



HAL
open science

Excitation stochastique des oscillations stellaires. Application à la mission spatiale COROT.

Réza Samadi

► **To cite this version:**

Réza Samadi. Excitation stochastique des oscillations stellaires. Application à la mission spatiale COROT.. Astrophysique [astro-ph]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2000. Français. NNT: . tel-00067734v1

HAL Id: tel-00067734

<https://theses.hal.science/tel-00067734v1>

Submitted on 7 May 2006 (v1), last revised 15 Aug 2008 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ PARIS 6

Spécialité :

Méthodes instrumentales en Astrophysique et leurs applications spatiales

présentée par

David Réza SAMADI

pour obtenir le grade de DOCTEUR de l'UNIVERSITÉ PARIS 6

Sujet de la thèse :

**Excitation stochastique des oscillations stellaires.
Application à la mission spatiale COROT.**

soutenue le 8 décembre 2000
devant le jury composé de :

Président :	Pr. Pierre ENCRENAZ
Directeur de thèse :	Annie BAGLIN
Rapporteurs :	Pr. Pawan KUMAR Pr. Michel RIEUTORD
Examineurs :	Marie-Jo GOUPIL André MANGENEY Pr. Ian ROXBURGH Michel AUVERGNE

Résumé

On a tout lieu de croire que les oscillations acoustiques du Soleil, qui sont sujettes à différents mécanismes complexes d'amortissement, sont excitées stochastiquement par les mouvements incohérents de matière dans la zone convective. Ces mouvements turbulents sont à l'origine d'une puissance acoustique injectée dans les oscillations et en assurent la survie. On désigne alors par oscillations de type solaire des oscillations acoustiques excitées par ce mécanisme, elles concernent les étoiles de masse intermédiaire dotées d'une zone convective supérieure. Pour peu que des mesures précises d'amplitude et d'amortissement soient disponibles il est possible d'évaluer cette puissance acoustique et de contraindre la physique du phénomène. Dans ce travail les bases de cette théorie ont été reconsidérées : les inconsistances ont été identifiées et supprimées et les controverses entre les auteurs précédents résolues. Il en résulte une nouvelle formulation qui généralise le traitement de la turbulence. Le terme d'advection des fluctuations turbulentes de l'entropie par le champ de vitesse est identifiée comme la source d'excitation dominant largement la source liée au stress de Reynolds. Les études quantitatives effectuées pour un modèle du Soleil et de Procyon ont révélé la grande sensibilité aux paramètres libres, introduits dans la théorie, ainsi qu'à la modélisation de la turbulence. L'application de cette formulation à des étoiles de masse intermédiaire ($1 \lesssim M \lesssim 2 M_{\odot}$) de la séquence principale a mis en évidence des effets systématiques relatifs aux paramètres stellaires : plus l'étoile est chaude plus la sensibilité au spectre de turbulence est exacerbée et plus elles sont porteuses d'information. La future mission spatiale COROT devrait collecter des données de haute qualité sur ce type d'étoile. Dans cette perspective et pour optimiser le retour scientifique nous avons développé un modèle numérique de la chaîne photométrique de l'instrument. Ce modèle nous a permis d'apprécier la réponse de l'instrument que nous avons alors convolué avec nos estimations des puissances. On établit que les hautes performances de COROT devraient être capables de nous fournir les contraintes observationnelles sur la théorie développée dans le présent travail.

Abstract

The observed solar p -mode oscillations are damped due to several damping mechanisms and in the other hand they are believed to be excited stochastically by turbulent convection. Turbulent motions, which occur in the convection zone, generate acoustic power which in turn is injected into the p -mode oscillations and thus ensures the modes excitation. Solar-like oscillations are therefore meant as stochastically excited oscillations and concern low massive stars with an outer convective zone. Providing that accurate measurements of the oscillation amplitudes and damping rates are available it is possible to evaluate the power injected into the modes and thus- by comparison with the observations- to constrain current theories. In the present work we review the basic theory : inconsistencies are identified and removed and controversy between previous authors are solved. As a result I propose a new formulation which generalizes previous ones. This formulation enable investigations of various possible stellar turbulent models. The entropy contribution to excitation is found to originate from the advection of the Eulerian entropy fluctuations by the turbulent velocity field and dominates the contribution of the Reynolds stress. Numerical computations performed in the solar case and in the case of Procyon reveal the sensitivity to the free parameters - involved in the theory- and to the model of stellar turbulence. Application to several low intermediate stars ($1 \lesssim M \lesssim 2M_{\odot}$) located in the main-sequence shows that hotter stars are more sensitive to the turbulent features and thus can yield more information.

The forthcoming space mission COROT will provide high-quality data of solar oscillations. In order to optimize the scientific return of the mission we have developed a numerical simulation of the whole photometric chain. This simulation allows use to assess the instrument response which has been convoluted with the oscillations power. We conclude that the high performances of COROT will provide accurate constraints for the theory of the stochastic excitation developed in the present work.

THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ PARIS 6

Spécialité :

Méthodes instrumentales en Astrophysique et leurs applications spatiales

présentée par

David Réza SAMADI

pour obtenir le grade de DOCTEUR de l'UNIVERSITÉ PARIS 6

Sujet de la thèse :

**Excitation stochastique des oscillations stellaires.
Application à la mission spatiale COROT.**

soutenue le 8 décembre 2000
devant le jury composé de :

Président :	Pr. Pierre ENCRENAZ
Directeur de thèse :	Annie BAGLIN
Rapporteurs :	Pr. Pawan KUMAR Pr. Michel RIEUTORD
Examineurs :	Marie-Jo GOUPIL André MANGENEY Pr. Ian ROXBURGH Michel AUVERGNE

Rubayat

این چرخ فلک که ما در او حیرانیم فانوس خیال از او مثالی دانیم
خورشید چراغ دان و عالم فانوس ما چون صوریم کاندرا او حیرانیم

Cette voûte des cieux, sous laquelle nous sommes la proie du vertige
Nous pouvons, par la pensée, l'assimiler à une lanterne magique.
L'univers est cette lanterne, le Soleil y représente le foyer de la lumière
Et nous, semblables à ces images, nous y demeurons dans la stupéfaction.

اجرام که ساکنان این ایوانند اسباب تردد خردمندانند
هان تا سر رشته خرد گم نکنی کانا که مدبرند سرگردانند

Ces astres au palais de la nuit suspendus
Egarent les savants en problèmes ardu ;
Toi, du moins, ne perds pas le fil de la sagesse
Lorsque les connaisseurs eux-mêmes sont perdus.

Omar Khayam (1048-1122) [Khayam, 1994; Hedayat, 1993]
L'astronome et mathématicien perse qui ne croyait pas au ciel.

Remerciements

Ma reconnaissance dans son ensemble va naturellement à Marie-Jo et à Annie. La première pour l'aide et le regard critique et constructif apporté au cours du déroulement de cette thèse et pour tous ses efforts. La seconde pour les précieuses orientations stratégiques données à mes recherches ainsi qu'à l'attention continue accordée à mon travail.

Ma reconnaissance va ensuite à André Mangeney sans lequel je n'aurais pas eu le sentiment d'aboutir pleinement dans mes travaux sans ses suggestions.

J'ai aussi une ancienne reconnaissance à Jean Guibert qui m'a initié au travail de recherche à l'occasion de mon stage de DEA. Enfin je suis reconnaissant envers Pierre Encrenaz de m'avoir accueilli au sein de son DEA et de m'avoir permis d'entreprendre cette thèse.

Je remercie Michel Rieutord et Pawan Kumar d'avoir accepté de rapporter sur mon travail ainsi que l'ensemble de mon jury en particulier Ian Roxburgh qui a courageusement lu mon manuscrit écrit *in french*. Je remercie Jean-Paul Zahn pour les discussions utiles et l'attention apportée à mon travail.

Je suis redevable à Caroline Barban pour l'aide fournie et l'expérience partagée, à Françoise Tran Minh et Louis Léon pour l'usage de leur code et enfin à Yveline Lebreton pour les nombreux modèles calculés. Je remercie Claude Van't Veer pour le temps consacré à travailler sur des modèles d'atmosphère.

Je remercie également Myriam Adda et Eric Copet pour la contribution au modèle de l'instrument, Michel Auvergne pour le suivi de son développement et enfin à Jean Schneider et Eric Michel pour l'intérêt porté à celui-ci.

Au delà des relations qui demeurent dans le cadre strictement professionnel, il y a aussi celles qui tiennent tout simplement de l'amitié :

Ce fut ainsi un réel plaisir de travailler avec Marie-Jo que je remercie pour sa patience. Je n'oublierai pas en particulier les séances de correction de thèse sur la plage des Canaries ...

Je suis infiniment reconnaissant à Annie pour la confiance qu'elle m'a accordée, le soutien moral qu'elle m'a apporté et la motivation qu'elle a su susciter en moi.

Il y a aussi ceux "de la bande à EVRIS" avec qui j'ai fait connaissance il y a plus de 5 ans : Gérard, Michel, Annie et Tristan. J'ai partagé pas mal de bons moments avec eux ! J'espère qu'il nous sera donné à l'avenir d'assister ensemble à un lancement (de COROT!) réussi.

Et il y a ceux que j'ai rencontrés également à l' "obs" peu de temps après, parfois au hasard des relations humaines : Yamina, Régis , Damien, Boutheina, Philippe Zanatta, Amir ...

Et ceux qui ont suivi le même chemin (de galère ?) avec moi depuis le DEA : Sujit, Jihane, Fred, Philippe Marty, Christophe, Gilles Biolluz, Gilles Chagnon Je souhaite en passant à mes camarades doctorants courage et succès dans l'accomplissement de leur thèse !

Et enfin il y a ceux que j'ai rencontrés en dehors de l' "obs" ou de l' "astro" en général et qui m'ont permis de ce fait de connaître d'autres horizons (Muriel, Myriam, Sina) et de réchauffer mon coeur (Salima).

Je remercie enfin tous mes proches qui m'ont soutenu et aidé. En particulier mon père pour les deux quatrains de Khayam du préambule de cette thèse et ma mère pour la correction de nombreuses fautes d'orthographe !

Enfin pour terminer j'aimerais dédier cette thèse à Sonia pour qui ces trois années qui s'achèvent coïncident aussi avec trois années de labeur et d'efforts, mais le plus dur est maintenant derrière nous !

Table des matières

Références bibliographiques	11
-----------------------------	----

Chapitre 1

Introduction

1.1 Les oscillations de type solaire	15
1.2 Problématique scientifique	16
1.3 Problématique instrumentale	17
1.4 Organisation du manuscrit	18

Chapitre 2

Les oscillations stellaires

2.1 Modes propres d'oscillations	19
2.1.1 Equations de base	19
2.1.2 Forme locale et diagramme de propagation	21
2.2 Processus d'excitation et d'amortissement	22
2.2.1 Excitation	22
2.2.2 Amortissement	23
2.2.3 Bilan	23
2.3 Les observations	24
2.3.1 Les données solaires	24
2.3.2 Les autres étoiles	25
2.4 Des observations aux modèles	25

Chapitre 3

Le milieu stellaire convectif turbulent

3.1 Modèles convectifs	33
3.1.1 Critère d'instabilité et régions convectives	33
3.1.2 Transport convectif de l'énergie	35
3.1.3 La théorie standard de la longueur de mélange	35
3.1.4 Autres formulations	37
3.1.5 La théorie de la longueur de mélange dépendante du temps	39
3.1.6 La théorie non-locale de la longueur de mélange	41
3.2 Modélisation du milieu turbulent	43
3.2.1 Transition vers la turbulence	43
3.2.2 La cascade turbulente	44

3.2.3	Produits de corrélation	45
3.2.4	L'approximation quasi-normale	46
3.2.5	Spectre temporel	47
3.2.6	Granulation solaire	48
3.2.7	Spectre d'énergie cinétique	52
3.2.8	Le scalaire passif	53

Chapitre 4

L'excitation stochastique

4.1	Approche du type Lighthill	60
4.2	La stratification	61
4.3	Principe de l'excitation stochastique	62
4.4	L'équation d'onde inhomogène	64
4.4.1	Oscillations libres	65
4.4.2	Modes propres d'oscillation excités par la turbulence	66
4.5	Moyenne quadratique des amplitudes des modes	67
4.6	Ordre de grandeur et termes sources dominants	69
4.6.1	Loi d'échelle des fluctuations turbulentes	69
4.6.2	Termes sources dominants	71
4.6.3	Termes sources négligeables	73
4.7	Contribution du terme source de Reynolds	74
4.8	Contribution des termes sources entropiques	76
4.8.1	Contribution du terme linéaire	77
4.8.2	Contribution du terme non-linéaire	77
4.9	Formulation globale	79
4.10	Exemples	79
4.10.1	Spectre temporel gaussien	79
4.10.2	Spectre de Kolmogorov	80
4.11	Formes asymptotiques	80
4.12	Validité et limitations	80

Chapitre 5

Excitation des oscillations solaires

5.1	Modèle solaire à 1 dimension	83
5.1.1	Modèle basé sur le traitement standard de la convection	83
5.1.2	Modèle basé sur la description de Gough de la convection	88
5.2	Pression turbulente et effets non-adiabatiques	88
5.3	Simulation solaire à 3 dimensions	90
5.3.1	Validation des hypothèses du modèle turbulent	92
5.3.2	Validation des approximations du modèle convectif	97

Chapitre 6

Du Soleil à Procyon

6.1	Modèle de Procyon basé sur la MLT classique	103
-----	---	-----

6.1.1	Puissance des oscillations	103
6.1.2	Influence de différentes hypothèses	105
6.2	Un traitement de la convection plus “sophistiqué”	107
6.3	Estimation des vitesses des oscillations	112
6.4	Conclusion	114

Chapitre 7

Du Soleil aux autres étoiles

7.1	Parcours du diagramme HR	115
7.2	Contraintes observationnelles	117
7.3	Conclusion	119

Chapitre 8

Modélisation de la chaîne photométrique de l’instrument COROT

8.1	Le projet COROT	121
8.1.1	La mission et les spécifications scientifiques	121
8.1.2	Le satellite	122
8.2	Besoins et contraintes	123
8.3	Objectifs et caractéristiques	124
8.3.1	Le modèle idéal	125
8.3.2	Le modèle considéré	125
8.4	Modélisations et impasses	125
8.5	Implémentation	128
8.5.1	Module Images	128
8.5.2	Module Détecteur	130
8.5.3	Module Traitement	130
8.6	Interfaces et utilisation	132
8.7	Application	134

Conclusion

1	Synthèse	137
2	Perspectives	138

Annexe A

Profil Lorentzien

Annexe B

Termes croisés

Annexe C

Effets géométriques de l’anisotropie

Annexe D

Contribution de l’entropie

Annexe E Publications
--

Références bibliographiques

- M. Adda. *Photométrie CCD de très haute précision dans l'espace. Application au programme stellaire de la mission spatiale COROT*. PhD thesis, Université Paris 6, 2000.
- H. Ando and Y. Osaki. Nonadiabatic nonradial oscillations - an application to the five-minute oscillation of the sun. *PASJ*, 27 :581–603, 1975.
- M. Auvergne and the COROT Team. The noise budget of the seismology channel of the corot mission. In *The Third MONS Workshop : Science Preparation and Target Selection*, pages 135–138, april 2000.
- A. Baglin and The Corot Team. Asteroseismology from space - the corot experiment. In *IAU Symp. 185 : New Eyes to See Inside the Sun and Stars*, volume 185, page 301, 1998.
- A. Baglin, W.W. Weiss, and G. Bisnovatyi-Kogan. In A. Baglin and W.W. W. Weiss, editors, *Inside the stars*, page 756, 1993.
- C. Bailly. *Modelisation du rayonnement acoustique des écoulements turbulents libres subsoniques et supersoniques*. PhD thesis, Ecole centrale de Paris, 1994.
- N. H. Baker and D. O. Gough. Pulsations of model rr lyrae stars. *ApJ*, 234 :232–244, November 1979.
- N. J. Balmforth and D. O. Gough. Mixing-length theory and the excitation of solar acoustic oscillations. *Solar Physics*, 128 :161–193, July 1990.
- N. J. Balmforth. Solar pulsational stability - part three - acoustical excitation by turbulent convection. *MNRAS*, 255 :639, April 1992.
- N. J. Balmforth. Solar pulsational stability - part two - pulsation frequencies. *MNRAS*, 255 :632, April 1992.
- N. J. Balmforth. Solar pulsational stability. i - pulsation-mode thermodynamics. *MNRAS*, 255 :603–649, April 1992.
- C. Barban, E. Michel, M. Martic, J. Schmitt, J. C. Lebrun, A. Baglin, and J. L. Bertaux. Solar-like oscillations of procyon a : stellar models and time series simulations versus observations. *A&A*, 350 :617–625, October 1999.
- C. Barban. *Sismologie d'étoiles A,F et G de la séquence principale*. PhD thesis, Université Paris 6, dec 1999.
- G. K. Batchelor. *The theory of homogeneous turbulence*. University Press, 1970.
- T. R. Bedding, H. Kjeldsen, J. Reetz, and B. Barbuy. Measuring stellar oscillations using equivalent widths of absorption lines. *MNRAS*, 280 :1155–1161, June 1996.
- E. Bohm-Vitense. *Introduction to stellar astrophysics*, volume 3. Cambridge University Press, 1989.
- A.S. Brun. *Étude théorique de la structure interne du Soleil*. PhD thesis, Université Paris VII-Denis Diderot, 1998.
- P. Butler et al. (*in preparation*), 2000.
- V. M. Canuto and I. Mazzitelli. Stellar turbulent convection - a new model and applications. *ApJ*, 370 :295–311, March 1991.
- C. Catala. Corot projet de petite mission ("document rose"), 1996.
- W. J. Chaplin, Y. Elsworth, G. R. Isaak, R. Lines, C. P. McLeod, B. A. Miller, and R. New. "solar p-mode excitation : further insight from recent low-l bison helioseismological data". *MNRAS*, 298 :L7–L12, July 1998.
- J. Christensen-Dalsgaard and S. Frandsen. Radiative transfer and solar oscillations (invited review). *Solar Physics*, 82 :165–204, January 1983.
- J. Christensen-Dalsgaard and S. Frandsen. Stellar 5 min oscillations. *Solar Physics*, 82 :469–486, 1983.

- J. Christensen-Dalsgaard. Lecture notes on stellar oscillations, 1989.
- G. Comte-Bellot, C. Bailly, and Ph. Blanc-Benon. Modelling tools for flow noise and sound propagation through turbulence. In O. Metais and J. Ferziger, editors, *New Tools in Turbulence Modelling*, pages 141–162. Les Editions de Physique & Springer-Verlag, 1997.
- T.Ĝ. Cowling. The non-radial oscillations of polytropic stars. *MNRAS*, 101 :367, 1941.
- J.P. Cox. *Principles of stellar structure*. Gordon and Breach, 1968.
- J.P. Cox. *Theory of Stellar Pulsation*. Princeton University Press, 1980.
- F. L. Deubner. Observations of low wavenumber nonradial eigenmodes of the sun. *A&A*, 44 :371–375, November 1975.
- D. Dravins and A. Nordlund. Stellar granulation IV : Line formation in inhomogeneous stellar photospheres. *A&A*, 228 :184, 1990.
- D. Dravins and A. Nordlund. Stellar granulation V : Synthetic spectral lines in disk-integrated starlight. *A&A*, 228 :203, 1990.
- O. Espagnet, R. Muller, T. Roudier, and N. Mein. Turbulent power spectra of solar granulation. *A&A*, 271 :589, April 1993.
- J. W. Evans and R. Michard. Observational study of macroscopic inhomogeneities in the solar atmosphere. i. velocity displacements of fraunhofer lines as a function of line strength and position on disk. *ApJ*, 135 :812, May 1962.
- F. Favata, I Roxburgh, and J. Christensen-Dalsgaard. Eddington : a proposal to esa for asteroseismology and planet-finding. In *The Third MONS Workshop : Science Preparation and Target Selection*, pages 49–54, april 2000.
- E. Fossat. "the iris network for full disk helioseismology - present status of the programme". *Solar Physics*, 133 :1–37551, May 1991.
- A.H. Gabriel and *et al.* Global oscillations at low frequency from the soho mission (golf). *Solar Physics*, 162 :61, 1995.
- A. Gautschy and H. Saio. "stellar pulsations across the hr diagram : Part 1". *ARA&A*, 33 :75–114, 1995.
- P. Goldreich and D.Ā. Keeley. "solar seismology. i - the stability of the solar p-modes". *ApJ*, 211 :934–942, February 1977.
- P. Goldreich and D. A. Keeley. Solar seismology. ii - the stochastic excitation of the solar p-modes by turbulent convection. *ApJ*, 212 :243–251, February 1977.
- P. Goldreich and P. Kumar. Wave generation by turbulent convection. *ApJ*, 363 :694–704, November 1990.
- P. Goldreich and P. Kumar. Thermal and mechanical damping of solar p-modes. *ApJ*, 374 :366–368, jun 1991.
- P. Goldreich and N. Murray. The effects of scattering on solar oscillations. *ApJ*, 424 :480–490, March 1994.
- P. Goldreich, N. Murray, and P. Kumar. Excitation of solar p-modes. *ApJ*, 424 :466–479, March 1994.
- D.O. Gough. In E.A. Spiegel and J.-P. Zahn, editors, *Problems of stellar convection*, volume 71 of *Lecture notes in physics*, page 15. Springer Verlag, 1976.
- D. O. Gough. Mixing-length theory for pulsating stars. *ApJ*, 214 :196–213, May 1977.
- D. Gray. *The observation and analysis of stellar photospheres*. Cambridge University Press, 1992.
- S. Hedayat. *Les chants d'Omar Khayam*. J. Corti, 1993.
- G. Houdek, N. J. Balmforth, J. Christensen-Dalsgaard, and D. O. Gough. Amplitudes of stochastically excited oscillations in main-sequence stars. *A&A*, 351 :582–596, November 1999.
- G. Houdek. *Pulsation of Solar-type Stars*. PhD thesis, Institut für Astronomie , Wien, 1996.
- O. Khayam. *Rubayat*. Gallimard, 1994.
- H. Kjeldsen and T. R. Bedding. Amplitudes of stellar oscillations : the implications for asteroseismology. *A&A*, 293 :87–106, January 1995.
- H. Kjeldsen and T.R. Bedding, editors. *The First MONS Workshop : Science with a Small Space Telescope*. Aarhus Universitet., November 1998.
- H. Kjeldsen, T.Ř. Bedding, M. Viskum, and S. Frandsen. "solarlike oscillations in eta boo". *AJ*, 109 :1313–1319, March 1995.

- R. W. Komm, R. Howe, and F. Hill. Width and energy of solar p-modes observed by gong. Special Publication SP-464. ESA's Publications Division (EPD), October 2000.
- R. H. Kraichnan. Relation of fourth-order to second-order moments in stationary turbulence. *Physical Review.*, 107 :1485–1490, 1957.
- P. Kumar and P. Goldreich. Nonlinear interactions among solar acoustic modes. *ApJ*, 342 :558–575, July 1989.
- R.L. Kurucz. *Stellar Atmospheres : Beyond Classical Models*. NATO ASI Series. Kluwer, 1991.
- Y. Lebreton, M. Perrin, R. Cayrel, A. Baglin, and J. Fernandes. "the hipparcos hr diagram of nearby stars in the metallicity range : $-1.0 < [Fe/H] < 0.3$. a new constraint on the theory of stellar interiors and model atmospheres". *A&A*, 350 :587–597, October 1999.
- P. Ledoux and Th. Walraven. In Flugge S., editor, *Handbuch der Physik*, volume 51, page 353. Springer-Verlag (New York), 1958.
- R. B. Leighton, R. W. Noyes, and G. W. Simon. Velocity fields in the solar atmosphere. i. preliminary report. *ApJ*, 135 :474, March 1962.
- M. Lesieur. *Turbulence in fluids*. Kluwer Academic Publishers, 1997.
- K.Ĝ. Libbrecht and H. Zirin. "properties of intermediate-degree solar oscillation modes". *ApJ*, 308 :413–423, September 1986.
- K. G. Libbrecht. Solar p-mode phenomenology. *ApJ*, 334 :510–516, November 1988.
- K.Ĝ. Libbrecht. "on the ultimate accuracy of solar oscillation frequency measurements". *ApJ*, 387 :712–714, March 1992.
- M. J. Lighthill. On sound generated aerodynamically. *Proc. R. Soc. Lond.*, A211 :564, 1952.
- B. Mandelbrot. *Fractals*. Freeman, 1977.
- M. Martić, J. Schmitt, J.-C. Lebrun, C. Barban, P. Connes, F. Bouchy, E. Michel, A. Baglin, T. Appourchaux, and J.-L. Bertaux. Evidence for global pressure oscillations on procyon. *A&A*, 351 :993–1002, 1999.
- J. M. Matthews. Asteroseismology from space : Getting the most science for the least money. In *Structure and Dynamics of the Interior of the Sun and Sun-like Stars*, page 395, 1998.
- D. W. Moore and E. A. Spiegel. The generation and propagation of waves in a compressible atmosphere. *ApJ*, 139 :48, January 1964.
- P. Morel. Cesam : A code for stellar evolution calculations. *A&AS*, 124 :597–614, September 1997.
- R. Müller, T. Roudier, J.Ĝ. Malherbe, and P. Mein. "dynamics of the solar granulation". In *European Regional Astronomy Meeting of the IAU, Volume 1*, volume 1, page 175, 1987.
- R. Müller. Granulation : Overview. In R.J. Rutten and G. Severino, editors, *Solar and Stellar Granulation*, page 101. Kluwer Academic Publishers, 1989.
- Z. E. Musielak, R. Rosner, R. F. Stein, and P. Ulmschneider. On sound generation by turbulent convection : A new look at old results. *ApJ*, 423 :474–487, March 1994.
- A. Nesis, A. Hanslmeier, R. Hammer, R. Komm, W. Mattig, and J. Staiger. Dynamics of the solar granulation. 2 : A quantitative approach. *A&A*, 279 :599–609, November 1993.
- A. Nordlund and R. F. Stein. Convection : Significance for stellar structure and evolution. In A. Noels, D. Fraipont-Cro, M. Gabriel, N. Grevesse, and P. Demarque, editors, *Proceedings from the 32nd Liege Colloquium*, pages 75–93. Universite de Liege, Institut d'Astrophysique, 1996.
- A. Nordlund, H. C. Spruit, H. G. Ludwig, and R. Trampedach. Is stellar granulation turbulence? *A&A*, 328 :229–234, December 1997.
- A.M. Oboukov. On the distribution of energy in the spectrum of turbulent flow. *Dokl. Akad. Sci. Nauk SSSR*, 32 :22–24, 1941.
- S.A. Orzag. Analytical theories of turbulence. *J. Fluid Mech.*, 41 :363–386, 1970.
- Y. Osaki. Excitation mechanisms of solar oscillations. In Y. Osaki and H. Shibahashi, editors, *Lecture Notes in Physics : Progress of Seismology of the Sun and Stars*, page 75. Springer-Verlag, 1990.
- Y. Osaki. Excitation mechanisms of oscillations in stars. In *ASP Conf. Ser. 40 : IAU Colloq. 137 : Inside the Stars*, pages 512–520, 1993.
- M. Rieutord, T. Roudier, J.Ĝ. Malherbe, and F. Rincon. On mesogranulation, network formation and supergranulation. *A&A*, 357 :1063–1072, May 2000.

- M. Rieutord. *Une introduction à la dynamique des fluides*. Masson, 1997.
- T. Roudier and R. Muller. *Solar Phys.*, 107 :11, 1986.
- T. Roudier, J. Vigneau, O. Espagnet, R. Muller, P. Mein, and J. M. Malherbe. "dynamics of the solar granulation. ii - statistical analysis : Power spectra, coherence, phase". *A&A*, 248 :245–255, August 1991.
- R. Samadi and M.-J. Goupil. Excitation of stellar p-modes by turbulent convection : 1. theoretical formulation. *A&A(accepted)*, 2000.
- R. Samadi, M.-J. Goupil, and Y. Lebreton. Excitation of stellar p-modes by turbulent convection : 2. the sun. *A&A(accepted)*, 2000.
- R. Samadi, M.-J. Goupil, Y. Lebreton, and A. Baglin. Oscillation power as a test of stellar turbulence : Scanning the hr diagram. In *SOHO 10 / GONG 2000 Workshop*, October 2000.
- G. Schaller, D. Schaerer, G. Meynet, and A. Maeder. "new grids of stellar models from 0.8 to 120 solar masses at $z = 0.020$ and $z = 0.001$ ". *A&AS*, 96 :269–331, December 1992.
- E.A. Spiegel. Thermal turbulence at very small prandtl number. *J. Geophys. Res.*, 67 :3063, 1962.
- E. A. Spiegel. A generalization of the mixing-length theory of turbulent convection. *ApJ*, 138 :216, July 1963.
- H. C. Spruit, A. Nordlund, and A. M. Title. Solar convection. *ARA&A*, 28 :263–301, 1990.
- R. F. Stein and A. Nordlund. "topology of convection beneath the solar surface". *ApJ*, 342 :L95–L98, July 1989.
- F Stein and A. Nordlund. in *Challenges to Theories of the Structure of Moderate-Mass Stars*, volume 195. ed D. Gough & J. Toomre (Springer-Verlag), 1991.
- R. F. Stein and A. Nordlund. Simulations of solar granulation. i. general properties. *ApJ*, 499 :914, May 1998.
- R. F. Stein and A. Nordlund. Solar oscillations and convection : ii. excitation of radial oscillations. *ApJ(in press)*, 2000.
- R. F. Stein. Generation of acoustic and gravity waves by turbulence in an isothermal stratified atmosphere. *Solar Physics*, 2 :385–432, 1967.
- H. Tennekes and J.L. Lumley. *A first course in turbulence*. MIT Press, 8th edition, 1982.
- H. Tennekes. Eulerian and lagrangian time microscales in isotropic turbulence. *Journal of Fluids Mechanics*, 67 :561–567, 1975.
- T. Toutain and C. Froehlich. "characteristics of solar p-modes - results from the iphir experiment". *A&A*, 257 :287–297, April 1992.
- Trampedach. Theory and tests of convection in stellar structure. *PASP*, 173 :233, 1999.
- F. Tran Minh and L. Leon. The galerkin and b-splines method. In *Physical Process in Astrophysics*, page 219, 1995.
- R. K. Ulrich. The five-minute oscillations on the solar surface. *ApJ*, 162 :993, December 1970.
- W. Unno and S. Kato. On the generation of acoustic noise from the turbulent atmosphere, i. *PASJ*, 14 :417, 1962.
- W. Unno, Y. Osaki, H. Ando, H. Saio, and H. Shibahashi. *"Nonradial oscillations of stars"*. Nonradial oscillations of stars, Tokyo : University of Tokyo Press, 1989, 2nd ed., 1989.
- W. Unno. Stellar radial pulsation coupled with the convection. *PASJ*, 19 :140, 1967.
- J.-P. Zahn. Solar and stellar convection. In E.H. Schroter and M. Schussler, editors, *Solar and Stellar Physics*, volume 292 of *Lecture Notes in Physics*, pages 55–71. Springer-Verlag (Berlin), 1987.

Chapitre 1

Introduction

1.1 Les oscillations de type solaire

L’astérosismologie s’intéresse aux étoiles pulsantes *i.e.* des étoiles sujettes à des variations périodiques de l’éclat de l’étoile et de la vitesse de déplacement de la matière stellaire à la surface de celle-ci.

Elle se fonde sur les observations des oscillations qui s’établissent naturellement dans l’enveloppe stellaire. Ces oscillations se forment dans la cavité résonnante que constitue une étoile. Cette sphère gazeuse est en fait un milieu structuré et stratifié. Les fréquences des oscillations ainsi observées témoignent, à travers leur fréquence d’oscillation, de cette stratification et permettent ainsi de sonder les intérieurs stellaires.

Les modes d’oscillations se traduisent par des fluctuations très faibles de température, de densité et de pression. Ces fluctuations induisent à la surface de l’étoile des variations extrêmement petites de l’intensité lumineuse émergente de l’étoile mais également une modification des profils des raies spectrales de l’étoile. A l’image d’une cavité laser les modes résonnent à des fréquences de pulsation discrètes et se traduisent dans les observables par des signaux cohérents qui se distinguent des bruits instrumentaux en général blancs. Les fluctuations de luminosité et les vitesses spectrales induites par les oscillations sont donc les deux observables de base de l’astérosismologie.

Les modes d’oscillation stellaire sont principalement de deux natures : on distingue les modes de gravité ou mode “g” et les modes acoustiques ou mode “p”. Les premiers ont pour force de rappel la force d’Archimède et sont évanescents dans la zone convective supérieure des étoiles de type solaire, tandis que les seconds ont pour force de rappel le gradient de pression et s’étendent principalement de la base inférieure de la zone convective à la surface de l’étoile. Ces derniers sont les seuls que l’on observe pour ce type d’étoile. Ils apportent des contraintes sur la structure de l’étoile. Il s’agira donc des modes privilégiés sur lesquels se base exclusivement ce travail.

A la condition d’obtenir des mesures sismiques précises, on est capable de mesurer à la fois l’amortissement des modes et la puissance injectée dans ces modes (*c.f.* section 2.4). Cette dernière quantité témoigne du processus d’excitation des modes. Tandis que les mécanismes d’amortissement à ce jour proposés sont complexes et les approximations nombreuses, la physique du processus d’excitation des modes peut être contrainte par l’observable puissance. Ce principe suggéré par Goldreich *et al.* [1994] constitue la ligne directrice de mon travail de thèse.

Tandis que les théories en astérosismologie prédisent avec une grande précision les fréquences des modes, l’estimation de leur amplitude et durée de vie demeure très grossière. L’amplitude d’un mode résulte d’un équilibre entre excitation et amortissement. La physique relative aux processus d’excitation et d’amortissement demeure encore mal connue. On distingue deux processus d’excitation : l’excitation thermique due à un mécanisme d’opacité (κ -mécanisme) et l’excitation stochastique par la convection turbulente. Tandis que le κ -mécanisme explique l’excitation des oscillations d’un grand nombre d’étoiles pulsantes (δ Scuti, naines blanches, Céphéides) il est fort probable que ce mécanisme ne soit pas à l’origine des faibles amplitudes observées sur les étoiles peu massives ($1M_{\odot} \lesssim M \lesssim 2M_{\odot}$). En effet, dans le cas du Soleil, un très grand nombre d’oscillations d’amplitudes très faibles sont observées. Ces amplitudes ne peuvent pas être expliquées par le κ -mécanisme. En effet ce mécanisme se traduit pour certains modes par de l’amortissement tandis que pour un nombre faible de modes dits “instables” il se traduit par une excitation et dans ce cas un mécanisme de saturation entraîne des amplitudes très grandes.

Du fait de leur faible masse, ces étoiles sont dotées d’une zone convective externe. Cette zone convective est le siège de mouvements turbulents de matière et il a été suggéré il y a plus d’une vingtaine d’années

que ce milieu turbulent pouvait être à l'origine de l'excitation des modes acoustiques. On désigne alors par "oscillations de type solaire", des oscillations générées stochastiquement par la convection turbulente d'étoiles dotées d'une zone convective externe. Dans ce travail de thèse on s'intéressera exclusivement à l'excitation des modes d'oscillations de ce type d'étoile (les étoiles plus massives ($M \gtrsim 2M_{\odot}$) ne sont pas dotées d'une zone convective externe assez étendue par conséquent l'excitation des modes p ne peut donc pas être envisagée par ce mécanisme stochastique).

La convection turbulente se traduit par des mouvements turbulents de la matière stellaire, les mouvements chaotiques de matière génèrent alors une fluctuation turbulente de la pression que l'on désigne par bruit acoustique. C'est cette puissance acoustique qui excite les oscillations. Le processus d'excitation des modes est donc fortement dépendant du modèle de convection et des propriétés turbulentes du milieu. De plus l'excitation stochastique met en jeu une forte interaction entre les oscillations et le milieu turbulent. L'observable qui mesure la puissance injectée par la convection turbulente dans les oscillations peut dès lors être considéré comme un formidable outil de sondage de la zone convective, de caractérisation de l'état turbulent et de description des fonctions propres au niveau de la zone d'excitation. La comparaison entre prédictions théoriques de la puissance d'excitation stochastique et observations s'avère de ce fait un véritable enjeu.

Les travaux sur ce sujet ont été développés pour le cas du Soleil, or cette étoile n'est qu'un cas particulier. Du fait de la grande diversité d'étoiles de type solaire d'une part et la complexité des phénomènes physiques liés à l'excitation stochastique des modes d'autre part, une investigation sur un échantillon varié d'étoiles appartenant à des stades d'évolutions différents s'avère nécessaire et très prometteuse.

Des estimations fiables des valeurs absolues des amplitudes faites pour un échantillon varié d'étoiles de type solaire permettraient de caractériser les propriétés des spectres de puissances de ces étoiles. Ces caractéristiques permettront à leur tour de contraindre les étoiles cibles des missions spatiales d'astérosismologie actuellement en projet (COROT [Baglin and The Corot Team, 1998], MOST [Matthews, 1998] et MONS [Kjeldsen and Bedding, 1998], EDDINGTON [Favata *et al.*, 2000]) et de contraindre les spécifications des instruments à venir.

Plus précisément dans le cadre du projet spatial COROT [Baglin and The Corot Team, 1998] il est apparu indispensable d'évaluer les performances de l'instrument. En effet, pour peu que des estimations fiables des amplitudes des oscillations de type solaire soient disponibles, l'évaluation des performances de l'instrument permettra d'optimiser le profil de mission et d'anticiper ainsi sur le retour scientifique de la mission.

On le voit donc bien ici, ce travail de thèse s'inscrit dans un contexte scientifique et dans le cadre d'un projet spatial à la fois passionnant et enrichissant. C'est donc sur ces deux aspects que mon travail de thèse s'est engagé.

1.2 Problématique scientifique

Les oscillations solaires ont été mises en évidence pour la première fois par Evans and Michard [1962] et Leighton *et al.* [1962]. Ces oscillations ont été tout d'abord considérées comme émanant directement des mouvements turbulents à la surface du Soleil [Unno and Kato, 1962; Moore and Spiegel, 1964]. Ca n'est toutefois que bien plus tard que ces oscillations furent identifiées comme des modes propres d'oscillation, *i.e.* globaux [Ulrich, 1970; Deubner, 1975]. La confusion entre l'existence propre des modes globaux solaires et les phénomènes de génération du bruit acoustique par les mouvements turbulents a donc longtemps perduré.

Les caractéristiques générales des modes propres solaires sont aujourd'hui extrêmement bien connues. On sait ainsi qu'il s'agit de modes apparentés aux ondes sonores et qui se propagent dans une cavité en général plus grande que la zone convective externe des étoiles de type solaire. Les propriétés de ces modes propres, notamment leur fréquence, sont davantage contraintes par les caractéristiques globales de l'étoile et sont moins sensibles à l'existence du milieu convectif turbulent. Il reste à expliquer les mécanismes d'excitation des modes propres observés dans le Soleil.

On a considéré parallèlement les deux processus d'excitation plausibles, à savoir le κ -mécanisme [Ando and Osaki, 1975] et l'excitation stochastique par la convection turbulente telle que suggérée par Goldreich and Keeley [1977b].

Toutefois de nombreuses études [Goldreich and Keeley, 1977b; Kumar and Goldreich, 1989; Goldreich and Kumar, 1990] ont directement ou indirectement conforté l'idée que l'excitation stochastique apparaît le processus le plus probable (*c.f.* section 2) tandis que le κ -mécanisme semble insatisfaisant pour expliquer le grand nombre de modes excités et les faibles amplitudes observées pour le Soleil [Osaki, 1990].

On doit donc à Goldreich and Keeley [1977b] la première étude théorique pour expliquer l'origine stochastique de l'excitation des oscillations solaires. Les auteurs identifient le terme turbulent du tenseur de

Reynolds comme la source majeure d'excitation des modes acoustiques. L'étude en question conclut qu'il existe une équipartition d'énergie cinétique entre les éléments turbulents (tourbillons) et les oscillations. Toutefois l'estimation des amplitudes qui se déduit de cette première formulation sous-estime d'un facteur $\sim 10^3$ les puissances des oscillations solaires déduites des observations solaires [Osaki, 1990]. Ce n'est que bien plus tard que Stein and Nordlund [1991] suggèrent à l'aide de simulations numériques que le terme dominant d'excitation stochastique est attribuable à la composante non-adiabatique de la fluctuation de pression : en d'autres termes la fluctuation d'entropie serait la source majeure d'excitation. Fort de cette constatation, Goldreich *et al.* [1994] établissent une formulation incluant de façon approximative un terme source additionnel dérivant de la fluctuation turbulente d'entropie. Parallèlement Balmforth [1992a] isole ce terme source d'origine entropique et établit une nouvelle formulation par analogie à la méthode utilisée par Goldreich and Keeley [1977b]. Tandis que les premiers confortent les conclusions de Stein and Nordlund [1991], à savoir que la source d'excitation d'origine entropique serait fort probablement dominante devant celle qui prend son origine dans la fluctuation turbulente du stress de Reynolds, Balmforth [1992a] aboutit à la conclusion inverse. Cette controverse constitue un des éléments de la problématique sur laquelle mon travail de thèse s'est engagé.

Il nous est donc apparu instructif de mener plus avant une étude sur la nature même des processus d'excitation stochastique mis en jeu et en particulier en ce qui concerne la source additionnelle d'origine entropique. En effet une étude préliminaire des théories actuelles d'excitation des modes d'oscillations de type solaire nous a révélé un certain nombre d'inconsistances et d'approximations. Nous avons donc cherché à modéliser de façon plus consistante la source additionnelle d'entropie. De plus les formulations actuelles se restreignent à des descriptions simplifiées de la turbulence. L'utilisation de ces formulations à tout spectre turbulent (cinétique et entropique) est dès lors sujette à caution. Il nous a donc semblé nécessaire de généraliser d'abord la formulation donnant la puissance injectée dans les modes par la convection turbulente et d'en faire ainsi un outil de prospection de l'état turbulent de la zone de convection des étoiles de type solaire.

Le modèle développé par Goldreich and Keeley [1977b] et plus tard la formulation de Balmforth [1992a] ont servi de base dans les estimations des amplitudes des étoiles de type solaire. C'est ainsi que Christensen-Dalsgaard and Frandsen [1983b] appliquent le principe d'équipartition de Goldreich and Keeley [1977b] et déduisent les premières estimations d'amplitudes (luminosité et vitesse) pour des étoiles de type solaire situées sur la séquence principale.

S'appuyant sur la formulation due à Balmforth [1992a] et utilisant un modèle d'équilibre et un code de pulsation sophistiqué [Gough, 1977; Balmforth, 1992c], Houdek *et al.* [1999] ont obtenu de nouvelles estimations sur un grand nombre d'étoiles de type solaire de la séquence principale. Toutefois, on l'a évoqué plus haut, ces estimations se basent sur des hypothèses théoriques qui sont dans une certaine mesure restrictives, incomplètes et inconsistantes. Avec la formulation généralisée développée ici, il nous est possible d'étudier un échantillon varié d'étoiles de type solaire et d'isoler ainsi d'éventuelles caractéristiques communes relatives aux comportements turbulents de la zone convective.

D'autre part la consolidation de la théorie d'excitation stochastique ainsi obtenue nous a permis d'améliorer les estimations actuelles des puissances d'oscillation des étoiles. Ces estimations des puissances s'inscrivent dans la perspective des projets spatiaux à venir. La formulation ainsi dérivée offrira dans ce contexte un outil de diagnostic des puissances injectées stochastiquement dans les oscillations.

1.3 Problématique instrumentale

Les expériences spatiales s'affranchissent de certaines contraintes imposées aux instruments au sol, à savoir l'atmosphère et les interruptions jours-nuits. Elles offrent une très grande résolution fréquentielle et des seuils de détections plus bas que ce qui est atteint au sol. Des mesures précises des puissances injectées dans les modes d'oscillations seront donc disponibles. Ceci n'a à ce jour été possible qu'en héliosismologie et ne sera vraisemblablement possible pour les étoiles que depuis l'espace. Du fait des spécifications pointues de l'instrument COROT et des coûts liés au développement et à l'étalonnage, une modélisation globale de l'instrument s'est avérée incontournable. En effet pour évaluer et optimiser la réponse de l'instrument il est nécessaire d'intégrer chaque sous-système. D'autre part certains perturbateurs environnementaux et bruits instrumentaux ont des échelles de temps susceptible de polluer le domaine de fréquence "scientifique". Aussi l'évaluation des performances de l'instrument ne peut se réduire à un simple bilan des bruits blancs. Il m'a donc été confié de concevoir et de mettre en oeuvre un modèle de la chaîne photométrique de l'instrument COROT. Ce modèle numérique doit prendre en compte la globalité de l'instrument dans son environnement et sa constitution physique. Il s'agit de générer des images réalistes et finalement de simuler des courbes de

lumière avec un certain degré de réalisme. Aux degrés d'approximations près, mais celles-ci dûment justifiées, ces simulations de courbe de lumière d'étoiles cibles permettent d'évaluer les performances de l'instrument et de les confronter aux estimations des puissances des modes attendues pour les étoiles du programme. Cette confrontation révélera la richesse de notre modèle théorique vu comme outil de diagnostic de la convection turbulente des étoiles de type solaire.

1.4 Organisation du manuscrit

Cette thèse se scinde en deux parties distinctes quant aux objectifs.

La première, chapitre 2 à 7, répond à la problématique scientifique tandis que la seconde (chapitre 8) traite de la problématique instrumentale. L'ensemble permet d'anticiper dans la conclusion sur le retour scientifique possible de l'instrument spatial COROT.

Dans la première partie on s'intéresse donc à l'excitation des oscillations acoustiques des étoiles de type solaire. Le chapitre 2 introduit les éléments théoriques de base de la sismologie stellaire, les processus d'amortissement et d'excitation et enfin les observations sismiques.

Ces derniers ne pouvant pas fournir directement l'amplitude et le taux d'amortissement des oscillations (que l'on relie à la durée de vie) il est nécessaire d'introduire le modèle de l'oscillateur forcé qui permet d'évaluer la moyenne quadratique des amplitudes et la largeur des modes (taux d'amortissement) que l'on déduit à partir des observables. Ceci est par conséquent réalisé dans ce chapitre en anticipant nécessairement quelque peu sur la nature du processus d'excitation stochastique traité du chapitre 4 à 7.

Le chapitre suivant (chapitre 3) traite des propriétés du milieu turbulent convectif de la zone convective supérieure dont les étoiles de masse intermédiaire ($1 M_{\odot} \lesssim M \lesssim 2 M_{\odot}$) sont dotées. Dans ce chapitre sont d'abord exposés les modèles convectifs basés sur la théorie de la longueur de mélange. Ensuite on introduit de manière indépendante les propriétés relatives au caractère turbulent de la zone convective.

Dans le chapitre 4, dans lequel les notions et les modèles introduits dans les chapitres 2 et 3 sont utilisés, je développe en détail le processus d'excitation stochastique des oscillations acoustiques par le milieu turbulent de la zone convectif. Ce chapitre établit en particulier la formulation générale exprimant l'amplitude des oscillations excitées stochastiquement et se termine par une discussion quant à la validité et aux limites d'une telle formulation.

Le chapitre 5 explore de façon assez détaillée le cas du Soleil : des tests et des étalonnages sont tout d'abord entrepris en considérant tour à tour deux traitements différents de la théorie de la longueur de mélange. Ensuite une validation de la formulation s'appuyant sur une simulation à 3 dimensions de la partie supérieure convective du Soleil est effectuée.

Dans les chapitres suivants (chapitres 6 et 7) l'application du calcul des puissances acoustiques injectées dans les oscillations est effectuée sur différentes étoiles de type solaire. L'application est réalisée tout d'abord (chapitre 6) sur des modèles de l'étoile Procyon pour laquelle des observations récentes sont disponibles. Ensuite (chapitre 7) une application systématique est effectuée à titre prospectif sur un échantillon varié d'étoiles de type solaire.

La seconde partie concerne le modèle de l'instrument COROT et constitue le chapitre 7. Le besoin général est tout d'abord défini et les contraintes isolées. Le modèle idéal est exposé dans sa généralité et les points durs identifiés. Le modèle simplifié développé pour le client scientifique en considérant quelques approximations en partie validées est ensuite décliné en terme de solution.

On achève ce chapitre par une application qui consiste à convoluer par la réponse de l'instrument COROT une courbe de lumière d'une étoile test dont l'amplitude des oscillations est simulée en utilisant nos estimations des puissances stochastiques. Cette application permet d'illustrer le retour scientifique envisageable par la mission COROT.

La conclusion synthétise les résultats de ce travail de thèse et avance quelques perspectives pour le travail futur.

Chapitre 2

Les oscillations stellaires

2.1 Modes propres d'oscillations

Le milieu stellaire est un fluide auto-gravitant globalement à l'équilibre dans lequel des perturbations locales de la densité peuvent se produire notamment par modulation du flux radiatif (*i.e.* par le mécanisme d'opacité dit mécanisme κ) ou suite à une excitation stochastique par la convection turbulente. Lorsque la région est dynamiquement stable mais vibrationnellement instable, les forces de pression et la force d'Archimède tendent à ramener, tel un ressort, ces perturbations locales du fluide à leur position d'origine. Une perturbation locale donnée se traduit alors localement par une oscillation telle une masse suspendue à un ressort. La propagation de la perturbation s'effectue à une vitesse qui dépend des propriétés locales du milieu. L'oscillation se propage ensuite de proche en proche pour se réfléchir à la surface et au centre de l'étoile. Les conditions de réflexion de l'onde à la surface et de réfraction au centre contraignent les périodes des oscillations à des valeurs discrètes. On parle dès lors de modes propres d'oscillation que l'on peut rapprocher des modes propres d'un instrument de musique.

La durée du parcours de l'onde dans l'intérieur dépend des propriétés locales du milieu stellaire. Les valeurs discrètes imposées par les conditions de réflexions aux périodes d'oscillation résultent donc des propriétés du milieu traversé. Les fréquences des modes témoignent par conséquent de la structure de l'enveloppe stellaire et leur mesure permet de caractériser la structure de l'étoile.

On distingue deux types de modes d'oscillation : les modes acoustiques (modes de pression ou modes p) et les modes de gravité (modes g). Les modes p se propagent quant à eux dans la quasi-totalité de l'étoile. Les étoiles de masse $M \lesssim 2 M_\odot$ sont comme le Soleil dotées d'une zone convective externe. Les modes p de ces étoiles sont donc plus faciles à observer parce que contrairement aux modes g , ils ne sont pas évanescents en surface. Il s'agit donc des modes sur lesquels se base exclusivement ce travail.

L'objet de la théorie des oscillations stellaires est l'étude des propriétés de ces oscillations. Une présentation détaillée de cette théorie peut être trouvée notamment dans Unno *et al.* [1989] et dans Cox [1980] tandis que Gautschy and Saio [1995] en proposent une revue récente. On expose toutefois ici dans un cas extrêmement simplifié les caractéristiques générales des modes propres acoustiques.

2.1.1 Equations de base

La dynamique du fluide auto-gravitant est décrite par l'équation de conservation de la masse

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (2.1)$$

l'équation du mouvement

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P + \vec{g} \quad (2.2)$$

ainsi que par l'équation de conservation de l'énergie

$$T \frac{ds}{dt} = \epsilon_N - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} \cdot (\vec{F}_R + \vec{F}_c) \quad (2.3)$$

où ρ désigne la densité, \vec{v} le champ de vitesse, \vec{g} le champ gravitationnel, s l'entropie, ϵ_N le taux de production d'énergie nucléaire par unité de masse, \vec{F}_R le flux radiatif et enfin \vec{F}_c le flux convectif de chaleur.

Chaque grandeur thermodynamique f est décomposée en terme d'une valeur d'équilibre f_0 [correspondant à un état non perturbé de f et ne dépendant pas du temps t ou variant lentement avec t , c.f. Cox, 1968] et d'une fluctuation eulérienne f_1 par

$$f = f_0 + f_1 \quad (2.4)$$

On suppose les perturbations petites devant les grandeurs à l'équilibre f_0 ce qui permet de linéariser le jeu d'équations 2.1-2.3. Dans cette approximation fluctuations lagrangienne et eulerienne de la quantité f sont reliées comme

$$\delta f = f_1 + \vec{\xi} \cdot \vec{\nabla} f_0 \quad (2.5)$$

où δf est la fluctuation lagrangienne et $\vec{\xi}(\vec{r})$ désigne le déplacement du fluide induit par l'oscillation [c.f. Cox, 1968]. On considère l'approximation de mouvements adiabatiques de sorte que fluctuations lagrangiennes de pression et de densité sont reliées par $\delta P = c_s^2 \delta \rho$ où $c_s^2 \equiv (\partial P / \partial \rho)_s$ est le carré de la vitesse du son. Dans cette approximation les modulations du flux convectif et du flux radiatif sont négligées ($\delta F_R = \vec{0}$ et $\delta F_c = \vec{0}$).

La résolution des équations 2.1 et 2.2 linéarisées se réduit à la résolution de l'équation aux valeurs propres du type

$$\vec{L} [\vec{\xi}(\vec{r})] + \omega_0^2 \vec{\xi}(\vec{r}) = \vec{0} \quad (2.6)$$

où \vec{L} est un opérateur linéaire et ω_0 la valeur propre. A l'équation 2.6 on ajoute des conditions appropriées au centre et à la surface de l'étoile. Ces conditions imposent des valeurs discrètes de ω_0 qui sont les fréquences des modes propres $\vec{\xi}$ recherchées. Dans l'approximation adiabatique - que l'on a adopté ici - les solutions de l'équation 2.6 sont les vecteurs de la base des harmoniques sphériques de la forme

$$\vec{\xi}(\vec{r}, t) = \left[\xi_r \hat{e}_r + \xi_h \left(\hat{e}_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{e}_\phi \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \right] Y_\ell^m(\theta, \phi) e^{i\omega_0 t} \quad (2.7)$$

Cette décomposition permet d'interpréter la valeur propre ω_0 comme la fréquence d'oscillation. La fonction sphérique $Y_\ell^m(\theta, \phi)$ est telle que

$$\nabla_\perp^2 Y_\ell^m(\theta, \phi) = -l(l+1) Y_\ell^m(\theta, \phi) \quad (2.8)$$

où ℓ est entier fixant l'ordre sphérique du vecteur propre considéré, m son ordre azimutal et ∇_\perp est la composante horizontale du gradient $\vec{\nabla}$. Le mode de degré $\ell = 0$ est un mode purement radial, i.e. sans dépendance sphérique. Le nombre n de noeuds des fonctions propres dans la direction radiale fixe l'ordre radial de l'oscillation. L'ensemble des vecteurs propres forme une base orthogonale, on montre en effet la relation d'orthogonalité [Unno *et al.*, 1989, Chap 14.2]

$$4\pi \int_{\mathcal{V}_*} d^3x \xi_{nlm}^* \xi_{n'l'm'} = \delta_{nn'} \delta_{ll'} \delta_{mm'} \int_0^{M_*} dm [|\xi_r|^2 + l(l+1)|\xi_h|^2] \quad (2.9)$$

où M_* la masse de l'étoile et \mathcal{V}_* son volume.

Enfin on néglige les fluctuations de gravité ($\vec{g}_1 = \vec{0}$) : Il s'agit de l'approximation de Cowling [1941] qui est particulièrement pertinente pour les oscillations d'ordre radial élevé.

L'insertion de l'équation 2.7 dans les équations 2.1 et 2.2 linéarisées permet d'établir [Gautschy and Saio, 1995; Unno *et al.*, 1989, Chap 15.1]

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \xi_r) - \frac{g}{c_s^2} \xi_r + \left(1 - \frac{L_\ell^2}{\omega_0^2} \right) \frac{P_1}{\rho_0 c_s^2} = 0 \quad (2.10)$$

pour l'équation de conservation de la masse et

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{dP_1}{dr} + \frac{g}{\rho_0 c_s^2} P_1 + (N_b^2 - \omega_0^2) \xi_r = 0 \quad (2.11)$$

pour l'équation du mouvement respectivement. L_ℓ et N_b , respectivement la fréquence de Lamb et la fréquence de Brunt-Väisälä, sont définies comme

$$L_\ell^2 = \frac{l(l+1)c_s^2}{r^2} \quad \text{et} \quad N_b^2 = g_0 \frac{Q}{C_P} \frac{ds}{dr} \quad (2.12)$$

où g_0 est le champ gravitationnel au repos, C_P la capacité calorifique à pression constante et $Q = (\partial \ln \rho \partial \ln T)_P$.

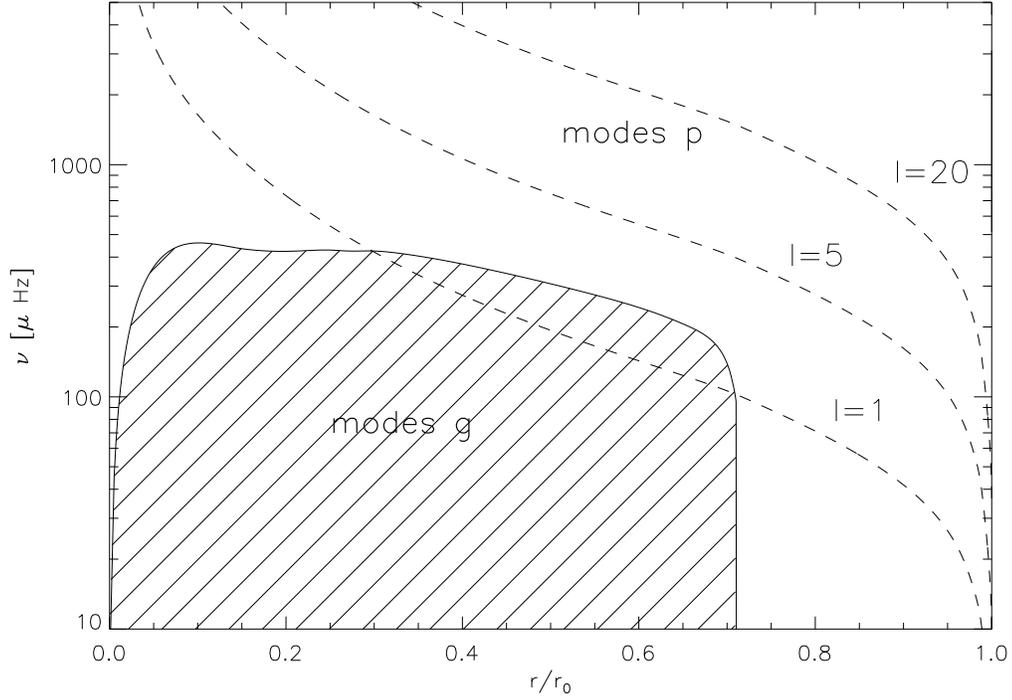


FIG. 2.1 – Diagramme de propagation d'un modèle solaire. La courbe en trait plein représente la fréquence de Brunt-Väisälä N_b tandis que les courbes discontinues représentent les fréquences de Lamb L_ℓ pour les valeurs de $\ell = 1, 5, 20$. La zone hachurée représente la zone de piégeage des modes g . La zone de piégeage des modes p dépend quant à elle de la valeur de l'ordre sphérique ℓ . La zone de piégeage d'un mode $\ell = 5$ se situe au dessus de la courbe $\ell = 5$.

2.1.2 Forme locale et diagramme de propagation

Une analyse locale des solutions des équations 2.10 et 2.11 permet de préciser le rôle des fréquences caractéristiques L_ℓ et N_b et de justifier l'existence des modes p et g . Considérons les formes locales pour les solutions ξ_r et P_1 des équations 2.10 et 2.11 :

$$\xi_r \propto e^{ik_r r} \quad P_1 \propto e^{ik_r r} \quad (2.13)$$

L'introduction des formes locales 2.13 dans les équations 2.10 et 2.11 permet d'établir l'équation de dispersion [Unno *et al.*, 1989, Chap 15.2]

$$k_r^2 \simeq \frac{(\omega_0^2 - L_\ell^2)(\omega_0^2 - N_b^2)}{\omega_0^2 c_s^2} \quad (2.14)$$

Une oscillation se propage dans la direction radiale lorsque k_r est réel, *i.e.* lorsque $\omega_0^2 > L_\ell^2$ et $\omega_0^2 > N_b^2$ ou $\omega_0^2 < L_\ell^2$ et $\omega_0^2 < N_b^2$. N_b et L_ℓ varient spatialement dans l'enveloppe stellaire et déterminent donc les régions où sont confinées les oscillations propagatives (figure 2.1). Deux formes d'oscillation sont envisageables : les modes p tels que $\omega_0^2 > L_\ell^2$ et $\omega_0^2 > N_b^2$ et les modes g tels que $\omega_0^2 < L_\ell^2$ et $\omega_0^2 < N_b^2$. Dans les régions où ces conditions ne sont plus satisfaites les oscillations deviennent évanescentes et cessent de se propager.

Les modes g sont confinés dans l'enveloppe interne des étoiles de type solaire. En effet les ondes de gravité (modes g) sont stables (oscillent) pour $N_b^2 > 0$; or du fait de l'instabilité dans la zone convective, $N_b^2 < 0$ dans cette région là (*c.f.* section 3.1.1) si bien que les ondes de gravité sont amorties tandis que dans les autres régions les modes g peuvent osciller sans amortissement (voir figure 2.1).

La fréquence de Lamb croît avec la profondeur si bien que les modes p de degré ℓ non nul progressant vers l'intérieur sont réfléchis avant d'atteindre le centre (voir figure 2.1). En effet lorsque l'onde atteint le rayon r_ℓ tel que $\omega_0^2 = L_\ell^2$ il devient évanescant. Ce point d'arrêt est appelé le point de rebroussement car le vecteur d'onde radial (\vec{k}_r) s'y annule tandis que le vecteur d'onde horizontal (\vec{k}_h), assurant la propagation de l'onde, lui fait subir un "virage" qui le fait ainsi retourner vers la surface. Les modes p radiaux ($\ell = 0$)

peuvent quant à eux s'étendre dans la totalité de l'enveloppe stellaire car la fréquence de Lamb, étant nulle, ne leur impose aucune contrainte.

2.2 Processus d'excitation et d'amortissement

Bien que l'on soit capable de prédire avec une grande précision les fréquences des modes d'oscillation il n'en est pas de même pour leur amplitude et durée de vie. Il est en fait question d'expliquer les mécanismes d'excitation et d'amortissement qui font vivre les oscillations avec une amplitude et une durée de vie finie.

L'amplitude d'un mode résulte d'un équilibre entre excitation et amortissement. Cet équilibre change selon la profondeur dans l'enveloppe stellaire. En effet excitation et amortissement résultent d'un échange local d'énergie entre l'oscillation et le milieu qu'elle traverse. L'échange d'énergie avec le milieu s'effectue sous forme de travail mécanique. Ce travail peut être soit fourni à l'oscillation, il s'agit dans ce cas d'excitation, soit pris à elle, il s'agit alors d'amortissement.

2.2.1 Excitation

L'existence d'une oscillation perturbe l'état d'équilibre du milieu ambiant qui répond en conséquence : la réponse est soit de l'amortissement soit de l'excitation. Si la résultante en terme de travail fourni à l'oscillation est positive le mode est excité ; si le travail est négatif le mode est amorti (stable vibrationnellement). Le mécanisme d'opacité dit κ -mécanisme tient de cela et peut agir tantôt comme un mécanisme d'excitation tantôt comme un mécanisme d'amortissement. Une compression locale de la matière va induire une modification de l'opacité. Dans les régions d'ionisation partielle la compression et l'accroissement de température qu'elle induit se traduisent par un accroissement de l'opacité et donc une absorption du flux radiatif incident. Cette excès d'énergie est transformé en travail qui excite les oscillations. Dans les autres régions l'opacité décroît sous l'effet de la compression tandis que l'accroissement de la température, suite à la compression, induit une relaxation radiative qui se traduit par un amortissement du mode.

L'excitation par le κ -mécanisme est "passive" en ce sens où elle intervient en réponse à l'oscillation elle-même (auto-excitation). Par opposition le phénomène d'excitation stochastique, dont le principe sera détaillé dans le chapitre 4, est un mécanisme d'excitation "actif" car il s'agit d'un travail fourni constamment par les éléments turbulents aux oscillations.

Le problème de la stabilité des modes est étroitement lié aux processus "passifs". L'excitation "passive" résulte de la réponse à l'oscillation. On peut considérer au premier ordre des perturbations linéaires du type $\vec{\xi}(\vec{r})e^{i\omega_0 t + \bar{\eta}t}$ où ω_0 est la fréquence du mode d'oscillation $\vec{\xi}(\vec{r})$ et $\bar{\eta}$ son taux de croissance ($\bar{\eta} = -\eta$) ou d'amortissement selon le signe de $\bar{\eta}$. Ces perturbations oscillantes modulent le flux radiatif, le flux convectif et la pression turbulente (c.f. section 3.1.5). La modulation de ces quantités provoque un échange de travail avec l'oscillation qui se traduit tantôt par de l'excitation tantôt par de l'amortissement. L'étude de la stabilité des modes se réduit donc alors à la résolution d'équations non-adiabatiques perturbées linéairement par les modes d'oscillation. De cette résolution on obtient simultanément la fréquence et le taux de croissance $\bar{\eta}$ du mode.

Un taux de croissance négatif ($\bar{\eta} < 0$) correspond à l'amortissement du mode tandis qu'un taux positif correspond à l'excitation de celui-ci. Dans le cas d'un taux positif l'amplitude du mode ne va pas cesser de croître et l'approximation linéaire ne sera plus valide. On conçoit alors qu'il existe des phénomènes non linéaires qui vont saturer le mode à une amplitude finie. Le problème devenant non-linéaire on ne sait pas le résoudre simplement. Dans le cas contraire ($\bar{\eta} < 0$) l'oscillation va décroître (à partir d'une amplitude initiale que l'on a supposée par hypothèse petite). De telles modes sont dit stables car ils sont amortis et n'engendrent par conséquent pas de saturation. S'il n'existait pas de mécanismes d'excitation supplémentaires, nécessairement "actifs", de telles modes ne seraient pas observés.

La stabilité des modes solaires a été envisagée par nombreux auteurs [Ando and Osaki, 1975; Balmforth, 1992c]. Lorsque qu'elle se réduit au seul κ -mécanisme [Ando and Osaki, 1975], elle ne permet pas d'expliquer les amplitudes solaires. En effet tous les modes observés ne sont pas prédits instables par le κ -mécanisme et par conséquent il faut expliquer l'excitation de ces modes stables ($\bar{\eta} < 0$). D'autre part pour les modes prédits instables il faut en fait considérer des amortissements supplémentaires qui conduisent à les stabiliser, comme on va le voir en effectuant le bilan des différents processus d'amortissement (c.f. section 2.2.2).

2.2.2 Amortissement

Les processus d'amortissement sont nombreux et la physique sous-jacente complexe. On rappelle ici ces processus déjà résumés en détail dans Houdek [1996] :

- l'amortissement radiatif (η_{rad}). Il s'agit d'une part de l'amortissement radiatif par κ -mécanisme déjà décrit plus haut et d'autre part d'un amortissement induit par un écart à l'Équilibre Thermodynamique Locale (ETL) [Christensen-Dalsgaard and Frandsen, 1983a].
- l'amortissement convectif (η_{conv}). Cet amortissement est relié à une modulation du flux convectif par les oscillations. Le traitement d'un tel effet demande une description de la convection qui soit dépendante du temps. Parmi ces descriptions on distingue celle proposée par Gough [1977] que l'on évoquera dans la section 3.1.5.
- l'amortissement par modulation de la pression turbulente (η_t). Le terme du stress turbulent de Reynolds (second terme de l'équation 4.26) agit comme le gradient de la pression (troisième terme de l'équation 4.26). La vitesse quadratique d'origine turbulente $\rho_0 u^2$, où u désigne le champ de vitesse turbulent, agit dès lors comme un terme de pression et est appelée pression turbulente. Cette pression s'ajoute à la pression du gaz et modifie l'état d'équilibre hydrostatique. De la même manière que pour le flux radiatif et convectif cette pression turbulente est amenée à être modulée par l'oscillation, cela exige là encore une description dépendante de temps de la convection. La fluctuation de pression turbulente engendrée effectue un travail (négatif) sur l'oscillation (c.f. section 3.1.5). L'efficacité de ce travail est contrôlée par la différence de phase entre l'oscillation et la fluctuation de pression turbulente [Balmforth, 1992c] et se traduit par de l'amortissement.
- l'amortissement par la viscosité turbulente (η_ν). La théorie de la longueur de mélange s'intéresse uniquement aux tourbillons de plus grandes taille (ceux égaux par définition à la longueur de mélange). Les processus d'amortissement présentés jusqu'ici se basant sur cette théorie négligent la contribution des tourbillons de petite taille. Hors aux petites échelles les phénomènes dissipatifs dominent et peuvent être modélisés en terme d'un viscosité turbulente ν_t . Ce terme de viscosité se traduit en terme d'amortissement pour les oscillations [Ledoux and Walraven, 1958]. La difficulté réside dans l'évaluation de ν_t . Gough [1976] et Goldreich and Keeley [1977a] en proposent une estimation très différente qui se traduit toutefois par des valeurs d'amortissement (η_ν) semblables et qui montrent que η_ν contribue peu au taux d'amortissement global.
- l'amortissement induit par le couplage entre modes (η_{coupl}). La présence des oscillations modifie la pression à l'équilibre hydrostatique et cette fluctuation de pression exerce à son tour un travail (négatif ou positif) sur ces mêmes oscillations. Il y a donc couplage entre modes. Kumar and Goldreich [1989] ont établi - en adoptant une approche hamiltonienne - que l'interaction non-linéaire entre modes s'effectue principalement par 3 modes et se traduit par un transfert d'énergie d'un mode p vers deux modes f , transfert d'énergie auquel on fait correspondre une contribution à l'amortissement.
- l'amortissement par perte de cohérence de la phase ($\eta_{scattering}$). Les oscillations traversent un milieu turbulent donc inhomogène¹ notamment horizontalement. Cette inhomogénéité horizontale conduit à une perte de cohérence de la phase des modes traversant le milieu turbulent. Cette perte de cohérence se traduit alors par de l'amortissement [Goldreich and Murray, 1994].

2.2.3 Bilan

Les processus d'amortissement décrits plus haut ont été évalués par de nombreux auteurs. De ces évaluations il en ressort que les 3 premiers amortissements (η_{rad} , η_{conv} , η_t) sont dominants tandis que les 3 derniers (η_ν , η_{coupl} , $\eta_{scattering}$) sont négligeables. On montre en particulier que le terme d'amortissement par modulation de la pression turbulente (η_t) contribue largement à l'amortissement et le comptabiliser permet de stabiliser la totalité des modes solaires [Balmforth and Gough, 1990; Balmforth, 1992c]. L'évaluation des taux d'amortissement correspondant aux processus d'amortissement dominants décrits plus haut est en accord avec les taux d'amortissement déduits des observations solaires.

Par conséquent les modes d'oscillation solaire sont amortis et dès lors l'excitation par le κ -mécanisme ne convient pas à expliquer les valeurs des amplitudes solaires. Il faut donc concevoir une autre forme d'excitation. Depuis plus d'une trentaine d'années on considère le processus d'excitation stochastique par la convection turbulente comme le processus le plus probable.

¹ On entend par turbulence homogène un milieu dont les propriétés statistiques sont invariantes par translation. Aussi un milieu turbulent peut être homogène au sens stochastique alors qu'il s'agit d'un milieu inhomogène par son caractère chaotique.

2.3 Les observations

La section 2.1 décrivait l'origine et les caractéristiques globales des fonctions propres d'oscillation. On précise ici les observations qui nous permettent de remonter (section 2.3) aux éléments caractéristiques des oscillations à savoir leur fréquence, leur durée de vie (amortissement η) et leur amplitude.

Les observables sont principalement de deux natures² : les fluctuations d'intensité globale de l'étoile et le déplacement de la matière à la surface de celle-ci.

Seule l'atmosphère des étoiles est accessible directement aux observations parce que le milieu devient optiquement épais en dessous de la photosphère. En particulier il est possible par des mesures spectroscopiques d'isoler des raies d'absorption d'éléments de la matière stellaire. Les modes p se propagent notamment dans l'atmosphère et se traduisent par des déplacements de matière. Les déplacements de matière dans l'atmosphère, due notamment aux modes propres et aux mouvements turbulents (granulation), provoquent par effet Doppler un déplacement en fréquence des raies. On traduit ensuite ces déplacements en vitesse dite spectroscopique. On isole enfin les modes propres des mouvements incohérents (turbulents) par une analyse spectrale de laquelle on établit la fréquence de ces oscillations.

Les oscillations se manifestent également par les fluctuations périodiques de la température dans l'atmosphère notamment au niveau de la photosphère de l'étoile. Or c'est à la photosphère que la quasi totalité du flux émanant de l'étoile est visible. Les étoiles rayonnent en première approximation comme des corps noirs si bien qu'une fluctuation de température et une variation du rayon photosphérique se traduisent directement en fluctuation lumineuse $\delta L/L$ où L est la luminosité globale de l'étoile. L'analyse spectrale de δL permet à nouveau d'isoler les fluctuations périodiques et d'évaluer les fréquences des modes.

La relation entre fluctuations de luminosité et oscillations est en fait plus complexe que celle qui relie vitesse et modes propres qui sera établie dans la section 2.4. Il existe en effet un déphasage non constant³ entre fluctuations de température δT et fluctuations de densité $\delta\rho$ que l'on relie aux variations du rayon photosphérique. Par conséquent il est plus commode de s'intéresser aux vitesses des déplacements oscillants, et l'on s'intéressera donc par la suite aux seules vitesses des oscillations.

2.3.1 Les données solaires

Les observations des oscillations du Soleil sont nombreuses car, contrairement aux autres étoiles, un signal sur bruit (ex. ~ 3000 avec GOLF [Gabriel and *et al.*, 1995]) et une résolution fréquentielle très élevée peuvent être atteints.

On distingue les observations héliosismiques au sol - mono-site (BBSO [Libbrecht and Zirin, 1986]) et multi-sites (IRIS [Fossat, 1991], BISON [Chaplin *et al.*, 1998], GONG) - des observations depuis l'espace (IPHIR [Toutain and Froehlich, 1992], SOHO/GOLF [Gabriel and *et al.*, 1995], SOHO/SOI/MDI, SOHO/VIRGO). Parmi celles-ci il faut également distinguer les mesures spectroscopiques (IRIS, BBSO, BISON, GOLF, SOI/MDI) des mesures de fluctuations de luminosité (IPHIR, VIRGO) ainsi que les mesures globales (IRIS, BBSO, BISON, GOLF) des mesures avec résolution spatiale (SOI/MDI, VIRGO).

Libbrecht [1988] et Chaplin *et al.* [1998] ont déterminé vitesses et amortissements des modes d'oscillation solaire. Les mesures de Libbrecht [1988] se basent sur les observations mono-site du BBSO (Big Bear Solar Observatory) et celles de Chaplin *et al.* [1998] sur le réseau BISON. Ces mesures concernent les modes de degré ℓ faibles ($\ell \approx 20$ pour Libbrecht et $\ell = 0$ pour Chaplin *et al.*) et sont librement mises à disposition via les publications de Libbrecht [1988] et Chaplin *et al.* [1998].

Pour contraindre la théorie de l'excitation stochastique nous avons utilisé les mesures de Libbrecht [1988] (figures 2.4 et 2.5) car le nombre de modes dont il estime les vitesses et les amortissements sont les plus nombreux et les mesures plus précises que celles de Chaplin *et al.* [1998]. La vitesse des oscillations en fonction de la fréquence ν des modes a typiquement l'allure d'une "cloche" (figure 2.4) dont le maximum est au voisinage de $\nu \simeq 3$ mHz et correspond aux oscillations de période environ 5 mn. Les taux d'amortissements η des 19 modes sont présentés dans la figure (2.5).

²Il existe également la possibilité de mesurer les variations des largeurs équivalentes des raies en absorption dues aux variations locales et périodiques de la température (suggéré par Kjeldsen *et al.* [1995] et Bedding *et al.* [1996]).

³En effet dans la majeure partie de l'enveloppe, le temps thermique caractéristique τ_{th} est beaucoup plus long que le temps dynamique caractéristique τ_{dyn} [Gautschi and Saio, 1995]. Une compression locale de matière est alors isentropique car la perte d'énergie par rayonnement ou convection n'a pas le temps de se produire et se traduit dès lors instantanément en fluctuation de température δT comme $\delta\rho/\rho_0 \propto -\delta T/T_0$, si bien que δT et $\delta\rho$ sont déphasés constamment de 90° . Or dans la zone supérieure de l'enveloppe stellaire, là où le gradient de température est extrêmement superadiabatique, τ_{th} devient du même ordre que τ_{dyn} . Par conséquent dans ces régions δT n'est pas instantanément en quadrature de phase avec les déplacements de matière. La détermination du déphasage n'est possible que lorsque l'on tient compte des effets non-adiabatiques. On se reportera à Houdek [1996] pour une comparaison entre le déphasage calculé et mesuré.

2.3.2 Les autres étoiles

Jusqu'à maintenant les observations d'étoiles de type solaire se réduisent à de nombreuses tentatives infructueuses ou incertaines sur des étoiles brillantes telles que Procyon, η Boo, α Cent et Acturus. On se référera au travail de thèse de Barban [1999] pour une étude exhaustive des différentes campagnes de sismologie.

A ce jour la détection la plus sérieuse d'oscillation stellaire de type solaire a été mise en évidence par Martić *et al.* [1999] et Barban *et al.* [1999] sur Procyon. L'observation en question consistait en une mesure des vitesses spectroscopiques à partir du spectrographe ELODIE (c.f. Martić *et al.* [1999]). Celle-ci a mis en évidence un excès de puissance d'environ 1 (m/s)^2 entre 0.5 et 1.5 mHz. Le niveau signal à bruit est suffisant pour détecter avec un taux de confiance de 99% des oscillations d'amplitude supérieure à $\sim 50 \text{ cm/s}$ [Barban, 1999] et confirmer ainsi l'origine sismique de l'excès de puissance observé au voisinage de $\nu \sim 1 \text{ mHz}$. Mais les interruptions diurnes provoquent des interférences entre modes rendant très difficile leur identification et donc la mesure de leur amplitude et durée de vie (voir section 2.4).

Les observations spatiales permettent de s'affranchir à la fois de l'interruption diurne et de la perturbation atmosphérique qui altèrent la précision des observations photométriques. Elles rendent donc possible l'observation continue et de longue durée de cibles stellaires sismiques.

L'expérience spatiale COROT, dont les spécifications scientifiques sont données dans la section 8.1.1, observera ainsi pendant près de 150 jours quelques étoiles cibles (étoiles de type solaire et δ Scuti) si bien que la résolution fréquentielle atteindra $\sim 0.1 \mu\text{Hz}$ tandis que la précision photométrique sera de 0.7 ppm [Auvergne and the COROT Team, 2000].

De telle performance permettront d'évaluer à partir des observations sismiques les amplitudes et les amortissements des modes. Le procédé par lequel ces deux dernières quantités sont obtenues à partir des observations est détaillé dans la section suivante (2.4).

2.4 Des observations aux modèles

L'analyse spectrale ne permet pas d'évaluer directement les amplitudes et la durée de vie des oscillations. En effet les oscillations ayant des durées de vie finies, l'énergie qu'elles contiennent s'étalent sur plusieurs éléments spectraux⁴. D'autre part la densité importante de modes et l'étalement des modes provoquent une confusion qui rendent l'isolement des modes difficile et la mesure de l'étalement (donc de la durée de vie) impossible.

Pour évaluer l'amplitude et la durée de vie des modes il convient donc de modéliser *a priori* l'évolution temporelle des oscillations. On recourt pour cela au modèle de l'oscillateur amorti et forcé. On anticipe par là sur la nature du processus d'excitation. D'une part on montrera dans le chapitre 4 que l'excitation stochastique par la convection turbulente tient du modèle de l'oscillateur forcé. D'autre part il a été rappelé qu'il s'agit fort probablement du seul processus convenant à expliquer l'excitation des modes d'oscillation de type solaire (voir la section 2.2 du présent chapitre). Cette modélisation permet enfin par ajustement aux observables d'isoler les modes les uns des autres et d'extraire la largeur de l'étalement (que l'on relie au taux d'amortissement donc à la durée de vie, voir plus loin) et l'amplitude quadratique moyenne du mode isolé.

Considérons des déplacements $z(t)$ unidimensionnels (radiaux) de fréquence angulaire ω_0 soumis à une source de forçage $f(t)$ ainsi qu'à un amortissement de taux η . L'équation d'évolution d'un oscillateur forcé s'écrit avec les considérations précédentes [Chaplin *et al.*, 1998]

$$\frac{d^2}{dt^2}z(t) + 2\eta\frac{d}{dt}z(t) + \omega_0^2z(t) = f(t) \quad (2.15)$$

Les solutions complexes ont la forme générale

$$z(t) = a(t) e^{-\eta t - i\omega_0 t} \quad (2.16)$$

où $a(t)$ est l'amplitude du déplacement résultant de l'excitation. L'amplitude est déterminée à l'aide de l'équation inhomogène (équation 2.15) et s'exprime

$$a(t) = \frac{i}{2\omega_0} \int_{-\infty}^t dt' e^{\eta t' + i\omega_0 t'} f(t') \quad (2.17)$$

⁴Si toutefois la durée d'observation est bien plus grande que la durée de vie des modes.

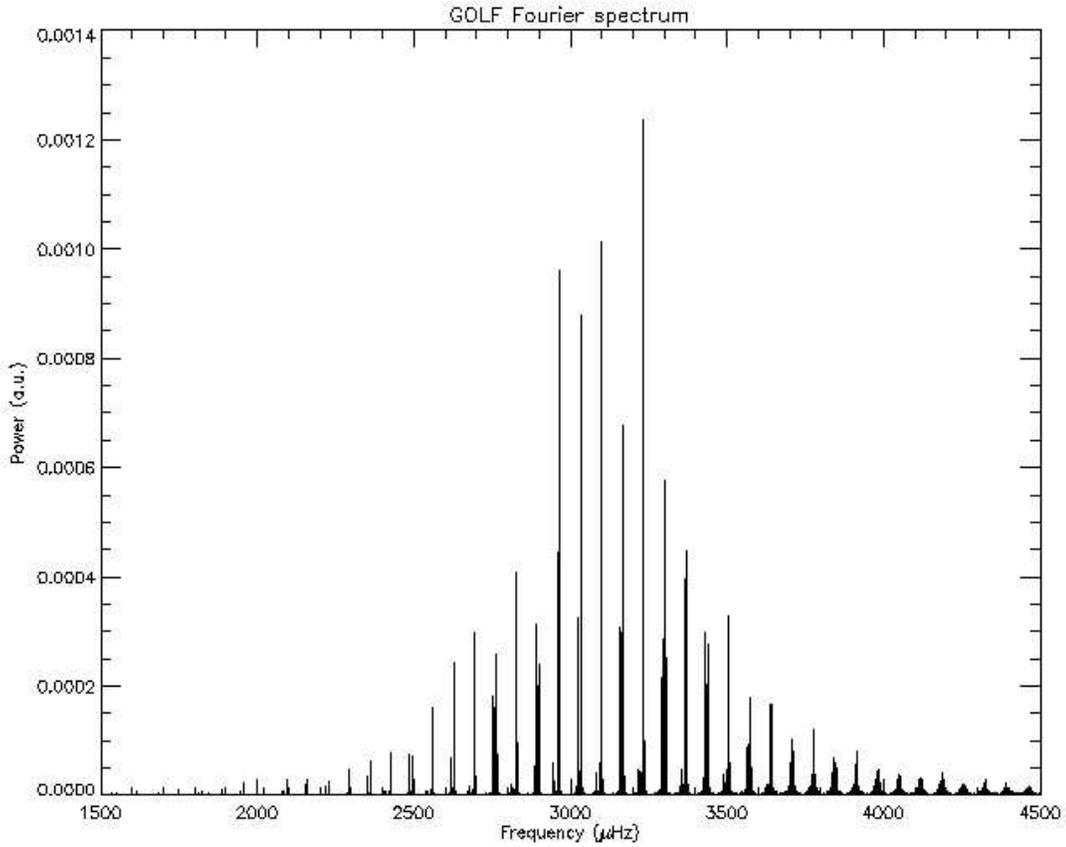


FIG. 2.2 – Spectre de puissance d’une série temporelle de mesures spectroscopique des vitesses d’oscillation solaires obtenue sur une durée d’observation de 690 jours à partir de l’instrument spatial GOLF.

L’analyse spectrale amène à s’intéresser au spectre de puissance défini comme

$$\mathcal{P}(\omega) = \frac{1}{T_{obs}^2} \frac{1}{2} |z(\omega)|^2 \quad (2.18)$$

où $z(\omega)$ est la transformée de Fourier de $z(t)$ définie comme

$$z(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{i\omega t} z(t) \quad (2.19)$$

et où T_{obs} est la durée des observations de sorte que l’énergie dans le spectre de puissance soit indépendante de T_{obs} . Le facteur 2 dans l’équation 2.18 a été introduit du fait que $z(t)$ est une quantité complexe. A titre d’illustration un spectre de puissance $\mathcal{P}(\omega)$ pour les vitesses spectroscopiques est présenté dans la figure 2.2.

Il faut, pour expliciter la dépendance de \mathcal{P} avec ω , connaître la dépendance en fréquence de $a(t)$. Pour cela on anticipe à nouveau sur les propriétés du terme source $f(t)$ à savoir qu’il s’agit d’un terme source incohérent, stationnaire et relevant d’un processus stochastique suivant une distribution normale (gaussienne). Les grandeurs d’intérêt ne pourront être évaluées qu’en terme de moyenne statistique. La notation $\langle \dots \rangle$ désignera par la suite une moyenne au sens statistique *i.e.* effectuée sur un nombre infini de réalisations indépendantes. La moyenne statistique du spectre fait intervenir, à travers l’équation 2.17, la moyenne du produit de corrélation de $f(t)$. Cette dernière quantité est une mesure de la cohérence du terme source. Les considérations précédentes sur $f(t)$ nous conduisent donc à modéliser la moyenne du produit de corrélation de $f(t)$ comme suit

$$\langle f(t_0)f(t_0 + t) \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \langle f^2 \rangle e^{-(t/\tau_\Lambda)^2} \quad (2.20)$$

où t_0 est une origine des temps, arbitraire dans l’hypothèse d’une source stationnaire, τ_Λ désigne le temps de cohérence caractéristique du processus, supposé bien plus court que la durée de vie des modes ($\eta \sim 10 \mu Hz$),

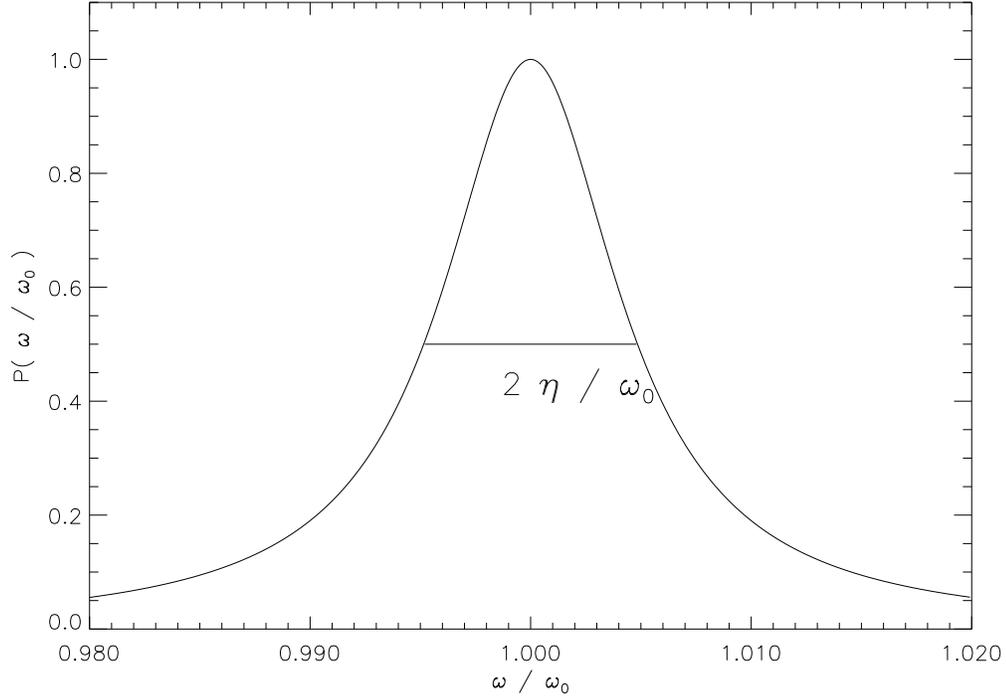


FIG. 2.3 – Profil lorentzien : Spectre de puissance $\mathcal{P}(\omega)$ (équation 2.26) synthétique d'un mode d'oscillation de fréquence angulaire ω_0 subissant un amortissement de taux η . Le tracé est effectué en fonction de la fréquence réduite ω/ω_0 et l'unité dans laquelle est exprimée $\mathcal{P}(\omega)$ est arbitraire. La largeur à mi-hauteur vaut $2\eta/\omega_0$.

et enfin $\langle f^2 \rangle$ est la moyenne quadratique du terme source de forçage. La transformée de Fourier du produit de corrélation de l'équation 2.20 vaut

$$\mathcal{F}(\omega) = \frac{\tau_\Lambda}{2\pi} \langle f^2 \rangle e^{-(\omega\tau_\Lambda/2)^2} \quad (2.21)$$

et permet d'établir que la résonance entre la source et l'oscillation s'effectue au voisinage de la fréquence $\omega \sim \tau_\Lambda^{-1}$.

Dans l'hypothèse où le temps d'observation T_{obs} est beaucoup plus grand que la durée de vie des modes ($T_{obs}\eta \gg 1$) un calcul donne, à partir des équations 2.16, 2.17, 2.18, 2.19 et 2.20, la moyenne statistique du spectre de puissance (c.f. appendice A)

$$\langle \mathcal{P}(\omega) \rangle = \frac{1}{16\pi T_{obs}\omega_0^2} \frac{\mathcal{F}(\omega)}{(\omega - \omega_0)^2 + \eta^2} \quad (2.22)$$

Le modèle de l'oscillateur forcé et amorti confère donc aux modes un profil lorentzien de largeur Γ_{ω_0} à mi-hauteur (c.f. figure 2.3). On a $\Gamma_{\omega_0} = 2\eta$ ce qui permet d'interpréter naturellement η comme l'inverse du temps caractéristique de la durée de vie d'un mode. L'ajustement de ce profil au spectre de puissance observé fournit directement l'amortissement des modes. En ce qui concerne l'amplitude des modes il faut calibrer le modèle parce que d'une part les grandeurs relatives à la source $f(t)$ dans l'équation 2.22 demeurent inconnues et que d'autre part la disponibilité opérationnelle (en anglais "duty-cycle") doit être prise en compte. La vitesse quadratique moyenne (au sens statistique) est liée au déplacement quadratique moyen comme

$$\langle v_{osc}^2(t) \rangle = \frac{\omega_0^2}{2} \langle |z(t)|^2 \rangle \quad (2.23)$$

Les auteurs [Libbrecht, 1988; Chaplin *et al.*, 1998] s'intéressent généralement à la vitesse moyenne sur la durée de vie η^{-1} du mode. Cette vitesse moyenne (au sens temporel cette fois-ci) s'exprime dès lors comme

$$\overline{\langle v_{osc}^2 \rangle} \equiv \eta \int_{-\infty}^{+\infty} dt \langle v_{osc}^2(t) \rangle = 2\pi\eta\omega_0^2 T_{obs}^2 \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \langle \mathcal{P}(\omega) \rangle \quad (2.24)$$

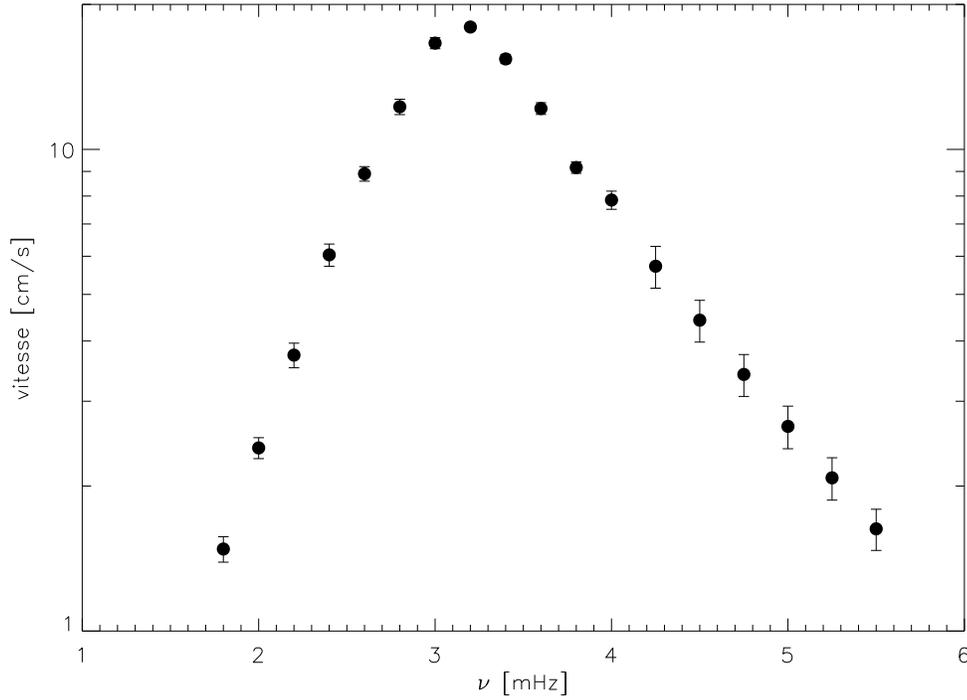


FIG. 2.4 – Racine carré de la vitesse quadratique moyenne des oscillations solaires mesurée par Libbrecht par ajustement du profil Lorentzien sur le spectre de puissance observé. Les points de mesures sont accompagnés de leur barre d'erreur respective.

où l'on a appliqué la relation de Parseval-Plancherel. La relation 2.24 traduit le fait que la puissance totale, étalée le long du profil lorentzien, se ramène à une vitesse moyenne sur la durée de vie du mode. Puisque $\eta\tau_\Lambda \ll 1$, $\mathcal{F}(\omega)$ est une fonction qui varie à l'échelle τ_Λ^{-1} si bien que dans le domaine $|\omega - \omega_0| \lesssim \eta$ (i.e. dans le profil lorentzien) elle demeure constante et l'on a ainsi après intégration sur ω dans l'équation 2.24

$$\overline{\langle v_{osc}^2 \rangle} = \frac{\pi}{8} T_{obs} \mathcal{F}(\omega_0) \quad (2.25)$$

Cette relation permet de normaliser le spectre de puissance de l'équation 2.22. En effet les équations 2.22 et 2.24 nous permettent d'exprimer le spectre de puissance sous la forme

$$\langle \mathcal{P}(\omega) \rangle = \frac{1}{2\pi^2(\omega_0 T_{obs})^2} \frac{\overline{\langle v_{osc}^2 \rangle}}{(\omega - \omega_0)^2 + \eta^2} \quad (2.26)$$

L'équation 2.26 permet de déduire directement la vitesse quadratique moyenne des modes $\left(\overline{\langle v_{osc}^2 \rangle}\right)^{1/2}$ ainsi que leur taux d'amortissement η par ajustement au spectre de puissance observé. Les évaluations des vitesses, notamment celles de Libbrecht [1988] et de Chaplin *et al.* [1998], sont effectuées sur ce schéma là. Ici, toutefois, il s'agit d'un modèle simplifié qui ne prend pas en compte diverses corrections notamment instrumentales.

On a tracé dans la figure 2.4 les vitesses moyennes, $\left(\overline{\langle v_{osc}^2 \rangle}\right)^{1/2}$, des oscillations solaires déduites des observations effectuées par Libbrecht [1988] en appliquant un ajustement similaire à celui décrit plus haut. La figure 2.5 présente le taux d'amortissement η déduite de la même façon des observations du Soleil par Libbrecht.

Le modèle simple présenté ici (basé essentiellement sur les équations 2.15 et 2.21) ne décrit évidemment pas la physique de l'excitation, son unique objet est de modéliser le profil lorentzien observé afin d'en déduire une mesure de η et de la vitesse moyenne.

L'équation 2.15 d'évolution du déplacement (unidimensionnel) de la matière n'est exprimée qu'à l'endroit où la mesure est effectuée alors que l'injection de puissance dans les oscillations a lieu dans une zone étendue se situant en dessous. D'autre part les oscillations stellaires s'étendent sur un domaine encore plus large. Il

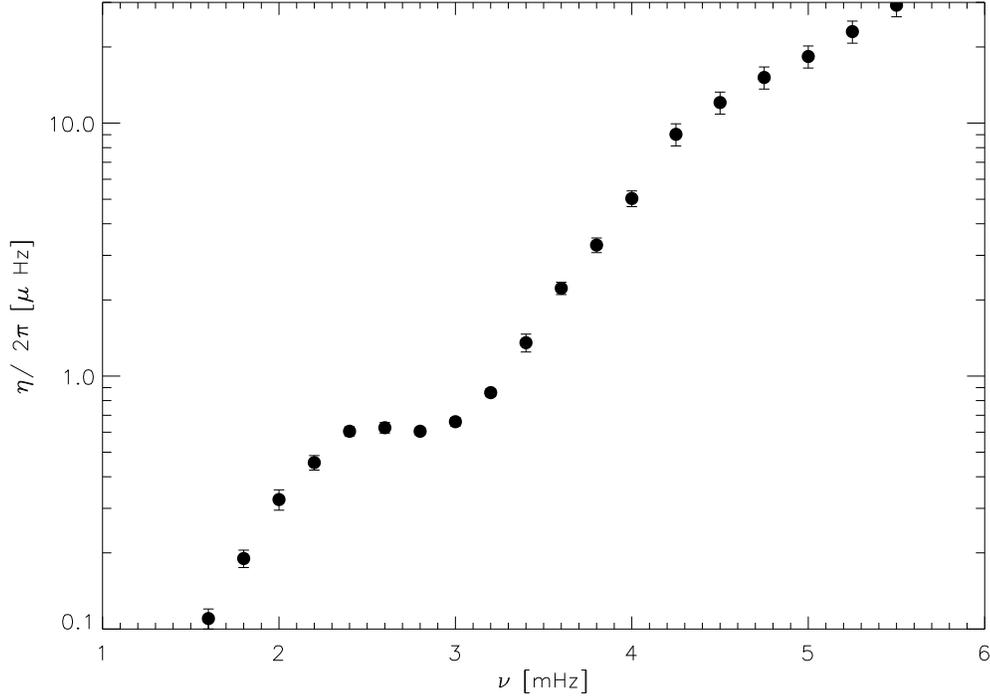


FIG. 2.5 – Taux d’amortissement ($\eta / 2\pi$) des oscillations solaires mesuré par Libbrecht par ajustement du profil Lorentzien sur le spectre de puissance observé. Les points de mesures sont accompagnés de leur barre d’erreur respective.

faut donc relier les vitesses mesurées aux caractéristiques des modes propres, déterminer les termes sources et traiter le couplage de ceux-ci avec les modes propres.

Le problème du couplage entre les sources turbulentes et les modes sera abordé dans le chapitre traitant l’excitation stochastique du point de vue théorique (chapitre 4). On donne maintenant pour un usage futur la relation qui lie la vitesse moyenne mesurée aux modes propres, ainsi que la relation donnant l’énergie des modes et la puissance injectée dans ceux-ci.

Le déplacement d’une oscillation de fréquence angulaire ω_0 s’exprime à une position \vec{r} quelconque dans l’enveloppe stellaire comme

$$\delta\vec{r}_{osc}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \left(A(t) \vec{\xi}(\vec{r}) e^{-i\omega_0 t} + cc \right) \quad (2.27)$$

où $\vec{\xi}(\vec{r})$ est le mode propre d’oscillation, $A(t)$ l’amplitude instantanée de l’oscillation et enfin cc désigne le complexe conjugué. La vitesse du déplacement correspondant s’exprime

$$\vec{v}_{osc} \equiv \frac{d}{dt} \delta\vec{r}_{osc} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{d}{dt} \ln |A(t)| - i\omega_0 \right) A(t) \vec{\xi}(\vec{r}) e^{-i\omega_0 t} + cc \right] \quad (2.28)$$

Le temps de cohérence des tourbillons est de l’ordre de quelques minutes dans la région d’excitation. La fréquence angulaire associée est alors comparable à la fréquence des oscillations ω_0 (~ 3 mHz) laquelle est bien plus grande que η (~ 100 μ Hz). L’échelle de variation rapide de $A(t)$ est donc de l’ordre de ω_0^{-1} et est ainsi plus grande que la composante lente qui est de l’ordre de η^{-1} (en effet l’équation 4.51 permet d’établir que $\frac{d \ln |A(t)|}{dt} \simeq -\eta$). Par conséquent la composante rapide ne peut pas *a priori* être négligée devant la composante lente. Malgré tout la composante rapide de $\frac{d \ln |A(t)|}{dt}$ est incohérente si bien qu’en terme de moyenne quadratique de $A(t)$ la composante rapide s’annule et peut donc être dès à présent mise de coté. Enfin la composante lente qui varie à l’échelle de η^{-1} peut quant à elle être négligée dans l’équation 2.28 car $\omega_0 \gg \eta$. Ces considérations nous permettent d’établir à partir de 2.28 la relation

$$\vec{v}_{osc} \simeq \frac{1}{2} \left(-i\omega_0 A(t) \vec{\xi}(\vec{r}) e^{-i\omega_0 t} + cc \right) \quad (2.29)$$

La vitesse moyenne mesurée sur une couche de l'atmosphère située à la position $r = r_s$ s'exprime alors à l'aide de l'équation 2.29 comme [Balmforth, 1992a]

$$v_s^2 \equiv \langle v_{osc}^2(r_s) \rangle = \omega_0^2 |\vec{\xi}(r_s)|^2 \frac{1}{2} \langle |A(t)|^2 \rangle \quad (2.30)$$

L'énergie moyenne (cinétique + potentielle) d'une oscillation est donnée par la relation

$$E_{\omega_0} = \int_0^{M_*} dm \langle v_{osc}^2 \rangle = \frac{1}{2} \langle |A(t)|^2 \rangle I \omega_0^2 \quad (2.31)$$

où

$$I \equiv \int_{\mathcal{V}_*} \rho_0 d^3x (\vec{\xi}^* \cdot \vec{\xi}) \quad (2.32)$$

est l'inertie du mode propre, M_* la masse de l'étoile et \mathcal{V}_* son volume. La puissance injectée dans le mode vaut par définition

$$P(\omega_0) \equiv \frac{dE_{\omega_0}}{dt} = \frac{1}{2} I \omega_0^2 \frac{d}{dt} \langle |A(t)|^2 \rangle \quad (2.33)$$

où la dérivée est effectuée sur une échelle de temps grande devant la composante rapide des variations de $A(t)$ (d'ordre ω_0^{-1}) mais à une échelle de temps petite devant la composante lente (d'ordre η^{-1}). On établit dans la section 4.5 la relation (c.f. équation 4.57)

$$\langle |A|^2(t) \rangle \propto \int_{-\infty}^t dt_0 e^{2\eta(t_0-t)} f(t, t_0) \quad (2.34)$$

où $f(t, t_0)$ est une fonction incohérente qui varie à l'échelle de ω_0^{-1} . Par conséquent l'équation 2.33 peut s'écrire à partir de 2.34 sous la forme

$$P(\omega_0) = \eta I \omega_0^2 \langle |A|^2 \rangle = 2\eta E_{\omega_0} = \Gamma_{\omega_0} E_{\omega_0} \quad (2.35)$$

qui coïncide avec la définition de [Goldreich *et al.*, 1994, GMK]. Les relations 2.30 et 2.35 permettent de relier la vitesse moyenne mesurée à la puissance $P(\omega_0)$

$$v_s^2 = |\xi(r_s)|^2 \frac{P(\omega_0)}{2\eta I} \quad (2.36)$$

Cette relation importante exprime le fait que l'amplitude d'un mode résulte d'un équilibre entre amortissement (terme η) et excitation (terme $P(\omega_0)$). Elle permet de relier la vitesse quadratique moyenne v_s^2 ainsi que l'amortissement η , que l'on déduit des observations par ajustement de l'équation 2.26 au profil Lorentzien, à la puissance $P(\omega_0)$ injectée dans les modes. L'évaluation de $P(\omega_0)$ à partir de l'équation 2.36 permet ainsi de contraindre le processus d'excitation.

Les observations de Libbrecht [1988] sont effectuées à la profondeur optique moyenne de Rosseland $\tau_{5000} \simeq 0.05$. Ce lieu est situé à ~ 140 km au dessus de la photosphère du modèle solaire considéré dans ce travail. La figure 2.6 donne le calcul de la puissance $P(\omega_0)$ obtenue à partir de l'équation 2.36 en utilisant les vitesses moyennes et les amortissements mesurés par Libbrecht [1988] et en évaluant les fonctions propres de notre modèle solaire 140 km au dessus de la photosphère.

Les formes asymptotiques de la puissance ont été tracées sur la figure 2.6. La dépendance en $\sim \nu^7$ observée à basse fréquence résulte de la dépendance fréquentielle de l'inertie des modes et du profil des fonctions propres dans la région d'excitation, tandis que la dépendance en $\sim \nu^{-6}$ à haute fréquence résulte de l'inefficacité du transfert de puissance des sources turbulentes aux modes d'oscillations.

Ces dépendances - dont les origines seront détaillées davantage dans le chapitre 4 - nous permettront dans le chapitre 5 de contraindre la théorie de l'excitation stochastique développée dans le chapitre 4.

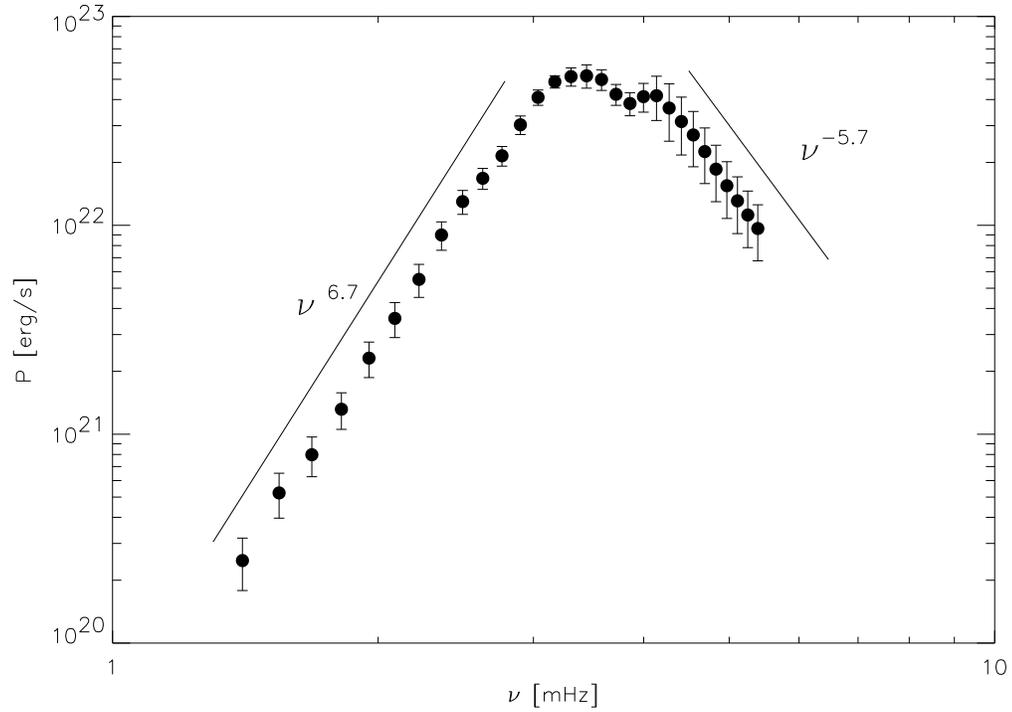


FIG. 2.6 – Puissance injectée dans les modes d'oscillation solaire : Le calcul de la puissance est obtenue à partir des observations solaires de la vitesse moyenne et de l'amortissement η (figures 2.4 et 2.5) et en se basant sur la relation 2.36. On a également tracé les dépendances asymptotiques à basse et haute fréquence ainsi que les barres d'erreur correspondant aux erreurs de mesure sur la vitesse et sur η (c.f. équation 7.7).

Chapitre 3

Le milieu stellaire convectif turbulent

Ce chapitre a pour objet d'introduire les différents modèles caractérisant le milieu stellaire convectif turbulent. Il se scinde volontairement en deux.

Dans la première partie (section 3.1) on expose brièvement les différents traitements de la convection stellaire. Parmi ceux-ci on s'étendra sur la théorie standard de la longueur de mélange dont l'exposé s'inspire du cours de Bohm-Vitense [1989]. Ce traitement classique de la convection nous servira dans les évaluations numériques effectuées dans les chapitres 5 et 6. On résume ensuite (section 3.1.4) la formulation dépendante du temps et non-locale que l'on doit à Gough et qui se base essentiellement sur la théorie de la longueur de mélange. La formulation dépendante du temps et non-locale sera utilisée - à titre de comparaison avec le traitement standard - dans nos estimations faites aux chapitres 5 et 6.

La théorie de la longueur de mélange, parce qu'elle fournit un modèle analytique de la convection, nous sert dans cette partie à évaluer la vitesse quadratique moyenne ainsi que la variance de la fluctuation d'entropie. Ces valeurs nous permettent d'apporter des contraintes de normalisation sur les différents spectres turbulents introduits dans la seconde partie de ce chapitre.

La seconde partie (section 3.2) s'attache à la modélisation du milieu turbulent. On montre en effet (section 3.2.1) que le milieu convectif est le siège de mouvements chaotiques d'un nombre extraordinairement grand d'éléments de matière (tourbillons). Or la théorie de la longueur de mélange définit une taille unique des tourbillons. Elle ne permet pas de caractériser la dynamique de l'ensemble des éléments turbulents alors que le processus d'excitation stochastique met en jeu cet ensemble.

On décrit donc dans cette partie différents modèles de turbulence caractérisant la dynamique des éléments turbulents en particulier le champ de vitesse (section 3.2.7) et le caractère scalaire passif des fluctuations turbulentes d'entropie (section 3.2.8). On introduira également les outils qui serviront dans le développement de la formulation évaluant la puissance injectée dans les oscillations de type solaire.

3.1 Modèles convectifs

3.1.1 Critère d'instabilité et régions convectives

L'énergie produite au coeur des étoiles est transportée à la surface par transport radiatif et convectif. Le transport convectif se concrétise par un transport de matière stellaire des régions chaudes aux régions froides et se traduit par un transfert de chaleur. Ce phénomène n'est possible que lorsque le milieu présente une instabilité dont on va rappeler brièvement l'origine.

Un élément de matière se déplaçant adiabatiquement verticalement subira *a priori* un changement de température différent de celui du milieu ambiant supposé à l'équilibre radiatif. Si le gradient adiabatique de température du milieu ambiant s'avère inférieur au gradient radiatif, la température de l'élément sera plus élevée que celle du milieu ambiant. Durant son ascension l'équilibre hydrostatique est quasi instantané car l'échelle de temps dynamique⁵ est typiquement très inférieure à la durée de vie⁶ des éléments convectifs si bien que l'élément considéré sera à la même pression que le milieu ambiant. La densité de l'élément convectif ascendant sera donc inférieure à celle du milieu ambiant. Cet élément va dans ce cas de figure subir la force d'Archimède qui tendra à l'accélérer vers le haut, le milieu est alors instable. Le critère d'instabilité est

⁵De l'ordre de Λ/c_s où c_s est la vitesse du son et Λ la taille caractéristique d'un élément convectif

⁶De l'ordre de Λ/w où w et Λ sont respectivement la vitesse et la taille caractéristiques d'un élément convectif.

donc relatif à la différence des gradients de température adiabatique et radiatif et la condition d'instabilité convective s'exprime

$$\left(\frac{d \ln T}{d \ln P}\right)_{ad} < \left(\frac{d \ln T}{d \ln P}\right)_{rad} \quad (3.1)$$

Si l'inégalité est inversée on montre qu'un élément ascendant subira la force d'Archimède orientée vers le bas et cette force tendra donc à ramener l'élément à sa place d'origine. Le milieu est alors stable et les mouvements convectifs impossibles.

On peut également exprimer le critère d'instabilité à l'aide de la fréquence de Brunt-Väisälä introduite dans la section 2.1.1. Un élément de fluide déplacé verticalement de sa position initiale sera soumis à une force de rappel (force d'Archimède) proportionnelle à l'écart de densité avec le milieu ambiant. Le retour de l'élément à sa position d'équilibre s'effectue en un temps caractéristique égal à l'inverse de la fréquence Brunt-Väisälä N_b (équation 2.12) que l'on peut relier aux gradients de température [Unno *et al.*, 1989, Chap 13.4 Eq. 13.112] comme ⁷

$$N_b^2 = \frac{gV}{r} (\nabla_{ad} - \nabla + \nabla_\mu) \quad (3.2)$$

avec $V(r) \equiv -d \ln \rho / d \ln r$, $\nabla_\mu \equiv d \ln \mu / dr$ et μ la masse moléculaire. Si $N_b^2 > 0$ la force d'Archimède engendre des oscillations (modes gravité) de fréquences $\omega_0 > N_b$ (c.f. [Lesieur, 1997, Chap II-9]). Par contre si $N_b^2 < 0$ les oscillations subissent une amplification exponentielle et le milieu devient instable. Les zones convectives sont donc caractérisées par une valeur de N_b^2 négative.

La convection sera possible dans les régions où le gradient adiabatique est faible et où le gradient radiatif est grand. Pour un gaz parfait le gradient adiabatique est relié à l'indice adiabatique γ comme

$$\left(\frac{d \ln T}{d \ln P}\right)_{ad} \equiv \nabla_{ad} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \quad (3.3)$$

avec $\gamma = C_p / C_V$ et où C_p et C_V sont respectivement les capacités calorifiques à pression et volume constant. Dans la majeure partie de l'étoile $\gamma = 5/3$ et ainsi $\nabla_{ad} = 0.4$. Dans les zones d'ionisation partielle l'énergie interne des atomes croît avec le degré d'ionisation et se traduit par un accroissement de C_V et donc par un abaissement de ∇_{ad} . Les zones d'ionisation partielle sont donc des régions propices à la convection.

Le gradient radiatif est quant à lui étroitement lié à la variation de l'opacité du milieu et au flux radiatif. On montre en effet que celui-ci vaut, lorsque le milieu est optiquement épais [Cox, 1968] :

$$\left(\frac{d \ln T}{d \ln P}\right)_{rad} \equiv \nabla_{rad} \propto \frac{\kappa_R P}{T^4} \frac{L(r)}{M(r)} \quad (3.4)$$

avec κ_R l'opacité moyenne de Rosseland, $L(r)$ le flux radiatif traversant la sphère de rayon r et $M(r)$ la masse contenue dans cette sphère.

Dans l'enveloppe supérieure d'une étoile le rapport $L(r)/M(r)$ demeure quasiment constant et égal approximativement à sa valeur L_*/M_* à la surface où M_* est la masse de l'étoile et L_* sa luminosité. Dans cette région c'est la variation spatiale de l'opacité qui va être déterminante pour fixer la valeur de ∇_{rad} par rapport à celle de ∇_{ad} , ainsi un accroissement de κ_R favorisera une valeur élevée de ∇_{rad} . Or ce sont dans les régions d'ionisation, situées dans les couches supérieures des étoiles peu massives, que les variations spatiales de l'opacité vont être les plus fortes. Cet effet s'ajoute à l'abaissement du gradient adiabatique dans ces mêmes régions conférant à ces régions un caractère convectif.

L'ionisation de l'hydrogène est initiée à des températures entre 6000 K et 7000 K. Ce sont les étoiles de température effective $T_{eff} \lesssim 7000$ K qui présentent une zone convective dans l'enveloppe supérieure, zone qui sera d'autant plus étendue que l'étoile sera froide. On s'intéressera donc à ce type d'étoiles (type F et G) dont la zone convective supérieure est propice à l'excitation stochastique des modes acoustiques. On nommera donc "étoile de type solaire" les étoiles du type F et G dont les modes p peuvent être excités stochastiquement dans la zone convective supérieure.

Pour les étoiles dont la production d'énergie est très concentrée au coeur, le flux radiatif $L(r)$ demeure quasiment égale à L_* tandis que $M(r)$ décroît de manière monotone lorsque l'on descend dans l'intérieur de l'étoile. Les étoiles très lumineuses (ou massives, $M \gtrsim 1.2 M_\odot$) seront donc naturellement dotées d'un coeur convectif. Les étoiles de type solaire que l'on considère dans notre travail peuvent être dotées d'un coeur convectif. Toutefois les modes acoustiques, dont on s'occupe, sont confinés principalement dans l'enveloppe supérieure des étoiles et ne sont donc pas excités stochastiquement par les mouvements turbulents du coeur convectif.

⁷Dans cette relation on a supposé pour simplifier le milieu complètement ionisé et l'on a négligé la pression radiative.

3.1.2 Transport convectif de l'énergie

Les éléments convectifs descendant et ascendant transportent leur énergie cinétique ainsi que leur énergie thermique. Le flux convectif F_c est le bilan moyen des flux d'énergies descendant et ascendant et s'écrit

$$F_c = \frac{1}{2}\rho_a w_a (C_p(T_a - T_0) + w_a^2) - \frac{1}{2}\rho_d w_d (C_p(T_d - T_0) + w_d^2) \quad (3.5)$$

où w , ρ et T sont les vitesses verticales, densités et températures des éléments convectifs ; les variables indexées par a et d désignent respectivement les éléments ascendants (a) et descendants (d) ; enfin F_c est le flux convectif par unité de surface [$J kg/m^2 s$].

La conservation de la masse impose que les flux massiques ascendants et descendants soit égaux de sorte que

$$\rho_a w_a = \rho_d w_d \equiv \rho_0 w \quad (3.6)$$

Les différences de densité entre les éléments ascendant et descendant sont faibles devant la densité moyenne (ρ_0) du milieu ambiant et peuvent donc être négligées dans l'égalité précédente si bien que l'on a $w_a = w_d = w$. Le flux moyen d'énergie cinétique est par conséquent nul. Autrement dit l'énergie convective est transportée sous forme thermique et le flux convectif s'exprime donc

$$F_c = \frac{1}{2}\rho_0 w C_p(T_a - T_d) = \rho_0 w C_p \Theta \quad (3.7)$$

avec $\Theta = T_a - T_0 = T_0 - T_d$ et où T_0 désigne la température moyenne du milieu ambiant. Le flux convectif s'ajoute au flux radiatif et doit évaluer le flux sortant de l'étoile de sorte que

$$F_c + F_{rad} = \sigma T_{eff}^4 \frac{R_*^2}{r^2} \quad (3.8)$$

où T_{eff} est la température effective, F_{rad} le flux radiatif par unité de surface traversant une sphère de rayon r et R_* est le rayon photosphérique de l'étoile. Le but des théories de la convection est d'obtenir le flux convectif et cela passe donc par une évaluation de la vitesse convective w et l'écart de température Θ qui se rapporte en fait à la différence des gradients de température de la bulle de gaz et du milieu ambiant.

3.1.3 La théorie standard de la longueur de mélange

Le milieu convectif est constitué d'un ensemble d'éléments de tailles diverses effectuant des mouvements ascendants et descendants sur des longueurs différentes et des échelles de temps différentes. La théorie de la longueur de mélange consiste à effectuer le bilan d'énergie d'un élément convectif de taille unique, que l'on va appelé "bulle", se déplaçant sur une distance moyenne appelée longueur de mélange (Λ). Selon ce point de vue, cet élément prenant naissance avec une vitesse nulle est accéléré par la force d'Archimède pour se dissoudre dans le milieu ambiant après avoir effectué une distance moyenne Λ à la vitesse moyenne w .

La force d'Archimède fournit un travail à la bulle, ce travail se transforme en énergie cinétique si bien que le bilan d'énergie cinétique s'exprime pour une distance l parcourue par la bulle

$$\frac{1}{2}\rho_0 w^2(l) + \int_0^l (\rho(z) - \rho_0) g_0 dz = 0 \quad (3.9)$$

où ρ et ρ_0 sont respectivement les densités de la bulle et du milieu ambiant. L'intégrale dans l'équation 3.9 représente le travail de la force d'Archimède effectué sur la distance l .

Fluctuations de densité, de température et de pression sont reliées au premier ordre par

$$\frac{\delta P}{P_0} = \frac{\delta T}{T_0} + \frac{\delta \rho}{\rho_0} + \frac{\delta \mu}{\mu_0} \quad (3.10)$$

où les quantités indexées par 0 désignent les valeurs moyennes de la densité, la pression et la température du milieu ambiant et le symbole δ désigne, pour chaque quantité considérée, l'écart entre la bulle et milieu ambiant ; enfin μ est la masse moléculaire qui varie notamment selon l'état d'ionisation du milieu. On avait déjà supposé que les bulles sont à l'équilibre hydrostatique avec le milieu ambiant, de sorte que $\delta P \simeq 0$. Cette approximation est en fait l'approximation de Boussinesq pour laquelle on considère que l'échelle de pression (H_p) est grande devant la taille des éléments perturbatifs. De sorte que la bulle ne subit pas la modification du profil de pression. Cette approximation n'est en fait pas valide. En effet la longueur de mélange contrainte

par l'ajustement des modèles aux observables solaires (luminosité et rayon, c.f. plus loin) se trouve être du même ordre de grandeur que H_p . Il conviendrait en fait de tenir compte de la fluctuation de pression. Mais dans une description simplifiée on utilise l'approximation de Boussinesq de sorte que fluctuation de densité et température sont simplement reliées comme

$$\frac{\delta\rho}{\rho_0} = -Q \frac{\delta T}{T_0} \quad (3.11)$$

avec $Q = 1 - \left(\frac{\partial \ln \mu_0}{\partial \ln T_0} \right)_P$ dans le cas d'un gaz parfait et où l'on a négligé (pour simplifier l'exposé) la pression radiative. Ceci nous permet d'établir une expression pour le carré de la vitesse

$$w^2(l) = 2Q g_0 \int_0^l \frac{\delta T(z)}{T_0} dz \quad (3.12)$$

L'écart en température se ramène aux gradients de température

$$\Theta(l) = \left[\left(\frac{dT}{dz} \right) - \left(\frac{dT}{dz} \right)_\Lambda \right] l \quad (3.13)$$

En utilisant l'équation d'équilibre hydrostatique

$$\frac{d \ln P}{dz} = -\frac{\rho_0 g_0}{P_0} = -\frac{1}{H_p} \quad (3.14)$$

où H_p est l'échelle des pressions, on peut exprimer $\Theta(s)$ sous la forme

$$\Theta(l) = \frac{T_0}{H_p} (\nabla - \nabla_\Lambda) l^2 \quad (3.15)$$

où ∇_Λ est le gradient de température vu par la bulle et ∇ le gradient de température du milieu ambiant. Localement dans l'étoile la distance moyenne parcourue est $\Lambda/2$ si bien que la vitesse quadratique moyenne s'exprime à partir de l'équation 3.9

$$w(\Lambda)^2 = \frac{Q g_0}{H_p} (\nabla - \nabla_\Lambda) \Lambda^2 \quad (3.16)$$

tandis que le flux convectif s'exprime

$$F_c = \rho_0 C_p T_0 \sqrt{Q g_0} H_p^{-3/2} (\nabla - \nabla_\Lambda)^{3/2} \left(\frac{\Lambda}{2} \right)^2 \quad (3.17)$$

La couche étant par hypothèse instable, le gradient de température de la bulle (∇_Λ) vérifie le critère de stabilité ($\nabla_{ad} \leq \nabla_\Lambda < \nabla$) de telle sorte que le déplacement de la bulle se traduit par un écart de température $\Theta = T_0/H_p (\nabla - \nabla_\Lambda) \Lambda$ par rapport au milieu ambiant. Cet écart de température avec le milieu ambiant correspond à un excès d'énergie calorifique. Une partie de cette énergie est perdue par rayonnement pendant le déplacement de la bulle. On définit alors l'efficacité convective (Γ_{conv}) comme le rapport entre l'énergie thermique cédée par la bulle au milieu lorsqu'elle perd son identité à la fin de sa vie et l'énergie perdue par rayonnement

$$\Gamma_{conv} = \frac{\mathcal{V} \rho_0 C_p T_0 (\nabla_\Lambda - \nabla) \Lambda / H_p}{\mathcal{A} F_{rad} \Lambda / w} \quad (3.18)$$

où \mathcal{V} et \mathcal{A} sont respectivement le volume et la surface de la bulle de gaz, enfin F_{rad} est le flux radiatif s'échappant de la surface de celle-ci. En supposant la bulle optiquement épaisse, le flux radiatif s'échappant de celle-ci s'exprime

$$F_{rad} = a \frac{T_0^3 \Theta'}{\kappa_R \rho_0 \Lambda / 2} \quad (3.19)$$

où a est une constante, κ_R l'opacité moyenne de Rosseland et Θ' l'écart de température entre le centre et la surface de la bulle. On considère le choix de Böhm-Vitense qui consiste à prendre $\Theta' = \Theta/2$. L'efficacité s'écrit alors

$$\Gamma_{conv} = \frac{\mathcal{V} C_p \rho_0^2 \kappa_R}{\mathcal{A} 4a T_0^3} \quad (3.20)$$

L'énergie perdue peut également être calculée en exprimant l'écart à l'adiabaticité, en effet l'écart de température entre un déplacement adiabatique et non-adiabatique vaut $\Theta'' = T_0(\nabla_\Lambda - \nabla_{ad})\Lambda/H_p$. Cet écart se traduit par une perte d'énergie rayonnée égale à $\mathcal{V}\rho_0 C_p \Theta''$. L'efficacité convective peut alors s'écrire comme

$$\Gamma_{conv} = \frac{\mathcal{V}\rho_0 C_p \Theta}{\mathcal{V}\rho_0 C_p \Theta''} = \frac{\nabla - \nabla_\Lambda}{\nabla_\Lambda - \nabla_{ad}} \quad (3.21)$$

On voit que le jeu d'équations 3.8, 3.14, 3.16, 3.17, 3.20, et 3.21 permet de déterminer les grandeurs ∇ , ∇_{ad} , w , F_{rad} , et F_c . Le problème de la convection est ainsi résolu dans le cadre de la théorie de la longueur de mélange. La longueur de mélange demeure néanmoins un paramètre libre de la théorie, elle peut être inférieure ou de l'ordre de H_p mais jamais beaucoup plus grande. On choisit de la prendre proportionnelle à l'échelle des pressions (H_p) soit

$$\Lambda = \alpha_c H_p \quad (3.22)$$

où α_c est appelé le paramètre de la longueur de mélange. On détermine α_c en calibrant un modèle solaire. On calcule pour cela des modèles stellaires que l'on fait évoluer jusqu'à l'âge solaire connu par ailleurs (environ 4.65 milliards d'années). Les paramètres libres (le paramètre de longueur de mélange ainsi que l'abondance de l'hélium) sont ajustés de sorte que la luminosité du modèle et son rayon soient les plus proches des observables solaires connues. Pour les autres étoiles on utilise généralement (par défaut) le même paramètre que celui ajusté sur le Soleil. L'universalité de la valeur de α_c le long de la séquence principale a cependant été suggéré par certains auteurs [Lebreton *et al.*, 1999]. Toutefois les simulations numériques 3 dimensionnelles faites par Trampedach [1999] suggèrent que la valeur de α_c devrait être plus faible pour les étoiles plus massives que le Soleil.

Dans la majeure partie de la zone convective l'opacité du milieu ainsi que la valeur du gradient adiabatique (∇_{ad}) font que la convection est très efficace et que le gradient du milieu ambiant ∇ est égal à ∇_{ad} . Dans ces régions le transport convectif est isentropique (s'effectue sans perte de chaleur par rayonnement) et l'efficacité de la convection est maximale.

Dans la région située juste en dessous de la photosphère, l'efficacité diminue ($\Gamma_{conv} \lesssim 1$). En effet le milieu devenant moins dense il devient plus difficile de transporter de l'énergie sous forme convective bien que le critère d'instabilité demeure satisfait. Par conséquent pour assurer le transport convectif de la part de l'énergie de l'étoile, qui ne peut pas être transportée totalement sous forme radiatif, la vitesse des éléments convectifs doit s'accroître en haut de la zone convective. Dans cette région où $\Gamma_{conv} \lesssim 1$ la perte par rayonnement devient dominante et l'écart à l'équilibre isentropique d'autant plus importante de sorte que ∇ s'écarte de ∇_{ad} . La région est dite superadiabatique car $\nabla > \nabla_{ad}$.

On constate donc un accroissement de w tandis que l'on s'approche de la photosphère. Le flux convectif cesse brutalement en haut de la zone convective lorsque le critère d'instabilité cesse d'être satisfait parce que les éléments H et He ne sont plus du tout ionisés. La figure 3.1 illustre la dépendance de $w(r)$ avec la profondeur en haut de la zone convective. Il s'avère que la vitesse convective joue un rôle majeur dans l'excitation stochastique (voir les chapitres 4, 5 et 6) : elle conditionne notamment la profondeur de la zone d'excitation ainsi que l'importance de la puissance injectée dans les oscillations. $M_t = w/c_s$ fournit un ordre de grandeur du nombre de Mach, on a $M_t \ll 1$ dans la zone isentropique et $M_t \lesssim 0.3$ dans la zone superadiabatique du Soleil. Les mouvements turbulents sont par conséquent subsoniques.

Les grosses bulles de la MLT ont une durée de vie $\tau_\Lambda = \Lambda/w$, l'échelle de hauteur H_P variant lentement, la durée de vie des tourbillons s'accourte (figure 3.1) tandis que leur vitesse s'accroît. La durée de vie des tourbillons est également une quantité déterminante dans le processus d'excitation stochastique car elle conditionne l'efficacité de la résonance entre oscillations et tourbillons. On référera donc souvent à l'allure du profil et à l'amplitude de $w(r)$ et de $\tau_\Lambda(r)$ dans la zone superadiabatique (figure 3.1).

3.1.4 Autres formulations

On l'a vu, la théorie standard de la longueur de mélange se base sur de nombreuses approximations à savoir l'approximation de Boussinesq, l'existence d'une échelle spatiale unique et le bilan sommaire de l'énergie radiatif rayonnée par la bulle. D'autre part l'application du critère d'instabilité dans le cadre de cette théorie introduit des discontinuités aux limites supérieures et inférieures de la zone convective. Cette discontinuité a été partiellement corrigée par la modélisation du processus de pénétration des éléments convectifs dans l'atmosphère [Schaller *et al.*, 1992, "overshooting"]. Et enfin la théorie standard demeure essentiellement statique; elle occulte le fait que le milieu ambiant peut être sujet à des perturbations qui peuvent notamment avoir pour origine les modes d'oscillations.

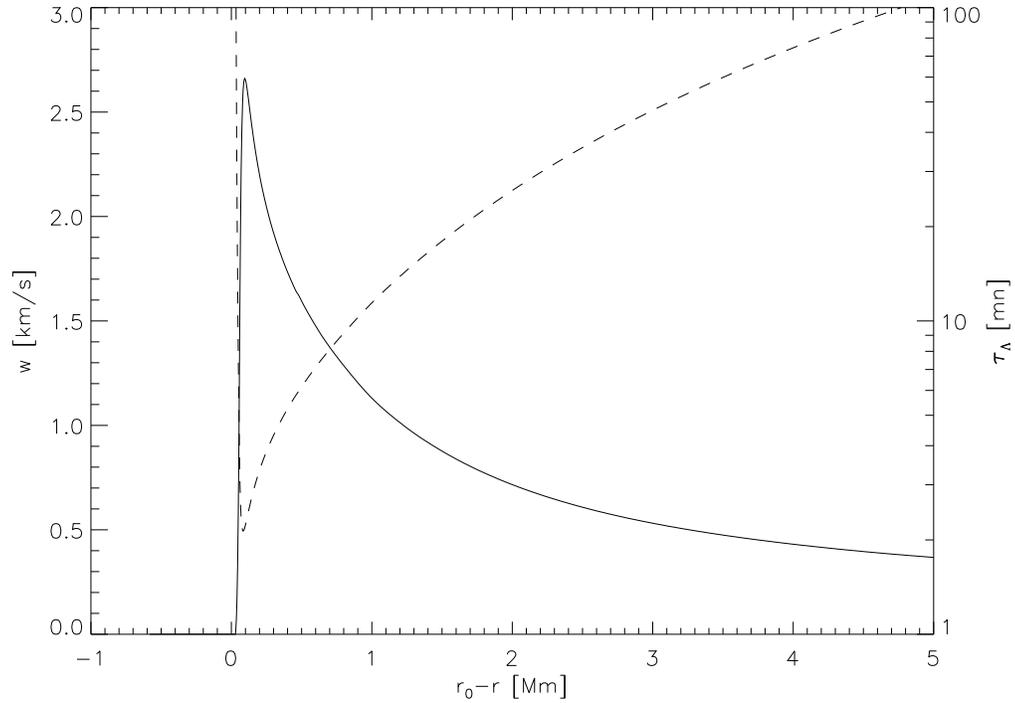


FIG. 3.1 – *Trait plein (échelle de gauche)* : dépendance de la vitesse convective verticale (w) en fonction de $r_0 - r$ où r_0 est le rayon de la photosphère. *Trait discontinu (échelle de droite)* : durée de vie ($\tau_\Lambda = \Lambda/w$) des tourbillons de taille égale à la longueur de mélange Λ . Le calcul de w et de τ_Λ a été effectué pour un modèle solaire en considérant la théorie standard de la longueur de mélange. La région $r_0 - r \gtrsim 1$ Mm correspond au domaine isentropique ($\nabla \simeq \nabla_{ad}$) tandis que la région supérieure située juste en dessous de la photosphère ($0 \text{ Mm} \lesssim r_0 - r \lesssim 1 \text{ Mm}$) correspond au domaine superadiabatique ($\nabla > \nabla_{ad}$).

Du fait de ces nombreuses approximations, la valeur du paramètre de la longueur de mélange, obtenue par calibration, masque en fait toutes les incertitudes relatives à la description de la convection mais également, et dans une certaine mesure, toutes les incertitudes sur la physique des modèles stellaires utilisée.

Il existe différentes théories de la convection qui viennent raffiner ou supplanter la théorie standard de la longueur de mélange. Parmi celles-ci on distingue essentiellement deux écoles. La première, celle de [Spiegel, 1962; Unno, 1967; Gough, 1976, 1977] se base essentiellement sur le point de vue de la longueur de mélange, tandis que la seconde [Canuto and Mazzitelli, 1991] tient compte de l'ensemble du spectre de turbulence faisant appel pour cela à l'approximation EDQNM (Eddy Damped Quasi-Normal Markovian, c.f. Lesieur [1997, Chap. VII-3]).

Enfin des simulations à 2 et 3 dimensions de la zone convective stellaire sont réalisées [Stein and Nordlund, 1989, 1998]. Celles-ci résolvent les équations exactes de l'hydrodynamique ainsi que le transfert radiatif sans recourir aux approximations usuelles dans les théories de la longueur de mélange, telles que l'approximation de Boussinesq et l'approximation de diffusion radiatif (approximation d'Eddington). Du fait des limitations d'ordre numérique ces simulations ne peuvent toutefois pas décrire toutes les échelles correspondant aux éléments convectifs turbulents (on travaille en fait avec un nombre de Reynolds faible, c.f. section 5.3). Typiquement ces simulations sont capables de décrire une région d'environ quelques Mm (soit quelques 1/1000 du rayon solaire) correspondant à la région superadiabatique. On décrira dans la section 5.3 une simulation 3D établie pour l'enveloppe supérieure du Soleil. On l'utilisera pour tester différentes hypothèses utilisées pour modéliser le processus d'excitation stochastique.

3.1.5 La théorie de la longueur de mélange dépendante du temps

Dans le cadre de la théorie standard de la longueur de mélange on suppose que les variables thermodynamiques (notamment la densité, la pression et la température) relatives au milieu ambiant, et dont on considère les moyennes effectuées sur les couches horizontales, n'ont pas de dépendance temporelle. Or aux variables d'équilibre peuvent s'ajouter des fluctuations dues aux pulsations stellaires. Cette dépendance temporelle de la densité, pression, et température du milieu ambiant se traduit alors par un couplage entre oscillations et éléments convectifs qu'il s'agit de modéliser.

Une description dynamique de la théorie de la longueur de mélange a été proposée par Gough [1977], on en rappelle ici les grandes lignes. La dynamique de la vitesse et de la température des tourbillons est gouvernée, dans l'approximation de Boussinesq, par l'équation du mouvement et de la conservation d'énergie [Gough, 1977]

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{\Phi} \frac{\partial \ln(r^2 \rho)}{\partial t} \right] w - \frac{g_0 Q}{\Phi} \frac{\Theta}{T} = 0 \quad (3.23)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \left(\frac{\partial \ln C_p}{\partial t} - Q \right) \frac{\partial \ln T}{\partial t} - \frac{\partial \ln Q}{\partial t} \nabla_{ad} \frac{\partial \ln P}{\partial t} \right] \frac{\Theta}{T} + \frac{N_b^2}{g_0 Q} w + \frac{\phi K}{\rho C_p} k^2 \frac{\Theta}{T} = 0 \quad (3.24)$$

Dans les équations 3.23 et 3.24, $\Theta(t, \vec{r})$ est l'écart de température entre le tourbillon et le milieu ambiant tandis $\rho(t, r)$, $P(t, r)$ et $T(t, r)$ désignent respectivement la densité, la pression et la température du milieu ambiant. Ces quantités dépendent *a priori* du temps si bien que les dérivées temporelles agissant sur les quantités ρ , P , C_p , Q et T relatives au milieu ambiant ne sont pas nulles. Par conséquent les équations 3.23 et 3.24 s'établissent, dans l'approximation de Boussinesq, à partir de l'équation du mouvement et de la conservation de l'énergie. Les dérivées agissant sur les quantités ρ , P , C_p , Q et T ne sont pas nulles alors qu'elles le seraient dans un modèle convective statique.

Dans les équations 3.23 et 3.24, N_b désigne la fréquence de Brunt-Väisälä (équation 2.12), ϕ est un facteur dépendant du facteur de forme de la bulle et de l'écart à l'équilibre radiatif⁸ dans la bulle (c.f. Gough [1977]), K est la conductivité radiative, k est le nombre d'onde associé au tourbillon; enfin Φ est le facteur d'anisotropie introduit par Gough [1977] et défini comme

$$\Phi \equiv \frac{\langle u^2 \rangle}{\langle u_z^2 \rangle} \quad (3.25)$$

où u est la vitesse des éléments turbulents. Dans le cadre de la MLT, il existe une unique taille de tourbillon, et Φ se réduit alors à

$$\Phi = \frac{\langle v^2 \rangle}{\langle w^2 \rangle} \quad (3.26)$$

⁸Ou de façon équivalente à l'épaisseur optique dans la bulle

où $v(t, \vec{r})$ est la vitesse totale (verticale + horizontale) des éléments convectifs (les gros tourbillons de la MLT) et $w(t, \vec{r})$ désigne sa composante verticale. On relie ce facteur aux nombres d'onde verticaux (k_v) et horizontaux (k_h) des tourbillons comme

$$\Phi = 1 + \frac{k_v^2}{k_h^2} \quad (3.27)$$

La description dépendante du temps due à Unno [1967] considère que les vitesses convectives et les températures des tourbillons sont instantanément en phase avec l'enveloppe pulsante. Cependant cette hypothèse est inconsistante [Gough, 1977]. En effet, les équations 3.23 et 3.24 appliquées à une enveloppe statique établissent que la durée nécessaire pour que les fluctuations de vitesse et température convergent vers le régime stationnaire est de l'ordre de $|N_b|^{-1}$ (équation 2.12), i.e. la durée de vie des éléments convectifs. Or cette durée croît de quelques dizaines de minutes en bas de la zone convective solaire à quelques minutes en haut de la zone superadiabatique (voir figure 3.1). La durée nécessaire pour atteindre le régime stationnaire s'avère être du même ordre de grandeur que la période d'oscillation de l'enveloppe pulsante. Par conséquent l'hypothèse de Unno n'est pas valide et il convient de tenir compte des termes d'accélération⁹.

Dans la description dépendante du temps de Gough, on considère que les éléments convectifs ne sont pas créés précisément avec les mêmes propriétés que le milieu ambiant à l'équilibre (enveloppe statique) mais avec une petite perturbation grâce à laquelle ils doivent leur existence. Désignons par convention t_0 l'instant où le tourbillon prend naissance. Les considérations de Gough impliquent qu'à l'instant t_0 il existe un décalage entre les propriétés du tourbillon et le milieu ambiant. Ceci nous conduit à décomposer les grandeurs relatives aux tourbillons en terme d'une variable d'équilibre et d'une perturbation due à l'oscillation. On décompose ainsi le nombre d'onde horizontal (k_h) et vertical (k_v) comme

$$k_h = k_h^0 (1 + k_h^{10} e^{-i\omega_0 t_0} + k_h^{11} e^{-i\omega_0 t}) \quad (3.28)$$

$$k_v = k_v^0 (1 + k_v^{10} e^{-i\omega_0 t_0} + k_v^{11} e^{-i\omega_0 t}) \quad (3.29)$$

où k_h^0 et k_v^0 sont les nombres d'ondes respectivement horizontaux et verticaux caractérisant les tourbillons de l'enveloppe statique tandis que k_h^{10} , k_h^{11} , k_v^{10} et k_v^{11} sont les valeurs absolues des perturbations induites par les oscillations. L'équation 3.27 permet d'établir la dépendance temporelle de Φ

$$\Phi = \Phi_0 (1 + \Phi^{10} e^{-i\omega_0 t_0} + \Phi^{11} e^{-i\omega_0 t}) \quad (3.30)$$

où des notations similaires à l'équation précédente ont été considérées.

L'équation du mouvement des tourbillons s'établit en excluant les termes non-linéaires et s'exprime à l'aide des équations 3.23 et 3.24 comme

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{K_0 k_0^2 \phi_0}{\rho_0 C_{p,0}} (1 + \kappa_{10} e^{-i\omega_0 t_0} + \kappa_{11} e^{-i\omega_0 t}) \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{N_b^2}{\Phi} (1 + 2\mu_{10} e^{-i\omega_0 t_0} + 2\mu_{11} e^{-i\omega_0 t}) w = 0 \quad (3.31)$$

où les grandeurs indexées par 0 désignent les grandeurs thermodynamique à l'équilibre. Les coefficients complexes $\kappa_{10}, \kappa_{11}, \mu_{10}$ et μ_{11} , sont reliées aux grandeurs d'équilibres ainsi qu'aux amplitudes des oscillations de ces mêmes grandeurs (c.f. Gough [1977] et Baker and Gough [1979]). L'équation de mouvement se résoud de façon exacte et permet d'exprimer la vitesse des éléments convectifs w s'écrit

$$w = w_0 [1 + w_{10} e^{-i\omega_0 t_0} + w_{11} e^{-i\omega_0 t} + (t - t_0) w_{12} e^{-i\omega_0 t_0}] \quad (3.32)$$

où w_0 correspond à la vitesse convective dans le cas d'une enveloppe statique. De façon similaire l'écart de température Θ entre tourbillon et milieu ambiant s'exprime comme :

$$\Theta = \Theta_0 [1 + \Theta_{10} e^{-i\omega_0 t_0} + \Theta_{11} e^{-i\omega_0 t} + (t - t_0) \Theta_{12} e^{-i\omega_0 t_0}] \quad (3.33)$$

où Θ_0 correspond à l'écart en température dans le cas d'une enveloppe statique. Les coefficients w_{1i} et Θ_{1i} sont reliés aux coefficients κ_{1i} et μ_{1i} . Il s'agit de coefficients complexes dont la partie imaginaire exprime le déphasage avec l'oscillation.

Ce déphasage est déterminant pour stabiliser les modes de type solaire [Balmforth, 1992c]. En effet la pression turbulente est définie par $P_t = \rho w^2$, le travail qu'exerce la fluctuation de la pression turbulente (δP_t) sur l'oscillation s'exprime [Baker and Gough, 1979] par :

$$W_t = -\pi \int_0^{M_*} dm \frac{P_0}{\rho_0} \text{Im}(\delta P_t^* \delta \rho) \quad (3.34)$$

⁹Il s'agit des dérivées agissant sur les variables relatives au milieu ambiant dans les équations 3.23 et 3.24

où δP_t est la fluctuation de pression turbulente induite par les variations de w ; $\delta\rho$ est la fluctuation Lagrangienne de la densité due à l'oscillation. L'intégration est réalisée sur la totalité de l'étoile et l'on a ignoré pour simplifier les termes d'anisotropie qui sont en fait négligeables [c.f. Balmforth, 1992c]. Un déphasage entre la fluctuation de pression et la fluctuation de densité se traduit par un travail effectif ($W_t < 0$) et donc par un amortissement¹⁰ de la pulsation.

Les fluctuations du flux convectif sont reliées aux fluctuations de w , Θ , C_p et de ρ et conduisent à une modulation du flux convectif. L'équation suivante en donne une expression réduite [Houdek, 1996]

$$\frac{\delta F_c}{F_c} = \frac{\delta\rho}{\rho_0} + \frac{\delta C_p}{C_{p,0}} + w_{11} + \Theta_{11} + w_{21} + (w_{10} + \Theta_{10})F + (w_2 + \Theta_{12})F\mathcal{G} + \mathcal{H} \quad (3.35)$$

dans laquelle les fonctions \mathcal{F} , \mathcal{G} et \mathcal{H} résultent d'une moyenne effectuée sur un ensemble de conditions initiales distribuées selon une loi de distribution quadratique. La modulation du flux convectif ($\delta F_c / F_c$) s'ajoute à la modulation du flux radiatif par les pulsations, et l'ensemble permet de tenir compte de la non-adiabaticité et donc d'obtenir l'amortissement des oscillations.

3.1.6 La théorie non-locale de la longueur de mélange

On l'a évoqué, la théorie standard de la longueur de mélange se base sur l'approximation de Boussinesq qui exige que les tailles caractéristiques des éléments convectifs restant très petites devant l'échelle liée à la stratification, notamment devant l'échelle de hauteur de pression (H_p). Or le paramètre de longueur mélange qu'il convient d'adopter pour ajuster un modèle d'équilibre aux observables solaires est de l'ordre de l'unité. Ceci implique que la stratification de l'enveloppe stellaire varie sur des échelles de l'ordre ou inférieures à la taille des éléments convectifs.

Pour remédier partiellement à cette inconsistance Spiegel [1963] suggère une description non-locale de la théorie de la longueur de mélange. Pour cela il introduit une fonction de distribution $\psi(\vec{r}, t, \vec{u})$ qui décrit la densité des éléments convectifs dans l'espace des phases formé par les variables position (\vec{r}), temps (t) et champ de vitesse convective (\vec{u}). L'équation régissant l'évolution de $\psi(\vec{r}, t, \vec{u})$ dans l'espace des phases s'exprime par [Spiegel, 1963]

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j\psi) + \frac{\partial}{\partial u_j} \left(\frac{\partial u_j}{\partial t} \psi \right) = q_+ + q_- \quad (3.36)$$

dans laquelle q_+ est un terme source et q_- désigne les pertes. Le terme $\frac{\partial}{\partial u_j} \left(\frac{\partial u_j}{\partial t} \psi \right)$ dérive formellement de la conservation de la fonction de distribution ψ qui s'applique dans un espace des phases tenant compte également du champ de vitesse \vec{u} . Il traduit les changements des propriétés de l'élément convectif en mouvement. Les pertes correspondent à la disparition de la bulle de gaz lorsque celle-ci a traversé une distance égale à la longueur de mélange (Λ) et valent par unité de temps

$$q_- = \frac{w}{\Lambda} \psi \quad (3.37)$$

Dans une atmosphère plan parallèle et statique l'équation 3.36 s'écrit sous une forme similaire à l'équation de transfert radiatif, à savoir

$$\mu \frac{d\Psi}{d\xi} = \Psi - \mathcal{D} \quad (3.38)$$

avec

$$\begin{aligned} d\xi &\equiv -dz / \Lambda \\ \Psi &\equiv w\psi \end{aligned} \quad (3.39)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &\equiv \Lambda \left[q_+ - \frac{\partial}{\partial u_j} \left(\frac{\partial u_j}{\partial t} \psi \right) \right] \\ \mu &\equiv \cos\theta \end{aligned} \quad (3.40)$$

et où θ désigne l'angle entre la trajectoire de l'élément convectif et l'axe z .

Par analogie avec l'équation du transfert radiatif, Ψ est l'intensité spécifique¹¹ et \mathcal{D} est le terme source convectif. Soit e_+ et e_- l'excès d'énergie calorifique transportée par les éléments montants (e_+) et descendants

¹⁰Il s'agit de l'amortissement par modulation de la pression turbulente évoqué dans la section 2.2.

¹¹C'est à dire le flux d'énergie qui traverse une surface élémentaire, dans un angle solide unité et par seconde

(e_-), dans le contexte de la théorie de la longueur de mélange on a $e_+ = -e_-$. Le flux convectif, qui est également le moment d'ordre un, s'exprime par

$$\mathcal{F}_c = 2\pi \int_0^{+1} d\mu \mu e_+ \Psi + 2\pi \int_{-1}^0 d\mu \mu e_- \Psi \quad (3.41)$$

L'équation 3.38 s'intègre et connaissant alors Ψ on en déduit l'expression pour \mathcal{F}_c

$$\mathcal{F}_c(\xi_0) = 2\pi \int_0^\infty d\xi e_+ \mathcal{D}(\xi) E_2(|\xi - \xi_0|) \quad (3.42)$$

où E_2 est l'intégrale exponentielle seconde [c.f. Gray, 1992, Chap 7].

Dans la limite d'une longueur de mélange infiniment petite devant la stratification, on a $\mathcal{F}_c \simeq 2\pi e_+ \mathcal{D}$; autrement dit le flux convectif coïncide avec la source convective locale. Dans le cas général l'équation 3.42, bien que valide, ne permet pas de fermer le système, la quantité $e_+ \mathcal{D}$ demeurant inconnue. Pour résoudre ce problème, Gough [1976] propose d'appliquer l'approximation d'Eddington par analogie avec la théorie du transfert radiatif.

Ainsi l'équation différentielle relative au moment d'ordre un s'obtient par intégration de l'équation 3.38 sur les angles et s'exprime

$$2 \frac{d}{d\xi} \int_0^{+1} d\mu \mu e_+ \psi = \mathcal{F}_c - F_c \quad (3.43)$$

avec F_c la source locale

$$F_c \equiv 2\pi \int_0^{+1} d\mu e_+ \mathcal{D} = 2\pi e_+ \mathcal{D} \quad (3.44)$$

et \mathcal{F}_c , le moment d'ordre nul, est défini comme

$$\mathcal{F}_c \equiv 2\pi \int_0^{+1} d\mu e_+ \Psi \quad (3.45)$$

Enfin l'équation différentielle relative au moment du second ordre s'obtient par intégration de l'équation 3.38 sur $\mu d\mu$ et s'exprime

$$\frac{d\mathcal{F}_2}{d\xi} = 2 \frac{d}{d\xi} \int_0^{+1} d\mu \mu e_+ \psi \quad (3.46)$$

où \mathcal{F}_2 est le moment du second ordre défini comme

$$\mathcal{F}_2 \equiv 2\pi \int_0^{+1} d\mu \mu^2 e_+ \Psi \quad (3.47)$$

L'approximation d'Eddington consiste à fermer le système des équations 3.43 et 3.46 en posant

$$\mathcal{F}_2 = \frac{1}{a^2} \mathcal{F}_c \quad (3.48)$$

où a est une constante, égale à $\sqrt{3}$ dans le contexte du transfert radiatif. Ceci permet d'établir l'équation différentielle vérifiée par le moment d'ordre zéro

$$\frac{1}{a^2} \frac{d^2}{d\xi^2} \mathcal{F}_c = \mathcal{F}_c - F_c \quad (3.49)$$

Le paramètre a permet de fixer le caractère non-local du transport convectif. Lorsque $a \rightarrow \infty$, \mathcal{F}_c égal la source convective locale F_c . Dans cette hypothèse on se place dans le cas limite d'une longueur de mélange infiniment petite devant la stratification, autrement dit dans le cas de la théorie standard de la longueur de mélange.

Le flux convectif (\mathcal{F}_c) est relié à la source convective locale (F_c) par la relation

$$\mathcal{F}_c(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi_0 F_c(\xi_0) \mathcal{H}(\xi, \xi_0) \quad (3.50)$$

où le noyau \mathcal{H} est défini comme

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} a e^{a|\xi - \xi_0|} \quad (3.51)$$

Dans le cadre de la théorie standard de la longueur de mélange on montre que le flux convectif (*i.e.* la source locale) est fonction de l'écart au gradient adiabatique. Définissons alors

$$\beta = \nabla - \nabla_{ad} \quad (3.52)$$

où ∇ est le gradient de température réel du milieu ambiant et ∇_{ad} le gradient adiabatique. Or cette dépendance a été établie dans l'approximation de Boussinesq. Lorsque Λ se trouve être du même ordre de grandeur que l'échelle des hauteurs, le gradient de température dans la bulle ne demeure plus constant entre le centre et la surface de celle-ci. Pour résoudre cette inconsistance, Spiegel [1963] propose de remplacer la valeur de β par une moyenne effectuée sur la longueur de mélange et qu'il définit égale à

$$\mathcal{B} = \frac{\int_{z-\Lambda/2}^{z+\Lambda/2} dz_0 \mathcal{W}^2(z_0) \beta(z_0)}{\int_{z-\Lambda/2}^{z+\Lambda/2} dz_0 \mathcal{W}^2(z_0)} \quad (3.53)$$

avec le noyau

$$\mathcal{W}(z_0) = \cos \left[\frac{\pi}{\Lambda} (z - z_0) \right] \quad (3.54)$$

Gough [1976] propose d'étendre les bornes à l'infini et de remplacer le noyau \mathcal{W} par le noyau \mathcal{H} . Cela revient formellement à dire que \mathcal{B} vérifie une équation différentielle analogue à celle vérifiée par \mathcal{F}_c et qui s'écrit

$$\frac{1}{b^2} \frac{d^2}{d\xi^2} \mathcal{B} = \mathcal{B} - \beta \quad (3.55)$$

où b est un paramètre qui, de façon similaire au paramètre a , ajuste le degré de "non-localité" du gradient β .

Enfin Gough étend le procédé décrit plus haut à l'évaluation de la pression turbulente \mathcal{P}_t et établit ainsi la relation

$$\frac{1}{c^2} \frac{d^2}{d\xi^2} \mathcal{P}_t = \mathcal{P}_t - P_t \quad (3.56)$$

qui relie la pression turbulente établie dans le cadre de la théorie locale (P_t) à celle qui tient compte de l'étendue des tourbillons (\mathcal{P}_t). Le paramètre c est considéré égal au paramètre a et joue le même rôle que ce dernier.

La description non-locale proposée par Gough et résumée ici, consiste à décrire l'effet de la cohérence spatiale des tourbillons de taille étendue sur le gradient de température réel et sur le flux convectif. Dans cette description les paramètres a et b contrôlent le degré de "non-localité". Dans les limites où $a \rightarrow \infty$ et $b \rightarrow \infty$, la formulation se réduit aux solutions locales *i.e.* les solutions de la théorie standard de la longueur de mélange.

La description non-locale tend à réduire la valeur du gradient de température en haut de la zone superadiabatique. Une faible valeur du paramètre a augmente la contribution des tourbillons, situés sur des couches différentes, au flux convectif ce qui a pour conséquence l'abaissement du gradient de température [Balmforth, 1992c].

3.2 Modélisation du milieu turbulent

3.2.1 Transition vers la turbulence

Le milieu convectif stellaire est particulièrement turbulent et met en jeu de nombreux éléments turbulents de tailles et de cinétiques variées et qu'il convient de modéliser. Penchons-nous en effet sur les conditions qui conduisent le milieu convectif à être turbulent. Dans le milieu convectif $N_b^2 < 0$ et les mouvements de matière subissent une amplification exponentielle et le milieu devient instable. Ces oscillations sont néanmoins atténuées voir annihilées par la viscosité et par la diffusion thermique. On définit alors le nombre de Rayleigh (R_a) qui mesure l'importance relative de la force d'Archimède par rapport aux forces visqueuses et aux effets diffusifs et qui s'exprime comme [Lesieur, 1997, Chap III-5]

$$R_a = \frac{N_b^2}{(\nu/\Lambda^2) (\kappa_R/\Lambda^2)} \quad (3.57)$$

où ν est la viscosité, κ le coefficient de diffusivité thermique, Λ l'échelle caractéristique de la couche soumise à un gradient de température et ν/Λ^2 (resp. κ/Λ^2) est la fréquence caractéristique des phénomènes visqueux

(resp. diffusifs). On conçoit donc que plus ce nombre est élevé plus le milieu est turbulent (au sens d'un ensemble de modes instables, voir plus bas).

La transition vers la turbulence est déterminée par le critère d'instabilité de Rayleigh-Bénard. On établit ce critère en considérant le régime linéaire *i.e.* un régime dans lequel les perturbations sont petites. Considérons pour cela une couche d'épaisseur Λ vérifiant la condition de l'approximation de Boussinesq¹² et soumise à un gradient de température. On montre dans l'approximation de Boussinesq et dans le régime linéaire que les modes instables, *i.e.* non amortis, sont ceux pour lesquels

$$R_a > \frac{k_v^2 + k_h^2}{k_h^2} \quad (3.58)$$

où k_h (resp. k_v) désigne le nombre d'onde horizontal (resp. vertical) exprimé en unité de $1/\Lambda$. Des conditions simples aux limites¹³ de la couche imposent $k_v = \pi j$ où j est un nombre entier. La valeur minimale de R_a est atteinte pour le mode ($j = 1, k_h = \pi/\sqrt{2}$) et vaut [Lesieur, 1997; Rieutord, 1997, Chap III-5 et Chap 7.5 resp.]

$$R_{ac}(j = 1, k_h = \pi/\sqrt{2}) \equiv \frac{27\pi^4}{4} \simeq 657 \quad (3.59)$$

Pour $R_a < R_{ac}$ tous les modes sont amortis tandis que pour $R_a \geq R_{ac}$ il existe au moins un mode instable : il s'agit du critère d'instabilité de Rayleigh-Bénard qui détermine la transition vers la turbulence. En effet plus R_a est grand devant R_{ac} plus le nombre de modes instables est important. L'amplitude d'un mode instable croît jusqu'à un niveau pour lequel le régime linéaire cesse d'être valide. Le comportement des modes devenant alors fortement non-linéaire ils saturent à des amplitudes finies.

Le nombre de Reynolds (R_e) mesure le rapport entre les forces d'inertie et les forces visqueuses et s'évalue comme $R_e = w\Lambda/\nu$ où w est la vitesse caractéristique des éléments convectifs et $\Lambda = \alpha_c H_p$ la longueur de mélange. Du fait des vitesses convectives élevées ($\sim 10^5$ cm/s) et d'une viscosité faible dans la zone convective, le nombre de Reynolds est particulièrement élevé ($\sim 10^{12}$).

Le nombre de Prandtl ($P_r = \nu/\kappa$) compare quant à lui les effets visqueux aux effets diffusifs. Ce nombre est très petit dans les enveloppes stellaires ($P_r \sim 10^{-7}$). Dans l'approximation de Boussinesq, toujours, on a $R_a \approx P_r R_e^2$ si bien que le nombre de Rayleigh est particulièrement grand ($R_a \sim 10^{20}$) de sorte que $R_a \gg R_{ac}$ et de très nombreux modes sont ainsi instables. La région convective stellaire est donc un milieu fortement turbulent qui met en jeu un nombre extrêmement important de modes turbulents (de l'ordre de $\sim R_e^{9/4} \sim 10^{30}$ dans une sphère de rayon égale à la longueur de mélange).

La théorie de la longueur s'intéresse aux seuls tourbillons de grande taille, la contribution des tourbillons de plus petite taille au flux convectif est par conséquent négligée [Canuto and Mazzitelli, 1991]. Cette contribution se trouve être d'autant plus importante que le nombre de Reynolds est élevé [Canuto and Mazzitelli, 1991]. Néanmoins le rôle du paramètre de la longueur de mélange est d'ajuster le modèle convectif de sorte que, dans le cas solaire, le modèle d'équilibre s'ajuste aux observables. Aussi la théorie de la longueur de mélange fournit une bonne estimation du flux convectif et donc de l'énergie totale transportée par l'ensemble des tourbillons. Par contre, par construction, elle ne décrit pas la dynamique et les propriétés des tourbillons. Il convient donc de modéliser la cinétique et les caractéristiques (taille, durée de vie) des éléments turbulents.

3.2.2 La cascade turbulente

La turbulence est communément décrite par le processus de "la cascade turbulente". Dans cette description, que l'on doit à Oboukov [1941], une certaine quantité d'énergie est injectée aux tourbillons de plus grande taille (Λ). Dans le cas stellaire cette échelle coïncide avec la longueur de mélange ($\alpha_c H_p$). Cette énergie transportée par les tourbillons de plus grande taille est cédée aux tourbillons de taille inférieure qui cèdent à leur tour leur énergie aux tourbillons qui les succèdent hiérarchiquement en taille. Le transfert de l'énergie s'effectue à taux constant des grandes échelles aux plus petites. On a donc à faire à ce que l'on appelle la "cascade turbulente" : le milieu turbulent est constitué d'un ensemble d'éléments turbulents hiérarchiquement ordonnés en taille et en énergie. Aux échelles inférieures à l'échelle dissipative (λ_D), les phénomènes dissipatifs d'origine visqueuse deviennent dominants et les tourbillons de taille caractéristique égale λ_D cèdent alors leur énergie au milieu ambiant. Le nombre de Reynolds croît comme $(\Lambda/\lambda_D)^{4/3}$, si

¹²L'approximation de Boussinesq consiste à supposer les tailles des éléments turbulents très faibles devant H_p

¹³Il s'agit de conditions académiques et non réalistes qui consistent à considérer la vitesse verticale w ainsi que dw/dz et dw^2/dz^2 nulles aux limites de la couche.

bien que l'échelle dissipative est très petite devant l'échelle caractéristique des tourbillons de plus grande taille (ou longueur de mélange).

Par conséquent la turbulence qui prend place dans la zone convective externe des étoiles de type solaire met en jeux des tourbillons dont les grandeurs caractéristiques (taille, durée de vie et énergie) balayent un spectre large d'échelles temporelles, de dimension et d'énergie. Ce caractère contraste singulièrement avec les caractéristiques des oscillations à savoir leur intrinsèque grande cohérence spatiale et temporelle. On s'attend dès lors à ce que l'interaction "onde-turbulence", i.e. le couplage entre un mode d'oscillation donné et la turbulence, isole les caractéristiques de la turbulence à des échelles de temps et de dimension caractéristique de ce mode d'oscillation.

Dans le processus de l'excitation stochastique développé dans le chapitre 4 il sera établi que le couplage entre oscillation et turbulence détermine l'efficacité du transfert d'énergie des tourbillons vers les oscillations. Le spectre de puissance que l'on tire des observations exprime ce couplage. Par conséquent la puissance injectée dans les oscillations permet de caractériser l'état de la turbulence et la théorie de l'excitation sous-jacente peut de ce fait être considérée comme un véritable outil de diagnostic de la turbulence stellaire.

3.2.3 Produits de corrélation

La modélisation du processus d'excitation des modes d'oscillation fait intervenir des produits de corrélation spatiale et temporelle du champ de vitesse et de la fluctuation d'entropie. En effet on montrera dans la section 4.5 que des produits de corrélation mettant en jeu les fluctuations turbulentes de la vitesse et de l'entropie interviennent dans le processus d'excitation des modes. C'est l'origine turbulente des quantités qui confère un caractère stochastique à l'excitation des modes. D'autre part les produits de corrélation permettent de caractériser les longueurs de cohérence spatiale et temporelle des éléments turbulents. Ces longueurs de cohérence interviennent directement dans le couplage entre les oscillations et les tourbillons (i.e. dans l'interaction "onde-turbulence", voir chapitre 4).

Dans le cas d'une turbulence isotrope, homogène, stationnaire et incompressible on établit de façon très générale les propriétés de la moyenne du produit de corrélation du second ordre de la vitesse que l'on définit comme

$$\phi_{ij}(\vec{r}, \tau) = \langle u_i(\vec{x}_0, t) u_j(\vec{x}_0 + \vec{r}, t_0 + \tau) \rangle \quad (3.60)$$

où (\vec{r}, τ) représentent les écarts spatiaux et temporels entre les points (\vec{x}_0, t_0) et $(\vec{x}_0 + \vec{r}, t_0 + \tau)$ dont on mesure la corrélation du champ de vitesse. L'opérateur $\langle \cdot \rangle$ correspond à une moyenne statistique effectuée sur un nombre infini de réalisations indépendantes.

Les coordonnées \vec{x}_0 et t_0 ne sont pas pertinentes dans le cas d'une turbulence homogène et stationnaire. Toutefois il s'agit pour nous de modéliser/décrire un milieu turbulent fortement stratifié et anisotrope. L'hypothèse d'homogénéité n'est plus valide car en effet les tailles des plus grands éléments turbulents sont de l'ordre de l'échelle caractéristique de la stratification. On se place néanmoins dans l'hypothèse d'une turbulence homogène et isotrope. On montrera à posteriori que cette approximation s'avère justifiée dans le processus d'émission du bruit acoustique. Dans cette approximation il convient donc de garder la dépendance avec (\vec{x}_0, t_0) des moments des quantités turbulentes. Il en sera donc implicitement le cas par la suite.

Soit $\phi_{ij}(\vec{k}, \omega)$ la transformée de Fourier (spatiale et temporelle) du tenseur $\phi_{ij}(\vec{r}, \tau)$:

$$\phi_{ij}(\vec{k}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d\tau \int d^3r e^{i\omega\tau - i\vec{k}\cdot\vec{r}} \langle u_i(\vec{x}_0, t) u_j(\vec{x}_0 + \vec{r}, t + \tau) \rangle \quad (3.61)$$

Par définition de $\phi_{ij}(\vec{k}, \omega)$ la moyenne quadratique de la vitesse vaut [Lesieur, 1997, Chap V-10] :

$$\frac{1}{2} \langle u^2(\vec{x}_0, \omega) \rangle = \int_0^{+\infty} dk 2\pi k^2 \phi_{ii}(k, \omega) \quad (3.62)$$

On définit $E(k, \omega) = 2\pi k^2 \phi(k, \omega)$, cette quantité vérifie par conséquent

$$\frac{1}{2} \langle u^2(\vec{x}_0, \omega) \rangle = \int_0^{+\infty} dk E(k, \omega) \quad (3.63)$$

et s'interprète naturellement comme la densité d'énergie cinétique exprimée par unité de masse et par unité de nombre d'onde, soit en Jm/s. La valeur de l'énergie cinétique totale (équation 3.63) contenue dans l'ensemble du spectre $E(k, \omega)$, peut être estimée en utilisant la théorie de la longueur de mélange.

Pour la description de la turbulence il est usuel et beaucoup plus commode de travailler dans l'espace des nombres d'onde \vec{k} . En effet dans cet espace la résolution de l'équation de Navier-Stokes, qui régit la dynamique des fluides newtoniens, se simplifie grandement (car les opérateurs dérivées spatiales s'expriment en fonction de \vec{k}). De plus l'hypothèse d'incompressibilité du fluide turbulent permet d'établir l'orthogonalité de la transformée de Fourier $\vec{u}(\vec{k})$ avec le vecteur d'onde \vec{k} , i.e. $\vec{k} \cdot \vec{u}(\vec{k}) = 0$, si bien que la décomposition du champ turbulent dans la base de Fourier devient pertinente. On se placera donc par la suite dans l'espace Fourier.

Les propriétés intrinsèques d'une turbulence isotrope, homogène, stationnaire, incompressible et sans vorticité permettent d'établir la forme générale suivante [Batchelor, 1970]

$$\phi_{ij}(k, \omega) = \frac{E(k, \omega)}{4\pi k^2} T_{ij} \quad (3.64)$$

où le tenseur

$$T_{ij} = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \quad (3.65)$$

dérive du caractère incompressible du fluide turbulent (c.f. Lesieur [1997] Chap V-2). Comme Stein [1967] on décompose le spectre d'énergie cinétique $E(\vec{k}, \omega)$ en une partie $E(k)$ purement spatiale et une partie $\chi_k(\omega)$ dépendante de la fréquence :

$$E(\vec{k}, \omega) = E(k) \chi_k(\omega) \quad (3.66)$$

La décomposition de l'équation 3.66 repose sur l'hypothèse d'un flux convectif stationnaire : Dans le cadre de cette hypothèse l'énergie injectée par la convection dans la cascade turbulente s'effectue de manière stationnaire à des échelles de temps grandes devant le temps de cohérence caractéristique des tourbillons τ_k de la cascade. La quantité $\tau_\Lambda = \Lambda/w$ fournit un ordre de grandeur du temps caractéristique auquel la convection dissipe son énergie dans la cascade turbulente. Pour les tourbillons de temps de cohérence τ_k tel que $\tau_k \ll \tau_\Lambda$, la dissipation de l'énergie convective appar  it stationnaire. Par conséquent la dynamique du spectre $E(\vec{k}, \omega)$ aux courtes échelles de temps est fixée par la dynamique propre des tourbillons tels que $\tau_k \ll \tau_\Lambda$. Cette dernière se mesure par le produit de corrélation temporel $\chi_k(\omega)$ des tourbillons dont la largeur τ_k s'interprète comme la durée de vie des tourbillons vus comme des objets de dimension finie. L'hypothèse de stationnarité du spectre d'énergie $E(\vec{k}, \omega)$ nous permet donc de le décomposer en une partie purement spatiale $E(k)$, qui assure la stationnarité du transfert d'énergie des petites aux grandes échelles, et une partie $\chi_k(\omega)$ qui décrit la dynamique des tourbillons aux échelles de temps courte ($\tau_k \ll \tau_\Lambda$).

La décomposition de l'équation 3.66 demeure néanmoins strictement valide pour les tourbillons de petite taille car le temps de cohérence décroit avec k (c.f. section 3.2.5). Les gros tourbillons de la zone d'injection ne vérifient pas cette condition si bien que dépendance spatiale et dépendance temporelle ne peuvent être *a priori* simplement dissociées. Toutefois, à défaut de disposer d'un modèle satisfaisant de la dynamique des grands tourbillons (méso-granulation), nous adoptons le choix implicite de Stein [1967] et de Musielak *et al.* [1994] qui consiste à étendre à tout le spectre d'énergie la décomposition 3.66.

3.2.4 L'approximation quasi-normale

On établira au chapitre 4 que le processus d'excitation stochastique invoque des produits de corrélations d'ordre 4 de la vitesse et de l'entropie. Or il n'existe pas d'expression analytique pour le moment d'ordre 4. On connait dans le domaine de Fourier l'expression analytique du produit de corrélation d'ordre 2 de la vitesse que l'on a présentée dans la section précédente. L'approximation quasi-normale consiste à décomposer le moment d'ordre 4 en une somme de produits de moments du second ordre [Lesieur, 1997, Chap VII-2].

Ainsi si l'on considère 4 processus aléatoires g_1, g_2, g_3 et g_4 dont la statistique vérifie une loi normale de moyenne nulle, alors le moment d'ordre 4 impliquant les 4 processus se décompose exactement comme

$$\langle g_1 g_2 g_3 g_4 \rangle = \langle g_1 g_2 \rangle \langle g_3 g_4 \rangle + \langle g_1 g_3 \rangle \langle g_2 g_4 \rangle + \langle g_1 g_4 \rangle \langle g_2 g_3 \rangle \quad (3.67)$$

On montre également que tous les moments d'ordre impair sont nuls.

Mais pour des processus aléatoires quelconques la décomposition 3.67 n'est pas vérifiée. On désignera alors par "terme cumul  nt" l'écart à cette décomposition.

On ne peut résolument pas associer la vitesse du milieu turbulent stellaire à un processus normal. En effet bien que l'on établisse expérimentalement que la densité de probabilité de la vitesse a des allures de gaussienne [Batchelor, 1970; Lesieur, 1997] la densité de probabilité de la dérivée de la vitesse présente une asymétrie marquée [Lesieur, 1997, Chap VII-2]. Elle est en fait plus proche d'une exponentielle que d'une gaussienne.

Ce ne serait pas le cas si le processus était gaussien. D'autre part supposer que la vitesse turbulente suit une loi normale conduirait le produit de corrélation d'ordre 3 à être nul. Or le transfert d'énergie entre les éléments turbulents de nombre d'onde différent est régi par un produit de corrélation de vitesse d'ordre 3 [Lesieur, 1997, Chap VII-1]. Supposer des processus gaussiens reviendrait à annuler le transfert d'énergie entre les éléments turbulents et la cascade turbulente ne se produirait pas.

L'approximation quasi-normale consiste toutefois à considérer valide la décomposition 3.67 appliquée aux champs de vitesse turbulents, en d'autre terme on suppose le "terme cumulatif" négligeable. Cette approximation nous permet donc de décomposer le produit de corrélation d'ordre 4 du champ de vitesse comme

$$\langle u'_i u'_j u''_k u''_l \rangle = \langle u'_i u'_j \rangle \langle u''_k u''_l \rangle + \langle u'_i u''_k \rangle \langle u'_j u''_l \rangle + \langle u'_i u''_l \rangle \langle u'_j u''_k \rangle \quad (3.68)$$

avec les notations suivantes

$$\vec{u}' = \vec{u}(\vec{x}_0 - \frac{\vec{r}}{2}, t_0 - \frac{\tau}{2}) \quad \vec{u}'' = \vec{u}(\vec{x}_0 + \frac{\vec{r}}{2}, t_0 + \frac{\tau}{2}) \quad (3.69)$$

où u_i est le champ de vitesse turbulente de moyenne nulle ; enfin les indices i, j, k, l indexent les différentes composantes des vecteurs de vitesses correspondants. De même cette décomposition appliquée au produit de corrélation d'ordre 4 qui fait intervenir la vitesse et la fluctuation d'entropie s'écrit

$$\langle u'_i u''_j s' s'' \rangle = \langle u'_i u''_j \rangle \langle s' s'' \rangle + \langle s' u'_i \rangle \langle s'' u''_j \rangle + \langle s' u''_j \rangle \langle s'' u'_i \rangle \quad (3.70)$$

où l'on a défini

$$s' = s_t(\vec{x}_0 - \frac{\vec{r}}{2}, t_0 - \frac{\tau}{2}) \quad s'' = s_t(\vec{x}_0 + \frac{\vec{r}}{2}, t_0 + \frac{\tau}{2}) \quad (3.71)$$

L'approximation quasi-normale permet de résoudre à moindre frais le problème de la fermeture des moments. Cependant Kraichnan [1957] et Orzag [1970] ont montré que l'approximation quasi-normale appliquée au champ de vitesse d'une turbulence isotrope et stationnaire conduit à une violation sévère de la conservation d'énergie. Plus précisément Kraichnan [1957] a montré que la décomposition 3.67 appliquée dans le bilan d'énergie conduit à négliger des corrélations entre certains modes turbulents. Cet ensemble de modes ainsi mis de côté est d'autant plus grand que le nombre de Reynolds est grand, ce qui est malheureusement le cas dans l'enveloppe stellaire.

Toutefois dans le contexte de l'excitation stochastique on admettra que les décompositions des équations 3.68 et 3.70 sont valides, *i.e.* on suppose que les termes cumulants ne contribuent pas à l'excitation stochastique des modes acoustiques. La validation de cette décomposition sera quant à elle envisagée à l'aide d'une simulation 3D de l'enveloppe supérieure du Soleil dans la section 5.3.

3.2.5 Spectre temporel

La fonction $\chi_k(\omega)$ introduite dans la section 3.2.3, appelée spectre temporel, mesure la cohérence temporelle d'un tourbillon de nombre d'onde k . La largeur de cette fonction s'interprète comme le temps de cohérence ou durée de vie du tourbillon considéré. Le spectre temporel est normalisé tel que [Tennekes and Lumley, 1982, Chap 8.1]

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \chi_k(\omega) = 1 \quad (3.72)$$

Ce choix diffère de celui considéré par Stein [1967] et Musielak *et al.* [1994] à savoir

$$\int_0^{+\infty} d\omega \chi_k(\omega) = 1 \quad (3.73)$$

Le spectre temporel doit être invariant par une inversion des temps [Musiak *et al.*, 1994], ce qui confère à $\chi_k(\omega)$ une symétrie par rapport à $\omega = 0$. Aussi la condition de normalisation 3.72 est cohérente avec la propriété de symétrie que doit vérifier $\chi_k(\omega)$.

Le choix de spectre temporel le plus simple est la forme gaussienne

$$\chi_k(\omega) = \frac{1}{\omega_k \sqrt{\pi}} e^{-(\omega/\omega_k)^2} \quad (3.74)$$

où ω_k est la largeur de la gaussienne. Son équivalent dans l'espace des temps est également une gaussienne dont la largeur équivalente à $1/e$ se définit comme étant égale au temps de cohérence τ_k si bien que

$$\omega_k = \frac{2}{\tau_k} \quad (3.75)$$

Pour adopter le choix de Balmforth [1992a], le temps de cohérence τ_k est défini comme

$$\tau_k \equiv \frac{\lambda}{ku_k} \quad (3.76)$$

ce qui permet d'écrire $\omega_k = 2ku_k/\lambda$. La vitesse u_k est la vitesse relative du tourbillon de nombre d'onde k en mouvement dans le référentiel co-mobile avec le tourbillon le plus large [Stein, 1967] et s'exprime comme

$$u_k^2 = \int_k^{2k} dk E(k) \quad (3.77)$$

Le paramètre λ dans l'équation 3.76 a été introduit par B92 pour pouvoir contrôler l'arbitraire contenue dans les définitions de τ_k et de u_k . Les relations 3.75, 3.76 et 3.77 permettent d'établir les lois d'échelles vérifiées approximativement par ω_k et τ_k dans le cas d'un spectre de Kolmogorov

$$\tau_k = \tau_{k_0} \left(\frac{k_0}{k}\right)^{2/3} \quad \omega_k = \omega_{k_0} \left(\frac{k_0}{k}\right)^{-2/3} \quad (3.78)$$

On étudiera d'autres spectres temporels proposés par Stein [1967] et Musielak *et al.* [1994] à savoir "la fonction gaussienne modifiée" (FGM)

$$\chi_k(\omega) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\omega^2}{\omega_k^3} e^{-(\omega/\omega_k)^2} \quad (3.79)$$

et la forme exponentielle (EXP)

$$\chi_k(\omega) = \frac{1}{2\omega_k} e^{-|\omega/\omega_k|} \quad (3.80)$$

La FGM a été construite "à la main" de telle sorte que $\chi_k(\omega)$ tend vers 0 en $\omega = 0$. D'après Musielak *et al.* [1994] il s'agit d'une propriété que doit vérifier de façon générale le spectre temporel. Ils fondent leur argument sur le fait qu'il ne saurait exister des tourbillons de durée de vie plus grande que l'âge du Soleil. Enfin la forme exponentielle a pour seule justification la motivation de jauger l'effet d'un spectre temporel différent d'une forme gaussienne. La figure 3.2 présente les différentes formes considérées ici.

3.2.6 Granulation solaire

Les observations de la surface du Soleil mettent en évidence la présence de structures appelées granulation présentant des échelles variées en dimension et en intensité. Ces structures ont fait l'objet d'observations nombreuses. On se référera à ce sujet à l'excellente revue de Muller [1989].

Les observations de la granulation solaire consiste généralement à évaluer le spectre des vitesses radiales des granules et à caractériser leur géométrie. Le spectre des vitesses présente clairement une pente en $-5/3$ pour les granules de taille¹⁴ inférieure à $\theta_{5/3} = 3''$ [Muller, 1989; Roudier *et al.*, 1991; Espagnet *et al.*, 1993]. D'autre part la comparaison entre le périmètre et la surface des granules présente une dimension fractale d'environ $4/3$ pour des granules de taille inférieure à $\theta_{df} = 1.4''$ [Roudier and Muller, 1986; Muller, 1989]. La dimension fractale de $4/3$ coïncide avec celle attendue pour une turbulence 3D, homogène, isotrope et du type Kolmogorov [Mandelbrot, 1977]. Le régime en $-5/3$ ainsi que la dimension fractale de $4/3$ sont les signatures évidentes du caractère turbulent des granules de petites tailles $\theta < \theta_{df}$ et confortent ainsi pour le Soleil le modèle de la cascade turbulente en $-5/3$ attribuée aux tourbillons de petites tailles.

Pour les granules de grandes tailles ($\theta > \theta_{5/3}$) le spectre des vitesses radiales observé par Muller *et al.* [1987] présente une pente faible devant la cascade à $-5/3$, et égale approximativement à -0.7 [Zahn, 1987, voir figure 3.3]. De plus l'analyse fractale attribuée aux granules de taille supérieure à θ_{df} une dimension fractale proche de 2. Cette faible valeur confirme la constatation visuelle que les grands granules ($\theta > \theta_{df}$) sont moins réguliers que les plus petits [Zahn, 1987].

D'autre part pour les granules de taille supérieure à $\theta_{df} = 1.4''$ une forte corrélation est observée entre la vitesse des granules et leur d'intensité. A ce niveau (optiquement mince) ils rayonnent leur énergie expliquant ainsi la forte corrélation entre vitesse et fluctuation de luminosité [Roudier *et al.*, 1991]. Les petits granules ($\theta < \theta_{df}$) ne présentent pas de corrélation vitesse-intensité. Ceci suggère- selon Muller [1989] - que les gros

¹⁴On exprimera ici les tailles des granules en seconde d'arc sur la surface solaire. La seconde d'arc équivaut à un segment d'environ $0.73 Mm$ de la surface solaire et à nombre d'onde de $8.6 Mm^{-1}$.

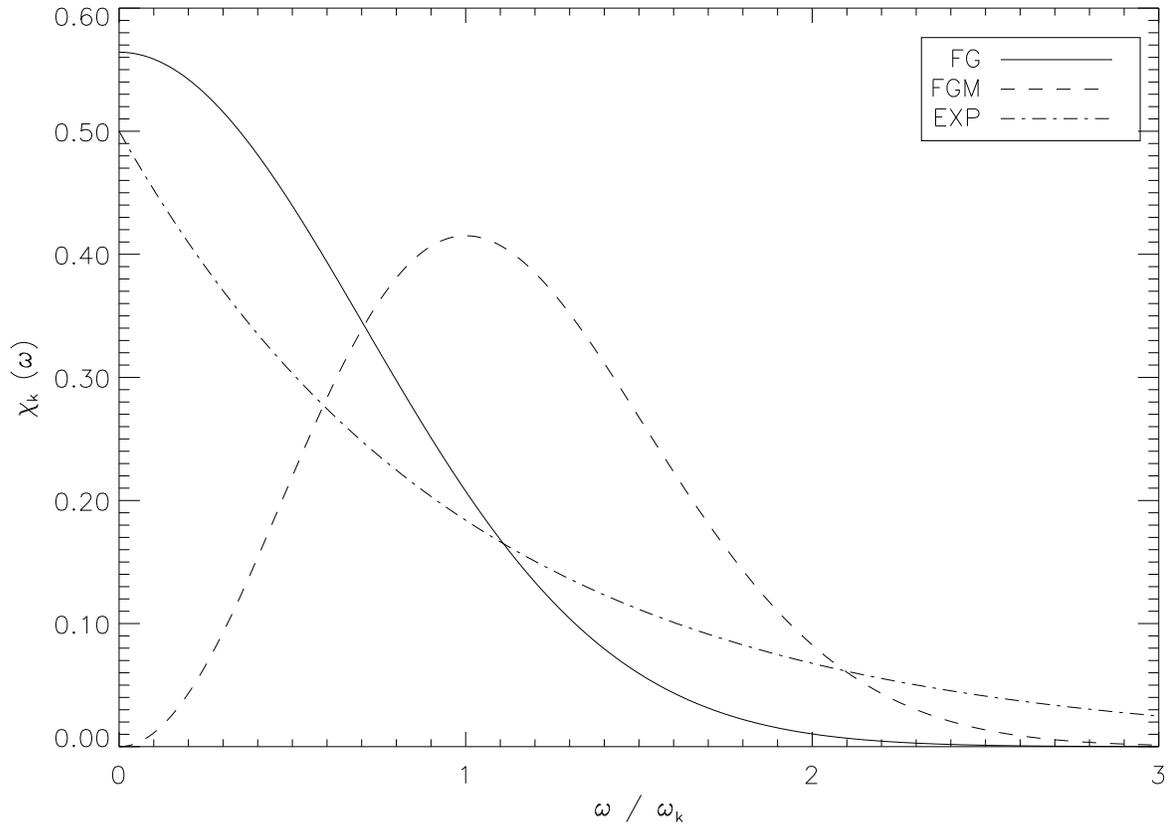


FIG. 3.2 – Tracé des spectres temporels $\chi_k(\omega)$ en fonction de la fréquence réduite ω/ω_k : on considère la fonction gaussienne (FG, équation 3.74), la “fonction gaussienne modifiée” (FGM, équation 3.79) et enfin la fonction exponentielle (EXP, équation 3.80). Le tracé des spectres temporels a été limité au domaine $\omega \geq 0$ mais on rappelle qu’ils sont symétriques par rapport à $\omega = 0$.

granules contiennent l'énergie convective qu'ils injectent aux petits granules à travers la cascade turbulente [Muller, 1989; Roudier *et al.*, 1991].

Roudier *et al.* [1991] fournissent une interprétation de l'écart qui existe entre les tailles caractéristiques $\theta_{5/3}$ et θ_{df} . Le nombre de Peclet égale l'unité à l'échelle caractéristique de 1 Mm qui correspond à une taille angulaire voisine de $\theta_{df} = 1.4''$. Ceci suggère que les granules de taille supérieure sont dominés par la dynamique tandis que ceux de taille inférieure sont dominés par la thermique. Les granules de grande taille ($\theta \gtrsim \theta_{df}$) seraient donc sujets à des instabilités horizontales en pression qui tendent à les déformer et fragmenter. Ceci aurait pour conséquence d'augmenter leur dimension fractale de 4/3 à environ 2 et rendant ainsi leur forme plus irrégulière [Zahn, 1987; Roudier *et al.*, 1991].

Les observations de Nesis *et al.* [1993] contrastent avec les précédentes en ce que le régime observé de pente proche de -2 , qu'ils associent au régime inertiel (ou cascade turbulente), concerne les granules de tailles $\theta < 1.2''$, tandis que dans le domaine $1.7'' > \theta > 1.2$ les auteurs observent un régime de pente d'environ -5 sans proposer d'interprétation.

Il apparaît clairement que les granules de tailles $\theta \lesssim \theta_{df}$ présentent toutes les caractéristiques d'un milieu fortement turbulent et hiérarchisé. En ce qui concerne les tailles intermédiaires ($\theta_{5/3} \gtrsim \theta \gtrsim \theta_{df}$) les différences de pente entre les résultats de Nesis *et al.* [1993] et ceux notamment de Espagnet *et al.* [1993] rendent l'interprétation du régime correspondant difficile.

Selon Roudier (communication privée) la différence entre les pentes observées dans le domaine ($\theta_{5/3} \gtrsim \theta \gtrsim \theta_{df}$) serait imputable à la façon dont sont filtrées les oscillations solaires de 5 min et peut-être plus important encore à l'effet de la convolution atmosphérique. Toujours selon Roudier, il semble aujourd'hui que pour lever l'ambiguïté observationnelle mentionnée, il serait nécessaire d'analyser le spectre de puissance des vitesses Doppler à partir d'observation depuis l'espace afin d'éviter la convolution atmosphérique dont on ne connaît pas les valeurs instantanées qui seraient à appliquer à chaque donnée.

En fait des arguments plus importants jettent un doute sur la validité des conclusions que l'on tire généralement des observations de la granulation solaire. Ainsi Rieutord *et al.* [2000] pointent du doigt la forte dépendance des propriétés que l'on confère à la mésogranulation avec les méthodes d'analyse spectrale, plus précisément avec le choix de la fenêtre spatiale et l'échelle de temps à partir desquels sont effectués les moyennes dans le calcul des spectres.

De la même façon Nordlund *et al.* [1997] soulèvent la controverse quant à validité des analyses faites sur les observations de la granulation solaire. Les auteurs s'appuient sur une simulation tridimensionnelle de la surface du Soleil qui fait apparaître les granules en terme de luminosité comme des objets à flanc abrutés. Le calcul du spectre de puissance spatial de tels objets induit naturellement une "cascade" de pente proche de $-5/3$ que l'on associe habituellement au caractère turbulent de la granulation solaire. Pour être encore plus convaincant les auteurs montrent que l'on peut reproduire une cascade de pente proche de $-5/3$ en modélisant simplement les granules comme un ensemble d'objets à flancs droits et de tailles identiques.

Puisque les mesures spectroscopiques sont fortement corrélées aux intensités des granules, il semble donc, d'après Nordlund *et al.* [1997] mais aussi suite aux réserves formulées par Rieutord *et al.* [2000], qu'il soit hasardeux de conclure sur les propriétés des spectres de puissance de la granulation solaire. Dans la suite on considérera néanmoins à titre de test les différents spectres mentionnés ici.

Les disparités entre les différents auteurs et les controverses évoquées ne permettent pas de fixer une valeur unique pour le nombre d'onde k_0 à partir duquel le régime inertiel débute. Ce nombre d'onde est important pour caractériser les spectres de turbulence (cinétique et entropique). De plus il s'avère déterminant pour fixer l'amplitude globale de la puissance injectée stochastiquement dans les modes (voir chapitre 4). Aussi on n'imposera pas de contraintes sur k_0 d'autant plus que l'observation de la granulation solaire s'effectue quelques 100 km au dessus de la photosphère alors que l'excitation des modes débute quelques 100 km en dessous. On reliera k_0 à la longueur de mélange Λ en introduisant le paramètre libre β de telle sorte que

$$k_0 = \frac{2\pi}{\beta \Lambda} \quad (3.81)$$

Du fait des controverses évoquées plus haut il semble que la caractérisation des granules de grande taille ($\theta \gtrsim \theta_{df}$) ne soit pas clairement établie. Par conséquent il demeure d'autant plus difficile d'établir à partir des observations le domaine de validité de la décomposition 3.66 qui néanmoins sera supposée valide pour toutes valeurs de k .

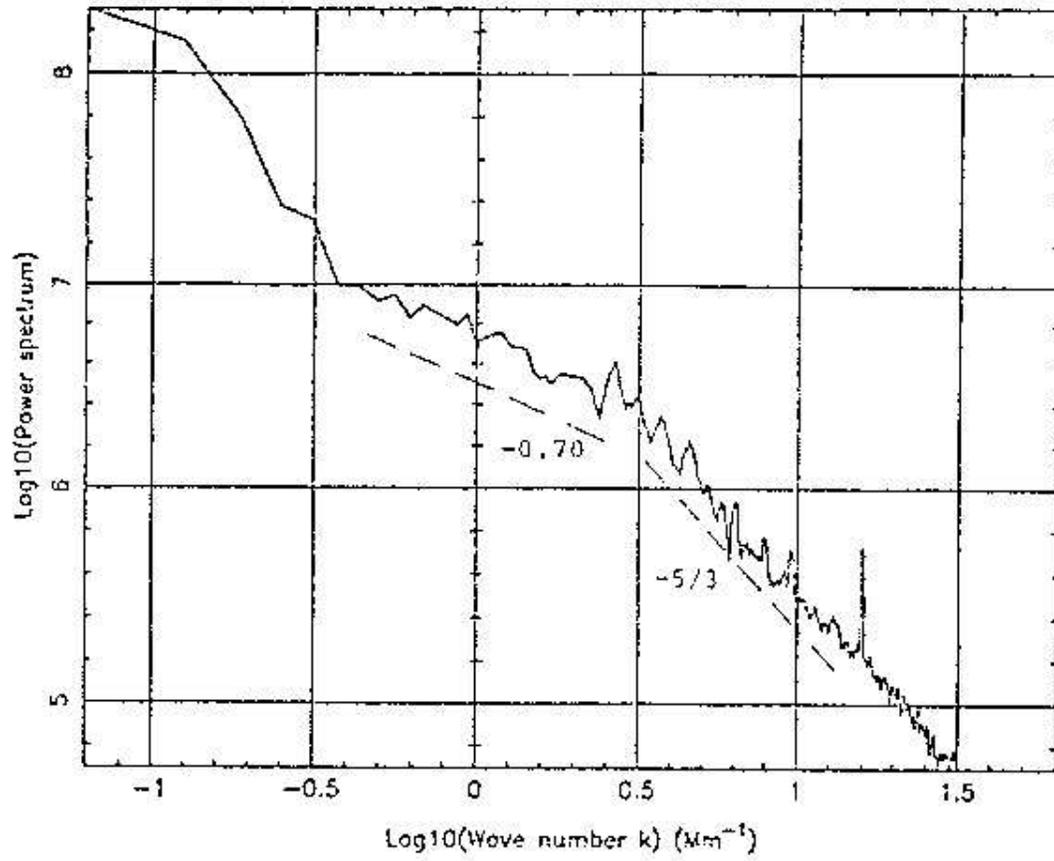


FIG. 3.3 – Spectre de puissance des vitesses Dopplers observées par Muller *et al.* [1987] sur le soleil. La figure a été empruntée à Zahn [1987].

3.2.7 Spectre d'énergie cinétique

Le spectre d'énergie universel et invoqué le plus souvent est le spectre dit de Kolmogorov¹⁵ ; il confère à l'énergie cinétique des tourbillons une loi en $k^{-5/3}$. Il s'agit de la cascade turbulente. Ce spectre est la conséquence directe du postulat de Oboukov [1941] qui suggère que le transfert d'énergie entre les tourbillons de taille décroissante s'effectue à taux constant. Montrons rapidement que ce postulat établit le spectre dit de Kolmogorov.

Soit ϵ la puissance dissipée dans la cascade exprimée en énergie par unité de temps et par unité de masse, soit en unité SI en $J/kg/s$. Cette quantité est par hypothèse constante le long de la cascade et s'évalue comme le rapport entre l'énergie d'un tourbillon k et sa durée de vie τ_k que l'on évalue approximativement comme $\tau_k \approx (k u_k)^{-1}$. Il vient alors

$$\epsilon \approx \frac{k E(k)}{\tau_k} \approx k E(k) k u_k \quad (3.82)$$

où $E(k)$ est le spectre d'énergie cinétique défini par l'équation 3.63 et qui s'exprime en énergie par unité de masse et par unité de nombre d'onde, soit en $J \times m/kg$. Enfin l'équation 3.77 permet d'évaluer approximativement u_k comme $u_k \approx \sqrt{k u_k}$ et on en déduit immédiatement $E(k) \approx \epsilon^{2/3} k^{-5/3}$. Le domaine de nombre d'onde où le spectre d'énergie cinétique présente une pente proche de $-5/3$ est aussi appelé régime inertiel. On définit donc le spectre de Kolmogorov comme

$$E(K) = \begin{cases} \frac{u_0^2}{k_0} K^{-5/3} & K > 1 \\ 0 & K < 1 \end{cases} \quad (3.83)$$

avec $K \equiv k/k_0$, k_0 le nombre d'onde à partir duquel le régime inertiel débute et u_0 une constante de normalisation telle que la totalité de l'énergie cinétique dans la cascade égale $3/2 u_0^2$, i.e

$$\frac{3}{2} u_0^2 \equiv \frac{1}{2} \langle u^2(\vec{x}_0) \rangle \quad (3.84)$$

En intégrant l'équation 3.63 sur ω , en utilisant la condition de normalisation 3.72 ainsi que la décomposition 3.66, on établit ainsi la condition de normalisation sur u_0

$$\frac{3}{2} u_0^2 \equiv \frac{1}{2} \langle u^2(\vec{x}_0) \rangle = \int_0^{+\infty} dk E(k) \quad (3.85)$$

Dans une turbulence isotrope ($\Phi = 3$) la quantité u_0 s'interprète comme une quelconque des 3 composantes de la racine carrée de la vitesse quadratique moyenne. Si l'on introduit le facteur d'anisotropie Φ (équation 3.25) la condition de normalisation et la définition de Φ permettent d'exprimer la contrainte

$$\frac{1}{2} \langle u^2(\vec{x}_0) \rangle = \frac{1}{2} \Phi w^2 \quad (3.86)$$

Enfin en vertu du choix de normalisation 3.85 la relation 3.86 implique

$$u_0 = \sqrt{\frac{\Phi}{3}} w \quad (3.87)$$

si bien que, dans le cas où le facteur Φ est introduit, u_0 ne peut plus s'interpréter comme une quelconque des 3 composantes de la vitesse.

Il est évident que le spectre de Kolmogorov ne décrit pas le domaine situé avant la cascade turbulente (zone d'injection). Considérons par exemple le spectre baptisé "spectre de Spiegel" par Stein [1967] :

$$E(K) = \begin{cases} 18 \frac{u_0^2}{k_0} (2K)^{-5/3} J(2K) & K > 0.5 \\ 0 & K < 0.5 \end{cases} \quad (3.88)$$

avec

$$J(K) = \left[1 - K^{-8/3} - \frac{4}{7} (1 - K^{-14/3}) \right]^2 \quad (3.89)$$

¹⁵Le spectre dit de Kolmogorov a été établi originellement par Oboukov [1941]

Le spectre de Spiegel prend en considération les interactions non linéaires entre modes turbulents [Spiegel, 1962]. Ces interactions adoucissent les flancs de la cascade turbulente à bas nombre d'onde (voir Figure 3.4). Musielak *et al.* [1994] suggèrent le spectre dit “Raised Kolmogorov Spectrum”, présentant une pente en -0.7 à bas nombre d'onde en accord avec les observations solaires de Muller *et al.* [1987] (voir figure 3.3)

$$E(K) = \begin{cases} 0.54 \frac{u_0^2}{k_0} K^{-5/3} & K > 1 \\ 0.54 \frac{u_0^2}{k_0} K^{-0.7} & 0.2 < K < 1 \\ 0 & K < 0.2 \end{cases} \quad (3.90)$$

ainsi que le spectre dit “Broad Kolmogorov Spectrum” (BKS)

$$E(K) = \begin{cases} 0.652 \frac{u_0^2}{k_0} K^{-5/3} & K > 1 \\ 0.652 \frac{u_0^2}{k_0} & 0.2 < K < 1 \\ 0 & K < 0.2 \end{cases} \quad (3.91)$$

Le RKS et le BKS ont essentiellement été considérés pour tenir compte des tourbillons de grandes tailles ($\theta \gtrsim \theta_{5/3}$) et pour jauger l'impact en terme d'excitation stochastique. Enfin on propose le spectre que l'on appellera “Nesis Kolmogorov Spectrum” (NKS)

$$E(K) = \begin{cases} 0.655 \frac{u_0^2}{k_0} K^{-5/3} & K > 1 \\ 0.655 \frac{u_0^2}{k_0} K^{-5} & 0.7 < K < 1 \\ 0 & K < 0.7 \end{cases} \quad (3.92)$$

pour modéliser le spectre d'énergie cinétique observé par Nesis *et al.* [1993].

Du fait que le nombre de Reynolds est très grand l'échelle dissipative correspond à un nombre d'onde très grand devant k_0 et l'échelle dissipative peut être négligée. La cascade turbulente en $-5/3$ attribuée à tous les spectres pour $k > k_0$ a par conséquent été étendue à l'infini. La figure 3.4 présente l'allure des différents spectres considérés.

3.2.8 Le scalaire passif

Pour évaluer les termes sources il convient également de modéliser la fluctuation d'entropie imputable à la turbulence. On va pour cela adopter le modèle du “scalaire passif” communément attribué aux fluctuations de température et d'entropie, mais qui peut être appliqué à d'autres grandeurs physiques. Il s'agit en fait d'une *hypothèse forte* dont on ne connaît pas bien le degré de validité dans la zone convective turbulente des étoiles.

Le caractère passif d'une quantité scalaire peut être comparé au comportement d'une goutte de colorant introduite dans un milieu turbulent qui suit passivement les mouvements turbulents du fluide. On montre ainsi que dans un milieu turbulent incompressible et en absence de forçage thermique (dû au transfert radiatif ou à des processus nucléaires ou chimiques) la température se comporte comme un scalaire passif [Tennekes and Lumley, 1982; Lesieur, 1997, Chap VI-10]. En effet dans un tel milieu à nombre de Mach faible (donc incompressible) la fluctuation de température T_t d'origine turbulente vérifie l'équation de diffusion suivante [Lesieur, 1997, Chap II-4, II-5 et VI-10]

$$\frac{\partial}{\partial t} (T_0 + T_t) + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} (T_0 + T_t) = \chi \nabla^2 (T_0 + T_t) \quad (3.93)$$

avec $\chi = \kappa / (\rho C_p)$ le coefficient moléculaire de diffusion thermique et κ le coefficient de diffusion thermique. Il existe une échelle particulière de nombre d'onde k_c à laquelle le terme convective $\vec{u} \cdot \vec{\nabla} T_t$ et de diffusion

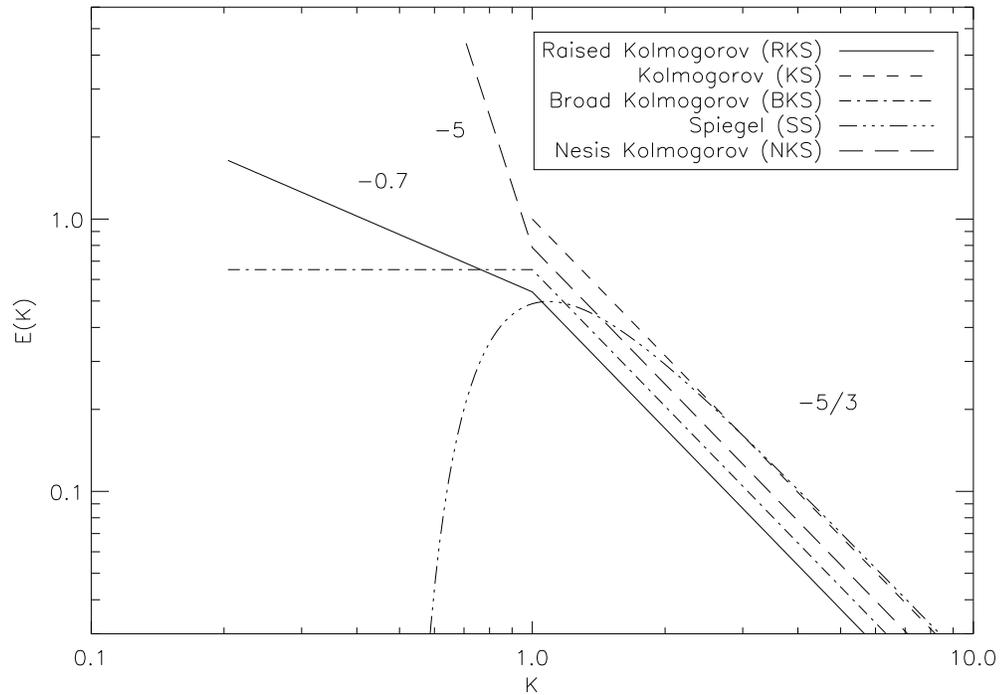


FIG. 3.4 – représente les différents spectres d'énergie cinétique en fonction du nombre d'onde normalisé ($K = k/k_0$). On a considéré : le RKS, le KS, le SS, le BKS et enfin le NKS (c.f. la section 3.2.7). Hormis le KS, tous les spectres déterminent l'énergie cinétique contenue par les tourbillons de grande taille ($K < 1$). Enfin tous les spectres présentent le régime inertiel de pente $-5/3$ aux grandes valeurs de K . Le NKS a été intentionnellement translaté vers le haut afin de le distinguer du BKS dans le domaine $K > 1$ où ces spectres coïncident.

$\chi \nabla^2 T_t$ sont du même ordre. On peut montrer que dans le cas d'un nombre de Prandtl ($P_r = \nu/\kappa$) très petit devant un, ce qui est le cas en haut de la zone convective, l'échelle dissipative de nombre d'onde k_D et l'échelle k_c sont reliées comme $k_c = P_r^{3/4} k_D$ [Lesieur, 1997, Chap VI-10] et que par conséquent $k_c \ll k_D$. Pour les tourbillons de grande taille le terme diffusif est négligeable devant le terme advectif. Dans le domaine de nombre d'onde $k_0 < k < k_c$, dit domaine inertiel, la fluctuation de température suit donc passivement les fluctuations du champ de vitesse turbulent \vec{u} . En d'autres termes le champ de température subit la cascade turbulente. Cette propriété est intrinsèquement due au caractère linéaire de l'équation de diffusion 3.93 [Lesieur, 1997, Chap VI-10].

Ainsi dans le domaine de nombre d'onde $k_c < k < k_D$, dit domaine inertiel-conductif, les effets de diffusion moléculaire deviennent prépondérants tandis que le champ de vitesse demeure toujours dans le domaine inertiel ($k < k_D$) i.e. dans la cascade turbulente. On montre que dans ce domaine le spectre de la quantité scalaire suit une loi en $k^{-4} E(k)$ où $E(k)$ est le spectre de l'énergie cinétique. Dans le cas de la cascade du type Kolmogorov, $E(k) \propto k^{-5/3}$ le spectre de la quantité scalaire décroît comme $k^{-17/3}$ montrant ainsi que la convection du scalaire est moins efficace, la diffusion thermique du scalaire l'emportant sur son advection (voir figure 3.5).

On peut observer le spectre de température dans le cas solaire grâce à la mesure de la fluctuation d'intensité des granules. En effet dans l'hypothèse d'un rayonnement de corps noir les fluctuations de température et d'intensité sont reliées par

$$\frac{\delta F}{F} = 4 \frac{\delta T}{T} \quad (3.94)$$

où F est le flux émanant d'un granule en $J/s/m^2$, T sa température et le symbole δ signifie des fluctuations des quantités considérées. Les mesures du spectre des fluctuations d'intensité ont été effectuées par Espagnet *et al.* [1993] et Nesis *et al.* [1993].

Les mesures évoquées sont en accord et font apparaître 2 régimes : le premier régime de pente proche de $-5/3$ et le suivant de pente proche de $-17/3$ que les auteurs interprètent respectivement comme le régime inertiel-advectif et le régime inertiel-conductif. Selon les auteurs, ces résultats assurent une solide confirmation du spectre théorique prédit pour un scalaire passif et tendent ainsi à valider le caractère scalaire passif de la fluctuation de température.

Néanmoins les réserves formulées par Nordlund *et al.* [1997] et Rieutord *et al.* [2000] quant à validité des analyses faites sur les observations de la granulation solaire et que l'on a évoquées dans la section 3.2.6 tendent à nouveau ici à relativiser les conclusions tirées de ces observations. Ces réserves suggèrent donc que le caractère scalaire passif que l'on attribue aux fluctuations n'est pas clairement établi et que le modèle de scalaire passif demeure par conséquent une hypothèse forte.

Si l'on s'en tient par exemple au résultat de Espagnet *et al.* [1993], le régime inertiel-advectif débute pour les granules de taille angulaire $\theta_0 \approx 3''$ pour se terminer aux granules de tailles $\theta_c \approx 1.4''$ tandis que le régime inertiel-conductif s'étend en deçà de $\theta_c \approx 1.4''$. Cela nous conduit à considérer un rapport $k_c/k_0 = \theta_0/\theta_c \approx 2$.

Les fluctuations d'entropie s_1 et de température T_1 sont reliées comme

$$s_1 = \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_P T_1 + \left(\frac{\partial s}{\partial P} \right)_T P_1 \quad (3.95)$$

Dans l'approximation de Boussinesq on peut montrer que les fluctuations relatives de pression sont plus petites que les fluctuations de température. La contribution du second terme de l'équation 3.95 est négligeable et cette équation peut ainsi se réduire à

$$s_1 = \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_P T_1 \quad (3.96)$$

On peut donc raisonnablement s'attendre à ce que la fluctuation eulerienne d'entropie due à la turbulence se comporte comme la fluctuation de température, à savoir comme un scalaire passif.

Le spectre d'énergie du scalaire $E_s(k, \omega)$ est relié à la moyenne quadratique du scalaire passif comme [Lesieur, 1997, Chap V-10]

$$\frac{1}{2} \langle s_t^2(\vec{x}_0, \omega) \rangle = \int_0^\infty dk E_s(k, \omega) \quad (3.97)$$

Soit $\phi_s(\vec{k}, \omega)$ la transformée de Fourier du produit de corrélation du scalaire passif, $\phi_s(\vec{k}, \omega)$ et $E_s(k, \omega)$ sont reliés par la relation [Lesieur, 1997, Chap V-10]

$$\phi_s(\vec{k}, \omega) = \frac{E_s(k, \omega)}{2\pi k^2} \quad (3.98)$$

Comme pour le spectre d'énergie cinétique, la densité d'énergie du scalaire passif est décomposée en une partie $E_s(k)$ purement spatiale et une partie $\chi_k(\omega)$ dépendante de la fréquence :

$$E_s(\vec{k}, \omega) = E_s(k) \chi_k(\omega) \quad (3.99)$$

où la partie dépendante de la fréquence, $\chi_k(\omega)$, a été choisie identique à celle du spectre d'énergie cinétique. Ce choix semble raisonnable du fait que s_t est un scalaire passif et subit donc la dynamique des modes turbulents que l'on a modélisée en introduisant $\chi_k(\omega)$.

On montre de façon très générale [c.f. Lesieur, 1997, Chap VI-10] que le spectre de la fluctuation d'entropie se déduit directement du spectre d'énergie cinétique et prend alors la forme

$$E_s(K) = \begin{cases} a_0 \frac{\tilde{s}^2}{k_0} \frac{E(K)}{u_0^2} & K < K_C \\ a_0 \frac{\tilde{s}^2}{k_0} \left(\frac{K_C}{K}\right)^4 \frac{E(K)}{u_0^2} & K_C < K \end{cases} \quad (3.100)$$

où a_0 est une constante de normalisation, $E(K)$ est le spectre d'énergie cinétique, $\tilde{s}^2 \equiv \langle s_t^2(\vec{x}_0) \rangle$, $K_C \equiv k_c/k_0$ et k_c est le nombre d'onde délimitant le régime inertiel-advectif du régime inertiel-conductif.

En intégrant l'équation 3.97 sur ω , en utilisant la condition de normalisation 3.72 ainsi que la décomposition 3.99, on établit ainsi la condition de normalisation sur \tilde{s}

$$\frac{1}{2} \tilde{s}^2 \equiv \frac{1}{2} \langle s_t^2(\vec{x}_0) \rangle = \int_0^{+\infty} dk E_s(k) \quad (3.101)$$

qui permet de déterminer la valeur de a_0 .

On a tracé sur la figure 3.5 un spectre $E_s(K)$ calculé à partir de l'équation 3.100 en utilisant pour $E(K)$ le spectre de Kolmogorov. Le spectre du scalaire présente pour $K < K_C$ un régime de pente $-5/3$, il s'agit du régime inertiel-convectif, domaine dans lequel le scalaire suit passivement la cascade turbulente du champ de vitesse. Tandis que pour $K > K_C$ c'est une pente $-17/3$ qui identifie le régime inertiel-conductif dans lequel la diffusion du scalaire devenant prépondérante l'advection du scalaire est moins efficace.

Nous appellerons "Kolmogorov Conductive Spectrum" (KCS par la suite) ce spectre entropique basé sur le spectre de Kolmogorov. De la même manière les spectres dits "Nes Kolmogorov Conductive Spectrum" (NKCS par la suite), "Raised Kolmogorov Conductive Spectrum" (RKCS par la suite), le "Spiegel Conductive Spectrum" (SCS par la suite) et enfin le "Broad Kolmogorov Conductive Spectrum" (BKCS par la suite) seront des spectres entropiques basés respectivement sur le NKS, le RKS, le SS et le BKS introduits dans la section 3.2.7.

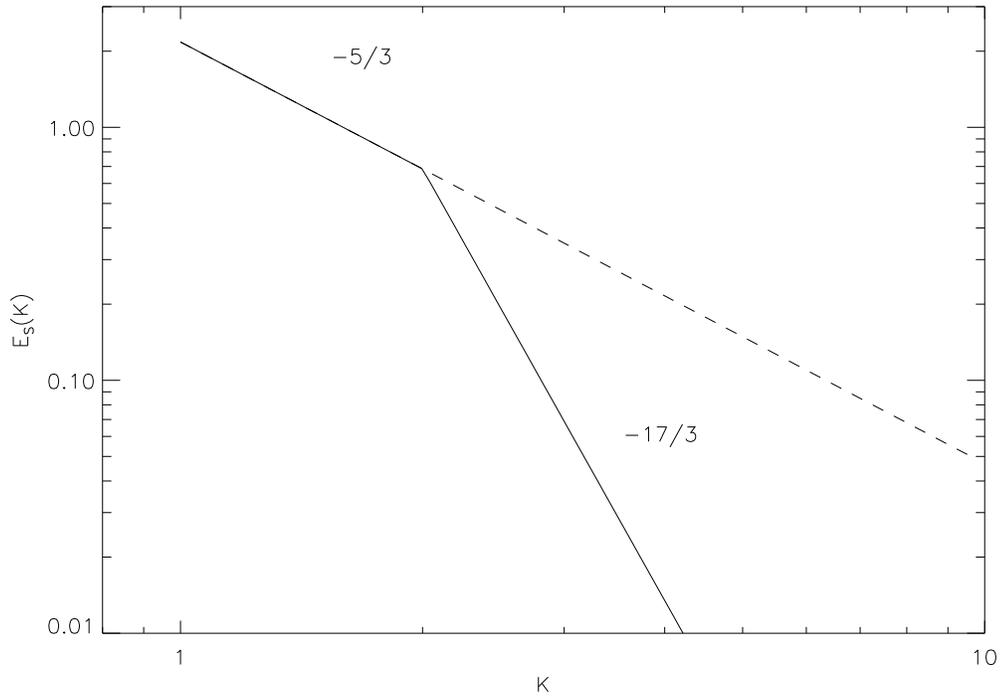


FIG. 3.5 – Spectre du scalaire entropie basé sur l'équation 3.100 en utilisant pour spectre cinétique, $E(K)$, le spectre de Kolmogorov. Le nombre d'onde K est normalisé tel que $K = k/k_0$. On a considéré $K_C = 2$. Les 2 régimes, le régime inertiel-convectif ($K < K_C$) et le régime inertiel-conductif ($K > K_C$) se distinguent clairement.

Chapitre 4

L'excitation stochastique

Les processus à l'origine de l'excitation des modes d'oscillation ont été évoqués dans la section 2.2. L'excitation stochastique s'avère le processus le plus probable expliquant la survie des modes d'oscillation de type solaire. On abordera donc ce processus du point de vue théorique dans ce chapitre.

Le caractère fortement turbulent de la zone convective supérieure des étoiles a été rappelé dans la section 3.2. Ce milieu turbulent est le siège de mouvements incohérents et chaotiques d'un nombre extrêmement grand de tourbillons d'énergie et de taille variées et hiérarchisées. Ces mouvements provoquent localement des fluctuations de la pression et de la densité. Ces fluctuations de la pression sont appelées bruit¹⁶ acoustique. Le mécanisme à l'origine de ce bruit acoustique a été étudié initialement à travers le travail pionnier de Lighthill [1952]. La généralisation à un milieu stratifié a été entreprise par Stein [1967]. Enfin c'est par ce mécanisme que Unno and Kato [1962] ont tenté d'expliquer l'origine des oscillations cohérentes observées à la surface du Soleil.

Cependant il a été clairement établi que les oscillations, de bas degré et de degré intermédiaire, observées dans le cas du soleil sont des modes propres d'oscillation qui s'établissent naturellement et s'étendent dans la quasi totalité de l'enveloppe stellaire (la "cavité stellaire") et qui de ce fait sont contraints par les paramètres globaux de l'étoile (rayon, structure et luminosité). Le mécanisme d'émission acoustique permet - comme on va le voir - d'expliquer l'excitation des modes propres.

L'approche du type Lighthill ainsi que celle de Stein ne décrivent pas le mécanisme par lequel la puissance acoustique générée par le milieu turbulent est transférée aux modes propres d'oscillations. Celle de Goldreich and Keeley [1977b, GK] modélise quant à elle ce processus de transfert de puissance. On notera toutefois que si les approches diffèrent dans la méthodologie- parce que l'objectif est différent - certains ingrédients physiques sont identiques.

Dans la première section on rappellera l'approche du type Lighthill. La section suivante traitera des effets de la stratification et évoquera le travail de Stein [1967]. Toutes les sections suivantes traiteront simultanément du processus de génération et de transfert de la puissance du bruit acoustique aux modes propres d'oscillation dans le cadre de l'approche du type GK. Cette étude a partiellement fait l'objet d'une publication [Samadi and Goupil, 2000] soumise à *Astronomy & Astrophysics* mais est développée en détail dans ce chapitre.

Le principe de l'excitation sera d'abord illustré par une analogie (section 4.3). On établira ensuite de manière plus complète que chez GK tous les termes susceptibles d'être à l'origine de l'excitation des modes (section 4.4). Ces termes sources seront reliés à la moyenne quadratique des amplitudes des oscillations (section 4.5). On s'intéressera ensuite au terme source du stress turbulent de Reynolds (section 4.7). Contrairement aux autres auteurs qui introduisent une simple loi d'échelle du type Kolmogorov, la contribution associée au terme de Reynolds sera établie de manière générale pour tout spectre d'énergie turbulente cinétique. Il en sera fait de même pour la contribution associée aux fluctuations turbulentes d'entropie (section 4.8). Pour cette dernière on distinguera la contribution des fluctuations lagrangiennes - qui a été envisagée par Goldreich *et al.* [1994, GMK] et Balmforth [1992a, B92]- de la contribution due à l'advection de l'entropie par le champ de vitesse turbulent et qui avait été isolée par GK mais considérée comme négligeable. On exposera ensuite la formulation générale (section 4.9) que l'on exprimera par la suite pour des cas particuliers et l'on terminera enfin par une discussion sur la validité et les limitations d'une telle formulation (section 4.12).

¹⁶L'appellation "bruit" dérive du caractère incohérent et chaotique des fluctuations turbulentes des quantités thermodynamiques (pression, densité; température) du milieu.

4.1 Approche du type Lighthill

La théorie de Lighthill [1952] consiste à déterminer le rayonnement acoustique induit par les mouvements de la matière d'un milieu homogène (non stratifié). On considère l'équation de conservation de la masse

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} = 0 \quad (4.1)$$

et l'équation de mouvement

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j u_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial P}{\partial x_j} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (4.2)$$

où τ_{ij} est le tenseur des contraintes visqueuses. En combinant l'équation 4.1 avec l'équation 4.2 il vient l'équation de propagation

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \rho u_i u_j}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (P \delta_{ij} - \tau_{ij}) \quad (4.3)$$

On dissocie les grandeurs thermodynamiques sous la forme de l'équation 2.4 où f désigne la variable thermodynamique considérée, f_0 est sa valeur à l'équilibre tandis que f_1 désigne sa fluctuation. En introduisant la vitesse du son c_0 (constante dans un milieu homogène), l'équation 4.3 se met sous la forme

$$\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} \quad (4.4)$$

où T_{ij} est le tenseur de Lighthill

$$T_{ij} = \rho u_i u_j + (P_1 - c_0^2 \rho_1) \delta_{ij} \quad (4.5)$$

Dans un milieu homogène et au repos les ondes acoustiques sont gouvernées par l'équation de propagation

$$\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial x_i \partial x_i} = 0 \quad (4.6)$$

En présence de mouvements, qui peuvent être notamment d'origine turbulente, les ondes sonores sont régies par l'équation de propagation 4.4 où le terme $\partial^2 T_{ij} / \partial x_i \partial x_j$ représente l'ensemble des termes sources. Le rayonnement acoustique résulte alors d'une distribution de forces extérieures ($\partial^2 T_{ij} / \partial x_i \partial x_j$) agissant sur le milieu homogène et au repos. L'équation de Lighthill n'admet des solutions explicites que si le terme source T_{ij} peut s'exprimer indépendamment de ρ . Pour cela on fait généralement appel à plusieurs hypothèses :

- le champ de vitesse est d'origine turbulent.
- le nombre de Mach turbulent M_t est élevé.
- le nombre de Reynolds est particulièrement élevé de sorte que l'on peut négliger les phénomènes visqueux ($\tau_{ij} = 0$).
- on néglige les fluctuations d'entropie de sorte que $P_1 = c_0^2 \rho_1$.
- le tenseur de Reynolds $\rho u_i u_j$ est approximé par $\rho_0 u_i u_j$ où ρ_0 est la densité du fluide au repos. Cette approximation est raisonnable dans l'hypothèse d'un nombre de Mach turbulent M_t faible. En effet on montre dans cette hypothèse que les fluctuations turbulentes de densité ρ_t sont tel que $\rho_t / \rho_0 \sim M_t^2$ (c.f. section 4.6.1).

Dans le cadre de ces hypothèses l'équation de propagation 4.4 se ramène à

$$\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (\rho_0 u_i u_j) \quad (4.7)$$

La solution de l'équation inhomogène 4.7 pour une source acoustique concentrée en un point singulier est la fonction de Green qui vérifie

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} \right) G(\vec{x}, t) = \delta(\vec{x}) \delta(t) \quad (4.8)$$

et qui s'exprime comme

$$G(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi c_0^2 |\vec{x}|} \delta(t - |\vec{x}|/c_0) \quad (4.9)$$

La solution générale pour une source étendue s'exprime alors à l'aide de la fonction de Green associée et prend une forme similaire aux potentiels retardés rencontrés en électromagnétisme :

$$\rho_1(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (T_{ij} * G) = \frac{1}{4\pi c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \int_{\mathcal{V}} \frac{d^3 y}{|\vec{x} - \vec{y}|} T_{ij} \left(\vec{y}, t - \frac{|\vec{x} - \vec{y}|}{c_0} \right) \quad (4.10)$$

où \mathcal{V} est le volume occupé par la source turbulente.

L'équation 4.10 admet une forme plus simple en champ lointain, i.e. dans les régions de l'espace tel que $|\vec{x}| \gg \Lambda$ où Λ est la taille caractéristique du milieu turbulent [c.f. Bailly, 1994] :

$$\rho_1(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi c_0^4 |\vec{x}|} \frac{x_i x_j}{x^2} \int_{\mathcal{V}} d^3 y \frac{\partial^2}{\partial t^2} T_{ij} \left(\vec{y}, t - \frac{|\vec{x} - \vec{y}|}{c_0} \right) \quad (4.11)$$

La solution simple en champ lointain (équation 4.11) est inadéquate dans le problème du transfert de puissance acoustique aux modes propres car le transfert est effectué localement, tandis que la solution locale (équation 4.10) s'avère particulièrement difficile à résoudre numériquement¹⁷ [Comte-Bellot *et al.*, 1997].

On peut néanmoins établir une forme approximative de l'équation 4.11. Soit w la vitesse caractéristique des tourbillons et Λ leur taille caractéristique ; l'échelle de temps caractéristique est donc Λ/w . On procède alors aux substitutions suivantes

$$T_{ij} \rightarrow \rho_0 w^2 \quad \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow w/\Lambda \quad \int d^3 y \rightarrow \Lambda^3 \quad (4.12)$$

qui permettent d'aboutir à l'approximation suivante

$$\rho_1(\vec{x}, t) \approx \rho_0 \frac{\Lambda}{|\vec{x}|} M_t^4 \quad \text{pour } |\vec{x}| \gg \Lambda \quad (4.13)$$

où $M_t = w/c_0$ est une mesure du nombre de Mach turbulent.

L'intensité acoustique rayonnée par unité de surface s'exprime [Lighthill, 1952] par :

$$\mathcal{J} = \rho_0 c_0^3 \frac{\langle \rho_1^2 \rangle}{\rho_0^2} \quad (4.14)$$

et la puissance ainsi rayonnée à travers une sphère de rayon $|\vec{x}|$ vaut approximativement

$$P_Q = 4\pi |\vec{x}|^2 \mathcal{J} \approx \rho_0 w^3 \Lambda^2 M_t^5 \quad (4.15)$$

La quantité $w^3 \Lambda^2$ est une mesure du taux d'injection d'énergie (ϵ) dans la cascade turbulente (équation 3.82). Le rendement de l'émission acoustique est le rapport entre la puissance acoustique P_Q , exprimée par unité de volume, sur la puissance injectée par la convection dans la cascade turbulente. Ce rendement s'exprime donc pour l'unité de volume comme

$$\frac{P_Q}{\rho_0 \epsilon} \approx M_t^5 \quad (4.16)$$

et tend à montrer que dans le cas de mouvements turbulents subsoniques (i.e. $M_t \ll 1$) la puissance acoustique rayonnée est négligeable devant la puissance injectée par la convection dans la cascade turbulente.

Ce résultat rejoint celui de Goldreich and Kumar [1990]. Les auteurs ont en effet montré que le rapport entre la puissance injectée stochastiquement dans les modes d'oscillations et la puissance convective est dans un rapport $M_t^{15/2}$. Autrement dit le transfert d'énergie dans les modes est particulièrement inefficace.

4.2 La stratification

Dans les intérieures stellaires on ne peut pas *a priori* négliger la stratification dans le processus d'émission du bruit acoustique. Il faut tenir compte de la gravité et du fait que la vitesse du son c_s n'est pas homogène. Ceci nous conduit à généraliser la théorie de Lighthill en ajoutant dans les termes sources (termes de droite de l'équation 4.4) la force d'Archimède $\vec{F} = \rho_1 \vec{g}$ ainsi que la vitesse du son c_s de sorte que l'équation de propagation devient

$$\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial F_i}{\partial x_i} \quad (4.17)$$

¹⁷Notamment à cause de la présence du retard $|\vec{x} - \vec{y}|/c_0$.

avec ici cette fois

$$T_{ij} = \rho_0 u_i u_j + (c_s^2 - c_0^2) \rho_1 \delta_{ij} \quad (4.18)$$

où l'on s'est à nouveau placé dans l'approximation adiabatique pour laquelle $P_1 = c_s^2 \rho_1$. La quantité c_0 désigne une vitesse du son de référence.

On a l'habitude de classer les termes sources en terme de monopole, dipole et quadrupole : considérons l'équation inhomogène

$$\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\partial^i f}{\partial x^i} \quad (4.19)$$

où f désigne un terme source quelconque et j désigne une dérivation d'ordre j . Une source f est un monopole lorsque $j = 0$, un dipole pour $j = 1$ et enfin un quadrupole lorsque $j = 2$. On montre en fait, qu'en terme d'émission acoustique, un monopole est associé à une fluctuation de masse, un dipole à une fluctuation de force et enfin un quadrupole à une déformation de surface à volume constant (fluctuation de stress).

Dans l'équation 4.17 on voit donc apparaître le tenseur de Reynolds $\rho_0 u_i u_j$ comme un terme source quadrupolaire ; le terme $(c_s^2 - c_0^2) \rho_1 \delta_{ij}$, induit par l'inhomogénéité de la vitesse du son, est ainsi un terme source quadrupolaire ; enfin le terme $\rho_1 g_i$, associé aux fluctuations de la force d'Archimède, est un terme dipolaire. Les dérivées spatiales agissant sur ρ_0 et c_s^2 à droite de l'équation 4.17 induisent de plus un terme monopolaire témoignant également de la stratification [c.f. Stein, 1967].

La prise en compte de la stratification fait apparaître des termes qui dépendent maintenant de ρ_1 . La méthode de Lighthill qui consiste à déterminer le champ acoustique $\rho_1(\vec{x}, t)$ par convolution des termes sources avec la fonction de Green n'est donc plus valable.

Stein [1967] entreprend l'évaluation du bruit acoustique généré par un milieu stratifié. Il évalue le champ acoustique en terme de fluctuation de pression et se place dans l'approximation de mouvements adiabatiques ($\delta P_1 = c_s^2 \delta \rho_1$). Le champ turbulent est décrit par un modèle de turbulence, isotrope, stationnaire, homogène et incompressible. La dynamique du spectre de turbulence est traitée en découplant dépendance spatiale et dépendance temporelle (c.f. équation 3.66 ainsi que la section 3.2.3). Ce calcul est réalisé dans le domaine Fourier et une transformée de Fourier inverse est opérée afin de retourner dans l'espace des coordonnées spatiales.

Stein établit que les sources monopolaires et dipolaires sont négligeables devant le terme quadrupolaire du stress de Reynolds. Ces résultats sont à nouveau confirmés par les travaux récents de Musielak *et al.* [1994] dont le but était d'introduire une description améliorée de la turbulence. Toutefois contrairement à ceux de Stein [1967], les travaux de Musielak *et al.* [1994] tendent à montrer que l'émission acoustique est peu dépendante du spectre d'énergie turbulente.

Par ailleurs Goldreich and Kumar [1990] ont montré que l'émission acoustique n'est pas affectée par la stratification, ce résultat est donc cohérent avec ceux de Stein et Musielak *et al.* , à savoir que la stratification joue un rôle mineur dans l'émission acoustique. Cette propriété nous sera particulièrement utile dans la suite pour séparer les grandeurs liées à la stratification des sources turbulentes d'excitation.

L'approche de Stein se distingue de la méthode due à GK, que l'on va adopter par la suite, en ce que le couplage avec les modes propres n'est pas traité et que les fluctuations turbulentes d'entropie ne sont pas envisagées.

4.3 Principe de l'excitation stochastique

L'excitation stochastique fonctionne sur le modèle de l'oscillateur forcé : une source d'excitation turbulente force les modes propres d'oscillation. Ceux-ci sont amortis sur une échelle de temps (quelques jours) bien plus grande que la durée de vie des éléments turbulents dans la zone d'excitation ($\sim 5 - 10$ mn , voir figure 3.1), si bien qu'à l'échelle de temps caractéristique de l'amortissement la source turbulente apparaît stationnaire. Les modes propres d'oscillation oscillent à des périodes du même ordre de grandeur que la durée de vie des tourbillons. Ainsi ce sont les modes turbulents dont les durées de vies τ_k sont inférieures ou du même ordre de grandeur que la période $2\pi/\omega_0$ d'un mode de fréquence angulaire ω_0 , qui pourront entrer en résonance et lui fournir une partie négligeable¹⁸ de leur énergie. L'efficacité du transfert résulte donc du couplage des modes propres considérés avec les modes turbulents vérifiant approximativement la condition $\tau_k \omega_0 \lesssim 1$.

La physique du transfert est déterminée par la nature du terme source de forçage. On établira que ce

¹⁸Nous avons en effet rappeler en section 4.1 que l'énergie dissipée par l'émission acoustique représentée une fraction négligeable de l'énergie dissipée le long de la cascade turbulente.

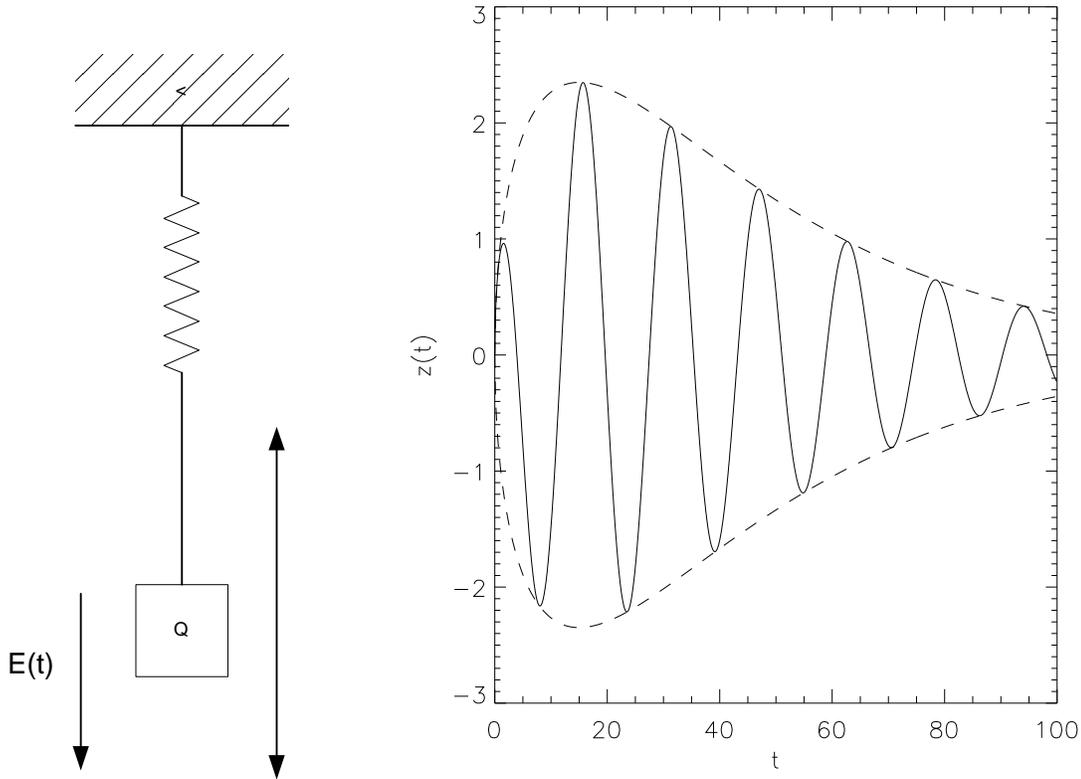


FIG. 4.1 – *A gauche* : configuration de l'analogie basée sur un ressort soumis à un champ électrique faisant office de source d'excitation. *A droite* : évolution dans le temps de la position du ressort soumis à de l'amortissement linéaire de la forme $e^{-\eta t}$ et de l'excitation de la forme $a(t) = \sqrt{t}$.

terme se compose de deux contributions de nature différente. La première est d'origine mécanique et est associée au tenseur de Reynolds résultant directement des mouvements des éléments turbulents, tandis que la deuxième est d'origine thermique et est associée aux fluctuations passives et d'origine turbulente de l'entropie du milieu. Ce transfert d'énergie résulte donc d'une part d'un travail mécanique et de l'autre d'un transfert de chaleur associé aux fluctuations passives d'entropie. Les termes sources correspondant seront explicités dans la section 4.4.

Outre la nature physique de ces termes sources il reste à décrire le principe même du mécanisme de forçage des oscillations. Procédons pour cela par analogie : considérons une charge électrique de charge q et de masse m suspendue à ressort de raideur k (figure 4.1). Un déplacement initial provoque des oscillations de fréquence $\omega_0 = k/m$. L'oscillation s'accompagne d'un amortissement linéaire¹⁹ - pouvant avoir pour origine la résistance de l'air - introduisant un taux d'amortissement η . En l'absence d'excitation l'oscillation s'évanouit.

Considérons maintenant un champ électrique $\vec{E}(t)$ vertical (voir figure 4.1). Attribuons lui un comportement aléatoire relevant d'un processus stationnaire suivant une distribution normale (gaussienne). Ces considérations nous permettent - par analogie - d'associer le champ $\vec{E}(t)$ à la source turbulente d'excitation des oscillations stellaires. Il exerce sur la charge électrique une force $q\vec{E}(t)$ si bien que l'équation différentielle vérifiée par le déplacement vertical $z(t)$ de la charge est identique à l'équation 2.15 dans laquelle le terme source est $f(t) = qE(t)$. En l'absence de champ électrique les solutions sont les modes propres prenant, dans une description complexe, la forme suivante

$$z_0 = a_0 e^{-\eta t - i\omega_0 t} \quad (4.20)$$

où a_0 est l'amplitude initiale de l'oscillation. Cette amplitude résulte d'une (petite) perturbation initiale (de

¹⁹Cet amortissement linéaire revient formellement à introduire une partie complexe à la constante de raideur.

nature non spécifiée) ayant une durée de vie extrêmement courte devant la période de l'oscillation. Dans notre analogie $z_0(t)$ est associé à un mode propre d'oscillation stellaire de fréquence ω_0 . Les solutions générales en présence de la source d'excitation prennent la forme

$$z(t) = a(t) e^{-\eta t - i\omega_0 t} = \frac{a(t)}{a_0} z_0 \quad (4.21)$$

où $a(t)$ est l'amplitude instantanée de l'oscillation résultante de l'excitation par le terme de forçage $f(t)$. Les deux quantités sont ainsi reliées par la relation 2.17.

L'excitation résulte d'un processus aléatoire, il s'agit donc de caractériser d'un point de vue statistique le comportement temporel du terme de forçage. Les propriétés attribuées au champ électrique permettent de modéliser la cohérence de celui-ci comme (c.f. section 2.4)

$$\langle E(t_0)E(t_0 + t) \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \langle E^2 \rangle e^{-(t/\tau_\Lambda)^2} \quad (4.22)$$

où τ_Λ est le temps de cohérence (ou durée de vie) de la source.

La moyenne quadratique du déplacement exprimée en m^2 se décompose alors comme (c.f. section 2.4)

$$\frac{1}{2} \langle |z|^2 \rangle = \frac{T_{obs} \tau_\Lambda}{16\omega_0^2} \langle (qE)^2 \rangle e^{-(\omega_0 \tau_\Lambda / 2)^2} \quad (4.23)$$

L'interprétation de l'équation 4.23 nous permet de comprendre certains éléments intéressants du processus de forçage des modes propres : Le terme $\langle (qE)^2 \rangle$ est la moyenne quadratique de la force qui s'exerce sur la charge q , cette quantité fixe l'amplitude absolue du forçage. Le terme $e^{-(\omega_0 \tau_\Lambda / 2)^2}$ traduit l'efficacité du forçage. En effet pour $\tau_\Lambda \omega_0 \gtrsim 1$ la contribution de ce terme est négligeable tandis que dans le cas contraire elle est maximale.

Si on assimile notre source excitatrice à un ensemble de sources individuelles ayant chacune son propre temps de cohérence τ_Λ , alors l'équation 4.23 nous révèle que ce sont les sources vérifiant la condition $\tau_\Lambda \omega_0 \lesssim 1$ qui contribuent au forçage tandis que les autres sources sont inefficaces et n'entrent donc pas en résonance avec la charge oscillante. Dans cette analogie cet ensemble de sources est associé à l'ensemble des modes turbulents (*i.e.* les tourbillons) du milieu convectif turbulent, chaque mode turbulent ayant son propre temps de cohérence.

L'analogie considérée nous a permis d'illustrer le mécanisme général sur lequel repose l'excitation stochastique. Il convient maintenant d'explicitier les termes sources ainsi que d'établir la formule générale exprimant la puissance injectée dans les oscillations du type solaire.

4.4 L'équation d'onde inhomogène

On établit ici la forme des termes sources turbulents du mécanisme d'excitation stochastique. Les équations de base sont l'équation de conservation de la masse (2.1) et l'équation de mouvement (2.2) laquelle peut s'écrire comme

$$\frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla} : (\rho \vec{v} \vec{v}) = \rho \vec{g} - \vec{\nabla} P \quad (4.24)$$

Chaque variable f est écrite comme la somme de la valeur d'équilibre et d'une fluctuation eulerienne f_1 (c.f. équation 2.4).

A l'équilibre le champ moyen de vitesse est nul de sorte que les variables d'équilibre (g_0 , P_0 et ρ_0) satisfont l'équation de l'équilibre hydrostatique

$$\vec{\nabla} P_0 = \rho_0 \vec{g}_0 \quad (4.25)$$

L'insertion de chaque variable sous la forme de l'équation 2.4 dans l'équation 4.2 s'effectue en ne retenant que les termes linéaires et quadratiques en P_1 et ρ_1 . En se plaçant dans l'approximation de Cowling ($\vec{g}_1 = \vec{0}$) on obtient les formes perturbées des équations 2.1 et 4.24

$$\frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla} : (\rho \vec{v} \vec{v}) + \vec{\nabla} P_1 = 0 \quad (4.26)$$

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (4.27)$$

L'équation d'état perturbée s'exprime, dans une description eulerienne et dans un développement limité au premier et second ordre, sous la forme

$$P_1 = c_s^2 \rho_1 + \alpha_s s_1 + \alpha_{\rho\rho} \rho_1^2 + \alpha_{ss} s_1^2 + \alpha_{\rho s} \rho_1 s_1 \quad (4.28)$$

avec

$$\alpha_s = \left(\frac{\partial P}{\partial s} \right)_\rho \quad \alpha_{\rho s} = \left(\frac{\partial^2 P}{\partial \rho \partial s} \right) \quad (4.29)$$

$$\alpha_{ss} = \left(\frac{\partial^2 P}{\partial s^2} \right)_\rho \quad \alpha_{\rho\rho} = \left(\frac{\partial^2 P}{\partial \rho^2} \right)_s \quad (4.30)$$

$$c_s^2 = \Gamma_1 P_0 / \rho_0 \quad (4.31)$$

et où c_s désigne la vitesse du son et $\Gamma_1 = (\partial \ln P / \ln \rho)_s$ est l'indice adiabatique.

La prise en compte de l'équation 2.3 de conservation de l'énergie permettrait :

- d'étudier la modification de l'état d'équilibre du flux convectif induite par l'émission acoustique.
- de résoudre la non-adiabaticité des oscillations dues à la modulation du flux convectif et radiatif.

On suppose toutefois les hypothèses simplificatrices suivantes :

- les oscillations sont adiabatiques de sorte que la fluctuation lagrangienne de l'entropie est due exclusivement à la turbulence.
- l'émission acoustique - pour partie injectée dans les oscillations et pour partie dissipée dans le milieu - s'effectue sans que la valeur du flux convectif soit altérée. Autrement dit on suppose que les spectres turbulents d'énergie cinétique et du scalaire passif entropie correspondent à ceux en absence d'émission acoustique.

Ces hypothèses simplificatrices justifiées à posteriori (c.f. section 4.12) permettent d'ignorer l'équation de conservation de l'énergie.

Fluctuations lagrangienne et eulerienne d'entropie sont reliées l'une à l'autre comme [c.f. Cox, 1968]

$$\frac{d\delta s_t}{dt} = \frac{\partial s_1}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} (s_0 + s_1) \quad (4.32)$$

où δs_t est la fluctuation turbulente et lagrangienne de l'entropie. L'indice t désignera par la suite des quantités d'origine turbulente. Pour un usage ultérieur on réécrit 4.32 sous la forme

$$\alpha_s \frac{\partial s_1}{\partial t} = \alpha_s \frac{d\delta s_t}{dt} - \alpha_s \vec{v} \cdot \vec{\nabla} s_0 - \vec{\nabla} \cdot (\alpha_s s_1 \vec{v}) + s_1 \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \alpha_s + \alpha_s s_1 \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \quad (4.33)$$

Le champ de vitesse est décomposé en une composante relative au déplacement des oscillations ($\delta \vec{r}_{osc}$) et une composante turbulente (\vec{u})

$$\vec{v} = \frac{d\delta \vec{r}_{osc}}{dt} + \vec{u} = \vec{v}_{osc} + \vec{u} \quad (4.34)$$

où $\vec{v}_{osc} \equiv d\delta \vec{r}_{osc} / dt$ est la vitesse du déplacement oscillant.

4.4.1 Oscillations libres

En absence de turbulence ($\vec{u} = 0$) le champ de vitesse est simplement réduit à celui des oscillations

$$\vec{v} = \frac{d}{dt} \vec{\xi}(\vec{r}, t) \quad (4.35)$$

où $\vec{\xi}(\vec{r}, t)$ est le déplacement oscillant du fluide stellaire.

La dérivation de l'équation 4.26 par rapport à t , permet d'établir, en invoquant le jeu d'équations (4.27, 4.28, 4.33) et en négligeant les termes non linéaires en terme de $\vec{\xi}$, l'équation d'onde homogène

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{L} \right) \vec{v} = 0 \quad (4.36)$$

avec l'opérateur linéaire :

$$\vec{L}(\vec{X}) = \frac{1}{\rho_0} \left[\vec{\nabla} \cdot \left(c_s^2 \vec{\nabla} \cdot (\rho_0 \vec{X}) + \alpha_s \vec{X} \cdot \vec{\nabla} s_0 \right) - \vec{g}_0 \vec{\nabla} \cdot (\rho_0 \vec{X}) \right] \quad (4.37)$$

La recherche des solutions de l'équation 4.36 s'effectue en terme de déplacement oscillant sous la forme $\vec{\xi}(\vec{r}, t) = \vec{\xi}(\vec{r}) e^{-i\omega_0 t}$ où ω_0 est la fréquence angulaire de l'oscillation considérée et $\vec{\xi}(\vec{r})$ désigne sa dépendance spatiale. La substitution de l'équation 4.35 dans l'équation homogène 4.36 établit alors l'équation au vecteur propre

$$\vec{L} \left[\vec{\xi}(\vec{r}) \right] + \omega_0^2 \vec{\xi}(\vec{r}) = \vec{0} \quad (4.38)$$

pour laquelle les déplacements adiabatiques $\vec{\xi}(\vec{r})$ sont les vecteurs propres ou modes propres d'oscillation dont les propriétés générales ont été décrites dans la section 2.1 du chapitre 2.

4.4.2 Modes propres d'oscillation excités par la turbulence

En négligeant les termes en v_{osc}^2 , en supposant la turbulence incompressible ($\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$) et enfin en invoquant le jeu d'équations (4.27, 4.28, 4.33) ainsi que l'équation 4.34, la dérivation de l'équation 4.26 par rapport à t établit l'équation d'onde inhomogène

$$\rho_0 \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{L} \right) \left[\left(1 + \frac{\rho_1}{\rho_0} \right) \vec{v} \right] + \vec{\mathcal{D}}(\vec{v}_{osc}) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{f}_t + \vec{\nabla} h_t \right) - \vec{c} \quad (4.39)$$

Les termes de droite de l'équation 4.39 sont les termes sources. On distingue le stress turbulent de Reynolds :

$$\vec{f}_t = -\vec{\nabla} : (\rho_0 \vec{u} \vec{u}) \quad (4.40)$$

le terme source du aux fluctuations turbulentes d'entropie :

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} h_t = -\vec{\nabla} \left(\alpha_s \frac{d}{dt} \delta s_t - \vec{\nabla} \cdot (\alpha_s \vec{u} s_1) + s_1 \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \alpha_s \right) \quad (4.41)$$

Enfin le dernier terme de droite de l'équation 4.39 est défini comme

$$\begin{aligned} \vec{c} = & \frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{\nabla} : \rho_1 \vec{u} \vec{u} \right) + \vec{\nabla} \left(-(\alpha_{\rho s} s_1 + 2\alpha_{\rho\rho} \rho_1) \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) \right) \\ & + (\alpha_{\rho s} \rho_1 + 2\alpha_{s s} s_1) \frac{\partial s_1}{\partial t} + \alpha_s \frac{\rho_1}{\rho_0} \vec{u} \cdot \vec{\nabla} s_0 \end{aligned} \quad (4.42)$$

Le premier terme à droite de l'équation 4.41 est dû aux fluctuations lagrangiennes d'entropie. Ce terme a été considéré par Goldreich *et al.* [1994, GMK par la suite] et Balmforth [1992a, B92 par la suite]. Les deux derniers termes sont dus à la force d'Archimède associée aux fluctuations eulériennes d'entropie. Il sera établi que ces termes contribuent à l'excitation au même titre que le terme source de Reynolds. L'opérateur dérivée partielle à gauche de l'équation 4.41 définissant h_t a été introduit car l'opérateur $\vec{\nabla}$ à droite de l'équation 4.41 étant en facteur il pourra être ultérieurement appliqué aux fonctions propres. Ce choix de convenance est licite car $\partial/\partial t$ et $\vec{\nabla}$ commutent. L'opérateur $\vec{\mathcal{D}}$, faisant intervenir à la fois le champ de vitesse turbulente (\vec{u}) et la vitesse (\vec{v}_{osc}) des déplacements oscillants, se définit comme

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{D}}(\vec{v}_{osc}) = & 2 \frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{\nabla} : \rho \vec{u} \vec{v}_{osc} \right) + \vec{\nabla} \left(\alpha_s \frac{\rho_1}{\rho_0} \vec{v}_{osc} \cdot \vec{\nabla} s_0 - \vec{\nabla} \cdot (\alpha_s \vec{v}_{osc} s_1) + s_1 \vec{v}_{osc} \cdot \vec{\nabla} \alpha_s \right) \\ & + \alpha_s s_1 \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_{osc} - (\alpha_{\rho s} s_1 + 2\alpha_{\rho\rho} \rho_1) \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}_{osc}) \end{aligned} \quad (4.43)$$

On montrera dans la section suivante que ce dernier contribue dynamiquement à l'amortissement linéaire.

Les termes $\vec{\mathcal{D}}$, $\vec{\nabla} h_t$ et \vec{c} mêlent quantités turbulentes avec les fluctuations eulériennes de densité (ρ_1) et d'entropie (s_1). Ces dernières fluctuations eulériennes sont imputables à la fois à la turbulence et aux oscillations. Or la résolution de l'équation inhomogène n'est strictement possible que si les termes dépendants des oscillations peuvent être placés à gauche de l'équation inhomogène tandis que les termes qui ne dépendent que des quantités d'origine turbulente sont placés à droite. Il faudrait séparer de façon totalement consistante turbulence et oscillations.

Pour pouvoir isoler la partie homogène relative aux oscillations de la partie inhomogène (termes à droite de l'équation 4.39) on considère deux hypothèses simplificatrices :

- on suppose une turbulence “libre”, *i.e.* le milieu turbulent évolue librement sans être perturbé par les oscillations de sorte que l'équation de continuité s'applique aux éléments turbulents de façon indépendante des oscillations :

$$\frac{\partial \rho_t}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot ((\rho_0 + \rho_t) \vec{u}) = 0 \quad (4.44)$$

- on considère que les fluctuations s_1 et ρ_1 apparaissant dans les termes $\vec{\nabla} h_t$, $\vec{\mathcal{C}}$ and $\vec{\mathcal{D}}$ ne sont dues qu'aux mouvements turbulents de la matière. On considère donc que les perturbations imputables aux mouvements oscillants sont petites devant celles d'ordre plus élevé d'origine turbulente. Cette approximation est consistante avec le fait d'avoir négligé les termes non-linéaires en \vec{v}_{osc} dans l'équation 4.39. Par conséquent nous substituerons ρ_1 (resp. s_1) par ρ_t (resp. s_t) dans la série d'équations 4.41, 4.44 et 4.43.

A l'aide de l'équation 4.44, $\vec{\mathcal{C}}$ se ramène à

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{C}} = & \frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{\nabla} : \rho_t \vec{u} \vec{u} \right) + \vec{\nabla} \cdot \left((\alpha_{\rho s} s_t + 2\alpha_{\rho\rho} \rho_t) \frac{\partial \rho_t}{\partial t} \right. \\ & \left. + (\alpha_{\rho s} \rho_t + 2\alpha_{ss} s_t) \frac{\partial s_t}{\partial t} + \alpha_s \frac{\rho_t}{\rho_0} \vec{u} \cdot \vec{\nabla} s_0 \right) \end{aligned} \quad (4.45)$$

On montrera en section 4.6.3 que ce terme est négligeable car de l'ordre de M_t^2 et $M_t \lesssim 0.3$ dans la zone convective solaire.

L'opérateur linéaire $(\partial^2/\partial t^2 - \vec{L})$ agissant sur le champ de vitesse turbulente \vec{u} dans l'équation inhomogène (4.39) ajoute des contributions. Certaines sont du même ordre que le terme source du stress de Reynolds et d'autres négligeables. On montre toutefois que cette contribution s'annule essentiellement car il s'agit d'un terme linéaire en terme de fluctuations turbulentes (c.f. section 4.8.1).

Finalement l'équation inhomogène de propagation d'onde que l'on considère dorénavant s'écrit

$$\rho_0 \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{L} \right) \left[\left(1 + \frac{\rho_1}{\rho_0} \right) \vec{v}_{osc} \right] + \vec{\mathcal{D}}(\vec{v}_{osc}) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{f}_t + \vec{\nabla} h_t \right) \quad (4.46)$$

4.5 Moyenne quadratique des amplitudes des modes

Les vitesses des mouvements oscillants en présence de turbulence sont décomposées en terme d'un mode propre adiabatique $\vec{\xi}(\vec{r}, t)$ définis plus haut et d'une amplitude instantanée $A(t)$ (c.f. équations 2.27 et 2.29). Cette dernière quantité représente l'amplitude résultant du forçage des modes propres par les termes sources turbulents.

La substitution de l'équation 2.29 dans 4.46, donne à l'aide de l'équation homogène 4.36 :

$$\rho_0 \left(i\omega_0 \frac{d^2 A}{dt^2} + 2\omega_0^2 \frac{dA}{dt} \right) \vec{\xi} + i\omega_0 \vec{\mathcal{D}}(A \vec{\xi}) + i\omega_0 \rho_0 \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{L} \right) \left[\frac{\rho_t}{\rho_0} A \vec{\xi} \right] = \frac{\partial \vec{\mathcal{S}}}{\partial t} \quad (4.47)$$

avec

$$\vec{\mathcal{S}} \equiv - \left(\vec{f}_t + \vec{\nabla} h_t \right) \quad (4.48)$$

La période d'une oscillation est bien plus courte que sa durée de vie ($\omega_0 \gg \eta$) et ainsi $|d \ln A / dt| \ll \omega_0$. Par conséquent la dérivée seconde de A peut être négligée dans l'équation 4.47. Multiplions l'équation 4.47 par $\vec{\xi}^*(\vec{r}, t)$ et intégrons sur l'enveloppe stellaire, ceci nous donne

$$\frac{dA}{dt} + \Delta\sigma A = \frac{1}{2\omega_0^2 I} \int d^3x \vec{\xi}^* \cdot \frac{\partial \vec{\mathcal{S}}}{\partial t} \quad (4.49)$$

où l'on a défini la quantité complexe $\Delta\sigma = i\Delta\omega + \eta_D$ comme :

$$\begin{aligned} i\Delta\omega + \eta_D \equiv & \frac{i}{2\omega_0 I} \int d^3x \vec{\xi}^* \cdot \left\{ \vec{\mathcal{D}}(\vec{\xi}) + 2 \left(\frac{\partial}{\partial t} \ln A \right) \vec{\nabla} : \rho_0 \vec{u} \vec{\xi} \right. \\ & \left. + \rho_0 \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{L} \right) \left[\frac{\rho_t}{\rho_0} \vec{\xi} \right] - 2i\omega_0 \left(\frac{\partial}{\partial t} \ln A \right) \rho_t \vec{\xi} \right\} \end{aligned} \quad (4.50)$$

L'expression de droite de l'équation 4.50 est linéaire en terme des vecteurs propres. Par conséquent la partie imaginaire correspond à un décalage fréquentiel $\Delta\omega$ d'origine turbulente. Brun [1998] a montré que pour le Soleil le décalage fréquentiel induit par la pression turbulente serait d'au plus $\sim 12 \mu\text{Hz}$. Ce décalage est du même ordre que celui établi par Houdek [1996] en tenant compte du traitement non adiabatique basé sur le modèle convectif introduit par Gough (c.f. sections 3.1.5 et 3.1.6). On montre qu'un décalage d'ordre $\sim 10 \mu\text{Hz}$ modifie ici de manière insignifiante l'amplitude estimée des oscillations. Le décalage $\Delta\omega$ est par conséquent négligeable et peut être ignoré. La partie réelle à droite de l'équation 4.50 définit η_D et contribue à l'amortissement dynamique. De la même manière que B92 et GMK, η_D est remplacé dans l'équation 4.49 par l'amortissement global η à fin de prendre en compte toutes les formes d'amortissement linéaire.

L'équation d'évolution de $A(t)$ s'exprime alors comme

$$\frac{dA}{dt} + \eta A = \frac{1}{2\omega_0^2 I} \int d^3x \vec{\xi}^*(\vec{x}) e^{i\omega_0 t} \cdot \frac{\partial \vec{S}}{\partial t} \quad (4.51)$$

La solution de l'équation 4.51 s'écrit

$$A(t) = \frac{e^{-\eta t}}{2\omega_0^2 I} \int_{-\infty}^t dt' \int d^3x e^{(\eta+i\omega_0)t'} \vec{\xi}(\vec{x}) \cdot \frac{\partial \vec{S}}{\partial t'} \quad (4.52)$$

Après une intégration par partie, $A(t)$ se ramène à

$$A(t) = \frac{i e^{-\eta t}}{2\omega_0 I} \int_{-\infty}^t dt' \int d^3x e^{(\eta+i\omega_0)t'} \vec{\xi}(\vec{x}) \cdot \vec{S}(\vec{x}, t') \quad (4.53)$$

Le carré de l'amplitude s'exprime alors à partir de l'équation 4.53 comme :

$$|A|^2(t) = \frac{e^{-2\eta t}}{4(\omega_0 I)^2} \int_{-\infty}^t dt_1 dt_2 \int d^3r_1 d^3r_2 e^{\sigma(t_1, t_2)} \left(\vec{\xi}(\vec{r}_1) \cdot \vec{S}(\vec{r}_1, t_1) \right) \left(\vec{\xi}(\vec{r}_2) \cdot \vec{S}^*(\vec{r}_2, t_2) \right) \quad (4.54)$$

avec $\sigma(t_1, t_2) = \eta(t_1 + t_2) + i\omega_0(t_1 - t_2)$. Les intégrations spatiales sont effectuées sur toute l'enveloppe stellaire; il en sera implicitement le cas par la suite. On définit les coordonnées suivantes

$$\begin{aligned} \vec{x}_0 &= \frac{\vec{r}_2 + \vec{r}_1}{2} & t_0 &= \frac{t_1 + t_2}{2} \\ \vec{r} &= \vec{r}_2 - \vec{r}_1 & \tau &= t_2 - t_1 \end{aligned} \quad (4.55)$$

\vec{x}_0 et t_0 correspondent à une position temps-espace moyenne où l'excitation stochastique est intégrée tandis que \vec{r} et τ sont reliés à la turbulence locale. Dans ces nouvelles coordonnées, τ correspond à l'échelle de temps rapide associée au temps de cohérence des tourbillons et t_0 à l'échelle de temps lente associée à la durée de vie des modes (η^{-1}). Les opérateurs dérivés se transforment dans les nouvelles coordonnées comme

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}_1 &= \vec{\nabla}_0 - 2\vec{\nabla}_{\vec{r}} & \vec{\nabla}_2 &= \vec{\nabla}_0 + 2\vec{\nabla}_{\vec{r}} \\ \frac{\partial}{\partial t_1} &= \frac{\partial}{\partial t_0} - 2\frac{\partial}{\partial \tau} & \frac{\partial}{\partial t_2} &= \frac{\partial}{\partial t_0} + 2\frac{\partial}{\partial \tau} \end{aligned} \quad (4.56)$$

où $\vec{\nabla}_0$ est la dérivée à grande échelle associée à la coordonnée spatiale \vec{x}_0 tandis que $\vec{\nabla}_{\vec{r}}$ est la dérivée à petite échelle associée à la coordonnée spatiale \vec{r} . Enfin $\vec{\nabla}_1$ and $\vec{\nabla}_2$ sont associés respectivement aux coordonnées \vec{r}_1 et \vec{r}_2 . La moyenne quadratique de A s'écrit dans les nouvelles coordonnées comme

$$\begin{aligned} \langle |A|^2(t) \rangle &= \frac{1}{4(\omega_0 I)^2} \int_{-\infty}^t dt_0 e^{2\eta(t_0-t)} \int_{2(t_0-t)}^{2(t-t_0)} d\tau \int d^3x_0 d^3r e^{-i\omega_0 \tau} \\ &\times \left\langle \vec{\xi} \cdot \vec{S}[\vec{x}_0 - \frac{\vec{r}}{2}, t_0 - \frac{\tau}{2}] \vec{\xi} \cdot \vec{S}^*[\vec{x}_0 + \frac{\vec{r}}{2}, t_0 + \frac{\tau}{2}] \right\rangle \end{aligned} \quad (4.57)$$

On rappelle que l'opérateur $\langle \cdot \rangle$ correspond à une moyenne statistique effectuée sur un nombre infini de réalisations indépendantes.

Dans la région d'excitation la durée de vie des tourbillons est bien plus courte que la durée de vie des oscillations ($\sim 1/\eta$) si bien que le terme $e^{2\eta(t_0-t)}$, dans l'équation 4.57, demeure constant à l'échelle de

temps des tourbillons. L'intégration par rapport à τ dans l'équation 4.57 peut être ainsi étendue à l'infini. Nous supposons d'autre part une turbulence stationnaire, si bien que le terme source \mathcal{S} est invariant par translation par rapport à t_0 . D'autre part on utilisera le fait que \mathcal{S} est réel car il fait intervenir des quantités d'origine turbulente. Les considérations précédentes nous permettent d'exprimer la moyenne quadratique de l'amplitude comme

$$\langle |A|^2 \rangle = \frac{1}{8\eta(\omega_0 I)^2} \int d^3 x_0 \int_{-\infty}^{+\infty} d^3 r d\tau e^{-i\omega_0 \tau} \left\langle \left(\vec{\xi} \cdot \vec{\mathcal{S}} \right)_1 \left(\vec{\xi} \cdot \vec{\mathcal{S}} \right)_2 \right\rangle \quad (4.58)$$

où l'intégration sur t_0 a été effectuée. Les indices 1 et 2 réfèrent à des quantités évaluées aux positions spatiales et temporelle $(\vec{x}_0 - \frac{\vec{r}}{2}, -\frac{\tau}{2})$ et $(\vec{x}_0 + \frac{\vec{r}}{2}, \frac{\tau}{2})$ respectivement. Par la suite toutes les intégrations par rapport à τ devront être entendues comme étant effectuées dans le domaine $] -\infty, +\infty[$.

Il est pratique d'écrire la moyenne quadratique de A comme

$$\langle |A|^2 \rangle = \frac{1}{8\eta(\omega_0 I)^2} (C_R^2 + C_S^2 + C_{RS}^2) \quad (4.59)$$

avec

$$C_R^2 = \int d^3 x_0 \int d\tau e^{-i\omega_0 \tau} \int d^3 r \left\langle \left(\rho_0 u_j u_i \nabla_1^j \xi^i \right)_1 \left(\rho_0 u_j u_i \nabla_2^j \xi^i \right)_2 \right\rangle \quad (4.60)$$

la contribution du stress turbulent de Reynolds²⁰,

$$C_S^2 = \int d^3 x_0 \int d\tau e^{-i\omega_0 \tau} \int d^3 r \left\langle \left(h_t \vec{\nabla} \cdot \vec{\xi} \right)_1 \left(h_t \vec{\nabla} \cdot \vec{\xi} \right)_2 \right\rangle \quad (4.62)$$

la contribution des fluctuations turbulentes d'entropie et

$$C_{RS}^2 = 2 \int d^3 x_0 \int d\tau e^{-i\omega_0 \tau} \int d^3 r \left\langle \left(\rho_0 u_j u_i \nabla_1^j \xi^i \right)_1 \left(h_t \vec{\nabla} \cdot \vec{\xi} \right)_2 \right\rangle \quad (4.63)$$

les termes croisés entre les termes sources de Reynolds et d'entropie. Nous avons adopté la convention d'Einstein de sommation sur les indices répétés.

Les termes croisés ne contribuent pas à l'excitation principalement parce qu'ils mettent en jeu des moments d'ordre trois (c.f. Annexe B) et l'on a finalement :

$$\langle |A|^2 \rangle = \frac{1}{8\eta(\omega_0 I)^2} (C_R^2 + C_S^2) \quad (4.64)$$

4.6 Ordre de grandeur et termes sources dominants

Dans cette section on établit l'ordre de grandeur de chacun des termes sources. On commence d'abord (section 4.6.1) à déterminer les lois d'échelle des fluctuations des quantités turbulentes ainsi que l'ordre de grandeur des amplitudes de ces fluctuations. On se sert ensuite de ces ordres de grandeur pour évaluer en section 4.6.2 l'amplitude des termes sources dominants puis en section 4.6.3 l'amplitude des termes sources négligeables.

4.6.1 Loi d'échelle des fluctuations turbulentes

On définit les quantités suivantes dimensionnant les grandeurs caractéristiques du milieu turbulent :

- λ taille d'un tourbillon.
- Λ taille du plus grand tourbillon. On approxime cette quantité avec la longueur de mélange $\alpha_c H_P$, où H_P est l'échelle des hauteurs en pression et α_c le paramètre de la longueur de mélange.

²⁰Pour établir l'équations 4.60 on a considéré une intégration par partie de la forme

$$\int d^3 x \xi^i \nabla^j (\rho_0 u_j u_i) = \int_{\mathcal{A}} d\vec{A} \cdot \vec{u} \rho_0 \vec{u} \cdot \vec{\xi} - \int d^3 x (\rho_0 u_j u_i) \nabla^j \xi^i \quad (4.61)$$

où \mathcal{A} désigne la surface de l'étoile. Le terme de surface dans l'équation 4.61 s'annule car la vitesse turbulente s'annule à la surface de l'étoile. Les équations 4.62 et 4.63 sont établies à l'aide d'intégrations par partie analogues. Noter que dans les équations 4.60, 4.62 et 4.63, les opérateurs gradients agissent maintenant sur la fonction propre au lieu d'agir sur les quantités turbulentes.

- λ_D échelle dissipative.
- u_λ vitesse d'un tourbillon de taille λ
- u_Λ vitesse des tourbillons de plus grande taille.
- $\tau_\lambda \simeq \lambda/u_\lambda$ la durée de vie caractéristique (ou temps de cohérence) d'un tourbillon de taille λ
- $\tau_\Lambda \simeq \Lambda/u_\Lambda$ la durée de vie caractéristique du tourbillon de plus grande taille
- $\omega_\lambda \equiv 2\pi/\tau_\lambda$ fréquence caractéristique d'un tourbillon de taille λ
- $\omega_\Lambda \equiv 2\pi/\tau_\Lambda$ fréquence caractéristique du tourbillon de plus grande taille
- s_λ fluctuation d'entropie associée à un tourbillon de taille λ
- ρ_λ fluctuation de densité associée à un tourbillon de taille λ

Ces grandeurs vont nous servir dans l'évaluation des ordres de grandeurs des termes sources. On va considérer une loi d'échelle du type Kolmogorov. Cette loi d'échelle confère aux vitesses des tourbillons la distribution suivante (c.f. section 3.2.7)

$$u_\lambda = u_\Lambda \left(\frac{\lambda}{\Lambda} \right)^{1/3} \quad \text{avec} \quad \Lambda \gtrsim \lambda \gtrsim \lambda_D \quad (4.65)$$

La théorie de la longueur de mélange (MLT par la suite) fournit une estimation de la composante verticale (w) de la vitesse des tourbillons les plus gros si bien qu'à l'aide du facteur d'anisotropie Φ (équation 3.26) $u_\Lambda = \sqrt{\Phi} w$ constitue une estimation de la vitesse de ces tourbillons. On établit immédiatement la loi d'échelle vérifiée par la fréquence caractéristique ω_λ des tourbillons

$$\omega_\lambda = \omega_\Lambda \left(\frac{\lambda}{\Lambda} \right)^{-2/3} \quad \text{avec} \quad \Lambda \gtrsim \lambda \gtrsim \lambda_D \quad (4.66)$$

La MLT fournit également une estimation de l'entropie transportée par les tourbillons de plus grande taille. En effet soit $\langle T_t^2 \rangle$ la moyenne quadratique des fluctuations turbulentes de température. Dans le cadre de la MLT ces fluctuations de températures correspondent à la différence de température entre le milieu ambiant et les tourbillons de plus grande taille (égale à la longueur de mélange). On montre qu'il existe dans l'approximation de Boussinesq une relation entre la vitesse quadratique moyenne w^2 du flux convective et $\langle T_t^2 \rangle$, elle s'exprime [Gough, 1977]

$$w^2 = \frac{g_0 \Lambda \delta}{2\Phi T_0} \langle T_t^2 \rangle^{1/2} \quad (4.67)$$

avec $\delta = (\partial \ln \rho / \partial \ln T)_P$ et où Φ est le facteur d'anisotropie de Gough [1977, c.f. équation 3.25]. En vertu de la relation 3.96 la moyenne quadratique des fluctuations turbulentes d'entropie vaut à l'aide de l'équation 4.67

$$\tilde{s}^2 \equiv \langle s_t^2 \rangle = \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_P^2 \langle T_t^2 \rangle = \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_P^2 \left(\frac{2\Phi T_0}{g_0 \Lambda \delta} \right)^2 w^4 \quad (4.68)$$

La relation

$$\left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_P = \left(\frac{\partial s}{\partial P} \right)_\rho \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_\rho = \frac{1}{\alpha_s} \frac{P_0}{T_0} \left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln T} \right)_\rho \quad (4.69)$$

où $\alpha_s \equiv (\partial P / \partial s)_\rho$, nous permet d'exprimer \tilde{s} à partir de l'équation 4.68 sous une forme qui nous sera utile dans la suite, à savoir

$$\tilde{s} = \frac{2\Gamma_1}{\alpha_s \alpha_c} \rho_0 \Phi w^2 \quad (4.70)$$

avec $\Gamma_1 \equiv (\partial \ln P / \partial \ln \rho)_s$ et $\alpha_c \equiv \Lambda / H_P$. Enfin l'expression 4.70 nous fournit un ordre de grandeur pour \tilde{s} :

$$\tilde{s} \approx \frac{2\Gamma_1}{\alpha_s \alpha_c} \rho_0 u_\Lambda^2 \approx \frac{2\Gamma_1 M_t^2}{\alpha_s \alpha_c} \rho_0 c_s^2 \quad (4.71)$$

avec $u_\Lambda^2 \equiv \Phi w^2$ et $M_t \equiv u_\Lambda / c_s$ une estimation du nombre de Mach turbulent.

Le caractère scalaire passif de la fluctuation d'entropie confère à celle-ci une loi d'échelle identique à celle du champ de vitesse turbulent (c.f. section 3.2.8), à savoir

$$s_\lambda = \tilde{s} \left(\frac{\lambda}{\Lambda} \right)^{1/3} \quad (4.72)$$

L'équation de mouvement 4.24 et la loi d'échelle des vitesses 4.65 permettent d'établir la loi d'échelle des fluctuations turbulentes de la pression (GK)

$$P_\lambda = \rho_0 u_\Lambda^2 \left(\frac{\lambda}{\Lambda} \right)^{2/3} \quad (4.73)$$

Enfin l'équation d'état perturbée 4.28 ainsi que la loi d'échelle 4.72 attribuent à la fluctuation de densité la même loi d'échelle que l'entropie et permet d'estimer la fluctuation de densité ρ_Λ des grosses bulles, elle vaut approximativement $\rho_\Lambda \approx \alpha_s / c_s^2 \tilde{s}$.

Les considérations précédentes nous permettent d'explicitier les lois d'échelle vérifiées approximativement par les fluctuations de vitesse, d'entropie et de densité, elles s'expriment par :

$$u_\lambda \approx u_\Lambda \left(\frac{\lambda}{\Lambda} \right)^{1/3} \quad (4.74)$$

$$s_\lambda \approx \tilde{s} \rho_0 c_s^2 \left(\frac{\lambda}{\Lambda} \right)^{1/3} \quad (4.75)$$

$$\rho_\lambda \approx \rho_0 M_t^2 \left(\frac{\lambda}{\Lambda} \right)^{1/3} \quad (4.76)$$

4.6.2 Termes sources dominants

L'estimation de la moyenne quadratique des amplitudes conduit à intégrer sur l'enveloppe stellaire le projeté des fonctions propres sur le terme source turbulent $\vec{\mathcal{S}}$ (équation 4.58). Dans le terme source \mathcal{S} (équation 4.48), le gradient ($\vec{\nabla}$) est appliqué aux fonctions propres par intégration par partie effectuée dans l'équation 4.58. On définit ainsi la quantité $R_\xi = \left| \frac{d \ln \xi_r}{dr} \right|_{top}$ égale à la dérivée logarithmique de la fonction propre radiale évaluée en haut de la région superadiabatique. Cette quantité fournit une évaluation du gradient de la fonction propre apparaissant dans la formulation donnant les amplitudes. D'autre part on approxime la dérivée temporelle appliquée à $\vec{\mathcal{S}}$ par $\omega_0 \vec{\mathcal{S}}$. Cette approximation est raisonnable car dans la région d'excitation la résonance entre l'oscillation et le milieu turbulent a lieu au voisinage de la fréquence d'oscillation (voir plus loin). On procède donc aux substitutions suivantes

$$\begin{aligned} \xi_r \frac{\partial}{\partial r} &\rightarrow \xi_r R_\xi \\ \frac{\partial}{\partial t} &\rightarrow \omega_0 \end{aligned} \quad (4.77)$$

Les considérations précédentes nous permettent d'évaluer les ordres de grandeur et les lois d'échelle de chacun des termes sources.

Pour le terme source de Reynolds on établit en ordre de grandeur

$$\left| \frac{\partial \vec{f}_t}{\partial t} \right| = \left| \vec{\nabla} : (\rho_0 \vec{u} \vec{u}) \right| \approx R_\xi \omega_0 \rho_0 u_\Lambda^2 \left(\frac{\lambda}{\Lambda} \right)^{2/3} \quad (4.78)$$

Le terme source entropique se décompose en trois parties, que l'on définit ainsi :

$$\frac{\partial h_1}{\partial t} = \alpha_s \frac{d\delta s_\lambda}{dt} \quad (4.79)$$

$$\frac{\partial \vec{\nabla} h_2}{\partial t} = \vec{\nabla} \left(s_\lambda \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \alpha_s \right) \quad (4.80)$$

$$\frac{\partial \vec{\nabla} h_3}{\partial t} = \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot (\alpha_s s_\lambda \vec{u}) \right) \quad (4.81)$$

Pour le premier terme dû à la fluctuation lagrangienne d'entropie (la partie linéaire) on établit l'ordre de grandeur

$$\left| \frac{\partial h_1}{\partial t} \right| = \alpha_s \left| \frac{d\delta s_\lambda}{dt} \right| \approx \frac{2\Gamma_1}{\alpha_c} R_\xi \omega_0 \rho_0 u_\Lambda^2 \left(\frac{\lambda}{\Lambda} \right)^{1/3} \quad (4.82)$$

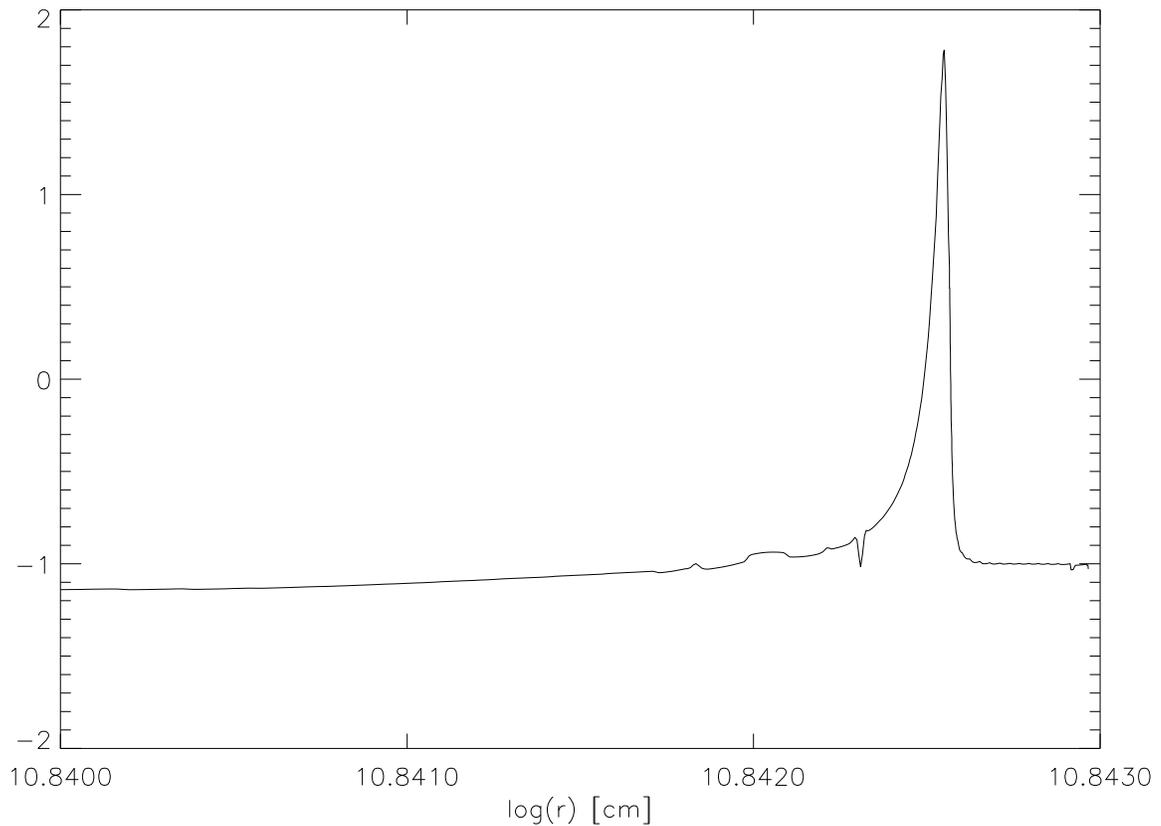


FIG. 4.2 – La courbe représente pour le modèle solaire considéré la quantité $H_P \left(\frac{d \ln \alpha_s}{dr} \right)$ en fonction du rayon. Cette quantité prend des valeurs absolues voisines de 1 et présente un maximum en haut de la zone superadiabatique. Puisque que $\alpha_s = \rho_0 T_0 \nabla_{ad} \Gamma_1$, le pic observé s'explique dès lors par le changement d'état d'ionisation de l'hydrogène qui entraîne une variation rapide du gradient adiabatique (∇_{ad}) et de l'indice adiabatique (Γ_1).

On a pour cela supposé que la fluctuation lagrangienne agit comme un scalaire passif. Ce terme source se trouve être du même ordre de grandeur que le terme de Reynolds. On montrera toutefois qu'il n'est pas contributif dans le processus d'excitation des oscillations (c.f. section 4.8.1). On va donc l'écartier dès à présent.

La grandeur α_s varie comme la stratification, le gradient appliqué à cette dernière quantité varie alors comme $\approx 1/H_P$ où H_P est l'échelle des hauteurs. Pour s'en convaincre on a tracé sur la figure 4.2 la quantité $H_P \left(\frac{d \ln \alpha_s}{dr} \right)$. On a par conséquent $\left| H_P \left(\frac{d \ln \alpha_s}{dr} \right) \right| \sim 1$ dans la majeure partie de la région d'excitation. On déduit ainsi pour le second terme l'ordre de grandeur :

$$\left| \frac{\partial \vec{\nabla} h_2}{\partial t} \right| = \left| \vec{\nabla} (s_\lambda \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \alpha_s) \right| \approx 2\Gamma_1 R_\xi \frac{u_\Lambda}{\Lambda} \rho_0 u_\Lambda^2 \left(\frac{\lambda}{\Lambda} \right)^{2/3} \quad (4.83)$$

Enfin pour le troisième terme, le gradient agissant sur $\alpha_s s_\lambda \vec{u}$ peut être par intégration par partie transféré à la dérivée de la fonction propre, il vient ainsi l'ordre de grandeur suivant

$$\left| \frac{\partial \vec{\nabla} h_3}{\partial t} \right| \approx \frac{2\Gamma_1}{\alpha_c} \frac{dR_\xi}{dr} u_\Lambda \rho_0 u_\Lambda^2 \left(\frac{\lambda}{\Lambda} \right)^{2/3} \quad (4.84)$$

L'échelle de variation de la dérivée des fonctions propres est inférieure à H_P . On montre en effet numériquement que $R_\xi \gg H_P^{-1}$ i.e. autrement dit que les fonctions propres varient à des échelles bien inférieures à

H_P en haut de la zone convective. Il en est de même pour les dérivées d'ordre supérieur. Par conséquent si on remplace dans l'équation 4.85, (dR_ξ/dr) par R_ξ/H_P on obtient une limite inférieure du terme $|\partial_t \vec{\nabla} h_3|$. Ceci nous donne l'ordre de grandeur

$$\left| \frac{\partial \vec{\nabla} h_t}{\partial t} \right| \approx 2\Gamma_1 R_\xi \frac{u_\Lambda}{\Lambda} \rho_0 u_\Lambda^2 \left(\frac{\lambda}{\Lambda} \right)^{2/3} \quad (4.85)$$

On établit alors à partir des équations 4.83 et 4.85 l'ordre de grandeur du terme source entropique

$$\left| \frac{\partial \vec{\nabla} h_t}{\partial t} \right| \approx 4\Gamma_1 R_\xi \omega_\Lambda \rho_0 u_\Lambda^2 \left(\frac{\lambda}{\Lambda} \right)^{2/3} \quad (4.86)$$

avec $\omega_\Lambda \equiv u_\Lambda/\Lambda$.

Le rapport entre le terme entropique (4.86) et le terme de Reynolds (4.78) vaut $2\Gamma_1 \omega_\Lambda/\omega_0$ montrant ainsi que le terme entropique injecte plus efficacement de l'énergie dans les oscillations de basse fréquence. Ce constat avait déjà été établi par GK, toutefois les auteurs ont estimé négligeable la contribution associée au terme source entropique et l'ont par conséquent négligé. On retrouvera ce résultat explicitement dans la formulation asymptotique de la puissance injectée dans les modes, formulation que l'on établira dans la section 4.11.

Le forçage des oscillations est maximale lorsque $\omega_0 \tau_\lambda \lesssim 1$ (c.f. section 4.7). En haut de la zone superadiabatique les fluctuations des vitesses turbulentes et de l'entropie sont les plus larges tandis que les durées de vie des plus gros tourbillons (τ_Λ) sont les plus courtes (c.f. 3.1.3). Par conséquent dans ces régions l'excitation est la plus grande. En particulier, puisque $\omega_\lambda = 2\pi/\tau_\lambda$ et $\tau_\lambda < \tau_\Lambda$ (équation 4.66), la puissance injectée dans les modes est maximale pour la fréquence ω_0 telle que $\omega_0 \approx \omega_\Lambda$.

Dans l'estimation de l'ordre de grandeur des termes sources on ne va alors considérer que les fréquences d'oscillation telles que $\omega_0 \approx \omega_\Lambda$. Dans le cas solaire il s'agit des oscillations de l'ordre de 5 mn tandis que pour Procyon il s'agit de modes de période de l'ordre de 15 mn.

On déduit alors immédiatement à partir de l'équation 4.86 que **le terme entropique est du même ordre de grandeur que le terme de Reynolds** (équation 4.78). Cette conclusion est clairement en désaccord avec les affirmations de GK et de B92 et confirme les conclusions de GMK et de Stein and Nordlund [1991].

En suivant GMK il apparaît judicieux de définir le rapport \mathcal{R} comme suit

$$\mathcal{R} \equiv \frac{\alpha_s \tilde{s}}{\rho_0 u_0^2} \quad (4.87)$$

Cette quantité mesure approximativement le rapport entre la magnitude des termes entropiques et la magnitude du terme de Reynolds. Il vient à partir des équations 3.87 et 4.70, l'expression

$$\mathcal{R} = \frac{6}{\alpha_c} \left(\frac{\partial \ln P_0}{\partial \ln \rho_0} \right)_s = \frac{6}{\alpha_c} \Gamma_1 \quad (4.88)$$

Cette quantité vaut environ ~ 5 pour $\alpha_c = 2$ et $\Gamma_1 = \gamma = 5/3$. On s'attend donc à ce que **le terme source entropique domine le terme de Reynolds**.

4.6.3 Termes sources négligeables

On va montrer maintenant que le terme source \mathcal{C} (équation 4.45) est négligeable devant le terme de Reynolds ce qui justifiera le fait de l'avoir écarté. Décomposons comme suit ce terme en trois parties

$$\vec{\mathcal{C}}_1 = \frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{\nabla} : \rho_t \vec{u} \vec{u} \right) \quad (4.89)$$

$$\vec{\mathcal{C}}_2 = \vec{\nabla} \left(\alpha_{\rho s} \rho_t \frac{\partial s_t}{\partial t} + \alpha_{\rho s} s_t \frac{\partial \rho_t}{\partial t} + 2\alpha_{\rho \rho} \rho_t \frac{\partial \rho_t}{\partial t} + \alpha_{s s} \frac{\partial s_t^2}{\partial t^2} \right) \quad (4.90)$$

$$\vec{\mathcal{C}}_3 = \vec{\nabla} \left(\alpha_s \frac{\rho_t}{\rho_0} \vec{u} \cdot \vec{\nabla} s_0 \right) \quad (4.91)$$

On montre sans difficulté que

$$|\vec{\mathcal{C}}_1| \approx R_\xi M_t^2 \omega_0 \rho_0 u_\Lambda^2 \left(\frac{\lambda}{\Lambda} \right) \quad (4.92)$$

$$|\vec{\mathcal{C}}_2| \approx R_\xi M_t^4 \omega_0 \rho_0 c_s^2 \rho_0 \left(\frac{2\alpha_{\rho s}}{\alpha_s} + 2\alpha_{\rho\rho} + \frac{\alpha_{ss}}{\alpha_s^2} \right) \left(\frac{\lambda}{\Lambda} \right)^{2/3} \quad (4.93)$$

Dans le cas du gaz parfait on établit les relations suivantes

$$\alpha_s = \frac{P_0}{C_v} \quad \alpha_{\rho\rho} = \frac{\gamma - 1}{2} \frac{c_s^2}{\rho_0} \quad \alpha_{ss} = \frac{c_s^2 \rho_0}{2C_v^2} \quad \alpha_{\rho s} = \frac{c_s^2}{C_v} \quad (4.94)$$

avec $\gamma = C_P/C_v$. Il vient alors

$$\rho_0 \left(\frac{2\alpha_{\rho s}}{\alpha_s} + 2\alpha_{\rho\rho} + \frac{\alpha_{ss}}{\alpha_s^2} \right) = \frac{1}{2} \gamma^2 + 3\gamma - 1 \approx 5 \quad (4.95)$$

d'où l'on déduit

$$|\vec{\mathcal{C}}_2| \approx R_\xi M_t^2 \omega_0 \rho_0 u_\Lambda^2 \left(\frac{\lambda}{\Lambda} \right)^{2/3} \quad (4.96)$$

Pour le troisième terme il suffit de rappeler que dans la théorie de la longueur de mélange l'entropie transportée par les grosses bulles (*i.e.* la différence d'entropie entre la bulle et le milieu ambiant) est directement reliée au gradient de l'entropie du milieu à l'équilibre comme (GMK)

$$s_\Lambda = -\frac{\Lambda}{2} \frac{ds_0}{dr} \quad (4.97)$$

Ceci permet d'estimer le troisième terme comme suit

$$|\vec{\mathcal{C}}_3| \approx R_\xi M_t^2 \omega_\Lambda \rho_0 u_\Lambda^2 \left(\frac{\lambda}{\Lambda} \right)^{2/3} \quad (4.98)$$

Il apparaît clairement que le rapport entre le terme \mathcal{C} et le terme de Reynolds est d'ordre M_t^2 . **Le terme \mathcal{C} est par conséquent négligeable.**

4.7 Contribution du terme source de Reynolds

On suppose que les termes $(\rho_0 \nabla_1^i \xi^j)$ et $(\rho_0 \nabla_2^i \xi^j)$ dans l'équation 4.60 demeurent constants à l'échelle des tourbillons bien que les plus grands tourbillons soient du même ordre de grandeur que l'échelle de pression. Cette hypothèse implique que $\nabla_r^i \xi^j \simeq 0$ et permet les substitutions suivantes dans l'équation 4.60

$$\nabla_1^i \xi^j \rightarrow \nabla_0^i \xi^j \quad \nabla_2^i \xi^j \rightarrow \nabla_0^i \xi^j \quad (4.99)$$

La validité de cette approximation sera justifiée à posteriori à la fin de cette section, et à partir de l'équation 4.99, la contribution du stress de Reynolds peut s'écrire comme

$$C_R^2 = \int d^3 x_0 \rho_0^2 \nabla_0^i \xi^j \nabla_0^l \xi^m \int d\tau d^3 r e^{-i\omega_0 \tau} \langle u_i' u_j' u_l'' u_m'' \rangle \quad (4.100)$$

où l'on a défini les notations suivantes

$$\vec{u}' = \vec{u}(\vec{x}_0 - \frac{\vec{r}}{2}, t_0 - \frac{\tau}{2}) \quad \vec{u}'' = \vec{u}(\vec{x}_0 + \frac{\vec{r}}{2}, t_0 + \frac{\tau}{2}) \quad (4.101)$$

A l'aide de la relation de Parseval-Plancherel

$$\int d\tau d^3 r F(\vec{r}, \tau) G(\vec{r}, \tau) = (2\pi)^4 \int d\omega d^3 k \hat{F}(\vec{k}, \omega) \hat{G}(\vec{k}, \omega) \quad (4.102)$$

où \hat{F} et \hat{G} sont les transformées de Fourier de F et G respectivement. A l'aide de l'approximation quasi-normale (c.f. section 3.2.4 et l'équation 3.68) et de l'équation 3.61 on obtient la relation²¹

$$\int d\tau d^3r e^{-i\omega_0\tau} \langle u'_i u'_j u''_l u''_m \rangle = (2\pi)^4 \int d\omega d^3k \times \left[\phi_{il}(\vec{k}, \omega_0) \phi_{jm}(\vec{k}, \omega) + \phi_{im}(\vec{k}, \omega_0) \phi_{jl}(\vec{k}, \omega) \right] \quad (4.103)$$

A l'aide de la condition de normalisation 3.72 et de l'équation Eq.(4.103), le terme source de Reynolds peut s'écrire comme

$$C_R^2 = \pi^2 \int d^3x_0 (\rho_0^2 \nabla_0^i \xi^j \nabla_0^l \xi^m) \int d^3k (T_{ijlm} + T_{ijml}) \frac{E^2(k)}{k^4} \chi_k(\omega_0) \quad (4.104)$$

où

$$T_{ijklm} = \left(\delta_{il} - \frac{k_i k_l}{k^2} \right) \left(\delta_{jm} - \frac{k_j k_m}{k^2} \right)$$

Nous avons vu que l'excitation par la convection turbulente a lieu en haut de la zone convective (section 4.6.2). Dans cette région de l'étoile, les fonctions propres ξ^j d'ordre radial élevé sont essentiellement radiales et se propagent dans une atmosphère quasi plan-parallèle de telle sorte que l'équation 4.104 se réduit à

$$C_R^2 = 2\pi^2 \int_0^M dm \rho_0 \left(\frac{d\xi_r}{dr} \right)^2 \int d^3k \left(1 - \frac{k_z^2}{k^2} \right)^2 \frac{E^2(k)}{k^4} \chi_k(\omega_0) \quad (4.105)$$

Le terme $(1 - k_z^2/k^2)^2$ dans l'équation 4.105 dérive du caractère supposé incompressible de la turbulence. Il permet d'établir que ce sont les modes turbulents dont les vecteurs d'onde \vec{k} sont horizontaux qui contribuent le plus efficacement à l'excitation des modes de pulsation radiaux (quasi-verticaux en haut de la zone convective), tandis que les modes turbulents verticaux ($\vec{k} = k \hat{e}_z$) sont non contributifs. Puisque la turbulence est incompressible on a $\vec{k} \cdot \vec{u} = 0$. Ce sont donc les modes turbulents dont les vitesses sont verticales qui contribuent le plus efficacement à l'excitation des oscillations radiales. Dans l'hypothèse d'une turbulence isotrope l'intégration sur les angles solides dans l'équation 4.105 ne pose pas de problème et introduit un "facteur de forme" constant égal à 16/15 (c.f. Annexe C).

Si la turbulence n'est pas isotrope le spectre cinétique $E(\vec{k})$ ne dépend plus seulement de la norme de \vec{k} et l'intégration sur les angles solides dépend de la dépendance angulaire de $E(\vec{k})$. Mais il n'existe pas de description analytique d'une turbulence anisotrope.

La description de Gough [1977] de la MLT tente néanmoins de prendre en compte l'anisotropie des grosses bulles de la MLT en introduisant un facteur d'anisotropie Φ (équation 3.25). Cela revient à dire, lorsque l'on attribue une dimension finie aux tourbillons, que les gros tourbillons de la MLT sont difformes. On montre en effet que si Ω désigne le rapport entre la dimension horizontale et la dimension verticale des gros tourbillons, on a la relation (c.f. Annexe C)

$$\Phi = 1 + 2 \Omega^2 \quad (4.106)$$

de sorte que si $\Phi < 3$ les tourbillons apparaissent allongés dans le sens vertical ($\Phi = 3$ correspond au cas isotrope). La valeur $\Phi = 2$ correspond à la MLT classique tandis que le modèle convectif utilisé par Balmforth and Gough [1990] et Houdek *et al.* [1999] suggère des valeurs de Φ inférieures (voir table C). L'élongation verticale des tourbillons correspond à une élongation de la composante horizontale \vec{k}_h des vecteurs d'onde associés aux tourbillons. Du fait de la présence du terme $(1 - k_z^2/k^2)^2$ dans l'équation 4.105, cette élongation renforce la contribution des modes turbulents horizontaux.

Outre les effets géométriques, l'introduction du facteur d'anisotropie donne une contrainte sur la normalisation du spectre d'énergie cinétique qui est différente du cas purement isotrope (équation 3.86).

La théorie de la longueur de mélange ne s'intéresse qu'à une taille unique de tourbillons et le facteur d'anisotropie de Gough a été introduit dans ce cadre là. Ici on s'intéresse à la contribution de tous les tourbillons dans le spectre. Aussi, pour simplifier, les effets géométriques dus à l'anisotropie seront pris en compte en étendant la déformation des gros tourbillons à tous les tourbillons dans la cascade turbulente.

²¹ Notez que le premier terme à droite de l'équation 3.68 ne donne pas de contribution lorsqu'il est inséré dans l'équation 4.103.

Toutefois la description de la turbulence du point de vue énergétique sera dans cette approximation maintenue isotrope tout le long de la cascade.

Ces considérations nous permettent d'effectuer sans difficulté l'intégration sur les angles solides dans l'équation 4.105 (c.f. Annexe C) et de définir un facteur d'anisotropie \mathcal{G} traduisant les effets géométriques d'un écart à l'anisotropie telle qu'elle est envisagée par Gough. On établit ainsi l'expression (c.f. Annexe C)

$$C_R^2 = 4\pi^3 \mathcal{G} \int_0^M dm \rho_0 \left(\frac{d\xi_r}{dr} \right)^2 \int_0^\infty dk \frac{E^2(k)}{k^2} \chi_k(\omega_0) \quad (4.107)$$

où le facteur d'anisotropie \mathcal{G} dépend de Φ et a été évalué pour différentes valeurs de Φ dans l'annexe C.

Finalement en introduisant u_0 la contribution de Reynolds se met sous la forme

$$C_R^2 = 4\pi^3 \mathcal{G} \int_0^M dm \rho_0 u_0^4 \left(\frac{d\xi_r}{dr} \right)^2 \int_0^\infty \frac{dk}{k^2} \frac{E(k)}{u_0^2} \frac{E(k)}{u_0^2} \chi_k(\omega_0) \quad (4.108)$$

Le terme $\chi_k(\omega_0)$ met en évidence la résonance entre l'oscillation et les tourbillons. Ce terme prend des valeurs significatives pour $\omega_k \gtrsim \omega_0$. Les tourbillons tels que $\omega_k \gtrsim \omega_0$ contribuent ainsi majoritairement à l'intégrale, et donc à l'excitation globale. Ce résultat converge avec l'assertion de Goldreich and Kumar [1990] à savoir que l'émission acoustique provient des tourbillons tels que $\omega_0 \tau_k \lesssim 1$. Nous avons

$$\frac{\omega_k}{\omega_0} \approx \frac{k u_k}{k_{osc} c_s} \gtrsim \frac{k}{k_{osc}} M_t \gtrsim 1 \quad (4.109)$$

où k_{osc} est le vecteur d'onde du mode et u_k la vitesse du tourbillon de nombre d'onde k . Les tourbillons de nombre d'onde k très supérieur au nombre d'onde de l'oscillation ($k \gg k_{osc}$) sont donc ceux qui contribuent le plus à l'excitation. Les oscillations et les tourbillons qui contribuent à l'excitation sont par conséquent bien découplés.

D'autre part on a vu que la stratification n'affecte pas l'émission acoustique (c.f. section 4.2 et Goldreich and Kumar [1990]). L'approximation qui consiste à découpler le terme $(\rho_0^2 \nabla_1^i \xi^j \nabla_2^k \xi^l)$ dans l'intégration sur \vec{r} dans l'équation 4.60 est valide puisque cette quantité demeure constante à l'échelle des tourbillons contributifs. Cette conclusion justifie par ailleurs l'utilisation d'une turbulence homogène car stratification et oscillations correspondent à des échelles de longueur bien plus grandes que celles des tourbillons contributifs.

4.8 Contribution des termes sources entropiques

La substitution de l'équation 4.99 dans l'équation 4.62 aboutit à

$$C_S^2 = \int d^3 x_0 (\nabla_0^i \xi_i)^2 \int d\tau e^{-i\omega_0 \tau} \int d^3 r \langle h_t' h_t'' \rangle \quad (4.110)$$

où les quantités indéxées par ' et '' sont évaluées respectivement aux positions $[\vec{x}_0 - \frac{\vec{r}}{2}, t_0 - \frac{\tau}{2}]$ et $[\vec{x}_0 + \frac{\vec{r}}{2}, t_0 + \frac{\tau}{2}]$. L'expression du terme source entropique h_t est obtenue à partir de l'équation 4.41 par intégration par partie effectuée dans l'équation 4.52. L'intégration sur le temps du premier terme à droite de l'équation 4.41 donne

$$h_t(\vec{x}, t) = -\alpha_s \delta s_t + q_t(\vec{x}, t) \quad (4.111)$$

avec

$$q_t(\vec{x}, t) \equiv \int_{-\infty}^t dt' \left(\vec{\nabla} \cdot (\alpha_s \vec{u} s_t) - s_t \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \alpha_s \right) \quad (4.112)$$

La contribution du terme croisé entre le terme $\alpha_s \delta s_t$ - linéaire en terme de fluctuations turbulentes - et le terme q_t - non linéaire - s'annule (c.f. Annexe B) de sorte que la contribution de l'entropie peut se réécrire comme

$$C_S^2 = \int d^3 x_0 (\nabla_0^i \xi_i)^2 \int d\tau e^{-i\omega_0 \tau} \int d^3 r \left[\langle (\alpha_s \delta s_t') (\alpha_s \delta s_t'') \rangle + \langle q_t' q_t'' \rangle \right] \quad (4.113)$$

4.8.1 Contribution du terme linéaire

La contribution de la fluctuation lagrangienne d'entropie est proportionnelle à

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \int d^3r e^{-i\omega_0\tau} \langle \delta s'_t \delta s''_t \rangle \quad (4.114)$$

Il a été établi dans la section 3.2.8 qu'aussi bien la fluctuation eulérienne de l'entropie s_t que sa fluctuation lagrangienne agissent comme des scalaires passifs. Par conséquent la loi d'échelle de δs_t est identique à celle de s_t si bien que le produit de corrélation $\langle \delta s'_t \delta s''_t \rangle$ est proportionnel au produit de corrélation $\langle s'_t s''_t \rangle$ dont la transformée de Fourier est donnée par l'équation 3.98 .

A l'aide de l'équation 3.98 la quantité 4.114 se ramène à

$$\int d\tau \int d^3r e^{-i\omega_0\tau} \langle \delta s'_t \delta s''_t \rangle \propto \int d\tau \int d^3r e^{-i\omega_0\tau} \langle s' s'' \rangle = (2\pi)^4 \phi_s(\vec{0}, \omega_0) \quad (4.115)$$

Nous considérons la décomposition de l'équation 3.99 dans laquelle la fonction $\chi_k(\omega)$ sera dans le raisonnement qui va suivre prise égale à la forme gaussienne de l'équation 3.74.

Le spectre d'entropie $E_s(k)$ décroît en k^2 au voisinage de $k = 0$ [Tennekes, 1975; Tennekes and Lumley, 1982, Chap 8.6] si bien que $E_s(k) \rightarrow 0$ et $u_k \rightarrow 0$ lorsque $k \rightarrow 0$. D'autre part puisque $\omega_k = \lambda^{-1} k u_k$ (c.f. section 3.2.5), on a $\omega_k \rightarrow 0$ lorsque $k \rightarrow 0$. Par conséquent on a $\chi_k(\omega_0) \rightarrow 0$ lorsque $k \rightarrow 0$.

Les comportements asymptotiques de $E_s(k)$ et de $\chi_k(\omega_0)$ au voisinage de $k = 0$ nous permettent donc d'établir, en vertu de la décomposition 3.99 et de l'équation 3.98, que la quantité $\phi_s(\vec{0}, \omega_0)$ dans l'équation 4.115 s'annule. Par conséquent la contribution du terme linéaire est nulle. Notez que aucune hypothèse sur $E_s(k)$ n'a été nécessaire pour établir ce résultat. Par conséquent ce résultat est valide pour tout spectre d'énergie, pour peu toutefois que la décomposition 3.99 soit valide.

D'autre part on montre qu'il en va de même pour tout terme source linéaire en terme du champ de vitesse turbulent. En effet soit un terme source de la forme $\vec{S}_u = \alpha(\vec{x}_0) \vec{u}(\vec{r}, \tau)$ où $\alpha(\vec{x}_0)$ est une quantité à l'équilibre qui varie à l'échelle de la stratification. Ce terme source introduirait une contribution à l'excitation proportionnelle à

$$\alpha^2 \int d\tau \int d^3r e^{-i\omega_0\tau} \langle u'_i u''_j \rangle = \alpha^2 (2\pi)^4 \phi_{ij}(\vec{0}, \omega_0) \quad (4.116)$$

où l'on a introduit la transformée de Fourier $\phi_{ij}(\vec{k}, \omega)$ du produit de corrélation $\langle u'_i u''_j \rangle$. On établit de la même façon le comportement asymptotique de $\phi_{ij}(\vec{k}, \omega_0)$ au voisinage de $k = 0$ et l'on montre ainsi que la contribution associée à S_u s'annule. Ce résultat justifie, par ailleurs, le fait d'avoir écarté dans la section 4.4 le terme source provenant de l'action de l'opérateur linéaire $(\partial^2/\partial t^2 - \vec{L})$ sur \vec{u} .

Ce résultat peut être interprété comme suit : en terme d'excitation des modes une fluctuation linéaire d'une quantité turbulente agit en terme d'un produit de corrélation d'ordre deux, i.e. sous la forme $\langle s'_t s''_t \rangle$, où s_t est la quantité turbulente. La turbulence et l'oscillation sont couplées, dans le domaine Fourier, par le terme de phase $e^{-i\omega_0\tau}$ et par le spectre temporel $\chi_k(\omega)$, qui mesure la cohérence des éléments turbulents. Par conséquent la résonance entre turbulence et l'oscillation s'effectue au voisinage de la fréquence ω_0 et fait donc intervenir, d'après la relation 4.109, les tourbillons tels que $k \gtrsim k_{osc} M_t^{-1}$. Par opposition la composante spatiale de $\langle s'_t s''_t \rangle$ favorise les tourbillons de plus grande taille ($k \rightarrow 0$). Ces deux effets sont clairement incompatibles et conduisent à annuler la contribution associée.

Cela ne se produit pas avec la contribution du terme de Reynolds car ce terme met en jeu un produit de corrélation d'ordre quatre. D'après la QNA, ce produit peut se décomposer en terme de deux produits de corrélations du second ordre. Le couplage entre oscillation et modes turbulents devient alors non-linéaire et conduit à une contribution effective.

4.8.2 Contribution du terme non-linéaire

On considère maintenant la contribution associée au terme q_t (équation 4.112). Ce terme mettant en jeu des quantités non-linéaires en terme de fluctuations turbulentes résulte de l'advection du scalaire passif par le champ de vitesse turbulente. Puisqu'il a été établi que le terme linéaire est non contributif, la contribution du terme source entropique se réduit alors à

$$\begin{aligned} C_S^2 &= \int d^3x_0 \left(\vec{\nabla}_0 \cdot \vec{\xi} \right)^2 \int d\tau e^{-i\omega_0\tau} \int d^3r \int_{-\infty}^{\tau/2} dt_3 \int_{-\infty}^{-\tau/2} dt_4 \\ &\times \left\{ \vec{\nabla}_1 \alpha_s \cdot \left\langle (s_t \vec{u})_3 (s_t \vec{u})_4 \right\rangle \cdot \vec{\nabla}_2 \alpha_s - 2 \vec{\nabla}_1 \alpha_s \cdot \left\langle (s_t \vec{u})_3 \vec{\nabla}_2 \cdot (\alpha_s s_t \vec{u})_4 \right\rangle + \left\langle \vec{\nabla}_1 \cdot (\alpha_s s_t \vec{u})_3 \vec{\nabla}_2 \cdot (\alpha_s s_t \vec{u})_4 \right\rangle \right\} \end{aligned} \quad (4.117)$$

où les quantités indexées respectivement par 3 et 4 sont évaluées aux positions $[\vec{x}_0 - \vec{r}/2, t_3]$ et $[\vec{x}_0 + \vec{r}/2, t_4]$ respectivement. Comme cela a déjà été évoqué pour le terme source de Reynolds, stratification et oscillations sont bien découplées des tourbillons qui contribuent effectivement à l'excitation. Par conséquent α_s demeure constant à l'échelle des tourbillons contributifs, ceci implique que $\nabla_1^i \alpha_s \simeq \nabla_0^i \alpha_s \simeq \nabla_2^i \alpha_s$. Par ailleurs, en effectuant une intégration par partie, similaire à celles effectuées dans la section 4.5, les gradients ∇_1 et ∇_2 agissant sur des termes du type $\alpha_s s_t \vec{u}$ agissent désormais sur les fonctions propres. Finalement en vertu des substitutions de l'équation 4.99, les opérateurs ∇_1 et ∇_2 peuvent être à leur tour remplacés par le gradient à grande échelle ∇_0 . Ces considérations ramènent l'équation 4.118 à

$$C_S^2 = \int d^3 x_0 \left(\alpha_s \vec{\nabla}_0 \cdot \vec{\xi} \right)^2 g^{ij} \int d\tau e^{-i\omega_0 \tau} \int \int d^3 r \times \int_{-\infty}^{\tau/2} dt_3 \int_{-\infty}^{-\tau/2} dt_4 \langle (s_t u_i)_3 (s_t u_j)_4 \rangle \quad (4.118)$$

avec

$$g^{ij} = \nabla_0^i (\ln |\alpha_s|) \nabla_0^j (\ln |\alpha_s|) - 2 \nabla_0^i (\ln |\alpha_s|) \nabla_0^j (\ln |\vec{\nabla}_0 \cdot \vec{\xi}|) + \nabla_0^i (\ln |\vec{\nabla}_0 \cdot \vec{\xi}|) \nabla_0^j (\ln |\vec{\nabla}_0 \cdot \vec{\xi}|) \quad (4.119)$$

La QNA (section 3.2.4) nous permet d'écrire

$$\langle u_3^i u_4^j s_3 s_4 \rangle = \langle u_3^i u_4^j \rangle \langle s_3 s_4 \rangle + \langle s_3 u_3^i \rangle \langle s_4 u_4^j \rangle + \langle s_3 u_4^j \rangle \langle s_4 u_3^i \rangle \quad (4.120)$$

Les termes du type $\langle u_3^i s_3 \rangle$ et $\langle u_3^i s_4 \rangle$ s'annulent parce que s_t est un scalaire et que le champ \vec{u} est incompressible [Lesieur, 1997, Chap V-8] et l'équation 4.118 se réduit à

$$C_S^2 = \int d^3 x_0 \left(\alpha_s \vec{\nabla}_0 \cdot \vec{\xi} \right)^2 g_{ij} \int d\tau e^{-i\omega_0 \tau} \int d^3 r \int_{-\infty}^{\tau/2} dt_3 \int_{-\infty}^{-\tau/2} dt_4 \langle u_3^i u_4^j \rangle \langle s_3 s_4 \rangle \quad (4.121)$$

Un calcul donne (c.f. Annexe D)

$$C_S^2 = \int d^3 x_0 \left(\alpha_s \vec{\nabla}_0 \cdot \vec{\xi} \right)^2 g^{ij} \frac{(2\pi)^4}{\omega_0^2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int d^3 k \phi_{ij}(\vec{k}, \omega) \phi_s(\vec{k}, \omega_0 + \omega) \quad (4.122)$$

Comme pour la contribution du terme de Reynolds, le gradient de la stratification est radial et l'on invoque à nouveau l'approximation plan-parallèle. D'autre part les effets géométriques, dus à notre traitement anisotrope de la théorie de la longueur de mélange, seront pris en compte de la même façon qu'ils l'ont été pour le terme de Reynolds (c.f. section 4.7)

Ces considérations nous permettent d'établir (c.f. Annexe C)

$$C_S^2 = \frac{4\pi^3 \mathcal{H}}{\omega_0^2} \int d^3 x_0 \left(\alpha_s \frac{d\xi_r}{dr} \right)^2 g_r \int dk \frac{E_s(k)E(k)}{k^2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \chi_k(\omega_0 + \omega) \chi_k(\omega) \quad (4.123)$$

avec

$$g_r = \frac{1}{r^2} \left(\frac{d}{d \ln r} \ln |\alpha_s| - \frac{d}{d \ln r} \ln \left| \frac{d}{dr} \xi_r \right| \right)^2 \quad (4.124)$$

et où \mathcal{H} est un facteur d'anisotropie dépendant du facteur d'anisotropie de Gough (c.f. Annexe C).

La contribution de l'entropie peut s'écrire comme

$$C_S^2 = 4\pi^3 \mathcal{H} \int_0^M dm \rho_0 u_0^4 \mathcal{R}^2 \mathcal{F}^2 \left(\frac{d\xi_r}{dr} \right)^2 \left(\frac{u_0}{\Lambda \omega_0} \right)^2 \times \int \frac{dk}{k^2} \frac{E_s(k)E(k)}{\tilde{s}^2 u_0^2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \chi_k(\omega_0 + \omega) \chi_k(\omega) \quad (4.125)$$

où l'on a introduit $\tilde{s}^2 \equiv \langle s_t^2(\vec{x}_0) \rangle$, le facteur \mathcal{R} (équation 4.87) ainsi que le facteur

$$\mathcal{F}^2 \equiv \Lambda^2 g_r \quad (4.126)$$

Notez que le spectre temporel $\chi_k(\omega)$, contrairement à la contribution de Reynolds, intervient sous forme d'un produit de convolution. Formellement cela est dû au fait que le terme source non-linéaire q_t (équation 4.112) résulte de intégration des termes d'advection des fluctuations de l'entropie.

4.9 Formulation globale

L'insertion des équations 4.108 et 4.125 dans 4.64 établit l'expression générale de la moyenne quadratique de l'amplitude

$$\langle |A|^2 \rangle = \frac{\pi^3}{2\eta(\omega_0 I)^2} \int_0^M dm \rho_0 u_0^4 \left(\frac{d\xi_r}{dr} \right)^2 \int_0^\infty \frac{dk}{k^2} \frac{E(k)}{u_0^2} F(k, \omega_0) \quad (4.127)$$

où

$$F(k, \omega_0) \equiv \mathcal{G} \frac{E(k)}{u_0^2} \chi_k(\omega_0) + \mathcal{H} \mathcal{R}^2 \mathcal{F}^2 \frac{E_s(k)}{\tilde{s}^2} \left(\frac{u_0}{\Lambda \omega_0} \right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \chi_k(\omega_0 + \omega) \chi_k(\omega) \quad (4.128)$$

L'expression des facteurs d'anisotropies \mathcal{G} et \mathcal{H} est donnée en Annexe C.

Dans le régime inertiel-convectif, les fluctuations d'entropie se comportent approximativement comme la vitesse, en u_k si bien que la loi d'échelle sur $E_s(k)$ est en u_k^2 dans le régime inertiel-convectif. Par conséquent la contribution du terme source entropique agit, comme la contribution de Reynolds, quadratiquement en u_k^4 . On retrouve la même forme quadratique dans la formulation due à GMK. Toutefois leur formulation a été développée d'une manière que l'on n'a pas comprise. En effet pour établir l'équation 26 à partir de l'équation 24 il faut supposer que la fluctuation turbulente d'entropie s_k vérifie une loi d'échelle du type u_k^2 . Ceci est en contradiction avec l'hypothèse concernant s_k à savoir qu'il s'agit d'un scalaire passif fluctuant en u_k .

Cette formulation inclut le facteur \mathcal{F} qui fait intervenir le gradient de $\alpha_s = (\partial P / \partial s)_\rho$ ainsi que la dérivée seconde des fonctions propres. Ces deux quantités ne sont présentes ni dans GMK ni dans B92 puisque que notre terme source entropique résulte de l'advection des fluctuations d'entropie par le champ turbulent de vitesse. Le terme source entropique envisagé par GMK et B92 résulte des fluctuations lagrangiennes d'entropie lesquelles se comportent comme des scalaires passifs. La contribution associée n'est pas présente ici car il a été démontré en section 4.8.1 qu'elle s'annule du fait du caractère linéaire de la source associée.

La présente formulation a été établie de façon consistante pour n'importe quel spectre d'énergie cinétique et d'entropie ainsi que pour toute forme de spectre temporel vérifiant 3.66 et 3.99. Elle sera utilisée avec différents spectres turbulents au chapitre 5 dans le cas solaire. Dans la section suivante on considère certains cas particuliers dans le but de comparer notre formulation avec celle d'autres auteurs.

4.10 Exemples

4.10.1 Spectre temporel gaussien

On définit les variables suivantes

$$K = \frac{k}{k_0} \quad , \quad u_K = \frac{u_k}{u_0} \quad , \quad \omega_\Lambda = \frac{2\pi u_0}{\Lambda} \quad (4.129)$$

La moyenne quadratique de l'amplitude s'écrit pour le spectre temporel de forme gaussienne (équation 3.74) et en considérant les notations 4.129

$$\langle |A|^2 \rangle = \frac{\lambda \beta^4}{32\pi \eta (\omega_0 I)^2} \int_0^M dm \rho_0 u_0^3 \Lambda^4 \left(\frac{d\xi_r}{dr} \right)^2 \times [\mathcal{G} \mathcal{S}_R(X) + \mathcal{H} \mathcal{R}^2 \mathcal{F}^2 \mathcal{S}_S(X)] \quad (4.130)$$

avec les "fonctions sources"

$$\mathcal{S}_R(X) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{dK}{K^3} \frac{1}{u_K} \frac{k_0^2 E^2(K)}{u_0^4} e^{-Z^2} \quad (4.131)$$

$$\mathcal{S}_S(X) = \frac{X^{-2}}{2(2\pi)^{5/2}} \int_0^\infty \frac{dK}{K^3} \frac{1}{u_K} \left(\frac{k_0 E_S(K)}{\tilde{s}^2} \right) \left(\frac{k_0 E(K)}{u_0^2} \right) \times e^{-(Z\sqrt{2})^2} \quad (4.132)$$

où $X(m, \omega_0) \equiv \omega_0 / \omega_\Lambda$ et $Z = \lambda \beta X / 2K u_K$.

Notez que la moyenne quadratique de l'amplitude est très sensible aux paramètres β et λ car d'une part elle croît comme $\lambda \beta^4$ et que d'autre part la quantité $\lambda \beta$ intervient dans les fonctions exponentielles des termes sources (équations 4.131 et 4.132). L'influence des paramètres sur les estimations des puissances sera étudiée en détail au chapitre 5.

4.10.2 Spectre de Kolmogorov

La contribution du terme source entropique fait intervenir le spectre du scalaire passif défini par l'équation 3.100. Pour comparer notre formulation avec celle de B92 on suppose que la loi d'échelle du scalaire à toutes les échelles est identique à celle du champ de vitesse, *i.e.* que le spectre du scalaire est réduit au régime inertiel-advectif. Dans l'hypothèse considérée et en vertu des conditions de normalisation 3.85 et 3.101 on établit la relation qui lie $E_s(k)$ à $E(k)$

$$\frac{E_s(k, \omega)}{\tilde{s}^2} = \frac{1}{3} \frac{E(k, \omega)}{u_0^2} \quad (4.133)$$

Adoptons le spectre de Kolmogorov (équation 3.83) ainsi que la relation 4.133 ; les fonctions sources 4.131 et 4.132 s'écrivent alors

$$\mathcal{S}_R(X) \simeq 0.92 \int_1^\infty dK \frac{u_K^3}{K^5} e^{-z^2} \quad (4.134)$$

$$\mathcal{S}_S(X) \simeq \frac{0.008}{X^2} \int_1^\infty dK \frac{u_K^3}{K^5} e^{-(z/\sqrt{2})^2} \quad (4.135)$$

avec X et Z tels que définies dans les équations et 4.131 et 4.132.

La fonction source 4.134 pour la contribution du stress de Reynolds est similaire à la fonction source $S_Q(m, \omega)$ dérivée par B92 (leur équation 2.20). Cependant la fonction source pour la contribution de l'entropie (équation 4.135) diffère de celle établie par B92 (leur équation 3.9) car celui-ci a extrapolé de façon abusive la formulation de GK (dérivée pour le terme de Reynolds) pour l'appliquer à la contribution de la fluctuation lagrangienne d'entropie.

Enfin on notera que pour contribution de Reynolds et dans l'hypothèse d'un spectre de Kolmogorov uniquement, il y a accord entre B92 et nos résultats. Pour un spectre quelconque, par exemple pour le spectre de Spiegel utilisé par B92, c'est la forme générale de l'équation 4.127 qui doit être utilisée.

4.11 Formes asymptotiques

Dans le but de comparer notre formulation à la forme asymptotique proposée par GMK, on simplifie les fonctions sources (équations 4.134 et 4.135) en utilisant le fait que l'émission acoustique est due aux tourbillons tels que $\omega_k \gtrsim \omega_0$. L'approximation consiste à intégrer u_K^3/K^5 dans les équations 4.134 et 4.135 dans le domaine où $e^{-(\omega_0/\omega_k)^2} \sim 1$. Pour $\omega_0/\omega_\Lambda \gtrsim 1$ nous avons approximativement $e^{-(\omega_0/\omega_k)^2} \simeq 1$ et l'intégration par rapport à K conduit donc aux formes asymptotiques respectives des fonctions sources 4.134 et 4.135

$$\mathcal{S}_R \propto (\omega_0/\omega_\Lambda)^{-15/2} \quad \text{pour} \quad \frac{\omega_0}{\omega_\Lambda} \gtrsim 1 \quad (4.136)$$

$$\mathcal{S}_S \propto (\omega_0/\omega_\Lambda)^{-19/2} \quad \text{pour} \quad \frac{\omega_0}{\omega_\Lambda} \gtrsim 1 \quad (4.137)$$

La dépendance asymptotique du terme source de Reynolds (équation 4.136) est identique à celle établie par GMK. Par contre GMK considèrent une dépendance identique pour les deux contributions tandis qu'ici la forme asymptotique de l'équation 4.137, correspondant à la contribution de l'entropie, présente une pente plus abrupte que celle de \mathcal{S}_R . Ce résultat nous montre que la contribution de l'entropie est moins efficace à haute fréquence et par conséquent diffère fondamentalement de celle de GMK. Ce résultat est en revanche consistant avec l'assertion de GK, à savoir que l'injection de la puissance acoustique dans les oscillations par le terme source entropique est plus efficace pour les modes de longue période.

4.12 Validité et limitations

L'établissement de la formule générale évaluant la moyenne quadratique de l'amplitude des oscillations est basée sur de nombreuses approximations et hypothèses.

On distingue d'abord celles qui sont relatives aux propriétés des modes propres :

- Il a été supposé que la stratification et les oscillations sont spatialement découplées des tourbillons qui contribuent à l'émission acoustique. Cette hypothèse a été justifiée à posteriori et est en accord avec les conclusions de Goldreich and Kumar [1990].

- Seuls les modes propres radiaux ont été considérés pour simplifier l’intégration sur les angles solides. GMK a tenu compte de manière simplifiée l’effet géométrique induit par les modes radiaux en introduisant un terme de compressibilité. On montre que ce terme est proche de un pour les modes d’ordre radial élevé et d’ordre sphérique ℓ faible.
- l’approximation plan-parallèle a été utilisée et se justifie par le fait que l’excitation stochastique a lieu en haut de la zone convective et que les modes radiaux se propagent essentiellement dans la direction verticale.
- on a considéré des oscillations adiabatiques : on montre (section 5.2) que le calcul de l’amplitude des modes (équation 4.127) est peu sensible au passage des fonctions propres adiabatiques aux non-adiabatiques. Ces dernières ont été calculées avec le code de pulsation non adiabatique de Balmforth [Balmforth, 1992c,b,a] se basant sur la description de Gough [Gough, 1977] de la MLT.

Nous avons ignoré pour simplifier l’équation de conservation d’énergie. Cette approximation, consistante avec le fait de considérer des oscillations adiabatiques, nous a permis de négliger la perte d’énergie due à l’émission acoustique. Cette perte d’énergie engendre *a priori* une modification de l’état d’équilibre du flux convectif. Toutefois il a été rappelé (section 4.1) que l’émission acoustique est particulièrement inefficace, *i.e.* que l’énergie acoustique émise est négligeable devant l’énergie injectée par la convection dans la cascade turbulente. Ceci justifie donc à posteriori le fait d’ignorer l’équation de conservation de l’énergie.

D’autres hypothèses et approximations sont relatives aux modèles de turbulence et s’inspirent principalement du travail de Stein [1967]

- La turbulence a été supposée homogène, stationnaire et isotrope. Toutefois les effets géométriques liés aux formes irrégulières des tourbillons ont été grossièrement modélisés en étendant la déformation constante pour toutes les valeurs de k . Le spectre turbulent quant à lui a été maintenu constant le long de la cascade tandis qu’aux grandes échelles les effets d’anisotropie ont été intégrés dans le bilan énergétique en adoptant la description de Gough [1977] de la MLT. Ceci nous a apporté de nouvelles contraintes sur la manière de normaliser les spectres.
- la séparation du spectre d’énergie cinétique $E(k, \omega)$ comprend 2 composantes : une composante purement spatiale $E(k)$ et une composante temporelle $\chi_k(\omega)$ qui modélise la cohérence temporelle des modes turbulents. La validité de cette décomposition (équation 3.66) a été discutée en détail en section 3.2.3 et est consistante avec l’hypothèse d’une turbulence stationnaire. On rappelle qu’elle est mise en défaut aux grandes échelles turbulentes (*i.e.* aux petites valeurs de k) mais que toutefois par défaut elle a été supposée valide pour tout le spectre. Les oscillations de de fréquences élevées doivent leur excitation aux tourbillons de petites tailles (*i.e.* aux grandes valeurs de k), la décomposition de l’équation 3.66 est par conséquent plus robuste pour les oscillations de courtes périodes.
- la QNA a été invoquée pour décomposer le produit de corrélation d’ordre quatre de la vitesse turbulente. La validité de cette approximation a été discutée du point de vue théorique dans la section 3.2.4 tandis que sa validation numérique sera entreprise au chapitre 5.
- La dynamique propre de chaque mode turbulent de nombre d’onde k a été modélisée par un spectre temporel $\chi_k(\omega)$ dont la largeur se ramène au temps de cohérence τ_k . Ce temps de cohérence a été évalué en adoptant la définition de B92 et en évaluant les vitesses des modes turbulents à l’aide de la relation de Stein [1967] qui lie $E(k)$ à u_k . Le paramètre λ a alors été introduit pour jauger l’arbitraire et les approximations liés à ces choix.
- Le champ turbulent a été supposé incompressible. Ce choix se justifie par le caractère subsonique des mouvements turbulents dans la zone convective des étoiles peu massives.

Les approximations et hypothèses précédentes ont été étendues aux fluctuations turbulentes de l’entropie. Ce choix se justifie par le caractère scalaire passif de la fluctuation turbulente de l’entropie (*c.f.* section 3.2.8).

Enfin d’autres hypothèses et approximations sont relatives au modèle convectif :

- L’évaluation de la formulation sur des modèles stellaires exige l’estimation de la moyenne quadratique du champ de vitesse turbulente ainsi que celle du scalaire passif entropie. Ces quantités sont en effet nécessaires pour déterminer l’énergie totale dans les spectres et permettent ainsi la normalisation des spectres.

À cette fin la MLT nous fournit l’estimation de ces quantités. Cette théorie se base sur l’approximation de Boussinesq laquelle est de fait mise à défaut dans la zone convective stellaire car les tourbillons de plus grandes tailles ont une taille de l’ordre de l’échelle de longueur de la stratification.

Ceci est en contradiction avec l'hypothèse d'homogénéité utilisée dans la modélisation du milieu turbulent. Toutefois il a été rappelé que le transfert de puissance dans les oscillations n'est pas affecté par la stratification (c.f. section 4.2) ce qui justifie le fait d'avoir invoqué une turbulence homogène.

- La valeur du nombre d'onde k_0 du tourbillon de plus grande taille dans le régime inertiel entre dans la définition des spectres turbulents. k_0 est inconnu mais l'estimation de la taille du tourbillon de plus grande taille peut être fournie par la MLT. En effet cette théorie se base sur des tourbillons de taille unique en fait de grande taille (de l'ordre de l'échelle de hauteur de pression).

Nous avons ainsi relié k_0 à la longueur en introduisant toutefois le paramètre libre β dans cette relation. Ce paramètre permet de jauger l'arbitraire inhérent à ce choix.

Certaines de ces hypothèses et approximations seront validées à l'aide d'une simulation numérique 3D effectuée dans le cas solaire au chapitre 5. L'impact d'un traitement différent de la convection y sera également discuté.

Chapitre 5

Excitation des oscillations solaires

L'objet du chapitre est de tester, d'étalonner et de valider, dans le cas du Soleil, la formulation générale (équation 4.127) donnant l'amplitude quadratique moyenne des oscillations.

Les tests et étalonnages sont effectués sur deux modèles d'équilibre unidimensionnels solaires et ce de manière à évaluer la sensibilité de la formulation au traitement de la convection. Le premier se base sur le traitement standard de la théorie de la longueur de mélange (MLT par la suite) tandis que le deuxième se base sur la description de Gough de la MLT telle qu'elle a été évoquée dans la section 3.1.4.

Les tests consistent simplement à appliquer la formulation aux modèles d'équilibre pour lesquelles on calcule les fonctions propres qui interviennent dans la formulation. Les valeurs des vitesses des oscillations ainsi calculées sont comparées aux observations solaires.

L'étalonnage consiste à ajuster les paramètres libres qui entrent dans la formulation, de sorte à reproduire l'amplitude maximale et la forme- *i.e.* la dépendance avec la fréquence - des vitesses observées des oscillations solaires. La procédure d'ajustement et sa justification seront détaillées dans la section 5.1.1.

La validation de certaines hypothèses qui ont conduit à l'expression théorique des amplitudes est effectuée quant à elle dans la section 5.3 à l'aide d'une simulation numérique 3 dimensionnelle de l'enveloppe solaire.

5.1 Modèle solaire à 1 dimension

5.1.1 Modèle basé sur le traitement standard de la convection

Le résultat des tests et de l'étalonnage de notre formulation a été publié dans Samadi *et al.* [2000a], on s'y référera pour davantage de détails. On en présente ici un résumé.

Le modèle solaire considéré a été calculé avec le code CESAM d'évolution stellaire [Morel, 1997] et les modes propres du modèle d'équilibre ont été obtenus avec le code de pulsation adiabatique FILOU développé par Tran Minh and Leon [1995] et mis à disposition par les auteurs.

Comparaison aux observations solaires

La première étape consiste à calculer la vitesse des oscillations $v_s(\omega_0)$ évaluée à la profondeur dans l'atmosphère où s'effectuent les mesures solaires de Libbrecht [1988]. Dans un deuxième temps cette vitesse est comparée aux valeurs solaires mesurées. L'évaluation des vitesses s'obtient à partir de l'équation 2.36. L'amortissement η est donné par la mesure de la largeur des raies des oscillations solaires tandis que l'évaluation de la puissance $P(\omega_0)$ s'obtient en considérant la formulation générale de l'équation 4.127 qui tient compte de la contribution du terme source de Reynolds et du terme source entropique. Les paramètres libres β et λ interviennent dans la formulation (c.f. sections 3.2.5 et 3.2.7 pour la définition de ces paramètres). On considère initialement la valeur $\lambda = 1$, qui correspond au choix de Balmforth [1992a, B92 par la suite] et de Houdek [Houdek, 1996; Houdek *et al.*, 1999], et enfin on prend $\beta \simeq 2$, valeur qui satisfait en ordre de grandeur les contraintes de normalisation du spectre de Kolmogorov (c.f. Samadi and Goupil [2000]).

La figure 5.1 présente le résultat du calcul de $v_s(\omega_0)$ en considérant d'une part la seule contribution de Reynolds (trait discontinu) et d'autre part les deux contributions de l'entropie et de Reynolds (trait continu).

Le critère de comparaison de $v_s(\omega_0)$ avec les données solaires se base sur les caractéristiques des vitesses des oscillations solaires (figure 5.1) qui ont été commentées dans la section 2.4. On utilise dans la comparaison

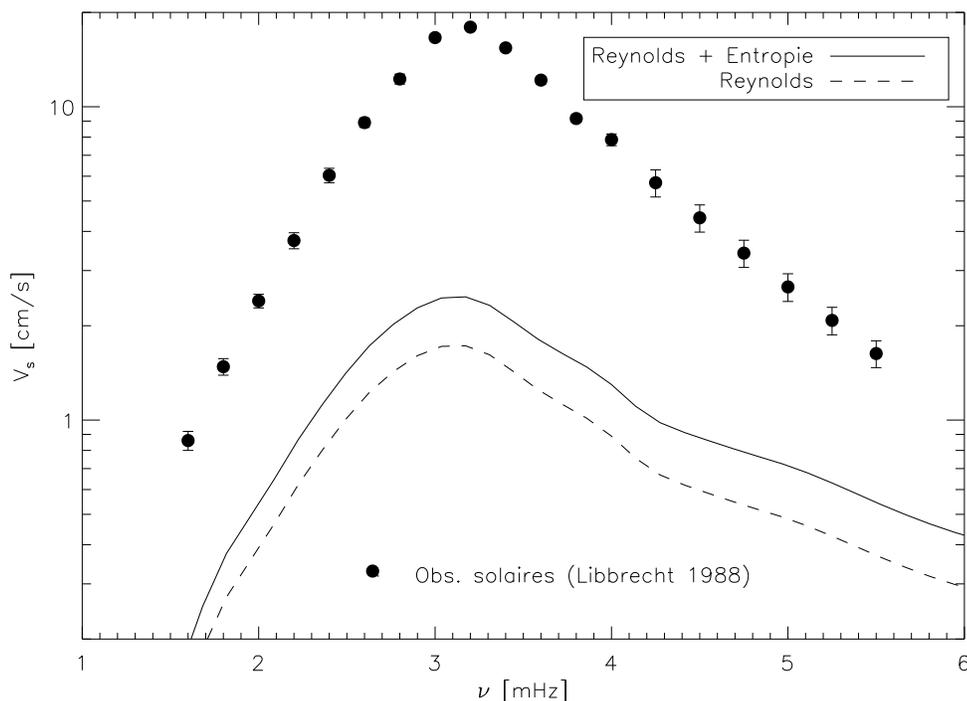


FIG. 5.1 – présente le calcul de $v_s(\omega_0)$ effectué en considérant les sources termes de l’entropie et de Reynolds (courbe continue) et la seule contribution du terme de Reynolds (courbe discontinue). Le spectre de turbulence utilisé ici est le spectre de Kolmogorov (KS) et le modèle solaire considéré est basé sur la MLT classique. Les amortissements utilisés dans le calcul de v_s sont les amortissements mesurés. Les cercles pleins accompagnés des barres d’erreur respectives représentent les données solaires de Libbrecht [1988].

la dépendance avec ν à basse et haute fréquence ainsi que la position en fréquence du maximum et sa valeur.

La décroissance de $v_s(\omega_0)$ à haute fréquence ($\nu \gtrsim 3.5$ mHz) résulte de l’inefficacité du transfert de puissance des sources turbulentes aux modes d’oscillations tandis qu’à basse fréquence l’accroissement de $v_s(\omega_0)$ avec ω_0 est due à la dépendance fréquentielle de l’inertie des modes.

En effet il a été établi en section 4.7 que les tourbillons qui contribuent à l’excitation des modes sont ceux tels que $\omega_0 \tau_k \lesssim 1$. Soit τ_Λ la durée de vie associée aux plus gros tourbillons, tous les tourbillons de taille inférieure ont une durée de vie plus courte (*i.e.* $\tau_k \lesssim \tau_\Lambda$). Par conséquent lorsque $\omega_0 \tau_\Lambda \lesssim 1$ tous les tourbillons de la cascade turbulente contribuent à l’excitation des modes. Les propriétés des spectres turbulents n’interviennent pas et l’excitation fonctionne dans un régime “saturé”. Dans le domaine de basse fréquence ce sont alors les propriétés des fonctions propres - à travers l’inertie $I(\omega_0)$ des modes - qui gouvernent la dépendance de la puissance avec ω_0 .

Dans le cas contraire ($\omega_0 \tau_\Lambda > 1$) une fraction seulement de la cascade turbulente est contributive. L’injection de puissance dans les modes est alors moins efficace. Cela explique la chute observée à haute fréquence dans $v_s(\omega_0)$ (figure 5.1).

L’estimation de $v_s(\omega_0)$ montre clairement que le terme source entropique est dominant devant le terme source de Reynolds (près de 10 fois en terme de puissance). Ce résultat confirme les conclusions de Goldreich *et al.* [1994, GMK par la suite] et contraste avec celui de Balmforth [1992a, B92 par la suite] et Goldreich and Keeley [1977b] qui considèreraient que le terme source entropique devrait être négligeable.

La généralisation de la formulation des amplitudes, $v_s(\omega_0)$, à tout spectre turbulent nous a permis d’étudier différents modèles de turbulence solaire.

J’ai considéré différents spectres turbulents cinétiques (RKS, BKS, NKS et SS) et turbulents entropiques (resp. RKCS, BKCS, NKCS et SCS) tels qu’ils ont été définis dans les sections 3.2.7 et 3.2.8. Il résulte des amplitudes d’oscillation en vitesse - $v_s(\omega_0)$ - différentes selon le spectre turbulent considéré, en particulier à haute fréquence, domaine dans lequel le RKS s’ajuste de façon plus satisfaisante aux observations. Ces différences s’expliquent par le fait que la profondeur d’excitation diffère selon le spectre utilisé. Ces différences

de profondeur d'excitation ont quant à elles été imputées aux différences de forme des différents spectres. Par exemple pour un mode de degré radial $n = 20$ on trouve une profondeur d'excitation $z \simeq 0.8$ Mm avec le RKS. Cette valeur est proche de celle évaluée par les simulations de Stein and Nordlund [2000] et confirme l'assertion de Osaki [1993] à savoir que la source d'excitation stochastique devrait être plus concentrée que celle induite par la formulation de B92.

Par contre aucune différence sur la forme de $v_s(\omega_0)$ en fonction de ω_0 n'est visible pour des estimations faites avec des spectres entropiques réduits au seul régime inertiel-convectif²² et ceux tenant compte du régime inertiel-conductif. Ce résultat suggère que les données solaires ne permettent pas de déterminer le nombre d'onde k_c à partir duquel le régime inertiel-conductif débute.

Concernant les différents modèles de spectre temporel introduits dans la section 3.2.5, aucune différence significative entre la forme gaussienne (FG) et la forme gaussienne modifiée (FGM) n'est visible. En revanche la forme exponentielle (EXP) donne les estimations de $v_s(\omega_0)$ les moins satisfaisantes.

Les vitesses calculées avec le spectre de Spiegel (SS) et avec le spectre de Kolmogorov donnent des résultats similaires, les écarts étant insignifiants devant les barres d'erreur sur les mesures. Cela contredit B92 et Houdek [1996] pour lesquels le spectre SS s'ajuste mieux à basse fréquence aux observations solaires que ne le fait le spectre de Kolmogorov. Ce désaccord s'explique par la manière plus consistante avec laquelle nous avons normalisé les spectres d'énergie et d'autre part par la façon injustifiée dont le spectre SS a été implémenté par ces auteurs.

En dépit des formes asymptotiques différentes établies à haute fréquence pour la contribution du stress de Reynolds (équation 4.136) et la contribution de l'entropie (équation 4.137), aucune différence significative entre les deux contributions ne se manifeste à haute fréquence. Cela ne sera néanmoins pas le cas pour la formulation étalonnée.

Étalonnage

L'étalonnage consiste à déterminer les valeurs des paramètres libres λ et β de façon à reproduire au mieux l'amplitude globale et l'allure des vitesses spectroscopiques solaires mesurées par Libbrecht [1988].

Les valeurs initiales imposées à β et λ induisent un maximum d'amplitude (~ 3 cm/s, c.f. figure 5.1) inférieur à la valeur solaire (~ 18 cm/s). Le maximum d'amplitude estimé par B92 et GMK s'ajuste avec les observations car les auteurs ont considéré des paramètres d'ajustement. En particulier B92 considère un facteur d'ajustement d'environ ~ 6 tandis que GMK introduit deux paramètres. Le premier (similaire à notre paramètre $\beta\lambda$) ajuste la position en fréquence du maximum et le second, que les auteurs relient au facteur de forme des tourbillons, est égal à 1.8 et permet d'ajuster la valeur du maximum de puissance.

On montre en fait que la moyenne quadratique des amplitudes (équation 4.130) croît comme β^4 de sorte qu'une valeur plus élevée de β aboutit à une valeur plus grande du maximum de $v_s(\omega_0)$. En fait puisque λ est également un paramètre libre on peut jouer sur le jeu des paramètres λ et β pour étalonner la formulation. On établit toutefois dans Samadi *et al.* [2000a] une contrainte sur la valeur de $\lambda\beta$. Cette contrainte impose une limite supérieure à $\beta\lambda$ et dérive du fait que le temps de cohérence τ_k des tourbillons du régime inertiel doit nécessairement être inférieur à ou du même ordre de grandeur que le temps caractéristique $\tau_\Lambda \equiv \Lambda/w$ du processus d'injection d'énergie convective dans la cascade (c.f. Samadi *et al.* [2000a] ainsi que la section 3.2.3). En effet la durée de vie des tourbillons du régime inertiel - dont τ_k en fournit une mesure - ne saurait être plus long que τ_Λ .

En modifiant les paramètres on met en évidence le rôle joué par la quantité $\lambda\beta$ dans le contrôle de la dépendance fréquentielle de $v_s(\omega_0)$. La valeur de $\beta\lambda$ est donc d'abord fixée de manière à ajuster au mieux la position en fréquence du maximum et si possible de façon à reproduire la dépendance en fréquence de $v_s(\omega_0)$ (c.f. Samadi *et al.* [2000a]). Une fois la valeur de $\beta\lambda$ ajustée, nous déterminons ensuite indépendamment les valeurs de β et λ qui permettent d'atteindre le maximum des amplitudes solaires (~ 18 cm/s).

Résultats

Le résultat des ajustements effectués pour chaque spectre est présenté dans la figure 5.2. Les valeurs des paramètres qui ont servi à l'ajustement sont reportées dans la table 5.1. Le meilleur ajustement est obtenu avec le spectre NKS qui dérive des observations de la granulation solaire faite par Nesis *et al.* [1993], tandis que les spectres RKS et BKS s'ajustent un peu moins bien avec les mesures à haute fréquence.

L'ajustement obtenu avec le simple spectre de Kolmogorov (KS) est aussi bon que celui obtenu avec le NKS. Cependant la valeur correspondante de $\beta\lambda$ est incompatible avec la contrainte que l'on établit sur

²²Il s'agit de l'hypothèse de travail de GMK et de B92

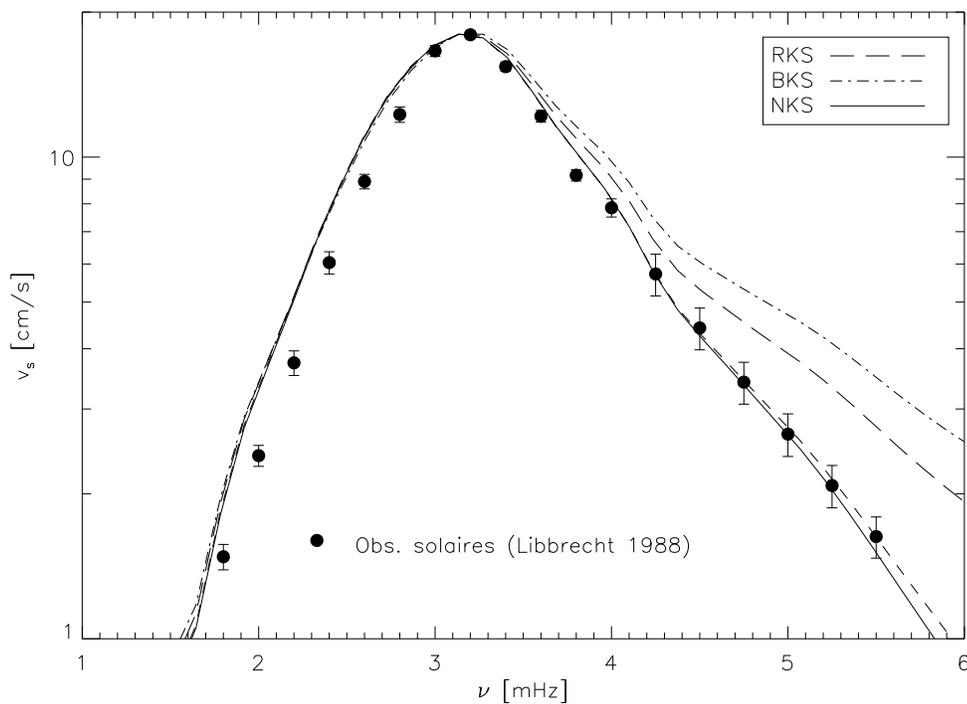


FIG. 5.2 – Calculs des vitesses des oscillations (v_s) pour le modèle solaire en considérant les valeurs ajustées des paramètres β et λ (table 5.1). Le modèle convectif considéré est celui de la MLT classique. Les vitesses ont été calculées en considérant les contributions du terme de Reynolds et du terme entropique. Les différents spectres d'énergie cinétique turbulent introduits dans la section 3.2.7 ont été considérés. Les spectres turbulents d'entropie utilisés correspondent aux formes "conductives" explicitées en section 3.2.8 pour lesquelles on a considéré $K_C = 2$. Les courbes ont toutes été décalées de 0.1 mHz vers les hautes fréquences de sorte que les positions des maxima des amplitudes calculées soient proches des observations. Les cercles pleins accompagnés des barres d'erreurs respectives représentent les données solaires de Libbrecht [1988].

spectre	$\beta\lambda$	β	λ	k_0 (Mm $^{-1}$)
RKS	1	3.53	0.28	7.3
BKS	1	4.44	0.22	5.8
NKS	3.8	5.00	0.76	5.1
KS	5.7	9.51	0.60	2.7

TAB. 5.1 – Valeurs ajustées des paramètres β et λ . Le nombre d’onde k_0 du plus grand tourbillon du régime inertiel est relié à la longueur de mélange Λ comme $k_0 = 2\pi/\beta\Lambda$ (c.f. section 3.2.6 et l’équation 3.81) et est évalué au niveau du rayon photosphérique.

cette quantité, tandis que les valeurs des paramètres correspondants aux trois spectres NKS, BKS et RKS sont compatibles avec la contrainte sur $\beta\lambda$. De plus on sait d’après les observations de la granulation solaire que l’énergie cinétique est contenue par les tourbillons de la zone d’injection ($k \gtrsim k_0$). Le KS n’en tient pas par définition compte. Par conséquent le bon ajustement du KS aux observations sismiques résulte fort probablement d’un effet de compensation entre les paramètres.

A toute valeur ajustée de β correspond une valeur du nombre k_0 du plus gros tourbillon de la cascade turbulente (c.f. table 5.1). La valeur de ce nombre d’onde caractéristique peut être évaluée indépendamment à partir des observations de la granulation solaire (c.f. section 3.2.6). La valeur mesurée par Nesis *et al.* [1993] est $k_0 = 7 \text{ Mm}^{-1}$ et contraste avec celle de Espagnet *et al.* [1993] qui vaut $k_0 = 3 \text{ Mm}^{-1}$. Le désaccord n’ajoute pas de contrainte supplémentaire et ne permet pas de trancher franchement entre le NKS et le RKS (ou BKS).

On en reste donc avec le NKS qui conduit au meilleur ajustement. Il serait toutefois hasardeux de conclure fermement sur le meilleur spectre entre le RKS, BKS et NKS.

En effet la validité de nos résultats est fortement conditionnée par la décomposition des spectres turbulents selon la relation 3.66. Des doutes ont été évoqués (c.f. sections 3.2.3 et 4.12) sur la validité de cette décomposition pour $k \lesssim k_0$. Ces doutes sont confirmés par les écarts observés à haute fréquence entre les puissances $P(\nu)$ calculées tour à tour avec les BKS, RKS et NKS.

En effet l’application de la décomposition de l’équation dans le domaine $k \lesssim k_0$ conduit à tenir compte des tourbillons de grande taille dans le processus d’excitation. Cela favorise les oscillations de basse fréquence. Dans le cas du NKS cet effet est moindre et de ce fait il a été possible d’ajuster correctement $P(\nu)$ aux observations sismiques simultanément aux basses et hautes fréquences. Au contraire pour le RKS (et de la même façon pour le BKS) les tourbillons $k \lesssim k_0$ provoquent une injection de puissance excessive dans les modes de basse fréquence. Cela se fait au détriment des hautes fréquences et altère ainsi l’ajustement à haute fréquence.

Il convient donc de relativiser les différences d’ajustement obtenues entre les spectres RKS, BKS et NKS. Toutefois à défaut de pouvoir proposer une alternative à la décomposition de l’équation 3.66 - que Stein [1967] et Musielak *et al.* [1994] tiennent pour valide dans tout le domaine de définition des spectres turbulents - tous les calculs par la suite reposeront néanmoins sur celle-ci.

La dépendance du spectre de puissance $P(\nu)$ à haute fréquence s’ajuste parfaitement avec les observations solaires lorsque l’on considère le NKS. On établit une loi de la forme $P(\nu) \propto \nu^{-p}$ avec $p \simeq 6$ pour $\nu \gtrsim 4.5$ mHz.

Ce résultat diffère de celui obtenu par GMK. Les auteurs établissent en effet une pente égale à $p \simeq 4.4$ à haute fréquence en désaccord avec les observations même si les auteurs affirment le contraire. Le désaccord qu’ils obtiennent s’explique du fait qu’ils évaluent la puissance au niveau de la photosphère.

En effet Chaplin *et al.* [1998] ont attiré l’attention sur le fait que la pente à haute fréquence ($\nu \gtrsim 4.0$ mHz) vaut $p \simeq 6.2$ lorsque les puissances déduites des observations sont évaluées au niveau où se font les mesures spectroscopiques alors que la pente vaut $p \simeq 4.5$ lorsque le calcul est effectué au niveau de la photosphère.

Les formes asymptotiques des contributions de l’entropie et du terme de Reynolds établies analytiquement dans la section 4.11 (équations 4.136 et 4.137) permettent de prévoir que la contribution du terme source est moins efficace à haute fréquence comparé au terme source de Reynolds.

Le spectre de puissance $P(\nu)$ évalué en considérant les deux contributions (Reynolds+entropie) montre clairement à haute fréquence un déficit relatif de puissance par rapport au calcul de $P(\nu)$ effectué avec la seule contribution du stress de Reynolds.

Ce résultat montre que la contribution de l’entropie à la puissance injectée dans les modes est moins efficace à haute fréquence. Il est par conséquent en accord avec notre conclusion déduite des formes asymptotiques. Il diffère avec celui obtenu par GMK puisque ceci établissent une même décroissance avec ν à haute fréquence pour les deux contributions.

spectre	$\beta\lambda$	β	λ	k_0 (Mm ⁻¹)
RKS	0.6	1.96	0.31	11.5
BKS	1.6	4.06	0.39	5.5
NKS	2.6	3.11	0.83	7.2

TAB. 5.2 – Valeurs des paramètres libres β et λ résultant de l’ajustement des vitesses calculées aux vitesses spectroscopiques mesurées à l’aide des observations sismiques du Soleil [Libbrecht, 1988]. Le modèle solaire considéré est celui basé sur la MLT selon Gough [1977]. Différents spectres turbulents ont été considérés. Nous avons figuré dans le tableau la valeur de k_0 (c.f. section 3.2.6 et l’équation 3.81) évalué au niveau de la photosphère.

5.1.2 Modèle basé sur la description de Gough de la convection

Nous considérons la généralisation du traitement de la MLT à sa description non-locale et dépendante du temps introduite par Gough [Gough, 1976, 1977, voir aussi sections 3.1.5 et 3.1.6]. Les détails concernant le code numérique sont donnés dans B92 et dans Houdek *et al.* [1999].

Le modèle solaire incluant ce traitement “sophistiqué” de la MLT a été calculé par Houdek G. La métallicité a été choisie telle que $X = 0.7$ et $Z = 0.02$. Le facteur d’anisotropie a été fixé à $\Phi = 1.37$, cette valeur assure le meilleur ajustement de l’amortissement η par rapport aux mesures solaires [Houdek, communication privée]. Les éléments physiques du modèle d’équilibre calculé sont ceux décrits dans Houdek *et al.* [1999]. La valeur du paramètre de la longueur de mélange qui convient pour ajuster le modèle aux observations solaires vaut $\alpha_c = 2.02$. Enfin les fonctions propres calculées par Houdek ont été obtenues à l’aide du code de pulsation non adiabatique de Balmforth [1992c; 1992b; 1992a] se basant sur la description non-locale et dépendante du temps introduite par Gough [1977].

Pour chacun des spectres turbulents j’ai déterminé les valeurs des paramètres β et λ qui permettent d’ajuster l’amplitude et la dépendance fréquentielle des vitesses estimées (équation 2.36) aux données solaires. Les amortissements, qui servent à déterminer les vitesses des oscillations, sont déduits des largeurs des raies mesurées.

La table 5.1.2 donne les valeurs des paramètres ajustés en considérant les différents spectres turbulents utilisés dans la section 5.1.1.

Les estimations résultant de l’étalonnage sont, tous spectres confondus, bien meilleures à basse fréquence qu’elles ne le sont avec le modèle solaire basé sur la MLT standard. Ce résultat peut se comprendre par la valeur relativement élevée de α_c utilisée. On montre en fait dans la section 6.1.2.0 qu’un accroissement de α_c provoque un décalage du spectre de puissance $P(\omega_0)$ vers les hautes fréquences.

Les différences observées entre les différents spectres demeurent semblables à celles établies avec le modèle solaire de la section 5.1.1. En particulier, comme pour le modèle de la section 5.1.1, le spectre NKS assure le meilleur ajustement entre vitesses calculées et vitesses spectroscopiques issues des observations solaires. De la même façon les spectres RKS et BKS surestiment légèrement les vitesses théoriques à haute fréquence ($\nu \gtrsim 4 \text{ mHz}$). Ces résultats confortent ceux obtenus dans la section 5.1.1.

5.2 Pression turbulente et effets non-adiabatiques

La description de Gough de la MLT se distingue de celle de la MLT classique en ce que la pression turbulente P_t est intégrée dans le modèle d’équilibre et sa perturbation dans le code de pulsation. Il était donc important d’évaluer l’effet de la pression turbulente sur les estimations des puissances.

D’autre part dans la section précédente ce sont les fonctions propres adiabatiques fournies par le code de pulsation de B92 qui ont été utilisées dans les estimations. Or le développement de la formulation exprimant la puissance stochastique repose sur l’hypothèse d’oscillations adiabatiques. Il était donc important de vérifier que les propriétés non-adiabatiques des fonctions propres n’influent pas sur nos estimations.

Par conséquent j’ai entrepris, avec la collaboration de Houdek, une étude de l’impact de la pression turbulente et de la non-adiabaticité des fonctions propres.

Ce travail a été effectué avec sur la formulation de B92 et pour le modèle solaire décrit dans la section 5.1.2.

Il a permis d’établir que la pression turbulente intégrée dans le modèle d’équilibre a des effets négligeables sur la valeur du maximum d’amplitude ($< 10\%$) et modifie de manière insignifiante la dépendance fréquentielle.

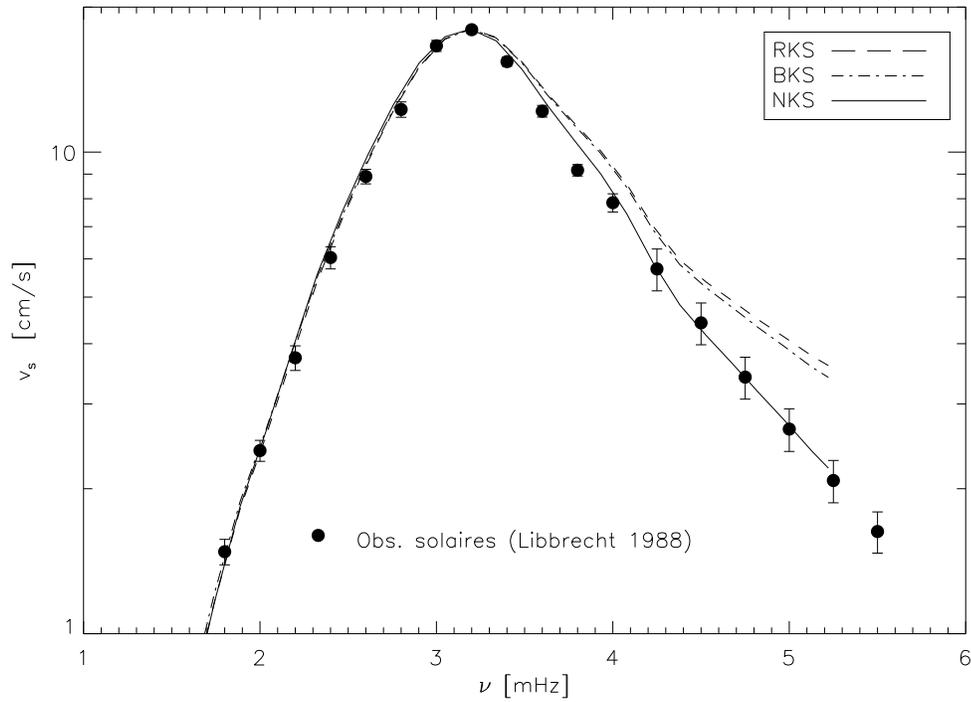


FIG. 5.3 – Estimations des vitesses des oscillations solaires calculées sur le modèle d'équilibre basé sur la MLT introduite par Gough. Les valeurs des paramètres β et λ ont été ajustées de manière à ajuster l'allure et l'amplitude maximale des vitesses aux vitesses spectroscopiques des données solaires. Les notations et considérations de la figure 5.2 ont été adoptées.

La pression turbulente est modulée - comme pour le flux convectif - par les oscillations. Cette modulation (δP_t), prise en compte par le code de pulsation non-adiabatique de B92, est responsable de l'amortissement par modulation de la pression turbulente η_t (c.f. section 3.1.5). Nous avons testé l'effet de cette modulation sur les fonctions propres pour nos estimations en terme de puissance stochastique. La modulation de P_t par les oscillations entraîne des effets également négligeables.

Enfin concernant la non-adiabaticité des fonctions propres nous avons comparé les amplitudes calculées avec des fonctions propres adiabatiques et non-adiabatiques. On constate de même que le maximum d'amplitude et la dépendance fréquentielle sont modifiés de manière négligeable.

5.3 Simulation solaire à 3 dimensions

Le modèle d'équilibre qui nous a servi à quantifier la puissance injectée dans les modes d'oscillations traite la convection dans le cadre de la MLT. Il a été rappelé que cette théorie s'accommode de nombreuses approximations. En particulier la MLT s'intéresse par construction à une taille unique des éléments convectifs. D'autre part elle se base sur l'approximation de Boussinesq qui rend possible l'estimation analytique des vitesses des éléments convectifs ainsi que l'énergie qu'ils transportent. Mais cette approximation se fait au prix d'une inconsistance que l'on a évoquée dans les sections 3.1.3 et 3.1.4.

Un code numérique à 3 dimensions qui modélise les couches extérieures du Soleil a été développé depuis plusieurs années par le groupe d'Astrophysique Numérique de Copenhague. Ce code numérique simule une portion de la zone convective solaire de façon beaucoup plus réaliste que ne le font les modèles à une dimension basés sur la MLT. Grâce à la collaboration de Ludwig H., il m'a été donné l'opportunité d'utiliser les résultats d'une telle simulation de sorte que l'on a pu envisager de tester certaines approximations sur lesquelles repose la formulation exprimant la puissance injectée dans les modes propres acoustiques. Ces validations spécifiques au développement théorique du chapitre 4 n'avaient pas été entreprises par l'équipe de Copenhague.

Les simulations ont permis des avancées importantes dans notre connaissance des intérieurs stellaires [c.f. Spruit *et al.*, 1990, pour une revue complète]. En particulier la simulation 3D utilisée ici est le produit d'un long développement. Elle a permis en outre d'établir comment les mouvements convectifs modifient la largeur des raies [Dravins and Nordlund, 1990a,b]; de mettre en évidence la contribution des fluctuations non-adiabatiques de pression dans l'excitation des modes p ainsi que le décalage des fréquences des modes propres induit par les mouvements convectifs [Stein and Nordlund, 1991]; de montrer comment le principe de conservation de la masse conduit à accroître la taille des éléments convectifs avec la profondeur [Nordlund and Stein, 1996]. On se reportera à Stein and Nordlund [1998] pour un historique plus complet.

La physique et le schéma numérique du code en question sont résumés dans Stein and Nordlund [1998]. Il consiste en une simulation d'une très petite portion du fluide solaire se situant de la surface à la zone superadiabatique. Le volume représente un parallélépipède de section $6 \text{ Mm} \times 6 \text{ Mm}$ et de profondeur $Z \simeq 2.6 \text{ Mm}$ et correspond à un réseau de points de $125 \times 125 \times 82$ respectivement. Nous avons dépouillé 20 réalisations du code réparties sur 10 mn représentant un total d'environ $\sim 300 \text{ Mo}$ de données.

Le code résout en suivant un schéma implicite les équations des fluides newtoniens. Il est stabilisé par introduction d'une hyperviscosité. Cette hyperviscosité est proportionnelle à la vitesse du son, à la vitesse du fluide et enfin aux écarts de vitesse du fluide. La première composante stabilise le code face aux petites oscillations, la deuxième prévient des changements brusques dans les quantités advectées et enfin la dernière stabilise le code face aux chocs. La viscosité introduite n'est donc pas invariante d'échelle de sorte qu'il n'est pas possible de définir un nombre de Reynolds pour la simulation (Ludwig, communication privée). Toutefois du fait d'une densité faible de points de simulation le code numérique est loin d'avoir la résolution suffisante pour atteindre les échelles de longueur et de temps pertinentes avec les nombres de Reynolds, de Rayleigh et de Prandtl caractéristiques de l'enveloppe convective solaire. De ce fait cette simulation revient à simuler les tourbillons les plus larges (de telles simulations sont du type "large Eddy simulation" en anglais).

L'équation d'état prend en compte de façon réaliste l'état du gaz notamment les états d'ionisation des éléments²³. La pression du gaz est quant à elle évaluée par interpolation d'une table construite à partir de l'équation d'état. Le transfert radiatif est résolu à l'équilibre thermodynamique locale dans l'espace à 3 dimensions.

Bien que la profondeur ($\simeq 2.6 \text{ Mm}$) de la zone convective simulée soit extrêmement petite devant la taille de la zone convective solaire ($\sim 200 \text{ Mm}$), la base de la simulation tombe dans la région isentropique de la

²³Les états ionisés des éléments jouent un rôle important dans le phénomène de convection car les variations du gradient adiabatique en dépendent fortement (c.f. section 3.1.1).

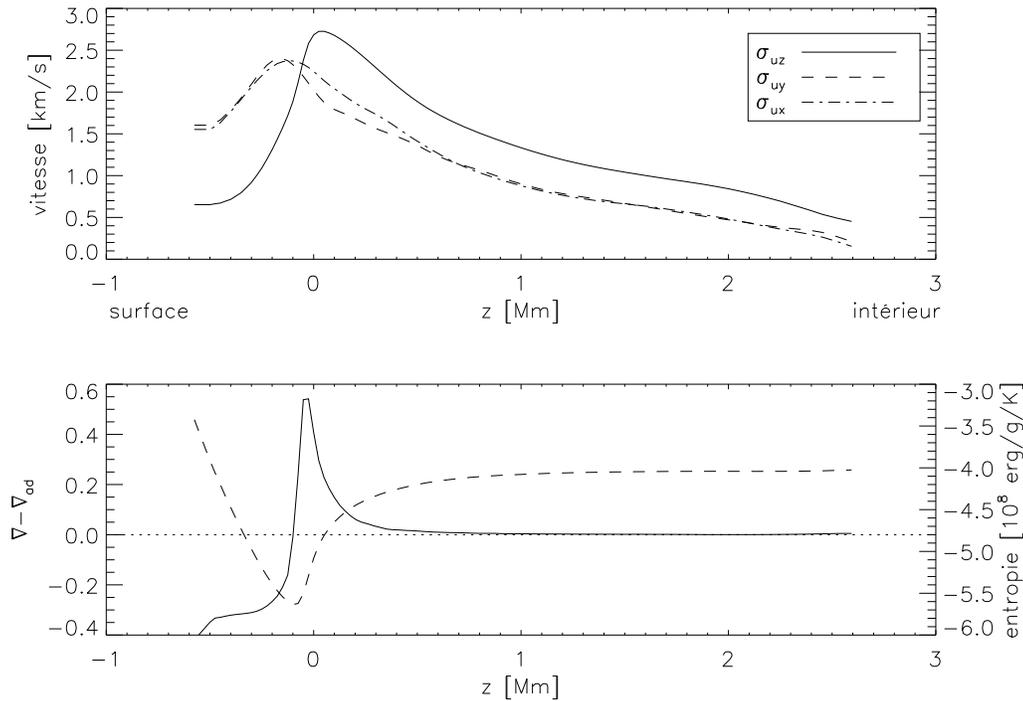


FIG. 5.4 – *En haut* : tracé de l'écart-type de la vitesse verticale du fluide (σ_{uz}) ainsi que les écart-type des vitesses horizontales (σ_{ux}, σ_{uy}). La profondeur $z = -0.10$ Mm correspond à la photosphère et le domaine $z > 0$ correspond aux couches internes. *En bas* : la courbe en trait plein (échelle de gauche) représente la dépendance de l'écart au gradient adiabatique ($\nabla - \nabla_{ad}$) avec la profondeur tandis que le trait discontinu (échelle de droite) représente l'entropie.

zone convective de sorte que la simulation est très peu influencée par les conditions imposées à la base du domaine. En haut du domaine simulé la densité est faible de sorte que l'influence des conditions imposées aux extrémités supérieures est faible [c.f. Stein and Nordlund, 1998, pour les détails concernant les conditions aux bords]. Enfin les conditions imposées sur les extrémités horizontales du réseau sont périodiques.

La figure 5.4 trace les valeurs moyennes effectuées dans le temps et sur les plans horizontaux de différentes grandeurs pertinentes pour caractériser la convection.

En particulier la courbe $\sigma_{uz}(z)$ est à comparer avec la courbe $w(r)$ des vitesses verticales convectives calculées à partir du modèle solaire unidimensionnel invoquant la MLT (figure 3.1). La valeur maximale atteinte par $\sigma_{uz}(z)$ est de ~ 2.7 km/s et est par conséquent très proche de celle atteinte par $w(r)$ (~ 2.6 km/s). Par contre la transition entre le haut de la zone superadiabatique (là où $\sigma_{uz}(z)$ est maximal) et le domaine radiatif de l'atmosphère est moins brutale que pour $w(r)$. Cela s'explique du fait que dans le cadre de la MLT standard le critère d'instabilité s'applique strictement et ne permet pas modéliser la pénétration des tourbillons dans la couche située au dessus de la zone superadiabatique.

L'écart moyen au gradient adiabatique ($\nabla - \nabla_{ad}$) a également été tracé il permet d'identifier la zone supérieure radiative ($\nabla - \nabla_{ad} < 0$), la zone superadiabatique ($\nabla - \nabla_{ad} > 0$) qui s'étend sur profondeur ~ 1 Mm et enfin la base isentropique de la simulation ($\nabla \simeq \nabla_{ad}$).

La valeur du paramètre de la longueur de mélange équivalente à la simulation correspond à la valeur $\alpha_c = 1.8$ (Ludwig, communication privée). Cette valeur est obtenue en ajustant un modèle à une dimension basé sur la MLT standard avec la base isentropique de la simulation. Elle conforte la valeur de α_c utilisée dans le modèle solaire unidimensionnel et basée sur la MLT standard (section 5).

5.3.1 Validation des hypothèses du modèle turbulent

L'approximation quasi-normale (QNA)

La QNA a été utilisée à maintes reprises que ce soit pour évaluer la contribution du stress de Reynolds, pour la contribution de l'entropie, pour les termes croisés. Il a été évoqué en section 3.2.4 que cette approximation conduit à une violation du principe de conservation de l'énergie et que les termes cumulants (voir section 3.2.4) n'étaient pas négligeables. Malgré tout cette approximation a été adoptée car il s'agit du seul moyen simple d'évaluer analytiquement les moments d'ordres 4 des quantités turbulentes (vitesse et entropie). La simulation 3D solaire va nous permettre d'en évaluer la validité pour l'usage que l'on en fait et dans le domaine où l'excitation stochastique se produit.

On s'intéresse au produit de corrélation d'ordre 4 des vitesses turbulentes de moyenne nulle (équation 3.68). Le produit de corrélation doit être évalué en effectuant des translations spatiales dans toutes les directions. Toutefois le milieu étant fortement stratifié, le calcul du produit de corrélation dans le sens vertical n'a pas de sens. En effet la QNA s'applique pour des variables aléatoires de moyenne nulle tandis que la stratification selon z induit une variation verticale de la vitesse moyenne. On se restreint aux seules translations dans le plan horizontal et l'on s'intéresse aux produits de corrélations des vitesses radiales.

Les oscillations d'ordre radial élevé étant quasi verticales dans la zone superadiabatique, l'excitation des modes propres est réalisée par la composante verticale de la vitesse turbulente (c.f. section 4.7). Par conséquent le plan d'incompressibilité (c.f. section 3.2.3) orthogonal aux modes propres coïncide avec le plan horizontal. Or ce sont les tourbillons dont le nombre d'onde \vec{k} est situé dans le plan orthogonal aux fonctions propres radiales (plan d'incompressibilité) qui contribuent le plus au transfert de puissance aux modes d'oscillations (c.f. section 4.7). Notre restriction aux plans horizontaux dans l'évaluation de la QNA est donc raisonnable.

On définit une vitesse verticale réduite et de moyenne nulle

$$\tilde{u}_z(x, y, z, t) = \frac{v_z - \langle v_z \rangle_{x,y}}{\langle v_z \rangle_{x,y}} \quad (5.1)$$

où $v_z(x, y, t)$ est la composante verticale de la vitesse extraite d'une réalisation du code à la position $[x, y, z]$ et au temps t . L'opérateur $\langle \cdot \rangle_{x,y}$ désigne une moyenne effectuée sur le plan horizontal à un instant donné.

On considère alors les produits de corrélations suivants

$$\begin{aligned} \langle uu'u'u' \rangle (\Delta x) &\equiv \overline{\langle \tilde{u}_z^2(x) \tilde{u}_z^2(x + \Delta x) \rangle}_{x,y} \\ \langle u'u' \rangle (\Delta x) &\equiv \overline{\langle \tilde{u}_z(x) \tilde{u}_z(x + \Delta x) \rangle}_{x,y} \\ \langle uu \rangle (\Delta x) &\equiv \overline{\langle \tilde{u}_z^2(x) \rangle}_{x,y} \\ \langle u'u' \rangle (\Delta x) &\equiv \overline{\langle \tilde{u}_z^2(x + \Delta x) \rangle}_{x,y} \end{aligned} \quad (5.2)$$

où Δx désigne une translation suivant l'axe x et l'opérateur $\overline{(\cdot)}$ désigne une moyenne temporelle effectuée sur les 20 réalisations de la simulation. La dépendance de \tilde{u}_z avec y, z et t a été omise pour alléger l'écriture. Notez que $\langle uu \rangle$ et $\langle u'u' \rangle$ correspondent à la variance de \tilde{u}_z et sont donc égaux et constants. Enfin notez que du fait des conditions périodiques imposées dans le plan horizontal, la réalisation de translations horizontales n'engendre pas d'effets de bord.

Dans les notations de l'équation 5.2, la validation de la QNA suggère de s'intéresser à la relation

$$\langle uu'u'u' \rangle (\Delta x) = N(\Delta x) + C(\Delta x) \quad (5.3)$$

avec

$$N(\Delta x) \equiv 2 \langle uu' \rangle^2 + \langle uu \rangle \langle u'u' \rangle \quad (5.4)$$

et $C(\Delta x)$ est le terme cumulant qui est nul lorsque la QNA est vérifiée²⁴. Les figures 5.5 et 5.6 présentent les différentes quantités de l'équation 5.2 tracées en fonction de Δx et à différentes profondeurs. Aux grandes valeurs de Δx les courbes $\langle uu'u'u' \rangle (\Delta x)$ et $\langle uu' \rangle^2 (\Delta x)$ tendent vers la constante $\langle uu \rangle \langle u'u' \rangle$ tandis qu'au voisinage de $\Delta x = 0$ elles ont toutes deux une allure de gaussienne dont la largeur (~ 0.5 Mm) s'interprète comme la longueur de cohérence moyenne des éléments turbulents. Le cumulant $C(\Delta x)$ s'évalue en appréciant l'écart entre les courbes $\langle uu'u'u' \rangle (\Delta x)$ et $N(\Delta x)$. On a ainsi tracé dans la figure 5.7 la quantité $|C|/N$ à différentes profondeurs ; il s'agit du cumulant relatif.

²⁴Ce qui est toujours le cas pour des variables aléatoires suivant une distribution normale.

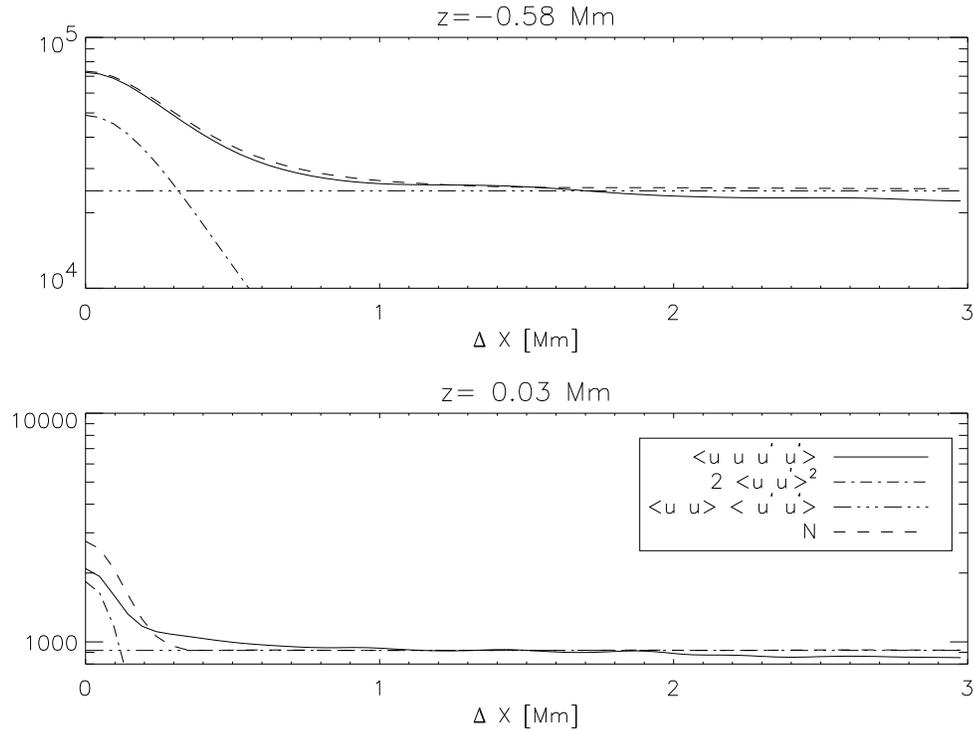


FIG. 5.5 – Tracés des quantités $\langle uu'u'u' \rangle$, $2 \langle u'u' \rangle^2$, $\langle uu \rangle \langle u'u' \rangle$ et $N(\Delta x)$ en fonction de Δx (voir texte pour la signification de ces quantités). Le panneau supérieur concerne la couche supérieure de la simulation (de profondeur $z = -0.58$ Mm) tandis que le panneau inférieur concerne la profondeur $z = 0.03$ Mm correspondant à la couche où l'écart-type de la vitesse radiale est maximale. Le terme cumulatif $C(\Delta x)$ correspond à l'écart entre les courbes $\langle uu'u'u' \rangle$ (ligne continue) et N (ligne discontinue).

On constate que le terme $2 \langle u'u' \rangle^2$ dans $N(\Delta x)$ domine pour $|\Delta x| \sim 0$ tandis que pour $|\Delta x| \gtrsim 1$ Mm c'est le terme constant $\langle uu \rangle \langle u'u' \rangle$ qui domine.

À la profondeur $z = -0.58$ Mm, la QNA est particulièrement bien vérifiée (à ~ 2 % près pour $|\Delta x|$ petit). On constate qu'elle est par contre d'autant moins bien vérifiée que l'on va en profondeur. La profondeur $z = 0.03$ Mm correspond à la couche où l'écart-type de la vitesse radiale est maximale, *i.e.* où les vitesses convectives sont les plus importantes. Dans cette couche, où l'excitation stochastique est maximale, le cumulatif relatif est plus faible que dans les couches plus profondes.

Le cumulatif relatif demeure malgré tout relativement élevé (~ 20 % à $z = 0.03$ Mm et ~ 100 % à $z = 1.35$ Mm pour $|\Delta x| \sim 0$) mais reste toutefois acceptable au regard de la précision de la simulation. En effet la résolution spatiale et l'hyperviscosité introduite font que le code simule principalement la dynamique des gros tourbillons de taille nécessairement supérieure au maillage du réseau (~ 0.05 Mm). On se place donc dans un régime faiblement non-linéaire et faiblement turbulent. L'accroissement du cumulatif avec la profondeur s'explique par le fait que le milieu est d'autant moins turbulent que l'on s'approche de la région isentropique.

Dans le milieu fortement turbulent des zones convectives stellaires le nombre d'éléments de petite taille domine largement sur le nombre de tourbillons accessible par la simulation. Le nombre impressionnant d'éléments de petite taille contribue à améliorer la statistique sur la loi normale que l'on confère dans le cadre de la QNA aux quantités turbulentes (vitesses et entropie). En effet les petits tourbillons, plus que les gros, sont, du fait de leur faible longueur de cohérence, davantage décorrélés des modes propres et de la stratification. Par conséquent la distribution de leur vitesse suit davantage une loi normale que celle des plus gros tourbillons. En conclusion la valeur élevée du cumulatif relatif est à mettre sur le compte de la faible statistique inhérente à la résolution faible de la simulation. Une augmentation de la résolution diminuerait certainement la valeur du cumulatif et l'accord avec la QNA.

On constate que les oscillations observées aux grandes valeurs de Δx dans la courbe $\langle uu'u'u' \rangle(\Delta x)$ sont d'autant plus marquées dans les couches plus profondes. Ces structures émanent fort probablement des ondes

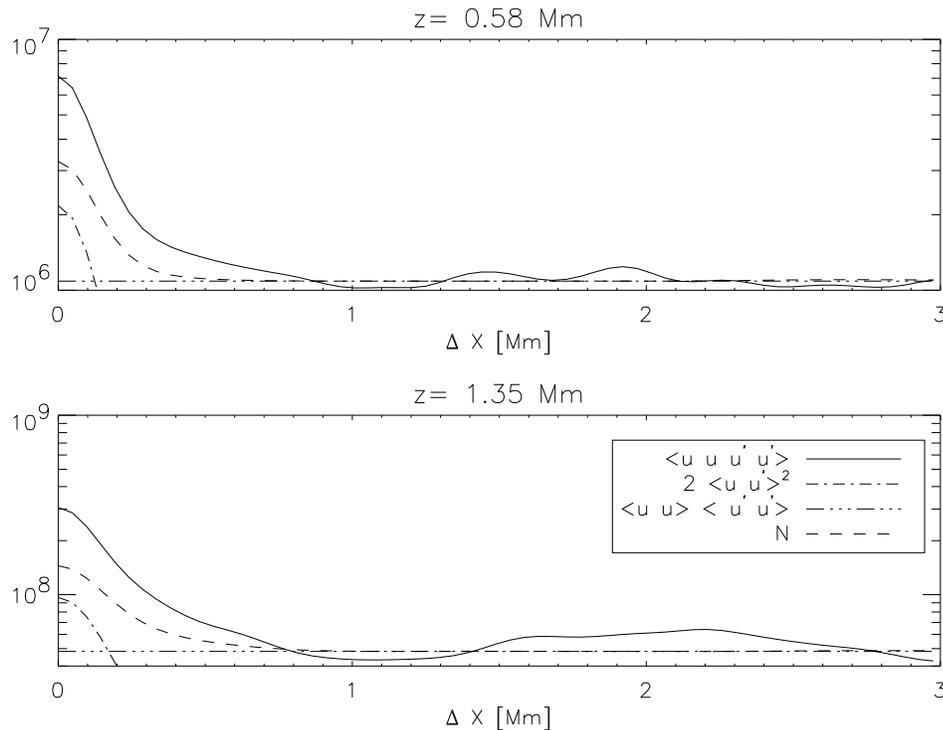


FIG. 5.6 – Tracés identiques à la figure 5.5 mais effectués aux profondeurs $z = 0.58$ Mm et $z = 1.35$ Mm. Notez ici les oscillations observées pour $\Delta x \gtrsim 1$ Mm.

sonores. En effet une structure centrée à une valeur de $\Delta x > 0$ est la signature d'une cohérence spatiale. Or les ondes sonores du fait de leur périodicité spatiale (longueur d'onde) sont intrinsèquement cohérentes spatialement tandis que les tourbillons n'ont pas de périodicité spatiale et sont donc confinés au voisinage $\Delta x = 0$. Une évaluation du produit d'ordre 4 faite à différents instants et à la profondeur $z = 1.35$ Mm montre que l'amplitude de ces oscillations varie sur la durée de la simulation (10 mn), confortant l'idée qu'il s'agit d'oscillations périodiques. On montre par ailleurs que ces oscillations sont spatialement bien découplées des éléments turbulents qui vivent au voisinage de $\Delta x = 0$, confortant ainsi l'approximation qui consistait à découpler spatialement les oscillations de la turbulence (section 4.7).

La QNA a également été utilisée pour décomposer le produit de corrélation d'ordre 4 qui mêle fluctuations de vitesse et d'entropie (équation 3.70). Nous avons constaté pour la simulation des comportements identiques à ceux observés précédemment sur le produit de corrélation d'ordre quatre de la vitesse.

Spectres turbulents

La simulation nous a également permis de calculer les spectres turbulents des vitesses et des fluctuations d'entropie. Nous considérons l'énergie cinétique par unité de masse définie comme

$$E_c(x, y, z, t) = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 \quad (5.5)$$

dont on calcule le spectre de puissance.

Le calcul du spectre de puissance dans l'espace tri-dimensionnel, n'est pas approprié du fait que le milieu est fortement stratifié. En effet les fonctions sinusoidales, qui servent de base à la transformée de Fourier, mettent à nu les cohérences spatiales des éléments de fluide turbulents (Ludwig, communication privée). Puisque le milieu est stratifié, les quantités d'équilibre induiraient une cohérence spatiale qui n'a pas de signification physique. Le spectre tri-dimensionnel ne permet donc pas de caractériser une turbulence dans un milieu stratifié.

On s'est par conséquent restreint aux spectres calculés sur des couches horizontales. On considère donc le spectre puissance bidimensionnel, $P_c(k_x, k_y, z, t)$ que l'on définit comme

$$P_c(k_x, k_y, z, t) = E_c(k_x, k_y, z, t) E_c^*(k_x, k_y, z, t) \quad (5.6)$$

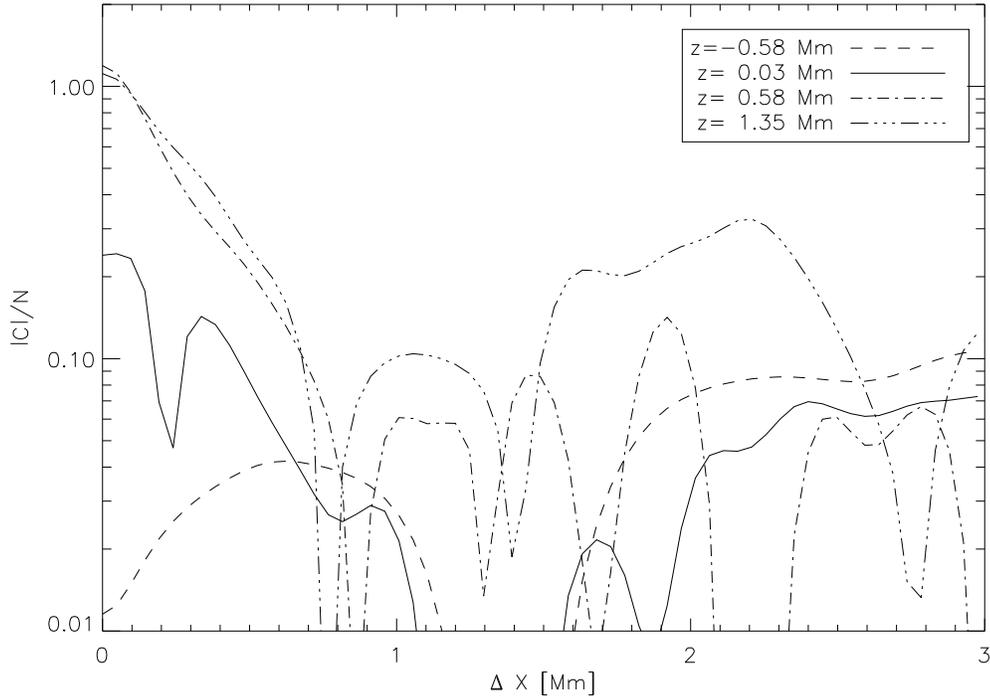


FIG. 5.7 – Cumulant relatif $|C|/N(\Delta x)$ tracé à différentes profondeurs.

où $E_c(k_x, k_y, z, t)$ désigne la transformée de Fourier bidimensionnelle dans l'espace des nombres d'onde (k_x, k_y) associé aux coordonnées horizontales (x, y) .

Le spectre de puissance bidimensionnel, $P_c(k_x, k_y, z, t)$, est intégré le long de cercles concentriques de rayons k_h dans le plan horizontal. On effectue ensuite une moyenne sur le temps, i.e. sur les 20 réalisations de la simulation. Le spectre d'énergie cinétique dans l'espace (k_h, z) se définit alors naturellement comme

$$E_c(k_h, z) \equiv P_c^{1/2}(k_h, z) \quad (5.7)$$

On a tracé $E_c(k_h, z)$ dans la figure 5.8 en considérant différentes profondeurs z . Le spectre calculé au niveau de la photosphère ($z \simeq -0.10$ Mm) est ajusté par des fonctions décroissantes de k de la forme k^p où p est la pente de la décroissance. Nous avons figuré les valeurs de ces pentes issues de l'ajustement. Le régime de pente -2 , que l'on peut associer à la cascade turbulente du type Kolmogorov, coïncide avec le spectre calculé mais seulement sur un domaine assez restreint de nombres d'onde (de $k_h \sim 10$ Mm $^{-1}$ à $k_h \sim 30$ Mm $^{-1}$). Tandis qu'au-delà ($k_h \gtrsim 30$ Mm $^{-1}$) c'est un régime de pente près de deux fois plus abrupte qui prend la suite. On retrouve en fait ici les résultats présentés dans Nordlund *et al.* [1997] qui ont conduit les auteurs à remettre en cause le caractère turbulent de la granulation solaire (c.f. section 3.2.6).

Outre l'objection faite dans la section 3.2.6 à ce sujet, il convient de rappeler que dans la simulation la viscosité artificielle n'est pas invariante d'échelle (elle dépend notamment de la vitesse du milieu). Il a été expliqué que cette viscosité avait été introduite pour stabiliser le code. Elle se traduit par une viscosité très faible pour les éléments turbulents grands (donc peu rapides), si bien qu'à leur échelle le nombre de Reynolds apparaît infini²⁵ (Ludwig, communication privée), tandis que pour les structures de petite taille, la viscosité est plus grande. Par conséquent aux petites échelles accessibles par la simulation la dissipation est plus importante que dans le milieu stellaire où le nombre de Reynolds est très grand. L'argument développé permet, me semble-t-il, d'expliquer pourquoi le régime inertiel en $-5/3$ se produit dans un domaine de nombres d'ondes réduit et d'expliquer le déficit d'énergie, par rapport au régime inertiel, observé aux grands nombres d'ondes.

Je me suis également intéressé au spectre de l'entropie. Le spectre du scalaire passif entropie a été défini comme

$$E_s(x, y, z, t) \equiv s_1^2 \quad (5.8)$$

²⁵C'est essentiellement pour cela que l'on désigne par "large Eddy simulation" de telle simulation

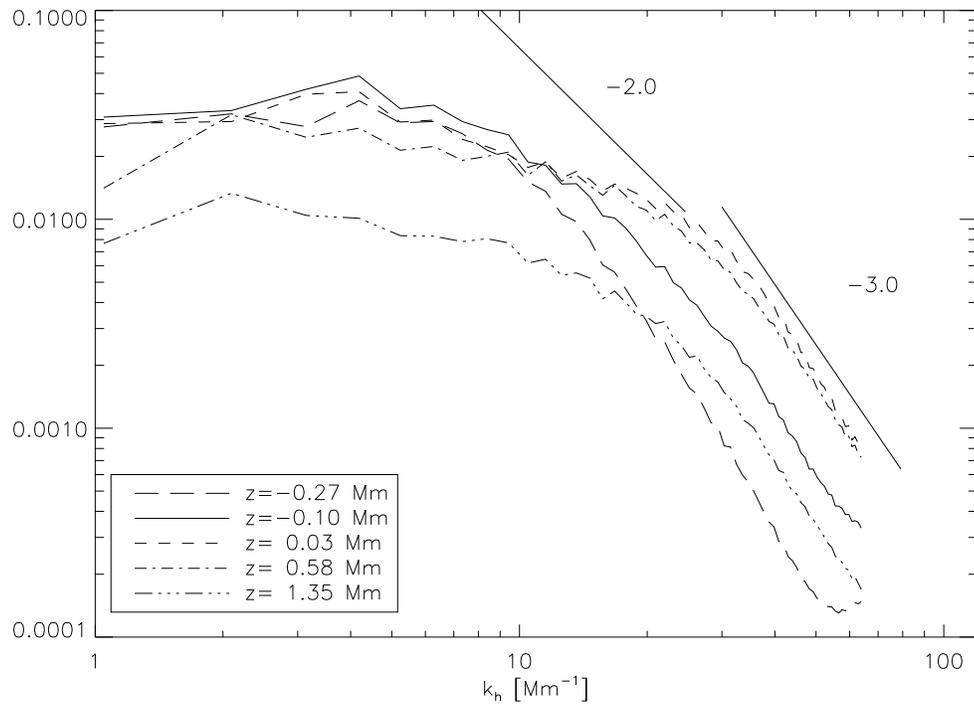


FIG. 5.8 – Spectre d'énergie cinétique bidimensionnel, $E_c(k_h, z)$, calculé à différentes profondeurs z . L'unité dans laquelle sont exprimés les spectres est arbitraire. L'altitude $z = -0.10$ Mm correspond à la photosphère. On y a fait figurer les deux régimes, l'un de pente $p \sim -2$ l'autre de pente $p \sim -3$, résultant de l'ajustement d'une loi décroissante du type k^{-p} au spectre $E_c(k_h, z)$ calculé au niveau de la photosphère ($z = -0.10$ Mm).

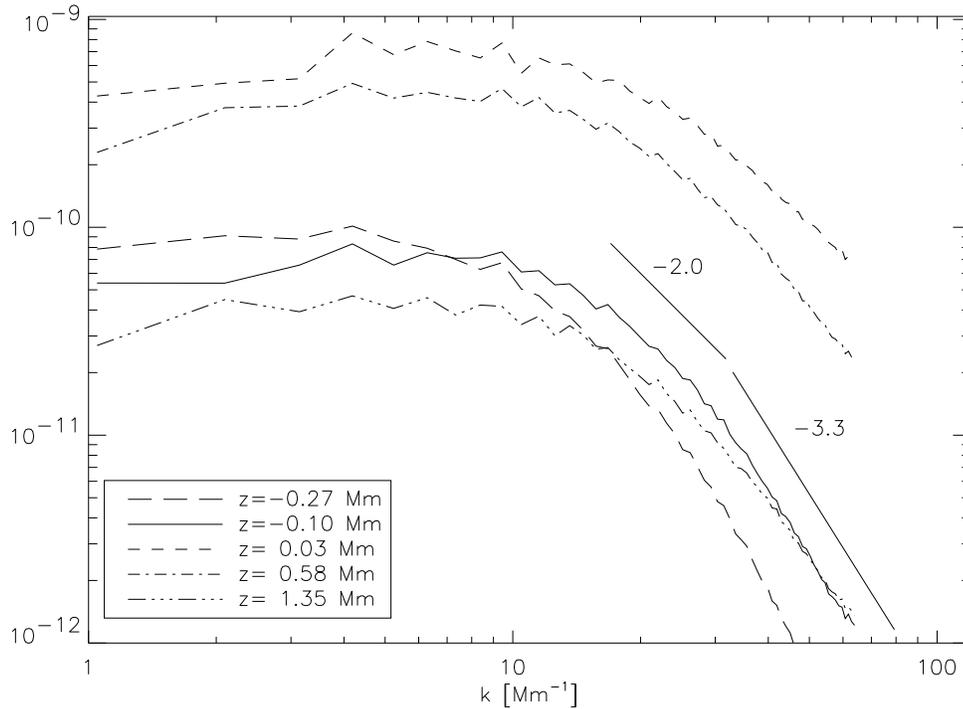


FIG. 5.9 – Spectre bidimensionnel du scalaire entropie, $E_s(k_h, z)$, calculé à différentes profondeurs z . L'unité dans laquelle sont exprimés les spectres est arbitraire. L'altitude $z = -0.10$ Mm correspond à la photosphère. On y a fait figurer les pentes $p \simeq -2.0$ correspond et $p \simeq -3.3$ obtenues par ajustement d'une loi décroissante du type k^{-p} au spectre $E_s(k_h, z)$ calculé au niveau de la photosphère ($z = -0.10$ Mm).

où $s_1(x, y, z, t)$ est la fluctuation eulerienne d'entropie (c.f. équation 5.10). Son spectre de puissance vaut

$$P_s(k_x, k_y, z, t) = E_s(k_x, k_y, z, t) E_s^*(k_x, k_y, z, t) \quad (5.9)$$

Comme pour le spectre cinétique, on a intégré $P_s(k_x, k_y, z, t)$ sur la couche horizontale et effectué la moyenne sur les 20 réalisations. On s'intéresse donc au spectre du scalaire passif $E_s(k_h, z) = P_s^{1/2}(k_h, z)$ où k_h est à nouveau un nombre d'onde radial sur la couche de profondeur z . Le résultat du calcul de $E_s(k_h, z)$ sur plusieurs couches est porté sur la figure 5.9 dans laquelle nous avons figuré les courbes du type k^{-p} qui s'ajustent au spectre calculé au niveau de la photosphère.

Là, de nouveau, le régime de pente $p \simeq -2$, qui s'interprète comme le régime inertiel, n'est observé que dans un très petit domaine de nombres d'ondes ($15 \text{ Mm}^{-1} \lesssim k_h \lesssim 30 \text{ Mm}^{-1}$), tandis qu'aux grandes valeurs de k c'est un régime de pente beaucoup plus abrupte qui est observé ($p \simeq -3$).

Le modèle théorique du scalaire passif prévoit une pente de $-17/3 \simeq -5.7$ à grand nombre d'onde, ce régime dit inertiel conductif résulte du fait qu'aux petites échelles la diffusion du scalaire devient prépondérante devant l'advection de celui-ci (c.f. section 3.2.8). Aux plus grandes échelles au contraire c'est le régime inertiel-convectif de pente égale à $-5/3$ qui est attendu. Dans ce domaine le scalaire passif est advecté par les éléments turbulents du régime inertiel.

Le régime inertiel-conductif n'est pas mis en évidence dans la simulation. Le régime de pente $p \simeq -3$ observé aux grandes valeurs de k peut, comme pour le spectre d'énergie cinétique, être imputable à l'effet de l'hyper-viscosité, introduite dans le code, sur la dynamique des éléments de petites tailles.

5.3.2 Validation des approximations du modèle convectif

Relation température-entropie

Dans la section 3.2.8 la nature scalaire passif de la fluctuation de turbulente de température a été évoquée tant du point de vue théorique que du point de vue des observations de la granulation solaire. Le caractère

scalaire passif des fluctuations turbulentes de la température a été ensuite généralisé à celui des fluctuations turbulentes d'entropie à l'aide de la relation 3.96. Cette relation résulte de l'approximation de Boussinesq appliquée à la relation linéaire (équation 3.95) liant les fluctuations eulériennes d'entropie aux fluctuations de pression et de température. Cette dernière relation résulte elle-même de l'approximation linéaire qui consiste à négliger les fluctuations de température et de pression d'ordre supérieur.

La simulation nous permet de valider ces deux approximations. Pour se faire nous avons calculé les fluctuations eulériennes d'entropie, de température et de pression :

$$\begin{aligned} s_1(x, y, z, t) &= s(x, y, z, t) - \langle s \rangle_{x,y} \\ T_1(x, y, z, t) &= T(x, y, z, t) - \langle T \rangle_{x,y} \\ P_1(x, y, z, t) &= P(x, y, z, t) - \langle P \rangle_{x,y} \end{aligned} \quad (5.10)$$

où l'opérateur $\langle \cdot \rangle_{x,y}$ désigne une moyenne effectuée sur une couche horizontale. La relation 3.95 représente les contributions des fluctuations de température et de pression à la fluctuation d'entropie. Ces deux contributions s'écrivent respectivement pour la température

$$s_T \equiv C_P \frac{T_1}{T} \quad (5.11)$$

et pour la pression

$$s_P \equiv -C_P \nabla_{ad} \frac{P_1}{P} \quad (5.12)$$

Dans ces notations la relation 3.95 prend la forme suivante

$$s_1 = s_T + s_P \quad (5.13)$$

dont la validation justifie l'approximation linéaire considérée dans l'équation 3.95. Nous avons tracé la bissectrice $s_1 \rightarrow s_1$ pour évaluer l'écart à la linéarité et la validité de l'approximation de Boussinesq qui permet de négliger le terme s_P dans l'équation 5.13. Les figures 5.10, 5.11 et 5.12 concernent respectivement les couches de profondeur $z = 0.03$ Mm, $z = 0.58$ Mm et $z = 1.35$ Mm. Dans les couches profondes la linéarité entre s_1 et T_1 est bien vérifiée tandis qu'elle est moins bien vérifiée en haut de la zone superadiabatique où les vitesses convectives sont maximales ($z = 0.03$ Mm). Ceci s'explique par le fait que les variations de température y sont plus importantes. En effet le milieu devenant optiquement plus mince, les éléments convectifs se refroidissent par transfert radiatif. Les écarts de température entre le milieu ambiant, les éléments ascendants (plus chauds) et les éléments descendants (plus froids) y sont plus grands de sorte que l'approximation linéaire est moins bien vérifiée. L'écart à la linéarité observée dans $s_T(s_1)$ demeure néanmoins négligeable devant l'amplitude des fluctuations d'entropie.

Par ailleurs un écart systématique avec la bissectrice et $s_T(s_1)$ est constaté à la profondeur $z = 0.03$ Mm (voir figure 5.10). Cet écart s'explique par l'écart à la linéarité engendré par des fluctuations plus importantes de la température.

On constate que la contribution linéaire à l'entropie (s_P) due aux fluctuations de pression P_1 est plus faible en moyenne quadratique que la contribution s_T . Ceci est d'autant plus vrai que l'on va en profondeur. Ce résultat s'explique par le fait que le nombre de Mach turbulent (M_t) est relativement faible dans la simulation (et à fortiori dans la zone convective solaire), de sorte que l'écart à l'équilibre hydrostatique est faible (Ludwig, communication privée). Dans le cadre de l'approximation de Boussinesq on montrerait d'ailleurs que P_1 est de l'ordre de M_t^2 . C'est précisément ce qui est vérifié dans la simulation.

D'autre part les fluctuations s_P induites par les fluctuations P_1 apparaissent incohérentes de sorte que les fluctuations s_1 et les fluctuations s_P induites par P_1 sont indépendantes. La contribution de s_P dans le processus d'excitation stochastique reste donc une contribution négligeable²⁶. On peut donc raisonnablement négliger la contribution s_P dans l'équation 5.13.

Asymétrie des fluctuations turbulentes

Les figures 5.11 et 5.12 mettent à jour une asymétrie marquée dans la distribution des fluctuations s_1 . Par ailleurs cette asymétrie est croissante avec la profondeur. En effet dans la couche de profondeur $z = 0.03$ Mm il y a pratiquement autant d'éléments avec $s_1 > 0$ que d'éléments avec $s_1 < 0$ et les amplitudes des

²⁶On montre en effet que du fait du caractère incohérent des fluctuations s_P , le spectre de puissance de s_P dans le domaine de Fourier des nombres d'ondes k est négligeable devant celui de s_T ; le caractère incohérent de s_P étalant l'énergie sur un grand interval spectral.

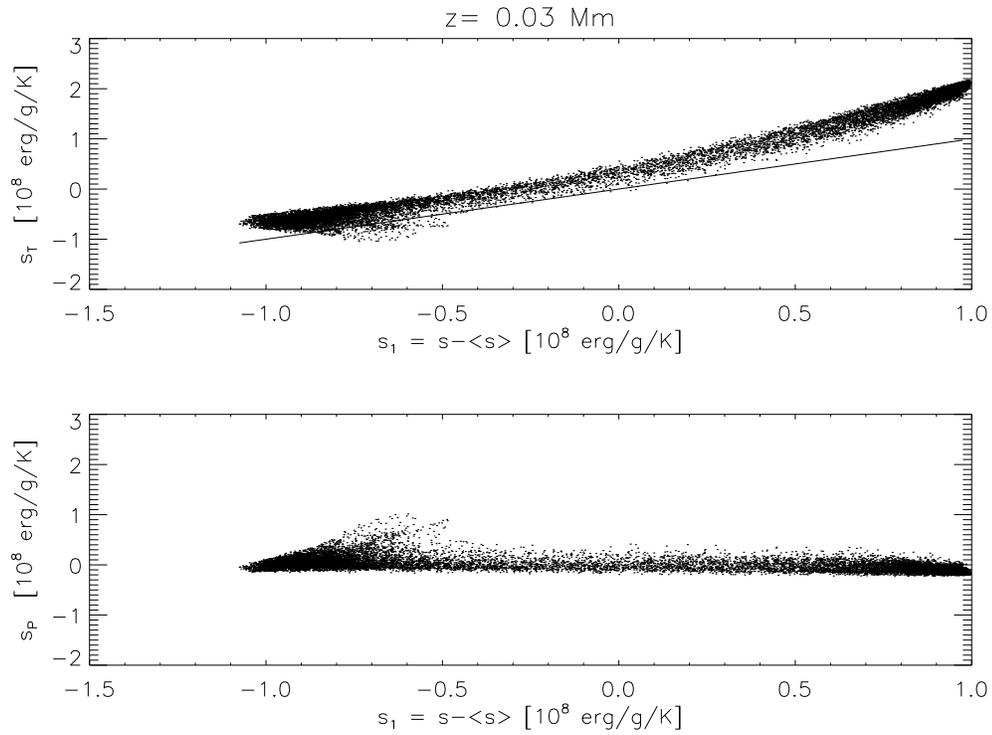


FIG. 5.10 – *En haut* : contribution s_T due aux fluctuations de température (T_1) tracée en fonction des fluctuations d'entropie (s_1). Les points correspondent à une réalisation extraite de la couche de profondeur $z = 0.03$ Mm. On rappelle qu'il s'agit de la couche dans laquelle les vitesses convectifs sont maximales. On a également tracé bissectrice $s_1 \rightarrow s_1$ pour apprécier l'écart à la linéarité. *En bas* : contribution s_P due aux fluctuations de pression (P_1) dans les mêmes conditions.

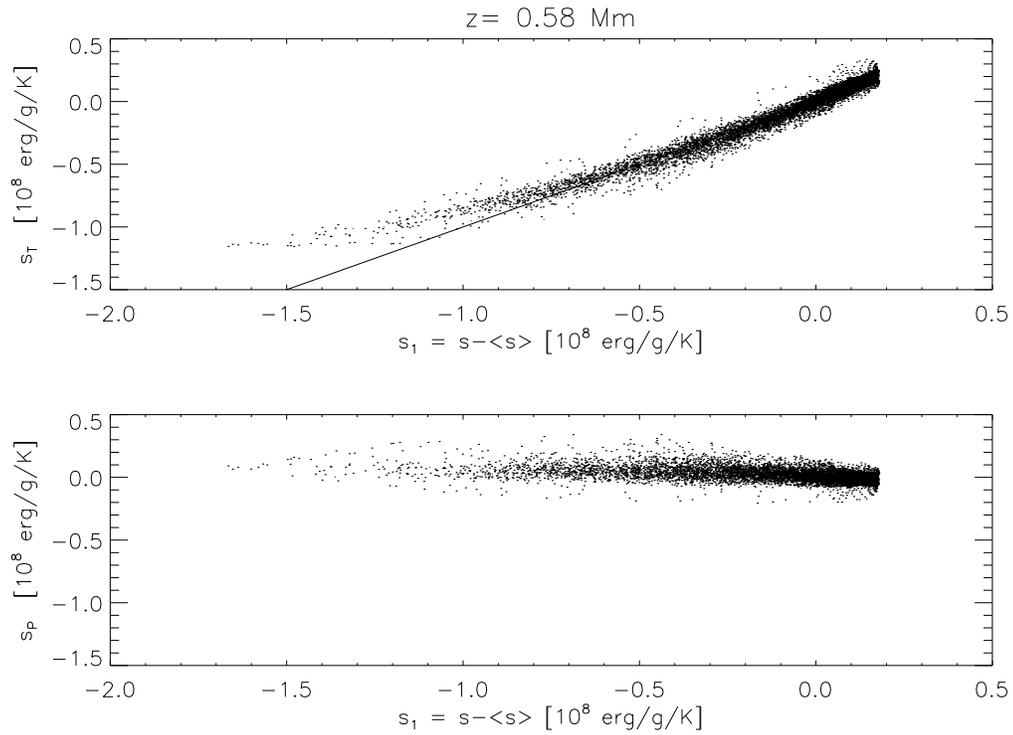


FIG. 5.11 – Tracés effectués à la profondeur $z = 0.58 \text{ Mm}$ avec les mêmes considérations que celles de la figure 5.10.

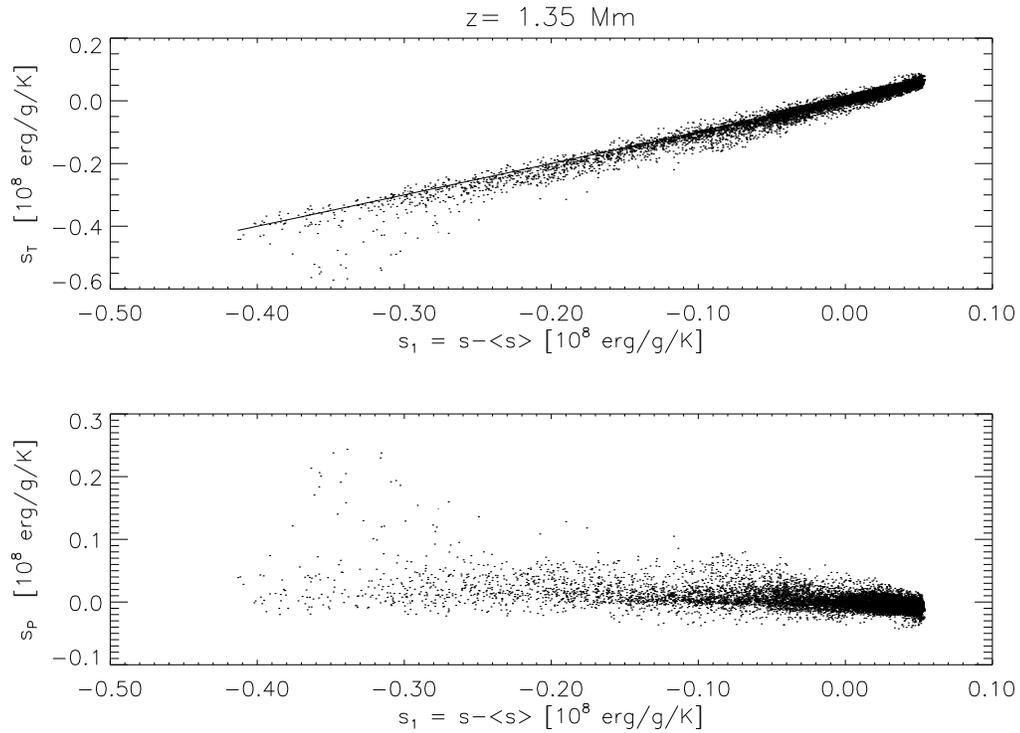


FIG. 5.12 – Tracés effectués à la profondeur $z = 1.35 \text{ Mm}$ avec les mêmes considérations que celles de la figure 5.10. Notez la très bonne linéarité de $s_P(s_1)$ ainsi que les faibles amplitudes de la contribution s_P induites par P_1 .

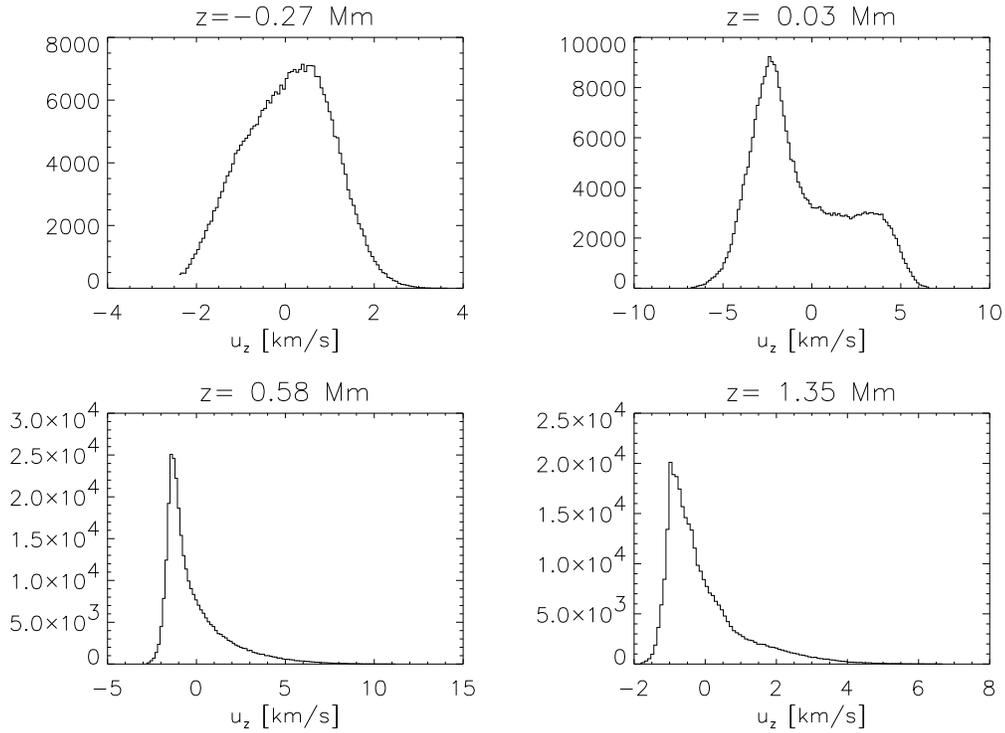


FIG. 5.13 – Distribution des vitesses verticales u_z à différentes profondeurs. $u_z > 0$ correspond à un mouvement descendant et $u_z < 0$ à un mouvement ascendant.

fluctuations respectivement positives et négatives sont relativement symétriques (figure 5.10). Ce n'est pas le cas dans les couches profondes où une accumulation de points avec $s_1 > 0$ et d'amplitude faible est constatée (figures 5.11 et 5.12). Il y a donc en fait dans les couches profondes plus d'éléments chauds que d'éléments froids.

Cette asymétrie peut être également mise en évidence dans la distribution des vitesses des éléments. On a tracé dans la figure 5.13 les distributions des vitesses verticales (u_z) à différentes profondeurs. On constate de même que, tandis que l'on s'enfonce, le nombre d'éléments descendants ($u_z > 0$) est moindre que le nombre d'éléments ascendants ($u_z < 0$) et l'amplitude des vitesses de ces derniers est plus petite. Comme le flux moyen de masse dans une couche donnée est nécessairement nul, l'asymétrie sur les vitesses permet d'affirmer que les flux descendants sont associés à de plus grosses structures (des plumes) tandis que les flux ascendants sont associés à des petites structures.

Cette asymétrie observée sur u_z est fortement corrélée avec l'asymétrie observée sur s_1 , on montre en effet que les flux ascendants sont associés aux petites fluctuations positives de s_1 , donc naturellement à des éléments chauds et les flux descendants aux larges fluctuations négatives, et donc naturellement à des éléments froids. Dans les couches profondes le milieu est quasi isentropique de sorte que la distribution des fluctuations négatives et positives de l'entropie est quasi symétrique. L'asymétrie sur les amplitudes des fluctuations de s_1 s'explique alors du fait que des éléments descendants, plus froids, parce qu'ils ont perdu leur énergie au niveau de la photosphère, pénètrent dans un milieu quasi-isentropique et brise ainsi la symétrie de la distribution des fluctuations s_1 .

L'asymétrie est quasi inexistante en haut de la zone superadiabatique (à la profondeur $z = 0.03$ Mm, voir figure 5.10) puisque en vertu de la conservation du flux de masse sur une couche donnée, il y a pratiquement autant d'éléments ascendants et chauds, qui viennent perdre leur énergie par rayonnement, que d'éléments froids qui ont perdu leur énergie.

L'asymétrie évoquée, qui affecte les distributions des vitesses et des fluctuations d'entropie, n'est pas prise en compte dans le modèle unidimensionnel de turbulence qui nous a servi à estimer la puissance injectée dans les modes. Toutefois c'est en haut de la région superadiabatique que l'excitation stochastique est maximale de sorte que l'asymétrie évoquée devrait avoir une moindre influence sur les estimations effectuées précédemment sur le modèle à une dimension.

Chapitre 6

Du Soleil à Procyon

La formulation estimant la puissance injectée dans les oscillations de type solaire a été étalonnée sur le Soleil pour chaque spectre turbulent dans le chapitre précédent. L'étalonnage a permis de fixer au mieux la valeur des paramètres libres λ et β (c.f. sections 3.2.5 et 3.2.7 pour la définition de ces paramètres). Il a été établi que le spectre NKS donnait l'ajustement sur les données solaires le plus satisfaisant.

Dans ce chapitre nous utilisons les formulations étalonnées avec les différents spectres pour obtenir la puissance associée pour un modèle de l'étoile Procyon dans chacun des cas. Cette étoile a suscité notre intérêt car des oscillations de type solaire ont été clairement identifiées récemment par Martić *et al.* [1999] et Barban *et al.* [1999]. Ces observations suggèrent que l'amplitude maximale des oscillations de cette étoile serait ~ 50 cm/s [Barban *et al.*, 1999] bien inférieure aux estimations de Houdek *et al.* [1999] (~ 150 cm/s) et de Kjeldsen and Bedding [1995] ~ 100 cm/s. Des oscillations du même type aurait été également observées sur β Hydri par Butler *et al.* [2000], mais cette découverte doit être confirmée.

J'étudierai l'influence du paramètre de la longueur de mélange (section 6.1.2.0) et des paramètres libres λ et β (section 6.1.2.0). Enfin la théorie de la longueur de mélange a été utilisée dans le calcul de quantités déterminantes dans le processus d'excitation. On évaluera donc l'influence que peut avoir un traitement différent de la convection (section 6.2). J'utiliserai à cette fin le traitement de la convection basé sur la description non-locale et dépendante du temps selon Gough [Gough, 1976, 1977, c.f. sections 3.1.5 et 3.1.6] déjà considéré pour un modèle solaire (section 5.1.2).

Le traitement dépendant du temps nous permet de calculer les taux d'amortissement attendus pour les modes d'oscillation de Procyon. Ces taux d'amortissements calculés nous permettent alors d'évaluer la valeur des vitesses des oscillations à partir des puissances prédites (section 6.3). Les vitesses ainsi évaluées sont comparées aux observations de Barban *et al.* [1999].

6.1 Modèle de Procyon basé sur la MLT classique

Nous considérons un modèle de Procyon de masse $M = 1.46 M_{\odot}$ et de température effective $T_{\text{eff}} = 6420$ K construit à l'aide du code d'évolution CESAM. Le traitement de la convection correspond à la théorie standard de la longueur de mélange telle qu'elle a été utilisée dans le modèle solaire considéré dans la section 5.1. La valeur de la longueur de mélange et la composition chimique des éléments lourds sont identiques à celles utilisées dans le modèle solaire. Enfin les modes propres d'oscillations sont, comme pour le modèle solaire, calculés avec le code adiabatique FILOU de Tran Minh and Leon [1995].

6.1.1 Puissance des oscillations

Nous adoptons le modèle de turbulence introduit dans les sections 3.2.7 et 3.2.8. Pour chacun des spectres (RKS, BKS et NKS) les valeurs des paramètres libres β et λ ont été fixées dans la section 5.1 par ajustement aux observations solaires. Nous adopterons initialement ces valeurs.

La puissance stochastique, $P(\omega_0)$, injectée dans les modes d'oscillation de Procyon est calculée à l'aide des relations 2.35 et 4.130. Le résultat du calcul de $P(\omega_0)$ pour les différents spectres est présenté dans la figure 6.1. Les estimations ont été effectuées jusqu'à la fréquence de coupure de Procyon (~ 1.5 mHz).

On observe (figure 6.1) de grandes différences pour les puissances évaluées avec les différents spectres turbulents. Ces différences permettront d'identifier lequel de ces spectres correspond le plus à la réalité.

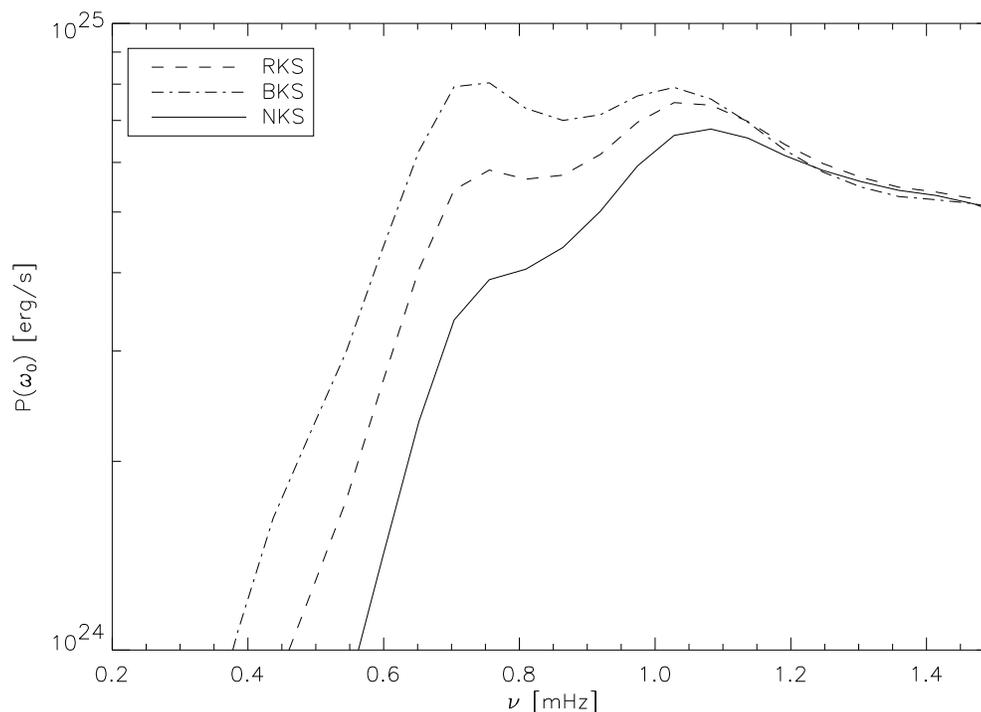


FIG. 6.1 – Spectre de puissance $P(\omega_0)$ calculé pour le modèle de Procyon en considérant différents spectres de turbulence. Le modèle de Procyon a été obtenu à l’aide du code CESAM tandis que les modes propres ont été obtenus à l’aide au code adiabatique FILOU.

Mais contrairement au cas solaire, les différences sont observées à basse fréquence tandis qu’à haute fréquence les courbes $P(\omega_0)$ calculées avec les différents spectres sont quasi confondues. On observe également une variation de la forme du spectre de puissance avec ν qui n’est pas observée dans le spectre de puissance calculé dans le cas du Soleil (chapitre 5).

Dans le cas solaire et à basse fréquence l’allure du spectre de puissance est principalement contrôlé par l’inertie des modes. En effet à basse fréquence $\nu \lesssim 3$ mHz la totalité des tourbillons décrits par le spectre turbulent est mise en jeu dans le processus d’excitation stochastique. Cela entraîne dans le cas solaire l’absence de différence à basse fréquence entre les différents spectres turbulents.

Cela n’est pas le cas ici pour le modèle Procyon bien que les valeurs des paramètres libres soient identiques à ceux utilisés pour le modèle solaire. Nous montrerons en effet dans la section 6.2 que les différences observées à basse fréquence sont imputables au traitement de la convection dans le modèle d’équilibre.

Les variations de la forme du spectre de puissance sont dues à la faible profondeur de la zone convective de Procyon. En effet il a été clairement établi dans la section 4.7 que les tourbillons de nombre d’onde k qui contribuent à l’excitation d’un mode de fréquence ω_0 sont tels que $\tau_k \omega_0 \lesssim 1$ où τ_k est le temps de cohérence d’un tourbillon considéré. Les temps de cohérence τ_k des tourbillons sont inférieurs ou de l’ordre du temps convectif caractéristique τ_Λ dont la dépendance avec la profondeur a été tracée dans la figure 3.1 de la section 3.1.3. Par conséquent la région d’excitation est le domaine où l’on a approximativement $\tau_\Lambda \omega_0 \lesssim 1$. Une telle région se situe en haut de la zone convective là où l’estimation de τ_Λ par la MLT atteint un minimum qui coïncide avec le maximum du gradient superadiabatique [Christensen-Dalsgaard and Frandsen, 1983b]. Parce que Procyon est plus lumineuse et plus chaude que le Soleil, la zone où $\tau_\Lambda \omega_0 \lesssim 1$ est vérifiée, à ω_0 donné, est plus petite que dans le cas du Soleil.

D’autre part la formulation de la puissance injectée dans les modes met en jeu le carré de la dérivée des fonctions propres par rapport au rayon $(d\xi/dr)^2$. Cette grandeur présente un pic très fort en haut de la zone superadiabatique et oscille plus bas (c.f. Goldreich *et al.*, 1994, ainsi que la figure 6.8). La dépendance avec ω_0 de la largeur de la région d’excitation rend le spectre de puissance sensible aux oscillations de $(d\xi/dr)^2$ et explique ainsi les variations observées dans $P(\omega_0)$.

Cela n’est pas observé dans le cas du Soleil. En effet le Soleil a une zone d’excitation plus large que celle

de Procyon. Par conséquent, à ω_0 donné, la région où la condition $\tau_\Lambda \omega_0 \lesssim 1$ est satisfaite est plus large que le domaine dans lequel prennent place les premiers noeuds des fonctions propres dont les amplitudes sont significatives. Par conséquent à basse fréquence le spectre de puissance des oscillations solaires est davantage contraint par l'inertie des modes.

6.1.2 Influence de différentes hypothèses

On rappelle que dans l'expression générale des amplitudes (équation 4.127), les deux paramètres libres β et λ , définis respectivement dans les sections 3.2.6 et 3.2.5, ont été introduits. Le premier permet de relier (équation 3.81) le nombre d'onde k_0 , (à partir duquel le régime inertiel débute) à la longueur de mélange (Λ). Enfin le second, λ a été introduit dans la définition du temps de cohérence (τ_k), c.f. équation 3.76.

L'introduction de ces paramètres libres a permis d'aboutir à l'équation 4.130. Cette forme établit que l'amplitude absolue de la puissance croît comme $\lambda \beta^4 \Phi^{3/2} w^3 \Lambda^4$, où w est l'estimation des vitesses convectives par la MLT et Φ est le facteur d'anisotropie (équation 3.26).

τ_k est une mesure de la largeur du spectre temporel $\chi_k(\omega)$ qui intervient dans l'équation 4.127. Par conséquent la dépendance fréquentielle de $P(\omega_0)$ est principalement gouvernée par τ_k . Les équations 3.76 et 3.81 permettent d'écrire τ_k comme

$$\tau_k = \frac{\lambda \beta \alpha_c H_P}{2\pi u_0 w K u_K} \quad (6.1)$$

où $u_K = u_k/u_0$ et $u_0 = \sqrt{\Phi/3} w$.

L'estimation des puissances est par conséquent très sensible à la valeur des paramètres libres β et λ , à la valeur de la longueur de mélange $\Lambda = \alpha_c H_P$ et enfin à la valeur de Φ et w ; cette dernière quantité dépendant du traitement de la convection.

Nous étudierons dans cette section les effets dus à un changement du paramètre α_c de la longueur de mélange et des valeurs des paramètres libres. Les effets dus à un traitement différent de la convection seront étudiées dans la section 6.2.

Effets du paramètre de la longueur de mélange

Les simulations faites par Trampedach [1999] suggèrent que la valeur de α_c devrait être plus faible pour les étoiles plus massives que celle établie par étalonnage des modèles solaires. Nous considérons donc ici des modèles de Procyon avec des valeurs de α_c égales à $\alpha_c = 1.665, 1.5, 1.3, 1.0$. A cette fin nous utilisons un modèle de Procyon doté d'une atmosphère construite dans l'approximation d'Eddington de sorte à éviter le problème de raccordement de l'atmosphère avec l'enveloppe²⁷. Toutes les autres caractéristiques des modèles sont identiques à celles considérées précédemment pour Procyon.

L'impact d'un changement de α_c est illustré sur les figures 6.2 et 6.3 qui concernent respectivement le RKS et le NKS. Tandis que α_c décroît, nous observons un décalage de la position du maximum vers les basses fréquences, un accroissement relatif de la puissance injectée à basse fréquence et enfin une baisse relative à haute fréquence.

La diminution de α_c induit une décroissance de τ_k et accroît ainsi la région où la condition $\tau_k \omega_0 \lesssim 1$ est vérifiée. Parce que les fonctions propres d'ordre radial faible sont plus profondes, davantage de puissance est injectée dans les modes de très basse fréquence lorsque α_c décroît. Ceci explique le décalage vers les basses fréquences du spectre de puissance.

Dans le cas du NKS et avec le modèle de paramètre $\alpha_c = 1.0$, la décroissance de $P(\omega_0)$ à haute fréquence s'avère plus faible qu'avec le RKS. Cette différence avec le RKS s'explique par le fait que le NKS induit un domaine d'excitation plus faible que le RKS.

En effet, le RKS et le BKS concentrent davantage d'énergie aux faibles nombres d'ondes k , et une portion plus importante de puissance est injectée aux modes d'oscillations de longues périodes. La région d'excitation est alors plus large pour le RKS et le BKS que pour le NKS.

D'autre part, la région d'excitation est localisée dans un très petit domaine (quelques Mm) en haut de la zone superadiabatique, à l'extrémité supérieure de laquelle $(d\xi/dr)^2$ croît avec ω_0 (c.f. Goldreich *et al.* [1994] ainsi que la figure 6.8).

²⁷Pour chaque valeur de α_c il faut calculer la loi $T(\tau)$ où τ est l'épaisseur optique dans l'atmosphère de sorte à ce que l'atmosphère se raccorde avec l'enveloppe interne. L'atmosphère du modèle initial de Procyon a été calculée à l'aide du code ATLAS 9 de Kurucz [1991]. Il aurait fallu calculer, à chaque stade d'évolution de l'étoile et pour chaque valeur de α_c considérée, de nouvelles loi $T(\tau)$. L'introduction de la loi $T(\tau)$ calculée dans l'approximation d'Eddington permet de contourner ce problème. Par ailleurs on a montré [Samadi *et al.*, 2000a] que le traitement de l'atmosphère influe peu sur les amplitudes.

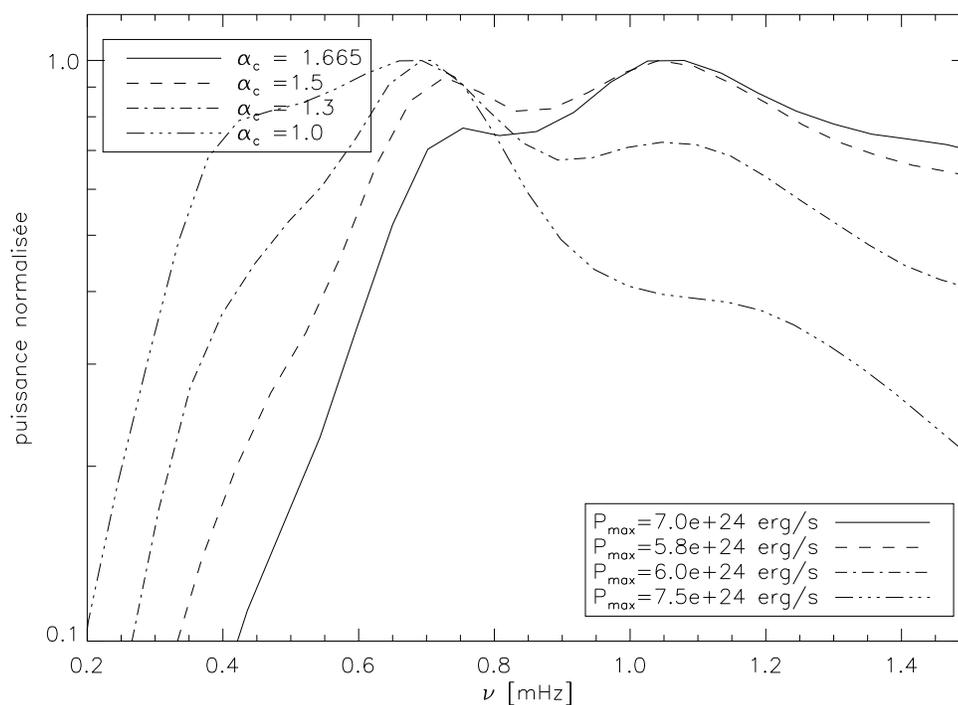


FIG. 6.2 – Spectre de puissance $P(\omega_0)$ estimé pour le modèle de Procyon basé sur la MLT classique pour différentes valeurs de α_c et en considérant le spectre RKS.

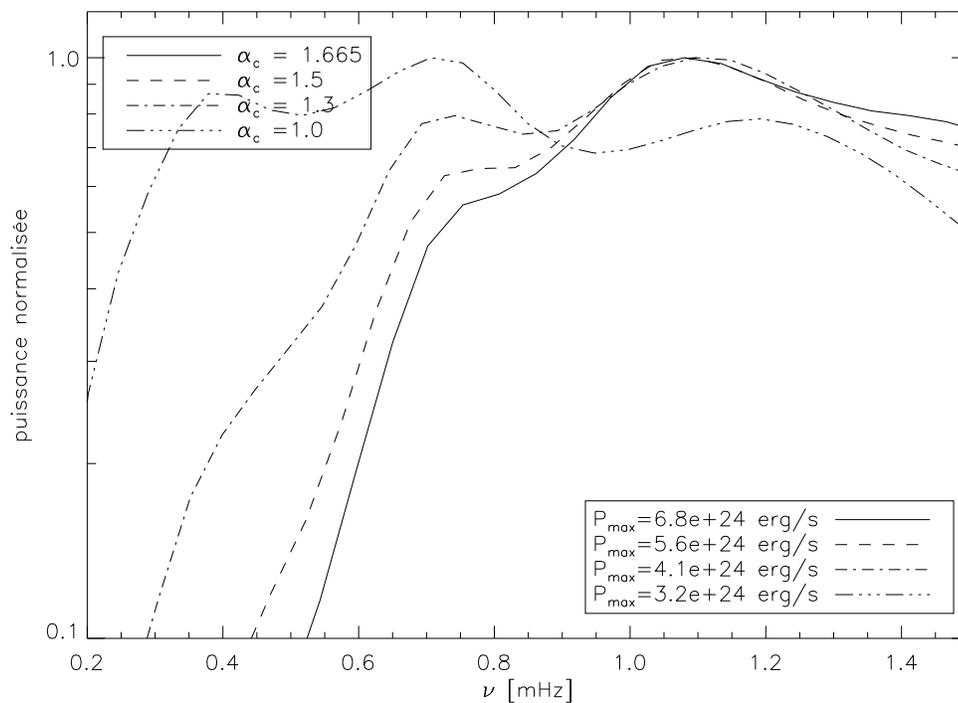


FIG. 6.3 – Idem figure 6.2 mais avec le spectre NKS. Notez à haute fréquence une décroissance plus faible de $P(\omega_0)$ pour les valeurs décroissantes de α_c .

Le NKS présente, à ω_0 fixé, une zone d’excitation moins profonde que le RKS, celui-ci rend davantage compte de l’accroissement de $(d\xi/dr)^2$ avec la fréquence. Cela compense la décroissance de $P(\omega_0)$ observée à haute fréquence dans le cas du spectre RKS.

Effets des paramètres libres β et λ

Les paramètres libres β et λ ont été fixés à partir du modèle solaire de façon à ajuster simultanément aussi bien l’amplitude absolue que la position en fréquence du maximum des amplitudes solaires.

Christensen-Dalsgaard and Frandsen [1983b, JCD] ont également introduit un paramètre γ qui permet d’ajuster la fréquence d’oscillation pour laquelle le transfert de puissance aux oscillations est maximale²⁸

Le paramètre γ est donc d’une certaine façon équivalente à la quantité $\beta\lambda$. Toutefois dans notre formulation la signification des deux paramètres a été clairement établie et a permis d’ajuster simultanément forme et amplitude des vitesses sur les données solaires.

Parce que reliés à la turbulence β et λ , on s’attend à ce que β et λ prennent les mêmes valeurs pour les autres étoiles que le Soleil (en particulier pour Procyon au début du présent chapitre). Cependant à cause d’un certain nombre d’incertitudes quant au traitement de la convection et quant à la formulation de la puissance $P(\omega_0)$, les valeurs ajustées de ces paramètres peuvent être dans une certaine mesure incertaines ou fortuites.

L’amplitude global, dans l’expression 4.130 donnant l’amplitude des oscillations, varie comme β^4 . L’estimation du spectre de puissance est par conséquent très sensible à ce paramètre. L’ajustement du paramètre β doit être sans doute sujet à des incertitudes plus importantes que celui sur λ . Nous étudions ici les effets d’un changement de la valeur de β tandis que λ garde la valeur ajustée sur le Soleil.

Le spectre de puissance $P(\omega_0)$ pour différentes valeurs de β et pour le RKS est présenté dans la figure 6.4.²⁹ Des effets similaires à ceux observés en changeant la valeur de α_c sont constatés. Cela s’explique par le fait que α_c et β contrôlent la profondeur de la région d’excitation à travers la valeur de τ_k (équation 6.1). Un accroissement de β induit, comme pour α_c , un accroissement du temps de cohérence τ_k et rétrécit la région où $\tau_k\omega_0 \lesssim 1$.

Cependant les effets s’avèrent plus faibles qu’avec α_c . En effet, les changements sur la valeur de α_c induisent non seulement une modification de la valeur maximale de τ_k mais aussi une modification de la vitesse convective w , dont les variations sont dépendantes de la profondeur dans la zone superadiabatique.

6.2 Un traitement de la convection plus “sophistiqué”

Considérons maintenant le traitement de Gough de la MLT et qui a déjà été envisagé dans le cas solaire. Les ingrédients physiques sont ceux du modèle solaire de la section 5.1.2. Les paramètres du modèle, température effective, masse et composition chimique, correspondent à ceux du modèle de Procyon de la section 6.1 et construit sur la base de la MLT standard avec le code CESAM. Le paramètre de la longueur de mélange a été fixé ici à $\alpha_c = 2.2$. Le modèle de Procyon construit avec la valeur $\alpha_c = 2.02$ (qui correspond à la valeur ajustée avec le modèle solaire établi avec la même physique dans la section 5.1.2), conduit à des modes propres instables ($\eta < 0$). Ces modes instables ne sont pas détectés par les différentes campagnes d’observations de Procyon. On s’attend donc à ce que tous les modes de Procyon soient amortis ($\eta > 0$). Nous avons donc imposé la valeur $\alpha_c = 2.2$ qui assure la stabilité de tous les modes d’oscillation.

La figure 6.5 présente les spectres de puissance $P(\omega_0)$ calculés en considérant les spectres NKS, BKS et RKS et en prenant les valeurs des paramètres de β et λ ajustés dans la section 5.1.2 sur les observations solaires. Contrairement au modèle de Procyon de la section 6.1, nous n’observons pas de grandes différences entre les spectres et les maxima de puissance sont très proches. Les principaux écarts entre les spectres sont observés à haute fréquence ($\nu \gtrsim 1.3$ mHz) tandis qu’à basse fréquence ($\nu \lesssim 1.3$ mHz) tous les spectres sont confondus.

L’absence de sensibilité au spectre turbulent obtenue ici est contraire aux résultats basés sur la MLT classique. Elle peut s’expliquer par des valeurs relativement plus petites du temps de cohérence τ_k induites par le présent modèle de Procyon et par les propriétés spécifiques des modes propres associés.

²⁸En effet le critère de résonance s’exprime $\omega_0\tau_k \lesssim 1$ où k désigne le nombre d’onde d’un tourbillon. Les tourbillons les plus larges, *i.e.* tel que $k\Lambda \sim 2\pi$, sont les plus énergétiques. τ_Λ est la durée de vie des gros tourbillons de la MLT. Par conséquent à τ_Λ donné le transfert de puissance aux oscillations est la plus grande pour ω_0 approximativement tel que $\omega_0\tau_\Lambda \sim 1$. τ_Λ atteint un minimum τ_Λ^{\min} en haut de la zone superadiabatique là où l’excitation est la plus grande. Le transfert maximal de puissance s’effectue à la fréquence ω_0 tel que l’on ait approximativement $\omega_0\tau_\Lambda^{\min} \sim 1$. JCD introduisent ensuite le paramètre pour ajuster la position en fréquence du maximum des vitesses d’oscillation du Soleil.

²⁹Des résultats similaires sont établis avec le spectre NKS ou le BKS.

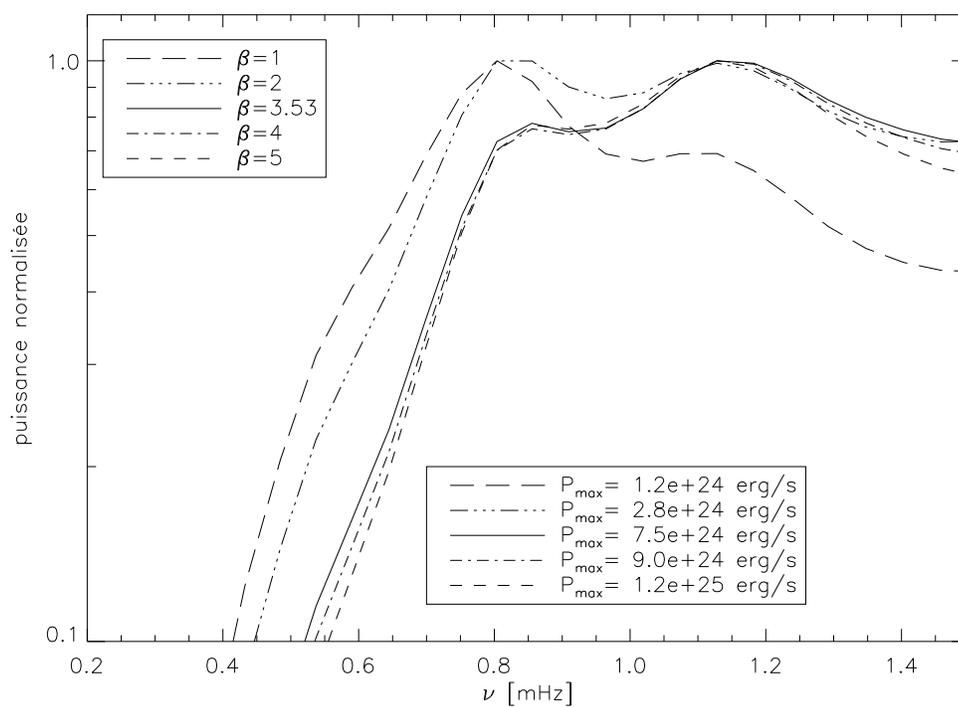


FIG. 6.4 – Estimation de la puissance $P(\omega_0)$ injectée dans les oscillations de Procyon pour différentes valeurs de β et pour le spectre RKS.

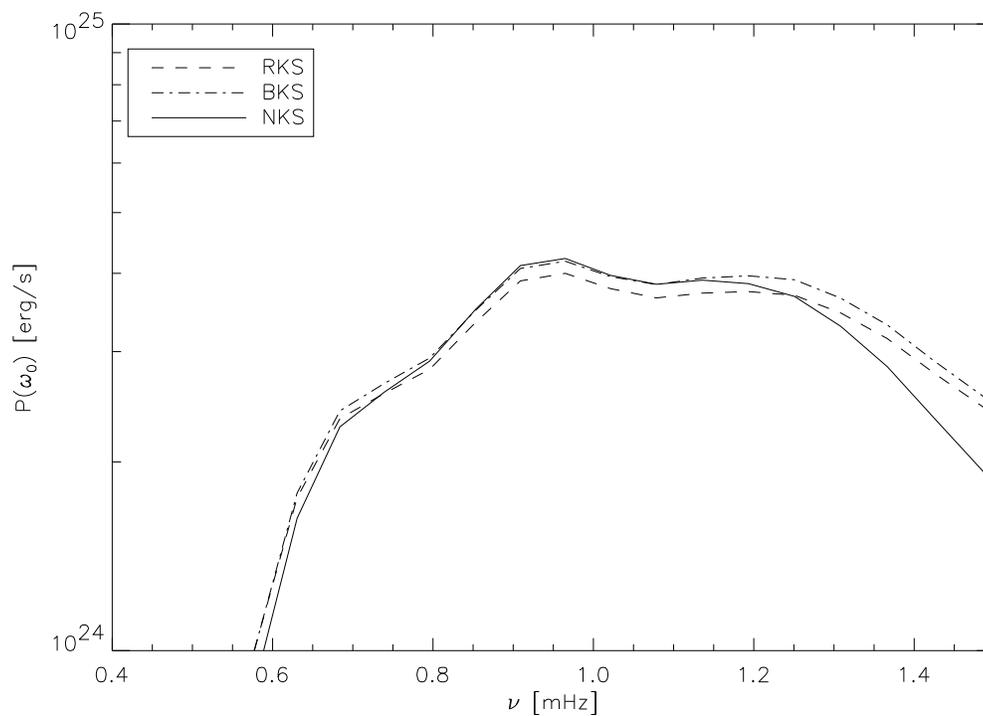


FIG. 6.5 – Estimation du spectre de puissance $P(\omega_0)$ du modèle de Procyon basé sur le traitement non-local et dépendant du temps de la MLT.

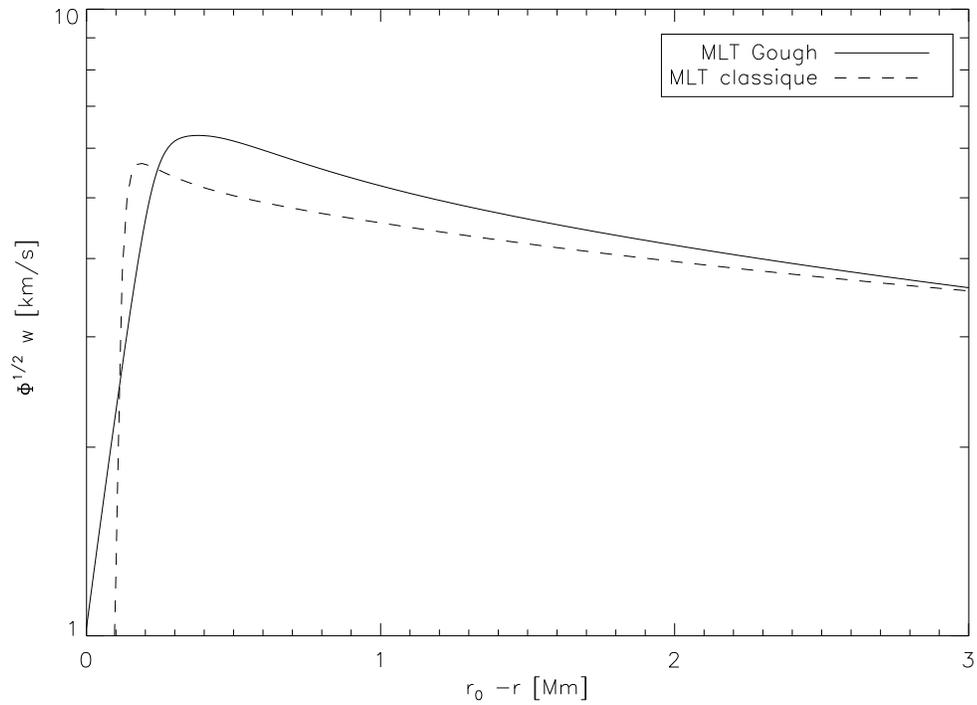


FIG. 6.6 – Vitesse convective total $\Phi^{1/2} w$ pour les deux modèles de Procyon basés respectivement sur la description de Gough de la MLT (ligne continue) et sur la MLT classique (ligne en pointillée). La vitesse convective est tracée en fonction de $r_0 - r$ où r_0 est le rayon de la photosphère. La description de Gough de la MLT induit des valeurs de w plus grandes dans un domaine plus étendu que celles atteintes par w en considérant la MLT classique.

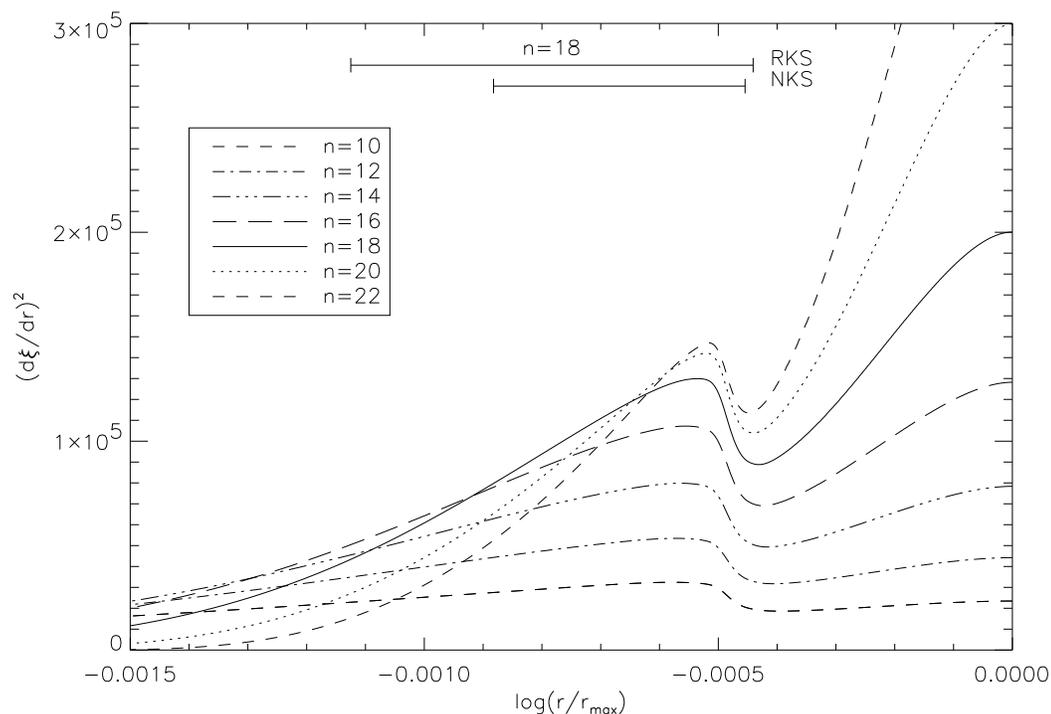


FIG. 6.7 – Carré de la dérivée des fonctions propres non-adiabatique, $(d\xi/dr)^2$, calculées à l'aide du code de pulsation non adiabatique de Balmforth [1992c; 1992a; 1992a, B92]. Les modes radiaux d'ordres $n = [10, 12, 14, 16, 18, 20, 22]$ ont été considérés et tracés en fonction du logarithme du rayon réduit r/r_{max} où r_{max} est le rayon total de l'étoile. Les segments horizontaux représentent, pour le mode radial $n = 18$, les domaines d'excitation des spectres RKS et NKS. Il s'agit des domaines où la fonction source $\mathcal{S}_S(r, \omega_0)$ - équation 4.132 - est supérieure à $\max(\mathcal{S}_S) / 10$. Notez l'allure caractéristique des fonctions propres au voisinage de la surface. Elle s'explique du fait que le code de pulsation de B92 impose une atmosphère isotherme à la surface pour laquelle on peut déterminer analytiquement les fonctions propres. Les conditions aux limites consistent alors à faire coïncider les modes propres de l'enveloppe avec les fonctions propres de l'atmosphère isotherme [c.f. Christensen-Dalsgaard, 1989].

En effet dans la région superadiabatique τ_k prend des valeurs plus faibles et sur une étendue plus grande que les valeurs de τ_k atteintes avec le modèle basé sur la MLT standard. Ceci s'explique du fait que les valeurs atteintes par w dans la région superadiabatique sont plus grandes que celles induites par la MLT classique (c.f. figure 6.6). Enfin ceci peut se comprendre par la valeur élevée de α_c imposée à ce modèle de Procyon pour stabiliser tous ses modes et par la physique différente de celle du modèle de la section 6.1.

Puisque $\tau_k \propto w^{-1}$ le modèle convectif plus élaboré conduit à des valeurs de τ_k plus petites. Par conséquent l'excitation des modes de basse fréquence ($\nu \lesssim 1.2$ mHz) du présent modèle de Procyon prend place plus profondément dans la région superadiabatique. Dans ces régions plus profondes le carré de la dérivée des fonctions propres, $(d\xi/dr)^2$, change peu avec la fréquence (voir figure 6.7).

Pour le modèle de Procyon de la section 6.1 au contraire, les régions d'excitation, tous spectres confondus, sont moins profondes à cause des valeurs plus élevées de τ_k induites par ce modèle. Par conséquent l'excitation des modes de basses fréquences ($\nu \lesssim 1.0$ mHz) prend place dans une région plus étroite que celle du modèle basé sur la MLT de Gough. Dans cette région les variations de $(d\xi/dr)^2$ avec ω_0 sont plus larges. En particulier l'accroissement de $(d\xi/dr)^2$ avec ω_0 s'avère plus large avec les fonctions propres du code adiabatique FILOU calculé sur le modèle d'équilibre basé sur la MLT standard (comparez à titre d'illustration les figures 6.7 et 6.8).

Enfin, tous les spectres ne génèrent pas la même profondeur d'excitation à ω_0 fixé et la profondeur d'excitation décroît lorsque ω_0 croît. Les variations importantes de $(d\xi/dr)^2$ avec ω_0 (figure 6.8) expliquent alors les différences observées entre les différents spectres turbulents pour le modèle d'équilibre basé sur la MLT classique (voir figure 6.1).

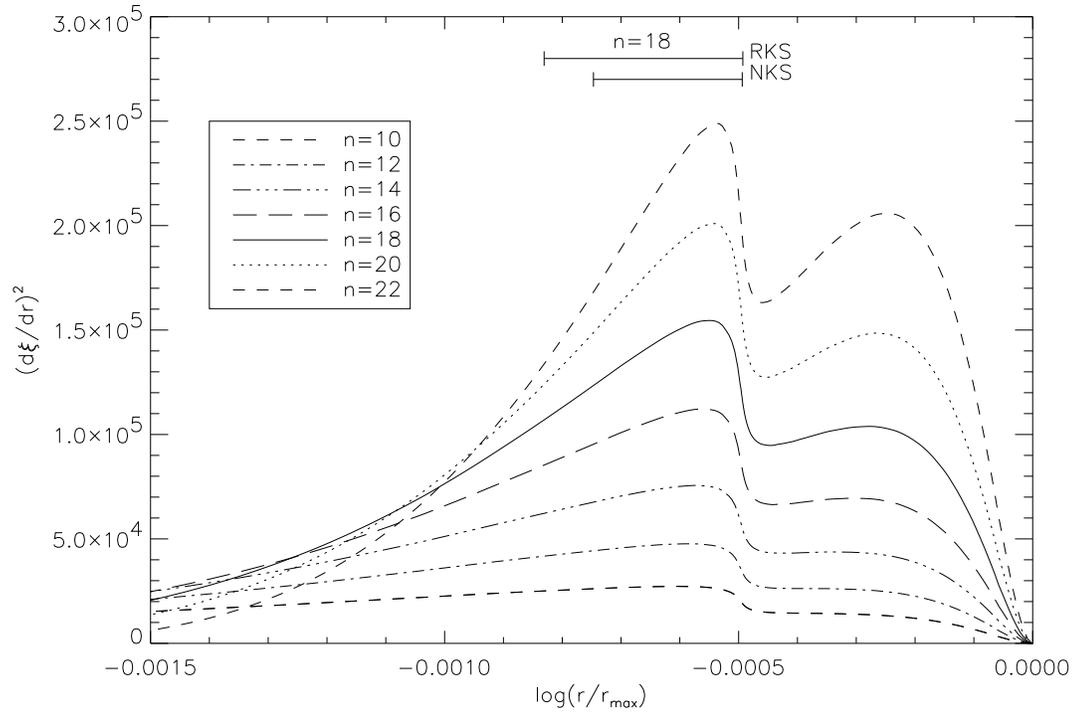


FIG. 6.8 – Même graphe que la figure 6.7 : les fonctions propres ξ ici sont calculées à l'aide du code de pulsation adiabatique FILOU de Tran Minh and Leon [1995]. Notez que les domaines d'excitation des deux spectres - tracés ici pour le mode d'ordre $n = 18$ - sont plus étroits que ceux du modèle basé sur la MLT de Gough (c.f. figure 6.7). Notez aussi le comportement très différent des fonctions propres à la surface par rapport aux fonctions propres de la figure 6.7. Ce comportement s'explique par le fait que les conditions aux limites considérées par le code FILOU consiste à annuler la variation Lagrangienne de la pression. On montre que cette condition aux limites supérieures est sans conséquence sur le calcul de $P(\omega_0)$.

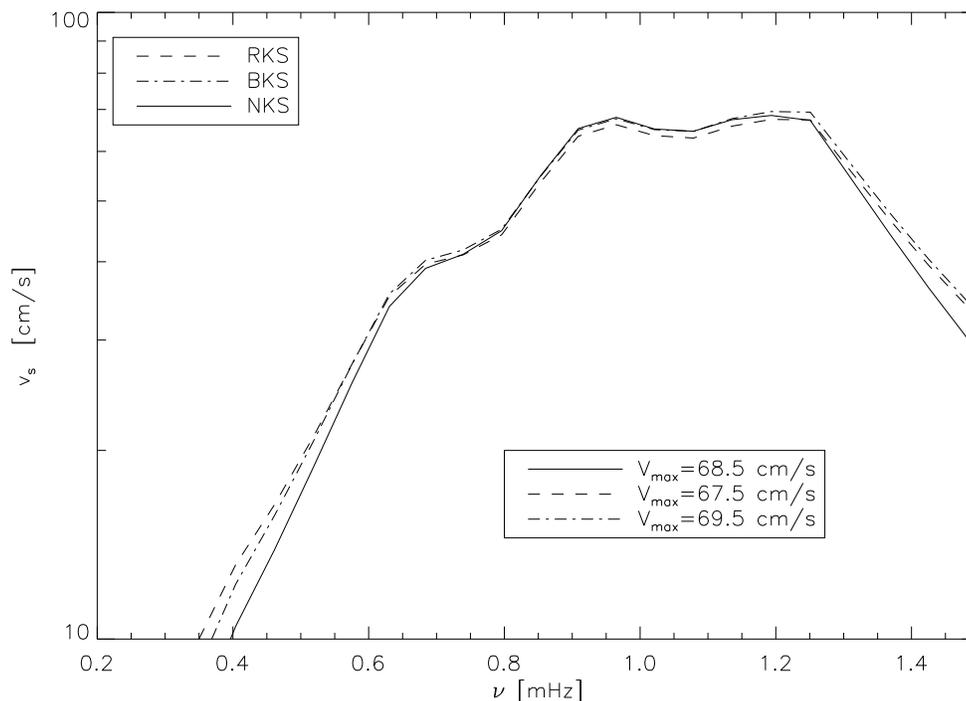


FIG. 6.9 – Vitesses des oscillations prédites pour le modèle d'équilibre de Procyon basé sur le traitement non-local et dépendant du temps de la MLT de Gough. Différents spectres turbulents sont envisagés.

Pour le modèle de Procyon considéré ici, l'excitation des modes de basse fréquence a lieu dans une région plus profonde que pour le modèle de la section 6.1, dans laquelle la pente de $(d\xi/dr)^2$ reste faible (c.f. figure 6.7). De ce fait les spectres turbulents se différencient peu à basse fréquence (voir figure 6.5).

6.3 Estimation des vitesses des oscillations

Pour évaluer les amplitudes des vitesses d'oscillation de Procyon il est nécessaire de connaître les amortissements η associés (équation 2.36). La description de la convection dépendante du temps considérée par Gough (c.f. section 3.1.5) fournit simultanément fréquence et amortissement des oscillations (consulter Balmforth [1992c] pour des détails au sujet du code de pulsation non-adiabatique correspondant).

Les vitesses amplitudes $v_s(\omega_0)$ des oscillations des Procyon s'obtiennent à partir de l'équation 2.36 à l'aide de η et des amplitudes des puissances $P(\omega_0)$ calculées dans les sections précédentes.

Dans l'évaluation de $v_s(\omega_0)$ intervient la profondeur à laquelle sont effectuées les mesures des vitesses. Les observations sismiques solaires s'effectuent en général avec une unique raie dont la profondeur dans l'atmosphère est bien connue. Dans le cas des observations stellaires, du fait d'un rapport signal à bruit beaucoup plus faible, on utilise en général un très grand nombre de raies³⁰. Par conséquent il est difficile de déterminer une profondeur moyenne à laquelle s'effectuent les mesures. On considère donc par défaut dans ce calcul la couche dans l'atmosphère qui correspond aux mesures solaires, *i.e.* la profondeur $h = 140$ km. On a toutefois montré dans Samadi *et al.* [2000a] que, dans le cas du Soleil, la variation de l'amplitude maximale avec h était faible et que les principaux changements dans $v_s(\omega_0)$ étaient attendus à haute fréquence.

La figure 6.9 présente le calcul de $v_s(\omega_0)$ effectué sur le modèle d'équilibre basé sur le traitement de la MLT selon Gough (modèle de la section 6.2) et pour différents spectres turbulents. Nous observons à nouveau uniquement des différences à haute fréquence ($\nu \lesssim 1.2$ mHz) entre les spectres turbulents. Ces différences sont évidemment reliées à celles observées pour $P(\omega_0)$ calculé avec des spectres turbulents différents puisque l'on utilise les mêmes valeurs de $\eta(\omega_0)$ pour calculer v_s .

³⁰C'est le cas des observations de Procyon faites avec le spectrographe ELODIE qui travaille sur un domaine large de longueur d'onde [c.f. Barban *et al.*, 1999; Martić *et al.*, 1999].

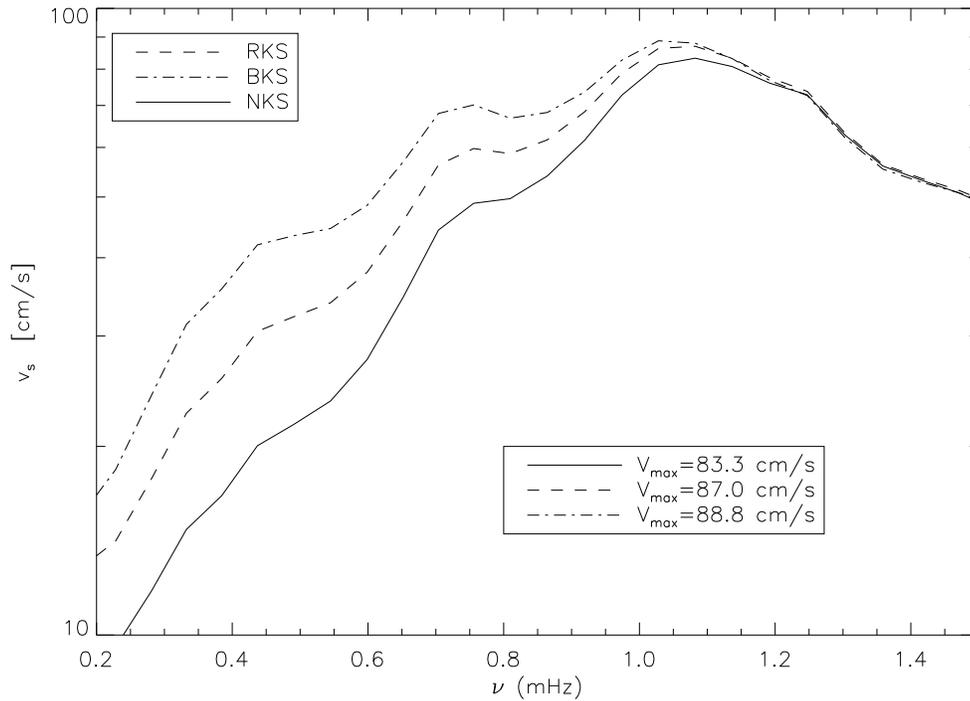


FIG. 6.10 – Idem figure 6.9, les estimations concernent ici le modèle d'équilibre de Procyon basé sur la MLT standard.

De la même façon nous avons évalué les vitesses des oscillations du modèle d'équilibre basé sur la MLT standard. On a pour cela considéré les valeurs de η du modèle d'équilibre de la section 6.2 puisque celles-ci ne peuvent pas être obtenues à partir du code de pulsation adiabatique FILOU et de la description classique de la MLT. On suppose ainsi que l'usage d'un modèle d'équilibre et de fonctions propres basé sur une description physique différente pour le calcul des η engendre des erreurs négligeables devant les incertitudes quant à la formulation de $P(\omega_0)$. Cette inconsistance peut affecter la valeur absolue de $v_s(\omega_0)$ mais n'altère pas la validité de la comparaison entre des vitesses calculées avec des spectres turbulents différents.

La figure 6.10 présente le calcul de $v_s(\omega_0)$ pour le modèle d'équilibre basé sur la MLT standard et pour les différents spectres turbulents considérés jusqu'alors. Les maxima de $v_s(\omega_0)$ atteints avec les différents spectres s'avèrent très proches les uns des autres (~ 83 – 88 cm/s). On note aussi à nouveau à basse fréquence une large différenciation due à des spectres turbulents. Elle demeure néanmoins plus faible qu'en terme de puissance. En effet l'amortissement $\eta(\nu)$ des modes de Procyon croît avec ν jusqu'à la fréquence $\nu \simeq 0.7$ mHz au delà de laquelle l'amortissement des modes est quasi constant. Par conséquent les variations de η à basse fréquence contribuent à réduire les écarts observés en terme de $P(\omega_0)$.

Les observations de Procyon ont été réalisées par Martić *et al.* [1999] et Barban *et al.* [1999]. Les auteurs ont détecté un maximum de puissance au voisinage de $\nu \simeq 1$ mHz et ont estimé la valeur limite supérieure de la vitesse autour de $V_{\max} \lesssim 60$ cm/s.

Les estimations des vitesses des figures 6.9 et 6.10 présentent un maximum autour de $\nu \simeq 1$ mHz en bon accord avec les observations. Cependant les valeurs maximales prédites pour tous les spectres et pour le modèle de Procyon de la section 6.1 (voir figure 6.9) sont près de 40 % plus grandes que la valeur limite suggérée par Barban *et al.* [1999]. Cet écart peut être expliqué du fait de l'approximation mentionnée plus haut qui consiste à utiliser les amortissements calculés à partir d'un modèle différent.

Les valeurs maximales de v_s prédites sur le modèle basé sur le traitement de Gough de la MLT avoisinent les ~ 70 cm/s et sont donc en meilleur accord avec les observations (figure 6.10).

Ce meilleur accord avec les observations de Procyon ainsi que le meilleur accord avec les observations solaires obtenu sur le modèle solaire basé sur le même traitement de la MLT tendent à conforter ce traitement de la convection.

Enfin, que ce soit avec le traitement standard ou le traitement "sophistiqué" de la MLT nos estimations

des amplitudes de Procyon basées sur notre formulation des puissances sont plus proches des observations que celles s'appuyant sur la formulation de Balmforth [1992a]. En effet cette dernière, également étalonnée sur le soleil, donnerait des vitesses de l'ordre de 150 cm/s (Houdek, communication privée). La différence avec nos résultats s'explique du fait que la formulation de B92 appliqué avec le spectre de Kolmogorov induit des profondeurs d'excitation beaucoup plus grande ($\sim \times 10$ pour un mode de degré $n = 20$).

Notre résultat tend donc - sous réserve que les estimations des amortissements restent fiables - à conforter nos estimations des puissances.

6.4 Conclusion

L'étude entreprise sur Procyon nous a révélé que le calcul de la puissance acoustique pour cette étoile est très sensible aux spectres de turbulence introduits dans la formulation. Cette étude sera étendue au chapitre 7 pour d'autres modèles d'étoile de type solaire.

On a montré que cette formulation est également très sensible à la valeur des paramètres α_c et β . Toutefois ne disposant pas de contraintes autres que celles du Soleil, on est contraint de prendre les valeurs solaires.

Ces résultats ont été obtenus en utilisant la MLT classique. En revanche l'utilisation d'une description de la convection basée sur la MLT mais prenant en compte les effets non-locaux et une dépendance en temps élimine cette sensibilité au modèle de turbulence, du moins dans le cas de Procyon. Ceci est dû au fait que ce traitement de la convection induit des profondeurs d'excitation plus étendues que celles induites par le traitement classique de la MLT. Cela peut se comprendre par la valeur élevée du paramètre α_c pour lequel une valeur différente de la valeur solaire a été imposée pour stabiliser tous les modes d'oscillation.

La différence de ces résultats avec ceux obtenus avec la MLT classique tend à relativiser nos conclusions concernant la sensibilité au modèle de turbulence. Il faut donc poursuivre nos investigations pour faire la part entre ce qui est relatif aux ingrédients physiques, au traitement de la convection et enfin au paramètre de la longueur de mélange.

Le calcul des vitesses d'oscillation a montré que la valeur du maximum - quelque soit le traitement de la convection - est proche de celle suggérée par les observations de Procyon et contraste avec les estimations de vitesses effectuées avec la formulation de B92. Cette différence avec B92 est reliée aux profondeurs d'excitation plus petites induites par notre formulation.

Chapitre 7

Du Soleil aux autres étoiles

Après avoir étudié en détail le cas du Soleil et celui de Procyon, nous explorons ici de manière systématique sur un échantillon varié d'étoile de type solaire les conséquences de l'excitation telle que modélisée au chapitre 4. Nous nous basons pour cela sur la formulation calibrée au chapitre 5 sur les données solaires et ceci pour chaque spectre de turbulence. Une comparaison étoile à étoile et spectre à spectre est effectuée à partir de laquelle on établit des effets systématiques en fonction des paramètres stellaires fondamentaux (température effective T_{eff} et luminosité L).

Enfin des contraintes observationnelles sont établies pour chaque étoile à partir des performances attendues pour l'instrument COROT. Ces contraintes permettent ensuite de conclure sur l'opportunité d'observer certains types d'étoile en particulier.

L'essentiel de ce travail a été publié dans Samadi *et al.* [2000b], inséré en annexe E. On en propose ici un résumé.

7.1 Parcours du diagramme HR

Nous nous intéressons à 6 étoiles de masse intermédiaire ($1M_{\odot} \lesssim M \lesssim 2M_{\odot}$) échantillonnant convenablement le diagramme HR dans le voisinage de la séquence principale. Les paramètres stellaires de ces étoiles sont donnés dans la table 7.1 tandis que leur position dans le diagramme HR est donné dans la figure 7.2. Ces étoiles peu massives sont donc dotées d'une enveloppe convective supérieure qui permet l'excitation stochastique des modes p . Excepté pour Procyon et β Hydri elles correspondent à la liste préliminaire des étoiles cibles de la mission spatiale EVRIS [Baglin *et al.*, 1993]. Du fait de leur magnitude apparente faible ($m_v \sim 3 - 4$) ce sont des étoiles intéressantes pour les futurs projets spatiaux MONS et MOST. Pour la mission COROT (qui s'intéresse principalement à des étoile de magnitude $m_v \sim 6$) elles ont été considérées pour leur paramètres stellaires fondamentaux.

Les calculs des modèles d'équilibre basés sur le traitement standard de la MLT et des oscillations adiabatiques sont effectués avec les mêmes ingrédients et paramètres que ceux du modèle solaire au chapitre 5.

Modèle	L/L_{\odot}	T_{eff} K	M/M_{\odot}	ν_c mHz	Age 10^9 ans
α Tri	12.1	6350	1.68	1.0	1.79
η Boo	9.0	6050	1.44	1.0	3.05
Procyon	6.6	6400	1.46	1.5	2.40
β Hydri	3.7	5740	1.08	1.5	7.33
β Vir	3.5	6120	1.25	2.3	4.10
π^3 Ori	2.6	6420	1.25	3.6	1.76

TAB. 7.1 – Paramètres stellaires des étoiles sélectionnées. ν_c désigne la fréquence de coupure.

Le résultat des calculs des puissances $P(\omega_0)$ effectués sur α Tri, η Boo, Procyon et β Vir est présenté dans la figure 7.1. Les calculs de $P(\omega_0)$ sur π^3 Ori et β Hydri ne traduisent pas de changement significatif entre les différents spectres turbulents et ne sont pas présentés.

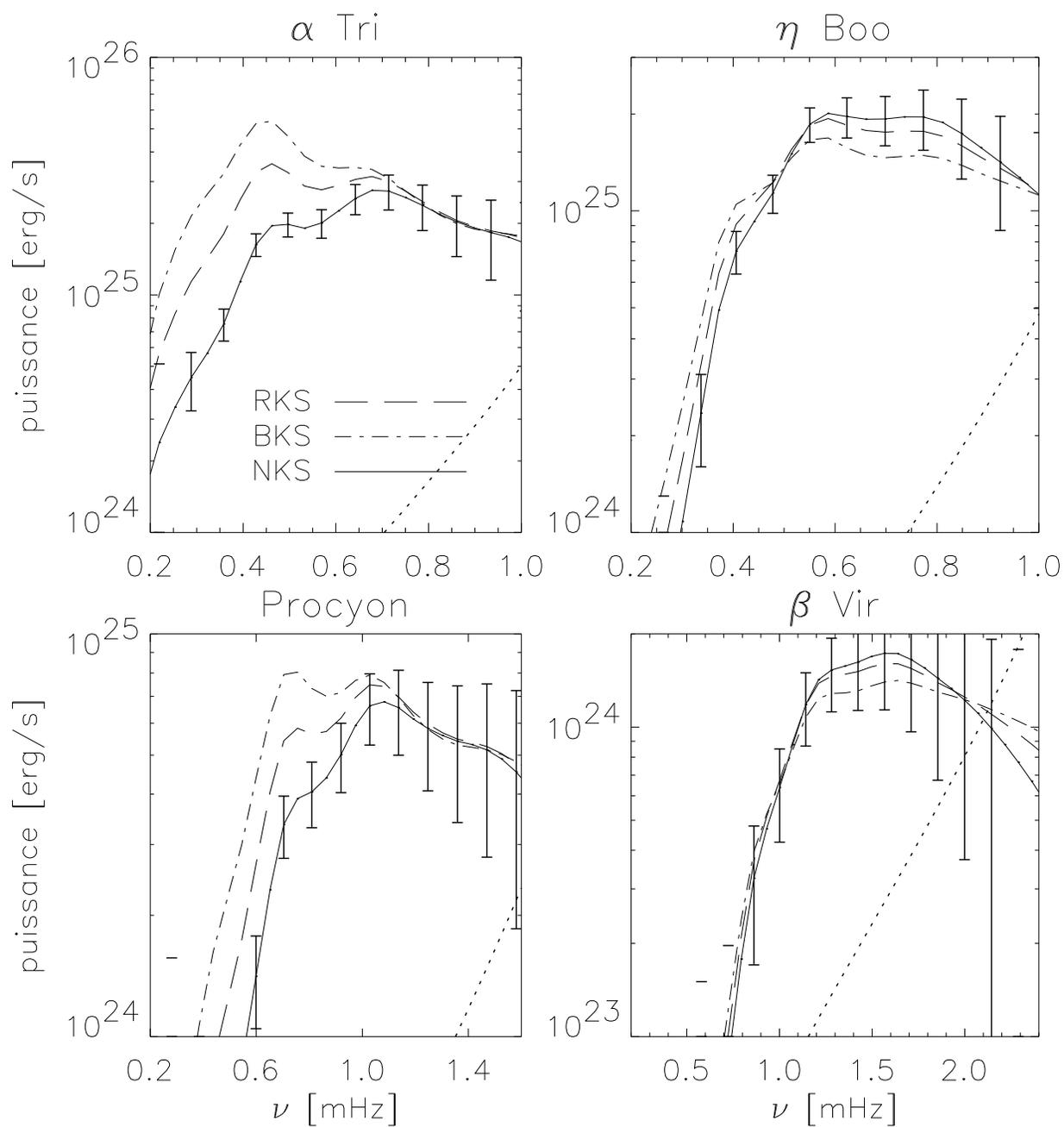


FIG. 7.1 – Puissance stochastique $P(\omega_0)$ en fonction de la fréquence ($\nu = \omega_0/2\pi$) des oscillations calculée pour les étoiles α Tri, η Boo, Procyon et β Vir. On a considéré tour à tour les différents spectres de turbulence utilisés sur le modèle solaire dans le chapitre 5. Les barres d'erreur verticales ΔP ont été obtenues en supposant une précision sur $\eta/2\pi$ (resp. $\delta L/L$) égale à $0.1 \mu\text{Hz}$ (resp. 0.7 ppm). Pour chaque étoile on a également tracé (ligne pointillée) le seuil de détection calculé à partir de l'équation 7.5.

Parmi nos 5 étoiles, β Vir est la plus proche du soleil dans le diagramme HR (figure 7.2), par conséquent sa structure (considérant ici la même composition chimique) est presque identique à celle du Soleil. En conséquence le spectre $P(\omega_0)$ de β Vir se comporte de façon analogue à celui du Soleil et donc ne montre pas de grandes différences lorsque l'on utilise différents spectres turbulents. La même conclusion peut être déduite pour β Hydri.

Pour une étoile plus chaude, les spectres $P(\omega_0)$ calculés avec différents spectres turbulents diffèrent à basse fréquence. Ces différences observées sont plus grandes que les barres d'erreur théoriques (que l'on a tracées dans la figure 7.1 et évaluées en section 7.2) et sont donc assez significatives pour contraindre la modélisation du spectre turbulent stellaire.

Les différences dans la puissance entre β Vir (équivalente au Soleil) et les autres étoiles sont liées à la zone convective externe (ZC ci-après) plus étendue de β Vir. En effet l'épaisseur de la ZC de β Vir est plus grande, l'excitation des oscillations de basse fréquence implique tous les modes (turbulents) des spectres turbulents. Par conséquent comme pour le Soleil la puissance injectée dans des oscillations de basse fréquence est principalement régie par le comportement des fonctions propres (à travers le terme $\partial\xi_r/\partial r$ et l'inertie I) tandis que les propriétés des spectres turbulents dans la région d'injection ne jouent aucun rôle.

Pour les étoiles plus chaudes, la taille relativement plus petite de la ZC induit une région d'excitation moins étendue et confinée en haut de la ZC là où les variations des fonctions propres ξ_r sont importantes. Or à une fréquence donnée l'extension de la région d'excitation change avec les propriétés du spectre de turbulence considéré. Par conséquent $P(\omega_0)$ est très sensible simultanément à ξ_r - donc à ω_0 - et aux propriétés des spectres de turbulence. Cela explique donc les différences observées dans $P(\omega_0)$ à basse fréquence entre les différents spectres turbulents.

En marge de l'effet sur la température, il existe un effet plus faible lié à la luminosité (ou la masse). Cela est illustré par le cas de π^3 Ori qui est à la fois plus chaude que β Vir mais moins lumineuse. Or malgré sa température cette étoile présente une faible sensibilité aux propriétés des spectres turbulents. Cette étoile est en fait un cas intermédiaire entre Procyon et β Vir. Par conséquent la région d'excitation de celle-ci s'étend plus profondément dans l'intérieur que dans le cas de Procyon.

La figure 7.2 illustre dans le diagramme HR les variations étoile à étoile de $P(\omega_0)$. Le domaine où $P(\omega_0)$ prend des valeurs significatives décroît lorsque la température s'accroît ou lorsque la gravité g de l'étoile décroît. En effet le spectre de puissance est limité par la fréquence de coupure (ν_c) or celle-ci varie comme $\nu_c \propto g/\sqrt{T_{\text{eff}}}$. D'autre part on observe que la forme de $P(\omega_0)$ devient plus irrégulière avec les étoiles les plus chaudes et les plus lumineuses. On en déduit que le spectre de puissance évalué sur des étoiles plus chaudes contient plus d'information que des étoiles de structure proche de celle du Soleil.

7.2 Contraintes observationnelles

Les observations sismiques stellaires depuis le sol sont en général limitées par les interruptions diurnes. De ce fait elles ne sont actuellement pas capables de fournir l'amortissement η nécessaire dans l'évaluation de $P(\omega_0)$ à partir de l'équation 2.36.

Les observations spatiales sont particulièrement adaptées en astérosismologie car elles évitent ces interruptions diurnes. Elles s'affranchissent aussi du bruit photométrique dû aux fluctuations atmosphériques. La mission d'astérosismologie spatiale COROT (c.f. chapitre 8) fournira des mesures photométriques d'une précision de 0.7 ppm et une résolution spectrale de $\sim 0.1 \mu\text{Hz}$ (c.f. section 8.1.1) si bien que des mesures précises de η et de la fluctuation relative de luminosité $\delta L/L$ seront disponibles.

Cherchons comment traduire en terme de $P(\omega_0)$ les précisions sur η et $\delta L/L$. Vitesse des oscillations v_s et $P(\omega_0)$ sont reliées par le biais de l'équation 2.36 dans laquelle le rayon r_s correspond à la couche de l'étoile où $T = T_{\text{eff}}$. Dans l'approximation adiabatique v_s est relié à $\delta L/L$ comme [Kjeldsen and Bedding, 1995]

$$\delta L/L \propto v_s T_{\text{eff}}^{-1/2} \quad (7.1)$$

Les équations 2.36 et 7.1 nous permettent d'établir la relation approximative suivante

$$\frac{P}{P_{\odot}} \approx \left(\frac{\delta L/L}{\delta L_{\odot}/L_{\odot}} \right)^2 \frac{T_{\text{eff}} \eta I \xi_r^{-2}}{(T_{\text{eff}} \eta I \xi_r^{-2})_{\odot}} \quad (7.2)$$

où le symbole \odot se réfère aux quantités relatives au Soleil. Goldreich and Kumar [1991] ont établi une relation simplifiée pour η qui tient compte de l'amortissement radiatif et convectif. Cette relation permet d'exprimer

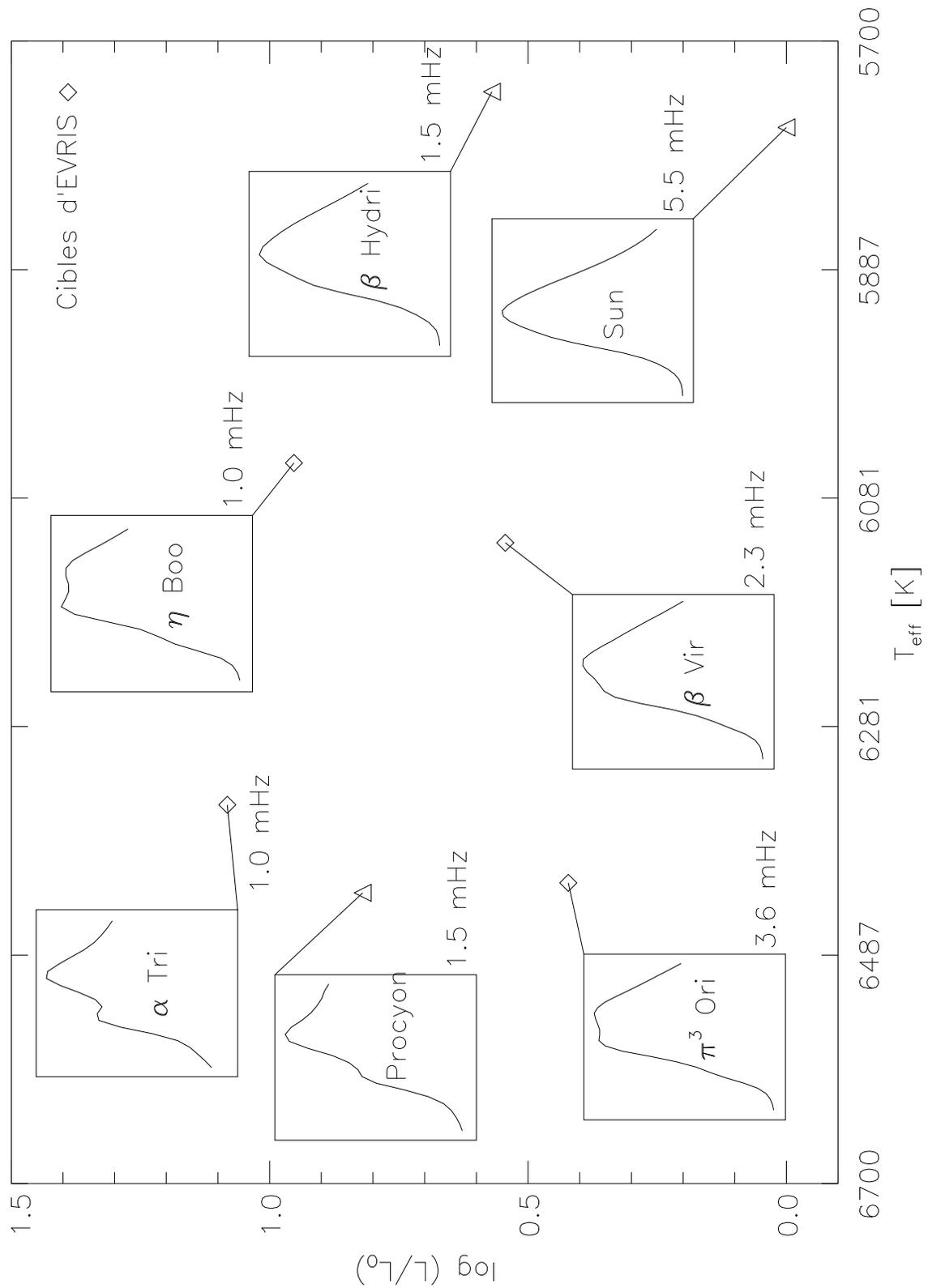


FIG. 7.2 – Position sur le diagramme HR des étoiles sélectionnées. Pour chaque étoile la puissance acoustique $P(\omega_0)$ calculée en considérant le spectre NKS est présentée dans une boîte associée. L'abscisse relative à $P(\omega_0)$ s'étend de 0 mHz à la fréquence de coupure.

η/η_{\odot} comme [c.f. Houdek, 1996, section 3.4.4]

$$\frac{\eta}{\eta_{\odot}} = \frac{L (H c_s^{-2} \omega R)^2 I^{-1}}{L_{\odot} (H c_s^{-2} \omega R)_{\odot}^2 I_{\odot}^{-1}} \quad (7.3)$$

où c_s et H sont respectivement la vitesse du son et l'échelle de pression évaluées à la frontière supérieure de la zone superadiabatique et enfin R désigne le rayon de l'étoile.

On considère qu'une variation relative de luminosité $\delta L/L$ est détectée lorsqu'elle est supérieure à un certain seuil. Soit donc s le seuil de détection en terme de $\delta L/L$ et exprimé en unité de la fluctuation lumineuse maximale solaire $(\delta L_{\max}/L)_{\odot}$. Une oscillation est par conséquent détectée lorsque par convention :

$$\frac{\delta L}{L} \geq s \left(\frac{\delta L_{\max}}{L} \right)_{\odot} \quad (7.4)$$

Au critère de détection de l'équation 7.4 correspond le seuil de détection $P^{\text{th}}(\omega)$ en terme de $P(\omega_0)$ que l'on peut exprimer alors à l'aide des équation 7.2 et 7.3 comme

$$P^{\text{th}}(\omega) = b s^2 P_{\odot}^{\max} \frac{R^2 \xi_r^{-2}(\omega) \omega^2}{R_{\odot}^2 \xi_{r,\odot}^{-2}(\omega_{\max}) \omega_{\max}^2} \quad (7.5)$$

$$\text{avec } b = T_{\text{eff}} L H^2 c_s^{-4} / (T_{\text{eff}} L H^2 c_s^{-4})_{\odot} \quad (7.6)$$

où ω_{\max} et P_{\odot}^{\max} sont respectivement la position en fréquence et la puissance du maximum d'amplitude solaire $(\delta L_{\max}/L)_{\odot} \sim 2$ ppm.

De plus à partir de l'équation 7.2, $\Delta P(\omega_0)$ peut s'exprimer comme

$$\frac{\Delta P}{P} = 2 \frac{\Delta \delta L}{\delta L} + \frac{\Delta \eta}{\eta} \quad (7.7)$$

où η et δL sont évalués à partir des équations 7.3 et 7.2.

On a tracé dans la figure 7.1 les barres d'erreur ΔP évaluées à partir de l'équation 7.7 dans laquelle on a considéré les performances de COROT, i.e. $\Delta \eta/2\pi \sim 0.1 \mu\text{Hz}$ et $\Delta \delta L \sim 0.7$ ppm.

Le maximum des amplitudes solaires $(\delta L_{\max}/L)_{\odot}$ est égal à ~ 2 ppm et représente environ 3 fois le niveau de bruit blanc ($\Delta \delta L \sim 0.7$ ppm) attendu avec l'instrument COROT. Le seuil de détection $s = 1$ correspond donc à un degré de confiance de 99 %. Nous avons ainsi tracé (lignes pointillées) le seuil de détection $P^{\text{th}}(\omega)$ pour le cas $s = 1$.

7.3 Conclusion

Pour les étoiles les plus chaudes et les plus massives la puissance $P(\omega_0)$ injectée dans les oscillations est très sensible au modèle de turbulence. L'évaluation de cette puissance à partir d'observations précises des amplitudes et de l'amortissement des oscillations permettra de contraindre les spectres turbulents de ces étoiles.

Par ailleurs il est établi que pour un spectre de turbulence donné la forme $P(\omega_0)$ en fonction de la fréquence ω_0 change significativement d'une étoile à l'autre. Ces différences ont été reliées aux variations de la taille de la zone convective avec les paramètres stellaires en particulier la température. La comparaison de $P(\omega_0)$ évaluée sur plusieurs étoiles de caractéristiques différentes fournira donc des contraintes additionnelles sur la physique du processus d'excitation.

Nous avons évalué approximativement les barres d'erreur et le seuil de détection en terme de $P(\omega_0)$ en fonction des précisions éventuellement accessibles sur la photométrie et l'évaluation des amortissements.

Ces relations nous permettent de conclure - pour une précision d'un instrument donné - si les différences obtenues en considérant différents spectres de turbulence sont suffisamment significatives pour être discriminées entre les spectres turbulents à partir des observations sismiques.

A partir des précisions attendues avec COROT on conclut que les différences obtenues sur les étoiles les plus chaudes - dont α Tri et Procyon sont des exemples types - sont suffisamment larges pour pouvoir discriminer entre les spectres turbulents.

Enfin compte tenu des performances de l'instrument COROT, le seuil de détection est suffisamment assez bas pour pouvoir apprécier - pour toutes les étoiles de masse intermédiaire (ou étoile du type solaire) - le changement de la forme du spectre de puissance avec principalement T_{eff} et marginalement avec L .

Les conclusions de ce chapitre ont été établies à partir du calcul de puissance pour des modèles basés sur la MLT classique.

On a montré au chapitre 5 section 5.1.2 que la puissance calculée pour le modèle d'équilibre de Procyon basé sur la description de Gough de la MLT est nettement moins sensible aux propriétés des spectres de turbulence.

Ce résultat différent de celui obtenu avec le traitement classique de la MLT a été relié à l'évaluation différente du profil des vitesses convectives induit par ce traitement de la MLT selon Gough. Cette différence a elle-même été reliée à la valeur élevée imposée à la valeur de α_c pour stabiliser les modes du modèle de Procyon.

A titre de comparaison avec la MLT classique il faudrait refaire le parcours du diagramme HR en utilisant la description de Gough de la convection et en considérant la valeur solaire de α_c . Ceci permettra de caractériser, à α_c constant, le changement "étoile à étoile" du spectre de puissance et de comparer son comportement avec celui obtenu avec la MLT classique. De même cela permettra de déterminer un domaine du diagramme HR dans lequel la sensibilité du spectre de puissance aux propriétés des spectres turbulent serait éventuellement importante. Sachant que la sensibilité au spectre de turbulence augmente lorsque la taille de la zone convective décroît, on peut s'attendre à ce que pour des étoiles plus chaudes et plus lumineuses que Procyon et α Tri il sera possible de distinguer entre les différents spectres et d'utiliser les spectres de puissance comme choix du spectre turbulent stellaire.

Chapitre 8

Modélisation de la chaîne photométrique de l'instrument COROT

8.1 Le projet COROT

COROT (CONvection ROTation et Transits planétaire) est une mission de sismologie stellaire et de détection des exoplanètes. La première mission consiste en la détection et la mesure des fluctuations extrêmement faibles de lumière des étoiles sujettes à des oscillations périodiques d'origine sismique. La seconde mission consiste en la détection de planètes extra-solaires par occultation de la lumière émergeant d'étoiles des systèmes planétaires inconnus.

Elle repose sur une photométrie de très haute précision qui lui permet dans le cas de l'astérosismologie de détecter les oscillations du type solaires et dans le cas de la détection d'exoplanètes la découverte de planètes telluriques.

La conception de l'instrument revient aux laboratoires de l'Observatoire de Paris, au Laboratoire d'Astronomie Spatiale de Marseille (LAS) et à l'institut d'Astrophysique Spatiale (IAS). Le maître d'oeuvre principal est le CNES qui fournit à l'instrument sa plate-forme (PROTEUS).

8.1.1 La mission et les spécifications scientifiques

Les motivations du programme d'astérosismologie peuvent être en partie comprises à travers l'exposé sur les oscillations stellaires du chapitre 2. Une liste exhaustive des objectifs et du retour scientifique de la mission est donnée dans Catala [1996]. Plus spécifiquement dans le cadre de ce travail, où l'on s'est intéressé aux oscillations du type solaire, on insistera sur la motivation de contraindre la théorie de l'excitation stochastique et de caractériser la convection turbulente de ce type stellaire. La mesure de la puissance injectée dans les modes d'oscillations a été établie comme outil de caractérisation de la convection turbulente dans les chapitres précédents. Elle demande à la fois une grande précision sur la mesure des amplitudes des oscillations et une grande résolution (fréquentielle) sur la mesure de l'amortissement (c.f. section 2.4).

Les spécifications du programme d'astérosismologie sont données dans Catala [1996] et résumées dans Adda [2000]. On retiendra que la demande relative à la durée d'observation des cibles principales assure une précision sur les mesures des fréquences de l'ordre de $0.1 \mu\text{Hz}$. Cette précision est du même ordre que la précision à laquelle sont mesurées les largeurs des modes d'oscillations solaires. Enfin la précision demandée sur la mesure des amplitudes a été fixée par rapport à l'amplitude maximale des oscillations solaires, à savoir ~ 2 ppm.

L'amortissement du mode solaire de plus grande amplitude correspond à une durée de vie de 5 jours. La contrainte sur la précision des mesures des fréquences, la largeur des modes de 5 jours et la durée d'observation exigent un rapport signal à bruit de 15 dans le spectre de puissance [c.f. Libbrecht, 1992]. Ce rapport est atteint pour des amplitudes 4 fois plus grandes que le bruit. Le niveau de bruit correspondant à la détection d'une oscillation de 2 ppm intégrée pendant la durée de vie typique de 5 jours est alors de 0.6 ppm.

Les étoiles cibles sont choisies de telle sorte que les amplitudes prédites³¹ soient supérieures à celle du

³¹ Ces prédictions se basent sur les estimations de l'amortissement et de la puissance faites par Houdek [1996]. La formulation de la puissance injectée dans les modes est due à Balmforth [1992a] et l'estimation de l'amortissement correspond aux solutions des équations non-adiabatiques reposant principalement sur le traitement de la convection non local et dépendant du temps de Gough [1977, 1976, c.f. section 3.1.4.].

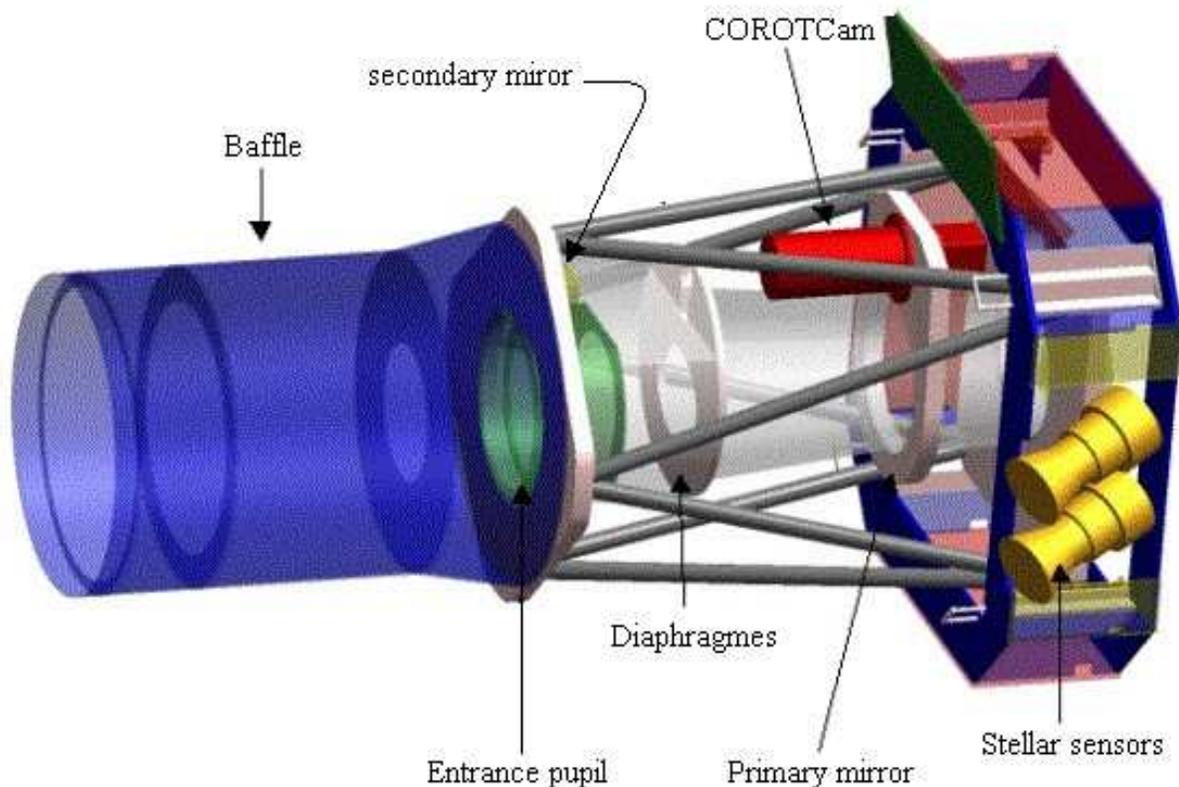


FIG. 8.1 – Vue générale de l'instrument COROT.

soleil. Ces étoiles sont du type F et G naines et sous-géantes. Les taux d'amortissement calculés pour ce type d'étoiles, et qui sont nécessaires pour l'évaluation des amplitudes, sont bien supérieures à $0.1\mu\text{Hz}$ [Houdek, 1996; Houdek *et al.*, 1999] de sorte que les spécifications scientifiques permettent, sous réserve que les prédictions sont fiables, la mesure des puissances injectées dans les oscillations solaires des étoiles cibles.

Concernant la découverte d'exoplanètes, il s'agit de détecter des planètes telluriques par la méthode d'occultation. La motivation pour ce programme exploratoire tient de l'engouement du public pour la découverte d'éventuelles formes de vie extraterrestres et l'intérêt des planétologues de caractériser les planètes telluriques extra-solaires. Les exigences techniques vont de paire avec celles du programme d'astérosismologie. En effet la vie extraterrestre est attendue sur les planètes telluriques dont la température est de l'ordre de celle de la Terre ($\sim 300\text{ K}$) de sorte que l'apparition de la vie puisse être envisageable. Leur distance à l'étoile doit par conséquent être adéquate (de l'ordre de la distance Terre-Soleil). De telles exigences font que l'occultation par le transit d'une planète tellurique devant la ligne de visée d'une étoile induit un assombrissement très faible de la luminosité de l'étoile (de l'ordre de 10^{-4}). La signature achromatique de ces transits permet de les identifier, avec un niveau de confiance dépendant du rapport signal à bruit, sans avoir à attendre les transits périodiques suivants. Il est ainsi demandé d'extraire l'information spectrale de la photométrie. Cela est techniquement possible par l'addition d'un prisme disperser sur le trajet optique. Toutefois cette demande spécifique au programme de découverte d'exoplanètes n'est pas envisagée dans le modèle présenté ici.

8.1.2 Le satellite

La structure de l'instrument est très bien résumé dans Adda [2000]. On rappelle les éléments qui entrent dans la présente modélisation.

L'instrument s'articule autour d'un télescope composé de deux miroirs et d'un système optique dipotrique pour la focalisation de l'image (voir figure 8.1). La surface de pupille d'entrée est de 600 cm^2 . Le bloc focal est agencé de sorte que les images soient très défocalisées pour les taches images des étoiles cibles du

programme d'astérosismologie et très peu défocalisées pour celles du programme de découverte d'exoplanètes. Le télescope est surmonté d'un baffle de cône d'ouverture 28° arrêtant partiellement la lumière diffusée par la Terre.

L'orbite du satellite est polaire de sorte que l'instrument puisse pointer pendant 6 mois au plus un champ fixe de la voûte céleste. La durée de l'orbite est de 103 minutes durant lesquelles le système de pointage (ou système de contrôle d'attitude) assure au mieux la stabilité des taches images des étoiles cibles sur le plan focal. L'orbite polaire évite les éclipses de la Terre et assure un ensoleillement constant (à l'échelle de quelques orbites) de la face arrière de l'instrument. Le flux solaire collecté par celle-ci est dissipé à l'aide d'un radiateur regardant l'espace froid.

L'ossature de l'instrument est une structure en treillis sur laquelle repose les 2 miroirs. La structure minimise les déformations mécano-thermiques qui sont indésirables particulièrement au niveau des miroirs. Toutefois les déformations mécano-thermiques subsistent, elles sont dues d'une part à un éclairage par l'albédo terrestre inhomogène au cours de l'orbite et d'autre part du fait de l'inertie thermique du système de régulation. Ces déformations se traduisent par une déformation des surfaces réfléchissantes des miroirs et par conséquent par une déformation et le mouvement de la tache image.

Le plan focal est pavé par 4 CCD (Charge Coupled Device) totalisant une zone constituée chacun de $2k \times 2k$ pixels dont chacun occupe une surface de $15\mu\text{m} \times 15\mu\text{m}$. La zone image est transférée ligne par ligne dans la zone mémoire qui ne voit pas le ciel. Le transfert s'effectue pendant la pose et donc sans interruptions, qui sont indésirables en astérosismologie surtout lorsqu'elles sont périodiques. Le transfert s'effectue donc tandis que l'intégration des étoiles cibles n'est pas achevée si bien que les taches images subissent une déformation dans le sens du transfert (cet effet s'appelle le *smearing* en anglais et sera référencé par ce terme par la suite).

Les photons incidents sont absorbés par le substrat du détecteur CCD et transformés en électrons. Le rendement de cette conversion est appelé rendement quantique et dépend de la longueur d'onde et de la technologie du CCD. Ce rendement est de l'ordre de 60 %, il s'agit d'une mesure de rendement global et moyen sur tout le CCD. Il faut en fait considérer la dépendance spatiale de ce rendement qui traduit l'inhomogénéité entre pixels. Cette inhomogénéité est mesurée en terme de PRNU (en anglais Pixel Response Non Uniformity) qui représente l'écart-type moyen du rendement quantique pixels à pixels.

Les déformations de l'optique et le résidu du contrôle d'attitude provoquent au cours du temps le bougé et la déformation de la PSF³². Les taches images balayent ainsi une surface inhomogène quant à la conversion photons \rightarrow électrons ce qui entraîne du bruit proportionnel au PRNU.

Contrairement aux instruments au sol, limités principalement par l'étalement des images par la turbulence atmosphérique, il est possible depuis l'espace d'approcher la limite ultime d'un instrument photométrique, à savoir le bruit de photons. Les spécifications techniques sont d'exiger des bruits blancs instrumentaux inférieurs au dixième du bruit de photons qui doit rentrer dans les 0.6 ppm du budget scientifique. Pour le programme d'astérosismologie, on ajoute une spécification sur les bruits périodiques à savoir qu'ils doivent être inférieurs à 2 ppm dans le spectre de Fourier.

Les spécifications techniques sont déterminées de sorte que sur chaque poste d'erreurs la contrainte sur les bruits blancs et périodiques soit respectée. L'identification et l'évaluation des postes d'erreurs sont détaillés dans Adda [2000].

8.2 Besoins et contraintes

L'élaboration d'un satellite se réalise à travers une succession d'étapes qui vont d'une étude de faisabilité (phase A), d'une définition préliminaire (phase B), d'une de définition détaillée (phase C), de la réalisation et la qualification (phase D), du lancement et qui se poursuit par l'exploitation et la maintenance en vol (phase E).

Au cours de ces étapes de conception (A,B) et de réalisation (C,D) les acteurs doivent gérer au mieux les spécifications scientifiques et partager les spécifications techniques. Cela nécessite au cours de ces étapes (A,B,C,D) de tester et d'étalonner les composantes de chaque sous-système de l'instrument³³, de valider les traitements et gestions à bord et au sol, d'optimiser les points de fonctionnement et enfin d'évaluer les performances globales avant le lancement. Il s'agit d'un travail long et coûteux. En effet la validation des traitements et l'évaluation des performances globales nécessitent l'intégration de chaque sous-système pour former l'instrument global ou partiel sur lequel sont réalisés les tests qui conviennent.

³²La PSF (Point Spread Fonction) est l'image d'un point source placé à l'infini

³³Dans le cas de COROT le système de contrôle d'attitude ne sera pas étalonné.

Pour gérer les spécifications scientifiques et partager les spécifications techniques l'analyse et la quantification des postes d'erreurs sont indispensables ; en effet elles permettent d'établir un bilan des différents bruits instrumentaux et environnementaux et remplir ainsi la tâche de gestion des spécifications scientifiques et de partage des spécifications techniques. Cette façon d'attaquer le problème est indispensable, plus spécifiquement en phase A où l'étude de faisabilité est réalisée, mais elle demeure largement insuffisante. En effet : Le comportement de l'instrument est inhomogène spatialement, les propriétés de l'optique changent en fonction de la direction de visée tandis que la réponse du détecteur est inhomogène. A différents niveaux de la chaîne photométrique existent des dépendances spectrales différentes, celles-ci se couplent avec les caractéristiques spectrales des objets cibles observés. Enfin, le comportement de l'instrument n'est pas stationnaire dans le temps, les détecteurs sont sujets à des dérives lentes tandis que l'attitude de la plateforme varie, l'instrument subit des asservissements passifs³⁴ ou actifs³⁵. Du fait de ces dépendances spatiales, spectrales et temporelles, l'analyse et la quantification des postes d'erreurs ne peut donc se réduire à un simple bilan. Notamment, en ce qui concerne le programme d'astérosismologie du projet COROT, la connaissance dynamique de la réponse de l'instrument est un élément fondamental du fait des contraintes scientifiques imposées dans le domaine des fréquences.

Au cours de la vie du satellite (phase E) le profil de mission peut être perturbé par des événements inattendus et indésirables, les données recueillies sujettes à des artefacts, les détecteurs sont susceptibles de connaître des dérives inattendues et enfin les traitements à bord peuvent s'avérer inadaptés ou déficients. Les réponses à ces problèmes peuvent s'envisager par une modification du profil de mission et par une reprogrammation du logiciel de vol. Pour sécuriser, adapter et optimiser ces tentatives de modifications il est indispensable de tester au préalable au sol leur faisabilité. Pour effectuer ces tests, il conviendrait idéalement de disposer au sol de l'ensemble des sous systèmes de l'instrument, de la plateforme et du segment sol. Cependant, face aux coûts des projets spatiaux et du fait de la réduction des frais de projet sous-jacente, certains composants du système (instrument + plateforme) seront uniques.

Pour résoudre ces problèmes (coûts, durée, optimisation, quantification, partage et reprogrammation) l'élaboration de modèles conviendrait idéalement. Il ne peut exister toutefois un unique modèle car il existe en fait des clients différents avec des besoins distincts et parfois contradictoires. Parmi ces clients on distingue :

- L'ingénieur système et le chef de projet : leur tâche est la gestion des spécifications techniques. Ils doivent disposer d'un outil simple permettant d'évaluer l'impact de non conformités éventuelles et de faire remonter le problème s'il y a lieu.
- "l'Instrument Scientist" et "l'Ingénieur Système Mission" : ils doivent démontrer que les spécifications scientifiques sont tenues tout le long de la chaîne photométrique et de traitement. Leur besoin est un outil complet, segmenté et extrêmement modulaire.
- les scientifiques : leur objectif par rapport au projet est de concevoir et d'optimiser les traitements vol et sol. Leur besoin est une simulation réaliste des sorties de la chaîne photométrique et de la chaîne de traitement. L'outil mis à leur disposition doit être, spécifiquement pour eux, conçus comme un produit fini et convivial.

Parmi les contraintes on doit distinguer les contraintes d'ordre fonctionnel et pratique des contraintes d'ordre physique. Les contraintes physiques sont subordonnées à la connaissance des phénomènes physiques mis en jeu. Elles valident ou non les modélisations des phénomènes physiques correspondant. Les impasses et leur impacts doivent être identifiées. Les contraintes d'ordre fonctionnel et pratique viennent des besoins spécifiques des clients-utilisateurs. Notamment l'architecture logicielle du modèle est étroitement conditionnée par le besoin du client. Typiquement le client scientifique imposera un modèle rigide parce qu'il n'a pas besoin d'une connaissance extrêmement détaillée de l'instrument et parce qu'il s'intéresse principalement aux sorties exploitables du point de vue scientifique tandis que les autres clients imposeront un modèle segmenté et souple. En effet ces derniers seront amenés au cours des phases de réalisation à interfacer des modèles numériques avec des sous-systèmes (matériel et logiciel) de l'instrument.

8.3 Objectifs et caractéristiques

Au vu des besoins et contraintes décrits de façon très générale dans la section précédente on va expliciter les objectifs et caractéristiques d'un modèle de l'instrument COROT. On procédera en deux étapes, la première s'attachera à définir le modèle idéal susceptible de répondre aux besoins des différents utilisateurs.

³⁴L'équilibre thermique de l'instrument COROT est modifié par le flux radiatif qu'il reçoit de la Terre et du Soleil et qui se modifie au cours de l'orbite. La présence de radiateur permet de réguler, avec une certaine inertie, la température de l'instrument : il s'agit d'un asservissement passif.

³⁵Le système de contrôle d'attitude de COROT est asservi au mesure des barycentres des taches étoilées.

La seconde étape s'attachera à définir les objectifs et caractéristiques du modèle sur lequel j'ai travaillé et qui répond plus spécifiquement aux besoins du client scientifique.

8.3.1 Le modèle idéal

Le modèle de l'instrument est un modèle numérique qui doit prendre en compte la globalité de l'instrument dans son environnement et sa constitution physique. Il appréhende l'instrument dans son comportement dynamique au sein d'un environnement de caractéristiques variables.

Il doit être capable de remplir les objectifs suivants :

- L'architecture logicielle doit être conçue dans le souci d'une adaptation souple aux caractéristiques évolutives de l'instrument et aux interfaces avec les différents sous-systèmes. Il doit notamment faciliter l'intégration d'éléments calibrés (rendement quantique, champ plat ,PSF ... etc). Ces caractéristiques répondent au besoin de limiter les tests effectués sur l'instrument intégré.
- Il doit produire de la télémétrie réaliste pour permettre le test du traitement sol. Il permettra en phase de conception et de réalisation d'élaborer et d'optimiser le segment sol. Au cours de la phase d'exploitation il permettra d'adapter le segment sol au comportement réel et aux événements imprévus lors de la mission.
- Produire des séquences d'images en sortie de la chaîne photométrique de manière à tester le traitement vol. De la même manière que pour le segment sol cela participera d'une part au processus de conception et de réalisation et d'autre part à la reprogrammation éventuelle et sécurisée du programme vol au cours de la mission.
- Offrir un libre choix des stimuli comme par exemple des étoiles cibles du programme d'astérosismologie et des transits de planète du programme exo-planète. Ce besoin vient plus spécifiquement du client scientifique. Celui-ci a besoin d'évaluer si l'instrument est capable de fournir l'information scientifique recherchée. Le but étant de pouvoir contraindre le profil de mission *i.e.* le choix des cibles et la durée des observations.
- Simuler des événements erratiques dont notamment les impacts des rayons cosmiques. Le but étant d'en mesurer l'impact d'une part en terme photométrique et d'autre part en terme de comportement de la boucle d'asservissement du système de contrôle d'attitude du satellite.
- in fine, élaborer des courbes de lumière réalistes. Ce besoin satisfait l'ensemble des acteurs : il permet d'abord un bilan "end to end" des performances de l'instrument, bilan qui participe à la gestion des spécifications scientifiques et techniques. Ensuite il constitue l'outil de simulation indispensable au scientifique.

On donne dans la figure 8.2 un schéma montrant comment les différents sous-modèles du modèle global de l'instrument COROT peuvent s'agencer idéalement.

8.3.2 Le modèle considéré

Tout d'abord on insistera sur le fait que le modèle présenté ici n'est qu'à l'état de maquette et qu'il répond plus spécifiquement aux besoins du client scientifique.

L'objectif ultime de ce modèle est la fourniture de courbes de lumière réalistes de cibles scientifiques dont les caractéristiques sont fixées par l'utilisateur.

Ce modèle numérique utilise partiellement des modèles externes (modèle de la PSF, modèle du système de contrôle d'attitude et modèle de la lumière diffusée) élaborés par les équipes COROT du LAS, de l'Observatoire de Paris et du CNES et s'interface aisément avec ceux-ci.

On a privilégié un point de vue fonctionnel plutôt qu'un point de vue matériel car ce qui nous intéresse avant tout c'est la finalité de la modélisation et non son réalisme matériel. En effet prenons par exemple le cas de la lumière diffusée par la Terre et qui rentre dans le baffle. Son passage par la voie optique impliquerait une convolution avec la réponse de l'optique. Tenir compte de cette convolution ajouterait une perturbation négligeable par rapport à la solution envisagée qui consiste à présenter directement le flux de lumière diffusée sur le plan du détecteur.

8.4 Modélisations et impasses

Pour modéliser le plus fidèlement possible la réponse de l'instrument tout le long de la chaîne photométrique, il faut suivre le trajet des photons des sources lumineuses à travers l'optique, traiter la conversion photons \rightarrow électrons et la lecture des charges électriques accumulées et enfin la conversion en signal digital.

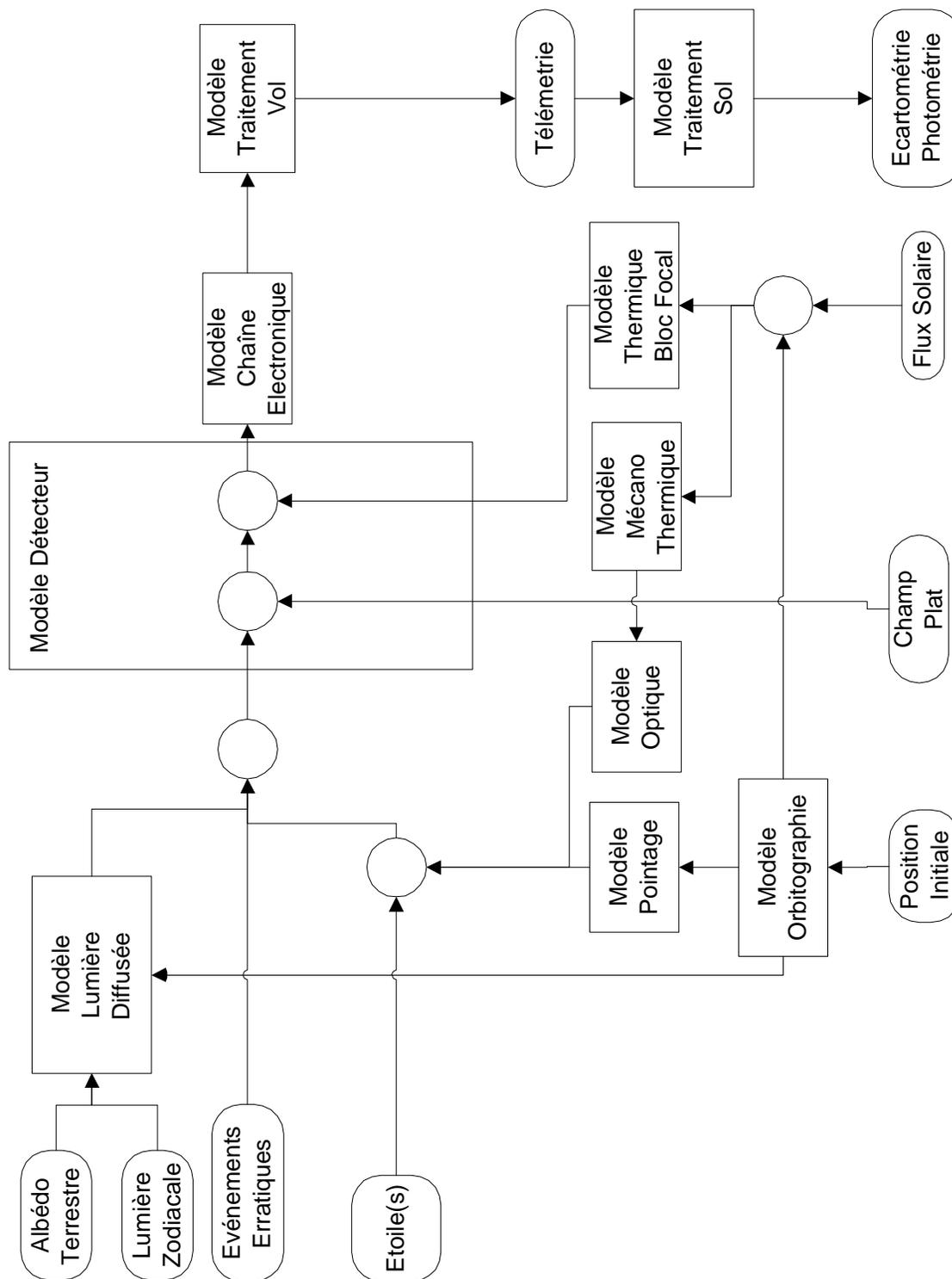


FIG. 8.2 – Agencement des différents sous-systèmes entre eux. Les rectangles symbolisent des modèles tandis que les rectangles à bords arrondis représentent les entrées et sorties. Les cercles représentent quant à eux des opérations simples (addition, multiplication, couplage, projections) effectuées sur les flux de données entrant et sortant des modèles.

Ce modèle n'a pas de traduction simple en terme analytique. Enfin la traduction de cette réponse en terme logiciel conduirait à une manipulation laborieuse et coûteuse (mémoire et temps machine) des données tout le long de la chaîne photométrique.

Il y a en fait beaucoup de redondance spatiale et temporelle. En effet en ce qui concerne les dépendances temporelles, le rendement quantique η , la PSF, le champ plat (FF) et la transmission (TR) connaissent des dérivés très lentes devant les grandeurs qui évoluent à des échelles temporelles inférieures ou de l'ordre de la période orbitale, à savoir le déplacement du point image $\{\delta k(t), \delta j(t)\}$ au cours du temps, le temps d'intégration et le temps d'extraction des charges. En ce qui concerne les dépendances spatiales, les échelles de non-uniformité de la PSF et du fond diffus sont bien supérieures à celle des déplacements de la tache image $\{\delta k(t), \delta j(t)\}$ sur le CCD (~ 0.2 pixel).

Il convient donc pour les échelles temporelles lentes et les échelles spatiales larges de ne pas en tenir compte de manière dynamique. Il suffit par contre de figer initialement les valeurs des grandeurs évoquées pour une position de la tache sur le CCD donnée et pour un instant donné. La dépendance lente serait donc décrite en considérant un ensemble de points de fonctionnement dont chacun correspondrait à une réalisation du modèle.

La dépendance en température de la PSF est relative au comportement thermo-élastique du télescope. La modulation du flux radiatif reçu par le satellite perturbe l'équilibre thermique et conduit à des modifications de la structure du télescope et donc à des translations, rotations et déformations des surfaces optiques. Ces perturbations modifient la réponse de l'optique et se traduisent par une modulation de la PSF au cours des orbites. Cette dépendance de la PSF avec la température n'a toutefois pas été modélisée. L'évaluation des amplitudes des déformations de la PSF est en cours d'étude au LAS.

En ce qui concerne les dépendances chromatiques on ne peut pas les négliger le long de la chaîne photométrique. Toutefois le problème est le suivant : les caractéristiques spectrales de l'étoile, du rendement quantique et du champ plat ne sont pas connues à des résolutions et des longueurs d'onde identiques. Il s'agirait de la coupler avec celle de l'étoile, avec la dépendance spectrale de la transmission et du rendement quantique. Pour cela il faudrait disposer d'un jeu important de PSFs monochromatiques. Il en résulterait une manipulation laborieuse d'images chromatiques tout le long de la chaîne photométrique. En ce qui concerne la dépendance chromatique de la PSF, il existe en fait des outils très puissants (ASAP) dont la charge est précisément de produire des PSF "blanches" convoluées avec un spectre d'étoile et tenant compte de façon assez réaliste de l'optique géométrique et ondulatoire. Par conséquent une partie de la dépendance chromatique sera déchargée sur l'outil ASAP de modélisation des PSF. Cela permet de découpler les dépendances chromatiques

Les considérations précédentes nous permettent d'établir l'expression analytique :

$$I(i, j, t_m) = \sum_{k=0}^{nx-1} SM(i, j, k, T_p, T_{tl}, t_k, t'_k) \int_{t_k}^{t'_k} dt \times FF(k, j) PSF(k + \delta k(t), j + \delta j(t)) TR_b \eta_b [\langle TR \rangle \langle \eta \rangle Star(m_v, t) + FD(t)] \quad (8.1)$$

avec

$$Star(m_v, t) = Star(m_v) \left(1 + \frac{\delta L}{L}(t) \right) \quad (8.2)$$

$$Star(m_v) = \int_{\lambda}^{\lambda'} d\lambda Star(\lambda, m_v) \quad (8.3)$$

$$\langle \eta \rangle = \frac{\int_{\lambda_n}^{\lambda'_n} d\lambda \eta(\lambda) Star(\lambda, m_v)}{\eta_b \int_{\lambda_n}^{\lambda'_n} d\lambda Star(\lambda, m_v)} \quad (8.4)$$

$$\langle TR \rangle = \frac{\int_{\lambda_{TR}}^{\lambda'_{TR}} d\lambda TR(\lambda) Star(\lambda, m_v)}{TR_b \int_{\lambda_{TR}}^{\lambda'_{TR}} d\lambda Star(\lambda, m_v)} \quad (8.5)$$

et où l'on a défini

- $I(i, j, t_m)$ nombre de charges extraites du pixel (i, j) à l'instant t_m de la pose m
- (i, j) indices des lignes et des colonnes sur le CCD
- SM opérateur modélisant l'effet du smearing
- nx largeur du CCD (nombre de lignes de la zone image dans le sens du transfert des e^-)
- T_p temps de pose (=temps d'intégration+temps de transfert des lignes)

- T_{tl} temps de transfert d'une ligne
- $\{t_k, t'_k\}$ instants de début et de fin d'intégration du pixel
- λ longueur d'onde
- $\eta(\lambda)$ rendement quantique global
- FF champ plat
- PSF , la PSF du système optique
- $\{\delta k(t), \delta j(t)\}$ déplacement du point image sur le CCD (jitter)
- TR transmission globale de l'optique
- $Star$ flux de l'étoile au niveau de la pupille
- m_v magnitude visuelle de l'étoile
- FD fond diffus
- $\delta L(t)/L$ fluctuation relative du flux de l'étoile
- TR_b composante blanche de la transmission
- η_b composante blanche du rendement quantique
- $\{\lambda_{TR}, \lambda'_{TR}\}$ bande passante de la transmission
- $\{\lambda, \lambda'\}$ domaine de longueur d'onde du spectre de l'étoile
- $\{\lambda_\eta, \lambda'_\eta\}$ bande passante du rendement quantique

Dans l'équation 8.1, pour tenir compte de l'effet du smearing, l'intégration doit se faire par pas égal au temps de transfert de ligne qui est de l'ordre de 0.1 ms. La largeur de la zone image du CCD étant de 2000 pixels dans le sens des indices ligne, il faudrait donc pour chaque temps de pose de une seconde considérer environ 2000 points d'intégration. Ce nombre est exorbitant si l'on a l'intention de faire tourner le modèle sur plusieurs jours. On décide donc de modéliser les effets du smearing à échéance de la seconde en supposant que tous les perturbateurs (en particulier le mouvement de la tâche sur le CCD) demeurent constants sur la seconde. Dans cette hypothèse, la modélisation de l'effet du smearing se trouve simplifiée et peut s'écrire comme

$$I(i, j, t_m) = \left(\sum_{k=0}^{nx-1} I_0(k, j, t_m) \frac{T_{tl}}{T_p} \right) + I_0(i, j, t_m) \left(1 - nx \frac{T_{tl}}{T_p} \right) \quad (8.6)$$

avec

- (i, j) indices lignes et colonnes dans l'image considérée
- nx largeur de l'image (nombre de lignes dans le sens du transfert des charges)
- $I(i, j)$ nombres de charges extraites du pixel (i, j) à échéance du temps de pose

et

$$I_0(i, j, t_m) = T_p FF(k, j) PSF(i + \delta i(t_m), j + \delta j(t_m)) TR_b \eta_b [\langle TR \rangle \langle \eta \rangle Star(m_v, t_m) + FD(t_m)] \quad (8.7)$$

le nombre de charges collectées pendant la durée du temps de pose T_p . Il s'agit du nombre de charge que l'on aurait extraites en absence de smearing. On remarquera que l'effet du smearing a été limité à la taille de l'image considérée *i.e.* on a négligé la contribution du champ en dehors de l'image. Dans le cas contraire il aurait fallu former l'ensemble de l'image sur le CCD située en haut et en bas de l'image considérée, le fait de se limiter à l'image de travail permet de réduire la "charge informatique". D'autre part la contribution majoritaire au smearing vient de l'étoile cible dans la fenêtre car c'est la plus brillante du champ.

8.5 Implémentation

Le modèle global fédère un ensemble de sous-modèles (ou modules) dont les tâches sont de modéliser les sous-systèmes de la chaîne photométrique à savoir le télescope, le détecteur, la chaîne électronique, le traitement vol et sol. La figure 8.3 montre l'organisation générale du modèle tandis que les figures (8.4, 8.5, 8.6) donnent le détail des modules "Images", "Détecteur" et "Traitement". La chaîne électronique est implicitement comprise dans le module détecteur, d'autre part le module traitement concerne ici sans distinction le traitement sol et vol.

8.5.1 Module Images

Le module produit en sortie une séquence d'images d'une portion du champ du CCD.

Les images sont produites à partir d'une PSF fournie par ASAP, elles sont couplées avec l'écartométrie et la courbe de lumière des étoiles. Le bougé n'est comptabilisé qu'à l'échelle de la seconde ³⁶ : on néglige

³⁶Cette approximation pourrait être levée au moins partiellement par convolution.

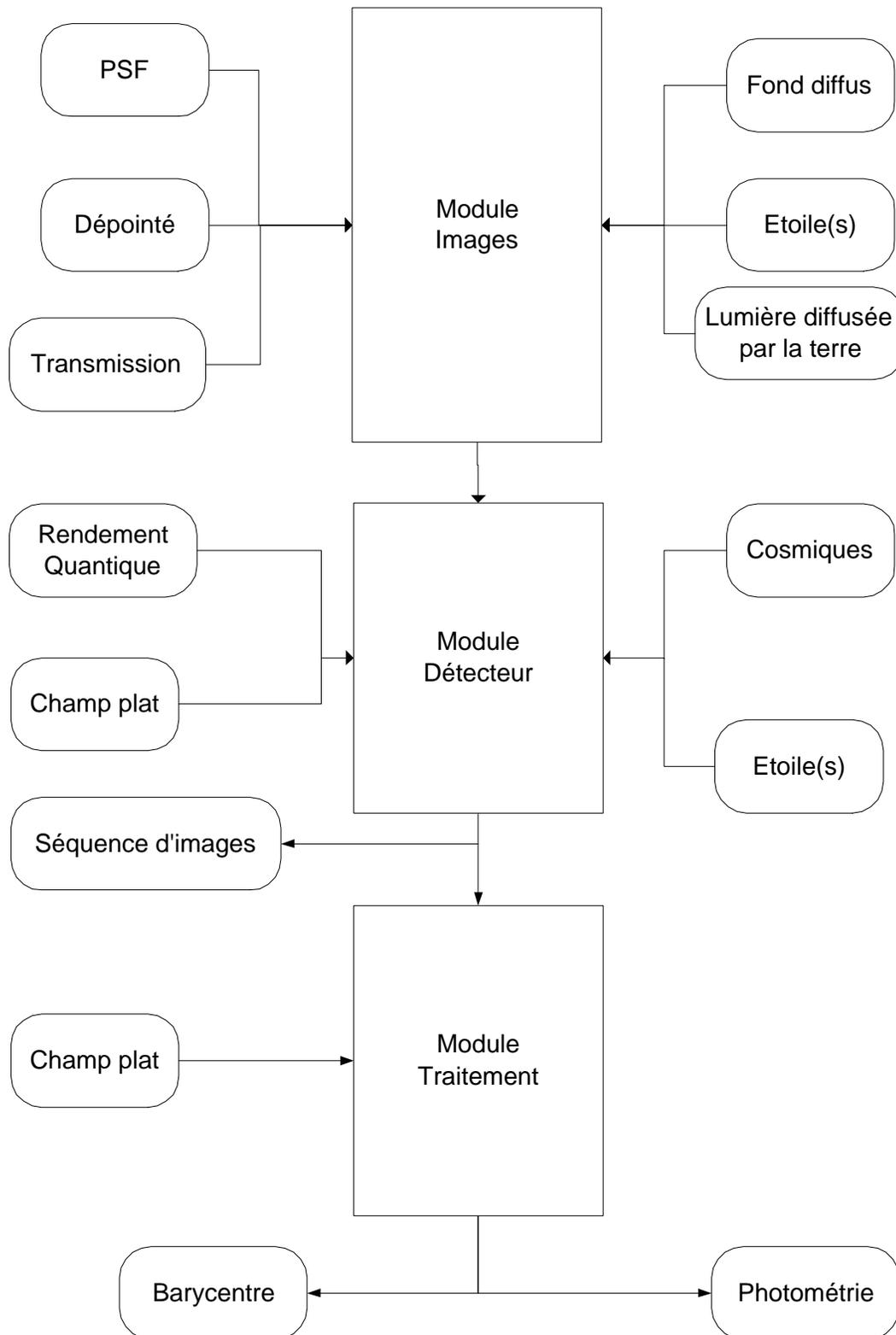


FIG. 8.3 – Organisation du modèle de la chaîne photométrique. La signification des symboles est identique à celle de la figure 8.2

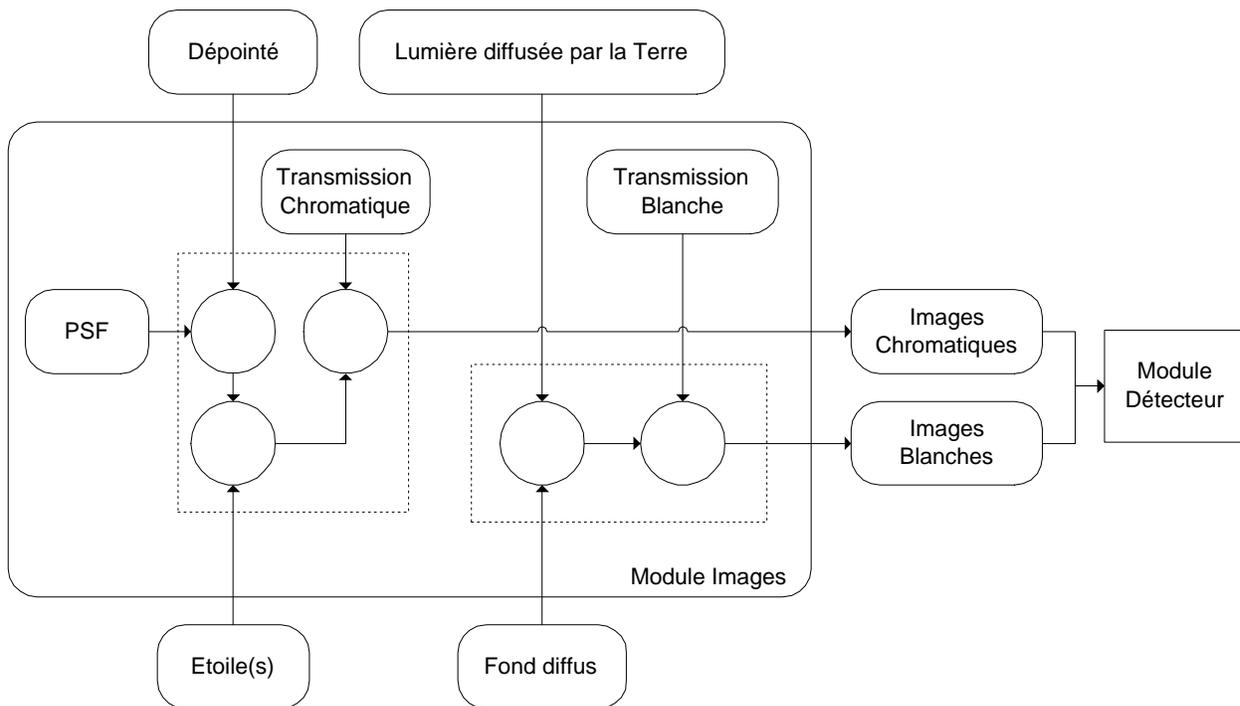


FIG. 8.4 – Organisation du module Images.

donc l'étalement produit par des mouvements plus rapides que la seconde. Par contre si le temps de pose est supérieur à la seconde³⁷, l'effet du bougé est comptabilisé par intégration toutes les secondes.

Le bruit de photons et la lumière diffusée peuvent être ajoutés. Aucun couplage entre le spectre des étoiles et la chromaticité de la PSF n'est réalisé par le module : on considère que ce couplage est déjà contenu dans les PSFs fournies. Toutefois le spectre de chaque étoile est couplé avec la dépendance en longueur d'onde de la transmission de l'optique.

Chaque étoile aura la même PSF. La durée de la séquence est imposée par celle de l'écartométrie fournie en entrée du module "Images". Les images se succèdent au rythme du temps de pose. On peut considérer autant d'étoiles que désiré, chacune d'elles voit ses caractéristiques définies dans un fichier qui lui est propre. L'utilisateur doit spécifier la position des étoiles dans l'image.

Le module fournit accessoirement l'écart-type de l'écartométrie et du barycentre des images et également l'écart-type du flux dans la tache. Le module estime, par ajustement par une gaussienne et pour information, la largeur et l'amplitude de la PSF fournie utilisée par ASAP.

8.5.2 Module Détecteur

Ce module lit la séquence d'images (voir figure 8.5) en sortie du module "Images". L'utilisateur peut spécifier le spectre du rendement quantique. Celui-ci est couplé avec le spectre des étoiles introduites (le spectre de celles-ci est spécifié dans le fichier des caractéristiques de l'étoile). Bruit de lecture et rayons cosmiques peuvent être ajoutés. On peut également tenir compte des effets de la saturation, du smearing et de la diffusion.

8.5.3 Module Traitement

L'objet du module est d'effectuer une série de traitements nécessaires à l'exploitation des données en sortie du module Détecteur (voir figure 8.6). Les opérations implémentées demeurent rudimentaires si bien que ce module ne peut pas à ce stade être considéré comme une simulation du traitement sol et vol, il sert simplement à valider le développement du modèle de la chaîne photométrique.

En standard il fournit la position de l'étoile (barycentre) et la photométrie qui peut être à seuil fixe ou à seuil optimal selon la méthode de Rouan D [c.f. Adda, 2000]. Les résultats sont fournis à échéance du temps

³⁷C'est le cas pour le programme exoplanète pour lequel le temps de pose est de 32s

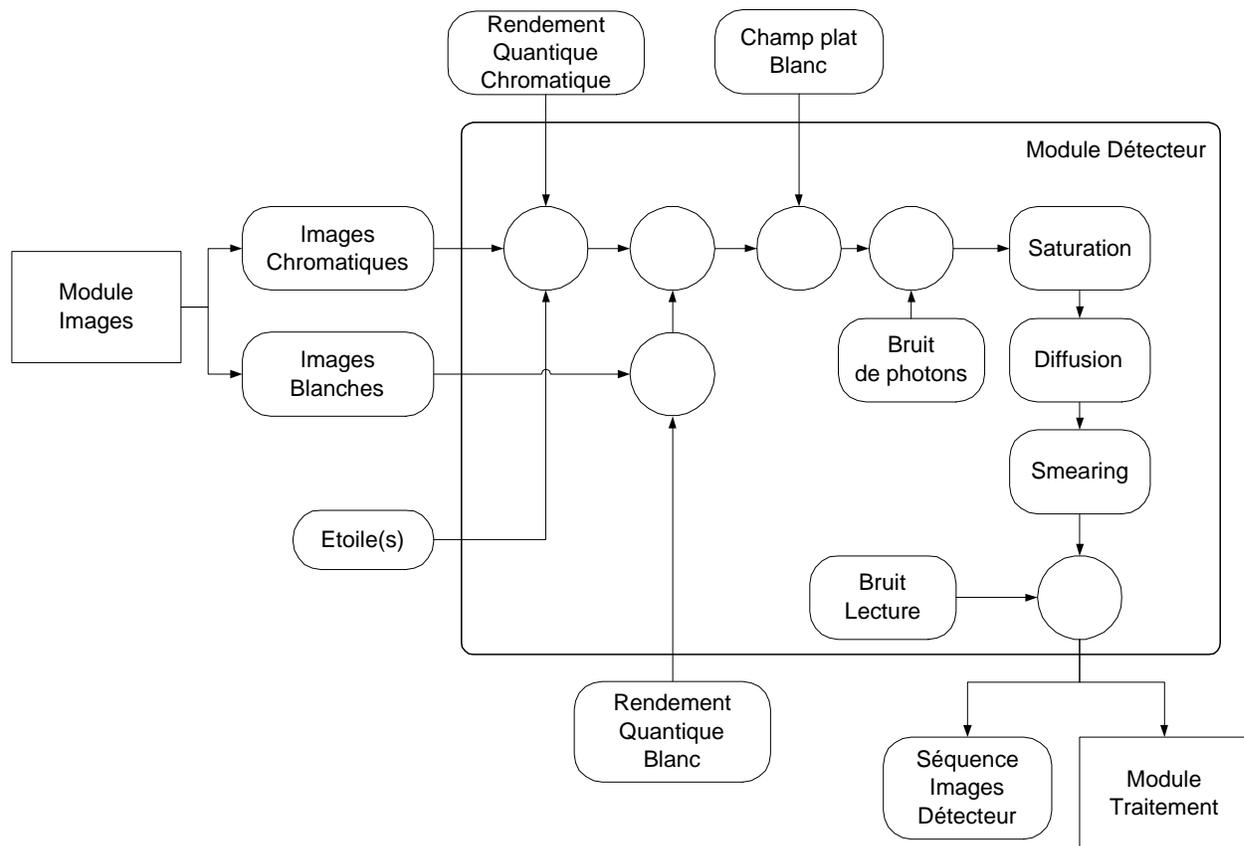


FIG. 8.5 – Organisation du module Détecteur.

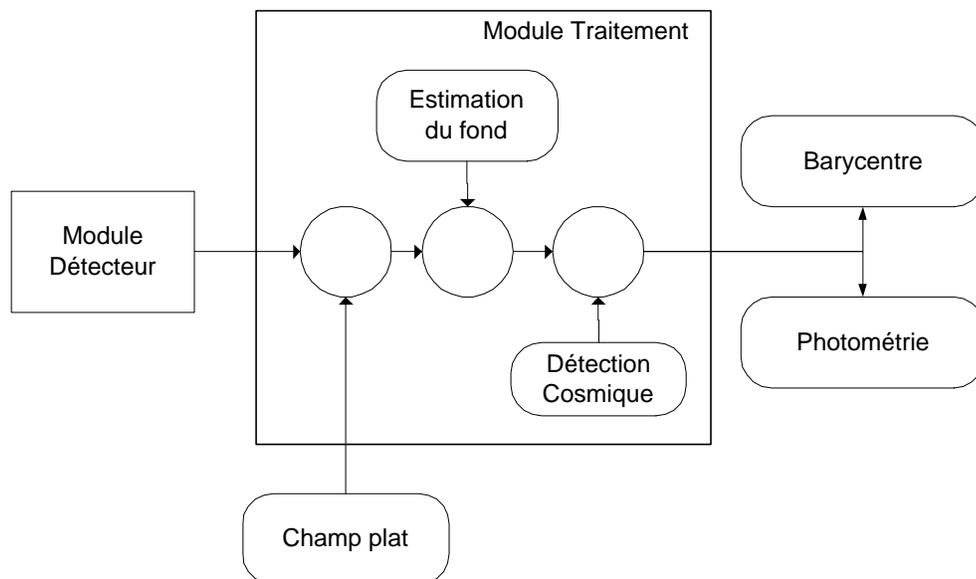


FIG. 8.6 – Organisation du module Traitement.

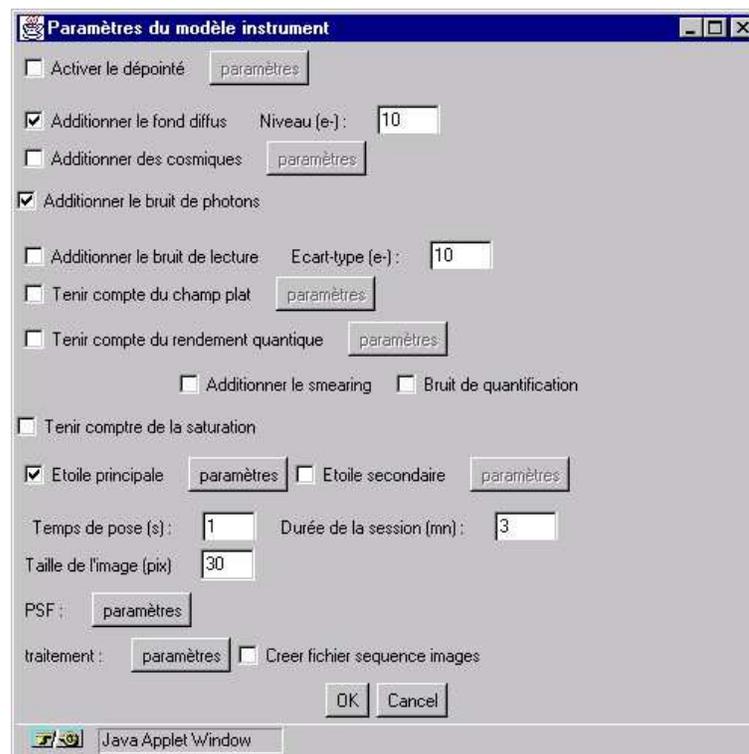


FIG. 8.7 – Interface JAVA : fenêtre pour la configuration des paramètres du modèle de l'instrument.

de pose. Le module donne également la moyenne et l'écart-type correspondants. Les résultats sont écrits dans un fichier ASCII. Les impacts des cosmiques peuvent être corrigés, le champ plat corrigé et le bruit de fond estimé et soustrait.

8.6 Interfaces et utilisation

Le modèle numérique a été doté de 3 niveaux d'interfaces. On distingue :

- L'interface du coeur des modules : il s'agit de la rédaction d'un fichier définissant les paramètres du module. Le module est lancé en passant pour seul argument le nom ce fichier au programme du modèle numérique écrit en langage C++³⁸
- L'interface JAVA³⁹ : il s'agit d'une interface utilisable via INTERNET par le biais d'un navigateur adéquat (Netscape par exemple). Son rôle est de rédiger le fichier de paramètres fourni au coeur du modèle et de lancer celui-ci. L'interface est fenêtrée facilitant ainsi la définition des paramètres.
- L'interface IDL⁴⁰ : il s'agit pour l'instant de la mise à disposition de petits outils IDL pour exploiter les sorties d'un module. Pour l'heure ces outils ne forment pas un tout cohérent : chaque outil s'utilise indépendamment.

Les paramètres d'entrée peuvent être des paramètres dimensionnant l'instrument, précisant les options et les enchaînements des simulations désirées, des paramètres relatifs à l'étalonnage de l'instrument (champ plat, rendement quantique, transmission) et enfin des paramètres relatifs aux sources cibles (paramètres des étoiles, paramètres du signal scientifique recherché).

Une maquette du modèle numérique peut être sollicitée via INTERNET à l'adresse suivante : <http://pc-corot10.obspm.fr/modeles/java/instrument.html> . La documentation, les outils IDL ainsi que l'interface JAVA sont disponibles sur le site mentionné. Des exemples de l'interface JAVA sont illustrées dans les figures 8.7, 8.8 et 8.9.

Le codage du modèle numérique a été réalisé en partie en adaptant des sources écrites par Adda M. et Copet E. que je tiens à remercier pour leur contribution.

³⁸Langage de programmation objet et compilé.

³⁹Langage de programmation objet multi plate-forme basé sur une machine virtuelle.

⁴⁰Langage de programmation interprété et interactive, développé principalement pour la communauté des astronomes.



FIG. 8.8 – Interface JAVA : fenêtre pour la configuration des paramètres d'une étoile.

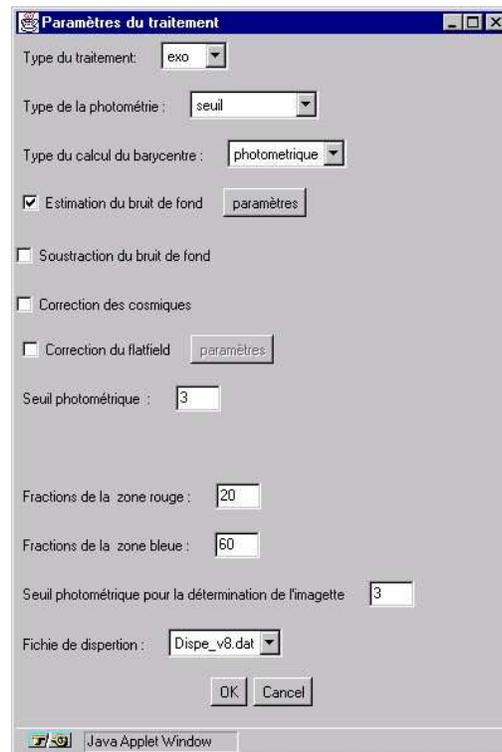


FIG. 8.9 – Interface JAVA : fenêtre pour la configuration des options des traitements des données.

8.7 Application

Pour évaluer les performances de l'instrument et illustrer l'intérêt de notre modèle nous nous sommes livré à une application qui permet de faire le lien avec nos calculs des amplitudes basées sur notre formulation du chapitre 4.

Nous avons pour cela considéré une étoile fictive de magnitude visible $m_v = 6$ dont les amplitudes des oscillations en terme de luminosité sont celles de l'étoile Procyon calculées dans le chapitre 7 en considérant le spectre turbulent NKS.

Les fluctuations relatives de luminosité $\delta L(t)$ se décompose dans la base Fourier comme

$$\frac{\delta L}{L}(t) = \sum_i \frac{\delta L}{L}(\nu_i) \cos(2\pi \nu_i t) \quad (8.8)$$

où L est la luminosité globale moyenne, i indexe les modes radiaux de l'étoile et $\delta L(\nu_i)$ est la composante de Fourier du mode de fréquence ν_i , *i.e.* l'amplitude crête à crête du mode. La largeur des modes, *i.e.* la durée de vie des oscillations, n'est pas simulée. La simulation est exécutée pendant 5 jours si bien que les modes de durée de vie plus longue que 5 jours ne s'étalent pas et sont contenus dans un unique élément spectral.

Nos estimations d'amplitudes correspondent à des moyennes quadratiques, $\langle \delta L^2(\nu) \rangle$, que l'on relie par conséquent aux composantes Fourier $\delta L(\nu_i)$ comme

$$\langle \delta L^2(\nu_i) \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \delta L(\nu_i) \quad (8.9)$$

Les valeurs de $\langle \delta L^2(\nu_i) \rangle$ sont celles qui ont été calculées pour Procyon au chapitre 7.

L'écart-type des mouvements de l'image sur le CCD est fixé à 0.03 pixel, l'inhomogénéité de la réponse des pixels est générée par une distribution gaussienne d'écart-type 1 %, le bruit de lecture est de $10 e^-$ (rms) et le niveau du fond diffus constant est fixé à $10 e^-$. La simulation prend en compte le smearing, le bruit de quantification, le rendement quantique global en fonction de la longueur d'onde ainsi que la transmission chromatique de l'optique. La température effective est prise égale à 5700 K et son spectre suit la loi du corps noir.

La fluctuation $\delta L(t)$ générée en appliquant la décomposition 8.8, se superpose à la luminosité moyenne de l'étoile et est convoluée par la réponse instrumentale et le calcul photométrique. Le calcul photométrique se base sur la méthode de calcul à seuil optimal, il fournit à chaque temps de pose le nombre $I(t)$ d'électrons dans la tache limitée par la fenêtre de taille 30pix. \times 30pix. dans laquelle s'effectue le calcul photométrique. On considère la "photométrie relative" que l'on définit comme

$$\mathcal{J}(t) = \frac{I(t) - \langle I \rangle}{\langle I \rangle} \quad (8.10)$$

où $\langle \dots \rangle$ désigne la moyenne effectuée sur toute la durée de la session de 5 jours.

$\mathcal{J}(\nu)$ désignera la transformée de Fourier de $\mathcal{J}(t)$. On a tracé $\mathcal{J}(\nu)$ sur la figure 8.10. Nous y avons fait figurer la transformée de Fourier de la fluctuation relative du flux de l'étoile $\delta L(t)/L$ qui correspond donc au signal en entrée de l'instrument.

Le niveau de bruit blanc estimé aux fréquences $\nu > 1.5$ mHz ($\nu \simeq 1.5$ mHz étant la fréquence de coupure de Procyon) est de $\simeq 0.54$ ppm et est en accord avec les spécifications. On constate que les oscillations se détachent nettement du bruit blanc et que ce niveau est suffisamment faible pour pouvoir distinguer entre le RKS et le NKS.

Notez que cette simulation est toutefois incomplète : outre les impasses de la modélisation (c.f. section 8.4) l'écartométrie résultant du mouvement du satellite n'a pas été injectée dans la simulation car celle-ci ne couvre pas la durée de la session. Or la période de l'orbite étant de 103 mn, elle engendre des perturbations dont le mode fondamental dans le domaine de Fourier est situé à la fréquence $\nu \simeq 0.16$ mHz, *i.e.* dans le voisinage du domaine des oscillations considérées. Il eût donc été intéressant d'injecter cette perturbation.

Enfin la durée de vie des modes n'a pas été pris en compte, or il est attendu des durées de vie plus courtes pour les étoiles plus massives que le Soleil dont la durée typique des modes est de 5 jours. Par conséquent dans une simulation de 5 jours les modes s'étalent sur plusieurs éléments spectraux. Il conviendrait donc de simuler également la largeur des modes.

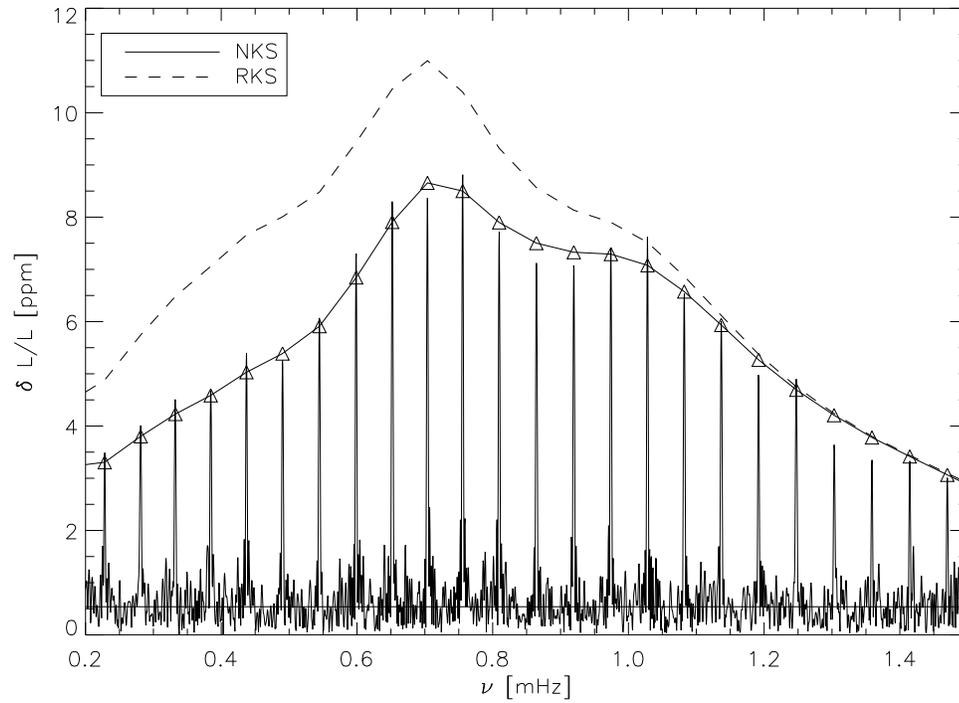


FIG. 8.10 – Tracé de la “photométrie relative” $J(\nu)$ en sortie de l’instrument (voir texte pour les détails). La courbe solide accompagnée de triangles représente l’enveloppe $\delta L(\nu_i)/L$ évaluée pour Procyon en considérant le spectre turbulent NKS et ayant servi à générer les oscillations lumineuses de l’étoile fictive. La courbe en pointillés représente une enveloppe calculée avec le spectre turbulent RKS. Enfin la barre horizontale situe la valeur estimée du bruit blanc, cette estimation a été effectuée pour les fréquences $\nu > 1.5$ mHz, *i.e.* au delà de la fréquence de coupure de Procyon.

Conclusion

1 Synthèse

Ce travail de thèse a abordé l'excitation stochastique des oscillations de type solaire. J'ai entrepris une étude théorique du mécanisme d'excitation dont l'objectif premier a été d'établir une formulation donnant, de la manière la plus complète et la plus générale possible, la puissance injectée stochastiquement dans les modes propres de type solaire qui assure la survie des oscillations.

Cette étude a permis initialement de mettre à jour un certain nombre d'inconsistances dans les travaux précédents. A son stade préliminaire elle a également permis de cerner le cadre de la théorie et d'explicitier de manière la plus exhaustive possible toutes les approximations de base sans lesquelles une approche analytique de l'excitation stochastique serait difficilement quantifiable.

J'ai démontré le rôle majeur des fluctuations turbulentes d'entropie confirmant les résultats des simulations numériques du Soleil [Stein and Nordlund, 1991]. Mais j'ai montré aussi que la contribution des fluctuations Lagrangiennes - à laquelle se restreignent Goldreich *et al.* [1994] - n'apporte pas de contribution à l'excitation. Ceci s'explique par le fait que ce terme est intrinsèquement linéaire en terme de fluctuations turbulentes et que la résonance avec l'oscillation conduit à annuler la contribution correspondante. Ce résultat établit plus généralement que toute contribution linéaire en terme d'une fluctuation turbulente n'apporte pas de contribution à l'excitation des modes.

La source entropique identifiée résulte en fait de l'advection par le champ de vitesse turbulent de la fluctuation turbulente d'entropie. La nature quadratique de ce terme le rend comparable par la forme au terme du stress de Reynolds. Ce terme non-linéaire avait précédemment été identifié par Goldreich and Keeley [1977b] mais considéré alors par les auteurs comme négligeable.

Cette étude théorique s'est attachée au problème de la généralisation du processus d'excitation à tout modèle turbulent. Cette approche faisait défaut chez les auteurs précédents dont les formulations ne permettaient pas d'envisager de façon consistante des modèles de turbulence différents du simple spectre de Kolmogorov. Enfin la nature scalaire passif de la fluctuation turbulente d'entropie à l'origine du terme source entropique a été prise en compte de manière consistante. Cette généralisation développée dans le cadre d'une description stationnaire, homogène et isotrope de la turbulence repose sur les outils mathématiques utilisés par Stein [1967] lesquels ont été étendus au cas du scalaire passif. Avec la formulation développée ici il est possible d'étudier un spectre de turbulence (cinétique et entropique) de forme quasiment quelconque.

Notre approche théorique a également permis de relier de façon rigoureuse les spectres de turbulence aux grandeurs physiques faisant l'objet d'une évaluation par la théorie de la longueur de mélange, à savoir la vitesse quadratique moyenne du champ de vitesse turbulent et la variance du scalaire entropie.

Des paramètres libres, l'un relié au temps de cohérence des tourbillons et l'autre au nombre d'onde caractéristique du plus grand tourbillon dans la cascade turbulente, ont été introduits. Ils contrôlent l'arbitraire de certaines définitions et compensent, un peu comme le fait le paramètre de la longueur de mélange, notre méconnaissance des propriétés de la turbulence stellaire. Leur nature a clairement été précisée et leur effets en terme de puissance injectée dans les modes ont été caractérisés.

Il nous a été ensuite possible d'étudier le cas des oscillations solaires. J'ai pu ainsi quantifier la contribution dominante de la source d'entropie et préciser la sensibilité aux paramètres libres et au modèle de turbulence solaire (inspiré des observations de la granulation solaire).

Les paramètres libres sont déterminés par étalonnage de la formulation calculée avec différents spectres turbulents par comparaison avec les observations solaires. Il en résulte que la région d'excitation des oscillations solaires est moins profonde que dans la formulation de Balmforth [1992a] et en accord avec les simulations numériques de Stein and Nordlund [2000] confortant ainsi l'affirmation de Osaki [1993]. Enfin la puissance calculée s'ajuste de manière très satisfaisante avec la puissance que l'on déduit des observations sismiques solaires. En particulier à haute fréquence l'ajustement avec les observations est bien meilleur que

ceux obtenus par Goldreich *et al.* [1994] et Balmforth [1992a].

J'ai ainsi calibré la formulation ensuite utilisée dans le cas de l'étoile Procyon pour laquelle des oscillations de type solaire ont été détectées. Nous avons d'abord considéré un modèle de Procyon basé sur le traitement classique de la convection pour lequel nous avons calculé le spectre de puissance des oscillations en utilisant tour à tour les différents spectres de turbulence considérés dans le cas du Soleil. Ces calculs ont mis à jour des différences significatives entre les puissances calculées avec les différents spectres de turbulence.

La comparaison avec les calculs de puissance basés sur le traitement non-local et dépendant du temps de la convection introduit par Gough [Gough, 1976, 1977] a révélé des comportements différents de ceux obtenus avec le traitement classique de la convection. Il a été ainsi établi que le spectre de puissance calculé sur le modèle de Procyon basé sur ce traitement de la convection était peu sensible aux caractéristiques des spectres turbulents. Ce résultat a été imputé aux propriétés des modes propres et à la profondeur d'excitation plus grande induite par ce traitement de la convection.

J'ai ensuite calculé de manière systématique la puissance injectée dans les oscillations de type solaire pour un échantillon d'étoiles situées sur la séquence principale. Ces calculs ont révélé une forte dépendance de la puissance d'oscillation avec la température effective : plus l'étoile est chaude plus le spectre de puissance des oscillations est sensible aux propriétés de la turbulence et plus celui-ci présente une forme irrégulière et donc riche en information. Cette conclusion déduite de calculs effectués avec la MLT classique reste sans doute vraie avec la MLT de Gough car basée sur la profondeur de la zone convective.

L'utilisation d'une simulation numérique tri-dimensionnelle du Soleil nous a permis, en dépit d'une résolution spatiale et temporelle assez réduite, de conforter certaines des approximations utilisées dans le développement théorique. Ces validations ont ainsi concerné l'approximation quasi-normale, utilisée pour décomposer analytiquement l'émission quadrupolaire du terme de Reynolds et d'entropie, et aussi la relation liant fluctuation d'entropie et de température pour laquelle tant les observations que la théorie de la turbulence favorisent une nature de scalaire passif.

Enfin en marge de l'approche théorique et quantitative, un modèle numérique de la chaîne photométrique de l'instrument COROT a été proposé. Bien qu'à l'état d'ébauche ce modèle destiné à la préparation scientifique de la mission a permis de valider la faisabilité de ce modèle numérique vu comme un outil d'évaluation des performances de l'instrument et de validation des traitements sols et vols.

Ce modèle numérique, conçu dans un souci de convivialité, a été appliqué, à titre d'illustration, à nos estimations des puissances injectées dans les modes. Cette convolution instrumentale a ainsi permis d'illustrer les hautes performances de l'instrument qui pourra dans un proche avenir nous apporter les contraintes observationnelles sur la physique de l'excitation stochastique.

2 Perspectives

Du point de vue de la théorie de l'excitation stochastique

Dans ce travail de thèse la part de recherche théorique a été dominante, néanmoins certaines approximations et modélisations devraient être explorées davantage. En particulier en se basant sur le travail de Stein [1967], le spectre de turbulence a été décomposé en une composante purement spatiale et une partie reliée à la durée de vie des tourbillons. Des réserves ont été formulées dans ce travail sur la validité de cette décomposition aux grandes échelles spatiales (c.f. sections 3.2.3, 4.12 et 5.1.1.0). C'est en fait la modélisation de la turbulence aux grandes échelles (méso-granulation) qu'il conviendrait de reconsidérer pour pouvoir caractériser la dynamique des tourbillons dans ce domaine d'échelle. On peut s'attendre à ce qu'une meilleure caractérisation de la dynamique du spectre de turbulence modifie la sensibilité de la formulation aux spectres turbulents. Enfin cette amélioration permettra de contraindre le spectre de turbulence à partir des observations sismiques stellaires de manière plus robuste que ce qui a été fait dans le cas du Soleil.

Nous avons considéré uniquement l'excitation des modes radiaux. Cette hypothèse a été adoptée tardivement dans le développement théorique, essentiellement pour simplifier la formulation finale. Le transfert de puissance aux oscillations se réalise majoritairement par les modes turbulents tangentiels aux modes propres. Par conséquent l'évaluation de l'excitation stochastique des modes non-radiaux ne peut - contrairement à ce qui est fait par Goldreich *et al.* [1994]- se réduire simplement à l'introduction du facteur de compressibilité. Le calcul à entreprendre devrait permettre de mettre à jour des effets liés à la stratification et à la géométrie des modes non-radiaux. La comparaison avec les mesures d'amplitude de différents modes de degré ℓ élevé permettrait alors de consolider la théorie de l'excitation stochastique. Il faut du moins explorer ces aspects de la théorie.

Ce travail a permis d'améliorer l'évaluation des puissances injectées dans les oscillations. Cependant la valeur des amplitudes est fixée par un équilibre entre excitation et amortissement. La physique de l'amortissement des modes est complexe et encore mal comprise. Même pour le Soleil l'évaluation des taux d'amortissement ne s'ajuste pas encore aux observations de manière satisfaisante. Dans le cas du Soleil le problème de l'évaluation des taux d'amortissement a été contourné en utilisant les largeurs des modes observés sur celui-ci. Pour estimer les amplitudes des modes des autres étoiles il faut améliorer l'évaluation des taux d'amortissements η . En particulier les estimations actuelles de Houdek *et al.* [1999] négligent des processus d'amortissement parmi lesquels l'amortissement par perte de cohérence de phase ($\eta_{scattering}$, c.f. section 2.2.2) permettrait d'expliquer la sous-évaluation de η à basse fréquence.

Dans le développement théorique on a ignoré l'effet éventuel de la rotation et du champ magnétique sur l'excitation des modes. Une variation de l'énergie des modes est observée au cours du cycle solaire [Komm *et al.*, 2000] tandis que la puissance injectée dans ceux-ci demeure constante. L'interprétation de ce phénomène n'est pas encore fermement établie. La formulation a été étalonnée avec les observations solaires effectuées à une époque donnée du cycle solaire. On est donc amené à imaginer que les paramètres libres varient avec le cycle solaire (donc avec le champ magnétique). On peut donc envisager d'étudier le spectre de puissance du Soleil à différentes époques du cycle solaire, *i.e.* à différentes valeurs du champ magnétique, ce qui reviendrait à étudier des étoiles plus ou moins magnétiques.

Du point de vue quantitatif

Le parcours du diagramme HR a été effectué en considérant 7 étoiles. Pour consolider nos conclusions et évaluer l'effet éventuel de l'âge et de la métallicité des étoiles de type solaire, il conviendrait d'explorer le diagramme HR avec un échantillonnage plus important.

Le traitement standard de la théorie de longueur de mélange (MLT) et la prescription de Gough [Gough, 1976, 1977] ont été comparés dans ce travail et conduisent dans le cas de Procyon à des conclusions différentes sur le spectre de puissance. J'ai proposé une explication, il s'agit de pousser plus avant l'étude. Il faudra enfin effectuer à nouveau le parcours du diagramme HR avec la description de Gough de la MLT pour mettre en évidence d'éventuels comportements "étoile à étoile" différents. Des comportements différents pourraient être alors contraints par les données qui seront fournies par les futures missions spatiales.

Le traitement particulier de Canuto and Mazzitelli [1991] a seulement été évoqué. Ce modèle statique traite la convection turbulente de manière plus consistante car l'ensemble des tourbillons de la cascade turbulente est comptabilisé dans le calcul du flux convectif et des vitesses convectives. De ce fait ce modèle convient plus naturellement avec notre formulation théorique qui a intégré de manière consistante le caractère turbulent du milieu stellaire convectif. Il serait donc intéressant de "convoluer" un tel traitement de la convection à notre formulation.

Du point de vue observationnel

Les mesures spectroscopiques des vitesses des oscillations solaires sont en général effectuées à l'aide d'une raie dont la profondeur dans l'atmosphère est bien connue. La dépendance du spectre de puissance acoustique avec la profondeur à laquelle sont effectuées les mesures a été soulignée au chapitre 5. Les instruments spectroscopiques dédiés à l'astérosismologie utilisent en général un nombre très important de raies dont les profondeurs dans l'atmosphère sont différentes. Il s'agirait pour toute étoile dont les oscillations sont mesurées par la méthode spectroscopique de localiser la profondeur des raies qui contribuent à la mesure des vitesses spectroscopiques. Ce travail - que j'ai entamé en collaboration avec Claude Van't Veer - se conçoit grâce à l'utilisation de modèles d'atmosphère stellaire que l'on peut affiner par des observations spectrométriques.

Les futures missions spatiales d'Astérosismologie sont exclusivement basées sur des mesures photométriques. Par conséquent les contraintes sur l'excitation des modes se fera en terme des fluctuations oscillantes de la luminosité ($\delta L/L$ en valeur relative). Nous avons relié $\delta L/L$ aux puissances des oscillations en considérant des modes radiaux (donc en s'affranchissant du problème de la visibilité des modes de degré ℓ non nul) et en négligeant l'effet de l'assombrissement centre-bord ainsi que les effets non-adiabatiques. Il faut par conséquent isoler les effets qui ne sont pas négligeables - pour les modes de degré ℓ faible qui seront observés - et les intégrer dans la relation qui lie $\delta L/L$ aux puissances des oscillations.

Du point de vue des simulations

Les validations effectuées dans ce travail, à l'aide d'une simulation numérique tridimensionnelle du Soleil, devraient être consolidées par de nouvelles simulations jouissant d'une meilleure résolution spatiale et tem-

porelle. De telles simulations permettraient d'améliorer la caractérisation de la dynamique de la turbulence et fournir éventuellement des contraintes indépendantes sur les paramètres libres.

D'autre part les validations ont été effectuées dans le cas du Soleil. Des effets importants dus à une modélisation différente de la turbulence stellaire sont attendus avec des étoiles plus chaudes et plus massives. Il conviendrait donc de vérifier si les approximations utilisées dans le développement théorique se maintiennent "d'étoiles à étoiles". De même il devrait être possible de valider le caractère universel conféré aux paramètres libres. De telles simulations numériques sur des étoiles de type solaire ont déjà été entreprises [Trampedach, 1999] mais sans doute pas avec la résolution nécessaire. Il faudra probablement générer des simulations spécifiquement adaptées aux problèmes de l'excitation stochastique. L'analyse de ces simulations permettra alors de vérifier les approximations et modélisations utilisées.

Du point de vue instrumental

Le modèle de la chaîne photométrique de l'instrument COROT a été développé en faisant l'impasse sur les aspects thermiques. D'autre part la gestion du profil de mission (mouvement orbital, disponibilité opérationnelle), la simulation d'événements erratiques et les traitements vols n'ont pas été intégrés. Enfin la composante exoplanète de la mission a été écartée. Pour parfaire ce modèle et le rendre plus représentatif pour un usage futur par les utilisateurs scientifiques, il faudrait poursuivre son développement et sa validation.

Perspectives à long terme

Les futures missions de sismologie spatiale qui ont été évoquées (COROT, MONS, MOST, EDDINGTON, c.f. l'introduction) offriront des observations d'une qualité inégalée jusqu'à maintenant au sol. Elles ouvrent une voie prometteuse pour l'astérosismologie.

Ce travail s'est inscrit dans cette perspective par une contribution spécifique que l'on a synthétisée plus haut. La confrontation de la théorie de l'excitation stochastique avec les données qui seront disponibles grâce à ces missions apporteront des contraintes supplémentaires qui à ce jour sont principalement disponibles pour le Soleil. Cette confrontation permettra de préciser lesquelles des hypothèses invoquées sont les plus robustes et lesquelles doivent être reconsidérées. De même elles permettront également de déterminer le domaine de validité de la théorie qui a été étendue au delà du cas du Soleil.

Annexe A

Profil Lorentzien

On établit ici le profil lorentzien présenté dans la section 2.4. La moyenne quadratique du spectre de puissance s'exprime à l'aide des équations 2.16, 2.17, 2.18 et 2.19

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{P}(\omega) \rangle &= \frac{1}{8(T_{obs}\omega_0)^2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{T_{obs}} dt_3 e^{i(\omega-\omega_0)t_3-\eta t_3} \int_{-\infty}^{t_3} dt_1 e^{i\omega_0 t_1+\eta t_1} \\ &\times \frac{1}{2\pi} \int_0^{T_{obs}} dt_4 e^{i(-\omega+\omega_0)t_4-\eta t_4} \int_{-\infty}^{t_4} dt_2 e^{-i\omega_0 t_2+\eta t_2} \langle f(t_1) f(t_2) \rangle \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

La stationnarité de $f(t)$ ainsi que l'équation 2.20 nous permettent d'écrire

$$\langle f(t_1) f(t_2) \rangle = \langle f(0) f(t_2 - t_1) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \mathcal{F}(\omega) e^{-i\omega(t_2-t_1)} \quad (\text{A.2})$$

qui une fois injectée dans l'équation A.1 nous donne

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{P}(\omega) \rangle &= \frac{1}{8(T_{obs}\omega_0)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \mathcal{F}(\omega') \\ &\times \frac{1}{2\pi} \int_0^{T_{obs}} dt_3 e^{i(\omega-\omega_0)t_3-\eta t_3} \int_{-\infty}^{t_3} dt_1 e^{i\omega_0 t_1+\eta t_1+i\omega' t_1} \\ &\times \frac{1}{2\pi} \int_0^{T_{obs}} dt_4 e^{i(-\omega+\omega_0)t_4-\eta t_4} \int_{-\infty}^{t_4} dt_2 e^{-i\omega_0 t_2+\eta t_2-i\omega' t_2} \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Les intégrations sur t_1 et t_2 nous amènent à

$$\langle \mathcal{P}(\omega) \rangle = \frac{1}{8(T_{obs}\omega_0)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \mathcal{F}(\omega') \frac{1}{2\pi} \int_0^{T_{obs}} dt_3 \frac{e^{i(\omega+\omega')t_3}}{i\omega_0 + \eta + i\omega'} \frac{1}{2\pi} \int_0^{T_{obs}} dt_4 \frac{e^{-i(\omega+\omega')t_4}}{-i\omega_0 + \eta - i\omega'} \quad (\text{A.4})$$

Dans l'hypothèse où $T_{obs}\eta \gg 1$ l'équation précédente se réduit à

$$\langle \mathcal{P}(\omega) \rangle = \frac{1}{8(T_{obs}\omega_0)^2} \int_0^{T_{obs}} dt_4 \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \frac{\mathcal{F}(\omega') \delta(\omega + \omega')}{\eta^2 + (\omega_0 + \omega')^2} \frac{e^{-i(\omega+\omega')t_4}}{2\pi} \quad (\text{A.5})$$

$$= \frac{1}{8(T_{obs}\omega_0)^2} \frac{T_{obs}}{2\pi} \frac{\mathcal{F}(-\omega)}{(\omega - \omega_0)^2 + \eta^2} \quad (\text{A.6})$$

$\langle f(0) f(t_2 - t_1) \rangle$ est invariant par une inversion des temps de sorte que $\mathcal{F}(\omega) = \mathcal{F}(-\omega)$ si bien que l'on aboutit au résultat de l'équation 2.22 :

$$\langle \mathcal{P}(\omega) \rangle = \frac{1}{16\pi T_{obs}\omega_0^2} \frac{\mathcal{F}(\omega)}{(\omega - \omega_0)^2 + \eta^2} \quad (\text{A.7})$$

Annexe B

Termes croisés

Le terme source entropique (h_t) et le terme source du stress de Reynolds (\vec{f}_t) introduisent trois termes croisés dans l'équation 4.63. En effet, le terme de Reynolds, qui est proportionnel à $u_i u_j$ est corrélé avec les trois termes entropiques dans h_t (équation 4.111), à savoir le terme linéaire δs_t et les deux termes non-linéaires dans q_t (équation 4.112). Les contributions correspondantes sont proportionnelles à :

$$\int d^3 r \langle s' u_i'' u_j'' \rangle \quad (\text{B.1})$$

$$\int d^3 r \langle u_i' s' u_j'' \rangle \quad (\text{B.2})$$

$$\int d^3 r \langle u_i' s' u_i'' u_j'' \rangle \quad (\text{B.3})$$

où l'on a à nouveau supposé que les fluctuations lagrangiennes d'entropie suivent une loi d'échelle identique aux fluctuations euleriennes. La QNA fournit la relation suivante

$$\begin{aligned} \langle u_i' s' u_i'' u_j'' \rangle &= \langle u_i' s' \rangle \langle u_i'' u_j'' \rangle + \langle u_i' u_i'' \rangle \langle s' u_j'' \rangle \\ &\quad + \langle u_i' u_j'' \rangle \langle s' u_i'' \rangle \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Pour une turbulence isotropique, homogène, et incompressible on a $\langle s' u_j'' \rangle = 0$ [Lesieur, 1997, Chap V-8]. si bien que les trois termes dans l'équation B.4 s'annulent. Par conséquent les contributions B.2 et B.3 s'annulent.

Le terme linéaire et les deux termes d'advection dans le terme source entropique h_t introduisent trois termes croisés. Ceux-ci sont proportionnels à

$$\int d^3 r \langle s' s'' u_i'' \rangle \quad (\text{B.5})$$

$$\int d^3 r \langle s' s'' u_i'' \rangle \quad (\text{B.6})$$

Le produit de corrélation d'ordre trois pour des quantités turbulentes suivant une distribution normale est nul. Toutefois les quantités turbulentes, telles que les fluctuations d'entropie (s_t) et le champ de vitesse turbulente (\vec{u}) ne peuvent pas suivre une distribution normale; cela reviendrait autrement à annuler le transfert d'énergie entre tourbillons de nombres d'onde différents (c.f. section 3.2.4). Cependant dans un milieu fortement turbulent, comme c'est le cas dans la zone convective des étoiles, l'approximation qui consiste à modéliser la distribution des quantités turbulentes par une fonction gaussienne est raisonnable et est consistante avec la QNA.

Les termes B.1, B.5 et B.6 sont des produits de corrélation d'ordre trois et donc s'annulent. En conclusion les termes croisés de C_{RS} ainsi que les termes croisés entre les différents termes du terme source entropique ne contribuent pas à l'excitation des oscillations.

Annexe C

Effets géométriques de l'anisotropie

On établit ici les équations 4.107 et 4.123 dans lesquelles les facteurs d'anisotropie \mathcal{G} et \mathcal{H} sont introduits. Nous évaluons ensuite ces facteurs pour différents cas.

Soit (x, y, z) le système de coordonnées réelle dans lequel les éléments turbulents sont anisotropes et $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ le système à coordonnées fictive dans lequel les éléments turbulents apparaissent isotropes.

La turbulence est supposée isotrope dans le plan horizontal et anisotrope dans la direction verticale. Les deux jeux de coordonnées sont alors reliés par le facteur d'anisotropie \mathcal{Q} comme

$$\begin{cases} x = \mathcal{Q} \tilde{x} \\ y = \mathcal{Q} \tilde{y} \\ z = \tilde{z} \end{cases} \quad (\text{C.1})$$

\mathcal{Q} mesure ainsi le rapport entre la taille des tourbillons dans le plan horizontal par rapport à leur taille dans le sens vertical. La relation équivalente dans l'espace des nombres d'onde s'exprime comme

$$\begin{cases} k_x = \mathcal{Q}^{-1} \tilde{k}_x \\ k_y = \mathcal{Q}^{-1} \tilde{k}_y \\ k_z = \tilde{k}_z \end{cases} \quad (\text{C.2})$$

où (k_x, k_y, k_z) et $(\tilde{k}_x, \tilde{k}_y, \tilde{k}_z)$ sont respectivement les coordonnées anisotropes et isotropes de nombre d'onde. $\mathcal{Q} = 1$ correspond au cas d'une turbulence isotrope. On se place dans le cas anisotrope ($\mathcal{Q} \neq 1$) et on étend cette anisotropie à toutes les valeurs $|\vec{k}|$, i.e. à toute la cascade turbulente.

L'évaluation de l'équation 4.104 donne dans les coordonnées sphériques $(\tilde{k}, \tilde{\theta}, \tilde{\phi})$ associées aux coordonnées "isotropes" $(\tilde{k}_x, \tilde{k}_y, \tilde{k}_z)$:

$$\begin{aligned} C_R^2 &= 4\pi^3 \int_0^M dm \rho_0 \left(\frac{d\xi_r}{dr} \right)^2 \\ &\times \int \tilde{k}^2 \mathcal{Q}^{-2} d\tilde{k} \frac{E^2(\tilde{k})}{\tilde{k}^4} \chi_{\tilde{k}}(\omega_0) \\ &\times \int d\tilde{\theta} \sin \tilde{\theta} \left(1 - \frac{\mathcal{Q}^2 \cos^2 \tilde{\theta}}{(\mathcal{Q}^2 - 1) \cos^2 \tilde{\theta} + 1} \right)^2 \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

On considère toutefois que la composante isotrope de $\phi_{ij}(k, \omega)$, équation 3.64, demeure isotrope. On s'intéresse donc aux effets géométriques dus aux formes des tourbillons tandis que la description de la turbulence du point de vue énergétique est maintenue isotrope. Cette approximation permet d'écrire la relation

$$\frac{E(\tilde{k}, \omega)}{4\pi \tilde{k}^2} = \frac{E(k, \omega)}{4\pi k^2} \quad (\text{C.4})$$

Le volume des tourbillons se conserve dans les coordonnées isotropes de sorte que l'on a la relation

$$4\pi \int \tilde{k}^2 \mathcal{Q}^{-2} d\tilde{k} = 4\pi \int k^2 dk \quad (\text{C.5})$$

Φ	\mathcal{Q}^2	a	\mathcal{G}	\mathcal{H}
3	1	0	16/15	4/3
2	0.5	0.5	1.0	1.0
5/3	0.33	0.66	1.8	1.2
1.37	0.18	0.81	3.7	1.6

TAB. C.1 – Valeurs de \mathcal{H} and \mathcal{G} pour différentes valeurs de Φ : le cas isotrope correspond à $\Phi = 3$; $\Phi = 2$ est consistant avec la MLT de Bohm-Vitense ; $\Phi = 5/3$ est la valeur qui maximise le flux convectif établi par Balmforth and Gough [1990] et enfin $\Phi = 1.37$ est la valeur considérée par Houdek *et al.* [1999] dans leurs estimations d'amplitudes.

Les relations C.4 et C.5 nous permettent de mettre l'équation C.3 sous la forme

$$\begin{aligned}
C_R^2 &= 4\pi^3 \int_0^M dm \rho_0 \left(\frac{d\xi_r}{dr} \right)^2 \\
&\times \int dk \frac{E^2(k)}{k^2} \chi_k(\omega_0) \\
&\times \int d\tilde{\theta} \sin \tilde{\theta} \left(1 - \frac{\mathcal{Q}^2 \cos^2 \tilde{\theta}}{(\mathcal{Q}^2 - 1) \cos^2 \tilde{\theta} + 1} \right)^2
\end{aligned} \tag{C.6}$$

On définit par convenance le facteur \mathcal{G} comme

$$\mathcal{G} = \int_{-1}^1 d \cos \tilde{\theta} \left(1 - \frac{\mathcal{Q}^2 \cos^2 \tilde{\theta}}{(\mathcal{Q}^2 - 1) \cos^2 \tilde{\theta} + 1} \right)^2 \tag{C.7}$$

L'équation C.6 munie de la définition de \mathcal{G} établit ainsi l'équation 4.107.

De la même façon que pour la contribution de Reynolds on obtient à partir de l'équation 4.122 l'équation 4.123 dans laquelle le facteur d'anisotropie est défini comme

$$\mathcal{H} = \int_{-1}^1 d \cos \theta \left(1 - \frac{\mathcal{Q}^2 \cos^2 \theta}{(\mathcal{Q}^2 - 1) \cos^2 \theta + 1} \right) \tag{C.8}$$

La durée de vie d'un tourbillon est nécessairement la même dans toutes les directions de sorte que

$$\frac{\mathcal{Q}\Lambda}{\langle u_x^2 \rangle^{1/2}} = \frac{\mathcal{Q}\Lambda}{\langle u_y^2 \rangle^{1/2}} = \frac{\Lambda}{\langle u_z^2 \rangle^{1/2}} \tag{C.9}$$

où Λ est la taille dans le sens vertical du tourbillon le plus large. On obtient alors à partir des équations 3.25 et C.9 une relation entre \mathcal{Q} et Φ

$$\Phi = 1 + 2\mathcal{Q}^2 \tag{C.10}$$

L'intégration des équations C.7 et C.8 donne

$$\mathcal{G} = \frac{1}{a^{5/2}} \left[\frac{2a^{3/2} - 3\sqrt{a}}{a-1} - 3 \operatorname{atanh}(\sqrt{a}) \right] \tag{C.11}$$

$$\mathcal{H} = \frac{2}{a^{3/2}} [\operatorname{atanh}(\sqrt{a}) - \sqrt{a}] \tag{C.12}$$

avec

$$a = 1 - \mathcal{Q}^2 = (3 - \Phi) / 2 \tag{C.13}$$

La table C donne les valeurs de \mathcal{G} et \mathcal{H} pour différentes valeurs de Φ .

Annexe D

Contribution de l'entropie

Nous établissons ici l'équation 4.122 à partir de l'équation 4.121

$$C_S^2 \propto \int d\tau e^{-i\omega_0\tau} d^3r \int_{-\infty}^{\tau/2} dt_3 \int_{-\infty}^{-\tau/2} dt_4 \langle u_3^i u_4^j \rangle \langle s_3 s_4 \rangle \quad (\text{D.1})$$

La stationnarié de la turbulence nous permet d'écrire l'équation D.1 sous la forme

$$C_S^2 \propto \int d\tau e^{-i\omega_0\tau} d^3r \int_{-\infty}^{\tau/2} dt_3 \int_{-\infty}^{-\tau/2} dt_4 \langle u^i u^j(t_4 - t_3) \rangle \langle s_t s_t(t_4 - t_3) \rangle \quad (\text{D.2})$$

laquelle équation peut être décomposée dans l'espace Fourier à l'aide des relations 3.61 et 3.98

$$C_S^2 \propto (2\pi)^3 \int d\tau e^{-i\omega_0\tau} d^3k \int_{-\infty}^{\tau/2} dt_3 \int_{-\infty}^{-\tau/2} dt_4 \int d\omega_3 d\omega_4 \\ \times \phi_{ij}(\vec{k}, \omega_3) \phi_s(\vec{k}, \omega_4) e^{-it_3(\omega_3 + \omega_4)} e^{it_4(\omega_3 + \omega_4)} \quad (\text{D.3})$$

L'intégration de l'équation D.3 sur t_3 et t_4 aboutit à

$$C_S^2 \propto (2\pi)^3 \int d\tau e^{-i\omega_0\tau} d^3k \int d\omega_3 d\omega_4 \frac{e^{-i\tau(\omega_3 + \omega_4)}}{(\omega_3 + \omega_4)^2} \phi_{ij}(\vec{k}, \omega_3) \phi_s(\vec{k}, \omega_4) \quad (\text{D.4})$$

Finalement l'intégration de l'équation D.4 sur τ donne

$$C_S^2 \propto \frac{(2\pi)^4}{\omega_0^2} \int d^3k \int d\omega \phi_{ij}(\vec{k}, \omega) \phi_s(\vec{k}, \omega_0 + \omega) \quad (\text{D.5})$$

ce qui fournit le résultat de l'équation 4.122.

Annexe E

Publications

- Samadi R. et Houdek G. , Oscillation power as a diagnostic tool for stellar turbulent spectra, The Third MONS Workshop : Science Preparation and Target Selection , p27 , 2000.
- Samadi R., Goupil M.-J., Lebreton Y. et Baglin,A., Oscillation power as a test of stellar turbulence : Scanning the HR diagram, SOHO 10 / GONG 2000 Workshop , 2000.
- Samadi R. et Goupil M.-J. , Excitation of stellar p-modes by turbulent convection : 1. Theoretical formulation , accepté par Astronomy & Astrophysics le 9/12/2000.
- Samadi R., Goupil M.-J. et Lebreton Y., Excitation of stellar p-modes by turbulent convection : 2. The Sun , accepté par Astronomy & Astrophysics. le 9/12/2000.