Conception Robuste de Mécanismes

Stéphane Caro

▶ **To cite this version:**

Stéphane Caro. Conception Robuste de Mécanismes. Automatique / Robotique. Ecole Centrale de Nantes (ECN), 2004. Français. NNT : . tel-00078374

HAL Id: tel-00078374
https://theses.hal.science/tel-00078374

Submitted on 5 Jun 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Ecole Centrale de Nantes *Université de Nantes*

ÉCOLE DOCTORALE

MECANIQUE, THERMIQUE ET GENIE CIVIL

Année 2004 N° B.U. :

Thèse de DOCTORAT

Diplôme délivré conjointement par
l'École Centrale de Nantes et l'Université de Nantes

Spécialité : Génie Mécanique

Présentée et soutenue publiquement par :

STEPHANE CARO

le 17 décembre 2004
à l'Ecole Centrale de Nantes

TITRE

CONCEPTION ROBUSTE DE MECANISMES

JURY

Président :	Grigore GOGU	Professeur, IFMA, Clermont-Ferrand
Rapporteurs :	Jorge ANGELES	Professeur, Université McGill, Montréal
	Fethi Ben OUEZDOU	Maître de Conférences, HdR, Université de Versailles, St Quentin
Examinateurs :	Fouad BENNIS	Professeur, IRCCyN, Ecole Centrale de Nantes
	Alain RIVIERE	Professeur, Institut Supérieur de Mécanique de Paris
	Philippe WENGER	Directeur de recherche CNRS, IRCCyN, Nantes

Directeurs de thèse : Fouad BENNIS et Philippe WENGER
Laboratoire : Institut de Recherche en Communications et Cybernétique de Nantes

N° ED 0367-171

Remerciements

Avant de reposer ma plume et de vous laisser lire ma prose, je tiens à remercier les personnes sans lesquelles ces trois années de dur labeur mais formatrices n'auraient pas été aussi plaisantes et enrichissantes.

Pour commencer, je tiens à exprimer ma gratitude envers mes directeurs de thèse, les Professeurs Fouad Bennis et Philippe Wenger. Leurs bons conseils, disponibilité, écoute, gentillesse et générosité m'ont en effet permis de présenter mes travaux de thèse dans les meilleures conditions.

Je tiens aussi à remercier Jean-François Lafay pour son accueil à l'Institut de Recherche en Communications et Cybernétique de Nantes, laboratoire très confortable au coeur d'une ville toute aussi agréable.

Je suis aussi très honoré que le Professeur Grigore Gogu ait présidé ma soutenance de thèse. Ma profonde gratitude s'adresse naturellement au Professeur Jorge Angeles pour avoir rapporté ma thèse et pour les nombreux échanges que nous avons eu ces dernières années. Je remercie également le Maître de Conférences et HdR Fethi Ben Ouezdou, rapporteur, ainsi que le Professeur Alain Rivière, examinateur, pour l'intérêt porté à mes travaux.

Inévitablement, une part de ma reconnaissance va aux membres de l'équipe MCM de l'IRCCyN pour le bon esprit et la solidarité, et plus particulièrement à Damien Chablat pour son aide précieuse et ses encouragements depuis le début de cette initiation à la recherche. Je tiens aussi à saluer mes ami(e)s doctorant(e)s de l'IRCCyN qui m'ont apporté beaucoup au travers de nombreuses discussions aussi bien sérieuses qu'amusantes. Je pense entre autres à Maher, Sylvain, Sébastien, Émilie, Aude, Michel, Mathieu, Vincent, Thierry, Alexandre, Minh Tu...

Il va de soi que mes remerciements s'adressent pareillement au cher « coloc » Mathias qui m'accompagne depuis le début de cette longue épopée, ainsi qu'à son « acolyte » Stéphane pour ses nombreuses visites à Nantes toujours très rafraîchissantes.

Mes dernières gouttes d'encre coulent enfin pour adresser mes vifs remerciements à mes parents et mes frères pour leur amour, leur confiance et leur soutien inébranlable.

“ Ne faites rien contre votre conscience, même si l’Etat vous le demande.”

Albert Einstein

Sommaire

Introduction **1**

1 État de l'art de la conception robuste de mécanismes **5**
1.1 Propriétés générales des mécanismes articulés 6
1.2 Les origines de la conception robuste 15
1.3 La conception axiomatique et la conception robuste 15
1.4 Formulation d'un problème de conception robuste locale 19
1.5 Résolution d'un problème de conception robuste 21
Conclusion 25

2 Analyse de sensibilité d'un manipulateur d'architecture parallèle **27**
Introduction 28
2.1 Manipulateur étudié : l'Orthoglide 30
2.2 Sensibilité des performances cinématiques du manipulateur 31
2.3 Sensibilité de la situation de l'effecteur 34
Conclusion 57

3 Indices de robustesse et synthèse de tolérances de mécanismes **59**
Introduction 60
3.1 Analyse de la sensibilité des performances d'un mécanisme 61
3.2 Indices de robustesse 64
3.3 Utilisation de la robustesse comme critère de dimensionnement 68
3.4 Synthèse de tolérances de mécanismes 77
Conclusion 89

4 Étude de la robustesse de manipulateurs $3R$ **91**
Introduction 92
4.1 Propriétés des manipulateurs 3R 93
4.2 Robustesse des manipulateurs génériques et non-génériques 101
Conclusion 110

Conclusion générale et Perspectives **121**

Références **125**

Publications personnelles **133**

A Modèle simplifié de l'Orthoglide et tolérances des limites articulaires **135**

A.1 Paramétrage du manipulateur 135

A.2 Performances au sein de l'espace de travail 138

A.3 Calcul des limites articulaires 140

A.4 Synthèse de tolérances des limites articulaires 142

B Conditions d'isotropie du manipulateur $2R$ **145**

Table des figures

1.1 Structure d'un manipulateur d'architecture sérielle 7
1.2 Représentation d'une chaîne cinématique fermée 8
1.3 Exemples de machines six axes à structure parallèle 9
1.4 Machine parallèle de type Delta (INDEX-Werke) 9
1.5 Exemple de singularité parallèle 14
1.6 Exemple de singularité sérielle 14
1.7 Exemple de singularité structurelle 14
1.8 Fonctions perte « double échelons » et « quadratique » 18
1.9 Système bielle-manivelle 21
1.10 Optimisation statistique, recherche du minimum robuste 22
1.11 Décalage des frontières des contraintes 24
1.12 Problème d'optimisation d'aide à la décision et surface de réponse 25

2.1 Prototype de l'Orthoglide 29
2.2 Paramétrage de l'Orthoglide 30
2.3 Espace de travail de l'Orthoglide et cube C_u 31
2.4 Limites articulaires et leur tolérance 32
2.5 Morphologie de la $i^{\text{ème}}$ jambe de l'Orthoglide 35
2.6 Sensibilité moyenne de p_x lorsque P parcourt C_u 39
2.7 Sensibilité moyenne de p_y lorsque P parcourt C_u 39
2.8 Sensibilité moyenne de p_z lorsque P parcourt C_u 40
2.9 Sensibilité moyenne de $\mathbf{p}$ lorsque P parcourt C_u 40
2.10 Sensibilité de p_x aux variations de la première jambe 41
2.11 Sensibilité de p_y aux variations de la première jambe 41
2.12 Sensibilité de $\mathbf{p}$ aux variations de la première jambe 41
2.13 Sensibilité globale de $\mathbf{p}$, p_x, p_y, p_z 41
2.14 Sensibilité de p_x dans la configuration isotrope cinématique 42
2.15 Sensibilité de $\mathbf{p}$ dans la configuration isotrope cinématique 42
2.16 Sensibilité de p_x lorsque l'effecteur se trouve en Q_2 43
2.17 Sensibilité de $\mathbf{p}$ lorsque l'effecteur se trouve en Q_2 43

2.18 Configuration isotrope cinématique de l'Orthoglide 43
2.19 Variations de la chaîne OA_i 45
2.20 Variations de la chaîne A_iB_i 45
2.21 Variations de la chaîne $B_iB_{ij}C_i$ 45
2.22 Variations de la chaîne $C_{ij}C_iP$ 45
2.23 Variations du $i^{\text{ème}}$ parallélogramme 50
2.24 Sensibilité de la position de l'effecteur le long de Q_1Q_2 54
2.25 Sensibilité de l'orientation de l'effecteur le long de Q_1Q_2 55

3.1 Ellipse de sensibilité, $m = 2$ 63
3.2 Influence de l'indice RI_1 sur la forme et la taille des ellipses de sensibilité . 65
3.3 Amortisseur 66
3.4 Indices de robustesse 67
3.5 Ellipses de sensibilité de l'amortisseur 68
3.6 Dimensionnement d'un mécanisme mono-performance 70
3.7 Dimensionnement d'un mécanisme multi-performances (1) 71
3.8 Dimensionnement d'un mécanisme multi-performances (2) 71
3.9 Manipulateur $2R$ et sa cible 72
3.10 $RI_2 = f(l_1,l_2)$ 73
3.11 Variables de conception (l_1,l_2) correspondant à une même valeur de RI_2 . . 75
3.12 Manipulateurs robustes 76
3.13 Boîte de tolérances des variables de conception optimale 80
3.14 Boîte de tolérances optimale 82
3.15 Manipulateur $3R$ 83
3.16 Ellipsoïde de sensibilité le plus contraignant et boîte de tolérances optimale 85
3.17 Validation de la boîte de tolérances optimale 85
3.18 La boîte de tolérances optimale n'est pas incluse dans l'octaèdre 86
3.19 Ellipsoïde critique et boîte de tolérances optimale 88
3.20 Boîte de tolérances comprise à l'intérieur de l'ellipsoïde de sensibilité 89
3.21 Erreur de position de l'effecteur inférieure à 10μm 89

4.1 Manipulateur $3R$ orthogonal 93
4.2 Robot industriel de type PUMA 93
4.3 Singularités d'un manipulateur $3R$ 94
4.4 Manipulateur cuspidal, trajectoire T sans franchissement de singularité . . 96
4.5 Mécanisme de Bennett 98
4.6 Manipulateur de type PUMA non générique 98
4.7 Manipulateur non générique 99
4.8 Manipulateur générique, classe 2(1,1) 100
4.9 Manipulateur générique, classe 1(0,0) 100

4.10 Zones de manipulateurs génériques et de manipulateurs non-génériques . . 101
4.11 Espaces articulaire et de travail du manipulateur de dimensions 103
4.12 Image de l'aspect A_1 103
4.13 Image de l'aspect A_2 103
4.14 Image de l'aspect A_3 103
4.15 Image de l'aspect A_4 103
4.16 Espaces articulaire et de travail du manipulateur de dimensions 104
4.17 Image de l'aspect B_1 105
4.18 Image de l'aspect B_2 105
4.19 Espaces articulaire et de travail du manipulateur de dimensions 105
4.20 Zoom sur la trajectoire T : contournement d'un point cusp 106
4.21 Trajectoire T incluse dans une région T-parcourable 106
4.22 Espaces articulaire et de travail du manipulateur de dimensions 106
4.23 Zoom sur la trajectoire T : pas de contournement de point cusp 107
4.24 Portion T_1 de la trajectoire T incluse dans la 1^{re} région T-parcourable . . . 107
4.25 Portion T_2 de la trajectoire T incluse dans la 2^{e} région T-parcourable . . . 107
4.26 Portion T_2 de la trajectoire T incluse dans la 3^{e} région T-parcourable . . . 107
4.27 Erreurs de précision maximales du manipulateur non-générique 112
4.28 Erreurs de précision maximales du manipulateur non-générique 113
4.29 Erreurs de précision maximales du manipulateur non-générique 114
4.30 Erreurs de précision maximales du manipulateur non-générique 115
4.31 Performances cinématiques et sensibilité du manipulateur non-générique ... 116
4.32 Performances cinématiques et sensibilité du manipulateur non-générique ... 117
4.33 Performances cinématiques et sensibilité du manipulateur non-générique ... 118
4.34 Performances cinématiques et sensibilité du manipulateur non-générique ... 119

A.1 Modèle simplifié de l'Orthoglide 136
A.2 Posture zéro de l'Orthoglide 136
A.3 Partie de l'ensemble opérationnel exempt de singularité 139
A.4 Espace de travail selon la direction Q_1Q_2 140
A.5 Conditionnement numérique inverse de la matrice jacobienne cinématique . 142
A.6 Facteurs d'amplification de vitesse 143
A.7 Synthèse des tolérances des limites articulaires 144

B.1 Manipulateur $2R$ 145
B.2 Une configuration isotrope cinématique du manipulateur $2R$ 146

Liste des tableaux

1.1 Comparaison des manipulateurs d'architectures sérielle et parallèle 10

2.1 Nomenclature propre à l'analyse de sensibilité cinématique 36
2.2 Nomenclature propre à l'analyse de sensibilité vectorielle 47
2.3 Récapitulatif des résultats de l'analyse de sensibilité de l'Orthoglide 57

Introduction

Objectifs de la thèse

Toute conception de produit est soumise à des variations qui peuvent être dues à des sources diverses, incluant par exemple les défauts de fabrication, les incertitudes sur les propriétés des matériaux et l'environnement. L'ignorance de ces variations peut se traduire par des conceptions non robustes, onéreuses et défaillantes. Par ailleurs, la réduction des variations est reconnue universellement comme étant la clé de l'amélioration de la fiabilité d'un produit et de la productivité. En effet, en réduisant les variations le plus tôt possible dans le cycle de vie d'un produit, les défauts sont minimisés dans les phases en aval.

Selon Taguchi (1978), pionnier de la conception robuste, « au lieu d'éliminer ou de réduire les causes de la variabilité des performances d'un produit, il est préférable d'ajuster sa conception afin de le rendre insensible aux causes des variations ». La conception robuste vise ainsi à optimiser les paramètres de conception d'un produit et de son procédé de fabrication afin de réduire la sensibilité de ses performances aux incertitudes. Ces dernières peuvent provenir d'erreurs de mesure, des tolérances dimensionnelles et géométriques, d'évènements futurs ne pouvant être connus, des changements de l'environnement.

La démarche utilisée en conception robuste est aussi valable dans d'autres domaines que celui de l'ingénierie, tels que l'économie, les sciences physiques, la presse. Par exemple, la notion de robustesse peut être utilisée lors de la planification de la production de l'énergie d'une centrale électrique lorsque la demande n'est pas connue, la vente d'un quotidien, ou encore lors de l'allocation de budgets à différentes activités non utilisés dans l'immédiat.

Les travaux présentés dans cette thèse portent sur l'étude de la robustesse de mécanismes. Ce sont principalement des mécanismes articulés d'architecture sérielle ou parallèle. Parmi les intérêts d'améliorer la robustesse d'un mécanisme, nous pouvons citer l'élargissement du domaine de variations admissible en vue de simplifier la synthèse des tolérances de ses paramètres géométriques. Naturellement, la connaissance de l'effet des variations des paramètres géométriques permet au concepteur et au fabricant de mieux cibler les éléments pour lesquels les tolérances doivent être serrées ou larges.

Participation à un programme interdisciplinaire de recherche

Cette thèse s'inscrit dans le cadre du projet MP2 (Machines Parallèles de Précision) du programme interdisciplinaire de recherche ROBEA (ROBotique et Entités Artificielles) du département STIC du CNRS. Le projet MP2 regroupe les équipes de l'INRIA [1] Sophia Antipolis, de l'IRCCyN [2], du LaRAMA [3], du LASMEA [4] et du LIRMM [5]. Le projet ROBEA-MP2 se propose d'étudier en deux ans les moyens d'améliorer la précision des machines parallèles non-classiques : machines isotropes, hybrides, à structure métrologique découplée ou en position quasi-singulière. Pour améliorer la précision d'un mécanisme, il est nécessaire d'agir à la fois de façon préventive (au niveau de la conception) et corrective (au niveau de l'étalonnage). Dans le cadre de ce projet, l'un des intérêts d'utiliser la conception robuste est de déterminer les valeurs nominales des paramètres de conception d'un mécanisme afin de minimiser l'influence de leurs variations sur ses performances. La conception robuste doit ainsi permettre d'améliorer la précision du mécanisme et de réduire son coût de fabrication, notamment grâce à des tolérances dimensionnelles plus larges.

Les principales contributions de cette thèse résident dans l'analyse de sensibilité de l'Orthoglide : manipulateur d'architecture parallèle à trois degrés de liberté comprenant des articulations de type parallélogramme, la détermination d'un indice de robustesse, la formulation d'une procédure de synthèse de tolérances, et l'étude de la robustesse d'une famille de manipulateurs d'architecture sérielle à trois degrés de liberté.

Organisation du mémoire

Notre étude se décompose ainsi en quatre chapitres. La premier chapitre est consacré à un rappel des propriétés générales des mécanismes étudiés, à une étude bibliographique de la conception robuste et à la formulation d'un problème de conception robuste. Les quantités présentes dans un problème de conception robuste sont divisées en trois ensembles : les variables de conception (VC), les paramètres de conception environnementaux (PCE) et les fonctions performances (FP). Les valeurs nominales des VC sont contrôlables par le concepteur mais leur valeur réelle reste incertaine. Les PCE représentent l'environnement du mécanisme étudié et sont au delà de la décision du concepteur. Les FP caractérisent

1. INRIA : Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique.
2. IRCCyN : Institut de Recherche en Communications et Cybernétique de Nantes.
3. LaRAMA : Laboratoire de Recherches et Applications en Mécanique Avancée, IFMA, Clermont-Ferrand.
4. LASMEA : LAboratoire des Sciences et Matériaux pour l' Electronique et d'Automatique. Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand.
5. LIRMM : Laboratoire d'Informatique, de Robotique et de Microelectronique de Montpellier.

les performances du système étudié et dépendent des VC et des PCE.

Le deuxième chapitre porte sur l'analyse de la sensibilité de l'Orthoglide. L'un des intérêts de cette analyse est de connaître l'influence des variations des paramètres géométriques sur la position et l'orientation (i.e. la situation) de l'effecteur du manipulateur. Une autre motivation est de simplifier la synthèse de tolérances des dimensions du manipulateur. Par ailleurs, cette analyse nous permet de repérer les configurations du manipulateur pour lesquelles la sensibilité de la situation de l'effecteur aux variations est globalement minimale ou maximale.

Le troisième chapitre est consacré à la définition d'un indice de robustesse optimal et à la formulation d'une procédure de synthèse de tolérances décomposée en deux étapes séquentielles. La première étape consiste à rendre la conception d'un mécanisme robuste afin d'élargir le domaine admissible de variations de ses VC et PCE. L'indice de robustesse optimal fait office de critère de dimensionnement. Les tolérances des VC peuvent ensuite être synthétisées au moyen d'une méthode de synthèse de tolérances que nous développons au moyen d'une approche d'analyse de sensibilité des performances. Plusieurs études de cas sont traitées pour illustrer la pertinence de cette méthode. La procédure de synthèse de tolérances proposée présente l'avantage de simplifier la résolution de problèmes complexes de synthèse de tolérances. En effet, la décomposition du problème en deux étapes séquentielles est plus simple que la résolution d'un problème d'optimisation robuste qui viserait à minimiser les performances et leur écart-type, tout en maximisant les tolérances des variables de conception.

Le quatrième chapitre présente enfin une étude de la robustesse de manipulateurs $3R$. La motivation principale de cette étude est d'identifier des corrélations entre les notions de robustesse et de généricité. Pour cela, nous exploitons différentes propriétés de la robotique telles que la parcourabilité, la précision et la dextérité afin de comparer le comportement des manipulateurs génériques et non-génériques. Notre travail met en évidence, à travers plusieurs exemples, que le fait que le manipulateur soit générique ou non n'a pas d'effet sur ses performances cinématiques et sur la sensibilité de la position de son effecteur aux variations de ses paramètres de conception.

Enfin, ce mémoire est illustré par de nombreuses études de cas telles que la conception robuste d'un amortisseur, le dimensionnement et la synthèse de tolérances de manipulateurs d'architecture sérielle, l'analyse de sensibilité et la synthèse de tolérances d'un manipulateur d'architecture parallèle.

1 État de l'art de la conception robuste de mécanismes

1.1 Propriétés générales des mécanismes articulés 6
1.1.1 Manipulateurs d'architecture sérielle et d'architecture parallèle 7
1.1.2 Espace articulaire et espace de travail 10
1.1.3 Modélisation des robots 11
1.1.4 Singularités 12
1.1.5 Conclusion 15
1.2 Les origines de la conception robuste 15
1.3 La conception axiomatique et la conception robuste 15
1.3.1 La conception axiomatique 16
1.3.2 La conception robuste selon Taguchi 17
1.3.3 Conclusion 19
1.4 Formulation d'un problème de conception robuste locale 19
1.4.1 Les variables de conception 19
1.4.2 Les paramètres de conception environnementaux 19
1.4.3 Les fonctions performances 20
1.4.4 Exemples de formulation d'un problème de conception robuste 20
1.5 Résolution d'un problème de conception robuste 21
Conclusion 25

La prise en compte des variations est essentielle dans la phase de développement d'un produit. En effet, toute conception est soumise à des variations qui peuvent être dues à des sources diverses, incluant les défauts de fabrication, les incertitudes sur les propriétés des matériaux, l'environnement, etc. L'ignorance de ces variations peut se traduire par des conceptions non robustes, onéreuses et défaillantes.

La réduction des variations est reconnue universellement comme étant la clé de l'amélioration de la fiabilité et de la productivité. En effet, en réduisant les variations le plus tôt possible dans le cycle de vie d'un produit, il est possible d'éviter des défauts aux niveaux en aval.

Prenons l'exemple d'un concepteur et fabricant d'amplificateurs opérationnels différentiels utilisés dans des cabines téléphoniques, confronté à un problème de variations de tension

excessives dues à la variabilité de la fabrication. Ces variations de tension créent une mauvaise qualité de la transmission vocale, en particulier pour les téléphones éloignés de la centrale téléphonique. Ainsi, comment peut on faire pour remédier à un tel problème tout en minimisant les coûts ? Les solutions suivantes peuvent être envisagées :

1. dédommager les clients pour la mauvaise qualité sonore ;
2. supprimer les circuits, généralement situés en bout de ligne téléphonique, subissant de fortes variations de tension de l'amplificateur opérationnel ;
3. réduire les tolérances de fabrication ;
4. modifier les valeurs nominales des paramètres de conception des circuits critiques afin de minimiser la sensibilité de leur(s) performance(s) aux causes de leur(s) variation(s), i.e. la variabilité de leur fabrication.

La quatrième approche est évidemment la plus intéressante. En passant de la première approche à la quatrième approche, nous nous situons progressivement de plus en plus en amont dans le cycle de réalisation du produit. En définitive, il est préférable de formuler le problème et de le résoudre le plus en amont possible.

Selon Taguchi (1993), «au lieu d'éliminer ou de réduire les causes de la variabilité des performances d'un produit, il est préférable d'ajuster sa conception afin de le rendre insensible aux causes des variations ». La conception robuste vise ainsi à optimiser les paramètres de conception d'un produit et de son procédé de fabrication afin de réduire la sensibilité de ses performances aux bruits internes et externes.

C'est la raison pour laquelle l'un des objectifs de cette thèse est de développer une méthodologie permettant de générer des conceptions robustes. Nous nous intéresserons principalement la conception de mécanismes articulés.

Avant de rappeler les origines de la conception robuste, formuler un problème de conception robuste, puis parcourir quelques méthodes existantes de résolution de problèmes de conception robuste, nous présentons certaines propriétés des mécanismes étudiés.

1.1 Propriétés générales des mécanismes articulés

Un mécanisme est une combinaison, un agencement de pièces, d'organes, montés en vue d'un fonctionnement d'ensemble, (GDT, 2004). Les mécanismes étudiés dans cette thèse sont principalement des mécanismes articulés, que nous nommons manipulateurs, par abus de langage, même si les applications visées ne se limitent pas à la manipulation d'objets. Un mécanisme de type manipulateur est une succession de corps rigides liés entre eux par des articulations rotoïdes (rotation) ou prismatiques (translation). Les articulations sont supposées idéales, sans jeu et sans élasticité. Nous rappelons ici quelques définitions

permettant de comprendre les manipulateurs dans le cas général avec leurs applications et le vocabulaire que nous utiliserons. Nous faisons la distinction entre deux classes de manipulateurs : les manipulateurs d'architecture sérielle et les manipulateurs d'architecture parallèle. Ces deux classes sont présentées et comparées ci-après.

1.1.1 Manipulateurs d'architecture sérielle et d'architecture parallèle

Nous avons assisté ces dernières années à un fort développement dans le monde industriel de l'utilisation des robots, principalement en raison de leur flexibilité. L'architecture mécanique des robots les plus couramment utilisés est de type sériel et s'avère peu appropriée pour certaines tâches. C'est la raison pour laquelle d'autres types d'architecture ont été étudiés et commencent à trouver leur place dans le monde de la robotique industrielle et, plus récemment, dans celui de la machine-outil. C'est le cas des manipulateurs d'architecture parallèle.

1.1.1.1 Les manipulateurs d'architecture sérielle

Un manipulateur d'architecture sérielle est formé d'une chaîne cinématique simple dont la base et l'organe effecteur possèdent un degré de connexion égal à un (i.e. : ils ne sont reliés qu'à un seul corps) et les autres éléments possèdent un degré de connexion égal à deux (i.e. : ils sont reliés à deux corps). La figure 1.1 illustre la structure d'un manipulateur d'architecture sérielle composé de $n+1$ corps, notés $C_0, \ldots, C_n$, et de n articulations. Le corps C_0 désigne la base du mécanisme et l'organe terminal est attaché au corps C_n. La $j^{\text{ème}}$ articulation connecte le corps C_j au corps C_{j+1} et chaque corps C_j a son propre repère. Le paramétrage de Denavit Hartenberg modifié peut être utilisé pour paramétrer ce type d'architecture, (Khalil et Dombre, 2002).

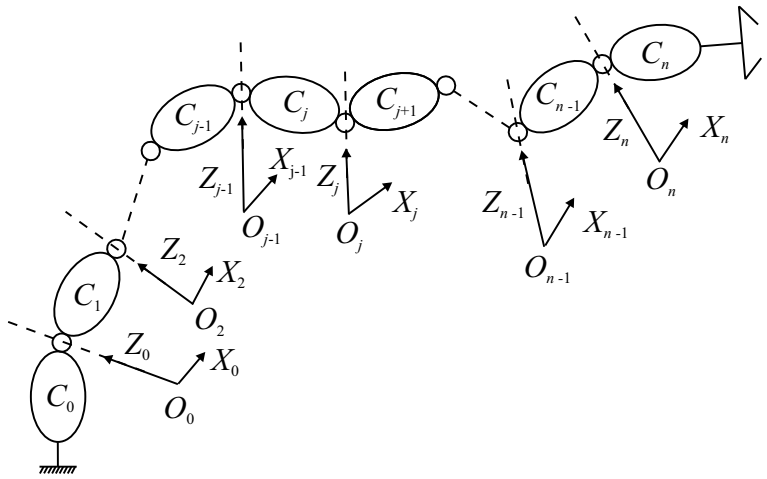


figure 1.1 – *Structure d'un manipulateur d'architecture sérielle*

De nombreuses études ont été menées sur ces manipulateurs. Dans les domaines liés à l'analyse cinématique des manipulateurs sériels, nous pouvons citer Denavit et Hartenberg (1955) pour ses travaux sur la modélisation cinématique, Borrel et Liegeois (1986) pour l'étude des aspects, Wenger (1989) pour l'étude des aspects libres et de la parcourabilité, et Khalil et Dombre (2002) pour l'identification des paramètres géométriques et dynamiques.

1.1.1.2 Les manipulateurs d'architecture parallèle

Les manipulateurs d'architecture parallèle sont constitués d'une plate-forme mobile à n degrés de liberté et d'une base fixe, reliées entre elles par des chaînes cinématiques fermées indépendantes. Une chaîne cinématique fermée est une chaîne cinématique dont l'un des membres, différent de la base, possède un degré de connexion supérieur ou égal à trois, (Merlet, 2000). Les corps C_1, C_2, C_3, C_4, et C_5 représentés par la figure 1.2 forment une chaîne cinématique fermée. Les manipulateurs d'architecture parallèle présentent la

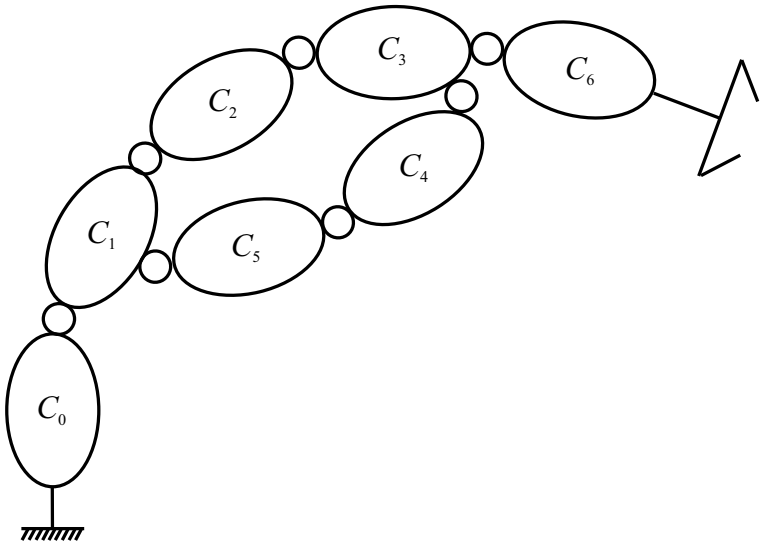
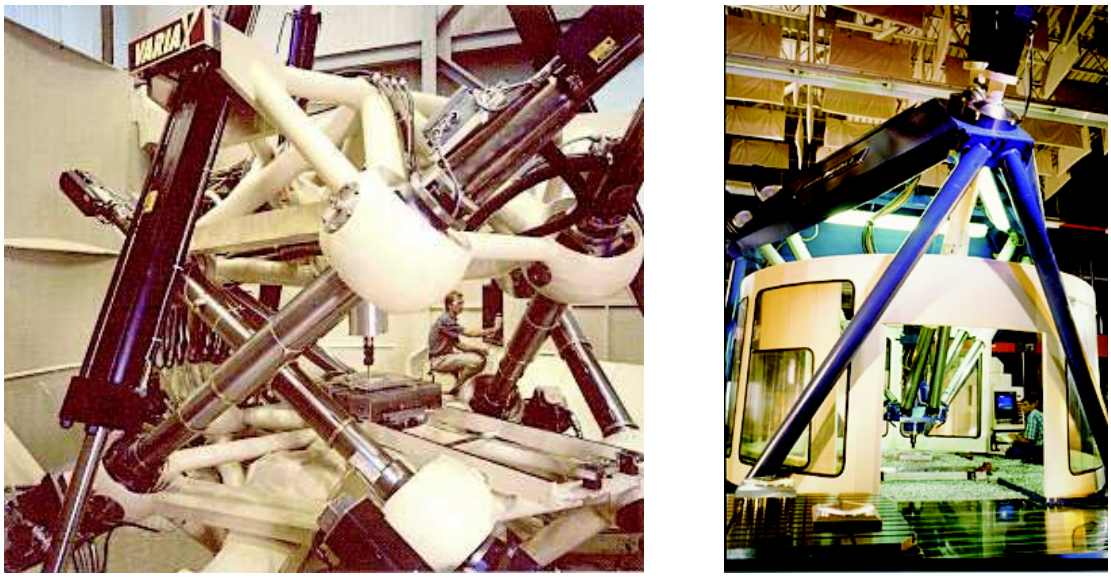


figure 1.2 – *Représentation d'une chaîne cinématique fermée*

particularité d'être rigides, précis, et de pouvoir transporter de lourdes charges. Cependant, leur espace de travail est généralement restreint. En faisant varier le nombre et la topologie des chaînes cinématiques du manipulateur, nous obtenons un grand nombre de manipulateurs d'architecture parallèle. Les figures 1.3(a) et 1.3(b) représentent deux machines outil six axes à structure parallèle dont l'architecture est inspirée de la plate-forme de Gough Stewart. La figure 1.4 représente quant à elle une machine d'usinage d'architecture parallèle de type Delta à trois degrés de liberté de translation. Ce type d'architecture peut être utilisé par exemple pour réaliser des opérations de fraisage, de soudage au laser, d'assemblage, ou de transfert. Une comparaison entre les propriétés des manipulateurs d'architecture sérielle et d'architecture parallèle, essentielle pour le choix du type de manipulateur pour une application donnée, est résumée ci-après.



(a) *machine VARIAX* (b) *machine INGERSOLL*

figure 1.3 – *Exemples de machines six axes à structure parallèle*

figure 1.4 – *Machine parallèle de type Delta (INDEX-Werke)*

1.1.1.3 Comparaison des manipulateurs d'architecture sérielle et d'architecture parallèle

Comme l'indique le tableau 1.1, les manipulateurs d'architecture sérielle présentent l'avantage d'avoir un large espace de travail, alors que la charge transportable est généralement plus importante avec les structures parallèles. Des notions propres aux deux types de manipulateurs, telles que celles d'espace articulaire et d'espace de travail, de modèles géométriques direct et inverse, et de singularités sont rappelées dans les parties suivantes.

■

Manipulateurs d'architecture sérielle	**Manipulateurs d'architecture parallèle**
= Succession de segments en série de la base vers l'effecteur = Chaîne cinématique ouverte + Important espace de travail – Faible précision – Faible charge transportable – Faible raideur	= Tout segment au contact de la base et de l'effecteur = Chaînes cinématiques fermées – Espace de travail restreint (précision non définie) + Lourde charge transportable (raideur non définie)

tableau 1.1 – *Comparaison des manipulateurs d'architectures sérielle et parallèle*

1.1.2 Espace articulaire et espace de travail

Pour les manipulateurs d'architecture sérielle et d'architecture parallèle, il existe une relation de dépendance entre leurs variables articulaires motorisées $\mathbf{q}$ et la configuration de leur effecteur $\mathbf{X}$, qui peut s'exprimer sous la forme suivante :

$$F(\mathbf{X},\mathbf{q}) = 0 \tag{1.1}$$

Nous noterons :

- EA_n : l'espace articulaire lié aux articulations motorisées q (n désigne le nombre d'articulations motorisées) ;
- EAP_r : l'espace articulaire lié aux articulations passives $\mathbf{q}_r$ (r désigne le nombre d'articulations passives) ;
- EO_m : l'espace opérationnel lié aux configurations de la plate-forme mobile (m désigne le nombre de degrés de liberté de la plate-forme mobile) ;
- EC_{n+m} : l'espace des configurations du manipulateur défini sur le produit cartésien de EA_n et EO_m et de dimension $n+m$.

Soit Q le domaine articulaire accessible :

$$Q = \{\mathbf{q} \in EA_n,\ \forall i \leqslant n,\ q_{imin} \leqslant q_i \leqslant q_{imax}\} \tag{1.2}$$

Q représente l'ensemble des vecteurs de coordonnées articulaires du robot respectant les butées articulaires. C'est aussi un domaine de EA_n qui dépend de la morphologie du robot. Par exemple, pour un robot possédant deux articulations rotoïdes et une articulation prismatique, Q est un domaine de $\mathrm{T}^2 \times \mathrm{R}$, où T^2 désigne le tore classique et R la droite des réels.

L'espace de travail W d'un robot manipulateur est défini comme étant l'ensemble des positions et orientations accessibles par un repère particulier lié, en général, à l'organe

terminal du robot. W est aussi l'image de Q par l'opérateur géométrique $\mathbf{f}$ du robot :

$$W = \mathbf{f}(Q) \tag{1.3}$$

W est un domaine de EO_m et sa structure dépend donc de celle de l'espace opérationnel. Dans le cas général, W est un domaine de l'espace $\mathrm{R}^3 \times \mathrm{SO}(3)$, qui représente le produit de l'espace des coordonnées de position R^3 avec le groupe des rotations propres de R^3. Sa dimension est ainsi égale à six mais peut être plus faible lorsqu'une partie seulement des positions et orientations de l'organe terminal est analysée. Le terme « espace de travail » est couramment utilisée dans la littérature bien qu'il n'ait pas une structure d'espace vectoriel. Il est donc plus judicieux de le nommer « ensemble opérationnel ».

1.1.3 Modélisation des robots

La conception et la commande des robots nécessitent le calcul de certains modèles mathématiques, tels que :

- les modèles de transformation entre l'espace de travail (dans lequel est définie la situation de l'effecteur) et l'ensemble articulaire (dans lequel est définie la configuration du robot). Nous distinguons parmi ces modèles :
  - les modèles géométriques direct et inverse (MGD et MGI), qui expriment la situation de l'organe terminal en fonction des variables articulaires du mécanisme et inversement,
  - les modèles cinématiques direct et inverse (MCD et MCI), qui expriment la vitesse de l'organe terminal en fonction des vitesses articulaires et inversement ;
- les modèles dynamiques définissant les équations du mouvement du robot, qui permettent d'établir les relations entre les couples ou forces exercés par les actionneurs et les positions, vitesses et accélérations des articulations.

Le calcul des modèles géométriques direct et inverse du manipulateur peut se faire à partir de l'équation (1.1).

1.1.3.1 Modèles géométriques direct et inverse

Dans la littérature, il existe plusieurs méthodes de résolution du MGD et du MGI d'un manipulateur d'architecture sérielle, les plus connues sont celles de Pieper (1968), Paul (1981), et de Raghavan et Roth (1990).

Pour les manipulateurs d'architecture parallèle, la résolution du MGI ne pose généralement pas de problème. Pour calculer le MGI, nous écrivons un système d'équations non-linéaires dont chaque équation est associée à une jambe du manipulateur. Chaque jambe est caractérisée par une origine A_i et une extrémité C_i. La configuration $\mathbf{X}$ de l'ef-

fecteur permet de définir la position des points extrêmes de chaque jambe. Nous pouvons ainsi écrire le MGI de chaque jambe : $A_iC_i = H(\mathbf{X})$. Ce modèle est parfois difficile à résoudre, notamment pour les mécanismes spatiaux et lorsque la structure de leurs jambes est complexe. A l'inverse, le MGI de manipulateurs d'architecture parallèle composés de jambes du même type est généralement simple à résoudre.

1.1.3.2 Modèles cinématiques direct et inverse

Le modèle cinématique direct d'un manipulateur décrit le torseur cinématique $\mathbf{t}$ de l'organe terminal du manipulateur en fonction des vitesses articulaires $\dot{\mathbf{q}}$. Il est noté :

$$\mathbf{t} = \mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \tag{1.4}$$

où $\mathbf{J}(\mathbf{q})$ désigne la matrice jacobienne cinématique du manipulateur et dépend de la configuration articulaire $\mathbf{q}$.

Le calcul de la matrice jacobienne cinématique d'un manipulateur sériel peut se faire en dérivant le MGD, lorsqu'il comporte deux ou trois degrés de liberté. Cependant, il est préférable de la calculer par une méthode de calcul direct lorsque le nombre de degrés de liberté du robot est plus important.

Inversement, le rôle du modèle cinématique inverse est de calculer les vitesses articulaires $\dot{\mathbf{q}}$ en fonction du torseur cinématique $\mathbf{t}$ dont les trois premières composantes caractérisent la vitesse articulaire de l'organe terminal et les trois suivantes sa vitesse ponctuelle. Le MCI est obtenu par inversion du MCD en résolvant un système d'équations linéaires analytiquement ou numériquement, (Khalil et Dombre, 2002).

Pour les manipulateurs d'architecture parallèle, nous distinguons deux types de matrice jacobienne cinématique : la « matrice jacobienne cinématique parallèle » et la « matrice jacobienne cinématique sérielle ». En effet, la dérivation de l'équation (1.1) propre à un manipulateur d'architecture parallèle conduit à l'équation suivante :

$$\mathbf{A}\mathbf{t} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} = 0 \tag{1.5}$$

où $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont respectivement appelées « matrice jacobienne cinématique parallèle » et « matrice jacobienne cinématique sérielle » du manipulateur, (Gosselin et Angeles, 1990).

1.1.4 Singularités

Les manipulateurs d'architectures sérielle et parallèle comportent des configurations dites singulières pour lesquelles le nombre de degrés de liberté de l'organe terminal est différent de la dimension de l'espace de travail dans lequel il évolue. Ces configurations peuvent se situer aussi bien à l'intérieur que sur les frontières de l'espace de travail du manipulateur.

Celles situées à l'intérieur de l'espace de travail sont les plus gênantes pour la génération de trajectoires puisque le manipulateur peut se bloquer dans de telles configurations. Les problèmes suivants peuvent aussi survenir au voisinage de ces configurations singulières :

- une augmentation importante des efforts dans les articulations qui peut endommager la structure du manipulateur ;
- une perte de rigidité du manipulateur qui peut se traduire par une instabilité de son organe terminal lorsque les articulations motorisées sont bloquées.

1.1.4.1 Singularités des manipulateurs d'architecture sérielle

Les configurations singulières des manipulateurs d'architecture sérielle peuvent être de type position (l'effecteur ne peut pas exécuter certaines translations), de type orientation (l'effecteur ne peut pas exécuter toute rotation), ou de type mixte lorsqu'il s'agit d'une combinaison des deux précédentes où l'effecteur ne peut pas exécuter tout mouvement hélicoïdal, (Burdick, 1991) et (Smith et Lipkin, 1993).

1.1.4.2 Singularités des manipulateurs d'architecture parallèle

De nombreuses études utilisent les matrices jacobiennes cinématiques pour déterminer les configurations singulières des manipulateurs d'architecture parallèle. Parmi celles-ci, nous pouvons citer (Sefrioui et Gosselin, 1993), (Gosselin et Wang, 1995), (Bonev, 2002) et (Caro *et al.*, 2003c) pour les manipulateurs plans et (Ma et Angeles, 1991), (Khalil et Murareci, 1996), (Dheeman et Ashitava, 1997) pour les manipulateurs spatiaux. Il apparaît quatre types de configurations singulières pour les manipulateurs d'architecture parallèle :

- les singularités *parallèles* qui sont dues à la perte de rang de la matrice jacobienne parallèle **A**. Dans ce cas, l'effecteur peut bouger alors que les articulations motorisées sont bloquées. Le manipulateur gagne ainsi un ou plusieurs degré(s) de liberté ;
- les singularités *sérielles* qui sont dues à la perte du rang de la matrice jacobienne sérielle **B**. Dans ce cas, certains déplacement de l'effecteur ne peuvent pas être réalisés et le manipulateur perd un ou plusieurs degré(s) de liberté. Les singularités sérielles représentent aussi les limites de l'espace de travail du manipulateur ;
- les singularités *parallèles/sérielles* qui sont dues à la perte de rang simultanée de **A** et **B**. Dans ce cas, il est possible de déplacer de manière infinitésimale l'effecteur alors que les articulations motorisées sont bloquées et inversement ;
- les singularités *structurelles* qui apparaissent pour des dimensions particulières du manipulateur. Dans ce cas, le modèle géométrique direct admet une infinité de solutions pour certaines configurations articulaires.

■

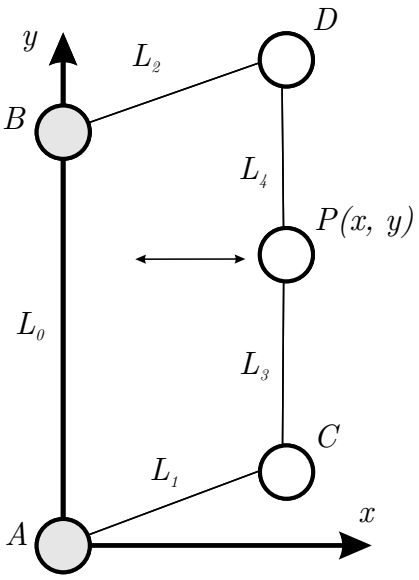


figure 1.5 – *Exemple de singularité parallèle*

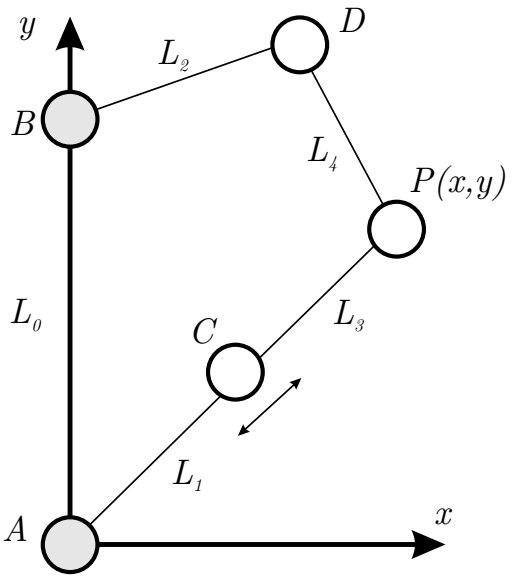


figure 1.6 – *Exemple de singularité sérielle*

La figure 1.5 présente une configuration singulière parallèle d'un mécanisme cinq barres puisqu'un déplacement infinitésimal du point P est possible dans la direction perpendiculaire à la droite (CD), alors que les articulations motorisées A et B sont bloquées. La figure 1.6 représente une configuration singulière sérielle d'un mécanisme cinq barres. En effet, le mouvement de l'effecteur P dans la direction (AP) n'est pas réalisable lorsque les articulations rotoïdes A, C, et P sont alignées. Enfin, la figure 1.7 représente une singularité structurelle puisque le point P peut balayer une infinité de positions lorsque les articulations C et D coïncident et les articulations motorisées A et B sont bloquées.

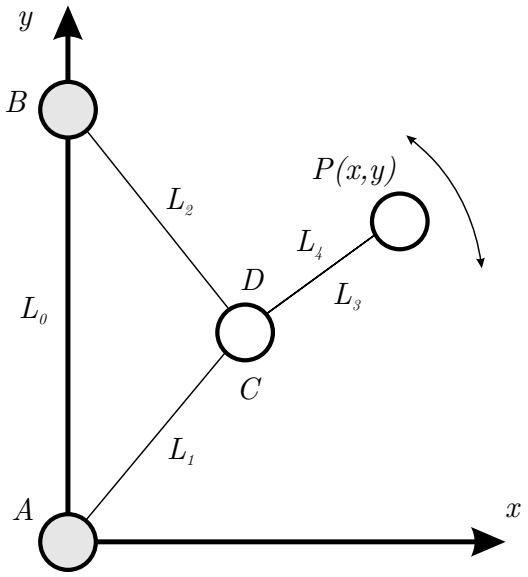


figure 1.7 – *Exemple de singularité structurelle*

1.1.5 Conclusion

Dans cette partie, nous avons présenté les différentes notions à connaître pour comprendre l'étude de la robustesse des mécanismes étudiés dans cette thèse.

1.2 Les origines de la conception robuste

Le concept de la robustesse a été introduit pour la première fois par Taguchi (1978). Il a proposé dans les années cinquante de transformer le contrôle de qualité en ligne en contrôle de qualité hors ligne. Cette étape est à l'origine du concept de qualité robuste en ingénierie. Il fallut cependant attendre le début des années quatre-vingt-dix pour trouver les premières contributions dans la littérature qui intègrent ce concept dans le cadre de la conception.

En effet, la conception robuste est au coeur de l'amélioration de la productivité en ingénierie. De nombreuses compagnies internationales ont réalisé des économies considérables en utilisant des méthodes de conception robuste (Phadke, 1989), (Taguchi, 1993), (Wu et Wu, 2000), et ce dans différents secteurs d'activité : automobile, xérographie, télécommunications, électronique, informatique, etc.

Les entreprises ont parallèlement investi lourdement dans l'approche « Six-Sigma » à la fin des années quatre-vingt et au début des années quatre-vingt-dix, (Thornton, 2001). Cette approche permet de réduire les coûts en détectant les problèmes rencontrés durant les phases de conception et de fabrication et en s'affranchissant des causes de défaillance immédiatement. Ces efforts ont cependant eu un impact important sur le coût des produits et ainsi sur les revenus des entreprises. En effet, l'approche « Six-Sigma » a été utilisée au maximum de son potentiel et a montré ses limites. De nouvelles méthodes, telles que les méthodes de conception robuste, se sont donc avérées nécessaires pour améliorer la productivité des entreprises.

1.3 La conception axiomatique et la conception robuste

Il existe actuellement différentes méthodologies et différents courants de pensée de la conception. Une vision assez complète de l'évolution et de la variété des méthodes de conception est donnée par Pahl et Beitz (1996). Deux modèles de conception reviennent cependant de façon prépondérante dans la littérature récente : la « conception axiomatique » de Suh et la « conception robuste » vue par Taguchi présentées en détail ci-après.

1.3.1 La conception axiomatique

Selon Suh (2001), une bonne conception en ingénierie respecte les axiomes suivants :

- **axiome 1** (l'axiome d'indépendance) : la meilleure conception est celle pour laquelle toutes les fonctions sont indépendantes ;
- **axiome 2** (l'axiome du minimum d'information) : la meilleure conception est celle contenant le minimum d'information.

Dans un premier temps, le concepteur doit identifier les « spécifications » et les « paramètres de conception ». Suh suppose l'existence d'une relation linéaire entre les spécifications et les paramètres de conception caractérisée par une matrice de conception $\mathbf{A}$. Il s'avère que $\mathbf{A}$ est diagonale lorsque l'axiome d'indépendance est respecté. En outre, Suh considère qu'une conception idéale comprend autant de paramètres de conception que de spécifications. Dans ce cas, la matrice $\mathbf{A}$ est carrée. $\mathbf{A}$ est rectangulaire lorsque le nombre de spécifications est différent du nombre de paramètres de conceptions. Dans le cas où les spécifications sont plus nombreuses que les paramètres de conception, la conception est dite « couplée ». A l'inverse, elle est dite « redondante » lorsqu'elle comprend plus de paramètres de conception que de spécifications.

Suh (2001) définit le degré de couplage des spécifications et des paramètres de conception par deux scalaires : la réangularité R et la sémangularité S. R est une mesure de l'orthogonalité des colonnes de la matrice $\mathbf{A}$ et est définie comme suit :

$$R = \prod_{\substack{i=1,\cdots,n-1 \\ j=i+1,\cdots,n}} \left[1 - \left(\frac{\mathbf{a}_i{}^T \mathbf{a}_j}{\|\mathbf{a}_i\| \|\mathbf{a}_j\|} \right)^2 \right]^{1/2} \tag{1.6}$$

où $\mathbf{a}_i$ est la $i^{\text{ème}}$ colonne de la matrice de conception. S, indicateur de la « diagonalité » de la matrice de conception, a pour expression :

$$S = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{|A_{ii}|}{\|\mathbf{a}_i\|} \right) \tag{1.7}$$

où A_{ii} est le $i^{\text{ème}}$ terme de la diagonale de $\mathbf{A}$.

Une conception satisfait ainsi l'axiome d'indépendance lorsque la matrice de conception est diagonale, i.e. : $R = S = 1$. Cependant, les conceptions dont le nombre de spécifications est égal au nombre de paramètres de conception sont rares. Par ailleurs, une matrice de conception diagonale peut contenir des termes diagonaux très différents les uns des autres, induisant ainsi une forte sensibilité des spécifications aux variations des paramètres de conception. Par ailleurs, selon Daniel et Nicolas (2002), la nécessité d'éviter le couplage entre les spécifications et les paramètres de conception n'est pas évidente.

Pour utiliser le deuxième axiome, une mesure de la quantité d'information contenue dans la conception est nécessaire. Selon Suh (2001), la quantité d'information d'une conception est égale au logarithme de l'inverse de la probabilité de rencontre d'un évènement. L'évènement est ici la satisfaction des exigences des spécifications. La quantité d'information I d'une conception donnée est la somme des quantités d'information de ses différents éléments :

$$I = \log\left(\frac{1}{p_1 p_2 \cdots p_n}\right) \tag{1.8}$$

où p_i est la probabilité de satisfaction de l'exigence de la $i^{\text{ème}}$ spécification et n est le nombre d'éléments de la conception.

Les travaux de Suh (2001) ne sont pas les seuls sur la conception axiomatique. En effet, Hazelrigg (1999) voit l'étape de conception comme un ensemble de prises de décision et reprend les six axiomes de Von Newmann-Morgenstern pour construire une structure mathématique de la conception.

1.3.2 La conception robuste selon Taguchi

La philosophie de Taguchi repose sur deux concepts : la fonction *perte* et le *ratio signal/bruit*, (Taguchi, 1993), (Wu et Wu, 2000).

1.3.2.1 La fontion perte

La fraction de produits en dehors des limites spécifiées est couramment utilisée comme une mesure de la qualité. Bien que ce soit une bonne mesure de la perte due au rebut, ce n'est pas un bon indicateur de la satisfaction du client. C'est la raison pour laquelle G.Taguchi a défini la fonction perte comme une mesure de la perte de la qualité subie par un client, due à une mauvaise conception du produit acheté. Le respect des tolérances ne garantit pas nécessairement une bonne qualité du produit. Phadke (1989) présente ainsi une fonction perte quadratique à la place de la fonction perte double échelons. En effet, la qualité d'un produit diminue progressivement avec la déviation des variables par rapport à leur valeur nominale. Les allures de ces fonctions sont représentées par la figure 1.8 où m est la cible de la variable de conception y, $\pm\Delta_0$ est la plage de variations de y tolérée, et A_0 est la perte due à la défaillance d'un produit. Ainsi, l'expression de la fonction perte est la suivante :

$$L = k(y - m)^2 \tag{1.9}$$

■

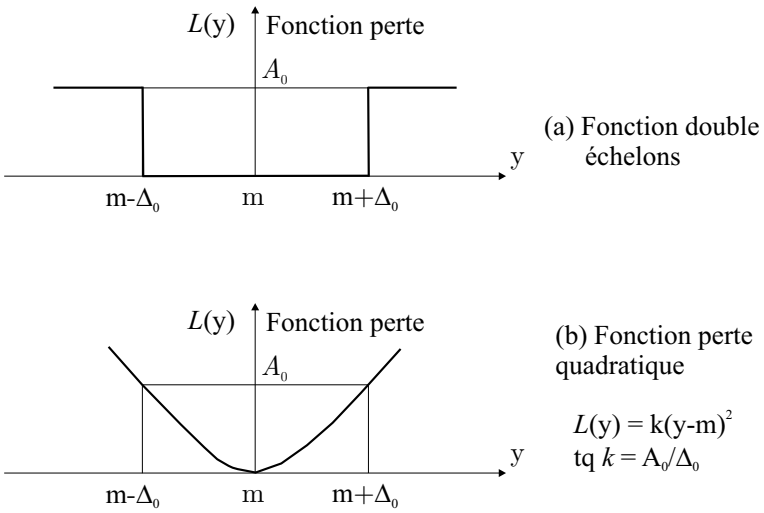


figure 1.8 – *Fonctions perte « double échelons » et « quadratique »*

où $k = A_0/{\Delta_0}^2$. En outre, si la fonction y a pour moyenne m et pour variance σ^2, la perte de qualité moyenne par produit est donnée par l'équation suivante :

$$Q = k\left[(\mu - m)^2 + \sigma^2\right] \tag{1.10}$$

1.3.2.2 Le ratio signal/bruit

La robustesse d'une conception varie avec les valeurs des variables de conception. Le ratio signal/bruit est une mesure de la sensibilité de la conception aux changements des conditions environnementales et peut être utilisé pour calculer les valeurs optimales des variables de conception.

D'après l'équation (1.10), la perte de qualité moyenne dépend de la déviation de la moyenne de la variable de conception y par rapport à sa cible et de sa variance. Rendre la conception robuste consiste ainsi à résoudre le problème d'optimisation visant à minimiser la variance des spécifications tout en maintenant leur moyenne sur leur cible. Selon Phadke (1989), il est plus facile d'ajuster la moyenne sur la cible que de minimiser la variance. En conséquence, il est plus judicieux pour le concepteur de minimiser la variance des performances d'une conception dans un premier temps et d'ajuster ensuite la moyenne des variables de conception. Le problème d'optimisation peut ainsi se décomposer en deux étapes :

1. maximiser le ratio signal/bruit η défini par:

$$\eta = 10\log_{10}\left(\mu^2/\sigma^2\right) \tag{1.11}$$

2. ajuster la moyenne sur la cible en utilisant une ou deux variable(s) de conception n'ayant pas (ou peu) d'influence sur la variance des spécifications.

1.3.3 Conclusion

La conception axiomatique et la conception robuste vue par Taguchi sont deux outils d'aide à la conception. En effet, leur utilité n'est pas de proposer des solutions au concepteur mais de le guider dans ses choix. Al-Widyan (2004) fait le parallèle entre la fonction perte de Taguchi et le deuxième axiome de Suh en évoquant le second principe de la thermodynamique. En effet, lorsque l'information est transmise, l'entropie augmente et entraîne une perte d'information, à l'image de l'entropie responsable de la perte d'énergie utile en chaleur irrécupérable dans tout procédé de conversion d'énergie.

1.4 Formulation d'un problème de conception robuste locale

Dans tout problème de conception robuste, trois ensembles sont dissociés : l'ensemble des variables de conception, l'ensemble des paramètres de conception environnementaux et l'ensemble des fonctions performances Taguchi (1993). Al-Widyan et Angeles (2005) introduisent par ailleurs les notions de *conception globalement robuste* et de *conception localement robuste*. Ici, nous nous focalisons sur la deuxième notion.

1.4.1 Les variables de conception

Les variables de conception (VC) d'un système mécanique sont généralement ses dimensions (longueurs des barres, orientations des axes des liaisons, etc). Les valeurs nominales de ces variables sont contrôlables et calculées par le concepteur afin d'optimiser les performances du mécanisme. Leur valeur réelle est cependant incertaine à cause des défauts de fabrication et de l'usure des pièces par exemple. Ces variables sont regroupées dans le vecteur $\mathbf{x}$ de dimension l :

$$\mathbf{x} = [x_1 x_2 \cdots x_l]^T \tag{1.12}$$

1.4.2 Les paramètres de conception environnementaux

Les paramètres de conception environnementaux (PCE) décrivent l'environnement du système. Ils ne peuvent pas être maîtrisés par le concepteur puisque leurs variations sont aléatoires. La température, la pression ambiante, le niveau d'humidité et l'utilisateur du bien conçu sont des exemples de paramètres de conception environnementaux. Ces para-

mètres sont regroupés dans le vecteur $\mathbf{p}$ de dimension m :

$$\mathbf{p} = [p_1 p_2 \cdots p_m]^T \tag{1.13}$$

1.4.3 Les fonctions performances

Les fonctions performances (FP) d'un système mécanique peuvent être multiples. Les n fonctions performances d'un système mécanique sont regroupées dans le vecteur $\mathbf{f}$ de dimension n et la $i^{\text{ème}}$ fonction performance est notée f_i :

$$\mathbf{f} = [f_1 f_2 \cdots f_n]^T \tag{1.14}$$

Les fonctions performances des systèmes mécaniques étudiés dans cette thèse ne dépendent que des variables et des paramètres de conception :

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{q}) \tag{1.15}$$

1.4.4 Exemples de formulation d'un problème de conception robuste

La formulation du problème de conception robuste d'un système de refroidissement d'une salle et celle d'un mécanisme articulé illustrent la différence entre les ensembles définis précédemment.

1.4.4.1 Exemple 1 : système de refroidissement d'une salle

Pour la conception d'un système de refroidissement d'une salle, le réglage du thermostat est le signal et la température résultante de la salle est la fonction performance. Le système a ici une seule fonction performance : la température de la salle. La température extérieure, l'ouverture et la fermeture des fenêtres, le nombre de personnes présentes dans la salle sont des paramètres de conception du système puisqu'ils ne peuvent pas être contrôlés par le concepteur. A l'inverse, le nombre de personnes déclarées, la taille de l'unité de conditionnement d'air, l'épaisseur et le type d'isolation sont des variables de conception puisque leur valeur nominale peut être contrôlée par le concepteur.

Afin de rendre le système robuste, le concepteur doit ainsi calculer les valeurs nominales des variables de conception afin de minimiser la variation de la température de la salle (la fonction performance) et de la maintenir au voisinage de la température fixée par le réglage du thermostat.

1.4.4.2 Exemple 2 : mécanisme articulé

Le système bielle-manivelle représenté par la figure 1.9 est composé d'une bielle de longueur l_r, d'une manivelle de longueur l_c, et d'un piston. e est l'excentricité entre l'axe de rotation de la manivelle et la direction de la translation du piston. L'inégalité $l_r \geqslant l_c + e$

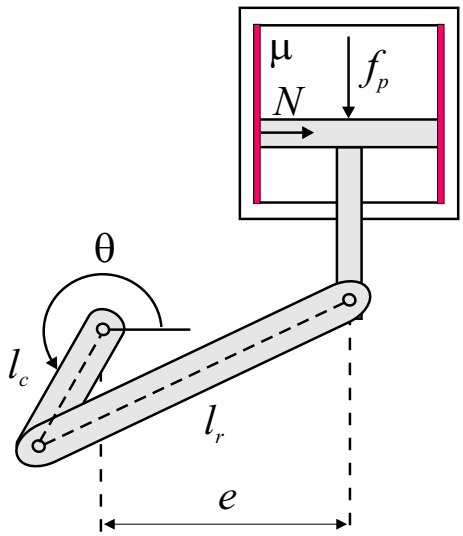


figure 1.9 – *Système bielle-manivelle*

est une condition nécessaire au fonctionnement du mécanisme. f_p et μ sont respectivement la force exercée sur le piston et le coefficient de frottement entre le piston et le cylindre. Ils sont supposés incontrôlables par le concepteur. N_{moy} est la moyenne de la force radiale exercée par le cylindre sur le piston. Rendre la conception du mécanisme robuste consiste ici à calculer les valeurs nominales de l_r, l_c, et e afin de minimiser N_{moy} et sa sensibilité aux variations des variables et paramètres de conception. En définitive, $\mathbf{x} = [l_c\ l_r\ e]^T$, $\mathbf{p} = [f_p\ \mu]^T$ et $\mathbf{f} = [N_{moy}]$.

1.5 Résolution d'un problème de conception robuste

L'approche de Taguchi est certainement la plus connue à l'heure actuelle en conception robuste. L'une des raisons est la simplicité d'utilisation du ratio signal/bruit comme critère d'optimisation. Ramakrishnan et Rao (1991) formulent par exemple un problème de conception robuste sous la forme d'un problème d'optimisation non-linéaire et utilisent la fonction perte de Taguchi comme critère. Les méthodes de Taguchi présentent cependant des limites. Par exemple, plusieurs méthodes stochastiques de Taguchi telles que les tableaux orthogonaux et les graphes linéaires ne sont pas justes d'un point de vue statistique, (Box, 1988), (Tsui, 1992).

De nouvelles méthodes sont naturellement apparues dans la littérature. Yu et Ishii (1998) ont par exemple développé des méthodes permettant de prendre en compte, dans la phase

de conception, les variations liées au procédé de fabrication. Sundaresan *et al.* (1993) ont quant à eux proposé une procédure d'optimisation robuste qui tient compte des variations des variables de conception et des contraintes. Elle vise à calculer les variables de conception d'un système afin d'obtenir une performance optimale et robuste. Lorsque les problèmes de conception ne peuvent pas être exprimés sous forme explicite, la moyenne des performances est généralement calculée statistiquement à l'aide de plans d'expérience. Sundaresan *et al.* (1993) définissent cependant un indice de sensibilité SI en fonction des valeurs de la performance calculées aux l plus mauvaises combinaisons des l variables de conception. Ils l'utilisent ensuite comme critère à minimiser dans un problème d'optimisation statistique.

Rappelons que dans un problème d'optimisation classique, l'objectif est généralement de minimiser ou de maximiser une fonction f en présence de r contraintes g_i.

Problème d'optimisation classique :	connaissant le vecteur des paramètres $\mathbf{p}$ *calculer* $\mathbf{x}$ afin de *minimiser/maximiser* $f(\mathbf{x},\mathbf{p})$ *sous contraintes* $g_i(\mathbf{x},\mathbf{p})$ 0, $i = 1, \cdots, r$

L'optimisation statistique vise quant à elle à optimiser la valeur moyenne d'une fonction soumise à des contraintes incertaines. La figure 1.10 illustre le concept de l'optimisation statistique pour un système présentant une seule fonction objective f et une seule variable de conception x. Le point N correspond à la solution optimale du problème d'optimisation

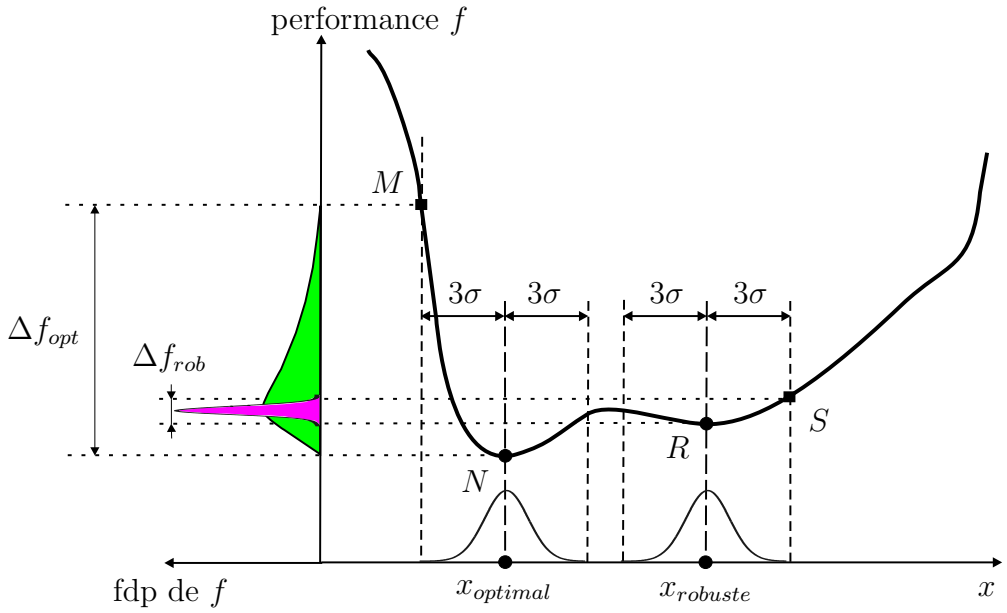


figure 1.10 – *Optimisation statistique, recherche du minimum robuste*

classique alors que R correspond à la solution du problème d'optimisation statistique, appelé *optimum robuste*. En effet, si $x_{optimal}$ est la valeur nominale de la variable de

conception, une variation de 3σ de cette dernière peut faire varier la fonction performance f du point N au point M. Au contraire, si la valeur nominale de la variable de conception est égale à $x_{robuste}$, la variation de f est relativement faible (du point R au point S au maximum) pour une même variation de 3σ de la variable de conception.

Les variations des contraintes dues aux variations des variables et paramètres de conception peuvent être prises en compte en remplaçant les inéquations caractérisant les contraintes, i.e.: $g_i(\mathbf{x},\mathbf{p}) \leqslant 0$, par les inéquations suivantes dans le cas d'une analyse statistique :

$$g_i(\mathbf{x},\mathbf{p}) + k\sigma_{gi}(\mathbf{x},\mathbf{p}) \leqslant 0 \quad i = 1, \cdots, r \tag{1.16}$$

où une valeur de k égale à 3 garantit le respect des contraintes 99,865 % du temps. Les inéquations suivantes sont utilisées dans le pire des cas :

$$g_i(\mathbf{x},\mathbf{p}) + \Delta_{gi}(\mathbf{x},\mathbf{p}) \leqslant 0 \quad i = 1, \cdots, r \tag{1.17}$$

L'expression de la variance σ_{gi}^2 de la contrainte g_i est obtenue par linéarisation et en supposant l'indépendance des variations des variables et paramètres de conception :

$$\sigma_{gi}^2 = \sum_{j=1}^{l} \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j} \sigma_{xj} \right)^2 + \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{\partial g_i}{\partial p_j} \sigma_{pj} \right)^2 \tag{1.18}$$

où σ_{xj} et σ_{pj} sont les écart-types de la $i^{\text{ème}}$ variable de conception et du $j^{\text{ème}}$ paramètre de conception, respectivement. De même, la tolérance Δg_i de la contrainte g_i a pour expression :

$$\Delta g_i = \sum_{j=1}^{l} \left| \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \Delta x_j \right| + \sum_{j=1}^{m} \left| \frac{\partial g_i}{\partial p_j} \Delta p_j \right| \tag{1.19}$$

où Δx_i et Δp_j sont les tolérances de la variable de conception x_i et du paramètre de conception p_j, respectivement. Comme l'illustre la figure 1.11, les inéquations (1.18) et (1.19) ont pour effet de réduire le domaine admissible des variables de conception. Néanmoins, la faisabilité de la conception est robuste dans ce domaine puisque les contraintes de faisabilité sont respectées même en présence de variations des variables et paramètres de conception, (Parkinson, 1995).

En outre, Chen *et al.* (1996) distinguent les sources de variations pour formuler deux types de problème de conception robuste, définis comme suit :

- **Type I** : minimisation des variations des performances dues aux variations des facteurs de bruit (paramètres de conception) ;
- **Type II** : minimisation des variations des performances dues aux variations des facteurs de contrôle (variables de conception).

■

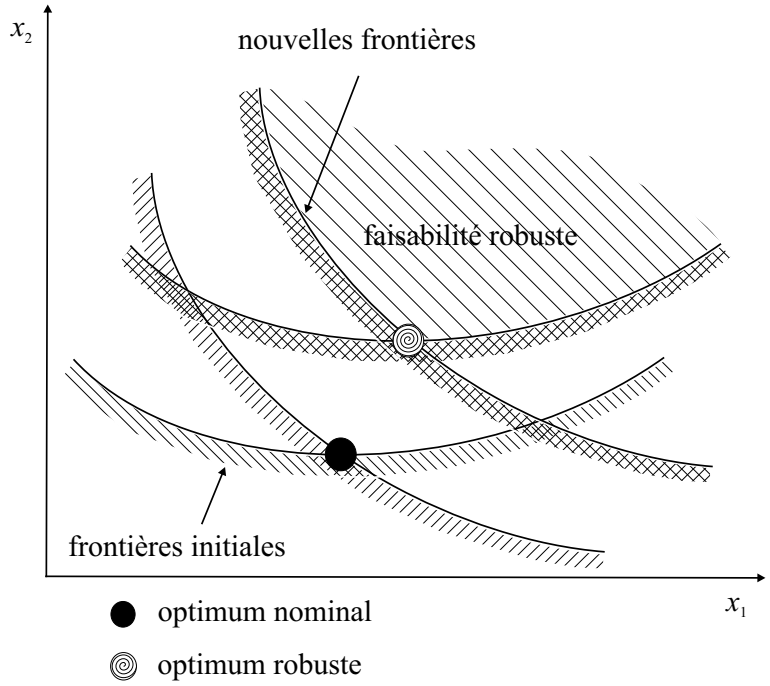


figure 1.11 – *Décalage des frontières des contraintes*

Nous pouvons remarquer que l'approche de Parkinson (1995) permet de résoudre les deux types de problème indifféremment alors que les méthodes de Taguchi ne s'appliquent que pour la formulation de Type I puisqu'il ne prend pas en compte les variations des variables de conception. De même, Chen *et al.* (1996) proposent une procédure pour résoudre les problèmes de conception robuste de Type I et de Type II. Cette procédure permet au concepteur de minimiser les variations des performances et de faire coïncider leur norme avec leur cible. Comme l'illustre la figure 1.12, la première étape consiste à calculer une surface de réponse correspondant à chaque fonction performance f_i en fonction des variables et des paramètres de conception. Les valeurs moyennes et les variances des fonctions performances, calculées à l'aide des modèles obtenus à partir des surfaces de réponse, sont ensuite utilisées dans le problème d'optimisation d'aide à la décision (*Compromise Decision Support Problem*) pour calculer la solution optimale robuste.
La procédure de Chen *et al.* (1996) présente les avantages d'intégrer les contraintes, de trouver un compromis entre plusieurs objectifs, et de prendre en compte les interactions et les effets non-linéaires au moyen d'une surface de réponse. Cette procédure est cependant limitée puisque les fonctions performances et les contraintes sont calculées approximativement en utilisant des méthodes statistiques basées sur les plans d'expérience.

Nous pouvons aussi remarquer que les méthodes précédentes ne peuvent être utilisées qu'en présence de petites variations. En effet, un développement en série de Taylor n'est viable que lorsque les variations sont faibles.

En définitive, nous retiendrons la formulation du problème d'optimisation statistique sui-

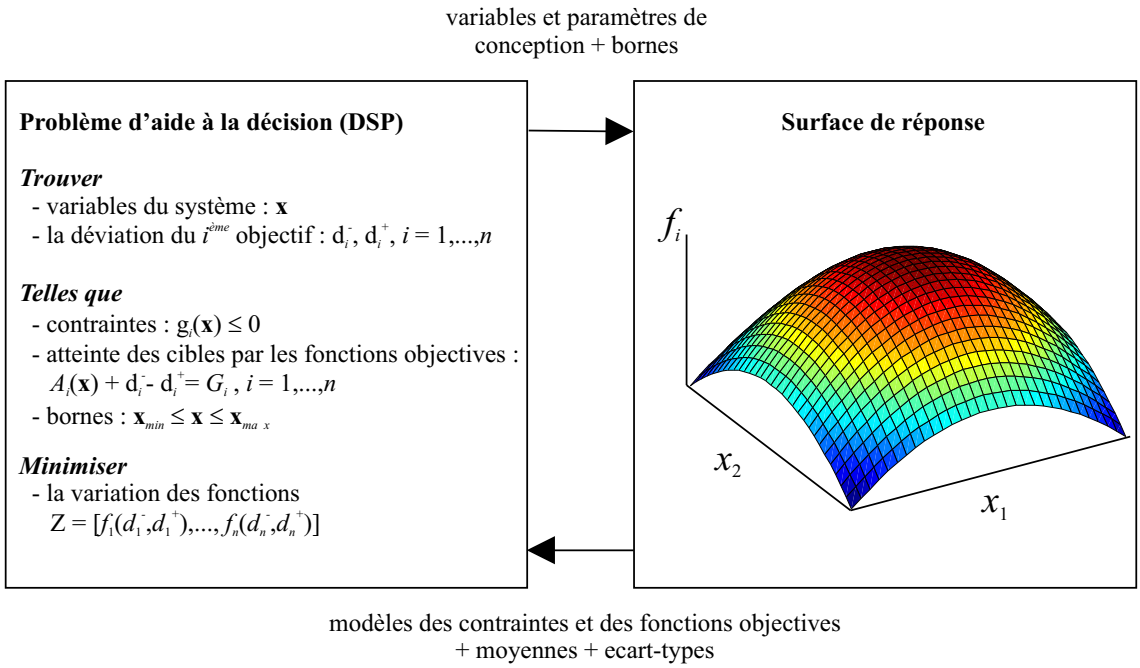


figure 1.12 – *Problème d'optimisation d'aide à la décision et surface de réponse*

vant pour calculer la solution optimale robuste d'un problème de conception ne pouvant être exprimé sous une forme explicite :

Problème d'optimisation statistique (robuste) :	connaissant le vecteur des paramètres $\mathbf{p}$ calculer l'ensemble des variables de conception $\mathbf{x}$ afin de *minimiser* les moyennes des fonctions performances $\mu_{fi}(\mathbf{x},\mathbf{p})$ et leur écart-type $\sigma_{fi}(\mathbf{x},\mathbf{p})$, $i = 1,\cdots,n$ sous contraintes $\mu_{gi}(\mathbf{x},\mathbf{p}) + k\sigma_{gi}(\mathbf{x},\mathbf{p}) \leqslant 0$, $j = 1,\cdots,r$

Dans le cas où le problème de conception peut être exprimé sous une forme explicite, nous pouvons utiliser d'autres approches telles que celle basée sur l'analyse de la sensibilité des performances d'un système mécanique, (Zhu et Ting, 2001). Cette approche est décrite plus en détail dans le chapitre 3 puisque nous l'utilisons pour étudier la robustesse de systèmes mécaniques, définir un indice de robustesse, et développer une méthode de synthèse de tolérances.

Conclusion

La prise en compte des variations des éléments du produit à concevoir a toujours été une préoccupation des concepteurs. L'objet de la conception robuste est d'intégrer au plus tôt ces variations dans le procédé de conception afin de prédire les problèmes relatifs à ces variations et de minimiser leurs effets sur les performances du système.

■

Il existe plusieurs formulations de la notion de robustesse dans la littérature. Nous avons retenu les deux définitions suivantes :

- « la conception robuste vise à améliorer la qualité d'un produit en minimisant les effets des variations sans éliminer les causes des variations », (Taguchi, 1993) ;
- « la conception d'un système mécanique est robuste lorsque ses fonctions performances sont le moins sensibles possible aux variations de ses variables et paramètres de conception », (Caro *et al.*, 2005).

Un problème de conception robuste est ainsi composé de trois ensembles distincts : l'ensemble des variables de conception, dont les valeurs nominales sont contrôlables mais les valeurs réelles incertaines, l'ensemble des paramètres de conception qui sont incontrôlables, et l'ensemble des fonctions performances.

Les méthodes de Taguchi sont très utilisées dans la littérature. Elles sont cependant limitées pour résoudre certains problèmes de conception robuste, tels que les problèmes non-linéaires. Les méthodes d'optimisation statistique présentent ainsi l'avantage de s'affranchir de ces problèmes de non-linéarités lorsqu'elles ne sont pas trop importantes. Certaines utilisent la méthodologie de la surface de réponse pour modéliser les performances d'un système en fonction de ses variables et paramètres de conception.

Les méthodes présentées précédemment visent toutes à réduire la sensibilité des performances d'un système aux variations. En outre, elles nécessitent toutes une parfaite information sur la capabilité des procédés de fabrication utilisés et sur l'environnement. En effet, elles requièrent la connaissance des tolérances des variables et paramètres de conception. Ainsi, c'est l'une des raisons pour lesquelles nous choisissons d'utiliser une méthode différente dans le chapitre suivant pour étudier la robustesse de mécanismes, proposer un indice de robustesse optimale et développer une méthode de synthèse de tolérances.

Cette thèse traite de la conception robuste de mécanismes. Nous limitons notre étude à des mécanismes articulés, appelés manipulateurs. Les manipulateurs étudiés sont principalement d'architectures sérielle et parallèle. Quelques propriétés de ces manipulateurs ont été énumérées dans ce chapitre, telles que les notions d'espaces articulaire et de travail, de modèles géométriques et cinématiques, et de singularités.

L'un des objectifs de la thèse est l'analyse de la sensibilité de l'Orthoglide, manipulateur d'architecture parallèle développé à l'IRCCyN, afin de développer une méthode de synthèse des tolérances de ses dimensions et ses variables angulaires. La démarche utilisée pour analyser sa sensibilité et les résultats obtenus sont présentés dans le chapitre 2. Ensuite, une approche d'analyse de la sensibilité des performances d'un système mécanique est utilisée dans le chapitre 3 pour définir un indice de robustesse optimal de la conception d'un mécanisme et pour développer une méthode de synthèse de tolérances. Enfin, le chapitre 4 vise à comparer la robustesse de manipulateurs 3R génériques et non-génériques.

2 Analyse de sensibilité d'un manipulateur d'architecture parallèle : l'Orthoglide

Introduction **28**

2.1 Manipulateur étudié : l'Orthoglide **30**

2.1.1 Géométrie du manipulateur 30

2.1.2 Dimensionnement du manipulateur 30

2.2 Sensibilité des performances cinématiques du manipulateur . . **31**

2.2.1 Influence des variations des limites articulaires 32

2.2.2 Influence de l'erreur de réglage du zéro des actionneurs prismatiques . . 33

2.3 Sensibilité de la situation de l'effecteur **34**

2.3.1 Condition d'isostaticité du manipulateur 35

2.3.2 Analyse de sensibilité cinématique 35

2.3.3 Analyse de sensibilité vectorielle 44

Conclusion **57**

Une étape préalable à la synthèse de tolérances des dimensions d'un mécanisme est l'analyse de sensibilité de ses performances aux variations de ses paramètres géométriques. En effet, la connaissance de cette sensibilité permet au concepteur et au fabricant de mieux cibler les éléments pour lesquels les tolérances doivent être serrées ou larges. Dans ce chapitre, nous analysons la sensibilité d'un manipulateur d'architecture parallèle à trois degrés de liberté nommé « Orthoglide » et développé à l'Institut de Recherche en Communications et Cybernétique de Nantes [1]. Chaque jambe de ce manipulateur est composée d'une articulation prismatique motorisée, de deux articulations rotoïdes et d'une articulation de type parallélogramme.

Notre principale contribution dans ce chapitre est ainsi le développement de deux méthodes d'analyse de sensibilité de l'Orthoglide. La première présente l'avantage d'avoir

[1] IRCCyN: UMR n° 6597 CNRS, École Centrale de Nantes, Université de Nantes, École des Mines de Nantes

une mise en équations simple et d'offrir un ordre d'idée des variations les plus influentes sur la position de l'effecteur. Cependant, elle ne permet pas de prendre en compte les variations internes aux articulations de type parallélogramme. C'est la raison pour laquelle nous développons une deuxième méthode. Les résultats obtenus indiquent que la configuration isotrope cinématique du manipulateur est la plus intéressante. En effet, c'est la configuration pour laquelle la sensibilité de la position et de l'orientation de son effecteur est globalement minimale.

Introduction

Ces deux dernières décennies, les manipulateurs d'architecture parallèle ont attiré l'attention de nombreux chercheurs qui les considèrent comme des solutions alternatives précieuses aux manipulateurs et machines industriels. Les machines d'architecture sérielle conventionnelles ont assurément atteint leurs limites en terme de performance dynamique. En effet, même s'ils ont de bonnes caractéristiques opérationnelles : large espace de travail, hautes flexibilité et manoeuvrabilité, les manipulateurs d'architecture sérielle présentent l'inconvénient d'avoir une faible puissance et leur rigidité ne peut être augmentée qu'au prix d'un accroissement des masses en mouvement.

Au contraire, les manipulateurs d'architecture parallèle présentent les avantages suivants : faibles masses déplacées, rigidité importante, hautes fréquences naturelles, construction mécanique modulaire, possibilité de fixation des actionneurs motorisés sur la base fixe. Cependant, leur précision n'est pas nécessairement meilleure que celle des manipulateurs d'architecture sérielle. En effet, même si les variations dimensionnelles peuvent être compensées avec les manipulateurs d'architecture parallèle, elles peuvent aussi être amplifiées contrairement à celles des manipulateurs d'architecture sérielle, (Wenger *et al.*, 1999).

Quelques travaux sur l'analyse de sensibilité de mécanismes d'architecture parallèles existent dans la littérature. De nombreuses études ont été faites sur la plate-forme de Gough -Stewart. Wang et Masory (1993) ont par exemple étudié l'effet des tolérances dimensionnelles sur sa précision. Kim et Choi (2000) ont utilisé une méthode d'analyse directe pour calculer les erreurs de position et d'orientation de sa plate-forme mobile en supposant les défauts des articulations connus. Ils ont aussi utilisé une méthode d'analyse d'erreurs inverse pour calculer les erreurs dans les articulations en fonction des erreurs de position et d'orientation de la plate-forme.

Kim et Tsai (2003) ont étudié l'effet des erreurs d'alignement des actionneurs linéaires d'un manipulateur parallèle de translation à trois degrés de liberté sur la position de sa plate-forme mobile. Han *et al.* (2002) ont utilisé une méthode d'analyse de sensibilité cinématique pour montrer qu'un manipulateur d'architecture parallèle de type 3-UPU est très sensible aux jeux dans les articulations. Fan *et al.* (2003) ont quant à eux analysé

la sensibilité de la structure parallèle de type 3-PRS d'une machine d'usinage hybride (machine sérielle-parallèle).

Nous pouvons remarquer que les mécanismes étudiés dans la littérature ne possèdent généralement pas d'articulation de type parallélogramme. Les méthodes proposées ne sont donc pas nécessairement adaptées à l'Orthoglide. L'un des objectifs de ce chapitre est ainsi de développer des méthodes permettant d'analyser la sensibilité de la position et de l'orientation de l'effecteur de l'Orthoglide aux variations des longueurs et angulaires, notamment à celles des parallélogrammes.

L'Orthoglide est un manipulateur d'architecture parallèle de translation à trois degrés de liberté. Un prototype à échelle réduite de ce manipulateur est représenté par la figure 2.1. La sensibilité du manipulateur sera étudiée au moyen de deux méthodes complémentaires.

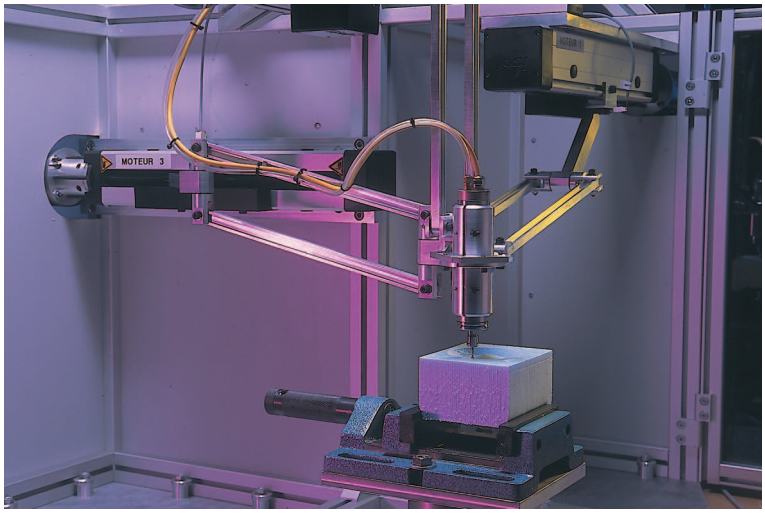


figure 2.1 – *Prototype de l'Orthoglide*

Dans un premier temps, une analyse cinématique de la structure permet d'avoir un ordre d'idée de l'influence des variations dimensionnelles sur la position de l'effecteur. Cette analyse permet par ailleurs de montrer que les variations des paramètres de conception du même type d'une jambe à l'autre ont la même influence sur la position de l'effecteur. Bien que cette méthode soit compacte, elle ne peut pas être utilisée pour connaître l'influence des variations internes aux articulations de type parallélogramme. Ainsi, une méthode vectorielle différentielle est mise au point pour étudier l'influence des variations des longueurs et angulaires des éléments du manipulateur, notamment les erreurs de parallélisme des barres des parallélogrammes, sur la position et l'orientation de l'effecteur du manipulateur. En outre, les configurations du manipulateur les plus intéressantes et les plus pénalisantes seront recherchées.

2.1 Manipulateur étudié : l'Orthoglide

2.1.1 Géométrie du manipulateur

Le manipulateur étudié dans ce chapitre est d'architecture parallèle et est représenté par la figure 2.2. Nommé « Orthoglide », il est constitué de trois chaînes cinématiques identiques

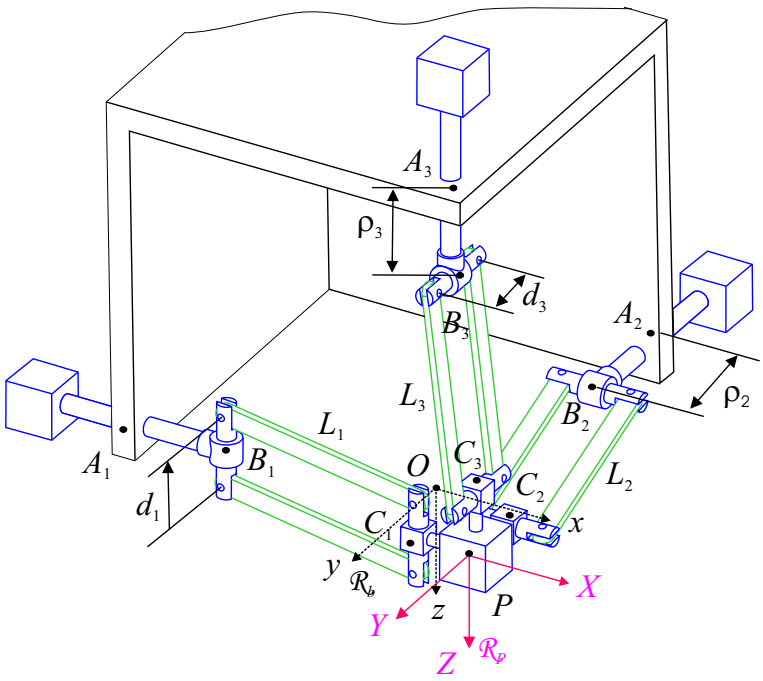


figure 2.2 – *Paramétrage de l'Orthoglide*

montées en parallèle et son effecteur P a un mouvement de translation pure. Une broche peut être montée sur son effecteur connecté aux articulations motorisées par l'intermédiaire de trois articulations de type parallélogramme. Les articulations motorisées sont les articulations prismatiques et les directions de ces articulations sont orthogonales. Les chaînes cinématiques du manipulateur sont de type PRP_aR, où P indique une articulation prismatique, R une articulation rotoïde, et P_a une articulation de type parallélogramme. Cette dernière génère une translation circulaire et est parfois appelée articulation de type Π (Π joint), (Angeles, 2004).

2.1.2 Dimensionnement du manipulateur

Le prototype de l'Orthoglide conçu à l'IRCCyN a été dimensionné de manière à ce que :

- l'effecteur atteigne une vitesse de 1,2 m.s^{-1} et une accélération de 17 m.s^{-2} à l'isotropie ;
- la charge admissible soit supérieure à 4 kg (outil et broche inclus) ;
- les facteurs d'amplification de vitesse soient compris entre 1/2 et 2 lorsque l'effecteur balaie le cube C_u d'arête égale à 200 mm représenté en traits-tillés sur la figure 2.3.

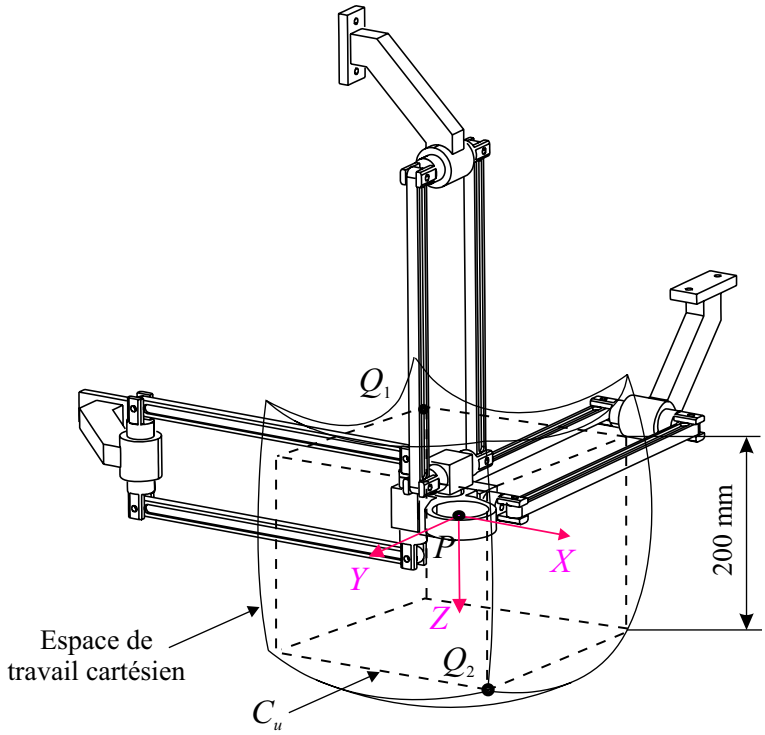


figure 2.3 – *Espace de travail de l'Orthoglide et cube C_u*

Par ailleurs, les trois jambes du manipulateur sont conçues afin d'éviter les collisions entre les parallélogrammes et les articulations prismatiques. Les dimensions du manipulateur ainsi retenues sont : $L = L_1 = L_2 = L_3 = 310{,}58$ mm, $d = d_1 = d_2 = d_3 = 80$ mm, et $r = r_1 = r_2 = r_3 = 31$ mm, où L_i et d_i sont la longueur et la largeur du $i^{\text{ème}}$ parallélogramme, et r_i la distance entre le point C_i et l'effecteur P (voir figure 2.2), (Chablat et Wenger, 2003).

2.2 Sensibilité des performances cinématiques du manipulateur

L'usinage en trois axes est l'une des applications possibles de l'Orthoglide. Ses performances cinématiques doivent être ainsi proches de celles des machines traditionnelles, i.e. quasiment isotropes à l'intérieur de C_u. Les facteurs d'amplification de vitesse, valeurs singulières minimale et maximale de la matrice jacobienne cinématique du manipulateur, sont ici utilisés pour caractériser ses performances cinématiques.

L'ensemble opérationnel du manipulateur est symétrique par rapport aux axes x, y, z. L'analyse des propriétés cinématiques du manipulateur peut ainsi être réduite à l'étude selon l'axe Q_1Q_2, la bissectrice du premier octant de l'ensemble opérationnel, (Chablat *et al.*, 2002). Les coordonnées cartésiennes de l'effecteur et les coordonnées articulaires sont identiques le long de cet axe. Soit $p = p_x = p_y = p_z$ et $\rho = \rho_x = \rho_y = \rho_z$ les coordonnées

cartésiennes de l'effecteur et les coordonnées articulaires le long de cet axe, respectivement. Les expressions de la matrice jacobienne cinématique inverse, de p et de ρ sont données dans l'annexe A.

Les limites des articulations prismatiques, déduites des bornes des facteurs d'amplification de vitesse, sont égales à : $\rho_{min} = 126{,}80$ mm et $\rho_{max} = 366{,}02$ mm. De plus, les coordonnées des sommets Q_1 et Q_2 du cube C_u exprimées dans le repère de centre O, intersection des droites qui portent les articulations prismatiques, et d'axes x, y, et z, sont égales à $p_{Q1} = (-73{,}21 \ -73{,}21 \ -73{,}21)$ et $p_{Q2} = (126{,}79 \ 126{,}79 \ 126{,}79)$, respectivement.

Les erreurs sur les limites des articulations prismatiques motorisées et sur le réglage de leur zéro n'ont pas été prises en compte dans le calcul de ρ_{min} et ρ_{max}. Cependant, les limites des facteurs d'amplification de vitesse y sont sensibles. Dans un premier temps, cette partie vise ainsi à analyser la sensibilité des facteurs d'amplification de vitesse aux variations des limites articulaires et à synthétiser leur tolérance. Ensuite, une analyse de leur sensibilité au réglage du zéro sera réalisée.

2.2.1 Influence des variations des limites articulaires

La figure 2.4 représente l'évolution des facteurs d'amplification de vitesse en fonction de la longueur ρ des articulations prismatiques motorisées du manipulateur. Pour des facteurs

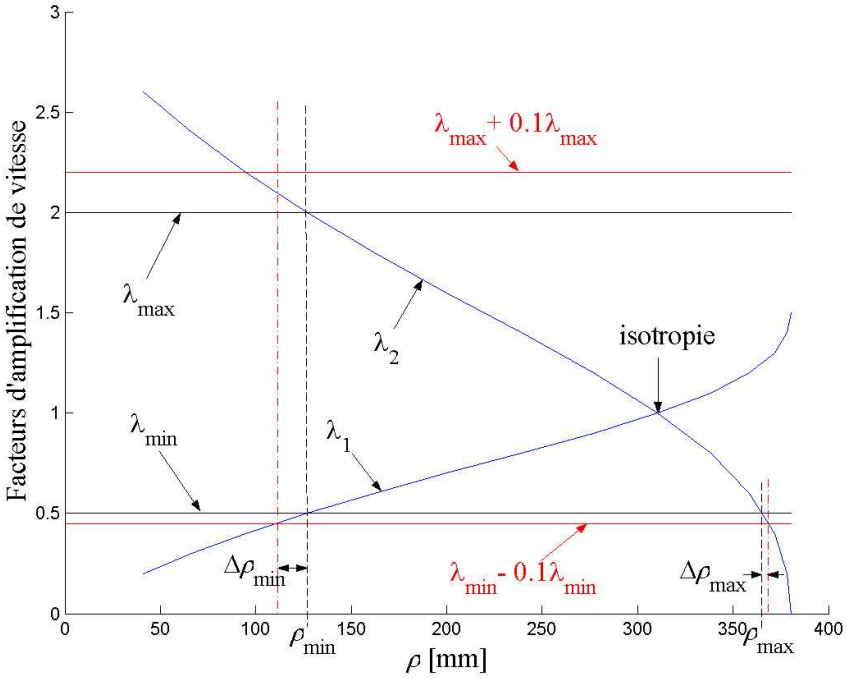


figure 2.4 – *Limites articulaires calculées en fonction des bornes des facteurs d'amplification de vitesse, et leur tolérance*

d'amplification de vitesse λ_1 et λ_2 bornés entre 1/2 et 2, la valeur nominale de ρ est bien

comprise entre 126,80 mm et 366,02 mm. Nous pouvons aussi remarquer que la sensibilité de λ_1 et λ_2 aux variations de ρ est plus importante au voisinage de ρ_{max} qu'au voisinage de ρ_{min}. En effet,

$$\max\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\rho}\right)_{\rho_{min}} = 0{,}003 \tag{2.1}$$

et

$$\max\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\rho}\right)_{\rho_{max}} = 0{,}062 \tag{2.2}$$

sont les sensibilités maximales des facteurs d'amplification de vitesse lorsque les actionneurs prismatiques atteignent leurs butées minimale et maximale, respectivement. Ces sensibilités sont exprimées sous forme algébrique simple à partir des expressions des facteurs d'amplification de vitesse données dans l'annexe A.

Les coefficients de sensibilité précédents peuvent être utilisés pour calculer les tolérances des limites articulaires. En supposant par exemple qu'une erreur de 10% soit tolérée sur les facteurs d'amplification de vitesse :

$$\Delta\rho_{min} = 16{,}48 \text{ mm et } \Delta\rho_{max} = 3{,}04 \text{ mm} \tag{2.3}$$

où $\Delta\rho_{min}$ et $\Delta\rho_{max}$ sont les tolérances de rho_{min} et rho_{max}, respectivement. D'après (Paskevitch *et al.*, 2005), il existe une relation linéaire entre ρ et la longueur L des parallélogrammes. Pour une erreur tolérée sur les facteurs d'amplification de vitesse de 10%, les ratios suivants sont donc valables quelle que soit la valeur de L :

$$\frac{\Delta\rho_{min}}{\rho_{min}} = 0{,}13 \text{ et } \frac{\Delta\rho_{max}}{\rho_{max}} = 0{,}0083 \tag{2.4}$$

En conclusion, les performances cinématiques du manipulateur sont plus sensibles aux variations des butées articulaires maximales qu'à celles des butées articulaires minimales. Par conséquent, une attention particulière doit être portée au réglage de la butée articulaire maximale. En outre, l'erreur de réglage du zéro des actionneurs prismatiques influent sur les performances cinématiques. Il faut donc les prendre en compte lors de la synthèse des tolérances des limites articulaires.

2.2.2 Influence de l'erreur de réglage du zéro des actionneurs prismatiques

Théoriquement, le manipulateur se trouve dans sa configuration isotrope lorsque l'élongation des articulations prismatiques est nulle, i.e.: $\rho_x = \rho_y = \rho_z = 0$. Ce n'est généralement

pas le cas lorsque le réglage du zéro des actionneurs n'a pas été fait au préalable ou qu'il est imprécis. Cette erreur de réglage du zéro doit cependant être prise en compte dans le calcul des tolérances des limites articulaires. En effet, supposons que l'erreur de réglage du zéro soit comprise dans l'intervalle $[\Delta_{0min}, \Delta_{0max}]$, les nouvelles tolérances des limites articulaires, $\Delta^N_{\rho min}$ et $\Delta^N_{\rho max}$, qui permettent aux bornes des facteurs d'amplification de vitesse d'être respectées sont les suivantes :

$$\Delta^N_{\rho min} = \Delta\rho_{min} - \Delta_{0min} \tag{2.5}$$

et

$$\Delta^N_{\rho max} = \Delta\rho_{max} - \Delta_{0max} \tag{2.6}$$

Si $\Delta_{0min} \geqslant \Delta\rho_{min}$ ou $\Delta_{0max} \geqslant \Delta\rho_{max}$, les bornes des facteurs d'amplification de vitesse ne sont pas respectées en tout point du cube C_u. Dans ce cas, il faut régler le zéro des actionneurs plus précisément afin de diminuer les valeurs de Δ_{0min} et Δ_{0max}.

2.3 Sensibilité de la situation de l'effecteur

A l'instar des erreurs de réglage des butées articulaires, responsables des variations des performances cinématiques du manipulateur, les erreurs de fabrication, d'assemblage et d'installation influent sur la précision de la position et de l'orientation de son effecteur.

Deux méthodes d'analyse de sensibilité complémentaires sont développées dans cette partie pour analyser la sensibilité de la position et de l'orientation de l'effecteur de l'Orthoglide aux variations dimensionnelles.

Dans un premier temps, une méthode basée sur une analyse cinématique du manipulateur est utilisée pour avoir un ordre d'idée de l'influence des variations dimensionnelles sur la position de son effecteur. Cette méthode présente l'avantage d'être compacte mais ne permet d'analyser ni la sensibilité de l'orientation de l'effecteur aux variations des longueurs et angulaires, ni celle de la position de l'effecteur aux variations dimensionnelles des parallélogrammes. Par conséquent, une méthode basée sur une approche vectorielle est proposée pour faire une analyse complète de la sensibilité de la position et de l'orientation de l'effecteur du manipulateur aux variations des longueurs et angulaires des éléments du manipulateur, notamment aux variations dimensionnelles des parallélogrammes. Cette méthode permet par ailleurs de dissocier les erreurs influant sur l'orientation de l'effecteur du manipulateur de celles influant sur sa position.

2.3.1 Condition d'isostaticité du manipulateur

Un système mécanique, mécanisme ou structure, est dit isostatique s'il est possible de déterminer toutes les inconnues des liaisons en appliquant le principe fondamental de la statique. Sinon, il est dit hyperstatique, et le nombre d'inconnues indéterminées représente son degré d'hyperstatisme.

Il est important de noter que les deux méthodes d'analyse de sensibilité de l'Orthoglide proposées dans ce chapitre procurent des résultats significatifs si et seulement si le manipulateur est isostatique. En effet, un mécanisme isostatique fonctionne même si les conditions géométriques de montage ne sont pas réalisées, i.e. lorsque ses dimensions réelles ne sont pas égales aux dimensions nominales. Au contraire, pour un mécanisme hyperstatique, le non respect des contraintes géométriques au montage entraîne son blocage, voire sa destruction. Dans ce cas, il faut prendre en compte la déformation des barres pour évaluer l'influence des variations des longueurs des barres et angulaires sur la situation de l'effecteur.

Sachant que la mobilité du manipulateur étudié est égale à trois, une condition nécessaire à son isostaticité est que ses jambes soient identiques et aient cinq degrés de liberté chacune, (Karouia et Herve, 2002). Les jambes de l'Orthoglide représenté par la figure 2.2 sont identiques mais n'ont que quatre degrés de liberté chacune, en supposant que l'articulation de type parallélogramme soit équivalente à une liaison à un degré de liberté. Pour rendre le manipulateur étudié isostatique, nous ajoutons donc une articulation rotoïde à chacune de ses jambes. La nouvelle morphologie des jambes du manipulateur étudié est représentée par la figure 2.5. Le parallélisme des axes des articulations rotoïdes des articulations de

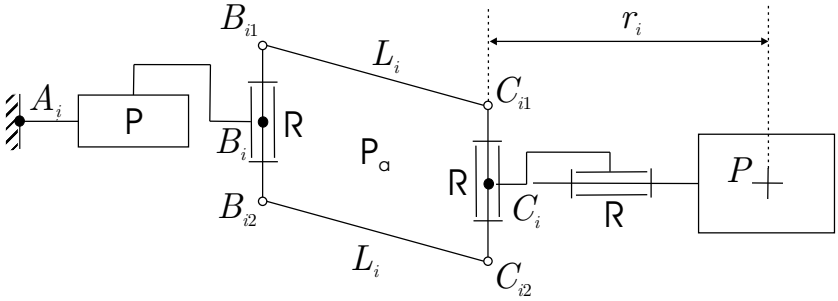


figure 2.5 – *Morphologie de la $i^{ème}$ jambe de l'Orthoglide*

type parallélogramme est aussi une condition nécessaire à l'isostaticité du manipulateur et à la pertinence des résultats obtenus. Dans le cadre de notre étude, nous supposons donc que cette condition est respectée.

2.3.2 Analyse de sensibilité cinématique

Une première analyse de la sensibilité de l'Orthoglide est ici faite en utilisant un modèle simplifié afin d'avoir un ordre d'idée de l'influence des variations des paramètres pris en

compte sur la position de l'effecteur du manipulateur.

Pour obtenir une relation entre les variations de la position de l'effecteur et les variations dimensionnelles, nous écrivons les équations correspondant aux trois chaînes de fermeture cinématiques du manipulateur. Nous obtenons ainsi trois fonctions implicites caractéristiques de la cinématique du manipulateur. En les différenciant, nous obtenons une matrice jacobienne de sensibilité, qui exprime la relation entre les variations des paramètres géométriques pris en compte et l'erreur de position de l'effecteur.

2.3.2.1 Nomenclature

Le paramétrage du manipulateur est décrit par la figure 2.2. La nomenclature résumée dans le tableau 2.1 regroupe l'ensemble des variables et variations prises en compte par la première méthode d'analyse de sensibilité du manipulateur.

$\mathcal{R}_b(O,x,y,z)$	repère de référence d'origine O et d'axes x, y et z
$\mathcal{R}_P(P,X,Y,Z)$	système de coordonnées d'origine P et lié à l'effecteur
$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_x & p_y & p_z \end{bmatrix}^T$	coordonnées cartésiennes de l'effecteur exprimées dans $\mathcal{R}_b$
$\delta\mathbf{p} = \begin{bmatrix} \delta p_x & \delta p_y & \delta p_z \end{bmatrix}^T$	erreur de position de l'effecteur exprimée dans $\mathcal{R}_b$
ρ_i	élongation de la $i^{\text{ème}}$ articulation prismatique
$\delta\rho_i$	erreur d'élongation de la $i^{\text{ème}}$ articulation prismatique
L_i	longueur théorique du $i^{\text{ème}}$ parallélogramme
δL_i	variation de la longueur du $i^{\text{ème}}$ parallélogramme
a_i	distance entre les points O et A_i
r_i	distance entre les points P et C_i

tableau 2.1 – *Nomenclature propre à l'analyse de sensibilité cinématique*

2.3.2.2 Mise en équations

Les points A_1, A_2 et A_3 sont les points d'attache des actionneurs prismatiques et leurs coordonnées cartésiennes exprimées dans $\mathcal{R}_b$ sont $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, et $\mathbf{a}_3$, respectivement.

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} -a_1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \tag{2.7a}$$

$$\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -a_2 & 0 \end{bmatrix}^T \tag{2.7b}$$

$$\mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_3 \end{bmatrix}^T \tag{2.7c}$$

a_i est la distance entre les points A_i et O, O étant l'origine du repère de base $\mathcal{R}_b$. Les points B_1, B_2 et B_3 sont les points d'attache des actionneurs prismatiques et des parallé-

logrammes. Leurs coordonnées dans le repère de base sont :

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} -a_1 + \rho_1 & b_{1y} & b_{1z} \end{bmatrix}^T \tag{2.8a}$$

$$\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} b_{2x} & -a_2 + \rho_2 & b_{2z} \end{bmatrix}^T \tag{2.8b}$$

$$\mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} b_{3x} & b_{3y} & -a_3 + \rho_3 \end{bmatrix}^T \tag{2.8c}$$

où ρ_i est l'élongation de la $i^{\text{ème}}$ articulation prismatique. b_{1y} et b_{1z} sont les défauts de position du point B_1 selon les axes y et z du repère de base $\mathcal{R}_b$, respectivement. De même, b_{2x} et b_{2z} sont les défauts de position du point B_2 selon les axes x et z de $\mathcal{R}_b$, et b_{3x} et b_{3y} sont les défauts de position du point B_3 selon les axes x et y de $\mathcal{R}_b$. Ces défauts de position sont dus aux erreurs d'orientation des directions des actionneurs prismatiques, i.e. aux défauts de perpendicularité des actionneurs prismatiques.

Les coordonnées cartésiennes des points C_1, C_2, et C_3, exprimées dans $\mathcal{R}_b$, sont les suivantes :

$$\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} p_x - r_1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \tag{2.9a}$$

$$\mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} 0 & p_y - r_2 & 0 \end{bmatrix}^T \tag{2.9b}$$

$$\mathbf{c}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & p_z - r_3 \end{bmatrix}^T \tag{2.9c}$$

où p_x, p_y, p_z sont les coordonnées cartésiennes de l'effecteur P, exprimées dans le repère $\mathcal{R}_b$.

La longueur du $i^{\text{ème}}$ parallélogramme, L_i, est la norme euclidienne du vecteur $\overrightarrow{B_iCi}$.

$$L_i = \|\mathbf{c}_i - \mathbf{b}_i\|_2 \ , \ i = 1,2,3 \tag{2.10}$$

Il en découle trois fonctions implicites exprimées en fonction des paramètres géométriques du manipulateur :

$$F_1 = (-r_1 + p_x + a_1 - \rho_1)^2 + (p_y - b_{1y})^2 + (p_z - b_{1z})^2 - L_1^2 = 0 \tag{2.11}$$

$$F_2 = (p_x - b_{2x})^2 + (-r_2 + p_y + a_2 - \rho_2)^2 + (p_z - b_{2z})^2 - L_2^2 = 0 \tag{2.12}$$

$$F_3 = (p_x - b_{3x})^2 + (p_y - b_{3y})^2 + (-r_3 + p_z + a_3 - \rho_3)^2 - L_3^2 = 0 \tag{2.13}$$

En différenciant les fonctions F_1, F_2, et F_3 par rapport aux paramètres géométriques du manipulateur et de la position de l'effecteur, nous obtenons une relation entre l'erreur de position de l'effecteur, $\delta\mathbf{p}$, et les variations des paramètres géométriques, $\delta\mathbf{q}_i$:

$$\delta F_i = \mathbf{A}_i \delta\mathbf{p} + \mathbf{B}_i \delta\mathbf{q}_i = 0 \ , \ i = 1,2,3 \tag{2.14}$$

■

avec

$$\mathbf{A}_i = \left[\begin{array}{ccc} \partial F_i/\partial p_x & \partial F_i/\partial p_y & \partial F_i/\partial p_z \end{array} \right] \tag{2.15}$$

$$\mathbf{B}_i = \left[\begin{array}{cccccc} \partial F_i/\partial a_i & \partial F_i/\partial b_{iy} & \partial F_i/\partial b_{iz} & \partial F_i/\partial \rho_i & \partial F_i/\partial L_i & \partial F_i/\partial r_i \end{array} \right] \tag{2.16}$$

$$\delta\mathbf{p} = \left[\begin{array}{ccc} \delta p_x & \delta p_y & \delta p_z \end{array} \right]^T \tag{2.17}$$

$$\delta\mathbf{q}_i = \left[\begin{array}{cccccc} \delta a_i & \delta h_i & \delta k_i & \delta \rho_i & \delta L_i & \delta r_i \end{array} \right]^T \tag{2.18}$$

où δa_i, δh_i, δk_i, $\delta \rho_i$, δL_i, et δr_i, représentent les variations de a_i, h_i, k_i, ρ_i, L_i, et r_i, respectivement, et $h_1 = b_{1y}$, $k_1 = b_{1z}$, $h_2 = b_{2x}$, $k_2 = b_{2z}$, $h_3 = b_{3x}$, $k_3 = b_{3y}$.

L'équation suivante tient compte du couplage des trois chaînes de fermeture cinématiques du manipulateur.

$$\mathbf{A}\delta\mathbf{p} + \mathbf{B}\delta\mathbf{q} = 0 \tag{2.19}$$

Elle est déduite de l'équation (2.14) en isolant les paramètres géométriques des coordonnées cartésiennes de la position de l'effecteur. Les expressions des matrices $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, et du vecteur $\delta\mathbf{q}$ sont les suivantes :

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{ccc} \mathbf{A}_1^T \mathbf{A}_2^T \mathbf{A}_3^T \end{array} \right]^T \in \mathbb{R}^{3\times 3} \tag{2.20}$$

$$\mathbf{B} = \left[\begin{array}{ccc} \mathbf{B}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{B}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{B}_3 \end{array} \right] \in \mathbb{R}^{3\times 18} \tag{2.21}$$

$$\delta\mathbf{q} = \left[\begin{array}{ccc} \delta\mathbf{q}_1^T & \delta\mathbf{q}_2^T & \delta\mathbf{q}_3^T \end{array} \right]^T \in \mathbb{R}^{18\times 1} \tag{2.22}$$

Nous pouvons remarquer que $\mathbf{A}$ est la matrice jacobienne cinématique parallèle de l'Orthoglide. D'après Chablat et Wenger (2003), le manipulateur ne rencontre pas de configuration singulière parallèle lorsque son effecteur parcourt le cube C_u. Par conséquent, $\mathbf{A}$ n'est pas singulière et son inverse $\mathbf{A}^{-1}$ existe sur C_u. L'erreur de position de l'effecteur est ainsi définie par :

$$\delta\mathbf{p} = \mathbf{C}\ \delta\mathbf{q} \tag{2.23}$$

où $\mathbf{C}$, appelée matrice jacobienne de sensibilité du manipulateur, a pour expression :

$$\mathbf{C} = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = \left[\begin{array}{cccc} \partial p_x/\partial a_1 & \partial p_x/\partial h_1 & \cdots & \partial p_x/\partial r_3 \\ \partial p_y/\partial a_1 & \partial p_y/\partial h_1 & \cdots & \partial p_y/\partial r_3 \\ \partial p_z/\partial a_1 & \partial p_z/\partial h_1 & \cdots & \partial p_z/\partial r_3 \end{array} \right] \in \mathbb{R}^{3\times 18} \tag{2.24}$$

Les termes de la matrice $\mathbf{C}$ sont les coefficients de sensibilité des coordonnées cartésiennes

de la position de l'effecteur du manipulateur aux paramètres géométriques. Ces coefficients sont utilisés par la suite pour analyser la sensibilité de la position de l'effecteur de l'Orthoglide aux variations de ses paramètres géométriques. Les résultats de cette analyse de sensibilité sont présentés ci-après.

2.3.2.3 Résultats de l'analyse de sensibilité cinématique

Dans cette partie, nous analysons la sensibilité de la position de l'effecteur de l'Orthoglide à l'aide des termes de la matrice **C**. Cette matrice dépend de la position de l'effecteur. Dans un premier temps, nous calculons donc la moyenne des coefficients de sensibilité lorsque l'effecteur parcourt le cube C_u d'arête égale à 200 mm et représenté par la figure 2.3. Ensuite, nous faisons une analyse locale de la sensibilité de la position de l'effecteur pour repérer les positions les plus pénalisantes et les plus intéressantes.

Les figures 2.6, 2.7, 2.8, et 2.9 représentent les valeurs moyennes des coefficients de sensibilité de p_x, p_y, p_z, et de la norme de $\mathbf{p}$ lorsque l'effecteur P parcourt le cube C_u. Ces moyennes sont calculées à partir de cent points choisis aléatoirement dans le cube C_u.

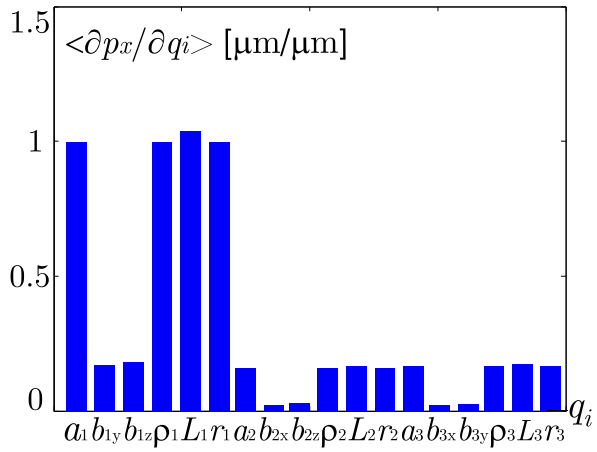


figure 2.6 – *Sensibilité moyenne de p_x lorsque P parcourt C_u*

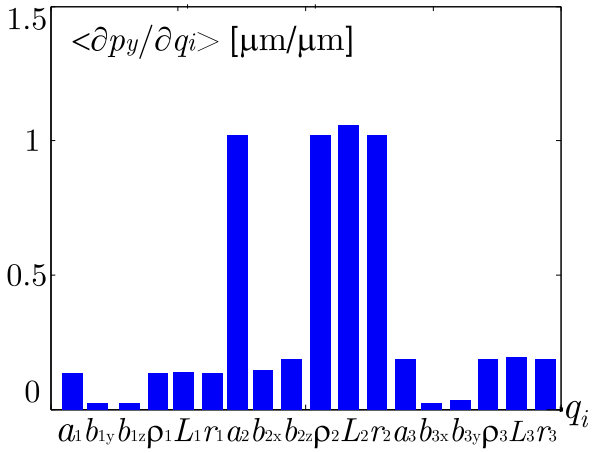


figure 2.7 – *Sensibilité moyenne de p_y lorsque P parcourt C_u*

Comme l'indiquent ces figures, la position de l'effecteur est très sensible aux variations de la position des points A_i, des longueurs des parallélogrammes L_i, des longueurs des actionneurs prismatiques, ρ_i, et de la position des points C_i, r_i (cf. figure 2.5). En revanche, elle est très peu sensible aux variations des paramètres b_{1y}, b_{1z}, b_{2x}, b_{2z}, b_{3x}, et b_{3y}, i.e. aux défauts de perpendicularité des actionneurs prismatiques. Par ailleurs, nous pouvons remarquer que p_x, (p_y, p_z, respectivement) est beaucoup plus sensible aux variations des paramètres géométriques de la première (deuxième, troisième, respectivement) jambe du manipulateur qu'à celles des paramètres géométriques des autres jambes. Ces corrélations sont dues à la symétrie de l'architecture du manipulateur. Dorénavant, nous tiendrons compte simplement des variations des paramètres géométriques de la première jambe du

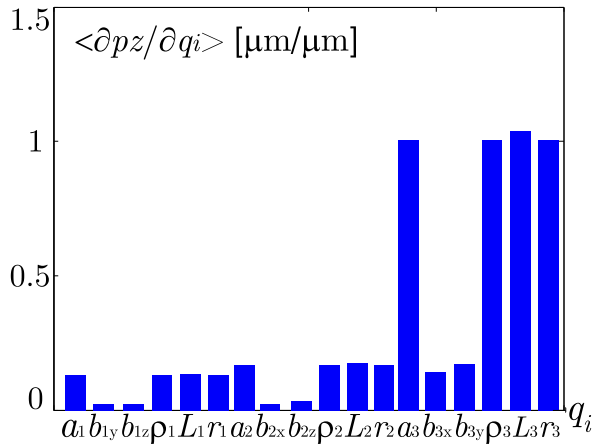


figure 2.8 – *Sensibilité moyenne de p_z lorsque P parcourt C_u*

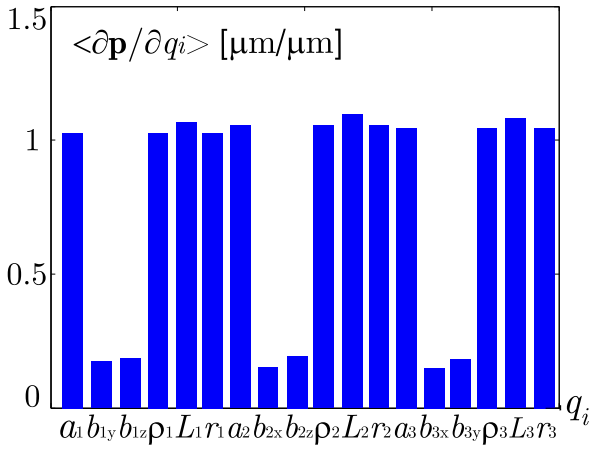


figure 2.9 – *Sensibilité moyenne de $\boldsymbol{p}$ lorsque P parcourt C_u*

manipulateur. En effet, la sensibilité de la position de l'effecteur aux variations des paramètres géométriques des deuxième et troisième jambes peut être déduite de la sensibilité de la position de l'effecteur aux variations des paramètres géométriques de la première jambe.

A l'aide d'une analyse par intervalles, Chablat *et al.* (2002) ont montré que l'analyse cinématique de l'Orthoglide dans le cube C_u peut être réduite à une analyse sur la diagonale Q_1Q_2 de C_u. En effet, les bornes des facteurs d'amplification de vitesse du manipulateur sont respectées en tout point du C_u lorsqu'elles le sont aux sommets Q_1 et Q_2. Par ailleurs l'étude des singularités sur la diagonale Q_1Q_2 est suffisante pour connaître toutes les configurations singulières du manipulateur lorsque l'effecteur du manipulateur parcourt le cube C_u (cf. Annexe A).

Numériquement, nous remarquons que les valeurs des coefficients de sensibilité sont maximales lorsque l'effecteur du manipulateur se trouve aux points Q_1 et Q_2. Ainsi, nous supposons que les limites prescrites des coefficients de sensibilité sont respectées en tout point de C_u si elles le sont aux points Q_1 et Q_2. En outre, nous limitons l'analyse locale de la sensibilité de l'Orthoglide dans le cube C_u à son analyse sur la diagonale Q_1Q_2 en supposant que les résultats obtenus sont caractéristiques de la sensibilité du manipulateur lorsque son effecteur balaie C_u.

Les figures 2.10 et 2.11 représentent ainsi l'évolution des coefficients de sensibilité de p_x et p_y aux variations des paramètres géométriques de la première jambe du manipulateur, i.e.: a_1, b_{1y}, b_{1z}, r_1, L_1, et r_1, lorsque l'effecteur parcourt la diagonale Q_1Q_2. Il s'avère que ces coefficients sont minimaux dans la configuration isotrope cinématique du manipulateur, i.e.: $P \equiv O$, et maximaux lorsque l'effecteur se trouve en Q_2, i.e.: dans la configuration la plus proche d'une configuration singulière sérielle.
La figure 2.12 présente les coefficients de sensibilité de la position de l'effecteur lorsqu'il

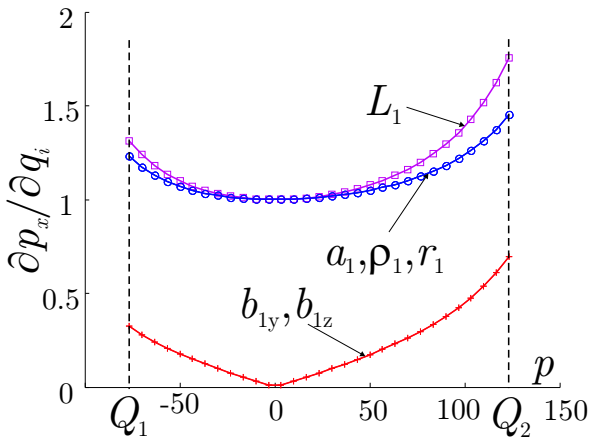


figure 2.10 – *Sensibilité de p_x aux variations de la première jambe*

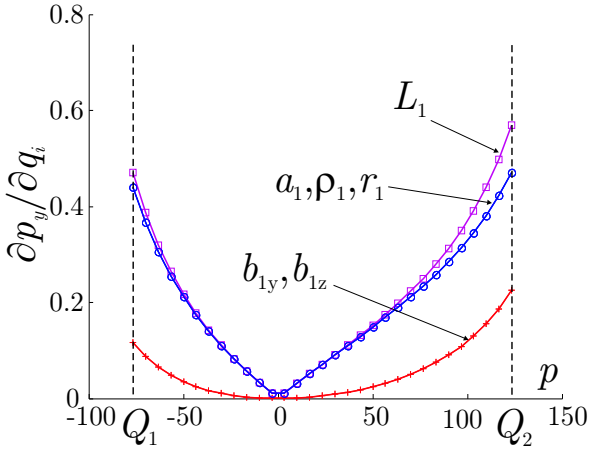


figure 2.11 – *Sensibilité de p_y aux variations de la première jambe*

parcourt la diagonale Q_1Q_2. Nous pouvons remarquer à nouveau que tous les coefficients de sensibilité sont minimaux lorsque le manipulateur se trouve dans sa configuration isotrope cinématique et maximaux lorsque l'effecteur se trouve en Q_2, i.e. au plus près d'une configuration singulière sérielle.

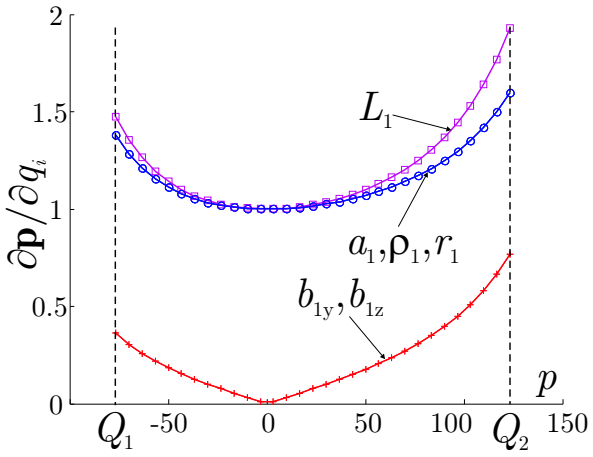


figure 2.12 – *Sensibilité de $\boldsymbol{p}$ aux variations de la première jambe*

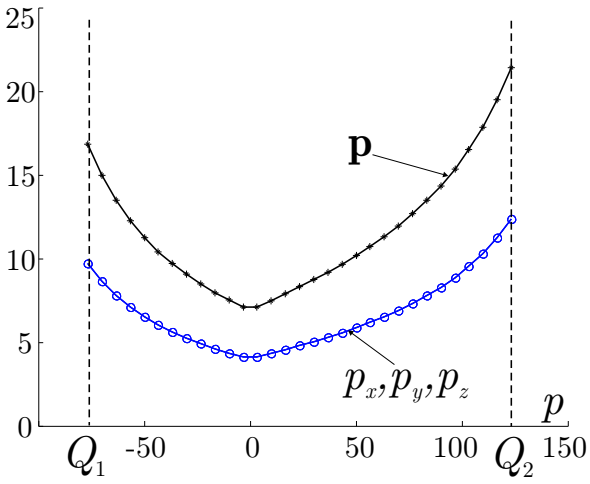


figure 2.13 – *Sensibilité globale de $\boldsymbol{p}$, p_x, p_y, p_z*

La figure 2.13 représente les sensibilités globales de $\mathbf{p}$, p_x, p_y, et p_z à l'ensemble des variations dimensionnelles prises en compte. Nous constatons que la configuration isotrope cinématique est à nouveau la plus intéressante, puisque les sensibilités globales de $\mathbf{p}$, p_x, p_y, et p_z sont minimales dans cette configuration. Au contraire, la configuration la plus proche d'une configuration singulière, i.e. $P \equiv Q_2$, est la plus pénalisante.

D'après les courbes précédentes la sensibilité de la position de l'effecteur aux différentes variations est minimale lorsque le manipulateur se trouve dans sa configuration isotrope

cinématique. Les figures 2.14 et 2.15 représentent les coefficients de sensibilité de p_x et de la position globale de l'effecteur lorsque le manipulateur se trouve dans cette configuration.

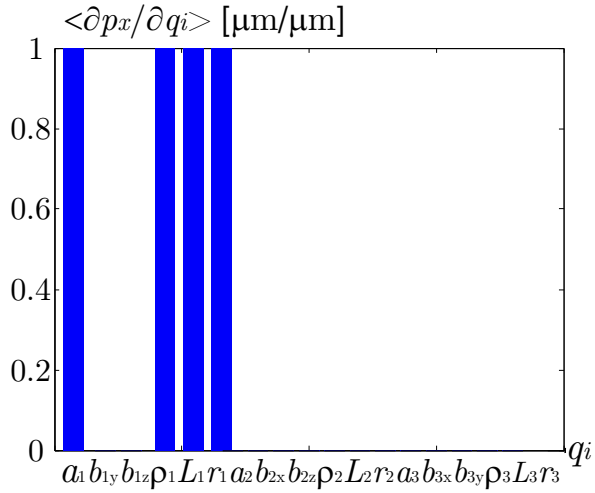


figure 2.14 – *Sensibilité de p_x dans la configuration isotrope cinématique*

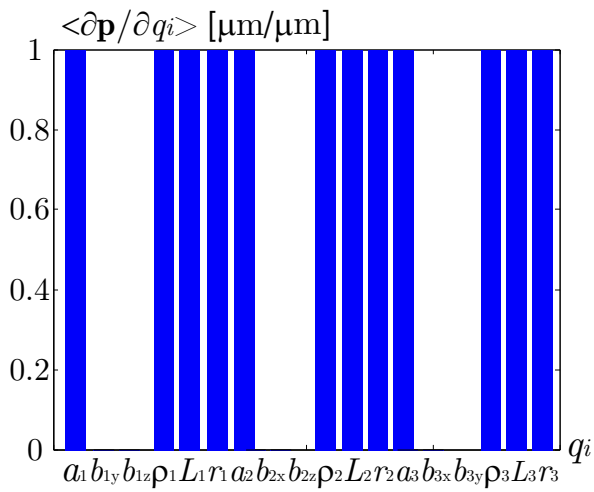


figure 2.15 – *Sensibilité de $\boldsymbol{p}$ dans la configuration isotrope cinématique*

Par ailleurs, l'erreur de position de l'effecteur ne dépend pas de l'erreur d'orientation des directions des actionneurs prismatiques dans la configuration isotrope cinématique puisque la sensibilité de la position de l'effecteur aux variations de b_{1y}, b_{1z}, b_{2x}, b_{2z}, b_{3x}, et b_{3y} est nulle dans cette configuration. De plus, les sensibilités de p_x, p_y, et p_z y sont découplées. En effet, les variations de p_x (p_y, p_z, respectivement) sont seulement dues aux variations dimensionnelles des paramètres géométriques de la première (deuxième, troisième, respectivement) jambe. Les coefficients de sensibilité correspondants sont égaux à un. Ce qui signifie que les variations dimensionnelles ne sont ni amplifiées, ni compensées dans la configuration isotrope cinématique.

Les figures 2.16 et 2.17 représentent les coefficients de sensibilité de p_x et de $\mathbf{p}$ lorsque l'effecteur se trouve en Q_2. Dans ce cas, les sensibilités de p_x, p_y, et p_z sont couplées. Les variations de p_x sont par exemple aussi bien dues aux variations dimensionnelles des paramètres géométriques de la première jambe qu'à celles des paramètres géométriques des autres jambes. Par ailleurs, l'amplification des variations dimensionnelles est importante dans cette configuration. En effet, les coefficients de sensibilité sont quasiment tous supérieurs à un et certains avoisinent deux. Par exemple, la sensibilité de $\mathbf{p}$ aux variations des longueurs des parallélogrammes est égale à 1.9. Ce qui signifie qu'une variation de 10 mm de la longueur d'un parallélogramme engendre une variation de 19 mm de la position de l'effecteur.

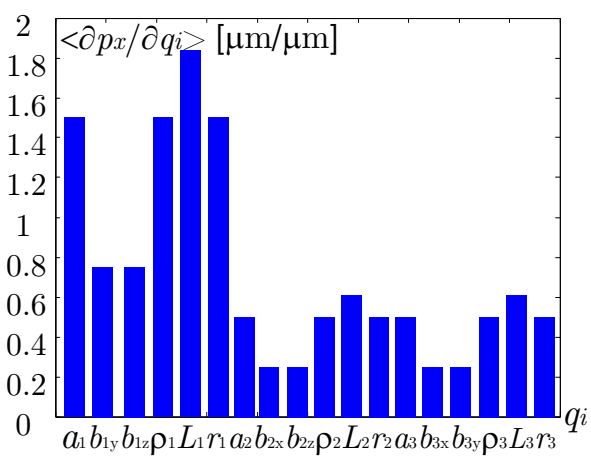


figure 2.16 – *Sensibilité de p_x lorsque l'effecteur se trouve en Q_2*

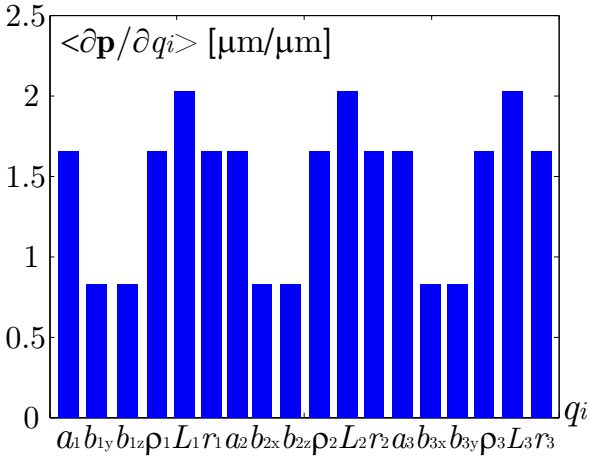


figure 2.17 – *Sensibilité de $\boldsymbol{p}$ lorsque l'effecteur se trouve en Q_2*

2.3.2.4 Conclusion

Nous pouvons déduire des résultats de l'analyse de sensibilité précédente que la configuration isotrope cinétostatique du manipulateur est la plus intéressante. En effet, elle correspond à la configuration pour laquelle la sensibilité de la position de son effecteur aux variations des paramètres géométriques est minimale. La figure 2.18 représente l'Orthoglide dans sa configuration isotrope cinétostatique.

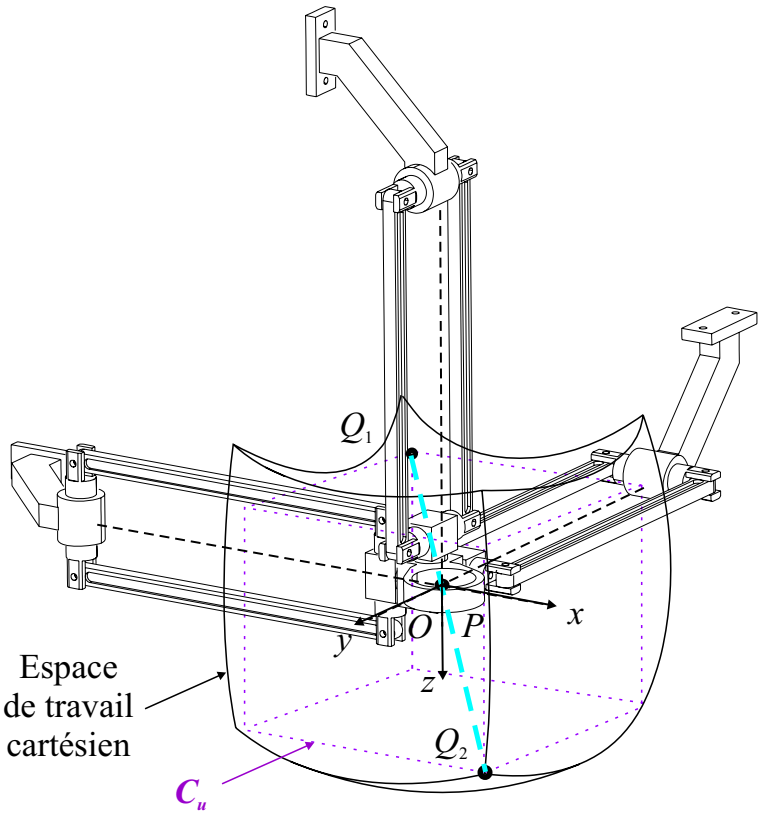


figure 2.18 – *Configuration isotrope cinématique de l'Orthoglide*

Au contraire, la configuration pour laquelle l'effecteur de l'Orthoglide se trouve en Q_2, configuration la plus proche d'une configuration singulière sérielle, est la plus pénalisante. Elle correspond en effet à la configuration pour laquelle la sensibilité de la position de l'effecteur du manipulateur est maximale. En outre, les figures 2.6 à 2.9 et 2.14 à 2.17 montrent que les variations des paramètres géométriques du même type d'une jambe à l'autre ont la même influence sur la position de l'effecteur.

Nous pouvons cependant remarquer que l'analyse de sensibilité précédente ne tient pas compte des variations des longueurs des barres des parallélogrammes, même si elle tient compte des variations de la longueur globale des parallélogrammes. C'est la raison pour laquelle nous développons une autre méthode pour prendre en compte les variations internes des articulations de type parallélogramme, pour analyser la sensibilité de l'orientation de l'effecteur, et pour faire la distinction entre les variations responsables de l'erreur de position de l'effecteur et celles responsables de son erreur d'orientation.

2.3.3 Analyse de sensibilité vectorielle

Dans cette partie, nous mettons au point une méthode d'analyse de sensibilité de l'Orthoglide complémentaire à l'analyse de sensibilité précédente. Cette méthode présente les avantages de prendre en compte les variations internes aux articulations de type parallélogramme et d'évaluer la sensibilité de l'orientation de l'effecteur aux variations des longueurs et angulaires. Pour développer cette méthode, nous nous sommes aussi inspirés d'une étude de Huang *et al.* (2003) d'un manipulateur d'architecture parallèle comprenant aussi des articulations de type parallélogramme.
Dans un premier temps, nous exprimons les variations des longueurs et angulaires sous forme vectorielle. En écrivant les équations de fermeture des jambes du manipulateur, nous obtenons ensuite des relations entre l'erreur de position, l'erreur d'orientation, les variations des longueurs, et les variations angulaires. A partir de ces relations, nous obtenons les expressions des erreurs d'orientation et de position de l'effecteur du manipulateur en fonction des variations des longueurs et angulaires responsables de ces erreurs, respectivement. Il en découle des indices de sensibilité de la position et de l'orientation de l'effecteur du manipulateur. Ces indices nous permettent ainsi d'analyser la sensibilité de l'effecteur aux variations des longueurs et angulaires, notamment aux erreurs de parallélisme des barres des parallélogrammes.

2.3.3.1 Paramétrage des variations des longueurs et angulaires

Les variations des longueurs et angulaires de la $i^{\text{ème}}$ jambe du manipulateur, représentée schématiquement par la figure 2.5, sont représentées sous forme vectorielle par les figures 2.19, 2.20, 2.21, et 2.22.

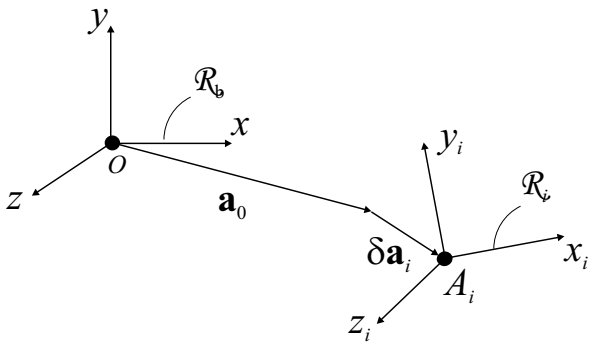


figure 2.19 – *Variations de la chaîne OA_i*

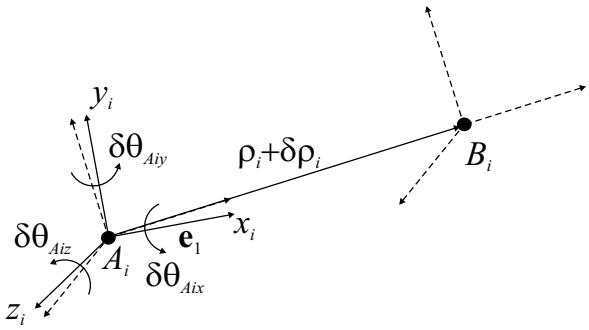


figure 2.20 – *Variations de la chaîne A_iB_i*

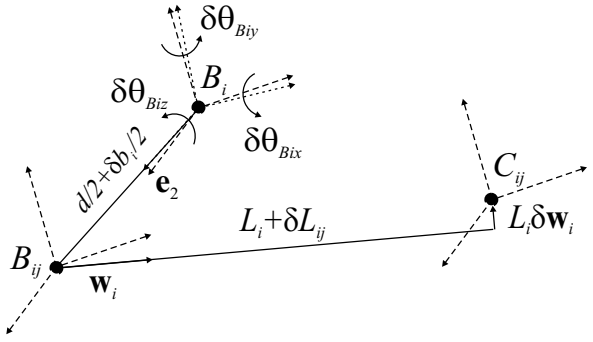


figure 2.21 – *Variations de la chaîne $B_iB_{ij}C_i$*

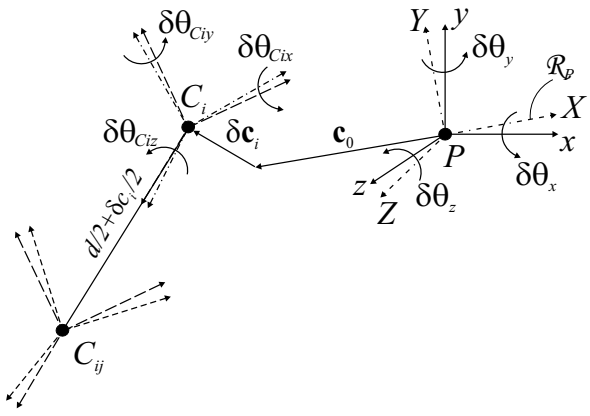


figure 2.22 – *Variations de la chaîne $C_{ij}C_iP$*

2.3.3.2 Nomenclature

Les variations des longueurs et angulaires représentées par les figures 2.19, 2.20, 2.21, et 2.22 sont répertoriées dans le tableau 2.2.

Notation	Description
$\mathcal{R}_b(O,x,y,z)$	repère de référence d'origine O et d'axes x, y et z
$\mathcal{R}_P(P,X,Y,Z)$	système de coordonnées d'origine P et lié à l'effecteur
$\mathcal{R}_i(A_i,x_i,y_i,z_i)$	système de coordonnées lié à la $i^{\text{ème}}$ articulation prismatique
$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_x & p_y & p_z \end{bmatrix}^T$	coordonnées cartésiennes de l'effecteur exprimées dans $\mathcal{R}_b$
$\delta\mathbf{p} = \begin{bmatrix} \delta p_x & \delta p_y & \delta p_z \end{bmatrix}^T$	erreur de position de l'effecteur exprimée dans $\mathcal{R}_b$
$\mathbf{a}_0$	position nominale du point A_i par rapport à O exprimée dans $\mathcal{R}_i$
$\mathbf{o}$	vecteur des coordonnées cartésiennes du point O exprimées dans $\mathcal{R}_b$
$\mathbf{a}_i$	vecteur des coordonnées cartésiennes du point A_i exprimées dans $\mathcal{R}_b$
$\mathbf{b}_i$	vecteur des coordonnées cartésiennes du point B_i exprimées dans $\mathcal{R}_i$
$\mathbf{b}_{ij}$	vecteur des coordonnées cartésiennes du point B_{ij} exprimées dans $\mathcal{R}_i$
$\mathbf{c}_{ij}$	vecteur des coordonnées cartésiennes du point C_{ij} exprimées dans $\mathcal{R}_i$
$\mathbf{c}_i$	vecteur des coordonnées cartésiennes du point C_i exprimées dans $\mathcal{R}_i$
$\delta\mathbf{a}_i$	erreur de position du point A_i exprimée dans $\mathcal{R}_i$
ρ_i	élongation de la $i^{\text{ème}}$ articulation prismatique
$\delta\rho_i$	erreur d'élongation de la $i^{\text{ème}}$ articulation prismatique
L_i	longueur théorique du $i^{\text{ème}}$ parallélogramme
δL_i	variation de la longueur du $i^{\text{ème}}$ parallélogramme
$\delta\boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \delta\theta_x & \delta\theta_y & \delta\theta_z \end{bmatrix}^T$	erreur d'orientation de l'effecteur exprimée dans $\mathcal{R}_b$
δL_{ij}	variation de la longueur de la barre $\overline{B_{ij}C_{ij}}$
δb_i	variation de la longueur de la barre $\overline{B_{i1}B_{i2}}$

Suite page suivante

Notation	Description
Suite ...	
δc_i	variation de la longueur de la barre $\overline{C_{i1}C_{i2}}$
δl_i	erreur de parallélisme des barres $\overline{B_{i1}B_{i2}}$ et $\overline{C_{i1}C_{i2}}$
δm_i	erreur de parallélisme des barres $\overline{B_{i1}C_{i1}}$ et $\overline{B_{i2}C_{i2}}$
$\mathbf{w}$	direction des barres $\overline{B_{i1}C_{i1}}$ et $\overline{B_{i2}C_{i2}}$
$\delta\mathbf{w}$	variation de la direction des barres $\overline{B_{i1}C_{i1}}$ et $\overline{B_{i2}C_{i2}}$
$\delta\mathbf{e}_i = \begin{bmatrix} \delta e_{ix} & \delta e_{iy} & \delta e_{iz} \end{bmatrix}^T$	somme des erreurs de position des points A_i, B_i, C_i
$\delta\boldsymbol{\theta}_{Ai} = \begin{bmatrix} \delta\theta_{Aix} & \delta\theta_{Aiy} & \delta\theta_{Aiz} \end{bmatrix}^T$	variation angulaire de la direction de la $i^{\text{ème}}$ articulation prismatique
$\delta\boldsymbol{\theta}_{Bi} = \begin{bmatrix} \delta\theta_{Bix} & \delta\theta_{Biy} & \delta\theta_{Biz} \end{bmatrix}^T$	variation angulaire entre la barre $\overline{B_{i1}B_{i2}}$ et la direction de la $i^{\text{ème}}$ articulation prismatique
$\delta\boldsymbol{\theta}_{Ci} = \begin{bmatrix} \delta\theta_{Cix} & \delta\theta_{Ciy} & \delta\theta_{Ciz} \end{bmatrix}^T$	variation angulaire entre l'effecteur et la barre $\overline{C_{i1}C_{i2}}$
$\delta\boldsymbol{\gamma}_i = \begin{bmatrix} \delta\gamma_{ix} & \delta\gamma_{iy} & \delta\gamma_{iz} \end{bmatrix}^T$	erreur d'orientation du $i^{\text{ème}}$ parallélogramme par rapport à la $i^{\text{ème}}$ articulation prismatique et à l'effecteur

tableau 2.2 – *Nomenclature propre à l'analyse de sensibilité vectorielle*

2.3.3.3 Mise en équations

Le paramétrage du manipulateur connu, nous obtenons les relations entre l'erreur de position, l'erreur d'orientation, les variations des longueurs, et les variations angulaires, en écrivant les équations de fermeture des jambes du manipulateur.

$\mathbf{o}$,$\mathbf{a}_i$,$\mathbf{b}_i$,$\mathbf{b}_{ij}$,$\mathbf{c}_{ij}$,$\mathbf{c}_i$, et $\mathbf{p}$ sont les coordonnées cartésiennes des points O, A_i, B_i, B_{ij}, C_{ij}, C_i, et P, respectivement, exprimées dans le repère $\mathcal{R}_b$, où $\mathcal{R}_b$ est le repère de référence d'origine O, intersection des directions des droites qui portent les actionneurs prismatiques.

D'après la figure 2.19,

$$\mathbf{a}_i - \mathbf{o} = \mathbf{R}_i(\mathbf{a}_0 + \delta\mathbf{a}_i) \tag{2.25}$$

où $\mathbf{a}_0$ est la position nominale du point A_i par rapport à O exprimée dans $\mathcal{R}_i$, $\mathbf{a}_i$ est sa position réelle exprimée dans $\mathcal{R}_b$, et $\delta\mathbf{a}_i$ est son erreur de position exprimée dans $\mathcal{R}_i$. $\mathbf{R}_i$ est la matrice de transformation de $\mathcal{R}_i$ à $\mathcal{R}_b$ et $\mathbf{I}_3$ est la matrice identité de dimension (3×3).

■

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{I}_3 \tag{2.26}$$

$$\mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.27}$$

$$\mathbf{R}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.28}$$

D'après la figure 2.20,

$$\mathbf{b}_i - \mathbf{a}_i = \mathbf{R}_i(\rho_i + \delta\rho_i)\mathbf{e}_1 + \mathbf{R}_i\delta\theta_{Ai} \times (\rho_i + \delta\rho_i)\mathbf{e}_1 \tag{2.29}$$

où ρ_i est le déplacement de la $i^{\text{ème}}$ articulation prismatique, $\delta\rho_i$ est sa variation, $\delta\theta_{Ai} = \begin{bmatrix} \delta\theta_{Aix} & \delta\theta_{Aiy} & \delta\theta_{Aiz} \end{bmatrix}^T$ est la variation angulaire de sa direction, équivalent au défaut de perpendicularité. Par ailleurs,

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.30}$$

$$\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2.31}$$

$$\xi(j) = \begin{cases} 1 & \text{if } j = 1 \\ -1 & \text{if } j = 2 \end{cases} \tag{2.32}$$

D'après la figure 2.21,

$$\mathbf{b}_{ij} - \mathbf{b}_i = \mathbf{R}_i[\mathbf{I}_3 + \delta\theta_{Ai}\times]\big(\xi(j)(d/2 + \delta b_i/2)[\mathbf{I}_3 + \delta\theta_{Bi}\times]\mathbf{e}_2\big) \tag{2.33}$$

$$\mathbf{c}_{ij} - \mathbf{b}_{ij} = L_i\mathbf{w}_i + \delta L_{ij}\mathbf{w}_i + L_i\delta\mathbf{w}_i \tag{2.34}$$

où d est la largeur nominale du parallélogramme, δb_i est la variation de longueur de la barre $\overline{B_{i1}B_{i2}}$ et est supposée équitablement partagée de chaque côté du point B_i. $\delta\theta_{Bi} = \begin{bmatrix} \delta\theta_{Bix} & \delta\theta_{Biy} & \delta\theta_{Biz} \end{bmatrix}^T$ est l'erreur d'orientation de la barre $\overline{B_{i1}B_{i2}}$ par rapport à la direction de la $i^{\text{ème}}$ articulation prismatique. L_i est la longueur du $i^{\text{ème}}$ parallélogramme. δL_{ij} est la variation de longueur de la barre $\overline{B_{ij}C_{ij}}$ de vecteur directeur $\mathbf{w}_i$. $\delta\mathbf{w}_i$ est la variation de ce dernier et lui est perpendiculaire.

■

D'après la figure 2.22,

$$\mathbf{c}_{ij} - \mathbf{c}_i = \mathbf{R}_i[\mathbf{I}_3 + \delta\boldsymbol{\theta}\times]\big(\xi(j)(d/2 + \delta c_i/2)[\mathbf{I}_3 + \delta\theta_{Ci}\times]\mathbf{e}_2\big) \quad (2.35)$$

$$\mathbf{c}_i - \mathbf{p} = [\mathbf{I}_3 + \delta\boldsymbol{\theta}\times]\mathbf{R}_i(\mathbf{c}_0 + \delta\mathbf{c}_i) \quad (2.36)$$

où δc_i est la variation de longueur de la barre $\overline{C_{i1}C_{i2}}$. Elle est supposée également partagée de part et d'autre de C_i. Le vecteur $\delta\theta_{Ci} = \begin{bmatrix} \delta\theta_{Cix} & \delta\theta_{Ciy} & \delta\theta_{Ciz} \end{bmatrix}^T$ représente l'erreur d'orientation de la barre $\overline{C_{i1}C_{i2}}$ par rapport à la barre $\overline{C_iP}$. $\mathbf{c}_i$ est le vecteur des coordonnées réelles de C_i exprimées dans $\mathcal{R}_b$, $\mathbf{c}_0$ est le vecteur de ses coordonnées nominales et $\delta\mathbf{c}_i$ est son erreur de position exprimées dans $\mathcal{R}_i$. Enfin, $\delta\boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \delta\theta_x & \delta\theta_y & \delta\theta_z \end{bmatrix}^T$ est l'erreur d'orientation de l'effecteur exprimée dans $\mathcal{R}_b$.

En linéarisant les équations (2.25) à (2.35) et en isolant les termes nominaux, i.e. $\mathbf{p}_0 = \mathbf{R}_i(\mathbf{a}_0 + \rho_i\mathbf{e}_1 - \mathbf{c}_0) + L_i\mathbf{w}_i$, nous obtenons l'expression de l'erreur de position de l'effecteur du manipulateur :

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{p} &= \mathbf{p} - \mathbf{p}_0 \\ &= \mathbf{R}_i\big(\delta\mathbf{e}_i + \rho_i(\delta\theta_{Ai}\times\mathbf{e}_1) + \xi(j)\ d/2\ (\delta\theta_{Ai}\times\mathbf{e}_2) + \\ &\quad \xi(j)\ d/2\ (\delta\gamma_i\times\mathbf{e}_2) + \xi(j)\ \delta m_i/2\ \mathbf{e}_2\big) + \\ &\quad \delta L_{ij}\mathbf{w}_i + L_i\delta\mathbf{w}_i - \delta\boldsymbol{\theta}\times\mathbf{R}_i\big(\mathbf{c}_0 + d/2\ \xi(j)\ \mathbf{e}_2\big) \end{aligned} \quad (2.37)$$

où

$\delta\mathbf{e}_i = \delta\mathbf{a}_i + \delta\rho_i\mathbf{e}_1 - \delta\mathbf{c}_i$ est la somme des erreurs de position des points A_i, B_i, et C_i exprimée dans $\mathcal{R}_i$;

$\delta\gamma_i = \delta\theta_{Bi} - \delta\theta_{Ci}$ est la somme des erreurs d'orientation du $i^{\text{ème}}$ parallélogramme par rapport à la direction de la $i^{\text{ème}}$ articulation prismatique et par rapport à l'effecteur ;

$\delta m_i = \delta b_i - \delta c_i$ correspond à l'erreur de parallélisme des barres $\overline{B_{i1}C_{i1}}$ et $\overline{B_{i2}C_{i2}}$ comme le représente la figure 2.23.

D'après l'équation (2.37), les erreurs de position et d'orientation de l'effecteur sont couplées. Les erreurs de position de l'effecteur peuvent être compensées puisque le manipulateur a trois degrés de liberté de translation, contrairement aux erreurs d'orientation qui ne peuvent pas l'être lors du fonctionnement du manipulateur. Il est donc important de minimiser les variations des paramètres géométriques responsables des erreurs d'orientation de l'effecteur.

Les relations entre l'erreur d'orientation de l'effecteur, son erreur de position et les varia-

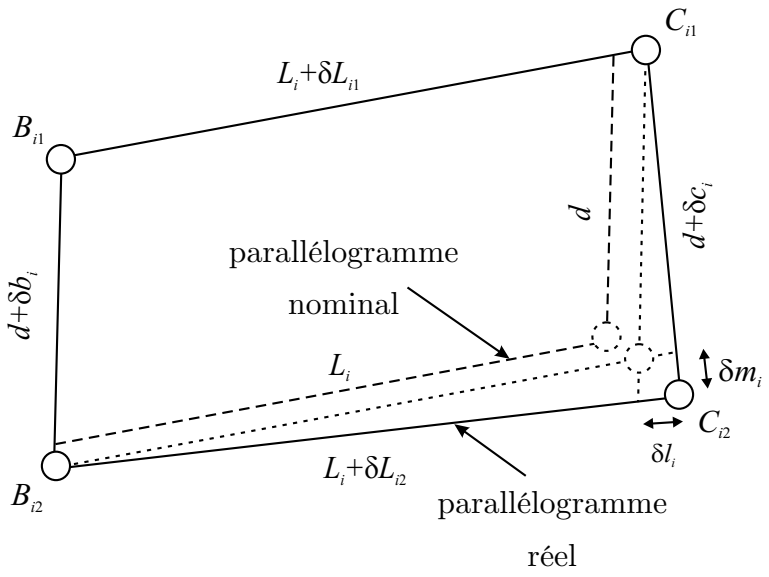


figure 2.23 – *Variations du $i^{ème}$ parallélogramme*

tions des paramètres géométriques sont déduites de l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_i^T \delta\mathbf{p} \;=\; & \mathbf{w}_i^T \mathbf{R}_i \delta\mathbf{e}_i + \rho_i (\mathbf{R}_i \mathbf{e}_1 \times \mathbf{w}_i)^T \mathbf{R}_i \delta\boldsymbol{\theta}_{Ai} + \xi(j)\; d/2 \\ & (\mathbf{R}_i \mathbf{e}_2 \times \mathbf{w}_i)^T \mathbf{R}_i (\delta\theta_{Ai} + \delta\gamma_i) + \xi(j)\; \delta m_i/2\; \mathbf{w}_i^T \mathbf{R}_i \mathbf{e}_2 \\ & + \delta L_{ij} - \left(\mathbf{R}_i(\mathbf{c}_0 + \xi(j)\; d/2\; \mathbf{e}_2) \times \mathbf{w}_i\right)^T \delta\boldsymbol{\theta} \end{aligned} \tag{2.38}$$

Elle est obtenue en multipliant l'équation (2.37) par $\mathbf{w}_i^T$ et en utilisant la circularité du produit vectoriel.

2.3.3.4 Relation entre l'erreur d'orientation de l'effecteur et les variations des paramètres géométriques

Une relation entre l'erreur d'orientation de l'effecteur et les variations des paramètres géométriques, indépendante de l'erreur de position $\delta\mathbf{p}$, est déduite par soustraction des expressions de l'équation (2.38) obtenues pour $j = 1$ et $j = 2$:

$$d(\mathbf{R}_i \mathbf{e}_2 \times \mathbf{w}_i)^T \delta\boldsymbol{\theta} = \delta l_i + d(\mathbf{R}_i \mathbf{e}_2 \times \mathbf{w}_i)^T \mathbf{R}_i (\delta\theta_{Ai} + \delta\gamma_i) + \delta m_i\; \mathbf{w}_i^T \mathbf{R}_i \mathbf{e}_2 \tag{2.39}$$

où $\delta l_i = \delta L_{i1} - \delta L_{i2}$ est l'erreur relative des longueurs des barres $\overline{B_{i1}C_{i1}}$ et $\overline{B_{i2}C_{i2}}$. C'est aussi l'erreur de parallélisme des barres $\overline{B_{i1}B_{i2}}$ et $\overline{C_{i1}C_{i2}}$ comme le représente la figure 2.23). En outre, l'équation (2.39) peut être écrite sous forme compacte :

$$\delta\boldsymbol{\theta} = \mathbf{J}_{\theta\theta} \boldsymbol{\epsilon}_\theta \tag{2.40}$$

■

telle que

$$\mathbf{J}_{\theta\theta} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{E} \tag{2.41}$$

$$\mathbf{D} = d\begin{bmatrix} (\mathbf{R}_1\mathbf{e}_2 \times \mathbf{w}_1)^T \\ (\mathbf{R}_2\mathbf{e}_2 \times \mathbf{w}_2)^T \\ (\mathbf{R}_3\mathbf{e}_2 \times \mathbf{w}_3)^T \end{bmatrix} \tag{2.42}$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_1 & \mathbf{0}_{1\times 8} & \mathbf{0}_{1\times 8} \\ \mathbf{0}_{1\times 8} & \mathbf{E}_2 & \mathbf{0}_{1\times 8} \\ \mathbf{0}_{1\times 8} & \mathbf{0}_{1\times 8} & \mathbf{E}_3 \end{bmatrix} \tag{2.43}$$

$$\mathbf{E}_i = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{w}_i^T\mathbf{R}_i\mathbf{e}_2 & d(\mathbf{R}_i\mathbf{e}_2 \times \mathbf{w}_i)^T\mathbf{R}_i & d(\mathbf{R}_i\mathbf{e}_2 \times \mathbf{w}_i)^T\mathbf{R}_i \end{bmatrix} \tag{2.44}$$

$\delta\boldsymbol{\theta}$ est l'erreur d'orientation de l'effecteur exprimée dans $\mathcal{R}_b$ et $\boldsymbol{\epsilon}_\theta = (\boldsymbol{\epsilon}_{\theta 1}^T, \boldsymbol{\epsilon}_{\theta 2}^T, \boldsymbol{\epsilon}_{\theta 3}^T)^T$ tel que $\boldsymbol{\epsilon}_{\theta i} = (\delta l_i, \delta m_i, \delta\theta_{Ai}^T, \delta\gamma_i^T)^T$. Le déterminant de $\mathbf{D}$ est nul si et seulement si les vecteurs normaux au plans comprenant les parallélogrammes sont colinéaires, ou si un parallélogramme est aplati. En raison de la conception du manipulateur, aucune de ces conditions n'est vérifiées lorsque son effecteur parcourt le cube C_u. Par conséquent, le déterminant de la matrice $\mathbf{D}$ ne s'annule pas et la matrice est inversible quelle que soit la position de P dans C_u.

En outre, comme $(\mathbf{R}_i\mathbf{e}_2 \times \mathbf{w}_i)^T \perp \mathbf{R}_i\mathbf{e}_2$, $\delta\theta_{Aiz}$ et $\delta\gamma_{iz}$, les troisièmes composantes des vecteurs $\delta\theta_{Ai}$ et $\delta\gamma_i$ projetés dans $\mathcal{R}_i$, n'ont pas d'effet sur l'orientation de l'effecteur. Ainsi, la matrice $\mathbf{J}_{\theta\theta}$ peut être simplifiée en éliminant ses colonnes associées à $\delta\theta_{Aiz}$ et $\delta\gamma_{iz}$, i = 1,2,3. En conclusion, dix-huit variations : δl_i, δm_i, $\delta\theta_{Aix}$, $\delta\theta_{Aiy}$, $\delta\gamma_{ix}$, $\delta\gamma_{iy}$, i = 1,2,3, sont responsables de l'erreur d'orientation de l'effecteur.

2.3.3.5 Relation entre l'erreur de position de l'effecteur et les variations des paramètres géométriques

Par addition des expressions de l'équation (2.38) obtenues pour $j = 1$ et $j = 2$, nous obtenons une relation entre l'erreur de position de l'effecteur et les variations des paramètres géométriques, indépendante de $\delta\gamma_i$:

$$\mathbf{w}_i^T\delta\mathbf{p} = \delta L_i + \mathbf{w}_i^T\mathbf{R}_i\delta\mathbf{e}_i + \rho_i(\mathbf{R}_i\mathbf{e}_1 \times \mathbf{w}_i)^T\mathbf{R}_i\delta\theta_{Ai} - (\mathbf{R}_i\mathbf{c}_0 \times \mathbf{w}_i)^T\delta\boldsymbol{\theta} \tag{2.45}$$

L'équation (2.45) peut être écrite sous forme compacte :

$$\delta\mathbf{p} = \mathbf{J}_{pp}\boldsymbol{\epsilon}_p + \mathbf{J}_{p\theta}\boldsymbol{\epsilon}_\theta = [\mathbf{J}_{pp}\mathbf{J}_{p\theta}]\begin{bmatrix} \boldsymbol{\epsilon}_p \\ \boldsymbol{\epsilon}_\theta \end{bmatrix} \tag{2.46}$$

■

où

$$\mathbf{J}_{pp} = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{G} \tag{2.47}$$
$$\mathbf{J}_{p\theta} = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{J}_{\theta\theta} \tag{2.48}$$
$$\mathbf{F} = [\mathbf{w}_1\mathbf{w}_2\mathbf{w}_3]^T \tag{2.49}$$
$$\mathbf{G} = \mathrm{diag}(\mathbf{G}_i) \tag{2.50}$$
$$\mathbf{G}_i = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{w}_i^T\mathbf{R}_i & \rho_i(\mathbf{R}_i\mathbf{e}_1 \times \mathbf{w}_i)^T\mathbf{R}_i \end{bmatrix} \tag{2.51}$$
$$\mathbf{H} = -\begin{bmatrix} \mathbf{R}_1\mathbf{c}_0 \times \mathbf{w}_1 & \mathbf{R}_2\mathbf{c}_0 \times \mathbf{w}_2 & \mathbf{R}_3\mathbf{c}_0 \times \mathbf{w}_3 \end{bmatrix} \tag{2.52}$$
$$\boldsymbol{\epsilon}_p = (\boldsymbol{\epsilon}_{p1}^T,\boldsymbol{\epsilon}_{p2}^T,\boldsymbol{\epsilon}_{p3}^T)^T \tag{2.53}$$
$$\boldsymbol{\epsilon}_{pi} = (\delta L_i,\delta\mathbf{e}_i^T,\delta\theta_{Ai}^T)^T \tag{2.54}$$

$\delta L_i = (\delta L_{i1} + \delta L_{i2})/2$ est la valeur moyenne des variations des longueurs des barres $\overline{B_{i1}C_{i1}}$ et $\overline{B_{i2}C_{i2}}$, i.e.: la variation de la longueur du $i^{\text{ème}}$ parallélogramme. $\boldsymbol{\epsilon}_p$ est l'ensemble des variations des paramètres géométriques responsables de l'erreur de position de l'effecteur, exceptées celles responsables de son erreur d'orientation. $\boldsymbol{\epsilon}_p$ est composé de trois types d'erreurs :

- les variations des longueurs des parallélogrammes, i.e.: δL_i,$i = 1,2,3$;
- les erreurs de position des points A_i, B_i, et C_i, i.e.: $\delta\mathbf{e}_i$,$i = 1,2,3$;
- les erreurs d'orientation des directions des actionneurs prismatiques, $\delta\theta_{Ai}$, $i = 1,2,3$.

$\mathbf{F}$ correspond à la matrice jacobienne cinématique du manipulateur. D'après Chablat et Wenger (2003), elle n'est pas singulière et donc inversible lorsque lorsque l'effecteur P balaie le cube C_u.

D'après l'équation (2.45), comme $(\mathbf{R}_i\mathbf{e}_1 \times \mathbf{w}_i)^T \perp \mathbf{R}_i\mathbf{e}_1$, la matrice $\mathbf{J}_{pp}$ peut être simplifiée en éliminant les colonnes associées à $\delta\theta_{Aix}$, $i = 1,2,3$. En conclusion, trente-trois variations : δL_i, δe_{ix}, δe_{iy}, δe_{iz}, $\delta\theta_{Aix}$, $\delta\theta_{Aiy}$, $\delta\theta_{Aiz}$, δl_i, δm_i, $\delta\gamma_{ix}$, $\delta\gamma_{iy}$, $i = 1,2,3$ sont responsables de l'erreur de position de l'effecteur.

En réarrangeant les termes des matrices $\mathbf{J}_{pp}$ et $\mathbf{J}_{p\theta}$, l'erreur de position de l'effecteur a pour expression :

$$\delta\mathbf{p} = \mathbf{J}\ \boldsymbol{\epsilon}_q = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 & \mathbf{J}_2 & \mathbf{J}_3 \end{bmatrix} (\boldsymbol{\epsilon}_{q1}\ \boldsymbol{\epsilon}_{q2}\ \boldsymbol{\epsilon}_{q3})^T \tag{2.55}$$

où $\boldsymbol{\epsilon}_{qi} = \left(\delta L_i,\delta e_{ix},\delta e_{iy},\delta e_{iz},\delta\theta_{Aix},\delta\theta_{Aiy},\delta\theta_{Aiz},\delta l_i,\delta m_i,\delta\gamma_{ix},\delta\gamma_{iy}\right)$ et $\mathbf{J} \in \mathbb{R}^{3\times 33}$.

2.3.3.6 Indices de sensibilité

Afin d'examiner l'influence des erreurs des paramètres de conception sur la position et l'orientation de l'effecteur, des indices de sensibilité sont nécessaires. D'après les résultats

de l'analyse de sensibilité cinématique, les variations des paramètres de conception du même type d'une jambe à l'autre ont la même influence sur la position de l'effecteur. Ainsi, en supposant que les variations des paramètres de conception soient indépendantes, la sensibilité de la position de l'effecteur aux variations du $k^{\text{ème}}$ paramètre géométrique responsable de l'erreur de position, i.e.: $\epsilon_{q(1,2,3)k}$, est nommée μ_k et définie par l'équation suivante :

$$\mu_k = \sqrt{\sum_{i=1}^{3}\sum_{m=1}^{3} J_{imk}^2} \ , \ k = 1, \cdots, 11 \tag{2.56}$$

De même, ν_r est un indice de sensibilité de l'orientation de l'effecteur aux variations du $r^{\text{ème}}$ paramètre de conception responsable de l'erreur d'orientation, i.e:$\epsilon_{\theta(1,2,3)r}$. ν_r est déduit de l'équation (2.40) et est défini par :

$$\nu_r = \arccos \frac{\text{tr}(\mathbf{Q}_r) - 1}{2} \ , \ r = 1, \cdots, 6 \tag{2.57}$$

où $\mathbf{Q}_r$ est la matrice de rotation correspondant à l'erreur d'orientation de l'effecteur. ν_r est un invariant linéaire qui correspond à la rotation globale, (Angeles, 2002).

$$\mathbf{Q}_r = \begin{bmatrix} C_{\nu_{zr}} C_{\nu_{yr}} & \left(C_{\nu_{zr}} S_{\nu_{yr}} S_{\nu_{xr}} - S_{\nu_{zr}} C_{\nu_{xr}}\right) & \left(C_{\nu_{zr}} S_{\nu_{yr}} C_{\nu_{xr}} + S_{\nu_{zr}} S_{\nu_{xr}}\right) \\ S_{\nu_{zr}} C_{\nu_{yr}} & \left(S_{\nu_{zr}} S_{\nu_{yr}} S_{\nu_{xr}} + C_{\nu_{zr}} C_{\nu_{xr}}\right) & \left(S_{\nu_{zr}} S_{\nu_{yr}} C_{\nu_{xr}} - C_{\nu_{zr}} S_{\nu_{xr}}\right) \\ -S_{\nu_{yr}} & C_{\nu_{yr}} S_{\nu_{xr}} & C_{\nu_{yr}} C_{\nu_{xr}} \end{bmatrix} \tag{2.58}$$

telle que $C_{\nu_{xr}} = \cos \nu_{xr}$, $S_{\nu_{xr}} = \sin \nu_{xr}$, $C_{\nu_{yr}} = \cos \nu_{yr}$, $S_{\nu_{yr}} = \sin \nu_{yr}$, $C_{\nu_{zr}} = \cos \nu_{zr}$, $S_{\nu_{zr}} = \sin \nu_{zr}$, et

$$\nu_{xr} = \sqrt{\sum_{j=0}^{2} J_{\theta\theta 1(6j+r)}^2} \ , \ r = 1, \cdots, 6 \tag{2.59}$$

$$\nu_{yr} = \sqrt{\sum_{j=0}^{2} J_{\theta\theta 2(6j+r)}^2} \ , \ r = 1, \cdots, 6 \tag{2.60}$$

$$\nu_{zr} = \sqrt{\sum_{j=0}^{2} J_{\theta\theta 3(6j+r)}^2} \ , \ r = 1, \cdots, 6 \tag{2.61}$$

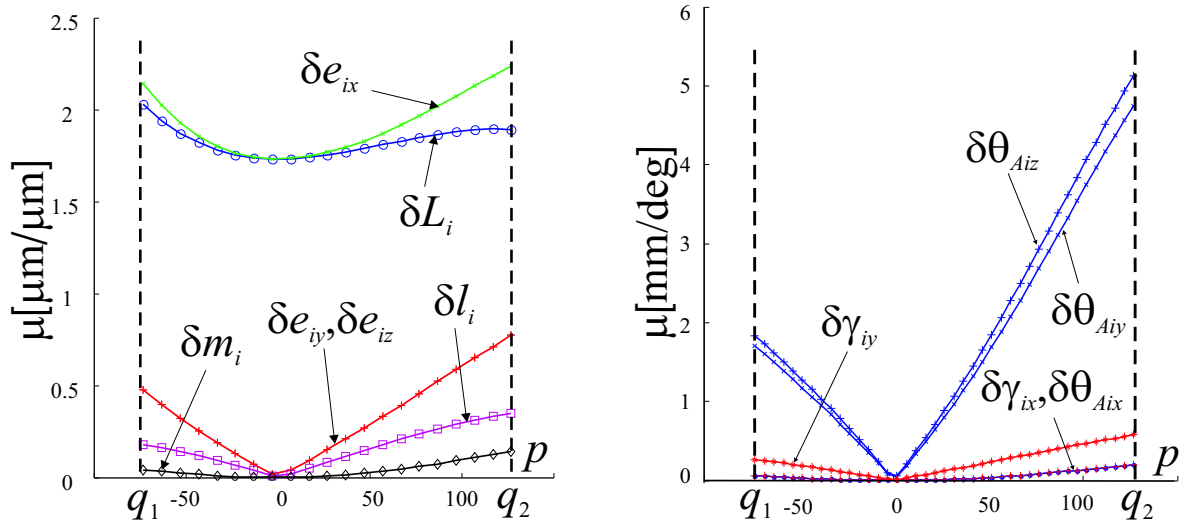
Finally, μ_k can be employed as a sensitivity index of the position of the end-effector to the k^{th} design parameter responsible for the position error. Likewise, ν_r can be employed as a sensitivity index of the orientation of the end-effector to the r^{th} design parameter responsible for the orientation error. It is noteworthy that these sensitivity indices depend on the location of the end-effector.

En conclusion, μ_k est l'indice de sensibilité de la position de l'effecteur aux variations du

$k^{\text{ème}}$ paramètre de conception responsable de son erreur de position. ν_r est l'indice de sensibilité de l'orientation de l'effecteur aux variations du $r^{\text{ème}}$ paramètre de conception responsable de son erreur d'orientation. La valeur de ces indices varie avec la position de l'effecteur et leur unité diffère suivant le type de variation. Les résultats de l'analyse de sensibilité de l'Orthoglide menée à l'aide de ces deux indices sont donnés ci-après.

2.3.3.7 Résultats de l'analyse de sensibilité vectorielle

Les indices de sensibilité définis par les équations (2.56) et (2.57) sont utilisés pour évaluer la sensibilité de la position et de l'orientation de l'effecteur du manipulateur aux variations des paramètres de conception, notamment à celles des dimensions des parallélogrammes.

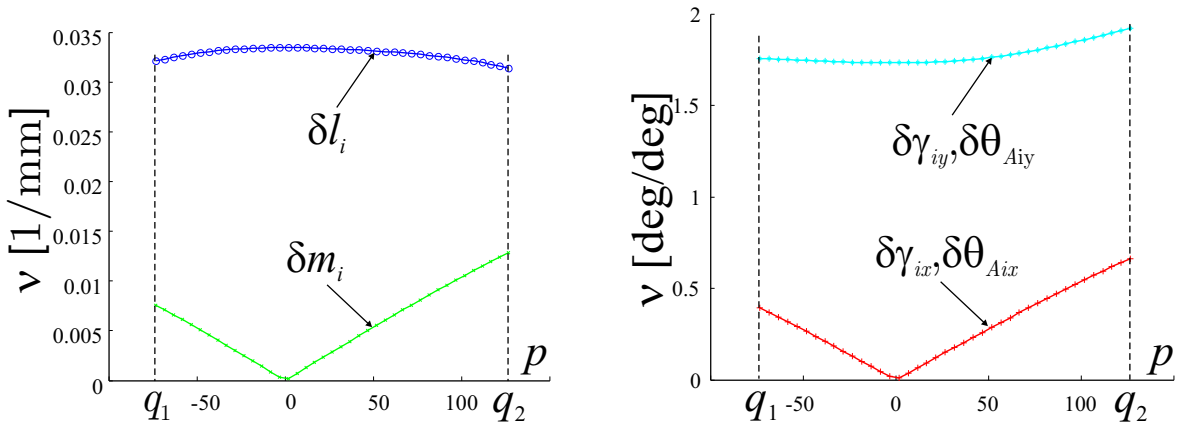


(a) *aux variations des longueurs* (b) *aux variations angulaires*

figure 2.24 – *Sensibilité de la position de l'effecteur le long de* Q_1Q_2

Les figures 2.24(a) et 2.24(b) représentent ainsi la sensibilité de la position de l'effecteur du manipulateur aux variations des longueurs et angulaires, respectivement, lorsqu'il parcourt la diagonale Q_1Q_2 du cube C_u ($p_x = p_y = p_z = p \in [q_1,q_2]$).

D'après la figure 2.24(a), la position de l'effecteur est très sensible aux variations des longueurs des parallélogrammes, δL_i, et à l'erreur de position des points A_i, B_i, et C_i le long de l'axe x_i de $\mathcal{R}_i$, i.e.: δe_{ix}. Au contraire, l'influence de δl_i et δm_i, erreurs de parallélisme des barres des parallélogrammes, est faible et même négligeable lorsque le manipulateur se trouve dans sa configuration isotrope ($p = 0$). D'après la figure 2.24(b), les erreurs d'orientation des actionneurs prismatiques, $\delta\theta_{Aiy}$ et $\delta\theta_{Aiz}$, sont les variations angulaires les plus influentes sur la position de l'effecteur. Par ailleurs, il est important de noter que la sensibilité de la position de l'effecteur aux variations angulaires est nulle lorsqu'il se trouve dans sa configuration isotrope.



(a) *aux variations des longueurs* (b) *aux variations angulaires*

figure 2.25 – *Sensibilité de l'orientation de l'effecteur le long de* Q_1Q_2

Les figures 2.25(a) et 2.25(b) représentent la sensibilité de l'orientation de l'effecteur aux variations des longueurs et angulaires, respectivement, lorsqu'il parcourt la diagonale Q_1Q_2 du cube C_u. D'après la figure 2.25(a), les variations des longueurs δl_i et δm_i, caractérisant les erreurs de parallélisme des barres des articulations de type parallélogramme sont les seules variations des longueurs responsables de l'erreur d'orientation de l'effecteur. De plus, l'influence de l'erreur de parallélisme des petites barres des parallélogrammes, δl_i, est plus importante que celle de leurs grandes barres, δm_i.

D'après les figures 2.24(a) et 2.24(b), la sensibilité de la position et de l'orientation de l'effecteur est généralement nulle dans la configuration isotrope cinématique ($p = 0$). En effet, seules les variations δL_i et δe_{ix} génèrent une erreur de position de l'effecteur dans cette configuration. De même, seules les variations δl_i, $\delta\theta_{Aiy}$ et $\delta\gamma_{iy}$ génèrent une erreur d'orientation de l'effecteur dans cette configuration. Au contraire, la sensibilité de la position et de l'orientation de l'effecteur est maximale lorsque le manipulateur se situe au voisinage de ses configurations singulières cinématiques, i.e.: $P \equiv Q_1$ et $P \equiv Q_2$.

En outre, les figures 2.24(a) et 2.24(b) peuvent être utilisées pour calculer les erreurs de position et d'orientation de l'effecteur du manipulateur connaissant les valeurs des variations des paramètres géométriques. Supposons par exemple que δl_i, valeur caractéristique de l'erreur de parallélisme des petites barres des parallélogrammes, soit égale à 10 mm, l'erreur de position de l'effecteur est égale à 3 mm lorsque l'effecteur se trouve en Q_1. De même, d'après la figure 2.24(b), si l'erreur d'orientation de la direction de la $i^{\text{ème}}$ articulation prismatique autour de l'axe y_i est égale à 0,1 radian, i.e.: $\delta\theta_{Aiy} = 0{,}1$ rad, l'erreur de position de l'effecteur est égale à 0,48 mm lorsque l'effecteur se trouve en Q_2.

Le tableau 2.3 récapitule les résultats de l'analyse de sensibilité de l'Orthoglide. La première colonne décrit la notation des variations prises en compte et la deuxième colonne

leur signification. La troisième et la quatrième colonnes présentent la sensibilité de la position de l'effecteur lorsque le manipulateur se trouve dans sa configuration isotrope cinématique et lorsque l'effecteur se trouve au point Q_2, respectivement. La cinquième et la sixième colonnes présentent la sensibilité de l'orientation de l'effecteur à l'isotropie et en Q_2. L'intensité de la sensibilité de la position et de l'orientation de l'effecteur est représentée par quatre symboles :

+++ sensibilité forte ;

++ sensibilité moyenne ;

\+ sensibilité faible ;

0 sensibilité nulle.

Notation	Description	μ (Isotropie)	μ (Q_2)	ν (Isotropie)	ν (Q_2)
δL_i	variation de la longueur du $i^{\text{ème}}$ parallélogramme	++	+++	0	0
δa_{ix}	erreur de position du point A_i selon l'axe x_i du repère $\mathcal{R}_i$	++	+++	0	0
δa_{iy}, δa_{iz}	erreur de position du point A_i selon les axes y_i et z_i du repère $\mathcal{R}_i$	0	++	0	0
$\delta \rho_i$	variation de l'élongation de la $i^{\text{ème}}$ articulation prismatique	++	+++	0	0
δc_{ix}	erreur de position du point C_i selon l'axe x_i du repère $\mathcal{R}_i$	++	+++	0	0
δc_{iy}, δc_{iz}	erreur de position du point C_i selon les axes y_i et z_i du repère $\mathcal{R}_i$	0	++	0	0
δl_i	erreur de parallélisme des petites barres du $i^{\text{ème}}$ parallélogramme	0	++	+++	++
δm_i	erreur de parallélisme des grandes barres du $i^{\text{ème}}$ parallélogramme	0	+	0	+

Suite page suivante

Notation	Description	μ (Isotropie)	μ (Q_2)	ν (Isotropie)	ν (Q_2)
Suite ...					
$\delta\theta_{Aix}$	variation angulaire de la direction de la $i^{\text{ème}}$ articulation prismatique autour de l'axe x_i de $\mathcal{R}_i$	0	+	0	++
$\delta\theta_{Aiy}$	variation angulaire de la direction de la $i^{\text{ème}}$ articulation prismatique autour de l'axe y_i de $\mathcal{R}_i$	0	+++	+++	+++
$\delta\theta_{Aiz}$	variation angulaire de la direction de la $i^{\text{ème}}$ articulation prismatique autour de l'axe z_i de $\mathcal{R}_i$	0	+++	0	0
$\delta\gamma_{Aix}$	erreur de torsion du $i^{\text{ème}}$ parallélogramme par rapport à la $i^{\text{ème}}$ articulation prismatique et par rapport à l'effecteur (rotation autour de l'axe x_i de $\mathcal{R}_i$)	0	+	0	++
$\delta\gamma_{Aiy}$	erreur de torsion du $i^{\text{ème}}$ parallélogramme par rapport à la $i^{\text{ème}}$ articulation prismatique et par rapport à l'effecteur (rotation autour de l'axe y_i de $\mathcal{R}_i$)	0	+++	+++	+++
$\delta\gamma_{Aiz}$	erreur de torsion du $i^{\text{ème}}$ parallélogramme par rapport à la $i^{\text{ème}}$ articulation prismatique et par rapport à l'effecteur (rotation autour de l'axe z_i de $\mathcal{R}_i$)	0	0	0	0

tableau 2.3 – *Récapitulatif des résultats de l'analyse de sensibilité de l'Orthoglide*

Conclusion

L'objectif de ce chapitre était d'analyser la sensibilité de l'Orthoglide : manipulateur d'architecture parallèle à trois degrés de liberté de translation. Après avoir présenté l'archi-

tecture et le paramétrage du manipulateur, nous avons analysé l'influence des variations des limites articulaires et des erreurs de réglage de leu zéro sur la position de l'effecteur. Les tolérances optimales des butées articulaires ont par ailleurs été calculées.

La principale contribution de ce chapitre est le développement de deux méthodes d'analyse de sensibilité de l'Orthoglide aux variations des longueurs et angulaires. La première méthode permet d'avoir un ordre d'idée de l'influence des variations des paramètres géométriques du manipulateur sur la position de son effecteur. Les résultats obtenus à partir de cette méthode indiquent que la configuration isotrope cinématique du manipulateur est la plus intéressante. En effet, la sensibilité globale de la position de l'effecteur aux variations considérées est minimale dans cette configuration. Au contraire, elle est maximale au voisinage des configurations singulières sérielles du manipulateur. Par ailleurs, il s'avère que les variations du même type d'une jambe à l'autre du manipulateur ont la même influence sur la position de son effecteur. Cette correspondance est probablement due à la symétrie du manipulateur. Cette première méthode présente l'avantage d'avoir une mise en équations simple. Cependant, elle ne permet pas de prendre en compte les variations internes aux articulations de type parallélogramme, notamment les erreurs de parallélisme des petites barres et des grandes barres des parallélogrammes. C'est la raison pour laquelle nous avons mis au point une deuxième méthode d'analyse de sensibilité de l'Orthoglide, complémentaire à la première.

Cette deuxième méthode décrit les variations des longueurs et angulaires sous forme vectorielle. Ainsi, nous avons pu prendre en compte les variations internes des articulations de type parallélogramme, telles que les erreurs de parallélisme et de torsion. De plus, cette méthode nous a permis d'analyser la sensibilité de l'orientation de l'effecteur aux variations des longueurs et angulaires. La mise en évidence des configurations du manipulateur minimisant et maximisant sa sensibilité aux variations est un autre résultat intéressant de cette analyse. A l'image des résultats obtenus avec la première méthode, il s'avère que la sensibilité de la position et de l'orientation de l'effecteur est généralement minimale lorsque le manipulateur se trouve dans sa configuration isotrope cinématique.

La sensibilité de l'Orthoglide dépend évidemment de son dimensionnement et de son architecture. L'une des motivations de la conception robuste est ainsi de trouver le dimensionnement optimal du mécanisme minimisant la sensibilité de ses performances, la position et l'orientation de l'effecteur par exemple, aux différentes sources de variations. Par ailleurs, les résultats de l'analyse de sensibilité du manipulateur peuvent être utilisés pour synthétiser les tolérances optimales de ses dimensions. Dans le chapitre suivant, nous proposons ainsi un indice de robustesse optimal de la conception d'un mécanisme et une procédure de synthèse de tolérances.

3 Indices de robustesse et synthèse de tolérances de mécanismes

Introduction **60**

3.1 Analyse de la sensibilité des performances d'un mécanisme . . **61**

3.2 Indices de robustesse **64**

3.2.1 Étude de cas : conception robuste d'un amortisseur 66

3.3 Utilisation de la robustesse comme critère de dimensionnement **68**

3.3.1 Tolérances dimensionnelles connues 69

3.3.2 Tolérances dimensionnelles inconnues 72

3.4 Synthèse de tolérances de mécanismes **77**

3.4.1 Méthode de synthèse de tolérances 78

3.4.2 Synthèse de tolérances de deux manipulateurs d'architecture sérielle . . 80

3.4.3 Synthèse de tolérances de l'Orthoglide 87

Conclusion **89**

Ce chapitre présente une procédure de synthèse de tolérances de mécanismes. Elle est décomposée en deux étapes à réaliser de manière séquentielle. La première étape consiste à calculer les valeurs optimales des variables de conception du mécanisme afin d'élargir le domaine de variations admissible de ses variables et paramètres de conception. Nous proposons ainsi un indice de robustesse optimal de la conception d'un mécanisme. La deuxième étape consiste à synthétiser les tolérances des paramètres géométriques à l'aide d'une méthode de synthèse de tolérances que nous développons grâce à une approche d'analyse de sensibilité des performances. La procédure de synthèse de tolérances sera illustrée par l'étude de deux manipulateurs d'architecture sérielle et d'un manipulateur d'architecture parallèle.

Introduction

Les concepteurs se contentent généralement de prédire les performances de conceptions proposées, alors que les modèles existants peuvent souvent être utilisés pour comprendre et contrôler les effets de la variabilité d'une conception. Ainsi, en exploitant ce potentiel non utilisé, les conceptions peuvent être développées de manière à être performantes tout en tolérant des variations.

Afin d'améliorer et de maîtriser les performances d'un mécanisme, il est donc nécessaire de prendre en compte les variations de ses variables et paramètres de conception. Par ailleurs, l'abstraction de ces variations peut conduire à des conceptions non fiables et coûteuses, (Parkinson, 1995). En outre, elles peuvent être dues à des sources diverses : procédé de fabrication, propriétés des matériaux, usure des pièces, environnement opérationnel.

La sensibilité des performances d'un système aux variations varie avec ses dimensions. La robustesse peut ainsi faire l'objet de critère de dimensionnement dans un problème de conception. Un ou plusieurs indice(s) de robustesse est (sont) ainsi nécessaire(s).

Sundaresan *et al.* (1993) ont proposé un indice de sensibilité SI pour évaluer la sensibilité de la performance d'un système mécanique aux variations de ses variables de conception. Cet indice est défini de la manière suivante :

$$SI = \left(\frac{1}{l} \sum_{i=1}^{l} {f_i}^k \right)^{\frac{1}{k}} \tag{3.1}$$

où k est généralement égal à 2, l est le nombre de variables de conception, et f_i , $i = 1, \ldots, l$, est l'ensemble des valeurs de la fonction performance du système calculées aux l plus mauvaises combinaisons des variables de conception, comprises dans leur intervalle de tolérance respectif. Cependant, cet indice présente les inconvénients de n'être défini que pour des systèmes mono-performance et de nécessiter la connaissance des tolérances des variables de conception.

Zhu et Ting (2001) utilisent quant à eux une approche basée sur l'analyse de sensibilité des performances d'un système pour étudier la robustesse de sa conception. Il en découle une matrice jacobienne de sensibilité qui lient les variations des performances du système étudié et les variations des variables et paramètres de conception. La transformation générée par cette matrice peut être représentée par un hyper-ellipsoïde, dont la taille et la forme décrivent la sensibilité des performances aux variations. Al-Widyan et Angeles (2005) ont aussi utilisé cette approche pour présenter un cadre théorique et une méthodologie générale du problème de conception robuste.

Dans ce chapitre, nous adoptons cette approche pour déterminer un indice de robustesse approprié à la quantification de la robustesse de mécanismes, et pour développer une méthode permettant de calculer les valeurs nominales optimales des variables de conception

lorsque les tolérances des variables et paramètres de conception sont connues. Lorsque ces dernières ne sont pas connues, il est tout de même possible de calculer les dimensions optimales du mécanisme au moyen de l'indice de robustesse proposé, utilisé comme critère de dimensionnement dans un problème d'optimisation. Ensuite, les tolérances des variables de conception et des paramètres environnementaux optimales pourront être calculées à l'aide d'une méthode de synthèse de tolérances, et déduite de l'approche basée sur l'analyse de sensibilité des performances. C'est notamment l'une des raisons du choix de l'approche décrite ci-après.

3.1 Analyse de la sensibilité des performances d'un mécanisme

Dans cette partie, nous présentons la démarche utilisée pour analyser la sensibilité des performances d'un mécanisme et déterminer sa matrice jacobienne de sensibilité. Cette matrice nous permet entre autres de représenter graphiquement la sensibilité des performances du mécanisme, et de déterminer un indice de robustesse.

Les variations des performances d'un mécanisme dépendent des variations de ses variables et paramètres de conception environnementaux. Lorsque les fonctions performances f_i, $i = 1, \ldots, n$ sont définies explicitement (de manière algébrique) en fonction des variables et paramètres de conception, l'expression de leur variation peut être obtenue en linéarisant les fonctions f_i, i.e. en retenant les termes du premier ordre de leur développement en série de Taylor.

L'expression de la $i^{\text{ème}}$ composante δf_i du vecteur des variations des performances $\delta\mathbf{f} = [\delta f_1 \ldots \delta f_n]^T$ est la suivante :

$$\delta f_i = \sum_{j=1}^{l} \frac{\partial f_i(\mathbf{x},\mathbf{p})}{\partial x_j}\delta x_j + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_i(\mathbf{x},\mathbf{p})}{\partial p_j}\delta p_j \tag{3.2}$$

et peut s'écrire sous forme matricielle :

$$\delta\mathbf{f} = [\mathbf{J}_x \ \mathbf{J}_p] \left[\delta\mathbf{x}^T \ \delta\mathbf{p}^T\right]^T = \mathbf{J} \ \delta\mathbf{X} \tag{3.3}$$

où $\delta\mathbf{x} = [\delta x_1 \ldots \delta x_l]^T$ et $\delta\mathbf{p} = [\delta p_1 \ldots \delta p_m]^T$ sont respectivement les vecteurs des variations des variables et des paramètres de conception. $\mathbf{J}_x = \partial\mathbf{f}/\partial\mathbf{x}$ (respectivement $\mathbf{J}_p = \partial\mathbf{f}/\partial\mathbf{p}$) est la matrice jacobienne de sensibilité du vecteur des fonctions performances $\mathbf{f}$ par rapport aux variables de conception (respectivement par rapport aux paramètres de conception environnementaux). Lorsque les variations des variables de conception ne sont pas prises en compte, $\mathbf{J} = \mathbf{J}_p$ et $\mathbf{X} = \mathbf{p}$. A l'inverse, $\mathbf{J} = \mathbf{J}_x$ et $\mathbf{X} = \mathbf{x}$ lorsque seules les variations des variables de conception sont prises en compte.

La conception d'un mécanisme est robuste lorsque la sensibilité de ses performances aux variations de ses variables et paramètres de conception environnementaux est minimale. Cela revient à minimiser globalement les variations δf_i, c'est-à-dire la norme de $\delta\mathbf{f}$. L'expression du carré de la norme euclidienne de $\delta\mathbf{f}$, $\|\delta\mathbf{f}\|_2$, est la suivante :

$$\|\delta\mathbf{f}\|_2^2 = \delta\mathbf{f}^T\delta\mathbf{f} = \delta\mathbf{X}^T\mathbf{S}\ \delta\mathbf{X} \tag{3.4}$$

$\mathbf{S} = \mathbf{J}^T\mathbf{J}$ est nommée matrice de sensibilité.

En supposant que les variations des variables de conception ne soient pas prises en compte, $\mathbf{J} = \mathbf{J}_p$ et $\mathbf{S}$ est une matrice symétrique de dimension $(m \times m)$, m étant la dimension du vecteur des paramètres de conception environnementaux. La matrice $\mathbf{S}$ est diagonalisable et peut être exprimée sous la forme suivante :

$$\mathbf{S} = \mathbf{Q}\ \mathrm{diag}(\lambda_i)\ \mathbf{Q}^T, \quad \mathbf{Q} = [\mathbf{q}_1 \cdots \mathbf{q}_i \cdots \mathbf{q}_m], \quad i \in 1, \ldots, m \tag{3.5}$$

où l_i est sa $i^{\text{ème}}$ valeur propre et q_i est le vecteur propre associé à λ_i. La matrice de passage $\mathbf{Q}$ est composée des vecteurs propres associés aux valeurs propres de $\mathbf{S}$.

$$\delta\mathbf{p} = \mathbf{Q}\mathbf{r} \tag{3.6}$$

L'équation suivante donne l'expression de la norme des variations des performances en fonction des composantes de $r = [r_1 \ldots r_m]^T$, qui est la projection du vecteur des variations des paramètres de conception dans la base formée par les vecteurs colonnes de $\mathbf{Q}$.

$$\|\delta\mathbf{f}\|_2 = \sqrt{\lambda_1 {r_1}^2 + \cdots + \lambda_m {r_m}^2} \tag{3.7}$$

Le ratio Signal/Bruit de Taguchi peut être utilisé pour quantifier la sensibilité des performances d'un mécanismes aux facteurs de bruits, (Taguchi, 1993). Par analogie, nous définissons la sensibilité S des performances du mécanisme aux variations des paramètres de conception environnementaux par le ratio de la norme euclidienne des variations des performances et de celle des variations des paramètres de conception environnementaux.

$$S = \frac{\|\delta\mathbf{f}\|_2}{\|\delta\mathbf{p}\|_2} = \sqrt{\frac{\lambda_1 {r_1}^2 + \cdots + \lambda_m {r_m}^2}{r_1^2 + \cdots + r_m^2}} \tag{3.8}$$

D'après l'équation 3.8, S dépend des variations des paramètres de conception environnementaux. Il est cependant possible de la borner par des termes indépendants de ces variations. En effet, en supposant que $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_m$, S est comprise entre la plus petite valeur singulière, $\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1}$, et la plus grande valeur singulière, $\sigma_1 = \sqrt{\lambda_m}$, de la

matrice jacobienne de sensibilité $\mathbf{J}$.

$$\sigma_1 \leqslant S \leqslant \sigma_m \tag{3.9}$$

En outre, l'équation (3.7) représente une famille d'hyper-ellipsoïdes de dimension m et de paramètre $\|\delta\mathbf{f}\|_2$, appelés *hyper-ellipsoïdes de sensibilité*. Les longueurs de leurs demi-axes sont inversement proportionnelles aux valeurs singulières de la matrice jacobienne de sensibilité. La figure 3.1 représente l'hyper-ellipsoïde de sensibilité d'un mécanisme ayant deux paramètres de conception environnementaux, p_1 et p_2, et pour lequel les variations de ses variables de conception ne sont pas prises en compte.

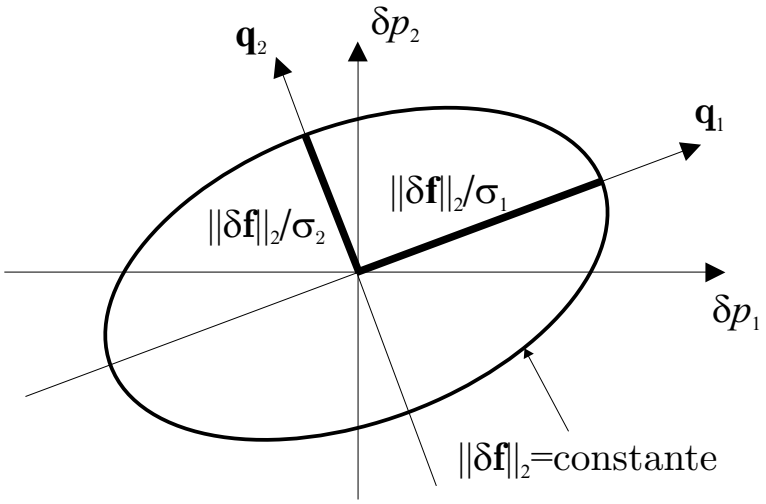


figure 3.1 – *Ellipse de sensibilité, $m = 2$*

L'hyper-ellipsoïde est ici une ellipse puisque $m = 2$. σ_1 et σ_2 sont respectivement la plus petite et la plus grande valeur singulière de $\mathbf{J}$. $\mathbf{q}_1$ et $\mathbf{q}_2$ sont les vecteurs propres associés à σ_1 et σ_2, respectivement. $\|\delta\mathbf{f}\|_2/\sigma_i$ est la longueur du $i^{\text{ème}}$ demi-axe principal de l'ellipse de sensibilité. La longueur de ce demi-axe principal de l'ellipse de sensibilité augmente ainsi lorsque $\|\delta\mathbf{f}\|_2$ augmente et σ_i diminue.

Les variations des variables de conception ne sont ici pas prises en compte. L'ellipse de sensibilité est ainsi tracée dans l'espace des variations des paramètres de conception environnementaux. Les points de coordonnées (δp_1, δp_2) appartenant à la surface de l'ellipse de sensibilité correspondent à une même norme des variations de la performance. Ainsi, la sensibilité S des performances aux variations des paramètres de conception est minimale le long du plus grand demi-axe de l'ellipse de sensibilité. Pour une norme des variations des performances donnée, cette direction correspond à celle où la norme des variations des paramètres de conception environnementaux tolérée est la plus importante. Ainsi, la sensibilité des performances du mécanisme aux variations des paramètres de conception est minimale dans la direction $\mathbf{q}_1$ et maximale dans la direction $\mathbf{q}_2$, de l'espace des variations des paramètres de conception environnementaux.

En conclusion, la sensibilité d'une conception peut être caractérisée par un hyper-ellipsoïde. Nous allons voir dans la partie suivante qu'il est possible d'en déduire des indices de robustesse pour évaluer et comparer la robustesse de mécanismes.

3.2 Indices de robustesse

Afin d'utiliser la robustesse comme critère d'optimisation dans un problème de dimensionnement de mécanisme, un ou plusieurs indice(s) de robustesse est (sont) nécessaire(s). L'interprétation des résultats de l'analyse de sensibilité des performances précédente nous permet de déduire des indices de robustesse et de les comparer.

Le conditionnement numérique de la matrice jacobienne de sensibilité $\mathbf{J}$ est utilisé en tant qu'indice de robustesse par certains auteurs, (Ting et Long, 1996), (Al-Widyan et Angeles, 2005). Notons RI_1 le conditionnement numérique de $\mathbf{J}$. RI_1 est le produit de la norme euclidienne de $\mathbf{J}$ par la norme euclidienne de son inverse. C'est aussi le ratio de ses valeurs singulières maximale et minimale, (Golub et Van Loan, 1994), ou encore le ratio des bornes maximales et minimales de la sensibilité S définies par l'équation (3.9).

$$RI_1 = \|\mathbf{J}\|_2 \|\mathbf{J}^{-1}\|_2 = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{min}} \tag{3.10}$$

où $\|.\|_2$ est la norme euclidienne.

Dans un problème de conception robuste, nous chercherons à minimiser l'indice RI_1. En effet, lorsque RI_1 est minimal, i.e. : $RI_1 = 1$, les longueurs des demi-axes de l'hyper-ellipsoïde de sensibilité sont égales et l'hyper-ellipsoïde de sensibilité est une hyper-sphère. Dans ce cas, la sensibilité de la norme euclidienne des variations des performances ne dépend pas de la direction des variations des variables de conception (VC) et des paramètres de conception environnementaux dans leur espace de variations (PCE), i.e. : il y a une homogénéité de l'influence des variations des VC et des PCE dans leur espace de variations.

Bien que cette propriété soit intéressante, notamment lorsque le concepteur n'a aucune connaissance de la répartition des variations des variables et des paramètres de conception, la minimisation de RI_1 n'est pas équivalente à celle de la sensibilité des performances du mécanisme aux variations des VC et des PCE. En effet, d'après l'équation (3.9), la sensibilité S de la conception peut très bien être bornée entre deux valeurs singulières élevées lorsque RI_1 est minimal. Dans ce cas, les influences des variations des VC et des PCE sur les performances sont identiques mais importantes.
La figure 3.2 représente trois ellipses de sensibilité correspondant à des mécanismes pour lesquels seules deux variations sont prises en compte, $m = 2$. La première caractérise une matrice jacobienne de sensibilité dont le conditionnement numérique est égal à un et dont les valeurs singulières sont égales à deux, ($\sigma_1 = \sigma_2 = 2$). La deuxième caractérise une

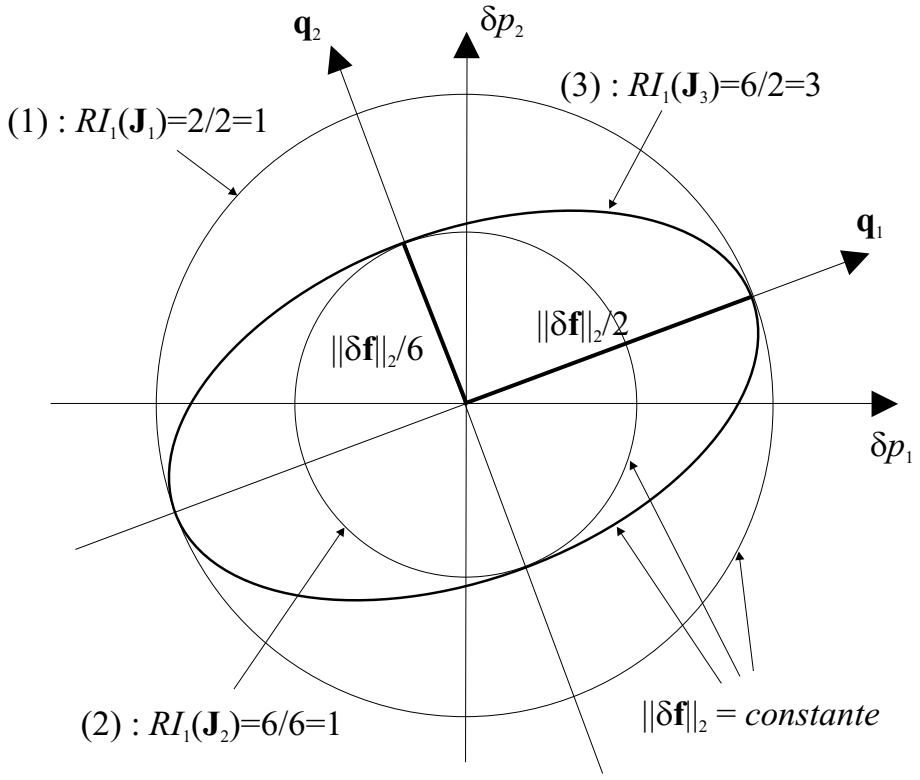


figure 3.2 – *Influence de l'indice RI_1 sur la forme et la taille des ellipses de sensibilité*

matrice jacobienne de sensibilité dont le conditionnement numérique est égal à 1 et dont les valeurs singulières sont égales à six, ($\sigma_1 = \sigma_2 = 6$). Enfin, la troisième caractérise une matrice jacobienne dont les valeurs singulières sont respectivement égales à deux et six, ($\sigma_1 = 2$, $\sigma_2 = 6$).

La conception la plus intéressante, c'est à dire celle tolérant les plus larges variations, correspond à l'ellipse (1), ici un cercle de rayon $\|\delta\mathbf{f}\|_2/2$. A l'inverse, la moins intéressante correspond à l'ellipse (2), ici un cercle de rayon $\|\delta\mathbf{f}\|_2/6$. Les conditionnements numériques de ces deux matrices jacobiennes sont égaux à un. L'indice RI_1 ne permet donc pas de faire la différence entre la robustesse de ces deux conceptions. Par ailleurs, nous remarquons que l'ellipse (2) est incluse dans l'ellipse (3) alors que la valeur de RI_1 correspondant à l'ellipse (2) est inférieure à celle correspondant à l'ellipse (3), $RI_1(\mathbf{J}_2) < RI_1(\mathbf{J}_3)$. Par conséquent, la minimisation du conditionnement numérique de la matrice jacobienne de sensibilité ne garantit pas une minimisation de la sensibilité des performances du mécanisme aux variations. Un autre indice de robustesse est ainsi nécessaire pour quantifier la robustesse de la conception d'un mécanisme.

La borne supérieure de la sensibilité S est égale à la valeur singulière maximale de la matrice jacobienne de sensibilité, i.e. sa norme euclidienne. Cette dernière peut ainsi faire office d'indice de robustesse, que nous notons $RI2$.

$$RI_2 = \|\mathbf{J}\|_2 = \sigma_{max} \tag{3.11}$$

■

où σ_{max} est la valeur singulière maximale de la $\mathbf{J}$.

Cet indice de robustesse a notamment été utilisé par Zhu et Ting (2001) et Hu *et al.* (2003). Nous pouvons remarquer sur la figure 3.2 que l'ellipse de sensibilité la plus large, i.e. celle tolérant les variations les plus importantes, correspond à la matrice jacobienne de sensibilité ayant la plus faible norme euclidienne ($RI_2(\mathbf{J}_1) = 2$) alors que les normes euclidiennes des matrices jacobiennes de sensibilité des deux autres conception sont égales à six. Contrairement à l'indice RI_1, l'indice RI_2 permet bien de faire la différence entre les robustesses des conceptions (1) et (2). Cependant, il ne permet pas de faire la différence entre les robustesses des conceptions (2) et (3) puisque $RI_2(\mathbf{J}_2) = RI_2(\mathbf{J}_3) = 6$.

En définitive, nous considérons que l'indice RI_2 est le mieux approprié à la quantification de la robustesse d'une conception. La comparaison des deux indices de robustesse précédents est illustrée par l'étude d'un amortisseur dans le paragraphe suivant.

3.2.1 Étude de cas : conception robuste d'un amortisseur

Afin de comparer les indices de robustesse RI_1 et RI_2, nous étudions dans cette partie l'amortisseur représenté par la figure 3.3. Les variables de conception sont la masse M

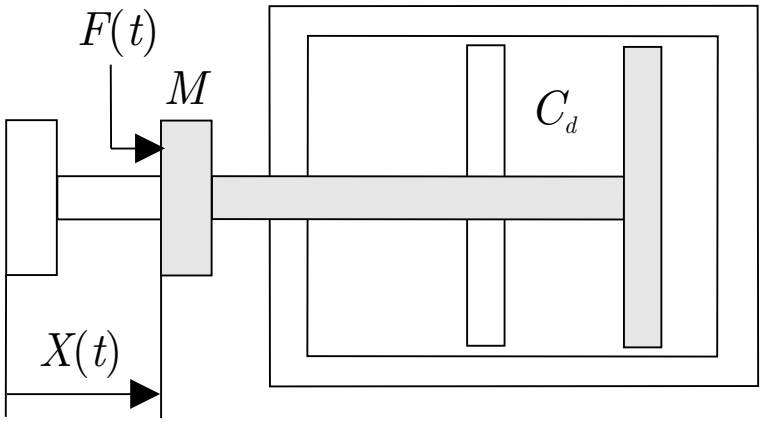


figure 3.3 – *Amortisseur*

et le coefficient d'amortissement C_d. Les valeurs nominales de ces variables de conception doivent être calculées afin de maintenir l'amplitude du déplacement de la masse M voisine de sa valeur nominale égale à 0,1 m, sachant que l'amplitude F_0 de la force d'excitation $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$ et sa pulsation ω sont soumises à des variations considérables que le concepteur ne peut pas contrôler : $F_0 = 10$ N, $\omega = 2\pi$ rad/s. $X(t) = X_0 \cos(\omega t + \phi)$ est l'expression du déplacement de la masse M et est le déphasage entre ce déplacement et la force d'excitation. En outre, les relations suivantes existent :

$$X_0 = \frac{F_0}{\omega\sqrt{C_d^2 + \omega^2 M^2}} \tag{3.12}$$

■

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{\omega M}{C_d}\right) \tag{3.13}$$

Les vecteurs des variables de conception, paramètres de conception environnementaux, et fonctions performances sont $\mathbf{x} = [M\ C_d]^T$, $\mathbf{p} = [F_0\ \omega]^T$, $\mathbf{f} = [X_0\ \phi]^T$. respectivement. La relation entre le vecteur des variations des fonctions performances, $\delta\mathbf{f}$, et les variations des paramètres de conception environnementaux, $\delta\mathbf{p}$, est la suivante :

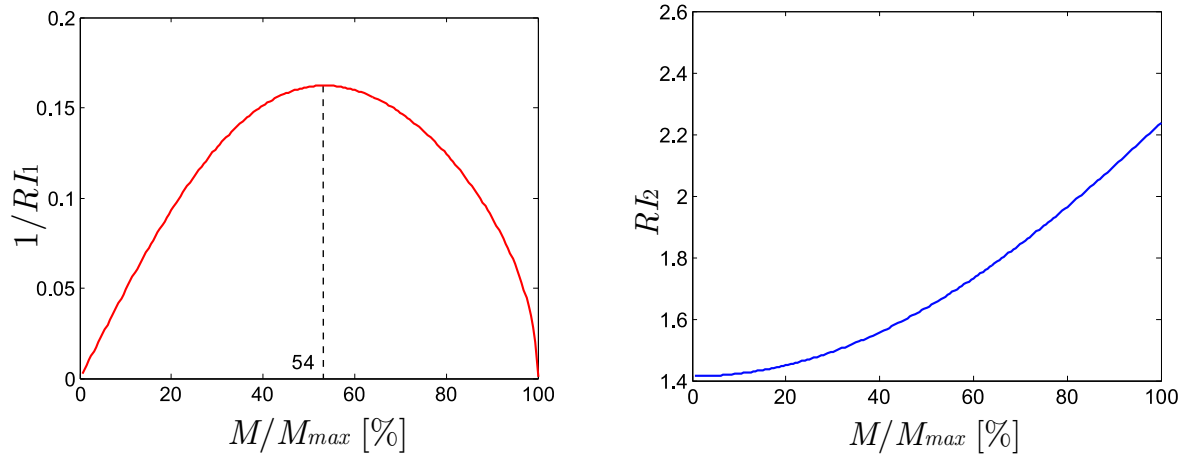
$$\delta\mathbf{f} = \mathbf{J}\ \delta\mathbf{p} \tag{3.14}$$

où la matrice jacobienne de sensibilité $\mathbf{J}$ dépendant de $\mathbf{x}$ et $\mathbf{p}$ est égale à :

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_p = \begin{bmatrix} 1 & -1-\alpha^2 \\ 0 & \alpha\sqrt{1-\alpha^2} \end{bmatrix}, \quad \alpha = \frac{X_0}{F_0}\omega^2 M \tag{3.15}$$

et

$$\delta\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \delta X_0/X_0 \\ \delta\phi \end{bmatrix}, \quad \delta\mathbf{p} = \begin{bmatrix} \delta F_0/F_0 \\ \delta\omega/\omega \end{bmatrix} \tag{3.16}$$



(a) RI_1 (b) RI_2

figure 3.4 – *Indices de robustesse*

Les figures 3.4(a) et 3.4(b) représentent respectivement les indices de robustesse RI_1 et RI_2 de l'amortisseur en fonction de la masse M. D'après la figure 3.4(a), RI_1 est minimal lorsque $M/M_{max} = 0{,}54$ avec $M_{max} = 2{,}533$ kg, et la figure 3.4(b) montre que RI_2 augmente avec M.

La figure 3.5 représente des ellipses de sensibilité tracées pour différentes valeurs de M.

Nous remarquons que plus M est faible, plus l'ellipse de sensibilité est large. Cela signifie que les variations de F_0 et ω tolérées sont globalement plus importantes et que la conception du mécanisme est robuste. A l'inverse, l'ellipse de sensibilité correspondant à la valeur de M/M_{max} qui minimise l'indice RI_1 est la plus petite. Par conséquent, ce résultat concorde avec les remarques faites sur l'indice RI_1 précédemment.

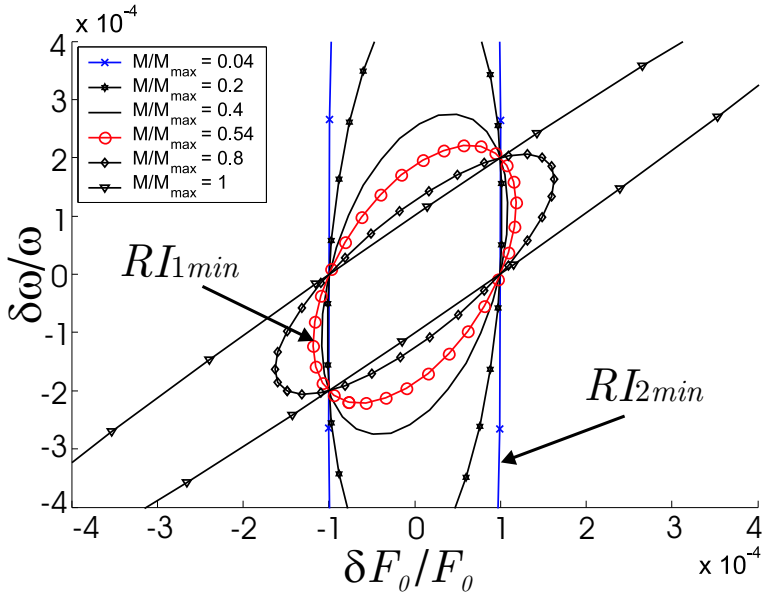


figure 3.5 – *Ellipses de sensibilité de l'amortisseur*

Chen *et al.* (1996) proposent un algorithme d'optimisation pour rendre une conception robuste sans avoir recours aux indices de robustesse. Cependant, ils ont besoin de connaître l'amplitude des variations des paramètres et des variables de conception pour l'utiliser. En supposant que $\Delta F_0/F_0 = 0{,}1$, $\Delta\omega/\omega = 0{,}1$, et $M/M_{max} \geqslant 0{,}5$, leur algorithme converge vers $M/M_{max} = 0{,}5$ et $C_d = 13{,}78$ N.s.m^{-1} afin de minimiser les variations de X_0 et de ϕ. Le résultat obtenu avec l'algorithme de Chen *et al.* (1996) concorde ainsi avec celui obtenu en minimisant l'indice de robustesse RI_2. En conclusion, l'étude de la robustesse de cet amortisseur conforte notre choix d'utiliser l'indice RI_2 comme indice de robustesse.

Dans la suite, nous veillerons à ne pas confondre les symboles δ et Δ. En effet, δv désigne la variation de la variable v alors que Δv représente son intervalle de tolérance, i.e. $-\Delta v \leqslant \delta v \leqslant \Delta v$.

3.3 Utilisation de la robustesse comme critère de dimensionnement

La robustesse de la conception d'un mécanisme dépend de ses dimensions. Dans cette partie, deux méthodes utilisant la robustesse comme critère de dimensionnement sont introduites.

La première méthode nécessite la connaissance des tolérances des variables et des paramètres de conception environnementaux alors que la deuxième méthode peut être utilisée pour calculer les valeurs nominales optimales des variables de conception d'un mécanisme, lorsque les tolérances des VC et des PCE ne sont pas connues.

3.3.1 Tolérances dimensionnelles connues

Les tolérances dimensionnelles d'un mécanisme dépendent aussi bien du procédé de fabrication que des fonctions du mécanisme (jeux, erreurs acceptées,...). Par ailleurs, les coûts de fabrication d'un produit sont directement liés à ses tolérances dimensionnelles (Lee *et al.*, 1993), (Zhang et Wang, 1998). Dans cette partie, les tolérances dimensionnelles sont supposées connues. L'objectif est ainsi de calculer les dimensions du mécanisme afin de minimiser l'influence des tolérances de ses VC et PCE sur ses performances.

L'idée est ici d'utiliser la méthode d'analyse de la sensibilité des performances d'un mécanisme présentée précédemment et de rechercher l'hyper-ellipsoide de sensibilité optimal englobant la boîte de tolérances du mécanisme définie dans l'espace des variations des VC et PCE. L'hyper-ellipsoïde de sensibilité optimal englobe la boîte de tolérances connue avec un hyper-volume le plus faible possible. Nous faisons ici la différence entre les systèmes mono-performance ($n = 1$) et les systèmes multi-performances ($n > 1$).

3.3.1.1 Performance unique, $n = 1$

Les données du problème de dimensionnement du mécanisme sont ses tolérances dimensionnelles. La boîte de tolérances BT est ainsi connue et peut être représentée dans l'espace des variations des VC et PCE du mécanisme. Soit C le paramètre de l'hyper-ellipsoïde de sensibilité, c'est-à-dire l'erreur sur la performance obtenue pour une variation des VC et PCE située sur la frontière de l'hyper-ellipsoïde de sensibilité. Nous proposons ainsi de résoudre le problème d'optimisation suivant pour trouver les valeurs nominales optimales des variables de conception du mécanisme, garantissant la robustesse de sa performance :

P_1	*minimiser* C *sous contrainte* : inclusion de la boîte de tolérances BT dans l'hyper-ellipsoïde de sensibilité du mécanisme

La figure 3.6 illustre le résultat du problème d'optimisation obtenu pour un mécanisme n'ayant qu'une seule performance, deux paramètres de conception, et pour lequel les variations des variables de conception ne sont pas prises en compte. L'hyper-ellipsoïde de sensibilité est ici une ellipse puisque seules les variations des deux paramètres de conception ($m = 2$) sont prises en compte. Il s'avère que l'ellipse $\xi(C_2)$ est la plus intéressante puisque c'est la plus petite ellipse à englober la boîte de tolérances BT. En conclusion,

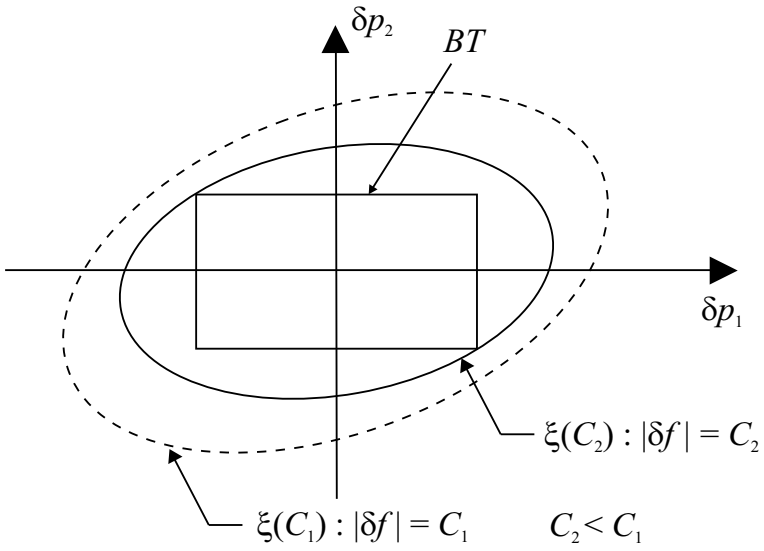


figure 3.6 – *Dimensionnement d'un mécanisme mono-performance : recherche de l'ellipsoïde de sensibilité de paramètre C minimal, englobant la boîte de tolérances BT, $m = 2$*

les variables de conception correspondant à l'ellipse $\xi(C_2)$ garantissent la robustesse du mécanisme.

3.3.1.2 Multi-Performances, $n > 1$

Dans le cas où le mécanisme étudié comprend plusieurs performances, nous proposons deux problèmes d'optimisation pour le dimensionner. Le premier problème vise à minimiser la norme des variations des performances, alors que le deuxième problème vise à minimiser les variations des performances indépendamment.

Soit $\delta\mathbf{f} = [\delta f_1 \dots \delta f_n]^T$ le vecteur des variations des n fonctions performances du mécanisme. Le problème P_1 présenté précédemment peut être utilisé pour calculer les variables de conception du mécanisme. Dans ce cas, les valeurs nominales des variables de conception sont calculées afin de minimiser la norme euclidienne maximale des variations des performances lorsque les variations des variables de conception et des paramètres de conception environnementaux sont comprises dans la boîte de tolérances BT (cf. figure 3.7).
Considérons maintenant les n hyper-ellipsoïdes de sensibilité associés à chaque performance f_i, le problème d'optimisation P_2 peut être utilisé pour calculer les variables de conception optimales du mécanisme :

P_2	*minimiser* C *sous contrainte* : inclusion de la boîte de tolérances BT dans les n hyper-ellipsoïdes de sensibilité du mécanisme

Les n performances du mécanisme sont caractérisées par les hyper-ellipsoïdes ξ_i, $i = 1, \dots, n$. C est le paramètre des hyper-ellipsoïdes de sensibilité, i.e. une variation située

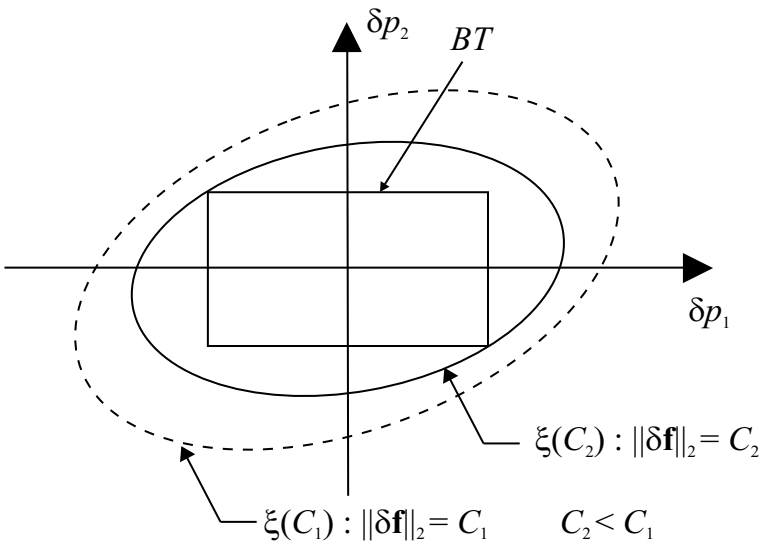


figure 3.7 – *Dimensionnement d'un mécanisme multi-performances : recherche de l'ellipsoïde de sensibilité de paramètre C minimal, englobant la boîte de tolérances BT, $m = 2$*

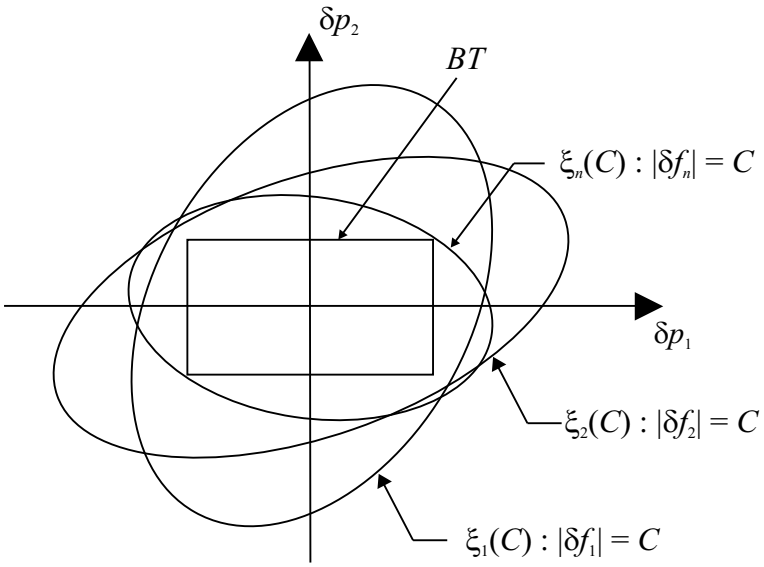


figure 3.8 – *Dimensionnement d'un mécanisme multi-performances : minimisation du paramètre C des ellipses de sensibilité et inclusion de BT dans les ellipses, $m = 2$*

sur la frontière $\xi(C)$ engendre une variation de la $i^{\text{ème}}$ performance de norme euclidienne égale à C.

Le problème P_2 présente l'avantage de prendre en compte les variations des performances indépendamment mais ses contraintes sont plus nombreuses. En effet, la vérification de l'inclusion de la boîte de tolérances BT dans un hyper-ellipdoïde de dimension l (l étant le nombre de variables de conception) se fait au moyen de 2^{l-1} contraintes alors que la vérification de son inclusion dans n hyper-ellipdoïde se fait au moyen de $n2^{l-1}$ contraintes.

3.3.2 Tolérances dimensionnelles inconnues

Les problèmes d'optimisation présentés dans la partie précédente ne peuvent pas être utilisés pour dimensionner un mécanisme lorsque ses tolérances dimensionnelles ne sont pas connues.

Nous proposons ainsi une procédure permettant de calculer les valeurs nominales optimales des variables de conception et leur tolérance de manière séquentielle. Cette procédure est définie comme suit :

1. calcul des valeurs nominales optimales des variables de conception à l'aide de l'indice de robustesse RI_2 ;
2. synthèse des tolérances des variables de conception à l'aide d'une méthode de synthèse de tolérances que nous développons ultérieurement.

Cette procédure est illustrée par l'étude d'un manipulateur d'architecture de type sériel à deux degrés de liberté. La phase de dimensionnement est décrite ci-après, alors que la phase de synthèse de tolérances est exposée ultérieurement.

3.3.2.1 Etude de cas : dimensionnement d'un manipulateur $2R$

Le manipulateur étudié est d'architecture de type sériel à deux degrés de liberté et est composé de deux articulations rotoïdes motorisées. Nommé manipulateur de type $2R$, il est représenté par la figure 3.9. Il comprend deux barres AB et BE de dimensions l_1 et

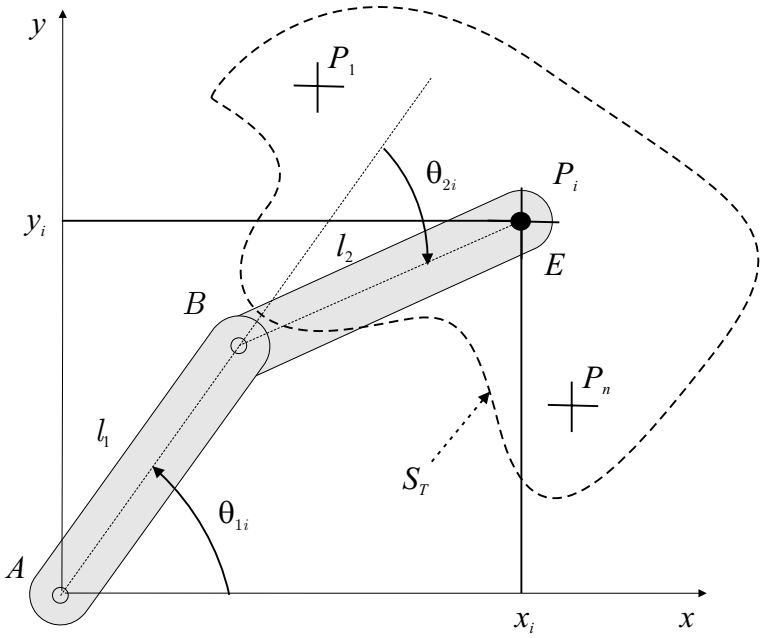


figure 3.9 – *Manipulateur $2R$ et sa cible*

l_2, respectivement. Le manipulateur doit passer par une série de points formant une cible

S_T avec une précision de 10 mm. Dans un premier temps, ses dimensions sont calculées afin de le rendre robuste, i.e. la sensibilité de la position de son effecteur aux points de S_T est minimisée. L'une des raisons de la minimisation de cette sensibilité est la volonté d'élargir les tolérances dimensionnelles, mais aussi de simplifier le calibrage géométrique du manipulateur, (Khalil *et al.*, 2000). Dans un second temps, les tolérances optimales des variables de conception sont calculées en utilisant la méthode de synthèse de tolérances développée ultérieurement.

L'objectif de cette partie est de calculer les valeurs nominales des longueurs des barres l_1 et l_2 du manipulateur afin de minimiser la sensibilité de la position de son effecteur E aux variations de l_1 et l_2, lorsque E parcourt une cible S_T. La cible S_T est ici composée de n points $P_1,\ldots,P_n$. L'effecteur E peut atteindre tous les points de S_T si et seulement si l_1 et l_2 satisfont les conditions suivantes :

$$\begin{cases} |l_1 - l_2| \leqslant r \\ l_1 + l_2 \geqslant R \end{cases} \tag{3.17}$$

où r (resp. R) est la distance minimale (resp. maximale) entre le point A et les points P_i. Ces conditions permettent de définir l'espace de faisabilité des variables de conception. Il est représenté dans la figure 3.10 et est limité par les droites d'équations $|l_2 - l_1| = r$ et $l_1 + l_2 = R$. Les variables de conception sont ici les longueurs des barres AB et BE.

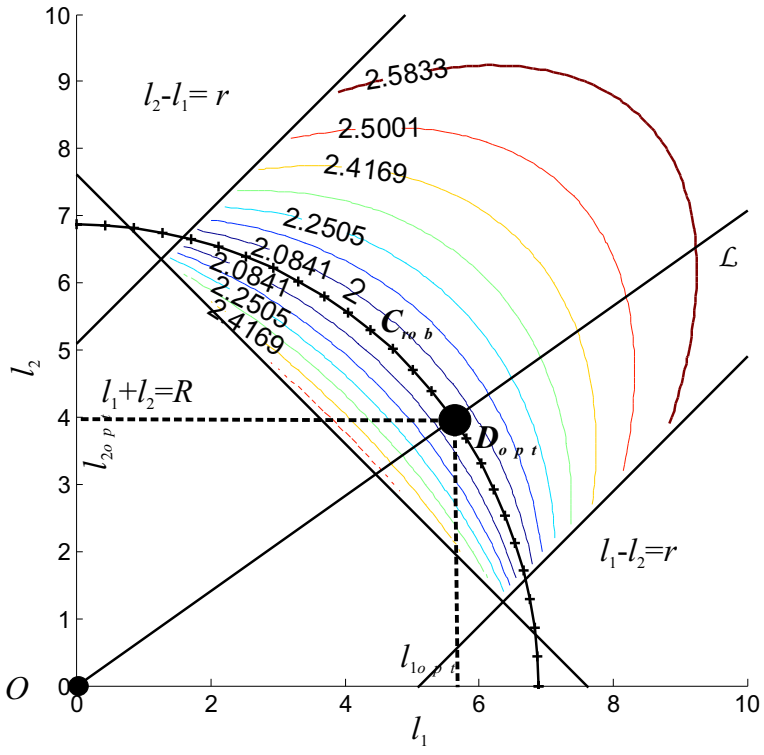


figure 3.10 – $RI_2 = f(l_1,l_2)$

Le vecteur des fonctions performances du manipulateur est composé des coordonnées de

l'effecteur E aux n points à atteindre.

$$\mathbf{x} = [l_1\ l_2]^T\ ,\ \mathbf{f} = [\mathbf{e}_1^T \cdots \mathbf{e}_i^T \cdots \mathbf{e}_n^T]^T \tag{3.18}$$

$$\mathbf{e}_i = l_1\,[C_{\theta_{1i}}\ S_{\theta_{1i}}]^T + l_2\,[C_{\theta_{1i}+\theta_{2i}}\ S_{\theta_{1i}+\theta_{2i}}]^T \tag{3.19}$$

$\mathbf{e}_i$ est le vecteur des coordonnées cartésiennes de E lorsque l'effecteur est sensé se trouver au point P_i. $C_{\theta_{ji}} = \cos\theta_{ji}$, $S_{\theta_{ji}} = \sin\theta_{ji}$, θ_{ji} étant la valeur de l'angle de la $j^{\text{ème}}$ articulation rotoïde motorisée lorsque l'effecteur se trouve au point P_i.

La relation entre l'erreur de position de E au point P_i, $\delta\mathbf{f}_i$, et les variations dimensionnelles δl_1 et δl_2 est déduite de l'équation (3.19).

La norme $\|\delta\mathbf{f}\|_2$ du vecteur des variations des performances $\delta\mathbf{f}$ est l'erreur de position globale de l'effecteur. La matrice jacobienne de sensibilité $\mathbf{J}_x$ du manipulateur est une matrice bloc de dimension (2×2) composée des matrices $\mathbf{J}_{xi}$. La relation entre $\delta\mathbf{f}$, $\mathbf{J}_x$ et le vecteur des variations dimensionnelles $\delta\mathbf{x}$ est la suivante :

$$\delta\mathbf{f} = \mathbf{J}_x\delta\mathbf{x} \quad \text{tel que} \quad \mathbf{J}_x = [\mathbf{J}_{x_1}^T \cdots \mathbf{J}_{x_i}^T \cdots \mathbf{J}_{x_n}^T]^T \tag{3.20}$$

et

$$\mathbf{J}_{x_i} = \begin{bmatrix} C_{\theta_{1i}} & C_{\theta_{1i}+\theta_{2i}} \\ S_{\theta_{1i}} & S_{\theta_{1i}+\theta_{2i}} \end{bmatrix} \tag{3.21}$$

Un des critères de dimensionnement du manipulateur est sa robustesse quantifiée par l'indice RI_2. RI_2 est ici la valeur singulière maximale de $\mathbf{J}_x$ et correspond à la norme maximale de l'erreur de position de l'effecteur, $\|\delta\mathbf{f}\|_{max}$, lorsque la norme des variations dimensionnelles est égale à un, i.e.: $\delta l_1^2 + \delta l_2^2 = 1$.

Supposons que S_T soit composée des quatre points P_1, P_2, P_3, P_4 de coordonnées cartésiennes (1,5), (2,7), (3,7), (4,6), respectivement. Les courbes d'isocontours de l'indice de robustesse RI_2 tracées dans l'espace des variables de conception sont représentées par la figure 3.10. Nous pouvons remarquer que ces courbes d'isocontours forment une famille d'ellipses et que RI_2 est minimal lorsque les variables de conception appartiennent au cercle C_{rob}. L'expression algébrique de RI_2 est donnée par l'équation suivante :

$$RI_2 = \sqrt{n + \left|\sum_{i=1}^{n} \cos\theta_{2i}\right|} = \sqrt{n + \left|\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2 + y_i^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1l_2}\right|} \tag{3.22}$$

où x_i et y_i sont les coordonnées cartésiennes du point P_i. L'ensemble des solutions (l_1,l_2) satisfaisant l'équation (3.22) pour une valeur donnée de RI_2, est soit l'ellipse ϵ_1, soit l'ellipse ϵ_2, dont les équations sont $L_1^2/a_1^2 + L_2^2/b_1^2 = c$ et $L_1^2/a_2^2 + L_2^2/b_2^2 = c$, respectivement ($a_1 = b_2 = 1/RI_2$, $a_2 = b_1 = 1/\sqrt{2n - RI_2^2}$). L_1 et L_2 sont les expressions de l_1 et de

l_2 exprimées dans un repère orienté de 45 degrés par rapport au repère de base dans l'espace des variables de conception. Par conséquent, les ellipses ϵ_1 et ϵ_2, représentées par la figure 3.11 sont les courbes d'isocontours de l'indice de robustesse RI_2. D'après

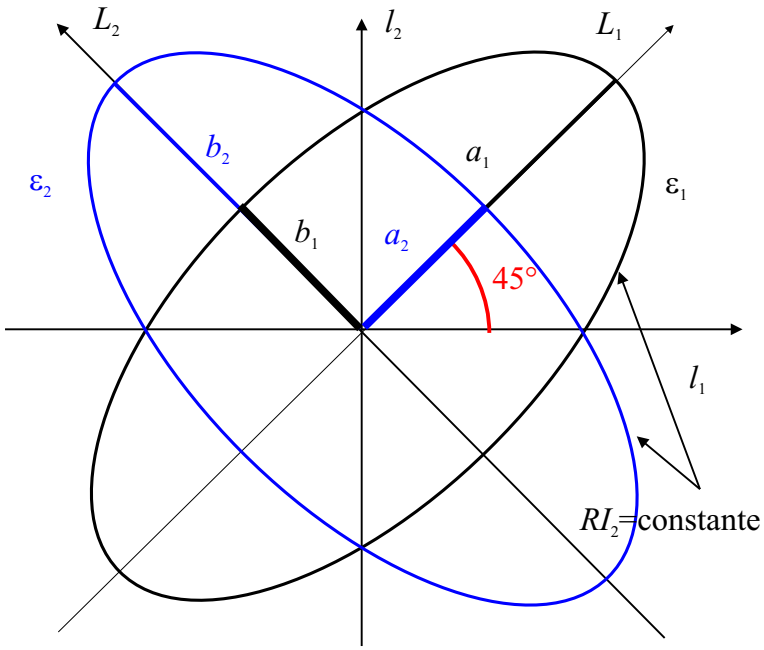


figure 3.11 – *Variables de conception (l_1,l_2) correspondant à une même valeur de RI_2*

l'équation (3.22), l'indice RI_2 est minimal lorsque l'équation suivante est vérifiée :

$$l_1^2 + l_2^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + y_i^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d^2(A,P_i) \tag{3.23}$$

c'est-à-dire lorsque le dimensionnement (l_1,l_2) appartient au cercle de rayon la racine carrée de la moyenne des distances des points P_i au point A, et centré à l'origine de l'espace des variables de conception ($d(A,P_i)$ est la distance du point A au point P_i). Ce cercle correspond bien à C_{rob} de rayon égal à 6,87. Il existe donc une infinité de dimensionnements (l_1,l_2) qui minimisent l'indice RI_2 et ainsi une infinité de manipulateurs robustes. La figure 3.12 représente trois manipulateurs robustes. D'après la figure 3.12, les barres des manipulateurs 1, 2, 3 sont quasiment perpendiculaires lorsque leur effecteur passe par les points P_1, P_2, P_3, et P_4. Ceci est justifié par l'équation (3.22) puisque l'indice RI_2 est minimal lorsque le cosinus des angles θ_{2i} est nul, i.e. lorsque les barres du manipulateur sont perpendiculaires. La sensibilité de la position des effecteurs des manipulateurs 1, 2, et 3 aux variations de leurs dimensions est dans ce cas minimale.

Pour distinguer les manipulateurs robustes, le concepteur doit utiliser un (d') autre(s) critère(s) de sélection. Il peut par exemple prendre en compte le coût, la complexité du mécanisme, ses propriétés cinématiques, l'encombrement. Ici, nous choisissons la dextérité comme deuxième critère de sélection. La dextérité d'un manipulateur caractérise son

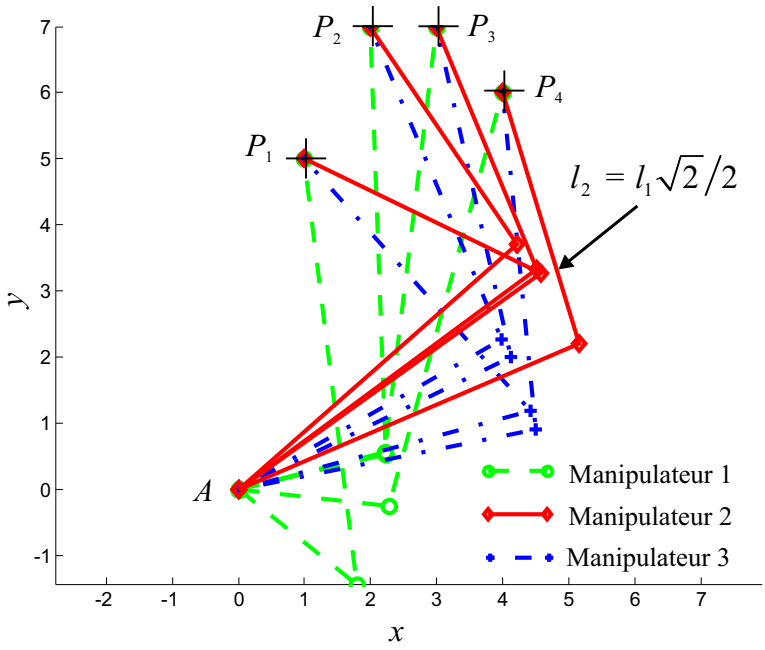


figure 3.12 – *Manipulateurs robustes*

aisance à exécuter des mouvements dans toutes les directions. Elle peut être quantifiée par le conditionnement numérique de la matrice jacobienne cinématique du manipulateur. En effet, plus le conditionnement numérique est faible, meilleure est la dextérité. La configuration optimale du manipulateur d'un point de vue de la cinématique est ainsi sa configuration isotrope puisque le conditionnement numérique de sa matrice jacobienne est dans ce cas égal à un (Angeles, 2002).

L'expression de la matrice jacobienne cinématique $\mathbf{J}_k$ du manipulateur $2R$ est la suivante :

$$\mathbf{J}_k = \begin{bmatrix} -l_1\sin(\theta_1) - l_2\sin(\theta_1+\theta_2) & -l_2\sin(\theta_1+\theta_2) \\ l_1\cos(\theta_1) + l_2\cos(\theta_1+\theta_2) & l_2\cos(\theta_1+\theta_2) \end{bmatrix} \tag{3.24}$$

D'après l'annexe B, une condition nécessaire à l'isotropie du mécanisme est la suivante :

$$l_2 = l_1\sqrt{2}/2 \tag{3.25}$$

Le manipulateur se trouve ainsi dans sa configuration isotrope cinématique lorsque $\cos(\theta_2) = -\sqrt{2}/2$, i.e. $\theta_3 = \pm 3\pi/4$. La droite d'équation , nommée $\mathcal{L}$, est représentée sur la figure 3.10. Le point D_{opt} de coordonnées $(5{,}61; 3{,}97)$ est l'intersection du cercle C_{rob} et de la droite $\mathcal{L}$, et correspond au manipulateur robuste optimal. En conséquence, le manipulateur $2R$ dont les barres ont pour longueur $l_1 = l_{1opt} = 5{,}61$ et $l_2 = l_{2opt} = 3{,}97$, respectivement, est le manipulateur $2R$ passant par les points de la cible S_T avec la meilleure dextérité et celui dont la position de l'effecteur est la moins sensible possible aux variations de l_1 et de l_2.

■

En conclusion, ne connaissant pas les tolérances des longueurs des barres du manipulateur $2R$, qui sont les seules variables de conception prises en compte dans l'étude, l'indice de robustesse RI_2 nous a permis de déterminer un ensemble de manipulateurs $2R$ robustes. La conditionnement de la matrice jacobienne cinématique a ensuite été utilisé comme critère de sélection du manipulateur le plus dextre, appelé ici « manipulateur robuste optimal ».

3.4 Synthèse de tolérances de mécanismes

Le tolérancement est l'une des tâches les plus importantes des phases de conception et de fabrication d'un produit. En effet, la répartition des tolérances entre les différents éléments d'un assemblage mécanique et entre les étapes intermédiaires des procédé de fabrication des éléments peut considérablement altérer la qualité du produit et sa robustesse.

L'écart entre les limites supérieure et inférieure situées de part et d'autre de la valeur nominale d'une variable de conception est appelé « tolérance », (ASME, 1994).

Zhang et Wang (1998) ont ainsi présenté une méthodologie pour maximiser la robustesse d'un produit en allouant convenablement les tolérances des dimensions de ses éléments et les tolérances de fabrication.

Ting et Long (1996) utilisent quant à eux une approche basée sur la distribution des performances communément appelée *performance distribution approach* pour étudier la robustesse d'une conception. Ils caractérisent la sensibilité d'un mécanisme par une matrice jacobienne de sensibilité. Cette matrice permet de calculer les variations des performances du mécanisme en fonction des variations de ses variables et paramètres de conception. Ils représentent aussi l'espace de faisabilité des performances par un hyper-ellipsoïde. Sa taille, sa forme et son orientation décrivent la sensibilité de la performance aux variations. Ils présentent une méthode de synthèse de tolérances basée sur l'approche d'analyse de sensibilité des performances. Il s'avère les boîtes de tolérances obtenues en utilisant leur méthode contiennent des pièces défectueuses, i.e. ne respectant pas le cahier des charges, et ils l'utilisent à tort pour synthétiser indifféremment les tolérances des dimensions et les tolérances des angles d'un mécanisme quatre barres.

Chase *et al.* (1996) proposent une méthode nommée *Direct Linearisation method* pour l'analyse de tolérances d'assemblages mécaniques en 2-D et 3-D. Selon eux, aussi bien les concepteurs que les fabricants sont concernés par les effets des tolérances. Ainsi, leur spécification est un lien important entre la conception et la fabrication d'un mécanisme.

Quelques travaux sur la synthèse de tolérances existent dans la littérature. Nous pouvons citer les travaux de Lee *et al.* (1993) sur la synthèse de tolérances de systèmes non-linéaires basés sur des méthodes de programmation non-linéaires. Parkinson (2000) applique quant

à lui une méthode de conception robuste au tolérancement. Connaissant les plages de variations des variables de conception, il a développé une méthode d'optimisation déterministe pour calculer les valeurs nominales des variables de conception d'un mécanisme. La solution optimale est obtenue en minimisant la variation des dimensions du mécanisme.

Les tolérances dimensionnelles dépendent généralement de plusieurs paramètres : le procédé de fabrication, les tolérances des performances, les coûts de fabrication, etc... Dans la littérature, quelques travaux portent sur la relation entre les tolérances dimensionnelles et le coût de revient d'un produit, (Zhang et Porchet, 1993), (Rajagopalan et Cutkosky, 2003). Ici, nous supposons simplement que le coût de revient d'un mécanisme décroît lorsque ses tolérances dimensionnelles augmentent.

Les méthodes existantes dans la littérature s'adaptent bien à des assemblages d'éléments statiques. Cependant, il existe peu de méthodes applicables à des systèmes mécanismes, tels que les manipulateurs d'architecture sérielle ou parallèle.

C'est la raison pour laquelle nous proposons dans ce chapitre une nouvelle méthode de synthèse de tolérances, qui s'appuie sur l'approche d'analyse de sensibilité des performances présentée dans la partie 3.1.

Pour synthétiser les tolérances des variables de conception d'un mécanisme, nous proposons au concepteur de suivre la procédure définie dans la partie 3.3.2, qui consiste à le dimensionner et à synthétiser ses tolérances de manière séquentielle.

Dans le cadre de notre étude, nous n'utilisons pas de modèle de coût, mais nous considérons que plus les tolérances sont serrées, plus le coût de fabrication du produit est élevé.

3.4.1 Méthode de synthèse de tolérances

Le tolérancement d'une pièce mécanique concerne aussi bien son concepteur que son fabricant. Cependant, les tolérances souhaitées par ces derniers sont généralement antagoniques. En effet, le concepteur aura plutôt tendance à serrer les tolérances afin d'accroître la précision du produit, alors que le fabricant cherchera à les augmenter pour assurer la faisabilité des opérations et diminuer les coûts de fabrication.

Pour aider le concepteur à ne pas choisir des tolérances trop serrées, nous lui proposons une démarche séquentielle. Elle consiste dans un premier temps à calculer les variables de conception du mécanisme, au moyen de l'indice de robustesse RI_2, afin de le rendre robuste. Ainsi, la sensibilité de ses performances aux variations de ses variables et paramètres de conception est minimale et les tolérances des variables de conception acceptables seront d'autant plus larges. Ensuite, connaissant la norme maximale des variations des performances tolérée, $\|\delta\mathbf{f}\|_{max}$, le calcul des tolérances optimales des variables de conception peut se faire en utilisant le problème d'optimisation suivant :

P	*maximiser* le volume de la boîte de tolérances BT des variables de conception *sous contrainte* : garantir son inclusion dans l'hyper-ellipsoïde de sensibilité du mécanisme $\xi(\|\delta\mathbf{f}\|_{max})$,dont les points situés sur sa frontière correspondent à une norme des variations de ses performances égale à $\|\delta\mathbf{f}\|_{max}$

Le problème P peut aussi être formulé de la manière suivante :

$$\begin{cases} \max\limits_{\mathbf{u}} \prod\limits_{i=1}^{l} |u_i| \\ telque \quad U(u_1, u_2, \cdots, u_l) \in \xi(C) \\ \qquad u_i.\text{sign}(V_i) \geqslant 0,\ i = 1, \cdots, l \\ \qquad |u_i| \geqslant \Delta x_{imin},\ i = 1, \cdots, l \end{cases}$$

où $\mathbf{u} = [u_1, u_2, \cdots, u_l]^T$ est le vecteur des coordonnées du point U, un des sommets de la boîte de tolérances des variables de conception. Les tolérances optimales, Δx_{iopt}, des variables de conception x_i sont directement déduites du vecteur $\mathbf{u}$, solution du problème d'optimisation précédent :

$$\Delta x_{iopt} = |u_i| \ , \ i = 1, \ldots, l \tag{3.26}$$

Ainsi, les plages de variation des variables de conception sont les suivantes :

$$\overline{x}_i - \Delta x_{iopt} \leqslant x_i \leqslant \overline{x}_i + \Delta x_{iopt} \ , \ i = 1, \ldots, l \tag{3.27}$$

où $\{\overline{x}_i,\ i = 1, \ldots, l\}$ est l'ensemble des valeurs nominales des variables de conception x_i calculées à l'aide de l'indice de robustesse RI_2 afin de rendre le mécanisme robuste.

La première contrainte de l'algorithme correspond à l'inclusion du point U dans l'hyper-ellipsoïde de sensibilité $\xi(\|\delta\mathbf{f}\|_{max})$, i.e. une variation des variables de conception située sur la frontière de l'hyper-ellipsoïde génère une variation des performances de norme égale à $\|\delta\mathbf{f}\|_{max}$. $\mathbf{V}$ est le vecteur propre associé à la valeur singulière maximale de la matrice jacobienne de sensibilité $\mathbf{J}_x$ et est sa $i^{\text{ème}}$ composante. La deuxième contrainte garantit ainsi l'inclusion de la boîte de tolérances dans l'hyper-ellipsoïde de sensibilité. La troisième contrainte, quant à elle, est imposée par le fabricant et dépend des procédé de fabrication utilisés (Δx_{imin} est la tolérance dimensionnelle minimale tolérée pour la variable x_i).

La figure 3.13 illustre le fonctionnement de cet algorithme pour un mécanisme comportant deux variables de conception ($l = 2$), et pour lequel les composantes V_1 et V_2 du vecteur $\mathbf{V}$ sont négative et positive, respectivement. Dans ce cas, le point U est situé dans le cadran indiqué par le vecteur $\mathbf{V}$ dans l'espace des variations des variables de conception. La boîte de tolérances optimale, nommée Caro-BT sur la figure 3.13, est déduite des coordonnées

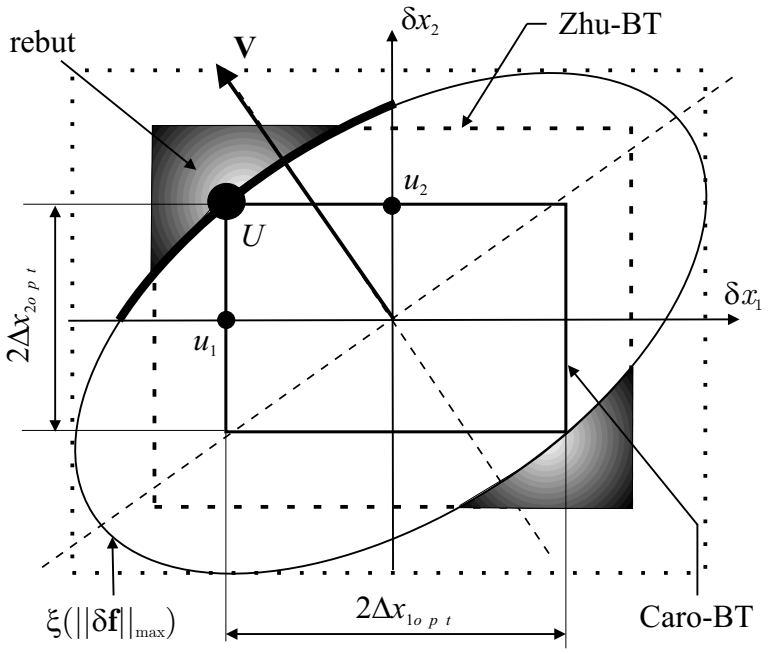


figure 3.13 – *Boîte de tolérances des variables de conception optimale*

du point U et correspond à la boîte de tolérances la plus volumineuse ne comprenant pas de pièces défectueuses.

Zhu et Ting (2001) proposent aussi une méthode de synthèse de tolérances applicables aux mécanismes quatre barres. Selon eux, la boîte de tolérances optimale d'un mécanisme est une contraction de la boîte circonscrite à l'hyper-ellipsoïde de sensibilité $\xi(\|\delta\mathbf{f}\|_{max})$. Bien que cette boîte, nommée Zhu-BT sur la figure 3.13, soit plus large que la boîte de tolérances que nous trouvons, elle comprend des pièces défectueuses, i.e : des mécanismes dont la norme des variations des performances est supérieure à $\|\delta\mathbf{f}\|_{max}$. Ces pièces correspondent aux parties grisées de la figure 3.13.

Pour illustrer cette méthode de synthèse de tolérances, nous étudions deux manipulateurs d'architecture sérielle, et un manipulateur d'architecture parallèle.

3.4.2 Synthèse de tolérances de deux manipulateurs d'architecture sérielle

Un manipulateur de type $2R$ (manipulateur d'architecture sérielle à deux degrés de liberté et composé de deux articulations rotoïdes) et un manipulateur de type $3R$ (manipulateur d'architecture sérielle à trois degrés de liberté et composé de trois articulations rotoïdes) sont étudiés dans cette partie pour illustrer la méthode de synthèse de tolérances décrite précédemment.

Sachant que l'effecteur de ces deux manipulateurs doit passer par n points avec une erreur de position inférieure à 10 mm, nous recherchons les tolérances optimales de leurs

dimensions.

Un hyper-ellipsoïde de sensibilité est associé à chaque position de l'effecteur et la boîte de tolérances optimale doit être incluse dans tous ces hyper-ellipsoïdes. Cependant, un seul hyper-ellipsoïde de sensibilité est pris en compte dans le problème d'optimisation présenté précédemment. Afin de pouvoir utiliser notre méthode de synthèse de tolérances, nous recherchons dans un premier temps l'hyper-ellipsoïde de sensibilité qui nous permettra de trouver la boîte de tolérances la plus (hyper)-volumineuse comprise dans tous les hyper-ellipsoïdes de sensibilité. Cet hyper-ellipsoïde sera nommé hyper-ellipsoïde critique et noté ξ_{crit}.

Concernant les manipulateurs d'architecture sérielle, une variation unitaire d'une variable de conception et l'absence de variations des autres variables entraînent une erreur de position unitaire de l'effecteur. Ainsi, les hyper-ellipsoïdes de sensibilité se croisent en 2^l points. Les hyper-ellipsoïdes étant convexes, le polyèdre dont les sommets sont ces 2^l points est inclus dans tous les hyper-ellipsoïdes de sensibilité.

Pour un manipulateur d'architecture sérielle, nous pouvons en déduire que l'hyper-ellipsoïde critique est celui dont le petit demi-axe est le plus petit des petits demi-axes des n hyper-ellipsoïdes de sensibilité, n étant le nombre de points de passage de l'effecteur du manipulateur.

3.4.2.1 Synthèse de tolérances d'un manipulateur $2R$

L'étude du manipulateur $2R$ représenté par la figure 3.9 illustre la procédure séquentielle de dimensionnement et de synthèse de tolérances décrite précédemment. En effet, le manipulateur a été dimensionné dans la partie 3.3.2.1 à l'aide de l'indice de robustesse RI_2 afin de minimiser la sensibilité de la position de son effecteur aux variations des longueurs de ses barres l_1 et l_2. Ci-après, nous nous intéressons à la synthèse des tolérances de leur tolérance.

La figure 3.14 représente les ellipses de sensibilité du manipulateur robuste optimal défini dans la partie 3.3.2.1 ($l_{1opt} = 5{,}61$ et $l_{2opt} = 3{,}97$). Chaque point des ellipses de sensibilité tracées dans l'espace des variations des variables de conception correspond à une erreur de position de l'effecteur E de 10 mm. Nous pouvons remarquer que la forme, la taille, et l'orientation des ellipses de sensibilité dépendent seulement de la deuxième variable angulaire motorisée θ_2, et que l'effecteur E peut atteindre tous les points de la cible S_T lorsque l'angle θ_2 appartient à l'intervalle $[\theta_{2min},\theta_{2max}]$.

L'ellipse critique du manipulateur utilisée dans le problème d'optimisation pour calculer les tolérances optimales des longueurs des barres du manipulateur est celle correspondant à l'angle θ_{2max}. En effet, c'est celle ayant le plus petit-axe. L'algorithme d'optimisation converge ainsi vers la solution $\Delta l_{1opt} = \Delta l_{2opt} = 5{,}82$ mm et la boîte de tolérances correspondantes est représentée dans la figure 3.14.

■

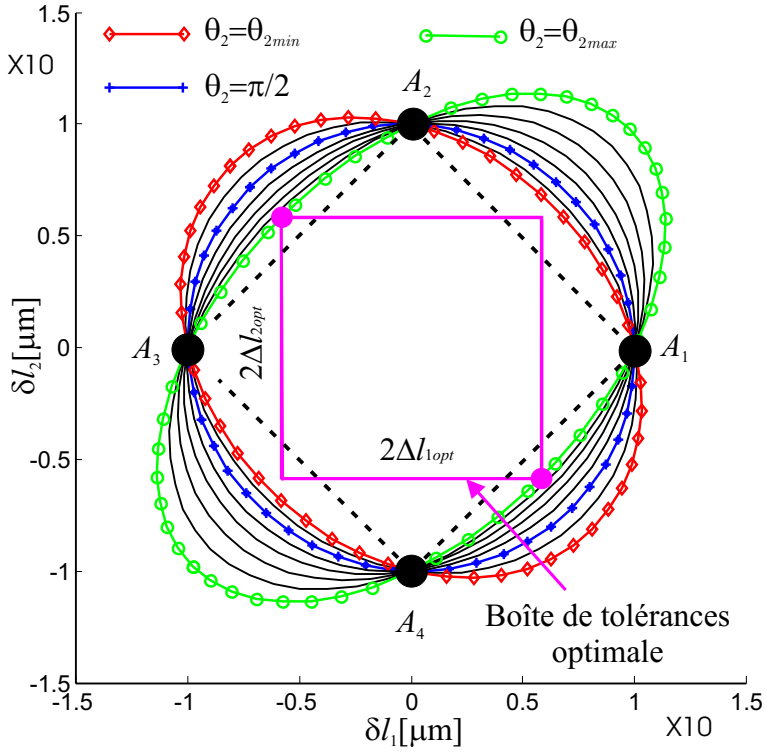


figure 3.14 – *Boîte de tolérances optimale*

Les points $A_1(1,0)$, $A_2(0,1)$, $A_3(-1,0)$, $A_4(0,-1)$ appartiennent à chaque ellipse de sensibilité du manipulateur puisque une variation unitaire de l_i et une absence de variation de l_j $(i \neq j)$, engendre une erreur de position unitaire de l'effecteur. Les ellipses étant de forme convexe, le carré $A_1A_2A_3A_4$ est inclus dans toutes les ellipses de sensibilité du manipulateur. Il en découle que l'inégalité suivante est une condition suffisante pour que l'erreur de position de l'effecteur du manipulateur soit inférieure à 10 mm quelle que soit la configuration du manipulateur.

$$\Delta l_1 + \Delta l_2 \leqslant 10\mu\text{m} \tag{3.28}$$

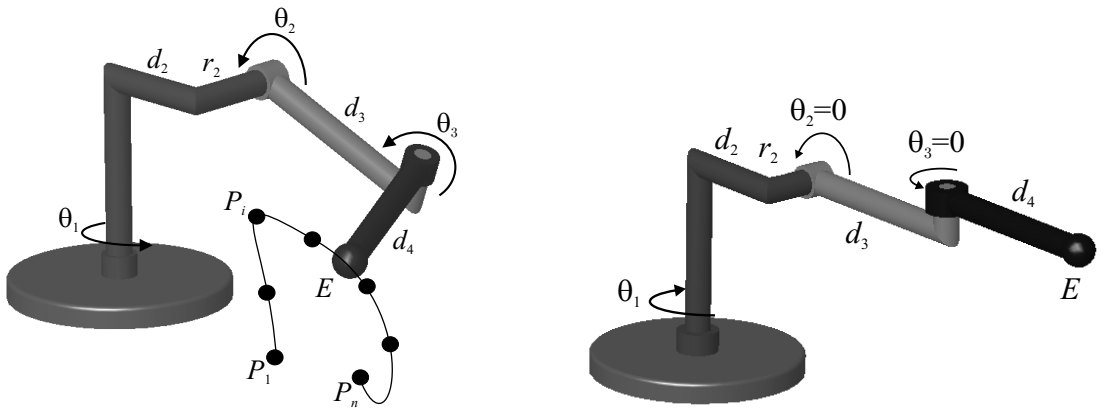
Ainsi le concepteur peut utiliser cette inégalité au lieu de l'algorithme de synthèse de tolérances pour synthétiser les tolérances Δl_1 et Δl_2. Cependant, les tolérances obtenues dans ce cas sont moins intéressantes. En effet, la somme des tolérances Δl_{1opt} et Δl_{2opt} est égale à 11,64 mm et ne respectent pas l'inégalité (3.28) bien qu'elles garantissent une erreur de position de l'effecteur inférieure à 10 μm quelle que soit sa position sur la cible S_T. En définitive, la méthode de synthèse de tolérances proposée dans la partie 3.4.1 est plus intéressante que l'inégalité (3.28) pour synthétiser les tolérances des longueurs des barres du manipulateur $2R$, et les tolérances optimales des longueurs des barres retenues sont les suivantes : $\Delta l_{1opt} = \Delta l_{2opt} = 5{,}82$ mm.

Le manipulateur $2R$ a été étudié afin d'obtenir une interprétation graphique des résultats et une expression algébrique de l'indice de robustesse RI_2. Cet indice peut cependant

être calculé numériquement lorsqu'il ne peut pas être exprimé sous forme algébrique. Par ailleurs, la démarche proposée pour dimensionner le manipulateur $2R$ et synthétiser les tolérances de ses dimensions peut être adoptée pour étudier d'autres mécanismes, tels que le manipulateur $3R$.

3.4.2.2 Synthèse de tolérances d'un manipulateur $3R$

Le manipulateur étudié dans cette partie est un manipulateur d'architecture sérielle à trois degrés de liberté, composé de trois articulations rotoïdes motorisées, et est représenté par la figure 3.15(a). θ_1, θ_2, et θ_3 sont ses variables articulaires motorisées, d_2, d_3, d_4, r_2, r_3 sont ses variables de conception définis à l'aide du paramétrage de Dénavit Hartenberg Modifié, (Khalil et Dombre, 2002).



(a) *trajectoire à parcourir* (b) *configuration zéro*

figure 3.15 – *Manipulateur* $3R$

Sachant que l'erreur de position de l'effecteur E du manipulateur, ϵ_E, doit être inférieure à 10μm en tout point P_i, $i = 1,\ldots,n$ d'une trajectoire, nous calculons les tolérances optimales des dimensions du manipulateur à l'aide de la méthode de synthèse de tolérances présentée dans la partie 3.4.1. Les variations des variables θ_1, θ_2, et θ_3 sont négligeables puisque les codeurs des articulations motorisées sont supposés très précis. Ainsi, ϵ_E ne dépend que des variations des dimensions du manipulateur. Par souci d'interprétation graphique, seules les variations des paramètres d_2, r_2, d_3 sont prises en compte($\mathbf{x} = [d_2\ r_2\ d_3]^T$).

$\mathbf{f} = [\mathbf{f}_1^T \ldots \mathbf{f}_n^T]$ est le vecteur des fonctions performances $\mathbf{f}_i = [e_{xi}\ e_{yi}\ e_{zi}]^T$, où e_{xi}, e_{yi}, e_{zi} sont les coordonnées cartésiennes de l'effecteur E lorsqu'il se trouve au point P_i. $\delta\mathbf{f} = [\delta\mathbf{f}_1^T \cdots \delta\mathbf{f}_n^T]^T$ est le vecteur des variations des performances tel que $\delta\mathbf{f}_i = [\delta e_{xi}\ \delta e_{yi}\ \delta e_{zi}]^T$, δe_{xi}, δe_{yi}, δe_{zi} étant les variations des coordonnées e_{xi}, e_{yi} et e_{zi}. $\delta\mathbf{x} = [\delta d_2\ \delta r_2\ \delta d_3]^T$ est

le vecteur des variations des variables de conception. La relation entre $\delta\mathbf{f}_i$ et $\delta\mathbf{x}$ est la suivante :

$$\delta\mathbf{f}_i = \mathbf{J}_{x_i}\delta\mathbf{x} \quad \text{with} \quad \mathbf{J}_{x_i} = \begin{bmatrix} \cos\theta_{1i} & -\sin\theta_{1i} & \cos\theta_{1i}\cos\theta_{2i} \\ \sin\theta_{1i} & \cos\theta_{1i} & \sin\theta_{1i}\cos\theta_{2i} \\ 0 & 0 & -\sin\theta_{2i} \end{bmatrix} \tag{3.29}$$

où θ_{1i} et θ_{2i} sont les valeurs de θ_1 et θ_2 lorsque l'effecteur se trouve en P_i, calculées à l'aide du modèle géométrique inverse du manipulateur. La matrice jacobienne de sensibilité du manipulateur, notée $\mathbf{J}_x$, est une matrice bloc de dimension $(3n \times 3)$, composée des matrices $\mathbf{J}_{xi}$.

Supposons que $n = 5$ et que les coordonnées cartésiennes de P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 soient (1, 1, 1), (2, -2, 3), (5, 6, 2), (-1, -4, 3), (2, 3, 5), respectivement. L'indice de robustesse RI_2 dépend des valeurs des variables articulaires θ_{1i} et θ_{2i} correspondant au passage de l'effecteur par les points P_i. Pour calculer cet indice, nous cherchons la solution du problème d'optimisation visant à minimiser la valeur de l'indice RI_2 tout en garantissant le passage de l'effecteur par les points P_i. L'algorithme de résolution utilisé est de type SQP (Sequential Quadratic Programming), et converge vers la solution suivante : $d_2 = 1{,}75$; $r_2 = 2{,}5$; $d_3 = 3{,}25$ et $d_4 = 2{,}5$ (la fonction *fmincon* de *Matlab* a été utilisée pour obtenir ce résultat).

La norme euclidienne de la variation de la position de l'effecteur, notée $\|\delta\mathbf{f}\|_2$, est l'erreur de position globale de l'effecteur. $\|\delta\mathbf{f}\|_2 \leqslant 10\mu$m est une condition suffisante pour garantir une erreur de position de l'effecteur en tout point P_i inférieure à 10 μm. Cette condition est toute fois très contraignante. Nous préférons ainsi chercher la plus grande boîte de tolérances des dimensions incluse dans tous les ellipsoïdes de sensibilité associés aux points P_i. La figure 3.16 représente l'ellipsoïde de sensibilité le plus contraignant, noté ξ_{crit}, i.e. celui ayant le plus petit petit demi-axe parmi les cinq ellipsoïdes de sensibilité.

Le problème d'optimisation suivant est utilisé pour calculer les tolérances dimensionnelles optimales Δd_{2opt}, Δr_{2opt}, Δd_{3opt} des longueurs d_2, r_2 et d_3, respectivement.

$$\begin{cases} \max\limits_{\mathbf{u}} |u_1 u_2 u_3| \\ \text{tel que} \quad U(u_1,u_2,u_3) \in \xi_{crit} \\ u_1 \geqslant 0 \ , \ u_3 \geqslant 0 \\ |u_i| \geqslant \Delta x_{imin} \ , \ i = 1, \cdots, 3 \end{cases}$$

où $\Delta x_{1min} = 1\mu$m, $\Delta x_{2min} = \dfrac{r_2}{d_2}\Delta x_{1min}$, $\Delta x_{3min} = \dfrac{d_3}{d_2}\Delta x_{1min}$. La solution du problème d'optimisation précédent est calculée à l'aide de la fonction $fmincon$ de $Matlab$. L'algorithme converge vers la solution suivante : $u_1 = 4{,}08\mu$, $u_2 = -5{,}77\mu$ et $u_3 = 4{,}08\mu$. Ainsi, $\Delta d_{2opt} = 4{,}08\mu$m, $\Delta r_{2opt} = 5{,}77\mu$m and $\Delta d_{3opt} = 4{,}08\mu$m. La boîte de tolérances

■

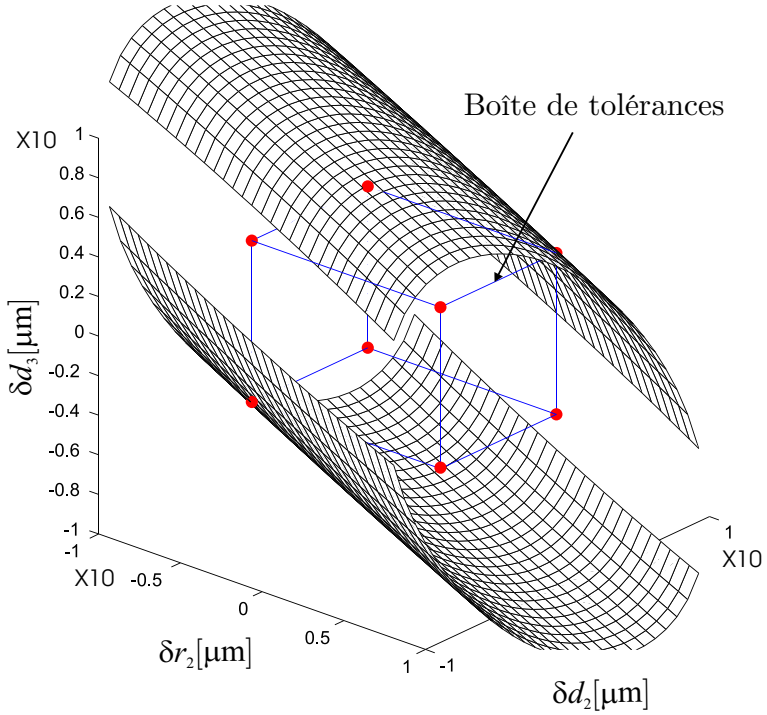


figure 3.16 – *Ellipsoïde de sensibilité le plus contraignant et boîte de tolérances optimale*

correspondante est représentée dans la figure 3.16. La figure 3.17 décrit les valeurs de

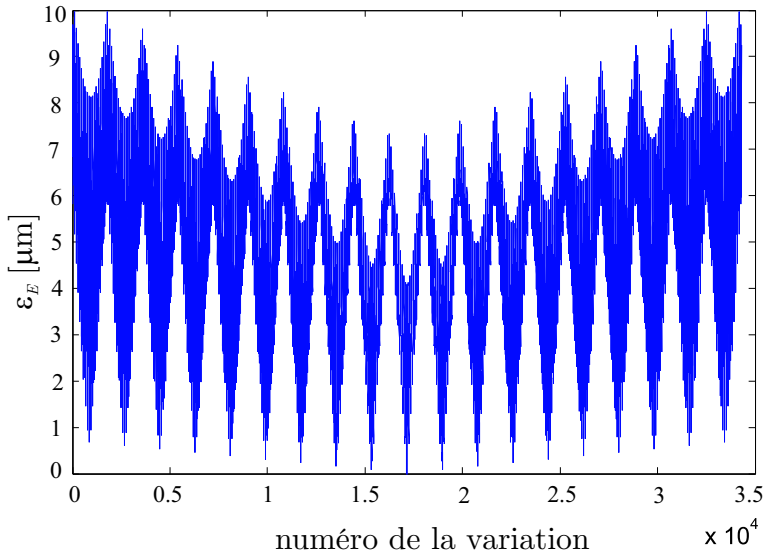


figure 3.17 – *Validation de la boîte de tolérances optimale*

l'erreur de position de l'effecteur lorsque δd_2, δr_2, et δd_3 varient entre $-\Delta d_{2opt}$ et Δd_{2opt}, $-\Delta r_{2opt}$ et Δr_{2opt}, $-\Delta d_{3opt}$ et Δd_{3opt}, respectivement, et pour les cinq positions de l'effecteur. Nous pouvons constater que ϵ_E est toujours inférieure à 10 μm. L'erreur de position de l'effecteur est ainsi inférieure à 10 μm quelle que soit sa posture lorsque les tolérances dimensionnelles de d_2, r_2, et d_3 sont égales à Δd_{2opt}, Δr_{2opt}, et Δd_{3opt}, respectivement.

Les points $B_1(1,0,0)$, $B_2(-1,0,0)$, $B_3(0,1,0)$, $B_4(0,-1,0)$, $B_5(0,0,1)$, et $B_6(0,0,-1)$ appar-

tiennent à tous les ellipsoïdes de sensibilité du manipulateur puisqu'une variation de 1 μm d'une variable de conception et une variation nulle des autres variables engendrent une erreur de position de 1 μm de l'effecteur E. L'ellipsoïde étant un volume convexe, l'octaèdre $B_1B_2B_3B_4B_5B_6$ représenté dans la figure 3.18 est inclus dans tous les ellipsoïdes de sensibilité du manipulateur, dont un point de la surface engendre une erreur de position de 10 μm de l'effecteur. L'inéquation suivante est ainsi une condition suffisante pour que

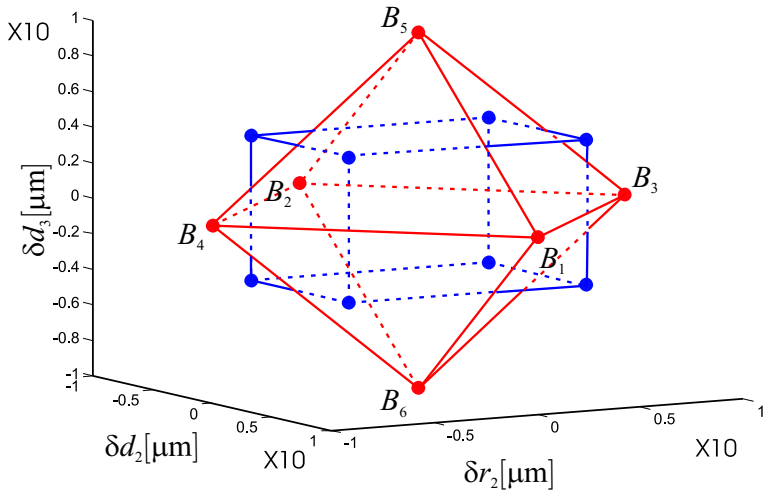


figure 3.18 – *La boîte de tolérances optimale n'est pas incluse dans l'octaèdre*

l'erreur de position de l'effecteur soit inférieure à 10 μm quelle que soit sa position :

$$\Delta d_2 + \Delta r_2 + \Delta d_3 \leqslant 10\mu\text{m} \tag{3.30}$$

Elle peut donc être utilisée par le concepteur pour calculer les tolérances des longueurs d_2, r_2, et d_3. Nous pouvons cependant remarquer que

$$\Delta d_{2opt} + \Delta r_{2opt} + \Delta r_{3opt} = 13{,}9\mu\text{m} > 10\mu\text{m} \tag{3.31}$$

La boîte de tolérances optimale n'est donc pas incluse dans l'octaèdre $B_1B_2B_3B_4B_5B_6$, comme le montre la figure 3.18, alors que les tolérances des dimensions correspondantes (Δd_{2opt}, Δr_{2opt}, Δd_{3opt}) garantissent une erreur de position de l'effecteur inférieure à 10 μm en tout point P_i. En définitive, la méthode de synthèse de tolérances proposée est plus intéressante que l'inéquation (3.30) pour calculer les tolérances optimales des variables de conception du manipulateur $3R$ étudié.

Les applications de notre méthode de synthèse de tolérances ne se limitent pas aux manipulateurs d'architecture sérielle. En effet, nous l'utilisons pour synthétiser les tolérances des longueurs des articulations de type parallélogramme de l'Orthoglide, étudié dans le chapitre 2.

■

3.4.3 Synthèse de tolérances de l'Orthoglide

Dans cette partie, nous appliquons la méthode de synthèse de tolérances, développée dans la partie 3.4.1, à l'Orthoglide, manipulateur d'architecture parallèle à trois degrés de liberté de translation pure. L'analyse de sensibilité de ce manipulateur a été réalisée dans le chapitre 2 et il est représenté par la figure 2.2. L'effecteur P du manipulateur doit parcourir un cube C_u d'arête 200 mm avec un facteur d'amplification de vitesse compris entre 0,5 et 2. Les longueurs nominales de ses articulations de type parallélogramme sont ainsi égales à 310,6 mm ($L_1 = L_2 = L_3 = 310.6$ mm), (Chablat et Wenger, 2003). Sachant que l'erreur de position de P, ϵ_P, doit être inférieure à 10μm en tout point de C_u, nous souhaitons connaître les tolérances optimales des variables de conception du mécanisme.

D'après les résultats de l'analyse de sensibilité de l'Orthoglide, les variations des longueurs des articulations de type parallélogramme sont les plus influentes sur la position et l'orientation de l'effecteur. Ainsi, par souci d'interprétation graphique, seules les tolérances des longueurs des articulations de type parallélogramme sont recherchées dans cette partie ($\mathbf{x} = [L_1\ L_2\ L_3]$).

Pour appliquer la méthode de synthèse de tolérances présentée dans la partie 3.4.1, il faut dans un premier temps déterminer l'ellipsoïde critique du manipulateur. A chaque point de l'espace articulaire du manipulateur est associé un ellipsoïde de sensibilité aux variations dimensionnelles δL_1, δL_2 et δL_3. L'ellipsoïde critique ξ_{crit} est celui dont le petit demi-axe est le plus petit des petits demi-axes des ellipsoïdes de sensibilité du manipulateur, i.e. l'ellipsoïde de sensibilité correspondant à la matrice jacobienne de sensibilité ayant la plus grande valeur singulière maximale.

Les équations permettant d'obtenir l'expression de la matrice jacobienne de sensibilité du manipulateur sont données en annexe A. Les expressions des valeurs singulières de la matrice jacobienne de sensibilité étant lourdes, elles sont calculées numériquement. La plus grande valeur singulière maximale correspond à la configuration pour laquelle les variables articulaires du manipulateur sont minimales, i.e. $r_1 = r_2 = r_3 = 126.80$ mm. Le vecteur propre correspondant est $\mathbf{V} = [0{,}74\ \ -0{,}08\ \ -0{,}66]^T$. Sa première composante étant positive et les deux autres négatives, le problème d'optimisation suivant est utilisé pour calculer ΔL_{1opt}, ΔL_{2opt}, et ΔL_{3opt}, les tolérances optimales des longueurs L_1, L_2, et L_3, respectivement :

$$\begin{cases} \text{variables : } u_1,\ u_2,\ u_3 \\ \textit{maximiser } |u_1 u_2 u_3| \\ \textit{sous contraintes } \ U(u_1,u_2,u_3) \in \xi_{crit} \\ \qquad\qquad\qquad\quad u_1 \geqslant 0\ ,\ u_2 \leqslant 0\ ,\ u_3 \geqslant 0 \\ \qquad\qquad\qquad\quad |u_i| \geqslant \Delta L_{imin}\ ,\ i = 1, \cdots, 3 \end{cases}$$

où ΔL_{imin} est la tolérance minimale de la longueur L_i. En supposant que $\Delta L_{1min} =$

$\Delta L_{2min} = \Delta L_{3min} = 1\mu$m, la solution du problème d'optimisation converge vers $\mathbf{u} = [2{,}49 - 2{,}49 - 2{,}49]$ en utilisant le fonction $fmincon$ de $Matlab$. $\Delta L_{1opt} = 2{,}49\ \mu$m, $\Delta L_{2opt} = 2{,}49\ \mu$m, et $\Delta L_{3opt} = 2{,}49\ \mu$m sont ainsi les tolérances optimales des longueurs des parallélogrammes du manipulateur.

La figure 3.19 représente la boîte de tolérances optimale des longueurs des parallélogrammes du manipulateur. Cette boîte est comprise à l'intérieur de l'ellipsoïde de sensibilité critique ξ_{crit}.

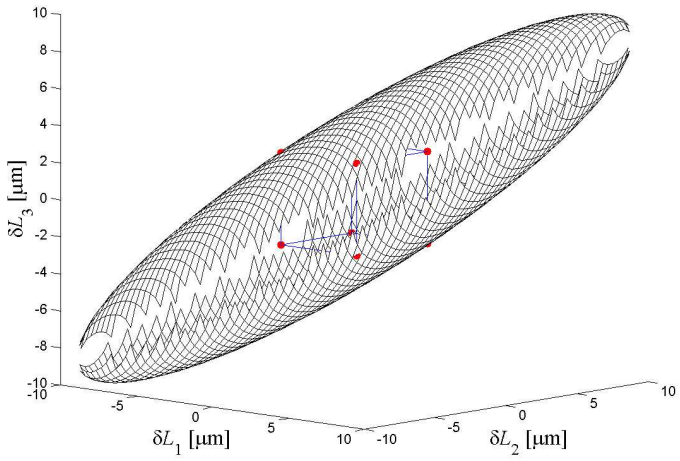


figure 3.19 – *Ellipsoïde critique et boîte de tolérances optimale*

La figure 3.20 représente la boîte de tolérances optimale comprise à l'intérieur de l'ellipsoïde de sensibilité correspondant à la configuration isotrope cinématique du manipulateur. D'après l'analyse de sensibilité de l'Orthoglide décrite dans le chapitre 2, cette configuration est la moins sensible aux variations des longueurs et angulaires. Nous remarquons ici que l'ellipsoïde de sensibilité correspondant englobe largement la boîte de tolérances optimale.

Comme l'illustre la figure 3.21, l'erreur de position de l'effecteur du manipulateur est inférieure à 10μm pour toute variation $(\delta L_1, \delta L_2, \delta L_3)$ comprise dans la boîte de tolérance optimale BT_{opt} du manipulateur et quelle que soit la position de l'effecteur. L'erreur de position maximale est par ailleurs égale à 10μm. BT_{opt} est donc une boîte de tolérances dimensionnelles optimale du manipulateur.

En définitive, les tolérances optimales des longueurs des articulations de type parallélogramme trouvées sont les suivantes : $\Delta L_{1opt} = 2{,}49\mu$m, $\Delta L_{2opt} = 2{,}49\mu$m, et $\Delta L_{3opt} = 2{,}49\mu$m. La boîte de tolérances correspondante est donc un cube. Ce qui est compréhensible puisque la conception du manipulateur est symétrique, ses trois jambes sont identiques, et la région de l'espace de travail balayée par l'effecteur est aussi un cube.

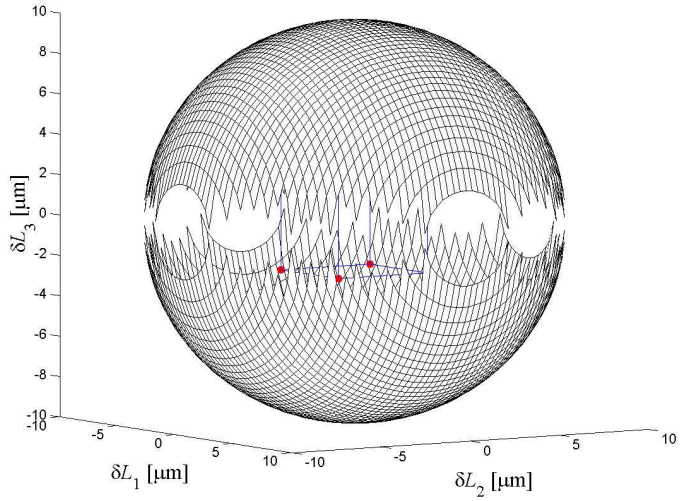


figure 3.20 – *Boîte de tolérances optimale comprise à l'intérieur de l'ellipsoïde de sensibilité correspondant à la configuration isotrope du manipulateur*

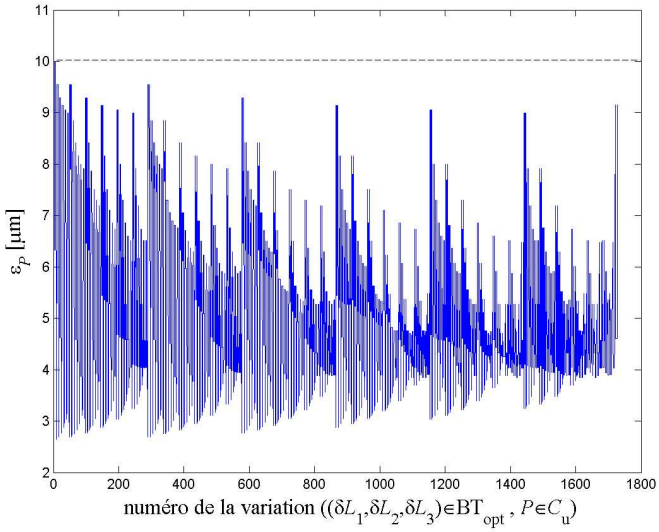


figure 3.21 – *Erreur de position de l'effecteur inférieure à* $10\mu m$ *quelle que soit la variation comprise à l'intérieur de* BT_{opt} *et la configuration du manipulateur*

Conclusion

La plupart des méthodes de conception robuste existantes dans la littérature nécessitent la connaissance des tolérances des variables de conception (Sundaresan *et al.*, 1993), (Parkinson, 1995), (Chen *et al.*, 1996). Elles ne peuvent donc pas être utilisées lorsque les sources de variations, comme la capabilité des procédé de fabrication, l'usure des pièces, l'environnement opérationnel, ne sont pas connues et maîtrisées.

Dans ce chapitre, nous avons utilisé une approche basée sur l'analyse de la sensibilité des performances d'un mécanisme pour déterminer un indice de robustesse adapté à la quan-

tification de la robustesse de sa conception. L'indice que nous suggérons au concepteur de systèmes mécaniques robotisés est la norme euclidienne de la matrice jacobienne de sensibilité de la conception. Cette matrice est obtenue en linéarisant les fonctions performances du mécanisme et exprime les variations des performances en fonction de celles des variables de conception et des paramètres de conception environnementaux.

Il existe cependant d'autres indices de robustesse dans la littérature comme le conditionnement numérique de la matrice jacobienne de sensibilité, ou encore des combinaisons linéaires du conditionnement et de la norme euclidienne de matrice jacobienne sensibilité. Ici, nous avons comparé le conditionnement et la norme euclidienne de la matrice jacobienne de sensibilité en étudiant un amortisseur. Les résultats obtenus ont aussi été confrontés aux résultats trouvés avec une méthode de conception robuste classique mais nécessitant la connaissance des tolérances des variables de conception. Nous en déduisons que la norme euclidienne de la matrice jacobienne de sensibilité est un indice mieux approprié à la quantification de la robustesse du manipulateur que son conditionnement numérique.

La robustesse peut aussi être utilisée comme critère de dimensionnement de mécanismes. Nous avons ainsi proposé une méthode basée sur l'analyse de sensibilité des performances pour calculer les variables de conception optimales d'un mécanisme lorsque les tolérances des variables de conception sont connues. Lorsque nous n'avons aucune information sur l'ordre de grandeur des variations des variables de conception, l'indice de robustesse RI_2 proposé peut être utilisé pour calculer leur valeur nominale optimale. Un manipulateur $2R$ a ainsi été dimensionné en utilisant deux critères : sa robustesse quantifiée à l'aide de l'indice RI_2 et sa dextérité quantifiée par le conditionnement numérique de sa matrice jacobienne cinématique.

Enfin, nous avons formulé une procédure de dimensionnement et de synthèse de tolérances optimales des variables de conception d'un mécanisme. Cette procédure vise à réaliser ces deux opérations de manière séquentielle. Le dimensionnement est réalisé au moyen de l'indice de robustesse optimal proposé. La synthèse de tolérances est faite à l'aide d'une méthode que nous avons développée. Cette procédure présente l'avantage d'être simple à utiliser et permet de synthétiser plus facilement les tolérances des variables de conception de mécanismes complexes. Deux manipulateurs d'architecture sérielle et un manipulateur d'architecture parallèle ont ainsi été étudiés pour illustrer cette procédure.

4 Étude de la robustesse de manipulateurs $3R$

Introduction **92**

4.1 Propriétés des manipulateurs 3R **93**

4.1.1 Paramétrage 93

4.1.2 Singularités de position d'un manipulateur $3R$ 93

4.1.3 La notion d'aspect 94

4.1.4 La notion de parcourabilité 95

4.1.5 Manipulateurs cuspidaux 95

4.1.6 Manipulateurs génériques et non-génériques 96

4.1.7 Classes d'homotopie 98

4.2 Robustesse des manipulateurs génériques et non-génériques . . **101**

4.2.1 Robustesse vis-à-vis de la T-parcourabilité d'une trajectoire 102

4.2.2 Robustesse vis à vis de la précision de l'effecteur 108

4.2.3 Performances cinématiques et sensibilité de la position de l'effecteur . . 109

Conclusion **110**

Ce chapitre présente une étude de la robustesse de manipulateurs $3R$. L'un des objectifs est de répondre à la question suivante : les manipulateurs génériques sont-ils plus robustes que leurs homologues non-génériques ? Pour cela, nous exploitons plusieurs propriétés des manipulateurs $3R$ pour identifier des corrélations entre les notions de généricité et de robustesse. Nous montrons par exemple qu'un manipulateur $3R$ non-générique n'est pas robuste vis-à-vis de sa classe d'homotopie, ce qui peut être particulièrement gênant pour la génération de trajectoires continues. Par ailleurs, nous verrons que la généricité ou la non-généricité d'un manipulateur n'ont pas d'influence sur sa précision et sa dextérité.

Introduction

Les fonctions performances d'un manipulateur peuvent être multiples. En effet, sa dextérité, sa précision, la forme et la taille ainsi que la parcourabilité de son espace de travail sont des exemples de critères de performance pouvant être pris en compte lors de sa phase de conception, (Dombre, 2001). De plus, nous avons vu précédemment qu'il est important d'assurer leur robustesse vis-à-vis des variations des variables et des paramètres de conception. L'indice de robustesse RI_2, norme euclidienne de la matrice jacobienne de sensibilité du mécanisme, peut ainsi être utilisé pour quantifier localement la robustesse de ces différents critères de performance.

Dans ce chapitre, nous étudions la robustesse de manipulateurs $3R$, manipulateurs d'architecture sérielle à trois degrés de liberté et composés de trois articulations rotoïdes motorisées. En limitant notre étude à ce type de manipulateurs, nous cherchons entre autres à obtenir des éléments de réponse à la question suivante : les manipulateurs génériques sont-ils plus robustes que les manipulateurs non-génériques ?

Cette question prend toute son importance lorsqu'on sait que de nombreux robots industriels sont nominalement non-génériques. La non-généricité d'un manipulateur est généralement due à des simplifications de ses paramètres géométriques. L'intersection des surfaces de singularités des manipulateurs $3R$ et l'incertitude de certaines de leurs propriétés font partie de leurs particularités. Nous pourrions donc être tentés d'affirmer, comme d'autres l'ont déjà fait par le passé (Pai, 1992), (Burdick, 1995b), (El Omri, 1996) que les manipulateurs non-génériques sont moins robustes que leurs homologues génériques. D'un autre côté, en considérant que la robustesse de la conception d'un mécanisme augmente lorsque sa complexité diminue, nous pourrions penser que la conception d'un manipulateur non-générique est plus robuste que celle d'un manipulateur générique. En effet, la conception d'un manipulateur non-générique est généralement plus simple que celle d'un manipulateur générique puisque la non-généricité est habituellement due à l'annulation de certains paramètres géométriques. Les interrogations précédentes confortent ainsi l'intérêt d'une étude détaillée de la robustesse de manipulateurs $3R$.

Dans un premier temps, des notions propres aux manipulateurs $3R$ et nécessaires à la compréhension de notre étude sont résumées, telles que les notions de singularité, d'aspect, de cuspidalité, de classes d'homotopie, et de généricité. Ensuite, nous allons comparer la robustesse des manipulateurs génériques et non-génériques vis-à-vis de la parcourabilité de trajectoires et de la précision. Enfin, nous allons voir si la dextérité d'un manipulateur dépend de sa généricité ou de sa non-généricité.

4.1 Propriétés des manipulateurs 3R

Après avoir défini le paramétrage des manipulateurs $3R$ étudiés, nous résumons des notions propres aux manipulateurs et nécessaires à la compréhension de l'étude de leur robustesse menée dans ce chapitre.

4.1.1 Paramétrage

Le manipulateur $3R$ étudié est paramétré à l'aide du paramétrage de Denavit-Hartenberg-Modifié (Khalil et Dombre, 2002). d_2, d_3, d_4, r_2, r_3, α_2, et α_3, sont ainsi les paramètres géométriques du manipulateur $3R$ et sont décrits par la figure 4.1 représentant un manipulateur $3R$ orthogonal ($\alpha_2 = -90°$ et $\alpha_3 = 90°$). θ_1, θ_2 et θ_3 sont les variables angulaires du manipulateur. Les robots industriels d'architecture sérielle ont généralement une structure formée d'un porteur, d'architecture de type manipulateur $3R$, et d'un poignet à trois articulations rotoïdes d'axes concourants. Le porteur du robot de type PUMA, représenté par la figure 4.2, est un exemple de manipulateur $3R$. Les valeurs de ses paramètres géométriques sont égales à $d_2 = 0$, $r_2 = r_3$, $\alpha_2 = 90°$ et $\alpha_3 = 180°$ et sont cinématiquement équivalentes à $d_2 = 0$, $r_2 = 0$, $r_3 = 0$, $\alpha_2 = 90°$ et $\alpha_3 = 180°$.

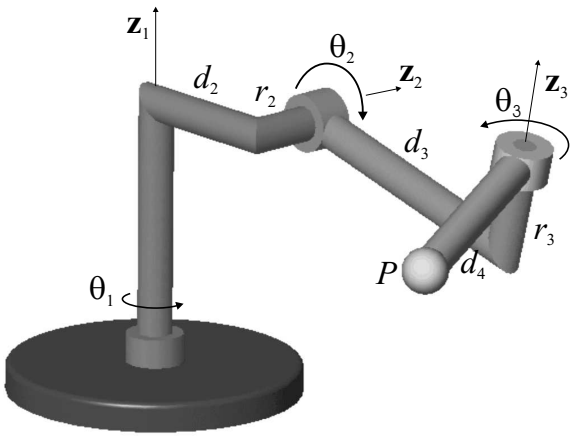


figure 4.1 – *Manipulateur $3R$ orthogonal*

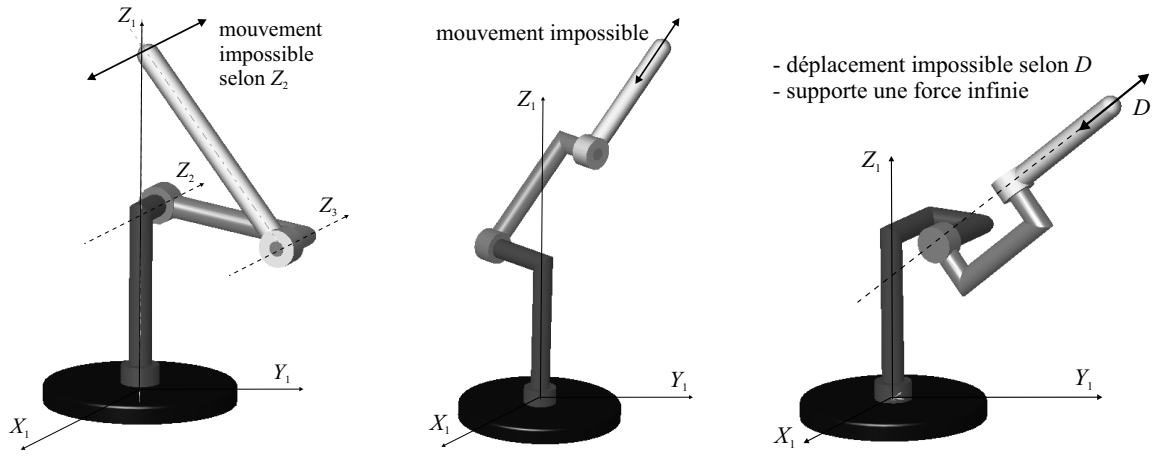
figure 4.2 – *Robot industriel de type PUMA*

4.1.2 Singularités de position d'un manipulateur $3R$

Les singularités de position d'un manipulateur à trois degrés de liberté (ddl) apparaissent lorsque sa matrice jacobienne cinématique $\mathbf{J}$ est singulière. Trois types de singularités

existent ainsi pour les manipulateurs à 3 ddl, (El Omri, 1996) :

1. Singularités de type 1 : l'une des colonnes de **J** est nulle. Physiquement, ce cas se présente lorsque l'effecteur se trouve sur l'axe d'une l'articulation rotoïde. La contribution de cette articulation au mouvement est ainsi nulle (cf. figure 4.3(a)) ;
2. Singularités de type 2 : deux colonnes de **J** sont dépendantes. Dans ce cas, les contributions de deux articulations au mouvement de l'effecteur sont identiques (cf. figure 4.3(b)) ;
3. Singularités de type 3 : les colonnes de J forment un système dépendant. Un manipulateur $3R$ se trouve dans une configuration singulière de type 3 lorsque son effecteur est sur une droite qui coupe tous les axes des articulations rotoïdes. La ligne qui croise ainsi tous les axes représente une direction dans laquelle le déplacement instantané de l'effecteur est impossible et peut supporter en théorie un effort infini (cf. figure 4.3(c)).



(a) *type 1* (b) *type 2* (c) *type 3*

figure 4.3 – *Singularités d'un manipulateur* $3R$

Les singularités projetées dans l'espace de travail forment des surfaces ((Tsai, 1990), (Burdick, 1995a)) et les propriétés cinématiques globales du manipulateur sont intimement liées à leur topologie. Par ailleurs, elles divisent l'espace de travail en régions ayant différentes solutions au modèle géométrique inverse et l'ensemble articulaire en deux domaines au moins exempts de singularité, appelés aspects (Borrel et Liegeois, 1986), (Wenger et Chedmail, 1991), (Ranjbaran et Angeles, 1994).

4.1.3 La notion d'aspect

Les aspects réalisent une partition du domaine articulaire accessible Q. Pour les robots non redondants de morphologie non cuspidale, qui regroupent la plupart des robots d'usage

industriel, les aspects sont les plus grands domaines connexes de Q ne possédant pas de configurations singulières. Ce sont ainsi les domaines d'unicité de solutions au modèle géométrique inverse (MGI) et chaque aspect est associé à une posture du manipulateur. Néanmoins, il peut exister plusieurs solutions dans un même aspect pour les morphologies dites cuspidales, (El Omri, 1996).

L'application majeure de la notion d'aspect est l'étude de la faisabilité des trajectoires continues. En effet, Borrel montre que la décomposition en aspects permet de prévoir les blocages des articulations sur une butée articulaire en cours de mouvement, (Borrel et Liegeois, 1986). Ce qui peut être évité par un choix judicieux de la posture initiale sur la trajectoire continue.

4.1.4 La notion de parcourabilité

La tâche la plus simple qu'un manipulateur peut être amené à réaliser est une trajectoire discrète, c'est à dire une trajectoire définie par un nombre quelconque de configurations de l'espace de travail. Ainsi, un domaine de l'espace de travail est dit N-parcourable si toute trajectoire discrète de ce domaine est faisable.

Une tâche plus complexe que nous pouvons exiger d'un manipulateur est la réalisation d'une trajectoire continue, c'est à dire une trajectoire que l'effecteur doit suivre de manière continue comme un cordon de soudage à l'arc. Ainsi, un domaine de l'espace de travail est dit T-parcourable si toute trajectoire continue de ce domaine est faisable (Chedmail *et al.*, 1998), i.e. le manipulateur peut parcourir le domaine sans rencontrer de configuration singulière et sans être gêné par ses butées articulaires.

4.1.5 Manipulateurs cuspidaux

Un manipulateur cuspidal est un manipulateur pouvant changer de posture sans franchir de singularité (Parenti et Innocenti, 1988), (Wenger et El Omri, 1995). Il admet donc plusieurs solutions au MGI dans au moins un aspect.

Un manipulateur à trois degrés de liberté peut changer de posture sans rencontrer de singularité si et seulement si il y a au moins un point de son espace de travail possédant trois solutions coïncidentes au MGI. Un tel point est appelé point *cusp* et est situé sur la frontière délimitant une zone à quatre solutions au MGI, (Wenger et El Omri, 1996).

La figure 4.4 représente l'espace articulaire et une coupe de l'espace de travail d'un manipulateur $3R$ cuspidal. La coupe de l'espace de travail présente quatre points cusps, une zone à deux solutions au MGI (i.e. deux postures) et une autre à quatre solutions (i.e. quatre postures). La condition d'existence de point(s) cusp(s) peut être vérifiée soit graphiquement, soit numériquement, mais ne peut généralement pas être écrite sous forme explicite. Baili *et al.* (2004) ont cependant écrit une condition explicite d'existence de

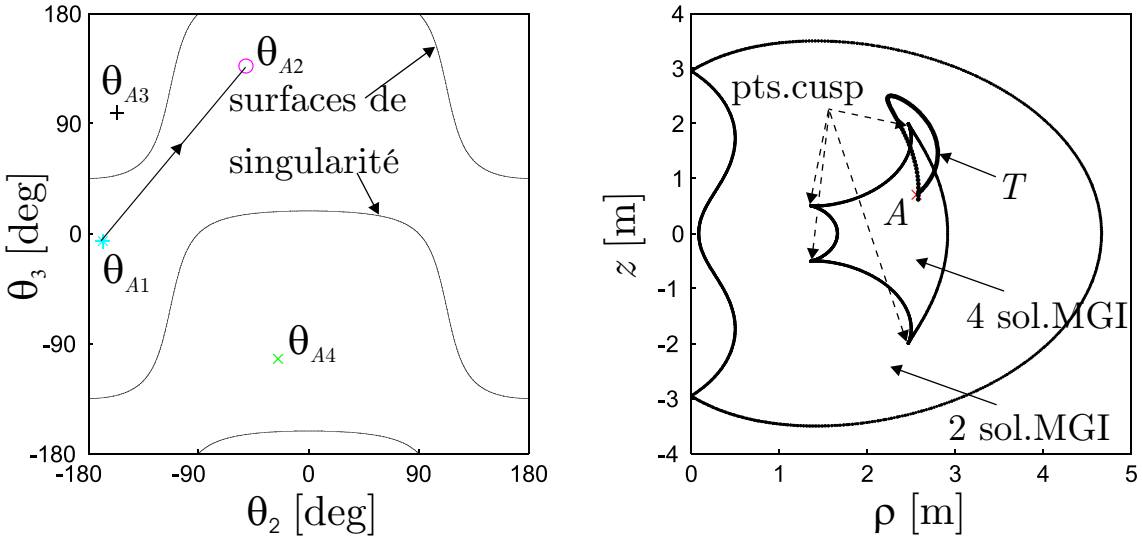


figure 4.4 – *Manipulateur cuspidal, trajectoire T parcourue sans franchissement de singularité*

points cusps, ne dépendant que des paramètres de Dénavit-Hartenberg Modifiés (DHM), pour une famille de manipulateurs $3R$ à axes orthogonaux.

Par ailleurs, la trajectoire T peut être parcourue par l'effecteur du manipulateur sans franchir de singularité puisqu'une de ses images dans l'espace articulaire est le segment $[\theta_{A1}\ \theta_{A2}]$ ne franchissant pas de surface de singularités. Les vecteurs de coordonnées articulaires $\boldsymbol{\theta}_{A1}$, $\boldsymbol{\theta}_{A2}$, $\boldsymbol{\theta}_{A3}$, et $\boldsymbol{\theta}_{A4}$ sont les quatre solutions au MGI du point A, et correspondent aux quatre postures du manipulateur permettant à son effecteur d'atteindre le point A. Par conséquent, le manipulateur change de posture sans franchir de singularité en parcourant la trajectoire T. Nous pouvons aussi remarquer que la trajectoire T contourne un point cusp. Cette condition est effectivement nécessaire pour permettre à un manipulateur $3R$ de changer de posture sans franchir de singularité en parcourant une trajectoire continue, (Wenger et El Omri, 1996).

4.1.6 Manipulateurs génériques et non-génériques

L'un des objectifs de ce chapitre est de comparer la robustesse des manipulateurs génériques et des manipulateurs non-génériques. Il est cependant nécessaire de définir dans un premier temps ces deux types de manipulateur.

Pai (1992) démontre qu'un manipulateur à trois degrés de liberté non redondant est générique s'il respecte les deux conditions de généricité suivantes :

- Condition de généricité 1 : la matrice jacobienne cinématique $\mathbf{J}$ est de rang 2 en toute configuration singulière ;
- Condition de généricité 2 : toutes les configurations singulières $\left(\mathbf{q}^{(s)}\right)$ satisfont la condition suivante :

$$\frac{\partial[\det\left(\mathbf{J}\left(\mathbf{q}^{(s)}\right)\right)]}{\partial q_i} \neq 0 \text{ pour au moins } i = 2 \text{ ou } 3 \tag{4.1}$$

Pour les manipulateurs à trois degrés de liberté non redondants, la généricité implique que l'ensemble des points singuliers est nul ou une (ou plusieurs) surface(s) uniforme(s) et régulière(s). En pratique, les singularités génériques sont des surfaces régulières qui ne rencontrent pas d'autres surfaces de singularités. Ce sont les plus répandues et leurs propriétés topologiques sont stables pour de petites variations des paramètres géométriques, (Pai, 1992). En outre, la stabilité des propriétés cinématiques globales, en présence de faibles variations des paramètres cinématiques, est l'une des principales caractéristiques des manipulateurs génériques.

Les manipulateurs $3R$ non-génériques vérifient quant à eux les conditions suivantes :

- Condition de non-généricité 1 : il existe des singularités de rang 1 ;
- Condition de non-généricité 2 : la relation suivante est satisfaite en au moins une configuration singulière $\left(\mathbf{q}^{(s)}\right)$ $\left(\det\left(\mathbf{J}\left(\mathbf{q}^{(s)}\right)\right) = 0\right)$:

$$\frac{\partial[\det\left(\mathbf{J}\left(\mathbf{q}^{(s)}\right)\right)]}{\partial q_i} = 0 \text{ pour } i = 2{,}3 \tag{4.2}$$

Il s'avère que la non-généricité d'un manipulateur est souvent due à des simplifications de sa géométrie, telles que l'intersection ou le parallélisme d'axes d'articulations rotoïdes. En outre, de nombreux robots manipulateurs industriels sont non-génériques, (Smith, 1990), (Pai, 1992), (Burdick, 1995a).

Nous pouvons citer le mécanisme de Bennett représenté par la figure comme exemple de mécanisme non-générique. En effet, ce manipulateur est bien connu pour avoir un degré de liberté lorsque certaines conditions entre ses paramètres géométriques sont vérifiées ($r_2 = 0$ et $d_3\left(\sin(\alpha_2)\right)^2 = d_2\left(\sin(\alpha_3)\right)^2$), (Baker, 1988). Cependant, il ne peut pas bouger lorsque ses paramètres ne vérifient pas cette condition. Le robot de type PUMA représenté par la figure 4.6(a) est un exemple de robot non-générique. Les points d'intersection de ses surfaces de singularités, représentées dans l'espace articulaire, sont des points singuliers non génériques (i.e. la condition (4.2) est vérifiée en ces points). Plus précisément, le déterminant de la matrice jacobienne cinématique est nul et le Hessien de l'opérateur géométrique du manipulateur est de signe indéfini en ces points. Les manipulateurs non-génériques constituent un sous-ensemble de mesure nulle dans l'espace des manipulateurs. Ainsi, en choisissant au hasard un jeu de paramètres géométriques, la probabilité d'obtenir une morphologie non-générique est nulle. Contrairement aux manipulateurs génériques, les propriétés topologiques des espaces articulaires et de travail, ainsi que les propriétés cinématiques des manipulateurs non-génériques sont sensibles à certaines variations de leurs paramètres géométriques et cinématiques. C'est ainsi l'une des raisons qui nous

■

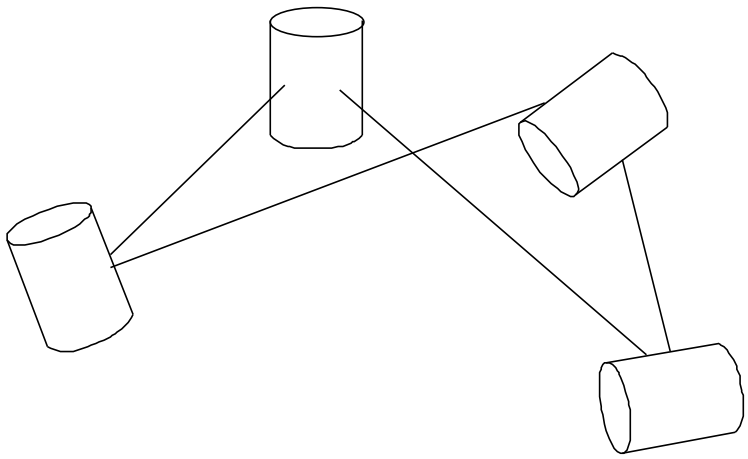
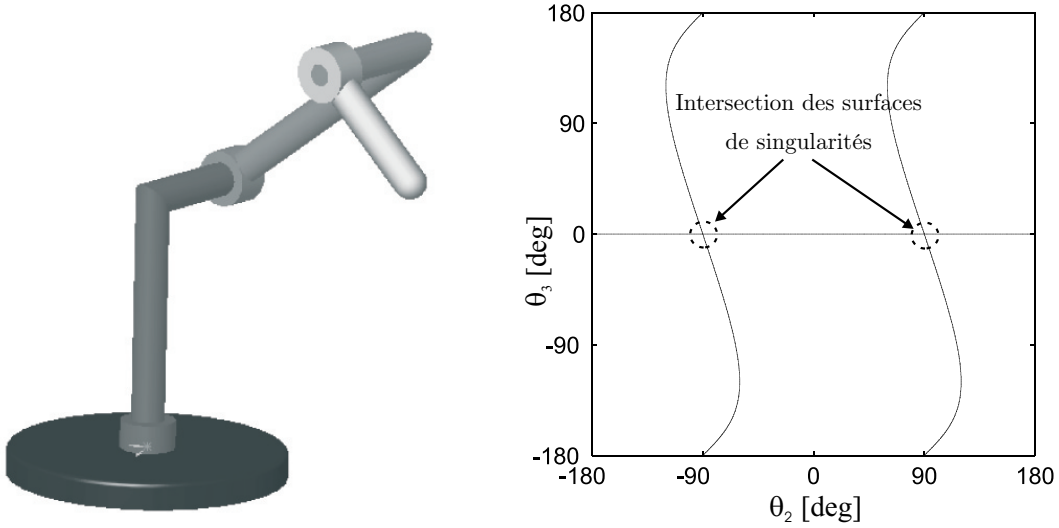


figure 4.5 – *Mécanisme de Bennett*



(a) *schéma manipulateur* (b) *espace articulaire*

figure 4.6 – *Manipulateur de type PUMA non générique ($d_2 = 0$, $r_2 = 0$, $r_3 = 0$, $\alpha_2 = 90°$, et $\alpha_3 = 0°$*

laissent penser que les manipulateurs génériques sont plus robustes que les manipulateurs non-génériques.

Une dernière notion propre aux manipulateurs $3R$ est la notion de classes d'homotopie. Les classes d'homotopie permettent entre autres de distinguer les différentes classes de manipulateurs génériques, (Wenger, 1998).

4.1.7 Classes d'homotopie

Deux manipulateurs génériques M_1 et M_2 sont dits homotopes si les surfaces de singularités de M_1 peuvent être déformées continûment et régulièrement jusqu'aux surfaces de singularités de M_2, (Burdick, 1995a).

Tous les manipulateurs homotopes appartiennent à une même classe d'homotopie. Une classe d'homotopie est caractérisée par une suite de couples $n(n_2,n_3)_b$ où :

- n est le nombre de branches de singularité générique ;
- n_2 est le nombre de fois qu'une branche de singularité générique entoure le domaine articulaire Q suivant θ_2 lors d'un parcours de la branche b ;
- n_3 est le nombre de fois qu'une branche de singularité générique entoure le domaine articulaire Q suivant θ_3 lors d'un parcours de la branche b.

Les figures 4.7, 4.8, et 4.9 représentent un manipulateur non générique et deux manipulateurs génériques voisins de ce manipulateur, respectivement. Seules les valeurs de la dimension r_3 et de l'angle α_2 changent d'un manipulateur à l'autre.

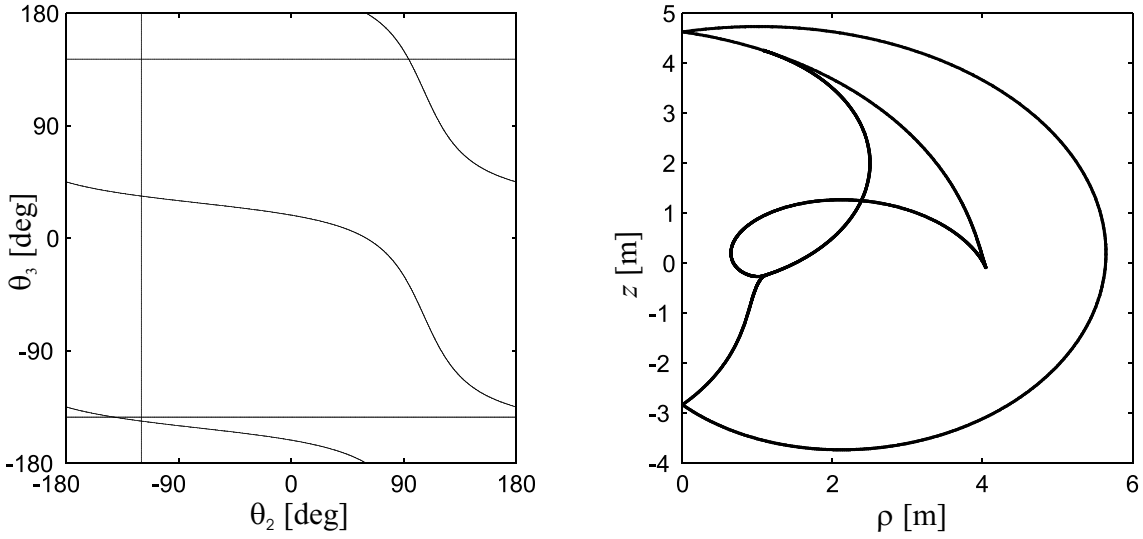


figure 4.7 – *Manipulateur non générique,* $d_2 = 1$*;* $d_3 = 2$*;* $d_4 = 2{,}5$*;* $r_2 = 1$*;* $\mathbf{r_3 = 0}$*;* $\alpha_2 = -60°$*;* $\alpha_3 = 90°$

La classe d'homotopie du manipulateur dont les espaces articulaires et de travail sont représentés par la figure 4.8 est de type 2(1,1) puisque les branches de singularités génériques entourent chacune le domaine articulaire suivant θ_2 et suivant θ_3. En revanche, la classe d'homotopie du manipulateur caractérisé par la figure 4.9 est de type 1(0,0) puisque l'espace articulaire ne comprend qu'une seule branche de singularités et elle ne l'entoure ni suivant l'angle θ_2 ni suivant l'angle θ_3.

Nous pouvons ainsi constater qu'en présence de faibles variations dimensionnelles, le manipulateur non-générique dégénère en un manipulateur générique de classe d'homotopie 2(1,1) ou de classe d'homotopie 1(0,0). Sachant que la classe d'homotopie d'un manipulateur conditionne la topologie de ses surfaces de singularités, cette propriété est instable pour le manipulateur non-générique. Ce constat est évidemment valable pour tous les manipulateurs non-génériques et pour les manipulateurs voisins de ces manipulateurs

■

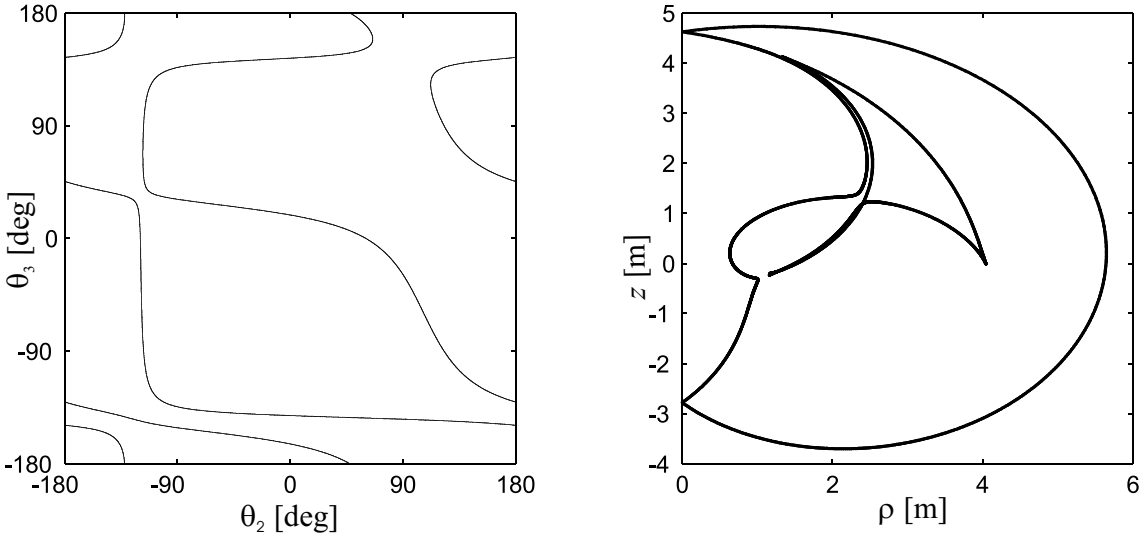


figure 4.8 – *Manipulateur générique,* $d_2 = 1$*;* $d_3 = 2$*;* $d_4 = 2{,}5$*;* $r_2 = 1$*;* $\mathbf{r_3 = 0{,}01}$*;* $\boldsymbol{\alpha_2 = -59°}$*;* $\alpha_3 = 90°$*,* ***classe 2(1,1)***

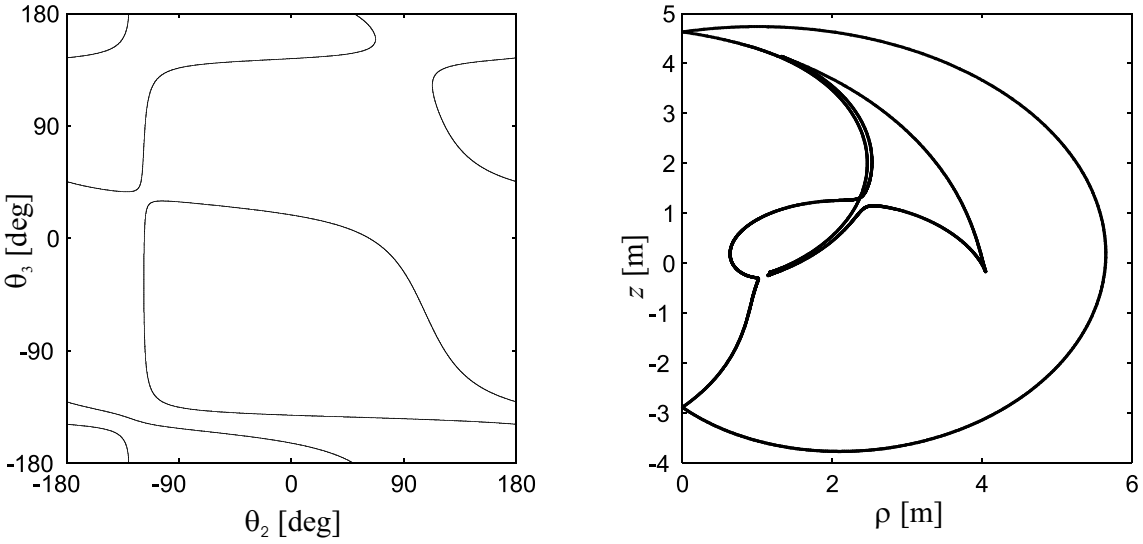


figure 4.9 – *Manipulateur générique,* $d_2 = 1$*;* $d_3 = 2$*;* $d_4 = 2{,}5$*;* $r_2 = 1$*;* $\mathbf{r_3 = 0{,}01}$*;* $\boldsymbol{\alpha_2 = -61°}$*;* $\alpha_3 = 90°$*,* ***classe 1(0,0)***

par leurs dimensions. En définitive, il est donc légitime d'affirmer que, vis-à-vis de sa classe d'homotopie et de la topologie de ses surfaces de singularités, un manipulateur non-générique n'est pas robuste.

L'espace des manipulateurs de position $3R$ quaternaires (ayant quatre solutions au modèle géométrique inverse) est divisé par l'ensemble des manipulateurs non-génériques, formant des sous-ensembles de manipulateurs génériques homotopes, comme le représente la figure 4.10. Chaque sous-ensemble est ainsi caractérisé par une classe d'homotopie et il en existe au plus huit puisque les manipulateurs $3R$ quaternaires comptent au plus huit classes d'homotopie, (Wenger, 1998).

Enfin, Burdick (1995a) a montré que le nombre de solutions au MGI de deux manipula-

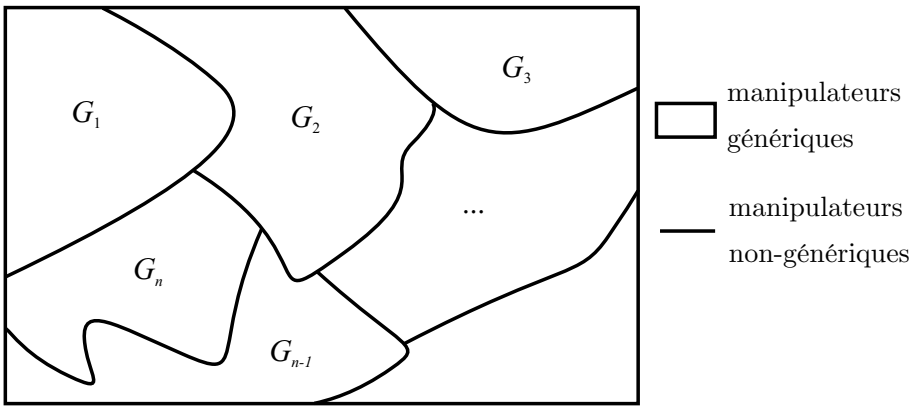


figure 4.10 – *Zones de manipulateurs génériques et de manipulateurs non-génériques dans l'espace des paramètres géométriques*

teurs appartenant à la même classe d'homotopie est le même par aspect. Il en découle que si un manipulateur M est cuspidal (resp. non-cuspidal), tous les manipulateurs homotopes à M sont cuspidaux (non-cuspidaux). Ainsi, un manipulateur nominalement cuspidal changeant de classe de d'homotopie pour de faibles variations de ses paramètres géométriques peut ne pas être réellement cuspidal. Cette propriété est importante puisqu'un changement de posture réalisable avec un manipulateur cuspidal ne le sera pas nécessairement avec un manipulateur non-cuspidal. Nous pouvons donc affirmer cette fois que, vis-à-vis de la classe d'homotopie, un manipulateur non-générique n'est pas robuste.

Nous venons de voir qu'un manipulateur non-générique n'est pas robuste vis-à-vis de la classe d'homotopie, de la topologie de ses surfaces de singularités et de son aptitude à éviter une singularité lors d'un changement de posture. Cependant, cela ne suffit pas pour affirmer que les manipulateurs génériques sont globalement plus robustes que les manipulateurs non-génériques. Nous comparons ainsi dans la partie suivante leur robustesse vis-à-vis de la T-parcourabilité, de la précision et leurs performances cinématiques.

4.2 Robustesse des manipulateurs génériques et non-génériques

A notre connaissance, il n'existe pas dans la littérature d'étude approfondie sur la robustesse des manipulateurs génériques et non-génériques. D'après leurs caractéristiques générales présentées précédemment, les manipulateurs génériques semblent plus robustes que leurs homologues non-génériques puisque leurs propriétés sont généralement plus stables. Cependant, est-ce suffisant pour affirmer que les manipulateurs génériques sont globalement plus robustes que les manipulateurs non-génériques ?

Sachant que la génération de trajectoires est une application courante en robotique, nous allons nous pencher dans un premier temps sur l'étude de la robustesse des manipulateurs

$3R$ vis-à-vis de la T-parcourabilité. Nous ferons ainsi une étude comparative de quelques couples de manipulateurs génériques et non-génériques. Un autre critère de sélection important en robotique est bien évidemment la précision des robots. Dans un second temps, nous allons donc étudier sensibilité de la position de l'effecteur des manipulateurs génériques et non-génériques aux variations de leurs paramètres géométriques.

4.2.1 Robustesse vis-à-vis de la T-parcourabilité d'une trajectoire

Au même titre que ses autres performances, les trajectoires parcourues par l'effecteur d'un manipulateur sont sensibles aux variations de ses paramètres géométriques. Nous définissons ainsi la robustesse d'un manipulateur vis-à-vis de la T-parcourabilité comme suit :

> Un manipulateur est robuste vis-à-vis de la T-parcourabilité si toute trajectoire parcourable avec les paramètres géométriques nominaux du manipulateur reste parcourable avec ses paramétres géométriques réels, c'est-à-dire en présence de variations dimensionnelles.

Dans cette partie, nous comparons deux couples de manipulateurs génériques et non-génériques pour illustrer l'influence de la généricité et de la non-généricité des manipulateurs sur la robustesse de la parcourabilité de trajectoires.

4.2.1.1 Premier exemple de non robustesse vis-à-vis de la T-parcourabilité

Considérons le manipulateur $3R$ dont les valeurs nominales des paramètres géométriques sont les suivantes : $\mathbf{d_2} = \mathbf{0}$, $d_3 = 2$, $d_4 = 1{,}5$, $r_2 = 1$, $r_3 = 0$, $\alpha_2 = -90°$, $\alpha_3 = 90°$. Les espaces articulaires et de travail sont représentés par la figure 4.11. Nous pouvons remarquer que ce manipulateur est nominalement non-générique puisque ses surfaces de singularités se croisent dans l'espace articulaire. La fonction du manipulateur est ici de parcourir la trajectoire AB définie dans l'espace de travail. Les points A et B ont pour coordonnées (0,76;0) et (3,7;0), respectivement. Comme nous pouvons le visualiser sur la figure 4.11, le manipulateur comprend quatre aspects nommés A_1, A_2, A_3 et A_4, i.e. quatre régions de l'espace articulaire libres de singularité. Les trajectoires T_1, T_2, T_3 et T_4 sont les images de la trajectoire AB dans les quatre aspects du manipulateur, respectivement, et obtenues en résolvant son MGI.

Les figures 4.12, 4.13, 4.14, 4.15 représentent les images des quatre aspects dans l'espace de travail, et correspondent aux régions de l'espace de travail T-parcourables. L'espace de travail du manipulateur est réellement représenté par le plan horizontal de ces figures, défini par les coordonnées r et z de l'effecteur $\left(\rho = \sqrt{x^2 + y^2}\right)$. L'axe vertical correspond quant à lui au cosinus de l'angle θ_2 et permet de bien distinguer les régions T-parcourables de l'espace de travail, notamment pour les robots cuspidaux, (Wenger, 2004).

■

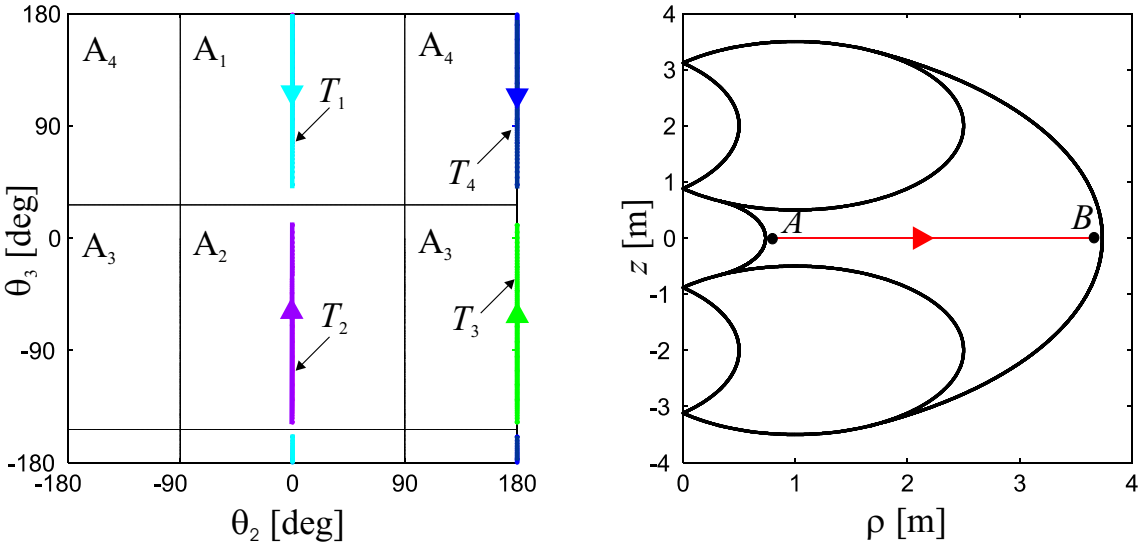


figure 4.11 – *Espaces articulaire et de travail du manipulateur de dimensions* $d_2 = 0$, $d_3 = 2$, $d_4 = 1{,}5$, $r_2 = 1$, $r_3 = 0$, $\alpha_2 = -90°$, $\alpha_3 = 90°$, *trajectoire AB parcourable*

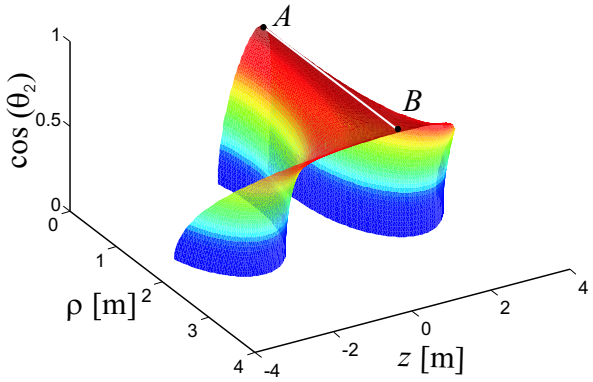


figure 4.12 – *Image de l'aspect* A_1

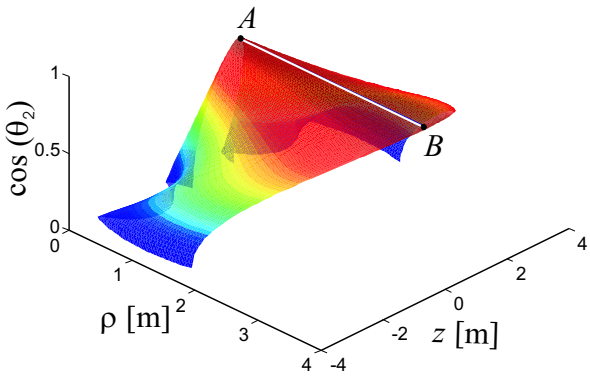


figure 4.13 – *Image de l'aspect* A_2

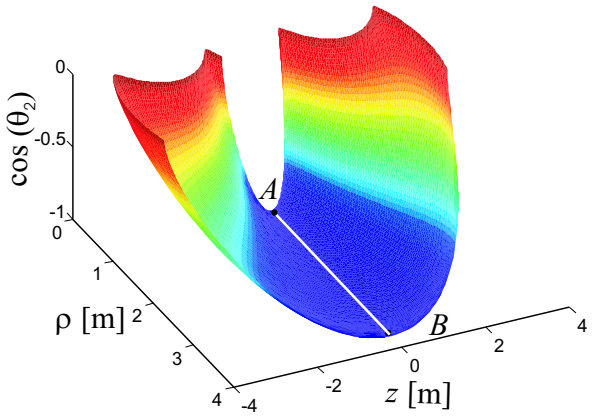


figure 4.14 – *Image de l'aspect* A_3

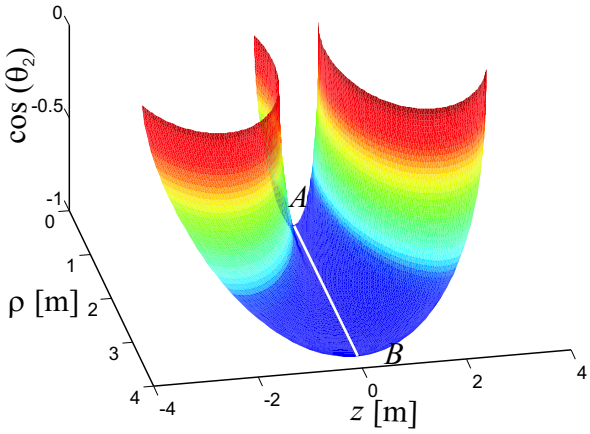


figure 4.15 – *Image de l'aspect* A_4

Nous pouvons remarquer que la trajectoire AB est comprise dans les images des quatre

aspects du manipulateur. Il en résulte qu'elle est T-parcourable par ce manipulateur non-générique, et ceci pour n'importe quel choix de la posture, i.e. peu importe le choix de la solution au MGI. Cependant, la trajectoire AB reste-t-elle parcourable lorsque les valeurs réelles des paramètres géométriques du manipulateur ne sont pas égales aux valeurs nominales ? Pour répondre à cette question, nous faisons varier un paramètre géométrique en considérant que d_2 n'est pas nul mais égal à 0,1.

La figure 4.16 représente ainsi les espaces articulaire et de travail du manipulateur de dimensions $\mathbf{d_2 = 0{,}1}$, $d_3 = 2$, $d_4 = 1{,}5$, $r_2 = 1$, $r_3 = 0$, $\alpha_2 = -90°$, $\alpha_3 = 90°$. Contrairement au manipulateur précédent, nous pouvons remarquer que ce manipulateur est générique puisque ses surfaces de singularités ne se croisent pas.

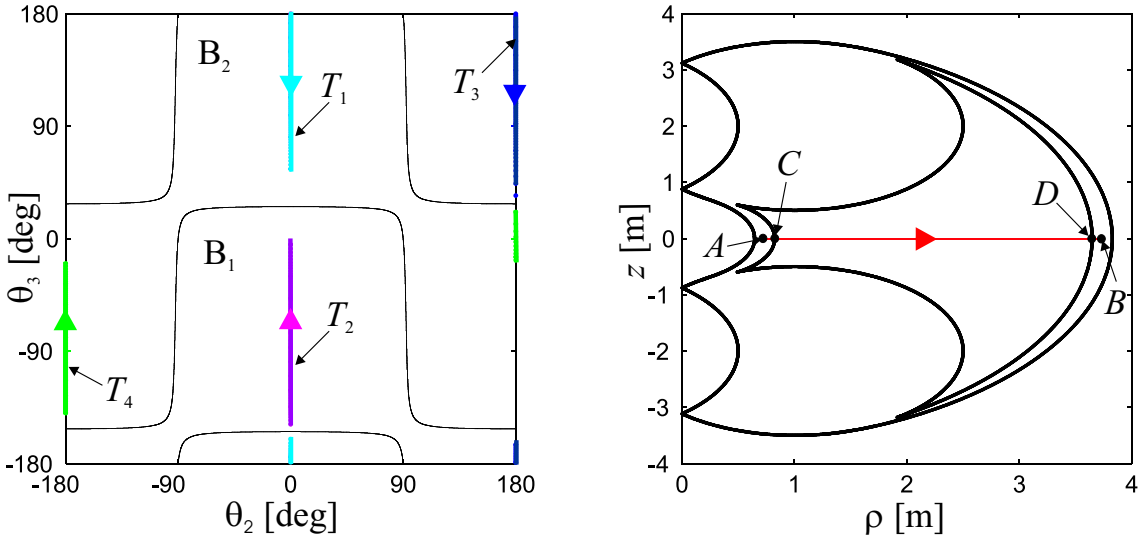


figure 4.16 – *Espaces articulaire et de travail du manipulateur de dimensions* $d_2 = 0{,}1$, $d_3 = 2$, $d_4 = 1{,}5$, $r_2 = 1$, $r_3 = 0$, $\alpha_2 = -90°$, $\alpha_3 = 90°$, *trajectoire* AB *non-parcourable*

En outre, il est cuspidal (présence de quatre points cusps) et ne comprend que deux aspects nommés B_1 et B_2, dont les images dans l'espace de travail sont représentées par les figures 4.17 et 4.18.

Ces images représentent les régions T-parcourables du manipulateur. Nous pouvons remarquer que la trajectoire AB n'est incluse dans aucune de ces deux régions. En définitive, la trajectoire AB n'est pas parcourable par ce manipulateur générique voisin du manipulateur non-générique étudié précédemment.

Notons que des portions significatives de la trajectoire AB restent cependant parcourables par ce manipulateur générique. En effet, les images des trajectoires T_1, T_2, T_3 et T_4 définies dans l'espace articulaire sont respectivement les portions CB, CB, AD et AD de la trajectoire AB, les points C et D étant représentés sur la figure 4.16.

En conclusion, la parcourabilité de la trajectoire AB est fortement sensible à la variation du paramètre géométrique d_2. En effet, elle est parcourable lorsque $d_2 = 0$ et ne l'est plus

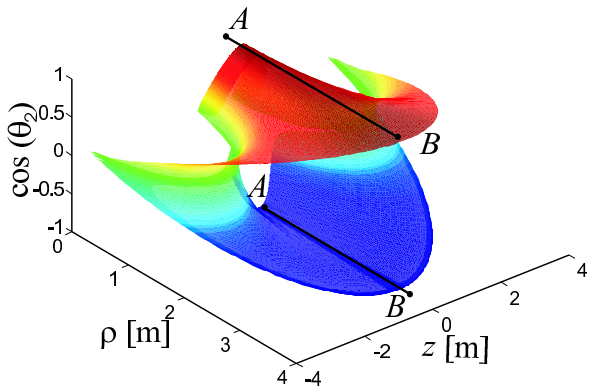


figure 4.17 – *Image de l'aspect B_1*

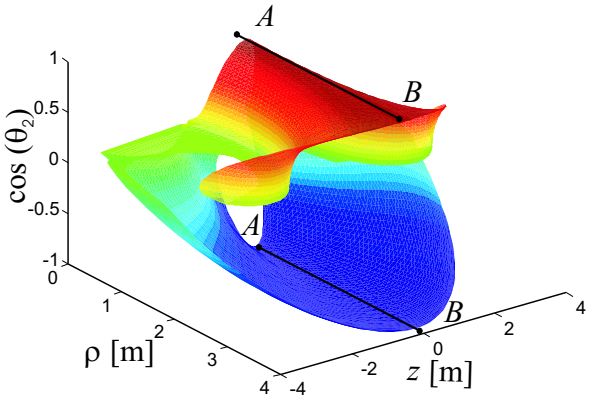


figure 4.18 – *Image de l'aspect B_2*

lorsque $d_2 = 0{,}1$. Le manipulateur non-générique étudié n'est donc pas robuste vis-à-vis de la T-parcourabilité.

4.2.1.2 Deuxième exemple de non robustesse vis-à-vis de la T-parcourabilité

Considérons le manipulateur de dimensions $d_2 = 1$, $d_3 = 0{,}6$, $d_4 = 2$, $r_2 = 1$, $r_3 = 0{,}1$, $\alpha_2 = -90°$ et $\alpha_3 = 90°$. Ses espaces articulaire et de travail sont représentés par la figure 4.19. Le suivi de la trajectoire T_a dans l'espace articulaire permet de parcourir la trajectoire T dans l'espace de travail en partant du point B pour revenir au même point tout en changeant de posture. En effet, les points A_1 et A_2 de l'espace articulaire correspondent à deux postures différentes du manipulateur et leur image dans l'espace de travail calculée à l'aide du MGD du manipulateur est le point B.

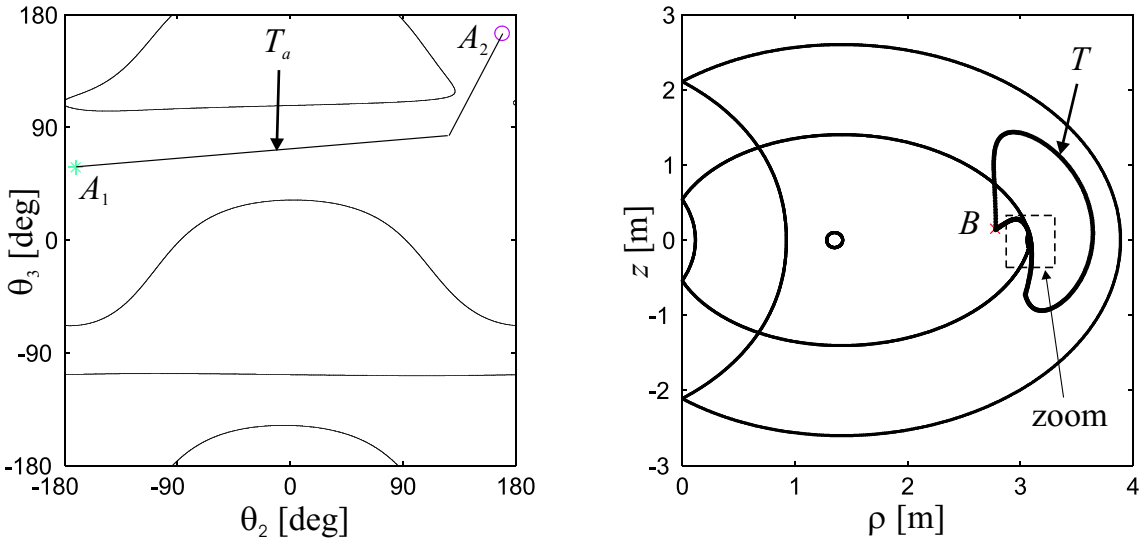


figure 4.19 – *Espaces articulaire et de travail du manipulateur de dimensions $d_2 = 1$, $d_3 = 0{,}6$, $d_4 = 2$, $r_2 = 1$, $\mathbf{r_3 = 0{,}1}$, $\alpha_2 = -90°$ et $\alpha_3 = 90°$, trajectoire T-parcourable*

Comme l'indique la section 4.1.5, seuls les manipulateurs cuspidaux peuvent changer de

posture sans franchir de singularité. La figure 4.20 montre effectivement que la trajectoire T contourne un point cusp et la figure 4.21 représente la région T-parcourable auquelle appartient la trajectoire T.

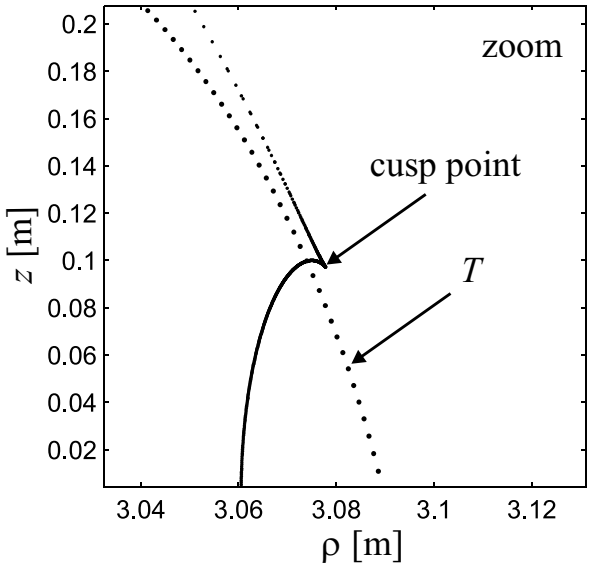


figure 4.20 – *Zoom sur la trajectoire T : contournement d'un point cusp*

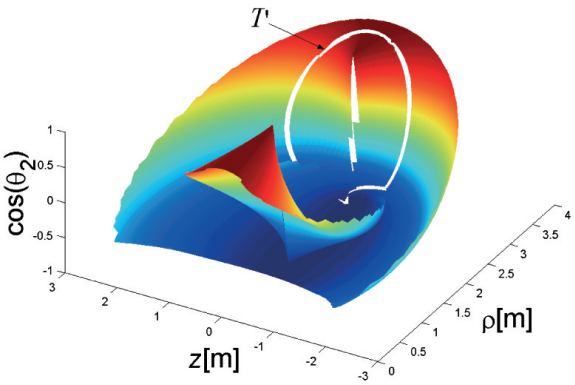


figure 4.21 – *Trajectoire T incluse dans une région T-parcourable*

Supposons maintenant que le paramètre r_3 soit légèrement perturbé et que sa valeur réelle soit nulle. Les espaces articulaire et de travail du manipulateur sont ainsi représentés par la figure 4.22.

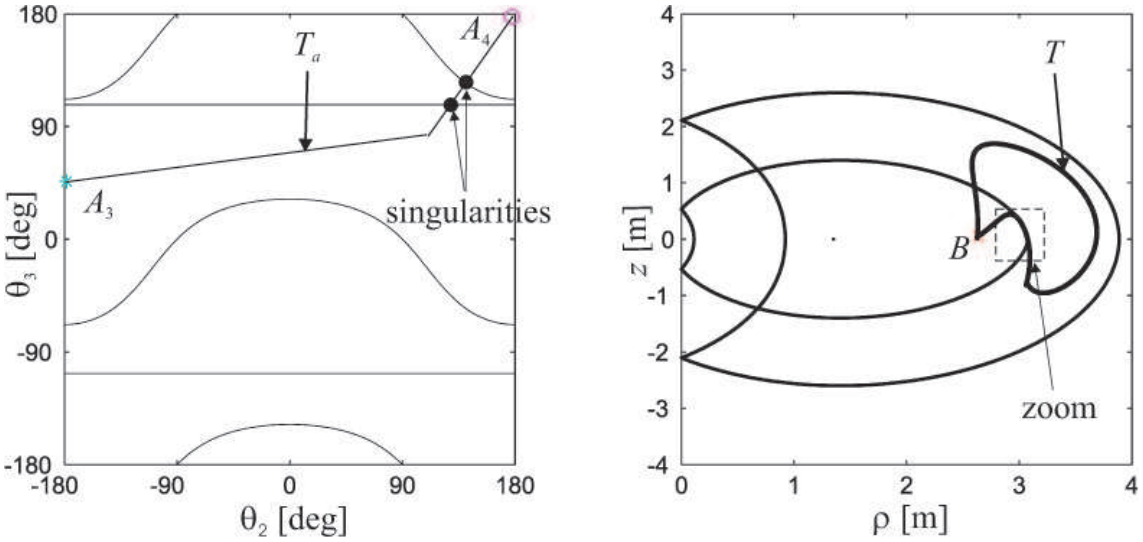


figure 4.22 – *Espaces articulaire et de travail du manipulateur de dimensions $d_2 = 1$, $d_3 = 0{,}6$, $d_4 = 2$, $r_2 = 1$, $\mathbf{r_3} = \mathbf{0}$, $\alpha_2 = -90°$ et $\alpha_3 = 90°$, trajectoire T non parcourable*

Dans ce cas, nous pouvons constater qu'un changement de posture du manipulateur n'est plus possible en parcourant continûment la trajectoire T et sans franchissement de singularité. En effet, l'image T_a de T dans l'espace articulaire croise des surfaces de singularités.

La figure 4.23 représente un zoom de la trajectoire T et montre ses intersections avec les surfaces de singularités.

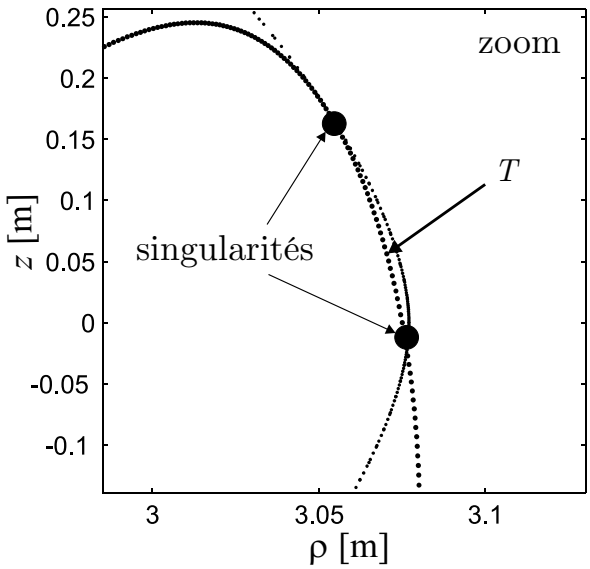


figure 4.23 – *Zoom sur la trajectoire T : pas de contournement de point cusp*

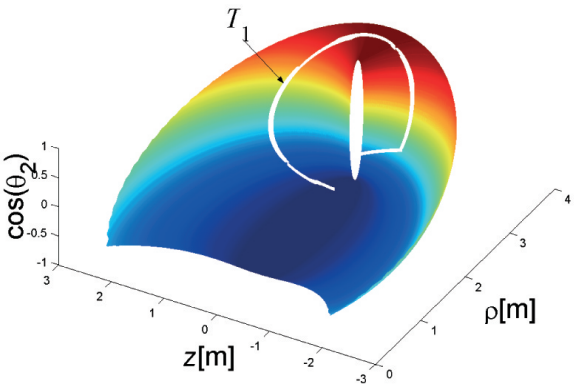


figure 4.24 – *Portion T_1 de la trajectoire T incluse dans la première région T-parcourable*

T est ainsi une union de trois trajectoires T-parcourables T_1, T_2 et T_3, qui sont représentées dans leur région parcourable respective par les figures 4.24, 4.25 et 4.26.

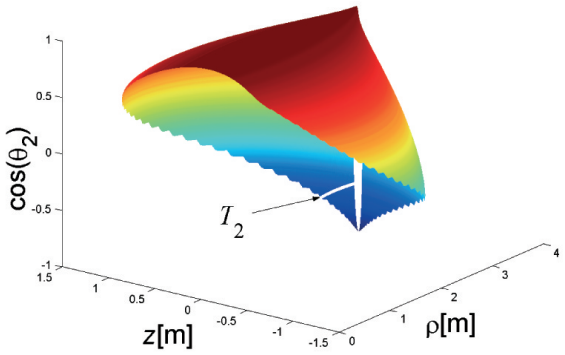


figure 4.25 – *Portion T_2 de la trajectoire T incluse dans la deuxième région T-parcourable*

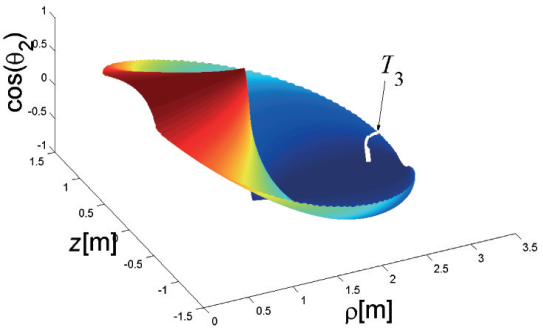


figure 4.26 – *Portion T_3 de la trajectoire T incluse dans la troisième région T-parcourable*

En outre, nous pouvons constater que les deux manipulateurs précédents n'appartiennent pas à la même classe d'homotopie. En effet, le premier manipulateur appartient à la classe d'homotopie 2(1,0)+1(0,0) alors que le deuxième appartient à la classe d'homotopie 4(1,0). En conséquence, une faible variation du paramètre géométrique r_3 de manipulateurs voisins de ces manipulateurs peut changer considérablement la topologie de leurs surfaces de

singularités. De même, le nombre de points cusps diffère puisque le premier manipulateur possède deux points cusps alors que le second n'est pas cuspidal.

Les classes d'homotopie des manipulateurs étant différentes, ils n'appartiennent pas au même ensemble de robots génériques. En réalité, ces deux manipulateurs se situent de part et d'autre d'une (hyper-) surface de robots non-génériques dans l'espace des dimensions du manipulateur (cf. figure 4.10). Ils sont donc voisins par leurs dimensions d'un manipulateur non-générique. En définitive, lors du dimensionnement d'un manipulateur $3R$, il est important de s'éloigner des surfaces de non-généricité de l'espace des paramètres afin de minimiser la sensibilité de la topologie des surfaces de singularités et du nombre de points cusps aux variations des paramètres géométriques, mais aussi pour minimiser la sensibilité de la T-parcourabilité des trajectoires.

4.2.2 Robustesse vis à vis de la précision de l'effecteur

Nous avons vu précédemment que les propriétés de manipulateurs non-génériques et génériques voisins dans l'espace des dimensions peuvent changer pour de faibles variations des paramètres géométriques. Cependant, la précision de ces manipulateurs est elle altérée pour autant ? Pour répondre à cette question, nous comparons dans cette partie la précision de manipulateurs génériques et non génériques voisins l'un de l'autre dans l'espace des dimensions.

Afin de simplifier l'étude, nous considérons que les tolérances des paramètres géométriques des manipulateurs sont connues et identiques d'un manipulateur à l'autre : $\Delta d_2 = \Delta d_3 = \Delta d_4 = \Delta r_2 = \Delta r_3 = 0{,}1$ mm, $\Delta\alpha_2 = \Delta\alpha_3 = 5.10^{-4}$ rad, $\Delta\theta_2 = \Delta\theta_3 = 3.10^{-4}$ rad.

Connaissant les tolérances des paramètres géométriques des manipulateurs, nous calculons l'erreur maximale de position de leur effecteur en chaque point de l'espace de travail. Les figures 4.27(a) à 4.30(f) représentent ainsi les espaces articulaire et de travail de couples de manipulateurs générique/non-générique, l'erreur de position maximale en cinq points de l'espace de travail, et les courbes d'isocontours de l'erreur de position tracées dans l'espace de travail des manipulateurs.

D'après les figures 4.27(a) à 4.30(f), les différences sont faibles entre les courbes d'isocontours de l'erreur de position maximale de l'effecteur d'un manipulateur générique et celles de l'effecteur d'un manipulateur non-générique voisins l'un de l'autre dans l'espace des dimensions.

Nous remarquons cependant que pour chaque couple de manipulateurs générique/non-générique, l'erreur de position maximale de l'effecteur du manipulateur non-générique est plus faible que celle de l'effecteur du manipulateur générique. Cette différence est principalement due aux dimensions des manipulateurs et non au caractère générique ou

non-générique du manipulateur. Pour chaque couple de manipulateurs générique/non-générique, seul un paramètre géométrique change et la valeur du paramètre changeant est toujours plus grande pour le manipulateur générique. En présence de variations angulaires, l'erreur de précision de l'effecteur augmente évidemment avec les longueurs des barres du manipulateur. Ceci explique la différence entre les erreurs de position maximales des effecteurs des manipulateurs génériques et des manipulateurs non génériques étudiés.

En conclusion, même si l'étude comparative précédente n'est pas générale, elle est suffisante pour nous laisser penser que la précision d'un manipulateur ne dépend pas de sa généricité ou non-généricité. La partie suivante vise à étudier l'influence de la généricité et de la non-généricité d'un manipulateur sur ses performances cinématiques.

4.2.3 Performances cinématiques et sensibilité de la position de l'effecteur aux variations dimensionnelles

Nous avons remarqué dans la partie précédente qu'il n'y a pas de différence notable entre la précision des manipulateurs génériques et celle des manipulateurs non génériques. Leurs performances cinématiques sont elles pour autant similaires ? Pour le savoir, nous traçons les courbes d'isocontours du conditionnement numérique inverse de la matrice jacobienne cinématique des manipulateurs génériques et non-génériques étudiés précédemment. Le conditionnement numérique de la matrice jacobienne cinématique d'un manipulateur quantifie sa dextérité et peut ainsi faire office d'indice de performance cinématique, (Gosselin et Angeles, 1991).

Les figures 4.31(a), 4.31(b), 4.32(a), 4.32(b), 4.33(a), 4.33(b), 4.34(a), et 4.34(b) représentent ainsi les courbes d'isocontours du conditionnement numérique inverse de la matrice jacobienne cinématique des manipulateurs non-génériques et génériques étudiés, tracées dans l'espace articulaire.

D'après les figures 4.31(a) à 4.34(f), nous pouvons remarquer que deux manipulateurs générique et non-générique voisins par leurs dimensions ont la même dextérité puisque les courbes d'isocontours du conditionnement inverse de leur matrice jacobienne cinématique sont similaires.

Les figures 4.31(c), 4.31(d), 4.32(c), 4.32(d), 4.33(c), 4.33(d), 4.34(c), et 4.34(d) représentent les courbes d'isocontours des normes euclidiennes des matrices jacobiennes de sensibilité aux variations des paramètres de conception d_2, d_3, d_4, r_2, et r_3. D'après ces courbes, les sensibilités de la position de l'effecteur aux variations des variables dimensionnelles de manipulateurs génériques et non-génériques voisins sont quasiment identiques.

Les figures 4.31(e), 4.31(f), 4.32(e), 4.32(f), 4.33(e), 4.33(f), 4.34(e), et 4.34(f) représentent les courbes d'isocontours des normes euclidiennes des matrices jacobiennes de sensibilité aux variations des variables angulaires α_2 et α_3. D'après ces courbes, les sensibilités de

la position de l'effecteur aux variations angulaires de manipulateurs génériques et non-génériques voisins sont quasiment identiques.

En outre, il est important de noter que les manipulateurs étudiés ne sont pas nécessairement plus précis au voisinage de leur configuration isotrope cinématique. En effet, nous remarquons que les lieux de l'espace articulaire où la norme euclidienne des matrices jacobiennes de sensibilité est faible ne correspondent pas nécessairement aux lieux où le conditionnement numérique inverse de la matrice jacobienne cinématique est faible. En d'autres termes, les lieux où la sensibilité maximale du manipulateur aux variations des longueurs et angulaires est faible ne correspondent pas nécessairement aux configurations articulaires pour lesquelles le manipulateur a une bonne dextérité.

En conclusion, notre travail a permis de mettre en évidence, à travers plusieurs exemples, que la généricité ou la non-généricité d'un manipulateur n'a d'influence ni sur ses performances cinématiques, ni sur la sensibilité de la position de son effecteur aux variations de ses variables des longueurs et angulaires. Les exemples choisis sont représentatifs de l'ensemble des manipulateurs $3R$. Ainsi, nous pouvons affirmer sans prendre trop de risques que cette observation est généralisable à l'ensemble des manipulateurs $3R$. Cependant, est ce que cette propriété est valable pour tous les manipulateurs ? Cette question reste ouverte et fait partie de nos perspectives de recherche.

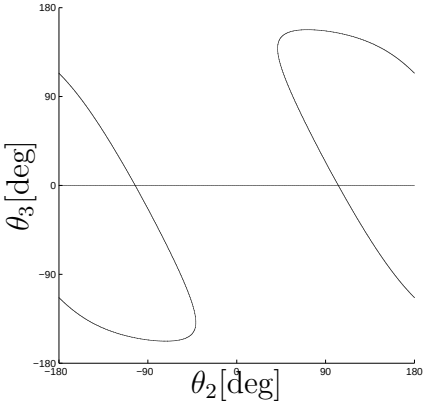
Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié la robustesse de manipulateurs $3R$ afin d'identifier les corrélations entre la notion de généricité et la notion de robustesse. Dans un premier temps, nous avons rappelé différentes notions propres aux manipulateurs $3R$ telles que les notions de singularités, d'aspect, de parcourabilité, de cuspidalité, de généricité, et de classes d'homotopie. Ces notions ont ensuite été utilisées pour comparer la robustesse et le comportement de manipulateurs génériques et non-génériques.

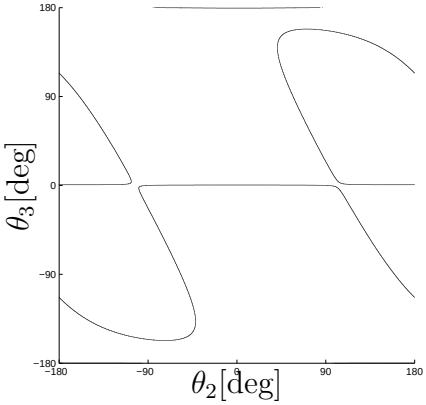
Il s'avère qu'un manipulateur $3R$ voisin d'un manipulateur non-générique par ses dimensions n'est pas robuste vis-à-vis de sa classe d'homotopie. En effet, pour de faibles variations de ses dimensions, sa classe d'homotopie peut changer et la topologie de ses surfaces de singularités est ainsi incertaine. Ceci est particulièrement gênant pour la génération de trajectoires continues. Nous avons remarqué à travers deux exemples que la T-parcourabilité d'une trajectoire réalisée par un manipulateur non-générique peut être fortement sensible aux variations de ses variables de conception. Ce constat est aussi valable pour des manipulateurs génériques situés au voisinage de manipulateurs non-génériques dans l'espace des dimensions des manipulateurs $3R$.

Cependant, même si les manipulateurs non-génériques sont moins robustes que leurs homologues génériques vis-à-vis d'indices de performances globales, nous avons remarqué

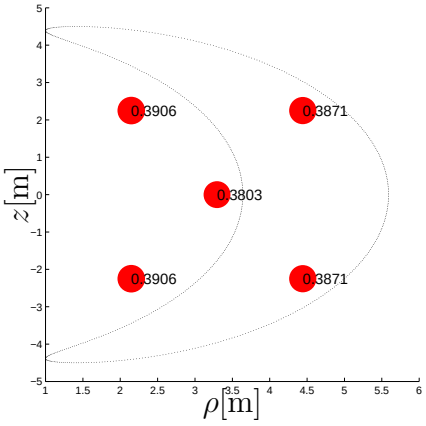
à travers plusieurs exemples que leur précision et leur dextérité sont similaires. De plus, il est important de noter que les configurations du manipulateur pour lesquelles la sensibilité de la position de l'effecteur aux variations des longueurs et angulaires est faible ne correspondent pas nécessairement aux configurations pour lesquelles le manipulateur a une bonne dextérité.



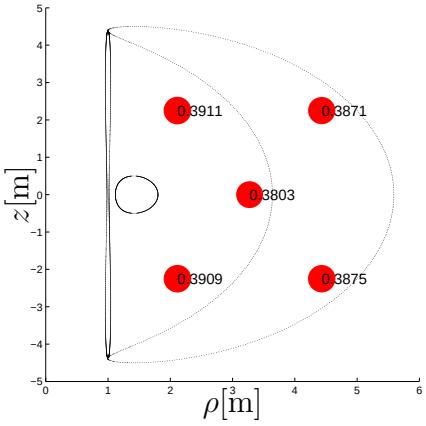
(a) *manipulateur* ***non-générique****, espace articulaire*



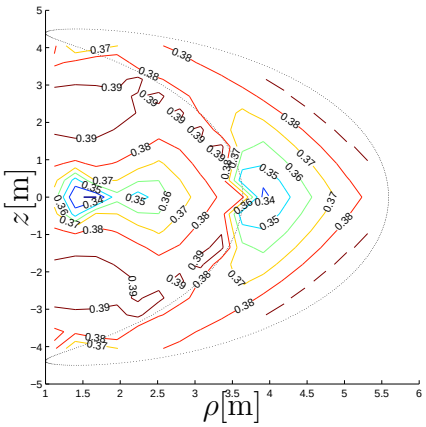
(b) *manipulateur* ***générique****, espace articulaire*



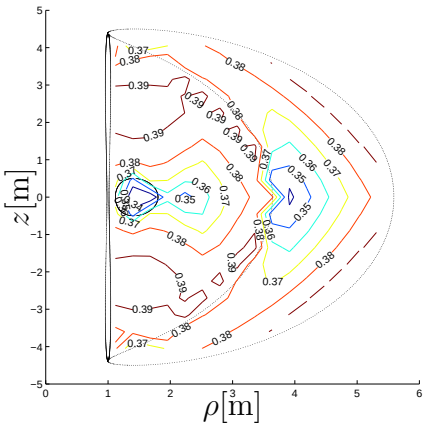
(c) *erreur en cinq points de l'espace de travail*



(d) *erreur en cinq points de l'espace de travail*

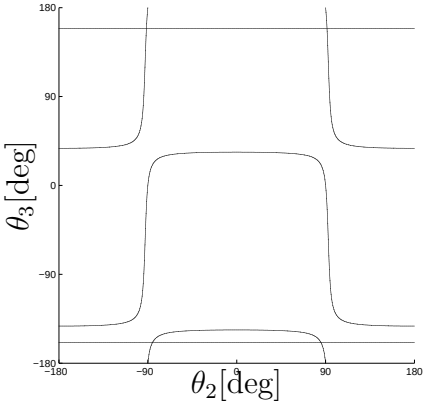


(e) *courbes d'isocontours d'erreur de position*

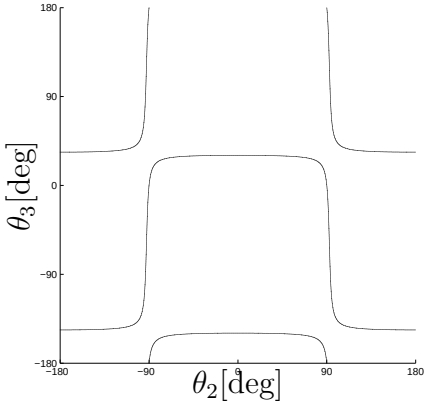


(f) *courbes d'isocontours d'erreur de position*

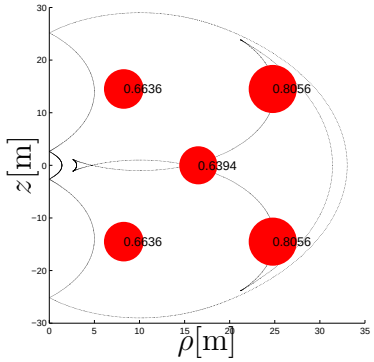
figure 4.27 – *Erreurs de précision maximales du manipulateur non-générique (resp. générique) de dimensions :* $d_2 = 1$, $d_3 = 2$, $d_4 = 2{,}5$, $r_2 = 1$, $r_3 = 0$, $\alpha_2 = 90°$, $\alpha_{\mathbf{3}} = \mathbf{0}°$ *(resp.* $\alpha_{\mathbf{3}} = \mathbf{1}°$*)*



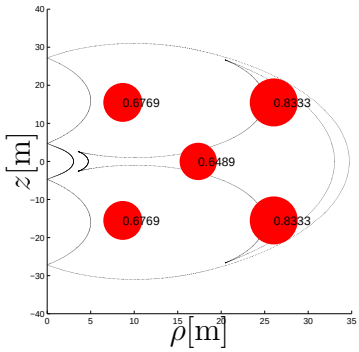
(a) *manipulateur* ***non-générique****, espace articulaire*



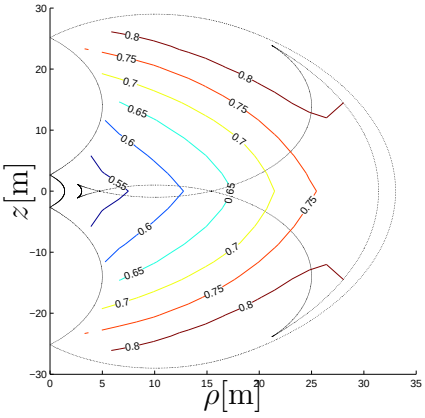
(b) *manipulateur* ***générique****, espace articulaire*



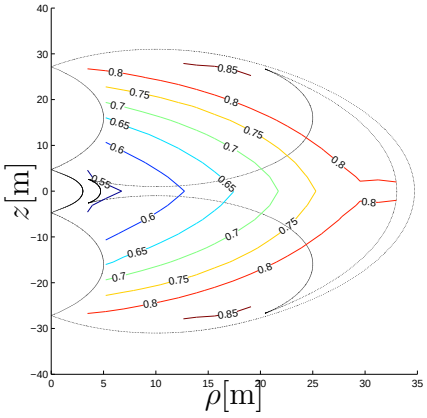
(c) *erreur en cinq points de l'espace de travail*



(d) *erreur en cinq points de l'espace de travail*

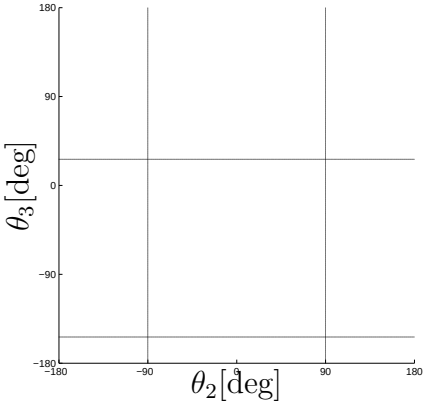


(e) *courbes d'isocontours d'erreur de position*

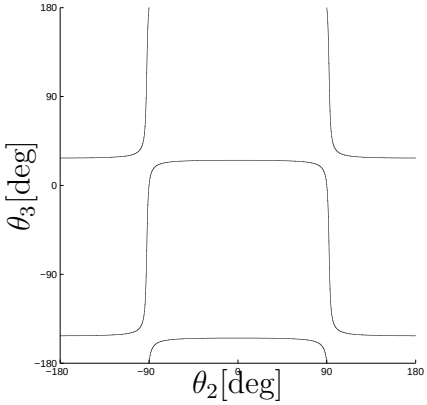


(f) *courbes d'isocontours d'erreur de position*

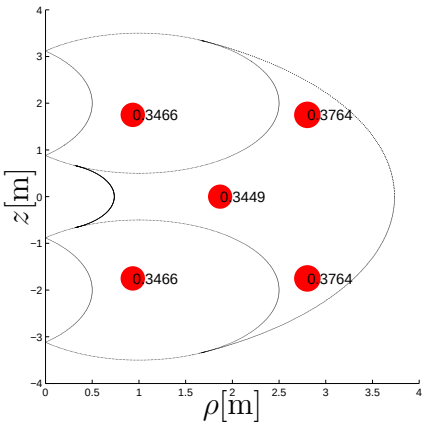
figure 4.28 – *Erreurs de précision maximales du manipulateur non-générique (resp. générique) de dimensions :* $d_2 = 1$, $\mathbf{d_3 = 14}$ *(resp.* $\mathbf{d_3 = 16}$*),* $d_4 = 15$, $r_2 = 10$, $r_3 = 0$, $\alpha_2 = -90°$, $\alpha_3 = 90°$



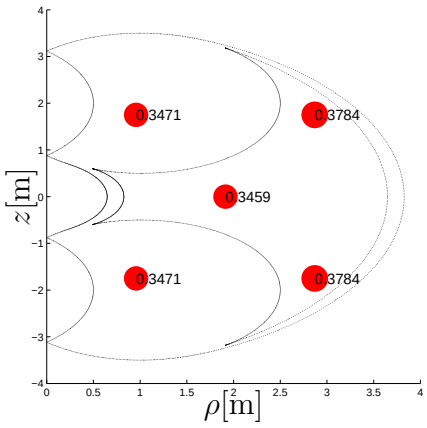
(a) *manipulateur* ***non-générique****, espace articulaire*



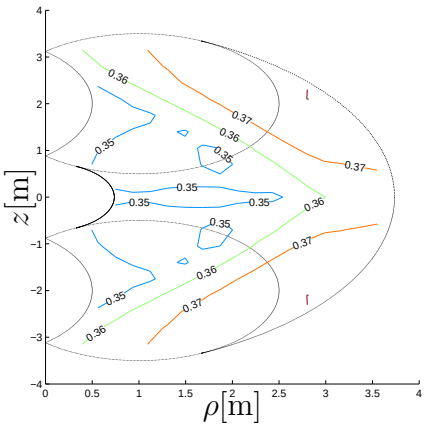
(b) *manipulateur* ***générique****, espace articulaire*



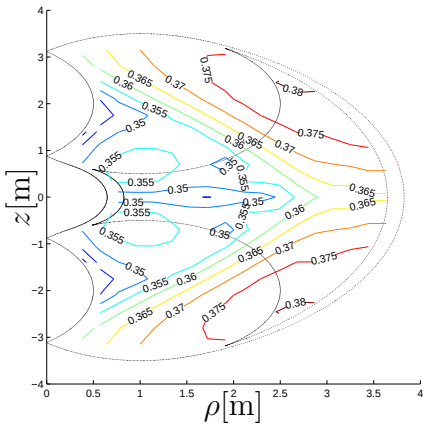
(c) *erreur en cinq points de l'espace de travail*



(d) *erreur en cinq points de l'espace de travail*

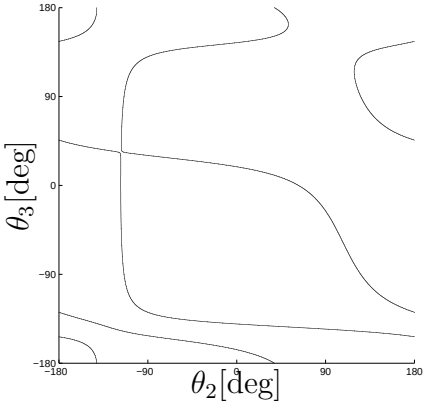


(e) *courbes d'isocontours d'erreur de position*

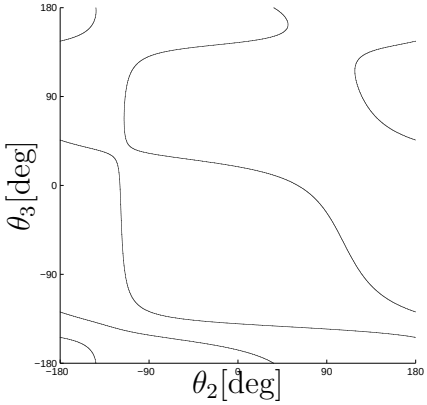


(f) *courbes d'isocontours d'erreur de position*

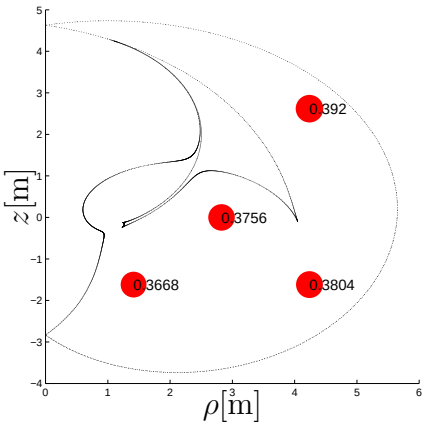
figure 4.29 – *Erreurs de précision maximales du manipulateur non-générique (resp. générique) de dimensions :* $\mathbf{d_2 = 0}$ *(resp.* $\mathbf{d_2 = 0{,}1}$*),* $d_3 = 2$, $d_4 = 1{,}5$, $r_2 = 1$, $r_3 = 0$, $\alpha_2 = -90°$, $\alpha_3 = 90°$



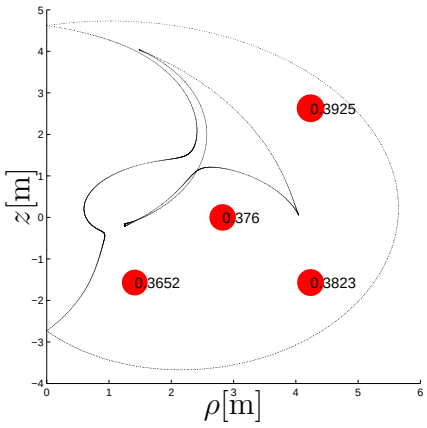
(a) *manipulateur* ***non-générique****, espace articulaire*



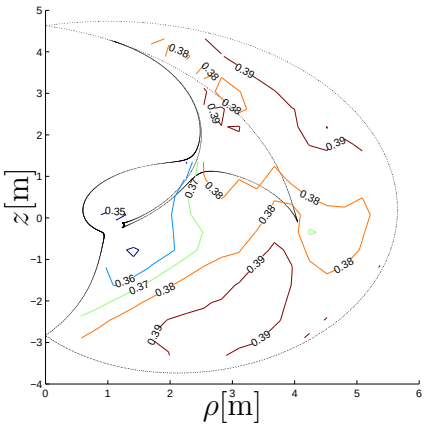
(b) *manipulateur* ***générique****, espace articulaire*



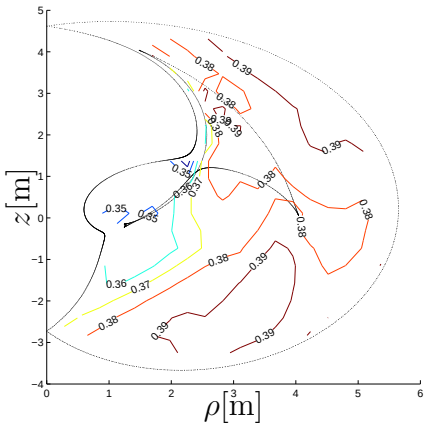
(c) *erreur en cinq points de l'espace de travail*



(d) *erreur en cinq points de l'espace de travail*

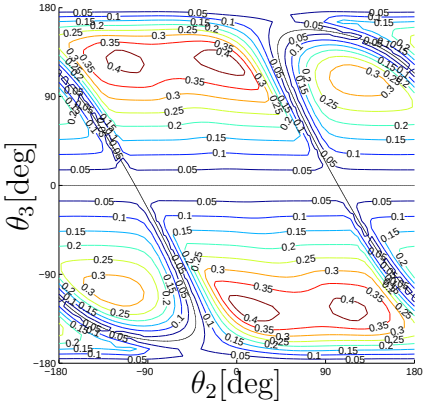


(e) *courbes d'isocontours d'erreur de position*

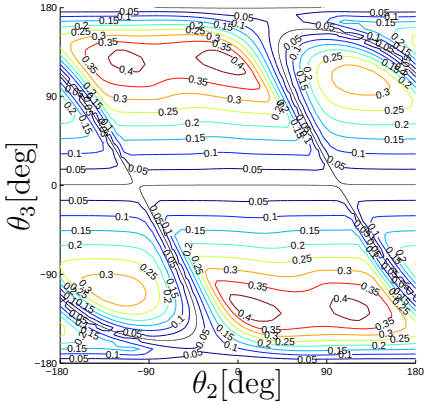


(f) *courbes d'isocontours d'erreur de position*

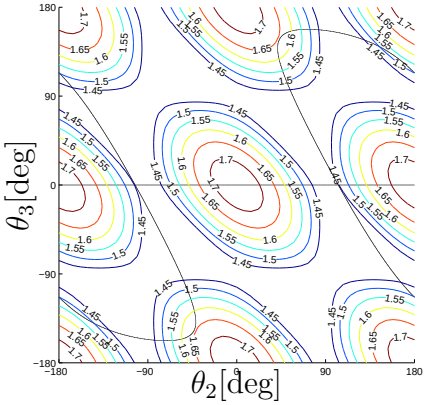
figure 4.30 – *Erreurs de précision maximales du manipulateur non-générique (resp. générique) de dimensions :* $d_2 = 1$, $d_3 = 2$, $d_4 = 2{,}5$, $r_2 = 1$, $r_3 = 0{,}2$, $\alpha_{\mathbf{2}} = \mathbf{-60}°$ *(resp.* $\alpha_{\mathbf{2}} = \mathbf{-58}°$*),* $\alpha_3 = 90°$



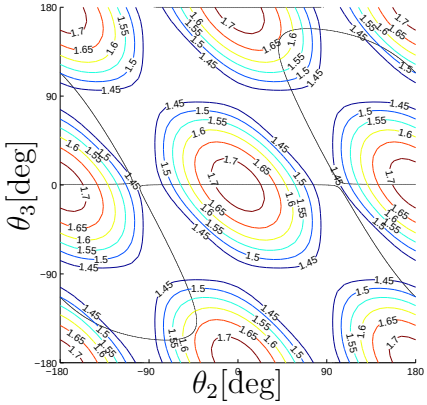
(a) ***non-générique***, *conditionnement inverse de la matrice jacobienne cinématique*



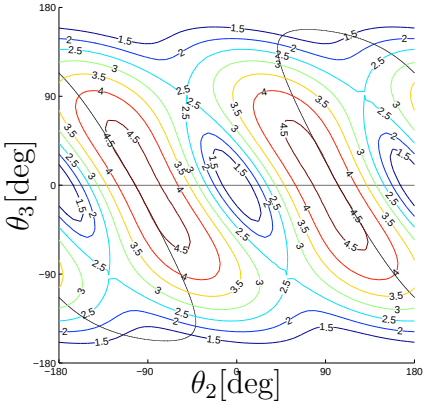
(b) ***générique***, *conditionnement inverse de la matrice jacobienne cinématique*



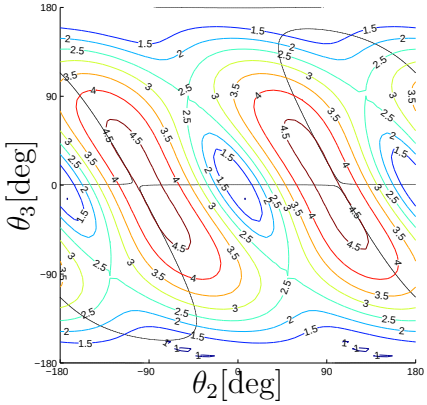
(c) ***non-générique***, *sensibilité aux variations de* d_2, d_3, d_4, r_2, r_3



(d) ***générique***, *sensibilité aux variations de* d_2, d_3, d_4, r_2, r_3

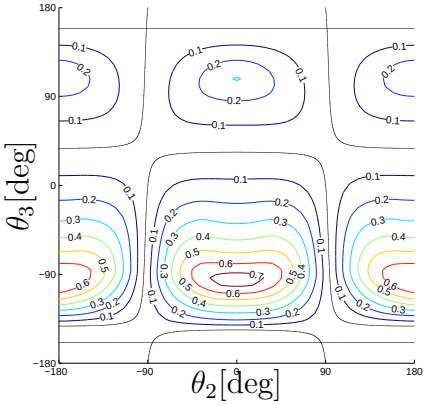


(e) ***non-générique***, *sensibilité aux variations de* α_2 *et* α_3

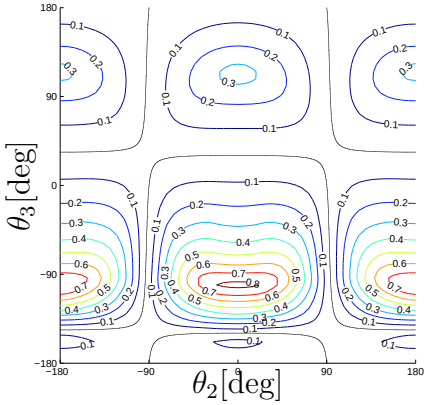


(f) ***générique***, *sensibilité aux variations de* α_2 *et* α_3

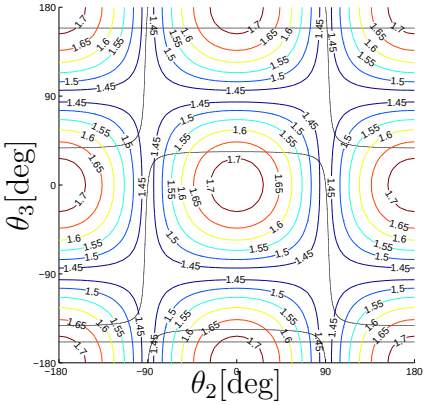
figure 4.31 – *Performances cinématiques et sensibilité du manipulateur non-générique (resp. générique) :* $d_2 = 1$, $d_3 = 2$, $d_4 = 2{,}5$, $r_2 = 1$, $r_3 = 0$, $\alpha_2 = 90°$, $\alpha_{\mathbf{3}} = \mathbf{0}°$ *(resp.* $\alpha_{\mathbf{3}} = \mathbf{1}°$*)*



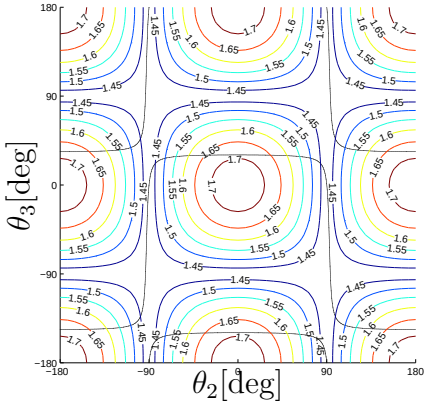
(a) ***non-générique***, *conditionnement inverse de la matrice jacobienne cinématique*



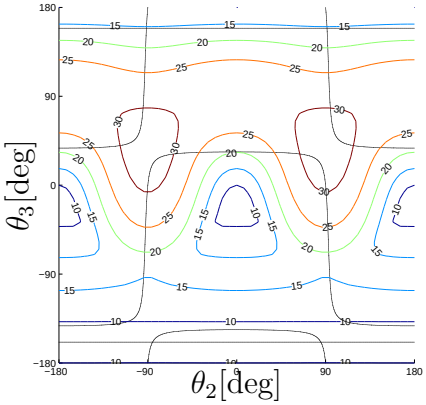
(b) ***générique***, *conditionnement inverse de la matrice jacobienne cinématique*



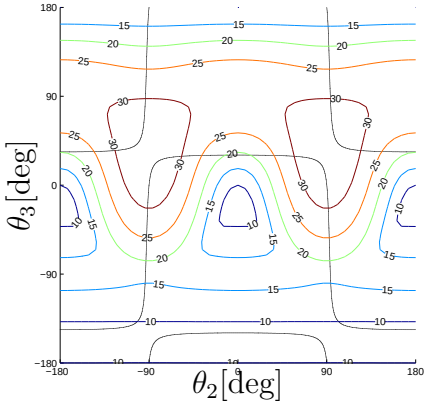
(c) ***non-générique***, *sensibilité aux variations de* d_2, d_3, d_4, r_2, r_3



(d) ***générique***, *sensibilité aux variations de* d_2, d_3, d_4, r_2, r_3

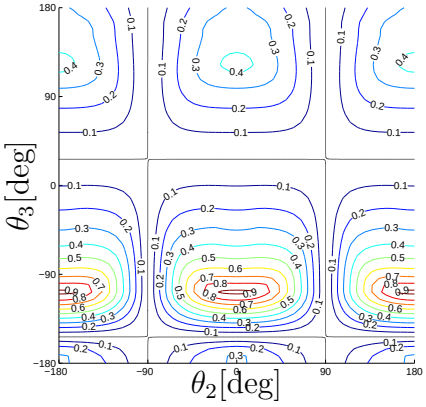


(e) ***non-générique***, *sensibilité aux variations de* α_2 *et* α_3

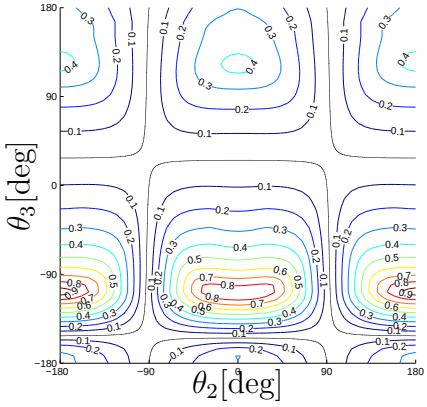


(f) ***générique***, *sensibilité aux variations de* α_2 *et* α_3

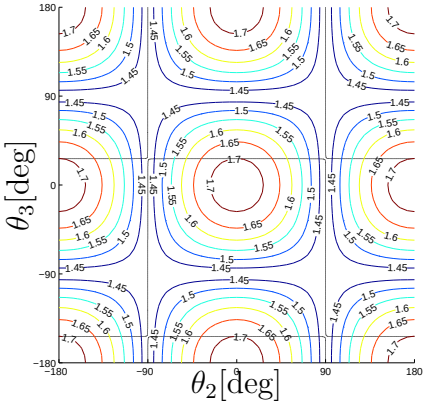
figure 4.32 – *Performances cinématiques et sensibilité du manipulateur non-générique (resp. générique) :* $d_2 = 1$, $\mathbf{d_3 = 14}$ *(resp.* $\mathbf{d_3 = 16}$*),* $d_4 = 15$, $r_2 = 10$, $r_3 = 0$, $\alpha_2 = -90°$, $\alpha_3 = 90°$



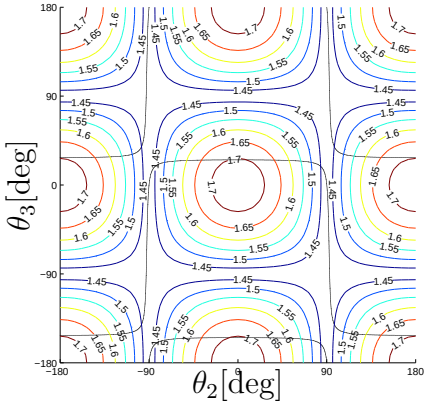
(a) ***non-générique***, *conditionnement inverse de la matrice jacobienne cinématique*



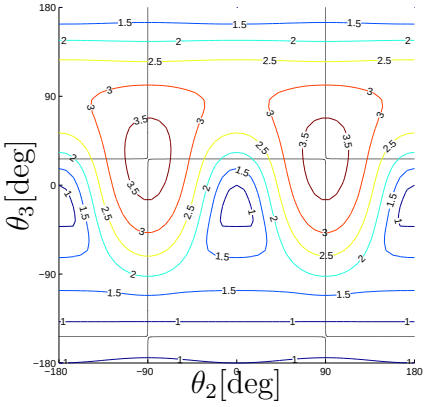
(b) ***générique***, *conditionnement inverse de la matrice jacobienne cinématique*



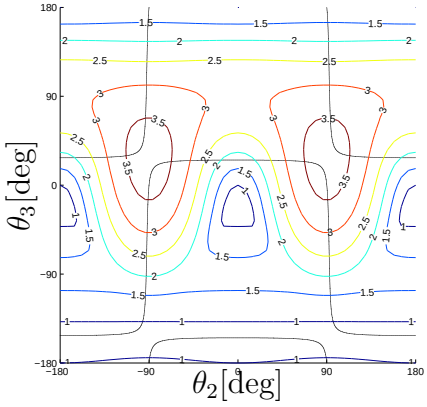
(c) ***non-générique***, *sensibilité aux variations de* d_2, d_3, d_4, r_2, r_3



(d) ***générique***, *sensibilité aux variations de* d_2, d_3, d_4, r_2, r_3

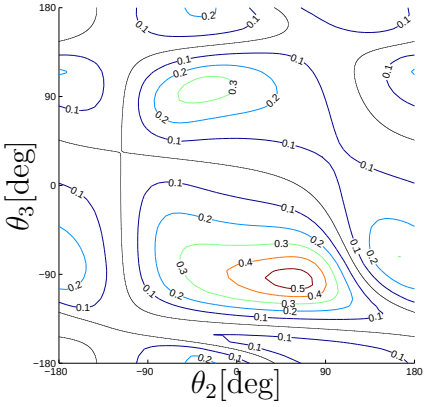


(e) ***non-générique***, *sensibilité aux variations de* α_2 *et* α_3

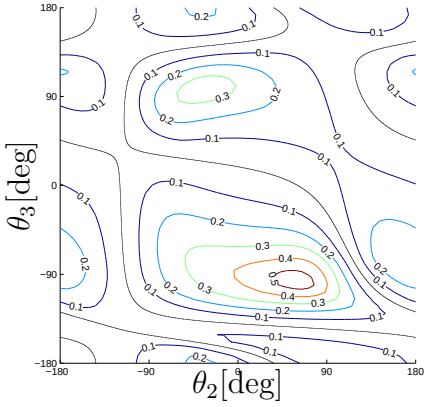


(f) ***générique***, *sensibilité aux variations de* α_2 *et* α_3

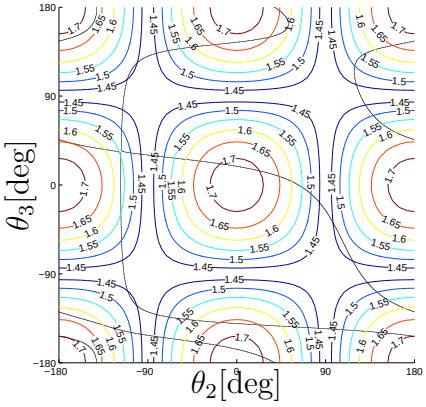
figure 4.33 – *Performances cinématiques et sensibilité du manipulateur non-générique (resp. générique) :* $\mathbf{d_2 = 0}$ *(resp.* $\mathbf{d_2 = 0{,}1}$*),* $d_3 = 2$, $d_4 = 1{,}5$, $r_2 = 1$, $r_3 = 0$, $\alpha_2 = -90°$, $\alpha_3 = 90°$



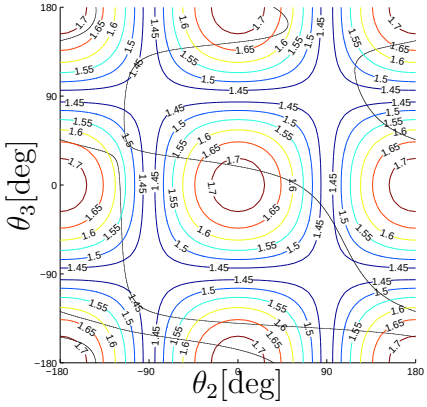
(a) ***non-générique***, *conditionnement inverse de la matrice jacobienne cinématique*



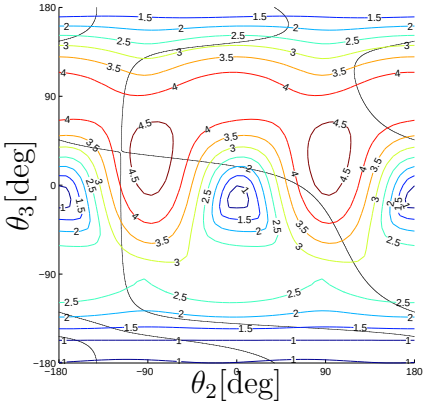
(b) ***générique***, *conditionnement inverse de la matrice jacobienne cinématique*



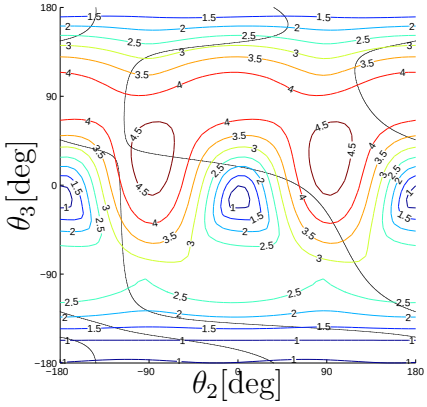
(c) ***non-générique***, *sensibilité aux variations de* d_2, d_3, d_4, r_2, r_3



(d) ***générique***, *sensibilité aux variations de* d_2, d_3, d_4, r_2, r_3



(e) ***non-générique***, *sensibilité aux variations de* α_2 *et* α_3



(f) ***générique***, *sensibilité aux variations de* α_2 *et* α_3

figure 4.34 – *Performances cinématiques et sensibilité du manipulateur non-générique (resp. générique) :* $d_2 = 1$, $d_3 = 2$, $d_4 = 2{,}5$, $r_2 = 1$, $r_3 = 0{,}2$, $\alpha_2 = -\mathbf{60}^\circ$ *(resp.* $\alpha_2 = -\mathbf{58}^\circ$*),* $\alpha_3 = 90^\circ$

Conclusion générale et Perspectives

Conclusion générale

Le travail que nous avons présenté dans cette thèse porte sur la conception robuste de mécanismes. Le premier chapitre rappelle les propriétés générales des mécanismes étudiés et présente un état de l'art de la conception robuste. Notre étude est axée sur les mécanismes articulés tels que les manipulateurs d'architecture sérielle et d'architecture parallèle. Nous avons classé les méthodes de résolution de problèmes de conception robuste en deux catégories : les méthodes basées sur l'optimisation statistique et les méthodes basées sur une approche d'analyse de sensibilité des performances, (Bennis *et al.*, 2002). Les méthodes d'optimisation statistique nécessitent la connaissance des tolérances des variables et des paramètres de conception du manipulateur. Afin de développer une méthode de synthèse de tolérances, nous nous sommes aidés de l'approche d'analyse de sensibilité.

Par ailleurs, dans tout problème de conception robuste, nous faisons la différence entre trois ensembles : l'ensemble des variables de conception, l'ensemble des paramètres de conception environnementaux et l'ensemble des fonctions performances. Bien que les valeurs nominales des variables de conception soient contrôlables par le concepteur, il est important de noter que leur valeur réelle reste incertaine. Les paramètres de conception environnementaux décrivent quant à eux l'environnement du manipulateur et sont au delà de la décision du concepteur. Enfin, les fonctions performances représentent les performances du mécanisme et dépendent des variables et des paramètres de conception environnementaux, (Caro *et al.*, 2003a).

L'un des objectifs de la thèse était de synthétiser les tolérances de l'Orthoglide, manipulateur d'architecture parallèle à trois degrés de liberté développé à l'IRCCyN. Une étape préalable à la synthèse de tolérances est l'analyse de sa sensibilité. En effet, la connaissance des coefficients de sensibilité de la position et de l'orientation de l'effecteur aux variations des paramètres géométriques facilite la synthèse de tolérances du manipulateur. Dans le deuxième chapitre, nous avons ainsi développé deux méthodes pour analyser la sensibilité de la position et de l'orientation de l'effecteur de l'Orthoglide. La première méthode est basée sur une analyse cinématique du manipulateur. Cette méthode met en

évidence les variations des variables de conception les plus influentes sur la position de l'effecteur, i.e. les variations des longueurs des articulations de type parallélogramme et celles de l'élongation des actionneurs prismatiques. L'erreur d'orientation des actionneurs prismatiques est quant à elle peu influente sur la position de l'effecteur. Nous remarquons par ailleurs que les variations des paramètres géométriques du même type d'une jambe à l'autre du manipulateur ont la même influence sur la position globale du manipulateur. Cette première méthode nous a permis d'avoir un ordre d'idée de l'influence des variations des différents paramètres géométriques. Cependant, elle ne permet pas de prendre en compte les variations des longueurs des barres des articulations de type parallélogramme du manipulateur. Ainsi, nous avons mis au point une deuxième méthode d'analyse de sensibilité afin de prendre en compte les erreurs de parallélisme des barres des parallélogrammes, et d'analyser la sensibilité de l'orientation de l'effecteur du manipulateur aux variations de ses dimensions et de ses angles. Nous déduisons de ces deux méthodes que la configuration isotrope cinématique est celle pour laquelle la sensibilité de la position et de l'orientation de l'effecteur aux variations des paramètres géométriques est globalement minimale. A l'inverse, elle est maximale au voisinage des configurations singulières sérielles, (Caro *et al.*, 2004). Ce constat incitera donc l'utilisateur de l'Orthoglide à centrer la région de l'espace de travail à parcourir au voisinage de la position de l'effecteur correspondant à sa configuration isotrope cinématique.

L'analyse de sensibilité de l'Orthoglide nous a permis de repérer les variations des paramètres géométriques les plus influentes et les moins influentes sur la position et l'orientation de son effecteur. La synthèse de tolérances des paramètres géométriques est ainsi simplifiée puisque nous avons une meilleure idée des tolérances des paramètres géométriques à serrer et à élargir.

Dans le troisième chapitre, nous formulons une procédure de synthèse de tolérances. Cette procédure est composée de deux étapes, à réaliser de manière séquentielle, (Caro *et al.*, 2005). La première étape consiste à rendre le mécanisme robuste afin d'élargir le domaine admissible de variations des variables et des paramètres de conception. Nous proposons ainsi un indice de robustesse optimal pour évaluer la robustesse de la conception d'un mécanisme : la norme euclidienne de sa matrice jacobienne de sensibilité. La pertinence de cet indice a été mise en évidence par l'étude de la robustesse d'un amortisseur, (Caro *et al.*, 2003b). La deuxième étape consiste à calculer les tolérances optimales des variables de conception d'un mécanisme. Nous avons ainsi développé une méthode de synthèse de tolérances basée sur l'approche d'analyse de sensibilité des performances. Cette méthode de synthèse de tolérances vise à maximiser l'hyper-volume de la boîte de tolérances incluse dans tous les hyper-ellipsoïdes de sensibilité du mécanisme étudié. L'absence de pièce défectueuse dans la boîte de tolérances obtenue fait partie des avantages de cette méthode. De plus, la procédure en deux étapes permet de simplifier la synthèse de tolérances de

conceptions complexes. En effet, l'élargissement du domaine admissible de variations des variables et des paramètres de conception et le calcul de la boîte de tolérances la plus volumineuse inscrite dans ce domaine est plus simple que le calcul des valeurs nominales des variables de conception et de leur tolérance simultanément. Pour illustrer la procédure de synthèse de tolérances proposée, deux manipulateurs d'architecture sérielle et un manipulateur d'architecture parallèle ont été étudiés.

Dans le quatrième chapitre, nous avons étudié la robustesse de manipulateurs $3R$. La motivation principale était de répondre à la question suivante : les manipulateurs génériques sont-ils plus robustes que leurs homologues non-génériques ? Pour cela, nous avons exploité différentes propriétés de la robotique telles que la parcourabilité, la précision, la dextérité. Il s'avère qu'un manipulateur $3R$ voisin d'un manipulateur non-générique par ses dimensions n'est pas robuste vis-à-vis de sa classe d'homotopie. En effet, pour de faibles variations de ses dimensions, sa classe d'homotopie peut changer et la topologie de ses surfaces de singularités est ainsi incertaine. Ceci est particulièrement gênant pour la génération de trajectoires continues. Nous avons remarqué à travers deux exemples que la T-parcourabilité d'une trajectoire réalisée par un manipulateur non-générique peut être aussi fortement sensible aux variations de ses variables de conception. Cependant, même si les manipulateurs non-génériques sont moins robustes que leurs homologues génériques vis-à-vis d'indices de performances globales, nous avons remarqué à travers plusieurs exemples que leur précision et leur dextérité sont similaires.

Perspectives

La procédure de synthèse de tolérances proposée dans cette thèse est intéressante puisqu'elle intègre la notion de robustesse. Elle présente aussi l'avantage de rendre les étapes de dimensionnement et de synthèse de tolérances d'un mécanisme indépendantes. En outre, l'analyse de sensibilité de l'Orthoglide donne une bonne indication de l'influence des variations de ses paramètres géométriques sur la position et l'orientation de l'effecteur. En revanche, ces études ne sont qu'une étape préalable à la synthèse de tolérances géométriques d'un mécanisme. En effet, à défaut de fournir les tolérances géométriques optimales d'un mécanisme à son concepteur, les résultats obtenus avec les méthodes proposées dans cette thèse sont suffisants pour le guider dans ses choix de tolérances. L'une des perspectives de notre travail de recherche est ainsi de développer une méthodologie de synthèse de tolérances géométriques. Cette méthodologie pourra s'appuyer sur les méthodes d'analyse de sensibilité et de synthèse des tolérances des dimensions de mécanismes développées dans cette thèse.

Une autre extension possible de notre travail de recherche est l'étude de la sensibilité de mécanismes hyperstatiques. A cet effet, il est nécessaire de prendre en compte les défor-

mations des éléments du mécanisme. Ceci pourra être réalisé au moyen d'une modélisation des pièces en éléments finis, ou en modélisant des raideurs localisées par des articulations flexibles fictives, (Majou, 2004).

L'Orthoglide appartient à une famille de manipulateurs *Delta- linéaires*, i.e. manipulateurs d'architecture parallèle comprenant des articulations prismatiques motorisées et des articulations de type parallélogramme. Les méthodes d'analyse de sensibilité développées dans cette thèse pourront ainsi être utilisées pour comparer la sensibilité de manipulateurs Delta - linéaires. Ces méthodes d'analyse de sensibilité pourront aussi être améliorées pour prendre en compte les erreurs de parallélisme des axes des articulations rotoïdes des parallélogrammes et les jeux dans les différentes articulations. Une extension de l'application de ces méthodes à d'autres manipulateurs d'architecture parallèle fait aussi partie des perspectives de notre travail de recherche.

Enfin, l'étude de la robustesse de manipulateurs $3R$ a mis en évidence que la généricité ou la non-généricité d'un manipulateur $3R$ n'a pas d'influence sur ses performances cinématiques et sur la sensibilité de la position de son effecteur aux variations de ses variables dimensionnelles. Cependant, est-ce que cette propriété est généralisable à tous les manipulateurs ? Cette question reste ouverte et fait partie de nos axes de recherche futurs.

Références

Al-Widyan, K., 2004, *The Robust Design of Robotic Mechanical Systems*, Ph.D. Thesis, McGill University, Montreal, Canada. 1.3.3

Al-Widyan, K. et Angeles, J., 2005, "A Model-Based Formulation of Robust Design," *ASME Journal of Mechanical Design* 127, pp. 388–396. 1.4, 3, 3.2

Angeles, J., 2002, *Fundamentals of Robotic Mechanical Systems: Theory, Methods, and Algorithms*, 2nd ed., New York: Springer-Verlag. 2.3.3.6, 3.3.2.1, A.1.3

Angeles, J., 2004, "The Qualitative Synthesis of Parallel Manipulators," *ASME Journal of Mechanical Design* 126, pp. 617–624. 2.1.1

ASME, 1994, *Dimensioning and Tolerancing, American National Standard ASME Y 14.5M*, The American Society of Mechanical Engineers, NY. 3.4

Baili, M., Wenger, P., et Chablat, D., 2004, "Classification of One Family of 3R Positioning Manipulators," *Proceedings of the ICRA conference*, New-Orleans, USA. 4.1.5

Baker, J., 1988, "The Bennett Linkage and its associated Quadric Surfaces," *Mechanism and Machine Theory* 23, no. 2, pp. 147–156. 4.1.6

Bennis, F., Wenger, P., et Caro, S., 2002, "Etat de l'art de la Conception Robuste de Mécanismes," *Journée AIP-PRIMECA sur les méthodes non déterministes en conception intégrée*, ENS de Cachan. 4.2.3

Bonev, I., 2002, *Geometric Analysis of Parallel Mechanisms*, Ph.D. Thesis, Université Laval, Quebec, Canada. 1.1.4.2

Borrel, P. et Liegeois, A., 1986, "A Study of Manipulator Inverse Kinematic Solutions with Application to Trajectory Planning and Workspace Determination," *Proc. IEEE Int. Conf. on Rob. and Aut.* pp. 1180–1185. 1.1.1.1, 4.1.2, 4.1.3

Box, G., 1988, "Signal-to-Noise Ratios, Performance Criteria, and Transformations," *Technometrics* 30, no. 1, pp. 1–18. 1.5

Burdick, J., 1991, "A Classification of 3R Regional Manipulator Singularities and Geometries," *IEEE Int. Conf. on Rob. and Aut.*, California, pp. 2670–2675. 1.1.4.1

Burdick, J., 1995a, "A Classification of 3R Positioning Manipulator Singularities and Geometries," *Journal of Mechanisms and Machine Theory* 30, pp. 71–89. 4.1.2, 4.1.6, 4.1.7, 4.1.7

Burdick, J., 1995b, "A Recursive Method for Finding Revolute-Jointed Manipulator Singularities," *Journal of Mechanical Design* 117, pp. 55–63. 4

Caro, S., Bennis, F., et Wenger, P., 2003a, "Robust Design and Tolerance Synthesis of Mechanisms," *Proc. CIRP Design Seminar*, Grenoble, France. 4.2.3

Caro, S., Bennis, F., et Wenger, P., 2003b, "Tolerance Synthesis of Mechanisms: a Robust Design Approach," *Proceedings of the ASME Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*, DETC2003-DAC48737, Chicago, Illinois, USA. 4.2.3

Caro, S., Bennis, F., et Wenger, P., 2005, "Tolerance Synthesis of Mechanisms: A Robust Design Approach," *ASME Journal of Mechanical Design* 127, pp. 86–94. 1.5, 4.2.3

Caro, S., Chablat, D., Wenger, P., *et al.*, 2003c, *Recent Advances in Integrated Design and Manufacturing in Mechanical Engineering*, Chap. The Isoconditioning Loci of Planar Three-DOF Parallel Manipulators, Kluwer Academic Publisher, In: G. Gogu, D. Coutellier, P. Chedmail and P. Ray (Editors), ISBN 1-4020-1163-6, pp.129-138. 1.1.4.2

Caro, S., Wenger, P., Bennis, F., *et al.*, 2004, "Sensitivity Analysis of the Orthoglide, a 3-DOF Translationnal Parallel Kinematic Machine," *Proceedings of the ASME Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*, DETC2004-57379, Salt Lake City, Utah, USA. 4.2.3

Chablat, D. et Wenger, P., 2003, "Architecture Optimization of a 3-DOF Parallel Mechanism for Machining Applications, The Orthoglide," *IEEE Transactions On Robotics and Automation* 19, pp. 403–410. 2.1.2, 2.3.2.2, 2.3.3.5, 3.4.3, A.1

Chablat, D., Wenger, P., et Merlet, J., 2002, "Workspace Analysis of the Orthoglide Using Interval Analysis," *in: Advances in Robot Kinematic, J.Lenarjcijc and F.Thomas* (M. Norwell, ed.), Kluwer Academic Publishers, pp. 397–406. 2.2, 2.3.2.3

Chase, K., Gao, J., Magleby, S., *et al.*, 1996, "Including Geometric Feature Variations in Tolerance Analysis of Mechanical Assemblies," *IEE transactions* 28, pp. 795–807. 3.4

Chedmail, P., Dombre, E., et Wenger, P., 1998, *La CAO en robotique - outils et méthodologies*, ISBN 2-86601-695-5, Paris, Hermès. 4.1.4

Chen, W., Allen, J., Tsui, K.-L., *et al.*, 1996, "A Procedure for Robust Design: Minimizing Variations Caused by Noise Factors and Control Factors," *ASME Journal*

of Mechanical Design 118, pp. 478–485. 1.5, 1.5, 3.2.1, 3.4.3

Daniel, D. et Nicolas, W., 2002, "The Effect of Coupling on Parameter Design," *Proc. of ICAD 2002 Second Conference on Axiomatic Design* (M. Norwell, ed.), Cambridge, MA. 1.3.1

Denavit, J. et Hartenberg, R., 1955, "A Kinematic Notation for Lower Pair Mechanisms Bases on Matrices," *Journal of Applied Mechanisms* 22, pp. 215–221. 1.1.1.1

Dheeman, B. et Ashitava, G., 1997, "Singularity Analysis of Platform-Type Multi-Loop Spatial Mechanisms," *Mechanism and Machine Theory* 33, pp. 375–389. 1.1.4.2

Dombre, E., 2001, *Analyse et Modélisation des Robots Manipulateurs*, ISBN 2-7462-0300-6, Paris, Hermès Science Publications (sous la direction d'E.Dombre). 4

El Omri, J., 1996, *Analyse Géométrique et Cinématique des Mécanismes de Type Manipulateur*, Ph.D. Thesis, Université de Nantes, Ecole Centrale de Nantes. 4, 4.1.2, 4.1.3

Fan, K.-C., Wang, H., Zhao, J.-W., *et al.*, 2003, "Sensitivity Analysis of the 3-PRS Parallel Kinematic Spindle Platform of a Serial-Parallel Machine Tool," *International Journal of Machine Tools and Manufacture* 43, pp. 1561–1569. 2

GDT, 2004, *Grand Dictionnaire Terminologique*, Office Québécois de la Langue Française, http://www.granddictionnaire.com. 1.1

Golub, G. et Van Loan, C., 1994, *Matrix Computations*, The Johns Hopkins University Press, Baltimore. 3.2

Gosselin, C. et Angeles, J., 1990, "Singularity Analysis of Closed-Loop Kinematic Chains," *IEEE Transactions on Robotics and Automation* 6, pp. 281–290. 1.1.3.2

Gosselin, C. et Angeles, J., 1991, "A Global Performance Index for the Kinematic Optimization of Robotic Manipulators," *ASME Journal of Mechanical Design* 113, pp. 220–226. 4.2.3

Gosselin, C. et Wang, J., 1995, "Singular Loci of Planar Parallel Manipulators," *9th World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms*, vol. 3, Milano, Italy. 1.1.4.2

Han, C., Kim, J., Kim, J., *et al.*, 2002, "Kinematic Sensitivity Analysis of the 3-UPU Parallel Mechanism," *Mechanism and Machine Theory* 37, pp. 787–798. 2

Hazelrigg, G., 1999, "An Axiomatic Framework for Engineering Design," *ASME Journal of Mechanical Design* 121, pp. 342–347. 1.3.1

Hu, S., Webbink, R., Lee, J., *et al.*, 2003, "Robustness Evaluation for Compliant Assembly Systems," *ASME Journal of Mechanical Design* 125, pp. 262–267. 3.2

Huang, T., Whitehouse, D., et Chetwynd, D., 2003, "A Unified Error Model for Tolerance Design, Assembly and Error Compensation of 3-DOF Parallel Kinematic Machines with Parallelogram Sruts," *Science in China Series E, ISSN:1006-9321, 20* 46, no. 5, pp. 515–526. 2.3.3

Karouia, M. et Herve, J., 2002, "A Family of Novel Orientational 3-dof Parallel Robots," *Proceedings of the 14th CISM-IFToMM RoManSy Symposium, RoMansSy 14. (Edited by G. Bianchi, J.C. Guinot and Rzymkowski)* (S. Verlag, ed.), Vienna, pp. 359–368. 2.3.1

Khalil, W., Besnard, S., et Lemoine, P., 2000, "Comparison Study of the Geometric Parameters Calibration Methods," *International Journal of Robotics and Automation* 15, pp. 56–67. 3.3.2.1

Khalil, W. et Dombre, E., 2002, *Modeling, Identification and Control of Robots*, ISBN 1-9039-9613-9, Hermes Penton Science. 1.1.1.1, 1.1.1.1, 1.1.3.2, 3.4.2.2, 4.1.1

Khalil, W. et Murareci, D., 1996, "Kinematic Analysis and Singular Configurations of a Class of Parallel Robots," *Mathematics and Computers in Simulation* pp. 377–390. 1.1.4.2

Kim, H. et Choi, Y., 2000, "The Kinematic Error Bound Analysis of the Stewart Platform," *Journal of Robotic Systems* 17, pp. 63–73. 2

Kim, H. et Tsai, L.-W., 2003, "Design Optimization of a Cartesian Parallel Manipulator," *ASME Journal of Mechanical Design* 125, pp. 43–51. 2

Lee, W., Woo, T., et Chou, S., 1993, "Tolerance Synthesis for Nonlinear Systems based on Nonlinear Programming," *IIE Transactions* 25, no. 1, pp. 51–61. 3.3.1, 3.4

Ma, O. et Angeles, J., 1991, "Architecture Singularities of Platform Manipulators," *Proceedings IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Sacramento, California, pp. 1542–1547. 1.1.4.2

Majou, F., 2004, *Analyse Cinétostatique des Machines Parallèles à Translations*, Ph.D. Thesis, Université de Nantes, Ecole Centrale de Nantes. 4.2.3

Merlet, J., 2000, *Parallel Robots, Solid Dynamics and its Applications*, Kluwer Academic Publishers. 1.1.1.2

Pahl, G. et Beitz, W., 1996, *Engineering Design*, Springler-Verlag, New-York. 1.3

Pai, D., 1992, "Genericity and Singularities of Robot Manipulators," *IEEE Transactions on Robotics and Automation* 8, pp. 545–559. 4, 4.1.6, 4.1.6, 4.1.6

Parenti, C. et Innocenti, C., 1988, "Spatial Open Kinematic Chains: Singularities, Regions and Subregions," *Proc. 7th CISM-IFTOMM Romansy*, Udine, Italy, pp. 400–407. 4.1.5

Parkinson, A., 1995, "Robust Mechanical Design Using Engineering Models," *ASME Journal of Mechanical Design* 117, pp. 48–54. 1.5, 3, 3.4.3

Parkinson, D., 2000, "The Application of a Robust Design Method to Tolerancing," *ASME Journal of Mechanical Design* 122, pp. 149–153. 3.4

Paskevitch, A., Wenger, P., et Chablat, D., 2005, "Design Strategies for the Geometric Synthesis of Orthoglide-type Mechanisms," *Journal of Mechanism and Machine Theory* 40, no. 8, pp. 907–930. 2.2.1, A.2.2, A.3

Paul, R., 1981, *Robot Manipulators: Mathematics, Programming, and Control*, MIT Press, Cambridge. 1.1.3.1

Phadke, M., 1989, *Quality Engineering Using Robust Design*, PTR Prentice-Hall Inc, Englewood Cliffs, New Jersey. 1.2, 1.3.2.1, 1.3.2.2

Pieper, D., 1968, *The Kinematics of Manipulators Under Computer Control*, Ph.D. Thesis, Stanford University. 1.1.3.1

Raghavan, M. et Roth, B., 1990, "Inverse Kinematics of the General 6R Manipulator and Related Linkages," *ASME Journal of Mechanical Design* 115, pp. 502–508. 1.1.3.1

Rajagopalan, S. et Cutkosky, M., 2003, "Error Analysis for the In-Situ Fabrication of Mechanisms," *ASME Journal of Mechanical Design* 125, pp. 809–822. 3.4

Ramakrishnan, B. et Rao, S., 1991, "A Robust Optimization Approach Using Taguchi's Loss Function for Solving Nonlinear Optimization Problems," *Advances in Design Automation* , no. ASME DE-32-1, pp. 241–248. 1.5

Ranjbaran, F. et Angeles, J., 1994, "On Positioning Singularities of 3-Revolute Robotic Manipulators," *Proc. 12th Symp. on Engineering Applications in Mechanics*, Montreal, Canada, pp. 273–282. 4.1.2

Sefrioui, J. et Gosselin, C., 1993, "Singularity Analysis and Representation of Planar Parallel Manipulators," *Robotic and Autonomous Systems* pp. 209–224. 1.1.4.2

Smith, D., 1990, *Design of Solvable 6R Manipulators*, Ph.D. Thesis, Institute Of Technology, Georgia, Atlanta, USA. 4.1.6

Smith, D. et Lipkin, H., 1993, "Higher Order Singularities of Regional Manipulators," *IEEE Int.Conf. on Rob. and Aut.*. 1.1.4.1

Suh, N., 2001, *Axiomatic Design, Advances and Applications*, OUP, Oxford. 1.3.1, 1.3.1, 1.3.1

Sundaresan, S., Ishii, K., et Houser, D., 1993, "A Robust Optimization Procedure with Variations on Design Variables and Constraints," *Advances in Design Automation, ASME DE.Vol 65-1*, pp. 379–386. 1.5, 3, 3.4.3

Taguchi, G., 1978, "Off-Line and On-Line Quality Control Systems," *Proceedings of International Conferences on Quality Control*, Tokyo, Japan. (document), 1.2

Taguchi, G., 1993, *On Robust Technology Development, Bringing Quality Engineering Upstream*, ISBN 0-7918-0028-8, ASME Press. 1, 1.2, 1.3.2, 1.4, 1.5, 3.1

Thornton, A., 2001, "Optimism vs. Pessimism: Design Decisions in the Face of Process Capability Uncertainty," *ASME Journal of Mechanical Design* 123, pp. 313–320. 1.2

Ting, K. et Long, Y., 1996, "Performance Quality and Tolerance Sensitivity of Mechanisms," *ASME Journal of Mechanical Design* 118, pp. 144–150. 3.2, 3.4

Tsai, K., 1990, *Admissible Motions in Manipulator's Workspace*, Ph.D. Thesis, Univ. Wisconsin. 4.1.2

Tsui, K., 1992, "An Overview of Taguchi Method and Newly Developed Methods for Robust Design," *IIE Transactions* 24, no. 5, pp. 44–57. 1.5

Wang, J. et Masory, O., 1993, "On the Accuracy of a Stewart platform - Part I, The Effect of Manufacturing Tolerances," *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics Automation*, Atlanta, USA, pp. 114–120. 2

Wenger, P., 1989, *Aptitude d'un Robot Manipulateur à Parcourir son Espace de Travail en Présence d'Obstacles*, Ph.D. Thesis, Université de Nantes, ENSM. 1.1.1.1

Wenger, P., 1998, "Classification of 3R Positioning Manipulators," *ASME Journal of Mechanical Design* 120, pp. 327–332. 4.1.6, 4.1.7

Wenger, P., 2004, "Uniqueness Domains and Regions of Feasible Paths for Cuspidal Manipulators," *IEEE Transactions on Robotics* 20, no. 4, pp. 745–750. 4.2.1.1

Wenger, P. et Chedmail, P., 1991, "Ability of a Robot to Travel Through its Free Workspace," *The International Journal of Robotics Research* 10, no. 3. 4.1.2

Wenger, P. et El Omri, J., 1995, "How to Recognize Simply a Non-Singular Posture Changing 3-DOF Manipulator," *Proc. 7th Int. Conf. on Advanced Robotics (ICAR)*, San Feliu de Glixol, Espagne. 4.1.5

Wenger, P. et El Omri, J., 1996, "Changing Posture for Cuspidal Robot Manipulators," *IEEE Int. Conf. on Rob. and Aut.*, Minneapolis, USA, pp. 3173–3178. 4.1.5, 4.1.5

Wenger, P., Gosselin, C., et Maillé, B., 1999, "A Comparative Study of Serial and Parallel Mechanism Topologies for Machine Tool," *Int. Workshop on Parallel Kinematic Machines*, Milan, Italie, pp. 23–35. 2

Wu, Y. et Wu, A., 2000, *Taguchi Methods for Robust Design*, ASME Press, New York. 1.2, 1.3.2

Yu, J.-C. et Ishii, K., 1998, "Design for Robustness Based on Manufacturing Variation Patterns," *ASME Journal of Mechanical Design* 120, pp. 196–202. 1.5

Zhang, C. et Wang, H.-P., 1998, "Robust Design of Assembly and Machining Tolerance Allocations," *IIE Transactions* 30, pp. 17–29. 3.3.1, 3.4

Zhang, G. et Porchet, M., 1993, "Some New Developments in Tolerance Design in CAD," *Advances in Design Automation DE* 66, no. 2. 3.4

Zhu, J. et Ting, K., 2001, "Performance Distribution Analysis and Robust Design," *ASME Journal of Mechanical Design* 123, pp. 11–17. 1.5, 3, 3.2, 3.4.1

Publications personnelles

Revues internationales avec comité de lecture

[**1**] Caro, S., Wenger, P., Bennis, F., Chablat, D., « *Sensitivity Analysis of Delta-Linear Manipulators* », ASME Journal of Mechanical Design, soumis en 1re lecture le 15 novembre 2004, accepté pour publication le 1er avril 2005.

[**2**] Caro, S., Bennis, F., Wenger, P., « *Tolerance Synthesis of Mechanisms : A Robust Design Approach* », ASME Journal of Mechanical Design, Vol.127, pp. 86-94, January 2005.

Conférences internationales avec comité de lecture et publication des actes

[**1**] Caro, S., Wenger, P., Bennis, F., « *Robustness Study of Generic and Non-Generic 3R Positioning Manipulators* » , Proceedings of the American Society of Mechanical Engineers (ASME) 29th Biennial Mechanisms and Robotics Conference, Long Beach, California, USA, Sept.24-28, 2005, DETC2005-84903.

[**2**] Caro, S., Bennis, F., Wenger, P., Chablat, D., « *Sensitivity Analysis of the Orthoglide, a 3-DOF Translational Parallel Kinematic Machine* » , Proceedings of the American Society of Mechanical Engineers (ASME) 28th Biennial Mechanisms and Robotics Conference, Salt-Lake City, Utah, USA, Sept. 28 to Oct. 2, 2004, DETC2004-57379, ISBN : 0-7918-3742-1.

[**3**] Caro, S., Bennis, F., Wenger, P., « *Tolerance Synthesis of Mechanisms: A Robust Design Approach* », Proceedings of the ASME 2003 Design Engineering Technical Conferences, Chicago, Illinois USA, Sept.2-6, 2003, DETC2003/DAC-48737.

[**4**] Caro, S., Bennis, F., Wenger, P., « *Robust Design and Tolerance Synthesis of Mechanisms* », Proceedings of the CIRP Design Seminar 2003, Grenoble, France, May.12-14.

[**5**] Chablat, D., Wenger, P., Caro, S., and Angeles, J., « *The Isoconditioning Loci of Pla-*

nar Three-Dof Parallel Manipulators », Proceedings of the ASME 2002 Design Engineering Technical Conferences, Montreal, Canada, Sept.29 - Oct.2, DETC2002/MECH-34268, CD-ROM ISBN 0-7918-3603-7.

[**6**] Chablat, D., Caro, S., Wenger, P., and Angeles, J., « *The Isoconditioning Loci of Planar Three-DOF Parallel Manipulators* », 4e Conférence Internationale sur la Conception et la Fabrication Intégrée en Mécanique, IDMME, Clermont-Ferrand, France, Mai, 2002.

Conférences nationales avec comité de lecture et publication des actes

[**1**] Bouleti, J., Caro, S., Angeles, J., « *A Introduction to Globally Robust Design Using Complexity-Based Rules* », 2nd CDEN International Conference on Design Education, Innovation and Practice, Kananaskis, Alberta, Canada, July 18-20, 2005.

[**2**] Caro, S., Bennis, F., Wenger, P., « *Comparison of Robustness Indices and Introduction of a Tolerance Synthesis Method for Mechanisms* », 20th Canadian Congress of Applied Mechanics, CANCAM 2005, McGill University, Department of Mechanical & Manufacturing Engineering, Montreal, Canada, May 30th to June 2nd.

[**3**] Caro, S., Bennis, F., Wenger, P., « *Conception Robuste et Synthèse de Tolérances de Mécanismes* », 8e colloque national AIP PRIMECA, La Plagne, France, 31 mars, 1er et 2 avril 2003.

[**4**] Bennis, F., Wenger, P., Caro, S., « *Etat de l'art de la Conception Robuste de Mécanismes* », Journée AIP-PRIMECA sur les méthodes non déterministes en conception intégrée, ENS de Cachan, France, 31 janvier 2002.

Contribution à un ouvrage collectif

[**1**] Caro, S., Chablat, D., Wenger, P., and Angeles, J., « *The Isoconditioning Loci of Planar Three-Dof Parallel Manipulators* », In: G. Gogu, D. Coutellier, P. Chedmail and P. Ray (Editors), Recent Advances in Integrated Design and Manufacturing in Mechanical Engineering, Kluwer Academic Publisher, 2003, ISBN 1-4020-1163-6, pp.129-138.

A Modèle simplifié de l'Orthoglide et synthèse des tolérances des limites articulaires

A.1 Paramétrage du manipulateur 135
A.1.1 Géométrie du manipulateur 136
A.1.2 Modèle Géométrique Inverse 137
A.1.3 Modèle Géométrique Direct 137
A.2 Performances au sein de l'espace de travail 138
A.2.1 Analyse de la matrice jacobienne cinématique 138
A.2.2 Les propriétés du manipulateur selon Q_1Q_2 139
A.3 Calcul des limites articulaires 140
A.3.1 Au moyen du conditionnement numérique de **J** 141
A.3.2 Au moyen des facteurs d'amplification de vitesse 141
A.4 Synthèse de tolérances des limites articulaires 142
A.4.1 Synthèse de tolérances au moyen du conditionnement de **J** 143
A.4.2 Synthèse de tolérances au moyen des facteurs d'amplification de vitesse 144

Cette annexe présente un paramétrage et une mise en équations simplifiés du manipulateur Orthoglide. Par ailleurs, une méthode est introduite pour calculer les limites des articulations prismatiques. Enfin, les tolérances de ces limites articulaires sont calculées de telle façon que l'erreur des indices de performances cinématiques n'excède pas 10%.

A.1 Paramétrage du manipulateur

L'ensemble opérationnel de l'Orthoglide est symétrique par rapport aux axes x, y, z. Ainsi, l'étude cinématique de la conception peut être réduite à celles des points appartenant à l'axe Q_1Q_2, la bissectrice du premier octant, (Chablat et Wenger, 2003).

A.1.1 Géométrie du manipulateur

Soit $\mathbf{p} = (p_x,p_y,p_z)$ les coordonnées de l'effecteur dans l'espace cartésien et $\boldsymbol{\rho} = (\rho_x,\rho_y,\rho_z)$ celles des articulations prismatiques. L est la longueur principale des parallélogrammes. Par convention, le point de coordonnées $\mathbf{p}_0 = (0,0,0)$ correspond à l'intersection des droites qui portent les articulations prismatiques. Les coordonnées des articulations prismatiques sont égales à $\boldsymbol{\rho} = (L,L,L)$ lorsque l'effecteur se trouve dans cette position (cf. figures A.1 et A.2).

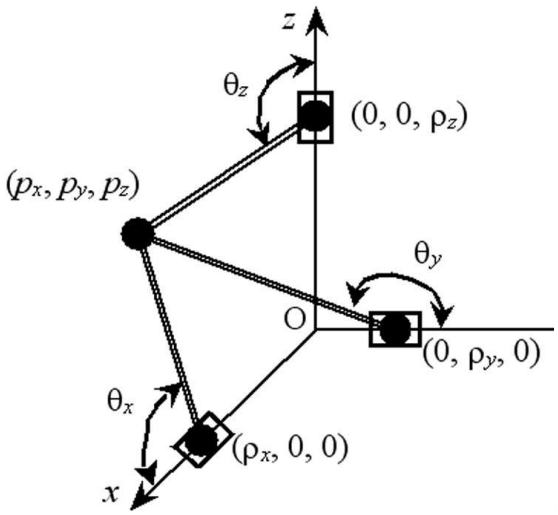


figure A.1 – *Modèle simplifié de l'Orthoglide*

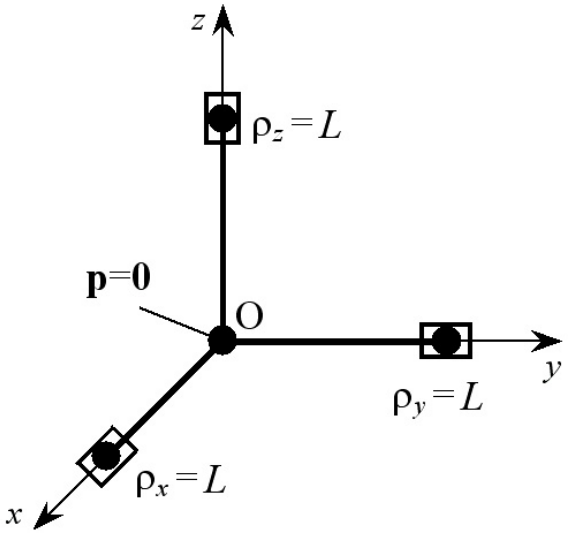


figure A.2 – *Posture zéro de l'Orthoglide*

Par ailleurs, les articulations prismatiques sont bornées pour des raisons pratiques et technologiques :

$$0 < \rho_x \leqslant 2L \tag{A.1a}$$
$$0 < \rho_y \leqslant 2L \tag{A.1b}$$
$$0 < \rho_z \leqslant 2L \tag{A.1c}$$

Les relations entre les variables articulaires et les coordonnées cartésiennes de l'effecteur sont les suivantes :

$$(p_x - \rho_x)^2 + p_y^2 + p_z^2 = L^2 \tag{A.2a}$$
$$p_x^2 + (p_y - \rho_y)^2 + p_z^2 = L^2 \tag{A.2b}$$
$$p_x^2 + p_y^2 + (p_z - \rho_z)^2 = L^2 \tag{A.2c}$$

A.1.2 Modèle Géométrique Inverse

Nous déduisons le Modèle Géométrique Inverse du manipulateur des équations (A.2a) à (A.2c).

$$\rho_x = p_x + s_x\sqrt{L^2 - p_y^2 - p_z^2} \tag{A.3a}$$
$$\rho_y = p_y + s_y\sqrt{L^2 - p_x^2 - p_z^2} \tag{A.3b}$$
$$\rho_z = p_z + s_z\sqrt{L^2 - p_x^2 - p_y^2} \tag{A.3c}$$

où s_x,s_y,$s_z = \pm 1$ caractérisent les différentes configurations du manipulateur et dépendent des signes de $\rho_x - p_x$, $\rho_y - p_y$ et $\rho_z - p_z$. Ces configurations sont représentées par la figure A.1 où θ_x, θ_y, θ_z sont les angles entre les barres et les articulations prismatiques. Nous montrons aisément que $s_x = s_y = s_z = 1$ lorsque les angles (θ_x, θ_y, $\theta_z \in [90°,180°]$. Par ailleurs les configurations pour lesquelles un des angles θ_q, $q \in (x,y,z)$, est égal à 90° sont singulières sérielles. Il est aussi évident que les équations (A.2a) à (A.2c) donnent huit solutions au modèle géométrique inverse.

A.1.3 Modèle Géométrique Direct

Les solutions au Modèle Géométrique Direct du manipulateur sont exprimées de la manière suivante :

$$p_x = \frac{\rho_x}{2} + \frac{T}{\rho_x} \tag{A.4a}$$
$$p_y = \frac{\rho_y}{2} + \frac{T}{\rho_y} \tag{A.4b}$$
$$p_z = \frac{\rho_z}{2} + \frac{T}{\rho_z} \tag{A.4c}$$

où T est une variable scalaire auxiliaire et permet d'écrire le modèle géométrique du manipulateur sous forme quadratique :

$$AT^2 + 2BT + C = 0 \tag{A.5}$$

les coefficients A, B, C ayant pour valeurs :

$$A = (\rho_x\rho_y)^2 + (\rho_x\rho_z)^2 + (\rho_y\rho_z)^2 \tag{A.6a}$$
$$B = (\rho_x\rho_y\rho_z)^2/2 \tag{A.6b}$$
$$C = \left(\rho_x^2 + \rho_y^2 + \rho_z^2 - 4L^2\right)(\rho_x\rho_y\rho_z)^2/4 \tag{A.6c}$$

Les solutions au modèle géométrique direct du manipulateur sont ainsi les racines de l'équation de l'équation (A.5). Il faut cependant faire attention au calcul de ces racines. D'après Angeles (2002), il ne faut pas calculer les racines de l'équation (A.5) en utilisant

la forme standard des solutions d'une équation quadratique. Il est préférable d'utiliser une approche robuste pour éviter l'annulation d'une des racines lorsque $B^2 \gg AC$, qui conduirait à une racine nulle erronée. A cet effet, nous calculons dans un premier temps la racine ayant la plus grande valeur absolue appelée :

$$T_1 = \frac{-B - sign(B)\sqrt{B^2 - AC}}{A} \tag{A.7}$$

où $sign(B) = 1$ si $B > 0$ et $sign(B) = -1$ si $B < 0$. Dans le cas où $B = 0$, les deux racines de l'équation quadratique sont symétriques.

$$T_{12} = \frac{\pm\sqrt{-AC}}{A} \tag{A.8}$$

Dans le cas où $B \neq 0$, la seconde racine est calculée de la façon suivante :

$$T_2 = \frac{C}{AT_1} \tag{A.9}$$

Nous pouvons remarquer que la solution pour laquelle $B^2 = AC$ correspond à une configuration singulière parallèle, les parallélogrammes sont parallèles à un même plan et le manipulateur est *plat*.

A.2 Performances au sein de l'espace de travail

Dans cette partie, nous allons voir que l'étude cinématique du manipulateur sur son ensemble opérationnel peut être réduite à l'étude du comportement du manipulateur selon un axe, appelé Q_1Q_2.

A.2.1 Analyse de la matrice jacobienne cinématique

Comme le montre la figure A.3, l'ensemble opérationnel exempt de singularité de l'Orthoglide est la sphère de rayon L, de centre $P_0(0,0,0)$ et bornée par les singularités parallèles plates, dans le premier octant. Ces propriétés sont définies à partir de la matrice jacobienne cinématique du manipulateur, dont l'expression analytique de son inverse est la suivante :

$$\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{p},\boldsymbol{\rho}) = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{p_y}{p_x - \rho_x} & \dfrac{p_z}{p_x - \rho_x} \\ \dfrac{p_x}{p_y - \rho_y} & 1 & \dfrac{p_z}{p_y - \rho_y} \\ \dfrac{p_x}{p_z - \rho_z} & \dfrac{p_y}{p_z - \rho_z} & 1 \end{pmatrix} \tag{A.10}$$

■

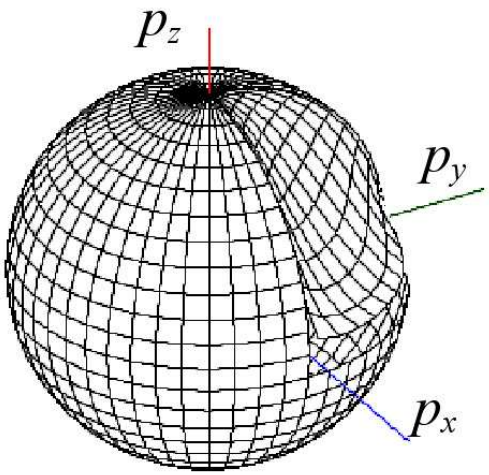


figure A.3 – *Partie de l'ensemble opérationnel exempt de singularité*

L'expression analytique du déterminant de la matrice jacobienne découle de l'équation (A.10).

$$\det\left(\mathbf{J}^{-1}\right) = \frac{p_x\rho_y\rho_z + \rho_x p_y\rho_z + \rho_x\rho_y p_z - \rho_x\rho_y\rho_z}{(p_x-\rho_x)(p_y-\rho_y)(p_z-\rho_z)} \tag{A.11}$$

Cette expression nous permet de trouver les configurations singulières sérielles et parallèles du manipulateur, i.e. celles qui annulent le déterminant de $\mathbf{J}$ et celles qui le font tendre vers l'infini, respectivement.

D'après l'équation (A.10), il est évident que la configuration isotrope est atteinte lorsque l'effecteur P du manipulateur se situe en $P_0(0,0,0)$ puisque la matrice jacobienne cinématique est la matrice identité en ce point.

A.2.2 Les propriétés du manipulateur selon Q_1Q_2

L'ensemble opérationnel du manipulateur est symétrique par rapport aux axes x, y, z. L'analyse des propriétés cinématiques du manipulateur peut ainsi être réduite à l'étude selon l'axe Q_1Q_2, la bissectrice du premier octant de l'ensemble opérationnel. Les coordonnées cartésiennes de l'effecteur et les coordonnées articulaires sont identiques le long de cet axe. Soit $p = p_x = p_y = p_z$ et $\rho = \rho_x = \rho_y = \rho_z$ les coordonnées cartésiennes de l'effecteur et les coordonnées articulaires le long de cet axe, respectivement. L'expression de la matrice jacobienne inverse est ainsi la suivante :

$$\mathbf{J}^{-1}(\chi) = \begin{pmatrix} 1 & \chi & \chi \\ \chi & 1 & \chi \\ \chi & \chi & 1 \end{pmatrix} \tag{A.12}$$

■

où χ est un scalaire adimensionnel, dont l'expression est la suivante :

$$\chi = -\frac{p}{\sqrt{L^2 - 2p^2}} \tag{A.13}$$

Par ailleurs, les coordonnées cartésiennes et articulaires le long de Q_1Q_2 sont exprimées en fonction de χ :

$$p = -\frac{\chi L}{\sqrt{1 + 2\chi^2}} \tag{A.14}$$

$$\rho = -\frac{(1-\chi)L}{\sqrt{1 + 2\chi^2}} \tag{A.15}$$

Comme le montre la figure A.4, la direction Q_1Q_2 comprend des points singuliers de nature différente. P_1, P_2, P_3 correspondent à des configurations singulières parallèles alors que P_4 correspond à une configuration singulière sérielle. D'après Paskevitch *et al.* (2005), la

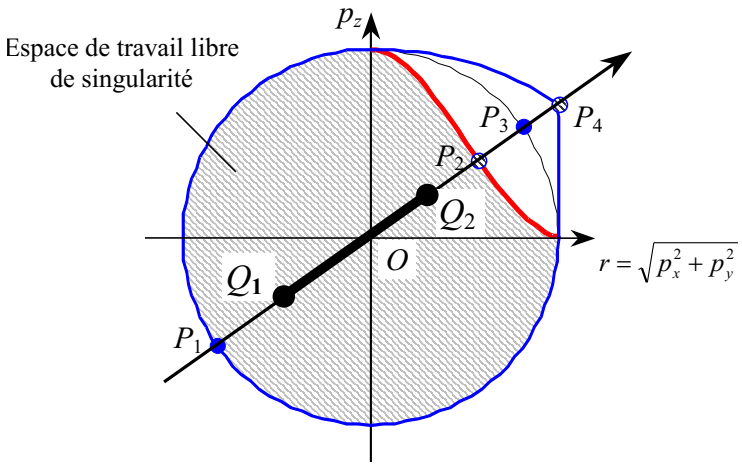


figure A.4 – *Espace de travail selon la direction* Q_1Q_2

portion de la direction de Q_1Q_2 libre de configuration singulière est celle pour laquelle $\chi \in [-0{,}5; 1]$. Les intervalles de p et ρ correspondant sont $[-L/\sqrt{3}; L/\sqrt{6}]$ et $[0; L\sqrt{3/2}]$, respectivement. Dans cette région, la relation entre les coordonnées p et ρ est monotone.

A.3 Calcul des limites articulaires

Les limites articulaires sont calculées en utilisant la technique Q-axis présentée par Paskevitch *et al.* (2005). Cette méthode consiste à définir deux points Q_1 et Q_2 sur une ligne bissectrice de l'espace de travail. Il est évident que le segment $[Q_1Q_2]$ doit comprendre le point isotrope O et les performances cinématiques aux points Q_1 et Q_2 doivent être similaires. Deux critères d'évaluation de la dextérité du manipulateur sont ici proposés pour calculer

ses limites articulaires : le conditionnement de la matrice jacobienne cinématique et les facteurs d'amplification de vitesse. Par ailleurs, l'étude est menée pour une longueur des parallélogrammes unitaire, i.e. $L = 1$.

A.3.1 Au moyen du conditionnement numérique de J

Le conditionnement numérique $\kappa(\mathbf{J})$ de la matrice jacobienne cinématique évalue la distance des configurations du manipulateur aux singularités. Ce conditionnement est le ratio de la plus grande valeur singulière sur la plus petite valeur singulière de la matrice jacobienne cinématique ou encore le rapport des longueurs des grands et petits axes de l'ellipsoïde de manipulabilité. D'après l'équation (A.12), le conditionnement numérique de la matrice jacobienne cinématique de l'Orthoglide atteint sa valeur optimale en $O(0,0,0)$ où il est égal à 1. Ailleurs, sa valeur est toujours supérieure à 1. Les limites articulaires sont calculées à partir de l'inégalité suivante :

$$\kappa\left(\mathbf{J}^{-1}(\rho)\right) \leqslant \delta \tag{A.16}$$

où δ est la limite supérieure de cet indice de performance définie par le concepteur.

L'expression analytique du conditionnement numérique de la matrice jacobienne cinématique est la suivante :

$$\kappa\left(\mathbf{J}(\chi)\right) = \begin{cases} 1 + \dfrac{3\chi}{1-\chi} & \text{lorsque} \quad \chi \in]0,1[\\ 1 - \dfrac{3\chi}{1+2\chi} & \text{lorsque} \quad \chi \in]-\dfrac{1}{2},0[\end{cases} \tag{A.17}$$

Les expressions de χ_1 et χ_2, bornes de χ, sont déduites de l'équation (A.17) :

$$\chi_1 = -(\delta - 1)(2\delta + 1) \tag{A.18a}$$

$$\chi_2 = (\delta - 1)(\delta + 2) \tag{A.18b}$$

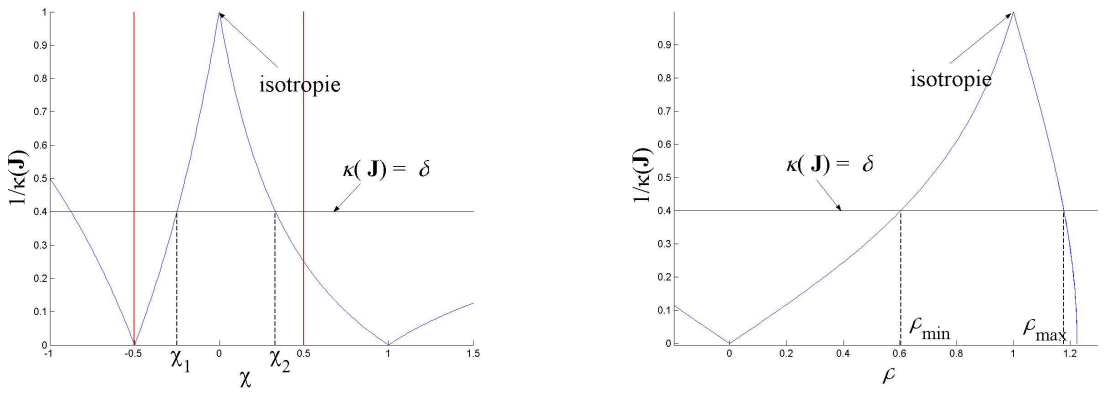
Les évolutions du conditionnement inverse de la matrice jacobienne cinématique en fonction de χ et de ρ sont représentées par les figures A.5(a) et A.5(b), respectivement.

A.3.2 Au moyen des facteurs d'amplification de vitesse

Les facteurs d'amplification de vitesse évaluent le rapport entre la vitesse de l'effecteur du manipulateur et la vitesse du point correspondant dans l'ensemble articulaire. Par exemple, le facteur d'amplification de vitesse d'un mouvement de direction $\mathbf{e}$ en un point P de coordonnées $\mathbf{p}$ est donné par l'équation suivante :

$$\lambda(\mathbf{p},\mathbf{e}) = \|\mathbf{J}(\mathbf{p})^{-1}\mathbf{e}\|^{-1} \tag{A.19}$$

■



(a) *fonction de* χ (b) *fonction de* ρ

figure A.5 – *Conditionnement numérique inverse de la matrice jacobienne cinématique*

avec $\mathbf{e}^T\mathbf{e} = 1$. Ce facteur est borné par les valeurs singulières minimale et maximale de $\mathbf{J}$.

Les limites articulaires peuvent ainsi être calculées à partir de l'inégalité suivante :

$$\lambda_{min} \leqslant \lambda(\rho,\mathbf{e}) \leqslant \lambda_{max} \ , \ \forall \rho \in [\rho_{min}; \rho_{max}] \ , \ \forall \mathbf{e} : \|\mathbf{e}\| = 1 \tag{A.20}$$

où $\lambda(\rho,\mathbf{e})$ est le facteur d'amplification de vitesse le long de la direction Q_1Q_2 et λ_{min}, λ_{max}, sont les spécifications de conception données par le cahier des charges, $\lambda_{min} \leqslant 1 \leqslant \lambda_{max}$.

$\lambda_1 = 1 + 2\chi$ et $\lambda_2 = \lambda_3 = 1 - \chi$ sont les valeurs singulières de la matrice jacobienne cinématique. Connaissant les bornes des facteurs d'amplification de vitesse, λ_{min} et λ_{max}, l'intervalle de variations de χ toléré est $[\chi_1, \chi_2]$, tel que :

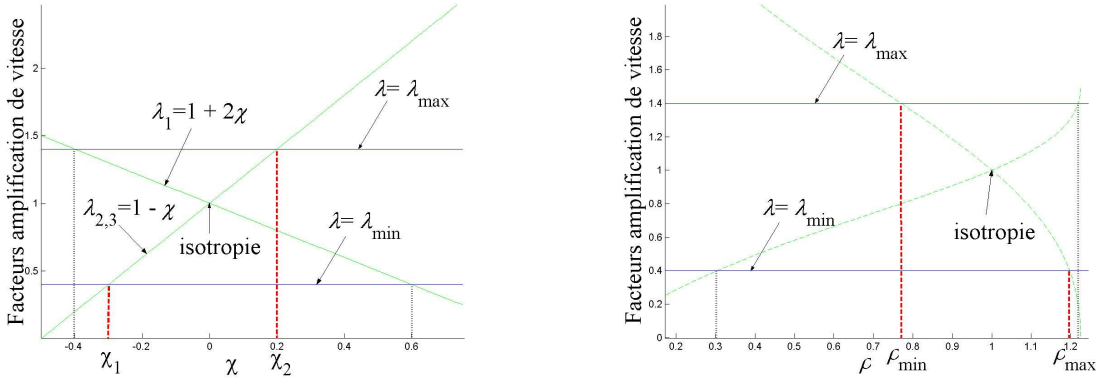
$$\chi_1 = \max\left\{1 - \lambda_{max} \ , \ \frac{\lambda_{min} - 1}{2}\right\} \tag{A.21a}$$

$$\chi_2 = \min\left\{1 - \lambda_{min} \ , \ \frac{\lambda_{max} - 1}{2}\right\} \tag{A.21b}$$

Les évolutions des facteurs d'amplification de vitesse de la matrice jacobienne cinématique en fonction de χ et de ρ sont représentées par les figures A.6(a) et A.6(b), respectivement.

A.4 Synthèse de tolérances des limites articulaires

Comme indiqué dans la partie précédente, les limites articulaires peuvent être calculées en fonction des indices de performances cinématiques. Les variations des limites articulaires n'ont cependant pas été prises en compte. Les variations des limites articulaires peuvent en effet modifier les limites des indices de performances désirées. Par ailleurs, les varia-



(a) *fonction de* χ (b) *fonction de* ρ

figure A.6 – *Facteurs d'amplification de vitesse*

tions des limites articulaires n'ont pas nécessairement les mêmes influences. D'après la figure A.5(b), une variation de la limite articulaire ρ_{max} aura plus d'influence sur la limite δ du conditionnement numérique de la matrice jacobienne cinématique qu'une même variation de la limite articulaire ρ_{min}. Ainsi, connaissant l'erreur tolérée des limites des indices de performances cinématiques, il est possible de calculer les tolérances optimales des limites articulaires.

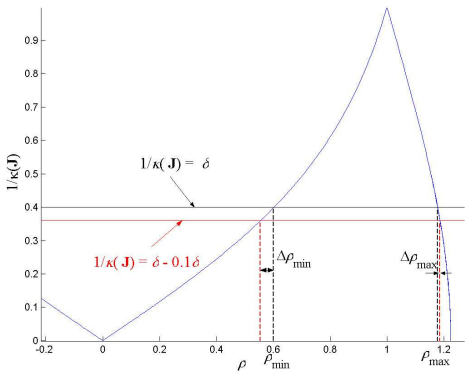
A.4.1 Synthèse de tolérances au moyen du conditionnement de J

Problématique : En considérant que la limite du conditionnement numérique inverse de la matrice jacobienne cinématique soit égale à 0,4, i.e. $1/\delta = 0{,}4$ et qu'une erreur de 10% est tolérée sur cette limite, quelles sont les tolérances optimales à allouer aux limites articulaires ?

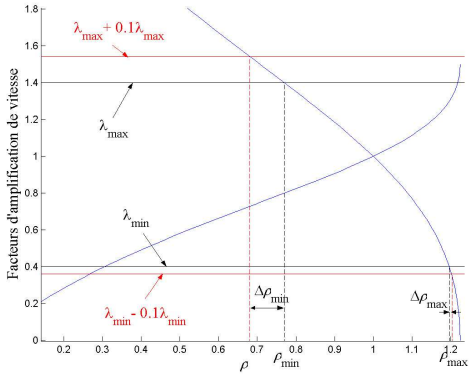
Les équations () et () permettent de calculer les valeurs de χ pour lesquelles le conditionnement numérique inverse est égal à δ. Les valeurs de ρ sont ensuite calculées à l'aide de l'équation (A.15). En outre, les tolérances des limites articulaires sont déduites des valeurs de ρ pour lesquelles le conditionnement numérique est égal à $\delta - 0{,}1\delta$. D'après la figure A.7(a), les tolérances à allouer aux limites articulaires pour une valeur de $1/\delta$ de 0,4 sont égales à :

$$\Delta\rho_{min} = 4{,}29\% \quad \text{(A.22a)}$$

$$\Delta\rho_{max} = 0{,}76\% \quad \text{(A.22b)}$$



(a) *au moyen du conditionnement numérique de la matrice jacobienne cinématique*



(b) *au moyen des facteurs d'amplification de vitesse*

figure A.7 – *Synthèse des tolérances des limites articulaires*

A.4.2 Synthèse de tolérances au moyen des facteurs d'amplification de vitesse

Problématique : En considérant que les facteurs d'amplification de vitesse soient compris entre 0,4 et 1,4 et qu'une erreur de 10% est tolérée sur ces limites, quelles sont les tolérances optimales à allouer aux limites articulaires ?

Les équations (A.21a) et (A.21b) permettent de calculer les valeurs de χ limitant le domaine dans lequel les facteurs d'amplification de vitesse sont compris entre 0,4 et 1,4. Les limites des articulations prismatiques correspondantes sont calculées en utilisant l'équation (A.15). D'après la figure A.7(b), les tolérances optimales des limites articulaires sont égales à :

$$\Delta\rho_{min} = 8{,}78\% \tag{A.23a}$$

$$\Delta\rho_{max} = 0{,}58\% \tag{A.23b}$$

En conclusion, quel que soit l'indice de performance choisi, la tolérance à allouer à la limite articulaire maximale est plus faible que celle à allouer à la limite articulaire minimale.

B Conditions d'isotropie du manipulateur $2R$

Cette annexe vise a présenter les conditions d'isotropie du manipulateur $2R$ représenté par la figure B.1. Les équations des coordonnées de l'effecteur du manipulateur en fonction

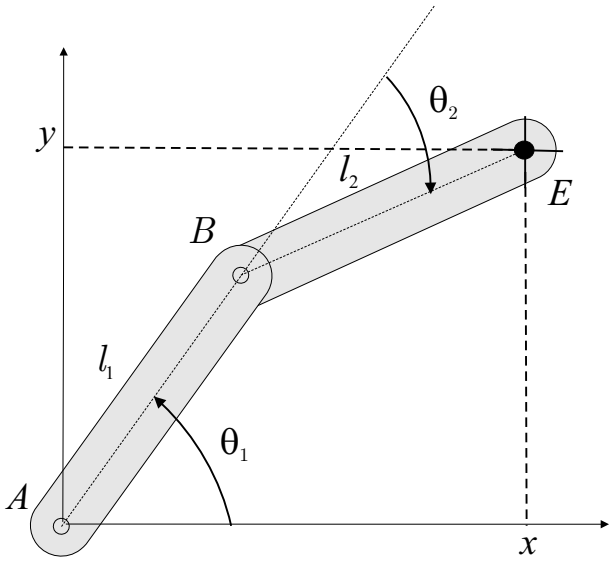


figure B.1 – *Manipulateur* $2R$

des longueurs l_1 et l_2 de ses barres sont les suivantes :

$$x = l_1 \cos(\theta_1) + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \tag{B.1a}$$

$$y = l_1 \sin(\theta_1) + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \tag{B.1b}$$

L'expression de la matrice jacobienne cinématique du manipulateur est ainsi :

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} -l_1 \sin(\theta_1) - l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) & -l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ l_1 \cos(\theta_1) + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) & l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{pmatrix} \tag{B.2}$$

Nous en déduisons l'expression de ses valeurs singulières minimale et maximale, i.e. σ_1 et σ_2 :

$$\begin{aligned}\sigma_1^2 &= l_2^2 + l_1 l_2 \cos(\theta_2) + \frac{l_1^2}{2} \\ &\quad -\frac{1}{2}\sqrt{4l_2^4 + 8l_2^3 l_1 \cos(\theta_2) + 8l_2^2 l_1^2 \cos(\theta_2) + 4l_2 l_1^3 \cos(\theta_2) + l_1^4}\end{aligned} \tag{B.3}$$

$$\begin{aligned}\sigma_1^2 &= l_2^2 + l_1 l_2 \cos(\theta_2) + \frac{l_1^2}{2} \\ &\quad +\frac{1}{2}\sqrt{4l_2^4 + 8l_2^3 l_1 \cos(\theta_2) + 8l_2^2 l_1^2 \cos(\theta_2) + 4l_2 l_1^3 \cos(\theta_2) + l_1^4}\end{aligned} \tag{B.4}$$

Le conditionnement numérique de la matrice jacobienne cinématique est minimal lorsque $\sigma_1 = \sigma_2$, i.e. lorsque le terme sous la racine carrée des équations (B.3) et (B.4) est nul. Ce terme est nul lorsque :

$$\cos(\theta_2) = \frac{-\frac{l_2^2}{2} - \frac{l_1^2}{4} - \frac{1}{4} I(-2l_2^2 + l_1^2)}{l_1 l_2} \tag{B.5}$$

D'après l'équation (B.5), $\cos(\theta_2)$ est réel si et seulement si :

$$l_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} l_1 \tag{B.6}$$

et sa valeur est égale à $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, i.e. $\theta_2 = \pm\frac{3\pi}{4}$.
En définitive, le manipulateur $2R$ présente une infinité de configurations isotropes cinématiques. Il est isotrope lorsque le ratio $\frac{l_2}{l_1}$ est égal à $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et l'angle de la deuxième articulation rotoïde égal à $\pm\frac{3\pi}{4}$. La figure représente ainsi une configuration isotrope cinématique du manipulateur $2R$.

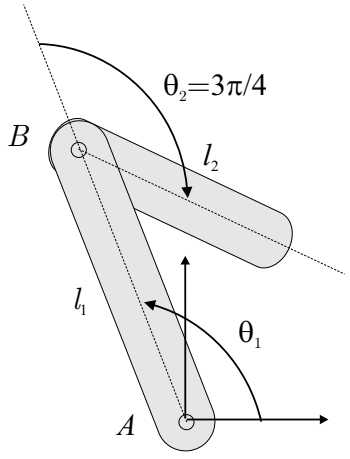


figure B.2 – *Une configuration isotrope cinématique du manipulateur 2R*

CONCEPTION ROBUSTE DE MÉCANISMES

Les travaux présentés dans cette thèse portent sur l'étude de la robustesse de la conception de mécanismes. Ses principales contributions résident dans la détermination d'un indice de robustesse, le développement de deux méthodes d'analyse de sensibilité pour les manipulateurs d'architecture parallèle de type Delta-Linéaire, la formulation d'une procédure de synthèse de tolérances et l'étude de la robustesse d'une famille de manipulateurs d'architecture sérielle génériques et non-génériques à trois degrés de liberté. Le mémoire est ainsi divisé en quatre chapitres. Le premier chapitre est consacré à une énumération des propriétés générales des mécanismes étudiés, à une étude bibliographique de la conception robuste et à la formulation d'un problème de conception robuste. Le deuxième chapitre traite de l'analyse de sensibilité de l'Orthoglide, manipulateur d'architecture parallèle de type Delta-Linéaire à trois degrés de liberté de translation. L'étude permet de connaître la sensibilité de la situation de l'effecteur du manipulateur aux variations de ses paramètres géométriques et de repérer les configurations pour lesquelles cette sensibilité est minimale et maximale. Le troisième chapitre présente un indice de robustesse optimal pour les mécanismes étudiés et une procédure de synthèse de tolérances dimensionnelles décomposée en deux étapes séquentielles. Par ailleurs, ils sont illustrés par plusieurs études de cas, notamment un amortisseur et un manipulateur d'architecture parallèle. Finalement, le quatrième chapitre décrit une étude de la robustesse d'une famille de manipulateurs d'architecture sérielle à trois degrés de liberté. Cette étude vise à identifier les corrélations entre les notions de robustesse et de généricité. A cet effet, différentes notions de la robotique sont exploitées, telles que la parcourabilité, la précision et la dextérité d'un manipulateur. Il s'avère que la généricité d'un manipulateur n'a pas d'influence sur ses performances cinématiques, ni sur la sensibilité de la position de son effecteur aux variations de ses paramètres géométriques.

Mots-clés : Conception Robuste, Manipulateurs Parallèles, Manipulateurs Sérielles, Analyse de Sensibilité, Synthèse de Tolérances, Généricité, Parcourabilité, Précision, Dextérité, Isotropie.

ROBUST DESIGN OF MECHANISMS

This thesis deals with the study of the robustness of mechanisms. Its principal contributions lie in the determination of a robustness index, the development of two sensitivity analysis methods for Parallel Kinematic Machines (PKM) of Delta-Linear type, the formulation of a tolerance synthesis procedure, and the robustness study of a family of generic and non-generic manipulators with three degrees of freedom. The report is thus divided into four chapters. The first chapter is devoted to a listing of the general properties of the studied mechanisms, to a state of the art of robust design, and to the formulation of a robust design problem. The second chapter deals with the sensitivity analysis of the Orthoglide, a PKM of Delta-Linear type with three degrees of freedom of translation. The study allows us to know the sensitivy of the pose of the end-effector of the manipulator to the variations in its geometrical parameters. Moreover, it highlights the configurations of the manipulator for which this sensitivity is a minimum and a maximum. The third chapter sets out an optimal robustness index for the studied mechanisms, and a tolerance synthesis procedure composed of two sequential stages. In addition, they are illustrated by several case studies, from a shock absorber to a PKM. Finally, the fourth chapter describes the robustness study of a family of generic and non-generic manipulators with three degrees of freedom. It aims at identifying the correlations between the concepts of robustness and genericity. For that matter, various robotic notions are exploited, such as the path feasibility, the accuracy, and the dexterity of a manipulator. It turns out that the genericity of a manipulator does not affect either its kinematic performances or the sensitivity of the position of its effector to the variations in its geometrical parameters.

Keywords : Robust Design, Parallel Kinematic Machines, Serial Manipulators, Sensitivity Analysis, Tolerance Synthesis, Genericity, Path Feasibility, Accuracy, Dexterity, Isotropy.

Discipline : Sciences de l'Ingénierie