



HAL
open science

Couplage instationnaire Navier-Stokes/Euler pour la génération et le rayonnement des sources de bruit aérodynamique

Ronan Guenanff

► **To cite this version:**

Ronan Guenanff. Couplage instationnaire Navier-Stokes/Euler pour la génération et le rayonnement des sources de bruit aérodynamique. Acoustique [physics.class-ph]. Université Rennes 1, 2004. Français. NNT: . tel-00068113

HAL Id: tel-00068113

<https://theses.hal.science/tel-00068113>

Submitted on 10 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° ORDRE : 3138

THÈSE

présentée

DEVANT L'UNIVERSITÉ DE RENNES I

pour obtenir

le grade de : **DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE RENNES I**

Mention : **MÉCANIQUE**

PAR

Ronan GUÉNANFF

Équipe d'accueil : ONERA, Châtillon
École Doctorale : Sciences de la Matière
Composante universitaire : IRMAR, Rennes

**COUPLAGE INSTATIONNAIRE NAVIER-STOKES/EULER POUR LA
GÉNÉRATION ET LE RAYONNEMENT DES SOURCES DE BRUIT
AÉRODYNAMIQUE**

SOUTENUE LE 14 Décembre 2004 devant la commission d'Examen

COMPOSITION DU JURY

M. R. ABGRALL	Professeur, Univ. Bordeaux I	Rapporteur
M. B. CARUELLE	Ingénieur de Recherche, AIRBUS France	Examineur
M. F. HECHT	Professeur, Univ. Paris VI	Rapporteur
M. R. LEWANDOWSKI	Professeur, Univ. Rennes I	Directeur de thèse
M. E. MANOHA	Ingénieur de Recherche, ONERA	Membre invité
M. L. RAKOTOMANANA	Professeur, Univ. Rennes I	Examineur
M. P. SAGAUT	Professeur, Univ. Paris VI	Examineur
M. M. TERRACOL	Ingénieur de Recherche, ONERA	Membre invité



REMERCIEMENTS

Ce travail de thèse a été effectué à l'Office National d'Etudes et de Recherches Aérospatiales, au sein du Département de Simulation Numérique des Ecoulements et d'Aéroacoustique, dans l'unité Bruit d'Ecoulement.

Je tiens tout d'abord à remercier Messieurs Philippe Morice, directeur du département DSNA, et Alain Julienne, chef de l'unité BREC, pour m'avoir accueilli au sein de leurs équipes.

Je souhaite exprimer mes plus vifs remerciements à Monsieur le professeur Roger Lewandowski, qui m'a fait l'honneur de diriger mon travail avec disponibilité et intérêt. Il m'a encouragé et soutenu tout au long de ces trois années de thèse.

Mes remerciements s'adressent particulièrement à trois personnes qui ont fortement contribué à l'intérêt scientifique de cette thèse. Tout d'abord, j'exprime ma gratitude à Monsieur le professeur Pierre Sagaut, avec qui les échanges ont été enrichissants et stimulants grâce à sa grande culture scientifique, à Monsieur Eric Manoha dont l'expertise en aéroacoustique et la patience sont des qualités rarissimes et, enfin, à Monsieur Marc Terracol, pour sa grande connaissance de la turbulence et des outils numériques sans lesquels, bien évidemment, je n'aurais pas pu tenir les objectifs fixés.

Tous mes remerciements à Messieurs les professeurs Rémy Abgrall et Frédéric Hecht d'avoir accepté d'être les rapporteurs de ce travail, et pour l'intérêt qu'ils y ont porté. Merci à Monsieur Bastien Caruelle et à Monsieur le professeur Lalao Rakotomanana d'avoir accepté de faire partie du jury et pour leurs remarques pertinentes sur mon travail.

Je remercie sincèrement tous les gens avec qui j'ai pu mener des discussions scientifiques intéressantes, et parfois jusque très tard. Je pense particulièrement à Monsieur Stéphane Redonnet, Monsieur le professeur Michel Crouzeix, Monsieur Grégory Vial, Madame Nathalie Rittemard, Mademoiselle Saloua Ben Khelil, Monsieur Philippe Guillen, Monsieur Ivan Mary, Madame Catherine Herrero.

En ce qui concerne mes "collègues" thésards, j'adresse un petit clin d'oeil à : Igor le terrible (qui a eu le courage de relire ma thèse et avec qui j'ai eu l'honneur de discuter de tout ou presque), Matthieu la "référence" (unix, internet, blagues en tout genres et bonne humeur), Quasifab (apprenti numéricien et danseur émérite ou l'inverse), Chibre le produc-

teur, JB le bi-fluideur, Nono, Seb le terrible joueur de foot, Fred le flingueur, Chichi l'ami du moustachu, Sonic, Guigui2, Guillaume D. et Jean (qui doivent essayer de repousser à leur tour les limites de l'aéroacoustique), Fred la carotte, Elisa et Elodie la Robigirl.

Un grand merci aux experts informatiques que sont Philippe Ceroni et Bruno Mazin (qui résoud tous les problèmes avant qu'on ait le temps de les formuler et dont les grimaces matinales ne m'impressionnent plus) et aux petites fées, Brigitte Commelin et Ghislaine Denis, qui transforment les tracasseries administratives en sourires et bonne humeur communicatives.

Un coucou spécial à ma famille et à mes amis qui m'ont rendu ces trois années agréables : Fred, Olive, Benoit, Stéphanie, Didier. Et pour le plaisir, un coucou aux théatreaux (locataires de l'Annexe) : Valou l'artiste, Mathews l'architecte, Ségo, Thomas, Charlotte, Nathan, Pierre, Cécile et à maître Lionel.

Et un dernier hommage à E.K. : "Moi je vous donne les informations telles que je les reçois, vous les interprétez comme vous voulez".

Table des matières

1	Introduction	7
1.1	Contexte général	7
1.2	Objectifs de la thèse	11
1.3	Organisation du mémoire	11
2	Généralités sur le bruit aérodynamique et sa simulation	13
2.1	Description physique de quelques mécanismes générateurs de bruit aérodynamique	13
2.2	Simulation numérique d'un écoulement turbulent	16
2.2.1	Rappel des équations de Navier-Stokes	16
2.2.2	De la simulation numérique directe à la simulation des grandes échelles	17
2.2.3	Aérodynamique/acoustique	19
2.3	Méthodes hybrides à deux étapes	21
2.3.1	Analogie de Lighthill	21
2.3.2	Extension de l'analogie	22
2.4	Méthode hybride à trois étapes	23
2.4.1	Nécessité de l'introduction d'un maillon Euler	23
2.4.2	Couplage direct "one-way" des équations de Navier-Stokes 3D et d'Euler 2D	24
2.4.3	Interface de couplage Navier-Stokes/Euler	25
2.5	Conclusion	25
3	Simulation de la propagation acoustique	27
3.1	Equations d'Euler en perturbations	27
3.2	Etat de l'art des schémas numériques	31
3.2.1	Schéma de dérivation spatiale	31
3.2.2	Schéma d'intégration temporelle	35
3.3	Etat de l'art des conditions aux limites	40
3.4	Filtrage de la solution	41
3.5	Méthode numérique	44
3.6	Conclusion	47

4	Stabilisation des équations d'Euler discrétisées par DFC	49
4.1	Instabilités en haute fréquence	49
4.2	Méthodes de stabilisation	53
4.2.1	Méthode de viscosité artificielle	53
4.2.2	Modèles semi-discrets et discrets étudiés	55
4.3	Stabilité en conditions aux limites périodiques	56
4.3.1	Propriétés des modèles	56
4.3.2	Analyse du coefficient d'amplification des trois modèles	60
4.3.3	Conclusion partielle	61
4.4	Stabilité en conditions aux limites de sortie des ondes	63
4.4.1	Méthode de stabilité matricielle	63
4.4.2	Résultats	64
4.5	Stabilité et réflexions numériques dans les simulations	67
4.6	Conclusion	70
5	Méthode de raccordement non-conforme	71
5.1	Position du problème et bibliographie	72
5.2	Choix de la méthode d'interpolation	73
5.2.1	La base d'interpolation : bruit large bande	73
5.2.2	Les degrés de liberté	74
5.2.3	Analyse spectrale pour le choix des degrés de liberté	75
5.3	Mise en oeuvre et validation en maillage cartésien	82
5.3.1	Description des opérations	82
5.3.2	Cas de propagation d'une source acoustique	82
5.4	Extension aux maillages complexes	84
5.4.1	Méthode	84
5.4.2	Validation : Diffraction sur un cylindre	90
5.5	Procédure de couplage à un sens	96
5.5.1	Méthode de couplage SGE/Euler	96
5.5.2	Validation sur un cas de propagation	96
5.6	Conclusion	99
6	Etude du bruit aérodynamique d'une aile hypersustentée	101
6.1	Localisation des sources de bruit dans la cavité de bec	102
6.1.1	Description de la configuration	102
6.1.2	Résultats aérodynamiques	104
6.1.3	Résultats acoustiques	107
6.2	Maillage adapté à la propagation	109
6.2.1	Le maillage aérodynamique	109
6.2.2	Le maillage acoustique	109
6.3	Validation du maillage acoustique	113
6.3.1	Calcul sans écoulement	113
6.3.2	Effets dus à l'écoulement	115

6.4	Rayonnement de sources équivalentes	120
6.4.1	Source au bord de fuite supérieur du bec	120
6.4.2	Source près du bord de fuite inférieur du bec	126
6.5	Conclusion	131
7	Couplage SGE/Euler sur une plaque plane	133
7.1	Couplage SGE/Euler sur une plaque plane à bord de fuite épais	133
7.1.1	Le calcul SGE	133
7.1.2	Couplage SGE/Euler	137
7.1.3	Conclusion partielle	146
7.2	Modèle de sources équivalentes	148
7.2.1	Modélisation du bruit de culot par une source dipolaire harmonique	148
7.2.2	Perspectives sur l'utilisation d'un modèle général de sources équiva- lentes	152
7.3	Conclusion	154
8	Conclusion et perspectives	157
8.1	Conclusion	157
8.2	Perspectives	158
	Publications	163
A	Analysis of a high-order filtered method for CAA	163
B	Study of stabilization methods for computational aeroacoustics	201

Chapitre 1

Introduction

1.1 Contexte général

Le bruit des véhicules (avions, trains, voitures) devient un problème social et économique omniprésent. La réduction des nuisances sonores est partout une priorité. En parallèle de la caractérisation expérimentale, la simulation numérique en aéroacoustique constitue donc un enjeu un majeur de la recherche aéronautique, automobile et ferroviaire.

Dans le domaine de l'aviation civile, les normes internationales concernant le bruit sont de plus en plus contraignantes, notamment sous la pression d'associations de riverains des aéroports. En conséquence, les performances acoustiques représentent un critère de concurrence sévère entre les principaux avionneurs (Airbus, Boeing) et motoristes (Snecma, Rolls-Royce, General Electric, Pratt & Whitney). Le bruit étant devenu un argument commercial, sa prévision et sa réduction par des effets de masque ou par l'emploi de matériaux absorbants constitue dorénavant une priorité.

Les deux principales contributions au bruit émis par un avion de transport civil sont le bruit de propulsion et le bruit aérodynamique. Le bruit de propulsion est constitué par le bruit des moteurs dont les deux sources principales sont le jet et la soufflante. Le bruit aérodynamique se définit comme le bruit engendré par l'écoulement autour de la structure de l'avion et plus particulièrement autour des dispositifs hypersustentateurs (becs et volets) et du train d'atterrissage. En phase de décollage, le bruit de propulsion est prépondérant. En phase d'approche et d'atterrissage, les contributions du bruit de propulsion et du bruit aérodynamique sont du même ordre de grandeur.

La connaissance du bruit de propulsion a beaucoup progressé au cours des dernières décennies grâce aux moyens expérimentaux et à l'accroissement des moyens de simulation numérique [18, 26, 63], ce qui a permis de le réduire considérablement. De nombreux travaux sont en cours sur la prévision numérique du bruit de soufflante et de jet, dont la complexité nécessite des moyens de calcul très importants [30, 5]. De sorte que si le bruit

de moteur reste prépondérant dans la phase de décollage d'un avion, sa contribution relative est moins importante en phase d'atterrissage où le pilote réduit la vitesse de l'avion et enclenche les dispositifs hypersustentateurs (bec et volet) pour compenser le déficit de portance engendré. L'écoulement complexe qui se crée alors autour de l'aile engendre un bruit aérodynamique très supérieur à celui engendré en phase de croisière.

L'ONERA contribue depuis longtemps à l'étude du bruit aérodynamique, tant sur le plan expérimental que numérique. Cette thèse s'intègre dans le cadre de cette contribution à la progression de la simulation numérique des mécanismes aéroacoustiques.

D'après Goldstein [33], l'aéroacoustique est l'étude du bruit généré par des forces aérodynamiques ou par la dynamique interne de l'écoulement plutôt que par l'application de forces appliquées ou mouvements externes qui relève de l'acoustique classique.

Les fluctuations de pression acoustiques dans un écoulement prennent leur origine dans les fluctuations des quantités aérodynamiques et plus particulièrement dans les régions de forte vorticité, dont certaines constituent de véritables zones sources de bruit. L'étude d'un mécanisme aéroacoustique nécessite obligatoirement la connaissance de la nature de l'écoulement.

Les forces aérodynamiques qu'exerce un fluide en mouvement sur un obstacle dépendent de phénomènes complexes, car aléatoires (on parle alors de turbulence) et impliquent une large gamme d'échelles temporelles et spatiales depuis les plus grandes structures de l'écoulement, qui produisent de l'énergie, jusqu'aux plus petites structures dynamiquement actives (échelle de Kolmogorov) à travers lesquelles se dissipe l'énergie.

Cette production d'énergie par les grosses structures aboutit dans certains cas à la génération d'ondes acoustiques. Les fréquences acoustiques principales correspondent aux fréquences de variation des forces aérodynamiques sur l'obstacle. Les mécanismes physiques qui font varier ces forces correspondent aux interactions des échelles caractéristiques du fluide en mouvement et des échelles caractéristiques de l'obstacle : épaisseur d'un bord de fuite, dimensions d'une cavité, corde d'un profil.

Sur des géométries complexes, ces interactions sont multiples et leur simulation nécessite la modélisation de toute les échelles en jeu. De tels calculs sont coûteux, voire souvent hors d'atteinte.

Le rapport entre les échelles les plus grandes, de taille L , et les plus petites échelles, de taille η , suit, pour la turbulence homogène isotrope, la loi suivante :

$$\frac{L}{\eta} = O(Re^{3/4})$$

où le nombre de Reynolds, Re , mesure l'importance relative des forces d'inertie et des

forces dissipatives.

On estime ainsi que dans l'espace physique tridimensionnel (à quatre dimensions avec le temps), le nombre de degrés de liberté de la simulation est proportionnel à $(Re^{3/4})^4 = Re^3$

Cette contrainte de simuler l'ensemble des échelles mises en jeu limite donc les simulations aérodynamiques à des nombres de Reynolds raisonnables pour les supercalculateurs : $Re = 10^4$ contre $Re = 10^6$ dans les cas complexes industriels. Pour simuler l'écoulement autour d'un avion complet, Moin et Kim [64] estiment le nombre de degrés de liberté nécessaires à 10^{20} !

Dans les régions sources de l'écoulement, où des ondes acoustiques sont générées, il est pratiquement impossible de séparer la partie acoustique de la partie aérodynamique. Le son se définit comme de faibles variations de pression autour d'un état moyen qui se propagent à de grandes distances à la vitesse c_o . Cette vitesse est définie, en fonction de la pression et de la densité, comme $c_o = \sqrt{(\partial p / \partial \rho)}$ à entropie constante. A de grandes distances de la source et hors du sillage de l'obstacle, les gradients de l'écoulement sont moindres, les fluctuations aérodynamiques sont négligeables et les fluctuations de pression acoustiques peuvent alors être mises en évidence. Dans de telles zones, ces fluctuations sont régies par l'équation des ondes. En revanche, dans les régions sources, les champs de vitesse, de pression et de densité ont des gradients locaux importants et intermittents.

Extraire les sources de bruit d'un calcul aérodynamique pour en déduire le bruit rayonné en champ lointain est le travail de l'aéroacousticien. Les principales théories aéroacoustiques sont nées dans la deuxième moitié du vingtième siècle. Plus récemment, l'essor de l'aéroacoustique numérique (Computational AeroAcoustics, CAA) a permis d'appliquer ces théories à des configurations de complexité croissante.

On peut distinguer plusieurs types de bruit aérodynamique, par exemple le bruit de cavité (un champ moyen cisailé impacte une paroi solide affleurante et libère de l'énergie acoustique), le bruit de jet (la vorticité est entretenue grâce aux importants gradients de l'écoulement moyen). Dans le cas des hypersustentateurs, le mécanisme dominant est le bruit de profil dans lequel la vorticité cr e e   la paroi est diffractée au bord de fuite. Dans ce type d'écoulement externe, les sources de bruit sont localisées près de l'aile. Ces dernières années, la connaissance de ces écoulements a beaucoup progressé grâce   la simulation numérique.

En raison de la grande disparité d'échelles en jeu, les simulations numériques du bruit de profil sont en général hybrides, c'est   dire qu'elles associent plusieurs techniques, chacune affectée   la simulation d'un mécanisme physique particulier. La Figure 1.1 montre un exemple de stratégie de ce type, étudiée   l'ONERA pour effectuer le couplage de l'aérodynamique et de l'aéroacoustique en vue du calcul du bruit de voilure [58]. D'abord, l'écoulement instationnaire turbulent est calculé par simulation des grandes échelles (SGE) afin de décrire les mécanismes aérodynamiques générateurs de bruit. Ensuite, les fluctuations acoustiques sont propagées en écoulement non-uniforme via les équations d'Euler

discrétisées par une méthode d'ordre élevé. L'étude du bruit engendré par une aile à section constante et à bord de fuite tronqué [58] a été une première réalisation de ce couplage.

Cette approche hybride permet de bénéficier des méthodes innovantes mises au point pour la CFD instationnaire. Les travaux de Labourasse [48], basés sur la méthode NLDE (Non-Linear Disturbance Equations, ou équations de Navier-Stokes instationnaires en perturbation), ont permis de simuler la turbulence de façon zonale afin de limiter le coût de calcul de la simulation d'un écoulement turbulent. Cette méthode zonale a permis, entre autres, de caractériser des sources de bruit dans la cavité de bec d'une aile hypersustentée.

Parallèlement, les travaux de Redonnet [71, 70] ont montré la capacité des équations d'Euler en perturbations, discrétisées par la méthode des différences finies d'ordre élevé, à propager les ondes sur des écoulements inhomogènes en présence de parois solides. Cette méthode a permis d'envisager de coupler un calcul aérodynamique avec un calcul acoustique via une phase de stockage des données aérodynamiques [58]. Les méthodes évaluées dans le cadre de ces travaux ont été intégrées dans un logiciel de CFD (Computational Fluid Dynamics) existant comprenant des fonctionnalités multi-domaines, donnant naissance au logiciel *sAbrinA* (Solveur Aéroacoustique de BRuit d'INteractions Aérodynamiques).

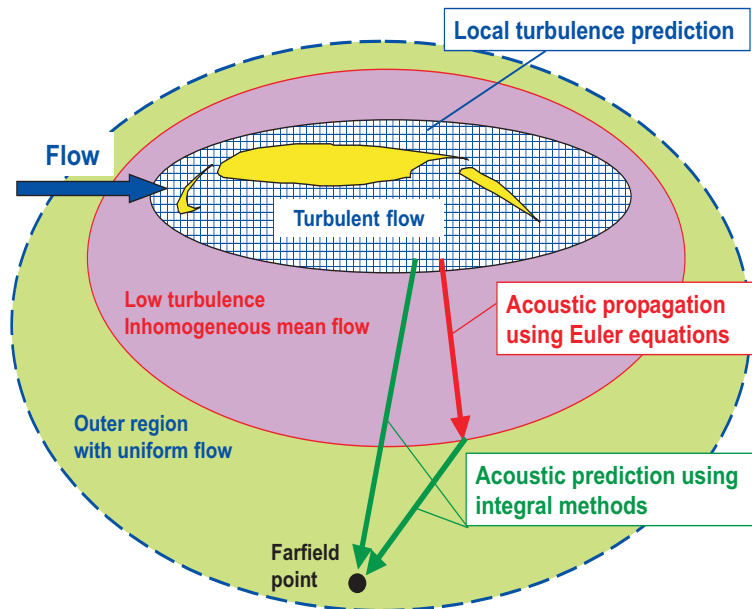


FIG. 1.1: Chaîne de calcul aéroacoustique mise en place à l'ONERA [58]

1.2 Objectifs de la thèse

Le premier objectif de cette thèse est d’approfondir certains aspects théoriques et numériques liés à la simulation de la propagation acoustique en milieu inhomogène par discrétisation des équations d’Euler à l’aide de schémas aux différences finies d’ordre élevé. Il s’agit notamment d’étudier les effets de la méthode numérique et des conditions aux limites sur la stabilité des simulations et sur la précision des résultats.

En effet, le choix d’une discrétisation par la méthode des différences finies centrées d’ordre élevé pour la résolution des équations d’Euler (système d’équations hyperbolique) pose des problèmes de stabilité. Ces schémas numériques permettent la croissance d’ondes parasites qui dénaturent la simulation et rendent les résultats inexploitable. Ces ondes interagissent avec les conditions aux limites et se propagent dans tout le domaine de calcul à des vitesses supersoniques. Une mauvaise stabilisation peut contraindre de façon excessive le pas de temps de calcul et allonger les durées de simulation. Plusieurs techniques existantes de stabilisation ont prouvé leur efficacité : application d’un filtre spatial d’ordre élevé, introduction d’une viscosité artificielle. Il convient donc d’étudier l’équivalence et la performance des différentes méthodes de stabilisation afin d’en tirer le meilleur parti pour la qualité des simulations.

Le deuxième objectif de cette thèse est d’améliorer les techniques de couplage entre un calcul d’écoulement instationnaire local et une propagation acoustique en écoulement non-uniforme dans le cadre d’une méthode hybride CFD/CAA [58]. Afin de résoudre la grande disparité des échelles de temps et d’espace mises en jeu dans les problèmes aéroacoustiques, on se propose de développer une méthode d’interface non-conforme entre domaines afin de transférer l’information large bande du maillage aérodynamique vers le maillage acoustique dans le cas du bruit aérodynamique externe (Fig. 1.1). Cette modélisation répond aux besoins de l’application visée mais n’envisage pas une rétroaction des ondes acoustiques émises sur l’aérodynamique, comme il est possible dans des écoulements internes (moteurs). Cette méthode d’interfaçage nécessite la mise en oeuvre d’une interpolation d’ordre élevé pour être adaptée à la simulation numérique de la propagation. Elle sera implantée dans le logiciel *sAbrinA*. Enfin, elle sera appliquée à des problèmes industriels de bruit d’origine aérodynamique : rayonnement des sources de bruit présentes dans la cavité de bec d’une aile hypersustentée et bruit rayonné par l’écoulement turbulent autour d’une plaque plane à bord de fuite tronqué.

1.3 Organisation du mémoire

Les récents développements de la CAA sont présentés dans le chapitre 2. Ils ont permis de mettre en place des stratégies hybrides, véritables chaînes de calcul aéroacoustiques, pour obtenir le bruit rayonné en champ lointain pour des écoulements turbulents. On rappelle ces méthodes, leurs différentes hypothèses et leur domaine d’application. L’intérêt de

l'introduction d'un nouveau maillon dans la chaîne de calcul, pour traiter la propagation en écoulement inhomogène et de faible turbulence, y est montré. Les schémas aux différences finies centrées d'ordre élevé sont un bon candidat pour résoudre les équations d'Euler dans cette zone.

Les techniques principales mises en oeuvre en aéroacoustique numérique dans le cadre de la discrétisation spatiale par la méthode des différences finies sont rappelées dans le chapitre 3. Les méthodes numériques employées dans le cadre de cette thèse sont précisées, de même que les limites de précision et de stabilité liées à la simulation numérique de la propagation des ondes.

Dans le chapitre 4, on analyse les stabilisations possibles dans le cadre de la résolution par différences finies centrées d'ordre élevé. La similitude entre les différentes approches utilisées dans la communauté CAA est montrée. Une démonstration de stabilité est faite dans le cadre simplifié de l'opérateur d'advection et des équations d'Euler linéarisées. L'interaction entre cette stabilisation et la condition aux limites de sortie est analysée. Des simulations sont effectuées pour vérifier les résultats obtenus sur l'analyse de stabilité effectuée au préalable.

Dans le chapitre 5, une interface non-conforme multi-domaines est développée pour permettre de traiter efficacement des géométries complexes. Cette méthode se base sur une interpolation polynomiale dans un repère cartésien, étudiée pour transmettre au mieux les ondes acoustiques à travers ce type d'interface dans une zone d'écoulement non-homogène faiblement turbulent. Une étude paramétrique de cette interpolation est effectuée sur les degrés de liberté. Une analyse *a priori* en nombre d'onde est menée afin d'orienter ce choix. Des applications de nature aéroacoustique sont présentées afin de valider l'interface.

Le chapitre 6 présente un modèle équivalent de sources de bruit calculées par une simulation CFD dans le cas du bruit de cavité de bec d'une aile hypersustentée. Ce modèle permet d'évaluer l'influence de l'écoulement moyen sur le rayonnement des sources. Un maillage adapté à la propagation acoustique sur cette configuration complexe a été réalisé et les résultats de propagation sont validés en l'absence d'écoulement grâce à la méthode des éléments finis de frontière (BEM).

Enfin, dans le chapitre 7, l'interface non-conforme, mis en oeuvre au chapitre 5, est appliquée à l'étude du bruit rayonné par un écoulement turbulent. Cette interface permet d'adapter les échelles aéroacoustiques et aérodynamiques en jeu dans le cadre d'un couplage Navier-Stokes/Euler. D'une part, le couplage est étudié en faisant varier la position de l'interface et la résolution de la zone de propagation. D'autre part, les résultats de rayonnement direct sont comparés avec ceux du modèle équivalent de sources de bruit du chapitre précédent. L'enjeu est de définir un moyen optimal de lier le calcul CAA au calcul CFD préalable afin de rendre compte à faible coût de la génération et du rayonnement du bruit de turbulence.

Chapitre 2

Généralités sur le bruit aérodynamique et sa simulation

Les sources de bruit d'un écoulement turbulent subsonique externe autour d'une surface portante ont fait l'objet de nombreuses études expérimentales [13, 10, 19], théoriques [33, 54, 40] et numériques [65, 72, 48, 86, 68]. Elles correspondent localement à une production d'énergie dont les origines sont des mécanismes aérodynamiques. Les techniques de modélisation de ces mécanismes de génération du bruit ont considérablement évolué ces dernières années, de même que les techniques d'extraction et de propagation des fluctuations acoustiques permettant d'en déduire le bruit rayonné.

2.1 Description physique de quelques mécanismes générateurs de bruit aérodynamique

La Figure 2.1 illustre les différents mécanismes aéroacoustiques susceptibles de contribuer au bruit aérodynamique d'un profil placé dans un écoulement turbulent.

Sur les voilures tridimensionnelles réelles, des tourbillons d'extrémité latérale d'aile se forment et peuvent ainsi donner lieu à des rayonnements acoustiques.

Dans les régions bidimensionnelles des voilures (section constante), les trois mécanismes de bruit suivants peuvent être observés : le bruit de turbulence amont, le bruit de la couche limite turbulente et le bruit de bord de fuite.

Le bruit de turbulence amont est généré par des fluctuations de portance du profil, liées aux variations de la composante de la vitesse normale à la paroi du profil. La couche limite se développe le long de la corde du profil sans engendrer de bruit notable. Lors de leur passage au bord de fuite, l'équilibre interne des structures turbulentes est modifié, avec pour conséquence la création d'ondes acoustiques à large bande : c'est le bruit de bord de fuite. Au bruit large bande de bord de fuite vient s'ajouter une composante à bande étroite lorsque le bord de fuite est tronqué. Des structures tourbillonnaires alternées se

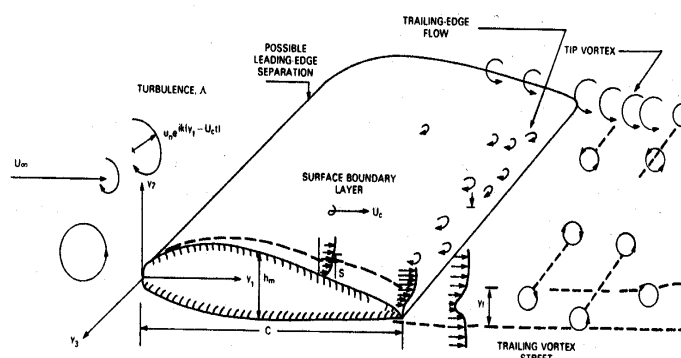


FIG. 2.1: Illustration des sources de bruit aérodynamique d'une surface portante [10].

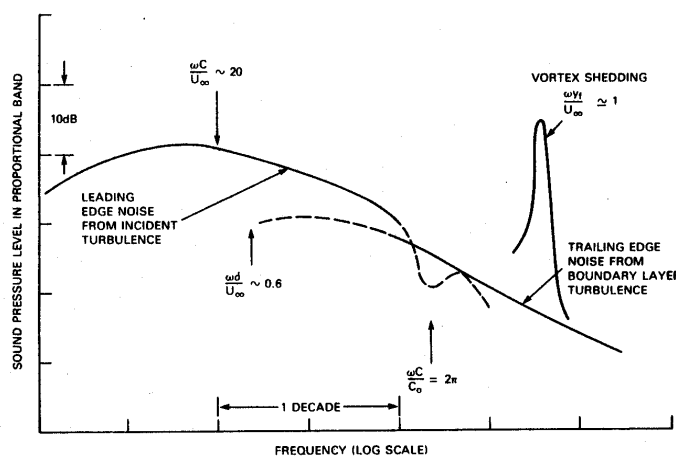


FIG. 2.2: Illustration des contributions des sources de bruit d'une surface portante placée dans un écoulement subsonique turbulent [10].

forment périodiquement au bord de fuite et interagissent avec celui-ci. La contribution de ce phénomène dépend largement de la géométrie du bord de fuite. Elle correspond à un pic de fréquence sur le spectre, comme on peut le voir sur la Figure 2.2. Le bruit de bord de fuite peut alors émerger du bruit ambiant de plus de 20 dB.

Ce type de bruit est analogue à celui, bien connu, du bruit éolien généré par le vent sur un câble (drisse d'un bateau, câble d'un pont). L'écoulement qui se produit autour d'un cylindre à la vitesse subsonique U_0 est largement déterminé par le nombre de Reynolds $Re = \frac{\rho_0 U_0 D}{\mu}$ basé sur le diamètre du cylindre D . A des nombres de Reynolds compris entre environ 100 et 1000, un lâcher périodique de tourbillons se produit, formant les allées de Von Karman, et exerce une fluctuation de force périodique sur l'obstacle, à l'origine du bruit.

2.1. Description physique de quelques mécanismes générateurs de bruit aérodynamique

La fréquence de la variation de la force est égale à la fréquence du détachement tourbillonnaire :

$$f = \frac{StU_o}{D} \quad (2.1)$$

où le nombre de Strouhal St dépend du nombre de Reynolds, mais reste proche de 0,2. Le bruit émis a ainsi une longueur d'onde très supérieure au diamètre du cylindre : $\frac{\lambda}{D} = \frac{c}{D \cdot f} = \frac{1}{St \cdot M} \approx 50$, par exemple à Mach 0,1. Il en résulte une longueur d'onde émise très supérieure à la taille de l'obstacle et une disparité d'échelle très forte entre aérodynamique et acoustique.

Pour un avion en phase d'approche, en conditions réelles de vol ($M \approx 0.3$ et $Re > 10^6$), le champ de vitesse autour de l'aile est tridimensionnel et turbulent. Les structures cohérentes qui entrent en jeu sont tridimensionnelles. Elles se mêlent à la turbulence fine pour générer un bruit large bande. Lorsque le bord de fuite du profil est tronqué, il se produit un échappement tourbillonnaire si la couche limite est suffisamment fine par rapport à la taille de la troncature [10]. Le nombre de Strouhal est alors obtenu (Eq. 2.1), en prenant pour dimension caractéristique la somme de la taille du bord de fuite, δ_c , et des épaisseurs de déplacement sur l'intrados, δ_i , et l'extrados, δ_e , et non plus la taille de l'objet : $\delta_c + \delta_i + \delta_e$. Il en résulte une composante fréquentielle principale basse fréquence, rapportée aux échelles fines de la turbulence, de longueur d'onde du même ordre que la taille de l'objet. Cet écoulement constitue donc un cas test intéressant pour l'expérimentation et la simulation.

Une fois formées, les structures cohérentes peuvent interagir entre elles pour former des structures cohérentes de taille plus importante. Le transfert d'énergie qui se produit lors de cette interaction conduit à une libération d'énergie sous forme acoustique. Bogey [11] a étudié la simulation numérique de l'appariement de tourbillons qui se produit dans une couche de mélange pour différentes excitations. Un champ de vitesse axial cisailé provoque la génération de tourbillons bidimensionnels qui s'apparient ensuite, aléatoirement ou périodiquement suivant l'excitation. De tels appariements se produisent de façon aléatoire dans les sillages tridimensionnels.

La convection d'un tourbillon par un écoulement uniforme ne génère pas de bruit. En revanche, si celui-ci rencontre un obstacle, il va être diffracté et une partie de son énergie hydrodynamique va être transformée en ondes acoustiques. Ce mécanisme se produit dans le cas d'obstacles complexes, ou lors de l'interaction entre plusieurs obstacles : bruit de cavité [49], interaction rotor/stator [69], aile hypersustentée [48] (interaction bec/profil) ou interaction pale/tourbillon dans le bruit d'hélicoptère par exemple [12]. Ce type de mécanisme de bruit peut être simulé à l'aide des équations d'Euler, puisqu'elles permettent de prendre en compte la convection de tourbillons comme la propagation des ondes acoustiques.

2.2 Simulation numérique d'un écoulement turbulent

Puisque le bruit est généré par les fluctuations aérodynamiques dans les régions de forte vortacité, la simulation des équations de Navier-Stokes compressibles est susceptible de simuler la génération de ce bruit ainsi que le bruit rayonné en champ lointain. C'est le modèle le plus général.

2.2.1 Rappel des équations de Navier-Stokes

L'application de la loi de Newton et les hypothèses de la mécanique des milieux continus pour un fluide newtonien conduisent aux équations de Navier-Stokes.

On se place dans le cas d'un fluide visqueux et compressible. Les forces extérieures, y compris la gravité, sont négligées. La conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie totale, permettent d'obtenir le système d'équations suivant (en utilisant la convention des indices répétés) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = 0 \\ \frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial j} (\rho u_i u_j + p \delta_{ij} - 2\mu(T) S_{ij}^d) = 0 \\ \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} ((E + p)u_i - (2\mu(T) S_{ij}^d u_j + q_i)) = 0 \end{array} \right. \quad (2.2)$$

où :

$$S_{ij}^d = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{1}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \quad (2.3)$$

est la partie déviatorique du tenseur des vitesses de déformation, ρ est la densité, $u = (u_1, u_2, u_3)$ le champ de vitesse et E l'énergie totale du fluide :

$$E = \rho e + \frac{1}{2} \rho u_i u_i \quad (2.4)$$

Ici e représente l'énergie interne du fluide :

$$\rho e = \frac{p}{\gamma - 1} \quad (2.5)$$

et γ est le rapport des capacités calorifiques à volume constant et à pression constante :

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} \quad (2.6)$$

Le flux de chaleur q_j est défini par :

$$q_j = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x_j} \quad (2.7)$$

où T est la température (en degrés Kelvins K) et κ la conductivité thermique.

L'équation d'état du fluide permet de fermer ce système d'équations. On assimile le comportement des fluides newtoniens à celui de gaz parfaits, ce qui permet d'écrire :

$$p = \frac{\rho RT}{M} \quad (2.8)$$

où R est la constante des gaz parfaits ($R = 8,3145 \text{ J.mol}^{-1}.K^{-1}$) et M la masse molaire du fluide. Cette loi peut aussi s'écrire :

$$e = C_v T \quad (2.9)$$

La viscosité dynamique μ varie en fonction de la température suivant la loi de Sutherland :

$$\mu(T) = \mu_0 \sqrt{\frac{T}{T_0} \frac{1 + \frac{C}{T_0}}{1 + \frac{C}{T}}} \quad (2.10)$$

où $T_0 = 273 \text{ K}$ est la température absolue, et C et μ_0 des constantes qui dépendent du fluide. Enfin, la constante κ s'exprime en fonction de la viscosité par :

$$\kappa = \frac{\mu C_p}{Pr} \quad (2.11)$$

où Pr est le nombre de Prandtl.

Ces équations, une fois discrétisées sur un maillage adapté, permettent d'effectuer la simulation numérique de l'écoulement turbulent local et donc de décrire toute la dynamique instationnaire qui s'y produit. Elles permettent aussi de décrire la propagation des ondes acoustiques pourvu que le maillage soit adapté au problème.

2.2.2 De la simulation numérique directe à la simulation des grandes échelles

L'étude du bruit directement obtenu par simulation numérique directe (SND) des équations de Navier-Stokes a permis de mieux comprendre de nombreux phénomènes liés à la

génération du bruit.

Il a fallu attendre les années 90 et les capacités croissantes des supercalculateurs pour que la simulation numérique permette de calculer un champ acoustique d'origine aérodynamique [63, 27].

Cependant, sur des configurations complexes et à des nombres de Reynolds élevés, il est encore impossible d'obtenir simultanément le champ aérodynamique local et le bruit rayonné en champ lointain. A de hauts nombres de Reynolds, la simulation numérique directe permet à peine d'avoir une idée du bruit en champ proche. L'effort en terme de nombre de points est si important près des parois de l'obstacle qu'il faut ensuite rapidement réduire cet effort en s'écartant de la surface afin de garder un nombre total de points de calcul acceptable et également réduire l'influence des conditions aux limites appliquées sur les frontières extérieures du domaine de calcul. Environ 90% de l'effort en terme de temps de calcul est dédié aux zones proches de la paroi et seulement 10% au champ lointain.

La simulation des grandes échelles (SGE) a permis, de ce point de vue, de réduire considérablement le nombre de points de calcul nécessaires pour simuler correctement l'écoulement instationnaire autour de profils complexes. La dynamique de sous-maille y est prise en compte grâce à un modèle orienté suivant la phénoménologie de l'écoulement. Le développement et les progrès de la SGE [72] ont donné un nouvel élan à la simulation des sources de bruit aérodynamique. La SGE fait intervenir :

- (i) une opération de filtrage sur les équations de Navier-Stokes afin de diminuer le nombre de degrés de liberté,
- (ii) un modèle pour prendre en compte la gamme d'échelles qui n'est plus représentée du fait de ce filtrage.

Pour une description détaillée de la SGE, le lecteur pourra se reporter à l'ouvrage de Sagaut [72]. Les travaux de Seror *et al.* [74] ont permis d'évaluer l'influence du modèle de sous-maille sur le bruit de jet et de conclure quant à la faible contribution au champ acoustique de la turbulence fine. Cependant, une simulation des grandes échelles adaptée au champ acoustique est encore hors de portée pour les configurations tridimensionnelles complexes.

L'introduction de la NLDE (Non Linear Disturbance Equations) par Morris [65] a permis d'apporter une précision supplémentaire en effectuant le calcul sur la partie fluctuante du champ seulement, ce qui affine le calcul des sources aéroacoustiques. Sagaut *et al.* [73] ont proposé un couplage RANS (Reynolds Average Navier-Stokes)/NLDE, afin de réduire le coût de calcul en prenant en compte les spécificités locales de l'écoulement. Cette technique permet une résolution zonale de la dynamique instationnaire. Grâce à cette méthode, les sources aéroacoustiques de l'écoulement dans la cavité du bec d'une aile hypersustentée ont pu être identifiées par Labourasse [48].

Les simulations des grandes échelles qui ont servi aux calculs aéroacoustiques figurant dans le présent travail de thèse, ont été effectuées par des spécialistes de cette modélisation à l'ONERA.

2.2.3 Aérodynamique/acoustique

Pour effectuer un calcul qui permette d'obtenir simultanément les champs aérodynamique et acoustique, il faut résoudre les problèmes contradictoires suivants :

- la disparité des ordres de grandeur des échelles de temps et d'espace,
- la stratégie de maillage,
- les schémas numériques,
- les conditions aux limites,
- la complexité : aérodynamique non-linéaire/acoustique linéaire.

Disparité des échelles La différence entre les ordres de grandeurs des échelles de temps et d'espace en jeu est importante. Dans le cas du bruit rayonné par une aile hypersustentée, la taille de maille à la paroi nécessaire pour décrire la dynamique d'un écoulement à $Re = 10^6$ est de l'ordre du micron alors que la gamme de fréquences audibles [20 Hz ; 20 kHz] ne nécessite qu'une résolution de l'ordre du millimètre pour garder une résolution acoustique minimale de dix points par longueur d'onde. Par exemple, pour la fréquence de 20 kHz, la longueur d'onde acoustique associée est de 1,7 cm et nécessite donc une taille de maille de 1,7 mm. Cette disparité d'échelles spatiales se retrouve dans le domaine temporel : la période caractéristique des plus petites échelles aérodynamiques est beaucoup plus petite que la plus courte période des ondes acoustiques audibles. Construire un maillage adapté aux prévisions aérodynamique et acoustique est donc très difficile.

Stratégie de maillage La simulation aérodynamique se focalise sur les régions de forte vorticité qui représentent 90% du c ut de calcul. Il faut donc établir une stratégie spécifique pour le maillage. En dehors des zones de cisaillement, et particulièrement dans le cas de l'aérodynamique externe, le maillage est relaché de façon croissante jusqu'aux frontières du domaine de calcul. Cette répartition des mailles permet, d'une part, d'alléger le c ut de calcul global, et, d'autre part, de ne plus représenter toutes les échelles en jeu, notamment dans le sillage où il est préférable de dissiper l'énergie avant qu'elle ne rencontre la frontière aval du domaine de calcul. Au contraire, pour obtenir le bruit rayonné en champ proche, le maillage doit être le plus homogène possible afin de propager correctement la plus haute fréquence acoustique audible présente dans l'écoulement.

Méthodes numériques Les méthodes numériques utilisées pour simuler la dynamique de l'écoulement ne conviennent pas à la propagation acoustique qui nécessite l'emploi d'une méthode numérique de précision accrue. Lors du calcul aérodynamique, l'étirement des mailles en aval permet de dissiper l'énergie aérodynamique basse fréquence et notamment l'énergie des structures cohérentes de l'écoulement dans la direction aval avant d'atteindre la frontière aval du domaine de calcul afin de ne pas générer de rayonnement parasite. Il est plus difficile d'éviter ce rayonnement parasite avec un schéma aux différences finies (DF) d'ordre élevé. Or, lors de calculs de bruit aérodynamique, les fluctuations acoustiques peuvent être très faibles (quelques Pascals) devant les fluctuations aérodynamiques (plusieurs centaines ou milliers de Pascals). Par conséquent, les erreurs sur la partie aérodynamique se répercutent sur le champ acoustique. La discrétisation des équations de Navier-Stokes avec la méthode des différences finies centrées d'ordre élevé plutôt qu'avec une méthode de volumes finis (VF) d'ordre deux a été étudiée par différents auteurs [62, 11]. Meinke *et al.* [62] ont montré qu'il n'y avait pas d'avantage à cette discrétisation d'ordre élevé, à cause de l'étape de stabilisation nécessaire, qui a une influence non négligeable sur les termes de sous-maille. Cela ne permet pas d'utiliser un maillage plus grossier et, en plus, une augmentation du coût de calcul de l'ordre de 150 % a été observée pour obtenir des résultats semblables à ceux d'une méthode classique. Ceci est dû au fait que l'étape de stabilisation revient à négliger les petites échelles, et il faut donc aller chercher une taille de maille plus petite pour représenter l'action de la même gamme d'échelles.

Conditions aux limites Parmi les spécificités numériques liées à la simulation de la propagation des ondes, le problème des conditions aux limites est très important. En effet, la simulation de la propagation acoustique en champ libre suppose la libre sortie des ondes du domaine de calcul. Cela implique de minimiser la réflexion de l'énergie de ces ondes aux frontières du domaine de calcul. La simulation de la propagation des ondes a conduit les aéroacousticiens à mettre au point des techniques spécifiques : conditions basées sur les caractéristiques [88, 31], conditions de rayonnement [82], Perfectly Matched Layer (PML) [41], couche absorbante [11]. Les simulations aérodynamiques instationnaires récentes à finalité acoustique commencent à prendre en compte cette spécificité [27, 11].

Complexité des phénomènes Hors des zones de forte vorticit   pr  s des parois et des zones de forte turbulence, la fluctuation instationnaire est de nature acoustique. Il est possible alors d'utiliser le mod  le des   quations d'Euler, d  duit des   quations de Navier-Stokes et   ventuellement lin  aris  , afin de simuler la propagation des ondes dans un milieu non homog  ne faiblement turbulent. Ce mod  le permet une r  duction de temps de calcul dans cette zone de 30% (temps de calcul du flux visqueux). Enfin, en s'  cartant encore un peu de l'obstacle, quand l'  coulement n'est plus influenc   par la pr  sence de l'obstacle (  coulement homog  ne), on peut, soit r  soudre l'  quation des ondes en   coulement homog  ne, soit utiliser un mod  le d'extrapolation du champ acoustique par une m  thode de Kirchhoff.

Pour toutes ces raisons, la résolution du problème complet se fait généralement en deux temps. Dans un premier temps, on effectue la simulation des équations de Navier-Stokes permettant la description des mécanismes de génération du bruit. Les résultats obtenus sont alors transmis au solveur CAA dans un deuxième temps : il s'agit d'une méthode hybride CFD/CAA.

2.3 Méthodes hybrides à deux étapes

On rappelle brièvement dans cette partie l'évolution des méthodes hybrides pour l'aéroacoustique au cours de ces dernières décennies. Chaque modélisation nécessite de faire des hypothèses spécifiques et a montré ses avantages et inconvénients pour des applications différentes. Pour une énumération plus exhaustive, le lecteur pourra trouver des précisions dans les références suivantes [11, 32].

2.3.1 Analogie de Lighthill

En 1952, Lighthill [54] a proposé une analogie acoustique permettant une évaluation quantitative du champ acoustique rayonné par des régions turbulentes dans un écoulement inhomogène de jet. En recombinaison les équations de Navier-Stokes, il a isolé à gauche l'opérateur de propagation des ondes, et reporté à droite tous les autres termes alors considérés comme représentatifs de l'influence acoustique des fluctuations aérodynamiques :

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - c_0^2 \Delta \rho' = \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} \quad (2.12)$$

où ρ' est la fluctuation de densité, $T_{ij} = \rho u_i u_j + \delta_{ij} [(p - p_0) - c_0^2 (\rho - \rho_0)] - e_{ij}$ le tenseur des contraintes turbulentes de Lighthill, et e_{ij} la partie déviatorique du tenseur des contraintes pour un fluide newtonien.

Cette équation est exacte car elle ne suppose aucune hypothèse sur le champ aérodynamique. Elle exprime le fait que le bruit rayonné par un volume de sources jusqu'à un observateur est "analogue" au bruit rayonné par une source d'amplitude $\frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_i \partial x_j}$ à travers un milieu au repos, d'où le concept d'analogie acoustique. De ce point de vue, la connaissance de la distribution du terme source (la double divergence du tenseur de Lighthill), permet d'obtenir le champ acoustique correspondant par une simple intégration volumique de l'équation 2.12.

Dans le cas d'écoulements fortement turbulents, on fait l'hypothèse que le terme $\rho u_i u_j$ du tenseur de Lighthill est prépondérant. Lors de la résolution de cette équation par une méthode intégrale, des hypothèses simplificatrices sont adoptées afin de limiter le volume de données nécessaires. Une connaissance plus précise de la variation du terme source garantit

donc un résultat plus précis sur le champ acoustique. Les moyens croissants des supercalculateurs ont permis ces dernières années d'appliquer cette méthode avec succès dans des écoulements sans paroi, notamment dans le cadre d'études du bruit de jet [27, 11, 5].

2.3.2 Extension de l'analogie

Pour prendre en compte la présence de paroi solides qui vont réfléchir et diffracter les ondes sonores, l'analyse de Lighthill a été étendue par plusieurs auteurs et en particulier par Ffowcs-Williams et Hawkings (FWH) [25].

Grâce au théorème de Stokes, l'intégrale volumique sur un volume quelconque peut être remplacé par une intégrale de surface. Lorsque cette surface est une paroi solide, l'intégrand est constitué des fluctuations de force sur cette paroi.

L'inhomogénéité de l'écoulement dans la région source et notamment les gradients de vitesse du champ moyen peuvent cependant influencer le processus d'émission sonore. Phillips (1960) [67] et Lilley (1972) [55] ont défini un nouveau terme source obtenu en retranchant à celui de Lighthill la partie convective et en l'incluant dans l'opérateur de propagation. Cela permet de simuler les effets de convection et de réfraction des ondes dus à l'écoulement. L'opérateur de propagation est non-linéaire, cependant son utilisation est restreinte à des écoulements bidimensionnels uniformes ou unidirectionnellement cisailés (opérateur scalaire).

Bailly *et al.* [3, 11] ont proposé d'utiliser l'opérateur de propagation plus général que constituent les équations d'Euler linéarisées. En effet, il peut être intéressant d'utiliser un opérateur linéaire, la non-linéarité de l'écoulement étant majoritairement due aux fluctuations aérodynamiques dans la région source. Toutes les interactions entre le champ aérodynamique moyen et le champ acoustique sont prises en compte dans l'opérateur de propagation. La méthode a été appliquée à plusieurs études de bruit aérodynamique, dont le bruit de jet subsonique.

La méthode de Kirchhoff [44] (1883) permet de calculer le champ acoustique en champ lointain à partir de la connaissance de ce dernier sur une surface de contrôle qui entoure la région source, à condition que le champ sur et à l'extérieur de cette surface vérifie l'équation des ondes en écoulement nul ou uniforme. Cette méthode est aujourd'hui très répandue dans la communauté aéroacoustique [58, 32, 5] pour obtenir le bruit en champ lointain, quand on connaît le champ aérodynamique instationnaire sur une surface de contrôle englobant les sources.

2.4 Méthode hybride à trois étapes

2.4.1 Nécessité de l'introduction d'un maillon Euler

On vient de voir qu'une méthode hybride à deux étapes permet, d'une part, d'effectuer un calcul SGE simulant la génération du bruit, et, d'autre part, d'extrapoler le champ acoustique au-delà d'une surface de contrôle, par exemple par une intégration de Kirchhoff, pour obtenir le bruit rayonné en champ lointain.

L'application conjointe de ces deux méthodes nécessite de résoudre le problème du choix de la surface de contrôle. Il faut (i) se placer dans une zone d'écoulement uniforme et (ii) s'assurer que l'acoustique y soit bien résolue, malgré l'étirement des mailles du maillage SGE et compte tenu du schéma numérique utilisé.

Pour des configurations complexes et en l'état actuel des moyens de calcul, la résolution correcte des ondes acoustiques par un calcul SGE dans toute la gamme des fréquences souhaitées jusqu'à une zone d'écoulement uniforme reste hors de portée.

Manoha *et al.* [60] ont proposé d'introduire un maillon supplémentaire dans la méthode hybride. Dans un premier temps, les fluctuations obtenues lors du calcul SGE sont stockées dans une zone entourant l'obstacle où :

- l'énergie des fluctuations aérodynamiques et la vorticité sont faibles,
- la partie acoustique est encore bien résolue,
- l'écoulement moyen est encore inhomogène.

Dans un deuxième temps, les fluctuations sont injectées dans un maillage adapté à l'acoustique sur lequel sont résolues les équations d'Euler avec un schéma numérique d'ordre élevé (méthode des différences finies). La propagation de ces ondes acoustiques sur un champ moyen stationnaire est effectuée jusqu'à une zone d'écoulement uniforme.

Le champ acoustique est ensuite extrapolé en champ lointain par la méthode de Kirchhoff. La chaîne de calcul SGE/Euler/Kirchhoff ainsi formée prend donc en compte la spécificité de chaque région de l'écoulement et permet de prédire le bruit rayonné en champ lointain. Cette méthode a été appliquée à la prévision numérique du bruit rayonné par un profil NACA0012, dont le bord de fuite est tronqué, à 5 degrés d'incidence ($Re = 10^6$) [58].

La présente thèse vise à améliorer les techniques permettant d'introduire, dans une chaîne de calcul aéroacoustique basée sur la SGE une telle méthode numérique de simulation de la propagation des ondes acoustiques avec les équations d'Euler.

2.4.2 Couplage direct "one-way" des équations de Navier-Stokes 3D et d'Euler 2D

Ce type de couplage a été proposé la première fois par Freund *et al.* [26] pour la simulation numérique d'un jet supersonique. Le champ lointain y est obtenu en couplant les équations de Navier-Stokes tridimensionnelles avec un modèle bidimensionnel de propagation des ondes : équation des ondes ou équations d'Euler linéarisées.

Shih *et al.* [77] proposent une comparaison du champ lointain obtenu pour un jet supersonique avec différentes méthodes : méthode de Kirchhoff, analogie de Lighthill, couplage Navier-Stokes/Euler linéarisées. Pour ce couplage, les maillages à l'interface des différents domaines de calcul sont coïncidents. A chaque pas de temps dans la zone de recouvrement entre les grilles des deux domaines, les valeurs des variables des points de chacun des deux domaines sont échangées. Aucune réflexion particulière, due à la présence de l'interface, n'entache la simulation.

Dans leur étude sur le bruit de profil à bord de fuite tronqué, Manoha *et al.* [58] se placent aussi dans le cadre d'un couplage aérodynamique 3D/acoustique 2D. Les résultats aérodynamiques montrent un champ de pression tridimensionnel (i) décorrélé en envergure en champ proche et, (ii) corrélé en envergure en champ lointain. La longueur du domaine de calcul suivant l'envergure est faible devant la longueur d'onde des ondes acoustiques émises et les conditions aux limites dans la direction de l'envergure sont périodiques. Les ondes acoustiques émises y ont donc une nature bidimensionnelle. Le couplage est à un sens ("one-way coupling"). Le résultat dans le domaine Navier-Stokes sert à alimenter, par une frontière, le domaine où l'on résout les équations d'Euler linéarisées. Cette partie du calcul représente un temps de calcul de l'ordre de 1% par rapport au calcul Navier-Stokes complet. Le pas de temps de calcul dans le domaine de propagation y est similaire. En revanche, la taille de maille minimale est beaucoup plus importante sur la grille acoustique et le maillage y est uniforme.

Le problème de la nature de la fluctuation à l'interface Navier-Stokes/Euler se pose pour cette méthode. La transmission des seules ondes acoustiques nécessiterait de partitionner la fluctuation en une partie acoustique et une partie aérodynamique, contenant la vorticité. Une telle décomposition est difficile   obtenir. Théoriquement, la décomposition de Helmholtz doit permettre, pour des écoulements incompressibles, de séparer la partie   rotationnel nul de la partie   divergence nulle. Ewert *et al.* [23] proposent de se baser sur cette décomposition pour dériver un système d'équations pour la partie acoustique, supposée   rotationnel nul. Le reste de la fluctuation est modélisée comme une source de vorticité   divergence nulle. En écoulement compressible, cette séparation n'est plus possible et une solution consiste donc   placer l'interface de couplage dans une zone où la vorticité est faible.

2.4.3 Interface de couplage Navier-Stokes/Euler

Dans l'étude menée par Manoha *et al.* [58], la position de l'interface de couplage Navier-Stokes/Euler est choisie hors du sillage et de la couche limite du profil. Dans ces zones, le champ de vitesse est fortement cisailé et l'énergie turbulente y est forte. Ce cisaillement et cette énergie ne sont pas du tout pris en compte dans le modèle des équations d'Euler et on peut alors les voir comme un terme source pour ces équations et l'origine d'un rayonnement acoustique parasite. La résolution des équations de Navier-Stokes seules n'aurait pas fait apparaître de source acoustique. Il n'est donc pas possible de coupler les équations de Navier-Stokes et d'Euler dans ces zones de fort cisaillement. Il faut se placer dans une zone extérieure de faible turbulence où les fluctuations aérodynamiques sont faibles. La position de l'interface de couplage va donc être dépendante de l'écoulement, ce qui est aussi le cas lors du couplage avec la méthode de Kirchhoff. Son emploi nécessite de choisir autour de l'obstacle une surface fermée qui n'est pas traversée par des fluctuations aérodynamiques.

La disparité des échelles en présence et la stratégie à appliquer dans les deux zones conditionnent le choix du type d'interface. La non-conformité du maillage à l'interface est nécessaire : le maillage acoustique doit (i) être homogène et (ii) récupérer la taille de maille de la bordure de la zone aérodynamique adjacente. Le choix d'une modélisation par la méthode des volumes finis (VF) pour le calcul CFD et par la méthode des différences finies (DF) pour la zone acoustique, peut mener à l'emploi de méthodes temporelles différentes (exemple : implicite (VF) et explicite (DF)), et provoquer de fortes contraintes en terme de taille de maille. Ce point sera développé dans le chapitre 7, où cette méthode sera mise en oeuvre.

2.5 Conclusion

Ce chapitre montre, tout d'abord, que le choix d'une stratégie spécifique pour l'aérodynamique, d'une part, et pour l'acoustique d'autre part, est incontournable. Les différences entre les méthodes numériques, les phénomènes physiques et les stratégies de maillage sont importantes.

Cela conduit à simuler les mécanismes aéroacoustiques par des méthodes hybrides CFD/CAA, dans lesquelles le champ aérodynamique instationnaire local, simulé par les équations de Navier-Stokes, est couplé à une zone dans laquelle les équations d'Euler, résolues à l'ordre élevé, permettent de simuler la propagation acoustique en écoulement non-uniforme. Le problème de la nature des fluctuations du champ aérodynamique à l'interface de couplage entre les équations de Navier-Stokes et d'Euler se pose, et le choix de la position de l'interface s'avère crucial.

Maintenant, il est nécessaire de rappeler les méthodes numériques généralement utilisées pour résoudre la propagation acoustique en milieu inhomogène à l'aide des équations

d'Euler discrétisées par différences finies, ce qui est fait au chapitre suivant. La méthode numérique employée dans ce travail y est présentée : schéma d'ordre élevé en espace et en temps, conditions aux limites spécifiques, méthode de stabilisation.

Chapitre 3

Simulation de la propagation acoustique par les équations d'Euler

L'aéroacoustique numérique a connu un essor important dans les années 90, adaptant les méthodes numériques de la mécanique des fluides numériques aux spécificités de l'aéroacoustique [53, 81]. Elle a pour but de décrire (i) la génération des ondes acoustiques par les écoulements turbulents et (ii) leur propagation dans les écoulements stationnaires inhomogènes. La formulation conservative des équations d'Euler en perturbations est particulièrement adaptée à la deuxième étape (ii). Dans ce chapitre, les caractéristiques principales de la discrétisation des équations d'Euler par la méthode des différences finies sont rappelées : maillage structuré, choix de l'ordre des schémas, conditions aux limites spécifiques.

3.1 Equations d'Euler en perturbations

On considère la séparation suivante du champ aérodynamique en une partie stationnaire et une partie fluctuante :

$$U = U_o + U_p \quad (3.1)$$

Le choix de cette séparation des variables se justifie par la nature même de l'acoustique qui concerne les fluctuations de pression autour d'un état moyen. Il permet de porter son attention exclusivement sur la fluctuation U_p , dans le cas courant où le champ moyen U_o est connu, soit par un calcul de l'écoulement moyen visqueux (modèle RANS), ou non visqueux (modèle Euler), soit par un calcul analytique (écoulements potentiel, uniforme).

Les parties stationnaire et fluctuante U_o et U_p s'écrivent :

$$U_p = \begin{pmatrix} \rho \\ (\rho u)_p \\ (\rho v)_p \\ (\rho w)_p \\ (\rho E)_p \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad U_o = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho_o u_o \\ \rho_o v_o \\ \rho_o w_o \\ \rho_o E_o \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

où ρ désigne la masse volumique, u, v et w les composantes de la vitesse et E l'énergie totale. Pour un gaz parfait, on peut écrire $\rho E = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2}\rho(u^2 + v^2 + w^2)$, où γ est le rapport des chaleurs spécifiques et p la pression.

Le vecteur des inconnues est sous forme conservative, comme c'est souvent l'usage en CFD. On trouve aussi des formulations non conservatives dans la littérature [3, 11, 80]. Celles-ci ont l'avantage de calculer directement la pression, la grandeur acoustique la plus représentative. Aucune étude n'a jusqu'ici permis de montrer la supériorité d'une approche par rapport à l'autre.

La variable perturbée s'écrit donc $(\rho u)_p$ et s'explique de la façon suivante : $(\rho u)_p = \rho u - \rho_o u_o = (\rho_o + \rho_p) \cdot (u_o + u_p) - \rho_o u_o = \rho_o u_p + \rho_p u_o + \rho_p u_p$.

Dans le cas particulier où l'écoulement moyen stationnaire vérifie les équations d'Euler, on a :

$$\frac{\partial U_o}{\partial t} + \nabla \cdot F(U_o) = 0 \quad (3.3)$$

avec $F(U)$ le vecteur de flux conservatif

$$F(U) = \begin{pmatrix} \rho u^T \\ \rho u \otimes u + p Id \\ (\rho E + p) u^T \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

En supposant que le champ moyen vérifie les équations d'Euler, écrire que le champ total vérifie les équations d'Euler instationnaires revient à écrire pour la perturbation :

$$\frac{\partial U_p}{\partial t} + \nabla \cdot (F(U_o + U_p) - F(U_o)) = 0 \quad (3.5)$$

Pour simuler la présence de sources acoustiques, on pourra placer un terme source volumique S , à droite dans cette équation.

Si l'on veut étudier la propagation d'ondes sonores sur un écoulement moyen visqueux, il faut introduire un terme de correction à droite dans l'équation 3.5. C'est le cas si le champ moyen provient d'un calcul RANS stationnaire ou d'un calcul instationnaire (SND, SGE) moyenné en temps. On a alors :

$$\frac{\partial U_o}{\partial t} + \nabla \cdot F(U_o) = \nabla \cdot F_v(U_o) \quad (3.6)$$

en notant F_v le flux visqueux.

$$F(U) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\mu S \\ 2\mu S \cdot U_o + q \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

où S et q sont respectivement la partie déviatorique du tenseur des vitesses de déformation et le flux de chaleur (Chapitre 2).

En faisant l'hypothèse que le champ total vérifie les équations d'Euler, il vient :

$$\frac{\partial U_p}{\partial t} + \nabla \cdot (F(U_o + U_p) - F(U_o)) = -F_v(U_o) \quad (3.8)$$

En pratique, il est même possible, via ce terme, d'utiliser un champ U_o instationnaire, par exemple dans le cas d'un champ aérodynamique dont les caractéristiques moyennes fluctuent au cours du temps (par exemple, choc oscillant au voisinage d'un profil d'aile). Dans le cadre de ce travail, on se limite à des champs moyens U_o stationnaires.

L'hypothèse de faibles fluctuations autour d'un état moyen constitue un cas particulier du système précédent d'équations. On peut alors négliger le terme non-linéaire dans le flux et considérer le vecteur des inconnues linéarisées :

$$(\rho u)_p = \rho_o u_p + \rho_p u_o + \rho_p u_p \approx \rho_o u_p + \rho_p u_o \quad (3.9)$$

Dans les cas de bruit d'origine aérodynamique en régime subsonique, cette approximation sur les ordres de grandeur des quantités fluctuante et moyenne est souvent valable. Dans ce cas, l'opérateur de propagation linéaire suffit pour décrire la propagation des ondes dans un milieu non-homogène.

De plus, le système d'équations linéaire peut être étudié grâce à l'analyse matricielle. Les trois modes alors obtenus (vecteurs propres du système d'équations) sont le mode entropique, le mode acoustique (de dimension trois en 3D) et le mode de vorticité. Une description complète de la génération et la description de ces modes a été effectuée dans les années 50 par Chu et Kovasznay [17, 46].

De nombreuses analyses s'appuient sur cette décomposition pour proposer des conditions aux limites en annulant certains des modes localement sur une frontière [88, 31]. On peut aussi relier entre elles les fluctuations des différentes grandeurs [82]. Le concept de réceptivité correspond au transfert de l'énergie d'un mode acoustique en un mode de vorticité lorsqu'un front d'onde atteint une arête solide. Inversement, un tourbillon qui vient impacter une paroi va générer une onde acoustique.

On peut aussi étudier la stabilité de la propagation d'une onde à une certaine fréquence sur un écoulement donné et déterminer ainsi les fréquences instables susceptibles de générer des rayonnements acoustiques. Dans le cadre de la propagation sur des écoulements cisailés, le choix d'équations linéaires peut cependant rendre la solution instable à certaines fréquences par une croissance exponentielle qui ne serait pas observée en non-linéaire.

Pour générer un mode acoustique à l'aide des équations d'Euler, il est possible d'utiliser des sources de fluctuations de pression ou de vitesse. Les sources de vitesse sont intéressantes dans le cadre de la simulation du bruit aérodynamique car la turbulence fait intervenir des fluctuations de vitesse importantes. Cependant, les fluctuations de pression ont une signification acoustique directe.

En variables primitives, la séparation du champ total $U = (u, v, w)$ en la somme d'un champ moyen U_o et d'un champ fluctuant U_p s'écrit :

$$U = U_o + U_p, \quad \text{avec} \quad U_p = \begin{pmatrix} u_p \\ v_p \\ w_p \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad U_o = \begin{pmatrix} u_o \\ v_o \\ w_o \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

De plus, la pression p est aussi séparée en une partie moyenne p_o et une partie fluctuante p_p :

$$p = p_o + p_p \quad (3.11)$$

La formulation non conservative (et isentropique) des équations d'Euler linéarisées s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{\partial p_p}{\partial t} + U_o \cdot \nabla p_p + U_p \cdot \nabla p_o + \gamma p_o \nabla U_p + \gamma p_p \nabla U_o = S_p \\ \frac{\partial U_p}{\partial t} + U_o \cdot \nabla U_p + U_p \cdot \nabla U_o + \frac{1}{\rho_o} \nabla p_p - \frac{p_p}{\rho_o^2 c_o^2} \nabla p_o = 0 \end{cases} \quad (3.12)$$

où S_p représente une distribution de sources de pression. La même source (isentropique) pour la formulation conservative s'obtient en passant des variables primitives aux variables conservatives.

On peut établir les équations qui régissent l'évolution de la vorticité et de la propagation acoustique au sein d'un écoulement uniforme. En combinant les deux équations 3.12, on peut écrire, en notant Ω le rotationnel des fluctuations de vitesse :

$$\begin{cases} \frac{\partial \Omega}{\partial t} + (U_o \cdot \nabla) \Omega = 0 \\ \left(\Delta - \frac{1}{c_o^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + (U_o \cdot \nabla) \right)^2 \right) p_p = -\frac{1}{c_o^2} \left(\frac{dS_p}{dt} \right) \end{cases} \quad (3.13)$$

Cette distribution de sources de pression ne génère donc pas de source de vorticit e.

La mod elisation d'une source monopolaire bidimensionnelle peut se faire en prenant :

$$S_p = \epsilon e^{-\frac{((x-x_o)^2+(y-y_o)^2)}{b^2}} \sin(\omega t) \quad (3.14)$$

pour une source plac ee en (x_o, y_o) et d'amplitude ϵ . La constante b est la demi-largeur de la gaussienne et doit au moins ˆetre discr etis ee sur trois points de maillage : $b/\Delta x > 3$. ω est la pulsation de la source et sa longueur d'onde acoustique vaut : $\lambda = c_o \cdot \frac{2\pi}{\omega}$. Pour mod eliser un dipˆole, on place deux monopoles en opposition de phase espacées de δ suivant l'axe du dipˆole, avec $\delta/\lambda \ll 1$.

3.2 Etat de l'art des sch emas num eriques

3.2.1 Sch ema de d erivation spatiale

La m ethode des diff erences finies est particuli erement adapt ee  a la r esolution des  equations d'Euler  a un ordre  elev e. La propagation des ondes est correctement d ecrite avec un nombre raisonnable de points par longueur d'onde et donc pour un nombre total r eduit de points de calcul.

Choix du sch ema spatial

Un avantage important de la discr etisation par la m ethode des  el ements finis est son application  a des maillages non structur es. Cette potentialit e est inestimable dans le cas de g eom etri es complexes tridimensionnelles. Elle permet de plus de mettre en oeuvre des m ethodes de raffinement local. Cette m ethode est couramment utilis ee en CFD de par sa robustesse. Du point de vue d'un couplage a erodynamique/acoustique, elle semble donc parfaitement adapt ee. Pour l'a eroacoustique, la m ethode des  el ements finis basées sur la formulation de Galerkin discontinue a montr e de bonnes aptitudes  a propager les ondes acoustiques [14]. Une formulation faible est  etablie sur chaque  el ement de la grille. La m ethode autorise ainsi que la solution soit repr esent ee par des fonctions polynomiales discontinues  a la fronti ere de deux  el ements adjacents. L'ordre du polynome est local et s'adapte donc  a de nombreux types d' ecoulements et notamment aux chocs. De plus, cette m ethode peut permettre une r esolution de la solution  a un ordre  elev e au contraire de la m ethode des volumes finis peu utilis ee en a eroacoustique. Enfin, la m ethode des  el ements finis permet des justifications math ematiques int eressantes, notamment dans l' etude de l'existence et de solutions aux  equations [50]. On rappelle ici que la preuve de l'existence d'une solution unique, r eguli ere, aux  equations de Navier-Stokes incompressibles tridimensionnelles n'a toujours pas  et e apport ee.

Cependant, la résolution numérique des équations de Navier-Stokes sur un maillage structuré a montré, à ce jour, des garanties supérieures à celles obtenues sur des maillages non-structurés. Du point de vue de la simplicité d'implantation, les différences finies sont plus favorables. C'est peut-être pour cette raison qu'un nombre majoritaire d'auteurs privilégient cette méthode en aéroacoustique. Pour conclure, on peut dire que dans le cadre de l'aéroacoustique, au-delà de la question du maillage, les exigences en termes de précision et de conditions aux limites sont les mêmes en différences finies et en éléments finis.

Dans le code *sAbrinA* (utilisé dans cette étude), les équations d'Euler en perturbations sont discrétisées avec la méthode des différences finies d'ordre six. L'intégration temporelle est effectuée avec un schéma explicite compact de Runge-Kutta d'ordre 3 [57, 42].

Nécessité de l'ordre élevé

En acoustique, on analyse généralement la propagation des ondes de façon spectrale. Dans le cas d'une méthode spectrale, on étudie la propagation de chaque fréquence séparément. Cela a mené à des méthodes et des conditions aux limites spécifiques.

Dans les problèmes de bruit d'origine aérodynamique, il n'est pas possible de raisonner ainsi, car le spectre contient une large gamme de fréquences. De ce point de vue, il est préférable de se placer en spatio-temporel afin de représenter l'ensemble des fréquences en jeu dans la simulation. Cependant, il est légitime de conserver la précision avantageuse des méthodes spectrales.

Cela a poussé les aéroacousticiens à proposer des schémas plus précis, d'ordre élevé, afin de couvrir une large gamme de nombres d'onde. Les différences finies d'ordre élevé ont ainsi été privilégiées car elles permettent d'augmenter la précision des schémas en considérant plus de points dans la discrétisation de l'opérateur de dérivation.

Un schéma de dérivation spatiale garantit un certain degré de fidélité dans la résolution pour chaque fréquence. On peut le quantifier au moyen d'une analyse de Fourier pour toutes les fréquences présentes sur la grille de calcul.

On considère le schéma centré à $2N$ points :

$$\frac{\partial f}{\partial x} \approx \frac{1}{\Delta x} \sum_{j=-N}^N a_j f(x + j\Delta x) \quad (3.15)$$

En effectuant une transformée de Fourier spatiale $\hat{F}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x)e^{-ikx}dx$, à gauche et à droite, et en se servant des deux propriétés suivants :

$$\widehat{\frac{\partial f(x)}{\partial x}} = ik\hat{f}(k) \quad (3.16)$$

$$\widehat{f(x + \lambda)} = e^{ik\lambda}\hat{f}(k) \quad (3.17)$$

il vient :

$$ik\hat{f}(k) \approx \frac{1}{\Delta x} \left(\sum_{j=-N}^N a_j e^{ijk\Delta x} \right) \hat{f}(k) \quad (3.18)$$

$$\approx i\bar{k}\hat{f}(k) \quad (3.19)$$

où \bar{k} est le nombre d'onde approché du schéma aux différences finies.

$$\bar{k} = \frac{-i}{\Delta x} \sum_{j=-N}^N a_j e^{ijk\Delta x} = \sum_{j=1}^N a_j \frac{\sin(jk\Delta x)}{\Delta x} \quad (3.20)$$

On représente sur la Figure 3.1, les nombres d'onde approchés obtenus pour les schémas centrés d'ordre 2, 4 et 6, obtenus par développements de Taylor respectifs d'ordre 2, 4 et 6. Le Tableau 3.1 récapitule la résolution minimale pour chacun de ces ordres (erreur de 1 % sur le nombre d'onde approché par rapport au nombre d'onde exact). A l'ordre six, le schéma permet de propager correctement les ondes jusqu'à une longueur d'onde critique, $\lambda_c/\Delta x = 6,3$. A l'ordre deux, la résolution minimale passe à $\lambda_c/\Delta x = 15,7$.

ordre	$k_c\Delta x$	$\frac{\lambda_c}{\Delta x}$
6	1	6,3
4	0,75	8,4
2	0,4	15,7

TAB. 3.1: Résolution minimale des schémas en nombre d'onde et longueur d'onde.

Un schéma d'ordre deux doit donc avoir un nombre de points deux fois et demi plus grand pour obtenir la qualité de précision du schéma d'ordre 6. On comprend ainsi l'intérêt d'un schéma d'ordre élevé pour la propagation acoustique en matière de coût de calcul.

Optimisation des schémas de dérivation spatiale

Afin d'améliorer encore la bande passante des schémas, Tam et Webb [85] ont proposé d'optimiser le schéma de dérivation à six points pour une gamme de nombres d'onde donnée. Pour cela, ils proposent d'annuler les termes du développement de Taylor jusqu'à l'ordre quatre et d'ajouter une condition de minimisation de l'erreur sur le nombre d'onde approché pour les longueurs d'onde supérieures à six points $\lambda_{min} > 6\Delta x$, soit $k \in [0; k_{max}]$ avec $k_{max}\Delta x \approx 1,04$.

La fonctionnelle à minimiser est :

$$J(\alpha) = \int_{k=0}^{k_{max}} \left| 1 - \frac{\bar{k}(\alpha)}{k} \right|^2 dk \quad (3.21)$$

Cela permet d'obtenir un nouveau schéma à six points d'ordre quatre, mais optimal sur une large bande de nombre d'onde. Ce schéma DRP (Dispersion Relation Preserving) préserve la relation de dispersion des ondes. La relation de dispersion exacte, $\Omega = k \cdot c \approx \bar{k} \cdot c$, où Ω est la fréquence de l'onde et c la célérité du son, est mieux approchée.

D'autres fonctionnelles sont possibles pour ce problème de minimisation. Les mêmes auteurs proposent de minimiser une combinaison de l'erreur sur la vitesse de groupe v_g et de l'erreur sur la vitesse de phase v_ϕ .

On rappelle que ces deux vitesses s'écrivent :

$$v_\phi = \frac{\Omega}{k} \approx c \frac{\bar{k}}{k} \quad (3.22)$$

$$v_g = \frac{d(\Omega)}{dk} \approx c \frac{d\bar{k}}{dk} \quad (3.23)$$

Minimiser l'erreur en vitesse de groupe revient à minimiser la fonctionnelle :

$$J(\alpha) = \int_{k=0}^{k_{max}} \left| 1 - \frac{\partial \bar{k}(\alpha)}{\partial k} \right|^2 dk \quad (3.24)$$

Ces nouveaux schémas permettent de gagner un point par longueur d'onde environ. La résolution minimale, correspondant à 1% d'erreur en vitesse de phase, passe à 5,5 points par longueur d'onde. Pour une description plus précise, le lecteur pourra se référer à l'analyse détaillée de cette technique et de ses résultats par Redonnet [71].

Lele [52] propose de dériver des schémas de dérivation spatiale implicites (ou compacts). Si on note $(f_i, i = 1, n)$ les valeurs de la fonction f sur la grille de calcul :

$$\alpha_f f'_{i-1} + f'_i + \alpha_f f'_{i+1} = \sum_{j=0, N} \beta_j (f_{i+j} - f_{i-j}) \quad (3.25)$$

où le coefficient α_f peut varier suivant les cas. Le cas $\alpha_f = 0$ correspond à un schéma explicite. Une valeur courante de α_f est 0,49.

La Figure 3.1 montre l'erreur commise par les différents schémas en nombre d'onde approché et en vitesse de phase approchée, en fonction du nombre d'onde. Les schémas compacts permettent une nette amélioration de la bande passante numérique, jusqu'à 4 points par longueur d'onde.

Redonnet [71] propose une version DRP de ces schémas implicites pour baisser encore cette limite à 3,5 points par longueur d'onde.

Le terme compact illustre le fait que, pour obtenir un schémas d'ordre six, un schéma à cinq points suffit. Cette particularité lui confère un avantage pour les conditions aux limites puisqu'il peut s'appliquer jusqu'à deux points de la frontière contre trois pour les schémas explicites à sept points du même ordre. Ces schémas implicites ont un coût de l'ordre de 50 à 80 % supérieur aux schémas explicites [71] car ils nécessitent la résolution d'un système linéaire à chaque calcul de dérivée spatiale.

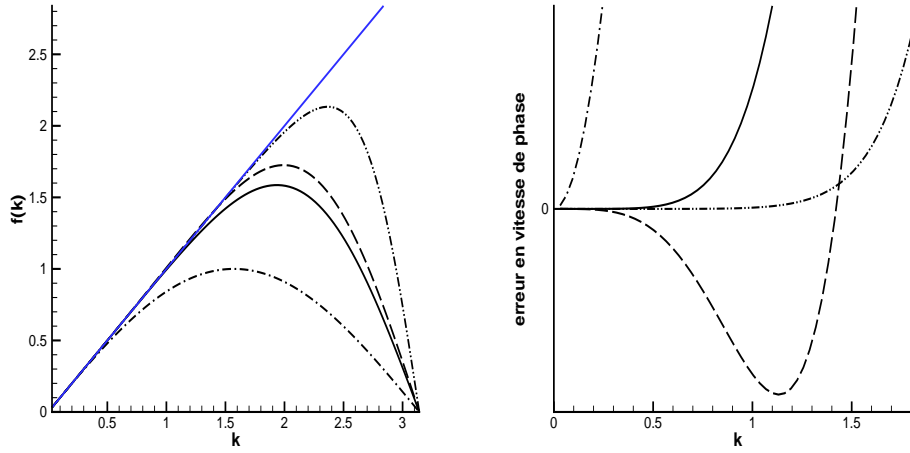


FIG. 3.1: A gauche : fonctions de transfert des schémas de dérivation. A droite : vitesse de phase obtenue avec ces schémas. Schémas explicites d'ordre 2 (---), d'ordre 6 (plein), DRP (—) et implicite d'ordre 8 à 7 points (-·-·-·) en noir, et opérateur continu en bleu.

3.2.2 Schéma d'intégration temporelle

La même analyse en nombre d'onde a été effectuée pour les schémas temporels de Runge-Kutta par Hu *et al.* [42] et a conduit à une optimisation de ces schémas.

Schémas de Runge-Kutta

On définit le coefficient d'amplification exact complexe $r(\Omega)$ et on peut écrire d'après les propriétés de la transformation de Fourier temporelle pour un pas de temps Δt :

$$r(\Omega) = \frac{\widehat{u(t + \Delta t)}}{\widehat{u(t)}} = e^{-i\Omega\Delta t} \quad (3.26)$$

où Ω , la fréquence temporelle, est un nombre réel.

L'algorithme du schéma de Runge-Kutta à trois sous-étapes s'écrit :

$$\begin{aligned} u^1 &= u^n + \alpha_1 \Delta t \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^n \\ u^2 &= u^n + \alpha_2 \Delta t \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^1 \\ u^{n+1} &= u^n + \alpha_3 \Delta t \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \end{aligned} \quad (3.27)$$

On peut donc écrire en effectuant une transformée de Fourier temporelle, en remarquant que $\widehat{\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^n} = -i\Omega \hat{u}^n$:

$$\hat{u}^{n+1} = \hat{u}^n + \Delta t \sum_{j=1}^3 c_j (-i\Omega \Delta t)^j \hat{u}^n \quad (3.28)$$

où $(c_j, j = 1, 3)$ sont calculés à partir des coefficients α_j ($c_j = \frac{1}{j!}$).

On peut ainsi obtenir le coefficient d'amplification approché en temps : $\bar{r}(\Omega) = \frac{\hat{u}^{n+1}}{\hat{u}^n}$.

$$\bar{r}(\Omega) = \frac{\hat{u}^{n+1}}{\hat{u}^n} = 1 + \sum_{j=1}^3 c_j (-i\Omega \Delta t)^j \quad (3.29)$$

Pour le schéma à trois sous-étapes d'ordre trois, on obtient le coefficient d'amplification complexe $\bar{r}(\Omega)$:

$$\bar{r}(\Omega) = 1 - i\Omega - \frac{\Omega^2}{2} + \frac{i\Omega^3}{6} \quad (3.30)$$

On peut alors définir l'erreur commise par la méthode numérique temporelle par rapport à l'intégration temporelle exacte :

$$\frac{\bar{r}(\Omega)}{r(\Omega)} = \left| \frac{\bar{r}(\Omega)}{r(\Omega)} \right| e^{i\phi(\Omega)} \quad (3.31)$$

où $|\bar{r}|$ représente une erreur de dissipation du schéma et ϕ une erreur de déphasage. On comprend là-aussi pourquoi il faut une méthode d'ordre élevé en temps pour minimiser ces erreurs.

On peut alors définir la fonctionnelle $J(c_j)$:

$$J(c_j) = \int_0^{\Omega_{max}} |1 - \bar{r}(\Omega)| d\Omega \quad (3.32)$$

où les coefficients c_j sont alors à optimiser. On peut ici aussi laisser un coefficient libre et se contenter d'un ordre plus faible dans le développement de Taylor, comme il est effectué en espace, et minimiser la fonctionnelle qui varie en fonction de ce coefficient laissé libre.

La minimisation de J sur une bande de fréquence temporelle la plus large possible $[0 ; \Omega_{max}]$ doit aussi permettre d'optimiser les coefficients du schéma.

Comme $\Omega = \frac{1}{T}$, cela revient à diminuer le nombre d'itérations par période nécessaires pour bien résoudre un signal harmonique. En optimisant les coefficients, on peut descendre à une résolution d'environ six itérations par période temporelle.

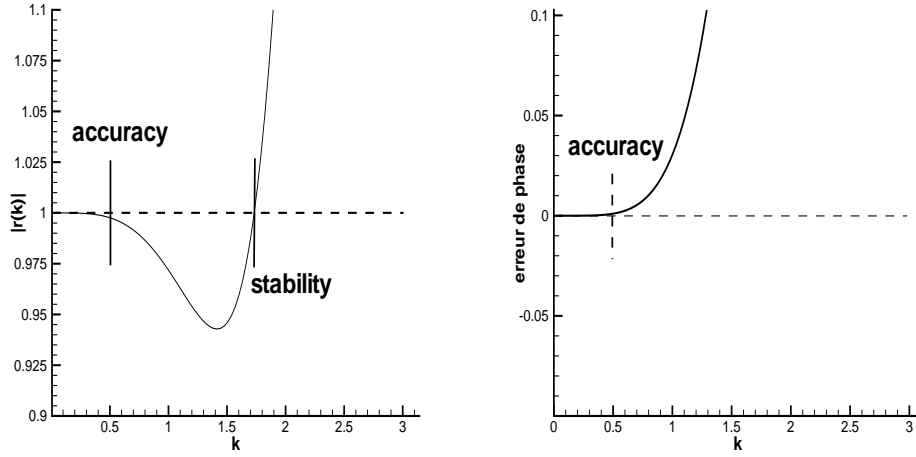


FIG. 3.2: Limites de stabilité et de précision pour le schéma de Runge-Kutta d'ordre 3. A gauche, module du coefficient d'amplification. A droite, l'erreur de phase.

Résolution du problème temps-espace et stabilité

On pose le problème d'advection classique à la vitesse c :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -c \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3.33)$$

Lorsque le problème est aussi discret en espace $\bar{\Omega} = \bar{k}c \approx \Omega$, le nombre $\bar{k}(k)$ est alors complexe. Pour que le schéma reste stable, il faut s'assurer que :

$$|\bar{r}(\bar{\Omega})| = |\bar{r}(\bar{k}(k) \cdot c)| < 1 \quad \forall k \Delta x \in [0 ; \pi] \quad (3.34)$$

Il est équivalent de vérifier que :

$$\{\bar{\Omega} \in \mathbb{C}, \bar{\Omega} = \bar{k} \cdot c\} \in \{\Omega \in \mathbb{C}, |\bar{r}(\Omega)| < 1\}. \quad (3.35)$$

D'une part, la Figure 3.3 montre que lorsque $\bar{\Omega} \Delta t = c \bar{k}(k_1^*) \Delta t < 0,5$, le schéma de Runge-Kutta d'ordre trois permet une bonne résolution. Or, la limite de bonne résolution des ondes en espace pour le schéma d'ordre 6 est $k_1^* \Delta x \approx 1$, pour lequel $\bar{k}(k_1^*) \Delta x = 1$. On obtient alors $CFL_1 = \frac{c \Delta t}{\Delta x} < \frac{0,5}{\bar{k}(k_1^*) \Delta x} = 0,5$.

D'autre part, la Figure 3.3 montre que lorsque $\bar{\Omega} \Delta t = c \bar{k}(k_2^*) \Delta t < 1,7$, le schéma de Runge-Kutta d'ordre trois est stable. Or le maximum de la fonction $\bar{k}(k)$ est obtenue en $k_2^* \Delta x \approx 1,9$ et vaut $\bar{k}(k_2^*) \Delta x = 1,6$. On en déduit donc que la limite de stabilité obtenue

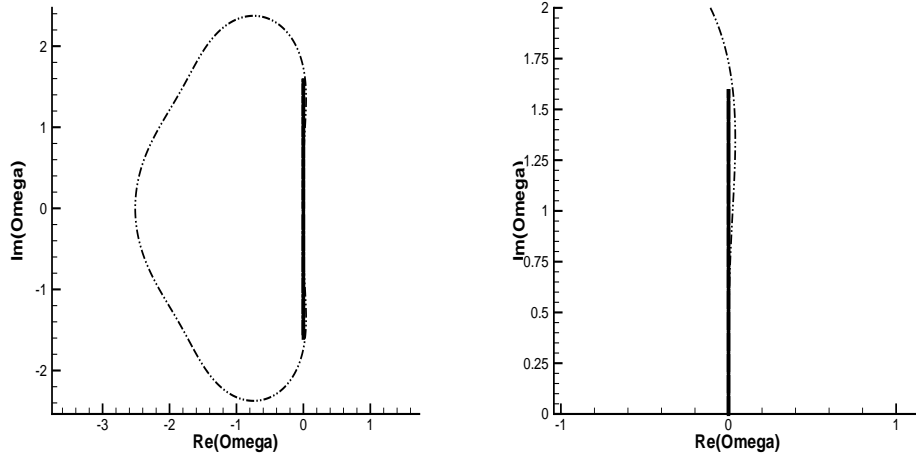


FIG. 3.3: Diagramme de stabilité du schéma de Runge-Kutta d'ordre trois (trait discontinu) et valeurs propres des modes de Fourier pour l'équation d'advection à $CFL = 0,8$ (trait plein). A gauche : localisation dans le plan complexe. A droite : zoom sur la limite de stabilité.

impose : $CFL_2 = \frac{c\Delta t}{\Delta x} < \frac{1,7}{\bar{k}(k_2^*)\Delta x} \approx 1,06$. La contrainte de précision de la résolution du problème temps-espace est donc a priori plus contraignante que la condition de stabilité. On peut toutefois remarquer sur la Figure 3.3 que la disposition des pulsations temporelles approchées $\bar{\Omega}(k)$ est proche de la limite de stabilité de la méthode numérique de Runge-Kutta d'ordre trois au voisinage de l'axe réel. De plus, les hautes fréquences $\lambda \in [2\Delta x; 4\Delta x]$ mal résolues et que l'on ne souhaite donc pas propager se situent près de la limite de stabilité : $\bar{k}(\frac{\pi}{\Delta x}) = 0$. La stabilité n'est pas assurée sur de longs temps de calcul et une méthode de stabilisation basée sur un filtrage de la solution sera nécessaire (chapitre 4). En supposant que l'on peut stabiliser la propagation, deux cas de figure peuvent se produire.

D'une part, on peut diminuer le pas de temps pour bien respecter les deux critères de bonne résolution en temps et en espace. C'est ce que l'on fait dans les simulations où la source acoustique est analytique pour obtenir des résultats très précis sur la propagation des ondes.

D'autre part, pour un calcul de bruit d'origine aérodynamique, on veut propager des ondes jusqu'à une fréquence donnée avec une résolution suffisante. Les contraintes du calcul sont fortes en termes de volume des données à considérer pour le couplage aérodynamique/acoustique. On va donc prendre un pas de temps, et donc un CFL, les plus grands possibles. Dans ce cas, on est limité par la condition de stabilité.

Extension de l'analyse aux équations d'Euler linéarisées

On se place à présent dans le cadre des équations d'Euler linéarisées bidimensionnelles en variables primitives. En faisant l'hypothèse d'un milieu au repos, la propagation acoustique isentropique est décrite par le système d'équations couplées suivantes :

$$\frac{\partial u_p}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_p}{\partial x} = 0 \quad (3.36)$$

$$\frac{\partial v_p}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_p}{\partial y} = 0 \quad (3.37)$$

$$\frac{\partial p_p}{\partial t} + \gamma p_0 \left(\frac{\partial u_p}{\partial x} + \frac{\partial v_p}{\partial y} \right) = 0 \quad (3.38)$$

En se plaçant dans l'hypothèse de conditions aux limites périodiques, et en appliquant la transformée de Fourier en espace, on obtient :

$$\frac{\partial \hat{u}_p}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} i k_x \hat{p}_p = 0 \quad (3.39)$$

$$\frac{\partial \hat{v}_p}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} i k_y \hat{p}_p = 0 \quad (3.40)$$

$$\frac{\partial \hat{p}_p}{\partial t} + \gamma p_0 (i k_x \hat{u}_p + i k_y \hat{v}_p) = 0 \quad (3.41)$$

où ρ_0, p_0 sont des caractéristiques du milieu au repos et (k_x, k_y) la projection du nombre d'onde \vec{k} sur les directions x et y .

On peut écrire ce système d'équations sous la forme :

$$\frac{\partial \vec{U}_p}{\partial t} = A \cdot \vec{U}_p \quad (3.42)$$

où $\vec{U}_p = (\hat{u}_p, \hat{v}_p, \hat{p}_p)$

La matrice A prend alors la forme suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{\rho_0} i k_x \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\rho_0} i k_y \\ -\gamma p_0 i k_x & -\gamma p_0 i k_y & 0 \end{pmatrix} \quad (3.43)$$

Les valeurs propres que l'on obtient sont : $0, i \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}} \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ et $-i \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}} (k_x^2 + k_y^2)^{1/2}$. En reconnaissant que $c_0 = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}}$ est la célérité dans le milieu au repos, on en déduit : $\lambda_1 = 0, \lambda_1 = i c_0 k_r$ et $\lambda_1 = -i c_0 k_r$. Les deux dernières valeurs propres correspondent à un mode

acoustique, se dirigeant dans deux directions opposées.

Par analogie avec l'équation d'advection, on va avoir $\bar{\Omega} = c_0 \bar{k}_r = c_0 (\bar{k}_x^2 + \bar{k}_y^2)^{1/2}$, où \bar{k}_x et \bar{k}_y correspondent à la discrétisation vue précédemment, identique en x et en y . Les valeurs propres sont imaginaires pures pour un schéma de dérivation centré, comme dans le cas de l'équation d'advection. L'analyse effectuée sur le schéma d'advection est donc transposable aux équations d'Euler linéarisées.

3.3 Etat de l'art des conditions aux limites

Le problème des conditions aux limites est critique pour la simulation numérique de la propagation des ondes via les équations d'Euler. Il a été traité par de nombreux auteurs [81, 53], et de nombreuses approches ont été proposées.

On peut distinguer plusieurs familles de conditions aux limites, parmi lesquelles : condition de sortie des ondes, condition de non-réflexion en entrée à imposer en même temps qu'une excitation (condition d'injection non-réfléchissante), condition de glissement à la paroi, conditions de paroi absorbante. Cette dernière condition est particulièrement importante pour la réduction du bruit aérodynamique [66] mais sort du cadre de cette thèse.

La discrétisation de la condition de glissement à la paroi peut se faire de différentes façons. Dans la condition de type "miroir", l'inversion de la composante normale de vitesse est appliquée sur des points fictifs qui ne sont pas calculés. Cela permet d'annuler la vitesse normale à la paroi. Les autres variables (densité, énergie) sont copiées aux points fictifs pour assurer une dérivée normale nulle à la paroi. Plutôt que de développer une formulation curviligne, pour laquelle les propriétés de la méthode analysées sur des maillages cartésiens uniformes ne sont plus valables, il est possible de développer un traitement cartésien des conditions aux limites de paroi [47]. Cela permet d'effectuer la propagation acoustique sur un maillage cartésien. Cette technique, qui nécessite d'effectuer des extrapolations et des interpolations aux points de la paroi, peut toutefois poser des problèmes de stabilité et nécessiter l'emploi de filtres spécifiques pour éviter des rayonnements parasites.

On va se pencher plus particulièrement sur le problème des conditions de sortie des ondes. Parmi les conditions les plus utilisées figurent : la condition de rayonnement de Tam et Dong [82], les conditions basées sur les caractéristiques [88], la condition PML (Perfectly Matched Layer) [41], le décentrage des opérateurs [92], l'approche Low-Order-Centered [91]. A ces conditions, les auteurs ajoutent, en général, un étirement des mailles jusqu'à atteindre, près de la frontière du domaine numérique, une taille de maille au moins égale à la plus grande longueur d'onde à propager.

Parmi les conditions aux limites non-réfléchissantes, la condition de rayonnement en champ lointain dérivée par Tam et Dong [82] est sans doute l'une des plus efficaces pour la propagation externe. Elle consiste à résoudre en coordonnées cylindriques, aux bornes du domaine de calcul, une équation obtenue par une formulation asymptotique. Cela nécessite de choisir un point du domaine comme centre. Ce centre est choisi comme la source acous-

tique dans le cas d'une source unique. Son choix s'avère plus difficile en présence de sources multiples. La dépendance du résultat par rapport au choix de la position de cette source n'est cependant pas très important, pourvu que l'on soit placé au moins à une dizaine de longueurs d'onde de la source.

L'approche LOC (Low-order centered) [92] consiste à baisser l'ordre de l'opérateur de filtrage et de dérivation (diminution du nombre de points pris en compte) près du bord du domaine. Cela permet d'éviter un décentrage des opérateurs en ces points. Une condition de Dirichlet est appliquée au dernier point. Cependant, Gaitonde et Visbal [28] proposent de maintenir la précision en faisant évoluer le coefficient α_f du filtre implicite afin d'éviter une dissipation accrue. Toutefois, les auteurs constatent la grande perte de précision engendrée et préfèrent utiliser un décentrage des opérateurs afin de conserver une précision sur tous les points de calcul.

3.4 Filtrage de la solution

L'introduction d'une étape de filtrage est prônée par de nombreux auteurs [29, 91, 71] afin de stabiliser la méthode numérique (schémas et conditions aux limites). Les filtres utilisés ont deux propriétés principales :

- approximation de la solution à un ordre élevé, ce qui ne met pas en péril la résolution d'ordre élevé du problème mathématique à traiter,
- annulation des ondes dont la longueur d'onde est égale à deux points par longueur d'onde.

Pour une variable $\Phi_N = (\phi_1, \dots, \phi_N) \in \mathbb{R}^N$, un filtre \mathcal{F} s'applique linéairement de la façon suivante :

$$\alpha_f \mathcal{F} \phi_{i-1} + \mathcal{F} \phi_i + \alpha_f \mathcal{F} \phi_{i+1} = \sum_{l=-n, n} f_{i+l} \phi_{i+l} \quad (3.44)$$

dans le cas d'une formulation compacte [52]. On obtient les filtres explicites en choisissant $\alpha_f = 0$. Un filtre explicite à $2n + 1$ points est d'ordre $2n$. Le filtre centré explicite d'ordre dix est couramment utilisé [29, 71] et c'est celui qui sera retenu dans la suite. On obtient ses coefficients en annulant les termes d'ordre pair dans le développement de Taylor et en appliquant la condition d'annulation des modes à deux points par longueur d'onde.

On peut étudier les caractéristiques du filtre en nombre d'onde en lui appliquant une transformée de Fourier spatiale. Pour la variable Φ discrète en espace, $\Phi(x_0 + j\Delta x) \approx \phi_j$ et pour une fonction $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ périodique, on peut écrire pour un filtre explicite :

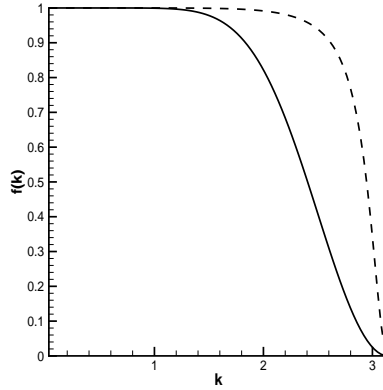


FIG. 3.4: Partie réelle de la fonction de transfert du filtre d'ordre dix pour les schémas explicite (trait plein) et compact (trait discontinu).

$$\mathcal{F}\hat{\phi}(k) \approx \hat{\phi}(k) \cdot \sum_{l=-n,n} f_l e^{ikl\Delta x} \quad (3.45)$$

$$\approx \hat{\phi}(k) \cdot \left(f_0 + \sum_{l=1,n} 2f_l \cos(ikl\Delta x) \right) \quad (3.46)$$

La fonction $\hat{f}(k) = f_0 + \sum_{l=1,n} 2f_l \cos(ikl\Delta x)$ est la fonction de transfert du filtre. L'annulation des modes pair-impair donne alors pour $k = \frac{\pi}{\Delta x} : f_0 + (-1)^l f_l = 0$. Cela permet de trouver les coefficients suivants pour le filtre centré explicite d'ordre dix :

$$\begin{cases} f_0 = \frac{772}{1024} \\ f_1 = \frac{210}{1024} \\ f_2 = \frac{-120}{1024} \\ f_3 = \frac{45}{1024} \\ f_4 = \frac{-10}{1024} \\ f_5 = \frac{1}{1024} \end{cases} \quad (3.47)$$

L'étude de la fonction de transfert du filtre montre que le filtre n'agit pas ou très peu sur les ondes à grande longueur d'onde. En revanche, il altère les ondes de façon croissante en nombre d'onde jusqu'à l'annulation des modes pair-impair dans la gamme $[\frac{1}{\Delta x} ; \frac{\pi}{\Delta x}]$, soit $[2\Delta x ; 6\Delta x]$ en longueur d'onde.

Les filtres compacts permettent de reculer la gamme d'altération en nombre d'onde et d'avoir un effet plus ciblé encore, grâce à une décroissance plus tardive et plus rapide de la fonction de transfert $\hat{f}(k)$ (Fig. 3.4).

L'optimisation du filtre en nombre d'onde a été étudiée par Lele [52]. L'amélioration obtenue n'est pas significative. De plus, la précision du filtre doit s'adapter à celle du schéma afin d'éviter de filtrer des fréquences bien résolues et, *a contrario*, de laisser se propager des fréquences mal résolues par le schéma.

Dans le logiciel *sAbrinA*, l'application du filtre s'effectue à la fin de chaque itération et pour chaque direction. Lors de l'emploi de géométries cartésiennes non-uniformes ou curvilignes, le filtre s'applique comme dans le repère cartésien orthonormé. Cela assure l'annulation des modes pairs-impairs. En revanche, on perd alors de la précision dans le développement de Taylor qui n'est plus formellement d'ordre élevé, mais dépend de la grille et n'a *a priori* aucune raison d'être d'ordre supérieur à un. Cela rajoute un terme de dispersion dans la relation d'onde numérique.

Pour obtenir un schéma de filtrage qui prenne en compte l'inhomogénéité du maillage, par exemple pour un filtre explicite à trois points ($x_1 = x - \Delta x$, $x_2 = x$, $x_3 = x + (1 + \alpha)\Delta x$), on peut écrire :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}f(x) &= a_{-1}f(x - \Delta x) + a_0f(x) + a_1f(x + (1 + \alpha)\Delta x) \\ \mathcal{F}f(x) &\approx (a_{-1} + a_0 + a_1)f(x) + (-a_{-1} + (1 + \alpha)a_1)\Delta x f'(x) \\ &\quad + (a_{-1} + (1 + \alpha)^2 a_1)\frac{\Delta x^2}{2} f''(x) + o(\Delta x^2) \end{aligned} \quad (3.48)$$

Les deux premières relations nécessaires pour déterminer a_{-1} , a_0 et a_1 sont obtenues (i) en assurant que leur somme est égale à un et (ii) en annulant le terme d'ordre 1 dans le développement de Taylor.

Pour la troisième relation, on est confronté au choix suivant :

- soit on annule le terme d'ordre deux dans le développement de Taylor,
- soit on annule la partie réelle du mode pair-impair ($k = \frac{\pi}{\Delta x}$).

Ces deux possibilités conduisent à deux schémas de filtrage différents. Dans la suite, on adopte celui qui résulte de l'annulation de la partie réelle du mode pair-impair en prenant en compte l'inhomogénéité du maillage. Par transformée de Fourier, on obtient :

$$\hat{f}(k) \approx a_{-1}e^{-ik\Delta x} + a_0 + a_1e^{ik(1+\alpha)\Delta x} \quad (3.49)$$

Si on choisit d'annuler la fonction f pour le nombre d'onde $k = \frac{\pi}{\Delta x}$, on obtient alors :

$$\hat{f}\left(\frac{\pi}{\Delta x}\right) \approx -a_{-1} + a_0 + a_1(-e^{i\pi\alpha}) \quad (3.50)$$

et pour la partie réelle :

$$\begin{aligned} \text{Re}\left(\hat{f}\left(\frac{\pi}{\Delta x}\right)\right) &\approx -a_{-1} + a_0 + a_1(-\cos(\pi\alpha)) = 0 \\ &\approx -a_{-1} + a_0 + a_1\left(-1 + \frac{(\alpha\pi)^2}{2} + o(\alpha^2)\right) = 0 \end{aligned} \quad (3.51)$$

La troisième relation, que constitue $Re(\hat{f}(\frac{\pi}{\Delta x})) = 0$, permet d'aboutir au système de trois équations à trois inconnues suivant :

$$\begin{cases} a_{-1} + a_0 + a_1 = 1 \\ -a_{-1} + (1 + \alpha)a_1 = 0 \\ -a_{-1} + a_0 + a_1(-1 + \frac{(\alpha\pi)^2}{2}) = 0 \end{cases} \quad (3.52)$$

On obtient alors :

$$\begin{pmatrix} a_0 = \frac{2 + \alpha - \frac{(\alpha\pi)^2}{2}}{4 + 2\alpha - \frac{(\alpha\pi)^2}{2}} \\ a_{-1} = \frac{1 + \alpha}{4 + 2\alpha - \frac{(\alpha\pi)^2}{2}} \\ a_1 = \frac{1}{4 + 2\alpha - \frac{(\alpha\pi)^2}{2}} \end{pmatrix} \quad (3.53)$$

L'autre solution permet d'obtenir un schéma d'ordre 2, mais l'opération n'est pas équivalente à annuler les modes pair-impair dans la grille de calcul. Il s'agit d'une autre modélisation.

Cette dernière nécessite de calculer un schéma de filtrage par point de calcul et de le garder en mémoire pendant le calcul. En maillage curviligne, il faudrait utiliser une abscisse curviligne pour obtenir ces schémas.

Toutefois, sur un maillage inhomogène, lorsque la résolution est suffisante, l'impact du filtrage, en tant qu'opérateur de dispersion, est faible. Au contraire, la dispersion engendrée par ce filtrage symétrique sur un tel maillage va dénaturer la propagation. Cette dénaturation, consécutive à un fort étirement des mailles, est très utilisée pour améliorer les conditions aux limites de sortie des ondes.

3.5 Méthode numérique

Ce paragraphe récapitule la méthode numérique utilisée au cours de ce travail telle qu'elle est implantée dans le code *sAbrinA* pour simuler la propagation acoustique :

- schéma de dérivation spatial DRP,
- schéma d'intégration temporelle de Runge-Kutta d'ordre trois,
- conditions aux limites,
- application du filtre,
- formulation curviligne.

L'algorithme de calcul peut-être ainsi résumé :

$$U_p^{(0)} = U_p^n \quad (3.54)$$

$$U_p^{(k)} = U_p^{(k-1)} - \beta^{(k)} \Delta t R_k \quad \text{pour } k = 1, 2, 3 \quad (3.55)$$

$$U_p^{n+1} = \mathcal{F}U_p^{(3)} \quad (3.56)$$

avec

$$R_0 = R(U_p^{(0)}) = (\text{Div} \cdot (F(U_p^{(0)}) - S^{(0)})) \quad (3.57)$$

$$R_1 = R(U_p^{(1)}) + \gamma_1 R_0 \quad (3.58)$$

$$R_2 = R(U_p^{(2)}) + \gamma_2 R_1 \quad (3.59)$$

en prenant

$$\beta^{(1)} = \frac{1}{2} \quad (3.60)$$

$$\beta^{(2)} = 0.91068 \quad (3.61)$$

$$\beta^{(3)} = 0.36603 \quad (3.62)$$

$$\gamma_1 = -0.68301 \quad (3.63)$$

$$\gamma_2 = \frac{4}{3} \quad (3.64)$$

où U_p est le vecteur des inconnues (la fluctuation), F le flux eulérien, Div l'opérateur $\nabla \cdot$ discrétisé par le schéma de dérivation spatiale DRP, \mathcal{F} l'opérateur de filtrage explicite d'ordre 10 appliqué dans les trois directions de l'espace, et S , les sources acoustiques.

La formulation curviligne fait intervenir la jacobienne qui relie les deux systèmes de coordonnées locales (ξ) et globales (x) :

$$\text{div}_x(F) = J \cdot \text{div}_\xi(F) \quad (3.65)$$

Certains auteurs préfèrent garder une formulation conservative, cela conduit à :

$$\text{div}_x(F) = |J| \cdot \text{div}_\xi(F \cdot \frac{J}{|J|}) \quad (3.66)$$

On a plus facilement accès à l'inverse de la jacobienne, \overline{J} , qu'à la jacobienne elle-même. La jacobienne est donc déduite de son inverse. Visbal et Gaitonde [91] proposent de réaliser ce passage non pas par une résolution linéaire classique, mais en respectant une loi géométrique :

$$\nabla_\xi \cdot \left(\frac{J}{|J|} \right) = 0 \quad (3.67)$$

Le calcul de la jacobienne se fait donc par la relation suivante :

$$\frac{J}{|J|} = \left(\begin{array}{c} \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial(\bar{J}_{22}x_3)}{\partial\xi_3} & -\frac{\partial(\bar{J}_{32}x_3)}{\partial\xi_2} \\ \frac{\partial(\bar{J}_{32}x_3)}{\partial\xi_1} & -\frac{\partial(\bar{J}_{12}x_3)}{\partial\xi_3} \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial(\bar{J}_{23}x_1)}{\partial\xi_3} & -\frac{\partial(\bar{J}_{33}x_1)}{\partial\xi_2} \\ \frac{\partial(\bar{J}_{33}x_1)}{\partial\xi_1} & -\frac{\partial(\bar{J}_{13}x_1)}{\partial\xi_3} \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial(\bar{J}_{21}x_2)}{\partial\xi_3} & -\frac{\partial(\bar{J}_{31}x_2)}{\partial\xi_2} \\ \frac{\partial(\bar{J}_{31}x_2)}{\partial\xi_1} & -\frac{\partial(\bar{J}_{11}x_2)}{\partial\xi_3} \end{array} \right] \end{array} \right) \quad (3.68)$$

Condition de paroi solide La condition de type miroir est utilisée. Dans le repère local, la vitesse normale est inversée aux points fictifs symétriques des points de calcul par rapport à la paroi. La vitesse tangentielle ainsi que les autres variables (densité et pression) sont recopiées. Soit le point M de coordonnées $\Xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ dans le repère local et $X = (x_1, x_2, x_3)$ dans le repère global et le point fictif M' , symétrique du point M, par rapport à la paroi solide, a pour coordonnées $\xi' = (\xi'_1, \xi'_2, \xi'_3)$ dans le repère local et $X' = (x'_1, x'_2, x'_3)$ dans le repère global. La condition aux limites s'applique dans la direction du maillage (i, j ou k) et de normale \vec{n} :

$$\begin{pmatrix} \delta_{in} \\ \delta_{jn} \\ \delta_{kn} \end{pmatrix} \quad (3.69)$$

où $\delta_{in} = 1$ si la normale \vec{n} est dirigée suivant la direction l et 0 sinon.

On écrit dans le repère local en variables primitives :

$$U_p(\xi') = M \cdot U_p(\xi) \quad (3.70)$$

soit

$$\begin{pmatrix} \rho_p(\xi') \\ u_p(\xi') \\ v_p(\xi') \\ w_p(\xi') \\ p_p(\xi') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{\delta_{in}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^{\delta_{jn}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-1)^{\delta_{kn}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \rho_p(\xi) \\ u_p(\xi) \\ v_p(\xi) \\ w_p(\xi) \\ p_p(\xi) \end{pmatrix} \quad (3.71)$$

En remarquant que $U_p(X) = J \cdot U_p(\xi)$, cette opération est effectuée dans le repère global par la relation :

$$U_p(X') = J \cdot M \cdot \bar{J} \cdot U_p(X) \quad (3.72)$$

Condition de libre sortie des ondes Redonnet [71, 70] propose de créer une zone fictive en sortie de domaine sur cinq rangées de points fictifs dans laquelle la dissipation et la dispersion sont progressivement accrues (Figure 3.5) :

- en baissant l'ordre du filtre près du bord de dix à zéro,
- en baissant l'ordre du schéma de dérivation de six à deux,

- en appliquant une condition de Dirichlet homogène au dernier point.

Cette technique entraîne une augmentation de la dispersion, dispersion qui peut-être encore renforcée par un étirement des mailles. La dissipation est croissante sur les cinq dernières rangées de points, comme on peut le voir sur la Figure 3.5. Cette méthode est simple et générale, et ne nécessite pas d’avoir d’information sur la nature et la position des sources acoustiques. Son fonctionnement sera évalué au chapitre 4.

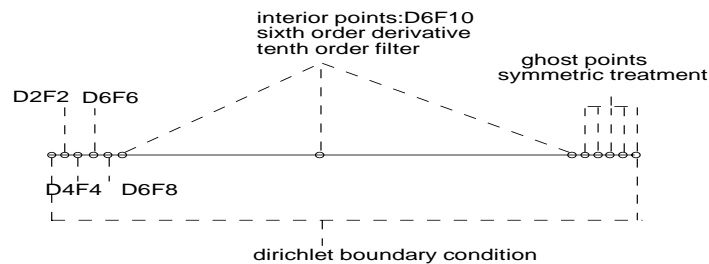


FIG. 3.5: Condition aux limites de sortie des ondes proposée par Redonnet [70, 71] .

3.6 Conclusion

Les méthodes numériques utilisées dans le cadre de la simulation des équations d’Euler en perturbations ont été présentées. La méthode des différences finies d’ordre élevé permet de minimiser la dispersion des ondes acoustiques et d’assurer une propagation correcte sur plusieurs dizaines de longueurs d’onde. En revanche, le schéma centré est relativement instable du fait qu’aucune dissipation n’est appliquée pour propager au mieux les ondes sur une large gamme de nombres d’onde. De plus, les conditions aux limites sont de nature à exciter les instabilités en réfléchissant les ondes aux frontières du domaine de calcul. Cette interaction entre la méthode numérique et la condition aux limites de sortie des ondes sera particulièrement étudiée.

Par conséquent, il est indispensable de stabiliser la méthode numérique. Plusieurs méthodes de stabilisation existantes sont rappelées et analysées dans le chapitre suivant. L’objectif est de garder la même précision sur la gamme de nombres d’onde voulue tout en s’assurant que les hautes fréquences, plus instables, ne vont pas dégrader la simulation. La méthode stabilisée doit aussi permettre de travailler à un nombre CFL optimal, c’est-à-dire le plus grand possible tout en assurant une bonne précision pour la propagation des ondes. Cette double contrainte est particulièrement importante dans le cas de la simulation du

bruit aérodynamique puisque les paramètres du calcul aérodynamique vont influencer sur ceux du calcul acoustique (pas de temps, taille de maille) et donc sur le nombre CFL lors de ce calcul.

Chapitre 4

Stabilisation des équations d'Euler discrétisées par différences finies centrées

A ce jour, aucune étude complète n'a été effectuée pour analyser (i) l'effet du filtre sur la méthode numérique et, (ii) son interaction avec les conditions aux limites. Certains auteurs ont toutefois montré la nécessité de recourir à une telle procédure de stabilisation [80, 45]. De nombreuses méthodes existent pour analyser la stabilité des systèmes d'équations linéaires [38, 90]. Ce chapitre présente une étude, basée sur certaines de ces méthodes, de la stabilisation des équations d'Euler linéarisées discrétisées par la méthode numérique décrite au chapitre précédent (section 3.5). Certains aspects complémentaires de cette étude font l'objet des articles figurant dans les Annexes A et B du présent mémoire.

4.1 Instabilités en haute fréquence

Vichnevsky [90] a mis en évidence la présence de solutions parasites dans le cas de résolutions de problèmes hyperboliques par différences finies centrées. A une fréquence temporelle donnée, plusieurs solutions numériques coexistent, qui ne se propagent pas à la vitesse du son, ou ne sont pas advectés à la vitesse d'advection .

Soit une variable ϕ qui vérifie l'équation d'advection à la vitesse U_o :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + U_o \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad (4.1)$$

En appliquant une transformation de Fourier temporelle, et en notant Ω la pulsation temporelle, on obtient :

$$i\Omega \hat{\phi} = -U_o \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} \quad (4.2)$$

Par intégration analytique, on peut exprimer la solution comme :

$$\hat{\phi}(x, \Omega) = \hat{\phi}(0, \Omega)e^{-i\Omega x/U_o} \quad (4.3)$$

L'amplitude se conserve : $\bar{\phi}(x, \Omega) = \bar{\phi}(0, \Omega)$, et la dépendance en x est harmonique, avec un nombre d'onde $k = \frac{\Omega}{c}$, soit une longueur d'onde : $\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi U_o}{\Omega}$

Vichnevetsky remarque qu'en discrétisant l'équation 4.2 avec le schéma en espace que l'on souhaite étudier, on peut mettre en évidence des caractéristiques de la propagation des ondes unidimensionnelle.

Soit $\Phi_N = (\phi_1, \dots, \phi_N)$, la solution semi-discrète en espace sur la grille x_0, x_1, \dots, x_N avec $x_i = \frac{i}{N}$, $i = 0, N$. On peut écrire pour un schéma centré à 7 points d'ordre 6 ($a_1 = 45/60$, $a_2 = -9/60$, $a_3 = 1/60$) :

$$\frac{d\phi_i}{dt} = -\frac{U_o}{\Delta x} \sum_{j=1,3} a_j \phi_{i+j} \quad (4.4)$$

En effectuant une transformée de Fourier en temps, on obtient :

$$i\Omega \hat{\phi}_i = -\frac{U_o}{\Delta x} \sum_{j=1,3} a_j \hat{\phi}_{i+j} \quad (4.5)$$

soit :

$$\sum_{j=1,n} a_j \hat{\phi}_{i+j} + i\frac{\Omega \Delta x}{U_o} \hat{\phi}_i - \sum_{j=1,n} a_j \hat{\phi}_{i-j} = 0 \quad (4.6)$$

On remarque que cette équation dépend du seul nombre d'onde adimensionnel $k\Delta x = \frac{\Omega \Delta x}{U_o}$. On résout cette équation de récurrence pour la suite $(\hat{\phi}_i(\Omega) = \hat{\phi}(x = i\Delta x, \Omega))_{i=0,N}$. En notant $E(\Omega) = \frac{\hat{\phi}_{i+1}}{\hat{\phi}_i}$ le coefficient d'amplification spatiale, on peut écrire :

$$\sum_{j=1,n} a_j E^{j+n} + ik\Delta x E^n - \sum_{j=1,n} a_j E^{n-j} = 0 \quad (4.7)$$

Cette équation possède $2n$ solutions complexes $E_j(\Omega)$. Si on reconstitue ensuite la suite $\phi^j(x, \Omega)$ sur la grille (x_1, \dots, x_N) correspondant à la solution $E_j(\Omega)$ au point $x_n = n\Delta x$:

$$\phi^j(n\Delta x, \Omega) = \phi^j(0, \Omega)[E_j^n(\Omega)]. \quad (4.8)$$

Une seule suite ϕ^j approche la solution analytique de l'équation d'advection (voir équation 4.3). Pour le schéma centré d'ordre deux, Vichnevetsky obtient deux suites ϕ^1 et ϕ^2

en résolvant une équation du second degré. Les deux solutions $E_1(\Omega)$ et $E_2(\Omega)$ qu'il obtient sont de module 1. Il montre que la discrétisation spatiale de l'équation d'advection du premier ordre est aussi consistante avec l'équation des ondes (du deuxième ordre) si $u_o = c$ et suppose donc que deux solutions peuvent coexister. Parmi ces deux solutions, la première est l'approximation de la solution physique dans la gamme de longueur d'onde spatiale $[4\Delta x, +\infty[$ et l'autre la solution "parasite" dans la gamme de longueur d'onde spatiale $[2\Delta x, 4\Delta x]$.

Par analogie avec la résolution analytique, on peut ainsi écrire :

$$\phi^j(x_n = n\Delta x, \Omega) = \phi^j(0, \Omega) |E_j(\Omega)|^n e^{in \times \arg(E_j(\Omega))} = \phi_0^j e^{-i\Omega x_n / c_j^*(k\Delta x)} \quad (4.9)$$

Les solutions numériques ne se propagent pas à la vitesse d'advection U_o , mais à une vitesse de phase numérique c_j . Cela permet de définir une vitesse de phase pour chaque branche de solution E_j :

$$c_j^*(\Omega) = \frac{-\Omega\Delta x}{\arg(E_j(\Omega))} \quad (4.10)$$

Pour le schéma centré d'ordre deux, Vichnevetsky obtient :

$$\begin{cases} c_j^*(\Omega) = \frac{\Omega\Delta x}{\arcsin(\Omega\Delta x/U_o)} & \text{si } \arg(E^j) \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \\ c_j^*(\Omega) = \frac{\Omega\Delta x}{\pi - \arcsin(\Omega\Delta x/U_o)} & \text{si } \arg(E^j) \in [\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}] \end{cases} \quad (4.11)$$

On peut aussi définir une vitesse de groupe pour ces solutions, à partir de la définition de leur vitesse de phase :

$$Vg(\Omega) = \frac{d\Omega}{dk} = \frac{d\Omega}{d(\Omega/c^*(\Omega))} = \frac{d}{d\Omega}(\Omega c^*(k)) \quad (4.12)$$

A l'ordre deux, la vitesse de groupe de la première solution approche celle de la solution analytique, et la deuxième solution a une vitesse de groupe négative de valeur opposée.

L'analyse présentée ci-dessus a été effectuée pour le schéma centré d'ordre six. L'intervalle $0 < k\Delta x < \pi$ est discrétisé en 30 points équidistants. L'équation 4.7 est résolue à l'aide des formules ci-dessus. Les Figures 4.1 et 4.2 présentent les longueurs d'onde et les vitesses de groupe numériques des différentes solutions obtenues avec cette analyse.

Parmi les six solutions trouvées, S_1 approche la solution physique jusqu'à environ $\Omega\Delta x = 1,5$ en longueur d'onde et en vitesse de groupe. Elle rejoint ensuite une autre branche de solution S_2 de longueur d'onde courte $\lambda_2 \in [2\Delta x; 4\Delta x]$ et $Vg_2 \in [-2U_o; 0]$, déjà présente lors de la discrétisation par un schéma centré d'ordre deux. La nouvelle branche ainsi formée a une vitesse de groupe de l'ordre de $6U_o$. Parmi les quatre autres solutions, deux sont de module nettement supérieur à un et deux sont de module très inférieur à

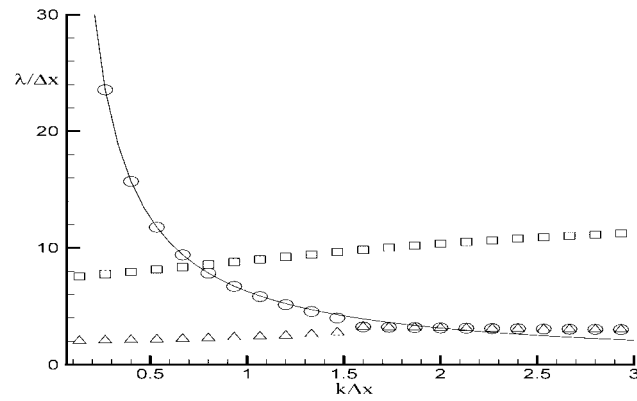


FIG. 4.1: Analyse de Fourier de la méthode non filtrée d'ordre six. Longueur d'onde spatiale en fonction du nombre d'onde. En trait plein la solution exacte $\lambda = 2 * \pi / \Omega$.

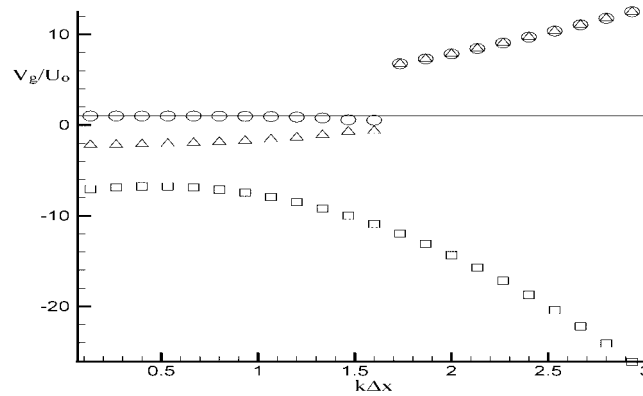


FIG. 4.2: Analyse de Fourier de la méthode non filtrée d'ordre six. Vitesse de groupe V_g en fonction du nombre d'onde. En trait plein la solution exacte, fonction constante et égale à un $V_g/U_o = 1$.

un et ne sont donc pas représentés sur la grille de calcul. La solution (S_3) a une longueur d'onde λ_3 qui varie dans l'intervalle $[7\Delta x; 12\Delta x]$ et une vitesse de groupe très importante et négative, $Vg_3 < -7U_o$. Elle est présentée sur les Figures 4.1 et 4.2. Une partie de l'énergie peut, en présence d'une discontinuité numérique (condition aux limites), se réfléchir sur cette composante qui va se propager puisqu'elle sera suffisamment résolue $\lambda_3 > 4\Delta x$.

Lorsque la condition limite au point N est discrétisée par un schéma décentré, Vichnevsky montre qu'une partie de l'énergie de la solution numérique "physique" se transmet à la solution numérique "parasite". Cette énergie réfléchie peut-être réduite en appliquant une discrétisation d'ordre élevé pour la condition limite en x_N . Ces deux solutions qui ont des supports de nombres d'onde spatiaux distincts contiennent l'énergie du signal à la fréquence Ω . Le paquet d'ondes réfléchies est donc dans la gamme des longueurs d'onde courtes $[2\Delta x, 4\Delta x]$.

L'existence de plusieurs solutions peut expliquer la croissance plus forte des instabilités de longueur d'onde courte obtenues lors des simulations avec la discrétisation à l'ordre élevé. Ces solutions parasites croissent et se propagent à des vitesses de groupe très grandes (environ 10 fois la vitesse d'advection), positives et négatives. A l'ordre deux, on peut réduire leur réflexion et les annihiler avec une condition aux limites d'ordre plus élevé. A l'ordre six, la croissance rapide des ondes parasites doit être enrayée par un traitement spécifique.

4.2 Méthodes de stabilisation

L'instabilité haute fréquence observée dans le cas d'une discrétisation par des différences finies centrées a conduit plusieurs auteurs à recourir à des solutions empiriques. Celles-ci visent à ajouter de la dissipation numérique dans le schéma pour les hautes fréquences. Cela peut consister en un décentrage du schéma, à l'introduction d'un terme de dissipation artificielle dans les équations ou encore, comme cela est fait dans le logiciel *sAbrinA*, de l'application d'une étape supplémentaire de filtrage de la solution.

4.2.1 Méthode de viscosité artificielle

Plusieurs auteurs [85, 1, 3, 11], qui utilisent une méthode aux différences finies centrées, introduisent un nouveau terme dans les équations semi-discrètes.

Tam [85] propose l'ajout d'un terme de dissipation artificielle dans les équations semi-discrètes. Ce terme résulte de l'application d'un opérateur discret sur la solution elle-même, opérateur positif, centré sur 7 points et de moyenne nulle. Il vaut 1 pour le nombre d'onde de coupure $k = \frac{\pi}{\Delta x}$. Les coefficients du schéma de cet opérateur sont obtenus en minimisant

l'écart avec une fonction gaussienne qui vérifie les propriétés citées.

Considérons l'équation d'advection à la vitesse U_o pour la variable ϕ sur la grille $(x_o, x_i = i\Delta x, x_N)$. La méthode de viscosité artificielle consiste à introduire à droite dans l'équation semi-discrète un terme de dissipation D :

$$\frac{d\phi_l}{dt} + U_o \sum_{j=-3,3} a_j \phi_{l+j} = \frac{-\nu}{(\Delta x)^2} \sum_{j=-3,3} d_j \phi_{l+j} \quad (4.13)$$

où $(a_j, j = -3, 3)$ sont les coefficients du schéma DRP, $(d_j, j = -3, 3)$ les coefficients de l'opérateur de dissipation artificielle et ν la viscosité artificielle. Au vu de la valeur des coefficients d_j , l'opérateur de dissipation artificielle D peut-être mis sous la forme $D = 1 - \mathcal{F}$ où \mathcal{F} est un filtre du type de celui présenté précédemment (section 3.4).

Pour les cas de forts gradients dans la solution, comme pour les chocs en non-linéaire, Tam propose d'adapter ce terme suivant le gradient de vitesse local de l'écoulement. Il remarque alors que la valeur adéquate pour le coefficient $\frac{\nu}{(\Delta x)^2}$ est $\frac{1}{0.06}$. Cette valeur est l'inverse du CFL couramment utilisé par Tam dans ses simulations.

Adams et Stolz [1] proposent un terme de pénalisation qui a la même nature que celui proposé par Tam. Ils utilisent deux niveaux de filtrage. Un premier niveau exclut les nombres d'onde $\xi > \xi_c$ à l'aide du filtre G_1 et un deuxième niveau de filtrage modélise les nombres d'ondes non représentés sur la grille (x_1, \dots, x_N) sur laquelle la projection de u est (u_1, \dots, u_N) .

Le premier niveau de filtrage permet d'imposer une dissipation physique dans le cas d'une modélisation par les équations de Navier-Stokes. Il est effectué par convolution avec le filtre G_1 : $G_1 * u = \bar{u}$. Le deuxième niveau de filtrage correspond à la méthode précédemment proposée et couramment utilisée en aéroacoustique numérique. Ce terme $-\chi(\bar{u}_N - G_2 * \bar{u}_N)$ est similaire au terme de Tam : $-(Du)_l = -\frac{\nu}{(\Delta x)^2} \sum_{j=-3,3} d_j u_{l+j}$ puisque l'opérateur $Id - G_2$, dans le premier cas, et l'opérateur D , dans le deuxième cas, ont des fonctions de transferts similaires. La méthode de régularisation est donc la même. Le paramètre χ peut varier d'un facteur un à dix sans changer son impact sur la solution.

Dans l'équation de transport-diffusion suivante monodimensionnelle pour la variable u dérivée par les auteurs, ∂x est un opérateur discret puisque la solution a déjà été discrétisée sur la grille :

$$\frac{\partial \bar{u}_N}{\partial t} + \frac{\partial(F_N(\bar{u}_N))}{\partial x} = \frac{\partial(F_N(\bar{u}_N))}{\partial x} - G_1 * \frac{\partial(F_N(u_N))}{\partial x} - \chi(\bar{u}_N - G_2 * \bar{u}_N) \quad (4.14)$$

où F représente le flux.

Le premier terme à droite dans l'équation $\frac{\partial(\mathbf{F}_N(\bar{u}_N))}{\partial x} - G_1 * \frac{\partial(\mathbf{F}_N(u_N))}{\partial x}$ correspond à l'erreur de commutation du filtre avec la dérivation spatiale. Adams et Stolz [1] proposent d'étudier un nouveau modèle :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(u)}{\partial x} = -\chi(u - G_2 * u) \quad (4.15)$$

où G_2 modélise maintenant les deux niveaux de filtrage de l'équation précédente.

Cela correspond à une simulation numérique directe régularisée par un terme de pénalisation. Lorsque $\xi_c = \xi_N$, c'est à dire lorsque l'action du premier filtre est nulle, la turbulence n'est pas modélisée [61]. La méthode est appliquée à divers problèmes dont des captures de chocs pour lesquels, comme pour la propagation acoustique, une méthode d'ordre élevé est nécessaire. Adams et Solz [1] remarquent que cette méthode est équivalente à un filtrage tous les $\frac{1}{\chi \Delta t}$ pas de temps.

Les méthodes de Tam [80] et celle d'Adams et Stolz [1] ne sont donc qu'une seule et même méthode, appelée pénalisation (Modèle 2) dans la suite, utilisant le même type d'outil que le filtre présenté dans la section (3.4).

4.2.2 Modèles semi-discrets et discrets étudiés

Les motivations de cette étude sur l'application du filtrage sont :

- d'identifier la meilleure place du filtrage dans l'algorithme
- de déduire les contraintes supplémentaires liées à cette application
- de vérifier l'intérêt des propriétés des filtres dans la mise au point d'une condition aux limites non-réfléchissante.

Les trois modèles étudiés sont les suivants :

Modèle 1 : Filtrage de l'incrément temporel

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} = -\mathcal{F} \left(\sum_{j=1,3} D_j \cdot \mathbf{F}_j(U_i) \right) \quad (4.16)$$

Modèle 2 : Méthode de pénalisation

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} = - \sum_{j=1,3} D_j \cdot \mathbf{F}_j(U_i) - \chi(\mathcal{F} - Id)(U_i) \quad (4.17)$$

Modèle 3 : Filtrage en fin d'itération

$$\begin{cases} \frac{\partial U_i}{\partial t} = - \left(\sum_{j=1,3} D_j \cdot F_j(U_i) \right) \\ U_*^{n+1} = \mathcal{F}U^{n+1} \end{cases} \quad (4.18)$$

où D_j représente la dérivation discrète dans la direction j et F_j , la j ème colonne de la matrice de flux. χ est appelé coefficient de pénalisation, il est homogène à l'inverse d'un temps et $\chi > 0$.

Les Modèles 1 et 2 sont semi-discrets en espace. On peut donc déterminer, pour chacun de ces deux modèles, si les valeurs propres liées aux modes de Fourier se trouvent dans le domaine de stabilité du schéma temporel, comme cela a été fait précédemment. Pour le Modèle 3 en revanche, la comparaison n'est possible qu'après intégration temporelle et doit se faire à partir de l'analyse du coefficient d'amplification.

4.3 Stabilité en conditions aux limites périodiques

4.3.1 Propriétés des modèles

On se replace dans le cadre de l'équation d'advection à la vitesse c . Pour les Modèles 1 et 2, on peut déterminer l'ensemble $\{\bar{\Omega} \in \mathbb{C}, \bar{\Omega} = \bar{k}c\}$, où \bar{k} représente le nombre d'onde approché lié à la discrétisation en espace et \mathbb{C} l'ensemble des complexes. Pour le modèle 1, on a :

$$\bar{k}_1(k) = \mathcal{F}(k) \cdot iD(k) \quad (4.19)$$

$$= i(f_0 + \sum_{j=1}^5 f_j \cos(jk\Delta x)) \cdot \left(\sum_{j=1}^3 a_j \frac{\sin(jk\Delta x)}{\Delta x} \right) \quad (4.20)$$

Le nombre d'onde approché reste imaginaire pur. Le maximum de la fonction $\bar{k}_1(k)$ est obtenu en $k_{max} = \frac{1,7}{\Delta x}$ et vaut $\frac{1,45}{\Delta x}$, d'où, pour le schéma de Runge-Kutta d'ordre 3 (voir chapitre 3) $\frac{c\Delta t}{\Delta x} < \frac{1,7}{1,45} = 1,17$. La limite de stabilité est repoussée de 1,06 à 1,17. De plus, la Figure 4.3 montre que la perte de précision engendrée est faible et la limite de précision reste autour de $k\Delta x = 1$. Cependant, ce modèle ne permet pas de stabiliser les hautes fréquences $[2\Delta x; 4\Delta x]$, puisque $\bar{k}_1(\frac{\pi}{\Delta x}) = 0$.

Pour le Modèle 2, on obtient le nombre d'onde approché suivant :

$$\bar{k}_2(k) = iD(k) + \frac{\chi}{c}(\mathcal{F}(k) - 1) \quad (4.21)$$

$$= i \sum_{j=1}^3 a_j \frac{\sin(jk\Delta x)}{\Delta x} + \frac{\chi}{c} (f_0 + \sum_{j=1}^5 f_j \cos(jk\Delta x) - 1) \quad (4.22)$$

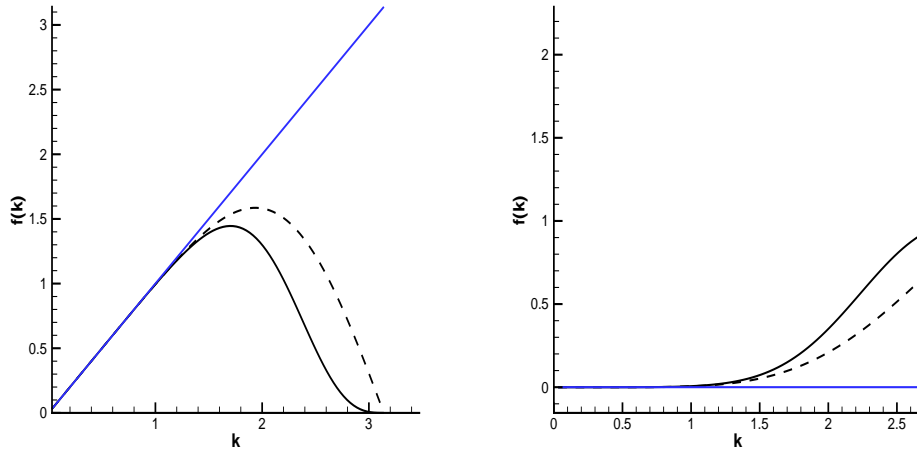


FIG. 4.3: Modèle 1. A gauche : nombre d'onde approché $\bar{k}_1(k)$. A droite : vitesse de phase numérique. Modèle 1 (trait plein), schéma de base (noir discontinu) et opérateur continu (bleu).

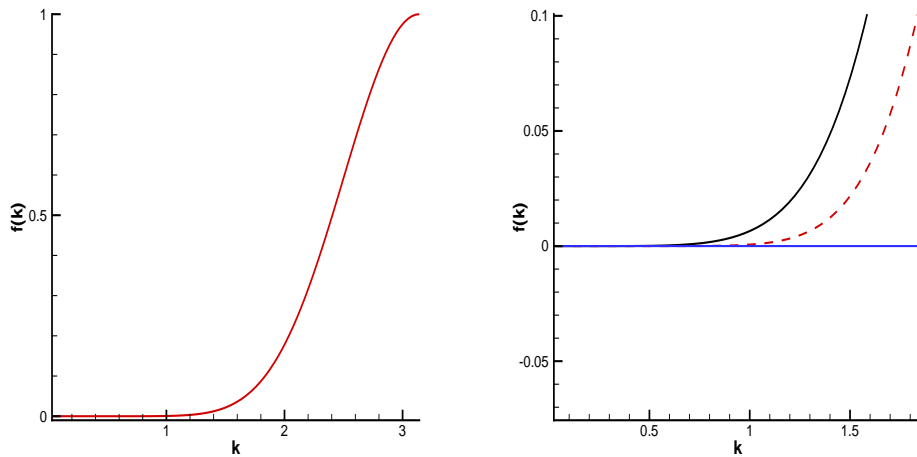


FIG. 4.4: Modèle 2. A gauche : Partie réelle introduite sur le nombre d'onde approché par le Modèle 2, $\bar{k}_2(k)$, avec $\chi\Delta t = 1$. A droite : Comparaison des parties réelle (rouge) et imaginaire (noir) de $\bar{k}_2(k)$. $f(k) = 0$ (bleu).

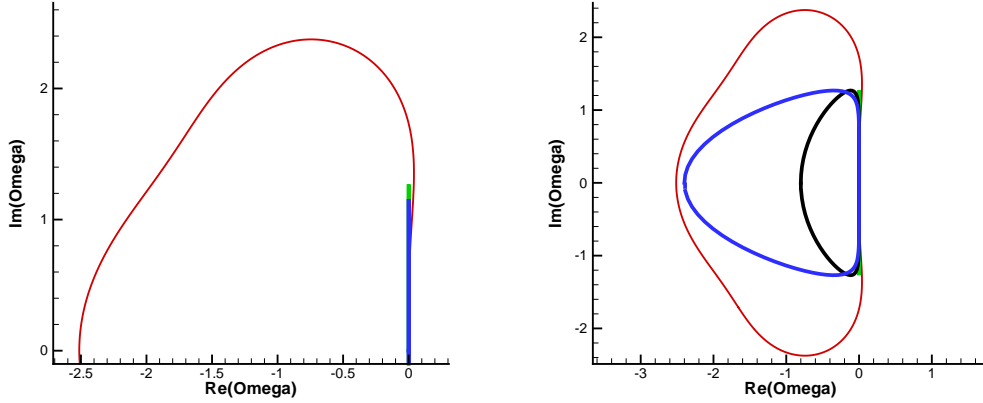


FIG. 4.5: Fréquence approchée $\bar{\Omega}(k)$ à $CFL = 0,8$. A gauche : Modèle 1 (vert), schéma de base (bleu), limite du diagramme de stabilité du schéma RK3 (rouge). A droite : Modèle 2 pour $\chi\Delta t = 1$ (noir) et $\chi\Delta t = 3$ (bleu), schéma de base (vert), limite du diagramme de stabilité du schéma RK3 (rouge).

Ce nombre complexe n'est pas imaginaire pur. Une partie réelle non nulle apparaît dans la formule 4.22. L'erreur par rapport au nombre d'onde exact comporte donc une partie dissipative (Fig. 4.4 à gauche), le schéma n'est plus conservatif. L'erreur sur la partie réelle est plus faible que celle sur la partie imaginaire (Fig. 4.4 à droite). En effet, l'application du filtre introduit, dans le développement de Taylor, une erreur plus faible (ordre 10) que celle due à la dérivation (ordre 6). Ce schéma garde donc les mêmes propriétés de précision que le schéma de base, par contre sa limite de stabilité n'est plus seulement restreinte par celle du schéma en temps sur l'axe imaginaire $lim(RK3)_{im} \approx \sqrt{3}$. La contrainte sur l'axe imaginaire reste toutefois la même que pour le schéma de base. Les hautes fréquences sont amorties : $Re(\bar{k}_2(\frac{\pi}{\Delta x})) = -\chi\Delta t < 0$.

Une nouvelle contrainte de stabilité apparaît sur l'axe réel :

$$0 < \chi\Delta t < |lim(RK3)_{re}| \approx 2,5 \quad (4.23)$$

La condition de stabilité dépend donc de χ . A $CFL = 0,8$, χ peut donc prendre des valeurs comprises entre 0 (schéma de base) et 3 environ (courbe en bleu sur la Figure 4.5).

En représentant $Re(\bar{\Omega}) = f(k)$, on s'aperçoit qu'augmenter χ revient à augmenter la dissipation mais avec une limite imposée par le domaine de stabilité du schéma en temps. D'une part, si χ est faible, la dissipation n'est pas assez forte sur les modes en haute fréquence et la stabilité est toujours liée au mode qui réalise le maximum de $Im(\bar{k})$ tel que $\lambda \approx 4\Delta x$. D'autre part, si χ est fort, la dissipation des modes $\lambda \approx 4\Delta x$ est satisfaisante, mais les modes $\lambda = 2\Delta x$ deviennent instables si la borne sur l'axe réel n'est pas respectée.

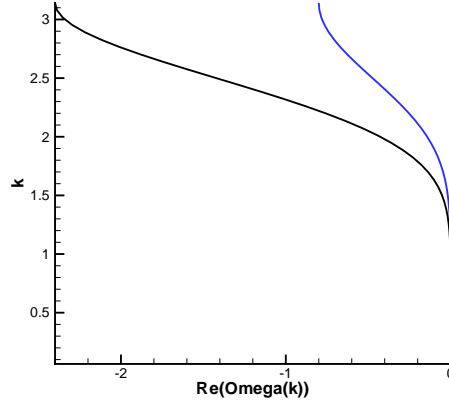


FIG. 4.6: Partie réelle de $\bar{\Omega}(k)$ à $CFL = 0,8$ en fonction de k : effet de la méthode sur la décroissance des hautes fréquences. $\chi\Delta t = 0$ (rouge), $\chi\Delta t = 1$ (bleu) et $\chi\Delta t = 3$ (noir).

Le paramètre χ peut évoluer selon le CFL choisi, tout en restant borné. Cela confirme le résultat de Adams et Stolz [1] qui remarquent que la méthode n'est pas sensible à la valeur de χ pourvu que celui-ci soit dans une gamme donnée.

L'influence de χ se voit bien sur la Figure 4.6 où l'on distingue l'action ciblée du Modèle 2 sur les hautes fréquences ($k\Delta x > 1$) suivant la valeur de χ . Les basses fréquences ($k\Delta x < 1$) ne sont pas du tout dissipées par cette action et gardent une partie réelle nulle.

Pour conclure sur l'étude du diagramme de stabilité temporelle, on peut dire que contrairement au Modèle 1, le Modèle 2 introduit une dissipation numérique sur les hautes fréquences (mal résolues) et stabilise la méthode numérique pourvu que χ soit borné dans un intervalle qui dépend de la méthode d'intégration temporelle.

4.3.2 Analyse du coefficient d'amplification des trois modèles

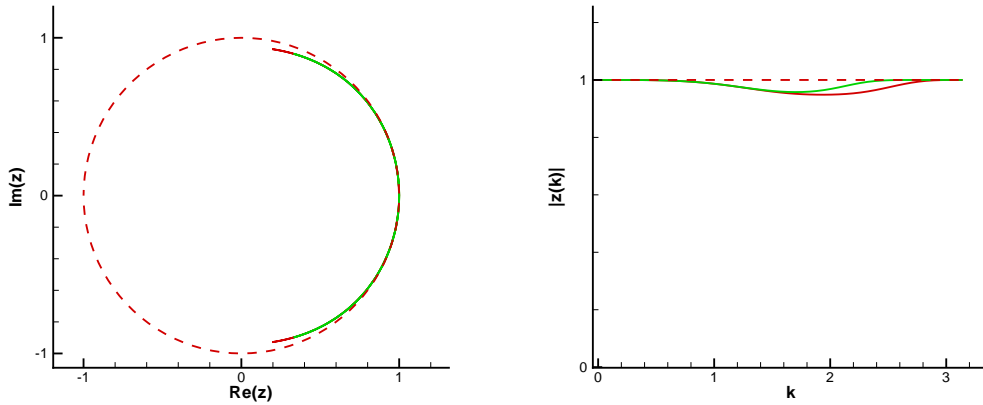


FIG. 4.7: Modèle 1. Coefficient d'amplification de tous les modes de Fourier à $CFL = 0,8$. A gauche : localisation dans le plan complexe. A droite : module. Modèle 1 (vert), schéma de base (rouge), limite de stabilité $|z| = 1$ (rouge discontinu).

Le lieu géométrique du coefficient d'amplification du Modèle 1 (Fig.4.7) est similaire à celui du schéma de base à la différence près qu'il est plus restreint. Le module du coefficient d'amplification des modes haute fréquence est toujours proche de un. La stabilité n'est pas améliorée par rapport au schéma de base pour les grands nombres d'onde. Ce résultat confirme celui obtenu au paragraphe précédent à partir du diagramme de stabilité temporelle.

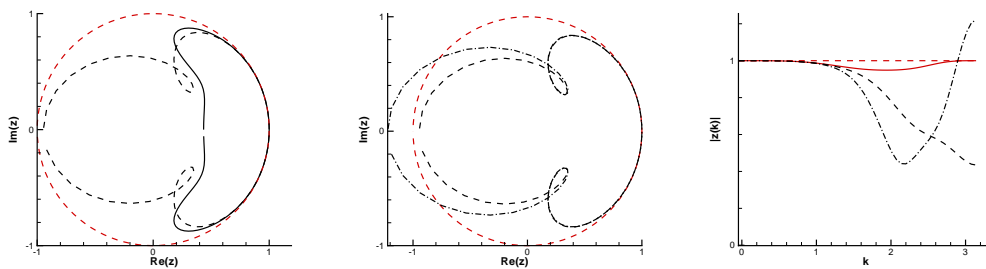


FIG. 4.8: Modèle 2. Coefficient d'amplification de tous les modes de Fourier à $CFL = 0.8$. A gauche : localisation dans le plan complexe, $\chi\Delta t = 1$ (noir) $\chi\Delta t = 3.1$ (noir discontinu). Au milieu : localisation dans le plan complexe, $\chi\Delta t = 3.1$ (--) et $\chi\Delta t = 3.2$ (- · - ·). A droite : module (idem). Schéma de base (rouge continu) et limite de stabilité $|z| = 1$ (rouge discontinu).

Le Modèle 2 change le lieu géométrique du coefficient d'amplification. Comme on l'a vu précédemment χ peut varier dans une gamme qui dépend du pas de temps. Sur la Figure 4.8, à gauche, les lieux géométriques sont présentés pour $\chi\Delta t = 1$ et $\chi\Delta t = 3, 1$. Le schéma est alors stabilisé, les valeurs propres à forte partie réelle négative sont les modes haute fréquence, comme on peut le voir sur la Figure 4.8 à droite, et $Re(z_2(\frac{\pi}{\Delta x})) = \chi\Delta t/\pi$. En revanche, le choix d'une valeur trop forte pour χ rend instables ces hautes fréquences et la méthode complète devient alors elle-même instable, puisque comme on le voit sur les Figure 4.8 du milieu et de droite, le lieu géométrique du coefficient d'amplification sort du cercle de stabilité.

Le module d'amplification des modes de Fourier obtenu pour le Modèle 3 est présenté sur la Figure 4.9. Le Modèle 3 annule le module du coefficient d'amplification des ondes à deux points par longueur d'onde. Le schéma est stable et les modes haute fréquence ont une décroissance forte. Le résultat est assez similaire à celui obtenu avec le Modèle 2 pour $\chi\Delta t = 1$. De plus, pour la gamme basse fréquence $k \in [0; 1, 2/\Delta x]$ le Modèle 3 a les mêmes caractéristiques de propagation que le schéma de base.

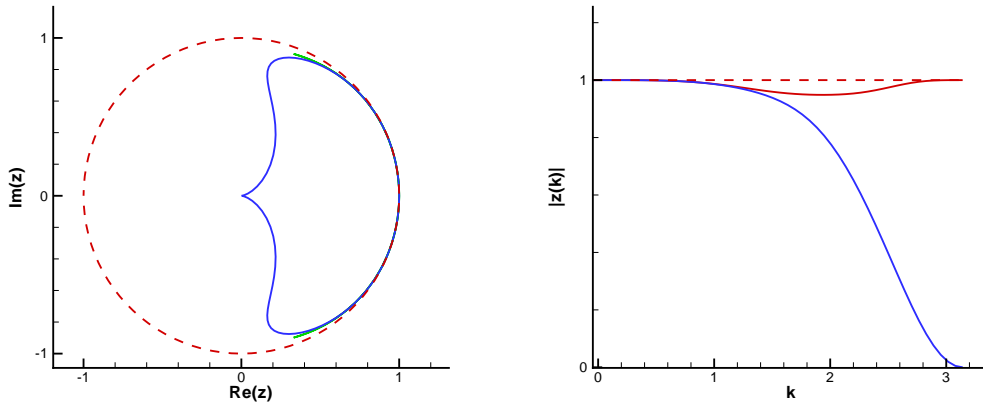


FIG. 4.9: Modèle 3. Coefficient d'amplification de tous les modes de Fourier à $CFL = 0, 8$. À gauche : localisation dans le plan complexe. À droite : module. Modèle 3 (bleu), schéma de base (rouge), limite de stabilité $|z| = 1$ (rouge discontinu).

4.3.3 Conclusion partielle

Les Modèles 2 et 3 (Figure 4.10) permettent de stabiliser la simulation en dissipant les hautes fréquences mal résolues par le schéma de dérivation spatiale. Cependant, le Modèle 2 nécessite de prendre une valeur pour le paramètre χ qui soit dans une gamme qui dépend du pas de temps de la simulation et du schéma d'intégration temporelle, en particulier de sa limite de stabilité sur l'axe réel. Cette méthode nécessite donc une vigilance accrue. Au contraire, le Modèle 3 assure la stabilité en annulant à chaque itération la présence

de ces modes parasites. La méthode numérique ainsi stabilisée permet des simulations sur des temps longs avec un CFL proche de 1, ce qui autorise son utilisation dans tous les cas pratiques rencontrés. Ce modèle est implanté dans le code *sAbrinA* pour lequel il s'est avéré particulièrement robuste, comme on le verra dans la suite.

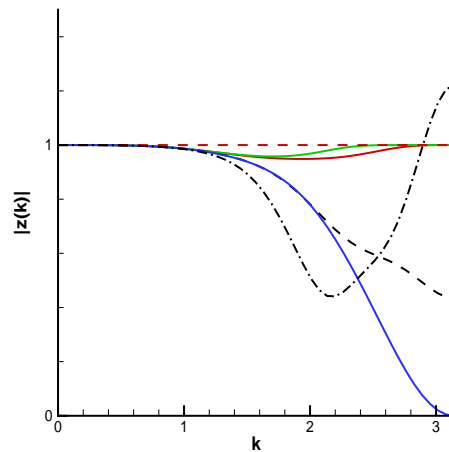


FIG. 4.10: Comparaison des modèles. Module du coefficient d'amplification de la méthode complète de tous les modes de Fourier. Limite de stabilité (rouge discontinu), schéma de base (rouge plein), Modèle 1 (vert), Modèle 2 $\chi = 1$ (—) et $\chi\Delta t = 3, 2$ (— · — ·), Modèle 3 (bleu).

4.4 Stabilité en conditions aux limites de sortie des ondes

L'analyse de Fourier précédente n'est plus valable en conditions aux limites non périodiques. Or, un point déterminant de la méthode numérique (section 3.5) est l'effet de ces conditions aux limites sur la sortie des ondes du domaine numérique. Dans ce paragraphe, on se propose de montrer que l'intégration du filtre dans la condition aux limites est nécessaire pour obtenir une condition aux limites non-réfléchissante.

4.4.1 Méthode de stabilité matricielle

Discrétisation spatiale La méthode de stabilité matricielle permet de représenter l'action des conditions aux limites. On aboutit à l'étude d'un système d'équations différentielles en temps.

Soit u une variable vérifiant l'équation d'advection et u_N ses valeurs discrètes sur la grille (x_1, \dots, x_N) , on peut écrire :

$$\frac{du_N}{dt} = S \cdot u_N \quad (4.24)$$

La matrice S contient les informations liées au schéma en espace et les conditions aux limites. Les vecteurs propres de S forment une base de vecteurs complète sur laquelle se projette la solution :

$$u_N(t) = \sum_{j=1,N} u_N^j(t) \cdot V^j \quad (4.25)$$

Or, chaque mode V^j , de valeur propre associée Ω_j , vérifie :

$$\frac{dV^j}{dt} = \Omega_j V^j \quad (4.26)$$

La solution u_N est une combinaison de ces vecteurs propres et on peut alors reconstruire la solution par intégration temporelle analytique comme :

$$u_N(n\Delta t) = \sum_{j=1,N} u^j(t=0) \cdot e^{\Omega_j n\Delta t} \cdot V^j \quad (4.27)$$

où $u^j(t=0)$ est la projection de la condition initiale sur la base de vecteurs V^j , et Ω_j la valeur propre associée à ce mode.

Le système d'équations différentielles est bien posé si et seulement si toutes les valeurs propres ont une partie réelle négative ou nulle.

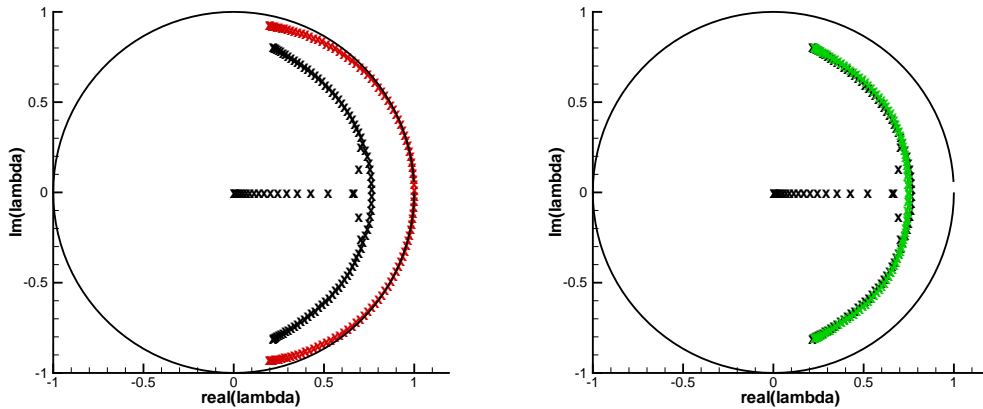


FIG. 4.11: Localisation dans le plan complexe des valeurs propres à $CFL = 0,8$. Modèle 3 (croix noires), limite de stabilité (noir continu). A gauche : Modèle 1 (croix rouges). A droite : modèle 2 (croix vertes).

Méthode temporelle Il est possible de prendre en compte la méthode temporelle, comme cela est effectué pour la méthode de Von Neumann. On vérifie alors que les valeurs propres obtenues par l'analyse matricielle sont situées dans le diagramme de stabilité de la méthode numérique choisie.

Une autre façon de prendre en compte la méthode numérique complète est d'écrire sa matrice d'amplification A :

$$u_N^{n+1} = A \cdot u_N^n \quad (4.28)$$

et d'étudier les valeurs propres et vecteurs propres de A .

4.4.2 Résultats

La méthode d'analyse matricielle a été effectuée pour les Modèles 1, 2 et 3. Les résultats sont présentés en terme de localisation des valeurs propres dans le plan complexe, de valeur du rayon spectral en fonction du CFL et de forme des vecteurs propres obtenus.

Valeurs propres

Les valeurs propres obtenues pour les différents modèles sont présentées sur la Figure 4.11 pour $CFL = 0,8$, et les rayons spectraux correspondants sur la Figure 4.12 dans la gamme de CFL $[0 ; 1,5]$. Les valeurs propres de la matrice correspondant au Modèle 1 ont un module proche de 1 à $CFL = 0,8$. Le rayon spectral reste proche de 1 pour $CFL < 1.06$ (limite obtenue en conditions aux limites périodiques). La stabilité n'est pas assurée sur de

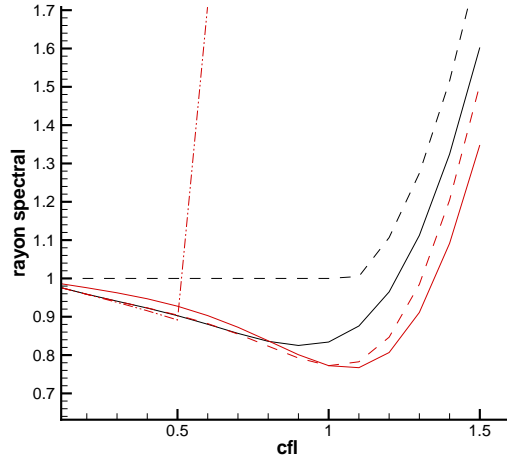


FIG. 4.12: Rayon spectral en fonction du CFL. Schéma de base (noir discontinu), Modèle 3 (noir continu), Modèle 2 avec $\chi = 1$ (rouge continu), Modèle 2 $\chi = 2$ (rouge discontinu), Modèle 2 avec $\chi = 5$ (rouge discontinu pointillés).

longs temps de simulation. Pour $CFL > 1.06$, le rayon spectral est nettement supérieur à 1 et la méthode est instable.

Les valeurs propres correspondant au Modèle 2 se trouvent à l'intérieur du domaine de stabilité. Le Modèle 2 avec $\chi \in]0; 3]$ est donc stable et le rayon spectral correspondant descend jusqu'à 0,75 pour $CFL = 1$. En revanche, pour $\chi = 5$ cette stabilisation n'intervient que pour $CFL < 0.5$.

Le Modèle 3 est également stable à $CFL = 0,8$ et même jusqu'à $CFL \approx 1$. Le minimum est obtenu pour $0,8 < CFL < 0,9$. La courbe du rayon spectral est très similaire à celles obtenues avec le Modèle 2 pour $\chi = \frac{1}{\Delta x}$.

L'étude du rayon spectral de la matrice d'amplification de la méthode numérique montre qu'il est nécessaire d'utiliser un filtre. L'approche combinant la diminution de l'ordre du schéma de dérivation et du filtre, Modèles 2 et 3, permet d'améliorer nettement la stabilité de la méthode numérique pour $CFL < 1, 2$. Cela est suffisant pour les simulations puisque le CFL couramment utilisé dans la suite est autour de 0,8. Pour le Modèle 2, il paraît judicieux de prendre en compte la valeur du CFL pour la détermination de Δt . Un bon choix pour χ est $\frac{1}{\Delta t}$. Les Modèles 2 et 3 sont équivalents pour un schéma temporel Euler explicite d'ordre un (Annexe A).

Vecteurs propres

La Figure 4.13 montre que les vecteurs propres des Modèles 2 et 3, correspondant à des modes soutenus, c'est-à-dire tels que $Re(\Omega) \approx 0$ ou $|\lambda| \approx 1$, sont des vecteurs à composante nulle à l'intérieur du domaine de calcul. L'énergie est dissipée dans les derniers points du

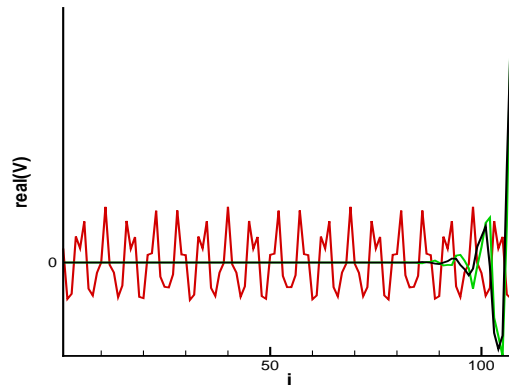


FIG. 4.13: Distribution spatiale de la partie réelle d'un vecteur propre soutenu ($Re(\Omega) \approx 0$). Modèle 1 (rouge), Modèle 2 (vert), Modèle 3 (noir).

domaine, dans la zone d'absorption. La solution, qui est une combinaison linéaire de ces vecteurs propres, aura donc une contribution quasi-nulle dans le domaine, assurant le caractère non-réfléchissant de la condition aux limites. La forme de ces vecteurs propres a été retrouvée lors de simulations de propagation monodimensionnelle (Annexe A).

Les vecteurs propres du Modèle 1 oscillent fortement sur toute la longueur du domaine numérique. Ils ne permettent pas la libre sortie des ondes. L'énergie n'est pas dissipée malgré la baisse de l'ordre des opérateurs de filtrage et de dérivation près des bords. Cette énergie se réfléchit, et les modes haute fréquence créés vont contaminer la solution et la simulation sera instable. Ce comportement est le même que celui observé en l'absence de filtrage.

Conclusion partielle

Cette analyse de la stabilité en conditions aux limites de sortie des ondes vient confirmer (i) celle effectuée précédemment dans le cas périodique et (ii) celle menée par Koutsavdis *et al.* [45] sur l'impact du filtrage sur la stabilité des simulations en conditions aux limites non-périodiques. Le Modèle 3 qui consiste à filtrer la solution à la fin de chaque pas de temps stabilise la simulation en dissipant l'énergie sur quelques points en fin de domaine de calcul. En effet, la présence de conditions aux limites non-périodiques convertit l'énergie du signal incident répartie sur les mode basse fréquence sur une gamme haute fréquence mal résolue et instable. L'interaction du filtre et de la condition aux limites est décisive puisque pour le Modèle 1, la réduction de l'ordre des opérateurs près des bords ne permet pas la dissipation de l'énergie.

4.5 Stabilité et réflexions numériques dans les simulations

Les bons résultats de stabilité du Modèle 3, obtenus sur un cas académique à l'aide de l'analyse de Fourier et l'analyse matricielle, sont vérifiés ici sur un cas de propagation bidimensionnelle classique. Le niveau d'énergie réfléchi est quantifié pour s'assurer que la méthode numérique est effectivement non-réfléchissante.

Le cas test présenté ci-dessous, proposé par Tam [80], permet de quantifier la réflexion numérique obtenue dans les simulations numériques bidimensionnelles. Le fluide est au repos. Le maillage curviligne est obtenu en déformant, par une fonction sinusoidale [71, 91], un maillage initialement cartésien uniforme de dimensions $[-100, 100] \times [-100, 100]$ dont la taille de maille est $\Delta x = \Delta y = 1$. La condition aux limites décrite et analysée précédemment est imposée sur toutes les frontières.

La perturbation initiale s'exprime de la façon suivante :

$$\rho(x, y, t = 0) = \epsilon e^{-\frac{(x^2+y^2)}{b^2}} \quad (4.29)$$

$$p(x, y, t = 0) = c_0^2 \rho(x, y, t = 0) \quad (4.30)$$

$$u(x, y, t = 0) = 0 \quad (4.31)$$

$$v(x, y, t = 0) = 0 \quad (4.32)$$

avec $\epsilon = 0,01$ et $b = 3$.

La solution est présentée à différents instants sur la Figure 4.14. La propagation circulaire attendue est obtenue de façon satisfaisante. On voit que les modes parasites sont concentrés près des frontières du domaine de calcul. Au dernier instant, le niveau résiduel de pression est 1000 fois plus faible que le niveau initial dans le domaine.

Cette simulation montre l'efficacité du traitement de sortie de l'approche définie dans la section 2.5 couplée au Modèle 3. Il est possible d'améliorer ce résultat en étirant les mailles correspondant aux points fictifs et constituer ainsi une zone éponge plus étendue.

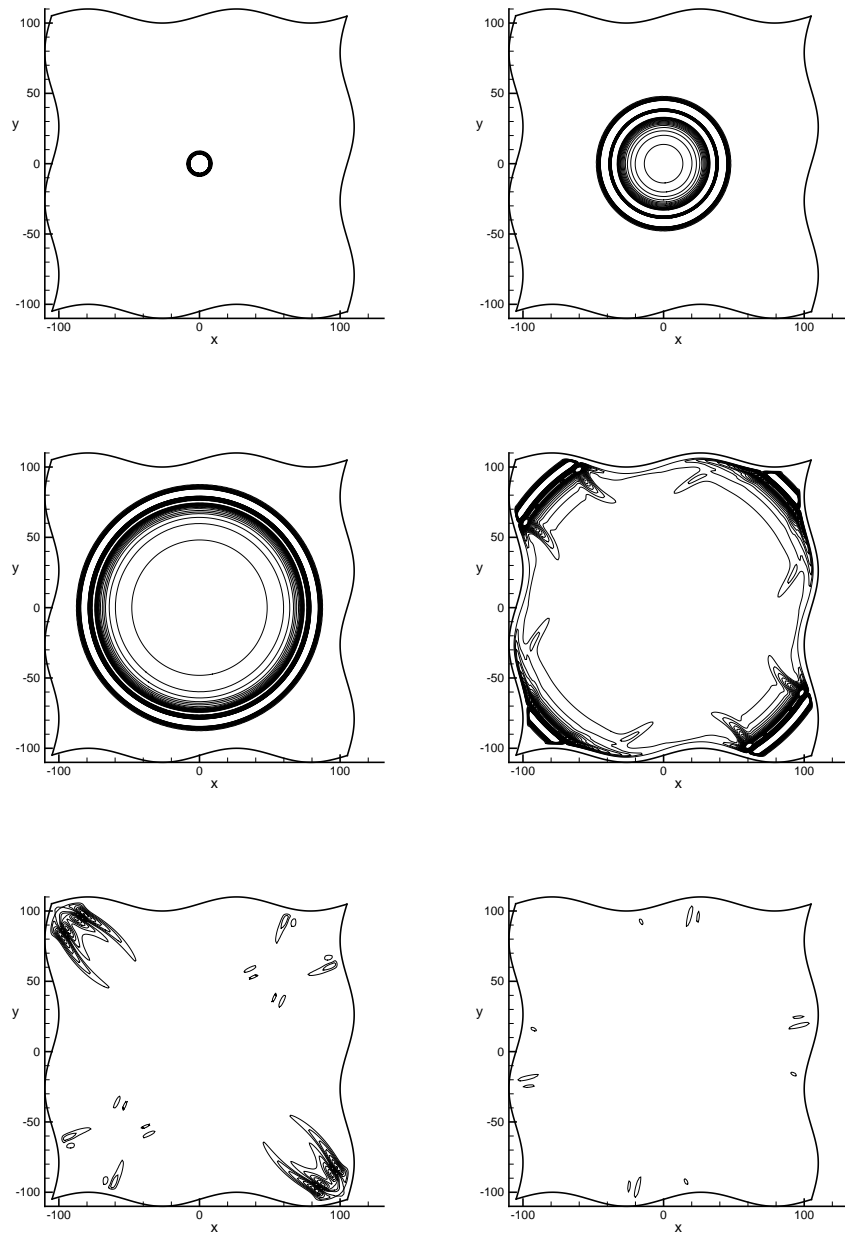


FIG. 4.14: Distribution de la fluctuation de pression sur le maillage ondulé 2D de $t = 0$ à $t = 200$, tous les $\Delta t = 40$ (de gauche à droite et de haut en bas). $CFL = 0,1$. 20 isoniveaux de pression normalisée dans la gamme $[2 \cdot 10^{-5}, 3 \cdot 10^{-4}]$.

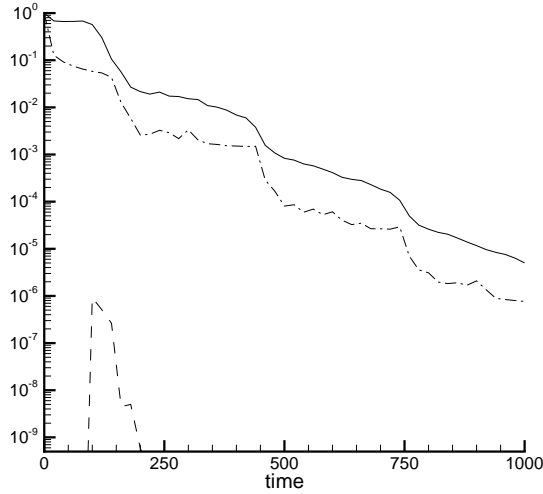


FIG. 4.15: Propagation d'une source impulsionnelle gaussienne sur le maillage ondulé. Evolution du niveau d'énergie fluctuante de pression. Domaine entier : norme L^2 (trait continu) et L^∞ (trait discontinu pointillé). Zone éponge : norme L^2 (trait discontinu).

Le niveau d'énergie fluctuante de pression intégré sur le domaine entier, composé de N points de calcul de coordonnées x_N , est calculé à l'aide des normes L^2 et L^∞ définies de la façon suivante :

$$\begin{cases} \|p\|_2(t) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N p(x_N, t)}{\sum_{i=1}^N p(x_N, t=0)}} \\ \|p\|_\infty(t) = \frac{\max_{i=1, N} p(x_N, t)}{\max_{i=1, N} p(x_N, t=0)} \end{cases} \quad (4.33)$$

L'évolution au cours du temps de ce niveau d'énergie est représenté sur la Figure 4.15. Pour les deux normes, l'énergie résiduelle présente une décroissance monotone. On observe des plateaux qui correspondent à des durées de propagation de l'onde résiduelle successivement réfléchiée sur les frontières du domaine. Ces ondes réfléchies parasites sont atténuées à chaque interaction avec les frontières. La norme L^2 décroît plus vite que la norme L^∞ sur le début de la propagation, puis les deux normes décroissent de façon similaire. Sur des temps longs, le niveau d'énergie résiduelle diminue jusqu'à l'erreur numérique informatique, ce qui montre la stabilité de la méthode. La Figure 4.15 montre le faible niveau d'énergie contenu dans la zone éponge avec un pic correspondant à l'absorption de l'énergie du signal incident dans l'intervalle de temps $95 < t < 200$.

4.6 Conclusion

Cette étude de stabilité, basée sur des méthodes classiques d'analyse numérique, a permis de mettre en évidence la nécessité d'introduire une étape de stabilisation dans l'algorithme de calcul. En ce sens, l'approche qui s'avère la plus efficace consiste à appliquer un filtrage à la fin de chaque itération temporelle. Cette méthode stabilise la simulation et autorise la bonne propagation des ondes ainsi que leur sortie du domaine numérique sans réflexion parasite notable. L'effet du filtre est concentré sur les hautes fréquences ($\lambda < 6\Delta x$) sans affecter les basses fréquences à propager.

Dans un cas plus général de propagation acoustique bidimensionnelle, la quantification de l'erreur numérique au cours du temps montre que l'algorithme est stable sur de longs temps de calcul et que l'énergie résiduelle sur la grille tend vers zéro. L'application de cette méthode à des cas de propagation sur des géométries complexes est donc prometteuse. L'étape suivante est de pouvoir prendre en compte les géométries complexes à l'aide d'une méthode de raccordement non-conforme permettant de gérer les inhomogénéités de maillage tout en respectant les contraintes théoriques de la simulation de la propagation acoustique par cette méthode.

Chapitre 5

Méthode de raccordement non-conforme

La perspective de coupler simultanément ou en différé un calcul aérodynamique local par simulation des grandes échelles et une simulation de propagation acoustique externe amène à résoudre des problèmes de disparité d'échelles de temps et d'espace. L'objectif de développer un outil numérique général et flexible conduit donc à mettre en place une méthode d'interfaçage non-conforme afin de permettre la propagation des ondes sur un maillage le plus homogène possible dans la zone de résolution des équations d'Euler.

On précise qu'aucune prise en compte de la nature de la perturbation aérodynamique n'est considérée dans cette étude. Ainsi, aucun enrichissement en fréquence n'est prévu lors d'un raffinement local de résolution contrairement aux interfaces développées en CFD, par exemple dans le cadre de la SGE [68].

L'interface envisagée vise à transmettre une perturbation de nature acoustique à large bande dans une zone où l'écoulement est quasiment irrotationnel. On se place donc en dehors des couches limites, des zones décollées et des sillages d'aile.

Son application est intéressante, par exemple dans des calculs de diffraction par un obstacle curviligne : cylindre, profil d'aile. En effet dans ce cas, la présence de zones à forte courbure implique un étirement des mailles dans la direction azimutale quand on s'éloigne de l'obstacle. Cet étirement entraîne une perte de résolution qui ne permet plus une précision suffisante pour la propagation des ondes.

Dans un premier temps, le couplage sera étudié dans le cas d'un calcul de propagation sans écoulement puis en présence d'un écoulement irrotationnel. Les contraintes fixées sont de minimiser la réflexion numérique et le coût de calcul.

D'abord, on rappellera les méthodes employées en aéroacoustique numérique pour le raccordement de grilles. Plusieurs contraintes interviennent dans le choix de la méthode, d'un point de vue théorique, et dans sa mise en oeuvre pratique dans des cas complexes. On présentera aussi les moyens d'analyse disponibles pour orienter ce choix. La méthode est décrite dans le cas général. L'extension dans le cas curviligne présentée dans ce chapitre

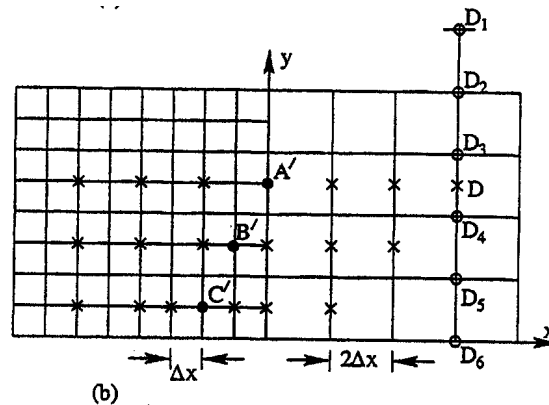


Figure 1. Special stencils for use in the mesh-size-change buffer region. • mesh points at which finite difference approximation of spatial derivatives is to be found. × stencil points. o points used for interpolation.

FIG. 5.1: Modélisation cell-center choisie par Tam et Kurbatskii [84] pour effectuer un saut de résolution.

est originale et permet son application de façon générale. Enfin des validations permettront d'évaluer son bon fonctionnement et l'erreur commise dans des cas d'application concrets.

5.1 Position du problème et bibliographie

Le développement rapide de la CAA au début des années 90 et ses résultats très satisfaisants sur la simulation de la propagation des ondes dans des milieux inhomogènes et en présence d'obstacles solides a convaincu les industriels de son intérêt. Cela a conduit les chercheurs à l'étendre à des applications complexes (sous l'impulsion de la NASA [92] par exemple). Deux techniques existent pour combiner la présence de parois curvilignes et la propagation acoustique sur un maillage cartésien, d'une part, le traitement cartésien de la paroi [47] et, d'autre part, un maillage curviligne intermédiaire dans une zone limitée autour de l'obstacle (body-fitted) [20]. Ces techniques nécessitent l'emploi de méthodes d'interpolation et d'extrapolation [47, 20].

La technique de raccordement non-conforme est inhérente aux différences finies d'ordre élevé et au choix de travailler au centre des cellules (Fig. 5.1). Le calcul des métriques et des dérivées des variables aux points proches de la frontière nécessitent alors d'introduire des points fictifs.

Dans le cas conforme, aucune interpolation n'est requise car les points fictifs d'une grille correspondent aux points réels du domaine adjacent. Dans le cas non-conforme, les variables sont calculées au point fictif par interpolation des points réels avoisinant. C'est le cas du contexte d'étude ici, où le choix de calculer les inconnues aux centres des cellules

a pour conséquence qu'aucun point fictif ne correspond à un point réel.

Tam et Kurbatskii [83] ont étudié des techniques d'interpolation monodimensionnelle afin d'obtenir une optimisation en nombre d'onde pour l'adapter aux schémas DRP. Néanmoins, le traitement choisi n'est pas général et il est difficilement adaptable à des maillages complexes. Le schéma de dérivation est recalculé pour les derniers points avant la frontière pour garder une résolution optimale en nombre d'onde. Son application se limite à des maillages cartésiens uniformes avec raffinement et déraffinement définis (d'un facteur deux en l'occurrence). De plus, l'interpolation reste monodimensionnelle et adaptée au choix de la discrétisation "cell-vertex".

Dans le cas général, il est préférable de disposer d'un unique schéma d'interpolation. Le choix des degrés de liberté (ddl) pour l'interpolation devient alors crucial. Trois facteurs définissent l'interpolation : la base d'interpolation (polynomiale, Fourier), la nature des degrés de liberté (valeur de la fonction, ses dérivées, ses dérivées secondes), et le nombre de degrés de liberté pour l'ordre de la méthode.

On peut ainsi trouver dans la littérature sur le sujet des choix d'interpolation de Lagrange, de Hermite, monodimensionnelle ou bidimensionnelle, de 4 à 16 degrés de liberté [20, 93, 83]. Dans la référence [93], Yin *et al.* ont conclu qualitativement que le résultat du calcul de diffraction est peu sensible à la méthode d'interpolation pourvu que celle-ci soit d'ordre au moins quatre. Sherer et Visbal [76, 75] ont mis au point une méthode générale d'interpolation d'ordre élevé afin d'adapter une condition aux limites de paroi curviligne avec une propagation externe sur une grille cartésienne. Ils aboutissent à la même conclusion en terme de précision pour la méthode (ordre minimal égal à quatre).

5.2 Choix de la méthode d'interpolation

5.2.1 La base d'interpolation : bruit large bande

Dans les applications aéroacoustiques réelles [58, 48], le bruit rayonné résulte de sources issues de la turbulence, donc à large bande. Il n'est en aucun cas mono-fréquentiel et le choix d'une base de Fourier paraît donc inadapté. Parmi les bases usuelles, la base polynomiale est la plus classique. Elle offre l'avantage de ne nécessiter *a priori* aucune information sur le signal. La solution approchée P s'écrit donc :

$$P(x ; y ; z) = \sum_{i,j,k=0,n} c_{ij} x^i y^j z^k \quad (5.1)$$

Les configurations de bruit aérodynamique externe de voilure simulées à l'ONERA correspondent à des ailes de section constante en envergure. Les simulations aérodynamiques instationnaires sont nécessairement tridimensionnelles pour caractériser les structures turbulentes, mais une faible extension du domaine de calcul en envergure (quelques épaisseurs

de couche limite seulement), négligeable devant les longueurs d'onde acoustique, est suffisante. En conséquence, le rayonnement acoustique est pratiquement bidimensionnel. Il n'a donc pas été jugé utile de mettre au point une interpolation tridimensionnelle. La méthode a tout de même aussi été choisie en vue de sa possible extension aux applications tridimensionnelles.

5.2.2 Les degrés de liberté

L'interpolation est effectuée sur les variables *conservatives*, qui sont stockées en mémoire. Une interpolation sur les variables caractéristiques rajouterait en effet des étapes supplémentaires au calcul, le passage des variables conservatives aux variables caractéristiques devant se faire pendant le calcul à chaque itération.

La base d'interpolation est entièrement déterminée par le choix des degrés de liberté à condition d'aboutir à un problème unisolvant [22]. Le nombre de vecteurs de base est égal au nombre de degrés de liberté. En deux dimensions, pour atteindre l'ordre deux, quatre degrés de liberté sont nécessaires alors que l'ordre quatre nécessite seize degrés de liberté. En trois dimensions, ces deux nombres passent respectivement à huit et soixante-quatre.

La méthode d'interpolation doit être d'ordre élevé pour ne pas perdre la précision du schéma de dérivation spatiale. L'interpolation idéale transformerait une onde mono-fréquentielle en un signal mono-fréquentiel de même fréquence. Une interpolation numérique va introduire sur ce signal des composantes hautes fréquences et lisser la fréquence du signal à interpoler. Cette erreur doit donc être minimisée et l'interpolation doit être efficace jusqu'à la limite de résolution du schéma spatial (6 points par longueur d'onde).

Les degrés de liberté peuvent être les valeurs de la fonction à interpoler (méthode de Lagrange), ses valeurs et les valeurs de ses dérivées partielles (méthode de Hermite), ses valeurs, les valeurs de ses dérivées partielles et de ses dérivés secondes (méthode des splines). Les polynômes obtenus par ces méthodes d'interpolation sont tensorisés, ce sont des produits de fonction d'une variable :

$$P(x ; y) = g(x) \times h(y) \tag{5.2}$$

Dans le cas de l'interpolation bidimensionnelle de Lagrange à 16 ddl (Fig. 5.3 à droite), le polynôme trouvé P s'écrira :

$$\begin{aligned} P(x ; y) &= (a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) \times (b_0 + b_1y + b_2y^2 + b_3y^3) \\ &= \sum_{i,j=0,3} c_{ij}x^i y^j \end{aligned} \tag{5.3}$$

L'erreur d'interpolation d'une fonction f par le polynôme P sera donc en $O(x^4)$.

Un autre facteur déterminant pour l'interpolation est la position relative des points utilisés. Dans des cas académiques comme le raffinement/déaffinement d'un facteur n , il est possible d'envisager un traitement particulier lié à la géométrie. C'est ce que l'on verra pour le raffinement/déaffinement d'un facteur deux. En revanche dans le cas général, il est impossible de prévoir la position relative du point à interpoler par rapport à ses voisins. Par conséquent, à chaque point correspondra un schéma d'interpolation unique.

5.2.3 Analyse spectrale pour le choix des degrés de liberté

Tam et Kurbatskii [83] ont étudié la possibilité d'obtenir un schéma d'interpolation optimal en nombre d'onde pour une distribution donnée de points en une dimension. Il n'a pas semblé judicieux, dans le cadre de la présente thèse, d'étendre cette méthode pour une configuration complexe. Cette méthode est lourde et coûteuse, même si cette optimisation peut se faire avant le calcul lors de la lecture du maillage. En outre, elle n'apporte des améliorations que dans une zone de résolution proche de la limite de résolution du schéma.

Cependant, on va, partant de ce type d'analyse, étudier la limite de validité de l'interpolation en nombre d'onde et ainsi vérifier sa compatibilité avec le schéma.

Méthode

On se propose d'analyser l'erreur en nombre d'onde commise en interpolant une fonction f .

En notant l'opérateur d'interpolation I , il vient :

$$I(f)(x, y) = \sum_{j=1, n} \alpha_j f(x + \Delta x_j, y + \Delta y_j) \quad (5.4)$$

$$+ \sum_{j=1, n} \beta_j \frac{\partial f}{\partial x}(x + \Delta x_j, y + \Delta y_j) \quad (5.5)$$

$$+ \sum_{j=1, n} \gamma_j \frac{\partial f}{\partial y}(x + \Delta x_j, y + \Delta y_j) \quad (5.6)$$

où $(x + \Delta x_j, y + \Delta y_j)$, $j = 1, n$ sont les n points voisins choisis.

On obtient la fonction de transfert de l'interpolation en appliquant une transformée de Fourier aux deux membres de l'identité précédente :

$$\widehat{I(f)}(\xi, \eta) = \sum_{j=1, n} \alpha_j e^{i\xi\Delta x_j} e^{i\eta\Delta y_j} \hat{f}(\xi, \eta) \quad (5.7)$$

$$+ i\Delta x_j \xi \sum_{j=1, n} \beta_j e^{i\xi\Delta x_j} e^{i\eta\Delta y_j} \hat{f}(\xi, \eta) \quad (5.8)$$

$$+ i\Delta y_j \eta \sum_{j=1, n} \gamma_j e^{i\xi\Delta x_j} e^{i\eta\Delta y_j} \hat{f}(\xi, \eta) \quad (5.9)$$

où ξ et η sont les nombres d'onde dans les direction (Ox) et (Oy) La partie réelle de $\widehat{I}(f)$ permet de vérifier le lissage effectué en fréquence, et sa partie imaginaire le déphasage engendré.

Résultats

Le cas d'un raffinement/ déraffinement d'un facteur deux est illustré sur la Figure 5.2.

La grille grossière (en noir) est au-dessus, ses points de calcul sont repérés par des cercles noirs pleins et ses points fictifs dans la grille fine par des cercles noirs vides. La grille fine (en rouge) est en-dessous, ses points de calcul sont repérés par des carrés rouges pleins et ses points fictifs dans la grille grossière par des carrés rouges vides.

On cherche à interpoler le point A à partir des points voisins B_i (Fig. 5.3). L'interpolation de type "bidiagonale" (points B_1 à B_{12}), utilisée dans les références [93, 52], est présentée sur la Figure 5.3, en bas à gauche. Elle consiste en la demi-somme de deux interpolations "diagonales" de même que l'interpolation de Lagrange à 4 ddl (points B_6, B_7, B_{10}, B_{11}) et à 16 ddl (points B_1 à B_{16}), en bas à droite. L'interpolation de Hermite a le même support que l'interpolation de Lagrange à 4 ddl.

Les coefficients d'interpolation pour le schéma "diagonal" sont, en notant comme plus haut, α_j le coefficient d'interpolation du point B_j de la Figure 5.3 (à gauche) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_7 = \alpha_{12} = \frac{3}{256} \\ \alpha_8 = \alpha_{11} = \frac{-25}{256} \\ \alpha_9 = \alpha_{10} = \frac{75}{128} \\ \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = \alpha_6 = 0 \end{array} \right. \quad (5.10)$$

Pour le schéma "bidiagonal", les coefficients sont, toujours par rapport aux points B_i de la Figure 5.3 (à gauche) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = \alpha_7 = \alpha_{12} = \alpha_6 = \frac{3}{512} \\ \alpha_2 = \alpha_8 = \alpha_{11} = \alpha_5 = \frac{-25}{512} \\ \alpha_3 = \alpha_9 = \alpha_{10} = \alpha_4 = \frac{75}{256} \end{array} \right. \quad (5.11)$$

Pour le schéma de Lagrange à 16 ddl, on a les coefficients suivants, par rapport aux points B_i de la Figure 5.3 (à droite) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = \alpha_4 = \alpha_{13} = \alpha_{16} = \frac{1}{256} \\ \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_5 = \alpha_8 = \alpha_9 = \alpha_{12} = \alpha_{14} = \alpha_{15} = \frac{-9}{256} \\ \alpha_6 = \alpha_7 = \alpha_{10} = \alpha_{11} = \frac{81}{256} \end{array} \right. \quad (5.12)$$

Pour le schéma de Lagrange à 4 ddl, on a les coefficients suivants, par rapport aux points B_i de la Figure 5.3 (à droite) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = \alpha_4 = \alpha_{13} = \alpha_{16} = 0 \\ \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_5 = \alpha_8 = \alpha_9 = \alpha_{12} = \alpha_{14} = \alpha_{15} = 0 \\ \alpha_6 = \alpha_7 = \alpha_{10} = \alpha_{11} = \frac{1}{4} \end{array} \right. \quad (5.13)$$

Pour l'interpolation de Hermite à 12 ddl, qui prend aussi en compte les valeurs des dérivées partielles, les coefficients sont les suivants, par rapport aux points B_i de la Figure 5.3 (à droite) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_6 = \alpha_7 = \alpha_{10} = \alpha_{11} = \frac{1}{4} \\ \beta_6 = -\beta_7 = \beta_{10} = -\beta_{11} = \frac{1}{4} \\ \gamma_6 = \gamma_7 = -\gamma_{10} = -\gamma_{11} = \frac{1}{4} \end{array} \right. \quad (5.14)$$

Les autres coefficients sont nuls.

Les fonctions de transfert obtenues pour ces interpolations sont comparées sur les Figures 5.5, 5.6 et 5.7.

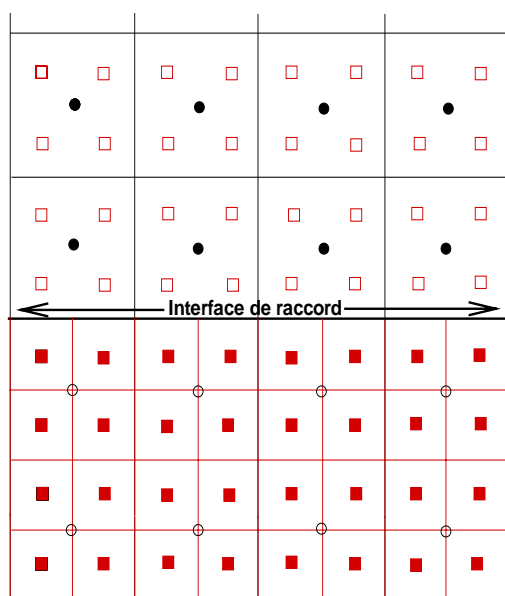


FIG. 5.2: Maillage avec raffinement/déraffinement d'un facteur deux. Grille grossière (noir) et grille fine (rouge). Points de calcul (symboles pleins), points fictifs (symboles vides).

La Figure 5.5 montre l'intérêt d'une interpolation prenant en compte des points équirépartis dans le plan et pas seulement suivant une droite. L'interpolation "diagonale" dont les coefficients sont donnés dans [52] est d'ordre 6 mais son comportement se détériore dans les directions éloignées des axes Ox et Oy . La possibilité de moyenner le résultat obtenu

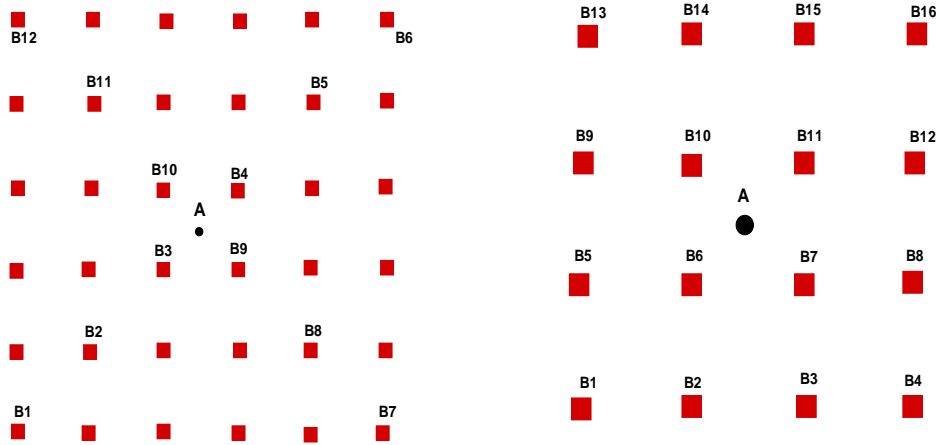


FIG. 5.3: Schéma d'interpolation du point A. A gauche : interpolation bidiagonale avec les points B_i , $i = 1, 12$ ou diagonale B_i , $i = 1, 6$. A droite : interpolation de Lagrange à 16 ddl avec les points B_i , $i = 1, 16$.

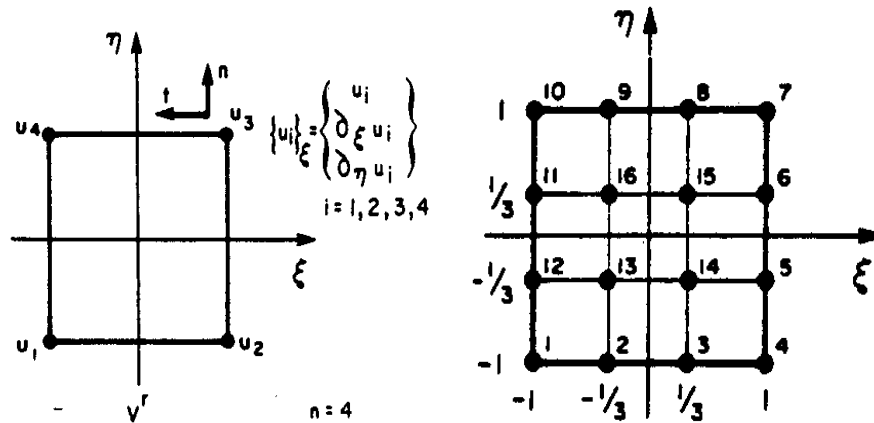


FIG. 5.4: A gauche : interpolation de Hermite à 12 ddl (valeur de la fonction et de ses dérivées partielles). A droite : interpolation de Lagrange à 16 ddl.

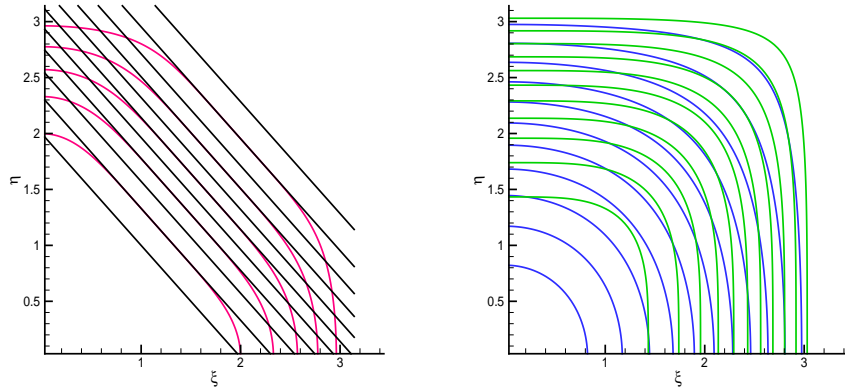


FIG. 5.5: Fonction de transfert de l'interpolation. A gauche : interpolation "bidiagonale" à 12 ddl d'ordre six (rose) et "diagonale" à 6 ddl d'ordre six (noir). A droite : interpolation de Lagrange à 16 ddl (vert) et à 4 ddl (bleu). Contours dans le plan des nombres d'onde $(\xi\Delta x, \eta\Delta x)$. $f(0, 0) = 1$, $\Delta f = 0, 12$

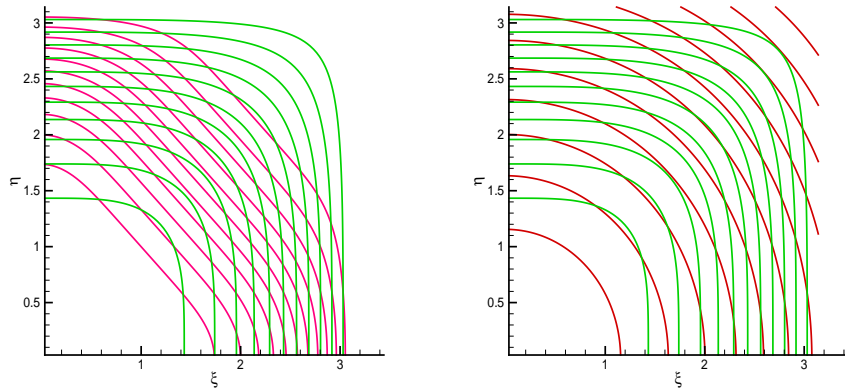


FIG. 5.6: Fonction de transfert de l'interpolation. A gauche : interpolation de Lagrange à 16 ddl (vert) et "bidiagonale" à 12 ddl d'ordre 6 (rose). A droite : interpolation de Lagrange à 16 ddl (vert) et de Hermite à 12 ddl (rouge). Contours dans le plan $(\xi\Delta x, \eta\Delta x)$. $f(0, 0) = 1$, $\Delta f = 0, 12$.

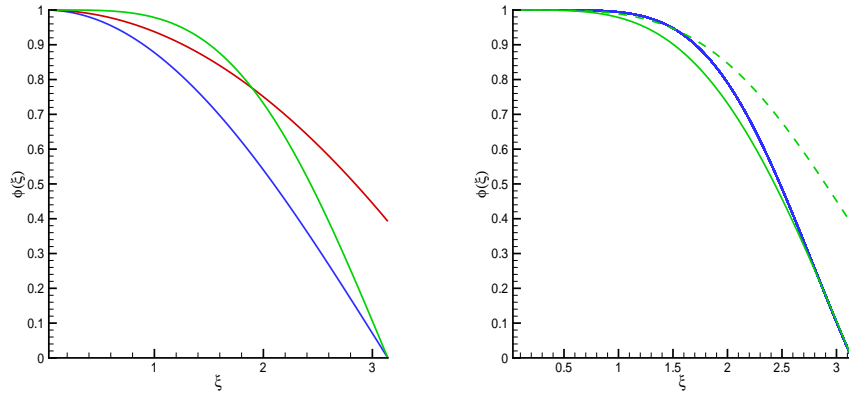


FIG. 5.7: Fonction de transfert de l'interpolation. A gauche : coupe dans la direction $\xi\Delta x = 0$ ou $\eta\Delta x = 0$ pour l'interpolation de Lagrange à 4 ddl (bleu) à 16 ddl (vert) et de Hermite à 12 ddl (rouge). A droite : coupe dans la direction $\xi\Delta x = \eta\Delta x$ pour l'interpolation de Lagrange à 16 ddl (vert discontinu) , et coupe dans la direction $\xi\Delta x = 0$ (ou $\eta\Delta x = 0$) pour l'interpolation de Lagrange à 16 ddl (vert continu) et fonction de transfert du schéma de dérivation d'ordre six (bleu).

suivant les deux diagonales améliore l'interpolation, cependant on peut voir sur la Figure 5.6 à gauche que sa précision reste inférieure à une interpolation de Lagrange à 16 ddl.

Cette interpolation de Lagrange d'ordre quatre à 16 ddl a une meilleure précision que les interpolations de Lagrange à 4 ddl et de Hermite à 12 ddl. Le compromis précision-isotropie qu'elle procure semble être optimal. Une comparaison de ces trois interpolations dans la direction $\eta\Delta x = 0$ (ou $\xi\Delta x = 0$) est présentée sur la Figure 5.7, à gauche. Elle montre la supériorité de l'interpolation de Lagrange à 16 ddl sur les deux autres.

Sur la Figure 5.7, on compare notamment sa fonction de transfert avec celle du schéma de dérivation spatiale. On voit que dans la direction x , ($\eta = 0$) onde plane suivant (Ox) , la résolution est assez similaire en nombre d'onde. La fonction de transfert dans la direction la plus favorable, $\xi = \eta$, est présentée sur la Figure de droite ainsi que la fonction de transfert du schéma de dérivation. On constate donc que l'interpolation est très fidèle jusqu'à $\xi = 0,75$ soit $\lambda \approx 8\Delta x$ et reste fidèle dans la gamme $\xi\Delta x \in [0,75; 1,5]$ soit $\lambda \in [4\Delta x; 8\Delta x]$. Le signal est toutefois plus ou moins altéré dans cette gamme suivant la direction de propagation.

Possible optimisation du schéma d'interpolation

Il est possible d'effectuer une optimisation en nombre d'onde comme pour les schémas de dérivation.

Une fonctionnelle à minimiser sur le domaine $[0 ; \xi_{max}] \times [0 ; \eta_{max}]$ du plan $(\xi ; \eta)$ peut être :

$$J(\alpha) = \int_{\xi=0}^{\xi_{max}} \int_{\eta=0}^{\eta_{max}} |1 - \widehat{I(f)}_{\xi, \eta}(\alpha)|^2 d\xi d\eta \quad (5.15)$$

On peut par exemple poser le problème suivant pour le schéma d'interpolation de Lagrange à 16 ddl pour le point A situé au milieu des points $(B_i, i = 1, 16)$ (Fig. 5.3 à droite). Pour obtenir un schéma d'interpolation symétrique, il est logique d'imposer que le coefficient d'interpolation des points B_1, B_4, B_{13} et B_{16} soit le même (a_1), de même que a_2 soit le coefficient d'interpolation des points $B_2, B_3, B_5, B_8, B_9, B_{12}, B_{14}$ et B_{15} , et que a_3 soit le coefficient d'interpolation des points B_6, B_7, B_{10} et B_{11} . Il reste donc trois degrés de liberté. De plus, on peut imposer que la somme des coefficients soit égale à un. Les termes d'ordre un dans le développement limité de $I(f)$ (Eq. 5.6) seront nuls étant donné la symétrie imposée du schéma. On peut alors imposer d'annuler un terme d'ordre deux (tous les termes d'ordre deux seront alors nuls). Le degré de liberté laissé libre permet d'optimiser la fonctionnelle (Eq. 5.15).

Les résultats obtenus ne sont pas présentés ici, et ne seront pas utilisés dans la suite, car l'amélioration de la bande passante du schéma d'interpolation est négligeable. De plus, cette procédure vaut pour une position particulière du point A par rapport aux points B_i . Pour un schéma d'interpolation monodimensionnel, on pourra se référer à la méthode proposée par Tam et Kurbatskii [83].

5.3 Mise en oeuvre et validation en maillage cartésien

Après avoir comparé théoriquement la validité des différentes méthodes d'interpolation, on va dans la suite les mettre en oeuvre dans un cas de propagation simple afin d'évaluer numériquement leur comportement. On se place dans le cas du maillage avec raffinement/déraffinement d'un facteur deux, afin de comparer les schémas d'interpolation présentés plus haut. Le domaine est pris assez grand pour négliger l'impact des conditions aux limites.

5.3.1 Description des opérations

Le maillage étant régulier, un seul schéma d'interpolation est nécessaire pour interpoler les points fictifs. Les points fictifs du domaine grossier ne correspondent pas à des points réels du domaine fin et réciproquement, contrairement à la même configuration traitée en cell-vertex.

Au début de chaque étape temporelle, les valeurs aux points fictifs de chacun des domaines sont recalculées en fonction des valeurs aux points réels calculées à l'itération précédente. Cette opération est une simple combinaison linéaire (produit scalaire). Elle est effectuée sur cinq rangées de points fictifs.

Un problème particulier se pose dans le cas de l'interpolation d'Hermite qui utilise les dérivées. Les dérivées des variables conservatives ne sont pas stockées en mémoire ni évaluées pendant le calcul dans le logiciel *sAbrinA*. Il a donc fallu les recalculer en certains points. Cette étape coûteuse s'effectue à chaque itération et rend l'interpolation d'Hermite moins économique en coût de calcul.

La méthode des splines a été testée à l'aide de la librairie scientifique ASL (Advanced Scientific Library). Sa mise en oeuvre nécessite de connaître la valeur des dérivées partielles et des dérivées secondes.

5.3.2 Cas de propagation d'une source acoustique

La comparaison suivante entre les méthodes d'interpolation n'est pas exhaustive. Son objectif est de vérifier les conclusions tirées lors de l'analyse en nombre d'onde. La méthode jugée la plus efficace, c'est à dire ayant un compromis intéressant entre la précision, le coût de calcul et la faisabilité de la mise en oeuvre sera retenue pour la suite de l'étude.

Description de la simulation

La dimension totale de la grille est $[0, 480] \times [0, 480]$. La grille est divisée en deux domaines : un domaine grossier, avec une taille de maille $h_g = 2$ dans le domaine $[0, 480] \times [0, 240]$, et un domaine fin avec une taille de maille $h_g = 1$ dans le domaine $[0, 480] \times$

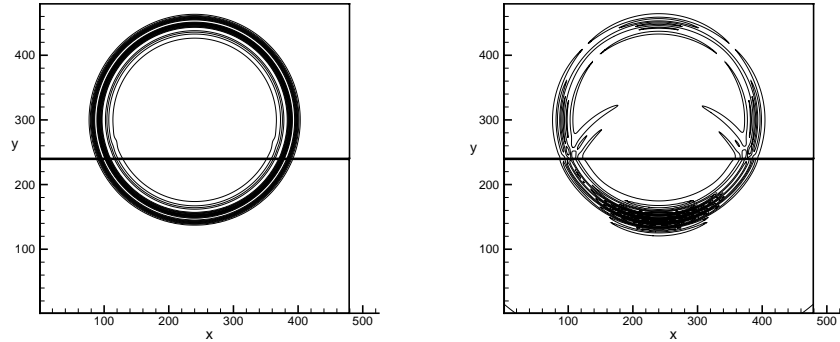


FIG. 5.8: Propagation à travers un interface de recouvrement non-conforme d'un monopole placé en $(x ; y) = (240 ; 300)$ à $t = 1500\Delta t$. A gauche : fluctuation de pression. A droite : erreur sur la fluctuation de pression par rapport à la solution analytique (définition Eq. 5.16). Isocontours dans la gamme $[-6\%; 6\%]$.

[240, 480].

La source est une source initiale localisée en $S = (240, 300)$. Sa propagation à travers l'interface non-conforme est simulée jusqu'à $t = 1500\Delta t = 150$ dans le but d'éviter l'influence des conditions aux limites. L'écoulement est au repos.

La perturbation initiale est la même que celle décrite dans l'équation 4.32 avec $b = 6 = 3h_g$ et $\epsilon = 0.001$. Le choix de b est effectué pour assurer une propagation correcte sur le maillage grossier, i.e $\lambda/h_g > 10$. La solution obtenue est comparée à la solution analytique, obtenue par intégration numérique comme précisé plus haut. Ainsi un taux de réflexion de l'interface est obtenu dans chacun des domaines et comparé pour les interpolations testées. Les résultats sont consignés dans le tableau 5.1. Une carte d'erreur est présentée sur la Figure 5.8, où on peut y distinguer les fronts d'onde réfléchis. En notant $t_1 = 1500\Delta t$, $\{x_i, i = 1, N\}$ les points de calcul, p et p_a respectivement les solutions numériques et analytiques, le critère d'erreur est :

$$Err(t = t_1) = \frac{\max_{i=1, N}(p - p_a)(x_i, t_1)}{\max_{i=1, N} p_a(x_i, t_1)} \quad (5.16)$$

Analyse des résultats

On constate d'abord que l'erreur relative est plus forte sur le domaine grossier. La dispersion y est plus forte que sur le maillage fin car l'onde y est moins bien résolue. Elle passe de $\lambda = 20\Delta x$ sur le domaine fin à $\lambda = 10\Delta x$ sur le domaine grossier.

Domaine	Lagr. 4 ddl	Lagr. 16 ddl	Bidiag.	Herm. 12 ddl	Splines
Fin	2.2	1.2	1.23	1.4	1.98
Grossier	6.3	6.24	6.48	5.89	5.4

TAB. 5.1: Maximum d'erreur en % sur la fluctuation de pression, à $t = 1500\Delta t$, rapporté au niveau maximum de pression de la solution à cet instant (Eq. 5.16).

Le taux de réflexion le plus faible sur le domaine fin est obtenu avec l'interpolation de Lagrange à 16 ddl. La gamme d'erreur obtenue suivant les interpolations varie de 1,2 à 2,2% soit une variation de quasiment 100%. Cette erreur est néanmoins de l'ordre de l'erreur de dispersion sur le maillage fin, comme on peut le voir en la comparant à celle faite sur le front d'onde n'ayant pas vu l'interface (Figure 5.8).

Sur le domaine grossier on voit que l'erreur varie de 5.4 à 6.5% soit une variation de 20% environ. La contribution relative de l'erreur d'interpolation à l'erreur totale est moindre et peut être attribuée à la résolution plus pauvre. Le meilleur résultat est obtenu pour la méthode des splines.

Les résultats obtenus pour l'interpolation "bidiagonale" et pour l'interpolation de Lagrange à 4 ddl sont moins bons dans les deux domaines que ceux obtenus pour l'interpolation de Lagrange à 16 ddl. Ces tendances confirment l'analyse en nombre d'onde effectuée dans la section précédente. Il est plus difficile de trancher entre les interpolations de Lagrange à 16 ddl et d'Hermite. On peut toutefois préciser que l'interpolation de Hermite permet d'interpoler sur des supports disjoints alors que pour l'interpolation de Lagrange à 16 ddl, on a préféré situer le point à interpoler dans le carré central $B_6B_7B_{10}B_{11}$ (Figure 5.3 à droite), ce qui ne permet pas de profiter de cette propriété.

Les résultats obtenus avec la méthode des splines mériteraient un approfondissement des investigations, mais son coût est prohibitif (nombre total de degrés de liberté élevé, connaissance des dérivées et des dérivées secondes) et sa mise en application sur des maillages curvilignes s'avère problématique.

5.4 Extension aux maillages complexes

5.4.1 Méthode

Lorsque les grilles sont inhomogènes, chaque point à interpoler a une position spécifique dans le nuage de points qui l'entoure. Parmi les méthodes d'interpolation générale, on peut citer la méthode de décomposition en triangles et celle basée sur les distances. La première ne permet pas d'atteindre un ordre élevé, à moins de prendre en compte les dérivées, la deuxième non plus.

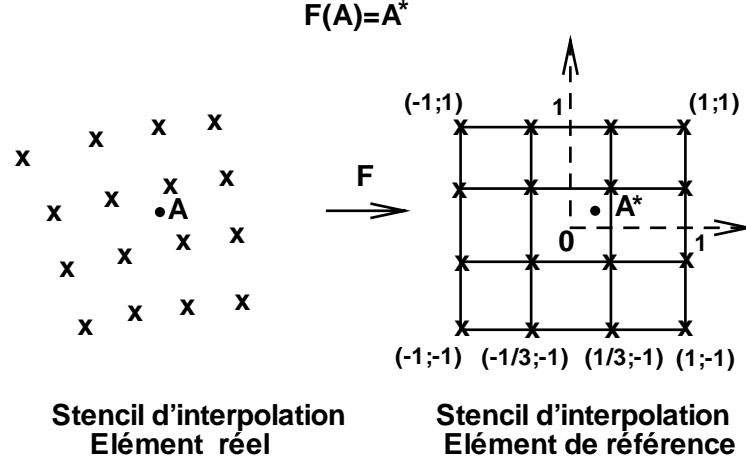


FIG. 5.9: Description de la transformation vers l'élément de référence.

En notant $d = \begin{pmatrix} d_{00} \\ d_{01} \\ d_{02} \\ \vdots \\ d_{33} \end{pmatrix}$, on peut écrire la relation :

$$\begin{pmatrix} 1 & x_{00} & y_{00} & \dots & x_{00}^3 y_{00}^3 \\ 1 & x_{01} & y_{01} & \dots & x_{01}^3 y_{01}^3 \\ 1 & x_{02} & y_{02} & \dots & x_{02}^3 y_{02}^3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{33} & y_{33} & \dots & x_{33}^3 y_{33}^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{00} \\ a_{01} \\ a_{02} \\ \vdots \\ a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{00} \\ d_{01} \\ d_{02} \\ \vdots \\ d_{33} \end{pmatrix} \quad (5.20)$$

soit en notation condensée :

$$\begin{pmatrix} \Phi_{pq}(A_{00}^*) \\ \Phi_{pq}(A_{01}^*) \\ \Phi_{pq}(A_{02}^*) \\ \vdots \\ \Phi_{pq}(A_{33}^*) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{00} \\ a_{01} \\ a_{02} \\ \vdots \\ a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{00} \\ d_{01} \\ d_{02} \\ \vdots \\ d_{33} \end{pmatrix} \quad (5.21)$$

c'est-à-dire, en notant M la matrice de la valeur des fonctions de base aux points d'interpolation (matrice de rigidité) :

$$\begin{pmatrix} a_{00} \\ a_{01} \\ a_{02} \\ \vdots \\ a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_{pq}(A_{00}^*) \\ \Phi_{pq}(A_{01}^*) \\ \Phi_{pq}(A_{02}^*) \\ \vdots \\ \Phi_{pq}(A_{33}^*) \end{pmatrix}^{-1} \cdot d = M^{-1} \cdot d \quad (5.22)$$

Cette relation relie les coefficients du polynôme de Lagrange aux degrés de liberté, qui sont connus.

Ordre des opérations et optimisation du coût de calcul

En pratique, l'interpolation se fait par moyenne pondérée sur les points du schéma d'interpolation. En effet, à l'itération n , on ne connaît que la valeur de la solution d_{ij} en ces points.

On peut écrire le résultat comme le produit scalaire des coefficients d'interpolation par les degrés de liberté :

$$P(A) = \sum_{i,j=0,3} p_{ij} P(A_{ij}) = p^t \cdot d = [\dots \Phi_{ij}(A^*) \dots] \begin{pmatrix} a_{00} \\ a_{01} \\ a_{02} \\ \vdots \\ a_{33} \end{pmatrix} = [\dots; x_*^i y_*^j; \dots] \begin{pmatrix} a_{00} \\ a_{01} \\ a_{02} \\ \vdots \\ a_{33} \end{pmatrix} \quad (5.23)$$

d'où

$$P(A) = [\dots; x_*^i y_*^j; \dots] \cdot M^{-1} \cdot d = p^t \cdot d \quad (5.24)$$

On stocke donc en mémoire $p^t = [\dots; \Phi_{ij}(A^*); \dots] \cdot M^{-1}$

La première phase de transformation donne $A^* = (x_*, y_*)$ et comme on connaît les fonctions de base $\Phi_{ij} = x^i y^j$, on peut calculer le vecteur p . La matrice M^{-1} est à inverser une fois, et elle est indépendante du problème à traiter. Elle dépend du schéma d'interpolation dans l'élément de référence et a été obtenue avec le logiciel MATLAB.

Ces opérations sont donc effectuées avant le calcul. La taille mémoire à réserver pour l'interpolation de Lagrange à seize ddl, pour les cinq rangées de points fictifs, est $16 \times 5 \times (N_1 + N_2)$ correspondant aux coefficients d'interpolation calculés, N_1 et N_2 étant les nombres de points constituant la frontière des domaines 1 et 2 raccordés.

Problèmes liés à la méthode

Dans cette méthode, les problèmes liés aux irrégularités du maillage interviennent dans la phase de passage vers l'élément de référence, l'inversion de la matrice de rigidité étant indépendante de la grille de calcul.

En effet, il faut résoudre un système linéaire qui peut être mal conditionné. Ce mauvais conditionnement rendra inexploitable le résultat de par une trop grande incertitude sur la position de A^* . Le conditionnement d'une matrice M carrée se calcule par la formule :

$$\text{cond}(M) = \|M\|_2 \cdot \|M^{-1}\|_2 \quad (5.25)$$

En particulier, on a pu observer dans les cas de simulations curvilignes que le conditionnement de la matrice de transformation pouvait devenir trop faible. On peut notamment montrer que dans le cas de maillages circulaires, le conditionnement de la matrice de transformation ne reste pas constant suivant l'angle.

On se place dans le cas d'un maillage cylindrique, et on calcule le conditionnement de la matrice de la transformation bilinéaire d'un quadrangle $M_1 M_2 M_3 M_4$ vers le carré de référence $[0 ; 1] \times [0 ; 1]$. On note $(a_i, i=1,4)$ et $(b_i, i=1,4)$ les coefficients de la transformation bilinéaire (Eq. 5.17) pour les abscisses et les ordonnées, et $((x_i, y_i), i=1,4)$ les coordonnées des points $(M_i, i = 1, 4)$ du schéma d'interpolation (Fig. 5.10 à gauche).

Dans le cas bilinéaire, la transformation peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1 y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2 y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3 y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4 y_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \\ a_3 b_3 \\ a_4 b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.26)$$

La Figure 5.10, à droite, présente l'inverse du conditionnement de la matrice de la transformation (Eq. 5.26) en fonction de l'abscisse pour des quadrangles placés sur un maillage cylindrique (moitié supérieure). Ce nombre devient très faible (en $o(1)$) pour $x_1 = -1/\sqrt{2}$ et $x_2 = 1/\sqrt{2}$, ce qui correspond aux angles $\alpha_1 = 3\pi/4$ et $\alpha_1 = \pi/4$. Pour éviter que le conditionnement de cette matrice devienne très grand et dépende de l'angle, on propose d'effectuer au préalable une rotation. Ainsi on parvient à se ramener à un conditionnement constant (en $O(1)$) pour la matrice de transformation (Figure 5.10). Cette étape supplémentaire a permis d'améliorer le conditionnement de la matrice de transformation dans le cas de grilles curvilignes générales pour l'interpolation de Lagrange à 16 ddl.

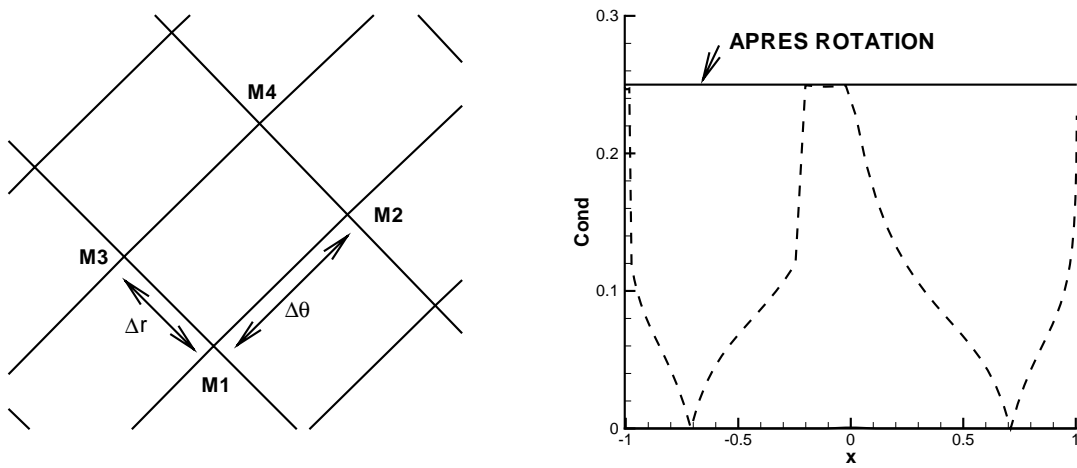


FIG. 5.10: A gauche : quadrangle avant transformation. A droite : inverse du conditionnement de la matrice de transformation vers l'élément de référence (trait discontinu), après rotation (trait plein) pour un maillage cylindrique.

5.4.2 Validation : Diffraction sur un cylindre

Description de la simulation et objectifs

La simulation de la diffraction sur un corps cylindrique avec la méthode numérique utilisée dans la présente étude a été validée [71] et constitue une simulation de référence, pour un maillage suffisamment raffiné par rapport aux caractéristiques de la source. Une source harmonique monopolaire (de période $T = 12$) est placée au point A près d'un cylindre de centre O et de rayon $R = 30$ (Figure 5.11). La résolution spatiale est de 12 points par longueur d'onde, et la résolution temporelle de 120 points par période ($\Delta t = 0,1$). Le maillage est à pas constant dans la direction radiale ($\Delta r = 1$), d'où $CFL = 0,1$ avec $c_0 = 1$. Il s'étend jusqu'à environ 10 rayons, et il est étiré sur les derniers points (condition de non-réflexion). La simulation s'étend sur une durée d'une trentaine de périodes afin d'évacuer le régime transitoire.

Les quatre simulations effectuées sont décrites dans le tableau 5.2. La simulation de référence est effectuée sur un maillage "fin" 180×300 comprenant 180 points en azimuth et 300 points dans la direction radiale. Le maillage "grossier" 90×300 ne peut qu'induire une perte d'information par rapport au maillage fin. On ne récupère pas le même résultat en raison de la plus pauvre résolution azimuthale (Fig. 5.12).

Pour contrecarrer cet effet dû aux maillages curvilignes, on procède donc à un raffinement dans la direction azimuthale à une distance d'un rayon du cylindre (Fig. 5.11). La grille non-conforme a donc 90×30 points dans la zone proche cylindre et 180×270 points dans la zone externe. A cette interface (les inconnues sont calculées au centre des cellules), on utilise la méthode de raccordement non-conforme présentée dans le paragraphe précédent. On va comparer les résultats obtenus avec la méthode d'interpolation de Lagrange à 4 ddl et à 16 ddl avec les résultats des simulations sur les grilles fine et grossière. Les caractéristiques des différentes simulations sont résumées dans le tableau 5.2.

Maillage	Domaine 1 (points)	Domaine 2 (points)	Type de Raccord	Nb ddl
Fin	30×180	270×180	conforme	
Grossier	30×90	270×90	conforme	
Raffiné	30×90	270×180	non-conforme	4
Raffiné	30×90	270×180	non-conforme	16

TAB. 5.2: Simulations effectuées dans le cas de la diffraction sur un cylindre.

Résultats sans écoulement

La pression en tout point du domaine est, comme la source, une fonction sinusoïdale du temps. Chaque point est donc caractérisé par une valeur RMS (root mean square) de la

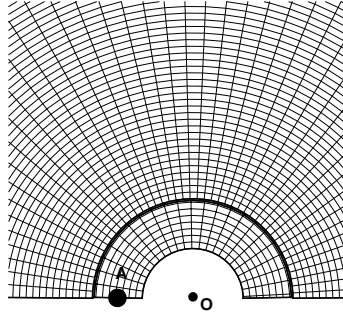


FIG. 5.11: Grille non-conforme, emplacement de la source acoustique entre le cylindre et l'interface (trait épais).

pression et un déphasage du signal de pression par rapport à la source. La pression RMS peut se calculer, pour un signal sinusoïdal de période T de la façon suivante :

$$P_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T (p'(t))^2 dt} \quad (5.27)$$

Le déphasage par rapport à la source est calculé selon la méthode proposée dans la référence [70].

Les résultats de la Figure 5.12 montrent les champ de pression RMS obtenus sur les maillages fin et grossier. Ces résultats montrent la présence de trois lobes principaux que l'on numérote de 1 à 3 de $\theta = 0$ (zone éclairée, axe (Ox) $x < 0$) vers $\theta = -\pi$ (zone d'ombre axe (Ox), $x > 0$). Une coupe est effectuée en champ lointain $r = 9R$ où les lobes apparaissent dans la gamme $[-\pi, 0]$. Elle montre une moins bonne qualité d'information sur le maillage grossier par rapport au maillage fin sur les deuxième et troisième lobes.

La Figure 5.13 (gauche) présente les résultats pour cette même coupe obtenus sur le maillage raffiné avec une méthode de raccordement d'ordre 2 (en bleu) et d'ordre 4 (en rouge). On observe que les résultats obtenus avec le raccordement d'ordre 4 (16 ddl) permet d'obtenir la même précision que le maillage fin sur les trois principaux lobes.

Quelques différences minimales apparaissent dans la zone d'ombre $[-2\pi/3 ; -\pi]$. A l'ordre 2 en revanche, même si les lobes 2 et 3 semblent être mieux restitués que sur le maillage grossier, la comparaison des niveaux fait apparaître des différences significatives.

Sur cette même Figure 5.13 à droite, on peut voir une coupe située dans le domaine proche du cylindre, afin d'évaluer le niveau d'énergie qui pourrait éventuellement être réfléchi par l'interface non-conforme. Aucun dépassement des niveaux n'est observé par

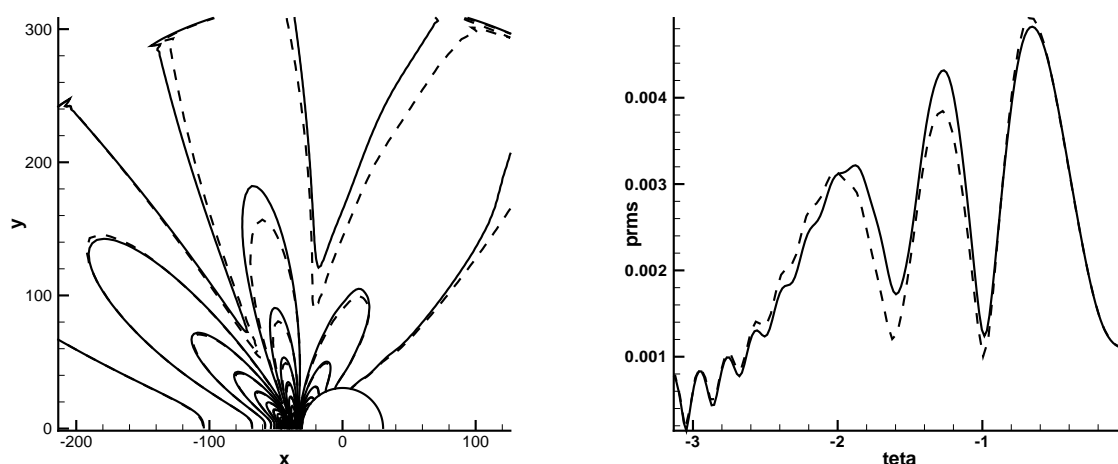


FIG. 5.12: Diffraction sur un cylindre. A gauche : champ de pression RMS. A droite : directivité à $r = 9R$. Maillage fin (trait continu), maillage grossier (trait discontinu).

rapport au maillage fin. On note également une meilleure restitution de la propagation par la méthode d'ordre 4, surtout sur le lobe 3.

Les résultats sur le déphasage obtenus à $r = 3R/2$ sont présentés sur la Figure 5.14. Il n'y a pas de différence notable entre les différentes courbes. La seule différence observable est située dans la zone d'ombre pour $\theta \approx -\pi$, où la méthode d'ordre 2 semble présenter un net déphasage par rapport aux deux autres résultats, comme le suggère aussi la Figure 5.13 à droite.

Les simulations confirment donc l'analyse effectuée en nombre d'onde. La méthode de Lagrange à 16 ddl (ordre 4) permet d'effectuer des raccordements non-conformes non-réfléchissants. La simulation précédente a montré qu'une résolution de douze points par longueur d'onde était suffisante pour cette méthode.

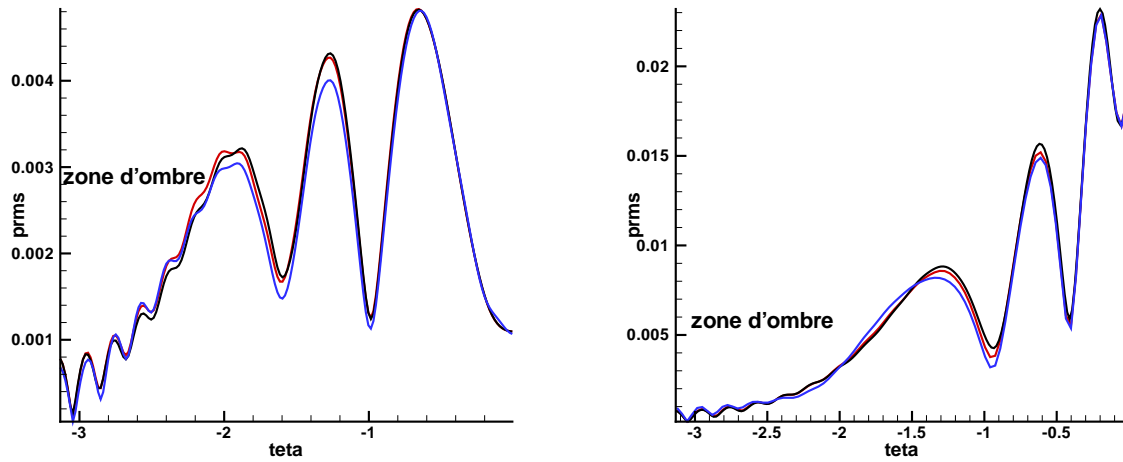


FIG. 5.13: Diffraction sur un cylindre. Directivités. A gauche à $r = 9R$, et à droite à $r = 3R/2$. Maillage fin (noir), maillage raffiné interpolation à 16 ddl (rouge) et maillage raffiné interpolation à 4 ddl (bleu).

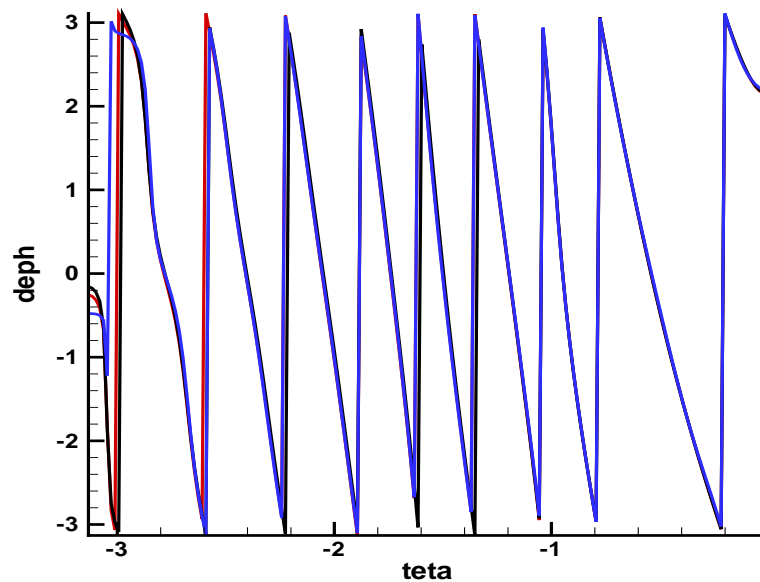


FIG. 5.14: Diffraction sur un cylindre. Déphasage par rapport à la source sur la coupe $r = 3R/2$. Maillage fin (noir), maillage raffiné avec interpolation à 16 ddl (rouge) et à 4 ddl (bleu).

Résultats avec écoulement irrotationnel

On reprend le même maillage raffiné en azimuth introduit au paragraphe précédent. Seule la méthode d'interpolation à 16 ddl est mise en oeuvre. La propagation de la même source acoustique ($T = 12$, source placée au point A) est simulée, cette fois-ci, en présence d'un écoulement irrotationnel (Fig. 5.15). Le nombre de Mach M est de 0,3. Le champ a été obtenu analytiquement. L'interface non-conforme est situé dans une zone d'écoulement inhomogène, où les gradients du champ moyen ne sont pas négligeables.

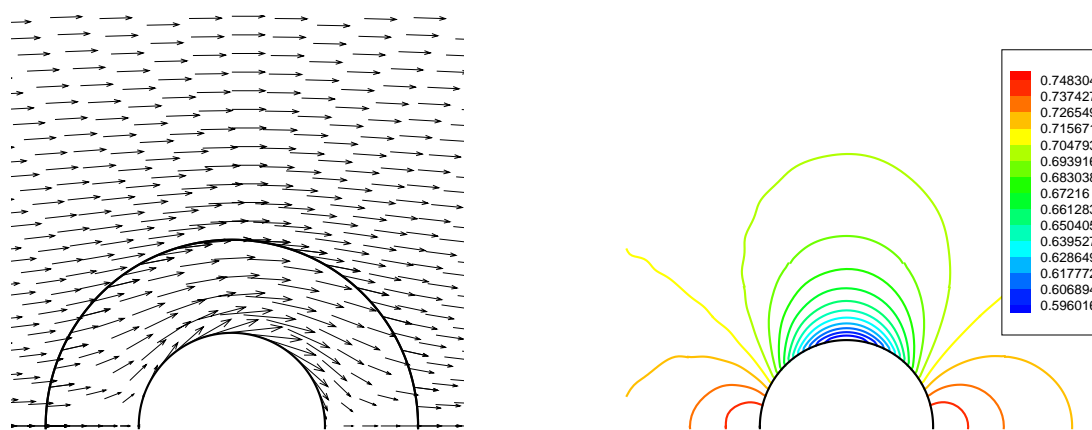


FIG. 5.15: Écoulement potentiel autour du cylindre à $M = 0.3$. À gauche : vecteurs vitesse. À droite : Isovaleurs de la pression normalisée.

La transmission des ondes acoustiques est très satisfaisante dans ce cas, comme le montre la Figure 5.16. Aucune discontinuité notable n'apparaît lors du calcul. Vers l'amont, la résolution baisse pourtant jusqu'à 10 points par longueur d'onde car les fronts d'onde font face à l'écoulement et se déplacent à la vitesse $c - U_0$.

On peut en outre mettre ici en relief l'influence de la présence de l'écoulement sur la propagation (Fig. 5.17). Dans le cas avec écoulement, les lobes de directivité sont un peu renforcés vers l'aval.

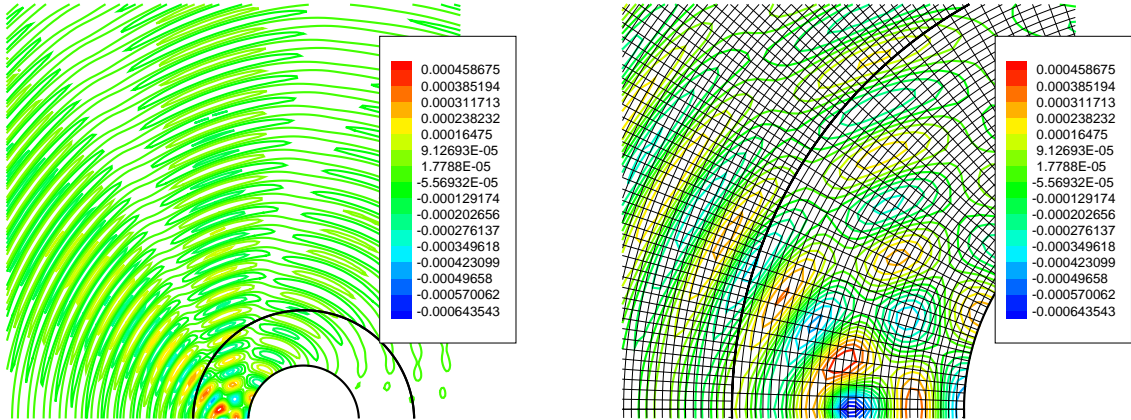


FIG. 5.16: Propagation en présence d'écoulement à $M = 0,3$. Isovaleurs de la fluctuation de densité. A gauche : domaine complet. A droite : zoom dans la région de l'interface.

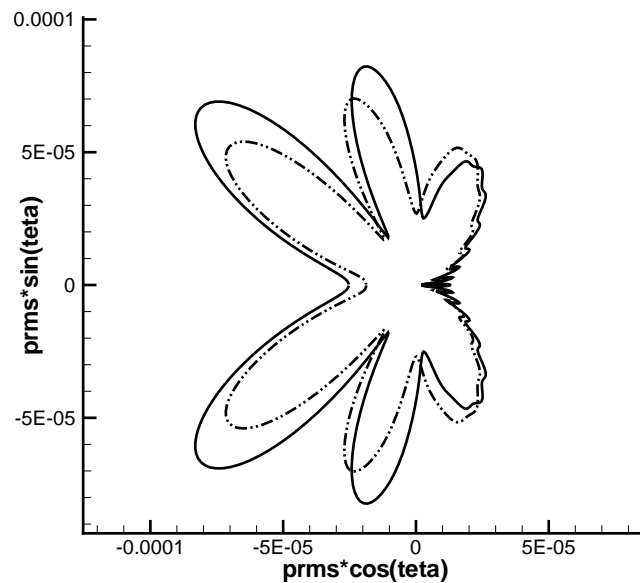


FIG. 5.17: Diffraction sur un cylindre. Directivité à $7R$ avec écoulement à $M = 0,3$ (trait plein) et au repos (trait discontinu).

5.5 Procédure de couplage à un sens

Dans ce qui précède, la méthode d'interface non-conforme a été appliquée au couplage entre deux domaines adjacents d'un même calcul acoustique. En vue d'appliquer cette technique à un couplage "unidirectionnel" (one-way) SGE/Euler où les deux calculs sont successifs, il est nécessaire de tester la capacité de la méthode à gérer un stockage intermédiaire des données dans un premier domaine source puis leur injection dans un deuxième domaine via une interface non-conforme.

5.5.1 Méthode de couplage SGE/Euler

Un calcul aérodynamique instationnaire est effectué dans les domaines source. Les résultats alors obtenus sont stockés puis sont injectés dans les domaines de propagation via une interface non-conforme.

A chaque itération, l'algorithme consiste en la succession des étapes suivantes :

- incrémentation de la zone source par lecture d'un fichier,
- interpolation des variables aux points fictifs des domaines de propagation adjacents,
- avancée temporelle dans les zones de propagation.

Les tableaux correspondant aux variables conservatives des points de calcul SGE sont réactualisés en mémoire à chaque itération. Ces variables ne sont pas recalculées lors de l'avancée temporelle, mais écrasées par leur valeur à l'itération suivante.

Cette condition d'interfaçage est d'ordre faible, puisque la solution dans le domaine source n'évolue pas aux sous-itérations du schéma de Runge-Kutta. Cependant, il est possible de mettre en place une réactualisation des données à ces sous-itérations. La méthode développée par Carpenter *et al.* [15] s'applique à des problèmes linéaires, comme la propagation des ondes acoustiques, et permet de garder un ordre élevé dans cette procédure d'injection en prenant en compte les dérivées temporelles du signal dans le domaine source. Cette méthode, nécessitant de connaître la solution aux instants ultérieurs pour calculer une dérivée temporelle, ne peut cependant pas s'appliquer à un couplage "simultané".

5.5.2 Validation sur un cas de propagation

Cette procédure de couplage a été validée sur un cas de propagation acoustique d'une source monopolaire harmonique (Fig. 5.18). La source est située sur la partie 1a du domaine cartésien uniforme 1. Un premier calcul de propagation a été effectué dans tout le domaine 1, et stocké en totalité. Lors d'un deuxième calcul, l'information provenant du domaine 1a est transmise au domaine 2 (de résolution moitié) via un interface non-conforme (en rouge sur la Fig. 5.18). La résolution de l'onde acoustique est d'environ vingt points par longueur d'onde sur le domaine 1 et seulement 10 points par longueur d'onde sur le domaine 2. La propagation ainsi obtenue sur le domaine 2 est alors comparée avec celle obtenue sur la partie 1b du domaine 1. La Figure 5.19 montre la bonne transmission de l'onde acoustique

à travers l'interface non-conforme. Le signal s'établit progressivement dans le domaine 2 et les niveaux transmis dans une coupe suivant la direction y sont satisfaisants (coupe selon la direction y de la Figure 5.19).

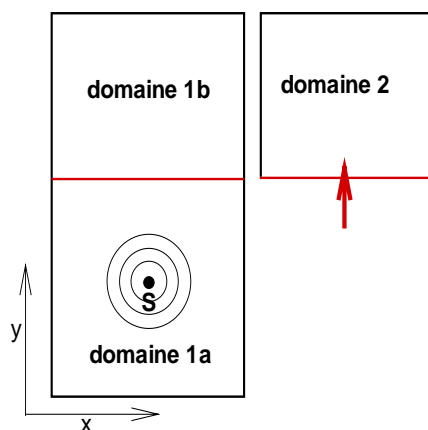


FIG. 5.18: Domaines de calcul. A gauche : domaine-source 1 (calcul stocké). A droite : domaine 2 alimenté par raccord non-conforme (en rouge) ($y = 0, 65$)

La qualité du signal transmis dépend de la longueur d'onde du signal émis. Pour des longueurs d'ondes plus petites, il ne sera plus judicieux de déraffiner à l'interface, mais plutôt de raffiner la grille.

Comparée à la technique de couplage à deux sens, la transmission de données évite une réflexion excessive puisque le domaine 1 ne "voit" pas le domaine 2 et donc aucun ajustement entre les résolutions ne se produit. Cette technique évite aussi une extrapolation des points fictifs avant leur interpolation.

La validation avec un écoulement moyen n'est pas présentée ici par souci de concision.

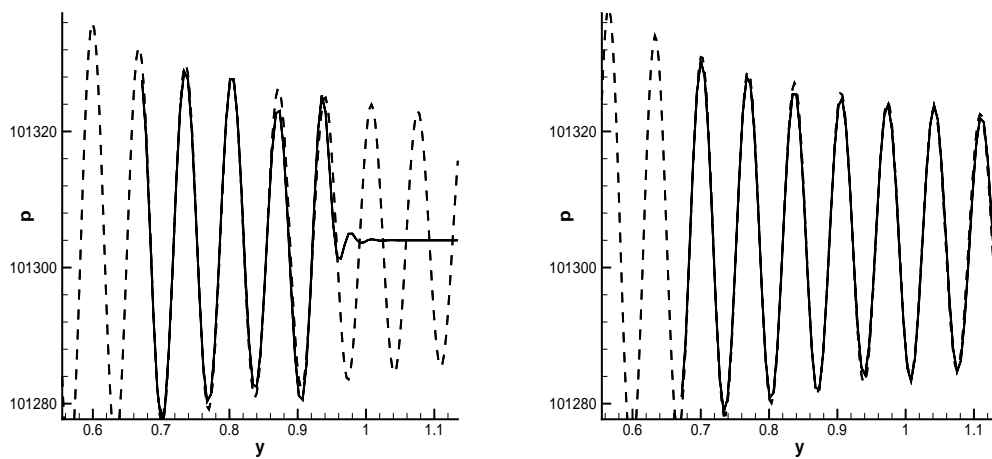


FIG. 5.19: Fluctuation de pression sur une coupe à $x = x_S$ (abscisse milieu du domaine 1). A gauche : A un instant t_1 . A droite : A un instant t_2 , $t_2 > t_1$. Domaine-source 1 (trait discontinu) et domaine 2 de propagation (en trait continu).

5.6 Conclusion

Une méthode d'interpolation d'ordre élevé a été développée afin de permettre des raccordements non-conformes entre domaines. Les cas tests ont confirmé l'analyse en nombre d'onde effectuée dans le cas de maillages cartésiens uniformes. La méthode d'interpolation a une limite de validité proche de celui de la méthode de propagation, de l'ordre de 8-10 points par longueur d'onde. Son extension aux maillages curvilignes, proposée dans ce chapitre, autorise l'utilisation de ces raccordements non-conformes sur des maillages complexes. En outre, cette méthode d'interpolation générale peut être utilisée pour d'autres types de raccord que celui par interface (superposition de grilles par exemple). Le raccord non-conforme entre domaines peut être effectué dans une zone d'écoulement inhomogène comme le prévoit la méthode hybride CFD/CAA envisagée dans les applications.

Dans cette optique, une technique de couplage à un sens par l'intermédiaire d'une interface a été mise au point afin d'effectuer le traitement en deux temps. Dans un premier temps, le calcul permet de stocker les données dans une zone où se situent les sources acoustiques (analytiques ou issues d'un calcul CFD). Dans un deuxième temps, le domaine de propagation est alimenté via une interface avec le domaine source, lui-même incrémenté par les données stockées à chaque itération. Cette technique permet de conserver la précision de la méthode d'interpolation.

Chapitre 6

Application à l'étude du bruit aérodynamique de la cavité de bec d'une aile hypersustentée

Dans ce chapitre, la méthode numérique de propagation des ondes acoustiques en présence d'un écoulement visqueux stationnaire, étudiée et développée dans le cadre de cette thèse, est appliquée à un cas industriel. L'objectif est d'étudier le rayonnement des sources de bruit aérodynamique présentes dans la cavité de bec d'une aile hypersustentée. La localisation des sources d'un tel écoulement a fait l'objet de plusieurs études expérimentales [19] et numériques [48, 87, 43]. Ces sources sont reproduites analytiquement et on étudie leur propagation, d'abord, sans écoulement, puis en présence d'un écoulement visqueux moyen, afin de montrer que même à un faible nombre de Mach, l'écoulement a une influence non négligeable sur la directivité du champ acoustique.

Cette étude est susceptible de guider l'expérimentateur pour connaître les sources de bruit qui apportent une contribution significative au bruit au sol. Il pourra alors, au besoin, traiter spécifiquement une source de bruit par l'emploi de méthodes de réduction de bruit (effet de masque, emploi de matériaux absorbants). Dans cette optique, la possibilité de traiter une source de bruit isolée est un atout.

De plus, la validation de cet outil pourrait permettre, dans l'avenir, de l'inclure dans une méthode de localisation de sources [9]. Ces méthodes permettent de déterminer les caractéristiques des sources de bruit (position, fréquence) en connaissant le bruit rayonné à une certaine distance de l'obstacle, par exemple mesuré par une antenne de microphones. Elles prennent en compte, pour le moment, des modèles simples de propagation (ondes sphériques). De telles méthodes ont déjà donné des résultats encourageants et constituent un enjeu important de la réduction du bruit aérodynamique.

6.1 Localisation des sources de bruit dans la cavité de bec

Cette étude se base sur les résultats de deux calculs aérodynamiques [48, 43] prenant comme géométrie la maquette tridimensionnelle, à section constante, d'une aile hypersustentée.

6.1.1 Description de la configuration

La configuration choisie est une section modifiée d'aile hypersustentée, à échelle réduite. Plusieurs calculs effectués à l'ONERA sur cette géométrie ont permis d'y identifier certaines sources de bruit.

La configuration choisie est le profil d'aile représenté sur la Figure 6.1. Les dimensions choisies sont celles de la maquette à l'échelle 1/10 d'une aile de corde 6,5 m en configuration d'atterrissage. Le braquage du bec, par rapport au corps principal, correspond à un angle de 32 degrés, le braquage du volet est, lui, de 17 degrés. La vitesse extérieure est de $U_0 = 65,51$ m/s ($M = 0,2$), ce qui correspond à un nombre de Reynolds basé sur la corde de $2,55 \cdot 10^6$. La corde du bec, la corde du volet et celle de l'aile représentent respectivement 16 %, 25,5 % et 82 % de la corde de la voilure en configuration de croisière.

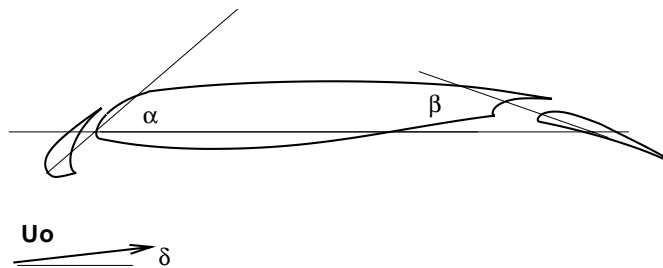


FIG. 6.1: Configuration de la voilure : $\delta = 4^\circ$, $\alpha = 32^\circ$, $\beta = 17^\circ$. Aile à section constante en envergure.

Cette configuration est similaire à celle étudiée expérimentalement à la NASA en 1998 et 1999, et calculée par Khorrani *et al.* [16]. L'incidence du corps principal y variait de 4 à 8 degrés, et les bec et volet étaient braqués à 30 degrés. De plus, deux épaisseurs de bord de fuite supérieur du bec y avaient été testées. Ces résultats serviront de point de comparaison pour la présente étude.

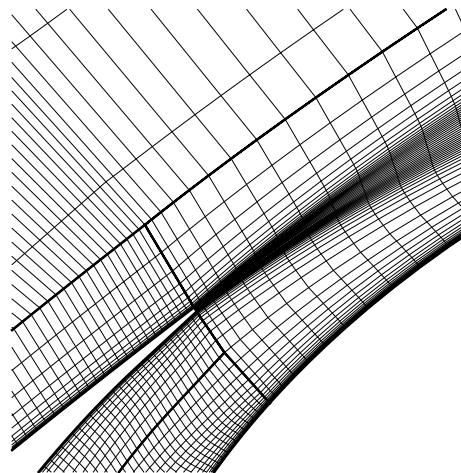
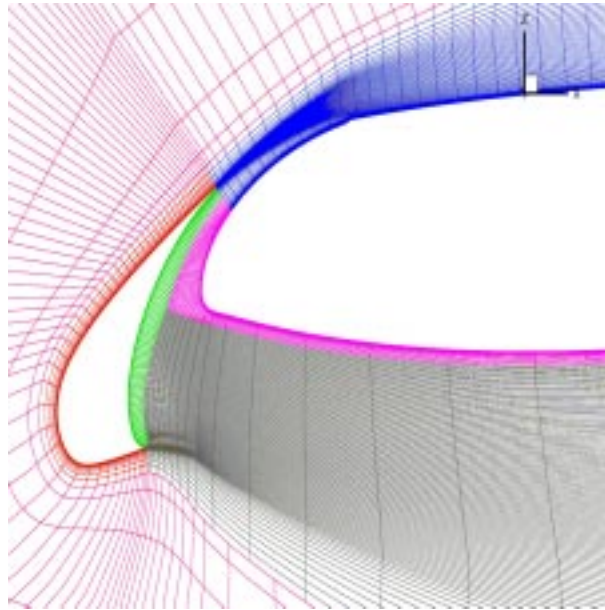


FIG. 6.2: Maillage aérodynamique des calculs CFD ([48, 43]). En haut : Vue de la région du bec. En bas : zoom au bord de fuite supérieur du bec (culot).

6.1.2 Résultats aérodynamiques

Tout d'abord, deux calculs RANS, à 0 et 4 degrés d'incidence, avaient permis de dégager les caractéristiques aérodynamiques moyennes de ces écoulements. Le maillage structuré 2D comprenait 411 664 points de calcul répartis en 18 domaines. La densité de points la plus forte se situe dans la cavité de bec (Figure 6.2). Les champs aérodynamiques RANS à 0° et 4° obtenus sont présentés sur la Figure 6.3. Une large zone de recirculation s'établit dans la cavité de bec. Cette zone se rétrécit légèrement à 4° d'incidence. On identifie notamment deux phénomènes propres à créer des instabilités :

- la couche de mélange créée par le bord de fuite inférieur du bec,
- le sillage créé par le bord de fuite supérieur du bec.

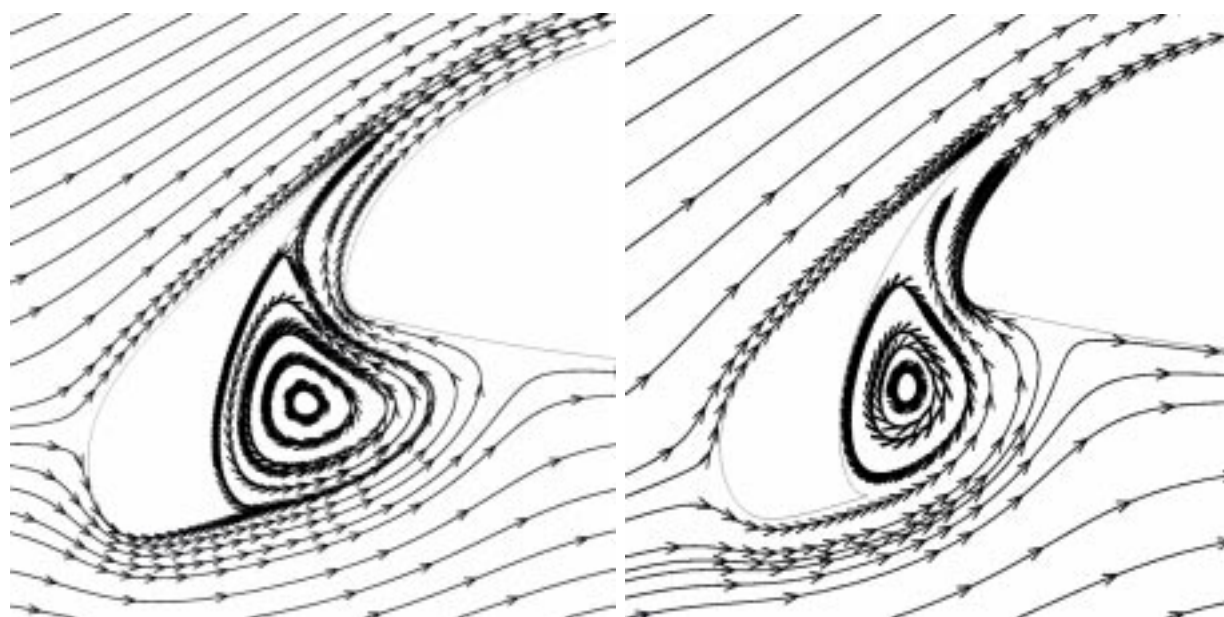


FIG. 6.3: Calcul RANS de l'écoulement à 0° et 4° d'incidence autour de l'aile. Lignes de courant dans la région du bec. A gauche : écoulement à 0°. A droite : écoulement à 4°.

Deux calculs CFD instationnaires avaient ensuite été effectués, à 0° et 4°, avec des modèles différents.

Labourasse [48] avait effectué un couplage zonal RANS/NLDE à 0° dans le cadre de ses travaux de thèse portant sur la possibilité d'enrichir localement un champ statistique par un complément fréquentiel aux endroits critiques de l'écoulement. Cette méthode avait permis de caractériser les sources acoustiques sur la configuration décrite ci-dessus. Seule la zone du bec était tridimensionnelle avec 52 plans en envergure pour un nombre de points total de l'ordre de 10 millions. La méthode numérique consistait en une méthode des volumes finis d'ordre deux avec une intégration temporelle implicite d'ordre deux. On distingue sur la Figure 6.4 les phénomènes instationnaires prédominants de l'écoulement.

Des tourbillons se forment et s'apparient dans le sillage du bord de fuite inférieur du bec (zone 2). L'écoulement décolle sur le corps principal dans la zone 3 et sur la paroi interne du bec dans la zone 1. Ces décollements entraînent des fluctuations de charge locales sur le corps principal et sur le bec qui vont produire un rayonnement acoustique. Dans la zone 4, au bord de fuite supérieur du bec, un échappement tourbillonnaire se produit.

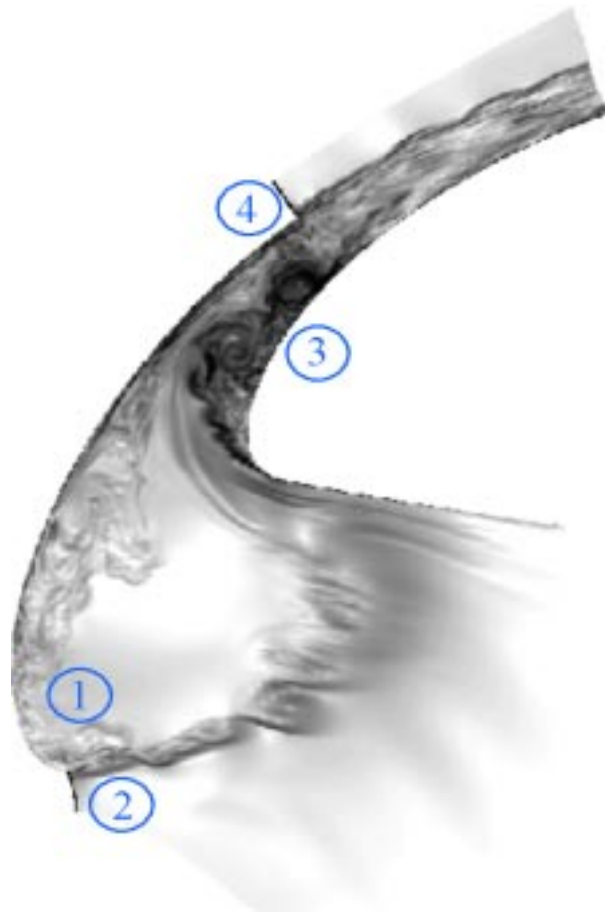


FIG. 6.4: Visualisation des structures cohérentes de l'écoulement [48]. Norme du gradient de la fluctuation de densité.

Ben Khelil [43] a plus récemment effectué un calcul SGE sur la même configuration avec une incidence de 4° , et ce avec une méthode de couplage 2D/3D en envergure afin de ne calculer la turbulence que dans la zone du bec. Le post-traitement acoustique de ce calcul n'a pas encore été effectué, mais les résultats font apparaître des ondes acoustiques de fréquence 30 kHz, remontant depuis le bord de fuite supérieur du bec vers l'amont. Cette fréquence apparaît aussi nettement sur les spectres de pression en aval du culot. De plus, ce calcul a permis d'obtenir un champ moyen issu de la SGE, a priori plus réaliste que le champ RANS.

Afin de vérifier l'origine de cette composante à 30 kHz, il est possible d'évaluer le nombre de Strouhal du détachement tourbillonnaire au bord de fuite supérieur du bec. La Figure 6.5 montre la variable $1 - \frac{u(y)}{u_e}$, où u est la norme du vecteur vitesse (fonction de la distance à la paroi y), et u_e la norme du vecteur vitesse en dehors de la couche limite. Cela permet de calculer l'épaisseur de déplacement de la couche limite, δ_a , définie par :

$$\delta_a = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u(y)}{u_e}\right) dy \quad (6.1)$$

où δ est l'épaisseur de la couche limite.

On obtient respectivement $\delta_s = 1, 25 \cdot 10^{-4}$ m pour la couche limite supérieure et $\delta_i = 0, 7 \cdot 10^{-4}$ m pour la couche limite inférieure. La vitesse extérieure au-dessus du culot est de 93 m/s et de 79 m/s en-dessous.

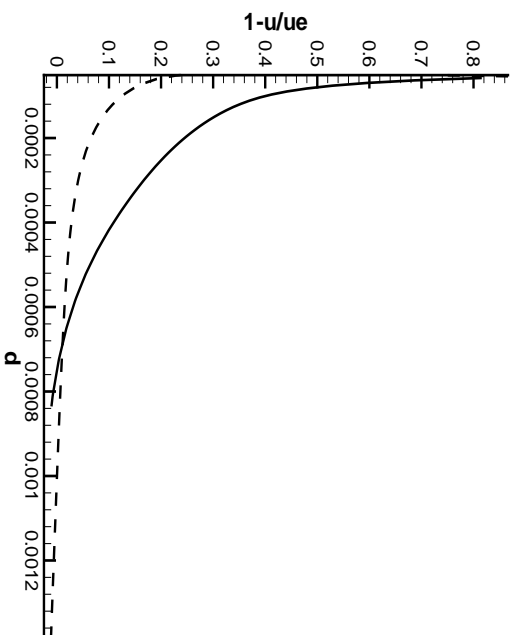


FIG. 6.5: Profil de vitesse dans la couche limite pour le calcul de l'épaisseur de déplacement au bord de fuite supérieur du bec. Couche limite supérieure, au-dessus du culot, (en trait continu) et couche limite inférieure (en trait discontinu).

En prenant comme dimension caractéristique $e_c + \delta_s + \delta_i$, (avec e_c l'épaisseur du culot), et comme vitesse la moyenne de la vitesse des deux cotés du culot, on obtient le nombre de Strouhal :

$$St = \frac{f \cdot (e_c + \delta_s + \delta_i)}{U_0} = \frac{30000 \cdot 5, 4 \cdot 10^{-4}}{86} = 0, 188$$

très voisin de la valeur 0,2 attendue, typique d'un tel échappement tourbillonnaire.

6.1.3 Résultats acoustiques

Le calcul de Labourasse [48] donnait des indications intéressantes sur le rayonnement des sources de bruit présentes dans la cavité de bec. De nombreuses fréquences apparaissaient notamment sur les spectres calculés à différents points de cette cavité. On peut distinguer les contributions acoustiques des phénomènes aérodynamiques cités au paragraphe précédent :

- en S1, le décollement sur le bord interne du bec près du bord de fuite inférieur (bande 20-50 kHz),
- en S2, le sillage au bord de fuite inférieur du bec $f_0 \approx 15$ kHz, appariement tourbillonnaire à $f_{01} = f_0/2$,
- en S3, le décollement sur le corps principal (bande 10-60 kHz),
- en S4, l'échappement tourbillonnaire au bord de fuite supérieur du bec (qui est un culot franc) à la fréquence d'environ 30 kHz (Fig. 6.6),

On distingue nettement dans les zones 1 et 3 des fronts d'onde correspondant à des hautes fréquences acoustiques proches de 50-60 kHz (Figure 6.6, en bas à gauche). De façon moins nette, un rayonnement autour de 20 kHz est diffracté au bord de fuite inférieur du bec. Sur la Figure 6.6, à droite, le rayonnement acoustique au bord de fuite supérieur du bec est bien visible à la fréquence 30 kHz.

On peut rappeler aussi que, dans ce type de configuration, d'autres phénomènes peuvent générer des ondes acoustiques. Par exemple, on peut citer l'impact aléatoire, sur le corps principal ou sur le bord de fuite supérieur du bec, de tourbillons provenant du sillage du bord de fuite inférieur du bec, du décollement sur le corps principal ou de la bulle de recirculation.

Dans le calcul de Khorrani *et al.* [16], l'échappement tourbillonnaire au bord de fuite supérieur du bec s'effectuait à une fréquence de 50 kHz et constituait le rayonnement acoustique principal. Ce phénomène était nettement moins marqué lorsque le bec n'était braqué qu'à 20°. De plus, deux épaisseurs furent testées pour le bord de fuite supérieur du bec. L'épaississement de 50% du bord de fuite supérieur du bec engendrait un bruit de plus basse fréquence (38 kHz) et situé sur une bande plus large autour de cette fréquence. La méthode de Ffowcs Williams-Hawkings appliquée sur la paroi faisait apparaître deux lobes prépondérants : un premier lobe dirigé vers le bas, légèrement vers l'aval, et un second lobe dirigé vers l'amont. Atkins *et al.* [2] ont d'ailleurs simulé la propagation acoustique bidimensionnelle sans écoulement de cette source modélisée par un dipole analytique, situé au bord de fuite supérieur du bec. Les auteurs, ont pu à ce sujet remarquer la différence entre les directivités obtenues en changeant l'orientation du dipôle.

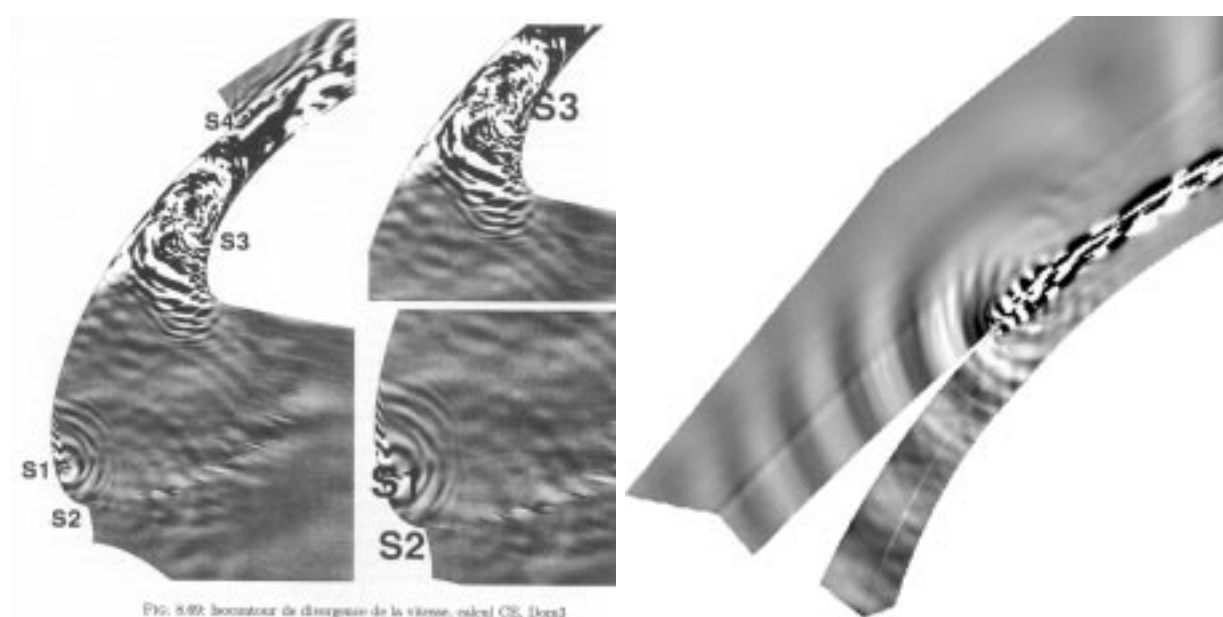


FIG. 6.6: Calcul RANS/NLDE de Labourasse [48] à incidence 0° . Isocontours de divergence de la fluctuation de vitesse. A gauche : zone de la cavité de bec. A droite : zoom au bord de fuite supérieur du bec.

6.2 Maillage adapté à la propagation

Pour cette étude acoustique, la grille précédemment utilisée pour les calculs RANS et pour simuler l'écoulement instationnaire turbulent autour de l'aile [48, 43] a tout d'abord dû être adaptée pour satisfaire aux critères de bonne résolution de la méthode numérique de propagation.

6.2.1 Le maillage aérodynamique

Les caractéristiques principales du maillage aérodynamique 2D (voir Figure 6.2) étaient les suivantes :

- extension à quinze cordes,
- raffinement aux parois pour résoudre correctement les couches limites,
- étirement important des mailles depuis la couche limite jusqu'au champ lointain.

La plus petite taille de maille dans la couche limite était de l'ordre de 10^{-6} m. Et le nombre total de points s'élevait à près de 400000. Le maillage dans la zone du bec concentrait à lui seul 90% des points de calcul. De ce fait, les ondes acoustiques émises étaient sur-résolues dans la cavité de bec. En revanche, en dehors de cette zone, elles devenaient sous-résolues et le maillage aérodynamique se comportait alors comme un filtre passe-bas pour les ondes acoustiques. L'émission d'ondes acoustiques était par contre bien visible dans la cavité de bec. L'enveloppe des domaines situés au voisinage du corps principal s'étirait dans la direction radiale vers l'aval de façon à permettre la libre croissance des couches limites et des sillages au-dessus et en-dessous du corps principal. Cet étirement des mailles contribuait aussi au filtrage des ondes acoustiques par le maillage aérodynamique.

6.2.2 Le maillage acoustique

Le maillage acoustique souhaité doit pouvoir :

- propager les ondes acoustiques jusqu'à une fréquence de 30 kHz, soit une longueur d'onde d'environ 1 cm, afin de respecter la résolution minimale d'environ dix points par longueur d'onde, la taille de maille maximale doit être ainsi inférieure à 1 mm,
- être le plus homogène possible (taille de maille uniforme),
- s'étendre jusqu'à environ une corde, là où l'écoulement redevient (quasiment) homogène, et où une méthode intégrale de type Kirchhoff peut prendre le relai.

Le mailleur GAMBIT a été utilisé ici pour obtenir le maillage acoustique à partir du maillage aérodynamique selon le processus suivant. La topologie du maillage aérodynamique dans la zone du bec a été conservée à l'exception du bord d'attaque du corps principal où des domaines ont été rajoutés afin d'assurer au mieux (i) l'orthogonalité des premières lignes de maillage avec la paroi solide (condition aux limites de paroi solide) et

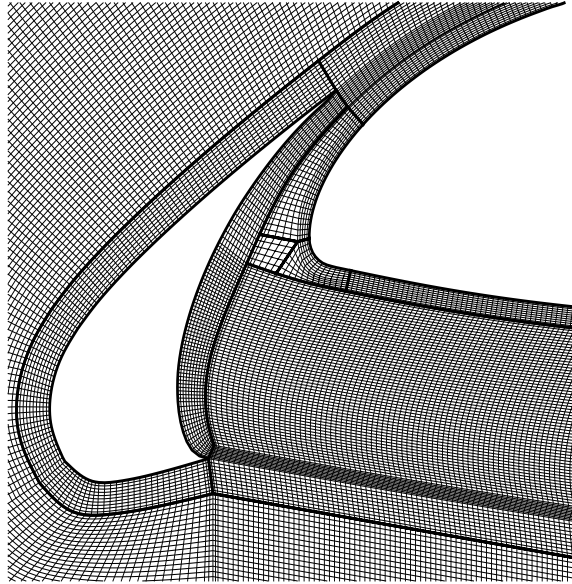


FIG. 6.7: Grille acoustique. Zone de la cavité de bec.

(ii) la colinéarité des normales à l'interface entre des domaines adjacents. L'enveloppe des domaines situés autour du corps principal a été rapprochée de ce corps afin d'éviter un étirement radial des mailles vers l'aval et permettre ainsi une propagation correcte en aval de l'écoulement et dans le sillage (Fig. 6.7).

La taille de maille maximale a été ramenée à $3 \cdot 10^{-4}$ m. Dans cette optique, le culot du bord supérieur du bec a été supprimé. La prise en compte de son épaisseur, de l'ordre de $3 \cdot 10^{-4}$ m, aurait nécessité de réduire la taille de maille jusqu'à 10^{-4} m. De plus, d'un point de vue acoustique, cette épaisseur est négligeable devant les longueurs d'onde émises (1 cm pour 30 kHz) et on peut donc faire l'hypothèse que l'épaisseur du bord de fuite supérieur du bec n'a pas d'influence significative sur la diffraction acoustique. Ce culot est ainsi devenu une arête vive dans le maillage acoustique (Fig. 6.8 à gauche).

Le problème de l'étirement des mailles dans la direction azimutale, abordé dans le cas d'un obstacle cylindrique au chapitre 5, se pose particulièrement pour cette application puisque le bec est fortement courbé. Dans le maillage acoustique, cet étirement azimutal a été compensé par plusieurs raffinements azimutaux successifs (Fig. 6.9). Ces raffinements nécessitent d'utiliser la technique d'interface non-conforme d'ordre élevé développée dans le chapitre 5. Ils permettent de garder une taille de maille à peu près constante dans la

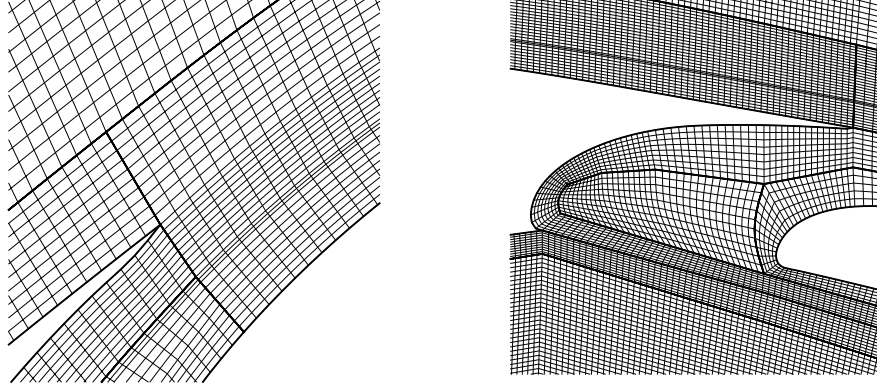


FIG. 6.8: Grille acoustique. A gauche : zoom au bord de fuite supérieur du bec. A droite : zone du volet.

direction azimutale et ce jusqu'aux frontières extérieures de la grille acoustique.

Le maillage acoustique ainsi dérivé comprend 622000 points de calcul. On peut souligner le fait que pour obtenir la même densité de points avec un maillage à raccords conformes, il aurait fallu disposer de 8 fois plus de points sur le bord externe du bec, soit environ 45000 points supplémentaires (+7%) pour le maillage 2D total. Mais surtout, le pas de temps nécessaire aurait alors dû être divisé par 8 pour assurer la stabilité de la simulation, multipliant ainsi par 8 le coût de calcul total de la simulation.

Le pas de temps de calcul sur le maillage acoustique est déterminé par la plus petite taille de maille et doit respecter :

$$CFL_1 = \frac{340 \times \Delta t}{3.10^{-4}} < 0,8 \quad (6.2)$$

Cela donne un pas de temps maximal $\Delta t = 7.10^{-7}$ s. Dans les simulations sans écoulement qui suivent, on a choisi un pas de temps de $\Delta t_1 = 5.10^{-7}$ s. En présence d'un écoulement à $Mach = 0,2$ (ou 65 m/s), il faut respecter un critère encore plus contraignant :

$$CFL_2 = \frac{(340 + 65) \times \Delta t}{3.10^{-4}} < 0,8 \quad (6.3)$$

On a ainsi pris pour pas de temps $\Delta t_2 = 4.10^{-7}$ s dans les calculs de propagation avec écoulement.

Dans les calculs suivants, la source est modélisée par un monopole harmonique gaussien (de période T , d'amplitude ϵ) défini par :

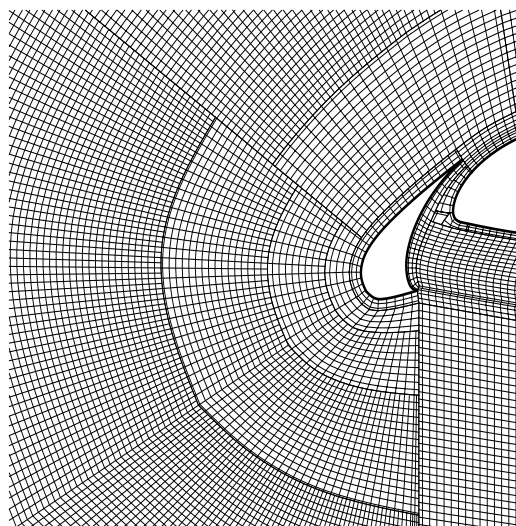


FIG. 6.9: Maillage acoustique raffiné dans la zone amont du bec avec raccords non-conformes entre les domaines (seulement un point sur deux dans chaque direction est représenté).

$$S_\rho(x, y, t) = \epsilon e^{-\frac{(x^2+y^2)}{b^2}} \sin(2\pi t/T) \quad (6.4)$$

$$S_p(x, y, t) = c_0^2 \rho(x, y, t) \quad (6.5)$$

$$S_u(x, y, t) = 0 \quad (6.6)$$

$$S_v(x, y, t) = 0 \quad (6.7)$$

où $b = 0,003$ est la demi-largeur de la gaussienne.

Ceci pour s'assurer que la source était correctement résolue sur le maillage acoustique : $b \approx 3\Delta x$.

Le nombre d'itérations nécessaire afin de propager le rayonnement de la source dans tout le domaine a été d'environ 10000 en l'absence d'écoulement et 12000 avec écoulement. La pression RMS a été calculée sur deux ou trois périodes de la source analytique. Le coût total d'une simulation aura été d'environ 35000 s CPU sur un NEC SX5, soit environ 10 h CPU.

6.3 Validation du maillage acoustique

La validation du maillage acoustique a été effectuée sur le cas de la propagation d'une source monopolaire harmonique, de fréquence 8 kHz, se propageant dans un milieu au repos. Les résultats de ce cas de diffraction ont été comparés avec ceux obtenus à l'aide du code commercial SYSNOISE qui emploie la méthode des éléments finis de frontière (Boundary Element Method ou BEM). Dans le calcul par la méthode BEM, l'équation de Helmholtz est résolue, avec pour second membre une distribution de Dirac localisée à la position de la source. Cette différence de nature de source entre les deux méthodes n'a pas d'incidence réelle sur cette validation.

La source ne correspond pas à une des sources de bruit "physiques" telles qu'elles ont été analysées précédemment. Elle a été placée loin des parois, notamment afin de s'assurer de la validité du résultat BEM. De plus, cette source est très bien résolue sur le maillage acoustique. Sa fréquence est de 8 kHz, soit une longueur d'onde $\lambda = 0,0425$ m, c'est-à-dire entre 50 et 140 Δx dans la zone du bec, et 250 pas de temps par période de la source.

6.3.1 Calcul sans écoulement

La Figure 6.10 présente la distribution instantanée de densité obtenue avec le calcul Euler. La Figure 6.11 compare les distributions de pression RMS calculées par Euler et par BEM, après recalage des niveaux maximum. Les résultats font apparaître la présence de trois lobes principaux : vers le bas, vers le haut et vers l'aval. La zone située en amont du bec est masquée pour cette source. Aucune réflexion notable par les frontières extérieures

du domaine n'est à signaler lors du calcul Euler.

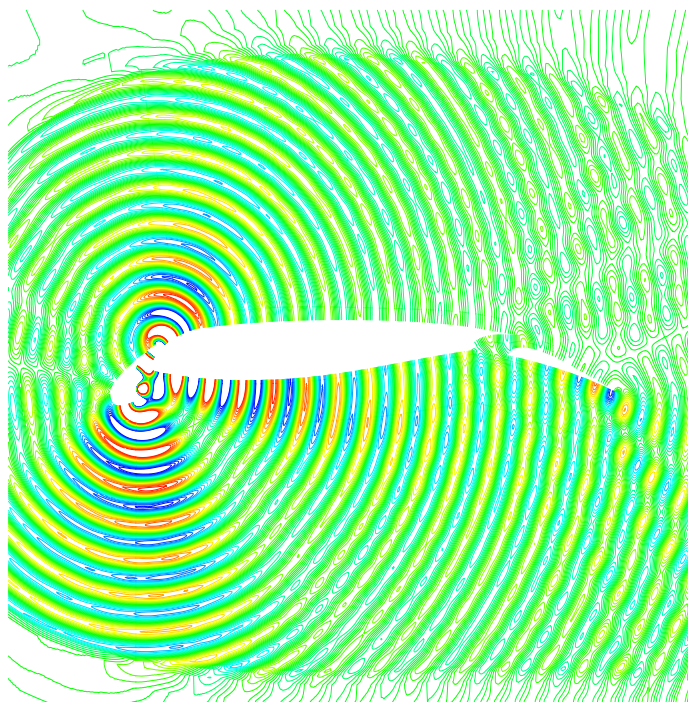


FIG. 6.10: Simulation du champ acoustique rayonné par une source monopolaire harmonique (8 kHz) placée dans la cavité de bec en l'absence d'écoulement. Distribution de la fluctuation de densité dans la gamme $[-5.10^{-5} ; 5.10^{-5}]$. Modèle Euler.

Les trois lobes apparaissent nettement sur la Figure 6.11 où l'on observe également des niveaux importants près du bord de fuite du volet. Trois petits lobes apparaissent en amont avec un niveau de pression RMS deux fois plus faible, soit environ 6 dB en-dessous des autres lobes. Il semble que le calcul Euler surestime un peu les niveaux par rapport au calcul BEM.

En l'absence d'écoulement, l'utilisation du code BEM est évidemment plus efficace puisqu'elle ne nécessite qu'environ 20 minutes de calcul sur une station SUN (soit l'équivalent de quelques secondes CPU sur un NEC SX5) contre 10 h pour le calcul Euler. La méthode BEM nécessite de résoudre un problème matriciel dont la taille est le nombre de facettes utilisées pour discrétiser l'obstacle (1300 pour l'aile 2D). Son utilisation en 3D s'avère,

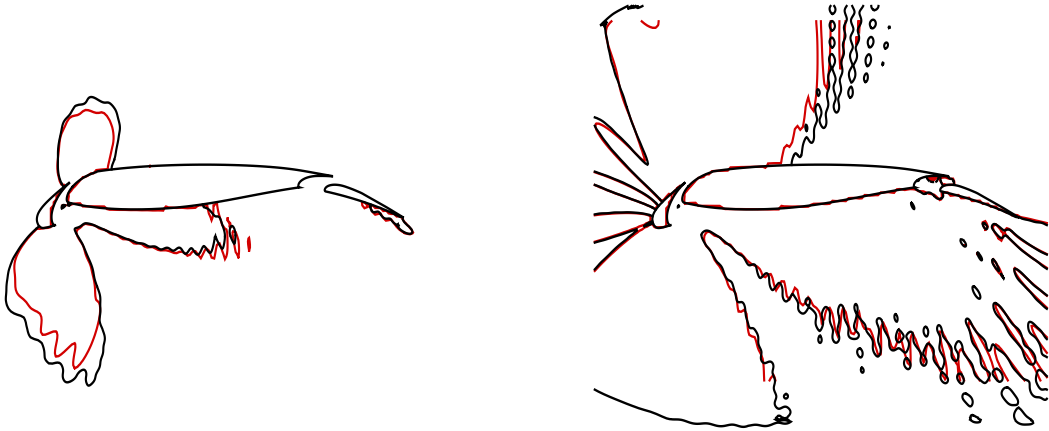


FIG. 6.11: Simulation du champ acoustique rayonné par une source monopolaire harmonique (8 kHz) placée dans la cavité de bec en l'absence d'écoulement. Calcul Euler (noir) et calcul BEM (rouge). Iso-niveau de pression RMS normalisée égale à 1 (figure de gauche) et à 0,5 (figure de droite). Echelle linéaire.

en revanche, beaucoup plus coûteuse. De plus, elle n'autorise pas de calcul en écoulement inhomogène.

Pour cette source à 8 kHz, la comparaison entre les calculs Euler effectués avec et sans raffinement azimutal donne des résultats très proches, les ondes acoustiques étant suffisamment résolues dans tout le domaine CAA.

6.3.2 Effets dus à l'écoulement

La propagation des ondes acoustiques est maintenant simulée en présence d'un écoulement avec une incidence de 4° par rapport au corps principal. Cet écoulement est obtenu par interpolation bilinéaire du champ SGE moyenné en temps sur la grille acoustique à l'aide du logiciel Tecplot.

Le cas de la source acoustique à 8 kHz placée au centre dans la cavité de bec est repris.

La distribution de la fluctuation de densité présentée sur la Figure 6.12 montre que la formation d'un mode tourbillonnaire se produit aux bords de fuite supérieur du bec, dans la couche de cisaillement. Ce mode est de type entropique, il ne rayonne pas en champ lointain. En rencontrant la frontière aval du domaine de calcul, il n'engendre pas de réflexion numérique notable. L'influence de ce mode tourbillonnaire sur le champ acoustique est donc négligeable.

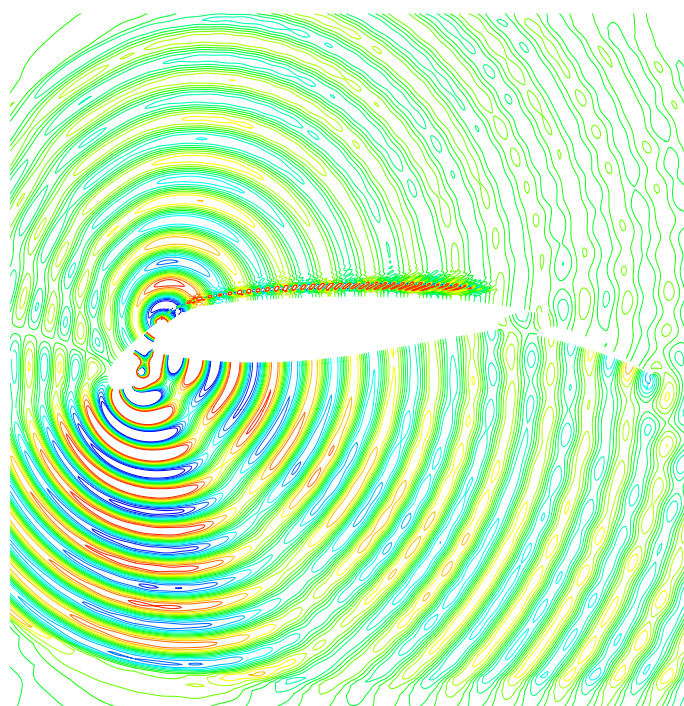


FIG. 6.12: Simulation du champ acoustique rayonné par une source monopolaire harmonique (8 kHz) placée dans la cavité de bec, en présence de l'écoulement inhomogène. Distribution de la fluctuation de densité dans la gamme $[-5.10^{-5} ; 5.10^{-5}]$.

Les Figures 6.13 et 6.14 comparent la distribution de la pression RMS avec et sans écoulement. En présence de l'écoulement, la forme générale des différents lobes de directivité sont affectés. Celui du bas s'est renforcé alors que celui du haut s'est affaibli.

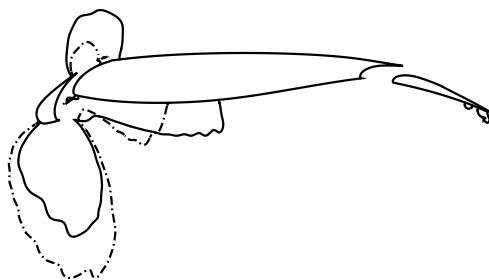


FIG. 6.13: Simulation de la propagation acoustique d'une source monopolaire harmonique (8 kHz) placée dans la cavité de bec en présence de l'écoulement inhomogène. Distribution de la pression RMS. Cas avec écoulement (noir discontinu), sans écoulement (noir continu). Niveau de pression RMS normalisée à 1,2.

La Figure 6.16 compare les directivités en champ proche obtenues avec et sans écoulement à l'aide des niveaux (normalisation en \sqrt{r}) relevés sur une ligne de maillage enveloppant l'aile. Sans écoulement, la comparaison Euler/BEM est très bonne, et la disposition des lobes confirme les observations effectuées plus haut.

Les Figures 6.14 et 6.15 expliquent le rôle joué par la bulle de recirculation dans la modification du rayonnement acoustique par l'écoulement inhomogène. On voit qu'elle confine l'onde acoustique près de la paroi interne du bec avant de le diffracter sur le bord de fuite inférieur du bec. Cette concentration d'énergie est donc délivrée principalement vers le bas. Les niveaux de pression RMS sont moins forts dans la partie supérieure de la cavité de bec et le rayonnement dans la partie située au-dessus du corps principal est moindre. En effet, la propagation en présence d'écoulement induit, d'une part, un renforcement des niveaux vers l'amont accompagné d'un resserrement des fronts d'onde et, d'autre part, un affaiblissement des niveaux vers l'aval accompagné d'un allongement des fronts d'onde. L'écoulement dans la cavité de bec s'effectuant principalement du bas vers le haut de la cavité (sauf près de la paroi interne du bec), on retrouve ces tendances dans le calcul en présence d'écoulement.

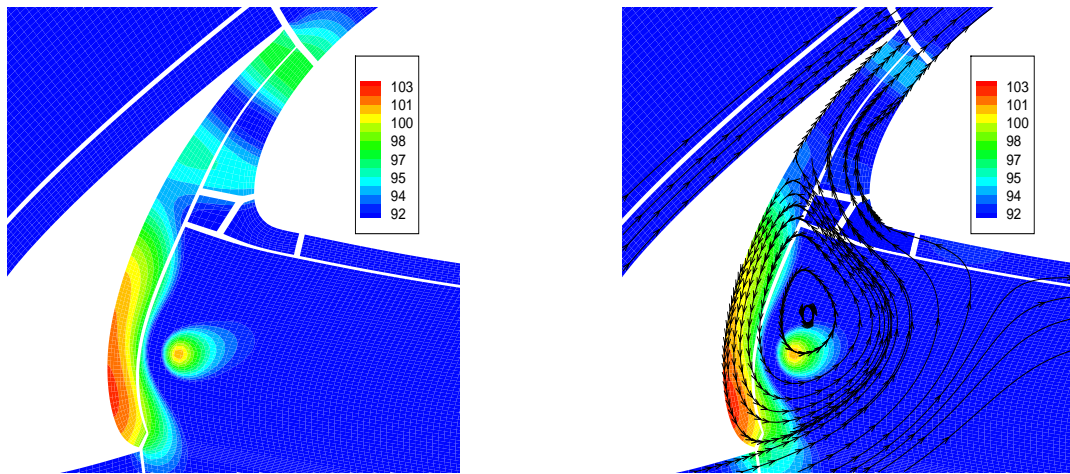


FIG. 6.14: Simulation de la propagation acoustique d'une source monopolaire harmonique (8 kHz) placée dans la cavité de bec. Distribution de la pression RMS. A gauche : calcul sans écoulement. A droite : calcul en présence de l'écoulement inhomogène (lignes de courant en noir). Echelle logarithmique (dB).

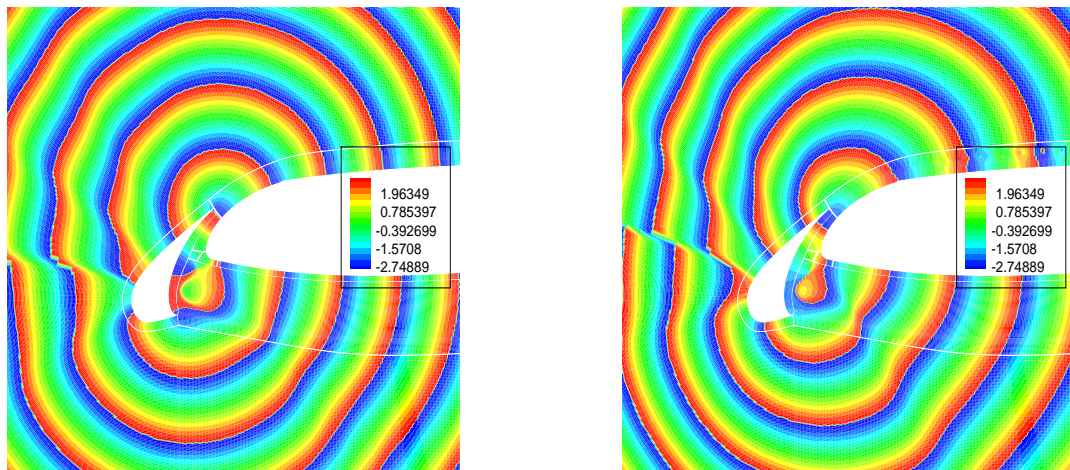


FIG. 6.15: Simulation de la propagation acoustique d'une source monopolaire harmonique (8 kHz) placée dans la cavité de bec. Distribution du déphasage par rapport à la source. A gauche : calcul sans écoulement. A droite : calcul en présence de l'écoulement inhomogène.

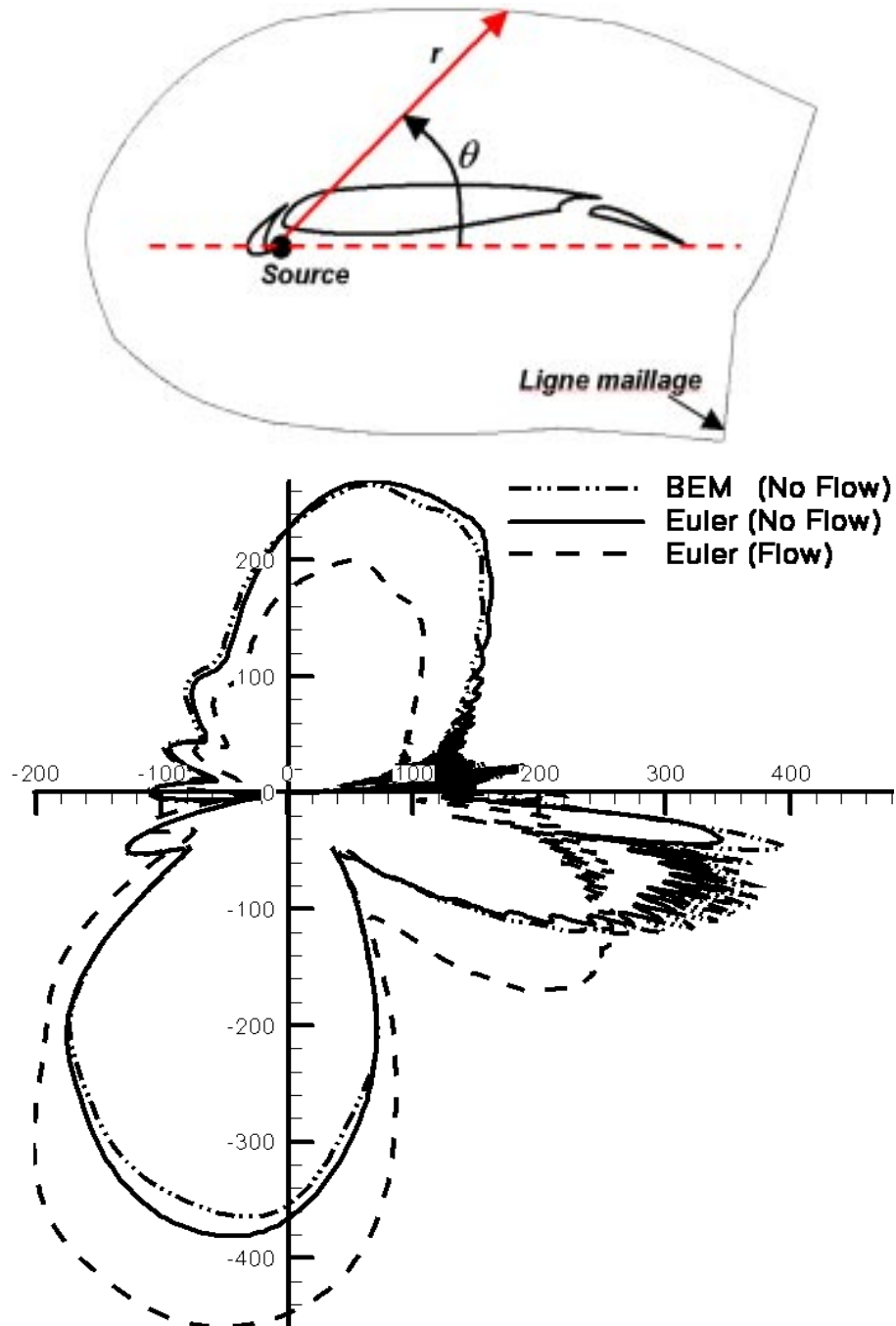


FIG. 6.16: Simulation de la propagation acoustique d'une source monopolaire harmonique (8 kHz) placée dans la cavité de bec. Comparaison BEM (trait discontinu pointillé)/Euler sans écoulement (trait plein)/ Euler avec écoulement (trait discontinu). Diagramme de directivité, échelle linéaire.

6.4 Rayonnement de sources équivalentes

Le maillage acoustique, qui a permis une validation de la propagation acoustique pour une source à 8 kHz, est repris en vue de propager deux des sources de bruit "physiques" identifiées (section 6.2). Chaque source est modélisée par une source monopolaire harmonique. L'effet de l'écoulement sur la propagation de ces sources est étudié. De plus, la diffraction, en l'absence d'écoulement, est comparée avec le résultat du modèle BEM dans chaque cas.

6.4.1 Source au bord de fuite supérieur du bec

Sur la grille de simulation précédemment décrite et validée, on place une source monopolaire harmonique en aval du bord de fuite supérieur du bec. Sa fréquence est de 30 kHz. La résolution des ondes acoustiques remontant l'écoulement est de 8 points par longueur d'onde ($\lambda = 8\Delta x$), ce qui se situe à la limite de validité de la méthode numérique (voir le chapitre 5).

En l'absence d'écoulement, la Figure 6.17, en haut, fait apparaître l'existence de trois lobes principaux, deux vers le haut et un vers le bas. Sous le corps principal, plusieurs lobes d'intensité décroissante de l'amont vers l'aval montrent que les ondes acoustiques sortant de la cavité de bec ont été diffractées au bord de fuite inférieur du bec. Ce phénomène est bien visible sur la Figure 6.18 en haut. La diffraction induit ensuite l'existence de plusieurs lobes "descendants" dont le plus important est dirigé suivant la verticale. Les autres lobes sont plus fins et plus faibles. Aucun rayonnement acoustique n'atteint le volet et, dans la direction amont, l'intensité du lobe est faible. La comparaison avec la BEM est encore très bonne à 30 kHz dans la majorité du domaine de calcul (Figure 6.22). La différence entre les prévisions des deux modèles (Euler et BEM) est de l'ordre du décibel (dB). On pourra toutefois noter une différence plus importante en aval du volet, où il aurait fallu sans doute raffiner le maillage afin de ne pas descendre en-dessous de 8 points par longueur d'onde.

En présence de l'écoulement non-uniforme, le lobe situé sous le corps principal est dévié vers l'aval d'environ 40 degrés. Son niveau est très légèrement plus faible (environ 1 dB) par rapport au même lobe en l'absence d'écoulement. La présence de l'écoulement inhomogène (Fig. 6.17 en bas) dévie les fronts d'onde dans la région de la bulle. Les fronts d'onde ne viennent pas impacter le bord de fuite inférieur du bec. Il n'y a pas de phénomène de diffraction aussi marqué qu'en l'absence d'écoulement (Fig. 6.18 en bas). Le front d'onde qui entre dans la cavité de bec depuis le culot peut emprunter deux trajets. Le premier trajet principal se situe le long de la paroi interne du bec. L'écoulement est d'abord opposé à la propagation $u_{ac} = c - U_o$, puis lorsque le front d'onde rejoint la bulle de recirculation du bec, la vitesse de l'écoulement et du front d'onde s'additionnent $u_{ac} = c + U_o$ et ce dernier est accéléré. Le second trajet se situe près du corps principal. Le front d'onde remonte l'écoulement sur tout ce trajet et, de plus, il est dévié vers l'aval, car le vecteur vitesse de l'écoulement est orthogonal à la direction de propagation. Entre ces deux trajets, les

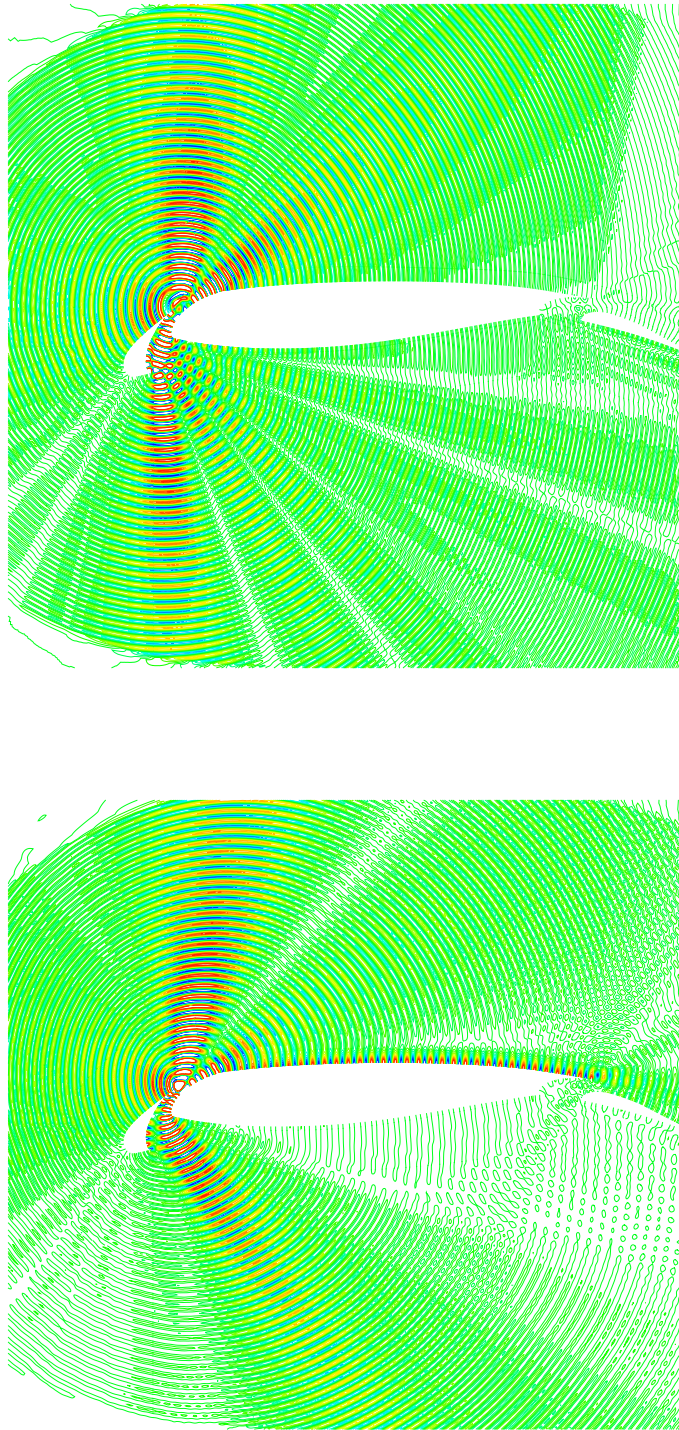


FIG. 6.17: Propagation acoustique de la source harmonique monopolaire (30 kHz) placée au bord de fuite supérieur du bec. En haut : Euler sans écoulement. En bas : Euler avec écoulement inhomogène. Niveaux de fluctuations de densité dans l'intervalle $[-5.10^{-5}; 5.10^{-5}]$.

fronts d'onde passent dans la bulle de recirculation où la vitesse de l'écoulement est faible. On voit nettement qu'en sortie de la bulle, les deux fronts d'onde issus des deux trajets sont en opposition de phase. La diffraction au bord de fuite inférieur du bec va donc être considérablement modifiée. Les distributions de pression RMS et du déphasage par rapport à la source sont présentées sur les Figures 6.20 et 6.21. On observe des niveaux importants de pression RMS près du bord d'attaque du corps principal en présence d'écoulement. La cause principale est l'accélération de l'écoulement moyen à cet endroit ($M = 0,35$), ce qui entraîne un renforcement des fronts d'onde qui remontent l'écoulement. Le déphasage par rapport à la source permet d'apprécier la séparation des fronts d'onde, venant du bord de fuite supérieur, dans la cavité de bec de part et d'autre de la bulle de recirculation.

L'écoulement a donc une influence significative sur le bruit rayonné par cette source : il n'y a qu'un seul lobe dirigé vers le bas. On voit sur la Figure 6.20 que la distribution de pression RMS diffère de beaucoup en présence de l'écoulement. Un écart de plus de 5 dB sépare le lobe principal dirigé vers le bas du lobe dirigé vers l'amont. Cette tendance à amplifier le bruit sous le corps principal et vers l'aval a été observée expérimentalement [19].

Ces résultats sont en outre très comparables à ceux obtenus par Khorrami *et al.* [16] avec un modèle URANS (RANS instationnaire) pour une configuration similaire, comme le montre la Figure 6.19 issue de leurs travaux. Les fronts d'onde sont déviés et ne viennent pas diffracter au bord de fuite inférieur du bec. Le lobe de directivité vers le bas, légèrement vers l'aval, est comparable. Cela explique que la simulation d'Atkins *et al.* [2], qui ne modélise pas la présence de l'écoulement, ne permet pas de rendre compte de ce lobe de directivité. Ce résultat est particulièrement intéressant puisque la modélisation choisie dans cette étude est nettement moins coûteuse que le calcul aérodynamique instationnaire effectué par Khorrami *et al.* [16]. Ceci s'explique aussi par le fait que, dans ce calcul, la source de bruit principale est l'échappement tourbillonnaire au bord de fuite supérieur du bec. La prise en compte de cette seule fréquence est par conséquent susceptible de donner une estimation des niveaux relatifs de bruit. En revanche, le lobe dirigé vers l'amont est d'intensité beaucoup plus faible que celui obtenu par Khorrami *et al.* [16]). Cette différence s'explique partiellement par la différence de modélisation de la source, d'une part la localisation de son point d'émission et, d'autre part, la diffraction de son rayonnement acoustique au bord de fuite supérieur du bec.

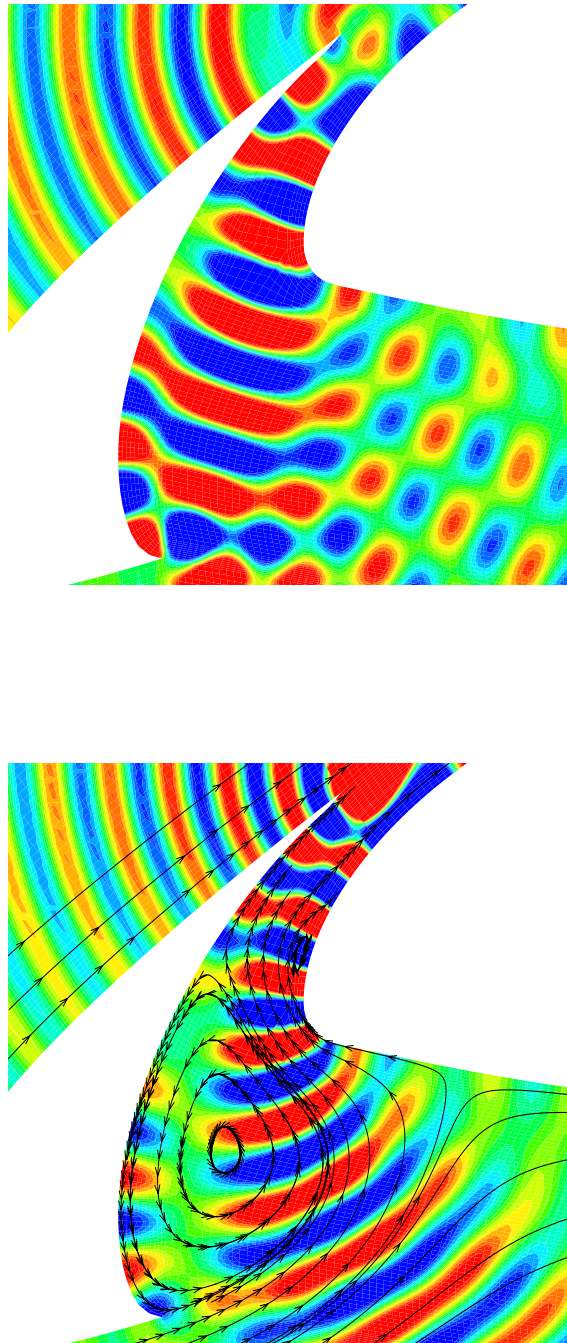


FIG. 6.18: Propagation acoustique de la source harmonique monopolaire (30 kHz) placée au bord de fuite supérieur du bec. Zoom dans la cavité de bec. En haut : sans écoulement. En bas : avec écoulement inhomogène. Niveaux de fluctuations de densité dans l'intervalle $[-5.10^{-5}; 5.10^{-5}]$. Lignes de courant (noir).

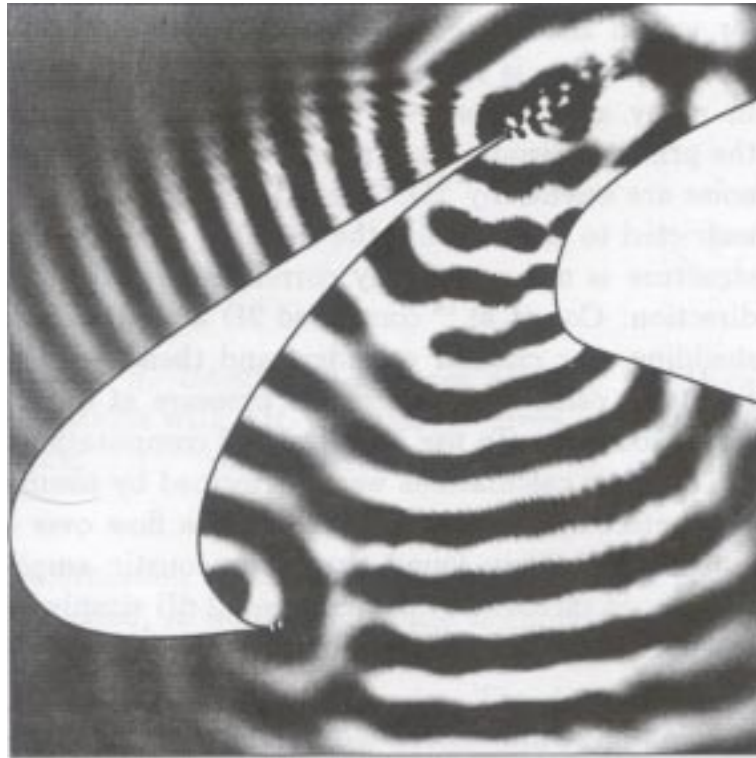


FIG. 6.19: Calcul URANS de Khorrami *et al.* [16]. Fluctuation de pression instantanée.

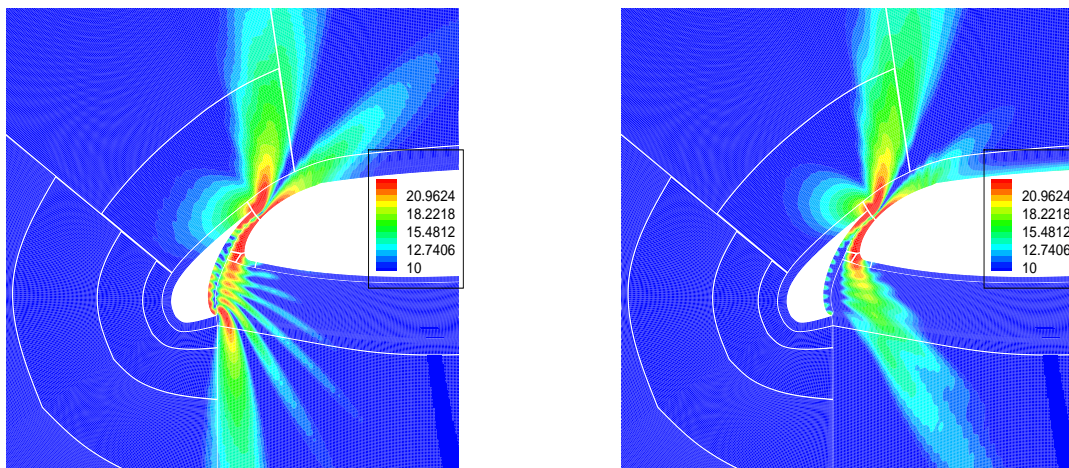


FIG. 6.20: Propagation acoustique de la source harmonique monopolaire (30 kHz) placée au bord de fuite supérieur du bec. Champ de pression RMS en dB. A gauche : sans écoulement. A droite : avec écoulement.

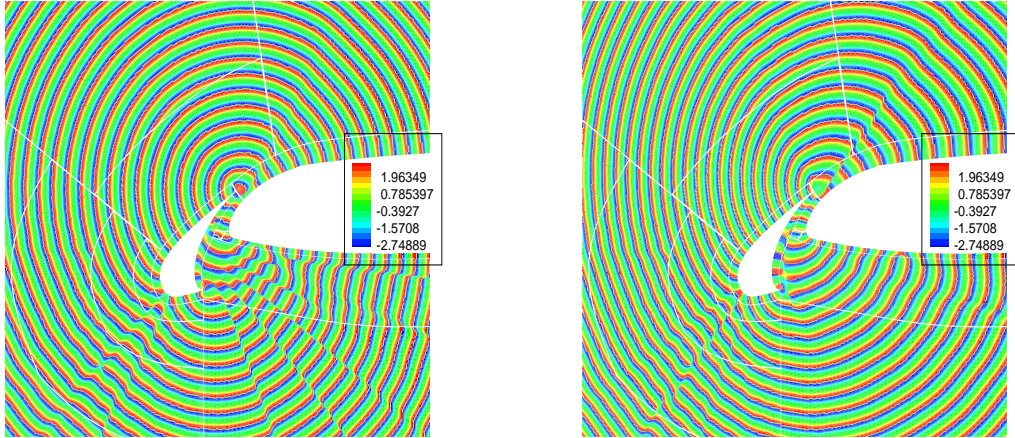


FIG. 6.21: Propagation acoustique de la source harmonique monopolaire (30 kHz) placée au bord de fuite supérieur du bec. Déphasage par rapport à la source. A gauche : sans écoulement. A droite : avec écoulement.

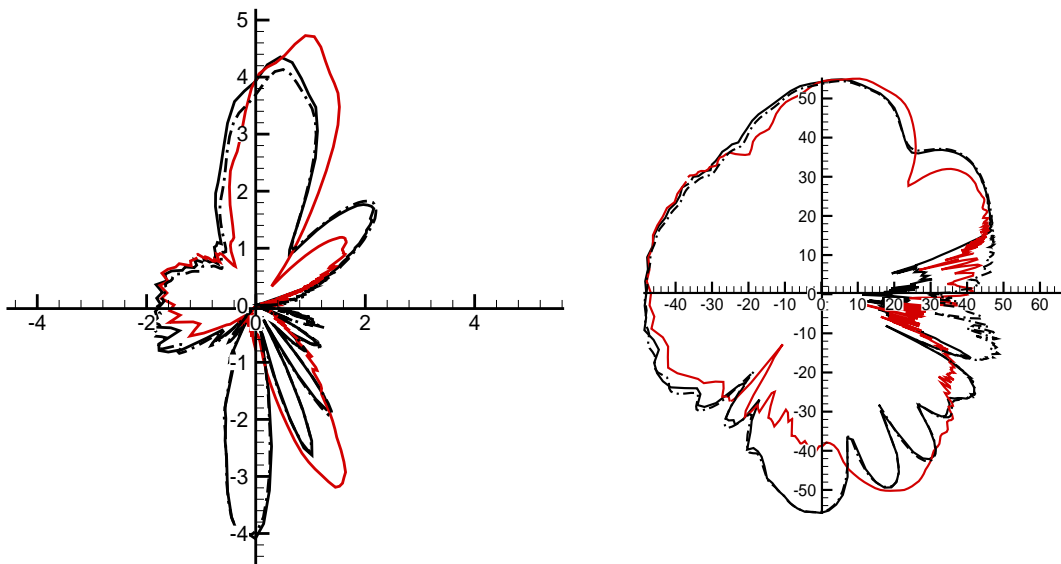


FIG. 6.22: Propagation acoustique de la source harmonique monopolaire (30 kHz) placée au bord de fuite supérieur du bec. Diagramme de directivité. Euler sans écoulement (noir continu), Euler avec écoulement (rouge), BEM (noir discontinu). A gauche : niveaux relatifs échelle linéaire. A droite : niveaux relatifs en dB.

6.4.2 Source près du bord de fuite inférieur du bec

Une source monopolaire harmonique est enfin placée sur la paroi interne du bec, près du bord de fuite inférieur du bec. Sa fréquence est de 20 kHz. En présence de l'écoulement, la résolution des ondes acoustiques se propageant vers l'amont est de 12 points par longueur d'onde ($\lambda = 12\Delta x$).

En l'absence d'écoulement, la Figure 6.23 en haut, montre l'existence de cinq lobes principaux sous le corps principal, de niveaux intenses près du volet et d'un lobe unique au-dessus du corps principal. Cette distribution est principalement due à la diffraction des fronts d'onde, la source étant placée très près du bord de fuite inférieur du bec. Parmi les lobes situés au-dessous du corps principal, les plus intenses sont les lobes 2, 3 et 4 (en les numérotant de 1 à 5 de l'amont vers l'aval).

En présence de l'écoulement (Figure 6.23 en bas), on retrouve cette distribution avec des lobes un peu décalés vers l'aval. Cependant, le niveau respectif des différents lobes a changé. Le lobe le plus en amont, lobe 1, est le plus intense. Les niveaux de pression RMS sont plus forts dans la partie supérieure de la cavité de bec. L'écoulement a donc encore une influence significative sur le bruit rayonné par cette source. On observe, sur la Figure 6.24, les différences sur le champ acoustique obtenu dans les deux cas : nombre, position et intensité relative des différents lobes. La Figure 6.25 montre le déphasage par rapport à la source des solutions avec et sans écoulement, et illustre de fait le rôle de la bulle de recirculation dans le rayonnement de la source.

La carte de directivité (Fig. 6.26) montre à nouveau la précision de la méthode en l'absence d'écoulement comparée à la BEM, et ce, dans toutes les directions de propagation. On retrouve une directivité plus forte en présence d'écoulement au-dessus du corps principal dans le quart de plan supérieur gauche. Sous le corps principal, les différences sont localement assez marquées, jusqu'à 5-10 dB d'écart dans le quart de plan inférieur droit.

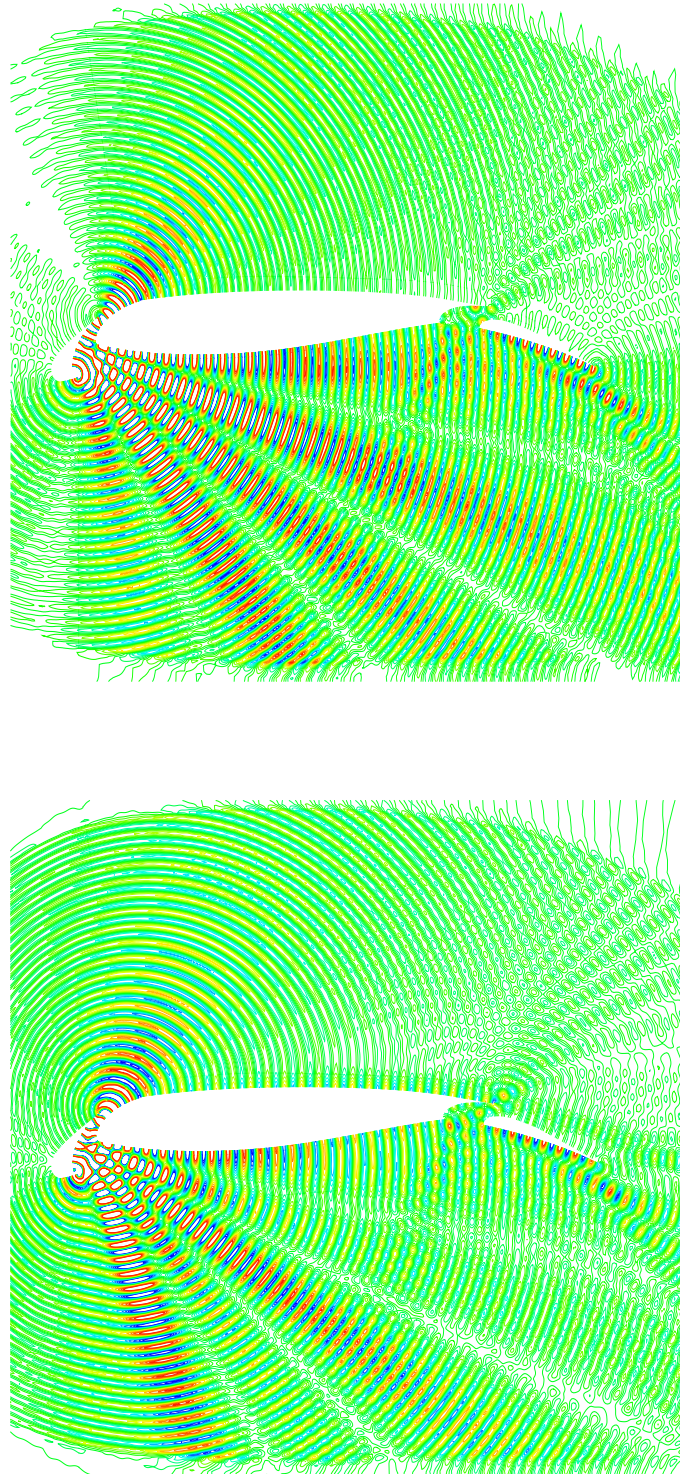


FIG. 6.23: Propagation acoustique de la source harmonique monopolaire (20 kHz) placée au bord de fuite inférieur du bec. En haut : Euler sans écoulement. En bas : Euler avec écoulement . Niveaux de fluctuations de densité dans l'intervalle $[-5.10^{-5} ; 5.10^{-5}]$.

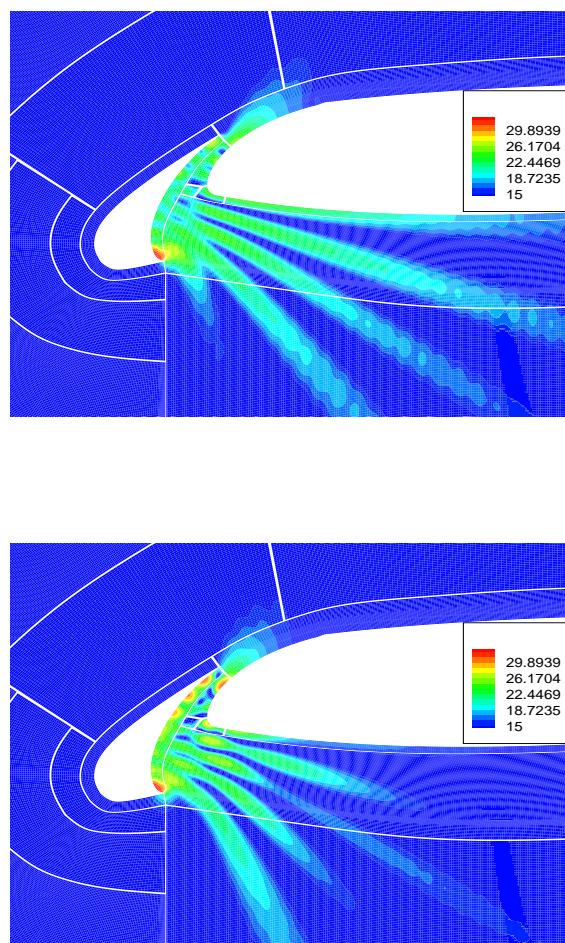


FIG. 6.24: Propagation acoustique de la source harmonique monopolaire (20 kHz) placée au bord de fuite inférieur du bec. En haut : sans écoulement. En bas : en présence d'écoulement. Pression RMS en dB.



FIG. 6.25: Propagation acoustique de la source harmonique monopolaire (20 kHz) placée au bord de fuite inférieur du bec. Déphasage par rapport à la source. À gauche : sans écoulement. À droite : en présence d'écoulement.

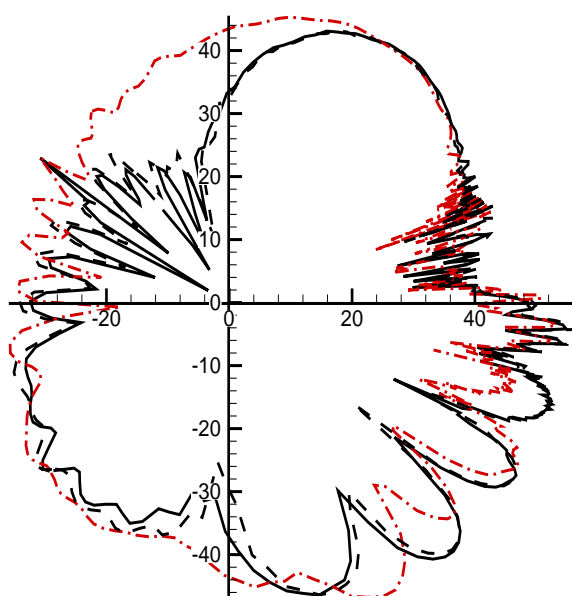


FIG. 6.26: Propagation acoustique de la source harmonique monopolaire (20 kHz) placée au bord de fuite inférieur du bec. Directivité en dB. Euler sans écoulement (noir continu). Euler avec écoulement (rouge discontinu pointillé), BEM (noir discontinu).

6.5 Conclusion

La méthode numérique de simulation de la propagation acoustique en écoulement non-uniforme a permis d'étudier le rayonnement de sources d'origine aérodynamique sur une configuration complexe, de type industrielle. Les sources, mises en évidence à l'aide d'une autre méthode (SND, SGE, méthode expérimentale), ont été modélisées analytiquement. Un maillage acoustique adapté à la simulation de la propagation a été construit à partir du maillage aérodynamique grâce, entre autres, à l'utilisation des raccordements non-conformes. L'influence de l'écoulement moyen sur la propagation de sources de bruit de la cavité de bec d'une aile hypersustentée a pu être mise en évidence. Les résultats montrent que cette influence n'est pas négligeable ; elle peut modifier la propagation en déviant les fronts d'onde et changer considérablement la directivité du champ acoustique. Le modèle prend en compte l'interaction de l'écoulement avec les fluctuations acoustiques : convection, réfraction. En revanche, il ne rend pas compte des interactions entre les phénomènes instationnaires sur la propagation, que l'on peut considérer comme négligeables en première approximation.

D'une part, ce genre d'étude qualitative peut se révéler intéressante, d'un point de vue pragmatique, dans l'optique de réduire le bruit d'une source identifiée comme ayant une contribution importante au bruit total. Il est alors possible de mettre en oeuvre des méthodes passives de réduction du bruit (effets de masque, matériaux absorbants). D'autre part, cet outil pourra être introduit dans une méthode de localisation pour modéliser, de façon encore plus réaliste, la propagation des sources.

En revanche, cette méthode, en l'état, ne permet pas encore d'obtenir une prévision du bruit aérodynamique total de la configuration. Pour cela, il aurait fallu prendre en compte l'importance relative de chacune des sources, et la nature large bande de ces sources. Dans l'optique de la prévision du bruit aérodynamique, il faut mettre en place le couplage direct SGE/Euler, ce qui constitue l'objet du dernier chapitre.

Chapitre 7

Bruit aérodynamique d'une plaque plane à bord de fuite épais

L'application de la méthode d'interfaçage non-conforme (chapitre 5) à la prévision du bruit de culot constitue un préalable à son application sur des configurations complexes, de type "aile hypersustentée". Les résultats aérodynamiques d'une simulation numérique tridimensionnelle de l'écoulement turbulent autour d'une plaque plane à bord de fuite épais [86] avaient été stockés en vue de leur couplage avec une simulation de propagation acoustique en écoulement inhomogène. Le couplage instationnaire SGE/Euler à un sens a ainsi été effectué avec la méthode d'interface non-conforme validée au chapitre 5 (section 5).

7.1 Couplage SGE/Euler sur une plaque plane à bord de fuite épais

7.1.1 Le calcul SGE

L'écoulement turbulent a été simulé grâce à un modèle de simulation des grandes échelles. Les détails de cette simulation sont présentés par Terracol dans la référence [86]. Ce calcul est tridimensionnel, les équations de Navier-Stokes y sont discrétisées par une méthode de volumes finis d'ordre deux en espace et par une intégration temporelle d'ordre deux.

On considère l'écoulement sur une plaque plane terminée par un bord de fuite épais.

L'épaisseur du bord de fuite est $h = 10L$ avec une longueur de référence $L = 0,086$ mm. Le nombre de Reynolds, basé sur l'épaisseur du culot, est $Re_h = 10000$ et le nombre de Mach de l'écoulement est 0,5. Dans la suite, toutes les dimensions sont normalisées par L .

Les dimensions du domaine de calcul sont $[-600 ; 350]$ dans la direction axiale suivant x , $[-600 ; 600]$ dans la direction normale à la paroi suivant y et $[-20 ; 20]$ dans la direction

de l'envergure. L'envergure comprend 86 plans.

Le maillage est étiré progressivement depuis la première maille de la couche limite jusqu'en sortie de domaine dans la direction normale à la paroi (Fig. 7.1). Cet étirement, nécessaire pour garder un coût de calcul raisonnable, empêche la propagation correcte des ondes au-delà de $y = 100$.

Le nombre de points du calcul est de 6,4 millions. Ce calcul a nécessité environ 700 heures CPU pour l'établissement de l'écoulement (150 000 itérations) et le post-traitement (150 000 itérations).

Des structures tourbillonnaires cohérentes apparaissent dans le sillage du culot. L'échappement tourbillonnaire qui se produit a été largement observé dans le cas d'obstacles arrondis (cylindre à section circulaire) et de profils à bord de fuite tronqué. Le phénomène est connu sous le nom d'allées de Von Karman, il est constitué de rouleaux tridimensionnels dont la vorticité change alternativement de signe. Ces structures qui apparaissent à un nombre de Reynolds assez faible perdurent à nombre de Reynolds élevé.

L'interaction de ces structures, présentes dans le sillage, avec les arêtes du bord de fuite engendre un bruit acoustique à bande étroite qui vient s'ajouter au bruit à large bande généré par la diffraction au bord de fuite de la couche limite turbulente (Fig. 7.3). La fréquence acoustique de ce mécanisme (40 kHz) correspond à un nombre de Strouhal, basé sur l'épaisseur du culot et les épaisseurs de déplacement, égal à $St = 0,24$.

Les données ont été stockées dans deux sous-domaines du champ proche, à savoir le domaine 1 $[-300 ; 0] \times [5 ; 210]$ et le domaine 2 $[0 ; 250] \times [0 ; 210]$, situés respectivement au-dessus et en aval de la plaque, dans le plan médian en envergure (Figure 7.2). Les cinq variables conservatives (partie fluctuante) ont été stockées à chaque itération du calcul SGE, sur une durée de $2000 \times 1.10^{-7} = 2.10^{-4}$ s soit 0,2 ms. Cette durée correspond à 8 périodes du cycle d'échappement.

Le volume total de données stockées est donc d'environ 2.10^8 réels occupant un volume de 1,6 Go. Le stockage s'effectue dans un seul fichier par domaine stocké.

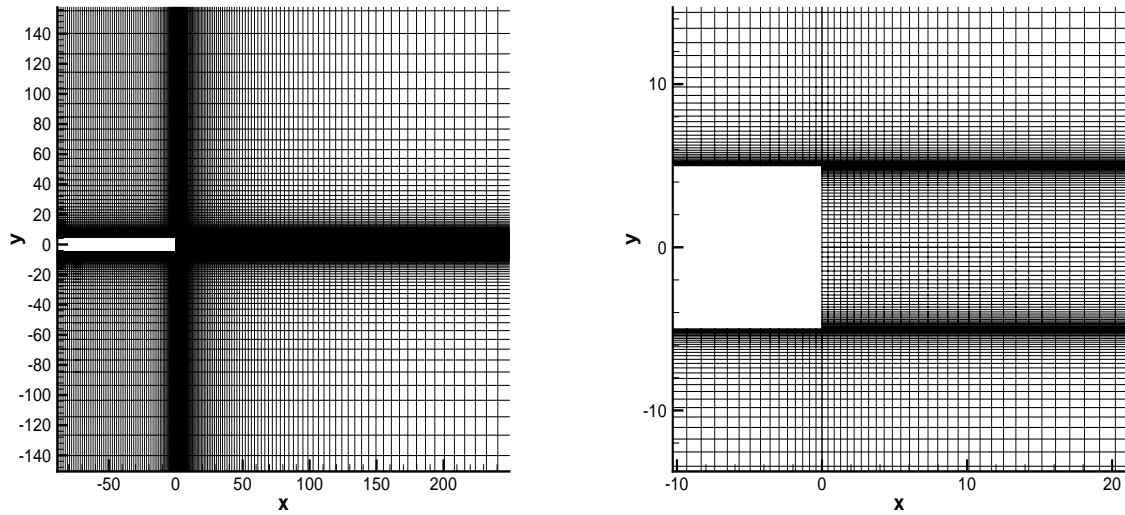


FIG. 7.1: Maillage SGE. A gauche : zoom en aval du culot. A droite : étirement des mailles dans le champ proche.

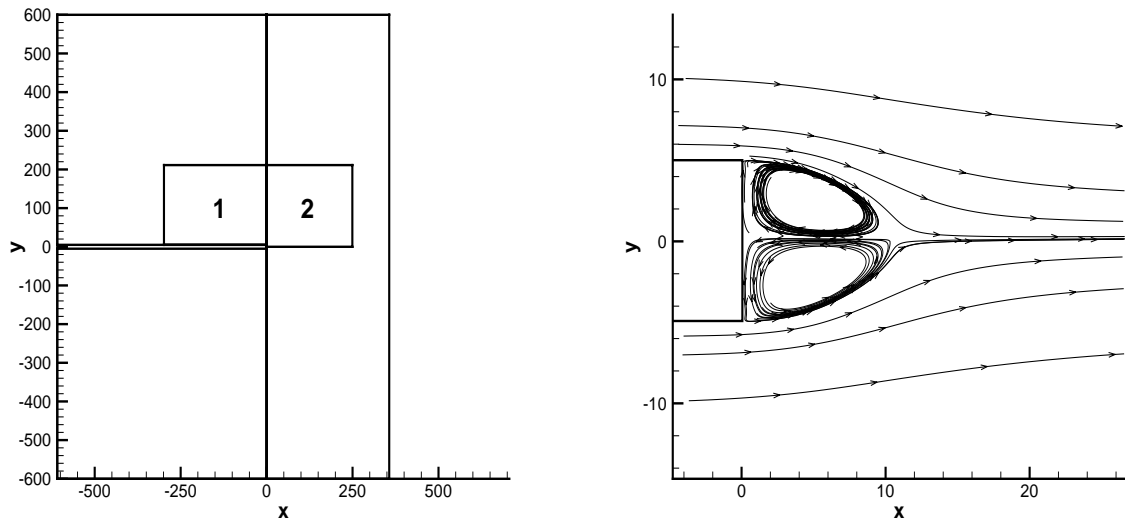


FIG. 7.2: A gauche : le domaine total de calcul SGE et les domaines stockés 1 et 2. A droite : les lignes de courant du champ de vitesse moyenné en temps.

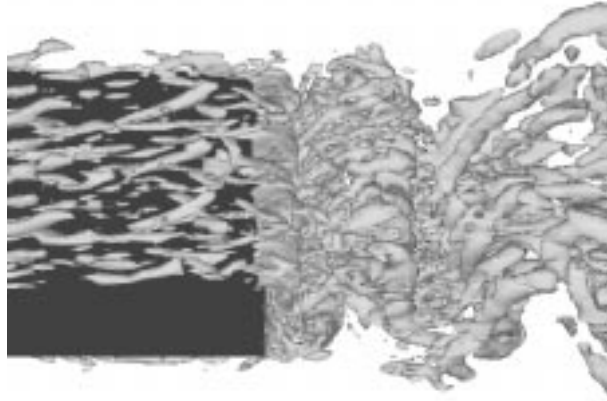


FIG. 7.3: Visualisation des structures turbulentes de l'écoulement [86] : critère Q .

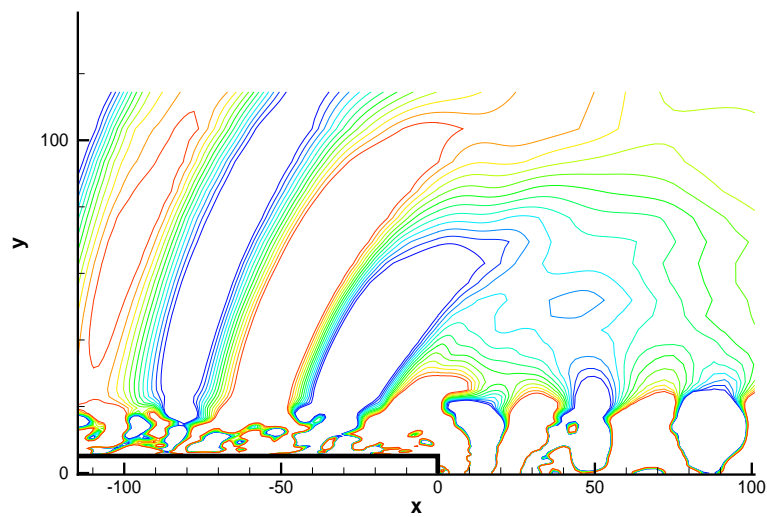


FIG. 7.4: Ondes acoustiques obtenues à l'aide du calcul SGE. Visualisation de la fluctuation de densité dans les domaines de stockage. Contours dans la gamme $[-0,005; 0,005]$

7.1.2 Couplage SGE/Euler

L'interface non-conforme, développée au chapitre 5, va être employée pour réaliser la transmission des ondes acoustiques du maillage SGE vers un maillage uniforme permettant la propagation en champ lointain des ondes générées lors du calcul aérodynamique.

Problématique

L'intérêt d'une telle configuration, dont le post-traitement acoustique est accessible en termes de temps de calcul (de l'ordre de 1000 s CPU), est de pouvoir faire varier la position de l'interface afin d'ajuster au mieux le couplage. Ce savoir-faire empirique sera utile afin de l'appliquer à des configurations plus complexes. Une des questions qui se posent est de savoir à quelle distance de la plaque on peut descendre l'interface. L'optimisation de cette position est un compromis entre les deux critères contradictoires suivants :

- l'interface doit être le plus près possible de la source afin d'éviter que le maillage CFD ne se comporte comme un filtre "passe-bas" pour les ondes acoustiques en raison de l'étirement des mailles,
- l'interface doit être suffisamment loin pour que les fluctuations turbulentes (couche limite, sillage) ne deviennent pas une source de bruit "parasite" pour les équations d'Euler.

En effet, on a pu montrer que la présence de tourbillons mal résolus -distribution spatiale insuffisante- sur la grille CFD engendre un bruit parasite lorsque ces données sont transmises sur une grille où sont résolues les équations d'Euler [58]. Le même problème se pose lors de l'utilisation de méthodes intégrales, car celles-ci nécessitent de choisir une surface englobant les sources, avec des contraintes similaires en termes de résolution et de nature des fluctuations.

Description des simulations

Pour obtenir la meilleure position possible pour l'interface, on propose d'étudier trois positions horizontales différentes (Fig. 7.5) :

- interface 1 : la droite $y = 40$,
- interface 2 : la droite $y = 60$,
- interface 3 : la droite $y = 80$.

La grille acoustique est homogène, de taille de maille $\Delta x = \Delta y = 3$ et a les dimensions suivantes : $[-300 ; 250] \times [60 ; 420]$. Pour l'interface 2, elle est reliée aux deux grilles de stockage successivement en $j = 47$ et $j = 77$ (Figure 7.6). L'interface 2 se trouve ainsi en dehors des couches limites et du sillage, sauf tout à fait en aval. A cet endroit, sur la grille CFD, la taille de maille est de $\Delta y_s = 6$, soit $y_s = 0,51$ mm, correspondant à une fréquence "acoustique" de 670 kHz. Une onde acoustique de fréquence 40kHz ($\lambda = 8,5$ mm) y est donc résolue avec 17 points par longueur d'onde et une onde de fréquence de 100

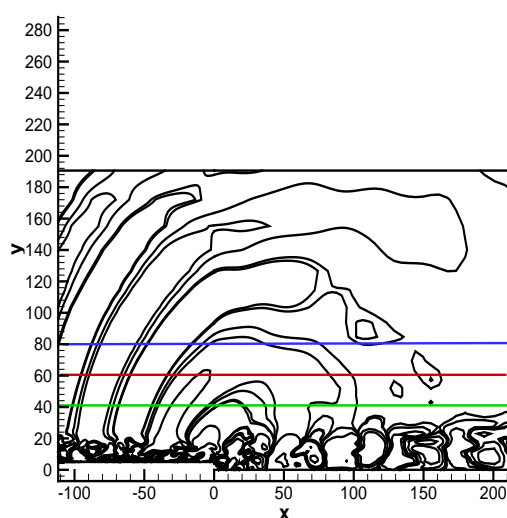


FIG. 7.5: Position des trois interfaces et isocontours de densité (données stockées).

kHz ($\lambda = 3,4$ mm) avec 6 points. La fréquence de coupure "acoustique" du maillage CFD peut-être définie arbitrairement comme la fréquence correspondant à la longueur d'onde $\lambda = 10\Delta x$. Selon ce critère, les fréquences de coupure "acoustiques" pour les interfaces 1, 2 et 3 sont respectivement de 100, 68 et 50 kHz.

L'interface 1 coupe le sillage en fin de domaine, tandis que l'interface 3 se trouve au-dessus dans toute la longueur du domaine de calcul. Les tailles de maille et pas de temps de calcul sont les mêmes pour les trois simulations. Avec un pas de temps de $1 \cdot 10^{-7}$ s le nombre CFL obtenu est $CFL = \frac{(c+U_0)\Delta t}{\Delta x} = \frac{(340+170) \cdot 10^{-7}}{3 \cdot 8,5 \cdot 10^{-5}} \approx 0,2$. La stabilité et la précision numérique sont assurées. On pourrait même travailler avec un pas de temps 4 fois supérieur, ou ce qui est équivalent, un pas d'espace 4 fois inférieur.

Analyse de l'influence de la position de l'interface de couplage

La solution obtenue sur la grille CAA avec l'interface 2 est présentée sur la Figure 7.6 (isocontours de densité), où l'on peut comparer la propagation des ondes sur cette grille avec celle obtenue lors du calcul SGE (données stockées). On constate que la direction des fronts d'onde est bien conservée et que la continuité est satisfaisante à l'interface. Des différences plus importantes interviennent au-dessus du sillage et seront étudiées dans la suite.

La comparaison avec le résultat SGE dans cette zone, entre $y = 60$ et $y = 120$ permet cette première validation. Plusieurs coupes suivant la direction y ont été effectuées pour

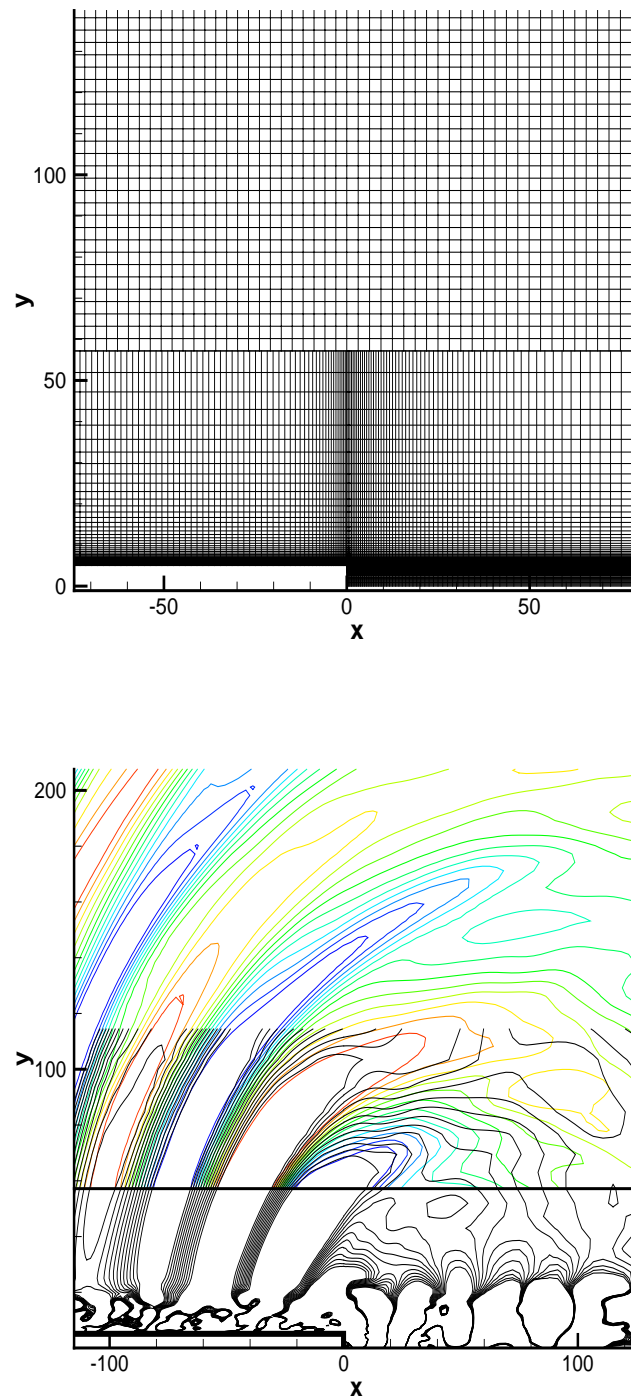


FIG. 7.6: En haut : maillage des deux grilles aérodynamiques et acoustiques résultant de la présence de l'interface 2. En bas : isocontours de densité obtenus lors du calcul SGE (noir), couplage CFD/CAA interface 2 (multicolore). Contours dans la gamme $[-0,001 ; 0,001]$

cette comparaison (Fig. 7.7). Au-dessus du sillage ($x > 0$), la transmission de la fluctuation est plus délicate car la "partie" aérodynamique de la fluctuation est plus importante. Cependant, l'amplitude du signal semble être correctement transmise sans déphasage notable.

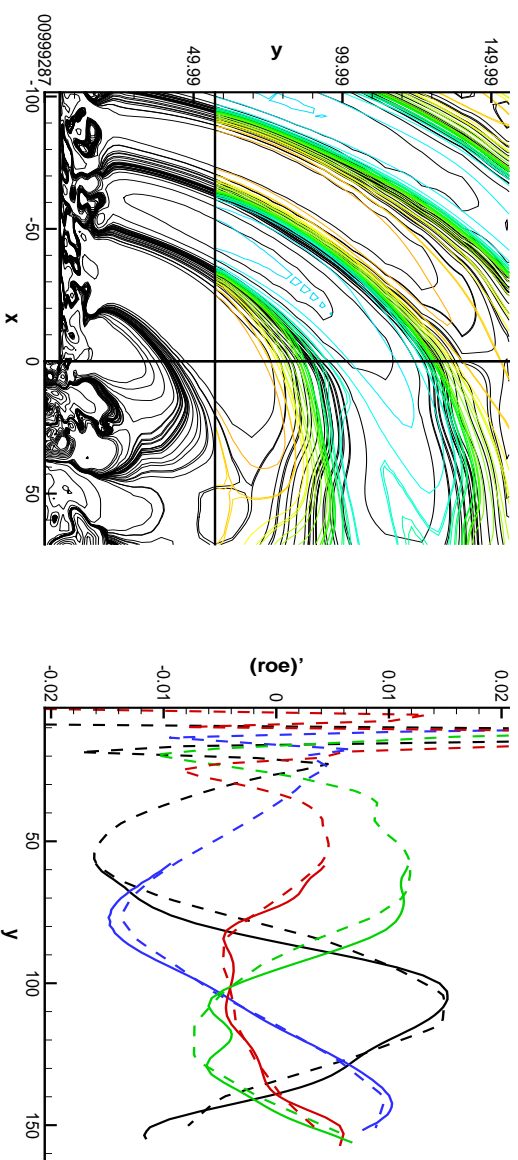


FIG. 7.7: Continuité du champ de pression, interface à $y = 60$. A gauche : Zoom dans la région du culot. A droite : Différentes coupes de la fluctuation instantanée d'énergie, calcul CAA (trait plein) et données SGE (pointillés) à $x = -100$ (bleu), $x = -50$ (noir), $x = 50$ (vert) et $x = 100$ (rouge).

La comparaison des champs de pression RMS suivant la position de l'interface (Fig. 7.8) permet de tirer les conclusions suivantes :

- à $y = 40$, l'interface est placée trop près de la couche limite turbulente de la plaque car la continuité du champ de pression RMS n'est pas bonne à l'interface pour $x < 0$ et donne des résultats discontinus au-dessus du sillage.
- à $y = 60$, l'interface donne des résultats satisfaisant comparé au résultat du calcul SGE pour $x < 0$, mais semble en revanche encore trop près du sillage
- à $y = 80$, l'interface permet d'obtenir une continuité satisfaisante des champs de pression RMS tout le long de l'interface, mais on peut se demander si le champ acoustique qui le traverse n'a pas été trop filtré.

On voit sur l'image de droite de la Figure 7.8 que la prévision du bruit rayonné sur la droite $y = 90$ est très similaire pour les interfaces 2 et 3 sauf au-dessus du sillage, où le calcul avec l'interface 3 surestime le bruit tout en fin de domaine. Cette différence est plus visible sur l'image de gauche où l'on peut voir que les contours de pression rms rouges (interface 2) oscillent beaucoup. Ces oscillations s'expliquent par le caractère aléatoire des

Fluctuations turbulentes dans le sillage.

Les résultats présentés montrent que le compromis se trouve entre l'interface 2 et l'interface 3 et suggèrent la création d'une interface qui s'élargisse vers l'aval pour éviter d'être franchi par le sillage, un artifice utilisé dans la méthode de Kirchhoff [5, 58].

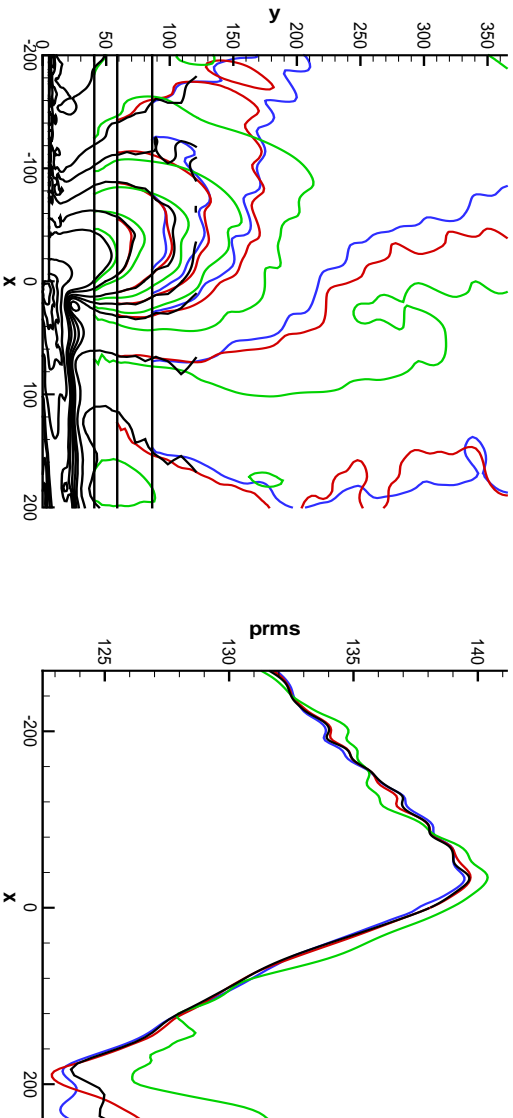


FIG. 7.8: Résultat du couplage, pression RMS. A gauche : champ bidimensionnel. A droite : coupe en $y = 90$. SGE (noir), interface 1 (vert), interface 2 (rouge), interface 3 (bleu).

Interface adaptée : évitement du sillage

Un calcul supplémentaire est donc effectué, avec une nouvelle interface prenant en compte l'élargissement du sillage jusqu'à la limite aval du domaine 2 du calcul CFD, constituée de la droite $y = 60$ et d'une droite oblique. Cette nouvelle interface est mieux adaptée à l'élargissement du sillage comme le montre l'analyse de la distribution de la viscosité turbulente (Figure 7.9). La continuité des fronts d'onde à l'interface est satisfaisante au-dessus du sillage (Figure 7.10). Le résultat se dégrade vers l'aval car le maillage CFD est étiré dans cette zone alors que la grille CAA garde la même résolution, la différence entre ces deux tailles de maille expliquant la moins bonne continuité dans cette zone.

Le même calcul est effectué avec une taille de maille deux fois plus petite pour la grille acoustique, ce raffinement permettant de résoudre les fréquences jusqu'à 100 kHz. La Figure 7.11 compare les résultats de ces deux calculs avec celui du calcul SGE et celui obtenu avec l'interface 2. Le calcul avec interface adaptée et maillage raffiné semble surestimer la pression RMS et la courbe correspondante oscille autour des deux autres courbes. Cette

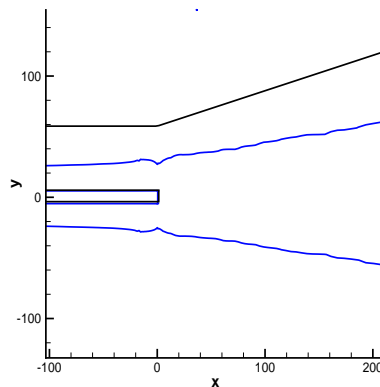


FIG. 7.9: Position de l'interface adaptée et contour de la viscosité turbulente moyenne $\mu_t/\mu = 0,05$.

oscillation suggère qu'un tel raffinement génère des erreurs : certaines fréquences, correctement résolues sur la grille CAA ($6\Delta x < \lambda < 12\Delta x$), étaient mal résolues sur la grille CFD.

Tout en aval, vers $200 < x < 240$, tous les calculs sont assez éloignés du résultat SGE, certainement en raison du fort déraffinement du maillage SGE, l'écart le plus faible (maximum de 1,2 dB en $x^* = 206$) étant obtenu avec l'interface 2.

Ces tendances se retrouvent en champ lointain, à $y = 350$, où le calcul avec l'interface adaptée avec maillage raffiné surestime toujours les niveaux de bruit, tout en oscillant fortement autour des autres courbes, jusqu'à 2 dB. En revanche, les deux autres calculs donnent des résultats similaires à moins de 0,5 dB, maximum relevé au-dessus du sillage.

Le calcul des spectres acoustiques est effectué avec 1500 échantillons espacés de $1 \cdot 10^{-7}$ s soit une période totale de 0,15 ms, un échantillonnage fréquentiel $\Delta f = 6600$ Hz dans la gamme $[0 ; 5 \text{ MHz}]$. Les spectres au point $(100 ; 90)$, au-dessus du sillage, permettent de comparer en ce point le signal obtenu lors du calcul CFD et celui transmis sur la grille CAA lors du couplage. Ils montrent en premier lieu que l'harmonique du signal correspondant à 40 kHz est intégralement transmise du maillage CFD au maillage acoustique. On peut d'ailleurs montrer en appliquant le théorème de Parseval qu'on retrouve l'intégralité du champ acoustique dans une bande de fréquence étroite autour de 40 kHz ($[33 \text{ kHz} ; 47 \text{ kHz}]$). En second lieu, on constate que lorsque l'interface ne coupe pas le sillage, on peut récupérer une partie du pic situé près de 100 kHz. Cependant, ce rayonnement est largement dominé par le rayonnement principal à 40 kHz et sa contribution au bruit est minime, au vu de l'écart entre les niveaux de pression RMS en champ lointain en intégrant la seule bande autour de 40 kHz et l'intégralité des fréquences discrètes du signal.

La Figure 7.13 montre les niveaux de bruit obtenus et la Figure 7.14 présente la courbe de décroissance du champ de pression RMS suivant la droite $x = 0$. On observe la présence

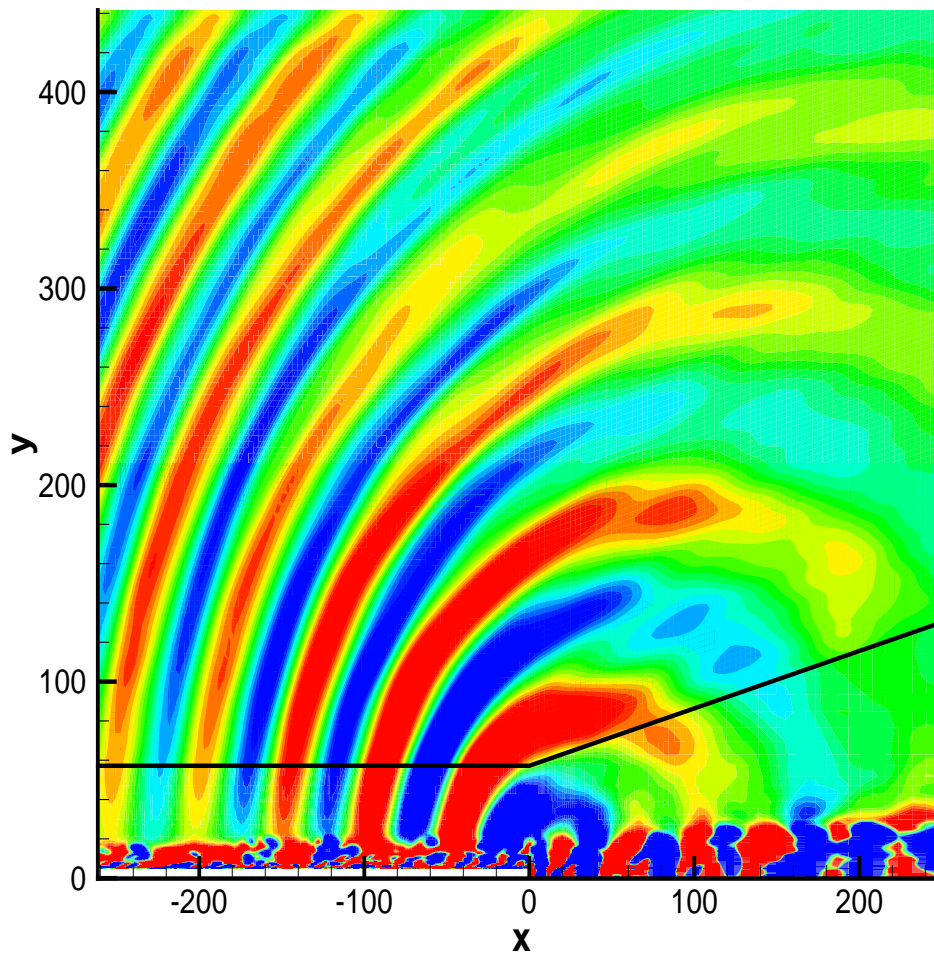


FIG. 7.10: Calcul CFD/CAA interface adaptée. Isovaleurs de densité dans la gamme $[-0,001 ; 0,001]$

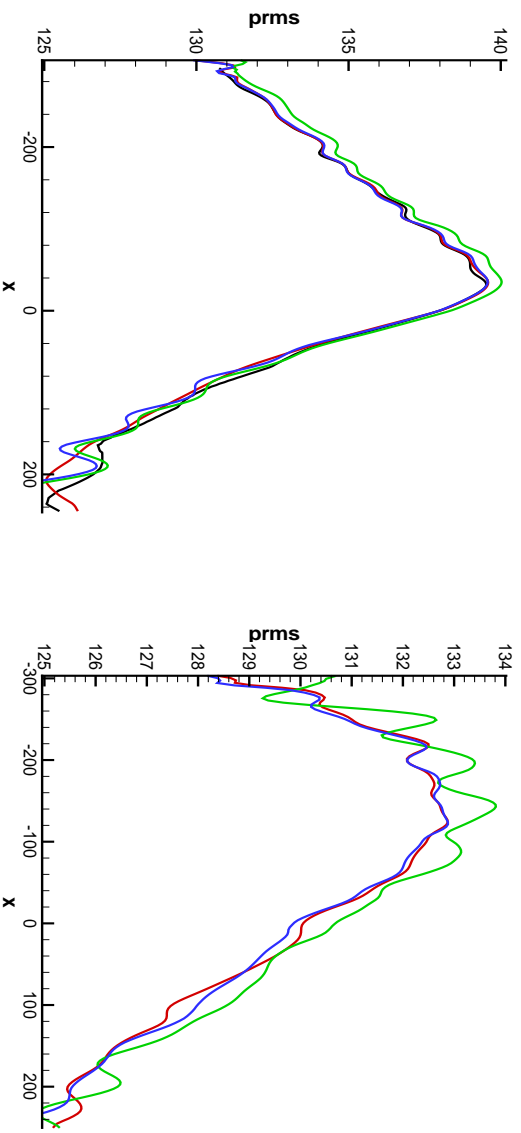


FIG. 7.11: A gauche : coupes de pression RMS le long de l'interface adaptée. A droite : coupe de pression RMS en champ lointain $y = 350$. Calcul SGE (noir), interface 2 (rouge), interface adaptée (bleu), interface adaptée maillage raffiné (vert).

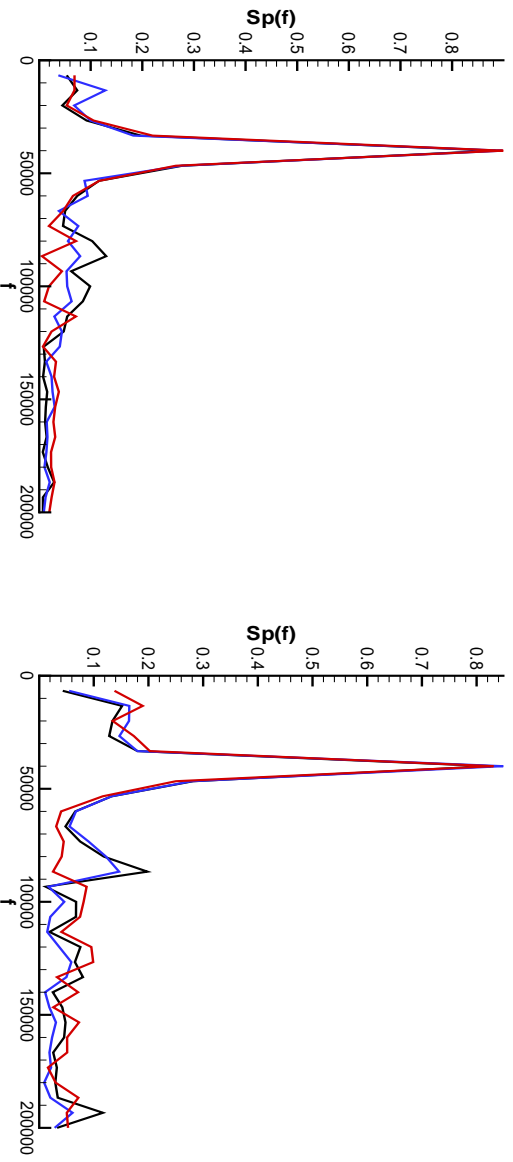


FIG. 7.12: Spectres de pression. A gauche : au point $(-100 ; 90)$. A droite : au point $(100 ; 90)$ au-dessus du sillage. Calcul SGE (noir), interface 2 (rouge), interface adaptée (bleu).

d'un lobe principal dirigé vers l'amont à 70 degrés de l'écoulement.

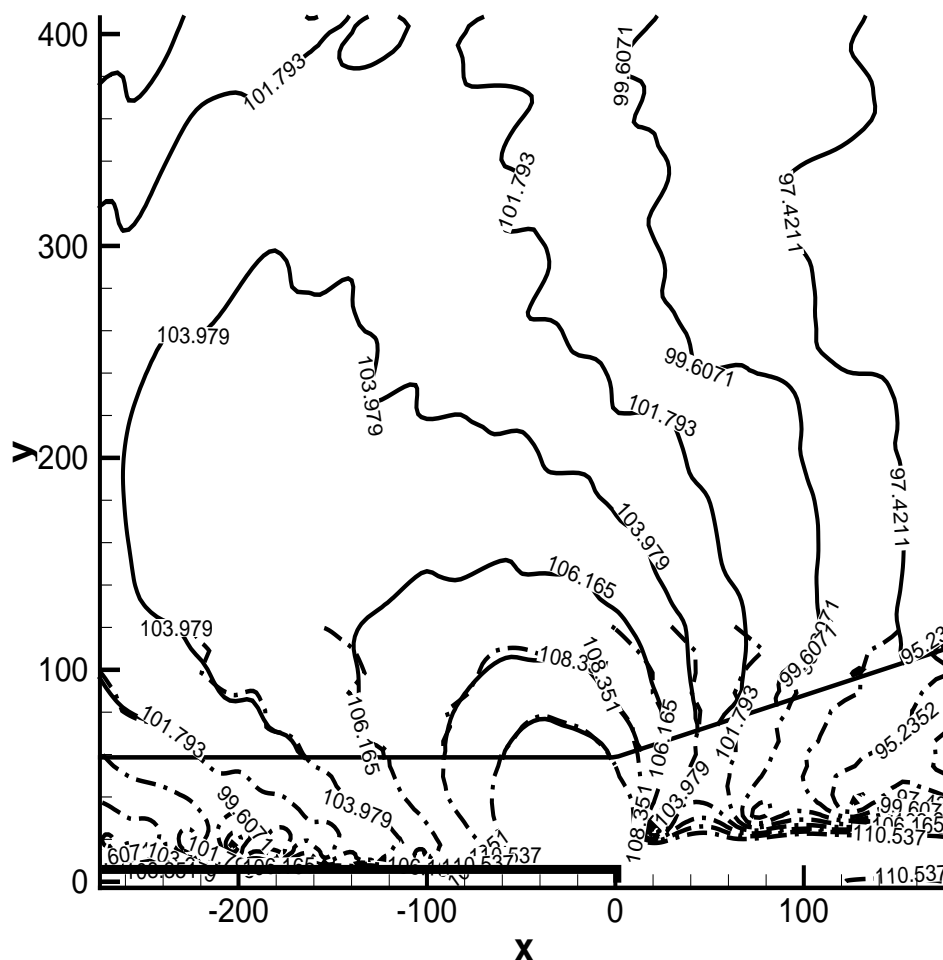


FIG. 7.13: Couplage CFD/CAA sur la plaque plane à bord de fuite épais. Carte de pression RMS.

Cette courbe est comparée avec la décroissance théorique du signal depuis la source : $f(r) = 1/\sqrt{r}$. La décroissance des niveaux de bruit est "physique" de l'ordre de 25 à 30 dB dans la direction principale de propagation jusqu'à la frontière du domaine. Le niveau maximum dans la zone aérodynamique est de 139 dB. A une distance de 400, soit 40h, le niveau n'est plus que d'environ 95-100 dB. Aucune expérimentation n'est disponible pour valider cette carte de bruit obtenue en champ lointain.

Le résultat obtenu vérifie approximativement cette décroissance en champ lointain ($y > 100$), alors qu'en champ proche la décroissance semble plus forte, à relier avec le fait que le calcul CFD est tridimensionnel. La propagation des ondes en trois dimensions engendre une décroissance en $1/r$. Près du bord de la grille CAA, en champ lointain, la décroissance de la courbe est affectée par les réflexions numériques.

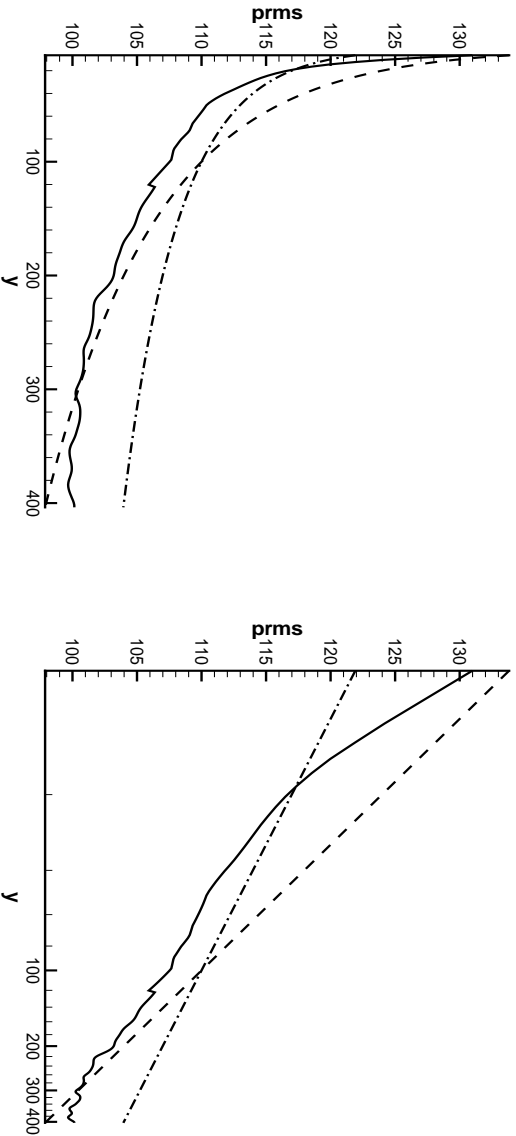


FIG. 7.14: Couplage CFD/CAA sur la plaque plane à bord de fuite épais, interface adaptée. Décroissance de la pression RMS le long de la droite $x = 0$. A gauche : échelle linéaire. A droite : échelle logarithmique. Couplage SGE/Euler (trait continu), décroissance en $1/\sqrt{r}$ (trait discontinu pointillé), décroissance en $1/r$ (trait discontinu).

7.1.3 Conclusion partielle

Le couplage SGE/Euler a été mis en oeuvre pour prévoir le bruit rayonné par l'écoulement turbulent autour d'une plaque plane. Les raccords non-conformes présentés dans le chapitre 5 ont permis d'adapter les exigences de l'aérodynamique et de l'acoustique afin de permettre de transmettre l'information large bande du maillage CFD vers un maillage CAA homogène. Une attention particulière a été portée sur la position de l'interface de couplage, mettant en évidence la nécessité d'éviter la couche limite et le sillage. La méthode de couplage à un sens s'est révélée robuste avec une continuité des champs satisfaisante. Elle évite d'effectuer simultanément le calcul aérodynamique et le calcul acoustique, puisque les données d'un premier calcul CFD sont d'abord stockées dans une première phase avant de servir de domaines source pour l'interpolation des points fictifs de la grille CAA. Cependant, ce couplage SGE/Euler reste cher en coût de calcul et il faut envisager d'autres

7.1. Couplage SGE/Euler sur une plaque plane à bord de fuite épais

méthodes pour prévoir le bruit aérodynamique, comme celle qui consiste à construire un modèle de sources équivalent.

7.2 Modèle de sources équivalentes

Les calculs de propagation suivants visent à modéliser par une source analytique le bruit de bord de fuite, qui apporte une contribution prépondérante au bruit total dans cette configuration. Les études expérimentales et théoriques sur ce genre de configuration [13, 10, 40] suggèrent que la modélisation du bruit rayonné par un dipôle proche du bord de fuite donne une approximation satisfaisante du champ acoustique. On se propose ici d'effectuer cette modélisation et de comparer le champ acoustique résultant à celui obtenu par couplage SGE/Euler au paragraphe précédent.

7.2.1 Modélisation du bruit de culot par une source dipolaire harmonique

Une source dipolaire harmonique (40 kHz) d'axe (Oy) est placée au bord de fuite de la plaque en $(x; y) = (10; 0)$, constituée de deux sources monopolaires harmonique (40 kHz) en opposition de phase placées en $(10; 0, 1)$ et en $(10; -0, 1)$.

Un maillage acoustique bidimensionnel uniforme (Figure 7.15), de dimension $[-200 ; 200] \times [-200 ; 200]$, entoure le culot. La taille de maille est uniforme et vaut $\Delta x = h/10 = 1$. En effet, dix points sont nécessaires sur le bord de fuite épais pour que la demi-largeur de la gaussienne soit au moins discrétisée sur trois points et modéliser correctement la diffraction des ondes au bord de fuite. Par conséquent, une longueur d'onde est discrétisée sur près de 60 points. Le maillage est ensuite dilaté en aval avec un taux de 4 %, et ce pour éviter une réflexion du mode rotationnel induit par la présence de l'écoulement cisailé (Figure 7.17), pour un nombre total de 211250 points.

Sur ce maillage, la résolution des ondes acoustiques est de 60 points par longueur d'onde pour les ondes se propageant vers l'amont à la vitesse $c - U_o$ ($U_o = c/2$) et de 180 points par longueur d'onde pour celles se propageant en aval à la vitesse $c + U_o$. Le pas de temps est de 1.10^{-7} s, ce qui correspond à un nombre $CFL = 0,6$, et à une résolution temporelle de 250 pas de temps par période de battement de la source. Le nombre de pas de temps effectué lors de la simulation est 3200, soit environ 13 périodes. L'écoulement SGE, moyenné en temps et interpolé sur le maillage acoustique, sert de champ porteur.

La distribution de la fluctuation de densité est présentée sur la Figure 7.16. On observe un champ acoustique antisymétrique par rapport à l'axe (Ox) comme on a pu l'observer lors du calcul SGE. Ce résultat ne peut-être comparé à celui du couplage SGE/Euler que sur la partie supérieure ($y > 0$).

On observe sur la Figure 7.18 que le modèle, simulant la source réelle de bruit de bord de fuite par une source dipolaire analytique située près du culot, permet une estimation correcte du niveau de bruit relatif. Les niveaux ont été adaptés par rapport au bruit calculé lors du couplage. Des oscillations plus fortes, dues aux réflexions numériques, apparaissent

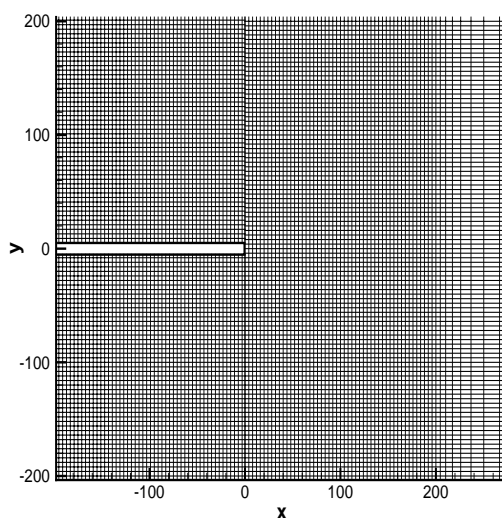


FIG. 7.15: Grille de calcul (un point sur quatre).

sur la courbe de pression RMS du modèle de propagation acoustique en champ lointain. La faible étendue du domaine numérique, et donc de la zone de sortie, par rapport à la longueur d'onde, génère une réflexion numérique inhabituelle avec cette méthode. L'extension du domaine numérique en employant par exemple l'interface de raccordement non-conforme pour baisser progressivement la résolution en champ lointain permettrait de limiter cette réflexion. Toutefois, l'allure des courbes est similaire à moins de 1 dB près, sauf en aval du culot. Dans cette zone, il semble que le modèle de propagation en écoulement cisailé, qui génère des modes rotationnels convectés vers l'aval, surestime les niveaux de bruit de plusieurs dB, comme on peut le voir sur la Figure 7.18. Cette surestimation, qui n'est pas de nature acoustique, est négligeable en champ lointain. Il s'agit probablement d'une réflexion numérique due à l'impact du mode rotationnel sur la zone étirée placée en aval pour minimiser ce phénomène parasite.

Conclusion partielle

La modélisation de l'échappement tourbillonnaire par un dipôle analytique constitue une bonne première approximation du bruit rayonné, offrant un très bon rapport qualité/coût comparativement à celui du couplage direct SGE/Euler. Cependant, cette approche est qualitative, les niveaux de bruit ayant été ajustés sur les résultats du couplage. La perspective d'obtenir des niveaux de bruit absolu avec cette méthode, modélisant chaque région-source de bruit, nécessiterait d'étudier quantitativement ces sources. De plus, cette approche repose sur des hypothèses de sources de bruit localisées et à bande de fréquence étroite, donc modélisables par une fonction harmonique. Ces hypothèses peuvent s'avérer

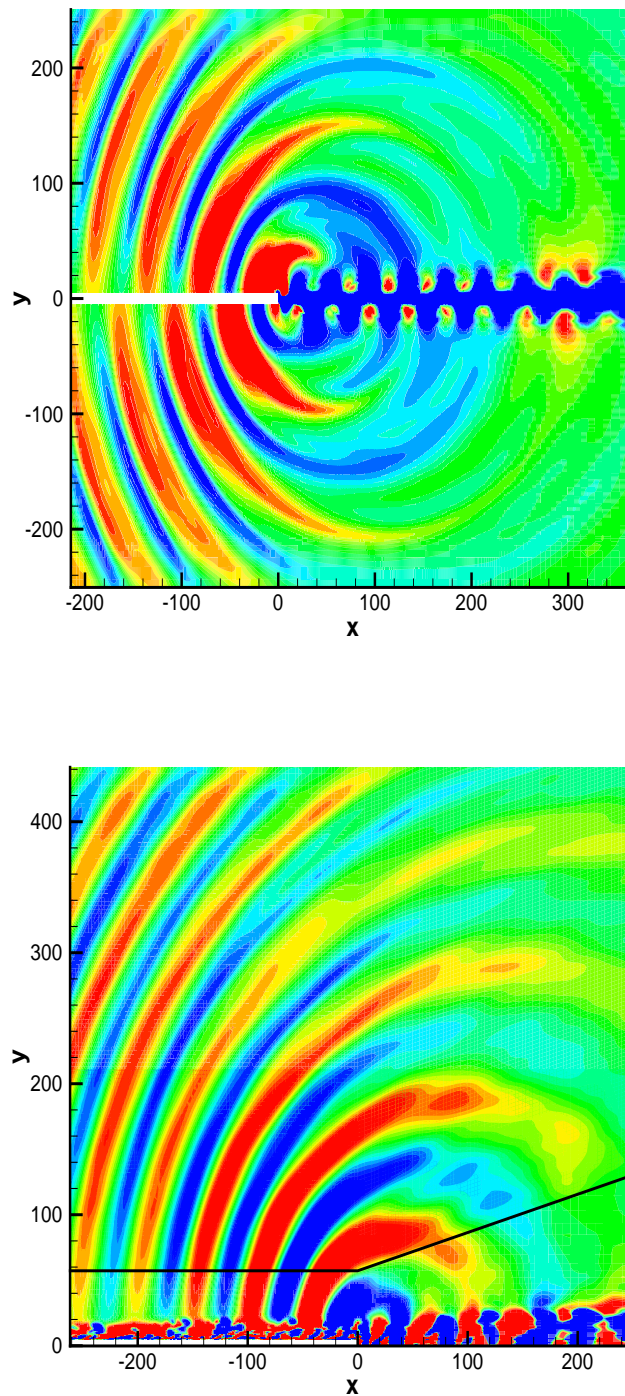


FIG. 7.16: En haut : simulation de la propagation d'une source dipolaire harmonique (40 kHz) placée en $(10 ; 0)$ en présence d'écoulement. Isocontours de densité dans la gamme $[-0,005 ; 0,005]$. En bas : couplage SGE/Euler sur la plaque plane. Isocontours de densité dans la gamme $[-0,001 ; 0,001]$

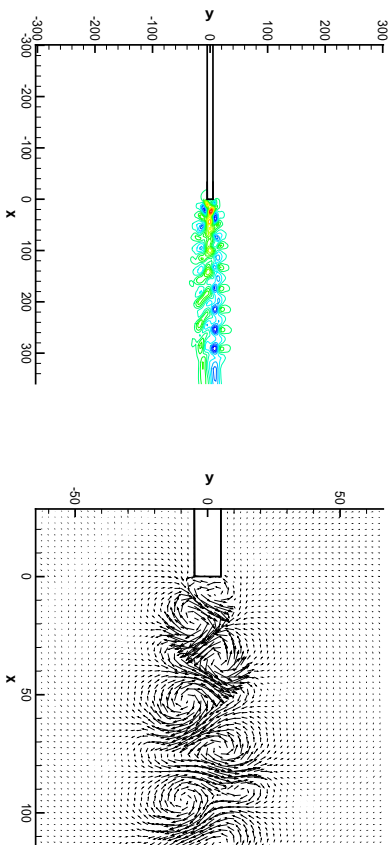


FIG. 7.17: Simulation de la propagation obtenue par la présence d'une source dipolaire dans l'écoulement SGE moyen. Partie fluctuante du vecteur vitesse.

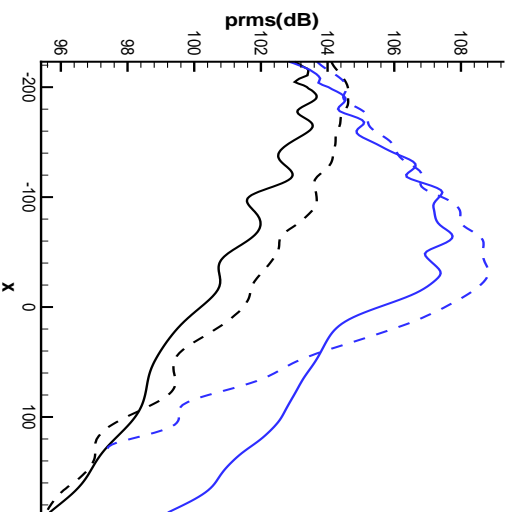


FIG. 7.18: Comparaison des pressions RMS en coupe. Calcul CFD/CAA (trait discontinu) et modèle de sources (trait continu) . Coupe sur la droite $y = 100$ (en bleu) et sur la droite $y = 250$ (en noir). Echelle en dB.

fausses, par exemple dans les cas de fluctuations de force basse fréquence. Il est donc nécessaire d'envisager une stratégie plus globale.

Le recours aux grandeurs moyennes issues d'un calcul RANS, pour obtenir les sources équivalentes, est une perspective prometteuse. En effet, un modèle statistique est beaucoup moins coûteux qu'un modèle de turbulence instationnaire. Des calculs RANS ont déjà été effectués sur des avions complets. Dans cette optique, de nombreuses questions se posent cependant sur leur capacité à contenir tout ou partie de l'information de la dynamique instationnaire. Néanmoins, plusieurs auteurs se sont basés sur ces modèles afin de synthétiser des écoulements turbulents [3, 7] et de simuler ensuite la propagation de sources équivalentes.

7.2.2 Perspectives sur l'utilisation d'un modèle général de sources équivalentes

On suppose dans la suite que les différentes sources de bruit d'un écoulement sont localisées (ponctuelles) et situées chacune dans une bande de fréquence étroite. Le modèle doit prendre en compte les caractères principaux : localisation, fréquence, amplitude. Une telle caractérisation repose sur l'hypothèse qu'on peut obtenir ces informations à partir d'un calcul RANS (coût de calcul abordable et stockage faible), au lieu d'un calcul SGE (temps de calcul long et stockage important). Pour aborder ce problème, on rappelle la méthode de terme source évoquée au chapitre 2 [3, 7], développée dans l'optique de générer aléatoirement la turbulence.

Billson *et al.* [7] dérivent un terme source sur la base d'une formulation conservative des équations d'Euler. Le lecteur pourra se reporter directement à la référence [7] pour le détail de l'obtention du système d'équations.

$$U' = \begin{pmatrix} \rho' \\ (\rho u_1)' \\ (\rho u_2)' \\ (\rho e)' \end{pmatrix} \quad (7.1)$$

En négligeant les corrélations triples $(\rho' u_i' u_j')$, ce terme se réduit à l'expression suivante :

$$S = \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\bar{\rho}(u_1' u_j' - \overline{u_1' u_j'}) \right) \\ -\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\bar{\rho}(u_2' u_j' - \overline{u_2' u_j'}) \right) \\ -\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\bar{u}_i \bar{\rho}(u_i' u_j' - \overline{u_i' u_j'}) \right) \end{pmatrix} \quad (7.2)$$

Dans la Figure 7.19, on peut voir la valeur RMS du terme source obtenu d'après la modélisation de Billson et al [7] avec les données SGE du calcul sur la plaque plane. Le calcul de la fluctuation RMS du terme source a été effectuée sur 8 périodes d'échappement et le résultat n'est donc pas suffisamment convergé, contrairement au résultat de pression RMS (Figure 7.20), pour lequel la moyenne est effectuée sur un temps beaucoup plus long.

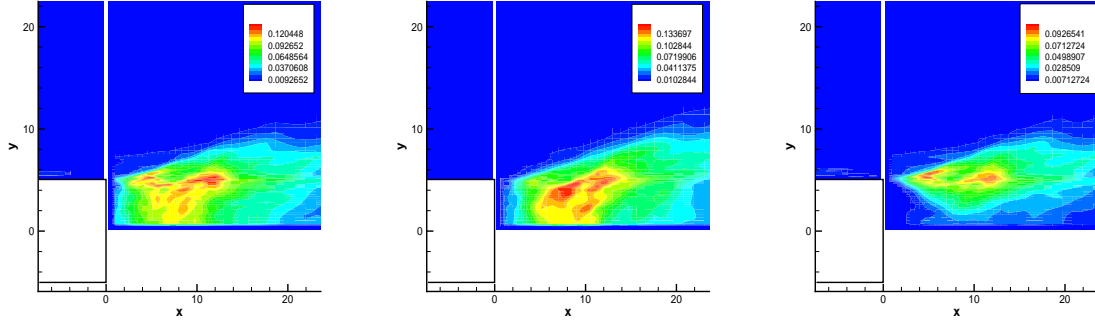


FIG. 7.19: Valeur RMS du terme source [7] sur 8 périodes d'échappement obtenue à partir des données SGE de l'écoulement autour de la plaque plane. A gauche : composante S_2 . Au milieu : composante S_3 . A droite : composante S_4 .

Les valeurs RMS des composantes S_2 , S_3 et S_4 sont maximales en aval du bord de fuite supérieur. En moyenne et sur de longs temps de simulation, on s'attend à obtenir une distribution symétrique de ces termes par rapport à l'axe Ox. Le résultat de pression RMS dans la zone source est assez similaire (Figure 7.20). La zone de pression RMS maximale est nettement localisée dans la zone de recirculation derrière le culot ($0 < x < 10$).

D'après la définition du terme source présenté ci-dessus, et moyennant une hypothèse d'isotropie des fluctuations de vitesse $|u'| \approx |v'|$, on peut remarquer :

$$\begin{cases} \frac{\partial \overline{\rho u'^2}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{\rho u' v'}}{\partial y} \approx \frac{\partial k}{\partial x} + \frac{\partial k}{\partial y} \\ \frac{\partial \overline{\rho u' v'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{\rho v'^2}}{\partial y} \approx \frac{\partial k}{\partial x} + \frac{\partial k}{\partial y} \end{cases} \quad (7.3)$$

La connaissance de l'énergie cinétique turbulente moyenne $k = 0,5(\overline{u'^2} + \overline{v'^2})$ permettrait donc d'obtenir une information moyenne sur le terme source. Cependant, cette simplification ne permettrait pas d'obtenir ni l'amplitude ni la fréquence des sources aéroacoustiques, puisqu'au cours de la modélisation RANS, les trois directions d'espace sont moyennées en temps et intégrées. Si on veut aller plus loin dans cette analyse et affiner la mise au point d'un modèle de sources équivalentes, il faut avoir recours à la modélisation SNGR (Stochastic Noise Generation and Radiation [3]).

La modélisation SNGR consiste en la reconstitution d'un champ turbulent homogène et isotrope à partir des quantités aérodynamiques moyennes obtenues via un calcul RANS. Il

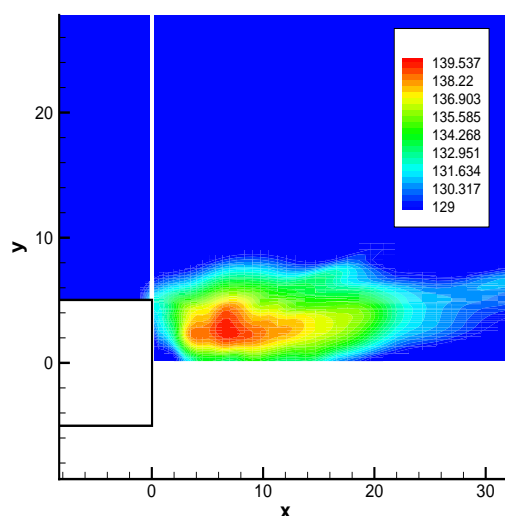


FIG. 7.20: Champ de pression RMS dans la région source. Valeurs en dB.

a déjà été mis en oeuvre pour l'évaluation des jets libres subsoniques [3, 7] et d'écoulements turbulents internes [56]. On rappelle les différentes étapes de cette méthode, qui est décrite dans les références précédentes :

- d'abord, un champ spatial de fluctuations de vitesse est synthétisé suivant une décomposition modale basée sur un spectre de turbulence homogène isotrope de Von Karman, calibré à partir de l'énergie cinétique turbulente et de son taux de dissipation fournis par le calcul RANS,
- ensuite, l'évolution temporelle de chaque mode est décrite en prenant en compte sa convection par l'écoulement moyen et une fréquence caractéristique,
- enfin, le champ de vitesse turbulent spatio-temporel est lissé en prenant en compte les longueurs de corrélations des structures cohérentes puis utilisé pour évaluer le terme source des équations d'Euler linéarisées.

Cette modélisation paraît très intéressante compte tenu des ressources moindres requises par un calcul RANS par rapport à un calcul SGE.

7.3 Conclusion

La méthode d'interface non-conforme développée au chapitre 5 a permis d'obtenir le bruit direct rayonné par l'écoulement autour d'une plaque plane à bord de fuite épais par un couplage SGE/Euler. L'interface d'ordre élevé a permis la transmission des ondes acoustiques depuis la région source jusqu'en champ lointain. Cette interface, qui s'est révélée stable et non-réfléchissante, a permis de résoudre le problème de la disparité des échelles

aérodynamiques et acoustiques mises en jeu. La nature acoustique des fluctuations à l'interface a pu être prise en compte par l'analyse de la viscosité turbulente locale afin d'éviter le rayonnement de sources parasites. Finalement, une interface adaptée, bon compromis entre la bonne résolution des ondes acoustiques et un faible taux de turbulence local, a été mis en place et a permis une modélisation satisfaisante du problème aéroacoustique complet.

Une modélisation analytique des sources de bruit par une source dipolaire harmonique a ensuite été étudiée. Elle a permis de retrouver une carte de bruit assez fidèle qualitativement au bruit direct rayonné. L'amélioration de ce modèle de sources équivalentes passerait par une modélisation de type SNGR, qui est plus générale, et se base sur l'analyse du champ aérodynamique RANS. Cette méthode, déjà éprouvée pour de nombreuses applications constituerait une approche parallèle indispensable pour prédire le bruit aérodynamique sur des configurations complexes lorsqu'il est trop coûteux de mettre en place le couplage SGE/Euler par interface.

Chapitre 8

Conclusion et perspectives

8.1 Conclusion

L'objectif de cette thèse était d'étudier plusieurs aspects critiques d'une méthode numérique de propagation acoustique en écoulement inhomogène, afin d'améliorer les possibilités de couplage de cette simulation avec une simulation directe des mécanismes aérodynamiques instationnaires de génération du bruit (simulation numérique directe, simulation des grandes échelles) en vue de l'étude et de la prévision du bruit aérodynamique externe.

La première partie de l'étude a été consacrée à la validation de deux aspects de la méthode de propagation abordés lors de travaux précédents [71], d'une part, la stabilité et, d'autre part, les conditions aux limites non-réfléchissantes. La stabilisation choisie précédemment, qui consiste en l'application d'une moyenne pondérée d'ordre élevé dans chaque direction à la fin de chaque pas de temps, permet d'effectuer les simulations sur de longs temps de calcul en évitant la croissance de modes parasites en haute fréquence. La condition aux limites non-réfléchissante, qui consiste en une courte zone de dispersion et de dissipation croissante en sortie de domaine, a été éprouvée sur des cas académiques, ce qui a permis de vérifier qu'elle évitait bien la réflexion des ondes aux frontières externes du domaine de calcul lors des simulations.

La deuxième partie de la thèse a consisté à développer une interpolation de Lagrange bidimensionnelle d'ordre élevé, avec une extension originale aux géométries curvilignes. Cette technique permet l'utilisation de maillages acoustiques homogènes sur des configurations complexes. Un résultat significatif est que l'erreur d'interpolation est plus faible que l'erreur de dispersion numérique due à la méthode de propagation pour la même bande passante. L'interface permet en outre de pallier le déraffinement azimutal naturel des mailles sur le cas d'un obstacle curviligne. Notamment, il a été appliqué avec succès au cas de la diffraction d'une source monopolaire sur un cylindre, puis, sur un profil d'aile hypersustentée, cas validé par comparaison avec la méthode des éléments finis de frontière.

Partant de ces éléments, l'utilisation d'un terme source équivalent a ensuite naturellement permis d'étudier le bruit aérodynamique de la cavité de bec d'une aile hypersustentée. L'influence de l'écoulement moyen non-uniforme sur la propagation acoustique de sources équivalentes n'est pas négligeable car sa prise en compte modifie la directivité du champ acoustique. Ce cas d'application a permis de plus de montrer que l'apport de raccordements non-conformes pour un tel maillage complexe se révèle indispensable pour limiter le coût de ces calculs. La prospection numérique devient ainsi abordable et susceptible de fournir des informations utiles au constructeur sur la nature et la position des sources aéroacoustiques afin, par exemple, d'appliquer des méthodes de réduction passives du bruit.

Enfin, la dernière partie de l'étude a été consacrée à l'application de la technique d'interface non-conforme au couplage des calculs SGE et Euler, ces deux calculs étant effectués successivement. Les données du calcul SGE sont d'abord stockées dans un ou plusieurs domaines-source, puis les fluctuations sont transmises au calcul acoustique via l'interface non-conforme. Cette interface de raccordement non-conforme s'est révélée indispensable pour résoudre les contraintes contradictoires apparaissant dans la génération et le rayonnement des sources. Le couplage à un sens a été appliqué au cas du bruit aérodynamique d'une plaque plane à bord de fuite épais. Le champ acoustique obtenu a pu ensuite être approché à 1 dB près par un modèle de sources équivalentes (source dipolaire harmonique placé au voisinage du bord de fuite).

8.2 Perspectives

La technique d'interfaçage non-conforme est dès maintenant applicable au couplage aérodynamique/acoustique et à la propagation acoustique de sources équivalentes en écoulement inhomogène sur des configurations complexes bidimensionnelles. Pour traiter des géométries tridimensionnelles encore plus réalistes, il sera nécessaire d'étendre au 3D la méthode d'interpolation de Lagrange d'ordre élevé, le nombre de degrés de liberté passant alors de 4^2 à 4^3 . Les calculs acoustiques tridimensionnels seront chers en temps de calcul et nécessiteront un règlement optimal des problèmes de disparité d'échelle aérodynamique/acoustique. Dans cette optique, des travaux de thèse sont en cours [21] pour introduire notamment cette méthode d'interpolation dans une technique de superposition de grilles. Celle-ci permettra de coupler une SGE calculée sur un maillage curviligne et une propagation acoustique sur un maillage cartésien, et ainsi, de garder les propriétés de la méthode numérique de propagation sur une grille homogène.

Au vu des résultats satisfaisants obtenus sur la plaque plane, le couplage par interface non-conforme devrait maintenant être appliqué à la prévision du bruit aérodynamique de la cavité de bec de l'aile hypersustentée. Des contraintes supplémentaires vont apparaître pour la détermination de l'écoulement moyen (durée nécessaire pour la moyenne), le volume des données (70 Gb) et le choix de l'interface, à cause de la complexité de l'application et de la limitation des moyens informatiques. Ces difficultés suggèrent la nécessité, à l'ave-

nir, d'envisager ce couplage dès la phase d'élaboration du maillage aérodynamique afin de prévoir la position possible de l'interface de couplage, à savoir dans une zone où les fluctuations acoustiques ne sont pas encore filtrées par le maillage aérodynamique, et en dehors des zones de forte turbulence (couches limites et sillages).

De façon générale, cette thèse a contribué à valoriser la méthode de propagation acoustique en écoulement inhomogène via la discrétisation des équations d'Euler par différences finies d'ordre élevé. Cette dernière permet notamment d'étudier le bruit aérodynamique, pour peu que l'on dispose de données sur les sources aéroacoustiques de l'écoulement (données expérimentales ou numériques). Un modèle RANS élaboré pour l'aéroacoustique paraît la perspective la plus prometteuse, en termes de coût de calcul et de gestion des données, pour servir de base à la construction d'un modèle général de sources équivalentes pour cette méthode.

Enfin, cet outil numérique possède toutes les propriétés pour prévoir la localisation de sources (position, amplitude, fréquence) à partir du bruit rayonné en champ lointain, par exemple à l'aide d'une antenne de microphones, et ce afin d'établir des cartes de bruit précises des régions source. Les méthodes de localisation actuelles prennent en compte des modèles semi-empiriques de propagation (ondes sphériques, écoulement uniforme), mais sont prêtes à inclure des modèles de propagation acoustique plus réalistes.

Publications

Annexe A

Analysis of a high-order filtered method for CAA

- [35] R. Guéanff, P. Sagaut, E. Manoha and R. Lewandowski.
soumis à *Int. J. Numer. Meth. Fluids*

Analysis of a filtered high-order finite difference method for computational aeroacoustics

R. Guenanff, E. Manoha

ONERA, CFD & Aeroacoustics Department, 29 av. Division Leclerc, 92 Châtillon, France.

P. Sagaut

Laboratoire de Modélisation en Mécanique, Université Pierre et Marie Curie, Boite 162, 4 place Jussieu, 75252 Paris Cedex 5, France.

R. Lewandowski

IRMAR, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes cedex, France.

abstract

A high-order finite difference method for the simulation of sound propagation on curvilinear grids is proposed, analyzed and assessed. The method is stabilized by applying a filter on the conservative variables. In this work, different possibilities for the filtering step are tested to understand its impact as a relaxation regularization term and to derive the equivalent relaxation parameter. It is also shown that the filtered scheme exhibits spectral-like precision at high wave numbers. A boundary closure procedure for the filter is proposed to derive a non-reflecting boundary condition. The stability of the boundary closure is ensured by the shape of the sustained discrete eigenmodes of the associated discrete equations. Then, numerical simulations are carried out for several test cases, using both linearized and non-linear Euler equations as a mathematical model to quantify the amount of numerical reflection at boundaries and to check stability for long-time computations. Specific properties of the non-linear case are identified.

keywords : Computational aeroacoustics, high-order methods, Euler equations, Nonreflecting boundary conditions.

Introduction

Computational Aeroacoustics (CAA) has become a recognized field of research, sustained by a growing industrial interest [85, 80]. One of the main issues of CAA is the definition of adequate numerical methods for wave propagation in flows. The large number of results published over the last decade shows that the definition of (1) discrete schemes, which are able to keep numerical dispersion as low as possible while preventing spurious modes and possessing satisfactory energy-conservation properties, and (2) non-reflecting exit boundary conditions remain open problems.

Several strategies have been proposed to derive discrete schemes for CAA. The fact that high-order accurate discretizations are necessary is commonly accepted. Numerical methods designed for CAA are based either on centered or upwind, explicit or implicit

schemes. Their properties for wave propagation can be improved using the Dispersion-Relation-Preserving optimization proposed by Tam and Webb [85].

The introduction of a regularization for the numerical simulation of the Euler equations with high-order centered finite difference schemes is commonly accepted. Many strategies have been developed in the past decade for that purpose. Among others, one of particular interest in the present study is the Approximate Deconvolution Method (ADM) introduced by Adams and Stolz [1] within the framework of Large-Eddy Simulation (LES), which rely on the introduction of a relaxation regularization in the continuous equations. This additional term constitutes a low-order perturbation to the equations and does not affect its well-posedness. It was related to measured growth of energy at high wavenumbers. A relaxation-time parameter, allowed to vary continuously in space and time, is derived by an a priori estimation and the initial data. The results for turbulent flows were not very sensitive to its variation. The effect of adding this term is equivalent to filtering the numerical solution every N time steps as noted by Stolz, Adams and Kleiser [79]. Matthew [61] proposed a unique filtering procedure, introducing a perfect low-pass filter, to model both the approximate deconvolution to construct the subgrid model term and the regularization for the LES of fully developed, turbulent, supersonic channel flows.

In this work, the sensitivity of the results, with emphasis put on acoustic wave propagation, upon the filter is studied by considering two possibilities : filtering the time increment or the solution. The interpretation in terms of regularization is deduced, and a relaxation parameter is derived. The dependence of the regularization term to the initial data is discussed.

As the method described by Adams and Stolz was successful for periodic problems, the problem of the extension of the method to non-periodic boundaries is more difficult. We propose an explicit boundary closure for the regularization term, that keeps the advantage of a stable integration of the evolution equations.

A semi-discrete formulation of the problem in the case of an advection equation is derived that illustrates the stability of the method in the linear case with both periodic and nonperiodic boundaries. An eigenmode analysis shows the stability of the boundary closure when the filter is applied at the end of each time step.

In a second step, several computational cases are considered, in order to assess the method on practical cases. A comparison of the accuracy of the boundary closure formulation with the characteristics method is shown, and several issues, like effects of non-linearities, the use of non-orthogonal curvilinear grids are assessed.

An important point, which sustains the present work, is that accuracy and efficiency of the global method depend on those of each element (numerical scheme, time integration method, filter, boundary condition), but also on the way they interact.

The main purpose of the present work is the definition of a method well-suited for acoustic wave propagation, not for direct computation of noise, in which the fluctuating field may be composed of acoustic, vortical and entropy modes.

Governing equations

Euler equations in perturbation form are used in the present paper as the mathematical model for acoustic waves propagation. The full conservative, non-linear formulation is retained, without any additional assumption dealing with the properties of the fluctuations. The total unsteady field $U = [\rho, (\rho u)^T, E]^T$ is split as the sum of a mean field, referred to as $U_0 = [\rho_0, (\rho_0 u_0)^T, E_0]^T$, and a fluctuating field, denoted $U_p \equiv U - U_0 = [\rho_p, (\rho u)_p^T, E_p]^T$, where ρ is the density, u the velocity and E the total energy. It is worth noting that in the present decomposition no linearization is made, i.e. $(\rho u)_p = \rho u - \rho_0 u_0 = \rho_0 u_p + \rho_p u_0 + \rho_p u_p$.

Making the assumption of a Euler steady mean field, the governing equations for the fluctuating field in conservative form are written as

$$\frac{\partial U_p}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{F}(U_0 + U_p) - \mathbf{F}(U_0)) = 0 \quad (\text{A.1})$$

where $\mathbf{F}(U)$ the conservative flux vector

$$\mathbf{F}(U) = \begin{pmatrix} \rho u^T \\ \rho u \otimes u + p Id \\ (\rho E + p)u^T \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

where p is the pressure and Id denotes the identity matrix. A perfect gas law is used in the present study to close the system. It is important noting that Eq.B.1 is a fully non-linear system, i.e. all terms are retained. In the case where the fluctuations are assumed to be of very small amplitude, i.e. $|U_p| = O(\epsilon)|U_0|$, $\epsilon \ll 1$, linearized gas dynamics equations are deduced from Eq.(B.1) by keeping only $O(1)$ and $O(\epsilon)$ terms in the flux definition (B.2).

To allow computation on curvilinear grids, Eq.(B.1) is re-written in general coordinates as follows :

$$\frac{\partial U_p}{\partial t} + |J| \nabla_\xi \cdot (\mathbf{F}'(U_0 + U_p) - \mathbf{F}'(U_0)) = 0 \quad (\text{A.3})$$

where Cartesian and general coordinates are referred to as $(x_i)_{i=1,3}$ and $(\xi_i)_{i=1,3}$, respectively. The Jacobian J and the transformed flux \mathbf{F}' are defined as

$$J = \nabla_x \xi \quad (\text{A.4})$$

and

$$\mathbf{F}' = \mathbf{F} \cdot \frac{J}{|J|} \quad (\text{A.5})$$

TAB. A.1: Coefficients of discrete first-order space derivative operator

order	a_{-3}	a_{-2}	a_{-1}	a_0	a_1	a_2	a_3
6	$-\frac{1}{60}$	$\frac{9}{60}$	$-\frac{45}{60}$	0	$\frac{45}{60}$	$-\frac{9}{60}$	$\frac{1}{60}$
4		$-\frac{1}{12}$	$-\frac{2}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{12}$	
2			$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$		

where $\nabla_\xi = (\partial/\partial\xi_1, \partial/\partial\xi_2, \partial/\partial\xi_3)^T$ and $\nabla_x = (\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \partial/\partial x_3)^T$ are related to space derivatives with respect to the general and Cartesian coordinates, respectively. It is important noting that the freestream preservation condition, introduced by Visbal et al [91, 92, 29, 28], which is very important to guaranty the accuracy of the results can be recast as

$$\nabla_\xi \cdot \left(\frac{J}{|J|} \right) = 0 \quad (\text{A.6})$$

Numerical method

Space derivatives and time integration

Space derivatives are approximated using explicit, centered finite difference schemes [53]. The first-order derivative of a dummy variable ϕ at point i is classically expressed as

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right|_i = \frac{1}{\Delta x} \sum_{l=-k, k} a_l \phi_{i+l} \quad (\text{A.7})$$

where Δx is the constant mesh size, $\{a_i\}_{i=-k, k}$ the coefficients of the considered scheme and $\phi_l = \phi(l\Delta x)$. Discrete operators up to the sixth-order of accuracy are considered in the present paper, whose coefficients are given in Table A.1.

When simulations on curvilinear grids are considered, all metrics are computed using the same scheme as the physical variable derivatives in order to preserve accuracy. Relation (A.4) is enforced by computing the Jacobian matrix J as described below [91, 92]. Defining the inverse Jacobian matrix \bar{J}

$$\bar{J} = \nabla_\xi x \quad (\text{A.8})$$

we have the two following equalities :

$$|J| = \frac{1}{|\bar{J}|} \quad (\text{A.9})$$

TAB. A.2: Coefficients of Adams-Bashforth time-integration scheme

order	b_0	b_1	b_2	b_3
2	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$		
3	$\frac{23}{12}$	$-\frac{16}{12}$	$\frac{5}{12}$	
4	$\frac{55}{24}$	$-\frac{59}{24}$	$\frac{37}{24}$	$-\frac{9}{24}$

and

$$\frac{J}{|J|} = \mathcal{J} \quad (\text{A.10})$$

where the matrix \mathcal{J} is evaluated as follows to ensure freestream preservation :

$$\mathcal{J} = \left(\begin{array}{c} \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial(\bar{J}_{22}x_3)}{\partial\xi_3} - \frac{\partial(\bar{J}_{32}x_3)}{\partial\xi_2} \\ \frac{\partial(\bar{J}_{32}x_3)}{\partial\xi_1} - \frac{\partial(\bar{J}_{12}x_3)}{\partial\xi_3} \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial(\bar{J}_{23}x_1)}{\partial\xi_3} - \frac{\partial(\bar{J}_{33}x_1)}{\partial\xi_2} \\ \frac{\partial(\bar{J}_{33}x_1)}{\partial\xi_1} - \frac{\partial(\bar{J}_{13}x_1)}{\partial\xi_3} \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial(\bar{J}_{21}x_2)}{\partial\xi_3} - \frac{\partial(\bar{J}_{31}x_2)}{\partial\xi_2} \\ \frac{\partial(\bar{J}_{31}x_2)}{\partial\xi_1} - \frac{\partial(\bar{J}_{11}x_2)}{\partial\xi_3} \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial(\bar{J}_{12}x_3)}{\partial\xi_2} - \frac{\partial(\bar{J}_{22}x_3)}{\partial\xi_1} \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial(\bar{J}_{13}x_1)}{\partial\xi_2} - \frac{\partial(\bar{J}_{23}x_1)}{\partial\xi_1} \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial(\bar{J}_{11}x_2)}{\partial\xi_2} - \frac{\partial(\bar{J}_{21}x_2)}{\partial\xi_1} \end{array} \right] \end{array} \right) \quad (\text{A.11})$$

Time-integration is performed using an explicit, fourth-order accurate Adams-Basforth scheme. For the semi-discretized problem in time associated to Eq.(B.1), we get :

$$U_p^{n+1} = U_p^n - \Delta t \left(\left[\sum_{l=0,3} b_l \nabla \cdot \mathbf{F}^{n-l}(U_0 + U_p) \right] - \nabla \cdot \mathbf{F}(U_0) \right) \quad (\text{A.12})$$

where superscript n denotes values at time $n\Delta t$, where Δt is the time step. Coefficients of Adams-Bashforth scheme up to the presently used fourth-order accurate method are recalled in Table A.2.

Introducing the discrete divergence operator \mathbf{D} based on relation (A.7), Eq. (A.12) leads to the following expression for the fully discretized problem :

$$U_p^{n+1}|_i = U_p^n|_i - \Delta t \left(\left[\sum_{l=0,3} b_l \mathbf{D}\mathbf{F}^{n-l}(U_0 + U_p)|_i \right] - \mathbf{D}\mathbf{F}(U_0)|_i \right) \quad (\text{A.13})$$

Regularization

The numerical method represented by Eq.(A.13) is unstable and requires the use of a regularization. It is chosen in the present paper to use a linear, explicit filtering step to stabilize the method and to prevent high-frequency spurious numerical oscillations. Implicit

TAB. A.3: Coefficients of spatial filter

order	f_{-5}	f_{-4}	f_{-3}	f_{-2}	f_{-1}	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
10	$\frac{1}{1024}$	$-\frac{10}{1024}$	$\frac{45}{1024}$	$-\frac{120}{1024}$	$\frac{210}{1024}$	$\frac{772}{1024}$	$\frac{210}{1024}$	$-\frac{120}{1024}$	$\frac{45}{1024}$	$-\frac{10}{1024}$	$\frac{1}{1024}$
8		$-\frac{1}{256}$	$\frac{8}{256}$	$-\frac{28}{256}$	$\frac{42}{256}$	$\frac{186}{256}$	$\frac{42}{256}$	$-\frac{28}{256}$	$\frac{8}{256}$	$-\frac{1}{256}$	
6			$\frac{1}{64}$	$-\frac{6}{64}$	$\frac{15}{64}$	$\frac{44}{64}$	$\frac{15}{64}$	$-\frac{6}{64}$	$\frac{1}{64}$		
4				$-\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{10}{16}$	$\frac{4}{16}$	$-\frac{1}{16}$			
2					$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$				

filters were used in Refs.[29, 28, 91, 92]. In the continuous equations, applying a filter relies on a convolution :

$$\mathcal{F} * \phi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(x - x')\phi(x')dx' \quad (\text{A.14})$$

The numerical cut-off filter commutes with the spatial derivation. But in the case of a set of nonlinear equations, the filter does not commute with the nonlinear fluxes. The modeling of the error of commutation is described in Ref.[94]. In our simulations all scales from the mode 0 to the numerical cut-off wavenumber $\xi = \frac{\pi}{\Delta x}$, where Δx is the constant mesh size, are computed.

The linear discrete filter is defined as a weighted average over the neighbouring nodes. For a dummy variable ϕ , it is expressed at point i as

$$\mathcal{F}(\phi)|_i = \sum_{l=-k,k} f_k \phi_{i+l} \quad (\text{A.15})$$

Filters up to the tenth order of accuracy have been considered in the present study, whose coefficients are given in Table A.3.

Such filters have regularizing properties associated to a strong damping of the highest resolved frequencies. Several possibilities exist dealing with the combination of the filtering step with the basic algorithm (A.13) :

1. **Algorithm 1** : Filtering of the divergence of the fluxes :

$$U_p^{n+1}|_i = U_p^n|_i - \Delta t \left(\left[\sum_{l=0,3} b_l \mathcal{F}(\text{DF}^{n-l}(U_0 + U_p))|_i \right] - \mathcal{F}(\text{DF}(U_0))|_i \right) \quad (\text{A.16})$$

2. **Algorithm 2** : Filtering at the end of the time step

$$U_p^{n+1}|_i = \mathcal{F} \left(U_p^n - \Delta t \left(\left[\sum_{l=0,3} b_l \text{DF}^{n-l}(U_0 + U_p) \right] - \text{DF}(U_0) \right) \right) \Big|_i \quad (\text{A.17})$$

These two algorithms have been considered and assessed during the present study. Results are presented below.

Treatment of boundary conditions

The use of high-order finite difference schemes for both space derivatives and filter with large stencils implies the definition of a specific treatment of the boundary conditions. Two basic types of boundary conditions are considered in the present study :

- **Solid walls** : the usual slip boundary condition for inviscid flows is used. In practice, values in ghost cells are computed in order to enforce symmetry (or skew-symmetry) in the local frame of reference associated to the local normal vector to the surface. If we suppose that one of the local directions i is normal to the wall which direction is n then $\delta_{in} = 1$ and we can write this boundary condition on the primitive variables as in Eq. A.18 with x' as the symmetric point of x relatively to the wall.

$$\begin{bmatrix} \rho(x') \\ u(x') \\ v(x') \\ w(x') \\ p(x') \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho(x) \\ (-1)^{\delta_{1n}} u(x) \\ (-1)^{\delta_{2n}} v(x) \\ (-1)^{\delta_{3n}} w(x) \\ p(x) \end{bmatrix} \quad (\text{A.18})$$

No operation is applied at these ghost points. The number of ghost cells is chosen such that the same scheme and filter can be used down to the solid wall, without reducing the order of the discrete operators or using new operators with non-centered stencils. Five ghost cells are required when the tenth-order filter is employed.

- **Exit boundary conditions** : an exit zone is defined in front of the exit boundary, whose width is equal to one half of the stencil of the filter (i.e. a maximum of 5 points if the tenth-order filter is used). Inside this exit region, the order of the space derivative operators and the filter is progressively decreased so that their stencils (i) remain inside the computational domain and (ii) encompass the last grid point. On the last line, the homogeneous Dirichlet boundary condition $U_p = 0$ is enforced. The resulting exit zone is described in Table A.4 and in Fig. A.1. This treatment of the exit boundary condition was proposed and successfully applied by Redonnet et al in [71, 70] and will be assessed later in the paper. A first remark is that the progressive decrease of the order of the filter results in an increasing damping of the fluctuations. The fact that the stencil of the filter encompass the last point on which a steady solution is enforced leads to the definition of an implicit penalization procedure inside the exit region. This point will be illustrated below. Exit zones were defined in the same spirit within the framework of implicit Padé schemes in Refs.[91, 92].

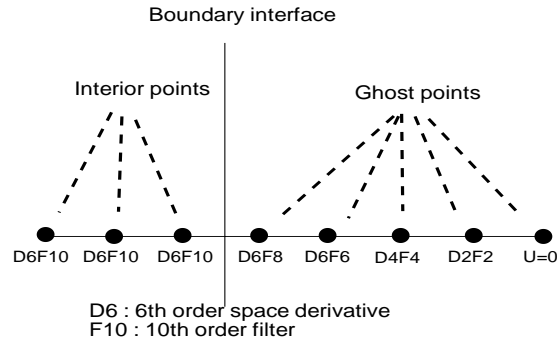


FIG. A.1: Schematic of the monodimensional implementation of the radiation boundary condition. $DmFn$ means that a m th order scheme is used for the spatial derivatives together with a n th order filter

TAB. A.4: Structure of the exit zone. Index of the last grid point is N .

Grid point index	Governing Eq.	Derivative order	Filter order
N-5	Euler	6	10
N-4	Euler	6	8
N-3	Euler	6	6
N-2	Euler	4	4
N-1	Euler	2	2
N	$U_p = 0$	-	-

Theoretical analysis of the linearized problem

Definition of a model problem

We now present a theoretical analysis of the properties of this complete numerical method for wave propagation, with emphasis put on discrete modal decomposition and non-reflecting exit boundary conditions. To render the analytical analysis possible, the problem is restricted to the linearized gas dynamics framework. The model problem simplifies as a simple linear advection equation :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + U_0 \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \quad (\text{A.19})$$

where ρ is the advected scalar quantity and U_0 the advecting velocity field, which is assumed to be uniform and steady. Discretized in time and space with parameters Δt and Δx , the associated full discrete problem analogous to Eq.(A.13) is

$$\rho_i^{n+1} = \rho_i^n - \frac{U_0 \Delta t}{\Delta x} \left(\sum_{l=0,3} b_l \text{D} \rho^{n-l} \Big|_i \right) \quad (\text{A.20})$$

which simplifies as

$$\rho_i^{n+1} = \rho_i^n - \frac{U_0 \Delta t}{\Delta x} \text{D} \rho^n \Big|_i \quad (\text{A.21})$$

when time integration is carried out using an explicit Euler scheme in order to allow further theoretical developments. The corresponding stabilized algorithms are

1. Algorithm 1 :

$$\rho_i^{n+1} = \rho_i^n - \frac{U_0 \Delta t}{\Delta x} \left(\sum_{l=0,3} b_l \mathcal{F}(\text{D} \rho^{n-l}) \Big|_i \right) \quad (\text{A.22})$$

for the Adams-Bashforth scheme, and

$$\rho_i^{n+1} = \rho_i^n - \frac{U_0 \Delta t}{\Delta x} \mathcal{F}(\text{D} \rho^n) \Big|_i \quad (\text{A.23})$$

for the explicit Euler scheme.

2. **Algorithm 2** : the two discrete problems are

$$\rho_i^{n+1} = \mathcal{F} \left(\rho^n - \frac{U_0 \Delta t}{\Delta x} \sum_{l=0,3} b_l \mathbf{D} \rho^{n-l} \right) \Big|_i \quad (\text{A.24})$$

and

$$\rho_i^{n+1} = \mathcal{F} \left(\rho^n - \frac{U_0 \Delta t}{\Delta x} \mathbf{D} \rho^n \right) \Big|_i \quad (\text{A.25})$$

for Adams-Bashforth and Euler schemes, respectively. Rewriting Eq. (A.25) as

$$\frac{\rho_i^{n+1} - \rho_i^n}{\Delta t} - \frac{U_0}{\Delta x} \mathcal{F}(\mathbf{D} \rho^n)|_i = -\frac{1}{\Delta t} ((\mathcal{F} - Id) \rho^n)|_i \quad (\text{A.26})$$

if we denote $CFL = \frac{U_0 \Delta t}{\Delta x}$, that leads to :

$$\frac{\rho_i^{n+1} - \rho_i^n}{\Delta t} + \frac{U_0}{\Delta x} (\mathcal{F}(\mathbf{D} \rho^n)|_i) = -\frac{U_0}{CFL \cdot \Delta x} ((Id - \mathcal{F}) \rho^n)|_i \quad (\text{A.27})$$

Looking at Eqs. (A.27) and (A.23) makes the difference between the two algorithms more explicit : algorithm 1 is equivalent to using a regularized finite difference operator for approximating the divergence operator, while algorithm 2 corresponds to the use of a relaxation regularization such as introduced by Adams and Stolz[1], with the filtered field $\mathcal{F}(\rho)$ as a target and $\tau = \frac{U_0}{CFL \cdot \Delta x}$ as a weighting factor. It will be shown below that the impact of the penalization term is significant. As filter and derivation commute in the continuous equations $\mathcal{F} * \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} * \mathcal{F}$, the corresponding formulations would be identical. But in the numerical algorithm, matrix for \mathcal{F} and D don't commute so they were both tested leading to similar results.

Introducing the formalism of Adams and Stolz, let us note u the solution of the advection problem and u_N its projection on the wavenumber range $[0, \frac{\pi}{\Delta x}]$. The regularization term proposed in Ref. [1] is $-\chi(u_N - G_2 * u_N)$ with $\chi = C_0 + \frac{C_1}{\Delta x}$, and G_2 a low-pass filter. Here, the derived value for χ is $\frac{U_0}{CFL \cdot \Delta x}$ which depends on both time step and mesh size. Furthermore, the filtered divergence of the flux is substituted to the divergence of the flux. So we propose to study the following evolution problem :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + U_0 \mathcal{F} \frac{\partial \rho}{\partial x} = -\tau(\rho - \mathcal{F} * \rho) \quad (\text{A.28})$$

Analogy with the artificial selective damping method

In the continuous form Eqs. (A.28), a correcting term is introduced. We compare the impact of this correcting term with the artificial selective damping term introduced by Tam in the semi-discrete equations in Ref. [80]. But first, let us remind the method to construct an artificial selective damping term. Its dimension is the same as the one of the term introduced by Algo2.

$$-\frac{U_0}{CFL \cdot \Delta x}(Id - \mathcal{F}) \sim -\frac{\nu}{\Delta x^2}D \quad (\text{A.29})$$

where ν is the artificial viscosity. And the operator D depends on the generalized wavenumber $\alpha\Delta x$. Three conditions are imposed for D :

- It is a positive even function of $\alpha\Delta x$.
- $D(\alpha\Delta x) \rightarrow 0$ as $\alpha\Delta x \rightarrow 0$
- $D(\pi) = 1$

These three conditions are fulfilled by the term $(Id - \mathcal{F})$. For further analysis, the comparison of the transfert function of these terms is shown on Fig. A.2 (left). Their spectral distribution is very similar. Globally, they do not affect low wavenumbers but they have a significant impact on high wavenumbers.

Optimal spectral-like accuracy

The regularization term can also be considered as a contribution to the discrete first-order derivative. This additional term will modify the group velocity, defined as $v_g = \frac{d(\kappa^* \Delta x)}{d\kappa \Delta x}$ in [80], of the waves in the high wavenumber range and make the odd-even modes become unstationary.

In Fig. A.2, the modified wavenumber $\kappa^* \Delta x$, obtained by Fourier transform of the spatial scheme for the first-order derivative, is plotted as a function of the exact wavenumber as it is usually done to evaluate the properties of the spatial scheme [52, 80]. It is observed that the filtered scheme exhibit a spectral-like behavior at very high wave numbers. The dependance to the CFL of algorithm 2 suggests that a calibration of the CFL is possible in order to have a better approximation of the continuous derivative operator in the high wavenumber range. An optimal value for this number is around $\frac{1}{3}$, or $\tau = 3$, as shown in Fig. A.2. This value is confirmed in the analysis below and in the simulations. It corresponds to the best approximation to the continuous operator, that means it gives to the spurious waves a group velocity homogeneous with the one of the larger scales, avoiding numerical dispersion.

Matrix stability analysis of the discrete problem

The two algorithms mentioned above can be distinguished looking at their stability properties. To account for both interior node and boundary condition discretization, a matrix

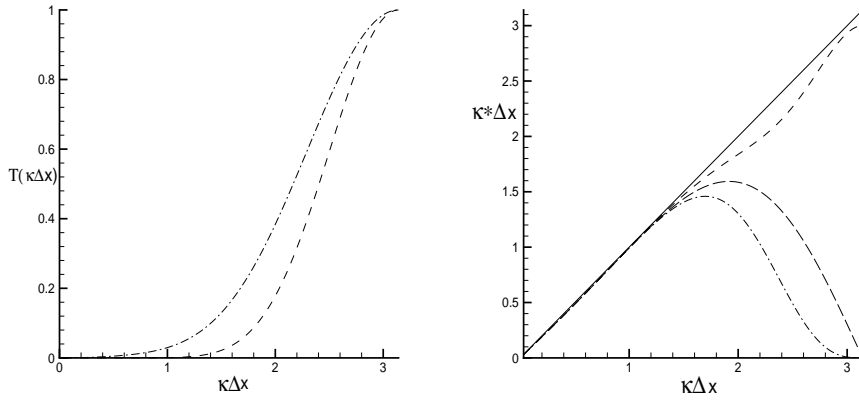


FIG. A.2: Left : transfert function of the correcting term -algo2- (dashed) and the artificial selective damping term (dashdot)[80]. Right : Generalized numerical wavenumber of the discrete first-order derivative as a function of the continuous generalized wavenumber $\kappa\Delta x$. Continuous operator (solid line), discrete operator with no filtering (long dash), algo2 $CFL = \frac{1}{3}$ (dashed line), algo1 (dashdot line).

stability analysis [38] is carried out considering the linear problems (A.22) and (A.24). Defining the general solution vector at time step n as $\Theta^n = (\{\rho_i^n\}, \{\rho_i^{n-1}\}, \{\rho_i^{n-2}\}, \{\rho_i^{n-3}\})^T$, where $\{\rho_i^n\}, i = 1, N$ is the discrete solution on a grid composed of N grid points, these two problems can be recast under the following form :

$$\Theta^n = A\Theta^{n-1} \quad (\text{A.30})$$

The matrix A has the general shape :w

$$A = \begin{pmatrix} [A_1] & [A_2] & [A_3] & [A_4] \\ [1] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [1] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [1] & [0] \end{pmatrix} \quad (\text{A.31})$$

where submatrices $[A_i]$ depend on the discrete operators and boundary conditions, and $[1]$ and $[0]$ denote the identity and the null matrices, respectively. Explicit expressions for $[A_i]$ matrices are derived using the discrete operator coefficients given in Sect.A. Typical results dealing with the eigenvalues corresponding to both algorithms with various boundary conditions are plotted in Figs. A.3 and A.4, showing that algorithm 2 is more stable than algorithm 1, whose eigenvalues are all very close or outside to the unit circle.

But, as discussed by Zingg in Ref.[94], the asymptotic stability method can fail to reveal instabilities if the matrix is not normal because in this case the spectral radius is the lower bound of all norms. Another point is that the singular value decomposition can be a helpful

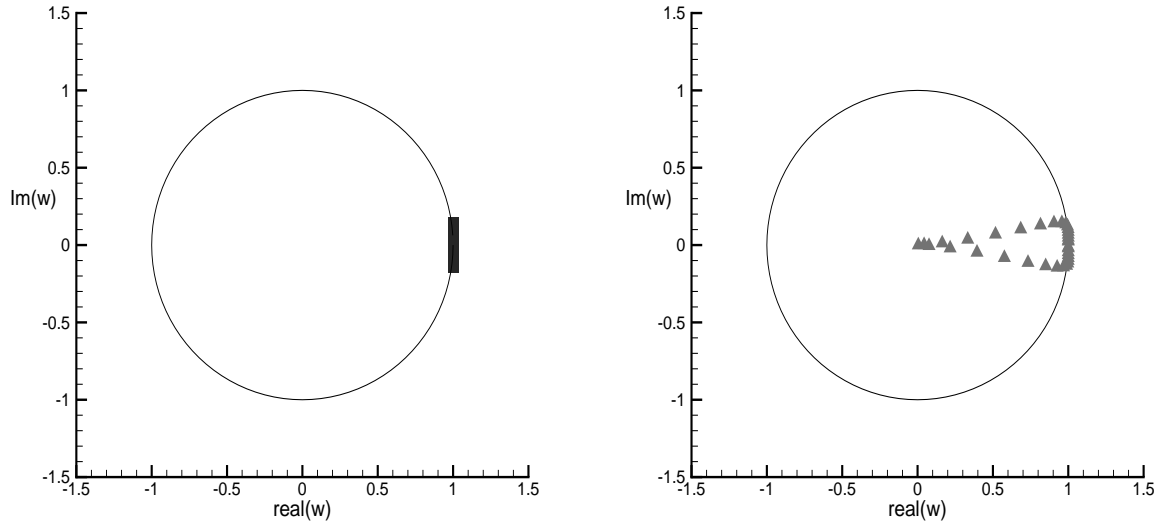


FIG. A.3: Eigenvalues of the 1D, fully discretized linear problem, with periodic boundary conditions (CFL = 0.1). Left : Algorithm 1, right : Algorithm 2

tool in stability analysis. Therefore, it is necessary to check that the method agrees with the definition of stability of Lax and Richtmyer. A sufficient and necessary condition for this is that A^n is uniformly bounded. Fig. A.5 shows that the norm of A^n is bounded for algorithm 2 for two values of n , 50 and 100. But it is not the case for algorithm 1 and neither in the case without filtering. The norm of A^n was computed with the singular value decomposition well-suited for nonnormal matrices such as obtained with high-order centered finite-difference methods.

For a $N \times N$ matrix A , the singular value decomposition can be written as follows :

$$A = Q_1 D Q_2 \quad (\text{A.32})$$

where Q_1 and Q_2 are orthogonal matrices and where $D = \text{diag}(v_1, v_2, \dots, v_N)$ with $v_1 \geq v_2 \geq \dots \geq v_N$.

This last result is an additional proof of the better stability of algorithm 2, that consists in a filtering at the end of the time step and which revealed very similar to the artificial selective damping method.

Time-Fourier analysis of the semi-discretized problem

The properties of the discrete solutions are now investigated thanks to the use of Fourier analysis. In order to obtain results that will be valid for spatially non-periodic solutions, a time-Fourier transform [90] (the independent variable in the transformed domain is the

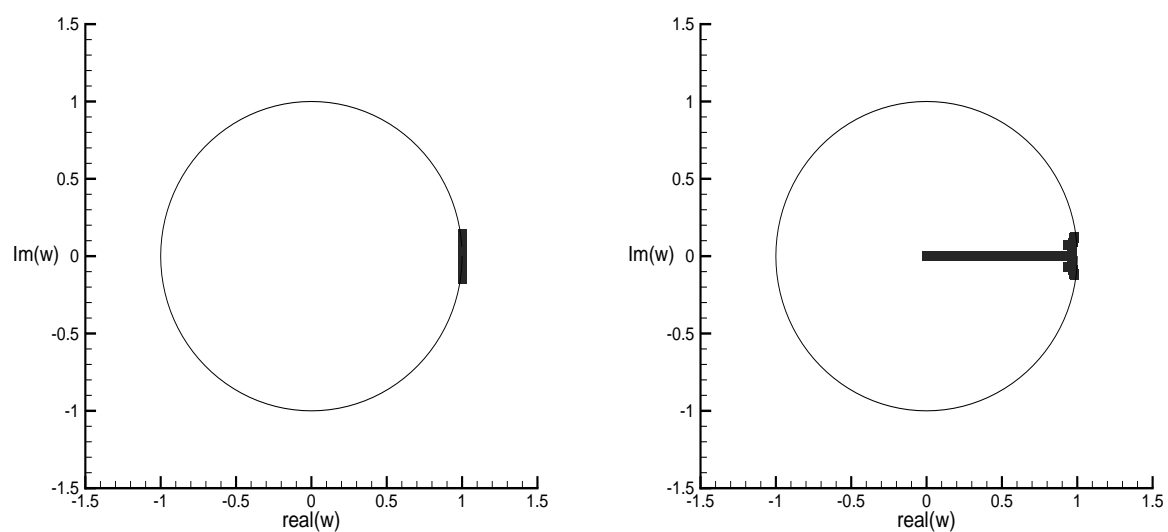


FIG. A.4: Eigenvalues of the 1D, fully discretized linear problem, with exit boundary conditions (CFL = 0.1). Left : Algorithm 1, right : Algorithm 2

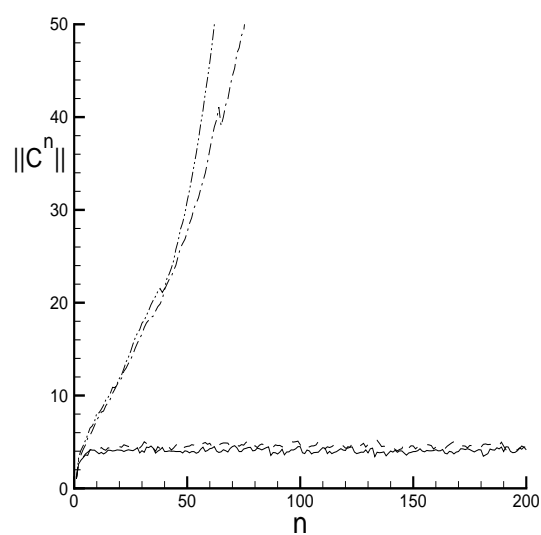


FIG. A.5: Norm of matrix A^n (maximum of positive singular values of A) as a function of number of iterations n . Algo2 $cfl = 0.2$ $N=100$ (solid line) and $N=50$ (dashed line), Algo1 $N=100$ (dashdotdot line), without filtering $N=100$ (dashdotline).

time-frequency Ω) is applied on the semi-discretized model problems (A.28) with $\tau = 0$ (algorithm 1) and $\tau = \frac{U_0}{CFL \cdot \Delta x}$, which are

$$\frac{d\rho_i}{dt} = -U_0 \mathcal{F}(\mathbf{D}\rho)|_i \quad (\text{A.33})$$

$$= -\frac{U_0}{\Delta x} \sum_{l=-5,5} f_l \sum_{m=-3,3} a_m \rho_{i+l+m} \quad (\text{A.34})$$

$$= -\frac{U_0}{\Delta x} \sum_{l=-8,8} \alpha_l^I \rho_{i+l} \quad (\text{A.35})$$

for algorithm 1, and

$$\frac{d\rho_i}{dt} = -U_0 \mathcal{F}(\mathbf{D}\rho)|_i - (\tau(1 - \mathcal{F})\rho)|_i \quad (\text{A.36})$$

$$= -\frac{U_0}{\Delta x} \left(\sum_{l=-5,5} f_l \sum_{m=-3,3} a_m \rho_{i+l+m} + \frac{\tau \Delta x}{U_0} \left(\rho_i - \sum_{l=-5,5} f_l \rho_{i+l} \right) \right) \quad (\text{A.37})$$

$$= -\frac{U_0}{\Delta x} \sum_{l=-8,8} \alpha_l^{II} \rho_{i+l} \quad (\text{A.38})$$

for algorithm 2. Taking time-Fourier transform of Eqs. (A.35) and (A.38), one obtains

$$i\Omega \hat{\rho}_i(\Omega) = -\frac{U_0}{\Delta x} \sum_{l=-8,8} \alpha_l^I \hat{\rho}(\Omega)_{i+l} \quad (\text{A.39})$$

with $i^2 = -1$, and

$$i\Omega \hat{\rho}_i(\Omega) = -\frac{U_0}{\Delta x} \sum_{l=-8,8} \alpha_l^{II} \hat{\rho}(\Omega)_{i+l} \quad (\text{A.40})$$

which are recurrence equations for $\{\hat{\rho}_i(\Omega)\}$. Seeking normal solutions such that the ratio $\hat{E}(\Omega) \equiv \hat{\rho}_{i+1}(\Omega)/\hat{\rho}_i(\Omega)$ is independent of i , one obtains a sixteenth order polynomial characteristic equation for $\hat{E}(\Omega)$:

$$i\Omega = -\frac{U_0}{\Delta x} \sum_{l=-8,8} \alpha_l^I (\hat{E}(\Omega))^l \quad (\text{A.41})$$

and

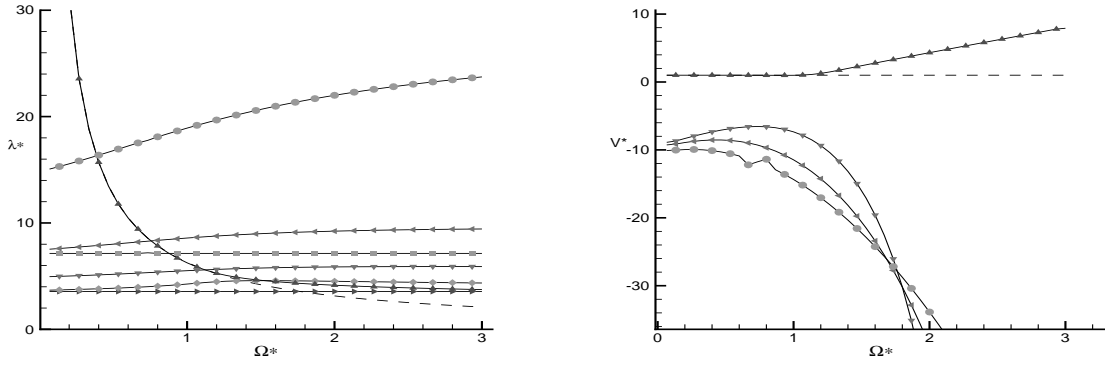


FIG. A.6: Time-Fourier analysis of algorithm 2, $\tau = 20$. Top : roots with wavelength strictly greater than $2\Delta x$; Bottom : corresponding group velocities. Dashed lines correspond to the exact solution.

$$i\Omega = -\frac{U_0}{\Delta x} \sum_{l=-8,8} \alpha_l^{II} (\hat{E}(\Omega))^l \quad (\text{A.42})$$

for the two proposed algorithms, respectively. Both of them yield the existence of sixteen characteristic roots, $\{\hat{E}_i^I(\Omega), i = 1, 16\}$ and $\{\hat{E}_i^{II}(\Omega), i = 1, 16\}$. It is worth noting that only one of these roots is associated to the physical solution, the other ones corresponding to spurious discrete modes. By analogy with the analytic solution of the advection equation [90], one can evaluate the nondimensional phase velocity $c_i^*(\Omega)$ associated to the root $\hat{E}_i(\Omega)$ as :

$$c_i^*(\Omega) = -\frac{\Omega\Delta x}{\text{arg}(\hat{E}_i(\Omega))} \quad (\text{A.43})$$

with $\text{arg}(\hat{E}_i(\Omega)) \in [-2\pi; 0]$. The associated group velocity $V_i(\Omega)$ and spatial wavelength $\lambda_i(\Omega)$ are defined as follows :

$$\lambda_i(\Omega) = \frac{2\pi c_i^*(\Omega)}{\Omega} \quad (\text{A.44})$$

$$\frac{1}{V_i(\Omega)} = \frac{d(\frac{\Omega}{c_i^*(\Omega)})}{d\Omega} \quad (\text{A.45})$$

Results obtained for algorithm 2 with $\tau = 20$ are displayed in Figs. A.6 and A.7. Very similar results are obtained when considering algorithm 1, which will not be presented for

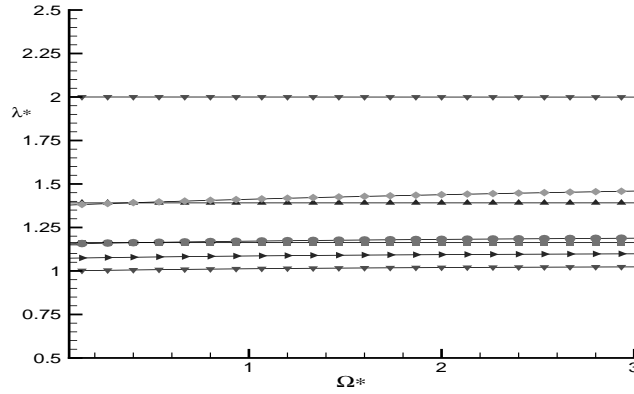


FIG. A.7: Time-Fourier analysis of algorithm 2, $\tau = 20$. Roots with wavelength lesser or equal to $2\Delta x$.

sake of brevity. Numerical roots associated to the use of a sixth-order accurate centered scheme for the divergence operator and a tenth-order accurate filter are presented using the nondimensional spatial wavelength $\lambda^* = \lambda/\Delta x$ and the nondimensional time frequency $\Omega^* = \Omega\Delta x/U_0$. The results are presented in the time frequency interval $\Omega^* \in [0; 3]$.

Figure A.6 displays the spatial wavelength and the group velocity of the roots which can be sustained on the grid during the computation, i.e. numerical modes such that $\lambda \geq 2\Delta x$.

It is seen that the exact solution is correctly approximated by the numerical physical root within the interval $\Omega^* \in [0; 1.584]$, leading to the following approximate criterion :

$$\Omega \leq \frac{1}{2}k_c U_0 \quad (\text{A.46})$$

where $k_c = \pi/\Delta x$ is the Nyquist spatial wavenumber associated to the mesh. For higher frequencies, some discrepancies appear on both wavelength and group velocity, and one spurious root has a spatial wavelength very close to the physical one. An interesting results is observed looking at the group velocity : some spurious roots have a negative group velocity, and correspond to energy propagation in the wrong direction. These modes will be responsible for spurious reflexions coming from the exit boundary, with group velocity much higher in amplitude than the physical velocity U_0 . Another phenomenon is the bifurcation of the group velocity of one spurious mode, which exhibits a change of sign at the critical value $\Omega^* \simeq \pi/2$. It is observed that spurious modes have long and nearly constant wavelengths, $\lambda \in [2\Delta x, 10\Delta x]$. For $\Omega^* \in [0, 0.4]$, spurious modes are of shorter spatial wavelength than the physical solution, while for $\Omega^* \geq 0.4$ some spurious modes correspond to larger spatial scales than the physical solution.

Figure A.7 shows spurious roots with wavelengths shorter than the cutoff wavelength of the grid. These modes, which are solutions of the time-Fourier analysis of the semi-discretized problem, cannot be sustained on the computational grid during the simulation,

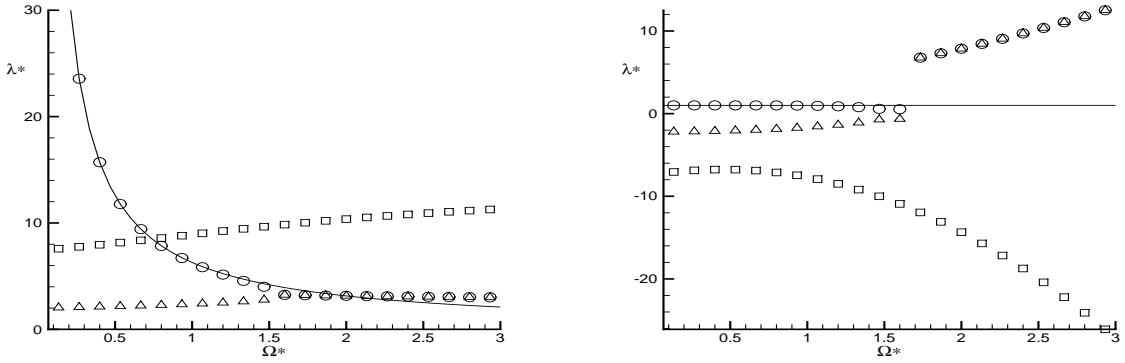


FIG. A.8: Time-Fourier analysis of unfiltered sixth-order method. Top : spatial wavenumber. Bottom : group velocity. Solid lines correspond to the exact solution

and thus will not be further considered here.

Effects of the filter on the modal structure of the discrete solution can be deduced comparing previous results with those associated to the unfiltered ($\tau = 0$) sixth-order scheme, which are plotted in Fig. A.8. The width of the stencil of the non-filtered algorithm is equal to 7 points, leading to the existence of six numerical roots. As in the previous case, there is one physical root and five spurious roots. A bifurcation is observed near $\Omega^* = 1.7$: for higher frequencies the physical root and the small-scale spurious root merge. The role of the filtering step is to prevent the bifurcation and to stabilize the procedure, but it does not modify significantly neither the local structure of the discrete solution nor the critical value of Ω^* . The number of sustained spurious modes are also very close, despite the fact that the stencil of the filtered algorithm is much wider than the one of the basic method.

Matrix analysis of the semi-discretized problem

The time-Fourier analysis of the semi-discretized problem derived from Eq.A.28 provides only with the local behavior of the numerical solution, and thus does not take the treatment of the boundary conditions into account. A more general analysis can be carried out using the matrix analysis method for the semi-discretized problem [38].

>From Eqs. (A.35) and (A.38), the following general form of the problem including boundary conditions is obtained :

$$\frac{d\rho}{dt} = S\rho \quad (\text{A.47})$$

where S is the matrix associated to the discretization at the interior nodes and at the boundaries. The exact solution of Eq.(A.47) can be recast as

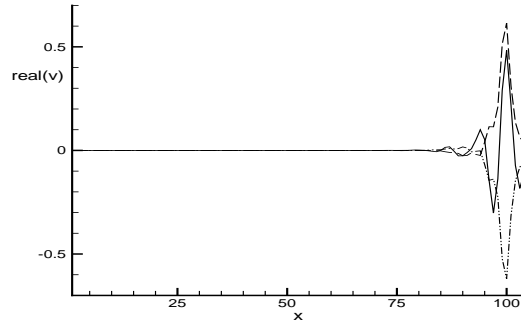


FIG. A.9: Matrix analysis of algorithm 2 with $\tau = 20$, $N = 105$, and exit boundary conditions. Examples of real part of some eigenvectors corresponding to eigenvalues such that $\text{real}(\lambda) > -0.02$ (sustained modes).

$$\rho(t) = \sum_{j=1,N} \rho_{0j} V_j e^{\lambda_j t} \quad (\text{A.48})$$

where N is the number of grid points, which is equal to the number of eigenvectors, $\{V_j\}_{j=1,N}$ are the eigenvectors of S and $\{\lambda_j\}_{j=1,N}$ the corresponding eigenvalues. Coefficients $\{\rho_{0j}\}_{j=1,N}$ are fixed by the initial condition.

The analysis is performed for the matrix computed from algorithm 2 with $N = 101$, $\tau = 20$, and exit boundary conditions. The sixth-order accurate operator for space derivatives and the tenth-order filter are used at the interior nodes. The exit condition is imposed on the right side of the domain. All the eigenvalues have a negative real part, showing that the algorithm is stable. It is seen from Fig.A.4 that the eigenmodes can be grouped in two classes : fastly decaying modes (i.e. modes with eigenvalues such that $\text{real}(\lambda_j) < 1$), and sustained modes such that $\text{real}(\lambda_j) \sim 1$. Fastly decaying modes are associated to the physical solution, which corresponds to the uniform flow once the perturbation has been convected outside the computational domain. Spurious reflexion at the exit boundary is associated to sustained modes, which will maintain fluctuations inside the computational domain a long time after the initial perturbation has left it.

A typical view of the structure of sustained modes is displayed in Fig. A.9, where the real part of some modes such that $\text{real}(\lambda_j) > -0.02$ is plotted. An interesting point is that all the sustained modes have the same structure : they have a very compact support with non-zero values near the exit boundary, but they are zero everywhere else. This structure show that spurious oscillations will form a boundary layer in the exit zone, but that they will not be able to contaminate the whole domain.

Typical structures of fastly decaying modes are presented in Fig.A.10. These modes are seen to be non-local, i.e. their support is the whole computational domain.

The same analysis conducted on the matrices associated to algorithm 1 or the unfiltered ($\tau = 0$) algorithm reveals that all the eigenvectors of the two methods are very similar to

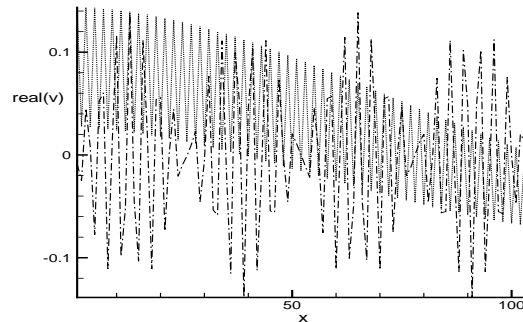


FIG. A.10: Matrix analysis of algorithm 2 with $\tau = 20$, $N = 105$, and exit boundary conditions. Examples of real part of eigenvectors corresponding to fastly decaying modes

those fastly decaying modes of algorithm 2 : they have a non-local, highly oscillatory structure. Eigenvalues associated to these two methods having very small real parts, numerical oscillations can be sustained for a very long time, leading to a very poor non-reflecting capability of the exit boundary condition. The influence of filtering the whole increment is then to modify the structure of the sustained modes by decreasing the width of their support, and to damp the eigenmodes with non-local support.

Numerical simulations in the linear case

Previous results issued from theoretical analysis are now assessed by carrying out numerical simulations with algorithm 2 on various configurations.

1D entropy wave

We first present results obtained when considering an initial gaussian density disturbance in a uniform subsonic flow. The Mach number is taken equal to $Ma = 0.5$. The domain is defined as $x \in [-100; 100]$ and inflow/exit boundary conditions are applied. A uniform mesh with $\Delta x = 1$ is used. The initial perturbation is defined as

$$\rho(x, t = 0) = \epsilon e^{-\alpha x^2}, \quad \alpha = \log\left(\frac{2}{b^2}\right) \quad (\text{A.49})$$

$$p(x, t = 0) = 0 \quad (\text{A.50})$$

$$u(x, t = 0) = 0 \quad (\text{A.51})$$

with $2 < b < 12$ and $\epsilon = 0.01$. For various values of b the spectral shape of the initial pulse is described in Fig. A.16. With increasing b the wavenumber range of advected waves is reducing from 1.78, i.e 3.5 points per wavelength (component in spectral decomposition

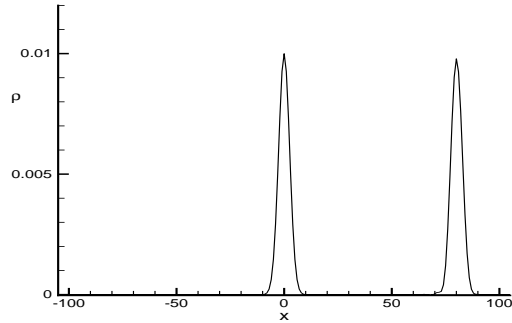


FIG. A.11: Linear advection of an entropy wave. Density perturbation at $t=0$ and $t=160$

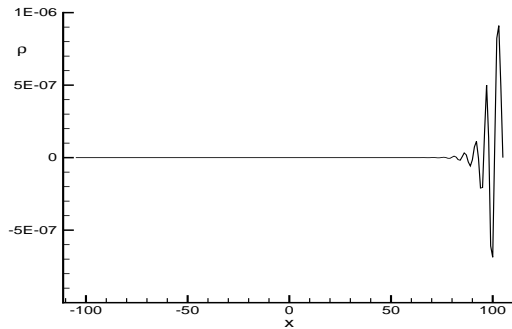


FIG. A.12: Linear advection of an entropy wave. Density perturbation after the physical signal has left the computational domain ($t=240$)

equal to 1% of the one of mode 0), for $b = 2$, to 0.3, i.e 21 ppw, for $b = 12$. For this last value, only large scales are advected.

It was checked that conclusions presented below are independent with respect to the value of ϵ .

Typical results obtained with $b = 3$ and $CFL = 0.2$ when the initial perturbation is advected within the computational domain are shown in Fig.A.11. The signal is observed to be correctly advected, both the group velocity and the amplitude being correctly captured. A view of the solution after a longer integration time, when the initial perturbation is expected to have left the domain, is plotted in Fig.A.12. A very-low amplitude residual noise is detected, with a maximum amplitude of the order of $10^{-4}\epsilon$, which is a very satisfactory non-reflective behavior. An interesting point is that the residual error is concentrated near the exit boundary and does not propagate backward in the domain. Its shape shows clearly that it is spanned by the subset of sustained eigenmodes predicted by the matrix analysis of the semi-discretized problem.

The global solutions computed using both algorithms are presented in a space-time diagram in Fig.A.13. The non-reflecting properties of algorithm 2 is clearly observed, while

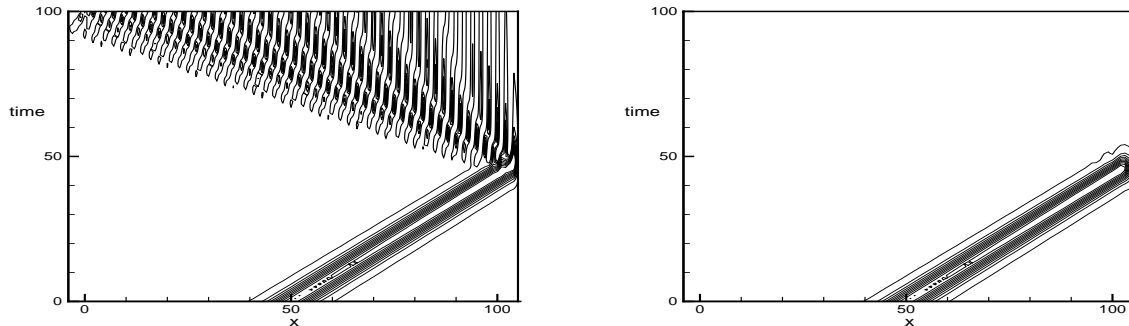


FIG. A.13: Linear advection of an entropy wave. Solution in the (x, t) plane. Left : algorithm 1, right : algorithm 2. $\epsilon = 0.1$, $b = 4$, $CFL = 0.05$. Euler explicit time integration scheme. Contours are defined such as $\rho \in [10^{-3}, 10^{-1}]$ with increment $\Delta\rho = 1.1 \cdot 10^{-2}$.

the topology of reflected waves computed with algorithm 1 is coherent with results of the theoretical analysis. They correspond to spurious modes with negative group velocity predicted by the time-fourier analysis. Corresponding spatial wavelengths belong to the range $[2\Delta x, 10\Delta x]$, in good agreement with theoretical results. Further insight into the structure of the discrete solution is gained by looking at Fig.A.14, which displays the same solutions as Fig.A.13, but focusing on very small amplitude waves. As predicted by the time-Fourier analysis, some spurious waves with negative group velocity are generated all along the simulation, whatever algorithm is used. An important point is that this spurious modes are generated before the original disturbance reach the exit plane, indicating that they are an intrinsic part of the discrete solution and cannot be interpreted only as exit boundary condition artefacts. Algorithm 2 is seen to yield lower amplitude backward-propagating waves than algorithm 1. Once the physical signal has reached the exit boundary, the large-amplitude reflected waves generated by algorithm 1 are seen strongly interact with these original spurious waves. As in the case of reflected waves, the observed spatial frequencies are in good agreement with theoretical predictions.

The accuracy of the exit boundary condition with respect to its non-reflecting properties can be evaluated looking at Fig.A.15, which presents the time history of the norm of the density fluctuation inside the computational domain referred to its value at the initial time. It is observed that the norm is constant during a first phase during which the initial perturbation is advected inside the domain, showing the good conservation properties of the method. Once the perturbation has left the domain, the residual energy is seen to decay exponentially and monotonically. An interesting point is that the residual perturbation inside the exit zone, which is defined as the 5-point wide region near the exit boundary where the numerical scheme is not the same as in the interior nodes, also decay very fastly and that, for long integration time, the residual perturbation is represented by non-local eigenmodes.

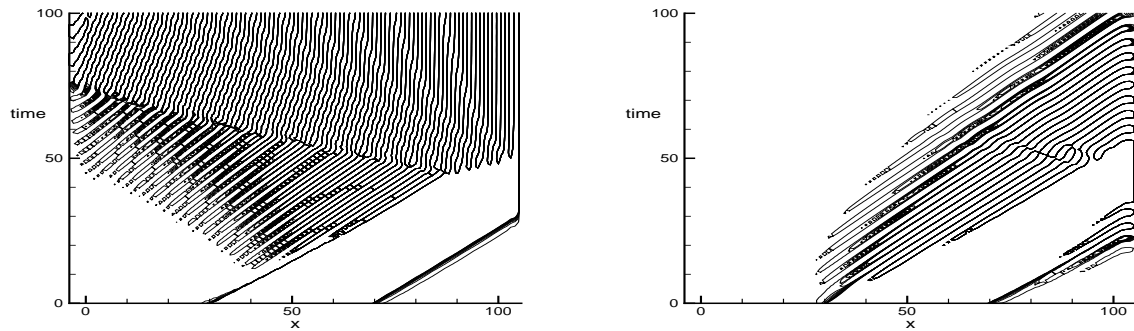


FIG. A.14: Linear advection of an entropy wave. Solution in the (x, t) plane. Left : algorithm 1, right : algorithm 2. Contours are defined such as $\rho \in [10^{-10}, 10^{-8}]$ with increment $\Delta\rho = 1.1 \cdot 10^{-9}$

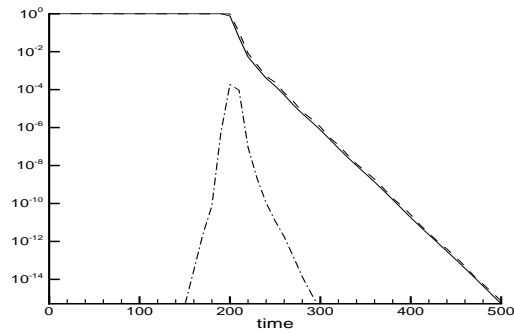


FIG. A.15: Time history of L^∞ (solid line) and L^2 (dashed line) norms of the density fluctuation inside the whole domain and inside the exit zone (dash-dot line). Computation carried out with $b = 3$ and CFL=0.2. Norms are referred to initial values over the whole domain.

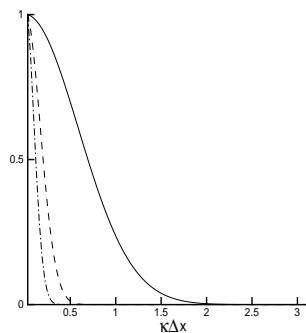


FIG. A.16: Right : Spectral form of Gaussian pulses with $b = 2$ (solid), $b = 7$ (dashed) and $b = 12$ (dashdot).

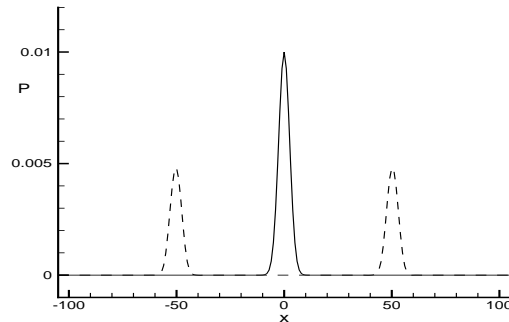


FIG. A.17: Signal at times $t=0$ (solid line) and $t=80$ (dashed line)

1D acoustic wave

We now present results dealing with the evolution of an acoustic disturbance in a fluid at rest. The mesh is the same as in the previous case. The initial perturbation field is given by

$$\rho(x, t = 0) = \epsilon e^{-\alpha x^2} \quad (\text{A.52})$$

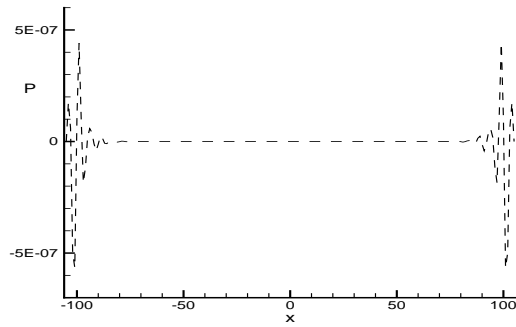
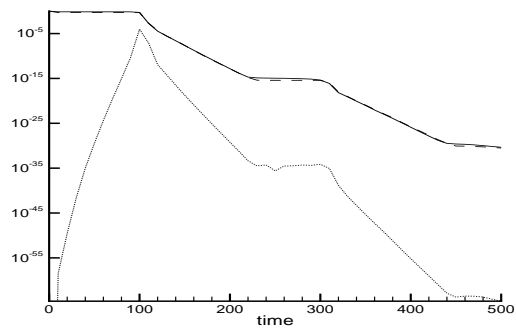
$$p(x, t = 0) = c_0^2 \rho(x, t = 0) \quad (\text{A.53})$$

$$u(x, t = 0) = 0 \quad (\text{A.54})$$

Exit zones are prescribed at both ends of the computational domain. Plots of the solution during the period where the acoustic wave is inside the domain are presented in Fig.A.17, showing a perfect agreement with the theoretical solution. The simulation has been carried out with $CFL = 0.2$ (based on sound speed), $b = 3$ and $\epsilon = 0.01$. The residual noise observed for long time integration when the physical wave has left the computational domain is shown in Fig.A.18. As in the case of the entropy wave, it is seen that the residual error is concentrated in exit regions and is spanned by eigenvectors with compact support. The maximum amplitude of the reflected noise is 10^{-5} of the original amplitude, showing the very good properties of the present method.

The time history of the norm of fluctuations contained inside the computational domain referred to the initial solution is displayed in Fig.A.19. The very low amplitude plateau observed between $t = 200$ and $t = 300$ corresponds to the occurrence of very weak spurious acoustic waves associated to residual contributions of fastly decaying modes. As in the entropy wave case, a general very satisfactory behavior of algorithm 2 is observed.

Sensitivity of the results to both CFL and grid resolution can be investigated from Fig.A.20, where the residual energy of the solution after long-time integration is plotted in the (CFL, ppw) plane. As mentioned above, ppw is the component in spectral decomposition of the gaussian pulse equal to 1% of the one of mode 0. It is observed that lowest values, i.e. the best non-reflecting properties, are obtained for $ppw \in [6, 12]$, $orb \in [6, 10]$,

FIG. A.18: Signal at time $t=120$ FIG. A.19: Linear propagation of an acoustic disturbance. Time history L^∞ (solid line) and L^2 norms (dashed line) of density in the domain and in the exit zone (dotted line)

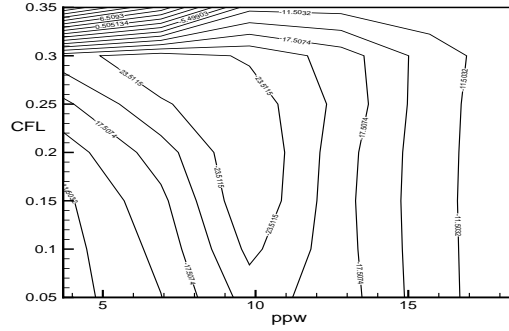


FIG. A.20: Contours of residual energy in logarithmic scale inside the computational domain after long-time integration ($t = 180$) function of minimum of number of points per wavelength contained in the spectrum of the pulse

with $CFL \in [0.1, 0.3]$. For smaller or larger values, very satisfactory results are obtained, but with higher level of residual noise.

For $ppw > 16$, or $b > 8$, results are also seen to be independent of the value of the CFL. These results have been checked to be independent on the amplitude of the initial disturbance.

2D entropy wave

The simulation of a 2D gaussian density pulse is now carried out to assess the properties of the method for multi-dimensional simulations. As in the one-dimensional case, the numerical set-up is chosen such that $CFL = 0.2$ and $b = 3$. A square computational domain is defined of dimensions $[-100, 100] \times [-100, 100]$, with a uniform mesh $\Delta x = \Delta y = 1$. The initial perturbation is axisymmetric and is centered at $(0, 0)$. Its expression in cylindrical coordinates is

$$\rho(r, t = 0) = \epsilon e^{-\alpha r^2} \quad (\text{A.55})$$

$$p(r, t = 0) = 0 \quad (\text{A.56})$$

$$u_r(r, t = 0) = 0 \quad (\text{A.57})$$

$$u_\theta(r, t = 0) = 0 \quad (\text{A.58})$$

where r is the radial coordinate and u_r and u_θ the radial and azimuthal velocity components, respectively. The perturbation is advected by a uniform flow with Mach number $Ma = 0.5$. To check cross-wind effects on the numerical accuracy, simulations have been carried out for several values of the angle, referred to as β , between the x-axis and the mean flow. Exit boundary conditions are prescribed on boundary corresponding to outward mean flow flux.

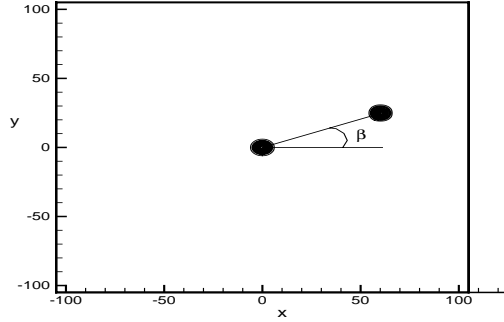


FIG. A.21: Density at times $t=0$ and $t=130$, $\beta = \frac{\pi}{8}$, $\epsilon = 0.001$, $CFL = 0.02$

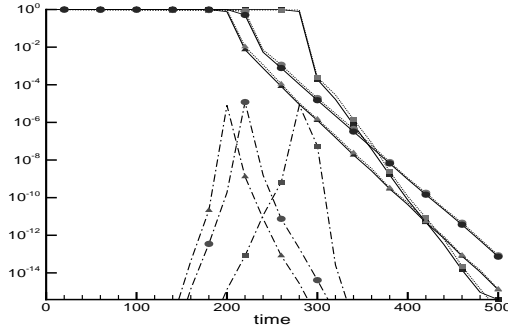


FIG. A.22: History of L^2 (solid lines) and L^∞ (dotted line) norms of density fluctuation inside the wall domain and inside the exit zone (dash-dot). Values are referred to initial values inside the whole domain. Computations are carried out with $\epsilon = 0.001$, $CFL = 0.1$, $b = 3$. Triangle : $\beta = 0$, circle : $\beta = \pi/8$, square : $\beta = \pi/4$

A view of the solution at two different times is shown in Fig.A.21.

Time histories of the norms of the fluctuating density field are presented in Fig.A.22, for several values of the angle β . In all cases, the non-reflecting properties of the exit boundary condition are observed to be very satisfactory : the residual noise exhibits an exponential decay down to the round-off precision. The same test has been conducted on a non-Cartesian, sinusoidal mesh in order to investigate the accuracy of the method on non-orthogonal grids. All other computational parameters are unchanged. Time history of the L^2 norm of the density fluctuation on both Cartesian and sinusoidal meshes is given in Fig.A.23 in the case $\beta = 0$ (similar results are obtained with other values of β). The method is seen to be as accurate on non-orthogonal curvilinear grids as on Cartesian grids.

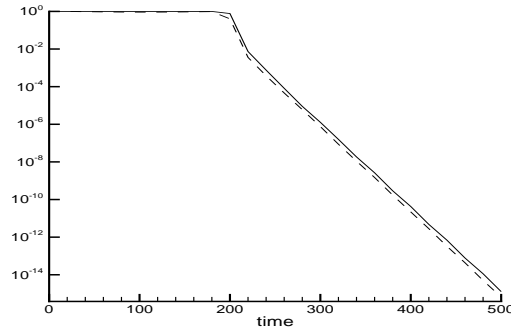


FIG. A.23: History of L^2 norm of density fluctuation on the Cartesian (solid line) and curvilinear (dashed line) grids. Values are referred to initial values inside the whole domain. Computations are carried out with $\epsilon = 0.001$, $CFL = 0.1$, $b = 3$.

2D acoustic wave

The last test case deals with the evolution of an initial 2D acoustic pulse. The mean flow is supposed to be at rest. The computational domain is the same as for the 2D entropy wave simulations. Exit boundary conditions are prescribed on all the boundaries. The initial disturbance is defined as

$$\rho(x, y, t = 0) = \epsilon e^{-\alpha(x^2+y^2)} \quad (\text{A.59})$$

$$p(x, y, t = 0) = c_0^2 \rho(x, y, t = 0) \quad (\text{A.60})$$

$$u(x, y, t = 0) = 0 \quad (\text{A.61})$$

$$v(x, y, t = 0) = 0 \quad (\text{A.62})$$

with $\epsilon = 0.01$ and $b = 3$.

Simulations are first carried out on both Cartesian and curvilinear grids defined in the preceding section. Instantaneous solutions are displayed in Figs.A.24 and A.25. In both cases, the propagation of the circular acoustic wave is seen to be very satisfactorily captured. Interaction between the original disturbance with exit boundaries results in the occurrence of spurious, low-amplitude reflections. These spurious modes are seen to be concentrated near the boundaries and exhibit characteristic patterns. This can be explained by the fact that they are spanned by sustained eigenmodes of the two-dimensional operators, which, as their one-dimensional counterparts, are uniformly zero far from the boundaries. For both calculations, the maximum level of residual pressure fluctuations at the last time step is 5.10^{-3} smaller than the amplitude of the initial perturbation, indicating very satisfactory non-reflecting properties of algorithm 2.

Time history of the fluctuating energy contained in the computational domain on these two grids is shown in Fig.A.26. In both cases the residual pressure fluctuations are seen to observe a monotonic decay. Some plateaus are detected, which correspond to the existence

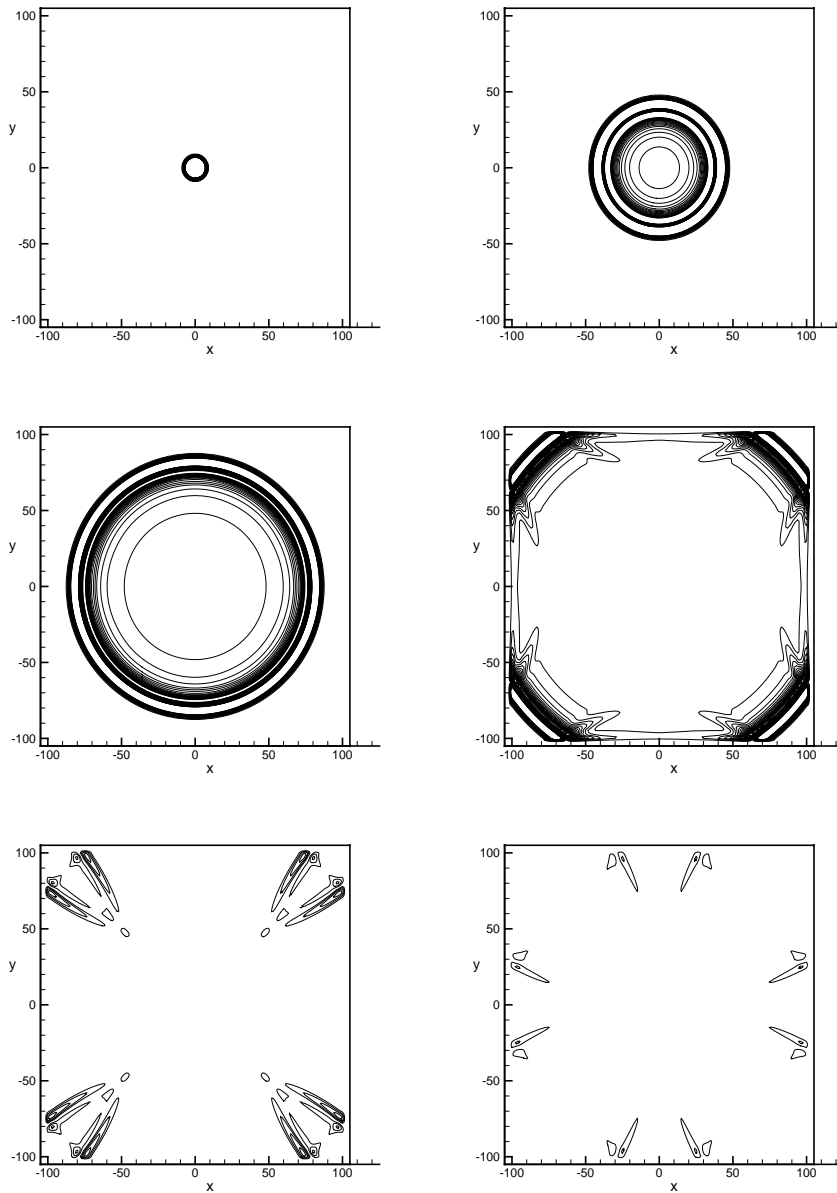


FIG. A.24: Contours of fluctuating pressure on 2D Cartesian mesh from $t=0$ to $t=200$ with interval $\Delta t = 40$ (from left to right and top to bottom). Computation is carried out with $\epsilon = 0.01$, $b = 3$ and $CFL = 0.1$. Contours are defined such as $p \in [2 \cdot 10^{-5}, 3 \cdot 10^{-4}]$ with increment $\Delta p = 1.4 \cdot 10^{-5}$.

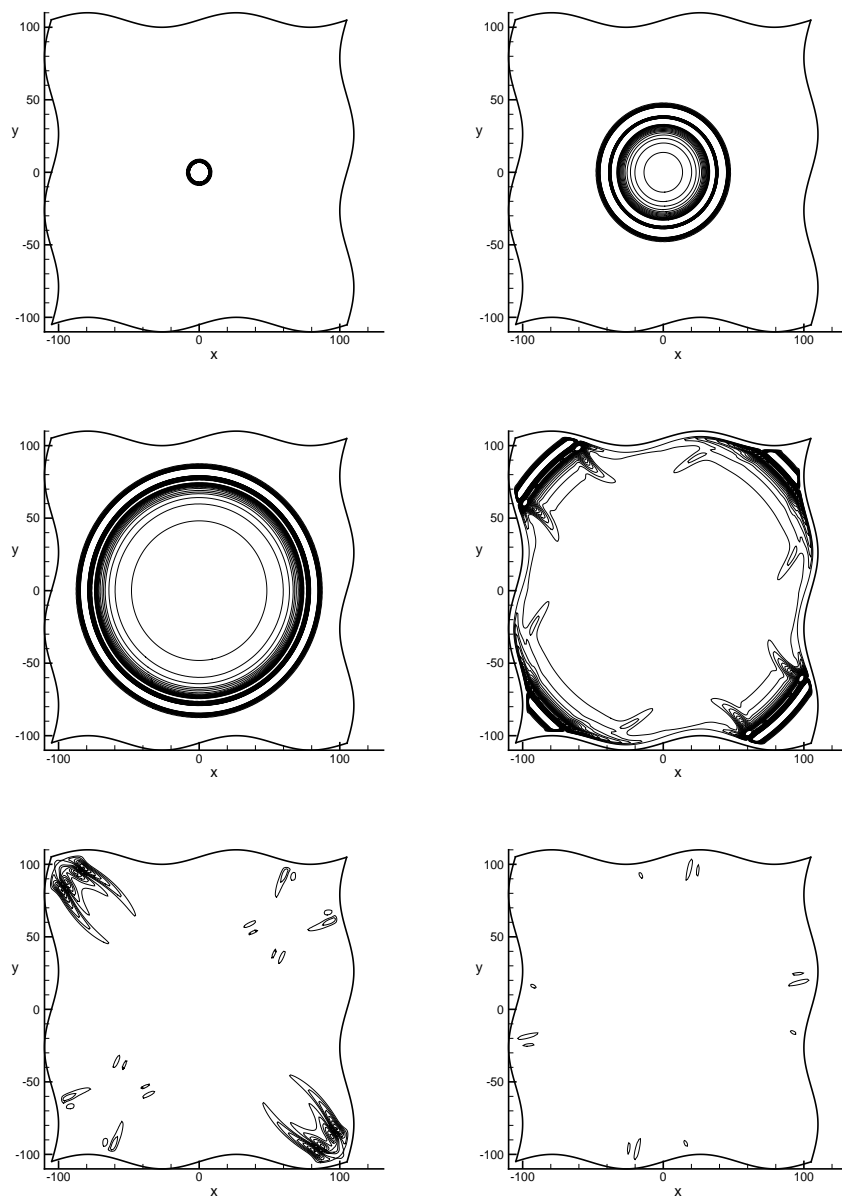


FIG. A.25: Contours of fluctuating pressure on 2D curvilinear grid from $t=0$ to $t=200$ with interval $\Delta t = 40$ (from left to right and top to bottom). Computation is carried out with $\epsilon = 0.01$, $b = 3$ and $CFL = 0.1$. Contours same as before.

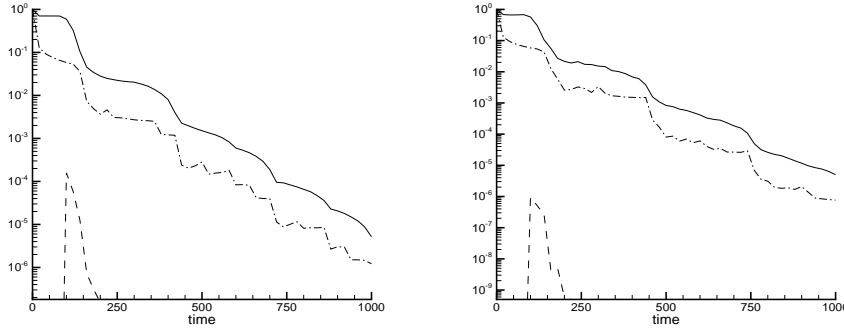


FIG. A.26: Time history of L^2 (solid line) and L^∞ (dashed line) norms of pressure on the whole domain and in the exit region (dash-dot line) computed on Cartesian (left) and curvilinear (right) grids.

of low-amplitude, spurious reflected waves which are damped each time they interact with exit regions. For long-time integration the residual pressure is driven down to the round-off precision, demonstrating the stability of the method.

In the cartesian case, the time history of the fluctuating energy is compared to the one obtained with a characteristics boundary condition in Fig.A.27 (left). Furthermore, comparatively, the characteristics boundary condition leads to an overestimation of the maximum in the domain at $100 < t < 140$ before the wave totally cross the numerical border Fig.A.27 (bottom curves). This overestimation, that can account for a numerical reflection, is around 20%. The comparison shows that they behave similarly for long-time simulation. This a very satisfactory result if we take into account the least additional cost of the exit zone derived compared to the one necessary for a characteristics boundary condition. The comparison with the analytical solution in Fig.A.27 (right) shows that the computed solution has very nice nonreflecting properties in the time interval $[100, 150]$, before a saturation level is set in the domain, that will be decreased at it will cross again a boundary as is shown in Fig.A.26.

Scattering on a cylinder

In order to validate the solid wall treatment in case of a curvilinear geometry, a study of the scattering of a pulsating source on a circular cylinder was held by Redonnet et al. in reference [71]. The results are recalled below in Figs. A.28 and A.29. The grid is of 180×80 points respectively in the azimuthal and radial directions. The pulsating source ($\epsilon = 0.01, b = 2, T = 30$) is located at $(0, -\frac{3R}{2})$ where R is the cylinder radius $R = 30$. The flow is at rest. The pressure disturbance at time $t = 10T = 5000\Delta t$ is shown on Fig. A.28 and Fig. A.29 gives the diagram of the pressure directivity at radius $r = 2R$ (amplitude and phase). The computed solution is very close to the reference solution, obtained with a Boundary Element Method (Sysnoise code). The resolution of the scattered wave is about 30 points per wavelenght at the wall. No noticeable reflections were observed during the

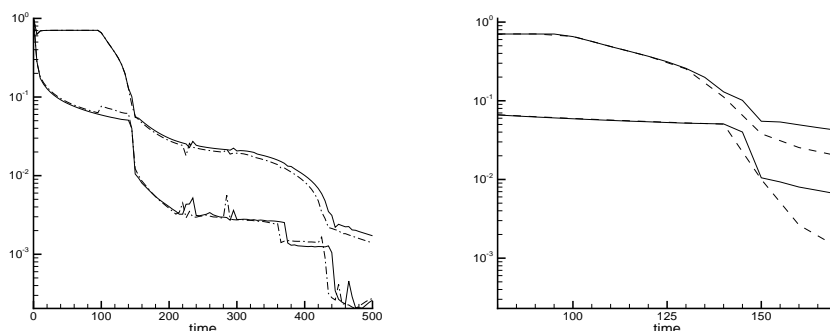


FIG. A.27: Time history of L^2 (top curves) and L^∞ (bottom curves) norms of pressure on the whole domain. Left : computed with the proposed exit zone (solid) and characteristic boundary condition (dashdot line) during $t \in [0, 500]$. Right : computed with the proposed exit zone (solid) and analytical solution (dashed line) in the time interval $[80, 170]$

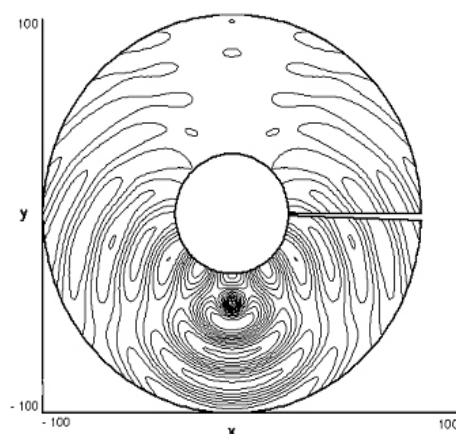


FIG. A.28: Pressure at $t=10T$, pulsating source and circular cylinder.

computation of around $10T$. The domain discontinuity on Fig. A.29 along the $y = 0, x > 0$ axis is purely graphical.

In Ref. [70], the same problem with a resolution of 6 points per wavelength was performed and revealed also in good agreement with the BEM reference solution.

Numerical simulations in the non-linear case

The last part of this paper deals with non-linear simulations of 1D and 2D acoustic wave propagation based on the full Euler equations in perturbation form (B.1). Such non-linear computations escape the theoretical approaches used above, and thus only numerical results will be shown.

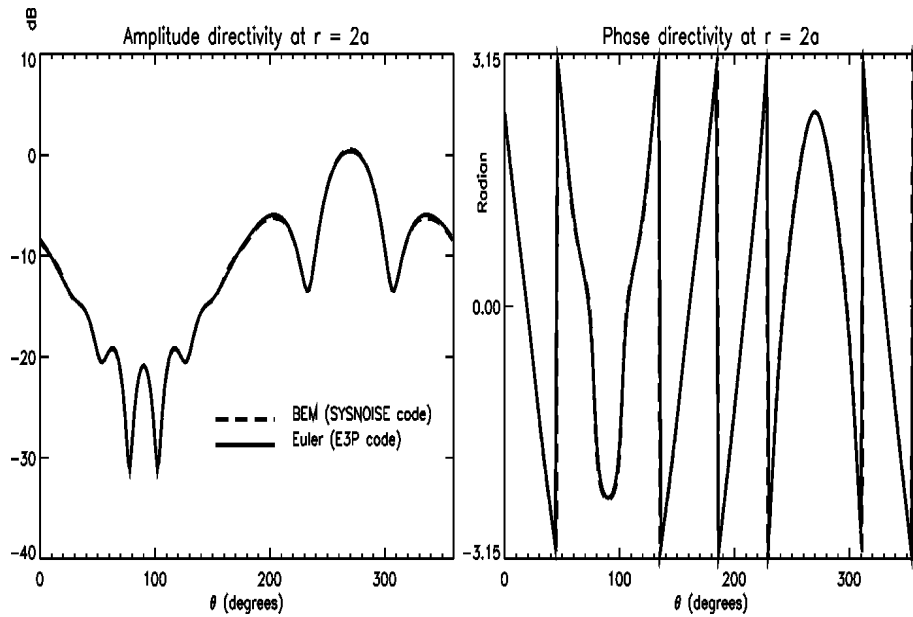


FIG. A.29: Amplitude (left) and phase (right) pressure directivity et $r = 2R$. Comparison with BEM.

Simulations presented in §5.2 and §5.4 have been repeated using the full non-linear model.

All numerical parameters (mesh size, b , size of computational domain, ...) have been kept unchanged.

Time histories of norms of the fluctuating pressure for 1D and 2D simulations with different values of ϵ are shown in Fig.A.30. The main difference with linear simulations is the existence of a saturation level which prevent the decay of the spurious modes down to the round-off precision. This level depends on the value of the initial disturbance, as could be expected from non-linear phenomena.

Further insight into this new phenomena can be gained looking at the solution for long-time integration, once the saturation level has been reached. Instantaneous 1D and 2D solutions are shown in Fig.A.31. In both cases, it is seen that the saturation level is not associated to reflected waves but to spurious stationary modes. These modes have local support with vanishing contributions near the boundaries. They are located at the same place as the initial disturbance, and can be interpreted as the projection of the initial solution onto eigenmodes of the non-linear problem. These stationary modes are generated at the initial time, and can be identified once the travelling waves have been damped enough, as in the linear case.

The possibility for these stationary modes to occur in the presence of a non-zero mean advecting field is checked by carrying out additional 1D simulation with a mean flow velocity chosen such that the mean flow Mach number is equal to 0.5. Time history of the norm of the fluctuating pressure field computed for several initial amplitudes are displayed in Fig.A.32. It is seen that advection by the mean flow precludes stationary spurious

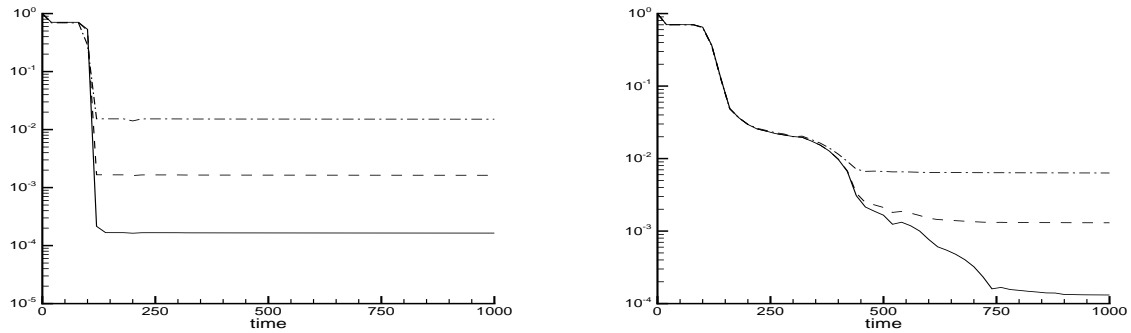


FIG. A.30: Non-linear computation of the evolution of 1D and 2D acoustic disturbances with mean flow at rest. Time history of the L^2 norm of the fluctuating pressure, referred to its initial value. Left : 1D simulation, right : 2D simulation. Solid line : $\epsilon = 0.1$, dashed line : $\epsilon = 0.01$, dotted line : $\epsilon = 0.001$

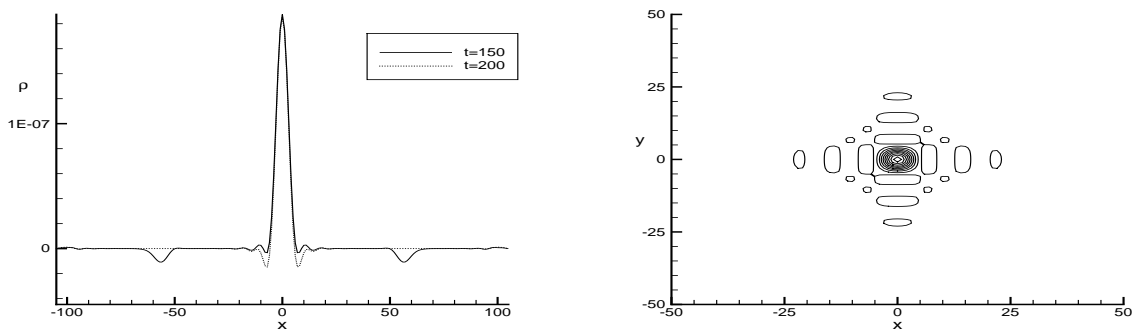


FIG. A.31: Non-linear computation of the evolution of 1D and 2D acoustic disturbances with mean flow at rest ($\epsilon = 0.001$). Instantaneous pressure iso-contours after long-time integration. Left : 1D simulation, right : 2D simulation

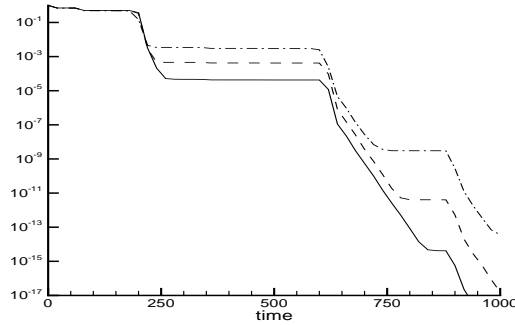


FIG. A.32: Non-linear computation of the evolution of 1D acoustic disturbance with $Ma = 0.5$ mean flow. Time history of the L^2 norm of the fluctuating pressure, referred to its initial value. Solid line : $\epsilon = 0.001$, dashed line : $\epsilon = 0.01$, dotted line : $\epsilon = 0.1$

modes, and a monotonic decay is recovered. A behaviour similar to those of the linear computations without mean advection is observed. Some transient plateaus are observed, which are associated to reflected travelling waves inside the domain. The level of the plateau depends on the initial amplitude of the perturbation.

Conclusions

A high-order finite-difference method for CAA has been proposed, analyzed and assessed on practical cases. The method is observed to be accurate and efficient, even on non-orthogonal curvilinear meshes.

Both theoretical analysis and numerical simulations show that only one combination of the filtering step with the general time-integration process leads to satisfactory results. It corresponds to filtering the solution at the end of each time step, which is equivalent to introduce a relaxation regularization. This procedure results in a stable and accurate procedure.

Exit boundary condition is based on the definition of homogeneous Dirichlet boundary conditions for the fluctuating field. Order of accuracy of both discrete first-order derivative operator and filter is decreased near the exit boundary, yielding the definition of a 5-point wide exit zone in front of the exit plane. This condition is very simple to implement and is observed to be very efficient on all the test cases considered in the present paper. It should be noted that a lower level of reflection can be computed for longer time integration, since the norm of the fluctuating field experiences a monotonic decay once the original disturbance has left the computational domain in all test cases. Theoretical analysis show that this very satisfactory behavior comes from the combination of the homogeneous Dirichlet condition and the filtering step.

The non-reflecting properties of the method are associated to the shape of the sustained discrete modes, which have compact supports located near the exit plane.

Numerical tests have also shown that, if no mean stream is present, the use of the non-linear model can yield the occurrence of spurious stationary modes, whose amplitude is governed by the initial condition.

Annexe B

Study of stabilization methods for computational aeroacoustics

- [36] R. Guéanff and M. Terracol.
accepté pour publication à *C. R. Acad. Sci. Paris*

Study of stabilization methods for computational aeroacoustics

Etude de méthodes de stabilisation en aéroacoustique numérique

Ronan Guéanff and Marc Terracol

CFD & Aeroacoustics Department, ONERA, France.

abstract

The use of high-order centered finite difference to solve the Euler equations commonly requires a stabilization procedure. The present work is a theoretical analysis of these stabilization methods that make the whole algorithm (i) still consistent with the continuous problem and (ii) able to run long time simulations. In the present study, a theoretical analysis of the three commonly used methods resorting to the application of high-order filters is performed. An extension to non-periodic boundary conditions [71, 29] is studied to avoid numerical reflection and numerical instabilities due to the use of specific boundary schemes. *To cite this article : R. Guéanff, M. Terracol, C. R. Mécanique 331 (2004).*

Résumé

La discrétisation des équations d'Euler par des différences finies centrées d'ordre élevé nécessite le recours à une procédure de stabilisation rendant l'algorithme discret (i) toujours consistant avec le problème continu et (ii) stable sur de longs temps de simulation. Cette étude propose une analyse théorique de trois méthodes de stabilisation recourant à l'application d'un filtre spatial d'ordre élevé sur la solution. Une extension aux conditions aux limites non-périodiques [71, 29] est étudiée pour éviter la réflexion numérique et les instabilités numériques éventuelles dues à l'utilisation de schémas spécifiques aux limites du domaine de calcul. *Pour citer cet article : R. Guéanff, M. Terracol, C. R. Mécanique 331 (2004).*

Keywords : computational aeroacoustics, stabilization method, non-reflecting boundary condition

Introduction

The finite-difference method is widely used to simulate acoustic wave propagation in flows. However, the definition of (i) stable and low-dispersive schemes and (ii) nonreflecting boundary conditions remains an open problem. An important point, which sustains the present work, is that accuracy and efficiency of the global method depend on those of each element (numerical scheme, time integration method, boundary condition), but also on the way they interact. Another point is that, if industrial use is aimed, the method must be as general and as simple as possible.

A major drawback is the possible appearance and growth of high-frequency spurious modes when performing numerical simulations with this method. A way to prevent the growth of these modes is to resort to an additional step or an additional term in the numerical scheme that relies on adding numerical dissipation in the scheme. The procedure must take into account the discretization parameters. Among the usual approaches, we will study the artificial selective damping method [80] -or penalization method- and the application of a linear filter at the end of the time step [29].

Discretization of the linearized Euler equations

The perturbation Euler equations are generally used as mathematical model to describe acoustic waves propagation. The global unsteady field $U = [\rho, \rho u, E]^T$ is splitted as the sum of a mean field $U_0 = [\rho_0, \rho_0 u_0, E_0]^T$, and a fluctuating field $U_p = U - U_0 = [\rho_p, (\rho u)_p, E_p]^T$, where ρ denotes density, u the velocity vector, and E the total energy. If we consider the hypothesis of some small perturbations around a steady mean flow $|U_p| = O(\epsilon)|U_0|$, $\epsilon \ll 1$, then we obtain the Linearized Euler Equations (LEE) *e.g.* $((\rho u)_p = \rho u - \rho_0 u_0 \approx \rho_0 u_p + \rho_p u_0)$.

Under the assumption of a mean field verifying the Euler equations, the evolution equations of the fluctuating field are reduced to :

$$\frac{\partial U_p}{\partial t} + \nabla \cdot (F(U_0 + U_p) - F(U_0)) = 0 \quad (\text{B.1})$$

where $F(U)$ is the convective flux vector :

$$F(U) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u \otimes u + p Id \\ (\rho E + p)u \end{pmatrix} \quad (\text{B.2})$$

with p the pressure and Id the identity matrix. The perfect gaz state-law makes it possible to close the system.

To obtain the Linearized Euler Equations, only terms in $O(1)$ and $O(\epsilon)$ are kept.

From a numerical point-of-view, the sixth-order accurate centered finite-difference scheme is one of the most commonly used schemes in Computational AeroAcoustics (CAA) to discretize the spatial derivatives present in F .

This schemes reads :

$$\frac{\partial f}{\partial x} \approx \frac{1}{\Delta x} \sum_{j=-3}^3 a_j f(x + j\Delta x) \quad (\text{B.3})$$

where the coefficients a_j are obtained by a high-order Taylor series expansion.

By applying the spatial Fourier transform, it comes :

$$ik \hat{f}(k) \approx \frac{1}{\Delta x} \sum_{j=-3}^3 a_j e^{jk\Delta x} \hat{f}(k) \quad (\text{B.4})$$

In order to perform a theoretical study of the use of these schemes, we will consider the simplified case of the linear advection case with periodicity boundary conditions. The semi-discrete mono-dimensional advection problem at velocity c verifies, for the Fourier mode k :

$$\frac{\partial \hat{u}_k}{\partial t} = -\frac{c}{\Delta x} i \cdot \left(\sum_{j=1}^3 a_j \sin(jk\Delta x) \right) \hat{u}_k = -\frac{c}{\Delta x} \bar{k}(k) \hat{u}_k \quad (\text{B.5})$$

The eigenvalue linked to this mode is purely imaginary for any k . The method is stable if and only if all the eigenvalues corresponding to the mode k from the grid lie in the stability domain of the temporal method. In this study, the explicit three-step third-order accurate Runge-Kutta scheme - with a rather large stability domain - will be considered.

For this algorithm, the location of the eigenvalues is the imaginary axis. The theoretical stability limit has thus to be taken on this axis and is equal to $\frac{\sqrt{3}}{\bar{k}(k_{max})}$ where k_{max} leads to the maximum value of $\bar{k}(k) = i \sum_{j=1}^3 a_j \sin(jk\Delta x)$, $k \in [0, \pi/\Delta x]$. The extension to waves propagation in two or three dimensions in a medium at rest is then straightforward. For instance, in two dimensions, we have : $\overline{k_{2D}}(k_x, k_y) = \pm ic_0 (\bar{k}(k_x)^2 + \bar{k}(k_y)^2)^{1/2}$ where c_0 denotes sound velocity. The complex number $\overline{k_{2D}}$ thus remains purely imaginary, and the limit of stability is given by the maximum of $|\overline{k_{2D}}|$.

High frequency modes are thus not damped and can lead to numerical instabilities. It is seen on Figure B.1 that the (O_y) axis is a limit of stability of the Runge-Kutta scheme.

Procédures de stabilisation

The following stabilization procedures both use a high-order spatial average operator \mathcal{F} that cancel two points per wavelenght modes [29, 52]. They differ by the location of the filter application in the numerical algorithm :

$$\begin{aligned} \text{Model 1 : } & \frac{\partial U_i}{\partial t} = -\mathcal{F} \left(\sum_{j=1,3} D_j \cdot F_j(U_i) \right) \\ \text{Model 2 : } & \frac{\partial U_i}{\partial t} = - \sum_{j=1,3} D_j \cdot F_j(U_i) - \chi(\mathcal{F} - Id)(U_i) \\ \text{Model 3 : } & \begin{cases} \frac{\partial U_i}{\partial t} = - \left(\sum_{j=1,3} D_j \cdot F_j(U_i) \right) \\ U^{n+1} = \mathcal{F}U^{n+1} \end{cases} \end{aligned}$$

with D_j , the discrete derivation operator in the j direction and F_j , the j^{th} column of the flux matrix.

We consider the particular framework of the monodimensional advection equation with speed c and periodic boundary conditions. The location of eigenvalues from both algorithms are to be compared with the one of the classical algorithm, that is the imaginary axis (Fig. B.1). This analysis is not possible for model 3 in which time discretization is involved.

The results in Fig.B.1 show that model 1 only allows to work at a slightly larger CFL, because the maximum of the \bar{k} function is lower than the one of the classical algorithm. However, this model does not damp high-frequency spurious modes.

In model 2, a parameter χ is introduced that must be fixed as a function of the space-time discretization. When $\chi = 0$, the model is equivalent to the basic model. For a stable time integration, this parameter must be bounded. A nonzero real part appears in the eigenvalues obtained with this model. The stability of this procedure also depends on the stability limit of the temporal method on the real axis that is approximately (-2.5) Fig.B.1. If we denote $\chi = \frac{\alpha}{\Delta x}$, then one can write $0 < \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x} = \chi \Delta t < 2.5$, or $\chi < \frac{2.5}{\Delta t}$. For a convenient value of χ , this method does thus damp high-frequency spurious modes (Fig.B.1) .

The analysis of the amplification factor of the third-order Runge-Kutta method allows to classify the three models. In Fig. B.1, it is clear that model 2 with $\chi = \frac{1}{\Delta t}$ is stable while the value $\chi = \frac{3.2}{\Delta t}$ leads to an unstable numerical scheme. Model 3, where the filtering is applied at the end of the iteration, does not exhibit this drawback (Fig.B.1). With this model, the amplification factor of the numerical scheme is zero for the mode with two points per wavelenght and vanishes for high-frequencies. Model 3 is retained for the following tests.

Extension to nonreflecting boundary conditions

The Fourier analysis is no longer valid for boundary conditions modelling waves leaving the computational domain. One can thus resort to matrix analysis [38]. This method analyses the effect of both spatial numerical scheme and boundary conditions thanks to the construction of a closed system of linear differential equations. The hypothesis of an exact temporal integration makes the reconstruction of the solution possible via the eigenvalues and eigenvectors of the system.

The exit boundary condition studied here consists in the decrease of the spatial operators order -derivation and filtering- in a sponge zone adjacent to the boundary [71]. The

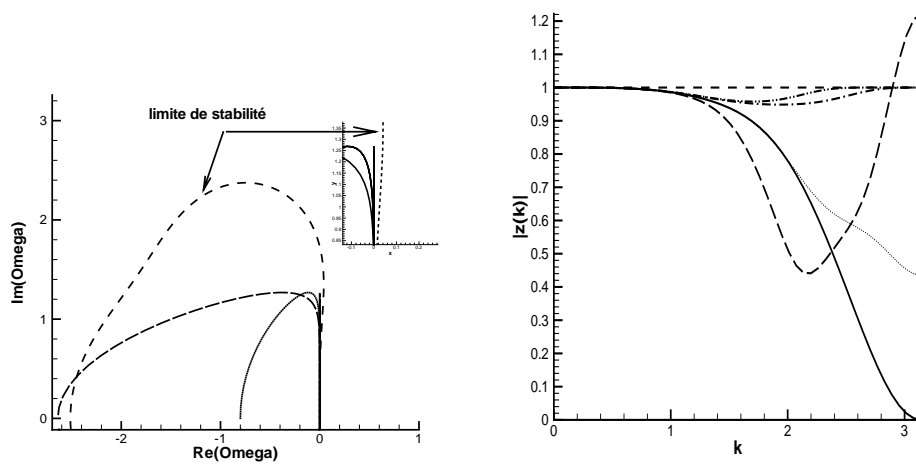


FIG. B.1: Left, location of the eigenvalues of the Fourier modes : RK3 stability limit (dashed), $\bar{\Omega}(k) = c\Delta t\bar{k}(k)$ with $CFL = 0.8$ model 1 (solid) model 2 $\chi = \frac{1}{\Delta t}$ (dotted) $\chi = \frac{3.2}{\Delta t}$ (long dash). Right, amplification factor of the model : stability limit (dashed) basic model (---), model 1 (-.-.-), model 2 $\chi = \frac{1}{\Delta t}$ (dotted), $\chi = \frac{3.2}{\Delta t}$ (long dash), model 3 (solid). A gauche, localisation des valeurs propres des modes de Fourier : limite de stabilité du schéma RK3 (trait discontinu), $\bar{\Omega}(k) = c\Delta t\bar{k}(k)$ avec $CFL = 0,8$ modél 1 (trait plein), modèle 2 $\chi = \frac{1}{\Delta t}$ (pointillés), $\chi = \frac{3.2}{\Delta t}$ (trait discontinu long). A droite, facteur d'amplification du modèle : limite de stabilité (trait discontinu), schéma de base (---), modèle 3 (trait plein).

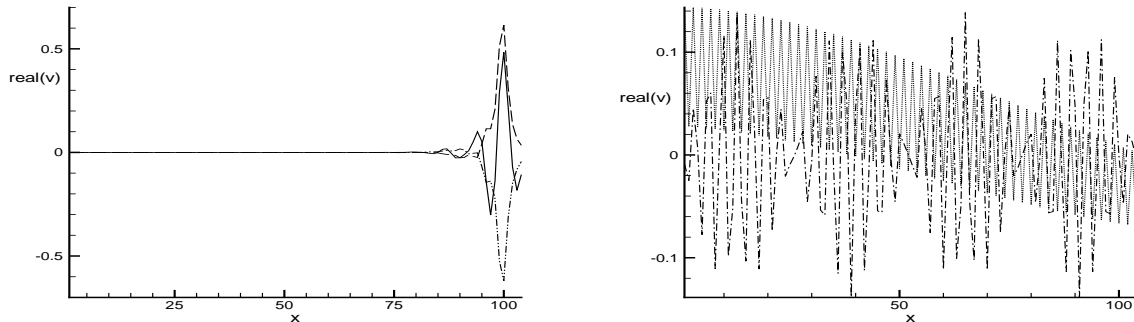


FIG. B.2: Matrix analysis of model 3 with exit waves boundary conditions. Examples of some eigenmodes with a real part corresponding to sustained modes (left), $Re(\lambda_i) \approx 0$ and fastly decaying modes $Re(\lambda_i) \ll 0$ (right). Analyse matricielle du modèle 3 avec des conditions aux limites de sortie des ondes. Exemples de modes propres avec une partie réelle correspondant à un mode soutenu (gauche), $Re(\lambda_i) \approx 0$, et modes à décroissance rapide $Re(\lambda_i) \ll 0$ (droite)

use of noncentered operators, that can lead to numerical instabilities, is thus avoided.

The order of the spatial filter decrease from ten to two in the five ghost points - introducing a strong dissipation for outgoing waves- and the order of the differentiation operator from six to two -leading to a strong dispersion for outgoing waves-. At the last ghost point, an homogeneous Dirichlet boundary condition is applied. These five ghost points constitute a layer which absorbs the energy. The following remarks relative to the analysis of the eigenvalues and the eigenvectors of the system can be made. The location of the eigenvalues (not presented here) proves that the model is stable. Two types of eigenvectors appear (Fig.B.2) : (i) spurious eigenvectors with high frequencies contributions corresponding to eigenvalues with a strongly negative real part -fastly decaying in time- and (ii) eigenvectors with a zero contribution inside of the domain corresponding to eigenvalues with a real part close to zero that make the waves leave the computational domain. As a consequence, the method reveals to be stable and nonreflecting.

Conclusion

The numerical analysis of stabilization methods for central finite difference schemes performed in this work has shown its major effect on the global numerical method. A bound for the relaxation parameter of the penalization method was derived corresponding to a new stability limit characteristic of the time integration method. The method which consists in the application of a linear filter at the end of the time step appears to be the most appropriate for the stabilization, with a stability limit driven only by the CFL number. An extension of this method for non-periodic cases has been studied. The method reveals to be stable and nonreflecting. Additional simulations, not presented here for sake

of brevity, were successfully performed [36], simulating the exit of monodimensional and bidimensional acoustic waves .

Acknowledgement

The authors would like to acknowledge Professor R. Lewandowski, Professor P. Sagaut and Doctor E. Manoha for useful discussions.

Bibliographie

- [1] N.A. Adams and S. Stolz. A subgrid-scale deconvolution approach for shock capturing. *Journal of Computational Physics*, 178 :391–426, 2002.
- [2] H.L. Atkins and P. Lockard. A high-order method using unstructured grids for the aeroacoustic analysis of realistic aircraft configuration. *AIAA paper 99-1945*, 1999.
- [3] C. Bailly, P. Lafon, and S. Candel. A stochastic approach to compute noise generation and radiation of free turbulent flows. *AIAA paper 95-092*, 1995.
- [4] M. Bauer. Computation of trailing edge noise with synthetic turbulence. *Colloquium EUROMECH 449*, 9-12 décembre 2003.
- [5] J. Biancherin. *Simulation aéroacoustique d'un jet chaud subsonique*. PhD thesis, ONERA, 2003.
- [6] M. Billson. *Computational techniques for jet noise prediction*. PhD thesis, Chalmers University of Technology, 2002.
- [7] M. Billson, L.E. Eriksson, and L. Davidson. Acoustic source terms for the linear Euler equations on conservative form. *AIAA 2002-2582*, 2002.
- [8] M. Billson, L.E. Eriksson, and L. Davidson. Modelling of synthetic anisotropic turbulence and its sound emission. *AIAA 2004-2857*, 2004.
- [9] B. Blacodon and G. Elias. Level estimation of extended acoustic sources using an array of microphones. *AIAA paper 2003-3199*, 2003.
- [10] W.K. Blake. *Mechanics of flow-induced sound and vibration*. Academic Press, 1986.
- [11] C. Bogey. *Calcul direct du bruit aérodynamique et validation de modèles acoustiques hybrides*. PhD thesis, Ecole Centrale de Lyon, 2000.
- [12] E. Bouchet. *Etude du bruit d'interaction pale/sillage d'un rotor principal d'hélicoptère*. PhD thesis, ONERA, 2002.
- [13] T.F. Brooks and T.H. Hodgson. Trailing edge noise prediction using measured surface pressure. *Journal of Sound and Vibration*, 78(1) :69–117, 1981.
- [14] A. Burbeau. *Méthodes de Galerkin discontinu d'ordre élevé pour la simulation instationnaire en maillage non structuré*. PhD thesis, ONERA, 2000.
- [15] M.H. Carpenter, D. Gottlieb, S. Abarbanel, and W. Don. The theoretical accuracy of Runge-Kutta time discretizations for the initial boundary value problem : a careful study of the boundary error. *SIAM Journal of Scientific Computing*, 16 :1241, 1995.

- [16] M. Choudhari, M.R. Khorrami, D.P. Lockard, and H.L. Atkins. Slat cove noise modelling : a posteriori analysis of unsteady RANS simulations. *AIAA paper 2002-2468*, 2002.
- [17] B.T. Chu and L.S.G. Kovasznay. Non-linear interactions in a viscous heat-conducting compressible gas. *Journal of Fluid Mechanics*, 3(5) :494–514, 1958.
- [18] C. Dahan, G. Elias, J. Maulard, and M. Perulli. Coherent structures in the mixing zone of a subsonic hot free jet. *Journal of Sound and Vibration*, 59 :313–333, 1978.
- [19] R. Davy, F. Moens, and H. Remy. Aeroacoustic behaviour of a 1/11 scale Airbus model in the open anechoic wind tunnel CEPRA 19. *AIAA paper 2002-2412*, 2002.
- [20] J.W. Delfs. An overlapped grid technique for high resolution CAA schemes for complex geometries. *AIAA paper 2001-2199*, 2001.
- [21] G. Desquesnes, M. Terracol, E. Manoha, and P. Sagaut. An overlapping grid method for CFD/CAA coupling : numerical and theoretical aspects. *soumis à AIAA/CEAS 2005*.
- [22] G. Dhatt and G. Touzot. *Une présentation de la méthode des éléments finis*. Collection Université de Compiègne, 1981.
- [23] R. Ewert, M. Meinke, and W. Schroder. On the computation of the aeroacoustic sound generated by the turbulent flow behind a blunt trailing edge. *Computational Fluid Dynamics Journal*, 9(1), 2000.
- [24] J.E. Ffwoes-Williams and L.H. Hall. Aerodynamic sound generation by turbulent flow in the vicinity of a scattering half-plane. *Journal of Fluid Mechanics*, 40 :657–670, 1970.
- [25] J.E. Ffwoes-Williams and D.L. Hawkings. Sound generated by turbulence and surfaces in arbitrary motion. *Philosophical Transactions of the Royal Society*, pages 321–342, 1969.
- [26] J.B. Freund, S.K. Lele, and P. Moin. Matching of near/far-field equation sets for direct computations of aerodynamic sound. *AIAA paper 93-4326*, 1993.
- [27] J.B. Freund, S.K. Lele, and P. Moin. Direct simulation of a mach 1.92 jet and its sound field. *AIAA paper 98-2291*, 1998.
- [28] D.V. Gaitonde, J.S. Shang, and J.L. Young. Further development of a Navier-Stokes solution procedure based on higher-order formulas. *AIAA-paper 99-0557*, 1999.
- [29] D.V. Gaitonde, J.S. Shang, and J.L. Young. Practical aspects of a higher-order numerical scheme for wave propagation phenomena. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 45 :1849–1869, 1999.
- [30] N. Gavelle, I. Mary, G. Elias, and P. Sagaut. Large eddy simulation of a subsonic hot jet at high Reynolds numbers. *AIAA paper 2003-3556*, 2003.
- [31] M.B. Giles. Non reflecting boundary conditions for Euler equation calculations. *AIAA Journal*, 28(12) :2050–2058, 1990.

-
- [32] X. Gloerflet. *Bruit rayonné par un écoulement affleurant une cavité : simulation aéroacoustique directe et application de méthodes intégrales*. PhD thesis, Ecole Centrale de Lyon, 2001.
- [33] M.E. Goldstein. *Aeroacoustics*. McGraw-Hill, 1976.
- [34] R. Guénanff, E. Manoha, M. Terracol, and S. Redonnet. Problem 1 : Aeolian tone generation from two cylinders, category 5 : sound generation from viscous problems. 2003.
- [35] R. Guénanff, P. Sagaut, E. Manoha, and R. Lewandowski. Analysis of a high-order filtered method for computational aeroacoustics. *soumis à Int. Jour. for Num. Methods in Fluids*.
- [36] R. Guénanff and Terracol. Study of stabilization methods for computational aeroacoustics. *accepté pour publication à Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*.
- [37] R. Guénanff, M. Terracol, E. Manoha, P. Sagaut, and R. Lewandowski. Theoretical and numerical aspects of a multidomain high-order method for computational aeroacoustics. *AIAA paper 2003-3117*, 2003.
- [38] C. Hirsch. *Numerical computation of internal and external flows*, volume 1& 2. John Wiley & Sons, 1989 & 1990.
- [39] R. Hixon, S.H. Shih, and R.R. Mankbadi. Evaluation of boundary conditions for computational aeroacoustics. *AIAA Journal*, 33(11) :2006, 1995.
- [40] M.S. Howe. The generation of sound by aerodynamic sources in an homogeneous steady flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 67(3) :597–610, 1975.
- [41] F.Q. Hu. On absorbing boundary conditions for linearized Euler equations by a perfectly matched layer. *Journal of Computational Physics*, 129 :201–219, 1996.
- [42] F.Q. Hu, M.Y. Hussaini, and J.L. Manthey. Low-dissipation and low-dispersion Runge-Kutta schemes for computational aeroacoustics. *Journal of Computational Physics*, 124 :177–191, 1996.
- [43] S. Ben Khelil. Large eddy simulation of the flow around a slat with a blunt trailing edge. *ICCFD3-2004*, 2004.
- [44] G.R. Kirchhoff. Towards a theory of light rays. *Annalen der Physik und Chemie*, 18 :663–695, 1883.
- [45] E.K. Koutsavdis, G.A. Blaisdell, and A.S. Lyrintzis. On the use of compact schemes with spatial filtering in computational aeroacoustics. *AIAA paper 99-0360*, 1999.
- [46] L.S.G. Kovaszny. Turbulence in supersonic flow. *Journal of the Aeronautical Science*, 20(10) :657–682, 1953.
- [47] K.A. Kurbatskii and C.K.W. Tam. Cartesian boundary treatment of curved walls for high-order computational aeroacoustics finite difference schemes. *AIAA paper 96-0275*, 1996.
- [48] E. Labourasse. *Reconstruction des fluctuations turbulentes par une approche hybride RANS/SGE*. PhD thesis, ONERA, 2002.

- [49] L. Larchevêque. *Simulation des grandes échelles de l'écoulement au-dessus d'une cavité*. PhD thesis, ONERA, 2003.
- [50] W.J. Layton and R. Lewandowski. Analysis of an eddy viscosity model for large eddy simulation of turbulent flows. *Journal of Mathematical Fluid Mechanics*, 4 :1–26, 2002.
- [51] E. Leclerc. *Contrôle actif pour les écoulements instationnaires turbulents*. PhD thesis, ONERA, 2003.
- [52] S.K. Lele. Compact finite-difference schemes with spectral-like resolution. *Journal of Computational Physics*, 103 :16–42, 1993.
- [53] S.K. Lele. Computational aeroacoustics : a review. *AIAA paper 97-0018*, 1997.
- [54] M.J. Lighthill. On sound generated aerodynamically I. General theory. In *Proceedings of the royal society of London*, volume A211,1107, pages 564–587, 1952.
- [55] G.M. Lilley. The generation and radiation of supersonic jet noise. In Technical Report AFAPL-TR-72-53 Air Force Aero Propulsion Laboratory, editor, *Vol. IV - Theory of turbulence generated jet noise, noise radiation from upstream sources, and combustion noise. Part II : Generation of sound in a mixing region*, volume 4, 1972.
- [56] E. Longatte. *Modélisation de la propagation et de la génération du bruit au sein des écoulements turbulents internes*. PhD thesis, Ecole Centrale Paris, 1998.
- [57] P.S. Lowery and W.C. Reynolds. Numerical simulation of a spatially-developing, forced, plane mixing layer. *Report of the Stanford University (TF 26)*, 1986.
- [58] E. Manoha, C. Herrero, P. Sagaut, and S. Redonnet. Numerical prediction of airfoil aerodynamic noise. *AIAA paper 2002-2573*, 2002.
- [59] E. Manoha, S. Redonnet, R. Guénanff, and M. Terracol. Acoustic scattering from complex geometries. *AIAA paper 2004-2938*, 2004.
- [60] E. Manoha, B. Troff, and P. Sagaut. Trailing edge noise prediction using large eddy simulation and acoustic analogy. *AIAA Journal*, 38(4) :575–583, 2000.
- [61] J. Matthew, R. Lechner, H. Foyi, J. Sesterhenn, and R. Friedrich. An explicit filtering method for large eddy simulation of compressible flows. *Physics of Fluids*, 15 :2279, 2003.
- [62] M. Meinke, W. Schroder, E. krause, and T. Rister. A comparison of second- and sixth-order methods for large eddy simulations. *Computers and Fluids*, 31 :695–718, 2002.
- [63] B.E. Mitchell, S.K. Lele, and P. Moin. Direct computation of Mach wave radiation in an axisymmetric supersonic jet. *AIAA Journal 98-2291*, 35 :1574–1580, 1998.
- [64] P. Moin and J. Kim. Tackling turbulence with supercomputers. *Scient. Amer.*, 276(1) : 62, 1997.
- [65] W.R. Morgans. The Kirchhoff formula extended to a moving surface. *Philosophical magazine*, 9 :141–161, 1883.
- [66] Y. Ozyoruk and L.N. Long. A time-domain implementation of surface acoustic impedance condition with and without flow. *AIAA paper 96-1663*, 1996.

-
- [67] O.M. Phillips. On the generation of sound by supersonic turbulent shear layers. *Journal of Fluid Mechanics*, 9(1) :1–28, 1960.
- [68] P. Quéméré. *Une méthode multidomaine/multirésolution avec application au couplage LES/LES et RANS/LES*. PhD thesis, ONERA, 2001.
- [69] B. Raverdy. *Simulation des grandes échelles de l'écoulement se développant dans un étage complet de turbine basse pression*. PhD thesis, ONERA, 2004.
- [70] S. Redonnet. *Simulation de la propagation acoustique en présence d'écoulements quelconques et de structures solides par résolution numérique de équations d'Euler*. PhD thesis, ONERA, 2001.
- [71] S. Redonnet, E. Manoha, and P. Sagaut. Numerical simulation of propagation of small perturbations interacting with flows and solid bodies. *AIAA paper 2001-2223*, 2001.
- [72] P. Sagaut. *Large eddy simulations for incompressible flows- An introduction*. Springer-Verlag, 2001.
- [73] P. Sagaut, E. Labourasse, P. Quéméré, and M. Terracol. Multiscale approaches for unsteady simulation of turbulent flows. *Int. J. Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 1 :285–298, 2000.
- [74] C. Seror. *Simulation des grandes échelles pour la prédiction du bruit des écoulements turbulents*. PhD thesis, ONERA, 2000.
- [75] S. Sherer. *Investigation of high-order and optimized interpolation methods with implementation in a high-order overset grid CFD code*. PhD thesis, Ohio state university, 2002.
- [76] S.E. Sherer and M.R. Visbal. Computational study of acoustic scattering from multiple bodies using a high-order overset grid approach. *AIAA paper 2003-3203*, 2003.
- [77] S.H. Shih, D.R. Hixon, and R.R. Mankbadi. A zonal approach for prediction of jet noise. *AIAA paper 95-144*, 1995.
- [78] B.A. Singer, D.B. Lockard, and K.S. Brentner. Computational aeroacoustic analysis of slat trailing-edge flow. *AIAA Journal*, 38 :1558–1564, 2000.
- [79] S. Stolz, N.A. Adams, and L. Kleiser. An approximate deconvolution model applied for large eddy simulation with applications to incompressible wall-bounded flows. *Physics of Fluids*, 13 :997, 2001.
- [80] C.K.W. Tam. Computational aeroacoustics : issues and methods. *AIAA Journal*, 33(10) :1748, 1995.
- [81] C.K.W. Tam. Advances in numerical boundary conditions for computational aeroacoustics. *AIAA paper 97-1774*, 1997.
- [82] C.K.W. Tam and Z. Dong. Radiation and outflow boundary conditions for direct computation of acoustic and flow disturbances in a nonuniform mean flow. *Journal of Computational Physics*, 4(2) :175–201, 1996.
- [83] C.K.W. Tam and K.A. Kurbatskii. An optimized extrapolation and interpolation method for computational aeroacoustics. *AIAA paper 2000-0218*, 2000.

- [84] C.K.W. Tam and K.A. Kurbatskii C.K.W. Tam. Multi-size-mesh multi-time-step dispersion relation preserving scheme for multiple scales aeroacoustics problems. *AIAA paper 2002-0224*, 2002.
- [85] C.K.W. Tam and J. Webb. Dispersion relation preserving finite difference schemes for computational aeroacoustics. *AIAA Journal 96-1663*, 107 :262–281, 1993.
- [86] M. Terracol. *A zonal LES approach for acoustic noise sources prediction*. 2004.
- [87] M. Terracol, E. Labourasse, E. Manoha, and P. Sagaut. Simulation of the 3D unsteady flow in a slat cove for noise prediction. *AIAA paper 2003-31110*, 2003.
- [88] K.W. Thomson. Time dependent boundary conditions for hyperbolic systems. *Journal of Computational Physics*, 89 :439–461, 1990.
- [89] G. Vial. Communications privées.
- [90] R. Vichnevetsky and J.B. Bowles. *Fourier analysis of numerical approximations of hyperbolic equations*. Society of industrial and applied mathematics, 1982.
- [91] M.R. Visbal and D.V. Gaitonde. Computation of aeroacoustic fields on general geometries using compact differencing and filtering schemes. *AIAA paper 99-3706*, 1999.
- [92] M.R. Visbal and D.V. Gaitonde. High-order accurate methods for complex unsteady subsonic flows. *AIAA Journal*, 37(10) :1231–1239, 1999.
- [93] J. Yin and J. Delfs. Sound generation from gust-airfoil interaction using CAA-chimera method. *AIAA paper 2001-2136*, 2001.
- [94] D.W. Zingg. Aspects of linear stability analysis for high-order finite-difference methods. *AIAA 97-1939*, 1997.

COUPLAGE INSTATIONNAIRE NAVIER-STOKES/EULER POUR LA GÉNÉRATION ET LE RAYONNEMENT DES SOURCES DE BRUIT AÉRODYNAMIQUE

RÉSUMÉ :

La simulation numérique de la prévision du bruit aérodynamique par la résolution des équations de Navier-Stokes demeure hors de portée des supercalculateurs pour les configurations industrielles. Le calcul aérodynamique local doit être relayé par une méthode de propagation acoustique dans une zone où l'écoulement est inhomogène. La résolution numérique des équations d'Euler en perturbation, discrétisée par une méthode des différences finies d'ordre élevé stabilisée, autorise la propagation acoustique dans cette zone. Plusieurs stabilisations sont étudiés. Une interface curviligne d'ordre élevé, basée sur une interpolation de Lagrange dans un élément de référence, est développée afin de faciliter le couplage Simulation des Grandes Echelles/Euler. Cette méthode numérique est appliquée à l'étude du rayonnement de sources de bruit de la cavité de bec d'une aile hypersustentée, en configuration d'approche, et, à la prévision du bruit rayonné par l'écoulement turbulent autour d'une plaque plane.

MOTS-CLÉS : Aéroacoustique numérique, bruit aérodynamique, méthode de stabilisation, aile hypersustentée, bruit de turbulence, sources de bruit.

NAVIER-STOKES/EULER INSTATIONNARY COUPLING FOR THE GENERATION AND RADIATION OF AERODYNAMIC NOISE SOURCES

ABSTRACT :

The numerical simulation of the prediction of the aerodynamic noise by the resolution of the Navier-Stokes equations is still out of reach of the supercomputers for the industrial configurations. The local aerodynamic computation must be coupled to an acoustic propagation method in a zone where the mean flow is inhomogeneous. The numerical resolution of the Euler equations in a perturbation form, discretized by a filtered high-order finite difference method, allows to simulate the acoustic propagation in such zones. Several stabilization methods are studied. A high-order curvilinear interface, based on a Lagrange interpolation in a reference element, is developed to facilitate the Large-Eddy Simulation/Euler coupling. This numerical method is applied to the study of the radiation from noise sources in the slat cove of a high-lift wing in approach configuration, and, to the prediction of the radiated noise from the turbulent flow around a flat plate.

KEYWORDS : Computational aeroacoustics, aerodynamic noise, stabilization method, high-lift wing, noise from turbulent flow, noise sources.

Office National d'Études et de Recherches Aéropatiales
BP72 - 29 avenue de la Division Leclerc
92322 CHATILLON CEDEX
Tél. : +33 (0)1 46 73 40 40 - Fax : +33 (0)1 46 73 41 41
<http://www.onera.fr/>