés du front de concentration massique. Étant donné qu'on cherche à optimiser le temps de calcul et la taille mémoire, la proposition qui vient d'être faite ne semble pas être un bon compromis.

Pour éviter la diffusion introduite par l'interpolation Q_1 et pour minimiser le nombre de noeuds à résoudre, une alternative consiste à interpoler les noeuds LP_{lim} de limite de niveau AMR avec une interpolation binaire.

Notons $LPG0 \in G_0$, le père de $LP \in G_1$, $S_{pmax} = \max_{x \in G_0}(S_p(x))$ et $S_{pmin} = \min_{x \in G_0}(S_p(x))$. Cette stratégie consiste à imposer $S_p(LP_{lim}) = S_{pmax}$ si $S_p(LPG0) \geq 0.5(S_{pmin} + S_{pmax})$, et $S_p(LP_{lim}) = S_{pmin}$ si $S_p(LPG0) < 0.5(S_{pmin} + S_{pmax})$.

On va donc privilégier une interpolation binaire de la concentration massique lorsque l'espèce est faiblement diffusive.

3.3.2 Capacité de l'AMR à réduire la diffusion numérique.

L'objectif de cette sous section est de montrer l'efficacité de la méthode pour réduire la diffusion numérique.

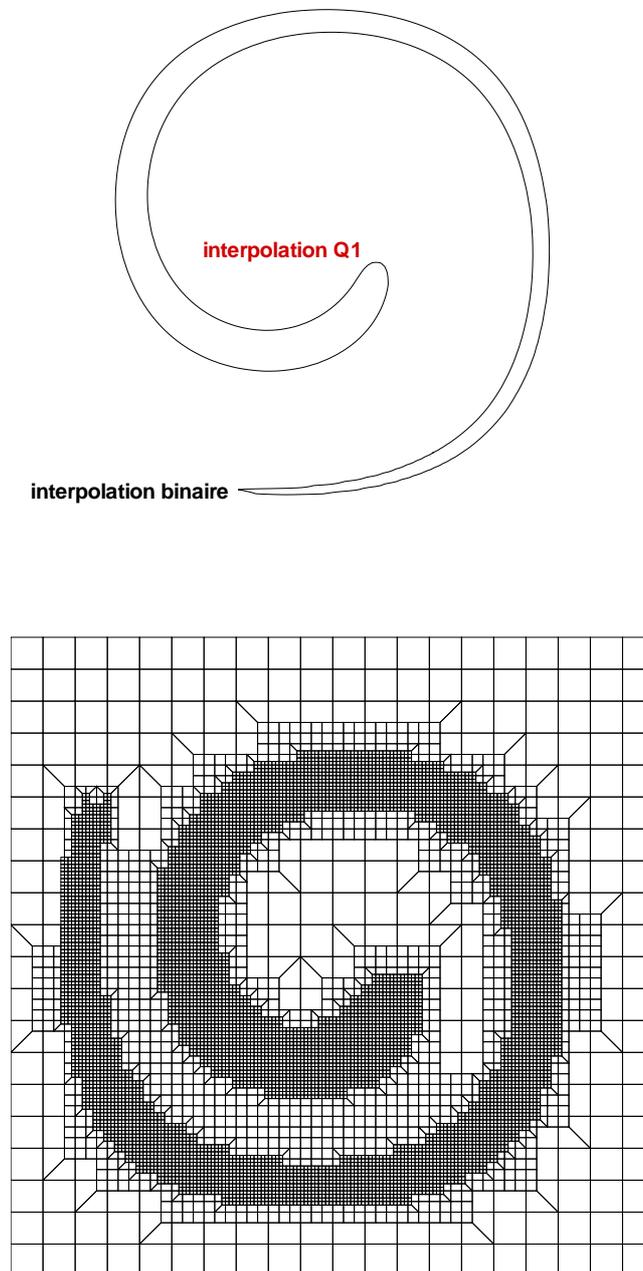


Figure 3.27 : Isovaleur $S_p = 0.5g.m^{-3}$ sur deux niveaux d'AMR, à $t = 8s$, en partant de $G_0 = 20 * 20$ (gauche). Maillage AMR utilisé (droite).

3.3 Résultats numériques sur l'équation de transport d'espèce : application au cas d'une tache cisailée 113

On considère un maillage grossier $G_0 = 16 * 16$ avec deux niveaux d'AMR, un pas de temps $\Delta t = 0.001s$, un temps total $t = 2s$ et un coefficient de diffusion $D = 10^{-8}m^2.s^{-1}$. On résout l'équation de transport sur les noeuds du niveau G_0 et sur ceux à l'intérieur des autres niveaux AMR G_1 et G_2 . Les noeuds aux limites des deux niveaux AMR sont interpolés en binaire. Le champ de vitesse analytique est imposé sur G_0 et sur la totalité des niveaux fins.

On a représenté sur la figure 3.28, différentes masses du disque cisailé pour estimer la diffusion numérique (M_1, M_2, M_3) mais aussi vérifier la conservation de la masse (M_0, M). M_0 est la masse théorique calculée à partir du volume (Πr^2) et de la concentration massique initiale $1g.m^{-3}$, soit $M_0 = 7.07 \cdot 10^{-4}g$. M est la masse numérique calculée à partir de l'équation discrétisée. M_1 (resp M_2, M_3) représente la masse pour laquelle la concentration massique est supérieure à $0.9g.m^{-3}$ (resp $0.95g.m^{-3}, 0.99g.m^{-3}$).

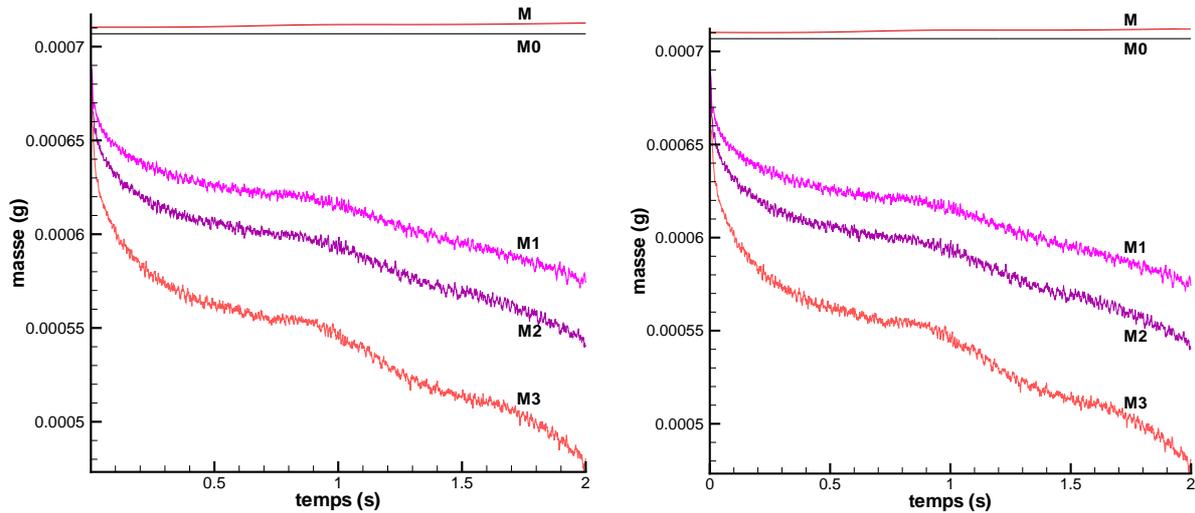


Figure 3.28 : Evolution de la masse, avec $G_0 = 16 * 16$ et 2 niveaux d'AMR pour la figure de gauche et avec $G = 144 * 144$ sans AMR pour la figure de droite. Le champ de vitesse est analytique.

On a rassemblé les valeurs des masses M_1, M_2, M_3 dans le tableau 3.14, au temps $t = 2s$.

Dans la première colonne, on utilise un maillage grossier $G_0 = 16 * 16$ avec deux niveaux d'AMR et dans la deuxième colonne, un maillage unique fin $G = 144 * 144$.

Pour déterminer si la masse est conservée, on calcule l'écart relatif e_{rel} de M à M_0 , soit $e_{rel} = \frac{|M - M_0|}{M_0}$. En utilisant les résultats du tableau 3.14, on évalue cet écart à 0.8%. Ceci

masse	<i>AMR</i> , vitesse analytique	sans <i>AMR</i> , vitesse analytique
M	0.000712591	0.000712161
M_1	0.000578019	0.000578019
M_2	0.000540958	0.000540958
M_3	0.000478011	0.000478011

Tableau 3.14 : M , M_1 , M_2 et M_3 à $t = 0.8s$ sur $G_0 = 16 * 16$ avec deux niveaux d'*AMR* (colonne 1) puis $G = 144 * 144$ sans *AMR* (colonne 2). Vitesse analytique imposée sur tous les noeuds.

montre une bonne conservation de la masse.

Il est à noter que si on utilise un maillage unique $G = 16 * 16$ sans *AMR*, les masses M_1 , M_2 et M_3 ont totalement disparu au temps $t = 2s$, ce qui signifie que la tache cisailée a été complètement diffusée (cf figure 3.29). En calculant l'écart relatif e_{rel} de M à M_0 , on obtient 15%. Ceci montre simplement que l'utilisation de la méthode *AMR* permet de réduire la diffusion numérique de la même façon que ce qu'on pourrait obtenir sur un maillage fin équivalent sans *AMR*. Sachant que l'évolution temporelle des différentes masses est quasiment la même avec et sans *AMR*, on souhaite savoir si la répartition de la concentration massique reste la même avec et sans *AMR*.

On compare donc la solution obtenue sur un maillage fin $G = 144 * 144$, S_{psamr} , sans *AMR* à celle obtenue via deux niveaux d'*AMR*, S_{pamr} . Pour cela, on calcule l'erreur ϵ en norme L^2 entre ces deux solutions en considérant S_{psamr} comme solution de référence (cf définition de l'erreur 3.1). On trouve $\epsilon = 6.1672 \cdot 10^{-5}$. On peut donc affirmer que la répartition de la concentration est la même à 10^{-4} près avec et sans *AMR*. Ceci, montre que la méthode est satisfaisante, non seulement parce qu'elle permet de réduire la diffusion numérique mais aussi parce qu'elle ne dégrade la solution.

3.3.3 Choix du critère de raffinement

Suite aux explications fournies dans la sous-section 2.2, nous avons choisi un critère de raffinement-déraffinement de type gradient de concentration.

On a essayé de faire une analogie avec un mur semi-infini en thermique pour évaluer le seuil

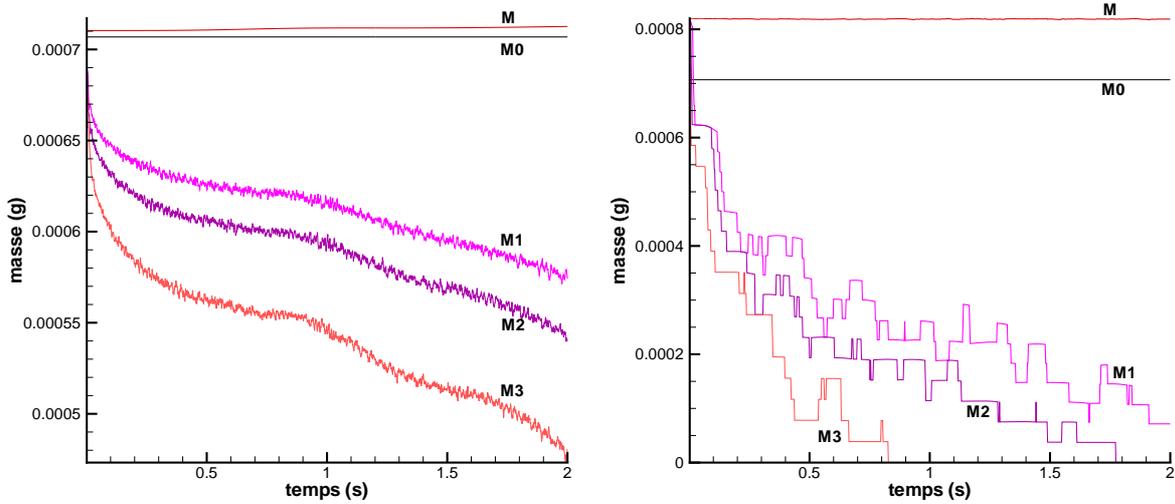


Figure 3.29 : Evolution de la masse, avec $G_0 = 16 * 16$ et 2 niveaux d'AMR pour la figure de gauche et avec $G = 16 * 16$ sans AMR pour la figure de droite. Le champ de vitesse est analytique.

de raffinement $seuil_{grad}$ (défini dans la sous-section 2.2), cependant, les effets d'inertie et le fort cisaillement de la tache ne permettent pas de définir une valeur de seuil satisfaisante, à partir de la seule diffusion.

Par expérience, on a estimé qu'une variation de $0.07g.m^{-3}$, par maille, de concentration massique S_p sur un maillage $G_0 = 16 * 16$ permettait un recouvrement parfait du front de concentration par les cellules AMR , durant le temps de simulation. Cette variation donne au seuil la valeur $seuil_{grad} = 11.9$. Elle est utilisée pour générer des cellules AMR sur les différents niveaux.

Il suffit de prendre une valeur du seuil de déraffinement légèrement inférieur à $seuil_{grad}$, soit $seuil_{grad-deraf} = 11$.

On remarque que, à condition qu'on ait bien choisi $seuil_{grad}$, l'utilisation de l'interpolation binaire pour la concentration massique n'introduit aucune diffusion et permet même de la contenir à l'intérieur des niveaux AMR . Une sous-estimation de ce seuil n'est donc pas gênante car elle n'entraînera aucune augmentation du nombre de cellules AMR créés (cette remarque n'est bien sûr pas valable pour un seuil nul).

3.3.4 Calcul du champ de vitesse

Dans la sous section précédente, le champ de vitesses analytique a été imposé sur tous les niveaux d'*AMR*. On souhaite estimer l'erreur introduite par une interpolation Q_1 de la vitesse sur les deux niveaux fins d'*AMR*. Cette interpolation n'étant pas à divergence nulle, il est important d'évaluer son effet sur la dynamique de la tache cisailée. On va donc se mettre dans les mêmes conditions que dans la sous section précédente, mis à part que la vitesse est maintenant interpolée sur les niveaux fins dans le cas *AMR*. On trace l'évolution des différentes masses M , M_1 , M_2 et M_3 jusqu'au temps $t = 2s$ sur la figure 3.30 dans les cas avec et sans *AMR*. On rassemble les résultats obtenus avec et sans *AMR* dans le tableau 3.15 au temps $t = 2s$: On indique dans la première colonne les valeurs des masses avec *AMR* et dans la deuxième colonne les valeurs des masses sans *AMR*. On a reporté dans la troisième colonne les écarts relatifs e_{rel} de masse obtenus avec les deux méthodes. On précise que ces calculs ont été effectués en considérant les valeurs des masses obtenues sans *AMR* comme référence.

On remarque que ces écarts sont très faibles pour M_1 , M_2 et M_3 , donc la méthode *AMR* donne une évolution des différentes masses assez proche de la méthode classique. Par contre, l'écart relatif entre M et M_0 atteint 4%. Ce qui est plus inquiétant, est l'augmentation de masse M , assez marquée (de l'ordre de 4% cf figure gauche 3.30) lorsque la vitesse est interpolée sur les niveaux fins.

Qu'en est-il de la repartition de la concentration massique? Sachant que les résultats sur la masse M sont peu convainquant, on s'attend à avoir une répartition de la concentration très moyenne. Pour en savoir plus, on calcule l'erreur ϵ entre la solution avec *AMR* et celle sans *AMR*. Cette fois-ci, $\epsilon = 0.11$ (voir aussi la figure 3.31) contre $\epsilon = 6.1672 \cdot 10^{-5}$ lorsque le champ de vitesses analytique est imposé sur les niveaux fins. Ce résultat montre donc que la méthode *AMR* a su réduire la diffusion numérique efficacement, cependant la répartition de la concentration est très sensible à la dynamique de l'écoulement. Il est donc impératif d'avoir un champ de vitesses assez précis sur les niveaux fins. Il est bien évident que dans la plupart des cas, le champ de vitesses n'est pas analytique.

Remarque: Si on regarde la figure 3.31 de plus près, on observe que la tache cisailée avec *AMR* est en retard par rapport à celle sans *AMR*. Le champ analytique étant *sinusoïdal*, l'interpolation linéaire a tendance à sous-estimer son amplitude au voisinage de ses extrema. La tache évoluant dans la zone de fort cisaillement, la sous-estimation du champ de vitesses expliquerait le retard observé sur la figure 3.31.

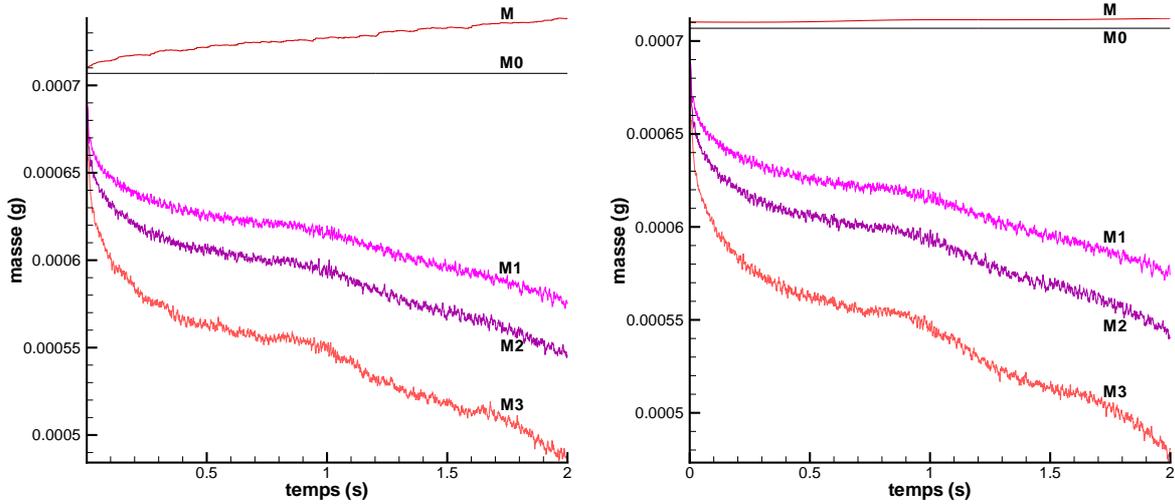


Figure 3.30 : Evolution de la masse, avec $G_0 = 16 * 16$ et 2 niveaux d'AMR pour la figure de gauche et avec $G = 144 * 144$ sans AMR pour la figure de droite. Vitesse interpolée sur les niveaux fins AMR et analytique ailleurs.

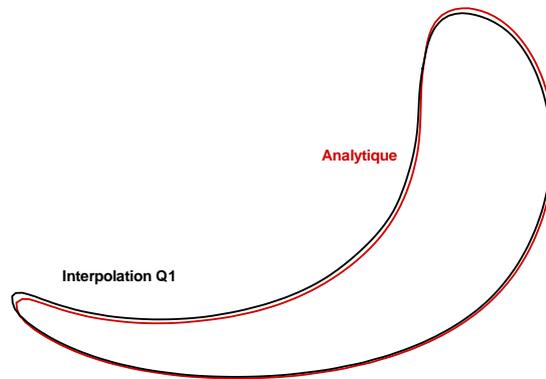


Figure 3.31 : Concentration massique sur le niveau deux d'AMR, avec un champ de vitesse analytique (rouge, trait continu) et interpolé (noir, trait discontinu). Maillage $G_0 = 16 * 16$, $t = 2s$.

Deux possibilités peuvent être alors envisagées pour améliorer la précision du champ de vitesses : la première consiste à résoudre les équations de Navier-Stokes à l'intérieur des niveaux fins et interpoler leurs limites dans le but de réduire l'effet de l'interpolation. La

masse	<i>AMR</i> , vitesse Q_1	sans <i>AMR</i> , vitesse analytique	écart relatif en %
M	0.000738269	0.000712161	4.43
M_1	0.000576199	0.000578019	0.315
M_2	0.000544176	0.000540958	0.6
M_3	0.000486193	0.000478011	1.7

Tableau 3.15 : M , M_1 , M_2 et M_3 à $t = 2s$ sur $G_0 = 16 * 16$ avec deux niveaux d'*AMR* (colonne 1) puis $G = 144 * 144$ sans *AMR* (colonne 2). Vitesse interpolée sur les niveaux fins *AMR* et analytique ailleurs.

deuxième méthode consiste à se placer sur un maillage grossier G_0 assez fin de façon à ce que le champ de vitesses ait déjà la précision souhaitée et de l'interpoler sur les niveaux fins.

Nous allons voir si la deuxième méthode donne des résultats satisfaisants. On considère un maillage $G_0 = 32 * 32$ avec deux niveaux d'*AMR*. Son maillage équivalent fin sans *AMR* est $G = 288 * 288$.

La figure 3.32 illustre les évolutions temporelles des masses M , M_1 , M_2 et M_3 avec et sans *AMR* jusqu'au temps $t = 2s$. Comme on l'a vu pour le cas *AMR* avec $G_0 = 16 * 16$, on retrouve une évolution des masses M_1 , M_2 et M_3 similaires avec et sans *AMR* avec des écarts relatifs très faibles entre 0.1% et 0.2% (cf tableau 3.16). On observe cette fois-ci que l'évolution de la masse M avec la méthode *AMR* est très proche de celle sans *AMR*. Ceci montre qu'en partant d'un maillage grossier G_0 plus fin, la seule interpolation du champ de vitesses et la résolution du transport d'espèce sur les niveaux fins permettent d'obtenir une évolution de la masse M très satisfaisante.

D'ailleurs, le tableau 3.16 vient conforter la démarche suivie puisque l'écart relatif entre M et M_0 est de 0.1% pour le cas *AMR* et 0.2% pour le cas sans *AMR*. Donc dans les deux cas, la masse est bien conservée. Quant à la répartition de la concentration massique, on calcule une erreur $\epsilon = 3.8345 \cdot 10^{-2}$ (cf figure 3.33), donc la dynamique de la tache cisailée a été mieux traitée en partant d'un maillage $G_0 = 32 * 32$ au lieu de $G_0 = 16 * 16$.

On peut donc conclure que la méthode *AMR* donne de bons résultats concernant la réduction de la diffusion numérique et la précision de la répartition de la concentration

3.3 Résultats numériques sur l'équation de transport d'espèce : application au cas d'une tache cisailée 119

massique lorsque la vitesse est interpolée sur les niveaux fins et l'équation de transport résolue sur ces mêmes niveaux. Il est à noter que cette stratégie (vitesse interpolée, transport résolu) est intéressante si et seulement si on utilise un maillage grossier sur lequel la précision souhaitée du champ de vitesse a été atteinte et que celle souhaitée pour la concentration massique ne l'a pas encore été.

masse	AMR, vitesse Q_1	sans AMR, vitesse analytique	écart relatif en %
M	0.00071077	0.00071056	0.003
M_1	0.000637201	0.000636302	0.1413
M_2	0.000621058	0.000620178	0.1419
M_3	0.000585361	0.000584021	0.2294

Tableau 3.16 : M , M_1 , M_2 et M_3 à $t = 0.8s$ sur $G_0 = 16 * 16$ avec deux niveaux d'AMR (colonne 1) puis $G = 144 * 144$ sans AMR (colonne 2). Vitesse interpolée sur les niveaux fins AMR et analytique ailleurs.

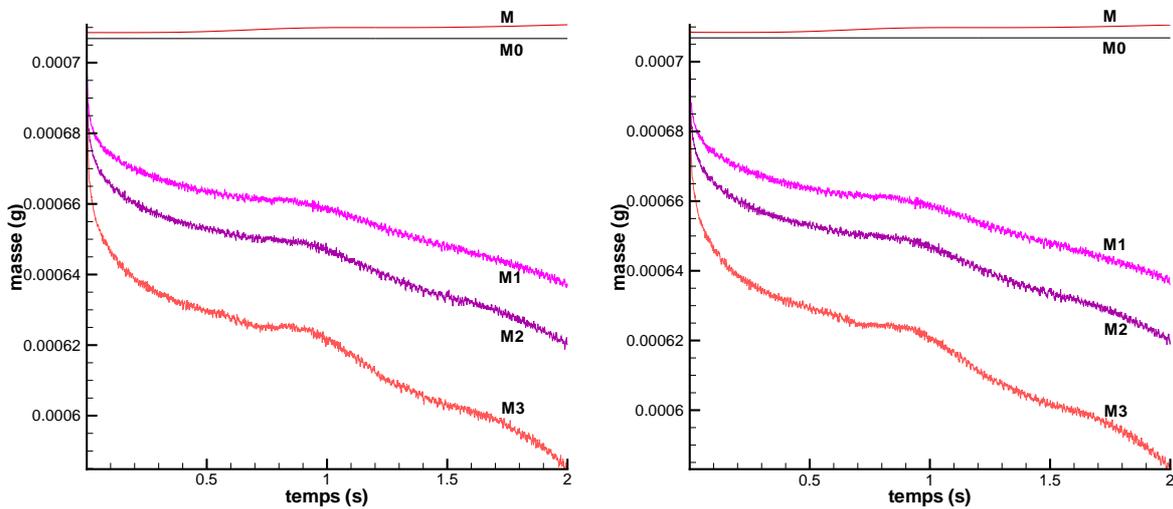


Figure 3.32 : Evolution de la masse, avec $G_0 = 32 * 32$ et 2 niveaux d'AMR pour la figure de gauche et avec $G = 288 * 288$ sans AMR pour la figure de droite. Le champ de vitesse est interpolé sur les niveaux fins et analytique ailleurs.

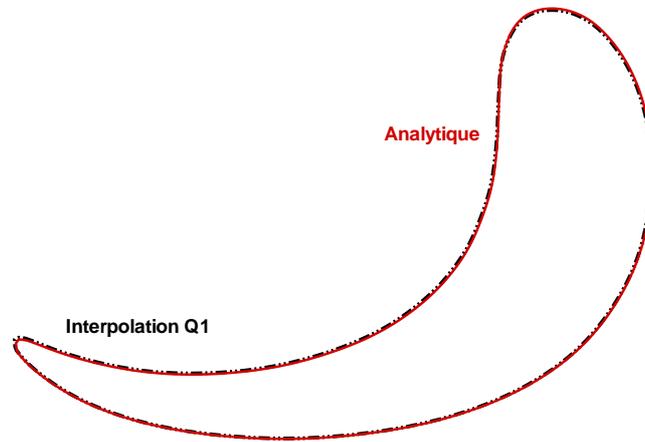


Figure 3.33 : Concentration massique sur le niveau deux d'AMR, avec un champ de vitesse analytique (rouge, trait continu) et interpolé (noir, trait discontinu). Maillage $G_0 = 32 * 32$, $t = 0.8s$.

3.3.5 Ordre de convergence de la méthode AMR

On veut savoir ici comment agit la méthode AMR sur l'ordre de convergence des schémas. On effectue donc dans un premier temps une étude de convergence en maillage de la tache cisillée sans AMR pour deux coefficients de diffusion $D = 10^{-9}m^2.s^{-1}$ et $D = 10^{-8}m^2.s^{-1}$.

Cette étude consiste à calculer successivement les erreurs ϵ_h entre la solution de référence et la solution obtenue sur chaque maillage $G = (N_x - 1)(N_z - 1)$ de pas d'espace de plus en plus petit.

Lorsque la solution analytique n'existe pas, la solution de référence est calculée sur un maillage très fin de façon à ce que la solution soit suffisamment résolue. Comme son nom l'indique, cette solution sert de référence. ensuite, on peut tracer la courbe $\ln(\epsilon) = \ln(k) - q \ln\left(\frac{L}{\sqrt{N}}\right)$, où k est une constante, $L = \sqrt{L_x L_z}$ et q l'ordre de convergence. Cette

courbe n'étant pas linéaire, on calcule une succession d'ordre locaux :

$$q_i = \frac{|\ln(\epsilon_{h_i}) - \ln(\epsilon_{h_{i-1}})|}{|\ln(\frac{L}{\sqrt{N_i}}) - \ln(\frac{L}{\sqrt{N_{i-1}}})|}$$

L'objectif est d'estimer l'ordre de convergence limite q .

Dans un deuxième temps, on réalise la même étude avec la méthode *AMR*. Les calculs d'erreur ϵ_h successifs entre la solution de référence et les solutions, pour des pas d'espace h de plus en plus petit, s'obtiennent en augmentant le nombre de niveaux *AMR*.

On prend comme solution de référence la tache cisailée sur un maillage $G = 1296 * 1296$ au temps $t = 8s$. Le pas de temps choisi est $\Delta t = 4.10^{-4}s$. On a rassemblé les erreurs à chaque maillage G dans le tableau 3.17 pour différents coefficients de diffusion sans *AMR*. On voit que pour $D = 10^{-8}m^2.s^{-1}$, les ordres de convergence successifs q_h (cf figure 3.34) tendent vers l'ordre limite $q = 2$, ce qui concorde avec l'ordre théorique du schéma utilisé. Par contre, on remarque que pour $D = 10^{-9}m^2.s^{-1}$ la convergence se fait plus difficilement puisque $q_4 = 1.99$ pour $D = 10^{-8}m^2.s^{-1}$ contre seulement $q_4 = 1.29$ pour $D = 10^{-9}m^2.s^{-1}$ sur la figure 3.35.

		$D = 10^{-8}m^2.s^{-1}$	$D = 10^{-9}m^2.s^{-1}$
maillage	N	ϵ_h	ϵ_h
144 * 144	21025	0.3151	
162 * 162	26569	0.2854	0.3264
324 * 324	105625	0.1370	0.2017
432 * 432	187489	$8.5657 \cdot 10^{-2}$	0.1533
648 * 648	421201	$3.8298 \cdot 10^{-2}$	$9.0825 \cdot 10^{-2}$

Tableau 3.17 : *Etude de convergence en maillage sans AMR pour le cas de la tache cisailée*

Ceci s'explique par le fait que pour un même temps t_f , la longueur caractéristique de diffusion λ est plus grande pour un coefficient de diffusion $D = 10^{-8}m^2.s^{-1}$ que $D = 10^{-9}m^2.s^{-1}$. L'ordre de grandeur de cette longueur caractéristique associée au coefficient de diffusion $D = 10^{-d}$, est $\lambda_d = \sqrt{2Dt_f}$ en faisant une analogie avec le cas d'un

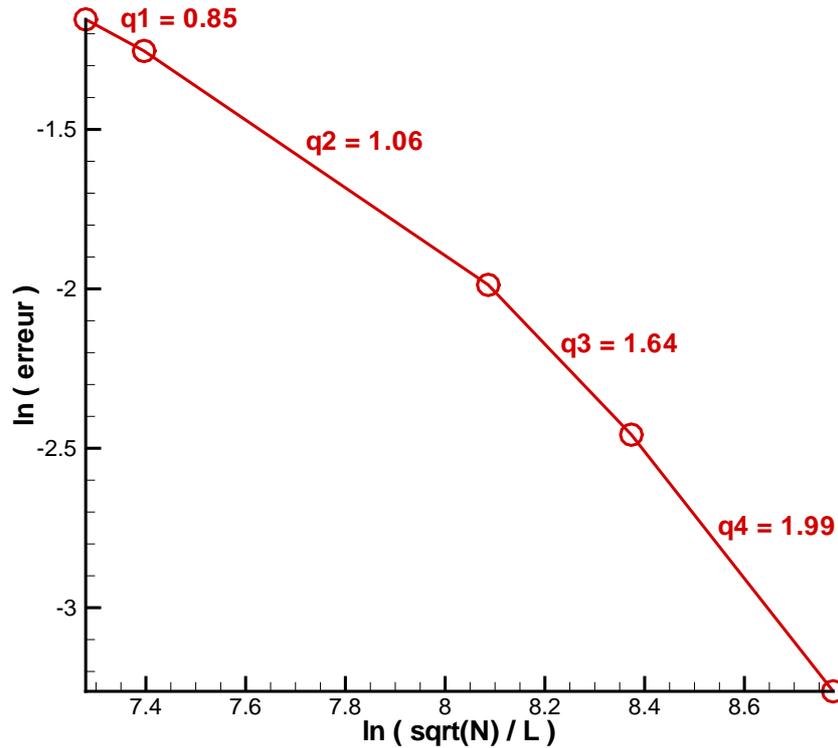


Figure 3.34 : Courbe de convergence pour un coefficient $D = 10^{-8}m^2.s^{-1}$ sans AMR .

mur semi-infini initialement isotherme, auquel on impose initialement une température de paroi (cf [?]). Avec un temps $t_f = 8s$, on trouve $\lambda_8 = 5.656 \cdot 10^{-4}m$ et $\lambda_9 = 1.788 \cdot 10^{-4}m$.

Il est aussi intéressant de noter que $\lambda_9 = \frac{\lambda_8}{\sqrt{10}}$.

Il est clair que, l'ordre du schéma ne pourra pas avoir atteint sa valeur limite tant que la longueur caractéristique λ de la diffusion physique, sera inférieure à la longueur caractéristique de la diffusion numérique. Sachant que la diffusion numérique s'étale sur deux à trois mailles, on détermine un pas d'espace critique Δx_{ci} (on se limite au pas d'espace suivant x car dans ce cas $\Delta x = \Delta z$) pour lequel $\lambda_i, i \in [8, 9]$ est supérieure à trois mailles. On pourra alors considérer que la solution a convergé en maillage lorsque $\Delta x \leq \Delta x_{c8}$ (respectivement $\Delta x \leq \Delta x_{c9}$) pour $D = 10^{-8}m^2.s^{-1}$ (respectivement $D = 10^{-9}m^2.s^{-1}$). Les pas d'espaces critiques sont rassemblés dans le tableau 3.18, ainsi que les maillages équivalents, pour les deux coefficients de diffusion.

On note que les résultats du tableau 3.18 concordent avec ceux des figures (3.34) et (3.35). En effet, pour un maillage $648 * 648$ (supérieur au maillage critique $G_c = 529 * 529$), on obtient un ordre de convergence $q_4 = 1.99$. On peut estimer que λ_8 est de l'ordre de

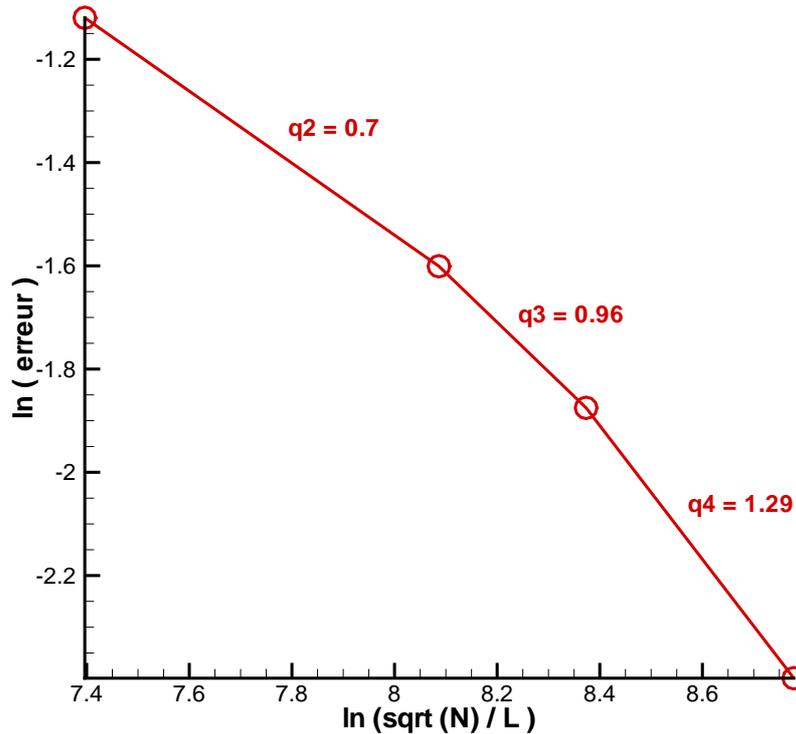


Figure 3.35 : Courbe de convergence pour un coefficient $D = 10^{-9}m^2.s^{-1}$ sans *AMR* .

$\frac{\lambda_8}{\Delta x} = \frac{\lambda_8}{\Delta z} = 3.68 \sim 4$ mailles. Par contre, pour $D = 10^{-9}m^2.s^{-1}$, le maillage $648 * 648$ est inférieur au maillage critique $G_c = 1676 * 1676$. il est donc illusoire de penser que l'ordre limite est atteint. En effet, la figure 3.35 montre que l'ordre de convergence n'est que $q_4 = 1.29$. On calcule d'ailleurs que $\frac{\lambda_9}{\Delta x} = \frac{\lambda_9}{\Delta z} = 1.2$ mailles.

On s'intéresse maintenant à l'ordre de convergence avec la méthode *AMR*. Pour cela, on considère un maillage grossier $G_0 = 16 * 16$, un pas de temps $\Delta t = 0.308 * 10^{-4}s$ et la solution obtenue sans *AMR* sur le maillage $G = 1620 * 1620$, comme solution de référence. La diminution du pas d'espace le plus petit se fait en ajoutant des niveaux *AMR*.

Le tableau 3.19 montre les différents écarts $ecart_h$ lorsque le nombre de niveaux *AMR* augmente. La figure 3.36, utilisant les données du tableau, montre que l'ordre de convergence tend vers une valeur limite $q = 2$. La méthode *AMR* permet donc de conserver l'ordre de convergence des schémas.

On peut refaire la même étude de convergence pour $D = 10^{-9}m^2.s^{-1}$ avec la méthode *AMR*. Cependant $G_4 = 1296 * 1296$ est inférieur au maillage critique. Il faudrait donc comparer les solutions obtenues sur différents maillage avec une solution de référence sans

	Δx_c	G_c
$D = 10^{-8}m^2.s^{-1}$	$1.885 \cdot 10^{-3}$	$529 * 529$
$D = 10^{-9}m^2.s^{-1}$	$5.96 \cdot 10^{-4}$	$1676 * 1676$

Tableau 3.18 : *Pas d'espace critiques et maillages critiques pour différents coefficients de diffusion.*

		$D = 10^{-8}m^2.s^{-1}$
maillage	NBP	$ecart_h$
$60 * 60$	2633	$2.1726 \cdot 10^{-2}$
$180 * 180$	14068	$1.2804 \cdot 10^{-2}$
$540 * 540$	61395	$3.54065 \cdot 10^{-3}$

Tableau 3.19 : *Etude de convergence en maillage avec AMR pour le cas de la tache cisailée avec $D = 10^{-8}m^2.s^{-1}$*

AMR sur un maillage $G = 11664 * 11664$. L'obtention de cette solution demandant beaucoup de ressources informatiques et de temps, on se contentera des résultats obtenus pour un coefficient de diffusion $D = 10^{-8}m^2.s^{-1}$ pour conclure sur l'efficacité de la méthode AMR.

On peut visualiser les solutions obtenues avec AMR sur les figures (3.37) et (3.38). On peut remarquer que les cellules AMR (disposées de part et d'autre du front de concentration) recouvrent parfaitement la zone de diffusion. Ceci permet de conserver la totalité de l'information à l'intérieur de chaque niveau AMR, et donc de réduire efficacement la diffusion numérique sans dégrader la répartition de la concentration massique. On peut observer que plus on ajoute de niveaux AMR, plus on se rapproche de la solution de référence (cf figure 3.39).

3.3.6 Performances en temps CPU et mémoire de l'AMR

Ayant montré les performances de convergence en maillage de la méthode AMR, on s'intéresse à sa capacité à optimiser le temps CPU et la taille mémoire. Pour cela, on analyse plusieurs paramètres liés au temps de simulation et à la taille mémoire.

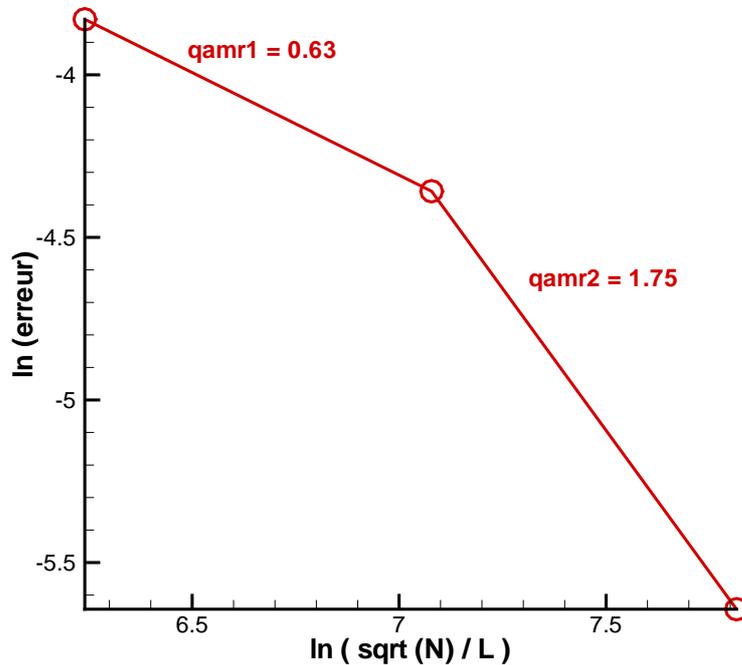


Figure 3.36 : Courbe de convergence pour un coefficient $D = 10^{-8}m^2.s^{-1}$ avec AMR .

On choisit un maillage grossier $G_0 = 20 * 20$ et un pas de temps $\Delta t = 3.08 * 10^{-4}s$. De plus, la tache est cisailée pendant une durée de $8s$.

Analyse de la mémoire

Pour estimer les performances de la méthode AMR en terme de mémoire, on compare la mémoire vive utilisée pour simuler le cas avec AMR et celle utilisée sur maillage fin équivalent sans AMR . On rassemble les résultats obtenus dans le tableau 3.20. Dans la première colonne est indiqué le pas d'espace $\Delta x = \Delta z$ dans le cas sans AMR et celui sur le niveau le plus fin dans le cas avec AMR . Dans la deuxième colonne (respectivement la troisième colonne), on donne la mémoire utilisée, en Mega octets (Mo), avec (respectivement sans) AMR , mem_{AMR} (respectivement mem). Dans la dernière colonne, on a calculé le rapport $rap = \frac{mem_{AMR}}{mem}$.

Afin de mieux interpréter les résultats du tableau 3.20, on s'appuie en plus sur les

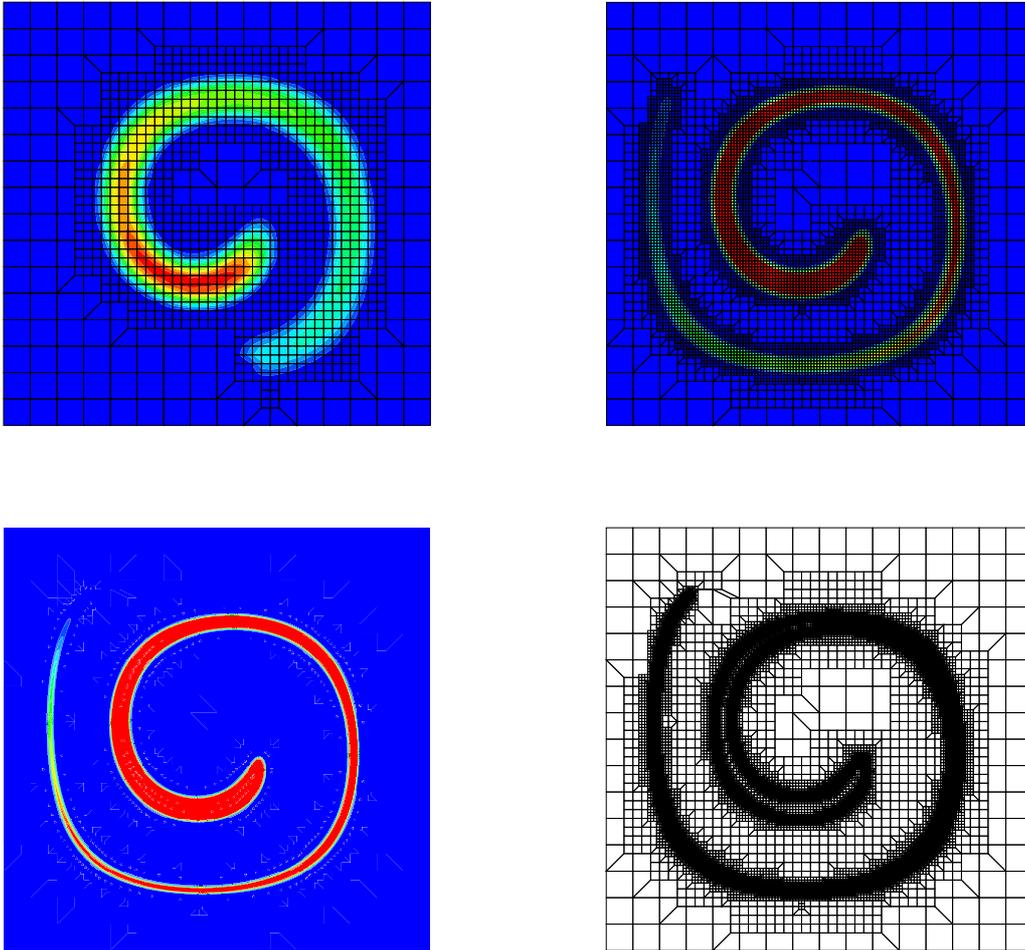


Figure 3.37 : *Concentration massique à $t = 8s$, sur $G_0 = 16 * 16$ et de 1 à 3 niveaux d'AMR. Le champ de vitesse est analytique sur tous les niveaux. Seuls sont représentés les noeuds résolus de niveau le plus fin.*

résultats de la figure 3.40, représentant $rgl = \frac{NBG_L}{KKT_L}$ en fonction du temps, et ceux du tableau 3.21. NBG_L représente le nombre de noeuds résolus avec la méthode *AMR* sur les $L + 1$ niveaux et KKT_L le nombre de noeuds résolus sans *AMR* sur un maillage fin équivalent. On observe sur le tableau 3.20 que pour de petits maillages tels $G = 60 * 60$, la méthode *AMR* est plus coûteuse en mémoire que celle sans *AMR*. Ceci est normal car on résout avec l'*AMR* un nombre de noeuds qui correspond à 71% des noeuds qu'il aurait fallu résoudre sur un maillage fin équivalent sans *AMR* (cf tableau 3.21). Quand le nombre de niveaux *AMR* augmente le rapport des mémoires *rap* diminue (cf tableau

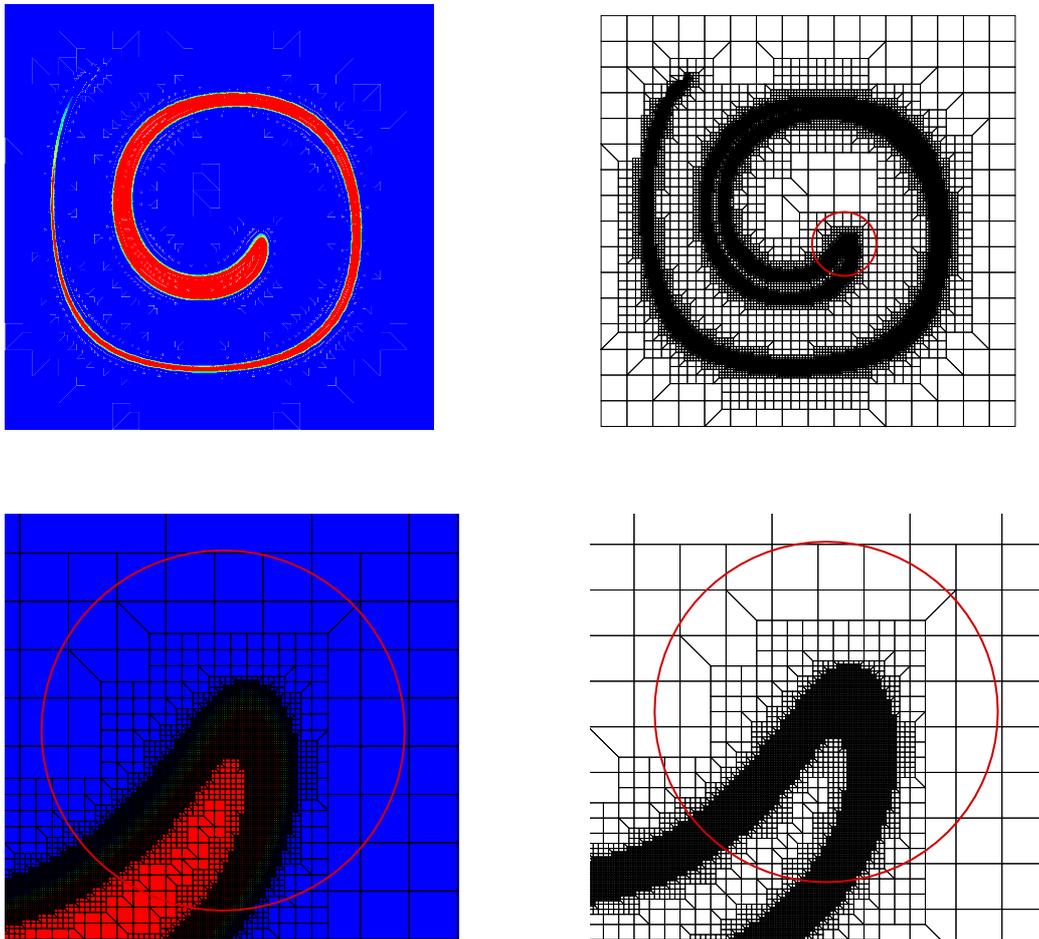


Figure 3.38 : Concentration massique à $t = 8s$, sur $G_0 = 16 * 16$ et 4 niveaux d'AMR. Le champ de vitesse est analytique sur tous les niveaux. Seuls sont représentés les noeuds résolus de niveau le plus fin.

3.20), ainsi que le rapport r_{gl} (cf tableau 3.21). On obtient par exemple un gain de 70% de mémoire avec trois niveaux d'AMR et la résolution de seulement 21% des noeuds qu'il aurait fallu résoudre sur un maillage fin équivalent sans AMR.

Ce résultat n'est pas surprenant dans la mesure où l'AMR nécessite la création de tableaux supplémentaires (tableau de connection entre cellules AMR, tableau indiquant la structure en arbre des noeuds père-fils, ...) pour gérer le raffinement et le déraffinement. Donc la méthode AMR sera performante en terme de mémoire à partir du moment où les ressources dont elle a besoin sont faibles devant celles demandée par le reste du code.

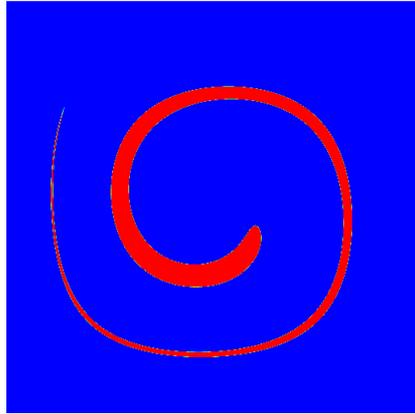


Figure 3.39 : Concentration massique de référence à $t = 8s$, sur $G = 3888 * 3888$. Le champ de vitesse est analytique.

On peut quantifier ce rapport en estimant une valeur critique de rgl , rgl_{crit} , en deçà de laquelle il est intéressant d'utiliser la méthode *AMR*. Soit $rap_{crit} = 0.75$, la valeur critique de rap en deçà de laquelle on estime que le gain en taille mémoire est suffisant pour préférer la méthode *AMR*. On considère la fonction $rap = f(rgl)$. A partir des données des tableaux 3.20 et 3.21, une régression linéaire de la fonction $rap = f(rgl)$ donne un coefficient de corrélation de 0.995 et la droite d'équation $rap = 4.605 * rgl - 0.7376$. On en déduit $rgl_{crit} = 32\%$.

Ainsi, tant que le nombre de noeuds résolus avec *AMR* est inférieur à 32% du nombre de noeuds qu'il aurait fallu résoudre sans *AMR* sur un maillage fin équivalent, la méthode *AMR* permet d'obtenir des gains en taille mémoire très intéressants.

Dans les conditions qui ont été choisies, le critère sur rgl n'est vérifié qu'à partir du troisième niveau *AMR*, donc cette méthode devient très efficace en termes de taille mémoire lorsqu'il y a au moins trois niveaux d'*AMR*.

On observe dans le tableau 3.21 que le rapport rgl diminue quand le nombre de niveaux augmente. Ceci est simplement dû au fait que le nombre de noeuds ayant une concentration massique $S_p = 1g.m^{-3}$ devient petit devant celui ayant une concentration massique $S_p = 0g.m^{-3}$ quand le pas d'espace du maillage diminue. Donc, si on choisit un maillage G_0 assez fin pour que le critère sur rgl soit vérifié pour G_1 , alors il le sera pour tous les autres niveaux G_L , $L > 1$. Ainsi la méthode *AMR* peut être intéressante en terme de taille mémoire dès le premier niveau d'*AMR*.

En effet, si on simule le même cas avec un niveau d'*AMR* en partant du maillage

3.3 Résultats numériques sur l'équation de transport d'espèce : application au cas d'une tache cisailée 129

$G_0 = 180 * 180$, le coût en taille mémoire s'élève à $111Mo$, soit un gain de 60%. Ceci est normal, puisqu'on résout 29% des noeuds qu'il aurait fallu résoudre si on avait utilisé un maillage $G = 540 * 540$ sans *AMR*.

maillage fin	Mémoire avec <i>AMR</i> (Mo)	Mémoire sans <i>AMR</i> (Mo)	rap
60 * 60	18	7	2.6
180 * 180	37	34	1.1
540 * 540	82	281	0.3
1620 * 1620	830	2550	0.33

Tableau 3.20 : Mémoire utilisée (en Mo) pour simuler la tache cisailée avec et sans *AMR*, sur différents maillages. Pour les cas *AMR*, le maillage grossier utilisé est $G_0 = 20 * 20$

maillage fin	NBG_L	KKT_L	rgl
60 * 60	2650	3721	0.7122
180 * 180	14018	32761	0.4279
540 * 540	61170	292681	0.2090
1620 * 1620	289981	2627641	0.1104

Tableau 3.21 : Rapport rgl pour différents nombres de niveaux *AMR* au temps $t = 8s$.
Maillage grossier $G_0 = 20 * 20$

Analyse du temps CPU

On cherche à estimer les performances de la méthode *AMR* en termes de temps de simulation. Le temps CPU total du cas *AMR* est la contribution des temps de gestion du raffinement, gestion du déraffinement et de résolution. On décide de quantifier ces différentes contributions en estimant leur temps moyen $t_{moyen} = \frac{1}{NT} \sum_{i=1,NT} t_i$, où NT

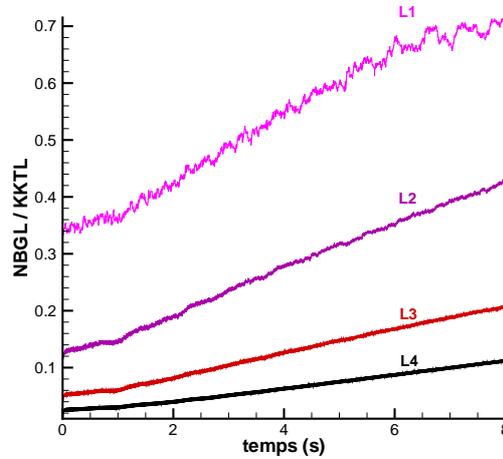


Figure 3.40 : Evolution temporelle du rapport rgl pour plusieurs niveaux AMR .

est le nombre d'itérations en temps et t_i le temps cpu par itération. Soient t_{raf} le temps moyen pour gérer le raffinement, t_{deraf} le temps moyen pour gérer le déraffinement, t_{resol} le temps moyen pour résoudre l'équation de transport et t_{total} le temps moyen total tel que $t_{total} = t_{raf} + t_{deraf} + t_{resol}$. Les figures 3.41 et 3.42 représentent l'évolution de ces différents temps moyen lorsqu'on augmente le nombre de niveaux AMR . On remarque que le déraffinement a un coût très faible jusqu'à trois niveaux d' AMR , puis il devient un peu plus coûteux pour quatre niveaux. Précisons que la gestion du déraffinement se fait de la même façon que celle du raffinement, sauf que celui-ci se fait à une fréquence choisie, contrairement au raffinement qui se fait à toutes les itérations. Par contre, on observe que l'écart entre t_{raf} et t_{resol} s'amenuise quand on augmente le nombre de niveaux puis la gestion du raffinement devient plus coûteuse que la résolution elle-même. On peut donc se demander si la méthode AMR reste intéressante d'utilisation sur plusieurs niveaux. On compare donc les temps moyen de résolution et totaux avec et sans AMR sur des maillages équivalents (cf figures 3.43 et 3.44). De plus, on indique dans les tableaux 3.22 et 3.23, les temps CPU de simulation pour les cas avec et sans AMR , ainsi que les différents temps moyens. La comparaison des temps de simulation CPU avec et sans AMR nous amène à conclure que l' AMR est intéressante en terme de gain en temps CPU à partir de trois niveaux d' AMR où ce gain s'élève à 25%.

La question que l'on se pose maintenant est la suivante: Peut-on relier directement les performances en temps CPU avec le nombre de noeuds traités?

Pour répondre à cette question, on compare les temps moyens t_{tot} avec et sans *AMR* pour un nombre de niveaux *AMR* différent (cf figure 3.41 et 3.42). La figure 3.42 montre que le temps t_{tot} avec *AMR* est égal à 75% de ce même temps sans *AMR*, ce qui rejoint le résultat obtenu sur le temps *CPU* de simulation avec trois niveaux.

Par contre, pour un ou deux niveaux d'*AMR*, les courbes représentant t_{tot} en fonction du nombre d'itérations avec et sans *AMR* se coupent en un point d'intersection (NT_{int}, T_{totint}). Ceci montre qu'à partir du temps $t_{int} = NT_{int} * \Delta t$ la méthode *AMR* devient plus coûteuse en temps *CPU* qu'une méthode classique. Notons $t_{totcrit} = 0.75t_{totint}$ le temps critique à partir duquel on estime que la méthode *AMR* est trop coûteuse en temps *CPU* et NT_{crit} l'itération correspondant à $t_{totcrit}$. On observe dans le tableau que pour un niveau d'*AMR*, la méthode serait intéressante en terme de temps *CPU* si $r_{gl} < 0.53$, pour deux niveaux, si $r_{gl} < 0.27$. On ne peut donc pas relier directement les performances de la méthode *AMR* en terme de gain en temps *CPU* et en taille mémoire. Ceci nous amène à confirmer qu'un autre facteur rend l'*AMR* plus coûteuse en temps *CPU* et pas en taille mémoire. On pense donc immédiatement aux nombreuses allocations-désallocations de tableaux, indispensables à la gestion dynamique du raffinement-déraffinement et aux tests de connection des cellules *AMR*.

D'après les résultats obtenus dans les tableaux 3.20, 3.21, 3.22, 3.23 et 3.24 on peut conclure que si le critère sur r_{gl} est vérifié (c'est à dire : si l'intérêt de la méthode *AMR* en terme de taille mémoire est confirmé), alors son efficacité en terme de gain en temps *CPU* est vérifié. Attention, la réciproque est fausse!

nombre de niveaux	t_{raf}	t_{resol}	t_{total}	$\frac{t_{raf}}{t_{total}}$	$\frac{t_{resol}}{t_{total}}$	temps <i>CPU</i> total
1	0.002499	0.01193	0.02001	0.1249	0.5962	522.1
2	0.04609	0.07379	0.1343	0.3432	0.5494	3495
3	0.4509	0.2476	0.7481	0.6027	0.3310	19460
4	3.4735	1.6411	6.4551	0.5381	0.2542	167940

Tableau 3.22 : Comparaison des temps *CPU* moyens à l'itération $NT = 26000$ pour différents nombres de niveaux *AMR*.

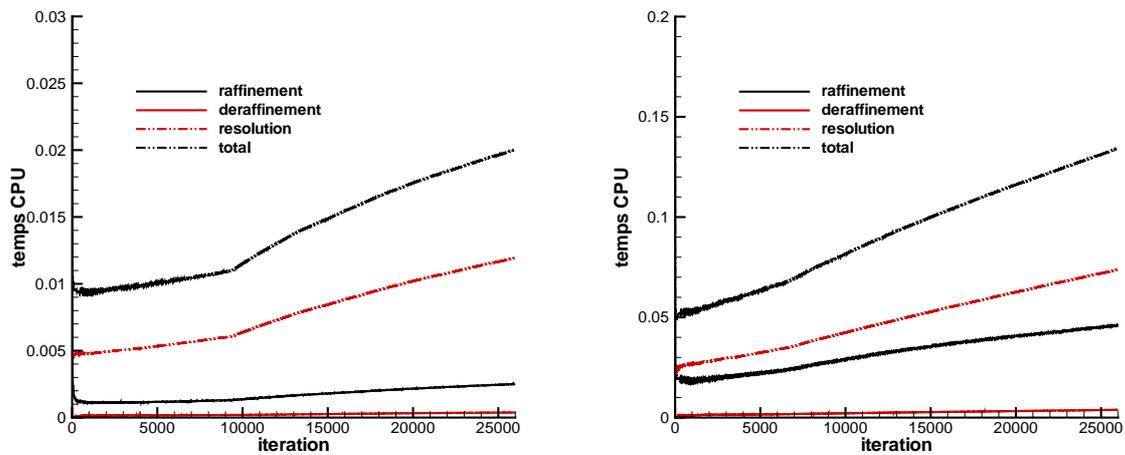


Figure 3.41 : Temps CPU moyens avec un niveau d'AMR à gauche et deux à droite.

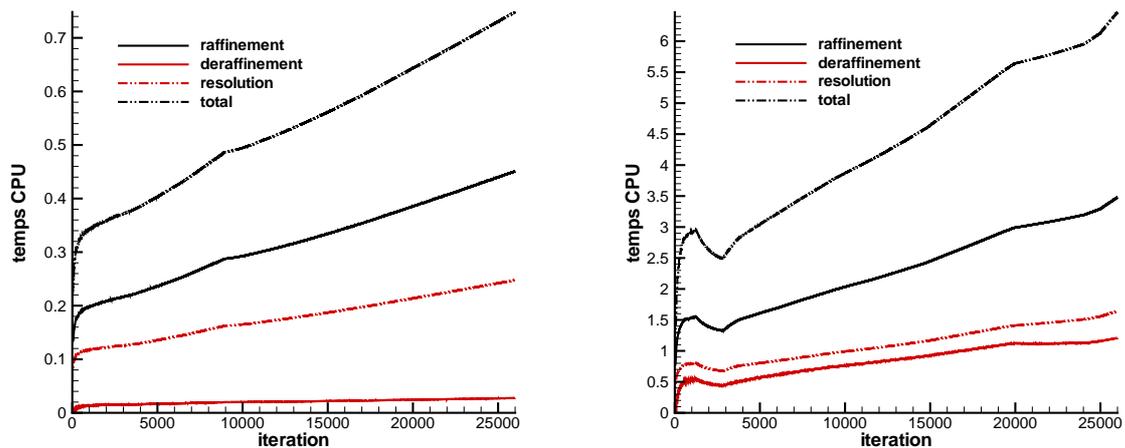


Figure 3.42 : Temps CPU moyens avec trois niveaux d'AMR à gauche et quatre à droite.

Bilan

Après avoir analysé les performances de la méthode *AMR*, en termes de gain en taille mémoire et en temps *CPU*, il apparaît clairement que cette méthode offre un intérêt important quand le nombre de noeuds *AMR* à résoudre est inférieur à 32% du nombre de noeuds qu'il aurait fallu résoudre sans *AMR*, sur un maillage fin équivalent.

Sous cette condition, l'*AMR* assure aussi des gains en temps *CPU* satisfaisants lorsque

maillage	t_{resol}	t_{total}	$\frac{t_{resol}}{t_{total}}$	temps CPU total
60 * 60	0.01156	0.0182	0.6352	475.3
180 * 180	0.1078	0.1207	0.8865	3144
540 * 540	0.9192	0.9932	0.9255	25860

Tableau 3.23 : Comparaison des temps CPU moyens à l'itération $NT = 26000$ pour différents nombres de niveaux AMR.

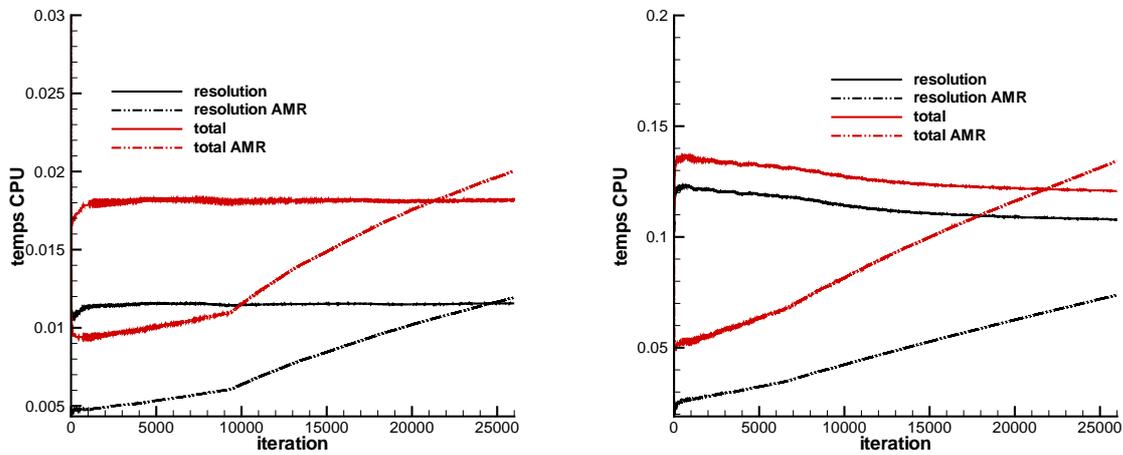


Figure 3.43 : Comparaison des temps CPU moyens avec un niveau d'AMR et sans AMR à gauche. Comparaison des temps CPU moyens avec deux niveaux d'AMR et sans AMR à droite.

la condition précédente est vérifiée, même si la gestion dynamique du raffinement est coûteuse.

On rappelle que seule l'équation de transport d'espèce a été résolue pour ce cas. Étant donné que le coût de la méthode AMR est directement liée au nombre de noeuds AMR résolus, il est évident que si on résout à la fois les équations de transport et de Navier-Stokes, ses performances en termes de gain en temps CPU seront très nettement accrues. Par contre, le nombre de noeuds AMR étant indépendant du nombre d'équations à résoudre, ses performances en terme de gain en taille mémoire resteront inchangées.

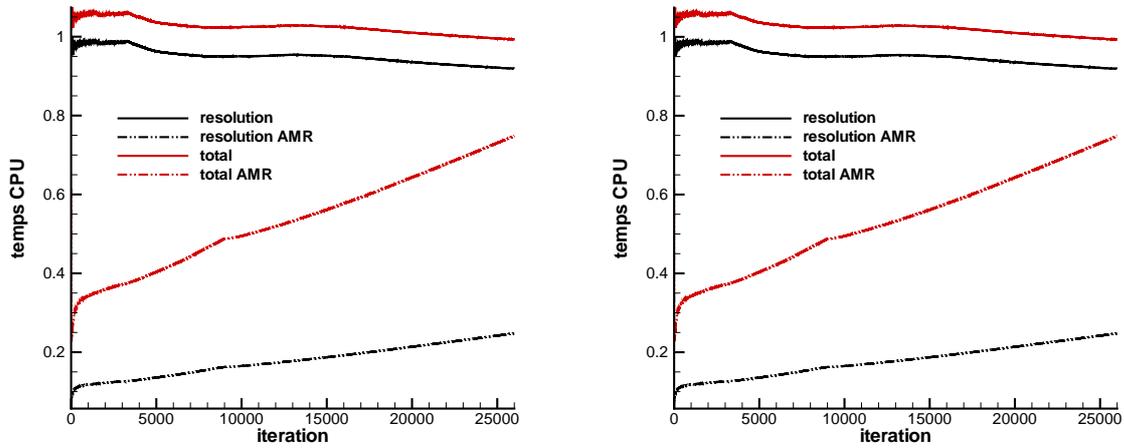


Figure 3.44 : Comparaison des temps CPU moyens avec un niveau d'AMR et sans AMR à gauche. Comparaison des temps CPU moyens avec deux niveaux d'AMR et sans AMR à droite.

niveau AMR	NT_{int}	t_{totint}	NT_{crit}	$t_{totcrit}$	rgl
1	21170	0.018	12769	0.0135	0.53
2	21766	0.12	12709	0.09	0.27

Tableau 3.24 : Comparaison des temps CPU moyens pour un et deux niveaux AMR.

3.4 Résultats numériques sur l'équation de transport d'interface : application au cas d'une tache cisailée

Ayant déjà évalué les performances de l'AMR en temps CPU et en taille mémoire sur un cas similaire en monophasique, on se contente ici d'estimer ses performances en terme de suivi d'interface. On se place, dans le cas de deux fluides non miscibles dans un domaine carré d'arête $0.1m$: le $fluide_1$ occupe initialement un disque de centre $(x = 0.075m, z = 0.05m)$ et de rayon r de $0.015m$, tandis que le $fluide_2$ occupe le reste du domaine (cf figure 3.24). On impose un champ de vitesse tournant d'intensité moyenne $V_{moyen} = 0.1m.s^{-1}$ et de forme analytique (voir figure 3.25):

$$\begin{aligned}
 u(x, z) &= -V_{moyen} \cos\left(\frac{\pi(x - x_0)}{L}\right) \sin\left(\frac{\pi(z - z_0)}{L}\right) \\
 w(x, z) &= V_{moyen} \sin\left(\frac{\pi(x - x_0)}{L}\right) \cos\left(\frac{\pi(z - z_0)}{L}\right)
 \end{aligned}$$

$(x_0 = 0.05m, z_0 = 0.05m)$ sont les coordonnées du centre du domaine.

3.4.1 Couplage *AMR* et *VOF*

On cherche à montrer dans cette sous-section l'apport de la méthode *AMR* à l'approche *VOF*. On va donc commencer par montrer les avantages et inconvénients de la méthode *VOF*. On montre ensuite comment la méthode *AMR* peut accroître le nombre de cas pour lesquels l'approche *VOF* peut être utilisée.

La méthode *VOF* consiste à reconstruire l'interface géométriquement, ce qui permet de connaître la position de l'interface, au cours du temps, de manière très précise. L'inconvénient de cette méthode est que si l'interface est trop cisailée par rapport à un maillage donné (i.e. l'épaisseur du fluide est trop fine par rapport à la taille des mailles), elle se fragmente (voir figure 3.45 sur le maillage $G = 20 * 20$). On peut réduire cette fragmentation, jusqu'à la faire disparaître, quand on diminue la taille des mailles. C'est ce qui est observé sur la figure 3.45. Cependant, si ce cisaillement est trop important, au point de nécessiter un maillage dont le nombre de noeuds à résoudre dépasse la taille mémoire des machines mises à disposition, la méthode *VOF* devient inutilisable.

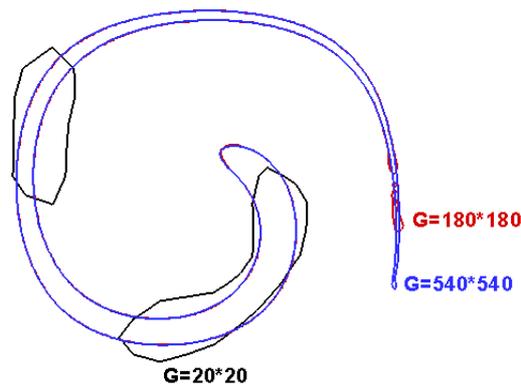


Figure 3.45 : Position de l'interface à $t = 1.23s$ pour des maillages de pas d'espace différents.

La tache cisailée de la figure 3.45 n'étant pas fragmentée pour un maillage $540 * 540$, on décide de comparer cette solution à celle obtenue avec trois niveaux d'*AMR* en partant d'un maillage grossier $G_0 = 20 * 20$. Au bout de $t = 1.23s$, on calcule une erreur $\epsilon = 6 * 10^{-14}$, ce qui montre l'efficacité de l'*AMR* à obtenir une solution aussi précise que si on avait utilisé un maillage fin équivalent sans *AMR*, ce qui est visible sur les figures 3.46 et 3.47.

L'approche *AMR* ne prétend pas améliorer la méthode *VOF*, mais seulement rendre accessible la finesse du maillage requise afin que la méthode *VOF* reste efficace (pas de fragmentation d'interface).

Pour s'assurer que l'approche *AMR* se comporte de la même manière qu'une méthode sans *AMR*, on effectue un deuxième test, qui consiste à imposer le champ de vitesses (3.1) pendant la première moitié du temps de simulation, puis à imposer à la tache cisailée un champ de vitesses inverse pendant la deuxième moitié du temps de la simulation (test de réversibilité). On compare les solutions *AMR* à celles obtenues sans *AMR* sur une durée de $t = 6.3s$ (cf figures 3.48, 3.49) puis de $t = 12.6s$ (cf figures 3.50, 3.51).

On observe que les solutions se comportent de la même façon avec et sans *AMR*, à savoir une bonne réversibilité du phénomène quand la tache est cisailée pendant une courte durée (voir figure 3.49), car la tache retrouve sa forme initiale à $t = 6.3s$. Par contre, pour une simulation plus longue, la solution finale (à $t = 12.6s$) ressemble à un disque déformé (cf figure 3.51). Pour le cas sans *AMR*, on retrouve des résultats similaires à ceux obtenus par [BREIL 01].

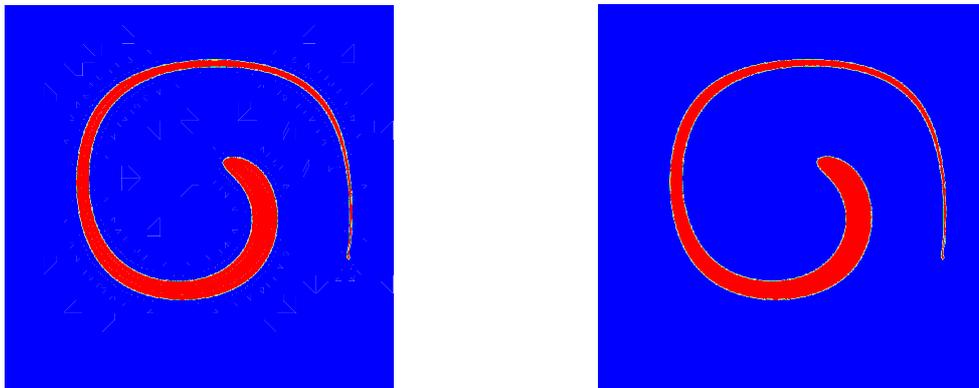


Figure 3.46 : Comparaison de la position de l'interface avec trois niveaux d'AMR (gauche) et sans AMR sur un maillage fin équivalent (droite).

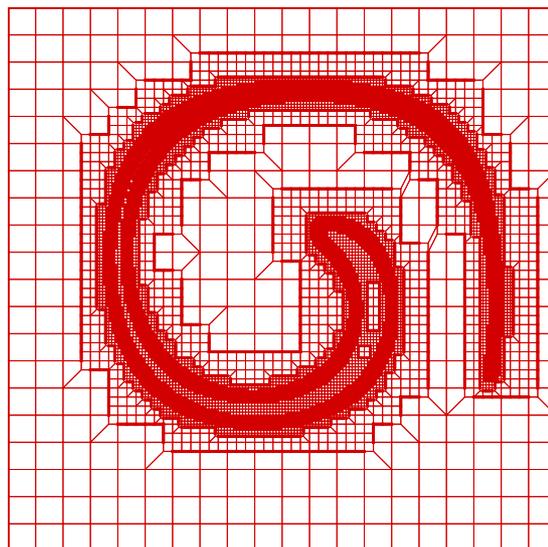


Figure 3.47 : Maillage AMR utilisé pour suivre l'interface.

3.4.2 Couplage AMR et TVD

On cherche à montrer dans cette sous-section l'efficacité de la méthode *AMR* à réduire la diffusion numérique introduite par l'utilisation d'un schéma *TVD* pour advecter



Figure 3.48 : Comparaison de la position de l'interface avec trois niveaux d'AMR (gauche) et sans AMR sur un maillage fin équivalent (droite), sur un allé-retour de $t = 6.3s$.



Figure 3.49 : Comparaison de la position de l'interface avec trois niveaux d'AMR (gauche) et sans AMR sur un maillage fin équivalent (droite), sur un allé-retour de $t = 6.3s$.

l'interface. Ayant déjà démontré les performances de l'approche *AMR* dans le cas monophasique avec le transport d'un front de concentration, on se contente ici de montrer que les solutions obtenues avec la méthode *AMR* ont le même comportement qu'avec une ap-

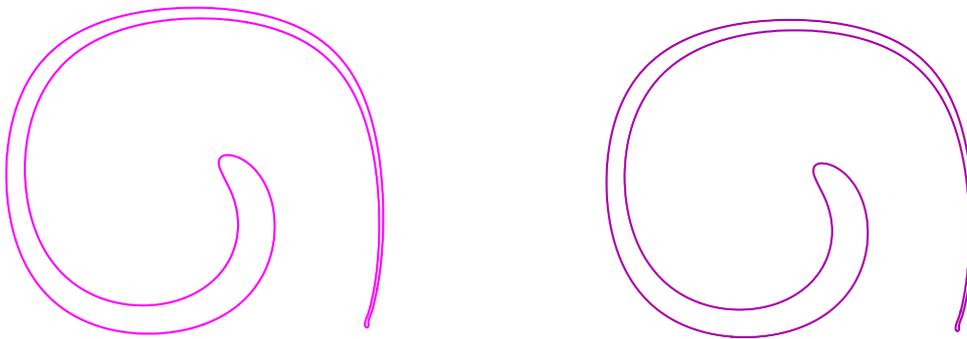


Figure 3.50 : Comparaison de la position de l'interface avec trois niveaux d'AMR (gauche) et sans AMR sur un maillage fin équivalent (droite), sur un allé-retour de $t = 12.6s$.



Figure 3.51 : Comparaison de la position de l'interface avec trois niveaux d'AMR (gauche) et sans AMR sur un maillage fin équivalent (droite), sur un allé-retour de $t = 12.6s$.

proche classique. De la même manière que dans la sous-section 3.4.1, on impose au disque initial le champ de vitesses (3.1) pendant la première moitié du temps de simulation, puis le champ de vitesses inverse pendant la deuxième moitié du temps de simulation. On

compare les solutions *AMR* à celles obtenues sans *AMR* sur une durée de $t = 6.3s$ (cf figures 3.52, 3.53) puis de $t = 12.6s$ (cf figures 3.54, 3.55).

Comme dans le cas avec la méthode *VOF*, on observe que les solutions se comportent de manière similaire avec et sans *AMR*, à savoir une bonne réversibilité du phénomène quand la tache est cisailée pendant une courte durée (voir figure 3.49), car la tache retrouve sa forme initiale à $t = 6.3s$. Par contre, pour une simulation plus longue, la forme du disque au temps final est déformé sur sa partie droite (cf figure 3.55).



Figure 3.52 : *Comparaison de la position de l'interface avec trois niveaux d'AMR (gauche) et sans AMR sur un maillage fin équivalent (droite), sur un allé-retour de $t = 6.3s$.*



Figure 3.53 : *Comparaison de la position de l'interface avec trois niveaux d'AMR (gauche) et sans AMR sur un maillage fin équivalent (droite), sur un allé-retour de $t = 6.3s$.*

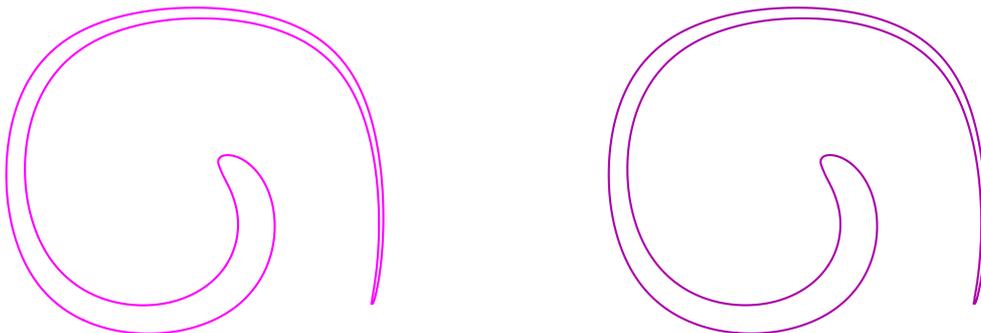


Figure 3.54 : *Comparaison de la position de l'interface avec trois niveaux d'AMR (gauche) et sans AMR sur un maillage fin équivalent (droite), sur un allé-retour de $t = 12.6s$.*



Figure 3.55 : *Comparaison de la position de l'interface avec trois niveaux d'AMR (gauche) et sans AMR sur un maillage fin équivalent (droite), sur un allé-retour de $t = 12.6s$.*

3.5 Résultats numériques sur l'équation de Navier-Stokes 2D: application au cas du tourbillon de Green-Taylor

L'objectif de cette section est de montrer l'efficacité de la méthode *AMR* pour résoudre les équations de Navier-Stokes, concernant la précision des solution et les gains en terme de taille mémoire et de temps *CPU*.

Étant donné qu'on s'intéresse plutôt à des écoulements diphasiques ou monophasique avec transport d'espèces inertes, on considère ici une cavité rectangulaire $\Omega = [-0.1m, 0.1m][0.1m, 0.1m]$, dans laquelle on place deux fluides. Initialement, le premier occupe la surface d'un cercle de centre $(0.05m, 0m)$ et de rayon $0.02m$, tandis que le deuxième fluide occupe le reste du domaine Ω . Il existe de plus, un écoulement instationnaire dans la cavité, appelé tourbillon de Green-Taylor. Celui-ci a été modifié en intégrant un terme source S_0 dans les équations de Navier-Stokes, dans le but de faire apparaître une solution stationnaire non nulle. Le second membre S_0 a pour expression :

$$\begin{aligned} u_0(x, z) &= -\frac{\pi^2 \mu}{2H^2} \cos\left(\frac{\pi x}{2H}\right) \sin\left(\frac{\pi z}{2H}\right) \\ w_0(x, z) &= \frac{\pi^2 \mu}{2H^2} \sin\left(\frac{\pi x}{2H}\right) \cos\left(\frac{\pi z}{2H}\right) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Ce qui donne le champ de vitesse analytique (voir figure 3.56) :

$$\begin{aligned} u(x, z, t) &= -\cos\left(\frac{\pi x}{2H}\right) \sin\left(\frac{\pi z}{2H}\right) \left(1 - \exp\left(\frac{-\pi^2 \mu t}{2\rho H^2}\right)\right) \\ w(x, z, t) &= \sin\left(\frac{\pi x}{2H}\right) \cos\left(\frac{\pi z}{2H}\right) \left(1 - \exp\left(\frac{-\pi^2 \mu t}{2\rho H^2}\right)\right) \end{aligned} \quad (3.3)$$

et la pression analytique :

$$p(x, z, t) = -\frac{\rho}{2} \left(\cos\left(\frac{\pi x}{2H}\right)^2 + \cos\left(\frac{\pi z}{2H}\right)^2 \right) \left(1 - 2 \exp\left(\frac{-\pi^2 \mu t}{2\rho H^2}\right) + \exp\left(\frac{-\pi^2 \mu t}{\rho H^2}\right) \right) \quad (3.4)$$

La condition initiale correspond à un champ de vitesses nul. Les conditions aux limites sont de type Dirichlet. Elles sont obtenues en utilisant le champ de vitesses analytique au niveau des parois du domaine Ω .

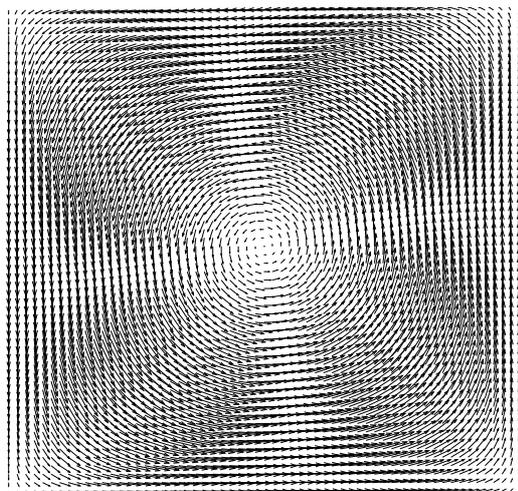


Figure 3.56 : *Champ de vitesses analytique au temps initial.*

3.5.1 Interpolations non conservatives et condition d'incompressibilité

3.5.2 Capacité de l'AMR à réduire la diffusion numérique

3.5.3 Performances de l'AMR en taille mémoire et temps CPU

maillage fin	Mémoire avec AMR (Mo)	Mémoire sans AMR (Mo)	rap
60 * 60			
180 * 180			
540 * 540			

Tableau 3.25 : *Mémoire utilisée (en Mo) pour simuler un disque cisailé par le tourbillon de Green-Taylor, avec et sans AMR, sur différents maillages. Pour les cas AMR, le maillage grossier utilisé est $G_0 = 20 * 20$*

maillage fin	NBG_L	KKT_L	rgl
60 * 60			
180 * 180			
540 * 540			

Tableau 3.26 : Rapport rgl pour différents nombres de niveaux AMR au temps $t = s$.
Maillage grossier $G_0 = 20 * 20$

3.6 Résultats numériques sur les équations de Navier-Stokes couplées à celle de transport : application au cas d'un remplissage de cavité

On cherche à montrer l'efficacité de l' AMR pour la résolution des équations de Navier-Stokes couplées à l'équation de transport en deux dimensions d'espace.

On considère un réservoir de $0.12m$ de large et $0.26m$ de haut rempli d'eau. On injecte de l'eau colorée (de coefficient de diffusion $D = 10^{-9}m^2.s^{-1}$) par un orifice de section $0.01m$ placé sur la partie gauche inférieure du réservoir (3.57). Le remplissage dure $0.5s$ et le mélange $1s$. On précise que l'écoulement est turbulent ($Re=6600$).

On résout l'équation de transport d'espèce (1.17) sur tous les niveaux. Les équations de Navier-Stokes en régime turbulent (1.10) sont quant à elle résolues sur le niveau grossier et interpolées par du Q_1 sur les autres niveaux. On choisit comme critère de raffinement un gradient de concentration massique.

On cherche à montrer l'efficacité de l' AMR à réduire la diffusion numérique sur le problème d'injection défini juste au dessus. Pour cela, on prend un maillage grossier $G_0 = 120 * 288$ avec un niveau d' AMR et un pas de temps $\Delta t = 0.00015s$. On regarde la répartition du fluide jusqu'à $t = 1s$. Le champ de vitesse est calculé avec les équations de Navier-Stokes sur le maillage grossier et interpolé partout sur les niveaux AMR avec une interpolation de type Q_1 .

On utilise les masses M_1, M_2, M_3 définies dans la section précédente pour rendre compte de la diffusion numérique. De même que précédemment, M et M_0 permettent de vérifier la conservation de la masse. Ces données sont rassemblées dans le tableau 3.27 au temps

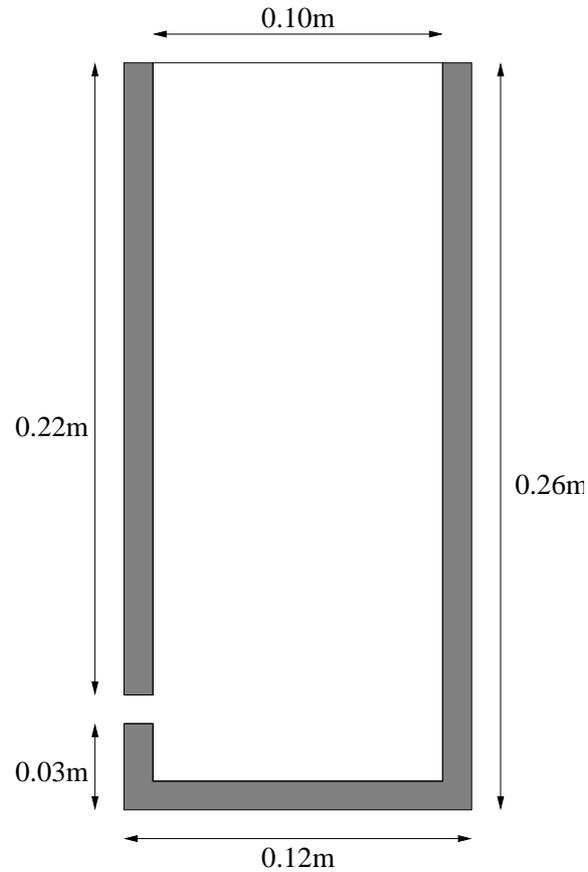


Figure 3.57 : *Injection dans un réservoir.*

$t = 0.8s$ pour trois cas d'injection. Le premier a été réalisé sur un maillage $G = 120 * 288$ sans *AMR*, le deuxième sur un maillage $G_0 = 120 * 288$ avec un niveau d'*AMR* et le troisième sur un maillage $G = 360 * 864$ sans *AMR*.

On remarque qu'avec le cas *AMR*, il y a une sous estimation de la masse totale M par rapport à la masse théorique M_0 de 0.6%. Si on prend un maillage $G = 360 * 864$ sans *AMR*, cette surestimation est multipliée par 3 puisqu'elle est de 1.7% à $t = 0.8s$. On note dans le cas d'un maillage $G = 120 * 288$ sans *AMR*, une surestimation de la masse de M de 1.5% à $t = 0.8s$. Donc on a une conservation de la masse satisfaisante que l'on soit dans le cas avec *AMR* ou sans *AMR*, puisque les écarts relatifs entre les masses M et M_0 ne dépassent pas 2%.

En ce qui concerne les masses M_1 , M_2 et M_3 , le tableau 3.27 montre des résultats très intéressants pour le cas $G_0 = 120 * 288$ avec un niveau d'*AMR* comparé au cas $G = 360 * 864$ sans *AMR*. En effet, si on compare ces deux cas, les écarts de masse relatifs par rapport

à la masse théorique M_0 sont : de 53% pour M_1 dans le cas avec *AMR* contre 83% pour le cas sans *AMR*, 87% pour M_2 dans le cas avec *AMR* contre 90% pour le cas sans *AMR* et 92% pour M_3 dans le cas avec *AMR* contre 97% pour le cas sans *AMR* (le calcul se fait de la manière suivant écart = $(M_{num} - M_0)/M_0$ où M_{num} est la masse M_1, M_2 ou M_3 . Par contre, les masses M_1, M_2 et M_3 relevées pour le cas du maillage $G = 120 * 288$ sans *AMR*, sont nettement moins satisfaisant puisque les écart de masses relatives comparées avec le cas *AMR* sont de 98% pour M_1 , 99.6% pour M_2 et 99.7% pour M_3 . Donc l'*AMR* permet de réduire les écart de masse M_1, M_2 et M_3 . On peut aussi observer l'évolution des masses M_1, M_2 et M_3 sur les figure 3.58 et 3.59. La figure 3.58 compare le cas $G_0 = 120 * 288$ avec un niveau d'*AMR* et le cas $G = 360 * 864$ sans *AMR*. On voit que les courbes de M sont semblables tandis que celles de M_1, M_2 et M_3 ont un pente ascendante plus marquée dans le cas de l'*AMR*. Leurs allures restent quand même assez proches. La figure 3.59 compare le cas $G_0 = 120 * 288$ avec un niveau d'*AMR* et le cas $G = 120 * 288$ sans *AMR*. On voit que les courbes de M sont semblables tandis que celles de M_1, M_2 et M_3 ont un maximum beaucoup plus faible dans le cas sans *AMR* et tendent toutes vers $10^{-4}g$ à $t = 0.8s$.

Ces résultats montrent donc que l'*AMR* est indispensable pour réduire la diffusion numérique. On fait remarquer que la vitesse est interpolée sur l'ensemble des noeuds du niveau *AMR* par une interpolation de type Q_1 . Cependant, comme on utilise un maillage grossier $G_0 = 120 * 288$ sur lequel la vitesse n'a pas convergé à cause de la turbulence, on ne peut pas obtenir la même solution sur un maillage $G_0 = 120 * 288$ avec un niveau d'*AMR* et sur un maillage $G = 360 * 864$ sans *AMR*. Il faut donc, soit utiliser un maillage grossier $G_0 = 120 * 288$ et calculer les vitesses sur le niveau *AMR*, soit prendre un maillage grossier plus fin sur lequel la vitesse a convergé et l'interpolée sur le niveau *AMR* (ici au minimum $G_0 = 210 * 504$).

On a représenté sur la figure 3.61 droite la concentration massique à $t=0.5s$ sur le niveau *AMR* G_1 . On s'est basé sur un maillage grossier $G_0 = 120 * 288$. Sur la figure 3.61 gauche, on peut voir les grilles correspondantes G_0 et G_1 montrant la structure auto-adaptative du niveau *AMR* G_1 pour suivre la physique du phénomène. La figure 3.62 droite représente la concentration massique du fluide sur un maillage $G = 120 * 288$ sans *AMR* à $t = 0.5s$. La figure de gauche montre la même concentration massique à $t = 0.5s$ sur le maillage $G_0 = 120 * 288$ après une injection conservative (*FWICV*) provenant

de la solution du niveau $AMR G_1$. On observe bien alors que l' AMR réduit la diffusion numérique de façon très marquée.

La figure 3.60 montre le temps CPU moyen pour un maillage $G_0 = 120 * 288$ avec un niveau d' AMR ($T_{totalAMR}$) et un maillage fin équivalent $G = 360 * 864$ sans $AMR T_{total}$. On note un point d'intersection pour l'itération $Iter = 4716$ et un temps CPU $T_{total} = 10.611s$, ce qui montre que lorsqu'on dépasse un certain nombre de noeuds AMR créés (à déterminer) NBR_{limite} , l' AMR n'est plus efficace. En effet, si on crée un nombre de noeuds $AMRR$ supérieur à NBR_{limite} , l' AMR devient plus coûteuse que l'utilisation d'un maillage monogridle fin classique. On considère que la méthode AMR reste intéressante tant que le temps CPU ne dépasse pas T_{limite} défini comme $T_{limite} = 0.95T_{total}$. Ici $T_{limite} = 10.08s$. Connaissant le nombre de cellules $AMR NCTG$ présentes à T_{limite} , $NCTG = 10387$, on en déduit $NBR_{limite} = 259675$. Le maillage grossier $G_0 = 120 * 288$ possède 34969 noeuds, soit un nombre de noeuds total de 294644. Ce qui représente 94.5% du nombre de noeuds du maillage fin équivalent $G = 360 * 864$ sans AMR . $NBR_{limite} = 259675$ représente aussi 83.3% du nombre de noeuds du maillage fin équivalent $G = 360 * 864$ sans AMR .

Donc on conclue que le coût de l' AMR en temps CPU est intéressant tant que le nombre de noeuds AMR créés reste inférieur à 83% du nombre de noeuds d'un maillage fin équivalent sans AMR .

3.7 Résultats numériques sur les équations de Navier-Stokes : application au cas de la cavité entraînée

On considère un domaine carré de côté $1m$ dans lequel on introduit un fluide incompressible newtonien. Des conditions de paroi sont imposées sur les limites gauche, droite et inférieure, tandis que la limite supérieure est animée d'une vitesse horizontale d'intensité $V = 1m.s^{-1}$ tel que $\vec{V} = (-1, 0)$. Le fluide se trouvant dans la partie supérieure du domaine est alors cisailé de telle manière que des tourbillons primaires et secondaires apparaissent et se stabilisent.

L'étude de ce cas a pour objectif de valider la méthode AMR pour les équations de Navier-Stokes. Une étude de convergence en maillage sera alors menée. On s'intéressera aussi aux performances de cette méthode en temps CPU et taille mémoire.

masse	Pas d'AMR, $G = 120 * 288$	AMR, $G_0 = 120 * 288$	Pas d'AMR, $G = 360 * 864$
M	0.00358	0.00351	0.00359
M_0	0.00353	0.00353	0.00353
M_1	0.000087	0.000714	0.000600
M_2	0.000011	0.000465	0.000330
M_3	0.0000099	0.000271	0.000120

Tableau 3.27 : M_1 , M_2 et M_3 jusqu'à $t = 0.8s$ sur un maillage $G = 120 * 288$ sans AMR (col 1), sur un niveau d'AMR G_1 ($G_0 = 120 * 288$) avec une interpolation Q_1 pour la vitesse sur G_1 (col 2) et sur un maillage $G = 360 * 864$ sans AMR.

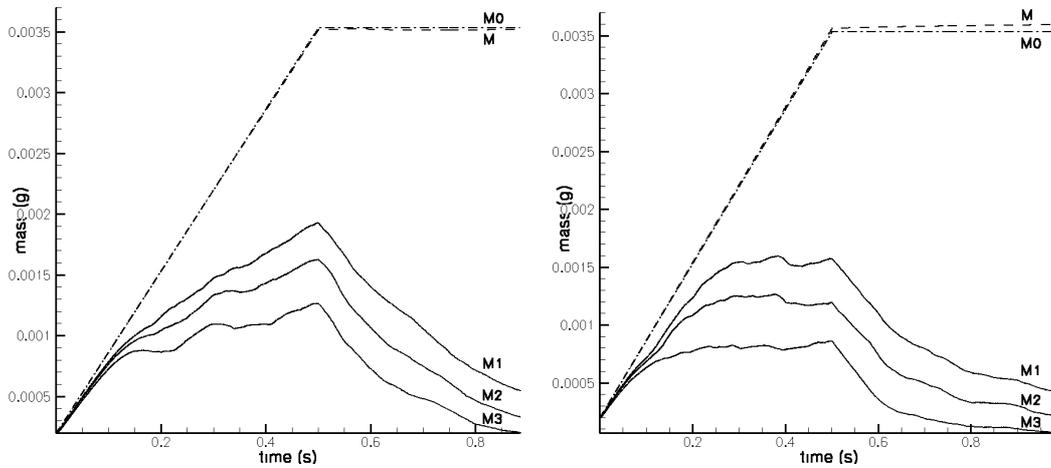


Figure 3.58 : Evolution de la masse au niveau d'AMR G_1 ($G_0 = 120 * 288$) avec un champ de vitesse interpolé sur G_1 (gauche); sur un maillage $G = 360 * 864$ sans AMR avec un champ de vitesse calculé à partir des équations de Navier-Stokes (droite).

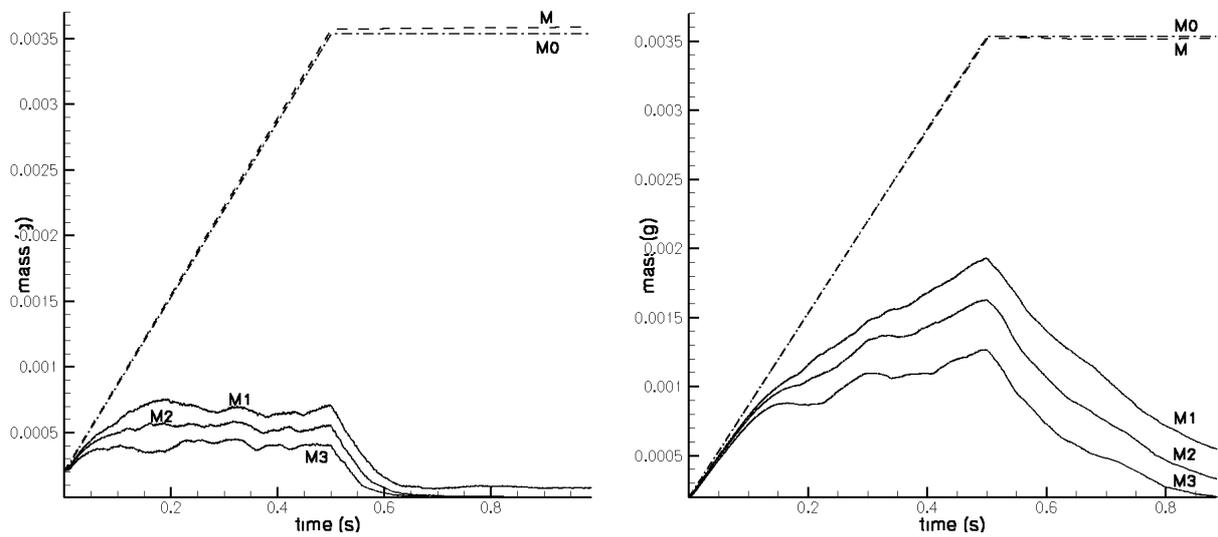


Figure 3.59 : Evolution de la masse, avec $G = 120 * 288$ sans AMR sur la figure de gauche. Avec AMR sur un niveau pour la figure de droite .

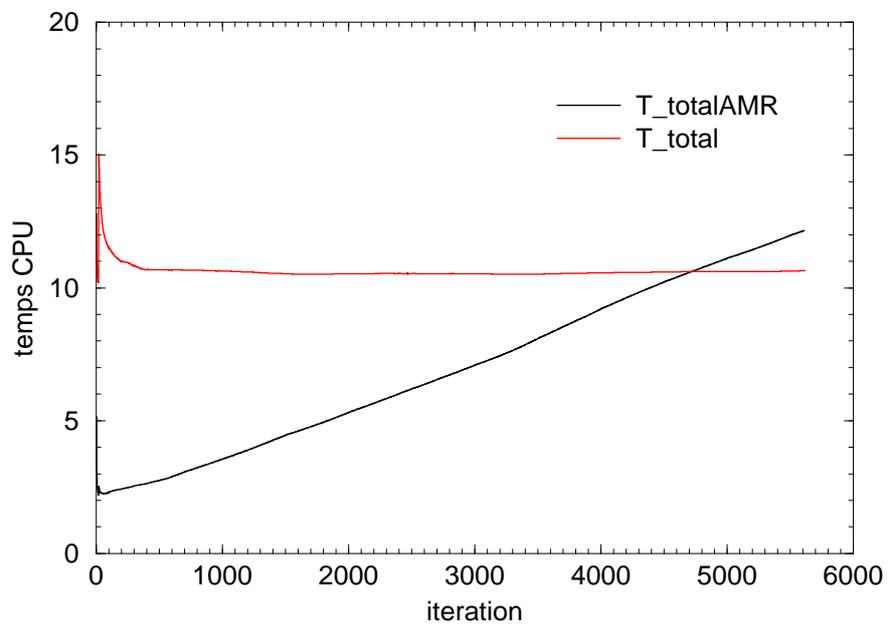


Figure 3.60 : Evolution de la masse, avec $G = 120 * 288$ sans AMR sur la figure de gauche. Temps cpu sur la figure de droite.

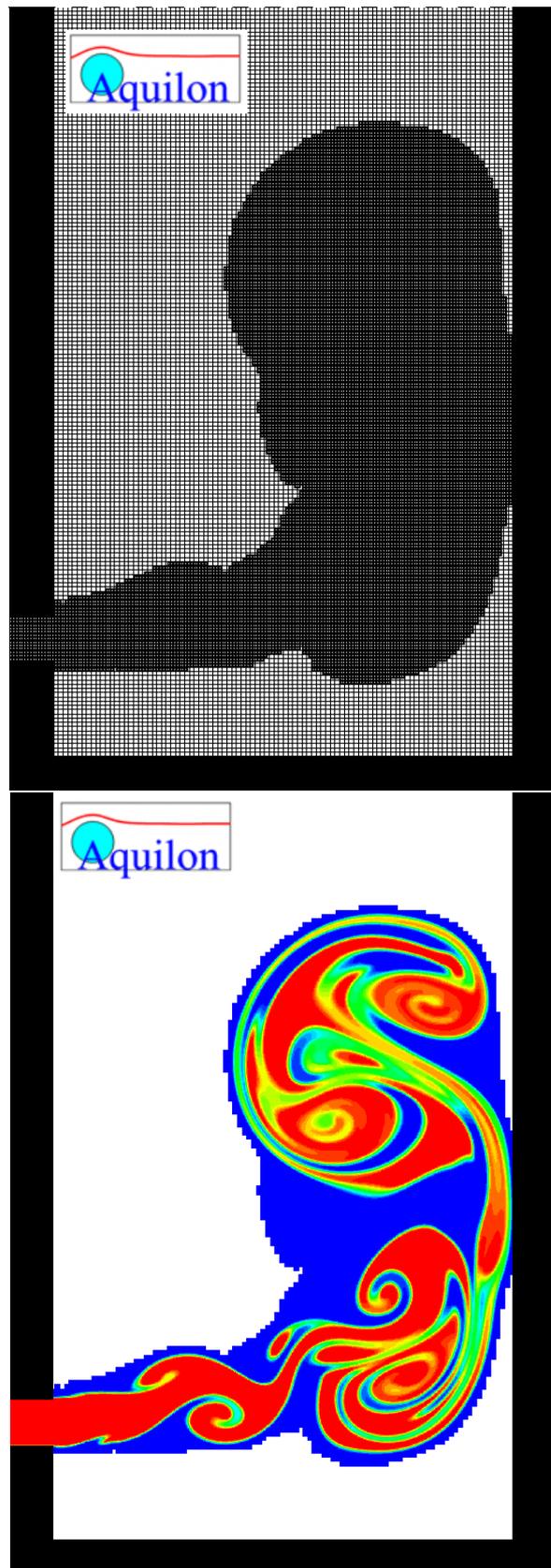


Figure 3.61 : Concentration massique sur le niveau AMR G_1 où $G_0 = 120 * 288$ (figure de droite). Maillage AMR correspondant, G_0 et G_1 (gauche) - $t = 0.5s$, $\Delta t = 10^{-4}s$,
 $D = 10^{-9}m^2.s^{-1}$.

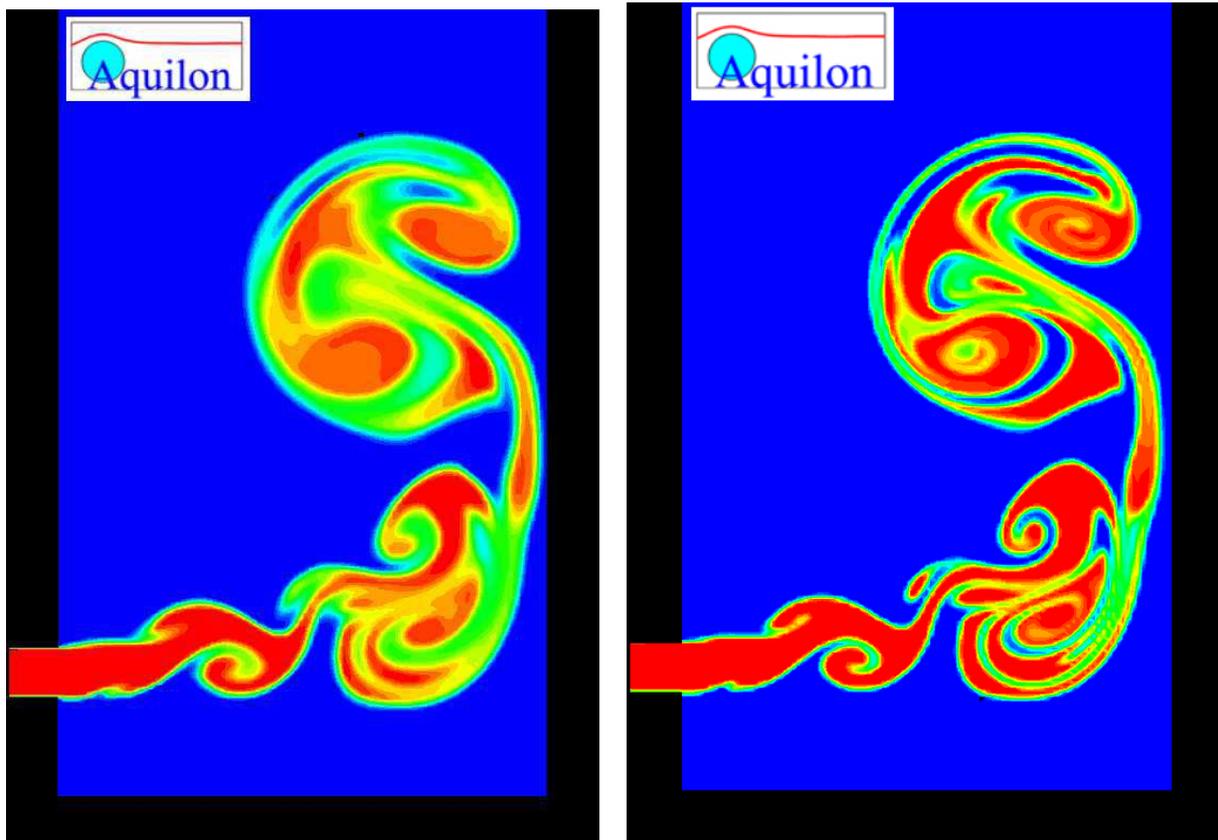


Figure 3.62 : Concentration massique sur un maillage $G = 120 * 288$ sans AMR (gauche) et sur un maillage $G_0 = 120 * 288$ avec un niveau d'AMR (droite) après une méthode d'injection FWICV - $t = 0.5s$, $\Delta t = 10^{-4}s$, $D = 10^{-9}m^2.s^{-1}$.

Chapitre 4

Résultats en 3D

Dans cette partie, on cherche tout d'abord à valider la méthode *AMR* en 3D. Le second objectif est d'évaluer ses performances en terme de précision des solutions et en terme de gain en taille mémoire et temps *CPU*.

4.1 Résultats sur l'équation de transport d'espèce: Tache cisailée par un tourbillon centré dans la cavité

On considère un domaine cubique d'arête $L = 0.1m$ centré en $(x = 0.05m, z = 0.05m, y = 0.05m)$. On y a disposé une sphère centrée en (x_0, z_0, y_0) et de rayon $R = 0.015m$. Celle-ci est submergée dans un fluide de concentration massique $0g.m^{-3}$. Dans un premier temps, le fluide immergé a un coefficient de diffusion faible : $10^{-9}m.s^{-2} \leq D \leq 10^{-8}m.s^{-2}$. On rappelle que l'équation résolue est celle de transport d'espèces.

On impose un champ de vitesses tournant d'intensité moyenne $V_{moyen} = 0.1m^2.s^{-1}$ autour de l'axe y , de forme analytique :

$$\begin{aligned} u(x, z) &= -V_{moyen} \cos\left(\frac{\pi(x - x_0)}{L}\right) \sin\left(\frac{\pi(z - z_0)}{L}\right) \\ w(x, z) &= -V_{moyen} \sin\left(\frac{\pi(x - x_0)}{L}\right) \cos\left(\frac{\pi(z - z_0)}{L}\right) \\ v(x, z) &= 0 \end{aligned}$$

Avec $x_0 = 0.075m$, $z_0 = 0.05m$ et $y_0 = 0.05m$.

Pour valider la méthode *AMR*, il convient de réaliser deux autres cas où l'axe de rotation du champ est z puis x . On aura ainsi testé toutes les directions d'espace. Le champ

tournant d'axe z s'écrit :

$$\begin{aligned} u(x, y) &= -V_{moyen} \cos\left(\frac{\pi(x - x_0)}{L}\right) \sin\left(\frac{\pi(y - y_0)}{L}\right) \\ w(x, y) &= 0 \\ v(x, y) &= V_{moyen} \sin\left(\frac{\pi(x - x_0)}{L}\right) \cos\left(\frac{\pi(y - y_0)}{L}\right) \end{aligned}$$

Avec $x_0 = 0.075m$, $z_0 = 0.05m$ et $y_0 = 0.05m$.

Le champ tournant d'axe x s'écrit :

$$\begin{aligned} u(z, y) &= 0 \\ w(z, y) &= V_{moyen} \sin\left(\frac{\pi(y - y_0)}{L}\right) \cos\left(\frac{\pi(z - z_0)}{L}\right) \\ v(z, y) &= -V_{moyen} \cos\left(\frac{\pi(y - y_0)}{L}\right) \sin\left(\frac{\pi(z - z_0)}{L}\right) \end{aligned}$$

Avec $x_0 = 0.05m$, $z_0 = 0.05m$ et $y_0 = 0.075m$.

On teste donc trois cas : rotation autour de l'axe y , z puis x . Pour chacun d'eux, on compare la solution obtenue au bout de $t = 4s$ avec et sans *AMR*. On utilise un schéma *TVD* pour résoudre la partie advection de l'équation de transport.

On compare les masses M_0, M, M_1, M_2 et M_3 introduites pour la tache cisailée en 2D. On adapte les définitions des masses au 3D. M_0 est la masse théorique de la sphère calculée à partir de son volume initial $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

M est l'équivalent de la masse M_0 calculée à partir de la solution numérique. M_1 (resp M_2, M_3) représente la masse pour laquelle la concentration massique est supérieure à $0.9g.m^{-3}$ (resp $0.95g.m^{-3}, 0.99g.m^{-3}$).

4.1.1 Tache cisailée autour de l'axe y

Précision des solutions

Les figures 4.1 gauche et droite représentent l'évolution des masses M, M_1, M_2 et M_3 de la sphère cisailée jusqu'à $t = 4s$, sur un maillage $G_0 = 16 * 16$ avec un niveau d'*AMR* et sur un maillage fin équivalent $G = 48 * 48$ SANS *AMR*. Le coefficient de diffusion D est nul pour celle de gauche et égal à $10^{-8}m^2.s^{-1}$ pour celle de droite. Dans les deux cas, on note la superposition des courbes de masse M, M_1, M_2 et M_3 avec et sans *AMR*. Ceci montre que la méthode *AMR* est efficace pour réduire la diffusion numérique en 3D. Pour vérifier que la concentration massique est répartie de la même manière avec et sans

AMR, on compare les iso-concentrations $S_p = 0.2g.m^{-3}$, $0.4g.m^{-3}$, $0.6g.m^{-3}$ et $0.8g.m^{-3}$ obtenues avec et sans *AMR* à $t = 4s$, avec $D = 10^{-8}m^2.s^{-1}$ (cf figure 4.2). Comme on peut le remarquer, elles sont confondues, ce qui montre une bonne répartition de la concentration massique. On calcule aussi l'erreur relative définie précédemment ϵ entre la solution sans et avec *AMR* au même instant : on obtient $\epsilon = 1,637.10^{-2}$, ce qui est très satisfaisant pour un maillage fin $G_1 = 48 * 48$. Ce résultat vient confirmer l'efficacité de l'approche *AMR* à donner une bonne précision des solutions.

La figure 4.3 permet de visualiser le cisaillement de la tache sur un niveau d'*AMR* ($G_1 = 48^3$) au cours du temps jusqu'à $t = 4s$. On y a représenté l'iso-concentration $S_p = 0.5g.m^{-3}$ à intervalle de temps régulier.

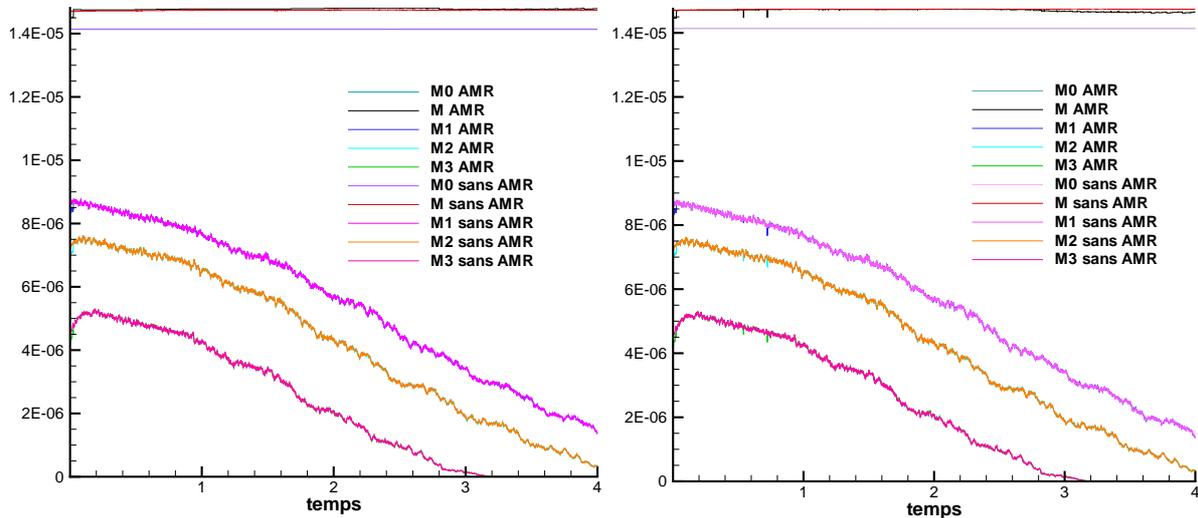


Figure 4.1 : Evolution de la masse pour la tache cisillée autour de l'axe y . Coefficient de diffusion nul à gauche et égal à $10^{-8}m^2.s^{-1}$ à droite.

On s'intéresse maintenant aux performances en taille mémoire et en temps *CPU* de la méthode *AMR*. Les calculs nécessitant des ressources informatiques importantes en $3D$, on se contente de comparer deux cas *AMR* à leurs homologues en maillage, sans *AMR*. Dans le premier, on part d'un maillage $G_0 = 16 * 16 * 16$ avec un niveau d'*AMR* pendant un temps $t = 4s$. Dans le deuxième cas, on choisit un maillage grossier $G_0 = 12 * 12 * 12$ avec deux niveaux d'*AMR* pendant une durée de $4s$. On utilise les mêmes notations que dans le cas de la tache cisillée en $2D$ (cf sous-section 3.3.6).

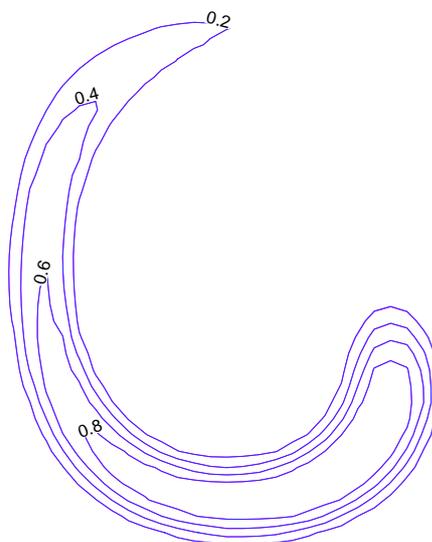


Figure 4.2 : Iso-concentrations de la tache cisailée avec (rose) et sans AMR (bleu) à $t = 4s$ et un coefficient de diffusion $D = 10^{-8}m^2.s^{-1}$ autour de l'axe y . Coupe dans le plan xz , pour $y = 0.05m$.

Analyse des performances en mémoire

En adoptant la même démarche que dans la sous-section 3.3.6 et en utilisant les tableaux 4.1 et 4.2, on considère que l'approche *AMR* est intéressante en termes de coût en mémoire tant que $rap < 0.75$, c'est à dire $r_{gl} < 57\%$. On rappelle que pour le même cas en dimension d'espace deux, on a évalué le pourcentage de points deçà duquel l'approche *AMR* était intéressante à $r_{gl} < 32\%$. Ceci montre que la méthode *AMR* est bien plus efficace, en termes de gain en taille mémoire, en *3D* qu'en *2D*.

maillage fin	Mémoire avec <i>AMR</i> (Mo)	Mémoire sans <i>AMR</i> (Mo)	rap
48 * 48 * 48	185	200	0.93
108 * 108 * 108	1400	2100	0.67

Tableau 4.1 : Mémoire utilisée (en Mo) pour simuler la tache cisailée avec et sans *AMR*, sur différents maillages.

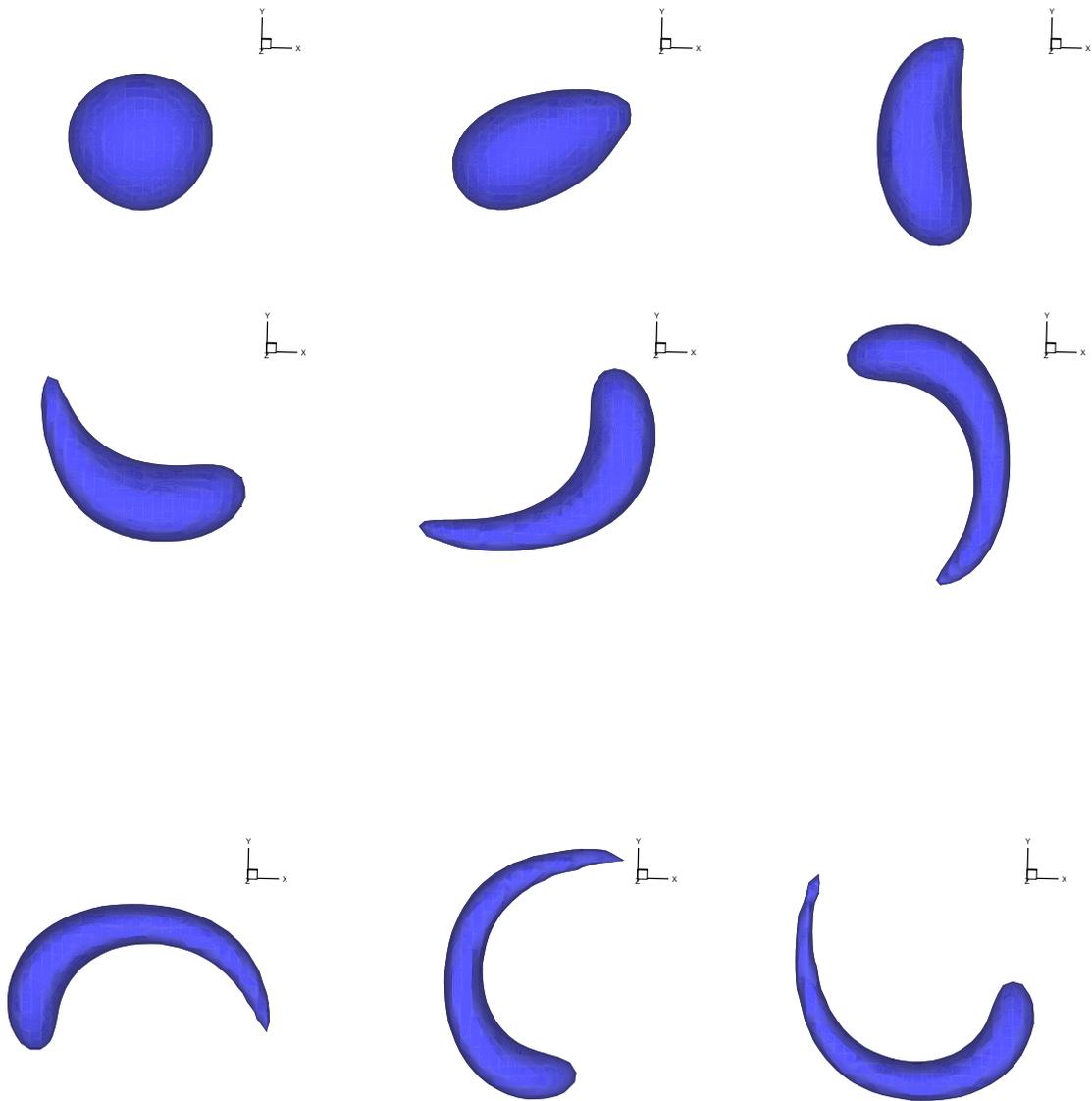


Figure 4.3 : Sketch de la tache cisailée sur le maillage fin $G_1 = 48^3$ jusqu'à $t = 4s$.
Coefficient de diffusion $D = 10^{-8}m^2.s^{-1}$. Représentation de l'iso-concentration
 $S_p = 0.5g.m^{-3}$

maillage fin	NBG_L	KKT_L	rgl
$48 * 48 * 48$	85413	117649	0.7
$108 * 108 * 108$	616072	1259712	0.5

Tableau 4.2 : Rapport rgl pour différents nombres de niveaux AMR au temps $t = 4s$.

Analyse des performances en temps CPU

On souhaite montrer les performances de la méthode AMR en termes de gain en temps CPU , sachant que son optimisation en $3D$ est incomplète (résolution de tous les noeuds AMR à l'intérieur du domaine Ω).

Comme dans le cas de la tache cisailée en $2D$, on estime dans un premier temps la répartition des différents temps moyens définis dans la sous-section 3.3.6. Ceux-ci sont représentés sur la figure 4.4.

On observe sur cette figure que la gestion dynamique du raffinement reste toujours aussi coûteuse en $2D$ qu'en $3D$, notamment à cause des nombreuses allocations/désallocations de tableaux.

Étant donné que les cas sans AMR sont coûteux en temps CPU et que le temps moyen t_{tot} est pratiquement constant au cours du temps, on a calculé le temps CPU total pour faire quelques itérations, puis on a extrapolé le résultats sur une durée de $4s$.

Les résultats du tableau 4.3 montrent qu'il faut continuer à optimiser la méthode.

maillage fin	temps CPU total sans AMR	temps CPU total avec AMR
$108 * 108 * 108$	71601	97490

Tableau 4.3 : Comparaison des temps CPU avec et sans AMR .

4.1.2 Tache cisailée autour de l'axe z

De même que pour la tache cisailée autour de l'axe y , les figures 4.5 gauche et droite représentent l'évolution des masses M, M_1, M_2 et M_3 de la sphère cisailée jusqu'à $t = 4s$ autour de l'axe z . Le coefficient de diffusion D est nul pour celle de gauche et égal à $10^{-8}m^2.s^{-1}$ pour celle de droite. Dans les deux cas, on note la superposition des courbes de masse M, M_1, M_2 et M_3 avec et sans AMR . Donc la méthode AMR permet d'obtenir

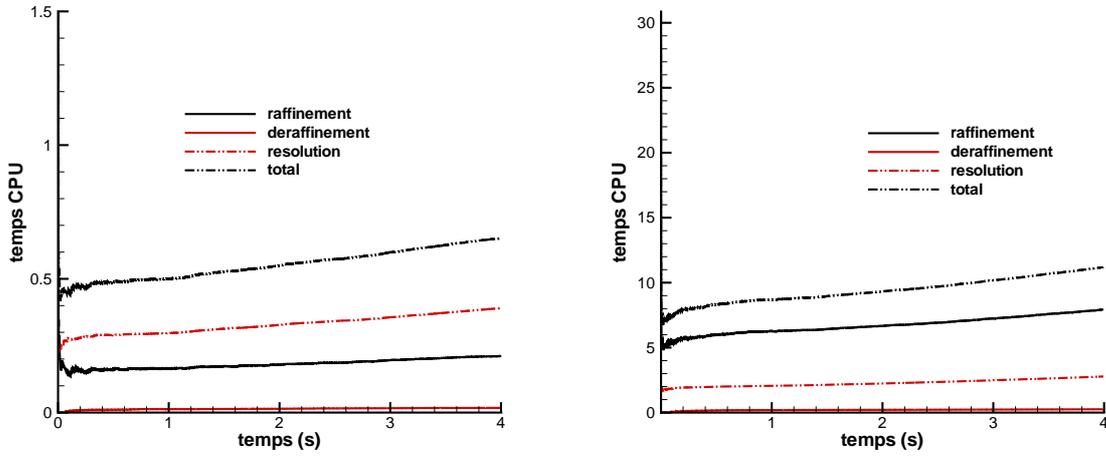


Figure 4.4 : Comparaison des différents temps moyens avec AMR pendant une durée de 4s. $G_0 = 16 * 16 * 16$ avec un niveau à gauche. $G_0 = 12 * 12 * 12$ avec deux niveaux à droite.

une solution fine (sur $G_1 = 48^3$) aussi précise que celle qu'on aurait obtenu sur un maillage équivalent sans AMR ($G = 48^3$) à 10^{-2} près (valeur d' ϵ calculé de la même façon que dans le cas de la tache cisailée autour de l'axe y).

On compare aussi les iso-concentrations $S_p = 0.2g.m^{-3}$, $0.4g.m^{-3}$, $0.6g.m^{-3}$ et $0.8g.m^{-3}$ obtenues avec et sans AMR à $t = 4s$, avec $D = 10^{-8}m^2.s^{-1}$ (cf figure 4.6). Celles-ci sont confondues ce qui vient conforter le résultat précédent.

4.1.3 Tache cisailée autour de l'axe x

On teste enfin la troisième direction d'espace. Les figures 4.7 gauche et droite représentent l'évolution des masses M, M_1, M_2 et M_3 de la sphère cisailée jusqu'à $t = 4s$ autour de l'axe x . Le coefficient de diffusion D est nul pour celle de gauche et égal à $10^{-8}m^2.s^{-1}$ pour celle de droite. Dans les deux cas, on note la superposition des courbes de masse M, M_1, M_2 et M_3 avec et sans AMR. De même que pour les taches cisailées autour de y et z , on en conclue que la méthode AMR permet d'obtenir une solution fine (sur $G_1 = 48^3$) aussi précise que celle qu'on aurait obtenu sur un maillage équivalent sans AMR ($G = 48^3$) à 10^{-2} près.

Les iso-concentrations $S_p = 0.2g.m^{-3}$, $0.4g.m^{-3}$, $0.6g.m^{-3}$ et $0.8g.m^{-3}$ obtenues avec et

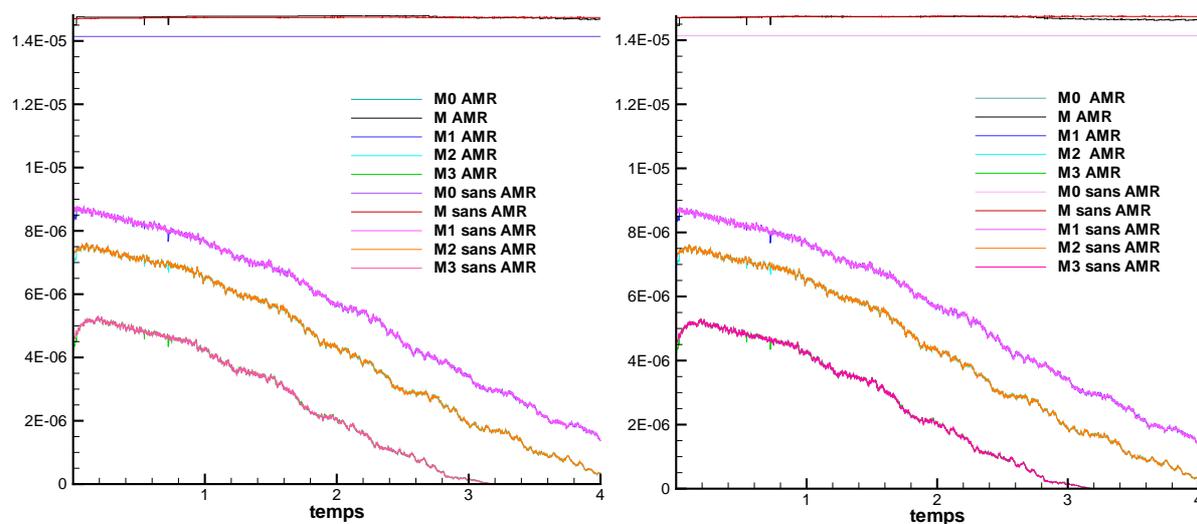


Figure 4.5 : Evolution de la masse pour la tache cisailée autour de l'axe z . Coefficient de diffusion nul à gauche et égal à $10^{-8} \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ à droite.

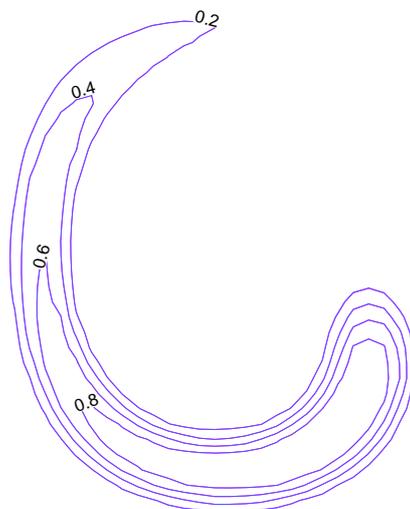


Figure 4.6 : Iso-concentrations de la tache cisailée avec (rose) et sans AMR (bleu) autour de l'axe z à $t = 4 \text{s}$ et un coefficient de diffusion $D = 10^{-8} \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$. Coupe dans le plan xy , pour $z = 0.05 \text{m}$.

4.2 Résultats sur l'équation de transport d'interface : Tache cisillée par un champ tournant périodique 163

sans *AMR* à $t = 4s$, avec $D = 10^{-8}m^2.s^{-1}$ sur la figure 4.8 sont confondues, ce qui vient conforter le résultat précédent.

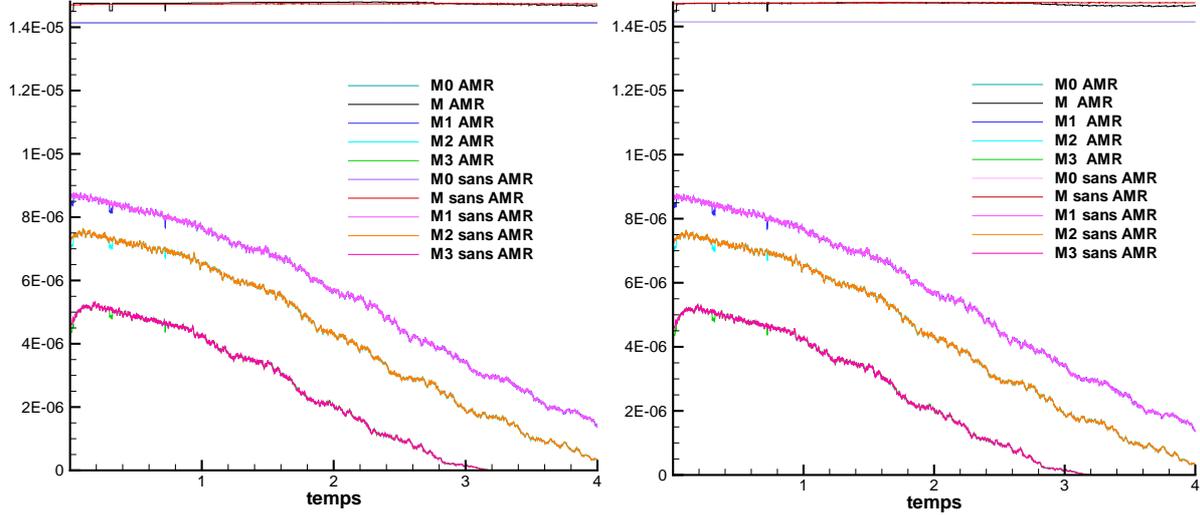


Figure 4.7 : Evolution de la masse pour la tache cisillée autour de l'axe z . Coefficient de diffusion nul à gauche et égal à $10^{-8}m^2.s^{-1}$ à droite.

4.2 Résultats sur l'équation de transport d'interface : Tache cisillée par un champ tournant périodique

On a repris ici le cas proposé par [LEVEQUE 96] et [P. LIOVIC 06] dans le but de comparer les résultats obtenus par [P. LIOVIC 06] et par le code *Aquilon*. Dans ce cas, on considère un domaine cubique d'arête $L = 1m$ centré en $(x = 0.5m, z = 0.5m, y = 0.5m)$. Un premier fluide de forme sphérique est centré en (x_0, z_0, y_0) et a pour rayon $R = 0.15m$. Le reste du domaine est occupé par un deuxième fluide. L'équation de transport d'interface est résolue. On impose un champ de vitesses tournant $2T$ -périodique de forme analytique :

$$\begin{aligned}
 u(x, z, y) &= 2 \sin^2(\pi x) \sin(2\pi z) \sin(2\pi y) \cos\left(\frac{\pi t}{T}\right) \\
 w(x, z, y) &= -\sin(2\pi x) \sin^2(\pi z) \sin(2\pi y) \cos\left(\frac{\pi t}{T}\right) \\
 v(x, z, y) &= -\sin(2\pi x) \sin(2\pi z) \sin^2(\pi y) \cos\left(\frac{\pi t}{T}\right)
 \end{aligned}$$

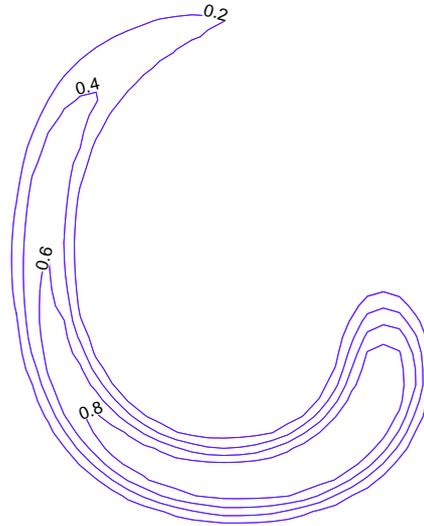


Figure 4.8 : Iso-concentrations de la tache cisailée avec (rose) et sans *AMR* (bleu) autour de l'axe z à $t = 4s$ et un coefficient de diffusion $D = 10^{-8}m^2.s^{-1}$. Coupe dans le plan zy , pour $x = 0.05m$.

Ce cas est particulièrement intéressant car la sphère est cisailée à tel point que son épaisseur devient très fine lorsque le cisaillement devient maximum (au bout du temps $t = \frac{(2k-1)T}{2}$, k entier strictement positif). Si l'épaisseur de la tache est plus fine que la taille d'une maille à ce moment là, l'interface est dégradée (cf : figure 4.9). Il en résulte une perte de matière qu'on peut estimer à l'instant suivant $t = kT$. On impose $T = 3s$. On a représenté sur la figure 4.9 les résultats obtenus par [P. LIOVIC 06] sur deux maillages $G = 128 * 128 * 128$ et $G = 256 * 256 * 256$ au bout de $t = 1.5s$ et $t = 3s$, en séquentiel. Ces cas étant très coûteux en mémoire, on se limite à une étude purement qualitative. On donne aussi des ordres de grandeurs concernant la taille mémoire nécessaire pour simuler ce cas avec *AMR*.

On compare sur les figures 4.10 et 4.11 deux cas *AMR* avec un schéma *TVD*, au bout de $0.75s$ et $1.5s$. L'interface sur les figures 4.10 et 4.11 de gauche (respectivement droite) est obtenue avec un maillage grossier $G_0 = 12 * 12 * 12$ (respectivement $G_0 = 22 * 22 * 22$) et deux niveaux *AMR*, soit un maillage fin équivalent $G = 108 * 108 * 108$ (respectivement $G = 198 * 198 * 198$).

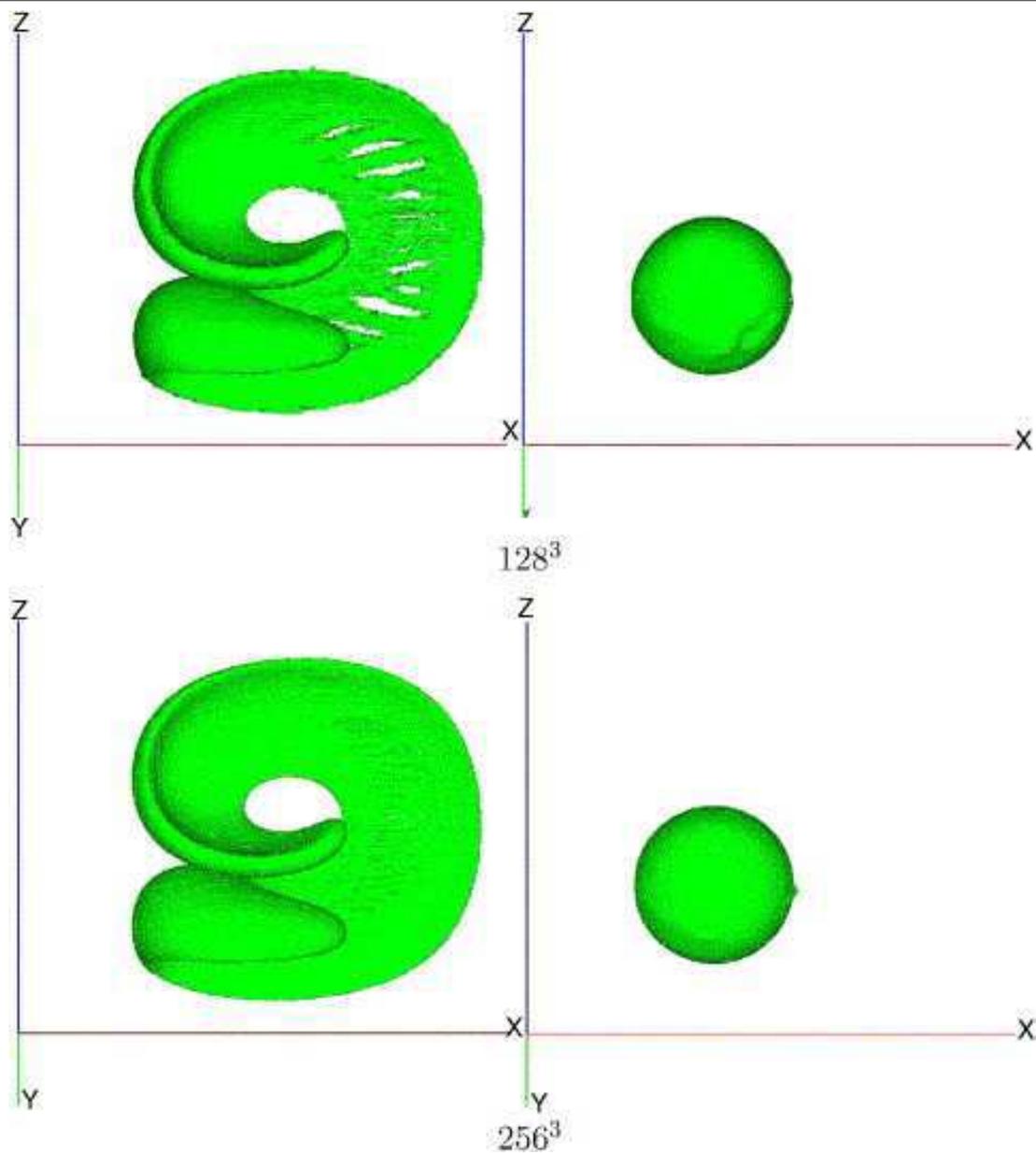


Figure 4.9 : Représentation de l'interface à son maximum de déformation ($t = 1.5s$) et à son minimum ($t = 3s$) pour un maillage $G = 128 * 128 * 128$ (haut) et $G = 256 * 256 * 256$ (bas).

On observe que la partie où l'épaisseur de la tache est la plus fine a été diffusée. Comme on pouvait s'y attendre, on capte une partie supplémentaire de la sphère cisailée lorsque le pas d'espace du maillage le plus fin diminue. Cependant, il aurait fallu atteindre un maillage fin équivalent minimum de $G = 256 * 256 * 256$ pour observer une solution proche

de celle présentée par [P. LIOVIC 06]. On précise que le premier cas a nécessité une taille mémoire d'environ $1.6Go$, tandis que le second en a requis $10Go$.

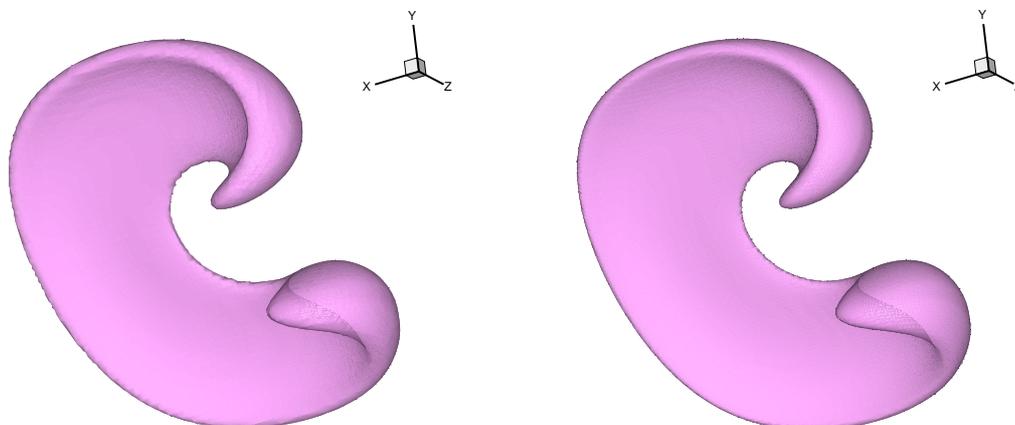


Figure 4.10 : Représentation de l'interface à $t = 0.75s$, pour un maillage $G_0 = 12 * 12 * 12$ (gauche) et $G = 22 * 22 * 22$ (droite), avec deux niveaux d'AMR et un schéma TVD.

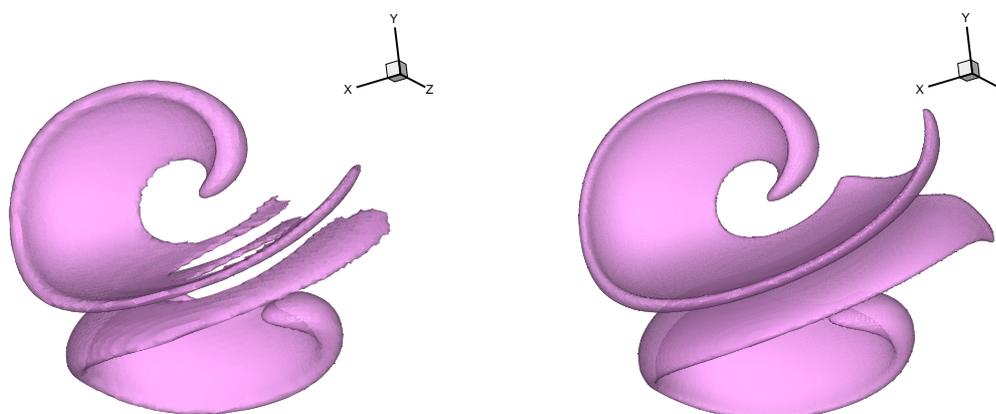


Figure 4.11 : Représentation de l'interface à son maximum de déformation ($t = 1.5s$) pour un maillage $G_0 = 12 * 12 * 12$ (gauche) et $G = 22 * 22 * 22$ (droite), avec deux niveaux d'AMR et un schéma TVD.

Conclusions et perspectives

L'objectif de ce travail de thèse était de développer une stratégie de maillage capable de réduire la diffusion numérique introduite par les schémas numériques, pour les écoulements incompressibles.

L'originalité de la méthode de raffinement de maillage adaptatif (*AMR*) implémentée au cours de la thèse, réside en deux points :

- Le premier est la structure même des niveaux *AMR*, que l'on peut considérer comme une entité dont la cohésion est assurée par les connexions entre cellules *AMR*.
- Le deuxième est l'implication de la méthode *AMR*, qui permet le passage d'informations entre niveaux d'*AMR* et entre cellules *AMR* d'un même niveau au même instant.

On a montré que la méthode *AMR* est très performante pour le suivi d'interface et d'espèce faiblement diffusive. Tout d'abord, l'ordre de convergence ainsi que la précision des solutions sont conservés. Ces résultats nous permettent de valider la démarche suivie.

L'intérêt de la méthode réside surtout dans ses performances en termes de gains en taille mémoire et en temps *CPU*. La finesse des maillages requise pour obtenir des solutions ayant atteint la précision souhaitée, pour étudier un écoulement complexe, est telle qu'il est souvent impossible de simuler ces cas, surtout en *3D*. L'approche *AMR* rend possible une partie de ces simulations grâce à une résolution plus ou moins fine des zones du domaine. On a pu observer, au travers des cas de validation, que la méthode *AMR* a permis d'obtenir des gains en taille mémoire et en temps *CPU* très intéressants.

Même si les cas de validation (tache cisailée) montrent que la méthode *AMR* est très efficace pour suivre un front, on rappelle que la vitesse imposée est analytique. Une interpolation du champ de vitesses sur les niveaux fins nous oblige à partir d'un maillage grossier où la vitesse est suffisamment résolu. Le problème est que pour des écoulements complexes, on risque d'avoir à utiliser un maillage de départ déjà très fin, ce qui réduit

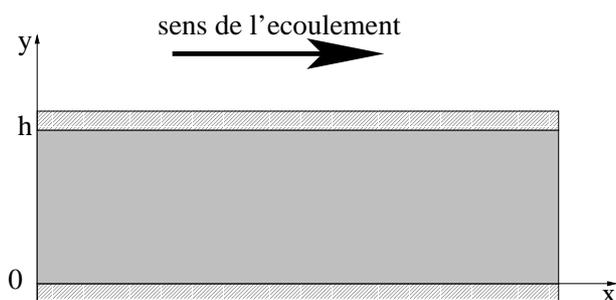
l'intérêt de l'approche *AMR*. Il est donc indispensable de résoudre les équations de Navier-Stokes sur les niveaux fins.

En perspective, on peut citer l'extension de la méthode *AMR* aux équations de Navier-Stokes (en développement en 2D) en 2D et 3D. Ceci permettra d'avoir des écoulements mieux résolus localement, et donc un déplacement d'interface plus précis. Il faudra aussi prévoir l'optimisation de l'approche en termes de gain en taille mémoire et en temps *CPU* pour le cas 3D, sans quoi elle perd son intérêt. Ainsi, une partie des simulations qui sont inaccessibles à cause des besoins en ressources informatiques trop importantes deviendront accessibles grâce à la méthode *AMR*. On se doute bien que cette approche sera insuffisante pour certains cas, il serait donc intéressant de paralléliser la méthode.

Annexe A

Solutions analytiques

A.1 Écoulement de Poiseuille 2D



Soit un fluide incompressible se déplaçant entre deux plans horizontaux, distant d'une hauteur h . On considère un écoulement plan et on néglige la pesanteur. On s'intéresse de plus au cas stationnaire.

Les équations de Navier-Stokes se réduisent alors à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \\ -\frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \\ -\frac{\partial p}{\partial z} = 0, \end{array} \right. \quad (\text{A.1})$$

On impose sur les bords du domaine $u(x, z = 0) = 0$ et $u(x, z = h) = 0$.

En résolvant les équations de Navier-Stokes en 2D, on obtient la solution analytique :

$$\begin{cases} u(x, z) = \frac{1}{2\nu} \frac{dp}{dx} z(h - z), \\ v(x, z) = 0, \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

Étant plus facile d'imposer la vitesse moyenne U_{moyen} que le gradient de pression $\frac{dp}{dx}$, on va trouver une relation entre les deux grandeurs.

$$U_{moyen} = \frac{1}{h} \int_0^h \frac{1}{2\nu} \frac{dp}{dx} z(h - z) dz$$

donc

$$U_{moyen} = \frac{1}{2\nu} \frac{dp}{dx} \frac{h^2}{6}$$

d'où

$$\begin{cases} u(x, z) = U_{moyen} \frac{6}{h^2} z(h - z), \\ v(x, z) = 0. \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

A.2 Conduction 2D dans un rectangle dont les bords sont chauffés à des températures différentes

[WHITAKER 83] a proposé des solutions à ce cas en 1983. On considère un rectangle de hauteur H et de longueur b dont trois bords (gauche, droit, inférieur) sont maintenus à une température T_0 et le dernier bord (supérieur) à une température $T(x)$. On place un fluide incompressible à l'intérieur de ce domaine (figure A.1).

A.2.1 Cas où f est constante par morceaux

On maintient le bord supérieur à une température constante $T_1 > T_0$. On crée donc une discontinuité au niveau des coins supérieurs (figure A.2). On se place en régime

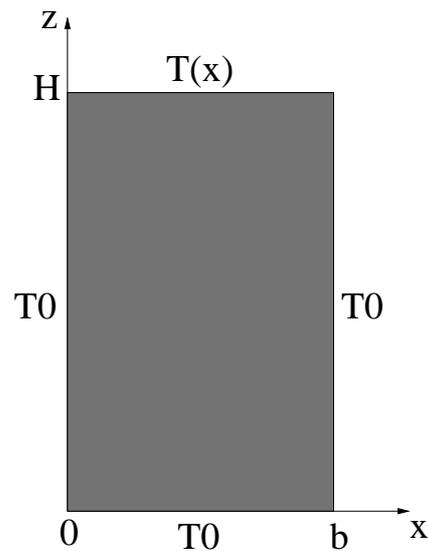


Figure A.1 : Conduction 2D dans un rectangle dont les bords sont chauffés à des températures différentes.

stationnaire et on considère que le terme d'advection de l'équation de conservation de l'énergie est nul. Celle-ci se réduit donc au seul terme de conduction, ce qui donne :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0. \quad (\text{A.4})$$

Les conditions aux limites sont de type Dirichlet :

- $T(x = 0, z) = T_0$
- $T(x, z = 0) = T_0$
- $T(x = H, z) = T_0$
- $T(x, z = H) = T_1$

On suppose que la température T peut s'écrire $T(x, z) = F(x)G(z)$. Donc l'équation de l'énergie peut se mettre sous la forme

$$\frac{1}{F} \frac{d^2 F}{dx^2} = -\frac{1}{G} \frac{d^2 G}{dz^2} = C$$

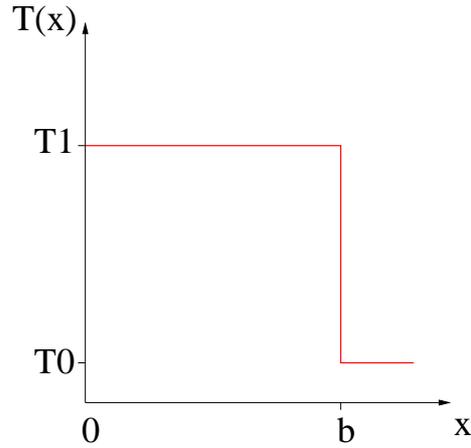


Figure A.2 : Température imposée sur le bord supérieur du domaine.

Trois valeurs de C sont alors possibles :

- Si $C = 0$ alors $T_a(x, z) = (C_1 + C_2x)(C_3 + C_4z)$,
- si $C > 0$ alors $T_b(x, z) = (C_5e^{\lambda x} + C_6e^{-\lambda x})(C_7e^{i\lambda z} + C_8e^{-i\lambda z})$,
- si $C < 0$ alors $T_c(x, z) = (C_9\cos(\lambda x) + C_{10}\sin(\lambda x))(C_{11}\cosh(\lambda z) + C_{12}\sinh(\lambda z))$.

T_a , T_b et T_c vérifient séparément l'équation différentielle A.4. Cependant, aucune des trois vérifient toutes les conditions aux limites. Seule une combinaison linéaire de $T_a(x, z)$ et $T_c(x, z)$, par exemple $T(x, z) = T_a(x, z) + T_c(x, z)$ est une solution acceptable, car elle vérifie à la fois l'équation différentielle et l'ensemble des conditions aux limites. Après quelques développements de calculs, cf [WHITAKER 83], on trouve :

$$T(x, z) = T_0 + 2(T_1 - T_0) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - (-1)^n)}{n\pi \sinh(\frac{n\pi H}{b})} \sin(\frac{n\pi x}{b}) \sinh(\frac{n\pi z}{b}), \quad (\text{A.5})$$

A.2.2 Cas où f est de classe C^1

On choisit d'imposer une température f de classe C^1 sur le bord supérieur. Au niveau des coins supérieurs, on a $T(0, H) = T(b, H) = T_0$ et $\frac{\partial T}{\partial x}(0, H) = \frac{\partial T}{\partial x}(b, H) = 0$.

Donc la fonction T_f doit vérifier les mêmes conditions, ie: $T_f(0) = T_f(b) = T_0$ et $T'_f(0) =$

$T'_f(b) = 0$. On fixe de plus que T_f atteigne son maximum T_1 en $x = \frac{b}{2}$, donc $T_f(\frac{b}{2}) = T_1$.
D'où

$$T_f(x) = T_0 - \frac{16}{b^4}(T_0 - T_1)x^2(x - b)^2$$

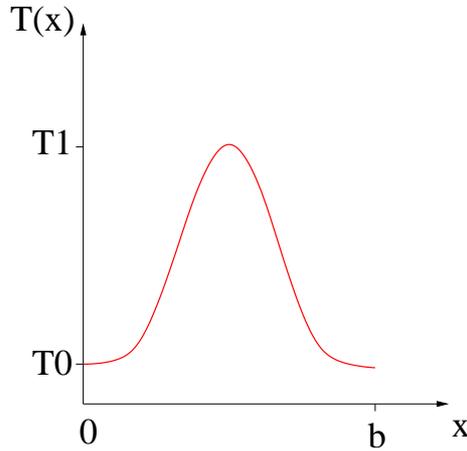


Figure A.3 : Température imposée sur le bord supérieur du domaine.

On se place dans les mêmes conditions que dans le cas où la température imposée sur le bord supérieur est constant. On retrouve ainsi l'équation A.4 à résoudre.

Les conditions aux limites se traduisent par ,

- $T(x = 0, z) = T_0$
- $T(x, z = 0) = T_0$
- $T(x = H, z) = T_0$
- $T(x, z = H) = f(x)$

En suivant le même raisonnement que dans le cas exposé dans la sous section précédente et en se référant à [WHITAKER 83], on en déduit la température qui vérifie l'équation A.4 et les conditions aux limites. Soit :

$$T(x, z) = T_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right) \sinh\left(\frac{n\pi z}{b}\right),$$

où

$$C_n = \frac{2}{b \sinh\left(\frac{n\pi H}{b}\right)} \int_0^b (f(x) - T_0) \sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right) dx.$$

Dans notre cas,

$$C_n = \frac{2}{b \sinh\left(\frac{n\pi H}{b}\right)} \int_0^b \frac{16}{b^4} (T_0 - T_1) x^2 (x - b)^2 \sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right) dx.$$

Après quelques intégrations par partie, on obtient :

$$C_n = 4(T_1 - T_0) 16 \frac{(1 - (-1)^n)}{(n\pi)^3 \sinh\left(\frac{n\pi H}{b}\right)} \left(\frac{12}{(n\pi)^2} - 1\right).$$

D'où,

$$T(x, z) = T_0 + 16(T_1 - T_0) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{(n\pi)^3 \sinh\left(\frac{n\pi H}{b}\right)} \sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right) \sinh\left(\frac{n\pi z}{b}\right) \quad (\text{A.6})$$

Bibliographie

- [ANGOT 89] P. ANGOT. *Contribution à l'étude des transferts thermiques dans des systèmes complexes; application aux composants électroniques*. Thèse de doctorat, Université BordeauxI, 1989.
- [B. GUO 86] I. BABUŠKA B. GUO. *The h-p version of the finite element method*. Part 1, J. Comput. Mech., vol. 1, p. 21–42, 1986.
- [BAKER 97] T. BAKER. *Mesh adaptation strategies for problems in fluid dynamics*. Finite Elements in Analysis and Design, vol. 25, p. 243–273, 1997.
- [BASU 83] P. BASU & A. PEANO. *Adaptivity in p-version finite element analysis*. J. Struct. Eng., vol. 109, p. 2310–2324, 1983.
- [BERGER 84] M. BERGER & J. OLIGER. *Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations*. Journal of Computational Physics, vol. 53, p. 484–512, 1984.
- [BERGER 89a] M. BERGER & J. OLIGER. *Adaptive mesh refinement for shock hydrodynamics*. Journal of Computational Physics, vol. 82, p. 64–84, 1989.
- [BERGER 89b] M. J. BERGER & P. COLELLA. *Local adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations*. J. Comput. Phys., vol. 82, p. 64–84, 1989.
- [BREIL 01] G. BREIL. *Modélisation du remplissage en propergol de moteur à propulsion solide*. Thèse de doctorat, Université BordeauxI, 2001.

- [C. ILINCA 00] J.-Y. TREPANIER, C. ILINCA, X. ZHANG & R. CAMARERO. *A comparison of three error estimation techniques for Finite Volume solutions of compressible flows*. Computer methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 189, p. 1277–1294, 2000.
- [CHASSAING 00] P. CHASSAING. *Turbulence en mécanique des fluides. Analyse du phénomène en vue de sa modélisation à l’usage de l’ingénieur*. Collection Polytech, cépaduès-editions edition, 2000.
- [D. AIT-ALI-YAHA 00] A. TAM, M. VALLET, D. AIT-ALI-YAHA, W. HABASHI & M. FORTIN. *A directionally adaptive methodology using an edge-based error estimate on quadrilateral grids*. International Journal for Numerical Methods in Fluids, vol. 32, p. 725–744, 2000.
- [DELHAYE 74] J. M. DELHAYE. *Jump conditions and entropy sources in two phase systems. Local instant formulation*. Int. J. Multiphase Flow, vol. 1, p. 395–409, 1974.
- [E. BELLENGER 05] P. COOREVITS, E. BELLENGER. *Adaptive mesh refinement for the control of cost and quality in finite element analysis*. Finite Elements in Analysis and Design, vol. 41, p. 1413–1440, 2005.
- [FORTIN 82] C. FORTIN & R. GLOWINSKY. *Méthodes de Lagrangien augmenté. Application à la résolution numérique de problèmes aux limites*. Dunod, Paris, 1982.
- [GUSTAFSSON 78] P. GUSTAFSSON. *On first and second order symmetric factorization methods for the solution of elliptic difference equations*. Chalmers University of Technology, 1978.
- [HACKBUSH 85] W. HACKBUSH. *Multi-grid methods and applications*. Springer, Berlin, 1985.

- [HARLOW 65] H. HARLOW & J.E. WELCH. *Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface*. Phys. Fluids, vol. 8, p. 2182–2189, 1965.
- [HAY 04] A. HAY. *Etude des stratégies d'estimation d'erreur numérique et d'adaptation locale de maillages non-structurés pour les équations de Navier-Stokes en moyenne de Reynolds*. Thèse de doctorat, Université de Nantes, 2004.
- [HAY 05] A. HAY & M. VISONNEAU. *Computation of free-surface flows with local mesh adaptation*. Int. J. Numer. Meth. Fluids, vol. 49, p. 785–816, 2005.
- [HIRSCH 90] C. HIRSCH. *Numerical computation of internal and external flows, volume 2: computational methods for inviscid and viscous flows*. John Wiley and Sons, Chichester, 1990.
- [J. B. BELL et al.] J. S. SALTZMAN J. B. BELL M. BERGER & M. WELCOME. *Three Dimensional Adaptive Mesh Refinement for Hyperbolic Conservation Laws*. LLNL report UCRL-JC-108794, 1991 december.
- [J. CADAFAALCH 98] M. SORIA J. CADAFAALCH C. D. PEREZ-SEGARRA & A. OLIVA. *Fully conservative multiblock method for the resolution of turbulent incompressible flow*. In Proceedings of the Fourth ECCOMAS Computational Fluid Dynamics Conference, vol. 1.2, p. 1234–1239, 1998.
- [J. CADAFAALCH 99] C. D. PEREZ-SEGARRA M. COSTA J. CADAFAALCH A. OLIVA & J. SALOM. *Comparative study of conservative and nonconservative interpolation schemes for the domain decomposition domain on laminar incompressible flow*. Numerical Heat Transfer, Part B, vol. 35, p. 65–84, 1999.
- [J. HETU 92] D. PELLETIER J. HETU. *Adaptive remeshing for viscous incompressible flows*. AIAA Journal, vol. 30, p. 1986–1992, August 1992.

- [J. ODEN 89] W. RACHOWICZ J. ODEN L. DEMKOWICZ & T. WESTERMANN. *Toward a universal h-p adaptive finite element strategy, Part 2: A-posteriori error estimation*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 77, p. 113–180, 1989.
- [J. TAINE 03] J-P PETIT J. TAINE. *Transferts thermiques, Introduction aux sciences des transferts*. Dunod, paris, 3ème édition edition, 2003.
- [J. U. BRACKBILL 92] D.B. KOTHE J. U. BRACKBILL & C. ZEMACH. *A continuum method for modeling surface tension*. J. Comput. Phys., vol. 100, p. 335–354, 1992.
- [K. KHADRA 95] J.P. CALTAGIRONE K. KHADRA & P. ANGOT. *On a local multigrid mesh refinement for solving Navier-Stokes equations*. Comptes rendus de l'académie des sciences, Série II-Mécanique-Physique-Chimie-Astronomie, vol. 320(6), p. 295–302, Mars 1995.
- [KATAOKA 86] I. KATAOKA. *Local instant formulation of two phase flow*. Int. J. Multiphase Flow, vol. 12, p. 745–758, 1986.
- [KHADRA 94] K. KHADRA. *Méthodes adaptatives de raffinement local multigrille, applications aux équations de Navier-Stokes et de l'énergie*. Thèse de doctorat, Université BordeauxI, 1994.
- [L. DEMKOWICZ 89] W. RACHOWICZ L. DEMKOWICZ J. ODEN & O. HARDY. *Toward a universal h-p adaptive finite element strategy, Part 1: Constrained approximation and data structure*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 77, p. 79–112, 1989.
- [LEVEQUE 90] R. J. LEVEQUE. *Numerical methods for conservation laws*. Lectures in Mathematics, ETH Zurich, Birkhauser, 1990.

- [LEVEQUE 92] R.J. LEVEQUE. *Numerical methods for conservation laws*. Lectures in mathematics, Landford, Birkhauser, Zurich, page 173, 1992.
- [LEVEQUE 96] R. LEVEQUE. *High -resolution conservative algorithms, for advection in incompressible flow*. SIAM J. Numer. Anal., vol. 33, p. 627–665, 1996.
- [M. SUSSMAN 99] J. B. BELL P. COLELLA L. H. HOWELL M. SUSSMAN A. S. ALMGREN & M. L. WELCOME. *An adaptive Level Set Approach for Incompressible Two-Phase Flows*. Journal of Computational Physics, vol. 148, p. 81–124, 1999.
- [N. PIERCE 03] M. GILES N. PIERCE. *Adjoint and defect error bounding and correction for functional estimates*. In the 16th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference, p. paper 2003–3846, 2003.
- [P. ANGOT 92] K. KHADRA P. ANGOT J. P. CALTAGIRONE. *Une méthode adaptative de raffinement local : la Correction du Flux à l'Interface*. C. R. Acad. Sci. Paris, Série I, vol. 315, p. 739–745, 1992.
- [P. LASCAUX 00] R. THEODOR P. LASCAUX. *Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur : tome 2 Méthodes itératives*. Dunod, Paris, 2000.
- [P. LIOVIC 06] J-L. LIOVIC D. LAKEHAL D. KOTHE P. LIOVIC M. RUDMAN. *A 3D unsplit-advection volume tracking algorithm with planarity-preserving interface reconstruction*. Comput. and Fluids, 2006.
- [PALMERIO 88] B. PALMERIO. *A two dimensional FEM adaptive moving-node method for steady Euler flow simulation*. Computer methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 71, p. 315–340, 1988.

- [PALMERIO 94] B. PALMERIO. *An attraction-repulsion mesh adaptation model for flow solution on unstructured grids*. Computer and Fluids, vol. 23, p. 487–506, 1994.
- [PATANKAR 80] S. V. PATANKAR. Numerical heat transfer and fluid flow. Hemisphere Publishing Corporation, New York (USA), 1980.
- [PIRZADEH 99] S. PIRZADEH. *An adaptive unstructured grid method by grid subdivision, local remeshing and grid movement*. In the 14th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference, p. paper 99–3255, 1999.
- [R. PEMBER 95] P. COLELLA-W. CRUTCHFIELD R. PEMBER J. BELL & M. WELCOM. *An adaptive grid method for unsteady compressible flow in irregular regions*. Journal of Computational Physics, vol. 120, p. 278–304, 1995.
- [R. T. TENCHEV 05] T.J. SCANLON M.T. STICKLAND R. T. TENCHEV J.A. MACHENZIE. *Finite element moving mesh analysis of phase change problems with natural convection*. International Journal of Heat and Fluid Flow, vol. 26, p. 597–612, 2005.
- [RICHARDSON 10] L. RICHARDSON. *The approximative arithmetical solution by Finite Differences of physical problems involving differential equations, with an application to the stress in a masonry dam*. Transactions of the Royal Society of London, vol. 210, Series A, p. 307–357, 1910.
- [RICHARDSON 27] L. RICHARDSON. *The deferred approach to the limit*. Transactions of the Royal Society of London, vol. 226, Series A, p. 299–361, 1927.
- [RITZ 97] J.B. RITZ. *Modélisation numérique des écoulements fluide-particule définition d'un modèle de simulation directe application à la sédimentation*. Thèse de doctorat, Université Bordeaux I, 1997.

- [S. DELAGE 04] J.P. CALTAGIRONE S. DELAGE S.VINCENT & J.P. HELIOT. *An hybrid linking approach for solving the conservation equations with an Adaptive Mesh Refinement method*. International Conference of Computational Methods in Sciences and Engineering 2004, Lecture Series on Computer and Computational Sciences, vol. 1, p. 150–153, 2004.
- [S. VINCENT 04] P. LUBIN T. N. RANDRIANARIVELO S. VINCENT J-P. CALTAGIRONE. *An adaptive augmented Lagrangien method for three dimensional multimaterial flows*. Computers and Fluids, vol. 33, p. 1273–1289, 2004.
- [SMAGORINSKY 63] J. SMAGORINSKY. *General circulation experiments with the primitive equations*. Month. Weath. Rev., vol. 93, p. 99–165, 1963.
- [T. WASHIO 00] C. W. OOSTERLEE T. WASHIO. *Error analysis for a potential problem on locally refined grids*. Numerische Mathematik, vol. 86, p. 539–563, 2000.
- [U. TROTTENBERG 01] A. SCHULLER U. TROTTENBERG C. OOSTERLEE. *Multigrid*. Academic press edition, 2001.
- [VENDITTI 02] D. VENDITTI & D. DARMOFAL. *Grid adaptation for functional outputs: Application to two-dimensional inviscid flows*. Journal of Computational Physics, vol. 176, p. 40–46, 2002.
- [VINCENT 99] S. VINCENT. *Modélisation d'écoulements incompressibles de fluides non-miscibles*. Thèse de doctorat, Université BordeauxI, 1999.
- [VINCENT 00] S. VINCENT & J.P. CALTAGIRONE. *One Cell Local Multigrid method for solving unsteady incompressible multi-phase flows*. J. Comput. Phys., vol. 163, p. 172–215, 2000.

- [VORST 92] H. A. VAN DER VORST. *A fast and smoothly converging variant of BI-CG for the solution of non-symmetric linear systems*. SIAM J. Sci. Stat. Comput., vol. 13(2), p. 631–644, 1992.
- [W. HABASHI 98] Y. BOURGAULT M. FORTIN W. HABASHI J. DOMPIERRE & M. VALLET. *Certifiable computational fluid dynamics through mesh optimization*. AIAA journal, vol. 36, p. 703–711, 1998.
- [W. RACHOWICZ 89] J. ODEN W. RACHOWICZ & L. DEMKOWICZ. *Toward a universal h-p adaptive finite element strategy, Part 3: Design of h-p meshes*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 77, p. 181–212, 1989.
- [WHITAKER 83] S. WHITAKER. *Fundamental Principles of Heat Transfer*. Robert E. Krieger Publishing company, malabar, florida edition, 1983.
- [X. D. LIU 94] S. OSCHER X. D. LIU & T. CHAN. *Weighted Essentially Non Oscillatory Schemes*. J. Comput. Phys., vol. 115, p. 200–212, 1994.
- [ZALESKI] S. ZALESKI. *Computation of multiphase flow by volume of fluid and high-order front tracking methods*.