HAL
open science

Etude analytique et numérique des instabilités spatio-temporelles des écoulements de convection mixte en milieu poreux: comparaison avec l'expérience.

Alexandre Delache

To cite this version:

Alexandre Delache. Etude analytique et numérique des instabilités spatio-temporelles des écoulements de convection mixte en milieu poreux: comparaison avec l'expérience.. Dynamique des Fluides [physics.flu-dyn]. Université des Sciences et Technologie de Lille - Lille I, 2005. Français. NNT : . tel-00069550

HAL Id: tel-00069550

https://theses.hal.science/tel-00069550

Submitted on 18 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre: 3744

THÈSE

présentée

à l'Université des Sciences et Technologie de Lille,
UFR de Mathématiques Pures et Appliquées,
Département de Mécanique Fondamentale

pour obtenir le titre de :

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE LILLE 1
Mention MÉCANIQUE

présentée par

Alexandre DELACHE

Titre de la thèse :

Etude analytique et numérique des instabilités spatio-temporelles des écoulements de convection mixte en milieu poreux : comparaison avec l'expérience

soutenue le 12 décembre 2005 devant le jury :

G.	LABROSSE	Président
M.	AZAIEZ	Rapporteurs
P.	CARRIÈRE	
G.	MOMPEAN	Examinateurs
X.	NICOLAS	
P. A.	BOIS	Directeurs de thèse
M.N.	OUARZAZI	

A Alexandra

Remerciements

Je tiens à remercier Najib Ouarzazi pour son soutien continu et sa confiance tout au long de ces quatre années de thèse passées au Laboratoire de Mécanique de Lille. Sa passion et son dynamisme ont été contagieux, sa patience a été, je l'espère, récompensée. Ces quelques lignes ne peuvent témoigner de toute ma gratitude et de mon amitié.

Je remercie également le professeur P.A Bois pour son soutien permanent et ses conseils. Ses cours ont toujours été d'une grande aide dans les moments délicats.

J'ai été accueilli durant quelques semaines au Laboratoire d'Informatique pour la Mécanique et les Sciences de l'Ingénieur par le professeur G. Labrosse. Je lui suis reconnaissant de l'aide chaleureuse qu'il n'a pas cessé de m'apporter depuis. Il m'a fait profiter au mieux des ses remarquables qualités scientifiques.

Le point de départ de cette thèse a été le travail expérimental du professeur M. Combarnous. Je le remercie pour ses encouragements, ses suggestions et discussions scientifiques. Sa disponibilité et sa confiance ont beaucoup contribué à la réalisation de ce travail.

Cette thèse est, par conséquent, le fruit d'une collaboration fructueuse.

Je remercie les membres du jury : le professeur M. Azaiez et P. Carrière, chargé de recherche au CNRS, d'avoir bien voulu accepter la charge de rapporteurs ainsi que le professeur G. Mompean et X. Nicolas, maître de conférences, pour leur examen attentif. L'intérêt et l'attention qu'ils ont manifesté pour mon travail m'ont enthousiasmé. Grâce à eux, j'ai pu améliorer la qualité de la rédaction de mon manuscrit. De plus, leurs suggestions m'ont été précieuses quant à l'évolution future de mes recherches.

Je n'oublie pas les (ex-) collègues thésards du L.M.L (Annabelle, Caroline, Stéphane, Cosmin, Céline, Fatah, Florent, ...) et du L.I.M.S.I (Sébastien, Vladimir, Guillaume, Li, ...) mais aussi les "permanents" du LML (Yves, Farzham, Djimédo, Jean-philippe, Mathieu, Jean-Marc, Patrick ...) pour leurs discussions enrichissantes.

Pour finir, je souhaiterais remercier mes amis et ma famille pour leur présence et leur encouragement. Enfin et surtout, un grand merci à Alexandra pour sa confiance sans failles et son aide au jour le jour, je lui dédie donc cette thèse.

Table des matières

Liste des paramètres **7**

Introduction **9**

1 Présentation de la convection mixte en milieu poreux **15**
1.1 Convection mixte en milieu poreux et expérimentation 15
1.1.1 Appareillage 15
1.1.2 Résultats expérimentaux 17
1.1.3 Travaux analytiques et numériques antérieurs 19
1.2 Caractérisation d'un milieu poreux 21
1.2.1 Définition du milieu poreux 21
1.2.2 Paramètres 22
1.3 Formulation mathématique 26
1.3.1 Modélisation 26
1.3.2 Conditions aux limites 32
1.3.3 Adimensionnalisation et solution de conduction 32
1.4 Conclusion 37

2 Analyse de stabilité de la solution de conduction **39**
2.1 Formulation du problème et équation de dispersion 39
2.2 Approche temporelle 42
2.2.1 Stabilité vis à vis des rouleaux longitudinaux fixes et des structures tridimensionnelles oscillatoires 42
2.2.2 Influence du confinement latéral du milieu et de l'inertie poreuse sur les structures bifurquées 46
2.2.3 Type de transition au point de codimension 2 (Re_K^*, Ra_c^*) 48
2.3 Approche spatio-temporelle 50
2.3.1 Réponse linéaire du système à une perturbation localisée 50
2.3.2 Comportement des branches spatiales 52
2.3.3 Transition instable convectif/ instable absolu : influence du confinement et de l'inertie 54
2.3.4 Dépendance de la période d'oscillation et de la longueur d'onde vis-à-vis des nombres de Rayleigh et de Peclet 57
2.4 Analogie avec le problème de Poiseuille-Rayleigh-Bénard 57

2.5 Conclusion 58

3 Analyse faiblement non linéaire au voisinage du point de codimension 2 61

3.1 Equation d'amplitude 62
3.2 Diagramme de stabilité par rapport à des perturbations homogènes . . . 63
3.3 Evaluation du transfert de chaleur moyen 64
3.4 Phénomène d'amplification du bruit en régime convectif 66
3.4.1 Diagramme d'instabilité spatiale 66
3.4.2 Simulation des équations d'amplitude 69
3.5 Conclusion 74

4 Comparaison des prédictions théoriques et des résultats expérimentaux 75

4.1 Evaluation expérimentale des nombres sans dimension et discussion . . . 75
4.2 Résultats de stabilité linéaire et expérience 77
4.2.1 Approche temporelle de stabilité et expériences 80
4.2.2 Transition instable convectif/ instable absolu et expériences . . . 81
4.3 Longeur d'onde, périodes d'oscillations et vitesse des structures propagatives 82
4.4 conclusion 84

5 Méthodes spectrales pour la résolution des équations de la convection mixte en milieu poreux 87

5.1 Position du problème 87
5.2 Solution de conduction 89
5.3 Discrétisation temporelle 89
5.3.1 Solution en perturbation 89
5.3.2 Zone tampon 91
5.4 Résolution spatiale, méthode spectrale 92
5.4.1 Cas unidimensionnel de l'équation de Helmholtz 93
5.4.2 Cas multidimensionnel de l'équation de Helmholtz 100
5.5 Résolution numérique des équations 102
5.5.1 Résolution de la température 102
5.5.2 Résolution de la pression et de la vitesse 102
5.5.3 zone tampon 104
5.6 Validation 104
5.6.1 Régime convectif 104
5.6.2 Régime absolu 106
5.6.3 Conclusion 106

6 Analyse des résultats de la simulation numérique de la convection mixte bi-dimensionnelle 109

6.1 Mode global et convection mixte en milieu poreux 109

6.2 Mise en évidence des structures thermo-convectives pleinement établies 111
6.3 Comparaison des amplitudes saturées de la température avec l'expérience 112
6.4 Longueurs d'établissement des structures thermoconvectives 116
6.4.1 Longueurs d'établissement des R.T 116
6.4.2 Effets de Ra et Pe 117
6.4.3 Loi d'échelle 119
6.5 Longueurs d'onde, période d'oscillations et vitesse de phase des structures pleinement établies 121
6.6 Transfert de chaleur 125
6.7 Conclusion 128

Conclusion générale et perspectives 129

A Instabilités Convectives / Absolues 133
A.1 Réponse impulsionnelle 135
A.2 Calcul de la fonction de Green 136
A.2.1 Décomposition en fonctions propres 136
A.2.2 Analyse temporelle 139
A.2.3 Analyse spatiale 140
A.2.4 Analyse spatio-temporelle 142
A.2.5 Estimation asymptotique 143
A.3 Complément à l' étude cinématique 145
A.3.1 taux maximal 145
A.3.2 seuil convectif 146
A.3.3 régime convectif 146
A.3.4 seuil absolu 146
A.3.5 régime absolu (théorie linéaire de l'instabilité absolue) 147

B Obtention des équations d'amplitude 151
B.1 Partie linéaire de l'équation d'amplitude 152
B.1.1 Partie linéaire des S.O.3D 153
B.1.2 Partie linéaire des R.L 153
B.2 Equations d'amplitude non linéaires 154
B.2.1 Développement multi-échelle 154
B.2.2 Ordre 0 157
B.2.3 Ordre 1 157
B.2.4 Ordre 2 159
B.2.5 Ordre 3 162

Liste des paramètres

a **:** rapport de forme entre la largeur et la hauteur.

Da **:** nombre de Darcy.

$\mathcal{F}$ **:** terme de Forchheimer.

k, k_c, k_c^*, k^*, k^A **:** nombre d'onde suivant x, au seuil convectif, au point de codimension deux, au point col et au seuil absolu.

K **:** perméabilité du milieu poreux.

$m, m_{\|}, m_{3D}$ **:** nombre de rouleaux longitudinaux, pour les R.L et les R.3D.

M **:** rapport des capacités calorifiques

P, P^* **:** pression adimensionnée et dimensionnée dans le milieu poreux.

Pe, Pe_c, Pe^* **:** nombre de Peclet, critique pour les R.L et au point de codimension deux.

Pr^* **:** nombre de Prandtl en milieu poreux.

$Ra, Ra_c^{\|}, Ra_c^{3D}, Ra_c^*, Ra_A$ **:** nombre de Rayleigh, au seuil convectif des R.L et des S.O.3D, au point de codimension deux et au seuil absolu.

Re_K, Re_p **:** nombre de Reynolds basé sur la perméabilité et sur la taille des pores.

$T, T_0, T_1, T^*, T_0^*, T_1^*$ **:** température adimensionnée, température de conduction adimensionnée, écart entre T et T_0, température dimensionnée, température de la plaque inférieure et supérieure dimensionnée.

$\overrightarrow{V}, \overrightarrow{V}_f$ **:** vitesse et vitesse de filtration dans le milieu poreux.

V, V_G, V_ϕ, V_p **:** vitesse de déplacement de l'instabilité, vitesse de groupe du paquet d'onde, vitesse de phase adimensionnée et dimensionnée .

κ^* **:** diffusivité thermique du milieu poreux

$\lambda_s, \lambda_f, \lambda^*$ **:** coefficient de conductivité thermique du solide et du fluide, et coefficient de conductivité thermique équivalent au milieu poreux.

λ **:** longueur d'onde.

Λ **:** rapport des viscosités.

$\omega, \omega^A, \omega^*$ **:** fréquence, fréquence au seuil absolu et fréquence associée au point col.

ν_f, μ_f, μ' **:** viscosité cinématique et dynamique du fluide ainsi que la viscosité équivalente du milieu poreux.

ρ densité volumique.

$(\rho c)^*, (\rho c)_s, (\rho c)_f$ **:** capacité calorifique du milieu poreux, du solide et du fluide respectivement.

θ perturbation linéaire de la température adimensionnée

ϕ **:** porosité.

σ **:** taux de croissance spatio-temporelle.

Introduction

L'étude des instablités hydrodynamiques qui se développent dans un milieu fermé a bénéficié d'un intérêt considérable depuis les trente dernières années. Citons par exemple, deux systèmes physiques qui ont particulièrement attiré la curiosité scientifique de nombreuses équipes de chercheurs, dans divers laboratoires du monde entier. Il s'agit du problème de Rayleigh-Bénard ([44]) ou de son analogue en milieu poreux, connu sous le nom de Horton-Rogers-Lapwood ([49]-[56]) et du problème dit de Couette-Taylor.

Les deux premiers problèmes consistent à chauffer un fluide entre deux plaques planes horizontales : celle du bas est chaude et celle du haut est froide (figure 1). On parle alors de **convection naturelle** car le mouvement est induit dans le champ de pesanteur par les variations suffisantes de masse volumique dues aux différences de température. Lorsque la différence de température est en dessous d'un certain seuil, il y a transport de chaleur par conduction thermique (profil linéaire de la température). Au premier abord, cette situation semblerait être en déséquilibre car les particules de fluide les plus légères se trouvent en dessous des éléments les plus lourds. Mais le freinage visqueux et la diffusion de la chaleur atténuent toutes perturbations sur une particule quelconque : ce sont des effets stabilisants. L' état de conduction est donc un état d'équilibre mécanique. Mais lorsque la différence de température est au dessus de ce seuil critique, une perturbation sur une particule des couches inférieures, moins denses, entraîne un mouvement ascendant par la poussée d'Archimède. Les effets stabilisants ne sont plus assez forts pour lutter contre l'ascension de la particule. Ce mouvement entraîne les couches inférieures. Lorsqu'elles arrivent sur la plaque du haut, elles se refroidissent et deviennent plus denses. Elles plongent donc vers l'intérieur, résultant d'une poussée d'Archimède dans le sens contraire. Ce processus s'auto-entretient sous la forme d'une structure spatiale périodique composée de rouleaux par exemple. L' état de conduction est donc devenu instable. Ce non-équilibre aboutit à l'apparition dans le fluide, d'un écoulement interne tendant à brasser le fluide, de façon à y établir une température uniforme. Le gradient de température est donc le moteur de cette instabilité dont les variations influencent la distribution de vitesse du fluide dans le milieu.

Quant au système de Couette-Taylor, il est constitué par un écoulement d'un fluide confiné entre deux cylindres coaxiaux, le cylindre extérieur est par exemple maintenu immobile alors que le cylindre intérieur est en rotation uniforme avec une vitesse angulaire Ω. L'expérience montre que dans un premier temps, un écoulement stationnaire

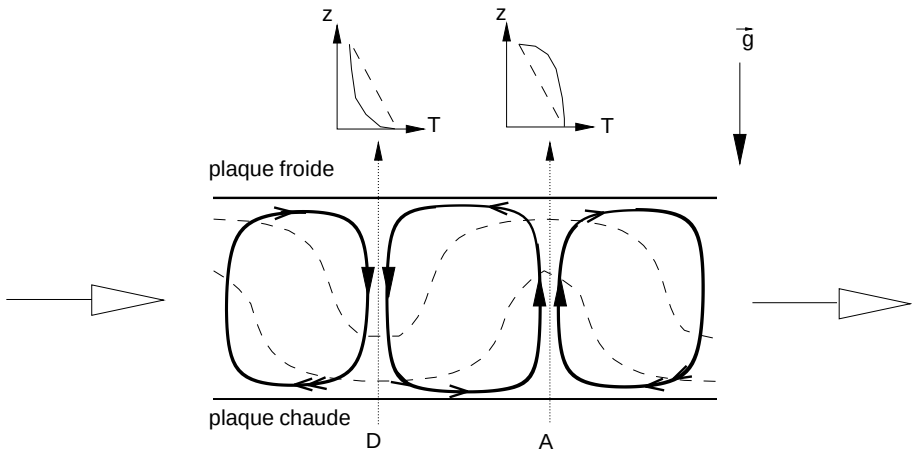


FIG. 1 – illustration du problème de convection naturelle : les lignes −− désignent les isothermes, la plus chaude se trouvant en bas et les lignes épaisses - désignent les lignes de courant. On a effectué 2 coupes du fluide $\cdots$ en A (pour ascendant) et en D (pour descendant). Au dessus de celles-ci, on a tracé la distribution suivant z de la température T (en −). On y a également superposé la température de l'état de conduction en −−. Les 2 flèches indiquent les sens de l'écoulement principal dans le cadre de la convection mixte.

purement azimutal s'installe. Il s'agit de l'écoulement de Couette. Lorsque la vitesse de rotation dépasse une valeur critique, une structure en cellules toroïdales se forme. La cause physique de l'instabilité vient du fait que les particules de fluide proches du cylindre intérieur sont éjectées vers l'extérieur par la force centrifuge et vont remplacer les particules proches de l'autre cylindre, tout en étant freinées par les forces de viscosité.

Ainsi, bien que les mécanismes physiques qui déclenchent l'apparition d'une instabilité dans le système de Couette-Taylor diffèrent de ceux qui provoquent la convection naturelle, les deux systèmes présentent des comportements dynamiques semblables. Le point commun des deux systèmes précédents est qu'ils sont soumis à des contraintes extérieures et qu'ils font intervenir des phénomènes non linéaires.

En effet l'état d'équilibre d'un système physique est l'état le plus régulier et le plus symétrique. Sous une contrainte extérieure de plus en plus forte, le système se déstabilise et perd progressivement sa régularité. Chaque brisure de symétries est accompagnée d'une bifurcation qui amène le système d'un état à un autre qui lui est macroscopiquement différent.

La question qui se pose est de savoir comment décrire théoriquement les différentes transitions des structures qui s'opèrent dans ces systèmes lorsque la contrainte extérieure dépasse un certain seuil. Les outils théoriques développés pour répondre à cette question montrent que la dynamique de ces structures peut-être décrite par un ensemble réduit d'équations différentielles non linéaires de formes génériques. Ces équations décrivent

l'évolution temporelle des modes actifs (instables) présents dans le système. Le rapport de forme de la boîte, dans une expérience de convection par exemple, conditionne le nombre de modes actifs. Ce nombre est d'autant plus grand que le rapport de forme l'est. Lorsque ce dernier paramètre est supposé non borné, des instabilités sous la forme de paquets d'ondes peuvent se développer et leur dynamique spatio-temporelle est décrite par des équations aux dérivées partielles, appelées **équations d'amplitude ou équations d'enveloppe**. La théorie des bifurcations dans les systèmes dynamiques [33], efficace pour décrire l'évolution des instabilités dans un milieu fermé, connaît cependant des limites lorsque ces systèmes sont ouverts.

Or ces derniers constituent la majorité des écoulements rencontrés dans la nature. On peut citer quelques exemples tels que les couches de mélange, les jets, les sillages, les couches limites et les problèmes de convection naturelle et de Taylor-Couette couplés avec un écoulement imposé de débit non nul. Dans ce genre de système où se produit un transport global de matière vers l'aval, la dimension spatiale des instabilités ne peut plus être dissociée de la dimension temporelle. L'approche théorique de la stabilité de ces systèmes ouverts est appelée à identifier les mécanismes physiques qui sont derrière l'apparition de structures macroscopiques. En effet, il est maintenant clairement établi que les écoulements ouverts se regroupent en deux classes [50], [14] : les écoulements **instables convectifs** où les structures macroscopiques peuvent être simplement le résultat de l'amplification des perturbations présentes dans tout système expérimental à l'entrée de l'écoulement, et les écoulements **instables absolus** dont le comportement est intrinsèque et peu sensible au bruit d'entrée.

Du point de vue expérimental, la nature convective ou absolue d'une instabilité peut être mise en évidence par des mesures spectrales d'une quantité fluctuante par rapport à l'écoulement de base. Ces mesures montrent un spectre de fréquence large si l'instabilité est convective ou au contraire un pic de fréquence plus énergétique si l'instabilité est absolue. Dans ce dernier cas, on observe l'apparition d'un mode global, c'est à dire d'une résonance du milieu avec une structure spatiale et une fréquence temporelle bien définies. La figure 2, illustre ce comportement dans une expérience menée par K.L. Babcock et al [6] concernant le système de Taylor-Couette ouvert forcé par un écoulement axial. Ces auteurs montrent également que les paramètres pour lesquels on observe une transition d'un spectre large de fréquence à un spectre étroit coïncident avec ceux pour lesquels la théorie linéaire de stabilité prédit le changement de nature de l'instabilité de l'écoulement de base : on passe d'une instabilité convective à une instabilité absolue. Ce résultat important a conduit A. Joulin à proposer dans sa thèse consacrée à la convection mixte des mélanges de fluides binaires [53], un protocole nouveau basé sur la transition instable convectif/absolu en vue de mesurer des effets difficiles à quantifier comme l'effet Soret. Malheureusement jusqu'à ce jour, et à notre connaissance, il n'existe aucune investigation expérimentale sur ce sujet que ce soit en milieu fluide ou en milieu poreux.

Cependant, dans le cas d'un fluide pur, la convection mixte en milieu poreux est documentée par des données expérimentales. Ces dernières sont relativement peu abondantes. Le travail mené par M. Combarnous ([26]-[28]) constitue une documentation

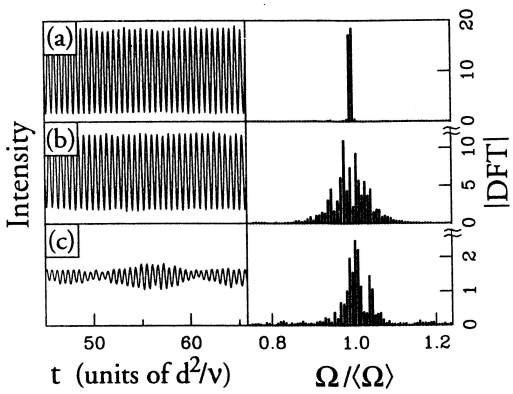


FIG. 2 – Exemple de séries temporelles et de module de la transformée de Fourier rapide (DFT) associé, dans le problème de Couette-Taylor où Ω représente la fréquence. La figure a) illustre le spectre en régime absolu et les figures b)-c) illustrent le spectre en régime convectif (figure tirée de [6])

des plus complètes sur ce sujet.

Parallèlement aux intérêts pratiques de la convection mixte en milieu poreux, la tentative d'étudier les différentes structures d'écoulements thermoconvectifs constitue un intérêt fondamental en matière d'analyse de stabilité dans ce problème type d'écoulements ouverts.

L'un des points majeurs de ce travail consiste à réaliser une comparaison qualitative et quantitative des résultats expérimentaux des écoulements de convection mixte dans une couche poreuse avec à la fois des prédictions théoriques issues du concept d'instabilité convective ou absolue et des résultats de simulations numériques.

Le premier chapitre est composé de trois parties. Après une partie qui présente le cadre général de cette étude, ainsi que les travaux expérimentaux, théoriques et numériques antérieurs, la seconde partie expose les caractéristiques rhéologiques des milieux poreux. Enfin la troisième partie propose une modélisation mathématique, identifie la solution de l'état de base et met en évidence les paramètres sans dimension qui caractérisent le problème de la convection mixte en milieu poreux.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude de la stabilité de l'état conductif aussi bien vis-à-vis de perturbations tridimensionnelles propagatives que vis-à-vis de structures fixes organisées sous la forme de rouleaux longitudinaux. Une analyse spatio-temporelle est proposée et permet de faire une distinction entre instabilité convective et instabilité absolue. Les caractéristiques linéaires de ces deux types d'instabilité sont déterminées et leur dépendance vis-à-vis des paramètres sans dimension du problème est discutée.

Le chapitre trois traite de la dynamique faiblement non linéaire au voisinage d'un point du plan des paramètres où le système observe une compétition entre deux types de structures thermoconvectives : les structures tridimensionnelles propagatives et les rouleaux longitudinaux fixes. Cette dynamique est décrite par deux équations d'amplitude couplées. L'intégration numérique de ces équations permet d'améliorer notre compréhension de certaines observations expérimentales.

L'objet du chapitre quatre est de mener une comparaison quantitative des prédictions théoriques issues de l'analyse spatio-temporelle de stabilité et des résultats expérimentaux.

L'enjeu est fort, puisqu'il porte sur la question cruciale de savoir si **les caractéristiques linéaires** du mode global, à savoir la fréquence des oscillations et la distribution spatiale des instabilités dans la région absolument instable, peuvent décrire précisement la dynamique thermoconvective observée expérimentalement. Cette description linéaire du mode global s'est avérée pertinente à plusieurs égards, nous nous sommes interrogés sur le rôle des non linéarités. Une simulation numérique directe bidimensionnelle est alors proposée.

Le chapitre cinq décrit les outils mathématiques et les méthodes spectrales utilisées dans un code développé au L.I.M.S.I [1] par l'équipe du professeur G. Labrosse, code validé sur une configuration de convection naturelle dans une boîte fermée. Mon séjour au L.I.M.S.I, encadré par G. Labrosse, m' a permis d'étendre ce code à une configuration adaptée au problème de la convection mixte.

Le chapitre six est consacré à l'analyse des résultats issus des simulations numériques directes bidimensionnelles. Les fréquences d'oscillations, les nombres d'onde ainsi que les vitesses de propagation des structures convectives, sont comparés aux résultats issus de la théorie linéaire. De même, l'amplitude saturée des structures thermoconvectives obtenue numériquement ainsi que le transfert de chaleur moyen sont à leur tour comparés aux données expérimentales [26]. Enfin, une loi d'échelle d'établissement de ces structures saturées, proposée par Couairon et Chomaz [32] dans le cadre de l'équation de Ginzburg-Landau, est discutée à la lumière des résultats de la simulation numérique directe.

A la fin de ce mémoire, les résultats obtenus le long de ce travail sont synthétisés sous forme de conclusion générale avec l'énoncé de certaines perspectives. L'annexe A détaille les concepts d'instabilité absolu et convectif et l'annexe B est consacrée à l'obtention des équations d'amplitude.

[1] Laboratoire d'Informatique pour la Mécanique et les Sciences de l'Ingénieur

Chapitre 1

Présentation de la convection mixte en milieu poreux

Les écoulements de fluide à travers un milieu poreux se rencontrent dans des domaines très variés des sciences et techniques. A titre d'exemple, on peut citer les problèmes de purification de l'eau, de dépollution des sols, d'extraction de pétrole et de gaz, les problèmes géophysiques, ...

Dans ce chapitre, nous exposons les travaux expérimentaux, théoriques et numériques antérieurs. Puis nous définissons les caractéristiques rhéologiques des milieux poreux. Enfin nous présentons une modélisation mathématique du problème, les paramètres adimensionnés pertinents ainsi que l'état conductif.

1.1 Convection mixte en milieu poreux et expérimentation

On parle de convection naturelle d'origine thermique lorsque le milieu est limité par des plaques imperméables et qu'il est chauffé par le bas. En revanche, on dit qu'il y a convection mixte lorsque l'on considère en plus du gradient de température, un débit filtrant en imposant une pression plus forte à l'amont qu'à l'aval du milieu poreux (voir figure 1.1).

La convection mixte au sein d'un milieu poreux saturé par un fluide a été étudiée par M. Combarnous ([26]-[28]), tant en ce qui concerne les conditions d'apparition de la convection, que le transfert de chaleur et la forme des cellules convectives. Les matrices solides utilisées sont non consolidées, composées de différents milieux : billes de verre, de quartz, de propylène, d'anneaux de Fenske .... Différents fluides sont utilisés : de l'eau désaérée et de l'huile aux silicones. Nous allons décrire le dispositif expérimental et exposer quelques résultats expérimentaux.

1.1.1 Appareillage

L'appareillage complet (figure 1.2) comprend une cellule principale dans laquelle se développent les mouvements convectifs et un ensemble d'élements annexes qui

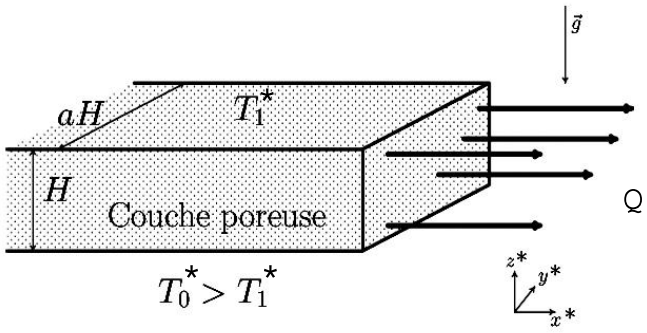


FIG. 1.1 – Configuration du domaine physique : une couche poreuse horizontale saturée d'un fluide pesant de hauteur H, de largeur aH chauffée par le bas refroidi par le haut et soumise à un écoulement horizontal uniforme de débit Q

permettent l'établissement de conditions aux limites stables ainsi que la mesure des températures et des flux de chaleur.

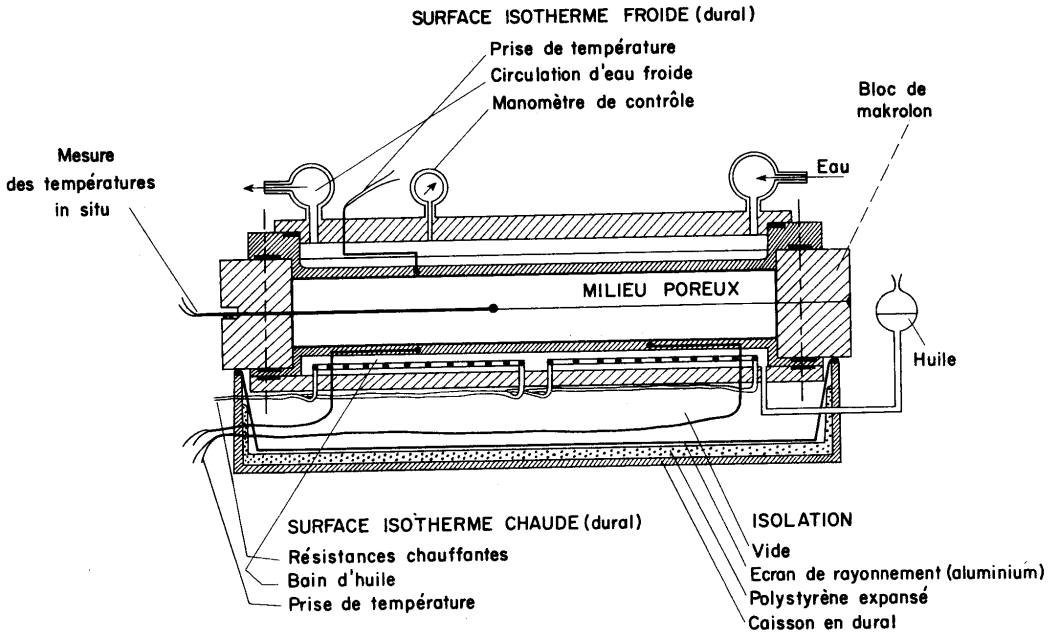
Une cellule principale est constituée d'un bloc de makrolon qui sert d'isolateur thermique. Dans le bloc, on y a usiné un tunnel, de 90 cm de longueur, 37 cm largeur et 5.35 cm de hauteur (figure 1.3). Une partie plus petite du bloc est au contact de deux plaques planes métalliques destinées à la régulation de la température.

La plaque du bas est chauffée par dissipation thermique, à partir d'une série de résistances regroupées par élément chauffant, baignant dans de l'huile et isolées par du vide. Tous ces éléments chauffants sont contrôlés indépendamment les uns des autres. La plaque du haut est maintenue à une température fixe par circulation d'eau. L'uniformité de la température des plaques est assurée par le relevé des thermocouples placés à proximité immédiate du milieu poreux et au centre des éléments chauffants.

A l'entrée du domaine il est imposé un profil de température linéaire (température de conduction) par une série de résistances chauffantes, ainsi qu'un écoulement uniforme dans le milieu poreux même en absence de convection.

La mesure de la température à l'intérieur du tunnel, est assurée par des sondes composées de thermocouples. Il est possible d'effectuer une mesure simultanée, en plusieurs points pour des hauteurs, des largeurs et longueurs variables. Une représentation de la distribution temporelle et spatiale de la température est donc possible.

La mesure du flux de chaleur s'effectue par le calcul de l'effet Joule par dissipation des éléments chauffants. Dans son interprétation, il est tenu compte des fuites thermiques de l'ensemble de l'appareillage.



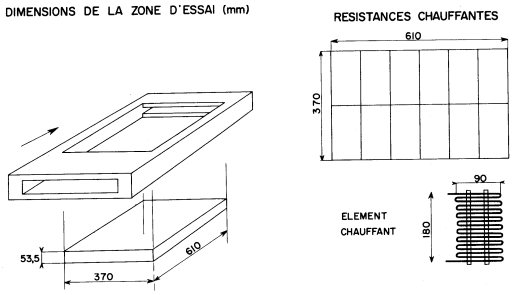


FIG. 1.2 – En haut, coupe longitudinal de l'appareillage (d'après [26]).

FIG. 1.3 – A gauche, cellule principale et emplacement des éléments chauffants indépendants et constitués de résistances (d'aprés[26])

1.1.2 Résultats expérimentaux

Les expériences de convection en milieu poreux présentent l'avantage de développer des instabilités sur des temps très lents. Les périodes sont de l'ordre de l'heure (voir la figure 1.5 a)) ce qui permet à l'expérimentateur armé de patience, d'avoir le temps d'observer l'organisation de la convection. Des différents essais entrepris, il en résulte que le critère d'apparition de la convection thermique ainsi que le transfert de chaleur ne sont pratiquement pas modifiés par l'existence d'un débit filtrant non nul. En revanche, la forme des cellules convectives dépend à la fois du gradient de température ΔT et de la valeur de la vitesse de l'écoulemenent moyen du fluide saturant le milieu poreux $\overline{V}$ (voir figure 1.4). L'enregistrement de l'évolution des températures au sein du milieu a permis de définir plusieurs régions dans le domaine de la convection laminaire :

– la région 1 sur la figure 1.4 : lorsque la vitesse entrante $\overline{V}$ est plus petite qu'une certaine vitesse $\overline{V}^*$, la convection se présente majoritairement sous la forme de rouleaux mobiles, perpendiculaires à l'écoulement moyen : appelés **rouleaux**

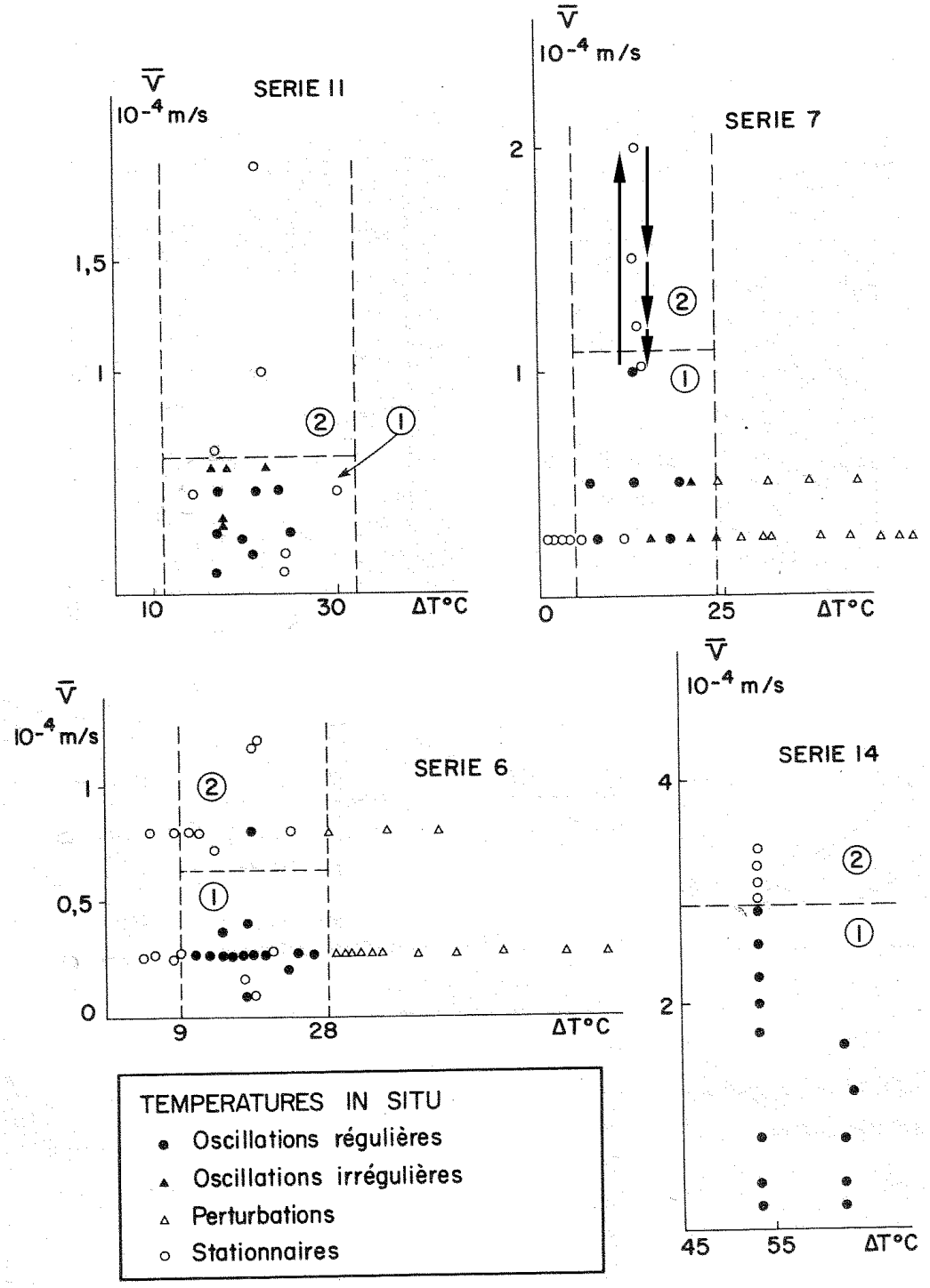


FIG. 1.4 – répartition des structures observées dans le plan $(\Delta T, \overline{V})$ où "oscillation" désigne les R.T (mesure de la figure 1.5 a)) , "stationnaire" désigne R.L (mesure de la figure 1.6 a)) et "perturbation" désigne des structures désordonnées (mesure de la figure 1.7). Les lignes horizontales en pointillé indiquent $\overline{V}^*$ et celles verticales indiquent de gauche à droite : le régime conductif ($\Delta T < 9$ pour la série 6), laminaire ($9 < \Delta T < 28$ série 6) et turbulent ($\Delta T > 28$ série 6).

transversaux mobiles et notés R.T (voir figure 1.5 b)).

– la région 2 sur la figure 1.4 : lorsque la vitesse entrante $\overline{V}$ est plus grande que $\overline{V}^*$, la convection se présente majoritairement sous la forme de rouleaux hélicoïdéaux fixes parallèles à l'écoulement moyen appelés **rouleaux longitudinaux fixes et notés R.L** (voir figure 1.6 b)).

Pour des vitesses débitantes proches de V^*, les essais réalisés mettent en évidence des effets d'hystérésis qui pourraient être associés à la transition entre les deux types de structures convectives (flèches sur la figure 1.4, série 7).

Certains enregistrements de la température suggèrent la possibilité de propagation de rouleaux parallèles mais pas tout à fait perpendiculaires à la direction moyenne d'écoulement ou même parfois de rouleaux perpendiculaires mobiles dans une partie du massif poreux alors que l'autre partie est occupée par des rouleaux stables hélicoïdaux.

Néanmoins, au delà d'un certain gradient de température, nous sommes dans le domaine turbulent et ce quel que soit la valeur de la vitesse entrante. La figure 1.7 décrit l'évolution lors d'un essai, la température en différents points du plan médian du milieu poreux et met en évidence le caractère fluctuant, imprévisible de la température, associé à des structures moins ordonnées.

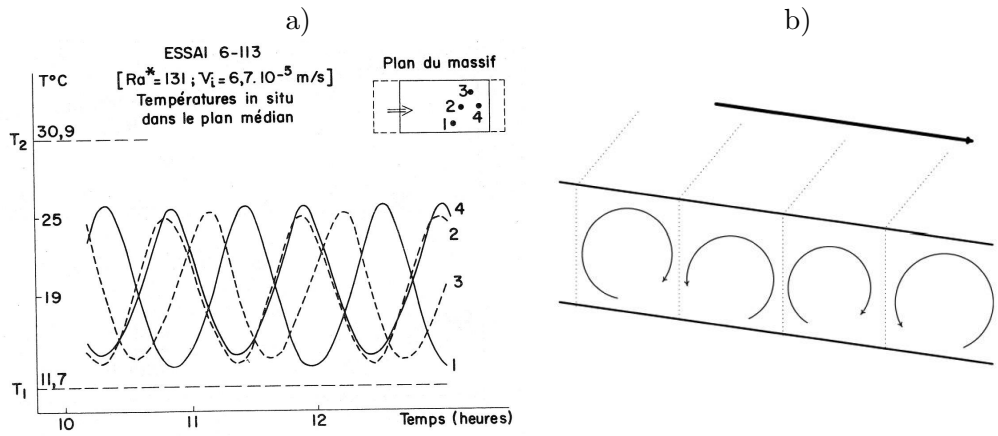


FIG. 1.5 – a) représente l'évolution lors d'un essai, de la température en différents points du plan de symétrie horizontale du milieu poreux. Il met en évidence le caractère oscillatoire régulier de la température associé aux R.T représentés schématiquement en b)

1.1.3 Travaux analytiques et numériques antérieurs

La convection mixte en milieu fluide, connue sous le nom de problème de Poiseuille-Rayleigh-Bénard a fait l'objet de très nombreuses investigations , tant théoriques ou numériques qu'expérimentales. A ce sujet, dans une excellente revue bibliographique récente, X. Nicolas [72] présente 154 références qui couvrent la période 1920-2001.

L'intérêt porté à la convection mixte en milieu poreux a été beaucoup moins important. D'un point de vue théorique, Prats [78] a été le premier à analyser la stabilité

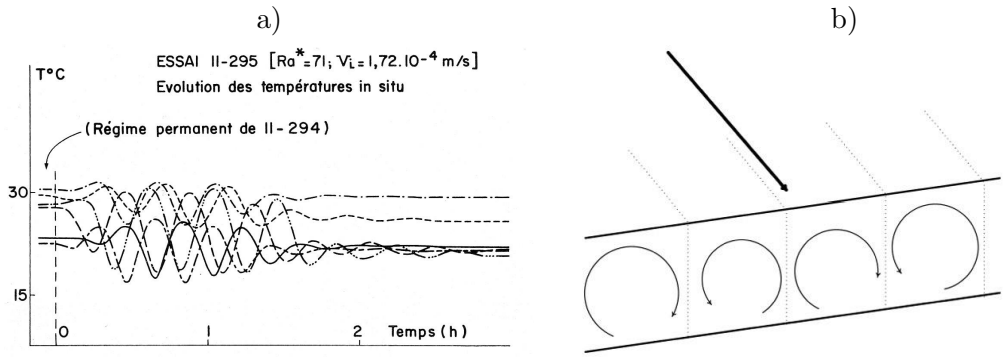


FIG. 1.6 – a) représente l'évolution lors d'un essai, de la température en différents points du plan de symétrie horizontale du milieu poreux et met en évidence le caractère stationnaire de la température (après un certain temps de transition) associé aux R.L représenté schématiquement en b)

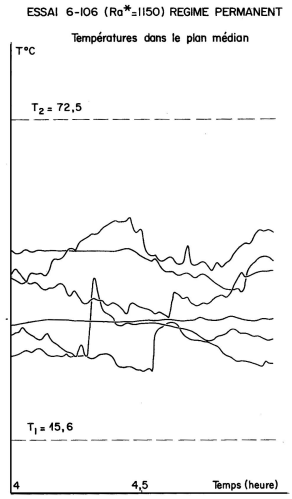


FIG. 1.7 – Mesure temporelle de la température, elle présente un caractère imprévisible associé au régime turbulent

linéaire de la convection mixte bidimensionnelle dans un milieu poreux d'extension latérale infinie ($a \to \infty$). En utilisant le modèle de Darcy, il montre que le seul effet de l'écoulement principal est d'introduire des oscillations des structures convectives, alors que le seuil d'apparition de ces structures reste le même que celui du problème classique de Horton-Rogers-Lapwood.

Rees [82] a étendu cette analyse en prenant en compte les effets d'inertie modélisés par le terme de Forchheimer en tant que correction du modèle de Darcy. Il montre que le couplage entre l'écoulement principal et les termes non linéaires d'inertie favorise l'émergence de structures convectives organisées sous la forme de rouleaux longitudinaux fixes, et ce quelle que soit la valeur de la vitesse débitante de l'écoulement principal.

D'un autre coté, en utilisant récemment la théorie de la propagation des ondes, Chung et al [25] ont proposé une loi d'établissement spatial de ces mêmes rouleaux

longitudinaux. Bien que les résultats établis dans [82] et [25] soient intéressants, ces prédictions théoriques ne renseignent pas et n'aident pas à comprendre l'observation expérimentale des rouleaux transversaux propagatifs.

Il faut attendre l'excellent travail de thèse de F. Dufour [39] pour qu'un nouvel éclairage soit apporté aux circonstances dans lesquelles la déstabilisation dans ce problème de convection mixte, conduit à un mouvement convectif dépendant du temps ou au contraire à un régime stationnaire structuré en rouleaux longitudinaux. L'originalité du travail de thèse de F. Dufour résident notamment dans l'utilisation rigoureuse du concept d'instabilité absolue, grace auquel, on comprend mieux les conditions nécessaires qui pilotent l'émergence des rouleaux transversaux propagatifs. La dynamique non linéaire de ces derniers a été étudiée par F. Duffour, en appliquant le théorème de la variété centrale et de la forme normale. Elle a par ailleurs mené une étude numérique [40] dans le but de décrire les écoulements bidimensionnels et périodiques en temps. Cette étude numérique lui a permis de calculer la fréquence globale des oscillations, les longueurs d'onde et la vitesse de phase des rouleaux transversaux.

Ce travail constitue alors une extension naturelle au travail de thèse de F. Dufour [39].

1.2 Caractérisation d'un milieu poreux

On rappelle succinctement, les différentes grandeurs caractéristiques du milieu poreux. Le lecteur intéressé, pourra consulter l'ouvrage de D.A. Nield et A. Bejan [73], pour de plus amples informations.

1.2.1 Définition du milieu poreux

Le milieu poreux est composé d'une matrice solide, à l'intérieur de laquelle se trouvent des pores reliés entre eux ou éventuellement isolés. On peut distinguer :

- les matrices solides non consolidées où la phase solide est formée de grains (par exemple le sable, le gravier, billes de verre, d'acier, les lits de particules pas encore fluidilisés ...), pratique pour l'expérimentation.
- les matrices solides consolidées (par exemple les roches calcaires, le grès, l'argile, le bois, tissu biologique ...).

Dans le cadre de cette étude nous nous limiterons au cas de la matrice solide non consolidée.

Les pores reliés entre eux, permettent l'écoulement d'un ou plusieurs fluides. On peut alors classer les problèmes rencontrés, suivant les phases en présence à l'intérieur des pores :

1) le milieu est saturé d'un seul fluide ou encore un ensemble de fluides miscibles (par exemple un sol imbibé d'eau).
2) le milieu est composé de plusieurs fluides non miscibles. Un ensemble de ménisques sépare alors les différentes phases (par exemple un mélange eau-huile-gaz dans les

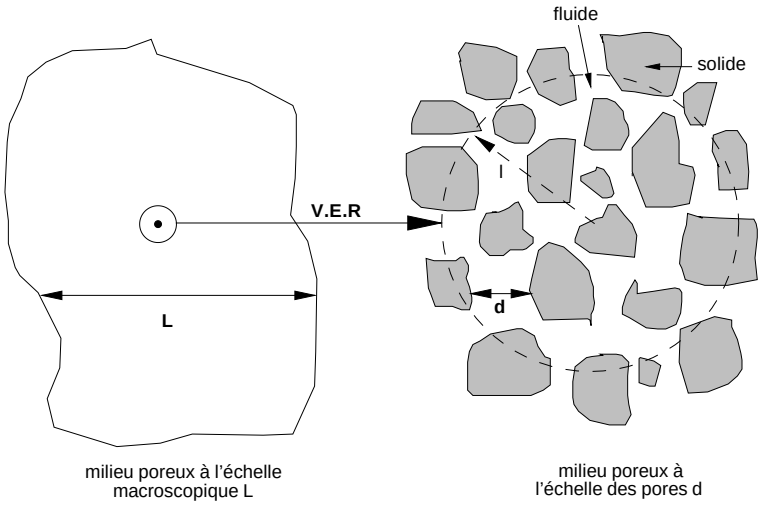


FIG. 1.8 – La figure illustre la taille intermédiaire l du Volume Elémentaire Représentatif (V.E.R) entre la taille du milieu poreux à l'échelle macroscopique L et à l'échelle des pores d

roches pétrolières, ou un sol partiellement saturé d'eau, la deuxième phase étant l'air).

3) le milieu est le siège d'un transport de fluide et de particules solides. Il agit en général comme un filtre, mais ses propriètés hydrodynamiques se modifient au cours du temps (dépollution des eaux contenant de grosses particules par percolation à travers le sol).

Dans le cadre de cette étude nous nous limiterons au cas 1).

1.2.2 Paramètres

Volume Elémentaire Représentatif (V.E.R)

L'échelle du pore d varie généralement de $0.05\mu m$ pour les nanopores, à $0.5mm$ pour les macropores. Or la distribution des pores et des grains est généralement très irrégulière. A cette échelle, la pression, la vitesse, la température varient donc très irrégulièrement d'un point à l'autre du domaine. On est donc amené à effectuer une moyenne spatiale de ces grandeurs. Elles ont pour but d'éliminer les fluctuations à l'échelle du pore, mais pas les fluctuations à l'échelle macroscopique du milieu poreux L. Cette moyenne s'effectue donc sur des nombreux pores par l'intermédiaire d'un *Volume Elémentaire Représentatif* V.E.R (voir figure 1.8) du milieu. De plus, l'échelle l du V.E.R doit donc vérifier :

$$d \ll l \ll L$$

On obtient donc les grandeurs caractéristiques de la vitesse, la pression et la température, en les moyennant sur le V.E.R. Cela permet de représenter un point dans un nouveau

a) cubique
$\phi = 0.476$

b) cubique centrée
$\phi = 0.32$

c) cubique à face centrée
$\phi = 0.255$

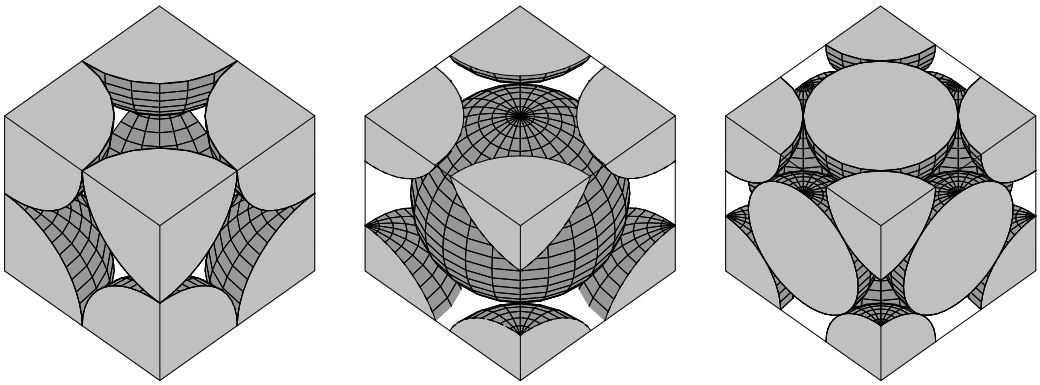


FIG. 1.9 – modèle géométrique par empilement régulier de sphères de même diamètre avec la porsité ϕ associée

milieu continu fictif par changement d'échelle. Il est équivalent au domaine poreux étudié mais à l'échelle macroscopique. Lorsque les propriétés locales, définies sur le V.E.R, sont indépendantes de la position de celui-ci, le milieu est dit homogène, à l'échelle macroscopique. Dans la suite, sauf cas particulier, toutes les grandeurs (pression,vitesse,température) apparaissant dans les différents modèles seront définies sur le V.E.R.

Porosité

La *porosité* ϕ est définie comme le rapport du volume vide occupé par les pores, sur le volume total soit :

$$\phi = \frac{volume\ des\ pores}{volume\ total}$$

La proportion occupée par la matrice solide est donc donnée par $1 - \phi$. En fait ϕ est plus exactement appelé *porosité totale*. En effet, cette définition prend en compte les pores fermés. On introduit donc une *porosité accessible*, définie comme le rapport du volume des pores connectés sur le volume total. Cela n'est possible que si on connaît suffisamment la structure du milieu poreux, elle est peu utilisée en pratique. Cette distinction n'aura pas lieu dans l'étude qui suit, les milieux expérimentaux se font par empilement (matrice solide non consolidée). Pour les milieux poreux naturels ϕ n'excède pas 0.66 (pour l'ardoise en poudre). Néanmoins cela peut être plus élevé pour des milieux poreux industriels (0.9 en moyenne pour les fibres de verre).

Beaucoup de résultats sont issus de modèles géométriques particuliers de grains ou de pores. Ils sont obtenus dans le cas d'empilements réguliers de sphères de même diamètre. Ces empilements forment des réseaux et la porosité dépend fortement de l'arrangement (voir (figure 1.9). Dans le cas d'un réseau cubique il y a beaucoup plus d'espace pour le fluide ($\phi = 0.476$) que dans le cas d'un réseau cubique à face centré

($\phi = 0.255$) qui est le réseau régulier, le plus compact que l'on puisse obtenir avec des sphères de même diamètre.

Il existe de nombreux cas où la porosité est variable mais on la considère comme uniforme.

Surface spécifique

Cela correspond au rapport de l'aire de la surface totale de l'interface fluide-solide A_{sf}, sur le volume de l'échantillon V soit :

$$\alpha = \frac{A_{sf}}{V}$$

qui a la dimension d'une longueur. Par exemple pour les empilements cubiques, la surface spécifique α varie comme $1/r$, avec r le rayon des sphères.

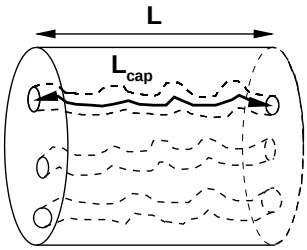
Comme précédemment on distinguera une *surface spécifique totale* et *accessible*. Cette grandeur joue un rôle capital dans les problèmes d'absorption ainsi que dans l'échange de chaleur entre le fluide et la matrice solide.

Tortuosité

La complexité du chemin continu des fluides à travers les pores a une influence sur les propriétés de transport du milieu. L'existence de "bras mort" (voie de garage de l'écoulement) est importante dans les matériaux peu poreux et très hétérogènes. Pour tenir compte de la connection entre les pores, on définit la *tortuosité* τ.

Généralement, on définit τ à partir de l'analogie hydraulique $\Leftrightarrow$ électricité. En effet, le transport de fluide (le débit) par différence de pression est l'analogue du transport de charge (le courant) par différence de potentiel électrique (voir la loi de Darcy (1.6)). La relation entre potentiel et courant est appellée conductivité (l'inverse d'une résistance). On considère la conductivité électrique équivalente σ_p d'un milieu poreux saturé par un liquide conducteur de conductivité électrique σ_f. Généralement le milieu poreux vide est très peu conducteur. C'est donc la structure géométrique des pores remplis de fluide qui rend le milieu poreux saturé, plus ou moins conducteur (mesure de σ_p). On définit donc :

$$\tau = \phi \frac{\sigma_f}{\sigma_p}$$



τ s'exprime simplement dans le cas où le milieu poreux étudié se modélise sous la forme d'un réseau de capillaires ondulés (voir la figure de gauche). On trouve dans ce cas :

$$\tau = \left(\frac{L_{cap}}{L}\right)^2 \tag{1.1}$$

où L_{cap} représente la longueur moyenne d'un tuyau capillaire ondulé et L représente la longueur du milieu. On a toujours $L_{cap} \geq L \Leftrightarrow \tau \geq 1$, et si les tuyaux capillaires sont

rectilignes, on obtient $L_{cap} = L \Leftrightarrow \tau = 1$. Plus τ est grand plus le milieu est "tortueux", il joue donc un rôle important dans les problèmes de diffusion.

Perméabilité

La perméabilité K se réfère à la capacité du milieu poreux à laisser passer le ou les fluides à l'intérieur des pores. Elle ne dépend que de la géométrie de la matrice solide, en particulier de la porosité et la tortuosité. Ainsi le milieu est d'autant plus perméable que les pores sont connectés entre eux.

Généralement K est déterminé par des mesures expérimentales, par le biais de la loi de Darcy régissant le mouvement du fluide dans le milieu poreux (voir (1.5)-(1.6)). Il existe de nombreux travaux répertoriant la perméabilté pour différents milieux. On pourra consulter le livre [73], pour trouver quelques valeurs de K, elles se situent entre $10^{-7} - 10^{-9}$ pour le gravier et $10^{-13} - 10^{-16} m^2$ pour l'argile stratifié.

Il est possible d'évaluer la perméabilité K grâce à des géométries particulières du milieu, par l'intermédiaire de ϕ et d'une dimension caractéristique de la matrice solide à l'échelle du pore. On note notamment :

- la relation de Kozeny-Carman (1937) [9], qui donne une estimation satisfaisante de K dans le cas d'un empilement de grains de formes à peu prés identiques et dont la distribution des tailles des grains n'est pas trop éloignée d'une taille moyenne D :

$$K = \frac{D^2 \phi^3}{36 C_0 (1-\phi)^2} \tag{1.2}$$

  C_0 est un coefficient de forme, il est compris entre 3.6 et 5. Il est égal à 4.8 pour les grains sphériques et dans ce cas D représente le diamètre de la sphère.
- le modèle de faisceaux de tubes capillaires ondulés, parallèles en moyenne à une direction donnée est donc fortement anisotrope [46] :

$$K = \phi \frac{D^2}{32} \frac{1}{\tau}$$

  avec τ la tortuosité des tubes capillaires ondulés (1.1), D le diamètre des tubes. Si le milieu est formé de 3 ensembles de capillaires perpendiculaires deux à deux (et donc relativement isotrope), la perméabilité serait réduite d'un facteur 3, on peut faire l'estimation suivante : $K = \phi \frac{D^2}{96} \frac{1}{\tau}$.
  On peut aussi intégrer directement les équations de Navier-Stokes par voie numérique. Cela s'effectue au cas par cas dans un domaine géométrique particulier assez simple et représentatif du milieu. On pourra consulter l'article de [81]. Les auteurs retrouvent notamment la relation (1.2) et la chute de pression prévue par la loi de Darcy (1.6).

  Il existe également des modèles statistiques permettant le calcul de la perméabilité. Cela se révèle utile lorsque le milieu poreux présente des inhomogénéités dans une large gamme d'échelle (il n'y a plus de description continue fictive équivalente).

Remarque :

- La loi empirique d'Archie (1942), relie le facteur de formation $F = \frac{\tau}{\phi}$ à la porosité par :
$$F = \phi^{-m}$$
avec par exemple $m = 3/2$ pour les grés, cette loi est valable pour la formation de roche sédimentaire (on peut également relier la perméabilité à la porosité).
- nous avons présenté des modèles de description des pores afin d'obtenir des V.E.R, basés sur des empilement de sphères ... où on utilise l'invariance par translation des propriétés, pour caractériser le V.E.R. Or les mesures (par exemple [80]) montrent que l'arrangement des pores des roches sédimentaires est proche des géomètries fractales au moins sur une certaine gamme d'échelle, c'est à dire que les propriétés sont invariantes par changement d'échelle. Des calculs effectués sur des structures fractales déterministes (voir notamment [7]) permettent dans ce cas le calcul par exemple de la porosité, la perméabilité ou la loi d'Archi... Néanmoins l'idée d'un caractère strictement fractal est mis en défaut par de récentes mesures, révélant le caractère multifractal de la répartition des pores [77], ce qui appelle une autre modélisation statistique [59].

1.3 Formulation mathématique

1.3.1 Modélisation

On considère une couche poreuse horizontale infinie (voir la figure 1.1), isotrope et homogène d'épaisseur H, de largeur aH. Cette couche est saturée par un fluide pur pesant, soumis à un écoulement uniforme, horizontal de débit Q . La paroi inférieure est chauffée à la température T_0^* alors que la paroi supérieure est maintenue à une température $T_1^* < T_0^*$. La couche est placée dans le champ gravitationnel $\overrightarrow{g}$.

Le fluide a une viscosité cinématique ν_f, une viscosité dynamique μ_f, une masse volumique ρ_f, et une conductivité thermique λ_f.

Comme nous l'avons vu précédemment, les grandeurs sont moyennées sur un V.E.R (les moyennes volumiques sont définies dans [60]-[94]). De plus la méthode d'homogénéisation [85]-[86] permet le changement d'échelle pour obtenir de nouvelles grandeurs continues d'un milieu poreux continu fictif équivalent. Elle repose essentiellement sur des développements asymptotiques de la vitesse et de la pression à l'échelle du pore, puis par une application d'un opérateur moyen d'intégration, on peut passer à l'échelle macroscopique. Les coefficients des équations macroscopiques ainsi obtenues reflètent la nature complexe du milieu à l'échelle microscopique.

On introduit donc la vitesse de filtration V_f, moyenne de la vitesse du fluide sur tout le V.E.R c'est à dire {pores remplis + solides }. On peut également définir la vitesse interstitielle V_i qui représente la vitesse moyenne du fluide mais à l'intérieur de pores. La relation de Dupuit-Forchheimer permet de relier les 2 grandeurs :

$$V_f = \phi V_i$$

On peut construire le nombre de Reynolds Re_p basé sur la taille moyenne des pores d et la vitesse interstitielle :

$$Re_p = V_i \frac{d}{\nu_f} \tag{1.3}$$

1.3.1.1 Equation de conservation de la masse

On écrit la conservation de la masse pour la phase fluide transportée par la vitesse interstitielle $\overrightarrow{V}_i$, on a alors :

$$\frac{\partial \rho_f \phi}{\partial t^*} + div(\rho_f \overbrace{\phi \overrightarrow{V}_i}^{\overrightarrow{V}_f}) = 0$$

En première approximation la densité s'écrit comme fonction linéaire de la température :

$$\rho_f = \rho_0(1 - \alpha_f(T^* - T_0^*))$$

avec α_f le coefficient d'expansion thermique, T^* la température en un point donné et T_0^* une température de référence par exemple la température de la plaque du bas. Dans les gaz et les liquides, le coefficient d'expansion thermique α est très petit,$10^{-3} < \alpha < 10^{-4} {}^\circ C^{-1}$. Nous adoptons donc l'**hypothèse d'Oberbeck-Boussinesq** [11] pour la densité du fluide qui montre que les variations de densité sont négligées, excepté dans le terme gravitationnel $\rho_f \overrightarrow{g}$ où elles rendent compte de la poussée d'Archimède qui est la cause de la convection thermique.

L'équation de conservation de la masse s'écrit alors :

$$div(\overrightarrow{V}_f) = 0 \tag{1.4}$$

1.3.1.2 Equation de conservation de la quantité de mouvement

Loi de DARCY :

C'est en 1856 que Henry Darcy [35] décrit une loi sur les écoulements isothermes dans un milieu poreux. A partir d'expériences de percolation d'eau à travers une colonne de sable verticale saturée de hauteur H, il en déduit :

$$Q = K' S \frac{\Delta P_m}{H} \tag{1.5}$$

avec Q le débit de l'eau percolant à travers la colonne, ΔP_m la différence de pression motrice entre le haut et le bas de la colonne et K' une constante dépendant de la perméabilité de la couche poreuse du milieu et du milieu fluide. On peut montrer [89] que $K' = \frac{K}{\mu_f}$ avec K la perméabilité et μ_f la viscosité dynamique du fluide.

On peut généraliser cette loi par :

$$\overrightarrow{V}_f = -\frac{K}{\mu_f}(\nabla P^* - \rho_f \overrightarrow{g}) \tag{1.6}$$

La perméabilité K peut être une constante dans le cas d'une couche poreuse isotrope et un tenseur dans le cas anisotrope et P^* représente la pression en un point du milieu continu fictif.

Les conditions aux limites sur le bord du domaine sont des conditions de glissement :

$$\overrightarrow{V}_f.\overrightarrow{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega$$

en effet même si il y a adhérence du fluide sur le bord du domaine à l'échelle des pores, en "moyenne" sur le V.E.R, le fluide glisse sur ce bord.

La loi de Darcy est vérifiée par de nombreux résultats expérimentaux pour des régimes d'écoulement laminaire. Elle a également été vérifiée par des simulations directes des équations de Navier-Stokes [81] où on vérifie bien cette chute de pression. Selon Bear [9] il existe 3 types de régimes en fonction de Re_p :

- pour $Re_p < 1$, le régime est laminaire, les forces de viscosité sont grandes devant les forces d'inertie, la loi de Darcy est valable.
- pour $1 < Re_p < 150$, des couches limites se développent au niveau des parois solides. En dehors de cette couche limite, il n'y a plus proportionnalité entre le gradient de pression et la vitesse de filtration : la loi de Darcy n'est plus applicable. Ce régime d'écoulement stationnaire laminaire persiste jusqu'à $Re_p = 150$.
- pour $150 < Re_p < 300$ un régime d'écoulement instationnaire prend place.
- $Re_p > 300$ on est en présence d'un écoulement turbulent.

Remarque :
- à l'échelle des pores, les forces prépondérantes sont donc les forces visqueuses, c'est un écoulement déterminé par l'équation de Stokes (loi de Poiseuille appliquée à chaque pore). Il est alors possible de retrouver la loi de Darcy par le biais de la théorie de l'homogénéisation à double échelle d'énergie [86] avec l'hypothèse de périodicité du milieu et d'un écoulement de Stokes.
- il y a une analogie complète entre les équations de Darcy en 2D et les équations régissant la cellule Hell-Shaw. Cette dernière est composée de 2 vitres verticales proches l'une de l'autre d'une distance h, entre lesquelles s'écoule un fluide [28]. On a alors l'équivalence $K \leftrightarrow h^2/2$.

Plusieurs modèles empiriques ont été proposés comme des extensions de la loi de Darcy.

Loi de Darcy-Forchheimer :

Lorsque la vitesse débitante augmente, les forces d'inertie ne sont plus négligeables. Dans ce cas, on montre expérimentalement que pour un gradient de pression fixé, le débit mesuré est plus petit qu'il ne le serait avec la loi de Darcy [73]. Pour prendre en compte cet effet, Forchheimer fut le premier à proposer, en 1901 [42], une modification empirique de la loi de Darcy en reliant non linéairement (par un polynôme du second ordre), la vitesse de filtration et le gradient de pression. La formulation la plus utilisée

est la suivante [73] :

$$\underbrace{\overrightarrow{V}_f}_{\text{due aux frottements visqueux}} + \underbrace{c_F \frac{K^{\frac{1}{2}}}{\mu_f}.||\overrightarrow{V}_f||.\overrightarrow{V}_f}_{\text{due aux pertes inertielles}} = -\frac{K}{\mu_f}(\nabla P^* - \rho_f \overrightarrow{g}) \tag{1.7}$$

avec c_F une constante reflétant la géométrie du milieu et $||.||$ la norme euclidienne de $\mathbb{R}^3$. c_F vaut approximativement 0.55 et dans le cas d'un empilement de sphères on trouve :

$$c_F = 0.55\left(1 - 5.5\frac{d}{D_e}\right) \tag{1.8}$$

avec d le diamètre des billes et D_e le diamètre équivalent de la couche (ici $D_e = aH$).

Il est possible de démontrer cette loi quadratique par la théorie de l'homogénéisation en incluant les premiers termes du transport par inertie en plus des effets visqueux [96].

Muskat [65] propose en 1946 une classification (introduite initialement par Lindquist [58]) du domaine de validité des lois de Darcy et Darcy-Forchheimer. Il distingue 3 zones en fonction du nombre de Reynolds Re :

zone 1 : correspondant à de très faibles Re_p ($Re_p < 1$), la loi de Darcy est valable.

zone 3 : correspondant à de forts Re_p ($10 > Re_p > 1$), la loi de Darcy-Forchheimer est valable.

zone 2 : correspondant à une zone de transition entre les faibles et les grands nombres de Reynolds.

De nombreuses autres relations non linéaires analytiques ont été suggérées pour la description de l'écoulement dans la couche poreuse. Ainsi dans la représentation de Muskat décrite ci-dessus, la difficulté était de décrire correctement la zone 2, c'est à dire la zone de transition. C'est dans ce contexte que Firdaouss et al. [41] ont montré que la première et la seconde zone peuvent être unifiées en une même zone obtenue asymptotiquement en faisant tendre $Re \to 0$. Dans cette nouvelle zone, la loi de Darcy est modifiée par une correction cubique pour la vitesse de filtration. Leur modèle est en accord avec les expériences de G. Chauvetau [21]. Cette correction cubique apparaît également sous certaines hypothèses (E. Skjetne et al. [90], C. Mei et al [61]).

Modèle de Brinkman

Dans le cas où la porosité est importante (de l'ordre de 0.8), il faut tenir compte des effets de diffusion visqueuse au niveau des parois. Il convient donc de rajouter un terme diffusif à la loi de Darcy. Brinkman en 1947 [15] propose le modèle suivant :

$$\nabla P^* = \rho_f \overrightarrow{g} - \frac{\mu_f}{K}\overrightarrow{V}_f + \mu' \triangle \overrightarrow{V}_f$$

où μ' est la viscosité effective qui peut être déterminée expérimentalement [45]. A titre indicatif on trouve pour $\phi = 0.972$ on a $\mu' \sim 7.5\mu_f$. Si K devient grand, l'équation se réduit à l'équation de Stokes avec $\mu_f = \mu'$.

Il est aussi possible d'additionner les effets de Forchheimer et Brinkman avec l'incorporation d'un terme instationnaire moyenné et d'un terme d'advection. On obtient un modèle semi-heuristique [73] :

$$\rho_f \left[\frac{1}{\phi} \frac{\partial \overrightarrow{V}_f}{\partial t^*} + \frac{\overrightarrow{V}_f}{\phi} . \nabla \left(\frac{\overrightarrow{V}_f}{\phi} \right) \right] = - \frac{1}{\phi} \nabla(\phi P^*) + \mu' \Delta \overrightarrow{V}_f - \frac{\mu_f}{K} \overrightarrow{V}_f \ldots \\ \ldots - \frac{c_F \rho_f}{K^{\frac{1}{2}}} \overrightarrow{V}_f ||\overrightarrow{V}_f|| + \rho_f \overrightarrow{g} \tag{1.9}$$

où ϕ peut varier spatialement. L'ajout des termes d'inertie comme dans les équations de Navier-Stokes s'avère limité. A part pour des perméabilités élevées et des vitesses vraiment élevées, ce terme peut être négligé par rapport à la correction Forchheimer. Quant au terme instationnaire, il est utile pour des vitesses très élevées ($Re_p > 150$). Nous montrerons dans la suite que ces termes sont négligeables lorsque qu'on adimensionne les équations (voir le paragraphe 1.3.3.2) .

Remarque : la gamme des vitesses utilisées dans les expériences de convection mixte de M. Combarnous [26] (par exemple $Re_p \simeq 1,2$ pour les expériences avec de l'eau) sont en adéquation avec le domaine de validité des équations de Darcy-Forchheimer.

1.3.1.3 Equation de conservation de l'énergie

La convection en milieu poreux favorise le transfert de chaleur entre la paroi chaude et la paroi froide. Ce transfert de chaleur est assuré à la fois par la phase fluide et la phase solide. Or ces deux phases ne possèdent ni la même capacité thermique (respectivement $(\rho c)_f, (\rho c)_s$ pour la phase fluide et la matrice solide), ni la même conductivité thermique (respectivement λ_f, λ_s). Pour cette raison et dans le but de tenir compte du transfert de chaleur lié à la présence des 2 phases, Combarnous et Bories [29] avaient proposé un modèle de deux équations d'énergie décrivant l'évolution de la température des deux phases :

$$\phi(\rho c)_f \frac{\partial T_f^*}{\partial t^*} + (\rho c)_f \overbrace{\phi \overrightarrow{V}_i}^{\overrightarrow{V}_f} . \nabla T_f^* = div[\lambda_f^* \nabla T_f^*] - h(T_f^* - T_s^*) \tag{1.10}$$

$$(1-\phi)(\rho c)_s \frac{\partial T_s^*}{\partial t^*} = div[\lambda_s^* \nabla T_s^*] - h(T_s^* - T_f^*) \tag{1.11}$$

avec $T_{f,s}^*$ désignant la température, moyennée sur un V.E.R, les indices $_{f,s}$ désignent la partie fluide et la matrice solide. Au regard de (1.10) et (1.11), on constate que si $T_s > T_f$, soit $T_s - T_f > 0$, le transfert de chaleur est compté positivement de la matrice solide vers la phase fluide.

Les scalaires λ_s^* et λ_s^* sont des coefficients de conductivité thermique équivalente et dépendent [1] des coefficients de conductivité thermique propre λ_f et λ_s et de la porosité ϕ. Ils dépendent aussi entre autres paramètres :

[1] si le milieu est isotrope ce sont des scalaires ; si le milieu est anisotrope, ce sont des tenseurs, par hypothèse ils sont sphériques

- pour λ_f^*, de la dispersion hydrodynamique dûe à la présence du squelette solide.
- pour λ_s^*, de l'état de division de la phase solide.

Le coefficient de transfert entre les 2 phases, h, dépend, par analyse dimensionnelle :
- des caractéristiques thermiques de la phase fluide et de la matrice solide (conductivité et chaleur volumique)
- de la porosité ϕ
- une dimension caractéristique du milieu poreux par exemple $\sqrt{K}$ avec K la perméabilité ou alors la taille d'un pore, d'un grain, d'une fibre.

h peut-être déterminé expérimentalement de manière indirecte [73].

Lorsque l'on suppose l'équilibre thermique entre la phase fluide et la matrice solide on a alors $T_f^* = T_s^*$ (le coefficient de transfert $h \to \infty$). Sa justification repose sur la comparaison des temps caractéristiques de mise à l'équilibre thermique du milieu poreux. Sa validité a été systématiquement étudiée dans [79]. Pour les modèles variant entre $10^{-2} < \frac{\lambda_s}{\lambda_f} < 10^3$, on observe qu' au cours d'un processus transitoire, l'écart maximal entre les températures moyennes adimensionnées de chaque phase est de l'ordre de 10%.

On en déduit par sommation termes à termes des équations (1.11) et (1.10), le modèle de transfert de chaleur le plus couramment utilisé pour les milieux poreux (équation de transport-diffusion) :

$$(\rho c)^* \frac{\partial T^*}{\partial t^*} + (\rho c)_f \overrightarrow{V}_f . \nabla T^* \quad = div[\lambda^* \nabla T^*] \tag{1.12}$$

avec T^* la température équivalente du milieu poreux, $(\rho c)^* = \phi(\rho c)_f + (1-\phi)(\rho c)_s$ la chaleur spécifique volumique équivalente (car additivité des enthalpies donc des chaleurs spécifiques volumiques) et $\lambda^* = \lambda_f^* + \lambda_s^*$. Généralement λ^* est mesurée expérimentalement mais il dépend de la température. On le prendra constant dans la suite. On peut quand même en donner une approximation assez simple. Parmi les modèles les plus usuels [73], on distingue :
- les modèles séries $\lambda^\perp$, définis par un milieu constitué de strates de solide et de fluide perpendiculaire au transfert de chaleur, on obtient :

$$\lambda^\perp = \phi\lambda_f + (1-\phi)\lambda_s$$

- les modèles parallèles $\lambda^\parallel$, définis par un milieu constitué de strates de solide et de fluide parallèles au transfert de chaleur, on obtient :

$$\frac{1}{\lambda^\parallel} = \frac{\phi}{\lambda_f} + \frac{1-\phi}{\lambda_s}$$

Ces approximations permettent d'encadrer λ^* :

$$\lambda^\perp < \lambda^* < \lambda^\parallel$$

Si λ^* ne varie pas spatialement, on peut écrire :

$$\frac{(\rho c)^*}{(\rho c)_f} \frac{\partial T^*}{\partial t^*} + \overrightarrow{V}_f . \nabla T^* = \kappa^* \Delta T^*$$

avec $\kappa^* = \frac{\lambda^*}{(\rho c)_f}$ le coefficient de diffusivité thermique équivalente.

1.3.2 Conditions aux limites

Pour une couche poreuse semi-infinie $[0, \infty], [0, aH], [0, H]$, dans le repère (x^*, y^*, z^*) (voir la figure 1.1), on impose les conditions aux limites suivantes :

- pour la vitesse, on utilise l'équation de Darcy ou Darcy-Forchheimer, avec :
  - des conditions de glissement à la frontière (parois imperméables) :

$$\overrightarrow{V}_f.\overrightarrow{n} = 0 \text{ sur la surface en } z^* = 0, H \text{ et } y^* = 0, aH$$

  - une condition de débit imposée, à l'entrée :

$$\int_0^H \int_0^{aH} \overrightarrow{V}_f.\overrightarrow{n} dS = Q$$

- pour la température, on utilise l'équation de l'énergie avec :
  - des parois latérales verticales adiabatiques (bloc de makrolon dans les expériences de Combarnous) :

$$\frac{\partial T^*}{\partial y^*} = 0 \text{ pour } y^* = 0, aH$$

  - des parois horizontales isothermes :

$$T^* = T_0^* \text{ pour } z^* = 0 \text{ et } T^* = T_1^* \text{ pour } z^* = 1$$

1.3.3 Adimensionnalisation et solution de conduction

1.3.3.1 Equations adimensionnées

Toutes les grandeurs physiques du problème peuvent être exprimées à l'aide de quatre grandeurs fondamentales : la longueur [m], la masse [kg], la température [K] et le temps [s]. Or les phénomènes physiques sont indépendants du choix de l'unité, ils dépendent donc de nombres sans dimension. Pour cela on adimensionne toutes les grandeurs par les échelles de références suivantes :

- pour la longueur : $L_0 = H$
- pour le temps : $t_0 = H^2 \frac{(\rho c)^*}{\lambda^*}$
- pour la température : $\delta T_0 = T_0^* - T_1^*$
- pour la vitesse de filtration : $v_0 = \frac{\lambda^*}{H(\rho c)_f}$
- pour la pression : $p_0 = \frac{\lambda^* \mu_f}{K(\rho c)_f}$

La longueur de référence représente la hauteur H sur laquelle se développe principalement le phénomène de convection.

Le temps de référence représente le temps de diffusion thermique équivalent sur une surface H^2.

La température de référence au sein du milieu est comprise entre la température de la plaque du haut et celle du bas, alors la différence de température donne la référence.

En milieu poreux, la vitesse de filtration de référence est basée sur le temps caractéristique de diffusion thermique κ^* et la longueur caractéristique H où seule la partie fluide est en mouvement d'où le terme $(\rho c)_f$ et non $(\rho c)^*$.

Au regard de la loi de Darcy, on construit la pression de référence à partir de la vitesse de référence et la longueur de référence mais aussi les coefficients reliant la pression et la vitesse dans Darcy-Forchheimer.

On effectue le changement de variable suivant :

$$\begin{cases} t = t^*/t_0 \\ (x,y,z) = (x^*,y^*,z^*)/L_0 \\ \overrightarrow{V} = \overrightarrow{V}_f/v_0 \\ P = P^*/p_0 \\ T = (T^* - T_0^*)/\delta T_0 \end{cases}$$

dans les équations (1.12)-(1.7)-(1.4).

La couche poreuse est maintenant décrite par : $(x,y,z) \in [0,\infty[.[0,a].[0,1]$ où a représente le rapport de forme transversal de la couche poreuse. Le **système adimensionné** régissant l'écoulement dans cette couche s'écrit dans le cas général :

$$\left(\frac{1}{\phi}Da\frac{M}{Pr^*}\right)\frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + \left(\frac{1}{\phi}\frac{Da}{Pr^*}\right)\overrightarrow{V}\nabla\left(\frac{\overrightarrow{V}}{\phi}\right) = -\frac{1}{\phi}\nabla(\phi P) + \Lambda Da\Delta\vec{V} - \vec{V}\ldots \tag{1.13}$$
$$\ldots - \mathcal{F}||\vec{V}||\vec{V} + RaT\vec{e}_z$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\vec{V}\cdot\vec{\nabla}T + \Delta T \tag{1.14}$$

$$div(\vec{V}) = 0 \tag{1.15}$$

avec les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} \vec{V}\cdot\vec{e}_z = 0 & \text{et } \overbrace{T = 1 \text{ en } z = 0}^{\text{plaques isothermes}} \\ \vec{V}\cdot\vec{e}_z = 0 & \text{et } T = 0 \text{ en } z = 1 \\ \vec{V}\cdot\vec{e}_y = 0 & \text{et } \dfrac{\partial T}{\partial y} = 0 \text{ en } y = 0 \\ \underbrace{\vec{V}\cdot\vec{e}_y = 0}_{\text{condition de glissement}} & \text{et } \underbrace{\dfrac{\partial T}{\partial y} = 0 \text{ en } y = a}_{\text{paroi adiabatique}} \end{cases} \tag{1.16}$$

et la condition de débit :

$$\int_0^a\int_0^1 \vec{V}\cdot\vec{e}_x dydz = aPe \tag{1.17}$$

Ce système d'équations et les conditions aux limites font intervenir les nombres sans dimension suivants :

Nombre de Rayleigh de filtration Ra :
Le nombre de Rayleigh de filtration défini par :

$$Ra = \frac{Kg\alpha_f H(T_0^* - T_1^*)(\rho c)_f}{\lambda^* \nu_f} \tag{1.18}$$

En effet, en convection naturelle, les effets stabilisants se traduisent par la diffusion thermique du fluide en mouvement où le temps caractéristique lors d'un trajet H d'une particule est $H^2 \frac{(\rho c)_f}{\lambda^*}$. Les effets stabilisants sont également dus à la viscosité où le temps caractéristique associé est $\frac{K}{\nu_f}$. De ce fait, le temps caractéristique de stabilisation est $t^2_{stabilisation} = \frac{H^2(\rho c)_f K}{\lambda^* \nu_f}$. Les effets déstabilisants proviennent de la poussée d'Archimède par variation de la densité, le temps de relaxation associé est donc : $t^2_{destablissation} = \frac{H}{\alpha_f(T_0 - T_1)g}$. Le nombre de Rayleigh est donc le rapport des 2 temps :

$$Ra = t^2_{stabilisation}/t^2_{destablissation}$$

Nombre de Péclet Pe :
Le nombre de Peclet représente le rapport du transport convectif sur le transport diffusif de la température et s'écrit :

$$Pe = \frac{V_e H(\rho c)_f}{\lambda^*}$$

avec $V_e = \frac{Q}{aH^2}$ la vitesse de filtration moyenne à l'entrée du domaine.

Nombre de Prandtl poreux Pr^* :
Pour la phase fluide, ce nombre traduit la nature même du fluide en rapportant les temps caractéristiques de diffusion thermique $t_{thermique} = H^2/\kappa_f$ pour l'échelle de référence H sur les temps caractéristiques de viscosité $t_{visqueux} = H^2/\nu_f$ pour la même échelle H.

$$Pr_f = \frac{t_{thermique}}{t_{visqueux}} = \frac{\nu_f}{\kappa_f}$$

avec $\kappa_f = \frac{\lambda_f}{(\rho c)_f}$ la diffusivité thermique du fluide.

De même, en milieu poreux on rapporte les temps caractéristiques de diffusion thermique du milieu poreux pour l'échelle de référence H ($t_{thermique} = H^2/\kappa^*$) sur les temps caractéristiques de viscosité de la phase fluide pour la même échelle H ($t_{visqueux} = H^2/\nu_f$), soit :

$$Pr^* = \frac{\nu_f}{\kappa^*}$$

avec $\kappa^* = \frac{\lambda^*}{(\rho c)_f}$ le coefficient de diffusivité thermique équivalente.

Nombre de Darcy Da :

Ce nombre traduit la finesse du milieu poreux. Il est défini par :

$$Da = \frac{K}{H^2}$$

Pour les milieux de faible granulométrie, le nombre de Darcy prend de très faibles valeurs comprises entre 10^{-6} et 10^{-8}.

Terme de Forchheimer $\mathcal{F}$:
Le terme de Forchheimer $\mathcal{F}$, comme nous l'avons vu nous donne l'intensité du terme non linéaire dans (1.20). Il est défini par :

$$\mathcal{F} = c_F \frac{Da^{\frac{1}{2}}}{Pr^*}$$

avec c_F la constante géométrique dépendant de la géométrie du milieu (voir (1.8)).

Nombre de Reynold Re_K :
On a déjà construit le nombre de Reynolds à l'échelle des pores Re_p (voir (1.3)). Nous pouvons construire également le nombre de Reynolds pour le milieu poreux à partir d'une longueur équivalente induit par la perméabilité K, soit :

$$Re_K = c_F \frac{V_e K^{\frac{1}{2}}}{\nu_f} = \mathcal{F} Pe \tag{1.19}$$

Nombre M :
Ce nombre est caractéristique de la couche poreuse. Il représente le rapport de la capacité thermique du fluide sur la capacité thermique du milieu poreux :

$$M = \frac{(\rho c)_f}{(\rho c)^*}$$

On a souvent $M \sim 1$.

Nombre Λ :
Ce nombre représente le rapport de la viscosité dynamique du milieu à celle du fluide :

$$\Lambda = \frac{\mu'}{\mu}$$

1.3.3.2 Simplification du modèle

Dans les expériences étudiées ici [26], [28], ϕ est constant spatialement ($\phi \sim 0.3, 0.4$) et les nombres sans dimension sont de l'ordre de : $Da \sim 10^{-5}$, $Pr^* \sim 10$, $Pr_f \sim 10$, $\frac{\lambda^*}{\lambda_f} \sim 1$, $M \sim 1$ et $\Lambda \sim 1$ (porosité faible). On en conclut donc que l'extension de Brinkman, le terme instationnaire et le terme d'avection qui sont de l'ordre de Da, peuvent être négligeabés devant les autres termes en particulier devant $\mathcal{F}$ (de l'ordre de $\sqrt{Da}$). Pour pouvoir prendre en compte l'inertie du milieu poreux, on utilise la loi

de Darcy-Forchheimer. L'instationnarité provient alors du transport de la température. Le système (1.13)-(1.15)-(1.14) avec les conditions aux limites (1.17)-(1.16) devient :

$$\vec{V} + \mathcal{F}||\vec{V}||\vec{V} = -\nabla P + RaT\vec{e}_z \tag{1.20}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\vec{V}\cdot\vec{\nabla}T + \Delta T \tag{1.21}$$

$$div(\vec{V}) = 0 \tag{1.22}$$

avec les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} \vec{V}\cdot\vec{e}_z = 0 & \text{et } \overbrace{T = 1 \text{ en } z = 0}^{\text{plaques isothermes}} \\ \vec{V}\cdot\vec{e}_z = 0 & \text{et } T = 0 \text{ en } z = 1 \\ \vec{V}\cdot\vec{e}_y = 0 & \text{et } \dfrac{\partial T}{\partial y} = 0 \text{ en } y = 0 \\ \underbrace{\vec{V}\cdot\vec{e}_y = 0}_{\text{condition de glissement}} & \text{et } \underbrace{\dfrac{\partial T}{\partial y} = 0 \text{ en } y = a}_{\text{paroi adiabatique}} \end{cases} \tag{1.23}$$

et la condition de débit :

$$\int_0^a \int_0^1 \vec{V}\cdot\vec{e}_x dydz = aPe \tag{1.24}$$

Remarque :

Le système (1.20)-(1.22)-(1.21) avec les conditions aux limites (1.24)-(1.23) est donc piloté par 4 paramètres indépendants : $Pe, Ra, a, \mathcal{F}$. Pour les expériences de M.C. Combarnous : le rapport de forme est fixe $a = \frac{37}{5.35} \simeq 6.91$, $\mathcal{F}$ est de l'ordre de 10^{-4}, Pe varie entre 0 et 40 et Ra entre 0 et 1300 (dans le régime turbulent).

1.3.3.3 solution de conduction

Une solution stationnaire simple du système (1.20)-(1.22)-(1.21) avec les conditions aux limites (1.24)-(1.23) peut être trouvée et ce quelque soit $Ra, Pe, \mathcal{F}, a$, c'est **la solution de conduction** définie par :

$$\begin{cases} \vec{V}_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Pe \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ T_0 = 1 - z \\ P_0 = Ra\left(z - 1/2\, z^2\right) - Pe(1 + Re_K)x + cste \end{cases} \tag{1.25}$$

Elle est caractérisée par un profil linéaire de la température et également un écoulement principal suivant x.

1.4 Conclusion

Nous avons exposé les travaux expérimentaux de M. Combarnous [28]-[26] ainsi que les travaux théoriques et numériques antérieurs. Ensuite nous avons défini les caractéristiques rhéologiques des milieux poreux. Enfin nous avons présenté une modélisation mathématique du problème basée sur l'équation de Darcy corrigée par le terme de Forchheimer. Par ailleurs, les paramètres adimensionnés pertinents du problème ont été déterminés ainsi que l'état de conduction.

A partir des équations développées précédemment, il est possible d'étudier la stabilité de l'état de conduction en fonction des paramètres adimensionnés du problème.

Chapitre 2

Analyse de stabilité de la solution de conduction

Ce chapitre est consacré à l'étude linéaire des instabilités qui apparaissent lorsque l'état de conduction (1.25) se déstabilise. Il s'agit d'étudier l'évolution au cours du temps d'une perturbation infinitésimale, qui peut simuler, par exemple, le bruit inhérent aux situations réelles. Si cette perturbation s'amplifie asymptotiquement dans le temps, la solution de conduction est dite **instable**, dans le cas contraire, elle est dite **stable**. Dans le cas particulier où elle n'est ni amplifiée, ni atténuée, on parle de *stabilité marginale*. Cette approche temporelle de stabilité est utile pour déterminer les modes les plus déstabilisants ainsi que les conditions critiques de leur émergence.

Or dans un système de fluide ouvert comme celui que l'on étudie, le taux de croissance des modes les plus instables peut ne pas être suffisant pour endiguer le phénomène de transport dû à la présence de l'écoulement horizontal. Dans ce cas, toute impulsion localisée est à la fois amplifiée et advectée, de telle sorte qu'en un point fixé de l'espace, le système relaxe vers l'état de conduction pour un temps asymptotiquement grand. En revanche, on peut déterminer les paramètres physiques pour lesquels toute perturbation localisée croît au cours du temps et envahit tout le domaine spatial, y compris contre l'écoulement principal. La distinction entre les deux dynamiques différentes peut être faite grâce à l'analyse de stabilité spatio-temporelle.

Les deux approches, temporelle et spatio-temporelle de stabilité linéaire sont menées au cours de ce chapitre. Les résultats qui en découlent sont comparés à ceux obtenus par P. Carrière et P.A. Monkewitz [18] et X. Nicolas [71] et qui concernent le problème de Poiseuille-Rayleigh-Bénard.

2.1 Formulation du problème et équation de dispersion

L'analyse linéaire qui correspond à l'étude de l'évolution d'une perturbation infinitésimale, donne une *condition suffisante d'instabilité*, l'état étudié est *linéairement* stable ou instable. En effet même si un état peut être stable vis à vis d'une pertur-

bation infinitésimale, il ne l'est peut-être pas vis à vis d'une perturbation d'amplitude finie (analyse non linéaire). Néanmoins l'analyse linéaire permet d'obtenir les seuils d'instabilité primaire, les nombres d'onde et les fréquences des structures bifurquées.

Pour la convection mixte, le système (1.20)-(1.22)-(1.21) avec les conditions aux limites (1.24)-(1.23), dépend de 4 paramètres :

- le rapport de forme a
- le nombre de Reynolds Re_K
- le nombre de Rayleigh Ra
- le nombre de Péclet Pe

En superposant à la solution de conduction (1.25), de petites perturbations de la vitesse $\vec{v} = (u, v, w)^T$, de la température θ et de la pression p :

$$\begin{cases} \vec{V} = \vec{V_0} + \vec{v}(\overrightarrow{X}, t) \\ T = T_0 + \theta(\overrightarrow{X}, t) \\ P = P_0 + p(\overrightarrow{X}, t) \end{cases} \tag{2.1}$$

avec $\overrightarrow{X} = (x, y, z)$. On reporte (2.1) dans (1.20)-(1.22). Après linéarisation on obtient un système vérifié par les perturbations :

$$\begin{cases} u(1 + 2Re_K) + \dfrac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ v(1 + Re_K) + \dfrac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ w(1 + Re_K) + \dfrac{\partial p}{\partial z} - Ra\theta = 0 \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial t} + Pe\dfrac{\partial \theta}{\partial x} - \Delta\theta - w = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z} = 0 \end{cases} \tag{2.2}$$

Les conditions aux limites pour les perturbations sont :
- $\theta = w = 0$ pour $z = 0$ et $z = 1$
- $\frac{\partial \theta}{\partial y} = v = 0$ pour $y = 0$ et $y = a$

Le système est limité suivant y et z et considéré comme semi-infini, homogène et isotrope dans la direction x avec des conditions aux limites qui sont indépendantes de x et t. Dans ces conditions on peut chercher les u, v, w, θ, p sous la forme de mode de Fourier suivant x et oscillant dans le temps à la fréquence ω. Le système (2.2) admet

des solutions de la forme [1] :

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ \theta \\ p \end{pmatrix} = \overrightarrow{E}_{n,m} = e^{i(kx-\omega t)} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \cos(n\pi z)\cos(\frac{m}{a}\pi y) \\ v_1 \cos(n\pi z)\sin(\frac{m}{a}\pi y) \\ w_1 \sin(n\pi z)\cos(\frac{m}{a}\pi y) \\ \theta_1 \sin(n\pi z)\cos(\frac{m}{a}\pi y) \\ p_1 \cos(n\pi z)\cos(\frac{m}{a}\pi y) \end{pmatrix} + C.C \tag{2.3}$$

où $C.C$ est le complexe conjugué, u_1, v_1, w_1, θ_1, et p_1 sont les amplitudes des perturbations, k est le nombre d'onde dans la direction de l'écoulement, alors que m est un entier. Le cas $m = 0$ correspond à des rouleaux transversaux (d'axe perpendiculaire à la direction de l'écoulement moyen) et $k = 0$ caractérise les structures convectives prenant la forme de m rouleaux longitudinaux (d'axe parallèle à la direction de l'écoulement). Lorsque $k \neq 0$ et $m \neq 0$, on obtient un mode complétement tridimensionnel. Le système (2.2) en tenant compte de (2.3), se réécrit pour les amplitudes sous la forme

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1+2\,Re_K & 0 & 0 & 0 & ik \\ 0 & 1+Re_K & 0 & 0 & -\left(\frac{m\pi}{a}\right) \\ 0 & 0 & 1+Re_K & -Ra & -n\pi \\ 0 & 0 & -1 & (n\pi)^2+\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - i\omega + iPek + k^2 & 0 \\ ik & \left(\frac{m\pi}{a}\right) & n\pi & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{=\mathcal{K}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ T_1 \\ P_1 \end{pmatrix}}_{\mathcal{E}_1} = 0 \tag{2.4}$$

Le système (2.4) admet une solution non triviale ($\mathcal{E}_1 \neq 0$) si et seulement si $\det(\mathcal{K}) = 0$. Cela conduit à une relation de dispersion reliant k et ω qui s'écrit :

$$\begin{aligned} D_\Phi(k,\omega) = &- i\omega + ikPe + k^2 + (n\pi)^2 + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \dots \\ &\dots - \frac{Ra}{1+Re_K}\left(\frac{k^2(1+Re_K) + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2(1+2Re_K)}{\left((n\pi)^2 + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right)(1+2Re_K) + k^2(1+Re_K)}\right) = 0 \end{aligned} \tag{2.5}$$

avec les paramètres $\Phi = [\frac{m}{a}, Ra, Pe, Re_K]$ En toute généralité $k = k_r + ik_i \in \mathbb{C}$ et $\omega = \omega_r + i\omega_i \in \mathbb{C}$ avec l'interprétation suivante :

- $\Re(k) = k^r$: nombre d'onde
  $\Im(k) = -k^i$: taux de croissance spatial (à 1 temps fixé t, lorsque $k_i < 0$ l'instabilité s'amplifie dans l'espace pour $x > 0$ sinon elle s'amortit)
- $\Re(\omega) = \omega^r$: fréquence de l'onde
  $\Im(\omega) = \omega^i$: taux de croissance temporelle (en 1 point fixé x, lorsque $\omega_i > 0$ l'instabilité s'amplifie au cours du temps, sinon elle s'amortit)

[1] En toute rigueur il faut écrire la solution sous la forme d'une somme de ces modes à l'aide d'une transformée de Fourier suivant x et t (car le système est infini dans la direction x) et à l'aide d'une série de Fourier suivant y et z (car le système est limité suivant y et z). La linéarité du système permet de traiter les modes séparément et en plus, indépendamment les uns des autres car ici chacun d'eux vérifient exactement les conditions aux limites.

Deux approches de stabilité linéaire sont adoptées. Lorsque la perturbation est supposée être étendue dans tout le système, une approche temporelle est suffisante. En revanche, la réponse du système à une perturbation localisée nécessite une analyse spatio-temporelle.

remarque : Lorsque la hauteur H et la largeur $a.H$ de la couche poreuse sont finies et petites devant la longueur du milieu, on peut considérer que la perturbation est spatialement étendue suivant les axes z et y. La croissance spatiale de la perturbation s'effectue suivant la direction principale de l'écoulement x. Les solutions sont alors de la forme $\overrightarrow{E}_{n,m}$. Mais lorsque a (l'axe y) devient très grand voir infini (domaine infini ou semi-infini), on doit introduire des solutions sous la forme $e^{i(k_x.x+k_y.y-\omega t)}.\cos\backslash\sin(n\pi z)$: on passe d'une série de Fourier ($\cos/\sin\frac{m}{a}\pi y$) à une transformée de Fourier ($e^{i.k_y.y}$).

2.2 Approche temporelle

A priori, il y a une infinité de modes (ω, k), solutions non triviales du système (2.4). Comme l'écoulement n'est pas tout le temps instable, on s'intéresse pour l'instant à la naissance des premiers modes déstabilisant la solution de conduction. Pour cela il faut effectuer une étude d'instabilité temporelle. Elle consiste à étudier l'évolution temporelle de la perturbation en supposant :

$$\boxed{k = k_r \in \mathbb{R} \text{ et } \omega \in \mathbb{C}}$$

Lorsque la perturbation n'est ni amplifiée ni atténuée, nous sommes dans les conditions de stabilité marginale qui sont atteintes pour :

$$\omega_i = 0 \tag{2.6}$$

Dans ce cas, on peut extraire les expression du nombre de Rayleigh Ra et de la fréquence ω_r, en fonction du reste des paramètres :

$$\omega_r = k_r.Pe \tag{2.7}$$

$$Ra^{(m)}(k) = \left((n\pi)^2 + k^2 + \left(\frac{m}{a}\pi\right)^2\right)(1 + Re_K).\frac{\pi^2\left((n\pi)^2+k^2+\left(\frac{m}{a}\pi\right)^2\right)}{\left(\frac{k^2}{1+2Re_K}+\frac{\left(\frac{m}{a}\pi\right)^2}{1+Re_K}\right)} \tag{2.8}$$

Le minimum de Ra est obtenu pour $n = 1$ ce qui fixe le nombre de rouleaux suivant la hauteur [2]. Il est intéressant de caractériser les modes les plus instables selon que k est nul ou non.

2.2.1 Stabilité vis à vis des rouleaux longitudinaux fixes et des structures tridimensionnelles oscillatoires

rouleaux longitudinaux R.L ($k = 0$) :

[2] à priori, les autres modes ont des seuils critiques d'apparition au moins $Ra_c^{(n,m)} > 4.(n\pi)^2$.

Les rouleaux longitudinaux fixes (R.L) sont décrits par $k = 0$ et $\omega = 0$. La relation (2.8) donne $Ra^{(m)} = \pi^2(\frac{a}{m} + \frac{m}{a})^2(1 + Re_K)$. Les modes longitudinaux les plus déstabilisants correspondent à l'entier $m_\parallel$ rendant $\frac{a}{m} + \frac{m}{a}$ le plus petit possible. Le seuil d'apparition des rouleaux longitudinaux est par conséquent :

$$Ra_c^\parallel = \pi^2 \left(\frac{a}{m_\parallel} + \frac{m_\parallel}{a} \right)^2 (1 + Re_K). \tag{2.9}$$

Pour un rapport de forme a fixé, ce seuil est une fonction croissante de Re_K : le débit tend à stabiliser l'état de conduction. Pour Re_K fixé, la figure 2.1 représente le seuil $Ra_c^\parallel$ en fonction du rapport de forme transversal a.

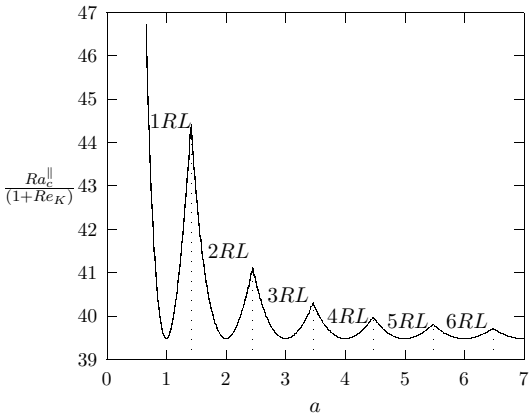


FIG. 2.1 – Seuil critique $Ra_c^\parallel$ (normalisé par $1 + Re_K$) d'apparition des rouleaux longitudinaux ainsi que le nombre de rouleaux $m_\parallel$ (noté RL) en fonction du rapport de forme a.

Nous indiquons aussi le nombre $m_\parallel$ des R.L naissants. Le nombre $m_\parallel$ de rouleaux longitudinaux dépend de a :

- lorsque a est entier, $Ra_c^\parallel$ est minimal et vaut $4\pi^2(1 + Re_K)$, avec $m_\parallel = a$. Les maxima locaux de $Ra_c^\parallel$ décroissent et se rapprochent de $4\pi^2(1 + Re_K)$ lorsque les parois latérales sont écartées puis rejetées à l'infini, en accord avec [82].
- lorsque $a^2 < [a][a + 1] = a_L^2$ alors $m_\parallel = [a]$ [3].
- lorsque $a^2 > a_L^2$ alors $m_\parallel = [a + 1]$
- lorsque $a^2 = a_L^2$, deux modes longitudinaux, constitués de $[a]$ et $[a] + 1$ rouleaux, sont simultanément amplifiés : $\omega = 0$ est une valeur propre de multiplicité 2. Cette situation correspond aux maxima locaux de la figure 2.1.

Récemment, Alves, Cotta et Pontes [2] ont déterminé les conditions critiques pour lesquelles la convection naturelle bidimensionnelle pourrait être le siège d'une transition de $[a]$ rouleaux impairs à $[a]+2$ rouleaux. Ces conditions critiques ont été déterminées à la fois par une analyse de stabilité linéaire et par une intégration numérique d'équations non linéaires obtenues par la méthode des transformations intégrales.

Les R.L sont donc décrits au seuil $Ra_c^\parallel$ par $m_\parallel$. La solution non triviale $\mathcal{E}_1$ du système (2.4) donne une relation entre les amplitudes. En effet si on note $w_1 = \frac{B_0}{2}$, on

[3] le symbole $[\ldots]$ désignant la partie entière.

obtient :

$$\begin{cases} u_1 = 0. \\ v_1 = -\dfrac{B_0\pi}{2l_0} \\ w_1 = \dfrac{B_0}{2} \\ \theta_1 = \dfrac{B_0}{2\left(\pi^2 + {l_0}^2\right)} \\ p_1 = -\dfrac{B_0\pi\ (1 + Re_K)}{2{l_0}^2} \end{cases}$$

avec $l_0 = \pi\frac{m_\parallel}{a}$. Connaissant le champ de vitesse total $\overrightarrow{V}(\overrightarrow{X}, t) = \overrightarrow{V}_0 + \overrightarrow{v}(\overrightarrow{X}, t)$, il est possible d'en déduire la forme des structures et la trajectoire des particules de fluide. En effet la trajectoire décrit le suivi d'une particule au cours du temps $\overrightarrow{X}(t)$, initialement repéré en $\overrightarrow{X}(t = 0) = \overrightarrow{X}_0$ évoluant dans le champ de vitesse $\overrightarrow{V}(\overrightarrow{X}(t), t)$.

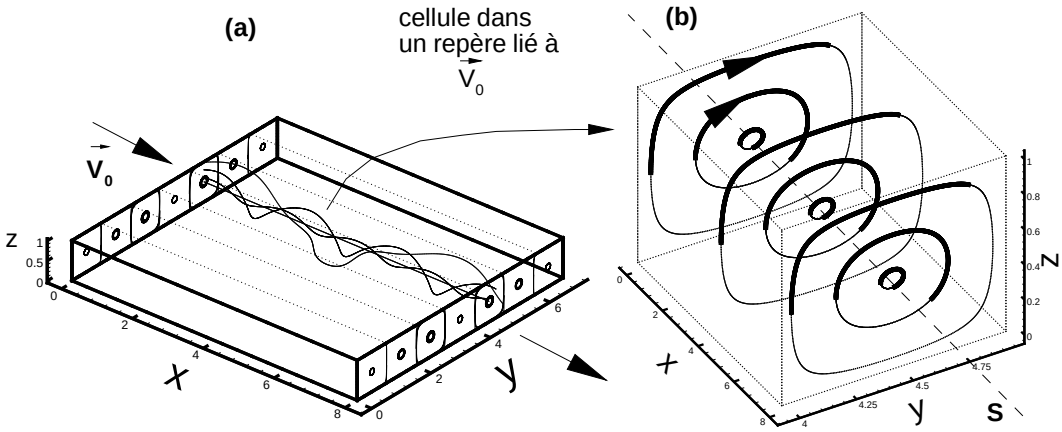


FIG. 2.2 – Représentation des R.L avec $a = 6.91$ donc $m_{\parallel=7}$ et $B_0 = 0.1$, $Pe = 0.1$. Sur la figure (a), on a représenté l'écoulement formé de la combinaison de R.L et de l'écoulement moyen de vitesse $\vec{V}_0 = Pe.\vec{e}_x$ avec les trajectoires de 4 particules différentes. Sur la figure (b) on représente 1 rouleau particulier avec les trajectoires de 9 particules initialement dans le plan $z = 0.5$ mais dans un repère galiléen évoluant avec la vitesse entrante $\vec{V}_0$. La ligne épaisse représente la trajectoire des particules au bout du même temps. On a contracté la dimension suivant x par rapport à la figure (a).

Pour connaître la trajectoire, il suffit de résoudre le système :

$$\begin{cases} \overrightarrow{X}(t = 0) = \overrightarrow{X}_0 \\ \dfrac{d\overrightarrow{X}}{dt}(t) = \overrightarrow{V}(\overrightarrow{X}(t), t) \end{cases}$$

ici c'est un système autonome $\overrightarrow{V}(\overrightarrow{X}(t),t) = \overrightarrow{V}(\overrightarrow{X}(t))$. La résolution s'effectue numériquement par une méthode Runge-Kutta d'ordre 4. Le résultat est illustré sur la figure 2.2. On observe que les particules près du coeur de la cellule ont une vitesse plus faible que celles qui sont à l'extérieur. On observe ce type de trajectoires, caractéristique des R.L, dans des simulations numériques directes de la convection naturelle dans un cube ([88]).

structures tridimensionnelles oscillatoires S.O.3D ($k \neq 0$) :

Le nombre d'onde critique est obtenu en minimisant Ra vérifiant (2.8) par rapport à k, qui décrit $]0,+\infty[$, et m, qui est entier. Pour chaque valeur de m fixée, le minimum de Ra est atteint lorsque

$$k^2 = \frac{\pi^2\left(-\frac{m^2}{a^2}(1+2Re_K) + \sqrt{(1+2Re_K)\left(Re_K(1-\frac{m^2}{a^2})+1\right)}\right)}{1+Re_K} \tag{2.10}$$

à condition que $k^2 \geq 0$, c'est à dire :

$$\frac{m^2}{a^2} < \frac{1+Re_K}{1+2Re_K} \leq 1 \tag{2.11}$$

Le seuil d'apparition des structures tridimensionnelles est alors :

$$Ra_c^{3D} = \left(\sqrt{1+Re_K\,(1-\frac{m_{3D}^2}{a^2})} + \sqrt{1+2Re_K}\right)^2 \pi^2, \tag{2.12}$$

où m_{3D} est le plus grand entier vérifiant (2.11), on notera k_c le nombre d'onde (2.10) associé à m_{3D}. En imposant $Re_K = 0$ ($i.e.\mathcal{F} = 0$) dans les relations (2.9)- (2.12), nous retrouvons les résultats issus du modèle de Darcy, indiquant que, pour $a > 1$, $[a]+1$ modes sont simultanément amplifiés à partir de $Ra_c = 4\pi^2$. De plus, le nombre d'onde du mode à m rouleaux dans la direction transverse est $k_c^2 = \pi^2\left(1-\frac{m^2}{a^2}\right)$. **Le débit et l'inertie poreuse détruisent cette dégénérescence en sélectionnant un seul mode tridimensionnel.**

Nous avons tracé sur la figure 2.3, Ra_c^{3D} en fonction de Re_K (relativement faible) pour $a = 6.91$. Pour ce rapport de forme et pour Re_K relativement faible, la relation (2.11) indique que les modes instables correspondent à $m = 0,\ldots,6$. De plus, le mode le plus instable est un mode tridimensionnel avec $m = m_{3D} = 6$.

La solution non triviale $\mathcal{E}_1$ du système (2.4) donne une relation entre les amplitudes.

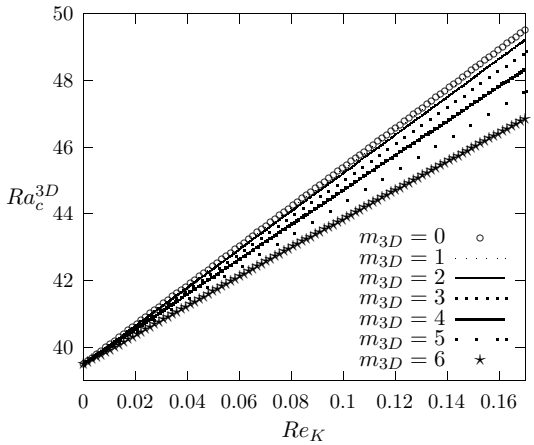


FIG. 2.3 – Ra_c^{3D} fonction de Re_K et différent $m = 0 \ldots 6$ pour $a = 6.91$.

En effet si on note $w_1 = A_0$, on obtient :

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{ik_c\, A_0 \pi\ (1 + Re_K)}{(2\, Re_K + 1)\, l^2 + {k_c}^2\, (1 + Re_K)} \\ v_1 = -\dfrac{A_0 \pi\, l\, (2\, Re_K + 1)}{(2\, Re_K + 1)\, l^2 + {k_c}^2\, (1 + Re_K)} \\ w_1 = A_0 \\ \theta_1 = \dfrac{A_0}{\pi^2 + l^2 + {k_c}^2} \\ p_1 = -\dfrac{A_0 \pi\ (1 + Re_K)\, (2\, Re_K + 1)}{(2\, Re_K + 1)\, l^2 + {k_c}^2\, (1 + Re_K)} \end{cases}$$

avec $l = \pi \frac{m_{3D}}{a}$. Les trajectoires sont illustrées sur la figure 2.4. On en déduit que plus les particules sont proches des axes S_x ou de S_y, plus leurs vitesses sont petites. De plus pour une même distance par rapport à S_x ou S_y, plus on se rapproche du "coeur" de la cellule, plus les trajectoires deviennent petites.

2.2.2 Influence du confinement latéral du milieu et de l'inertie poreuse sur les structures bifurquées

En tenant compte de la correction quadratique en vitesse, la nature des structures convectives naissantes dépend de la valeur prise par le rapport de forme a :

- si a est entier, $Ra_c^{\|} \leq Ra_c^{3D}$ quel que soit Re_K (voir la figure (2.5) : les rouleaux longitudinaux fixes R.L sont observés quelle que soit la valeur du débit. Il en est de même pour un milieu poreux d'extension transversale infinie [82].
- si a est non entier et supérieur à 1, les structures $3D$ oscillatoires (S.O.3D) dominent tant que $Re_K^n < Re_K^*$ (voir la figure 2.6). Au delà de la valeur critique Re_K^*, des rouleaux longitudinaux R.L apparaissent. Ce scénario de transition a étè observé expérimentalement [26] pour différents milieux poreux avec $a = 6.9$. Nous avons représenté sur la figure 2.6, les seuils d'apparition des instabilités

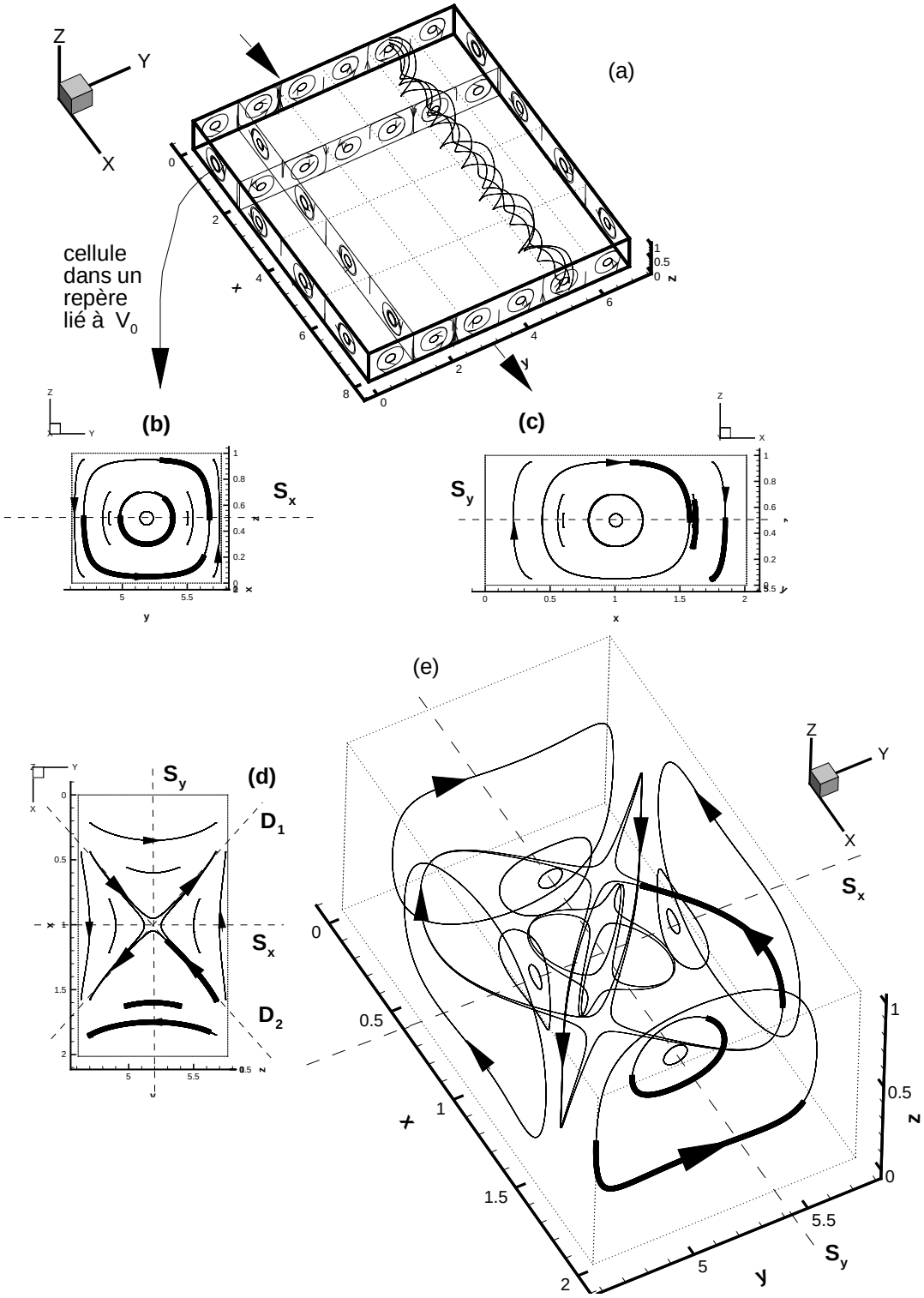


FIG. 2.4 – Représentation des S.O.3D avec $a = 6.91$, $A_0 = 0.1$, $Pe = 0.1$, $\mathcal{F} = 10^{-3}$ donc $m_{3D} = 6$, $k_c \approx 1.56$ ($L \approx 4$) et $Re_K = 10^{-4} \ll 1$. Sur la figure 2.4-(a) on a tracé l'ensemble des S.O.3D ainsi qu' un ensemble de 4 trajectoires de particules de fluide. On y a isolé une cellule de convection dans un repère lié à $\vec{V_0} = Pe\vec{e_x}$ que l'on a représenté sur la figure 2.4-(b) pour la vue de face, 2.4-(c) pour la vue de côté, 2.4-(d) pour la vue de dessus et 2.4-(e) pour une vue générale. Les lignes indiquent les trajectoires et les lignes épaisses indiquent les trajectoires de particules fluides au bout du même temps, initialement repérées dans le plan $z = 0.5$

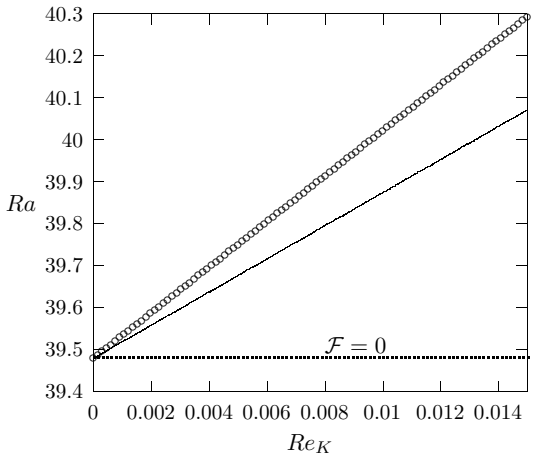


FIG. 2.5 – Seuil d'apparition des structures 3D (∘) et des R.L (−) en fonction de Re_K pour $a = 2$. Les traits en pointillé représentent ces seuils dans le cadre de la loi de Darcy

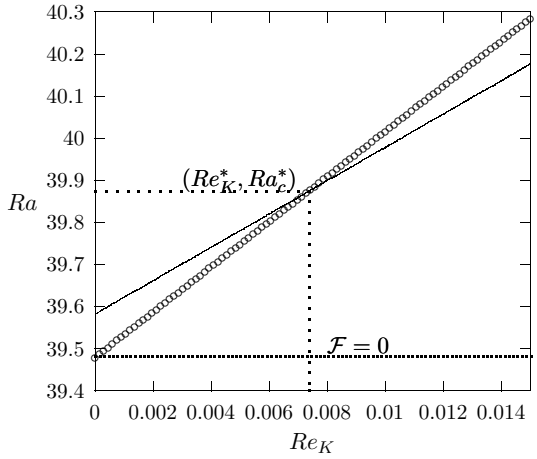


FIG. 2.6 – Seuil d'apparition des structures 3D (∘) et eds R.L (−) en fonction de Re_K pour $a = 1.9$. Les traits en pointillé représentent ces seuils dans le cadre de la loi de Darcy

thermo-convectives en fonction de Re_K, à la fois pour des rouleaux longitudinaux fixes (trait continu) et pour des structures tridimensionnelles oscillatoires (cercles) pour a = 1.9. Les traits en pointillé représentent ces seuils dans le cadre de la loi de Darcy sans correction non linéaire. Cette figure montre que **la loi de Darcy sans correction non linéaire ne permet pas de prévoir le rôle joué par le débit dans la sélection des structures convectives.**

– lorsque $a < 1$, il existe une valeur limite a_c ($a_c = 0.531$) telle que, si $a_c < a < 1$, le modèle de Forchheimer prévoit l'apparition des rouleaux transversaux oscillatoires (R.T) si Re_K est modéré mais sont remplacés par des R.L lorsque Re_K devient assez grand. Pour $a < a_c$, cette transition disparaît et seuls les R.T peuvent structurer la convection quelle que soit la valeur de Re_K.

Nous avons tracé sur les figures 2.7 et 2.8, le seuil d'apparition de transition Ra_c^* et le nombre de Reynols de transition Re_K^* en fonction du rapport de forme.

2.2.3 Type de transition au point de codimension 2 (Re_K^*, Ra_c^*)

Sur la base de la théorie linéaire d'instabilité, nous souhaitons caractériser le type de transition qui s'opère entre les structures tridimensionnelles oscillatoires et les rouleaux longitudinaux. Pour cela, on évalue le nombre d'onde k_c^* au point de codimension 2 (Re_K^*, Ra_c^*) où s'opère cette transition.

Cette dernière est qualifiée de **douce** si le nombre d'onde k_c^* s'annule au point de codimension 2, autrement, on parle de transition **abrupte**. Comme le montre la figure 2.9 si $a \in [[a], a_L]$, le nombre d'onde k_c^* des structures tridimensionnelles oscillatoires

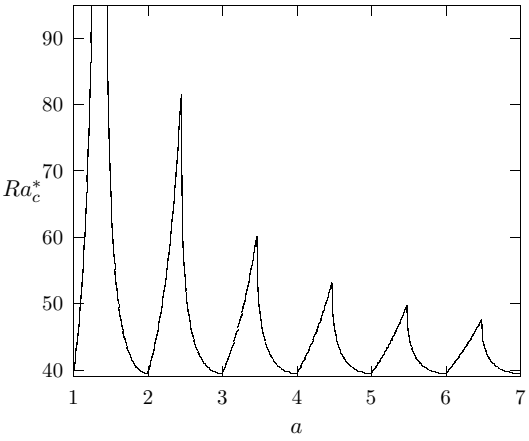


FIG. 2.7 – Nombre de Rayleigh critique Ra_c^* pour lequel $Ra_c^{3D} = Ra_c^{\|}$ en fonction de a.

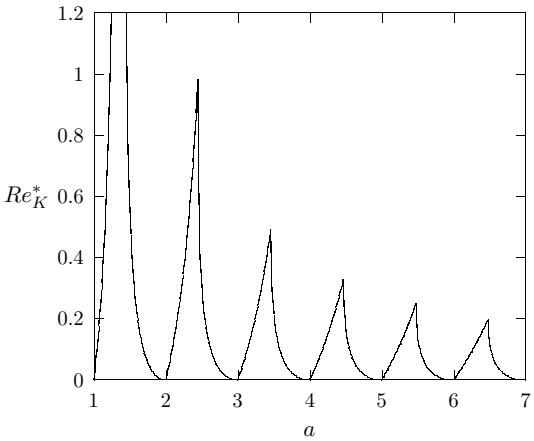


FIG. 2.8 – Valeur de Re_K^* pour lequel $Ra_c^{3D} = Ra_c^{\|}$ en fonction de a.

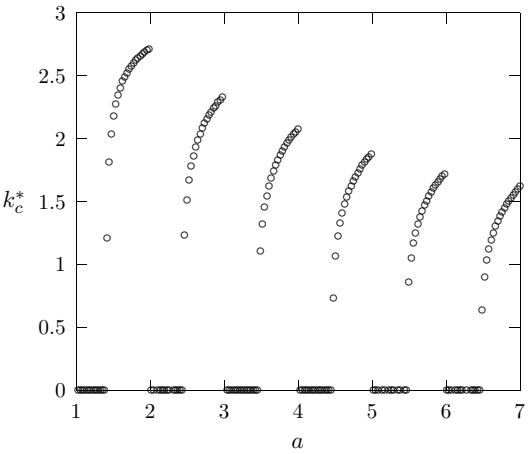


FIG. 2.9 – nombre d'onde au point de transition k_c^*

s'annule et m_{3D} est exactement le même que pour les rouleaux longitudinaux (i.e $m_{3D} = m_{\|}$) : la transition entre les deux types de structures s'opèrent d'une façon douce. Au contraire k_c^* ne s'annule pas si $a \in [a_L, [a]+1]$ et l'entier $m_{3D} = [a]$ alors que le nombre de rouleaux longitudinaux $m_{\|} = [a] + 1$. Dans ce cas, la transition observée est de nature abrupte.

D'un point de vue phénoménologique, il y a une analogie entre la transition douce/abrupte et la transition prévue par l'analyse de Rees et Postelnecu [83] dans un problème complètement différent sur la naissance de la convection d'une couche poreuse anisotrope inclinée.

2.3 Approche spatio-temporelle

Le concept d'instabilité absolue et convective est décrit dans [50] appliqué dans le cadre de la mécanique des fluides, en sachant qu'il fut développé en premier lieu, en physique des plasmas [93]. On étudie l'évolution temporelle et spatiale d'une perturbation. On considère alors :

$$\boxed{k = k_r + i.k_i \in \mathbb{C} \text{ et } \omega = \omega_r + i.\omega_i \in \mathbb{C}}$$

2.3.1 Réponse linéaire du système à une perturbation localisée

L'étude de stabilité linéaire fait intervenir le développement en temps et en espace de perturbations infinitésimales autour de l'état de base, représenté par la solution de conduction. Le problème peut-être ramené à un problème de valeurs propres dans lequel la fréquence ω et le nombre d'onde $= k$ sont reliés par l'équation de dispersion (2.5) : $D_\Phi(k,\omega) = 0$ avec $\Phi = \left[Ra, Pe, Re_K, \frac{m}{a}\right]$. La réponse impulsionnelle (ou fonction de Green) a une perturbation localisée peut-être cherchée, d'après le système (2.2), sous la forme :

$$(I.\partial_t + L).\overrightarrow{G} = \overrightarrow{\delta} \tag{2.13}$$

et le vecteur $\overrightarrow{\delta} = [1,1,1,1,0]^T.\delta_x.\delta_{y-y_0}.\delta_{z-z_0}.\delta_t$ avec δ la fonction de Dirac et :

$$I = \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} (1+2\,Re_K) & 0 & 0 & 0 & \partial_x \\ 0 & (1+Re_K) & 0 & 0 & \partial_y \\ 0 & 0 & (1+Re_K) & -Ra & \partial_z \\ 0 & 0 & -1 & Pe\partial_x - \Delta & 0 \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De plus, $\overrightarrow{G}$ vérifie la condition de causalité suivante :

$$\overrightarrow{G} = 0 \text{ pour } t < 0$$

Nous renvoyons le lecteur à l'annexe A où nous avons développé les calculs de la fonction de Green ainsi que les concepts associés. La fonction est estimée pour des temps longs par sa partie dominante obtenue par la méthode de la phase stationnaire. On obtient pour le mode $n = 1$ (mode le plus instable suivant l'axe z) :

$$\overrightarrow{G}(x,y,z,t) \underset{\substack{t\to\infty \\ x/t \text{ fixé}}}{\sim} \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi}} \sum_m \frac{Z_{1,m}(k^*,y_0,z_0).\ddot{\overrightarrow{S}}_{1,m}(k^*,y,z)}{\sqrt{\frac{d^2\omega}{dk^2}(k^*)}}.\frac{e^{i(k^*x-\omega(k^*).t)}}{\sqrt{t}} \tag{2.14}$$

avec $Z_{1,m}$ et $\ddot{\overrightarrow{S}}_{1,m}$ les fonctions définies en (A.12) et (A.6) de l'annexe A et pour chaque mode m on a noté $\omega = \omega_{1,m}$ et $k^* = k^*_{1,m}$ où k^* est le point col défini dans le plan complexe par :

$$\frac{\partial\omega(k^*)}{\partial k} = \frac{x}{t} = V$$

où V est la vitesse de déplacement de l'instabilité k^* le long du rayon x/t et où

$$\sigma(k_*) = \omega_i(k^*) - k_i^* \frac{x}{t}$$

est le taux d'accroissement de l'instabilité suivant le rayon x/t. Il tient compte en plus du terme d'accroissement temporel $\omega_i(k^*)$, d'un terme de contribution spatiale k_i^* où la vitesse de propagation $\frac{x}{t}$ du paquet d'onde joue un rôle important dans la région instable. Dans le but de calculer le taux d'accroissement σ de l'instabilité associée à chaque rayon $\frac{x}{t}$ et pour chacun des modes m, nous avons résolu, par un algorithme de Newton-Raphson, le système suivant :

$$D_\Phi(k^*, \omega(k^*)) = 0 \tag{2.15}$$

$$\frac{\partial \omega(k_*)}{\partial k} = \frac{x}{t} \tag{2.16}$$

$$\tag{2.17}$$

On en déduit k^*, $\omega(k^*)$ et donc $\sigma(k_*)$.

Le résultat est illustré sur la figure 2.10 dans le cas $m = 0$ (cas 2D) où on représente également le comportement des perturbations dans le plan (x, t).

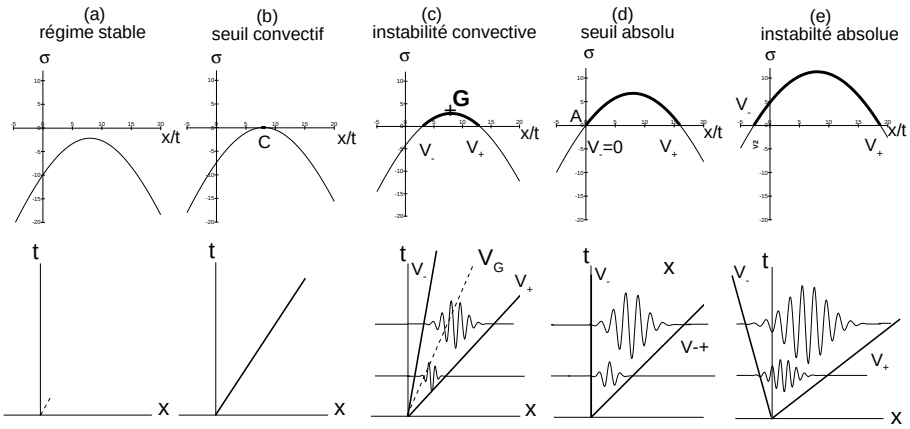


FIG. 2.10 – exemple de taux temporels $\sigma(k_*)$ pour $m = 0$ (cas 2D) en haut pour $Pe = 8$ avec (a) $Ra = 35 < Ra_c$, (b) $Ra = Ra_c = 39.53$, (c) $Ra_c < Ra = 45 < Ra_A$, (d) $Ra = Ra_A = 52.135$, (e) $Ra_A < Ra = 60$ (la ligne épaisse - met en évidence les $\sigma(k_*) > 0$) avec les perturbations associées, dans le plan (x, t) en bas limité spatialement par le front lent V_- et rapide V_+

Tant que Ra est inférieur au seuil d'instabilité Ra_c, déterminé au paragraphe précédent, le taux σ est négatif et l'état de conduction reste stable. Lorsque Ra dépasse Ra_c, σ devient positif et se développe alors un paquet propagatif délimité par un front arrière de vitesse V_- et d'un front avant de vitesse V_+ et centré autour du mode le plus instable de vitesse V_G (point G de la figure 2.10-c) appelé vitesse de groupe du paquet d'ondes. On peut distinguer deux types de situations :

– lorsque les vitesses des deux fronts sont de même signe, le paquet d'ondes est amplifié dans le sens de l'écoulement et finit par quitter le domaine d'observation pour un temps assez grand. La figure 2.10-c) illustre ce comportement. Dans ce cas l'instabilité est dite **convective**. La figure 2.10-b) illustre le cas du seuil d'instabilité convective (point C).

– en revanche, si les vitesses des 2 fronts, comme cela est indiqué sur la figure 2.10-e), sont de signes opposés, l'instabilité s'amplifie localement, croît et envahit tout le domaine spatial. L'instabilité est dite de nature **absolue**. La figure 2.10-d) montre l'évolution d'un paquet d'ondes instable au seuil d'instabilité absolue : la vitesse du front arrière est nulle (point A).

2.3.2 Comportement des branches spatiales

On a vu que la condition nécessaire pour que l'instabilité soit absolue est qu'il existe un point col k^* dans le plan complexe relié à une fréquence ω telle que :

$$D_\Phi(k^*, \omega(k^*)) = 0 \tag{2.18}$$

$$\frac{\partial \omega(k_*)}{\partial k} = 0 \tag{2.19}$$

$$\text{avec } \omega_i(k^*) \geq 0 \tag{2.20}$$

De plus, une condition suffisante impose que les branches spatiales dans le plan complexe k suivent un processus de pincement décrit ci-dssous.

2.3.2.1 Cas des structures propagatives tridimensionnelles

Les branches spatiales des S.O.3D pour l'analyse spatiale, sont définies par :

$$\Gamma = \{k \in \mathbb{C}, \omega \in \mathbb{R} / D_{[\frac{m}{a}, Ra, Pe, Re_K]}(k, \omega) = 0\}$$

La relation de dispersion (2.5) peut être développée en polynôme de degré 4 en k. Cette équation est alors résolue numériquement en faisant varier Ra pour des valeurs fixées des autres paramètres. Nous obtenons alors 4 branches spatiales dans le plan (k_r, k_i). Un exemple est illustré sur la figure 2.11.

Lorsqu'on augmente le nombre de Rayleigh, les branches spatiales se déforment. Le système devient convectivement instable si l'une des branches spatiales traverse l'axe réel (figure 2.11 (b)). Le système agit alors comme un amplificateur de perturbations permanentes. En augmentant Ra jusqu'au seuil de l'instabilité absolue, des branches spatiales émanant de part et d'autre de l'axe réel se pincent (figure 2.11 (c)). Le point de pincement correspond à un point col k^* où une fréquence d'oscillation est sélectionnée. Le système se comporte alors comme un oscillateur auto-entretenu.

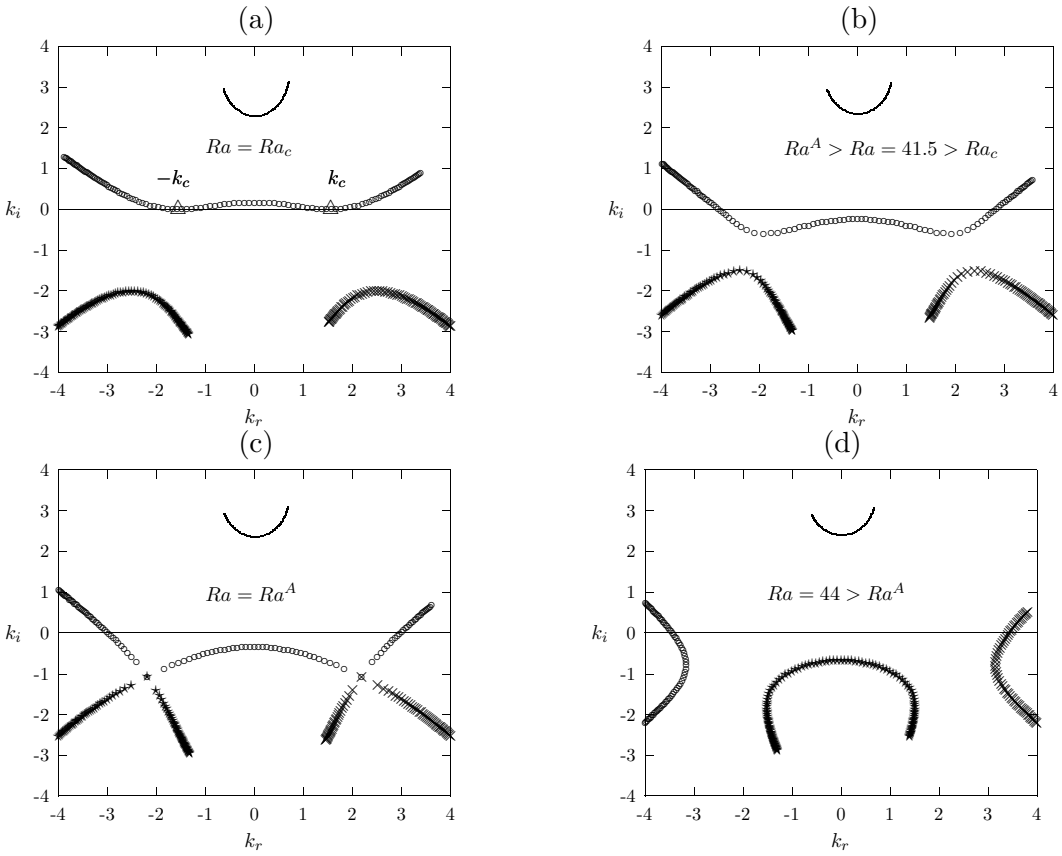


FIG. 2.11 – Comportement des branches spatiales des S.O.3D pour l'analyse spatiale (i.e $\omega_i = 0$) à différentes valeurs de Ra, avec $Pe = 2.07$, $m_{3D} = 6$, $a = 6.9$ au seuil convectif (a) $Ra_c \approx 39.53$, dans le régime convectif (b), au seuil absolu (c) $Ra_A = 42.015$ et au delà, dans le régime absolu (d). On a représenté k_c par $\triangle$.

2.3.2.2 Cas des rouleaux longitudinaux fixes

L'analyse temporelle de stabilité menée au paragraphe précédent a montré que des structures thermo-convectives sous la forme de rouleaux longitudinaux peuvent naître dès lors que le nombre de Rayleigh dépasse : $Ra^m = \pi^2 \left(\frac{a}{m} + \frac{m}{a}\right)(1 + Re_K)$ avec $m \in \mathbb{N}^*$. La nature convective ou absolue de ces modes instables a été recherchée, d'abord en cherchant des solutions du système (2.18)-(2.19) qui correspondent à des R.L (i.e. $\omega_r = k_r = 0$).

Généralement pour $\frac{m}{a}$, Pe et Re_K fixés, on trouve deux valeurs du nombre de Rayleigh pour lesquelles des solutions de ce type existent. Ensuite, nous vérifions pour laquelle des deux valeurs du nombre de Rayleigh, la condition nécessaire pour que l'instabilité soit absolue est respectée, à savoir, une des branches spatiales traverse l'axe des réels avant que le processus de pincement ait lieu.

Prenons un exemple qui met en évidence ce comportement. Pour $Pe = 0.3$, $m = 8$ et

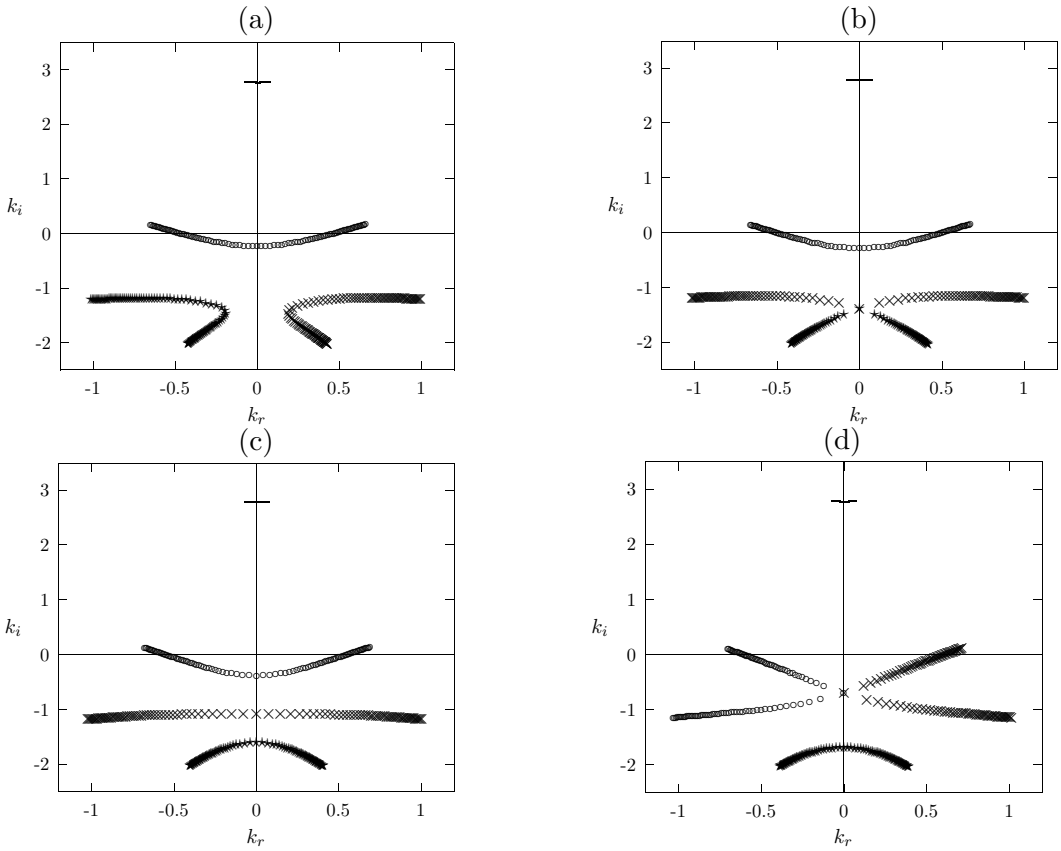


FIG. 2.12 – Comportement des branches spatiales des R.L pour l'analyse spatiale à différentes valeurs de Ra, avec $Pe = 0.3$, $m = 8$, $a = 6.9$ pour (a) $Ra = 42.42 < Ra_A^1$, (b) $Ra = Ra_A^1 = 42.43$ (c) $Ra_A^1 < Ra < Ra_A^2$ (d) $Ra = Ra_A^2 = 42.9$

$a = 6.9$, le système (2.18)-(2.19) admet des solutions avec $k_r = \omega_r = 0$ pour $Ra^1 = 42.43$ et $Ra^2 = 42.9$. Le comportement des branches spatiales, illustré sur la figure 2.12-b) montre que pour $Ra = Ra^1$, un processus de pincement des branches se produit. Les deux branches concernées par ce processus émanent toutes les deux du même demi-plan ($k_i < 0$) signifiant que la valeur Ra^1 ne correspond pas à une valeur seuil de l'instabilité absolue. Cependant, lorsqu' on augmente Ra jusqu'à Ra^2 (figure 2.12 d), une branche spatiale traverse l'axe k_r et vient se pincer avec une autre branche au point col $k^* = ik_i^*$. Ce processus étant respecté, nous concluons que la valeur Ra^2 représente le seuil de l'instabilité absolue : $Ra_A^{\|} = Ra^2$..

2.3.3 Transition instable convectif/ instable absolu : influence du confinement et de l'inertie

Le seuil absolu Ra_A représente la transition entre instabilité convective et instabilité absolue.

Pour les S.O.3D nous avons représenté sur la figure 2.13, le seuil Ra_A en fonction

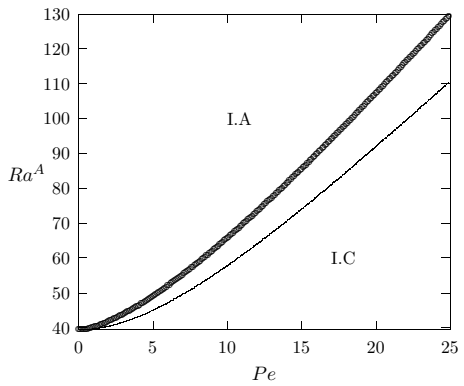


FIG. 2.13 – Seuil absolu Ra_A des S.O.3D en fonction de Pe pour $m = 0$ $(-)$ et $m = 6 = m_{3D}$ $(\circ)$ avec $\mathcal{F} = 0.0001$ et $a = 6.91$, I.C et I.A représentent la région d'instabilité convective et absolue.

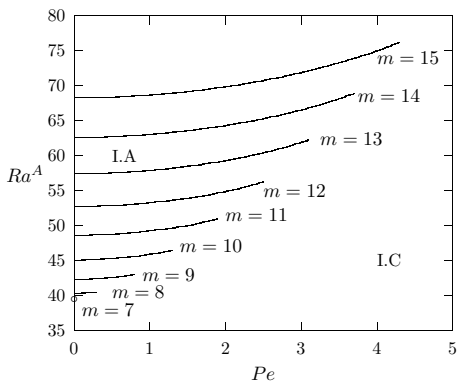


FIG. 2.14 – Seuil absolu Ra_A des R.L en fonction de Pe pour $m = 7(= m_{\|}), 8, 9 \ldots, 15$ avec $\mathcal{F} = 0.0001$ et $a = 6.91$, I.C et I.A représentent la région d'instabilité convective et absolue.

de Pe pour les modes instables $m = 0$ et $m = m_{3D} = 6$ avec $\mathcal{F} = 0.0001$ et $a = 6.91$. Les seuils associés aux autres $m = 1 \ldots 5$ se trouvent entre les 2 courbes, rangés par ordre croissant de m. On ne les a pas tracé par souci de clarté. Plus Pe augmente. Le seuil Ra_A augmente avec Pe indiquant que le débit a un rôle stabilisant.

Le fait le plus marquant qui découle de la figure 2.13 et de la figure 2.14 est le fait que le seuil de transition à une instabilité absolue des rouleaux propagatifs purement transversaux ($m = 0$) pour Pe fixé, est inférieur à la fois à celui des structures tridimensionnelles et à celui des rouleaux longitudinaux. Cela signifie qu'au seuil absolu, le système sélectionne des rouleaux transversaux se propageant dans la direction de l'écoulement. Les structures tridimenssionnelles ainsi que les rouleaux longitudinaux ne sont pas permanentes et quittent à des temps asymptotiquement grands, le domaine d'observation expérimentale.

Pour les R.L nous avons représenté sur la figure 2.14, le seuil absolu $Ra_A^{\|}$ en fonction de Pe pour $m = m_{\|} = 7, 8, \ldots, 15$ avec $\mathcal{F} = 0.0001$ et $a = 6.91$. Grace au logiciel Maple, nous avons conçu un programme qui calcul analytiquement et sélectionne systématiquement le "bon" Ra pour lequel se produit un processus de pincement pour les branches intéressantes [4]. On remarque que contrairement au cas des S.O.3D, ces seuils n'existent plus au delà d'un certain $Pe > Pe_c$, le système demeure convectivement instable vis à vis des R.L. Par exemple pour $m = 8 = m_{\|} + 1$ on a $Pe_c \simeq 0.3$. Au delà de ce Pe_c, le processus de pincement est vérifié pour $k_r \neq 0$. La valeur de Pe_c est d'autant plus grand à m fixé que le rapport de forme est petit.

Les effets d'inertie sur la transition convective/ absolue des instabilités structurées en rouleaux transversaux propagatifs, sont étudiés en faisant varier le terme de Forch-

[4] c'est à dire dont au moins l'une d'elles possède des k_i négatifs et positifs

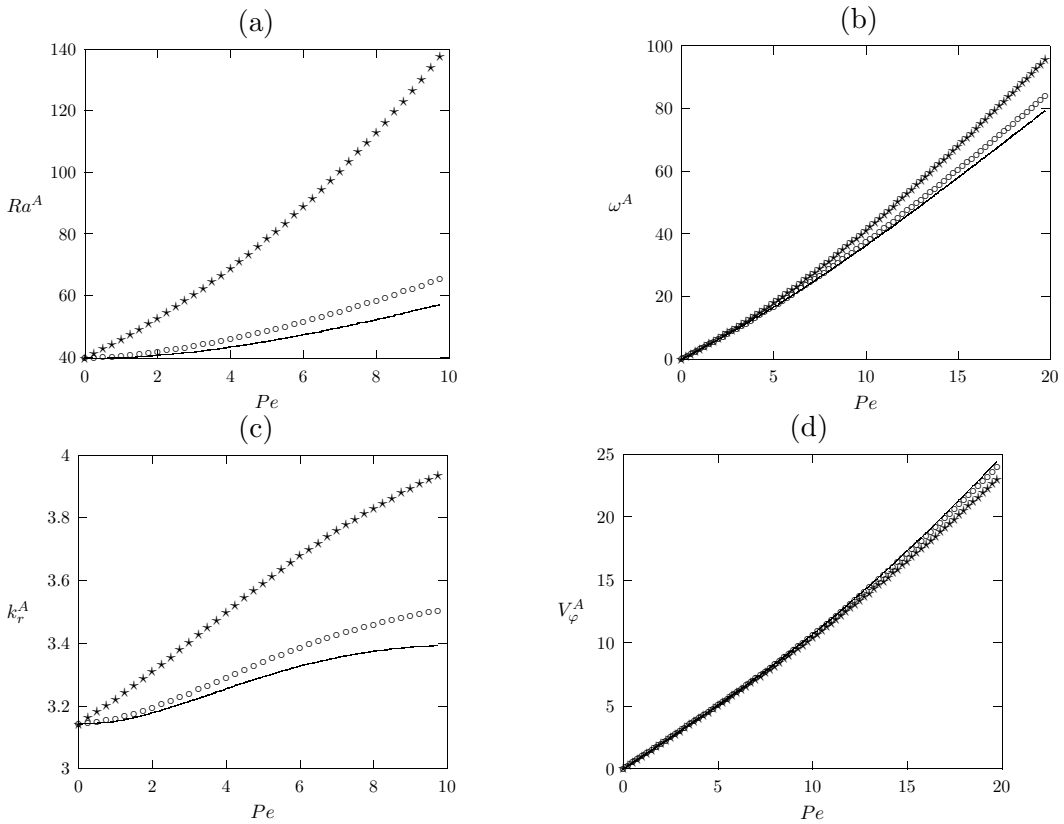


FIG. 2.15 – Caractéristiques des R.T au seuil absolu pour différents nombres de Fourschheimer $\mathcal{F} = 0$ $(-)$, $\mathcal{F} = 0.01$ $(\circ)$ and $\mathcal{F} = 0.1$ $(\star)$ (a) : $Ra^A(Pe)$, (b) : $\omega^A(Pe)$, (c) : $k_r^A(Pe)$ et (d) : $V_\varphi^A(Pe)$.

heimer $\mathcal{F}$. N'oublions pas que $\mathcal{F}$ n'intervient que dans le produit $Re_K = \mathcal{F}.Pe$ qui représente le rapport des termes d'inertie aux termes visqueux. Ainsi lorsque $\mathcal{F}$ augmente, le seuil absolu augmente, ce qui a un effet stabilisant sur l'écoulement (figure 2.15-(a)). Par exemple sur la figure 2.15-(a) $\mathcal{F}$ prend les valeurs 0, 0.01, et 0.1, le seuil Ra_A pour $Pe = 10$ prend alors les valeurs $58, 66$ et 142 respectivement. Cette prédiction pourrait être comparée aux résultats expérimentaux dans des milieux poreux où les effets d'inertie sont significatifs. Elle pourrait être utilisée comme test du modèle de Forchheimer.

Quelques caractéristiques des R.T ont été déterminées au seuil absolu, comme la pulsation ω^A, le nombre d'onde k_r^A et la vitesse de phase $V_\phi = \frac{\omega^A}{k_r^A}$. Elles sont représentées sur la figure 2.15-(b)-(c)-(d) en fonction de Pe et pour différent $\mathcal{F} = 0, 0.01$ et 0.1. On remarque que la vitesse de phase V_ϕ est à peu prés égale à Pe et ce quelque soit $\mathcal{F}$.

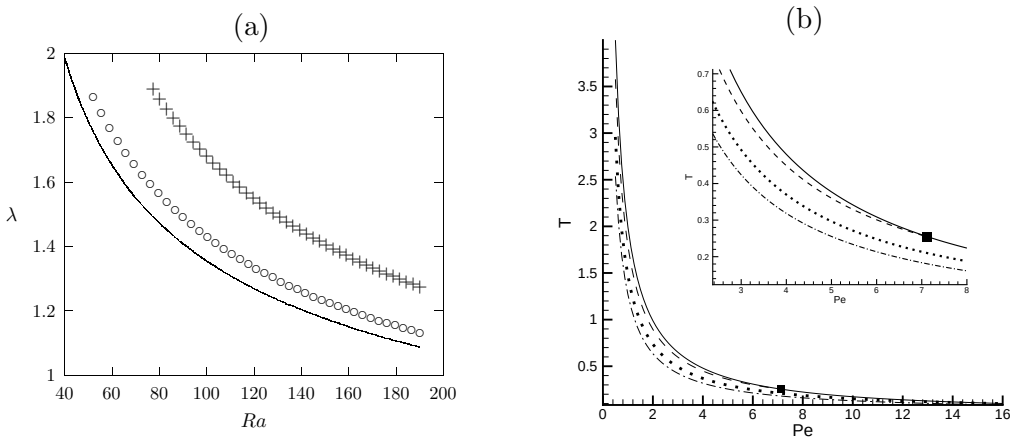


FIG. 2.16 – Caractéristiques des R.T dans la région absolument instable (a) : longueur d'onde en fonction de Ra pour $Pe = 1$ $(-)$, Pe=8 $(\circ)$ et $Pe = 16$ $(+)$; (b) : période au seuil absolu T^A $(-)$ et période dans la région absolument instable pour : $Ra = 50$ $(--)$, $Ra = 80$ $(\cdots)$ et $Ra = 120$ $(- \cdot -)$ en fonction de Pe.

2.3.4 Dépendance de la période d'oscillation et de la longueur d'onde vis-à-vis des nombres de Rayleigh et de Peclet

Dans la région des paramètres où l'instabilité est absolue (i.e. $Ra \geq Ra^A$) nous avons déterminé la longueur d'onde λ ainsi que les périodes d'oscillations T des rouleaux transversaux propagatifs. Sur la figure 2.16-(a), nous avons tracé λ en fonction de Ra pour $Pe = 1, 8$ et 16. Cette figure montre que la longueur d'onde décroît quand Ra croît à Pe fixé et qu'elle croît quand Pe croît à Ra fixé.

Quant à la période T, la figure 2.16-(b) montre que T diverge lorsque $Pe \to 0$, ce qui est en accord avec la fréquence nulle au seuil de stabilité marginale associé au problème classique de Horton-Rogers-Lapwood. On montre aussi qu'à Ra fixé la période T diminue si on augmente Pe et finit par être égale à la période T_A au seuil de l'instabilité absolue. Le calcul de la vitesse de phase pour $Ra > Ra^A$ montre que celle-ci reste à peu prés égale à Pe et ce quelque soit Ra et Pe.

2.4 Analogie avec le problème de Poiseuille-Rayleigh-Bénard

L'observation de deux types de structures convectives a déjà été signalée dans la littérature à propos d'essais expérimentaux sur la convection mixte dans des couches fluides en l'absence de milieu poreux. M.T. Ouazzani, J.K. Platten et A. Mojtabi [75] avaient mené une investigation expérimentale par anénométrie laser pour déterminer les conditions d'apparition de la convection mixte (i.e. problème de Rayleigh-Bénard-Poiseuille) sous la forme de structures tridimensionnelles propagatives (S.O.3D) ou longitudinales fixes (R.L) dans un canal rectangulaire. A des faibles nombres de Reynolds, leurs observations expérimentales montrent que la convection est structurée en S.O.3D.

Lorsque le nombre de Reynolds dépasse une valeur critique Re^*, valeur qui dépend du nombre de Rayleigh, une transition s'opère des S.O.3D aux R.L.

Dans une étude théorique récente, P. Carrière, P.A. Monkewitz, [17] se sont intéressées à la nature convective ou absolue des instabilités dans ce problème de convection mixte en **milieu fluide d'extension illimitée transversalement**. La réponse de ce système à une impulsion localisée dans l'espace a été déterminée en évaluant la fonction de Green. Il en ressort les deux points suivants :

- La courbe de transition instable convectif / instable absolu (I.C/ I.A) des rouleaux transversaux propagatifs décrit bien la transition observée dans [75].
- Les instabilités dont le motif se présente sous la forme de R.L, sont de **nature convective**, et ce quelle que soit la valeur prise par le nombre de Reynolds. A cet égard, ce résultat remet en cause la conclusion de nombreux travaux traitant du problème de la convection mixte en milieu fluide [13]-[57]. Ces travaux reposent sur différents modèles d'équations qui prévoient une transition I.C / I.A pour une valeur critique du nombre de Reynolds.

Nous pensons que ces résultats contradictoires et le débat qu'ils suscitent ne peuvent être élucidés sans une étude qui tienne compte du confinement transversal du milieu. En effet, concernant la convection mixte en milieu poreux, nous montrons que pour un **rapport de forme infini**[5], les R.L sont convectivement instables indépendamment de la valeur prise par la vitesse de filtration seul. Ce résultat corrobore celui de P. Carrière et P.A. Monkewitz.

Cependant, dès lors que le confinement transversal du milieu est pris en compte[6], on trouve que les R.L subissent une transition I.C / I.A. Le rapport de forme du milieux poreux favorisant cette transition, il est très intéressant d'apprécier son rôle en milieu fluide.

2.5 Conclusion

L'étude linéaire de stabilité temporelle montre que la nature des structures thermo-convectives bifurquées dépend du rapport de forme latéral du milieu et de l'inertie poreuse. Dans le cadre de l'hypothèse d'un rapport de forme latéral infini, on trouve que :

- la loi de Darcy conduit à une dégénérescence : toute structure convective, dont le nombre d'onde est $k_c = \pi$ peut apparaître au delà de $Ra_c = 4\pi^2$ et ceci indépendamment du débit imposé.
- la loi de Darcy-Forchheimer prévoit l'appparition de rouleaux longitudinaux indépendamment de la valeur prise par le débit. Ce résultat a été établi aussi par P. Carrière, P.A. Monkewitz, [17] par une analyse de stabilité linéaire du problème de P.R.B dans le cas d'un rapport de forme latéral infini.

[5] i.e. parois latérales verticales rejetées à l'infini et le spectre du nombre d'onde k_y est continue. On considère des perturbations de la forme $e^{i(k_x.x+k_y.y-\omega.t)}$

[6] le spectre du nombre d'onde $\frac{m}{a}\pi$ est discret

La prise en compte d'un rapport de forme latéral fini a pour effet de stabiliser les rouleaux longitudinaux. Dans ce cas, le modèle de Darcy-Forchheimer met en évidence le rôle joué par le débit. Il existe une valeur critique Re_K^* telle que la solution de conduction perd sa stabilité au profit de structures tridimensionnelles propagatives si $Re_K < Re_K^*$. En revanche pour des valeurs de $Re_K > Re_K^*$, on doit s'attendre à l'émergence de rouleaux longitudinaux fixes. Ce résultat est analogue à celui de X. Nicolas [71] dans son analyse du problème de P.R.B avec confinement latéral du milieu.

Ensuite, une partie de ce chapitre a été consacrée à déterminer la nature convective ou absolue des instabilités, aussi bien des structures tridimensionnelles propagatives que des rouleaux longitudinaux fixes. Cela a été possible par l'évaluation de la réponse linéaire du système à une impulsion localisée.

Lorsque le rapport de forme latéral du milieu poreux est supposé infini, seuls les rouleaux transversaux peuvent devenir absolument instables. Les autres configurations thermo-convectives demeurent convectivement instables et ce quelle que soit la valeur du débit imposé. Un changement majeur intervient si l'on tient compte du confinement latéral.

En effet, ce dernier peut promouvoir des instabilités absolues tridimensionnelles ou sous la forme de rouleaux longitudinaux. Cependant, du fait que leur taux d'accroissement temporel dans la région d'instabilité absolue est plus petit que celui des rouleaux transversaux, ces derniers constituent le motif le plus probable d'organisation de la convection dans une expérience de laboratoire. Nous nous sommes donc intéressés aux caractéristiques linéaires des rouleaux transversaux propagatifs dans le domaine instable absolu. L'influence systématique de chacun des paramètres adimensionnés sur la période d'oscillation, le nombre d'onde et la vitesse de propagation a été analysée.

Les principaux résultats de ce chapitre ont fait l'objet d'une publication [36], [37].

Chapitre 3

Analyse faiblement non linéaire au voisinage du point de codimension 2

L'analyse temporelle de stabilité menée au chapitre précédent a permis de déterminer le seuil d'apparition des structures convectives ainsi que le nombre d'onde et la fréquence associés. Au delà de ce seuil où se produit la première bifurcation, les perturbations se développent de manière exponentielle et l'hypothèse de petite perturbation n'est plus valable. Les effets non linéaires jouent alors pleinement leurs rôles. Un calcul analytique de la solution exacte non linéaire du système est généralement impossible. Pour rendre compte du rôle des non linéarités, on doit alors se contenter de chercher un développement de la solution suffisamment près du seuil, vérifiant une équation régissant l'amplitude des structures et dont les propriétés varient lentement dans l'espace et le temps.

La classe des équations utilisées dans ce problème est l' équation de Ginzburg-Landau [4] par analogie purement formelle avec la théorie de Ginzburg-Landau sur la supraconductivité. Cette équation modèle relativement simple par rapport aux équations d'origine, décrit la dynamique du système avec des coefficients propres au système étudié, sa forme reste universelle. Pour la mécanique des fluides, les équations d'amplitudes furent développées au début dans le problème de Rayleigh-Bénard ([67], [87]). On pourra consulter l'ouvrage [11] pour une introduction aux méthodes multiéchelles et faiblement non linéaires et aux méthodes perturbatives dans [66]. Pour un développement plus complet des équations de Ginzburg-Landau dans les structures hors équilibre, on pourra se reporter à [34].

Nous avons montré au chapitre précédent que la sélection linéaire d'un mode plus amplifié que les autres tombe en défaut au voisinage du point singulier (Re_K^*, Ra^*) que l'on désigne par point de codimension 2. Concrètement, dans ce voisinage, lorsque l'état de conduction se déstabilise, le système hésite à s'organiser en rouleaux longitudinaux fixes ou en structures tridimensionnelles propagatives. Il semble alors nécessaire de

compléter cette étude en explorant la dynamique non linéaire au voisinage de ce point. Indépendamment de l'intérêt théorique de comprendre la dynamique non linéaire au voisinage de cette singularité, nous espérons apporter une explication, au moins qualitative, au phénomène d'hystérisis observé dans les essais expérimentaux, à l'émergence des rouleaux longitudinaux dans la région des paramètres où l'état de conduction est convectivement instable et enfin à évaluer le transport de chaleur moyen.

Pour la clarté de ce mémoire, nous avons rassemblé dans l'annexe B, les calculs des équations d'amplitude.

3.1 Equation d'amplitude

L'étude de stabilité linéaire a montré que pour $Ra = Ra_c^*$ et $Re_K = Re_K^*$, 2 types de structures peuvent apparaître simultanément : les R.L (avec $\omega = 0$ et $k = 0$) et les S.O.3D (avec $k = k_c^* \neq 0$ et $\omega = \omega_c^* = k_c^* Pe$). Au voisinage du point (Re_K^*, Ra_c^*), la vitesse verticale peut s'écrire :

$$w = 0 + \underbrace{A(x,t).e^{i(k_c^* x - \omega_c^* t)} \cos(ly) \sin(\pi z)}_{\text{S.O.3D}} + \underbrace{B(x,t) \cos(l_0 y) \sin(\pi z)}_{\text{rouleaux longitudinaux}} + C.C$$

où les amplitudes $A(x,t)$ et $B(x,t)$ vérifient les équations de Ginzburg-Landau couplées suivantes (voir les détails dans l'annexe B) :

$$\frac{\partial A}{\partial t} = -Pe\frac{\partial A}{\partial x} + \nu_A \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + A \overbrace{\left(-\gamma_3' \frac{Ra - Ra_c^*}{Ra_c^*} - \gamma_4' \frac{Re_K - Re_K^*}{Re_K}\right)}^{=\gamma_0} - \gamma_1 \mid A \mid^2 A - \gamma_2 \mid B \mid^2 A \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} = -Pe\frac{\partial B}{\partial x} + \nu_B \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} + B \underbrace{\left(-\lambda_3' \frac{Ra - Ra_c^*}{Ra_c^*} - \lambda_4' \frac{Re_K - Re_K^*}{Re_K^*}\right)}_{=\lambda_0} - \lambda_1 \mid B \mid^2 B - \lambda_2 \mid A \mid^2 B \quad (3.2)$$

Chaque terme correspond à une caractéristique macroscopique du système. Considérons par exemple l'équation (3.1). Elle contient un terme d'instabilité linéaire ($\gamma_0 A$), un terme diffusif $\left(\nu_A \frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\right)$, un terme d'advection $\left(-Pe\frac{\partial A}{\partial x}\right)$, un terme de saturation non linéaire ($-\gamma_1 \mid A \mid^2 A$) et un terme de couplage entre les deux types de structures convectives ($-\gamma_2 \mid B \mid^2 A$). Les coefficients $\lambda_{1,2,3,4}, \gamma_{1,2,3,4}$ sont fonction du rapport de forme a (Annexe B). Pour $a = 6.91$ on obtient :

$$Ra_c^* = 39.53, Re_K^* = 0.001188$$
$$\gamma_1 = 0.3234,\ \gamma_2 = 0.2318,\ \gamma_3' = \gamma_3.Ra_c^*,\ \gamma_3 = -0.4991,\ \gamma_4' = \gamma_4.Re_K^*,\ \gamma_4 = 22.1335,$$
$$\lambda_1 = 0.125,\ \lambda_2 = 0.4722,\ \lambda_3' = \lambda_3.Ra_c^*,\ \lambda_3 = -0.5054,\ \lambda_4' = \lambda_4.Re_K^*,\ \lambda_4 = 19.957$$
$$\nu_A = 0.4928,\ \nu_B = 0.025,$$

Les solutions homogènes des équations (3.1) et (3.2) donnent, en plus de l'état de conduction $(A, B) = (0, 0)$, l'état fondamental de la structure bifurquée. Elles sont de trois types :

- mode des S.O.3D : $(A, B) = (A_{3D}, 0) = \left(\pm\sqrt{\frac{\gamma_0}{\gamma_1}}, 0\right)$
- mode des R.L :$(A, B) = (0, B_L) = \left(0, \pm\sqrt{\frac{\lambda_0}{\lambda_1}}\right)$
- mode mixte : $(A, B) = (A_m, B_m) = \left(\pm\sqrt{\frac{-\gamma_0\lambda_1+\gamma_2\lambda_0}{-\gamma_1\lambda_1+\gamma_2\lambda_2}}, \pm\sqrt{\frac{-\lambda_0\gamma_1+\lambda_2\gamma_0}{-\gamma_1\lambda_1+\gamma_2\lambda_2}}\right)$, on obtient un mode mixte mélange des 2 types de structures, par exemple pour

$$w_1 = A_m e^{ik_c^*(x-Pe.t)} \cos(ly) \sin(\pi\, z) + B_m \cos(l_0 y) \sin(\pi\, z)$$

3.2 Diagramme de stabilité par rapport à des perturbations homogènes

Il est possible d'étudier la stabilité temporelle des états d'équilibre en fonction des paramètres : $\frac{Re_K - Re_K^*}{Re_K^*}$ et $\frac{Ra - Ra_c^*}{Ra_c^*}$. Les perturbations sont supposées homogènes, on ne considère alors que l'évolution temporelle des amplitudes lorsque ces dernières sont pleinement développées dans l'espace. Le calcul des valeurs propres, après linéarisation [1] autour des états d'équilibre ne présente aucune difficulté. Nous nous contentons de présenter les résultats :

– la solution de conduction existe partout et elle est stable si $\gamma_0 \leqslant 0$ et $\lambda_0 \leqslant 0$
– les R.L existent si $\frac{\lambda_0}{\lambda_1} \geqslant 0$ et ils sont stables si $\gamma_0 - \gamma_2\frac{\lambda_0}{\lambda_1} \leqslant 0$.
– les S.O.3D existent si $\frac{\gamma_0}{\gamma_1} \geqslant 0$ et ils sont stables si $\lambda_0 - \lambda_2\frac{\gamma_0}{\gamma_1} \leqslant 0$
– le mode mixte existe si $\frac{-\gamma_0\lambda_1+\gamma_2\lambda_0}{-\gamma_1\lambda_1+\gamma_2\lambda_2} \geqslant 0$ et $\frac{-\lambda_0\gamma_1+\lambda_2\gamma_0}{-\gamma_1\lambda_1+\gamma_2\lambda_2} \geqslant 0$ et il est stable si $-\gamma_1\lambda_1 + \gamma_2\lambda_2 < 0$ ce qui n'est jamais le cas.

On peut regrouper ces résultats sous la forme d'un diagramme dans le plan $\left(\frac{Re_K - Re_K^*}{Re_K^*}, \frac{Ra - Ra_c^*}{Ra_c^*}\right)$ (figure 3.1). Il est représentatif, car on obtient qualitativement le même diagramme quel que soit a. Ce diagramme est composé de différentes régions à côté desquelles on a représenté des exemples typiques du comportement temporel des amplitudes $A(t)$ et $B(t)$, pour différentes conditions initiales données.

Dans les 2 régions [3D] et [3D, (L)], les S.O.3D constituent le seul état stationnaire stable. Dans la région [(M), L, 3D], les S.O.3D et les R.L sont simultanément stables, le mode mixte est tout le temps instable. Dans les 2 régions [L, (3D)] et [L], les R.L constituent le seul état stationnaire stable.
La sélection de l'une ou l'autre configuration convective dans la région [(M), L, 3D] est tributaire des conditions initiales de l'essai. Sur la figure 3.1, les flèches reliant la région [(M), L, 3D] aux régions [L, (3D)] ou [L] et inversement montrent l'existence d'un effet d'hystérésis : les S.O.3D disparaissent au profit des R.L par une augmentation de Re_K à Ra fixé lors du passage de la région [(M), L, 3D] à la région [L, (3D)]. Lorsque l'on inverse le chemin de parcours, les S.O.3D ne sont plus observées. Ce phénomène d'hystérésis est confirmé par les observations expérimentales.

[1] du système dynamique des équations de Landau, basé sur les équations (3.1)-(3.2) mais privées des termes spatiaux.

Ce type d'étude a été mené dans le cas du problème de Poiseuille-Rayleigh Bénard [54] ou dans le cas d'une couche de fluide inclinée chauffée par le bas [43].

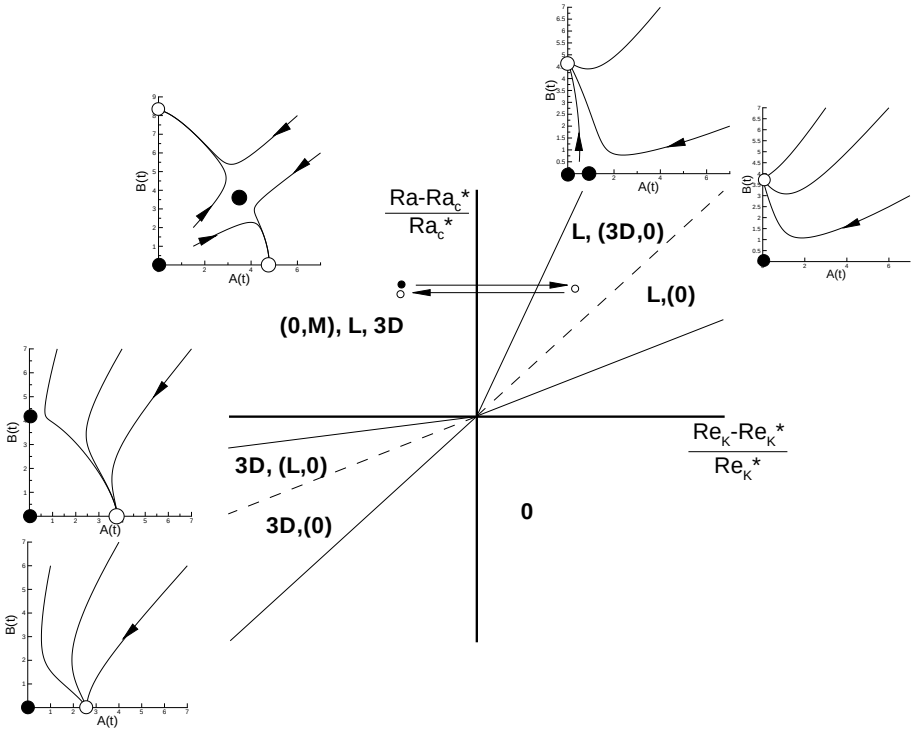


FIG. 3.1 – Diagramme de stabilité avec le comportement typique des amplitudes $A(t)$ et $B(t)$ associé à chaque zone de paramètre $\left(\frac{Re_K - Re_K^*}{Re_K^*}, \frac{Ra - Ra_c^*}{Ra_c^*}\right)$. On note $3D$: les S.O.3D, L : les rouleaux longitudinaux, M : le mode mixte, 0 : la solution de conduction et $(\cdots)$: les structures existantes mais instables. Dans le plan $\left(\frac{Re_K - Re_K^*}{Re_K^*}, \frac{Ra - Ra_c^*}{Ra_c^*}\right)$, les petits cercles représentent les R.L (vide) et les S.O.3D (noir). Dans le plan $(A(t), B(t))$, les grands cercles vides représentent les points fixes stables et les grands cercles pleins représentent points fixes instables.

3.3 Evaluation du transfert de chaleur moyen

Les deux équations d'amplitudes couplées (3.1) et (3.2), nous permettent d'obtenir l'expression du nombre de Nusselt Nu définissant le transfert de chaleur moyen en fonction du nombre de Rayleigh et du nombre de Reynolds. En effet le nombre de Nusselt est défini par ([73]) :

$$Nu = \frac{\text{chaleur transmise par (convection+conduction)}}{\text{chaleur transmise par la conduction}} = 1 + < w\theta >$$

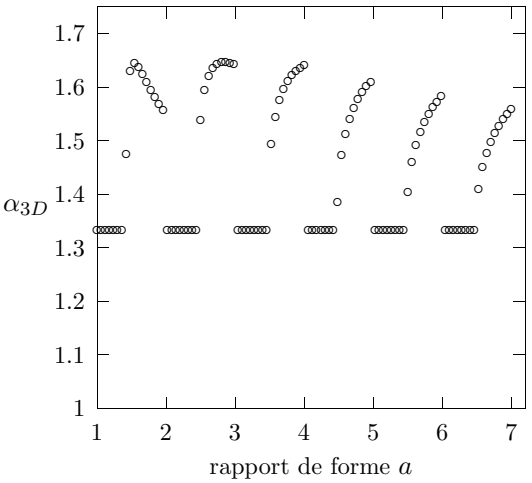


FIG. 3.2 – Coefficient $\alpha_{3D}(\circ)$ du nombre de Nusselt des S.O.3D

avec $< f >= \int_0^1 \frac{k_c^*}{2\pi} \int_0^{2\frac{\pi}{k}^*_c} \frac{1}{2a} \int_0^{2a} f(x,y,z)dydxdz$ qui représente la moyenne de la fonction sur une période et w et θ les perturbations, fonctions des amplitudes saturées A_{3D} et B_L. $Nu = 1$ délimite la frontière entre le régime de conduction et le régime de convection. On obtient pour chacune des structures stables R.L et S.O.3D :

$$Nu_L = 1/4 \frac{B_L^2}{\pi^2 + \left(\frac{m_L}{a}\right)}$$
$$N_{3D} = 1/2 \frac{A_{3D}^2}{\pi^2 + \left(\frac{m_{3D}}{a}\right) + k^2}$$

En remplaçant A_{3D} et B_L par leur valeur, on trouve :

$$Nu_L - 1 = \alpha_L \left(\frac{Ra}{Ra_c^{\|}(Re_K)} - 1 \right) \tag{3.3}$$
$$Nu_{3D} - 1 = \alpha_{3D} \left(\frac{Ra}{Ra_c^{3D}(Re_K)} - 1 \right) \tag{3.4}$$

avec $\alpha_L = 2$ et le coefficient α_{3D} dépend du rapport de forme a, comme le montre la figure 3.2. Pour un rapport de forme a fixé, nous avons vu que $Ra_c^{\|}$ et Ra_c^{3D} sont des fonctions croissantes de Re_K. Par conséquent, les expressions (3.3) et (3.4) montrent que Nu^L et Nu^{3D} diminuent quand Re_K augmente d'une façon significative.

Notons qu'au regard de la figure 3.2, il existe dans la plage de rapport de forme $[[a], [a]+1]$, un rapport de forme particulier a_0, tel que le α_{3D} associé soit maximum. On en déduit que le transfert de chaleur des S.O.3D est optimum dans une couche poreuse avec ce rapport de forme a_0.

3.4 Phénomène d'amplification du bruit en régime convectif

L'objet de ce paragraphe est d'étudier l'influence d'une perturbation infinitésimale **permanente** à l'entrée du milieu sur la dynamique des structures thermoconvectives dans la région convectivement et absolument instable. Cette perturbation à l'entrée pourrait être générée par la présence du bruit inhérent à toute expérience dans un laboratoire.

3.4.1 Diagramme d'instabilité spatiale

Pour nous rapprocher des conditions expérimentales lors d'une série d'essais, nous avons fixé $\mathcal{F}$. La dynamique est alors décrite par les paramètres $\frac{Ra-Ra_c^*}{Ra_c^*}$ et :

$$\frac{Re_K - Re_K^*}{Re_K^*} = \frac{Pe - Pe^*}{Pe^*}$$

avec $Pe^* = Re_K^*/\mathcal{F}$
Commençons par identifier sur la base des équations de Ginzburg-Landau linéarisées, les régions des paramètres où l'instabilité est convective ou absolue. La réponse du système linéaire à une impulsion localisée s'écrit exactement [64] :

$$G_A(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}.e^{t.\overbrace{\left[\gamma_0 - \frac{1}{4\nu_A}\left(\frac{x}{t} - Pe\right)^2\right]}^{\sigma_A}} \tag{3.5}$$

$$G_B(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}.e^{t.\overbrace{\left[\lambda_0 - \frac{1}{4\nu_B}\left(\frac{x}{t} - Pe\right)^2\right]}^{\sigma_B}} \tag{3.6}$$

suivant le rayon x/t et $G_{A,B}$ désigne la fonction de Green. La perturbation se développe si le taux d'accroissement est positif i.e $\sigma_A \geq 0$ et $\sigma_B \geq 0$. Les taux maximums $\sigma_A = \gamma_0$ et $\sigma_B = \lambda_0$ sont obtenus le long de $x/t = Pe$. Ainsi le régime convectif existe si $\lambda_0 \geq 0$ ou $\gamma_0 \geq 0$. Le seuil absolu est obtenu suivant le rayon $x/t = 0$ avec un taux d'accroissement nul i.e $\sigma_A = 0$ et $\sigma_B = 0$. Pour A on obtient le seuil absolu $Ra_{3D}^{A,GL}$ ($\gamma_0^A = Pe^2/(4\nu_A)$) et pour B on obtient le seuil absolu $Ra_L^{B,GL}$ ($\lambda_0^A = Pe^2/(4\nu_B)$). Ces seuils absolus issus de l'équation de Ginzburg-Landau, sont exagérément élevés par rapport à ceux obtenus à partir de l'équation de dispersion (figure 3.3). Nous avons également reporté les seuils absolus dans le plan $\left(\frac{Pe-Pe^*}{Pe^*}, \frac{Ra-Ra_c^*}{Ra_c^*}\right)$ sur la figure 3.4. Cela permet de délimiter deux régions : I.A S.O.3D où les S.O.3D sont absolument linéairement instables et I.A R.L où les structures S.O.3D et R.L sont absolument linéairement instables.

En présence de bruit $\phi_{A,B}(x,t)$ dans l'écoulement, la réponse $A(x,t)$ et $B(x,t)$ du système linéarisé s'obtient en effectuant le produit de convolution [2] : $[A,B](x,t) =$

[2] avec $(f * g)(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}[f(x,t).g(x-u,t-v)]dudv$

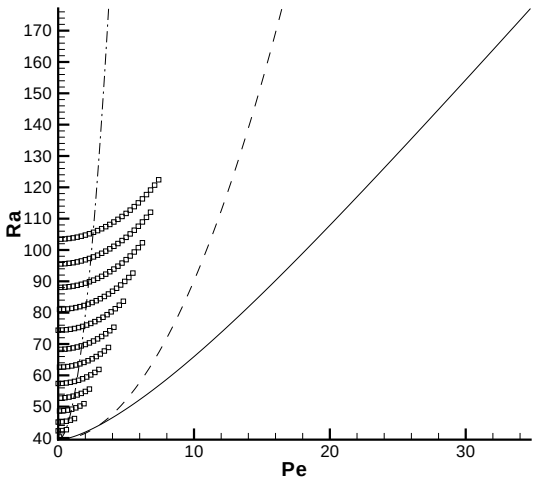


FIG. 3.3 – Seuil absolu : pour les R.L à partir de l'étude linéaire (□) avec $m = 7 \ldots 20$ et à partir des équations de Ginzburg-Landau $(- \cdot -)$ ainsi que pour les S.O.3D à partir de l'étude linéaire $(-)$ avec $m = 6$ et à partir des équations de Ginzburg-Landau $(--)$

$[G_{A,B} * \phi_{A,B}](x,t)$. En particulier si l'on suppose la présence du bruit à l'entrée du milieu, les amplitudes $A(x,t)$ et $B(x,t)$ peuvent être développées de la façon suivante :

$$[A(x,t), B(x,t)] = \int [A_0(\omega), B_0(\omega)] e^{ik(\omega).x - i\omega.t} d\omega$$

où $A_0(\omega)$ et $B_0(\omega)$ désignent les modes de Fourier de l'amplitude du bruit d'entrée : $A_0(t) = A(x = 0, t)$ et $B_0(t) = B(x = 0, t)$, la fréquence $\omega \in \mathbb{R}$ et le nombre $k \in \mathbb{C}$. L'amplification spatiale est décrite par la partie imaginaire de k. A partir des deux équations de Ginzburg-Landau (3.1) et (3.2) linéarisées, on peut déduire la relation de dispersion $k(\omega)$, reliant k et ω. Une amplification du bruit d'entrée se produit dès lors que $(-k_i) > 0$, ce qui correspond à des fréquences amplifiées appartenant à l'intervalle $]\omega_-, \omega_+[$:

$$\omega_\pm = \pm Pe\sqrt{\gamma_0} \text{ pour les S.O.3D} \tag{3.7}$$

$$\omega_\pm = \pm Pe\sqrt{\lambda_0} \text{ pour les R.L} \tag{3.8}$$

La fréquence ω_M qui correspond au taux d'accroissement spatial le plus élevé vérifie : $\frac{\partial k_i}{\partial \omega} = 0$. Pour les deux types de structures, on trouve $\omega_M = 0$. La réponse du système est alors dominée par le terme $e^{-k_i^{3D,L} x}$ $(k_r^{3D,L} = 0)$ avec :

$$k_i^{3D} = \frac{1}{2\nu_A}\left(-Pe + \sqrt{Pe^2 - 4\gamma_0\nu_A}\right) \tag{3.9}$$

$$k_i^{L} = \frac{1}{2\nu_B}\left(-Pe + \sqrt{Pe^2 - 4\lambda_0\nu_B}\right) \tag{3.10}$$

Ensuite, pour tout point du plan des paramètres $\left(\frac{Pe - Pe^*}{Pe^*}, \frac{Ra - Ra_c^*}{Ra_c^*}\right)$, nous avons comparé les taux d'accroissement spatial $-k_i^{3D}$ et $-k_i^L$. Il en ressort que les R.L ont un taux d'amplification spatial plus grand que celui des S.O.3D (i.e $-k_i^L > -k_i^{3D} > 0$) dans la région des paramètres notée I.C R.L sur la figure 3.4, alors que le contraire est

observé dans la région des paramètres notée I.C S.O.3D de cette même figure. Les deux régions des paramètres sont délimitées par une frontière en trait plein (−) sur la figure 3.4.

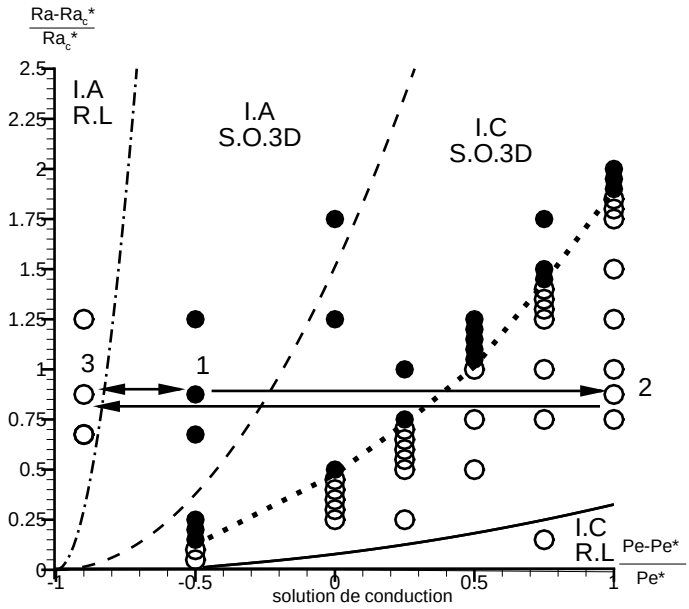


FIG. 3.4 – Diagramme spatial d'instabilité correspondant à un bruit d'entrée de 0.1% de l'amplitude saturée. La ligne $- \cdot -$ $(--)$ représente le seuil de l'instabilité absolue des R.L (S.O.3D) et la région d'instabilité absolue associée est notée I.A R.L (I.A S.O.3D). Dans le régime convectif, le taux maximum d'amplification spatiale est celui des R.L (S.O.3D) dans la partie noté I.C R.L (I.C S.O.3D) car $-k_i^L > -k_i^{3D} > 0$ $(-k_i^{3D} > -k_i^L > 0)$. La ligne − délimite la frontière entre I.C R.L et I.C S.O.3D. On y a également représenté les différents résultats issus des simulations numériques : ∘ pour les R.L et • pour les S.O.3D avec $a = 6.91$ et $Pe^* = 7.67$ (i.e $\mathcal{F} = 1.544\ 10^{-4}$). La ligne $\cdots$ (TR.CV), délimite dans la région convective, les régions des paramètres où on trouve numériquement les R.L (∘) et les S.O.3D (•). Les points 1, 2, 3 ainsi que les flèches correspondent à une série particulière des simulations.

Nous pouvons conclure grâce à cette analyse spatiale d'instabilité , que pour des écarts pas trop élevés de Ra, les rouleaux longitudinaux sont candidats à être observés dans une expérience réelle. Pour des écarts suffisamment élevés, les S.O.3D propagatives sont plutôt favorites à organiser les mouvements convectifs.

Ces prédictions découlent d'une analyse purement linéaire, aussi bien pour le régime convectif ou absolu. Que deviennent-elles si les non linéarités du modèle sont prises en compte ?

3.4.2 Simulation des équations d'amplitude

Dans le but d'explorer la dynamique non linéaire dans la région des paramètres où à la fois les R.L et les S.O.3D sont simultanément instables, nous avons simulé numériquement les équations de Ginzburg-Landau couplées (3.1) et (3.2). Nous avons utilisé une méthode de différence finie avec un schéma de Cranck-Nicholson. Les pas de temps Δt et d'espace Δx sont choisis suffisamment petits pour que les résultats soient indépendants de la résolution ([30]). Les conditions aux limites en sortie sont assurées en imposant la solution asymptotique pour les R.L ou les S.O.3D à savoir l'égalité des rapports des amplitudes :

$$\frac{A(x+dx,t+dt)}{A(x,t)} = \frac{A(x,t)}{A(x-dx,t-dt)}$$

avec le même type de conditions pour $B(x,t)$ [22]. Divers types de conditions aux limites ont été utilisés, notamment les conditions de sortie du type Orlanski (équation de transport pour A et B à la vitesse Pe). Ces dernières ne modifient pas le développement des amplitudes, sauf localement en sortie lorsque les amplitudes ont un comportement fortement instationnaire. En entrée, pour simuler simplement la présence de bruit, nous imposons une faible et permanente perturbation, dont l'amplitude est de l'ordre de 0.1% de l'amplitude saturée ([64]) :

$$A(0,t) = 0.001 A_{3D} \text{ et } B(0,t) = 0.001 B_L$$

On impose également cette faible amplitude comme conditions initiales $A(x,0)$ et $B(x,0)$.

Les simulations numériques ont été conduites pour les paramètres représentés par des cercles sur la figure (3.4). En particulier pour les points 1, 2, et 3 de cette figure nous avons fixés la valeur de $\frac{Ra-Ra_c^*}{Ra_c^*}$ et nous avons fait varier $\frac{Pe-Pe^*}{Pe^*}$. Les points 1, 2, et 3 de cette figure représentent qualitativement les paramètres les points 34, 35, 36 de la série 6 (figure 4.2 du chapitre quatre). Le sens des flèches indique que la solution stationnaire obtenue à l'issue de la simulation en un point est prise comme condition initiale pour la simulation au point suivant. Les comportements dynamiques sont illustrés sur la figure 3.5.

Les paramètres du point 1 correspondent au régime absolu pour les S.O.3D (I.A S.O.3D). A des temps suffisamment grands, la simulation numérique montre le développement des S.O.3D au détriment des R.L (figure 3.5-a)).

Avec les paramètres du point 2 (figure 3.5-b)) la simulation numérique montre que les deux types de structures sont amplifiés au voisinage de l'entrée, formant localement un mode mixte assimilable à la superposition des R.L et des S.O.3D [3]. Lorsque l'on s'éloigne de l'entrée et à des temps suffisamment grands, les R.L persistent durablement et finissent par occuper tout l'espace.
La sélection d'un motif thermo-convectif particulier est la conséquence d'une **interaction non linéaire** entre les deux types de structures au cours du temps. La figure

[3] sur la figure (3.5)-a) le mode mixte est trop faible à cette échelle pour y apparaître

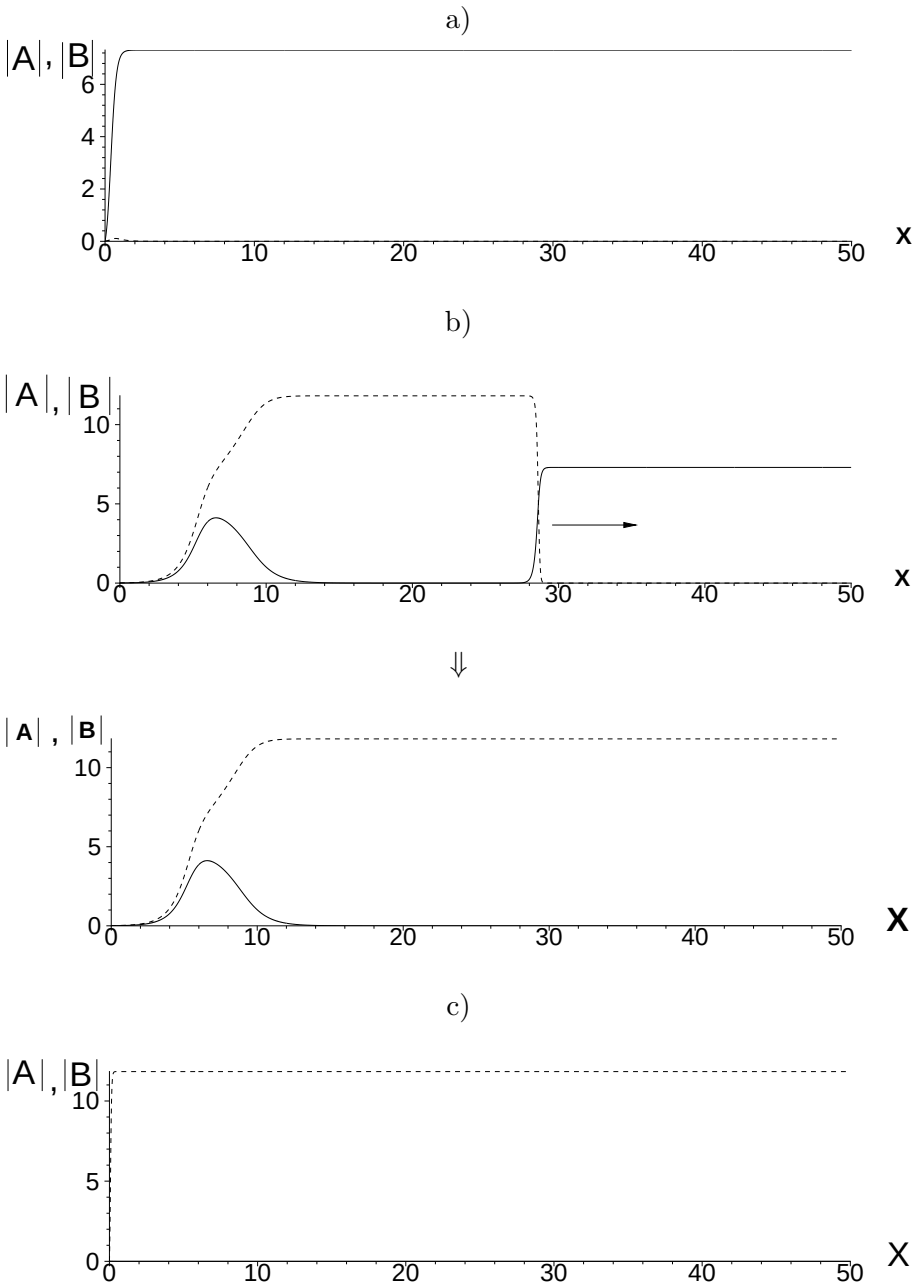


FIG. 3.5 – Représentation des amplitudes A (−) et B (−−) pour différents paramètres ($\frac{Pe-Pe^*}{Pe}$, $\frac{Ra-Ra_c^*}{Ra_c^*}$) associés au diagramme de la figure 3.4 correspondant : a) au point 1 du diagramme b) au point 2 avec une figure intermédiaire où l'amplitude B envahit le domaine c) au point 3. Avec $\Delta t = 0.001$, $\Delta x = 0.005$, $a = 6.91$ et $Pe^* = 7.67$ ($\mathcal{F} = 1.544\ 10^{-4}$)

3.5-b)) montre que le R.L occupent une partie de l'espace alors que l'autre partie est occupée par les structures 3D (en accord avec certaines observations expérimentales). C'est une situation transitoire du fait que les deux types de structures sont séparés par un front, se déplaçant approximativement à une vitesse égale à Pe. A des temps grands, les structures 3D sont envahies par les R.L et finissent par quitter le milieu. Dans les expériences de M. Combarnous [26], le nombre de Pe correspond à des vitesses de l'ordre de $10^{-4}m/s$. La longueur du massif poreux étant de 90 cm, le temps nécessaire pour que les structures 3D quittent le milieu est de 2 heures et demie après le délai d'attente (i.e temps de saturation) indispensable pour observer les mouvements convectifs tout motif compris.

Enfin avec les paramètres du point 3 correspondant au régime absolu I.A R.L, les R.L sont toujours persistants mais ils sont très proches de l'entrée et les S.O.3D sont inexistants. On précise que l'on passe directement du point 3 au point 1 de la figure (3.5), on retrouve les structures S.O.3D. Inversement, si on passe du point 1 au point 3 on retrouve les R.L.
La dynamique obtenue par les points 1, 2, et 3 de cette figure représente qualitativement celle des points d'essai 34, 35, 36 de la série 6 (figure 4.2 du chapitre quatre). En particulier on montre l'existence des R.L pour de faible valeur de Pe dans la zone où les S.O. 3D sont absolument instable. On retrouve ces R.L pour la série 11 et 7 (figure 4.3-a)-c))

A partir de simulations numériques nous pouvons évaluer approximativement la dynamique globale dans le plan $(\frac{Pe-Pe^*}{Pe^*}, \frac{Ra-Ra_c^*}{Ra_c})$ (figure 3.4). D'une part dans la régime d'instabilité absolue I.A, on observe deux régions des paramètres où domine l'une des structures :
– la région I.A S.O.3D où les S.O.3D sont sélectionnées.
– la région I.A R.L où les R.L sont sélectionnées.
D'autre part dans le régime d'instabilité convective, nous avons déterminé la ligne dans le plan $\left(\frac{Pe-Pe^*}{Pe^*}, \frac{Ra-Ra_c^*}{Ra_c^*}\right)$ qui sépare la région où se développent les R.L de celles où les structures 3D sont les plus amplifiées (en pointillés $\cdots$ sur la figure 3.4 et notée TR.CV pour transition convective entre les R.L et les S.O.3D). On constate que les non linéarités ont notamment pour effet d'élargir la zone d'amplification spatiale des R.L. Plus généralement, l'étendue de cette zone est fortement tributaire du niveau du bruit à l'entrée. En effet nous avons déterminé une nouvelle frontière TR.CV en changeant le niveau d'intensité du bruit à l'entrée :

$$A(0,t) = 0.01A_{3D} \text{ et } B(0,t) = 0.01B_L$$

Cette frontière TR.CV se rapproche du seuil absolu des S.O.3D lorsque le niveau de bruit augmente. Pour illustrer cette dépendance au bruit d'entrée, nous avons simulé numériquement les équations d'amplitudes avec des paramètres Ra et Pe identiques correspondant à la la région convective I.C RL mais pour des niveaux d'intensité de bruit d'entrée différents. Sur la figure 3.7, nous avons tracé uniquement les amplitudes $B(x,t)$ des R.L correspondant à trois niveaux différents. On remarque que plus ce

niveau augmente plus l'amplitude se rapproche de l'entrée et ce, semble t-il, proportionnellement à l'intensité.

Par ailleurs, nous avons essayé de reproduire qualitativement le phénomène observé sur la série 7 et qualifié d'hystérisis. Il a été mis en évidence par les flèches sur la figure 1.4 au chapitre 1 et il est également visible également sur la figure 4.3-c) dans le plan (Pe, Ra) au chapitre quatre. Des simulations numériques ont été effectuées dans la région des paramètres correspondant au point 1, 2 et 3 du diagramme spatial de la figure 3.6 et les solutions stationnaires associées sont tracées sur la figure 3.8-a)-b)-c). La simulation numérique effectuée au point 1 (placé dans la région I.C S.O.3D au voisinage de la courbe TR.CV), montre à des temps suffisamment grands, la formation de S.O.3D (figure 3.8-a)). Puis en partant de cette solution stationnaire comme condition initiale et avec les paramètres du point 2 dans la région I.C R.L, on observe la formation de R.L (figure 3.8-b)). Enfin en partant de cette solution stationnaire comme condition initiale et avec les paramètres du point 3 dans la région I.C on a toujours les R.L (figure 3.8-c)). Or les paramètres du point 3 sont très proches de ceux du point 1 : où Ra est fixé et la différence entre les valeurs de $\frac{Pe-Pe^*}{Pe^*}$ est de 5%. Pourtant on ne retrouve pas la même structure. Cela illustre le fait qu'au voisinage de la frontière TR.CV, lors d'une expérience, les erreurs inhérentes aux réglages des paramètres du problème, peuvent avoir des conséquences sur la sélection des structures convectives.

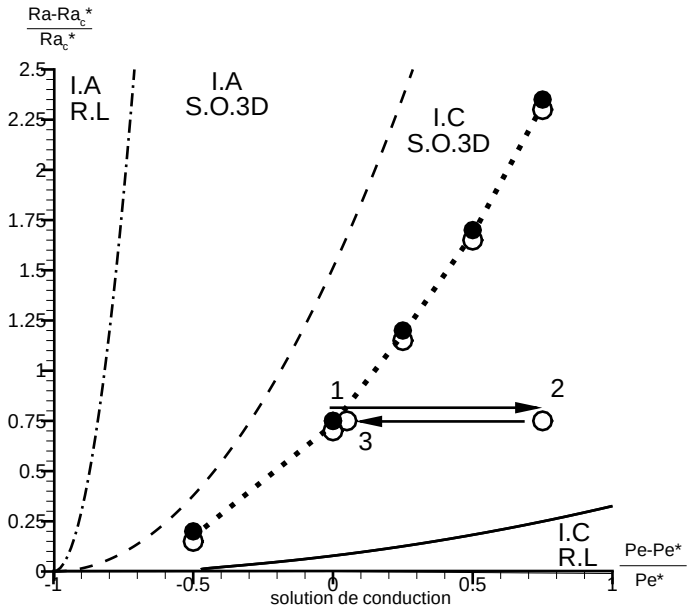


FIG. 3.6 – Diagramme spatial d'instabilité correspondant à un bruit d'entrée de 1% de l'amplitude saturée. La légende est la même que pour la figure 3.4.

Remarque : Il est également possible de créer une différence d'intensité à l'entrée du domaine, favorable aux R.L ou aux S.O.3D. Les simulations numériques montrent que lorsque ce sont les R.L qui sont favorisés par exemple $B(0,t) = 0.002B_L$ et $A(0,t) =$

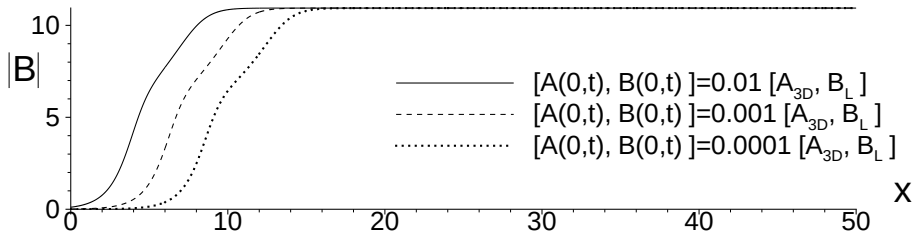


FIG. 3.7 – Amplitude $B(x,t)$ des R.L avec $\frac{Ra-Ra_c^*}{Ra_c^*} = 0.75$ et $\frac{Pe-Pe^*}{Pe^*} = 1$ (région convective I.C RL) et pour différents niveaux de bruit à l'entrée pour $A(x,t)$ et $B(x,t)$ avec $\Delta t = 0.001$, $\Delta x = 0.005$, $a = 6.91$ et $Pe^* = 7.67$ ($\mathcal{F} = 1.544\ 10^{-4}$) .

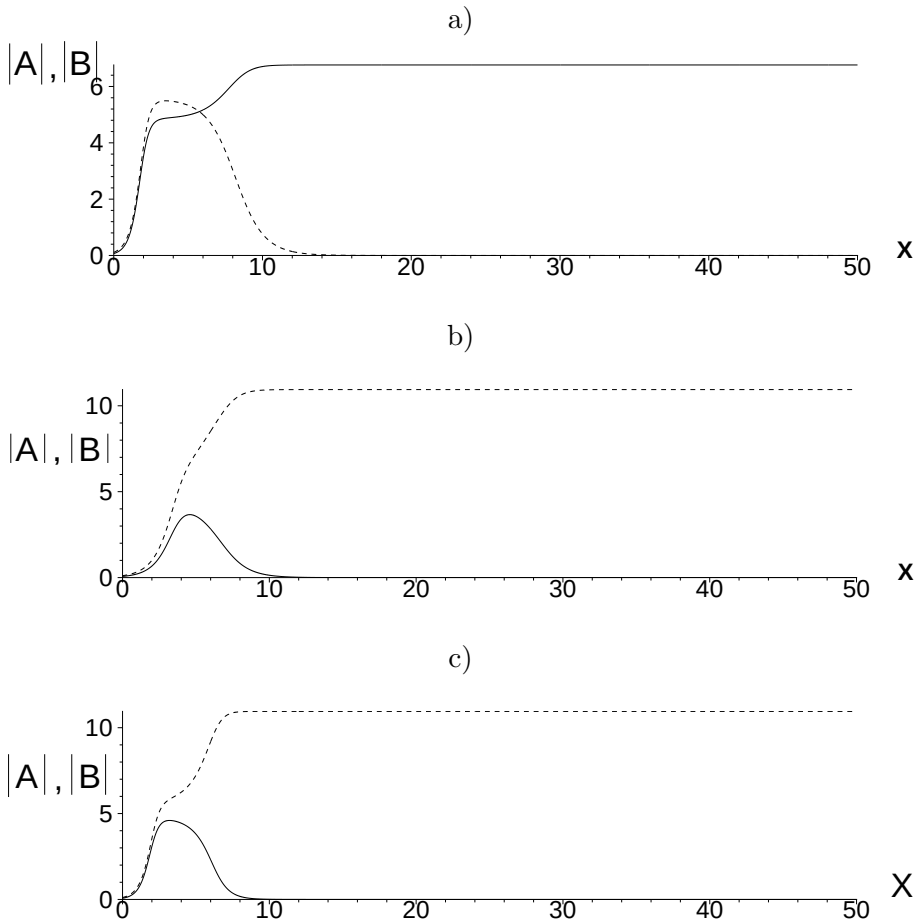


FIG. 3.8 – Représentation des amplitudes A ($-$) et B ($--$) pour différents paramètres ($\frac{Pe-Pe^*}{Pe}$, $\frac{Ra-Ra_c^*}{Ra_c^*}$) associés au diagramme de la figure 3.6 correspondant : a) au point 1 du diagramme b) au point 2 c) au point 3. Avec $\Delta t = 0.001$, $\Delta x = 0.005$, $a = 6.91$ et $Pe^* = 7.67$ ($\mathcal{F} = 1.544\ 10^{-4}$)

$0.001A_{3D}$, la zone où se développe les R.L augmente (i.e la frontière TR.CV se rapproche du seuil absolu des S.O.3D). Le contraire est observé lorsque ce sont les S.O.3D qui sont favorisées.

3.5 Conclusion

Au voisinage du point de bifurcation double (Re_K^*, Ra_c^*), les structures 3D propagatives et les R.L fixes peuvent s'amplifier simultanément. Une analyse classique basée sur les méthodes de développements asymptotiques et d'échelles multiples, permet de montrer que la dynamique non linéaire résultant de l'interaction entre les structures 3D et les RL est décrite par un modèle réduit formé de deux équations de Ginzburg-Landau couplées. L'étude de la stabilité des solutions stationnaires et homogènes a permis d'obtenir un diagramme complet de stabilité. Ce dernier permet d'expliquer qualitativement le phénomène d'hystérésis observé expérimentalement.

Par ailleurs, dans la région des paramètres où l'instabilité est convective, une analyse spatiale de stabilité linéaire d'une part et des simulations numériques du modèle réduit en présence du bruit d'entrée d'autre part, permettent de dégager des résultats significatifs. On montre que le plan des paramètres $(\frac{Pe-Pe^*}{Pe^*}, \frac{Ra-Ra_c^*}{Ra_c^*})$ le domaine où l'instabilité est convective, est composé de deux zones distinctes, l'une favorisant les R.L (I.C R.L) et l'autre privilégiant les structures 3D (I.C S.O.3D). La frontière entre les deux est tributaire du niveau du bruit d'entrée. Les simulations numériques montrent que durant une phase transitoire, les deux motifs thermo-convectifs peuvent être observées : un motif occupant une partie du milieu alors que l'autre partie est occupée par le deuxième motif. Ce résultat a été validé par les travaux expérimentaux de M. Combarnous.

Dans la région des paramètres où l'instabilité est absolue, nous avons montré qu'il existe deux zones de paramètres délimitées par le seuil absolu des R.L (I.A R.L) et le seuil absolu des S.O.3D (I.A S.O.3D) où chacune des structures est dominante. Dans la zone I.A R.L nous observons que seuls les R.L se développent et dans la zone I.A S.O.3D nous observons que seules les S.O 3D se développent.

Enfin nous avons montré que certaines séries d'essai effectuées expérimentalement était décrites par les simulations numériques des équations de Gingsburg-Landau.

Nous sommes en train de rédiger une note au C.R.A.S qui résume les principaux résultats de ce chapitre.

Chapitre 4

Comparaison des prédictions théoriques et des résultats expérimentaux

Cette partie aborde la question de la comparaison des résultats issus de l'analyse spatio-temporelle de stabilité linéaire avec des résultats expérimentaux. Cette entreprise est exigeante du fait qu'elle n'autorise aucun ajustement des paramètres du problème d'une part et qu'elle suppose d'autre part, que l'on soit bien informé des méthodes d'évaluation des paramètres et des nombres sans dimension, caractéristiques des conditions d'un essai expérimental. Cette entreprise est aussi intéressante car elle permet de vérifier si le modèle théorique, représenté par le système d'équations utilisé, est bien adapté à la description des phénomènes observés. Ainsi nous avons jugé utile de rappeler les grandes lignes des méthodes utilisées par M. Combarnous [26] pour évaluer les paramètres du problème

4.1 Evaluation expérimentale des nombres sans dimension et discussion

Les nombres sans dimension qui interviennent dans le problème sont :

$$Ra = \frac{\overbrace{\alpha_f(\rho c)_f}^{=A}}{\nu_f} \frac{K}{\lambda} g(T_1 - T_0)H \tag{4.1}$$

$$Pe = \frac{V_e H(\rho c)_f}{\lambda} \tag{4.2}$$

$$Re_K = c_F \frac{K^{\frac{1}{2}} V_e}{\nu_f} \tag{4.3}$$

$$\tag{4.4}$$

L'évaluation des différents paramètres a été réalisée dans [26].
Conductivité thermique équivalente λ^* :

L' interprétation des essais menés en régime de conduction pure, lorsque $(T_0^* - T_1^*)$ est faible permet, de déterminer λ^* lorsque l'on tient compte des fuites thermiques. Lorsque l'on utilise cette méthode d'évaluation directe λ^* est notée λ_2^*. Les variations de λ^* en fonction de la température moyenne de l'essai sont négligées.

Perméabilité :

La dimension relativement faible du massif poreux ne permet pas une détermination directe de la perméabilité, ni le long de l'axe du milieu, ni dans la direction verticale. K est donc estimé à l'aide de la loi de Kozeny-Carman en fonction de la porosité ϕ :

$$K = K_2 = \frac{d^2}{36C_0}\frac{\phi^3}{(1-\phi)^2}$$

la constante C_0 est choisie égale à 4.8 pour des grains sphériques de diamètre d.

Caractéristiques du fluide :

Les caractéristiques physiques des fluides, varient avec la température, la viscosité notamment. Nous présentons sur la figure (4.1) l'évolution, en fonction de la température , du paramètre $A = \frac{\alpha_f(\rho c)_f}{\nu_f}$ intervenant dans l'expression de Ra pour l'eau et l'huile aux silicones utilisées [26].

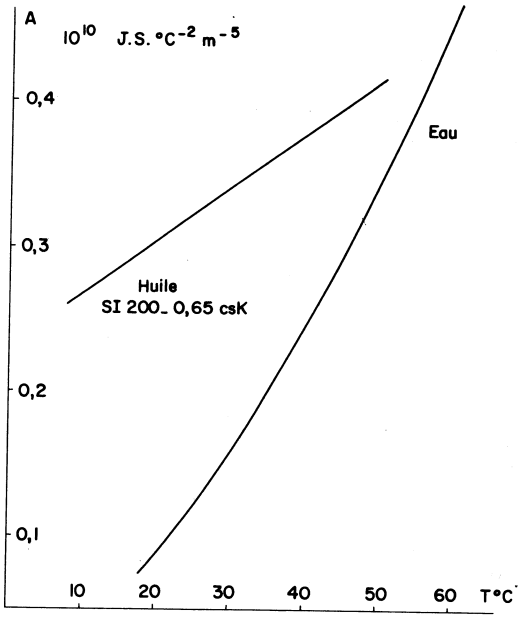


FIG. 4.1 – Coefficient A fonction de la température T

Méthode d'évaluation de Ra

De nombreux paramètres interviennent dans le nombre de Rayleigh dont certains ne sont pas accessibles, par une mesure directe (la perméabilité par exemple). M. Combarnous a donc procédé en deux étapes dans l'évaluation de Ra :

i) la première étape consiste à vérifier le critère d'apparition de la convection naturelle ($Ra_c = 4\pi^2$) et ce en utilisant la valeur de λ_2^* de la conductivité thermique et la valeur de K_2 de la perméabilité.

ii) les résultats de cette vérification étant satisfaisants pour l'ensemble des séries d'essais, connaissant alors la différence de température critique $(T_0^* - T_1^*)_c$ au delà de laquelle apparaît la convection naturelle, on définit un rapport $\left(\frac{H}{\lambda^*}\right) = \left(\frac{H}{\lambda^*}\right)_1$ tel que : $Ra_c\left[\left(\frac{H}{\lambda^*}\right)_1\right] = 4\pi^2$, i.e. $4\pi^2 = gA(T_0^* - T_1^*)_c H\left(\frac{H}{\lambda^*}\right)_1$.

L'écart moyen, pour l'ensemble des séries (6, 7, 11 et 14 entre autres) est égal à 5%. Les valeurs numériques de Ra ont été alors estimées en utilisant $\left(\frac{H}{\lambda^*}\right)_1$ et en prenant une température moyenne $\overline{T} = \frac{T_1^* + T_0^*}{2}$ pour l'évaluation du coefficient A.

Ce rappel de l'estimation expérimentale de Ra a montré que celle-ci tient compte des variations des caractéristiques du fluide utilisé en fonction de la température moyenne. Or le modèle théorique est basé sur l'approximation de Boussinesq qui stipule que toutes les caractéristiques du fluide restent constantes sauf la masse volumique dans le terme lié à la poussée d'Archimède où elle dépend linéairement de la température. Ce constat étant fait, dans toute la suite de ce chapitre, nous utilisons les valeurs de Ra, ainsi que les valeurs des autres paramètres tels qu'ils ont été évalués dans [26].

4.2 Résultats de stabilité linéaire et expérience

Les diagrammes représentent les différents motifs thermo-convectifs observés dans ([26], [29]), sont représentés sur les figures 4.2 et 4.3-a), b), c) dans le plan (Pe, Ra). Dans le régime de la convection laminaire (i.e $Ra < 260$), ces motifs peuvent être des rouleaux longitudinaux fixes ou des structures propagatives. Les essais réalisés montrent que les structures propagatives adoptent parfois une organisation en rouleaux purement transversaux, et d'autres fois une organisation complètement tridimensionnelle.

Sur la figure 4.2 nous avons spécifié en plus, les conditions initiales pour chaque essai. Dans tout le plan (Pe, Ra), chacune des structures observées à l'essai n, sert comme condition initiale pour l'essai suivant $n+1$, excepté pour le point 1 pour lequel l'essai commence à partir de la solution de conduction. Nous y avons également omis les points provenant de la région turbulente. Sur les figures 4.2 et 4.3, nous avons également tracé la frontière entre instabilité absolue et convective pour les rouleaux transversaux.
Puisque différents milieux poreux ont été utilisés dans les expériences avec de l'eau ou de l'huile comme fluide, nous avons rassemblé, dans le tableau 6.1, certaines propriétés thermo-physiques pour différentes séries d'expériences.

séries	solide/fluide	ϕ	$K.10^{-8}$ m^2	$\lambda_s(.10^{-1})$ $W/m°C$	$\lambda_f(.10^{-1})$ $W/m°C$	$\lambda^*(.10^{-1})$ $W/m°C$	Pe^*
6	verre/eau	0.371	1.147	1.5	0.6	0.85	6.95
7	verre/huile	0.351	0.228	1.5.	0.15	1.03	13.27
11	verre/eau	0.381	0.721	1.5	0.6	0.9	7.68
14	quartz/eau	0.324	0.209	6	0.6	4.25	3.29

TAB. 4.1 – Propriétés thermo-physiques pour les différentes séries d' expériences ainsi que la valeur des Pe^*.

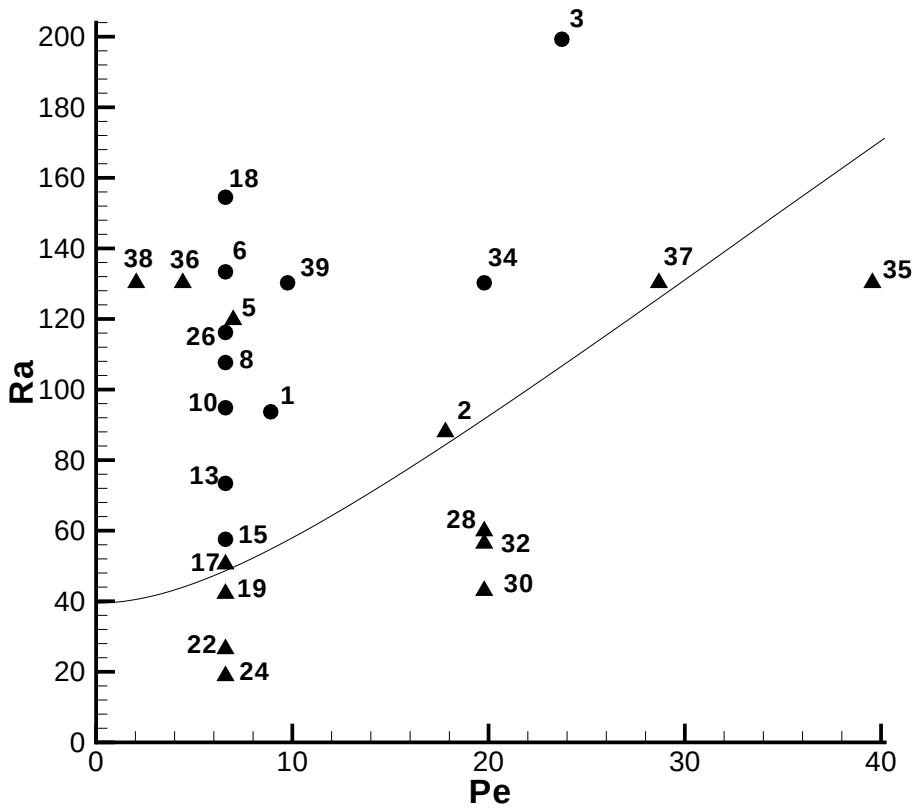


FIG. 4.2 – Carte représentant les différents régimes d'écoulement dans le plan (Pe, Ra) pour les structures observées pour la série 6 (milieu poreux constitué de billes de verre d'un diamètre de 4mm et d'eau) dans la région laminaire : les S.O.3D • et les R.L ▲. Les essais sont indiqués par leurs numéros. Les nombres manquants indiquent la région turbulente. La courbe représente la frontière entre régime convectif et absolu prédite par la théorie. On a $Pe^* \simeq 7.65$ et $Ra_c^* \simeq 39.53$.

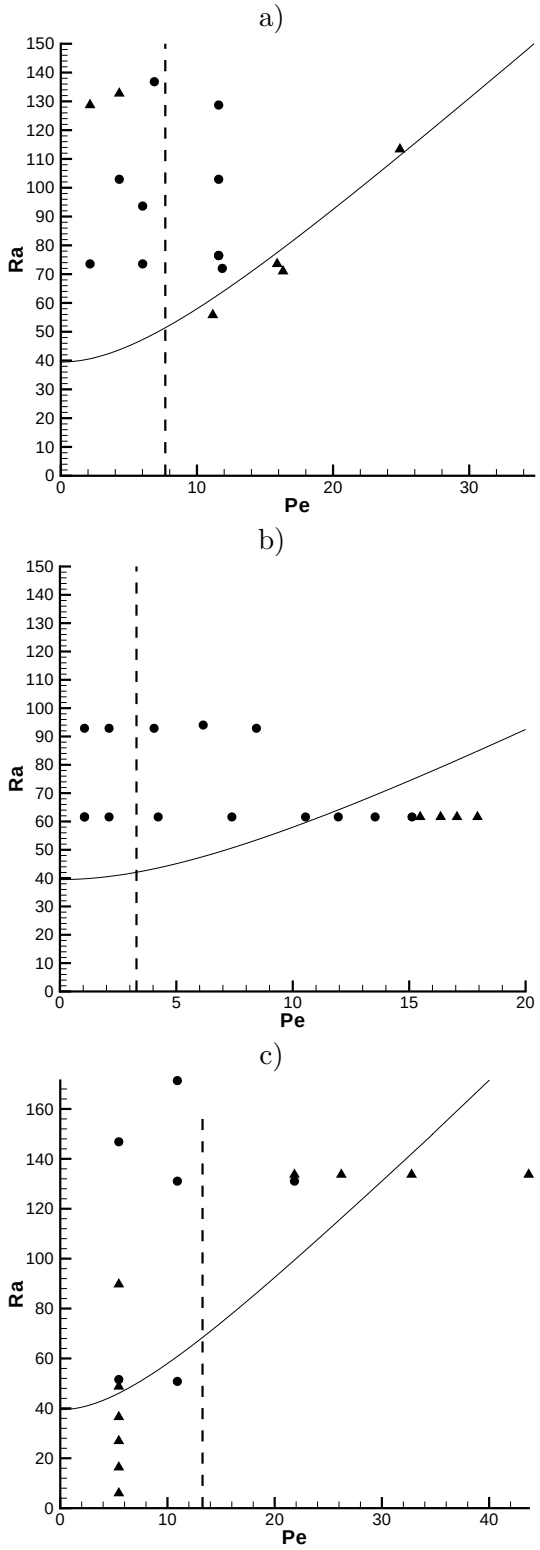


FIG. 4.3 – Carte du régime d'écoulement comme sur la figure 4.2 pour : a) la série 11 (billes de verre d'un diamètre 3mm/ eau), b) la série 14 (quartz d'un diamètre moyen de 2.25mm/ eau) et c) pour la série 7 (billes de verre d'un diamètre 2mm/ huile). La ligne verticale représente $Pe = Pe^*$ avec $Ra_c^* \simeq 39.53$

4.2.1 Approche temporelle de stabilité et expériences

L'approche temporelle de stabilité a permis de montrer que la sélection d'un motif particulier dépendait de la valeur prise par Re_K, comparée à la valeur Re_K^* au point de codimension 2. Les expériences ont toutes été menées dans les milieux poreux de rapport de forme latéral $a = 6.91$. La valeur de Re_K^* pour ce rapport de forme étant très petite ($Re_K^* = 1.2\ 10^{-3}$), les valeurs seuils du nombre de Rayleigh pour différents motifs se valent et avoisinent $4\pi^2$. Cette situation a été illustrée sur la figure 2.3 du chapitre 2 et qui montre que les valeurs seuils des différents modes (i.e. $m_{3D} = 0, \ldots 6$) sont identiques lorsque $Re_K \to 0$.
Cette dégénérescence, qui ne permet pas une sélection franche au seuil de l'instabilité d'un mode privilégié, persiste-t-elle lorsqu'on est loin du seuil ?
La réponse à cette question est apportée en évaluant le taux maximum de croissance temporelle σ_{max} (point G de la figure 2.10 du chapitre 2 ainsi que le complément de l'annexe A) de chaque mode instable. Le résultat est illustré sur la figure 4.4 pour les modes propagatifs $m = 0, \ldots, 6$ et pour les $R.L$ fixes avec $m = 7$. Sur cette figure nous avons tracé : a) le taux de croissance spatio-temporel σ pour chaque rayon x/t à Pe et Ra fixé et b) le maximum du taux de croissance σ_{max} (où l'étude temporelle est valable) en fonction de Ra pour Pe fixé. La figure 4.4-b) démontre sans aucune ambiguïté, que le taux maximum de croissance σ_{max} est identique pour ces modes instables. Nous concluons que la non sélection d'un mode privilégié au seuil de l'instabilité, persiste encore dans la région convectivement instable.

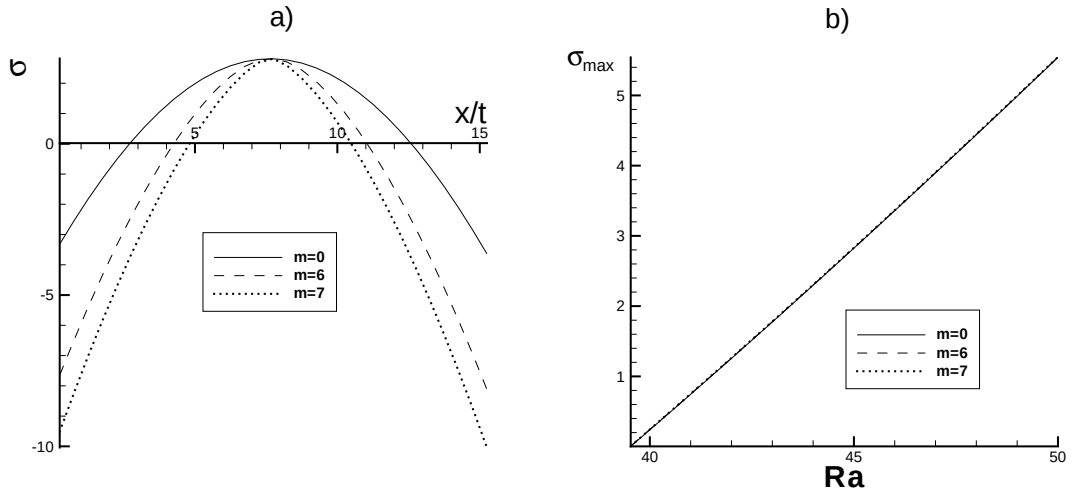


FIG. 4.4 – a) taux maximum de croissance spatio-temporel σ en fonction des rayons x/t avec $Ra = 45$ et $Pe = 7.65$ ($Ra_A = 52.135$) b) taux de croissance maximum σ_{max} fonction de Ra avec $Pe = 7.65$ pour différents $m = 0, 6$ (modes propagatifs) et $m = 7$ (R.L). Tous les taux sont pratiquement confondus.

Sur un plan pratique nous avons estimé la valeur de Pe^*, qui correspond à $Re_K^* = \mathcal{F}Pe^*$,

pour les différents milieux poreux utilisés. Ces valeurs de Pe^* sont reportées sur le tableau 4.1 et sont aussi représentées par les lignes verticales en pointillé sur la figure 4.3. Ces lignes verticales devraient, selon l'analyse linéaire de stabilité temporelle, séparer la région dominée par les R.L de celle où les S.O.3D dominent. Or ceci n'est pas le cas. Nous concluons alors que l'approche temporelle de stabilité linéaire ne rend pas compte des observations expérimentales.

4.2.2 Transition instable convectif/ instable absolu et expériences

Les figures 4.2 et 4.3 montrent que la frontière entre instabilité convective et instabilité absolue décrit presque parfaitement la transition qui se produit entre des S.O.3D ou des structures provenant de la zone turbulente et les R.L. En examinant de près la figure 4.2, nous pouvons observer ce comportement à travers différents scénarios :

- en augmentant Pe pour Ra fixé : point 34 au point 35.
- en augmentant ou en diminuant Ra dans la région laminaire pour Pe fixé : point 17 au point 18 et point 18 au point 19 respectivement.
- en diminuant Ra à partir de la région turbulente ($Ra > 260$) pour une valeur fixe de Pe : on part des points 27, 29, 31 qui ne sont pas représentés sur la figure et on arrive successivement aux points 28, 30, 32 respectivement.
- en diminuant Ra et en augmentant Pe : point 1 au point 2.

La question de l'existence des R.L dans la région convectivement instable (points 19, 28, 30 et 32) et dans la région absolument instable (point 36 et 38) a déjà été discutée qualitativement au chapitre précédent grâce au modèle d'équations d'amplitudes. Pour une meilleure compréhension de cette question, une simulation numérique directe 3D s'avère nécessaire.

Pour les séries 6 et 11 (eau/verre), nous avons constaté, à travers les figures 4.2 et 4.3-a), que les seuils de l'instabilité absolue de l'état conductif vis à vis des S.O.3D, correspondent aux seuils de transition observés expérimentalement entre les structures propagatives et les R.L.

Cet excellent accord observé pour les séries 6 et 11, l'est moins pour les séries 7 et 14 (figure 4.3-b) et c)). Nous pensons que ce léger désaccord est lié à la modélisation adoptée dans ce travail, en supposant qu'au point de vue thermique, ces milieux poreux se comportent comme un milieu fictif **unique** où le transfert de chaleur est décrit par une seule équation. Cette modélisation est satisfaisante, tant que les conductivités thermiques λ_s et λ_f respectivement de la phase solide et de la phase fluide sont proches. Or $\frac{\lambda_f}{\lambda_s} = 0.1$ pour les séries 7 et 14 (voir tableau 6.1). Il est alors nécessaire d'introduire un modèle qui repose sur l'assimilation du milieu poreux à **deux** milieux continus fictifs équivalents, l'un solide, l'autre fluide avec un échange de chaleur entre les deux phases à l'aide d'un coefficient de transfert.

4.3 Longeur d'onde, périodes d'oscillations et vitesse des structures propagatives

Les expériences [26] de convection mixte ont permis de mesurer les longueurs d'onde, les périodes d'oscillations et les vitesses de phase des structures propagatives, pour différents milieux poreux. Nous disposons des résultats issus de différents essais de la série 11 avec un milieu composé d'une matrice solide en verre et de l'eau comme fluide. Ces expériences ont été menées pour différentes combinaisons de Ra et Pe. Comme nous ne disposons pas d'informations précises sur le caractère 2D ou 3D des structures propagatives obervées, pour une combinaison donnée des paramètres, nous avons décidé que la comparaison des caractéristiques soit faite avec tous les modes instables (i.e. $m = 0, 1, \ldots, 6$).

Longueur d'onde dimensionnée :
La comparaison théorie/ expérience est menée en adoptant deux stratégies complémentaires. Dans un premier temps , pour chaque combinaison des paramètres Ra et Pe utilisés dans l'expérience, nous évaluons la longueur d'onde λ_{th} des modes propagatifs 2D et 3D (i.e. $m = 0, 1, \ldots, 6$). Les résultats obtenus sont indiqués sur le tableau 4.2 où nous précisons le type de mode propagatif dont la longueur d'onde est la plus proche de la longueur d'onde mesurée. Ensuite , dans un second temps, nous dégageons une tendance globale des variations de λ en fonction de Ra pour tous les modes propagatifs (figure 4.5).

Le tableau 4.2 montre que les écarts relatifs entre les longueurs d'onde mesurées λ_{exp} et les longueurs d'onde λ_{th}, toutes estimées dans la région d'instabilité absolue, sont comprises entre 0.5% et 14.5%. La dépendance de λ_{exp} vis à vis de Pe à Ra fixé et vis à vis de Ra à Pe fixé, peut-être déduite directement du tableau 4.2 :

- pour $Ra = 72$, si on augmente Pe de 7.23 à 11.75, la longueur d'onde λ_{exp} croît de 8.9 cm à 10.4 cm.
- pour $Pe = 11.75$, l'augmentation successive de Ra de 72 à 101, puis ensuite à 128.5 a pour effet une décroissance successive de λ_{exp} de 10.4 cm à 7.1 cm et de 7.1 cm à 6.7 cm.

Ces comportements observés expérimentalement confirment la dépendance de la longueur d'onde λ_{th} prédite vis à vis de Pe et Ra déjà signalée au chapitre 2 et illustrés sur la figure 2.16-a).

Pour une comparaison plus qualitative nous nous sommes intéressés à la dépendance globale de la longueur d'onde vis à vis de Ra. En utilisant une approximation de moindre-carré, nous avons interpolé les longueurs d'ondes expérimentales λ_{exp} et théoriques λ_{th}. Les interpolations de λ_{exp} sont présentées sur la figure 4.5 comme fonction de Ra pour la série 11 avec l'interpolation de λ_{th} des R.T (m=0) et des S.O.3D (m=6) dans le régime absolu. Les interpolations de λ_{th} pour S.O.3D avec $1 \leq m \leq 5$ se trouvent entre les courbes $m = 0$ et $m = 6$. Cette figure montre que la longueur d'onde prédite des R.T est en dessous des mesures expérimentales d'environ 10% alors que l'écart avec λ_{th} des S.O.3D est moins important.

Pe	Ra	λ_{exp} (cm)	λ_{th} (cm)	erreur (%)
2.56	63.95	13.3	11.46 $(m = 6)$	-13.8
7.23	72	8.9	8.81 $(m = 3)$	-1
11.75	72	10.4	10.35 $(m = 5)$	-0.5
8.28	75	10.8	10.12 $(m = 6)$	-6.3
13.86	76.40	8.4	9.61 $(m = 0)$	14.4
6.17	89.5	9.2	9.33 $(m = 6)$	1.4
11.75	101	7.1	8.13 $(m = 0)$	14.5
11.75	128.5	6.7	7.37 $(m = 0)$	10.
7.83	132.	9.16	7.93 $(m = 6)$	-13.4

TAB. 4.2 – Comparaison entre les longueurs d'onde dimensionnées prédites λ_{th} et mesurées λ_{exp} respectivement, pour différentes combinaisons de Ra et Pe.

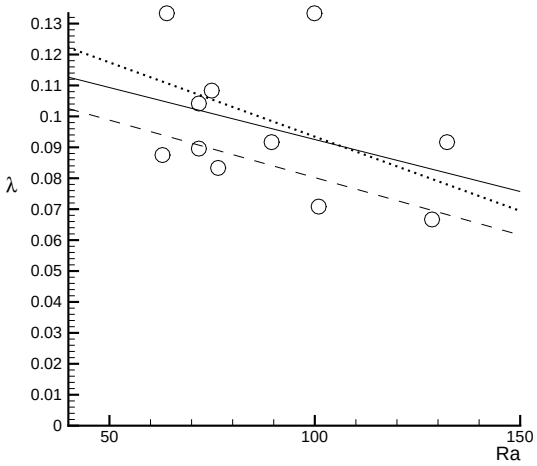


FIG. 4.5 – Longueur d'onde dimensionné λ (en m) en fonction de Ra pour les points expérimentaux $\circ$ et les droites d' interpolation des longueurs d'onde obtenues à partir des points expérimentaux $(-)$ et à partir des prédictions théoriques pour les S.O.3D avec $m = 6$ $(\cdots)$ et R.T avec $m = 0$ $(--)$

Vitesse de phase dimensionnée :

Les enregistrements de la température permettent la mesure de la vitesse de phase relative des structures propagatives : V_p/V_i. Cette vitesse dépend de la porosité ϕ et du rapport des capacités thermiques entre la matrice solide et fluide $(\rho c)_f/(\rho c)_s$. Les données expérimentales de la série 11 ([26]-[28]) donnent : $\phi V_p/V_i = 0.43$. Dans le chapitre 2 nous avons obtenu une vitesse de phase adimensionnée $V_\varphi = \omega_r/k_r$ à peu près égale à Pe. Nous obtenons après dimensionnement : $\phi V_p/V_i = 1/[1-\phi(\rho c)_s/(\rho c)_f)]$. Pour la série 11, avec $\phi = 0.381$ et $(\rho_c)_f/(\rho c)_s = 2.2$ on trouve $V_p/V_i = 0.57$.

Cette différence est peut-être dûe au fait que notre modèle considère des plaques horizontales isothermes. Cette hypothèse suppose que le coefficient de conductivité thermique est infinie ce qui est rarement le cas dans les expériences réelles. Dans le contexte du problème de Rayleigh-Bénard pur, sans débit entrant, Carrière et al [19] ont examiné l'importance de la conductivité des plaques horizontales. Les résultats indiquent en particulier que si la conductivité du fluide dépasse celle des plaques horizontales, le nombre

de Rayleigh critique et le nombre d'onde décroissent fortement. L'influence d'un coefficient de conduction thermique fini des plaques métalliques sur les nombres d'onde, les fréquences et la vitesse de phase doit sans doute être prise en compte.

Périodes d'oscillations dimensionnées

Nous avons constaté précédemment qu'il existe un écart relativement important entre la vitesse de phase mesurée et celle prédite théoriquement. La conséquence immédiate de cet écart est que les périodes prédites d'oscillations sont toujours plus petites que les périodes mesurées. Néanmoins, la curiosité nous a poussé à comparer les périodes mesurées T^* avec leurs valeurs T^A, juste au seuil de l'instabilité absolue. Le résultat, illustré sur la figure 4.6, montre un excellent accord.

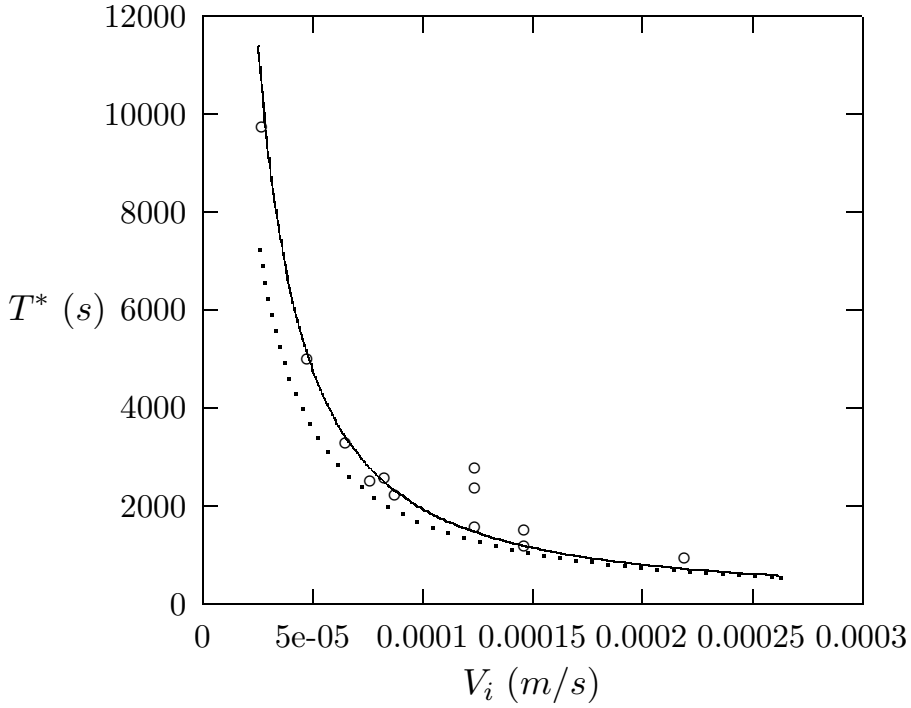


FIG. 4.6 – Période dimensionnée des oscillations en fonction de la vitesse intersticielle $V_i(m/s)$: expérience verre/eau ($\circ$), prédiction théorique au seuil absolu ($-$ pour les S.O.3D et $--$ pour les R.T).

4.4 conclusion

Ce chapitre a fait l'objet d'une étude comparative entre les résultats expérimentaux [26] et les prédictions, essentiellement issues de l'analyse linéaire de la stabilité de l'état de conduction. Il en ressort les conclusions suivantes :

- La théorie de stabilité marginale ne rend pas compte de la réalité expérimentale.

- Les seuils d'instabilité absolue de l'état conductif vis à vis des structures propagatives, correspondent aux seuils de la transition observée expérimentalement des structures oscillatoires aux rouleaux longitudinaux fixes et vice versa. Cette correspondance est parfaite lorsque la phase fluide et la phase solide du milieu poreux ont des conductivités thermiques proches. Le modèle théorique, basé sur l'hypothèse d'un équilibre thermodynamique local entre les deux phases est tout à fait justifié. Il l'est moins, au regard des résultats expérimentaux, pour des milieux poreux où le rapport des conductivités thermiques des deux phases est loin de l'unité. Dans ce cas, l'utilisation d'un modèle à deux équations d'énergie s'impose, chacune d'elle décrivant le transfert de chaleur de l'une ou l'autre phase.
- Pour différentes combinaisons des paramètres Pe et Ra, les longueurs d'ondes des structures propagatives observées expérimentalement sont en bon accord avec celle prédites en régime absolument instable. Cependant les valeurs des vitesses de propagation de ces structures sont surestimées par la théorie.
  Nous pensons que ce désaccord résulte de l'hypothèse trop idéalisée qui consiste à supposer des plaques planes parfaitement conductrices de la chaleur. L'introduction d'un coefficient de transfert de chaleur fini de ces plaques pourrait probablement atténuer ce désaccord. Ce dernier, concernant les vitesses de phase, induit une sous-estimation des périodes d'oscillations, comparées à l'expérience. Cependant, pour une valeur fixée de Pe, les périodes d'oscillations prédites au seuil de l'instabilité absolue, s'avèrent être en excellent accord avec les périodes mesurées.

Les principaux résultats ont fait l'objet d'un article soumis [38].

Chapitre 5

Méthodes spectrales pour la résolution des équations de la convection mixte en milieu poreux

La résolution analytique des équations de la convection mixte en milieu poreux, n'est pas aisée, voir impossible. Les résultats sont issus de nombreuses approximations mais ils permettent de comprendre le comportement global des phénomènes mis en jeux lors des expériences. L'outil numérique est alors d'une grande aide, car il est possible de simuler les équations au cas par cas, en prenant pleinement en compte les effets non linéaires du système. Dans le domaine, il existe de nombreuses méthodes de discrétisation des équations comme les éléments finis, les volumes finis, les différences finies ou encore les méthodes spectrales, chacune ayant ses spécificités. Nous avons choisi de travailler avec les méthodes spectrales qui sont d'une grande précision et s'adaptent bien à des géométries simples.

Dans ce chapitre, nous présenterons dans un premier temps la discrétisation temporelle des équations puis la discrétisation spatiale où nous détaillons la résolution d'une équation type pour notre problème : l'équation de Helmholtz. Enfin, nous terminerons par la présentation de certains résultats numériques participant à la validation du code.

5.1 Position du problème

Il s'agit de résoudre le système complet d'équation régissant le phénomème de convection mixte par intégration numérique. On se place dans un milieu poreux bidimensionnel $\Omega = [-1, 1].[-1, 1]$ dans lequel on applique les équations de Darcy couplées avec les

équations de transport de la chaleur établies dans le chapitre précédent soit :

$$\vec{V} = -\vec{\nabla}P + Ra.T\vec{e}_z \tag{5.1}$$
$$div(V) = 0 \tag{5.2}$$
$$\partial_t T + \vec{V} \cdot \nabla T = \Delta T \tag{5.3}$$

ce système est équivalent au système suivant, utile dans la résolution numérique :

$$\Delta P = Ra.\partial_z T \tag{5.4}$$
$$\vec{V} = -\vec{\nabla}P + Ra.T\vec{e}_z \tag{5.5}$$
$$\partial_t T + \vec{V} \cdot \vec{\nabla}T = \Delta T \tag{5.6}$$

conditions aux limites :
Ce milieu est chauffé par le bas, refroidi par le haut avec un débit filtrant imposé (de gauche à droite) c'est à dire que l'on a les conditions aux limites suivantes :

$$u(x = \pm 1, z) = Pe, v(x, z = \pm 1) = 0 \tag{5.7}$$
$$T(x = -1, z) = \frac{(1-z)}{2}, \frac{\partial T}{\partial x}(x = 1, z) = 0, T(x, z = -1) = 1, T(x, z = 1) = 0 \tag{5.8}$$

La condition de sortie $\frac{\partial T}{\partial x}(x = 1, z) = 0$ permet de se rapprocher de l'expérience, il n'y a pas d'échange de chaleur à la sortie comparativement à l'échange de chaleur suivant la direction verticale. Une autre condition acceptable mais plus restrictive est la solution de conduction en sortie $T(x = 1, z) = \frac{(1-z)}{2}$, dans tous les cas cela ne modifie pas les grandeurs globales (fréquences, amplitudes...). Les grandeurs sont uniquement modifiées localement en sortie, notamment la distribution de température mais pas la distribution de vitesse.
On peut voir sur la figure (5.1) le schéma représentant les conditions aux limites de l'écoulement simulé .

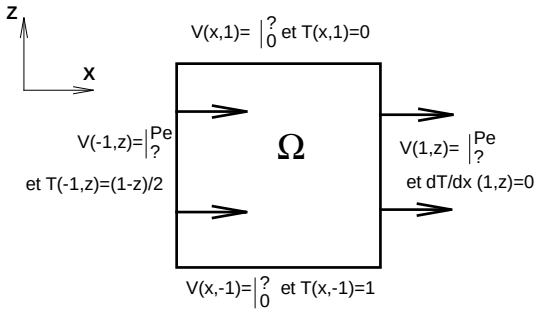


FIG. 5.1 – Domaine du milieu poreux Ω associé aux conditions aux limites sur $\partial\Omega$, les " ?" signifient qu'il n'y a aucune condition aux limites, c'est donc laissé libre.

remarque : on peut bien évidemment prendre un domaine quelconque $[-a, a].[-b, b]$ par exemple dans la suite, on se place dans la configuration des expériences de M. Combarnous [26] la longueur de la couche est de 12 pour une hauteur 1 on prendra un domaine symétrique : $\Omega = [-6, 6].[-0.5, 0.5]$.

5.2 Solution de conduction

La solution de conduction représente la solution stationnaire du système (5.1) – (5.3), c'est à dire que l'on résoud le système suivant :

$$\vec{V_0} = -\vec{\nabla} P_0 + Ra.T_0\vec{e_z} \tag{5.9}$$
$$div(V_0) = 0 \tag{5.10}$$
$$\vec{V_0} \cdot \vec{\nabla} T_0 = \Delta T_0 \tag{5.11}$$

où les indices $_0$ désignent les grandeurs stationnaires.
On ajoute à ce système, les conditions aux limites suivantes ce sont les mêmes conditions aux limites que (5.7) – (5.8) :

$$u_0(x = \pm 1, z) = Pe, v_0(x, z = \pm 1) = 0$$
$$\frac{\partial T_0(x = 1, z)}{\partial x} = 0, T_0(x = -1, z) = \frac{(1 - z)}{2}, T_0(x, z = -1) = 1, T_0(x, z = 1) = 0$$

On obtient avec ces conditions aux limites la solution de conduction suivante :

$$\vec{V_0}(x, z) = \begin{pmatrix} Pe \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5.12}$$
$$T_0 = (1 - z)/2 \tag{5.13}$$
$$P_0 = Ra/2.(z - \frac{z^2}{2}) - Pe.x + \underbrace{constante}_{prise=0} \tag{5.14}$$

sur les figures 5.2 et 5.3 on a tracé la distribution de la pression de conduction et de la température de conduction.

5.3 Discrétisation temporelle

5.3.1 Solution en perturbation

La solution globale et donc instationnaire du système (5.1) – (5.3) contient au moins la solution de conduction et ce quelque soit le temps. On pose alors pour les grandeurs :

$$T^{(n)} = T_0 + T_1^{(n)}$$
$$P^{(n)} = P_0 + P_1^{(n)}$$
$$\vec{V}^{(n)} = \vec{V_0} + \vec{V_1}^{(n)}$$

où $^{(n)}$ désigne les grandeurs au temps t_n et $*_1$ les perturbations des grandeurs.
Les grandeurs sont discrétisées suivant un schéma d' Adams-Bashforth. En connaissant les grandeurs au temps t_n, t_{n-1} (avec Δt le pas de temps), on obtient pour chacune des équations et après discrétisation temporelle, des équations équivalentes pour les grandeurs au temps t_{n+1} :

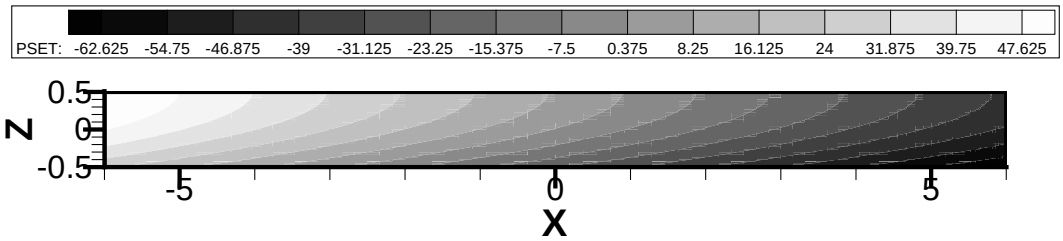


FIG. 5.2 – Distribution de la pression de conduction pour $\Omega = [-6, 6]/[-0.5, 0.5]$

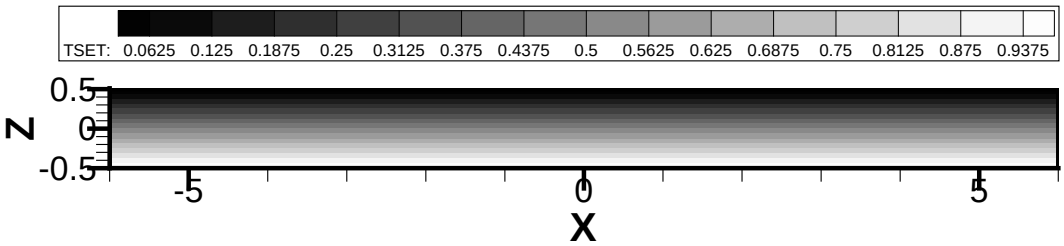


FIG. 5.3 – Distribution de la température de conduction pour $\Omega = [-6, 6]/[-0.5, 0.5]$

- pour l'équation 5.3) ($\partial_t T + \vec{V} \cdot \nabla T = \Delta T$) devient :

$$\frac{3/2T^{(n+1)} - 2T^{(n)} + 1/2T^{(n-1)}}{\Delta t} + \overbrace{(2\vec{(V)}^{(n)}.\nabla T^{(n)} - \vec{(V)}^{(n-1)}.\nabla T^{(n+1)})}^{\text{extrapolation } = TNL^{(n,n-1)}} = \Delta T^{(n+1)}$$

soit

$$(\Delta. - \underbrace{3/2.\frac{1}{\Delta t.}}_{=CH}).T_1^{(n+1)} = \underbrace{CH/3.(-4T^{(n)} + T^{(n-1)}) + CH.T_0^{(n)} + TNL^{(n,n-1)}}_{f^{(n,n-1)}}$$

on résoud donc :

$$(\Delta. - CH.).T_1^{(n+1)} = f^{(n,n-1)} \text{ sur } \Omega \text{ avec} \tag{5.15}$$

$$T_1^{(n+1)}(x = -1, z) = 0, T_1^{(n+1)}(x, z = \pm 1) = 0, \frac{\partial T_1^{(n+1)}}{\partial x}(x = 1, z) = 0 \tag{5.16}$$

on reconnaît une équation de Helmholtz

- en prenant la divergence de l'équation (5.1) ($\Delta P = Ra.\partial_z T$) on obtient une équation de Poisson :

$$\Delta' P^{(n+1)} = \widetilde{div}(\vec{g}^{(n+1)})$$

avec $\vec{g}^{(n+1)} = Ra.T^{(n+1)}.\vec{e}_z$, $\widetilde{div}(\ldots)$ la divergence calculée avec $\vec{g}$, mais où on remplace les valeurs aux frontières par les conditions aux limites sur la vitesse et Δ'

est l'opérateur quasi-Poisson (voir paragraphe (5.5.2) pour plus de détail). Pour la perturbation de P on a :

$$\Delta' P_1^{(n+1)} = \underbrace{\widetilde{div}(\vec{g}^{(n+1)}) - \Delta' P_0}_{=h^{(n+1)}} \tag{5.17}$$

$$\tag{5.18}$$

il n'y a aucune condition explicite aux limites sur la pression.

- on résoud la vitesse sans rien changer c'est à dire

$$\vec{V}^{(n+1)} = -\vec{\nabla} P^{(n+1)} + Ra.T^{(n+1)}\vec{e}_z$$

dans Ω avec comme conditions aux limites $\vec{V}^{(n+1)}(x = \pm 1, z) = Pe, \vec{V}^{(n+1)}(x, z = \pm 1) = 0$. La perturbation de la vitesse se déduit par différence : $\vec{V}_1^{(n+1)} = \vec{V}^{(n+1)} - T_0$.

Finalement, en connaissant les grandeurs au temps t_n, t_{n-1}, on les calcule au temps t_{n+1} en résolvant le système suivant :

$$(\Delta. - CH.).T_1^{(n+1)} = f^{(n,n-1)} \text{ sur } \Omega \text{ avec} \tag{5.19}$$

$$T_1^{(n+1)}(x = -1, z) = 0, T_1^{(n+1)}(x, z = \pm 1) = 0, \frac{\partial T_1^{(n+1)}}{\partial x}(x = 1, z) = 0 \tag{5.20}$$

$$\Delta' P_1^{(n+1)} = h^{(n+1)} \text{ sans condition aux limites} \tag{5.21}$$

$$\vec{V}^{(n+1)} = -\vec{\nabla} P^{(n+1)} + Ra.T^{(n+1)}\vec{e}_z \tag{5.22}$$

$$\text{avec } \vec{V}^{(n+1)}(x = \pm 1, z) = Pe, \vec{V}^{(n+1)}(x, z = \pm 1) = 0 \tag{5.23}$$

Puis connaissant les grandeurs au temps t_{n+1}, t_n, on les calcul au temps t_{n+2} par le même système, ce processus itératif décrit la résolution temporelle.

5.3.2 Zone tampon

Comme la simulation numérique n'est pas effectuée sur un domaine infini mais fini, les conditions aux limites sur les grandeurs en $x = 1$, peuvent induire une "réponse" sur l'amont de l'écoulement. Cette précaution est essentiellement dûe au caractère elliptique des équations résolues : on a essentiellement des opérateurs de "diffusion" (équation de Poisson et de Helmholtz).

Pour limiter cet effet, en s'inspirant de [91] on a créé une zone tampon dans laquelle :

pour T on diminue la diffusion thermique dans la zone tampon et on advecte la température à la vitesse Pe on résoud le système :

$$\partial_t T + \Phi(\vec{V}) \cdot \nabla T = \nu(x)\Delta T$$

avec $\Phi(\vec{V}) = (\vec{V} - \vec{V_0}).f(x) + \vec{V_0}$ et $\nu(x) = \nu_1 - (\nu_1 - 1) * f(x)$ où f est une fonction lentement décroissante de 1 jusqu'à approximativement 0 [1] (figure 5.4). Dans la zone

[1] $f(x) = 0.5 + 0.5 \tanh\left(4 - 8\frac{x - x_d}{x_b - x_d}\right)$ où x_d est l'abscisse de la fin du domaine et x_b l'abscisse du point où commence la décroissance vers 0

tampon, Φ permet de réduire les perturbations de la vitesse $\vec{V_1}$ pour le transport de la température et $\nu(x)$ ($\nu_1 < 1$) permet de réduire la diffusion thermique.
Numériquement on résoud l' équation pour la perturbation :

$$(\nu(x).\Delta. - CH).T_1^{(n+1)} = f_2^{(n,n-1)} \tag{5.24}$$

<u>pour P</u> on atténue le terme source de la pression c'est à dire

$$\Delta' P_1^{(n+1)} = f(x).g^{(n+1)} \tag{5.25}$$

Finalement au bout de la zone tampon on a les équations :

$$\partial_t T + \vec{V_0} \cdot \partial_x T = \nu_1 \Delta T \text{ (c'est du transport suivant } x)$$
$$\text{"}\Delta\text{"} P_1^{(n+1)}(x = 1, z) \backsimeq 0$$

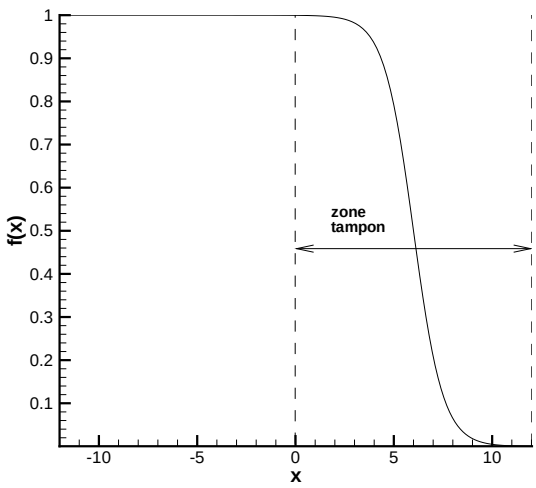


FIG. 5.4 – fonction d'atténuation avec le début de la décroissance en $x_b = 0$

5.4 Résolution spatiale, méthode spectrale

On présente dans ce paragraphe les rudiments nécessaires à la résolution numérique du problème spatial (5.19)-(5.23), l'équation type servant à décrire ce système est l'équation de Helmholtz pour un scalaire A c' est à dire :

$$(\Delta - \sigma).A(\overrightarrow{x}) = f(\overrightarrow{x})$$

avec σ réel. Si $\sigma = 0$, on retrouve une équation de Poisson. Pour résoudre cette équation on utilise une méthode spectrale ou spectrale de collocation. Cela consiste à approcher la solution spatiale par 1 base de polynômes de haut degré, orthogonaux par rapport à

1 produit scalaire. On choisit les polynômes de Tchebychev car le maillage étant plus raffiné sur le bord du domaine, ils sont donc adaptés aux problèmes de couche limite (ici couche limite thermique).

L'intérêt des méthodes spectrales est la très grande précision des résultats : pour une fonction régulière (ou analytique) l'erreur commise par l'approximation tend exponentiellement vers zéro quand le degré du polynôme augmente. De plus elles ont un caractère global : tous les points participent au calcul des dérivées en un point donné dans une direction donnée (contrairement aux méthodes de différences-volumes finis). La plupart du temps elles sont écrites pour des domaines rectangulaires, cylindriques ou sphériques, elles restent plus difficilement adaptables à des domaines de calcul quelconques. Pour plus de détails, on pourra consulter [12], [16] et [76] sur les méthodes spectrales, [5] pour leurs applications en milieu poreux et [48] pour la résolution de l'équation de Helmholtz. Dans la suite, nous avons opté pour une formulation forte des équations à résoudre.

5.4.1 Cas unidimensionnel de l'équation de Helmholtz

Pour commencer simplifions le problème : plaçons-nous dans le cas unidimensionnel de l'équation de Helmholtz avec $x \in [-1, 1]$ et des conditions aux limites mixtes Neuman-Dirichlet (Robins) soit :

$$(\frac{d^2}{dx^2} - \sigma).A(x) = \quad f(x) \tag{5.26}$$

$$\alpha_{\pm}.A_{\pm} + \beta_{\pm}.\frac{\partial A_{\pm}}{\partial x} = \quad \gamma_{\pm} \tag{5.27}$$

avec $\pm$ indique la valeur prise par la variable en $x = \pm 1$.
Pour décomposer A, on utilise la base des polynômes de Tchebychev c'est à dire les polynômes notés T_m tel que :

$$T_m(x) = \cos(\arccos(mx))$$

Ces polynômes peuvent être construits de manière itérative :

$$T_0(x) = 1,\ T_1(x) = x \text{ et } T_p(x) = 2xT_{p-1}(x) - T_{p-2}(x)$$

Pour m fixé, $T_m \in \mathcal{P}_m$ où $\mathcal{P}_m$ désignant l'espace des polynômes de degré m.

5.4.1.1 méthode de Galerkin

Pour décomposer A on utilise la méthode générale de Galerkin, qui permet d' écrire A sous la forme d'une série infinie de polynôme de Tchebychev, si A est suffisamment régulier on a :

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{a}_m T_m(x) \tag{5.28}$$

où $\tilde{a}_n$ désigne les composantes spectrales de A dans la base des T_m . Pour pouvoir écrire cette décomposition il faut introduire le produit scalaire suivant :

$$< f, g >= \int_{-1}^{+1} f(x)g(x)w(x)dx$$

avec la fonction de poids $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pour laquelle les T_m sont orthogonales, en effet ils vérifient :

$$< T_i, T_j >= c_i \frac{\pi}{2} \delta_{ij} \text{ avec } c_0 = 2 \text{ et } c_i = 1 \text{ pour } i \geq 1$$

On peut alors écrire les composantes spectrales :

$$\tilde{a}_m =< A, T_m > \frac{2}{\pi c_m}$$

Dans ces conditions on peut approcher A en tronquant la série à l'ordre N ($N+1$ est appelé fréquence de coupure) que l'on note A_N^g, soit :

$$A(x) \simeq A_N^g(x) = \sum_{n=0}^{N} \tilde{a}_m T_m(x) \tag{5.29}$$

Pour exprimer la dérivée de A, on peut soit différentier directement l'expression de A_N, soit réécrire la dérivée de A_N dans la base des T_m c'est à dire :

$$\begin{cases} \dfrac{dA_N^g(x)}{dx} = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} \tilde{a}_n \left(\frac{dT_n(x)}{dx} \right) \\ \dfrac{dA_N^g(x)}{dx} = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} \tilde{a}_n^1 T_n(x) \end{cases}$$

où $\tilde{a}_n^1$ désignent les composantes spectrales de la dérivée de A. On en déduit alors :

$$\tilde{a}_j^1 = \frac{2}{\pi c_i} \sum_{n=0}^{N} \tilde{a}_n \underbrace{< T_j, \frac{dT_n}{dx} >}_{=\mathbf{D}_{j,n}^x}$$

avec $\mathbf{D}_{j,n}^x = \frac{2n}{c_j}$ pour $\{j - n + 1 \leq 0 \text{ et pair } \}$. On a donc pour la dérivée de A :

$$\frac{dA(x)}{dx} \simeq \frac{dA_N^g(x)}{dx} = \sum_{j=0}^{N} \left(\sum_{n=0}^{N} \mathbf{D}_{j,n}^x \tilde{a}_n \right) T_j(x)$$

On en déduit plus généralement pour la dérivée $k^{\text{ième}}$ de A :

$$\frac{d^k A(x)}{dx^k} \simeq \frac{d^k A_N^g(x)}{dx^k} = \sum_{j=0}^{N} \left(\sum_{n=0}^{N} [\mathbf{D}^x]_{j,n}^k \tilde{a}_n \right) T_j(x) \tag{5.30}$$

où $[\mathbf{D}^x]^k$ désigne k fois le produit matriciel de $\mathbf{D}^x$.
Si on cherche à résoudre l'équation de Helmholtz (5.26) sans condition aux limites, on peut écrire le système suivant :

$$\sum_{j=0}^{N}\left[\left(\sum_{n=0}^{N}[\mathbf{D}^x]^2_{j,n})\tilde{a}_n\right)-\sigma\tilde{a}_j\right]T_j(x)\simeq(\frac{d^2}{dx^2}-\sigma).A(x)=f(x)\simeq\sum_{k=0}^{N}\tilde{f}_kT_k(x)$$

avec $\tilde{f}_k =< f, Tn > \frac{2}{c_k}$ les composantes spectrales de f. Si on égalise les termes de droites et ceux de gauche pour chaque T_n, on résoud donc le système linéaire suivant :

$$\left([\mathbf{D}^x]^2-\sigma.Id\right).\overrightarrow{\tilde{a}}=\overrightarrow{\tilde{f}} \tag{5.31}$$

avec $\overrightarrow{\tilde{f}}$ le vecteur construit avec les $(\tilde{f}_k)_{k=0..N}$, $\overrightarrow{\tilde{a}}$ le vecteur construit avec les $(\tilde{a}_n)_{n=0..N}$, $\mathbf{D}^x$, la matrice construite avec $(\mathbf{D}^x_{j,n})$ et Id représente la matrice identité.
Ce système de dimension finie peut être résolu à condition de connaître les $\tilde{f}_k$, c'est à dire de connaître f de manière continue et d'évaluer exactement l'intégrale dans $< f, T_n >$ ce qui est rarement le cas. Pour évaluer ce produit scalaire on est donc amené à remplacer l'intégration continue par une intégration numérique. En effet il est plus facile d'évaluer la fonction f en certains points plutôt que de l'intégrer continûment.

5.4.1.2 méthode de collocation

résolution pseudo spectrale

On passe donc d'une intégrale continue à une intégrale approximée par la quadrature de Gauss aux points de quadrature (appellé aussi points de collocation) de Gauss-Labatto $x_i = \cos(\frac{\pi i}{N})$ avec $i = 0 \dots N$ soit :

$$\int_{-1}^{1} f(x)w(x)dw \cong \frac{\pi}{N}\sum_{i=0}^{N}\frac{f(x_i)}{\overline{c_i}}$$

avec si $i = 0$ ou N alors $\overline{c}_i = 2$, si $1 \leq i \leq N-1$ alors $\overline{c}_i = 1$.

Le pas d'espace $\Delta x = x_{i+1} - x_i$ est donc plus resserré vers les frontières en -1 et 1 où le pas d'espace varie comme $\Delta x \sim (\frac{1}{N^2})$, et plus espacé au centre $\Delta x \sim (\frac{1}{N})$. Cela permet une meilleure résolution aux extrémités, pratique dans le cas de couche limite. On peut donc construire le produit scalaire discrétisé noté $< .,. >_d$:

$$< f, g >_d = \frac{\pi}{N}\sum_{i=0}^{N} f(x_i)g(x_i)\frac{1}{\overline{c_i}}$$

Avec la propriété pour $\varphi \in \mathcal{P}_{2N-1}$ d'avoir exactement :

$$\int_{-1}^{1}\varphi(x)w(x)dx = \frac{\pi}{N}\sum_{i=0}^{N}\frac{\varphi(x_i)}{\overline{c_i}}$$

en particulier si $T_m.T_n \in \mathcal{P}_{2N-1}$ on a :

$$< T_m, T_n >_d = < T_m, T_n > = \frac{\pi}{\overline{c}_m}\delta_{m,n} = \frac{\pi}{c_m}\delta_{m,n}$$

On décompose A (de même pour f) dans la base des T_m via le produit scalaire discrétisé, A est alors approximé par la série tronquée notée A_N^c :

$$A(x) \simeq A_N^c(x) = \sum_{n=0}^{N} \hat{a}_n T_n(x)$$

où $\hat{a}_n$ est appelé pseudo-spectre avec :

$$\hat{a}_n = \frac{2}{\overline{c_k}\pi} < A, T_n >_d = \frac{2}{\overline{c_k}N} \sum \left(\frac{1}{\overline{c_i}} a_i \cos\left(\frac{k\pi}{N}\right)\right)$$

avec $a_i = A(x_i)$, on obtient exactement $A_N^c(x_i) = A(x_i)$. Pour les dérivées on obtient des résultats similaires à (5.30) :

$$\frac{d^k A(x)}{dx^k} \simeq \frac{d^k A_N^c(x)}{dx^k} = \sum_{j=0}^{N} \left(\sum_{n=0}^{N} [\mathbf{D}^x]_{j,n}^k \tilde{a}_n \right) T_j(x)$$

et finalement si on cherche à résoudre l'équation de Helmholtz (5.26) sans condition aux limites, on résout comme précédemment (voir 5.31) le système linéaire suivant :

$$\left([\mathbf{D}^x]^2 - \sigma.Id\right).\overrightarrow{\hat{a}} = \overrightarrow{\hat{f}}$$

avec $\overrightarrow{\hat{f}}$ et $\overrightarrow{\hat{a}}$ les vecteurs basés sur les composantes pseudo-spectrales $(\hat{a}_j)_{j=0..N}$ et $(\hat{f}_j)_{j=0..N}$.
Le calcul est donc équivalent à celui obtenu par la méthode de Galerkin tronquée, sauf que les composantes pseudo-spectrales sont evaluées en ne connaissant la valeur de A et f qu' aux points de collocation x_i. Néanmoins il y a une différence (appelée aliasing) entre le spectre et le pseudo-spectre généralement $\hat{a} \neq \tilde{a}$ et $\hat{f} \neq \tilde{f}$ sauf si u et f sont dans $\mathcal{P}_{2N-1}$. En effet en reprenant le calcul de $\hat{a}$ et en remplaçant les a par sa série de Galerkin (5.28) on obtient :

$$\hat{a}_m = \tilde{a}_m + \frac{2}{\pi\overline{c_m}} \sum_{k=N+1}^{\infty} \tilde{a}_k < T_k, T_m >_d$$

c'est à dire que le pseudo-spectre diffère du spectre d'une quantité à laquelle contribue toute la partie du spectre située au delà de la fréquence de coupure (définie par N) cela est dû à la non orthogonalité discrète des fonctions T_m au delà de N.

résolution dans l'espace physique

Grâce au calcul des pseudo-spectres on peut exprimer A_N^c par le calcul de la série 5.4.1.2 dans tout le domaine. Néanmoins il est plus pratique de travailler directement avec les

points A_i c'est à dire avec l'espace physique. Pour cela on interpole A_N^c à l'aide de polynômes de Lagrange h_j aux points x_i. On obtient exactement, sans perte :

$$\sum_{k=0}^{N} \hat{a}_k T_k(x) = A_N^c(x) = \sum_{j=0}^{N} h_j(x) a_j$$

avec $h_j(x) = \frac{(-1)^{j+1}(1-x^2)T_N^{'}(x)}{\overline{c}_j N^2(x-x_j)}$ et on vérifie $A_N^c(x_i) = a_i$.
Comme on ne travaille qu'avec les a_i, on obtient pour les dérivées :

$$\frac{dA_N^c(x_k)}{dx} = \sum_{j=0}^{N} \frac{dh_j(x_k)}{dx} a_j$$

On note $\frac{dh_j(x_k)}{dx} = \mathcal{D}_{k,j}^x$ la matrice $j = 0 \dots N, k = 0 \dots N$ avec :

$$\mathcal{D}^x = \begin{bmatrix} \frac{2N^2+1}{6} & & & & \\ & \ddots & & \mathcal{B}_{i,j} & \\ & & -\frac{x_j}{2(1-x_j^2)} & & \\ & \mathcal{B}_{i,j} & & \ddots & \\ & & & & -\frac{2N^2+1}{6} \end{bmatrix} \text{ et } \mathcal{B}_{i,j} = \frac{\overline{c}_i}{\overline{c}_j} \frac{(-1)^{i+j}}{(x_i - x_j)}$$

L'écriture se simplifie donc en :

$$\frac{d\overrightarrow{A}_N^c}{dx} = \mathcal{D}^x \overrightarrow{u}$$

avec $\frac{d\overrightarrow{A}_N^c}{dx}$ le vecteur basé sur les $(\frac{dA_N^c}{dx}(x_k))_{k=0\dots N}$ et $\overrightarrow{a}$ le vecteur basé sur les $(a_k)_{k=0\dots N}$.
Plus généralement on montre :

$$\frac{d^k \overrightarrow{A}_N^c}{dx^k} = [\mathcal{D}^x]^k \overrightarrow{a}$$

En travaillant directement avec les a_i, la matrice $\mathcal{D}^x$ est pleine : **le calcul de la dérivée en un point fait intervenir tous les points du domaine** Ω.
Si on cherche à résoudre l'équation de Helmholtz (5.26) sans condition aux limites, on doit donc résoudre le système linéaire suivant pour $j = 0 \dots N$:

$$\left(\sum_{n=0}^{N} [\mathcal{D}^x]_{j,n}^2 a_n \right) - \sigma a_j = f_j \tag{5.32}$$

où $f_j = f(x_j)$, soit sous la forme matricielle on a :

$$\left([\mathcal{D}^x]^2 - \sigma . Id \right) . \overrightarrow{a} = \overrightarrow{f} \tag{5.33}$$

avec $\overrightarrow{f}$ le vecteur basé sur les $(f_j)_{j=0\dots N}$.
C'est cette méthode que nous allons utiliser dans la suite.
<u>remarque</u>

– on relie tout les points de l'espace pseudo-spectral à l'espace physique par la matrice $\mathbb{M}$ définie par :

$$\mathbb{M}_{m,n} = T_n(x_m)$$

avec $T_n(x_m) = \cos\left(\frac{mn\pi}{N}\right)$. On vérifie également :

$$\mathbb{M}^{-1}_{m,n} = \frac{\pi}{N\overline{c}_i} T_m(x_n)$$

On peut alors écrire la relation suivante :

$$\mathcal{D}^x = \mathbb{M}.\mathbf{D}^x.\mathbb{M}^{-1}$$

ce qui permet de relier l'espace physique (E_p) et l'espace pseudo-spectral (E_s) comme ceci :

$$\frac{d\overrightarrow{A}^c_N}{dx} = \underbrace{\mathbb{M}.\mathbf{D}^x.\underbrace{\mathbb{M}^{-1}\underbrace{\overrightarrow{a}}_{E_p}}_{E_s}}_{E_p}$$

– à partir de h, on remarque que les x_i sont les zéros du polynôme $(1-x^2)T_N^{'}(x)$, on aurait choisi les polynômes de Legendre , les x_i seraient les zéros de $(1-x^2)L_N^{'}(x)$ ce qui définit une autre grille (également espacée), et un autre produit scalaire voir [12],... .

5.4.1.3 conditions aux limites

Pour l'instant nous n'avons pas rajouté les conditions limites (5.27). Elles s'écrivent sous la forme discrétisée suivante :

$$\alpha_- a_0 + \beta_- \sum_{k=0}^{N} \mathcal{D}^x_{0,k} a_k = \gamma_- \tag{5.34}$$

$$\alpha_+ a_N + \beta_+ \sum_{k=0}^{N} \mathcal{D}^x_{N,k} a_k = \gamma_+ \tag{5.35}$$

On rappelme que a_0 et a_N représente la valeur de A en $x = -1$ et $x = +1$, grâce à (5.34)-(5.35) on peut déduire leurs valeurs en fonction des autres points $a_1 \dots a_{N-1}$ et donc les remplacer. En effet de (5.34)-(5.35) on en déduit :

$$a_0 = \sum_{k=1}^{N-1} \lambda_k^- a_k + \mu_- \tag{5.36}$$

$$a_N = \sum_{k=1}^{N-1} \lambda_k^+ a_k + \mu_+ \tag{5.37}$$

avec

$$\begin{cases} \lambda_k^- = \dfrac{(\beta_+.\mathcal{D}^x_{N,k}.\beta_-.\mathcal{D}^x_{0,N}) - \Big(\beta_-.\mathcal{D}^x_{0,k}.(\alpha_+ + \beta_+.\mathcal{D}^x_{N,N})\Big)}{\theta} \\ \lambda_k^+ = \dfrac{(\beta_-.\mathcal{D}^x_{0,k}.\beta_+.\mathcal{D}^x_{N,0}) - \Big(\beta_+.\mathcal{D}^x_{M,k}.(\alpha_- + \beta_-.\mathcal{D}^x_{0,0})\Big)}{\theta} \\ \mu_- = \dfrac{(\alpha_+ + \beta_+.\mathcal{D}^x_{N,N}).\gamma_- - (\beta_-.\mathcal{D}^x_{0,N}).\gamma_+}{\theta} \\ \mu_+ = \dfrac{(\alpha_- + \beta_-.\mathcal{D}^x_{0,0}).\gamma_- - (\beta_+.\mathcal{D}^x_{N,0}).\gamma_-}{\theta} \\ \theta = (\alpha_- + \beta_-.\mathcal{D}^x_{0,0}).(\alpha_+ + \beta_+.\mathcal{D}^x_{N,N}) - (\beta_+.\mathcal{D}^x_{N,0}).(\beta_-.\mathcal{D}^x_{0,N}) \end{cases}$$

On peut donc éliminer a_0 et a_N de (5.32), car à j fixé dans $[1, N-1]$ on peut écrire :

$$\sum_{k=0}^{N} [\mathcal{D}^x]^2_{j,k}.a_k = \sum_{k=1}^{N-1} \underbrace{\left\{[\mathcal{D}^x]^2_{j,k} + [\mathcal{D}^x]^2_{j,0}.\lambda_k^- + [\mathcal{D}^x]^2_{j,N}.\lambda_k^+\right\}}_{=[\mathcal{D}^x_{cl}]^2_{j,k}}.a_k + \underbrace{[\mathcal{D}^x]^2_{j,0}.\mu_- + [\mathcal{D}^x]^2_{j,N}.\mu_+}_{=s_j}$$

Alors le système (5.32) avec incorporation des conditions aux limites, devient pour j fixé dans $[1, N-1]$:

$$\sum_{k=1}^{N-1} [\mathcal{D}^x_{cl}]^2_{j,k}.a_k - \sigma.a_j = f_j - s_j \tag{5.38}$$

Si on réécrit sous la forme forme matricielle, le système linéaire (5.32) en incorporant les conditions aux limites, il s'écrit :

$$\left([\mathcal{D}^x_{cl}]^2 - \sigma.Id\right)\overrightarrow{a} = \overrightarrow{f} - \overrightarrow{s} \tag{5.39}$$

avec $\overrightarrow{s}$ le vecteur basé sur les $(s_j)_{j=1\ldots N-1}$, $\overrightarrow{f}$ et $\overrightarrow{a}$ sont également basés sur les $(f_j)_{j=1\ldots N-1}$, $(a_j)_{j=1\ldots N-1}$.
remarque : pour l'incorporation d'autres types de conditions aux limites on pourra consulter S. Nguyen [69], [68] et R. Peyret [76], par exemple si les conditions varient en fonction de x, si on ajoute un terme de diffusion variable devant $\frac{\partial^2}{\partial^2}$ ...

conclusion :
- l'incorporation des conditions aux limites dans le problème de Helmholtz libre (5.33) modifie l'opérateur $\mathcal{D}^x$ (matrice de dimension $N+1, N+1$) en un opérateur $\mathcal{D}^x_{cl}$ (matrice de dimension $N-1, N-1$) et modifie également le second membre $\overrightarrow{f}$ (vecteur de dimension $N+1$) en $\overrightarrow{f} - \overrightarrow{s}$ (vecteur de dimension $N-1$).
- connaissant $\overrightarrow{f} - \overrightarrow{s}$, le système (5.39) est facilement résolvable, il suffit d'inverser la matrice $[\mathcal{D}^x_{cl}]^2 - \sigma.Id$ pour avoir $\overrightarrow{a}$ vecteur basé sur les a_j avec $j = 1 \ldots N-1$ c'est à dire sur l'intérieur du domaine, les points à la frontière a_0 et a_N étant calculé par (5.36)-(5.37).

5.4.2 Cas multidimensionnel de l'équation de Helmholtz

On généralise la méthode de résolution pseudo-spectrale dans l'espace physique, appliquée à un domaine de dimension supérieure quelconque, par la méthode de tensorisation. Pour simplifier, on se place dans le cas bidimensionnel, l'extension au cas tridimensionel, voir N-dimensionnel, est similaire. Soit $\Omega = [-1,1].[-1,1]$, le problème à résoudre devient :

$$(\Delta - \sigma).A = f \tag{5.40}$$

$$\alpha_x^{\pm} A(x=\pm 1, z) + \beta_x^{\pm} \frac{\partial A(x=\pm 1, z)}{\partial x} = \gamma_x^{\pm} \tag{5.41}$$

$$\alpha_z^{\pm} A(x, z=\pm 1) + \beta_z^{\pm} \frac{\partial A(x, z=\pm 1)}{\partial z} = \gamma_z^{\pm} \tag{5.42}$$

On discrétise le scalaire A sur l'intérieur du domaine bidimensionnel Ω par une grille de Gauss-Labatto. On utilise une variable à 2 indices i, j (3 indices en 3D) qui permet d'écrire $a_{i,j} = A(x_i, z_j)$, avec $x_i = \cos(\frac{\pi i}{N_x})$,$z_j = \cos(\frac{\pi j}{N_z})$, $i = 0 \dots N_x$, $j = 0 \dots N_z$ et $N_x + 1$, $N_z + 1$ les fréquences de coupures dans chacune des directions x, z. Les dérivées de A au point (x_i, z_j) s'expriment par :

$$\frac{\partial A}{\partial x}(x_i, z_j) \backsimeq \sum_{k=0}^{N_x} \mathcal{D}_{i,k}^x a_{k,j} \tag{5.43}$$

$$\frac{\partial A}{\partial z}(x_i, z_j) \backsimeq \sum_{l=0}^{N_z} \mathcal{D}_{j,l}^z a_{i,l} \tag{5.44}$$

avec $\mathcal{D}^y$ définie comme $\mathcal{D}^x$.
On introduit le produit tensoriel, il est définie par exemple pour deux matrices B et C, par :

$$C \otimes B = \begin{bmatrix} c_{1,1}.B & \dots & c_{1,N}.B \\ \vdots & & \vdots \\ c_{N,1}.B & \dots & c_{N,N}.B \end{bmatrix}$$

et vérifiant les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} (D+C) \otimes B = D \otimes B + C \otimes B \\ (C \otimes B)(D \otimes E) = CD \otimes BE \\ (C \otimes B)^T = C^T \otimes B^T \\ (C \otimes B)^{-1} = C^{-1} \otimes B^{-1} \end{cases}$$

Ce produit tensoriel permet une écriture relativement simple des données multidimensionnelles sous la forme unidimensionnels. En effet, en prenant en compte les conditions aux limites, on peut écrire les $(a_{i,j})_{i=1\dots Nx-1, j=1\dots Nz-1}$ sous la forme d'un vecteur uni-

dimensionnel défini par :

$$\overrightarrow{a} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{Nx-1,1} \end{bmatrix}_{\text{bloc } 1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \begin{bmatrix} a_{1,Nz-1} \\ \vdots \\ a_{Nx-1,Nz-1} \end{bmatrix}_{\text{bloc } Nz-1} \end{bmatrix}$$

On a la même remarque pour f. Avec cette écriture, le système (5.40) avec les conditions aux limites (5.41)-(5.42) se réécrit sous la forme discrétisée suivante :

$$\left(Id_z \otimes [\mathcal{D}_{cl}^x]^2 + [\mathcal{D}_{cl}^z]^2 \otimes Id_x - \sigma.Id_z \otimes Id_x\right) \overrightarrow{a} = \overrightarrow{f} - \overrightarrow{s}^x - \overrightarrow{s}^z \tag{5.45}$$

avec les s_i^x et les s_j^z définis comme en (5.38) et les vecteurs $\overrightarrow{s}^x$, $\overrightarrow{s}^z$ définis par :

$$\overrightarrow{s}^x = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1^x \\ \vdots \\ s_{Nx-1}^x \end{bmatrix} \\ \vdots \\ \begin{bmatrix} s_1^x \\ \vdots \\ s_{Nx-1} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \text{ et } \overrightarrow{s}^y = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1^z \\ \vdots \\ s_1^z \end{bmatrix} \\ \vdots \\ \begin{bmatrix} s_{Nz-1}^z \\ \vdots \\ s_{Nz-1}^z \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

et $\overrightarrow{a}$ le vecteur basé sur les points intérieurs du domaine soit $(a_{i,j})_{i=1\ldots Nx-1, j=1\ldots Nz-1}$. Avant d'effectuer l'inversion de l'opérateur de Helmholtz pour obtenir $\overrightarrow{a}$, on va d'abord le diagonaliser. Pour cela il suffit de connaître les matrices diagonales des valeurs propres de $[\mathcal{D}_{cl}^x]^2$ et $[\mathcal{D}_{cl}^z]^2$ que l' on note respectivement Λ_x et Λ_z, ainsi que les matrices de passage que l' on note respectivement P_x et P_z, les opérateurs s'écrivent donc sous la forme :

$$[\mathcal{D}_{cl}^x]^2 = P_x \Lambda_x P_x^{-1} \tag{5.46}$$

$$[\mathcal{D}_{cl}^z]^2 = P_z \Lambda_z P_z^{-1} \tag{5.47}$$

En réintroduisant dans (5.45) on obtient :

$$(P_y \otimes P_x)\,(Id_z \otimes \Lambda_x + \Lambda_z \otimes Id_x - \sigma.Id_z \otimes Id_x)\,(P_z^{-1} \otimes P_x^{-1})\overrightarrow{a} = \overrightarrow{f} - \overrightarrow{s}^x - \overrightarrow{s}^z$$

soit :

$$\overrightarrow{a} = (P_z \otimes P_x) \left[\underbrace{(Id_z \otimes \Lambda_x + \Lambda_z \otimes Id_x - \sigma.Id_z \otimes Id_x)}_{=\mathbb{H}} \right]^{-1} (P_z^{-1} \otimes P_x^{-1})(\overrightarrow{f} - \overrightarrow{s}^x - \overrightarrow{s}^z) \tag{5.48}$$

La matrice $\mathbb{H}$ est diagonale, son inversion s'obtient simplement par inversion des termes diagonaux ceux qui est relativement peu coûteux. La résolution de A s'effectue sur les points intérieurs par (5.48), puis les points à la frontière s'obtiennent par une formule analogue à (5.36)-(5.37).

5.5 Résolution numérique des équations

5.5.1 Résolution de la température

Pour la résolution de l'équation (5.19) avec les conditions aux limites (5.20), on reconnaît une équation de Helmholtz du type (5.40) avec les conditions aux limites du type (5.41)-(5.42) on peut donc directement appliquer la méthode vue ci-dessus au cas de la température.

5.5.2 Résolution de la pression et de la vitesse

Connaissant T au temps t_{n+1} il s'agit de résoudre numériquement les équations :

$$\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x} + \frac{\partial v^{n+1}}{\partial z} = 0$$
$$\vec{V^{n+1}} = \begin{bmatrix} u^{n+1} \\ v^{n+1} \end{bmatrix} = -\vec{\nabla} P^{n+1} + \underbrace{Ra.T^{n+1}\vec{e_z}}_{=\vec{g}}$$

Comme il n'y a pas de conditions explicites sur la pression au bord du domaine Ω on ne peut donc pas utiliser directement l'équation de Helmholtz 1D, néanmoins il y en a pour la vitesse ce qui se traduit en terme discrétisé par :

$$u(x=-1,z) = Pe \Leftrightarrow u_{0,j} = Pe \tag{5.49}$$
$$u(x=1,z) = Pe \Leftrightarrow u_{Nx,j} = Pe \tag{5.50}$$
$$v(x,z=-1) = 0 \Leftrightarrow v_{i,0} = 0 \tag{5.51}$$
$$v(x,z=1) = 0 \Leftrightarrow v_{i,Ny} = 0 \tag{5.52}$$

avec $i \in [0, Nx]$ et $j \in [0, Nz]$.
Comme la vitesse et la pression sont reliées par :

$$div(\vec{V}) = 0 \Leftrightarrow div(\vec{\nabla} P) = div(\vec{g})$$

alors, pour connaître la valeur du champ de pression, il faut donc réinjecter la condition sur la vitesse, cela découle directement des équations discrétisées :

- on impose $div(\vec{V}) = 0$ sur tous les noeuds du domaine même à la frontière, c'est à dire pour $i = 0 \ldots Nx$ et $j = 0 \ldots Nz$:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, z_j) + \frac{\partial v}{\partial z}(x_i, z_j) = 0$$

en faisant ressortir les composantes de la vitesse imposée, on peut écrire les dérivées sous la forme discrétisée :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, z_j) \simeq \sum_{k=1}^{Nx-1} \mathcal{D}^x_{i,k} u_{k,j} + \underbrace{\mathcal{D}^x_{i,Nx} u_{Nx,j} + \mathcal{D}^x_{i,0} u_{0,j}}_{\text{imposé}}$$

$$\frac{\partial v}{\partial z}(x_i, z_j) \simeq \sum_{l=1}^{Nz-1} \mathcal{D}^z_{j,l} v_{i,l} + \underbrace{\mathcal{D}^z_{j,Nz} v_{i,Nz} + \mathcal{D}^z_{j,0} v_{i,0}}_{\text{imposé}}$$

- on applique la loi de Darcy pour les points intérieurs :

$$u = -\frac{\partial P}{\partial x} + g^x \Leftrightarrow u_{k,j} = -\sum_{m=0}^{Nx} \mathcal{D}^x_{k,m} P_{m,j} + g^x_{k,j}$$

$$v = -\frac{\partial P}{\partial z} + g^z \Leftrightarrow v_{i,l} = -\sum_{h=0}^{Nz} \mathcal{D}^z_{l,h} P_{i,h} + g^z_{i,l}$$

- finalement on en déduit l'équation pour la pression , définie sur tout le domaine Ω soit :

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{Nx-1} \mathcal{D}^x_{i,k} \underbrace{\left(\sum_{m=0}^{Nx} \mathcal{D}^x_{k,m} P_{m,j} \right)}_{\equiv \text{"}\mathcal{D}_x\text{"} P}}_{\equiv \tilde{\mathcal{D}}_x(\text{"}\mathcal{D}_x\text{"} P)} + \sum_{l=1}^{Nz-1} \mathcal{D}^z_{j,l} \left(\sum_{h=0}^{Nz} \mathcal{D}^z_{l,h} P_{i,h} \right) = \dots$$

$$\dots = \sum_{k=1}^{Nx-1} \mathcal{D}^x_{i,k} g^x_{k,j} + \mathcal{D}^x_{i,Nx} u_{Nx,j} + \mathcal{D}^x_{i,0} u_{0,j} + \sum_{l=1}^{Nz-1} \mathcal{D}^z_{j,l} g^z_{i,l} + \mathcal{D}^z_{j,Nz} v_{i,Nz} + \mathcal{D}^x_{j,0} v_{i,0}$$

soit sous forme tensorielle :

$$\underbrace{\left[Id_z \otimes (\tilde{\mathcal{D}}_x . \text{"}\mathcal{D}_x\text{"}) + (\tilde{\mathcal{D}}_z . \text{"}\mathcal{D}_z\text{"}) \otimes Id_x \right]}_{=\Delta'} P = \widetilde{div}(\vec{g})$$

avec $\tilde{\mathcal{D}}_{x,z}$ les matrices $\mathcal{D}^{x,z}$ vidées de la 1ère et la $N_{x,z}+1$ colonne, "$\mathcal{D}$"$_{x,z}$ les matrice $\mathcal{D}^{x,z}$ vidées de la 1ère et la $N_{x,z}+1$ ligne, Δ' l'opérateur quasi-Poisson, $\widetilde{div}(\vec{g})$ la divergence construite sur les $\mathcal{D}_{x,z}$ mais où on remplace les valeurs des $(\vec{g})$ à la frontière par les conditions aux limites sur la vitesse (5.49)-(5.52).

Finalement on obtient la pression en perturbation et la vitesse au temps t_{n+1} :

$$\boxed{\begin{array}{c} P_1^{n+1} = (\Delta')^{-1} h^{n+1} \\ \vec{V}^{n+1} = -\text{"}\vec{\nabla}\text{"}.P^{n+1} + Ra.T^{n+1}\vec{e}_z \end{array}}$$

avec $h^{n+1} = \widetilde{div}(\vec{g}) - \Delta' P_0$, "$\vec{\nabla}$". construit sur les "$\mathcal{D}$"$_{x,z}$.

L'opération d'inversion, $(\Delta^{'})^{-1}$ se calcule par diagonalisation. On a donc déterminé P_1^{n+1} et la vitesse sur tout Ω.
remarque : la condition imposée sur la vitesse et se répercutant sur la pression à la frontière du domaine $\partial\Omega$ est équivalente à la condition imposée à la pression par $\nabla P.\vec{n} = a$, avec $\vec{n}$ la normale à la frontière $\partial\Omega$ et a les conditions limites de la vitesse imposée à la frontière (voir (5.49)-(5.52)).

5.5.3 zone tampon

En introduisant un domaine avec une zone tampon, on doit résoudre les équations (5.25) et (5.24). La première équation sur la pression ne pose pas de problème. En revanche la deuxième équation sur la température est plus coûteuse en temps de calcul. En effet, les équations numériques à résoudre sont similaires à celles obtenus sans zone tampon sauf qu'en introduisant artificiellement une diffusion thermique $\nu(x)$ variant spatialement, la matrice $\mathbb{H}$ (équation (5.45)) n'est plus diagonale. Il faut alors rechercher la solution par une méthode itérative (méthode de Richardson, de résidu minimum préconditionné ... voir [76]) à l'aide d'un opérateur plus simple, par exemple la matrice $\mathbb{H}$ diagonale (5.45) et une diffusion thermique moyenne.

5.6 Validation

La méthode de "projection-diffusion" a éte validée dans le cadre des équations de Navier Stokes appliquées à la cavité entraînée ([8]). La décroissance exponentielle de la divergence de la vitesse en fonction de la fréquence de coupure, est observée. L'ordre temporel du schéma a été confirmé. De plus on montre que le schéma est stable et consistant en temps et en espace. Ici nous n' avons retenu que la partie "projection" de la méthode qui représente les équations de Darcy. A titre d'exemple, nous trouvons une divergence de la vitesse de l'ordre de 10^{-9} pour les simulations couramment utilisées.

Afin de confirmer la validité du code appliqué en convection mixte, nous avons comparé en régime convectif, la solution issue de la simulation numérique (en variant la résolution spatiale et temporelle) et la solution issue de la théorie linéaire à travers la réponse impulsionnelle. En régime absolu nous avons testé la résolution spatiale et temporelle.

5.6.1 Régime convectif

En régime convectif, nous avons simulé la réponse à une impulsion localisée en $(0, 0)$ du domaine $\Omega = [-6, 6].[-0.5, 0.5]$ pour différents Pe et Ra. Cette impulsion correspond numériquement, à une modification de la valeur initiale de T $(= T_0)$ sur un point de la grille au début du calcul. L'impulsion a donc une amplitude finie contrairement à la fonction de Dirac dans la cadre de la théorie linéaire. On observe à travers différentes simulations numériques que la réponse à cette impulsion, lui est directement proportionnelle dans la région où les non linéarités ne rentrent pas en jeu. Au delà l'amplitude de l'onde sature.

A partir du suivi temporel de la température T en un point du domaine $\Omega = [-6, 6].[-0.5, 0.5]$, il est possible d'obtenir l'amplitude des oscillations. Sur les figures 5.5 nous avons donc tracé les amplitudes normalisées des oscillations pour trois points du domaine, avec $Pe = 8$ et $Ra = 51$ proche du seuil absolu ($Ra_A = 52.135, Ra_c = 4\pi^2 \simeq 39.5$). On y distingue les résultats obtenus par la théorie linéaire (réponse impulsionnelle étudiée dans l'annexe A), et ceux obtenus par la résolution numérique pour différents pas de temps et différentes fréquences de coupure. Pour ce Ra, les résultats numériques de la simulation numérique sont exactement les même si les termes non linéaires ($\vec{V}.\nabla T$) sont totalement pris en compte ou alors linéarisés ($\vec{V_0}.\nabla T_1 + \vec{V_1}.\nabla T_0$).

On constate une excellente convergence des résultats numériques vers la solution issue de la théorie linéaire quand le pas de temps dt tend vers 0. Pour $dt = 5.10^{-4}$, on observe que la forme des paquets d'ondes est similaire, en particulier la localisation des maxima pour les points ($x = 1.37, z = 0$) et ($x = 3.198, z = 0$) et que le temps de passage des paquets d'ondes est également proche. Ces résultats sont confirmés à partir des amplitudes non saturées qui montrent qu'en plus la croissance de l'instabilité entre les points $x = 1.37$ et $x = 3.198$ est semblable.

Néanmoins, le paquet d'ondes obtenu numériquement au point proche de la sortie ($x = 5.94, z = 0$), est plus étroit et croît moins que celui prévu par la théorie linéaire, mais cette différence devient minime lorsque Ra diminue. Différentes conditions de sortie ($\frac{\partial T}{\partial x}|_{x=+6} = 0$ ou $T|_{x=+6} = \frac{1-z}{2}$) ont été testées. Celles-ci n' influencent que la température des points très proches de la frontière et le développement du paquet d'onde dans le reste du domaine n'est pas modifié.

Ces résultats écartent les problèmes de réflexions parasites à la frontière du domaine. En effet, le principal effet serait de rallonger la durée du signal (en régime convectif, les ondes s'amplifient). En outre, les simulations effectuées avec un domaine sans zone tampon ou avec une zone tampon deux à trois fois plus grande, nous réconforte : le développement du paquet d'onde n'est pas affecté dans la zone commune aux deux types de domaine et éloignée des frontières et ce en régime convectif ou absolu.

Notons qu' en dessous d'une certaine résolution spatiale assez basse, il apparaît des structures propres au schéma numérique. En effet, alors que nous sommes dans la région des paramètres où l'instabilité est convective mais relativement proche du seuil absolu, nous observons des structures persistantes qui disparaissent pour des résolutions spatiales plus importantes. Ce phénomène est similaire à celui décrit par C. Cossu et al. [30], sur l'équation de Ginzburg-Landau linéaire lorsqu'elle est simulée par une méthode de différence finie avec différents schémas. Les auteurs montrent que le schéma numérique approchant l'équation (dont le schéma de Newton-Raphson), peut développer des instabilités numériques (issues de la relation de dispersion numérique) pour de faibles résolutions spatiales dont les caractéristiques sont celles d'une instabilité absolue alors que les paramètres physiques de l'équation indiquent que le régime est convectif. Pour de plus hautes résolutions spatiales, les caractéristiques d'une instabilité convective sont retrouvées.

5.6.2 Régime absolu

En régime absolu, les différents essais montrent que les résultats numériques convergent rapidement vers une solution unique lorsque le pas d'espace et le pas de temps diminuent. La distribution de la vitesse et de la température mais également les amplitudes, les fréquences, les nombres d'onde, les fronts et les longueurs d'établissement des fronts, sont relativement peu dépendants du pas temporel et de la résolution spatiale.
Par ailleurs, pour des valeurs de l'impulsion initiale plus importante, l'amplitude de l'onde sature rapidement. Les différences des amplitudes numériques saturées sont minimes dans la région pleinement développée Les différents essais montrent que les résultats numériques convergent rapidement vers la même solution lorsque le pas de temps et d'espace diminue.

L'effet des conditions de sortie est le même qu'en régime convectif. Nous avons utilisé la même condition de sortie ($\frac{\partial T}{\partial x}|_{x=+6} = 0$) que F. Duffour et al. [40]. Ces derniers utilisent une méthode de volumes finis pour simuler le même écoulements en milieu poreux. Nous retrouvons leurs principaux résultats.

5.6.3 Conclusion

Nous avons exposé dans ce chapitre la méthode utilisée pour résoudre numériquement les équations de la convection mixte dans une couche poreuse bidimensionnelle. Nous avons complètement décrit le schéma temporel (Adams-Bashforth) ainsi que le schéma spatial (pseudo-spectrale dans l'espace physique) associé à la résolution des équations. Le code utilisé, déjà validé en méthode de "projection- diffusion" en configuration "fermée" pour les équations de Navier-Stokes, s'est révélé capable de reproduire en configuration "ouverte", les instabilités spatio-temporelles en régime convectif en comparant les résultats numériques avec la réponse impulsionnelle linéaire. En régime absolu, la relative indépendance des principales caractéristiques vis à vis des résolutions spatiales et temporelles nous pousse à utiliser cette méthode pour des comparaisons plus approfondies.

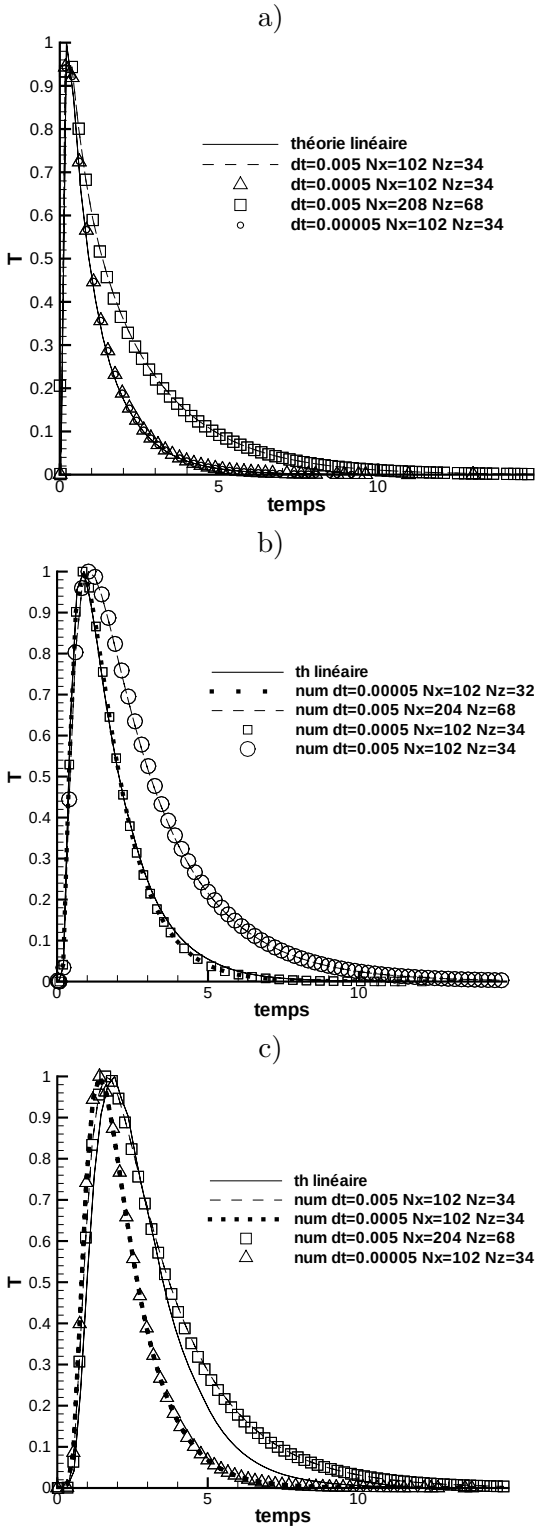


FIG. 5.5 – Suivi temporel des amplitudes normalisées des oscillations de la température, pour différents points du domaine $\Omega = [-6, 6].[-0.5, 0.5]$: a) en $(x = 1.37, z = 0)$ b) en $(x = 3.194, z = 0)$ et c) $(x = 5.94, z = 0)$ avec $Pe = 8$, $Ra = 51$ $(< Ra_A = 52.135)$ et le dirac numérique initiale en $(0, 0)$ avec une amplitude de 0.01. N_x et N_z sont les fréquences de coupures suivant x et z, "dt" est le pas de temps, "num" désigne solution issue de la simulation numérique, "th linéaire" désigne la solution issue de la théorie linéaire

Chapitre 6

Analyse des résultats de la simulation numérique de la convection mixte bi-dimensionnelle

Les observations expérimentales de convection mixte en milieu poreux ont mis en évidence l'émergence des oscillations synchronisées et auto-entretenues que l'on désigne par mode global. L'analyse de stabilité linéaire a permis de montrer que l'émergence de ce mode global est possible dès lors que l'état de conduction devient absolument instable. Lorsque cela se produit, nous avons montré que le mode absolument instable correspondait à un mode propagatif structuré en rouleaux transversaux. Dans ce contexte, la simulation numérique directe bidimensionnelle nous paraît justifiée.
Les objectifs recherchés des essais numériques sont :
- identifier les solutions non linéaires du problème en fonction des paramètres Ra et Pe.
- comparer l'amplitude saturée thermo-convective aux mesures expérimentales.
- discuter la loi d'échelle d'établissement de ces structures saturées.
- comparer les fréquences d'oscillations, les nombres d'onde ainsi que les vitesses de propagation du mode global avec la théorie linéaire d'instabilité absolue.
- Estimer le transfert de chaleur global et le comparer aux résultats expérimentaux.

6.1 Mode global et convection mixte en milieu poreux

Nous avons exposé dans le précédent chapitre la méthode spectrale utilisée afin de résoudre numériquement le système non linéaire (1.20)-(1.22) avec les conditions aux limites (1.23)-(1.24) dans le cadre de la loi de Darcy ($\mathcal{F} = 0$).
Cette résolution numérique indique que tant que le système est convectivement instable (i.e. $Ra_c < Ra < Ra_A$), toute perturbation initiale est amortie et le système, bien qu'instable, retrouve asymptotiquement l'état de conduction. En revanche, lorsque le

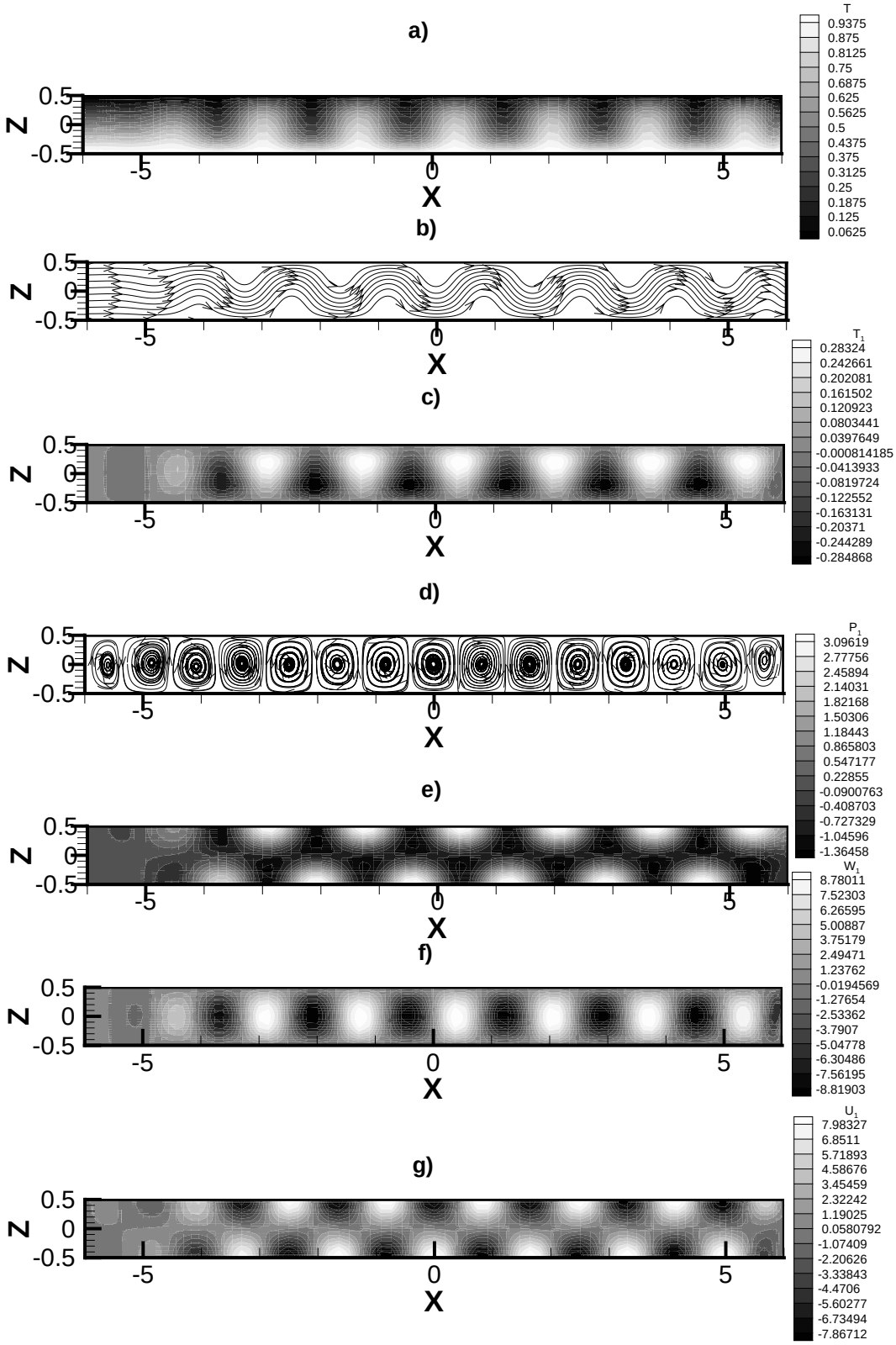


FIG. 6.1 – Simulation numérique au temps $t = 15$ avec $dt = 5.10^{-5}$, $N_x = 101$, $N_z = 34$ pour $Ra = 60 > Ra_A = 52.135$ et $Pe = 8$ en réponse à une perturbation pour la température au point $(0, 0)$ avec une amplitude de 0.01 dans le domaine $\Omega = [-6, 6].[-0.5, 0.5]$, voir le texte pour l'explication des figures a), b), c), d), e), f), g).

système devient absolument instable, un mode global apparaît sous forme de rouleaux transversaux d'amplitude finie, reliés à l'état de conduction à l'entrée par un front. L'évolution spatiale de certaines grandeurs physiques est illustrée sur la figure 6.1, où nous avons fixé $Pe = 8$ et $Ra = 60$, le seuil de l'instabilité absolue étant de $Ra_A = 52.135$. Les figures décrivent dans le plan spatial (X, Z) :

a) la distribution de la température totale $T = T_0 + T_1$.
c) la perturbation de la température T_1 où on observe la présence de point chaud (maxima) et froid (minima).
e) la perturbation de pression P_1.
b) les lignes de courant instantanées dans le repère lié au laboratoire.
d) les lignes de courant instantanées dans le repère lié à la vitesse d'entrée $\vec{V_0} = Pe\ \vec{x}$.
f) la vitesse verticale $W_1 = W$.
g) vitesse horizontale U_1.

On peut comprendre la relation entre les grandeurs perturbés P_1, T_1, U_1 et W_1 au temps $n + 1$, en examinant les équations. En effet si on connaît la répartition de T ou la perturbation de la température T_1 au temps $n+1$ alors les autres grandeurs perturbées ou non, sont résolues numériquement par les équations (5.19)- (5.22) équivalentes à (5.6)-(5.4). Ainsi plus les gradients verticaux de la température (5.6) sont élevés (comme près des parois horizontales), plus les gradients de pression (5.4) concentrés près des parois, sont élevés. On remarque que c'est ce que l'on peut observer en comparant les figures 6.1-c)-e). On peut également en déduire les répartitions de U_1 et W_1 à partir de (5.5).

Dans le régime absolu, on observe à travers les figures 6.1 que les structures apparaissent sous la forme de rouleaux pleinement développés et d'amplitude finie au delà de l'entrée. Ces derniers traversent le domaine à la vitesse de phase, mais ils sont continuellement renouvelés : ils persistent localement au cours du temps dans le repère lié au laboratoire.

6.2 Mise en évidence des structures thermo-convectives pleinement établies

L'évaluation de l'amplitude s'effectue dans la partie où les rouleaux sont pleinement développés. Pour cela on suit l'évolution temporelle de la température T ou de la composante verticale W, en un point particulier du domaine. Sur la figure 6.2, nous avons tracé le suivi temporel de la température au point $(0, 0)$ du domaine, obtenu numériquement avec les mêmes paramètres que ceux de la figure 6.1. Des oscillations **régulières** et **saturées** apparaissent au bout d'un certain temps et persistent au cours du temps : les structures sont pleinement développées. Il est possible d'obtenir l'amplitude saturée en mesurant le maximum T_{max} et le minimum T_{min} du suivi de T mais à partir d'un temps suffisant pour éliminer tout régime transitoire (typiquement on prend la deuxième moitié du domaine temporel, soit sur la figure 6.1 à partir de $t = 7.5$). On peut faire la même opération sur la composante W et on note A_s son amplitude maximale.

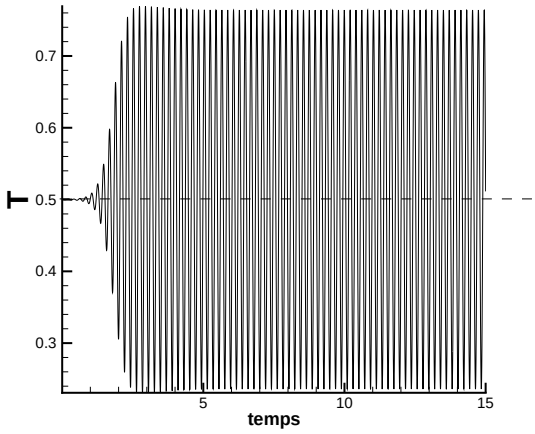


FIG. 6.2 – Evolution de la température au point $(0, 0)$. Ce suivi est obtenu numériquement pour les même conditions de la figure 6.1 .

L'amplitude des R.T est ainsi mise en évidence, on peut donc la comparer avec celle obtenue par l'expérience et par les prévisions de l'étude faiblement non linéaire.

6.3 Comparaison des amplitudes saturées de la température avec l'expérience

Il est possible d'effectuer des simulations bidimensionnelles avec des paramètres adimensionnés qui soient équivalentes aux expériences de M. Combarnous [26]. Dans ce cas nous allons nous intéresser aux amplitudes pour différentes expériences. Ces amplitudes expérimentales sont toutes issues de mesures de la température. Cette mesure s'effectue soit dans le temps en un point particulier : on étudie alors l'évolution temporelle de la température. On peut effectuer aussi des mesures simultanées ou non en plusieurs points du domaine, ce qui permet d'en déduire la distribution spatiale de la température. A partir de ces données il est possible d'en déduire les maxima et les minima de l'amplitude de la température.

La figure 6.3 décrit des oscillations régulières de la température au cours du temps, observées expérimentalement en différents points du plan médian du massif (i.e. $z = 0$ avec $z \in [-0.5, 0.5]$). Cette figure nécessite quelques commentaires :

- nous observons tout d'abord que T^{exp}_{max} et T^{exp}_{min} sont relativement les mêmes dans la direction perpendiculaire à l'écoulement (i.e. l'axe y), preuve que la convection est structurée en rouleaux purement transversaux. De même, ces maxima et minima sont relativement identiques, dans la direction de l'écoulement principal. Les points de mesure correspondent alors à une région de l'espace où les R.T sont effectivement pleinement développés.
- la température mesurée oscille autour d'une valeur moyenne $T^{exp}_{moy} = 19.5°C$ et non autour de la valeur de la température de conduction pure le long de l'axe médian du massif $T^*(z = 0) = 21.3°C$ (écart de 8.4%). Ce résultat est en contradiction avec l'idée d'une organisation convective en R.T qui impose une symétrie S_0, par rapport

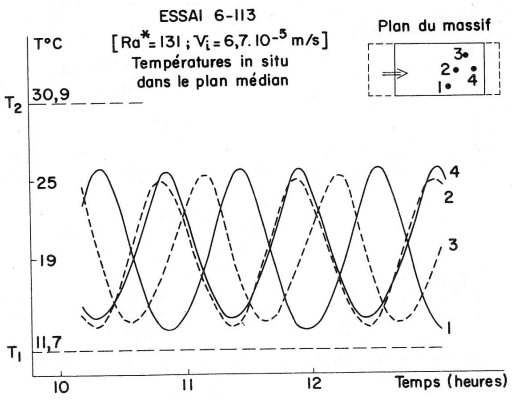


FIG. 6.3 – Evolution lors d'un essai, de la température en différents points du plan de symétrie horizontale du milieu poreux obtenue.

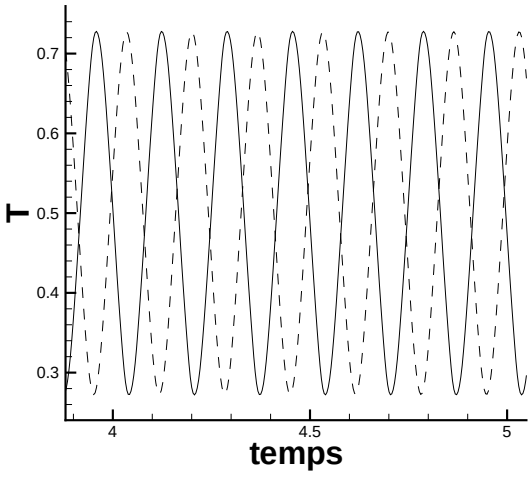


FIG. 6.4 – Evolution de la température obtenue à partir d'une simulation numérique dans des conditions et des paramètres équivalents à la figure 6.3, avec $Pe = 6.55$ et $Ra = 131$ où les traits $-$ et $--$ représentent respectivement les points 2 et 4 du plan massif expérimental.

au centre d'un même rouleaux :

$$\begin{array}{c} (u_1(x,z,t_1), w_1(x,z,t_1), T_1(x,z,t_1)) \\ S_0 \downarrow \\ -(u_1(-x,-z,t_1), w_1(-x,-z,t_1), T_1(-x,-z,t_1)) \end{array} \tag{6.1}$$

Cette symétrie centrale impose qu'en $z = 0$ les perturbations de la température maximale à l'instant t_1 deviennent des minimas en valeurs absolues et vice versa en deux points symétriques par rapport au centre du rouleau.

L'évolution de la température obtenue à partir d'une simulation numérique, représentée sur la figure 6.4 illustre bien ce comportement. Cette évolution concerne les deux points 2 et 4 du massif poreux, à des temps numériques compris entre 3.88s et 5.049s et qui correspondent respectivement à 11h et 13h pour les essais expérimentaux. La température maximale obtenue numériquement et exprimée en grandeur dimensionnée de $T_{max}^{num} = 25.77°C$ alors que $T_{max}^{exp} = 25.2$ (écart de 2.26%). Pour les minima de température, on a : $T_{min}^{exp} = 13.8°C$ alors que $T_{min}^{num} = 16.83°C$ (écart de 21.9%). Après le suivi temporel, nous nous sommes intéressés à la distribution spatiale de la température.

La figure 6.5 représente la distribution spatiale expérimentale de la température pour l'ensemble des points se situant sur l'axe du modèle au bout du temps $t = 15.5$ heures. Encore une fois, nous remarquons que les oscillations de la température se font autour

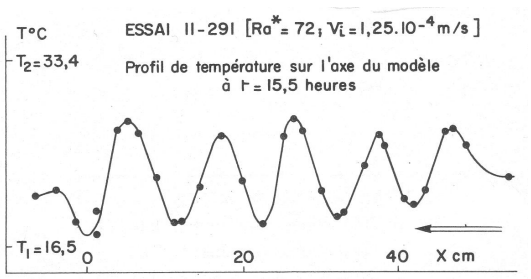


FIG. 6.5 – mesure expérimentale de la distribution spatial de la température suivant l'axe x sur toute la longueur de la plaque poreuse

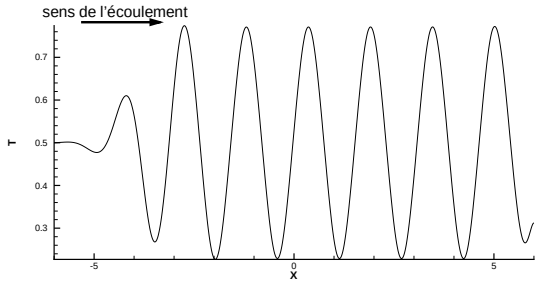


FIG. 6.6 – distribution spatiale de la température suivant x issue de la simulation numérique avec $Pe = 12.25$, $Ra = 72$ au bout du temps numérique $t = 6$ (équivalent à la configuration de la figure 6.5) a)

d'une température moyenne de $23.5°C$ et non autour de la température de conduction pure : $T^*(z = 0) = 24.95°C$ (écart de 5.8%).

Nous avons simulé ce même écoulement avec $Pe = 12.25$, $Ra = 72$ et au bout du temps numérique équivalent $t = 6$ suffisant pour avoir des structures pleinement développées. Sur la figure 6.6, on a représenté la distribution spatiale suivant x toute la longueur du domaine et pour $z = 0$ (milieu du massif poreux)

La simulation donne une valeur de la température maximale dimensionnée $T^{num}_{max} = 29.55°C$ alors que $T^{exp}_{max} = 28.72°C$ (écart de 2.9 %). Pour les minima, on trouve $T^{num}_{min} = 20.35°C$ alors que $T^{exp}_{min} = 18.3°C$ (écart de 11.2 %).

La figure 6.7-a) représente la distribution de la température mesurée dans une même section droite suivant z où on a représenté les maxima et minima. Une simulation numérique équivalente à l'expérience a été effectuée avec $Ra = 102$ et $Pe = 12.25$. Le suivi temporel de la température des trois points du massif est indiqué sur la figure 6.8 alors que la figure 6.7-b) montre la distribution de la température instantanée adimensionnée évaluée numériquement par la projection de $T(x, z)$ suivant z.
Cette distribution est parfaitement symétrique par rapport au point $T = 0.5, z = 0$ et à la température de conduction. Sur cette figure les cercles représentent les mêmes points expérimentaux que ceux de la figure 6.8-a). On observe que les maxima expérimentaux sont assez proches des maxima obtenus numériquement alors que les minima bien que l'accord soit parfait au point ($T^{num}_{min} = 0.33, z = -0.172$), l'écart entre T^{exp}_{min} et T^{num}_{min} se creuse au fur et à mesure que l'on s'approche de la plaque supérieure. Cependant, l'étendue de la température définie par $T_{max} - T_{min}$ prédite par les simulations numériques, est sensiblement la même que celle mesurée pour z fixée.

L'analyse des résultats expérimentaux montre que les oscillations des R.T dans le plan $z = 0$ n'ont pas eu lieu autour de l'état de conduction. L'explication possible que nous proposons est liée à la difficulté matérielle de maintenir la plaque inférieure à

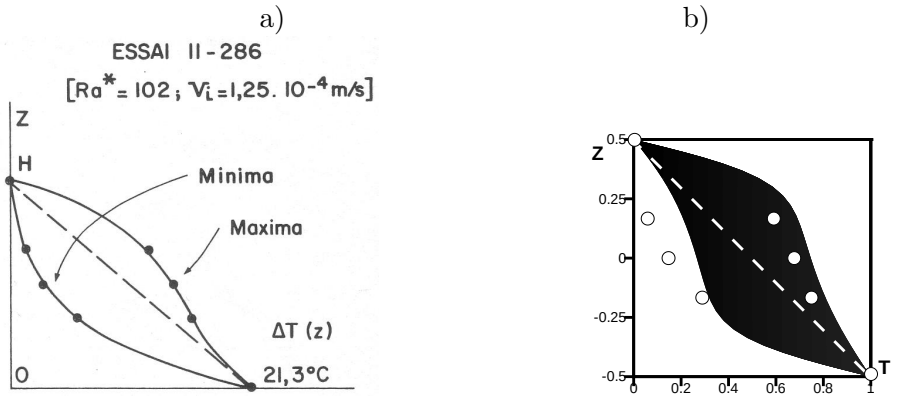


FIG. 6.7 – mesure de la distribution spatiale de la température dimensionnée suivant l'axe z obtenue : a) expérimentalement à partir d'une section droite de la couche poreuse [26] et dimensionée et b) numériquement à partir de la simulation équivalente ($Ra = 102$ et $Pe = 12.25$) où la distribution spatiale instantanée de la température adimensionée est projetée suivant l'axe x sur z (en noire). Les $\circ$ sur la figure b), représentent les mesures expérimentales équivalentes à la figure a) et $--$ représente la température de conduction.

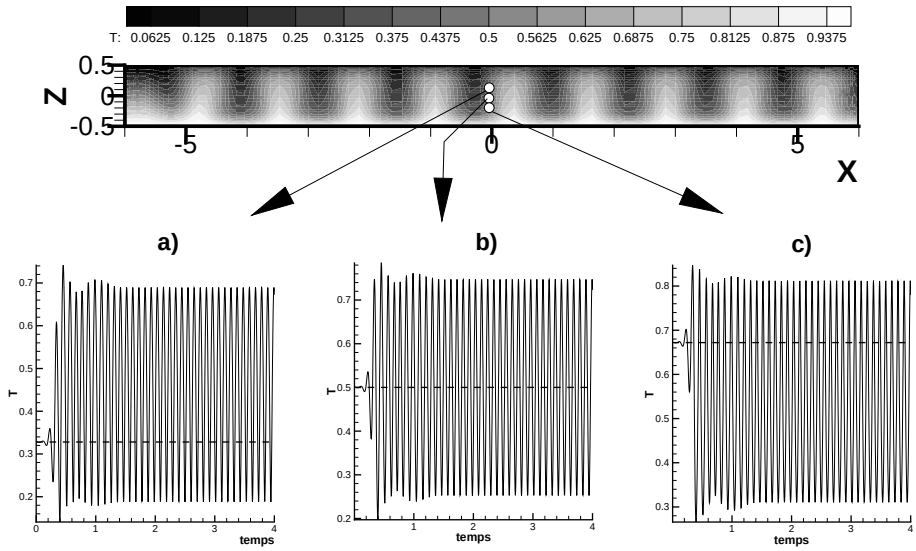


FIG. 6.8 – Simulation numérique pour $Pe = 12.25$ er $Ra = 102$ équivalente à l'-expérience de la figure 6.7 avec le suivi temporel des trois points de cette même expérience : a) en $(x = 0, z = 0.172)$ b) en $(x = 0, z = 0)$ c) en $(x =, z = -0.172)$. Les lignes en pointillées représentent la température de conduction.

une température uniforme. Des variations faibles de cette température induiraient inexorablement une dépendance en x de la température de conduction. Elle serait aussi à l'origine des variations de T_{max} et T_{min} le long du massif poreux. La figure 6.5 illustre cette dépendance certes faible mais suffisante pour expliquer les écarts bien que raisonnables, entre la théorie et l'expérience.

remarque
Il est possible de comparer l'amplitude A_s de la vitesse verticale à celle obtenue à partir des équations de Ginzburg-Landau. En effet celles-ci s'écrivent dans le cas bidimensionnel :

$$\frac{\partial A}{\partial t} + Pe\frac{\partial A}{\partial x} = 2\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \left(\frac{Ra - Ra_c}{2}\right) A - \frac{1}{8}A^3$$

avec $Ra_c = 4\pi^2$. L'amplitude saturée vaut alors $A_s^{GL} = 2\sqrt{Ra - Ra_c}$. Sur la figure 6.9, nous avons tracé l'amplitude A_s des oscillations de la vitesse verticale W en fonction de $Ra - Ra_c$ pour uniquement $Pe = 2$ (indépendance de W par rapport à Pe). On remarque que les prédictions des équations de Ginzburg-Landau sont relativement en bon accord avec les résultats des simulations numériques même loin du seuil $Ra_c = 4\pi^2$.

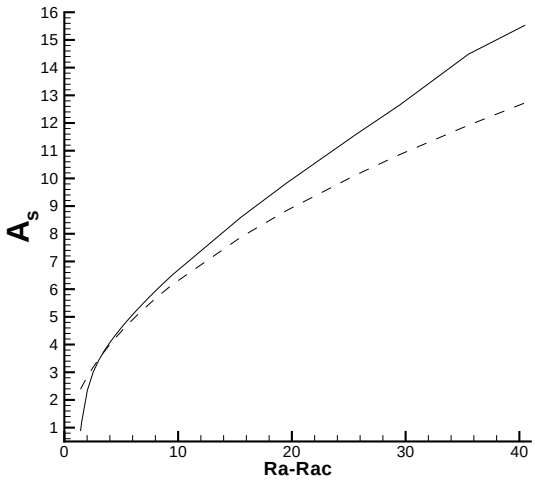


FIG. 6.9 – Amplitude des oscillations A_s de la vitesse verticale W obtenues numériquement $(-)$ et à partir de l'équation de Gingsburg-Landau $(--)$ avec $Pe = 2$.

6.4 Longueurs d'établissement des structures thermoconvectives

6.4.1 Longueurs d'établissement des R.T

Nous avons vu que l'amplitude maximale des rouleaux pleinement établis, obtenue numériquement est en bon accord quantitatif avec l'amplitude maximale mesurée expérimentalement. Néanmoins, cet état thermo-convectif pleinement développé est relié à l'état de conduction par l'intermédiaire d'un front. Ce front se forme à une certaine distance Δ qui peut être plus ou moins grande. Sur la figure 6.10-a), on a représenté 2 distributions de température suivant l'axe x pour $z = 0$ obtenues numériquement pour 2 temps

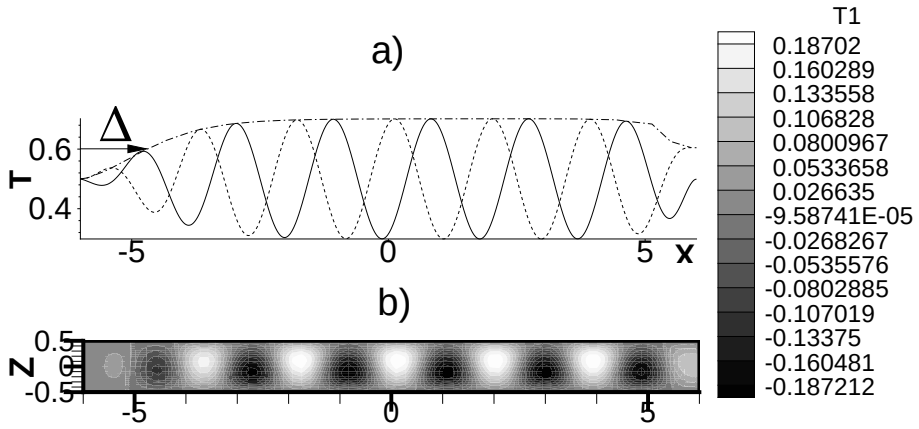


FIG. 6.10 – a) : distribution spatiale de la température T suivant x pour $z = 0$ à 2 temps différents ($-$, $--$) où Δ représente la distance d'établissement du front et $- \cdot -$ représente l'enveloppe stationnaire des oscillations. b) : distribution de la perturbation de la température T_1. a) et b) sont obtenus numériquement avec $Pe = 2$ et $Ra = 45$ ($Ra_A = 40.45$).

différents. Ces deux distributions prises, montrent que les maxima locaux des oscillations suivent une même enveloppe stationnaire. Celle-ci est déterminée en retenant les maxima locaux sur plusieurs temps. En parallèle, nous avons tracé sur la figure 6.10-b), la distribution spatiale de la perturbation T_1 dans le plan (X, Z) qui montre que les points chauds (les maxima de la figure 6.10-a)) se forment à une certaine distance de l'entrée.

On peut également déterminer l'enveloppe stationnaire des oscillations à partir de la vitesse verticale W. Or comme on n'impose aucune condition à l'entrée sur W, les caractéristiques sont moins nettes que celles obtenues avec la température. Grâce aux enveloppes stationnaires, il est possible de déterminer la distance d'établissement Δ. On définit Δ comme la distance entre l'entrée du domaine et la moitié de l'amplitude saturée [1] qui sera notée Δ_{num} dans le cas des simulations numériques.

6.4.2 Effets de Ra et Pe

La distance au front Δ dépend des deux paramètres du problème : Ra et Pe. Pour illustrer cette dépendance, nous avons tracé sur la figure 6.12, les enveloppes stationnaires de la température T ainsi que la distribution de la perturbation de la température T_1 pour différentes valeurs de Ra et Pe. Ainsi lorsque l'on augmente Ra à Pe fixé, (on passe de la figure 6.12-a) à 6.12-b)), on constate que le front avance vers l'entrée entraînant les points chauds avec lui. Mais lorsque l'on augmente Pe à Ra fixé, (on passe de la figure 6.12-b) à 6.12-c)) on constate que le front recule ainsi les point chauds.

[1] il est plus stable numériquement de déterminer la distance à la moitié de l'amplitude saturée plutôt qu' à sa valeur totale

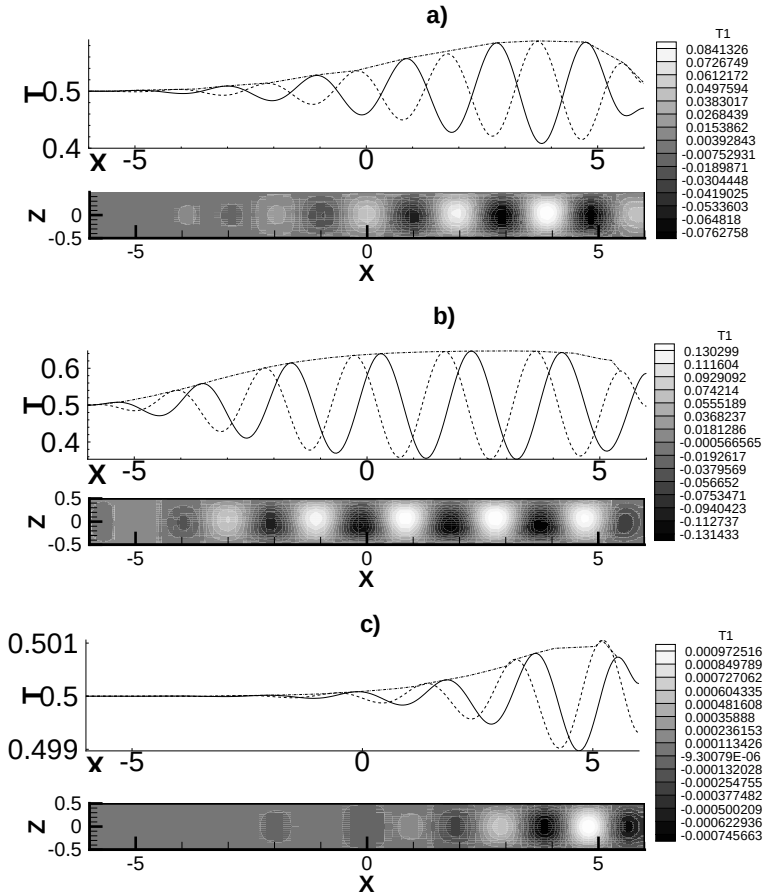


FIG. 6.11 – Distribution de la température T suivant x pour $z = 0$ associé à la distribution de la perturbation de la température T_1 pour : a) $Pe = 2, Ra = 41$ ($Ra_A = 40.45$) b) $Pe = 2, Ra = 42$ c) $Pe = 3, Ra = 42$ ($Ra_A = 41.62$).

Pour être plus précis, nous avons tracé sur la figure 6.12 les enveloppes stationnaires à Ra fixé pour différentes valeurs de Pe. On constate que lorsque Pe augmente à Ra fixé, la distance Δ augmente : les R.T sont poussés de plus en plus vers l'aval du canal lorsque le débit augmente. L'amplitude reste à peu près constante, elle ne dépend donc que de Ra comme nous l'avons vu au paragraphe 6.2. Ces résultats sont similaires à ceux obtenus dans le cas P.R.B (voir [71]-[70]).

De même, nous avons tracé sur la figure 6.13 à Pe fixé et pour différents Ra, les amplitudes de la température ainsi que celles de la vitesse verticale W. On remarque que lorsque Ra augmente, le front et donc les R.T, se rapprochent de l'entrée et l'amplitude de W et de T augmente. Néanmoins au-delà d'un certain Ra se situant autour de $Ra_c + 30$, l'amplitude de T diminue alors que l'amplitude de W continue d'augmenter. Ce résultat est indépendant de Pe, c'est pourquoi nous n'avons tracé les enveloppes stationnaires que pour un seul Pe.

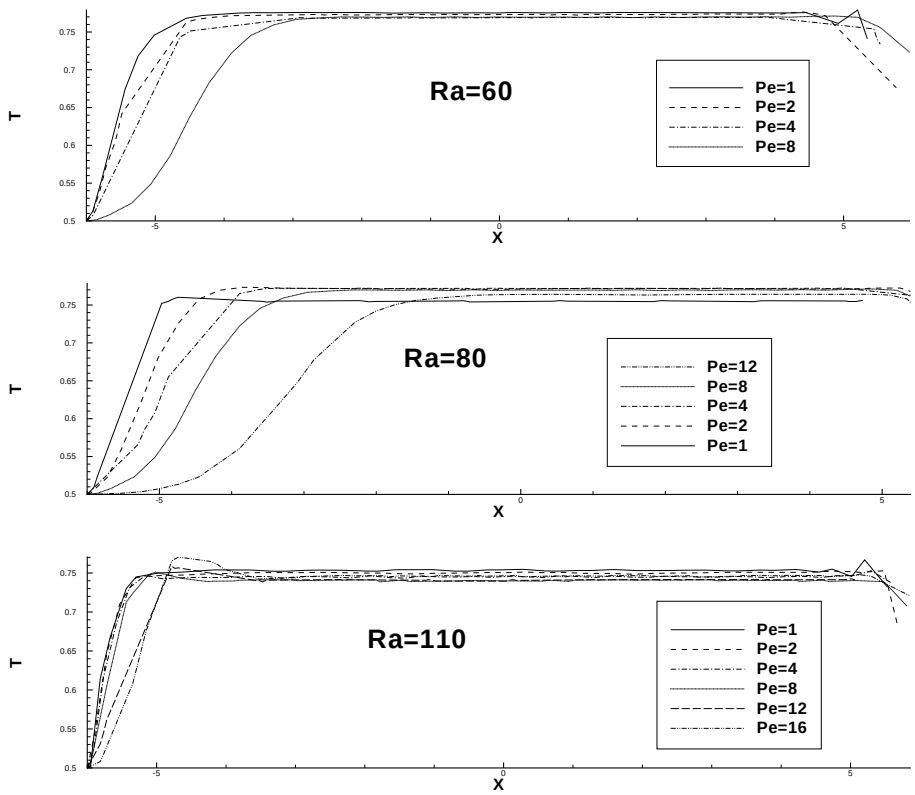


FIG. 6.12 – enveloppes stationnaires des oscillations pour différents $Pe = 1, \ldots 16$ à différents Ra fixés.

6.4.3 Loi d'échelle

Récemment, par application de méthodes de développements asymptotiques raccordés, A. Couairon et J.M. Chomaz [32] ont établi une loi d'échelle reliant la longueur d'établissement Δ à l'écart du seuil d'instabilité absolue Ra_A. Cette loi d'échelle, établie à partir de l'équation de Ginzburg-Landau, s'écrit :

$$\Delta_{GL} \sim \frac{1}{\sqrt{Ra - Ra_A}} \tag{6.2}$$

On remarque que lorsque $Ra \to Ra_A$, la distance Δ_{GL} diverge. Cette loi d'échelle est valable lorsque la bifurcation est supercritique, la transition Convectif/ Absolu reste linéaire [2].

[2]dans le cas sous-critique (la transition Convectif/ Absolu est non linéaire) on obtient :

$$\Delta_{GL} \sim ln\left(\frac{1}{Ra - Ra_A^{NL}}\right)$$

où Ra_A^{NL} est le seuil absolu non linéaire ([31]-[23]). Les expériences réalisées sur des vagues en cellule de Hell-Shaw confirment une telle loi ([47], [62])

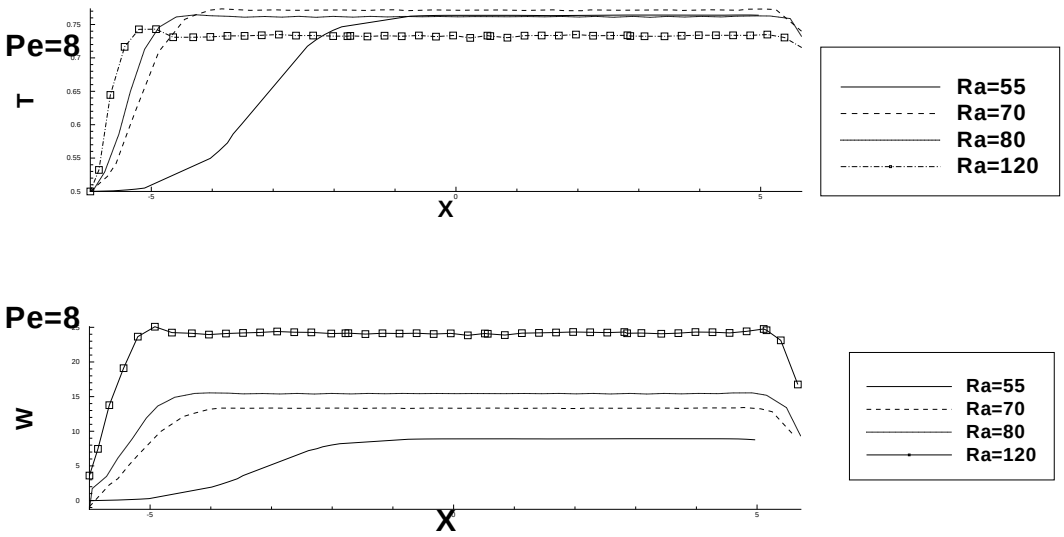


FIG. 6.13 – enveloppes stationnaires des oscillations pour différents Ra à $Pe = 8$

Nous avons donc obtenu la longueur d'établissement Δ à partir de simulations numériques pour différents Pe ($1 < Pe < 16$) et différents Ra ($Ra_A < Ra < 140$).
Sur la figure 6.14, nous avons tracé Δ en fonction de Ra pour différentes valeurs de Pe. On constate la divergence de Δ lorsque $Ra \to Ra_A$, c'est à dire que les R.T sont poussés à l'infini vers l'aval.
Pour comparer la loi (6.2) avec nos résultats, nous avons tracé sur la figure 6.15, $\ln(\Delta)$ en fonction de $\ln(Ra - Ra_A)$ pour quelques Pe. On remarque que les points sont pratiquement alignés pour chaque Pe. Il est donc possible d'en déduire par régression linéaire, le coefficient directeur α de la droite approximant le nuage de points. On peut alors écrire approximativement :

$$\Delta \sim \frac{1}{(Ra - Ra_A(Pe))^{\alpha}}$$

On résume dans le tableau 6.1 , les coefficients α obtenus.

Pe	1	2	4	8	12	16
α	0.540	0.611	0.722	0.695	0.535	0.613

TAB. 6.1 – coefficient α calculé à partir des simulations en fonction de Pe.

On remarque que α est proche de 0.5, mais les incertitudes inérant au calcul de la longueur d'établissement Δ à partir de l'enveloppe stationnaire, essentiellement lorsque $Ra \to Ra_A$, ne nous permettent pas d'affiner nos résultats.
F. Duffour et M.C. Néel [40] ont établi une autre relation à partir de résultats numériques :

$$\Delta \sim \frac{Pe}{Ra}$$

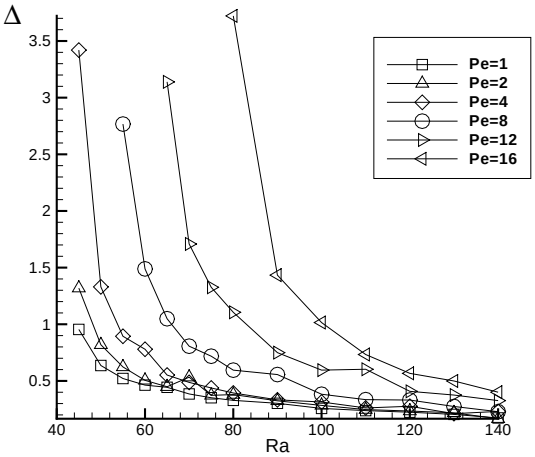


FIG. 6.14 – Distance au front Δ calculé numériquement en fonction de Ra pour plusieurs Pe.

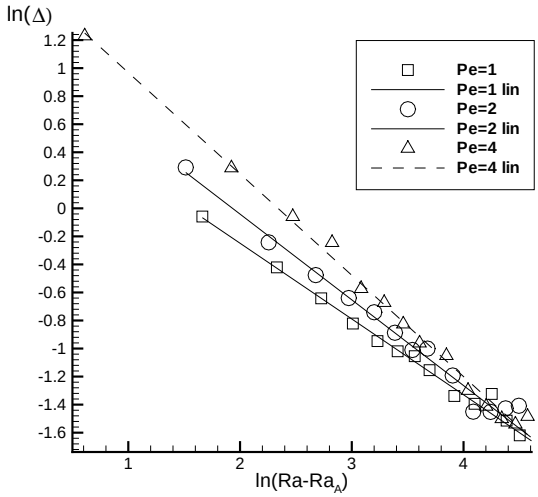


FIG. 6.15 – $\log(\Delta)$ en fonction de $\log(Ra - Ra_A)$ obtenu à partir des résultats numériques pour différents Pe où "lin" désigne la régression linéaire associé à chaque Pe.

ce qui signifie qu'en échelle logarithmique, on obtient une droite de pente -1 pour Pe fixé. Les résultats de nos simulations numériques ne nous permettent pas de retrouver cette loi d'échelle.

6.5 Longueurs d'onde, période d'oscillations et vitesse de phase des structures pleinement établies

Certaines caractéristiques des rouleaux transversaux, comme la longueur d'onde obtenue à partir de la distribution spatiale de la température, la période d'oscillations obtenue à partir du suivi temporel de la température et la vitesse de phase sont comparées avec celle prédites par la théorie linéaire de l'instabilité absolue.

Au paragraphe 2.3.1, la théorie linéaire d'instabilité absolue (T.L.I.A), nous a permis d'obtenir les nombres d'onde, les pulsations, la vitesse de propagation en étudiant la réponse du système à une perturbation localisée. En toute rigueur, cette dernière est strictement valable lorsque les perturbations sont relativement petites, c'est à dire ici, près de l'entrée. Loin de l'entrée du massif poreux, les effets non linéaires entrent en jeu. La question qui se pose est de savoir si les caractéristiques linéaires d'instabilité absolue sont similaires ou non aux caractéristiques des R.T pleinement établis, dans la région fortement non linéaire.

A partir des données numériques, nous avons déterminé le spectre temporel de la

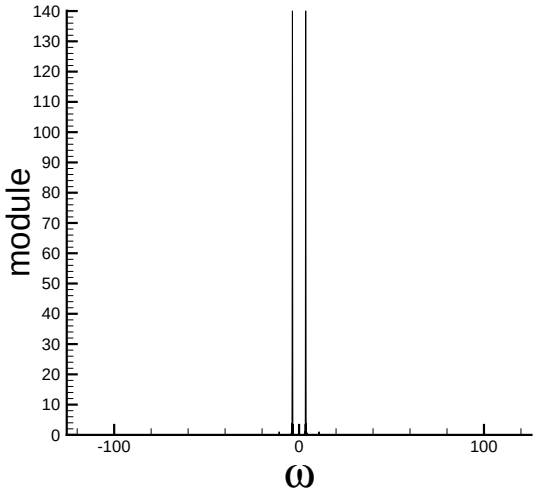


FIG. 6.16 – Module de la transformée de Fourier (F.F.T) du suivi temporel de la température au point $(0,0)$, en fonction de la pulsation ω avec $Pe = 1$ et $Ra = 60$ (F.F.T sur 2^{14} points après transformation)

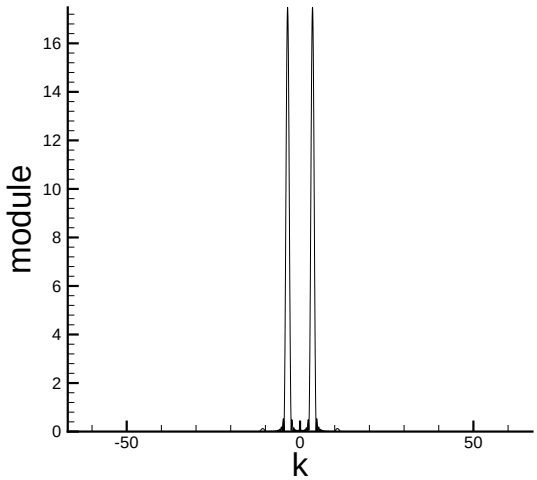


FIG. 6.17 – Module de la transformée de Fourier (F.F.T) de la distribution spatiale de la température suivant x pour $y = 0$, en fonction du nombre d'onde k avec $Pe = 1$ et $Ra = 60$ (F.F.T sur 2^{13} points après transformation)

température au point $(0,0)$ en effectuant une transformée de Fourier rapide (F.F.T) [3]. Les nombres d'onde sont calculés de la même manière mais à partir de la distribution spatiale de la température [4]. On a tracé le module de la transformée de Fourier en fonction des pulsations ω (voir la figure 6.16) et du nombre d'onde k (voir la figure 6.17) sans la pulsation nulle et le nombre d'onde nul qui indique le signal moyen (ce qui correspond à une température de 0.5 dans les 2 cas). Le spectre de ces derniers, se réduit à la forme particulière d'un "pic" autour d'une pulsation précise caractéristique du régime absolu (en régime convectif le spectre est beaucoup plus large).
Bien évidemment la pulsation ω et le nombre d'onde k sont dépendants de Pe et Ra.

Nous avons tracé sur la figure 6.18 les pulsations adimensionnées ω_{th} et ω_{num} en fonction de Ra à partir des données numériques (ω_{num}) et à partir de la T.L.I.A (ω_{th}). La figure 6.18 montre que ω_{nm} augmente à la fois lorsque Ra croît à Pe fixé et lorsque Pe croît à Ra fixé. Un comportement similaire est observé dans le problème de P.R.B [70].

[3] plus exactement on a effectué une F.F.T après avoir lissé le signal par une fonction en $\cos^2$ pour limiter les effets de bord. Puis nous avons rallongé le signal avec des 0.5 (moyenne de la température pour l'axe $z = 0$) pour diminuer le pas de la fréquence $\Delta\omega$ (basée sur la période du signal qui est maintenant plus grand). Alors une pulsation particulière mesurée est égale à : $\omega^{num} \simeq (N \pm 1).\Delta\omega$ avec ± 1 qui indique la fourchette d'erreur sur la pulsation. Comme $\Delta\omega$ devient plus petit, N devient grand et la fourchette d'erreur ± 1 devient plus petite par rapport à N, ce qui permet de limiter les erreurs. Ce traitement est utile lorsque le spectre est localisé dans les basses fréquences.

[4] le traitement est d'autant plus utile ici que les nombres d'onde sont petits.

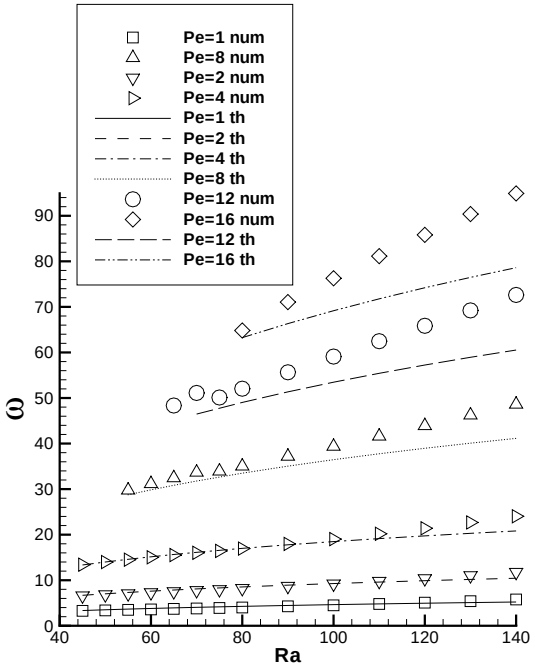


FIG. 6.18 – pulsation ω en fonction de Ra pour Pe fixé à différentes valeurs. "num" désigne les résultats numériques et "th" désigne les résultats issus de la T.L.I.A

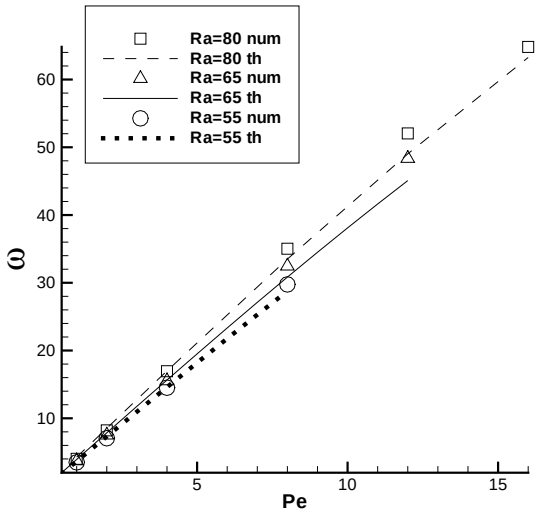


FIG. 6.19 – pulsation ω en fonction de Pe pour Ra fixé à différentes valeurs

La figure 6.18 montre également que quelque soit Ra, lorsque Pe prend des valeurs modérées, ω_{num} et ω_{th} sont confondues. Ce résultat est similaire à celui trouvé dans un problème tout à fait différent du nôtre. Récemment, J.M. Chomaz [24] a analysé les caractéristiques du mode global qui apparaît dans les écoulements parallèles dans le sillage d'un obstacle. Par le biais d'une simulation numérique directe, il a déterminé la fréquence globale d'oscillations dans la région pleinement non linéaire. Cette fréquence globale s'est avérée exactement identique à celle prédite en régime linéaire absolument instable.
Après l'étude de la pulsation ω en fonction de Pe et Ra, nous étudions le nombre d'onde k. Pour illustrer la dépendance de k vis à vis de Ra, nous avons tracé sur la figure 6.20, le champ de température T à Pe fixé pour 2 valeurs de Ra. Nous observons que lorsque Ra augmente, le nombre de rouleaux augmente indiquant que le nombre d'onde augmente également.

Sur la figure 6.21, nous avons tracé les nombres d'onde adimensionnés k^{num} et k^{th} en fonction de Ra à Pe fixé. Nous observons que lorsque Ra augmente, k^{num} et k^{th} augmentent. Ils sont proches lorsque Pe est petit et Ra voisin de Ra_A. Pour des valeurs élevées de Pe ($Pe = 16$) les résultats montrent que les valeurs de k^{num} s'éloignent de celles prises par k^{th}.

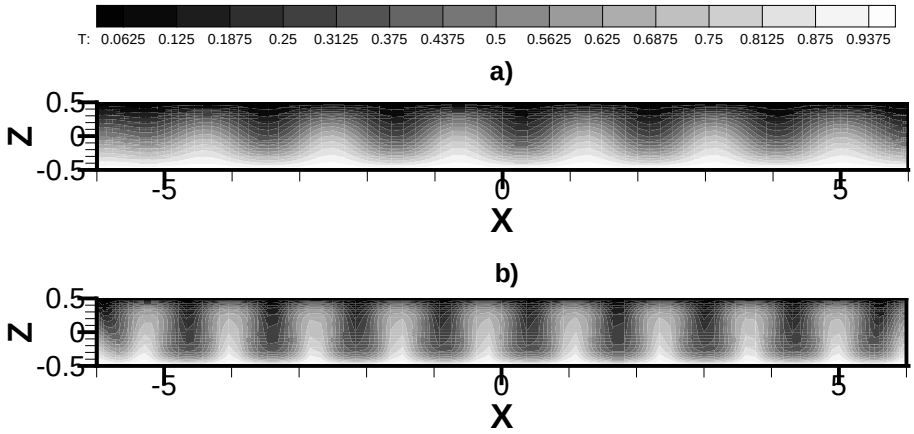


FIG. 6.20 – Champs de température T obtenue numériquement au même temps avec $Pe = 1$ et a) $Ra = 45$ et b) $Ra = 120$.

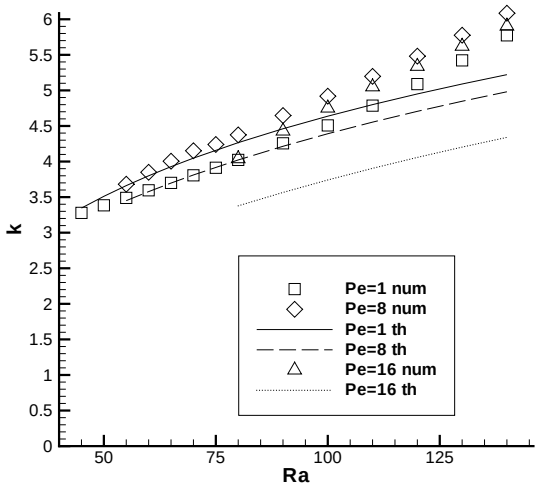


FIG. 6.21 – nombre d'onde k en fonction de Ra pour différents Pe et obtenu à partir des données numériques ("num") et à partir de la T.L.I.A ("th").

Enfin nous avons tracé sur la figure 6.22, la vitesse de phase $V_\varphi = \frac{\omega}{k}$ à partir des données numériques (V_φ^{num}) et à partir de la T.L.I.A (V_φ^{th}). On observe que l'on a pratiquement :

$$V_\varphi^{num} \simeq Pe$$

et ce quelles que soit les valeurs de Pe et Ra

On retrouve ce résultat dans [40] pour de faibles valeurs de Pe. Pour la T.L.I.A, on retrouve bien $V_\varphi^{th} \simeq Pe$ quelque soit la valeur de Ra lorsque $Pe \leq 8$. Mais $V_\varphi^{th} \geq Pe \simeq V_\varphi^{num}$ lorsque Pe est plus important. On en déduit que les prédictions de la T.L.I.A sont excellentes lorsque Pe reste petit et ce quelle que soit la valeur de Ra.

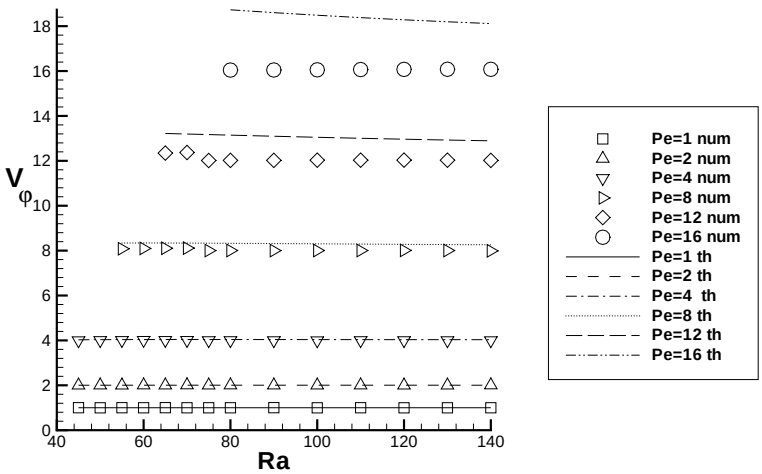


FIG. 6.22 – vitesse de phase $V_\varphi = \frac{\omega}{k}$ en fonction de Ra pour différents Pe à partir des données numériques ("num") et à partir de la T.L.I.A ("th")

6.6 Transfert de chaleur

L'importance du transfert de chaleur convectif est caractérisé par le nombre de Nusselt. Ce dernier est défini comme le rapport du flux de chaleur total au flux de chaleur de l'état de conduction pure, traversant un élément dS. Le principal transfert de chaleur s'effectue verticalement, le flux de chaleur total à travers dS s'écrit en grandeur adimensionnée :

$$dQ = \left(W.T - \frac{\partial T}{\partial z}\right) dS$$

Lorsque l'élément de surface est pris sur l'une des deux plaques horizontales en $z = -\frac{1}{2}$ ou $z = \frac{1}{2}$, en vertu de l'imperméabilité de ces plaques, l'expression du flux de chaleur se réduit à :

$$dQ = -\frac{\partial T}{\partial z}(z = \pm\frac{1}{2})dS$$

Le flux de chaleur moyen traversant l'une ou l'autre plaque est obtenu en introduisant la moyenne spatiale suivant x pour la convection mixte bidimensionnelle :

$$< Q(z = \pm\frac{1}{2}, t) >= -\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} \frac{\partial T}{\partial z}(z = \pm\frac{1}{2}, t)dx$$

avec $L = 6$ pour les simulations numériques effectuées ici.

Comme le flux de chaleur de l'état de conduction est égale à -1, le nombre de Nusselt global instantané est alors :

$$Nu(t) = - < Q(z = \pm\frac{1}{2}, t) >$$

Les simulations numériques montrent que $Nu(t)$ oscille légèrement (de l'ordre de 5%) autour d'une valeur moyenne, que l'on désigne par Nu.
Nous avons tracé le nombre de Nusselt moyen Nu sur la figure 6.23, en fonction de Ra et pour différents Péclet. Les résultats numériques montrent que Nu croît avec Ra et reste proche des valeurs de Nusselt mesurées tant que $Ra < 100$. Les simulations numériques montrent également que le nombre de Péclet n'a pratiquement aucune influence sur le nombre de Nusselt moyen.

Sur la figure 6.23, nous avons également représenté le nombre de Nusselt déterminé au chapitre trois grâce aux équations de Ginzburg-Landau couplées. Nous remarquons que Nu^{3D} constitue une bonne approximativement des données expérimentales sur une plage de Ra allant jusqu'à trois fois la valeur au seuil $Ra_c \simeq 40$. Dans les expériences citées dans ce travail, le nombre de Reynolds Re_K est voisin de zéro, ce qui impliquent, d'après les expressions (3.3) et (3.4) (chapitre trois) du nombre de Nusselt que la présence d'un écoulement principal ne modifie ni Nu^{3D}, ni Nu^L.

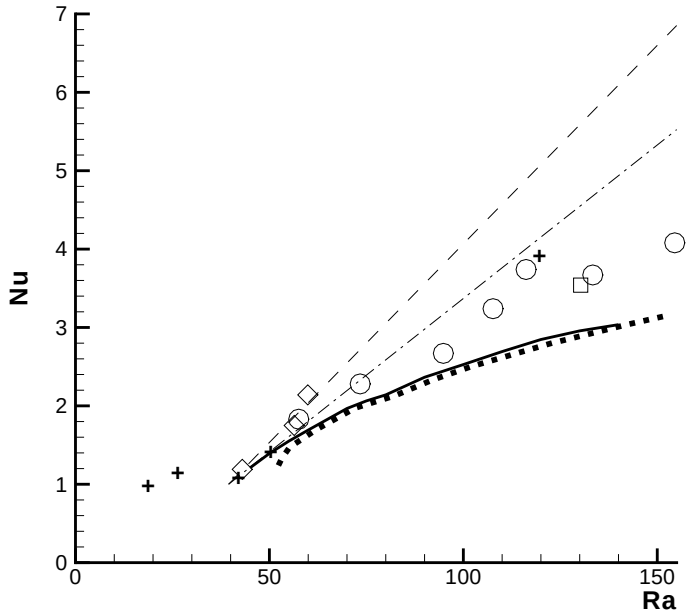


FIG. 6.23 – Nombre de Nusselt en fonction de Ra obtenu à partir de Ginzburg-Landau :$Nu^L(--)$, $Nu^{3D}(-\cdot-)$,
à partir des expériences de la série 6 (tableau 6.1) avec :
$+$: $R.L$, $\circ$: $S.O.3D$ pour $V_i = 6.7\ 10^{-5} m.s^{-1}$,
$\square$: $S.O.3D$, $\diamond$: $R.L$ pour $V_i = 21\ 10^{-5} m.s^{-1}$
et du calcul numérique 2D pour $Pe = 1$ $(-)$ et $Pe = 8$ $(\cdots)$

Les mesures expérimentales montrent que le transfert de chaleur est identique en convection mixte ou en convection naturelle [26], ce qui confirment les résultats précédemment obtenus. Ainsi nous avons reporté sur la figure 6.24, le nombre de Nusselt obtenu

numériquement ainsi que celui obtenu en convection naturelle à partir des séries 6, 7, et 14 (voir chapitre quatre). Les mesures expérimentales montrent à l'évidence que le transfert de chaleur moyen est influencé par les différents types de milieux poreux. Or le modèle d'équations utilisées ici (1.12) conduit à une relation biunivoque entre le transfert de chaleur moyen Nu et Ra : $Nu = f(Ra)$. Ce modèle ne prend pas suffisamment en compte la nature du milieu poreux.

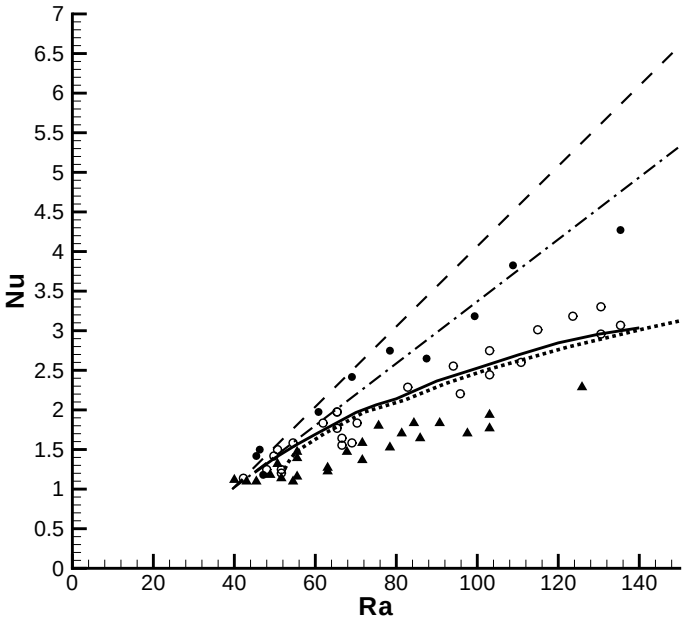


FIG. 6.24 – Nombre de Nusselt en fonction de Ra obtenu à partir de Ginzburg-Landau :$Nu^L(--)$, $Nu^{3D}(-\cdot-)$, à partir des expériences de convection naturelle : • : série 6, ∘ série 7, ▲ (tableau 6.1) série 14 et à partir du calcul numérique 2D pour $Pe = 1$ $(-)$ et $Pe = 8$ $(\cdots)$

Pour affiner la description du transfert de chaleur, il est possible d'assimiler le milieu poreux à deux milieux continus fictifs équivalents, l'un solide, l'autre fluide, modélisé par le système d'équations (1.11) et (1.10). A partir de ces équations, on en extrait la relation suivante :

$$Nu = f(Ra, \chi, \Lambda')$$

avec $\Lambda' = \frac{\lambda_f^*}{\lambda_s^*}$ et $\chi = \frac{hH^2}{\lambda_f^*}$. Les résultats numériques obtenus par M. Combarnous [27] à l'aide de ce modèle en régime thermique permanent et de convection naturelle, sont en bon accord qualitatif avec les résultats expérimentaux. En effet il a été possible malgré l'incertitude sur les valeurs de χ et Λ à choisir pour un milieu donné, d'expliquer la position relative des courbes expérimentales $Nu - Ra$, les unes par rapport aux autres.

6.7 Conclusion

Nous montrons, par le biais de la simulation numérique de la convection mixte en milieu poreux, qu'en régime absolument instable, la structure des solutions non linéaires se présente comme un front reliant l'état de conduction à l'entrée aux rouleaux transversaux se propageant dans la direction de l'écoulement. La distance Δ d'établissement du front est d'autant plus grande que le débit est élevé, alors qu'elle décroît lorsque le nombre de Rayleigh croît.

Une loi d'échelle reliant l'accroissement spatial Δ à l'écart du seuil d'instabilité absolue a été discutée à la lumière des résultats de la simulation numérique. Les extremums de la température des structures thermo-convectives mesurées sont comparés avec les résultats numériques. Nous avons aussi évalué le transfert de chaleur moyen et l'avons comparé à des résultats expérimentaux. Sans vouloir prétendre à une concordance parfaite entre les extremums de la température et le transfert de chaleur expérimentaux et numériques, nous notons cependant une grande similitude.

Les solutions non linéaires du problème ou modes globaux se présentent sous la forme d'oscillations parfaitement régulières. Tant que le nombre de Péclet n'est pas trop élevé, ces oscillations évaluées numériquemement dans le domaine pleinement non linéaire, s'avèrent identiques aux oscillations déterminées par le critère linéaire d'instabilité absolue. La même correspondance est observée pour la vitesse de propagation des structures thermo-convectives.

Le nombre de Nusselt caractérisant le transfert de chaleur moyen a été évalué numériquement. La comparaison avec des données expérimentales montre que, en plus de la contribution de Ra, l'influence sur le transfert de chaleur des caractéristiques thermiques de la phase solide et de la phase liquide est très importante.

Un projet d'article est en cours de rédaction, et qui rassemble les résultats issus de ce chapitre.

Conclusion générale et perspectives

Les résultats obtenus le long de ce travail sont synthétisés et une extension possible de ces travaux est suggérée dans cette section.

Ce travail porte sur une étude théorique et numérique des instabilités spatio-temporelles pouvant naître et se développer dans un fluide confiné en milieu poreux chauffé par le bas et soumis à un écoulement horizontal. La formulation mathématique des équations de ce problème repose sur la loi phénoménologique de Darcy, corrigée par un terme non linéaire dit de Forchheimer, pour décrire la filtration du fluide dans le milieu poreux. Ce problème de convection mixte admet une solution de conduction pour toutes les valeurs des nombres sans dimension du problème, à savoir le nombre de Rayleigh de filtration Ra, le nombre de Péclet Pe, le nombre de Reynolds Re_K basé sur la perméabilité du milieu et le rapport de forme latéral du milieu poreux a.

La stabilité de la solution de l'état de conduction est étudiée aussi bien par rapport à des perturbations spatialement étendues que par rapport à des perturbations localisées. L'étude linéaire de stabilité temporelle montre que la nature des structures thermo-convectives bifurquées dépend du rapport de forme latéral du milieu a et du nombre de Reynolds Re_K. Dans le cadre de l'hypothèse d'un rapport de forme latéral infini, on montre que le mode le plus instable correspond aux rouleaux longitudinaux fixes R.L (i.e d'axe parallèle à la direction de l'écoulement) indépendamment de la valeur de Re_K. La prise en compte d'un rapport de forme fini a pour effet de stabiliser les R.L. Dans ce cas, il existe une valeur critique Re_K^* telle que la solution de conduction perd sa stabilité au profit des structures tridimensionnelles oscillatoires (S.O.3D) si $Re_K < Re_K^*$. En revanche pour des valeurs de $Re_K > Re_K^*$ les S.O.3D sont remplacées par les R.L. Ce résultat semble reproduire qualitativement les données expérimentales, établies par M. Combarnous [26], et où des R.L et des structures oscillatoires ont été observés.

Une comparaison quantitative montre que les prédictions de l'approche temporelle de stabilité n'est pas adéquate et ne rend pas compte de la réalité expérimentale. Une approche spatio-temporelle de stabilité linéaire a été alors utilisée en évaluant la réponse du système à une impulsion localisée. Cette démarche a permis de distinguer la nature convective ou absolue des instabilités, aussi bien des S.O.3D que des R.L.

Lorsque le rapport de forme latéral du milieu est supposé infini, seuls les rouleaux transversaux propagatifs R.T (i.e d'axe perpendiculaire à l'écoulement) peuvent devenir absolument instables, les autres configurations thermo-convectives demeurent convectivement instables quelque soit la valeur du débit.

Cependant, nous trouvons que le confinement latéral peut promouvoir des instabilités absolues S.O.3D ou sous forme de R.L. Les courbes de transition instable convectif / instable absolu ont été déterminées dans le plan (Pe, Ra) pour les différents motifs thermo-convectifs instables. L'influence de l'inertie poreuse sur cette transition a été également discutée. Ensuite une comparaison avec des données expérimentales montre que les seuils d'instabilité absolue correspondent aux seuils de la transition observée expérimentalement entre les R.L et les structures oscillatoires. Cette correspondance s'est avérée parfaite quand la phase fluide et la phase solide du milieu poreux ont des conductivités thermiques proches. Lorsque le rapport des conductivités thermiques des deux phases est loin de l'unité, on observe un décalage entre théorie et expérience. Dans ce cas, nous pensons que le modèle théorique qui suppose un équilibre thermodynamique local entre les deux phases n'est plus approprié.

Nous avons comparé ensuite les caractéristiques linéaires des structures propagatives dans le régime absolument instable avec les résultats expérimentaux. Il en ressort que pour différentes combinaisons des paramètres Pe et Ra, les longueurs d'onde et les périodes d'oscillations prédites au seuil absolu, sont en bon accord avec l'expérience. Cependant, nous trouvons que les vitesses de propagations des structures thermo-convectives sont surestimées par la théorie.

Dans la perspective d'étudier la dynamique faiblement non linéaire, un modèle réduit, composé de deux équations de Ginzburg-Landau couplées a été obtenu par une analyse basée sur les méthodes de développements asymptotiques et d'échelles multiples. Ce modèle rigoureusement valable au voisinage du point de bifurcation double (Re_K^*, Ra_c^*) décrit l'interaction non linéaire entre les S.O.3D et les R.L.
L'étude de la stabilité des solutions homogènes de ce modèle permet d'expliquer qualitativement le phénomène d'hystérésis observé expérimentalement. Par ailleurs une étude linéaire d'instabilité spatiale et la simulation numérique du modèle réduit, en présence du bruit d'entrée inhérent à toute expérience de laboratoire, nous ont permis de décrire la dynamique globale des structures pour les paramètres (Pe, Ra). Celle-ci a pu être comparée et confirmée à celle obtenue expérimentalement. En régime d'instabilité absolue nous distinguons deux zones : une zone pour de faible valeur de Pe où ce sont les R.L qui se développent alors que pour des valeurs plus élevées de Pe ce sont les S.O.3D. En régime d'instabilité convective ce sont les R.L qui sont observés pour de grandes valeurs de Pe et les S.O.3D pour des plus faibles valeurs. La courbe de transition convective entre les R.L. et les S.O.3D a été déterminée, celle-ci dépend de l'intensité du bruit à l'entrée. Par ailleurs, les simulations numériques des deux équations de Ginzburg-Landau couplées montrent que durant une phase transitoire, l'un des deux motifs thermo-convectifs occupe une partie du massif poreux alors que l'autre partie est occupée par le deuxième motif. Ce résultat a été validé par les travaux expérimentaux de M. Combarnous.

Nous avons ensuite décrit les méthodes spectrales qui sont à la base de la méthode numérique utilisée pour résoudre le système d'équations aux dérivées partielles du problème. Des simulations numériques directes de la convection mixte bidimensionnelle ont été réalisées. Le caractère 2D de ces simulations est justifié par le fait que l'analyse linéaire a révélé que c'est précisément le mode 2D, représentant des rouleaux transversaux, qui est le plus absolument instable.

Les simulations numériques directes du problème pour différentes combinaisons de Ra et Pe, mettent en évidence l'émergence d'un mode global non linéaire, composé d'un front reliant l'état de conduction à l'entrée aux R.T propagatifs. Ce front s'avère capable de remonter l'écoulement principal contre l'advection et finit par s'arrêter à une certaine distance Δ du bord de l'entrée. Une loi d'échelle reliant la distance à l'écart du seuil d'instabilité absolue, a été proposée par A. Couairon et J.M. Chomaz [32] et obtenue à partir du modèle de Ginzburg-Landau est discuté ici à la lumière des résultats des simulations numériques. Par ailleurs, les extrémums de la température des structures thermo-convectives mesurées ainsi que le transfert de chaleur moyen mesuré, ont été comparés aux résultats numériques. Bien que la concordance ne soit pas parfaite, une grande similitude se dégage de ces comparaisons.

Nous avons ensuite mené une comparaison quantitative des prédictions théoriques émanant de l' analyse spatio-temporelle de stabilité linéaire et des résultats des simulations numériques. Tant que le nombre de Péclet n'est pas trop élevé, les oscillations et les vitesses de propagation des R.T s'avèrent identiques. Le rôle des non linéarités est principalement un rôle de saturation des R.T.

Par ailleurs, nous avons comparé le transfert de chaleur moyen obtenu numériquement à celui obtenu expérimentalement. On montre qu'en plus de la contribution de Ra, le transfert de chaleur est influencé par les caractéristiques thermiques du milieu, notamment par le transfert de chaleur entre la phase fluide et la phase solide.

Une question majeure reste à éllucider. Il s'agit de l'émergence observée expérimentalement des R.L dans la région convectivement instable. La contribution du bruit d'entrée et son amplification dans la région convectivement instable sont probablement des éléments essentiels pour comprendre ce phénomène, comme cela a été qualitativement prédit dans ce travail à partir du modèle des équations de Ginzburg-Landau couplées. Pour s'affranchir de l'hypothèse de faible écart au seuil, des simulations numériques de la convection mixte tridimensionnelle sont envisagées.

Comme nous l'avons signalé dans ce mémoire, l'une des explications aux écarts constatés entre les résultats de certains essais expérimentaux et les résultats numériques est la difficulté réelle de maintenir la plaque inférieure à une température constante dans une expérience. L'effet de la présence d'inhomogénéités de la température est une question passionnante qui pourrait permettre au modèle théorique de mieux appréhender la complexité de la réalité expérimentale.

Annexe A

Instabilités Convectives / Absolues

Les milieux ouverts, qui sont les écoulements les plus couramment rencontrés, ne comportent pas de frontières ou alors très éloignées, suivant la direction principale de l'écoulement. Si on observe une région du milieu, toute particule entrante, sort : le fluide qui s'écoule est sans cesse renouvelé. En convection mixte, l'évolution d'une impulsion localisée résulte d'une compétition entre les mécanismes d' advection par l'écoulement principal et d' amplification par transport de la chaleur imposée par le gradient vertical de température. Il faut donc prendre en compte la croissance spatiale et temporelle de la perturbation qui présente trois types de comportements (voir figure A.1) :

- la perturbation décroît dans le temps et dans l'espace : le système est dit *stable*
- la perturbation croît dans le temps et dans l'espace mais cela n'est pas suffisant pour contrer l'advection, elle finit par sortir du domaine, l'instabilité est convective et le système est dit *convectivement instable.*
- la perturbation croît suffisamment dans le temps et l'espace pour contrer l'advection, la perturbation finit par envahir le domaine, l'instabilité est absolue et le système est dit *absolument instable.*

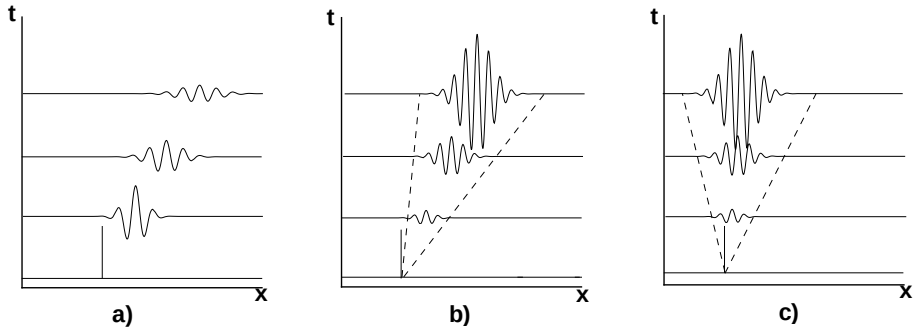


FIG. A.1 – Evolution d'une perturbation localisée en $x = 0, t = 0$ dans le plan (x, t), stable en a), convectivement instable en b) et absolument instable en c).

La différence entre instabilité convective et absolue n'est que relative en effet elle dépend du choix du référentiel : une instabilité convective devient absolue dans le référentiel lié au paquet d'onde, et inversement, une perturbation absolue devient convective dans un référentiel se déplaçant plus vite que le paquet d'onde. C'est pourquoi on prend un référentiel privilégié lié au "laboratoire" (voir [55]).

Lorsque l'on considère l'évolution d'une perturbation infinitésimale, par le biais de l'-analyse linéaire, le système est dit *linéairement convectivement instable ou linéairement absolument instable* [23], [31]. On qualifie alors la transition du régime convectif au régime absolu lorsque l'on augmente le(s) paramètre(s) de contrôle, de **transition linéaire**.

Cette analyse linéaire **locale** permet de qualifier le comportement **global** du système dans des situations moins "idéalistes" que la perturbation localisée. En effet, tout dispositif expérimental possède un niveau de bruit non négligeable que l'on peut voir comme une distribution stochastique de perturbation en temps et en espace et la distinction entre les différents régimes devient alors problématique. Néanmoins lorsque le système est convectivement instable, il amplifie les composantes spectrales du bruit qui se développent et se déplacent vers l'aval. Elles sont sans cesse renouvelées par la présence du bruit, ce qui donnent naissance à des structures entretenues. De telles structures sont observées dans l'expérience de Couette-Taylor [6] et en optique non linéaire dans les cristaux liquides [1].

Lorsque le système est absolument instable, il amplifie également les composantes spectrales du bruit qui se déplacent alors en amont et en aval de l'écoulement. Or parmi les composantes spectrales, il existe un mode lié au référentiel du laboratoire, qui ne se déplace ni vers l'aval et ni vers l'amont, ce mode a la particularité d'être visible tout le temps pour l'observateur lié au laboratoire. Pour cet observateur, le système se comporte comme un oscillateur auto-entretenu. Les structures sont alors peu, voire pas, sensibles au bruit. Dans les deux types de régimes (convectif ou absolu) il y a émergence d'un **mode global**.

Or l' émergence d'un mode global peut être modifié par la présence de fort effets non linéaires : il faut étudier l'évolution d' une perturbation mais cette fois-çi d'amplitude finie sur laquelle on prend en compte les effets non linéaires du système. Le système est alors qualifié de *non-linéairement convectivement instable ou non-linéairement absolument instable* et la transition est dite *transition non linéaire*. On obtient qualitativement le même comportement qu'avec l'évolution linéaire d'une perturbation infinitésimale, mais les caractéristiques sont quantitativement modifiées : la distance d'établissement du front vis à vis de l'entrée [31] et sa sélection [23],[51] sont différentes. On montre par exemple que lorsque la bifurcation est supercritique (notamment via Ginzburg-Landau d'ordre trois), la transition est linéaire, et qu'elle est non linéaire dans le cas sous-critique (Ginzburg-Landau d'ordre cinq). Pour ce problème, on sait que la bifurcation est supercritique, on considère donc que la transition est linéaire.

Par ailleurs, on retrouve le caractère convectif/absolu des instabilités des milieux ouverts dans d'autres champs scientifiques que celui de la mécanique des fluides, comme

en optique non-linéaire [1], [95], en biochimie, en dynamique des populations ou dans l'étude du trafic routier [63] ce qui élargit le champ d'application de ces concepts.
On présente dans cette annexe, le calcul de la réponse impulsionnelle infinitésimale ainsi que l'étude complémentaire des caractéristiques des régimes linéairement convectivement instables et linéairement absolument instables.

A.1 Réponse impulsionnelle

Le concept d'instabilité absolue et convective est décrit dans [50], [51] et appliqué dans le cadre de la mécanique des fluides, en sachant qu'il fut développé en premier lieu, en physique des plasmas [93].
On considère ici le milieu homogène, c'est à dire qu'il a les mêmes caractéristiques et propriétés dans tout le milieu ainsi que les contraintes extérieures [1]. Nous nous intéressons donc à la réponse linéaire du système à une perturbation localisée avec condition aux limites, elle est appelée fonction de Green notée vectoriellement par $\overrightarrow{G}$. La perturbation localisée est représentée par la distribution de Dirac qui permet d' exciter tous les modes de Fourier. Le système linéaire est obtenu au chapitre 2 (2.2), on cherche donc :

$$(I.\partial_t + L).\overrightarrow{G}(x, y, z, t) = \overrightarrow{\delta} \tag{A.1}$$

avec la condition de causalité

$$\overrightarrow{G}(x, y, z, t) = 0 \text{ pour } t < 0$$

le vecteur $\overrightarrow{\delta} = [1, 1, 1, 1, 0]^T.\delta_x\delta_t\delta_{y-y_0}\delta_{z-z_0}$ avec δ la fonction de dirac appliqué à x, y, z, t, $\overrightarrow{G} = [u, v, w, \theta, p]^T$ [2] et :

$$I = \begin{bmatrix} 0\,0\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,1\,0 \\ 0\,0\,0\,0\,0 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} (1+2\,Re_K) & 0 & 0 & 0 & \partial_x \\ 0 & (1+Re_K) & 0 & 0 & \partial_y \\ 0 & 0 & (1+Re_K) & -Ra & \partial_z \\ 0 & 0 & -1 & Pe\partial_x - \Delta & 0 \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La fonction de Green doit par ailleurs satisfaire aux conditions aux limites suivantes :

$$\theta = w = 0 \text{ pour } z = 0 \text{ et } z = 1 \tag{A.2}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial y} = v = 0 \text{ pour } y = 0 \text{ et } y = a \tag{A.3}$$

car les perturbations sont atténuées sur les bords du domaine. Pour résoudre le système linéaire homogène (A.1), on utilise les transformations suivantes pour les variables x et

[1] sinon il faut considérer une approximation du type W.K.B.J, où l'inhomogénéité (par exemple une tache thermique localisée) est lentement variable dans le temps et l'espace

[2] où ^{T} est la transposée

t d'une fonction quelconque $h(x,t)$:

$$\hat{h}(k,t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x,t)e^{-ikx}dx \text{ et } \tilde{h}(x,\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x,t)e^{i\omega t}dt$$

si $k, \omega \in \mathbb{R}$, on a une transformation de Fourier (noté T.F) et si $k = k_r + ik_i$, $\omega = \omega_r + i\omega_i \in \mathbb{C}$ on a une transformation de Laplace (noté T.L) qui sera vue ici comme une extension de la T.F (on veut au moins décrire la fonction par le nombre d'onde et la fréquence $k_r, \omega_r \in]-\infty, \infty[$) mais permettant en plus une atténuation ou une amplification des nombres d'onde par k_i et des fréquences par ω_i. En revenant à $h(x,t)$, la double transformation inverse en x et en t s'écrit formellement pour le cas d'une T.F :

$$h(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \ddot{h}(k,\omega)e^{i(kx-\omega t)}d\omega dk$$

ce qui peut-être vu comme une "somme" d'onde de la forme $e^{i(kx-\omega t)}$, appelé paquet d'onde avec un spectre particulier en $\ddot{h}(k,\omega)$ où $\ddot{h}$ représente la double transformée de h ($\ddot{h} = \tilde{\hat{h}}$). Dans le cas d'une T.L, la transformation inverse s'effectue en introduisant des contours particuliers qui prennent en compte les k_i et ω_i (voir plus loin). Ainsi la fonction de Dirac devient égale à 1 par la double transformation T.F ou T.L, elle excite tous les modes k, ω, en particulier ceux qui sont instables.
En prenant la double transformée de (A.1), on obtient le système suivant :

$$(-i\omega.I + \ddot{L}).\ddot{\overrightarrow{G}}(k,y,z,\omega) = [1,1,1,1,0]^T.\delta_{y-y_0}\delta_{z-z_0} \tag{A.4}$$

avec $\ddot{L}$ obtenu en remplaçant dans L : $\partial^j_{x^j} \leftrightarrow (ik)^j$.

A.2 Calcul de la fonction de Green

A.2.1 Décomposition en fonctions propres

Pour résoudre le système (A.4), on utilise la décomposition en fonction propre de l'opérateur $(-i\omega.I + \ddot{L})$. En effet nous avons :

$$(i\omega_{n,m}.I)\ddot{\overrightarrow{S}}_{n,m}(k,y,z,\omega) = \ddot{L}.\ddot{\overrightarrow{S}}_{n,m}(k,y,z,\omega) \tag{A.5}$$

où $\ddot{\overrightarrow{S}}_{n,m}$ et $\omega_{n,m}$ sont appelés "abusivement" fonctions et valeurs propres. Plus exactement les valeur $i\omega_{n,m}$ sont choisies de telle sorte que le noyau de l'opérateur $(-i\omega.I+\ddot{L})$ ne soit pas réduit à 0. Pour cela la condition nécessaire et suffisante à imposer à $\omega_{n,m}$ est $Det(-i\omega_{n,m}.I + \ddot{L}) = 0$ où $\omega_{n,m}$ désigne les ω qui vérifient cette relation de dispersion pour différents n et m.
Puisque l'écoulement principal se fait suivant la direction x, on étudie l'évolution spatial de la perturbation suivant la direction x par l'intermédiaire de k (transformée de Fourier). Les directions z et y étant bornées et d'extension assez petite par rapport à la longueur du milieu poreux, la perturbation est considéré comme spatialement étendue

dans ces deux directions (série de Fourier[3]). En négligant $Re_K \ll 1$, les solutions sont de la forme [4] :

$$\ddot{\vec{S}}_{n,m}(k,y,z) = A.\begin{pmatrix} i.k.\frac{n\pi}{(k^2+l^2)}\cos(n\pi z)\cos(\frac{m}{a}\pi y) \\ -\frac{n\pi l}{k^2+l^2}\cos(n\pi z)\sin(\frac{m}{a}\pi y) \\ \sin(n\pi z)\cos(\frac{m}{a}\pi y) \\ \frac{(n^2\pi^2+k^2+l^2)}{Ra(k^2+l^2)}\sin(n\pi z)\cos(\frac{m}{a}\pi y) \\ -\frac{n\pi}{(k^2+l^2)}\cos(n\pi z)\cos(\frac{m}{a}\pi y) \end{pmatrix} \tag{A.6}$$

où chaque $\ddot{\vec{S}}_{n,m}$ vérifient exactement les conditions aux limites (A.2)-(A.3) avec $l = \frac{m}{a}\pi$ et A l'amplitude qui est une constante pour le problème linéaire et qui sera déterminée par une analyse faiblement non linéaire (voir annexe B).
En outre, $\omega_{n,m}$ vérifie $Det(-i\omega_{n,m}.I+\ddot{L}) = 0$ qui est exactement la relation de dispersion (2.5) : $D_\Phi(k,\omega_{n,m}) = 0$ avec $\Phi = [\frac{m}{a}, Ra, Pe, Re_K, n]$. On obtient facilement $\omega_{n,m} = \omega_{n,m}(k)$.

Les $\ddot{\vec{S}}_{n,m}$ représentent alors un nombre infini de fonctions propres correspondant à une infinité de valeurs propres $\omega_{n,m}$ dépendant uniquement des valeurs prises par k. On développe $\ddot{\vec{G}}$ en série de fonctions propres [17] :

$$\ddot{\vec{G}}(k,y,z,\omega) = \sum_{n,m} C_{n,m}(k,y_0,z_0,\omega)\,\ddot{\vec{S}}_{n,m}(k,y,z) \tag{A.7}$$

En injectant (A.7) dans l'équation (A.4), on obtient :

$$-i\sum_{n,m}(\omega-\omega_{n,m})C_{n,m}I\,\ddot{\vec{S}}_{n,m} = [1,1,1,1,0]^T.\delta_{y-y_0}\delta_{z-z_0} \tag{A.8}$$

On définie le produit scalaire suivant y, z :

$$< \ddot{\vec{S}}_{n,m}, \ddot{\vec{S}}_{h,j} >= \int_0^1\int_0^a \ddot{\vec{S}}_{n,m}.\overline{\ddot{\vec{S}}}_{h,j}dydz$$

avec $-$ le complexe conjugué et . le produit scalaire vectoriel.
En multipliant (A.7) par $\ddot{\vec{S}}^*_{h,j}$, on obtient :

$$\begin{aligned} -i\sum_{n,m}(\omega-\omega_{n,m})C_{n,m} < I\,\ddot{\vec{S}}_{n,m}, \ddot{\vec{S}}^*_{h,j} > &=< [1,1,1,1,0]^T.\delta_{y-y_0}\delta_{z-z_0}, \ddot{\vec{S}}^*_{h,j} > \\ &= F_{h,j}(k,y_0,z_0) \end{aligned} \tag{A.9}$$

[3]si la direction est infinie par exemple pour un domaine infini ou semi-infini, il faut introduire une transformée de Fourier où on distingue k_y de k_x [17]

[4]les solutions ne sont pas toujours aussi simple, il faut mettre en oeuvre d'autres méthodes (par exemple méthode de Galerkin/collocation avec polynôme Techebychev [17], FFT ...).

où $\ddot{\overrightarrow{S^*}}_{h,j}$ sont les fonctions propres de l'adjoint de l'opérateur $-i\omega_{h,j}.I + \ddot{L}$. En effet l'opérateur adjoint [5] est défini par :

$$< (-i\omega_{h,j}.I + \ddot{L}).X, Y >=< X, (i\overline{\omega_{h,j}}.I + \ddot{L}^*).Y >$$

avec $\ddot{L}^*$ est égal à l'opérateur $\overline{\ddot{L}^T}$ où on remplace [6] $\partial^c_{(y,z)^c} \to (-1)^c \partial^c_{(y,z)^c}$. On a donc :

$$(i\overline{\omega_{h,j}}I + \ddot{L}^*).\ddot{\overrightarrow{S^*}}_{h,j} = 0 \tag{A.10}$$

$$\Downarrow$$

$$\ddot{\overrightarrow{S^*}}_{h,j}(k,y,z) = A. \begin{pmatrix} \frac{-i\bar{k}h\pi}{(\bar{k}^2+l^2)}\cos(h\pi z)\cos(ly) \\ -\frac{h\pi l}{(\bar{k}^2+l^2)}\cos(h\pi z)\sin(ly) \\ \sin(h\pi z)\cos(ly) \\ \frac{h\pi}{\bar{k}^2+l^2}\sin(h\pi z)\cos(ly) \\ \frac{\pi^2h^2+k^2+l^2}{\bar{k}^2+l^2}\cos(h\pi z)\cos(ly) \end{pmatrix} \tag{A.11}$$

avec $l = \frac{j}{a}\pi$. On peut alors calculer $F_{h,j}$, par exemple pour $y_0 = 0$ et $z_0 = 0$ (cela ne change rien au calcul mais cela simplifie l'écriture) on a : $F_{h,j}(k,0,0) = A\frac{ih\pi k+h^2\pi^2+l^2+k^2}{k^2+l^2}$.

Remarquons qu' en multipliant (A.5) à droite par $\overline{\ddot{\overrightarrow{S^*}}_{h,j}}$ et le complexe conjugué de (A.10) à gauche par $\ddot{\overrightarrow{S}}_{n,m}$, on obtient la suite d'égalité suivante :

$$i\omega_{n,m} < I.\ddot{\overrightarrow{S}}_{n,m}, \ddot{\overrightarrow{S^*}}_{h,j} >=< \ddot{L}.\ddot{\overrightarrow{S^*}}_{n,m}, \ddot{\overrightarrow{S^*}}_{h,j} >=< \ddot{\overrightarrow{S^*}}_{n,m}, \ddot{L}^*.\ddot{\overrightarrow{S^*}}_{h,j} >= i\omega_{h,j} < \ddot{\overrightarrow{S^*}}_{n,m}, I.\ddot{\overrightarrow{S^*}}_{h,j} >$$

ce qui entraînent, en effectuant la différence du premier et du dernier terme de cette suite d'égalité :

$$< I.\ddot{\overrightarrow{S^*}}_{n,m}, \ddot{\overrightarrow{S^*}}_{h,j} >= 0 \text{ si } h \neq n \text{ ou } m \neq j$$

.

Alors l'équation (A.9) donne alors les coefficients $C_{n,m}$ pour y_0 et z_0, en posant :

$$C_{n,m}(k,y_0,z_0,\omega) = \frac{1}{i(\omega_{n,m}-\omega)} \underbrace{\frac{F_{n,m}(k,y_0,z_0)}{< I.\ddot{\overrightarrow{S^*}}_{n,m}, \ddot{\overrightarrow{S^*}}_{n,m} >}}_{=Z_{n,m}(k,y_0,z_0)} \tag{A.12}$$

avec [7] $< I.\ddot{\overrightarrow{S^*}}_{n,m}, \ddot{\overrightarrow{S^*}}_{n,m} >= a/4.\frac{n\pi}{k^2+l^2}.\frac{(n\pi)^2+k^2+l^2}{Ra(k^2+l^2)}$.

[5] rappelons qu'un opérateur adjoint M^* de M vérifie : $< MX, Y >=< X, M^*Y >$

[6] ce qui se démontre par intégration par partie avec égalité des condition aux limites pour z et y

[7] pour $a = 0$, le produit scalaire est à redéfinir uniquement suivant z : $< **, * >= \int_0^1 ** . * dz$ ce qui permet d'avoir $< I.\ddot{\overrightarrow{S^*}}_{n,m}, \ddot{\overrightarrow{S^*}}_{n,m} >= 1/2.\frac{n\pi}{k^2}.\frac{(n\pi)^2+k^2}{Rak^2}$

Après avoir résolu le problème dans l'espace de Fourier, on revient à l'espace physique (x, t). En prennant la transformée inverse de (A.7) on obtient :

$$\overrightarrow{G}(x,y,z,t) = \frac{1}{(2\pi)^2}\sum_{n,m}\int_{L_k}\int_{L_\omega}\frac{Z_{n,m}(k,y_0,z_0)}{i(\omega_{n,m}-\omega)}.\overrightarrow{\overset{..}{S}}_{n,m}(k,y,z).e^{i(k.x-\omega.t)}d\omega dk \quad \text{(A.13)}$$

avec L_k et L_ω des contours bien choisis pour cette intégration.
Le calcul de l'intégration s'effectue dans le plan complexe. Pour cela on ne prend en compte que les pôles de $\frac{*}{i(\omega_{n,m}-\omega)}$ qui sont simples (fractions de polynômes) et qui sont obtenus pour $\omega = \omega_{n,m}$. Ces derniers $(\omega_{n,m})$ représentent donc l'ensemble (k, ω) qui vérifie la relation de dispersion (2.5) pour différents n et m : $D_\Phi(k, \omega) = 0$ avec $\Phi = [\frac{m}{a}, Ra, Pe, Re_K, n]$. Les pôles sont alors décris soit par $\omega = \omega(k)$ ou soit par $k = k(\omega)$. Le rôle des contours d'intégration est alors de prendre en compte ces pôles dans le plan complexe, en fonction de ω (L_ω) et en fonction de k (L_k) avec la condition suivante : pour balayer l'ensemble des modes, les contours L_ω et L_k doivent au moins décrire $]-\infty, \infty[$ pour ω_r et k_r.

Pour cette intégration et donc pour l'instabilité, il faut, selon les cas étudiés, distinguer 3 types d'analyse.

A.2.2 Analyse temporelle

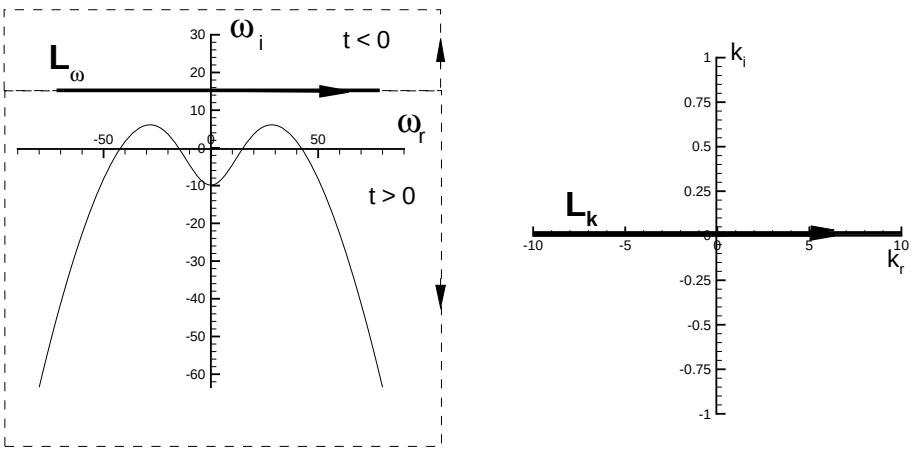


FIG. A.2 – exemple d'une branche temporelle $\omega(k) \in \mathbb{C}$, issue de la relation de dispersion, avec $Ra = 51$, $Pe = 8$, $k \in [-10, 10]$ pour $a = 0$ (structures 2D) et $\mathcal{F} = 0$ (Darcy)

Dans l'analyse temporelle, on impose : $\omega \in \mathbb{C}$ (T.L) et $k \in \mathbb{R}$ (T.F avec $k_i = 0$), la perturbation s'amplifie dans le temps mais de manière homogène dans l'espace. Lorsque k décrit $L_k =]-\infty, \infty[$, comme les pôles vérifient $D_\Phi(k, \omega) = 0$, on en déduit une ligne de pôle $\omega(k) \in \mathbb{C}$ appelée **branche temporelle** qui est fonction de Ra et Pe. Elle

permet d'effectuer par la méthode des résidus et l'expression de $\omega(k)$, le passage de $\int_{L_k}\int_{L_\omega}$ à $\int_{L_k}$. On donne un exemple de branche temporelle sur la figure A.2. Ainsi si on souhaite au moins intégrer la fonction avec $\omega_r(k)$ de $-\infty$ à ∞, on peut prendre comme contour d'intégration $L_\omega =]-\infty, \infty[$. Mais la présence des pôles particuliers sur l'axe réel $\omega_i(k) = 0$ (voir figure A.2) entraîne la divergence de l'intégrale. On est alors obligé de contourner ces pôles dans le plan complexe (ω_r, ω_i) ainsi que tous les autres pôles tel que $\omega_i(k) \neq 0$. Il est donc nécessaire de prendre un contour L_ω passant au dessus de tous ces pôles comme il est indiqué sur la figure A.2 et se refermant en l'infini de la façon suivante :

- soit au dessus des pôles, cela correspond à $t < 0$, comme on entoure aucun pôle, on vérifie alors la condition de causalité soit $\overrightarrow{G}(x, y, z, t) = 0$
- soit en entourant tous les pôles, cela correspond à $t > 0$, seules les fréquences ω_r qui ont des taux $\omega_i > 0$, sont amplifiées

Il n'y a pas de limite à cette intégration, car $\omega(k)$ n'a qu'une seule branche qui se trouve toujours au-dessous d'un certain ω_i maximum, le calcul de l'intégrale est donc faisable et ce quelque soit Ra et Pe.

A.2.3 Analyse spatiale

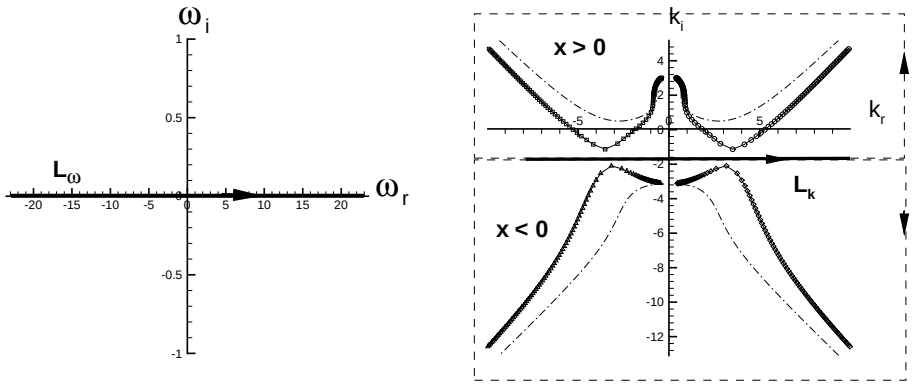


FIG. A.3 – Exemple des quatres branches spatiales $k(\omega) \in \mathbb{C}$ issues de la relation de dispersion pour $Pe = 8$ avec $Ra = 51 > Ra_c$ ($\square, \circ, \triangle, \diamond$ avec la ligne $-$) ainsi que pour $Ra = 30 < Ra_c$ (ce sont les mêmes branches mais avec la ligne $-\cdot-$, par souci de clarté nous n'avons pas rajouté les symboles) , $\omega \in [-168.7, 168.7]$ pour $a = 0$ (structures 2D) et $\mathcal{F} = 0$ (Darcy)

Dans l'analyse spatiale, on impose : $\omega \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{C}$ (T.L), la perturbation s'amplifie dans l'espace mais pas dans le temps. Lorsque ω décrit $L_\omega =]-\infty, \infty[$, on en déduit quatre lignes de pôles distinctes $(k^j(\omega))_{j=1...4}$ appelées **branches spatiales** (figure A.3) qui sont fonctions de Ra et Pe (voir les lignes $--$ pour $Ra < Ra_c$ et $-$ pour $Ra > Ra_c$ pour $Pe = 8$ sur la figure A.3). Elles permettent d'effectuer par la méthode des résidus et l'expression de $k^j(\omega)$), le passage de $\int_{L_\omega}\int_{L_k}$ à $\int_{L_\omega}$.

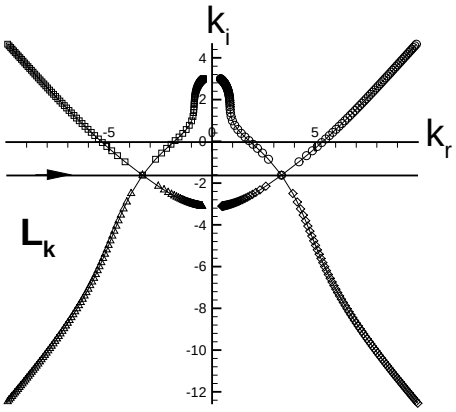


FIG. A.4 – pincement des branches spatiales et contours convenable avec pour $Pe = 8$, le seuil absolu associé $Ra_A = 52.135$, $\omega \in [-168.7, 168.7]$, $a = 0$ (structures 2D) et $\mathcal{F} = 0$
(Darcy)

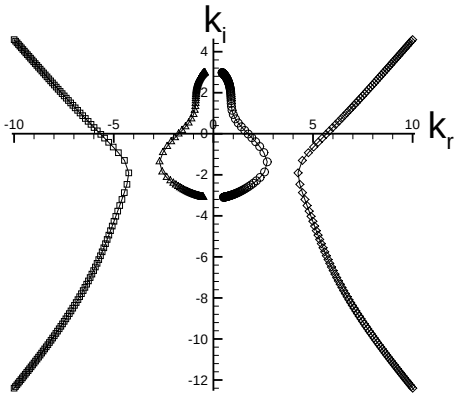


FIG. A.5 – Branche spatiale pour $Pe = 8$ avec $Ra = 55 > Ra_A$, $\omega \in [-168.7, -168.7]$, $a = 0$ (structures 2D) et $\mathcal{F} = 0$ (Darcy), il n'y a plus aucun contour convenable

Pour les mêmes raisons que précédemment (en inversant le rôle de ω et k), on choisit L_k comme il est indiqué sur la figure A.3 et se refermant en l'infini pour entourer les branches spatiales de la façon suivante :

- soit sur le demi plan supérieur pour les $x > 0$, cela correspond à une instabilité se développant dans le sens de l'écoulement principal. En effet pour $Ra < Ra_c$ toutes les branches correspondent à un état stable. Pour $Ra > Ra_c$ seules les branches qui ont des $k_i > 0$ et des $k_i < 0$ sont à prendre en compte, ce sont les branches avec $\circ$ et $\square$ sur la figure figure A.3). En effet les instabilités se développent en $e^{-k_i x}$ (voir (**??**) avec $\omega_i = 0$), ce changement de signe indique qu'elles se développent dans le sens des $x > 0$ avec les fréquences k_r pour lesquelles $k_i < 0$.
- soit sur le demi plan inférieur pour les $x < 0$ cela correspond à une des instabilités se développant dans le sens contraire à l'écoulement, qui sont stables car il n'y a pas de changement de signe pour ces branches spatiales.

Néanmoins on ne peut pas toujours effectuer cette intégration. En effet il arrive que *les branches se pincent* à Pe fixé pour un certain Ra : c'est le seuil absolu que l'on note Ra_A (figure A.4). Il est encore possible de trouver un contour convenable, mais au delà de ce Ra_A on ne peut plus trouver de contours convenable prenant en compte tous les pôles et permettant de décrire $k_r \in]-\infty, \infty[$ avec un k_i fini (figure A.5) : on ne peut plus alors distinguer les branches pour $x > 0$ et $x < 0$. On appelle ce processus, **le processus de pincement**, pour lequel on observe un pincement des branches spatiales intéressantes lorsque l'on augmente le paramètre de contrôle, ici Ra à Pe fixé.

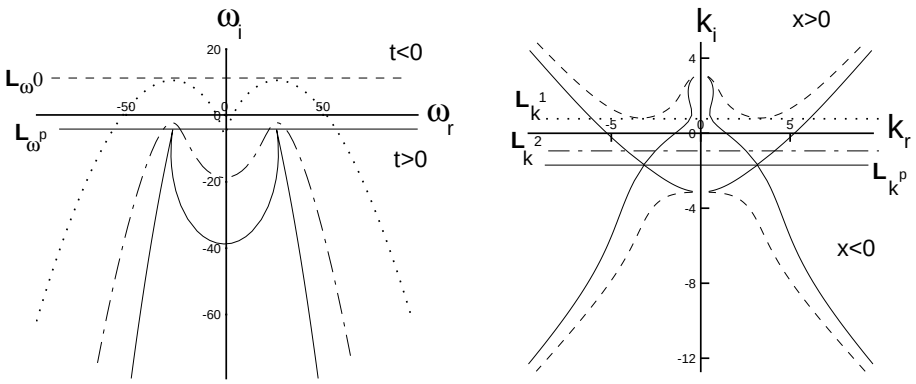


FIG. A.6 – exemple de branches temporelles pour $Pe = 8$ et $Ra = 45$, $a = 0$ (structures 2D) et $\mathcal{F} = 0$ (Darcy), dans (ω_r, ω_i) obtenues avec les contours $L_{k^1} = [-10+i0.8 \ldots 10+i0.8]$ (en ... sur la figure), $L_{k^2} = [-10 - i0.8..10 - i0.8]$ (en $- \cdot \cdot -$ sur la figure) et $L_{k^p} = [-10-i1.69..10-i1.69]$ (en $-$ sur la figure) et de branches spatiales dans (k_r, k_i) obtenues avec les contours $L^0_\omega = [-158.2+i10.2 \ldots 158.2+i10.2]$ (en $--$ sur la figure), $L_{\omega^p} = [-158.2 - i4.25 \ldots 158.2 - i4.25]$ (en $-$ sur la figure)

A.2.4 Analyse spatio-temporelle

Dans l'analyse spatio-temporelle, on impose : $\omega \in \mathbb{C}$ (T.L) et $k \in \mathbb{C}$ (T.L), la perturbation s'amplifie dans l'espace et dans le temps. Cette analyse mélange les deux dernières , mais elle est plus délicate car elle s'effectue pour tout $(\omega, k) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$. L'espace $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ est alors balayé par les contours d'intégration $L_\omega \times L_k$.

On se base sur la figure A.6 pour calculer de manière équivalente [8] : $\int_{L_\omega} \int_{L_k}$ en exprimant les branches spatiales $k(\omega)$ à travers L_ω et $\int_{L_k} \int_{L_\omega}$ en exprimant les branches temporelles $\omega(k)$ à travers L_k. Pour cela, fixons Pe et $Ra > Ra_c$, prenons un contour quelconque L_{ω^0} dans le plan (ω_r, ω_i) passant par ω_i^0 : $L_{\omega^0} =]-\infty + i.\omega_i^0, \infty + i.\omega_i^0[$ (en ... sur la figure A.6).
Ce contour décrit les branches spatiales dans le plan (k_r, k_i) en $--$ sur la figure A.6. Entre ces branches spatiales, il est possible de trouver des contours qui puissent les entourer et qui les prennent en compte pour l'intégration. En particulier nous avons exhibé le contour L_{k^1} (en ... sur la figure A.6) qui se trouve à la limite de la branche spatiale et le contour L_{k^2} (en $- \cdot -$ sur la figure A.6) qui est quelconque.
Ces mêmes contours L_{k^1} et L_{k^2} permettent à leur tour, de décrire des branches temporelles dans le plan (ω_r, ω_i) : L_{k^1} décrit la branche temporelle en ... sur la figure A.6 qui est exactement la branche temporelle passant juste en dessous de L_{ω^0}, et L_{k^2} décrit la branche $- \cdot -$ sur la figure A.6. Or comme L_{ω^0} passe au dessus de toutes ces branches temporelles, elles sont prises en compte pour l'intégration. On en conclut que

[8] on doit pouvoir intervertir les transformations : $\overrightarrow{G}(x, y, z, t) = \sum_{n,m} \int_{L_k} \int_{L_\omega} \cdots = \sum_{n,m} \int_{L_\omega} \int_{L_k} \cdots$

tous les pôles en dessous de ω_i^0 sont correctement pris en compte et ce pour un ω_i^0 à priori quelconque.

Néanmoins lorsque le contour L_{ω^0} atteint un certain contour L_{ω^p}, les branches spatiales correspondantes, se pincent (en − sur la figure A.6) comme dans l'analyse spatiale sauf qu' ici cela ne correspond pas au seuil absolu car Ra et Pe sont quelconques et $\omega_i^p = \Im(\omega^p) \neq 0$. Il existe alors un unique contour L_{k^p} qui permet d'entourer la branche spatiale dans (k_r, k_i) et inversement ce contour L_{k^p} permet de décrire l'unique branche temporelle dans (ω_r, ω_i) (en − sur la figure A.6), juste en dessous de L_{ω^p}. Si on choisit un contour en dessous L_{ω^p}, l'analyse n'est plus valable et on ne peut plus intégrer. Il est donc possible d'effectuer le calcul de $\int_{L_k}\int_{L_\omega}$ à Pe et à Ra fixé, avec tous les contours temporels se trouvant au dessus de L_{ω^p}.

A.2.5 Estimation asymptotique

L' analyse spatio-temporelle, est celle qui décrit de manière complète l'instabilité dans l'espace et le temps, l'analyse spatiale et temporelle apparaissent alors comme des cas particuliers. Les calculs qui suivent sont développés pour l'analyse spatio-temporelle, ils sont également valables pour les autres types d'analyse moyennant quelques adaptations.
On a décrit convenablement les contours d'intégration, il est alors possible de calculer (A.13) par la méthode des résidus. En effet, pour les pôles simples $\omega(k)$ et le contour L_ω judicieusement choisi, on obtient :

$$\overrightarrow{G} = \frac{i}{2\pi} H(t) \sum_{n,m} \int_{L_k} Z_{n,m}(k, y_0, z_0).\ddot{\overrightarrow{S}}_{n,m}(k, y, z).e^{i(k.x-\omega_{n,m}(k).t)} dk \tag{A.14}$$

avec $H(t)$ la fonction d'Heaviside. On peut calculer cette intégrale de manière asymptotique pour t devenant grand [9], en appliquant la méthode du col ([20], [10], [3]) pour les intégrales du type :

$$I(t) = -\frac{i}{2\pi} \int_c \phi(\alpha) e^{tf(\alpha)} d\alpha$$

L'onde susceptible d'apparaître pour t grand, est celle pour laquelle la phase est constante : $kx - \omega_{n,m}(k)t = constante$ et ce $\forall k$. En effet, pour un rayon x/t fixé, il existe un nombre d'onde particulier $k^*_{n,m}$ qui vérifie la stationnarité de la phase. Soit en dérivant la phase par rapport à k :

$$V = \frac{\partial \omega_{n,m}(k^*_{n,m})}{\partial k} = \frac{x}{t}$$

avec V la vitesse de transport du mode $k^*_{n,m}$ (ou encore appelée vitesse de groupe du mode $k^*_{n,m}$). La condition de Cauchy des fonctions holomorphes [20] s'écrit en séparant partie imaginaire et complexe :

[9] si cela n'est pas possible il faut alors recourir à une intégration numérique dans le plan complexe

$$\frac{\partial \omega_i^{n,m}(k_{n,m}^*)}{\partial k_i} = \frac{\partial \omega_r^{n,m}(k_{n,m}^*)}{\partial k_r} = \frac{x}{t} = V \tag{A.15}$$

$$-\frac{\partial \omega_r^{n,m}(k_{n,m}^*)}{\partial k_i} = \frac{\partial \omega_i^{n,m}(k_{n,m}^*)}{\partial k_r} = 0 \tag{A.16}$$

avec $w_{n,m} = \omega_r^{n,m} + i\omega_i^{n,m}$ et $k_{n,m}^* = k_{r*}^{n,m} + ik_{i*}^{n,m}$ obtenus pour chaque m et n par $D_\Phi(k_{n,m}^*, w_{n,m}(k_{n,m}^*)) = 0$. A la vue de ces relations on en déduit que l'on calcule la fréquence $\omega_r^{n,m}$ et le mode $k_{n,m}^*$ suivant le rayon x/t, tel que le $\omega_i^{n,m}$ associé, soit le plus important parmi les k_r possibles. La phase associée va alors dominer l'intégrale. En réécrivant le système sous une forme plus contractée, $k_{n,m}^*$ est donnée par la relation suivante :

$$\frac{\partial \omega_{n,m}(k_{n,m}^*)}{\partial k} = \frac{x}{t} \tag{A.17}$$

$$D_\Phi(k_{n,m}^*, w_{n,m}(k_{n,m}^*)) = 0 \tag{A.18}$$

qui peut-être résolu numériquement par un algorithme de Newton-Raphson. Ainsi, à condition que l'on puisse trouver L_k qui entoure le point $k_{n,m}^*$, on obtient pour un temps grand, en retenant que le premier terme du développement asymptotique :

$$\overrightarrow{G}(x,y,z,t) \underset{\substack{t\to\infty \\ x/t \text{ fixé}}}{\sim} \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n,m} \frac{Z_{n,m}(k_{n,m}^*, y_0, z_0).\ddot{\overrightarrow{S}}_{n,m}(k_{n,m}^*, y, z)}{\sqrt{\frac{d^2\omega_{n,m}}{dk^2}(k_{n,m}^*)}} . \frac{e^{i(k_{n,m}^* x - \omega_{n,m}^* . t)}}{\sqrt{t}} \tag{A.19}$$

avec $\omega_{n,m}^* = \omega_{n,m}(k_{n,m}^*)$.

Au regard de (A.19), la fonction de Green se présente au temps long, sous la forme d'un paquet d'ondes dans le plan (x,t) et suivant chaque rayon x/t, celui-ci est dominé par un mode associé à $k_{n,m}^*$ calculé par (A.15)-(A.16). On peut réécrire le paquet pour un mode particulier, en séparant la partie imaginaire et réelle :

$$e^{i(k_{n,m}^* x - \omega_{n,m}^* t)} = e^{t\sigma(k_{n,m}^*)} . e^{i(k_{r*}^{n,m} . x - \omega_r^{n,m}(k_{n,m}^*) . t)} \tag{A.20}$$

avec $\sigma(k_{n,m}^*) = (\omega_i^{n,m}(k_{n,m}^*) - k_{i*}^{n,m} . \frac{x}{t})$ où $\sigma(k_{n,m}^*)$ représente le taux de croissance du mode $k_{n,m}^*$ suivant le rayon x/t. L' étude du paquet $\overrightarrow{G}$, se réduit finalement à l'étude de **l'étalement de la perturbation** dans le plan (x,t). Suivant chaque rayon x/t, le mode $k_{n,m}^*$ associé au taux de croissance σ, est amplifié si $\sigma(k_{n,m}^*) > 0$.

Nous présentons le comportement des perturbations dans le plan (x,t) à partir de l'étude de σ sur la figure A.7 pour $n = 1$ et $m = 0$ (cas 2D).

remarque :

- On s'intéresse au mode le plus bas c'est à dire : $n = 1$ pour z et pour y, on s'intéressera à chaque mode.
- si au lieu d'un dirac $\overrightarrow{\delta}$, on prend une perturbation quelconque $\overrightarrow{f}(x,t)$ comme terme source, la réponse du système s'obtient par le produit de convolution [10] avec la

[10] définie par $(f * h)(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-u, t-v)h(x,t)dudv$

fonction de Green $\overrightarrow{f} * \overrightarrow{G}$, dans le cas où cela est calculable. On pourra consulter [50] dans le cas d'une réponse du système à une fréquence de forçage ω_f en un point particulier ($f(x,t) = \delta(x)H(t)e^{i\omega_f t}$), on y donne une estimation asymptotique.

A.3 Complément à l' étude cinématique

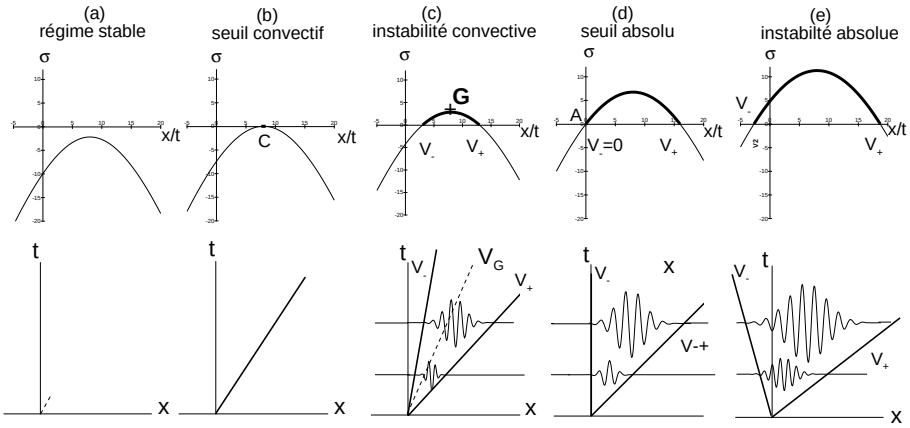


FIG. A.7 – exemple de taux temporels $\sigma(k_*)$ pour $m = 0$ (cas 2D) en haut pour $Pe = 8$ avec (a) $Ra = 35 < Ra_c$, (b) $Ra = Ra_c = 39.53$, (c) $Ra_c < Ra = 45 < Ra_A$, (d) $Ra = Ra_A = 52.135$, (e) $Ra_A < Ra = 60$ (la ligne épaisse - met en évidence les $\sigma(k_*) > 0$) avec les perturbations associées, dans le plan (x,t) en bas limité spatialement par le front lent V_- et rapide V_+

Nous détaillons ici les principales caractéristiques de l'étude cinématique du paquet d'ondes $\overrightarrow{G}$ à partir des paramètres de contrôle (Ra, Pe) et de la valeur du taux de croissance spatio-temporel σ suivant chaque rayon x/t. Pour l'illustration des différents régimes, nous avons tracé σ et la perturbation associée sur la figure A.7. On se restreint ici au mode $m = 0$ (cas 2D) et à $n = 1$ (mode le plus instable suivant z), on peut transposé les différentes conclusions pour chacun des modes $m \neq 0, n \neq 1$ (additivité des modes voir la somme sur n, m (A.19)) et on note : $k^* = k^*_{1,0}$, $\omega = \omega_{1,0}$.

A.3.1 taux maximal

Quelque soit Ra à Pe fixé, le taux de croissance σ est négatif pour $Ra < Ra_c$ et devient positif pour $Ra > Ra_c$ et ce sur une certaine largeur de bande de rayon x/t. Il possède un maximum σ_{max}, qui est obtenu pour :

$$\frac{\partial \sigma(k^*)}{\partial x/t} = 0 \Rightarrow k^*_i = 0 \tag{A.21}$$

ce maximum σ_{max} correspond donc un k^*_{max} tel que $k^*_{i,max} = 0$, l'analyse temporelle est alors pertinente dans ce cas, avec $\sigma_{max} = \omega_i(k^*_{max})$.

A.3.2 seuil convectif

Il correspond au premier point pour lequel $\sigma_{max} = 0$ (point noté C sur la figure 2.10-(b)), il est obtenu à Pe fixé pour $Ra = Ra_c(Pe)$. Le mode correspondant k_c n'est ni amplifié ni atténué, il est calculé par :

$$\sigma_{max} = 0 \Rightarrow \begin{cases} k_{ic} = 0 \text{ et } \omega_i(k_c) = 0 \\ k_{rc} = k_c \text{ et } \omega_r(k_c) = \omega_c = k_c Pe \end{cases}$$

où l'indice $_c$ désigne le seuil convectif : le paquet d'ondes se réduit à une onde monochromatique qui ne s'amplifie pas et ne croît pas mais est susceptible d'apparaître en premier lorsque l'on augmente le paramètre de contrôle (Ra) à partir de l'état de conduction.

A.3.3 régime convectif

Les perturbations croissent sous la forme d'un paquet d'ondes inégalement amplifié mais néanmoins centré autour du point G qui possède le taux maximum σ_{max} (voir figure 2.10) avec une vitesse de groupe $V_G = Pe$ appelée **la vitesse de groupe du paquet d'ondes** et une vitesse de phase $V_\varphi = Pe$. Comme ce point G a un taux de croissance maximum σ_{max}, le mode k_G est obtenu obtenu par (A.21) et l'analyse temporelle est alors pertinente.

Néanmoins pour le reste des modes $k^* \in \mathbb{C}$ et $\omega^* \in \mathbb{C}$, une analyse spatio-temporelle est nécessaire pour étudier l'ensemble du paquet d'ondes. Il est notamment limité par les ailes du front arrière V_- et avant V_+ correspondant à 1 taux de croissance nul ($\sigma = 0$). Les 2 ailes ont une vitesse négative, le paquet se développe dans le sens de l'écoulement mais il disparaît pour l'observateur lié au repère du laboratoire.
En régime convectif, lorsque le système baigne dans un bruit ambiant, il amplifie les composantes spectrales du bruit et ce de manière exponentielle suivant chaque rayon x/t. Le mode k^*_{max} correspondant à σ_{max} sera donc le plus amplifié et susceptible d'apparaître majoritairement au sein du milieu.

A.3.4 seuil absolu

Il correspond au premier taux $\sigma = 0$ pour lequel la vitesse du front arrière $V_- = 0$ c'est le point A sur la figure 2.10-(d). il est obtenu à Pe fixé pour un certain $Ra = Ra^A(Pe)$. Le mode correspondant k_A est calculé par :

$$\sigma = 0 \text{ et } \frac{\partial \omega}{\partial k}(k_A) = 0 \Rightarrow \omega_i^A = 0 \tag{A.22}$$

avec la condition nécessaire que les branches spatiales intéressantes, se pincent. L'analyse spatiale est alors pertinente. Ce mode a la particularité d'être observé tout le temps par un observateur lié au laboratoire alors que le reste du paquet s'étale et quitte le domaine.

A.3.5 régime absolu (théorie linéaire de l'instabilité absolue)

Au delà, lorsque $Ra > Ra_A$ le paquet se développe dans les 2 sens de l'écoulement (voir figure 2.10-(e)). avec des vitesses de front arrière $V_- > 0$ et avant $V_+ < 0$. Il y a donc une partie du paquet qui remonte l'écoulement principal vers l'amont.

Ainsi lorsque le système baigne dans un bruit ambiant, il amplifie toutes les composantes, et en particulier le mode k^*_{abs} correspondant au rayon $x/t = 0$ qui est amplifié avec un taux $\sigma(k^*_{abs}) = \omega_i(k^*_{abs}) > 0$. Il est obtenu quelque soit $Ra > Ra_A$ à Pe fixé par :

$$0 = \frac{\partial \omega}{\partial k}(k^*_{abs}) \tag{A.23}$$

avec la condition que les branches spatiales en ce point respectent le processus de pincement. Ce mode k^*_{abs} reste tout le temps observé dans un repère lié au laboratoire alors que le reste du paquet quitte le domaine observé, à droite et à gauche. L'observateur lié au laboratoire "voit" donc le système comme un oscillateur avec un unique nombre d'onde k_r^{abs} et une unique fréquence ω_r^{abs}.
On peut résumer l'ensemble des caractéristiques des différents régimes sous la forme d'un tableau (voir tableau A.1) .

	seuil convectif	régime convectif	seuil absolu	régime absolu
valeurs des paramètres	$\forall Pe$ $Ra_c(Pe)$	$\forall Pe, \forall Ra$ avec $Ra_A > Ra > Ra_c$	$\forall Pe$ $Ra_A(Pe)$	$\forall Pe$ $\forall Ra > Ra_A(Pe)$
domaine de définition	$k_c \in \mathbb{R}$ $\omega_c \in \mathbb{R}$	$k_G \in \mathbb{R}$ $\omega_G \in \mathbb{C}$	$k_A \in \mathbb{C}$ $\omega_A \in \mathbb{R}$	$k^*_{abs} \in \mathbb{C}$ $\omega_{abs} \in \mathbb{C}$
stationnarité de la phase	$\frac{\partial \omega_r}{\partial k_r}(k_c) = Pe$	$\frac{\partial \omega_i}{\partial k_r}(k_G) = 0$ $\frac{\partial \omega_r}{\partial k_r}(k_G) = V_G = Pe$	$\frac{\partial \omega_r}{\partial k_r}(k_A) = 0$	$\frac{\partial \omega_i}{\partial k_r}(k^*_{abs}) = 0$ $\frac{\partial \omega_r}{\partial k_r}(k^*_{abs}) = 0$
taux de croissance	$\sigma_{max} = 0$	$\sigma_{max} > 0$	$\sigma(k_A) = 0$	$\sigma(k^*_{abs}) > 0$
type d' analyse	temporelle (marginale)	temporelle	spatiale + pincement	spatio-temporelle + pincement

TAB. A.1 – résumé des différents régimes et des différentes caractéristiques associées, "pincement" désigne le processus de pincement

remarque :
Nous avons montré, lors du calcul de la fonction de Green, que les modes sélectionnés k^* sont obtenus en résolvant le système (A.17) et (A.18). Or une condition supplémentaire est que l'on puisse trouver pour chaque mode, un contour temporel et spatial qui soit convenable afin d'effectuer l'analyse spatio-temporelle.

Pour illustrer cette condition, nous avons tracé en régime absolu ($Ra > Ra_A$) , sur la figure A.8, les modes $k^*_r, k^*_i, \omega^*_r, \omega^*_i$ en fonction des rayons x/t pour lesquels les lignes épaissies correspondent à un taux de croissance $\sigma > 0$. On en extrait par exemple, deux modes particuliers k^*_1 et k^*_2 associés aux rayons $x/t = 3$ (mode se développant dans

la région aval de l'écoulement des $x > 0$) et $x/t = -3$ (mode se développant dans la région amont de l'écoulement des $x < 0$).

Sur les figures A.8-(a)-(b), nous avons tracé les contours d'intégration trouvés ainsi que les branches temporelles et spatiales associées aux modes k_2^* et k_1^*. Pour le mode k_1^* sur la figure A.8(b), les contours sont $L_{k^1} =]-\infty + ik_{i,1}^*, \infty + ik_{i,1}^*[$ et $L_{\omega^1} =]-\infty + i\omega_{i,1}^*, \infty + i\omega_{i,1}^*[$, ils décrivent bien les branches temporelles et spatiales respectivement et ils entourent bien ω_1^*, k_1^* respectivement, correspondant à la région $x > 0$. On a le même raisonnement pour le mode k_2^* dans la région $x < 0$ à partir de la figure A.8(a).

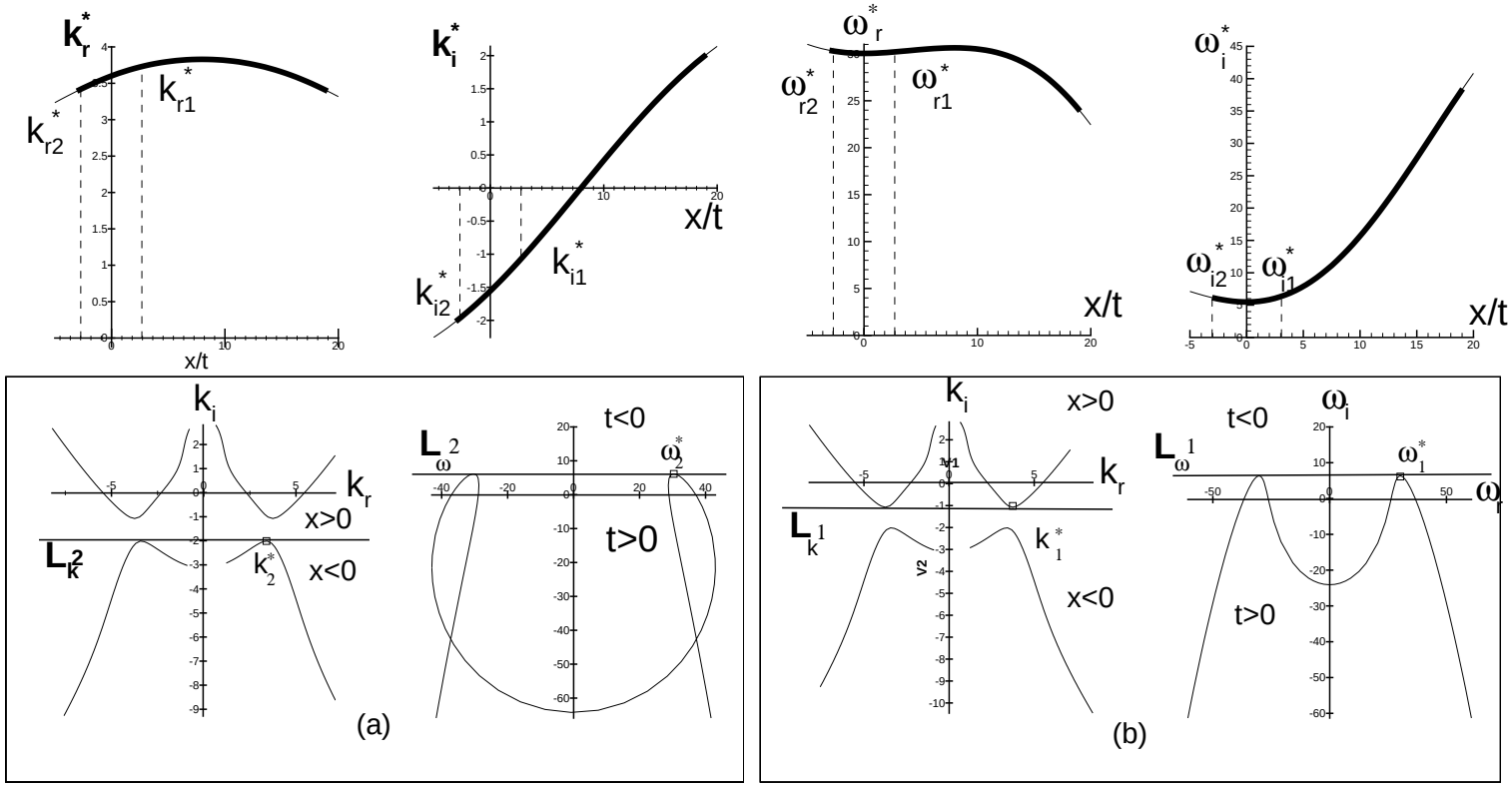


FIG. A.8 – exemple de mode k^* avec $Pe = 8$ et $Ra = 61 > Ra_A = 52.135$, pour lesquels $\sigma > 0$ (lignes épaissies), on a tracé en haut $k_r^*, k_i^*, \omega_r^*, \omega_i^*$ en fonction des rayons x/t. On a extrait deux modes particuliers k_1^* et k_2^* pour lesquels on a tracé sur les figures (b) et (a) en bas, les branches spatiales et temporelles ainsi que les contours d'intégration L_{k^1}, L_{k^2}, L_{ω^1} et L_{ω^2}

Annexe B

Obtention des équations d'amplitude

Soit le système adimensionné suivant :

$$\begin{cases} \vec{V}.\left(1+\mathcal{F}||\vec{V}||\right)+\nabla P-RaT\vec{e}_z=0 \\ \dfrac{\partial T}{\partial t}+\vec{V}\cdot\vec{\nabla}T-\Delta T=0 \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{V}=0 \end{cases} \tag{B.1}$$

avec les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} \vec{V}\cdot\vec{e}_z=0 \ \text{ et } \ T=1 \text{ quand } z=0 \\ \vec{V}\cdot\vec{e}_z=0 \ \text{ et } \ T=0 \text{ quand } z=1 \\ \vec{V}\cdot\vec{e}_y=0 \ \text{ et } \ \dfrac{\partial T}{\partial y}=0 \ \text{ quand } y=0 \\ \vec{V}\cdot\vec{e}_y=0 \ \text{ et } \ \dfrac{\partial T}{\partial y}=0 \text{ quand } y=a \\ \displaystyle\int_{y=0}^{a}\int_{z=0}^{1}u(x,y,z,t)dzdy=a.Pe \end{cases}$$

Un calcul analytique de la solution exacte non linéaire du système à Ra et Pe fixé est généralement impossible. Néanmoins l'approximation linéaire (voir chapitre deux) est rigoureusement valable au seuil convectif. Ce seuil critique délimite la frontière entre un état de base stable et instable. Juste au seuil, la solution de conduction perd sa stabilité au profit d'une structure sous la forme d'une onde monochromatique avec un nombre d'onde k_c, et une pulsation ω_c précis, mais avec un taux de croissance nulle. Au delà de ce seuil, les perturbations se développent de manière exponentielle, et l'hypothèse d'une petite perturbation n'est rapidement plus valable, les effets non linéaires jouent alors pleinement leurs rôles.

Pour rendre compte de la physique du système, on doit alors se contenter de chercher un développement de cette solution suffisamment près du seuil, sous la forme d' une équation régissant l'amplitude des structures dont les propriétés varient **lentement dans l'espace et le temps**. La classe des équations utilisées dans ce problème est l' équation de Ginzburg-Landau [4]. Cette équation modèle relativement simple par rapport aux équations d'origine, décrit la dynamique du système avec des coefficients propres au système étudié mais sa forme reste universelle : elle est la même pour différents systèmes ayant les mêmes symétries (translation, rotation ...).

Nous allons dans un premier temps calculer les équations d'amplitude linéaires du système puis dans un deuxième temps les équations d'amplitude non linéaires du système au voisinage du point de codimension 2 où les structures R.L et S.O.3D existent simultanément.

B.1 Partie linéaire de l'équation d'amplitude

Au chapitre deux, nous avons montré par une analyse de stabilité linéaire de la solution de conduction, qu'il existe 2 types de structures susceptibles de se développer simultanément au seuil convectif correspondant au point de codimension deux ($Ra_c = Ra_c^*, Re_K = Pe_K^*$) : les R.L (avec ω_c^*=0 et $k_c^* = 0$) et les S.O.3D (avec $\omega_c^* \neq 0$ et $k_c^* \neq 0$) et ce quelque soit la valeur de Pe. Par exemple la perturbation w par rapport à la composante verticale de la vitesse W s'écrit au seuil critique sous la forme :

$$w = \underbrace{A_0 e^{i(k_c^* x - \omega_c^* t)} \cos(ly) \sin(\pi z)}_{\text{rouleaux 3D}} + \underbrace{B_0 \cos(l_0 y) \sin(\pi z)}_{\text{rouleaux longitudinaux}} + C.C$$

où
- $l = \frac{m_{3D}}{a}\pi$
- $l_0 = \frac{m_{\parallel}}{a}\pi$
- $\omega_c^*, k_c^* \in \mathbb{R}$ sont évalués au seuil convectif, $\omega_c^* = Pek_c^*$

et $C.C$ représente le complexe conjugué de toute l'expression, dans la suite on omettra le complexe conjugué. Lorsque nous nous éloignons du seuil tout en restant dans son voisinage, on peut décrire la dynamique de la structure par de petites perturbations synonymes de lentes variations de l'amplitude autour de l'onde porteuse soit :

$$w = \underbrace{A_0 e^{i((k-k_c^*)x - (\omega - \omega_c^*)t)}}_{=A(x,t)} \underbrace{e^{i(k_c^* x - \omega_c^* t)} \cos(ly) \sin(\pi z)}_{=\phi_A(x,y,z,t)} + \underbrace{B_0 e^{i(k^L x - \omega^L t)}}_{=\mathrm{B(x,t)}} \underbrace{\cos(l_0 y) \sin(\pi z)}_{=\phi_B(x,y,z,t)}$$

avec $\omega, k \in \mathbb{C}$ (il y a donc amplification ou atténuation ainsi qu'une modulation) et ω^L, k^L purement imaginaire (c'est à dire que l'on autorise uniquement une amplification ou une atténuation des R.L).
Au voisinage du seuil, la perturbation s'écrit sous la forme d'un paquet d'ondes, somme de modes de Fourier $e^{i(kx-\omega t)}$. On peut alors effectuer un développement limité des modes autour de l'onde porteuse pour chacune des structures R.L et S.O.3D .

B.1.1 Partie linéaire des S.O.3D

En effet, au voisinage de (k_c^*, ω_c^*) du point critique (Ra_c^*, Re_K^*), ω et k sont reliés par la relation de dispersion $D_{[Ra,Re_K,Pe,\frac{m_{3D}\pi}{a}]}(\omega, k) = 0 \Longrightarrow \omega = \omega(k)$, on en déduit alors :

$$\omega = \omega_c^* + \left.\frac{\partial \omega}{\partial k}\right|_c (k - k_c^*) + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2}\right|_c (k - k_c)^2 + \left.\frac{\partial \omega}{\partial Ra}\right|_c (Ra - Ra_c^*) + \left.\frac{\partial \omega}{\partial Re_K}\right|_c (Re_K - Re_K^*) + ..(B.2)$$

avec l'indice $_c$ indiquant que l'on a évalué les dérivées au point critique. De plus on a gardé dans cette expression les termes de degré le plus élevé et du même ordre : $Ra - Ra_c^*$ et $Re_K - Re_K^*$ est du même ordre que $(k - k_c^*)^2$ et $\omega - \omega_c$, les termes croisés sont de degré plus bas. Comme au voisinage du seuil, $Ra - Ra_c^*$ est petit, alors $k - k_c^*$ et $\omega - \omega_c^*$ sont petits et on en déduit que :

la longueur $\frac{2\pi}{k-k_c^*}$ et le temps $\frac{2\pi}{\omega-\omega_c^*}$ caractéristiques de la modulation et de l'amplification de l'amplitude A sont respectivement, très grande devant la longueur $\frac{2\pi}{k_c^*}$ et très lente devant le temps $\frac{2\pi}{\omega_c^*}$, caractéristiques de l'onde porteuse .

En multipliant B.2 par $i\tilde{A}$ [1] et en prenant la transformée de Fourier inverse on obtient l'équation aux dérivées partielles suivantes :

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \left.\frac{\partial \omega}{\partial k}\right|_c \frac{\partial A}{\partial x} = \frac{i}{2}\left.\frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2}\right|_c \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - i\left(\left.\frac{\partial \omega}{\partial Ra}\right|_c (Ra - Ra_c^*) + \left.\frac{\partial \omega}{\partial Re_K}\right|_c (Re_K - Re_K^*)\right) A$$

on retrouve la partie linéaire de l'équation (B.21) pour A avec les coefficients (B.22).

B.1.2 Partie linéaire des R.L

De même pour les R.L, avec $k = 0$ et $\omega = 0$ au point critique Ra_c^*, Pe^*, on peut écrire :

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \left.\frac{\partial \omega}{\partial k}\right|_c \frac{\partial B}{\partial x} = \frac{i}{2}\left.\frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2}\right|_c \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} - i\left(\left.\frac{\partial \omega}{\partial Ra}\right|_c (Ra - Ra_c^*) + \left.\frac{\partial \omega}{\partial Re_K}\right|_c (Re_K - Re_K^*)\right) B$$

on retrouve la partie linéaire de l'équation (B.21) pour B avec les coefficients (B.22). Ici $(k^L)^2$ et ω^L sont de l'ordre de $Ra - Ra_c$ c'est à dire qu'ils sont très petits, là aussi l'amplitude évolue lentement en temps et en espace, les R.L étant indépendants de x et t au seuil convectif.

L'étude spatio-temporelle de la relation de dispersion (voir chapitre deux et l'annexe A) montre qu'au delà du seuil Ra_c, on sélectionne une bande de k et de ω correspondant à un taux de croissance positif. Ici la partie linéaire des équations d'amplitude n'est qu'une approximation de la relation de dispersion au voisinage du seuil. Elle reflète cette relation loin du seuil critique autant qu'une droite tangente basée sur la dérivée d'une fonction en un point, ne reflète cette même fonction au delà du point.
L'approximation linéaire au voisinage du seuil critique, reste valable tant que l'amplitude est faible or si une amplitude se développe exponentiellement, il est alors nécessaire de prendre en compte les non linéarités.

[1] $\tilde{A}$ étant la tranformé de Fourier inverse de A

B.2 Equations d'amplitude non linéaires

B.2.1 Développement multi-échelle

Pour cela, il faut pousser plus loin le développement limité de la vitesse $\vec{V}$, la température T et la pression P par rapport à l' analyse linéaire de la solution de conduction $(\vec{V}_0, T_0, P_0)$. On effectue un développement limité à l'ordre trois des grandeurs :

$$\begin{cases} \vec{V} = \begin{pmatrix} Pe \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \varepsilon \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \end{pmatrix} + \varepsilon^2 \cdot \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \\ w_2 \end{pmatrix} + \varepsilon^3 \cdot \begin{pmatrix} u_3 \\ v_3 \\ w_3 \end{pmatrix} + \dots \\ T = T_0 + \varepsilon T_1 + \varepsilon^2 T_2 + \varepsilon^3 T_3 + \dots \\ P = P_0 + \varepsilon P_1 + \varepsilon^2 P_2 + \varepsilon^3 P_3 + \dots \end{cases}$$

où $\varepsilon \ll 1$ mesure les ordres de grandeurs. Au voisinage du point Ra_c^*, Pe^* on prend :

$$Re_K = Re_K^* + \varepsilon^2 Re_K^2 + \dots \quad \text{et} \quad Ra = Ra_c^* + \varepsilon^2 Ra_2 + \dots$$

avec Re_K^2, Ra_2 de l'ordre de un en ε. La justification de cet ordre s'effectue à posteriori. En effet, si l'écart au seuil critique était de l'ordre de ε alors en développant les équations et en appliquant l'alternative de Fredholm à l'ordre deux on obtiendrait une divergence de la solution (voir (B.15)) .

Substituons maintenant, dans (B.1) les variables $x = x'$ et $t = t'$, alors toutes les grandeurs $f\ (\vec{V}, T, P)$ du système (B.1) se réécrivent $f(x, y, z, t) = f(x', y, z, t')$ et donc le système (B.1) dépend donc maintenant des variables x', y, z, t' [2].

La longueur et le temps caractéristique des variations lentes de l'amplitudes sont du même ordre de grandeur que $\sqrt{Ra - Ra_c}$ et $Ra - Ra_c$ respectivement, on introduit les variables lentes en temps τ_1, τ_2 et en espace X au coté des variables lentes $x = x'$ et $t = t'$:

$$\begin{cases} \tau_1 = \varepsilon \cdot t' \text{ et } \tau_2 = \varepsilon^2 \cdot t' \\ X = \varepsilon x' \end{cases}$$

Les amplitudes dépendent donc des variables lentes soit :

$$A(x', t') = A(X, \tau_1, \tau_2)$$
$$B(x', t') = B(X, \tau_1, \tau_2)$$

on cherche donc les solutions par exemple pour la vitesse verticale w_1, sous la forme :

$$w_1(x', y, z, t') = A(X, \tau_1, \tau_2).\phi_A(x, y, z, t) + B(X, \tau_1, \tau_2).\phi_B(x, y, z, t)$$

[2] ce sont les mêmes variables, on les introduit juste pour le moment pour faire apparaître le changement de variable par la suite et ne pas avoir à traîner les ' dans les calculs

on découple ainsi les phénomènes rapides $\phi_{A,B}$ (les ondes porteuses) et lents A, B (les amplitudes). Puis on effectue le changement de variable en temps $t' \to (t, \tau_1, \tau_2)$ et en espace $x' \to (X, x)$, les dérivées temporelles et spatiales se modifient en :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t'} = \dfrac{\partial}{\partial t} + \varepsilon \dfrac{\partial}{\partial \tau_1} + \varepsilon^2 \dfrac{\partial}{\partial \tau_2} \\ \dfrac{\partial}{\partial x'} = \dfrac{\partial}{\partial x} + \varepsilon \dfrac{\partial}{\partial X} \\ \dfrac{\partial^2}{\partial x'^2} = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \epsilon^2 \dfrac{\partial^2}{\partial X^2} + 2\epsilon \dfrac{\partial^2}{\partial X \partial x'} \end{cases} \tag{B.3}$$

La correction quadratique de Forchheimer devient par approximation, en rappelant que $Re_K = \mathcal{F} Pe$:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}||\vec{V}|| =& Re_K^* + \varepsilon u_1 \mathcal{F} + \varepsilon^2 \left(\mathcal{F} \underbrace{\mathcal{F} \frac{w_1^2 + v_1^2}{2(Re_K^*)}}_{a_1} + Re_K^2 + \mathcal{F} u_2 \right) + \dots \\ & \dots \varepsilon^3 \mathcal{F} \left(u_3 + \underbrace{\mathcal{F} \left(\frac{v_1 v_2 + w_1 w_2}{Re_K^*} \right) - \mathcal{F}^2 \left(\frac{u_1 w_1^2 + u_1 v_1^2}{2(Re_K^*)^2} \right)}_{b_{12}} \right) \end{aligned}$$

En introduisant le développement des variables en ε, les changements d'échelles, et la correction linéarisée de Forchheimer dans le système (B.1), on obtient au final un

développement limité du système (B.1) autour de la solution de conduction :

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\left(u_3\varepsilon^3 + u_2\varepsilon^2 + u_1\varepsilon\right)\left(1 + Re_K^* + \varepsilon u_1\mathcal{F} + \varepsilon^2\left(\mathcal{F}a_1 + Re_K^2 + \mathcal{F}u_2\right) + \varepsilon^3\mathcal{F}\left(u_3 + b_{12}\right)\right) + \ldots \\
\ldots + \left(Pe + PeRe_K^* + \varepsilon u_1(Re_K^* + \varepsilon^2 Re_K^2) + \varepsilon^2\left((Re_K^* + \varepsilon^2 Re_K^2)a_1 + PeRe_K^2 + (Re_K^* + \varepsilon^2 Re_K^2)u_2\right) + \varepsilon^3(Re_K^* + \varepsilon^2 Re_K^2)\left(u_3 + b_{12}\right)\right) + \ldots \\
\ldots + \frac{\partial}{\partial x}P_3\varepsilon^3 + \frac{\partial}{\partial x}P_2\varepsilon^2 + \frac{\partial}{\partial x}P_1\varepsilon + \frac{\partial}{\partial x}P_0 + \varepsilon\left(\frac{\partial}{\partial X}P_3\varepsilon^3 + \frac{\partial}{\partial X}P_2\varepsilon^2 + \frac{\partial}{\partial X}P_1\varepsilon + \frac{\partial}{\partial X}P_0\right) = 0 \\
\\
\left(v_3\varepsilon^3 + v_2\varepsilon^2 + v_1\varepsilon\right)\left(1 + Re_K^* + \varepsilon u_1\mathcal{F} + \varepsilon^2\left(\mathcal{F}a_1 + Re_K^2 + \mathcal{F}u_2\right) + \varepsilon^3\mathcal{F}\left(u_3 + b_{12}\right)\right) + \frac{d}{dy}P_3\varepsilon^3 + \frac{\partial}{\partial y}P_2\varepsilon^2 + \frac{\partial}{\partial y}P_1\varepsilon + \frac{\partial}{\partial y}P_0 = 0 \\
\\
\left(w_3\varepsilon^3 + w_2\varepsilon^2 + w_1\varepsilon\right)\left(1 + Re_K^* + \varepsilon u_1\mathcal{F} + \varepsilon^2\left(\mathcal{F}a_1 + Re_K^2 + \mathcal{F}u_2\right) + \varepsilon^3\mathcal{F}\left(u_3 + b_{12}\right)\right) + \frac{d}{dz}P_3\varepsilon^3 + \frac{\partial}{\partial z}P_2\varepsilon^2 + \frac{\partial}{\partial z}P_1\varepsilon + \frac{\partial}{\partial z}P_0 - \ldots \\
\ldots - (Ra_c^* + \varepsilon^2 Ra_2)\left(T_3\varepsilon^3 + T_2\varepsilon^2 + T_1\varepsilon + T_0\right) = 0 \\
\\
\frac{\partial}{\partial t}T_3\varepsilon^3 + \frac{\partial}{\partial t}T_2\varepsilon^2 + \frac{\partial}{\partial t}T_1\varepsilon + \frac{\partial}{\partial t}T_0 + \varepsilon\left(\frac{\partial}{\partial \tau_1}T_3\varepsilon^3 + \frac{\partial}{\partial \tau_1}T_2\varepsilon^2 + \frac{\partial}{\partial \tau_1}T_1\varepsilon + \frac{\partial}{\partial \tau_1}T_0\right) + \varepsilon^2\left(\frac{\partial}{\partial \tau_2}T_3\varepsilon^3 + \frac{\partial}{\partial \tau_2}T_2\varepsilon^2 + \frac{\partial}{\partial \tau_2}T_1\varepsilon + \frac{\partial}{\partial \tau_2}T_0\right) + \ldots \\
\ldots + \left(u_3\varepsilon^3 + u_2\varepsilon^2 + u_1\varepsilon + Pe\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}T_3\varepsilon^3 + \frac{\partial}{\partial x}T_2\varepsilon^2 + \frac{\partial}{\partial x}T_1\varepsilon + \frac{\partial}{\partial x}T_0 + \varepsilon\left(\frac{\partial}{\partial X}T_3\varepsilon^3 + \frac{\partial}{\partial X}T_2\varepsilon^2 + \frac{\partial}{\partial X}T_1\varepsilon + \frac{\partial}{\partial X}T_0\right)\right) + \ldots \\
\ldots + \left(v_3\varepsilon^3 + v_2\varepsilon^2 + v_1\varepsilon\right)\left(\frac{\partial}{\partial y}T_3\varepsilon^3 + \frac{\partial}{\partial y}T_2\varepsilon^2 + \frac{\partial}{\partial y}T_1\varepsilon + \frac{\partial}{\partial y}T_0\right) + \left(w_3\varepsilon^3 + w_2\varepsilon^2 + w_1\varepsilon\right)\left(\frac{\partial}{\partial z}T_3\varepsilon^3 + \frac{\partial}{\partial z}T_2\varepsilon^2 + \frac{\partial}{\partial z}T_1\varepsilon + \frac{\partial}{\partial z}T_0\right) - \ldots \\
\ldots - \frac{\partial^2}{\partial x^2}T_3\varepsilon^3 - \frac{\partial^2}{\partial x^2}T_2\varepsilon^2 - \frac{\partial^2}{\partial x^2}T_1\varepsilon - \frac{\partial^2}{\partial x^2}T_0 - \frac{\partial^2}{\partial y^2}T_3\varepsilon^3 - \frac{\partial^2}{\partial y^2}T_2\varepsilon^2 - \frac{\partial^2}{\partial y^2}T_1\varepsilon - \frac{\partial^2}{\partial y^2}T_0 - \frac{\partial^2}{\partial z^2}T_3\varepsilon^3 - \frac{\partial^2}{\partial z^2}T_2\varepsilon^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2}T_1\varepsilon - \frac{\partial^2}{\partial z^2}T_0 - \ldots \\
\ldots - \varepsilon^2\left(\frac{\partial^2}{\partial X^2}T_3\varepsilon^3 + \frac{\partial^2}{\partial X^2}T_2\varepsilon^2 + \frac{\partial^2}{\partial X^2}T_1\varepsilon + \frac{\partial^2}{\partial X^2}T_0\right) - 2\,\varepsilon\left(\frac{\partial^2}{\partial X\partial x}T_3\varepsilon^3 + \frac{\partial^2}{\partial X\partial x}T_2\varepsilon^2 + \frac{\partial^2}{\partial X\partial x}T_1\varepsilon + \frac{\partial^2}{\partial X\partial x}T_0\right) = 0 \\
\\
\frac{\partial}{\partial x}u_3\varepsilon^3 + \frac{\partial}{\partial x}u_2\varepsilon^2 + \frac{\partial}{\partial x}u_1\varepsilon + \frac{\partial}{\partial x}Pe + \varepsilon\left(\frac{\partial}{\partial X}u_3\varepsilon^3 + \frac{\partial}{\partial X}u_2\varepsilon^2 + \frac{\partial}{\partial X}u_1\varepsilon + \frac{\partial}{\partial X}Pe\right) + \frac{\partial}{\partial y}v_3\varepsilon^3 + \frac{\partial}{\partial y}v_2\varepsilon^2 + \frac{\partial}{\partial y}v_1\varepsilon + \ldots \\
\ldots + \frac{\partial}{\partial z}w_3\varepsilon^3 + \frac{\partial}{\partial z}w_2\varepsilon^2 + \frac{d}{dz}w_1\varepsilon = 0
\end{array}
\right\}
$$

Au final, en égalisant les termes du même ordre tout en s'arrêtant à l'ordre 3 en ε, on obtient le système itératif d'équation aux dérivées partielles linéaires suivant :

$$
\begin{cases}
K_0(u_0, v_0, w_0, T_0, P_0) = 0 \\
K(u_1, v_1, w_1, T_1, P_1) = 0 \\
K(u_2, v_2, w_2, T_2, P_2) = \overrightarrow{SM}_2 \\
K(u_3, v_3, w_3, T_3, P_3) = \overrightarrow{SM}_3
\end{cases}
$$

avec K_0 le système de la solution stationnaire (solution de conduction), K un système d'équation aux dérivées partielles linéaires et $\overrightarrow{SM}_{2,3}$ représentant les seconds membres qui contiennent les non linéarités provenant respectivement de l'ordre 1 pour $\overrightarrow{SM}_2$ et de l'ordre 1 et 2 pour $\overrightarrow{SM}_3$. On résoud itérativement ordre par ordre ce système : la solution à l'ordre 1 est la solution homogène de K, puis la solution à l'ordre 2 et 3 sont des solutions particulières de K.

B.2.2 Ordre 0

A l'ordre 0 en ε, on retrouve la solution de conduction est la solution :

$$\begin{cases} \vec{V_0} = \begin{pmatrix} u_0 = Pe \\ v_0 = 0 \\ w_0 = 0 \end{pmatrix} \\ T_0 = 1 - z \\ P_0 = Ra_c^* \left(z - 1/2\, z^2\right) - Pe\,(1 + Re_K^*)\, x + cste \end{cases}$$

avec $z \in [0, 1]$, x décrit la longueur du domaine.

B.2.3 Ordre 1

B.2.3.1 Equations

En remplaçant les termes d'ordre 0 par leur valeur et les injectant dans le système linéarisé on retrouve les équations linéaires, à l'ordre 1 :

$$\begin{cases} K^1(u_1, v_1, w_1, T_1, P_1) = u_1\,(1 + 2Re_K^*) + \dfrac{\partial}{\partial x} P_1 & = 0 \\ K^2(u_1, v_1, w_1, T_1, P_1) = v_1\,(1 + Re_K^*) + \dfrac{\partial}{\partial y} P_1 & = 0 \\ K^3(u_1, v_1, w_1, T_1, P_1) = w_1\,(1 + Re_K^*) - Ra_c^*\, T_1 + \dfrac{\partial}{\partial z} P_1 & = 0 \\ K^4(u_1, v_1, w_1, T_1, P_1) = -w_1 - \dfrac{\partial^2}{\partial z^2} T_1 + \dfrac{\partial}{\partial t} T_1 - \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} T_1 - \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} T_1 + Pe \dfrac{\partial}{\partial x} T_1 & = 0 \\ K^5(u_1, v_1, w_1, T_1, P_1) = \dfrac{\partial}{\partial z} w_1 + \dfrac{\partial}{\partial y} v_1 + \dfrac{\partial}{\partial x} u_1 & = 0 \end{cases} \tag{B.4}$$

Il s'agit donc de résoudre ce système d' équations aux dérivées partielles linéaires sans second membre : on cherche donc la solution homogène de K. On peut réécrire K sous forme matricielle :

$$\underbrace{(I.\partial_t + L)}_{=K}.\vec{G_1} = 0 \tag{B.5}$$

avec

$$I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \vec{G_1} = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ T_1 \\ P_1 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} (1 + 2\,\mathcal{F} Re_K^*) & 0 & 0 & 0 & \partial_x \\ 0 & (1 + Re_K^*) & 0 & 0 & \partial_y \\ 0 & 0 & (1 + Re_K^*) & -Ra_c^* & \partial_z \\ 0 & 0 & -1 & Pe\partial_x - \Delta & 0 \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

avec $\partial_* = \frac{\partial}{\partial *}$, et $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$. On introduit l'espace des solutions [3] E où $u_1 \in E$ et $\vec{G_1} \in E^5$, K est alors un opérateur aux dérivées partielles linéaires de $E^5 \to E^5$

B.2.3.2 Solutions

La solution $\overrightarrow{G}_1$ du système (B.4) a déjà été obtenue et discutée à partir du système (2.2) du chapitre deux, mais ici on restreint au point de codimension deux. On a par exemple :

$$w_1 = A(X, \tau_1, \tau_2) e^{i(k_c^* x - \omega_c^* t)} \cos(ly) \sin(\pi z) + \frac{B(X, \tau_1, \tau_2)}{2} \cos(l_0 y) \sin(\pi z)$$

c'est à dire que les solutions proposées sont composées de produits et sommes de terme en :

$$\left\{ e^{i.n_1.(k_c^* x - \omega_c^* t)}, cos/sin(n_2 l y), cos/sin(n_3 l_0 y), cos/sin(n_4 \pi z) \right\} \in S \tag{B.6}$$

$$\text{avec } n_1, n_2, n_3, n_4 \in [-1, 1] \text{ et entier.} \tag{B.7}$$

avec le sous-espace $S \subset E$ des fonctions périodiques [4] avec $K : S^5 \to S^5$. La résolution du système (B.5) se résume à résoudre un problème aux valeurs propres, en effet en remplaçant ∂_t par $-i\omega_c^*$ on obtient :

$$i\omega_c^* . \overrightarrow{G}_1 = L . \overrightarrow{G}_1$$

où $i\omega_c^*$ et $\overrightarrow{G}_1 \in S^5$ sont appelés respectivement les valeurs propres et les fonctions propres du système. Les fonctions propres sont donc de la forme :

$$\overrightarrow{G}_1 = \underbrace{\begin{bmatrix} u_{1,1}\, e^{i(k_c^* x - \omega_c^* t)} \cos(\pi z) \cos(ly) \\ v_{1,1}\, e^{i(k_c^* x - \omega_c^* t)} \cos(\pi z) \sin(ly) \\ w_{1,1}\, e^{i(k_c^* x - \omega_c^* t)} \sin(\pi z) \cos(ly) \\ T_{1,1}\, e^{i(k_c^* x - \omega_c^* t)} \sin(\pi z) \cos(ly) \\ P_{1,1}\, e^{i(k_c^* x - \omega_c^* t)} \cos(\pi z) \cos(ly) \end{bmatrix}}_{\overrightarrow{G}_1^{3D}} + \underbrace{\begin{bmatrix} u_{1,2} \cos(\pi z) \cos(l_0\, y) \\ v_{1,2} \cos(\pi z) \sin(l_0\, y) \\ w_{1,2} \sin(\pi z) \cos(l_0\, y) \\ T_{1,2} \sin(\pi z) \cos(l_0\, y) \\ P_{1,2} \cos(\pi z) \cos(l_0\, y) \end{bmatrix}}_{=\overrightarrow{G}_1^{\parallel}} + C.C$$

[3] $E = \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ est l'espace des fonctions continues et une infinité de fois continûment différentiables d'un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}$, avec $(x, y, z, t) \in \Omega =]-\infty, \infty[.[0, a].[0, 1].[0, T]$

[4] $S = \mathcal{C}^\infty(\Omega_S, \mathbb{R})$ avec le compact $\Omega_S = [-\frac{\pi}{k_c^*}, \frac{\pi}{k_c^*}].[0, a].[0, 1].[0, 2\frac{\pi}{\omega_c^*}]$. Par périodicité, les termes (B.6) sont égaux (voir nuls) sur bord du domaine Ω_S

Résoudre $K.\overrightarrow{G}_1 = 0$ revient à résoudre séparément les systèmes $K.\overrightarrow{G}_1^{3D} = 0$ et $K.\overrightarrow{G}_1^{\parallel} = 0$. En résolvant ces systèmes équivalents pour les amplitudes, on obtient :

$$\begin{cases} u_{1,1} = \dfrac{ik_c^* A(X,\tau_1,\tau_2)\pi\ (1+Re_K^*)}{\left(2\,Re_K^*+1\right)l^2+(k_c^*)^2\left(1+Re_K^*\right)} \\ v_{1,1} = -\dfrac{A(X,\tau_1,\tau_2)\pi\, l\,(2\,Re_K^*+1)}{\left(2\,Re_K^*+1\right)l^2+(k_c^*)^2\left(1+Re_K^*\right)} \\ w_{1,1} = A(X,\tau_1,\tau_2) \\ T_{1,1} = \dfrac{A(X,\tau_1,\tau_2)}{\pi^2+l^2+(k_c^*)^2} \\ P_{1,1} = -\dfrac{A(X,\tau_1,\tau_2)\pi\ (1+Re_K^*)\,(2\,Re_K^*+1)}{\left(2\,Re_K^*+1\right)l^2+(k_c^*)^2\left(1+Re_K^*\right)} \end{cases}, \begin{cases} u_{1,2} = 0 \\ v_{1,2} = -\dfrac{B(X,\tau_1,\tau_2)\pi}{2l_0} \\ w_{1,2} = \dfrac{B(X,\tau_1,\tau_2)}{2} \\ T_{1,2} = \dfrac{B(X,\tau_1,\tau_2)}{2\left(\pi^2+{l_0}^2\right)} \\ P_{1,2} = -\dfrac{B(X,\tau_1,\tau_2)\pi\ (1+\mathcal{F}Pe^*)}{2{l_0}^2} \end{cases}$$

On peut donc réintroduire ces termes dans le système et extraire l'équation l'ordre 2 en ε.

B.2.4 Ordre 2

B.2.4.1 Equations

En remplaçant les termes d'ordre 0 et 1 en ε par leurs valeurs et les injectant dans l'équation on obtient à l'ordre 2 en ε le même système qu'à l'ordre 1 mais avec un second membre exprimé à partir des termes d'ordre 1 et en ε :

$$\begin{cases} K^1(u_2,v_2,w_2,T_2,P_2) = -\left(\mathcal{F}\,(u_1)^2 + Re_K^* a_1\right) - \dfrac{\partial}{\partial X}P_1 - Re_K^2 Pe \\ K^2(u_2,v_2,w_2,T_2,P_2) = -\left(v_1\mathcal{F}u_1\right) \\ K^3(u_2,v_2,w_2,T_2,P_2) = -\left(w_1\mathcal{F}u_1\right) \\ K^4(u_2,v_2,w_2,T_2,P_2) = 2\,\dfrac{\partial^2}{\partial X\partial x}T_1 - \dfrac{\partial}{\partial \tau_1}T_1 - w_1\dfrac{\partial}{\partial z}T_1 - Pe\,\dfrac{\partial}{\partial X}T_1 - u_1\dfrac{\partial}{\partial x}T_1 - v_1\dfrac{\partial}{\partial y}T_1 \\ K^5(u_2,v_2,w_2,T_2,P_2) = -\dfrac{\partial}{\partial X}u_1 \end{cases}$$

On néglige les termes en $\mathcal{F} \ll 1$ on obtient le systéme suivant :

$$\begin{cases} K^1(u_2,v_2,w_2,T_2,P_2) = -\dfrac{\partial}{\partial X}P_1 - Re_K^2 Pe \\ K^2(u_2,v_2,w_2,T_2,P_2) = 0 \\ K^3(u_2,v_2,w_2,T_2,P_2) = 0 \\ K^4(u_2,v_2,w_2,T_2,P_2) = -\vec{V}_1\cdot\nabla T_1 + 2\,\dfrac{\partial^2}{\partial X\partial x}T_1 - \dfrac{\partial}{\partial \tau_1}T_1 - Pe\,\dfrac{\partial}{\partial X}T_1 \\ K^5(u_2,v_2,w_2,T_2,P_2) = -\dfrac{\partial}{\partial X}u_1 \end{cases} \tag{B.8}$$

où $\vec{V_1} = (u_1, v_1, w_1)^T$. Le second membre agit comme un terme source pour l'opérateur K par rapport à la solution homogène.

B.2.4.2 Solutions à l'orde 2

Si on note le second membre sous la forme d'un vecteur $\overrightarrow{SM}_2$ ainsi que la solution $\overrightarrow{G}_2 = [u_2, v_2, w_2, T_2, P_2]^T$ (où ^{T} est la transposée), le système (B.8) s'écrit sous la forme :

$$K.\overrightarrow{G}_2 = \overrightarrow{SM}_2$$

il suffit de calculer explicitement $\overrightarrow{SM}_2$ et de chercher les solutions particulières du système. Celles-ci étant très longues, on ne les a pas écrites. Néanmoins $\overrightarrow{G}_2$ comme $\overrightarrow{SM}_2$, sont composées de produits et de sommes de terme en :

$$\left\{e^{i.n_1.(k_c^* x - \omega_c^* t)}, cos/sin(n_2 ly), cos/sin(n_3 l_0 y), cos/sin(n_4 \pi z), Re_K^2\right\} \in S \tag{B.9}$$

$$n_1, n_2, n_3, n_4 \in [-2, 2] \text{ et entier} \tag{B.10}$$

et les amplitudes dépendent de $A, \frac{\partial A}{\partial X}, \frac{\partial B}{\partial \tau_1} \ldots$, en n'oubliant pas les $C.C$. Les solutions du type (B.9) contiennent les fonctions du type (B.6) mais également leurs premières harmoniques, elles décrivent donc des structures plus petites.

B.2.4.3 Alternative de Fredholm

Or dans le système (B.8), il faut imposer une condition au second membre : l'alternative de Fredholm. Pour cela introduisons le produit scalaire [5] pour deux fonctions $\vec{f}, \vec{g} \in L^2(S^5)$:

$$< \vec{f}, \vec{g} >= \int_{\Omega_S} \vec{f}.\vec{g} = \int_0^{2\frac{\pi}{\omega_c}} \int_{-\frac{\pi}{kx}}^{\frac{\pi}{kx}} \int_0^1 \int_0^a \vec{f}(x, y, z, t) .\overline{\vec{g}(x, y, z, t)} dy\, dz\, dx\, dt$$

avec $\overline{*}$, représente le complexe conjugué de $*$
On définie K^*, l'adjoint [6] de K à partir du produit scalaire, par :

$$\forall(\vec{f}, \vec{g}) \in H^2(S^5) :< K.\vec{f}, \vec{g} >=< \vec{f}, K^*.\vec{g} > \tag{B.11}$$

avec $H^2(S^5) \subset L^2(S^5)$. On remarque que les fonctions composées de sommes et de produits du type (B.6), (B.9) sont dans $H^2(S)$, et donc $\overrightarrow{SM}_2 \in H^2(S^5)$ et $\overrightarrow{G}_2 \in H^2(S^5)$.

---

[5] définit sur l'espace de Hilbert $L^2(S^5) = \left\{\vec{f} \in S^5 / \parallel \vec{f} \parallel_2 =< \vec{f}, \vec{f} >^{1/2} < \infty\right\}$ et quotienté par les fonctions nulles presque partout , les fonctions intégrées ont donc du sens.

[6] définie sur l'espace $H^2(S^5)$ qui est l'espace de Sobolev définie par $H^m(S^5) = \left\{v \in L^2(S^5) \text{ et } |\alpha| < m, D^\alpha v \in L^2(S^5)\right\}$ avec α le multi-indice, on prend ici $m = 2$ et donc D^α désigne toutes combinaisons des dérivées $\partial_x, \partial_y, \partial_z$ mais de degré 2 au maximum, en effet l'opérateur K contient des dérivées premières et secondes qui doivent avoir du sens lorsqu'on les intègre par le produit scalaire et dans ce cas $K : H^2(S^5) \to H^2(S^5)$

On en déduit $\forall \vec{h} \in \ker K^* = \{\vec{v} \in H^2(S^5) \backslash K^*.\vec{v} = 0\}$, **l'alternative de Fredholm ou théorème de Fredholm** [84] par projection de $\overrightarrow{SM}_2$ sur $\vec{K}$:

$$< \overrightarrow{SM}_2, \vec{h} >=< K.\overrightarrow{G}_2, \vec{h} >=< \overrightarrow{G}_2, K^*\vec{h} >= 0 \tag{B.12}$$

c' est à dire que le second membre $\overrightarrow{SM}_2$ est orthogonal à $\ker K^*$. On peut le comprendre comme ceci : quand on calcule explicitement $\overrightarrow{SM}_2$, ce dernier comporte des termes composés du type (B.9) qui jouent leur rôle de terme source et qui vont "exciter" le système à certaines fréquences. Or certains de ces termes sont composés de fonctions du type (B.6) c'est à dire des termes de la solution homogène $\overrightarrow{G}_1^{3D,\|}$. Dans ce cas, ces derniers vont entrer en résonance avec $\overrightarrow{G}_1^{3D,\|}$ et la solution va diverger tendant vers l'inifini , il est donc nécessaire de les annuler.

On peut calculer explicitement l'adjoint à partir de (B.11). En effet en sachant que la perturbation s'écrit sous la forme de fonction à variables séparées x, y, z, t (voir (B.9), on peut effectuer des intégrations par partie (I.P.P) successives des termes ce qui transforme les dérivées [7] $\partial_{*^i} \to (-1)^i \partial_{*^i}$, on en déduit donc :

$$K^* = \begin{bmatrix} (1+2Re_K^*) & 0 & 0 & 0 & -\partial_x \\ 0 & (1+Re_K^*) & 0 & 0 & -\partial_y \\ 0 & 0 & (1+Re_K^*) & -1 & -\partial_z \\ 0 & 0 & -Ra_c^* & -\partial_t - Pe\partial_x - \Delta & 0 \\ -\partial_x & -\partial_y & -\partial_z & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

or $\ker K^*$ se déduit directement de $\ker K \equiv \overrightarrow{G}_1^{3D,\|}$ en suivant la même démarche (même relation de dispersion...).

<u>projection sur les S.O.3D</u>

On obtient $\overrightarrow{h}^{3D} \in \ker K^*$ avec :

$$\vec{h}_{3D} = \left\{ \lambda. \begin{bmatrix} e^{i(k_c^* x - \omega_c^* t)} \cos(\pi z) \cos(ly) + C.C \\ \frac{il\left(2\,Re_K^*+1\right)}{k_c^*\left(1+Re_K^*\right)} e^{i(k_c^* x - \omega_c^* t)} \cos(\pi z) \sin(ly) + C.C \\ -\frac{i\left(k_c^{*2}(1+Re_K^*)+2\,l^2(1+Re_K^*)\right)}{\pi\, k_c^*\left(1+Re_K^*\right)} e^{i(k_c^* x - \omega_c^* t)} \sin(\pi z) \cos(ly) + C.C \\ -\frac{i\left(k_c^{*2}(1+Re_K^*)+(l^2+\pi^2)(1+2Re_K^*)\right)}{\pi\, k_c^*} e^{i(k_c^* x - \omega_c^* t)} \sin(\pi z) \cos(ly) + C.C \\ -\frac{i\left(2\,Re_K^*+1\right)}{k_c^*} e^{i(k_c^* x - \omega_c^* t)} \cos(\pi z) \cos(ly) + C.C \end{bmatrix} \right\}$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}$. La condition d'orthogonalité nous fournit :

$$< \overrightarrow{SM}_2, \vec{h}_{3D} >= 0 \Rightarrow \frac{\partial A}{\partial \tau_1} = -Pe\frac{\partial A}{\partial X} \tag{B.13}$$

avec $A = A(X, \tau_1, \tau_2)$. La variable en temps τ_1 et la variable en espace X sont du même

[7] les termes d'ordre 1 et 2 s'égalisent sur Ω_s et donc le reste de l'I.P.P s'annule

ordre de grandeur, le temps τ_1 est le temps d'advection. L' équation (B.13) permet de décrire le phénomène d' advection de l'amplitude à la vitesse Pe.

projection sur les R.L

De la même manière on trouve pour $\overrightarrow{h}_{\parallel} \in \ker K^*$:

$$\vec{h}_{\parallel} = \left\{ \lambda . \begin{bmatrix} 0 \\ \cos(\pi\, z)\sin(l_0 y) + C.C \\ -\frac{l_0}{\pi}\sin(\pi\, z)\cos(l_0 y) + C.C \\ -\frac{(\pi^2+l_0^2)(1+Re_K^*)}{\pi l_0}\sin(\pi\, z)\cos(l_0 y) + C.C \\ -\frac{(1+Re_K^*)}{l_0}\cos(\pi\, z)\cos(l_0 y) + C.C \end{bmatrix} \right\}$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}$. La condition d'orthogonalité nous fournit :

$$< \overrightarrow{SM}_2, \vec{h}_{\parallel} >= 0 \Rightarrow \frac{\partial B}{\partial \tau_1} = -Pe\frac{\partial B}{\partial X} \tag{B.14}$$

avec $B = B(X, \tau_1, \tau_2)$.

remarque : Si on avait choisi $Ra = Ra_c^* + \varepsilon Ra_2$ ou $Re_K = Re_K^* + \varepsilon Re_K^2$ c'est à dire du même ordre que la perturbation de vitesse $\vec{V} = \vec{V}_0 + \varepsilon\vec{V}_1 + \ldots$ alors en appliquant l'alternative de Fredholm on trouve une divergence dans les 2 cas, par exemple dans le cas des S.O.3D on trouve :

$$\frac{\partial A}{\partial \tau_1} = -Pe\frac{\partial A}{\partial X} + \frac{A\sqrt{\pi^2}}{\sqrt{\pi^2}+\pi} \tag{B.15}$$

avec l'approximation $\mathcal{F} \ll 1$.

B.2.5 Ordre 3

B.2.5.1 Equations

Connaissant les termes d'ordre $0, 1, 2$ en les injectant dans l'équation à l'ordre 3 en ε, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} K^1(u_3, v_3, w_3, T_3, P_3) & = -2\,\mathcal{F}u_1u_2 - 2Re_K^2 u_1 - a_1\mathcal{F}u_1 - Re_K^*\, b_{12} - \dfrac{\partial}{\partial X}P_2 \\ K^2(u_3, v_3, w_3, T_3, P_3) & = -v_1\mathcal{F}u_2 - v_2\mathcal{F}u_1 + \left(-Re_K^2 - a_1\mathcal{F}\right)v_1 \\ K^3(u_3, v_3, w_3, T_3, P_3) & = -w_1\mathcal{F}u_2 - w_2\mathcal{F}u_1 + \left(-Re_K^2 - \mathcal{F}a_1\right)w_1 + Ra_2\, T_1 \\ K^4(u_3, v_3, w_3, T_3, P_3) & = -\dfrac{\partial}{\partial \tau_1}T_2 - \dfrac{\partial}{\partial \tau_2}T_1 + \dfrac{\partial^2}{\partial X^2}T_1 + 2\,\dfrac{\partial^2}{\partial X \partial x}T_2 - Pe\,\dfrac{\partial}{\partial X}T_2 \ldots \\ & \quad \ldots - \vec{V}_1.\nabla T_2 - \vec{V}_2\nabla T_1 - u_1\dfrac{\partial}{\partial X}T_1 \\ K^5(u_3, v_3, w_3, T_3, P_3) & = -\dfrac{\partial}{\partial X}u_2 \end{cases}$$

En négligeant les termes en $\mathcal{F} \ll 1$ et $Re_K^* \ll 1$, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} K^1(u_3, v_3, w_3, T_3, P_3) & = -\,2Re_K^2\, u_1 - \dfrac{\partial}{\partial X} P_2 \\ K^2(u_3, v_3, w_3, T_3, P_3) & = -\,Re_K^2\, v_1 \\ K^3(u_3, v_3, w_3, T_3, P_3) & = -\,Re_K^2\, w_1 + Ra_2\, T_1 \\ K^4(u_3, v_3, w_3, T_3, P_3) & = -\,\vec{V}_1 \cdot \nabla T_2 - \vec{V}_2 \cdot \nabla T_1 - \dfrac{\partial}{\partial \tau_1} T_2 - \dfrac{\partial}{\partial \tau_2} T_1 + \dfrac{\partial^2}{\partial X^2} T_1 + \ldots \\ & \quad \ldots + 2\,\dfrac{\partial^2}{\partial X \partial x} T_2 - Pe\,\dfrac{\partial}{\partial X} T_2 - u_1 \dfrac{\partial}{\partial X} T_1 \\ K^5(u_3, v_3, w_3, T_3, P_3) & = -\,\dfrac{\partial}{\partial X} u_2 \end{cases} \tag{B.16}$$

on a gardé le caractère principal du terme non linéaire de transport à savoir le mélange des composantes des différentes tailles de structures via le terme en $-\vec{V}_1 \cdot \nabla T_2 - \vec{V}_2 \cdot \nabla T_1$. On a donc le système d'équations suivant :

$$K.\overrightarrow{G}_3 = \overrightarrow{SM}_2$$

avec $\overrightarrow{SM}_3$ le second membre du système, $\overrightarrow{G}_3$ sa solution avec $\overrightarrow{G}_3$ et $\overrightarrow{SM}_3$, sont composés de produits et de sommes de terme en :

$$\left\{ e^{i.n_1.(k_c^* x - \omega_c^* t)}, cos/sin(n_2 l y), cos/sin(n_3 l_0 y), cos/sin(n_4 \pi z), -Re_K^2 \right\} \in S \tag{B.17}$$

avec $n_1, n_2, n_3, n_4 \in [-3, 3]$ et entier. Or on ne va pas chercher à résoudre ce système mais on va directement appliquer l'alternative de Fredolhm.

B.2.5.2 Equations de Ginzburg-Landau

On utilise l'alternative de Fredolhm décrite précédemment, on obtient par projection, respectivement $< \overrightarrow{SM}_3, \vec{h}_{3D} >= 0$ et $< \overrightarrow{SM}_3, \vec{h}_{\parallel} >= 0$, les équations de Ginzburg-Landau suivantes :

$$\begin{cases} \gamma_1 \overline{A} A^2 + \gamma_2 \overline{B} B A \; + \dfrac{\partial}{\partial \tau_2} A - \nu_A \dfrac{\partial^2}{\partial X^2} A + A\left(\gamma_3, Ra_2 + Re_K^2 \gamma_4\right) = 0 \\ \lambda_1\, \overline{B} B^2 + \lambda_2\, \overline{A} A B + \dfrac{\partial}{\partial \tau_2} B - \nu_B\, \dfrac{\partial^2}{\partial X^2} B + B\left(\lambda_3 Ra_2 + Re_K^2 \lambda_4\right) = 0 \end{cases} \tag{B.18}$$

La variable en temps τ_2 et du même ordre de grandeur que la variable en espace X^2, le temps τ_2 est le temps de diffusion. L' équation (B.18) permet de décrire le phénomène de diffusion de l'amplitude.
Les coefficients $\lambda_{1,2,3,4}, \gamma_{1,2,3,4}$ sont réels mais très "lourds" surtout pour les termes non linéaires γ_2, λ_2, nous n'avons donc pas mis leurs valeurs analytiques. Comme **les coefficients** $\lambda_{1,2,3,4}, \gamma_{1,2,3,4}$**, varient en fonction de** $\omega_c^*, k_c^*, \mathcal{F}Pe^*, l, l_0, Ra_c^*$ et qu'eux mêmes varient en fonction du rapport de forme a (voir chapitre deux), nous avons tracé

sur figure (B.22), les coefficients en fonction de $a = 6.42 \ldots 7.42$. Néanmoins moyennant certaines approximations on donne la valeur des coefficients (B.22).
Comme $B = B(X, \tau_1, \tau_2)$ et $A = A(X, \tau_1, \tau_2)$ dépendent des variables lentes X, τ_1, τ_2 et pas des variables rapides x et t, on peut revenir aux variables x', t' par le changement suivant en faisant le raisonnement inverse de (B.3) :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial X} = \dfrac{1}{\varepsilon}\dfrac{\partial}{\partial x'} \quad \dfrac{\partial^2}{\partial X^2} = \dfrac{1}{\varepsilon^2}\dfrac{\partial^2}{\partial x'^2} \\ \dfrac{\partial}{\partial \tau_2} = \dfrac{1}{\varepsilon^2}\dfrac{\partial}{\partial t'} - \dfrac{1}{\varepsilon}\dfrac{\partial}{\partial \tau_1} = \dfrac{1}{\varepsilon^2}\dfrac{\partial}{\partial t'} + Pe\dfrac{1}{\varepsilon}\dfrac{\partial}{\partial X} \end{cases} \tag{B.19}$$

en utilisant pour A et B : $\frac{\partial}{\partial \tau_1} = -Pe\frac{\partial}{\partial X}$ d'après (B.13) ,(B.14). La composante verticale W de la vitesse non perturbée s'écrit sous la forme $W = 0 + \varepsilon.w_1 + \varepsilon^2 \ldots$ avec $w_1 = A\phi_A + B\phi_B$. Si on effectue le changement de variable suivant :

$$\begin{cases} Ra_2 = \dfrac{Ra - Ra_c^*}{\varepsilon^2}, Re_K^2 = \dfrac{Re - Re_K^*}{\varepsilon^2} \\ A \to \dfrac{A}{\varepsilon}, B \to \dfrac{B}{\varepsilon} \end{cases} \tag{B.20}$$

en injectant les transformations (B.20), (B.19) et en revenant aux grandeurs d'espace et de temps x', t' dans (B.18) on obtient en simplifiant par ε^3, les équations de Ginzburg-Landau écrites pour (x', t'). C'est à dire, en substituant $x' = x$ et $t' = t$ pour alléger l'écriture :

$$\begin{aligned} &\gamma_1 \mid A \mid^2 A + \gamma_2 \mid B \mid^2 A + \frac{\partial A}{\partial t} + Pe\frac{\partial A}{\partial x} - \nu_A \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \ldots \\ &\qquad \ldots + A\left(\gamma_3(Ra - Ra_c^*) + (Re_K - Re_K^*)\gamma_4\right) = 0 \\ &\lambda_1 \mid B \mid^2 B + \lambda_2 \mid A \mid^2 B + \frac{\partial B}{\partial t} + Pe\frac{\partial B}{\partial x} - \nu_B \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} \ldots \\ &\qquad \ldots + B\left(\lambda_3(Ra - Ra_c^*) + (Re_K - Re_K^*)\lambda_4\right) = 0 \end{aligned} \tag{B.21}$$

On obtient des grandeurs du type, par exemple pour la vitesse verticale : $W = 0 + A.e^{ik_c^*(x - Pe.t)}$. L'obtention des équations de Ginzburg-Landau est assez algorithmique à partir du moment où nous avons choisit les variables lentes et les ordres de grandeurs. Les calculs se prêtent donc bien à un calcul symbolique (calcul des termes et des équations d'ordre 0,1,2,3 en ε, projection sur les ker, intégration, fonctions propres ...).

remarque : Ces équations ont été écrites pour Pe de l'ordre de 0 en ε, c'est à dire lorsque le temps de diffusion et le temps d'advection ne sont pas du même ordre de grandeur. Si Pe est plus petit, de l'ordre de ε il faut poser $Pe = \varepsilon\overline{Pe}$. Seul le temps τ_2 est pris en compte, le temps τ_1 devient inutile (le temps d'advection devient du même ordre que le temps de diffusion) et nous retrouvons la même équation B.21.

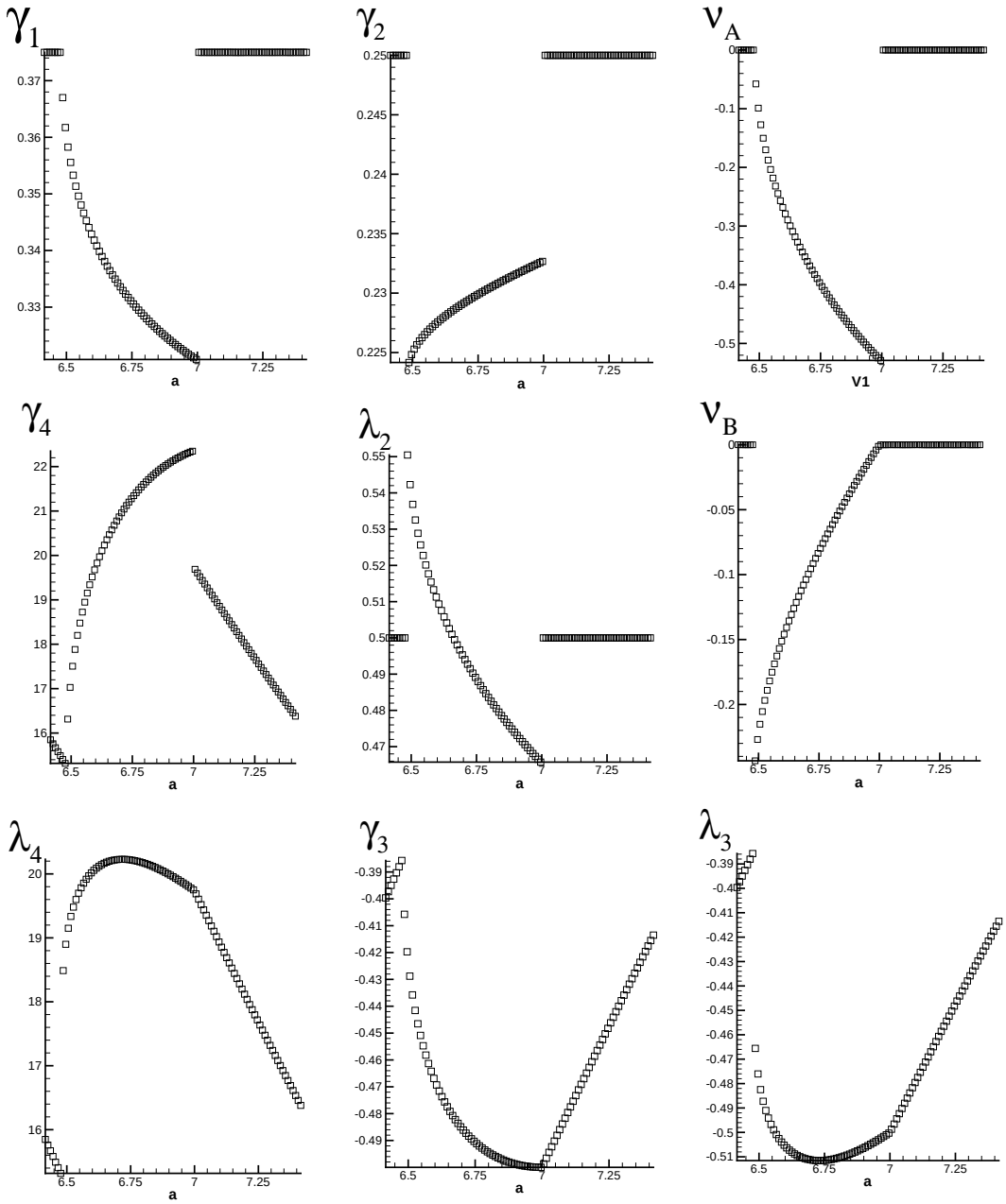


FIG. B.1 – coefficient de l'équation de Ginzburg Landau en fonction du rapport de forme a. Notons que $\lambda_1 = \frac{1}{8}$.

Coefficients analytiques des équations de Ginzburg-Landau, avec l'approximation suivante :

$$\mathcal{F} \ll 1, Re_K^* \ll 1, Ra_c^* = 4\pi^2, k_c^* = \sqrt{-l^2+\pi^2} \approx 1.562374753,$$

on obtient les coefficients suivant :

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= 1/4\,\frac{\left(40\,\pi^6 l^4 - 8\,\pi^2 l^8 + 72\,\pi^{10} + 16\,\pi^4 l^6 - 48\,\pi^8 l^2\right)}{\pi^2\left(12\,\pi^4 - 12\,l^2\pi^2 + 4\,l^4\right)\left(4\,\pi^4 + 4\,l^2\pi^2 + 4\,l^4\right)} \\
\gamma_2 &= \frac{B^2 A\pi^2}{8}\,\frac{\left(3\,{l_0}^{12} + \left(45\,\pi^2 - 9\,l^2\right){l_0}^{10} + \left(310\,\pi^4 + 65\,l^2\pi^2 - 12\,l^4\right){l_0}^8 + \left(506\,\pi^4 l^2 - 60\,\pi^2 l^4 + 1122\,\pi^6\right){l_0}^6 + \left(-52\,\pi^4 l^4 + 2055\,\pi^8 + 630\,\pi^6 l^2\right){l_0}^4 + \left(945\,\pi^{10} - 4\,\pi^6 l^4 + 495\,\pi^8 l^2\right){l_0}^2 + 105\,\pi^{10} l^2\right)}{{l_0}^2\left({l_0}^2+\pi^2\right)^2\left({l_0}^4 + 4\,{l_0}^3 l + \left(6\,\pi^2 + 4\,l^2\right){l_0}^2 + 12\,\pi^2 l_0\,l + 21\,\pi^4\right)\left({l_0}^4 - 4\,{l_0}^3 l + \left(6\,\pi^2 + 4\,l^2\right){l_0}^2 - 12\,\pi^2 l_0\,l + 21\,\pi^4\right)} \\
\nu_A &= 2\,\frac{\left(-l^2+\pi^2\right)}{\pi^2}, \gamma_3 = -1/2, \gamma_4 = 1/2\left(6\,\pi^2 - 2\,l^2\right) \\
\lambda_2 &= 1/16\,\frac{\left(1764\,\pi^{10} + 294\,\pi^8 l^2 - 6\,{l_0}^8 l^2 - 8\,{l_0}^6 l^4 + 2\,{l_0}^{10} + 176\,{l_0}^6\pi^4 + 24\,{l_0}^8\pi^2 + 708\,{l_0}^4\pi^6 + 1806\,{l_0}^2\pi^8 - 24\,{l_0}^2 l^4\pi^4 + 384\,{l_0}^4 l^2\pi^4 - 52\,{l_0}^6 l^2\pi^2 + 1172\,{l_0}^2\pi^6 l^2 - 96\,{l_0}^4\pi^2 l^4\right)}{\pi^2\left(21\,\pi^4 + 6\,\pi^2{l_0}^2 + 12\,\pi^2 l_0\,l + {l_0}^4 + 4\,{l_0}^3 l + 4\,{l_0}^2 l^2\right)\left(4\,{l_0}^2 l^2 - 4\,{l_0}^3 l - 12\,\pi^2 l_0\,l + {l_0}^4 + 6\,\pi^2{l_0}^2 + 21\,\pi^4\right)} \\
\nu_B &= \frac{\left(-{l_0}^2+\pi^2\right)}{{l_0}^2}, \lambda_1 = \frac{1}{8}, \lambda_3 = -\frac{{l_0}^2}{{l_0}^2+\pi^2}, \lambda_4 = \frac{\left({l_0}^4 + 2\,\pi^2{l_0}^2 + \pi^4\right)}{{l_0}^2+\pi^2}
\end{aligned} \tag{B.22}$$

Dans le cas des expériences de M. Combarnous [26], on a $a = 6.91\ldots$ alors :

$$\gamma_1 = 0.3234, \gamma_2 = 0.2318, \nu_A = 0.4928, \gamma_3 = -0.4991, \gamma_4 = 22.1335, \lambda_1 = 0.125, \lambda_2 = 0.4722, \lambda_3 = -0.5054, \lambda_4 = 19.957$$

Bibliographie

[1] Agez G., *Effets du bruit et d'un flot transverse sur les instabilités spatio-temporelles dans un système optique à cristaux liquides*, Thèse de Doctorat de l'Université des Sciences et Technologie de Lille, (2005)

[2] L.S. De B. Alves, R.M. Cotta, J. Pontes, *Stability analysis of natural convection in porous cavities through integral transforms*, Int. J. Heat Transfer, 45, (6), p. 1185-1195, (1999)

[3] W. Appel, *Mathématiques pour la physique et les physiciens*, H& K Edition, (2002)

[4] I.S. Aranson, L. Kramer. *The world of the complex Ginzburg-Landau equation*, Rev. Mod. Phys, 74, p99-143, (2002)

[5] M. Azaiez, M. Dauge,Y. Maday, *Spectral methods applied to porous media*, East-West Num. Math. 2, 91-105, (1994)

[6] K.L. Babcock, G. Ahlers, D.S. Cannell, *Noise amplification in open Taylor-Couette flow*, Phys. Rev. E, vol 50, number 5, p3670-3691, (1994)

[7] F. Bartoli, P. Dutartre, V. Gomendy, S. Niquet, M. Dubuit, H. Vivier, In : P. Baveye, J.Y. Parlange and B.A. Stewart ,*Fractal in Soil Science*, New York : Springer, (1998)

[8] A. Batoul, H.Khallouf, G. Labrosse, *Une méthode de résolution directe (pseudo-spectrale) du prblème de Stokes 2D/3D instationnaire. Application à la cavité entrainée carrée* , C.R. Acad.Sci.Paris,t.319,Série II, p.1455-1461, (1994)

[9] J. Bear, *Dynamics of fluid in porous media*, New York, 3e Ed. Université of Toronto Press (1972)

[10] C. Bender, S. Orsag, *Advance mathematical methods for scientists and engineers*, McGraw Hill, New-York, (1978)

[11] P.A. Bois, *Introduction à la mécanique théorique des fluides*, Ellipses, (2000)

[12] J.P. Boyd, *Chebyshev and Fourier Spectral Methods*, Dover Publication, (2000)

[13] H.R. Brand, R.J. Deissler, G. Ahlers, *Simple model for the Bénard instability with horizontal flow near threshold*, Phys. Rev. A, 43, p. 4262-4268, (1991)

[14] R.J. Briggs,*Electron-Stream interaction with Plasmas*, Research Monograph, MIT Press, Cambridge, (1964)

[15] H.C. Brinkman, *A calculation of viscous force exerted by a flowing fluid on a dense swarm of particles*, Applied Sciences Research, A1, p. 27-34, (1947)

[16] C. Canuto, M.Y. Hussaini, A. Quarteroni, T.A. Zang, *Spectral methods in fluid dynamics*, Springer, (1988)

[17] P. Carrière, P.A. Monkewitz, *Convective versus absolute instability in mixed Rayleigh-Bénard-Poiseuille convection*, J. Fluid. Mech., 384,p243-262, (1999)

[18] P. Carrière, P.A. Monkewitz, D. Martinaud, *Envelope equations for the Rayleigh-Bénard-Poiseuille system. Part1, Spatially homogenous case*, J. Fluid Mech, p.153-174, (2004)

[19] P. Carrière, A. Bottaro, P. Metzener, *Wavelength selection in Rayleigh-Bénard convection between horizontal boundaries of finite conductivity*, Eur. J. Mech/ B. Fluids, 16, p.483-508, (1997)

[20] B. Chabat, *Introduction à l'analyse complexe*, MIR, (1990)

[21] G. Chauvetau, *Essai sur la loi de Darcy*, thèse, université de Toulouse, (1965)

[22] H. Chaté, P. Manneville, *Phase diagram of the two-dimensional complex Gingsburg-Landau equation*, Physica A, 224, p. 348-368, (1996)

[23] J.M. Chomaz, A. Couairon, *Against the wind*, Phys. Fluids, 11, p. 2977-2983, (1999)

[24] J.M. Chomaz, *Fully non linear dynamics of parallel wakes*, J. Fluid Mech, 495, p. 57-75, (2003)

[25] T.J. Chung, J.H. Park, C.K. Choi, D.Y. Yoon, *The onset of vortex in laminar forced convection flow through a horizontal porous channel*, Int. J. Heat Mass Transfert, 45, p. 3061-3064, (2002)

[26] M. Combarnous, *Convection naturelle et convection mixte en milieux poreux* , Thèse d'état, Faculté des Sciences de l'Université de Paris, (1970)

[27] M. Combarnous, *Description du transfert de chaleur par convection naturelle dans une couche poreuse horizontale à l'aide d'un coefficient de transfert solide-fluide*, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 275, Série A, p. 1375-1378, (1972)

[28] M. Combarnous, S.A.Bories, *Hydrothermal convection in satured porous media*, Advaces in Hydroscience, 10, p. 231-307, (1975)

[29] M. Combarnous, S.A.Bories, *Modélisation de la convection d'une couche poreuse horizontale à l'aide d'un coefficient de transfert solide-fluide*, Int. J. Heat Mass Transfer, vol.17, p.505-514, (1974)

[30] C. Cossu, T. Loiseleux, *On the convective and absolute nature of instabilities in finite difference numerical simulations of open flows*, J. Comput. Phys, 144, p.98-108, (1998)

[31] A. Couairon, J.M. Chomaz, *Absolute and convective instabilities , front velocities and global modes in nonlinear systems*, Physica D, 108, p236-276, (1997)

[32] A. Couairon, J.M Chomaz, *Primary and secondary non linear global instability*, Physica D, 123, p428-456, (1999)

[33] H. Dang-Vu, C. Delcarte, *Bifurcation et chaos*, ellipses, (2000)

[34] M.C. Cross, P.C. Hohenberg, *Pattern formation outside of equilibrium* , Rev. Mod. Phys, vol 65, 3, p851-1112, (1993)

[35] H. Darcy, *Les fontaines publiques de la ville de Dijon*, Librairie des Corps Impériaux des Ponts et Chaussées et des Mines, Paris, (1856)

[36] A.Delache, N. Ouarzazi, M.C. Néel, *Structuration de la convection mixte en milieu poreux confiné latéralement et chauffé par le bas : effets d'inertie* , C.R. Mécanique 330, p. 885-891, (2002)

[37] A. Delache, N. Ouarzazi, M. Combarnous *Etude comparative des prévisions théoriques et des résultats expérimentaux de la convection mixte en milieu poreux chauffé par le bas*, 16ème Congrès Français de Mécanique, (2003)

[38] A. Delache, N. Ouarzazi, M. Combarnous, *Spatio-temporal instabilities of mixed convection flows in porous media heated from below : Comparison with experiments.* , article soumis à Int. J. of Heat and Mass Transfer

[39] F. Dufour, *Etude analytique et numérique de la convection entrainée en milieux poreux*, Thèse, Université Paul Sabatier Toulouse III, (1998)

[40] F. Dufour, M.C. Néel, *Numerical study of instability in a horizontal porous channel with bottom heating and forced horizontal flow*, Phys. Fluids, 10, (9), p.2198-2207,(1998)

[41] M. Firdaouss, J.L. Guermond, P. Le Quéré, *Non linear coorection to Darcy's law at low Raynols numbers*, J. Fluid Mech, vol. 343, p.331-350, (1997)

[42] F. Forchheimer, *Wassergnengung durch boden*, Z. Vereines. Deutcher Ingnieure, XXXXV, 49 p. 1736-1741, et 50, p. 1781-1788, (1901)

[43] K. Fujimura, R.E. Kelly, *Mixed mode convection in a inclined slot*, J. Fluid Mech., vol. 246, p.545-568, (1993)

[44] A.V. Getling, *Rayleigh-Bénard convection, structure and dynamics*, advanced series in nonlinear dynamics, vol 11, ed World Scientific, (1998)

[45] R.C. Givler, S.A. Altobelli, *A determination of effective viscosity for the Brinkman-Forchheimer flow model*, J. Fluid. Mech., 258, p. 355-370, (1994)

[46] E.Guyon, J.P Hulin, L.Petit, *Hydrodynamique physique*, EDP sciences/ CNRS Edition, (2001)

[47] P. Gondret, P. Ern, L. Meignin, M. Rabaud, *Experimental evidence of a nonlinear transition from convective to absolute instability*, Phys. Rev. Lett., 82, p. 1442-1445

[48] P.Haldenwang, G. Labrosse, S.Abboudi, M.Deville *Chebycheff 3-D Spectral and 2-D Pseudospectral Solvers for the Helmholtz Equation*, Journal of Computationnal Physics 55, 115-128, (1984)

[49] C.W.Horton, F.T.Rogers, *Convection currents in a porous medium*, J.Appl. Phys., 16, p.367-370, (1945)

[50] P. Huerre, P.A. Monkewitz, *Local and Global instabilities in spatially developing flow*, Annu.Rev Fluid Mech., vol 22,p473-537,(1990)

[51] P. Huerre, M. Rossi, *Hydrodynamic instbilities in open flows*, In : *Hydrodynamics and nonlinear instabilities*, Edité par C. Godréche, P. Maneville, Cambridge University Press, (1998)

[52] A. Joulin, M.N. Ouarzazi, Mixed convection of a binary mixture in a porous media, *C .R. Acad. Sci. Paris.*, série II b, 328, (2000), 311-316

[53] A. Joulin, *Instabiité convectives et absolues d'un mélange binaire en convection mixte dans un milieu poreux*, Thèse de Doctorat de l'Université des Sciences et Technologie de Lille, (2001)

[54] Y. Kato, K. Fujimura, *Prediction of pattern selection due to interaction rolls and transverse modes in a flow through a rectangular channel heated from below*, Phys. Review E, vol.62, N° 1, (2000)

[55] L.Landau, E.Lifchitz, *Mécanique des Fluides*, Mir, (1989)

[56] E.R. Lapwood, *Convection of a fluid in a porous medium*, Proc. Cambridge, Phil. Soc., 44, p. 508-525, (1948)

[57] H. Li, R.E. Kelly, P. Hall, *Absolute instabilty of Rayleigh-Bénard convection in time-periodic shear flow*, Phys. Fluids, 9, p.1273-1276, (1997)

[58] E. Linquist, Proceeding of *Premier Congrés des Grands Barrages*, Stockholm, (1930)

[59] S. Lovejoy, D. Schertzer, P. Silas, *Diffusion in one dimensional multifractal porous media*, Water Ressources J., 34, 12, p. 3283-3291, (1998)

[60] C.M. Marle, *Ecoulement monophasique en milieu Poreux*, Revue Institut Français du Pétrole, 22, 10, p. 1471-1509, (1967)

[61] C. Mei, J-L Auriault, *The effect of weak inertia on flow through a porous medium*, J. Fluid Mech., 222, p. 647-663, (1991)

[62] L. Meignin, *Formation et dynamique de vague en cellule de Helle-Shaw*, Thése, Université Paris XI Orsay, (2001)

[63] N.Mitarai, H. Nakanishi, *Covective instability and structure formation in traffic flow*, Phys. Rev. Lett., 85, p. 1766, (2000)

[64] H.W. Müller, R.J. Tveitereid, S. Trainoff, *Rayleigh-Bénard problem with imposed weak through-flow : two-coupled shear flow*, Phys. Rev. E., 48, p. 263-271, (1993)

[65] M. Muskat,*The flow of homogeneous fluids through porous media*, The Maple Press Company, York, PA, (1946)

[66] Nayfeh A.H., *Perturbation methods*,Wiley, New-York, (1973)

[67] Newell A.C. , Whitehead J.A., *Finite bandwidth, finite amplitude convection* , J. Fluid Mech., vol 38, part 2, p. 279-303, (1969)

[68] S. Nguyen, C. Delcarte, *A spectral collocation method to solve Helmholtz problems with boundary conditions involving mixed tangential and normal derivatives* , J. Comput. Phys. , vol 200, p. 34-49, 2004

[69] S. Nguyen, *Dynamique d'une interface en présence d'une singularité de contact solid/fluide*, Thèse de Doctorat de Paris-Sud XI, (2005)

[70] X. Nicolas, A. Mojtabi, Platten J.K., *Two-dimensional numerical analysis of the Poiseuille-Bénard flow in a rectangular channel heated from below*, Phys. Fluids, 9, (2), p. 337-348, (1997)

[71] X. Nicolas, J.M. Luijkx, J. K. Platten, *Linear stability of mixed convection flows in horizontal rectangular channels of finite transversal extension heated from below*, Int. J. Heat and Mass Transfert, 43, p. 589-610, (2000)

[72] X. Nicolas, *Revue bibliographique sur les écoulements de Poiseuille-Rayleigh-Bénard : écoulements de convection mixte en conduites rectangulaires horizontales chauffées par le bas*, Int. J. Thermal Sc, 41, p. 961-1016, (2002)

[73] D.A.Nield, A.Bejan, *Convection in Porous Media*, Springer, second edition, (1999)

[74] M.N. Ouarzazi, A. Joulin, P.A. Bois, J.K. Platten, Soret effect and mixed convection in porous media, *Thermal Non Equilibrium Phenomena in Fluid Mixtures*, Ed. W. Köhler and S. Wiegand, Springer, *Lecture Notes in Phys.*, 584, p. 428-447, (2002)

[75] M.T. Ouazzani, J.K. Platten, A. Mojtabi, *Etude expérimentale de la convection mixte entre deux plans horizontaux à températures différentes*, Int. J. Heat Mass Transfer, 33, p. 1417-1427, (1990)

[76] R. Peyret, *Spectral method for incompressible viscous flow*, Springer, (2002)

[77] A.N.D. Posadas , D. Giménez, R. Quiroz, R. Protz, *Multifractal Characterization of soil pore systems*, Soil Sci. Soc. Am. J., 67, p. 1361-1369, (2003)

[78] M. Prats, *The effect of horizontal fluid motion on thermally induced convection currents in porous media*, J. Geophys. Res., 71, p. 4835-4838, (1967)

[79] M. Quintard et S. Whitaker, *One and two-equation models for transient diffusion process in two-phase systèms*, Advances in Heat Transfer, Vol. 23, p. 369-464, (1993)

[80] A.P. Radliński, E.Z. Radlińska, M. Agamalian, G.D. Wignall, P. Lindner, O.G. Randl, *Fractal Geometry of rocks* , Phys. Rew. Letters, vol. 82, N° 15, (1999)

[81] M.H. Rahimian and A. Pourshaghaghy, *Direct simulation of forced convection flow in a parallel plate channel filled with porous media*, Int. Comm. Heat Mass Transfer, vol29, N° 6, p. 867-878, (2002)

[82] D.A.S. Rees, *The effect of inertia on the onset of mixed convection in a porous layer heated from below*, Int. Comm. Heat Mass Transfert, 24, (2), p.277-283, (1997)

[83] D.A.S. Rees, A. Postelnicu, *The onset of conection in an inclined anisotropic porous layer*, Int. J. Heat Mass Transfer, 44, p. 4127-4138, (2001)

[84] F. Reinhardt, H. Soeder, *Atlas des mathématiques*, Librairie Générale Française, (1997)

[85] E. Sanchez-Palencia, *Comportement local et macroscopique d'un type de milieux physiques hétérogènes*, int. J. Engng. Sc., vol.12, p. 331-351, (1980)

[86] E. Sanchez-Palencia, *Non-homogeneous media and vibration theory* , Lectures Notes in Physics, N° 127, (1980)

[87] Segel L.A ,*Distant side-walls cause slox amplitude modulation of cellular convection*, J. Fluid Mech., vol 38, part 2, p203-235, (1969)

[88] I. Sezai, *Flow patterns in a fluid-satured porous cube heated from below*, J. Fluid Mech, vol. 523, p. 392-410, (2005)

[89] A.E. Sheidegger, *the phyics of flow through porous media*, University of Toronto press, (1960)

[90] E. Skjetne, J.L. Auriault, *New insights on steady non-linear flow in porous media*, European J. Mech. B Fluids, 18, (1), p. 131-145, (1999)

[91] C.L. Street, M.G. Macaraeg, *Spectral multi-domain for large-svale dynamic simulation*, Applied Numerical Mathematics 6 , 123-139, (1989)

[92] M. Tveitereid, H.W. Müller, *Pattern selection at the onset of Rayleigh-Bénard convection in a horizontal shear flow*, Phys.Rev. E, 50, p.1219-1226, (1994)

[93] R.Q. Twiss, *Propagation in electronion streams*, Phys. Rev., 88, p.1392-1407, (1952)

[94] S. Whitaker, *Advances in theory of fluid motion in porous media*, Industrial and Engineering Chemistry, 61, vol12, p. 15-26, (1969)

[95] Ward H., Ouarzazi M.N., Taki M., Glorieux P., *Influence of walkoff on pattern formation in nondegenerate optical parametric oscillators* , Phys. Rev. E 63, 016604, (2000)

[96] J.C. Wodie, *Contribution à l'etude des milieux poreux par la méthode de l'homogénéisation : filtration non linéaire, milieux fissurés*, Thèse, Université Paris 6, (1992)

Résumé :

Cette étude concerne l'évolution spatio-temporelles des structures thermo-convectives en milieu poreux chauffé par le bas et soumis à un écoulement horizontal. Des données expérimentales montrent que dans la région laminaire, deux types de structures ont été observés : des rouleaux propagatifs transverses à l'écoulement (R.T) et des rouleaux fixes longitudinaux (R.L). Il est obtenu que l'analyse temporelle ne permet pas de prédire la sélection de structures observées, alors que la transition convectif/ absolu dans l'espace des paramètres correspond parfaitement à la transition entre les deux types de structures. Ce très bon accord entre la théorie de l'instabilité absolue et l'-expérience, est retrouvé également lorsque l'on compare les périodes d'oscillations et les longueurs d'onde des R.T.

Lorsque le rapport de forme transversal du milieu et l'inertie sont pris en compte, l'interaction non linéaire des R.T et des R.L est étudiée grâce à deux équations d'enveloppes, obtenues rigoureusement au voisinage d'un point de bifurcation double. La simulation numérique de ce modèle réduit en présence du bruit permet d'expliquer certaines observations expérimentales.

D'autre part la résolution numérique directe bidimensionnelle en méthode spectrale montre que les caractéristiques des modes globaux non linéaires sont identiques à ceux obtenues par la théorie linéaire d'instabilité absolue. Par ailleurs le transfert de chaleur moyen est analysé et comparé à l'expérience.

Abstract :

This study deals with the spatio-temporal evolution of thermo-convective instabilities in porous media heated from below and subject to a horizontal through flow. The experimental data show that in laminar convection two kind of structures may appear depending on the parameters of problem : the moving transversal rolls (T.R) and the stationary longitudinal rolls (L.R). It is shown that while the prediction stemming from the linear temporal stability is in a complete contradiction with experiments, the border between convective and absolute instability correspond perfectly to the observed transition from L.R to T.R. Moreover it has also been found that the measured and the predicted of oscillations and the wavelength of T.R are in a good agreement at the absolute instability regime. The competition between T.R and L.R is examined in the framework on a model based on coupled amplitude equations. The numerical simulation of this model in presence of noise allow to understand some experimental observations. The direct two dimensional numerical simulation with spectral methods is performed and show that on linear effects do not modify some of the R.T. Characteristics. The mean heat transfer is also evaluated and compared for experimental data.