



HAL
open science

Contribution à la modélisation de granulats tridimensionnels : application au ballast.

Gilles Saussine

► **To cite this version:**

Gilles Saussine. Contribution à la modélisation de granulats tridimensionnels : application au ballast.. Mécanique [physics.med-ph]. Université Montpellier II - Sciences et Techniques du Languedoc, 2004. Français. NNT: . tel-00077519

HAL Id: tel-00077519

<https://theses.hal.science/tel-00077519>

Submitted on 31 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ACADEMIE DE MONTPELLIER

UNIVERSITE MONTPELLIER II

— SCIENCES ET TECHNIQUES DU LANGUEDOC —

THÈSE

Présentée à l'Université des Sciences et Techniques du Languedoc
pour obtenir le diplôme de DOCTORAT

Spécialité : Mécanique.
Formation Doctorale : Mécanique des matériaux et des milieux complexes,
des structures et des systèmes.
Ecole Doctorale : Informations, Structures, Systèmes.

**CONTRIBUTION A LA MODELISATION
DE GRANULATS TRIDIMENSIONNELS :
APPLICATION AU BALLAST.**

par

Gilles SAUSSINE

Soutenue le 14 octobre 2004 devant le jury composé de :

MM.	Jean Jacques Moreau	Professeur émérite - LMGC - Montpellier II	Président
	Claude Bohatier	Professeur - LMGC - Montpellier II	Directeur de Thèse
	Bernard Cambou	Professeur - ECL - LTDS	Rapporteur
	Karam Sab	Professeur - ENPC	Rapporteur
	Catherine Cholet	Chargée de Recherche à la SNCF	Examineur
	Frédéric Dubois	Ingénieur de Recherche CNRS - Montpellier II	Examineur
	Francis Pradel	Chargé de Recherche à l'IFP	Invité

Remerciements

Ce travail de thèse s'est déroulé pour une partie au laboratoire de Mécanique et Génie Civil et au sein de l'unité Physique du Système Ferroviaire et Confort de la Direction de la Recherche et de la Technologie de la SNCF. Je tiens à remercier tout d'abord Claude Bohatier pour m'avoir fait confiance et pour m'avoir dirigé pendant ces trois années.

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance au Professeur Jean Jacques Moreau pour avoir été un Président de Jury bienveillant et un acteur très important dans ce travail. Les nombreux conseils qu'il m'a prodigués m'ont permis d'avancer et d'apprendre, et nos nombreuses discussions ont été source de motivations supplémentaires.

Je ne peux parler de ce travail de thèse sans adresser mes plus sincères remerciements à Catherine Cholet et Frédéric Dubois sans lesquels, sans aucun doute, ce travail n'aurait pu atteindre la même précision et la même qualité. Leur disponibilité de tous les instants, leur gentillesse et leur patience à mon égard m'ont permis de progresser, de m'enrichir. Je sais que vous n'aimez pas recevoir *des fleurs* mais veuillez accepter toute ma gratitude.

Je remercie particulièrement le Professeur Fahrang Radjaï pour m'avoir initié, conseillé, et guidé au cours de ce travail. Cette collaboration fructueuse m'a permis de donner une plus ample valeur à mon travail.

Les Professeurs Karam Sab et Bernard Cambou m'ont fait l'honneur de bien vouloir être rapporteurs de ce long mémoire, je leur suis très reconnaissant. Leur très grande connaissance sur la modélisation, la simulation, l'infrastructure ferroviaire, leur a inspiré bon nombre de remarques et de questions, et leurs compliments sont source d'encouragements. J'espère pouvoir continuer un échange sur ces points de vue.

Je tiens à remercier monsieur Francis Pradel qui a bien voulu participer à ce jury, et qui par son expérience dans le domaine de la simulation et du développement, m'a permis de progresser à la suite de discussions fructueuses.

Je remercie profondément monsieur Pierre-Etienne Gautier pour avoir suivi et encouragé mon travail, monsieur Louis-Marie Cléon pour sa confiance et sa reconnaissance de mon travail et monsieur Philippe Renard pour son soutien et sa confiance.

Au sein du laboratoire je tiens à remercier vivement le Professeur Maisonneuve qui a été un acteur pour l'obtention de ce financement, le Professeur Pierre Alart pour les discussions et conseils, le Professeur Robert Peyroux pour ses conseils bienveillants, sa disponibilité jusqu'aux derniers instants, le Professeur Michel Jean pour les nombreux conseils, discussions, ainsi que Saïd, Franck.

Au sein de l'unité SFC, je remercie Laurent Schmitt pour ses conseils, sa disponibilité, sa gentillesse, et François Quétin pour les discussions, les conseils et ses encouragements. Je remercie les nombreuses personnes que j'ai pu découvrir exerçant dans des domaines scientifiques différents : Florence, Franck, Sylvie, Cora, Corinne, Myriam, Nicolas, Adrien, Jean-Pierre, les deux Xavier, Julien, Eva, Gaëlle.

Je remercie messieurs Fumey et Potvin de la Direction de l'Ingénierie de la SNCF pour la collaboration fructueuse qui m'a permis d'appliquer mes travaux à des problématiques ferroviaires.

La thèse étant un travail de longue haleine pour lequel la rigueur est un objectif quotidien, je m'autorise une digression afin de décrire sous forme d'histoire ces trois années de vie.

La thèse, ce mythe dont nous entendions parler en usant nos pantalons sur les chaises de lycée, de l'université, nous paraît si inaccessible ... et pourtant. Tout commence tout d'abord avec la période estivale, en effet pour les néophytes, il faut savoir que si le soleil, la plage sont des mots de saison, c'est aussi une époque où se déclare l'ouverture de la chasse à la bourse. La chasse à la bourse se pratique à l'affût, sans aucun animal en soutien (chien ou chat de type John), et la patience permet de capturer le plus souvent deux types de gibiers : la MRT, qui se déplace plutôt par groupe de 2 à 3 individus et la CIFRE solitaire. Pour ma part, à la suite d'une longue sieste rythmée par les chants des cailloux dansant, je capturais une CIFRE, et celle-ci allant changer ma vie.

Les premiers temps sont consacrés au changement, tout d'abord morphologique car on passe de l'état étudiant à une structure humanoïde d'apparence humaine : le thésard, ou comme le nomme les férus de terminologie avanguardiste, le doctorant. Le thésard fait peur, en effet s'engager dans trois années de dur labeur après tant de temps consacré aux études ... est-il fou ? Cet être différent, commençant à parler un langage peu compréhensible, évolue alors dans un monde nouveau : on ne sait pas réellement ce qu'il fait, on ne comprend pas réellement ce qu'il fait, où il va, et qu'elle en sera l'issue

Après l'ensemble de ces mutations, la réalité nous rattrape, du moins la science nous tape sur l'épaule en nous disant : " Et ta contribution, où en est-elle ?". Là, démarre la fabuleuse aventure, en commençant par l'inévitable bibliographie. On rêve de science, de découvertes, de douceurs de vivre, de petits trains, et là on découvre qu'à son insu on travaille dans un monde où il ne fait pas bon être régularisé (imaginer que l'on remplace votre lit si souple par un matelas de fakir ...). Mais où est passé le ballast de mon sujet de thèse ? Les pourfendeurs de la science dite molle dont j'ai pu apprécié les discussions au sujet de mon confort dans le dialogue figé homme-animal peuvent se rassurer : il existe quelques formulations de la science dite dure pour les caractériser, nous parlerons donc de science régularisée les concernant et science unilatérale pour les autres adeptes. Ce premier choc est évidemment un traumatisme pour cette entité cellulaire qui vient de naître : le monde du contact sera parfaitement rigide.

A la suite de cette première et lente prise de conscience, la terrible réalité du monde virtuel devient une dure mise à l'épreuve ... analyser la structure complexe d'un assemblage de fichiers qui s'apparente à un logiciel afin de créer son propre monde quel objectif ! Et là je ne peux que m'attarder sur la difficulté à laquelle nous avons tous été confrontés, l'apprentissage d'une autre langue. En effet, une erreur glissée de manière inopinée dans quelques milliers de caractères écrits par mon soin, se traduisait par un dialogue de sourd avec la machine : "core dumped". Ces deux mots si fréquents nous rappellent avec fierté la supériorité de l'homme sur la machine, mais la traque du BUG, pas celui de l'an 2000, mais cette erreur que l'on ne soupçonne pas et qui se propage parfois de manière aléatoire, est une action de tous les instants. Heureusement grâce aux incantations du gourou informatique touchant Dubois (elle était facile ...), gérant l'amoncellement de la production des thésards, les solutions évoquées ont le plus souvent permis de faire disparaître de manière ponctuelle le BUG.

L'apprentissage de la langue ne permet tout de même pas de communiquer avec d'autres thésards, car au surprise de la première année : je ne suis pas seul à nager au milieu de la matière grise en quête d'un radeau. Certains comme Matthieu en sont réduits à ne voir que l'infiniment petit, pris dans la vague appelée 'Nanomania' et qui paradoxalement n'a jamais rencontré à cette échelle la petite Aude, mais la grande O2 qui l'a attiré par un praxilinguisme subtil. D'autres animés par une envolée lyrique se passionnent pour des structures moléculaires afin de se faire une membrane pour se protéger du *Contact* et rester à l'âge de la zéolithe : mais est ce que les limaces de Virginie mangeront la zéolithe de Jean Michel, telle est la question ... Tandis que certains parlant 5 langues mais pas le fortran, s'attachent à prôner l'usage du mac et assurent la promotion de la chimie virtuelle à la fnac, j'ai nommé le célèbre Doc Ken'chi. D'autres se passionnent pour la parallélisation de leur travail grâce à leur mémoire partagée entre les méthodes numériques et le cinéma en VO, et peuvent glisser des BUG dans mes propres programmes : Doc M. Renouf avec qui nous avons conversé sur un mode CVS (Crash Version System).

Après une longue phase d'adaptation où le thésard s'émancipe, parfois de manière incontrôlable en s'autorisant des railleries sur l'encadrante amusée par les rayures que je portais, la phase de la compréhension du sujet de recherche arrive : je maîtrise ce que je fais, enfin ... presque. En effet après les années YéYé, je dois faire face à l'année YoYo : un jour cela marche, un jour non. Mais malgré les oscillations, j'avançais dans le dédale des grains de ballast, le fameux ballast, dès fois vert, dès fois rouge, et s'amusant à construire des murs de briques. On teste, on s'amuse, on écrit, bref les premiers résultats étant là, la motivation est là, et on compte plus les heures pour vérifier le proverbe : le travail c'est la santé. C'est aussi la période de communication avec le monde extérieur, on découvre que la farine Francine peut se porter grâce à Matthieu, que les avions peuvent subir l'assaut des optimisateurs fous de mathématiques avec Laurent, de voir que le Chantier de M6 a fait naître une vocation à Stéphane et Christelle, de voir Fred et Syssy parler anglais fascinés par les USA et le muscat, découvrir avec Gaëlle que l'on peut mettre des mots sur le confort.

La dernière phase de la vie de thésard sonne le glas de l'insouciance. En effet, les derniers six mois sont consacrés à la phase de rédaction. Cette phase, commence par une rapide transformation qui n'est visible que par les personnes qui vous entourent. Des ethnologues débutant vous affirment que vous vous repliez sur vous même, votre visage devient marqué par la tâche à accomplir, et l'agitation quasi perpétuelle de vos mains sur un agencement ordonné de lettres alphabétiques fait naître des excroissances cèleuses au bout des doigts. Ces modifications morphologiques semblent bien réelles, mais le travail de synthèse nous absorbe tant ... sera t-on compréhensible au sein du monde scientifique ? Après la chasse au bug, nous sommes confrontés à une exploitation rigoureuse d'ouvrages lointains afin d'atteindre la perfection grammaticale et orthographique : le BLED, et le bescherelle. Nous ne pouvons que remercier ces recueils qui ont bercé notre enfance, et permis d'affronter l'écriture avec sérénité.

La lente opération de synthèse se trouve alors accélérée par un élément qui nous paraissait si lointain : la soutenance. Cette échéance fixée, oblige alors de se concentrer tel un bouddha : plus rien ne nous arrêtera... Et l'œuvre prend forme, la taille nous en effraie presque, qui aurait dit qu'un jour nous aurions pu écrire autant ... Les remarques judicieuses de la part des acteurs de cette aventure permettent de progresser et de voir que parfois on est compréhensible que par soi-même (et dire que selon cette phrase célèbre "je pense donc je suis"). Après de multiples relectures où l'esprit en arrive à lire que ce qu'il veut, la première confrontation avec l'esprit proche de la

culture cellulaire, vous rassure : elle a compris où je voulais en venir. Les délais stricts tels une épée de Damoclès se faisant si menaçant, nous envoyons cet œuvre aux rapporteurs, les dès en sont jetés.

La dernière étape est là, et la science nous rappelle : "Tu dois synthétiser pour le public en 45 min". Et la présentation se crée sous forme de pensées, les conseils pour la produire fusent. Les adeptes du bouton unique prône l'usage d'outils gratuits, mais je ne cède pas à la tentation de croquer dans la pomme. Je m'engage dans le dédale de Pauvre Point, cher à l'observateur du cône de Mach, et après de longues mises au point j'en arrive à la phase de l'élocution devant des spectateurs ébahis par un flot de paroles assimilables au passage d'un TGV (au moins j'étais en rapport avec le sujet ...). On se demande si le design acoustique cher à Julien et Franck ne pourrait pas nous aider, et l'entraînement, le raccourcissement, l'homogénéisation permettent d'approcher l'exposé tant désiré. Ensuite, le moment tant attendu, passe si vite, comme le TGV.

Et bien ayant glissé quelques détails, je n'ai pu citer tout le monde, mais juste faire comprendre que ce travail m'a permis de rencontrer beaucoup de personnes et que ces trois années ont été très enrichissantes. Je rajouterai un petit clin d'œil sincère à la famille Moyen, la famille Colombero, et tous les cousins adoptifs qui m'accompagnent depuis si longtemps.

Je tiens à remercier mes grands parents, mes parents pour leurs soutiens, leurs encouragements, sans lesquels je ne serais arrivé jusque là et enfin Sylvie qui m'accompagne depuis trois ans dont la présence fidèle et son soutien ont été très importants.

Table des matières

Remerciements	3
Introduction	11
I Introduction générale	13
1 La voie	17
1.1 La voie ferrée ballastée	18
1.1.1 La voie	18
1.1.2 L'armement	19
1.1.3 Le ballast	22
1.1.4 Les structures d'assises	24
1.2 La vie de la voie	25
1.2.1 Charges supportées par la voie	25
1.2.2 Les défauts de voie	26
1.2.3 Les opérations de maintenance	28
1.2.4 L'évolution des défauts sur les lignes à grande vitesse	30
1.2.5 Comprendre	32
2 Modélisation de la voie ballastée	33
2.1 Approches expérimentales	34
2.1.1 Etude du comportement vertical et latéral de la voie	34
2.1.2 Etude de l'opération de bourrage et de la stabilisation	37
2.1.3 Synthèse	39
2.2 Etudes numériques	40
2.2.1 Modélisation par éléments finis ou discret/continu	40
2.2.2 Modélisation par éléments discrets	45
2.2.3 Conclusion	49
II Méthodes numériques par éléments discrets	53
3 Méthodes par éléments discrets	57
3.1 Introduction	58
3.2 Equation du mouvement d'un corps en présence de contact	59
3.3 Description du contact	59

3.4	Lois d'interaction	60
3.4.1	Unilatéralité	61
3.4.2	Lois de frottement	62
3.4.3	Lois de choc	63
3.5	Schémas d'intégration	63
3.6	Stratégie de résolution	65
3.7	Conclusion	66
4	Méthode NonSmooth Contact Dynamics	69
4.1	Introduction	70
4.2	Schéma d'intégration pour les équations de la dynamique non-régulière	70
4.3	Discrétisation des relations cinématiques	70
4.4	Un solveur : la méthode de Gauss-Seidel non-linéaire	71
4.5	Normes de convergence	72
4.6	Conclusion	74
5	Une approche bidimensionnelle polygonale	75
5.1	Introduction	76
5.2	Le modèle	76
5.3	Algorithme de détection	77
5.4	Sous-couche déformable	79
5.5	Quelques considérations numériques	80
5.5.1	Normes de convergence	81
5.5.2	Influence du pas de temps	83
5.6	Conclusion	84
6	Une approche tridimensionnelle polyédrique	85
6.1	Introduction	86
6.2	Le modèle	86
6.3	Le paramétrage	87
6.4	Matrice d'inertie d'un polyèdre convexe	88
6.5	Algorithme Shadow-Overlap 3D	89
6.5.1	Détection grossière	89
6.5.2	Recherche d'un plan séparateur	90
6.5.3	Intersection de primitives	92
6.5.4	Choix des points de contact	93
6.5.5	Optimisations de l'algorithme de détection	95
6.5.6	Evaluation des performances de l'algorithme de détection	98
6.6	Construction des opérateurs de passage global/local	99
6.7	Résolution du problème local	101
6.7.1	Résolution du problème dans le cas d'un contact entre sphères	101
6.7.2	Résolution à l'aide de la méthode de Newton généralisée	102
6.7.3	Résolution en considérant l'opérateur de Delassus diagonal	104
6.8	Comparaison numérique des résolutions locales	105
6.9	Conclusion	106

III Résultats	109
7 Tassement de la voie ferrée ballastée	113
7.1 Introduction	114
7.2 Confrontation expérience et simulation	114
7.2.1 Expérience	114
7.2.2 Paramètres	115
7.2.3 Résultats	116
7.3 Essais à grand nombre de cycles	118
7.4 Influence de la fréquence de sollicitation	120
7.4.1 Accélération critique	120
7.4.2 Echantillon de référence	121
7.4.3 Evolution du tassement et de la déflexion	121
7.4.4 Evolution de l'accélération du blochet	122
7.5 Influence de la sous-couche	126
7.6 Couplage éléments finis-éléments discrets	127
7.6.1 Préparation d'un échantillon	127
7.6.2 Résultats	128
7.7 Conclusion	130
8 Validation et étude numérique tridimensionnelle	133
8.1 Introduction	134
8.2 L'expérience de Château Gombert	134
8.2.1 Confrontation expérience et simulation	134
8.2.2 Performance de la détection	136
8.3 L'arche d'Istres	137
8.4 Etude d'une structure maçonnée : le dôme	139
8.4.1 Rôle du coefficient de frottement	140
8.4.2 Stabilité en fonction de l'épaisseur	141
8.5 Angle au repos de grains de ballast	143
8.5.1 Différents protocoles	144
8.5.2 Expérience en tambour tournant	147
8.6 Conclusion	149
9 Comportement d'une Couche Mince Granulaire	151
9.1 Introduction	152
9.2 Configuration et paramètres d'étude	153
9.2.1 Composition granulaire	153
9.2.2 Configuration de référence	153
9.2.3 Paramètres d'étude	154
9.3 Analyse du comportement	155
9.3.1 Evolution du déviateur et de la résistance verticale	155
9.3.2 Le réseau des forces	157
9.3.3 Relaxation libre d'une CMG	158
9.3.4 Analyse de la compacité	159

9.4	Evolution de la microstructure	160
9.4.1	Rôle des contacts linéiques	160
9.4.2	Distribution des forces	162
9.4.3	Connectivité des particules	163
9.5	Etude tridimensionnelle	164
9.5.1	Echantillons granulaires	165
9.5.2	Paramètres d'étude	165
9.5.3	Analyse du comportement	166
9.5.4	Analyse de la microstructure	168
9.6	Conclusion	169
10	Résistance latérale de la voie	171
10.1	Introduction	172
10.2	Description des expériences et construction des échantillons	173
10.2.1	Configuration d'essais expérimentaux de l'Ingénierie	173
10.2.2	Elaboration d'échantillons avec grains de ballast digitalisés	174
10.3	Mesure de la résistance	176
10.4	Champ de vitesses	178
10.5	Répartition des efforts dans le massif	179
10.5.1	Localisation des efforts sans surcharge verticale	179
10.5.2	Localisation des efforts avec surcharge verticale	180
10.5.3	Répartition de pressions au sol	181
10.5.4	Influence d'une surcharge sur la résistance latérale de la voie	183
10.6	Conclusion	183
	Conclusion	187
	Bibliographie	191
IV	ANNEXES	199
11	Matrice d'inertie	201
11.1	Rappels	201
11.2	Caractéristiques d'inertie d'un tétraèdre.	202
11.3	Comparaisons	204
11.3.1	Moment d'inertie d'un tétraèdre	206
11.3.2	Résultats numériques de calcul de matrice inertie	207
12	Revue d'algorithme d'intersection entre polyèdres	209
12.1	Algorithmes d'intersection entre polyèdres convexes	209
12.1.1	Représentation	209
12.1.2	Différents algorithmes de détection	212
12.1.3	Conclusion	222

Introduction

Les matériaux granulaires sont l'objet de nombreuses investigations expérimentales et numériques afin de mieux comprendre leur comportement que l'on peut assimiler à un solide, liquide ou à un gaz selon les circonstances. Ils sont largement employés dans le domaine du génie civil, de l'industrie chimique, agro-alimentaire. Dans le domaine ferroviaire, les matériaux granulaires sont des composants essentiels de l'infrastructure. En particulier le ballast permet d'assurer la stabilité des voies et facilite les opérations de maintenance. Le comportement du ballast, soumis à des sollicitations cycliques ou extrêmes, est encore insuffisamment connu. Cette connaissance présente un enjeu scientifique et économique important.

On modélise communément le ballast par une approche continue. L'objectif de cette thèse est de montrer qu'il existe une alternative à cette approche pour étudier le comportement d'un matériau granulaire comme le ballast soumis à des sollicitations très diverses, en particulier des cycles de chargements. L'approche continue ne permet pas de prendre en compte les particularités d'un tel matériau, angularité, discontinuités géométriques. En outre l'épaisseur de la couche de ballast n'excède par une dizaine de diamètre de grains ce qui en fait du point de vue de la mécanique granulaire une couche mince. Les méthodes par éléments discrets représentent une alternative intéressante et ont été utilisées pour étudier le tassement du ballast sous quelques centaines de cycles de chargement [73, 62] ou le bourrage [103]. Les modèles utilisés sont basés sur la méthode Molecular Dynamics développée à la suite de Cundall [36]. Dans ce travail nous proposons d'étudier le comportement du ballast à l'aide de méthodes par éléments discrets mais avec l'approche Contact Dynamics avec un modèle bidimensionnel et tridimensionnel. Cette approche a été peu ou pas utilisée dans le domaine ferroviaire. L'emploi de ce type de méthode est un enjeu industriel, en effet cela peut permettre d'améliorer la compréhension du comportement du ballast et de définir des règles de maintenance.

La première partie de ce travail présente l'origine des problèmes. Malgré les nombreuses investigations réalisées dans le domaine ferroviaire, les expériences modèles reproduisant les sollicitations cycliques verticales subies par le ballast sont peu courantes. Dans un premier temps nous nous attacherons à présenter les divers constituants de la voie qui sont en interaction avec le ballast. Nous décrirons les défauts géométriques de voie couramment détectés pour rendre compte de la qualité de la voie et les opérations de maintenance permettant de les corriger. Ensuite nous présenterons les diverses modélisations expérimentales et numériques qui ont eu pour objectif de quantifier ou proposer une loi de tassement, d'identifier des comportements spécifiques au ballast.

La deuxième partie est consacrée à la présentation du modèle numérique proposé. Dans le premier chapitre, nous rappellerons l'ensemble des éléments nécessaires pour une modélisation par éléments discrets, en détaillant les lois d'interaction, les schémas d'intégration, et les diverses approches pour résoudre un problème d'interaction. Nous exposerons alors les choix faits par rapport au problème envisagé. Dans le deuxième chapitre, nous présenterons une méthode de résolution, la méthode NonSmooth Contact Dynamics, en détaillant le principe du solveur du problème d'interaction et diverses techniques pour évaluer la qualité du calcul. Ensuite nous présenterons les particularités de la modélisation bidimensionnelle, nous exposerons un algorithme de détection de points de contact entre polygones convexes, un modèle de sous-couche pour tenir compte de la déformabilité du sol sur lequel repose le ballast, et une étude de sensibilité numérique pour les simulations de chargements cycliques. Le dernier chapitre de cette partie est consacré à la présentation du modèle tridimensionnel, nous détaillerons le paramétrage choisi, la résolution du problème local de contact frottement, et enfin nous proposerons un algorithme de détection entre polyèdres convexes.

La troisième partie présente à la fois des cas de validation bidimensionnels et tridimensionnels pas forcément dans le domaine ferroviaire, et des investigations numériques ayant pour but de mieux comprendre le comportement du ballast dans le cas de chargements cycliques ou du phénomène de résistance latérale. Le premier chapitre est une étude bidimensionnelle sur le tassement, où nous présentons une comparaison entre des simulations et des expériences et diverses investigations pour identifier le rôle des divers constituants de la voie. Le second chapitre regroupe des cas de validations pour le modèle tridimensionnel ; comme ils sont peu nombreux à l'heure actuelle dans le domaine ferroviaire, nous traitons des exemples de maçonnerie dont le comportement est connu ou prédictible. Nous exposerons à la suite de ces études une caractérisation de grains de ballast digitalisés. Le troisième chapitre présente une étude du comportement d'une couche mince granulaire, en faisant référence aux conditions d'utilisation du ballast, pour laquelle nous montrons que les descripteurs classiquement utilisés pour analyser la réponse mécanique d'un système ne sont pas adaptés dans ce cas. Nous mettrons en évidence des structures particulières, inhomogènes, guidant le comportement des couches minces granulaires. Le dernier chapitre est consacré à l'étude de la résistance latérale de la voie en se basant sur des expériences réalisées à la Direction de l'Ingénierie de la SNCF.

L'ensemble des développements informatiques et des résultats de simulations présentés dans ce travail a été réalisé dans la plate-forme LMGC90 dont le développement et la diffusion sont assurés par F. Dubois et M. Jean [45]. Les développements constituent la base du logiciel par éléments discrets dédié au traitement des interactions entre grains de ballast, BALLAST3D, qui permettra de continuer les investigations.

Ce travail de thèse a été supporté financièrement par Réseau Ferré de France dans le cadre du projet *Ballast Granulaire* soutenu par messieurs J. Lux et P. Montier et s'est déroulé au sein du Laboratoire de Mécanique et Génie Civil, unité mixte CNRS, de l'Université Montpellier II et de l'unité Service Ferroviaire et Confort de la Direction de la Recherche et de la Technologie de la SNCF.

Première partie

Introduction générale

Introduction

La caractérisation et la connaissance des matériaux employés dans des procédés industriels sont un enjeu scientifique et économique. La diversité des matériaux, à différentes échelles, exige l'élaboration de techniques expérimentales adaptées, et la création de modèles permettant d'affiner les investigations et de prédire les comportements.

Les matériaux granulaires constituent une classe de matériaux composés d'un grand nombre d'entités élémentaires, les grains. Ces grains ont le plus souvent des formes irrégulières, et leur taille varie entre le micron et quelques dizaines de mètres selon le domaine d'application. On trouve ces matériaux dans bon nombre de domaines, la géologie, l'agro-alimentaire, la construction civile, et la compréhension de leurs comportements, qui sont complexes, est aujourd'hui activement étudiée. Ainsi selon les sollicitations appliquées à ce type de milieu, on peut observer une évolution comparable à celle d'un solide, d'un liquide voire d'un gaz suivant les conditions de fonctionnement.

Les sollicitations peuvent être extrêmement variées et souvent très intenses entraînant des déformations irréversibles pour un assemblage de grains, voire même la rupture ou l'usure de ces entités. Dans le cas de l'étude de la voie ballastée, les phénomènes mis en jeu sont dynamiques sous l'effet de la circulation à grande vitesse des trains et de longue durée, la voie étant soumise à plusieurs millions de passage d'essieux. Cette problématique industrielle se rattache au domaine d'étude de la compaction des matériaux granulaires, il existe dans ce domaine des expériences sur un milieu modèle dont nous allons analyser la pertinence vis à vis de notre problématique.

Un matériau granulaire soumis à des sollicitations mécaniques telles que des secousses, des vibrations, a tendance à se compacter progressivement. Cette compaction met en jeu des contraintes stériques dues à leur géométrie et le frottement entre ces particules. L'étude de la compaction *douce*, en particulier de la dynamique de ce phénomène à grande échelle de temps est le fruit d'études relativement récentes. Dans le cas des expériences de *tapping* menées au James Franck Institute à Chicago [71, 70] sur des échantillons de billes de verre monodisperses, une loi empirique a été proposée pour décrire l'évolution de la compaction, celle-ci étant proportionnelle à l'inverse du logarithme du nombre de secousses. Parmi les comportements observés il a pu être fait une analogie avec les systèmes vitreux. Ce type d'expérience a été repris par Philippe [106] qui a mis en évidence l'existence d'un temps de compaction et des mouvements de convection collectifs. On peut distinguer deux régimes, si l'accélération dépasse un certain seuil alors on observe que l'échantillon effectue un vol libre entre deux secousses verticales, il est donc soumis à des chocs entraînant une densification couche par couche. Si l'accélération n'est pas suffisante, l'énergie du système est dissipée par frottement.

Dans le cadre de ces études, les sollicitations sont le résultat d'un mouvement vertical imposé à la boîte contenant l'échantillon. Il existe d'autres types de sollicitations comme le cisaillement cyclique d'un matériau granulaire. Pour ce type d'expériences, il a été mis en évidence par Pouliquen et *al.* [109] que pour un cisaillement alternatif d'amplitude constante le mouvement des particules, des billes de verre monodisperses, peut être de deux natures différentes : un mouvement aléatoire essentiellement à l'intérieur d'un volume confiné appelé *cage*, et occasionnellement des mouvements de changement de *cage*. L'amplitude des mouvements est généralement liée à celle de la déformation imposée au système, les changements rapides n'étant observés que pour des changements d'amplitude.

L'étude de la réponse mécanique d'un matériau granulaire modèle, disque ou sphère, à une sollicitation cyclique est un domaine relativement récent. Ce type d'investigation est en général mené afin de mieux comprendre le comportement des divers composants d'une route par exemple. Hermann et *al.* [11] ont mis en évidence que le comportement d'un assemblage de disques soumis à une sollicitation cyclique présentait un effet de *rocher* (*ratcheting*) pour les contacts glissants et observe pour de longues sollicitations une accumulation de déformations plastiques. Ces constatations ont été mises en évidence sur des particules de formes polygonales [12], et il apparaît nécessaire pour étudier ce phénomène d'introduire de nouvelles variables tenant compte de l'évolution de la dynamique des contacts glissants durant les sollicitations cycliques. Les simulations numériques de ces auteurs donnent des résultats différents selon qu'ils emploient une méthode de type Molecular Dynamics ou une méthode de type Contact Dynamics. En fait ce dernier type est celui que nous appliquons, et ne semble pas conçu par les auteurs de la même manière que nous [54]. Les auteurs ne retrouvent pas une accumulation de déformations plastiques mais seulement un phénomène de charge limite.

Cette revue succincte met en évidence une différence qui nous apparaît fondamentale par rapport à l'étude du comportement d'une voie ferrée. En effet les sollicitations dans ce cas sont essentiellement verticales, mais s'effectuent sur la partie supérieure du matériau granulaire, le ballast. Il y a donc un type de sollicitation différent avec une configuration à bord libre qui est à prendre en compte. Il existe peu d'expériences modèles de ce type caractérisant ou mettant en évidence des phénomènes particuliers, les seules existantes provenant du domaine de la mécanique des sols et plus particulièrement dans le domaine routier ou ferroviaire. Dans le domaine de la simulation, les sollicitations cycliques mettent en jeu des phénomènes complexes et les quantités classiquement mesurées peuvent être remises en question.

Nous allons dans cette première partie présenter tout d'abord la voie ferrée, ses éléments constitutifs, les sollicitations auxquelles elle est soumise et les dégradations observées. Ensuite nous exposerons diverses modélisations expérimentales et numériques ayant pour objectif d'identifier et de mieux comprendre le comportement de la voie sous chargement cyclique.

Chapitre 1

La voie

Le réseau ferré français s'est considérablement développé depuis le début du XX^{me} siècle avec l'évolution des technologies. L'avènement de l'électrification a permis une circulation des trains de plus en plus rapide avec une sécurité et un confort toujours accru. A l'heure actuelle, le réseau exploité comporte au total 31385 km dont 14464 km de lignes électrifiées incluant 1540 km de lignes à grande vitesse (LGV). En 2001, la SNCF a transporté 315 millions de voyageurs sur le réseau classique hors Ile de France, dont 83 millions ont emprunté le train à grande vitesse (TGV).

A l'heure actuelle les déplacements professionnels et privés se sont banalisés, la rapidité des déplacements avec un confort et une sécurité optimum est l'une des principales raisons du voyageur de choisir le transport routier, ferroviaire ou aérien. Depuis la mise en place en 1981 des lignes à grande vitesse les temps de parcours du transport ferroviaire sont devenus concurrentiels par rapport à des trajets aériens.

Mais l'accroissement des vitesses de circulation 160 km/h sur ligne classique, 270 km/h sur Ligne à Grande Vitesse jusqu'en 2001 puis 300 km/h et bientôt 320 km/h sur la future LGV Est, afin de diminuer les temps de parcours engendre l'accélération de la dégradation de la voie entraînant la nécessité d'effectuer des opérations de maintenance de plus en plus en fréquentes et coûteuses. Afin d'assurer à la fois l'expansion du réseau existant et le respect des exigences de sécurité, il est indispensable de connaître la capacité des voies ferrées ballastées pour le transport sous des sollicitations de plus en plus contraignantes.

Dans ce chapitre nous allons présenter tout d'abord les divers constituants de la voie ferrée, sa géométrie, et ensuite les critères permettant d'analyser les dégradations et les opérations de maintenance couramment pratiquées.

1.1 La voie ferrée ballastée

1.1.1 La voie



FIG. 1.1 – Photographie de voie LGV.

La terminologie ferroviaire désigne par *la voie* (fig. 1.1) l'ensemble des constituants assurant la circulation des trains et supportant les efforts transversaux, longitudinaux et verticaux [9], [134]. Les lignes à grande vitesse sont généralement constituées de deux voies juxtaposées permettant une vitesse commerciale de 300 km/h, et sont dites des *voies banalisées*, les circulations pouvant s'effectuer indifféremment dans les deux sens.

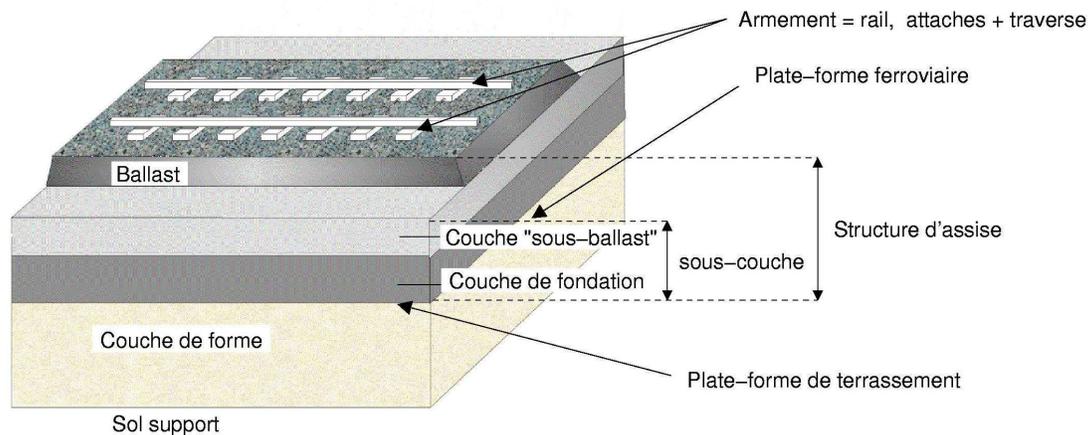


FIG. 1.2 – Schéma du profil de voie.

Les caractéristiques de la voie sont fixées par des règles génériques, définissant des exigences géométriques et mécaniques qui assurent une qualité continue et homogène sur le réseau.

La voie à grande vitesse (fig. 1.2) a un écartement standard de 1,435 m entre les deux files de rails. Elle repose sur une structure d'assise, communément appelée plate-forme, de 14 m de large avec une emprise de 50 m environ. On distingue l'armement composé des rails, des semelles absorbantes, des attaches et des traverses et les structures d'assises constituées du ballast et des sous-couches sur lesquelles il repose. L'armement assure entre autres fonctions la transmission des efforts aux structures d'assises. L'épaisseur de ballast sur LGV est en général de 30 cm sous les traverses.

La voie et ses différents éléments constitutifs supportent des efforts transversaux et verticaux qui agissent de manière prépondérante entraînant des déformations irréversibles (tassement vertical), les efforts longitudinaux étant moins importants (accélération et freinage).

La grande vitesse nécessite la maîtrise de la stabilité du matériel roulant, ce qui implique une très grande qualité des infrastructures.

1.1.2 L'armement

Le rail

Le rail assure le support vertical des roues des véhicules et guide les roues dans le sens transversal. Le développement d'une signalisation adaptée a été nécessaire en raison des distances de freinage importantes en particulier pour la grande vitesse.

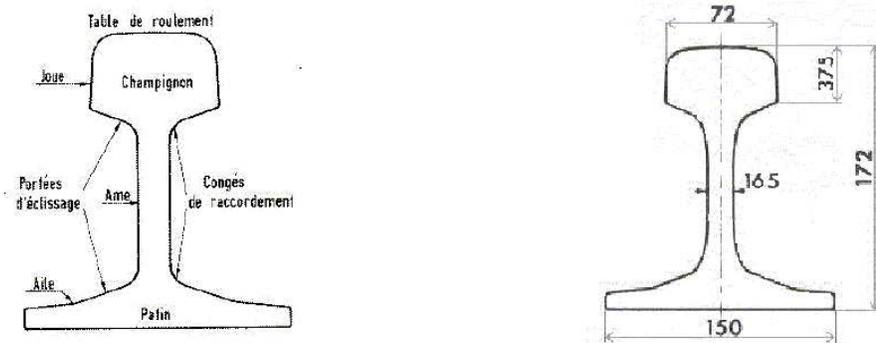


FIG. 1.3 – Cotes rail UIC60.

Le rôle primordial du rail [9] est de diriger le train et d'assurer la transmission et la répartition de la charge aux traverses :

Il est soumis à divers types de sollicitation :

- des charges statiques et dynamiques différentes d'un véhicule à l'autre,
- des surcharges dynamiques parfois très élevées par rapport aux charges statiques,
- des chocs se produisant au franchissement des joints ou de défauts géométriques de la surface de roulement (écaillage, usure ondulatoire) ou des méplats des roues,
- des efforts longitudinaux s'exerçant lors d'accélération ou de freinages,
- des efforts thermiques,
- des contraintes résiduelles issues de la fabrication.

Actuellement le rail est un assemblage de barres élémentaires de 36 m ou 72 m, en acier laminé de masse linéique 60 kg/m, soudées électriquement pour obtenir des Longs Rails Soudés (L.R.S.) de longueur quelconque (fig. 1.3). Ensuite les L.R.S. sont soudés par aluminothermie en voie et fixés sur les blochets des traverses par l'intermédiaire des attaches.

Les attaches rails-traverse

Les attaches rail-traverse [9] assurent la fixation du rail sur la traverse. Elles assurent à la fois une élasticité dans le sens vertical et horizontal. Ces constituants permettent de régler la progression de l'effort en fonction du déplacement. Une semelle d'élastomère cannelée de 9 mm d'épaisseur est posée entre le rail et la traverse afin de permettre l'absorption des vibrations nées dans le rail pouvant atteindre des accélérations de l'ordre de 200 fois la pesanteur et des fréquences de l'ordre de 1000 Hz, des amplitudes ne dépassant pas 0.1 mm [134].

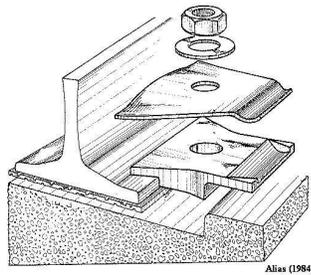
FIG. 1.4 – Schéma du système *nabla*.

FIG. 1.5 – Photo d'une attache.

Ce dispositif permet donc :

- d'assurer le positionnement du rail et de la traverse,
- le serrage du rail sur la traverse, afin que la résistance au glissement entre le rail et la traverse soit supérieure à la résistance au glissement longitudinal entre la traverse et le ballast,
- de conserver un effort de serrage suffisant malgré les vibrations dues aux circulations,
- d'absorber les efforts longitudinaux et dynamiques au passage des trains.

Les attaches *nabla* (fig. 1.4,1.5) sont fixées sur les traverses à l'aide de vis appelées tirefonds.

Les traverses

La transmission des efforts entre le rail et le ballast se fait par des traverses, qui assurent en même temps le maintien de l'écartement.

Les traverses permettent :

- la transmission des charges dynamiques et statiques du rail au ballast qui dépendent beaucoup des conditions d'appui,
- le maintien de l'écartement des deux files de rail,
- le maintien d'une certaine inclinaison du rail (1/20).

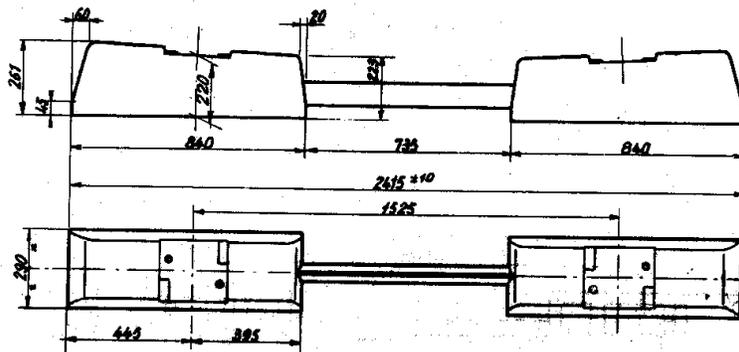


FIG. 1.6 – Profil de traverse VAX U41.

Les traverses modernes sont appelées traverses mixtes type Vagneux (fig. 1.6). Elles sont soit

constituées de deux parties en béton, les traverses biblocs, soit d'une seule partie, traverses monoblocs, et assurent la transmission des efforts du rail au ballast. Le rôle de maintien de l'écartement est assuré par une entretoise en acier en forme de U. Les traverses actuelles, type *VAX U41* mesurent 2,415 m de long et pèsent 245 kg.

1.1.3 Le ballast

Le ballast est un granulat provenant du concassage de roches extraites dans des carrières de pierres dures (granit, diorite, rhyolite, quartzite, grès) [9, 134]. Il constitue un élément support de la voie et fait partie de la superstructure.

Le ballast a un rôle très important, il remplit les fonctions suivantes :

- la transmission et la répartition des efforts à la plate-forme dues aux charges statiques et dynamiques des circulations,
- l'absorption des vibrations mécaniques et acoustiques,
- l'ancrage latéral et longitudinal de la voie, la résistance au cisaillement permet de contenir les chargements latéraux (circulation en courbe, flambage consécutif de la dilatation des L.R.S.) et longitudinaux (accélération, freinage),
- le drainage des eaux pluviales,
- une maintenance et une mise en place de la voie plus aisées.

L'ensemble des fonctions remplies par le ballast nécessite de définir des critères de qualité, qui sont définis dans la norme européenne "NF EN 13450" (août 2003) [6]. Cette norme remplace à partir de janvier 2004 la norme française "NF F53 - 695". Le ballast doit répondre essentiellement aux critères suivants :

- une granulométrie et une propreté permettant d'assurer le drainage et de bonnes propriétés mécaniques,
- une angularité assurant la résistance au cisaillement, celle-ci n'étant pour l'instant pas définie par des paramètres,
- une résistance mécanique assurant le maintien de l'angularité et de la granulométrie, et la résistance à l'abrasion,
- une insensibilité à l'eau et au gel,
- une homogénéité de la forme des grains, absence de formes de grains trop allongées ou aplaties.

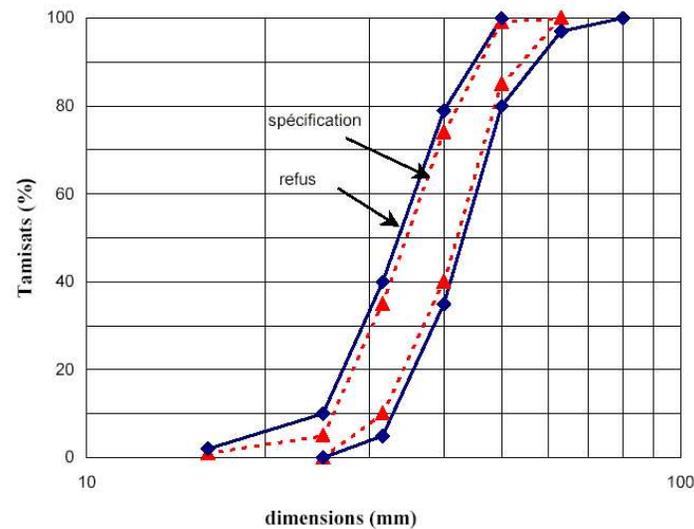


FIG. 1.7 – Granulométrie du ballast utilisé par la S.N.C.F. (NF EN 13450, Août 2003).

Le ballast employé pour les lignes ferroviaires françaises actuelles est un granulat concassé 25-50 mm dont les fuseaux de spécification et de refus sont représentés sur la figure 1.7. Les deux fuseaux représentent respectivement la spécification du ballast préconisée par la norme et les valeurs limites au-delà desquelles le ballast est refusé. Le deuxième fuseau est établi suite à des contrôles de conformité à la norme.



FIG. 1.8 – Photographie de grains de ballast.

Les grains de ballast (fig. 1.8) ont une forme polyédrique, avec des arêtes vives, que l'on caractérise par la longueur, la grosseur et l'épaisseur.

Il est important de connaître la proportion des éléments pouvant nuire à la stabilité des assemblages. Ces grains, que l'on dénomme *plats* ou *aiguilles*, ne doivent pas dépasser 92 mm et leur proportion ne doit pas excéder 7% de la masse totale des matériaux passant au tamis de 50 mm. Les éléments plats sont caractérisés par un coefficient d'aplatissement global qui représente le pourcentage total en masse de passant à l'ensemble des grilles et ne doit pas dépasser 12%. L'homogénéité du ballast est définie par la proportion d'éléments friables ou altérés qui ne doit pas dépasser 3%.

La dureté et la résistance à l'usure des grains de ballast sont définies à l'aide de l'essai Los Angeles et l'essai d'attrition Micro-Deval en présence d'eau.

La norme européenne, qui remplacera la norme française, fixe aussi les exigences pour les grains de ballast pour :

- la durabilité, déterminée par la résistance aux cycles de gel, dégel, le coefficient d'absorption d'eau,
- le coup de soleil, qui est un type de dégradation de roches présente dans certains basaltes, caractérisée par l'apparition de fissures très fines engendrant une perte de la résistance de la roche,
- les composants nocifs.

1.1.4 Les structures d'assises

La couche de ballast repose sur une structure d'assise comportant la sous-couche et la plate-forme [9, 134].

La sous-couche est constituée de matériaux bien gradués (sables ou graves), multicouches ou mono-couche, permettant d'assurer :

- la protection de la plate-forme contre l'action du poinçonnement de la couche de ballast et l'action des eaux zénithales,
- une protection de la plate-forme contre l'effet du gel,
- une meilleure répartition des charges transmises aux diverses couches de la plateforme.

La sous-couche comprend :

- la couche "sous-ballast", constituée de grave propre de tranche granulométrique 0/31.5 et compactée à 100% de l'optimum Proctor modifié (OPM). Elle permet d'améliorer la portance du sol et la répartition des charges transmises ainsi que la protection de la plate-forme contre l'érosion et le gel,
- la couche de fondation, constituée de grave compactée à 95% de l'optimum Proctor, d'une épaisseur minimale de 15 cm. Elle permet la circulation des engins de chantier sans risque d'endommagement de la plate-forme et n'est généralement pas nécessaire pour des substrats rocheux ou des sols de bonne qualité,
- la couche anti-contaminante, constituée de sable propre dont le rôle est d'empêcher les remontées d'éléments fins depuis la plate-forme vers les couches d'assises supérieures. Cette couche est facultative mais peut être doublée d'un tapis géotextile ou géomembrane.

La sous-couche repose sur la plate-forme constituée d'une partie supérieure, la couche de forme composée dans le cas d'un remblai de matériaux de même nature que le corps du remblai ou d'un sol de meilleure qualité compacté à 95% OPM.

La structure type de la voie ferrée nouvelle peut être résumée par les schémas suivants (Notice Générale EF 2 C 20 n°3) :

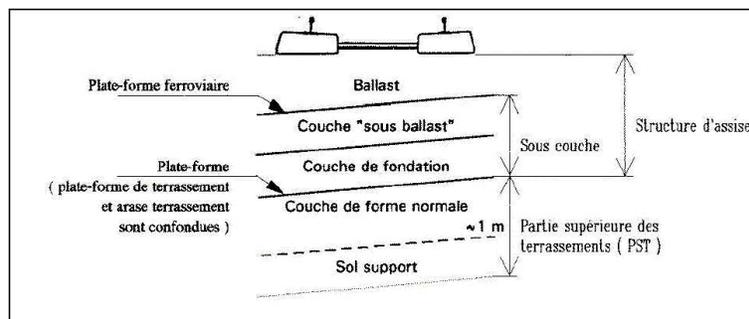


FIG. 1.9 – Structure de voie neuve avec couche de forme normale (déblai).

1.2 La vie de la voie

1.2.1 Charges supportées par la voie

Les efforts supportés par la voie proviennent des interactions véhicule-voie [9, 134]. La masse par essieu, la charge totale annuelle et la vitesse sont des paramètres fondamentaux pour étudier la fatigue de la voie. Actuellement le classement des voies fait par l'Union Internationale des Chemins de Fer (U.I.C) se divise en trois catégories :

- catégorie A, 16 tonnes par essieu,
- catégorie B, 18 tonnes par essieu,
- catégorie C, 20 tonnes par essieu,

L'augmentation de la charge par essieu et de la vitesse sont des éléments importants influant sur la vitesse de dégradation de la voie, et donc les coûts de maintenance.

Les véhicules exercent des efforts statiques et dynamiques sur la voie et les imperfections de celles-ci agissent sur la stabilité des véhicules. On peut distinguer trois types d'efforts :

- les efforts verticaux dus aux passages des essieux, repris par l'ensemble de la plate-forme suffisamment robuste pour supporter les efforts dynamiques très élevés,
- les efforts latéraux, sortant rapidement du domaine élastique, auquel cas la voie conserve des déplacements résiduels importants.
- les efforts longitudinaux dus aux accélérations et aux freinages, en général peu importants par rapport aux efforts verticaux,

Les variations de ces efforts, les surcharges, ont pour origine :

- les irrégularités de la voie, horizontale et verticale,
- les discontinuités aux raccordements non soudés,
- les franchissements d'appareil de voie, aiguillage par exemple,
- les irrégularités de la surface de roulement du rail ou des roues des véhicules (présence de plats).

Ces défauts peuvent être à l'origine des dégradations de la voie.

1.2.2 Les défauts de voie

La circulation des trains entraîne l'apparition de défauts de voie [9], [103]. Ces défauts sont de nature géométrique résultant essentiellement de problèmes de nivellement. Les défauts de voie entraînent un inconfort pour les voyageurs et mettent en jeu la sécurité des circulations s'ils sont trop importants. Ces défauts sont identifiés à l'aide d'une rame spéciale appelée *Voiture Mauzin*, dont on analyse les enregistrements, comme les défauts que nous allons présenter. On trouvera plus de détails sur cette rame dans [103]. Nous ne citerons ici que les défauts de nivellement qui sont corrigés à l'aide d'opérations de maintenance et nous exposerons les seuils fixés pour les LGV.

Les différents défauts [9], [103]

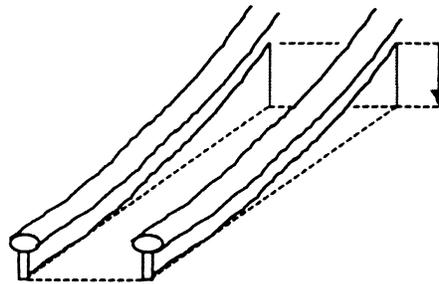


FIG. 1.10 – Schéma du nivellement longitudinal [72].

Dans le plan vertical on distingue le *nivellement longitudinal* (NL) (fig. 1.10), qui est le résultat du tassement global et du tassement résiduel, en pratique c'est la valeur instantanée entre la crête de défaut et la ligne de l'enregistrement sur une base de 15 m et le *nivellement transversal* que l'on évalue selon deux quantités :

- l'écart de dévers (fig. 1.12), c'est-à-dire la différence entre le dévers mesuré et le dévers théorique, qui représente l'inclinaison transversale de la voie dans les courbes pour compenser les efforts dans les courbes,
- le gauche ou torsion de la voie (fig. 1.11), qui représente le décalage vertical entre les deux files de rails.

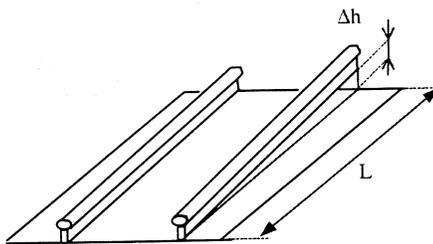


FIG. 1.11 – Le gauche [72].

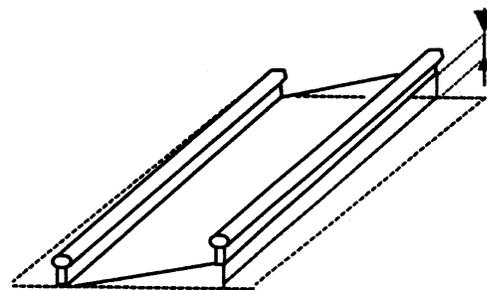


FIG. 1.12 – Le dévers [72].

Les défauts apparaissant dans le plan horizontal sont caractérisés selon deux types :

- le défaut de dressage (fig. 1.13) qui représente la variation transversale du milieu des rails par rapport à sa position théorique,
- le défaut d'écartement des rails entre eux.

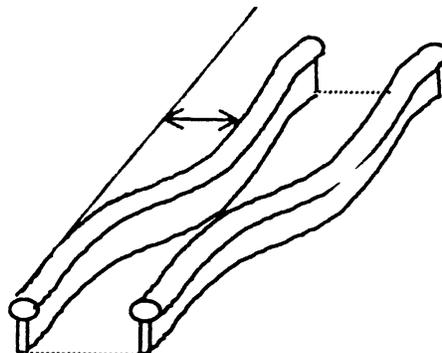


FIG. 1.13 – Schéma du dressage. [72]

La mesure et l'analyse de ces défauts conduisent à déterminer l'état de la voie selon des tolérances de sécurité admises et à planifier les opérations d'entretien. En fonction du type de circulation de la ligne, on définit des seuils dont le dépassement peut entraîner des réductions de vitesse ou des opérations de maintenance urgentes.

Seuils d'intervention pour voie LGV (Vitesses > 220 km/h) [41]

Les normes d'interventions constituent la base du référentiel qualité de la maintenance de la voie. Pour chaque paramètre, il a été défini des limites de sécurité appelées **VR**, valeur de ralentissement à partir desquelles des mesures de restriction de vitesse des circulations sont à prendre. Il existe des seuils permettant d'entreprendre des actions de maintenance avant que le seuil VR soit atteint.

Le seuil **VI**, valeur d'intervention, impose une intervention dans un délai relativement court pour ne pas atteindre le seuil VR. Le seuil **VA**, valeur d'alerte, impose une surveillance ou une intervention programmée à moyen terme. Et enfin lors de l'intervention on cherche un niveau de qualité, c'est le niveau **VO**, valeur d'objectif.

L'écartement de la voie est évalué par trois paramètres, E_{min} , qui est la valeur la plus faible de l'écartement sur le tronçon de voie considéré, E_{max} , la valeur la plus grande, et E_{moy} , qui est la moyenne arithmétique des écartements sur 100 m. L'écartement standard étant, 1,435m. Dans le tableau suivant nous présentons quelques ordres de grandeurs pour les valeurs de E_{min} et E_{max} .

Niveaux de qualité	E min	E max
VO	$E_{min} > 1433 \text{ mm}$	$E_{max} \leq 1444 \text{ mm}$
VA	$1430 \text{ mm} \leq E_{min} < 1432 \text{ mm}$	$1452 \text{ mm} < E_{max} < 1455 \text{ mm}$
VI	$E_{min} < 1430 \text{ mm}$	$E_{max} > 1455 \text{ mm}$
VR	$1426 \text{ mm} \leq E_{min} < 1428 \text{ mm}$	$1462 \text{ mm} < E_{max} < 1470 \text{ mm}$

Le **NL** est l'écart-type sur 200 m de voie du nivellement longitudinal de la plus mauvaise des files de rail, le nivellement longitudinal étant mesuré sur une base de 15 m. Les différents seuils sont les suivant :

Niveaux de qualité	NL
VO	$NL \leq 0.45 \text{ mm}$
VA	$NL \geq 0.9 \text{ mm}$

Les niveaux de qualité pour le nivellement transversal, sont évalués à l'aide de la mesure du dévers, du gauche sur la base de 3 et 9 m et l'écart de dévers (**Ed**) sur la base de 10m. Une des quantités les plus importantes est le gauche, qui représente en quelque sorte la torsion de la voie.

Niveaux de qualité	Gauche sur 3 m (g3)	Ecart de dévers
VO	$g3 \leq 3 \text{ mm}$	$Ed \leq 3 \text{ mm}$
VA	$5 \text{ mm} < g3 \leq 7 \text{ mm}$	$7 \text{ mm} < Ed \leq 10 \text{ mm}$
VI	$g3 > 7 \text{ mm}$	$Ed > 10 \text{ mm}$
VR	$15 \text{ mm} < g3 \leq 21 \text{ mm}$	$15 \text{ mm} < Ed \leq 18 \text{ mm}$

Les seuils présentés ici montrent la précision nécessaire afin de maintenir sur le terrain une sécurité optimale. Il en découle bien sûr une difficulté accrue pour atteindre ces seuils quotidiennement sur une voie LGV, tout se jouant au millimètre près, sur des kilomètres.

1.2.3 Les opérations de maintenance

Les défauts de voie présentés sont corrigés à l'aide d'opérations que l'on appelle le bourrage [103]. Ces opérations permettent de corriger les défauts par vibration et serrage des grains de ballast situés sous les traverses. Elles sont réalisées par des engins appelés bourreuses, l'opération de bourrage manuel s'effectuant à l'aide d'outil *Jackson*.

Il existe deux types de procédés pour corriger le nivellement de la voie :

- le premier système de nivellement est appelé *nivellement en base relative* où l'on vient relever d'une valeur constante entre deux points extrêmes appelée *hauteur de relevage*. On l'utilise pour obtenir un *rapport de réduction de défaut*.
- le second est appelé *nivellement en base absolue*, où l'on relève par rapport au niveau réel de la voie afin de reproduire le profil théorique.

La correction du dressage s'effectue par comparaison de la flèche d'un point à mesurer à la flèche d'un point déjà dressé. Il est possible de travailler selon deux méthodes :

- sans référence au piquetage qui permet de réduire les défauts de dressage en ligne droite ou en courbe,
- avec référence au piquetage où la valeur de défaut de dressage est mesurée au préalable.

Selon la longueur d'onde des défauts on applique les différents procédés :

Longueur d'onde $\lambda(m)$	Type de défaut	Action d'entretien
$\lambda > 30$	Défaut long	Bourrage et dressage en base absolue
$10 < \lambda < 30$	Défaut court	Bourrage et dressage en base relative
$\lambda > 1.7$	Défaut de rail	Meulage

Afin de réaliser ces travaux, il existe différents types de bourreuse qui sont classées selon la nature, la qualité du travail à fournir et le rendement à obtenir. La S.N.C.F. a effectué le classement suivant :

- les bourreuses premier niveau destinées aux travaux d’entretien du nivellement et du tracé des voies. L’entretien est défini comme la rectification de la géométrie des voies dans les limites de 20 mm de relevage (nivellement) et 20 mm de ripage (dressage) pour le L.R.S. Ces machines sont destinées à l’entretien à grand rendement (1400 m/h),
- les bourreuses deuxième niveau sont affectées aux opérations de ballastage et aux travaux d’entretien du nivellement et du dressage des appareils de voie. Elles permettent un nivellement plus important mais plus grossier,
- les bourreuses troisième niveau sont destinées aux opérations ponctuelles (400 m ou 500 m) d’entretien du nivellement et du tracé des voies,
- les bourreuses quatrième niveau sont destinées au calage des traverses préalablement mises en hauteur.

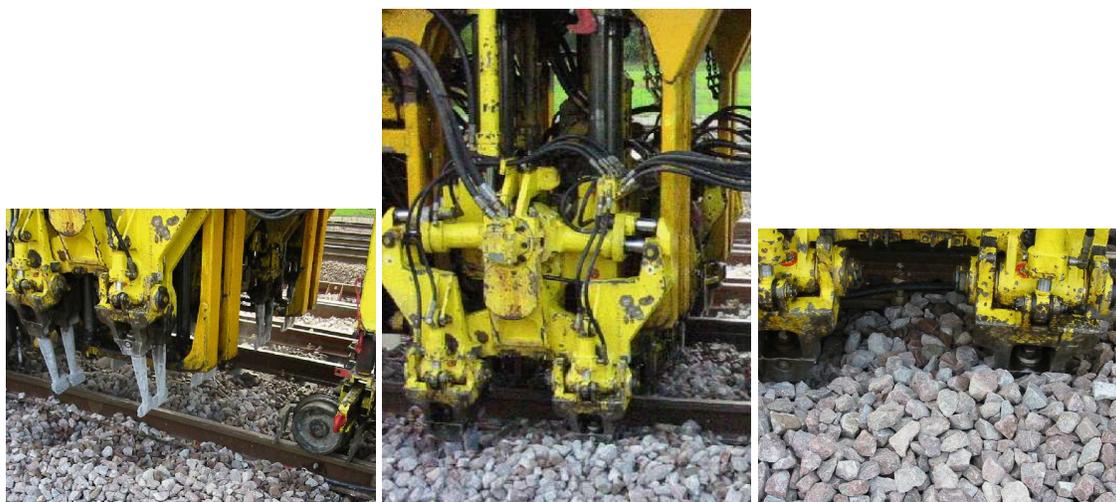


FIG. 1.14 – Bourrage.

Le principe du bourrage est le suivant, on appelle cycle de bourrage l’enchaînement des opérations suivantes :

- soulèvement de la voie (fig. 1.14 à gauche),
- les bourroirs vibrant à une fréquence d’environ 35 Hz plongent dans le ballast de façon à ce que la partie inférieure descende en-dessous de la traverse (fig. 1.14 au centre),
- application simultanée d’un mouvement de serrage ramenant les grains de ballast sous la traverse (fig. 1.14 à droite),
- remontée des bourroirs et passage à la traverse suivante.

Les paramètres qui pilotent le bourrage sont :

- la fréquence des vibrations qui se situe entre 35 Hz et 45 Hz selon le constructeur de la machine,
- la force de serrage des bourroirs, environ 16 kN par bourroir,
- le temps de serrage, qui est de 1.8 s pour 35 Hz et 1.3 s pour 45 Hz,

- la profondeur de plongée des bourroirs, qui représente la distance entre la surface inférieure des blochets et le bord supérieur des bourroirs, fixée à une valeur oscillant entre 15 mm et 20 mm,
- l’amplitude des signaux de vibration, entre 5 mm et 10 mm, qui doit être supérieure à 2 mm
- la force de pénétration dans le ballast, qui dépend directement du poids du dispositif de bourrage,
- la forme des bourroirs, en T .

Ces paramètres ont été fixés par des retours d’expérience et il est communément admis que la méthode de travail du personnel des bourreuses influe grandement sur le résultat du bourrage à la fois en terme d’homogénéité de la voie et en terme de qualité pour l’évolution du nivellement longitudinal.

A la suite d’une opération de bourrage on effectue une opération de stabilisation qui permet d’obtenir par vibration une assise de la voie équivalente à la circulation de 150000 tonnes pour les traverses en béton. C’est en quelque sorte une accélération du vieillissement de la voie.

1.2.4 L’évolution des défauts sur les lignes à grande vitesse

Expérience de la régénération de la ligne nouvelle Paris-Lyon [134]

La ligne à grande vitesse de Paris à Lyon (LN1) a été mise en service en plusieurs étapes à partir de 1981. La dégradation de la qualité géométrique de la voie, évaluée par la valeur du nivellement longitudinal, l’augmentation de la fréquence des bourrages mécaniques lourds nécessaires à son rétablissement, ainsi que l’existence de nombreuses zones boueuses rendant la voie non bourrable ont rendu nécessaires des relevages de 0.15 m dès 1996. Ces relevages avaient pour objectif d’introduire un ballast de meilleure qualité que le ballast initial qui présentait une trop faible dureté (12 à 19) et d’augmenter l’épaisseur de la couche de ballast sain dont les 25 cm d’origine étaient jugés trop insuffisants. Un renouvellement complet du ballast (dégarnissage jusqu’à la sous-couche) sur de nombreuses zones a été jugé indispensable et entrepris à partir de 1996.

A la suite de ces travaux, l’évolution de la qualité de la géométrie de la voie a montré une certaine disparité d’une zone à l’autre. Sur l’ensemble des zones traitées l’apport de ballast neuf et de meilleure qualité a rendu les voies de nouveau bourrables. Les défauts apparaissant à la suite de circulations peuvent être corrigés efficacement à la suite d’opérations de maintenance, leur planification étant difficile en raison des contraintes d’exploitation et matérielles.

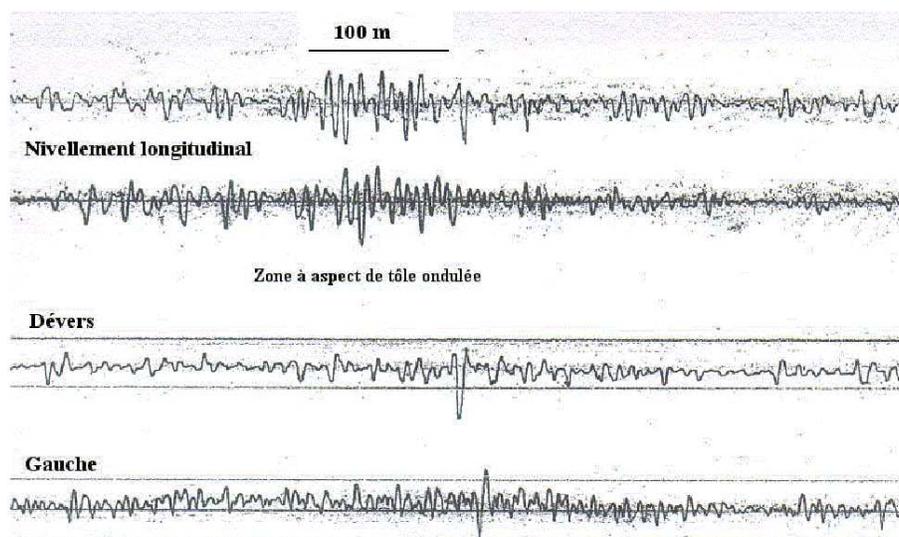


FIG. 1.15 – Enregistrement Mauzin.

La cause des désordres ne réside pas uniquement dans le ballast lui-même, la plate-forme pouvant aussi être mise en cause. Ce type de défauts apparaît sur les tracés Mauzin comme des oscillations, dont la longueur d'onde est souvent de 10 à 20 m. Cet aspect de tôle ondulée (fig. 1.15), est généralement la signature des zones d'instabilité de la plate-forme.

L'ensemble des défauts apparus à la suite de la régénération de la LN1 a pour cause possible :

- les conditions météorologiques qui semblent avoir été très humides depuis la régénération,
- la plate-forme a pu être abîmée lors de travaux de dégarnissage, notamment dans les zones de mise en place de la chaîne de dégarnissage,
- le relèvement de la vitesse de 270 à 300 km/h et l'augmentation du trafic (espacement entre les trains passé de 5 min à 4 min).

Il est tout de même important de souligner que l'augmentation de la vitesse reste un facteur d'aggravation que l'on ne peut écarter et les conditions hydrologiques ont sans doute joué un rôle important.

Phénomène de traverses danseuses

Il existe des phénomènes de dégradation qui peuvent au fil des années rendre la voie non bourrable. Un des phénomènes observé sur les voies ferroviaires, pas uniquement sur les lignes à grande vitesse, est l'apparition de *traverses danseuses* ou de *plage de danse*.

Sous l'effet des circulations, de la présence de défauts de rail ou d'instabilités locales de la plate-forme, il peut se produire une création de vides sous une traverse, sous un des blochets ou sous les deux. Ces vides entraînent une déflexion importante au passage des trains, la traverse venant taper sur le ballast. Cela peut être ressenti comme un choc anormal par les conducteurs de trains.



FIG. 1.16 – Surface inférieure d’une traverse et résultat de la production de fines sous la traverse en place.

Sous l’effet des chocs répétés entre le ballast et la traverse, l’usure de la traverse devient de plus en plus importante pouvant arriver jusqu’à sa destruction (fig. 1.16). Il en résulte le transport de fines sous l’effet des circulations sur une zone d’environ une dizaine de traverses. Le ballast est colmaté par des fines et l’ensemble forme un agrégat de grains de ballast, ces grains n’étant pas forcément très usés.

Afin de corriger les défauts apparus, des opérations de maintenance, bourrage, rajout de ballast, sont dans un premier temps effectués, mais des évolutions peuvent perdurer et il est nécessaire dans ce cas de réaliser une opération de dégarnissage pour enlever le ballast et la traverse endommagée pour les remplacer par du ballast sain et des traverses neuves.

1.2.5 Comprendre

Les règles de dimensionnement des couches d’assises ferroviaires sont restées pendant longtemps des règles d’ordre empirique et le fruit d’améliorations successives, suffisantes à une époque où les conditions de trafic évoluaient peu et où très peu de lignes nouvelles étaient créées.

A la fin des années 70, la nécessité de l’adaptation de la voie nouvelle au trafic de l’avenir a amené l’Office de Recherches et d’Essais de l’U.I.C. à entreprendre une démarche moins empirique, basée sur des essais en laboratoire, des expérimentations sur sites réels et sur l’utilisation plus systématique des premiers outils de modélisation numérique.

Cette démarche de compréhension des phénomènes est devenue indispensable à l’heure actuelle où le développement rapide du réseau à grande vitesse engendre des problématiques liées à des phénomènes dynamiques jusqu’ici mal identifiés.

Chapitre 2

Modélisation de la voie ballastée

L'objectif de ce chapitre est de présenter les diverses expériences menées pour améliorer la compréhension de la dégradation de la voie, et plus particulièrement pour identifier le comportement du ballast. Nous présenterons dans un premier temps les expériences dans ce domaine et ensuite nous exposerons divers types de modélisation.

2.1 Approches expérimentales

La compréhension des phénomènes comme le tassement ou le comportement sous chargement cyclique du ballast est un enjeu important en terme de recherche et en terme économique. Il existe de nombreuses expérimentations, dans lesquelles le ballast n'intervient qu'en tant qu'un des constituants de la voie, nous exposerons ici quelques travaux, dont l'objectif est la caractérisation proprement dite de ce matériau.

2.1.1 Etude du comportement vertical et latéral de la voie

Charge latérale limite supportée par la voie

L'étude de la résistance latérale de la voie a été le sujet d'investigations expérimentales menées par Prud'homme [110]. L'objectif était de déterminer une loi permettant de déterminer les niveaux d'efforts acceptables sans que la voie se déforme au-delà d'une limite acceptable. Deux systèmes expérimentaux ont été utilisés par Prud'homme sur une voie expérimentale :

- un wagon dérailleur possédant un essieu spécial permettant d'exercer des efforts latéraux et verticaux variables,
- un wagon tombereau qui est tiré dans l'axe de la voie par un dispositif sur une voie parallèle. Ce dispositif permet d'exercer une charge verticale de 17 tonnes et de contrôler les essais réalisés à l'aide du wagon dérailleur.

La résistance L de la voie est donnée pour des traverses en béton par la formule suivante :

$$L = 1.5 + \frac{P}{3} \quad (2.1)$$

où P est la charge à l'essieu (en tonnes).

Détermination d'une loi de tassement verticale

Les travaux de Nathalie Guérin [58] ont permis d'obtenir une formulation incrémentale du tassement. La démarche a consisté à identifier cette loi de tassement en partant d'observations expérimentales et en faisant varier certains paramètres. Cet échantillon est composé de ballast respectant la courbe granulométrique du ballast réel mais à l'échelle un tiers, *microballast*, reposant sur un élastomère. Au moyen d'une pièce métallique cylindrique de 192 mm de diamètre, des cycles de chargement sont appliqués simulant le passage de bogies.

L'approche a permis de proposer une loi reliant l'incrément de tassement vertical (déformation résiduelle) en fonction de la déflexion verticale d :

$$\frac{d\tau}{dN} = \alpha \cdot d^\beta \quad (2.2)$$

avec $\frac{d\tau}{dN}$ l'incrément de tassement vertical par cycle (en mm par cycle), d la déflexion verticale élastique maximale de la traverse (en mm), α et β des coefficients constants. Ramenés à échelle 1 par similitude, ces deux derniers coefficients prennent pour valeurs : $\alpha = 1,437 \cdot 10^{-6}$ et $\beta = 2.51$.

La déflexion verticale dépend notamment de la charge à l'essieu et de la raideur du sol. La vitesse n'a que peu d'influence si le domaine de fréquence de la sollicitation reste inférieur à la fréquence de désorganisation du massif de ballast.

Etude du comportement vertical et latéral

Les travaux de Valérie Bodin [19] ont eu pour but d'étudier le comportement du ballast sous chargement latéral et vertical à l'aide du banc d'essai BETTER (Ballast : Etude du Tassement Transversal à Echelle Réduite) où on sollicite un modèle de traverse bi-bloc (fig. 2.1). Le banc d'essai est à l'échelle réduite 1/3.

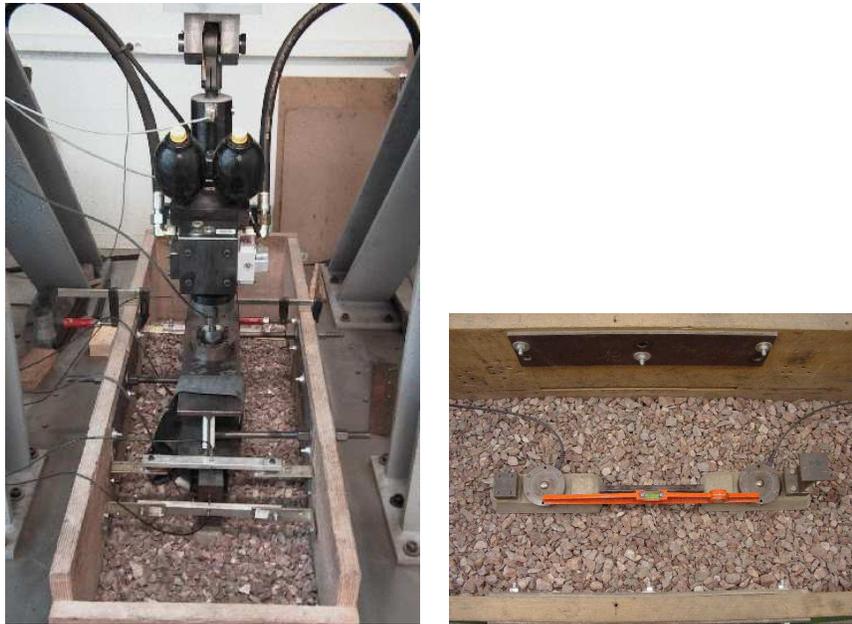


FIG. 2.1 – Banc d'essai BETTER et traverse bi-bloc employée.

Deux types d'essais ont été réalisés sur ce banc :

- des essais quasistatiques à faible nombre de cycles (environ 3000), afin d'évaluer le déplacement latéral élastique sous chargement (déflexion) et le tassement résiduel après décharge (tassement) de la traverse.
- des essais cycliques à grand nombre de cycles qui consistent à simuler le passage d'un train en appliquant un effort vertical et latéral sur la traverse reproduisant le passage d'un bogie.

Les essais quasistatiques mettent en évidence une phase de mise en place sur 300 cycles environ et ensuite une phase de stabilisation. Les essais à grand nombre de cycles font apparaître une phase de mise en place, où le tassement est important lorsque la sollicitation est purement verticale.

Les essais cycliques sur le banc d'essai à l'échelle 1/3 ont permis d'identifier une loi de tassement vertical et latéral valable au-delà de 250000 cycles :

- pour le tassement vertical : $\frac{d\tau_V}{dN} = 2,1 \cdot 10^{-6} (\delta_V)^{1.17}$,
- pour le tassement latéral : $\frac{d\tau_L}{dN} = 7 \cdot 10^{-6} (\delta_L)^{1.13}$,

où $\frac{d\tau_V}{dN}$ représente l'incrément de tassement vertical par cycle, δ_V la déflexion verticale, $\frac{d\tau_L}{dN}$ représente l'incrément de tassement latéral par cycle, δ_L la déflexion latérale.

Les conclusions des essais en terme ferroviaire sont :

- le tassement vertical est lié à la charge à l'essieu et à la qualité du sol à travers la déflexion verticale,
- le tassement latéral de la voie est lié à l'insuffisance de dévers et éventuellement à la raideur du sol,
- les valeurs du tassement obtenues restent très faibles quelle que soit la vitesse pour les charges ou l'insuffisance de dévers considérés.

A l'aide du même banc d'essai un phénomène important a été mis en évidence, l'existence d'une accélération critique. L'augmentation de la vitesse de sollicitation pour différentes charges appliquées sur le blochet entraîne une désorganisation du massif de ballast. Il a été observé une fluidification du tas de ballast, la traverse s'enfonçant jusqu'au bâti. Ces essais montrent que l'accélération peut être un paramètre plus représentatif que la déflexion.

Etude du comportement du ballast sous chargement cyclique

Les expériences menées par Indraratna et *al.* [61] consistent en une série d'essais cycliques sur du ballast en utilisant une cellule de forme parallélépipédique, les quatre plans verticaux pouvant se déplacer indépendamment les uns des autres, et munie d'un vérin permettant d'appliquer des chargements verticaux d'amplitude maximale 73 kN. Ce système permet d'imposer des contraintes majeures et mineures.

Des essais ont été réalisés à une fréquence de 15 Hz simulant une vitesse de 80 km/h et le nombre total de cycles par essai est de 500000.

Les résultats montrent que l'évolution des contraintes verticales en fonction des déformations verticales est caractérisée par un premier cycle de charge/décharge pour lequel les déformations permanentes sont importantes. Plusieurs essais sur différents types de ballast montrent que c'est le ballast neuf qui se tasse le moins, l'analyse de cette constatation met en avant le rôle de l'angularité des grains. Les auteurs en déduisent une loi de tassement :

$$\delta = \alpha + \beta \log(N)$$

avec α et β des paramètres dépendant de l'état initial de compaction, du type de ballast, de l'amplitude du cycle de chargement, du degré de saturation de l'échantillon.

Etude du tassement sur une expérience modèle

En s'inspirant du principe des matériaux de Schneebeli [76], une expérience, représentative du ferroviaire, a été réalisée par Combe au LCPC [29] avec pour objectif de confronter des résultats de simulations par éléments discrets et des résultats expérimentaux. L'emploi de la méthode des éléments discrets va permettre une analyse fine des évolutions des interactions entre grains afin d'évaluer le rôle de données micro-mécaniques difficilement mesurables.

Le dispositif expérimental représente une portion de voie ferroviaire. Il est constitué d'un bloc en aluminium représentant une portion de blochet, de prismes en béton haute performance à sections polygonales représentant les grains de ballast, le tout reposant sur une couche d'élastomère représentant le sol (fig. 2.2). Les grains modèles, en ciment haute performance et de trois diamètres différents (1 cm, 1.5 cm et 2 cm), sont répartis selon une loi de similitude à échelle un tiers. L'ensemble est disposé dans un bâti rectangulaire, sur lequel est fixé un vérin, asservi en force. Celui-ci permet d'appliquer des chargements cycliques sur le blochet avec diverses inclinaisons. Au cours des expériences des photos sont prises pour évaluer le déplacement de quelques grains. Des prismes rectangulaires ont été collés sous le blochet pour augmenter le seuil de cisaillement entre le blochet et les grains, en raison de nombreuses pertes d'adhérence du blochet sur les grains au cours des premiers essais.

Le type de chargement appliqué est un signal sinusoïdal de valeur moyenne 1000 newtons et d'amplitude 500 newtons. La fréquence des essais varie entre 0.25 Hz et 1 Hz et quatre angles de sollicitation sont utilisés, 0, 5, 10 et 15 degrés.

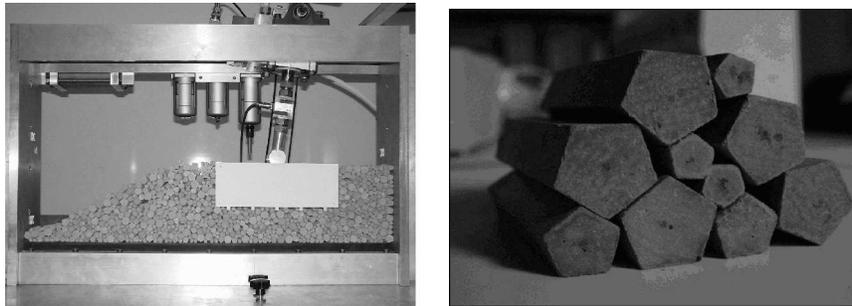


FIG. 2.2 – Photographie de l'expérience et des prismes.

La campagne d'essais réalisée à l'aide de ce dispositif a mis en évidence que la déstabilisation du massif granulaire est essentiellement due aux réarrangements géométriques des grains dans le massif sans qu'aucun phénomène d'endommagement des prismes (production de fines) ou d'endommagement des arêtes n'ait été constaté. Les tendances observées sont les mêmes que pour du ballast réel : les échantillons sont plus déstabilisés lorsque l'angle de sollicitation augmente et conduit systématiquement à la ruine au-delà d'un certain angle de chargement. Le nombre de cycles appliqué reste peu important en comparaison des essais réalisés sur du ballast réel ou du ballast à l'échelle 1/3, on reste dans une phase de mise en place. Deux essais à 20000 cycles mettent en évidence un premier régime transitoire de mise en place des grains et ensuite un régime, où le déplacement des grains évolue de manière plus régulière.

2.1.2 Etude de l'opération de bourrage et de la stabilisation

Stabilisation de la voie avant circulation

La stabilisation de la voie joue un rôle important dans l'augmentation de la résistance latérale et a été montré par Prud'homme lors de ces expériences. Janin [63] a réalisé une campagne d'essais avec deux engins de stabilisation différents : un engin de la SNCF appliquant un effort vertical

permanent auquel on ajoute un effort vibratoire et un engin développé par une firme permettant de faire varier la fréquence des vibrations dans l'axe transversal.

L'effet de la stabilisation est d'augmenter la résistance latérale pour les deux techniques. On observe une augmentation de la résistance latérale pour des traverses bétons d'environ 40 % par rapport à une voie non stabilisée et qu'il existe une fréquence optimale d'environ 25 Hz.

Cette opération permet une stabilisation de la voie plus rapide correspondant à de nombreuses circulations (équivalent à 60000 et 90000 tonnes). Janin propose une loi exprimant la résistance latérale en fonction du tonnage.

Etude de l'état initial de la densification du ballast [125]

Les études menées par Sato avaient pour objectif d'étudier l'opération de bourrage à l'aide d'un banc d'essai à échelle réduite. Le ballast est disposé dans une éprouvette est soumis à deux types de bourrage à l'aide d'une machine de type Jackson et une machine de type Vibrogir. Les résultats sont qualitatifs et visuels et ne résultent pas de mesures effectuées sur le banc. Il constate que le principe Vibrogir, pour lequel le ballast est compacté sous l'action de la vibration d'une semelle, est plus approprié à la densification du ballast. La méthode de type Jackson consiste à introduire une dent vibrée dans le ballast et le bourrage commence avec la liquéfaction du ballast à une fréquence de 30 Hz.

Etude du bourrage

Dans le cadre de la thèse de Ximena Oviedo [103], un banc d'essais dont le principe consiste à reproduire l'action des sollicitations mises en œuvre lors du bourrage du ballast a été développé. Ce banc d'essais a pour objectif d'améliorer la compréhension du bourrage et du comportement du ballast lors de cette opération, de comprendre le rôle de la fréquence et de la force de serrage et enfin d'optimiser cette opération.



FIG. 2.3 – Banc d'essais BOUBA (**B**ourrage du **b**allast).

Le banc d'essais (fig. 2.3) consiste en une boîte, délimitée par une paroi en plexiglass, pouvant se translater sous l'action d'une force, pour effectuer le serrage de la plaque bourroir qui effectue un mouvement horizontal d'amplitude contrôlée. L'action de serrage et la vibration sont découplées afin de mieux maîtriser l'évolution du système, en particulier sous le blochet. Ce banc ne reproduit pas la rentrée des bourroirs dans le ballast. La possibilité de visionner l'ensemble du

phénomène grâce à la paroi en plexiglas a permis de définir deux critères de qualité de bourrage : la densité de grains sous le blochet et le nombre de grains en contact avec le blochet.

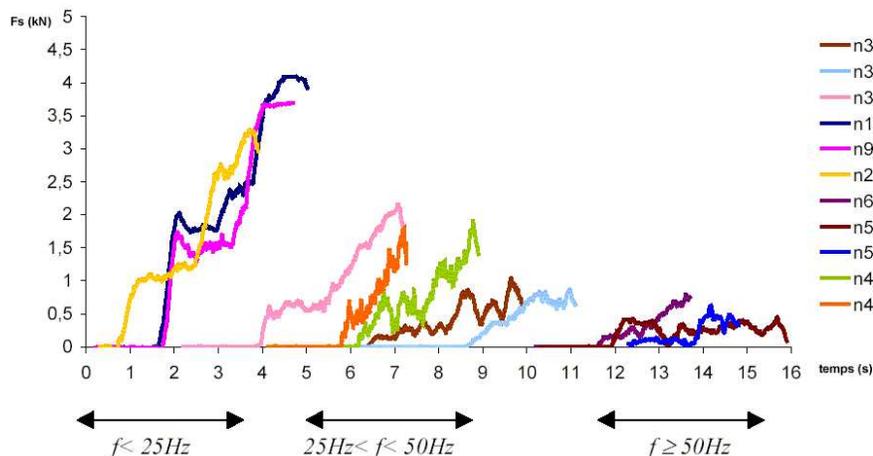


FIG. 2.4 – Influence des fréquences de bourrage sur la force nécessaire pour obtenir un bourrage optimal.

Les différents essais (n1,n2,...) (fig. 2.1.2) ont permis de mettre en évidence trois zones pour lesquelles un massif de ballast présente des comportements différenciés :

- un comportement dit *solide* pour la plage des faibles fréquences (inférieures à 15 Hz), où les grains sont soumis principalement aux efforts de serrage,
- un comportement visco-élastique pour les moyennes fréquences (inférieures à 30 Hz) où les efforts de serrage et les vibrations se combinent pour obtenir un bourrage efficace,
- un comportement dit *liquide* pour les hautes fréquences (supérieures à 35 Hz) où les vibrations entraînent une forte diminution de la résistance des grains de ballast à l’avancée du bourroir.

Cette approche expérimentale a permis de représenter les phénomènes réels constatés in-situ, mais qualitativement les comparaisons numériques sont plus difficiles à effectuer étant donné que le ballast utilisé respecte la granulométrie à l’échelle un tiers. En effet le comportement étant non linéaire, le changement d’échelle pour des quantités cinématiques est très difficile.

2.1.3 Synthèse

L’ensemble de ces études met en évidence l’appartenance du ballast à un milieu divisé ou plus spécifiquement granulaire. Le comportement du ballast soumis à des actions extérieures cycliques montre la sensibilité des résultats en fonction de la nature du sol sur lequel il repose et la variabilité possible lors d’une étude systématique pour identifier une loi de tassement. On retrouve une caractéristique des matériaux granulaires auxquels on attribue des comportements solides, liquides et le rôle de l’histoire des sollicitations joue un rôle important sur le comportement.

L’épaisseur en nombre de grains de la couche de ballast est généralement faible. Les comportements mis en évidence lors des expériences sont généralement traduits par des lois qui ne

reflètent que le comportement macroscopique de l'échantillon étudié. Mais il est aussi nécessaire d'étudier les phénomènes qui ont lieu au sein du ballast lui-même, la modélisation est alors un moyen supplémentaire d'investigation.

2.2 Etudes numériques

L'objectif général de la modélisation de la voie ferrée est d'être capable de prédire le comportement des divers composants de la voie, ce qui implique de :

- tenir compte des principaux composants de la voie : rail, traverses, ballast, sous-couche,
- prendre en compte une caractérisation réaliste des propriétés de chacun des composants,
- prendre en compte la géométrie du système,
- prendre en compte les diverses conditions de chargement possible, dynamique, statique, orientation,
- représenter les changements des propriétés des composants en fonction des conditions environnementales.

Actuellement, les diverses modélisations ont eu pour objectif de déterminer ou de prédire le tassement de la voie sous l'effet de circulation à l'aide de modélisation par éléments finis ou éléments discrets.

2.2.1 Modélisation par éléments finis ou discret/continu

La modélisation de la voie a été l'objet de nombreuses approches afin d'étudier le dimensionnement optimum des diverses sous-couches, ce qui a constitué les travaux de Larible [77], la réponse dynamique de la voie sous l'effet de l'usure ondulatoire du rail [59], ou de développer des modèles numériques pour traiter le comportement dynamique de la voie et des véhicules [98].

Modélisation du comportement latéral et vertical de la voie

Une modélisation par éléments finis a été proposée par Bodin [19] afin d'étudier numériquement le comportement latéral et vertical de la voie ferrée ballastée. A l'aide de la loi de tassement identifiée grâce aux essais expérimentaux il est possible de calculer les déflexions élastiques verticales et latérales de la voie sous un cycle de chargement et de mesurer un tassement irréversible après N cycles de chargement.

La détermination des caractéristiques mécaniques du ballast se fait par identification inverse à partir des essais menés sur le banc BETTER. Le ballast ayant un comportement non-linéaire, une loi de comportement localement non-linéaire a été adoptée, dont les paramètres ont été identifiés pour divers chargements au moyen du banc d'essai.

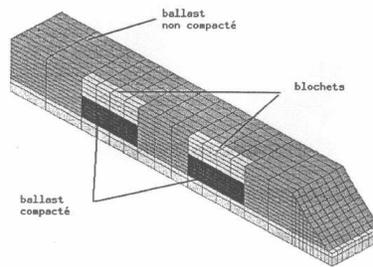


FIG. 2.5 – Schéma du maillage employé [19].

Le ballast est considéré comme la superposition de deux matériaux distincts (fig. 2.5), un matériau à forte rigidité pour le ballast compacté situé directement sous les blochets et un matériau à faible rigidité pour le ballast lâche. Cette approche nécessite l'identification de deux états du ballast pour deux niveaux de contraintes différents. Elle est plus simple que l'emploi d'une loi unilatérale de comportement du ballast à laquelle on attribuerait des modules élastiques différents en traction et en compression. Cette dernière approche ne modifie pratiquement pas les résultats mais entraînerait une multiplication du temps de calcul par 10.

La méthode proposée est intéressante et performante pour le calcul des déflexions élastiques par cycle, l'enrichissement de modèles de tassements, la détermination de matrices d'influence nécessaires à ces mêmes modèles, la compréhension de situations locales complexes pour faire intervenir les aspects hydrauliques, thermiques.

La méthode des éléments finis trouve une limitation importante dans la modélisation d'un matériau aussi discontinu que le ballast. L'assimilation du ballast à un matériau continu pose en effet un double problème :

- un problème de détermination des lois de comportement macroscopiques équivalentes de ce matériau,
- un problème de représentativité de ces lois de comportement dans une géométrie de dimension réduite due à la faible épaisseur de grains de ballast sous le blochet (environ une dizaine en terme de diamètre de grains).

Méthode de prédiction du comportement

Le travail d'Abdelkrim [4] s'inscrit dans la thématique de l'élaboration de méthodes de prédiction du comportement de l'infrastructure ferroviaire ou routière sous chargement cyclique. L'approche proposée se base sur la formulation d'une loi de comportement cyclique qui décrit l'accumulation progressive de déformations irréversibles dans une structure composée de matériaux granulaires.

Ce type de loi peut être mis sous la forme d'une relation entre le taux d'accumulation des déformations permanentes acquises au Nième cycle de chargement et les caractéristiques du chemin de contrainte suivi :

$$\frac{d\epsilon(x, N)}{dN} = F(N, (\sigma)(x, N)) \quad (2.3)$$

où ϵ est la déformation permanente du matériau en point x au bout de N cycles, $(\sigma)(x, N)$ est le cycle des contraintes auquel est soumis le matériau au même point entre N et $N + 1$.

Cette approche nécessite, dans le cadre de l'étude du tassement, d'une part la formulation d'une loi de comportement cyclique, qui doit être déduite d'essais en laboratoire pour chaque matériau, un outil de calcul pour déterminer le cycle de contrainte de référence en fonction de la charge considérée et une procédure numérique pour évaluer le tassement résiduel.

La mise en œuvre de la méthode sur des essais oedométriques et sur une modélisation simplifiée de l'essai BETTER à l'aide du code calcul CESAR a permis de commencer à valider l'approche et d'analyser l'influence de l'hypothèse d'élasticité linéaire pour modéliser le comportement réversible. Il est important de noter que le modèle ne prend pas en compte les effets dynamiques.

Etude du comportement dynamique

L'influence de la vitesse de circulation sur le comportement du véhicule, de la voie et de l'infrastructure implique l'étude des vibrations et de la propagation des ondes dans la voie. L'objectif de ces recherches est l'étude de phénomènes physiques de vibration apparaissant dans les voies en fonction de la vitesse des véhicules. Il existe de nombreuses études afin d'étudier le comportement d'un sol ou d'un massif soumis au passage d'une charge mobile, avec par exemple une approche stochastique pour caractériser la réponse dynamique du milieu pour des amplitudes aléatoires [81], et le modèle développé par Nguyen [97].

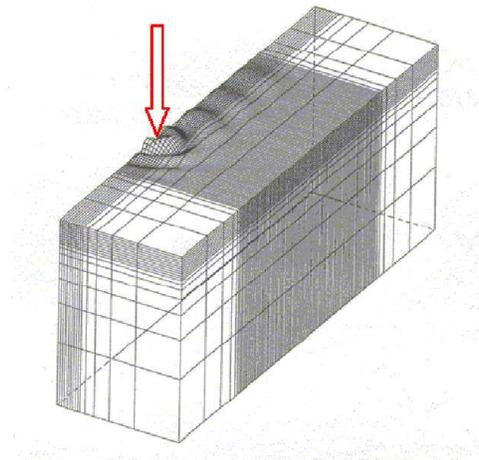


FIG. 2.6 – Exemple de propagation tridimensionnelle à travers un massif pour une charge mobile verticale [111].

La prise en compte du massif du ballast entraîne la présence de non-linéarités qui entrent en jeu dans le mécanisme de propagation d'onde. Une première modélisation consiste à étudier un massif multicouche visco-élastique tridimensionnel soumis à une charge mobile ponctuelle (fig. 2.6). Ce problème linéaire peut être résolu par une méthode semi-analytique, et les exemples numériques mettent en évidence l'influence de la vitesse ainsi que l'élasticité du milieu.

L'utilisation d'une loi de comportement non-linéaire pour le ballast permet de tenir compte des non-linéarités. Elle est caractérisée par une élasticité non-linéaire.

Modélisation du comportement du ballast par une approche discrète/continue

La prise en compte du caractère discret du ballast à l'aide d'approche continue est difficile. L'approche proposée par Suiker et *al.* [13], [14] consiste à considérer le ballast comme un assemblage de particules bidimensionnelles ponctuelles formant un réseau de cellules carrées, de masse m reliées entre elles par des ressorts longitudinaux et diagonaux. La maille du réseau est définie arbitrairement, en rapport avec la taille moyenne d'un grain de ballast.

L'analyse de la propagation d'onde dans ce milieu montre que pour des courtes longueurs d'onde, la dispersion des ondes est plus marquée, ce qui est le résultat du caractère discret de la couche considérée. Le nombre de modes propres de la couche dépend de la taille des particules et de l'épaisseur de celle-ci.

La prise en compte de particules ayant un rayon de 25 mm entraîne l'apparition de phénomènes vibratoires causés par la vibration individuelle des particules, phénomènes ne pouvant apparaître avec une description continue. La nature des ondes et leur intensité dépendent à la fois de la vitesse de chargement et de la nature de la couche de ballast.

L'approche proposée par Ricci et *al.* [121] est l'extension du modèle bidimensionnel proposé par Suiker en considérant un réseau tridimensionnel de particules reposant sur un milieu continu supposé infini.

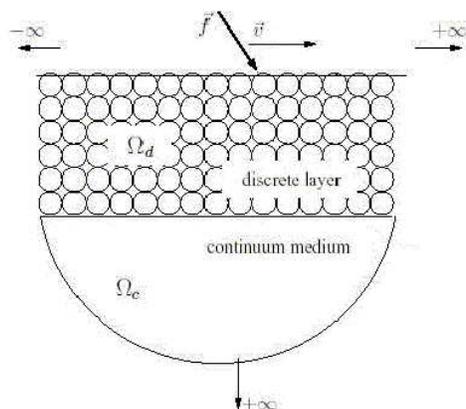


FIG. 2.7 – Schéma du modèle discret/continu [121].

La couche de ballast est formée d'un assemblage d'éléments cubiques avec des masses concentrées aux nœuds (fig. 2.7). L'écriture des équations de mouvement permet de déterminer une solution semi-analytique du mouvement de chaque particule. Le milieu continu est considéré comme un milieu élastique linéaire isotrope.

Les résultats numériques montrent l'importance de la rigidité de la sous-couche et de la vitesse de sollicitation qui influent sur l'accélération verticale. La comparaison entre l'approche discrète/continue et continue/continue montre des différences en terme de réponse dynamique.

L'objectif de cette approche est de pouvoir étudier selon les vitesses, la nature des charges, à l'aide d'un modèle semi-analytique, le niveau d'accélération en tout point d'un massif représentant une voie ferrée tout en tenant compte d'une modélisation discrète de la couche de ballast. En effet, les accélérations sont un paramètre important à analyser, selon le niveau mesuré on pourrait en arriver à la conclusion que la vitesse de la charge mobile entraîne des phénomènes d'accélération pouvant désolidariser le massif de ballast. La limite de ce modèle est d'une part la taille du système à résoudre, en effet la prise en compte de plusieurs mètres de voie peut engendrer un temps de calcul très important et d'autre part la modélisation du ballast par un assemblage de masses ponctuelles.

Outil d'aide au dimensionnement

L'outil logiciel dynavoie développé à la Direction de la Recherche et de la Technologie de la SNCF et l'école Centrale de Paris permet la prise en compte du comportement dynamique couplé aux véhicules ferroviaires et des voies en présence de défauts de voie ou de forme des roues. L'objectif est d'améliorer la compréhension du comportement de la voie lors d'un grand nombre de circulations.

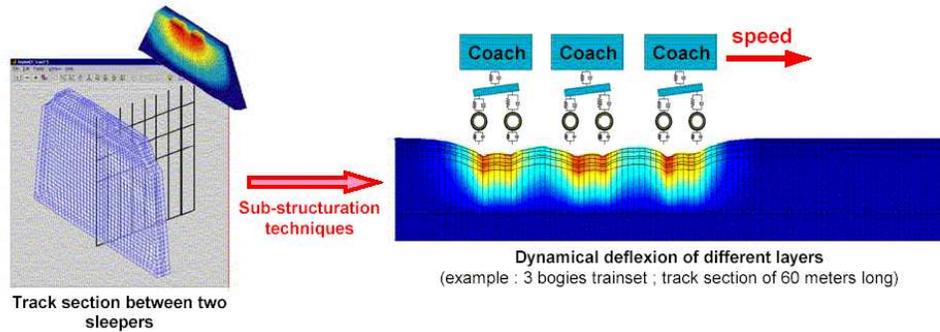


FIG. 2.8 – Modèle dynamique : déflexion verticale de la voie au passage de trois bogies [111].

L'approche proposée est basée sur une réduction du modèle éléments finis avec des techniques de sous-structurations nodales diminuant d'un facteur 20 à 50 le nombre de degrés de liberté à traiter. Cela permet d'étudier plusieurs dizaines de mètres de voies en quelques minutes sur un PC (fig. 2.8).

Le modèle permet d'analyser les déflexions et les contraintes mécaniques en tous points ainsi que l'évolution du tassement vertical. Il est important de noter que cette modélisation ne permet d'étudier que le tassement vertical, le gonflement n'étant pas traité.

2.2.2 Modélisation par éléments discrets

Les méthodes par éléments discrets ou méthodes par éléments distincts ont la particularité de ne pas traiter un milieu composé de grains comme un milieu continu en utilisant des méthodes numériques comme la méthode par éléments finis. Dans le cas des méthodes par éléments discrets chaque grain est traité indépendamment comme un corps rigide ou déformable avec un nombre fini de degrés de liberté.

Parmi les méthodes de résolution d'un problème d'évolution de grains en interaction il en existe deux couramment utilisées, la *Distinct Element Method* développée par Cundall [36] caractérisée par la description des forces d'interaction de contact par des systèmes de ressorts et d'amortisseurs et la méthode *Contact Dynamics* [37], [88] caractérisée par une description des actions intergranulaires par des lois à seuil, des lois de chocs et des conditions unilatérales et un traitement implicite de l'équation de la dynamique.

Ces méthodes sont utilisées pour étudier le comportement de sols, par exemple l'étude de l'effort exercé par une dent introduite dans un sol [100], l'étude de structures maçonnées [5], l'étude du comportement de milieux modèles comme un assemblage de disques soumis à une compression biaxiale [31], le rôle du frottement et du réseau des forces dans un assemblage granulaire [112].

Nous allons présenter divers travaux dédiés à la modélisation du ballast à l'aide des méthodes par éléments discrets et deux approches traitant de grains polyédriques pouvant constituer une alternative pour modéliser le comportement du ballast.

Une approche bidimensionnelle à l'aide de disques

L'évolution de la qualité de la voie, en particulier l'évolution du nivellement longitudinal, avec l'augmentation du trafic ferroviaire est une problématique importante. Andres Lopez Pita et Joan-Manuel Estrades Panades [82] considèrent que les méthodes par éléments finis ont permis d'analyser l'influence des différentes raideurs des ensembles constituant la voie mais ne permettent pas de reproduire complètement l'évolution de la couche de ballast sous chargement cyclique. Ce constat provient du fait que l'on ne prend pas en compte le caractère discret du ballast, constitué d'un assemblage de grains en interaction.

Ils proposent d'utiliser les méthodes par éléments discrets avec l'approche proposée par Cundall en modélisant les grains de ballast par des disques. Cette approche leur a permis, pour une configuration géométrique respectant celle d'une voie ferrée et une distribution de grains respectant la granulométrie du ballast, d'analyser la porosité de la couche de ballast et pour un chargement appliqué d'en déduire les efforts exercés sur les grains. La connaissance de ces efforts a permis d'évaluer la fraction de grains ayant dépassé le critère de rupture défini.

La prise en compte du caractère discret du ballast permet d'accéder à des informations locales difficilement mesurables lors d'expériences.

Une approche tridimensionnelle à l'aide de sphères

Dans le cadre de la thèse de Guérin [58], la constatation est faite que l'épaisseur de ballast considérée est faible, environ une dizaine de diamètres de grains, et que la mécanique des milieux continus n'est pas forcément adaptée pour les volumes considérés. Les méthodes par éléments discrets se sont avérées être une opportunité. L'approche retenue a été Molecular Dynamics avec l'emploi de sphères représentant les grains de ballast. L'essai avec l'approche Contact Dynamics proposée par Moreau et Jean n'avait pas été concluante. L'objectif de l'utilisation de l'approche granulaire était d'analyser la répartition des forces dans un volume de ballast simulant l'essai Microballast.

L'analyse a porté sur un échantillon de sphères reposant sur une couche de sphères modélisant le sol, reliées par un ressort à un point fixé, formant une boîte de 500 mm de côté et 100 mm de haut. L'application d'une force sur l'échantillon montre que la répartition des forces au sol est peu étalée et la courbe force - déplacement peut être comparée avec des essais expérimentaux réalisés sur du Microballast.

Une approche bidimensionnelle à l'aide de polygones pour modéliser le bourrage

L'objectif de la thèse de Oviedo [103] était d'étudier et de reproduire les phénomènes physiques mis en jeu lors du bourrage sur la base d'une approche numérique et expérimentale. L'approche numérique, basée sur la méthode par éléments discrets, avec l'approche de type Molecular Dynamics, a été développée dans un logiciel éléments discrets et adapté pour traiter le contact entre particules polygonales.

La première difficulté a été de développer un algorithme d'intersection entre polygones, permettant de statuer sur trois types de contact, *face-face*, *sommet-face* et *sommet-sommet*, et de calculer l'aire de recouvrement des polygones en contact afin de calculer les forces au contact. La deuxième difficulté est liée à la résolution du problème de contact et la définition des paramètres à introduire.

Les premiers cas tests ont été la mesure d'un angle au repos de grains polygonaux respectant la granulométrie du ballast permettant de retrouver un angle naturel du ballast de 40 degrés pour un coefficient de frottement intergranulaire de 0.8 et des essais biaxiaux pour lesquels les tendances observées dans la littérature ont été retrouvées. Les temps de calcul pour un test biaxial avec 1000 polygones et une déformation de 5% était de 3 heures environ.

Ces résultats ont confirmé l'intérêt des méthodes par éléments discrets et l'application à l'étude du phénomène de bourrage a été faite en modélisant le banc d'essais BOUBA (fig. 2.9).

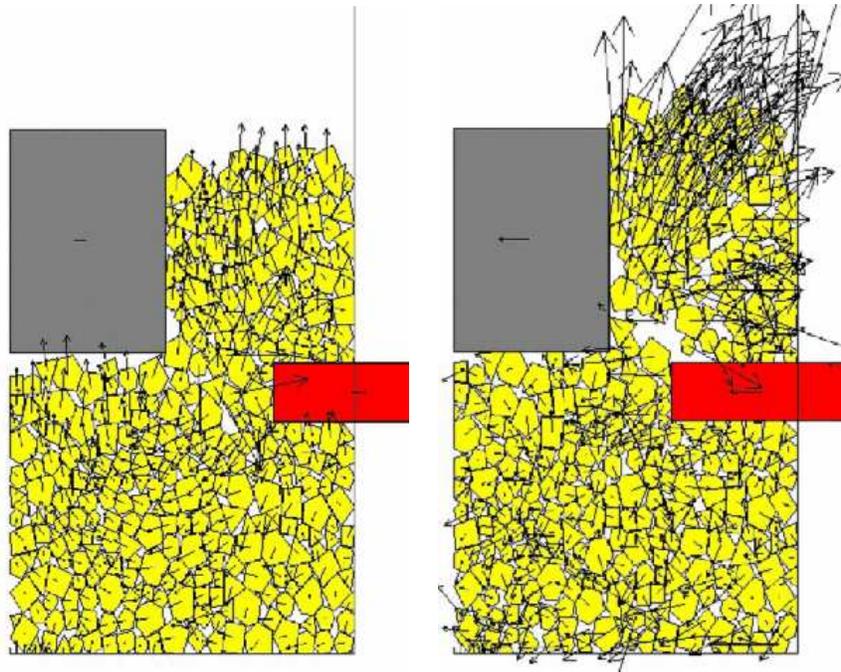


FIG. 2.9 – Exemples de simulations.

La simulation numérique retrouve qualitativement les résultats déterminés lors de l'expérience, une première gamme de fréquences pour laquelle l'ensemble des grains forment un amas, l'état solide, une deuxième gamme de fréquence où l'on trouve un état assimilable à un comportement gazeux et enfin la troisième gamme où l'on constate un état liquide.

L'approche développée montre l'intérêt des méthodes par éléments discrets pour modéliser des phénomènes mettant en jeu les non-linéarités présentes dans un milieu comme le ballast et la capacité de ces méthodes à reproduire un phénomène expérimental.

Une approche bidimensionnelle à l'aide de polygones pour étudier le tassement

L'étude de la déformation irréversible d'un massif de ballast à l'aide d'une méthode par éléments discrets a été abordée par Ishikawa et Horiike [62]. Le modèle considéré est constitué d'un assemblage de polygones représentant les grains de ballast respectant trois granulométries différentes et de trois blocs. L'ensemble repose dans une boîte et pour étudier l'influence du niveau

de bourrage, des grains de ballast sont enlevés par rapport à la configuration initiale soit sous les traverses soit entre les traverses.

L'application de quelques cycles de chargements, 5 au maximum sur les différentes configurations, permet de mettre en évidence que l'amplitude du déplacement résiduel chute au fur et à mesure des cycles et de comparer ces essais numériques à des essais expérimentaux. Les essais réalisés sur des échantillons présentent des interstices en plus grand nombre, l'amplitude des déplacements résiduels est plus importante.

L'analyse du mécanisme de déformation conduit à identifier que le tassement sous les traverses s'effectue sous compression, et qu'en même temps il se produit un phénomène de cisaillement entre les traverses. L'analyse du nombre de coordination, le nombre moyen de contacts par particules, montrent une augmentation du nombre de coordination sous les traverses. Cette tendance est aussi observée entre les traverses mais est beaucoup moins marquée.

L'utilisation des méthodes par éléments discrets nécessite un calage par rapport à des essais expérimentaux et nécessite le développement d'outils spécifiques pour l'analyse des résultats.

Une approche bidimensionnelle polygonale avec la méthode Contact Dynamic [29]

Dans le cadre du stage *post doctoral* de Gael Combe, une première validation de l'approche par éléments discrets a été menée par comparaison avec une expérience reprenant le principe de Schneebeli. La partie numérique de cette étude a été menée grâce au logiciel développé par Moreau permettant de traiter les interactions entre grains polygonaux (fig. 2.10).

La méthode numérique adoptée est la méthode Contact Dynamics développée par Moreau et Jean. Il a été nécessaire d'adapter le logiciel afin de pouvoir modéliser l'élastomère de l'expérience par une sous-couche déformable. Cette sous-couche est constituée de polygones reliés à un ressort et un amortisseur, reprenant le modèle de Kelvin-Voigt et possédant un seul degré de liberté dans le sens vertical. La prise en compte des efforts exercés par le modèle visco-élastique est faite de manière explicite, en évaluant les efforts exercés sur les grains de la sous-couche, on est capable de déterminer l'accélération de chaque grain, de calculer leur vitesse et d'en tenir compte dans le processus itératif de Gauss-Seidel. Cette modélisation proposée pour le sol déformable consiste donc à introduire des forces explicites dans une méthode de calcul implicite. Pour l'ensemble des simulations un coefficient de frottement de l'ordre de 0.5 a été considéré.

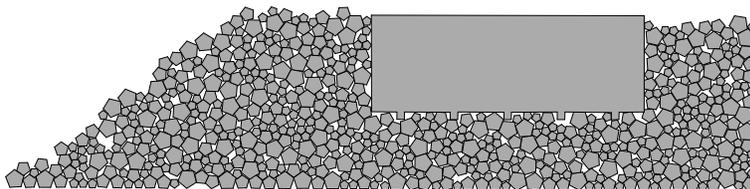


FIG. 2.10 – Exemple de simulations.

Les simulations de chargement cyclique sur un massif granulaire montrent une grande variabilité dans les résultats de mesures du déplacement du blochet. Les simulations conduisent selon la précision de calcul adopté à des ordres de grandeurs de tassement similaires avec l'expérience. La ruine systématique de l'échantillon pour un angle de chargement supérieur à 15 degrés a aussi

été observée. Enfin des comportements similaires avec l'expérience, recirculation de grains, mouvement du blochet ont été observés.

Mais deux principales difficultés ont été mises en évidence concernant les résultats des simulations numériques :

- la première concerne la précision des calculs, en effet l'interpénétration géométrique entre les grains peut, selon le jeu de paramètres employés (pas de temps, norme de convergence), mettre en doute les mesures de tassements effectuées en cours de calcul. Il est apparu nécessaire d'être très exigeant sur la norme de convergence pour obtenir des résultats satisfaisants en terme d'interpénétration, ce qui engendre la deuxième difficulté liée à ce type de simulation, le temps de calcul.
- en effet les temps de calcul sont très longs, jusqu'à 7 semaines pour faire 1000 cycles de chargement à 0.5 Hz.

Etude du tassement à l'aide de l'approche Molecular Dynamics

Le comportement du ballast sous chargement cyclique a été étudié à l'aide de la méthode par éléments discrets avec l'approche de type Molecular Dynamics par Kruse et Popp [73]. Le modèle développé prend en compte l'angularité des grains de ballast en considérant des grains ayant une enveloppe polygonale. La méthode employée pour évaluer les forces de contact est la dynamique moléculaire, le module de la force normale est proportionnel à l'aire de recouvrement des polygones. La loi de Coulomb est utilisée pour modéliser le frottement. Le pas de temps usuellement employé lors des simulations en fonction du chargement appliqué est de l'ordre de 0.5 μ s.

La première constatation faite porte sur l'influence des conditions initiales, en effet plusieurs échantillons sont considérés, différents par la forme des grains, celle-ci respectant des propriétés fixées mais sont générés aléatoirement. Les tassements observés sur une vingtaine de cycles, peuvent être très différents (de 2 mm à 11 mm). Il est donc nécessaire, pour obtenir un comportement moyen, de réaliser un nombre important de calculs.

L'augmentation de l'accélération appliquée lors de cycles de chargements entraîne un accroissement des incréments de tassements plus important.

L'application d'un nombre de cycles plus important, environ 700, ne permet pas de dégager plusieurs phases dans le tassement. En effet il est observé de nombreux réarrangements ou accidents pour ces premières centaines de cycles.

2.2.3 Conclusion

Les différents types de modélisation présentés n'ont pas les mêmes objectifs. Les modélisations continues permettent, à l'aide d'une loi de tassement identifiée expérimentalement, de faire une prédiction de l'évolution des incréments de tassement par cycle de chargement ou d'évaluer la réponse de la structure soumise à une charge mobile.

La loi proposée par Bodin [19] exprime l'évolution du tassement vertical et ne dépend pas de la vitesse de la sollicitation malgré les constats fait sur l'effet de ce paramètre. La prise en compte des déformations irréversibles à l'aide de la loi de comportement proposée par Abdelkrim [4] ne tient pas compte de la vitesse ou de l'accélération induite par la sollicitation.

Les approches proposées pour étudier l'influence d'une sollicitation dynamique ont pour objectif d'obtenir une loi de tassement dépendante de l'accélération tout en tenant compte si possible de la particularité du ballast, dont le comportement ne peut être décrit par une loi linéaire. L'ensemble des solutions proposées donne de bons résultats qualitatifs et quantitatifs et permet de réaliser des études paramétriques avec des temps de calculs raisonnables.

Toutefois la prise en compte des non-linéarités pour modéliser le ballast implique des développements qui peuvent être pénalisants pour les temps de calculs et nécessitent d'adopter des lois de comportement encore aujourd'hui difficiles à identifier et à généraliser à n'importe quel type de ballast.

Les mécanismes impliqués dans le tassement ou toutes autres sollicitations d'un massif de ballast sont difficilement explicables par ces méthodes, il est nécessaire d'adopter une modélisation plus fine et tenir compte des interactions entre les grains à l'échelle locale. Les approches par éléments discrets montrent leurs aptitudes à la description d'une évolution d'un granulat, les informations issues des simulations permettant d'étudier des quantités micro-mécaniques difficilement mesurables, comme les chaînes de forces entre les grains. Les temps de calculs sont un obstacle pour des études où le temps simulé est long, par exemple dans le cas de chargements cycliques, mais il existe une approche permettant d'entrevoir des possibilités intéressantes. Il est tout de même possible d'étudier le tassement d'un blochet sous chargement, celui-ci étant le résultat des réarrangements de grains [73, 29].

Conclusion de la première partie

L'étude du comportement des milieux divisés est actuellement un enjeu scientifique important, et l'amélioration de la compréhension à la fois par des expériences modèles ou des simulations numériques révèle à la fois une richesse et donc des difficultés. En effet ces milieux ont des comportements différents selon les sollicitations auxquelles ils sont soumis. Cette remarque a son importance étant donné le domaine d'application que nous désirons étudier : le ballast. Il existe aujourd'hui peu d'expériences modèles reprenant le type de sollicitation ainsi que la configuration afin de mettre en évidence les mécanismes liés au tassement et les défauts de voie qui en découlent.

Dans cette première partie nous avons montré que les expériences du domaine ferroviaire ont mis en évidence que le comportement du ballast n'est pas facilement identifiable ou du moins explicable, en effet les résultats sont sensibles à la nature du sol sur lequel repose le ballast et l'histoire des actions qu'il a subies. Les phénomènes observés dans le cas d'expériences comme le bourrage [103] ou les chargements cycliques [19] montrent que le ballast peut avoir les comportements que l'on assimilera à un fluide ou purement solide. La configuration particulière du ballast sous le blochet implique que la dynamique des grains semble être très particulière, en effet le ballast est comprimé entre la sous-couche et la traverse sur une épaisseur ne dépassant pas la dizaine de diamètres de grains.

L'ensemble des modélisations proposées pour étudier le ballast ou prédire son comportement montrent jusqu'à aujourd'hui deux limitations :

- dans le cas d'un modèle continu, le ballast est modélisé par une loi non-linéaire afin de traduire son comportement particulier, le tassement mesuré étant le résultat d'une loi de tassement. Les phénomènes locaux propres aux matériaux granulaires sont difficilement pris en compte,
- dans le cas d'un modèle discret, la limitation est le temps de calculs ou le nombre de cycles calculés, mais tiens compte du caractère discret du ballast et permet d'observer des phénomènes de réarrangements, de mesurer des quantités micro-mécaniques difficilement mesurables expérimentalement.

Les méthodes par éléments discrets ont montré leur aptitude pour la description de phénomènes tels que les chargements cycliques, la ségrégation. Il apparaît clairement que l'on ne peut étudier le ballast à l'heure actuelle pour comprendre son comportement à l'aide de modèles continus. Le modèle éléments discrets apparaît très intéressant pour étudier le comportement du ballast, mais il est nécessaire à la fois d'améliorer les modèles existants et d'aborder le modèle tridimensionnel.

Deuxième partie

**Méthodes numériques par éléments
discrets**

Introduction

La modélisation du comportement d'un granulat comme le ballast peut être faite à l'aide de diverses approches. Il est possible d'étudier plus ou moins finement, à différentes échelles, des phénomènes liés aux actions des sollicitations auxquelles il est soumis, cisaillement, chargements cycliques. Un granulat comme le ballast est usuellement modélisé comme un milieu continu, à l'aide d'une approche éléments finis. Il existe néanmoins des alternatives à l'aide des méthodes par éléments discrets permettant de tenir compte du caractère discret d'un granulat et des caractéristiques anguleuses de ce matériau. Les informations exploitables grâce à ce type de méthode sont riches, il est possible de dégager des comportements macroscopiques connus et d'enrichir les connaissances par des études à l'échelle du grain [103, 73, 100, 76, 94].

Dans cette seconde partie nous allons présenter en détails un modèle éléments discrets permettant de traiter des interactions entre corps bidimensionnels et tridimensionnels, ainsi que les difficultés théoriques et techniques afférentes.

Le premier chapitre est consacré à la description de l'ensemble des éléments nécessaires pour construire un modèle par éléments discrets, parmi lesquels nous exposerons les orientations choisies. Ensuite nous détaillerons la méthode de résolution du problème d'interaction choisie, l'ensemble des éléments étant applicable dans le cas bidimensionnel et tridimensionnel.

Les deux chapitres suivants sont consacrés à la présentation des particularités des modèles bidimensionnel et tridimensionnel, en particulier le paramétrage, la détection géométrique de points de contact, ainsi que des études de sensibilités numériques.

Chapitre 3

Méthodes par éléments discrets

3.1 Introduction

Les méthodes par éléments discrets ont pour objectif de modéliser le comportement collectif d'un milieu constitué d'éléments distincts en interaction. Ces méthodes sont couramment utilisées pour la modélisation des milieux granulaires, par exemple le sable, les roches, les milieux condensés comme les gels ou les suspensions, les tissus vivants comme les cellules cœsseuses, les milieux fracturés ou enfin dans le domaine de la robotique.

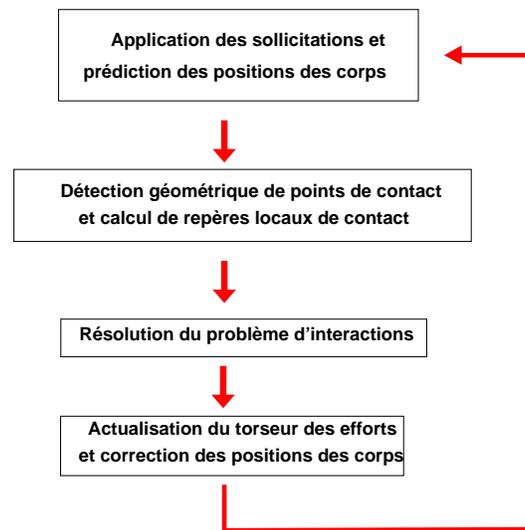


FIG. 3.1 – Étapes d'une méthode par éléments discrets.

Une des particularités des méthodes par éléments discrets est de prendre en compte chaque élément constituant le milieu étudié comme une entité à part entière dont le mouvement est géré par ses interactions avec son environnement. Le principe général de ces méthodes est rappelé sur la figure 3.1.

Une autre particularité est que les systèmes que nous allons considérer sont non-réguliers. On peut dégager trois raisons :

- les corps peuvent subir de grands déplacements et de grandes rotations, sans être nécessairement déformés, ce qui implique une non-linéarité de type cinématique,
- dans l'éventualité d'une collision entre deux particules **rigides**, la fonction dépendant du temps représentant la vitesse est discontinue, ce qui implique une non-régularité temporelle. Une collision apparaît comme instantanée par rapport à l'échelle de temps du mouvement,
- les lois d'interaction entre deux corps sont généralement des relations non-linéaires entre efforts et vitesses relatives. Ces relations peuvent, par exemple, être des conditions unilatérales, du frottement de Coulomb. La présence de conditions unilatérales engendre des discontinuités dans les évolutions des variables cinématiques et sthéniques.

Nous allons présenter dans ce chapitre l'ensemble des éléments nécessaires pour une modélisation par éléments discrets : discrétisation en espace du comportement des corps, leur cinématique, la détection des interactions, les lois vérifiées par ces interactions et enfin les diverses stratégies et méthodes de résolution du problème complet.

3.2 Equation du mouvement d'un corps en présence de contact

L'équation de la dynamique d'un corps en présence de contacts mais sans choc peut être écrite sous la forme suivante :

$$\mathbb{M}\dot{u} = \mathbb{F}(q, u, t) + \mathbb{P}(t) + r \quad (3.1)$$

avec q une paramétrisation quelconque (par exemple la position du centre de gravité d'un corps rigide, les paramètres de rotation de ce corps ou les déplacements des nœuds d'un maillage éléments finis), u la fonction vitesse et r la contribution des forces de contact que l'on ne connaît pas a priori. Les n -vecteurs $\mathbb{F}(q, u, t)$ et $\mathbb{P}(t)$ représentent les efforts extérieurs ou intérieurs ainsi que des termes dépendant de la vitesse que l'on appelle couramment *centrifuge* et *gyroscopique*.

Pour un corps rigide cette équation signifie que le torseur des efforts extérieurs est égal au torseur dynamique. On peut écrire cette équation sous la forme des équations de Newton-Euler :

$$m\dot{v} = P(t) + r \quad (3.2)$$

$$I\dot{\omega} = -\omega \times (I\omega) + M_P(t) + M_r \quad (3.3)$$

où v représente la vitesse du centre de masse, ω le vecteur vitesse angulaire, $\dot{\omega}$ la dérivée du vecteur vitesse dans le repère lié au solide, $P(t)$ et $M_P(t)$ représentent respectivement la résultante et le moment au centre de gravité du torseur des efforts extérieurs, r et M_r la résultante et le moment résultant au centre de gravité du torseur des efforts de contact, m la matrice de masse, I la matrice d'inertie. L'équation (3.3) est a priori non-linéaire en raison du premier terme de droite, terme nul dans le cas bidimensionnel ou lorsque le corps a une symétrie sphérique.

Cette équation différentielle ne permet pas de décrire rigoureusement, d'un point de vue mathématique, ce qu'il se passe lors d'une collision ou tout autre phénomène non-régulier. L'expression (3.1) doit donc être étendue au formalisme de la Dynamique Non-Régulière. En considérant que la fonction vitesse u est une fonction à variation localement bornée il est possible d'écrire le problème en terme de *mesures différentielles* comme le propose Moreau [89, 37] :

$$\mathbb{M}du = (\mathbb{F}(q, u, t) + \mathbb{P}(t))dt + r d\nu \quad (3.4)$$

où du représente la mesure différentielle de u , dt la mesure de Lebesgue et r la contribution locale des impulsions exercées lors de la présence de contacts, et $d\nu$ une mesure non négative. Dans le cas régulier, on retrouve la forme classique (3.1) avec $du = \dot{u}dt$.

3.3 Description du contact

Nous allons brièvement évoquer les choix faits pour modéliser le contact de manière générale. La localisation du contact dépend de l'échelle choisie, le contact peut être un point, une ligne ou une surface. Ces situations que l'on retrouve pour des objets rigides ou déformables peuvent être prises en compte à l'aide de diverses approches. Il est classique dans les simulations de matériaux granulaires de considérer une approche nœud à nœud, les contacts linéiques ou surfaciques étant représentés par plusieurs points de contact simultanés. Ceci pouvant introduire une surabondance d'équations.

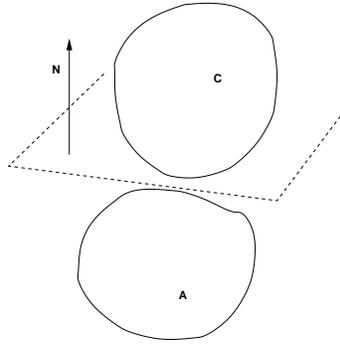


FIG. 3.2 – Schéma candidat/antagoniste.

La présence d'un choc entre deux corps engendre une percussion, et par le principe d'action réaction les deux corps sont soumis à des forces exercées au point de contact de sens opposées. Ces forces impliquent que les corps ne s'interpénètrent pas. Il est alors possible de définir un choix de modélisation, en définissant le principe suivant : soit deux corps en contact, un antagoniste A et un candidat C, on postule que le candidat ne doit pas pénétrer l'antagoniste. L'antagoniste porte le repère local de contact, la normale étant orientée de l'antagoniste vers le candidat (fig. 3.2).

Le contact entre un corps candidat (C) et un corps antagoniste (A) va être décrit par des relations entre deux points localement les plus proches, sur les deux enveloppes des corps. On suppose qu'à chaque instant on est capable de définir un tel couple de points les plus proches ainsi que le repère local (n, t, s) .

Les lois de comportement de l'interaction sont écrites en terme de distance algébrique (g) et de vitesse relative (U) entre les deux corps. Les vitesses relatives U dans le repère local et les vitesses u dans le repère général peuvent être reliées par un opérateur que l'on notera $H^{*\alpha}$, pour un contact α , et qui est construit grâce à des relations cinématiques. Une description plus détaillée de la construction de cet opérateur de passage peut se trouver dans [142]. Si on considère un contact α , on peut donc écrire :

$$U^\alpha = H^{*\alpha}(q)u \quad (3.5)$$

La relation duale entre les réactions locales R^α et leur contribution dans le repère global r^α s'écrit :

$$r^\alpha = H^\alpha(q)R^\alpha \quad (3.6)$$

r dans l'équation (3.1) représente la somme de l'ensemble des contributions des contacts appliqué au corps. Les opérateurs $H^{*\alpha}(q)$, $H^\alpha(q)$ sont linéaires et transposés l'un par rapport à l'autre. L'opérateur H^α est construit grâce à des considérations énergétiques.

3.4 Lois d'interaction

Les actions intergranulaires peuvent être décrites à différentes échelles de temps et d'espace selon le niveau de description nécessaire. Ces actions peuvent résulter de phénomènes très complexes nécessitant par exemple la prise en compte de réactions chimiques, des phénomènes thermiques, modifiant ces actions au cours du temps. Il est courant dans le domaine de la simulation

numérique des matériaux granulaires de choisir des lois à seuil pour traduire la phénoménologie d'interactions qui restent en général mal connues.

Comme nous le verrons par la suite, les lois utilisées pour nos simulations restent simples : l'unilatéralité et la loi de frottement sec.

3.4.1 Unilatéralité

Le contact unilatéral signifie que deux corps ne peuvent s'interpénétrer. Une interprétation simple est de considérer qu'il n'y a pas d'attraction (d'action à distance) et pas de force de cohésion. L'expression de l'ensemble de ces assertions est résumé par les *conditions de Signorini en interstice* :

$$g \geq 0, R_N \geq 0, gR_N = 0 \quad (3.7)$$

où g représente l'interstice entre deux corps, R_N la composante normale de la réaction locale et l'indice N indique la partie normale d'un vecteur.

La prise en compte de cette loi discontinue nécessite soit une technique de régularisation soit d'employer une méthode de résolution capable de traiter des conditions de complémentarité.

Il est possible de réécrire les conditions de Signorini (3.7) en fonction de la vitesse relative normale U_N , comme le propose Moreau [87], sous la forme d'une *condition de complémentarité en vitesse* (3.8) :

$$\begin{aligned} &\text{à un instant } t_0, g(t_0) = 0 ; \\ &\forall t \in]0, T], \text{ si } g(t) \leq 0 \text{ alors} \\ &U_N \geq 0, R_N \geq 0, U_N R_N = 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

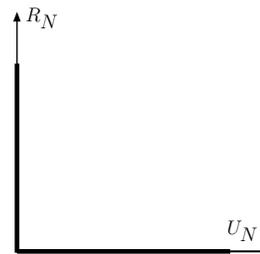


FIG. 3.3 – Graphe de la condition de complémentarité en vitesse.

Les conditions de complémentarités, en interstice ou en vitesse, modélisent le contact de façon idéale ou simplifiée. En effet à l'échelle du contact, la surface des objets en interaction n'est pas lisse comme un plan ou la surface d'une sphère. La présence d'aspérités susceptibles de se déformer sous l'action du contact permet de justifier un modèle de comportement différent. Par exemple on peut proposer que la réaction soit proportionnelle à l'interstice g , qui peut prendre des valeurs négatives traduisant une *interpénétration*. La condition d'unilatéralité est ainsi régularisée par un modèle à flexibilité linéaire qui peut s'écrire sous la forme :

$$\text{Si } g \leq 0, R_N = -k_N g; \text{ si } g > 0, R_N = 0 \quad (3.9)$$

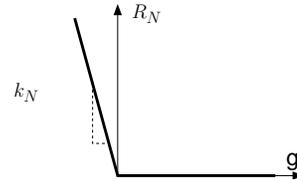


FIG. 3.4 – Graphe d'une loi de contact régularisée.

Le modèle présenté par les conditions de (3.4.1) est relativement simple ; il est possible de l'enrichir comme dans les méthodes de type Molecular Dynamics. Par exemple, on peut proposer le modèle suivant :

$$\begin{aligned} \text{Si } g \leq 0, \text{ alors } R_N &= \max(0, -k_N g - \nu_N U_N) \\ \text{Si } g > 0, \text{ alors } R_N &= 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

Les termes k_N et ν_N traduisent une raideur et une viscosité.

Il est important de souligner l'approche régularisée et la prise en compte de la loi de complémentarité en vitesse nécessitent un schéma d'intégration adapté dont nous discuterons au paragraphe suivant.

3.4.2 Lois de frottement

La loi de frottement sec de Coulomb peut être écrite de la manière suivante, dans le cas d'un contact :

La réaction tangentielle s'oppose au glissement, elle doit vérifier $\| R_T \| \leq \mu R_N$. Si $\| U_T \| > 0$, $R_T = -\mu R_N \frac{U_T}{\|U_T\|}$ sinon $\| R_T \| \leq \mu R_N$.

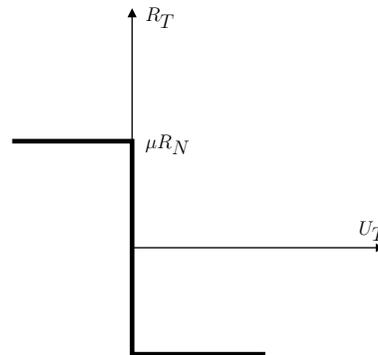


FIG. 3.5 – Graphe de la loi de Coulomb en 2D.

Il est possible de trouver une solution régularisée de la même manière que proposée précédemment pour la partie normale. Ceci est couramment employé dans les méthodes de type Molecular Dynamics [24].

Il existe beaucoup d'autres lois de contact que l'on pourra trouver dans [24].

3.4.3 Lois de choc

Lors d'un choc, i.e. un contact, qui a lieu sur un laps de temps très court, les lois précédentes ne font que décrire ce qui se passe pendant que le contact est établi, sans donner d'information sur la transition du contact induite par le choc entre les deux solides. Une loi de choc doit donc être adoptée. Une telle loi est supposée décrire un phénomène complexe se produisant sur un intervalle de temps très court, par exemple une déformation élastique, que l'on ne considérera pas à notre échelle [137]. Il est usuel d'employer alors la loi de restitution de Newton, $U_N^+ = -eU_N^-$, où U_N^+ représente la vitesse relative normale après la collision, et U_N^- la vitesse relative normale avant collision, et e le coefficient de restitution dont la validité est discutable [136].

Comme pour la partie normale il peut être important d'introduire un coefficient tangentiel de restitution pour modéliser les effets tangentiels sur le choc. Ces paramètres permettant de traduire une loi de choc ne constituent pas une théorie générale sur les chocs [94]. Toutefois certaines expériences ont montré la pertinence de cette loi pour des solides ayant une géométrie particulière [26, 43].

3.5 Schémas d'intégration

L'objectif des schémas d'intégration en temps est d'obtenir une discrétisation de ces équations différentielles (3.1) ou (3.4). Dans le cas régulier, il est possible d'utiliser n'importe quel schéma d'intégration pour les équations différentielles, ces schémas ayant diverses propriétés en terme de précision, de conservation d'énergie, de stabilité de convergence.

Dans le cas non-régulier le problème est différent car les solutions perdent leurs propriétés nécessaires à la construction des schémas : dérivabilité, continuité. Deux approches sont possibles :

- les méthodes dites *événementielles* (*event-driven*), basées sur un découpage adaptatif de l'intervalle de temps considéré de façon à capturer l'instant d'une collision. L'objectif est de séparer la partie régulière du mouvement (mouvement sans contact ou contact persistant) de la partie non-régulière du mouvement (choc ou changement du statut de frottement). Cette approche permet d'utiliser la plupart des schémas d'intégration d'ordre élevé [2] sur chaque intervalle où le mouvement est régulier. La difficulté apparaît dans la détermination de la transition d'un intervalle au suivant [78, 79]. De plus lors d'une accumulation de collisions cette approche devient difficile à utiliser car le temps d'un intervalle régulier entre deux événements non-réguliers devient trop petit. Cette approche est couramment utilisée dans le domaine de la robotique où les périodes de vol libre sont importantes et demandent des calculs précis avec une discrétisation grossière du temps.
- les méthodes dites *pas à pas* (*time-stepping*), basées sur un découpage arbitraire du temps pas nécessairement uniforme. Dans ce cas l'ordre du schéma d'intégration est nécessaire-

ment peu élevé, un ou deux. En effet la présence d'un choc engendre une discontinuité de la fonction vitesse. C'est-à-dire que dans l'équation 3.4 lorsque la fonction vitesse admet une variation bornée, on ne peut définir l'accélération. Les lois d'interaction non-régulières modifient elles aussi les propriétés du schéma d'intégration. Ce type de découpage permet de traiter un grand nombre de discontinuités au cours d'un pas de temps. On peut trouver deux familles de schéma d'intégration : explicite comme les méthodes dérivant de Molecular Dynamics [34, 10], et implicite comme les méthodes basées sur Contact Dynamics [86, 89, 37] ou GEM.

En considérant les propriétés d'intégration des mesures différentielles [89], il est possible de généraliser l'écriture des équations de la dynamique et d'obtenir une intégration de cette équation :

$$\forall \tau, t \in]0, T]$$

$$\begin{cases} \mathbb{M}(u(t) - u(\tau)) = \int_{\tau}^t (\mathbb{F}(q, u, s) + \mathbb{P}(s)) ds + \int_{] \tau, t]} r d\nu \\ q(t) = q(\tau) + \int_{\tau}^t u ds \end{cases} \quad (3.11)$$

Cette expression est obtenue indépendamment du nombre de collisions potentielles au cours d'un pas de temps $] \tau, t]$.

Pour une approximation numérique, l'intervalle de temps $[0, T]$ va être divisé arbitrairement en sous intervalles. Considérons un intervalle de temps $]t_i, t_f]$, de longueur h , on obtient :

$$\begin{cases} \mathbb{M}(u_f - u_i) = \int_{t_i}^{t_f} (\mathbb{F}(q, u, s) + \mathbb{P}(s)) ds + hr_f \\ q_f = q_i + \int_{t_i}^{t_f} u ds \end{cases} \quad (3.12)$$

avec $r_f = \frac{1}{h} \int_{]t_i, t_f]} R d\nu$ la valeur moyenne de l'impulsion sur le pas de temps. Nous chercherons donc le couple (U_f, R_f) vérifiant les équations de la dynamique et les lois d'interaction.

Lorsqu'un corps est discrétisé en éléments finis, une étape supplémentaire est nécessaire qui revient à introduire un terme de rigidité au premier membre [65].

3.6 Stratégie de résolution

Les paragraphes précédents nous ont permis d'énoncer l'ensemble des détails relatifs à un problème de contact : une discrétisation spatiale et temporelle, un modèle pour traiter les interactions. Etant donné toutes les possibilités pour traiter ces différents points, il existe de nombreuses stratégies de calcul pour des problèmes de dynamique non-régulière ([21], [64]).

Nous allons décrire les éléments nécessaires pour définir un *solveur* d'un problème avec contact. Le problème à résoudre peut être schématisé comme sur la figure 3.6 :

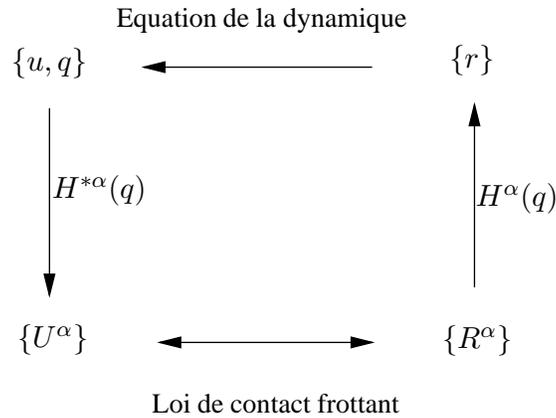


FIG. 3.6 – Relations entre les variables locales et globales.

Au niveau global, on considère les équations de la dynamique vérifiées par chaque corps, et au niveau local on prend en compte les lois d'interaction entre les paires de nœuds des corps en contact. Le passage entre ces deux niveaux s'effectue à l'aide des matrices H et H^* qui dépendent de la position des points de contact, des discrétisations spatiale et temporelle. On peut adopter plusieurs types d'approche pour la résolution, comme :

- une résolution simultanée au niveau global et local, comme celle employée par Alart et Curnier [38],
- une résolution au niveau global, c'est le principe des stratégies d'*élimination* ou de *substitution*, que l'on retrouve dans les méthodes de pénalisation ou de multiplicateurs de Lagrange dans les méthodes par éléments finis,
- une résolution au niveau local, c'est le principe de la stratégie de *condensation*.

L'*approche globale* consiste à résoudre le système linéaire constitué de l'ensemble des équations de la dynamique en tenant compte des lois d'interaction. A l'aide d'une discrétisation en espace et en temps, on peut assembler le système suivant :

$$\mathbb{M}(u_f - u_i) = hr_{free} + hr \quad (3.13)$$

où \mathbb{M} est une matrice bloc diagonale, chaque bloc ayant la taille du système d'équation régissant le mouvement d'un corps. Le n -vecteur $hr_{free} = \int_{t_i}^{t_f} (\mathbb{F}(q, u, t) + \mathbb{P}(t)) dt$ représente la contribution des efforts sans contact, h étant le pas de temps.

L'ensemble des relations de contact doit être ajouté au système. Une manière d'obtenir un système ne dépendant pas des variables locales est décrit dans [64] que nous ne détaillerons pas ici. Le principe général est le suivant, en tenant compte des relations cinématiques (matrice H), les variables locales (g, U, R) sont éliminées des lois d'interaction locales pour ne garder que les variables globales (q, u) . Ainsi en éliminant r des expressions précédentes, on obtient un système d'inéquations qui dépend uniquement des variables globales. Ces inéquations peuvent être résolues à l'aide de méthodes de résolution de système linéaire avec contrainte. D'un point de vue numérique, cette stratégie permet d'employer des méthodes de résolution directe ou itérative.

L'*approche locale* consiste à condenser les équations de la dynamique au niveau local. La résolution se fait à deux niveaux, on vérifie d'abord les lois de contact au niveau local, et lorsque les relations sont vérifiées on actualise les équations de la dynamique au niveau global. Il est possible de condenser le système total (3.13) sous la forme :

$$U = U_{free} + WhR \quad (3.14)$$

où $W = H^*M^{-1}H$ est l'opérateur de Delassus et $U_{free} = H^*(M^{-1}hr_{free} + u_i)$ représente la vitesse relative locale en l'absence de contact.

Il faut distinguer les méthodes de résolution directe et itérative. Afin d'utiliser des méthodes de minimisation avec contraintes, il est nécessaire de reformuler le problème précédent en utilisant les lois de contact ce qui nous donne un système d'inéquations dépendant uniquement des réactions locales R . Il est possible alors de résoudre simultanément les relations normales (contact) et tangentes (frottement) ou de résoudre successivement le problème jusqu'à convergence.

3.7 Conclusion

L'utilisation des méthodes par éléments discrets afin d'étudier une multitude de corps en interaction comme des grains de ballast nous impose de faire des choix parmi l'ensemble des éléments présentés.

L'étude du comportement d'un échantillon représentatif de granulats soumis à diverses sollicitations, en particulier l'étude d'une portion de voie ballastée, nécessite la prise en compte de plusieurs milliers de grains. Le système à étudier sera le plus souvent compact, le nombre de points de contact pourra être important. Nous adopterons, en conséquence, dans l'ensemble de ce travail, l'approche **time-stepping**.

Les lois d'interaction que nous considérerons seront l'unilatéralité, pour tenir compte de l'interpénétrabilité, et le frottement Coulomb.

Il est possible de traiter la condition d'unilatéralité et le frottement sec par des approximations régularisantes, comme dans la méthode Molecular Dynamic. Mais il nous apparaît important de souligner deux points :

- un schéma explicite est conditionnellement stable, il dépend le plus souvent, pour les méthodes qui utilisent la régularisation du contact, du rapport de la raideur de contact introduite et de la masse des grains. De façon générale, on considère des pas de temps petits, par rapport à une méthode implicite, afin de s'assurer la stabilité du schéma. Il est aussi possible d'assurer cette stabilité par l'introduction d'une viscosité artificielle.
- les simulations envisagées, par exemple les chargements cycliques, nécessitent un long temps simulé. L'emploi d'un pas de temps petit, peut nécessiter énormément de pas de

calcul sachant que les grains rigides ne peuvent s'interpénétrer que très légèrement afin d'évaluer des évolutions très précises.

L'approche de type **Contact Dynamics** permet d'employer des pas de temps plus grands, et la prise en compte de l'unilatéralité sans approximation. En contre partie le nombre d'opérations à effectuer est beaucoup plus important. Nous choisirons cette approche. Les lois d'interaction seront écrites à l'aide du modèle candidat antagoniste.

Le nombre conséquent de contacts engendrerait, pour une méthode de résolution globale, l'assemblage d'une matrice de taille importante. D'un point de vue numérique, l'assemblage de cette matrice pourrait nécessiter beaucoup de mémoire vive, nous préférons donc adopter une stratégie de **résolution locale**.

Nous allons, dans le chapitre suivant, définir la méthode de résolution que l'on va adopter pour résoudre ce type de problème.

Chapitre 4

Méthode NonSmooth Contact Dynamics

4.1 Introduction

A partir d'une formulation mathématique rigoureuse, Moreau et Jean ont construit la méthode de dynamique des contacts, NonSmooth Contact Dynamics Method [86, 89, 37, 65]. Cette méthode est basée sur une mise en équation adaptée de la dynamique en présence de collisions éventuelles. Elle est caractérisée par une discrétisation en temps de type time-stepping, en utilisant un schéma d'intégration implicite et en considérant une détection explicite. Un solveur local permet de calculer en même temps vitesses et réactions en tenant compte des lois d'interaction. Nous allons présenter ici l'ensemble des éléments constituant cette méthode.

4.2 Schéma d'intégration pour les équations de la dynamique non-régulière

Nous utilisons la forme intégrée non-régulière des équations de la dynamique (3.12). Dans ce travail nous avons choisi un schéma numérique de type θ -méthode pour approximer les deux

intégrales en temps : $\int_{t_i}^{t_f} (\mathbb{F}(q, u, s) + \mathbb{P}(s)) ds$ et $\int_{t_i}^{t_f} u ds$.

Nous pouvons donc écrire :

$$\begin{aligned} \int_{t_i}^{t_f} (\mathbb{F}(q, u, t) + \mathbb{P}(t)) dt &= h((1 - \theta)(\mathbb{F}(q_i, u_i, t_i) + \mathbb{P}(t_i)) \\ &\quad + \theta(\mathbb{F}(q_f, u_f, t_f) + \mathbb{P}(t_f))) \\ &\simeq h(\mathbb{F}(q_m, u_m) + \mathbb{P}(t_m)) \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$q_f = q_i + h((1 - \theta)u_i + \theta u_f) = q_m + h\theta u_f \quad (4.2)$$

où $t_m = t_i + (1 - \theta)h$ et $q_m = q_i + h(1 - \theta)u_i$.

Dans le cas où $\theta \in [0.5, 1]$, le schéma d'intégration est implicite et inconditionnellement stable.

4.3 Discrétisation des relations cinématiques

La méthode NSCD considère comme inconnues les variables cinématiques en fin de pas ainsi que les impulsions moyennes. Toutefois comme on l'a vu, les équations de la dynamique sont exprimées sous la forme de variables globales (u, r) et les lois d'interaction sous forme de variables locales (U, R) . Les relations entre variables locales et globales s'écrivent :

$$\begin{aligned} - U &= H^*(q)u \\ - r &= H(q)R \end{aligned}$$

où q désigne la configuration qui sert à déterminer les repères locaux. La méthode est implicite pour le fonction vitesse u et explicite pour la fonction q . En effet la solution dépend implicitement du repère, il serait donc nécessaire à chaque résolution locale de recalculer ces quantités ce qui serait beaucoup trop lourd. C'est une complication technique, nous ferons l'approximation, étant donné les petits pas de temps considérés, que le repère local de contact ne change pas ainsi que les opérateurs de passage entre le repère global et le repère local.

La configuration d'évaluation des lois d'interaction ne sera pas choisie au hasard, on prendra $q_m = q_i + (1 - \theta)hu_i$.

En tenant compte de l'approximation faite nous utiliserons les relations suivantes pour le calcul :

$$\begin{aligned} - U_f &= H^*(q_m)u_f \\ - r_f &= H(q_m)\dot{R}_f \end{aligned}$$

On peut constater que l'interstice en fin du pas de temps N est l'interstice au début du pas de temps $N + 1$. Ayant déterminé le gap dans la configuration intermédiaire on cherche à vérifier les lois en terme de $(g_f = g_m + hU_f, U_f, R_f)$. En fait tout se passe comme si on résolvait la dynamique globale entre les instants $t_i, t_f = t_i + h$ et le contact entre les instants $t_m = t_i + (1 - \theta)h$ et $t_{m+1} = t_f + (1 - \theta)h = t_m + h$. Dans le cas où $\theta = 0.5$ on retrouve la méthode de *saute mouton* (*leap frog*) où les résolutions globales et locales sont décalées.

4.4 Un solveur : la méthode de Gauss-Seidel non-linéaire

En considérant que \mathbb{M} est régulière, que les corps sont rigides, et en utilisant les opérateurs de passage repère local, repère global (figure 3.6), le système peut s'écrire :

$$U = U_{free} + WhR \quad (4.3)$$

où $U = H^*u_f$ représente les vitesses relatives entre les nœuds en contact. L'expression $U_{free} = H^*(u_i + \mathbb{M}^{-1}r_{free})$ représente le vecteur des vitesses relatives sans tenir compte des efforts de contact et $W = H^*\mathbb{M}^{-1}H$ est appelé *l'opérateur de Delassus*.

Ainsi l'équation vérifiée par le contact α peut s'écrire :

$$U^\alpha = U_{free}^\alpha + \sum_{\beta=1}^{n_c} W^{\alpha\beta}hR^\beta \quad (4.4)$$

où n_c est le nombre total de contacts. En séparant la contribution de ce contact α des autres :

$$U^\alpha = U_{free}^\alpha + W^{\alpha\alpha}hR^\alpha + \sum_{\beta=1, \beta \neq \alpha}^{n_c} W^{\alpha\beta}hR^\beta \quad (4.5)$$

On peut remarquer que si on fixe la contribution des contacts $\beta \neq \alpha$ dans cette équation, on a une relation linéaire entre U^α et R^α . Il est donc possible dans ce cas de trouver un couple (U^α, R^α) qui vérifie cette équation linéaire et une loi de contact 4.6 :

$$loi(g^\alpha, U_T^\alpha, U_N^\alpha, R_N^\alpha, R_T^\alpha) = vraie \quad (4.6)$$

Dans le cas bidimensionnel il est possible d'obtenir explicitement une solution grâce à une intersection de graphes [24]. Dans le cas tridimensionnel il est nécessaire d'utiliser une méthode itérative comme la méthode de Newton généralisée [38].

Cet algorithme est donc relativement simple, les couples d'équations sont résolus (dynamique et interaction) pour chaque contact en considérant les autres contributions fixées. On considère que la méthode a convergé vers une solution lorsque la solution de chaque contact ne change pas plus d'un certain seuil. Cette méthode peut être comparée à une méthode de type Gauss-Seidel non-linéaire par bloc. On trouvera dans [37, 24] plus de détails sur le solveur.

L'évaluation du terme $\sum_{\beta=1, \beta \neq \alpha}^{n_c} W^{\alpha\beta} R^\beta$ peut être réalisée par une des deux méthodes suivantes [119],[117] :

- **NSCD avec Echange Local Global**, à chaque réaction de contact calculée, sa contribution est actualisée dans l'équation de la dynamique (3.1) des particules concernées. Il est important de souligner que cette méthode nécessite une faible quantité de mémoire car les termes $W^{\alpha\beta}$ ne sont pas stockés en mémoire, par contre elle est plus coûteuse en terme d'accès mémoire et nombre d'opérations, ou
- **NSCD avec Stockage des données locales**, où l'on calcule une fois pour tous les termes $W^{\alpha\beta}$.

Il existe des alternatives à la méthode de type Gauss-Seidel couramment utilisée pour la méthode résolution NSCD, par exemple on peut employer une méthode du gradient conjugué projeté, c'est un algorithme de quasi-optimisation sous contrainte, dont on trouvera les détails dans [117, 118].

Il est important de souligner que la parallélisation de la méthode de type Gauss-Seidel présentée est possible, et donne d'excellents résultats [117, 120].

4.5 Normes de convergence

Afin de déterminer si la méthode a convergé vers une solution, il est nécessaire d'évaluer, pour chaque contact, la précision avec laquelle la loi de contact est vérifiée. Il existe différentes méthodes pour analyser cette précision, nous allons en présenter quelques-unes.

La première méthode permet d'estimer la précision contact par contact. De manière générale, au cours d'une itération de Gauss-Seidel si on considère n_c contacts et le contact α , alors les contacts β , avec $\beta < \alpha$ ont des valeurs actualisées et avec $\beta > \alpha$ ont des valeurs de l'itération précédente. En réécrivant l'équation 4.5 en notant R_{esti}^α la valeur de R^α de l'itération précédente on obtient :

$$U^\alpha = U_{free}^\alpha + W^{\alpha\alpha} h R^\alpha + \sum_{\beta=1}^{n_c} W^{\alpha\beta} h R^\beta - W^{\alpha\alpha} h R_{esti}^\alpha \quad (4.7)$$

ce qui peut s'écrire :

$$h W^{\alpha\alpha} (R^\alpha - R_{esti}^\alpha) = U^\alpha - U_{free}^\alpha - \sum_{\beta=1}^{n_c} W^{\alpha\beta} h R^\beta \quad (4.8)$$

Au cours d'une itération, les quantités $\sum_{\beta=1}^{n_c} W^{\alpha\beta} h R^\beta$ et U_{free}^α sont connues et le couple U^α, R^α est déterminé grâce aux lois d'interaction. Il est donc possible d'estimer la précision avec laquelle la loi de contact est vérifiée.

Afin de simplifier cette estimation, pour chaque contact on évalue la quantité $h W_N^{\alpha\alpha} (R_N^\alpha - R_{Nesti}^\alpha)$, où $W_N^{\alpha\alpha}$ représente la partie normale de l'opérateur de Delassus et R_N^α la réaction normale. Si cette quantité est plus petite qu'un seuil fixé alors on considère que la loi de contact est correctement vérifiée pour le contact examiné. Dans le cas contraire, le processus itératif de

Gauss-Seidel est poursuivi mais en considérant qu'aucun contact n'est vérifié. Les contacts sont analysés jusqu'à ce qu'ils vérifient la loi de contact avec la précision désirée.

La deuxième méthode permet d'estimer la précision de manière globale pour l'ensemble des contacts. Il existe des estimateurs permettant de mesurer les erreurs en loi de comportement, notamment l'énergie de référence due aux réactions, la violation moyenne ou la violation quadratique. En reprenant les notations de Jean [24], on peut définir :

$$\text{l'énergie de référence par, } w_{reac} = \sum_{\alpha}^{n_c} \frac{1}{2} (W^{\alpha\alpha} h R^{\alpha} \cdot h R^{\alpha} + W^{\alpha\alpha} h R_{esti}^{\alpha} \cdot h R_{esti}^{\alpha}),$$

$$\text{la violation moyenne par, } v_{ltom} = \frac{\sum_{\alpha}^{n_c} \frac{1}{2} (W^{\alpha\alpha} h R^{\alpha} \cdot h R^{\alpha} - W^{\alpha\alpha} h R_{esti}^{\alpha} \cdot h R_{esti}^{\alpha})}{w_{reac}}.$$

La violation moyenne permet d'estimer la pénétration dans la direction de la réaction. Ces estimateurs sont plus lourds à calculer, il est donc important d'évaluer ces quantités périodiquement au cours des itérations.

Ces deux méthodes pour évaluer la précision du calcul s'implémentent de manière différente. Pour la première méthode, on comptabilise au fur et à mesure de l'examen des contacts, ceux qui sont vérifiés. Si on note N_{verif} le nombre de contacts correctement vérifié on peut résumer cette méthode par l'algorithme suivant :

```

[ Parcours de  $n_c$  contacts
  [ Pour un contact  $\alpha$ 
    [ détermination de  $(U^{\alpha}, R^{\alpha})$  vérifiant la loi
      [ Si  $|hW_N^{\alpha\alpha}(R_N^{\alpha} - R_{Nesti}^{\alpha})| < seuil$  alors
        [  $N_{verif} = N_{verif} + 1$ 
          [ sinon  $N_{verif} = 0$ 
            [ Si  $N_{verif} > 2 * n_c$  on sort
  ]
]

```

Cette méthode est stricte, si un contact n'est pas vérifié, alors on considère qu'il est nécessaire de réexaminer l'ensemble des contacts. D'un point de vue pratique on fixe un nombre de parcours maximal de l'ensemble des contacts.

Le calcul de la violation moyenne étant plus coûteux, il est nécessaire d'adopter la démarche suivante : on parcourt N fois l'ensemble des contacts et ensuite on calcule la violation moyenne. Si celle-ci est supérieure à une certaine tolérance fixée alors on recommence le processus.

```

[ Tant que  $v_{ltom} > tolérance$ 
  [ Parcours N fois la liste des contacts  $\alpha$ 
    [ pour chaque contact  $\alpha$  :
      [ détermination de  $(U^{\alpha}, R^{\alpha})$  vérifiant la loi
        [ Calcul de  $v_{ltom}$ 
  ]
]

```

Les objectifs de ces deux méthodes étant les mêmes, leur approche reste pourtant différente. Il est donc à envisager une comparaison en terme de précision, de temps de calcul.

4.6 Conclusion

La méthode de résolution présentée permet de traiter un problème d'interaction entre corps rigides ou déformables à l'aide d'un schéma implicite. Cette caractéristique importante permet d'employer des pas de temps plus grands qu'avec une approche de type Molecular Dynamics, en contrepartie le nombre d'opérations à effectuer est beaucoup plus grand (résolution itérative, construction d'opérateur de passage).

La méthode NSCD présente l'avantage d'être stable, le schéma d'intégration implicite, et le solveur local de type Gauss-Seidel est robuste. Il semble nécessaire d'évaluer l'influence des paramètres de calcul : taille du pas de temps, norme de convergence, etc.

En reprenant le schéma de principe des méthodes par éléments discrets, nous pouvons synthétiser les étapes décrites. Nous présentons sur le schéma de la figure 4.1, les différents éléments présentés en noir et les éléments qui doivent être développés en vert. Considérons un ensemble de corps, que l'on décrit par une paramétrisation q :

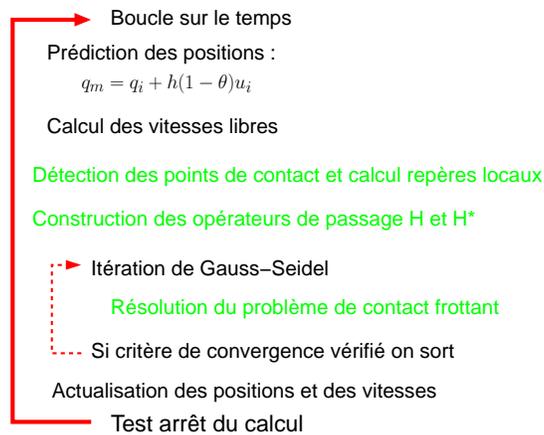


FIG. 4.1 – Schéma récapitulatif.

Nous n'avons pas précisé les calculs des matrices de masse et des matrices d'inertie, qui sont aisés à déterminer dans le cas bidimensionnel et qui feront l'objet d'une étude en trois dimensions. Les éléments discutés dans ce chapitre et le précédent ont fourni des éléments pour la modélisation des interactions et la méthode de résolution, ces choix étant valables dans le cadre bidimensionnel et tridimensionnel. Les deux chapitres suivants vont permettre d'exposer les particularités et les difficultés des modélisations bidimensionnelle et tridimensionnelle.

Chapitre 5

Une approche bidimensionnelle polygonale

5.1 Introduction

Nous avons présenté dans les deux chapitres précédents l'ensemble des éléments permettant de résoudre un problème d'interactions pour une collection de corps rigides ou déformables. La méthode de résolution choisie est la méthode Nonsmooth Contact Dynamics caractérisée par un schéma d'intégration implicite de type θ -méthode, un découpage en temps type pas à pas et la prise en compte de l'unilatéralité sans régularisation.

Dans ce chapitre, nous allons détailler les éléments spécifiques à la modélisation bidimensionnelle du ballast. Nous précisons le choix entre une approche corps rigides ou corps déformables, nous exposerons l'algorithme de détection des contacts, et le modèle de sous-couche. Les objectifs de cette modélisation étant d'étudier l'évolution d'un granulat sous chargement cyclique, nous présenterons une étude de sensibilité numérique pour divers paramètres de simulation sur une configuration géométrique inspirée de l'expérience menée par Combe [29, 27] et exposée dans la première partie.

5.2 Le modèle

L'utilisation d'une méthode par éléments discrets pour l'étude du comportement d'un granulat, en particulier le ballast, doit tenir compte des propriétés géométriques et mécaniques du matériau. Afin de pouvoir modéliser un comportement plus proche de la réalité, une approche corps déformables serait à envisager. Mais celle-ci implique des opérations plus lourdes, en effet il est nécessaire à la fois de résoudre un problème d'interactions et un problème d'équilibre pour chaque corps.

L'étude du comportement de grains sous chargements cycliques implique des temps simulés longs afin d'appliquer un nombre de cycles important. L'approche corps déformables nous apparaît donc, en l'état des moyens informatiques actuels prohibitive. Nous choisissons en conséquence de modéliser les grains de ballast par des corps rigides ayant une enveloppe polygonale convexe, des corps non convexes pouvant être considérés comme l'assemblage de corps convexes. On considèrera une loi de choc à restitution, en prenant le plus souvent un coefficient de restitution nul.

Nous adopterons une paramétrisation classique pour des corps rigides bidimensionnels en considérant deux degrés de liberté en translation et un en rotation au centre de gravité. L'équation de la dynamique peut donc être simplifiée (5.1, 5.2) :

$$m\dot{v} = P(t) + r \quad (5.1)$$

$$I\dot{\omega} = M_P(t) + M_r \quad (5.2)$$

en effet dans le cas bidimensionnel, le terme non-linéaire $w \times Iw$ disparaît, l'inertie étant un scalaire.

Le problème local d'interaction, énonçant la condition de complémentarité en vitesse et le frottement de Coulomb pourra s'énoncer sous la forme suivante :

$$WhR - U = U_{free} \quad (5.3)$$

$$U_N \geq 0, R_N \geq 0, U_N R_N = 0 \quad (5.4)$$

$$\| R_T \| \leq \mu R_N, \text{ si } \| U_T \| > 0, R_T = -\mu R_N \frac{U_T}{\| U_T \|} \text{ sinon } \| R_T \| \leq \mu R_N. \quad (5.5)$$

Dans le cas bidimensionnel la solution du problème s'obtient explicitement, on trouvera les détails dans [24].

5.3 Algorithme de détection

L'objectif de l'algorithme de détection est de déterminer si il y a contact entre deux corps et dans ce cas de donner des informations nécessaires et suffisamment précises afin de pouvoir résoudre le problème.

Ces informations sont :

- les coordonnées dans l'espace de travail du ou des points de contacts,
- le repère local de contact,
- l'interpénétration géométrique que nous appellerons *overlap*.

La première difficulté, dans le cas d'objets ayant une géométrie complexe, comme une enveloppe polygonale, est de déterminer si il y a contact, et dans ce cas de calculer la position de points de contacts. La deuxième contrainte est celle du temps de calcul puisqu'il faut traiter des interactions entre plusieurs milliers de grains.

Notations :

- nous considérerons pour la suite un repère orthonormé, d'origine O , d'axe $(0x, 0y)$,
- $Vert(A)$ représente l'ensemble des sommets du polygone convexe A ,
- $Face(A)$ représente l'ensemble des normales aux côtés du polygone convexe A ,
- $N_{contact}$ représente la normale du repère de contact, qui est une inconnue.

Nous présentons un algorithme développé par Moreau [131, 132] permettant de déterminer l'intersection entre deux polygones convexes, le cas de polygones non convexes étant traité comme l'union de polygones convexes.

Une droite sera déclarée séparatrice si les sommets respectifs des polygones sont séparés par celle-ci. Deux polygones s'interpénètrent si et seulement si il n'existe pas de droite vérifiant cette propriété. Au niveau numérique, on ne peut espérer observer de contacts stricts ; ceux sont toujours de petites interpénétrations qu'on interprète comme des contacts et, dans ce cas, on doit déterminer une droite jouant approximativement le rôle de tangente commune, appelée *common line*.

Considérons deux polygones A et B , O_A et O_B étant leur centre de masse respectif, et un vecteur donné V_{com} . Un test simple consiste à choisir un vecteur V_{com} vérifiant $O_A O_B \cdot V_{com} > 0$ et à déterminer l'intersection des projections orthogonales des sommets de ces polygones selon la direction donnée par ce vecteur. Si l'intersection des projections orthogonales, que l'on appellera *overlap*, est négative alors il n'y a pas contact.

La définition du *shadow-overlap* est la suivante :

$$shov(V_{com}) = \max(OS_A \cdot V_{com})_{S_A \in Vert(A)} - \min(OS_B \cdot V_{com})_{S_B \in Vert(B)} \quad (5.6)$$

L'élément de $Vert(A)$, (resp. $Vert(B)$) réalisant le *max* (resp. le *min*), est appelé un sommet critique.

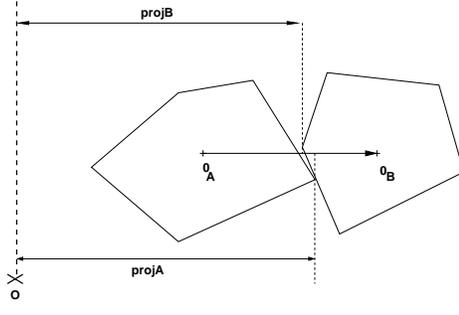


FIG. 5.1 – Overlap positif : il peut y avoir contact.

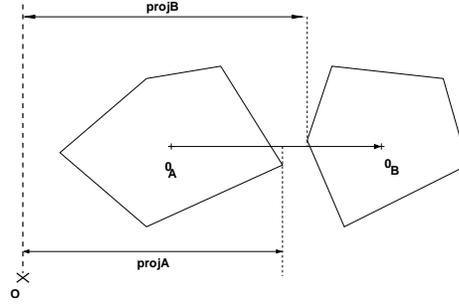


FIG. 5.2 – Overlap négatif : pas contact.

Pour déterminer si il y a un contact potentiel entre A et B , nous utilisons l'algorithme suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } \text{overlap} = \text{shov}(V_{com}) < 0 \text{ alors} \\ \quad \text{il n'y a pas contact,} \\ \text{Sinon} \\ \quad \text{il faut tester une autre direction de projection.} \\ \text{Fin} \end{array} \right. \quad (5.7)$$

L'algorithme du *shadow overlap* est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Calcul de } \text{overlap}^0 = \text{shov}\left(\frac{O_A O_B}{\|O_A O_B\|}\right) \\ \text{Si } \text{overlap}^0 < 0 \text{ alors} \\ \quad \text{pas contact} \\ \text{Sinon} \\ \quad \left[\begin{array}{l} \text{Pour tout } V_{com} \in \text{Face}(A) \\ \quad \text{Calcul de } \text{overlap}^1 = \text{shov}(V_{com}) \\ \quad \text{Si } \text{overlap}^1 < 0 \text{ alors pas contact} \\ \quad \text{Sinon} \\ \quad \quad \text{Si } \text{overlap}^0 > \text{overlap}^1 \text{ alors} \\ \quad \quad \quad N_{contact} = V_{com} \text{ et } \text{overlap}^0 = \text{overlap}^1 \\ \quad \quad \text{Fin} \\ \quad \text{Fin} \end{array} \right. \\ \quad \left[\begin{array}{l} \text{Pour tout } V_{com} \in \text{Face}(B) \\ \quad \text{Calcul } \text{overlap}^1 = \text{shov}(V_{com}) \\ \quad \text{Si } \text{overlap}^1 < 0 \text{ alors pas contact} \\ \quad \text{Sinon} \\ \quad \quad \text{Si } \text{overlap}^0 > \text{overlap}^1 \text{ alors} \\ \quad \quad \quad N_{contact} = V_{com} \text{ et } \text{overlap}^0 = \text{overlap}^1 \\ \quad \quad \text{Fin} \\ \quad \text{Fin} \end{array} \right. \\ \text{Fin} \end{array} \right. \quad (5.8)$$

L'objectif de cet algorithme est de trouver une direction pour laquelle l'overlap est positif. Dans le cas où il n'existe pas de direction parmi l'ensemble des normales des polygones testés

pour laquelle l'overlap est négatif alors il y a contact. Dans le cas d'un contact, la normale au contact est celle pour laquelle l'overlap est maximal et on considère qu'il y a au moins un point de contact. La position de ce point est choisi comme le centre du segment reliant les deux sommets critiques et la droite passant par ce point, perpendiculaire à la normale au contact, est considérée comme droite de contact.

Il est alors nécessaire de déterminer s'il existe un deuxième point de contact. Si une normale de A (resp B) est une normale de contact, alors il y aura deux points de contact si un des sommets de B (resp A) se trouve au-delà de la droite de contact, c'est-à-dire que la projection du vecteur reliant ce sommet au premier point de contact sur la normale est négative. En pratique, il suffit de regarder les sommets appartenant aux côtés des polygones issus des sommets critiques, les polygones considérés étant convexes.

Dans le cas d'un contact entre deux côtés, la dynamique sur le pas de temps concerné est traitée en considérant seulement deux points de contact situés aux extrémités du segment commun aux deux polygones. Cela revient à supposer l'existence d'une très petite concavité des côtés en contact.

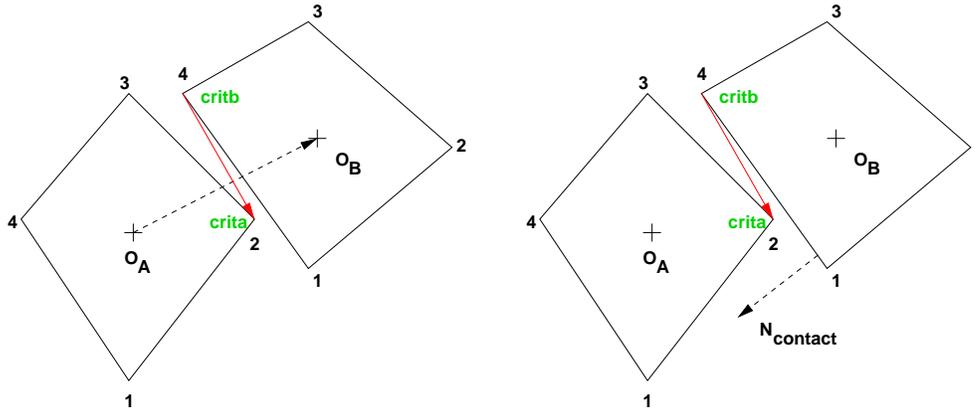


FIG. 5.3 – Cas $O_A O_B \times S_{critb} S_{crita} < 0$. FIG. 5.4 – Cas $N_{contact} \times S_{critb} S_{crita} > 0$.

Afin de rendre l'algorithme optimal en terme de nombre de directions de projection à tester, on peut orienter le choix à l'aide d'une numérotation des sommets dans le sens trigonométrique, et en utilisant l'orientation des deux polygones l'un par rapport à l'autre.

A l'issue du premier shadow-overlap, nous obtenons deux sommets critiques, S_{crita} et S_{critb} (fig. 5.3). Si $O_A O_B \times S_{critb} S_{crita}$ est négatif (resp. positif) alors on examine les normales des côtés $crita + 1$ et $critb + 1$ (resp. $crita - 1$ et $critb - 1$), et on retient la direction $N_{contact}$ pour laquelle l'overlap est le plus petit (fig. 5.4). On calcule ensuite, avec les nouveaux sommets critiques la quantité $N_{contact} \times S_{critb} S_{crita}$, si celle-ci est positive alors l'overlap le plus petit a été trouvé et selon son signe, il y a contact ou non.

5.4 Sous-couche déformable

Dans le cadre de l'étude du ballast, la prise en compte du comportement mécanique de la sous-couche sur laquelle il repose semble importante. Cette particularité avait été prise en compte dans

l'expérience menée par Combe [29].

Il est possible de discrétiser par ailleurs la sous-couche par éléments finis. Cependant cette approche implique des calculs lourds, en effet il est nécessaire de résoudre les équations d'équilibre pour un corps déformable, donc d'effectuer une résolution d'un système linéaire avec un grand nombre de degrés de liberté. Nous proposons, comme dans le cadre du travail de Combe [29], de modéliser cette sous-couche par un assemblage de particules rigides polygonales suspendues sur un ressort visco-élastique (fig. 5.5), indépendantes les unes des autres [129, 128, 132]. Cette stratégie permet d'introduire des possibilités supplémentaires de déplacements des grains par rapport à une sous-couche rigide, les éléments de la sous-couche pouvant se déplacer uniquement dans le sens vertical sous l'action des efforts du massif de grains.

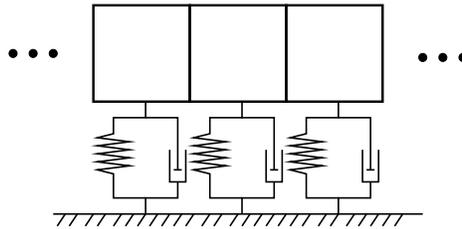


FIG. 5.5 – Schéma du modèle de sous-couche.

La loi visco-élastique suivante décrit le comportement du ressort reliant le solide rigide au sol, en donnant la réaction en fonction de la déformation :

$$R_N = -k_N \varepsilon + h\nu \dot{\varepsilon} \quad (5.9)$$

avec $\varepsilon = \frac{L-L_0}{L_0} - \varepsilon_0$. L_0 représente la longueur du ressort dans sa configuration de référence, L la position en cours, ε_0 est une prédéformation, k_N la raideur et ν la viscosité de l'amortisseur.

Cette loi visco-élastique est traitée avec l'approche NSCD en la considérant comme une *loi de Signorini dérivée* qui après changement de variables s'écrit comme une loi de Signorini [24].

5.5 Quelques considérations numériques

Les simulations de granulat sous chargement cyclique reposant sur une sous-couche doivent permettre, dans le cas de l'évaluation du tassement, d'enregistrer l'enfoncement du blochet sans que les erreurs d'interpénétration remettent en cause cette estimation.

Il est donc important, pour cette étude à grand nombre de cycles de déterminer les paramètres optimum des simulations : pas de temps, normes de convergences, nombre minimal d'itérations de Gauss-Seidel, pour effectuer des calculs avec la meilleure précision pour un temps de calcul acceptable.

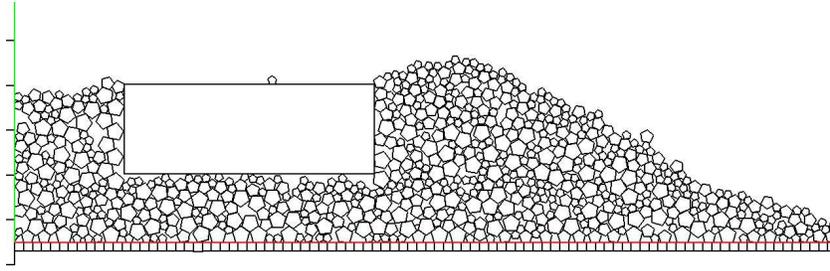


FIG. 5.6 – Exemple de géométrie d'échantillon à étudier.

Pour cette analyse nous considérerons des échantillons représentant la géométrie d'une coupe transversale de voie ballastée. Ils sont constitués d'un assemblage de polygones, de masse volumique $\rho = 2367 \text{ kg/m}^3$, reposant sur une sous-couche pouvant se déformer (fig. 5.6). Ils sont soumis ensuite, par l'intermédiaire du blochet, à des chargements cycliques verticaux et transversaux à une fréquence de 20 Hz.

5.5.1 Normes de convergence

Afin de dégager une règle de calcul, nous allons pour un même échantillon considérer le test de convergence en énergie. Pour une même tolérance $Tol = 1,666.10^{-4}$, nous allons faire varier la période des tests de convergences (N) de 100 itérations à 400 itérations de Gauss-Seidel. La limite maximale du nombre d'itérations étant fixée à 1000.

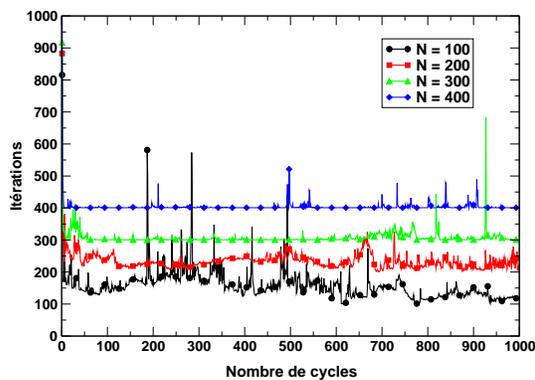


FIG. 5.7 – Evolution du nombre d'itérations.

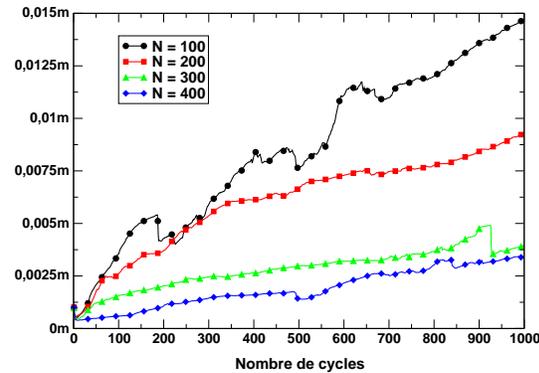


FIG. 5.8 – Evolution de l'interpénétration cumulée.

Sur le graphique de la figure 5.7 nous avons représenté l'évolution du nombre moyen d'itérations par cycle de chargement pour les quatre valeurs de N . L'augmentation de N entraîne une convergence assurée de l'algorithme car on atteint le nombre d'itérations nécessaire pour vérifier le critère de cette norme. En conséquence on note une hausse significative de la moyenne d'itérations.

L'évolution des violations cumulées, moyennées sur chaque cycle, est présentée sur la figure 5.8. L'augmentation de N a pour effet de diminuer l'évolution des violations. Ces évolutions

semblent devenir stables pour $N > 300$. Il apparaît intéressant d'étudier pour une tolérance plus faible le même problème.

Nous avons choisi de travailler avec une tolérance de $1,66 \cdot 10^{-05}$, et avec $N = 100$, et d'effectuer le même nombre de cycles de chargement.

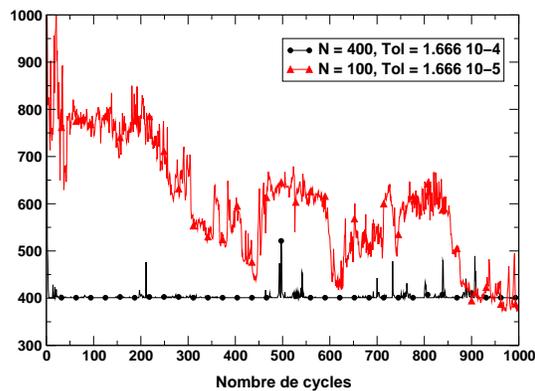


FIG. 5.9 – Evolution du nombre d'itérations.

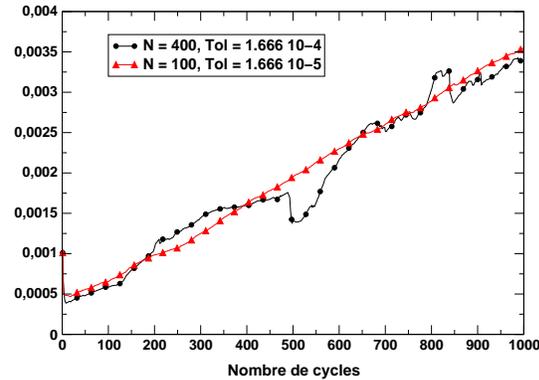


FIG. 5.10 – Evolution de la violation cumulée.

En comparant avec les résultats précédents pour $N = 400$, on remarque sur le graphique de la figure 5.9 que la diminution de la tolérance entraîne une hausse significative du nombre d'itérations par cycle de chargement. La moyenne des itérations est supérieure à 400. On pourrait donc s'attendre, au vu des premières observations à une évolution des violations beaucoup moins importante que sur les premiers essais. Or le résultat présenté sur le graphique de la figure 5.10 montre que l'évolution est similaire.

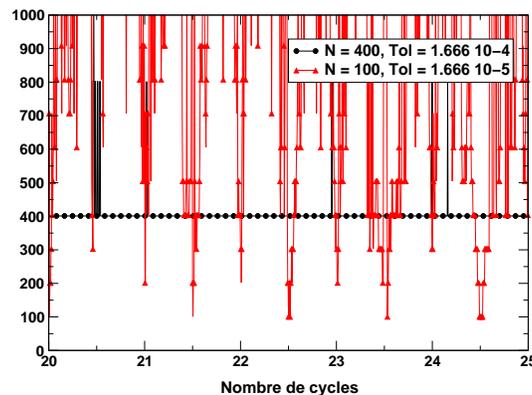


FIG. 5.11 – Comparaison de l'évolution des itérations sur quelques cycles.

Une analyse plus fine, sans moyenne sur un cycle (fig. 5.11), montre que malgré une tolérance plus faible l'algorithme converge pour de nombreux cas en seulement 100 itérations. Donc la principale différence entre le test avec $(N = 400, Tol = 1.6610^{-04})$ et $(N = 100, 1.6610^{-05})$, est qu'à chaque pas de temps on force l'algorithme à faire au moins 400 itérations. L'évolution

quasi similaire des violations alors que le nombre moyen d'itérations par cycle est différent peut s'expliquer par :

- le calcul d'une norme en moyenne peut ne pas tenir compte de phénomènes isolés, par exemple une force sous évaluée pour un contact, et il se peut que pour gagner en précision il soit nécessaire d'itérer beaucoup plus car une fois l'équilibre du réseau fort obtenu, celui du réseau faible est souvent plus difficile à atteindre,
- lorsque à un pas de temps la méthode a convergé en 100 itérations, au pas de temps suivant il peut lui falloir beaucoup plus d'itérations pour obtenir une valeur de la solution plus précise. Ainsi on essaie de corriger la solution qui était en moyenne équilibrée au pas de temps précédent, on pourrait évoquer un effet de mémoire.

Il apparaît donc une règle pour conduire pour ce type de calcul : il faut forcer une moyenne d'itérations par pas de temps élevée, afin de prévenir tout problème d'apparition de violations.

5.5.2 Influence du pas de temps

Le choix du pas de temps utilisé dans les simulations de matériaux granulaires, avec des corps rigides ou déformables, a une grande importance. En effet pour un pas de temps trop grand, étant donné que l'on considère fixe, au cours du pas de temps, les repères locaux calculés explicitement, on impose une plus grande approximation et le calcul des impulsions moyennes est beaucoup moins précis. Il est souvent nécessaire d'itérer beaucoup plus. Dans le cas où le pas de temps est petit, il est possible d'effectuer peu d'itérations, mais pour le même temps simulé l'augmentation du nombre de pas de temps nécessaires peut engendrer un temps de calcul très important.

Dans cette étude paramétrique [129, 128] on enregistre pour dix pas de temps différents (1.10^{-4} s à 1.10^{-3} s) l'évolution des violations moyennes et maximales, pour deux angles de chargement différents, 0 et 5 degrés, au cours de 2000 cycles.

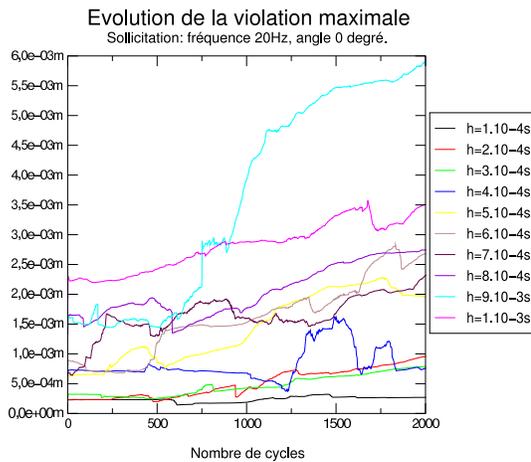


FIG. 5.12 – Evolution des violations maximales.

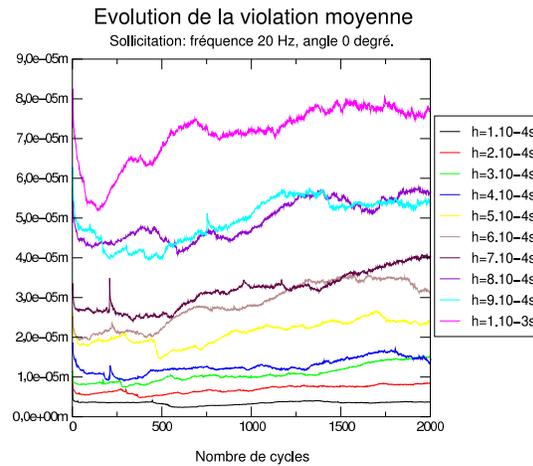


FIG. 5.13 – Evolution des violations moyennes.

On constate bien que le pas de temps joue un rôle important, il conditionne la valeur des violations moyennes, celle-ci étant multipliée par huit entre les pas de temps 1.10^{-4} s et 1.10^{-3}

s. Cette observation est couramment faite mais il est important de souligner que pour un pas de temps suffisamment petit, de l'ordre de 2.10^{-4} s, l'évolution des violations moyennes est stable. Les violations moyennes ne sont pas affectées par les violations maximales dans ce cas.

Il est important d'associer à ces évolutions une description du comportement du massif. En effet, pour un angle de 0 ou 5 degrés, les premiers cycles entraînent un réarrangement brutal tout autour du blochet, on observe une diminution du nombre de contacts, ce qui se traduit par une diminution de la violation moyenne. Ensuite la surface inférieure du blochet repose sur un empilement de grains, le confinement de ces éléments entre la sous-couche et le blochet entraîne la présence d'une localisation d'efforts.

On observe les mêmes tendances pour les deux angles de chargements, l'évolution des violations, dans la configuration particulière de notre échantillon, est stable si le pas de temps employé est de l'ordre de 1.10^{-4} s à 3.10^{-4} s. Les violations maximales ne sont pas nombreuses et se situent le plus souvent sur un contact face-face entre polygones.

5.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les particularités du modèle bidimensionnel. Nous avons choisis de modéliser les grains de ballast par des corps rigides ayant une enveloppe polygonale convexe.

La détermination de points de contact éventuels est issue d'un algorithme proposé par Moreau. Cette méthode, nommée *shadow-overlap*, permet de calculer très efficacement des intersections entre polygones convexes ; en modélisant le contact linéique par deux points. Elle permet par un calcul de projection de déterminer à la fois le repère local de contact, et les points de contacts, sans que le temps de calcul soit pénalisé.

La prise en compte d'une sous-couche déformable est faite à l'aide d'une discrétisation avec des polygones reposant sur des ressorts visco-élastiques. Cette approche simplifiée permet de tenir compte d'une déformation uniaxiale sans introduire la complexité d'une modélisation par éléments finis.

L'étude de sensibilité numérique sur un exemple de chargement cyclique a montré l'importance de deux paramètres de la simulation. Le premier est le **nombre minimal d'itérations** de Gauss-Seidel à effectuer un calcul, il est nécessaire d'itérer en moyenne suffisamment, **environ 300 à 400 itérations**, de façon à ne pas observer une accumulation d'interpénétration pouvant mettre en doute les résultats. Le second paramètre est le pas de temps, celui-ci doit être environ de 2.10^{-4} s, enfin d'obtenir un calcul propre.

L'ensemble des tests réalisés met en évidence que les temps de calcul dans le cas bidimensionnels sont longs, à 20 Hz, 1000 cycles de chargement simulés avec une bonne précision sur un échantillon tel que nous l'avons présenté prend environ 24 heures. Il est tout de même possible de pouvoir simuler plusieurs milliers de cycles de chargement dans des temps raisonnables.

Chapitre 6

Une approche tridimensionnelle polyédrique

6.1 Introduction

La modélisation de granulats tridimensionnels permet d'enrichir l'ensemble des observations possibles à l'aide de méthode par éléments discrets. Toutefois on s'attend à des difficultés numériques, en effet utiliser des grains polyédriques et considérer des échantillons de taille représentative implique des calculs a priori longs.

Dans ce chapitre nous allons présenter l'ensemble des éléments nécessaires à la mise en œuvre de la méthode par éléments discrets avec l'approche NSCD dans le cas tridimensionnel pour des corps convexes. Tout d'abord nous précisons le modèle choisi, ensuite nous décrivons le paramétrage puis le calcul de la matrice d'inertie pour un polyèdre convexe. Nous présenterons alors quelques exemples d'algorithmes de détection géométrique de points de contact et nous proposerons une méthode, et nous détaillerons la construction des opérateurs de passage entre le repère global et le repère local ainsi que la résolution du problème de contact frottant. Enfin nous présenterons une étude numérique.

6.2 Le modèle

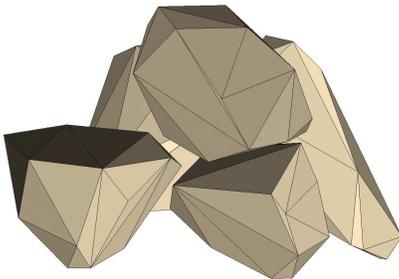


FIG. 6.1 – Grains de ballast peu facetisés convexes.

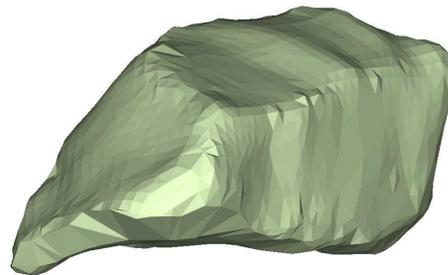


FIG. 6.2 – Grain de ballast très facetisé.

La modélisation des grains de ballast à l'aide d'objets tridimensionnels respectant leur angularité amène à considérer les corps comme des polyèdres. Nous considérerons les grains de ballast comme des corps ayant une enveloppe polyédrique convexe. La forme des grains sera en général issue d'une digitalisation de grains de ballast, sur la figure 6.1 on expose des grains peu facetisés volontairement, afin d'une part de considérer des grains convexes et d'autre part de limiter la taille des structures de données.

L'exemple de grains très facetisés issus d'une digitalisation de grains de ballast réels montre le degré de raffinement nécessaire si l'on désire être au plus près de la réalité. Nous ne considérerons pas ce type de grains, la détermination de leurs paramètres mécaniques reste complexe étant donné qu'ils ne sont pas convexes.

Nous supposerons les grains parfaitement rigides afin de diminuer le volume de calcul par rapport à une approche déformable.

6.3 Le paramétrage

Le choix du paramétrage est très important car il conditionne le déroulement de l'algorithme de résolution. Il est classique de choisir les déplacements du centre de gravité parmi les variables de configuration. Mais pour les rotations il existe plusieurs possibilités, comme par exemple les angles d'Euler, les quaternions. Ces différents paramétrages impliquent des implémentations différentes plus ou moins complexes, ayant parfois des limitations.

Nous avons choisis de raisonner différemment. Nous considérerons trois points associés au solide, ces points représentant les sommets des vecteurs de son repère principal d'inertie (α, β, γ) . Ce choix vient en partie du fait que dans le cas général la représentation de la matrice d'inertie du solide évolue en fonction du temps, alors que dans le repère principal d'inertie elle est constante et peut être calculée une fois pour toute.

Une fois les composantes du vecteur vitesse de rotation connues, il suffit de calculer le mouvement et la position du repère lié au solide à l'instant suivant. Il semble que les performances en temps de calcul de cette méthode et de la méthode des quaternions soient similaires, et donne les mêmes résultats [75].

On résout l'équation du mouvement en translation 3.2 dans le repère général et l'équation de moment 3.3 dans le repère principal d'inertie. La vitesse de rotation s'exprime comme : $\Omega = \omega_\alpha \alpha + \omega_\beta \beta + \omega_\gamma \gamma$.

L'algorithme présenté sur la figure 4.1 (page 74) se déroule de la manière suivante :

- on calcule la position intermédiaire, le déplacement du repère $q_m = q_i + h(1 - \theta)u_i$ ou q_i représente la position en début de pas, u_i la vitesse en début de pas. On évalue la rotation par entraînement du repère, $\alpha_m = \alpha_i + h(1 - \theta)\Omega_i \times \alpha_i$, ou α_i un vecteur directeur du repère en début de pas et Ω_i la rotation en début de pas. On fait de même pour β_m et γ_m et on peut donc évaluer la rotation $\Omega_m = \omega_\alpha \alpha_m + \omega_\beta \beta_m + \omega_\gamma \gamma_m$,
- on calcule les vitesses libres $v_{free} = (u_{free}, \Omega_{free})$,
- on effectue la détection géométriques des positions de points de contact, que l'on détaillera dans la suite. Grâce aux positions intermédiaires on peut déterminer les positions des sommets des polyèdres,
- on construit les opérateurs de passage entre le repère global et le repère local, H et H^* ,
- on effectue la résolution du problème local,
- on vient ensuite corriger les vitesses et les positions en fonction du torseur (r, M_r) , $u_f = u_{free} + \mathbb{M}^{-1}hr$ et $\omega_f = \omega_{free} + \mathbb{I}^{-1}hMr$, et $q_f = q_m + h\theta u_f$ et $\langle \alpha_f, \beta_f, \gamma_f \rangle = \langle \alpha_m, \beta_m, \gamma_m \rangle + h\theta \omega_f \times \langle \alpha_m, \beta_m, \gamma_m \rangle$

Le principal avantage de cette approche est de résoudre l'équation de moment dans le repère principal d'inertie, et de pouvoir inclure dans la construction des opérateurs de passage H et H^* le changement entre le repère global et local, afin de ne pas effectuer d'opérations supplémentaires au cours des itérations de Gauss-Seidel. En effet, la résolution étant réalisée au niveau local, chaque résolution d'un contact implique un changement de repère pour actualiser le torseur des grains concernés par ce contact.

6.4 Matrice d'inertie d'un polyèdre convexe

La résolution des équations du mouvement d'un corps rigide nécessite la connaissance de grandeurs comme la matrice d'inertie. La matrice de masse d'un polyèdre est aisée à calculer, mais ce n'est pas le cas de la matrice d'inertie d'un polyèdre quelconque. Il existe une méthode complexe pour ces configurations géométriques proposée par Mirtich [84] qui nous est apparu difficile à implémenter. Nous allons exposer la méthode développée, l'ensemble des rappels et développements analytiques étant présentés en annexe (page 201) avec des résultats de comparaison.

Considérons un polyèdre A , composé de N_A sommets et f_A faces triangulaires, de barycentre C . Ce polyèdre peut être découpé en f_A tétraèdres de sommet C et de base les sommets composant chaque face de A . L'objectif est de déterminer la position du centre de masse G de A et sa matrice d'inertie notée I .

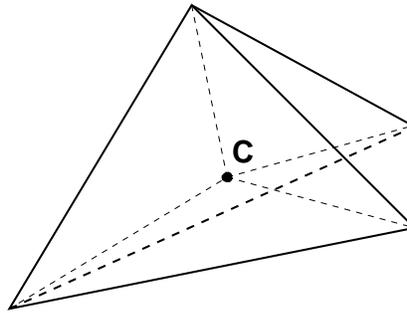


FIG. 6.3 – Exemple de découpage d'un tétraèdre.

La méthode est la suivante :

- | | |
|---|--|
| { | Etape 1 : détermination de la position de G. |
| | Pour chaque face de A , on considère le tétraèdre correspondant de sommet C :
on évalue G_i son centre d'inertie par la formule (11.18) et sa masse m_i . |
| | On détermine par la formule (11.3) le centre de gravité G de A . |
| | Etape 2 : translation des sommets.
Translation des sommets de vecteur $-OG$. |
| { | Etape 3 : détermination des matrices d'inerties des tétraèdres.
Pour chaque tétraèdre élémentaire de sommet l'origine :
détermination de sa matrice d'inertie à l'aide des formules de l'annexe |
| | Etape 4 : calcul de la matrice I de A.
somme des matrices d'inerties de tous les tétraèdres. |

Il est important de souligner que la somme de toutes les matrices d'inerties des tétraèdres composant le polyèdre A est permise car elles sont toutes calculées et exprimées dans le même repère R . La diagonalisation de la matrice d'inertie pour déterminer les moments principaux et le repère d'inertie s'effectue grâce à des bibliothèques standard de calcul scientifique. Cette méthode est valable uniquement pour des polyèdres convexes étant donné que l'on se base sur le calcul du barycentre des sommets du polyèdres considérés. En effet pour le cas non convexe on peut facilement imaginer que le barycentre soit extérieur au solide, le découpage en tétraèdre ne serait donc plus valable.

6.5 Algorithme Shadow-Overlap 3D

La résolution du problème mécanique d'interaction entre objets rigides nécessite de connaître, comme dans le cas bidimensionnel, les positions des points de contact, les repères locaux de contact. Il existe de nombreuses approches à la fois pour représenter un polyèdre, et pour détecter rapidement s'il existe une intersection entre deux polyèdres. Ces algorithmes ont le plus souvent été développés dans le domaine de la réalité virtuelle ou de la robotique où le nombre d'objets est peu conséquent. Par contre chaque objet peut être très facetisé. Nous présentons en annexes quelques types de représentation de polyèdres et quelques algorithmes de détection (page 209).

L'efficacité de la méthode du *shadow-overlap* développée par Moreau [131, 132] pour déterminer l'intersection éventuelle entre polygones convexes et la complexité de la réécriture d'algorithmes existants et leur adaptation, nous a motivé dans ce travail à développer un algorithme de détection entre polyèdres convexes. Nous allons exposer en détail l'algorithme proposé, et les optimisations possibles.

Notations :

- on considèrera dans la suite un repère orthonormé, d'origine O , d'axe $(0x, 0y, Oz)$,
- $Vert(A)$ représente l'ensemble des sommets du polyèdre convexe A ,
- $Face(A)$ représente l'ensemble des normales aux faces du polyèdre convexe A ,
- $N_{contact}$ représente la normale du repère de contact, qui est une inconnue,
- W_k l'ensemble des points de contact.

6.5.1 Détection grossière

Cette étape permet d'éliminer les cas de non contact de manière simple et rapide. On utilise usuellement la sphère englobante au polyèdre ou une boîte englobante. Dans notre cas nous allons définir le rayon d'encombrement d'un polyèdre de la manière suivante, considérant un polyèdre A , de barycentre C_A :

$$r_A = \max(\|C_A S\|, S \in Vert(A))$$

Le test consistera donc à examiner la distance entre deux polyèdres par rapport à la somme de leurs rayons d'encombrement. Ce test est rapide et efficace, mais selon la forme des grains il peut être inadapté.

L'utilisation d'une boîte englobant un polyèdre peut permettre d'éliminer de nombreux cas mais doit être employée de manière efficace. L'objectif est de déterminer si il existe un intervalle selon l'axe Ox, Oy , ou Oz pour lequel les projections des polyèdres sur un de ces axes ne se recoupent pas.

Les coordonnées de la boîte sont définies par deux points extrémaux, $P1(A)$, $P2(A)$:

$$P1_x = \min(OS.O_x, S \in vert(A)) \text{ (resp } y,z)$$

$$P2_x = \max(OS.O_x, S \in vert(A)) \text{ (resp } y,z)$$

Considérons deux polyèdres A et B , dont les barycentres sont O_A, O_B . Le test selon l'axe Ox consiste à évaluer (resp. Oy, Oz) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{If } O_A O_B \cdot Ox > 0 \text{ then} \\ \quad \text{If } P1_x(B) - P2_x(A) > 0 \text{ then no contact} \\ \text{Else} \\ \quad \text{If } P1_x(B) - P2_x(B) < 0 \text{ then no contact} \\ \text{Endif} \end{array} \right. \quad (6.1)$$

L'évaluation des points les plus éloignés est l'étape la plus coûteuse, étant donné qu'il faut déterminer ces points parmi un ensemble de sommets. Mais ce calcul peut être fait une seule fois par pas de temps lors de l'actualisation des positions des sommets.

6.5.2 Recherche d'un plan séparateur

La détermination d'un plan séparateur est couramment utilisé pour statuer rapidement d'un cas de non contact [140],[30]. A la différence de la recherche d'un plan commun, proposée par Cundall [35] ou Moreau pour la méthode du shadow-overlap, nous allons essayer de déterminer s'il existe un plan tel que deux polyèdres soient contenus dans les deux demi-espaces dont il forme la frontière.

Cette étape ne permet pas au final de statuer s'il y a contact, mais de déterminer une direction pour laquelle l'overlap entre deux polyèdres est le plus petit. Pour cette raison nous n'emploierons pas le terme de *common plane*. Dans le cas où l'on trouve une direction pour laquelle l'overlap est négatif, alors il n'y a pas contact. Les directions examinées vont être choisies arbitrairement parmi les normales aux polyèdres.

Ce choix est orienté par le théorème suivant [140] :

Théorème 1. *Considérons une paire de polyèdres dont l'intersection est vide, alors il existe un axe séparateur orthogonal à une des facettes des deux polyèdres ou orthogonal à une arête de chaque polyèdre.*

Il est important de remarquer que les normales aux polyèdres sont connues et leur orientation actualisée, il n'est pas nécessaire de les réévaluer.

La définition du *shadow-overlap* est la suivante :

$$shov(V_{com}) = \max(OS_A \cdot V_{com})_{S_A \in Vert(A)} - \min(OS_B \cdot V_{com})_{S_B \in Vert(B)} \quad (6.2)$$

Le sommet de $Vert(A)$, (resp. $Vert(B)$) vérifiant la projection la plus grande (resp. la plus petite), est appelé un sommet critique. Pour déterminer si il y a possibilité de contact entre A et B , on utilise l'algorithme suivant :

$$\left. \begin{array}{l}
 \text{Calcul de } \textit{overlap}^0 = \textit{shov}\left(\frac{O_A O_B}{\|O_A O_B\|}\right) \\
 \text{Si } \textit{overlap}^0 < 0 \text{ alors} \\
 \quad \text{pas contact} \\
 \text{Sinon} \\
 \quad \left[\begin{array}{l}
 \text{Pour tout } V_{com} \in \textit{Face}(A) \\
 \text{Si } V_{com} \cdot O_A O_B > 0 \text{ alors} \\
 \quad \text{Calcul de } \textit{overlap}^1 = \textit{shov}(V_{com}) \\
 \quad \text{Si } \textit{overlap}^1 < 0 \text{ alors pas contact} \\
 \quad \text{Sinon} \\
 \quad \quad \text{Si } \textit{overlap}^0 > \textit{overlap}^1 \text{ alors} \\
 \quad \quad \quad N_{contact} = V_{com} \text{ et } \textit{overlap}^0 = \textit{overlap}^1 \\
 \quad \quad \text{Fin} \\
 \quad \text{Fin} \\
 \quad \text{Fin}
 \end{array} \right. \\
 \quad \left[\begin{array}{l}
 \text{Pour tout } V_{com} \in \textit{Face}(B) \\
 \text{Si } V_{com} \cdot O_A O_B < 0 \text{ alors} \\
 \quad \text{Calcul de } \textit{overlap}^1 = \textit{shov}(V_{com}) \\
 \quad \text{Si } \textit{overlap}^1 < 0 \text{ alors pas contact} \\
 \quad \text{Sinon} \\
 \quad \quad \text{Si } \textit{overlap}^0 > \textit{overlap}^1 \text{ alors} \\
 \quad \quad \quad N_{contact} = V_{com} \text{ et } \textit{overlap}^0 = \textit{overlap}^1 \\
 \quad \quad \text{Fin} \\
 \quad \text{Fin} \\
 \quad \text{Fin}
 \end{array} \right. \\
 \text{Endif}
 \end{array} \right\} \quad (6.3)$$

Cet algorithme permet donc de trouver la direction qui minimise l'overlap entre deux polyèdres, cette direction sera considérée comme normale du repère local de contact dans le cas où il y a effectivement contact. Cela permet aussi de sélectionner les faces candidates au contact. Les polyèdres étant convexes, ce sont les faces dont le produit scalaire entre la normale et l'axe des centres est positif pour A , négatif pour B .

Les étapes les plus coûteuses de cette analyse sont l'évaluation de l'overlap, il est nécessaire de parcourir l'ensemble des sommets des polyèdres pour déterminer la projection la plus éloignée :

$$\max(OS_A \cdot V_{com})_{S_A \in \textit{Vert}(A)}$$

Mais nous verrons dans les optimisations de l'algorithme que des simplifications peuvent être apportées.

Pour déterminer s'il y a ou non contact il est donc nécessaire d'analyser l'intersection des faces candidates au contact des polyèdres A et B . Ces intersections consistent donc à analyser des primitives qui sont dans notre cas des triangles.

6.5.3 Intersection de primitives

Les polyèdres considérés étant facetisés à l'aide de triangles, pour déterminer si il y a contact, il est nécessaire de déterminer si une facette de A intersecte une facette de B . L'opération consiste à parcourir l'ensemble des facettes de A candidates au contact et de tester avec l'ensemble de celles de B . Nous allons présenter une méthode d'intersection entre deux triangles.

Considérons deux polyèdres A et B , F_A une face de A de normale N_A et F_B une face de B de normale N_B . Examinons le cas où une arête de F_A intersecte la face F_B (idem pour les autres cas de figure), on considère :

- $[P_1, P_2]$ une arête de A
- $[S_1, S_2, S_3]$ les sommets de la face F_B

$[P_1, P_2]$ arête de A (resp B) intersecte la face F_B (resp F_A) si :

s'il existe $\lambda \in [0, 1]$ $N_B \cdot P_1 P_2 \neq 0, S_1 \in Vert_{F_B}$ et $\lambda = \frac{N_B \cdot P_2 S_1}{N_B \cdot P_2 P_1}$

et $C = \lambda P_1 + (1 - \lambda) P_2$ vérifiant $(CS_1 \times CS_2) \cdot N_B, (CS_2 \times CS_3) \cdot N_B, (CS_3 \times CS_1) \cdot N_B$ de même signe.

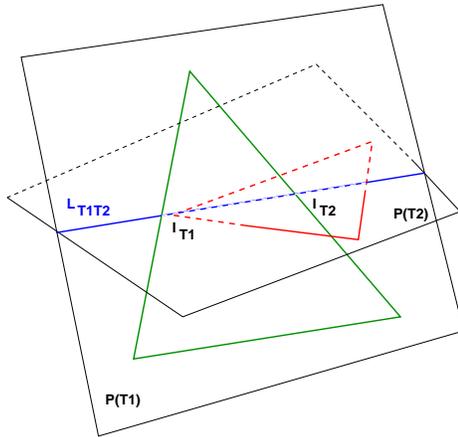


FIG. 6.4 – Cas d'intersection entre I_{T1} et I_{T2} .

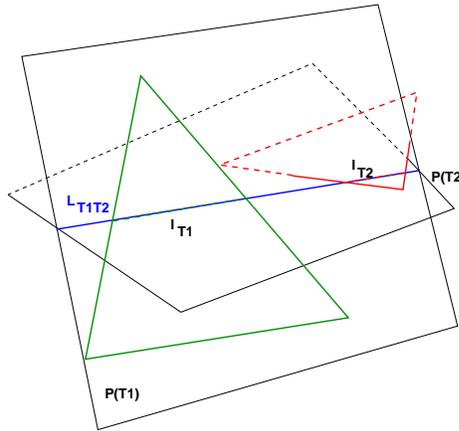


FIG. 6.5 – Cas de non intersection.

Il existe d'autres méthodes moins brutales que celle-ci, par exemple celle proposée par Moller [96] et plus récemment Guigue [57]. Ces méthodes sont basées sur le calcul d'overlap entre deux triangles, Guigue proposant une optimisation de l'algorithme de Moller en utilisant l'orientation pour l'analyse. Pour deux triangles $T1$ et $T2$ l'approche consiste à :

- calculer l'équation du plan $P(T2)$ contenant $T2$,
- si les sommets de $T1$ sont du même côté de $P(T2)$, pas d'intersection,
- calculer l'équation du plan $P(T1)$ contenant $T1$,
- si les sommets de $T2$ sont du même côté de $P(T1)$, pas d'intersection,
- sinon il existe une droite d'intersection commune à $T1$ et $T2$, que l'on note L_{T1T2} .

- On calcule les intervalles I_{T_1} et I_{T_2} définissant $L_{T_1 T_2} \cap (T_1 \cup T_2)$
- si l'intersection des intervalles I_{T_1} et I_{T_2} est non vide, T_1 et T_2 s'intersectent, sinon pas d'intersection.

Dans le cas où il y a intersection, l'algorithme permet de déterminer les points définissant le segment représentant cette intersection. Nous adopterons la méthode proposée par Guigue [57], celle-ci étant la plus rapide à l'heure actuelle.

Il est donc nécessaire d'effectuer les opérations suivantes si l'on emploie la première méthode pour déterminer un ensemble de points d'intersection :

$$\left[\begin{array}{l}
 \text{Pour toute normale } V_A \in \text{Face}(A) \text{ vérifiant : } V_A \cdot O_A O_B > 0 \\
 \left[\begin{array}{l}
 \text{Pour toute normale } V_B \in \text{Face}(B) \text{ vérifiant : } V_B \cdot O_A O_B < 0 \\
 \left[\begin{array}{l}
 \text{Si il existe } C \in \{\lambda P_1 + (1 - \lambda)P_2, P_1, P_2 \in \text{Vert}_{V_A}, \lambda \in [0, 1]\} \\
 \text{et } C \text{ appartient à la face de normale } V_A \\
 \\
 \text{OU} \\
 \\
 \text{Si il existe } C \in \{\lambda P_1 + (1 - \lambda)P_2, P_1, P_2 \in \text{Vert}_{V_B}, \lambda \in [0, 1]\} \\
 \text{et } C \text{ appartient à la face de normale } V_B \\
 \\
 \text{C est un point d'intersection et } W_{\{k+1\}} = W_{\{k\}} \cup \{C\}
 \end{array} \right.
 \end{array} \right.
 \end{array} \right. \quad (6.4)$$

A l'aide de la méthode proposée par Guigue, il suffit de parcourir l'ensemble des faces candidates au contact avec deux boucles imbriquées. L'analyse des facettes candidates au contact est arrêtée lorsque un nombre de points d'intersection arbitraire est trouvé, on fixera une vingtaine. Cette étape est très coûteuse, le nombre de paires de facettes à analyser pouvant être grand. Une fois que l'on a déterminé un ensemble de points d'intersection, il faut définir un critère pour choisir un, deux ou trois points de contact.

6.5.4 Choix des points de contact

Parmi l'ensemble W_k des points d'intersection déterminés, il est nécessaire d'en choisir 1, 2 ou 3. Nous envisageons trois situations géométriques :

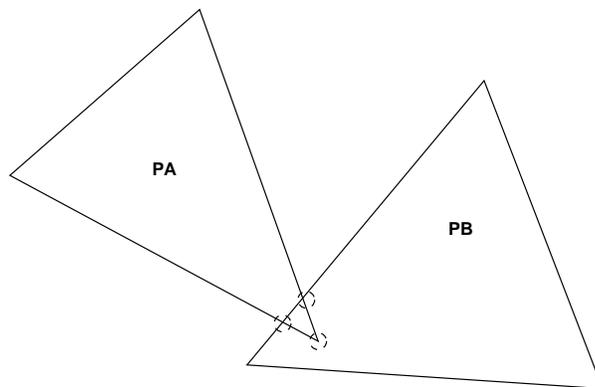


FIG. 6.6 – Situation nécessitant un point de contact.

Dans ce premier cas il n'est pas utile de prendre 3 points de contacts, les points constituant l'intersection étant proches les uns des autres. On peut prendre le barycentre des points comme point de contact.

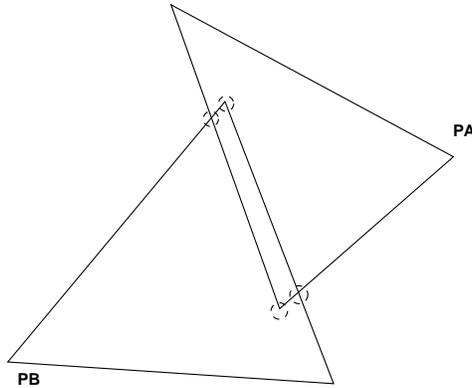


FIG. 6.7 – Situation nécessitant 2 points de contact.

Dans ce second cas, les points de contact peuvent être pris comme les points extrémaux

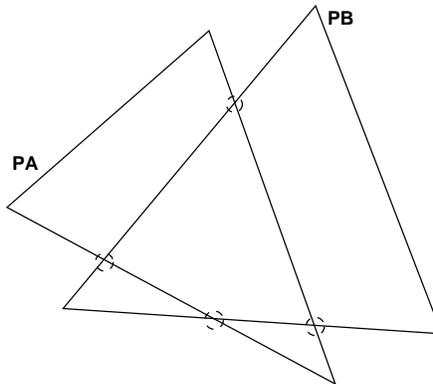


FIG. 6.8 – Situation nécessitant 3 points de contact.

Dans ce troisième cas il est nécessaire de choisir trois points de contact représentatifs de la zone de contact.

Pour déterminer si les points sont suffisamment éloignés les uns des autres, il est nécessaire d'avoir une valeur seuil propre à chaque situation. On prendra donc pour une paire de polyèdre le plus petit rayon d'encombrement des faces, que l'on désignera par *norm*.

On notera $W_{contact}$ les points de contacts choisis, cet ensemble est de dimension 3.

Les points doivent vérifier :

$$\forall C \in W_{contact}, C \text{ vérifie } \forall P \in W_k, \|CP\| > norm \text{ et } \forall P' \in W_{contact}, \|CP'\| > norm$$

Selon les cas on trouvera 1, 2 ou 3 points de contacts. Dans le cas où on en trouve qu'un seul, le barycentre B des points d'intersection déterminés est pris comme point de référence.

Une approche différente a été utilisée dans le cadre de la thèse de Dimnet [43], le traitement d'un contact entre surface est fait de la manière suivante, on considère l'ensemble des points de contacts délimitant la surface candidate comme point de contact effectif pour le calcul des percussions. Mais au vu du nombre de solides à traiter, cette approche reviendrait à considérer un nombre trop important de contacts, et des calculs beaucoup trop longs.

6.5.5 Optimisations de l'algorithme de détection

L'optimisation de l'algorithme présenté a pour objectif de diminuer le nombre d'opérations à effectuer en particulier lors de l'évaluation de la fonction support d'un polyèdre dans une direction et lors du calcul d'intersection de primitives. Nous allons tout d'abord rappeler brièvement les étapes de calculs pour une simulation de type éléments discrets :

- prédiction des vitesses des corps,
- prédiction des positions des corps au moyen de ces vitesses, en particulier détermination de la position des sommets des polyèdres,
- détection géométrique de points de contact et calcul des repères locaux de contact,
- résolution du problème d'interaction,
- actualisation des efforts et des positions des corps.

Il est intéressant de constater que l'étape de détection est réalisée pour des positions calculées après la prédiction des vitesses. Il est alors possible lors du calcul de ces positions d'évaluer des données nécessaires à l'algorithme de détection afin de diminuer le nombre d'opérations à effectuer.

Calcul des fonctions support

La recherche d'un plan séparateur nécessite pour chaque direction testée l'évaluation de deux quantités : $\max(OS_A.V_{com}, S_A \in Vert(A))$ et $\min(OS_B.V_{com}, S_B \in Vert(A))$.

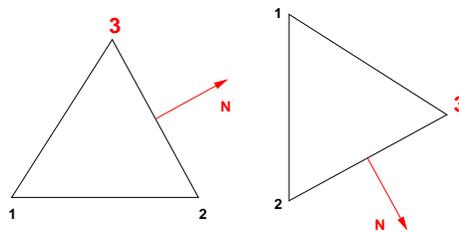


FIG. 6.9 – Exemple sur la rotation d'un triangle.

Or pour un polyèdre A l'évaluation de la fonction support pour une direction choisie parmi l'ensemble de ses normales peut être simplifiée. En effet, le sommet vérifiant, $\max(OS_A.V_{com}, S_A \in Vert(A))$, pour $V_{com} \in Face(A)$ est toujours le même, les objets ne se déformant pas (fig. 6.9).

Donc pour un polyèdre, il faut déterminer pour chacune de ses normales le sommet vérifiant la projection maximale dans cette direction, ensuite la valeur de la fonction support peut être calculée simplement $s(V_{com}) = S_{V_{com}}.V_{com}, V_{com} \in Face(A)$ pendant l'actualisation de la position des sommets par un simple produit scalaire.

On notera donc $S_V(A)$ le sommet du polyèdre A associé à la direction V vérifiant $\max(OS_A.V, S_A \in Vert(A))$. On pourra réécrire le shadow-overlap, pour $V_{com} \in Face(A)$ (resp $V_{com} \in Face(B)$) :

$$shov(V_{com}) = OS_{V_{com}}(A).V_{com} - \min(OS_B.V_{com})_{S_B \in Vert(B)} \quad (6.5)$$

Lors d'une détection, il ne sera plus nécessaire de calculer la quantité $OS_{V_{com}}(A).V_{com}$ qui sera considérée comme précalculée pendant l'actualisation de la position.

Détermination des paires de triangle à examiner

L'optimisation de l'algorithme proposé doit permettre de diminuer le nombre de paires de primitive à examiner. Nous allons exposer deux approches possibles, l'une valable uniquement pour des polyèdres convexes, et l'autre valable dans des cas où la surface des polyèdres pourrait être localement non convexe.

Première approche : L'algorithme du shadow-overlap peut être utilisé pour déterminer les faces les plus proches dans l'espace. Ces faces doivent vérifier que l'overlap est minimal. Si l'on considère deux polyèdres A et B , convexes, on détermine la face de A pour laquelle l'overlap est minimum,

$$\left[\begin{array}{l} \text{Pour tout } V_{com} \in Face(A) \\ \text{Si } V_{com}.O_A O_B > 0 \text{ then} \\ \quad \text{Calcul de } overlap^1 = shov(V_{com}) \\ \quad \text{Si } overlap_A^1 < 0 \text{ alors pas contact} \\ \quad \text{Sinon} \\ \quad \quad \text{Si } overlap_A^0 > overlap_A^1 \text{ alors} \\ \quad \quad \quad N_A = V_{com} \text{ et } overlap_A^0 = overlap_A^1 \\ \quad \text{Fin} \\ \text{Fin} \\ \text{Fin} \end{array} \right. \quad (6.6)$$

On réalise la même opération pour les faces de B :

$$\left[\begin{array}{l} \text{Pour tout } V_{com} \in Face(B) \\ \text{Si } V_{com}.O_A O_B < 0 \text{ alors} \\ \quad \text{Calcul de } overlap_B^1 = shov(V_{com}) \\ \quad \text{Si } overlap_B^1 < 0 \text{ alors pas contact} \\ \quad \text{Sinon} \\ \quad \quad \text{Si } overlap_B^0 > overlap_B^1 \text{ alors} \\ \quad \quad \quad N_B = V_{com} \text{ et } overlap_B^0 = overlap_B^1 \\ \quad \text{Fin} \\ \text{Fin} \\ \text{Fin} \end{array} \right. \quad (6.7)$$

Une fois les deux facettes déterminées on teste uniquement les intersections des facettes adjacentes aux facettes les plus proches, ce qui réduit considérablement le nombre de tests.

Cette méthode simple exige de construire une base de donnée plus importante et donc plus de place mémoire, mais ne nécessite aucun paramètre à définir pour éliminer des facettes à examiner. C'est son principal avantage.

Deuxième approche : En partant de la constatation géométrique suivante, en prenant un objet facetisé comme sur la figure 6.10 la projection des normales selon l'axe des centres peut servir à déterminer si une face peut être en contact potentiel. Si l'on prend le cas de deux sphères facetisées, les normales des faces qui seront potentiellement en contact sont celles dont le produit scalaire avec l'axe des centres est le plus grand, ou le plus petit.

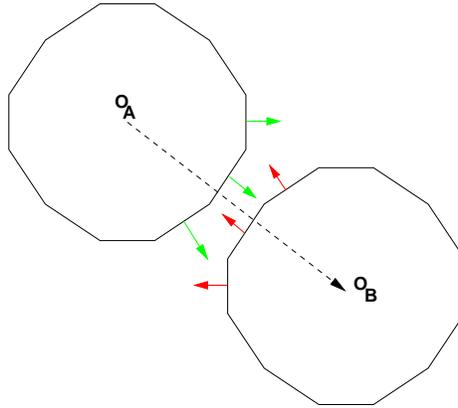


FIG. 6.10 – Facette candidate au contact pour un objet facetisé.

Considérons deux polyèdres A et B , de barycentre O_A , O_B . L'opération va donc consister à étudier la quantité $p = V_{com} \cdot O_A O_B$ pour $V_{com} \in Face(A)$. On initialise une quantité p_0 avec une valeur négative, on teste une direction si cette direction de projection diminue l'overlap, alors on prends comme référence $p_0 = p$. Ensuite en continuant les tests on enregistre les faces qui vérifient $p > \alpha p_0$. Le paramètre α , est entre $[0, 1]$, la valeur 1 étant prise dans le cas d'une sphère facetisée.

Notons $Face_{cd}(A)$ l'ensemble des facettes candidates au contact pour le polyèdre A .

$$\left[\begin{array}{l}
 \text{Pour tout } V_{com} \in Face(A) \\
 \text{Si } p = V_{com} \cdot O_A O_B > 0 \text{ then} \\
 \text{Si } p > \alpha p_0 \text{ alors } Face_{cd}(A) = Face_{cd}(A) \cup V_{com} \\
 \text{Calcul de } overlap^1 = shov(V_{com}) \\
 \text{Si } overlap^1 < 0 \text{ alors pas contact} \\
 \text{Sinon} \\
 \quad \text{Si } overlap^0 > overlap^1 \text{ alors} \\
 \quad \quad N_A = V_{com} \text{ et } overlap^0 = overlap^1, p_0=p \\
 \text{Fin} \\
 \text{Fin} \\
 \text{Fin}
 \end{array} \right. \quad (6.8)$$

On réalise la même opération pour les faces de B, en initialisant la valeur de $p_0 = -p_0$

$$\left[\begin{array}{l}
 \text{Pour tout } V_{com} \in \text{Face}(B) \\
 \text{Si } p = V_{com} \cdot O_A O_B < 0 \text{ alors} \\
 \text{Si } p < \alpha p_0 \text{ alors } \text{Face}_{cd}(B) = \text{Face}_{cd}(B) \cup V_{com} \\
 \text{Calcul de } \text{ovlap}_B^1 = \text{shov}(V_{com}) \\
 \text{Si } \text{ovlap}_B^1 < 0 \text{ alors pas contact} \\
 \text{Sinon} \\
 \quad \text{Si } \text{ovlap}_B^0 > \text{ovlap}_B^1 \text{ alors} \\
 \quad \quad N_B = V_{com} \text{ et } \text{ovlap}_B^0 = \text{ovlap}_B^1 \quad p_0 = p \\
 \text{Fin} \\
 \text{Fin} \\
 \text{Fin}
 \end{array} \right. \quad (6.9)$$

Cette approche permet d'analyser un nombre plus important de faces donc éventuellement de traiter des cas d'objets non convexes.

6.5.6 Evaluation des performances de l'algorithme de détection

L'algorithme présenté exploite la possibilité de trouver une direction séparatrice permettant de statuer de la situation de non contact. Dans le cas où il n'existe pas de normale aux faces des deux polyèdres vérifiant la condition d'une direction séparatrice, il est nécessaire d'effectuer des opérations plus lourdes.

L'efficacité de l'algorithme peut être analysée en considérant l'évolution du nombre moyen de shadow-overlap effectués pour chaque pas de temps et le nombre de situations pour lesquelles lorsqu'il n'y a pas contact, la direction séparatrice ne se trouve pas parmi l'ensemble des normales aux faces des polyèdres examinés. Ces deux quantités permettront d'analyser l'algorithme. Notons N_{test} , le nombre de détections effectuées et N_{noctc} le nombre de situation de non contact statuées par le calcul d'intersection de faces.

On définit les paramètres suivants.

Le nombre moyen de shadow-overlap effectués par pas de temps, N_{shadow} :

$$N_{shadow} = \frac{\text{Nombre de shadow-overlap effectués}}{N_{test}}$$

Le pourcentage de situations, sur un pas de temps, parmi celles possibles où la direction séparatrice n'appartient pas à l'ensemble des normales des polyèdres examinés, D_{eff} :

$$D_{eff} = 100 - \frac{N_{noctc} * 100}{N_{test}}$$

Le coût de l'algorithme de détection, C , lors d'un calcul est une donnée qu'il est nécessaire de définir. On va donc étudier le rapport entre le temps moyen d'une détection et le temps moyen d'une itération du solveur. Ce rapport va permettre, selon le type de simulation d'évaluer qu'elles sont les parties les plus coûteuses en temps de calcul :

$$C = \frac{\text{Temps moyen d'une d'itération}}{\text{Temps moyen d'une détection}}$$

6.6 Construction des opérateurs de passage global/local

La résolution d'un problème avec la démarche adoptée implique une résolution des équations de la dynamique au niveau global et une résolution du problème d'interaction au niveau local. Les opérateurs permettant de passer du repère local au global, notés H^* et H , sont calculés dans la configuration de détection et sont pris constant au cours du pas de temps.

Le choix de paramétrer la rotation par rapport au repère principal d'inertie, implique d'en tenir compte dans la construction des opérateurs de passage. Nous allons exposer la construction de ces opérateurs.

Considérons deux corps A et B , de centre de gravité G_A et G_B , ayant un point de contact P , et un repère local de contact associé (n, t, s) . L'objectif est d'exprimer les vitesses relatives dans le repère local au contact en fonction des vitesses des corps dans le repère général.

La vitesse au point de contact P pour les corps A et B s'écrit :

$$u_A(P) = u_A(G_A) + \Omega_A \times G_AP$$

$$u_B(P) = u_B(G_B) + \Omega_B \times G_BP$$

La vitesse de translation au centre de gravité étant connue explicitement dans le repère global suite à une prédiction en début de pas, il est donc nécessaire d'évaluer dans ce repère les termes $\Omega_A \times G_AP$ et $\Omega_B \times G_BP$. La vitesse de rotation Ω_A s'écrit, $\Omega_A = \omega_\alpha \alpha_m + \omega_\beta \beta_m + \omega_\gamma \gamma_m$, $(\alpha_m, \beta_m, \gamma_m)$ étant la position du repère principal d'inertie dans la configuration de la détection.

On peut donc écrire, pour le corps A :

$$\Omega_A \times G_AP = (\omega_\alpha \alpha_m + \omega_\beta \beta_m + \omega_\gamma \gamma_m) \times G_AP$$

Ce qui peut s'écrire sous forme matricielle, $\Omega_A \times G_AP = [Rc]\omega_A$, avec $[Rc]$:

$$Rc = \begin{pmatrix} \alpha(2).GP(3) - \alpha(3).GP(2) & \beta(2).GP(3) - \beta(3).GP(2) & \gamma(2).GP(3) - \gamma(3).GP(2) \\ \alpha(3).GP(1) - \alpha(1).GP(3) & \beta(3).GP(1) - \beta(1).GP(3) & \gamma(3).GP(1) - \gamma(1).GP(3) \\ \alpha(1).GP(2) - \alpha(2).GP(1) & \beta(1).GP(2) - \beta(2).GP(1) & \gamma(1).GP(2) - \gamma(2).GP(1) \end{pmatrix}$$

La vitesse relative au point de contact, notée U , peut donc s'écrire :

$$U = (u_A(P) - u_B(P).n)n + (u_A(P) - u_B(P).t)t + (u_A(P) - u_B(P).s)s$$

avec $(\Omega_A \times G_{AP}).n$ sous la forme :

$$\begin{aligned} (\Omega_A \times G_{AP}).n &= \begin{pmatrix} \omega_\alpha \\ \omega_\beta \\ \omega_\gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Rc_{11}n(1) + Rc_{12}n(2) + Rc_{13}n(3) \\ Rc_{21}n(1) + Rc_{22}n(2) + Rc_{23}n(3) \\ Rc_{31}n(1) + Rc_{32}n(2) + Rc_{33}n(3) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \omega_\alpha \\ \omega_\beta \\ \omega_\gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} M_{An}(1) \\ M_{An}(2) \\ M_{An}(3) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

En réalisant le même développement pour l'ensemble des expressions ci-dessus, on peut en déduire une relation matricielle reliant les vitesses dans le repère local et les vitesses dans le repère global, ainsi que pour les actions de contact :

$$(U_n, U_t, U_s) = H^*(U_A(P) - U_B(P))$$

Avec la matrice H^* :

$$H^* = \begin{pmatrix} n(1) & n(2) & n(3) \\ t(1) & t(2) & t(3) \\ s(1) & s(2) & s(3) \\ M_{An}(1) & M_{An}(2) & M_{An}(3) \\ M_{At}(1) & M_{At}(2) & M_{At}(3) \\ M_{As}(1) & M_{As}(2) & M_{As}(3) \\ -n(1) & -n(2) & -n(3) \\ -t(1) & -t(2) & -t(3) \\ -s(1) & -s(2) & -s(3) \\ -M_{Bn}(1) & -M_{Bn}(2) & -M_{Bn}(3) \\ -M_{Bt}(1) & -M_{Bt}(2) & -M_{Bt}(3) \\ -M_{Bs}(1) & -M_{Bs}(2) & -M_{Bs}(3) \end{pmatrix}$$

De même pour les réactions de contact on aura $(R_A, M_A, R_B, M_B) = H(r_n, r_t, r_s)$ où H est la transposé de H^* . Les opérateurs de passage H et H^* contiennent donc le passage du repère d'inertie au repère global, l'actualisation des torseurs des efforts au cours des itérations peut donc être faite pour l'équation de moment dans le repère principal d'inertie. Cela permet d'économiser un nombre important d'opérations, la matrice d'inertie étant diagonale dans ce repère.

6.7 Résolution du problème local

Au niveau local, on est amené à résoudre un problème non-linéaire avec contraintes exprimant les conditions de Signorini et la loi de frottement de Coulomb. On peut donc écrire le problème sous la forme suivante :

$$U - U_{free} - WhR = 0$$

(U_N, R_N) vérifient condition de Signorini

(U_T, R_T) appartient au cône de Coulomb

Ce qui peut s'écrire :

$$U_N - U_{freeN} - W_{NN}hR_N - W_{NT}hR_T = 0$$

$$U_T - U_{freeT} - W_{TN}hR_N - W_{TT}hR_T = 0$$

avec les contraintes suivantes :

$$R_N \geq 0 \quad U_N \geq 0 \quad R_N U_N = 0$$

$$\| R_T \| \leq \mu R_N \text{ avec } \begin{cases} \text{Si } \| R_T \| < \mu R_N \text{ alors } U_T = 0 \\ \text{Si } \| R_T \| = \mu R_N \text{ alors } U_T = -\lambda R_T \quad \lambda > 0 \end{cases}$$

La résolution de ce problème est non-linéaire dans le cas général, en effet les différentes équations sont couplées, l'opérateur de Delassus, W , étant une matrice pleine. Nous allons tout d'abord présenter la résolution de ce problème pour un contact entre corps sphériques, ensuite nous exposerons la méthode de Newton généralisée et enfin une simplification possible afin de diminuer le nombre d'opérations à effectuer.

6.7.1 Résolution du problème dans le cas d'un contact entre sphères

En raison de la symétrie sphérique, l'opérateur de Delassus, noté W , est diagonal, les termes hors diagonaux étant nuls pour sphères. On a donc un problème découplé, et l'on peut le réécrire sous la forme :

$$U_N - U_{freeN} - W_{NN}R_N = 0$$

$$U_T - U_{freeT} - W_{TT}R_T = 0$$

avec les contraintes suivantes :

$$R_N \geq 0 \quad U_N \geq 0 \quad R_N U_N = 0$$

$$\| R_T \| \leq \mu R_N \text{ avec } \begin{cases} \text{Si } \| R_T \| < \mu R_N \text{ alors } U_T = 0 \\ \text{Si } \| R_T \| = \mu R_N \text{ alors } U_T = -\lambda R_T \quad \lambda > 0 \end{cases}$$

Le calcul alors de la solution (U, R) peut se faire explicitement. (U_N, R_N) vérifiant les conditions de Signorini on a donc, pour $U_N = 0$:

$$R_N = \frac{-U_{freeN}}{W_{NN}}$$

Si $R_N < 0$ alors il n'y a pas contact et donc $R_T = 0$.

Dans le cas contraire, (U_T, R_T) vérifiant la frottement de Coulomb, on a donc pour $U_T = 0$:

$$R_T = \frac{-U_{freeT}}{W_{TT}}$$

Si $\|R_T\| < \mu R_N$ alors on est à l'intérieur du cône de Coulomb, c'est une situation de contact collant. La relation de Coulomb est donc vérifiée, mais dans le cas contraire la réaction tangentielle est proportionnelle à μR_N , on a donc $R_T = \frac{\mu R_N}{\|R_T\|} R_T$.

Cette résolution dans le cas d'une sphère est simple, nous verrons dans la suite qu'elle peut être intéressante pour le cas des polyèdres. Mais de manière générale, pour un corps n'ayant pas de symétrie sphérique, l'opérateur de Delassus n'est pas diagonal, et l'on ne peut obtenir en trois dimensions une solution explicite.

6.7.2 Résolution à l'aide de la méthode de Newton généralisée

En trois dimensions, le problème de contact frottant peut s'écrire sous la forme suivante, en réécrivant les contraintes de manière équivalente :

$$U_N - U_{freeN} - W_{NN}hR_N - W_{NT}hR_T = 0$$

$$U_T - U_{freeT} - W_{TN}hR_N - W_{TT}hR_T = 0$$

$$R_N = \text{proj}_{\mathbb{R}^+}(R_N - \rho_N U_N) \text{ où } \rho_N > 0 \text{ est arbitraire.}$$

$$R_T = \text{proj}_{C(\mu R_N)}(R_T - \rho_T U_T) \text{ où } \rho_T > 0 \text{ est arbitraire.}$$

$$\text{avec } C(\mu R_N) = \{S_T : \|S_T\| \leq \mu R_N\}$$

Au final on peut introduire :

$$\Phi_1(U, hR) = U_N - U_{libN} - W_{NN}hR_N - W_{NT}hR_T \in \mathbb{R}$$

$$\Phi_2(U, hR) = U_T - U_{libT} - W_{TN}hR_N - W_{TT}hR_T \in \mathbb{R}^2$$

$$\Phi_3(U, hR) = hR_N - \text{proj}_{\mathbb{R}^+}(R_N - \rho_N U_N) \in \mathbb{R}$$

$$\Phi_4(U, hR) = hR_T - \text{proj}_{C(\mu R_N)}(R_T - \rho_T U_T) \in \mathbb{R}^2$$

on définit donc l'application Φ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ dans lui-même et on recherche un couple (U, hR) tel que $\Phi(U, hR) = 0$.

Ce problème est non linéaire, non différentiable, la méthode de Newton a été généralisée à ce type de problème par Alart et Curnier[8].

Le principe de la méthode de Newton est de chercher itérativement la solution du problème non-linéaire. Si on note X l'inconnue du problème, F l'application non-linéaire et X^i une approximation non satisfaisante de la solution, alors une nouvelle approximation X^{i+1} de la solution sera calculée par l'expression :

$$\partial F(X^i).(X^{i+1} - X^i) = -F(X^i)$$

où $\partial F(X^i)$ représente une *dérivée* de F en (X^i) par rapport à X .

Dans notre cas on va donc pouvoir écrire synthétiquement une itération de Newton sous la forme :

$$\partial\phi(U^i, hR^i).(U^{i+1} - U^i, hR^{i+1} - hR^i) = -\Phi(U^i, hR^i)$$

L'évaluation de $\partial\Phi$ nous donne :

$$\partial\Phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial\Phi_1}{\partial U_N} = I & \frac{\partial\Phi_1}{\partial U_T} = 0 & \frac{\partial\Phi_1}{\partial hR_N} = -W_{NN} & \frac{\partial\Phi_1}{\partial hR_T} = -W_{NT} \\ \frac{\partial\Phi_2}{\partial U_N} = 0 & \frac{\partial\Phi_2}{\partial U_T} = I & \frac{\partial\Phi_2}{\partial hR_N} = -W_{TN} & \frac{\partial\Phi_2}{\partial hR_T} = -W_{TT} \\ \frac{\partial\Phi_3}{\partial U_N} & \frac{\partial\Phi_3}{\partial U_T} = 0 & \frac{\partial\Phi_3}{\partial hR_N} & \frac{\partial\Phi_3}{\partial hR_T} = 0 \\ \frac{\partial\Phi_4}{\partial U_N} = 0 & \frac{\partial\Phi_4}{\partial U_T} & \frac{\partial\Phi_4}{\partial hR_N} & \frac{\partial\Phi_4}{\partial hR_T} \end{pmatrix}$$

où I est l'identité dans \mathbb{R} ou \mathbb{R}^2 .

Il est nécessaire de discuter selon les valeurs de (U, hR) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } hR_N - \rho_N U_N > 0 \text{ alors } \Phi_3(U, hR) = \rho_N U_N, \\ \text{donc } \frac{\partial\Phi_3}{\partial U_N} = \rho_N I \text{ et } \frac{\partial\Phi_3}{\partial hR_N} = 0. \\ \text{Si } hR_N - \rho_N U_N < 0 \text{ alors } \Phi_3(U, hR) = hR_N, \\ \text{donc } \frac{\partial\Phi_3}{\partial U_N} = 0 \text{ et } \frac{\partial\Phi_3}{\partial hR_N} = I. \\ \text{Si } hR_T - \rho_T U_T \in R_N D \text{ alors } \Phi_4(U, hR) = \rho_T U_T, \\ \text{donc } \frac{\partial\Phi_4}{\partial U_T} = \rho_T I, \frac{\partial\Phi_4}{\partial hR_N} = 0 \text{ et } \frac{\partial\Phi_4}{\partial hR_T} = 0. \\ \text{Si } hR_T - \rho_T U_T \notin R_N D \text{ alors } \frac{\partial\Phi_4}{\partial U_T} = \rho_T \mu hR_N M(hR_T - \rho_T U_T) \\ \text{et } \frac{\partial\Phi_4}{\partial hR_T} = I - \mu hR_N M(hR_T - \rho_T U_T). \end{array} \right.$$

On peut mettre $\partial\Phi$ sous la forme :

$$\partial\Phi = \begin{bmatrix} I & -W \\ A_p & B_p \end{bmatrix}$$

où I, W, A_p et B_p sont des applications de \mathbb{R}^3 dans lui-même.

Les itérations de la méthode de Newton sont définies par :

$$\begin{cases} U_{p+1} - U_{lib} - hWR_{p+1} = 0, \\ (A_p W + B_p)(hR_{p+1} - hR_p) = -(\Phi_3(U_p, hR_p), \Phi_4(U_p, hR_p)). \end{cases}$$

On choisit les constantes ρ_N et ρ_T comme suit afin de rendre l'opérateur contractant :

$$\rho_N = W_{NN} \text{ et } \rho_T = \frac{\lambda_{min}}{\lambda_{max}^2}.$$

Dans la pratique la convergence est réalisée en quelques itérations.

On peut synthétiser l'algorithme de la manière suivante :

On calcule les quantités ρ_N et ρ_T .

On initialise les valeurs des réactions (R_N, R_T) et des vitesses relatives (U_N, U_T).

Boucle des itérations de Newton

Calcul de Φ_3, Φ_4 et des dérivées partielles d'après les quantités R_N, R_T, U_N, U_T connues.

Construction des matrices A_p, B_p .

Calcul de la matrice $(A_p W + B_p)$ puis de son inverse par un calcul littéral d'une matrice 3×3 .

Calcul de $-(A_p W + B_p)^{-1}(\Phi_3(U_p, hR_p), \Phi_4(U_p, hR_p))$.

Calcul des nouvelles réactions.

Test de convergence, si vérifié on sort de la boucle (en moyenne 4 itérations).

6.7.3 Résolution en considérant l'opérateur de Delassus diagonal

La méthode de Newton généralisée [8] restant la méthode de référence, il est possible d'utiliser l'artifice suivant évoquée par Moreau [94]. En écrivant l'équation de la dynamique dans le repère local 4.5, et en notant la valeur de R^α à l'itération précédente, R_{esti}^α , on obtient :

$$U^\alpha = U_{free}^\alpha + W^{\alpha\alpha} hR^\alpha + \sum_{\beta=1}^{n_c} W^{\alpha\beta} hR^\beta - W^{\alpha\alpha} hR_{esti}^\alpha \quad (6.10)$$

ce qui peut s'écrire :

$$hW^{\alpha\alpha}(R^\alpha - R_{esti}^\alpha) = U^\alpha - U_{free}^\alpha - \sum_{\beta=1}^{n_c} W^{\alpha\beta} hR^\beta \quad (6.11)$$

La convergence de l'algorithme de Gauss-Seidel fait tendre le membre de droite vers zéro. Il est donc possible de remplacer l'opérateur de Delassus, W , par n'importe quelle quantité ayant les bonnes propriétés, par exemple $W = \gamma I$, avec I la matrice identité [94].

Cette approche peut s'avérer intéressante d'un point de vue temps de calcul, la résolution dans ce cas se ramenant à celui d'une sphère. Mais cette simplification doit être évaluée à l'aide de simulations tests, en comparant les résultats à la méthode de Newton généralisée. Le scalaire γ sera pris comme la moyenne des valeurs propres de W , ce qui correspond à un tiers de la trace de W .

6.8 Comparaison numérique des résolutions locales

Afin de comparer les solutions issues de la résolution numérique, nous allons nous placer dans le cas d'un exemple mettant en jeu le frottement, l'étude d'une arche sous pesantueur. Cette arche est constituée de 50 blocs de masse volumique 2500 kg/m^3 , et repose sur un socle rigide. Le coefficient de frottement entre les blocs est fixé à 0.6 et entre les blocs et le socle à 0.7. Nous adoptons une loi de restitution nulle, et l'opération consiste à laisser l'arche s'équilibrer sous pesantueur, avec un pas de temps de $2 \cdot 10^{-4} \text{ s}$.

Afin de comparer l'approche avec une résolution du problème local d'interaction par la méthode de Newton Généralisée et la résolution diagonale, nous proposons deux éléments de comparaisons :

- le premier consiste à calculer l'erreur relative entre les réactions locales de contacts calculées par les deux méthodes, celle de Newton Généralisée étant prise comme référence
- le second consiste à comparer les efforts exercés sur les blocs formant la base et le sommet de l'arche.

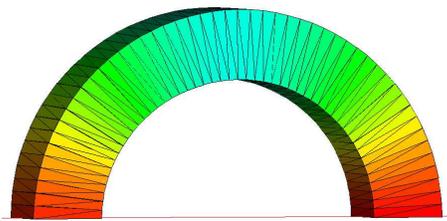


FIG. 6.11 – Répartition des efforts à l'équilibre.

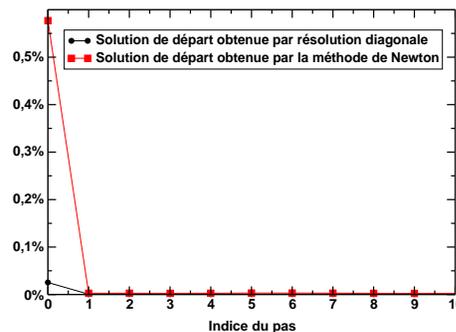


FIG. 6.12 – Erreur relative par rapport à la méthode de Newton.

Le premier test a consisté à obtenir par la méthode de Newton, une solution à l'équilibre (fig. 6.11). La simulation a donc consisté à imposer 1000 itérations de Gauss-Seidel pour environ 145 points de contacts sur 2000 pas de temps. Partant de cette solution, on poursuit le calcul sur 10 pas de temps avec les deux méthodes en enregistrant l'ensemble des réactions de contact. Le calcul de l'erreur relative par rapport à la solution de Newton nous donne une erreur inférieure à 1% pour tous les pas (fig. 6.12).

Le second test découle du premier, on recherche une solution à l'équilibre par la méthode de résolution diagonale et ensuite on effectue le même type de comparaison. Dans ce cas, l'erreur relative aussi inférieure à 1% pour tous les pas (fig. 6.12).

Le dernier test effectué est l'obtention d'une solution d'équilibre par les deux méthodes en imposant le même nombre d'itérations, 1000, et en enregistrant le torseur des blocs formant la base de l'arche et le sommet. Les torseurs calculés par les deux méthodes sont exactement les mêmes pour les blocs formant la base et le sommet.

Il apparaît donc que ces deux types de résolution nous donnent des résultats similaires, dans ce cas précis mettant en jeu le frottement à la fois entre les blocs et le socle. Cela permet d'envisager d'utiliser la méthode de résolution diagonale pour nos futures simulations. Sur cet exemple, la

détection a été performante, l'efficacité étant de 100% et le coût d'une itération étant 200 fois supérieur à celui d'une détection.

6.9 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté l'ensemble des particularités de la modélisation tridimensionnelle pour traiter des interactions entre corps rigides. Les corps seront considérés comme rigides avec une enveloppe polyédrique convexe, dont la surface est triangulée. La résolution de l'équation du mouvement présente une difficulté, l'équation de moment étant non-linéaire. Afin de résoudre ce problème, nous avons choisi de paramétrer les solides par la position du repère principal d'inertie, la rotation est donc évaluée au travers de ce repère, ce qui permet de résoudre l'équation de moments avec une matrice d'inertie diagonale. L'évaluation de la matrice d'inertie d'un polyèdre quelconque n'est pas triviale mais il est possible à l'aide d'une intégration numérique sur un tétraèdre de référence d'obtenir cette matrice en décomposant les polyèdres en tétraèdres.

Il est alors nécessaire lors du calcul des opérateurs de passage entre le repère local et le repère global de tenir compte de cette paramétrisation, ce qui peut être fait par un développement analytique. La résolution du problème de contact frottant nécessite l'emploi de la méthode de Newton Généralisée, le système à résoudre étant non-linéaire en raison du couplage entre la partie normale et la partie tangente, mais la résolution diagonale, plus simple, apparaît comme une solution envisageable pour de futurs calculs.

Dans ce chapitre nous avons présenté un algorithme de détection géométrique de points de contact entre polyèdres convexes. Cet algorithme se base sur l'algorithme du shadow overlap développé en deux dimensions par Moreau, en recherchant une direction séparatrice parmi les normales des polyèdres testés. Il est nécessaire d'examiner les intersections entre les faces diminuant l'overlap dans le cas où l'on ne trouve pas de direction séparatrice afin de déterminer s'il y a effectivement contact, et dans ce cas on choisit un, deux ou trois points de contact en fonction des rayons de faces des polyèdres examinés. Cet algorithme présente l'avantage d'être relativement simple à implémenter, ne nécessite pas de base de données supplémentaire comme les voisinages des faces et n'est pas itératif. Son utilisation reste a priori limitée à des solides peu facetisés, environ 200 faces, pour conserver des performances optimales. Il est important de mentionner qu'il existe beaucoup de méthodes possibles, mais le plus généralement elles sont dédiées au domaine de la réalité virtuelle où l'on privilégie la finesse de description au détriment du nombre de corps.

Conclusion de la deuxième partie

Dans cette seconde partie nous avons présenté l'ensemble des éléments nécessaires pour une modélisation du comportement du ballast dans le cas bidimensionnel et tridimensionnel. L'approche NonSmooth Contact Dynamics se révèle être une alternative aux méthodes de type Molecular Dynamics très intéressante :

- la modélisation du contact idéale, en traitant l'unilatéralité sans régularisation, permet de s'affranchir du choix de paramètres comme les raideurs normales et tangentielles au contact,
- l'emploi d'un schéma d'intégration implicite, à l'aide d'une θ -méthode, permet d'avoir un schéma numériquement stable, et l'on peut alors employer des pas de temps de discrétisation plus grands. Cette donnée apparaît comme très importante, car les temps simulés sont longs dans le cas de sollicitations cycliques.

Le solveur local peut être assimilé à une résolution de Gauss-Seidel par blocs, c'est une méthode robuste, qui peut être parallélisée et qui a été largement utilisée dans ce domaine.

Dans le cas bidimensionnel, la difficulté de la détection est résolue grâce à l'algorithme du shadow-overlap qui permet de détecter efficacement une intersection entre polygones convexes. Une étude de sensibilité numérique montre qu'il est important d'effectuer des calculs en imposant d'effectuer un nombre d'itération conséquent à chaque pas afin de se prémunir de l'apparition d'une accumulation d'interpénétrations. L'emploi d'un pas de temps de l'ordre de 2.10^{-4} s permet de s'assurer de la qualité du calcul, pas de temps tout de même 400 fois supérieur à celui employé dans les simulations faites par Kruse et Popp [73] par une méthode de type Molecular Dynamics.

Dans le cas tridimensionnel, les difficultés sont plus nombreuses. Tout d'abord la représentation des grains est faite à l'aide de grains polyédriques, dont la surface est triangularisée. Le paramétrage choisi est d'actualiser la position du repère principal d'inertie, afin de résoudre l'équation de moments dans ce repère. Il est donc nécessaire d'en tenir compte dans la construction des opérateurs de passage entre le repère local et le repère global. La détection est faite à l'aide d'une extension de l'algorithme du shadow-overlap qui permet de statuer de la situation de contact, cet algorithme est adapté à des solides qui ne sont pas extrêmement facétisés et présente l'avantage d'être simple à mettre œuvre et nous donne plusieurs points de contact ainsi qu'une normale.

La résolution du problème local d'interaction peut être faite à l'aide de deux approches celle de Newton généralisée ou une résolution diagonale comme dans le cas d'un contact entre corps sphériques. Un exemple numérique nous laisse envisager que la résolution du problème local en considérant le problème découplé permet d'obtenir des résultats similaires par cette méthode plus simple et moins coûteuse en temps.

Il va donc être nécessaire de mettre en œuvre l'ensemble des solutions proposées sur des exemples représentatifs du domaine ferroviaire, en abordant au préalable des exemples simples pour le cas tridimensionnel afin de s'assurer du bon fonctionnement de l'outil numérique.

Troisième partie

Résultats

Introduction

L'étude du comportement de structures du génie civil, de la mécanique des sols ou de l'amélioration de la compréhension de procédés industriels à l'aide de méthodes par éléments finis ou éléments discrets nécessite une comparaison entre les résultats numériques et les résultats expérimentaux existants.

Cette étape primordiale n'est pas sans difficultés et se fait au prix de nombreuses tentatives pour lesquelles des comparaisons peuvent être faites et les limites du modèle numérique peuvent être analysées. La *validation* de l'outil numérique dépend fortement de la problématique étudiée mais aussi des éléments de comparaison possibles, les difficultés numériques et expérimentales étant souvent différentes. Le terme de *validation* peut être sujet à de nombreuses controverses, dans notre cas la validation consistera à montrer l'aptitude du modèle numérique à reproduire un comportement macroscopique réel, et ainsi retrouver des valeurs d'efforts ou de déplacements comparables à ceux des essais existants.

Cette *validation* est donc un enjeu important car elle doit permettre d'aborder avec confiance l'étude de problèmes industriels et d'exploiter les nombreuses données que l'on peut calculer à l'aide des méthodes par éléments discrets.

Dans cette troisième partie nous allons tout d'abord étudier dans le premier chapitre à l'aide d'un modèle bidimensionnel le phénomène de tassement sous chargement cyclique. Nous comparerons un essai expérimental et un essai numérique, et nous étudierons notamment l'influence de la raideur de la sous-couche sur l'évolution du tassement. Ensuite nous présenterons les résultats d'une étude sur l'influence de la vitesse de sollicitation en faisant référence à la mise en évidence d'une accélération critique par Bodin [19] et enfin nous exposerons les premiers résultats des calculs de chargements cycliques réalisés avec une sous-couche modélisée par éléments finis.

Le second chapitre est consacré à l'exploitation du modèle tridimensionnel, nous nous attacherons à retrouver des comportements expérimentaux ou connus en traitant des exemples de maçonneries et en simulant un essai de caractérisation du ballast à l'aide de grains de ballast digitalisés.

Dans le troisième chapitre nous étudierons le comportement d'une couche mince granulaire avec les deux modèles présentés dans la deuxième partie, afin de mieux comprendre les mécanismes du tassement et le comportement des grains de ballast entre la sous-couche et le blochet.

Le dernier chapitre est consacré à l'étude de la résistance latérale de la voie non chargée à l'aide du modèle tridimensionnel en se basant sur des essais réalisés à la Direction de l'Ingénierie de la SNCF.

Chapitre 7

Tassement de la voie ferrée ballastée

7.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est de montrer que l'approche par éléments discrets avec la méthode NSCD permet d'étudier le comportement d'un granulat sous chargement cyclique et d'étudier l'influence de quelques paramètres du modèle afin de mieux appréhender le phénomène de tassement.

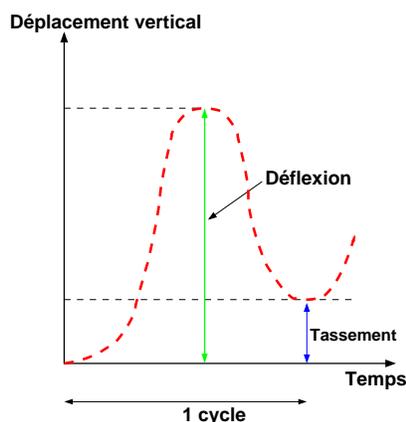


FIG. 7.1 – Schéma du calcul du tassement et de la déflexion.

Dans l'ensemble des simulations nous pourrions évaluer les deux quantités suivantes pour une particule :

- le tassement, qui est la différence entre la position du blochet en fin de cycle et celle en début de cycle (fig. 7.1),
- la déflexion, qui est la différence entre la position la plus haute et la plus basse au cours d'un cycle de chargement.

Nous allons présenter tout d'abord la confrontation de l'expérience réalisée au LCPC et la simulation numérique. A la suite de cette confrontation, nous exposerons des résultats numériques où nous avons fait évoluer les paramètres de nos simulations : des essais comportant un nombre de cycles important, une étude de l'influence de la fréquence de sollicitation en considérant une configuration géométrique différente. De plus nous nous intéresserons au rôle de la sous-couche en faisant varier la raideur de celle-ci et en exposant quelques résultats de simulations modélisant la sous-couche par éléments finis.

7.2 Confrontation expérience et simulation

7.2.1 Expérience

L'expérience modèle est basée sur le principe des matériaux de Schneebeli [76], avec la particularité d'utiliser un empilement de prismes pentagonaux. Nous allons rappeler quelques détails de cette expérience à l'échelle un tiers réalisée par Combe [29] sous la direction de K. Sab et G. Forêt au LCPC en collaboration avec le LMGC, que nous avons présentée dans la première partie.

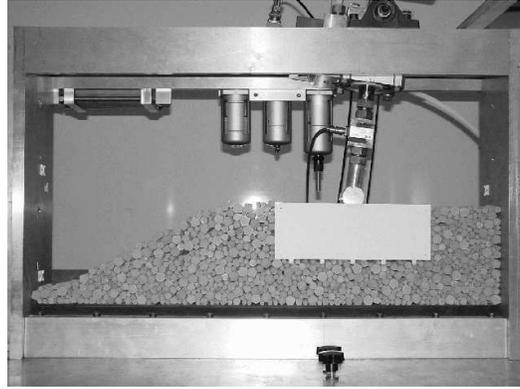


FIG. 7.2 – Banc d’essai expérimental.

Le dispositif expérimental est constitué d’un cadre rectangulaire en aluminium, sur lequel est fixé un vérin asservi en force. Il est possible d’appliquer un chargement d’amplitude maximale de 4000 Newtons sur un blochet en aluminium reposant sur un lit de prismes à section pentagonale, fabriqués en ciment haute performance (fig. 7.2). La base du vérin, fixée sur la partie haute du bâti peut prendre plusieurs positions afin d’exercer des sollicitations suivant différentes inclinaison par rapport à la verticale (0 et 30 degrés par incrément de 5 degrés). Le dispositif est dédié à l’étude du comportement des matériaux granulaires sous sollicitations quasi-statiques, seules les faibles fréquences sont possibles pour les cycles de chargement ($f \leq 2Hz$).

Le chargement cyclique choisi est une sinusoïde de valeur moyenne 1000 N et d’amplitude 500 N. La fréquence choisie pour tous les essais cycliques est de 0.25 Hz. Dans la plupart des expériences, le nombre maximal de cycles de chargement est de l’ordre du millier de cycles. Le coefficient de frottement entre les prismes a été identifié expérimentalement de l’ordre de 0.5.

Au cours de l’application des chargements il est possible d’acquérir des images, et de reconstruire l’échantillon de prismes dans le plan de coupe. On peut alors grâce à leurs descriptions géométriques réaliser des simulations en partant de la même configuration géométrique. Notre objectif est donc, à partir de positions numérisées, d’effectuer un calcul en appliquant des efforts caractéristiques de l’expérience.

7.2.2 Paramètres

Les paramètres des simulations à identifier sont liés aux caractéristiques de l’échantillon : masse volumique et géométrie des grains, leurs positions. Il est nécessaire d’évaluer les paramètres de la sous-couche visco-élastique, la viscosité et la raideur, que l’on doit introduire dans le modèle. Le signal appliqué est sinusoïdal, avec des amplitudes clairement définies dans l’expérience : $F = F_{const} + A\sin(\omega t + \phi)$.

Une identification expérimentale a consisté à mesurer l’enfoncement du blochet, reposant sur l’élastomère, soumis à une force incrémentale variant de 0 à 2000 N afin d’identifier la raideur k_N et la viscosité ν à introduire dans la simulation.

La confrontation des résultats expérimentaux, tridimensionnels et bidimensionnels implique d’adimensionner les quantités mécaniques utilisées lors des simulations. En effet dans le calcul bidimensionnel, l’application d’un effort de 10 N par exemple sur un grain revient à appliquer

cet effort sur un grain qui aurait une profondeur de 1 m. Il est donc indispensable, connaissant la longueur des prismes, 6 cm, d'appliquer une correction lors des comparaisons.

Nous résumons l'ensemble des paramètres qui vont être utilisés pour le calcul :

	ρ grains	F_{const}	A	Raideur
Expérience	2367 kg/m ³	1000 N	1000 N	
Simulation	2367 kg/m ³	$\frac{1000}{0.06}$ N	$\frac{1000}{0.06}$ N	4600 N/m

Il est important de souligner que l'adimensionnement des efforts doit être pris en compte pour les simulations faisant référence à une granulométrie du ballast réelle. L'assemblage de grains étant denses, nous avons choisis de considérer une loi de choc sans restitution.

7.2.3 Résultats

Afin de s'assurer un calcul précis, le pas de temps utilisé pour la simulation a été de $2 \cdot 10^{-4}$ s. L'application des 1000 cycles de chargement a nécessité 5 millions de pas de temps. Le calcul en lui-même a duré trois semaines sur une station unix. D'un point de vue numérique, la résolution du problème d'interaction occupe 90 % du temps de la simulation.

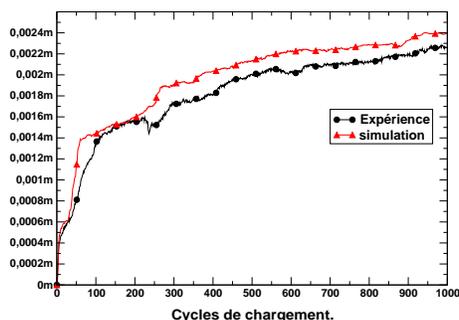


FIG. 7.3 – Comparaison du tassement expérimental et numérique.

L'évolution des tassements obtenus numériquement et expérimentalement [131, 132] est similaire et nous obtenons au final des niveaux comparables (fig. 7.3). L'écart entre deux courbes n'est pas significatif vu que l'imprécision à la fois de la digitalisation et du positionnement de la sous-couche ne permet pas de démarrer la simulation exactement de la disposition géométrique expérimentale. Néanmoins cette évolution sur un processus long montre l'aptitude des méthodes par éléments discrets avec l'approche NSCD à reproduire numériquement le tassement.

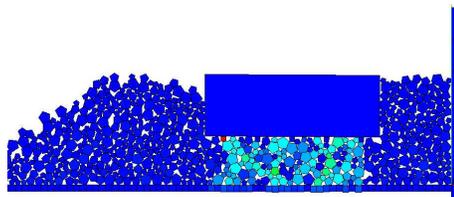


FIG. 7.4 – Chaînes de forces au cycle 290.

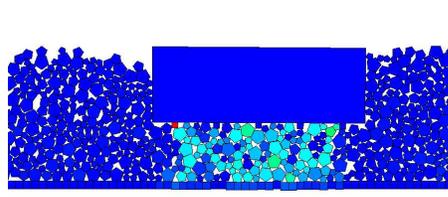


FIG. 7.5 – Chaînes de forces au cycle 510.

La visualisation des efforts montre qu'ils sont essentiellement concentrés sous le blochet (fig. 7.4,7.5), et sont répartis suivant des directions privilégiées.

Au cours d'un cycle de chargement, les grains situés sous le blochet sont entraînés vers le bas, ainsi que les grains en contact avec ses parois latérales.

Dans la phase de croissance de la force, on peut observer qu'il n'y a pas uniquement un mouvement d'enfoncement des grains (fig. 7.6), en effet si des grains peuvent descendre à la frontière du blochet, cela peut repousser les grains avec lesquels ils sont en contact vers l'extérieur (fig. 7.7).

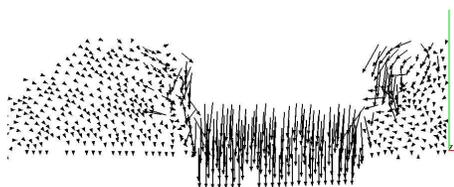


FIG. 7.6 – Image 1/5 de cycle.



FIG. 7.7 – Image 2/5 de cycle.

Ce phénomène s'observe pour différentes étapes de l'enfoncement, comme sur le bord droit du blochet (fig. 7.6).



FIG. 7.8 – Image 3/5 de cycle.

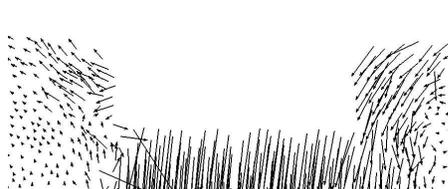


FIG. 7.9 – Image 4/5 de cycle.

En fin de cycle, l'élasticité de la sous-couche et la diminution de l'intensité de la force, entraînent des mouvements vers l'extérieur sur la partie droite, et des recirculations sur la partie gauche. Il apparaît donc que les grains ont des mouvements au cours d'un cycle très fluctuants, mais souvent similaires pour une zone donnée (fig. 7.8,7.9).

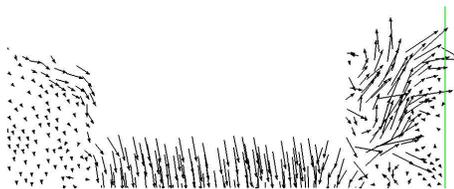


FIG. 7.10 – Image en fin de cycle.

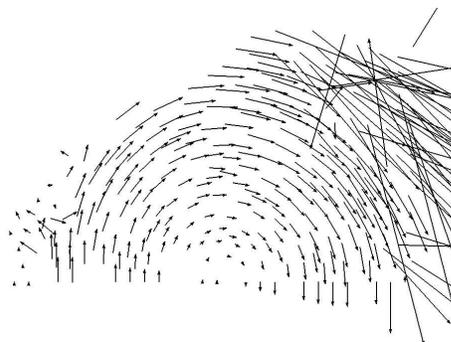


FIG. 7.11 – Zoom sur la partie gauche.

Le mouvement du blochet entraîne au cours d'un cycle l'ensemble des grains de son voisinage, mais il apparaît clairement que de petits changements surviennent, dans l'orientation du déplacement des grains par rapport à un mouvement collectif, à des échelles plus petites. On peut observer des mouvements collectifs de la partie formant la banquette à gauche du blochet (fig. 7.11) assez particuliers, probablement peu significatifs.

Cette analyse sur un cycle montre que les phénomènes mis en jeu sont complexes, les mouvements exposés précédemment sont petits sur la durée d'un cycle par rapport à l'échelle du grain. Sous l'effet de plusieurs cycles une majorité de micro-réarrangements survient dans le massif couplés à des crises dynamiques moins nombreuses mais beaucoup plus brutales. Cette étude de l'enfoncement d'une particule met en évidence des phénomènes macroscopiques comme la recirculation des grains, et microscopiques, le mouvement oscillant conduisant à avoir des particules plus libres tout autour du blochet. L'ensemble de ces grains plus libres forment une enveloppe tout autour du blochet, et sont susceptibles de repousser les grains sur les parois latérales du blochet.

7.3 Essais à grand nombre de cycles

In situ l'évolution du tassement est le résultat de plusieurs millions de cycles de chargements résultant du passage des essieux. Les diverses expériences existantes [19, 58] montrent deux phases dans cette évolution : la première pour laquelle les incréments de tassement sont importants, alors que la seconde présente une évolution plus régulière.

L'utilisation de la simulation numérique comme outil de compréhension et de prédiction du tassement implique de connaître le comportement du modèle présenté. Dans notre cas, le tassement est le résultat du réarrangement des grains entre eux sur une sous-couche visco-élastique. L'objectif de cette étude est d'étudier le comportement de notre modèle pendant plusieurs milliers de chargements.

Pour cette étude nous considérons trois échantillons présentant des distributions similaires de taille, mais des positions différentes avant le dépôt. Le coefficient de frottement intergranulaire est de 0.5 et on considère une loi de choc avec restitution nulle. A la suite de cette préparation, on applique un chargement sinusoïdal, avec une charge moyenne de 1000 N, d'une amplitude de 500 N et une fréquence de 20 Hz, les paramètres de la sous-couche étant $k_N = 4100$ N/m, $\nu = 80$.

La principale difficulté pour ce type de simulations numériques est d'une part la précision des calculs pour éviter sur un long processus l'accumulation d'interpénétrations et d'autre part

le nombre d'opérations important à effectuer au cours d'un pas de temps. Il a été nécessaire de calculer pendant un mois sur une station unix Compaq EV6.

L'évolution du tassement est différente pour les trois échantillons (fig. 7.12). On observe un changement dans l'évolution du tassement au-delà de 13000 cycles qui peut s'expliquer par une réorganisation des grains sous l'effet des chargements.

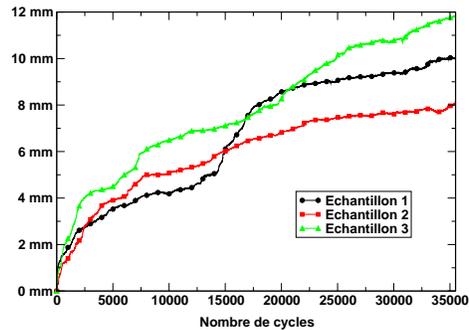


FIG. 7.12 – Evolution sur 35000 cycles du tassement.

Après ce changement, l'évolution est plus régulière. Il est important de noter qu'en dépit de propriétés identiques le tassement final est différent pour les trois échantillons. Le domaine où le réseau de forces est le plus fort est celui sous le blochet.

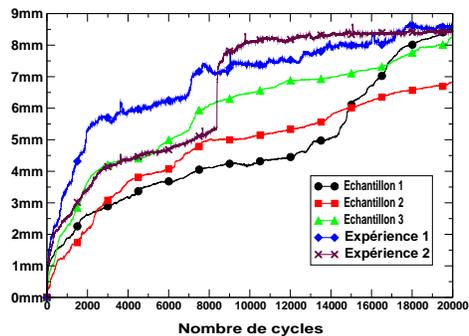


FIG. 7.13 – Comparaison avec les résultats expérimentaux.

Le tassement après 20000 cycles de chargements peut être comparé aux résultats expérimentaux quasi-statiques réalisés à une fréquence de 1 Hz (fig. 7.13).

7.4 Influence de la fréquence de sollicitation

7.4.1 Accélération critique

L'influence de la fréquence de sollicitation sur le comportement du ballast a été mise en évidence dans une expérience menée par Bodin [19] à échelle réduite. Il a été constaté que l'augmentation de la fréquence entraîne une augmentation des tassements mesurés. De plus, pour une charge moyenne constante appliquée, il a été atteint une fréquence dite *critique* pour laquelle on constate un désolidarisation du massif de grains de ballast. Il a été constaté que cette fréquence critique varie en fonction de la charge moyenne constante appliquée.

L'expérience montre une désorganisation du massif pour une augmentation de la fréquence à une charge donnée. Cela se traduit par des incréments de tassements plus importants. Pour une charge de 1150 N le passage de la fréquence de 40 à 42 Hz entraîne une désorganisation du massif, celle-ci s'arrêtant si la fréquence redescend en dessous de 40 Hz (fig. 7.14). Une augmentation de la charge a pour effet d'accentuer le même phénomène, et à 50 Hz les incréments de tassement deviennent très importants.

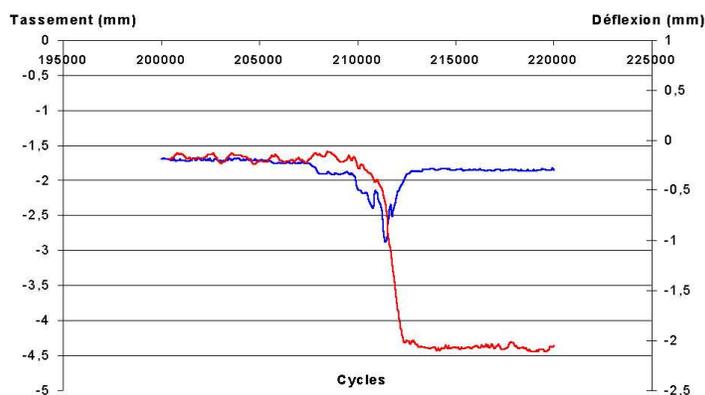


FIG. 7.14 – Détail d'une instabilité (rouge : tassement, bleu : déflexion[19]).

Pour une fréquence plus faible, mais avec une charge moyenne appliquée de 5000 N, la même observation a été faite, la transition étant entre 20 et 25 Hz. Si la charge moyenne est ramenée à 625 N alors ce phénomène n'est plus mis en évidence même pour une fréquence de 60 Hz.

Lors de l'apparition de ce phénomène de désorganisation, il a été observé une augmentation brutale de la déflexion.

Le phénomène se déclenchant pour des amplitudes et des fréquences différentes, il peut être interprété comme une accélération critique. Au-delà d'une certaine accélération fournie au blochet, le milieu se fluidifie et le massif se désorganise.

Il nous apparaît intéressant à l'aide de notre modèle d'étudier le même phénomène. Pour calculer cette accélération critique il est possible de suivre à la fois la trajectoire du blochet mais aussi d'enregistrer son torseur des efforts.

7.4.2 Echantillon de référence

L'échantillon bidimensionnel considéré est dans le sens longitudinal de la voie [27]. Un blochet repose sur une épaisseur de quelques dizaines de grains contenus dans une boîte de 1.89 m de long. La granulométrie des grains respecte celle du ballast, 25/50 mm, avec une masse volumique 2700 kg/m^3 et un coefficient de frottement intergranulaire de 0.5.

L'échantillon est déposé sous gravité en faisant vibrer la sous-couche à une fréquence de 45 Hz et avec une amplitude de 1 mm. Au cours de cette mise en place on a désactivé les relations visco-élastiques liant la sous-couche au référentiel. On active alors la sous-couche, et l'échantillon s'équilibre sous son propre poids. Ce mode préparatoire a pour objectif de densifier suffisamment les grains sous le blochet afin de démarrer la procédure de chargement cyclique d'une configuration plus compacte et plus proche de celle pratiquée en voie.

Ensuite ces échantillons sont soumis par l'intermédiaire de l'application d'une force sur le blochet à des sollicitations cycliques ayant les caractéristiques suivantes :

- on considère un signal sinusoïdal, correspondant au passage d'un TGV dont l'espacement entre les roues de bogies est de 3 m,
- une amplitude de 45000 N, correspondant à une charge constante appliquée, avec une variation de 5000 N.

L'objectif est donc d'augmenter la fréquence de sollicitation de 20 Hz à 30 Hz, ce qui correspond à l'étude d'une plage de vitesse de 216 km/h à plus de 300 km/h et d'enregistrer la position du blochet, l'évolution de son torseur des efforts.

7.4.3 Evolution du tassement et de la déflexion

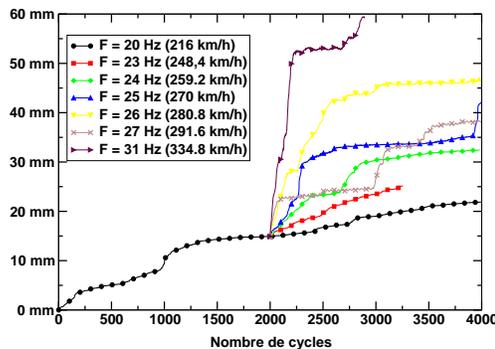


FIG. 7.15 – Evolution du tassement selon les fréquences.

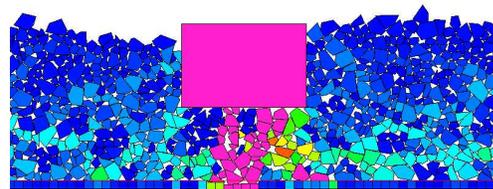


FIG. 7.16 – Efforts dans le massif.

A la suite de 2000 cycles effectués à 20 Hz, nous avons changé la fréquence de sollicitation, correspondant à une augmentation de la vitesse de circulation, de 216 km/h à 334 km/h. Tout d'abord, il apparaît clairement que le changement de la fréquence engendre un comportement différent du massif, ce qui se traduit par une évolution du tassement plus rapide (fig. 7.15).

Lorsque la fréquence ne change pas, il n'y a pas de changement significatif de la taille des incréments de tassement, l'augmentation est régulière. L'augmentation de la fréquence entraîne une augmentation de la taille des incréments de tassements sur environ 500 cycles quel que soit la fréquence, les plus importants s'observant pour 31 Hz. A la suite de cette rapide augmentation, on

retrouve un plateau correspondant à une diminution des incréments par cycle. On peut remarquer que le phénomène se reproduit : augmentation puis diminution des incréments.

On peut donc dégager deux éléments :

- l'augmentation de la fréquence de sollicitation semble accélérer l'évolution du système, plus la fréquence de sollicitation est grande plus les incréments de tassement sont importants,
- le massif se réorganise de façon à contenir les efforts imposés (fig. 7.16), l'augmentation de la fréquence de sollicitation déstabilise le massif qui se réarrange pour atteindre un nouvel état d'équilibre, que l'on remarque par la présence de plateaux.

Les niveaux de tassements fluctuent entre les différents essais, mais au-delà de 25 Hz, on observe l'existence de différents plateaux, mettant en évidence plusieurs phases où les incréments de tassement sont importants. On peut interpréter cela par une succession de phases où le massif de grains supporte les actions extérieures puis cède en se réarrangeant pour contenir à la suite les efforts imposés.

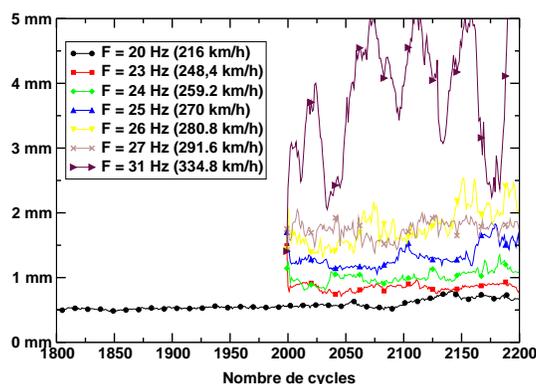


FIG. 7.17 – Evolution de la déflexion.

La déflexion calculée montre une augmentation pour chaque incrément de fréquence (fig.7.17). Pour 31 Hz, le niveau de déflexion est pratiquement deux fois plus grand que pour les fréquences inférieures et fluctue de manière plus marquée.

7.4.4 Evolution de l'accélération du blochet

Afin de mettre en parallèle notre étude avec celle réalisée par Bodin [19], nous allons évaluer une approximation de l'accélération du blochet en considérant que sur un cycle le mouvement est sinusoïdal, l'accélération maximale du blochet est équivalente à $\omega^2 * dv$, dv étant la déflexion verticale sur un cycle.

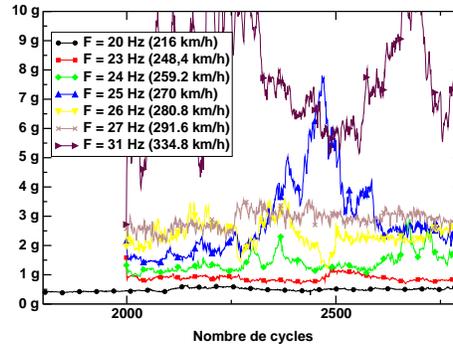


FIG. 7.18 – Evolution de l'accélération du blochet au sens de Bodin.

Une première analyse nous montre que le niveau d'accélération du blochet, est différent selon les fréquences (fig. 7.18), et l'on peut discerner trois types de comportement :

- pour 20 Hz et 23 Hz, l'accélération reste aux alentours de 1 g, ce qui peut être mis en parallèle avec les niveaux de tassement,
- pour 24 Hz, 25 Hz, 26 Hz et 27 Hz, l'accélération se situe entre 2 et 3 g et pour ces essais l'évolution du tassement est plus importante et beaucoup plus perturbée,
- pour 31 Hz, l'accélération se situe le plus souvent au-delà de 5 g, et le massif tend à se désorganiser.

Afin d'affiner cette étude nous avons appliqué au même type d'échantillon des sollicitations cycliques en augmentant la fréquence tous les 500 cycles pour trois charges différentes. Au cours des essais nous avons enregistré le tassement du blochet, et son accélération instantanée calculée à partir de la différence des vitesses en début et fin de chaque pas de temps. Le tableau suivant présente la correspondance entre les fréquences appliquées et les vitesses de circulation :

Fréquence (Hz)	20	22.22	25	27.47	29.94	32.47	35.21
Vitesse (Km/h)	200	240	270	296.7	323.35	350.6	380.3

Pour trois charges moyennes, 45 kN, 40 kN, 25 kN, nous avons effectué une succession de 500 cycles de chargement en imposant les fréquences de 20 Hz à 35.21 Hz.

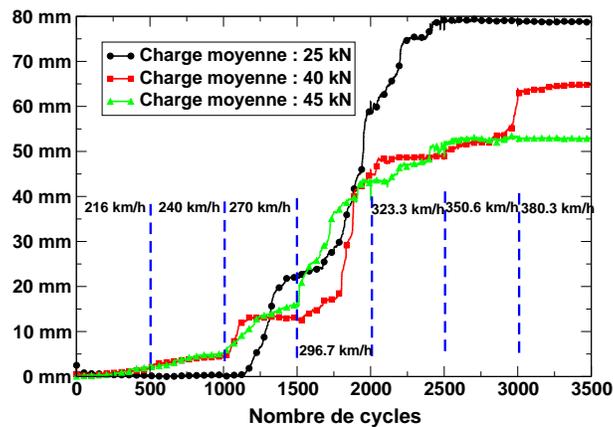


FIG. 7.19 – Evolution du tassement du blochet.

En dessous de 270 km/h (25 Hz), le tassement évolue de façon régulière malgré l'augmentation de la fréquence de sollicitation (fig. 7.19). Au-delà, à la suite de 1000 cycles de chargement, on remarque que les incréments de tassement sont beaucoup plus importants. Cette rapide augmentation des incréments se fait pratiquement instantanément dès l'augmentation de fréquence pour les charges moyennes de 45 kN et 40 kN. Pour la charge de 25 kN cette transition est décalée d'environ 300 cycles.

Le tassement représente la partie irréversible du mouvement du blochet. On remarque que pour une charge moyenne plus importante, les incréments de tassement sont plus importants, entre 0 et 1000 cycles. Cette évolution est régulière, malgré l'augmentation de la fréquence de sollicitation. Ensuite le déplacement irréversible du blochet est accéléré quelque soit la charge appliquée pour un même intervalle de fréquences : 25 Hz à 30 Hz. Au delà, on retrouve une évolution régulière.

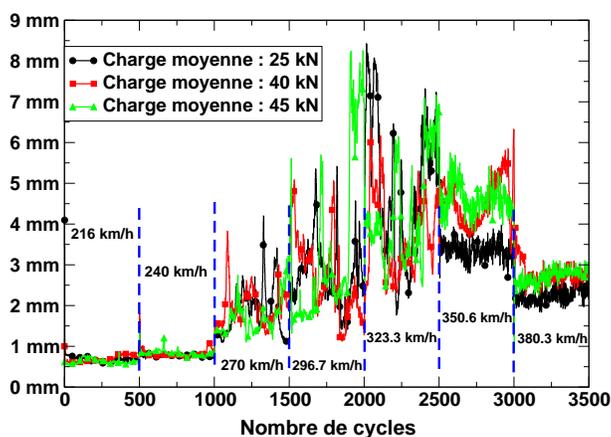


FIG. 7.20 – Evolution de la déflexion du blochet.

La déflexion mesurée est plus importante au-delà de 25 Hz (270 km/h) (fig. 7.20), on remarque que la déflexion pour la charge la moins importante est supérieure à celle des charges 45 kN et 40 kN. La déflexion change brusquement pour chaque augmentation de fréquence.

La déflexion représente la partie élastique du mouvement du blochet. En dessous de la fréquence correspondant à une vitesse de 270 km/h, on observe quelque soit la charge, une déflexion de même taille, environ 1 mm. On remarque un léger saut lors de l'augmentation de la fréquence. Par contre entre 25 Hz et 32 Hz, quelque soit la charge, l'évolution de la déflexion est très chaotique, et atteint des pics d'environ 8 mm quelque soit la charge moyenne appliquée.

Ces évolutions montrent une transition de l'état du système lors du passage de la fréquence à 25 Hz. L'évolution du tassement et de la déflexion semblent traduire un mode de résonance de notre système. La sous-couche est formée d'un assemblage de grains reposant sur des barres élastiques que l'on peut assimiler à des oscillateurs unidimensionnels verticaux. Leurs fréquences propres est d'environ 80 Hz, elle est donc supérieure aux fréquences appliquées. La configuration géométrique est particulière, il y a environ une dizaine de grains sous le blochet qui sont comprimés par le blochet soumis à une charge moyenne et une vibration. Il est donc probable que pour ce type de système, il faille tenir compte de la masse des grains situés entre le blochet et la sous-couche pour évaluer la fréquence de résonance du système. Si on considère qu'il y a environ 8 grains

sous le blochet, la fréquence de résonance du système serait d'environ 28 Hz, ce qui correspond à l'intervalle où l'on observe de fortes fluctuations.

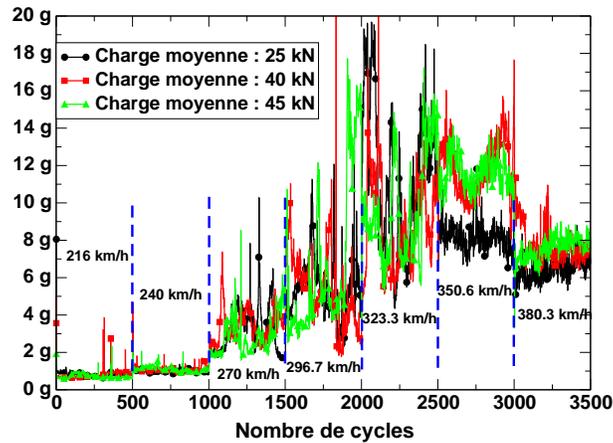


FIG. 7.21 – Evolution de l'accélération maximale sur un cycle du blochet.

Etant donné que notre modélisation ne nous donne pas accès à l'accélération, nous en faisons une approximation à partir de la différence des vitesses en début et fin de pas de temps du blochet. Le découpage en petits pas de temps, permet d'effectuer des calculs avec suffisamment de précision et donc de considérer que cette approximation est correcte. On observe que l'accélération maximale est directement liée à la déflexion, et le niveau d'accélération change pour le passage à une fréquence de 25 Hz (fig. 7.21). Néanmoins l'accélération moyenne sur un cycle est très faible, on observe des pics et elle augmente lorsque la fréquence augmente. On retrouve les mêmes constatations faites pour l'évolution de la déflexion et du tassement.

L'étude de l'influence de l'augmentation de la fréquence de sollicitation sur ce type de système doit être menée avec précaution. En effet il est possible d'atteindre la fréquence de résonance du système en raison de la faible épaisseur en terme de nombre de grains entre le blochet et la sous-couche. L'évaluation de cette fréquence est possible en considérant la masse des grains comprise entre la sous-couche et le blochet, la masse du polygone constituant la sous-couche et la raideur employée.

On retrouve néanmoins certaines observations faites par Bodin [19], les changements de fréquence entraîne une déflexion et des incréments de tassement plus importants. Nous n'avons pas mis en évidence de transition d'accélération mais l'énergie injectée au système semble être un paramètre important. Cette énergie est dissipée par les chocs et le frottement, le système subissant de nombreux mouvements causés par la réponse de la sous-couche élastique.

Le modèle de sous-couche introduit des fréquences de résonance qui ne seraient pas présentes sur un sol car il n'y a pas de réflexion des ondes. Il serait sans doute nécessaire d'introduire de la viscosité dans ce type de modèle, afin d'éviter ces phénomènes.

7.5 Influence de la sous-couche

Les mécanismes à l'origine du tassement sont difficiles à expliquer, les paramètres mécaniques ou géométriques ne sont pas facilement identifiables. Notre objectif est d'étudier la contribution des composants de la voie sur le tassement, nous nous sommes intéressés au rôle de la sous-couche [132] sur laquelle le ballast repose, en particulier sa raideur.

Nous avons construit huit échantillons qui se différencient uniquement par la position géométrique des grains avant le dépôt. Cette approche statistique du problème permet de limiter l'impact des variations notées dans la phase expérimentale.

La méthode de construction des échantillons est la même. Les pentagones ayant une même masse volumique ($\rho = 2367 \text{ kg/m}^3$) avec une distribution de la taille des grains approchant la granulométrie du ballast à l'échelle un tiers (361 grains de 1 cm de diamètre, 242 de 1.5 cm et 121 de 2 cm). Le coefficient de frottement intergranulaire est de 0.5 et on considère une loi de choc avec restitution nulle. Les grains sont déposés sous gravité et ensuite deux cycles sont appliqués afin de compacter l'échantillon. On le laisse se stabiliser sous pesanteur afin d'obtenir une vitesse moyenne de l'échantillon très petite. Nous avons considéré trois raideurs différentes : $k_N \geq 4100 \text{ N/m}$, la raideur de référence que l'on multipliera par 100 et 1000 et $\nu = 80$. L'unique différence entre ces échantillons est la disposition géométrique des grains.

La charge moyenne appliquée est de 1000 N, avec un signal sinusoïdal, une amplitude de chargement de 500 N et une fréquence de 20 Hz. Les simulations ont duré chacune trois jours pour effectuer 3000 cycles sur un ordinateur unix Compaq EV6 (667 MHz) en utilisant un pas de temps de 2.10^{-4} s . Le tassement est enregistré pour les huit échantillons, selon les raideurs considérées. On représente le tassement moyen des huit échantillons sur le même graphique (fig. 7.22).

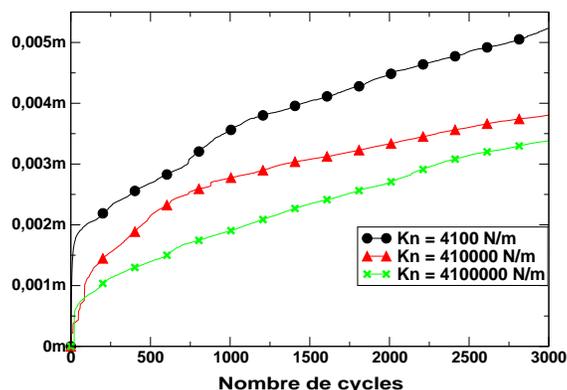


FIG. 7.22 – Evolution du tassement pour les trois raideurs.

Un résultat intuitif est obtenu, le tassement dépend des propriétés de la sous-couche (fig. 7.22), plus celle-ci est souple plus le tassement est important.

A l'échelle du grain on observe une alternance de phase de dilatance et contractance sous le blochet. Les grains peuvent circuler sous le blochet et des réarrangements surviennent en raison de la diminution de l'intensité des chaînes de forces. L'augmentation de la raideur implique un réseau de forces plus fort, les réarrangements étant peu importants. L'observation des chaînes de

forces ne donne par forcément une explication mais une voie de réflexion.

On observe des crises dynamiques sporadiques sous l'effet des cycles de chargement, pouvant entraîner des réarrangements brutaux. Ces réarrangements dépendent donc de la configuration de l'échantillon et pour obtenir un comportement moyen il est nécessaire d'effectuer des calculs sur plusieurs échantillons géométriquement différents : une analyse statistique est nécessaire pour ce type d'étude.

7.6 Couplage éléments finis-éléments discrets

La modélisation de la déformabilité de la sous-couche sur laquelle repose les prismes pentagonaux ou plus généralement le ballast, à l'aide de polygones reposant sur des barres visco-élastiques est grossière car elle ne tient pas compte des déformations horizontales et des couplages. En effet la déformation de ce type de sous-couche est uniquement verticale, cette modélisation est peut être trop sommaire. On pourrait introduire des barres visco-élastiques horizontales afin de modéliser des déformations horizontales mais la prise en compte d'éléments de plus en plus complexes nécessite de faire une étude paramétrique spécifique afin de comprendre et mesurer les différences.

L'approche corps déformables, qui n'a pas été envisagée dans le cadre de ce travail pour modéliser les grains de ballast peut par contre être employée pour modéliser la sous-couche. En effet, il est possible de traiter les interactions entre corps déformables et corps rigides à l'aide de l'approche NSCD [5, 65, 45].

La comparaison des deux modélisations, sous-couche éléments finis et sous-couche polygonale, apparaît donc indispensable. A priori on s'attend à obtenir des résultats différents [128], au vue de la variabilité mise en évidence pour une même approche. L'objectif est donc d'effectuer une comparaison afin d'observer les différences en terme de comportement macroscopique et en terme de quantité micro-mécanique. Cette comparaison doit être réalisée avec un échantillon géométriquement identique.

7.6.1 Préparation d'un échantillon

Nous avons considéré un échantillon de pentagones, de masse volumique $\rho = 2367 \text{ kg/m}^3$, avec un coefficient de frottement intergranulaire de 0.5. Cet échantillon est déposé sous gravité sur un socle rigide. On enregistre, à l'équilibre, la position géométrique des pentagones.

A la suite de ce dépôt, on reconstruit à l'aide des positions calculées deux échantillons, l'un avec une sous-couche polygonale et l'autre avec une sous-couche éléments finis. On laisse alors les deux échantillons s'équilibrer sous gravité.

Nous avons choisi une sous-couche polygonale ayant un comportement élastique, les ressorts ayant une longueur initiale de 2 cm et une raideur $k_N = 8818 \text{ N/m}$. La sous-couche éléments finis a une loi de comportement élastique isotrope dont le module d'Young est $E = 0.8818 \text{ MPa}$ et le coefficient de poisson $\nu = 0.33$.

Les échantillons sont ensuite soumis à des chargements cycliques d'amplitude 500 N et de charge constante 1000 N à une fréquence de 20 Hz.

7.6.2 Résultats

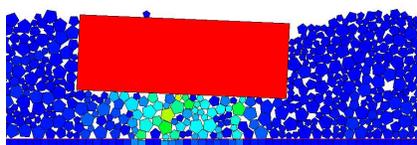


FIG. 7.23 – Sous-couche polygonale (cycle 500).

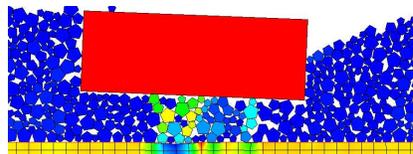


FIG. 7.24 – Sous-couche éléments finis (cycle 500).

Le comportement macroscopique des échantillons est similaire. Le blochet, sous l'effet de la sollicitation et de la localisation des chaînes de force, bascule dans le sens trigonométrique (fig. 7.23, 7.24). Les deux sous-couches se déforment dans la même zone, sous le blochet. On peut remarquer que les chaînes de forces les plus importantes sont moins nombreuses dans le cas de la sous-couche éléments finis. La déformation de la sous-couche éléments finis semble localiser les chaînes de contacts forts de façon plus marquée.

Les mécanismes de réarrangements observés dans les deux cas sont similaires. Bien que la distribution locale des efforts soit sensiblement différente, l'apparition et la rupture des chaînes de forces présentes sous le blochet guident l'évolution du massif de grains pour les deux essais. Il est important de noter que sous l'effet des sollicitations, l'apparition d'ondes se propageant dans le milieu entraîne des mouvements de grains plus importants sous le blochet.

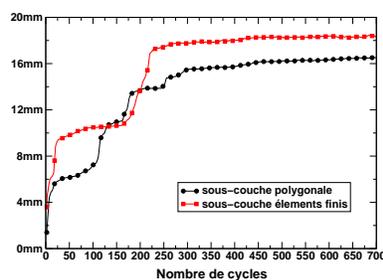


FIG. 7.25 – Comparaison des tassements pour les deux sous-couches.

L'évolution des tassements est proche pour les deux types de modélisation ce qui n'est pas surprenant, mais même si l'évolution en début est différente, on observe le même plateau en fin de calcul (fig. 7.25). Les paramètres macroscopiques ne traduisent pas un comportement radicalement différent entre les deux modélisations.

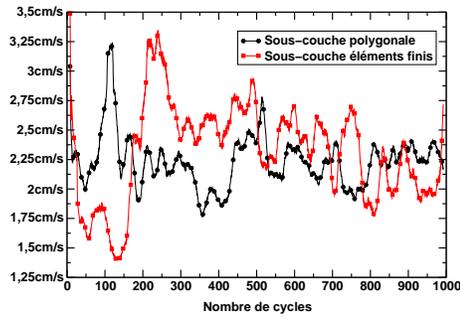


FIG. 7.26 – Comparaison des vitesses moyennes.

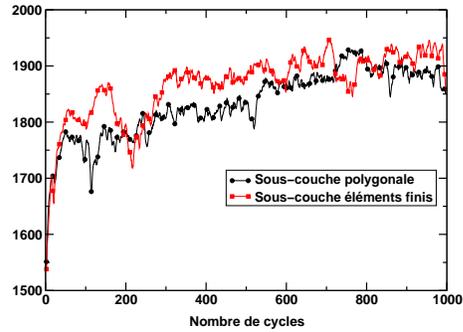


FIG. 7.27 – Comparaison de l'évolution du nombre de contacts.

La vitesse moyenne dans l'échantillon n'évolue pas de la même manière, on peut relier les évolutions à la mesure du tassement, l'échantillon avec la sous-couche éléments finis étant plus rapide entre 150 et 200 cycles de chargements (fig. 7.26). On retrouve cette caractéristique dans l'évolution du nombre de contact, celui-ci diminuant de manière significative entre 150 et 250 cycles (fig. 7.27).

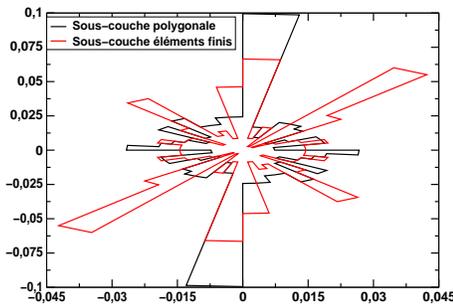


FIG. 7.28 – Distribution des orientations des contacts forts.

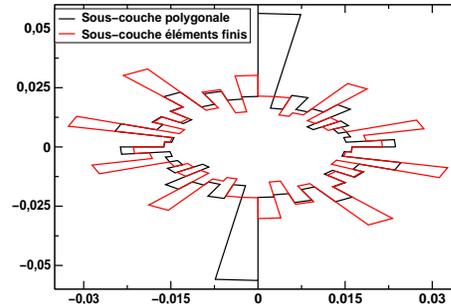


FIG. 7.29 – Distribution des orientations des contacts faibles.

La distribution des orientations des normales au contact présente des différences. En effet la distribution pour les contacts forts indique une direction privilégiée (fig. 7.28), verticale, pour la sous-couche polygonale traduisant la présence de nombreux contacts avec les polygones reposant sur les barres élastiques. Cette différence est essentiellement due à la déformation de la sous-couche éléments finis dont la surface sous l'action des forces n'est plus horizontale, contrairement à la sous-couche polygonale.

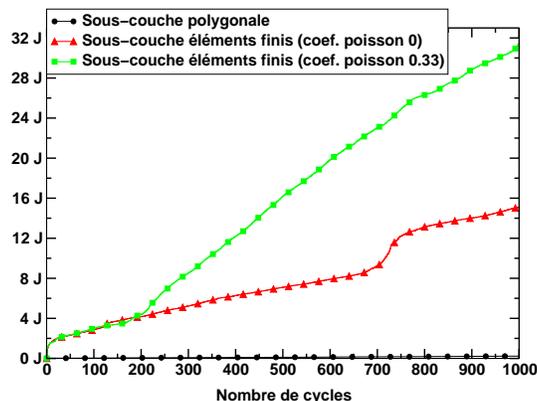


FIG. 7.30 – Comparaison de l'énergie dissipée cumulée par frottement au cours du chargement.

Sur la figure 7.30, on peut remarquer une très grande différence entre l'énergie dissipée par frottement entre les divers types de sous-couche. Nous avons comparé avec un calcul supplémentaire pour un coefficient de Poisson nul. La dilatation introduite grâce à un coefficient de Poisson de 0.33 engendre une énergie dissipée cumulée 30 fois plus importante qu'avec la sous-couche polygonale et deux fois plus importante avec un coefficient de poisson nul. Cela peut s'expliquer par la réponse élastique de la sous-couche déformable qui sous l'action de la sollicitation cyclique joue un rôle de guide d'onde et entraîne de petits mouvements entre les grains et la sous-couche.

7.7 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté plusieurs études numériques bidimensionnelles. La confrontation de la simulation avec les résultats expérimentaux de Combe [29, 27], montre que l'on peut décrire l'évolution d'un processus long à l'aide de la méthode par éléments discrets avec l'approche NSCD, en particulier l'évaluation du tassement du blochet est en accord avec celui de l'expérience ainsi que les mouvements des grains observés.

L'exploitation du modèle nous a permis de montrer l'influence de la sous-couche qui apparaît comme un des éléments clés dans l'évolution du tassement, plus la sous-couche est souple, donc de mauvaise qualité, plus le tassement sera important. Ce résultat apparaît comme intuitif, mais il nous est apparu important de vérifier que notre modèle indique des tendances correctes, même avec un modèle de sous-couche relativement simple.

Dans les expériences menées jusqu'à présent [19], la phase de mise en place a lieu au cours de 200000 premiers cycles. Les simulations effectuées sur des géométries modèles avec un nombre de cycles important n'ont pas permis de dépasser cette limite expérimentale. Néanmoins pour les systèmes considérés il est possible que le nombre de cycle nécessaires à mise en place soit moins élevé. En effet nous avons observé deux phases dans l'évolution du tassement. Nous avons pu tout de même effectuer un nombre de cycles largement supérieur au 700 cycles appliqués par Kruse et Popp [73] et obtenir des tassements dont l'ordre de grandeur peut être corrélé avec les essais longs menés par Combe [29].

L'étude de l'influence de la fréquence de sollicitation, en référence aux travaux de Bodin [19], montre qu'il est nécessaire d'évaluer la fréquence de résonance du système en fonction de la masse de grains comprise entre le blochet et la sous-couche. Cette particularité est due à la faible

épaisseur en nombre de grains entre le blochet et la sous-couche, nos simulations ayant montré l'existence d'un mode de résonance. Néanmoins l'augmentation de la fréquence se traduit par des incréments de tassement plus importants, et la charge moyenne appliquée semble jouer un rôle important.

Le modèle de sous-couche relativement simple, à déformation uniquement verticale influence les résultats. Il est possible d'envisager de modéliser cette sous-couche par un élément déformable. Le résultat obtenu montre que le comportement n'est pas radicalement différent, mais les informations locales, comme l'orientation des contacts montrent des différences. Ce type de modèle apparaît donc intéressant pour avoir une sous-couche avec des propriétés plus proches de celle en voie.

La méthode par éléments discrets avec l'approche NSCD se révèle être pertinente pour étudier l'évolution d'un massif de grains sous chargement cyclique, et permet de mener des calculs avec un nombre de cycles important par rapport aux simulations numériques effectuées jusqu'alors.

En terme ferroviaire, on peut donc dégager les conclusions suivantes :

- les méthodes par éléments discrets constituent une alternative pour étudier le tassement, et l'influence des différents composants de la voie,
- la qualité de la sous-couche est un élément très important dans l'évolution du tassement, et le ballast ne peut être seul à l'origine de la dégradation géométrique.

Chapitre 8

Validation et étude numérique tridimensionnelle

8.1 Introduction

Le modèle éléments discrets tridimensionnel présenté dans la deuxième partie présente la particularité de résoudre un problème d'interaction entre corps rigides avec l'approche NSCD. Il existe des modèles éléments discrets avec l'approche Molecular Dynamics traitant des interactions entre cluster de sphères [141], avec des cylindres [75] ou avec des polyèdres [105],[33].

Le nombre d'exemples de validation avec des corps polyédriques reste à l'heure actuelle très limité, nous sommes donc contraints de définir une stratégie de validation. Il est nécessaire de vérifier à la fois les hypothèses de la résolution, d'étudier les performances de l'algorithme de détection, et de se placer dans un cas traitant un problème ferroviaire.

Dans un premier temps nous allons nous attacher à effectuer des calculs tridimensionnels à partir d'exemples bidimensionnels existants qui ont fait l'objet d'études expérimentales ou numériques. Ces différentes études sont menées sur des cas où le comportement mécanique peut être prédit, par exemple le cas d'une arche ou d'un dôme, afin de s'assurer d'une résolution correcte du problème d'interaction et de l'efficacité de la détection.

A la suite de l'étude sur ces structures, nous allons nous intéresser à la caractérisation d'un échantillon composé de polyèdres issus de la digitalisation de grains de ballast. Nous tenons à souligner qu'il n'existe pas à notre connaissance de simulations effectuées avec des grains digitalisés, ce qui constitue une première particularité des simulations envisagées. L'étude de l'angle au repos d'un tas de ballast est loin d'une problématique opérationnelle mais c'est un élément pouvant servir à la caractérisation du ballast. Nous exposerons différents protocoles possibles pour étudier cet angle et nous exposerons les valeurs numériques déterminées.

8.2 L'expérience de Château Gombert

Le contact frottant est un phénomène complexe, les modèles utilisés, sont en général simplifiés pour en tenir compte. Malgré ces simplifications des comportements macroscopiques peuvent être analysés. L'exemple traité dans le cadre de l'expérience de Château Gombert permet de mettre en évidence, par une comparaison de résultats numériques et expérimentaux, la pertinence de l'emploi de la loi de Coulomb et d'une loi de choc inélastique, c'est-à-dire avec un coefficient de restitution nul. Nous ne ferons aucune simplification pour l'algorithme de détection, c'est-à-dire que le nombre de faces pour les briques étant limité, nous examinerons les intersections de toutes les faces entre elles.

8.2.1 Confrontation expérience et simulation

L'expérience consiste à étudier un assemblage de blocs en bois, reposant sur deux plates-formes horizontales, mobiles l'une par rapport à l'autre. Dans l'expérience le mur est constitué de 105 briques de bois assemblées en 10 couches, dont 95 ont les dimensions ($H=4.9$ cm, $L=12.4$ cm, $l=6.2$ cm), et 10 dont la longueur est divisée par 2. A l'origine, l'objectif de cette expérience était de confronter des résultats expérimentaux à des simulations bidimensionnelles. Afin d'empêcher toutes éventuelles rotations, les briques sont guidées entre elles par des clavettes. Le coefficient de frottement entre les briques a été identifié, de l'ordre de 0.6, et celui des briques avec la plate-forme est de l'ordre de 0.7. L'ensemble de l'expérience a été réalisé par C. Fort de l'Ecole Supérieure de Mécanique de Marseille (ESM2), avec le support technique de M. Fuseri.

WALL SUPPORTED BY DEFORMING GROUND

105 blocks
 Block height : 0.049 m
 Block widths : 0.124 m and 0.062 m

Right foundation is fixed.
 Left foundation moves down.
 Final displacement 0.06 m

Experiment:

M. Jean,
 Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique
 (UPR CNRS 7051), Marseille.

*Numerical simulation by
the Contact Dynamics method:*

J. J. Moreau,
 Laboratoire de Mécanique et Génie Civil
 (UMR CNRS 5508), Université Montpellier II.

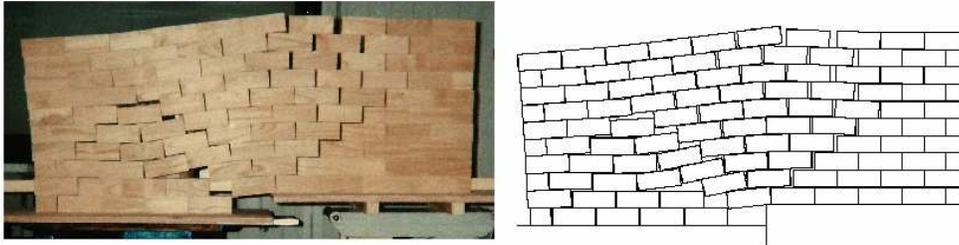


FIG. 8.1 – Résultats bidimensionnels obtenus par Moreau.

Les résultats bidimensionnels obtenus par Moreau ([66]) sont en excellent accord avec les résultats expérimentaux (fig. 8.1). Ces observations ont été retrouvées à l'aide d'une modélisation tridimensionnelle avec des corps déformables [5].

L'ensemble des données étant à notre disposition il nous est apparu très intéressant de réaliser cette même expérience avec le modèle de corps rigides tridimensionnels. Cet exemple permet à la fois d'évaluer la robustesse de l'algorithme de détection en raison des nombreuses situations avec des faces perpendiculaires ou parallèles, et de vérifier la résolution numérique du problème de contact frottant.

La première étape de l'expérience consiste à affaisser le bâti de droite de 5 cm, avec une vitesse de 5 cm/s. Cette opération entraîne l'apparition d'ouvertures dans le mur, avec un profil particulier. Une opération identique a été réalisée à l'aide du modèle numérique et nous donne le résultat suivant (fig. 8.3) :

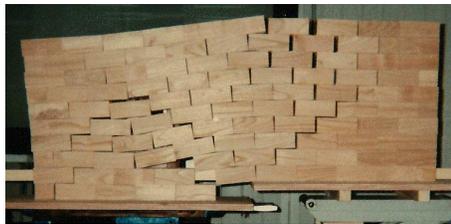


FIG. 8.2 – Photo de l'expérience.

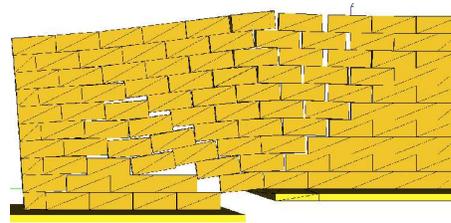


FIG. 8.3 – Image de la simulation.

Les ouvertures présentes dans l'expérience ont été retrouvées par la simulation numérique (fig. 8.3). Ce résultat est à mettre en parallèle avec des calculs bidimensionnels réalisés par Moreau

retrouvant le même profil (fig. 8.1).

Cet exemple de simulation d'affaissement de sol permet de retrouver un comportement macroscopique identifié expérimentalement en employant les coefficients de frottement identifiés expérimentalement.

8.2.2 Performance de la détection

Sur ce type de géométrie, l'algorithme de détection teste en moyenne cinq ou six directions de projection pour statuer du non contact ou déterminer une éventuelle normale au contact. Ce résultat apparaît concordant avec la disposition des blocs et la discrétisation surfacique en triangle.

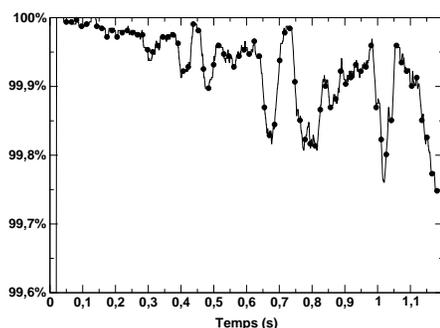


FIG. 8.4 – Evolution de l'efficacité.

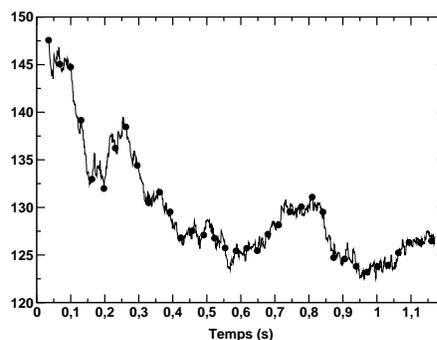


FIG. 8.5 – Coût de la détection (rapport du temps entre une itération et du temps d'une détection).

L'efficacité de l'algorithme sur ce type de géométrie est pratiquement de 100% (fig. 8.4), ce qui signifie qu'il existe très peu de situations pour lesquelles l'ensemble des normales des polyèdres examinés ne contient pas de direction séparatrice. Le coût moyen d'une détection reste très inférieur à celui d'une itération, une itération avec 450 contacts étant environ 120 fois plus coûteuse qu'une détection en adoptant la méthode de résolution locale de Newton Généralisée. Ces performances ont été obtenues sur une station unix Pentium 4 cadencée à 2.66 GHz (fig. 8.5).

Il est donc possible d'utiliser l'algorithme de détection à l'aide d'objets composés en moyenne d'une douzaine de faces, sur des structures maçonnées, sans être pénalisé par des temps de détection trop importants par rapport au coût du solveur.

8.3 L'arche d'Istres

La validation d'un outil numérique étant une étape difficile, et les expériences parfaitement décrites plutôt peu nombreuses, les géométries modèles ou les structures assimilables, constituent un champ d'investigation pour étudier le comportement d'un modèle.

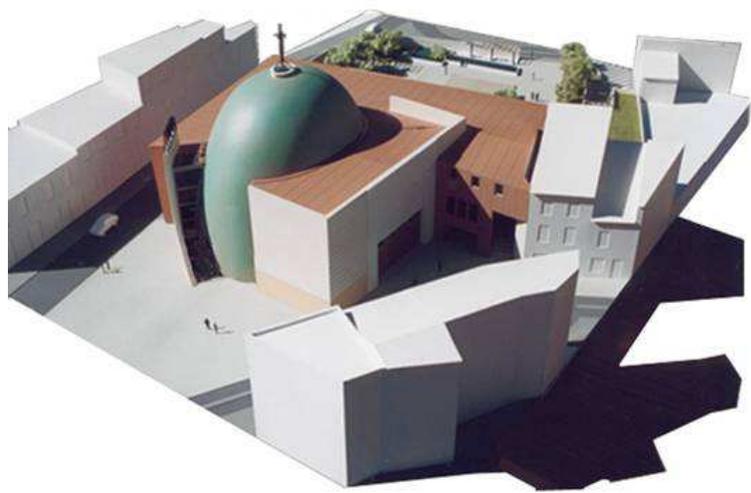


FIG. 8.6 – Photo d'une maquette.

Ici il a été possible d'étudier une structure existante, la porte de l'église d'Istres (fig. 8.6), dont le maillage des différents blocs la constituant était disponible [25]. Cette structure présente l'intérêt d'être interprétable plus facilement. L'ensemble de la géométrie bidimensionnelle originale issue des travaux de Chetouane a été extrudé et nous avons mené un calcul avec notre modèle tridimensionnel.

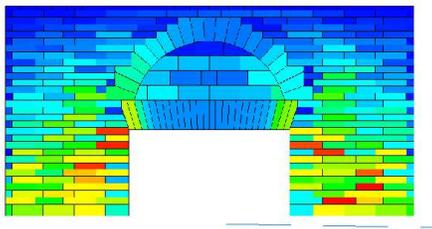


FIG. 8.7 – Exemple traité en 2D.

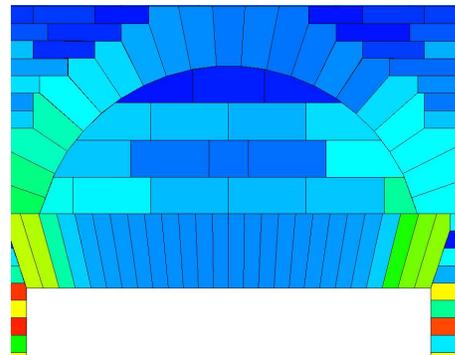


FIG. 8.8 – Plate bande.

L'arrangement des briques conduit, après un calcul 2D (fig. 8.7), à une stabilisation de l'arche sous pesanteur. Les efforts exercés sur la partie supérieure de la plate bande sont repris par les murs constituant l'arche, et l'ensemble des briques de la plate bande se bloque sous ces contraintes (fig. 8.8).

Il apparaît clairement que les constatations observées à l'aide du modèle 2D doivent être retrouvées à l'aide du modèle 3D, des calculs ont donc été menés sur cette structure. En effet l'obtention de l'équilibre est conditionnée par la localisation des chaînes de forces, donc de la position des points de contact et la qualité du calcul, c'est-à-dire le choix de la norme de convergence du solveur.

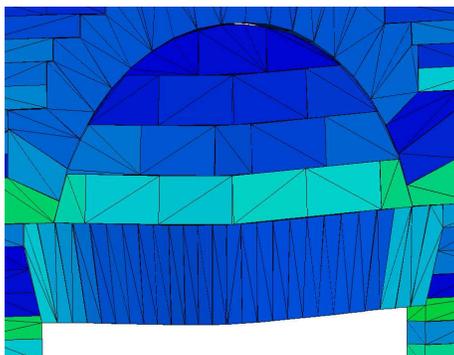


FIG. 8.9 – Structure 3D à l'équilibre (Norme= $1.666.10^{-2}$).

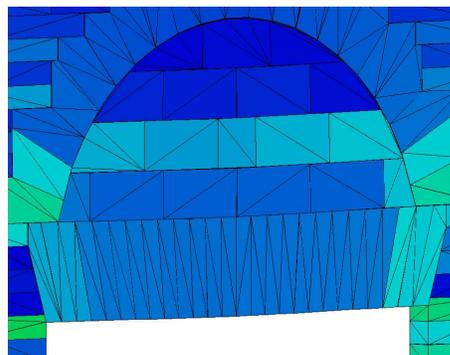


FIG. 8.10 – Structure 3D à l'équilibre (Norme= $1.666.10^{-3}$).

Le calcul sur la structure tridimensionnelle issue d'une extrusion conduit à une situation d'équilibre, mais la norme de convergence joue un rôle très important sur l'arrangement des briques et la déformation de l'arche. L'emploi d'une norme trop permissive entraîne une déformation anormale de la plate bande (fig. 8.9, 8.10) ; avec un calcul suffisamment précis l'imbrication des éléments formant la plate bande, sous l'effet de la pesanteur entraîne leur blocage et permet de transmettre les efforts aux murs. Si le nombre d'itérations effectuées n'est pas assez important cela conduit à une solution à chaque pas de temps pour laquelle les lois de comportement des interactions ne sont pas correctement vérifiées.

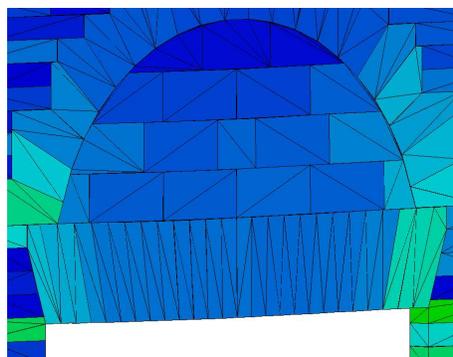


FIG. 8.11 – Structure 3D à l'équilibre (Norme= $1.666.10^{-4}$).

L'utilisation d'une norme de convergence de l'ordre de $1.666.10^{-4}$ permet d'obtenir à la suite de quelques milliers de pas de calcul une solution équilibrée sans déformation anormale de la plate bande (fig. 8.11).

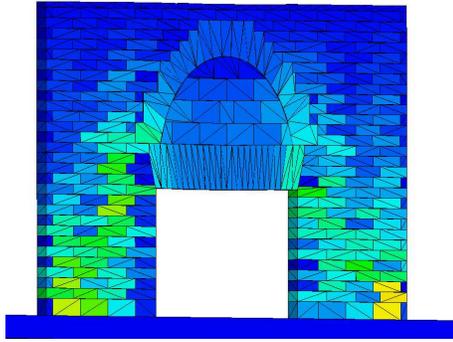


FIG. 8.12 – Arche à l'équilibre.

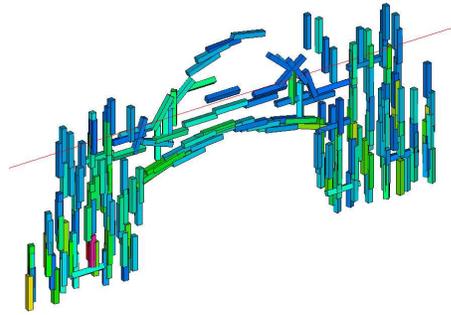


FIG. 8.13 – Réseau de contacts forts.

On retrouve les constatations faites à l'aide du modèle bidimensionnel avec la reprise des efforts par la plate bande et leur transmission aux murs constituant l'arche (fig. 8.12, 8.13). La figure (fig. 8.13) représente le réseau des contacts pour lesquelles la force normale est supérieure à la force normale moyenne.

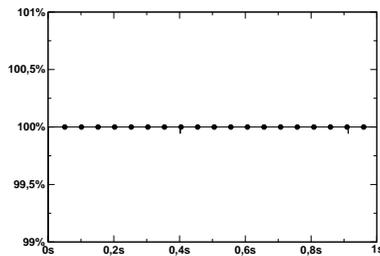


FIG. 8.14 – Efficacité de l'algorithme de détection.

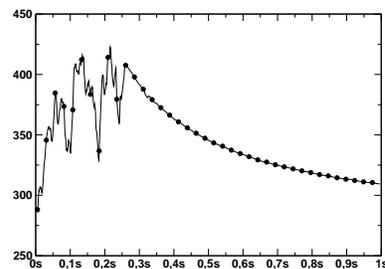


FIG. 8.15 – Coût de la détection.

Le calcul sur une structure plus importante, avec des géométries plus compliquées, confirme les résultats obtenus pour le mur. En effet le pourcentage d'efficacité de l'algorithme de détection est presque de 100% sur l'ensemble de la simulation, donc le nombre de situations où une direction séparatrice ne se trouve pas parmi l'ensemble des normales aux polyèdres examinés est très faible pour ce type de polyèdres et d'arrangement (fig. 8.14). Il est intéressant de remarquer qu'en moyenne une itération du solveur est de l'ordre de 270 fois plus coûteuse qu'une détection (fig. 8.15), sachant qu'en moyenne on fait 5 shadow-overlap sur un pas de temps. Ces résultats sont encourageants et permettent de voir que le coût d'une itération de Gauss-Seidel reste beaucoup plus important que le coût d'une détection.

8.4 Etude d'une structure maçonnée : le dôme

L'étude de la stabilité de structures comme le dôme a été l'objet de nombreuses investigations, afin de comprendre les phénomènes d'apparition de fissures ou d'instabilités. L'étude de la stabilité d'un dôme a été un sujet étudié de différentes manières dont on trouvera une revue non exhaustive dans [60]. Une des plus célèbres études est celle de Poleni, qui dès 1748 c'est intéressé à la stabilité

du dôme de St Pierre de Rome suite à la présence de nombreuses fissures. Le découpage du dôme en 25 arches, chacune découpée en 32 blocs lui permis de considérer le cas-bidimensionnel en deux arches. Il considéra alors une corde constituée de masse proportionnelles à chaque bloc. En superposant la chaîne ainsi constituée à l'équilibre et un schéma du dôme, il obtint que la ligne passait à l'intérieur du dôme et que celui-ci était stable, malgré la présence de fissures.

Les études numériques tridimensionnelles sur ce type de structures à l'aide de modèles éléments discrets rigides ou déformables sont peu courantes. Un exemple de dôme a été traité avec l'approche déformable par Acary [5], mettant en évidence la répartition des contraintes dans la structure.

Dans un premier temps, nous allons effectuer une mise en équilibre d'un dôme construit géométriquement, de forme sphérique avec une ouverture circulaire. Ensuite nous étudierons la stabilité d'un dôme en fonction de l'épaisseur du voile, en prenant comme portée celle de St-Pierre de Rome.

8.4.1 Rôle du coefficient de frottement

La structure est constituée de 760 blocs, formant un dôme de 8 m de diamètre ayant une épaisseur constante de 0.5 m. Elle est composée de 40 arches, chacune d'elle étant un assemblage de 38 blocs, avec une ouverture au sommet de 0.6 m. La masse volumique considérée est d'environ 2500 kg/m^3 et le coefficient de frottement entre les blocs est de 0.6.

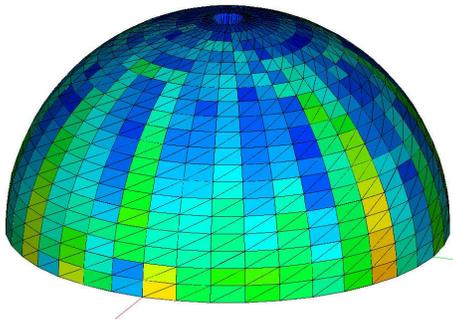


FIG. 8.16 – Dôme à l'équilibre (somme des efforts normaux).

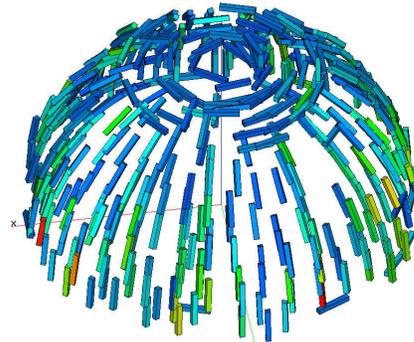


FIG. 8.17 – Réseau de contacts forts.

Dans un premier temps, nous avons fixé le coefficient de frottement entre les blocs et le sol rigide à 0.7 afin que les efforts tangentiels exercés sous la pression des blocs soient contenus par le frottement. L'équilibre est obtenu rapidement, les arches reprennent les efforts de la pesanteur et s'autobloquent. Nous avons représenté le réseau d'efforts, en dessinant les contacts surfaciques par un seul parallélépipède placé au barycentre des points de contact, qui met en évidence des efforts plus importants à la base du dôme et à son sommet (fig. 8.17). La représentation en terme de contrainte montre une zone de forte compression à la base et au sommet (fig. 8.16), constatation que l'on peut retrouver dans les travaux d'Acary [5].

La zone où les contraintes sont les moins importantes, est celle où la stabilité peut être mise en jeu.

Intuitivement on remarque l'importance du rôle de coefficient de frottement entre les blocs formant la base du dôme et le sol. En effet, sous l'effet de la pesanteur les blocs formant la base reprennent les efforts des arches et la présence du frottement empêche leur écartement.

L'introduction d'un coefficient de frottement nul entre les blocs et le sol, entraîne une rapide déstabilisation de la structure (fig. 8.18, 8.19).

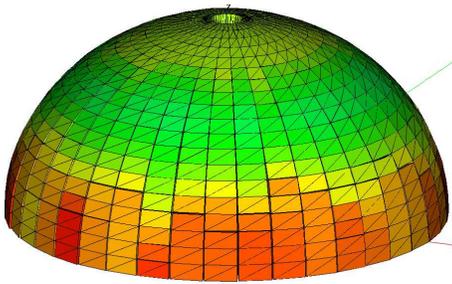


FIG. 8.18 – Effondrement du dôme.

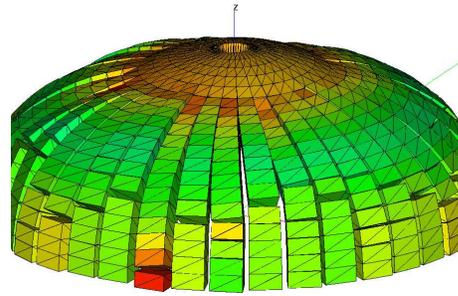


FIG. 8.19 – Effondrement du dôme suite.

Le dôme s'effondre et l'on peut remarquer que chaque arche à sa cinématique propre, en repoussant les blocs formant la base vers l'extérieur. L'effondrement de la structure est homogène.

Pour ce type d'arrangement, le nombre de contacts est important, environ 5000 à 6000 contacts, et le coût de la détection reste bien inférieur à celui du solveur.

8.4.2 Stabilité en fonction de l'épaisseur

En considérant un dôme sphérique de rayon extérieur, R de 22.4 m, et une ouverture au sommet de 9 m. Nous allons étudier la stabilité de cette structure en faisant varier son épaisseur. On définit l'épaisseur de la calotte t , par $t = 2kR$ avec k une constante. L'opération va consister à construire plusieurs dômes, pour différentes épaisseurs, et observer l'évolution de la structure sous pesanteur. Les dômes sont construits de la même manière, avec 100 demi-arches, elles mêmes découpées en 16 secteurs, la masse volumique considérée est de 2500 kg/m^3 et le coefficient de frottement choisi est de 0.6 entre les blocs et de 0.8 entre les blocs et le socle rigide.

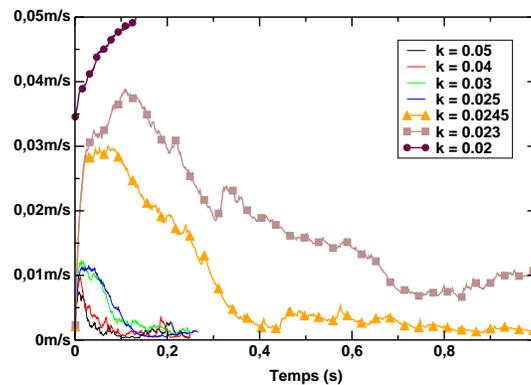
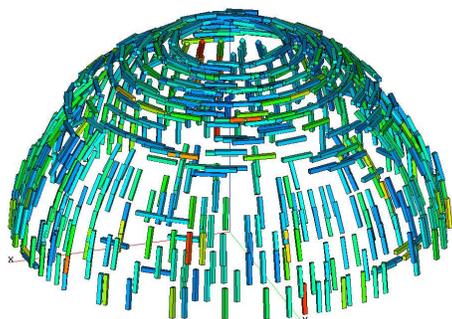
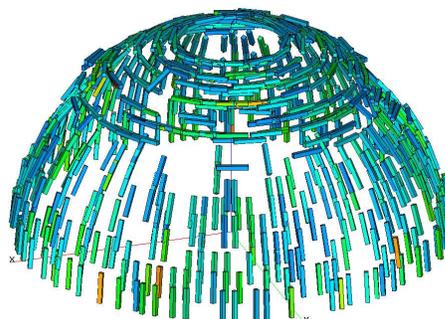
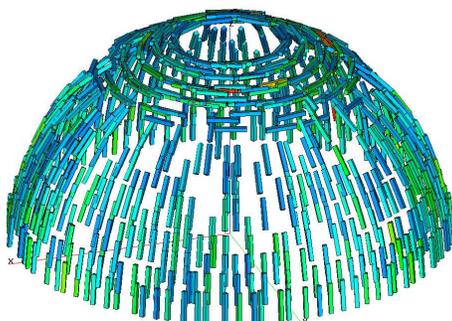
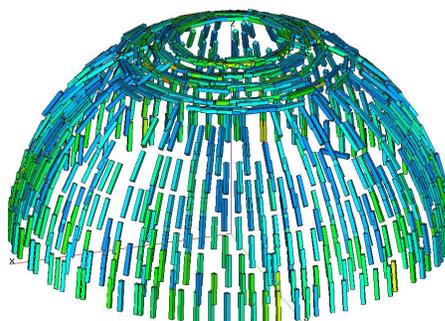


FIG. 8.20 – Evolution des vitesses moyennes.

L'évolution de la stabilité des structures en fonction de la valeur de k montre que pour des épaisseurs supérieures à 5 % du rayon du dôme, il y a une rapide stabilisation sous pesanteur de la structure (fig. 8.20). Pour des épaisseurs inférieures à 5%, c'est-à-dire k inférieur à 0.0245, la stabilité est plus difficile à obtenir. La ruine est rapidement obtenue pour des valeurs en dessous de 4.5% du rayon. Cette constatation a été mentionnée pour une structure similaire [60]. Afin d'affiner nos observations nous allons étudier la répartition du réseau fort dans ce type de structure, nous représenterons les contacts par des parallélépipèdes allongés, en considérant un seul parallélépipède pour représenter les situations où il y a 1, 2 ou 3 contacts.

FIG. 8.21 – Réseau fort pour $k = 0.05$.FIG. 8.22 – Réseau fort pour $k = 0.04$.

Pour ces deux configurations à l'équilibre, (fig. 8.21, 8.22), le réseau fort présente une particularité, à la base les efforts de plus grande intensité sont principalement orientés dans le sens des colonnes, et au sommet du dôme l'orientation change et devient parallèle au sol. Au sommet les efforts entraînent un serrage des blocs, on pourrait évoquer l'image d'une ceinture de forces. La partie supérieure peut alors s'assimiler à une calotte rigide, reposant sur une paroi faisant office de socle. Il est important de remarquer que la diminution de l'épaisseur entraîne une remontée de la base de cette calotte. La transition d'orientation du réseau fort remonte.

FIG. 8.23 – Réseau fort pour $k = 0.03$.FIG. 8.24 – Réseau fort pour $k = 0.025$.

Cette remontée de la transition d'orientation du réseau fort devient de plus en plus marquée pour des épaisseurs inférieures (fig. 8.23, 8.24), et selon les secteurs, on peut observer la disparition de la présence du réseau fort. Sur ces exemples, les efforts les plus importants ne dépassent pas 7

fois la force moyenne.

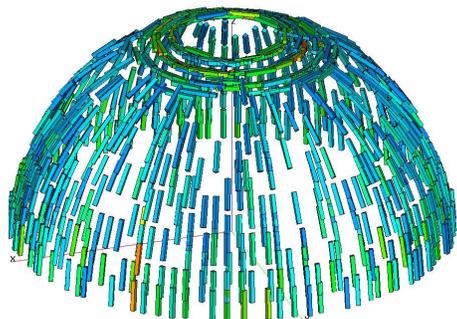


FIG. 8.25 – Réseau fort pour $k = 0.0245$.

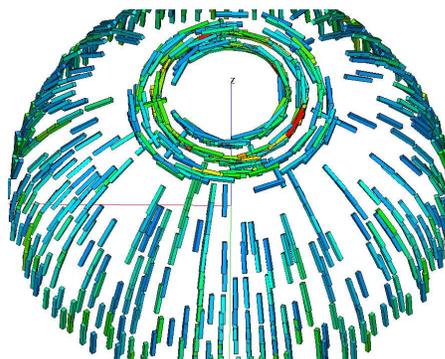


FIG. 8.26 – Réseau fort pour $k = 0.02$.

La diminution de l'épaisseur en deçà de 4.5% du rayon, entraîne la ruine du dôme. La transition d'orientation du réseau fort devient majoritairement discontinue pour toutes les arches. La ruine de la structure s'effectue à deux niveaux, à la fois à la base du dôme, et au niveau de la transition d'orientation du réseau fort.

L'angle par rapport à la verticale à partir duquel on observe la transition, que nous noterons α , peut être relié à celui de l'apparition des fissures mentionnée dans [60].

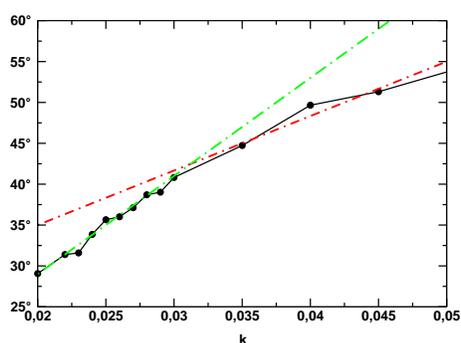


FIG. 8.27 – Evolution de α en fonction de k .

Lorsqu'on trace l'évolution de α en fonction de k (fig. 8.27), on peut remarquer deux zones d'évolution séparées par la valeur 0.03 de k . Cela peut être corrélé à notre observation précédente sur les difficultés d'obtention d'un équilibre.

8.5 Angle au repos de grains de ballast

Les expériences permettant de caractériser des objets de formes quelconques sont peu nombreuses, en particulier il existe très peu de protocoles avec des résultats expérimentaux pour étudier le comportement de polyèdres. Il est donc difficile de définir une expérience simple dont le comportement peut être intuitif pour étudier des formes digitalisées de grains de ballast. Par contre

l'étude d'un comportement global ou d'une quantité macroscopique semble être envisageable, une des limites restant a priori le temps de calcul.

L'étude des milieux granulaires en écoulement est très riche en terme d'expériences, on trouvera une revue à la fois d'expériences et de simulations dans [15]. Parmi ces expériences, la caractérisation de l'angle au repos de grains de ballast semble intéressante. Celui-ci dépend a priori beaucoup de la géométrie des grains et peu du frottement intergranulaire. De plus l'évaluation de cet angle ne nécessite pas a priori de dispositif particulier, la limitation principale restant le nombre de grains nécessaire. Dans ce cas le choix d'un protocole adapté semble important.

Dans un premier temps nous exposerons différents protocoles possibles, en énonçant les difficultés numériques associées. Ensuite nous exposerons des résultats avec le protocole retenu. Les grains de ballast digitalisés étant plus facetisés que les blocs de maçonneries nous fixerons le paramètre α de l'algorithme du shadow-overlap 3D à 0.5. Ce choix a été guidé par des simulations tests qui ne sont pas présentées dans ce rapport.

8.5.1 Différents protocoles

Le dépôt par pluviation apparaît comme la solution la plus simple, en effet il suffit de générer une bibliothèque de grains respectant la granulométrie du ballast et ensuite de *lâcher* les grains un à un à partir d'une hauteur fixée. Cette technique a été utilisée pour étudier la formation d'un tas de sphères [94] ou d'un tas de polygones [103]. Afin de déposer le plus rapidement possible un grand nombre de grains, il est possible de déplacer le point source autour d'un cercle. Nous présentons le résultat d'un dépôt par pluviation composé de 6377 grains de ballast digitalisés, ayant une masse volumique $\rho = 2600 \text{ kg/m}^3$, et dont on a fixé le coefficient de frottement intergranulaire à 0.6.

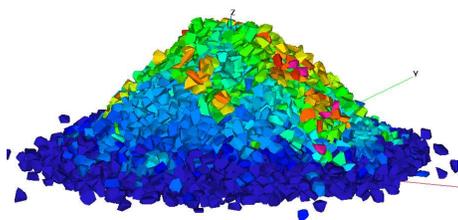


FIG. 8.28 – Tas obtenu par pluviation (vitesses).



FIG. 8.29 – Allure d'un tas expérimental obtenu par le même procédé [135].

L'obtention d'un tas par pluviation se révèle être une méthode très coûteuse en terme de temps de calcul, en effet si le principe est simple, numériquement il faut s'assurer qu'un nouveau grain n'est lâché que lorsque le précédent est suffisamment loin, et chaque chute sur le tas en formation nécessite beaucoup d'itérations de Gauss-Seidel pour équilibrer le système. Néanmoins on obtient d'un point de vue macroscopique l'allure d'un tas de grains de ballast (fig. 8.28, 8.29) qui ne nous apparaît pas aberrante.

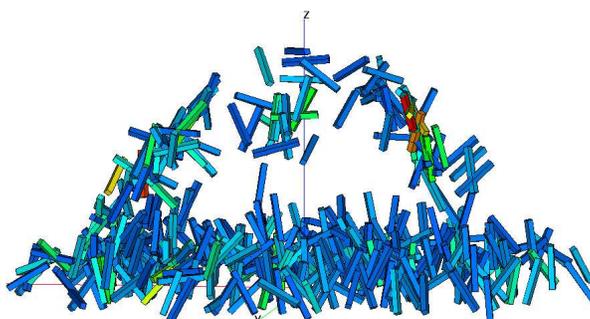


FIG. 8.30 – Réseau de contacts forts.

La question d'une visualisation de données mécaniques afin d'être interprétable est un problème difficile et toujours d'actualité. Par exemple en ce qui concerne les contacts, il est classique avec des échantillons de corps sphériques de les représenter par un parallélépipède ou un cylindre reliant leurs centres. Mais dans le cas des polyèdres de formes quelconques, cela n'a plus de sens ; nous avons choisi le même type de représentation que dans le cas de structures maçonnées (fig. 8.30). Ce choix permet tout de même de rendre compte de l'inhomogénéité du réseau de contacts forts dans cet assemblage.

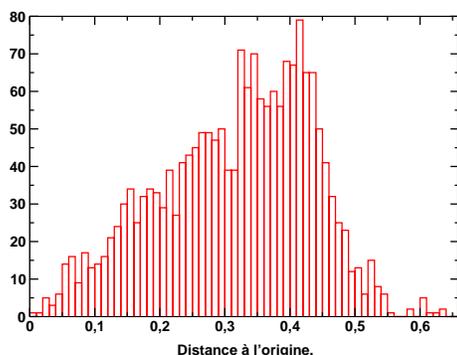


FIG. 8.31 – Distribution du nombre de contacts.

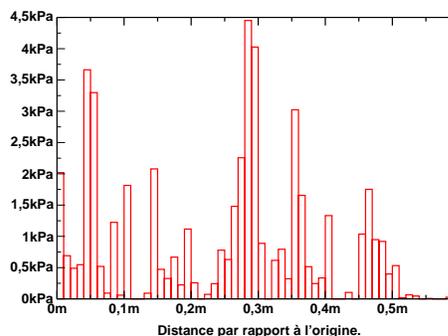


FIG. 8.32 – Distribution de pression sous le tas.

Afin d'analyser la répartition des efforts sous le tas, nous avons tracé la distribution du nombre de contacts situés dans des anneaux d'épaisseur 1 cm, en fonction de la distance au centre du tas. On remarque alors la présence d'un nombre faible de contacts au centre du tas (fig. 8.31), et la pression sur chaque anneau est clairement discontinue (fig. 8.32). On peut mettre en parallèle ces résultats à ceux pour un tas de sphères [94].

Le procédé par pluviation ne permet pas, en raison du temps de calcul nécessaire d'envisager une étude paramétrique de l'angle au repos d'un tas de ballast pour différents coefficients de frottement.

Il est possible d'envisager un autre type de protocole qui consiste à étudier l'écoulement confiné d'un massif de ballast sous pesanteur. On place des grains de ballast dans une boîte et on enlève une paroi pour que les grains s'écoulent. On peut envisager d'enlever la paroi brusquement, ou de la remonter lentement, cette dernière méthodologie apparaissant comme coûteuse en temps de calcul. Nous avons donc opté pour enlever la paroi, à la suite d'un dépôt sous gravité.

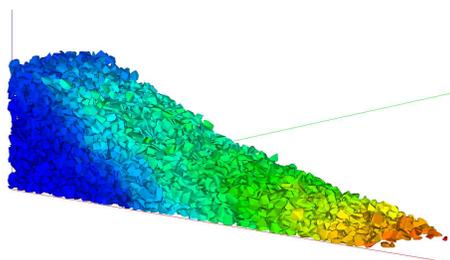


FIG. 8.33 – Exemple de talus.

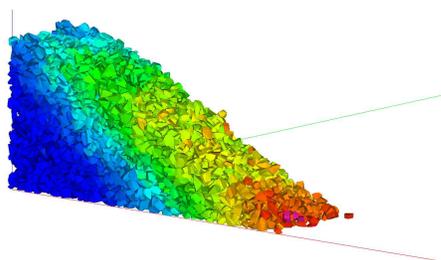


FIG. 8.34 – Exemple de talus.

Mais comme on peut le remarquer sur les deux images d'écoulements (fig. 8.33, 8.34), les couleurs représentant la norme du vecteur vitesse des grains, la dynamique joue un rôle important sur la formation du talus. Sous l'effet d'arches, il peut y avoir un mouvement où les grains sont poussés à la base du tas dans la direction de l'écoulement. Il nous apparaît difficile de maîtriser l'ensemble des paramètres, taille de la boîte, coefficient de frottement avec les parois, afin de faire une étude systématique. Des récents essais ont été menés en levant la paroi avec une vitesse constante et lente et l'on obtient à la fois un angle de talus de manière reproductible et des angles proches de l'expérience [16] (fig. 8.35, 8.36).

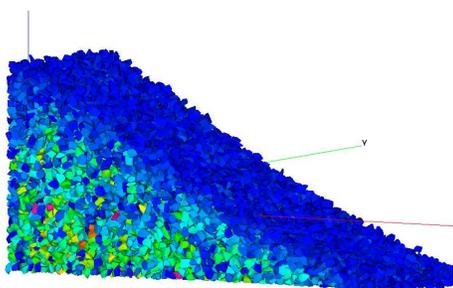


FIG. 8.35 – Exemple de talus obtenu en levant à vitesse constante une paroi (efforts) [16].



FIG. 8.36 – Exemple de talus obtenu expérimentalement [135].

Il apparaît toutefois difficile par ces deux protocoles de faire une étude paramétrique à cause de temps de calcul trop longs.

Il existe un protocole expérimental couramment utilisé pour améliorer la compréhension de la ségrégation des matériaux granulaires ou caractériser des écoulements, le tambour tournant. Ce type de géométrie nécessite d'écrire l'algorithme permettant de déterminer un point de contact

entre un polyèdre et un cylindre creux, mais présente l'avantage d'être reproductible et d'utiliser plusieurs fois le même échantillon.

8.5.2 Expérience en tambour tournant

Les expériences en tambour tournant sont généralement dédiées à l'étude des écoulements [117] où l'on recherche : un profil de vitesse, l'épaisseur de la couche qui s'écoule, etc.. Il est aussi possible de déterminer deux angles, avant l'avalanche θ_{start} et lorsque celle-ci s'arrête, θ_{stop} . Ce type de géométrie nous apparaît très intéressant afin d'étudier l'angle au repos d'un tas de ballast, en faisant varier le coefficient de frottement.

Afin d'étudier l'angle au repos nous avons défini trois types de géométrie : un premier tambour de 0.8 m de diamètre et 0.2 m de profondeur, 0.8 m et 0.4 m de profondeur et enfin 1.15 m et 0.4 m de profondeur. Nous avons fixé le coefficient de frottement entre le cylindre et les grains à 0.9 et à 0 entre les parois et les grains. L'opération consiste à appliquer une vitesse de rotation du cylindre de 6 *trs/min* et lorsque une avalanche se produit, on arrête la rotation. On mesure alors la pente de l'écoulement. Cette opération est réalisée pour différents coefficients de frottement intergranulaire.

Les simulations sont réalisées avec un pas de temps de $2 \cdot 10^{-4}$ s, et nécessite environ 12000 pas de temps. Nous avons employé la méthode de Newton Généralisée pour résoudre le problème de contact frottement pour des coefficients de frottement faibles, inférieurs à 0.5. Au-delà, des problèmes numériques de divergence de la méthode ont été constatés. La méthode de résolution diagonale a alors été employée, celle-ci donnant les mêmes résultats pour des faibles coefficients. Les simulations les plus longues durent environ 300 heures, sur un ordinateur Compaq EV6 cadencé à 667 Mhz, certains PC actuels permettant d'améliorer de façon notable ces temps de calcul. La détection ne pénalise pas le temps de calcul, et la totalité des opérations, création d'une liste de voisinage, la détection de points de contact, l'actualisation des positions consomme environ 10% du temps de calcul.

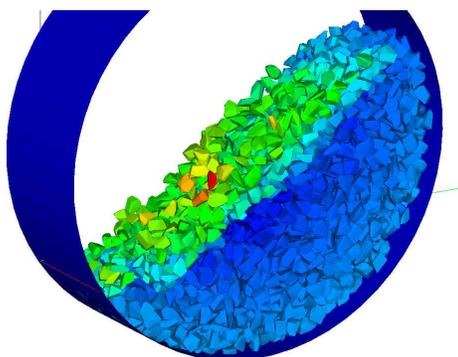


FIG. 8.37 – Exemple tambour $\emptyset = 0.8$ m, $P = 0.2$ m.

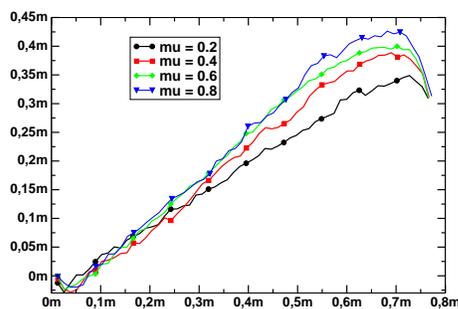


FIG. 8.38 – Profils moyens obtenus pour les différents coefficient de frottement.

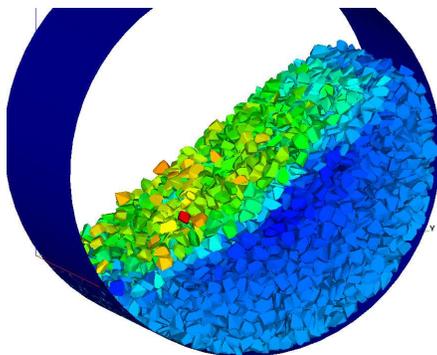


FIG. 8.39 – Exemple tambour $\emptyset = 0.8\text{ m}$, $P = 0.4\text{ m}$.

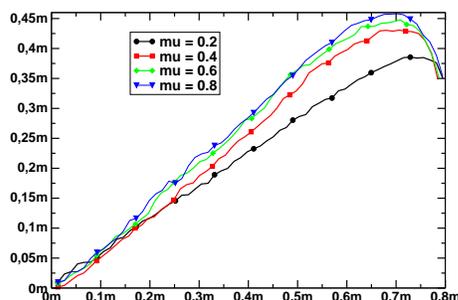


FIG. 8.40 – Profils moyens obtenus pour les différents coefficient de frottement.

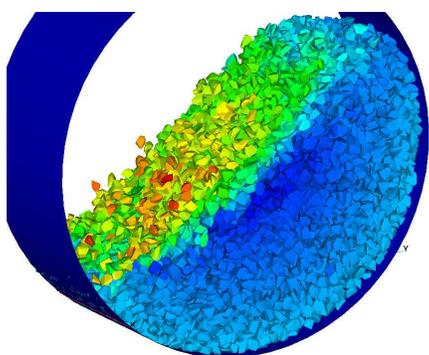


FIG. 8.41 – Exemple tambour $\emptyset = 1.15\text{ m}$, $P = 0.4\text{ m}$.

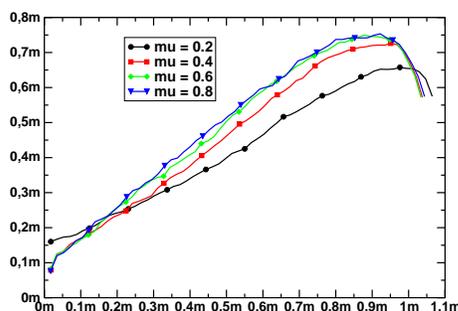


FIG. 8.42 – Profils moyens obtenus pour les différents coefficient de frottement.

Pour l'ensemble des essais on retrouve un comportement similaire, le profil pour le coefficient de frottement intergranulaire de 0.2 se distingue des autres, la pente du profil étant moins importante. Les profils pour les coefficients de frottement plus élevés deviennent similaires, et il faut noter qu'ils influent peu sur l'allure du profil. On peut donc en déduire que dans ce cas c'est la géométrie des grains qui guide la formation de la pente au repos.

	$\emptyset = 0.8\text{ m}$, $P = 0.2\text{ m}$	$\emptyset = 0.8\text{ m}$, $P = 0.4\text{ m}$	$\emptyset = 1.15\text{ m}$, $P = 0.4\text{ m}$
$\mu = 0.2$	27.98	28.06	29.06
$\mu = 0.4$	33.4	33.8	36.01
$\mu = 0.6$	33.91	34.3	37.1
$\mu = 0.8$	35	34.66	37.7

Les angles varient peu entre les deux premiers tambours de même diamètre, on a un angle au repos d'environ 35 degrés. Cette valeur peut être corrélée au résultats expérimentaux présentés dans [16, 135]. L'emploi d'un tambour plus grand fait apparaître une augmentation de l'angle de repos d'environ trois degrés. On constate donc un effet de structure, il serait nécessaire de poursuivre ces simulations en analysant l'évolution du réseau des forces.

8.6 Conclusion

Les exemples traités dans ce chapitre ont permis de vérifier la mécanique et l'efficacité des algorithmes présentés pour le cas tridimensionnel.

Les exemples de maçonneries ont permis de retrouver des résultats proches à ceux des essais expérimentaux existants ou de comportements prédictibles. L'étude de la déformation d'un mur a été retrouvée à l'aide de la simulation numérique, et le profil des ouvertures est exactement le même que dans l'expérience.

L'étude d'une structure plus complexe comme un dôme nous a permis de mettre en évidence, pour un comportement déjà étudié le rôle du réseau de contact fort. On retrouve une transition d'orientation du réseau fort pouvant être reliée à l'angle d'apparition des fractures dans ce type de structure, cette transition étant de plus en plus marquée au fur et à mesure que l'épaisseur diminue. En dessous d'une épaisseur du dôme représentant environ 5% du diamètre, la structure devient moins stable.

Pour l'ensemble de ces calculs, l'algorithme de détection a été efficace, le plus souvent au-delà de 95% et le coût d'une détection est bien inférieur à celui d'une itération.

Les essais de caractérisation du ballast avec des grains digitalisés a nécessité le choix d'un protocole. Le dépôt par point source est pour l'instant prohibitif en raison du temps de calcul. Le tambour tournant est un protocole qui nous apparaît plus intéressant, il permet de créer un angle de manière reproductible, et de faire une étude paramétrique en fonction du coefficient de frottement. Il résulte des simulations que la géométrie des grains est l'élément le plus influant sur la formation d'un angle au repos. Pour ces simulations l'algorithme de détection reste toujours performant, et la résolution est la partie la plus coûteuse en terme de temps de calcul.

Les conclusions en terme ferroviaire sont :

- il est possible de modéliser le ballast à l'aide de grains de ballast digitalisés et de déterminer l'angle au repos de ce type de matériau,
- les temps de calculs sont importants mais permettent de traiter plusieurs milliers de grains, et donc de traiter des géométries proches du réel.

Chapitre 9

Comportement d'une Couche Mince Granulaire

9.1 Introduction

Le ballast est un milieu granulaire constitué de roches concassées anguleuses que l'on peut supposer non cohésif lors de sa mise en place. Il est donc possible d'observer des contacts face-face entre deux grains, élément fondamental à prendre en compte lors d'une étude à l'aide de simulations numériques. Par ailleurs l'épaisseur du ballast sous un blochet est généralement inférieure à 10 diamètres de grains, ce qui constitue une particularité par rapport à des systèmes jusqu'alors étudiés. En effet le comportement est étudié sur un Volume Élémentaire Représentatif (VER), dont la taille dépasse largement celle du diamètre d'un grain. Les dimensions doivent permettre d'évaluer de manière reproductible des quantités comme les contraintes, en dépit de fluctuations temporelles ou géométriques. Dans le cas du ballast, la configuration géométrique ne peut être assimilée à un VER, nous évoquerons plus spécifiquement une *Couche Mince Granulaire* (CMG). Le comportement d'une CMG est a priori fluctuant et sensible aux détails macroscopiques de l'arrangement des grains [113].

Sous le blochet le ballast est confiné à la fois par la pesanteur et par la surcharge variable ayant pour origine la circulation des trains. Il existe donc un équilibre entre les surcharges en général très élevées, et les contraintes d'origine gravitaire, dont l'évolution est influencée par le frottement entre les grains de ballast, entre les grains et le blochet et enfin entre les grains et la sous-couche. Cette situation d'équilibre, qui est fortement perturbée lors des opérations de bourrage, est moins sensible à la surcharge causée par les circulations. L'effet moyen de ces perturbations dynamiques sur un cycle de chargement peut être analysé comme une transition entre les configurations d'équilibre du début et de la fin d'un cycle. Ces perturbations d'origine dynamique étant faibles, cette transition dépend fortement de cet équilibre. Il va donc être nécessaire de caractériser cet état et de la résistance statique du ballast.

Le comportement des CMG n'a pratiquement jamais fait l'objet d'études systématiques. Dans le domaine de la mécanique des sols, la localisation des déformations dans une zone de faible épaisseur dans le volume ou à l'interface avec un ouvrage est un phénomène connu et très exploré. Mais les conditions aux limites et les sollicitations auxquelles sont soumises ces zones sont différentes de celles du ballast.

Dans ce chapitre, nous allons tout d'abord présenter le système de référence considéré dans le cadre d'une étude bidimensionnelle. Nous justifierons les orientations choisies pour caractériser l'étude des CMG et nous définirons les paramètres à étudier pour les simulations numériques. Ensuite nous analyserons le comportement des couches minces granulaires dans le cadre quasi-statique, et nous décrirons l'évolution de la micro-structure. Dans une dernière partie nous reprendrons les hypothèses faites et les analyses afin d'étudier le comportement d'une couche mince granulaire de grains de ballast digitalisés tridimensionnels.

9.2 Configuration et paramètres d'étude

9.2.1 Composition granulaire

Le système considéré est composé d'environ 1600 grains, de forme pentagonale régulière respectant la granulométrie suivante :

- 50% de diamètre égal à 2.5 cm,
- 34% de diamètre égal à 3.75 cm,
- 16% de diamètre égal à 5 cm.

Le choix des pentagones est motivé par le souci de ne pas faire intervenir des paramètres supplémentaires liés à la forme des grains. Le coefficient de frottement entre les grains est fixé à 0.8, et nous adoptons une valeur nulle ou de 0.8. Les calculs sont menés avec un pas de temps de 2.10^{-4} s et en imposant environ 400 itérations par pas afin d'avoir un calcul précis.

9.2.2 Configuration de référence

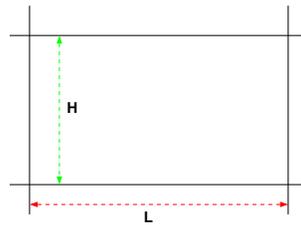


FIG. 9.1 – Schéma de la boîte.

Les grains sont confinés à l'intérieur d'un cadre rectangulaire (fig. 9.1) d'épaisseur H et de longueur L . Les deux parois latérales sont libres de se déplacer horizontalement. Elles sont soumises à une force compressive horizontale de 10^4 N. La paroi basse joue le rôle de socle et elle est fixe. La paroi haute est libre de se déplacer seulement verticalement.

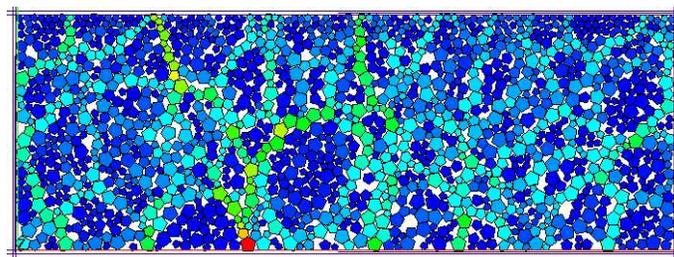


FIG. 9.2 – Un échantillon de référence après une compression biaxiale (niveau d'efforts).

Le système est préparé par le dépôt aléatoire des grains dans la boîte suivi d'une compression biaxiale en imposant une vitesse verticale constante de valeur négative (vers le bas) à la paroi haute (fig. 9.2). L'épaisseur initiale H_0 de la boîte est supérieure à 20 fois le diamètre moyen des grains.

Ce système est ensuite soumis à deux types de sollicitations : soit une compression verticale à \dot{H} constant, soit une relaxation libre en imposant une surcharge sur la paroi haute. Les analyses

portent sur cette phase de sollicitation où l'épaisseur diminue avec le raccourcissement vertical de la boîte en présence de la surcharge. Dans ce dernier cas, la diminution de l'épaisseur correspond au *tassement* de la couche granulaire au même titre que le tassement du ballast.

Le tassement entraîne une augmentation rapide de la longueur L . Une telle couche de grande longueur est nécessaire pour l'étude de la microstructure qui demande une statistique suffisante. En effet, l'épaisseur étant faible (une caractéristique essentielle du ballast), cette condition ne peut être remplie qu'en augmentant la longueur. Dans le cas du ballast ferroviaire, les conditions aux limites (gravité, extension finie du blochet) induisent des gradients de contrainte importants. Il est alors difficile d'effectuer une analyse statistique du système ou de déterminer la réponse mécanique intrinsèque du milieu. Le choix de la configuration de *boîte*, avec une gravité égale à zéro, permet d'éviter de tels gradients d'origine *externe*.

Cette configuration favorise ainsi l'homogénéité macroscopique du milieu. Mais elle diffère sur deux points des tests classiques réalisés, par exemple, pour l'étude du comportement des sols :

- le frottement avec les parois est non nul,
- l'épaisseur de la boîte est de l'ordre d'une dizaine de diamètres moyens.

Notre système de référence ne correspond donc pas à un VER, mais à une **couche mince granulaire** (CMG) confinée par parois frottantes.

9.2.3 Paramètres d'étude

L'ensemble des études va permettre de caractériser plusieurs éléments :

- le rôle du frottement et de l'épaisseur finie sur le comportement d'un milieu composé de grains anguleux,
- la pertinence de l'analyse de descripteurs classiques, comme le déviateur des contraintes, communément employé dans l'étude de VER,
- le rôle des chaînes de forces, qui apparaît comme prépondérant lors des études réalisées sur des cycliques de chargement.

Les paramètres d'étude que nous allons considérer, sont largement utilisés dans le domaine des matériaux granulaires, comme la compacité, le nombre de coordination, la densité de probabilité de force. Nous allons considérer deux grandeurs pour représenter l'état moyen des contraintes déviatoriques.

On considérera la contrainte déviatorique normalisée définie par :

$$\frac{q}{p} \equiv \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \quad (9.1)$$

où σ_1 et σ_2 sont les valeurs propres du tenseur des contraintes $\vec{\sigma}$ associé avec le volume total ou une partie délimitée du système. Ce tenseur est calculé en faisant la somme des moments internes des particules et la divisant par le volume concerné.

Pour une particule, il est donné par ses composantes :

$$M_{ij} = - \sum_{\alpha} r_i^{\alpha} f_j^{\alpha} \quad (9.2)$$

où r^{α} est le vecteur position du contact α dans un repère quelconque et \vec{f}^{α} est la force agissant sur la particule au point de contact α . La sommation porte sur tous les contacts de la particule. La contrainte moyenne associée avec une particule est la moitié de la trace de son moment interne [90]. Dans ce qui suit, elle sera représentée graphiquement par le niveau de bleu sur les particules. On considérera également la grandeur suivante :

$$R \equiv \frac{p_y - p_x}{p_y + p_x} \quad (9.3)$$

où $p_y \equiv f_y/L$ est la pression (normale) moyenne sur la paroi haute de la boîte et $p_x \equiv f_x/H$ est la pression moyenne sur les parois latérales. R représente la résistance verticale du système, nous utiliserons aussi parfois le rapport des contraintes normales (RCN) K (appelé également *constante de Janssen* dans l'étude des silos) défini par :

$$K \equiv \frac{p_y}{p_x} \quad (9.4)$$

Un milieu granulaire est dans un régime statique ou quasi-statique si la contrainte moyenne, due au transfert des forces au travers du réseau des contacts, c'est-à-dire la pression statique est grande devant la pression cinétique due au transfert de quantité de mouvement par collision. En d'autres termes les effets inertiels sont négligeables devant l'équilibre statique. Pour un milieu confiné la grandeur sans dimension qui caractérise la transition entre ces deux régimes est :

$$I = \dot{\epsilon} \sqrt{\frac{m}{p}} \quad (9.5)$$

où $\dot{\epsilon}$ est la vitesse de cisaillement, m est la masse d'un grain et p la pression. L'état quasi-statique correspond à des valeurs de I très inférieures à 1. Dans le cadre de test triaxial classique sa valeur est de l'ordre de $I = 10^{-8}$ [99]. Néanmoins, même pour des faibles valeurs de I , les effets dynamiques sont toujours présents, la transition entre deux états d'équilibre étant presque toujours dynamique sur des intervalles de temps très court.

9.3 Analyse du comportement

9.3.1 Evolution du déviateur et de la résistance verticale

Au cours d'une compression axiale à vitesse imposée, de -1 cm/s, pour un des échantillons où l'on fixe un coefficient de frottement nul avec la paroi, on observe que le déviateur q/p augmente rapidement au début de la sollicitation pendant que H diminue, et ensuite on observe une augmentation lente mais constante. Lorsque l'épaisseur H , normalisée par le diamètre moyen D des grains, arrive en-dessous de 5, le déviateur augmente très rapidement et tend vers 1. Pratiquement on observe que le système ne peut plus se réarranger, on arrive dans une situation de blocage, où le système peut numériquement exploser.

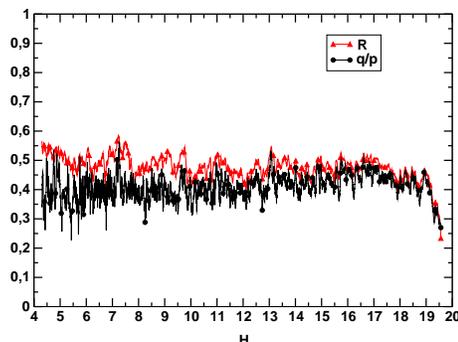


FIG. 9.3 – Compression avec $\mu = 0$ avec les parois.

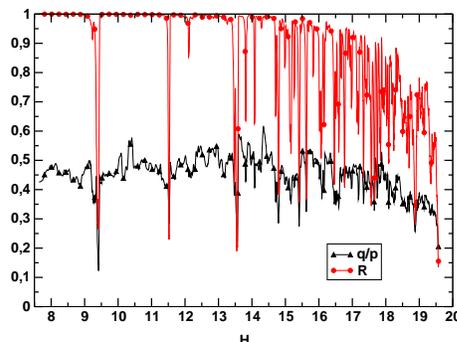


FIG. 9.4 – Compression avec $\mu = 0.6$ avec les parois.

On notera la présence de très nombreuses fluctuations du déviateur, qui sont de plus en plus importantes au fur et à mesure que H diminue. Ces fluctuations correspondent à des pertes brutales d'équilibre et des rotations importantes des directions principales du tenseur des contraintes. Les valeurs de R et q/p sont presque identiques, ce qui peut s'expliquer par le caractère axi-symétrique du tenseur des contraintes, les contributions des forces de frottement avec les parois haute et basse, mobilisées par le système pour résister à l'étalement, s'annulant dans ce cas.

Par contre, en présence de frottement on observe une différence notable entre les valeurs de q/p et de R . La résistance R dépasse 0.9 au cours de la compression pour atteindre la valeur 1 tandis que q/p reste inférieur à 0.6 (fig. 9.4). Il faut noter qu'en dessous de 15 diamètres de grains, le système subit des forces très intenses et l'on observe un état où les arrangements ne sont plus possibles sans accumulation d'interpénétrations.

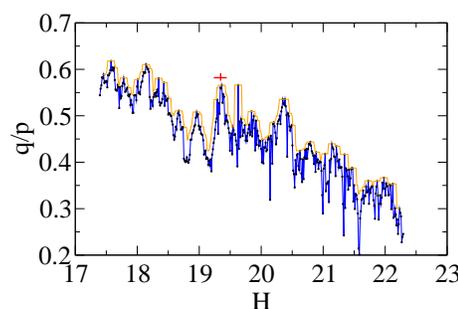


FIG. 9.5 – Enveloppe des maxima du déviateur des contraintes normalisées.

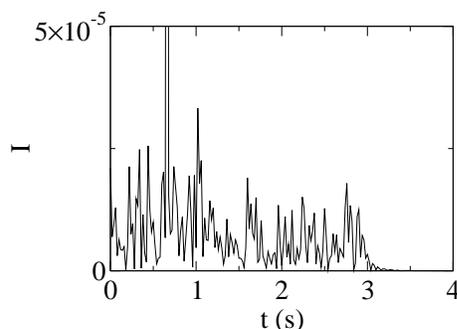


FIG. 9.6 – Evolution du paramètre d'inertie.

Si l'on trace l'évolution du déviateur des contraintes, on peut remarquer en traçant l'enveloppe des maxima sur dix points successifs (fig. 9.5), l'alternance de pics et de creux marquant une augmentation et perte brutale de la résistance à l'étalement. L'évolution du paramètre d'inertie montre la présence de nombreux pics correspondant à cette alternance (fig. 9.6), mais sa valeur reste suffisamment faible pour que les contraintes cinétiques soient négligeables. L'évolution du système reste ainsi globalement quasi-statique.

L'ensemble de ces constatations nous guide afin d'orienter notre analyse vers la compréhension du réseau des forces dans une CMG.

9.3.2 Le réseau des forces

La valeur très élevée de R et les fluctuations de contrainte sont la signature de formation ou de rupture de chaîne de force. Sur la figure représentant le réseau des forces, nous représentons les forces par un trait :

- centré sur le point d'application de la force,
- dont la largeur est proportionnelle au module de la force,
- et la direction confondue avec celle de la force.

On observe toujours une forte concentration des forces dans une petite portion du système. Par ailleurs, ces forces semblent former une structure souvent composée de colonnes dont certaines traversent verticalement toute l'épaisseur de la couche granulaire.

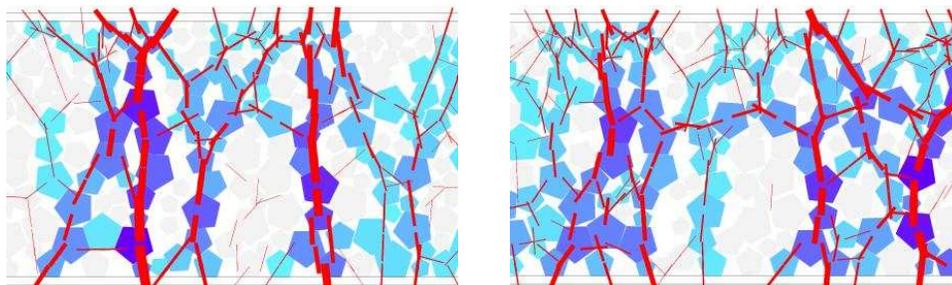


FIG. 9.7 – Evolution d'une chaîne de force.

Cette forte inhomogénéité des forces est à contraster à la fois avec la transmission inhomogène des forces dans un VER avec ses réseaux faible et fort, mais aussi avec les inhomogénéités d'origine externe. En fait, les réseaux fort et faible mis en évidence dans l'étude de la transmission des contraintes dans un VER, participent *organiquement* à la transmission des contraintes [116]. Les très grandes forces que nous observons sur les figures 9.7 constituent un phénomène plutôt très localisé et assez distinct par rapport au reste du système. Il apparaît plus adapté de parler de *très fortes forces*, par rapport à l'analyse du réseau fort et faible usuellement employée.

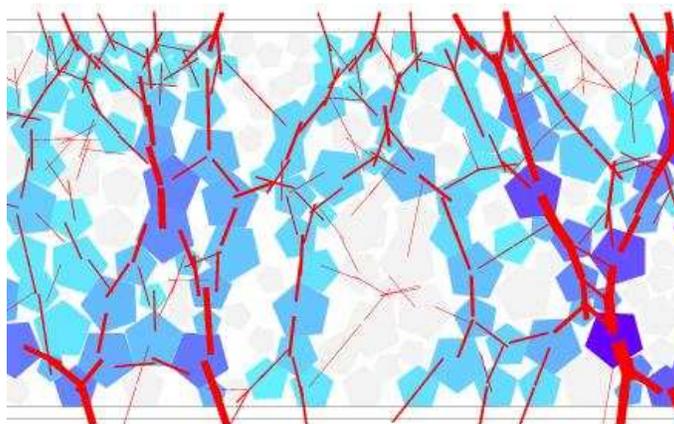


FIG. 9.8 – Nouvelle chaîne de force supportant les efforts.

Les trois figures représentent le système à trois instants de l'effondrement d'une colonne autour du pic marqué par une croix sur les figure 9.5, 9.8. Le niveau de bleu correspond à la contrainte moyenne subie par chaque grain lorsqu'elle est supérieure à 90% de la contrainte moyenne.

Nous nous référons à ces structures comme des **structures rigides localisées** (SRL), étant donné qu'elles présentent la particularité d'être composées de fortes forces et que leur présence est très localisée dans le système.

L'effondrement des SRL entraîne parfois une perte totale d'équilibre. Mais les effets inertiels engendrés restent encore très faibles par rapport à la pression de confinement.

9.3.3 Relaxation libre d'une CMG

L'action d'une circulation sur le ballast correspond à l'application d'une surcharge. Dans le régime quasi-statique auquel nous nous intéressons ici, il est instructif d'analyser la relaxation libre d'une CMG en présence d'une surcharge imposée et de frottement entre les grains et les parois. Cela correspond à considérer une valeur fixée de R pour laquelle on étudie l'étalement en fonction du temps. On peut remarquer que pour un VER il existe un seuil pour q/p . Si la valeur imposée est supérieure à ce seuil, l'étalement continue sans s'arrêter. Nous allons réaliser une première simulation où la surcharge verticale appliquée est dix fois supérieure à la pression horizontale, $K = 10$.

Pour ce premier test le système (fig. 9.9) se stabilise au bout de quelques secondes. On observe une légère diminution de la valeur de K correspondant aux changements de dimension de la boîte au cours de la relaxation (fig. 9.10). Dans la seconde simulation on recommence en partant de l'état relaxé de la première simulation mais en multipliant K par 4, et puis on répète les mêmes opérations successivement en multipliant K par 4 puis par 2.

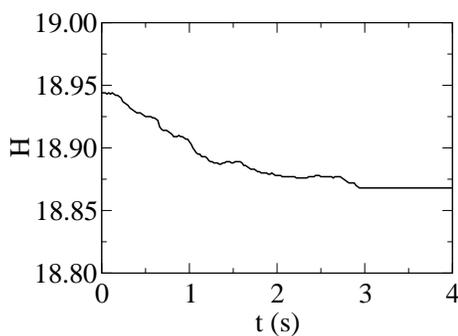


FIG. 9.9 – Evolution de H pour la première relaxation.

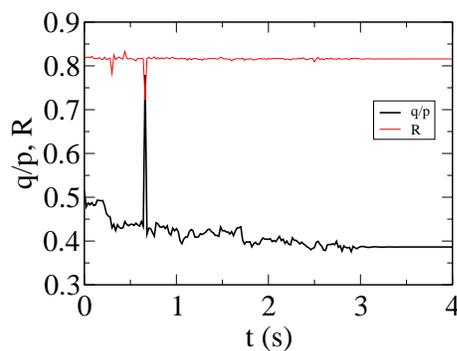


FIG. 9.10 – Evolution d'une chaîne de force.

Dans toutes ces simulations le système finit par se retrouver dans un état d'équilibre stable malgré les très grandes valeurs de K (fig. 9.11). Au cours de la relaxation le système recherche une nouvelle SRL, de nombreuses structures intermédiaires se forment ainsi et se défont, avant de trouver une SRL stable.

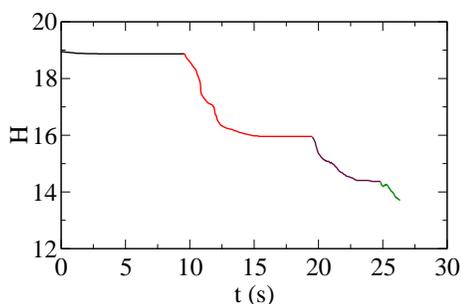


FIG. 9.11 – Evolution de H pour les relaxations successives.

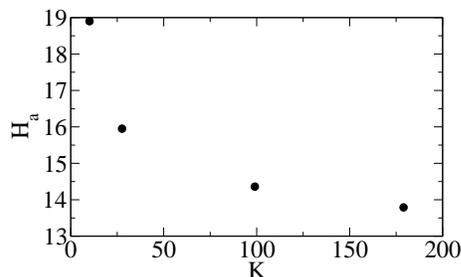


FIG. 9.12 – Evolution de l'épaisseur d'arrêt H_a atteinte pour chaque relaxation.

On peut donc en déduire que la relaxation d'une CMG conduit le milieu à trouver une configuration donnée pour une valeur limite H_a fonction de la surcharge appliquée, donc de K . La figure 9.12 montre la valeur de cette épaisseur d'arrêt H_a en fonction des contraintes normales K . Pour les différentes valeurs de K on observe une valeur asymptotique de H de l'ordre de $14 D$ (fig. 9.12). Pour cette épaisseur et ce type de configuration toute surcharge supérieure ne produira qu'un très léger tassement cumulé (fig. 9.11). L'existence d'une épaisseur critique de cet ordre indique qu'il est plus sensé d'utiliser le déplacement normalisé par le diamètre d'une particule plutôt que la déformation axiale qui normalise le déplacement par l'épaisseur initiale. En d'autres termes comme le système comporte une échelle de longueur interne, la notion de déformation pour ces couches minces granulaires n'a pas de sens intrinsèque.

9.3.4 Analyse de la compacité

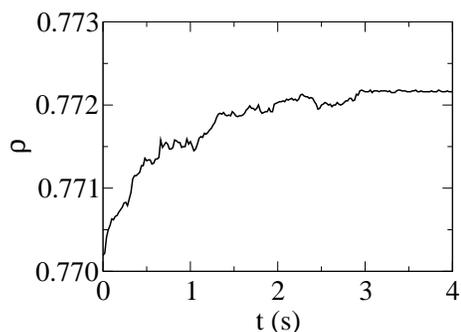


FIG. 9.13 – Evolution de la compacité au cours de la première relaxation.

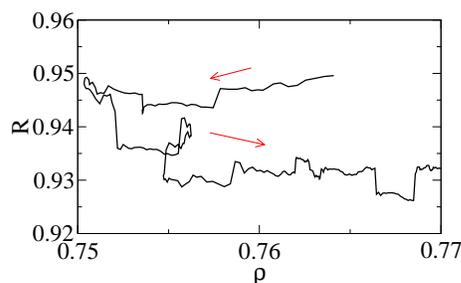


FIG. 9.14 – Evolution de la compacité en fonction de la résistance.

La forme polygonale des particules entraîne une compacité relativement faible par rapport à un système composé de disques. Sa valeur typique est de l'ordre de 0.77 dans les échantillons simulés ici. Au cours du premier test de relaxation la compacité augmente (fig. 9.13). Mais, au cours de la deuxième relaxation, la compacité diminue considérablement (de 0.77 à 0.75) avant de remonter à sa valeur initiale (fig. 9.14). La dilatance est induite par un cisaillement important du système au cours de sa relaxation.

Le mécanisme sous-jacent est une perte de stabilité : lorsque la compacité diminue, la probabilité de formation des SRL diminue, ce qui favorise l'étalement et donc la dilatation du milieu (diminution de la compacité). On peut voir ce mécanisme sur la courbe légèrement lissée où R est tracé en fonction de ρ au cours de la relaxation (fig. 9.14) (la branche descendante). La stabilisation du système par la formation d'une SRL n'est possible que si la compacité augmente. Ce même mécanisme fonctionne encore au cours de la troisième relaxation. Mais la dernière relaxation n'entraîne aucune diminution initiale de la compacité, après l'incrément de la surcharge. En d'autres termes, le système est pratiquement bloqué en présence des SRL stables.

9.4 Evolution de la microstructure

9.4.1 Rôle des contacts linéiques

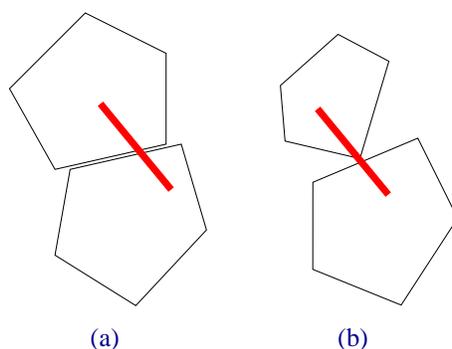


FIG. 9.15 – Contact linéique (a) et contact ponctuel (b).

La forme polygonale des particules a un rôle primordial dans la formation des SRL. Dans les simulations les contacts linéiques sont traités comme des contacts doubles. Ils concentrent les forces les plus importantes dans le milieu (fig. 9.15). Les contacts linéiques assurent la transmission de ces fortes forces, qui sont essentiellement localisées au niveau des SRL.

La particularité des formes polygonales dans le cadre de notre étude est liée à la possibilité d'obtenir une situation d'équilibre stable entre deux particules, contrairement à un assemblage de disque où les contacts sont tous ponctuels (fig. 9.15). Une chaîne de grains peut donc former une colonne à l'équilibre traversée par une ligne de force. Dans le cas de disques, les forces du réseau fort ne forment pas une ligne droite mais plutôt des chemins en zigzag.

Dans certaines conditions, compacité élevée ou une épaisseur faible, il est possible d'observer des SRL en colonne.

Un paramètre qui caractérise le degré de stabilité de chaque grain polygonal dans une colonne est l'angle θ_p entre ses deux plans de contact. Pour que l'équilibre du grain soit possible, il faut que cet angle soit inférieur à $2\theta_\mu$, où θ_μ est l'angle de frottement entre grains : $\theta_p \leq 2\theta_\mu$. Lorsque θ_μ tend vers zéro, l'équilibre implique que θ_p tende également vers zéro. La formation des colonnes avec des grains faiblement frottants est donc possible seulement si les grains présentent au moins deux côtés parallèles (rectangles, hexagones, etc).

En toute rigueur, la probabilité pour qu'une ligne droite passe par deux côtés quelconques d'un polygone dépend de l'angle sous lequel les deux côtés se voient. Pour les polygones engendrés à

partir d'une enveloppe circulaire de rayon a , cette probabilité est proportionnelle à la grandeur suivante :

$$\eta = \max \left\{ \frac{|\ell_\alpha \vec{n}_\alpha \cdot \ell_\beta \vec{n}_\beta|}{a^2} \right\} \quad (9.6)$$

où ℓ_α est la longueur du côté α et \vec{n}_α est sa normale sortante. La valeur maximale de cette expression calculée pour toute paire α et β de côtés d'une particule définit le facteur géométrique η . Cette grandeur représente donc l'aptitude d'un grain à faire partie d'une colonne stable suivant ses deux côtés pour lesquels η a sa valeur maximale.

Pour les polygones réguliers, l'expression de η en fonction du nombre de côtés n est

$$\eta = \begin{cases} 4 \sin^2 \frac{\pi}{n} & \text{si } n \text{ paire} \\ 4 \sin^2 \frac{\pi}{n} \cos \frac{\pi}{n} & \text{si } n \text{ impaire} \end{cases} \quad (9.7)$$

La valeur maximale de η est 2 pour un carré. Pour les hexagones réguliers il est égal à 1. Il tend vers zéro lorsque le nombre de côtés augmente. Pour le système de référence que nous avons simulé, $\eta \simeq 1,2$. Cette expression peut facilement se généraliser à la dimension trois.

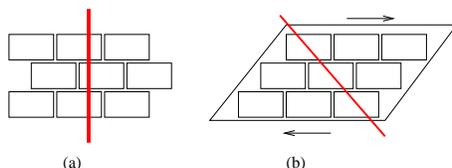


FIG. 9.16 – Modèle de briques en compression axiale (a) et en cisaillement simple (b).

Les colonnes peuvent transmettre les contraintes les plus fortes dans le milieu si elles s'alignent avec la direction de la surcharge. En effet, une colonne est fortement anisotrope : Elle peut supporter un chargement élevé dans une direction particulière, mais elle est d'autant plus fragile dans la direction perpendiculaire. Dans le cas limite où toute la surcharge verticale est supportée essentiellement par les forces aux contacts linéiques (par exemple, un mur construit avec des briques, $\eta = 2$), la résistance R peut tendre vers 1 pour la surcharge verticale, mais elle reste faible pour une surcharge horizontale. Par exemple, si on réalise un cisaillement simple la résistance dépend du coefficient de frottement μ entre grains, car le mécanisme de déformation est le glissement entre couches parallèles, Fig. 9.16.

Cette dépendance de la résistance par rapport à la direction de sollicitation existe dans tout milieu granulaire et elle est liée à l'anisotropie induite du réseau des contacts [124, 116, 102, 122]. Mais cette dépendance n'apparaît pas facilement puisque toute déformation tend à réorganiser rapidement le réseau des contacts. Dans le cas des grains polygonaux, la restructuration du réseau avec une transformation des contacts linéiques et ponctuels ne peut pas être spontanée ou rapide. La formation des colonnes, notamment des colonnes verticales dans le ballast, est ainsi une signature de la consolidation du milieu (augmentation de la résistance) pour un chargement vertical, qui s'accompagne d'une fragilisation dans la direction horizontale.

9.4.2 Distribution des forces

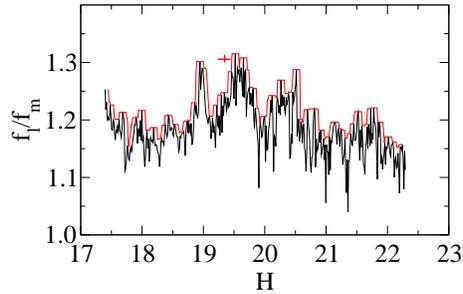


FIG. 9.17 – Evolution la force normale moyenne des contacts linéiques normalisée par la force normale moyenne.

Une grandeur qui reflète bien la transmission privilégiée des forces par les contacts linéiques est la force normale moyenne f_l aux contacts linéiques rapportée à la force normale moyenne f_m sur l'ensemble des contacts présents. La figure 9.17 montre l'évolution de ce rapport au cours de la compression biaxiale en fonction de H . Il varie entre 1.1 et 1.3, et ses variations sont fortement corrélées avec l'évolution des SRL. Cette propriété des contacts linéiques est d'autant plus remarquable qu'ils ne constituent que 40% des contacts.

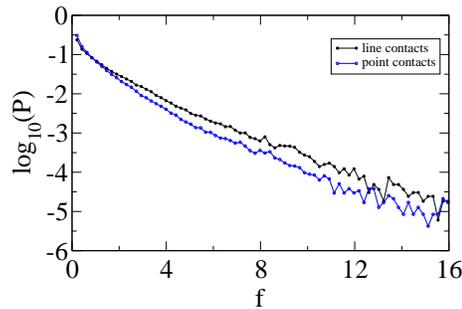


FIG. 9.18 – Logarithme de la densité de probabilité de la forces normales des contacts linéiques et simple.

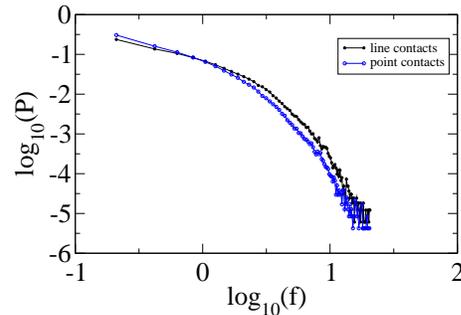


FIG. 9.19 – Densité de probabilité de la forces normales des contacts linéiques et simple en échelle log-log.

D'une manière générale, on peut évaluer la densité de probabilité $P(f)$ des forces normales séparément pour les contacts linéiques et pour les contacts ponctuels. Les figures 9.18 et 9.19 montrent la densité de probabilité des forces normales pour les contacts linéiques et pour les contacts ponctuels en échelles semi-log et log-log. Les forces sont normalisées par la force normale moyenne.

On remarque que les forces maximales sont bien plus grandes que la force moyenne. Les forces maximales dans un VER composé des disques dépasse rarement 6 fois la force moyenne [114, 95]. Par ailleurs, le nombre des forces faibles (inférieur à la force moyenne) semble diverger lorsque f tend vers zéro. Ceci indique une plus grande inhomogénéité d'une CMG composée de polygones en comparaison d'un VER composé de disques. Enfin, on remarque que dans le

domaine des fortes forces la fonction de densité des contacts linéiques est plus grande que celle des contacts ponctuels, cet ordre étant inversé dans le domaine des faibles forces.

9.4.3 Connectivité des particules

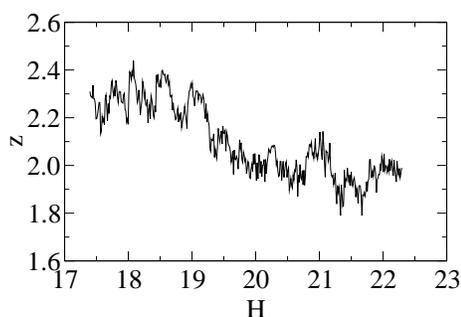


FIG. 9.20 – Evolution du nombre de coordination au cours de la compression.

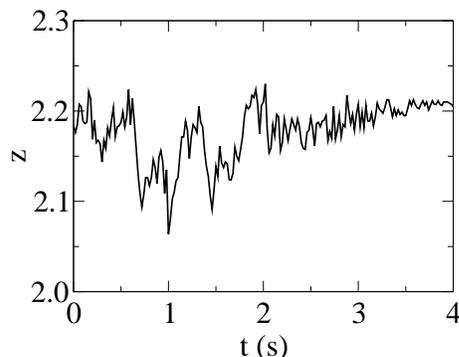


FIG. 9.21 – Evolution du nombre de coordination au cours d'une relaxation.

La dynamique des SRL peut être analysée à l'aide de l'évolution du nombre de coordination z . Au cours d'une compression (fig. 9.20), la valeur moyenne de z est au voisinage de 2.2. Dans le cas d'une relaxation, z subit des variations importantes (fig. 9.21). La diminution de z correspond à une perte de l'équilibre, mais sa valeur augmente après chaque chute, la création de nouveaux contacts contribuant à une nouvelle stabilisation du système.

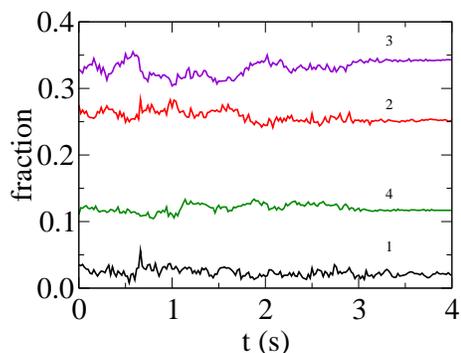


FIG. 9.22 – Evolution de la connectivité.

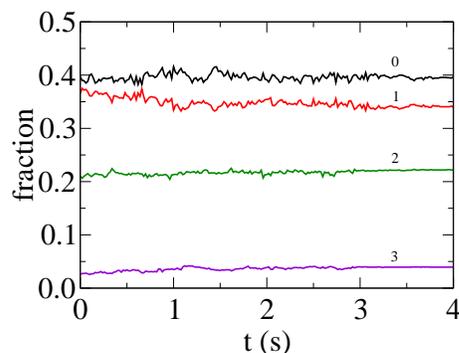


FIG. 9.23 – Evolution de la connectivité des contacts doubles.

Une grandeur qui permet une caractérisation plus riche du réseau des contacts est la fraction de particules ayant exactement n contacts, la fonction de connectivité. La figure 9.22 représente l'évolution de cette fonction au cours du temps, on notera que la fraction de particules avec plus de 4 contacts est négligeable tandis que la fraction moyenne des particules sans contact est de 25%. Mais le système étudié présente une particularité en raison de la forme des particules, 25% des particules ont seulement 2 contacts, ce qui est rendu possible par l'existence d'équilibre stable avec 2 contacts uniquement.

Il est intéressant de noter que le nombre de particules à 2 et 3 contacts varie en opposition de phase dans la totalité des essais (fig. 9.22). Environ 60% des particules ont 2 ou 3 contacts dans nos échantillons ce qui nous conduit à l'analyse suivante : le système s'organise avec des chaînes de particules à 2 contacts qui sont stabilisées par un troisième contact. Ce type de mécanisme peut s'observer aussi pour des disques mais avec une différence importante : les chaînes ne dépassent pas deux particules, tandis que dans notre cas elles peuvent traverser la couche.

La connectivité des particules par contacts linéiques est un autre descripteur significatif d'un système de polygones. La figure 9.23 montre l'évolution des fractions des particules avec 0, 1, 2 et 3 contacts linéiques au cours de la première relaxation. Les variations sont faibles. 40% des particules n'ont aucun contact linéique (dont 25% sans aucun contact du tout). Presque 35% des particules ont un seul contact linéique tandis que plus de 20% des particules ont 2 contacts linéiques. Ces dernières se trouvent très souvent dans les sous-structures localisées en forme de colonnes. Un phénomène remarquable sur la figure 9.23 est la variation des fractions des particules à 0 et 1 contact linéique en presque parfaite opposition de phase. En effet, la dynamique d'une particule à un seul contact linéique est régie plutôt par ses contacts ponctuels. En raison d'une plus grande mobilité et facilité de rotation d'une telle particule, le contact linéique peut disparaître. Par ailleurs, une particule qui ne présente que des contacts ponctuels, peut se trouver avec un contact ponctuel transformé en contact linéique à la suite de roulement sur une voisine de contact.

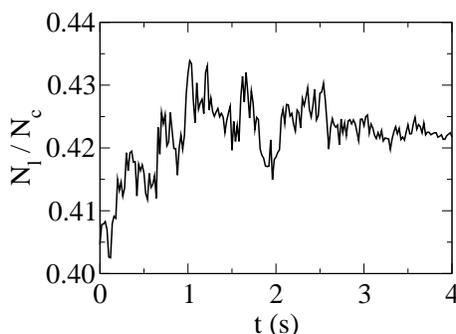


FIG. 9.24 – Evolution de la fraction des contacts linéiques.

Une augmentation, même très légère, du nombre des contacts linéiques correspond à une stabilité accrue du milieu (au sens d'une résistance plus élevée). Ainsi, au cours d'une relaxation la fraction des contacts linéiques N_l/N_c , où N_l est le nombre des contacts linéiques et N_c est le nombre total de particules, augmente, comme on peut voir sur la figure 9.24.

9.5 Etude tridimensionnelle

L'analyse du comportement d'une couche mince granulaire avec des grains de ballast digitalisés permet de tenir compte d'une géométrie proche de celle en voie et d'étudier un milieu proche de la configuration sous un blochet. Cette analyse va permettre de mettre en évidence les différences entre des simulations bidimensionnelles et tridimensionnelles.

9.5.1 Echantillons granulaires

Les échantillons sont composés environ de 9860 grains de ballast digitalisés dont le diamètre se situe entre 25 et 50 mm. Ils reposent dans une boîte et sont compactés par une force de 45000 N. Ensuite on effectue une compression verticale à la vitesse de 4 cm/s.

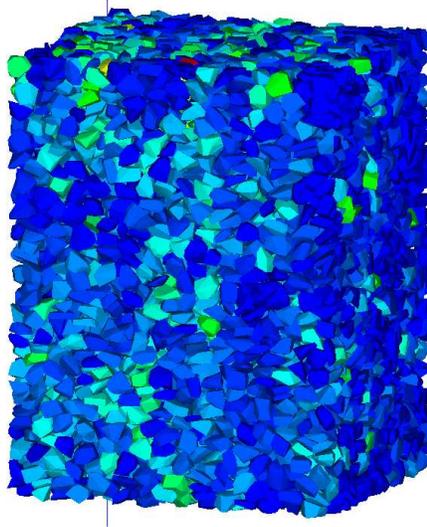


FIG. 9.25 – Echantillon après compression.

En moyenne, les grains considérés ont 35 faces et 19 sommets, le paramètre de forme η est relativement faible. Nous adopterons un coefficient de frottement intergranulaire de 0.5 et le frottement est pris égal à 0 ou 0.5 avec les parois.

Les échantillons sont préparés par une compression uniaxiale avec une force de 11 kN, et les dimensions à la suite de cette compression sont une boîte de base 50 cm \times 46 cm et 68 cm de haut (fig. 9.25).

9.5.2 Paramètres d'étude

Nous allons préciser, comme dans le cas bidimensionnel, les paramètres d'études, avec leurs définitions dans le cas tridimensionnel.

On considérera la contrainte déviatorique normalisée définie par :

$$\frac{q}{p} \equiv \frac{\sigma_3 - \sigma_2 - \sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3} \quad (9.8)$$

avec $\sigma_3 > \sigma_2 > \sigma_1$, qui sont les valeurs principales du tenseur des contraintes associé au volume délimité du système. Ce tenseur est calculé sur le même principe que dans le cas bidimensionnel.

On considérera la résistance R définie par :

$$R \equiv \frac{p_z - p_x - p_y}{p_y + p_x + p_z} \quad (9.9)$$

où $p_z \equiv f_z/L$ est la pression (normale) moyenne sur la paroi haute de la boîte et $p_x \equiv f_x/H$, $p_y \equiv f_y/H$ sont les pressions moyennes sur les parois latérales. Nous utiliserons le rapport des contraintes normales K défini par :

$$K \equiv \frac{p_z}{p_x + p_y} \quad (9.10)$$

9.5.3 Analyse du comportement

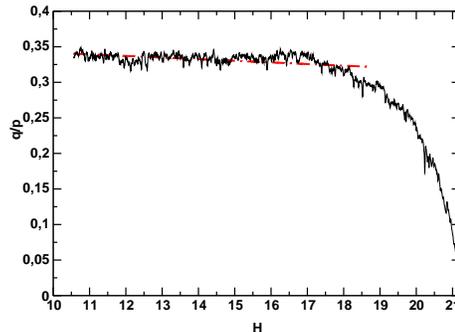


FIG. 9.26 – Evolution du déviateur pour la compression.

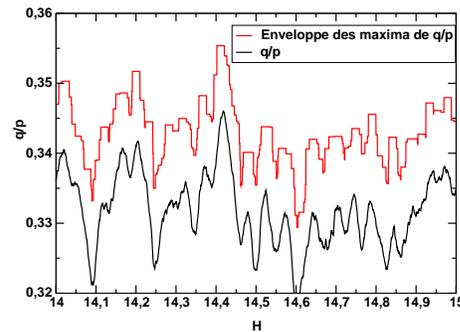


FIG. 9.27 – Variations du déviateur.

Au cours d'une compression axiale à vitesse imposée pour un coefficient de frottement nul avec la paroi on observe que le déviateur q/p augmente rapidement au début de la sollicitation. Ensuite on observe une augmentation lente mais constante du déviateur, une régression linéaire sur le plateau nous donne une pente de 0.002 (fig. 9.26). Comme dans le cas bidimensionnel, la résistance que nous n'avons pas représentée, est du même ordre que le déviateur, subissant de nombreuses fluctuations.

On notera que l'amplitude des fluctuations du déviateur augmente avec la diminution de H . Si on trace l'enveloppe des maxima sur dix points successifs (fig. 9.27), on remarque une alternance de pics et de creux traduisant des transitions brutales au niveau des chaînes de forces. Ces observations mettent en évidence la formation et la destruction de structures, composées de chaînes de forces très fortes, dont la présence a été identifiée dans le cas bidimensionnel : les structures rigides localisées. Ces structures contribuent à la résistance à l'écrasement, et malgré un facteur de forme inférieur à celui des pentagones, on retrouve pour des grains de ballast, ces structures particulières.

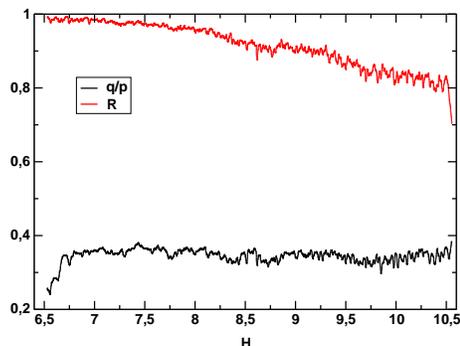


FIG. 9.28 – Evolution du déviateur et de la résistance en présence de frottement avec les parois.

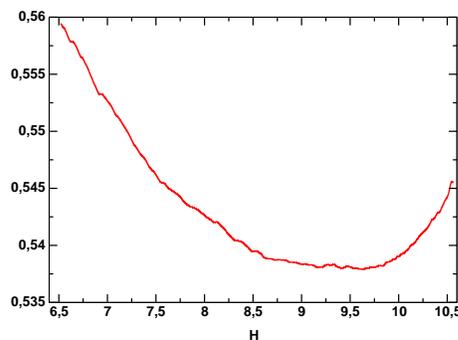


FIG. 9.29 – Evolution de la compacité en présence de frottement avec les parois.

A la suite de la première compression axiale, nous avons réalisé une autre simulation en imposant cette fois un coefficient de frottement de 0.6 avec les parois. La résistance est environ le double du déviateur tout au long de la compression, et augmente de façon régulière et plus rapidement. Le déviateur n'augmente pratiquement pas au cours du processus et chute brutalement en dessous de 7 diamètres de grains. La présence de frottement change ainsi le comportement, la résistance à l'étalement est plus importante et cela se traduit par des situations de blocage du système, les fluctuations de la résistance étant très nombreuses (fig. 9.28,9.29).

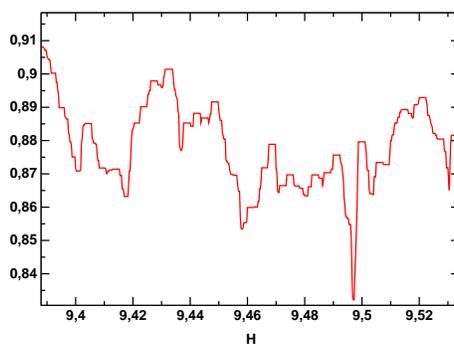


FIG. 9.30 – Variations des maxima de la résistance.

Si l'on analyse plus finement l'évolution de la résistance pour une très légère diminution de H, en traçant l'enveloppe de maxima sur une dizaine de points (fig. 9.30), on peut remarquer une alternance de plateaux et de chute brutale de la résistance. Pour H supérieur à 9.5 D, on remarque que la résistance évolue peu, puis augmente rapidement et chute en dessous de cette valeur. Cette évolution met en évidence le rôle des chaînes de forces très fortes qui s'opposent à l'écrasement. Ces chaînes étant peu nombreuses, une rupture d'une d'entre elles ou un réarrangement se traduit immédiatement par une perte de résistance, après avoir contenu la surcharge imposée.

9.5.4 Analyse de la microstructure

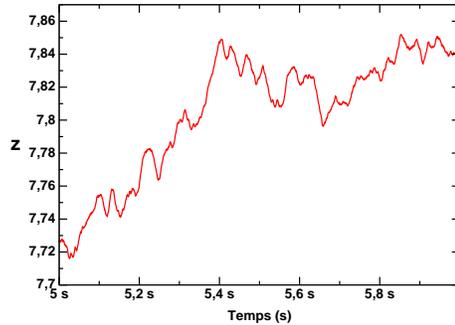


FIG. 9.31 – Evolution du nombre de coordination.

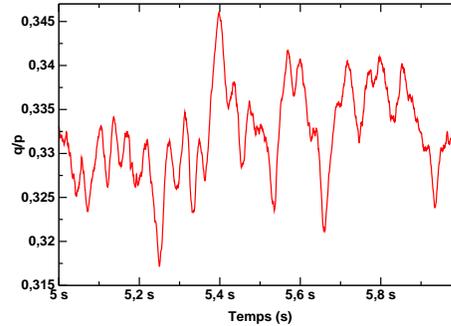


FIG. 9.32 – Variations du déviateur.

La dynamique des SRL peut être analysée à l'aide de l'évolution du nombre de coordination z comme dans le cas bidimensionnel. Au cours d'une compression (fig. 9.31), la valeur moyenne de z est au voisinage de 7.5. Cette valeur élevée s'explique car on a calculé z comme le nombre contact moyen par grains, en fait la valeur du nombre de coordination pour l'instant $t = 5.4$ s est 4.2. On peut remarquer que z subi des variations rapides et importantes, on peut parfaitement corréler ces variations avec l'évolution du déviateur. Les variations sont en phases, et à chaque augmentation du nombre de coordination on observe une augmentation du déviateur en particulier aux alentours de 5.4 s (fig. 9.32).

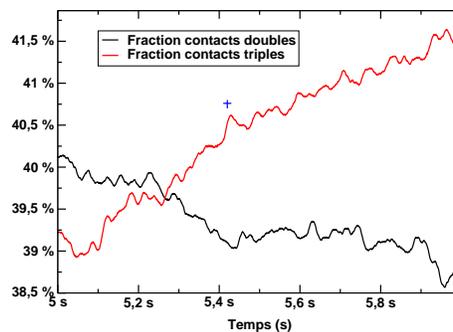


FIG. 9.33 – Evolution de la fraction des contacts doubles et triples.

La zone examinée correspond à un changement dans l'état du système, en effet la fraction des contacts triples devient la plus importante, et l'on peut remarquer que la variation du déviateur des contraintes est principalement liée à une augmentation de la fraction de ce type de contact (fig. 9.33)

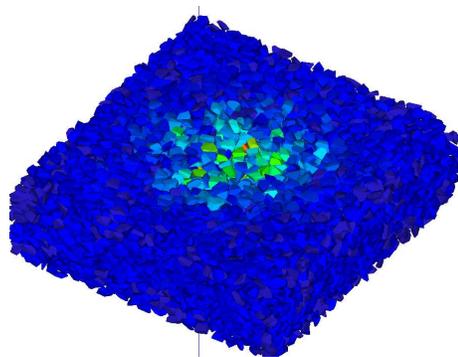


FIG. 9.34 – Echantillon en cours de compression.

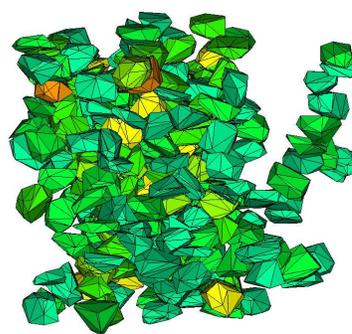


FIG. 9.35 – Zoom sur la partie la plus chargée.

La visualisation du système en cours de compression met en évidence l'inhomogénéité de la répartition des efforts. Pour cet échantillon, en présence de frottement, la stabilité de la structure est assurée par des grains situés au centre de l'échantillon (fig. 9.34).

Le rôle des contacts face-face est très important, ils contribuent à la stabilité du système, mais aussi à des situations de blocage de plus en plus nombreuses si leur nombre augmente. Le paramètre de forme défini dans l'analyse bidimensionnelle est plus petit que pour les pentagones, donc les grains de ballast sont moins aptes à former des SRL. Mais le nombre de facettes présentes dans les échantillons étant très important, la probabilité d'obtenir des formations de colonne reste élevée.

9.6 Conclusion

L'étude des mécanismes liés au tassement du ballast implique de considérer une géométrie particulière. En effet le ballast qui supporte les efforts induits par les circulations par l'intermédiaire du rail, de la traverse, est comprimé entre la surface inférieure des blochets et la sous-couche. Cette particularité nous a amené dans ce chapitre à considérer l'étude d'une *couche mince granulaire* (CMG).

Le système modèle étudié par la simulation numérique, à l'aide de pentagones dans le cas bidimensionnel et de grains de ballast digitalisés dans le cas tridimensionnel, présente un type particulier d'inhomogénéités induit par la formation des structures rigides localisées (SRL). Ces inhomogénéités apparaissent même pour des épaisseurs importantes (au moins 20 diamètres) d'une couche mince granulaire. Au cours du tassement sous l'action d'une surcharge, ces structures se multiplient et se renforcent. Pour une épaisseur critique, en présence de frottement, une transition de blocage a lieu, de telle sorte que le tassement n'est pratiquement plus possible par une simple augmentation de la surcharge.

Dans cette étude nous avons défini des variables de déformation et de contrainte adaptées au système. Pour les déformations, l'existence d'une longueur critique enlève au tenseur de déformation tout son intérêt comme observable macroscopique. Nous avons considéré à la place le déplacement cumulé rapporté au diamètre moyen des particules. En ce qui concerne le tenseur des contraintes, nous avons montré qu'en raison de la mobilisation du frottement aux parois, son déviateur ne représente pas la résistance réelle du système. Le descripteur macroscopique adapté

à une CMG est le rapport des contraintes normales.

Le phénomène principal qui pilote la réponse mécanique globale du système est la formation des SRL. Comme ces structures sont localisées dans une zone limitée du système, une statistique globale ne peut pas être représentative du comportement du système. En d'autres termes, ce sont les valeurs marginales des grandeurs locales qui interviennent dans la description des SRL (les plus grandes forces, les chaînes de forces les plus linéaires, l'enchaînement des contacts linéiques, etc.). Ces SRL se présentent généralement sous la forme de chaînes de forces qui sont constituées d'une succession de particules ayant un contact linéique ou surfacique. Elles ont un rôle fondamental dans la réponse mécanique et concentrent l'essentiel des efforts. Ces SRL peuvent traverser l'ensemble de la couche contrairement à des systèmes constitués de disques ou de sphères.

Dans le régime bloqué, nous avons montré que le tassement n'est pratiquement plus possible, les sollicitations horizontales peuvent donc jouer un rôle très important, tandis que les sollicitations verticales ne peuvent à elles seules entraîner le tassement.

Les conclusions en terme ferroviaire sont :

- les grains de ballast sont soumis à des efforts importants mais peu nombreux, la dureté du ballast est donc un élément à prendre en compte dans l'étude de la stabilité de la voie,
- l'aptitude des grains de ballast à transmettre les efforts par des chemins privilégiés et fortement inhomogènes directement à la sous-couche indique que les situations de poinçonnement peuvent être très nombreuses. La qualité de la sous-couche joue donc un rôle non négligeable dans le phénomène de tassement,
- l'inhomogénéité des réseaux d'efforts entre deux traverses consécutives, est un élément à étudier pour comprendre le phénomène d'apparition de traverses danseuses.

Chapitre 10

Résistance latérale de la voie

10.1 Introduction

La résistance latérale a été un sujet abordé au cours de la fin des années 60 avec la nécessité de faire circuler des trains commerciaux à des vitesses de plus en plus élevées et des trains de marchandises de plus en plus lourds. La stabilité de marche des véhicules a été largement étudiée malgré la complexité des problèmes de contact roue/rail. Il a donc été nécessaire d'étudier la résistance de la voie ballastée à des efforts verticaux et transversaux [110].

Les efforts ayant pour origine la dilatation thermique du rail, les trajectoires courbes, les mouvements parasites comme les lacets, ne doivent pas engendrer de déformations permanentes au delà d'un certain seuil afin d'assurer la sécurité des circulations. L'objectif de l'étude réalisée par Prud'homme était de dégager une règle permettant de définir pour un véhicule donné, les valeurs admissibles pour évaluer l'agressivité de ceux-ci sur la voie et de déterminer les facteurs influant la résistance de la voie.

Des études dans un cadre de coopération européen ont été menées afin d'analyser les résistances latérale et longitudinale de la voie [47]. La voie est conçue et entretenue afin de résister à des charges mécaniques et thermiques sans déformations excessives de sa structure. L'effort latéral exercé par les circulations est contenu par les efforts du ballast sur les traverses. L'évaluation de la résistance latérale du ballast est mesurée en poussant ou en tirant un panneau ou une traverse dans le sens latéral. Le comportement du ballast mesuré aux USA pour une traverse en bois varie de façon caractéristique en fonction du déplacement : on observe une résistance maximale ou *résistance de crête* après quelques millimètres de déplacement qui chute ensuite pour obtenir une résistance limite. Les surfaces inférieures, latérales de la traverse ainsi que la banquette influent sur le comportement latéral de la voie. Chacun de ces éléments contribue à environ un tiers de la résistance latérale du ballast de la voie non chargée [47]. D'autres éléments doivent être pris en compte dans le phénomène de résistance latérale, le type de traverse, le type de ballast, l'état de consolidation, la charge par essieux.

Les divers essais [48, 49, 123, 47, 44] réalisés montrent que :

- les traverses en béton conduisent à une résistance plus élevée que les traverses bois sur du ballast non compacté, la nature rugueuse de la surface inférieure de la traverse jouant un rôle prépondérant,
- le travelage, c'est-à-dire la distance d'écartement entre deux traverses consécutives, a un rôle non négligeable. La résistance de la voie augmente en fonction de l'écartement croissant entre les traverses,
- l'angularité du ballast modifie la résistance latérale et le passage d'une granulométrie de 22.4 à 63 mm augmente la niveau de résistance,
- la hauteur et la largeur de la banquette de ballast, joue aussi un rôle important. La résistance augmente linéairement avec la largeur de la banquette jusqu'à 0.5 m, et une résistance complémentaire peut être obtenue en augmentant la hauteur de ballast de la banquette de 10 à 20 cm,
- le bourrage améliore la géométrie de la voie mais réduit par contre la résistance latérale, jusqu'à 40 % de sa valeur initiale, la stabilisation permettant de compenser complètement cette perte.

L'utilisation de modèles numériques afin de reproduire et caractériser la résistance latérale a été faite à l'aide de modèles éléments finis et éléments discrets bidimensionnels. A l'aide du logiciel UDEC traitant, par la Distinct Element Method, l'interaction entre corps rigides avec enveloppe polygonale, le comportement observé dans les essais de résistance latérale a pu être observé [47] : la résistance passe par un pic, avant de diminuer et des déplacements de grains ont pu être analysés.

Dans ce chapitre nous allons présenter une étude de la résistance latérale avec le modèle tri-dimensionnel avec corps rigides polyédriques. Nous présenterons tout d'abord des essais expérimentaux réalisés à la Direction de l'Ingénierie de la SNCF, et ensuite nous exposerons les essais numériques et diverses analyses possibles à l'aide de notre modèle.

10.2 Description des expériences et construction des échantillons

10.2.1 Configuration d'essais expérimentaux de l'Ingénierie

Afin d'étudier la résistance latérale, des essais expérimentaux [107],[108] ont été menés pour caractériser la résistance latérale de divers types de traverses et déterminer des paramètres pour proposer une modélisation du comportement latéral. Il a donc été mis au point un mode opératoire donnant des résultats reproductibles pour quantifier la résistance latérale.



FIG. 10.1 – Photo du banc d'essais [107].

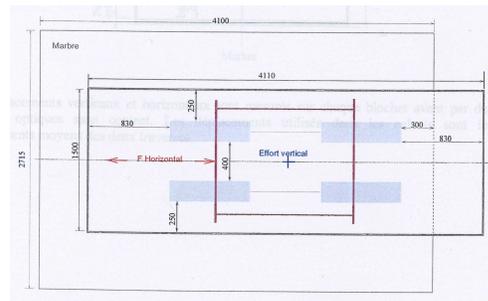


FIG. 10.2 – Schéma du banc d'essais [107].

Le ballast est contenu dans un coffrage, et repose sur un tapis en élastomère de raideur statique comprise entre 0.025 et 0.045 N/mm^2 . Une épaisseur de ballast de 260 mm est incorporée entre le tapis et la face inférieure des blochets (fig. 10.1). L'effort horizontal est appliqué par un deuxième vérin disposé horizontalement par l'intermédiaire d'une pièce articulée au niveau du rail côté vérin (fig. 10.1). Les expériences consistent à appliquer un effort incrémental, et à enregistrer le déplacement des traverses.

Le protocole d'essais en voie non stabilisée est le suivant :

- la rampe d'effort est de 0.1 kN.s^{-1} qui chute à 0 dès que le déplacement dépasse 5 mm ,
- on réalise trois cycles de charge, décharge,
- on enregistre pour chaque essai, le déplacement vertical et horizontal.

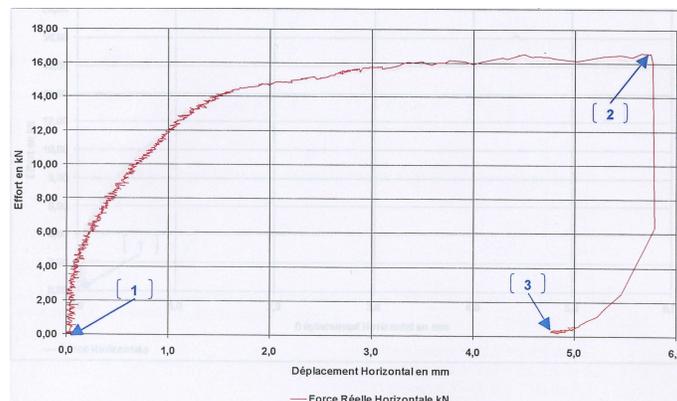


FIG. 10.3 – Exemple de courbe expérimentale force-déplacement [107].

Les courbes force-déplacement sont caractérisées par une première partie où les déplacements restent petits malgré les incréments de force appliqués, ensuite on observe un point d'inflexion, et un plateau traduisant un effort asymptotique (fig. 10.3).

Une identification a été proposée en utilisant une forme mathématique la plus proche de ces courbes. Elle se présente sous la forme suivante :

$$F = F_0 \frac{d}{d + u_0} \quad (10.1)$$

où F est l'effort appliqué au châssis en kN, d le déplacement horizontal du châssis en millimètre, F_0 l'effort asymptotique en kN et u_0 le déplacement unitaire en millimètre. Cette équation peut être mise sous la forme d'une équation linéaire $Y = A.X + B$ ou $Y = \frac{d}{F}$, $X = d$, $A = \frac{1}{F_0}$, $B = \frac{u_0}{F_0}$. A l'aide des enregistrements du déplacement et de la force, il est donc possible de tracer la courbe ($X = d, Y = \frac{d}{F}$) et d'identifier les paramètres A et B , en déduire F_0 et u_0 .

L'évaluation de F_0 et u_0 est réalisée sur les deux derniers chargements. En effet la tendance suivante a été observée, pour chaque chargement F_0 augmente constamment et on note une diminution de u_0 d'un rapport deux entre le premier chargement et les deux autres. Ceci peut s'expliquer par le fait que les traverses s'enfoncent de quelques millimètres pour chaque chargement.

10.2.2 Elaboration d'échantillons avec grains de ballast digitalisés

La création d'un échantillon représentatif d'une portion de voie constitue une difficulté non négligeable. En effet, il est important de respecter l'épaisseur d'environ 25 à 30 cm de ballast sous une traverse, de respecter les dimensions de la banquette, et d'obtenir un échantillon suffisamment compacté pour réaliser des essais de type résistance latérale.

Il est possible d'envisager de déposer un échantillon sous gravité, mais le respect des géométries est difficile à obtenir par ce biais et prend beaucoup de temps de calcul, en raison de l'aspect dynamique et du nombre de grains nécessaires.

Nous avons choisi la méthode suivante. Afin de pouvoir réutiliser une disposition géométrique, un empilement de grains, nous avons préparé un échantillon de 50000 grains par compression

uniaxiale, de façon à obtenir un volume de forme parallélépipédique de 2.5 m de long, 60 cm de haut et 55 cm de large. Cette préparation nous permet de récupérer une disposition des grains que l'on peut modifier à l'aide d'extrusions afin de placer une traverse, de créer une banquette. La mise en équilibre est ensuite plus rapide, puisque l'échantillon est déjà mis en place. La préparation initiale d'un échantillon prend environ 300 heures de calcul, mais elle peut être réutilisée pour construire plusieurs échantillons.

Nous avons pu construire trois échantillons avec cette même procédure se différenciant par la position géométrique des grains de ballast. La masse de chaque blochet est plus élevée pour tenir compte, par rapport aux essais du département IGEV de la SNCF, du poids du châssis.

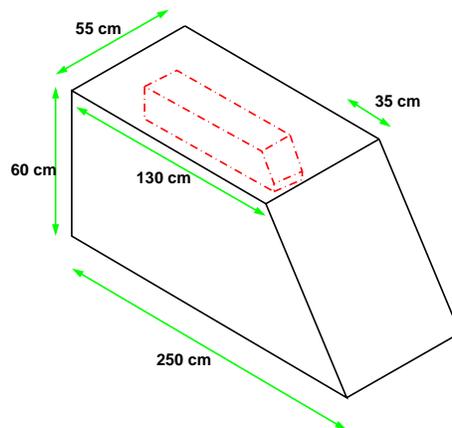


FIG. 10.4 – Schéma géométrique des échantillons.

Le premier échantillon comporte 28571 grains, le second 28419 et le troisième 28430 reposant dans une boîte rigide dont les dimensions sont présentées sur la figure 10.4. Le coefficient de frottement intergranulaire est de 0.6 et la masse volumique des grains est 2600 kg/m^3 . Les essais de type résistance latérale ont consisté en l'application d'une force incrémentale de 2 N par pas de temps, et on a enregistré le déplacement du blochet, les efforts exercés par les grains de ballast pour s'opposer à cette sollicitation, au cours de trois cycles charge, décharge. La décharge s'effectue dès que l'on dépasse 5 mm de déplacement. Cette rampe appliquée est bien plus élevée que celle appliquée dans l'expérience, mais le nombre de pas nécessaires pour effectuer la modélisation de la rampe expérimentale serait beaucoup trop important.

Nous avons travaillé avec la méthode de résolution diagonale, celle-ci étant beaucoup plus rapide et donnant, suite à quelques comparaisons, les mêmes résultats que la méthode de Newton Généralisée. Les essais sont réalisés avec un pas de temps de 2.10^{-4} s, et la détection est toujours moins importante en temps que le solveur. Sur un PC Pentium 4 cadencé à 2.66 GHz, 100000 détections prennent environ 1s de calcul et l'algorithme de détection a une efficacité supérieure à 95% pour ce type de calcul.

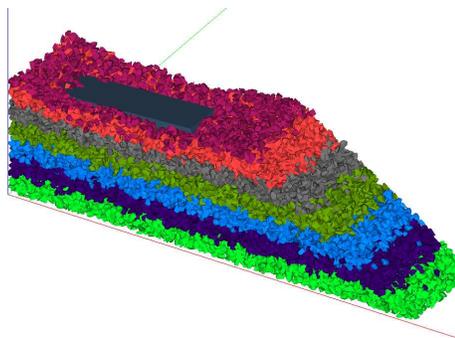


FIG. 10.5 – Exemple d'échantillon déposé.

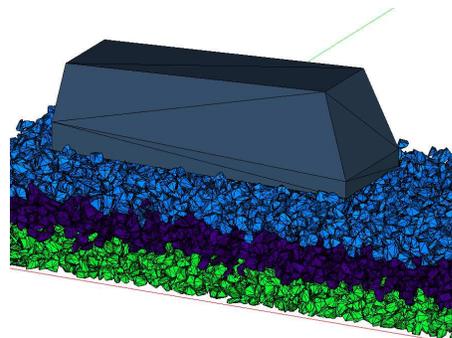


FIG. 10.6 – Blochet reposant sur les grains.

Les figures 10.5 et 10.6 montrent l'allure d'un échantillon déposé et le blochet reposant sur les grains de ballast.

10.3 Mesure de la résistance

L'application d'un effort sur le blochet entraîne une réaction du ballast afin de s'opposer à son déplacement. Il est possible, à l'aide de la simulation numérique d'enregistrer le déplacement du blochet comme dans l'expérience mais aussi l'effort exercé par les grains de ballast sur le blochet. Chaque essai prend environ trois jours de calcul.

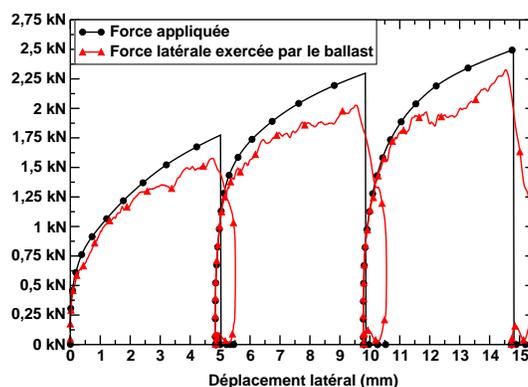


FIG. 10.7 – Courbe force déplacement au cours d'un essai.

Sur la figure 10.7 nous avons tracé l'évolution de la force appliquée et de la force exercée par le ballast en fonction du déplacement latéral du blochet. Pour le premier chargement, sous l'effet de l'application de la force, la résistance exercée par le ballast est comparable à la force appliquée. Pour les deux chargements suivants, il apparaît clairement que la résistance offerte par les grains de ballast augmente, mais la différence entre la force appliquée et la force exercée par le ballast devient de plus en plus importante. Nous retrouvons le comportement global observé dans l'expérience, pour lesquelles des cycles d'hystérésis ont été observés.

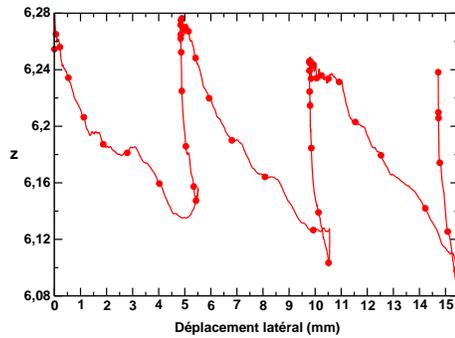


FIG. 10.8 – Evolution du nombre de coordination en fonction du déplacement.

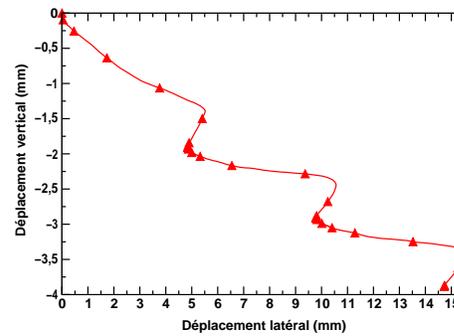


FIG. 10.9 – Tracé du déplacement vertical en fonction du déplacement latéral.

Le nombre de coordination est un indicateur du comportement de la micro-structure. Au début de l'application de l'effort, on observe une diminution rapide du nombre de coordination entre 0 et 1 mm, puis une évolution quasi-linéaire tout au long du processus (fig. 10.8). Cette diminution brutale traduit une réorganisation des grains en privilégiant le réseau fort des contacts, et ensuite la chute linéaire du nombre de coordination, indique une perte progressive de la résistance du milieu. A la fin du premier chargement, lorsque l'effort appliqué est nul, le nombre de coordination remonte presque instantanément à 6.28, valeur en début de chargement. On observe le même phénomène pour les cycles suivants, une diminution du nombre de coordination, puis une remontée brutale mais qui n'atteint pas la valeur initiale, celle-ci restant à 6.24 pour le second chargement. On peut traduire cela comme une perte irréversible de résistance. Il faut noter que la diminution dans la partie quasi-linéaire a une pente de moins en moins importante.

Au cours des chargements, à partir d'une situation non stabilisée, le blochet s'enfonce de quelques millimètres. Sur la figure 10.9 nous avons représenté le déplacement vertical en fonction du déplacement latéral, et l'on observe un comportement particulier. Sous l'effet du premier chargement le blochet s'enfonce d'un millimètre, la chute à zéro de l'effort appliqué entraîne un léger tassement, et ensuite le même phénomène s'observe pour le second chargement mais l'enfoncement du blochet est moins important. La forme particulière du blochet, en biseau pour la partie frontale implique que la force exercée par le ballast sur le blochet dans cette partie est orientée vers le bas et favorise l'enfoncement du blochet.

L'identification des efforts asymptotiques et déplacements unitaires pour les chargements en traçant la fonction ($Y = \frac{d}{F}$, $X = d$) et par régression linéaire nous donne les résultats suivants en moyennant sur les 3 échantillons :

	Chargement 1	Chargement 2	Chargement 3
F0	2.15 kN	2.48 kN	2.769 kN
u0	0.805 mm	0.476 mm	0.494 mm

Le niveau de l'effort asymptotique augmente entre chaque essai, et on observe une grande différence entre le u_0 du premier chargement et les suivants, celui-ci diminuant. On retrouve donc les constatations faites expérimentalement.

Dans l'expérience, les efforts asymptotiques et les déplacements unitaires sont calculés pour les deux derniers chargements et sur un système composé de deux traverses biblocs, constituées de

deux blochets reliés par une entretoise. L'expérience numérique est composée d'un seul blochet, et nous avons obtenus des efforts et déplacements moins importants : $u_0 = 0.485$ mm et $F_0 = 2.63$ kN.

10.4 Champ de vitesses

Sur ce type d'essais, il est possible d'identifier les zones sollicitées en représentant les zones s'étant déplacées. Il apparaît clairement que le cisaillement provoqué par le déplacement du blochet entraîne une déformation du massif plus complexe qu'un simple mouvement de grains se produisant sur une surface parallèle à la face inférieure du blochet.

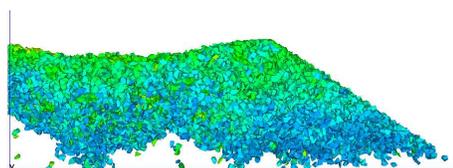


FIG. 10.10 – Champ de vitesses dans l'échantillon en fin de premier chargement.

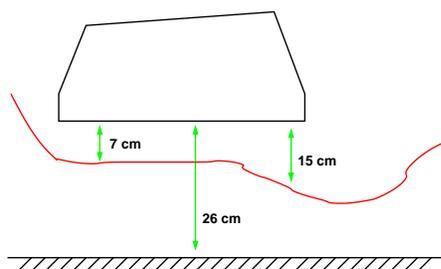


FIG. 10.11 – Schéma de la zone la plus sollicitée (au dessus de la ligne rouge).

Sous l'effet du premier chargement, les grains tout autour du blochet subissent de petits déplacements. On peut remarquer une géométrie particulière sous le blochet (fig. 10.10). En effet une couche d'environ 7 cm d'épaisseur subit des déplacements sous le blochet. Ce comportement peut s'expliquer par la force exercée par le poids du blochet et son déplacement qui entraîne les grains situés sous le blochet. Devant le blochet on observe que des grains situés à une distance, environ 15 cm, subissent des déplacements de même amplitude. La banquette joue donc un rôle particulier.



FIG. 10.12 – Vitesses dans l'échantillon en fin de second chargement.

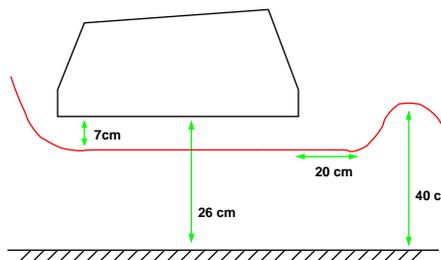


FIG. 10.13 – Schéma de la zone la plus sollicitée (au dessus de la ligne rouge).

Au cours du second chargement, nous avons représenté la variation des vitesses moyennes par rapport au premier chargement sur la figure 10.12. On observe toujours une couche sous le

blochet subissant des déplacements, mais au niveau de la banquette on met en évidence une zone de vitesses très faibles, dont la forme s'oppose à celle du premier chargement. Il est possible que le massif ait subi une consolidation en privilégiant un réseau de contacts, susceptible de contenir des efforts latéraux. On peut relier ce phénomène à l'augmentation de l'effort incrémental observé pour obtenir un déplacement de 5 mm.

10.5 Répartition des efforts dans le massif

La répartition des efforts dans un massif de ballast représentant une portion de voie est une donnée intéressante à connaître, nous allons présenter les répartitions observées lors des chargements latéraux et lors de l'application d'une surcharge.

10.5.1 Localisation des efforts sans surcharge verticale

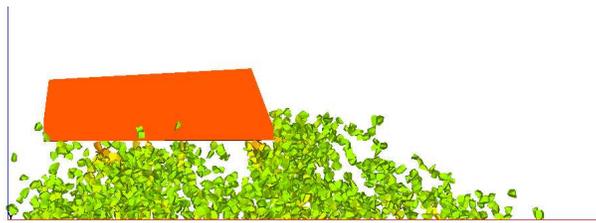


FIG. 10.14 – Grains les plus chargés après le premier chargement.

A la suite du premier chargement les grains les plus chargés sont majoritairement situés sous le blochet (fig. 10.14) et au niveau de la banquette. Sur la partie droite du blochet on peut remarquer que le nombre de grains les plus chargés est plus important.



FIG. 10.15 – Grains les plus chargés après le second chargement.

Lors du second chargement, on observe une augmentation du nombre de grains les plus chargés au niveau de la banquette principalement et aussi sous le blochet (fig. 10.15). Cette observation peut être corrélée à l'enfoncement du blochet qui peut avoir pour effet d'exercer un effort sur un plus grand nombre de grains.



FIG. 10.16 – Grains les plus chargés à la fin de l'expérience.

Cette tendance se confirme lors de l'application du troisième chargement, l'augmentation du nombre de grains les plus chargés étant très marquée à la fois sous le blochet et au niveau de la banquette (fig.10.16).

10.5.2 Localisation des efforts avec surcharge verticale

L'expérience a consisté en l'application d'une surcharge au centre de gravité du blochet de 4.5 tonnes et d'enregistrer les points de contact avec le sol. Cet effort correspond au passage d'un essieu.

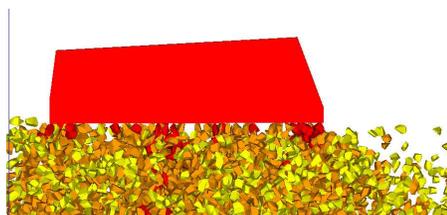


FIG. 10.17 – Efforts supérieurs à 5% effort maximum (vue côté).

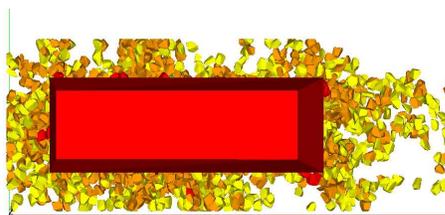


FIG. 10.18 – Efforts supérieurs à 5% effort maximum (vue dessus).

Les grains soumis à une force supérieure à 5% de la force maximale sont principalement situés sous le blochet. La zone du massif la plus chargée est donc sous le blochet, et la transmission des efforts au sol est verticale (fig. 10.17, 10.18).

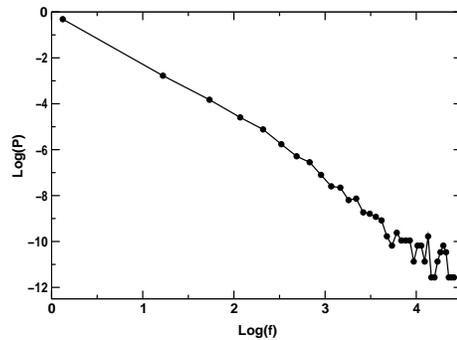


FIG. 10.19 – Densité de probabilité des forces normales.

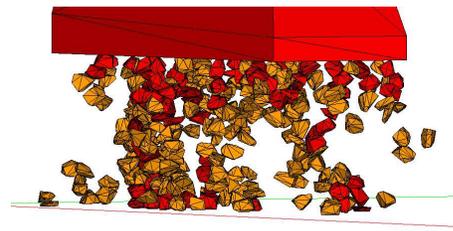


FIG. 10.20 – Exemple de localisation des chaînes de forces (SRL).

La densité des forces normales, normalisées par la force normale moyenne, représentée sur le graphique 10.19 en échelle log-log, diverge lorsque f tends vers 0. Les forces inférieures à la force moyenne sont très nombreuses tandis que les forces maximales peuvent dépasser de 100 fois la force moyenne. Cette très forte inhomogénéité, remarquée dans l'étude du chapitre précédent, est retrouvée dans une configuration géométrique ferroviaire. Il est bien sûr important de noter que si les forces fortes sont si fortes dans ce cas, c'est que l'ensemble de l'échantillon n'est pas soumis à la surcharge appliquée, mais la visualisation de la disposition des grains les plus chargés montre les directions privilégiées de chaînes de forces ainsi que la localisation de celles-ci. Ces chaînes de forces peuvent être assimilées à des structures rigides localisées mentionnées dans le chapitre précédent.

10.5.3 Répartition de pressions au sol

Sous l'effet de l'application d'une surcharge, le ballast transmet les efforts à la sous-couche, et les niveaux d'efforts à l'interface sont des quantités à mesurer afin de déterminer les paramètres des sous-couches optimum. Il est possible d'enregistrer les réactions ponctuelles s'exerçant sur le socle rigide. Ensuite, en découpant la surface en maille carrée de côté 2.5 cm, nous avons pu évaluer la pression au niveau du socle, sous l'effet du poids des grains et d'une surcharge.

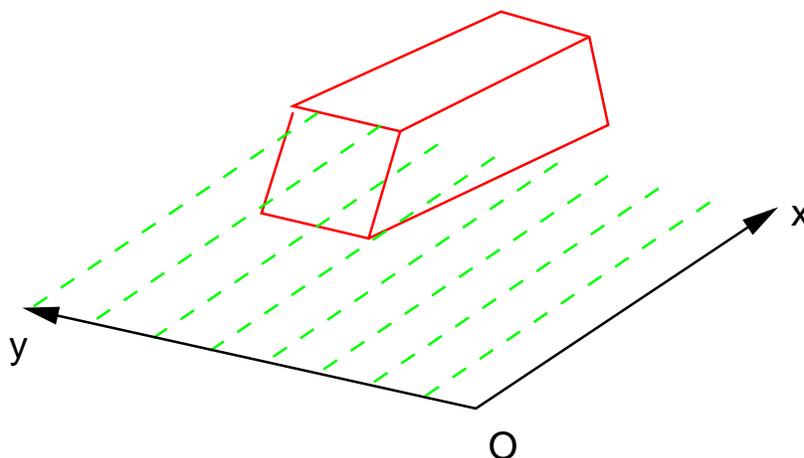


FIG. 10.21 – Schéma de la représentation.

On représente alors pour une bande donnée, de largeur 5 cm sur l'axe Oy , l'évolution, selon l'axe Ox , de la pression ainsi calculée (fig 10.21).

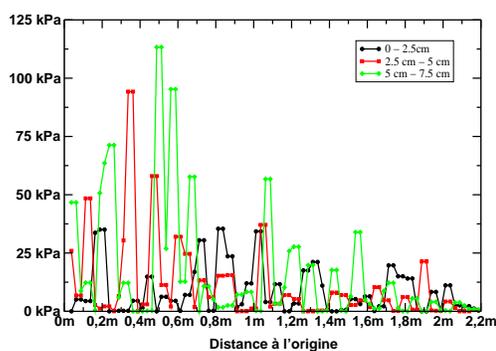


FIG. 10.22 – Niveau de pression.

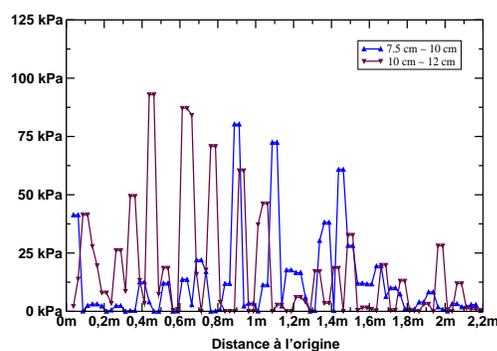


FIG. 10.23 – Niveau de pression.

Sur les bords du blochet, la pression augmente au fur et à mesure que l'on se rapproche du blochet, pour atteindre des valeurs de l'ordre de 100 kPa. Cette évaluation de la pression montre que la transmission de l'effort se fait de façon inhomogène et la localisation des efforts se fait sous le blochet.

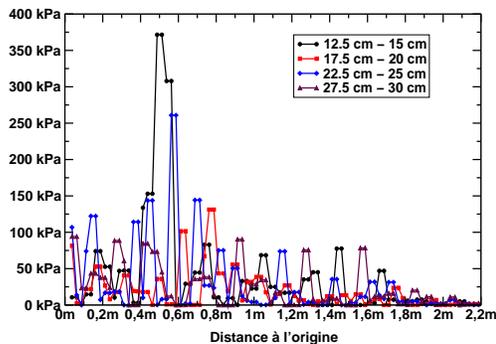


FIG. 10.24 – Niveau de pression.

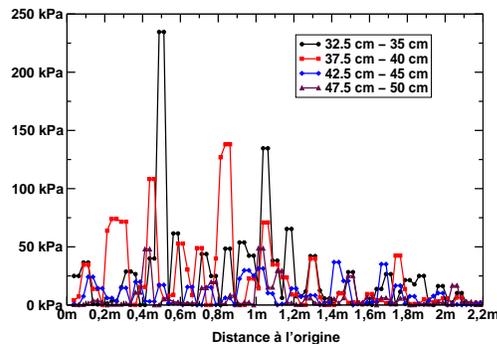


FIG. 10.25 – Niveau de pression.

Sous le blochet, les pressions déterminées sont plus importantes, de l'ordre de 250 à 350 kPa, principalement sous le centre du blochet

10.5.4 Influence d'une surcharge sur la résistance latérale de la voie

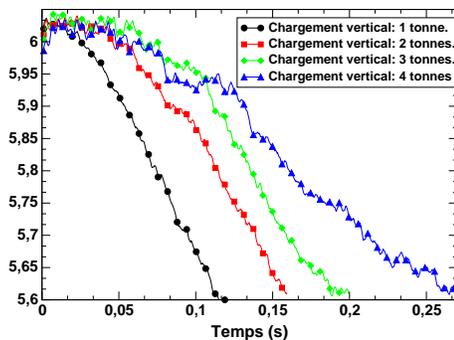


FIG. 10.26 – Evolution du nombre de coordination pour différentes surcharges.

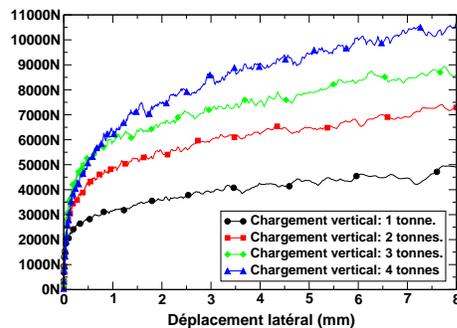


FIG. 10.27 – Niveau d'effort exercés par le ballast sur le blochet pour différentes surcharges.

Les essais de résistance latérale avec une surcharge montrent que le niveau de résistance offert par le ballast est beaucoup plus important [130]. Cela se traduit par une évolution du nombre de coordination plus stable en début de chargement, on observe ensuite un plateau, dont la longueur augmente en fonction de la charge verticale appliquée. La surcharge entraîne donc une consolidation du milieu ce qui augmente la résistance offerte par le ballast.

10.6 Conclusion

Les études sur la résistance latérale de la voie à l'aide d'une méthode par éléments discrets sont peu courantes. Dans ce chapitre nous avons présenté des essais en faisant référence à des campagnes expérimentales existantes, menées à la Direction de l'Ingénierie de la SNCF.

Ces essais nécessitent de construire des échantillons de taille importante, environ 30000 grains de ballast digitalisés, respectant une géométrie particulière avec une épaisseur de ballast de 26 cm. Cette difficulté a été en partie résolue en préparant un massif de ballast, dans lequel il a été possible, par extrusion, de créer trois échantillons différents afin d'introduire une variabilité géométrique. Les essais de résistance latérale sont ensuite menés en imposant trois cycles de charge, décharge.

Pour les trois échantillons nous avons retrouvé le comportement observé dans les expériences. On observe que le massif résiste à l'effort appliqué au début du chargement. Ensuite la courbe de force déplacement passe pour un plateau. Les ordres de grandeurs des efforts mesurés sont en accord avec les résultats expérimentaux.

Le comportement du massif est particulier, en effet on observe que sous le blochet une épaisseur d'environ 7 cm subit des déplacements, et que la banquette est sollicitée au premier cycle à une profondeur plus importante. Le second cycle de chargement implique un changement, en effet on observe une zone où les grains se déplacent peu au centre de la banquette, elle s'est consolidée à la suite du premier chargement. Les mécanismes guidant le comportement de la banquette sont complexes et une étude plus approfondie de son comportement permettrait de mieux appréhender le phénomène de résistance latérale.

Sous l'action d'une surcharge, on remarque que la transmission des efforts se fait de manière inhomogène, on retrouve les structures rigides localisées mise en évidence dans l'étude d'une couche mince granulaire. Les efforts les plus importants, entre 300 et 350 kPa, sont situés sous le blochet, et la transmission des efforts est presque verticale.

On peut dégager les conclusions suivantes en terme ferroviaire :

- il existe un nouveau modèle permettant de traiter le phénomène de résistance latérale, et de reproduire des comportements identifiés expérimentalement,
- l'ensemble de la banquette est soumise à des mouvements, et sa consolidation augmente le niveau d'effort asymptotique. Le ballast peut être mobilisé en profondeur,
- les niveaux d'efforts sur chaque face de la traverses peuvent être évalués à l'aide de cette modélisation.

Conclusion de la troisième partie

Dans cette troisième partie nous avons présenté un ensemble de résultats portant à la fois sur des exemples de validation et des investigations numériques afin de mieux appréhender le comportement du ballast.

Le modèle bidimensionnel a permis de comparer le tassement mesuré expérimentalement et celui de la simulation numérique, avec des échantillons ayant les mêmes propriétés et dispositions géométrique. Il a été possible d'effectuer des simulations de plusieurs milliers de cycles, et de mettre en évidence l'influence de la sous-couche sur le tassement, et l'influence de la vitesse de sollicitation qui se traduit par des tassements plus rapides. A l'heure actuelle il est possible en 24 heures d'effectuer 1000 cycles de chargement à une fréquence de 20 Hz sur un échantillon composé d'environ un millier de grains reposant sur une sous-couche déformable discrétisée en polygones. Ces performances sont permises par l'emploi d'une méthode Contact Dynamics qui d'une part est numériquement stable et d'autre part autorise un pas de temps suffisamment grand. La fréquence de sollicitation influence l'évolution du tassement, mais la fréquence de résonance de notre système dépend à la fois de la masse de l'oscillateur modélisant la sous-couche mais aussi de la masse des grains situés entre le blochet et celle-ci. L'enrichissement de ce modèle par l'emploi d'une sous-couche discrétisée par éléments finis est une perspective très intéressante pour prendre en compte des paramètres de sols de plus en plus pertinents.

Le modèle tridimensionnel a été confronté à des résultats expérimentaux, et nous avons obtenu, sur une structure maçonnée, un profil similaire d'ouvertures dans un mur constitué de briques. Cet essai a permis de montrer la pertinence des choix du modèle mécanique et la performance de la détection. Sur ce type d'exemple, comme celui de l'arche de Istres l'algorithme est performant, et beaucoup moins coûteux que la résolution du problème d'interaction. L'étude de la stabilité d'un dôme sous pesanteur en faisant varier son épaisseur permet de retrouver des comportements identifiés et confirme les performances de la détection. La caractérisation des grains de ballast digitalisés à l'aide de la simulation en tambour tournant a montré la forte dépendance de l'angle de repos par rapport à la géométrie des grains, le frottement jouant un rôle peu significatif. L'angle de repos évalué est d'environ 35 degrés. La performance de la détection et les temps de calculs permettent des simulations avec plusieurs milliers de grains. La résolution diagonale du problème de contact-frottement est une alternative très intéressante car elle est plus rapide.

L'épaisseur du ballast sous un blochet est généralement inférieure à 10 diamètres de grains, ce qui constitue une particularité par rapport à des systèmes granulaires jusqu'alors étudiés. La configuration géométrique ne permet pas de définir un VER, nous évoquerons plus spécifiquement une *Couche Mince Granulaire* (CMG). Nous avons donc réalisé une étude bidimensionnelle et tridimensionnelle du comportement d'une CMG. L'existence d'une longueur critique enlève au tenseur de déformation tout son intérêt comme observable macroscopique. En raison de la mobilisation du frottement aux parois, le déviateur des contraintes ne représente pas la résistance réelle du système, c'est le rapport des contraintes normales, la résistance, qui permet de l'évaluer. L'évolution de la résistance au cours d'une compression uniaxiale ou d'une relaxation libre est guidée par la formation de *structures rigides localisées* (SRL), qui sont formées de chaînes de particules

ayant principalement des contacts linéiques et concentrant l'ensemble des forces que l'on qualifiera de *fortes forces*. Lorsqu'on se place dans un régime bloqué, le tassement n'est pratiquement plus possible par l'application d'une simple surcharge, les efforts horizontaux peuvent donc avoir un rôle important.

La résistance latérale de la voie non chargée est une problématique ferroviaire importante car elle met en jeu la sécurité des circulations. Des expériences menées à la Direction de l'Ingénierie ont été prises comme référence pour effectuer des simulations avec le modèle tridimensionnel. En considérant un blochet de type VAX U41, les échantillons contiennent environ 30000 grains, et les essais de résistance latérale prennent environ trois jours de calcul. Nous avons pu retrouver les comportements expérimentaux, et les efforts mesurés sont parfaitement en corrélation avec ceux de l'expérience. Il a été mis en évidence le rôle particulier de la banquette et des déplacements des grains sous le blochet. La résistance latérale apparaît comme un phénomène complexe, difficile à caractériser selon les zones sollicitées.

L'ensemble des simulations montre que les méthodes par éléments discrets sont un moyen d'investigation très intéressant, et l'approche proposée permet d'aborder les phénomènes de chargement cycliques ou de traiter des échantillons réels dans le cas tridimensionnel avec des temps de calculs longs mais pas prohibitif. La modélisation tridimensionnelle permet de traiter des grains ayant une géométrie variée ce qui entraîne un domaine d'application plus vaste.

Conclusion et perspectives

Les matériaux granulaires sont formés de particules dont les interactions mécaniques régissent le comportement à l'échelle macroscopique. Les sollicitations auxquelles ils sont soumis sont très diverses, thermique, mécanique. Les études menées à l'aide d'expériences et de simulations ont eu pour objectif d'identifier un comportement sur un volume élémentaire représentatif, afin de proposer des modèles pour des échelles plus grandes, proches du problème réel. Mais le comportement d'un matériau granulaire est difficile à identifier et à généraliser, celui-ci dépendant fortement des contraintes extérieures auxquelles il est soumis. Le ballast, roche concassée employée pour assurer la stabilité des voies ferroviaires est soumis à des sollicitations cycliques, dans des conditions particulières. Il est usuellement modélisé par une approche continue afin de traiter des problèmes réels. Mais cette approche nécessite l'identification de lois de comportement non-linéaires qui sont toujours à l'heure actuelle difficiles à obtenir et généraliser.

Nous proposons dans ce mémoire un modèle par éléments discrets basé sur l'approche Non-Smooth Contact Dynamics développée par Moreau et Jean [88, 92, 64, 66]. Les méthodes par éléments discrets ont été utilisées pour étudier le comportement du ballast avec l'approche Molecular Dynamics [103, 73, 82]. Cette approche traite les interactions entre corps rigides par des approximations régularisantes et nécessite l'emploi d'un pas de temps petit afin de garantir la stabilité du schéma numérique explicite. Le modèle que nous proposons permet, par une résolution implicite, de tenir compte de l'unilatéralité et du frottement sans approximation, et d'utiliser des pas de temps plus grands, élément fondamental pour des calculs cycliques. Nous avons choisi de représenter les grains de ballast par des grains modèles, ayant une enveloppe polygonale ou polyédrique convexe.

Cette modélisation a nécessité dans le cas bidimensionnel l'utilisation d'un algorithme de détection géométrique de points de contact entre polygones convexes proposé par Moreau, basé sur le recouvrement des projections des sommets des polygones selon leurs normales. Cet algorithme permet d'utiliser plusieurs milliers de particules sans pénaliser le temps de calcul, la partie la plus coûteuse étant la résolution du problème mécanique d'interaction. Il est nécessaire pour étudier un massif granulaire sous chargements cycliques d'imposer un nombre minimal d'itérations de Gauss-Seidel élevé et d'utiliser un pas de temps de l'ordre de 2.10^{-4} s afin de se prémunir de toutes accumulations d'interpénétrations pouvant remettre en cause la mesure du tassement.

Le modèle tridimensionnel présente de nombreuses difficultés liées à la résolution des équations de la dynamique, du problème d'interaction et à la détermination de points de contact entre polyèdres convexes. Nous avons choisi de paramétrer le mouvements des solides par trois translations et de définir la rotation grâce au mouvement du repère principal d'inertie. Cette technique permet de résoudre l'équation des moments dans le repère principal d'inertie et donc de bénéficier d'une matrice d'inertie constante et diagonale. Il est donc nécessaire d'en tenir compte dans le calcul des opérateurs de passage entre le repère local et le repère global. La résolution du problème de contact frottement est un problème non-linéaire en raison du couplage entre la partie normale et les parties tangentes, nous utilisons soit la méthode de Newton Généralisée soit une simplification en considérant un problème découplé en remplaçant l'opérateur de Delassus par un opérateur

diagonal. La détection d'intersections entre deux polyèdres est un problème largement étudié à l'heure actuelle essentiellement dans le domaine de la réalité virtuelle. Les algorithmes existants sont adaptés à des solides très facetés et en petit nombre. Ils ne permettent pas en général de déterminer, sans développements supplémentaires, plusieurs points de contact. Nous proposons dans ce travail un algorithme basé sur la méthode du shadow overlap développé par Moreau dans le cas bidimensionnel, et qui permet de trouver une normale au contact parmi l'ensemble des normales des polyèdres examinés, et de déterminer des points de contact par un calcul d'intersection de primitives. Des optimisations sont proposées, permettant de diminuer le nombre d'opérations à effectuer. Cet algorithme est simple à implémenter et n'est pas itératif.

A l'aide du modèle bidimensionnel nous avons pu montrer l'aptitude de notre approche à reproduire le comportement expérimental d'un massif de prismes pentagonaux soumis à un chargement cyclique : les tassements évalués lors de l'expérience et de la simulation ont une évolution similaire, les chaînes de forces ayant un rôle primordial. 1000 cycles de chargement à 0.25 Hz ont nécessité trois semaines de calcul. Les investigations ont montré que la sous-couche jouait un rôle important dans le tassement, plus elle est souple plus le tassement est important, et l'on observe pour un nombre de cycle important, environ 35000, que sur ce système modèle l'évolution du tassement peut se découper en deux phases : une de mise en place et une évolution régulière. A l'heure actuelle pour un millier de grains il est possible d'effectuer 1000 cycles de chargements à une fréquence de 20 Hz en 24 heures. L'influence de la fréquence de sollicitation sur un massif granulaire avec une configuration ferroviaire nécessite d'analyser la fréquence de résonance du système en tenant compte de la masse des grains situés entre le blochet et la sous-couche, néanmoins nous avons observés que l'augmentation de la fréquence entraîne une augmentation des incréments de tassement. Il a été mis en évidence l'importance du rapport entre la charge oscillante représentant le passage d'un bogie, et la charge statique ainsi que l'énergie fournie au système. Ce modèle peut être enrichi à l'aide d'une sous-couche discrétisée en éléments finis et les premiers calculs, plus longs en temps, permettent d'envisager des modèles de sous-couche beaucoup plus riches en terme de comportement.

La validation du modèle tridimensionnel est une étape difficile. Les comparaisons entre des expériences effectuées sur des maçonneries donnent de bons résultats, il a été possible de retrouver les déformations d'un mur de briques ou de retrouver les paramètres de stabilité d'un dôme sous pesanteur. Ces investigations ont mis en évidence l'efficacité de l'algorithme de détection, en effet dans 90% des situations on peut déterminer une direction séparatrice parmi les ensembles des normales des polyèdres examinés et le temps d'une détection est bien moins important qu'une itération. La caractérisation des grains de ballast digitalisés à l'aide de simulations en tambour tournant a permis de déterminer un angle au repos d'environ 35 degrés et la performance de la détection permet de conclure que la résolution prend environ 90% du temps de calcul. Néanmoins il est possible d'utiliser plusieurs milliers de grains de ballast, et d'effectuer plusieurs milliers de pas de temps en quelques jours.

Le ballast étant utilisé dans des conditions particulières, étant situé entre les blochets et la sous-couche, l'étude classique à l'aide d'un Volume Élémentaire Représentatif n'est pas possible en raison de la taille du système d'une dizaine de diamètres de grain. Nous avons donc étudié à l'aide des modèles bidimensionnels et tridimensionnels les descripteurs classiques pour com-

prendre la réponse mécanique d'une Couche Mince Granulaire. Nous avons mis en évidence que la résistance à l'écrasement du milieu ne peut être représenté par le déviateur des contraintes en présence de frottement, mais par le rapport des contraintes normales. La dynamique de son évolution est guidée par la formation et la destruction de Structures Rigides Localisées. Ces structures sont peu nombreuses mais concentrent les forces que nous qualifierons de *fortes forces*, et sont principalement constituées de grains ayant des contacts linéiques ou surfaciques. La configuration particulière du ballast entraîne que le tassement n'est pratiquement plus possible uniquement par une sollicitation verticale, à partir d'une situation stable.

La résistance latérale de la voie ballastée est une problématique ferroviaire importante, en effet c'est un élément à quantifier et analyser pour déterminer les paramètres de sécurité optimum des circulations. Nous avons donc effectué des simulations respectant des géométries d'essais réalisés à la Direction de l'Ingénierie de la SNCF afin de vérifier que ce modèle reproduise les comportements observés. La principale difficulté technique réside dans la construction des échantillons respectant les 26 cm de ballast sous le blochet. Nous avons considéré un seul blochet ce qui nécessite environ 30000 grains de ballast. Les différents essais sur trois échantillons différents ont permis d'observer les mêmes comportements, et les niveaux d'efforts évalués étant en adéquation avec ceux identifiés expérimentalement. Ces essais ont mis en évidence des mouvements de grains sous le blochet et dans la banquette qui joue un rôle particulier en se consolidant sous l'effet des cycles de chargement. Ce type de modèle apparaît comme une alternative très intéressante pour aborder cette problématique, les simulations ne durant que quelques jours.

Les perspectives de ce travail sont d'ordre numérique et expérimental :

- les simulations numériques présentées dans ce travail nécessitent des temps de calculs longs, la méthode de résolution étant itérative. Il serait donc intéressant d'utiliser un nouveau solveur de contact développé par M. Renouf et P. Alart [117] ainsi que la parallélisation sur les problématiques présentées. L'algorithme de détection de contact permet de traiter des polyèdres convexes peu facetisés, et il nous paraîtrait important d'effectuer des comparaisons avec d'autres algorithmes existants plus classiquement utilisés dans des situations où le nombre de solides est peu important. Les investigations menées dans le cadre de l'étude d'une couche mince granulaire doivent être généralisées dans le cas d'un chargement dynamique avec les deux modèles présentés, et les quantités représentatives de la résistance du ballast doivent être analysées pour des simulations de chargements cycliques.
- les expériences dédiées à la validation d'un modèle éléments discrets sont peu nombreuses à l'heure actuelle, il serait intéressant de caractériser le ballast par diverses expériences, angle de talus, boîte de Casagrande, ou des essais de résistance latérale afin de pouvoir comparer des grandeurs macroscopiques et microscopiques avec les essais numériques.

D'un point de vue ferroviaire, nous disposons d'un outil d'investigation permettant d'aborder les problèmes de résistance latérale, il apparaît intéressant de déterminer l'effort s'exerçant sur chaque face du blochet afin de les quantifier et d'étudier le rôle du coefficient de frottement entre le blochet et les grains. Le bourrage est une autre thématique que l'on peut aborder, en effet il serait intéressant de déterminer les descripteurs micro-mécaniques représentatifs de cette opération complexe, et par exemple d'étudier la dynamique lors de l'enfoncement d'un bourroir le poinçonnement d'un matériau granulaire. Enfin une thématique actuelle serait d'étudier les mécanismes

liés à l'envol de grains de ballast en vue de l'augmentation des vitesses de circulation.

Bibliographie

- [1] Mesure de l'angle de talus naturel du ballast. Rapport technique, SNCF, 2000.
- [2] M. ABADIE : *Simulation dynamique de mécanismes. Prise en compte du contact frottant*. Thèse de doctorat, Université Montpellier II, 1998.
- [3] M. ABADIE et C. BOHATIER : Dynamic modelling of mechanisms : qualifying of three integration scheme. *IDMME'96 Integrated Design and Manufacturing in Mechanical Engineering*, 9:255–264, 1997.
- [4] M. ABDELKRIM : *Analyse par le calcul des structures du comportement cyclique à long terme des infrastructures de transport*. Thèse de doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 2003.
- [5] V. ACARY : *Contribution à la modélisation mécanique et numérique des édifices maçonnés*. Thèse de doctorat, Université Aix-Marseille II, 2001.
- [6] AFNOR. *Granulats pour ballast de voies ferrées*, Août 2003.
- [7] A. AGUILERA : *Orthogonal Polyedra : Study and Application*. Thèse de doctorat, Université Polytechnique de Catalogne, Avril 1998.
- [8] P. ALART et A. CURNIER : A generalized newton method for contact problems with friction. *Journal de Mécanique Théorique et Appliquée*, supplement(1 to 7):67–82, 1988.
- [9] J. ALIAS : *La voie ferrée*. Eyrolles, 1984.
- [10] M.P. ALLEN et D.J. TILDESLEY : *Computer simulation of liquids*. Oxford Science Publications, 1987.
- [11] F. ALONSO-MARROQUIN, R. GARCIA-ROJO et H.J. HERRMANN : Micro-mechanical investigation of the granular ratcheting. *In Proc. Cyclic Behaviour of Soils and Liquefaction Phenomena*, April 2004.
- [12] F. ALONSO-MARROQUIN et H.J. HERRMANN : Ratcheting of granular materials. *Physical review letter*, 92, 2004.
- [13] A.V. METRIKINE A.S.J. SUIKER et R. De BORST : Dynamic behaviour of a layer of discrete particles, part 1 : analysis of body waves and eigenmodes. *Journal of Sound and Vibration*, 240(1):1–18, 2001.
- [14] A.V. METRIKINE A.S.J. SUIKER et R. De BORST : Dynamic behaviour of a layer of discrete particles, part 2 : response to an uniformly moving, harmonically vibrating load. *Journal of Sound and Vibration*, 240(1):19–39, 2001.
- [15] E. AZANZA : *Écoulements granulaires bidimensionnels sur un plan incliné*. Thèse de doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1998.

- [16] E. AZÉMA : Caractérisation expérimentale et numérique du ballast. Mémoire de D.E.A., Université Montpellier II, 2004.
- [17] A. BALDASSARRI, S. KRISHNAMURTHY, V. LORETO et S. ROUX : Coarsening and slow dynamics in granular compaction. *Physical review letters*, 87(22), 2003.
- [18] J.P. BARDET : Introduction to computational granular mechanics. *Actes du colloque CISM*, pages 22–26, 1997.
- [19] V. BODIN : *Comportement du ballast des voies ferrées soumises à un chargement vertical et latéral*. Thèse de doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 2001.
- [20] C. BOHATIER : A numerical method for mechanism equations automatic building. *Eur. J. Mech., A Solids*, 9:359–371, 1990.
- [21] B. BROGLIATO : *Nonsmooth Mechanics*. Springer, second edition, 1999.
- [22] B. BROGLIATO, A.A. ten DAM, L. PAOLI, F. GÉNOT et M. ABADIE : Numerical simulation of finite dimensional multibody nonsmooth mechanicals systems. *Applied Mechanics Reviews*, 55(2):107–150, 2002.
- [23] F. CALVETTI, G. COMBE et J. LANIER : Experimental micromechanical analysis of a 2d granular material : relation between structure evolution and loading path. *Mechanics of cohesive and frictional materials*, 2:121–163, 1997.
- [24] B. CAMBOU et M. JEAN : *Micromécanique des matériaux granulaires*. Hermes Sciences, 2001.
- [25] B. CHETOUANE : *Approche combinée éléments distincts-éléments finis pour la modélisation du comportement mécanique des ouvrages archéologiques en pierres massives*. Thèse de doctorat, Université des Sciences et Techniques du Languedoc, Montpellier, En cours.
- [26] C. CHOLET : *Chocs de solides rigides*. Thèse de doctorat, Université Paris VI, 1998.
- [27] C. CHOLET : Application des méthodes par éléments discrets. Rapport technique, SNCF - Direction de la recherche et de la technologie, 2003.
- [28] C. CHOLET, G. SAUSSINE, P.E. GAUTIER et L.M. CLÉON : Milieux granulaires et voies ballastées. *In Colloque JJM*, 2004.
- [29] C. CHOLET, G. SAUSSINE, P.E. GAUTIER, F. DUBOIS, C. BOHATIER, G. COMBE et K. SAB : Application of discrete element methods to the modelling of ballasted track. *In World Congress on Railway Research (WCRR)*, 2003.
- [30] K. CHUNG et W. WANG : Quick collision detection of polytopes in virtual environments. pages 125–131, 1996.
- [31] G. COMBE : *Origines du comportement quasi-statique des assemblages granulaires denses : étude par simulations numériques*. Thèse de doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 2001.
- [32] G. COMBE : Chargement cycliques sur un modèle bidimensionnel de ballast de chemin de fer. Rapport technique, LCPC, SNCF, 2002.
- [33] P. A. CUNDALL : Formulation of three-dimensional distinct element model-part i. a scheme to detect and represent contacts in a system composed of many polyhedral blocks. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. and Geomech. Abstr*, 25(3):107–116, 1988.

- [34] P.A. CUNDALL : A computer model for simulating progressive large scale movement of block rock systems. *Proceeding of the symposium of the international society of rock mechanics*, 1:132–150, 1971.
- [35] P.A. CUNDALL : Formulation of three-dimensional distinct element model-part i. a scheme to detect and represent contacts in a system composed of many polyhedral blocks. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. and Geomech. Abstr*, 25(3):107–116, 1988.
- [36] P.A. CUNDALL et O.D.L. STRACK : A discrete numerical model for granular assemblies. *Geotechnic*, 29(1):47–65, 1979.
- [37] A. CURNIER, éditeur. *Unilaterality and dry friction in the dynamics of rigid bodies collection*. Presses Polytechniques et Universitaires Romanes, Lausanne, 1992.
- [38] P. Alart A. CURNIER : A generalized newton method for contact problems with friction. *Journal de mécanique théorique et appliquée*, (1 à 7):67–82, 1988.
- [39] A. M. Starfield D. LIN, C. Fairhurst : Geometrical identification of three-dimensional rock block systems using topological techniques. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. and Geomech. Abstr*, 24(6):331–338, 1987.
- [40] Direction de la recherche et de la TECHNOLOGIE, éditeur. *Rail et Recherche vol 24*, 45, rue de Londres, 75379 Paris Cedex 08, 2002. SNCF.
- [41] Direction de L'INFRASTRUCTURE : *Normes de maintenance de l'écartement et de la géométrie pour ligne à grande vitesse (V TGV > 220 km/h)*, Janvier 2001.
- [42] G. de SAXCE et Z. Q. FENG : The bipotentiel method : a constructive approach to design the complete contact law with friction and improved numerical algorithms. *Mathl. Comput. Modelling*, 28(4-8):225–245, 1998.
- [43] E. DIMNET : *Mouvement et collisions de solides rigides ou déformables*. Thèse de doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 2002.
- [44] P. DOGNETON : *Railroad track mechanic and technology*, chapitre The experimental Determination of the Axial and Lateral Track-Ballast Resistance. Princeton University, 1975.
- [45] F. DUBOIS et M. JEAN : Lmgc90 une plateforme de développement dédiée à la modélisation de problèmes d'interaction. In M. POTIER-FERRY, M. BONNET et A. BIGNONNET, éditeurs : *6ème colloque national en calcul des structures*, pages 111–118. Imprimerie de l'école polytechnique, 2003.
- [46] Improved knowledge of forces in cwr track (including switches).review of existing experimental work on behaviour of cwr track. Rapport technique, European Rail Research Institute, Utrecht, 1994. Provisional report.
- [47] Amélioration de la connaissance des efforts apparaissant des les voies en longs rails soudés. Rapport technique, European Rail Research Institute, Utrecht, 1996.
- [48] Lateral resistance tests. Rapport technique, European Rail Research Institute, Utrecht, 1996. Draft report Deutsche Bahn 50548.
- [49] Lateral resistance tests. Rapport technique, European Rail Research Institute, Utrecht, 1996. Draft report BR Research Limited, report number RR-TCE-81.
- [50] C. ESVELD : Improved knowledge of cwr track. *ERRI*, 2002.

- [51] Th. Zimmermann F.DESCOEUDRES : Calcul dynamique tridimensionnel de la chute de blocs rocheux. *6th - ISRM Congrès Monreal 87*, pages 337–342, 1987.
- [52] J. FORTIN : *Simulation numérique de la dynamique des systèmes multicorps appliquée aux milieux granulaires*. Thèse de doctorat, Université de Lille I, 2000.
- [53] M. FUMEY : Simulation en laboratoire de la limite de prud'homme. Rapport technique, SNCF, 2002.
- [54] R. GARCIA-ROJO, S. MCNAMARA et H.J. HERRMANN : Discrete element methods for the micro-mechanical investigation of granular ratcheting. *In Proc . ECCOMAS*, 2004.
- [55] Y. GARDAN : *Mathématiques et CAO, méthodes de base*. Hermes, 1985.
- [56] E.G. GILBERT, D.W. JOHNSON et S.S. KEERTHI : A fast procedure for computing the distance between objects in three-dimensional space. 1988.
- [57] P. GUIGUE et O. DEVILLERS : A fast and robust triangle-triangle overlap test using orientation predicates. *Journal of Graphics Tools*, 8(1):39–52, 2003.
- [58] N. GUÉRIN : *Approche expérimentale et numérique du comportement du ballast des voies ferrées*. Thèse de doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1996.
- [59] K. HEMPELMANN, F. HISS, K. KNOTHE et B. RIPKE : The formation of wear patterns on rail tread. *Wear*, 144:170–195, 1991.
- [60] J. HEYMAN : Poleni's problem. *In Proc. Instn. Engrs. part 1*, pages 737–759, 1998.
- [61] D. INDRARATNA et W. SALIM : Deformation and degradation mechanics of recycled ballast stabilised with geosynthetics. *Soils and Foundations*, 43(4):35–46, 2003.
- [62] T. ISHIKAWA et T. HORIIKE : A study on cyclic deformation of railroad ballast by discontinuous analysis. Rapport technique 16(4), RTRI Report, 2002.
- [63] G.J. JANIN : Résistance latérale de la voie ferrée. le problème de la stabilisation du ballast. *Revue générale de chemin de fer*, 1977.
- [64] M. JEAN : Simulation numérique des problèmes de contact avec frottement. *Matériaux et techniques*, 1-3, 1993.
- [65] M. JEAN : The non smooth contact dynamics method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 177(Special issue):235–257, 1999.
- [66] M. JEAN et J.J. MOREAU : Unilaterality and dry friction in the dynamics of rigid body collections. *Contact Mechanics International Symposium*, supplement:31–48, 1992.
- [67] D.W. JOHNSON : *The optimisation of robot motion in the presence of obstacles*. Thèse de doctorat, University of Michigan, 1987.
- [68] A. JOUKHADAR : *Simulation dynamique et applications robotiques*. Thèse de doctorat, Inria Projet Sharp, 1997.
- [69] C. KELVIN : *An Efficient Collision Detection Algorithm for Polytopes in Virtual Environments*. Thèse de doctorat, University of Hong Kong, 1996.
- [70] J.B. KNIGHT, E.E. EHRICHS, V.Y. KUPERMAN, J.K. FLINT, H.M. JAEGER et S.R. NAGEL : Experimental study of granular convection. *Physical review E*, 54:5726–5738, 1996.
- [71] J.B. KNIGHT, C.G. FANDRICH, C.N. LAU, H.M. JAEGER et S.R. NAGEL : Density relaxation in a vibrated granular material. *Physical review E*, 51:3957–3963, 1995.

- [72] Z. KRAKUTOVSKI : Etude de la dégradation géométrique des voies ferrées. Mémoire de D.E.A., Ecole Nationale des Ponts et Chaussées - Université de Paris XII, 2000.
- [73] H. KRUSE et K. POPP : Model-based investigation of the dynamic behaviour of railway ballast. pages 275–294, 2002.
- [74] R.H. Taylor L. JOSKOWICZ : Interfenc-free insertion of a solid body into a cavity : an algorithm and medical application. *Int. J. of Robotics Research*, 15:211–229, 1996.
- [75] P.A. LANGSTON, M.A. AL-AWAMLEH, F.Y. FRAIGE et B.N. ASMAR : Distinct element modelling of non-spherical frictionless particle flow. *Chemical Engineering Science*, 59: 425–435, 2003.
- [76] J. LANIER et M. JEAN : Experiments and numerical simulations with 2d disks assembly. *Powder Technology*, (109):206–221, 2000.
- [77] G. LARIBLE : *Vers un dimensionnement optimale des couches d'assises de la voie ferrée*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie (Paris VI), 1981.
- [78] C. LE SAUX : *Modélisation numérique du pliage et du déploiement de systèmes spatiaux avec prise en compte des contacts et des frottements - cas des systèmes de tensegrité*. Thèse de doctorat, Université des Sciences et Techniques du Languedoc, Montpellier, 2002.
- [79] C. LE SAUX, F. CEVAER et René MOTRO : Dynamique multi-contact d'un système de solides tridimensionnels rigides. *Comptes Rendus Académies des Sciences, Paris*, 331:277–282, 2003.
- [80] Y. LIMON DUPARCMEUR : *Écoulements et structuration de milieux granulaires modèles bidimensionnels*. Thèse de doctorat, Université de Rennes I, 1996.
- [81] G. LOMBAERT, G. DEGRANDE et D. CLOUTEAU : The non-stationary freefield response for a moving load with a random amplitude. *Journal of Sound and Vibration*, 2003.
- [82] A. LOPEZ PITA et J.M. ESTRADA PANADES : Planteamiento de una nueva metodología para el estudio del mecanismo de deterioro de la capa de balasto bajo la acción de la carga del tráfico ferroviario. *Revista de Obra publicas*, pages 23–26, 1990.
- [83] C. MING LIN et J.F. CANNY : A fast algorithm for incremental distance calculation. pages 1008–1014, 1991.
- [84] B. MIRTICH : Fast and accurate computation of polyedral mass properties. *Journal of Graphics Tool*, 2:31–50, 1996.
- [85] B. MIRTICH : Fast and robust polyedral collision detection. *ACM Trans. On graphics*, 3:177–208, 1998.
- [86] J.J. MOREAU : Une formulation du contact à frottement sec ; application au calcul numérique. *Comptes Rendus Académies des Sciences, Paris, Série II*, 302:799–801, 1986.
- [87] J.J. MOREAU : Bounded variation in time. In J.J. MOREAU, P.D. PANAGIOTOPOULOS et G. STRANG, éditeurs : *Topics in Nonsmooth Mechanics*, pages 1–74. Birkhauser, 1988.
- [88] J.J. MOREAU : Unilateral contact and dry friction in finite freedom dynamics. *CISM*, pages 1–82, 1988.
- [89] J.J. MOREAU : Unilateral contact and dry friction in finite freedom dynamics. In J.J. MOREAU et P.D. PANAGIOTOPOULOS, éditeurs : *Nonsmooth Mechanics and Applications*, chapitre CISM Courses and Lectures, vol. 302, pages 1–82. Springer-Verlag, 1988.

- [90] J.J MOREAU : Numerical investigation of shear zones in granular materials. In D.E. WOLF et P GRASSBERGER, éditeurs : *Workshop on friction, arching, contact dynamics*, volume 275, pages 233–247, 1996.
- [91] J.J. MOREAU : Numerical investigation of shear zones in granular materials. pages 233–247, 1996.
- [92] J.J. MOREAU : An introduction to unilateral dynamics. *Communication Laboratoire Lagrange*, page 45, 2000.
- [93] J.J. MOREAU : Numerical dynamics of granular materials. *Proceedings of the third contact mechanics international symposium*, 2001.
- [94] J.J. MOREAU : Modélisation et simulation de matériaux granulaires. In *Actes du 35 ième congrès d'analyse numérique*, 2003.
- [95] D.M. MUETH, H.M. JAEGER et S.R. NAGEL : Force distribution in a granular medium. *Phys. Rev. E.*, 57:3164–3169, 1998.
- [96] T. MÖLLER : A fast triangle-triangle intersection test. *Journal of Graphics Tools*, 2(2):25–30, 1997.
- [97] V.H. NGUYEN : *Comportement dynamique de structures non-linéaires soumises à des charges mobiles*. Thèse de doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 2002.
- [98] J. C. O. NIELSEN et J. OSCARSSON : Simulation of dynamic train track interaction with state-dependent track properties. *Journal of Sound and Vibration*, 275:515–532, 2004.
- [99] J.N. NOEL : communication privée.
- [100] C. NOUGIER : *Simulation des interactions outil-sol application aux outils de traitement des sols*. Thèse de doctorat, Université Montpellier II, 1999.
- [101] M. ODA et K. IWASHITA : *An introduction Mechanics of Granular Materials*. A.A. Balkema/Rotterdam/Brookfield, 1999.
- [102] M. ODA, J. KOSHINI et S. NEMAT-NASSER : Some experimentally based fundamental results on the mechanical behavior of granular materials. *Geotechnique*, 30:479–495, 1980.
- [103] X. OVIEDO : *Etude du comportement du ballast par un modèle micromécanique*. Thèse de doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 2001.
- [104] J. PERES : *Mécanique Générale*. MASSON ET Cie EDITEUR, 1962.
- [105] D. PETIT, F. PRADEL, G. FERRER et Y. MEIMON : Shape effect of grain in a granular flow. *Powder and grains 2001*, 2001.
- [106] P. PHILIPPE et D. BIDEAU : Granular medium under vertical tapping : change of compaction and convection dynamics around the liftoff threshold. *Physical review letters*, 91(10), 2003.
- [107] R. POTVIN et M. FUMEY : Comportement de la voie sous l'action d'efforts connus. Rapport technique, Direction de l'Ingénierie, département étude voie section EVT2, SNCF, 2001.
- [108] R. POTVIN et M. FUMEY : Comportement sous l'action d'efforts connus. Rapport technique, Direction de l'Ingénierie, département étude voie section EVT2, SNCF, 2002.
- [109] O. POULIQUEN, M. BELZONS et M. NICOLAS : Fluctuating particle motion during shear induced granular compaction. *Physical review letters*, 91(1), 2003.

- [110] M.A. PRUD'HOMME : Résistance de la voie aux efforts transversaux exercés par le matériel roulant. *Revue générale de chemin de fer*, 1970.
- [111] F. QUETIN, L. SCHMITT, K. SAB et D. DUHAMEL : Modelling of the dynamical behaviour of railway ballasted track including its platform. *In World Congress on Railway Research (WCRR)*, 2003.
- [112] F. RADJAI : *Dynamique des rotations et frottement collectif dans les systèmes granulaires*. Thèse de doctorat, Université Paris XI Orsay, 1995.
- [113] F. RADJAI : Etudes des mécanismes physiques locaux à l'origine du tassement. Rapport technique, SNCF - LMG, 2004.
- [114] F. RADJAI, M. JEAN, J.J. MOREAU et S. ROUX : Force distribution in dense two-dimensional granular systems. *Phys. Rev. Lett.*, 77:274, 1996.
- [115] F. RADJAI et D.E. WOLF : The origin of static pressure in dense granular media. *Granular matter.*, 1:3–8, 1998.
- [116] F. RADJAI, D.E. WOLF, M. JEAN et J.J. MOREAU : Bimodal character of stress transmission in granular packing. *Phys. Rev. Lett.*, 80(1):61–64, 1998.
- [117] M. RENOUF : *Optimisation numérique et calcul parallèle pour l'étude des milieux divisés*. Thèse de doctorat, Université des Sciences et Techniques du Languedoc, Montpellier, 2004.
- [118] M. RENOUF et P. ALART : Un nouvel algorithme de quasi-optimisation pour la résolution des problèmes multicontacts et application aux milieux granulaires. *In Proc. 16 ième Congrès français de mécanique*, septembre 2003.
- [119] M. RENOUF et P. ALART : Solveurs parallèles pour la simulation de systèmes multicontacts. *In Actes du sixième colloque national en calcul des structures*, numéro TOME III, 2003.
- [120] M. RENOUF et P. ALART : Solveurs parallèles pour la simulation de systèmes multicontacts. *Revue européenne des éléments finis*, 2004. soumis.
- [121] L. RICCI, V.H. NGUYEN, K. SAB, D. DUHAMEL et L. SCHMITT : Dynamic behaviour of ballasted railway tracks : a discrete/continuous approach. 2003.
- [122] L. ROTHENBURG et R.J. BATHURST : Analytical study of induced anisotropy in idealized granular materials. *Geotechnique*, 39:601–614, 1989.
- [123] G. SAMAVEDAM, A. KISH, A. PURPLE et J. SCHOENGART : Parametric analysis and safety concepts of cwr buckling. Rapport technique, U.S. Department of Transportation, Cambridge, 1993.
- [124] M. SATAKE : Fabric tensor in granular materials. *In P.A. VERMEER et H.J. LUGER, éditeurs : Proceedings of the IUTAM symposium on deformation and failure of granular materials*, volume 1, pages 63–68, 1982.
- [125] Y. SATO : Experiment study on restoration works of settled ballast using scale model. *In Proc. The fourth international heavy haul railway conference*, 1989.
- [126] G. SAUSSINE : Modélisation de la détection du contact entre granulats tridimensionnels en vue de l'application au ballast de tgv. Mémoire de D.E.A., Université Montpellier II, 2001.
- [127] G. SAUSSINE : Etude du comportement dynamique du ballast par une approche éléments discrets tridimensionnels. Rapport technique, SNCF, 2002.

- [128] G. SAUSSINE, C. CHOLET, F. DUBOIS et C. BOHATIER : Modélisation du comportement du ballast par une méthode d'éléments discrets. *Revue européenne des éléments finis*, 2004. à paraître.
- [129] G. SAUSSINE, C. CHOLET, F. DUBOIS, C. BOHATIER et P.E. GAUTIER : Modélisation du comportement du ballast par une méthode d'éléments discrets. In M. POTIER-FERRY, M. BONNET et A. BIGNONNET, éditeurs : *6ème colloque national en calcul des structures*, numéro Tome 3, pages 473–480. Imprimerie de l'école polytechnique, 2003.
- [130] G. SAUSSINE, C. CHOLET, P.E. GAUTIER, F. DUBOIS, C. BOHATIER et J.J. MOREAU : Modelling ballast behaviour using a three-dimensional discrete element method. In *Proc. 21st international congress on theoretical applied mechanics*, août 2004.
- [131] G. SAUSSINE, C. CHOLET, P.E. GAUTIER, F. DUBOIS, C. BOHATIER et J.J. MOREAU : Modelling ballast under cyclic loading using discret element method. In *Proc. Cyclic Behaviour of Soils and Liquefaction Phenomena*, April 2004.
- [132] G. SAUSSINE, F. DUBOIS, C. BOHATIER, C. CHOLET, P.E. GAUTIER et J.J. MOREAU : Modelling ballast behaviour under dynamic loading, part 1 : a 2d polygonal discrete element method approach. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 2004. accepté.
- [133] T. SCHAWGER et T. POËCHEL : Rigid body dynamics of railway ballast. *System Dynamics of long term behaviour of railway vehicles, track and subgrade*, Lecture Notes in Applied Mechanics Springer, 2002.
- [134] L. SCHMITT : Etudes relatives à la voie ferrée ballastée : rapport de synthèse, 2002.
- [135] F. SOULIÉ, J.Y. DELENNE, C. SAIX et S. ELYOUSSOUFI : Etude expérimentale de l'usure et de l'angle au repos d'un ballast ferroviaire. Rapport technique, SNCF - LMG, 2004.
- [136] D. STOIANOVICI et Y. HURMUZLU : A critical study of the applicability of rigid body collisions theory. *A.S.M.E. J. Appl. Mech.*, 63:307–316, 1996.
- [137] W. J. STRONGE : *Impact Mechanics*. Cambridge University Press, 2000.
- [138] J.D. FOLEY A. VAN DAMM S.K. FEINER et J.F. HUGUES : *Computer graphics - principles and practice*. Addison Wesley, second edition in C, 1996.
- [139] G. VAN DEN BERGEN : Fast and robust gjk implementation for collision detection of convex objects. *Journal of Graphics Tools*, 4(2):7–25, 1999.
- [140] G. VAN DER BERGEN : *Collision Detection in interactive 3D environments*. Elsevier, 2003.
- [141] O.R. WALTON et L. BRAUN : Simulation of rotary-drum and repose tests for frictional spheres and rigid sphere clusters. Rapport technique, sept. 29 - oct. 1 1993. Workshop on flow of particles and fluids.
- [142] P. WRIGGERS : *Computational Contact Mechanics*. Wiley, 2002.

Quatrième partie

ANNEXES

Chapitre 11

Matrice d'inertie

11.1 Rappels

Nous allons brièvement énoncer l'ensemble des définitions relatives aux caractéristiques d'inertie d'un solide. Soit S un solide indéformable de densité volumique ρ , de masse M , de volume V et de centre de gravité G .

La masse M du solide S est définie par :

$$M = \int \int \int \rho dx dy dz \quad (11.1)$$

Le centre de gravité G du solide (S) dans le repère R est définie par :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\int \int \int_{P \in S} \overrightarrow{OP} \rho dx dy dz}{\int \int \int_{P \in S} \rho dx dy dz} \quad (11.2)$$

Si le solide (S) peut se décomposer en N solides homogènes élémentaires, de masse m_i , et de centre de gravité G_i alors, la position du centre de gravité G du solide (S) peut se mettre sous la forme :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\sum_{i=1, N} m_i \overrightarrow{OG}_i}{M} \quad (11.3)$$

Les moments d'inerties, exprimés en $m^2.kg$ sont définis par :

Moment d'inertie de (S) par rapport à la droite (Ox) :

$$I_{/Ox}(S) = \int \int \int_S (y^2 + z^2) \rho dx dy dz \quad (11.4)$$

Moment d'inertie de (S) par rapport à la droite (Oy) :

$$I_{/Oy}(S) = \int \int \int_S (x^2 + z^2) \rho dx dy dz \quad (11.5)$$

Moment d'inertie de (S) par rapport à la droite (Oz) :

$$I_{/Oz}(S) = \int \int \int_S (x^2 + y^2) \rho \, dx \, dy \, dz \quad (11.6)$$

Les produits d'inertie sont définis par :

$$I_{/yOz}(S) = \int \int \int_S yz \rho \, dx \, dy \, dz \quad (11.7)$$

$$I_{/xOz}(S) = \int \int \int_S xz \rho \, dx \, dy \, dz \quad (11.8)$$

$$I_{/xOy}(S) = \int \int \int_S xy \rho \, dx \, dy \, dz \quad (11.9)$$

La difficulté pour évaluer les caractéristiques d'un corps ayant une géométrie complexe est de calculer les intégrales volumiques sur un domaine a priori quelconque. Il est donc nécessaire de développer une méthode permettant dans le cas de polyèdres facetés, connaissant les sommets et les faces qui les composent, de calculer la matrice d'inertie d'un polyèdre. L'ensemble de ces définitions vont être utilisées dans les parties suivantes.

11.2 Caractéristiques d'inertie d'un tétraèdre.

La méthode développée utilise l'intégration numérique sur un élément de référence. Les enveloppes des polyèdres étant facétisées par des éléments triangulaires ou pouvant l'être, on peut les découper en tétraèdres qui sont des éléments géométriques pour lesquels les paramètres d'inerties peuvent être calculés par une intégration numérique.

On considère un tétraèdre quelconque défini dans R ayant pour sommets $S_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $S_2 = (x_2, y_2, z_2)$, $S_3 = (x_3, y_3, z_3)$, $S_4 = (x_4, y_4, z_4)$. Considérons le tétraèdre de référence de sommets $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$. On peut définir cet élément de référence par les inégalités suivantes en considérant les variables X, Y, Z :

$$\begin{cases} X + Y + Z \leq 1 \\ X \geq 0 \\ Y \geq 0 \\ Z \geq 0 \end{cases} \quad (11.10)$$

Considérons la transformation linéaire en X, Y, Z :

$$x(X, Y, Z) = \langle 1 - X - Y - Z, X, Y, Z \rangle \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix}. \quad (11.11)$$

$$y(X, Y, Z) = \langle 1 - X - Y - Z, X, Y, Z \rangle \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{Bmatrix}. \quad (11.12)$$

$$z(X, Y, Z) = \langle 1 - X - Y - Z, X, Y, Z \rangle \begin{Bmatrix} z1 \\ z2 \\ z3 \\ z4 \end{Bmatrix}. \quad (11.13)$$

On a donc les équations paramétriques suivantes :

$$\begin{cases} x(X, Y, Z) = x1 + (x2 - x1)X + (x3 - x1)Y + (x4 - x1)Z \\ y(X, Y, Z) = y1 + (y2 - y1)X + (y3 - y1)Y + (y4 - y1)Z \\ z(X, Y, Z) = z1 + (z2 - z1)X + (z3 - z1)Y + (z4 - z1)Z \end{cases} \quad (11.14)$$

On en déduit la matrice Jacobienne de la transformation :

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial X} & \frac{\partial x}{\partial Y} & \frac{\partial x}{\partial Z} \\ \frac{\partial y}{\partial X} & \frac{\partial y}{\partial Y} & \frac{\partial y}{\partial Z} \\ \frac{\partial z}{\partial X} & \frac{\partial z}{\partial Y} & \frac{\partial z}{\partial Z} \end{bmatrix}. \quad (11.15)$$

$$J = \begin{bmatrix} x2 - x1 & x3 - x1 & x4 - x1 \\ y2 - y1 & y3 - y1 & y4 - y1 \\ z2 - z1 & z3 - z1 & z4 - z1 \end{bmatrix}. \quad (11.16)$$

On peut facilement en déduire son déterminant le Jacobien :

$$\begin{aligned} \det(J) = & -z2 x3 y1 - x2 y4 z3 + y2 x3 z1 - y2 x1 z3 - y2 x4 z1 + x2 y4 z1 + x2 y3 z4 \\ & - x2 y3 z1 - x2 y1 z4 + x2 y1 z3 - x1 y3 z4 + x1 y4 z3 - y2 x3 z4 + y2 x1 z4 \\ & + y2 x4 z3 + y1 x3 z4 - y1 x4 z3 + z2 x3 y4 - z2 x1 y4 - z2 x4 y3 + z2 x4 y1 \\ & + z2 x1 y3 - z1 x3 y4 + z1 x4 y3 \end{aligned}$$

La transformation d'une intégrale sur l'élément de référence, dans le cas d'un tétraèdre élémentaire s'écrit :

$$\int_V f(x) dx dy dz = \int_{Z=0}^{1-X-Y} \int_{Y=0}^{1-X} \int_{X=0}^1 f(x(X, Y, Z)) |det(J)| dX dY dZ \quad (11.17)$$

Donc pour évaluer les moments d'inertie et les produits d'inertie il faut effectuer le changement de variable de façon à exprimer l'ensemble des relations à l'aide des variables (X,Y,Z). Ces intégrations étant assez longues, les résultats sont obtenus par le logiciel Maple et exposés à la page 206.

Le calcul de la position du centre de gravité étant plus simple, grâce à l'équation (11.17), pour un tétraèdre on obtient :

$$G_{\text{tétraèdre}} \begin{cases} X_G = \frac{1}{4}(x1 + x2 + x3 + x4) \\ Y_G = \frac{1}{4}(y1 + y2 + y3 + y4) \\ Z_G = \frac{1}{4}(z1 + z2 + z3 + z4) \end{cases} \quad (11.18)$$

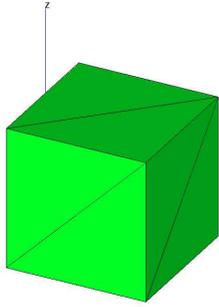
L'obtention de la matrice d'inertie pour un tétraèdre quelconque et la position de son centre de gravité va permettre de calculer la matrice d'inertie d'un polyèdre.

11.3 Comparaisons

Pour valider l'algorithme déterminant la matrice d'inertie d'un polyèdre, des comparaisons ont été effectuées avec des géométries dont la matrice d'inertie est connue explicitement, ces géométries pouvant être une approximation d'une forme connue par exemple une sphère.

Le cas du cube

Un premier test a été effectué sur un cube de côté $a=1$ et d'une densité égale à $\rho = 1$.



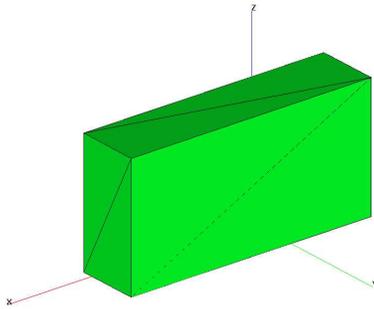
$$I_G = \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{\rho a^5}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\rho a^5}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\rho a^5}{6} \end{array} \right\} \quad (11.19)$$

FIG. 11.1 – Matrice d'inertie d'un cube côté a .

La comparaison entre le résultat analytique et la méthode numérique nous donne exactement le même résultat.

Le cas du parallélépipède

L'expression de la matrice d'inertie d'un parallélépipède étant connue, nous avons pu faire une comparaison avec la méthode développée. Considérons un parallélépipède de largeur $a=2\text{m}$, de longueur $b=0.5\text{m}$, de hauteur $h=1\text{m}$ et d'une densité égale à $\rho = 1$:

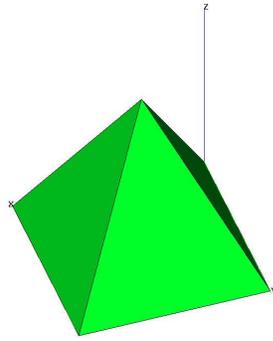


$$I_G = \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{\rho b h a (h^2 + b^2)}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\rho b h a (h^2 + a^2)}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\rho b h a (a^2 + b^2)}{12} \end{array} \right\} \quad (11.20)$$

FIG. 11.2 – Matrice d'inertie d'un parallélépipède.

Dans ce cas on retrouve exactement les mêmes résultats.

Le cas de la pyramide L'exemple de la pyramide permet à la fois de vérifier le calcul de la position du centre d'inertie, il se trouve à un quart de la hauteur, et de la matrice d'inertie. Considérons une pyramide de base $a=1\text{m}$, $b=1\text{m}$ et de hauteur $h=1\text{m}$, de masse M :



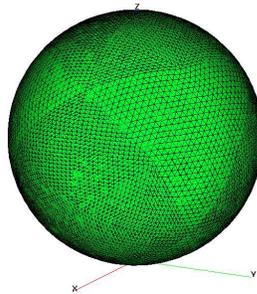
$$I_G = \frac{M}{20} \begin{pmatrix} \frac{(b^2 + \frac{3}{4}h^2)}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(a^2 + \frac{3}{4}h^2)}{12} & 0 \\ 0 & 0 & a^2 + b^2 \end{pmatrix} \quad (11.21)$$

FIG. 11.3 – Matrice d’inertie d’une pyramide.

Dans ce cas le calcul de la position du centre de gravité et de la matrice d’inertie est vérifié.

La sphère facétisée

Une comparaison de la méthode avec des polyèdres facétisés quelconque étant difficile puisqu’il n’existe pas d’expression analytique de leur matrice d’inertie, il est possible, à l’aide d’une facétisation de forme élémentaire, comme la sphère, de comparer le calcul des matrices d’inertie. En effet la matrice d’inertie d’une sphère étant aisée à calculer, une comparaison a été faite à l’aide d’un maillage surfacique en triangle d’une sphère suffisamment fin pour approcher le résultat théorique. Nous avons donc pris une sphère de rayon $\mathbf{R}=0.1\mathbf{m}$, de masse $M = \rho \frac{4}{3}\pi R^3$:



$$I_G = \begin{pmatrix} \frac{2MR^2}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2MR^2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2MR^2}{5} \end{pmatrix} \quad (11.22)$$

FIG. 11.4 – Exemple de sphère traité.

FIG. 11.5 – Matrice d’inertie d’une sphère.

La différence entre les résultats numériques et analytique de quelques pourcents, s’explique par l’approximation de la forme de la sphère discrétisée.

Cette méthode d’évaluation permet, pour tout polyèdre convexe, dont on connaît une description surfacique, de calculer les caractéristiques d’inertie afin de pouvoir résoudre les équations de la dynamique.

11.3.1 Moment d'inertie d'un tétraèdre

$$\begin{aligned}
Ixz &= (|J|)\left(\frac{1}{24} x1 (z4 - z1) + \frac{1}{120} (x2 - x1) (z4 - z1)\right. \\
&+ \frac{1}{24} (x4 - x1) z1 + \frac{1}{120} (x4 - x1) (z2 - z1) + \frac{1}{24} x1 (z3 - z1) \\
&+ \frac{1}{120} (x2 - x1) (z3 - z1) + \frac{1}{24} (x3 - x1) z1 + \frac{1}{120} (x3 - x1) (z2 - z1) + \frac{1}{6} x1 z1 \\
&+ \frac{1}{24} x1 (z2 - z1) + \frac{1}{24} (x2 - x1) z1 + \frac{1}{60} (x2 - x1) (z2 - z1) \\
&+ \frac{1}{60} (x4 - x1) (z4 - z1) + \frac{1}{120} (x3 - x1) (z4 - z1) + \frac{1}{120} (x4 - x1) (z3 - z1) \\
&\left. + \frac{1}{60} (x3 - x1) (z3 - z1)\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Ixy &= (|J|)\left(\frac{1}{60} (x4 - x1) (y4 - y1) + \frac{1}{120} (x3 - x1) (y4 - y1)\right. \\
&+ \frac{1}{120} (x4 - x1) (y3 - y1) + \frac{1}{60} (x3 - x1) (y3 - y1) + \frac{1}{120} (x3 - x1) (y2 - y1) \\
&+ \frac{1}{6} x1 y1 + \frac{1}{24} x1 (y2 - y1) + \frac{1}{24} (x2 - x1) y1 + \frac{1}{60} (x2 - x1) (y2 - y1) \\
&+ \frac{1}{24} x1 (y4 - y1) + \frac{1}{120} (x2 - x1) (y4 - y1) + \frac{1}{24} (x4 - x1) y1 \\
&+ \frac{1}{120} (x4 - x1) (y2 - y1) + \frac{1}{24} x1 (y3 - y1) + \frac{1}{120} (x2 - x1) (y3 - y1) \\
&\left. + \frac{1}{24} (x3 - x1) y1\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Iyz &= (|J|)\left(\frac{1}{24} (y3 - y1) z1 + \frac{1}{24} y1 (z3 - z1)\right. \\
&+ \frac{1}{120} (y2 - y1) (z3 - z1) + \frac{1}{120} (y3 - y1) (z2 - z1) + \frac{1}{120} (y4 - y1) (z2 - z1) \\
&+ \frac{1}{24} (y4 - y1) z1 + \frac{1}{24} y1 (z4 - z1) + \frac{1}{120} (y2 - y1) (z4 - z1) \\
&+ \frac{1}{120} (y3 - y1) (z4 - z1) + \frac{1}{120} (z3 - z1) (y4 - y1) + \frac{1}{6} y1 z1 + \frac{1}{24} y1 (z2 - z1) \\
&+ \frac{1}{24} (y2 - y1) z1 + \frac{1}{60} (y2 - y1) (z2 - z1) + \frac{1}{60} (y3 - y1) (z3 - z1) \\
&\left. + \frac{1}{60} (y4 - y1) (z4 - z1)\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Ixx &= (|J|)\left(\frac{1}{60} (y4 - y1)^2 + \frac{1}{60} (z4 - z1)^2\right. \\
&+ \frac{1}{60} (y3 - y1) (y4 - y1) + \frac{1}{60} (z3 - z1) (z4 - z1) + \frac{1}{60} (y3 - y1)^2 + \frac{1}{60} (z3 - z1)^2 \\
&+ \frac{1}{12} y1 (y4 - y1) + \frac{1}{60} (y2 - y1) (y4 - y1) + \frac{1}{12} z1 (z4 - z1) \\
&+ \frac{1}{60} (z2 - z1) (z4 - z1) + \frac{1}{12} y1 (y3 - y1) + \frac{1}{60} (y2 - y1) (y3 - y1) \\
&+ \frac{1}{12} z1 (z3 - z1) + \frac{1}{60} (z2 - z1) (z3 - z1) + \frac{1}{6} y1^2 + \frac{1}{12} y1 (y2 - y1) + \frac{1}{60} (y2 - y1)^2 \\
&\left. + \frac{1}{6} z1^2 + \frac{1}{12} z1 (z2 - z1) + \frac{1}{60} (z2 - z1)^2\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{yy} &= (|J|) \left(\frac{1}{60} (z_4 - z_1)^2 + \frac{1}{60} (z_3 - z_1)(z_4 - z_1) \right. \\
&+ \frac{1}{60} (z_3 - z_1)^2 + \frac{1}{12} z_1 (z_4 - z_1) + \frac{1}{60} (z_2 - z_1)(z_4 - z_1) + \frac{1}{12} z_1 (z_3 - z_1) \\
&+ \frac{1}{60} (z_2 - z_1)(z_3 - z_1) + \frac{1}{6} z_1^2 + \frac{1}{12} z_1 (z_2 - z_1) + \frac{1}{60} (z_2 - z_1)^2 + \frac{1}{60} (x_4 - x_1)^2 \\
&+ \frac{1}{60} (x_3 - x_1)(x_4 - x_1) + \frac{1}{60} (x_3 - x_1)^2 + \frac{1}{12} x_1 (x_4 - x_1) + \frac{1}{60} (x_2 - x_1)(x_4 - x_1) \\
&+ \frac{1}{12} x_1 (x_3 - x_1) + \frac{1}{60} (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) + \frac{1}{6} x_1^2 + \frac{1}{12} x_1 (x_2 - x_1) \\
&\left. + \frac{1}{60} (x_2 - x_1)^2 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{zz} &= (|J|) \left(\frac{1}{60} (y_4 - y_1)^2 + \frac{1}{60} (y_3 - y_1)(y_4 - y_1) \right. \\
&+ \frac{1}{60} (y_3 - y_1)^2 + \frac{1}{12} y_1 (y_4 - y_1) + \frac{1}{60} (y_2 - y_1)(y_4 - y_1) + \frac{1}{12} y_1 (y_3 - y_1) \\
&+ \frac{1}{60} (y_2 - y_1)(y_3 - y_1) + \frac{1}{6} y_1^2 + \frac{1}{12} y_1 (y_2 - y_1) + \frac{1}{60} (y_2 - y_1)^2 + \frac{1}{60} (x_4 - x_1)^2 \\
&+ \frac{1}{60} (x_3 - x_1)(x_4 - x_1) + \frac{1}{60} (x_3 - x_1)^2 + \frac{1}{12} x_1 (x_4 - x_1) + \frac{1}{60} (x_2 - x_1)(x_4 - x_1) \\
&+ \frac{1}{12} x_1 (x_3 - x_1) + \frac{1}{60} (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) + \frac{1}{6} x_1^2 + \frac{1}{12} x_1 (x_2 - x_1) \\
&\left. + \frac{1}{60} (x_2 - x_1)^2 \right)
\end{aligned}$$

11.3.2 Résultats numériques de calcul de matrice inertie

Cas d'un cube :

$$I_G = \left\{ \begin{array}{ccc} 0,1667 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1667 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1667 \end{array} \right\} I_G = \left\{ \begin{array}{ccc} 0,1667 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1667 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1667 \end{array} \right\}$$

FIG. 11.6 – Calcul analytique.

FIG. 11.7 – Calcul par LMGC90.

Cas d'un parallélépipède :

$$I_G = \left\{ \begin{array}{ccc} 0,1041 & 0 & 0 \\ 0 & 0,4166 & 0 \\ 0 & 0 & 0,3541 \end{array} \right\} I_G = \left\{ \begin{array}{ccc} 0,1041 & 0 & 0 \\ 0 & 0,4166 & 0 \\ 0 & 0 & 0,3541 \end{array} \right\}$$

FIG. 11.8 – Calcul analytique.

FIG. 11.9 – Calcul par LMGC90.

Cas d'une pyramide :

$$I_G = \begin{Bmatrix} 0,2916.10^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0,2916.10^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0,3333.10^{-2} \end{Bmatrix}$$

FIG. 11.10 – Calcul analytique.

$$I_G = \begin{Bmatrix} 0,2916.10^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0,2916.10^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0,3333.10^{-2} \end{Bmatrix}$$

FIG. 11.11 – Calcul par LMGC90.

Cas d'une sphère facétisée :

$$I_G = \begin{Bmatrix} 1,675.10^{-5} & 0 & 0 \\ 0 & 1,675.10^{-5} & 0 \\ 0 & 0 & 1,675.10^{-5} \end{Bmatrix}$$

FIG. 11.12 – Calcul analytique.

$$I_G = \begin{Bmatrix} 1,673.10^{-5} & 0 & 0 \\ 0 & 1,673.10^{-5} & 0 \\ 0 & 0 & 1,673.10^{-5} \end{Bmatrix}$$

FIG. 11.13 – Calcul par LMGC90.

Chapitre 12

Revue d'algorithme d'intersection entre polyèdres

La résolution du problème mécanique d'interaction entre objets rigides nécessite de connaître, comme dans le cas bidimensionnel, les positions des points de contact, les repères locaux de contact. Il existe de nombreuses approches à la fois pour représenter un polyèdre, et pour détecter rapidement s'il existe une intersection entre deux polyèdres. Ces algorithmes ont le plus souvent été développés dans le domaine de la réalité virtuelle ou de la robotique où le nombre d'objets est peu conséquent. Par contre chaque objet peut être très facetisé. Nous allons présenter quelques types de représentation de polyèdres et différents algorithmes de détection. On pourra trouver un panorama beaucoup plus complet et détaillé dans [140].

12.1 Algorithmes d'intersection entre polyèdres convexes

La résolution du problème mécanique d'interaction entre objets rigides nécessite de connaître, comme dans le cas bidimensionnel, les positions des points de contact, les repères locaux de contact. Il existe de nombreuses approches à la fois pour représenter un polyèdre, et pour détecter rapidement s'il existe une intersection entre deux polyèdres. Ces algorithmes ont le plus souvent été développés dans le domaine de la réalité virtuelle ou de la robotique où le nombre d'objets est peu conséquent. Par contre chaque objet peut être très facetisé. Nous allons présenter quelques types de représentation de polyèdres et différents algorithmes de détection. On pourra trouver un panorama beaucoup plus complet et détaillé dans [140].

12.1.1 Représentation

L'existence de nombreux types de description géométrique d'objets tridimensionnels ne nous permet pas d'en faire une description exhaustive. Ces descriptions sont adaptées en fonction des applications envisagées (robotique, réalité virtuelle). Une classification, très utilisée en infographie, est proposée par Foley et al [138] dans laquelle on distingue :

- les Constructive Solid Geometry (CSG),
- les descriptions volumiques par décomposition spatiale (Octrees, Cell Decomposition),
- les descriptions surfaciques ou Boundary Representation (B-reps).

Constructive Solid Geometry

Les représentations de type CSG sont constituées de primitives élémentaires, par exemple des cubes, cônes, qui sont combinées à l'aide d'opérations d'ensemble, rotation, translation ou changements d'échelle. Un objet est stocké au moyen d'un arbre avec des opérateurs aux nœuds internes et des primitives élémentaires entre les nœuds. Cette description permet de décrire un volume fermé, mais il peut être délicat de représenter certaines surfaces avec précision.

Représentation par subdivision spatiale Dans les représentations spatiales, les solides sont décomposés en une collection de solides adjoints ayant une géométrie plus simple. Ainsi un objet peut être reconstruit à partir de ces éléments de taille et d'orientation différentes. Il existe diverses techniques qui sont variées et adaptées selon les applications visées.

On peut citer la **décomposition en cellules**, où l'ensemble des éléments est le résultat d'un assemblage d'objets élémentaires, *les cellules*, auxquelles on applique différentes transformations (rotation, dilatation, translation). Chaque système de décomposition définit un ensemble de cellules élémentaires.

Une autre technique, appelée **l'énumération exhaustive**, cas particulier de la représentation précédente, consiste à décomposer le solide en cellules élémentaires identiques. Ces cellules sont placées dans une grille régulière et fixe. Chaque élément est souvent dénommé *voxel* (Volume Element). La cellule élémentaire la plus utilisée est le cube. Chaque cellule est repérée par les coordonnées d'un seul point, le centre de la cellule par exemple. La taille de la cellule est donnée par la taille de la grille (fig. 12.1).

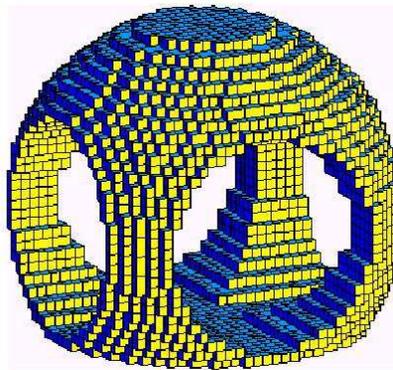


FIG. 12.1 – Décomposition spatiale par Voxels.

Les **octrees** constituent une variante de la description précédente basée sur une hiérarchisation des décompositions (fig. 12.2). Pour la réalisation d'une représentation de ce type, on applique la procédure récursive suivante :

- on commence par un cube qui englobe l'espace de représentation tout entier (profondeur=0),
- si l'objet est trop complexe pour être représenté par le cube, celui-ci est subdivisé en 8 octants,
- on étudie alors chacun des octants dans un ordre fixé (profondeur=1),

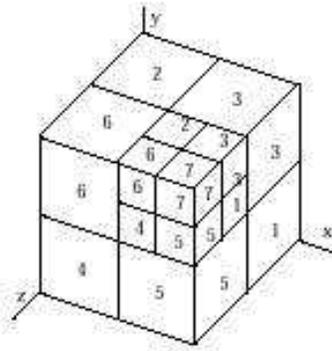


FIG. 12.2 – Octrees.

- cette subdivision est répétée jusqu'à un octant blanc (extérieur de l'objet) ou noir (complètement intérieur à l'objet).

Les propriétés sont similaires à celles des représentations exhaustives. La structure des octrees peut être exploitée dans les algorithmes, celle-ci n'est pas très consommatrice en espace mémoire. Le stockage reste un élément important étant donné que la finesse de représentation d'un objet est directement liée au nombre d'octrees employés. Il est à noter que lors d'un changement d'orientation le calcul de la représentation dans la nouvelle configuration est assez coûteux en temps de calcul.

Boundary Representation Dans cette description les objets sont décrits par leurs éléments frontières. Ces éléments frontières peuvent être plans, de formes polygonales éventuellement convexes voire triangulaires, ou être représentés par des surfaces courbes. La précision de la description dépend alors du nombre de facettes utilisées.

Nous avons retenu une description surfacique (B-reps) en considérant une discrétisation de l'enveloppe des polyèdres par des facettes triangulaires. Il est important de préciser que nous allons être amenés à traiter des évolutions de systèmes contenant plusieurs dizaines de milliers de polyèdres, en conséquence le nombre de facettes présentes peut être très important. Un rapide calcul nous montre que si l'on considère environ 20000 solides avec une moyenne de 30 faces, nos calculs comporteront 600000 facettes. Le coût de stockage de l'ensemble des données, en particulier si pour chaque solide on rajoute une description plus fine peut être très important, c'est pourquoi nous nous limiterons à une description simple de type B-reps.

Nous avons choisi de ne modéliser que des grains convexes, ceci pour simplifier la détection ultérieure des contacts. On peut cependant envisager ultérieurement de constituer des grains non convexes par collage de parties élémentaires convexes. En effet, dans le cas de corps rigides, ceci ne pose pas de difficultés particulières mais peut s'avérer plus compliqué lorsque les déformations du solide doivent être prises en compte [68].

12.1.2 Différents algorithmes de détection

Nous allons exposer quelques algorithmes de détection existant usuellement employés dans le domaine de la réalité virtuelle ou de la robotique où l'on traite des interactions entre un nombre d'objets restreint, quelques dizaines, et très facetisés.

La représentation géométrique de nos objets est faite par une discrétisation de l'enveloppe en triangles et notre objectif d'obtenir plusieurs points de contact. Cette dernière considération influera notre choix d'algorithme.

Algorithme de Gilbert-Johnson-Keerthi [56]

Cet algorithme est une méthode itérative permettant d'évaluer la distance entre deux enveloppes convexes, il calcule une valeur de cette distance lorsque les deux enveloppes sont séparées, et une approximation de la distance d'interpénétration dans le cas contraire.

Rappels d'analyse convexe Considérons un ensemble convexe C : la distance euclidienne entre deux enveloppes convexes C_X et C_Y est définie par :

$$d(C_X, C_Y) = \min(|x - y|, x \in C_X, y \in C_Y)$$

Cette distance est égale à la distance entre la différence de Minkowski de C_X et C_Y et l'origine du repère [56]. Cette différence est définie par :

$$C_X - C_Y = z; z = x - y, x \in C_X, y \in C_Y$$

On peut donc écrire :

$$d(C_X, C_Y) = \min(|z|; z \in C_X - C_Y)$$

La différence de Minkowski entre deux polyèdres convexes est aussi un polyèdre convexe. Le point le plus proche de l'origine appartenant à $C_X - C_Y$, peut être défini de la manière suivante, grâce à une fonction support S :

$$S_Z(\nu) = \max\{z \cdot \nu; z \in Z\}$$

S représente la projection la plus éloignée dans la direction ν . Le point le plus proche de l'origine est celui le plus éloigné dans la direction $-\nu$:

$$\|z\|^2 + S_Z(-z) = 0$$

Principe de l'algorithme Pour trouver le point le plus proche d'un ensemble $C = \{x_1, \dots, x_n\}$ à l'origine, on procède de la manière suivante :

- on commence par un ensemble $X_{k=0}$ formé de trois points de C ou 4 en trois dimensions,
- on détermine le point v_k de X_k le plus proche de l'origine,
- si $\|v_k\|^2 + S_{X_k}(-v_k) = 0$ alors v_k est le point le plus proche de l'origine,
- sinon v_k n'est pas le point le plus proche de l'origine et $X_{k+1} = X_k + \{v_k\}$ et on réalise les mêmes opérations sur X_{k+1} .

L'étape la plus coûteuse est le calcul de la différence des deux enveloppes convexes C_X et C_Y . Cette étape peut être simplifiée grâce à la propriété suivante :

$$S_{C_X - C_Y}(v) = S_{C_X}(v) - S_{C_Y}(v)$$

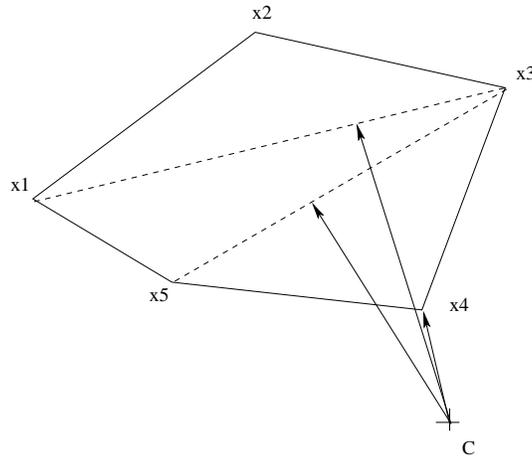


FIG. 12.3 – Schéma de l’algorithme en 2D.

Description de l’algorithme pour le cas tridimensionnel En considérant deux enveloppes convexes A et B l’algorithme de G.J.K permet d’approcher $v(A - B)$. La fonction support d’un polyèdre est définie par [139] :

$S_A(v) \in Vert(A)$ et $v.S_A(v) = \max\{v.x : x \in Vert(A)\}$, $Vert(A)$ représentant l’ensemble des sommets.

En trois dimensions l’algorithme génère des “simplex” constitués de 4 points, et garde à l’itération suivante (k+1) le sommet plus proche calculé à l’itération k. Le nombre d’itérations de l’algorithme dépend du choix du simplex de départ et de la direction de projection, mais on peut dire que l’algorithme converge en n+m itérations, n et m étant le nombre de sommets de chaque polyèdre.

La distance évaluée est locale donc, lors d’une interpénétration, celle-ci est négative. Mais, il se peut que la distance soit négative sans qu’il y ait interpénétration.

Le principe de l’algorithme est le suivant : on considère deux polyèdres P et Q. On notera T_p, T_q les vecteurs de translation, R_p, R_q les matrices de rotation des deux polyèdres et R_p^{-1}, R_q^{-1} leur inverse.

- On évalue la fonction support de P dans la direction S . R_p^{-1}
- On évalue la fonction support de P dans la direction $-S$. R_q^{-1}

Cela nous renvoie deux sommets p et q, ce qui permet d’évaluer le vecteur $r = (q.R_q + T_q) - (p.R_p + T_p)$. Si $S.r \geq 0$ alors pas de collision on s’arrête. Sinon on stocke les sommets dans deux ensembles de simplex relatifs aux deux polyèdres.

A partir de ces simplex on cherche un plan séparateur, si on en trouve un il n’y a pas contact.

Dans le cas contraire il y a forcément contact donc on cherche la paire de point la plus proche entre les deux simplex par l’algorithme de Johnson [67].

Différentes applications L’adaptation de l’algorithme de GJK proposée par Joukadar et Laugier [68] permet de déterminer la distance négative entre les enveloppes convexes, ce qui peut s’interpréter comme une mesure fictive de la distance entre deux enveloppes qui s’intersectent.

A partir de la dernière direction trouvée à l'issue de l'algorithme de GJK, on applique une nouvelle fois l'algorithme pour trouver une nouvelle direction. Si les deux directions sont égales alors la distance négative est $\|N\| - \|N'\|$, sinon on recommence avec $N = N'$.

L'application directe de cette méthode est de pouvoir traiter la collision entre deux objets avec une méthode par pénalité.

Les modifications apportées par Van Der Bergen [139],[140] permettent de palier à un problème lié à l'algorithme de GJK dont une tendance est de générer des simplexes qui sont progressivement oblong quand l'algorithme itère et d'utiliser un test appelé Separating Axis Test afin d'accélérer les conditions d'arrêt de GJK en partant de la constatation que l'on a pas forcément besoin de déterminer explicitement la distance entre deux objets qui ne sont pas en contact.

L'algorithme proposé par Van Der Bergen [139] a été utilisé dans le cadre du développement d'un logiciel élément discret [105] à l'Institut Français du Pétrole. La méthode de résolution adoptée est du type Molecular Dynamics, et l'algorithme est utilisé pour définir la normale et deux points. Chaque particule est considérée comme l'assemblage d'un élément constituant le corps de l'objet et d'une enveloppe, la crôte. La détection entre deux polyèdres se fait donc de la manière suivante, considérons deux polyèdres A et B convexes, le premier test consiste à déterminer s'il existe un point de contact entre le corps de A et l'enveloppe de B . Dans le cas d'une intersection on réalise l'opération inverse, on obtient donc deux points de contacts, le vecteur reliant ces deux points est pris comme normale au contact, l'interpénétration comme la distance entre ces deux points, et le point de contact est pris comme le centre du segment reliant les deux points trouvés. L'ensemble de ces informations permet l'évaluation des forces élastiques artificielles s'exerçant sur les particules et ainsi de calculer leur mouvement.

Algorithme de Lin-Canny [83]

L'approche développée par Lin et Canny consiste, à partir de la description des régions de Voronoï de polyèdres convexes, de trouver les éléments caractéristiques les plus proches de deux polyèdres (sommet, face, arête) et de statuer s'il y a contact. Il est nécessaire de définir des critères permettant de définir les différentes configurations entre les éléments caractéristiques et de manière itérative de converger vers les deux éléments caractéristiques les plus proches. Ensuite il faut calculer expressément leur intersection. Mais cet algorithme donne les deux éléments caractéristiques les plus proches uniquement si les deux enveloppes sont disjointes. Pour remédier à ce défaut Mirtich a développé une version plus élaborée permettant de traiter le cas où deux polyèdres s'interpénètrent.

Définition des régions de Voronoï et du diagramme de Voronoï associé à un polyèdre Considérons un ensemble S de points $\{S_1, \dots, S_N\}$ de l'espace. La région de Voronoï associée à un point S_i de S est l'ensemble des points de l'espace les plus proches de S_i que de tout autre point de l'ensemble.

Cette définition est utilisée pour déterminer les régions de Voronoï associées à chacun des éléments frontières d'un polyèdre (sommet, arête, face). Une région de Voronoï associée à un élément frontière d'un polyèdre est un ensemble de points extérieurs au polyèdre qui lui sont plus proches que de tout autre élément.

Région de Voronoï associée à un sommet : La région de Voronoï associée à un sommet S d'un polyèdre donné est la région délimitée par les plans contenant S et de normales les arêtes issues de ce sommet, c'est-à-dire que les plans sont perpendiculaires aux arêtes.

Un point P est plus proche de S que de tout autre élément du polyèdre s'il appartient à la région de Voronoï associée à S .

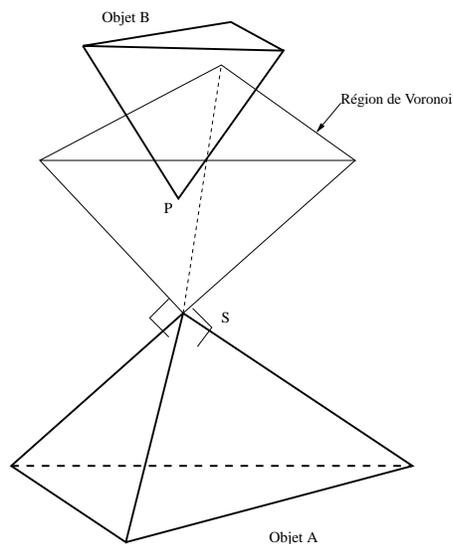


FIG. 12.4 – Région de Voronoï associée à un sommet S .

Région de Voronoï associée à une arête : La région de Voronoï associée à une arête $[S_1, S_2]$ est délimitée par 4 plans :

- les deux plans perpendiculaires à l'arête $[S_1, S_2]$ et qui passent respectivement par S_1 et S_2 , notés (U,V),
- les deux plans contenant l'arête et qui sont perpendiculaires aux faces du polyèdre définissant $[S_1, S_2]$.

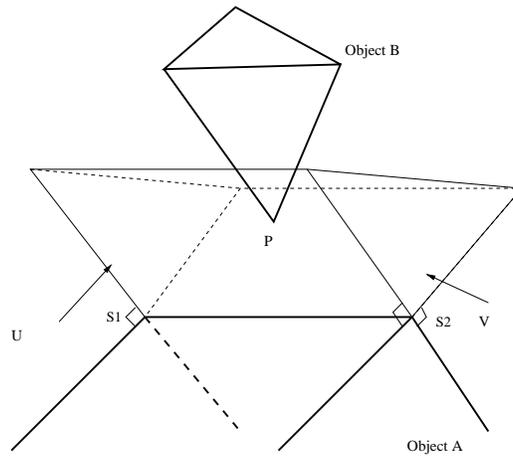


FIG. 12.5 – Région de Voronoï associée à une arête.

Région de Voronoï associée à une face : La région de Voronoï associée à une face F est délimitée par les plans perpendiculaires à cette face contenant les arêtes qui la composent.

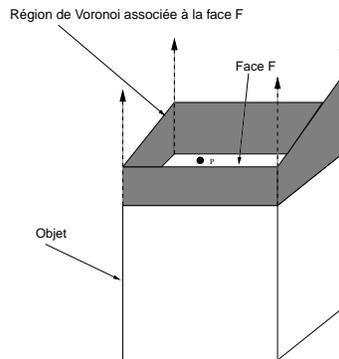


FIG. 12.6 – Région de Voronoï associée à une face.

Diagramme de Voronoï associé à un polyèdre : L'ensemble des régions de Voronoï associées aux différents éléments frontières du polyèdre forment le diagramme de Voronoï du polyèdre.

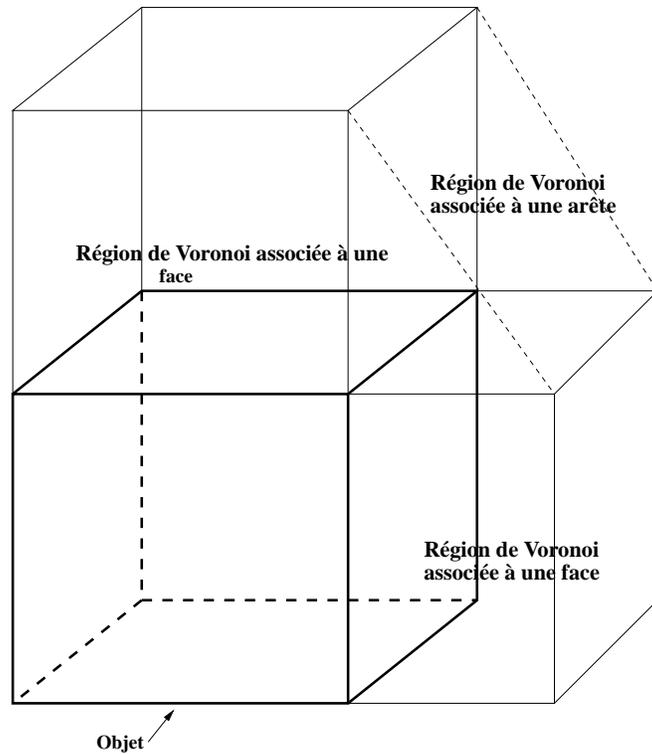


FIG. 12.7 – Exemple de diagramme de Voronoï pour un cube.

Définition des critères Les régions de Voronoï sont exploitées pour définir trois critères permettant de statuer sur la nature du contact. Considérons deux polyèdres convexes A et B .

- Le critère point/sommet permet de statuer si un sommet de A est dans la région de Voronoï d'un sommet de B ,
- le critère point/arête permet de statuer si un sommet de A est dans la région de Voronoï d'une arête de B ,
- le critère point/face permet de statuer si un sommet de A est dans la région de Voronoï d'une face de B .

Configurations de contact L'algorithme fonctionne de la manière suivante : on sélectionne 2 éléments frontières arbitraires (sommet, arête, face) appartenant aux polyèdres A et B . Les points les plus proches de ces deux éléments frontière sont déterminés. Si chacun de ces points appartient à la région de Voronoï associée à l'élément frontière du polyèdre en vis-à-vis alors ce sont les points les plus proches pour les polyèdres. Sinon, chacun des points est plus proche d'un autre élément frontière du polyèdre. Ce sont ces éléments qui sont alors sélectionnés pour réitérer l'opération précédente jusqu'à convergence.

Les configurations sont les suivantes :

- sommet/sommet : chacun des sommets vérifie l'un par rapport à l'autre le critère Point/Sommet.
- sommet/arête : le sommet S vérifie le critère Point/Arête et que le point le plus proche de l'arête par rapport à S vérifie le critère Point/Sommet.

- sommet/face : le sommet S vérifie le critère Point/face et que le sommet de la face le plus proche de S vérifie le critère Point/Sommet.
- arête/arête : les deux points les plus proches de ces deux arêtes vérifient le critère Point/Sommet l'un par rapport à l'autre.
- arête/face : si l'arête est parallèle et qu'elles se recouvrent alors les caractéristiques sont vérifiées. Sinon l'algorithme considère l'arête avec les arêtes de la face.
- face/face : faut qu'elles soient parallèles et qu'elles se recouvrent sinon l'algorithme renvoie la face et la plus proche arête de la face.

Cet algorithme donne en sortie les éléments frontières les plus proches mais les points de contact ne sont pas calculés. Les améliorations apportées par Mirtich [85] ne fournissent pas de points supplémentaires, mais permettent de statuer du contact si deux polyèdres s'interpénètrent.

La méthode développée par Cundall [35]

Cette méthode est basée sur la recherche d'un plan séparateur que l'on appellera *common-plane*. Elle consiste à déterminer s'il existe un plan entre deux polyèdres tel que les enveloppes soit séparées par ce plan. Dans le cas où il n'existe pas de plan vérifiant cette condition, il y a contact.

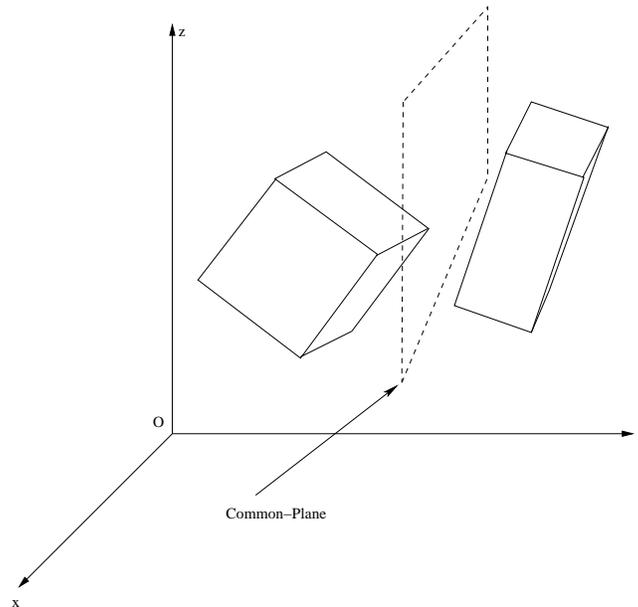


FIG. 12.8 – Principe du plan séparateur.

La détermination d'un point commun éventuel entre un polyèdre et le plan séparateur se fait par des calculs de produits scalaires entre la normale au plan séparateur et les vecteurs reliant les sommets et un point de référence appartenant à ce plan.

L'algorithme pour positionner le plan séparateur Soient deux polyèdres A et B , possédant respectivement N_A et N_B sommets, et de centre G_1 et G_2 . On notera l'ensemble des sommets de A $(S_i^A)_{i=1,\dots,N_A}$ et de B $(S_i^B)_{i=1,\dots,N_B}$. L'objectif est de trouver un plan qui maximise la distance entre le plan séparateur et les sommets les plus proches. On appellera cette distance l'interstice.

La première étape consiste en une translation du plan séparateur. Pour le premier test on se donne comme point de référence le point milieu $C = \frac{G_1 + G_2}{2}$ et on choisit la normale au plan séparateur comme étant $n = \frac{G_1 G_2}{\|G_1 G_2\|}$.

On teste l'ensemble des sommets de chaque polyèdre pour déterminer leur distance par rapport au plan séparateur :

$$d_2 = \min_{i=1, \dots, N_B} \{n \cdot CS_i^B\}$$

$$d_1 = \max_{i=1, \dots, N_A} \{n \cdot CS_i^A\}$$

d_2 représente la distance de la projection du plus proche sommet de B sur l'axe des centres entre cette projection et le point de référence C . d_1 représente la distance de la projection du plus proche sommet de A sur l'axe des centres entre cette projection et le point de référence C .

Si la quantité $(d_2 - d_1)$ est négative alors les blocs peuvent se toucher, on translate alors le point de référence et on a $C = C + \frac{(d_1 + d_2)n}{2}$.

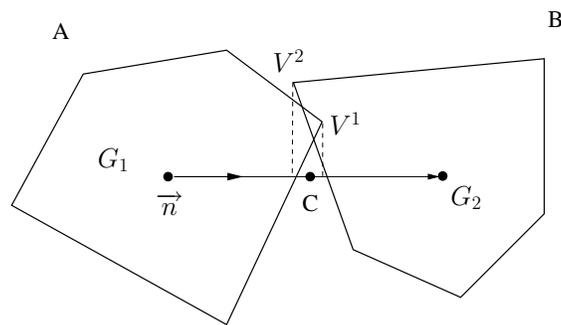


FIG. 12.9 – $C = C + (d_1 + d_2)n/2$

Dans le cas contraire les blocs ne se touchent pas et $C = \frac{V^1 + V^2}{2}$, c'est le milieu du segment des sommets les plus proches par rapport au plan.

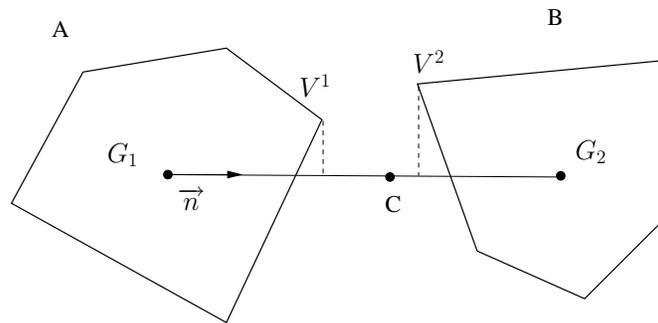


FIG. 12.10 – $C = \frac{V^1 + V^2}{2}$

Dans les deux cas il faut ensuite effectuer une ou plusieurs rotations pour savoir s'il existe une position du plan pour laquelle il n'y a aucun point de contact entre les polyèdres et le plan. Si on ne trouve pas de rotation pour laquelle le plan sépare les deux polyèdres alors il y a contact.

L'étape suivante consiste à effectuer des rotations du plan séparateur autour du point de référence C qui a été translaté selon les opérations vues précédemment.

Connaissant le vecteur normal au plan on définit deux vecteurs orthogonaux formant un trièdre avec n , que l'on appellera p et q . On applique ensuite les quatre perturbations suivantes :

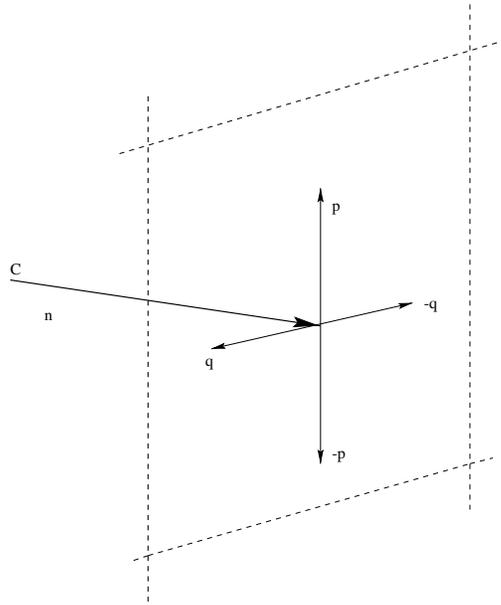


FIG. 12.11 – Schéma du principe des quatre perturbations.

$$n = (n + kp)/z$$

$$n = (n - kp)/z$$

$$n = (n + kq)/z$$

$$n = (n - kq)/z$$

avec $z^2 = 1 + k^2$ et k un paramètre à fixer.

L'algorithme consiste à appliquer quatre perturbations et d'évaluer le $\max\{-d_1, d_2\}$. Dans le cas où l'on trouve un interstice plus grand pour l'une des directions, celle-ci devient la nouvelle normale n . Dans le cas contraire on réalise les mêmes opérations avec $k = \frac{k}{2}$, et l'algorithme s'arrête si $k < k_{min}$.

Une fois la position du plan séparateur déterminée, on recalcule l'interstice total, $(d_2 - d_1)$. Si celui-ci est négatif alors il y a contact.

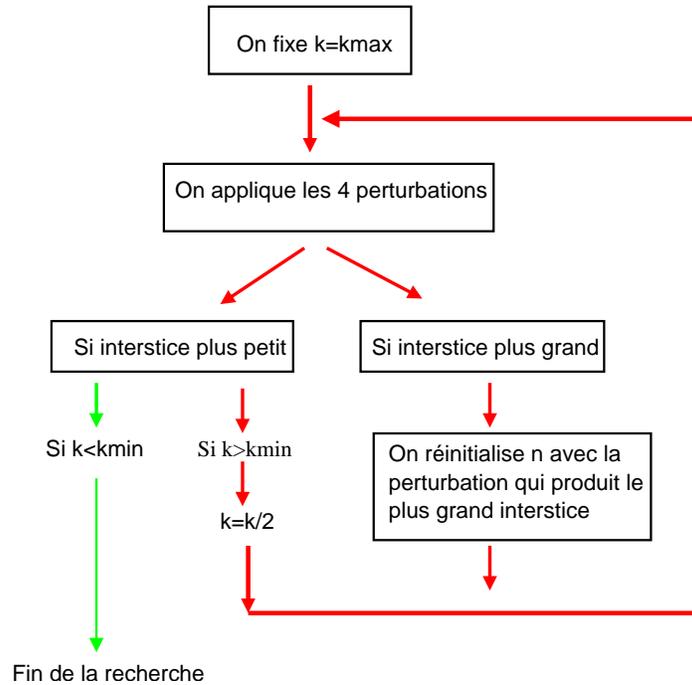


FIG. 12.12 – Algorithme de positionnement du plan séparateur.

Mise en œuvre de la méthode L'utilisation de cette méthode nécessite de fixer les paramètres k_{max} et k_{min} définissant les amplitudes des perturbations appliquées. Ces deux valeurs correspondent à des variations d'environ 5 degrés autour d'une position d'origine [35]. Mais cette approche est itérative et ne nous permet pas de déterminer plusieurs points de contacts, mais de trouver une normale qui peut être considérée comme la normale du repère local de contact.

12.1.3 Conclusion

La détection de collisions entre polyèdres est une étape difficile à la fois théorique et technique. Les algorithmes présentés ne permettent pas, à moins d'une adaptation, de déterminer plusieurs points de contact. L'algorithme de *GJK* apparaît le plus performant à l'heure actuelle mais son adaptation apparaît complexe.

Il apparaît tout de même un détail important, la plupart des algorithmes utilisent le calcul des fonctions support de polyèdre, comme l'algorithme de shadow-overlap proposé par Moreau. De plus la qualité de la programmation joue un rôle très important dans les performances des divers algorithmes existants.

L'expérience acquise dans le cas bidimensionnel, nous amène à proposer une méthode basée sur la méthode du shadow-overlap.

Résumé : Les méthodes par éléments discrets constituent une alternative par rapport aux méthodes par éléments finis pour la modélisation du comportement d'un milieu divisé : sol, milieux granulaires, etc . Dans ce mémoire l'objectif est d'étudier un matériau granulaire soumis à des sollicitations cycliques : le ballast des voies ferrées soumis au passage des trains. Nous présentons à la suite d'une étude bibliographique sur le comportement du ballast, la méthode de résolution NonSmooth Contact Dynamics, et nous exposons l'ensemble des développements nécessaires dans le cas bidimensionnel et tridimensionnel : un algorithme de détection entre polygones et entre polyèdres convexes, le paramétrage, la résolution du problème de contact frottant. Nous déterminons ensuite les paramètres optimaux pour des simulations de chargement cyclique. Dans une dernière partie, nous présentons ensuite un ensemble de résultats montrant l'aptitude des méthodes par éléments discrets à décrire l'évolution d'un massif granulaire sous chargement cyclique. L'analyse d'une comparaison entre une expérience et la simulation met évidence le comportement particulier de ce type de système, qui s'assimile à une couche mince granulaire où des micro-structures particulières guident la réponse mécanique du milieu. Dans le cas tridimensionnel, des comportements mécaniques connus ont été retrouvés, à titre d'exemple, en analysant l'évolution de structures maçonnées. Nous présentons une étude de la résistance latérale de la voie ballastée, en considérant des formes de grains issues de la digitalisation de grains réels, pour laquelle on retrouve un comportement identifié expérimentalement.

Mots clés : méthode par éléments discrets, NonSmooth Contact Dynamics, détection de contact entre polyèdres, chargement cyclique, ballast, résistance latérale, couche mince granulaire, contact frottant, matériaux granulaires.

Abstract : Discrete element methods are an alternative to finite element approach to modelise the behaviour of granular materials. This work is devoted to the study of a granular matter submitted to cyclic loadings : the ballast of the railway track submitted to repeated train passing. We choose the NonSmooth Contact Dynamics approach for the resolution method, and we present all technical aspects for the two-dimensional and three-dimensional cases : contact detection algorithm between convex polygons and convex polyhedra, the kinematic parametrization, the resolution of the contact and friction problem. We investigate the best parameters for numerical computation of cyclic loadings. In the following we present some results in order to show the ability of discrete element methods to describe the behaviour of granular matter under cyclic loading. A comparison between experiment and numericals computations underline the special behaviour of this kind of system. We focus on the thin granular layer behaviour with a specific mechanical reponse due to the creation of special structures. The three-dimensional model has been used as an example to study well known behaviour of masonry structure. We present a numerical study of lateral resistance of railway track based on an experiment with digitised ballast grains.

keywords : discrete element method, NonSmooth contact dynamics, contact detection for convex polyedra, cyclic loading, ballast, lateral resistance, thin granular layer, contact and friction, granular matter.

Discipline : Mécanique.

L.M.G.C. UMR-558 : Université Montpellier II, Place Eugène Bataillon, 34095 Montpellier Cedex 05.