



HAL
open science

Problèmes de linéarisation dans des familles de germes analytiques.

Dominique Vieugué

► **To cite this version:**

Dominique Vieugué. Problèmes de linéarisation dans des familles de germes analytiques.. Mathématiques [math]. Université d'Orléans, 2005. Français. NNT : . tel-00069473

HAL Id: tel-00069473

<https://theses.hal.science/tel-00069473v1>

Submitted on 17 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE
PRÉSENTÉE À L'UNIVERSITÉ D'ORLÉANS
POUR OBTENIR LE GRADE DE
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ D'ORLÉANS

par

Dominique VIEUGUE

Discipline : **Mathématiques**

Problèmes de linéarisation
dans des familles
de germes analytiques

Soutenue le: **15 septembre 2005**

MEMBRES DU JURY:

- | | |
|-------------------------|--|
| -Todor GRAMCHEV | Rapporteur / Professeur, <i>Université de Cagliari</i> |
| -Peter HAISSINSKY | Examineur / Maître de conférence, <i>Université de Provence</i> |
| -Ricardo PEREZ-MARCO | Examineur / Directeur de recherche, <i>Université Paris 13</i> |
| -Jean-Pierre SCHREIBER | Examineur / Professeur, <i>Université d'Orléans</i> |
| -Jean-Christophe YOCCOZ | Président / Professeur, <i>Collège de France</i> |
| -Michel ZINSMEISTER | Directeur de thèse / Professeur, <i>Université d'Orléans</i> |

Table des matières

1	Introduction	5
1.1	Les problèmes de linéarisation	5
2	Linéarisation formelle	11
2.1	Notations	11
2.2	Linéarisation et linéarisation formelle.	12
2.3	Linéarisation formelle et linéarisation	23
3	Diamètre transfini	37
3.1	Définition du diamètre transfini d'un compact	37
3.2	Diamètre transfini d'un ensemble quelconque	64
4	Généralisation du théorème de Perez-Marco	81
4.1	Théorème de Perez-Marco généralisé	81
4.2	Généralisation du théorème d'Il'Yashenko	88
4.3	Information diophantienne dans le théorème de Perez-Marco	92
4.4	Linéarisation des polynômes de degré 3	103
5	Compléments	113
5.1	Généralisation du théorème de Perez-Marco aux fractions rationnelles en t	113
5.2	Un exemple de cas résonant	121

Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer ma profonde reconnaissance à mon directeur de thèse Michel Zinsmeister qui, tout au long de cette thèse, m'a apporté de précieux conseils et a su guider mes pas avec patience et bienveillance, tout en me laissant une grande liberté dans mes directions de recherche.

Je tiens aussi à exprimer toute ma gratitude à Todor Gramchev et Juan Rivera-Letelier pour avoir accepté d'être rapporteurs de mes travaux.

Je remercie également Todor Gramchev, Peter Haissinsky, Ricardo Perez-Marco, Jean-Pierre Schreiber et Jean-Christophe Yoccoz pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail et l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant d'être membres de mon jury de thèse.

Le laboratoire et le département de mathématiques de l'Université d'Orléans m'ont accueilli dans une ambiance très propice au travail. Je tiens à en remercier tous les membres, notamment leurs responsables, Jean-Philippe Anker et Yves Denizeau, ainsi que les secrétaires Virginie Foucault, Anne-Sophie Jaïs, Anne Liger et Christelle Morillon qui y contribuent beaucoup.

Mes remerciements vont également à tous les collègues thésards, et notamment Barbara Schapira, Bruno Demange, Hermine Biermé et Olivier Prot avec qui nous avons de très longues et très intéressantes discussions concernant les mathématiques, la recherche, l'enseignement, ...

Enfin, je remercie mes parents pour le soutien constant et précieux qu'ils m'ont apporté.

Chapitre 1

Introduction

1.1 Les problèmes de linéarisation

On va s'intéresser à la linéarisation d'une fonction holomorphe au voisinage d'un point fixe. Ces problèmes de linéarisation trouvent leur origine en mécanique céleste, dans l'étude du mouvement de n corps soumis à la gravitation newtonienne. Par exemple, dans le cas d'un système planétaire où l'un des corps (le soleil) est beaucoup plus lourd que les autres, le problème essentiel est de savoir si le système est stable. Après simplification de la situation (trajectoires dans un plan assimilé au plan complexe ayant pour origine le soleil, ...) et discrétisation du temps, la position d'une planète à l'instant n , notée z_n est donnée par : z_0 et $z_{n+1} = f(z_n)$ où z_0 désigne la position initiale et f est une fonction holomorphe telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) = \lambda z$ avec λ nombre complexe de module 1. Au voisinage de 0, $f(z)$ ressemble à λz . La question est alors de savoir, si z_n ressemble à $\lambda^n z_0$.

Pour répondre à cette question, il convient de se demander sous quelles conditions une fonction f analytique ayant 0 comme point fixe et λ comme multiplicateur¹, est (ou n'est pas) analytiquement conjuguée au voisinage de l'origine à l'application $z \mapsto \lambda z$, c'est-à-dire sous quelles conditions il existe une fonction φ biholomorphe fixant l'origine et vérifiant, sur un voisinage de 0, $f(\varphi(z)) = \varphi(\lambda z)$. Lorsqu'une telle fonction φ existe, on dit que f est linéarisable et la fonction φ , que l'on peut normaliser en imposant $\varphi'(0) = 1$, est appelée une linéarisante de f .

Fixons $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ et $f(z) = \lambda z + \sum_{k=2}^{+\infty} a_k z^k$.

Deux problèmes se posent. L'un est algébrique : sous quelles conditions a-t-on existence d'une linéarisante formelle, c'est-à-dire d'une série formelle vérifiant l'équation $f(\varphi(z)) = \varphi(\lambda z)$ entre séries formelles. L'autre est analytique : cette série formelle, lorsqu'elle existe, est-elle de rayon de convergence strictement positif?

1. C'est-à-dire une fonction analytique f définie sur un voisinage de l'origine dans \mathbb{C} de la forme $f(z) = \lambda z + \sum_{k=2}^{+\infty} a_k z^k$.

La réponse à la première question est connue depuis longtemps. En notant $\mathcal{F}_\lambda = \{f(z) = \lambda z + \sum_{n=2}^{+\infty} a_n z^n / f \text{ est de rayon strictement positif}\}$, on a

Proposition 1.1.1. *Pour tout $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ et tout $f \in \mathcal{F}_\lambda$.*

Si λ n'est pas racine de l'unité, alors f possède une unique linéarisante formelle $\varphi(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k z^k$ et les b_k sont déterminés par :

$$b_1 = 1 \text{ et } b_n = \frac{1}{\lambda^n - \lambda} \sum_{2 \leq r \leq n} a_r \sum_{\substack{(j_1, j_2, \dots, j_r) \in (\mathbb{N}^*)^r \\ \sum_{1 \leq k \leq r} j_k = n}} \prod_{1 \leq k \leq r} b_{j_k} \quad (1.1)$$

Remarque 1.1.2. *Le terme qui risque d'entraîner une croissance très rapide des $|b_n|$ est le terme $\frac{1}{|\lambda^n - \lambda|}$ qui risque d'être très grand à cause d'un dénominateur parfois très petit. De là provient la terminologie "problèmes de petits diviseurs".*

Remarque 1.1.3. *Nous verrons au prochain chapitre que si $\lambda^q = 1$ avec $q \in \mathbb{N}^*$ et si f est un polynôme de degré $d \geq 2$, alors f n'est pas formellement linéarisable. Ceci indique que les racines de l'unité constituent une véritable obstruction à la linéarisation.*

Dans le cas non-racine de l'unité, on a l'existence d'une unique linéarisante formelle et donc, pour savoir si f est ou non linéarisable, il faut déterminer si le rayon de convergence de $\varphi(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k z^k$ est strictement positif. Pour cela, on peut essayer de majorer ou de minorer les $|b_k|$.

Pour certains λ , la solution est connue depuis longtemps.

Théorème 1.1.4. *G. Koenigs (1884)*

Soit $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ et $f \in \mathcal{F}_\lambda$. Si $|\lambda| \neq 1$, alors f est linéarisable.

Jusqu'à la fin de ce premier chapitre, nous supposons que λ n'est pas une racine de l'unité. Les premiers résultats sur la linéarisation dans le cas où $|\lambda| = 1$ furent obtenus en 1938 par Cremer (voir [Cre38]) et furent négatifs.

Théorème 1.1.5. *Si $P \in \mathcal{F}_\lambda$ est un polynôme de degré $d \geq 2$ et si*

$\limsup \frac{\ln \ln q_{n+1}}{q_n} > \ln d$, alors P possède des petits cycles, c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $z \in B(0, \varepsilon) \setminus \{0\}$ et $n \in \mathbb{N}^$ tels que $P^{\circ n}(z) = z$. Et ceci constitue une véritable obstruction à la linéarisation².*

Cremer a aussi prouvé que, pour presque tous les réels θ au sens de Baire, on peut trouver un $f \in \mathcal{F}_\lambda$ non linéarisable. Plus précisément,

2. Lorsque la linéarisation est possible, sur un petit voisinage de 0, il n'y a aucun cycle, car la rotation d'angle $2\pi\theta$ ne possède aucun cycle distinct de 0 lorsque θ est irrationnel.

Théorème 1.1.6. *Posons $W = \{\theta \in \mathbb{R}/P_\theta \text{ n'est pas linéarisable}\}$ où P_θ est le polynôme $P_\theta(z) = e^{i2\pi\theta}z + z^2$. Alors W est un G_δ -dense.*

Le premier résultat positif est dû à Siegel en 1942. En remarquant que les θ qui posent problème sont les rationnels, il s'est intéressé aux nombres qui sont "loin" des rationnels et, en majorant les coefficients de la linéarisante, il a prouvé le (voir [Sie42] ou [SM71])

Théorème 1.1.7 (Siegel). *Si θ est diophantien, alors tout $f \in \mathcal{F}_\lambda$ est linéarisable.*

Définition 1.1.8. *On dit qu'un irrationnel θ est diophantien d'ordre μ s'il existe $c > 0$ tel que $\forall p \in \mathbb{Z} \quad \forall q \in \mathbb{N}^* \quad \left| \theta - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{c}{q^\mu}$. On dit qu'un irrationnel θ est diophantien s'il existe un μ tel que θ est diophantien d'ordre μ .*

Proposition 1.1.9. *L'ensemble des réels non diophantiens est de mesure de Lebesgue nulle.*

Remarque 1.1.10. *Par conséquent, pour presque tous les nombres réels, tout $f \in \mathcal{F}_\lambda$ est linéarisable. On voit donc que, du point de vue de la topologie, il y a beaucoup de réels pour lesquels on peut trouver un $f \in \mathcal{F}_\lambda$ non linéarisable et il y en a peu pour lesquels tout $f \in \mathcal{F}_\lambda$ est linéarisable. Par contre, du point de vue de la mesure, c'est le contraire.*

En 1965, Brjuno améliora le théorème de Siegel (voir [Brj65], [Brj71] et [Brj72]) et prouva, en notant $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)$ la suite des réduites de θ :

Théorème 1.1.11 (Brjuno). *Si $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\ln q_{n+1}}{q_n} < +\infty$, alors tout $f \in \mathcal{F}_\lambda$ est linéarisable*

La question était alors de savoir si la condition de Brjuno était optimale. Yoccoz obtint la réponse en 1988 et prouva, en utilisant des techniques de chirurgie holomorphe,

Théorème 1.1.12. *Si $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\ln q_{n+1}}{q_n} = +\infty$, alors, il existe $f \in \mathcal{F}_\lambda$ tel que f soit non linéarisable.*

Yoccoz prouva aussi

Théorème 1.1.13. *$P_\theta(z) = e^{i2\pi\theta}z + z^2$ est linéarisable si et seulement si $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\ln q_{n+1}}{q_n} < +\infty$.*

Ce résultat prouve que tout polynôme $P(z) = e^{i2\pi\theta}z + a_2z^2$ est linéarisable si et seulement si $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\ln q_{n+1}}{q_n} < +\infty$, car P est analytiquement conjugué³ à P_θ .

Désormais, la question est de savoir si pour tout polynôme $P(z) = e^{i2\pi\theta}z + a_2z^2 + \dots + a_dz^d$ de degré $d \geq 3$, on a P linéarisable si et seulement si $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\ln q_{n+1}}{q_n} < +\infty$.

Pour $d = 3$, Perez-Marco a obtenu une avancée vers la réponse en 2003. Tout d'abord, il convient de remarquer que pour montrer ce théorème pour tout polynôme de degré 3 fixant 0 et de multiplicateur λ , il suffit de le prouver pour la famille $(e^{i2\pi\theta}z + bz^2 + z^3)_{b \in \mathbb{C}}$, car tout polynôme de degré 3 fixant 0 et de multiplicateur $e^{i2\pi\theta}$ est analytiquement conjugué à un polynôme de ce type.

En 2001, Perez-Marco a prouvé que

Théorème 1.1.14 (Perez-Marco). *Si $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\ln q_{n+1}}{q_n} = +\infty$, alors $\{b \in \mathbb{C} / P_b(z) = e^{i2\pi\theta}z + bz^2 + z^3 \text{ est linéarisable}\}$ est de capacité nulle (et donc de mesure nulle)*

Plus généralement, Perez-Marco a prouvé (voir [PM01]) que

Théorème 1.1.15 (Perez-Marco). *Pour tout $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ non résonant et pour toute famille $(f_t)_{t \in \mathbb{C}}$ de la forme $f_t(z) = \lambda z + \sum_{j=0}^d t^j \varphi_j(z)$ avec $\varphi_j(z) = \sum_{k=2}^{+\infty} c_{j,k} z^k$ série entière de rayon de convergence strictement positif et de valuation supérieure ou égale à 2, on a, en posant $E = \{t \in \mathbb{C} / f_t \text{ linéarisable}\}$: ou bien $E = \mathbb{C}$ ou bien $\text{cap}(E) = 0$.*

Un de nos objectifs sera de donner une nouvelle démonstration de ce théorème et de le généraliser à divers cadres.

Remarque: Dans [PM01], les résultats sont énoncés en dimension finie m sous une condition de non-résonance multidimensionnelle. Attention toutefois, car de nombreux théorèmes, comme ceux de Siegel ou Brjuno, ne se généralisent à la dimension finie que lorsque le multiplicateur de f , qui est en dimension finie une matrice, est diagonalisable. Et ceci n'est pas une commodité technique qui donne une démonstration plus simple, mais bien une obstruction de nature algébrique. En effet, dans [Yoc95], Yoccoz a démontré que

Théorème 1.1.16. *Soit $n \geq 2$ et $A \in GL_n(\mathbb{C})$. Si A possède une valeur propre de module 1 dont le sous-espace caractéristique associé diffère du sous-espace propre,*

3. Cela résulte du fait que, pour tout $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, on a, en notant $\psi(z) = \mu z$, $\psi^{-1}(P(\psi(z))) = \frac{1}{\mu} (e^{i2\pi\theta} \mu z + a_2 \mu^2 z^2) = e^{i2\pi\theta} z + a_2 \mu z^2$, d'où, pour $\mu = \frac{1}{a_2}$, $\psi^{-1}(P(\psi(z))) = e^{i2\pi\theta} z + z^2 = P_\theta(z)$.

alors, il existe des germes de difféomorphismes holomorphes de la forme $f(z) = Az + \dots$ qui ne sont pas linéarisables.

Dans le chapitre 2, nous rappelons les définitions de la linéarisation et nous redémontrons que, sous une condition de non-résonance, il y a existence et unicité de la linéarisante formelle. Les expressions obtenues pour les coefficients de la linéarisante formelle seront utiles pour démontrer des généralisations du théorème de Perez-Marco au chapitre 4. Nous terminerons ce chapitre en donnant, lorsque λ est non résonant, une minoration "explicite" des valeurs absolues des coefficients de la linéarisante formelle associée au polynôme $P_\lambda(z) = \lambda z - \lambda z^2$. Ces minoration ne semblent pas directement exploitables, mais une expérimentation sous MAPLE suggère qu'elles sont peut-être suffisantes pour montrer une non-linéarisabilité sous une très mauvaise condition diophantienne.

Dans le chapitre 3, nous redonnons les définitions et les principales propriétés du diamètre transfini en les adaptant au cadre p-adique et nous démontrons un théorème de majoration polynomiale. Ces résultats nous serviront au chapitre 4 pour donner une nouvelle démonstration du théorème de Perez-Marco et l'adapter au cadre p-adique.

Dans le chapitre 4, nous redémontrons le théorème de Perez-Marco. Dans son article, Perez-Marco utilisait la théorie du potentiel, notamment le lemme de Bernstein [Ran95]. Une approche alternative consiste à utiliser le diamètre transfini pour définir la capacité logarithmique dans \mathbb{C} et à remplacer le lemme de Bernstein par un théorème de majoration polynomiale utilisant uniquement le diamètre transfini. C'est cette approche que nous adoptons ici et elle va nous permettre d'aborder aussi le cas p-adique.

De plus, jusqu'ici, le théorème de Perez-Marco permettait d'obtenir des non-linéarisabilités en faisant apparaître dans la famille (f_t) une fonction dont le comportement était connu. Ici, grâce aux propriétés du diamètre transfini, nous pourrions directement récupérer une information diophantienne.

Nous terminerons ce chapitre, en calculant explicitement un domaine \mathcal{D} du plan pour lequel, lorsque $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\ln(q_{k+1})}{q_k} = +\infty$, on a

$$t \in \mathcal{D} \Rightarrow \lambda z + tz^2 + z^3 \text{ non linéarisable.}$$

Dans le chapitre 5, nous donnerons une généralisation du théorème de Perez-Marco au cas des fractions rationnelles et nous étudierons une généralisation dans un cas où il y a résonance. A cette occasion, nous retrouvons, par des techniques élémentaires, une version faible de certains résultats d'Ecalte concernant, dans \mathbb{C} , le centralisateur de germes tangents à l'identité.

Chapitre 2

Linéarisation formelle

2.1 Notations

Dans tout ce qui suit, p désignera un nombre premier et $|\cdot|_p$ la valeur absolue p -adique.¹

De manière usuelle, on note \mathbb{Q}_p le complété de \mathbb{Q} pour la valuation p -adique, \mathbb{Q}_p^{alg} la clôture algébrique de \mathbb{Q}_p (elle n'est pas complète) et \mathbb{C}_p le complété de \mathbb{Q}_p^{alg} . (\mathbb{C}_p est à la fois clos et complet.)

On note aussi $|\cdot|_p$ l'unique valeur absolue qui prolonge $|\cdot|_p$ à \mathbb{C}_p .

A partir de maintenant, $(\tilde{K}, |\cdot|)$ désignera soit $(\mathbb{C}_p, |\cdot|_p)$ soit $(\mathbb{C}, |\cdot|_\infty)$ où $|z|_\infty$ désigne le module du nombre complexe z . Lorsque les théorèmes et démonstrations utiliseront uniquement les propriétés communes à $(\mathbb{C}_p, |\cdot|_p)$ et $(\mathbb{C}, |\cdot|_\infty)$, nous utiliserons la notation $(\tilde{K}, |\cdot|)$ et nous signalerons explicitement les endroits où les propriétés diffèrent.

Nous noterons aussi K un sous-corps localement compact et complet (pour la valuation induite) de \tilde{K} . Par exemple, lorsque $\tilde{K} = \mathbb{C}$, K pourra désigner \mathbb{R} ou \mathbb{C} . Lorsque $\tilde{K} = \mathbb{C}_p$, K pourra désigner \mathbb{Q}_p ou une extension finie de \mathbb{Q}_p .

L'entier strictement positif m désignera la dimension de l'espace dans lequel nous nous plaçons et nous poserons $V = K^m$. Si a est un vecteur colonne de V , nous noterons $\|a\| = \sup_{j=1,2,\dots,m} |a_j|$. La longueur d'un multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{N}^m$ sera notée $\|\alpha\| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m$.

Nous noterons $B(a, r)$ la boule "ouverte" de V de centre a et de rayon r , c'est-à-dire $B(a, r) = \{z \in V \mid \|z - a\| < r\}$ et $B_f(a, r)$ la boule "fermée" de V de centre a et de rayon r , c'est-à-dire $B_f(a, r) = \{z \in V \mid \|z - a\| \leq r\}$.

1. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, $|\frac{a}{b}|_p = p^{v_p(b) - v_p(a)}$ où $v_p(a)$ désigne l'exposant de p dans la décomposition de a en produit de facteurs premiers.

Nous utiliserons, selon la commodité, deux notations pour les séries entières de V dans V . Nous les noterons parfois sous la forme $f(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^m} a_\alpha z^\alpha$ avec z un vecteur colonne de V ayant pour coordonnées z_1, z_2, \dots, z_m , a_α des vecteurs colonnes de V ayant pour coordonnées $a_{\alpha,1}, a_{\alpha,2}, \dots, a_{\alpha,m}$ et $z^\alpha = z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} \dots z_m^{\alpha_m}$.

Nous les noterons d'autres fois $f(z) = \sum_{j \in \mathbb{N}} f_j(z)$ ou $f(z) = \sum_{j \in \mathbb{N}} f^{(j)}(z)$ avec f_j (ou $f^{(j)}$) polynôme homogène de degré j en m variables et à valeurs dans V , ce qui revient à dire, en utilisant la notation précédente que $f_j(z) = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^m \\ |\alpha| = j}} a_\alpha z^\alpha$

Nous poserons aussi, pour toute série entière $f(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^m} a_\alpha z^\alpha$,
 $R_f = \sup\{r \in \mathbb{R}_+^* / \sup_{\alpha \in \mathbb{N}^m} \|a_\alpha\| r^{|\alpha|} < +\infty\}$. (rayon de la série entière f)

On obtient alors, pour tout $z \in V$, si $\|z\| < R_f$, alors $f(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^m} a_\alpha z^\alpha$ est convergente.

Nous noterons aussi L un élément de $GL_m(K)$ et nous identifierons L avec l'application linéaire qu'elle représente. Ainsi, pour tout $z \in V$, l'élément Lz sera parfois noté $L(z)$. Dans le cas de la dimension 1 ($m = 1$), on utilisera la lettre λ ($\lambda \in K^*$) plutôt que la lettre L et on notera λz au lieu de Lz .

L'ensemble \mathcal{F}_L désignera l'ensemble des séries entières de rayon de convergence strictement positif ayant 0 pour point fixe et L pour multiplicateur, c'est-à-dire $\mathcal{F}_L = \{f(z) = \sum f_j(z) / f \text{ est de rayon strictement positif et } f_0(z) = 0 \text{ et } f_1(z) = L(z)\}$. Lorsque $m = 1$, on utilisera indifféremment les notations \mathcal{F}_L ou \mathcal{F}_λ .

2.2 Linéarisation et linéarisation formelle.

Définition 2.2.1. Soit $f \in \mathcal{F}_L$. On dit que f est linéarisable s'il existe une série entière $\varphi = \sum \varphi_j$ de rayon de convergence strictement positif et $t \in]0, R_\varphi[$ vérifiant $\varphi_0(z) = 0$, $\varphi_1(z) = \tilde{L}z$ où $\tilde{L} \in GL_m(K)$, $\varphi(B(0,t)) \subseteq B(0, R_f)$, $L(B(0,t)) \subseteq B(0, R_\varphi)$ et

$$\forall z \in B(0,t) \quad f(\varphi(z)) = \varphi(L(z)) \quad (2.1)$$

Remarque 2.2.2. La condition $\varphi_0 = 0$ dans la définition précédente signifie simplement que le point fixe 0 de L est envoyé sur le point fixe 0 de f .

Remarque 2.2.3. La condition $\varphi_1 = \tilde{L}$ avec $\tilde{L} \in GL_m(K)$ dans la définition précédente signifie que φ est inversible et qu'au voisinage de 0, on a $f(z) = \varphi(L(\varphi^{-1}(z)))$, ce qui signifie que f est l'application L vue à travers φ .

Proposition 2.2.4. Soit $f \in \mathcal{F}_L$. Si f est linéarisable, alors il existe une série entière $\tilde{\varphi} = \sum \tilde{\varphi}_j$ de rayon de convergence strictement positif et $\tilde{t} \in]0, R_{\tilde{\varphi}}[$ vérifiant $\tilde{\varphi}_0(z) = 0$, $\tilde{\varphi}_1(z) = z$, $\tilde{\varphi}(B(0, \tilde{t})) \subseteq B(0, R_f)$, $L(B(0, \tilde{t})) \subseteq B(0, R_{\tilde{\varphi}})$ et

$$\forall z \in B(0, \tilde{t}) \quad f(\tilde{\varphi}(z)) = \tilde{\varphi}(L(z))$$

Démonstration :

Comme f est linéarisable, par définition, il existe une série entière $\varphi = \sum \varphi_j$ de rayon de convergence strictement positif et $t \in \mathbb{R}_+^*$ vérifiant $\varphi_0(z) = 0$, $\varphi_1(z) = \tilde{L}z$ où $\tilde{L} \in GL_m(K)$, $\varphi(B(0, t)) \subseteq B(0, R_f)$, $L(B(0, t)) \subseteq B(0, R_\varphi)$ et

$$\forall z \in B(0, t) \quad f(\varphi(z)) = \varphi(L(z)) \quad (2.2)$$

- Remarquons d'abord que $L \circ \tilde{L}^{-1} = \tilde{L}^{-1} \circ L$.

En effet, pour tout $z \in B(0, t)$, on a $f(\varphi(z)) = \varphi(L(z))$,

avec $f(\varphi(z)) = L(\tilde{L}(z) + \dots) + \dots = L(\tilde{L}(z)) + \dots$

et $\varphi(L(z)) = \tilde{L}(L(z) + \dots) + \dots = \tilde{L}(L(z)) + \dots$.

D'où, en identifiant les parties linéaires, $L(\tilde{L}(z)) = \tilde{L}(L(z))$. Cette égalité étant vraie sur un petit voisinage de 0 et les applications étant linéaires, on en déduit que $\forall z \in V \quad L(\tilde{L}(z)) = \tilde{L}(L(z))$, d'où $L \circ \tilde{L} = \tilde{L} \circ L$.

On obtient alors $\tilde{L}^{-1} \circ L \circ \tilde{L} \circ \tilde{L}^{-1} = \tilde{L}^{-1} \circ \tilde{L} \circ L \circ \tilde{L}^{-1}$, d'où $\tilde{L}^{-1} \circ L = L \circ \tilde{L}^{-1}$

- Construisons $\tilde{\varphi}$ et \tilde{t} .

Posons $\tilde{\varphi} = \varphi \circ \tilde{L}^{-1}$. Comme \tilde{L}^{-1} est linéaire, $\tilde{\varphi}(z) = \sum \tilde{\varphi}_j(z)$ est une série entière de rayon strictement positif et on a la relation $\forall j \in \mathbb{N} \quad \tilde{\varphi}_j(z) = \varphi_j(\tilde{L}^{-1}(z))$.

On vérifie facilement que l'on a $\tilde{\varphi}_0 = \varphi_0 = 0$ et $\forall x \in V \quad \tilde{\varphi}_1(x) = \varphi_1(\tilde{L}^{-1}(x)) = \tilde{L}(\tilde{L}^{-1}(x)) = x$, d'où $\tilde{\varphi}_1 = Id$. Comme $\tilde{\varphi}$, L et \tilde{L}^{-1} sont continues avec $\tilde{\varphi}(0) = 0$, $L(0) = 0$ et $\tilde{L}^{-1}(0) = 0$, on peut choisir $\tilde{t} \in]0, R_{\tilde{\varphi}}[$ tel que $\tilde{\varphi}(B(0, \tilde{t})) \subseteq B(0, R_f)$, $L(B(0, \tilde{t})) \subseteq B(0, R_{\tilde{\varphi}})$ et $\tilde{L}^{-1}(B(0, \tilde{t})) \subseteq B(0, t)$

- Vérifions que $\forall z \in B(0, \tilde{t}) \quad f(\tilde{\varphi}(z)) = \tilde{\varphi}(L(z))$

Soit $z \in B(0, \tilde{t})$. On a

$$\begin{aligned} f(\tilde{\varphi}(z)) &= f(\varphi(\tilde{L}^{-1}(z))) && \text{avec } \tilde{L}^{-1}(z) \in B(0, t) \\ &= \varphi(L(\tilde{L}^{-1}(z))) && \text{d'après (2.2)} \\ &= \varphi(\tilde{L}^{-1}(L(z))) && \text{car } L \circ \tilde{L}^{-1} = \tilde{L}^{-1} \circ L \\ &= \tilde{\varphi}(L(z)) \end{aligned}$$

□

Définition 2.2.5. Une application $\varphi = \sum \varphi_j$ vérifiant les conditions de la définition (2.2.1) et vérifiant de plus $\varphi_1 = Id$ est appelée une linéarisante de f .

Problème:

Soit $L \in GL_m(K)$ et $f \in \mathcal{F}_L$. Le problème qui nous intéresse est de savoir sous quelles conditions sur L et/ou f peut-on dire que f est (ou n'est pas) linéarisable.

La linéarisabilité de f est équivalente à l'existence d'une linéarisante φ et là, deux problèmes se posent. L'un algébrique : existe-t-il une série formelle $\varphi(z) = z + \sum_{j \geq 2} \varphi_j(z)$ vérifiant $f(\varphi(z)) = \varphi(Lz)$? On parle alors de linéarisante formelle. L'autre analytique : cette linéarisante formelle, lorsqu'elle existe, est-elle une série entière de rayon strictement positif?

Définition 2.2.6. Soit $L \in GL_m(K)$. Notons $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ ses m valeurs propres dans \tilde{K} . On dit que L est non résonante si

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^m \quad (||\alpha|| \geq 2) \implies \left(\forall j \in \llbracket 1, m \rrbracket \quad \lambda^\alpha - \lambda_j \neq 0 \right).$$

Remarque 2.2.7. Lorsque $m = 1$, λ non résonant signifie que $\forall k \geq 2 \quad \lambda^k - \lambda \neq 0$, c'est-à-dire $\forall k \geq 2 \quad \lambda^{k-1} - 1 \neq 0$, ce qui revient à dire que λ n'est pas une racine de l'unité.

Proposition 2.2.8. Soit $L \in GL_m(K)$ et $f \in \mathcal{F}_L$. Si L est non résonante, alors f possède une unique linéarisante formelle φ .

Démonstration :

Supposons L non résonante.

- Unicité

Supposons aussi que f possède une linéarisante formelle φ . En notant $\mathcal{L}_L^{(q)}$ l'opérateur défini sur l'espace des polynômes homogènes de degré q en m variables et à valeurs dans K^m , par

$$\mathcal{L}_L^{(q)}(P(z)) = P(Lz) - LP(z)$$

l'équation fonctionnelle

$$f(\varphi(z)) = \varphi(Lz)$$

donne²

$$Lz + L \sum_{q \geq 2} \varphi^{(q)}(z) + \sum_{l \geq 2} f^{(l)} \left(\sum_{i \geq 1} \varphi^{(i)}(z) \right) = Lz + \sum_{q \geq 2} \varphi^{(q)}(Lz)$$

d'où

$$\sum_{l \geq 2} f^{(l)} \left(\sum_{i \geq 1} \varphi^{(i)}(z) \right) = \sum_{q \geq 2} \varphi^{(q)}(Lz) - \sum_{q \geq 2} L\varphi^{(q)}(z)$$

ce qui aboutit à

$$\sum_{l \geq 2} f^{(l)} \left(\sum_{i \geq 1} \varphi^{(i)}(z) \right) = \sum_{q \geq 2} \mathcal{L}_L^{(q)} \left(\varphi^{(q)}(z) \right)$$

2. Ceci a bien un sens car les séries formelles sont de valuation supérieure à 1 et on peut donc les composer.

d'où, notant $\mathcal{P}_q(\cdot)$ la partie homogène de degré q d'un polynôme en m variables et à valeurs dans K^m :

$$\forall q \geq 2 \quad \mathcal{L}_L^{(q)}(\varphi^{(q)}(z)) = \mathcal{P}_q \left(\sum_{2 \leq l} f^{(l)} \left(\sum_{1 \leq i} \varphi^{(i)}(z) \right) \right).$$

et, comme on prend seulement la partie homogène de degré q , les parties homogènes d'ordres strictement supérieurs à q n'apportent aucune contribution et on obtient la formule :

$$\forall q \geq 2 \quad \mathcal{L}_L^{(q)}(\varphi^{(q)}(z)) = \mathcal{P}_q \left(\sum_{2 \leq l \leq q} f^{(l)} \left(\sum_{1 \leq i \leq q} \varphi^{(i)}(z) \right) \right). \quad (2.3)$$

Comme L est non résonante, il est connu que, pour tout $q \geq 2$, $\mathcal{L}_L^{(q)}$ est inversible. En effet, comme \tilde{K} est algébriquement clos, il existe A et B dans $GL_m(\tilde{K})$ tels que $L = B^{-1}AB$ avec A de la forme

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & \dots & a_{1,k} & \dots & a_{1,m} \\ 0 & a_{2,2} & \dots & \dots & a_{2,k} & \dots & a_{2,m} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & a_{k,k} & \dots & a_{k,m} \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & a_{m,m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & a_{1,2} & \dots & \dots & a_{1,k} & \dots & a_{1,m} \\ 0 & \lambda_2 & \dots & \dots & a_{2,k} & \dots & a_{2,m} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \lambda_k & \dots & a_{k,m} \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \lambda_m \end{pmatrix}$$

Comme³ $\mathcal{L}_L^{(q)}(P) = B^{-1}\mathcal{L}_A^{(q)}(BPB^{-1})B$, il suffit de montrer que $\mathcal{L}_A^{(q)}$ est inversible⁴.

Définissons la relation de bon ordre \leq sur \mathbb{N}^m de la manière suivante : pour tout $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ et tout $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)$,

$$\alpha \leq \beta \text{ si } \begin{cases} \|\alpha\| < \|\beta\| \\ \text{ou} \\ \|\alpha\| = \|\beta\| \text{ et } \alpha \text{ précède } \beta \text{ pour l'ordre lexicographique} \end{cases}$$

3. Cela résulte du fait que $B^{-1}\mathcal{L}_A^{(q)}(BPB^{-1})B = B^{-1}(BPB^{-1}A - ABPB^{-1})B = B^{-1}BPB^{-1}AB - B^{-1}ABPB^{-1}B = PB^{-1}AB - B^{-1}ABP = PL - LP = \mathcal{L}_L(P)$

4. En effet, la relation précédente permet de vérifier facilement que si $\mathcal{L}_A^{(q)}$ est injective et surjective, alors $\mathcal{L}_L^{(q)}$ l'est aussi.

Considérons alors la base $\mathcal{B} = (e_{\alpha,j}(z))_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^m \\ \|\alpha\| = q \\ 1 \leq j \leq m}}$ du K -espace vectoriel des polynômes homogènes de degré q en m variables

et à valeurs dans K^m définie par $e_{\alpha,j}(z) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ z^\alpha \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow j\text{-ème ligne}$

On a

$$\mathcal{L}_A^{(q)}(e_{\alpha,j}(z)) = e_{\alpha,j}(Az) - Ae_{\alpha,j}(z)$$

avec

$$Ae_{\alpha,j}(z) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & \dots & a_{1,j} & \dots & \dots & a_{1,m} \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & \dots & a_{2,j} & \dots & \dots & a_{2,m} \\ \vdots & \ddots & a_{3,3} & \dots & \dots & a_{3,j} & \dots & \dots & a_{3,m} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & a_{j,j} & \dots & \dots & a_{j,m} \\ \vdots & & & & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & a_{m,m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ z^\alpha \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^j a_{k,j} e_{\alpha,k}(z)$$

i.e.

$$Ae_{\alpha,j}(z) = \lambda_j e_{\alpha,j}(z) + \sum_{k=1}^{j-1} a_{k,j} e_{\alpha,k}(z)$$

et, en définissant la relation de bon ordre \preceq sur les (α, k) par

$$\forall (\beta, k) \in \mathbb{N}^m \times \mathbb{N} \quad \forall (\gamma, l) \in \mathbb{N}^m \times \mathbb{N} \quad (\beta, k) \preceq (\gamma, l) \text{ si } \beta \triangleleft \gamma \text{ ou } (\beta = \gamma \text{ et } k \leq l)$$

on obtient

$$Ae_{\alpha,j}(z) = \lambda_j e_{\alpha,j}(z) + \sum_{\substack{1 \leq k \leq j-1 \\ (\alpha, k) \prec (\alpha, j)}} a_{k,j} e_{\alpha,k}(z)$$

On a aussi

$$\begin{aligned}
e_{\alpha,j}(Az) &= e_{\alpha,j} \left(\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & \dots & a_{1,m} \\ 0 & a_{2,2} & \dots & \dots & a_{2,m} \\ \vdots & \ddots & a_{3,3} & \dots & a_{3,m} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_{m,m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix} \right) = e_{\alpha,j} \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^m a_{1,k} z_k \\ \sum_{k=2}^m a_{2,k} z_k \\ \sum_{k=3}^m a_{3,k} z_k \\ \vdots \\ \sum_{k=m}^m a_{m,k} z_k \end{pmatrix} \\
j\text{-ème ligne} \longrightarrow &= \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ \left(\sum_{k=1}^m a_{1,k} z_k \right)^{\alpha_1} \left(\sum_{k=2}^m a_{2,k} z_k \right)^{\alpha_2} \left(\sum_{k=3}^m a_{3,k} z_k \right)^{\alpha_3} \dots \left(\sum_{k=m}^m a_{m,k} z_k \right)^{\alpha_m} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \lambda^\alpha e_{\alpha,j}(z) + \sum_{\substack{\beta \\ (\beta,j) < (\alpha,j)}} b_\beta e_{\beta,j}(z)
\end{aligned}$$

En effet, en posant $B = \left(\sum_{k=1}^m a_{1,k} z_k \right)^{\alpha_1} \left(\sum_{k=2}^m a_{2,k} z_k \right)^{\alpha_2} \left(\sum_{k=3}^m a_{3,k} z_k \right)^{\alpha_3} \dots \left(\sum_{k=m}^m a_{m,k} z_k \right)^{\alpha_m}$,

on a :

$$\begin{aligned}
B &= \prod_{r=1}^m \left(\sum_{k=r}^m a_{r,k} z_k \right)^{\alpha_r} \\
&= \prod_{r=1}^m \prod_{s=1}^{\alpha_r} \prod_{k_r,s=r}^m a_{r,k_r,s} z_{k_r,s}
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
B &= \sum_{\substack{(k_{1,1}, k_{1,2}, \dots, k_{1,\alpha_1}, k_{2,1}, \dots, k_{2,\alpha_2}, \dots, k_{m,1}, \dots, k_{m,\alpha_m}) \in N^{|\alpha|} \\ r \leq k_{r,s} \leq m}} \prod_{\substack{1 \leq r \leq m \\ 1 \leq s \leq \alpha_r}} a_{r, k_{r,s}} \prod_{\substack{1 \leq r \leq m \\ 1 \leq s \leq \alpha_r}} z_{k_{r,s}} \\
&= \sum_{\beta \in N^m} \left(\sum_{\substack{(k_{1,1}, \dots, k_{1,\alpha_1}, \dots, k_{m,1}, \dots, k_{m,\alpha_m}) \in N^{|\alpha|} \\ r \leq k_{r,s} \leq m \\ \prod_{\substack{1 \leq r \leq m \\ 1 \leq s \leq \alpha_r}} z_{k_{r,s}} = z^\beta}} \prod_{\substack{1 \leq r \leq m \\ 1 \leq s \leq \alpha_r}} a_{r, k_{r,s}} \right) z^\beta
\end{aligned}$$

Soit $\beta \in \mathbb{N}^m$ et $(k_{1,1}, \dots, k_{1,\alpha_1}, \dots, k_{m,1}, \dots, k_{m,\alpha_m}) \in N^{|\alpha|}$

On suppose que $\forall r \in \llbracket 1, m \rrbracket \quad \forall s \in \llbracket r, \alpha_r \rrbracket \quad r \leq k_{r,s} \leq m$ et $\prod_{\substack{1 \leq r \leq m \\ 1 \leq s \leq \alpha_r}} z_{k_{r,s}} = z^\beta$

On a alors $\|\beta\| = \|\alpha\| = q$ et de plus :

- si $\beta = \alpha$, alors, comme les $k_{r,s}$ vérifient $r \leq k_{r,s} \leq m$, forcément, on a

$$k_{1,1} = k_{1,2} = \dots = k_{1,\alpha_1} = 1$$

puis

$$k_{2,1} = k_{2,2} = \dots = k_{2,\alpha_2} = 2$$

⋮

...

puis

$$k_{m,1} = k_{m,2} = \dots = k_{m,\alpha_m} = m$$

et dans ce cas, on a

$$\prod_{\substack{1 \leq r \leq m \\ 1 \leq s \leq \alpha_r}} a_{r, k_{r,s}} = \prod_{1 \leq r \leq m} a_{r,r}^{\alpha_r} = \prod_{1 \leq r \leq m} \lambda_r^{\alpha_r} = \lambda^\alpha$$

- si $\beta \neq \alpha$. On pose $r_0 = \min\{r \in \llbracket 1, m \rrbracket / \alpha_r \neq \beta_r\}$.

On a alors, par un raisonnement analogue au précédent,

$$\forall r \in \llbracket 1, r_0 - 1 \rrbracket \quad \forall s \in \llbracket 1, \alpha_r \rrbracket \quad k_{r,s} = r < r_0$$

et

$$\forall r \in \llbracket r_0 + 1, m \rrbracket \quad \forall s \in \llbracket 1, \alpha_r \rrbracket \quad k_{r,s} \geq r > r_0$$

et

$$\beta_{r_0} = \text{card}(\{s \in \llbracket 1, \alpha_{r_0} \rrbracket / k_{r_0,s} = r_0\}) \leq \alpha_{r_0} \quad \text{et} \quad \alpha_{r_0} \neq \beta_{r_0}$$

Donc $\beta_{r_0} < \alpha_{r_0}$, d'où $\beta \triangleleft \alpha$, d'où $(\beta, j) \prec (\alpha, j)$ et par conséquent, on a bien :

$$e_{\alpha,j}(Az) = \lambda^\alpha e_{\alpha,j}(z) + \sum_{\substack{\beta \in \mathbb{N}^m \\ \|\beta\| = q \\ (\beta,j) \prec (\alpha,j)}} b_\beta e_{\beta,j}(z)$$

d'où

$$\mathcal{L}_A^{(q)}(e_{\alpha,j}(z)) = e_{\alpha,j}(Az) - Ae_{\alpha,j}(z) = (\lambda^\alpha - \lambda_j) e_{\alpha,j}(z) + \sum_{\substack{\beta \in \mathbb{N}^m \\ 1 \leq k \leq m \\ \|\beta\| = q \\ (\beta,k) \prec (\alpha,j)}} c_{\beta,k} e_{\beta,k}(z)$$

d'où

$\mathcal{L}_A^{(q)}$ triangulaire supérieure avec pour coefficients diagonaux $\lambda^\alpha - \lambda_j$.

d'où

$$\det \left(\mathcal{L}_A^{(q)} \right) = \prod_{\substack{(\alpha,j) \\ \|\alpha\| = q \\ 1 \leq j \leq m}} (\lambda^\alpha - \lambda_j) \neq 0 \text{ car } L \text{ non résonante.}$$

et grâce à (2.3), on obtient, pour tout $q \geq 2$

$$\varphi^{(q)}(z) = (\mathcal{L}_L^{(q)})^{-1} \left(\mathcal{P}_q \left(\sum_{2 \leq l \leq q} f^{(l)} \left(\sum_{1 \leq i \leq q} \varphi^{(i)}(z) \right) \right) \right) \quad (2.4)$$

En se rappelant que $\varphi^{(0)}(z) = 0$, que $\varphi^{(1)}(z) = z$ et en remarquant que dans le membre de droite de la formule (2.4), les $\varphi^{(i)}$ qui interviennent ont un indice i vérifiant $1 \leq i \leq \frac{q}{2} < q$, on s'aperçoit que (2.4) est une formule de récurrence permettant de calculer les $\varphi^{(q)}(z)$ et l'unicité est ainsi démontrée.

- Existence de la linéarisante formelle.

Pour montrer l'existence de la linéarisante formelle, il suffit de définir $\varphi(z) = \sum \varphi^{(q)}(z)$ en posant $\varphi^{(0)}(z) = 0$, $\varphi^{(1)}(z) = z$ et, pour tout $q \geq 2$

$$\varphi^{(q)}(z) = (\mathcal{L}_L^{(q)})^{-1} \left(\mathcal{P}_q \left(\sum_{2 \leq l \leq q} f^{(l)} \left(\sum_{1 \leq i \leq q} \varphi^{(i)}(z) \right) \right) \right)$$

On peut alors remonter les calculs précédents et vérifier que l'on a bien

$$f(\varphi(z)) = \varphi(L(z))$$

□

Remarque 2.2.9. Dans le calcul précédent, si L est diagonalisable, alors on peut choisir une matrice A diagonale et on a

$$Ae_{\alpha,j}(z) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \lambda_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ z^\alpha \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_j e_{\alpha,j}(z)$$

et

$$e_{\alpha,j}(Az) = e_{\alpha,j} \left(\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix} \right) = e_{\alpha,j} \begin{pmatrix} \lambda_1 z_1 \\ \lambda_2 z_2 \\ \lambda_3 z_3 \\ \vdots \\ \lambda_m z_m \end{pmatrix}$$

d'où,

$$e_{\alpha,j}(Az) \underset{j\text{-ème ligne}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ (\lambda_1 z_1)^{\alpha_1} (\lambda_2 z_2)^{\alpha_2} (\lambda_3 z_3)^{\alpha_3} \dots (\lambda_m z_m)^{\alpha_m} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda^\alpha z^\alpha \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda^\alpha e_{\alpha,j}(z)$$

Ainsi,

$$\mathcal{L}_A^{(q)}(e_{\alpha,j}(z)) = e_{\alpha,j}(Az) - Ae_{\alpha,j}(z) = (\lambda^\alpha - \lambda_j)e_{\alpha,j}(z)$$

et donc $\mathcal{L}_A^{(q)}$ est diagonale.

Remarque 2.2.10. Dans le cas de la dimension 1, on peut raisonner plus directement et obtenir une formule explicite pour le calcul des coefficients de la linéarisante formelle.

Proposition 2.2.11. Soit $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ et $f(z) = \lambda z + \sum_{j=2}^{+\infty} a_j z^j \in \mathcal{F}_\lambda$. Si λ est non-résonant, alors f possède une unique linéarisante formelle $\varphi(z) = \sum_{j=1}^{+\infty} b_j z^j$ et les b_j sont déterminés par :

$$b_1 = 1 \text{ et } b_n = \frac{1}{\lambda^n - \lambda} \sum_{2 \leq r \leq n} a_r \sum_{\substack{(j_1, j_2, \dots, j_r) \in (\mathbb{N}^*)^r \\ \sum_{1 \leq k \leq r} j_k = n}} \prod_{1 \leq k \leq r} b_{j_k} \quad (2.5)$$

Démonstration :

Supposons λ non résonant. Comme $f \in \mathcal{F}_\lambda$, f s'écrit sous la forme

$f(z) = \lambda z + \sum_{k=2}^{+\infty} a_k z^k$. Cherchons une linéarisante formelle φ de f sous la forme

$$\varphi(z) = z + \sum_{k=2}^{+\infty} b_k z^k = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k z^k \text{ avec } b_1 = 1.$$

Supposons que φ vérifie l'équation $f(\varphi(z)) = \varphi(\lambda z)$ entre séries formelles.⁵ On a alors

$$\lambda z + \lambda \sum_{n=2}^{+\infty} b_n z^n + \sum_{r=2}^{+\infty} a_r \left(\sum_{j=1}^{+\infty} b_j z^j \right)^r = \lambda z + \sum_{n=2}^{+\infty} b_n (\lambda z)^n$$

d'où,

$$\sum_{n=2}^{+\infty} b_n (\lambda^n - \lambda) z^n = \sum_{r=2}^{+\infty} a_r \left(\sum_{j=1}^{+\infty} b_j z^j \right)^r \quad (2.6)$$

Or

$$\begin{aligned} \sum_{r=2}^{+\infty} a_r \left(\sum_{j=1}^{+\infty} b_j z^j \right)^r &= \sum_{r=2}^{+\infty} a_r \left(\sum_{j_1=1}^{+\infty} b_{j_1} z^{j_1} \right) \left(\sum_{j_2=1}^{+\infty} b_{j_2} z^{j_2} \right) \dots \left(\sum_{j_r=1}^{+\infty} b_{j_r} z^{j_r} \right) \\ &= \sum_{r=2}^{+\infty} a_r \sum_{(j_1, j_2, \dots, j_r) \in (\mathbb{N}^*)^r} b_{j_1} b_{j_2} \dots b_{j_r} z^{j_1 + j_2 + \dots + j_r} \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\sum_{r=2}^{+\infty} a_r \sum_{\substack{(j_1, j_2, \dots, j_r) \in (\mathbb{N}^*)^r \\ j_1 + j_2 + \dots + j_r = n}} b_{j_1} b_{j_2} \dots b_{j_r} \right) z^n \end{aligned}$$

De plus, en tenant compte du fait que chaque j_k est supérieur ou égal à 1, on a $r \leq j_1 + j_2 + \dots + j_r = n$, d'où

$$\sum_{r=2}^{+\infty} a_r \left(\sum_{j=1}^{+\infty} b_j z^j \right)^r = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\sum_{r=2}^n a_r \sum_{\substack{(j_1, j_2, \dots, j_r) \in (\mathbb{N}^*)^r \\ j_1 + j_2 + \dots + j_r = n}} b_{j_1} b_{j_2} \dots b_{j_r} \right) z^n \quad (2.7)$$

De (2.6) et (2.7), on déduit

$$b_n (\lambda^n - \lambda) = \sum_{2 \leq r \leq n} a_r \sum_{\substack{(j_1, j_2, \dots, j_r) \in (\mathbb{N}^*)^r \\ j_1 + j_2 + \dots + j_r = n}} b_{j_1} b_{j_2} \dots b_{j_r}$$

Et comme λ est non résonant, on a $\lambda^n - \lambda \neq 0$, d'où

$$b_n = \frac{1}{\lambda^n - \lambda} \sum_{2 \leq r \leq n} a_r \sum_{\substack{(j_1, j_2, \dots, j_r) \in (\mathbb{N}^*)^r \\ \sum_{1 \leq k \leq r} j_k = n}} \prod_{1 \leq k \leq r} b_{j_k}$$

5. Ceci a bien un sens car toutes les séries formelles considérées sont de valuation 1.

On vient de prouver que si la linéarisante formelle existe, alors elle est unique et ses coefficients sont donnés par (2.5).

Réciproquement, on vérifie facilement que la série formelle φ dont les coefficients sont définis par (2.5) vérifie $f(\varphi(z)) = \varphi(\lambda z)$. \square

Remarque 2.2.12. *Si λ est résonant, deux cas peuvent se produire.*

- *Ou bien f ne possède aucune linéarisante formelle et par conséquent aucune linéarisante (c'est par exemple le cas pour $\lambda = 1$ et $f(z) = z + z^2$ car une linéarisante formelle φ devrait vérifier $\varphi(z) = z + \dots$ et $\varphi^2(z) = 0$, ce qui est impossible).*

- *Ou bien f possède plusieurs linéarisantes formelles (c'est le cas pour $\lambda = -1$ et $f(z) = \frac{1}{1+z} - 1 = \lambda z + \sum_{k=2}^{+\infty} (-z)^k$. On remarque que $\varphi(z) = \exp(z) - 1 = z + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}$ est une linéarisante de f , car $f(\varphi(z)) = \exp(-z) - 1 = \varphi(-z)$, et que pour toute fonction $g(z) = z + \sum_{k=1}^{+\infty} c_{2k+1} z^{2k+1}$ analytique impaire, en posant $\varphi_g(z) = \varphi(g(z))$, on a que φ_g est une linéarisante de f , car $f(\varphi_g(z)) = f(\varphi(g(z))) = \varphi(-g(z)) = \varphi(g(-z)) = \varphi_g(-z)$ et $\varphi_g(z) = z + \dots$)*

Remarque 2.2.13. *Si λ est résonant ($\lambda^q = 1$ avec $q \in \mathbb{N}^*$) et si P est un polynôme de degré $d \geq 2$, alors P n'est pas formellement linéarisable.⁶*

2.3 Linéarisation formelle et linéarisation

Si $f \in \mathcal{F}_L$ avec L non-résonant, on a l'existence d'une unique linéarisante formelle φ et donc, pour savoir si f est ou non linéarisable, on est amené à déterminer si le rayon de convergence de $\varphi(z) = \sum_{j=1}^{+\infty} \varphi^{(j)}(z)$ est strictement positif. Pour cela, on peut essayer de majorer ou de minorer les valeurs absolues des composantes des coefficients des polynômes homogènes $\varphi^{(j)}(z)$.

Lorsque $K = \tilde{K} = \mathbb{C}$, en utilisant la technique des séries majorantes (et en majorant explicitement les valeurs absolues des composantes des coefficients des polynômes homogènes $\varphi^{(j)}(z)$), de nombreux résultats ont été obtenus.

Théorème 2.3.1 (Koenigs). *Si $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, si $f \in \mathcal{F}_\lambda$ et si $|\lambda| < 1$, alors f est linéarisable.*

Remarque 2.3.2. *Le théorème est encore vrai si on remplace la condition $|\lambda| < 1$ par la condition $|\lambda| > 1$. (il suffit de raisonner sur f^{-1} au lieu de f .)*

6. Si P était formellement linéarisable, il posséderait une linéarisante formelle $\varphi(z) = z + \dots$ vérifiant $P(\varphi(z)) = \varphi(\lambda z)$. Comme φ est une série formelle de valuation 1, elle possède une réciproque formelle de valuation 1 et on a: $P(z) = \varphi(\lambda \varphi^{-1}(z))$, $(P \circ P)(z) = P(P(z)) = \varphi(\lambda \varphi^{-1}(\varphi(\lambda \varphi^{-1}(z)))) = \varphi(\lambda \lambda \varphi^{-1}(z)) = \varphi(\lambda^2 \varphi^{-1}(z))$, $(P \circ P \circ P)(z) = \dots = \varphi(\lambda^3 \varphi^{-1}(z))$, \dots , $P^{\circ q}(z) = \varphi(\lambda^q \varphi^{-1}(z)) = \varphi(\varphi^{-1}(z)) = z$. Or c'est impossible, car $\deg P^{\circ q} = d^q \neq 1 = \deg z$.

Théorème 2.3.3 (Poincaré). Si $L \in GL_m(\mathbb{C})$, si $f \in \mathcal{F}_L$ et si $\max_{1 \leq k \leq m} |\lambda_k| < 1$, alors f est linéarisable.

Remarque 2.3.4. Comme précédemment, le théorème est encore vrai si on remplace la condition $\max_{1 \leq k \leq m} |\lambda_k| < 1$ par la condition $\min_{1 \leq k \leq m} |\lambda_k| > 1$.

Notation 2.3.5. Jusqu'à la fin de ce chapitre, nous supposons que $m = 1$, et $\lambda = e^{i2\pi\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. ($|\lambda| = 1$ et λ non résonant). Nous noterons alors $[a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{\ddots}}}}$ le développement en fraction

continue de θ et nous noterons $\frac{p_n}{q_n}$ la n -ième réduite de θ ,

$$c'est-à-dire \frac{p_n}{q_n} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}}$$

Théorème 2.3.6 (Siegel). Si $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, si $f \in \mathcal{F}_\lambda$ et si $\sup \left(\frac{\ln(q_{n+1})}{\ln(q_n)} \right) < +\infty$, alors f est linéarisable.

Remarque 2.3.7. La condition $\sup \left(\frac{\ln(q_{n+1})}{\ln(q_n)} \right) < +\infty$ est équivalente à dire que θ est diophantien, c'est-à-dire qu'il existe $C > 0$ et $\mu > 0$ tels que, pour tout $p \in \mathbb{Z}$ et tout $q \in \mathbb{N}^*$, $\left| \theta - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{C}{q^\mu}$.

Théorème 2.3.8 (Brjuno). Si $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, si $f \in \mathcal{F}_\lambda$ et si $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\ln(q_{n+1})}{q_n} < +\infty$, alors f est linéarisable.

Remarque 2.3.9. *Le théorème de Brjuno est un raffinement de celui de Siegel car, si $M = \sup \left(\frac{\ln(q_{n+1})}{\ln(q_n)} \right) < +\infty$, alors*

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln(q_{n+1})}{q_n} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln(q_{n+1})}{\ln(q_n)} \frac{\ln(q_n)}{q_n} \leq \sum_{n=2}^{+\infty} M \frac{\ln(q_n)}{q_n} \leq 6M < +\infty$$

Cela résulte du fait que $t \mapsto \frac{\ln(t)}{t}$ est décroissante sur $[e, +\infty[$ et que

$\forall n \in \mathbb{N} \quad q_n \geq F_n$ où $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite de Fibonacci définie par $F_0 = F_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

Théorème 2.3.10 (Brjuno). *Si $L \in GL_m(\mathbb{C})$, si L est diagonalisable, si $f \in \mathcal{F}_L$*

et si $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-\ln(\Omega(2^{n+1}))}{2^n} < +\infty$ où $\Omega(n) = \min_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^m \\ 2 \leq |\alpha| \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} |\lambda^\alpha - \lambda_j|$

alors f est linéarisable.

Remarque 2.3.11. *Le fait que L soit diagonalisable est crucial, car Yoccoz a démontré que si L possède une valeur propre associée à un bloc de Jordan non trivial⁷ alors il existe $f \in \mathcal{F}_L$ tel que f soit non-linéarisable.*

Remarque 2.3.12. *Les théorèmes précédents prouvent que cette attaque directe du problème, en manipulant directement les coefficients de la linéarisante formelle, est très fructueuse pour démontrer des théorèmes de linéarisation. Par contre, jusqu'à ce jour, aucune minoration directe n'a été possible et tous les théorèmes de non-linéarisabilité ont été obtenus par des méthodes indirectes (méthode des petits cycles développée par Cremer, chirurgie holomorphe développée par Yoccoz, ...).*

Théorème 2.3.13. *Si $P(z) = \lambda z + a_2 z^2 + \dots + a_d z^d$ est un polynôme de degré d et si $\limsup_{q \rightarrow +\infty} \frac{\ln \ln(1/|\lambda^q - 1|)}{q} > d$, alors P n'est pas linéarisable.*

Remarque 2.3.14. *Pour démontrer ce théorème, Cremer prouve que la condition $\limsup_{q \rightarrow +\infty} \frac{\ln \ln(1/|\lambda^q - 1|)}{q} > d$ entraîne que P possède des petits cycles, ce qui empêche la linéarisation⁸.*

Définition 2.3.15. *On dit que P possède des petits cycles si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $z \in B(0, \varepsilon) \setminus \{0\}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $P^{\circ n}(z) = P(P(\dots(P(z))\dots)) = z$*

7. C'est-à-dire que le sous-espace caractéristique associé à cette valeur propre diffère du sous-espace propre.

8. car si f est conjuguée à la rotation irrationnelle, dans un petit voisinage de 0, elle ne peut posséder aucun cycle.

Yoccoz utilise des techniques de chirurgie holomorphe pour démontrer le

Théorème 2.3.16. $P_\lambda(z) = \lambda z - \lambda z^2$ est linéarisable si et seulement si $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\ln(q_{n+1})}{q_n} < +\infty$. Ce qui prouve que la condition de Brjuno est optimale.

Dans [Yoc95], Yoccoz utilise le fait que les coefficients de la linéarisante formelle de P_λ sont de la forme $\frac{P_n(\lambda)}{\prod_{q=1}^n (1 - \lambda^q)}$ avec P_n polynôme à coefficients entiers pour obtenir diverses informations sur certaines fonctions lorsque l'on tend vers une racine q -ième de l'unité. On peut être tenté de réutiliser cette expression pour obtenir une minoration des coefficients de la linéarisante formelle et essayer d'en déduire la non-linéarisabilité de P_λ .

Définition 2.3.17. On définit la double suite de polynômes $(G_n^k)_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ 0 \leq k \leq n}}$ par :

$$\begin{aligned} G_0^0 &= 1, G_1^0 = 1, G_1^1 = 1, \text{ et pour tout } n \geq 2, \\ G_n^0 &= 1, G_n^n = 1 \text{ et } \forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket \quad G_n^k = G_{n-1}^{k-1} + X^k G_{n-1}^k. \\ \text{On définit aussi la suite de polynômes } (P_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ par} \\ P_0 &= 1 \text{ et } \forall n \geq 1 \quad P_n = \sum_{k=0}^{n-1} G_{n-1}^k P_k P_{n-1-k} \end{aligned}$$

Remarque 2.3.18. Par récurrence immédiate, les G_n^k sont des polynômes à coefficients entiers positifs, ainsi que les P_n .

$$\text{Lemme 2.3.19. } \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket \quad G_n^k = \frac{\prod_{q=1}^n (1 - X^q)}{\prod_{q=1}^k (1 - X^q) \prod_{q=1}^{n-k} (1 - X^q)}$$

Démonstration :

Le lemme est clairement vrai pour G_0^0 , G_1^0 et G_1^1 .

$$\text{Soit } n \in \mathbb{N}^* \text{ et supposons que } \forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \quad G_{n-1}^k = \frac{\prod_{q=1}^{n-1} (1 - X^q)}{\prod_{q=1}^k (1 - X^q) \prod_{q=1}^{n-1-k} (1 - X^q)}$$

$$\text{On a } G_n^0 = 1 = \frac{\prod_{q=1}^n (1 - X^q)}{\prod_{q=1}^0 (1 - X^q) \prod_{q=1}^n (1 - X^q)}, \quad G_n^0 = 1 = \frac{\prod_{q=1}^n (1 - X^q)}{\prod_{q=1}^n (1 - X^q) \prod_{q=1}^0 (1 - X^q)}$$

et pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, on a

$$G_n^k = G_{n-1}^{k-1} + X^k G_{n-1}^k = \frac{\prod_{q=1}^{n-1} (1 - X^q)}{\prod_{q=1}^{k-1} (1 - X^q) \prod_{q=1}^{(n-1)-(k-1)} (1 - X^q)} + X^k \frac{\prod_{q=1}^{n-1} (1 - X^q)}{\prod_{q=1}^k (1 - X^q) \prod_{q=1}^{n-1-k} (1 - X^q)}$$

$$\text{d'où } G_n^k = \frac{\prod_{q=1}^n (1 - X^q)}{\prod_{q=1}^k (1 - X^q) \prod_{q=1}^{n-k} (1 - X^q)} \left(\frac{(1 - X^k)}{(1 - X^n)} + X^k \frac{(1 - X^{n-k})}{(1 - X^n)} \right)$$

$$\text{avec } \frac{(1 - X^k)}{(1 - X^n)} + X^k \frac{(1 - X^{n-k})}{(1 - X^n)} = \frac{(1 - X^k)}{(1 - X^n)} + \frac{(X^k - X^n)}{(1 - X^n)} = \frac{(1 - X^n)}{(1 - X^n)} = 1$$

$$\text{d'où } G_n^k = \frac{\prod_{q=1}^n (1 - X^q)}{\prod_{q=1}^k (1 - X^q) \prod_{q=1}^{n-k} (1 - X^q)} \text{ et par récurrence, on en déduit que le lemme}$$

est vrai. □

Notons $\varphi(z) = \sum_{j=2}^{+\infty} b_j(\lambda) z^j$ la linéarisante formelle de P_λ .

Proposition 2.3.20.

$$\forall j \in \mathbb{N}^* \quad b_j(\lambda) = \frac{P_{j-1}(\lambda)}{\prod_{q=1}^{j-1} (1 - \lambda^q)}$$

Démonstration :

$$\text{D'après la relation (2.5), on a } b_1(\lambda) = 1 \text{ et } b_n(\lambda) = \frac{1}{\lambda^n - \lambda} \sum_{r=2}^n a_r(\lambda) \sum_{\substack{(j_1, j_2, \dots, j_r) \in (\mathbb{N}^*)^r \\ \sum_{1 \leq k \leq r} j_k = n}} \prod_{1 \leq k \leq r} b_{j_k}(\lambda),$$

$$\text{d'où, comme } a_2(\lambda) = -\lambda \text{ et } a_j(\lambda) = 0 \text{ pour } j \geq 3, b_n(\lambda) = \frac{-\lambda}{\lambda^n - \lambda} \sum_{\substack{(j_1, j_2) \in (\mathbb{N}^*)^2 \\ j_1 + j_2 = n}} b_{j_1}(\lambda) b_{j_2}(\lambda).$$

$$\text{On a alors } b_1(\lambda) = 1 = \frac{1}{1} = \frac{P_0(\lambda)}{\prod_{q=1}^0 (1 - \lambda^q)}.$$

Montrons par récurrence que la proposition est vraie.

$$\text{Soit } j \geq 2 \text{ et supposons que } \forall k \in \llbracket 1, j-1 \rrbracket, b_k(\lambda) = \frac{P_{k-1}(\lambda)}{\prod_{q=1}^{k-1} (1 - \lambda^q)}.$$

D'après ci-dessus, on a

$$\begin{aligned} b_j(\lambda) &= \frac{-\lambda}{\lambda^j - \lambda} \sum_{\substack{(j_1, j_2) \in (\mathbb{N}^*)^2 \\ j_1 + j_2 = j}} b_{j_1}(\lambda) b_{j_2}(\lambda) \\ &= \frac{1}{1 - \lambda^{j-1}} \sum_{d=1}^{j-1} b_d(\lambda) b_{j-d}(\lambda) \\ &= \frac{1}{1 - \lambda^{j-1}} \frac{\prod_{q=1}^{j-2} (1 - \lambda^q)}{\prod_{q=1}^{j-2} (1 - \lambda^q)} \sum_{d=1}^{j-1} \frac{P_{d-1}(\lambda)}{\prod_{q=1}^{d-1} (1 - \lambda^q)} \frac{P_{j-d-1}(\lambda)}{\prod_{q=1}^{j-d-1} (1 - \lambda^q)} \\ &= \frac{1}{\prod_{q=1}^{j-1} (1 - \lambda^q)} \sum_{d=0}^{j-2} \prod_{q=1}^{j-2} (1 - \lambda^q) \frac{P_d(\lambda)}{\prod_{q=1}^d (1 - \lambda^q)} \frac{P_{j-2-d}(\lambda)}{\prod_{q=1}^{j-2-d} (1 - \lambda^q)} \\ &= \frac{1}{\prod_{q=1}^{j-1} (1 - \lambda^q)} \sum_{d=0}^{j-2} G_{j-2}^d(\lambda) P_d(\lambda) P_{j-2-d}(\lambda) = \frac{P_{j-1}(\lambda)}{\prod_{q=1}^{j-1} (1 - \lambda^q)} \end{aligned}$$

□

Par récurrence, la propriété est donc vraie.

Grâce à l'expression des $b_j(\lambda)$ donnée dans la proposition 2.3.20, en passant aux valeurs absolues, on obtient une expression permettant une minoration des $|b_j(\lambda)|$. Malheureusement, à cause des polynômes P_j , elle n'est pas directement exploitable. On obtient

Proposition 2.3.21.

$$\forall j \geq 2 \quad |b_j(\lambda)| \geq \frac{|P_{j-1}(\lambda)|}{\prod_{q=1}^{j-1} |1 - \lambda^q|}$$

Pour pouvoir utiliser cette inégalité pour montrer de façon élémentaire que φ est de rayon nul, il faudrait pouvoir minorer $|P_{j-1}(\lambda)|$ et majorer $\prod_{q=1}^{j-1} |1 - \lambda^q|$.

Remarque 2.3.22. Lorsque $j = 1 + q_k$, il est facile d'obtenir une majoration grossière des $\prod_{q=1}^{j-1} |1 - \lambda^q|$. En effet, on a $\forall q \in \mathbb{N}^* \quad 0 < |1 - \lambda^q| \leq |1| + |\lambda^q| \leq 1 + 1 \leq 2$,

d'où $\prod_{q=1}^{j-1} |1 - \lambda^q| \leq 2^{j-2} |1 - \lambda^{j-1}| \leq 2^{j-1} |1 - \lambda^{j-1}| \leq 2^{q_k} |\lambda^{q_k} - 1|$. Or, d'après

la théorie des fractions continues, on a $\left| \theta - \frac{p_k}{q_k} \right| \leq \frac{1}{q_k q_{k+1}}$, d'où $|\lambda^{q_k} - 1| = |e^{i2\pi q_k \theta} - e^{i2\pi p_k}| \leq 2\pi |q_k \theta - p_k| \leq 2\pi \frac{1}{q_{k+1}}$, et finalement, $\prod_{q=1}^{j-1} |1 - \lambda^q| \leq 2\pi \frac{2^{q_k}}{q_{k+1}}$

Et on peut alors en déduire que, lorsque $j = 1 + q_k$,

$$|b_{1+q_k}(\lambda)| \geq \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2^{q_k} q_{k+1}} |P_{q_k}(\lambda)| \quad (2.8)$$

Remarque 2.3.23. Pour montrer que φ est de rayon nul, il faudrait pouvoir minorer $|P_{q_k}(\lambda)|$, par exemple par 1. On aurait alors

$$\frac{1}{1 + q_k} \ln(|b_{1+q_k}(\lambda)|) \geq \frac{1}{2} \frac{1}{q_k} \left(\ln \left(\frac{1}{2\pi} \right) + \ln \left(\frac{1}{2^{q_k}} \right) + \ln(q_{k+1}) \right)$$

d'où

$$\frac{1}{1 + q_k} \ln(|b_{1+q_k}(\lambda)|) \geq -\frac{\ln(2\pi)}{2q_k} - \frac{\ln(2)}{2} + \frac{1}{2} \frac{\ln(q_{k+1})}{q_k}$$

Ainsi, si $\limsup_{k \rightarrow +\infty} \frac{\ln(q_{k+1})}{q_k} = +\infty$, on obtiendrait φ de rayon nul.

Remarque 2.3.24. Une étude expérimentale réalisée avec MAPLE suggère que l'on a bien $|P_{q_k}(\lambda)| \geq 1$ et même mieux. Il semble que l'on ait,

$$\text{pour tout } j \geq 3, \quad m_j = \min_{t \in [0,1]} \ln(|P_j(e^{i2\pi t})|) \text{ est voisin de } j - 2,$$

ce qui permettrait au moins de minorer $|P_{j-1}(\lambda)|$ par 1, voire plus.

Voici le programme MAPLE ayant permis d'obtenir ces suppositions:

```
>restart;
>mamaxi:=20;
>G[0,0]:=1:G[1,0]:=1:G[1,1]:=1:for n from 2 to mamaxi do G[n,0]:=1:G[n,n]:=1:for
k from 1 to n-1 do G[n,k]:=expand(G[n-1,k-1]+X^k*G[n-1,k]) od: od:
>P[0]:=1:for n from 1 to mamaxi do S:=0: for k from 0 to n-1 do S:=S+G[n-
1,k]*P[k]*P[n-1-k] od: P[n]:=expand(S) od:
>Q:=proc(n,x)
global P;
local rt,res;
rt:=subs(X=x,P[n]);
res:=ln(abs(evalf(rt)));
end;
>for k from 0 to 7 do print(k, poly, P[k]) od;
>for k from 3 to 12 do print(poly, k);plot(Q(k,exp(I*2*Pi*x)),x=0..1,numpoints=
200) od;
```

Grâce à ce programme, on a obtenu pour les polynômes P_j :

$$P_0 = 1, P_1 = 1, P_2 = 2, P_3 = X + 5, P_4 = 4X^2 + 6X + 14, P_5 = 6X^4 + 16X^3 + 28X^2 + 28X + 42, P_6 = 4X^7 + 32X^6 + 48X^5 + 108X^4 + 128X^3 + 148X^2 + 120X + 132, P_7 = 27X^{10} + 89X^9 + 204X^8 + 327X^7 + 536X^6 + 660X^5 + 811X^4 + 756X^3 + 705X^2 + 495X + 429, \dots$$

Voici les graphiques obtenus:

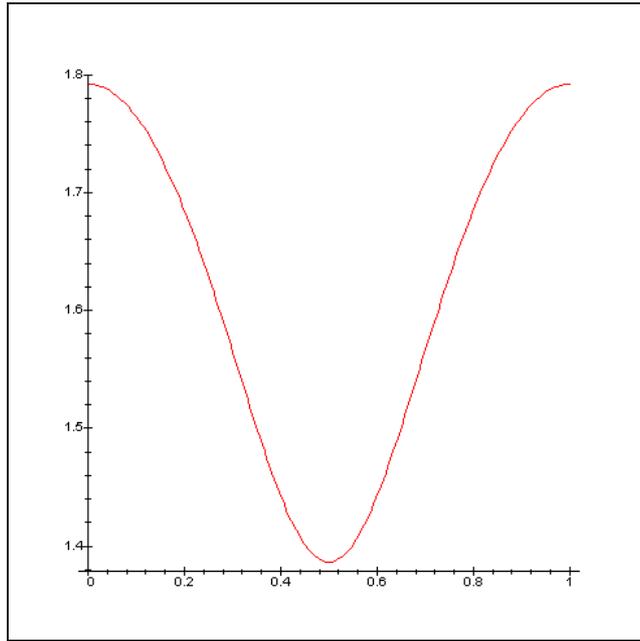


FIG. 2.1 – $t \mapsto \ln(|P_3(e^{i2\pi t})|)$

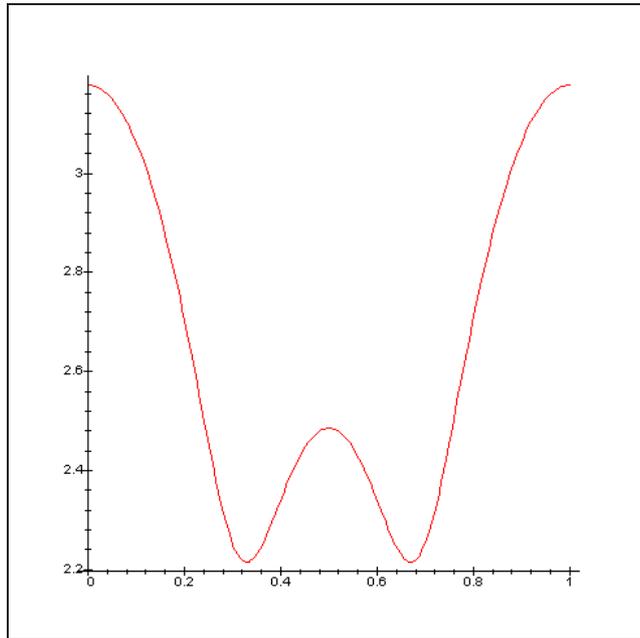


FIG. 2.2 – $t \mapsto \ln(|P_4(e^{i2\pi t})|)$

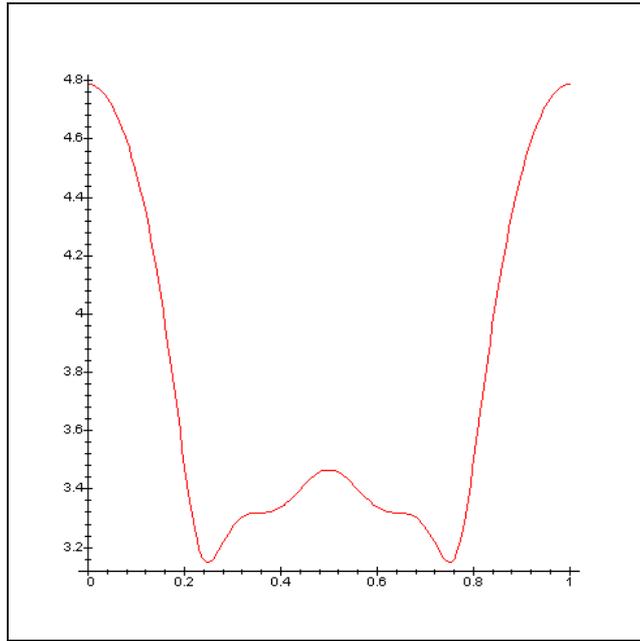


FIG. 2.3 – $t \mapsto \ln(|P_5(e^{i2\pi t})|)$

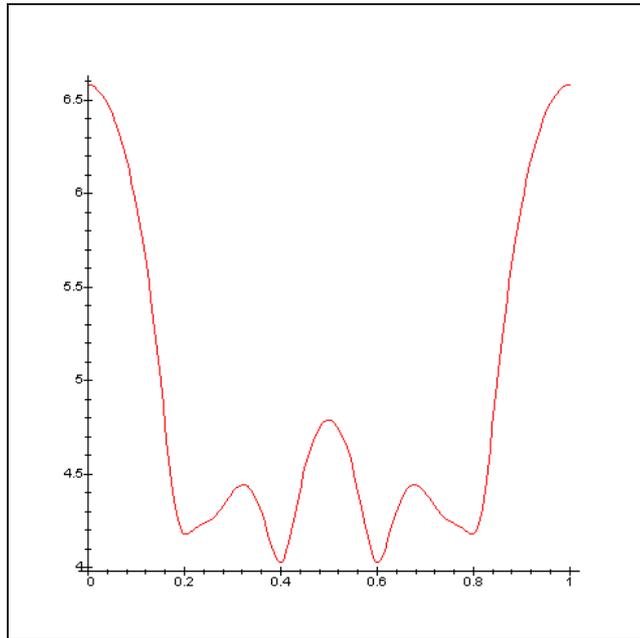


FIG. 2.4 – $t \mapsto \ln(|P_6(e^{i2\pi t})|)$

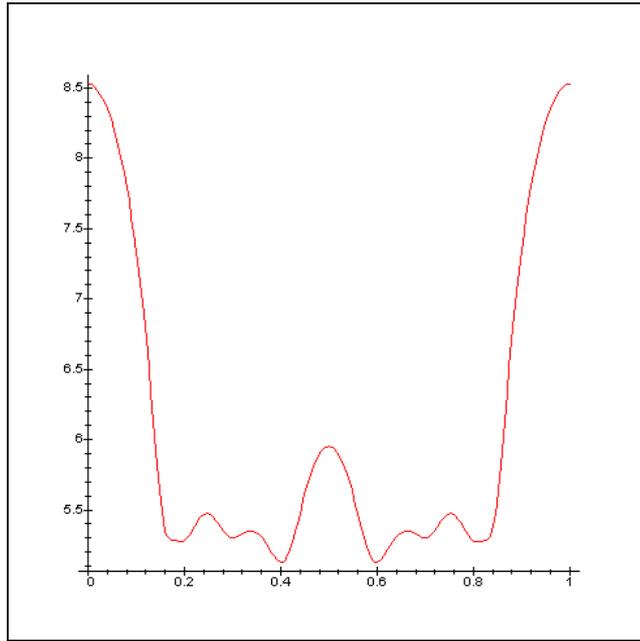


FIG. 2.5 - $t \mapsto \ln(|P_7(e^{i2\pi t})|)$

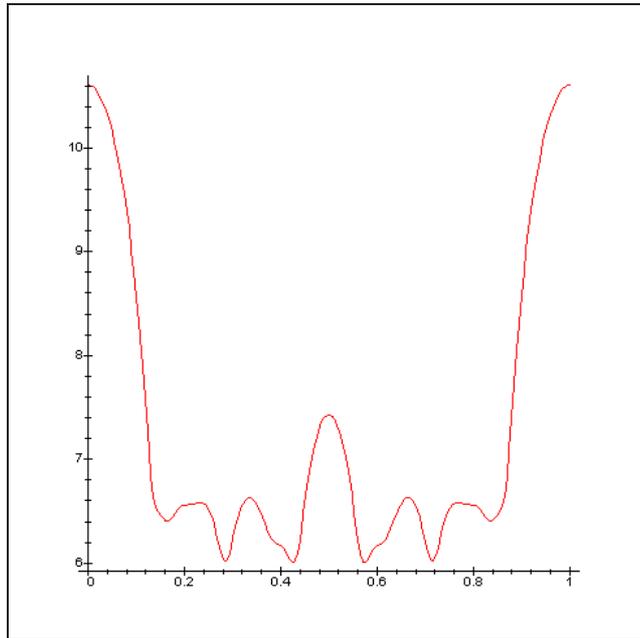


FIG. 2.6 - $t \mapsto \ln(|P_8(e^{i2\pi t})|)$

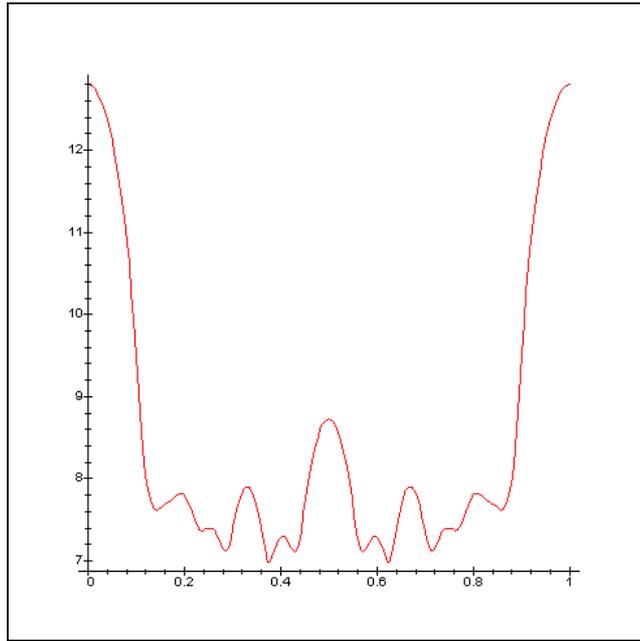


FIG. 2.7 – $t \mapsto \ln(|P_9(e^{i2\pi t})|)$

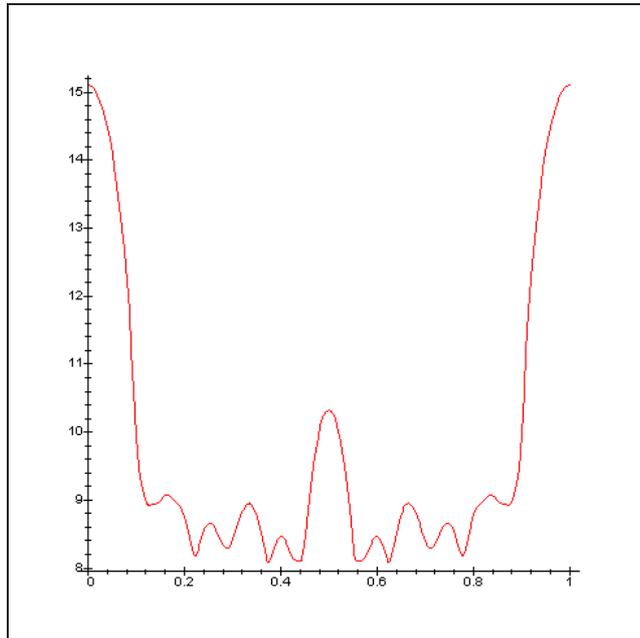


FIG. 2.8 – $t \mapsto \ln(|P_{10}(e^{i2\pi t})|)$

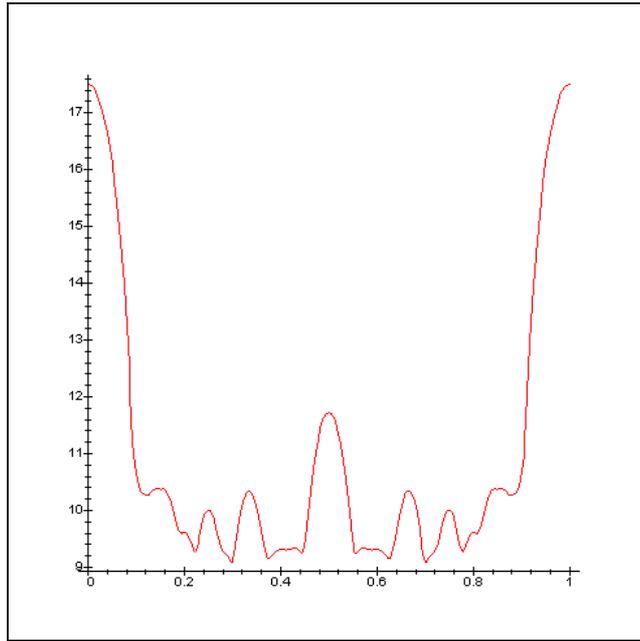


FIG. 2.9 – $t \mapsto \ln(|P_{11}(e^{i2\pi t})|)$

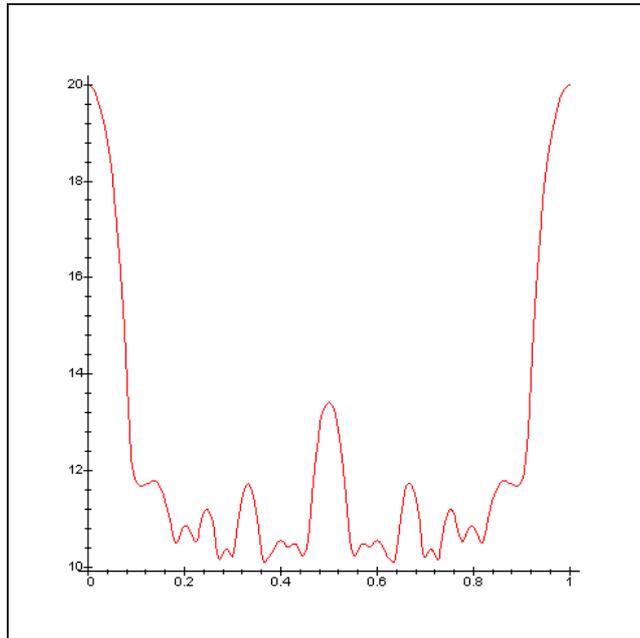


FIG. 2.10 – $t \mapsto \ln(|P_{12}(e^{i2\pi t})|)$

Chapitre 3

Diamètre transfini

Comme dans le chapitre précédent, K désignera un sous-corps valué complet de \tilde{K} . Ce chapitre est destiné à prouver que l'on peut généraliser la notion de diamètre transfini au cadre p -adique, ce qui nous permettra au prochain chapitre de démontrer l'analogie du théorème de Perez-Marco dans le cadre p -adique. Certaines propositions connues dans \mathbb{C} se généralisent à n'importe quel sous-corps valué complet K de \tilde{K} , par contre d'autres nécessitent que K soit localement compact. Nous indiquerons explicitement lesquelles de ces propositions utilisent la locale-compacité. (*Remarque: lorsque K est un sous-corps valué complet localement compact de \mathbb{C}_p , forcément K est une extension finie de \mathbb{Q}_p*)

3.1 Définition du diamètre transfini d'un compact

Dans toute cette section, E désigne un compact non vide de K .

Définition 3.1.1. *Pour tout $n \geq 2$, on pose*

$$\Delta_n(E) = \max_{z_1, z_2, \dots, z_n \in E} \prod_{\substack{\mu=1 \\ \nu \neq \mu}}^n \prod_{\nu=1}^n |z_\mu - z_\nu|$$

Dans le produit ci-dessus, il y a $n^2 - n$ termes¹. On normalise alors en posant

$$\delta_n(E) = \Delta_n(E)^{\frac{1}{n(n-1)}}$$

1. car $(\mu, \nu) \in [[1, n]] \times [[1, n]] \setminus \text{diagonale}$.

Remarque 3.1.2. Comme E est borné, pour tout $n \geq 2$, on a²

$$0 \leq \Delta_n(E) \leq \text{diam}(E)^{n^2-n} < +\infty \quad \text{et} \quad 0 \leq \delta_n(E) \leq \text{diam}(E) < +\infty$$

Définition 3.1.3. On appelle n -uplet de Fekete tout point $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ de E^n vérifiant

$$\Delta_n(E) = \prod_{\mu=1}^n \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq \mu}}^n |x_\mu - x_\nu|$$

Proposition 3.1.4. La suite $(\delta_n(E))_{n \geq 2}$ est décroissante et minorée par 0. (et majorée par $\text{diam}(E)$)

Elle converge donc vers un nombre réel que nous noterons $d(E)$ et que nous appellerons diamètre transfini vérifiant $0 \leq d(E) \leq \text{diam}(E)$

On convient aussi de poser $d(\emptyset) = 0 = \text{diam}(\emptyset)$.

Démonstration :

Soit $n \geq 2$.

1^{er} cas : $\Delta_{n+1}(E) = 0$

On a alors clairement : $\delta_{n+1}(E) = 0 \leq \delta_n(E)$.

2^{ème} cas : $\Delta_{n+1}(E) > 0$

L'ensemble E contient alors au moins $n+1$ points distincts et par conséquent, on a aussi $\Delta_n(E) > 0$.

Soit $x = (x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ un $(n+1)$ -uplet de Fekete.

Choisissons $k_0 \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$ de telle sorte que $\prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq k_0}}^{n+1} |x_{k_0} - x_\nu|$ soit minimal.

2. Etant donné que E est borné, il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $E \subseteq B_f(0, r)$ et, pour tout $z_1, z_2 \in E$, on a $|z_2 - z_1| \leq |z_2| + |z_1| \leq r + r$, d'où $\text{diam}(E) = \sup_{z_1, z_2 \in E} |z_2 - z_1| \leq 2r < +\infty$, d'où

$$\max_{z_1, z_2, \dots, z_n \in E} \prod_{\mu=1}^n \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq \mu}}^n |z_\mu - z_\nu| \leq \prod_{\mu=1}^n \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq \mu}}^n \text{diam}(E) \leq \text{diam}(E)^{n^2-n} < +\infty$$

On a alors

$$\begin{aligned}
\Delta_{n+1}(E) &\leq \prod_{\mu=1}^{n+1} \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq \mu}}^{n+1} |x_\mu - x_\nu| \\
&\leq \prod_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq k_0}}^{n+1} \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq \mu \\ \nu \neq k_0}}^{n+1} |x_\mu - x_\nu| \prod_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq k_0}}^{n+1} |x_\mu - x_{k_0}| \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq k_0}}^{n+1} |x_{k_0} - x_\nu| \\
&\leq \Delta_n(E) \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq k_0}}^{n+1} |x_{k_0} - x_\nu|^2
\end{aligned}$$

d'où

$$\left(\frac{\Delta_{n+1}(E)}{\Delta_n(E)} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq k_0}}^{n+1} |x_{k_0} - x_\nu| \quad (3.1)$$

On a aussi, par définition de k_0 ,

$$\forall k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket \quad \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq k_0}}^{n+1} |x_{k_0} - x_\nu| \leq \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq k}}^{n+1} |x_k - x_\nu|$$

d'où

$$\prod_{k=1}^{n+1} \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq k_0 \\ \nu \neq k}}^{n+1} |x_{k_0} - x_\nu| \leq \prod_{k=1}^{n+1} \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq k}}^{n+1} |x_k - x_\nu|$$

i.e.

$$\left(\prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq k_0}}^{n+1} |x_{k_0} - x_\nu| \right)^{n+1} \leq \Delta_{n+1}(E)$$

i.e.

$$\prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq k_0}}^{n+1} |x_{k_0} - x_\nu| \leq \Delta_{n+1}(E)^{\frac{1}{n+1}} \quad (3.2)$$

De (3.1) et (3.2) , on déduit que

$$\left(\frac{\Delta_{n+1}(E)}{\Delta_n(E)} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \Delta_{n+1}(E)^{\frac{1}{n+1}}$$

d'où

$$\Delta_{n+1}(E)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1}} \leq \Delta_n(E)^{\frac{1}{2}}$$

i.e.

$$\Delta_{n+1}(E)^{\frac{n-1}{2(n+1)}} \leq \Delta_n(E)^{\frac{1}{2}}$$

d'où, en élevant à la puissance $\frac{2}{n(n-1)}$,

$$\Delta_{n+1}(E)^{\frac{1}{n(n+1)}} \leq \Delta_n(E)^{\frac{1}{(n-1)n}}$$

i.e.

$$\delta_{n+1}(E) \leq \delta_n(E)$$

Par conséquent, la suite $(\delta_n(E))_{n \geq 2}$ est décroissante et minorée par 0 et on peut poser

$$d(E) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \delta_n(E)$$

Remarque 3.1.5. Si E est un sous-ensemble fini non vide de K , alors, E est un compact et $\forall n \geq 1 + \text{card}(E) \quad \Delta_n(E) = 0$.

Par conséquent, pour tout sous-ensemble fini de K , on a $d(E) = 0$.

Si E est un compact de K contenant une infinité de points, alors,

$$\forall n \geq 2 \quad \Delta_n(E) > 0$$

Proposition 3.1.6. On a aussi

1. Si E et F sont deux compacts de K vérifiant $E \subseteq F$, alors $d(E) \leq d(F)$
2. Si E est un compact de K et si $b \in K$, alors $d(E + b) = d(E)$
3. Si E est un compact de K et si $a \in K$, alors $d(aE) = |a| d(E)$
4. Si E est un compact de K , si $r \in \mathbb{R}_+^*$ et si $\varphi : K \rightarrow K$ vérifie

$$\forall x \in K \quad \forall y \in K \quad |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq r |x - y| ,$$
 alors $d(\varphi(E)) \leq r d(E)$

Démonstration :

1. Si E et F sont deux compacts de K vérifiant $E \subseteq F$, alors, par propriété du max, on a, pour tout $n \geq 2$, $\Delta_n(E) \leq \Delta_n(F)$, d'où $\delta_n(E) \leq \delta_n(F)$, d'où finalement $d(E) \leq d(F)$.

2. Si E est un compact de K et si $b \in K$, pour tout $n \geq 2$, on a

$$\begin{aligned}
\Delta_n(E + b) &= \max_{z_1, z_2, \dots, z_n \in E+b} \prod_{\mu=1}^n \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq \mu}}^n |z_\mu - z_\nu| \\
&= \max_{z_1, z_2, \dots, z_n \in E} \prod_{\mu=1}^n \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq \mu}}^n |(z_\mu + b) - (z_\nu + b)| \\
&= \max_{z_1, z_2, \dots, z_n \in E} \prod_{\mu=1}^n \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq \mu}}^n |z_\mu - z_\nu| \\
&= \Delta_n(E)
\end{aligned}$$

d'où $\delta_n(E + b) = \delta_n(E)$, d'où finalement $d(E + b) = d(E)$.

3. Si E est un compact de K et si $a \in K$, pour tout $n \geq 2$, on a

$$\begin{aligned}
\Delta_n(aE) &= \max_{z_1, z_2, \dots, z_n \in aE} \prod_{\mu=1}^n \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq \mu}}^n |z_\mu - z_\nu| \\
&= \max_{z_1, z_2, \dots, z_n \in E} \prod_{\mu=1}^n \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq \mu}}^n |az_\mu - az_\nu| \\
&= |a|^{n^2-n} \max_{z_1, z_2, \dots, z_n \in E} \prod_{\mu=1}^n \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq \mu}}^n |z_\mu - z_\nu| \\
&= |a|^{n^2-n} \Delta_n(E)
\end{aligned}$$

d'où $\delta_n(aE) = |a| \delta_n(E)$, d'où finalement $d(aE) = |a| d(E)$.

4. Si E est un compact de K , si $r \in \mathbb{R}_+^*$ et si $\varphi : K \rightarrow K$ vérifie

$$\forall x \in K \quad \forall y \in K \quad |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq r |x - y|$$

Pour tout $n \geq 2$, on a

$$\begin{aligned}
\Delta_n(\varphi(E)) &= \max_{z_1, z_2, \dots, z_n \in \varphi(E)} \prod_{\mu=1}^n \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq \mu}}^n |z_\mu - z_\nu| \\
&= \max_{z_1, z_2, \dots, z_n \in E} \prod_{\mu=1}^n \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq \mu}}^n |\varphi(z_\mu) - \varphi(z_\nu)| \\
&\leq \max_{z_1, z_2, \dots, z_n \in E} \prod_{\mu=1}^n \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq \mu}}^n r |z_\mu - z_\nu| \\
&\leq r^{n^2-n} \max_{z_1, z_2, \dots, z_n \in E} \prod_{\mu=1}^n \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq \mu}}^n |z_\mu - z_\nu| \\
&\leq r^{n^2-n} \Delta_n(E)
\end{aligned}$$

d'où $\delta_n(\varphi(E)) \leq r \delta_n(E)$, d'où finalement $d(\varphi(E)) \leq r d(E)$.

Théorème 3.1.7. *Soit E un compact non vide de K .*

Soit $n \geq 2$ et soit $x = (x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ un $(n+1)$ -uplet de Fekete.

Choisissons $k_0 \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$ de telle sorte que $\prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq k_0}}^{n+1} |x_{k_0} - x_\nu|$ soit minimal.

Il existe alors $P \in K[X]$ polynôme unitaire de degré n vérifiant

$$\max_{z \in E} |P(z)| \leq \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq k_0}}^{n+1} |x_{k_0} - x_\nu|$$

Démonstration :

• 1er cas: E possède au plus n points y_1, y_2, \dots, y_j .

Si $j < n$, on pose $y_{j+1} = y_{j+2} = \dots = y_n = y_j$. On pose ensuite

$$P(X) = \prod_{k=1}^n (X - y_k) \text{ et on vérifie que } \max_{z \in E} |P(z)| = 0 \leq \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq k_0}}^{n+1} |x_{k_0} - x_\nu|$$

• 2ème cas: E possède au moins $n + 1$ points.

On a alors $\Delta_n(E) > 0$ et $\Delta_{n+1}(E) > 0$. Soit $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ un n -uplet

de Fekete. Posons $P(X) = \prod_{k=1}^n (X - y_k)$. On a $P \in K[X]$ et P est un polynôme

unitaire de degré n . De plus, on a $\Delta_n(E) = \prod_{\mu=1}^n \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq \mu}}^n |y_\mu - y_\nu|$

Soit $z \in E$. Posons $y_{n+1} = z$. On a

$$\begin{aligned}
|P(z)|^2(\Delta_n(E)) &= |P(z)|^2 \prod_{\mu=1}^n \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq \mu}}^n |y_\mu - y_\nu| \\
&= \prod_{k=1}^n |z - y_k|^2 \prod_{\mu=1}^n \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq \mu}}^n |y_\mu - y_\nu| \\
&= \prod_{\nu=1}^n |y_{n+1} - y_\nu| \prod_{\mu=1}^n |y_\mu - y_{n+1}| \prod_{\mu=1}^n \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq \mu}}^n |y_\mu - y_\nu| \\
&= \prod_{\mu=1}^{n+1} \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq \mu}}^{n+1} |y_\mu - y_\nu| \\
&\leq \Delta_{n+1}(E)
\end{aligned}$$

De plus, comme $\Delta_n(E) > 0$, on a

$$|P(z)| \leq \left(\frac{\Delta_{n+1}(E)}{\Delta_n(E)} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.3)$$

Or, d'après le (3.1) de la proposition 3.1.4, on a

$$\left(\frac{\Delta_{n+1}(E)}{\Delta_n(E)} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq k_0}}^{n+1} |x_{k_0} - x_\nu|$$

Par conséquent, on déduit de ce qui précède que

$$|P(z)| \leq \left(\frac{\Delta_{n+1}(E)}{\Delta_n(E)} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq k_0}}^{n+1} |x_{k_0} - x_\nu|$$

d'où

$$|P(z)| \leq \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq k_0}}^{n+1} |x_{k_0} - x_\nu| \quad (3.4)$$

Ceci étant vrai pour tout $z \in E$, on a

$$\max_{z \in E} |P(z)| \leq \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq k_0}}^{n+1} |x_{k_0} - x_\nu|$$

Lemme 3.1.8. Soit $n \geq 2$ et soit $z_1, z_2, \dots, z_n \in K$.

On a

$$\prod_{\mu=1}^n \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq \mu}}^n |z_\mu - z_\nu| = \left| \left(\begin{array}{cccccc} 1 & z_1 & z_1^2 & z_1^3 & \dots & z_1^{n-1} \\ 1 & z_2 & z_2^2 & z_2^3 & \dots & z_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & z_n & z_n^2 & z_n^3 & \dots & z_n^{n-1} \end{array} \right) \right|^2$$

(la notation ci-dessus signifie que l'on élève au carré la valeur absolue du déterminant.)

Démonstration :

$$\begin{aligned} \text{On a} \\ \prod_{\mu=1}^n \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq \mu}}^n |z_\mu - z_\nu| &= \prod_{\mu=1}^n \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu < \mu}}^n |z_\mu - z_\nu| \prod_{\mu=1}^n \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu > \mu}}^n |z_\mu - z_\nu| \\ &= \prod_{\mu=1}^n \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu < \mu}}^n |z_\mu - z_\nu| \prod_{\nu=1}^n \prod_{\substack{\mu=1 \\ \mu < \nu}}^n |z_\nu - z_\mu| \\ &= \left(\prod_{\mu=1}^n \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu < \mu}}^n |z_\mu - z_\nu| \right)^2 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Montrons que

$$\prod_{\mu=1}^n \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu < \mu}}^n (z_\mu - z_\nu) = \begin{vmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 & z_1^3 & \dots & z_1^{n-1} \\ 1 & z_2 & z_2^2 & z_2^3 & \dots & z_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & z_n & z_n^2 & z_n^3 & \dots & z_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Pour cela, considérons, pour tout $m \in \llbracket 2, n \rrbracket$,

$$\text{la propriété } \mathcal{P}(m) : \left\{ \prod_{\mu=1}^m \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu < \mu}}^m (z_\mu - z_\nu) = \begin{vmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 & z_1^3 & \dots & z_1^{m-1} \\ 1 & z_2 & z_2^2 & z_2^3 & \dots & z_2^{m-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & z_m & z_m^2 & z_m^3 & \dots & z_m^{m-1} \end{vmatrix} \right\}.$$

$$\mathcal{P}(2) \text{ est vraie car } \prod_{\mu=1}^2 \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu < \mu}}^2 (z_\mu - z_\nu) = (z_2 - z_1) = \begin{vmatrix} 1 & z_1 \\ 1 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Soit $m \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket$ et supposons que $\mathcal{P}(m)$ est vraie

$$\text{Posons } A_{m+1} = \begin{vmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 & \dots & z_1^{m-1} & z_1^m \\ 1 & z_2 & z_2^2 & \dots & z_2^{m-1} & z_2^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & z_{m+1} & z_{m+1}^2 & \dots & z_{m+1}^{m-1} & z_{m+1}^m \end{vmatrix}$$

En remplaçant la dernière colonne par la dernière colonne moins z_{m+1} fois l'avant-dernière, puis l'avant-dernière par l'avant-dernière moins z_{m+1} fois l'avant-avant-dernière, etc ... , puis en développant suivant la dernière ligne et enfin en factorisant, on obtient :

$$\begin{aligned}
A_{m+1} &= \begin{vmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 & \dots & z_1^{m-1} & z_1^m \\ 1 & z_2 & z_2^2 & \dots & z_2^{m-1} & z_2^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & z_{m+1} & z_{m+1}^2 & \dots & z_{m+1}^{m-1} & z_{m+1}^m \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 & \dots & z_1^{m-1} & z_1^{m-1}(z_1 - z_{m+1}) \\ 1 & z_2 & z_2^2 & \dots & z_2^{m-1} & z_2^{m-1}(z_2 - z_{m+1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & z_{m+1} & z_{m+1}^2 & \dots & z_{m+1}^{m-1} & 0 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 & \dots & z_1^{m-2}(z_1 - z_{m+1}) & z_1^{m-1}(z_1 - z_{m+1}) \\ 1 & z_2 & z_2^2 & \dots & z_2^{m-2}(z_2 - z_{m+1}) & z_2^{m-1}(z_2 - z_{m+1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & z_{m+1} & z_{m+1}^2 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
&= \dots \\
&= \begin{vmatrix} 1 & (z_1 - z_{m+1}) & z_1(z_1 - z_{m+1}) & \dots & z_1^{m-2}(z_1 - z_{m+1}) & z_1^{m-1}(z_1 - z_{m+1}) \\ 1 & (z_2 - z_{m+1}) & z_2(z_2 - z_{m+1}) & \dots & z_2^{m-2}(z_2 - z_{m+1}) & z_2^{m-1}(z_2 - z_{m+1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{m+2} \begin{vmatrix} (z_1 - z_{m+1}) & (z_1 - z_{m+1})z_1 & (z_1 - z_{m+1})z_1^2 & \dots & (z_1 - z_{m+1})z_1^{m-1} \\ (z_2 - z_{m+1}) & (z_2 - z_{m+1})z_2 & (z_2 - z_{m+1})z_2^2 & \dots & (z_2 - z_{m+1})z_2^{m-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ (z_m - z_{m+1}) & (z_m - z_{m+1})z_m & (z_m - z_{m+1})z_m^2 & \dots & (z_m - z_{m+1})z_m^{m-1} \end{vmatrix} \\
&= (-1)^m (z_1 - z_{m+1})(z_2 - z_{m+1}) \dots (z_m - z_{m+1}) \begin{vmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 & \dots & z_1^{m-1} \\ 1 & z_2 & z_2^2 & \dots & z_2^{m-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & z_m & z_m^2 & \dots & z_m^{m-1} \end{vmatrix} \\
&= (z_{m+1} - z_1)(z_{m+1} - z_2) \dots (z_{m+1} - z_m) \begin{vmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 & \dots & z_1^{m-1} \\ 1 & z_2 & z_2^2 & \dots & z_2^{m-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & z_m & z_m^2 & \dots & z_m^{m-1} \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

En utilisant la relation de récurrence, on obtient :

$$\begin{aligned}
A_{m+1} &= \prod_{\nu=1}^m (z_{m+1} - z_\nu) \prod_{\mu=1}^m \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu < \mu}}^m (z_\mu - z_\nu) \\
&= \prod_{\mu=1}^{m+1} \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu < \mu}}^{m+1} (z_\mu - z_\nu)
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(m+1)$ est vraie.

Par récurrence, on en déduit alors que

$$\prod_{\mu=1}^n \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu < \mu}}^n (z_\mu - z_\nu) = \begin{vmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 & z_1^3 & \dots & z_1^{n-1} \\ 1 & z_2 & z_2^2 & z_2^3 & \dots & z_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & z_n & z_n^2 & z_n^3 & \dots & z_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

d'où, en passant aux valeurs absolues,

$$\prod_{\mu=1}^n \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu < \mu}}^n |z_\mu - z_\nu| = \left| \begin{pmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 & z_1^3 & \dots & z_1^{n-1} \\ 1 & z_2 & z_2^2 & z_2^3 & \dots & z_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & z_n & z_n^2 & z_n^3 & \dots & z_n^{n-1} \end{pmatrix} \right|$$

d'où, en élevant au carré,

$$\left(\prod_{\mu=1}^n \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu < \mu}}^n |z_\mu - z_\nu| \right)^2 = \left| \begin{pmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 & z_1^3 & \dots & z_1^{n-1} \\ 1 & z_2 & z_2^2 & z_2^3 & \dots & z_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & z_n & z_n^2 & z_n^3 & \dots & z_n^{n-1} \end{pmatrix} \right|^2$$

d'où, d'après (3.5)

$$\prod_{\mu=1}^n \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq \mu}}^n |z_\mu - z_\nu| = \left| \begin{pmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 & z_1^3 & \dots & z_1^{n-1} \\ 1 & z_2 & z_2^2 & z_2^3 & \dots & z_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & z_n & z_n^2 & z_n^3 & \dots & z_n^{n-1} \end{pmatrix} \right|^2$$

Théorème 3.1.9. Soit E un compact de K et soit $P \in K[X]$ un polynôme unitaire de degré $n \geq 1$.

On a alors

$$(d(E))^n \leq \max_{z \in E} |P(z)|$$

Démonstration :

Si $d(E)=0$, c'est évident.

On suppose désormais que $d(E) > 0$. L'ensemble E est alors infini et, pour tout $k \geq 2$, $\Delta_k(E) > 0$.

Posons $M = \max_{z \in E} |P(z)|$. Si $M = 0$, E est un ensemble fini et le résultat est trivial. On supposera donc désormais que $M > 0$.

Soit a un entier supérieur ou égal à 2.

Pour tout $\mu \in \mathbb{N}$, notons k_μ le quotient de la division euclidienne de μ par n et r_μ le reste de la division euclidienne de μ par n .

On a, pour tout $\mu \in \mathbb{N}$,

$$\mu = k_\mu n + r_\mu \quad , \quad 0 \leq r_\mu < n \quad \text{et} \quad k_\mu n \leq \mu < (k_\mu + 1)n.$$

Pour tout $\mu \in \mathbb{N}$, posons aussi

$$P_\mu(X) = X^{r_\mu} (P(X))^{k_\mu}$$

$P_\mu(X)$ est alors un polynôme unitaire de degré $r_\mu + k_\mu n = \mu$ qui s'écrit sous la forme³

$$P_\mu(X) = X^\mu + \sum_{k=0}^{\mu-1} a_{\mu,k} X^k \quad \text{avec les } a_{\mu,k} \text{ dans } K$$

Posons $m = an$.

Soit $z = (z_1, z_2, \dots, z_m)$ un m -uplet de Fekete.

On a

$$\Delta_m(E) = \prod_{\mu=1}^m \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq \mu}}^m |z_\mu - z_\nu| = \left| \begin{pmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 & z_1^3 & \dots & z_1^{m-1} \\ 1 & z_2 & z_2^2 & z_2^3 & \dots & z_2^{m-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & z_m & z_m^2 & z_m^3 & \dots & z_m^{m-1} \end{pmatrix} \right|^2$$

3. avec $P_0(X) = 1$.

C'est-à-dire, en posant $A_m = \begin{vmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 & z_1^3 & \dots & z_1^{m-2} & z_1^{m-1} \\ 1 & z_2 & z_2^2 & z_2^3 & \dots & z_2^{m-2} & z_2^{m-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & z_m & z_m^2 & z_m^3 & \dots & z_m^{m-2} & z_m^{m-1} \end{vmatrix},$

$$\Delta_m(E) \leq |A_m|^2 \quad (3.6)$$

Comme $P_{m-1}(X) = X^{m-1} + \sum_{k=0}^{m-2} a_{m-1,k} X^k$, en remplaçant dans le déterminant la dernière colonne par la dernière colonne plus $a_{m-1,0}$ fois la première colonne plus $a_{m-1,1}$ fois la deuxième colonne plus $a_{m-1,2}$ fois la troisième colonne plus ... plus $a_{m-1,m-2}$ fois l'avant dernière colonne, on obtient

$$A_m = \begin{vmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 & z_1^3 & \dots & z_1^{m-2} & P_{m-1}(z_1) \\ 1 & z_2 & z_2^2 & z_2^3 & \dots & z_2^{m-2} & P_{m-1}(z_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & z_m & z_m^2 & z_m^3 & \dots & z_m^{m-2} & P_{m-1}(z_m) \end{vmatrix}$$

Comme $P_{m-2}(X) = X^{m-2} + \sum_{k=0}^{m-3} a_{m-2,k} X^k$, en remplaçant dans le déterminant l'avant-dernière colonne par l'avant-dernière colonne plus $a_{m-2,0}$ fois la première colonne plus $a_{m-2,1}$ fois la deuxième colonne plus $a_{m-2,2}$ fois la troisième colonne plus ... plus $a_{m-2,m-3}$ fois l'avant-avant-dernière colonne, on obtient

$$A_m = \begin{vmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 & z_1^3 & \dots & P_{m-2}(z_1) & P_{m-1}(z_1) \\ 1 & z_2 & z_2^2 & z_2^3 & \dots & P_{m-2}(z_2) & P_{m-1}(z_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & z_m & z_m^2 & z_m^3 & \dots & P_{m-2}(z_m) & P_{m-1}(z_m) \end{vmatrix}$$

Etc ...

d'où

$$A_m = \begin{vmatrix} 1 & P_1(z_1) & P_2(z_1) & P_3(z_1) & \dots & P_{m-2}(z_1) & P_{m-1}(z_1) \\ 1 & P_1(z_2) & P_2(z_2) & P_3(z_2) & \dots & P_{m-2}(z_2) & P_{m-1}(z_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & P_1(z_m) & P_2(z_m) & P_3(z_m) & \dots & P_{m-2}(z_m) & P_{m-1}(z_m) \end{vmatrix}$$

c'est-à-dire

$$A_m = \begin{vmatrix} P_0(z_1) & P_1(z_1) & P_2(z_1) & \dots & P_{m-2}(z_1) & P_{m-1}(z_1) \\ P_0(z_2) & P_1(z_2) & P_2(z_2) & \dots & P_{m-2}(z_2) & P_{m-1}(z_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ P_0(z_m) & P_1(z_m) & P_2(z_m) & \dots & P_{m-2}(z_m) & P_{m-1}(z_m) \end{vmatrix} \quad (3.7)$$

Comme E est compact, E est borné et il existe $R \in]1, +\infty[$ tel que $E \subseteq B_f(0, R)$. Pour tout $z \in E$ et tout $\mu \in [[0, m-1]]$, en utilisant le fait que $E \subseteq B_f(0, R)$ et $0 \leq r_\mu \leq n$, on a

$$|P_\mu(z)| \leq R^{r_\mu} |P(z)|^{k_\mu} \leq R^n |P(z)|^{k_\mu} \quad (3.8)$$

Soit $\mu \in [[0, m-1]]$, $q \in [[0, m-1]]$ et soit σ une permutation de $[[0, m-1]]$. D'après la relation précédente, on a

$$|P_\mu(z_{\sigma(q)})| \leq R^n |P(z_{\sigma(q)})|^{k_\mu} \quad (3.9)$$

et, en utilisant le fait que $z_{\sigma(q)} \in E$, on obtient,

$$|P(z_{\sigma(q)})| \leq \max_{z \in E} |P(z)|$$

d'où, par définition de M et par croissance sur \mathbb{R}_+ de $t \mapsto t^{k_\mu}$,

$$|P(z_{\sigma(q)})|^{k_\mu} \leq \left(\max_{z \in E} |P(z)| \right)^{k_\mu} = M^{k_\mu}$$

d'où, d'après (3.9),

$$|P_\mu(z_{\sigma(q)})| \leq R^n M^{k_\mu} \quad (3.10)$$

Pour achever cette démonstration, on va devoir séparer les cas complexes et p -adiques, car ce sont des arguments différents qui vont nous permettre d'obtenir les majorations voulues et de conclure.

• si $\tilde{K} = \mathbb{C}$, grâce à l'inégalité de Hadamard, en notant $\|\cdot\|$ la norme

hermitienne standard et en notant $X_\mu = \begin{pmatrix} P_\mu(z_1) \\ P_\mu(z_2) \\ P_\mu(z_3) \\ \vdots \\ P_\mu(z_m) \end{pmatrix}$,

on a

$$|A_m| \leq \|X_0\| \|X_1\| \|X_2\| \dots \|X_{m-1}\| \quad (3.11)$$

or, pour tout $\mu \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket$, grâce à (3.10) avec $\sigma = I_d$, on a

$$\begin{aligned} \|X_\mu\|^2 &\leq |P_\mu(z_1)|^2 + |P_\mu(z_2)|^2 + |P_\mu(z_3)|^2 + \dots + |P_\mu(z_{m-1})|^2 \\ &\leq R^{2n} M^{2k_\mu} + R^{2n} M^{2k_\mu} + R^{2n} M^{2k_\mu} + \dots + R^{2n} M^{2k_\mu} \\ &\leq m R^{2n} M^{2k_\mu} \end{aligned}$$

d'où

$$|A_m|^2 \leq m R^{2n} M^{2k_0} \ m R^{2n} M^{2k_1} \ m R^{2n} M^{2k_2} \ \dots \ m R^{2n} M^{2k_{m-1}}$$

et on obtient ainsi, en utilisant (3.6)

$$\Delta_m(E) \leq |A_m|^2 \leq m^m R^{2mn} M^{2(k_0+k_1+k_2+\dots+k_{m-1})} \quad (3.12)$$

• si $\tilde{K} = \mathbb{C}_p$, on a, grâce à l'inégalité ultramétrique,

$$\begin{aligned} |A_m| &= \left| \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_m} \epsilon(\sigma) P_0(z_{\sigma(0)}) P_1(z_{\sigma(1)}) P_2(z_{\sigma(2)}) \dots P_{m-1}(z_{\sigma(m-1)}) \right| \\ &\leq \max_{\sigma \in \mathcal{S}_m} (|\epsilon(\sigma)| |P_0(z_{\sigma(0)})| |P_1(z_{\sigma(1)})| |P_2(z_{\sigma(2)})| \dots |P_{m-1}(z_{\sigma(m-1)})|) \end{aligned}$$

Or $|\epsilon(\sigma)| = 1$ et grâce à (3.10), on a $|P_\mu(z_{\sigma(q)})| \leq R^n M^{k_\mu}$, d'où

$$|A_m| \leq 1 \cdot R^n M^{k_0} \cdot R^n M^{k_1} \cdot R^n M^{k_2} \dots R^n M^{k_{m-1}}$$

On obtient alors

$$|A_m| \leq R^{mn} M^{k_0+k_1+k_2+\dots+k_{m-1}}$$

d'où,

$$\Delta_m(E) \leq |A_m|^2 \leq R^{2mn} M^{2(k_0+k_1+k_2+\dots+k_{m-1})} \leq m^m R^{2mn} M^{2(k_0+k_1+k_2+\dots+k_{m-1})}$$

• Suite de la démonstration (commune aux cas complexe et p -adique)

Dans les deux cas, on a donc

$$\Delta_m(E) \leq m^m R^{2mn} M^{2(k_0+k_1+k_2+\dots+k_{m-1})} \quad (3.13)$$

Or

$$k_0 = k_1 = k_2 = \cdots = k_{n-1} = 0$$

$$k_n = k_{n+1} = k_{n+2} = \cdots = k_{2n-1} = 1$$

$$k_{2n} = k_{2n+1} = k_{2n+2} = \cdots = k_{3n-1} = 2$$

.....

$$k_{(a-1)n} = k_{(a-1)n+1} = k_{(a-1)n+2} = \cdots = k_{an-1} = a - 1$$

d'où

$$k_0 + k_1 + k_2 + \cdots + k_{m-1} = n \sum_{j=0}^{a-1} j = n \frac{a(a-1)}{2}$$

On déduit alors de (3.13) que

$$\Delta_m(E) \leq m^m R^{2mn} M^{2(k_0+k_1+k_2+\dots+k_{m-1})} \leq m^m R^{2nm} M^{na(a-1)} \quad (3.14)$$

d'où, comme $m = an$,

$$\Delta_{an}(E) \leq (an)^{an} R^{2nan} M^{na(a-1)}$$

d'où, en élevant à la puissance $\frac{1}{(an)(an-1)}$,

$$\Delta_{an}(E)^{\frac{1}{(an)(an-1)}} \leq (an)^{\frac{an}{(an)(an-1)}} . R^{\frac{2nan}{(an)(an-1)}} . M^{\frac{na(a-1)}{(an)(an-1)}} \quad (3.15)$$

c'est-à-dire

$$\delta_{an}(E) \leq (an)^{\frac{1}{an-1}} . R^{\frac{2n}{an-1}} . M^{\frac{(a-1)}{an-1}} \quad (3.16)$$

Or

$$\delta_{an}(E) \xrightarrow{a \rightarrow +\infty} d(E)$$

et

$$(an)^{\frac{1}{an-1}} = e^{\frac{1}{an-1} \ln(an)} \xrightarrow{a \rightarrow +\infty} e^0 = 1$$

et

$$R^{\frac{2n}{an-1}} = e^{\frac{2n}{an-1} \ln(R)} \xrightarrow{a \rightarrow +\infty} e^0 = 1$$

et

$$M^{\frac{(a-1)}{an-1}} = e^{\frac{(a-1)}{an-1} \ln(M)} \xrightarrow{a \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{n} \ln(M)} = M^{\frac{1}{n}}$$

d'où finalement, en faisant tendre a vers $+\infty$ dans (3.16)

$$d(E) \leq M^{\frac{1}{n}}$$

i.e.

$$d(E)^n \leq M$$

i.e.

$$d(E)^n \leq \max_{z \in E} |P(z)|$$

□

Théorème 3.1.10. Soit E un compact de K tel que $d(E) > 0$.

Soit $R \in]0, +\infty[$ tel que $E \subseteq B_f(0, R)$. Soit $n \geq 2$.

Soit $P \in K[X]$ un polynôme de degré inférieur ou égal à n .

On a alors, pour tout $z \in K$,

- si $\tilde{K} = \mathbb{C}$, alors $|P(z)| \leq \max_{a \in E} |P(a)| \left(\frac{2}{d(E)} \right)^n (|z| + R)^n$
- si $\tilde{K} = \mathbb{C}_p$, alors $|P(z)| \leq \max_{a \in E} |P(a)| \left(\frac{1}{d(E)} \right)^n (\max(|z|, R))^n$
 $\leq \max_{a \in E} |P(a)| \left(\frac{2}{d(E)} \right)^n (|z| + R)^n$

Démonstration :

Comme $d(E) > 0$, E est un ensemble infini et $\Delta_n(E) > 0$ et $\Delta_{n+1}(E) > 0$.
Soit $x = (x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ un $(n+1)$ -uplet de Fekete.

choisissons $k_0 \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$ de telle sorte que $\prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq k_0}}^{n+1} |x_{k_0} - x_\nu|$ soit minimal.

D'après le théorème 3.1.7, il existe alors $Q \in K[X]$ polynôme unitaire de degré n vérifiant

$$\max_{z \in E} |Q(z)| \leq \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq k_0}}^{n+1} |x_{k_0} - x_\nu| \quad \text{avec } n \geq 2$$

D'après le théorème 3.1.9, on a

$$d(E)^n \leq \max_{z \in E} |Q(z)|$$

d'où

$$d(E)^n \leq \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq k_0}}^{n+1} |x_{k_0} - x_\nu|$$

d'où

$$0 < \frac{1}{\prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq k_0}}^{n+1} |x_{k_0} - x_\nu|} < \left(\frac{1}{d(E)} \right)^n \quad (3.17)$$

Comme P est un polynôme de degré inférieur ou égal à n , d'après le théorème d'interpolation de Lagrange appliqué aux $(n+1)$ points distincts x_1, x_2, \dots, x_{n+1} , on a

$$P(X) = \sum_{k=1}^{n+1} P(x_k) \frac{\prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n+1} (X - x_l)}{\prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n+1} (x_k - x_l)}$$

Soit $z \in K$. On a alors

$$P(z) = \sum_{k=1}^{n+1} P(x_k) \frac{\prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n+1} (z - x_l)}{\prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n+1} (x_k - x_l)}$$

d'où, en passant à la valeur absolue,

$$|P(z)| = \left| \sum_{k=1}^{n+1} P(x_k) \frac{\prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n+1} (z - x_l)}{\prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n+1} (x_k - x_l)} \right| \quad (3.18)$$

A nouveau, on va être obligé de distinguer les cas complexe et p -adique.

• si $\tilde{K} = \mathbb{C}$, alors on a

$$|P(z)| \leq \sum_{k=1}^{n+1} \left(|P(x_k)| \left| \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n+1} (z - x_l) \right| \frac{1}{\left| \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n+1} (x_k - x_l) \right|} \right) \quad (3.19)$$

Or, comme les x_k sont dans E , on a, pour tout $k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$,

$$|P(x_k)| \leq \max_{a \in E} |P(a)| \quad (3.20)$$

On a aussi, pour tout $k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$,

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{\prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n+1} (x_k - x_l)} \right| &= \frac{1}{\prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n+1} |x_k - x_l|} \\
&\leq \max_{j=1,2,\dots,n+1} \frac{1}{\prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^{n+1} |x_j - x_l|} \\
&\leq \frac{1}{\min_{j=1,2,\dots,n+1} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^{n+1} |x_j - x_l|} \\
&\leq \frac{1}{\prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k_0}}^{n+1} |x_{k_0} - x_l|}
\end{aligned}$$

et grâce à (3.17), on en déduit que

$$\left| \frac{1}{\prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n+1} (x_k - x_l)} \right| \leq \frac{1}{\prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k_0}}^{n+1} |x_{k_0} - x_l|} \leq \left(\frac{1}{d(E)} \right)^n \quad (3.21)$$

En outre, pour tout $l \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$, en tenant compte du fait que $x_l \in E \subseteq B(0, R)$, on a

$$|z - x_l| \leq |z| + |x_l| \leq |z| + R$$

d'où

$$\left| \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n+1} (z - x_l) \right| \leq \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n+1} |z - x_l| \leq \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n+1} (|z| + R) \leq (|z| + R)^n \quad (3.22)$$

En utilisant les majorations (3.20), (3.21) et (3.22), l'inégalité (3.19) donne

$$|P(z)| \leq \sum_{k=1}^{n+1} \max_{a \in E} |P(a)| \left(\frac{1}{d(E)} \right)^n (|z| + R)^n$$

d'où

$$|P(z)| \leq (n+1) \max_{a \in E} |P(a)| \left(\frac{1}{d(E)} \right)^n (|z| + R)^n$$

Et comme $n+1 \leq 2^n$, on obtient la majoration souhaitée

$$|P(z)| \leq \max_{a \in E} |P(a)| \left(\frac{2}{d(E)} \right)^n (|z| + R)^n$$

• si $\tilde{K} = \mathbb{C}_p$, grâce à l'inégalité ultramétrique, (3.18) donne

$$|P(z)| \leq \max_{k=1,2,\dots,n+1} \left(|P(x_k)| \left| \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n+1} (z - x_l) \right| \frac{1}{\left| \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n+1} (x_k - x_l) \right|} \right) \quad (3.23)$$

Comme dans le cas complexe, on vérifie que, pour tout $k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$,

$$|P(x_k)| \leq \max_{a \in E} |P(a)| \text{ et } \frac{1}{\left| \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n+1} (x_k - x_l) \right|} \leq \frac{1}{\prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k_0}}^{n+1} |x_{k_0} - x_l|} \leq \left(\frac{1}{d(E)} \right)^n$$

De plus, on a, pour tout $l \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$,

$$|z - x_l| \leq \max(|z|, |x_l|) \leq \max(|z|, R)$$

car $|x_l| \leq R$ du fait que $x_l \in E \subseteq B(0, R)$,
d'où

$$\left| \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n+1} (z - x_l) \right| \leq (\max(|z|, R))^n$$

L'inégalité (3.23) et les majorations précédentes donnent alors

$$|P(z)| \leq \max_{a \in E} |P(a)| \left(\frac{1}{d(E)} \right)^n \left(\max(|z|, R) \right)^n$$

□

Proposition 3.1.11. *Si $K = \tilde{K} = \mathbb{C}$, alors $d(\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}) = 1$.*

Démonstration :

Posons $E = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$. E est bien un compact de \mathbb{C} et, d'après le théorème 3.1.9 appliqué au compact E et au polynôme $P = X$, on obtient $d(E) \leq \max_{z \in E} |P(z)| = \max_{z \in E} |z| = 1$. On a donc $d(E) \leq 1$.

Pour montrer que $d(E) \geq 1$, nous allons revenir à la définition de $d(E)$.
Soit $n \geq 2$. Posons, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $z_k = e^{i2\pi \frac{k}{n}}$. On a alors

$$\Delta_n(E) \geq \prod_{\mu=1}^n \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq \mu}}^n |z_\mu - z_\nu|. \text{ Le problème étant invariant par rotation, on a,}$$

$$\text{pour tout } \mu \in \llbracket 1, n \rrbracket, \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq \mu}}^n |z_\mu - z_\nu| = \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq n}}^n |z_n - z_\nu| = \left| \prod_{\nu=1}^{n-1} (1 - z_\nu) \right|.$$

$$\text{Posons } P = \prod_{\nu=1}^n (X - z_\nu) \text{ et } Q = \prod_{\nu=1}^{n-1} (X - z_\nu).$$

$$\text{On a } P = (X - 1)Q \text{ et } P = X^n - 1 = (X - 1) \sum_{k=0}^{n-1} X^k, \text{ d'où } Q = \sum_{k=0}^{n-1} X^k.$$

$$\text{On obtient alors } \prod_{\nu=1}^{n-1} (1 - z_\nu) = Q(1) = \sum_{k=0}^{n-1} 1^k = n,$$

d'où

$$\prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq \mu}}^n |z_\mu - z_\nu| = \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq n}}^n |z_n - z_\nu| = \left| \prod_{\nu=1}^{n-1} (1 - z_\nu) \right| = |n| = n$$

ce qui donne

$$\Delta_n(E) \geq \prod_{\mu=1}^n \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq \mu}}^n |z_\mu - z_\nu| \geq \prod_{\mu=1}^n n \geq n^n$$

On obtient alors $\delta_n(E) \geq n^{\frac{1}{n-1}} \geq 1$, d'où, en passant à la limite, $d(E) \geq 1$.

Ainsi, $d(E) = 1$.

□

Proposition 3.1.12. *Si $K = \mathbb{Q}_p$ et $\tilde{K} = \mathbb{C}_p$, alors $d(\{z \in \mathbb{Q}_p / |z| \leq 1\}) = p^{-\frac{1}{p-1}}$.*

Démonstration :

Posons $E = \{z \in \mathbb{Q}_p / |z| \leq 1\}$. E est bien un compact de \mathbb{Q}_p . Pour calculer $d(E)$, cette fois-ci, nous utiliserons uniquement le fait que

$$d(E) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \delta_n(E) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \delta_{p^k}(E)$$

Soit $k \geq 2$. On a

$$\Delta_{p^k}(E) = \max_{z_1, z_2, \dots, z_{p^k} \in E} \prod_{\mu=1}^{p^k} \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq \mu}}^{p^k} |z_\mu - z_\nu| = \max_{z_1, z_2, \dots, z_{p^k} \in E} \left(\prod_{1 \leq \nu < \mu \leq p^k} |z_\mu - z_\nu| \right)^2$$

Or, ce max est atteint pour $z_1 = 1, z_2 = 2, \dots, z_{p^k} = p^k$ (ce qui correspond géométriquement aux "centres" des p^k boules de rayon $\frac{1}{p^k}$ constituant E).

Par ailleurs,

$$\prod_{1 \leq \nu < \mu \leq p^k} |\mu - \nu| = \prod_{\nu=1}^{p^k-1} \prod_{\mu=\nu+1}^{p^k} |\mu - \nu| = \prod_{\nu=1}^{p^k-1} \prod_{\mu=1}^{p^k-\nu} |\mu| = \prod_{\nu=1}^{p^k-1} |(p^k - \nu)!| = \prod_{\nu=1}^{p^k-1} |\nu!|$$

d'où

$$\ln(\delta_{p^k}(E)) = \frac{1}{p^k(p^k-1)} \ln(\Delta_{p^k}(E)) = \frac{2}{p^k(p^k-1)} \sum_{\nu=1}^{p^k-1} \ln(|\nu!|) \quad (3.24)$$

avec⁴

$$-\frac{\nu}{p-1} \leq \frac{\ln(|\nu!|)}{\ln(p)} \leq -\frac{\nu}{p-1} + \frac{\ln(\nu)}{\ln(p)} + 1 \quad (3.25)$$

or

$$\sum_{\nu=1}^{p^k-1} \frac{\nu}{p-1} = \frac{1}{p-1} \frac{p^k(p^k-1)}{2} \quad (3.26)$$

$$0 \leq \sum_{\nu=1}^{p^k-1} \frac{\ln(\nu)}{\ln(p)} \leq \frac{1}{\ln(2)} \int_1^{p^k} \ln(t) dt \leq \frac{1}{\ln(2)} p^k \ln(p^k) \quad (3.27)$$

$$0 \leq \sum_{\nu=1}^{p^k-1} 1 \leq p^k \quad (3.28)$$

On déduit alors des inégalités précédentes que

$$-\frac{1}{p-1} \ln(p) \leq \ln(\delta_{p^k}(E)) \leq -\frac{1}{p-1} \ln(p) + \frac{2 \ln(p)}{\ln(2)} \frac{\ln(p^k)}{p^k-1} + \frac{2 \ln(p)}{p^k-1} \quad (3.29)$$

d'où

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \ln(\delta_{p^k}(E)) = -\frac{1}{p-1} \ln(p) = \ln\left(p^{-\frac{1}{p-1}}\right) \quad (3.30)$$

d'où

$$d(E) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \delta_{p^k}(E) = p^{-\frac{1}{p-1}}$$

□

4. Cela résulte du fait que $v_p(n!) = \frac{n - S_p(n)}{p-1}$ où $S_p(n)$ est la somme des chiffres de n écrit en base p (voir [Rob00]). On a alors, en notant r le nombre de chiffres de n en base p , $0 \leq 1 \leq S_p(n) \leq (p-1)r \leq (p-1)(1 + \frac{\ln(n)}{\ln(p)})$.

Remarque 3.1.13. Lorsque $K = \mathbb{C}$ et que E est un compact de K , le diamètre transfini de E est égal à la capacité de E .

On peut le voir en utilisant⁵ d'une part le fait que la fonction de Green G de $\mathbb{C} \setminus E$ relative au point à l'infini existe si et seulement si $d(E) > 0$ et d'autre part le fait que si $d(E) > 0$, alors $G(z) = \ln(|z|) - \ln(d(E)) + O\left(\frac{1}{|z|}\right)$, ce qui permet d'obtenir que $d(E) = \text{cap}(E)$.

Remarque 3.1.14. Lorsque K n'est pas localement compact, les boules fermées ne sont plus compactes, mais on peut, sous réserve que K soit algébriquement clos, récupérer un théorème de majoration polynomiale pour les boules fermées. Nous allons en démontrer un pour $K = \tilde{K} = \mathbb{C}_p$. Dans la fin de cette section, la notation $B_f(a, r)$ (avec $a \in \mathbb{C}_p$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$) désignera l'ensemble $\{z \in \mathbb{C}_p / |z - a| \leq r\}$.

Remarque 3.1.15. Soit P un polynôme de $\mathbb{C}_p[X]$. Alors $\sup_{a \in B_f(0,1)} |P(a)| < +\infty$

(cela résulte de l'inégalité triangulaire) et il existe $b \in B_f(0,1)$ tel que⁶

$$|P(b)| = \sup_{a \in B_f(0,1)} |P(a)| = \max_{a \in B_f(0,1)} |P(a)|.$$

Proposition 3.1.16. Soit $n \geq 2$ et soit $P \in \mathbb{C}_p[X]$ un polynôme de degré inférieur ou égal à n . On a

$$\forall z \in \mathbb{C}_p \quad |P(z)| \leq \max_{a \in B_f(0,1)} |P(a)| \cdot 2^n \cdot (\max(|z|, 1))^n$$

5. On pourra trouver une démonstration des deux faits indiqués dans [Pom75], chap 11, th 11.1.

6. Pour voir ce fait, on peut raisonner par l'absurde. Nous utiliserons les notations traditionnelles $A = B_f(0,1)$, $M = B(0,1)$ et $k = A/M$. On sait que le corps résiduel k est la clôture algébrique de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Notons $P(X) = \sum_{j=0}^d a_j X^j$ et posons $r = \max_{j=1,2,\dots,d} |a_j| = |a_{j_0}|$ et

$Q(X) = \frac{1}{a_{j_0}} P(X) = \sum_{j=0}^d b_j X^j$. Par homothétie, il suffit de montrer qu'il existe $b \in B_f(0,1)$ tel que $|Q(b)| = \sup_{a \in B_f(0,1)} |Q(a)|$. D'une part, pour tout $x \in B_f(0,1)$, on a

$$|Q(x)| = \left| \sum_{j=0}^d b_j x^j \right| \leq \max_{j=0,1,\dots,d} |b_j| |x|^j \leq 1. \text{ On a alors } \sup_{a \in B_f(0,1)} |Q(a)| \leq 1.$$

Par l'absurde, supposons que pour tout $x \in B_f(0,1)$, $|Q(x)| < 1$. On a alors, en notant \bar{x} la projection de x dans k , $\forall x \in B_f(0,1) \quad \overline{Q(x)} = \overline{0}$ (On peut bien projeter le polynôme Q dans k , car ses coefficients sont dans A). Par conséquent, $\forall \alpha \in k \quad \overline{Q(\alpha)} = \overline{0}$. Mais ceci est impossible, car k est un corps commutatif infini et car $\overline{Q(X)}$ est un polynôme non nul (car $\overline{b_{j_0}} = \overline{1} \neq \overline{0}$). Donc il existe bien $x \in B_f(0,1)$ tel que $|Q(x)| = 1$.

Démonstration :

Posons $M = \max_{a \in B_f(0,1)} |P(a)|$ et notons $x_1, x_2, \dots, x_{n+1} = 1$ les $n + 1$ racines distinctes du polynôme $Q(X) = X^{n+1} - 1$. Les x_k sont tous de valeur absolue 1 et sont donc éléments de $B_f(0,1)$. D'après le théorème d'interpolation de Lagrange appliqué aux $(n + 1)$ points distincts x_1, x_2, \dots, x_{n+1} , on a

$$P(X) = \sum_{k=1}^{n+1} P(x_k) \frac{\prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n+1} (X - x_l)}{\prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n+1} (x_k - x_l)}$$

Soit $z \in \mathbb{C}_p$. On a alors

$$P(z) = \sum_{k=1}^{n+1} P(x_k) \frac{\prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n+1} (z - x_l)}{\prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n+1} (x_k - x_l)}$$

d'où, en passant à la valeur absolue et en utilisant l'inégalité ultramétrique,

$$|P(z)| = \left| \sum_{k=1}^{n+1} P(x_k) \frac{\prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n+1} (z - x_l)}{\prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n+1} (x_k - x_l)} \right| \leq \max_{k=1,2,\dots,n+1} |P(x_k)| \frac{\left| \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n+1} (z - x_l) \right|}{\left| \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n+1} (x_k - x_l) \right|} \quad (3.31)$$

Or $|P(x_k)| \leq M$ et pour tout $l \in [1, n + 1]$, $|z - x_l| \leq \max(|z|, |x_l|) \leq \max(|z|, 1)$,

$$\text{d'où } \left| \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n+1} (z - x_l) \right| = \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n+1} |z - x_l| \leq (\max(|z|, 1))^n .$$

Comme $|x_k| = 1$ et $z \mapsto zx_k^{-1}$ réalise une permutation⁷ des racines de $Q(X)$, on a

$$\left| \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n+1} (x_k - x_l) \right| = \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n+1} |x_k - x_l| = \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n+1} |1 - x_l x_k^{-1}| = \prod_{j=1}^n |1 - x_j| = \left| \prod_{j=1}^n (1 - x_j) \right|$$

$$\text{Posons } R(X) = \prod_{j=1}^n (X - x_j).$$

On a

$$Q(X) = (X - 1) \prod_{j=1}^n (X - x_j) = (X - 1)R(X)$$

et

$$Q(X) = X^{n+1} - 1 = (X - 1) \left(\sum_{k=0}^n X^k \right)$$

d'où

$$R(X) = \sum_{k=0}^n X^k$$

Ainsi,

$$\left| \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n+1} (x_k - x_l) \right| = |R(1)| = |n + 1|$$

On déduit alors de (3.31) que

$$|P(z)| \leq M(\max(|z|, 1))^n \frac{1}{|n + 1|} \quad (3.32)$$

avec

$$|n + 1| = |n + 1|_p \geq \prod_{q \text{ premier}} |n + 1|_q = \frac{1}{|n + 1|_\infty} = \frac{1}{n + 1}$$

7. car c'est clairement une injection de l'ensemble des racines de $Q(X)$ dans lui-même.

d'où

$$\frac{1}{|n+1|} \leq n+1 \leq 2^n$$

On déduit alors de (3.32) que

$$|P(z)| \leq \max_{a \in B_f(0,1)} |P(a)| \cdot 2^n \cdot (\max(|z|, 1))^n$$

3.2 Diamètre transfini d'un ensemble quelconque

Définition 3.2.1. Soit E un sous-ensemble de K .

On pose

$$d_*(E) = \sup_{\substack{A \text{ compact} \\ A \subseteq E}} (d(A))$$

et

$$d^*(E) = \inf_{\substack{H \text{ ouvert} \\ E \subseteq H}} (d_*(H))$$

Proposition 3.2.2. Soit E et F deux sous-ensembles de K tel que $E \subseteq F$.

On a $d_*(E) \leq d_*(F)$ et $d^*(E) \leq d^*(F)$.

Démonstration :

- Soit A un compact inclus dans E . Comme $E \subseteq F$, on a A compact inclus dans F , d'où, $d(A) \leq d_*(F)$, et comme ceci est vrai pour tout A un compact inclus dans E , on a $d_*(E) \leq d_*(F)$

- Soit H un ouvert contenant F . Comme $E \subseteq F$, on a $E \subseteq H$, d'où, $d^*(E) \leq d_*(H)$, et comme ceci est vrai pour tout H ouvert contenant F , on a

$$d^*(E) \leq d^*(F)$$

Proposition 3.2.3. Soit E un sous-ensemble de K . On a

$$d_*(E) \leq d^*(E)$$

Démonstration :

Soit H un ouvert contenant E . Comme $E \subseteq H$, d'après la proposition 3.2.2, on a $d_*(E) \leq d_*(H)$, et comme ceci est vrai pour tout H ouvert contenant E , on a $d_*(E) \leq d^*(E)$.

Lemme 3.2.4. Soit $\varepsilon \in]0, \frac{1}{2}[$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $R \in]1, +\infty[$, soit $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad 0 \leq a_k \leq R$$

On a alors

$$\prod_{k=1}^n (a_k + \varepsilon) \leq \left(\prod_{k=1}^n a_k \right) + \varepsilon (2R)^n$$

Démonstration :

- Pour $n=1$, on a $\prod_{k=1}^1 (a_k + \varepsilon) = \left(\prod_{k=1}^1 a_k \right) + \varepsilon \leq \left(\prod_{k=1}^1 a_k \right) + \varepsilon (2R)^1$
 - Pour $n=2$, on a $\prod_{k=1}^2 (a_k + \varepsilon) = a_1 a_2 + \varepsilon a_1 + \varepsilon a_2 + \varepsilon^2 \leq \left(\prod_{k=1}^2 a_k \right) + \varepsilon (a_1 + a_2 + \varepsilon)$
- d'où $\prod_{k=1}^2 (a_k + \varepsilon) \leq \left(\prod_{k=1}^2 a_k \right) + \varepsilon (R + R + R) \leq \left(\prod_{k=1}^2 a_k \right) + \varepsilon (2R)^2$
- Soit $n \geq 2$ et supposons que $\prod_{k=1}^n (a_k + \varepsilon) \leq \left(\prod_{k=1}^n a_k \right) + \varepsilon (2R)^n$.

On a alors $\prod_{k=1}^{n+1} (a_k + \varepsilon) = (a_{n+1} + \varepsilon) \prod_{k=1}^n (a_k + \varepsilon) \leq (a_{n+1} + \varepsilon) \left(\prod_{k=1}^n a_k + \varepsilon (2R)^n \right)$

d'où

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n+1} (a_k + \varepsilon) &\leq \left(\prod_{k=1}^{n+1} a_k \right) + a_{n+1} \varepsilon (2R)^n + \varepsilon \prod_{k=1}^n a_k + \varepsilon \varepsilon (2R)^n \\
&\leq \prod_{k=1}^{n+1} a_k + \varepsilon \left(a_{n+1} 2^n R^n + \prod_{k=1}^n a_k + \varepsilon 2^n R^n \right) \\
&\leq \prod_{k=1}^{n+1} a_k + \varepsilon \left(R 2^n R^n + R^n + \frac{1}{2} 2^n R^n \right) \\
&\leq \prod_{k=1}^{n+1} a_k + \varepsilon 2^n R^{n+1} \left(1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2} \right) \\
&\leq \prod_{k=1}^{n+1} a_k + \varepsilon 2^{n+1} R^{n+1}
\end{aligned}$$

□

Proposition 3.2.5. *Soit E un compact de K .*

On suppose de plus que K est localement compact. On a alors

$$d(E) = d_*(E) = d^*(E)$$

Démonstration :

(a) Montrons que $d(E) = d_*(E)$.

Comme E est un compact inclus dans E , on a $d(E) \leq d_*(E)$.

Pour tout A compact inclus dans E , on a $d(A) \leq d(E)$, d'où $d_*(E) \leq d(E)$.

Par conséquent, $d(E) = d_*(E)$.

(b) Montrons que $d(E) = d^*(E)$.

D'après le (a), on a $d(E) = d_*(E)$ et d'après la proposition 3.2.3, on a

$d_*(E) \leq d^*(E)$, d'où $d(E) \leq d^*(E)$.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme E est un compact, il existe $r > 0$ tel que $E \subseteq B_f(0, r)$.

Posons $R = 1 + 2r$. On a, $R > 1$ et, pour tout $z_1, z_2 \in E$, on a

$|z_2 - z_1| \leq |z_2| + |z_1| \leq r + r \leq R$. De plus, comme la suite $(\delta_n(E))_{n \geq 2}$ décroît vers $d(E)$, il existe $n_0 \geq 2$ tel que $\delta_{n_0}(E) < d(E) + \varepsilon$. Posons $\beta = (d(E) + \varepsilon)^{n_0(n_0-1)}$.

On a alors $\Delta_{n_0}(E)^{\frac{1}{n_0(n_0-1)}} < d(E) + \varepsilon$, d'où $\Delta_{n_0}(E) < \beta$.

Posons $\eta = \min(\beta - \Delta_{n_0}(E), R)$. On a $0 < \eta \leq R$ et $\Delta_{n_0}(E) + \eta \leq \beta$.

Posons aussi $N = n_0(n_0 - 1)$, $\alpha = \frac{1}{6} \min\left(\frac{\eta}{(2R)^N}, R, 1\right)$ et $H = \bigcup_{z \in E} B(z, \alpha)$.

H est un ouvert contenant E . De plus, comme $E \subseteq B_f(0, r)$, on a, par définition de H , $H \subseteq B_f(0, r + \alpha)$ avec $B_f(0, r + \alpha)$ fermé, d'où $H \subseteq \overline{H} \subseteq B_f(0, r + \alpha)$. Comme K est localement compact, $B_f(0, r + \alpha)$ est compact et par conséquent l'inclusion précédente nous indique que \overline{H} (fermé inclus dans un compact) est un compact. Comme $H \subseteq \overline{H}$ avec \overline{H} compact, on a aussi

$$d_*(H) \leq d_*(\overline{H}) = d(\overline{H}) \quad (3.33)$$

Considérons l'application $f : K^{n_0} \mapsto \mathbb{R}$ définie par

$$f(z_1, z_2, \dots, z_{n_0}) = \prod_{\mu=1}^{n_0} \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq \mu}}^{n_0} |z_\mu - z_\nu|$$

L'application f est continue⁸.

Soit $y_1, y_2, \dots, y_{n_0} \in H$. Par définition⁹ de H , il existe $z_1, z_2, \dots, z_{n_0} \in E$ et $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{n_0} \in B(0, \alpha)$, tels que, pour tout $k \in \llbracket 1, n_0 \rrbracket$, $y_k = z_k + \rho_k$.

On a aussi, $\forall (\mu, \nu) \in \llbracket 1, n_0 \rrbracket^2$ $|\rho_\mu - \rho_\nu| \leq |\rho_\mu| + |\rho_\nu| \leq \alpha + \alpha \leq 2\alpha$.

Ainsi,

$$\begin{aligned} f(y_1, y_2, \dots, y_{n_0}) &= \prod_{\mu=1}^{n_0} \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq \mu}}^{n_0} |y_\mu - y_\nu| \\ &= \prod_{\mu=1}^{n_0} \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq \mu}}^{n_0} |(z_\mu + \rho_\mu) - (z_\nu + \rho_\nu)| \\ &\leq \prod_{\mu=1}^{n_0} \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq \mu}}^{n_0} (|z_\mu - z_\nu| + |\rho_\mu - \rho_\nu|) \\ &\leq \prod_{\mu=1}^{n_0} \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq \mu}}^{n_0} (|z_\mu - z_\nu| + 2\alpha) \end{aligned}$$

8. par continuité des additions, multiplications et de la valeur absolue.

9. si $y \in B(z, \alpha)$, alors $y = z + (y - z)$ avec $z \in E$ et $y - z \in B(0, \alpha)$

En remarquant que dans ce produit, il y a $N = n_0(n_0 - 1)$ termes, que, par construction de R , pour tout $\mu \in \llbracket 1, n_0 \rrbracket$ et tout $\nu \in \llbracket 1, n_0 \rrbracket$, on a $|z_\mu - z_\nu| \leq R$ et $2\alpha \leq \min(R, \frac{1}{3})$, d'après le lemme 3.2.4, on a

$$\prod_{\substack{\mu=1 \\ \nu=1 \\ \nu \neq \mu}}^{n_0} (|z_\mu - z_\nu| + 2\alpha) \leq \left(\prod_{\substack{\mu=1 \\ \nu=1 \\ \nu \neq \mu}}^{n_0} |z_\mu - z_\nu| \right) + 2\alpha (2R)^N$$

D'où, d'après les deux inégalités précédentes et la définition de $\Delta_{n_0}(E)$,

$$f(y_1, y_2, \dots, y_{n_0}) \leq \Delta_{n_0}(E) + 2\alpha (2R)^N$$

et grâce à la définition de α , on obtient

$$f(y_1, y_2, \dots, y_{n_0}) \leq \Delta_{n_0}(E) + \frac{\eta}{(2R)^N} (2R)^N \leq \Delta_{n_0}(E) + \eta \leq \beta$$

Par conséquent, pour tout $y_1, y_2, \dots, y_{n_0} \in H$, on a

$$f(y_1, y_2, \dots, y_{n_0}) \leq \beta \quad (3.34)$$

Et, par continuité de f , on en déduit que

$$\forall y_1, y_2, \dots, y_{n_0} \in \overline{H}^{n_0} \quad f(y_1, y_2, \dots, y_{n_0}) \leq \beta \quad (3.35)$$

On obtient alors $\Delta_{n_0}(\overline{H}) \leq \beta$, d'où, en élevant à la puissance $\frac{1}{n_0(n_0-1)}$,

$$\delta_{n_0}(\overline{H}) \leq (d(E) + \varepsilon) \quad (3.36)$$

Or, par décroissance de $(\delta_k(\overline{H}))_{k \geq 2}$, on a

$$d(\overline{H}) \leq \delta_{n_0}(\overline{H}) \quad (3.37)$$

Et comme \overline{H} est compact, on a

$$d_*(\overline{H}) = d(\overline{H}) \quad (3.38)$$

En outre, puisque $H \subseteq \overline{H}$, on a

$$d_*(H) = d_*(\overline{H}) \quad (3.39)$$

De (3.36), (3.37), (3.38) et (3.39), on déduit que

$$d_*(H) \leq d(E) + \varepsilon$$

H étant un ouvert contenant E , on a alors

$$d^*(E) \leq d(E) + \varepsilon$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit que

$$d^*(E) \leq d(E)$$

D'où finalement,

$$d^*(E) = d(E).$$

□

Remarque 3.2.6. Si K n'est pas localement compact, la démonstration précédente donne seulement, pour tout compact E de K

$$d(E) = d_*(E) \leq d^*(E).$$

Proposition 3.2.7. Pour tout $a \in K$ et tout $r \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$d^*(B_f(a,r)) \leq r.$$

Démonstration :

- Si $\tilde{K} = \mathbb{C}$, alors $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$, ce qui entraîne que $B_f(a,r)$ est compact. On déduit alors de la proposition précédente et de la proposition 3.1.6 que $d^*(B_f(a,r)) = d(B_f(a,r)) = d(a + B_f(0,r)) = d(B_f(0,r)) = d(r.B_f(0,1)) = |r|d(B_f(0,1)) = r.d(B_f(0,1))$. Or $(B_f(0,1)) \subseteq \{z \in \mathbb{C}/|z| \leq 1\}$ et $d(\{z \in \mathbb{C}/|z| \leq 1\}) = 1$. Donc $d(B_f(0,1)) \leq 1$. On obtient alors $d^*(B_f(a,r)) \leq r$.

- Si $\tilde{K} = \mathbb{C}_p$. Soit $\varepsilon > 0$. Posons $H = B(a,r + \varepsilon)$. H est un ouvert contenant $B_f(a,r)$, donc $d^*(B_f(a,r)) \leq d_*(H)$. Soit A , un compact inclus dans H . Pour tout $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in A^n$, on a $|x_\mu - x_\nu| = |(x_\mu - a) - (x_\nu - a)| \leq \max(|x_\mu - a|, |x_\nu - a|) \leq r + \varepsilon$, d'où $\Delta_n(A) \leq (r + \varepsilon)^{n(n-1)}$, d'où $\delta_n(A) \leq (r + \varepsilon)$ et par conséquent, $d(A) \leq r + \varepsilon$. Ceci étant vrai pour tout compact A inclus dans H , on en déduit que $d_*(H) \leq r + \varepsilon$. Et comme $d^*(B_f(a,r)) \leq d_*(H)$, on a $d^*(B_f(a,r)) \leq r + \varepsilon$. Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, on obtient $d^*(B_f(a,r)) \leq r$.

Théorème 3.2.8. Soit $E_1, E_2, \dots, E_k, \dots$ une suite de parties de K .

On a alors

$$\left(\forall k \in \mathbb{N}^* \quad d^*(E_k) = 0 \right) \implies \left(d^* \left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} E_k \right) = 0 \right)$$

Remarque 3.2.9. *La démonstration de ce théorème dans le corps K est en partie analogue à la démonstration classique dans \mathbb{C} . Nous redonnons toutefois cette démonstration entièrement afin de s'assurer qu'elle fonctionne aussi dans le cadre p -adique et que l'on peut se passer de la locale compacité. Pour démontrer le théorème ci-dessus, nous allons commencer par démontrer un lemme.*

Notation 3.2.10. *Afin d'alléger les notations, pour tout $R \in \mathbb{R}_+^*$, on note g_R l'application de $[0, R[$ dans $[0, +\infty[$ définie par*

$$g_R(t) = \begin{cases} \frac{1}{\ln\left(\frac{R}{t}\right)} & \text{si } t \in]0, R[\\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases} \quad (3.40)$$

On vérifie facilement que g_R est continue sur $]0, R[$ et que c'est une bijection strictement croissante de $]0, R[$ sur $[0, +\infty[$. Sa bijection réciproque g_R^{-1} est alors continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$. On vérifie aussi immédiatement que l'on a $g_R(t) = 0 \iff t = 0$.

Lemme 3.2.11. *Soit R et r deux réels vérifiant $R > 2r > 1$. Soit $i \in \mathbb{N}^*$.*

Soit A_1, A_2, \dots, A_i des compacts de K vérifiant, $\forall k \in \llbracket 1, i \rrbracket$ $A_k \subseteq B_f(0, r)$.

Posons $A = \bigcup_{k=1}^i A_k$. A est un compact de K et on a

$$g_R(d(A)) \leq \sum_{k=1}^i g_R(d(A_k)) \quad (3.41)$$

Démonstration :

Comme A et les A_k sont inclus dans $B_f(0, r)$, on a, d'après la proposition 3.2.7, $d(A_k) = d^*(A_k) \leq d^*(B_f(0, r)) \leq r < R$. Par conséquent, les quantités $g_R(A_k)$ et $g_R(A)$ sont bien définies.

Nous allons démontrer ce lemme par récurrence en considérant la propriété $\mathcal{P}(i)$: "Pour tous compacts A_1, A_2, \dots, A_i de K vérifiant $\forall k \in \llbracket 1, i \rrbracket$ $A_k \subseteq B_f(0, r)$, en

posant $A = \bigcup_{k=1}^i A_k$, on a $g_R(d(A)) \leq \sum_{k=1}^i g_R(d(A_k))$ ".

- étape 1: La propriété $\mathcal{P}(1)$ est trivialement vraie.
- étape 2: Nous démontrerons que $\mathcal{P}(2)$ est vraie.
- étape 3: Montrons que si $\mathcal{P}(i)$ est vraie, alors $\mathcal{P}(i + 1)$ est encore vraie.

Soit $i \geq 2$ et supposons que $\mathcal{P}(i)$ est vraie. Soit $A_1, A_2, \dots, A_i, A_{i+1}$ des compacts de K inclus dans $B_f(0, r)$. Posons $A = \bigcup_{k=1}^{i+1} A_k$, $B_1 = \bigcup_{k=1}^i A_k$ et $B_2 = A_{i+1}$.

On a $A = B_1 \cup B_2$ avec B_1 et B_2 compacts, donc, comme $\mathcal{P}(2)$ est vraie, on a :

$g_R(d(A)) \leq g_R(d(B_1)) + g_R(d(B_2))$. Or $g_R(d(B_2)) = g_R(d(A_{i+1}))$ et, comme

$\mathcal{P}(i)$ est vraie, on a aussi $g_R(d(B_1)) \leq \sum_{k=1}^i g_R(d(A_k))$. Des inégalités précédentes,

on tire alors : $g_R(d(A)) \leq \sum_{k=1}^{i+1} g_R(d(A_k))$. Par conséquent, $\mathcal{P}(i+1)$ est vraie et

on peut en déduire que le lemme est vrai par récurrence.

Il reste à démontrer l'étape 2. Soit A_1 et A_2 deux compacts de K .

Posons $A = A_1 \cup A_2$. Si $d(A) = 0$, alors, par positivité de g_R , on a trivialement

$g_R(d(A)) = g_R(0) = 0 \leq g_R(d(A_1)) + g_R(d(A_2))$.

Désormais, on supposera donc que $d(A) > 0$.

Pour tout $n \geq 2$, notons $(z_{n,1}, z_{n,2}, \dots, z_{n,n})$ un n -uplet de Fekete de A .

Posons aussi $l_n = \text{card}\{j \in \llbracket 1, n \rrbracket / z_{n,j} \in A_1\}$. Quitte à renuméroter les points

à l'intérieur de chaque n -uplet de Fekete, on peut supposer que

$$\forall j \in \llbracket 1, l_n \rrbracket \quad z_{n,j} \in A_1 \quad \text{et} \quad \forall j \in \llbracket l_n + 1, n \rrbracket \quad z_{n,j} \in A_2 \quad (3.42)$$

• 1er cas: (l_n) possède une sous-suite (l_{n_k}) bornée.

Il existe alors un entier M supérieur à 2 tel que $\forall k \in \mathbb{N}^* \quad l_{n_k} \leq M$. De plus, on a clairement $n_k - l_{n_k} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} +\infty$ et pour tout $(j_1, j_2) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, on a

$$|z_{n,j_1} - z_{n,j_2}| \leq |z_{n,j_1}| + |z_{n,j_2}| \leq r + r \leq R \quad (3.43)$$

Soit $k \geq M + 3$. On a $n_k \geq k > M + 2 > 2$, $n_k - l_{n_k} \geq k - l_{n_k} \geq M + 2 - M \geq 2$ et

$$\Delta_{n_k}(A) = \prod_{\mu=1}^{n_k} \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq \mu}}^{n_k} |z_\mu - z_\nu| = B \times C \times D \times E \quad (3.44)$$

$$\text{avec } B = \prod_{\mu=1}^{l_{n_k}} \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq \mu}}^{l_{n_k}} |z_\mu - z_\nu|, \quad C = \prod_{\mu=l_{n_k}+1}^{n_k} \prod_{\substack{\nu=l_{n_k}+1 \\ \nu \neq \mu}}^{n_k} |z_\mu - z_\nu|,$$

$$D = \prod_{\mu=1}^{l_{n_k}} \prod_{\nu=l_{n_k}+1}^{n_k} |z_\mu - z_\nu| \text{ et } E = \prod_{\mu=l_{n_k}+1}^{n_k} \prod_{\nu=1}^{l_{n_k}} |z_\mu - z_\nu| = D.$$

Grâce à (3.43) et au fait que $l_{n_k} \leq M$, on obtient

$$B \leq \prod_{\mu=1}^{l_{n_k}} \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq \mu}}^{l_{n_k}} R \leq R^{l_{n_k}(l_{n_k}-1)} \leq R^{M(M-1)} \leq R^{M^2} \quad (3.45)$$

et

$$D = E \leq \prod_{\mu=l_{n_k}+1}^{n_k} \prod_{\nu=1}^{l_{n_k}} R \leq R^{l_{n_k}(n_k-l_{n_k})} \leq R^{M(n_k-l_{n_k})} \leq R^{Mn_k} \quad (3.46)$$

Par définition de $\Delta_{n_k-l_{n_k}}(A_2)$, on a aussi

$$C \leq \Delta_{n_k-l_{n_k}}(A_2) \quad (3.47)$$

En passant au logarithme dans (3.44) et en utilisant (3.45), (3.46) et (3.47), on obtient

$$\ln(\Delta_{n_k}(A)) \leq M^2 \ln(R) + \ln(\Delta_{n_k-l_{n_k}}(A_2)) + 2Mn_k \ln(R)$$

d'où

$$\frac{\ln(\Delta_{n_k}(A)) - M \ln(R)(M + 2n_k)}{n_k(n_k - 1)} \leq \frac{(n_k - l_{n_k})(n_k - l_{n_k} - 1)}{n_k(n_k - 1)} \frac{\ln(\Delta_{n_k-l_{n_k}}(A_2))}{(n_k - l_{n_k})(n_k - l_{n_k} - 1)}$$

d'où, comme $0 \leq M \leq n_k$

$$\ln(\delta_{n_k}(A)) - \frac{3n_k M \ln(R)}{n_k(n_k - 1)} \leq \left(1 - \frac{l_{n_k}}{n_k}\right) \left(1 - \frac{l_{n_k}}{n_k - 1}\right) \ln(\delta_{n_k-l_{n_k}}(A_2))$$

d'où

$$\ln(\delta_{n_k}(A)) - \frac{3M \ln(R)}{n_k - 1} \leq \ln(\delta_{n_k-l_{n_k}}(A_2))$$

En passant à l'exponentielle, on obtient

$$e^{\ln(\delta_{n_k}(A)) - \frac{3M \ln(R)}{n_k - 1}} \leq \delta_{n_k-l_{n_k}}(A_2)$$

et en faisant tendre k vers $+\infty$, on en déduit que

$$d(A) = e^{\ln(d(A))} \leq d(A_2)$$

Par croissance et positivité de g_R , il en résulte que

$$g_R(d(A)) \leq g_R(d(A_2)) \leq g_R(d(A_1)) + g_R(d(A_2)).$$

- 2ème cas: $(n - l_n)$ possède une sous-suite $(n_k - l_{n_k})$ bornée.

Une démonstration analogue à la précédente prouve qu'alors

$$g_R(d(A)) \leq g_R(d(A_1)) \leq g_R(d(A_1)) + g_R(d(A_2)).$$

- 3ème cas: ni (l_n) ni $(n - l_n)$ ne possède de sous-suite bornée.

En faisant deux extractions successives, on peut obtenir une sous-suite (n_k) vérifiant

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad n_k \geq 2, \forall k \in \mathbb{N}^* \quad l_{n_k} \geq 2, l_{n_k} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} +\infty \text{ et } n_k - l_{n_k} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} +\infty.$$

Comme $\forall k \in \mathbb{N}^* \quad 0 \leq \frac{l_{n_k}}{n_k} \leq 1$, on peut extraire une sous-suite $\left(\frac{l_{n_{k_q}}}{n_{k_q}}\right)$ qui converge vers un réel $\lambda \in [0,1]$. Pour alléger les notations, nous noterons (n_q) au lieu de

$$(n_{k_q}). \text{ De nouveau, on a } \Delta_{n_q}(A) = \prod_{\mu=1}^{n_q} \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq \mu}}^{n_q} |z_\mu - z_\nu| = B \times C \times D \times E \text{ avec}$$

$$B = \prod_{\mu=1}^{l_{n_q}} \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq \mu}}^{l_{n_q}} |z_\mu - z_\nu| \leq \Delta_{l_{n_q}}(A_1), C = \prod_{\mu=l_{n_q}+1}^{n_q} \prod_{\substack{\nu=l_{n_q}+1 \\ \nu \neq \mu}}^{n_q} |z_\mu - z_\nu| \leq \Delta_{n_q-l_{n_q}}(A_2),$$

$$D = \prod_{\mu=1}^{l_{n_q}} \prod_{\nu=l_{n_q}+1}^{n_q} |z_\mu - z_\nu| \text{ et } E = \prod_{\mu=l_{n_q}+1}^{n_q} \prod_{\nu=1}^{l_{n_q}} |z_\mu - z_\nu| = D \leq R^{l_{n_q}(n_q-l_{n_q})}.$$

On obtient alors

$$\Delta_{n_q}(A) \leq \Delta_{l_{n_q}}(A_1) \Delta_{n_q-l_{n_q}}(A_2) R^{2l_{n_q}(n_q-l_{n_q})}. \quad (3.48)$$

d'où, en passant au logarithme et en multipliant par $\frac{1}{n_q(n_q-1)}$,

$$\frac{1}{n_q(n_q-1)} \ln(\Delta_{n_q}(A)) \leq \tilde{A} \times \tilde{B} \times \tilde{C}. \quad (3.49)$$

$$\text{avec } \tilde{A} = \frac{l_{n_q}(l_{n_q}-1)}{n_q(n_q-1)} \frac{1}{l_{n_q}(l_{n_q}-1)} \ln(\Delta_{l_{n_q}}(A_1)) = \frac{l_{n_q}(l_{n_q}-1)}{n_q(n_q-1)} \ln(\delta_{l_{n_q}}(A_1)),$$

$$\begin{aligned} \tilde{B} &= \frac{(n_q - l_{n_q})(n_q - l_{n_q} - 1)}{n_q(n_q - 1)} \frac{1}{(n_q - l_{n_q})(n_q - l_{n_q} - 1)} \ln(\Delta_{n_q-l_{n_q}}(A_2)) \\ &= \left(1 - \frac{l_{n_q}}{n_q}\right) \left(1 - \frac{l_{n_q}}{n_q-1}\right) \ln(\delta_{n_q-l_{n_q}}(A_2)), \end{aligned}$$

$$\text{et } \tilde{C} = \frac{2l_{n_q}(n_q - l_{n_q})}{n_q(n_q - 1)} \ln(R) = 2 \left(\frac{l_{n_q}}{n_q}\right) \left(1 - \frac{l_{n_q}-1}{n_q-1}\right) \ln(R).$$

Les trois égalités précédentes et la formule (3.49) donnent alors

$$\begin{aligned} \ln(\delta_{n_q}(A)) &\leq \left(\frac{l_{n_q}}{n_q}\right) \left(\frac{l_{n_q}-1}{n_q-1}\right) \ln(\delta_{l_{n_q}}(A_1)) + \\ &+ \left(1 - \frac{l_{n_q}}{n_q}\right) \left(1 - \frac{l_{n_q}}{n_q-1}\right) \ln(\delta_{n_q-l_{n_q}}(A_2)) + 2 \left(\frac{l_{n_q}}{n_q}\right) \left(1 - \frac{l_{n_q}-1}{n_q-1}\right) \ln(R) \end{aligned} \quad (3.50)$$

Pour continuer, nous devons distinguer trois sous-cas:

○ 1er sous-cas: $d(A_1) = 0$. Par l'absurde, supposons que $\lambda > 0$.

L'égalité(3.50), le fait que $(\delta_j(A_2))$ soit décroissante et le fait que $0 \leq l_{n_q} \leq n_q$ donnent

$$\ln(\delta_{n_q}(A)) \leq \left(\frac{l_{n_q}}{n_q}\right) \left(\frac{l_{n_q}-1}{n_q-1}\right) \ln(\delta_{l_{n_q}}(A_1)) + \ln(\delta_2(A_2)) + 2 \ln(R) \quad (3.51)$$

On a alors $\ln(\delta_{n_q}(A)) \xrightarrow{q \rightarrow +\infty} \ln(d(A))$, $\frac{l_{n_q}}{n_q} \xrightarrow{q \rightarrow +\infty} \lambda$, $\frac{l_{n_q}-1}{n_q-1} \xrightarrow{q \rightarrow +\infty} \lambda$ et,

comme $\delta_{n_q}(A_1) \xrightarrow{q \rightarrow +\infty} d(A_1) = 0$, $\ln(\delta_{n_q}(A_1)) \xrightarrow{q \rightarrow +\infty} -\infty$, on a

$$\left(\frac{l_{n_q}}{n_q}\right) \left(\frac{l_{n_q}-1}{n_q-1}\right) \ln(\delta_{l_{n_q}}(A_1)) \xrightarrow{q \rightarrow +\infty} -\infty$$

En faisant tendre q vers $+\infty$ dans (3.51), on obtient $\ln(d(A)) \leq -\infty$, ce qui est impossible, car $d(A) > 0$. On a donc $\lambda = 0$, c'est-à-dire $\frac{l_{n_q}}{n_q} \xrightarrow{q \rightarrow +\infty} 0$.

En utilisant à nouveau le fait que $(\delta_j(A_1))$ est décroissante et le fait que $0 \leq l_{n_q} \leq n_q$,

(3.50) nous donne

$$\ln(\delta_{n_q}(A)) \leq \left(\frac{l_{n_q}}{n_q}\right) \ln(\delta_2(A_1)) + \left(1 - \frac{l_{n_q}}{n_q}\right) \left(1 - \frac{l_{n_q}}{n_q-1}\right) \ln(\delta_{n_q-l_{n_q}}(A_2)) + 2 \left(\frac{l_{n_q}}{n_q}\right) \ln(R)$$

d'où

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{l_{n_q}}{n_q}\right) \left(1 - \frac{l_{n_q}}{n_q-1}\right)} \left(\ln(\delta_{n_q}(A)) - \left(\frac{l_{n_q}}{n_q}\right) \left(\ln(\delta_2(A_1)) + 2 \ln(R) \right) \right) \leq \ln(\delta_{n_q-l_{n_q}}(A_2))$$

d'où

$$e^{\frac{1}{\left(1 - \frac{l_{n_q}}{n_q}\right) \left(1 - \frac{l_{n_q}}{n_q-1}\right)} \left(\ln(\delta_{n_q}(A)) - \left(\frac{l_{n_q}}{n_q}\right) \left(\ln(\delta_2(A_1)) + 2 \ln(R) \right) \right)} \leq \delta_{n_q-l_{n_q}}(A_2)$$

Et, en faisant tendre q vers $+\infty$ dans cette inégalité et en tenant compte du fait que $\frac{l_{n_q}}{n_q} \xrightarrow{q \rightarrow +\infty} 0$, on obtient

$$d(A) = e^{\ln(d(A))} \leq d(A_2).$$

Par croissance et positivité de g_R , on en déduit que

$$g_R(d(A)) \leq g_R(d(A_2)) \leq g_R(d(A_1)) + g_R(d(A_2)).$$

◦ 2ème sous-cas: $d(A_2) = 0$.

Par une démonstration analogue, on démontre que $\lambda = 1$ et que

$$g_R(d(A)) \leq g_R(d(A_1)) \leq g_R(d(A_1)) + g_R(d(A_2)).$$

◦ 3ème sous-cas: $d(A_1) > 0$ et $d(A_2) > 0$.

En faisant tendre q vers $+\infty$ dans (3.50), on obtient

$$\ln(d(A)) \leq \lambda^2 \ln(d(A_1)) + (1 - \lambda)^2 \ln(d(A_2)) + 2\lambda(1 - \lambda) \ln(R) \quad (3.52)$$

Posons $a = \ln(d(A_1))$, $b = \ln(d(A_2))$, $c = \ln(R)$, $d = \ln(d(A))$

et $P(X) = aX^2 + b(1 - X)^2 + 2cX(1 - X)$.

L'inégalité précédente devient $d \leq P(\lambda)$ avec $\lambda \in [0, 1]$.

Or, on a $P(X) = (a + b - 2c)X^2 + (2c - 2b)X + b$ avec¹⁰ $a + b - 2c < 0$.

Le polynôme P atteint donc son maximum au point λ_0 vérifiant $P'(\lambda_0) = 0$.

Comme $P'(X) = 2(a + b - 2c)X + (2c - 2b)$, on a $\lambda_0 = \frac{b - c}{a + b - 2c}$.

10. Cela résulte de $A_1 \subseteq B_f(0, r)$, d'où $d(A_1) \leq d^*(A_1) \leq d^*(B_f(0, r)) \leq r < R$, d'où $a = \ln(d(A_1)) < \ln(R) = c$. Idem pour b .

On en déduit alors que

$$\begin{aligned}
d - c &\leq P(\lambda) - c \\
&\leq P(\lambda_0) - c \\
&\leq (a + b - 2c) \left(\frac{b - c}{a + b - 2c} \right)^2 + (2c - 2b) \frac{b - c}{a + b - 2c} + b - c \\
&\leq \frac{(b - c)^2}{a + b - 2c} - 2 \frac{(b - c)^2}{a + b - 2c} + (b - c) \frac{a + b - 2c}{a + b - 2c} \\
&\leq \frac{b - c}{a + b - 2c} (- (b - c) + a + b - 2c) \\
&\leq \frac{b - c}{(a - c) + (b - c)} (a - c) \\
&\leq \frac{(b - c)(a - c)}{(b - c) + (a - c)}
\end{aligned}$$

d'où

$$\frac{1}{d - c} \leq \frac{(b - c) + (a - c)}{(b - c)(a - c)} \leq \frac{1}{a - c} + \frac{1}{b - c}$$

i.e.

$$g_R(d(A)) \leq g_R(d(A_1)) + g_R(d(A_2))$$

□

Retour à la démonstration du théorème:

1er cas: E borné

Il existe alors $r > 0$ tel que $E \subseteq B_f(0, r)$. Posons $R = 5r$. Comme E est la réunion des E_k , on a aussi, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $E_k \subseteq B_f(0, r)$.

Par ailleurs, on a $d^*(E_k) = \inf_{\substack{H \text{ ouvert} \\ E_k \subseteq H}} (d_*(H))$ et g_R est croissante et continue,

$$\text{d'où } g_R(d^*(E_k)) = \inf_{\substack{H \text{ ouvert} \\ E_k \subseteq H}} g_R(d_*(H)).$$

Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe un ouvert \widetilde{H}_k contenant E_k tel que

$$g_R(d_*(\widetilde{H}_k)) - \frac{\varepsilon}{2^k} \leq g_R(d^*(E_k)). \text{ Posons } H_k = \widetilde{H}_k \cap B(0, 2r) \text{ et } H = \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} H_k.$$

Comme $H_k \subseteq \widetilde{H}_k$, on a $d_*(H_k) \leq d_*(\widetilde{H}_k)$, d'où

$$g_R(d_*(H_k)) \leq g_R(d_*(\widetilde{H}_k)) \leq g_R(d^*(E_k)) + \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

De plus, par construction, E est inclus dans l'ouvert H .

Soit A un compact inclus dans H . On a $A \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} H_k$ avec A compact, donc il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $A \subseteq \bigcup_{k=1}^m H_k$. Soit ρ un nombre de Lebesgue¹¹ de ce recouvrement. On a $A \subseteq \bigcup_{x \in A} B(x, 2\rho)$. Comme A est compact, on peut extraire du recouvrement ouvert précédent un sous-recouvrement fini. Ainsi, il existe x_1, x_2, \dots, x_q

des éléments de A vérifiant $A \subseteq \bigcup_{j=1}^q B(x_j, 2\rho)$.

Pour tout $j \in \llbracket 1, q \rrbracket$, on pose $I_j = \min\{k \in \llbracket 1, m \rrbracket / B(x_j, 2\rho) \subseteq H_k\}$ et, pour tout

$k \in \llbracket 1, m \rrbracket$, on pose $\widetilde{A}_k = \bigcup_{\substack{j=1, \dots, q \\ I_j = k}} B_f(x_j, \rho)$ et $A_k = \widetilde{A}_k \cap A$.

On a alors, pour tout $k \in \llbracket 1, m \rrbracket$, A_k compact¹², $A_k \subseteq \widetilde{A}_k \subseteq H_k$ et $A \subseteq \bigcup_{k=1}^m \widetilde{A}_k$,

d'où $A \subseteq \bigcup_{k=1}^m A_k$ avec $\bigcup_{k=1}^m A_k$ compact. L'inclusion précédente et le lemme 3.2.11 nous permettent d'obtenir

$$g_R(d(A)) \leq g_R\left(d\left(\bigcup_{k=1}^m A_k\right)\right) \leq \sum_{k=1}^m g_R(d(A_k)) \quad (3.53)$$

11. c'est-à-dire un nombre réel $\rho > 0$ vérifiant $\forall x \in A \quad \exists j \in \{1, 2, \dots, m\} \quad B(x, 2\rho) \subseteq H_j$.

L'existence d'un tel ρ provient de la compacité de A . En effet, si par l'absurde on suppose le contraire, alors $\forall \rho > 0 \quad \exists x \in A \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, m\} \quad B(x, 2\rho) \not\subseteq H_j$. En définissant la suite (ρ_n) par $\rho_n = 2^{-n}$, on obtient l'existence d'une suite x_n d'éléments de A vérifiant $\forall j \in \{1, 2, \dots, m\} \quad B(x_n, 2\rho_n) \not\subseteq H_j$. A étant compact, on en déduit l'existence d'une sous-suite (x_{n_k}) qui tend vers un élément x de A . Comme $x \in A$ et $A \subseteq \bigcup_{k=1}^m H_k$, il existe j_0 tel que $x \in H_{j_0}$ et comme H_{j_0} est un ouvert, il existe $\eta > 0$ tel que $B(x, 3\eta) \subseteq H_{j_0}$. Comme $\rho_{n_k} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$, il existe k_0 tel que $\forall k \geq k_0 \quad 0 \leq 2\rho_{n_k} \leq \eta$. De plus, comme (x_{n_k}) converge vers x , il existe $k_1 \geq k_0$ tel que $\forall k \geq k_1 \quad |x_{n_k} - x| \leq \eta$. On a alors, pour tout $y \in B(x_{n_{k_1}}, 2\rho_{n_{k_1}})$, $|y - x| \leq |y - x_{n_{k_1}}| + |x_{n_{k_1}} - x| \leq 2\rho_{n_{k_1}} + \eta \leq 2\eta < 3\eta$, d'où $B(x_{n_{k_1}}, 2\rho_{n_{k_1}}) \subseteq B(x, 3\eta) \subseteq H_{j_0}$. Or, $B(x_{n_{k_1}}, 2\rho_{n_{k_1}}) \not\subseteq H_{j_0}$. Contradiction.

12. car A_k est un fermé qui est inclus dans le compact A .

Et comme A_k compact et $A_k \subseteq H_k$, on a $d(A_k) = d_*(A_k) \leq d_*(H_k)$. D'où

$$g_R(d(A_k)) \leq g_R(d_*(H_k)) \leq g_R(d^*(E_k)) + \frac{\varepsilon}{2^k} \quad (3.54)$$

De (3.53) et (3.54), on tire

$$g_R(d(A)) \leq \sum_{k=1}^m g_R(d^*(E_k)) + \sum_{k=1}^m \frac{\varepsilon}{2^k} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} g_R(d^*(E_k)) + \varepsilon \quad (3.55)$$

Or, comme $d_*(H) = \sup_{\substack{A \text{ compact} \\ A \subseteq H}} (d(A))$ et comme g_R est croissante et continue, on a

$$g_R(d_*(H)) = \sup_{\substack{A \text{ compact} \\ A \subseteq H}} g_R(d(A)) \quad (3.56)$$

De (3.55) et (3.56), on tire

$$g_R(d_*(H)) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} g_R(d^*(E_k)) + \varepsilon \quad (3.57)$$

Comme $g_R(d^*(E)) = \inf_{\substack{\tilde{H} \text{ ouvert} \\ E \subseteq \tilde{H}}} g_R(d_*(\tilde{H}))$ l'inégalité (3.57) donne

$$g_R(d^*(E)) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} g_R(d^*(E_k)) + \varepsilon$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit que

$$g_R(d^*(E)) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} g_R(d^*(E_k)) \quad (3.58)$$

Par conséquent, si pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $d^*(E_k) = 0$, alors $g_R(d^*(E_k)) = 0$ et (3.58) nous donne $g_R(d^*(E)) = 0$, d'où $d^*(E) = 0$.

2ème cas: E quelconque

Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $E_k^{[n]} = E_k \cap B(0, n)$ et $E^{[n]} = E \cap B(0, n)$. Comme $E_k^{[n]} \subseteq E_k$, on a $d^*(E_k^{[n]}) \leq d^*(E_k) \leq 0$. D'où $d^*(E_k^{[n]}) = 0$.

De plus, $E^{[n]} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} E_k^{[n]}$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*$ $d^*(E_k^{[n]}) = 0$ avec $E^{[n]}$ borné, d'où, d'après

le 1er cas, $d^*(E^{[n]}) = 0$. Comme $g_R(d^*(E^{[1]})) = \inf_{\substack{H \text{ ouvert} \\ E^{[1]} \subseteq H}} g_R(d_*(H))$,

il existe un ouvert H_1 contenant $E^{[1]}$ tel que $g_R(d_*(H_1)) < \varepsilon$. Quitte¹³ à réduire H_1 , on peut supposer H_1 borné.

Choisissons ε_2 tel que $0 < \varepsilon_2 < \varepsilon - g_R(d_*(H_1))$. Comme $g_R(d^*(E^{[2]})) = 0$, il existe un ouvert \widetilde{H}_2 contenant $E^{[2]}$ tel que $g_R(d_*(\widetilde{H}_2)) < \varepsilon_2$. Quitte¹⁴ à réduire \widetilde{H}_2 , on peut supposer \widetilde{H}_2 borné. Posons $H_2 = H_1 \cup \widetilde{H}_2$. On a $H_1 \subseteq H_2$ et comme H_1 , H_2 et \widetilde{H}_2 , sont des ouverts, on a $d_*(H_1) = d^*(H_1)$ et de même pour H_2 et \widetilde{H}_2 . Comme tout est borné, le 1er cas nous donne

$$g_R(d_*(H_2)) \leq g_R(d_*(H_1)) + g_R(d_*(\widetilde{H}_2)) < g_R(d_*(H_1)) + \varepsilon_2 < \varepsilon$$

Par récurrence on construit ainsi une suite (H_k) d'ouverts de K qui est croissante pour l'inclusion et telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $E^{[k]} \subseteq H_k$ et $g_R(d_*(H_k)) < \varepsilon$. Par ailleurs, on a $E \subseteq H = \bigcup_{k=1}^{+\infty} H_k$, d'où $d^*(E) \leq d^*(H)$.

Or, pour tout compact A inclus dans H , comme $\bigcup_{k=1}^{+\infty} H_k$ est un recouvrement ouvert de A , on peut en extraire un sous-recouvrement fini. Il existe alors $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $A \subseteq \bigcup_{k=1}^m H_k = H_m$ (par croissance des H_k).

Comme $A \subseteq H_m$, on a $d(A) = d_*(A) \leq d_*(H_m) < \varepsilon$, d'où $d(A) \leq \varepsilon$. Ceci étant vrai pour tout compact A inclus dans H , on en déduit que $d_*(H) \leq \varepsilon$. Et comme H est un ouvert contenant E , on a $d^*(E) \leq d^*(H) = d_*(H) \leq \varepsilon$. D'où $d^*(E) \leq \varepsilon$. Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on a $d^*(E) = 0$. □

13. On peut remplacer H_1 par $H_1 \cap B(0,1)$.

14. On peut remplacer \widetilde{H}_2 par $\widetilde{H}_2 \cap B(0,2)$.

Chapitre 4

Généralisation du théorème de Perez-Marco

Dans [PM01], Perez-Marco démontre que si on perturbe de façon polynomiale un germe de difféomorphisme holomorphe fixant 0, alors on a une loi de « tout ou presque rien ». Il démontre en particulier que pour tout $m, d \in \mathbb{N}^*$, si les $g_i : (\mathbb{C}^m, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^m, 0)$ sont des germes de fonctions holomorphes de valuation supérieure ou égale à 2, si $A \in GL_m(\mathbb{C})$ est non-résonante et si on pose $f_t(z) = Az + \sum_{i=0}^d t^i g_i(z)$ et $E = \{t \in \mathbb{C} / f_t \text{ est linéarisable}\}$, alors ou bien E est égale à \mathbb{C} tout entier ou bien E est un ensemble très petit (un ensemble de capacité logarithmique nulle).

L'objectif de la prochaine section est double. Dans son article, Perez-Marco utilisait la théorie du potentiel, notamment le lemme de Bernstein. Une approche alternative consiste à utiliser le diamètre transfini pour définir la capacité logarithmique dans \mathbb{C} et à remplacer le lemme de Bernstein par un théorème de majoration polynomiale utilisant uniquement le diamètre transfini. C'est cette approche que nous adoptons ici et elle va nous permettre d'une part de fournir une nouvelle démonstration du théorème de Perez-Marco dans \mathbb{C} et d'autre part d'adapter ce théorème au cadre p -adique.¹

4.1 Théorème de Perez-Marco généralisé

Soit K_1 un sous-corps valué complet de \tilde{K} et K_2 un sous-corps valué complet et localement compact de K_1 . Lorsque $\tilde{K} = \mathbb{C}$, forcément, $K_2 = \mathbb{R}$ ou $K_2 = \mathbb{C}$. Lorsque $\tilde{K} = \mathbb{C}_p$, forcément, K_2 est une extension finie de \mathbb{Q}_p .

1. La généralisation au cadre p -adique ne présente d'intérêt que pour $m \geq 2$, car il est classique qu'en dimension 1, tout $\lambda \in \mathbb{C}_p \setminus \{0\}$ non racine de l'unité est diophantien, ce qui entraîne que, dans le cas non-résonant, la linéarisation est toujours possible (voir [HY83])

Théorème 4.1.1. *Si $m, d \in \mathbb{N}^*$, si les $h_k : (K_1^m, 0) \longrightarrow (K_1^m, 0)$ sont des séries entières en m variables de valuation supérieure ou égale à 2 et de rayon de convergence strictement positif, si $L \in GL_m(K_1)$ est non-résonante et si on pose*

$$f_t(z) = Lz + \sum_{k=0}^d t^k h_k(z) \text{ et } E = \{t \in K_2 / f_t \text{ est linéarisable}\},$$

alors,

$$\text{ou bien } E = K_2 \text{ ou bien } d^*(E) = 0$$

Démonstration :

On s'intéresse à la linéarisation de la famille $(f_t : K_1^m \longrightarrow K_1^m)_{t \in K_2}$ avec f_t de la forme

$$f_t(z) = Lz + \sum_{k=0}^d t^k h_k(z)$$

avec $L \in GL_m(K_1)$ non-résonante, h_k de la forme $h_k(z) = \sum_{j \geq 2} h_k^{(j)}(z)$ de rayon de convergence strictement positif et $h_k^{(j)}(z)$ polynôme homogène de degré j en m variables et à valeurs dans K_1^m .

On peut aussi écrire f_t sous la forme

$$f_t(z) = Lz + \sum_{j=2}^{+\infty} f_t^{(j)}(z)$$

avec $f_t^{(j)}(z) = \sum_{0 \leq k \leq d} t^k h_k^{(j)}(z)$ polynôme homogène de degré j en m variables et à valeurs dans K_1^m et dont les composantes des coefficients sont des polynômes en t de degré au plus d .

Pour tout $t \in K_2$, comme L est non-résonante, d'après la proposition 2.2.8, f_t possède une unique linéarisante formelle

$$\varphi_t(z) = z + \sum_{j \geq 2} \varphi_t^{(j)}(z) = \sum_{j \geq 1} \varphi_t^{(j)}(z)$$

et d'après la formule (2.4), avec les notations du chapitre 2, elle est déterminée par

$$\varphi_t^{(1)}(z) = z \quad \text{et, pour tout } q \geq 2,$$

$$\varphi_t^{(q)}(z) = (\mathcal{L}_L^{(q)})^{-1} \left(\mathcal{P}_q \left(\sum_{2 \leq l \leq q} f_t^{(l)} \left(\sum_{1 \leq i \leq l} \varphi_t^{(i)}(z) \right) \right) \right) \quad (4.1)$$

De cette relation, on déduit immédiatement par récurrence que les composantes des coefficients des polynômes homogènes $\varphi_t^{(q)}$ sont des polynômes en t à coefficients dans K_1 .

De plus, en notant W_q le degré maximum, en tant que polynôme en t , des composantes des coefficients du polynôme homogène $\varphi_t^{(q)}$, on a le lemme suivant

Lemme 4.1.2.

$$\forall q \in \mathbb{N}^* \quad W_q \leq d(q-1)$$

Démonstration du lemme:

D'après la formule (4.1), comme on a à faire à des polynômes homogènes et comme les composantes des coefficients des $f_t^{(l)}$ sont des polynômes en t de degré au plus d , on a $W_1 = 0$ et, pour tout $q \geq 2$,

$$W_q \leq \max_{\substack{2 \leq l \leq q \\ 1 \leq i \leq q}} (d + lW_i) \quad (4.2)$$

On obtient alors que

- pour $q = 1$, le lemme est vrai, car $W_1 = 0 = d(1-1)$.
- pour $q \geq 2$, si on suppose que pour tout $j \in \llbracket 1, q-1 \rrbracket$, $W_j \leq d(j-1)$, alors, on tire de (4.2) que

$$W_q \leq \max_{\substack{2 \leq l \leq q \\ 1 \leq i \leq q}} (d + lW_i)$$

Or, pour tout $l \in \llbracket 2, q \rrbracket$ et tout $i \in \llbracket 1, \frac{q}{l} \rrbracket$, on a

$$\begin{aligned} d + lW_i &\leq d + ld(i-1) \\ &\leq d + dil - ld \\ &\leq d + dq - 2d \\ &\leq dq - d \\ &\leq d(q-1) \end{aligned}$$

d'où

$$W_q \leq d(q-1)$$

Par récurrence, il s'en suit que le lemme est vrai.

Pour tout $t \in K_2$ et $q \in \mathbb{N}^*$, notons aussi $B_q(t)$, le maximum (à t fixé) des valeurs absolues des composantes des coefficients du polynôme homogène $\varphi_t^{(q)}$. On a $E = \{t \in K_2 / f_t \text{ est linéarisable}\}$. Posons alors, pour tout $q \in \mathbb{N}^*$,

$$F_q = \{t \in K_2 \ / \ |t| \leq q\}$$

et

$$G_q = \bigcap_{j \in \mathbb{N}^*} \{t \in F_q \ / \ B_j(t) \leq q^j\}$$

Remarque 4.1.3. *Les G_q sont des fermés bornés dans K_2 qui est localement compact, donc les G_q sont des compacts.*

Lemme 4.1.4.

$$E = \bigcup_{q=1}^{+\infty} G_q$$

Démonstration du lemme:

• Si $t \in E$. Alors, f_t est linéarisable et $\varphi_t(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^m} a_{\alpha,t} z^\alpha$ est une série entière de rayon $R_{\varphi_t} > 0$. Posons $r = \frac{R_{\varphi_t}}{2}$ et $z_0 = (r, r, \dots, r)$. Comme $\|z_0\| < R_{\varphi_t}$, $\varphi_t(z_0)$ est convergente et donc $a_{\alpha,t} r^{|\alpha|} \xrightarrow{\|\alpha\| \rightarrow +\infty} 0$. Il existe alors un réel $M > 1$ tel que $\forall \alpha \in \mathbb{N}^m \quad \|a_{\alpha,t} r^{|\alpha|}\| \leq M$. En² posant $q_0 = 3 + \left\lceil \frac{M}{r} \right\rceil + \lceil |t| \rceil$, on obtient, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^m$ tel que $\|\alpha\| \geq 1$,

$$\|a_{\alpha,t}\| \leq \frac{M}{r^{|\alpha|}} \leq \left(\frac{M}{r}\right)^{\|\alpha\|} \leq q_0^{\|\alpha\|} \quad (4.3)$$

et

$$t \in F_{q_0} \quad (4.4)$$

d'où

$$B_{\|\alpha\|}(t) \leq q_0^{\|\alpha\|} \quad (4.5)$$

et

$$t \in F_{q_0} \quad (4.6)$$

On déduit alors de (4.5) et (4.6) que $t \in G_{q_0}$, d'où $t \in \bigcup_{q=1}^{+\infty} G_q$.

2. On note $[x]$ la partie entière du réel x , c'est-à-dire l'unique entier n vérifiant $n \leq x < n + 1$.

• Si $t \in \bigcup_{q=1}^{+\infty} G_q$, alors il existe q_0 tel que $t \in G_{q_0}$. On a alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^m$ tel que $\|\alpha\| \geq 1$, $\|a_{\alpha,t}\| \leq B_{\|\alpha\|}(t) \leq q_0^{|\alpha|}$. Donc $\varphi_t(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^m} a_{\alpha,t} z^\alpha$ est de rayon $R_{\varphi_t} \geq \frac{1}{q_0} > 0$. Par conséquent, f_t est linéarisable et $t \in E$.

Fin de la démonstration du théorème:

Pour démontrer le théorème 4.1.1, il suffit de prouver que si $d^*(E) > 0$, alors $E = K_2$. Supposons donc que $d^*(E) > 0$. D'après le lemme 4.1.4, on a $E = \bigcup_{q=1}^{+\infty} G_q$,

d'où $d^*\left(\bigcup_{q=1}^{+\infty} G_q\right) > 0$. Grâce au théorème 3.2.8, on en déduit qu'il existe $q_0 \in \mathbb{N}^*$

tel que $d^*(G_{q_0}) > 0$. Or, K_2 est localement compact et comme d'après la remarque 4.1.3, G_{q_0} est compact, on déduit de la proposition 3.2.5 que $d^*(G_{q_0}) = d(G_{q_0})$.

Par conséquent, $d(G_{q_0}) > 0$.

Soit $t \in K_2$, $q \geq 2$ et $C(t)$ une des composantes d'un des coefficients du polynôme homogène $\varphi_t^{(q)}(z)$ de degré q en z . Comme $d(G_{q_0}) > 0$ avec $G_{q_0} \subseteq B_f(0, q_0)$ et comme $\deg C \leq W_q \leq d(q-1) \leq dq$, on a, d'après le théorème 3.1.10

$$|C(t)| \leq \max_{a \in G_{q_0}} |C(a)| \left(\frac{2}{d(G_{q_0})} \right)^{dq} (|t| + q_0)^{dq}.$$

Or

$$\max_{a \in G_{q_0}} |C(a)| \leq \max_{a \in G_{q_0}} B_q(a) \leq q_0^q$$

d'où

$$|C(t)| \leq q_0^q \left(\frac{2}{d(G_{q_0})} \right)^{dq} (|t| + q_0)^{dq}$$

c'est-à-dire

$$|C(t)| \leq \left(q_0 \left(\frac{2}{d(G_{q_0})} \right)^d (|t| + q_0)^d \right)^q$$

et par conséquent,

$$B_q(t) \leq \left(q_0 \left(\frac{2}{d(G_{q_0})} \right)^d \left(|t| + q_0 \right)^d \right)^q$$

Ainsi, $t \in E$, ce qui entraîne finalement,

$$E = K_2.$$

Remarque 4.1.5. Lorsque $\tilde{K} = \mathbb{C}_p$, ce théorème ne présente d'intérêt que pour $m \geq 2$, car il est classique qu'en dimension 1, tout $\lambda \in \mathbb{C}_p \setminus \{0\}$ non racine de l'unité est diophantien, ce qui entraîne que, dans le cas non-résonant, la linéarisation est toujours possible (voir [HY83])

En dimension supérieure, la situation n'est pas triviale. Dans [HY83] est démontré le théorème suivant :

Il existe $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z}_p$ et une fonction entière $\theta(z) = \sum_{k \geq 2} a_k z^k$ tels que $g(z_1, z_2) = (\lambda_1 z_1, \lambda_2 z_2) + (\theta(z_2), 0)$ soit non linéarisable .

En appliquant le Théorème 4.1.1 à la famille

$$f_t(z_1, z_2) = g(z_1, z_2) + t \left(\sum_{\alpha_1 + \alpha_2 \geq 2} z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2}, \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 \geq 2} z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} \right),$$

on obtient

Corollaire 4.1.6. Il existe $t \in \mathbb{Q}_p \setminus \{0\}$ tel que f_t soit non linéarisable.

Ceci donne des exemples de non-linéarisabilité de fonctions d'une forme plus générale.

Remarque 4.1.7. Pour démontrer le théorème précédent, nous avons utilisé le fait que K_2 est localement compact à 2 reprises: lorsque nous avons utilisé la remarque 4.1.3 et lorsque nous avons utilisé la proposition 3.2.5. Cela nous a permis de pouvoir ensuite utiliser le théorème 3.1.10.

Si on ne suppose pas que K_2 est localement compact, on ne peut pas appliquer ce qui précède³. Toutefois, lorsque $K_2 = K_1 = \mathbb{C}_p$, en utilisant le fait que \mathbb{C}_p est à la fois complet et algébriquement clos, on peut démontrer un théorème de tout ou presque rien plus faible:

Théorème 4.1.8. Si $K_2 = \mathbb{C}_p$ avec les mêmes notations qu'au théorème 4.1.1, on a

ou bien $E = \mathbb{C}_p$, ou bien E est d'intérieur vide.

3. Même si on essaie de remplacer les "compacts" par des "fermés bornés", on n'arrive pas à conclure.

Démonstration :

On va utiliser les mêmes notations que dans la démonstration du théorème 4.1.1. Pour démontrer le résultat, il suffit de montrer que si E est d'intérieur non vide, alors, $E = \mathbb{C}_p$.

Supposons que E est d'intérieur non vide. D'après le lemme 4.1.4, on a $E = \bigcup_{q=1}^{+\infty} G_q$.

Par conséquent, comme les G_q sont des fermés (bornés), le théorème de Baire entraîne qu'il existe $q_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que G_{q_0} soit d'intérieur non vide. Il existe alors a_0 point de l'intérieur de G_{q_0} et $r \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $B(a_0, r) \subseteq G_{q_0}$.

Soit $b_0 \in B(a_0, r) \setminus \{a_0\}$. On a $r_0 = |b_0 - a_0| < r$ et $B_f(a_0, r_0) \subseteq B(a_0, r) \subseteq G_{q_0}$.

Soit $t \in K_2$, $q \geq 2$ et $C(t)$ une des composantes d'un des coefficients du polynôme homogène $\varphi_t^{(q)}(z)$ de degré q en z . Posons $P(X) = C(a_0 + (b_0 - a_0)X)$.

comme $\deg P = \deg C \leq W_q \leq d(q-1) \leq dq$, on a, d'après la proposition 3.1.16

appliquée au point $z = \frac{t - a_0}{b_0 - a_0}$,

$$|P(z)| \leq \max_{a \in B_f(0,1)} |P(a)| 2^{dq} (\max(|z|, 1))^{dq} \quad (4.7)$$

Or

$$P(z) = P\left(\frac{t - a_0}{b_0 - a_0}\right) = C\left(a_0 + (b_0 - a_0)\frac{t - a_0}{b_0 - a_0}\right) = C(a_0 + t - a_0) = C(t) \quad (4.8)$$

et, comme $a_0 \in G_{q_0}$, on a aussi

$$|z| = \left|\frac{t - a_0}{b_0 - a_0}\right| = \frac{|t - a_0|}{|b_0 - a_0|} = \frac{|t - a_0|}{r_0} \leq \frac{1}{r_0} \max(|t|, |a_0|) \leq \frac{1}{r_0} \max(|t|, q_0) \quad (4.9)$$

On déduit alors de (4.7), (4.8) et (4.9) que

$$|C(t)| \leq \max_{a \in B_f(0,1)} |P(a)| \left(\frac{2}{r_0}\right)^{dq} (\max(|t|, q_0, r_0))^{dq} \quad (4.10)$$

4. Un tel point existe car K_2 contient \mathbb{Q} et dans \mathbb{Q} , on peut trouver des nombres ayant une valeur absolue aussi petite que l'on veut.

Par ailleurs, pour tout $a \in B_f(0,1)$, on a $P(a) = C(a_0 + (b_0 - a_0)a)$

avec $a_0 + (b_0 - a_0)a \in B_f(a_0, r_0) \subseteq G_{q_0}$.

D'où $|P(a)| = |C(a_0 + (b_0 - a_0)a)| \leq B_q(a_0 + (b_0 - a_0)a) \leq q_0^q$

Ainsi

$$\max_{a \in B_f(0,1)} |P(a)| \leq q_0^q \quad (4.11)$$

On déduit alors de (4.10) et (4.11) que

$$|C(t)| \leq q_0^q \left(\frac{2}{r_0}\right)^{dq} (\max(|t|, q_0, r_0))^{dq} \quad (4.12)$$

d'où

$$|C(t)| \leq \left(q_0 \left(\frac{2}{r_0}\right)^d (\max(|t|, q_0, r_0))^d \right)^q \quad (4.13)$$

et par conséquent,

$$B_q(t) \leq \left(q_0 \left(\frac{2}{r_0}\right)^d (\max(|t|, q_0, r_0))^d \right)^q \quad (4.14)$$

Ainsi, $t \in E$, ce qui entraîne finalement,

$$E = \mathbb{C}_p.$$

4.2 Généralisation du théorème d'Il'Yashenko

Dans cette section, nous allons montrer que le théorème d'Il'Yashenko [Il'79], démontré par Il'Yashenko dans le cadre complexe, est encore valable dans le cadre p -adique.

Théorème 4.2.1. *Notons \mathcal{E} l'ensemble des séries entières en m variables et à valeurs dans K_1^m de rayon de convergence strictement positif et de valuation supérieure ou égale à 2.*

Notons \mathcal{B} l'application de \mathcal{E} dans \mathcal{E} définie par $\mathcal{B}(g) = g \circ L - L \circ g$. Soit $h \in \mathcal{E}$.

Si $h \notin \text{Im}(\mathcal{B})$, alors $d^(\{t \in K_2 \mid f_t = L + th \text{ linéarisable}\}) = 0$.*

En particulier, il existe $t \in B_f(0,1)$ tel que $f_t = L + th$ soit non-linéarisable.

Démonstration :

Notons $f_t(z) = Lz + th(z)$ et posons $E = \{t \in K_2 / f_t \text{ est linéarisable}\}$. Pour démontrer le théorème 4.2.1, il suffit de prouver que si $d^*(E) > 0$, alors $h \in \text{Im}(\mathcal{B})$. Supposons donc que $d^*(E) > 0$. D'après le lemme 4.1.4, on a $E = \bigcup_{q=1}^{+\infty} G_q$, d'où

$$d^* \left(\bigcup_{q=1}^{+\infty} G_q \right) > 0. \text{ Grâce au théorème 3.2.8, on en déduit qu'il existe } q_0 \in \mathbb{N}^*$$

tel que $d^*(G_{q_0}) > 0$. Or, K_2 est localement compact et comme d'après la remarque 4.1.3, G_{q_0} est compact, on déduit de la proposition 3.2.5 que $d^*(G_{q_0}) = d(G_{q_0})$.

Par conséquent, $d(G_{q_0}) > 0$.

Soit $t \in B_f(0,1)$, $q \geq 2$ et $C(t)$ une des composantes d'un des coefficients du polynôme homogène $\varphi_t^{(q)}(z)$ de degré q en z . Comme $d(G_{q_0}) > 0$ avec $G_{q_0} \subseteq B_f(0, q_0)$ et

comme $\deg C \leq W_q \leq d(q-1) \leq dq$, on a, d'après le théorème 3.1.10

$$|C(t)| \leq \max_{a \in G_{q_0}} |C(a)| \left(\frac{2}{d(G_{q_0})} \right)^{dq} (|t| + q_0)^{dq}.$$

Or

$$\max_{a \in G_{q_0}} |C(a)| \leq \max_{a \in G_{q_0}} B_q(a) \leq q_0^q$$

d'où

$$|C(t)| \leq q_0^q \left(\frac{2}{d(G_{q_0})} \right)^{dq} (|t| + q_0)^{dq}$$

c'est-à-dire

$$|C(t)| \leq \left(q_0 \left(\frac{2}{d(G_{q_0})} \right)^d (|t| + q_0)^d \right)^q$$

et par conséquent, comme on a également $|t| \leq 1$, on a

$$B_q(t) \leq \left(q_0 \left(\frac{2}{d(G_{q_0})} \right)^d (1 + q_0)^d \right)^q \quad (4.15)$$

Ainsi⁵, le rayon R_{φ_t} de la série $\varphi_t(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^m} a_{\alpha,t} z^\alpha$ est supérieur ou égal à $\frac{1}{\left(q_0 \left(\frac{2}{d(G_{q_0})}\right)^d (1+q_0)^d\right)}$, et ceci est vrai pour tout $t \in B_f(0,1)$.

Mais, comme les $a_{\alpha,t}$ sont des polynômes en t , la série $\varphi_t(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^m} a_{\alpha,t} z^\alpha$ peut aussi être vue comme une série $\psi(z_1, z_2, \dots, z_m, t) = \sum_{\beta \in \mathbb{N}^{m+1}} b_\beta z_1^{\beta_1} z_2^{\beta_2} \dots z_m^{\beta_m} t^{\beta_{m+1}}$

en $m+1$ variables⁶ et, en posant $R_0 = \min \left(1, \frac{1}{\left(q_0 \left(\frac{2}{d(G_{q_0})}\right)^d (1+q_0)^d\right)} \right)$,

on obtient⁷ que $R_\psi \geq R_0 > 0$.

La série $\psi(z_1, z_2, \dots, z_m, t) = \sum_{\beta \in \mathbb{N}^{m+1}} b_\beta z_1^{\beta_1} z_2^{\beta_2} \dots z_m^{\beta_m} t^{\beta_{m+1}}$ est alors dérivable en n'importe laquelle des variables, en particulier en t .

Pour tout $z \in K_1^m$ tel que $\|z\| < R_0$, considérons l'application $\eta_z : B_f(0,1) \rightarrow K_1^m$ définie par

$$\eta_z(t) = \psi(z_1, z_2, \dots, z_m, t) = \varphi_t(z)$$

Grâce à (4.15), on contrôle parfaitement les valeurs absolues de toutes les composantes de tous les coefficients des φ_t pour $t \in B_f(0,1)$. On peut alors en déduire qu'il existe $\varepsilon \in]0, \min(1, R_0)[$ vérifiant, pour tout $t \in B_f(0,1)$, $\varphi_t(B(0, \varepsilon))$ inclus dans le domaine de définition de f_t et $L(B(0, \varepsilon)) \subseteq B(0, R_0)$.

Par conséquent, pour tout $t \in B(0,1)$ et tout $z \in B(0, \varepsilon)$, on a

$$f_t(\varphi_t(z)) = \varphi_t(Lz) \tag{4.16}$$

c'est-à-dire

$$f_t(\eta_z(t)) = \eta_{Lz}(t) \tag{4.17}$$

5. En utilisant les notations de la section précédente,

6. toujours à valeurs dans K_1^m

7. car on vient de voir que cette série converge pour tout $(z_1, z_2, \dots, z_m, t)$ vérifiant

$$\forall k \in [[1, m]] \quad |z_k| < \frac{1}{\left(q_0 \left(\frac{2}{d(G_{q_0})}\right)^d (1+q_0)^d\right)} \text{ et } |t| \leq 1.$$

c'est-à-dire

$$L\eta_z(t) + th(\eta_z(t)) = \eta_{Lz}(t) \quad (4.18)$$

c'est-à-dire, en notant $b(t) = h(\eta_z(t))$,

$$L\eta_z(t) + tb(t) = \eta_{Lz}(t) \quad (4.19)$$

En dérivant ces séries entières par rapport à t , on obtient

$$L\eta'_z(t) + b(t) + tb'(t) = \eta'_{Lz}(t) \quad (4.20)$$

et en prenant $t = 0$, on en déduit que

$$L\eta'_z(0) + b(0) + 0b'(0) = \eta'_{Lz}(0) \quad (4.21)$$

c'est-à-dire

$$L\eta'_z(0) + h(\eta_z(0)) = \eta'_{Lz}(0) \quad (4.22)$$

Or, pour tout $y \in B(0, \varepsilon)$, on⁸ a $\eta_y(0) = \varphi_0(y) = y$, d'où $h(\eta_z(0)) = h(z)$.
Ce qui entraîne

$$h(z) = \eta'_{Lz}(0) - L\eta'_z(0) \quad (4.23)$$

De plus, pour tout $y \in B(0, \varepsilon)$ et tout $u \in B(0, 1)$, on a

$$\eta'_y(t) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{\beta \in \mathbb{N}^{m+1}} b_\beta y_1^{\beta_1} y_2^{\beta_2} \dots y_m^{\beta_m} t^{\beta_{m+1}} \right)$$

Donc $\eta'_y(t)$ est une série entière (de rayon strictement positif) en $(y_1, y_2, \dots, y_m, t)$ et par conséquent, $\eta'_y(0)$ est une série entière (de rayon strictement positif) en $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$. Nous la noterons $\gamma(y)$.

Ainsi, $\eta'_y(0) = \gamma(y)$ et l'équation (4.23) devient

$$h(z) = \gamma(Lz) - L\gamma(z) \quad (4.24)$$

On a alors $h = \mathcal{B}(\gamma)$, d'où finalement,

$$h \in \text{Im}(\mathcal{B}).$$

□

8. car, si $t = 0$, alors f_t est déjà linéaire et par unicité de la linéarisante formelle, on a $\varphi_0 = I_d$.

Remarque 4.2.2. Dans le cas complexe, c'est grâce à ce théorème que Yoccoz (voir [Yoc95]) démontre que :

Pour tout $n \geq 2$ et tout $A \in GL_n(\mathbb{C})$, si A possède une valeur propre de module 1 dont le sous-espace caractéristique associé diffère du sous-espace propre, alors, il existe des germes de difféomorphismes holomorphes de la forme $f(z) = Az + \dots$ qui ne sont pas linéarisables.

Remarque 4.2.3. Dans le cas complexe, ce théorème est aussi l'un des outils qui permet à DeLatte et à Gramchev (voir [DG02]) de démontrer que :

Pour tout $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & \varepsilon \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$ non-résonante avec $|\lambda| > 1$, $|\mu| < 1$ et $\varepsilon \neq 0$, il existe des germes de difféomorphismes holomorphes de la forme $f(z) = Az + \dots$ qui ne sont pas linéarisables.

4.3 Information diophantienne dans le théorème de Perez-Marco

Dans cette section, on supposera que $K_1 = K_2 = \mathbb{C}$ et que $m = 1$. Dans le théorème de Perez-Marco, pour obtenir qu'une famille f_t est non-linéarisable à l'exception d'un ensemble de mesure nulle de t , on s'arrange pour faire apparaître dans cette famille un élément f_{t_0} dont on sait déjà qu'il est non-linéarisable. Ainsi, comme ou bien $E = \mathbb{C}$ ou bien $d^*(E) = 0$, comme $t_0 \notin E$, forcément, $d^*(E) = 0$.

Ici, on va construire une famille sur laquelle on récupérera directement une information diophantienne, sans rien connaître à l'avance sur aucun membre de cette famille.

Théorème 4.3.1. Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Posons $\lambda = e^{i2\pi\theta}$ et notons $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)_{n \geq 0}$ la suite

des réduites de θ . Soit \mathcal{K} désignera une partie infinie de $\mathbb{N} \setminus \{0,1,2\}$ et

$$f(z) = \lambda z + \sum_{n=3}^{+\infty} c_n z^n \text{ une série entière de rayon } R > 0 .$$

On suppose que $\forall k \in \mathcal{K} \quad c_{1+q_k} \neq 0$ et on considère la famille $(f_t)_{t \in \mathbb{C}}$ définie par

$$f_t(z) = \lambda z + \sum_{n=3}^{+\infty} c_n t^{n-2} z^n .$$

En posant $E = \{t \in \mathbb{C} \mid f_t \text{ linéarisable}\}$, on a

$$\text{ou bien } E = \mathbb{C} \text{ et } \exists M > 1 \quad \forall k \in \mathcal{K} \quad \frac{\ln(q_{k+1})}{q_k} + \frac{\ln(|c_{1+q_k}|)}{q_k} \leq M .$$

ou bien $d^*(E) = 0$.

Remarque 4.3.2.

- Comme $f_0(z) = \lambda z$, on a automatiquement $0 \in E$.
- En notant R_t le rayon de la série entière f_t , on a $\forall t \in \mathbb{C}^* \quad R_t \geq \frac{R}{t} > 0$
- Comme $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, les f_t sont formellement linéarisables et leur linéarisante

formelle φ_t s'écrit sous la forme $\varphi_t(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(t) z^n$ où les $b_n(t)$ sont déterminés

par la relation de récurrence suivante :

$$b_1(t) = 1 \text{ et } b_n(t) = \frac{1}{\lambda^n - \lambda} \sum_{2 \leq r \leq n} a_r(t) \sum_{\substack{(j_1, j_2, \dots, j_r) \in (\mathbb{N}^*)^r \\ \sum_{1 \leq k \leq r} j_k = n}} \prod_{1 \leq k \leq r} b_{j_k}(t)$$

avec

$$a_2(t) = 0 \text{ et } \forall n \geq 3 \quad a_n(t) = c_n t^{n-2} \quad \left(\text{i.e. } f_t(z) = \lambda z + \sum_{n=2}^{+\infty} a_n(t) z^n \right)$$

Démonstration du théorème

On va utiliser les notations du théorème 4.1.1 et poser $F_q = \{t \in \mathbb{C} \mid |t| \leq q\}$ et $G_q = \bigcap_{j \in \mathbb{N}^*} \{t \in F_q \mid |b_j(t)| \leq q^j\}$. Un analogue du lemme 4.1.4 nous donne

que $E = \bigcup_{q \in \mathbb{N}^*} G_q$. (et que les G_q sont des compacts.)

Lemme 4.3.3. $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad b_n(t)$ est un polynôme en t .

Démonstration :

Récurrence immédiate en remarquant que les $a_k(t)$ sont des polynômes en t .

Lemme 4.3.4.

- $\deg(b_1) = 0$
- $\forall n \geq 2 \quad \deg(b_n) \leq n - 2$
- $\forall n \geq 3 \quad \deg \left(\sum_{m=2}^{n-1} a_m(t) \sum_{\substack{(j_1, j_2, \dots, j_m) \in (\mathbb{N}^*)^m \\ j_1 + j_2 + \dots + j_m = n}} b_{j_1}(t) b_{j_2}(t) \dots b_{j_m}(t) \right) \leq n - 3.$
- $\forall n \geq 3 \quad \text{val}(b_n) \geq \frac{n-1}{2}$

Démonstration :

Par définition des a_m , on a $\forall m \geq 2 \quad \deg(a_m) \leq m - 2$.

Par définition des b_n , on en déduit que $\deg(b_1)=0$, $\deg(b_2)=0$.

On a donc $\deg(b_1) \leq 1 - 1$ et $\deg(b_2) \leq 2 - 2$.

Considérons la propriété $\mathcal{P}(k)$: " $\forall l \in \llbracket 2, k - 1 \rrbracket \quad \deg(b_l) \leq l - 2$ "

On a déjà vu que $\mathcal{P}(3)$ est vraie.

Soit $n \geq 3$ et supposons $\mathcal{P}(n)$ est vraie. On a alors $\forall l \in \llbracket 2, n - 1 \rrbracket \quad \deg(b_l) \leq l - 2$

Il suffit de montrer que $\deg(b_n) \leq n - 2$.

Or

$$b_n(t) = \frac{1}{\lambda^n - \lambda} \sum_{m=2}^n a_m(t) \sum_{\substack{(j_1, j_2, \dots, j_m) \in (\mathbb{N}^*)^m \\ j_1 + j_2 + \dots + j_m = n}} b_{j_1}(t) b_{j_2}(t) \dots b_{j_m}(t)$$

d'où, comme $b_1(t) = 1$,

$$b_n(t) = \frac{1}{\lambda^n - \lambda} a_n(t) + \frac{1}{\lambda^n - \lambda} \sum_{m=2}^{n-1} a_m(t) \sum_{\substack{(j_1, j_2, \dots, j_m) \in (\mathbb{N}^*)^m \\ j_1 + j_2 + \dots + j_m = n}} b_{j_1}(t) b_{j_2}(t) \dots b_{j_m}(t)$$

Comme $\deg(a_n) \leq n - 2$, il suffit de montrer que

$$\deg \left(\frac{1}{\lambda^n - \lambda} \sum_{m=2}^{n-1} a_m(t) \sum_{\substack{(j_1, j_2, \dots, j_m) \in (\mathbb{N}^*)^m \\ j_1 + j_2 + \dots + j_m = n}} b_{j_1}(t) b_{j_2}(t) \dots b_{j_m}(t) \right) \leq n - 2.$$

Nous allons même montrer que

$$\deg \left(\frac{1}{\lambda^n - \lambda} \sum_{m=2}^{n-1} a_m(t) \sum_{\substack{(j_1, j_2, \dots, j_m) \in (\mathbb{N}^*)^m \\ j_1 + j_2 + \dots + j_m = n}} b_{j_1}(t) b_{j_2}(t) \dots b_{j_m}(t) \right) \leq n - 3.$$

Soit $m \in \llbracket 2, n - 1 \rrbracket$ et $(j_1, j_2, \dots, j_m) \in (\mathbb{N}^*)^m$ tels que $j_1 + j_2 + \dots + j_m = n$

Comme $m < n$, il existe $k_0 \in \llbracket 1, m \rrbracket$ tel que $j_{k_0} \geq 2$.

On a alors $\deg(a_m) \leq m - 2$ et $\forall k \in \llbracket 1, m \rrbracket \setminus \{k_0\} \quad \deg(b_{j_k}) \leq j_k - 1$

car $j_k = 1$ ou $2 \leq j_k \leq n - 1$ car $m > 1$ et $j_1 + j_2 + \dots + j_m = n$.

De plus⁹, $\deg(b_{j_{k_0}}) \leq j_{k_0} - 2$.

On a alors :

$$\deg (a_m(t) b_{j_1}(t) b_{j_2}(t) \dots b_{j_m}(t)) \leq m - 2 + (j_1 - 1) + (j_2 - 1) + \dots \\ + \dots + (j_{k_0} - 2) + \dots + (j_m - 1)$$

9. car $2 \leq j_{k_0} \leq n - 1$ car $m > 1$ et $j_1 + j_2 + \dots + j_m = n$.

d'où

$$\deg(a_m(t)b_{j_1}(t)b_{j_2}(t)\dots b_{j_m}(t)) \leq m-2 + (j_1 + j_2 + \dots + j_m) - m - 1 \leq n-3$$

Par conséquent $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

On a donc démontré que

$$\forall n \geq 2 \quad \deg(b_n) \leq n-2$$

Au passage, on a aussi démontré que

$$\forall n \geq 3 \quad \deg \left(\sum_{m=2}^{n-1} a_m(t) \sum_{\substack{(j_1, j_2, \dots, j_m) \in (\mathbb{N}^*)^m \\ j_1 + j_2 + \dots + j_m = n}} b_{j_1}(t)b_{j_2}(t)\dots b_{j_m}(t) \right) \leq n-3.$$

Il reste à montrer que $\forall n \geq 3 \quad \text{val}(b_n) \geq \frac{n-1}{2}$.

On a $b_1(t) = 1$ et $b_2(t) = 0$ (car $a_2(t) = 0$),

$$\text{donc } \text{val}(b_1) = 0 \geq \frac{1-1}{2} \text{ et } \text{val}(b_2) = +\infty \geq \frac{2-1}{2}.$$

Considérons la propriété $\mathcal{Q}(k)$: " $\forall j \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket \quad \text{val}(b_j) \geq \frac{j-1}{2}$ ".

On a déjà vu que $\mathcal{Q}(3)$ est vraie.

Soit $n \geq 3$ et supposons que $\mathcal{Q}(n)$ est vraie.

Il suffit de montrer que $\text{val}(b_n) \geq \frac{n-1}{2}$.

$$\text{Or } b_n(t) = \frac{1}{\lambda^n - \lambda} \sum_{2 \leq r \leq n} \sum_{\substack{(j_1, j_2, \dots, j_r) \in (\mathbb{N}^*)^r \\ \sum_{1 \leq k \leq r} j_k = n}} a_r(t) \prod_{1 \leq k \leq r} b_{j_k}(t)$$

Soit $r \in \llbracket 2, n \rrbracket$ et $(j_1, j_2, \dots, j_r) \in (\mathbb{N}^*)^r$ tels que $j_1 + j_2 + \dots + j_r = n$.

Si $r = 2$, alors $a_2(t) = 0$ et donc $a_r(t) \prod_{1 \leq k \leq r} b_{j_k}(t) = 0$.

On peut donc supposer $r \geq 3$.

En remarquant que $r \geq 2$ entraîne $j_1 < n, j_2 < n, \dots, j_r < n$, on a

$$\begin{aligned}
\text{val} \left(a_r \prod_{1 \leq k \leq r} b_{j_k} \right) &\geq \text{val}(a_r) + \sum_{1 \leq k \leq r} \text{val}(b_{j_k}) \\
&\geq r - 2 + \sum_{1 \leq k \leq r} \frac{j_k - 1}{2} \\
&\geq \frac{1}{2} \left(2r - 4 + \sum_{1 \leq k \leq r} j_k - \sum_{1 \leq k \leq r} 1 \right) \\
&\geq \frac{1}{2} (2r - 4 + n - r) \\
&\geq \frac{1}{2} (r - 4 + n) \\
&\geq \frac{1}{2} (-1 + n)
\end{aligned}$$

Par conséquent, $\text{val}(b_n) \geq \frac{n-1}{2}$ et donc $\Omega(n+1)$ est vraie. D'où le résultat. \square

Remarque 4.3.5. $\forall n \geq 3 \quad \frac{n-1}{2} \leq \text{val}(b_n) \quad \text{et} \quad \text{deg}(b_n) \leq n-2.$

Lemme 4.3.6.

$\forall k \geq 4 \quad b_{1+q_k}(t) = \frac{c_{1+q_k}}{\lambda^{1+q_k} - \lambda} t^{q_k-1} + \text{polynôme}^{10} \text{ de degré inférieur ou égal à } q_k - 2.$

Démonstration :

Soit $k \geq 3$. On a $q_k \geq k \geq 3$ et d'après le lemme précédent, on a

$$b_{1+q_k}(t) = \frac{1}{\lambda^{1+q_k} - \lambda} a_{1+q_k}(t) + \frac{1}{\lambda^{1+q_k} - \lambda} \sum_{m=2}^{1+q_k-1} a_m(t) \sum_{\substack{(j_1, j_2, \dots, j_m) \in (\mathbb{N}^*)^m \\ j_1 + j_2 + \dots + j_m = 1 + q_k}} \prod_{1 \leq r \leq m} b_{j_r}(t)$$

10. en t

$$\text{avec deg} \left(\frac{1}{\lambda^{1+q_k} - \lambda} \sum_{m=2}^{1+q_k-1} a_m(t) \sum_{\substack{(j_1, j_2, \dots, j_m) \in (\mathbb{N}^*)^m \\ j_1 + j_2 + \dots + j_m = 1 + q_k}} b_{j_1}(t) b_{j_2}(t) \dots b_{j_m}(t) \right) \leq 1 + q_k - 3 \leq q_k - 2$$

d'où

$$b_{1+q_k}(t) = \frac{1}{\lambda^{1+q_k} - \lambda} a_{1+q_k}(t) + \text{polynôme}^{11} \text{ de degré inférieur ou égal à } q_k - 2.$$

d'où

$$b_{1+q_k}(t) = \frac{c_{1+q_k}}{\lambda^{1+q_k} - \lambda} t^{q_k-1} + \text{polynôme en } t \text{ de degré inférieur ou égal à } q_k - 2.$$

Lemme 4.3.7. *Pour tout $k \in \mathcal{K}$, posons $B_{1+q_k}(T) = \frac{(\lambda^{1+q_k} - \lambda)}{c_{1+q_k}} b_{1+q_k}(T)$*

Alors, pour tout $k \in \mathcal{K}$, $B_{1+q_k}(T)$ est un polynôme unitaire de degré $q_k - 1$.

Démonstration :

Cela résulte du lemme précédent et du fait que si $k \in \mathcal{K}$, alors $c_{1+q_k} \neq 0$.

Fin de la démonstration du théorème:

Pour démontrer le théorème 4.3.1, on prouve dans un premier temps, d'une manière analogue à celle de la démonstration du théorème 4.1.1 que si $d^*(E) > 0$, alors $E = \mathbb{C}$. Supposons donc que $d^*(E) > 0$. Comme précédemment, en notant $F_q = \{t \in \mathbb{C} / |t| \leq q\}$ et $G_q = \bigcap_{j \in \mathbb{N}^*} \{t \in F_q / b_j(t) \leq q^j\}$, l'analogie du lemme 4.1.4

nous donne $E = \bigcup_{q=1}^{+\infty} G_q$, d'où $d^* \left(\bigcup_{q=1}^{+\infty} G_q \right) > 0$. Grâce au théorème 3.2.8, on en déduit qu'il existe $q_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $d^*(G_{q_0}) > 0$. Or, G_{q_0} est compact, donc, on déduit de la proposition 3.2.5 que $d^*(G_{q_0}) = d(G_{q_0})$. Par conséquent, $d(G_{q_0}) > 0$. Soit $t \in \mathbb{C}$ et $q \geq 2$. Comme $d(G_{q_0}) > 0$ avec $G_{q_0} \subseteq B_f(0, q_0)$ et comme $\deg b_q \leq q - 2 \leq q$, on a, d'après le théorème 3.1.10

$$|b_q(t)| \leq \max_{a \in G_{q_0}} |b_q(a)| \left(\frac{2}{d(G_{q_0})} \right)^q (|t| + q_0)^q.$$

Or

$$\max_{a \in G_{q_0}} |b_q(a)| \leq q_0^q$$

11. en t

d'où

$$|b_q(t)| \leq q_0^q \left(\frac{2}{d(G_{q_0})} \right)^q (|t| + q_0)^q.$$

c'est-à-dire

$$|b_q(t)| \leq \left(q_0 \left(\frac{2}{d(G_{q_0})} \right) (|t| + q_0) \right)^q.$$

et par conséquent, $t \in E$, d'où finalement,

$$E = \mathbb{C}.$$

Dans un deuxième temps, il reste à prouver qu'il existe $M > 1$ tel que

$$\forall k \in \mathcal{K} \quad \frac{\ln(q_{k+1})}{q_k} + \frac{\ln(|c_{1+q_k}|)}{q_k} \leq M.$$

Soit $k \in \mathcal{K}$. D'après le lemme 4.3.7, B_{1+q_k} est un polynôme unitaire de degré $q_k - 1$.

Comme $d(G_{q_0}) > 0$, d'après le lemme 3.1.9, on a

$$(d(G_{q_0}))^{q_k-1} \leq \max_{z \in G_{q_0}} |B_{1+q_k}(z)| \quad (4.25)$$

Et comme

$$\max_{z \in G_{q_0}} |B_{1+q_k}(z)| \leq \max_{z \in G_{q_0}} \frac{|\lambda^{1+q_k} - \lambda|}{|c_{1+q_k}|} |b_{1+q_k}(z)| \leq \frac{|\lambda^{1+q_k} - \lambda|}{|c_{1+q_k}|} q_0^{1+q_k} \quad (4.26)$$

En posant $\sigma = \min(1, d(G_{q_0}))$, (4.25) et (4.26) donnent

$$\sigma^{1+q_k} \leq \sigma^{q_k-1} \leq (d(G_{q_0}))^{q_k-1} \leq \frac{|\lambda^{1+q_k} - \lambda|}{|c_{1+q_k}|} q_0^{1+q_k} \quad (4.27)$$

En posant $\delta = \min\left(\frac{1}{2}, \frac{\sigma}{q_0}\right)$ et $A = \frac{1}{\delta}$, on obtient $0 < \delta < \frac{1}{2}$ et $2 < A$ et

$$\delta^{1+q_k} \leq \left(\frac{\sigma}{q_0}\right)^{1+q_k} \leq \frac{|\lambda^{1+q_k} - \lambda|}{|c_{1+q_k}|} \quad (4.28)$$

Or, en utilisant le fait que $|\lambda| = 1$ et la remarque 2.3.22, on a

$$|\lambda^{1+q_k} - \lambda| = |\lambda^{q_k} - 1| \leq \frac{2\pi}{q_{k+1}} \quad (4.29)$$

d'où

$$\delta^{1+q_k} \leq \frac{2\pi}{q_{k+1}|c_{1+q_k}|} \quad (4.30)$$

d'où

$$q_{k+1}|c_{1+q_k}| \leq 2\pi A^{1+q_k} \quad (4.31)$$

d'où

$$\ln(q_{k+1}) + \ln(|c_{1+q_k}|) \leq \ln(2\pi) + (1 + q_k) \ln(A) \quad (4.32)$$

d'où

$$\frac{\ln(q_{k+1})}{q_k} + \frac{\ln(|c_{1+q_k}|)}{q_k} \leq \frac{\ln(2\pi)}{q_k} + \frac{1 + q_k}{q_k} \ln(A) \leq \ln(2\pi) + 2 \ln(A) \quad (4.33)$$

En posant $M = 1 + \ln(2\pi) + 2 \ln(A)$, on obtient finalement $M > 1$ et

$$\forall k \in \mathcal{K} \quad \frac{\ln(q_{k+1})}{q_k} + \frac{\ln(|c_{1+q_k}|)}{q_k} \leq M.$$

□

Corollaire 4.3.8. Si $\left(\frac{\ln(q_{k+1})}{q_k}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ non majorée et si $m \in \mathbb{N} \setminus \{0,1,2\}$,

alors l'ensemble $E = \{t \in \mathbb{C} / f_t(z) = \lambda z + \frac{t^{m-2}z^m}{1-tz} \text{ linéarisable}\}$ vérifie $d^*(E) = 0$.

Autrement dit, $f_t(z) = \lambda z + \frac{t^{m-2}z^m}{1-tz}$ n'est quasiment jamais linéarisable.

Démonstration :

En appliquant le théorème 4.3.1 à $f(z) = \lambda z + \sum_{n=m}^{+\infty} c_n z^n$ avec $\forall n \geq m \quad c_n = 1$,

$\mathcal{K} = \llbracket m, +\infty \llbracket$ et $E = \{t \in \mathbb{C} / f_t(z) \text{ linéarisable}\}$ avec $f_t(z) = \lambda z + \sum_{n=m}^{+\infty} t^{n-2} z^n =$

$\lambda z + \frac{t^{m-2}z^m}{1-tz}$, on obtient :

ou bien $E = \mathbb{C}$ et il existe $M > 1$ tel que $\forall k \in \mathcal{K} \quad \frac{\ln(q_{k+1})}{q_k} + \frac{\ln(|c_{1+q_k}|)}{q_k} \leq M$.

ou bien $d^*(E) = 0$.

Mais le premier cas est impossible car cela entraînerait que¹² pour tout $k \geq m$,

$$\frac{\ln(q_{k+1})}{q_k} + \frac{\ln(|1|)}{q_k} \leq M$$

12. On utilise ici le fait que $q_k \geq k$.

c'est-à-dire

$$\frac{\ln(q_{k+1})}{q_k} \leq M$$

Ce qui contredit le fait que $\left(\frac{\ln(q_{k+1})}{q_k}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ est non majorée. Par conséquent, $d^*(E) = 0$.

Remarque 4.3.9. Pour démontrer la non linéarisabilité de beaucoup de f_t , on a utilisé uniquement le théorème 4.3.1 et contrairement au théorème de Perez-Marco, il était inutile de connaître à l'avance la non-linéarisabilité d'un f_{t_0} .

Corollaire 4.3.10. Si $\left(\frac{\ln(q_{k+1})}{q_k^2}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ non majorée, alors l'ensemble

$$E = \{t \in \mathbb{C} / f_t(z) = \lambda z + \frac{2e^{tz} - t^2 z^2 - 2tz - 2}{2t^2} \text{ linéarisable}\} \text{ vérifie } d^*(E) = 0.$$

Autrement dit, $f_t(z) = \lambda z + \frac{2e^{tz} - t^2 z^2 - 2tz - 2}{2t^2}$ n'est quasiment jamais linéarisable.

Démonstration :

En appliquant le théorème 4.3.1 à $f(z) = \lambda z + \sum_{n=3}^{+\infty} c_n z^n$ avec $\forall n \geq 3 \quad c_n = \frac{1}{n!}$,

$\mathcal{K} =]3, +\infty[$ et $E = \{t \in \mathbb{C} / f_t(z) \text{ linéarisable}\}$ avec $f_t(z) = \lambda z + \sum_{n=3}^{+\infty} t^{n-2} c_n z^n = \lambda z + \frac{2e^{tz} - t^2 z^2 - 2tz - 2}{2t^2}$ avec $\forall n \geq 3 \quad c_n = \frac{1}{n!}$, on obtient :

ou bien $E = \mathbb{C}$ et il existe $M > 1$ tel que $\forall k \in \mathcal{K} \quad \frac{\ln(q_{k+1})}{q_k} + \frac{\ln(|c_{1+q_k}|)}{q_k} \leq M$.

ou bien $d^*(E) = 0$.

Mais le premier cas est impossible car cela entraînerait que¹³ pour tout $k \geq 3$,

$$\frac{\ln(q_{k+1})}{q_k} + \frac{\ln \left| \frac{1}{(1+q_k)!} \right|}{q_k} \leq M$$

d'où

$$\frac{\ln(q_{k+1})}{q_k} \leq M + \frac{\ln((1+q_k)!)}{q_k} \leq M + 2(1+q_k) \frac{\ln(1+q_k)}{q_k}$$

13. On utilise ici le fait que $q_k \geq k$.

d'où

$$\frac{\ln(q_{k+1})}{q_k^2} \leq \frac{M}{q_k} + 2 \frac{(1+q_k) \ln(1+q_k)}{q_k} \frac{(1+q_k)}{1+q_k} \frac{1}{q_k} \leq M + 8$$

Ce qui contredit le fait que $\left(\frac{\ln(q_{k+1})}{q_k^2}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ est non majorée. Par conséquent, $d^*(E) = 0$.

Remarque 4.3.11. Avec les notations du théorème 4.3.1, on a formellement¹⁴,

$$\begin{aligned} \varphi_t(z) &= z + \sum_{n=3}^{+\infty} b_n(t) z^n = z + \sum_{n=3}^{+\infty} \left(\sum_{\frac{n-1}{2} \leq k \leq n-2} u_{n,k} t^k \right) z^n \\ &= z + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\sum_{k+2 \leq n \leq 2k+1} u_{n,k} z^n \right) t^k = z + \sum_{k=1}^{+\infty} d_k(z) t^k = \psi_z(t) \end{aligned}$$

avec

- A t fixé, $\varphi_t(z)$ est une série entière en z .
- A z fixé, $\psi_z(t)$ est une série entière en t .
- Ici, les $d_k(z)$ sont des polynômes en z

(dans le théorème de Perez-Marco, les $d_k(z)$ sont des séries entières en z pour lesquelles il est souvent difficile de déterminer si leur rayon est strictement positif.)

Par ailleurs, si on pose $\tilde{E} = \{z \in \mathbb{C} / \psi_z(t) \text{ de rayon strictement positif}\}$, on va démontrer que si $d^*(E) = 0$, on a aussi $d^*(\tilde{E}) = 0$. Supposons que $d^*(E) = 0$

et posons $\tilde{F}_q = \{z \in \mathbb{C} / |z| \leq q\}$ et $\tilde{G}_q = \bigcap_{j \in \mathbb{N}^*} \{z \in \tilde{F}_q / |d_j(z)| \leq q^j\}$. Un analogue du lemme 4.1.4 nous donne que $\tilde{E} = \bigcup_{q \in \mathbb{N}^*} \tilde{G}_q$. (et que les \tilde{G}_q sont des

compacts.). Supposons par l'absurde que $d^*(\tilde{E}) > 0$. On a alors $\tilde{E} = \bigcup_{q=1}^{+\infty} \tilde{G}_q$, d'où

$$d^* \left(\bigcup_{q=1}^{+\infty} \tilde{G}_q \right) > 0. \text{ Grâce au théorème 3.2.8, on en déduit qu'il existe } q_0 \in \mathbb{N}^*$$

tel que $d^*(\tilde{G}_{q_0}) > 0$. Or, \tilde{G}_{q_0} est compact, donc, on déduit de la proposition 3.2.5 que $d^*(\tilde{G}_{q_0}) = d(\tilde{G}_{q_0})$. Par conséquent, $d(\tilde{G}_{q_0}) > 0$.

Soit $z \in B_f(0,1)$ et $q \geq 2$. Comme $d(\tilde{G}_{q_0}) > 0$ avec $\tilde{G}_{q_0} \subseteq B_f(0,q_0)$ et

comme $\deg d_q \leq 2q + 1$, on a, d'après le théorème 3.1.10

¹⁴. grâce au lemme 4.3.4

$$|d_q(z)| \leq \max_{a \in \tilde{G}_{q_0}} |d_q(a)| \left(\frac{2}{d(\tilde{G}_{q_0})} \right)^{2q+1} (|z| + q_0)^{2q+1}.$$

Or

$$\max_{a \in \tilde{G}_{q_0}} |d_q(a)| \leq q_0^q$$

d'où

$$|d_q(z)| \leq q_0^q \left(\frac{2}{d(\tilde{G}_{q_0})} \right)^{2q+1} (|z| + q_0)^{2q+1} \leq q_0^{2q+1} \left(\frac{2}{d(\tilde{G}_{q_0})} \right)^{2q+1} (1 + q_0)^{2q+1}.$$

d'où

$$|d_q(z)| \leq \left(q_0 \left(\frac{2}{d(\tilde{G}_{q_0})} \right) (1 + q_0) \right)^{2q+1} \leq \left(q_0 \left(\frac{2}{d(\tilde{G}_{q_0})} \right) (1 + q_0) \right)^{3q}.$$

c'est-à-dire

$$|d_q(z)| \leq \left(\left(q_0 \left(\frac{2}{d(\tilde{G}_{q_0})} \right) (1 + q_0) \right)^3 \right)^q.$$

On en déduit d'une part, que pour tout $z \in B_f(0,1)$, $\psi_z(t)$ est de rayon strictement positif et donc que $B_f(0,1) \subseteq \tilde{E}$ (En fait, on a même $\tilde{E} = \mathbb{C}$)

En outre, en posant $R_0 = \min \left(1, \frac{1}{\left(\left(q_0 \left(\frac{2}{d(\tilde{G}_{q_0})} \right) (1 + q_0) \right)^3 \right)} \right)$, on a, pour

tout $(z,t) \in \mathbb{C}^2$ vérifiant $|z| < R_0$ et $|t| < R_0$, la série entière en deux variables

$$\Psi(z,t) = \psi_z(t) = z + \sum_{k=1}^{+\infty} d_k(z)t^k = z + \sum_{n=3}^{+\infty} b_n(t)z^n = \varphi_t(z) \text{ est convergente.}$$

Cela entraîne que pour tout $t \in B(0,R_0)$, φ_t est de rayon de convergence strictement positif, d'où $B_f(0, \frac{R_0}{2}) \subseteq B(0,R_0) \subseteq E$, d'où $d^*(E) \geq d^*(B_f(0, \frac{R_0}{2})) \geq \frac{R_0}{2} > 0$.

Absurde . Donc $d^*(\tilde{E}) = 0$.

□

4.4 Linéarisation des polynômes de degré 3

Depuis 1988, grâce au théorème de Yoccoz, on sait que tout polynôme de degré 2 de la forme $P_\theta(z) = \lambda z + a_2 z^2$ (avec $a_2 \neq 0$) est linéarisable si et seulement¹⁵ si $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\ln(q_{k+1})}{q_k} < +\infty$. (On supposera dans toute cette section que $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.)

On conjecture actuellement que tout polynôme $P(z) = \lambda z + a_2 z^2 + a_3 z^3$ (avec $a_3 \neq 0$) est linéarisable si et seulement si $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\ln(q_{k+1})}{q_k} < +\infty$. Grâce au théorème

de Brjuno, on sait que si $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\ln(q_{k+1})}{q_k} < +\infty$, alors $P(z) = \lambda z + a_2 z^2 + a_3 z^3$ est linéarisable.

Pour prouver la conjecture ci-dessus pour tout polynôme de degré 3, il suffit de le prouver¹⁶ pour tout polynôme de degré 3 de la forme $P_{\theta,b}(z) = \lambda z + b z^2 + z^3$ avec $b \in \mathbb{C}$.

C'est pour tenter de répondre à cette conjecture que Perez-Marco a développé son théorème, ce qui lui a permis d'obtenir une grande avancée vers la conjecture.

Théorème 4.4.1 (Perez-Marco). *Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Posons $\lambda = e^{i2\pi\theta}$ et notons $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des réduites de θ . Pour tout $t \in \mathbb{C}$, posons $f_t(z) = \lambda z + t z^2 + z^3$*

et posons $E = \{t \in \mathbb{C} / f_t \text{ linéarisable}\}$.

Si $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\ln(q_{n+1})}{q_n} = +\infty$, alors $d^(E) = 0$.*

Démonstration :

Supposons que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\ln(q_{n+1})}{q_n} = +\infty$. Pour démontrer ce théorème, nous allons nous intéresser à la famille de polynômes $g_t(z) = \lambda z + z^2 + t z^3$.

15. en notant $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des réduites de θ avec $\lambda = e^{i2\pi\theta}$

16. En effet, en posant, pour tout $u \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\psi(z) = uz$, on a $\psi^{-1}P_{\theta,b}(\psi(z)) = \frac{1}{u}P_{\theta,b}(uz) = \frac{1}{u}(\lambda uz + b(uz)^2 + (uz)^3) = \lambda z + buz^2 + u^2 z^3$, donc $P_{\theta,b}$ et $z \mapsto \lambda z + buz^2 + u^2 z^3$ sont simultanément linéarisables (en effet si φ est la linéarisante formelle du premier, alors $\psi^{-1} \circ \varphi \circ \psi$ est la linéarisante formelle du second et elles ont simultanément un rayon de convergence strictement positif.) Si $P(z) = \lambda z + a_2 z^2 + a_3 z^3$ est un polynôme quelconque, alors, en prenant pour u l'une des racines de $X^2 - a_3$ et en posant $b = a_2 u^{-1}$, on obtient que P est linéarisable si et seulement si $P_{\theta,b}$ est linéarisable.

En posant $\tilde{E} = \{t \in \mathbb{C} / g_t \text{ linéarisable}\}$, d'après le théorème 4.1.1, on a ou bien $\tilde{E} = \mathbb{C}$ ou bien $d^*(\tilde{E}) = 0$. Or, comme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\ln(q_{n+1})}{q_n} = +\infty$, d'après le théorème de Yoccoz, on a $g_0(z) = \lambda z + z^2$ non-linéarisable, donc $0 \notin \tilde{E}$ et par conséquent $\tilde{E} \neq \mathbb{C}$. On en déduit alors que $d^*(\tilde{E}) = 0$. En particulier, il existe $t_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tel que $g_{t_0}(z) = \lambda z + z^2 + t_0 z^3$ soit non linéarisable. Or $g_{t_0}(z) = \lambda z + z^2 + t_0 z^3$ est conjugué à $f_{t_1}(z) = \lambda z + t_1 z^2 + z^3$ où $t_1 = u^{-1}$ avec u racine de $X^2 - t_0$. Donc $f_{t_1}(z)$ est non linéarisable, d'où $t_1 \notin E$ et ainsi $E \neq \mathbb{C}$. Or d'après le théorème 4.1.1, on a ou bien $E = \mathbb{C}$ ou bien $d^*(E) = 0$. Par conséquent, $d^*(E) = 0$. \square

Remarque 4.4.2. Ce théorème démontre en particulier que si $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\ln(q_{n+1})}{q_n} = +\infty$, alors $f_t(z) = \lambda z + tz^2 + z^3$ n'est jamais linéarisable, à l'exception éventuelle d'un tout petit¹⁷ ensemble de valeurs de t .

Remarque 4.4.3. En utilisant le théorème de rectification des applications à allure polynomiale de Douady-Hubbard [DH85], nous pouvons préciser légèrement ce théorème.

Théorème 4.4.4. Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Posons $\lambda = e^{i2\pi\theta}$ et notons $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des réduites de θ . Pour tout $t \in \mathbb{C}$, posons $f_t(z) = \lambda z + tz^2 + z^3$ et posons $E = \{t \in \mathbb{C} / f_t \text{ linéarisable}\}$.

Si $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\ln(q_{n+1})}{q_n} = +\infty$, alors $E \subseteq B_f(0, 2\sqrt{2})$.

Démonstration :

Nous allons montrer que $B_f(0, 2\sqrt{2})^c \subseteq E^c$. Soit $b \in B_f(0, 2\sqrt{2})^c$.

Comme $|b| > 2\sqrt{2}$, il existe $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $2\sqrt{2} < \beta < |b|$.

Considérons l'application $h :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x) = \frac{2}{x} + x$.

On vérifie facilement que sur $]0, \sqrt{2}[$, h décroît strictement de $+\infty$ à $2\sqrt{2}$ et que sur $[\sqrt{2}, +\infty[$, h croît strictement de $2\sqrt{2}$ à $+\infty$. Comme $2\sqrt{2} < \beta < |b|$, par continuité de h , on obtient l'existence d'un réel $\alpha \in]0, \sqrt{2}[$ tel que $\beta = h(\alpha)$. On a alors

$$|b| > \beta \quad \text{avec} \quad \beta = h(\alpha) = \frac{2}{\alpha} + \alpha = \frac{2\alpha + \alpha^3}{\alpha^2} \quad (4.34)$$

17. Dans \mathbb{C} , la capacité et le diamètre transfini coïncident.

Posons $\varepsilon = \frac{\alpha^2}{2} \left(|b| - \frac{2\alpha + \alpha^3}{\alpha^2} \right)$. D'après (4.34), on a $\varepsilon > 0$ et $\frac{2\varepsilon}{\alpha^2} = |b| - \frac{2\alpha + \alpha^3}{\alpha^2}$.
d'où

$$|b| = \frac{2\alpha + \alpha^3}{\alpha^2} + \frac{2\varepsilon}{\alpha^2} > \frac{2\alpha + \alpha^3}{\alpha^2} + \frac{\varepsilon}{\alpha^2}$$

d'où

$$\alpha^2 |b| > \alpha + \alpha^3 + \alpha + \varepsilon \quad (\text{avec } 0 < \alpha < \sqrt{2} \text{ et } \varepsilon > 0) \quad (4.35)$$

Considérons les applications $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ et $f_b : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$f(z) = \lambda z + z^3 \quad \text{et} \quad f_b(z) = f(z) + bz^2$$

et posons $\mathcal{W} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < \alpha + \varepsilon\}$ et $\mathcal{W}_b = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < \alpha \text{ et } f_b(z) \in \mathcal{W}\}$.

Considérons aussi l'application $F_b : \mathcal{W}_b \longrightarrow \mathcal{W}$ définie par $F_b(z) = f_b(z)$.

Par définition de \mathcal{W}_b , F_b est bien définie et clairement, f , f_b et F_b sont holomorphes. De plus, 0 est clairement un point fixe de F_b . Nous allons démontrer que $(\mathcal{W}, \mathcal{W}_b, F_b)$ est une application à allure polynomiale de degré 2, c'est-à-dire que \mathcal{W} et \mathcal{W}_b sont deux ouverts connexes et simplement connexes de \mathbb{C} distincts de \mathbb{C} , que \mathcal{W}_b est relativement compact dans \mathcal{W} et que $F_b : \mathcal{W}_b \longrightarrow \mathcal{W}$ est holomorphe et propre de degré 2.

- \mathcal{W} ouvert connexe et simplement connexe de \mathbb{C} distinct de \mathbb{C} .

C'est évident car $\mathcal{W} = B(0, \alpha + \varepsilon)$.

- \mathcal{W}_b ouvert simplement connexe de \mathbb{C} distinct de \mathbb{C} .

Comme $\mathcal{W}_b \subseteq B(0, \alpha)$, \mathcal{W}_b est clairement distinct de \mathbb{C} . De plus,

$\mathcal{W}_b = B(0, \alpha) \cap f_b^{-1}(\mathcal{W})$ avec \mathcal{W} et f_b continue sur \mathbb{C} , donc \mathcal{W}_b est un ouvert.

Par l'absurde, supposons que \mathcal{W}_b n'est pas simplement connexe. Il existe alors un lacet simple fermé γ tel que $[\gamma]$, l'image du chemin γ , soit incluse dans \mathcal{W}_b et que γ ne soit pas homotope à un point. Notons Ω l'intérieur du lacet γ . On a $\partial\Omega = [\gamma]$. Comme γ n'est pas homotope à un point, il existe $z_0 \in \Omega$ tel que $z_0 \notin \mathcal{W}_b$. D'après le principe du maximum, on a¹⁸

$$|z_0| \leq \sup_{z \in \Omega} |z| \leq \max_{z \in \partial\Omega} |z| = |z_2| < \alpha$$

18. car $z_2 \in [\gamma] \subseteq \mathcal{W}_b \subseteq B(0, \alpha)$

d'où

$$z_0 \in B(0, \alpha) \quad (4.36)$$

De plus, comme $[\gamma] \subseteq \mathcal{W}_b \subseteq f_b^{-1}(\mathcal{W})$, pour tout $z \in [\gamma]$, on a $|f_b(z)| < \alpha + \varepsilon$.

D'après le principe du maximum, on a¹⁹

$$|f_b(z_0)| \leq \sup_{z \in \Omega} |f_b(z)| \leq \max_{z \in \partial\Omega} |f_b(z)| = |f_b(z_2)| < \alpha + \varepsilon$$

Donc $f_b(z_0) \in B(0, \alpha + \varepsilon) = \mathcal{W}$, d'où

$$z_0 \in f_b^{-1}(\mathcal{W}) \quad (4.37)$$

Par conséquent, (4.36) et (4.37) donnent $z_0 \in B(0, \alpha) \cap f_b^{-1}(\mathcal{W}) = \mathcal{W}_b$.

Or $z_0 \notin \mathcal{W}_b$. Absurde, donc \mathcal{W}_b est simplement connexe.

- $F_b : \mathcal{W}_b \longrightarrow \mathcal{W}$ est propre de degré 2.

Comme f_b est un polynôme de degré 3, chaque point de \mathcal{W} possède 3 préimages par f_b dans $f_b^{-1}(\mathcal{W})$. Nous allons montrer ici que dans $\mathcal{W}_b = f_b^{-1}(\mathcal{W}) \cap B(0, \alpha)$ il y en a exactement 2.

Soit $w \in \mathcal{W}$. On a $|w| < \alpha + \varepsilon$. Posons $\mathcal{C}(0, \alpha) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = \alpha\}$.

Considérons l'application $g_b : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $g_b(z) = f_b(z) - w$.

Montrer que w possède 2 préimages dans \mathcal{W}_b par f_b revient à montrer que 0 possède 2 préimages²⁰ dans \mathcal{W}_b par g_b .

Soit $z \in \mathcal{C}(0, \alpha)$. On a

$$\begin{aligned} |g_b(z) - bz^2| &= |f_b(z) - w - bz^2| \\ &= |\lambda z + bz^2 + z^3 - w - bz^2| \\ &= |\lambda z + z^3 - w| \\ &\leq |\lambda z| + |z^3| + |w| \\ &\leq |\lambda||z| + |z|^3 + |w| \\ &\leq 1 \cdot \alpha + \alpha^3 + |w| \\ &< \alpha + \alpha^3 + \alpha + \varepsilon \end{aligned}$$

19. car $z_2 \in [\gamma]$

20. Le nombre de préimages est compté avec multiplicité.

Or, d'après (4.35)

$$\alpha + \alpha^3 + \alpha + \varepsilon < \alpha^2|b| = |z|^2|b| = |bz^2|$$

d'où

$$|g_b(z) - bz^2| < |bz^2| \quad (4.38)$$

et ceci est vrai pour tout $z \in \mathcal{C}(0, \alpha)$. Grâce au théorème de Rouché, on en déduit que g_b et $z \mapsto bz^2$ ont même nombre de racines (comptées avec multiplicité) dans $B(0, \alpha)$. Donc g_b possède 2 racines dans \mathcal{W} et par conséquent w possède 2 préimages par f_b dans $B(0, \alpha)$. Ainsi, tout $w \in \mathcal{W}$ possède 2 préimages par F_b dans $B(0, \alpha) \cap f_b^{-1}(\mathcal{W})$.

Pour montrer que F_b est propre de degré 2, il suffit maintenant de vérifier que F_b est propre. Soit K un compact de \mathcal{W} . K est alors un compact de \mathbb{C} et on a K fermé et borné dans \mathbb{C} . Comme f_b est un polynôme de degré 3 (donc continue), $f_b^{-1}(K)$ est un fermé de \mathbb{C} et de plus $f_b^{-1}(K)$ est borné dans \mathbb{C} . Donc $f_b^{-1}(K)$ est un compact de \mathbb{C} . De plus, $f_b^{-1}(K) \cap B_f(0, \alpha)$ est aussi un compact de \mathbb{C} . Pour montrer que $F_b^{-1}(K)$ est compact, nous allons montrer que $F_b^{-1}(K) = f_b^{-1}(K) \cap B_f(0, \alpha)$. Comme K est un compact de \mathcal{W} et que $F_b : \mathcal{W}_b \rightarrow \mathcal{W}$ est définie par $F_b(z) = f_b(z)$ avec $\mathcal{W}_b = B(0, \alpha) \cap f_b^{-1}(\mathcal{W})$, on a $F_b^{-1}(K) = f_b^{-1}(K) \cap B(0, \alpha)$. Il suffit donc de montrer que $f_b^{-1}(K) \cap B(0, \alpha) = f_b^{-1}(K) \cap B_f(0, \alpha)$. On a clairement $f_b^{-1}(K) \cap B(0, \alpha) \subseteq f_b^{-1}(K) \cap B_f(0, \alpha)$. Par l'absurde, supposons que $f_b^{-1}(K) \cap B(0, \alpha) \neq f_b^{-1}(K) \cap B_f(0, \alpha)$. Il existe alors $z \in f_b^{-1}(K) \cap B_f(0, \alpha)$ tel que $z \notin f_b^{-1}(K) \cap B(0, \alpha)$. Nécessairement, $z \in f_b^{-1}(K)$ et $|z| = \alpha$. En particulier, on a

$$f_b(z) \in K \subseteq \mathcal{W} = B(0, \alpha + \varepsilon). \quad (4.39)$$

Or

$$|f_b(z)| = |\lambda z + z^3 + bz^2| \geq |bz^2| - |\lambda z + z^3| \geq |b||z|^2 - |\lambda||z| - |z|^3 \geq |b|\alpha^2 - \alpha - \alpha^3 \quad (4.40)$$

et d'après (4.35), on a

$$\alpha^2|b| > \alpha + \alpha^3 + \alpha + \varepsilon \quad (4.41)$$

d'où

$$\alpha^2|b| - \alpha - \alpha^3 > \alpha + \varepsilon \quad (4.42)$$

On a alors

$$|f_b(z)| > \alpha + \varepsilon \quad \text{avec } f_b(z) \in B(0, \alpha + \varepsilon).$$

Absurde. Donc $f_b^{-1}(K) \cap B(0, \alpha) = f_b^{-1}(K) \cap B_f(0, \alpha)$ et $F_b^{-1}(K)$ est compact.

Ainsi, F_b est une application propre de degré 2.

- \mathcal{W}_b connexe.

D'après ce qui précède, on sait que F_b est une application propre de degré 2. Par l'absurde, supposons que \mathcal{W}_b n'est pas connexe. U la composante connexe de \mathcal{W}_b contenant 0 est alors envoyée de façon biholomorphe sur \mathcal{W} par l'application f_b . D'après le théorème de représentation conforme de Riemann, il existe $\phi : \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} / |z| < 1\}$ biholomorphe et $\psi : U \rightarrow \mathbb{D}$ biholomorphe tels que $\phi(0) = 0$, $\psi(0) = 0$, $\phi'(0) > 0$, $\psi'(0) > 0$. Comme $U \subseteq \mathcal{W}_b \subsetneq \mathcal{W}$, $\phi'(0) < \psi'(0)$. Par ailleurs, comme f_b est un biholomorphisme de U sur \mathcal{W} , $\zeta = \phi \circ f_b$ est un biholomorphisme de U sur \mathbb{D} vérifiant $\zeta(0) = 0$ et $|\zeta'(0)| = |\phi'(0)| |f_b'(0)| = \phi'(0) |\lambda| = \phi'(0)$. Par unicité de la représentation conforme, on en déduit que $|\zeta'(0)| = |\psi'(0)| = \psi'(0)$. Or $\psi'(0) = |\zeta'(0)| = \phi'(0)$. D'où $\phi'(0) = \psi'(0)$ et $\phi'(0) < \psi'(0)$. Absurde.

Donc \mathcal{W}_b est connexe.

- \mathcal{W}_b est relativement compact dans \mathcal{W}

C'est évident car $\mathcal{W}_b \subseteq B(0, \alpha)$ et $\mathcal{W} = B(0, \alpha + \varepsilon)$.

On peut ainsi appliquer le théorème de rectification des applications à allure polynomiale de Douady-Hubbard et on en déduit qu'il existe un homéomorphisme Φ qui conjugue²¹, sur un voisinage de 0, F_b à un polynôme \tilde{P} de degré 2 fixant 0. Par conséquent, $F_b(z) = \lambda z + bz^2 + z^3$ est topologiquement conjugué à un polynôme $\tilde{P}(z) = \lambda' z + a_2 z^2$ (sur un voisinage de 0). Comme $\tilde{P}(z) = \lambda' z + a_2 z^2$ est lui-même conjugué à $P(z) = \lambda' z + z^2$ grâce à la conjuguante $\psi_u(z) = uz$ avec $u = a_2^{-1}$ (déjà vu), on en déduit que $f_b(z) = \lambda z + bz^2 + z^3$ est topologiquement conjugué à $P(z) = \lambda' z + z^2$. En outre, un résultat de Naïshul [Nai83] affirme que la valeur propre en un point fixe d'un germe de difféomorphisme holomorphe, lorsqu'elle est de module 1, est un invariant de conjugaison topologique. Par conséquent, on a $\lambda' = \lambda$ et $f_b(z) = \lambda z + bz^2 + z^3$ est topologiquement conjugué à $P(z) = \lambda z + z^2$.

Pour finir la démonstration du théorème, nous allons à nouveau raisonner par l'absurde. Supposons que $f_b(z) = \lambda z + bz^2 + z^3$ soit linéarisable. Alors, $f_b(z) = \lambda z + bz^2 + z^3$ est analytiquement conjugué à la rotation $r_\lambda(z) = \lambda z$. D'après ce qui précède, on en déduit aussi que $P(z) = \lambda z + z^2$ est topologiquement conjugué à la rotation $r_\lambda(z) = \lambda z$. Or, il est connu [CG95] que dans \mathbb{C} , conjugaison analytique et conjugaison topologique sont équivalentes. Par conséquent, $P(z) = \lambda z + z^2$ est analytiquement conjugué à la rotation $r_\lambda(z) = \lambda z$, ce qui veut exactement dire que $P(z) = \lambda z + z^2$ est linéarisable. Or comme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\ln(q_{n+1})}{q_n} = +\infty$, le théorème de Yoccoz nous dit que $P(z) = \lambda z + z^2$ n'est pas linéarisable. Absurde.

Par conséquent, $f_b(z) = \lambda z + bz^2 + z^3$ n'est pas linéarisable.

Remarque 4.4.5. *Le fait que l'on ait ce théorème seulement pour $|b| > 2\sqrt{2}$ provient de la position des racines du polynôme $f_b(z) = \lambda z + bz^2 + z^3$. Il faut en effet pouvoir regrouper les préimages d'un voisinage de 0 en deux paquets: un qui contient 0 et qui contient exactement 2 préimages de chaque point du voisinage et un qui contient à chaque fois la troisième préimage.*

21. c'est-à-dire $\forall z \in B(0, \varepsilon') \quad f_b(\Phi(z)) = \Phi(\tilde{P}(z))$.

Sur les dessins-ci dessous, on s'est intéressé aux polynômes $P(z) = \lambda z + bz^2 + z^3$, pour différentes valeurs de b , avec $\lambda = e^{i2\pi\theta}$ et $\theta = \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{1}{10^k}$ et on a tracé en gris clair la boule de centre 0 et de rayon α , en gris foncé, la préimage de cette boule par P et en noir, la préimage d'une très petite boule centrée en 0 afin d'indiquer où se trouvent les zéros de P .

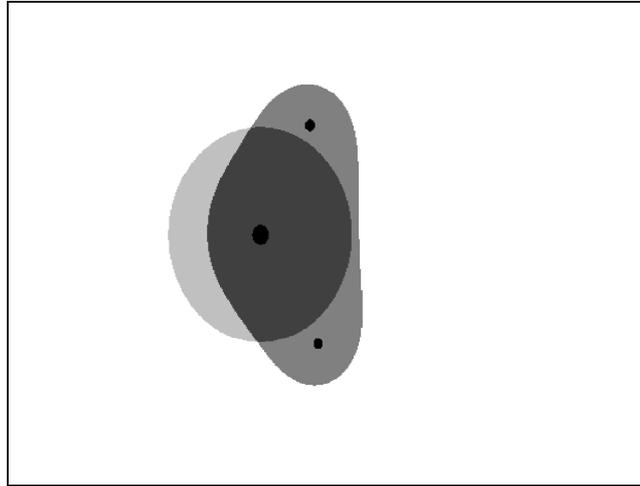


FIG. 4.1 - $P^{-1}(B(0,\alpha))$ pour $P(z) = \lambda z - z^2 + z^3$

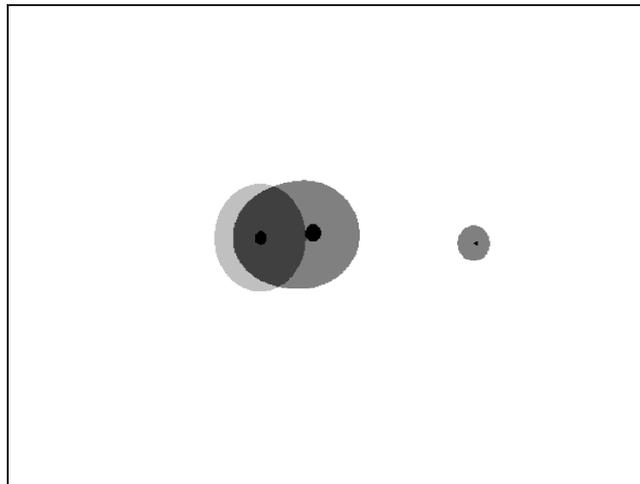


FIG. 4.2 - $P^{-1}(B(0,\alpha_1))$ pour $P(z) = \lambda z - 2z^2 + z^3$

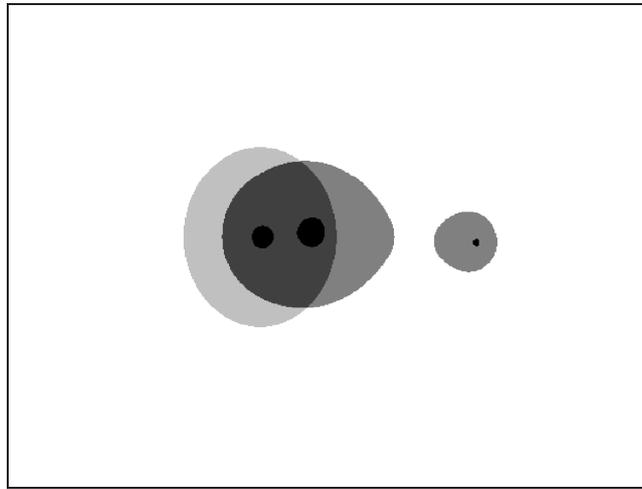


FIG. 4.3 - $P^{-1}(B(0, \alpha_2))$ pour $P(z) = \lambda z - 2z^2 + z^3$

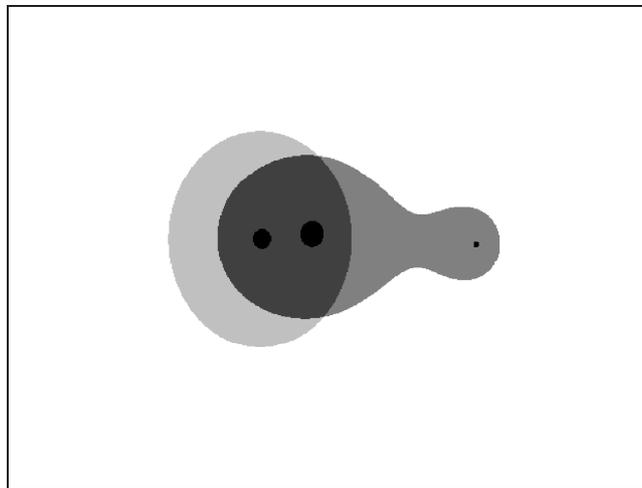


FIG. 4.4 - $P^{-1}(B(0, \alpha_3))$ pour $P(z) = \lambda z - 2z^2 + z^3$

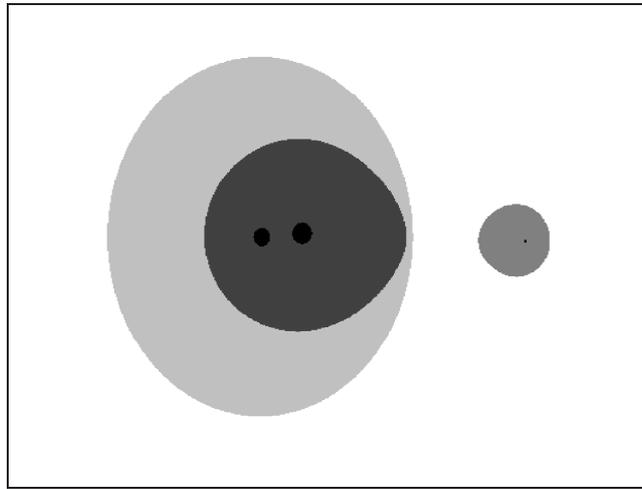


FIG. 4.5 - $P^{-1}(B(0,\alpha))$ pour $P(z) = \lambda z - 2.86z^2 + z^3$

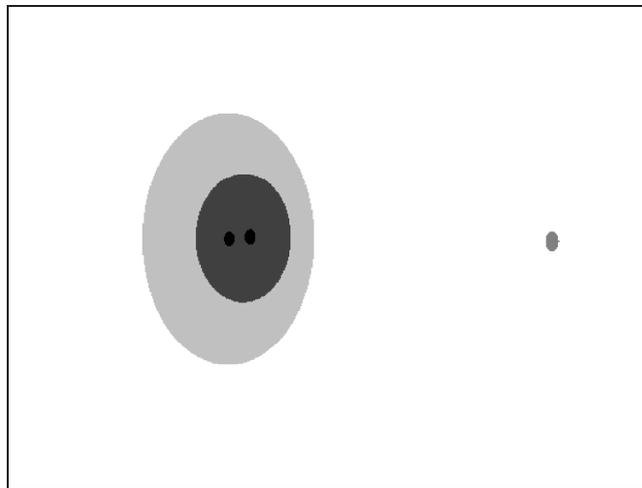


FIG. 4.6 - $P^{-1}(B(0,\alpha))$ pour $P(z) = \lambda z - 4z^2 + z^3$

Chapitre 5

Compléments

5.1 Généralisation du théorème de Perez-Marco aux fractions rationnelles en t

On reprend les notations du début du chapitre 4. K_1 désigne un sous-corps valué complet de \tilde{K} et K_2 un sous-corps valué complet et localement compact de K_1 . (Lorsque $\tilde{K} = \mathbb{C}$, forcément, $K_2 = \mathbb{R}$ ou $K_2 = \mathbb{C}$. Lorsque $\tilde{K} = \mathbb{C}_p$, forcément, K_2 est une extension finie de \mathbb{Q}_p .)

Théorème 5.1.1. *Si $m, d, r, s \in \mathbb{N}^*$, si y_1, y_2, \dots, y_s sont s points distincts de K_2 , si les $h_k : (K_1^m, 0) \rightarrow (K_1^m, 0)$ et les $g_{j,l} : (K_1^m, 0) \rightarrow (K_1^m, 0)$ sont des séries entières en m variables de valuation supérieure ou égale à 2 et de rayon de convergence strictement positif, si $L \in GL_m(K_1)$ est non-résonante et si on pose, pour tout $t \in K_2 \setminus \{y_1, y_2, \dots, y_s\}$*

$$f_t(z) = Lz + \sum_{\substack{j=1,2,\dots,s \\ l=1,2,\dots,r}} \frac{1}{(t-y_j)^l} g_{j,l}(z) + \sum_{k=0}^d t^k h_k(z)$$

et

$$E = \{t \in K_2 \setminus \{y_1, y_2, \dots, y_s\} / f_t \text{ est linéarisable}\},$$

alors,

$$\text{ou bien } E = K_2 \setminus \{y_1, y_2, \dots, y_s\} \text{ ou bien } d^*(E) = 0$$

Démonstration :

On s'intéresse à la linéarisation de la famille $(f_t : K_1^m \rightarrow K_1^m)_{t \in K_2 \setminus \{y_1, y_2, \dots, y_s\}}$

avec f_t de la forme

$$f_t(z) = Lz + \sum_{\substack{j=1,2,\dots,s \\ l=1,2,\dots,r}} \frac{1}{(t-y_j)^l} g_{j,l}(z) + \sum_{k=0}^d t^k h_k(z)$$

avec $L \in GL_m(K_1)$ non-résonante, h_k de la forme $h_k(z) = \sum_{j \geq 2} h_k^{(j)}(z)$ de rayon de convergence strictement positif et $h_k^{(j)}(z)$ polynôme homogène de degré j en m variables et à valeurs dans K_1^m et $g_{j,l}$ de la forme $g_{j,l}(z) = \sum_{j \geq 2} g_{j,l}^{(j)}(z)$ de rayon de convergence strictement positif et $g_{j,l}^{(j)}(z)$ polynôme homogène de degré j en m variables et à valeurs dans K_1^m .

Pour tout $t \in K_2 \setminus \{y_1, y_2, \dots, y_s\}$, on peut aussi écrire f_t sous la forme

$$f_t(z) = Lz + \sum_{j=2}^{+\infty} f_t^{(j)}(z)$$

avec $f_t^{(j)}(z) = \sum_{1 \leq j \leq s \text{ et } 1 \leq l \leq r} \frac{1}{(t-y_j)^l} g_{j,l}^{(j)}(z) + \sum_{0 \leq k \leq d} t^k h_k^{(j)}(z)$ polynôme homogène de degré j en m variables et à valeurs dans K_1^m et dont les composantes des coefficients sont des fractions rationnelles en t .

Posons $P(X) = \prod_{j=1}^s (X - y_j)^r$ et, pour tout $j \geq 2$, $g_t^{(j)}(z) = P(t) f_t^{(j)}(z)$.

Les $g_t^{(j)}(z)$ sont alors des polynômes homogènes de degré j en m variables et à valeurs dans K_1^m et dont les composantes des coefficients sont des polynômes en t de degré au plus $d + rs$.

Pour tout $t \in K_2$, comme L est non-résonante, d'après la proposition 2.2.8, f_t possède une unique linéarisante formelle

$$\varphi_t(z) = z + \sum_{j \geq 2} \varphi_t^{(j)}(z) = \sum_{j \geq 1} \varphi_t^{(j)}(z)$$

et d'après la formule (2.4), avec les notations du chapitre 2, elle est déterminée par

$$\varphi_t^{(1)}(z) = z \quad \text{et, pour tout } q \geq 2,$$

$$\varphi_t^{(q)}(z) = (\mathcal{L}_L^{(q)})^{-1} \left(\mathcal{P}_q \left(\sum_{2 \leq l \leq q} f_t^{(l)} \left(\sum_{1 \leq i \leq q} \varphi_t^{(i)}(z) \right) \right) \right) \quad (5.1)$$

Pour tout $j \geq 1$, posons $\psi_t^{(j)}(z) = (P(t))^{j-1} \varphi_t^{(j)}(z)$.

La relation de récurrence précédente devient alors

$$\psi_t^{(1)}(z) = z \quad \text{et, pour tout } q \geq 2,$$

$$\frac{\psi_t^{(q)}(z)}{(P(t))^{q-1}} = (\mathcal{L}_L^{(q)})^{-1} \left(\mathcal{P}_q \left(\sum_{2 \leq l \leq q} \frac{g_t^{(l)}}{P(t)} \left(\sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_l \leq q} \frac{\psi_t^{(i_1)}(z)}{(P(t))^{i_1-1}} \right) \right) \right)$$

d'où

$$\psi_t^{(q)}(z) = (\mathcal{L}_L^{(q)})^{-1} \left(\mathcal{P}_q \left(\sum_{2 \leq l \leq q} (P(t))^{q-1} \frac{g_t^{(l)}}{P(t)} \left(\sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_l \leq q} \frac{\psi_t^{(i_1)}(z)}{(P(t))^{i_1-1}} \right) \right) \right)$$

d'où

$$\psi_t^{(q)}(z) = (\mathcal{L}_L^{(q)})^{-1} \left(\mathcal{P}_q \left(\sum_{2 \leq l \leq q} (P(t))^{q-2} g_t^{(l)} \left(\sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_l \leq q} \frac{\psi_t^{(i_1)}(z)}{(P(t))^{i_1-1}} \right) \right) \right)$$

Comme les $g_t^{(l)}(z)$ sont des polynômes homogènes de degré l , les parties homogènes de degré q sont obtenues à chaque fois à partir de l coefficients provenant

de $\frac{\psi_t^{(i)}}{(P(t))^{i-1}}$ ayant pour indices (éventuellement répétés) $i_1, i_2, \dots, i_l \in \mathbb{N}^*$

vérifiant $i_1 + i_2 + \dots + i_l = q$.

On peut alors isoler chacun des $\psi_t^{(i_k)}$ en sortant chacun des $\frac{1}{(P(t))^{i_k-1}}$ devant $g_t^{(l)}$

et, en faisant ceci pour i_1, i_2, \dots, i_l , on obtient, devant $g_t^{(l)}$, quelque chose de la forme

$$(P(t))^{q-2} \prod_{k=1}^l \frac{1}{(P(t))^{i_k-1}}$$

avec

$$\begin{aligned} (P(t))^{q-2} \prod_{k=1}^l \frac{1}{(P(t))^{i_k-1}} &= (P(t))^{q-2-(i_1-1)-(i_2-1)-\dots-(i_l-1)} \\ &= (P(t))^{q-2-(i_1+i_2+\dots+i_l)+l} \\ &= (P(t))^{q-2-q+l} \\ &= (P(t))^{l-2} \end{aligned}$$

Cette égalité étant vraie pour toutes les parties homogènes de degré q , comme pour le calcul des $\psi_t^{(q)}$, seul compte ce qui est homogène de degré q , on en déduit que

$$\psi_t^{(q)}(z) = (\mathcal{L}_L^{(q)})^{-1} \left(\mathcal{P}_q \left(\sum_{2 \leq l \leq q} (P(t))^{l-2} g_t^{(l)} \left(\sum_{1 \leq i_1 \leq q} \psi_t^{(i_1)}(z) \right) \right) \right) \quad (5.2)$$

On déduit alors de (5.2) que les composantes des coefficients des polynômes homogènes $\psi_t^{(q)}$ sont des polynômes en t à coefficients dans K_1 .

De plus, en notant W_q le degré maximum, en tant que polynôme en t , des composantes des coefficients du polynôme homogène $\psi_t^{(q)}$ et en posant $h = d + rs$ on a le lemme suivant

Lemme 5.1.2.

$$\forall q \in \mathbb{N}^* \quad W_q \leq h(q - 1)$$

Démonstration du lemme:

D'après la formule (5.2), comme on a à faire à des polynômes homogènes, comme les composantes des coefficients des $g_t^{(l)}$ sont des polynômes en t de degré au plus $d + rs$ et comme P est un polynôme de degré rs , on a

$$W_1 = 0$$

et, pour tout $q \geq 2$,

$$W_q \leq \max_{\substack{2 \leq l \leq q \\ 1 \leq i_1 \leq q}} ((l - 2)(rs) + (d + rs) + lW_{i_1}) \quad (5.3)$$

d'où,

$$W_q \leq \max_{\substack{2 \leq l \leq q \\ 1 \leq i_1 \leq q}} ((l - 2)h + h + lW_{i_1}) \quad (5.4)$$

On obtient alors que

- pour $q = 1$, le lemme est vrai, car $W_1 = 0 = h(1 - 1)$.
- pour $q \geq 2$, si on suppose que pour tout $j \in \llbracket 1, q - 1 \rrbracket$, $W_j \leq h(j - 1)$, alors, on tire de (5.4) que

$$W_q \leq \max_{\substack{2 \leq l \leq q \\ 1 \leq i_1 \leq q}} ((l - 2)h + h + lh(i_1 - 1))$$

Or, pour tout $l \in \llbracket 2, q \rrbracket$ et tout $i \in \llbracket 1, \frac{q}{l} \rrbracket$, on a

$$\begin{aligned}
((l-2)h + h + lh(i-1)) &\leq (l-1)h + lh(i-1) \\
&\leq (l-1)h + lhi - lh \\
&\leq (l-1)h + qh - lh \\
&\leq h(q-1)
\end{aligned}$$

d'où

$$W_q \leq h(q-1)$$

Par récurrence, il s'en suit que le lemme est vrai.

Notation 5.1.3.

Pour tout $t \in K_2 \setminus \{y_1, y_2, \dots, y_s\}$ et $q \in \mathbb{N}^*$, notons aussi $B_q(t)$, le maximum (à t fixé) des valeurs absolues des composantes des coefficients du polynôme homogène $\varphi_t^{(q)}$. On a $E = \{t \in K_2 \setminus \{y_1, y_2, \dots, y_s\} / f_t \text{ est linéarisable}\}$. Posons alors, pour tout $q \in \mathbb{N}^*$,

$$F_q = \left\{ t \in K_2 \setminus \{y_1, y_2, \dots, y_s\} \mid |t| \leq q \text{ et } \forall k \in \llbracket 1, s \rrbracket \mid |t - y_k| \geq \frac{1}{q} \right\}$$

et

$$G_q = \bigcap_{j \in \mathbb{N}^*} \{t \in F_q \mid B_j(t) \leq q^j\}$$

Remarque 5.1.4. Les G_q sont des fermés bornés dans K_2 qui est localement compact, donc les G_q sont des compacts.

Lemme 5.1.5.

$$E = \bigcup_{q=1}^{+\infty} G_q$$

Démonstration du lemme:

• Si $t \in E$. Alors, $t \in K_2 \setminus \{y_1, y_2, \dots, y_s\}$, f_t est linéarisable et $\varphi_t(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^m} a_{\alpha, t} z^\alpha$

est une série entière de rayon $R_{\varphi_t} > 0$. Posons $r = \frac{R_{\varphi_t}}{2}$ et $z_0 = (r, r, \dots, r)$.

Comme $\|z_0\| < R_{\varphi_t}$, $\varphi_t(z_0)$ est convergente et donc $a_{\alpha, t} r^{|\alpha|} \xrightarrow{\|\alpha\| \rightarrow +\infty} 0$.

Il existe alors un réel $M > 1$ tel que $\forall \alpha \in \mathbb{N}^m \quad \|a_{\alpha, t} r^{|\alpha|}\| \leq M$.

En posant $q_0 = 3 + \max_{1 \leq k \leq s} \frac{1}{|t - y_k|} + \left\lceil \frac{M}{r} \right\rceil + \lceil |t| \rceil$, on obtient, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^m$ tel que $\|\alpha\| \geq 1$,

$$\|a_{\alpha,t}\| \leq \frac{M}{r^{\|\alpha\|}} \leq \left(\frac{M}{r}\right)^{\|\alpha\|} \leq q_0^{\|\alpha\|} \quad (5.5)$$

et

$$t \in F_{q_0} \quad (5.6)$$

d'où

$$B_{\|\alpha\|}(t) \leq q_0^{\|\alpha\|} \quad (5.7)$$

et

$$t \in F_{q_0} \quad (5.8)$$

On déduit alors de (5.7) et (5.8) que $t \in G_{q_0}$, d'où $t \in \bigcup_{q=1}^{+\infty} G_q$.

• Si $t \in \bigcup_{q=1}^{+\infty} G_q$, alors il existe q_0 tel que $t \in G_{q_0}$. On a alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^m$ tel

que $\|\alpha\| \geq 1$, $\|a_{\alpha,t}\| \leq B_{\|\alpha\|}(t) \leq q_0^{\|\alpha\|}$. Donc $\varphi_t(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^m} a_{\alpha,t} z^\alpha$ est de rayon $R_{\varphi_t} \geq \frac{1}{q_0} > 0$. Par conséquent, f_t est linéarisable et $t \in E$.

Lemme 5.1.6. Soit $q \in \mathbb{N}^*$. Il existe $m_q > 0$ et $M_q > 1$ tels que

$$\forall t \in F_q \quad m_q \leq |P(t)| \leq M_q$$

Démonstration du lemme:

On a $F_q = \{t \in K_2 \setminus \{y_1, y_2, \dots, y_s\} \mid |t| \leq q \text{ et } \forall j \in \llbracket 1, s \rrbracket \quad |t - y_j| \geq \frac{1}{q}\}$ et $P(X) = \prod_{j=1}^s (X - y_j)^r$. Donc, pour tout $t \in F_q$, on a

$$|P(t)| = \left| \prod_{j=1}^s (t - y_j)^r \right| = \prod_{j=1}^s |t - y_j|^r \quad (5.9)$$

Or, en posant $h = \max_{1 \leq j \leq s} |y_j|$, on a, pour tout $j \in \llbracket 1, s \rrbracket$, $|t - y_j| \leq |t| + |y_j| \leq q + h$, donc, en posant $M_q = 1 + (q + h)^{rs}$, on obtient

$$|P(t)| \leq M_q \quad (5.10)$$

On a aussi $\forall j \in \llbracket 1, s \rrbracket \quad |t - y_j| \geq \frac{1}{q}$, donc, en posant $m_q = \frac{1}{q^{rs}}$, (5.9) donne

$$|P(t)| \geq m_q \quad (5.11)$$

□

Fin de la démonstration du théorème:

Pour démontrer le théorème 5.1.1, il suffit de prouver que si $d^*(E) > 0$, alors $E = K_2 \setminus \{y_1, y_2, \dots, y_s\}$. Supposons donc que $d^*(E) > 0$. D'après le lemme 5.1.5, on a $E = \bigcup_{q=1}^{+\infty} G_q$, d'où $d^* \left(\bigcup_{q=1}^{+\infty} G_q \right) > 0$. Grâce au théorème 3.2.8, on en déduit qu'il existe $q_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $d^*(G_{q_0}) > 0$. Or, K_2 est localement compact et comme d'après la remarque 5.1.4, G_{q_0} est compact, on déduit de la proposition 3.2.5 que $d^*(G_{q_0}) = d(G_{q_0})$. Par conséquent, $d(G_{q_0}) > 0$.

Soit $t_0 \in K_2 \setminus \{y_1, y_2, \dots, y_s\}$. Posons $G = G_{q_0} \cup \{t_0\}$. Comme G_{q_0} est compact, G est lui-aussi compact et comme $G_{q_0} \subseteq G$, on a $d(G_{q_0}) \leq d(G)$, donc $d(G) > 0$. Posons aussi $R = q_0 + [t_0] + 1$. Comme $G_{q_0} \subseteq B_f(0, q_0)$, on a $G \subseteq B_f(0, R)$.

Par ailleurs, comme $K_2 \setminus \{y_1, y_2, \dots, y_s\} = \bigcup_{q \in \mathbb{N}^*} F_q$, il existe $v \in \mathbb{N}^*$ tel $t_0 \in F_v$. Comme $G_{q_0} \subseteq F_{q_0}$ et comme $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad F_n \subseteq F_{n+1}$, en posant $w = q_0 + v$, on obtient $G = G_{q_0} \cup \{t_0\} \subseteq F_w$.

Soit $q \geq 2$ et $C(t)$ une des composantes d'un des coefficients du polynôme homogène $\psi_t^{(q)}(z)$ de degré q en z . Comme $d(G) > 0$ avec $G \subseteq B_f(0, R)$ et comme $\deg C \leq W_q \leq h(q-1) \leq hq$, on a, d'après le théorème 3.1.10

$$|C(t_0)| \leq \max_{a \in G} |C(a)| \left(\frac{2}{d(G)} \right)^{hq} \left(|t_0| + R \right)^{hq}.$$

Or, comme $\psi_t^{(q)}(z) = (P(t))^{q-1} \varphi_t^{(q)}(z)$, en utilisant le fait que $G \subseteq F_w$, avec les notations du lemme 5.1.6, on a

$$\max_{a \in G} |C(a)| \leq \max_{a \in G} \left| (P(a))^{q-1} B_q(a) \right| \leq M_w^{q-1} q_0^q \leq M_w^q q_0^q \leq (M_w q_0)^q$$

d'où,

$$|C(t_0)| \leq (M_w q_0)^q \left(\frac{2}{d(G)} \right)^{hq} \left(|t_0| + R \right)^{hq}$$

c'est-à-dire

$$|C(t_0)| \leq \left((M_w q_0) \left(\frac{2}{d(G)} \right)^h (|t_0| + R)^h \right)^q \quad (5.12)$$

Soit $D(t)$ une des composantes d'un des coefficients du polynôme homogène $\varphi_t^{(q)}(z)$ de degré q en z . Comme $\psi_t^{(q)}(z) = (P(t))^{q-1} \varphi_t^{(q)}(z)$ et comme (5.12) est vraie pour toute composante $C(t)$ d'un des coefficients du polynôme homogène $\psi_t^{(q)}(z)$, on obtient (en notant $C(t)$ la composante qui est associée à $D(t)$) et en utilisant le fait que $t_0 \in F_w$ et le lemme 5.1.6,

$$|D(t_0)| \leq \frac{|C(t_0)|}{(P(t_0))^{q-1}} \leq \left(\frac{1}{m_w} \right)^{q-1} \left((M_w q_0) \left(\frac{2}{d(G)} \right)^h (|t_0| + R)^h \right)^q \quad (5.13)$$

et comme $\left(\frac{1}{m_w} \right)^{q-1} \leq \left(1 + \frac{1}{m_w} \right)^{q-1} \leq \left(1 + \frac{1}{m_w} \right)^q$, on a

$$|D(t_0)| \leq \left(1 + \frac{1}{m_w} \right)^q \left((M_w q_0) \left(\frac{2}{d(G)} \right)^h (|t_0| + R)^h \right)^q \quad (5.14)$$

d'où

$$|D(t_0)| \leq \left(\left(1 + \frac{1}{m_w} \right) (M_w q_0) \left(\frac{2}{d(G)} \right)^h (|t_0| + R)^h \right)^q \quad (5.15)$$

et par conséquent,

$$|B_q(t_0)| \leq \left(\left(1 + \frac{1}{m_w} \right) (M_w q_0) \left(\frac{2}{d(G)} \right)^h (|t_0| + R)^h \right)^q$$

Ainsi, $t_0 \in E$, ce qui entraîne finalement,

$$E = K_2 \setminus \{y_1, y_2, \dots, y_s\}.$$

□

Remarque 5.1.7. *Dans le théorème précédent, on avait besoin que K_2 soit localement compact pour pouvoir utiliser la remarque 5.1.4 et la proposition 3.2.5, ce qui permettait par la suite d'utiliser le théorème 3.1.10. Lorsque K_2 n'est pas localement compact mais est égal à \mathbb{C}_p , on peut toutefois démontrer un théorème de tout ou presque rien plus faible:*

Théorème 5.1.8. *Si $m, d, r, s \in \mathbb{N}^*$, si y_1, y_2, \dots, y_s sont s points distincts de \mathbb{C}_p , si les $h_k : (\mathbb{C}_p^m, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}_p^m, 0)$ et les $g_{j,l} : (\mathbb{C}_p^m, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}_p^m, 0)$ sont des séries entières en m variables de valuation supérieure ou égale à 2 et de rayon de convergence strictement positif, si $L \in GL_m(\mathbb{C}_p)$ est non-résonante et si on pose, pour tout $t \in \mathbb{C}_p \setminus \{y_1, y_2, \dots, y_s\}$*

$$f_t(z) = Lz + \sum_{\substack{j=1,2,\dots,s \\ l=1,2,\dots,r}} \frac{1}{(t-y_j)^l} g_{j,l}(z) + \sum_{k=0}^d t^k h_k(z)$$

et

$$E = \{t \in \mathbb{C}_p \setminus \{y_1, y_2, \dots, y_s\} / f_t \text{ est linéarisable}\},$$

alors,

ou bien $E = \mathbb{C}_p \setminus \{y_1, y_2, \dots, y_s\}$ ou bien E est d'intérieur vide.

Démonstration :

La démonstration est analogue à celle du théorème 5.1.1 à deux exceptions près. On utilise les mêmes lemmes et le fait que, pour démontrer le théorème 5.1.8, il suffit de prouver que si E est d'intérieur non vide, alors

$E = \mathbb{C}_p \setminus \{y_1, y_2, \dots, y_s\}$. Supposons donc que E soit d'intérieur non vide. D'après

le lemme 5.1.5, on a $E = \bigcup_{q=1}^{+\infty} G_q$, avec les G_q fermés (et bornés). Le théorème

de Baire nous assure alors l'existence d'un $q_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que G_{q_0} soit d'intérieur non vide. La suite de la démonstration est alors analogue à celle du théorème précédent en remarquant que (avec les mêmes notations que dans la démonstration du théorème précédent), $G = G_{q_0} \cup \{t_0\}$ est aussi d'intérieur non vide et est comme précédemment inclus dans l'un des F_w . On obtient alors l'existence d'un point $a \in G$ et d'un $\varepsilon > 0$ tels que $B(a, \varepsilon) \subseteq G \subseteq F_w$. La suite de la démonstration est analogue en remplaçant le théorème 3.1.10 par le théorème 3.1.16 qui permet d'obtenir une majoration polynomiale à partir d'une majoration sur une boule.

5.2 Un exemple de cas résonant

On conserve toujours les mêmes notations. K_1 désigne un sous-corps valué complet de \tilde{K} et K_2 un sous-corps valué complet et localement compact de K_1 .

On s'intéresse désormais au cas $m = 1$ et $\lambda = 1$. Une fonction $f(z) = z + \dots$ distincte de l'identité n'est jamais conjuguée à l'identité¹.

1. En effet, cela entraînerait $f(\varphi(z)) = \varphi(z)$, d'où $f(z) = \varphi(\varphi^{-1}(z)) = z$ et ceci est impossible si f n'est pas l'identité.

Dans ce cas, il faut essayer de conjuguer f à un autre type de fonctions très simples et ces dernières sont appelées formes normales. En général, on essaie de voir si f est conjuguée à une fonction du type $z \mapsto z + z^{q+1} + \mu z^{2q+1}$ et dans le cas particulier où $\mu = 1$, on essaie parfois de conjuguer à $z \mapsto \frac{z}{1-z^q}$.

Dans un premier temps, nous rappellerons ce qui est connu dans \mathbb{C} en montrant que c'est encore vrai dans K_1 (lorsque $\tilde{K} = \mathbb{C}$ ou $\tilde{K} = \mathbb{C}_p$) et ensuite nous montrerons que dans un cas très particulier on a encore un théorème analogue à celui de Perez-Marco.

Proposition 5.2.1. *Soit $f(z) = z + bz^{q+1} + \sum_{k=q+2}^{+\infty} a_k z^k$ une série entière à coefficients dans K_1 ayant un rayon de convergence strictement positif.*

Si le polynôme $X^q - \frac{1}{b}$ possède une racine $u \in K_1$, alors, il existe g et φ deux séries entières à coefficients dans K_1 de rayon de convergence strictement positif avec g de la forme $g(z) = z + z^{q+1} + \sum_{k=q+2}^{+\infty} c_k z^k$ et avec φ vérifiant $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) \neq 0$ et, pour tout z assez petit,

$$f(\varphi(z)) = \varphi(g(z))$$

Démonstration :

Supposons que le polynôme $X^q - \frac{1}{b}$ possède une racine $u \in K_1$. On a $u^q b = 1$. Posons $\varphi(z) = uz$. φ est bien une série entière à coefficients dans K_1 de rayon de convergence strictement positif et on a $\varphi(0) = 0$ et $\varphi'(0) = u \neq 0$. Posons aussi $g(z) = \varphi^{-1}(f(\varphi(z)))$. Comme f , φ et φ^{-1} sont des séries entières à coefficients dans K_1 de rayon strictement positif, g est elle aussi une série entière à coefficients dans K_1 de rayon strictement positif. De plus, elle est de la forme

$$\begin{aligned} g(z) &= \varphi^{-1}(f(\varphi(z))) = \frac{1}{u}(uz) + b(uz)^{q+1} + \sum_{k=q+2}^{+\infty} a_k (uz)^k \\ &= z + u^q b z^{q+1} + \sum_{k=q+2}^{+\infty} a_k u^{k-1} z^k \\ &= z + z^{q+1} + \sum_{k=q+2}^{+\infty} c_k z^k \end{aligned}$$

et par construction de g , sur un voisinage de 0, on a aussi $f(\varphi(z)) = \varphi(g(z))$.

Proposition 5.2.2. *Soit $f(z) = z + z^{q+1} + \sum_{k=q+2}^{+\infty} a_k z^k$ une série entière à coefficients dans K_1 ayant un rayon de convergence strictement positif.*

Alors, il existe g et φ deux séries entières à coefficients dans K_1 de rayon de convergence strictement positif avec g de la forme $g(z) = z + z^{q+1} + \mu z^{2q+1} + \sum_{k=2q+2}^{+\infty} c_k z^k$ et avec φ vérifiant $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = 1$ et, pour tout z assez petit,

$$f(\varphi(z)) = \varphi(g(z))$$

Démonstration :

Posons $f_2(z) = f(z) = z + z^{q+1} + a_{2,q+2}z^{q+2} + \sum_{j=q+3}^{+\infty} a_{2,j}z^j$.

Soit $k \in \llbracket 2, q \rrbracket$ et supposons que f_k , série entière à coefficients dans K_1 de rayon de convergence strictement positif, est construite et vérifie

$$f_k(z) = z + z^{q+1} + a_{k,q+k}z^{q+k} + \sum_{j=q+k+1}^{+\infty} a_{k,j}z^j$$

Posons $H_k(z) = z + \beta_k z^k$ avec $\beta_k = \frac{a_{k,q+k}}{q+1-k}$. Comme $\beta_k \in K_1$, H_k est bien une série entière à coefficients dans K_1 de rayon de convergence strictement positif et on a $H_k(0) = 0$ et $H'_k(0) = 1 \neq 0$. Posons alors $f_{k+1}(z) = H_k(f_k(H_k^{-1}(z)))$. Comme f_k , H_k et H_k^{-1} sont des séries entières à coefficients dans K_1 de rayon strictement positif, f_{k+1} est elle aussi une série entière à coefficients dans K_1 de rayon strictement positif. De plus, en notant $u = H_k^{-1}(z)$, elle est de la forme

$$\begin{aligned} f_{k+1}(z) &= H_k(f_k(H_k^{-1}(z))) \\ &= H_k(f_k(u)) \\ &= (f_k(u) + \beta_k(f_k(u))^k) \\ &= (u + u^{q+1} + a_{k,q+k}u^{q+k} + \dots) + \beta_k(u + u^{q+1} + a_{k,q+k}u^{q+k} + \dots)^k \\ &= (u + u^{q+1} + a_{k,q+k}u^{q+k} + \dots) + \beta_k u^k (1 + u^q + a_{k,q+k}u^{q+k-1} + \dots)^k \\ &= (u + u^{q+1} + a_{k,q+k}u^{q+k} + \dots) + \beta_k u^k (1 + k u^q + \dots) \end{aligned}$$

On a alors

$$f_{k+1}(z) = u + \beta_k u^k + u^{q+1} + (a_{k,q+k} + k\beta_k)u^{q+k} + \dots \quad (5.16)$$

Par ailleurs,

$$u + \beta_k u^k = H_k(u) = z \quad (5.17)$$

De plus, comme $H_k(z) = z + \beta_k z^k$, on a

$$H_k^{-1}(z) = z + \sum_{n=2}^{+\infty} b_n z^n.$$

Or

$$\begin{aligned}
z &= H_k^{-1}(H_k(z)) \\
&= z + \beta_k z^k + \sum_{n=2}^{+\infty} b_n (z + \beta_k z^k)^n \\
&= z + \beta_k z^k + \sum_{n=2}^{+\infty} b_n z^n (1 + \beta_k z^{k-1})^n \\
&= z + \sum_{n=2}^{k-1} b_n z^n + \beta_k z^k + b_k z^k + \dots
\end{aligned}$$

d'où $\forall n \in \llbracket 2, k-1 \rrbracket$ $b_n = 0$ et $b_k = -\beta_k$. Ce qui entraîne

$$u = H_k^{-1}(z) = z - \beta_k z^k + \dots \quad (5.18)$$

On a alors

$$u^{q+k} = z^{q+k} + \dots \quad (5.19)$$

et

$$\begin{aligned}
u^{q+1} &= (z - \beta_k z^k + \dots)^{q+1} = z^{q+1} (1 - \beta_k z^{k-1} + \dots)^{q+1} \\
&= z^{q+1} (1 - (q+1)\beta_k z^{k-1} + \dots) = z^{q+1} - (q+1)\beta_k z^{q+k} + \dots
\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$u^{q+1} = z^{q+1} - (q+1)\beta_k z^{q+k} + \dots \quad (5.20)$$

De (5.16), (5.17), (5.19) et (5.20), on déduit

$$f_{k+1}(z) = z + z^{q+1} - (q+1)\beta_k z^{q+k} + (a_{k,q+k} + k\beta_k) z^{q+k} + \dots \quad (5.21)$$

Autrement dit,

$$f_{k+1}(z) = z + z^{q+1} + (a_{k,q+k} - (q+1-k)\beta_k) z^{q+k} + \sum_{j=q+k+1}^{+\infty} a_{k+1,j} z^j \quad (5.22)$$

Et comme $\beta_k = \frac{a_{k,q+k}}{q+1-k}$, on a

$$f_{k+1}(z) = z + z^{q+1} + \sum_{j=q+k+1}^{+\infty} a_{k+1,j} z^j \quad (5.23)$$

i.e.

$$f_{k+1}(z) = z + z^{q+1} + a_{k+1,q+k+1} z^{q+k+1} + \sum_{j=q+k+2}^{+\infty} a_{k+1,j} z^j \quad (5.24)$$

De plus, sur un voisinage de 0, on a

$$H_k(f_k(z)) = f_{k+1}(H_k(z)) \quad \text{avec} \quad H_k(0) = 0 \quad \text{et} \quad H'_k(0) = 1$$

Autrement dit, sur un voisinage de 0, on a

$$f_k(z) = H_k^{-1}(f_{k+1}(H_k(z))) \quad \text{avec} \quad H_k(0) = 0 \quad \text{et} \quad H'_k(0) = 1$$

et comme on peut appliquer ce procédé pour tout $k \in \llbracket 2, q \rrbracket$ et comme $f = f_2$, on a, sur un voisinage² de 0,

$$\begin{aligned} f(z) &= H_2^{-1}(f_3(H_2(z))) \\ &= H_2^{-1}(H_3^{-1}(f_4(H_3(H_2(z)))))) \\ &= H_2^{-1}(H_3^{-1}(H_4^{-1}(f_5(H_4(H_3(H_2(z))))))) \\ &= H_2^{-1}(H_3^{-1}(\dots(H_q^{-1}(f_{q+1}(H_q(H_3(H_2(z)))))))) \end{aligned}$$

En posant $\varphi(z) = H_2^{-1}(H_3^{-1}(\dots(H_q^{-1}(z))))$, on obtient, sur un voisinage de 0,

$$f(z) = \varphi(f_{q+1}(\varphi^{-1}(z))) \quad \text{avec} \quad \varphi(0) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi'(0) = 1$$

Et comme f_{q+1} s'écrit sous la forme

$$f_{q+1}(z) = z + z^{q+1} + \mu z^{2q+1} + \sum_{k=2q+2}^{+\infty} c_k z^k,$$

le résultat est démontré.

Notation 5.2.3. Pour tout $q \in \mathbb{N}^*$ et tout $\mu \in K_1$, on pose

$$g_{q,\mu}(z) = z + z^{q+1} + \mu z^{2q+1}$$

et

$$\tau_q(z) = \frac{z}{1 - z^q}.$$

Théorème 5.2.4. Soit $f(z) = z + z^{q+1} + \mu z^{2q+1} + \sum_{k \geq 2q+2} c_k z^k$ une série entière à coefficients dans K_1 de rayon de convergence strictement positif. Il existe alors $\varphi(z) = z + \sum_{k \geq 2} b_k z^k$ une série formelle à coefficients dans K_1 vérifiant

$$f(\varphi(z)) = \varphi(g_{q,\mu}(z)).$$

Autrement dit, toute fonction f de la forme $f(z) = z + z^{q+1} + \mu z^{2q+1} + \sum_{k \geq 2q+2} c_k z^k$ est formellement conjuguée à $g_{q,\mu}(z) = z + z^{q+1} + \mu z^{2q+1}$.

2. une intersection finie de voisinage de 0.

Démonstration :

Soit $f(z) = z + z^{q+1} + \mu z^{2q+1} + \sum_{k \geq 2q+2} c_k z^k$ une série entière à coefficients dans K_1 de rayon de convergence strictement positif. Comme $\varphi(z) = z + \sum_{k \geq 2} b_k z^k$, il revient au même de montrer qu'il existe $h(z) = z + \sum_{k \geq 2} d_k z^k$ ($h = \varphi^{-1}$) vérifiant

$$h(f(z)) = g_{q,\mu}(h(z))$$

Pour démontrer ce théorème, nous allons procéder par analyse-synthèse.

• Supposons qu'il existe $h(z) = z + \sum_{k \geq 2} d_k z^k$ une série formelle à coefficients dans K_1 vérifiant

$$h(f(z)) = g_{q,\mu}(h(z)). \quad (5.25)$$

Comme on a à faire à des séries formelles de valuation 1, il n'y a aucun problème pour conjuguer et on a (en notant $d_1 = 1$)

$$\begin{aligned} g_{q,\mu}(h(z)) &= h(z) + (h(z))^{q+1} + \mu(h(z))^{2q+1} \\ &= z + \sum_{k \geq 2} d_k z^k + \left(\sum_{k \geq 1} d_k z^k \right)^{q+1} + \mu \left(\sum_{k \geq 1} d_k z^k \right)^{2q+1} \end{aligned}$$

Or, pour tout $s \in \mathbb{N}^*$, en notant $D(s,n) = \sum_{\substack{(k_1, k_2, \dots, k_s) \in \mathbb{N}^{*s} \\ k_1 + k_2 + \dots + k_s = n}} d_{k_1} d_{k_2} \dots d_{k_s}$, on a

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k \geq 1} d_k z^k \right)^s &= \sum_{(k_1, k_2, \dots, k_s) \in \mathbb{N}^{*s}} d_{k_1} d_{k_2} \dots d_{k_s} z^{k_1 + k_2 + \dots + k_s} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{\substack{(k_1, k_2, \dots, k_s) \in \mathbb{N}^{*s} \\ k_1 + k_2 + \dots + k_s = n}} d_{k_1} d_{k_2} \dots d_{k_s} \right) z^n \\ &= \sum_{n=s}^{+\infty} \left(\sum_{\substack{(k_1, k_2, \dots, k_s) \in \mathbb{N}^{*s} \\ k_1 + k_2 + \dots + k_s = n}} d_{k_1} d_{k_2} \dots d_{k_s} \right) z^n \\ &= \sum_{n=s}^{+\infty} D(s,n) z^n \end{aligned}$$

Donc

$$g_{q,\mu}(h(z)) = \sum_{n=1}^{+\infty} d_n z^n + \sum_{n=q+1}^{+\infty} D(q+1,n) z^n + \mu \sum_{n=2q+1}^{+\infty} D(2q+1,n) z^n \quad (5.26)$$

On a aussi, en notant $f(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k z^k$ et en posant $C(s,n) = \sum_{\substack{(k_1, k_2, \dots, k_s) \in \mathbb{N}^{*s} \\ k_1 + k_2 + \dots + k_s = n}} c_{k_1} c_{k_2} \dots c_{k_s}$

$$\left(\sum_{k \geq 1} c_k z^k \right)^s = \sum_{n=s}^{+\infty} C(s,n) z^n$$

et

$$\begin{aligned} h(f(z)) &= h\left(\sum_{k=1}^{+\infty} c_k z^k\right) \\ &= \sum_{j=1}^{+\infty} d_j \left(\sum_{k=1}^{+\infty} c_k z^k\right)^j \\ &= \sum_{j=1}^{+\infty} d_j \sum_{n=j}^{+\infty} C(j,n) z^n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{j=1}^n d_j C(j,n)\right) z^n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(d_n C(n,n) + \sum_{j=1}^{n-1} d_j C(j,n)\right) z^n \end{aligned}$$

et comme $C(n,n) = 1$, on a

$$h(f(z)) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(d_n + \sum_{j=1}^{n-1} d_j C(j,n)\right) z^n \quad (5.27)$$

On déduit alors de (5.25), (5.26) et (5.27) que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(d_n + \sum_{j=1}^{n-1} d_j C(j,n)\right) z^n = \sum_{n=1}^{+\infty} d_n z^n + \sum_{n=q+1}^{+\infty} D(q+1,n) z^n + \mu \sum_{n=2q+1}^{+\infty} D(2q+1,n) z^n$$

d'où

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{j=1}^{n-1} d_j C(j,n) \right) z^n = \sum_{n=q+1}^{+\infty} D(q+1,n) z^n + \mu \sum_{n=2q+1}^{+\infty} D(2q+1,n) z^n \quad (5.28)$$

Or, comme $c_1 = 1$ et $c_2 = c_3 = \dots = c_q = 0$, on a³, pour tout $s \in \mathbb{N}^*$,

$$C(s,s) = 1 \quad \text{et} \quad \forall k \in \llbracket 1, q-1 \rrbracket \quad C(s, s+k) = 0 \quad (5.29)$$

et, pour tout $1 \leq n \leq q$ et tout $1 \leq j \leq n-1$, on a $1 \leq n-j \leq q-j \leq q-1$, d'où

$$C(j,n) = C(j, j+(n-j)) = 0$$

La formule (5.28) devient alors

$$\sum_{n=q+1}^{+\infty} \left(\sum_{j=1}^{n-1} d_j C(j,n) \right) z^n = \sum_{n=q+1}^{+\infty} D(q+1,n) z^n + \mu \sum_{n=2q+1}^{+\infty} D(2q+1,n) z^n \quad (5.30)$$

Par ailleurs, on a, grâce à (5.29) et au fait que $c_{q+1} = 1$,

$$\sum_{j=1}^{(q+1)-1} d_j C(j, q+1) = d_1 C(1, q+1) + 0 = 1 \times 1 = 1$$

et comme $d_1 = 1$, on a aussi

$$D(q+1, q+1) = 1 \times 1 \times \dots \times 1 = 1 \quad (5.31)$$

La formule (5.30) devient alors

$$\sum_{n=q+2}^{+\infty} \left(\sum_{j=1}^{n-1} d_j C(j,n) \right) z^n = \sum_{n=q+2}^{+\infty} D(q+1,n) z^n + \mu \sum_{n=2q+1}^{+\infty} D(2q+1,n) z^n \quad (5.32)$$

Comme $c_1 = c_{q+1} = 1$ et $0 = c_2 = c_3 = \dots = c_q = c_{q+2} = c_{q+3} = \dots = c_{2q}$, on a aussi⁴, pour tout $s \in \mathbb{N}^*$,

$$C(s,s) = 1 \quad \text{et} \quad \forall k \in \llbracket 1, q-1 \rrbracket \cup \llbracket q+1, 2q-1 \rrbracket \quad C(s, s+k) = 0 \quad (5.33)$$

et, pour tout $q+1 \leq n \leq 2q$ et tout $1 \leq j \leq n-1$, on a $1 \leq n-j \leq q-j \leq 2q-1$, d'où

$$C(j,n) = C(j, j+(n-j)) = \begin{cases} 0 & \text{si } n-j \neq q \\ j & \text{si } n-j = q \end{cases}$$

3. car dans le produit apparaît au moins l'un des c_j avec $2 \leq j \leq q$.

4. car dans le produit apparaît au moins l'un des c_j avec $2 \leq j \leq q$ ou $q+2 \leq j \leq 2q$.

On obtient alors pour tout $n \in \llbracket q+2, 2q \rrbracket$,

$$\sum_{j=1}^{n-1} d_j C(j, n) = d_{n-q} C(n-q, n-q+q) = d_{n-q} (n-q) \quad (5.34)$$

D'après (5.32) et (5.34), pour $n = q+2$, on obtient

$$(q+2-q)d_{q+2-q} = D(q+1, q+2)$$

i.e.

$$2d_2 = d_1 d_1 \dots d_1 d_2 + d_1 \dots d_1 d_2 d_1 + \dots + d_2 d_1 \dots d_1 = (q+1)d_2$$

Donc, si $q > 1$, alors $d_2 = 0$.

D'après (5.32) et (5.34), pour $n = q+3$, on obtient

$$(q+3-q)d_{q+3-q} = D(q+1, q+3)$$

i.e.⁵

$$3d_3 = 0 + d_1 d_1 \dots d_1 d_3 + d_1 \dots d_1 d_3 d_1 + \dots + d_3 d_1 \dots d_1 = (q+1)d_3$$

Donc, si $q > 2$, alors $d_3 = 0$.

On procède ainsi par récurrence jusqu'à $n = q+q$.

D'après (5.32) et (5.34), pour $n = q+q$, on obtient

$$(q+q-q)d_{q+q-q} = D(q+1, q+q)$$

i.e.⁶

$$qd_q = 0 + d_1 d_1 \dots d_1 d_q + d_1 \dots d_1 d_q d_1 + \dots + d_q d_1 \dots d_1 = (q+1)d_q$$

Donc, comme $q > q-1$, alors $d_q = 0$. (5.35)

Ainsi $d_2 = d_3 = \dots = d_q = 0$ (si $q = 1$, on n'a aucune annulation) et (5.32) devient

$$\sum_{n=2q+1}^{+\infty} \left(\sum_{j=1}^{n-1} d_j C(j, n) \right) z^n = \sum_{n=2q+1}^{+\infty} D(q+1, n) z^n + \mu \sum_{n=2q+1}^{+\infty} D(2q+1, n) z^n \quad (5.36)$$

c'est-à-dire

$$\sum_{n=2q+1}^{+\infty} \left(\sum_{j=1}^{n-1} d_j C(j, n) \right) z^n = \sum_{n=2q+1}^{+\infty} (D(q+1, n) + \mu D(2q+1, n)) z^n \quad (5.37)$$

5. Dans la somme, les produits comprenant d_2 apportent une contribution nulle

6. Dans la somme, les produits comprenant d_2 ou d_3 ou \dots ou d_{q-1} apportent une contribution nulle

On déduit alors de (5.37) que, pour tout $n \geq 2q + 1$,

$$\sum_{j=1}^{n-1} d_j C(j, n) = D(q + 1, n) + \mu D(2q + 1, n) \quad (5.38)$$

avec

$$d_1 = 1 \text{ et } d_2 = d_3 = \dots = d_q = 0 \quad (5.39)$$

Or

$$\begin{aligned} D(s, n) &= \sum_{\substack{(k_1, k_2, \dots, k_s) \in \mathbb{N}^{*s} \\ k_1 + k_2 + \dots + k_s = n}} d_{k_1} d_{k_2} \dots d_{k_s} \\ &= d_1 \dots d_1 d_{n-(s-1)} + \dots + d_{n-(s-1)} d_1 \dots d_1 + \sum_{\substack{(k_1, k_2, \dots, k_s) \in \mathbb{N}^{*s} \\ k_1 + k_2 + \dots + k_s = n \\ \forall j \quad k_j < n - (s-1)}} d_{k_1} d_{k_2} \dots d_{k_s} \\ &= s d_{n-(s-1)} + \sum_{\substack{(k_1, k_2, \dots, k_s) \in \mathbb{N}^{*s} \\ k_1 + k_2 + \dots + k_s = n \\ \forall j \quad k_j < n - (s-1)}} d_{k_1} d_{k_2} \dots d_{k_s} \end{aligned}$$

donc

$$D(q + 1, n) = (q + 1) d_{n-q} + \sum_{\substack{(k_1, k_2, \dots, k_{q+1}) \in \mathbb{N}^{*q+1} \\ k_1 + k_2 + \dots + k_{q+1} = n \\ \forall j \quad k_j < n - q}} d_{k_1} d_{k_2} \dots d_{k_{q+1}} \quad (5.40)$$

et

$$D(2q + 1, n) = (2q + 1) d_{n-2q} + \sum_{\substack{(k_1, k_2, \dots, k_{2q+1}) \in \mathbb{N}^{*2q+1} \\ k_1 + k_2 + \dots + k_{2q+1} = n \\ \forall j \quad k_j < n - 2q}} d_{k_1} d_{k_2} \dots d_{k_{2q+1}} \quad (5.41)$$

d'où

$$D(2q + 1, n) = \sum_{\substack{(k_1, k_2, \dots, k_{2q+1}) \in \mathbb{N}^{*2q+1} \\ k_1 + k_2 + \dots + k_{2q+1} = n \\ \forall j \quad k_j < n - q}} d_{k_1} d_{k_2} \dots d_{k_{2q+1}} \quad (5.42)$$

Or, d'après (5.33), on obtient aussi

$$\sum_{j=1}^{n-1} d_j C(j, n) = (n - q) d_{(n-q)} + \sum_{j=1}^{n-2q} d_j C(j, n) \quad (5.43)$$

On déduit alors de (5.38), (5.40), (5.42) et (5.43) que pour tout $n \geq 2q + 1$,

$$(n - (2q + 1))d_{n-q} = A_{n,q} + B_{n,q} - C_{n,q} \quad (5.44)$$

avec

$$A_{n,q} = \sum_{\substack{(k_1, k_2, \dots, k_{q+1}) \in \mathbb{N}^{*q+1} \\ k_1 + k_2 + \dots + k_{q+1} = n \\ \forall j \quad k_j < n - q}} d_{k_1} d_{k_2} \dots d_{k_{q+1}}$$

et

$$B_{n,q} = \mu \sum_{\substack{(k_1, k_2, \dots, k_{2q+1}) \in \mathbb{N}^{*2q+1} \\ k_1 + k_2 + \dots + k_{2q+1} = n \\ \forall j \quad k_j < n - q}} d_{k_1} d_{k_2} \dots d_{k_{2q+1}}$$

et

$$C_{n,q} = \sum_{j=1}^{n-2q} d_j C(j, n) = \sum_{j=1}^{n-2q} d_j \sum_{\substack{(k_1, k_2, \dots, k_j) \in \mathbb{N}^{*j} \\ k_1 + k_2 + \dots + k_j = n}} c_{k_1} c_{k_2} \dots c_{k_j}$$

On s'aperçoit que pour $n = 2q + 1$, cette relation n'impose aucune condition sur d_{q+1} et que, pour tout $n \geq 2q + 2$, le coefficient d_{n-q} est déterminé de manière unique par la relation de récurrence ci-dessus.

Ainsi, les coefficients d'une conjugante formelle sont déterminés par

$$d_1 = 1, \quad d_2 = d_3 = \dots = d_q = 0, \quad d_{q+1} = u \in K_1 \quad (5.45)$$

et, pour tout $n > 2q + 1$,

$$((n - (2q + 1))d_{n-q} = A_{n,q} + B_{n,q} - C_{n,q} \quad (5.46)$$

avec

$$A_{n,q} = \sum_{\substack{(k_1, k_2, \dots, k_{q+1}) \in \mathbb{N}^{*q+1} \\ k_1 + k_2 + \dots + k_{q+1} = n \\ \forall j \quad k_j < n - q}} d_{k_1} d_{k_2} \dots d_{k_{q+1}}$$

et

$$B_{n,q} = \mu \sum_{\substack{(k_1, k_2, \dots, k_{2q+1}) \in \mathbb{N}^{*2q+1} \\ k_1 + k_2 + \dots + k_{2q+1} = n \\ \forall j \quad k_j < n - q}} d_{k_1} d_{k_2} \dots d_{k_{2q+1}}$$

et

$$C_{n,q} = \sum_{j=1}^{n-2q} d_j C(j, n) = \sum_{j=1}^{n-2q} d_j \sum_{\substack{(k_1, k_2, \dots, k_j) \in \mathbb{N}^{*j} \\ k_1 + k_2 + \dots + k_j = n}} c_{k_1} c_{k_2} \dots c_{k_j}$$

• Réciproquement, pour tout choix de $u \in K_1$, on vérifie que la série formelle $h(z) = z + \sum_{k \geq 2} d_k z^k$ définie par la relation de récurrence (5.45) et (5.46) est une série formelle à coefficients dans K_1 vérifiant

$$h(f(z)) = g_{q,\mu}(h(z)).$$

□

Théorème 5.2.5. *Supposons que $\tilde{K} = \mathbb{C}_p$. Soit $f(z) = z + z^{q+1} + \mu z^{2q+1} + \sum_{k \geq 2q+2} c_k z^k$ une série entière à coefficients dans K_1 de rayon de convergence strictement positif et vérifiant $|\mu|_p \leq 1$ et $\forall k \geq 2q+2 \quad |c_k|_p \leq 1$.*

Il existe alors $h(z) = z + \sum_{k \geq 2} d_k z^k$ une série entière à coefficients dans K_1 de rayon de convergence strictement positif vérifiant

$$h(f(z)) = g_{q,\mu}(h(z)).$$

Autrement dit, toute fonction f de la forme $f(z) = z + z^{q+1} + \mu z^{2q+1} + \sum_{k \geq 2q+2} c_k z^k$ avec $|\mu|_p \leq 1$ et $\forall k \geq 2q+2 \quad |c_k|_p \leq 1$ est analytiquement conjuguée à $g_{q,\mu}(z) = z + z^{q+1} + \mu z^{2q+1}$.

Démonstration :

Considérons la série formelle $h(z) = z + \sum_{k=2}^{+\infty} d_k z^k$ définie par la relation de récurrence

$$d_1 = 1, \quad d_2 = d_3 = \dots = d_q = 0, \quad d_{q+1} = 1$$

et, pour tout $n > 2q+1$,

$$((n - (2q + 1))d_{n-q} = A_{n,q} + B_{n,q} - C_{n,q}$$

avec

$$A_{n,q} = \sum_{\substack{(k_1, k_2, \dots, k_{q+1}) \in \mathbb{N}^{*q+1} \\ k_1 + k_2 + \dots + k_{q+1} = n \\ \forall j \quad k_j < n - q}} d_{k_1} d_{k_2} \dots d_{k_{q+1}}$$

et

$$B_{n,q} = \mu \sum_{\substack{(k_1, k_2, \dots, k_{2q+1}) \in \mathbb{N}^{*2q+1} \\ k_1 + k_2 + \dots + k_{2q+1} = n \\ \forall j \quad k_j < n - q}} d_{k_1} d_{k_2} \dots d_{k_{2q+1}}$$

et

$$C_{n,q} = \sum_{j=1}^{n-2q} d_j C(j,n) = \sum_{j=1}^{n-2q} d_j \sum_{\substack{(k_1, k_2, \dots, k_j) \in \mathbb{N}^{*j} \\ k_1 + k_2 + \dots + k_j = n}} c_{k_1} c_{k_2} \dots c_{k_j}$$

D'après la démonstration précédente, on a

$$h(f(z)) = g_{q,\mu}(h(z)).$$

et pour démontrer le théorème 5.2.5, il suffit de prouver que $h(z)$ possède un rayon de convergence strictement positif.

Comme tous les c_k vérifient $|c_k|_p \leq 1$, on obtient grâce à l'inégalité ultramétrique que tous les $C(j,n)$ vérifient aussi

$$|C(j,n)|_p \leq 1. \quad (5.47)$$

De plus, on vérifie immédiatement que $\forall k \in \llbracket 1, q+1 \rrbracket$ $|d_k| \leq 1$ et l'inégalité ultramétrique appliquée à la relation de récurrence définissant les d_k nous donne

$$|n - (2q+1)|_p |d_{n-q}|_p \leq \max \left(|A_{n,q}|_p, |B_{n,q}|_p, |C_{n,q}|_p \right) \quad (5.48)$$

avec

$$|A_{n,q}|_p \leq \max_{\substack{(k_1, k_2, \dots, k_{q+1}) \in \mathbb{N}^{*q+1} \\ k_1 + k_2 + \dots + k_{q+1} = n \\ \forall j \quad k_j < n - q}} |d_{k_1}|_p |d_{k_2}|_p \dots |d_{k_{q+1}}|_p \quad (5.49)$$

et (en utilisant le fait que $|\mu| \leq 1$),

$$|B_{n,q}|_p \leq \max_{\substack{(k_1, k_2, \dots, k_{2q+1}) \in \mathbb{N}^{*2q+1} \\ k_1 + k_2 + \dots + k_{2q+1} = n \\ \forall j \quad k_j < n - q}} |d_{k_1}|_p |d_{k_2}|_p \dots |d_{k_{2q+1}}|_p \quad (5.50)$$

et, en utilisant (5.47),

$$|C_{n,q}|_p \leq \max_{j=1,2,\dots,n-2q} |d_j|_p |C(j,n)|_p \leq \max_{j=1,2,\dots,n-2q} |d_j|_p \quad (5.51)$$

Comme $\forall k \in \llbracket 1, q+1 \rrbracket$ $|d_k| \leq 1$, on a, pour $n = 2q+2$,

$$|1|_p |d_{q+2}|_p \leq 1$$

c'est-à-dire

$$|d_{q+2}|_p \leq \frac{1}{|(2-1)!|_p} \quad (5.52)$$

Montrons par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}^*$ $|d_{q+k}|_p \leq \frac{1}{|(k-1)!|_p}$.

• On vient de vérifier que $|d_{q+2}|_p \leq \frac{1}{|(2-1)!|_p}$.

• Soit $k \geq 2$ et supposons que pour tout $2 \leq j \leq k$, $|d_{q+j}|_p \leq \frac{1}{|(j-1)!|_p}$.

Posons $n = 2q + k + 1$. On a alors

$$|k|_p |d_{q+k+1}|_p \leq \max \left(|A_{2q+k+1,q}|_p, |B_{2q+k+1,q}|_p, |C_{2q+k+1,q}|_p \right)$$

On convient de noter, pour tout entier $m < 0$, $m! = 1$. L'hypothèse de récurrence devient alors

$$\forall j \in \llbracket 1, q+k \rrbracket \quad |d_j|_p \leq \frac{1}{|(j-q-1)!|_p} \quad (5.53)$$

Remarque 5.2.6. Pour démontrer que $|d_{q+k+1}|_p \leq \frac{1}{|k!|_p}$, il suffit de prouver

$$\begin{aligned} a) \quad & |A_{2q+k+1,q}|_p \leq \frac{1}{|(k-1)!|_p} \\ b) \quad & |B_{2q+k+1,q}|_p \leq \frac{1}{|(k-1)!|_p} \\ c) \quad & |C_{2q+k+1,q}|_p \leq \frac{1}{|(k-1)!|_p} \end{aligned}$$

On pourra notamment utiliser le fait que $\forall n \in \mathbb{Z} \quad \frac{1}{|(n-1)!|_p} \leq \frac{1}{|n!|_p}$

• c) D'après (5.51), (5.53), et le fait que $k+1 \leq q+k$, on a,

$$|C_{2q+k+1,q}|_p \leq \max_{j=1,2,\dots,k+1} |d_j|_p \leq \max_{j=1,2,\dots,k+1} \frac{1}{|(j-q-1)!|_p} \leq \max_{j=1,2,\dots,k+1} \frac{1}{|(k-q)!|_p}$$

d'où

$$|C_{2q+k+1,q}|_p \leq \frac{1}{|(k-q)!|_p} \leq \frac{1}{|(k-1)!|_p} \quad (5.54)$$

• a) D'après (5.49), on a

$$|A_{2q+k+1,q}|_p \leq \max_{\substack{(k_1, k_2, \dots, k_{q+1}) \in \mathbb{N}^{*q+1} \\ k_1 + k_2 + \dots + k_{q+1} = 2q+k+1 \\ \forall j \quad k_j < q+k+1}} |d_{k_1}|_p |d_{k_2}|_p \cdots |d_{k_{q+1}}|_p$$

Soit $(k_1, k_2, \dots, k_{q+1}) \in \mathbb{N}^{*q+1}$ tel que

$$k_1 + k_2 + \dots + k_{q+1} = 2q+k+1$$

et

$$\forall j \in \llbracket 1, q+1 \rrbracket \quad k_j < q+k+1$$

On a alors

$$|d_{k_1}|_p |d_{k_2}|_p \cdots |d_{k_{q+1}}|_p \leq \frac{1}{|(k_1-q-1)!|_p} \frac{1}{|(k_2-q-1)!|_p} \cdots \frac{1}{|(k_{q+1}-q-1)!|_p}$$

Quitte à réordonner les k_j , on peut supposer que

$$k_1 - q - 1 \geq k_2 - q - 1 \geq \cdots \geq k_r - q - 1 \geq 1 > k_{r+1} - q - 1 \geq k_{q+1} - q - 1$$

Et comme $\forall m \leq 1 \quad m! = 1$, on a

$$|d_{k_1}|_p |d_{k_2}|_p \cdots |d_{k_{q+1}}|_p \leq \frac{1}{|(k_1 - q - 1)!|_p} \frac{1}{|(k_2 - q - 1)!|_p} \cdots \frac{1}{|(k_r - q - 1)!|_p} \quad (5.55)$$

avec

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_r \leq 2q + k + 1 \quad (5.56)$$

Or, il est connu que pour tout $(n_1, n_2, \dots, n_r) \in \mathbb{N}^r$, on a

$$\frac{(n_1 + n_2 + \cdots + n_r)!}{n_1! n_2! \cdots n_r!} \in \mathbb{N}^*$$

d'où

$$\left| \frac{(n_1 + n_2 + \cdots + n_r)!}{n_1! n_2! \cdots n_r!} \right|_p \leq 1$$

d'où

$$|(n_1 + n_2 + \cdots + n_r)!|_p \leq |n_1! n_2! \cdots n_r!|_p$$

d'où

$$\frac{1}{|n_1! n_2! \cdots n_r!|_p} \leq \frac{1}{|(n_1 + n_2 + \cdots + n_r)!|_p} \quad (5.57)$$

On déduit alors de (5.55) et (5.57) que

$$|d_{k_1}|_p |d_{k_2}|_p \cdots |d_{k_{q+1}}|_p \leq \frac{1}{|(k_1 - q - 1) + (k_2 - q - 1) + \cdots + (k_r - q - 1)!|_p} \quad (5.58)$$

c'est-à-dire

$$|d_{k_1}|_p |d_{k_2}|_p \cdots |d_{k_{q+1}}|_p \leq \frac{1}{|(k_1 + k_2 + \cdots + k_r - rq - r)!|_p} \quad (5.59)$$

et comme d'après (5.56) $k_1 + k_2 + \cdots + k_r \leq 2q + k + 1$, on a

$$\frac{1}{|(k_1 + k_2 + \cdots + k_r - rq - r)!|_p} \leq \frac{1}{|(2q + k + 1 - rq - r)!|_p} \leq \frac{1}{|((2 - r)q + k + (1 - r))!|_p}$$

d'où

$$|d_{k_1}|_p |d_{k_2}|_p \cdots |d_{k_{q+1}}|_p \leq \frac{1}{|((2 - r)q + k + (1 - r))!|_p} \quad (5.60)$$

Or, par définition de r , on a

$$(k_1 - q - 1) + (k_2 - q - 1) + \cdots + (k_r - q - 1) \geq 1 + 1 + \cdots + 1 \geq r$$

donc

$$((2 - r)q + k + (1 - r)) \geq (k_1 + k_2 + \cdots + k_r - rq - r) \geq r \geq 0$$

i.e.

$$0 \leq ((2 - r)q + k + (1 - r)) \quad (5.61)$$

◦◦ si $r \geq 2$, on a alors

$$0 \leq ((2-r)q + k + (1-r)) \leq k-1$$

d'où

$$\frac{1}{|((2-r)q + k + (1-r))!|_p} \leq \frac{1}{|(k-1)!|_p}$$

et (5.60) nous donne

$$|d_{k_1}|_p |d_{k_2}|_p \cdots |d_{k_{q+1}}|_p \leq \frac{1}{|(k-1)!|_p} \quad (5.62)$$

ce qui est le résultat voulu.

◦◦ si $r = 0$, par construction de r , il s'en suit immédiatement que

$$|d_{k_1}|_p |d_{k_2}|_p \cdots |d_{k_{q+1}}|_p = 1 \leq \frac{1}{|(k-1)!|_p} \quad (5.63)$$

ce qui est le résultat voulu.

◦◦ Reste le cas $r = 1$. On a alors

$$|d_{k_1}|_p |d_{k_2}|_p \cdots |d_{k_{q+1}}|_p \leq \frac{1}{|(k_1 - q - 1)!|_p} \quad (5.64)$$

avec⁷

$$k_1 < q + k + 1$$

c'est-à-dire

$$k_1 \leq q + k$$

d'où

$$k_1 - q - 1 \leq q + k - q - 1 \leq k - 1$$

d'où

$$\frac{1}{|(k_1 - q - 1)!|_p} \leq \frac{1}{|(k-1)!|_p}$$

On déduit alors de (5.64) et de l'inégalité précédente que

$$|d_{k_1}|_p |d_{k_2}|_p \cdots |d_{k_{q+1}}|_p \leq \frac{1}{|(k-1)!|_p} \quad (5.65)$$

ce qui est le résultat voulu.

⁷ car k_1 est un indice dans $A_{2q+k+1,q}$

Ainsi, dans tous les cas, on a

$$|d_{k_1}|_p |d_{k_2}|_p \cdots |d_{k_{q+1}}|_p \leq \frac{1}{|(k-1)!|_p} \quad (5.66)$$

d'où

$$|A_{2q+k+1,q}|_p \leq \frac{1}{|(k-1)!|_p} \quad (5.67)$$

• b) Par une démonstration analogue, on démontre que

$$|B_{2q+k+1,q}|_p \leq \frac{1}{|(k-1)!|_p} \quad (5.68)$$

Et finalement, grâce à la remarque 5.2.6 et à (5.67), (5.68) et (5.54), on a

$$|d_{q+k+1}|_p \leq \frac{1}{|k!|_p}$$

Par récurrence, il s'en suit alors que,

$$\forall k \geq 2 \quad |d_{q+k}|_p \leq \frac{1}{|(k-1)!|_p} \quad (5.69)$$

On obtient alors, comme $k-1 \leq q+k$,

$$\forall k \geq 2 \quad |d_{q+k}|_p \leq \frac{1}{|(k-1)!|_p} \leq \frac{1}{|(q+k)!|_p} \quad (5.70)$$

et comme

$$\forall j \in \llbracket 1, q+1 \rrbracket \quad |d_j|_p \leq 1 \leq \frac{1}{|j!|_p} \quad (5.71)$$

finalement, (5.70) et (5.71) donnent

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad |d_k|_p \leq \frac{1}{|k!|_p} \quad (5.72)$$

mais comme⁸

$$p^{-\frac{k}{p-1}} \leq |k!|_p \quad (5.73)$$

on a

$$\frac{1}{|k!|_p} \leq p^{\frac{k}{p-1}} \leq \left(p^{\frac{1}{p-1}}\right)^k \quad (5.74)$$

Finalement, on obtient

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad |d_k|_p \leq \left(p^{\frac{1}{p-1}}\right)^k \quad (5.75)$$

et par conséquent $h(z)$ est une série entière de rayon $R \geq p^{\frac{-1}{p-1}} > 0$.

□

8. voir (3.25)

Proposition 5.2.7. Soit $f(z) = z + \sum_{k \geq 2} \tilde{c}_k z^k$ une série entière à coefficients dans K_1 de rayon de convergence strictement positif. On suppose qu'il existe $q_1 \in \mathbb{N}^*$, $q_2 \in \mathbb{N}^*$, $\mu_1 \in K_1$, $\mu_2 \in K_1$, et $\varphi_1(z) = z + \sum_{k \geq 2} b_{1,k} z^k$ et $\varphi_2(z) = z + \sum_{k \geq 2} b_{2,k} z^k$ deux séries formelles à coefficients dans K_1 vérifiant

$$f(\varphi_1(z)) = \varphi_1(g_{q_1, \mu_1}(z)) \quad \text{et} \quad f(\varphi_2(z)) = \varphi_2(g_{q_2, \mu_2}(z))$$

Alors

$$q_1 = q_2 \quad \text{et} \quad \mu_1 = \mu_2$$

Démonstration :

On a

$$\varphi_1(g_{q_1, \mu_1}(\varphi_1^{-1}(z))) = f(z) = \varphi_2(g_{q_2, \mu_2}(\varphi_2^{-1}(z)))$$

d'où, en composant par φ_2^{-1} à gauche et par φ_1 à droite,

$$\varphi_2^{-1}(\varphi_1(g_{q_1, \mu_1}(z))) = g_{q_2, \mu_2}(\varphi_2^{-1}(\varphi_1(z)))$$

ce qui donne, en posant $h(z) = \varphi_2^{-1}(\varphi_1(z))$,

$$h(g_{q_1, \mu_1}(z)) = g_{q_2, \mu_2}(h(z))$$

avec $h(z) = z + \sum_{k=2}^{+\infty} d_k z^k$ série formelle à coefficients dans K_1 .

Or, d'après (5.26), on a, en utilisant les notations de la démonstration précédente,

$$g_{q_2, \mu_2}(h(z)) = \sum_{n=1}^{+\infty} d_n z^n + \sum_{n=q_2+1}^{+\infty} D(q_2+1, n) z^n + \mu_2 \sum_{n=2q_2+1}^{+\infty} D(2q_2+1, n) z^n$$

et, en notant $g_{q_1, \mu_1}(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k z^k$, on a aussi, d'après (5.27)

$$h(g_{q_1, \mu_1}(z)) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(d_n + \sum_{j=1}^{n-1} d_j C(j, n) \right) z^n$$

d'où

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(d_n + \sum_{j=1}^{n-1} d_j C(j, n) \right) z^n &= h(g_{q_1, \mu_1}(z)) = g_{q_2, \mu_2}(h(z)) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} d_n z^n + \sum_{n=q_2+1}^{+\infty} D(q_2+1, n) z^n + \mu_2 \sum_{n=2q_2+1}^{+\infty} D(2q_2+1, n) z^n \end{aligned}$$

d'où

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{j=1}^{n-1} d_j C(j, n) \right) z^n = \sum_{n=q_2+1}^{+\infty} D(q_2+1, n) z^n + \mu_2 \sum_{n=2q_2+1}^{+\infty} D(2q_2+1, n) z^n \quad (5.76)$$

Or, d'après (5.31), on a

$$D(q_2 + 1, q_2 + 1) = 1$$

Donc (5.76) devient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{j=1}^{n-1} d_j C(j, n) \right) z^n = z^{q_2+1} + \sum_{n=q_2+2}^{+\infty} b_n z^n \quad (5.77)$$

Or d'après (5.33), pour tout $n \leq q_1$, on a⁹

$$\sum_{j=1}^{n-1} d_j C(j, n) = 0$$

et d'après (5.43), pour $n = q_1 + 1$, on a

$$\sum_{j=1}^{n-1} d_j C(j, n) = (n - q_1) d_{(n-q_1)} + \sum_{j=1}^{n-2q_1} d_j C(j, n) = 1d_1 + 0 = 1$$

(5.77) devient alors

$$z^{q_1+1} + \sum_{n=q_1+2}^{+\infty} \tilde{b}_n z^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{j=1}^{n-1} d_j C(j, n) \right) z^n = z^{q_2+1} + \sum_{n=q_2+2}^{+\infty} b_n z^n \quad (5.78)$$

d'où

$$q_1 + 1 = q_2 + 1$$

et par conséquent,

$$q_1 = q_2.$$

On a aussi, grâce à (5.76), en notant $q = q_1 = q_2$, pour tout $n \geq 2q + 1$,

$$\sum_{j=1}^{n-1} d_j C(j, n) = D(q + 1, n) + \mu_2 D(2q + 1, n).$$

En particulier pour le coefficient de degré $n = 2q + 1$, on obtient

$$\sum_{j=1}^{2q} d_j C(j, 2q + 1) = D(q + 1, 2q + 1) + \mu_2 D(2q + 1, 2q + 1). \quad (5.79)$$

Or, d'une part, d'après (5.43)

$$\sum_{j=1}^{2q} d_j C(j, 2q + 1) = (q + 1) d_{q+1} + \sum_{j=1}^1 d_j C(j, 2q + 1)$$

9. On utilise ici le fait que $c_1 = 1, c_{q_1+1} = 1, c_{2q_1+1} = \mu_1$ et $\forall k \notin \{1, q_1 + 1, 2q_1 + 1\} \quad c_k = 0$

avec

$$d_1 = 1 \quad \text{et} \quad C(1, 2q + 1) = c_{2q+1} = \mu_1$$

d'où

$$\sum_{j=1}^{2q} d_j C(j, 2q + 1) = (q + 1)d_{q+1} + \mu_1 \quad (5.80)$$

et d'autre part,

$$D(2q + 1, 2q + 1) = 1 \quad (5.81)$$

et¹⁰

$$D(q + 1, 2q + 1) = (q + 1) d_{q+1} + \sum_{\substack{(k_1, k_2, \dots, k_{q+1}) \in \mathbb{N}^{*q+1} \\ k_1 + k_2 + \dots + k_{q+1} = 2q + 1 \\ \forall j \quad k_j < q + 1}} d_{k_1} d_{k_2} \dots d_{k_{q+1}}$$

d'où, comme $d_2 = d_3 = \dots = d_q = 0$,

$$D(q + 1, 2q + 1) = (q + 1) d_{q+1} + 0 = (q + 1) d_{q+1} \quad (5.82)$$

On déduit alors de (5.79), (5.80), (5.81) et (5.82) que

$$(q + 1)d_{q+1} + \mu_1 = (q + 1)d_{q+1} + \mu_2$$

d'où

$$\mu_1 = \mu_2$$

□

Nous allons maintenant essayer de généraliser le théorème de Perez-Marco à ce cadre.

Définition 5.2.8. Soit $f(z) = z + \sum_{k=2}^{+\infty} c_k z^k$ une série entière à coefficients dans K_1 et de rayon de convergence strictement positif.

On note $\tilde{C}(f)$ le centralisateur formel de f , c'est-à-dire l'ensemble des séries formelles $h(z) = z + \sum_{k=2}^{+\infty} d_k z^k$ vérifiant $f(h(z)) = h(f(z))$.

On note $C(f)$ le centralisateur de f , c'est-à-dire l'ensemble des séries entières $h(z) = z + \sum_{k=2}^{+\infty} d_k z^k$ à coefficients dans K_1 et de rayon de convergence strictement positif vérifiant $f(h(z)) = h(f(z))$.

Lorsque $\tilde{C}(f) = C(f)$, on dit que f est pleinement itérable.

Théorème 5.2.9. Si $d, q \in \mathbb{N}^*$, si $\mu \in K_1$, si les $h_k : K_1 \rightarrow K_1$ sont des séries entières de valuation supérieure ou égale à $2q + 2$ et de rayon de convergence strictement positif et si on pose

$$f_t(z) = z + z^{q+1} + \mu z^{2q+1} + \sum_{k=0}^d t^k h_k(z) \quad \text{et} \quad E = \{t \in K_2 / f_t \text{ est conjuguée à } g_{q, \mu}\},$$

Si on suppose de plus que $g_{q, \mu}$ est pleinement itérable, alors,

$$\text{ou bien } E = K_2 \text{ ou bien } d^*(E) = 0$$

10. d'après (5.40) appliqué à $n = 2q + 1$.

Remarque 5.2.10. Pour $K_1 = K_2 = \tilde{K} = \mathbb{C}$, ce théorème ne donne malheureusement que très rarement une information, car la condition $C(g_{q,\mu}) = \tilde{C}(g_{q,\mu})$ est très rarement réalisée. En effet, Ecalle a démontré (voir [Eca81a] et [Eca81b]) que :

Pour toute série entière $f(z) = z + \sum_{k=2}^{+\infty} c_k z^k$ à coefficients dans \mathbb{C} et de rayon de convergence strictement positif, si l'on fait varier r de ces coefficients $(c_{k_1}, c_{k_2}, \dots, c_{k_r})$ dans \mathbb{C}^r , alors f n'est pleinement itérable que pour un ensemble de mesure nulle de \mathbb{C}^r .

En particulier, cela entraîne que $g_{q,\mu}$ n'est pleinement itérable que pour un ensemble de mesure nulle de $\mu \in \mathbb{C}$.

Remarque 5.2.11. Le fait que l'on ait ici besoin d'une condition du type $g_{q,\mu}$ pleinement itérable provient du fait que la conjuguante formelle n'est pas unique (voir théorème 5.2.4), mais que (avec les notations de la démonstration du théorème 5.2.4), on peut choisir le coefficient $d_{q+1} = u$ de la conjuguante formelle comme on veut. On notera $h_{t,u}$ la conjuguante formelle de f_t qui vérifie de plus $d_{q+1} = u$. Le problème qui apparaît alors est qu'il est possible qu'une conjuguante formelle h_{t_0,u_0} de f_{t_0} soit une série entière de rayon strictement positif alors qu'une autre conjuguante formelle h_{t_0,u_1} de f_{t_0} soit une série entière de rayon nul.

De plus, lorsque l'on passe de t_0 à t_1 , il se peut que cette fois-ci, la conjuguante formelle h_{t_1,u_0} de f_{t_1} soit une série entière de rayon nul alors que la conjuguante formelle h_{t_1,u_1} de f_{t_1} soit une série entière de rayon strictement positif.

La condition $g_{q,\mu}$ pleinement itérable permet de résoudre le problème car elle entraîne que tous les $h_{t_0,u}$ sont simultanément linéarisables.

En effet, $h_{t_0,u}$ et $h_{t_0,1}$ sont deux conjuguantes formelles de f_{t_0} , alors on a $h_{t_0,u}^{-1}(g_{q,\mu}(h_{t_0,u}(z))) = f_{t_0}(z) = h_{t_0,1}^{-1}(g_{q,\mu}(h_{t_0,1}(z)))$, d'où $h_{t_0,1}(h_{t_0,u}^{-1}(g_{q,\mu}(z))) = g_{q,\mu}(h_{t_0,1}(h_{t_0,u}^{-1}(z)))$, d'où, en posant, $\tilde{h}(z) = h_{t_0,1}(h_{t_0,u}^{-1}(z)) = z + \dots$,

$\tilde{h}(g_{q,\mu}(z)) = g_{q,\mu}(\tilde{h}(z))$. Donc $\tilde{h} \in \tilde{C}(g_{q,\mu})$. Et comme $g_{q,\mu}$ est pleinement itérable, on a $\tilde{h} \in C(g_{q,\mu})$, d'où \tilde{h} série entière de rayon de convergence strictement positif. Comme $\tilde{h}(h_{t_0,u}(z)) = h_{t_0,1}(z)$ avec \tilde{h} rayon de convergence strictement positif, on en déduit que $h_{t_0,u}$ est de rayon de convergence strictement positif si et seulement si $h_{t_0,1}$ est de rayon de convergence strictement positif.

Remarque 5.2.12. Dans le chapitre 4, il y avait unicité de la linéarisante formelle et en notant, comme à la fin du chapitre 4, $r_\lambda(z) = \lambda z$ avec $\lambda = e^{i2\pi\theta}$ et $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, on a $\tilde{C}(r_\lambda) = \{Id\} = C(r_\lambda)$.

Remarque 5.2.13. Soit $f(z) = z + \sum_{k=2}^{+\infty} c_k z^k$ une série entière à coefficients dans \mathbb{C} et de rayon de convergence strictement positif. Pour étudier la structure de $C(f)$ et $\tilde{C}(f)$, Ecalle a d'abord prouvé, dans [Eca71], que $\tilde{C}(f)$ est l'ensemble ayant pour éléments tous les $f^{\{w\}}$ (itérées w ième de f) avec $w \in \mathbb{C}$. Ensuite, dans [Eca74], Ecalle a démontré que $W_f = \{w \in \mathbb{C} / f^{\{w\}} \text{ est de rayon strictement positif} \}$ est soit égal à \mathbb{C} tout entier (auquel cas f est pleinement itérable), soit égal à $\frac{1}{m}\mathbb{Z}$ avec

$m \in \mathbb{N}^*$. On peut utiliser la technique de Perez-Marco pour démontrer de façon beaucoup plus élémentaire un résultat un peu plus faible que le théorème d'Ecalte. Comme le cas qui nous intéresse est celui des fonctions $g_{q,\mu}$, on va se restreindre (pour ne pas alourdir les calculs) à l'étude des fonctions f de la forme $f(z) = z + z^{q+1} + \sum_{k=2q+1}^{+\infty} c_k z^k$.

Théorème 5.2.14. Soit $f(z) = z + z^{q+1} + \sum_{k=2q+1}^{+\infty} c_k z^k$ une série entière à coefficients dans \mathbb{C} et de rayon de convergence strictement positif. Alors, ou bien $W_f = \mathbb{C}$, ou bien $d^*(W_f) = 0$.

Démonstration :

Pour démontrer ce théorème, nous allons procéder par plusieurs étapes.

• étape 1: détermination de $\tilde{C}(f)$.

◦ Soit $h(z) = z + \sum_{k=2}^{+\infty} d_k z^k \in \tilde{C}(f)$. On a, avec les notations du théorème 5.2.4, en faisant une démonstration analogue à celle de la formule (5.27)

$$h(f(z)) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(d_n + \sum_{j=1}^{n-1} d_j C(j,n) \right) z^n \quad (5.83)$$

et

$$f(h(z)) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(c_n + \sum_{j=1}^{n-1} c_j D(j,n) \right) z^n \quad (5.84)$$

d'où, pour tout $n \geq 3$,

$$d_n + \sum_{j=1}^{n-1} d_j C(j,n) = c_n + \sum_{j=1}^{n-1} c_j D(j,n)$$

i.e.

$$d_n + \sum_{j=2}^{n-1} d_j C(j,n) + d_1 C(1,n) = c_n + \sum_{j=2}^{n-1} c_j D(j,n) + c_1 D(1,n)$$

i.e.

$$d_n + \sum_{j=2}^{n-1} d_j C(j,n) + d_1 c_n = c_n + \sum_{j=2}^{n-1} c_j D(j,n) + c_1 d_n$$

d'où, pour tout $n \geq 3$,

$$\sum_{j=2}^{n-1} d_j C(j,n) = \sum_{j=2}^{n-1} c_j D(j,n) \quad (5.85)$$

Comme $c_1 = 1 = c_{q+1}$ et $0 = c_2 = c_3 = \dots = c_q = c_{q+2} = \dots = c_{2q}$, on a, par une démonstration analogue à celle de (5.43), pour tout $n \geq q + 2$

$$\sum_{j=2}^{n-1} d_j C(j, n) = (n - q) d_{(n-q)} + \sum_{j=2}^{n-2q} d_j C(j, n) \quad (5.86)$$

Les relations (5.85) et (5.86) appliquées à $n = q + 2$ donnent

$$2d_2 = \sum_{j=2}^{q+1} d_j C(j, q+2) = \sum_{j=2}^{q+1} c_j D(j, q+2) = c_{q+1} D(q+1, q+2) = (q+1)d_2$$

Donc, si $q > 1$, alors $d_2 = 0$.

On regarde ce qui se passe pour $n = q + 3$ et finalement, par une démonstration analogue à celle de (5.35), on démontre que $d_2 = d_3 = \dots = d_q = 0$ (si $q = 1$, on n'a aucune annulation)

De plus¹¹, par un raisonnement analogue à celui de (5.40), on a

$$\begin{aligned} D(q+1, n) &= (q+1) d_{n-q} + \sum_{\substack{(k_1, k_2, \dots, k_{q+1}) \in \mathbb{N}^{*q+1} \\ k_1 + k_2 + \dots + k_{q+1} = n \\ \forall j \quad k_j < n-q}} d_{k_1} d_{k_2} \dots d_{k_{q+1}} \\ &= (q+1) d_{n-q} + D'(q+1, n, n-q-1) \end{aligned}$$

et comme¹²

$$\begin{aligned} \sum_{j=2}^{n-1} c_j D(j, n) &= c_{q+1} D(q+1, n) + \sum_{j=2q+1}^{n-1} c_j D(j, n) \\ &= D(q+1, n) + \sum_{j=2q+1}^{n-1} c_j D'(j, n, n-q-1) \end{aligned}$$

on obtient

$$\sum_{j=2}^{n-1} c_j D(j, n) = (q+1) d_{n-q} + D'(q+1, n, n-q-1) + \sum_{j=2q+1}^{n-1} c_j D'(j, n, n-q-1) \quad (5.87)$$

11. En notant $D'(s, n, r) = \sum_{\substack{(k_1, k_2, \dots, k_s) \in \mathbb{N}^{*s} \\ k_1 + k_2 + \dots + k_s = n \\ \forall j \quad k_j \leq r}} d_{k_1} d_{k_2} \dots d_{k_s} .$

12. car $c_1 = 1 = c_{q+1}$ et $0 = c_2 = c_3 = \dots = c_q = c_{q+2} = \dots = c_{2q}$
et $\forall j \geq 2q+1 \quad n - (j-1) \leq n - 2q \leq n - q - q \leq n - q - 1 .$

On déduit alors de (5.85), (5.86) et (5.87) que, pour tout $n \geq 2q + 1$,

$$(n - (2q + 1))d_{n-q} = D'(q+1, n, n-q-1) + \sum_{j=2q+1}^{n-1} c_j D'(j, n, n-q-1) - \sum_{j=2}^{n-2q} d_j C(j, n) \quad (5.88)$$

Pour $n = 2q + 1$, aucune condition n'est imposée sur d_{q+1} , mais, une fois le coefficient $d_{q+1} = u \in \mathbb{C}$ choisi, tous les d_k d'indice supérieur sont déterminés de manière unique par cette relation de récurrence.

A l'avenir, nous noterons h_u cette conjuguate formelle h pour indiquer que le coefficient $d_{q+1} = u$.

On vient de prouver que, lorsque u est fixé, h_u est unique et vérifie ainsi:

$$d_1 = 1, \quad d_2 = d_3 = \dots = d_q = 0, \quad d_{q+1} = u \quad (5.89)$$

et, pour tout $n \geq 2q + 1$,

$$(n - (2q + 1))d_{n-q} = D'(q+1, n, n-q-1) + \sum_{j=2q+1}^{n-1} c_j D'(j, n, n-q-1) - \sum_{j=2}^{n-2q} d_j C(j, n) \quad (5.90)$$

◦ Réciproquement, pour tout $u \in \mathbb{C}$, considérons la série formelle $h_u(z) = z + \sum_{k=2}^{+\infty} d_k z^k$ définie par

$$d_1 = 1, \quad d_2 = d_3 = \dots = d_q = 0, \quad d_{q+1} = u$$

et, pour tout $n \geq 2q + 1$,

$$(n - (2q + 1))d_{n-q} = D'(q+1, n, n-q-1) + \sum_{j=2q+1}^{n-1} c_j D'(j, n, n-q-1) - \sum_{j=2}^{n-2q} d_j C(j, n).$$

On vérifie alors que $h_u(f(z)) = f(h_u(z))$ et ainsi, $h_u \in \tilde{C}(f)$.

Remarque 5.2.15. h_u vérifie alors les propriétés de l'itéré u ème de f .

Comme $Id(f(z)) = f(z) = f(Id(z))$ et $Id(z)$ est une série formelle ayant son $q + 1$ ème coefficient nul, forcément,

$$h_0 = Id. \quad (5.91)$$

De manière analogue, comme $f(f(z)) = f(f(z))$ et $f(z)$ est une série formelle ayant son $q + 1$ ème coefficient égal à 1, on a

$$h_1 = f. \quad (5.92)$$

Par ailleurs¹³, pour tout $u \in \mathbb{C}$ et tout $v \in \mathbb{C}$, on a

$$h_u(h_v(f(z))) = h_u(f(h_v(z))) = f(h_u(h_v(z)))$$

avec

$$\begin{aligned} h_u(h_v(z)) &= h_u(z + vz^{q+1} + \dots) \\ &= (z + vz^{q+1} + \dots) + u(z + vz^{q+1} + \dots)^{q+1} + \dots \\ &= z + vz^{q+1} + \dots + uz^{q+1} + \dots = z + (u+v)z^{q+1} + \dots \end{aligned}$$

On en déduit alors que

$$h_u \circ h_v = h_{u+v}. \quad (5.93)$$

Cela entraîne en particulier que $h_2 = h_1 \circ h_1 = f \circ f$, $h_3 = h_2 \circ h_1 = f \circ f \circ f$, \dots

Et aussi, $Id = h_0 = h_{1-1} = h_{(-1)+1} = h_1 \circ h_{-1} = h_{-1} \circ h_1 = f \circ h_{-1} = h_{-1} \circ f$,
d'où $h_{-1} = f^{-1}$, etc \dots

• étape 2: majoration du degré (en tant que polynôme en u) des coefficients de h_u .

On a prouvé que, pour tout $u \in C$, $h_u(z) = z + \sum_{k=2}^{+\infty} d_k z^k$ est définie par

$$d_1 = 1, \quad d_2 = d_3 = \dots = d_q = 0, \quad d_{q+1} = u \quad (5.94)$$

et, pour tout $n \geq 2q+1$,

$$(n - (2q+1))d_{n-q} = D'(q+1, n, n-q-1) + \sum_{j=2q+1}^{n-1} c_j D'(j, n, n-q-1) - \sum_{j=2}^{n-2q} d_j C(j, n) \quad (5.95)$$

Cela entraîne en particulier, par récurrence immédiate, que les d_k sont des polynômes en u .

On remarque aussi immédiatement que d_1, d_2, \dots, d_q sont des polynômes constants et que d_{q+1} est un polynôme de degré 1. De plus

Lemme 5.2.16. .

Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, d_{q+m} est un polynôme en u de degré au plus $q+m$.

Démonstration :

• On a déjà vu que d_{q+1} est un polynôme de degré 1.

13. Comme toutes les séries formelles sont de valuation 1, il n'y a aucun problème pour les composer.

- Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et supposons que pour tout $r \in \llbracket 1, m \rrbracket$, $\deg d_{q+r} \leq r$.
Posons $n = m + 2q + 1$. On a $d_{q+m+1} = d_{n-q}$. Il nous reste à étudier les 3 termes de la relation de récurrence (5.95).
- Le 3 ème terme ne pose aucun problème car pour tout $j \leq n - 2q$, on a $j \leq n - 2q \leq n - q - 1 \leq q + n - 2q - 1 \leq q + m$, d'où $\deg(d_j) \leq m \leq m + 1$.
- Etudions le 2 ème terme. Soit $j \in \llbracket 2q + 1, n - 1 \rrbracket$. On a

$$D'(j, n, n - q - 1) = \sum_{\substack{(k_1, k_2, \dots, k_j) \in \mathbb{N}^{*j} \\ k_1 + k_2 + \dots + k_j = n \\ \forall j \quad k_j \leq n - q - 1}} d_{k_1} d_{k_2} \dots d_{k_j}$$

Soit $(k_1, k_2, \dots, k_j) \in \mathbb{N}^{*j}$ tel que $k_1 + k_2 + \dots + k_j = n$. Quitte à réordonner les k_j , on peut supposer que $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_r \geq q + 1 > k_{r+1} \geq \dots \geq k_j$.
On a alors

$$\begin{aligned} \deg(d_{k_1} d_{k_2} \dots d_{k_j}) &\leq \deg(d_{k_1} d_{k_2} \dots d_{k_r}) \\ &\leq \deg(d_{k_1}) + \deg(d_{k_2}) + \dots + \deg(d_{k_r}) \\ &\leq (k_1 - q) - (k_2 - q) - \dots - (k_r - q) \\ &\leq k_1 + k_2 + \dots + k_r - rq \\ &\leq n - rq \\ &\leq m + 2q + 1 - rq \\ &\leq m + 1 + (2 - r)q \end{aligned}$$

- si $r \geq 2$, alors $\deg(d_{k_1} d_{k_2} \dots d_{k_j}) \leq m + 1$ et on a le résultat voulu.
- si $r = 0$, alors, pour tout $i \leq j$, d_{k_i} est un polynôme constant, donc $d_{k_1} d_{k_2} \dots d_{k_j}$ est polynôme constant et $\deg(d_{k_1} d_{k_2} \dots d_{k_j}) \leq 0 \leq m + 1$ et on a le résultat voulu.
- si $r = 1$, alors, comme précédemment, $d_{k_2} \dots d_{k_j}$ est polynôme constant et on a $\deg(d_{k_1} d_{k_2} \dots d_{k_j}) \leq \deg(d_{k_1})$ avec $k_1 \leq n - q - 1 \leq m + q$, d'où $\deg(d_{k_1}) \leq m$. On a alors $\deg(d_{k_1} d_{k_2} \dots d_{k_j}) \leq \deg(d_{k_1}) \leq m \leq m + 1$ et on a le résultat voulu.
- Pour le 1er terme, la démonstration est analogue à la précédente et on a $\deg(d_{k_1} d_{k_2} \dots d_{k_{q+1}}) \leq m + 1$

Finalement, on a $d_{q+m+1} \leq m + 1$ et le lemme s'en déduit par récurrence.

• étape 3: fin de la démonstration du théorème.

Posons pour tout $q \in \mathbb{N}^*$,

$$F_q = \{u \in \mathbb{C} \ / \ |u| \leq q\}$$

et

$$G_q = \bigcap_{j \in \mathbb{N}^*} \{u \in F_q \ / \ d_j(u) \leq q^j\}$$

Les G_q sont des compacts de \mathbb{C} et on vérifie facilement que, en posant

$$E = \{u \in \mathbb{C} \ / \ h_u(z) = z + \sum_{k=2}^{+\infty} d_k(u)z^k \text{ de rayon strictement positif.}\},$$

on a

$$E = \bigcup_{q=1}^{+\infty} G_q$$

Pour achever la démonstration, il suffit de prouver que si $d^*(E) > 0$, alors $E = \mathbb{C}$.

Supposons donc que $d^*(E) > 0$. D'après ce qui précède, on a $E = \bigcup_{q=1}^{+\infty} G_q$, d'où

$d^*\left(\bigcup_{q=1}^{+\infty} G_q\right) > 0$. Grâce au théorème 3.2.8, on en déduit qu'il existe $q_0 \in \mathbb{N}^*$ tel

que $d^*(G_{q_0}) > 0$. Comme G_{q_0} est compact, on déduit de la proposition 3.2.5

que $d^*(G_{q_0}) = d(G_{q_0})$. Par conséquent, $d(G_{q_0}) > 0$.

Soit $u \in \mathbb{C}$ et $q \geq 2$. Comme $d(G_{q_0}) > 0$ avec $G_{q_0} \subseteq B_f(0, q_0)$ et comme $\deg d_q \leq q$,

on a, d'après le théorème 3.1.10

$$|d_q(u)| \leq \max_{a \in G_{q_0}} |d_q(a)| \left(\frac{2}{d(G_{q_0})}\right)^q (|u| + q_0)^q.$$

Or

$$\max_{a \in G_{q_0}} |d_q(a)| \leq q_0^q$$

d'où

$$|d_q(u)| \leq q_0^q \left(\frac{2}{d(G_{q_0})}\right)^q (|u| + q_0)^q$$

c'est-à-dire

$$|d_q(u)| \leq \left(q_0 \left(\frac{2}{d(G_{q_0})} \right) (|u| + q_0) \right)^q$$

Ainsi, $u \in E$, ce qui entraîne finalement,

$$E = \mathbb{C}.$$

Revenons désormais à la démonstration du théorème 5.2.9.

On a $f_t(z) = z + z^{q+1} + \mu z^{2q+1} + \sum_{k=2q+2}^{+\infty} c_k(t) z^k$ avec les $c_k(t)$ polynômes en t de degré au plus d . En vertu de la remarque 5.2.11, comme dans les hypothèses du théorème on a supposé $g_{q,\mu}$ pleinement itérable, toutes les conjuguantes $h_u^{(t)}$ sont, à t fixé, simultanément de rayon de convergence strictement positif. On peut donc se restreindre à $h_1^{(t)}$ et on a que f_t est conjuguée à $g_{q,\mu}$ si et seulement si $h_1^{(t)}$ est de rayon de convergence strictement positif. On notera alors, dans toute la suite $h_t = h_1^{(t)}$ la conjuguante formelle de f_t . On a alors

$$E = \{t \in K_2 \ / \ h_t \text{ de rayon strictement positif} \}.$$

Le principe de la démonstration étant analogue à la démonstration précédente ou à la démonstration du théorème 4.1.1, il suffit de prouver que les coefficients de $h_t(z)$ sont des polynômes en t dont on sait majorer le degré.

Or, d'après (5.45) et (5.46), on a

$$d_1 = 1, \ d_2 = d_3 = \dots = d_q = 0, \ d_{q+1} = 1 \tag{5.96}$$

et, pour tout $n > 2q + 1$,

$$(n - (2q + 1))d_{n-q} = A_{n,q} + B_{n,q} - C_{n,q} \tag{5.97}$$

avec

$$A_{n,q} = \sum_{\substack{(k_1, k_2, \dots, k_{q+1}) \in \mathbb{N}^{*q+1} \\ k_1 + k_2 + \dots + k_{q+1} = n \\ \forall j \quad k_j < n - q}} d_{k_1} d_{k_2} \dots d_{k_{q+1}}$$

et

$$B_{n,q} = \sum_{\substack{(k_1, k_2, \dots, k_{2q+1}) \in \mathbb{N}^{*2q+1} \\ k_1 + k_2 + \dots + k_{2q+1} = n \\ \forall j \quad k_j < n - q}} \mu d_{k_1} d_{k_2} \dots d_{k_{2q+1}}$$

et

$$C_{n,q} = \sum_{j=1}^{n-2q} \sum_{\substack{(k_1, k_2, \dots, k_j) \in \mathbb{N}^{*j} \\ k_1 + k_2 + \dots + k_j = n}} d_j c_{k_1} c_{k_2} \dots c_{k_j}$$

Montrons par récurrence que, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, $\deg(d_{q+j}) \leq d(j-1)$.

- Comme $d_{q+1} = 1$, on a $\deg(d_{q+1}) = 0 \leq d(1-1)$.
- Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et supposons que $\forall j \leq m \quad d_{q+j} \leq d(j-1)$.

Posons $n = m + 2q + 1$. On a $d_{q+m+1} = d_{n-q}$. Grâce à (5.97), il suffit d'étudier $A_{n,q}$, $B_{n,q}$ et $C_{n,q}$.

◦ Etude de $C_{n,q}$.

Soit $j \in \llbracket 1, n-2q \rrbracket$ et $(k_1, k_2, \dots, k_j) \in \mathbb{N}^{*j}$ tel que $k_1 + k_2 + \dots + k_j = n$. Quitte à réordonner les k_i , on peut supposer que

$$k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_r \geq q+2 > k_{r+1} \geq \dots \geq k_j.$$

□ si $j = 1$, on a $\deg(d_1 c_n) = \deg(c_n) \leq d \leq dm$.

□ si $j \in \llbracket 2, q \rrbracket$, on a $\deg(d_j c_{k_1} c_{k_2} \dots c_{k_j}) = \deg(0) \leq dm$.

□ si $j \geq q+1$, on a

$$\begin{aligned} \deg(d_j c_{k_1} c_{k_2} \dots c_{k_j}) &\leq \deg(d_j c_{k_1} c_{k_2} \dots c_{k_r}) \\ &\leq \deg(d_j) + \deg(c_{k_1}) + \dots + \deg(c_{k_r}) \\ &\leq d(j-q-1) + d + \dots + d \\ &\leq dj - dq - d + rd \\ &\leq d(j-q-1+r) \end{aligned}$$

Or

$$k_1 + k_2 + \dots + k_r \geq (q+2) + (q+2) + \dots + (q+2) \geq r(q+2)$$

et

$$k_{r+1} + k_{r+2} + \dots + k_j \geq 1 + 1 + \dots + 1 \geq j-r$$

d'où

$$n = k_1 + k_2 + \dots + k_r + k_{r+1} + k_{r+2} + \dots + k_j \geq r(q+2) + (j-r)$$

c'est-à-dire

$$n \geq rq + r + j$$

d'où

$$n - rq - q - 1 \geq r + j - q - 1$$

c'est-à-dire

$$m + q - rq \geq r + j - q - 1$$

On obtient alors

$$\deg(d_j c_{k_1} c_{k_2} \dots c_{k_j}) \leq d(m + q - rq) \leq d(m + (1 - r)q) \quad (5.98)$$

\triangle si $r \geq 1$, on obtient

$$\deg(d_j c_{k_1} c_{k_2} \dots c_{k_j}) \leq d(m + (1 - r)q) \leq dm$$

ce qui est le résultat voulu.

\triangle si $r = 0$, alors¹⁴, comme $j \leq n - 2q \leq n - q - 1 \leq q + m$, on a

$$\deg(d_j c_{k_1} c_{k_2} \dots c_{k_j}) \leq \deg(d_j) \leq d(m - 1) \leq dm$$

ce qui est le résultat voulu.

o Etude de $B_{n,q}$.

Soit $(k_1, k_2, \dots, k_{2q+1}) \in \mathbb{N}^{*2q+1}$ tel que $k_1 + k_2 + \dots + k_{2q+1} = n$ et $\forall j \quad k_j < n - q$.
Quitte à réordonner les k_j , on peut supposer que

$$k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_r \geq q + 2 > k_{r+1} \geq \dots \geq k_{2q+1}.$$

On a alors

$$\begin{aligned} \deg(\mu d_{k_1} d_{k_2} \dots d_{k_{2q+1}}) &\leq \deg(d_{k_1} d_{k_2} \dots d_{k_r}) \\ &\leq \deg(d_{k_1}) + \deg(d_{k_2}) + \dots + \deg(d_{k_r}) \\ &\leq d(k_1 - q - 1) + d(k_2 - q - 1) + \dots + d(k_r - q - 1) \\ &\leq d((k_1 + k_2 + \dots + k_r) - rq - r) \\ &\leq d(n - rq - r) \end{aligned}$$

\triangle si $r \geq 2$, on obtient

$$\deg(\mu d_{k_1} d_{k_2} \dots d_{k_{2q+1}}) \leq d(n - rq - r) \leq d(n - 2q - 2) \leq d(m - 1) \leq dm$$

ce qui est le résultat voulu.

\triangle si $r = 0$, on obtient

$$\deg(\mu d_{k_1} d_{k_2} \dots d_{k_{2q+1}}) \leq 0 \leq dm$$

ce qui est le résultat voulu.

\triangle si $r = 1$, on obtient, comme $k_1 \leq n - q - 1 \leq m + q$

$$\deg(\mu d_{k_1} d_{k_2} \dots d_{k_{2q+1}}) \leq \deg(k_1) \leq d(m - 1) \leq dm$$

14. On remarque que tous les c_{k_i} sont des polynômes constants.

ce qui est le résultat voulu.

◦ Etude de $A_{n,q}$.

Par une démonstration analogue, on majore les degrés des $d_{k_1}d_{k_2}\dots d_{k_{q+1}}$ par dm .

Et finalement, on obtient que $\deg(d_{q+m+1}) \leq dm$.

Par récurrence, on en déduit alors que

$$\forall j \in \mathbb{N}^* \quad \deg(d_{q+j}) \leq d(j-1) \quad (5.99)$$

Ainsi, on a

$$\forall j \geq q+1 \quad \deg(d_j) \leq d(j-q-1) \leq dj \quad (5.100)$$

Ce qui permet de démontrer le théorème. \square

Nous terminerons ce chapitre en donnant un cas particulier où l'on peut appliquer le théorème de Perez-Marco. Pour $q=1$ et $\mu=1$, plutôt que d'essayer de conjuguer

à $g_{1,1}(z) = z + z^2 + z^3$, on va essayer de conjuguer à $\tau_1(z) = \frac{z}{1-z} = \sum_{k=1}^{+\infty} z^k$.

Théorème 5.2.17. Soit $f(z) = z + z^2 + z^3 + \sum_{k=4}^{+\infty} c_k z^k$.

Il existe alors une unique série formelle $h(z) = z + z^2 + \sum_{k=3}^{+\infty} d_k z^k$ telle que

$$h(f(z)) = \tau_1(h(z))$$

Démonstration :

On a, avec les notations du théorème 5.2.4, en faisant une démonstration analogue à celle de la formule (5.27)

$$h(f(z)) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(d_n + \sum_{j=1}^{n-1} d_j C(j,n) \right) z^n \quad (5.101)$$

et

$$\tau_1(h(z)) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \sum_{j=1}^{n-1} D(j,n) \right) z^n \quad (5.102)$$

d'où, pour tout $n \geq 3$,

$$d_n + \sum_{j=1}^{n-1} d_j C(j,n) = 1 + \sum_{j=1}^{n-1} D(j,n)$$

i.e.

$$d_n + \sum_{j=2}^{n-1} d_j C(j,n) + d_1 C(1,n) = 1 + \sum_{j=2}^{n-1} D(j,n) + D(1,n)$$

i.e.

$$d_n + \sum_{j=2}^{n-1} d_j C(j,n) + d_1 c_n = 1 + \sum_{j=2}^{n-1} D(j,n) + d_n$$

d'où, pour tout $n \geq 3$,

$$c_n + \sum_{j=2}^{n-1} d_j C(j,n) = 1 + \sum_{j=2}^{n-1} D(j,n) \quad (5.103)$$

Pour $n = 3$, on a

$$1 + 1 = c_3 + d_2 C(2,2) = 1 + c_2 D(2,2) = 1 + 1$$

Pour $n \geq 4$, on a¹⁵

$$\sum_{j=2}^{n-1} d_j C(j,n) = (n-1)d_{n-1} + \sum_{j=2}^{n-2} d_j C(j,n) \quad (5.104)$$

et¹⁶

$$\sum_{j=2}^{n-1} D(j,n) = 2 d_{n-1} + D'(2,n,n-2) + \sum_{j=3}^{n-1} D'(j,n,n-2)$$

c'est-à-dire

$$\sum_{j=2}^{n-1} D(j,n) = 2 d_{n-1} + \sum_{j=2}^{n-1} D'(j,n,n-2) \quad (5.105)$$

On déduit alors de (5.103), (5.104) et (5.105) que

$$(n-3)d_{n-1} = 1 - c_n - \sum_{j=2}^{n-2} d_j C(j,n) + \sum_{j=2}^{n-1} D'(j,n,n-2) \quad (5.106)$$

Ce qui donne une relation de récurrence déterminant les d_k de manière unique.

Réciproquement, si on définit les d_k par $d_1 = 1 = d_2$ et pour tout $n \geq 4$

$$(n-3)d_{n-1} = 1 - c_n - \sum_{j=2}^{n-2} d_j C(j,n) + \sum_{j=2}^{n-1} D'(j,n,n-2),$$

et si on pose $h(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} d_k z^k$, on vérifie que

$$h(f(z)) = \tau_1(h(z))$$

15. démonstration analogue à celle de (5.86).

16. démonstration analogue à celle de (5.87).

Théorème 5.2.18. τ_1 est pleinement itérable.

Démonstration :

Pour vérifier que τ_1 est pleinement itérable, on va déterminer explicitement tous les $h_u(z)$ et montrer que ce sont toutes des séries entières de rayon de convergence strictement positif. Pour cela, on peut commencer par remarquer que

$$h_2(z) = h_1(h_1(z)) = \tau_1(\tau_1(z)) = \tau_1\left(\frac{z}{1-z}\right) = \frac{\frac{z}{1-z}}{1-\frac{z}{1-z}} = \frac{z}{1-z-z} = \frac{z}{1-2z}$$

Cela suggère que, $h_u(z)$ est probablement de la forme $h_u(z) = \frac{z}{1-uz}$.

Posons $\varphi_u(z) = \frac{z}{1-uz}$. On a d'une part

$$\varphi_u(\tau_1(z)) = \frac{\frac{z}{1-z}}{1-u\frac{z}{1-z}} = \frac{z}{1-z-uz} = \frac{z}{1-uz-z} = \frac{z}{1-\frac{1-uz}{z}} = \tau_1(\varphi_u(z))$$

et d'autre part,

$$\varphi_u(z) = \frac{z}{1-uz} = z(1+uz+\dots) = z+uz^2+\dots$$

Donc $h_u(z) = \varphi_u(z) = \frac{z}{1-uz}$. Il s'en suit alors que pour tout $u \in \mathbb{C}$, $h_u(z)$ est de rayon de convergence strictement positif. Donc τ_1 est pleinement itérable.

Théorème 5.2.19. Si $d \in \mathbb{N}^*$, si les $h_k : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ sont des séries entières de valuation supérieure ou égale à 4 et de rayon de convergence strictement positif et si on pose

$$f_t(z) = z + z^2 + z^3 + \sum_{k=0}^d t^k h_k(z) \text{ et } E = \{t \in \mathbb{C} / f_t \text{ est conjuguée à } \tau_1\},$$

Alors,

$$\text{ou bien } E = \mathbb{C} \text{ ou bien } d^*(E) = 0$$

Démonstration :

Comme τ_1 est pleinement itérable, toutes les conjuguantes $h_u^{(t)}$ de f_t sont, à t fixé, simultanément de rayon de convergence strictement positif. On peut donc se restreindre à $h_1^{(t)}$ et on a que f_t est conjuguée à τ_1 si et seulement si $h_1^{(t)}$ est

de rayon de convergence strictement positif. On notera alors, dans toute la suite $h_t = h_1^{(t)}$ la conjuguante formelle de f_t . On a alors

$$E = \{t \in \mathbb{C} \ / \ h_t \text{ de rayon strictement positif} \}.$$

Le principe de la démonstration étant analogue à la démonstration précédente. Il suffit de prouver que les coefficients de $h_t(z)$ sont des polynômes en t dont on sait majorer le degré.

Ecrivons $f_t(z)$ sous la forme $f(z) = z + z^2 + z^3 + \sum_{k=4}^{+\infty} c_k(t)z^k$ où les $c_k(t)$ sont des polynômes en t de degré au plus d . D'après le théorème 5.2.17, f_t possède une unique conjuguante formelle de la forme $h_t(z) = z + z^2 + \sum_{k=3}^{+\infty} d_k(t)z^k$ et on a les relations suivantes sur les $d_k(t)$: $d_1(t) = 1 = d_2(t)$ et pour tout $n \geq 4$,

$$(n-3)d_{n-1}(t) = 1 - c_n(t) - \sum_{j=2}^{n-2} d_j(t)C(j,n)(t) + \sum_{j=2}^{n-1} D'(j,n,n-2)(t) \quad (5.107)$$

On a alors $\deg(d_1) = \deg(d_2) = 0$. Montrons par récurrence que

$$\forall j \geq 2 \quad \deg(d_j) \leq d(j-2).$$

- On a déjà vu que $\deg(d_2) = 0 \leq d(2-2)$.
- Soit $m \geq 2$ et supposons que $\forall j \in \llbracket 2, m \rrbracket \quad \deg(d_j) \leq d(j-2)$
Posons $n = m + 2$. On a $d_{m+1} = d_{n-1}$ avec

$$\deg(1) = 0 \leq d(m-1) \quad (5.108)$$

et

$$\deg(c_n) \leq d \leq d(m-1) \quad (5.109)$$

◦ Etude de $\sum_{j=2}^{n-2} d_j(t)C(j,n)(t)$.

Soit $j \in \llbracket 2, n-2 \rrbracket$ et $(k_1, k_2, \dots, k_j) \in \mathbb{N}^{*j}$ tel que $k_1 + k_2 + \dots + k_j = n$.
Quitte à réordonner les k_i , on peut supposer que

$$k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_r \geq 3 > k_{r+1} \geq \dots \geq k_j.$$

on a

$$\begin{aligned} \deg(d_j c_{k_1} c_{k_2} \dots c_{k_j}) &\leq \deg(d_j c_{k_1} c_{k_2} \dots c_{k_r}) \\ &\leq \deg(d_j) + \deg(c_{k_1}) + \dots + \deg(c_{k_r}) \\ &\leq d(j-2) + d + \dots + d \\ &\leq dj - 2d + rd \\ &\leq d(j-2+r) \end{aligned}$$

Or

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_r \geq 3 + 3 + \cdots + 3 \geq 3r$$

et

$$k_{r+1} + k_{r+2} + \cdots + k_j \geq 1 + 1 + \cdots + 1 \geq j - r$$

d'où

$$n = k_1 + k_2 + \cdots + k_r + k_{r+1} + k_{r+2} + \cdots + k_j \geq 3r + (j - r) \geq j + 2r$$

c'est-à-dire

$$m + 2 \geq j + 2r$$

d'où

$$m - r \geq j - 2 + r$$

On obtient alors

$$\deg(d_j c_{k_1} c_{k_2} \cdots c_{k_j}) \leq d(m - r) \quad (5.110)$$

Δ si $r \geq 1$, on obtient

$$\deg(d_j c_{k_1} c_{k_2} \cdots c_{k_j}) \leq d(m - 1)$$

ce qui est le résultat voulu.

Δ si $r = 0$, alors, comme $j \leq n - 2 \leq m$, on a

$$\deg(d_j c_{k_1} c_{k_2} \cdots c_{k_j}) \leq \deg(d_j) \leq d(m - 2) \leq d(m - 1)$$

ce qui est le résultat voulu.

o Etude de $D'(j, n, n - 2)(t)$.

Soit $j \in [[2, n - 1]]$ et $(k_1, k_2, \dots, k_j) \in \mathbb{N}^{*j}$ tel que $k_1 + k_2 + \cdots + k_j = n$ et $\forall j \quad k_j < n - 1$. Quitte à réordonner les k_j , on peut supposer que

$$k_1 \geq k_2 \geq \cdots \geq k_r \geq 3 > k_{r+1} \geq \cdots \geq k_j.$$

On a alors

$$\begin{aligned} \deg(\mu d_{k_1} d_{k_2} \cdots d_{k_j}) &\leq \deg(d_{k_1} d_{k_2} \cdots d_{k_r}) \\ &\leq \deg(d_{k_1}) + \deg(d_{k_2}) + \cdots + \deg(d_{k_r}) \\ &\leq d(k_1 - 2) + d(k_2 - 2) + \cdots + d(k_r - 2) \\ &\leq d((k_1 + k_2 + \cdots + k_r) - 2r) \\ &\leq d(n - 2r) \\ &\leq d(m + 2 - 2r) \\ &\leq d(m + 2(1 - r)) \end{aligned}$$

△ si $r \geq 2$, on obtient

$$\deg(\mu d_{k_1} d_{k_2} \dots d_{k_j}) \leq d(m + 2(1 - r)) \leq d(m - 2) \leq d(m - 1)$$

ce qui est le résultat voulu.

△ si $r = 0$, on obtient

$$\deg(\mu d_{k_1} d_{k_2} \dots d_{k_j}) \leq 0 \leq d(m - 1)$$

ce qui est le résultat voulu.

△ si $r = 1$, on obtient, comme $k_1 \leq n - 2 \leq m$

$$\deg(\mu d_{k_1} d_{k_2} \dots d_{k_{2q+1}}) \leq \deg(k_1) \leq d(m - 2) \leq d(m - 1)$$

ce qui est le résultat voulu.

Finalement, on obtient que $\deg(d_{m+1}) \leq d(m - 1)$.

Par récurrence, on en déduit alors que

$$\forall j \in \mathbb{N}^* \quad \deg(d_j) \leq d(j - 2) \tag{5.111}$$

Posons pour tout $q \in \mathbb{N}^*$,

$$F_q = \{t \in \mathbb{C} \mid |t| \leq q\}$$

et

$$G_q = \bigcap_{j \in \mathbb{N}^*} \{t \in F_q \mid d_j(t) \leq q^j\}$$

Les G_q sont des compacts de \mathbb{C} et on vérifie facilement que, comme τ_1 est pleinement itérable, on a

$$E = \{t \in \mathbb{C} \mid h_t(z) = z + z^2 + \sum_{k=3}^{+\infty} d_k(t) z^k \text{ de rayon strictement positif.}\},$$

avec

$$E = \bigcup_{q=1}^{+\infty} G_q$$

Pour achever la démonstration, il suffit de prouver que si $d^*(E) > 0$, alors $E = \mathbb{C}$.

Supposons donc que $d^*(E) > 0$. D'après ce qui précède, on a $E = \bigcup_{q=1}^{+\infty} G_q$, d'où

$d^*\left(\bigcup_{q=1}^{+\infty} G_q\right) > 0$. Grâce au théorème 3.2.8, on en déduit qu'il existe $q_0 \in \mathbb{N}^*$ tel

que $d^*(G_{q_0}) > 0$. Comme G_{q_0} est compact, on déduit de la proposition 3.2.5

que $d^*(G_{q_0}) = d(G_{q_0})$. Par conséquent, $d(G_{q_0}) > 0$.

Soit $t \in \mathbb{C}$ et $q \geq 2$. Comme $d(G_{q_0}) > 0$ avec $G_{q_0} \subseteq B_f(0, q_0)$ et comme $\deg d_q \leq d(q-1) \leq dq$, on a, d'après le théorème 3.1.10

$$|d_q(t)| \leq \max_{a \in G_{q_0}} |d_q(a)| \left(\frac{2}{d(G_{q_0})} \right)^{dq} (|t| + q_0)^{dq}.$$

Or

$$\max_{a \in G_{q_0}} |d_q(a)| \leq q_0^q$$

d'où

$$|d_q(t)| \leq q_0^q \left(\frac{2}{d(G_{q_0})} \right)^{dq} (|t| + q_0)^{dq}$$

c'est-à-dire

$$|d_q(t)| \leq \left(q_0 \left(\frac{2}{d(G_{q_0})} \right)^d (|u| + q_0)^d \right)^q$$

Ainsi, $t \in E$, ce qui entraîne finalement,

$$E = \mathbb{C}.$$

□

Bibliographie

- [Brj65] A. BRJUNO – « Convergence of transformations of differential equations to normal forms », *Dokl. Akad. Nauk.* **165** (1965), p. 987–989.
- [Brj71] A. BRJUNO – « Analytical form of differential equations », *Trans. Moscow Math. Soc.* **25** (1971), p. 131–288.
- [Brj72] A. BRJUNO – « Analytical form of differential equations », *Trans. Moscow Math. Soc.* **26** (1972), p. 199–239.
- [Car04] T. CARLETTI – « Exponentially long time stability for non-linearizable analytic germs of $(\mathbb{C}^n, 0)$ », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **54** (2004), p. 989–1004.
- [CG95] L. CARLESON et T. GAMELIN – *Complex dynamics*, Springer, 1995.
- [Cre38] H. CREMER – « Über der Häufigkeit der Nichtzentren », *Math. Ann.* **115** (1938), p. 573–580.
- [DG02] D. DELATTE et T. GRAMCHEV – « Biholomorphic maps with linear parts having jordan blocks: linearization and resonance type phenomena », *Mathematical Physics Electronic Journal* **8** (2002).
- [DH85] A. DOUADY et J. HUBBARD – « On the dynamics of polynomial-like mappings », *Ann. scient. Ec. Norm. Sup., 4ème série* **18** (1985), p. 287–343.
- [Eca71] J. ECALLE – « Théorie itérative des transformations formelles à une variable complexe », Thèse, Université d’Orsay, 1971.
- [Eca74] J. ECALLE – *Théorie des invariants holomorphes*, Publications Mathématiques d’Orsay, 1974.
- [Eca81a] J. ECALLE – *Les fonctions résurgentes (tome 1)*, Publications Mathématiques d’Orsay, 1981.
- [Eca81b] J. ECALLE – *Les fonctions résurgentes (tome 2)*, Publications Mathématiques d’Orsay, 1981.
- [HY83] M. HERMAN et J. YOCCOZ – « Generalizations of some theorems of small divisors to non archimedean fields », *Lecture Notes in Maths* **1007** (1983), p. 408–447.
- [Il’79] Y. IL’YASHENKO – « Divergence of series reducing an analytic differential equation to linear normal form at a singular point », *Funct. Analysis and Appl.* **13** (1979), p. 227–229.

- [Nai83] V. NAISHUL – « Topological invariants of analytic and area preserving mappings and their applications to analytic differential equations in \mathbb{C}^2 and $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ », *Trans. Moscow Math. Soc.* **42** (1983), p. 239–250.
- [PM01] R. PEREZ-MARCO – « Total convergence or general divergence in small divisors », *Communications in Mathematical Physics* (2001), p. 451–464.
- [Pom75] C. POMMERENKE – *Univalent functions*, Vandenhoeck & Ruprecht, 1975.
- [Ran95] T. RANSFORD – *Potential theory in the complex plane*, Cambridge University Press, 1995.
- [Rob00] M. ROBERT – *A course in p-adic analysis*, Springer, 2000.
- [Sie42] C. SIEGEL – « Iteration of analytic functions », *Ann. Math.* **43** (1942), p. 265–269.
- [SM71] C. SIEGEL et J. MOSER – *Lectures on celestial mechanics*, Springer-Verlag, 1971.
- [Yoc95] J. YOCOZ – « Théorème de Siegel, nombres de Brjuno et polynômes quadratiques », *Astérisque* **231** (1995).

Problèmes de linéarisation dans des familles de germes analytiques.

Nous nous intéressons à la linéarisation de certaines familles de germes analytiques. En généralisant les définitions et propriétés du diamètre transfini, nous obtenons un théorème de majoration polynomiale valable à la fois pour les nombres complexes et p -adiques. Nous utilisons ensuite ces outils pour donner une nouvelle démonstration du théorème de Perez-Marco concernant la linéarisation des familles non résonantes de germes analytiques qui subissent une perturbation polynomiale. Cette nouvelle preuve permet de démontrer un analogue du théorème de Perez-Marco dans le cadre p -adique. De plus, cette nouvelle technique nous permet de récupérer une information diophantienne et donne de nouveaux exemples de germes non linéarisables. Nous généralisons ensuite ce théorème au cas des perturbations par des fractions rationnelles et finissons par étudier un cas résonant et retrouvons, de façon élémentaire, certaines propriétés concernant le centralisateur des germes tangents à l'identité.

Problems of linearization in some families of analytic germs.

We are interested in the linearization of some families of analytic germs. By generalizing definitions and properties of transfinite diameter, we obtain a polynomial majoration theorem that works both for the complex and the p -adic numbers. Then these tools are used to give a new proof of Perez-Marco's theorem about the linearization of non-resonant families of analytic germs under a polynomial perturbation. This proof allows the generalization of Perez-Marco's theorem to the p -adic case. Furthermore, with this new point of view, we obtain a diophantine information and give new examples of non linearizable germs. We generalize this theorem to the case of a perturbation with rational maps. Finally, a resonant case is studied and we give a new proof, more elementary, of some properties of the centralizer of germs tangent to identity.

DISCIPLINE: Mathématiques

MOTS CLÉS: linéarisation, petits diviseurs, condition diophantienne, diamètre transfini, capacité, systèmes dynamiques, résonance, formes normales.

Laboratoire MAPMO
Université d'Orléans
B.P. 6759
45067 Orléans Cedex 2
France