



**HAL**  
open science

## Sur la commande des systèmes non linéaires à dynamique hybride

Sid Ahmed Attia

► **To cite this version:**

Sid Ahmed Attia. Sur la commande des systèmes non linéaires à dynamique hybride. Automatique / Robotique. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG, 2005. Français. NNT: . tel-00082495

**HAL Id: tel-00082495**

**<https://theses.hal.science/tel-00082495>**

Submitted on 28 Jun 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE

N° attribué par la bibliothèque

□□□□□□□□□□

**THÈSE**

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE L'INPG**

**Spécialité : Automatique - Productique**

préparée au Laboratoire d'Automatique de Grenoble

dans le cadre de l'École Doctorale

■Électronique, Électrotechnique, Automatique, Télécommunications, Signal■

présentée et soutenue publiquement

par

**Sid Ahmed ATTIA**

le 02 Décembre 2005

**SUR LA COMMANDE DES SYSTÈMES NON LINÉAIRES À DYNAMIQUE  
HYBRIDE**

Directeurs de thèse : M. Mazen ALAMIR

M. Carlos CANUDAS DE WIT

**JURY**

M. J. DELLA DORA

M. H. GUÉGUEN

M. C. IUNG

M. M. ALAMIR

M. C. CANUDAS DE WIT

M. O. MALER

Professeur à INPG Grenoble

Professeur Supélec Rennes

Professeur INPL Nancy

Chargé de recherche CNRS

Directeur de recherche CNRS

Directeur de recherche CNRS

Président

Rapporteur

Rapporteur

Directeur de thèse

Co-encadrant

Examineur



# Remerciements

Cette thèse a été préparée au Laboratoire d'Automatique de Grenoble durant la période allant du 1<sup>er</sup> Octobre 2002 au 2 Décembre 2005.

Mes sincères remerciements vont particulièrement à mon encadrant Monsieur Alamir, ce chercheur aux qualités exceptionnelles aussi bien professionnelles qu'humaines, a su durant toutes les années passées au Laboratoire me motiver, me guider m'encourager et m'accompagner. Grâce à sa disponibilité, sa patience et sa clairvoyance j'ai pu surmonter certains moments difficiles qui me paraissaient insurmontable.

Je remercie mon co-encadrant Monsieur Canudas de Wit pour m'avoir intégré dans son équipe dont les réunions ont servi à élargir ma vision.

Mes sincères remerciements, au Président Della Dora malgré la charge qui lui incombe, il a répondu présent à notre invitation, aux rapporteurs Messieurs Lung et Guéguen pour avoir accepté d'évaluer mon travail, leurs critiques pertinentes ont permis d'améliorer la qualité du manuscrit.

Mes remerciements à Monsieur Maler d'avoir accepté d'examiner ce travail, de m'avoir intégré dans l'équipe participante au projet CC et pour toutes les discussions inter culturelles qu'on a pu avoir.

Je tiens aussi à remercier l'équipe technique et administrative du LAG pour leur disponibilité, vous faites de l'excellent travail.

Mes remerciements vont aussi à mes collègues du bureau B257d Khaled, Hassan, et tous les stagiaires qui sont passés, la liste est trop longue. Je remercie Emmanuel pour l'aide qu'il m'a apporté durant toutes ces années, entre nous s'est établie une relation fraternelle. Mes remerciements à tous mes collègues Bilal, Fadi, Idir, Belkacem, Hakim pour être ce qu'ils sont. A Mourad, Sid Ali et Houari pour les weekends qu'on a passé ensemble.

Je remercie mes parents, mon père pour ces conseils et sa patience, ma mère pour ses sacrifices et son amour, mes frères et sœurs pour leurs encouragements, ma belle famille tout spécialement ma belle sœur Fatima une femme courageuse qui a toujours répondu présente.

A ma femme Leila, merci pour ton amour, ton coaching, merci d'avoir supporté mes coups de gueules et d'avoir cru en moi. Je dédie ce travail à l'être qui sommeille dans tes entrailles.



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction générale</b>	<b>17</b>
<b>2</b>	<b>Définition et exemples de systèmes hybrides</b>	<b>19</b>
2.1	Introduction . . . . .	19
2.2	Exemples de phénomènes hybrides . . . . .	20
2.2.1	Stabilisation des systèmes par commutation . . . . .	21
2.2.2	Non unicité des trajectoires en temps inverse . . . . .	23
2.2.3	Phénomène de Zeno . . . . .	26
2.2.4	Système impulsif . . . . .	27
2.2.5	Stabilité des systèmes à commutations . . . . .	30
2.3	Modélisation des systèmes hybrides . . . . .	31
2.3.1	Exemples de modélisation formelle . . . . .	33
2.4	Modélisation des systèmes à commutations . . . . .	34
2.5	Conclusions . . . . .	37
<b>3</b>	<b>Algorithmes de commande optimale</b>	<b>39</b>
3.1	Panorama des méthodes existantes . . . . .	39
3.2	Les systèmes à commutations sans contraintes . . . . .	42
3.2.1	Formulation du problème . . . . .	42
3.3	Algorithme de commande optimale basée sur les variations fortes . . . . .	46
3.3.1	Résultats de convergence . . . . .	50
3.4	Les systèmes à commutations avec contraintes . . . . .	51
3.4.1	Discussion sur l'impact des contraintes . . . . .	51
3.5	Applications . . . . .	57
3.5.1	Exemple académique . . . . .	58
3.5.2	Commande en vitesse d'un véhicule automobile . . . . .	64
3.5.2.1	Formulation du problème de commande . . . . .	65
3.5.2.2	Implémentation . . . . .	66
3.6	Conclusions et Perspectives . . . . .	70

<b>4</b>	<b>Commande prédictive</b>	<b>71</b>
4.1	Introduction à la commande prédictive . . . . .	71
4.2	Commande Prédictive des systèmes à commutations . . . . .	74
4.2.1	Modélisation des systèmes à commutations . . . . .	74
4.2.2	Complexité d'une Approche Prédictive Aveugle . . . . .	76
4.3	Formulation de L'approche prédictive . . . . .	76
4.4	Exemples d'applications . . . . .	78
4.4.1	Exemple académique . . . . .	78
4.4.2	Stabilisation de l'équation de Kuramoto-Sivashinsky . . . . .	82
4.4.2.1	La physique du problème . . . . .	82
4.4.2.2	L'architecture de commande . . . . .	85
4.4.2.3	Approximation de l'équation KSE . . . . .	87
4.4.2.4	Les contrôleurs locaux . . . . .	89
4.4.2.5	Résultats de simulation . . . . .	91
4.5	Conclusions et Perspectives . . . . .	99
<b>5</b>	<b>Stabilisation des tensions</b>	<b>101</b>
5.1	Introduction . . . . .	101
5.2	Présentation des Benchmarks . . . . .	105
5.2.1	Benchmark simplifié . . . . .	105
5.2.2	Benchmark de petite taille . . . . .	108
5.2.3	Benchmark de taille moyenne . . . . .	108
5.3	Analyse de l'effondrement de tension . . . . .	110
5.3.1	Analyse statique . . . . .	111
5.3.2	Analyse dynamique . . . . .	114
5.4	Stabilisation des benchmarks . . . . .	116
5.4.1	Approche basée sur une stratégie de commutation . . . . .	116
5.4.1.1	Résultats de simulation . . . . .	125
5.4.2	Approche prédictive . . . . .	128
5.4.2.1	Benchmark de petite taille . . . . .	128
5.4.2.2	Benchmark de taille moyenne . . . . .	138
5.4.2.3	L'approche proposée . . . . .	138
5.4.2.4	La commande prédictive . . . . .	140
5.4.2.5	Résultats de simulation . . . . .	145
5.5	Conclusions et perspectives . . . . .	150
<b>6</b>	<b>Conclusion générale</b>	<b>151</b>
<b>A</b>	<b>Preuve de la proposition 3</b>	<b>153</b>

*TABLE DES MATIÈRES*

7

**B Anatomie d'un Blackout**

**157**





# Table des figures

2.1	Automate temporisé commandant l'oscillateur . . . . .	22
2.2	L'évolution des états sous la logique de commutation sur la figure 2.1 . . . . .	23
2.3	Evolution de la fonction d'énergie $V$ . Une décroissance par palier est à constater	23
2.4	L'indice des états de l'automate en fonction du temps . . . . .	24
2.5	La commande appliquée à l'oscillateur . . . . .	24
2.6	Non unicité des trajectoires pour l'exemple (2.7)-(2.8) . . . . .	25
2.7	Trajectoire du ballon . . . . .	27
2.8	Système à deux bacs . . . . .	28
2.9	Evolution des niveaux dans les bacs . . . . .	29
2.10	Evolution en fonction du temps de la fonction de Lyapunov . . . . .	29
2.11	L'évolution des états du système à commutations . . . . .	32
2.12	Evolution de la fonction de Lyapunov $V_{i(t)}$ . . . . .	32
2.13	Exemple d'exécution de l'automate hybride . . . . .	33
3.1	Exemple de dynamique discrète contrainte d'un système à commutations . . . . .	52
3.2	La stratégie de commutation, l'entrée continue et les états du système. Une méthode d'optimisation aveugle aurait nécessité l'exploration d'un arbre de plus de $3^{65}$ éléments. . . . .	59
3.3	Indice de performance, $\mu^j$ et $\ u^j - u^{j-1}\ $ . La valeur finale du paramètre $\mu^j$ et le terme quadratique satisfont aux conditions du corollaire 2. . . . .	59
3.4	La stratégie de commutation, entrée continue et les états du système pour le cas où la transition du nœud 1 au nœud 3 est interdite (voir figure 3.2). Cette interdiction est contournée par un passage rapide par la configuration 2, la transition $1 \rightarrow 3$ est contournée par les transitions successives $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$ . L'activité de la commande continu a aussi augmenté (comparer avec la figure 3.2) . . . . .	61
3.5	La stratégie de commutation, entrée continue et les états du système pour le cas où la configuration 2 est éliminée. Les performances restent bonnes par rapport au cas où toutes les configurations sont présentes (comparer avec 3.2). . . . .	62

3.6	La stratégie de commutation, entrée continue et les états du système pour le cas où la configuration 3 est éliminée. Les performances sont très médiocres par rapport au cas où toutes les configurations sont présentes (comparer avec 3.2). Ceci motive la désignation de cette configuration comme critique à ce système à commutations. . . . .	62
3.7	La stratégie de commutation, entrée continue et les états du système pour le cas où un temps de résidence minimal de $10h$ est spécifié. L'indice de performance réalisé est de 1.637. . . . .	63
3.8	Structure du véhicule automobile . . . . .	64
3.9	La fonction 3D décrivant le couple comme une fonction de la vitesse du moteur et la position de la pédale d'accélération . . . . .	66
3.10	La fonction $g_1$ . . . . .	66
3.11	La fonction $g_2$ . . . . .	67
3.12	Positions du levier de vitesse et les transitions possibles . . . . .	67
3.13	La stratégie de commutation, entrée continue et les états du système pour le cas où toutes les configuration sont accessibles. Remarquons les pics d'accélération avant le passage de vitesse typique d'une conduite conseillée. . . . .	68
3.14	Résultats de convergence de l'algorithme. . . . .	68
3.15	La poursuite de la trajectoire imposée. Remarquons que les courbes sont confondues, en pointillé est la trajectoire initiale. . . . .	69
4.1	Schéma général d'une commande prédictive . . . . .	72
4.2	Exemple de dynamique discrète d'un système à commutations . . . . .	76
4.3	Evolution de l'indice de performance en fonction de l'horizon de prédiction (indice calculée sur un temps de simulation de 3 sec) . . . . .	80
4.4	Stratégie de commutation et l'évolution des états pour $N_{pr} = 4$ et $\mathcal{E} = \mathcal{Q} \times \mathcal{Q}$ , $T_s = 0.05$ sec . . . . .	81
4.5	Stratégie de commutation et l'évolution des états pour $N_{pr} = 4$ et $\mathcal{E} = \mathcal{Q} \times \mathcal{Q}$ , $T_s = 0.01$ sec . . . . .	82
4.6	Schéma des quatre régimes ondulatoires d'un film s'écoulant à partir d'une fente et leur correspondant spectre provenant de sonde statique ( $\omega$ étant la fréquence d'onde). Pour des valeurs de $R$ ( $R > 50$ ), la région <i>III</i> peut ne pas être présente. Source [31] . . . . .	84
4.7	Architecture de contrôle, Multi Configuration Multi Actionneurs . . . . .	86
4.8	Actionneur avec étendu quasi ponctuel . . . . .	87
4.9	Estimation de la région d'attraction du point d'équilibre correspondant à une configuration $q$ fixe . . . . .	91
4.10	L'architecture de contrôle . . . . .	93

4.11	Profil spatiotemporel, modèle du 30 <sup>me</sup> obtenu par la méthode de Galerkin. Le profil correspond au cas où aucune action n'est exercée sur le système. . . . .	94
4.12	Profil spatiotemporel pour le cas où la première configuration est active. Les oscillations sont entretenues bien que le contrôleur local soit actif voir tableau 4.3 pour l'emplacement des actionneurs. . . . .	94
4.13	Profil spatiotemporel pour le cas où la seconde configuration est active. Les oscillations sont entretenues malgré l'utilisation du contrôleur local. . . . .	94
4.14	Profil spatiotemporelle pour le cas où la troisième configuration est active. . . . .	94
4.15	portrait de phase du système réduit aux modes instables avec les estimés des régions d'attraction <b>sans la commande prédictive</b> . Les conditions initiales sont prises en dehors des régions d'attraction, voir figures 4.12-4.14 pour les profils spatiotemporels correspondant . . . . .	95
4.16	Profil spatiotemporel pour le système à commutations avec un <b>horizon de prédition</b> $N_{pr} = 1$ . Cette figure est à comparer avec les figures 4.12-4.14. En permettant une commutation entre les configurations, le comportement oscillatoire est supprimé malgré le fait que <b>les conditions initiales soient en dehors des régions d'attraction</b> , voir figure 4.15 . . . . .	95
4.17	portrait de phase du système réduit aux modes instables avec les régions d'attraction estimées sous l'approche prédictive avec $N_{pr} = 1$ . Les conditions initiales sont celles sur la figure 4.15, voir aussi figure 4.16 pour le profil spatiotemporel correspondant . . . . .	96
4.18	Les entrées du système à commutations pour l'horizon de prédition $N_{pr} = 1$ . Cela correspond à la réponse tracée sur la figure 4.16. . . . .	96
4.19	La stratégie de commutation pour l'horizon de prédition $N_{pr} = 1$ , voir le profil spatiotemorel correspondant sur la figure 4.16 . . . . .	97
4.20	Portraits avec l'approche proposée pour différentes conditions initiales prises en dehors des régions d'attraction. La courbe externe en pointillé représente un estimé numérique de la région d'attraction sous la stratégie de commutation. Il est à noter l'élargissement du bassin d'attraction. . . . .	97
4.21	portrait de phase du système réduit aux modes instables pour le cas avec et sans l'approche prédictive de commutation, pour le cas où la condition initiale est à l'intérieur des regions d'attraction (pour le cas de cette figure la troisième configuration est active). On peut remarquer que même pour ce cas, la commutation apporte une amélioration des performances i.e., la trajectoire avec commutation est moins longue que celle sans. . . . .	98
5.1	Le benchmark simplifié . . . . .	106
5.2	Dynamique du contrôleur OLTC . . . . .	107
5.3	Le benchmark de petite taille . . . . .	109

5.4	Le benchmark de taille moyenne . . . . .	110
5.5	L'élément réseau de transmission dans le benchmark de taille moyenne . . .	111
5.6	Valeur propre du modèle linéarisé en fonction du paramètre $X$ . . . . .	113
5.7	Diagramme de Bifurcation . . . . .	113
5.8	Effondrement de tension côté charge, $\bar{u} = (1\ 0\ 0)$ et $X = X_f = 0.5$ . . . . .	115
5.9	Interpretation dans le plan de phase de l'effondrement de tension, $\bar{u} = (1\ 0\ 0)$ et $X = X_f = 0.5$ . . . . .	115
5.10	La fonction hysteresis telle qu'appliquée à la fonction candidate $V$ . . . . .	121
5.11	Exemple illustratif de l'évolution de la fonction de Lyapunov candidate en l'absence d'hystérésis. . . . .	122
5.12	Exemple illustratif de l'évolution de la fonction de Lyapunov candidate en présence d'hystérésis. Remarquons la réduction des oscillations due à l'intro- duction de la dynamique d'hystérésis. . . . .	122
5.13	Réseau électrique en boucle fermée. <b>CDPE</b> : Calcul Des Points Équilibre. <b>CNL</b> : Commande Non Linéaire. <b>TDC</b> : Table De Correspondance. <b>LDC</b> : Logique De Commutation. . . . .	124
5.14	Cas nominal, tension côté charge et l'état interne. . . . .	125
5.15	Cas nominal, l'entrée du réseau électrique . . . . .	125
5.16	Réponse de la tension et de l'état pour un cas défavorable. Remarquons que l'établissement de la tension se fait vers 1900 <i>sec</i> . Ce cas correspond à un scénario nettement plus difficile que le cas nominal, comparer avec la figure 5.14. . . . .	126
5.17	L'entrée du réseau dans un des cas les plus défavorables. Remarquons le dé- lestage de charges effectué en régime transitoire. . . . .	126
5.18	Évolution de la fonction de Lyapunov candidate pour le scénario dont la ten- sion et l'état sont tracés sur la figure 5.16. Remarquons la décroissance par palier correspondante à l'élimination de la charge qui est faite aux premiers instants voir figure 5.17. . . . .	127
5.19	Evolution de la fonction de Lyapunov candidate pour le cas nominal de la figure 5.14. Remarquons l'efficacité de la stratégie à faire décroître cette fonc- tion, ceci est réalisé en activant une valeur de la capacité supérieur à la valeur nominale (d'après défaut) aux instants où cette fonction est supérieur à $\epsilon_2 = 2$ et l'activation de la valeur nominale lorsqu'elle est inférieur à $\epsilon_1 = 1$ voir figure 5.10 et figure 5.15. . . . .	127
5.20	Tensions en régime permanent aux bus en fonction de la réactance. $v_2$ : plein, $v_3$ : trait discontinu et $v_4$ : pointillé . . . . .	128
5.21	Tension côté charge en fonction de la capacité et le relais de délstage de charge (en défaut) . . . . .	129

5.22	Tensions aux bus et les états internes pour un horizon de prédiction $N_p = 1$ . Cette valeur de l'horizon est visiblement trop faible pour capturer la dynamique du système. . . . .	135
5.23	L'allure des commandes pour un horizon de prédiction $N_p = 1$ . . . . .	135
5.24	Tensions aux bus et les états internes pour un horizon de prédiction $N_p = 5$ .	135
5.25	L'allure des commandes pour un horizon de prédiction $N_p = 5$ . . . . .	135
5.26	Tensions aux bus et les états internes pour un horizon de prédiction $N_p = 10$ , $n(0) = 0.8$ . . . . .	136
5.27	L'allure des commandes pour un horizon de prédiction $N_p = 10$ , $n(0) = 0.8$ .	136
5.28	Le temps maximal de calcul en fonction de l'horizon de prédiction $N_p$ . . . .	137
5.29	Tensions aux bus et les états internes pour un horizon de prédiction $N_p = 5$ et un retard de 110 sec . . . . .	137
5.30	L'allure de la commande pour $N_p = 5$ et un retard de 110 sec . . . . .	137
5.31	La boucle de contrôle local pour la mise à jour de la tension de référence . .	139
5.32	L'algorithme de recherche, en gris : nœuds générés. En noir : n œuds gagnants	145
5.33	L'effondrement de tension en boucle ouverte sous le défaut (0 1 2) . . . . .	147
5.34	Tensions dans le réseau avec la commande prédictive sous le défaut (0 1 2) .	147
5.35	Allure de la commande sous l'approche prédictive et pour le défaut (0 1 2) .	147
5.36	Tensions dans le réseau avec la commande prédictive sous le défaut (1 2 1) .	148
5.37	Allure de la commande sous l'approche prédictive et pour le défaut (1 2 1) .	148
5.38	Tensions dans le réseau avec la commande prédictive sous le défaut (2 1 0) .	148
5.39	Allure de la commande sous l'approche prédictive et pour le défaut (2 1 0) .	148
5.40	Tensions dans le réseau avec la commande prédictive sous le défaut (1 1 1) .	149
5.41	Allure de la commande sous l'approche prédictive et pour le défaut (1 1 1) .	149
5.42	Tensions dans le réseau avec la commande prédictive sous le défaut (0 2 1) .	149
5.43	Allure de la commande sous l'approche prédictive et pour le défaut (0 2 1) .	149
B.1	Les périmètres de contrôle et les conseils constituant la NERC . . . . .	160
B.2	Coordinateurs de sûreté de fonctionnement . . . . .	160
B.3	La ligne Star-South Canton . . . . .	160



# Liste des tableaux

3.1	Indice de performance pour différentes condition initiales sur les configurations	60
3.2	Identification des nœuds critiques . . . . .	63
3.3	Paramètres du modèle . . . . .	64
3.4	Les gains pour le passage de vitesses . . . . .	65
3.5	Comparaison en termes de performance, temps d'exécution, entre le cas où des contraintes sont présentes et le cas sans. . . . .	68
4.1	L'indice de performance pour le cas où différentes transitions sont prohibés .	80
4.2	Comparaison entre l'approche exhaustive et celle proposée . . . . .	81
4.3	Les différentes configurations et l'emplacement des actionneurs . . . . .	92
5.1	Les valeurs possibles des couples $(b, k)$ . . . . .	118
5.2	Comparaison entre une recherche exhaustive et l'approche proposée . . . . .	144





# Chapitre 1

## Introduction générale

*There is two kind of persons those who do the work and those who take the merit. Try to be in the first category, there is less competition there.*

-Ghandi

Cette thèse est consacrée au développement d'algorithmes de complexité réduite pour la commande des systèmes hybrides commutés. Des applications aussi diverses que l'automobile, la mécanique des fluides et les réseaux électriques sont traitées. Des schémas généraux de résolution de problèmes de commande optimale et prédictive sont proposés. Le souci permanent et la principale motivation est dans chaque méthode la réduction de la complexité et la combinatoire souvent associées à ces systèmes.

La thèse est structurée en quatre chapitres

Au chapitre 1, les propriétés et les difficultés inhérentes aux systèmes hybrides sont montrées à travers d'exemples provenant de domaines très variés. La classe des systèmes à commutations est ensuite définie comme une sous classe du formalisme générale des systèmes hybrides.

Le chapitre 2 est consacré à la commande optimale des systèmes à commutations. On rappelle que pour la classe des systèmes à commutations non contraints (toutes les configurations sont accessibles), le Principe du Minimum peut être utilisé pour caractériser la solution optimale. C'est dans cette optique, qu'un algorithme basé sur le concept des variations fortes est développé et des résultats de convergence démontrés. Le cas où des contraintes sur les configurations atteignables sont présentes est discuté (dans ce cas la dynamique discrète est décrite par un automate), la conclusion est que la caractérisation utilisée perd toute interprétation. L'algorithme peut être vu dans ce cas comme un simple outil de synthèse. La complexité du schéma est linéaire dans le nombre de configurations, ce qui le rend attractif pour des applications de grande dimension. Un modèle d'un véhicule automobile est utilisé pour illustrer cette approche.

Dans le chapitre 3, la commande en boucle fermée des systèmes à commutations autonomes est étudiée. L'objectif est d'extraire une séquence de commutations qui minimise un indice de performance. Pour cela, une paramétrisation simple des séquences de configurations est proposée. Cette paramétrisation est ensuite utilisée dans un schéma de commande prédictive pour les systèmes où une boucle de commande locale est déjà intégrée. Il peut s'agir de processus critiques où le concepteur n'a le droit que de commuter entre les configurations afin d'améliorer un indice de performance. L'architecture est utilisée pour évaluer une stratégie de commutation entre actionneurs visant à stabiliser un fluide s'écoulant le long d'une paroi.

Le chapitre 4 est consacré aux travaux réalisés dans le cadre du projet européen *Control & Computation*. Dans ce contexte, plusieurs schémas de commande sont étudiés afin de stabiliser des benchmarks de réseaux électriques proposés par un partenaire industriel. En se basant sur le benchmark le plus simple, les mécanismes d'effondrement des tensions dans les réseaux électriques sont tout d'abord analysés. Un schéma basé sur l'utilisation d'une fonction de Lyapunov est ensuite développé pour stabiliser ce système. Le second benchmark plus complexe a nécessité la synthèse algorithmique d'une loi de commande stabilisante. Une commande prédictive avec une paramétrisation réduite de la commande en boucle ouverte est utilisée avec succès à cet effet. La troisième approche plus générique consiste en une commande prédictive à laquelle est adjointe une méthode de recherche combinatoire et des schémas de commande locale, rendant ainsi la stratégie extensible à des réseaux pouvant contenir jusqu'à une dizaine de bus. Tous les benchmarks proposés dans le contexte du projet *C&C* ont été résolus.

# Chapitre 2

## Définition et exemples de systèmes hybrides

*Nous vivons trop dans les livres et pas assez dans la nature.*

-Anatole France, Le jardin d'Epicure

### 2.1 Introduction

L'étude analytique des comportements dynamiques mixtes continus-discrets remonte aux travaux pionniers de Witsenhausen [136]. A l'époque, Witsenhausen s'est intéressé aux problèmes variationnels posés par les systèmes commandés par relais. Le modèle qu'il proposa resta rudimentaire et n'inclua que des commutations autonomes i.e., initiés par l'évolution de l'état continu. Plus de vingt ans après, motivé d'une part par la nécessité de trouver un formalisme pour une classe de systèmes complexes [54] et d'autre part par l'expansion que connaît l'automatique (principalement les systèmes en réseaux, voir par exemple [128, 145, 61]), un regain d'intérêt est manifesté à l'égard des modèles hybrides.

Plusieurs formalismes ont ainsi vu le jour, chacun adapté et motivé par une classe donnée de problèmes, voir par exemple les travaux de Brockett, Tavernini [25, 126] et les travaux de Branicky [21] où un modèle unificateur est proposé. Branicky a répertorié et inclut tous les comportements d'intérêt pour des applications en ingénierie dans son modèle. Ces comportements peuvent être classifiés brièvement en

- Commutations autonomes : il s'agit de transitions se produisant entre plusieurs représentations (configurations) du système. Ces transitions sont initiées par l'évolution de l'état continu, et peuvent être accompagnées de saut sur l'état i.e., la valeur finale de l'état dans une configuration peut être différente de la condition initiale dans la configuration suivante.

- Commutations forcées : il s’agit de transitions initiées par une autorité externe. Ces transitions peuvent être contraintes e.g., le passage entre la seconde et la troisième vitesse d’une voiture peut être initié si et seulement si la vitesse est dans une certaine plage, et/ou peuvent être accompagnées d’un saut sur l’état.
- Changement de dimension : les espaces d’état et de contrôle peuvent dépendre de la configuration. Ceci conjointement à des commutations autonomes peuvent être utilisés afin de modéliser les défauts et l’accommodation aux défauts dans les systèmes dynamiques.

Après les travaux en [23], tous les modèles proposés dans la littérature sont plus au moins équivalents en termes de représentativité des phénomènes. Néanmoins, il existe des formalismes plus adaptés à certaines classe de problèmes, en exemple, est l’automate hybride formulé en termes d’invariants pour les problèmes spécifiques d’atteignabilité voir, e.g., [87].

Le présent chapitre consiste en une brève introduction aux systèmes hybrides. L’ambition n’est nullement de répertorier tous les modèles disponibles, mais de donner un aperçu général de la richesse de ces systèmes. L’organisation du chapitre est comme suit :

Dans la section 2.2, plusieurs exemples de phénomènes hybrides sont répertoriés. Il s’agit de donner une vision globale des problèmes et difficultés rencontrées pour cette classe de système. La section 2.3 est consacrée à une définition plus formelle des systèmes hybrides. Afin d’illustrer la généralité du modèle, les exemples traités dans la section précédente sont écrit dans ce formalisme. Dans la section 2.4, est défini une sous classe importante des systèmes hybrides qu’est la classe des systèmes à commutations. D’un point de vue ingénierie, cette classe inclut certains convertisseurs statiques de l’électronique de puissance, certains réseaux de transport d’énergie et informatiques ... Le formalisme général des systèmes hybrides est simplifié et réécrit d’une manière compacte pour cette classe. Finalement, quelques conclusions sont rapportées dans la dernière section.

## 2.2 Exemples de phénomènes hybrides

Plusieurs phénomènes intrigant ont été répertoriés dans la littérature des systèmes hybrides. Dans les paragraphes suivants, quelques comportements pathologiques n’ayant pas d’équivalents dans la théorie des systèmes continus/discrets sont brièvement étudiés.

Dans le premier exemple, en faisant intervenir un contrôleur hybride, il s’agit principalement de contourner l’impossibilité de stabiliser l’oscillateur harmonique par un retour de sortie statique (même discontinu). Un retour de sortie avec dynamique discrète est ainsi proposé en [8] afin de contourner cette constatation. D’un point de vue complexité ceci est à comparer avec les approches basée sur un retour de sortie en dimension infini [92].

Le second exemple tiré de [63] concerne l'étude de l'unicité des trajectoires et montre que l'existence d'une solution unique en temps n'implique pas nécessairement son unicité en temps inverse. Cette constatation a des conséquences remarquables sur le développement d'algorithmes de commande optimale. En effet, *le principe du Minimum* garantit l'existence d'un vecteur adjoint satisfaisant un système d'équations différentielles qui doit être intégrée en temps inverse. Cette intégration doit être effectuée avec une grande précaution surtout aux instants juste après les commutations.

Le troisième exemple [49] concerne le cas où un nombre infini de commutations se produit sur un intervalle de temps fini. Pour une classe de systèmes très simple (systèmes à dérivées constantes), la détection de tels phénomènes est connue comme un problème décidable. Sinon et le plus souvent, ces phénomènes doivent être exclus dès la phase de modélisation.

Le quatrième exemple concerne les systèmes impulsifs. Cette classe permet de modéliser un large éventail de problèmes économiques e.g., injection de fonds dans le capital d'une entreprise, et biologiques telle que l'extermination d'insectes par l'utilisation d'un pesticide. Un exemple d'application en ingénierie tiré de [116] est utilisé pour illustrer la difficulté inhérente à ce genre de systèmes. Le dernier exemple tiré de [40] illustre quant à lui les extensions des théories classiques de stabilité aux systèmes à commutations.

### 2.2.1 Stabilisation des systèmes par commutation

Soit l'oscillateur harmonique décrit par les équations d'état suivantes

$$\dot{\xi} = \eta \quad (2.1)$$

$$\dot{\eta} = -\xi + u \quad (2.2)$$

où  $x = (\xi \ \eta)'$  est le vecteur d'état,  $u \in \mathbb{R}$  est la commande continue, et l'équation de sortie

$$y = \xi \quad (2.3)$$

indiquant que seulement la position est mesurable.

Bien que le système (2.1)-(2.3) soit contrôlable et observable, il ne peut être stabilisé par **un retour de sortie statique**<sup>1</sup>. Soit l'automate temporel représenté sur la figure 2.1 dans lequel chaque état (repéré par un cercle) symbolise la commande à appliquer. Les transitions entre les états discrets sont conditionnées par l'évolution de la sortie. Pour éviter

---

<sup>1</sup>Cette affirmation peut être démontrée par contradiction. Supposons l'existence d'un retour de sortie stabilisant  $k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , soit la fonction d'énergie suivante associée à l'oscillateur  $V(\xi, \eta) = \eta^2 - \int_0^\xi (-\rho + k(\rho)) d\rho$  qui est constante le long des trajectoires ( $\dot{V} \equiv 0$ ) et puisque par supposition toutes les trajectoires convergent vers l'origine,  $V(\cdot, \cdot)$  doit être nulle ce qui est en contradiction avec  $V(0, 1) = 1$

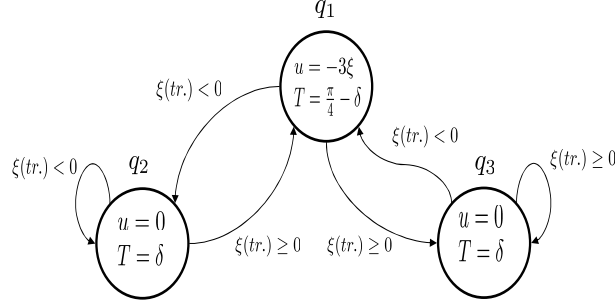


FIG. 2.1 – Automate temporisé commandant l'oscillateur

toute complication dans la notation  $\xi(tr.)$  symbolise la sortie à l'instant de transition et  $T = \delta$  ( $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ ) est le temps passé dans cet état à partir de l'instant où la transition a eu lieu, (à un instant  $\tau_1$  quelconque l'automate passe à l'état  $q_2$ , un passage à l'état  $q_1$  n'est possible qu'à l'instant  $\tau_2 = \tau_1 + T = \tau_1 + \delta$  et sous la condition que  $\xi(tr.) = \xi(\tau_2) \geq 0$ ). Afin de vérifier que la logique de commutation représentée par l'automate sur la figure 2.1 stabilise l'oscillateur harmonique, la fonction d'énergie suivante est considérée

$$V(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(\xi^2(t) + \eta^2(t)) \quad (2.4)$$

aux états  $q_2$  et  $q_3$  le système ne subit aucun changement d'énergie ( $\dot{V} = 0$ ). Ces états servent à détecter le passage par zéro de la sortie  $\xi$  (passage du quadrant positive au quadrant négatif dans le cas  $q_3$ ). Pour  $u = -3\xi$  la dérivée de  $V$  le long de la trajectoire est

$$\frac{dV}{dt} = \xi(t)\dot{\xi}(t) + \eta(t)\dot{\eta}(t) = -\xi(t)\eta(t) \quad (2.5)$$

qui est strictement négative ( $V$  décroissante) si et seulement si le produit  $\xi(\cdot)\eta(\cdot)$  est strictement positif. L'automate cherche donc à détecter les instants où le produit  $\xi\eta > 0$ , l'état  $q_1$  représente dans ce cas un état dissipatif (dans le sens où une partie de l'énergie de l'oscillateur est dissipée dans cette phase). La perte d'énergie peut être quantifiée analytiquement au  $\delta$  près et est de  $3/4$  de l'énergie initiale. La conclusion est que cette énergie tend vers zéro faisant tendre par la même occasion l'état  $x$  vers l'origine. Sur les figures 2.2 et 2.3 sont tracés respectivement les états internes pour la condition initiale  $x_0 = (1 \ -1)'$ ,  $\delta = 0.01$  et le niveau d'énergie représenté par la fonction  $V$  de l'équation (2.4). Sur les figures 2.4 et 2.5 sont tracées la stratégie de commutation (plus précisément les indices  $i$  des états  $q_i$ ) ainsi que la commande  $u$  appliquée au système.

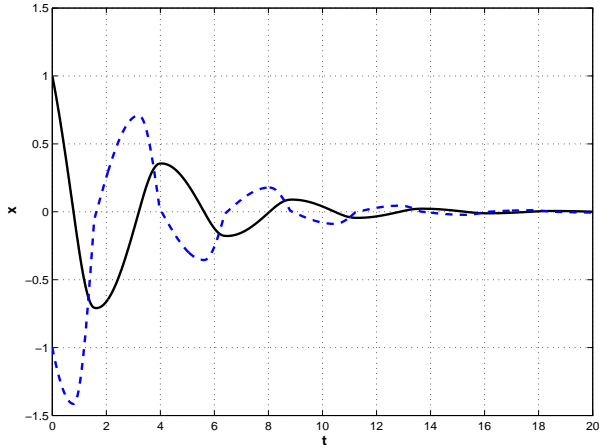


FIG. 2.2 – L'évolution des états sous la logique de commutation sur la figure 2.1

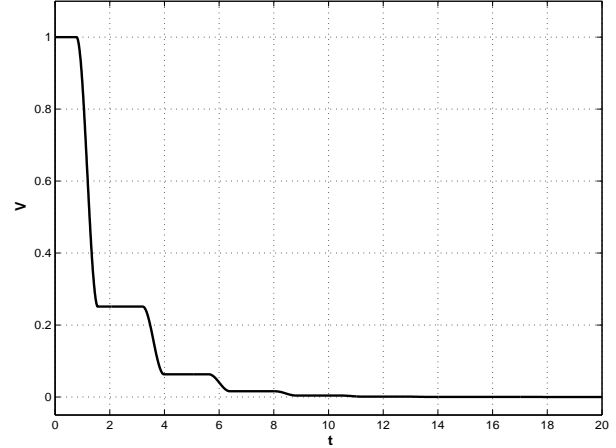


FIG. 2.3 – Evolution de la fonction d'énergie  $V$ . Une décroissance par palier est à constater

## 2.2.2 Non unicité des trajectoires en temps inverse

Soit le système décrit par la dynamique linéaire suivante

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} x \quad (2.6)$$

sur lequel est adjoint un système de saturation (*anti-windup*) limitant l'état  $x_1 \leq 0.4$ . En rajoutant cette nouvelle contrainte, le système s'écrit

$$\dot{x} = f_1(x) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} x \quad (2.7)$$

et

$$\dot{x} = f_2(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} x \quad (2.8)$$

avec les transitions de la description se déclenchant dès lors que (passage de  $f_1$  à  $f_2$ )

$$s_{12} = x_1 - 0.4 = 0$$

ou bien (passage de  $f_2$  à  $f_1$ ) lorsque

$$s_{21} = (-1 \ 2)x = 0$$

Il s'agit d'un système à commutations autonome. L'évolution des états dans le plan de phase est représentée sur la figure 2.6. Bien que le système soit autonome, en partant de la valeur



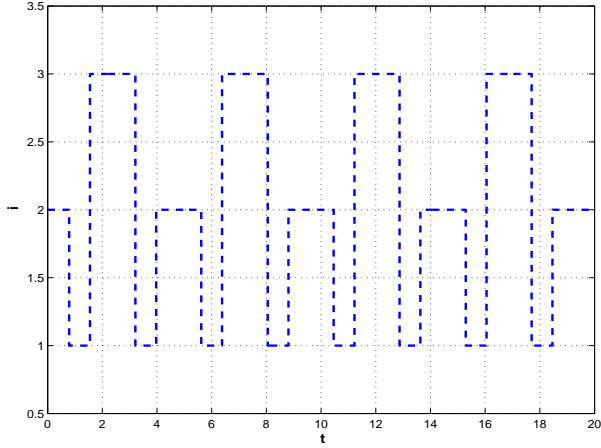


FIG. 2.4 – L'indice des états de l'automate en fonction du temps

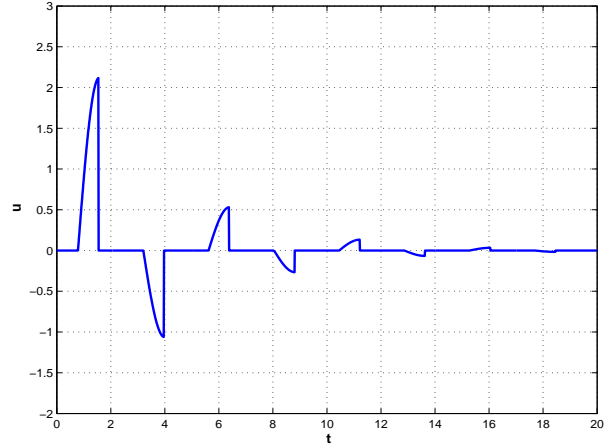


FIG. 2.5 – La commande appliquée à l'oscillateur

finale des états, la condition initiale n'est pas unique (voir figure 2.6). En effet, l'existence et l'unicité de la solution pour les systèmes de la forme suivante

$$\dot{x} = f(x), \quad x(0) = x_0 \quad (2.9)$$

avec  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  suppose particulièrement que  $f \in C^1$  i.e., continuellement différentiable, alors l'équation (2.9) admet une solution unique

$$x(t) = \phi_t(x_0) \quad (2.10)$$

de plus la solution est différentiable par rapport à  $x_0$  donnant lieu à la matrice de sensibilité  $\Phi_t(\cdot)$  suivante

$$\Phi_t(x_0) = \frac{\partial \phi_t(x_0)}{\partial x_0} \quad (2.11)$$

soit en développant  $\phi_t(\cdot)$  en série de Taylor et en négligeant les termes d'ordre élevé, on a l'approximation suivante

$$\delta x(t) \approx \Phi_t(x_0) \delta x_0 \quad (2.12)$$

en d'autres termes, la variation  $\delta x_0$  de la condition initiale se propage le long de la trajectoire du système avec un changement décrit approximativement par  $\Phi_t(\cdot)$ . Parce que  $\Phi_t(\cdot)$  n'est pas singulière, un changement  $\delta x(\cdot)$  induit par un changement  $\delta x_0$  peut être obtenu par inversion de la matrice de sensibilité, soit

$$\delta x_0 \approx \Phi_t^{-1}(x_0) \delta x(t) \quad (2.13)$$

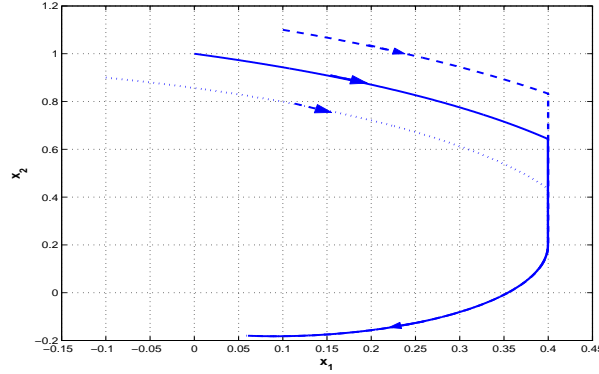


FIG. 2.6 – Non unicité des trajectoires pour l'exemple (2.7)-(2.8)

Pour la classe des systèmes envisagés comme exemple dans cette sous section, la matrice de sensibilité  $\Phi_t(\cdot)$  peut être singulière i.e., l'inversion en (2.13) n'est alors plus possible. En effet, cette classe de système peut être décrit par l'ensemble de champs de vecteurs suivant

$$\dot{x} = f_q(x), \quad q \in \mathcal{Q} \quad (2.14)$$

où  $\mathcal{Q}$  est un ensemble de cardinalité fini. Les fonctions de transition activant le passage de la description associée à l'indice  $i$  à celle associée à l'indice  $j$  est décrite par

$$s_{ij}(x) = 0 \quad (2.15)$$

Il est montré en [61] que la fonction de sensibilité est singulière si et seulement si

$$\left( \frac{\partial s_{ij}(x)}{\partial x} \right)' f_j = 0 \quad (2.16)$$

ce qui veut dire que l'état viole une condition de transversalité à l'approche de la surface  $s_{ij}(\cdot) = 0$  (voir l'exemple sur la figure 2.6). Si  $\Phi_t(\cdot)$  n'est pas inversible<sup>2</sup>, une perturbation  $\delta x(\cdot)$  ne peut être associée à une perturbation sur l'état initial  $\delta x_0$ . Ceci complique la tâche des algorithmes de commande optimale utilisant une intégration en temps inverse i.e., intégration de l'état adjoint dans les algorithmes basés sur le Principe du Minimum. Soulignons enfin le fait que cette non unicité peut se produire dans des systèmes classiques avec contraintes sur les états, mais le risque est beaucoup plus important pour la classe des systèmes hybrides.

<sup>2</sup>C'est le cas pour l'exemple sur la figure 2.6 où

$$\Phi_t(x_0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

### 2.2.3 Phénomène de Zeno

Soit un ballon jeté avec une vitesse initiale  $v_{x_0}$  d'une hauteur  $y_0$ . Le système peut être décrit par les équations

$$\ddot{x} = 0 \quad (2.17)$$

$$\ddot{y} = -g \quad (2.18)$$

$$(2.19)$$

$g$  étant la gravité. A chaque fois que le ballon touche le sol (situé à  $y = \frac{d}{2}$ ) il rebondit avec une fraction de la vitesse de contact suivant les coefficients de restitution  $\alpha_x, \alpha_y$  avec  $0 < \alpha_x \leq 1$  et  $0 < \alpha_y < 1$

$$\dot{x} = \alpha_x \dot{x}^- \quad \text{si } (y \leq d/2) \wedge (\dot{y}^- < 0) \quad (2.20)$$

$$\dot{y} = -\alpha_y \dot{y}^- \quad (2.21)$$

Les conditions initiales pour leur part s'écrivent

$$x(0) = 0, \quad y(0) = y_0 \quad (2.22)$$

$$\dot{x}(0) = v_{x_0}, \quad \dot{y}(0) = 0 \quad (2.23)$$

en intégrant le système, avant le premier contact avec le sol, les solutions s'écrivent

$$x(t) = v_{x_0} t \quad (2.24)$$

$$y(t) = y_0 - \frac{1}{2} g t^2 \quad (2.25)$$

le premier rebond ( $y = \frac{d}{2}$ ) se produit à l'instant  $t_1$  et à une distance  $x_1$  soient

$$t_1 = \sqrt{\frac{2}{g} \left( y_0 - \frac{d}{2} \right)} \quad (2.26)$$

$$x_1 = x(t_1) = v_{x_0} \sqrt{\frac{2}{g} \left( y_0 - \frac{d}{2} \right)} \quad (2.27)$$

les instants et coordonnées du  $k$ -ème impact s'écrivent

$$t_k = t_{k-1} + 2\alpha_y^{k-1} t_1 = t_1 \left( 1 + 2 \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_y^i \right) \quad (2.28)$$

$$x_k = x(t_k) = x_{k-1} + 2(\alpha_x \alpha_y)^{k-1} v_{x_0} t_1 = v_{x_0} t_1 \left( 1 + 2 \sum_{i=1}^{k-1} (\alpha_x \alpha_y)^i \right) \quad (2.29)$$

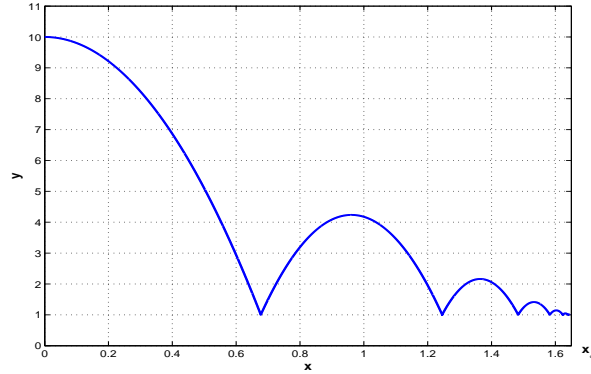


FIG. 2.7 – Trajectoire du ballon

en passant à la limite l'équation (2.28) donne

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} (t_k - t_{k-1}) = 0 \quad (2.30)$$

les instants d'impact vont s'agglomérer sur l'instant  $t_\infty = t_1 \left(1 + 2\frac{\alpha_y}{1-\alpha_y}\right)$  avec comme coordonnée  $x_\infty = v_{x_0} t_1 \left(1 + 2\frac{\alpha_x \alpha_y}{1-\alpha_x \alpha_y}\right)$ . Ce phénomène d'accumulation est communément connu sous le nom de *Zeno*<sup>3</sup>. Dans ce cas une distance finie est couverte par le ballon en un temps fini mais avec un nombre de d'impact infini (un nombre de transitions infini). Dans une simulation numérique, à partir d'un certain indice, aucune distinction ne pourra être faite entre les instants de commutations. Sur la figure 2.7 est tracée l'évolution de la trajectoire du ballon pour  $\alpha_x = 0.7$ ,  $\alpha_y = 0.6$  et  $v_{x_0} = 0.5$ . Pour ces paramètres  $t_\infty \approx 5.4$  s et  $x_\infty \approx 1.65$  ce qui se vérifie sur la figure 2.7.

### 2.2.4 Système impulsif

Soit le système à deux bacs représenté sur la figure 2.8 où la pompe située sous le bac 2 ré-alimente le bac 1. Le bac 1 peut être partiellement vidé par un système *chasse eau*. Notons par  $x_i$  la déviation par rapport au niveau d'équilibre  $x_{e_i}$  correspondant au bac  $i$ . Dès que la déviation  $x_1$  du niveau du bac 1 devient nulle le système chasse d'eau intervient en vidant partiellement le bac 1 et agit de ce fait comme un contrôleur. Le système avec son contrôleur

<sup>3</sup>Du nom du philosophe Grec Zeno de Elea qui a vécu entre 495 et 435 avant l'ère moderne. Zeno est connu pour avoir émis trois paradoxes dont le plus remarquable est le paradoxe d'Achille et la tortue.

s'écrit

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} x(t), \quad (1 \ 0) x(t) < 0 \quad (2.31)$$

$$x(t) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x(t^-), \quad (1 \ 0) x(t^-) = 0 \quad (2.32)$$

où  $x(t^-)$  représente l'état juste avant que la contrainte sur  $x_1$  ne soit active. Ce système peut se mettre sous la forme générique suivante

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t), & Cx(t) < 0 \\ x(t) = Jx(t^-), & Cx(t^-) = 0 \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (2.33)$$

il s'agit d'un système impulsif avec dynamique linéaire. Il peut être aussi vu comme un système hybride composé de deux systèmes, le premier continu et représenté par la dynamique induite par  $A$  et le second discret représenté par  $J$ .

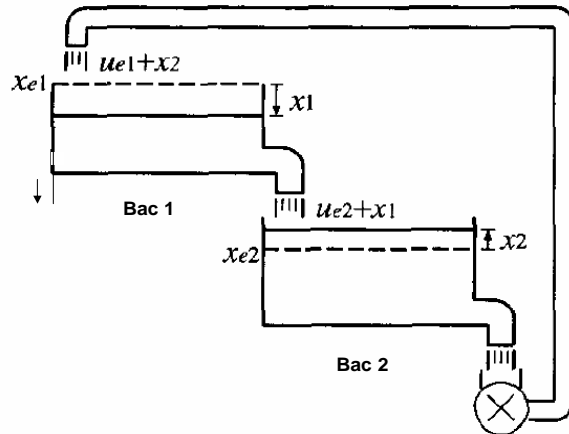


FIG. 2.8 – Système à deux bacs

Une condition suffisante pour la stabilité de ce système est l'existence d'une fonction de Lyapunov commune aux deux parties continue et discrète de la dynamique i.e., l'existence d'une matrice  $P$  de dimensions appropriées telle que

$$\begin{cases} P > \mathbf{0} \\ A'P + PA < \mathbf{0} \\ J'PJ - P < \mathbf{0} \end{cases} \quad (2.34)$$

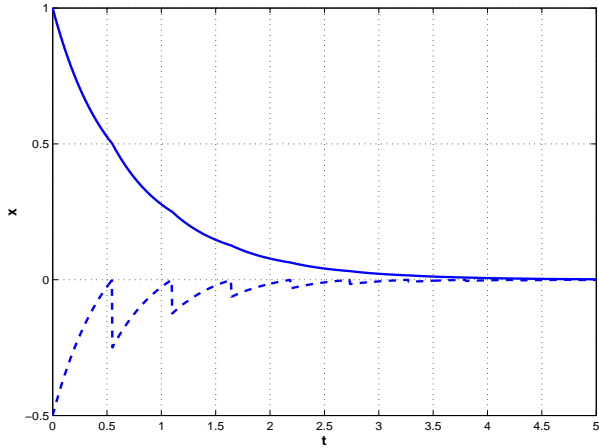


FIG. 2.9 – Evolution des niveaux dans les bacs

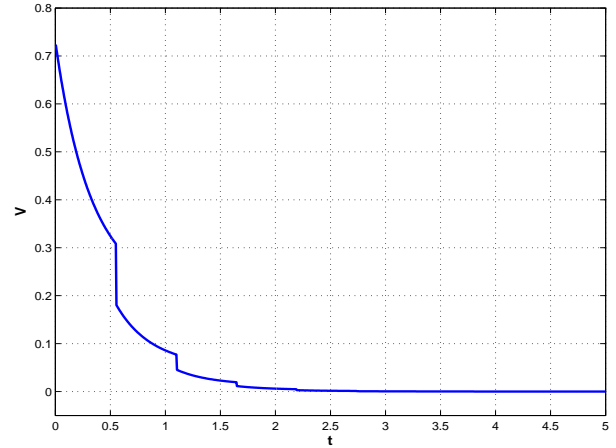


FIG. 2.10 – Evolution en fonction du temps de la fonction de Lyapunov

cette condition est très conservatrice puisqu'elle suppose que le système continu est Hurwitz stable et le système discret Schur stable<sup>4</sup>. En [116] est proposé un algorithme permettant le calcul des invariants du système en (2.33). Pour l'exemple du système à deux bacs (2.31)-(2.32), l'ensemble  $\chi$  suivant

$$\chi = \{x | (-1 \quad -0.5)x \leq 0\} \quad (2.35)$$

est invariant sous la dynamique du système et l'origine est localement asymptotiquement stable pourvu que  $x_0 \in \chi$ . La figure 2.9 représente l'évolution des niveaux pour  $x_0 =$

<sup>4</sup>Il est montré en [143] que pour la classe de systèmes hybrides normales i.e.,

$$A'A = AA'$$

et

$$J'J = JJ'$$

respectivement Hurwitz et Schur stable, le système résultant est stable quelque soit la stratégie de commutation (condition de passage entre les dynamiques). En effet la fonction  $x'x$  est une fonction de Lyapunov commune aux deux parties puisque par définition

$$A' + A < 0$$

et

$$J'J - I < 0$$

$I$  étant la matrice unité.

$(-0.5 \ 1)'$ . Sur la figure 2.10 est représentée l'évolution de la fonction de Lyapunov<sup>5</sup>. Aux instants de sauts, cette fonction subit des discontinuités dues aux sauts dans l'état  $x_1$ .

### 2.2.5 Stabilité des systèmes à commutations

Les domaines de recherche dans ce cadre peuvent être subdivisés en deux principales catégories

1. La stabilité sous une commutation arbitraire : le domaine d'investigation consiste à trouver les conditions pour lesquelles le système à commutations reste stable quelque soit la stratégie de commutation. Cette propriété est très intéressante puisqu'elle permet au concepteur de concentrer son effort sur l'amélioration des performances par exemple dans le cas d'une architecture multi contrôleurs. Les résultats concernent l'existence de fonction de Lyapunov commune e.g., [96, 79], l'étude de la stabilité des systèmes dont les écoulements de solution commutent i.e., le crochet de Lie pour les dynamiques prise deux par deux est nulle, voir e.g., [2, 88].
2. La stabilité sous une commutation contrainte : si le système à commutations n'est pas stable pour une commutation arbitraire, trouver les stratégies pour lesquelles il est asymptotiquement stable. Dans cette situation, deux cas peuvent être distingués. Le cas où les systèmes à commutations sont asymptotiquement stables et le cas où certaines dynamiques peuvent être instables. Les résultats disponibles dans la littérature concernent le premier cas voir e.g., [22, 94]. Les systèmes avec un temps de résidence minimal peuvent être aussi classés dans cette catégorie [59]. Le second cas concerne un problème de synthèse nettement plus difficile et seulement des études disparates sont disponibles [144].

Soit le système décrit par la dynamique linéaire  $\dot{x} = A_i x$  où  $i \in \{1, 2\}$  et

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 10 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1.5 & 2 \\ -2 & -0.5 \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

avec comme fonction de transition

$$s_{12}(x) = (-0.25 \ -1)x = 0 \quad (2.37)$$

$$s_{21}(x) = (0.5 \ -1)x = 0 \quad (2.38)$$

---

<sup>5</sup>Il s'agit d'une fonction calculée numériquement en [116]

$$x' \begin{pmatrix} 0.5148 & 0.6350 \\ 0.6350 & 1.2283 \end{pmatrix} x$$

les deux systèmes sont instables, les valeurs propres de  $A_1$  sont à l'origine et celles de  $A_2$  à  $0.5 \pm j\sqrt{3}$ . Sur la figure 2.11 est montré le portrait du système à commutations dans le plan de phase. Le système à commutations est stable sous la stratégie de commutation (2.37)-(2.38).

La stabilité du système à commutations peut être analysée en considérant les fonctions de Lyapunov candidates associées aux systèmes  $A_1$  et  $A_2$  soit  $V_i = x'P_i x$  et  $i \in \{1, 2\}$  avec

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0.46875 & -1.875 \\ -1.875 & 15 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1.0 & 1.2 \\ 1.2 & 1.6 \end{pmatrix} \quad (2.39)$$

des fonctions de Lyapunov quadratiques possédant une dérivée négative existent toujours sur une région bornée de l'espace, pourvue que  $A_i \neq \beta I$  avec  $\beta > 0$ . Cette propriété se vérifie pour cet exemple dans les régions de l'espace d'état où respectivement la première et la seconde dynamique sont actives. La *fonction de Lyapunov Multiple* i.e., concaténation de fonctions candidates<sup>6</sup>, tend vers zéro. Des résultats développés en [22] permettent de conclure à la stabilité. En effet aux instants de commutation, une même fonction de Lyapunov doit être décroissante i.e.,

$$V_i(x(t_{i, k})) \leq V_i(x(t_{i, k-1})) \quad (2.40)$$

où respectivement  $t_{i, k}$  et  $t_{i, k-1}$  est le  $k$ -ème et le  $(k-1)$ ème instant où la dynamique d'indice  $i$  est active. Des résultats plus généraux [94] permettent de relaxer la décroissance des fonctions candidates i.e., activation d'un système même si l'état n'appartient pas à la région de décroissance de la fonction candidate. Ces résultats présument que les fonctions de Lyapunov sont faibles, la condition de décroissance i.e.,  $\dot{V}_i \leq 0$  est remplacée par la condition suivante

$$V_i(x(t)) \leq h(V_i(x(t_j))), \quad t \in (t_j, t_{j+1}) \quad (2.41)$$

où  $h : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  est une fonction qui satisfait à  $h(0) = 0$  et  $t_j$  est instant où la dynamique d'indice  $i$  est active et  $t_{j+1}$  l'instant d'après. La fonction de Lyapunov peut ainsi croître suivant (2.41), le système reste stable si cette croissance est compensée par ailleurs en activant d'autres dynamiques. D'autres exemples peuvent être trouvés où par exemple la commutation entre des systèmes stables donnent une trajectoire globale instable [40, 78, 105]. Des comportements pathologiques dans le cas d'un système de dimension infini sont reportés au chapitre consacré à la commande prédictive des systèmes à commutations.

## 2.3 Modélisation des systèmes hybrides

Il existe plusieurs cadres de modélisation, chacun approprié à une classe de problèmes. On peut citer le modèle de Branicky développé en [23] qui unifie les modèles développés entre

<sup>6</sup>L'évolution temporelle de cette fonction est celle de la fonction de Lyapunov associé à la dynamique active par exemple  $V(t) = V_{i(t)} = V_1$  sur l'intervalle de temps où le système d'indice 1 est actif.



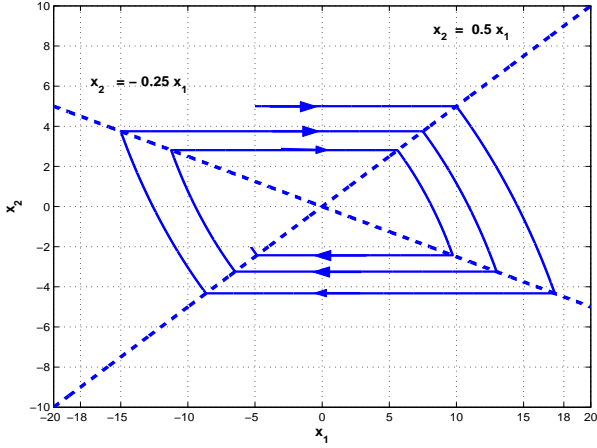


FIG. 2.11 – L'évolution des états du système à commutations

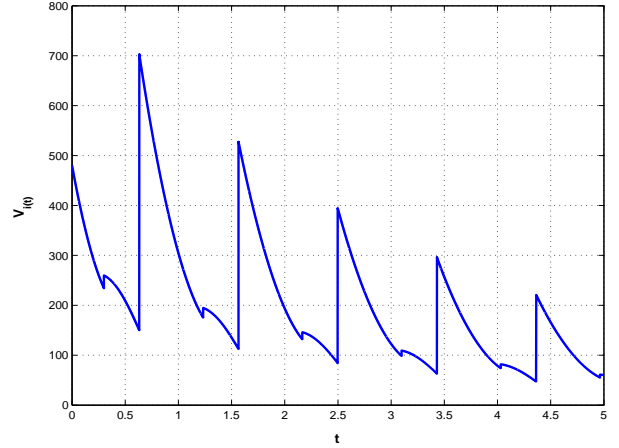


FIG. 2.12 – Evolution de la fonction de Lyapunov  $V_i(t)$

autres dans [136, 126, 25]. Un tour d'horizon et une comparaison entre ces modèles peuvent être trouvées dans [21]. Le modèle retenu dans ce manuscrit est l'**automate hybride** développé en [120].

**Définition 1** *Un système hybride est une collection*

$$\mathcal{H} = (\mathcal{Q}, \mathcal{E}, \mathcal{X}, U, \mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{R})$$

où

- $\mathcal{Q} = \{1, \dots, Q\}$  est l'ensemble de cardinalité finie des états discrets (nœuds)
- $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{Q} \times \mathcal{Q}$  est l'ensemble des arêtes
- $\mathcal{X} = \{\mathcal{X}_q\}_{q \in \mathcal{Q}}$  est la collection des domaines d'évolution des états continus. Quel que soit  $q \in \mathcal{Q}$ ,  $\mathcal{X}_q$  est un sous ensemble de  $\mathbb{R}^n$ ,  $n$  étant la dimension du vecteur d'état
- $U = \{U_q\}_{q \in \mathcal{Q}}$  est la collection des domaines de contrôle. Quel que soit  $q \in \mathcal{Q}$ ,  $U_q$  est un compact de  $\mathbb{R}^m$ ,  $m$  étant la dimension du vecteur de commande
- $\mathcal{F} = \{f_q\}_{q \in \mathcal{Q}}$  est la collection des champs de vecteurs. Quel que soit  $q \in \mathcal{Q}$ ,  $f_q : \mathcal{X}_q \times U_q \rightarrow \mathbb{R}^n$
- $\mathcal{G} = \{\mathcal{G}_e\}_{e \in \mathcal{E}}$  est la collection des gardes. Quelle que soit la transition  $e = (q_1, q_2) \in \mathcal{E}$ ,  $\mathcal{G}_e \subset \mathcal{X}_{q_1}$
- $\mathcal{R} = \{\mathcal{R}_e\}_{e \in \mathcal{E}}$  est la collection des fonctions de mise à jour (reset). Quelle que soit la transition  $e = (q_1, q_2) \in \mathcal{E}$ ,  $\mathcal{R}_e : \mathcal{G}_e \rightarrow 2^{\mathcal{X}_{q_2}}$  où  $2^{\mathcal{X}_{q_2}}$  est l'ensemble des parties de  $\mathcal{X}_{q_2}$

**Remarque 1** *Dans le modèle de l'automate hybride, l'espace d'état comme l'ensemble de commande peuvent dépendre de l'état discret. Cette dépendance permet de tenir compte des*

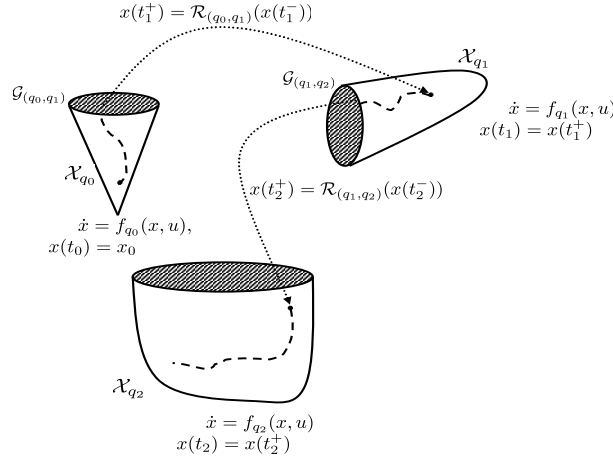


FIG. 2.13 – Exemple d'exécution de l'automate hybride

défauts qui peuvent survenir dans les systèmes critiques e.g., déconnection d'un contrôleur dynamique lors d'une surintensité, en effet le passage d'un fonctionnement en boucle fermée à un fonctionnement en boucle ouverte peut induire la chute de l'ordre du système.

Un exemple d'exécution est montré sur la figure 2.13. L'idée de base est qu'à partir d'une condition initiale sur respectivement les états continus et discret  $x(t_0) = x_0$  et  $q(t_0) = q_0$ . Le système évolue suivant la dynamique  $\dot{x} = f_{q_0}(x, u)$  avec  $u(t) \in U_{q_0}$  jusqu'à l'activation d'une garde à un instant  $t_1$ , dans l'exemple sur la figure 2.13 il s'agit de  $\mathcal{G}_{(q_0, q_1)}$ . Une transition vers l'état  $q_1$  peut être enclenchée et l'état continu mis à jour à l'aide de la fonction reset  $\mathcal{R}_{(q_0, q_1)}$ . Le processus se répète ainsi à l'infini.

**Remarque 2** Il faut rajouter à ce modèle quelques hypothèses garantissant l'unicité des solutions lorsque le système est dans un état discret e.g, champs Lipschitz continu. Afin d'éviter aussi des situations pathologiques comme ceux explicités dans l'exemple sur l'unicité des trajectoires, les champs sont supposés transversaux aux gardes.

### 2.3.1 Exemples de modélisation formelle

L'automate hybride introduit en définition 1 capture l'essentiel des phénomènes hybrides. Dans ce nouveau formalisme les exemples traités peuvent s'écrire comme suit

1. **Stabilisation des systèmes par commutation** (voir la sous section 2.2.1)
  - $\mathcal{Q} = \{q_1, q_2, q_3\}$
  - $\mathcal{E} = \{(q_1, q_2), (q_2, q_1), (q_1, q_3), (q_3, q_1)\}$
  - $\mathcal{X}_{q_1} = \mathcal{X}_{q_2} = \mathcal{X}_{q_3} = \mathbb{R}^2$

- $U_{q_1} = \mathbb{R}, U_{q_2} = U_{q_3} = \{0\}$
- $f_{q_1} = f_{q_2} = f_{q_3} = (\eta - \xi + u \ 1)'$
- $\mathcal{G}_{(q_1, q_2)} = \{(\eta, \xi, t) | \xi < 0 \wedge t \geq \frac{\pi}{4} - \delta\}, \mathcal{G}_{(q_1, q_3)} = \{(\eta, \xi, t) | \xi \geq 0 \wedge t \geq \frac{\pi}{4} - \delta\},$   
 $\mathcal{G}_{(q_3, q_1)} = \{(\eta, \xi, t) | \xi < 0 \wedge t = \delta\}, \mathcal{G}_{(q_2, q_1)} = \{(\eta, \xi, t) | \xi \geq 0 \wedge t = \delta\}$
- $\mathcal{R}_e = (\eta \ \xi \ 0), \forall e \in \mathcal{E}$

2. **Non unicité des trajectoires** (voir la sous section 2.2.2)

- $\mathcal{Q} = \{1, 2\}$
- $\mathcal{E} = \{(1, 2), (2, 1)\}$
- $\mathcal{X}_1 = \mathcal{X}_2 = \mathbb{R}^2$
- $U_1 = U_2 = \emptyset$
- $f_1 = (-x_1 + 2x_2 \ -2x_1 - x_2)', f_2 = (0 \ -2x_1 - x_2)'$
- $\mathcal{G}_{(1,2)} = \{x | x_1 - 0.4 = 0\}, \mathcal{G}_{(2,1)} = \{x | (-1 \ 2)x = 0\}$
- $\mathcal{R}_{(1,1)} = x$

3. **Phénomène Zeno** (voir la sous section 2.2.3)

- $\mathcal{Q} = \{1\}$
- $\mathcal{E} = \{(1, 1)\}$
- $\mathcal{X}_{q_1} = \mathbb{R}^4$
- $U_1 = \emptyset$
- $f_1(0, 0, 0, -g)'$
- $\mathcal{G}_{(1,1)} = \{x | (x_3 \leq \frac{d}{2}) \wedge (x_4 < 0)\}$
- $\mathcal{R}_{(1,1)} = (x_1, \alpha_x x_2, x_3, -\alpha_y x_4)$

4. **Système impulsif** (voir la sous section 2.2.4)

- $\mathcal{Q} = \{1\}$
- $\mathcal{E} = \{(1, 1)\}$
- $\mathcal{X}_1 = \mathbb{R}^2$
- $U_1 = \emptyset$
- $f_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} x$
- $\mathcal{G}_{(1,1)} = \{x | (1 \ 0)x\}$
- $\mathcal{R}_{(1,1)} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x$

L'exemple traité en sous section 2.2.5 peut être réécrit de la même manière que l'exemple 2.2.2. Ceci démontre qualitativement la puissance du cadre introduit en définition 1.

## 2.4 Modélisation des systèmes à commutations

Les problèmes de synthèse de commande pour les systèmes introduits dans la définition 1 s'avèrent être très complexe. D'une part, les non linéarités, le saut dans les états et les

transitions autonomes introduisent des discontinuités rendant inefficace les outils standards de conception de commande, d'autre part l'interaction des dynamiques continues et discrètes a introduit de nouveaux problèmes de stabilité et d'existence de solution.

Dans ce travail, on s'intéresse à la classe des systèmes à commutations. D'une manière informelle, les systèmes à commutations sont des systèmes hybrides dans lesquelles il n'y a ni transitions autonomes, ni sauts sur les états [140]. Cette classe inclut principalement des applications comme ceux énumérées ci après :

- Les systèmes contrôlés en réseaux par un contrôleur centralisé (un processeur), partageant son attention entre plusieurs tâches, cela peut être aussi le cas où le canal est lui même partagé entre plusieurs utilisateurs.
- L'industrie abonde d'applications qui utilisent le formalisme des systèmes à commutations, un exemple typique est la boîte de vitesse, le passage de vitesse correspond à une transition forcée dans le système.
- Certains types de réseaux de transport d'énergie peuvent être aussi modélisés comme des systèmes à commutations. En effet, l'interaction de composante de commande discrète e.g., banc de capacité, et les dynamiques continues (la charge) rentre dans ce formalisme (voir le chapitre 5 du présent manuscrit).

Dans un système à commutations, seul le vecteur  $x(\cdot)$  est considéré comme variable d'état, la variable  $q(\cdot)$  quant à elle peut être vue comme une entrée supplémentaire. Dans cette optique, un système à commutations est un système hybride dans lequel

$$\forall e = (q_1, q_2) \in \mathcal{E}, \quad \mathcal{G}_e = \mathcal{X}_{q_1} \quad (2.42)$$

et

$$\forall e = (q_1, q_2) \in \mathcal{E}, \quad \mathcal{R}_e = x \quad (2.43)$$

cette dernière égalité impose la continuité du vecteur d'état lors des transitions.

**Exemple 1** *Un exemple typique de système à commutations est un véhicule équipé d'une boîte à vitesse robotisée. En dénotant par  $x_1$  la position de la voiture, par  $x_2$  la vitesse en tr/min du moteur et  $u \in [0, 1]$  la position de la pédale, le modèle s'écrit [40]*

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (2.44)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{1 + \beta(q)} [-\alpha(x_2) + u] \quad (2.45)$$

où  $\alpha(x_2)x_2 > 0$ ,  $q \in \{1, 2, 3, 4\}$  la position du levier de vitesse et  $\beta(q)$  une certaine fonction de  $q$ . Dans le chapitre qui traite de la commande optimale, un modèle plus détaillé est utilisé pour illustrer les algorithmes développés.

Certains des ensembles définis pour les systèmes hybrides deviennent sans intérêt dans le cas des systèmes à commutations. Les systèmes à commutations peuvent être définis d'une manière plus directe comme suit.

**Définition 2** Un système à commutations est un tuple  $\mathcal{S} = (\mathcal{D}, \mathcal{F})$  où

- $\mathcal{D} = (\mathcal{Q}, \mathcal{E})$  est un graphe orienté représentant la structure discrète du système. L'ensemble des nœuds  $\mathcal{Q} = \{1, 2, \dots, Q\}$  est l'ensemble d'indices des configurations. L'ensemble des arêtes orientées  $\mathcal{E}$  est un sous ensemble du produit Cartésien  $\mathcal{Q} \times \mathcal{Q}$  contenant toutes les transitions valides représentées par les éléments du type  $(q_1, q_2)$ , indiquant qu'une commutation forcée du nœud  $q_1$  au nœud  $q_2$  est permise.
- $\mathcal{F} = \{f_p : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n, p \in \mathcal{Q}\}$  est un ensemble de champs de vecteurs, où pour chaque nœud  $p \in \mathcal{Q}$  est associé un vecteur  $f_p(x, u)$ , où  $x \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état et  $u \in U_p \subset \mathbb{R}^m$  est le vecteur d'entrée,  $U_p$  est un ensemble compact quelconque.

**Remarque 3** La dimension des domaines de contrôle est la même quelque soit la configuration  $q$  mais peut être d'étendu variable e.g., dans certains nœuds les contraintes sont plus dures que dans d'autres ou tout simplement différentes.

La famille d'ensembles indexé  $\{\mathcal{R}_p\}_{p \in \mathcal{Q}}$  est définie comme suit

$$\mathcal{R}_p = \{s \in \mathcal{Q} : (p, s) \in \mathcal{E}\} \quad (2.46)$$

l'ensemble  $\mathcal{R}_p$  représente l'ensemble des nœuds atteignables en un coup de la configuration actuelle  $p$ . Vue l'invariance par translation temporelle des systèmes à commutations considérés dans ce travail (voir la définition 2) et l'indépendance de ces ensemble par rapport à l'état, ces ensembles peuvent être formés hors ligne.

**Remarque 4** L'équation (2.46) définit l'ensemble des nœuds atteignables en un coup du nœud actuel, d'une manière similaire on peut définir l'ensemble atteignable en  $N_s \geq 1$  coups

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{q_0}^{N_s} &= \{k \in \mathcal{Q} : j \in \mathcal{R}_{q_0}^{N_s-1} \text{ et } (j, k) \in \mathcal{E}\} \\ \mathcal{R}_{q_0}^0 &= \{q_0\} \subset \mathcal{Q} \end{aligned} \quad (2.47)$$

ce qui donne un algorithme récursif pour le calcul des ensembles atteignables avec comme condition initiale  $q_0$ , d'une manière similaire l'algorithme d'atteignabilité inverse est formulé dans e.g, [87].

L'évolution du système à commutations peut être maintenant décrite comme suit. Soit donnée la condition initiale  $(x_0, q_0)$ , sur l'intervalle  $[t_0, t_1)$ , le système évolue suivant la dynamique

$$\begin{cases} q(t) \equiv q_0 \\ \dot{x} = f_{q_0}(x, u), \quad x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (2.48)$$

pour un certain  $u(t) \in U_{q_0}$ . Cela signifie que  $q(\cdot)$  est constante et est égale à  $q_0$  jusqu'à l'instant  $t = t_1$ . L'état  $x(\cdot)$  évolue dans  $\mathbb{R}^n$  suivant la dynamique  $\dot{x} = f_{q_0}(x, u)$  pour une entrée  $u(t) \in U_{q_0}$ . A l'instant  $t_1$ ,  $q$  varie i.e., une nouvelle configuration  $q_1$  est choisie telle

que  $q_1 \in \mathcal{R}_{q_0}$ , et le système évolue dans le nœud  $q_1$  sur l'intervalle  $[t_1, t_2)$  avec comme condition initiale  $x_1 = x(t_1)$  (il est implicitement supposé que la solution dans la configuration précédente peut être prolongée à l'intervalle fermée  $[t_0, t_1]$ )

$$\begin{cases} q(t) \equiv q_1 \\ \dot{x} = f_{q_1}(x, u), \quad x(t_1) = x_1 \end{cases} \quad (2.49)$$

Le processus est réitéré à une autre configuration  $q_2 \in \mathcal{R}_{q_1} \subseteq \mathcal{R}_{q_0}^2$  sur l'intervalle  $[t_2, t_3)$  et ainsi de suite.

## 2.5 Conclusions

Dans ce chapitre, à travers de nombreux exemples, les phénomènes hybrides les plus importants sont introduits. Ces derniers montrent particulièrement la diversité des comportements et les difficultés inhérentes aux systèmes hybrides. La formalisation proposée en [120] est introduite et les exemples traités précédemment sont réécrit dans ce formalisme démontrant ainsi la puissance de ce cadre de modélisation. Les systèmes à commutations sont ensuite défini comme une abstraction des systèmes hybrides. Le cadre de modélisation est ainsi simplifié et mieux adapté à la formulation d'une commande optimale qui fait l'objet du chapitre suivant.



# Chapitre 3

## Algorithmes de commande optimale en boucle ouverte des systèmes à commutations

*How often have I said to you that when you have eliminated the impossible, whatever remains, however improbable, must be the truth.*

-Arthur Conan Doyle, The sign of Four

### 3.1 Panorama des méthodes existantes

Les systèmes à commutations forment une des classes les plus importantes des systèmes hybrides. On les trouve dans les réseaux électriques, l'industrie automobile, l'industrie pétrochimique et les systèmes commandés à travers des réseaux. Le niveau de maturité de ces systèmes s'est raisonnablement enrichi ces dernières années, voir e.g. [136, 23, 16, 25, 58, 126, 97] pour tout ce qui a attiré à la modélisation et [15, 22, 51, 30, 40, 60, 57, 94] pour la commande et la stabilité. La lacune majeure reste néanmoins le développement de schémas de résolution numérique ou plus précisément les schémas de résolution de problèmes de commande optimale. Un effort important a été tout de même fourni, particulièrement dans la dernière décennie. En exemple les travaux pionniers réalisés dans [85] où la commande optimale des systèmes hybrides avec sauts autonomes est considérée. Les auteurs montrent sur des exemples simples comment les algorithmes de descente classique peuvent être mis en difficulté par la non différentiabilité de la fonction coût. Une heuristique simple consistant à re-résoudre le problème avec une séquence de configurations différente est aussi proposée. Quelques algorithmes conceptuels basés sur la programmation dynamique sont aussi proposés dans [24].

Une autre méthodologie est celle basée sur le formalisme *MLD* (Mixed Logical Dynamical)



initié dans [16, 15]. Ce formalisme inclut la classe de systèmes linéaires hybrides, automates à état fini, certaines classes de système à événements discrets, systèmes linéaires contraints et les systèmes à dynamiques non linéaires qui peuvent être finement approchées par des fonctions linéaires par morceaux. Pour cette classe de système, une commande prédictive est développée où le problème d'optimisation est résolu en ligne en utilisant les techniques de programmation mixte. L'étude empirique reportée en [127] sur la complexité de ce genre de schémas, nous renseigne que la généralité de la méthode a ses limites pour les systèmes de grande dimension et que le temps hors ligne nécessaire à trouver un compromis entre la finesse de l'approximation et le temps de calcul en ligne est non négligeable.

Dans les cinq dernières années, des philosophies de synthèse assez générale sont apparues, la méthode d'optimisation à deux niveaux développée indépendamment dans [30] et [140] est parmi les approches les plus souvent invoquées. Au premier niveau (niveau inférieur), l'objectif est de trouver les entrées continues et les instants de commutation quant au second (niveau supérieur), il permet d'activer et de changer la séquence de configurations et le nombre de commutations permises. La méthodologie consiste à itérer le schéma entre le premier et le second niveau jusqu'à épuisement de toutes les séquences de configurations et le nombre de commutations. Si la structure interne du problème n'est pas prise en compte, il est clair que le second niveau a une complexité combinatoire, limitant la généralité de cette démarche. Le premier niveau consiste à résoudre un problème de commande optimale conventionnelle où les instants de commutations sont figés, une paramétrisation de la fonction coût en fonction des instants de commutation est ainsi obtenu. Ceci permet l'utilisation des méthodes de programmation non linéaire afin d'ajuster les instants de commutations voir par exemple [140]. Plusieurs travaux ont été conduits sous la bannière de cette approche citons [138, 140, 139, 142] et le tour d'horizon [141] regroupant la batterie de stratégies développées par ces auteurs, voir aussi [30, 53, 98] où ce schéma est spécialisé pour les systèmes linéaires avec une partie discrète décrite par des équations récursives type Max-Plus. Dans [44], les auteurs proposent une formule analytique simple de gradient de la fonction coût par rapport aux instants de commutations, une descente du gradient est ensuite utilisée pour ajuster ces instants, certes l'optimalité reste locale mais la complexité du schéma est très raisonnable et supérieur au schéma homologue en [140]. Il est utile aussi de remarquer que cette formule est similaire aux approches développés à la fin des années 60's où l'objectif était de calculer les instants de commutations d'une solution bang-bang.

Afin de caractériser les solutions optimales, les premières tentatives de généralisation du Principe du Minimum [124, 102, 101, 113] sont apparues à la fin des années 90's. La version générale formulée en [124] donne ; en comparant des trajectoires avec la même stratégie de commutation ; des conditions d'optimalité et de transversalité que doivent satisfaire l'Hamiltonian et l'état adjoint aux instants de commutations. Ces dernières dépendent d'une part de

la nature de la commutation (autonome ou forcée) et d'autre part de la dépendance temporelle des hypersurfaces initiant les sauts autonomes. La version développée en [112] aboutit à des conditions de transversalité similaires à celles en [124]. Les similitudes s'arrêtent tout de même ici, en effet la version en [112] utilise un terme de programmation dynamique afin de calculer la stratégie de commutation et permet ainsi de tenir compte d'une manière plus explicite de la dynamique discrète du système hybride.

Un des premiers schémas basés sur la généralisation du Principe du Minimum est celui dû à [119]. L'objectif est de développer un algorithme dédiée aux systèmes hybrides avec une séquence de configurations fixe et où des transitions forcées et autonomes peuvent être présentes. La stratégie utilisée est celle de l'optimisation à deux niveaux. L'entrée continue est calculée en utilisant une technique de programmation dynamique accélérée et les instants de commutations en se basant sur les conditions de transversalité [124]. Les auteurs donnent aussi quelques indications afin de résoudre le problème où la séquence de commutation n'est pas connue à priori, cette fois ci en utilisant une technique combinatoire de génération de séquences sous optimales. Cette méthode est étendue dans [118, 26] où le concept de zone d'optimalité permettant de réduire la complexité de la recherche est présenté. Ces partitions sont difficiles à calculer dans le cas général, l'algorithme paraît assez compliqué à implanter.

Dans [17] les conditions suffisantes d'optimalité d'une classe de systèmes à commutations sont discutées. Les auteurs utilisent une technique d'immersion dans laquelle le système à commutations est écrit d'une manière uniforme; en introduisant une commande supplémentaire; comme une combinaison convexe des configurations le constituant, si une solution du type bang-bang est trouvée le problème est résolu sinon la solution est approchée en utilisant le lemme d'oscillation [18] i.e., qui donne une méthode constructive sous laquelle un champ de vecteurs est approché par une oscillation entre des champs de vecteur, aucune hypothèse n'est ainsi introduite ni sur le nombre de commutations ni sur la séquence de configurations actives. Dans le même esprit, cette immersion est discutée dans [111] dans le cadre des arcs singuliers, dont l'existence est vue comme un indicateur de la non existence de solution au problème originale. Une solution sous optimale doit être construite en utilisant le même lemme d'oscillation.

L'algorithme développé dans cette contribution est basé sur le Principe du Minimum et la théorie des variations fortes (en commande) initiés dans [50] afin de démontrer une version généralisée du Principe du Minimum. La famille d'algorithmes basée sur les variations fortes utilisent pour la mise à jour de la commande des variations importantes dans la norme infini au lieu d'une incrémentation traditionnelle basée sur le calcul d'un gradient. Ceci permet l'utilisation de ce type d'algorithme pour des systèmes avec des commandes appartenant à

un ensemble non convexe voir e.g., [65]. L'algorithme est basée sur le fait suivant : pourvu que les systèmes à commutations, sans contraintes ni sur les instants de commutations ni sur les configurations atteignables, sont considérés la version standard du Principe du Minimum [104] reste applicable. Cela peut être élucidé en écrivant le système à commutations comme une combinaison convexe et en introduisant des variables de commande binaires [110]. L'optimisation se fait ainsi d'une manière unifiée sur la commande continue et la commande binaire. La complexité du schéma est linéaire dans le nombre de configurations. Le cas où des contraintes sont présentes sur les configurations ou sur les instants de commutations i.e., la dynamique discrète est décrite par un automate, est discuté. Dans ces cas, les hypothèses sur lesquelles est bâti le Principe du Minimum sont violées (pour la formulation du problème telle qu'utilisée dans ce manuscrit). L'algorithme peut néanmoins être utilisé comme une méthode de synthèse.

Le chapitre est organisé comme suit :

Dans la section 3.2 un problème de commande optimale est formulé pour la classe des systèmes à commutations sans contraintes. La section 3.3 est consacrée à la formulation de l'algorithme, quelques résultats de convergence sont énoncés. Dans la section 3.4, une discussion sur l'impact des contraintes est incluse et le Principe du Minimum est discuté dans le cadre plus général des systèmes à commutations avec contraintes. Dans l'avant dernière section des expérimentations numériques sont conduites d'abord sur un système académique puis sur un modèle réaliste d'un véhicule automobile. Quelques conclusions et perspectives sont énoncées dans la dernière section.

## 3.2 Les systèmes à commutations sans contraintes

On montre dans cette section que le problème de commande optimale des systèmes à commutations sans contraintes ni sur les configurations atteignables ni sur les instants de commutations, peut être écrit sous forme standard. Dans ce cas, le formalisme de modélisation introduit dans le chapitre précédent n'est plus nécessaire.

### 3.2.1 Formulation du problème

Considérons un système non linéaire qui peut être dans  $Q$  ( $Q \in \mathbb{N}$ ) configurations différentes. Soit

$$q \in \mathcal{Q} = \{1, \dots, Q\} \quad (3.1)$$

une variable discrète indexant la configuration active. On suppose que l'état continu et l'entrée de commande, dénotés respectivement par  $x \in \mathbb{R}^n$  et  $v \in V \subset \mathbb{R}^m$  sont uniquement définis quelque soit la configuration active  $q$  avec  $V$  un ensemble compact quelconque. La

dynamique du système dans la configuration  $q \in \mathcal{Q}$  est décrite par

$$\dot{x} = f_q(x, v), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad v \in V \subset \mathbb{R}^m, \quad q \in \mathcal{Q} \quad (3.2)$$

afin de rendre complète la définition du problème, la nature des commutations entre les différentes configurations doit être spécifiée. Dans le cadre plus général des systèmes hybrides, les commutations peuvent être induites d'une manière autonome i.e., quand la trajectoire atteint une région de l'espace d'état, ou bien d'une manière forcée i.e., les commutations sont contrôlées, pour plus de détails voir le chapitre précédent. Dans ce manuscrit l'intérêt est porté sur les systèmes hybrides avec commutations forcées i.e., systèmes à commutations. On suppose que les commutations sont totalement libres dans le sens où quelque soit la configuration actuelle un saut est possible vers n'importe quelle autre configuration pourvue qu'elle appartienne à l'ensemble  $\mathcal{Q}$ , formellement cela veut dire que  $\mathcal{E} = \mathcal{Q} \times \mathcal{Q}$  dans la définition générale des systèmes à commutations du chapitre précédent (voir définition 2 du chapitre 2). On suppose aussi qu'aucun temps minimum de résidence n'est spécifié dans les différentes configurations i.e., il n'existe pas de contraintes sur les instants de commutations.

Le présent chapitre concerne la résolution algorithmique sur l'intervalle de temps  $[t_0, T]$  du problème de commande optimale suivant

$$\min_{q(\cdot), v(\cdot)} J(q(\cdot), v(\cdot)) := \int_{t_0}^T L_{q(t)}(x(t), v(t)) dt \quad (3.3)$$

telle que la dynamique (3.2) soit satisfaite presque partout avec  $x(t_0) = x_0$  comme condition initiale, où pour tout  $q \in \mathcal{Q}$ ,  $L_q : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  est une fonction dépendant de la configuration du système.

Bien que la classe des systèmes discutée dans ce chapitre soit restreinte comparé à la classe générale des systèmes hybrides définie dans le précédent chapitre, la plupart des algorithmes proposés dans la littérature (voir la section 3.1) traitent de cette classe de problèmes. Le but est ici d'attirer l'attention sur le fait que les problèmes d'explosion combinatoire, rencontrés dans les approches d'optimisation à deux niveaux, peuvent être évités en re-formulant le problème de commande.

Puisque le système à commutations n'est ni contraint dans son évolution discrète ni temporelle. Ce dernier peut être écrit en introduisant le vecteur de variables binaires  $\alpha_i(\cdot)$ ,  $i \in \mathcal{Q}$  tel que

$$\dot{x}(t) = \sum_{i \in \mathcal{Q}} \alpha_i(t) f_i(x(t), v(t)) \quad (3.4)$$

et pour tout  $t \in [t_0, T]$  la condition suivante est satisfaite

$$\forall i \in \mathcal{Q}, \alpha_i(t) \in \{0, 1\} \quad \text{et} \quad \sum_{i \in \mathcal{Q}} \alpha_i(t) = 1 \quad (3.5)$$

où une et seulement une composante du vecteur  $\alpha(t)$  est à 1 à tout moment. En notant par  $A \subset \{0, 1\}^Q$  l'ensemble de tous les vecteurs  $\alpha = (\alpha_1 \dots \alpha_Q)'$  dont les composantes satisfont aux conditions ci dessus.

$$A = \{\alpha = (\alpha_1 \dots \alpha_Q)' \in \{0, 1\}^Q \mid \sum_{i=1}^Q \alpha_i(t) = 1\} \quad (3.6)$$

En concaténant le vecteur  $(v \ \alpha)$  en un seul vecteur  $u$

$$u = (v \ \alpha) \in V \times A \quad (3.7)$$

le système à commutations peut s'écrire sous la forme compacte suivante

$$\dot{x} = f(x, u) = \sum_{i=1}^Q \alpha_i f_i(x, v), \quad u \in U = A \times V \subset \{0, 1\}^Q \times \mathbb{R}^m \quad (3.8)$$

il est clair que l'ensemble  $A \times V$  est un ensemble compact non convexe. Cette non-convexité n'exclut pas l'utilisation de l'outil standard de caractérisation des solutions optimales qu'est le Principe du Minimum. En effet, les conditions nécessaires d'optimalité sont formulées pour **un ensemble  $U$  quelconque non nécessairement convexe, ni d'ailleurs compact, pouvant dépendre du temps et/ou de l'état.**

D'une manière similaire, le coût (3.3) peut être ré-écrit comme suit

$$J(u(\cdot)) = \int_{t_0}^T \sum_{i=1}^Q L_i(x(t), v(t)) dt = \int_{t_0}^T L(x(t), u(\tau)), \quad u = (v \ \alpha) \quad (3.9)$$

Notons que si  $L_q$  est  $C^r$  en  $x$  pour un  $r \in \mathbb{N}$  alors  $L$  l'est aussi.

Le problème peut être re-formulé comme suit

$$\min_{u(\cdot)} J(u(\cdot)) := \int_{t_0}^T L(x(t), u(t)) dt \quad (3.10)$$

sous la contrainte dynamique suivante

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \quad (3.11)$$

et la contrainte sur la commande

$$u(t) \in U, \quad \text{pour presque tout } t \in [t_0, T] \quad (3.12)$$

Nous supposons satisfaites les hypothèses suivantes

**Hypothèse H1** Les fonctions  $f$  et  $L$  sont  $C^2$  en l'état  $x$  et continues par morceaux en  $u$ .<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Ceci peut être garanti en supposant que ces hypothèses sont vérifiées pour  $f_q$  et  $L_q$  pour tout  $q \in \mathcal{Q}$ .

**Hypothèse H2** Il existe une constante positive  $M \in \mathbb{R}_{>0}$  telle que pour toute commande admissible  $u(\cdot)$ , la trajectoire  $x(\cdot)$  lui correspondant satisfait la borne suivante

$$\forall t \in [t_0, T] \quad \|x(t)\| \leq M \quad (3.13)$$

Soit  $H(x, \lambda, u, \lambda_0)$  l'Hamiltonian du problème, à savoir

$$H(x, \lambda, u, \lambda_0) = \lambda_0 L(x, u) + \lambda' f(x, u) \quad (3.14)$$

où  $\lambda$  est le vecteur d'état adjoint de dimension  $n$  et  $\lambda_0$  une constante avec  $\lambda_0 \geq 0$ .

Le système Hamiltonian s'écrit

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda}(x, \lambda, u, \lambda_0) = f(x, u) \quad (3.15)$$

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x}(x, \lambda, u, \lambda_0) = -\lambda_0 \frac{\partial L}{\partial x}(x, u) - \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x, u) \right)' \lambda \quad (3.16)$$

La condition nécessaire d'optimalité issue du Principe du Minimum et applicable pour la classe de systèmes définie plus haut, peut être formulée par le théorème suivant

**Théoreme 1** Soit  $u^*(\cdot)$  une solution optimale du problème (3.10) définie sur l'intervalle  $[t_0, T]$  et  $x^*(\cdot)$  la trajectoire correspondante à  $u^*(\cdot)$ . Alors il existe une constante  $\lambda_0^* \geq 0$  et un vecteur de fonctions absolument continues  $\lambda^*(t) = (\lambda_1^*(t) \dots \lambda_n^*(t))'$  définies sur  $[t_0, T]$  telles que

- Pour tout  $t$  dans  $[t_0, T]$  le vecteur  $(\lambda_0^* \lambda^*(t)) \neq (0 \ \mathbf{0})$ .
- Pour presque tout  $t$  dans  $[t_0, T]$

$$\dot{x}^*(t) = \frac{\partial H}{\partial \lambda}(x^*(t), \lambda^*(t), u^*(t), \lambda_0^*) \quad (3.17)$$

$$\dot{\lambda}^*(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(x^*(t), \lambda^*(t), u^*(t), \lambda_0^*) \quad (3.18)$$

avec comme condition initiale  $x^*(t_0) = x_0$  où  $H(x, \lambda, u, \lambda_0) = \lambda_0 L(x, u) + \lambda' f(x, u)$

- Pour presque tout  $t$  dans  $[t_0, T]$  la condition suivante est satisfaite

$$H(x^*(t), \lambda^*(t), u^*(t), \lambda_0^*) = \min_{u \in U} H(x^*(t), \lambda^*(t), u, \lambda_0^*) \quad (3.19)$$

- Pour presque tout  $t$  dans  $[t_0, T]$

$$H(x^*(t), \lambda^*(t), u^*(t), \lambda_0^*) = cst \quad (3.20)$$

où  $cst$  est une constante.

- L'état adjoint  $\lambda^*$  vérifie la condition terminale

$$\lambda^*(T) = \mathbf{0} \quad (3.21)$$

*Preuve.* La preuve de ce théorème peut être trouvée dans n'importe quel ouvrage traitant de la commande optimale voir e.g., [104, 18].  $\diamond\diamond\diamond$

Une paire admissible  $(x(\cdot), u(\cdot))$  satisfaisant les conclusions du théorème 1 est dite extrémale. La fonction  $x(\cdot)$  est appelée une trajectoire extrémale et la commande  $u(\cdot)$  est dite commande extrémale. Il va sans dire, que la paire optimale est à chercher parmi les paires extrémales. Il est aussi utile de mentionner qu'une solution complète au problème d'optimisation (3.10) est en général extrêmement difficile pour les raisons suivantes :

- La condition de minimisation en (3.19) ne donne pas toujours une commande unique (existence de plusieurs extrémales). En plus, le Principe du Minimum consiste à résoudre un problème aux frontières avec une condition initiale sur l'état et une autre terminale sur l'état adjoint qui peut poser certaines difficultés pour sa résolution numérique.
- L'existence d'extrémales pathologiques i.e., non-normales et singulières. Pour les premières, les extrémales sont indépendantes du coût  $\lambda_0 = 0$ , pour les secondes, la commande reste indéfinie sur une certaine portion de la trajectoire, et la minimisation de l'Hamiltonian ne permet plus d'extraire cette commande. Ce cas apparaît aussi dans le cas où sur un intervalle de temps donné, l'Hamiltonian est indépendant de la commande.

Pour les problèmes de commande optimale considérés, on suppose satisfaite l'hypothèse suivante

**Hypothèse H3** La solution au problème (3.10) est supposée normale i.e., pour l'ensemble des extrémales, on a  $\lambda_0 \neq 0$ .

**Remarque 5** Si la solution est normale, l'Hamiltonian peut être normalisé i.e.,  $\lambda_0 = 1$  dans (3.16).

### 3.3 Algorithme de commande optimale basée sur les variations fortes

Loin de toute considération d'optimalité et d'un point de vue purement pratique, le principe du Minimum est souvent utilisé comme un outil de synthèse [123]. Cet outil est avantageusement utilisé dans les paragraphes suivants afin de développer un algorithme permettant d'extraire une paire extrémale. L'algorithme est basé sur la notion de variations fortes de la commande<sup>2</sup> développée dans [50]. La caractéristique principale de ces algorithmes réside dans la mise à jour des variables de commandes. Dans des approches algorithmiques classiques du type descente du gradient, la commande à l'itération  $j$  est mise à jour par

<sup>2</sup>Les variations fortes de l'état sont connues depuis longtemps et ont été même utilisées par Weierstrass pour démontrer des conditions nécessaires d'optimalité dans des problèmes variationnels.

### 3.3. ALGORITHME DE COMMANDE OPTIMALE BASÉE SUR LES VARIATIONS FORTES 47

une formule du type  $u_j = u_{j-1} + \alpha s$ , où  $\alpha$  est le pas d'incrément et  $s$  la direction de recherche.

Il est montré dans [90] l'efficacité numérique des algorithmes utilisant des variations du type

$$u_j(t) = \begin{cases} \check{u}(t) & t \in \mathcal{I}_1 \\ u_{j-1}(t) & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (3.22)$$

où  $\mathcal{I}_1$  est un sous intervalle de l'intervalle de temps d'intérêt et  $\check{u}$  est une commande qui satisfait certaines propriétés e.g., minimise l'Hamiltonian. Cette mise à jour a aussi l'avantage d'être utilisable pour des systèmes avec des ensembles non convexes [65, 56, 66, 4].

L'algorithme proposé utilise une itération basée sur la minimisation de l'Hamiltonian pénalisé par un terme quadratique faisant intervenir la commande à l'itération précédente. Rappelons que des schémas avec pénalité quadratique ont été déjà utilisés dans la littérature pour résoudre des problèmes de commande singulière e.g., [67] et dans des schémas de commande optimale standard avec stabilisation des itérations e.g., [115, 20, 68]. Le même principe est retenu dans l'algorithme suivant où une heuristique simple est proposée pour mettre à jour la variable de pénalité. La convergence est démontrée pour un ensemble de commande non convexe [5]

Afin de formuler l'algorithme de commande optimale capable de résoudre des problèmes tels que celui en (3.10). Le système d'équations différentielles ainsi que l'intervalle d'intérêt sont discrétisés en  $K$  (avec  $K$  un entier  $K > 1$ ) points, en introduisant  $h$  comme période d'échantillonnage

$$h = \frac{T - t_0}{K - 1} \quad (3.23)$$

définissons aussi les instants d'échantillonnage  $t_{k+1} = t_k + h$  avec  $k \in \mathcal{K} = \{0, 1, \dots, K\}$ . La discrétisation de la commande se fait aussi comme suit

$$\bar{u} = (\bar{u}(1), \dots, \bar{u}(K - 1)) \in \bar{U} = U \times \dots \times U \subset \mathbb{R}^{(K-1)m} \quad (3.24)$$

avec un profil constant par morceaux pour la commande  $u$

$$u(t_k + \delta) = \bar{u}(k), \quad \text{pour tout } k \in \mathcal{K} \text{ et } \delta \in [0, h) \quad (3.25)$$

La discrétisation des équations différentielles décrivant le système Hamiltonian

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda}(x, \lambda, u) = f(x, u) \quad (3.26)$$

$$\dot{\lambda} = \frac{\partial H}{\partial x}(x, \lambda, u) = -\frac{\partial L}{\partial x}(x, u) - \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x, u) \right)' \lambda \quad (3.27)$$



avec  $H(x, \lambda, u) = L(x, u) + \lambda' f(x, u)$ , se fait par le biais du schéma d'intégration de Runge-Kutta du second ordre suivant

$$\bar{x}(k+1) = \bar{x}(k) + \frac{h}{2} \left[ f\left(\bar{x}(k), \bar{u}(k)\right) + f\left(\bar{x}\left(k + \frac{1}{2}\right), \bar{u}(k)\right) \right], \quad \bar{x}(1) = x_0 \quad (3.28)$$

$$\bar{x}\left(k + \frac{1}{2}\right) = \bar{x}(k) + hf(\bar{x}(k), \bar{u}(k)) \quad (3.29)$$

$$\bar{\lambda}(k-1) = \lambda(k) + \frac{h}{2} \left[ \frac{\partial H}{\partial x}\left(\bar{x}(k), \bar{u}(k-1), \bar{\lambda}(ks)\right) + \frac{\partial H}{\partial x}\left(\bar{x}(k-1), \bar{u}(k-1), \bar{\lambda}\left(k - \frac{1}{2}\right)\right) \right] \quad (3.30)$$

$$\bar{\lambda}(K) = 0 \quad (3.30)$$

$$\bar{\lambda}\left(k - \frac{1}{2}\right) = \bar{\lambda}(k) + h \frac{\partial H}{\partial x}\left(\bar{x}(k-1), \bar{u}(k-1), \bar{\lambda}(k)\right) \quad (3.31)$$

où  $\bar{x}$  et  $\bar{\lambda}$  sont définis d'une façon similaire à  $\bar{u}$  soit

$$\bar{x} = (\bar{x}'(1), \dots, \bar{x}'(K)) \in \mathbb{R}^{Kn} \quad (3.32)$$

$$\bar{\lambda} = (\bar{\lambda}'(1), \dots, \bar{\lambda}'(K)) \in \mathbb{R}^{Kn} \quad (3.33)$$

avec ce schéma de discrétisation, la fonction coût est obtenu pour tout  $\bar{u} \in \bar{U}$  comme suit

$$\bar{J}(\bar{u}) = h \sum_{k=1}^{K-1} L(\bar{x}(k), \bar{u}(k)) \quad (3.34)$$

Soit l'algorithme suivant

**Algorithme 1** *Algorithme de commande optimale des systèmes à commutations sans contraintes*

**Étape 0** Fixer le nombre entier d'itérations maximal  $j_{max}$  et deux réels  $d_\mu > 0$  et  $\gamma > 1$ .

Fixer deux réels petits  $\epsilon_J > 0$  et  $\epsilon_u > 0$ . Fixer  $\mu^0 \geq 0$  et un profil initial  $\bar{u}^0 \in \bar{U}$

**Étape 1** Calculer  $\bar{x}^0$  solution de (3.28) avec  $\bar{u} = \bar{u}^0$ , mettre  $j := 1$

**Étape 2** Calculer  $\bar{\lambda}^{j-1}$  solution de (3.30) avec  $\bar{u} = \bar{u}^{j-1}$  et  $\bar{x} = \bar{x}^{j-1}$

**Étape 3** Calculer  $\bar{u}^j(k)$  et  $\bar{x}^j(k)$  pour  $k = 1, \dots, K$  tel que

–  $\bar{x}^j(k)$  est solution de (3.28) avec  $\bar{u}(k) = \bar{u}^j(k)$  et

$$\bar{u}^j(k) := \arg \min_{u \in U} \left[ H(\bar{x}^j(k), u, \bar{\lambda}^{j-1}(k)) + \mu^{j-1} \|u - \bar{u}^{j-1}(k)\|^2 \right] \quad (3.35)$$

**Étape 4** **Si**  $\left( \bar{J}(\bar{u}^j) > \bar{J}(\bar{u}^{j-1}) - \epsilon_J \right)$  et  $\left( \|\bar{u}^j - \bar{u}^{j-1}\| > \epsilon_u \right)$  **Alors**

$$\mu^{j-1} := \max \left( \mu^{j-1} + d_\mu, \gamma \mu^{j-1} \right)$$

et revenir à **Étape 3**

**Étape 5** *Si*  $\left(\bar{J}(\bar{u}^j) > \bar{J}(\bar{u}^{j-1}) - \epsilon_J\right)$  *Alors*

**5.1**  $\bar{u}^j := \bar{u}^{j-1}$

*Sinon*

**5.2**  $\mu^j := \max\left(0, \min(\mu^{j-1} - d_\mu, \mu^{j-1}/\gamma)\right)$

*Fin Si*

**Étape 6** *Si*  $\left(j < j_{max}\right)$  *Alors*

$j := j + 1$

et aller à **Étape 2**

*Sinon*

Arrêter

*Fin Si*

**Discussion** L'algorithme commence par le choix d'un profil de commande initial  $\bar{u}^0$ . Ce profil ne satisfaisant pas forcément les conditions nécessaires d'optimalité. L'**Étape 3** produit alors à chaque instant de décision l'oscillation de la commande entre le profil à l'itération précédente et celui qui minimise l'Hamiltonian augmenté (3.35). La modification de l'Hamiltonian par le terme de pénalité  $\mu^{j-1}\|u - \bar{u}^{j-1}(k)\|^2$  permet de stabiliser les itérations.  
3

Si l'algorithme reste entre les **Étapes 3** et **4**, l'**Étape 4** peut amener la variable  $\mu^j$  à prendre de grandes valeurs, qui du coup forcent l'évolution de l'algorithme à quitter l'**Étape 3** (voir corollaire 2).

L'**Étape 5.2**, exécutée seulement dans le cas où  $\left(\|\bar{J}(\bar{u}^j) - \bar{J}(\bar{u}^j)\| < \epsilon_J\right)$  et permet de réduire la valeur de  $\mu^j$  qui a temporairement augmentée lors du passage par l'**Étape 3** et **4**. Rappelons que du point de vue du Principe du Minimum, la minimisation dans **Étape 3** n'a de sens que pour  $\mu^{j-1} = 0$ .

La condition  $\left(\bar{J}(\bar{u}^j) > \bar{J}(\bar{u}^{j-1}) - \epsilon_J\right)$  et  $\left(\|\bar{u}^j - \bar{u}^{j-1}\| > \epsilon_u\right)$  dans l'étape 4 peut être interprétée comme suit :

**Si**  $\bar{u}^j$  n'arrive pas à faire décroître la fonction coût d'une manière significative,  $\left(\bar{J}(\bar{u}^j) >$

---

<sup>3</sup>Dans la partie hypothèses, on a implicitement supposé que le problème pouvait être singulier dans le sens où le coût pouvait être indépendant de la commande. En effet, en ajoutant un terme quadratique en la commande, le problème de commande optimale peut être re-formulé comme étant celui de minimiser la fonctionnelle suivante (avec pour tout  $t \in [t_0, T]$ ,  $\alpha(t) \in U$ )

$$J(u, \mu^j) = \int_{t_0}^T L(x(\tau), u(\tau)) + \mu^j \|\alpha(\tau) - u(\tau)\|^2 d\tau$$

qui contient un terme dépendant de  $u$  même si la fonctionnelle  $L$  dans la formulation originale est indépendante de  $u$ .

$\bar{J}(\bar{u}^{j-1}) - \epsilon_J$ ) et **Si** il reste de la marge i.e.,  $(\|\bar{u}^j - \bar{u}^{j-1}\| > \epsilon_u)$  **Alors** Aller à **Étape 3** avec une valeur supérieure de  $\mu^j$ .

### 3.3.1 Résultats de convergence

Dans cette sous section quelques résultats de convergence sont énoncés. Certains démonstrations sont répertoriés dans l'annexe A pour éviter toute interruption dans l'enchaînement d'idées.

**Proposition 1** *Il existe deux réels  $r > 0$  et  $\sigma > 0$  tel que, pour tout pas  $h$  suffisamment petit, la solution des itérations successives satisfait l'inégalité suivante*

$$\bar{J}(\bar{u}^j) - \bar{J}(\bar{u}^{j-1}) \leq h(r - \mu^{j-1}) \sum_{k=1}^{K-1} \|\bar{u}^j(k) - \bar{u}^{j-1}(k)\|^2 + \sigma \quad (3.36)$$

*Preuve.* voir appendice A. ◇◇◇

De la proposition 1, le corollaire suivant peut être démontré

**Corollaire 1** *Soit la séquence  $(\bar{x}^j, \bar{u}^j)$  générée par l'algorithme. La séquence de coûts lui correspondant  $\bar{J}(\bar{u}^j)$  est décroissante d'une manière monotone. En plus, si  $j_{max} = \infty$ , la séquence infini  $\bar{J}(\bar{u}^j)$  est convergente.*

*Preuve.* Considérons la séquence  $(\bar{u}^j)$ , pour tout  $j$ , deux situations sont possibles : 1)  $\|\bar{u}^j - \bar{u}^{j-1}\|_\infty = 0$ , dans ce cas,  $\bar{J}(\bar{u}^j) = \bar{J}(\bar{u}^{j-1})$ . 2)  $\|\bar{u}^j - \bar{u}^{j-1}\|_\infty > \epsilon_u$ , dans ce cas, suivant l'équation (3.36) de la proposition 1, l'étape 4 de l'algorithme donne une valeur de  $\mu^{j-1}$  (obtenu après de successives incrémentsations  $\mu^{j-1} = \max(\mu^{j-1} + d_\mu, \gamma\mu^{j-1})$ ) de **Étape 4** telle que la condition  $(\bar{J}(\bar{u}^j) \leq \bar{J}(\bar{u}^{j-1}) - \epsilon_J)$  nécessaire pour quitter **Étape 4** soit satisfaite. Dans ce cas,  $\bar{J}(\bar{u}^j) < \bar{J}(\bar{u}^{j-1})$ , alors,  $\bar{J}(\bar{u}^j)$  ne peut que décroître. Si  $j_{max} = \infty$ , l'algorithme génère une séquence décroissante infini  $\{\bar{J}(\bar{u}^j)\}$  qui est bornée inférieurement donc convergente. ◇◇◇

**Proposition 2** *Soit  $(\bar{x}^j, \bar{u}^j)$  une séquence générée par l'algorithme.*

**1)** *Supposons que  $j_{max} = \infty$  afin de générer une séquence infinie  $\bar{u}^j \in \bar{U}$ . Il existe un entier  $\bar{j}$  telle que*

$$\forall j \geq \bar{j} \quad : \quad \|\bar{u}^j(k) - \bar{u}^{j-1}(k)\| = 0 \quad ; \quad k = 1 \dots K - 1 \quad (3.37)$$

*En plus, si 0 est un point d'accumulation de la séquence  $\mu^{j-1}$  alors il existe un point d'accumulation  $\bar{u}^*$  de la séquence  $\bar{u}^j$  qui satisfait le Principe du Minimum aux points constituant la grille de discrétisation.*

2) En particulier, si pour un certain  $\bar{j}$ ,  $\bar{u}^{\bar{j}} = \bar{u}^{\bar{j}-1} =: \bar{u}^*$  avec  $\mu^{\bar{j}-1} = 0$  alors la commande  $\bar{u}^*$  satisfait le Principe du Minimum aux points constituant la grille de discrétisation.

3) Dans le cas où  $j_{max}$  est fini, l'algorithme s'arrête après un nombre fini d'itérations. A savoir, il ne peut être piégé par la boucle en (**Étape 3**)-(**Étape 4**)

*Preuve.* Afin de montrer 1), il est suffisant de montrer qu'il y a un nombre fini d'entiers  $j$  tel que  $\|\bar{u}^j - \bar{u}^{j-1}\|_\infty > \epsilon_u$ . Montrons le par contradiction, supposons que ce n'est pas le cas, alors il existe une séquence infini d'indice  $j_l$  telle que  $\|\bar{u}^{j_l} - \bar{u}^{j_l-1}\|_\infty > \epsilon_u$ . En suivant la preuve du corollaire 1, cette séquence doit satisfaire  $\bar{J}(\bar{u}^{j_l}) \leq \bar{J}(\bar{u}^{j_l-1}) - \epsilon_J$  et  $J(\bar{u}^{j_l})$  doit tendre vers  $-\infty$  quand  $l$  tend vers  $\infty$ . Cela est impossible vu que  $J$  est borné (inférieur). Par définition de  $\bar{u}^j$  (voir **Étape 3**), on peut écrire pour tout  $k = 1 \dots K-1$  et tout  $\bar{u} \in \bar{U}$  que  $H(\bar{x}^j(k), \bar{u}^j(k), \bar{\lambda}^{j-1}(k)) + \mu^{j-1} \|\bar{u}^j(k) - \bar{u}^{j-1}(k)\|^2 \leq H(\bar{x}^j(k), \bar{u}(k), \bar{\lambda}^{j-1}(k)) + \mu^{j-1} \|\bar{u}(k) - \bar{u}^{j-1}(k)\|^2$ . En ayant une séquence  $j_l$  telle que  $\lim_{l \rightarrow \infty} \mu^{j_l-1} = 0$ , et en passant à la limite, la véracité de 1) est montrée. Afin de montrer 2) il est suffisant de remarquer que  $\bar{u}^{\bar{j}} = \bar{u}^{\bar{j}-1} =: \bar{u}^*$  avec  $\mu^{\bar{j}-1} = 0$  alors la séquence  $\bar{u}^j$  pour  $i \geq \bar{j}$  devient constante et  $\bar{u}^*$  est son point d'accumulation. Le résultat provient de 1). Pour montrer 3), il est suffisant de noter qu'en utilisant 1), l'algorithme s'arrête quand  $j$  satisfait à  $j \geq \max\{j_{max}, \bar{j}\}$  (voir la condition d'arrêt **Étape 6**).  $\diamond\diamond\diamond$

**Estimation de la complexité** Soit  $C_{NLP}(m)$  la complexité de la méthode de programmation non linéaire utilisée pour résoudre le problème d'optimisation de dimension  $m$  en (3.35). Soit aussi  $C_{RK}(n)$  la complexité de la méthode de Runge-Kutta utilisée pour l'intégration du système Hamiltonian. La complexité d'une itération de l'algorithme proposé est

$$\sim K \cdot Q \cdot C_{NLP}(m) + 2 \times C_{RK}(n)$$

Il n'y a pas de terme exponentiel en  $n$ ,  $Q$  ou  $K$ . La complexité est linéaire par rapport au nombre de configurations  $card(Q)$ .

## 3.4 Les systèmes à commutations avec contraintes

Dans cette partie du manuscrit, l'algorithme développé dans la section précédente est ré-écrit dans le cas où des contraintes sont présentes sur le système à commutations. Ces contraintes peuvent être du type structurelles i.e., toutes les configurations ne sont pas atteignables, ou temporelles e.g., le système est contraint à résider un minimum de temps dans une configuration.

### 3.4.1 Discussion sur l'impact des contraintes

Si le système à commutations n'est pas contraint dans son évolution discrète, les hypothèses sur lesquelles est fondé le Principe du Minimum de Pontryagin sont satisfaites. Ceci

a été élucidé en considérant des variables binaires  $\alpha_i \in \{0, 1\}$  associées à chaque nœud  $q$  (avec  $\sum_{i=1}^Q \alpha_i = 1$  à tout instant sur l'intervalle d'intérêt), comme une partie du vecteur de commande. Le système à commutations peut être écrit comme une combinaison convexe  $\sum_{i=1}^Q \alpha_i f_i(x, v)$ . L'ensemble de commande est ainsi compacte mais non convexe.

Si on considère le cas où le système à commutations est seulement contraint dans son évolution discrète  $\mathcal{E} \subset \mathcal{Q} \times \mathcal{Q}$  i.e., dynamique discrète non triviale décrite par un automate. L'évolution temporelle du vecteur  $\alpha(\cdot)$  nécessite l'introduction d'une mémoire. Cela veut dire que l'ensemble des commandes admissibles ne peut être défini rigoureusement et indépendamment de la séquence de configurations elle-même. Ceci amène à la violation d'une des hypothèses sur laquelle est bâti le Principe du Minimum.

**Exemple 2** Soit l'exemple d'un système à commutations avec trois nœuds

$$\dot{x} = f_q(x, v), \quad q \in \mathcal{Q} = \{1, 2, 3\} \quad (3.38)$$

qui peut s'écrire en introduisant les variables binaires  $\alpha_i$  comme

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^3 \alpha_i(t) f_i(x, v), \quad \alpha(t) = (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3) \in \{0, 1\}^3 \text{ et } \sum_{i=1}^3 \alpha_i(t) = 1 \quad (3.39)$$

on suppose que l'évolution discrète du système, est décrite par l'ensemble  $\mathcal{E}$  suivant (voir aussi figure 3.1)

$$\mathcal{E} = \mathcal{Q} \times \mathcal{Q} - \{(1, 2), (2, 3)\} \quad (3.40)$$

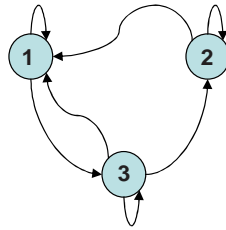


FIG. 3.1 – Exemple de dynamique discrète contrainte d'un système à commutations

à un instant initial  $t_0$  donné on suppose que le système à commutations est dans le nœud 1 [respectivement 3]. Le nœud 1 [respectivement 3] est ainsi activé dans (3.39) en prenant  $\alpha = (1, 0, 0)$  [respectivement  $\alpha = (0, 0, 1)$ ] sur un intervalle de temps donné. A un instant de commutation donné  $t_1$ ,  $\alpha(t_1)$  doit nécessairement appartenir à l'ensemble

$\{(1, 0, 0), (0, 0, 1)\}$  [respectivement  $\{(0, 0, 1), (1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$ ] puisque seulement les nœuds 1 et 3 (respectivement 1, 2 et 3) sont accessibles à partir de l'actuel nœud. On peut vérifier à travers cet exemple qu'une écriture explicite ; et indépendante de la séquence de commutation ; de l'ensemble au quel appartient les  $\alpha$ 's est impossible. En effet, cet ensemble évolue non comme une fonction du temps mais comme une fonction de la valeur prise précédemment par le vecteur  $\alpha$ . Dans ce cas, le Principe du Minimum ne peut être utilisé comme un outil de caractérisation.

L'étude des contraintes temporelles est assez délicate. Elle nécessite, en fait, l'introduction d'éléments de la théorie des fonctions convexes, plus précisément la Quasi-convexité d'une famille de fonctions, et la théorie des commandes généralisées (ou relaxées), il s'agit du lemme d'oscillations (Chattering Lemma) voir [18].

La notion de Quasi-convexité a été introduite par Gamkrelidze pour généraliser la caractérisation d'extrémums [50]. Cette notion est implicite dans le Principe du Minimum et est intimement liée aux variations en aiguille de la commande introduite dans plusieurs démonstrations du Principe du Minimum. D'une manière approchée, cette théorie nous renseigne que dans le Principe du Minimum, il est implicitement supposé que la commande comme une fonction du temps peut osciller d'un manière très rapide. Imposer des contraintes sur les instants de commutation revient à contraindre l'oscillation de la commande et donc à violer une des hypothèses du Principe du Minimum. Cette remarque fondamentale nous renseigne que dans un cadre plus générale même le fait d'approcher un problème de commande optimale en le discrétisant comme on l'a fait dans la section précédente viole le Principe du Minimum. La seule différence est que dans ce cas la précision de l'approximation faite du problème peut être approchée en diminuant la période d'échantillonnage, ce qui n'est pas le cas lorsque les contraintes sont liés au fonctionnement du système lui même.

Le Principe du Minimum ne tient donc pas dans le cas où des contraintes temporelles ou structurelles sont imposés sur le système à commutations. Néanmoins, l'algorithme développé dans la section 3.3 peut être utilisé comme une heuristique pour orienter la recherche d'une commande continu et une séquence de configurations. Les trajectoires obtenues sont par construction sous optimales. L'algorithme est utilisé dans ce cas comme une méthode de synthèse quasi-systématique voir [11]. L'introduction des contraintes nécessite d'étendre la définition des systèmes à commutations comme introduites dans le chapitre 2.

**Définition 3** *Un système à commutations est un tuple  $\mathcal{S} = (\mathcal{D}, \mathcal{F})$  où*

- $\mathcal{D} = (\mathcal{Q}, \mathcal{E})$  est un graphe orienté représentant la structure discrète du système. L'ensemble des noeuds (location set)  $\mathcal{Q} = \{1, 2, \dots, Q\}$  est l'ensemble d'indices des configurations. L'ensemble des arêtes orientées  $\mathcal{E}$  est un sous ensemble du produit Cartésien

$\mathcal{Q} \times \mathcal{Q}$  contenant toutes les transitions valides représentées par les éléments du type  $(q_1, q_2)$ , indiquant qu'une commutation forcée est possible du nœud  $q_1$  au nœud  $q_2$  est permise.

- $\mathcal{F} = \{f_q : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n, q \in \mathcal{Q}\}$  est un ensemble de champs de vecteurs, où pour chaque nœud  $p \in \mathcal{Q}$  est associé un vecteur  $f_q(x, v)$ , où  $x \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état et  $v \in V_q \subset \mathbb{R}^m$  est le vecteur d'entrée,  $V_q$  est un ensemble compact quelconque.

Pour un système à commutations  $\mathcal{S}$ , l'entrée consiste en une commande continue  $v$  et une stratégie de commutation  $q$ .

**Définition 4** Pour un système à commutations  $\mathcal{S}$ , une stratégie de commutation admissible ou profil admissible  $q(\cdot)$  avec  $K_c \in \mathbb{N}$  commutations est une fonction constante par morceaux définie pour tout  $t \in [t_0, T)$  comme

$$q(t) = \begin{cases} q_0 & t_0 \leq t < t_1 \\ q_1 & t_1 \leq t < t_2 \\ \vdots & \vdots \\ q_{K_c} & t_{K_c} \leq t < t_{K_c+1} \end{cases} \quad (3.41)$$

où  $t_0 < t_1 < t_2 \dots < t_{K_c} < t_{K_c+1} = T$ , et  $(q_i, q_{i+1}) \in \mathcal{E}$  pour tout  $i \in \mathcal{K}_c := \{0, 1, 2, \dots, K_c\}$ . Définissons  $\Sigma_{[t_0, T]} \triangleq \{q(\cdot) \text{ définie sur } [t_0, T)\}$  comme étant l'ensemble des stratégies de commutation définies sur  $[t_0, T)$ .

Les contraintes sur les instants de commutation sont prises en compte par les ensembles  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  définis comme suit

$$\Sigma_1 = \{q(\cdot) \in \Sigma_{[t_0, T]} | \forall i \in \mathcal{K}_c, \exists j \in \mathbb{Z}^+, t_{i+1} - t_i = j \times dt_{min} > 0\} \quad (3.42)$$

$$\Sigma_2 = \{q(\cdot) \in \Sigma_{[t_0, T]} | \forall i \in \mathcal{K}_c, t_{i+1} - t_i \geq dt_{min}\} \quad (3.43)$$

où

$$dt_{min} = N \times h \quad (3.44)$$

avec  $N \in \mathbb{Z}^+$  et  $h$  la période d'échantillonnage.

Les ensembles définis en (3.42) et (3.43) permettent un nombre fini de commutations sur tout intervalle fini. Pour l'ensemble (3.42) la décision de rester ou de quitter une configuration est prise chaque  $dt_{min}$ , contrairement à l'ensemble (3.43) où un temps minimal de résidence est spécifié.

**Définition 5** Pour un système à commutations  $\mathcal{S}$ , un ensemble admissible de commandes  $\bar{\mathcal{V}}_q$  associé à une stratégie de commutation  $q(\cdot)$  est défini

$$\bar{\mathcal{V}}_q = \left\{ v(\cdot) | \forall t \in [t_0, T), v(t) \in \mathcal{V}_{q(t)} \right\} \quad (3.45)$$

Le problème de commande optimale peut être formulée comme suit

**Problème 1** Soit un système à commutations  $\mathcal{S} = (\mathcal{D}, \mathcal{F})$  et un intervalle de temps fixe  $[t_0, T]$ , trouver une stratégie de commutation  $q(\cdot) \in \Sigma_1$  (ou bien  $q(\cdot) \in \Sigma_2$ ) et une entrée de commande associée  $v \in \bar{\mathcal{V}}_q$  telle que la fonctionnelle

$$J = \sum_{i=0}^K \int_{t_i}^{t_{i+1}} L_{q(t_i)}(x(t), u(t)) dt \quad (3.46)$$

sous les contraintes mixtes suivantes

$$\dot{x} = f_q(x, v) \quad (3.47)$$

$$q(t_i) \in \mathcal{R}_{q(t_{i-1})} \quad (3.48)$$

soit minimisée avec  $q(t_0) = q_0$  et  $x(t_0) = x_0$ , et où  $\mathcal{R}_{q(t_{i-1})}$  est l'ensemble des configurations atteignables en un coup à partir de  $q(t_{i-1})$  (voir l'équation (2.46) du chapitre 2).

Définissons l'Hamiltonian associé au profil  $q(\cdot)$  comme

$$H_q(x, v, \lambda) = L_q(x, v) + \lambda^T f_q(x, v) \quad (3.49)$$

et le système Hamiltonian suivant

$$\dot{x} = \frac{\partial H_q}{\partial \lambda}, \quad \dot{\lambda} = -\frac{\partial H_q}{\partial x} \quad (3.50)$$

Le schéma de discrétisation est ici rappelé brièvement, soit  $K \in \mathbb{N}$  ( $K > 1$ ) et  $h = \frac{T-t_0}{K-1}$  la période d'échantillonnage. Soit aussi les instants d'échantillonnage définis comme  $t_{k+1} = t_k + h$ . Définissons aussi la commande et la stratégie de commutation comme des fonctions constantes par morceaux  $v(t_k + \tau) = \bar{v}(k)$  et  $q(t_k + \tau) = \bar{q}(k)$  pour tout  $k \in \{1, 2, \dots, K\}$  et tout  $\tau \in [0, h)$ . Les approximations en dimension finie  $\bar{x}$  et  $\bar{\lambda}$  sont définies en intégrant le système Hamiltonian (3.50) et en utilisant le même schéma qu'en (3.28)-(3.31) qui est ici brièvement noté (avec  $\bar{x}(1) = x_0$ ,  $\bar{\lambda}(K) = 0$  et  $\bar{q}(1) = q_0$ )

$$\bar{x}(k+1) = RK_2^D(\bar{x}(k), \bar{v}(k), \bar{q}(k)) \quad (3.51)$$

$$\bar{\lambda}(k-1) = RK_2^I(\bar{\lambda}(k), \bar{x}(k), \bar{v}(k), \bar{x}(k-1), \bar{v}(k-1), \bar{q}(k)) \quad (3.52)$$

où  $D$  et  $I$  désignent respectivement le schéma direct et inverse. L'indice de performance est approché par la somme suivante

$$\bar{J} = \bar{J}(\bar{v}, \bar{q}) = h \sum_{k=1}^{K-1} L_{\bar{q}(k)}(\bar{x}(k), \bar{v}(k)) \quad (3.53)$$



En introduisant la métrique discrète  $d_d : \mathcal{Q} \times \mathcal{Q} \rightarrow \{0, 1\}$  définie comme suit

$$d_d(q_1, q_2) = \begin{cases} 0 & \text{si } q_1 = q_2 \\ 1 & \text{si } q_1 \neq q_2 \end{cases} \quad (3.54)$$

Avec une définition similaire que celle en (3.24),  $\bar{V}_q$  s'écrit

$$\bar{V}_q = \bar{V} \times \dots \times \bar{V} \subset \mathbb{R}^{(K-1)m}$$

l'algorithme défini dans algorithme 1 peut être adapté aux systèmes à commutations avec contraintes en modifiant l'**Étape 3** qui devient

**Algorithme 2** *Algorithme de commande des systèmes à commutations contraints*

**Étape 0** Fixer le nombre entier d'itérations maximal  $j_{max}$  et deux réels  $d_\mu > 0$  et  $\gamma > 1$ .

Fixer deux réels petits  $\epsilon_J > 0$  et  $\epsilon_u > 0$ . Fixer  $\mu^0 \geq 0$  et un profil initial  $\bar{q}^0 \in \Sigma_1$  (ou  $\bar{q}^0 \in \Sigma_2$ ) et  $\bar{v}^0 \in \bar{V}_{\bar{q}^0}$ , sous la condition initiale  $q_0 \in \mathcal{Q}$

**Étape 1** Calculer  $\bar{x}^0$  solution de (3.51) avec  $\bar{v} = \bar{v}^0$  et  $\bar{q} = \bar{q}^0$ , mettre  $j := 1$

**Étape 2** Calculer  $\bar{\lambda}^{j-1}$  solution de (3.52) avec  $\bar{v} = \bar{v}^{j-1}$ ,  $\bar{q} = \bar{q}^{j-1}$  et  $\bar{x} = \bar{x}^{j-1}$

**Étape 3** Calculer  $\bar{v}^j(k)$  et  $\bar{x}^j(k)$  pour  $k = 1, \dots, K$  tels que

**Étape 3 : Si** ( $k \times h$  est un instant candidat) **Alors**

– Calculer  $(\bar{q}^j(k), \bar{v}^j(k))$  et  $\bar{x}^j(k)$  tels que

$\bar{x}^j(k)$  est solution de (3.51) avec  $\bar{v}(k) = \bar{v}^j(k)$  et  $\bar{q}(k) = \bar{q}^j(k)$  et

$$(\bar{q}^j(k), \bar{v}^j(k)) = \arg \min_{s \in \mathcal{R}_{\bar{q}^j(k-1)}} \left\{ \min_{v \in \mathcal{V}_s} \left[ H_s(\bar{x}^j(k), v, \bar{\lambda}^{j-1}(k)) + \mu^{j-1} \|v - \bar{v}^{j-1}(k)\|^2 + \mu^{j-1} d_d(\bar{q}^{j-1}(k), s) \right] \right\} \quad (3.55)$$

**Si non**

– Calculer  $\bar{v}^j(k)$  and  $\bar{x}^j(k)$  tels que

$\bar{x}^j(k)$  est solution de (3.51), avec  $v(k) = \bar{v}^j(k)$  and  $\bar{q}(k) = \bar{q}^j(k)$  telle que

$$\bar{q}^j(k) := \bar{q}^j(k-1), \quad (\bar{q}^j(0) = q_0) \quad (3.56)$$

$$\bar{v}^j(k) := \arg \min_{v \in \mathcal{V}_{\bar{q}^j(k)}} \left[ H_{\bar{q}^j(k)}(\bar{x}^j(k), v, \bar{\lambda}^{j-1}(k)) + \mu^{j-1} \|v - \bar{v}^{j-1}(k)\|^2 \right] \quad (3.57)$$

**Fin Si**

**Étape 4** *Si*  $\left(\bar{J}(\bar{v}^j, \bar{q}^j) > \bar{J}(\bar{v}^{j-1}, \bar{q}^{j-1}) - \epsilon_J\right)$  *et*  $\left(\|\bar{v}^j - \bar{v}^{j-1}\| + d_d(\bar{q}^j, \bar{q}^{j-1}) > \epsilon_u\right)$  **Alors**

$$\mu^{j-1} := \max\left(\mu^{j-1} + d_\mu, \gamma\mu^{j-1}\right)$$

*et revenir à* **Étape 3**

**Étape 5** *Si*  $\left(\bar{J}(\bar{v}^j, \bar{q}^j) > \bar{J}(\bar{v}^{j-1}, \bar{q}^{j-1}) - \epsilon_J\right)$  **Alors**

**5.1**

$$\bar{v}^j := \bar{v}^{j-1}$$

$$\bar{q}^j := \bar{q}^{j-1}$$

**Sinon**

$$\mathbf{5.2} \mu^j := \max\left(0, \min(\mu^{j-1} - d_\mu, \mu^{j-1}/\gamma)\right),$$

**Fin Si**

**Étape 6** *Si*  $\left(j < j_{max}\right)$  **Alors**

$$j := j + 1$$

*et aller à* **Étape 2**

**Sinon**

*Arrêter*

**Fin Si**

**Discussion** L'algorithme est essentiellement composé de deux parties, la seconde partie du bloc **Si** dans l'**Étape 3** permet seulement la mise à jour de la commande continue pour une configuration fixée, à ce niveau un problème standard de commande est résolu. La première partie utilise une itération unifiée où une mise à jour de la commande continue et la stratégie de commutation sont effectuées. En effet, cela est possible pour des instants satisfaisants les contraintes définies par les ensembles (3.42) ou (3.43). Remarquons que seul la première partie de l'**Étape 3** est différente par rapport à l'algorithme formulé dans la section 3.3.

## 3.5 Applications

Dans la sous section suivante, deux exemples d'application sont traités. Pour la première application, il s'agit d'un exemple académique traité dans [140] avec la méthode d'optimisation à deux niveaux. Pour le second exemple, il s'agit de la commande du modèle simplifié d'un véhicule automobile [89]. L'objectif est de coordonner l'action de la pédale et le passage de vitesses afin de poursuivre une trajectoire de vitesse.

### 3.5.1 Exemple académique

Cet exemple est le même que celui testé en [140]. Le système est composé de trois configurations décrites par les équations suivantes

$$\text{Configuration 1 : } \begin{cases} \dot{x}_1 &= -x_1 + 2x_1v \\ \dot{x}_2 &= x_2 + x_2v \end{cases} \quad (3.58)$$

$$\text{Configuration 2 : } \begin{cases} \dot{x}_1 &= x_1 - 3x_1v \\ \dot{x}_2 &= 2x_2 - 2x_2v \end{cases} \quad (3.59)$$

$$\text{Configuration 3 : } \begin{cases} \dot{x}_1 &= 2x_1 + x_1v \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + 3x_2v \end{cases} \quad (3.60)$$

avec la fonctionnelle  $J$  suivante à minimiser<sup>4</sup>

$$J = \frac{1}{2}(x_1(T) - 2)^2 + \frac{1}{2}(x_2(T) - 2)^2 + \frac{1}{2} \int_0^T [(x_1(\tau) - 2)^2 + (x_2(\tau) - 2)^2 + v^2(\tau)] d\tau \quad (3.61)$$

et  $x(0) = x_0 = (1 \ 1)'$  pour condition initiale,  $T = 3$  sec et avec la contrainte d'amplitude  $|v| \leq 2$ . Il est clair que ce système à commutations peut s'écrire sous la forme (3.4). La première simulation concerne le cas où le système n'est ni contraint dans son évolution temporelle ni structurelle. Le même problème est résolu avec l'algorithme développé dans la section 3.3 (sans spécifier d'avance le nombre de commutations<sup>5</sup>). Dans toutes les simulations qui suivent, si les paramètres ne sont pas explicitement spécifiés cela veut dire les valeurs suivantes sont prises par défaut  $\mu^0 = 10$ ,  $v_0(\cdot) = -1$ ,  $d\mu = 0.5$  et  $\gamma = 1.5$ .

Les résultats de simulation sont ceux tracés sur les figures 3.2 pour la stratégie de commutation, la commande continu et les états internes du système et sur la figure 3.3 pour les variables internes à l'algorithme à savoir l'indice de performance, le paramètre  $\mu^j$  et le terme quadratique  $\|u^j - u^{j-1}\|$ . La complexité associée à l'approche d'optimisation à deux niveaux pour l'exemple sur la figure 3.2 aurait nécessité l'évaluation de plus  $3^{65}$  scénarios (65 étant le nombre de commutations sur la figure 3.2). L'indice de performance atteint est de  $\bar{J} = 0.3541$ . Remarquons aussi que sur la figure 3.3 les conditions du corollaire 2 sont satisfaites, la conclusion est que le profil final de commande correspond à une trajectoire extrémale avec un coût raisonnablement faible.

<sup>4</sup>Une fonctionnelle  $J$  du type Bolza  $J(u) = \phi(x(T)) + \int_{t_0}^T L(x, u)$  peut se mettre sous la forme Lagrange suivante  $J_1(u) = \int_{t_0}^T L_1(x, u)$  avec  $L_1(x, u) = L(x, u) + \frac{\partial \phi}{\partial x} \dot{x}$  et  $\arg \min_u(J) = \arg \min_u(J_1)$  pourvue que  $\phi(\cdot)$  soit différentiable.

<sup>5</sup>Il faut noter tout de même que le nombre de commutations est borné par  $(T - t_0)/h$  qui représente une contrainte de réalisation et non une contrainte de faisabilité. Le cas de l'approche d'optimisation à deux niveaux, le nombre de commutation est limité par des contraintes de faisabilité du type explosion combinatoire.

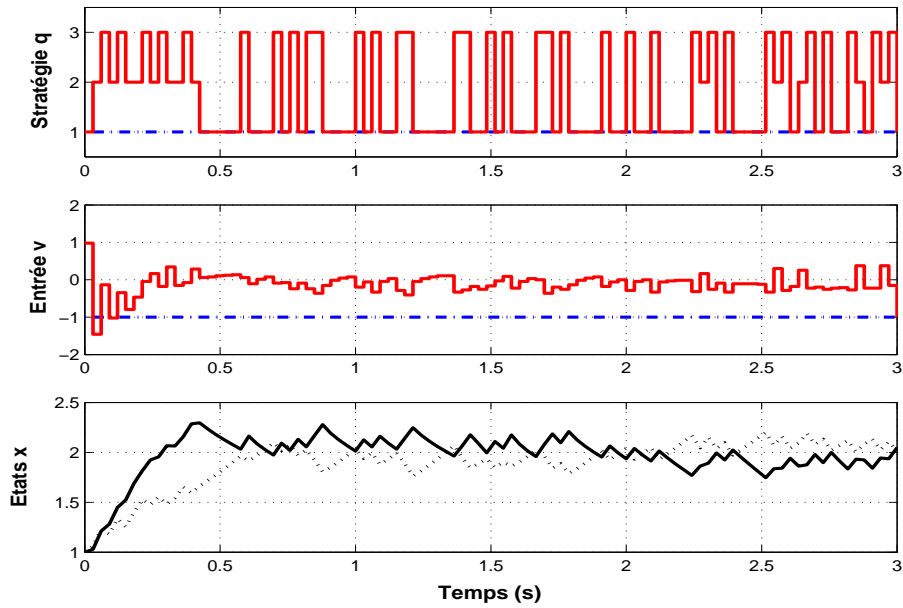


FIG. 3.2 – La stratégie de commutation, l’entrée continue et les états du système. Une méthode d’optimisation aveugle aurait nécessité l’exploration d’un arbre de plus de  $3^{65}$  éléments.

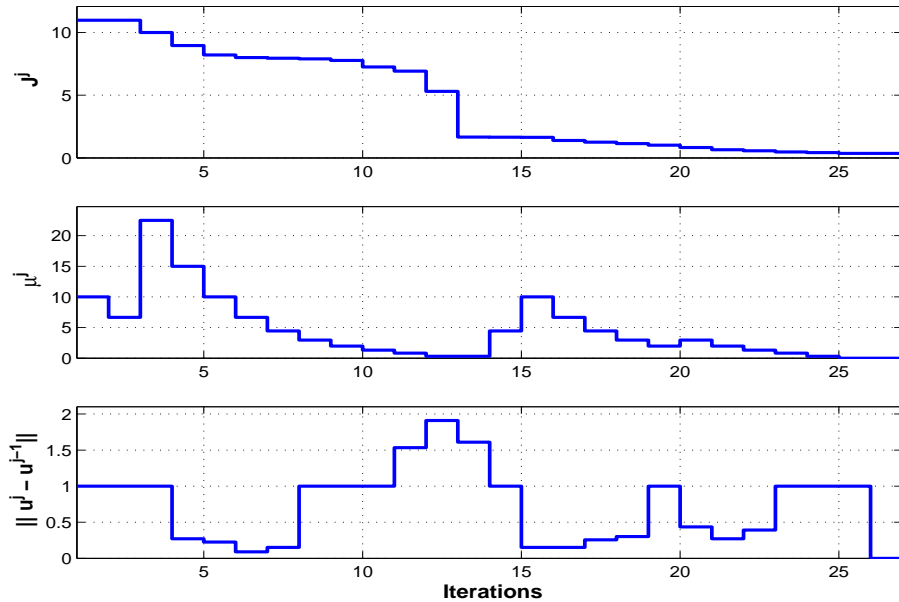


FIG. 3.3 – Indice de performance,  $\mu^j$  et  $\|u^j - u^{j-1}\|$ . La valeur finale du paramètre  $\mu^j$  et le terme quadratique satisfont aux conditions du corollaire 2.

Le système est ensuite contraint à démarrer d'une configuration donnée parmi les trois configurations possibles. Dans la table (3.1) sont indiqués les indices de performance réalisés pour différentes conditions initiales. Le caractère local de l'algorithme (et toute condition d'optimalité) est mis en évidence pour cet exemple. Rappelons qu'en contraignant le système à démarrer dans une configuration donnée, le Principe du Minimum est non applicable.

Configuration initiale	Indice de performance $\bar{J}$	Temps d'exécution
1	0.3541	2.63 sec
2	0.6212	3.37 sec
3	0.3873	4.04 sec

TAB. 3.1 – Indice de performance pour différentes condition initiales sur les configurations

**Identification des transitions et nœuds critiques** Ce paragraphe est dédié à la possibilité d'utiliser cet algorithme afin d'identifier les configurations les plus sensibles. Cela peut être le cas où le concepteur doit choisir d'intégrer ou non des composantes à un système donné, ou encore le cas des réseaux informatiques où on doit choisir les composantes d'un vecteur de commande qui contribue le plus à un indice de performance.

Comme mis en évidence par la figure 3.2 la transition entre la configuration 1 et la configuration 3 est pratiquement vitale (domine la stratégie de commutation) au système à commutations. Dans les simulations suivantes, cette transition est prohibée en ajustant l'ensemble  $\mathcal{E}$  qui devient  $\mathcal{E} = \mathcal{Q} \times \mathcal{Q} - \{(1, 3)\}$  et en prenant  $v_0(\cdot) = 2$  et  $\mu^0 = 10000$ . Les résultats sont montrés sur la figure 3.4. Il est clairement visible qu'afin de maintenir un niveau de performance acceptable, l'activité de la commande continue a augmentée (comparer avec la figure 3.2). L'indice de performance réalisée est de  $\bar{J}_{1-3} = 0.8152$  en 98 itérations.

On peut ainsi continuer à éliminer les transitions et voir l'impact qu'elles peuvent avoir sur l'indice de performance. Cela peut en effet conduire à considérer un nombre important de simulations.

Plutôt que d'explorer l'effet de chaque transition, dans ce qui suit certains nœuds sont tout simplement éliminés. Cela peut constituer une des applications de cet algorithme à savoir l'identification de nœuds critiques. Le tableau (voir tableau 3.2) suivant répertorie les résultats numériques obtenus en éliminant successivement les configurations une à une (rappelons qu'ici aucune violation des hypothèses du Principe du Minimum n'est faite). En figures 3.5 et 3.6 sont répertoriées les trajectoires obtenues pour le cas où respectivement la configuration 2 et la configuration 3 est éliminée. Comme constaté dans le tableau 3.2 le nœud 3 peut être considéré comme critique pour le système à commutations, cela est dû au fait que l'indice de performance est multipliée par plus de 20 lorsque cette configuration est retirée de la dynamique du système. En utilisant un temps de résidence minimal dans une configuration le nombre de commutation peut être implicitement borné. C'est l'inertie des

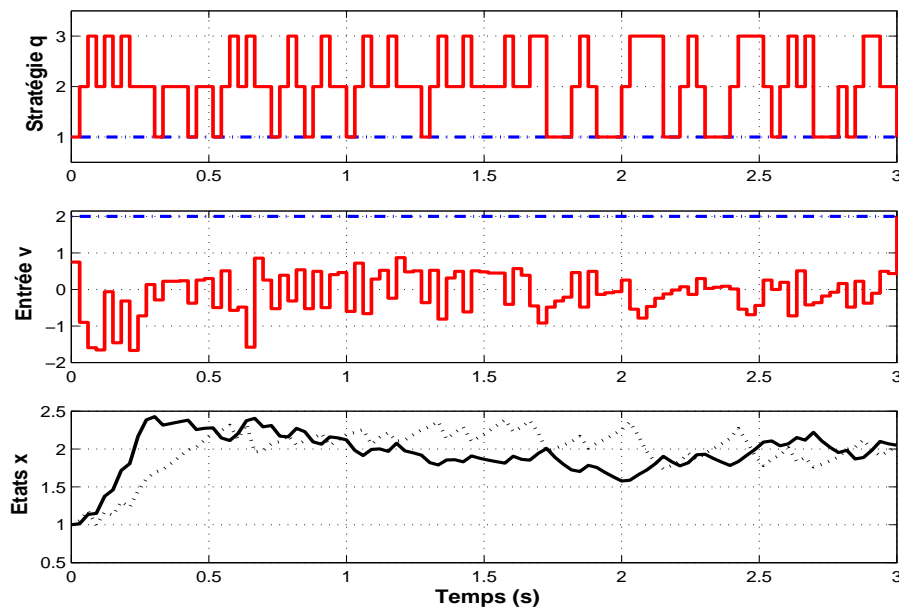


FIG. 3.4 – La stratégie de commutation, entrée continue et les états du système pour le cas où la transition du nœud 1 au nœud 3 est interdite (voir figure 3.2). Cette interdiction est contournée par un passage rapide par la configuration 2, la transition  $1 \rightarrow 3$  est contournée par les transitions successives  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$ . L'activité de la commande continue a aussi augmenté (comparer avec la figure 3.2)

actionneurs qui dans la majorité des cas imposent de telles restrictions. Sur la figure 3.7 sont tracées la stratégie de commutation, la commande continue et les états du systèmes lorsque le système est contraint à commuter au minimum chaque  $10 \times h$  ( $h = 0.03$  s étant la période d'échantillonnage).

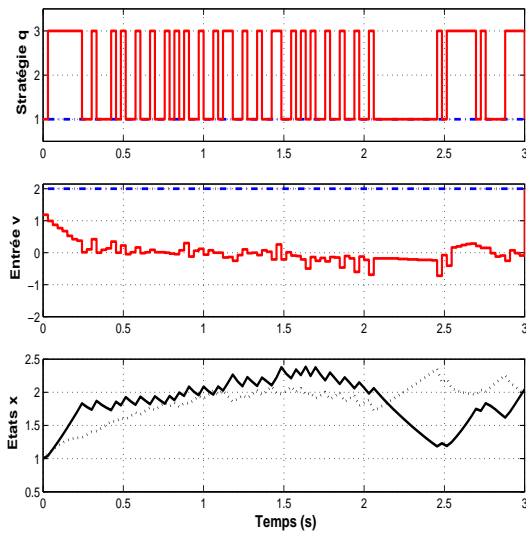


FIG. 3.5 – La stratégie de commutation, entrée continue et les états du système pour le cas où la configuration 2 est éliminée. Les performances restent bonnes par rapport au cas où toutes les configurations sont présentes (comparer avec 3.2).

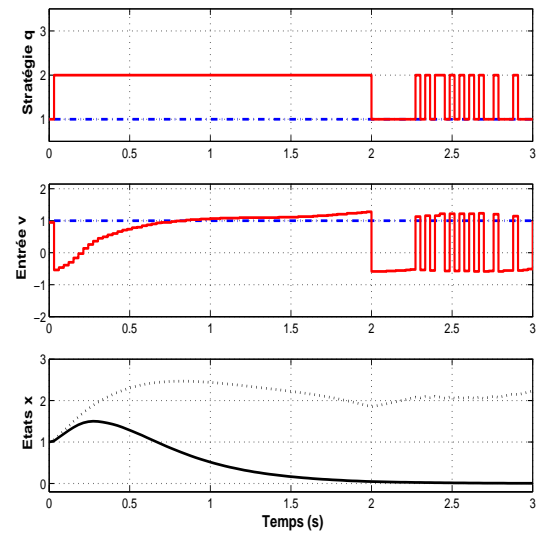


FIG. 3.6 – La stratégie de commutation, entrée continue et les états du système pour le cas où la configuration 3 est éliminée. Les performances sont très médiocres par rapport au cas où toutes les configurations sont présentes (comparer avec 3.2). Ceci motive la désignation de cette configuration comme critique à ce système à commutations.

Configuration éliminée	$u^0(\cdot)$	$\mu^0$	$\bar{J}$	$j$
aucune	-1.0	10	0.35	26
1	-1.5	10	0.60	19
2	2.0	100	0.46	35
3	1.0	100	7.51	30

TAB. 3.2 – Identification des nœuds critiques

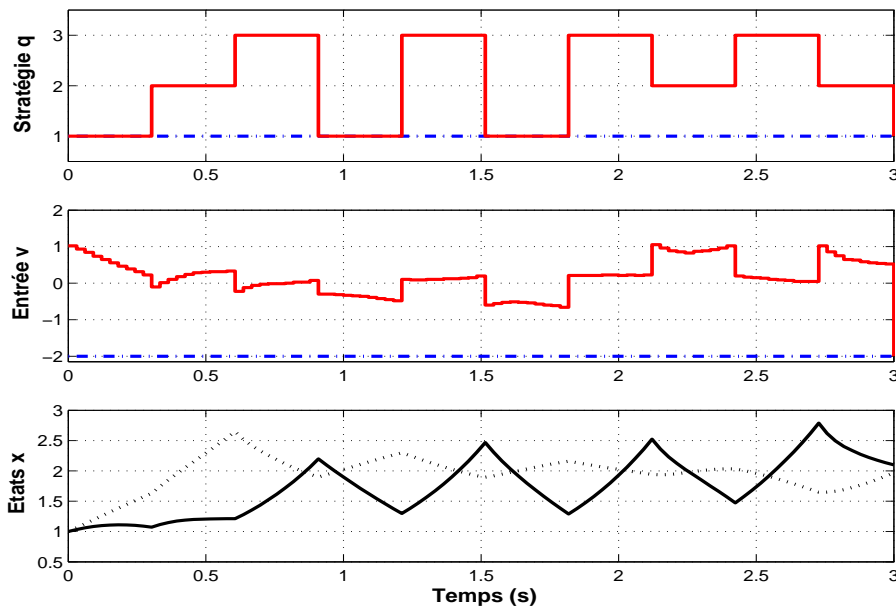


FIG. 3.7 – La stratégie de commutation, entrée continue et les états du système pour le cas où un temps de résidence minimal de  $10h$  est spécifié. L'indice de performance réalisé est de 1.637.



### 3.5.2 Commande en vitesse d'un véhicule automobile

Cette sous section concerne la synthèse de la commande d'un véhicule automobile équipé d'une boîte à vitesse automatique. Le modèle utilisé est celui développé par Mathworks et est utilisé, dans cette étude, comme un benchmark sur lequel l'algorithme de la section précédente est évalué. En effet, une version beaucoup plus simplifiée est considérée dans [40] comme étant pertinente pour la synthèse de lois de commande pour les systèmes à commutations. Le système consiste en une entrée continue et une autre discrète correspondant respectivement à la position de la pédale d'accélération et la position du levier de vitesse.

Le modèle développé dans [89] contient trois parties distinctes à savoir (voir figure 3.8)

- Le moteur
- Le système de transmission
- La dynamique du véhicule

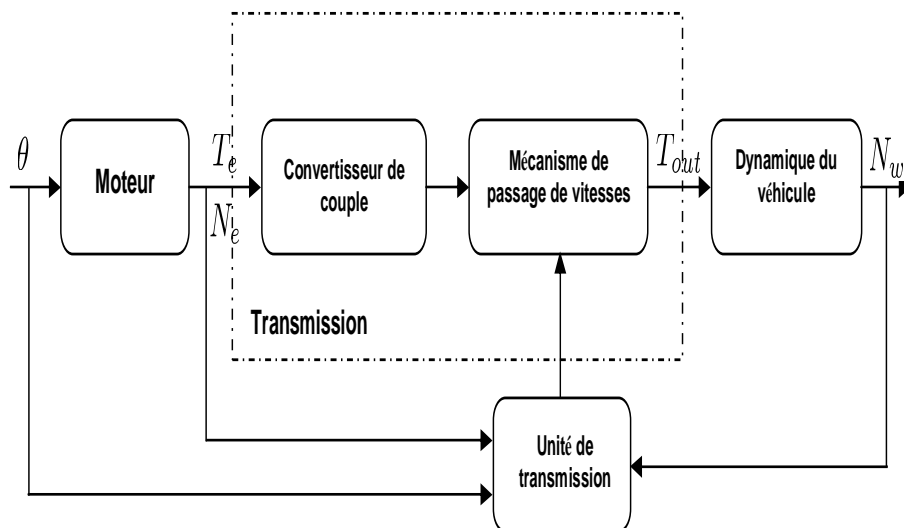


FIG. 3.8 – Structure du véhicule automobile

Tous les paramètres du véhicule sont regroupés dans les deux tableaux suivants

Paramètre	Valeur
Inertie moteur $I_e$	0.022
Inertie véhicule $I_v$	0.022
Rapport final $R_{fd}$	3.230
Coefficient de friction (roue) $r_0$	40.000
Friction aérodynamique $r_2$	0.020
Constante géométrique $c_1$	0.013

TAB. 3.3 – Paramètres du modèle

Position vitesse q	$R_q$
1	2.393
2	1.450
3	1.000
4	0.677

TAB. 3.4 – Les gains pour le passage de vitesses

en prenant comme vecteur d'état la vitesse du moteur  $N_e$  en *tr/min* et  $N_w$  la vitesse du véhicule en *km/h*,  $x = (x_1 \ x_2)' = (N_e \ N_w)'$  le système s'écrit sous la forme compacte suivante

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{I_e} \left[ T_e(x_1, v) - \left( \frac{x_1}{g_1 \left( c_1 \frac{R_q x_2}{x_1} \right)} \right)^2 \right] \quad (3.62)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{c_1 I_v} \left[ R_q g_2 \left( c_1 \frac{R_q x_2}{x_1} \right) \left( \frac{x_1}{g_1 \left( c_1 \frac{R_q x_2}{x_1} \right)} \right)^2 - \frac{1}{R_{fd}} (r_0 + r_2 x_2^2) \right] \quad (3.63)$$

où  $v = \theta \in [0, 100]$  représente la position de la pédale d'accélération,  $R_q$  est le gain variable représentant la position de la vitesse (voir tableau 3.4). Les fonctions  $T_e(\cdot, \cdot)$ ,  $g_1(\cdot)$  et  $g_2(\cdot)$  sont tracées sur les figures 3.9-3.11. Ces courbes représentent des données expérimentales provenant d'un moteur réel. Rappelons que le système (3.62)-(3.63) est de la forme standard suivante

$$\dot{x} = f_q(x, v)$$

voir la sous section 3.2.1.

### 3.5.2.1 Formulation du problème de commande

Plusieurs approches sont proposées dans la littérature afin de contrôler la vitesse des véhicules automobiles. A cet égard, on peut citer la référence [106] où un contrôleur à mode glissant est synthétisé pour mettre à jour la position de la pédale, la commutation entre les vitesses n'est pas prise en compte.

Dans [19] et [134] une stratégie à deux échelles de temps est proposée. L'échelle la plus rapide est pour mettre à jour l'entrée continue où un contrôleur robuste est synthétisé en se basant sur une linéarisation. La stratégie lente est quant à elle utilisée pour mettre à jour le passage de vitesse. Les transitions interdites e.g., passage de la vitesse 1 à 4, sont fortement pénalisées. Tout au contraire, l'approche proposée ici utilise une itération unifiée pour la mise à jour de la position de la pédale et le passage de vitesses.

L'objectif peut être formulé comme étant de trouver une commande continue  $v(\cdot)$  et une

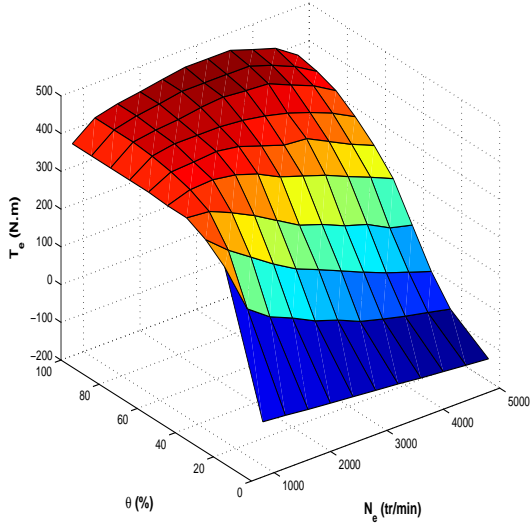


FIG. 3.9 – La fonction 3D décrivant le couple comme une fonction de la vitesse du moteur et la position de la pédale d'accélération

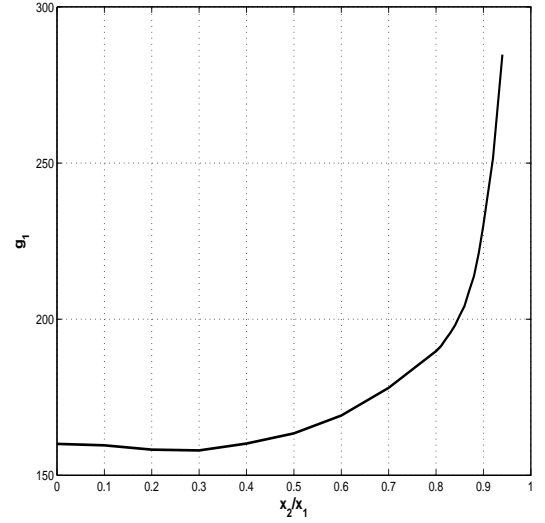


FIG. 3.10 – La fonction  $g_1$

stratégie de commutation telle que le critère suivant soit minimisé

$$J = P_{f_1} x_1^2(T) + P_{f_2} (x_2(T) - v_r(T))^2 + \int_{t_0}^T [P_{x_1} x_1^2(\tau) + P_{x_2} (x_2(\tau) - v_r(\tau))^2 + P_v v^2(\tau)] d\tau \quad (3.64)$$

l'indice de performance pénalise la déviation des états par rapport à des trajectoires de référence tout en limitant l'accélération. D'un point de vue pratique certaines transitions ne sont pas permises (voir figure 3.12), au lieu de les pénaliser (ce qui peut compliquer la résolution du problème), ces transitions sont simplement retirées de l'ensemble  $\mathcal{E}$ . Les possibilités de transitions sont celles montrées sur la figure 3.12.

Les valeurs des paramètres intervenant dans le critère (3.64) sont pris égales à :

$T = 15s$ ,  $P_{f_1} = 0$ ,  $P_{f_2} = 10$ ,  $P_{x_1} = 10^{-4}$ ,  $P_{x_2} = 10$  et  $P_v = 10^{-4}$ . Pour la trajectoire de référence  $v_r(\cdot)$ , la fonction suivante  $v_r(t) = 90(1 - e^{-t/2.5})$  représente bien les objectifs souhaités.

### 3.5.2.2 Implémentation

Les simulations sont conduites en utilisant le langage de programmation FORTRAN 90-compiler sur un ordinateur personnel du type Pentium 4 sous Windows XP. Les temps d'exécution sont estimés (voir tableau 3.5) à l'aide de la sous-routine *cpu\_time* disponible sous ce même environnement de programmation.

Étant donné qu'aucune expression analytique n'est disponible pour les différentes fonc-

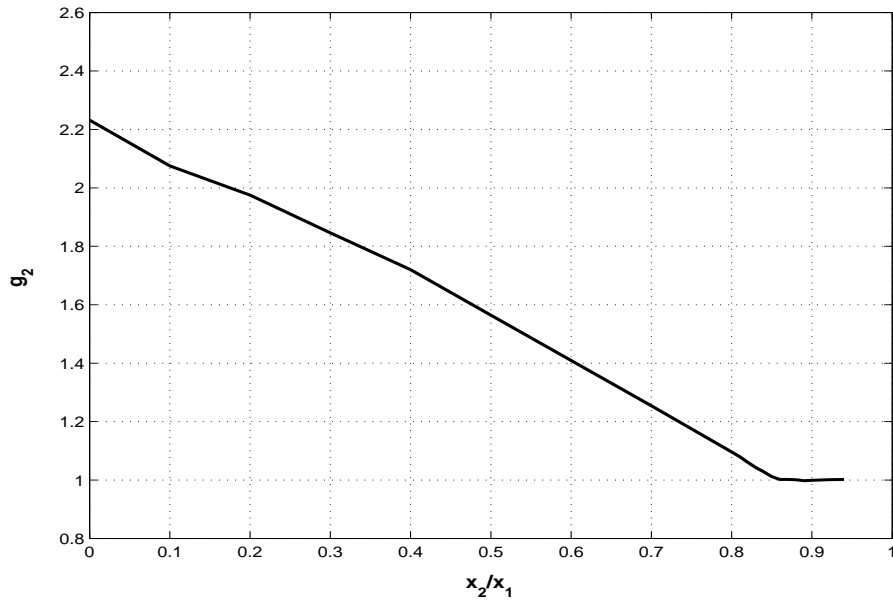
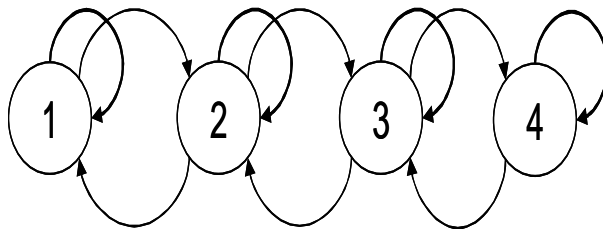
FIG. 3.11 – La fonction  $g_2$ 

FIG. 3.12 – Positions du levier de vitesse et les transitions possibles

tions statiques, voir les figures 3.9-3.11, une méthode d'interpolation linéaire, conjointement à une méthode binaire de recherche sont utilisées afin d'interpoler et d'extrapoler ces courbes. Pour la minimisation de l'Hamiltonian pénalisé voir **Étape 3** de l'algorithme 1 (section 3.3), la méthode de la section d'or (Golden Section) est utilisée, cette méthode a l'avantage de ne pas utiliser de gradient (qui n'existe pas dans ce cas) et est basée sur une méthode de dichotomie [103].

Les premières simulations concernent le cas où toutes les positions de vitesse sont accessibles. Sur la figure 3.13 sont tracées, la stratégie de commutation, l'entrée continue et les états du système pour le cas où toutes les configurations sont accessibles. Les résultats de convergence de l'algorithme sont montrés sur la figure 3.14. La stratégie de commutation synthétisée sur la figure 3.13 est la stratégie qu'emploierait tout conducteur averti. Remarquons particulièrement les coups d'accélération avant l'engagement de la vitesse supérieure.

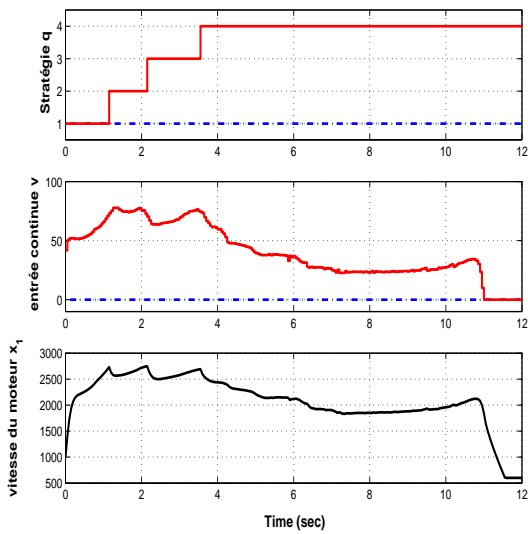


FIG. 3.13 – La stratégie de commutation, entrée continue et les états du système pour le cas où toutes les configurations sont accessibles. Remarquons les pics d'accélération avant le passage de vitesse typique d'une conduite conseillée.

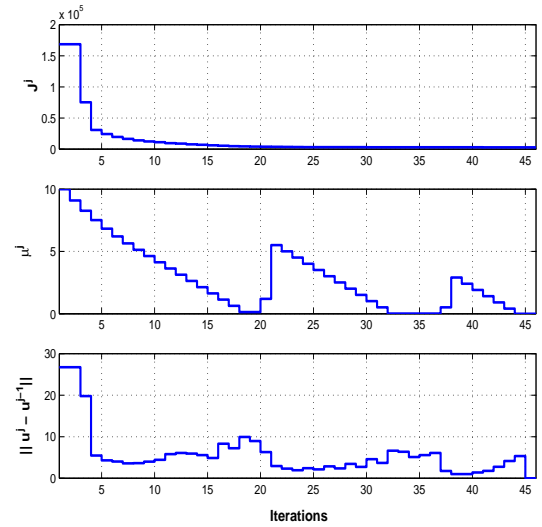


FIG. 3.14 – Résultats de convergence de l'algorithme.

sur la figure 3.15 est représentée la vitesse du véhicule, la trajectoire réalisée et celle désirée sont pratiquement confondues. La trajectoire en pointillé est la trajectoire initiale (itération 0). Le tableau 3.5 répertorie une comparaison entre le cas non contraint et le cas contraint (voir figure 3.12). Dans les pires des cas, l'intégration des contraintes permet de diviser le temps d'exécution par 2 qui représente un gain appréciable pour des applications en temps réel.

Mesures	Sans contraintes	Avec contraintes
Indice de performance	$2.2954 \cdot 10^3$	$2.964 \cdot 10^3$
Temps d'exécution	12 s	6.25 s

TAB. 3.5 – Comparaison en termes de performance, temps d'exécution, entre le cas où des contraintes sont présentes et le cas sans.

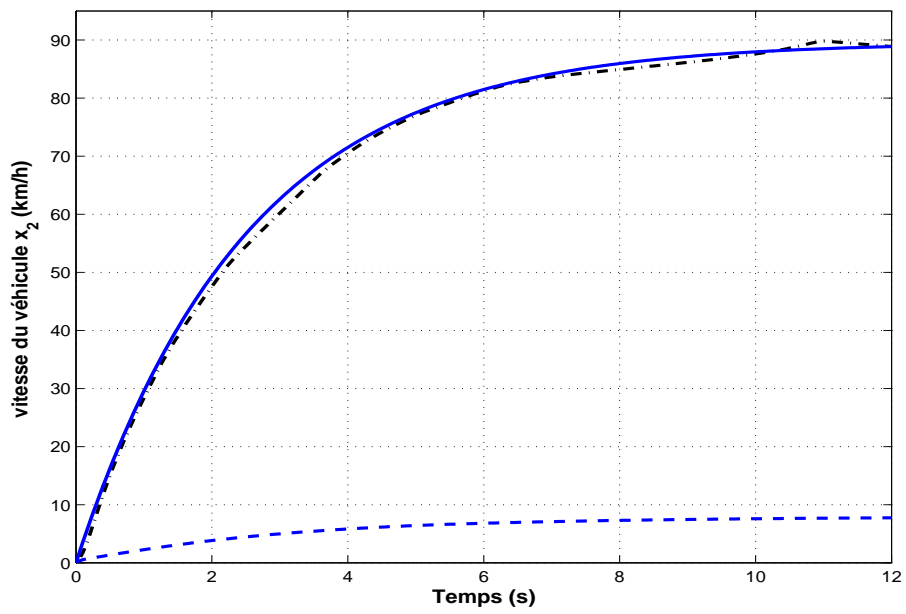


FIG. 3.15 – La poursuite de la trajectoire imposée. Remarquons que les courbes sont confondues, en pointillé est la trajectoire initiale.

## 3.6 Conclusions et Perspectives

Dans ce chapitre, en considérant le cas des systèmes à commutations sans contraintes sur les configuration atteignables, il est rappelé que le Principe du Minimum sous sa forme standard reste applicable. Cette remarque fondamentale, ouvre une brèche à l'utilisation d'algorithmes développés pour des systèmes avec des ensembles de commande non convexe. C'est dans cette optique, qu'un algorithme basé sur les variations fortes est développé. La convergence de l'algorithme est démontrée sous des conditions assez standards. Le cas où le système à commutations est contraint dans son évolution discrète est discuté, il est montré que certaines hypothèses du Principe du Minimum sont violées. Dans ce cas précisément, l'algorithme peut être utilisé comme un outil de synthèse. Cependant, toute interprétation en terme d'extrémalité perd son sens et les trajectoires obtenues sont par construction sous optimales. Ce travail constitue un point de départ pour la construction d'algorithmes capables de traiter des problèmes avec des dynamiques hybrides plus complexes.

L'algorithme est tout d'abord testé sur un exemple académique, où de nouvelles utilisation en sont faites, en exemple est l'identification hors ligne des configurations critiques, ceci permet au concepteur d'intégrer une composante dynamique que si son apport est important par rapport à une mesure de qualité. Le second exemple concerne le cas d'une commande en vitesse d'un véhicule automobile. L'objectif est de trouver une coordination entre la pédale et le passage de vitesse afin de poursuivre un profil de vitesse désiré. La solution obtenue est celle intuitivement réalisée par n'importe quel conducteur. L'introduction des contraintes structurelles sur le passage de vitesse permet dans ce cas de réduire le temps de calcul nécessaire à exécuter l'algorithme.

# Chapitre 4

## Commande prédictive des systèmes à commutations

*Everything has been thought of before, but the problem is to think it again.*

-Goethe

### 4.1 Introduction à la commande prédictive

La commande prédictive ou commande à horizon fuyant est en train de devenir une stratégie quasi standard de commande dans l'industrie. Ce succès, elle le doit principalement au fait qu'elle permet de tenir compte de différents types de contraintes i.e., sur les états, entrées et sorties. La commande prédictive est connue depuis le livre de *Lee et Markus* [77], les auteurs proposaient un schéma où un problème d'optimisation à horizon fini est résolu en ligne dans une boucle de commande. La méthode s'est néanmoins développée indépendamment de ces réflexions théoriques, les motivations étaient suscitées par des considérations économiques et pratiques comme souligné dans les références e.g., [107, 91, 108].

La stratégie consiste en deux étapes répétées indéfiniment, résoudre un problème d'optimisation à horizon fini i.e., extraire la séquence de commande qui minimise une certaine fonctionnelle, appliquer la première composante de cette séquence au système réel. Le processus d'optimisation est reconduit avec de nouvelles mesures provenant du système physique. Cette démarche correspond à un problème de programmation mathématique et peut être vue comme une alternative à la résolution de l'équation de *Hamilton-Jacobi-Bellman* (HJB) qui reste une tâche beaucoup plus difficile que la batterie d'optimisation à horizon fini que constitue l'approche à horizon fuyant. Un retour d'état explicite dans le cas où on sait résoudre l'équation de HJB ( $H_2$  et  $H_\infty$ ) n'est possible que pour une classe réduite de systèmes [14] et dans un cadre plus général on doit souvent se contenter d'un retour d'état implicite. La commande prédictive diffère ainsi des autres stratégies de commande, dans le sens



fondamental explicité plus haut et dans le sens de sa mise en œuvre.

Sur la figure 4.1 est tracé le schéma fonctionnel d'une commande prédictive. Le processus à contrôler est représenté par le bloc *Système* et le contrôleur par le bloc *Commande Prédictive*. Un observateur représenté par le bloc *Observateur* peut être éventuellement présent, il aura pour rôle de reconstruire les états du système. Dans le bloc du contrôleur, un modèle du système à contrôler est explicitement présent, les paramètres où même la structure interne de ce modèle peuvent être mis à jour en ligne. Cela est le cas où on identifie e.g., localement des modèles linéaires puis suivant l'état on commute vers telle ou telle autre représentation. Le sous bloc *coût + contraintes* représente quant à lui les différentes contraintes de fonctionnement ainsi que la fonctionnelle à optimiser.

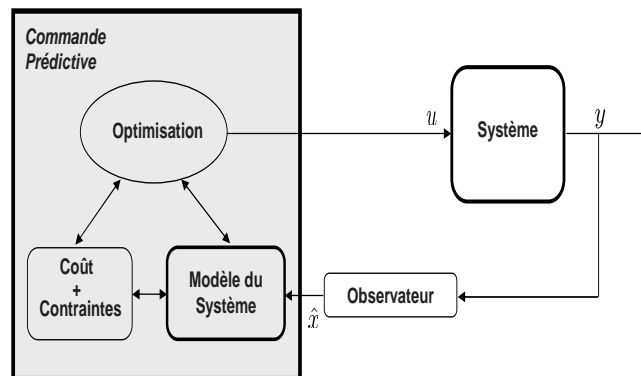


FIG. 4.1 – Schéma général d'une commande prédictive

Le bloc *optimisation* implémente l'algorithme d'optimisation dynamique et correspond aux poumons du contrôleur. Cette partie doit résoudre un problème d'optimisation en dimension infinie, puisqu'il s'agit d'optimiser un critère sur un espace de fonctions admissibles, qui peut s'avérer délicat et peut creuser les réserves de temps de calcul disponibles en ligne, mettant en péril la faisabilité d'une telle démarche. Afin de réduire la complexité de cette tâche, plusieurs approches sont à envisager.

- La première consiste à utiliser les conditions d'optimalité (le Principe du Minimum ou la programmation dynamique). L'algorithme formulé dans le chapitre précédent peut être utilisé à cet effet
- La seconde classe est représentée par les méthodes dites directes dans lesquelles le problème est pris tel quel. Les variables d'optimisation dans ce cas sont les états et les entrées. En terme de complexité, cela nous amène à résoudre une séquence de problèmes

- de programmation quadratique en général de grande dimension
- La troisième approche consiste à approximer le système et les régions de faisabilité pour les variables d’optimisation par des fonctions affines, ce qui correspond à la résolution d’une batterie de programmes linéaires.
- La quatrième classe vise à réduire la complexité en réduisant les degrés de liberté offerts par la commande, voir [28] pour plus de détails sur les différentes méthodes

La dernière approche, inclut la méthode qui consiste à réduire la structure temporelle des commandes possibles en boucle ouverte, un passage par exemple de l’espace de fonctions mesurables à un espace beaucoup plus réduit, où il y a une chance de trouver une solution, sous optimale certes, mais sans avoir à explorer un nombre important de possibilités. Cette technique de réduction est souvent appelé *paramétrisation de la commande en boucle ouverte* (open loop control parametrisation). Il s’agit là d’une méthode sous optimale par construction. On retrouve cette paramétrisation dans des applications industrielles, sans elle certains produits n’auraient jamais vu le jour voir e.g., [107]. En effet, dans le milieu industriel on trouve deux types de paramétrisation ; la première utilisant une base fonctionnelle polynomiale, où les inconnues sont les paramètres intervenant dans la base. Cette dernière est à relier aux méthodes de résolution de l’équation HJB e.g., [13, 3]. La seconde utilise des commandes constantes (*move blocking*) tout au long de l’horizon de prédiction.

Cette approche est étendue pour des systèmes non linéaires commutés, où un contrôle local est déjà mis en place. Il s’agit de systèmes critiques<sup>1</sup>, où une commande est préalablement imposée au niveau le plus bas, le concepteur ne peut dans ce cas que commuter entre les différents systèmes afin d’améliorer un indice de performance global. L’utilisation d’une approche à horizon fuyant conjointement à la paramétrisation permet d’extraire un chemin dans la dynamique discrète du système. Ce type de démarche permet de réduire considérablement le temps de calcul et représente une alternative pour la commande des systèmes à dynamique rapide. Le prix à payer est l’obtention d’une solution sous optimale et l’absence de preuve générique de stabilité.

La première application de cette approche concerne l’exemple académique d’un système affine en la commande [140]. Le compromis complexité/performance est évalué numériquement en comparant la stratégie développée à une stratégie de recherche exhaustive. L’effet induit par l’élimination de certaines transitions est étudié et les plus importantes d’entre elles identifiées. La seconde partie concerne une application concrète en mécanique des fluides. Il s’agit de stabiliser l’ondulation d’un film fluide s’écoulant le long d’une paroi verticale. Ce phénomène est modélisé par une équation aux dérivées partielles non linéaire

---

<sup>1</sup>D’une manière plus générale, l’approche qui consiste à introduire une boucle de commande dans chaque configuration et d’utiliser une stratégie de commutation au niveau plus haut est une stratégie visant à réduire la complexité associée au problème de synthèse des systèmes hybrides.

dite de Kuramoto-Sivashinsky du nom des deux physiciens qui l'ont étudié. Il s'agit là de synthétiser une stratégie de commutation entre différents actionneurs physiquement distribués ou ce qui équivaut à un seul actionneur pouvant se déplacer le long du système à des positions prédéfinies. Un problème similaire est formulé dans [41] et [42] pour respectivement une structure flexible et la stabilisation de câbles. L'application développée est influencée par les travaux [45, 7] dans le sens où la même modélisation et la même forme de contrôleurs locaux sont retenus dans le présent travail. Un regain de stabilité et l'élargissement des régions d'attraction sont reportés pour cet exemple. Les conclusions sont celles faites pour certains systèmes à dimension fini [93].

Le chapitre est organisé comme suit :

Dans la section 4.2 un problème de commande prédictive est formulé pour une classe de systèmes à commutations. La section 4.3 est consacrée à la formulation de l'algorithme proposée. Dans l'avant dernière section des expérimentations numériques sont conduites d'abord sur un système académique puis sur un modèle d'un fluide s'écoulant le long d'une paroi verticale. Quelques conclusions et perspectives sont énoncées dans la dernière section.

## 4.2 Commande Prédictive des systèmes à commutations

Dans cette partie du manuscrit, les systèmes à commutations sous une loi de commande locale sont introduits. Les caractéristiques de la dynamique discrète reste la même par rapport à la définition donnée au chapitre 1. Dans le modèle suivant, seulement une rétroaction locale est adjointe à chaque nœud composant le système à commutations.

### 4.2.1 Modélisation des systèmes à commutations

**Définition 6** *Un système à commutations contrôlé est un tuple  $\mathcal{S} = (\mathcal{D}, \mathcal{F}, \mathcal{K})$  où*

- $\mathcal{D} = (\mathcal{Q}, \mathcal{E})$  est un graphe orienté représentant la structure discrète du système. L'ensemble des nœuds  $\mathcal{Q} = \{1, 2, \dots, Q\}$  est l'ensemble d'indices des configurations. L'ensemble des arêtes orientées  $\mathcal{E}$  est un sous ensemble du produit Cartésien  $\mathcal{Q} \times \mathcal{Q}$  contenant toutes les transitions valides représentées par les éléments du type  $(q_1, q_2)$ , indiquant qu'une commutation forcée est possible du nœud  $q_1$  au nœud  $q_2$  est permise.
- $\mathcal{F} = \{f_q : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n, q \in \mathcal{Q}\}$  est un ensemble de champ de vecteurs, où à chaque nœud  $q \in \mathcal{Q}$  est associé un champ de vecteurs  $f_q(x, u)$ , où  $x \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état et  $u \in U_q \subset \mathbb{R}^m$  est le vecteur d'entrée de commande,  $U_q$  est un ensemble compact.
- $\mathcal{K} = \{K_q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, q \in \mathcal{Q}\}$  est l'ensemble des retours d'état locaux. Le système au nœud  $q$  est décrit par la dynamique suivante

$$\dot{x} = f_q(x, u) \quad (4.1)$$

$$u = K_q(x) \quad (4.2)$$

**Remarque 6** Les retours d'état  $K_q(\cdot)$  sont dits locaux, dans le sens où un contrôleur différent est associé à chaque nœud du système. En effet, c'est le cas de la plupart des systèmes critiques où pour des raisons de fiabilité et de sécurité, une commande est déjà en place, le concepteur est seulement autorisé à commuter entre les différents nœuds afin d'améliorer les performances ou la stabilité du système.

Pour le système à commutations autonome  $\mathcal{S}$ , l'entrée est une stratégie de commutation globale définie comme suit

**Définition 7** Pour un système à commutations  $\mathcal{S}$ , une stratégie de commutation ou profil admissible  $q(\cdot)$  est une fonction constante par morceaux définie pour tout  $t \in [t_0^s, \infty)$  comme suit

$$q(t) = \begin{cases} q_0 & t_0^s \leq t < t_1^s \\ q_1 & t_1^s \leq t < t_2^s \\ \vdots & \vdots \\ q_K & t_K^s \leq t < t_{K+1}^s \\ \vdots & \vdots \end{cases} \quad (4.3)$$

où  $\{t_k^s\}_{k \in \mathbb{N}}$  constitue une séquence non bornée et strictement croissante d'instant de commutation, et  $(q_k, q_{k+1}) \in \mathcal{E}$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$  laissant sous entendre que  $q(\cdot)$  respecte les limites décrites dans la dynamique discrète du système. On définit aussi  $\Sigma$  comme étant l'ensemble des stratégies de commutation admissibles  $\Sigma \triangleq \{q(\cdot) \text{ définie sur } [t_0, \infty)\}$ .

Plus précisément, les séquences d'instant de commutation vérifient la condition suivante, il existe un  $\tau > 0$  tel que quelque soit  $i \in \mathbb{N}$   $t_{i+1}^s \geq t_i^s + \tau$ , ainsi tous les phénomènes pathologiques tels que *Zeno* i.e., accumulation des instants de commutation, sont naturellement exclus. En effet, cette formulation permet au système de résider dans un nœud un minimum de temps (égal à  $\tau$ ).

En définissant l'ensemble des nœuds atteignables en un seul coup à partir du nœud  $p$  comme

$$\mathcal{R}_p = \{s \in \mathcal{Q} \mid (p, s) \in \mathcal{E}\} \quad (4.4)$$

La dynamique mixte est décrite par les équations suivantes

$$\dot{x} = f_q(x, K_q(x)) \quad (4.5)$$

$$q(t_i) \in \mathcal{R}_{q(t_{i-1})}; \quad t_i \geq t_{i-1} + \tau \quad (4.6)$$

avec comme conditions initiales  $x(t_0) = x_0$ ,  $q(t_0) = q_0$  et  $t_0 = 0$ .

### 4.2.2 Complexité d'une Approche Prédicative Aveugle

Dans ce qui suit est évaluée quantitativement la complexité d'une commande prédictive. Dans ce cas sans tenir compte de simplifications supplémentaires mis à part celle incluse dans le modèle proposé dans la sous section 4.2.1. Par la présente est fait allusion à la dissociation du problème de synthèse de la commande continue de celui de la stratégie de commutation. En effet, l'introduction des commandes locales a eu pour effet de réduire la complexité du schéma en éliminant  $\text{card}(\mathcal{Q})$  problème d'optimisation couplées en dimension infinie. Pour un horizon de prédiction  $N_{pr}$ , la complexité d'une recherche exhaustive est

$$\mathcal{C}_{exhaustive} \leq \text{card}(\mathcal{Q})^{N_{pr}} \quad (4.7)$$

**Exemple 3** Pour l'exemple dans la figure 4.2 et pour un horizon de prédiction  $N_{pr} = 3$  (compté en nombre de pas d'échantillonnage) la complexité est bornée par le nombre maximal de nœuds à visiter qui est égal à  $3^3$ . Plus exactement la complexité dépendra des décisions intermédiaires prise par le superviseur.

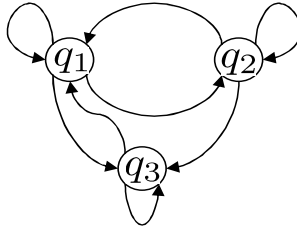


FIG. 4.2 – Exemple de dynamique discrète d'un système à commutations

## 4.3 Formulation de L'approche prédictive

Le but est ici de déterminer une loi de commutation en boucle fermée pour le système à commutations. Une paramétrisation simple des stratégies de commutation est proposée.

**Définition 8** Un profil de commutation constant en boucle ouverte est une stratégie de commutation appartenant à l'ensemble suivant

$$\Sigma_{\mathcal{Q}} = \{q(\cdot) \in \Sigma \mid \forall t \in [t_0, \infty), q(t) = q^*, q^* \in \mathcal{Q}\} \quad (4.8)$$

Notons un profil de commutation de durée finie comme

$$q_{t_1, t_2} : [t_1, t_2] \rightarrow \mathcal{Q} \quad (4.9)$$

$q_{t_1, t_2}$  représente ainsi un profil commençant à  $t_1$  et se prolongeant jusqu'à  $t_2$ . En notant la  $i$ -ème période d'échantillonnage comme  $t_i = iT_s$  où  $i$  est un entier non négatif et  $T_s$  la période d'échantillonnage. Le but est de trouver une loi de commutation en boucle fermée du type

$$q(t) = s(x(t_i)), \quad t \in [t_i, t_{i+1}) \quad (4.10)$$

qui asymptotiquement stabilise l'origine ou du moins améliore les performances du système à commutations dans un certain sens.

Le problème d'optimisation à horizon fini peut être formellement écrit comme suit

**Problème 2** Soit donné un horizon de prédiction  $N_{pr}$  (compté en nombre de période d'échantillonnage), à chaque instant d'échantillonnage  $t_i$  résoudre en l'inconnue  $q_{t_i, t_i + N_{pr}T_s} \in \Sigma_{\mathcal{Q}}$  (voir (4.8)) le problème d'optimisation en boucle ouverte suivant

$$J_{FH}(x(t_i), q(t_{i-1})) = \psi_f(x(t_i + N_{pr}T_s)) + \int_{t_i}^{t_i + N_{pr}T_s} L(x(\tau), q(\tau)) d\tau \quad (4.11)$$

assujetti aux dynamiques mixtes

$$\dot{x} = f_q(x, K_q(x)) \quad (4.12)$$

$$q(t_i) \in \mathcal{R}_{q(t_{i-1})} \quad (4.13)$$

avec  $x(t_0) = x_0$ ,  $q(t_0) = q_0$  et  $\psi_f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  est un terme de pénalité finale.

**Remarque 7** D'un point de vue numérique, la solution au problème 2 est calculée en utilisant une recherche exhaustive consistant à comparer le coût (4.11) pour au plus  $\text{card}(\mathcal{Q})$  trajectoires, ce qui veut dire que la complexité du problème est linéaire en  $Q$  i.e., le nombre de configurations.

Du principe de l'horizon glissant, le retour d'état basé sur la commande prédictive (MPC) est extrait en résolvant le problème 2 pour chaque instant  $t_i$

$$q_{t_i, t_i + N_{pr}T_s}^o(x(t_i), q(t_{i-1})) = \arg \min_{q(\cdot) \in \Sigma_{\mathcal{Q}}} J_{FH}(x(t_i), q(t_{i-1})) \quad (4.14)$$

et en appliquant le signal de commutation

$$q(t) = s^{RH}(x(t_i), q(t_{i-1})) = q_{t_i, t_{i+1}}^o, \quad t \in [t_i, t_{i+1}) \quad (4.15)$$

où  $q_{t_i, t_{i+1}}^o$  est la première partie du signal optimal  $q_{t_i, t_i + N_{pr}T_s}^o$ , la loi de commande recherchée est alors donnée par l'expression (4.15).

## 4.4 Exemples d'applications

Dans la partie qui suit et pour mieux illustrer l'approche, deux exemples sont traités. Le premier concerne un modèle académique qui a déjà été utilisé au chapitre précédent. Le second concerne une application du domaine de la mécanique des fluides. Il s'agit principalement d'étudier la stabilisation de l'écoulement d'un film fluide le long d'une paroi verticale.

### 4.4.1 Exemple académique

Il s'agit du modèle utilisé dans différents travaux des auteurs *Xu* et *Antsaklis* pour illustrer les algorithmes de commande optimale qu'ils ont développés voir e.g., [140, 141]. Cet exemple a déjà été traité dans un précédent chapitre, le système est décrit brièvement comme suit

$$\text{Configuration 1 : } \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + 2x_1u \\ \dot{x}_2 = x_2 + x_2u \end{cases} \quad (4.16)$$

$$\text{Configuration 2 : } \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - 3x_1u \\ \dot{x}_2 = 2x_2 - 2x_2u \end{cases} \quad (4.17)$$

$$\text{Configuration 3 : } \begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + x_1u \\ \dot{x}_2 = -x_2 + 3x_2u \end{cases} \quad (4.18)$$

le problème de commande optimale est défini par la minimisation de la fonctionnelle suivante

$$J = \frac{1}{2}(x_1(T) - 2)^2 + \frac{1}{2}(x_2(T) - 2)^2 + \frac{1}{2} \int_0^T [(x_1(\tau) - 2)^2 + (x_2(\tau) - 2)^2 + u(\tau)^2] d\tau \quad (4.19)$$

où  $x(0) = (1 \ 1)'$ ,  $T = N_{pr} \times T_s$ ,  $T_s = 0.05 \text{ sec}$  et  $|u| \leq 0.2$ ,  $N_{pr}$  est l'horizon de prédiction en nombre de périodes d'échantillonnage. Le système peut s'écrire sous la forme compacte suivante

$$\dot{x} = A_q x + (B_q x)u \quad (4.20)$$

où  $q \in \mathcal{Q} = \{1, 2, 3\}$  avec

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

et

$$B_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad (4.22)$$

La méthodologie de synthèse, consiste d'abord à définir les contrôleurs locaux au sens de la définition 6. Cette synthèse se fait en deux étapes, une fonction de Lyapunov candidate est tout d'abord associée à chaque configuration, l'expression du retour d'état est ensuite extraite en minimisant par rapport à la commande la dérivée de cette fonction. Soit

$$V_q(x) = \frac{1}{2} x' \Phi_q x \quad (4.23)$$

où  $\Phi_q \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  est une matrice définie positive. Le contrôleur dans la configuration  $q$  est synthétisé sur la base de la minimisation suivante

$$\min_u \dot{V}_q = \min_u \left[ x' \Phi_q (A_q + (B_q x)u) \right] = x' \Phi_q A_q + \min_u \left[ x' \Phi_q B_q x u \right] \quad (4.24)$$

ce qui donne

$$u = -u_{max} \operatorname{sgn}(x' \Phi_q B_q x) \quad (4.25)$$

où  $\operatorname{sgn}(\cdot)$  est la fonction signe usuelle et  $u_{max}$  le niveau de saturation.

Le retour d'état (4.25) est souvent appelé *Damping control* dans la littérature voir e.g., [123].

Plusieurs expérimentations sont ensuite conduites à chaque fois en éliminant un lien dans l'interconnexion du système à commutations. L'ensemble des arêtes est pris en premier lieu égal au produit Cartésien  $\mathcal{E} = \mathcal{Q} \times \mathcal{Q}$ , des éléments de cet ensemble vont être retiré au fur et à mesure et l'impact mesuré à l'aide de l'indice de performance (4.26) défini par la suite.

Sur la figure 4.3 est tracée l'évolution de l'indice de performance en boucle fermée comme une fonction de l'horizon  $N_{pr}$ . Cet indice peut être calculé comme suit, soient  $x^{N_{pr}}(\cdot)$  et  $u^{N_{pr}}(\cdot)$  respectivement les états et la commande continue obtenus sous la stratégie de commutation en boucle fermée calculée par la méthode explicitée dans la sous section 4.3. L'indice de performance en boucle fermée est calculé par la formule suivante (où  $T_c$  est le temps de simulation,  $T_c = 3 \text{ sec}$  avec comme condition initiale  $x_0 = x(0)$ )

$$J_{N_{pr}} = \frac{1}{2} (x_1^{N_{pr}}(T_c) - 2)^2 + \frac{1}{2} (x_2^{N_{pr}}(T_c) - 2)^2 + \frac{1}{2} \int_0^{T_c} \left[ (x_1^{N_{pr}}(\tau) - 2)^2 + (x_2^{N_{pr}}(\tau) - 2)^2 + u^{N_{pr}}(\tau)^2 \right] d\tau \quad (4.26)$$

Après une légère décroissance, l'indice de performance en boucle fermée est une fonction croissante de l'horizon de prédiction. Une possible interprétation est la suivante, dû au fait que la paramétrisation des stratégies de commutation proposée en (4.8) est une paramétrisation pauvre en dynamique. Celle ci à pour effet d'accroître le pessimisme du contrôleur lorsqu'il s'agit de prendre des décisions en comparant des trajectoires divergentes sur un intervalle de temps relativement important. A ce stade, utiliser des horizons de prédiction supérieur à 10 n'apporte qu'une augmentation du temps de calcul. En effet, l'utilisation



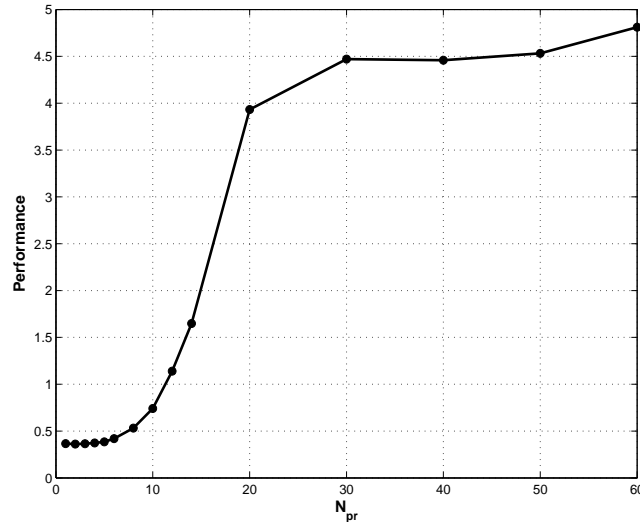


FIG. 4.3 – Evolution de l'indice de performance en fonction de l'horizon de prédiction (indice calculée sur un temps de simulation de 3 sec)

d'horizon élevé suppose que la paramétrisation de la boucle ouverte est suffisamment riche pour que le contrôleur puisse extraire une stratégie de commutation satisfaisante.

Sur la figure 4.4 est tracée la stratégie de commutation ainsi que les états pour un horizon  $N_{pr} = 4$  et pour le cas où toutes les configurations sont accessibles  $\mathcal{E} = \mathcal{Q} \times \mathcal{Q}$ . Comme on peut le voir certaines transitions dominent la stratégie de commutation, e.g., les transitions (3, 1), (1, 3) et (2, 3).

Sur le tableau 4.1 sont répertoriés les indices de performance en boucle fermée (calculée en utilisant (4.26)) sous la stratégie de commutation lorsque différentes transitions sont prohibées. L'indice de performance est multiplié par environ 66 (voir la première et la troisième

Transition interdite	J
Aucune	0.37
(1,2)	0.40
(1,3)	24.60
(2,1)	0.37
(2,3)	0.44
(3,1)	0.81
(3,2)	0.62

TAB. 4.1 – L'indice de performance pour le cas où différentes transitions sont prohibés

ligne dans le tableau 4.1) lorsque la transition (1, 3) est interdite, cela montre en effet l'im-

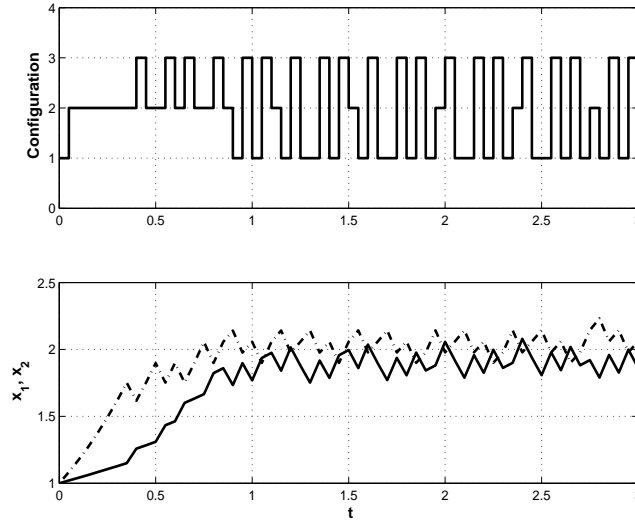


FIG. 4.4 – Stratégie de commutation et l'évolution des états pour  $N_{pr} = 4$  et  $\mathcal{E} = \mathcal{Q} \times \mathcal{Q}$ ,  $T_s = 0.05$  sec

portance d'une telle arête dans la structure du système à commutations. Remarquons que la même constatation a été faite dans le chapitre précédent où le système est utilisé dans un schéma de commande en boucle ouverte. L'interdiction de la transition  $(2, 1)$  quant à elle n'apporte aucune dégradation appréciable à l'indice de performance (comparer la première et la quatrième ligne). L'arête  $(2, 1)$  n'est donc pas importante pour l'objectif de stabilisation fixé auparavant.

Sur le tableau 4.2, l'approche proposée est comparée à l'approche exhaustive. Rappelons que l'approche exhaustive consiste à générer et comparer toutes les stratégies de commutation possible sur un horizon de prédiction donnée. La complexité est exponentielle en l'horizon  $N_{pr}$  (voir sous section 4.2.2).

$N_{pr}$	Performance		Temps de calcul (s)	
	Exhaustive	Proposée	Exhaustive	Proposée
2	0.3604	0.3612	0.235	0.054
3	0.3601	0.3646	1	0.057
4	0.3601	0.3729	4.015	0.062
5	0.3601	0.3852	14.5	0.065

TAB. 4.2 – Comparaison entre l'approche exhaustive et celle proposée

L'approche exhaustive apporte peu d'amélioration à l'indice de performance (évaluée sur

un intervalle de temps de 3 sec voir (4.26)). Par contre une nette augmentation, exponentielle du temps de calcul (entre deux périodes d'échantillonnage de l'algorithme) est à constater. On voit que pour l'approche proposée, le temps de simulation varie peu. Cela est dû au fait que la complexité du schéma est indépendante de l'horizon de prédiction. La faible augmentation est seulement due au fait que la simulation est entreprise pour un horizon plus élevé.

**Remarque 8** *Les temps d'exécution reportés dans le tableau 4.2 sont des temps d'exécution défavorables réalisés sur un échantillon de 60 simulations. Le code est réalisé sous Matlab et exécuté sur une machine équipée d'un Pentium 4 cadencé à 2 Ghz.*

Sur la figure 4.5 sont reportés l'évolution de l'état, ainsi que la stratégie de commutation pour une période d'échantillonnage cinq fois plus petite que celle sur la figure 4.4. Les performances sont ainsi améliorées et le système régulé au voisinage de  $(2 \ 2)'$ , le seul problème c'est que ceci reste impossible à implémenter en temps réel à cause justement des temps d'exécution reportés dans le tableau 4.2.

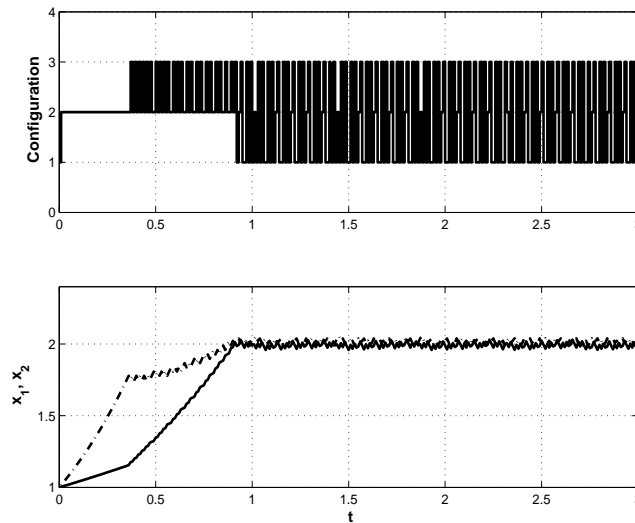


FIG. 4.5 – Stratégie de commutation et l'évolution des états pour  $N_{pr} = 4$  et  $\mathcal{E} = \mathcal{Q} \times \mathcal{Q}$ ,  $T_s = 0.01$  sec

## 4.4.2 Stabilisation de l'équation de Kuramoto-Sivashinsky

### 4.4.2.1 La physique du problème

L'écoulement d'un film fluide le long d'une paroi verticale est un phénomène qui a été étudié depuis longtemps. En effet les premiers travaux expérimentaux remontent à la fin des

années 1940. Les travaux ont été conduits par la famille Kapitza, et depuis la publication de leurs travaux, ce phénomène a intrigué nombre de physiciens. L'écoulement correspond à une instabilité hydrodynamique apparaissant à faible débit. De part la simplicité de l'appareillage nécessaire à son étude, l'écoulement exhibe un large spectre de phénomènes ondulatoires incluant une unique séquence de transitions non linéaires commençant par une perturbation monochromatique et aboutissant à une dynamique de turbulence (fluctuations spatio-temporelle irrégulières) nonstationnaire et à large spectre [31].

Dans ce qui suit est passé en revue la dynamique de l'écoulement d'un fluide le long d'une paroi verticale. Il s'agit là, de donner un bref aperçu de la physique du phénomène en expliquant, bien sûr, qualitativement les différentes transitions. Les phénomènes d'écoulement peuvent être catalogués à l'aide du nombre de Reynolds  $R = \frac{h_N}{\mu}$ , où  $h_N$  est le débit par unité de largeur et  $\mu$  est la viscosité cinématique. Pour de larges valeurs du nombre de Reynolds ( $R > 1000$ ), les ondes observées sont de type cisailé. Ces conditions de grand débit font apparaître des turbulences. Pour des valeurs modérées de  $R$  ( $1000 > R > 300$ ), dues à des effets capillaires et gravitationnelles, de longues ondulations apparaissent. Pour des valeurs très petites de  $R$  ( $R \ll 1$ ) le film devient si mince que les interactions moléculaires ne sont plus négligeables.

Dans cette étude l'intérêt est donné aux valeurs modérées de  $R$ , l'instabilité consiste principalement en l'existence de longues ondulations. L'évolution de l'onde dans cette gamme de valeurs du nombre de Reynolds est comme celle montré sur la figure 4.6. L'écoulement se fait dans la direction de l'axe des  $v$ . Typiquement, quatre régions peuvent être distinguées.

A l'origine, l'écoulement se fait par une fente, des perturbations infinitésimales à ce niveau sont amplifiées et à la fin de la région  $I$  une onde monochromatique est formée indiquant que l'instabilité est du type convective. Si la perturbation a un contenu fréquentiel pur, l'onde monochromatique résultant s'accapare de cette fréquence. Au cas où la perturbation initiale a un contenu fréquentiel étendu, un filtrage sélectif est opéré et l'onde à la sortie de la région  $I$  est monochromatique. L'amplitude de l'onde à la région  $I$  s'amplifie d'une manière exponentielle typique des systèmes à convection instable.

A l'entrée de la région  $II$ , l'augmentation exponentielle est arrêtée par des phénomènes non linéaires et l'amplitude de l'onde sature à une valeur qui dépend entre autres du nombre de Reynolds. A ce stade, le contenu fréquentiel n'est plus monochromatique, une deuxième harmonique (stable) s'ajoute à la fondamentale (instable). La distance parcourue par l'onde dans chacune des régions est d'environ dix fois la valeur de la longueur d'onde à la source soit environ de 10 *cm*. A la fin de la seconde région  $II$ , d'autre type d'instabilités apparaissent, l'ondulation est séparée en gouttelettes et le spectre fréquentiel devient plus étendu que

jamais, ces ondes sont dites ondes solitaires (région *III*).

Finalement à la région *IV* des variations transversales commencent à apparaître, et l'écoulement se fait d'une manière quasiment parallèle à l'axe horizontal supportant la paroi (axe  $z$ , voir figure 4.6).

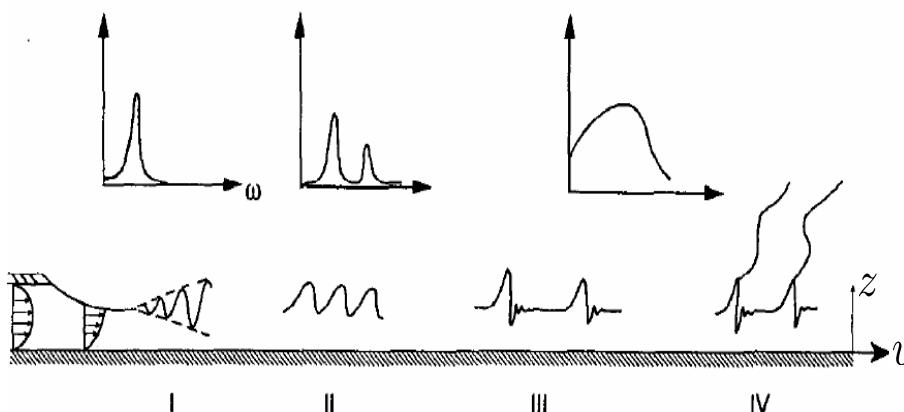


FIG. 4.6 – Schéma des quatre régimes ondulatoires d'un film s'écoulant à partir d'une fente et leur correspondant spectre provenant de sonde statique ( $\omega$  étant la fréquence d'onde). Pour des valeurs de  $R$  ( $R > 50$ ), la région *III* peut ne pas être présente. Source [31]

En supposant que le rapport  $\varepsilon$  entre l'amplitude de l'onde et sa longueur d'onde est petit (ce qui est le cas pour des nombres de Reynolds  $R \sim O(\varepsilon^0)$ ) et la déviation de l'amplitude de l'onde est petite, le phénomène est décrit par l'équation dite de Kuramoto-Sivashinsky [33]

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\nu \frac{\partial^4 h}{\partial z^4} - \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} - h \frac{\partial h}{\partial z} \quad (4.27)$$

où  $\nu$  est le paramètre d'instabilité dépendant des caractéristiques du fluide,  $h$  représente l'amplitude de l'onde et  $z$  la coordonnée spatiale. Les phénomènes décrits précédemment peuvent être modélisés par un  $\nu < 1$ . L'équation de Kuramoto-Sivashinsky *KSE* est une équation aux dérivées partielles non linéaire. Le dernier terme est un terme de convection rendant l'équation attractive pour tout genre d'expérimentation numérique et analytique, des comportements périodiques et même chaotique  $\nu \ll 1$  ont été exhibés, voir e.g., [6, 32, 70, 33, 84]. L'équation est aussi connue pour décrire nombre de phénomènes physiques incluant entre autres la propagation de fronts de flamme [121], mélange particule-fluide [43] et plus généralement les phases de turbulence dans les systèmes réaction-diffusion [72].

La suppression des ondulations dans l'écoulement de fluide est envisagée dans cette partie du manuscrit. L'intérêt d'une telle démarche est que la déposition de films est souvent décrite par ce type d'équation. Ce processus est devenu actuellement un processus quasi standard dans l'industrie. Si à ce niveau, on est capable de déposer des films stables sur une surface solide, cela améliorera par exemple la qualité des images reproduites sur papier, permettra d'amincir les surfaces isolantes et fortifiera les matériaux composites, beaucoup de produits verront leur coût s'effondrer et deviendront plus fiables vu la stabilité et l'uniformité du film voir e.g., [81] [80]. Dans ce genre d'application des actionneurs qui ajoute-enlève (blowing-suction) une partie du fluide sont envisageable [45], des actionneurs soufflant l'air peuvent être aussi implantés, ces derniers sont très courants pour le contrôle des turbulences voir, e.g., [35, 36, 86].

#### 4.4.2.2 L'architecture de commande

L'architecture de contrôle qui nous intéresse dans cette étude est du type tracée sur la figure 4.7. Différentes configurations sont disponibles pour contrôler un système distribué ou ce qui équivaut aussi à un ensemble d'actionneurs se déplaçant entre plusieurs positions prédéfinies. Dans le cas multi configurations par exemple, des considérations énergétiques imposent qu'un seul ensemble d'actionneurs soit actif à chaque instant (trois dans le cas de la figure 4.7). Cette architecture est bénéfique sur plusieurs plans i.e., une accommodation aux défaillances des actionneurs, un rejet efficace de perturbations spatiotemporelles puisque les actionneurs vont agir dans des positions spatiales différentes et donc peuvent avoir plus d'autorité. L'objectif est ici un peu différent, il est formulé comme étant celui de trouver une stratégie de commutation permettant d'améliorer les performances du système à commutations dans un certain sens i.e., l'élimination du comportement ondulatoire du fluide. La stabilisation de l'équation de Kuramoto-Sivashinsky a été considérée dans différents contextes dans, e.g., [76, 83, 64].

Le cas où  $l$  actionneurs distribués (le cas d'une configuration sur la figure 4.7) sont présents, avec  $z$  comme coordonnée spatiale et  $[-\pi, \pi]$  comme le domaine normalisé d'évolution l'équation KSE est décrite par la dynamique suivante

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\nu \frac{\partial^4 h}{\partial z^4} - \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} - h \frac{\partial h}{\partial z} + \sum_{i=1}^l b_i(z) u_i(t) \quad (4.28)$$

avec les conditions périodiques aux frontières et initiales suivantes

$$\frac{\partial^j h}{\partial z^j}(-\pi, t) = \frac{\partial^j h}{\partial z^j}(\pi, t) \quad j = 0, \dots, 3 \quad (4.29)$$

$$h(z, 0) = h_0(z) \quad (4.30)$$

où  $h(z, t)$  est l'amplitude normalisée et  $b_i(z)$  la distribution spatiale du  $i$ -ème actionneur.

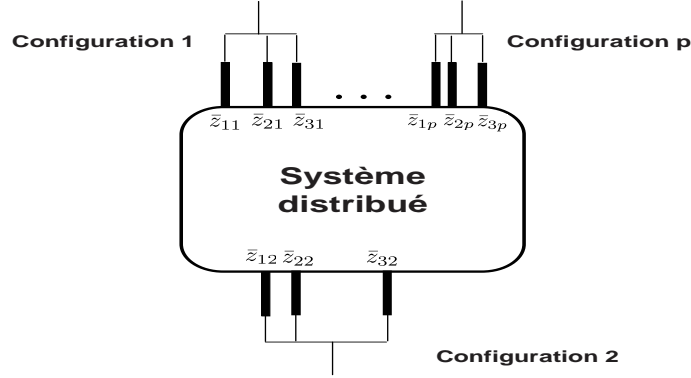


FIG. 4.7 – Architecture de contrôle, Multi Configuration Multi Actionneurs

L'espace d'état est un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$ , l'espace des fonctions mesurables au sens de Lebesgue à carré intégrable  $\mathcal{L}^2([-\pi, \pi]; \mathbb{R})$  muni de produit interne

$$\langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \gamma_1 \gamma_2 dz \quad (4.31)$$

et ayant comme norme

$$\|\gamma_1\| = \langle \gamma_1, \gamma_1 \rangle^{\frac{1}{2}} \quad (4.32)$$

où  $\gamma_1, \gamma_2$  sont deux éléments de  $\mathcal{H}$ . En définissant l'état  $y \in \mathcal{H}([-\pi, \pi]; \mathbb{R})$  comme

$$y(t) := h(\cdot, t) \quad (4.33)$$

un opérateur linéaire  $\mathcal{A}$  est défini comme suit

$$\mathcal{A}\zeta = -\nu \frac{\partial^4 \zeta}{\partial z^4} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} \quad (4.34)$$

avec comme domaine  $\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \{y \in \mathcal{H}([-\pi, \pi]; \mathbb{R}) \mid \text{conditions (4.29)–(4.30) sont satisfaites}\}$ .

L'opérateur d'entrée  $\mathcal{B}$  est défini comme

$$\mathcal{B}u = \sum_{i=1}^l b_i(\cdot) u_i(\cdot) \quad (4.35)$$

avec comme domaine  $\mathcal{D}(\mathcal{B}) = \{u \in \mathcal{L}^2([t_0, \infty); \mathbb{R}^l)\}$ . A partir de là, l'équation (4.28)-(4.30) peut s'écrire sous la forme opérationnelle suivante

$$\dot{y} = \mathcal{A}y + \mathcal{B}u + f(y) \quad (4.36)$$

où  $f(y) = -y \frac{\partial y}{\partial z}$  est l'opérateur bilinéaire ayant comme domaine  $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ .

Le cas de multi configurations  $Q$  est approché par un opérateur d'entrée  $\mathcal{B}_q$  dépendant de la configuration. Ce qui donne

$$\dot{y} = \mathcal{A}y + \mathcal{B}_q u_q + f(y) \quad (4.37)$$

sans perte de généralité, supposons que le nombre d'actionneurs  $l$  est le même pour toutes les configurations, il s'ensuit que  $\mathcal{B}_q u_q = \sum_{i=1}^l b_{iq} u_{iq}$ . Le terme  $b_{iq}(\cdot)$  représente la distribution spatiale du  $i$ -ème actionneur dans la  $q$ -ème configuration.

Dans le cas d'un actionnement ponctuel et en notant par  $\bar{z}_{iq}$  la coordonnée de l'actionneur  $i$  positionné dans la configuration  $q$ , l'expression de  $b_{iq}$  est décrite par

$$b_{iq}(z) = \frac{1}{\epsilon} \left[ \Gamma\left(\bar{z}_{iq} - \frac{\epsilon}{2}\right) - \Gamma\left(\bar{z}_{iq} + \frac{\epsilon}{2}\right) \right] \quad (4.38)$$

où  $\Gamma(\cdot)$  est un échelon spatial,  $\epsilon$  est un réel positif représentant l'étendu de l'actionneur voir figure 4.8. On notera par  $\bar{z}_q = (\bar{z}_{1q} \dots \bar{z}_{lq})$  les coordonnées des actionneurs, voir figure 4.7 pour un exemple.

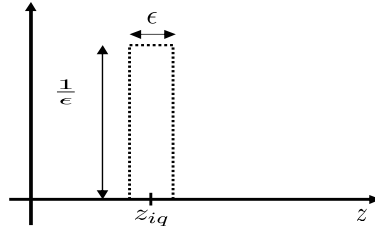


FIG. 4.8 – Actionneur avec étendu quasi ponctuel

#### 4.4.2.3 Approximation de l'équation KSE

Le problème aux valeurs propres correspondant à (4.37) est formulé comme suit

$$\mathcal{A}\phi_k = -\nu \frac{\partial^4 \phi_k}{\partial z^4} - \frac{\partial^2 \phi_k}{\partial z^2} = \lambda_k \phi_k \quad k = 1, \dots, \infty \quad (4.39)$$

où  $\lambda_k$  and  $\phi_k$  sont respectivement les valeurs et fonctions propres associées. En gardant seulement l'ensemble des fonctions propres impaires (licite si on impose le fait que l'onde doit s'annuler sur les frontières du domaine  $[-\pi, \pi]$ ). On peut écrire [45, 33]

$$\lambda_k(\nu) = -\nu k^4 + k^2 \quad (4.40)$$

$$\phi_k(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(kz) \quad (4.41)$$



Le caractère instable de l'équation (4.27) est démasqué de l'expression des valeurs propres. En effet, cette dernière indique l'existence de valeurs positives lorsque le paramètre d'instabilité  $\nu$  est inférieur à 1.

La solution  $y(z, t)$  est développée en terme de fonctions propres  $\phi_k$ , ce qui s'écrit

$$y(z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k(t) \phi_k(z) \quad (4.42)$$

où  $x_k$  est la  $k$ -ème amplitude modale.

Comme  $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = -\infty$ , cette propriété motive l'utilisation de série tronquée à  $r$  termes pour l'équation (4.42) donnant ainsi une approximation de dimension fini à l'équation de Kuramoto-Sivashinsky. Après quelques manipulations algébriques de base, en utilisant le produit interne (4.31) et la propriété d'orthonormalité de la base de fonctions propres (4.41). On obtient le système d'équations différentielles ordinaires pour  $k = 1, \dots, r$

$$\dot{x}_k(t) = (-\nu k^4 + k^2)x_k(t) + \sum_{i=1}^l \underline{b}_{iq}^k u_{iq}(t) - f_k(x) \quad (4.43)$$

où

$$\underline{b}_{iq}^k = \int_{-\pi}^{\pi} \phi_k(z) b_{iq}(z) dz \quad (4.44)$$

$$f_k(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \phi_k(z) \left( \sum_{j=1}^r x_j(t) \phi_j(z) \right) \left( \sum_{j=1}^r x_j(t) \frac{d\phi_j(z)}{dz} \right) dz \quad (4.45)$$

et  $x = (x_1, \dots, x_r)'$  représente le vecteur d'amplitudes modales.

**Remarque 9** Les expressions des termes  $\underline{b}_{iq}^k$  dans l'équation (4.44) peuvent être approchée numériquement en utilisant le fait que l'expression des actionneurs ponctuelles (4.38) peut être assimilée à un Dirac, i.e., opérateur d'échantillonnage. Ainsi l'intégrale (4.44) se réduit à  $\phi_k(\bar{z}_{iq})$  où  $\bar{z}_{iq}$  est définie comme étant la coordonnée spatiale du  $i$ -ème actionneur dans la  $q$ -ème configuration.

Le vecteur  $x$  des amplitudes modales est partitionné comme suit  $x = x_s \oplus x_f$  ( $\oplus$  est un opérateur de concatenation),  $x_s$  représente les  $r_s$  premiers modes (pour  $\nu < 1$ ) et  $x_f$  les  $r_f$  modes stables ( avec  $r = r_s + r_f$ ).

En notation matricielle, le système d'ordre réduit ( $r = r_s$  dans l'équation (4.43)) est écrit sous la forme suivante

$$\dot{x}_s = F x_s + f^*(x_s) + B_q u_q = \bar{f}(x_s) + B_q u_q \quad (4.46)$$

où  $F$  est une matrice diagonale de dimensions  $r_s \times r_s$  contenant les premières  $r_s$  valeurs propres,  $B_q$  est une matrice dépendante de la configuration et de dimensions  $r_s \times l$  contenant les différents coefficients  $\underline{b}_{iq}^k$

$$B_q = \begin{pmatrix} \underline{b}_{1q}^1 & \cdots & \underline{b}_{lq}^1 \\ \underline{b}_{1q}^2 & \cdots & \underline{b}_{lq}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \underline{b}_{1q}^{r_s} & \cdots & \underline{b}_{lq}^{r_s} \end{pmatrix} \quad (4.47)$$

et  $f^*(\cdot) = (f_1(x_s) \dots f_{r_s}(x_s))'$  est un vecteur colonne de dimension  $r_s$ .

#### 4.4.2.4 Les contrôleurs locaux

Maintenant qu'un modèle de dimension fini est extrait, voir équation (4.43). Un modèle ne retenant que les premiers modes (équation (4.46)) est alors utilisé pour la synthèse des contrôleurs locaux. L'architecture complète est ensuite appliquée au système décrit par l'équation (4.43) représentative de l'équation de Kuramoto-Sivashinsky en (4.37). La synthèse se fait comme ci dessous.

Définissons des fonctions de Lyapunov quadratique associée à chacune des configurations  $q$  comme suit

$$V_q(x_s) = x_s' \Phi_q x_s \quad (4.48)$$

où  $\Phi_q$  est une matrice définie positive solution de l'inégalité de Riccati suivante

$$F' \Phi_q + \Phi_q F - \Phi_q B_q B_q' \Phi_q < 0 \quad (4.49)$$

une condition suffisante pour l'existence d'une telle matrice est que la paire  $(F, B_q)$  soit stabilisable, donnant ainsi explicitement une borne inférieure sur le nombre d'actionneurs par configuration. En effet, ce type de contrainte sur le nombre d'actionneurs est courant dans le système à paramètre distribués, voir e.g., [37].

Notons par  $L_f V_q$  la dérivée de Lie de la fonction de Lyapunov  $V_q(x_s)$  dans la direction du vecteur  $f(x_s)$ , le contrôleur non linéaire suivant est synthétisé sur la base de la formule universelle de Sontag, voir [82]

$$u = u_q = K_q(x_s) = \begin{cases} k_q(x_s) (L_{B_q} V_q)^T & L_{B_q} V_q \neq \mathbf{0}_{1 \times l} \\ \mathbf{0}_{l \times 1} & L_{B_q} V_q = \mathbf{0}_{1 \times l} \end{cases} \quad (4.50)$$

avec

$$k_q(x_s) = - \frac{L_{\bar{f}} V_q + \sqrt{[L_{\bar{f}} V_q]^2 + (u_q^{max}(L_{B_q} V_q) u_q^{max}(L_{B_q} V_q)^T)^2}}{(L_{B_q} V_q)(L_{B_q} V_q)^T \left[ 1 + \sqrt{1 + (u_q^{max}(L_{B_q} V_q) u_q^{max}(L_{B_q} V_q)^T)} \right]} \quad (4.51)$$

où  $u_q^{max}$  est le niveau de saturation des actionneurs associés à la configuration  $q$ .

Le système avec sa commande locale peut être écrit dans le formalisme des systèmes à commutations autonomes comme suit

$$\dot{x}_s = \bar{f}(x_s) + B_q u \quad (4.52)$$

$$u = K_q(x_s) \quad (4.53)$$

**Remarque 10** *Il est montré dans [45] en utilisant des arguments de perturbations singulières [34], que sous le retour d'état (4.50), l'équation KSE (4.36) est localement asymptotiquement stable.*

L'objectif est maintenant de trouver une stratégie de commutation minimisant un certain critère de performances. L'approche développée dans la sous section 4.3 est utilisée à cet effet. Le problème de commutation se réduit dans ce cas à activer à chaque instant un système localement asymptotiquement stable de telle manière que le système à commutations en boucle fermée reste stable tout en minimisant l'indice de performance suivant

$$J = x_s(t_0 + N_{pr}T_s)^T P_f x_s(t_0 + N_{pr}T_s) + \int_{t_0}^{t_0 + N_{pr}T_s} x_s(\tau)^T P x_s(\tau) d\tau \quad (4.54)$$

où  $P$  et  $P_f$  sont respectivement une matrices définie positive et semi définie positive de dimensions appropriées,  $N_{pr}$  étant l'horizon de prédiction.

Afin de rendre plus intuitive l'interprétation des résultats, une méthode d'estimation des régions d'attraction est exposée ci dessous.

Remarquons que la contrainte d'amplitude est respectée et la dérivée de la fonction de Lyapunov  $V_q$  (associée à la configuration fixe  $q$ ) est négative pourvu que les états restent dans l'ensemble suivant (pour une configuration  $q$  fixe)

$$\Omega_q(u_{max}^q) = \{x_s \in \mathbb{R}^{r_s} \mid L_{\bar{f}}V_q \leq |L_{B_q}V_q|\} \quad (4.55)$$

le plus grand invariant positif contenu dans cet ensemble sera précisément la région d'attraction du point d'équilibre du système (4.46) sous la loi de commande (4.50) et respectant la contrainte de saturation. La région d'attraction de l'origine est estimée comme suit, tout d'abord définissons les surfaces de niveaux associées à la fonction  $V_q(x)$  pour  $a > 0$

$$\mathcal{L}_{V_q}(a) = \{x_s \in \mathbb{R}^{r_s} \mid V_q(x_s) \leq a\} \quad (4.56)$$

l'estimé de la région d'attraction  $\hat{\mathcal{R}}_q$  du point d'équilibre est ensuite approximé par la surface de niveau maximale contenue dans  $\Omega_q(u_{max}^q)$  ce qui donne

$$\hat{\mathcal{R}}_q = \mathcal{L}_{V_q}(\bar{a}_q) \quad (4.57)$$

où  $\bar{a}_q$  est

$$\bar{a}_q = \max a : \mathcal{L}_{V_q}(a) \subseteq \Omega_q \quad (4.58)$$

pour plus de détails voir la figure 4.9.

**Remarque 11** Remarquons que dans l'expression (4.55), l'ensemble  $\Omega_q$  dépend implicitement de l'emplacement des actionneurs  $\bar{z}_q$ . La région d'attraction de l'origine peut élargie en maximisant l'étendu de cet ensemble. Ce problème est un problème de programmation non linéaire sous la contrainte d'appartenance  $\bar{z}_q \in [-\pi, \pi]^l$  et peut être résolu par des techniques standards.

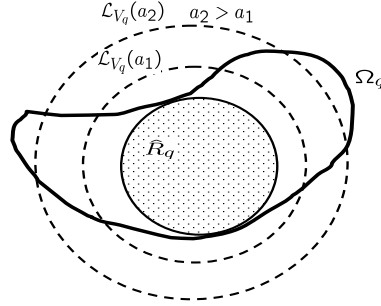


FIG. 4.9 – Estimation de la région d'attraction du point d'équilibre correspondant à une configuration  $q$  fixe

#### 4.4.2.5 Résultats de simulation

Pour les simulations, un modèle non linéaire du 30 ème ordre est retenu ( $r = 30$  dans (4.43)), le modèle utilisé dans le contrôleur (4.50) retient quant à lui seulement les deux premiers modes instables ( $r_s = 2$ )  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.8$  pour  $\nu = 0.2$ . La prédiction est aussi faite sur la base de ce modèle réduit. La période d'échantillonnage  $T_s$  est prise égale à 0.2 sec. Le profil initial  $h_0(z)$  est comme suit

$$h_0(z) = a_1 \sin(z) + a_2 \sin(2z) + \sin\left(\frac{z}{4}\right) + \sin\left(\frac{z}{16}\right) \quad (4.59)$$

avec  $a_1 = \frac{0.2}{\sqrt{\pi}}$  et  $a_2 = \frac{1.5}{\sqrt{\pi}}$ .

Sur la figure 4.11 est tracée l'évolution spatiotemporelle de  $h$  en boucle ouverte. Les oscillations sont clairement entretenues. L'objectif primaire est d'atténuer ces oscillations par une commutation entre actionneurs et de comparer les résultats avec ceux obtenus sans recours à cette dernière. Afin d'illustrer l'approche, un ensemble de configurations est choisi.

On en prend trois avec deux actionneurs par configuration. Cela correspond au nombre d'actionneurs minimal garantissant la condition de stabilisabilité du modèle réduit (puisque les valeurs propres sont de multiplicité 2 voir la condition (4.49)). L'emplacement des actionneurs est comme illustré dans le tableau 4.3.

Le niveau de saturation des commandes est pris comme  $u_q^{max} = 2$ ,  $q = 1, 2, 3$ .

Configuration	$\bar{z}_q$
$q = 1$	$(-0.4\pi \quad -0.2\pi)$
$q = 2$	$(0.6\pi \quad 0.8\pi)$
$q = 3$	$(0.3\pi \quad 0.9\pi)$

TAB. 4.3 – Les différentes configurations et l'emplacement des actionneurs

L'architecture de contrôle proposée est tracée sur la figure 4.10. Le bloc *Système Mécafluide* est utilisé pour schématiser le processus décrit par l'équation de KSE (4.37) et dont l'approximation retenue est du 30-ème ordre. Le bloc *Stratégie de commutation* est basé sur le modèle réduit (ne retenant que les deux premiers modes) et la stratégie à horizon fuyant (4.15) avec le critère quadratique (4.54). Les blocs *Contrôleur local* sont eux basés sur l'expression (4.50).

Le principe de la stratégie de commutation peut être énoncé comme suit : en se basant sur le modèle réduit bouclé avec sa commande continu, plusieurs prédictions sont faites dans le bloc *Stratégie de commutation* et l'indice de performance est calculé pour chacune des prédictions. Parmi toutes ces valeurs, la configuration donnant le minimum est activée sur le système réel durant une période d'échantillonnage. A la fin cette période, l'état actuel  $x_s$  est utilisé comme condition initiale dans le bloc *Stratégie de commutation* et le processus est réitéré.

Les expérimentations numériques sont conduites en utilisant le logiciel MATLAB et des fonctions écrites sous Fortran et compilées en MEX. Les temps d'executions moyens sont très inférieures à la période d'échantillonnage de 0.2s (pour un nombre élevé d'horizons de prédiction 1, ..., 5). Sur les figures 4.12, 4.13 et 4.14 est tracée l'évolution spatiotemporelle de  $h$  avec comme profil initial celui en (4.59), lorsque respectivement seulement la première, la seconde ou la troisième configuration (paire d'actionneurs) est active. Comme on peut le remarquer, la stabilité n'est pas garantie pour aucune des configurations, cela est dû au fait que la condition initiale est en dehors des régions d'attraction du point d'équilibre et ceci quelque soit la configuration. La situation est expliquée sur la figure 4.15, où on peut visualiser le portrait de phase du système réduit aux modes instables ainsi que les estimés des régions d'attraction du point d'équilibre voir les équations (4.55)-(4.58).

Sur la figure 4.16 est tracée l'évolution de  $h$  sous la commande prédictive proposée et cela pour un horizon de prédiction  $N_{pr} = 1$  (soit une prédiction sur 0.2 sec). La stabilité est

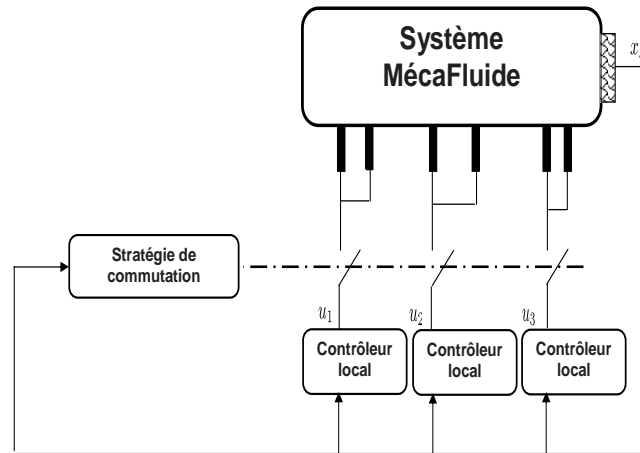


FIG. 4.10 – L'architecture de contrôle

ainsi retrouvée et le comportement oscillatoire supprimé. En permettant une commutation des actionneurs, la région d'attraction du point d'équilibre s'est élargie. Le portrait de phase du système réduit aux modes instables est tracé sur la figure 4.17. Les entrées continues correspondante ainsi que la stratégie de commutation sont tracées respectivement sur la figure 4.18 et la figure 4.19.

La région d'attraction du système à commutations peut être estimée numériquement en initialisant le système à différentes conditions et en traçant son évolution à partir de ces états. Sur la figure 4.20 est tracée en pointillé cette estimation, on y voit clairement l'élargissement du bassin d'attraction.

Sur la figure 4.21 est tracé le portrait de phase du système réduit correspondant à un scénario dans lequel les conditions initiales sont prises à l'intérieur de la région d'attraction du système en configuration 3. Comme on peut le remarquer, la trajectoire sous la commande prédictive est plus courte que dans le cas où aucune commutation n'est permise. L'approche proposée améliore le comportement même dans ces conditions. En effet, l'indice de performance mesuré par une fonctionnelle similaire à celle en équation (4.54) sur l'intervalle de simulation et pour les trajectoires du système en boucle fermée, est divisé par environ quatre 4 quand une commutation est permise.

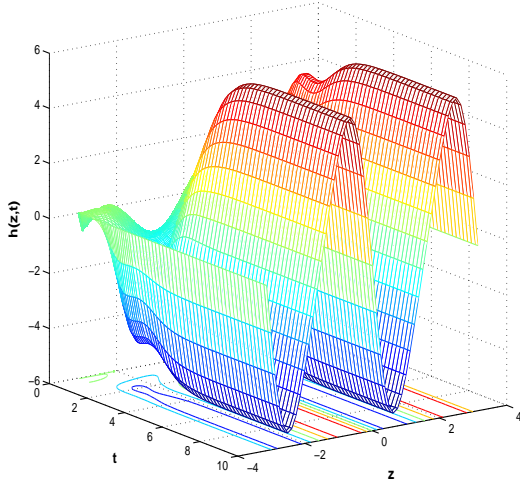


FIG. 4.11 – Profil spatiotemporel, modèle du 30<sup>me</sup> obtenu par la méthode de Galerkin. Le profil correspond au cas où aucune action n'est exercée sur le système.

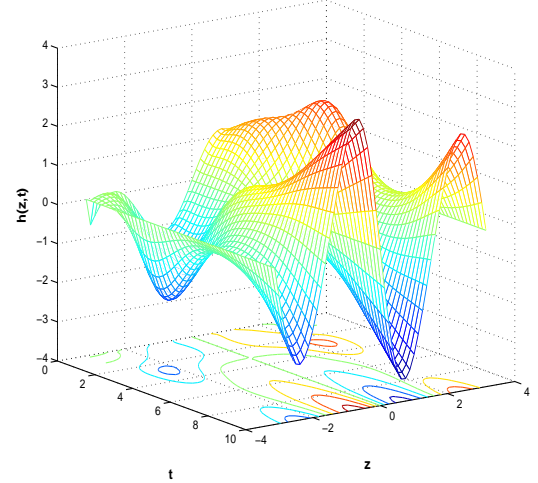


FIG. 4.12 – Profil spatiotemporel pour le cas où la première configuration est active. Les oscillations sont entretenues bien que le contrôleur local soit actif voir tableau 4.3 pour l'emplacement des actionneurs.

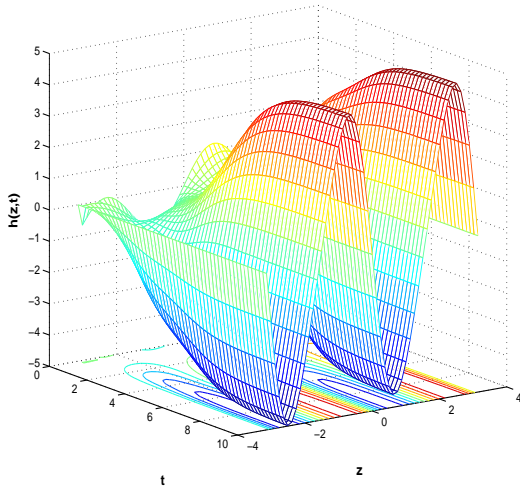


FIG. 4.13 – Profil spatiotemporel pour le cas où la seconde configuration est active. Les oscillations sont entretenues malgré l'utilisation du contrôleur local.

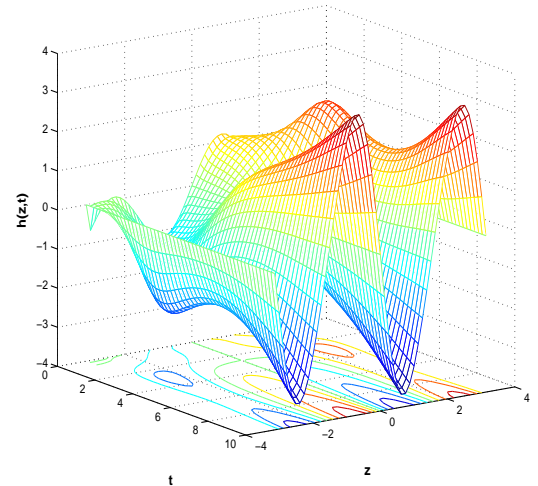


FIG. 4.14 – Profil spatiotemporelle pour le cas où la troisième configuration est active.

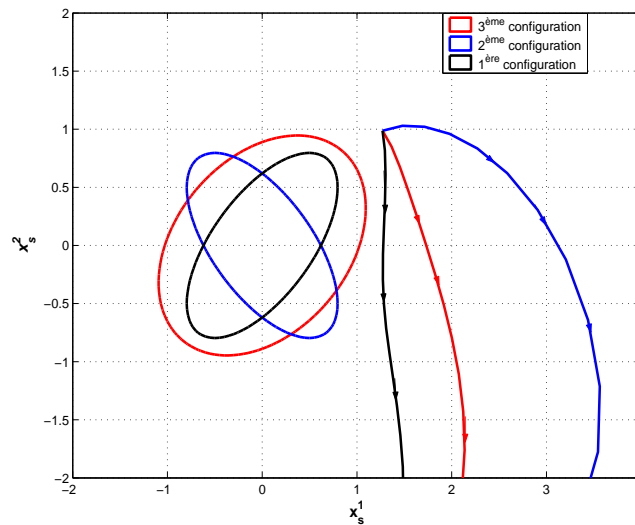


FIG. 4.15 – portrait de phase du système réduit aux modes instables avec les estimés des régions d'attraction **sans la commande prédictive**. Les conditions initiales sont prises en dehors des régions d'attraction, voir figures 4.12-4.14 pour les profils spatiotemporels correspondant

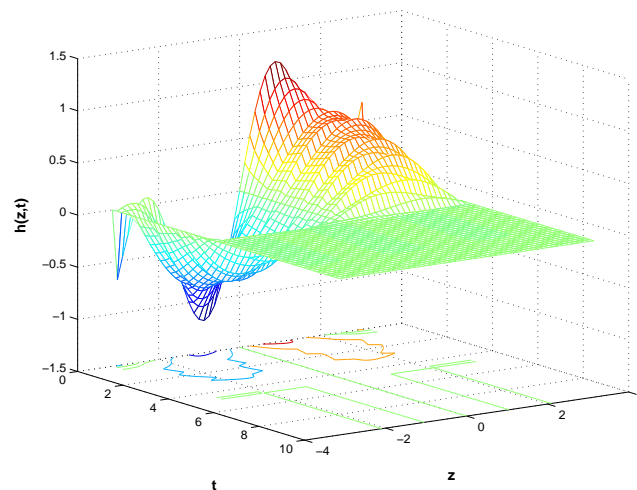


FIG. 4.16 – Profil spatiotemporel pour le système à commutations avec un **horizon de prédiction**  $N_{pr} = 1$ . Cette figure est à comparer avec les figures 4.12-4.14. En permettant une commutation entre les configurations, le comportement oscillatoire est supprimé malgré le fait que **les conditions initiales soient en dehors des régions d'attraction**, voir figure 4.15



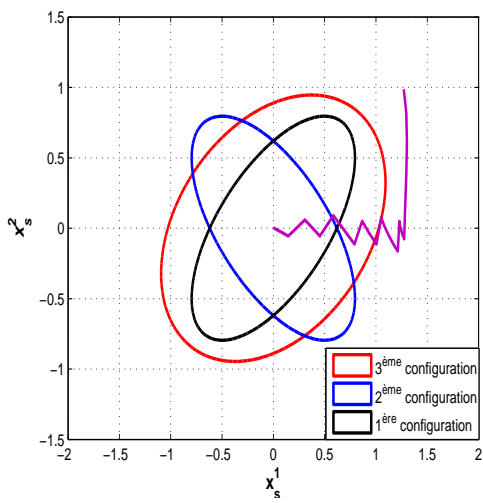


FIG. 4.17 – portrait de phase du système réduit aux modes instables avec les régions d'attraction estimées sous l'approche prédictive avec  $N_{pr} = 1$ . Les conditions initiales sont celles sur la figure 4.15, voir aussi figure 4.16 pour le profil spatiotemporel correspondant

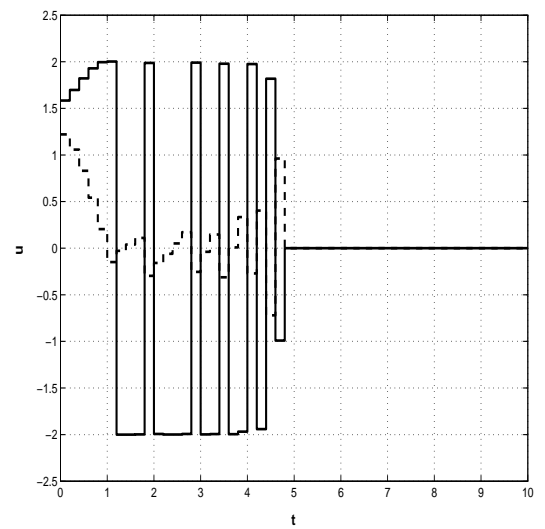


FIG. 4.18 – Les entrées du système à commutations pour l'horizon de prédiction  $N_{pr} = 1$ . Cela correspond à la réponse tracée sur la figure 4.16.

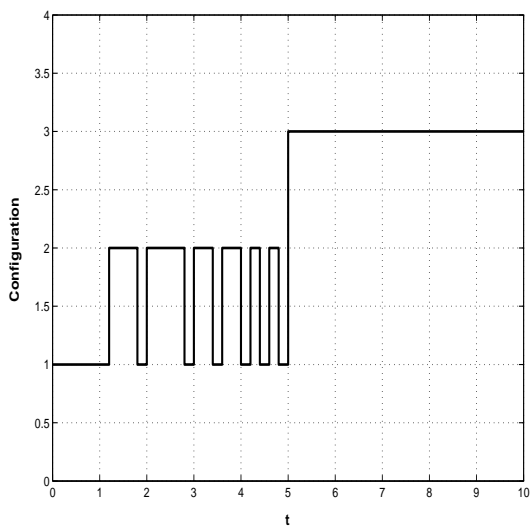


FIG. 4.19 – La stratégie de commutation pour l’horizon de prédiction  $N_{pr} = 1$ , voir le profil spatiotemporel correspondant sur la figure 4.16

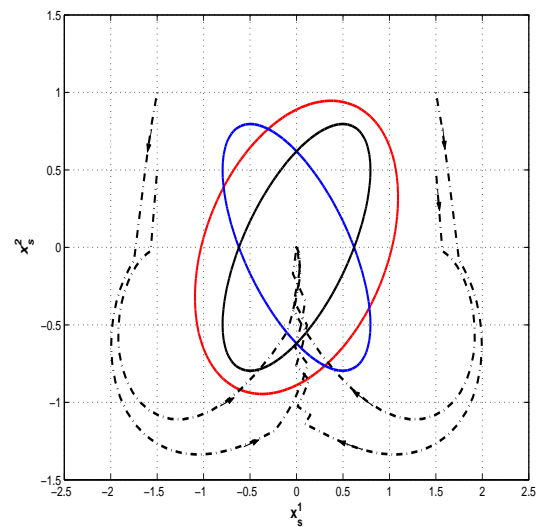


FIG. 4.20 – Portraits avec l’approche proposée pour différentes conditions initiales prises en dehors des régions d’attraction. La courbe externe en pointillé représente un estimé numérique de la région d’attraction sous la stratégie de commutation. Il est à noter l’élargissement du bassin d’attraction.

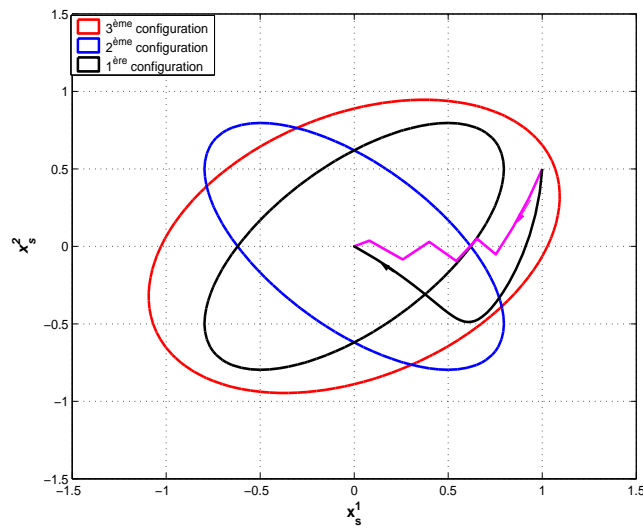


FIG. 4.21 – portrait de phase du système réduit aux modes instables pour le cas avec et sans l'approche prédictive de commutation, pour le cas où la condition initiale est à l'intérieur des régions d'attraction (pour le cas de cette figure la troisième configuration est active). On peut remarquer que même pour ce cas, la commutation apporte une amélioration des performances i.e., la trajectoire avec commutation est moins longue que celle sans.

## 4.5 Conclusions et Perspectives

Dans ce chapitre, une commande prédictive permettant d'extraire une stratégie de commutation en boucle fermée pour les systèmes non linéaires à commutations est développée. La méthode est évaluée d'abord sur un exemple académique, puis sur une application réelle consistant en la stabilisation d'un fluide le long d'une paroi verticale. Plusieurs expérimentations numériques sont entreprises pour le premier exemple, ces dernières montrent que le compromis performance-complexité est en grande partie en faveur des performances, qui restent comparables à celles d'une approche exhaustive. Pour l'exemple de la stabilisation en mécanique des fluides, la même approche est appliquée avec succès pour développer une stratégie de commutation entre actionneurs. Des comportements bénéfiques consistant en l'élargissement des régions d'attraction sont répertoriés et l'intérêt d'introduire une commutation entre les actionneurs mis en évidence. Le schéma reste relativement simple et attractif pour des applications en temps réel.



# Chapitre 5

## Stabilisation des tensions dans les réseaux électriques

*The problems we are dealing with are too nonlinear and too hybrid to think of using the 1990's versions of adaptive control.*

-David J. Hill

### 5.1 Introduction

Durant la dernière décennie, la communauté des systèmes de puissance a montré un intérêt croissant pour les méthodes de synthèse permettant le maintien d'un niveau de stabilité acceptable dans les réseaux électriques. Il est communément admis que l'instabilité de tension est l'une des défaillances les plus coûteuse d'un point de vue économique et les plus ravageuses d'un point vue socio-psychologique, en exemple, l'effondrement de tension qui a survenu en Amérique du nord<sup>1</sup> le 14 Août de l'an 2003, a coûté entre 4 et 6 milliards de dollars, et à plongé plus de 50 millions de personnes dans le noir total pendant plus de 24 heures. L'anatomie de ce *blackout*<sup>2</sup> et l'identification des mécanismes ayant conduit à une telle catastrophe ont été entreprises par un groupe d'experts. Un rapport, soutenant les hypothèses les plus plausibles ayant déclenché un tel effondrement, a été rendu public en Avril 2004 [47]. L'effondrement de tension y est décrit comme un enchaînement d'événements ayant amené le réseau électrique à un point de non retour, à un état incontrôlable (voir annexe B).

On pourrait se contenter de dire que la réunion de telles événements est rare et l'éven-

---

<sup>1</sup>L'effondrement de tension en Amérique du nord est pris comme exemple de référence vue la disponibilité d'un rapport détaillé de la *U.S.-Canada Power System Outage Task Force* relatant avec minutie les événements qui se sont déroulés juste avant l'effondrement. Des statistiques sont aussi mis à la disposition du public, ces dernières regroupent les effondrements de tension survenus entre 1984 à 2002, voir le site web de la *North American Electric Reliability Council* au [www.nerc.org](http://www.nerc.org)

<sup>2</sup>Les termes *blackout* et effondrement de tension sont interchangeablement utilisés par la suite

tualité d'un tel blackout encore plus. L'étude réalisée en [29] montre au contraire que les blackouts de taille importante ne sont pas si rare qu'on est amené à le penser. En effet, il est montré que la probabilité d'occurrence<sup>3</sup> de blackout important décroît comme une fonction polynômiale de la taille de l'événement, contrairement à une décroissance exponentielle commune dans la plupart des phénomènes physiques. L'attitude à prendre serait une attitude fataliste-réaliste i.e., se préparer à l'éventualité d'un blackout et faire en sorte de minimiser les dégâts. Avec une augmentation annuelle de la consommation en énergie de 2 % et une infrastructure des réseaux ne changeant pas appréciablement, la gestion des réseaux électriques deviendra dans un futur proche de plus en plus délicate et des techniques d'analyse et de contrôle avancées seront de plus en plus nécessaires. La difficulté dans ce genre de systèmes ne réside pas seulement dans leur caractère grande dimension mais aussi dans l'aspect hybride tant au niveau de la dynamique (certaines parties sont modélisées par des automates) qu'au niveau de la commande (l'aspect tout ou rien ou discontinu est le plus souvent présent). C'est dans le contexte d'un projet Européen qu'un travail sur la stabilisation des réseaux électriques est entrepris.

Le projet IST-2001-33520 réunit des laboratoires européens spécialisés dans les systèmes hybrides, chacun apportant une expertise et un regard critique au sein du groupe. Les laboratoires sont les suivants

- VERification IMAG (VERIMAG, INPG, France) : VERIMAG apporte une expertise dans la vérification des systèmes hybrides et au développement de systèmes embarqués. C'est en s'associant à VERIMAG au sein du projet que le LAG apporte un savoir faire dans les domaines de la commande non linéaire et la commande prédictive principalement en résolvant les problèmes posés par le partenaire industriel ABB et en proposant des algorithmes pour la commande optimale des systèmes hybrides non linéaires. Le Prof. O. Maler est le responsable de l'équipe.
- Institut Für Automatik (IFA, ETHZ, Suisse) : IFA apporte une expertise dans la commande optimale des systèmes affines par morceaux. Par ailleurs le groupe coordonné par le Prof. M. Morari a travaillé sur les benchmarks proposés par le partenaire industriel ABB.
- Centrum voor Wiskunde en Informatica (CWI, Amsterdam, Pays Bas) : CWI est un institut de recherche en mathématiques appliqués et en informatique. CWI apporte par le biais de son coordinateur Prof. J. Van Schuppen une expertise dans le contrôle des systèmes hybrides, des systèmes à événements discrets, des systèmes stochastiques et la théorie de la réalisation et de l'identification.
- Department of Automatic Control (Lund Institute of Technology, Lund, Suède) : le département d'automatique de Lund apporte un savoir faire dans la théorie de la

---

<sup>3</sup>Les auteurs utilisent une série de données récoltées aux États Unis et qui concerne tous les blackouts significatifs survenus entre 1984 et 2002.

- stabilité, et la commande optimale. Il a aussi acquis ces dernières années une expertise dans les systèmes de commande en temps réel qui sont fondamentales dans plusieurs applications liées à la thématique du projet. Le coordinateur est le Prof. A. Rantzer.
- Project for Advanced Research of Architecture and Design of Electronic Systems (PARADES, Rome, Italie) : PARADES a une expertise dans la modélisation, la synthèse et l'analyse dans le domaine de l'électronique embarquée pour l'industrie automobile. Sa principale activité dans le projet est la réalisation d'un benchmark automobile. Le coordinateur est le Prof. A. Balluchi.
  - Asea Brown Boveri (ABB corporate research, Baden, Suisse) : La principale activité du groupe au sein du projet est le développement de benchmarks pour la stabilisation de tension dans les réseaux électriques d'une part, et l'évaluation de la pertinence des solutions proposées par les différents partenaires académiques. Le coordinateur est le Prof. M. Larsson.
  - Electricité De France (EDF, Paris, France) : La principale activité du groupe EDF dans le projet est de développer deux benchmarks, le premier concerne le contrôle du niveau d'eau dans un générateur fonctionnant à l'énergie nucléaire, le second concerne l'optimisation de la combustion dans les systèmes thermiques. Le coordinateur est la Prof. P. Bendotti.
  - Systems and Control Group (Università degli studi di Siena, Siena, Italie) : Le groupe de Siena a pour mission d'étudier et de développer des algorithmes pour la commande optimale des systèmes linéaires par morceaux. Le coordinateur est le Prof. A. Bemporad.

La plupart des travaux entrepris dans le domaine de la stabilisation de tension sont basés sur l'utilisation d'heuristiques i.e., le savoir faire et l'expérience du concepteur sont mis en avance. Des schémas tels que ceux développés dans e.g., [39] où une heuristique de délestage de charges est comparée à une technique de délimitation de branches (branch and bound). La stratégie de synthèse consiste à générer hors ligne des comportements défaillants, à minimiser les taux de charge à éliminer par rapport à ceux trouvés dans la batterie de comportements disponibles.

Une autre famille de méthodes est celle basée sur le calcul d'une marge de sécurité ou une distance par rapport à l'effondrement de tension, voir e.g., [27] pour un tour d'horizon. En se basant sur ces mesures, les sensibilités des tensions par rapport aux différentes composantes du vecteur commande sont calculées, offrant ainsi des directions de mises à jour de la commande. Cette étape est en général suivie d'une étape d'optimisation pour dispatcher les différentes actions voir e.g., [137]. Dans le même esprit, les auteurs de [38] utilisent une approche basée sur des simulations quasi statiques et où une simple formule est proposée pour la mise à jour des commandes en se basant sur un classement, voir aussi [117] et [125]



pour d'autres variantes. Dans le travail [46] une distinction est faite entre l'action corrective et l'action préventive. La première est utilisée dans les avaries extrêmes (perte de solution) quant à la seconde, elle est utilisée pour améliorer la marge de stabilité du réseau.

En ce qui nous concerne, nous proposons deux type de solutions

La première solution consiste à utiliser une fonction de Lyapunov candidate. Afin de garantir la stabilité du système, l'objectif est formulé comme étant celui de faire décroître cette fonction le long des trajectoires en boucle fermée. Pour cela, le problème est formulé comme un problème d'optimisation, dans lequel la dérivée de cette fonction est minimisée sous la contrainte d'appartenance de la commande à un ensemble de cardinalité fini. Le problème d'optimisation est ensuite résolu pour le benchmark le plus simple par une méthode exhaustive. Une stratégie utilisant le fait d'activer le système induisant une décroissance d'une fonction de Lyapunov est proposée indépendamment dans [100, 48].

La seconde solution développée dans ce manuscrit appartient à la catégorie où la connaissance à priori sur le système est réduite. En effet, seulement un modèle de simulation est nécessaire. Ce dernier doit contenir au moins les dynamiques dominantes i.e., l'effondrement de tension est entraîné par la dynamique de la charge. Ces approches incluent principalement les méthodes basées sur la prédiction et l'analyse des sensibilités de trajectoires voir e.g., [61] discuté dans le cadre généraliste des systèmes hybrides, voir aussi [135] où une commande prédictive basée sur une méthode de programmation génétique est développée. L'approche prédictive est aussi exploitée dans les travaux [75, 74] où des techniques d'optimisation combinatoires issues de la communauté de l'Intelligence Artificielle sont utilisées comme une alternative afin de réduire la complexité du problème. La commande prédictive est discutée dans un cadre plus générale au chapitre 4, pour plus de détails voir aussi les tours d'horizon [108, 91].

L'intérêt du présent chapitre est d'explorer des approches de synthèse évitant l'effondrement de tension dans les réseaux électriques avec un accent prononcé pour les benchmarks proposés dans le cadre du projet européen IST-2001-33520. Ces méthodes constituent une première étape vers une solution décentralisée coordonnée. Le travail porte sur les contrôleurs de bas niveau. La coordination de ces contrôleurs n'est pas discutée dans le présent chapitre.

Le chapitre est organisée comme suit : la section 5.2 est consacrée à la présentation des benchmarks proposés par le partenaire industriel. L'analyse du benchmark le plus simple est entreprise dans la section 5.3. Dans la section 5.4 sont exposés les deux stratégies de stabilisation. La première est évaluée sur le benchmark simplifiée et la seconde sur les benchmarks de petite et de moyenne dimension. Finalement, quelques conclusions et orientations sont

données dans la section 5.5.

## 5.2 Présentation des Benchmarks

Dans les sous sections suivantes, la présentation des différents benchmarks est revue rapidement pour plus de détails voir [1].

### 5.2.1 Benchmark simplifié

Il s'agit du benchmark le plus simple en terme de topologie, et celui qui s'apprête le plus à une analyse complète tant du point de vue structurel que dynamique. Les conclusions tirées dans la majorité des cas restent valable et sont extensibles aux systèmes de grande dimension. Le benchmark est celui montré sur la figure 5.1 et est composé des éléments suivants

- Un bus infini *inf* représentant le reste du réseau.
- Deux lignes de transmission  $L_1$  et  $L_2$  en parallèle modélisées par une reactance inductive  $X$ . Ce modèle reste valable tant que la non stationnarité et le caractère distribué ne sont pas pris en compte. Une variation brusque de la reactance de la ligne  $L_1$  modélise un défaut dans le système de transmission
- Un transformateur équipé d'un variateur de rapport de transformation en charge OLTC<sup>4</sup>. Le graphe d'état sur la figure 5.2 illustre le fonctionnement du système de contrôle d'un OLTC typique. L'automate a trois états étiquetés par *Wait*, *Count* et *Action*.

**Wait** : l'automate reste dans cet état tant que la condition  $|v - v_r| \leq \Delta$  est satisfaite où  $v_r$  est l'entrée continu,  $v$  la tension au niveau de la charge et  $\Delta$  un seuil positif

**Count** : pendant que l'automate est dans cet état, un minuteur  $T_{count}$  est activé et s'il excède une certaine valeur  $T_d$  (typiquement  $30sec$ ), l'automate passe à l'état action

**Action** : le rapport de transformation  $n$  est incrémenté (ou décrementé) si le seuil  $\Delta$  est dépassé (n'est pas dépassé) i.e.

$$n^+ = \begin{cases} n^- + dn & \text{si } v_r - v > \Delta \quad \text{et } n^- < n_{max} \\ n^- - dn & \text{si } v_r - v < -\Delta \quad \text{et } n^- > n_{min} \end{cases} \quad (5.1)$$

où les exposants  $-$ ,  $+$  représentent respectivement les instants juste avant, juste après la mise à jour et  $dn$  le pas de variation ( $dn = 0.02$ )

---

<sup>4</sup>Acronyme de *On Load Tap Changer*

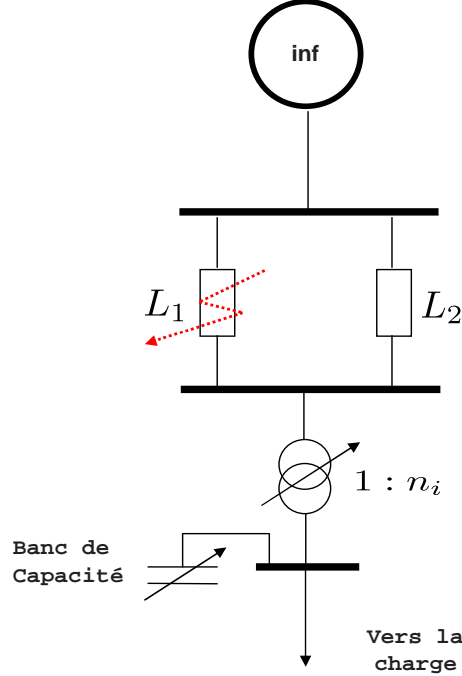


FIG. 5.1 – Le benchmark simplifié

- Une source de puissance réactive représentée par le banc de capacités  $b$ , prenant ces valeurs dans un ensemble discret fini. La variable  $b$  représente la seconde variable de commande du réseau électrique.
- Une charge non linéaire décrite comme une aggrégation de charges tout aussi différentes que des moteurs, systèmes de chauffage et d'éclairage. En vue de l'influence des boucles internes qui tendent à restaurer un niveau de puissance constant e.g., un moteur contrôlé et alimenté avec une faible tension tend à absorber un courant important, cette dépendance à sa dynamique propre et est décrite par le modèle suivant [71, 73]

$$\dot{x}_p = -\frac{x_p}{T_p} + P_0(v^{\alpha_s} - v^{\alpha_t}) \quad (5.2)$$

$$\dot{x}_q = -\frac{x_q}{T_q} + Q_0(v^{\beta_s} - v^{\beta_t}) \quad (5.3)$$

les équations de sortie représentent les puissances réactive et active absorbées

$$P = (1 - k) \left( \frac{x_p}{T_p} + P_0 v^{\alpha_t} \right) \quad (5.4)$$

$$Q = (1 - k) \left( \frac{x_q}{T_q} + Q_0 v^{\beta_t} \right) \quad (5.5)$$

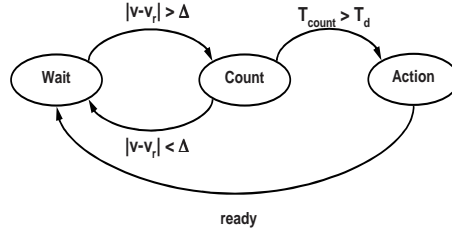


FIG. 5.2 – Dynamique du contrôleur OLTC

où  $x_p$  et  $x_q$  sont les états internes de la charge,  $T_p$  et  $T_q$  les constantes de temps,  $P_0$  et  $Q_0$  sont la puissance active et réactive en régime permanent. La variable  $k$  représente le pourcentage de charge délestée et représente la troisième entrée du système.

Le modèle (5.2)-(5.5) possède une capacité de recouvrement i.e., les puissances ont tendance à se maintenir à une certaine valeur pour une variation en échelon de la tension. En effet, cette capacité de recouvrement peut être mise en évidence pour  $k = 0$  en prenant le changement de variable  $W = v^{\alpha_s} - v^{\alpha_t}$  et  $\tilde{P} = P - P_0 v^{\alpha_s}$  de telle manière que le transfert entre  $\tilde{p}(s) \rightleftharpoons \tilde{P}(t)$  et  $w(s) \rightleftharpoons W(t)$  s'écrit

$$\tilde{p}(s) = \frac{P_0 T_p s}{1 + T_p s} w(s) \quad (5.6)$$

ce qui donne en utilisant le théorème de la valeur finale et pour des variations  $w(s)$  en échelon

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \tilde{P}(t) = 0 \quad (5.7)$$

des entrées en échelon représente bien l'effet des défauts sur la tension.

La nature hybride du système est due à l'interaction de l'automate décrit sur la figure 5.1, la dynamique continue (5.2)-(5.3) et l'ensemble discret des valeurs admissibles des commandes  $b$  et  $k$ .

En plus de la dynamique continue (5.2)-(5.3) il faut rajouter les équations algébriques décrivant l'écoulement et le transfert de puissance qui s'opèrent dans le système de transmission (entre le bus infini et la charge). Ces équations s'écrivent comme

$$\begin{cases} P = -\frac{v_0 v}{nX} \sin(\delta) \\ Q = \frac{v_0 v}{nX} \cos(\delta) - \frac{v^2}{n^2 X} + bv^2 \end{cases} \quad (5.8)$$

où  $X$  est la réactance inductive de la ligne,  $v_0$  est la tension au bus infini,  $n$  est la valeur du rapport de transformation et  $bv^2$  est la puissance réactive injectée dans le réseau,  $\delta$  est la

phase entre la tension  $v_0$  et celle au niveau de la charge  $v$ . Pour  $\alpha_s = \beta_s = 0$  et  $\alpha_t = \beta_t = 2$ , le modèle du benchmark simplifié s'écrit sous la forme algèbro-différentielle suivante

$$\dot{x}_p = -\frac{x_p}{T_p} + P_0(1 - v^2) \quad (5.9)$$

$$\dot{x}_q = -\frac{x_q}{T_q} + Q_0(1 - v^2) \quad (5.10)$$

$$0 = (1 - k) \left( \frac{x_p}{T_p} + P_0 v^2 \right) + \frac{v_0 v}{nX} \sin(\delta) \quad (5.11)$$

$$0 = (1 - k) \left( \frac{x_q}{T_q} + Q_0 v^2 \right) - \frac{v_0 v}{nX} \cos(\delta) + \frac{v^2}{n^2 X} - b v^2 \quad (5.12)$$

Une analyse complète du système (5.9)-(5.12) est entreprise dans la section 5.3.

### 5.2.2 Benchmark de petite taille

Le benchmark présenté dans ce qui suit est beaucoup plus complexe que son homologue de la sous section précédente. En effet, le benchmark de petite taille est non seulement de topologie plus complexe, aussi il intègre une contrainte supplémentaire liée à la présence d'un générateur. La topologie est celle tracée sur la figure 5.3. Le système a les mêmes composantes que le benchmark simplifié à savoir qu'il est équipé d'un OLTC, un banc de capacités et la possibilité d'éliminer une partie de la charge. Les lignes doubles de transmission  $L_1$ ,  $L_2$  et  $L_3$  sont modélisés comme des réactances inductive. La valeur de la réactance de la ligne  $L_3$  subit une brusque variation modélisant un défaut i.e., ouverture d'un disjoncteur.

### 5.2.3 Benchmark de taille moyenne

Le benchmark présenté dans cette sous section est le système de puissance le plus complexe étudié dans ce manuscrit. Il s'agit de l'interconnexion de trois régions de topologie similaire. Ces dernières font transiter des puissances entre elles et aussi vers des charges non linéaires de puissance différente. Ce benchmark représente par exemple un réseau interconnectant trois villes. Le réseau est décrit sur la figure 5.4. Ici comme dans les benchmarks précédents, les mêmes éléments sont présents. Le benchmark de taille moyenne est composé de

- Deux générateurs modélisés par un ensemble d'équations algébriques étant donnée la disparité entre la dynamique de la tension et la constante de temps des générateurs.
- Un bus infini utilisé pour représenter le reste du réseau.
- Trois zones inter-connectés représentées par les blocs *réseau de transmission* sur la figure 5.4.
- Trois lignes de transmission doubles modélisées par des réactances inductives et notées comme  $X_{i_1 i_2}^{i_3}$  où les indices  $i_1$  et  $i_2$  renvoient respectivement aux réseaux de transmission

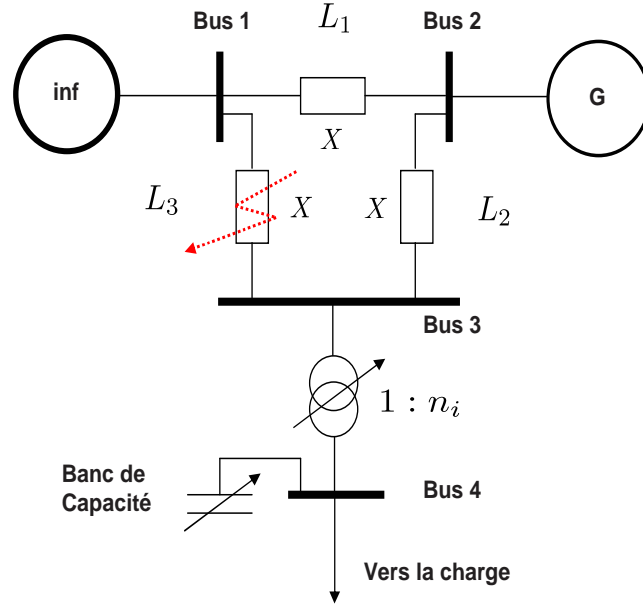


FIG. 5.3 – Le benchmark de petite taille

de départ et d'arrivée, et l'exposant  $i_3$  à l'indice de la ligne  $i_3 = 1, 2$ . Par suite de défauts, les réactances  $X_{i_1 i_2}^{i_3}$  peuvent subir de brusques variations .

Chaque bloc *réseau de transmission* est exactement une copie du benchmark de petite taille présenté dans la sous section précédente et illustré sur la figure 5.5. Les composantes sont rappelés brièvement pour plus de détails voir la sous section 5.2.1

- Trois lignes de transmission modélisées par des réactances  $X$ .
- Un transformateur équipé d'un OLTC (voir figure 5.2). La mise à jour du rapport de transformation  $n_i$  (état *action*) associé à la  $i$ -ème région, suit la loi d'évolution suivante (voir aussi (5.1))

$$n_i^+ = \begin{cases} n_i^- + dn & \text{si } v_{r_i} - v_i > \Delta \quad \text{et } n_i^- < n_{max} \\ n_i^- - dn & \text{si } v_{r_i} - v_i < -\Delta \quad \text{et } n_i^- > n_{min} \end{cases} \quad (5.13)$$

où  $i \in \mathcal{I} = \{1, \dots, l\}$ ,  $l$  étant le nombre de régions ( $l = 3$  dans ce cas ci),  $v_{r_i}$  et  $v_i$  représentent respectivement la tension de référence (entrée du système) et la tension à la charge correspondant à la  $i$ -ème région.

- Une source de puissance réactive représentée par le banc de capacités  $b_i$  (le second vecteur d'entrée du benchmark).
- Une charge non linéaire avec dynamique de recouvrement décrite par l'équation différentielle [73]

$$\dot{x}_i = -\frac{x_i}{T_{p_i}} + P_{0_i}(\sqrt{v_i} - v_i^2) \quad (5.14)$$

et les équations de sortie représentant les puissances réactives et actives absorbées

$$P_i = (1 - k_i) \left( -\frac{x_i}{T_{p_i}} + P_{0_i} v_i^2 \right) \quad (5.15)$$

$$Q_i = (1 - k_i) (\alpha_i P_i) \quad (5.16)$$

où  $x_i$  est le  $i$ -ème état de la charge ( $i \in \mathcal{I}$ ),  $T_{p_i}$  est la constante de temps  $P_{0_i}$  et  $\alpha_i = cst_i$  sont respectivement la puissance active en régime permanent et le facteur de puissance. La variable  $k_i$  représente le pourcentage de charge délestée associé à la  $i$ -ème région.

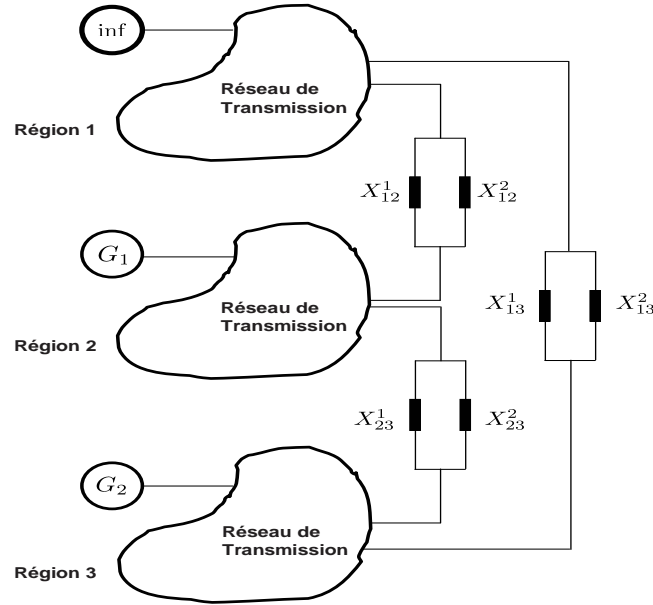


FIG. 5.4 – Le benchmark de taille moyenne

### 5.3 Analyse de l'effondrement de tension

Dans cette partie du manuscrit, sur la base du benchmark simplifié, est analysé l'effondrement de tension dans les réseaux électriques. Les conclusions tirées restent valables dans la majorité des cas pour des systèmes de grande dimension. Cette particularité des réseaux électriques est bien connue de la communauté électrotechnicienne, si bien que la plupart des modèles analysés dans la littérature sont de dimension petite e.g., [69, 132, 12]. D'un autre côté ces modèles de faible dimension peuvent être vues comme une abstraction de systèmes réels plus complexe et de grande dimension.

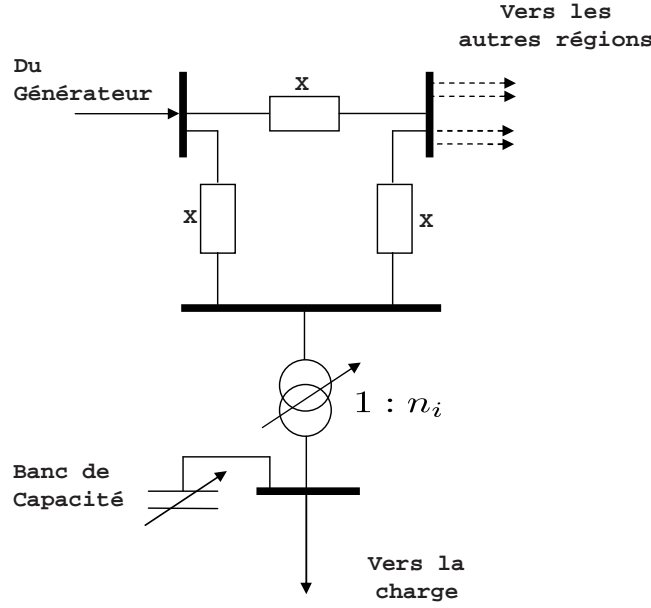


FIG. 5.5 – L'élément réseau de transmission dans le benchmark de taille moyenne

### 5.3.1 Analyse statique

Le modèle (5.2)-(5.3) jouit de certaines propriétés qui permettent de simplifier la dynamique du système. En effet la propriété suivante est vérifiée

**Propriété 1** *Considérons le système décrit par les équations suivantes*

$$\dot{x}_p = -\frac{x_p}{T_p} + P_0(v^{\alpha_s} - v^{\alpha_t}) \quad (5.17)$$

$$\dot{x}_q = -\frac{x_q}{T_q} + Q_0(v^{\beta_s} - v^{\beta_t}) \quad (5.18)$$

où  $v$  est un signal quelconque. Si les égalités  $T_p = T_q$ ,  $\alpha_s = \beta_s$  et  $\alpha_t = \beta_t$  sont satisfaites alors l'ensemble

$$F = \{(x_p, x_q) \in \mathbb{R}^2 \mid x_p = \eta x_q = \frac{P_0}{Q_0} x_q\} \quad (5.19)$$

est invariant sous (5.17)-(5.18).

*Preuve.* En multipliant l'équation (5.18) par  $\eta = \frac{Q_0}{P_0}$  et en utilisant le fait  $T_p = T_q$ ,  $\alpha_s = \beta_s$  et  $\alpha_t = \beta_t$  on retrouve l'équation (5.17). Ce qui implique que si  $(x_p(0) \ x_q(0)) \in F$  alors  $(x_p(t) \ x_q(t)) \in F$ ,  $\forall t > 0$ .  $\diamond\diamond\diamond$

La propriété 1 indique que l'état du système évolue sur une droite représentée par l'ensemble de points  $F$  (pour des conditions initiales appartenant à cette droite). En combinant les équations algébriques décrivant l'écoulement de puissance (5.11)-(5.12), et en notant par



$x = x_p$  et  $\bar{u} = (n \ b \ k)'$ , le système (5.9)-(5.12) se réduit à l'équation algèbro différentielle suivante

$$\dot{x} = -\frac{x}{T_p} + P_0(1 - v^2) \quad (5.20)$$

$$0 = v^4 + 2\alpha_1(x, \bar{u}, X)v^2 + \alpha_0(x, \bar{u}, X) \quad (5.21)$$

où  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont données par les équations suivantes

$$\alpha_1(x, \bar{u}, X) = \alpha_{11}(\bar{u}, X)x + \alpha_{12}(\bar{u}, X) \quad (5.22)$$

$$\alpha_0(x, \bar{u}, X) = \frac{1}{C} \frac{(1-k)^2(1+\eta^2)}{T_p^2} x^2 \quad (5.23)$$

avec

$$\alpha_{11}(\bar{u}, X) = \frac{1}{2C} \left( \frac{2(1-k)^2}{T_p} (P_0 + \eta Q_0) + \frac{2\eta(1-k)}{T_p} \left( \frac{1}{n^2 X} - b \right) \right) \quad (5.24)$$

$$\alpha_{12}(\bar{u}, X) = -\frac{v_0^2}{n^2 X^2} \quad (5.25)$$

et

$$C = (1-k)^2(P_0^2 + Q_0^2) + \left( \frac{1}{n^2 X} - b \right) \left[ \left( \frac{1}{n^2 X} - b \right) + 2(1-k)Q_0 \right] \quad (5.26)$$

La dépendance des fonctions  $\alpha_1$  et  $\alpha_0$  par rapport à la réactance de la ligne  $X$  fait que les caractéristiques statiques du système (5.20)-(5.21) varient en fonction de ce paramètre. Le modèle (5.20)-(5.21) s'écrit en notant  $y = v^2$  comme

$$\dot{x} = -\frac{x}{T_p} + P_0(1 - y) \quad (5.27)$$

$$0 = y^2 + 2\alpha_1(x, \bar{u}, X)y + \alpha_0(x, \bar{u}, X) \quad (5.28)$$

l'équation algébrique (5.28) est résolue explicitement et les solutions s'écrivent comme

$$y_{1,2} = -\alpha_1(x, \bar{u}, X) \pm \sqrt{\alpha_1^2(x, \bar{u}, X) - \alpha_0(x, \bar{u}, X)} \quad (5.29)$$

pourvu que les conditions initiales appartiennent à l'ensemble  $F$  défini plus haut ( $x_0 = x(t_0) \in F$ ). Le système explicite est décrit par l'une des solutions  $y_{1,2}$  en (5.29). En tenant compte de cette particularité, l'intérêt est porté sur la solution de module maximal (solution de valeur supérieure). En remplaçant  $y$  par son expression (5.27), le système s'écrit enfin comme suit

$$\dot{x} = -\frac{x}{T_p} + P_0 \left( 1 + \alpha_1(x, \bar{u}, X) - \sqrt{\alpha_1^2(x, \bar{u}, X) - \alpha_0(x, \bar{u}, X)} \right) \quad (5.30)$$

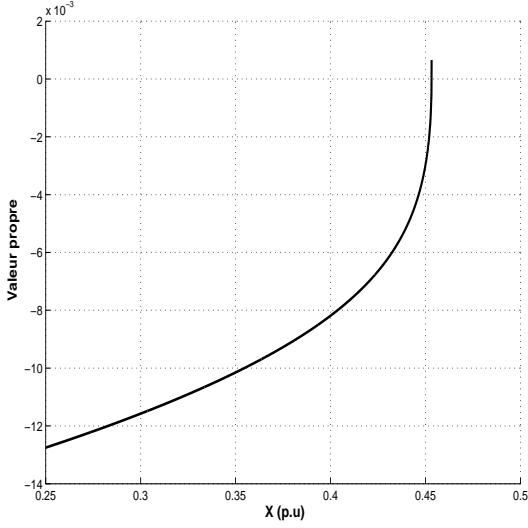


FIG. 5.6 – Valeur propre du modèle linéarisé en fonction du paramètre  $X$

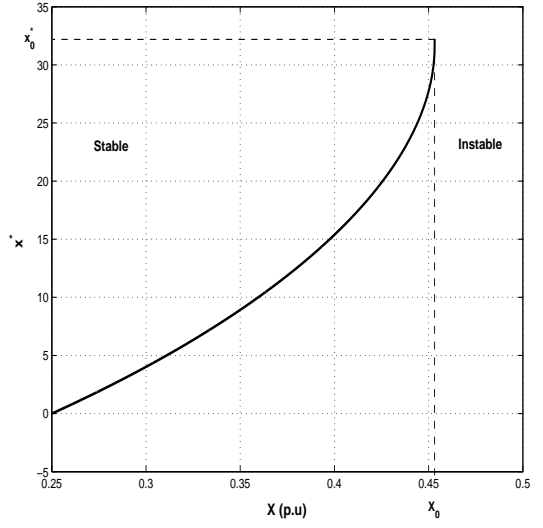


FIG. 5.7 – Diagramme de Bifurcation

Le calcul des points d'équilibre  $(x^*, \bar{u}^*)$  de l'équation (5.30) se fait en calculant les racines de l'équation algébrique suivante pour  $x$  et  $\bar{u}$

$$0 = -\frac{x}{T_p} + P_0 \left( 1 + \alpha_1(x, \bar{u}, X) - \sqrt{\alpha_1^2(x, \bar{u}, X) - \alpha_0(x, \bar{u}, X)} \right) \quad (5.31)$$

tout dépend de la valeur des fonctions  $\alpha_i$ , le système peut ne pas avoir de point d'équilibre. Ce fait est établi en variant lentement la valeur de la réactance  $X$ , pour une commande  $\bar{u}$  fixé à sa valeur nominale  $\bar{u}'_{nom} = (n_{nom} \ b_{nom} \ k_{nom}) = (1 \ 0 \ 0)$  et en calculant la solution de (5.31).

Afin de déduire la stabilité locale, le système est linéarisé autour du point d'équilibre  $(x^*, \bar{u}_{nom})$  solution de l'équation (5.31), cela donne

$$\dot{x} = \left[ -\frac{1}{T_p} + P_0 \left( \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} - \frac{2\alpha_1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} - \frac{\partial \alpha_0}{\partial x}}{2\sqrt{\alpha_1^2 - \alpha_0}} \right) \right]_{x=x^* \ \bar{u}=\bar{u}_{nom}} (x - x^*) \quad (5.32)$$

la dépendance des fonctions  $\alpha_i$  par rapport à  $x$  et  $\bar{u}$  est ici omise. Pour une variation lente du paramètre  $X$ , les solutions de l'équation (5.31) sont évaluées en utilisant l'algorithme du point fixe. Sur la figure 5.6 est tracée la valeur propre du linéarisé (5.32) comme une fonction de  $X$ , le système perd sa stabilité structurelle près de la valeur de  $X = X_0 = 0.4532$  à cette valeur un changement infinitésimal de  $X$  induit un changement du comportement de la trajectoire du système (passage stable-instable). La valeur  $X_0$  correspond à une valeur de *bifurcation* des trajectoires.

Sur la figure 5.7 est tracé le diagramme de bifurcation i.e., le tracé du point d'équilibre  $x^*$  (avec  $\bar{u} = \bar{u}_{nom}$ ) en fonction du paramètre  $X$ . Le point  $(X_0, x_0^*) = (0.4532, 32.245)$

correspond à un point de bifurcation. Ce type de bifurcation est connu sous le nom de *selle-nœud* [55] et illustre le cas où au dessus d'une certaine valeur d'un paramètre aucun équilibre n'est possible.

### 5.3.2 Analyse dynamique

Le système d'équations (5.27)-(5.28) s'écrit sous la forme générique suivante

$$\dot{x} = f(x, y) \quad (5.33)$$

$$0 = g(x, y) \quad (5.34)$$

lorsque le réseau est sujet à un défaut (modélisé comme une augmentation soudaine du paramètre  $X$  au delà de  $X_0$ ) la tension  $v = \sqrt{y}$  au borne de la charge (voir figure 5.8) exhibe un comportement avec un temps d'échappement fini. Ce comportement est mis en évidence en considérant le comportement à la frontière de l'hypersurface décrite par l'équation  $g(x, y) = 0$ . En effet, cette équation définit une partie de l'espace invariante par rapport à la dynamique du système, i.e.,  $\dot{g}(y, x) = 0$  ce qui s'écrit

$$\frac{\partial g}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial g}{\partial x} \dot{x} = 0 \quad (5.35)$$

en résolvant par rapport à  $\dot{y}$  cela donne la dynamique suivante

$$\dot{y} = - \left( \frac{\partial g}{\partial y} \right)^{-1} \frac{\partial g}{\partial x} \dot{x} \quad (5.36)$$

pour le système en question, cette équation est exprimée comme

$$\dot{y} = \frac{1}{2(y + \alpha_1(x, \bar{u}, X))} \left[ 2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} y + \frac{\partial \alpha_0}{\partial x} \right] \quad (5.37)$$

rappelons que  $y$  est prise égale à  $v^2$ . De cette équation on peut inférer qu'il peut exister des coordonnées (état)  $x$  pour lesquelles l'expression  $y + \alpha_1$  tend vers zéro, et faisant tendre par la même occasion  $\dot{y}$  vers  $-\infty$  (temps d'échappement fini). Ces points s'ils existent sont nommés par la suite *points singuliers*, et sont caractérisés plus explicitement dans la sous section consacrée à la stabilisation de ce système.

Le système de contraintes suivant

$$0 = y^2 + 2\alpha_1(x, \bar{u}, X)y + \alpha_0(x, \bar{u}, X) \quad (5.38)$$

$$0 = y + \alpha_1(x, \bar{u}, X) \quad (5.39)$$

doit être satisfait pour toute valeur de l'état pour la première contrainte et aux points singuliers pour la seconde. Ce qui veut dire que les deux solutions  $y_{1,2}$  coïncident à certains

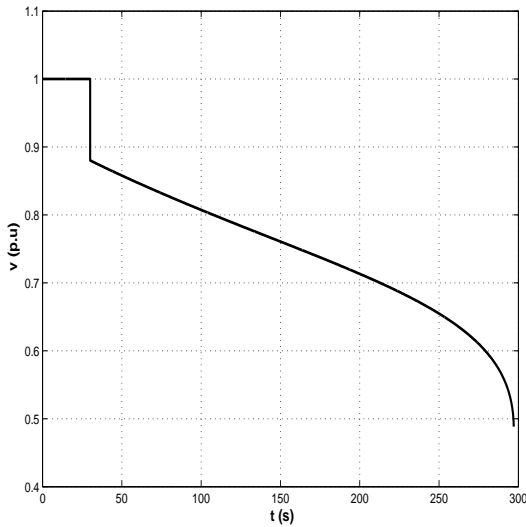


FIG. 5.8 – Effondrement de tension côté charge,  $\bar{u} = (1 \ 0 \ 0)$  et  $X = X_f = 0.5$

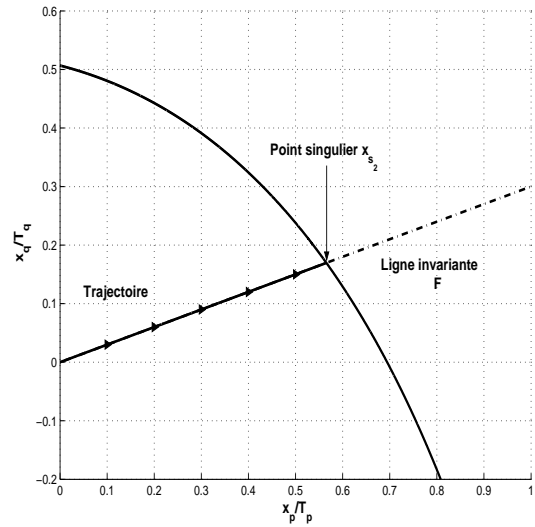


FIG. 5.9 – Interprétation dans le plan de phase de l'effondrement de tension,  $\bar{u} = (1 \ 0 \ 0)$  et  $X = X_f = 0.5$

coordonnées  $x = x_{singulière}$ . Cette fusion des différentes solutions est une propriété générique des équations algébriques apparaissant dans les réseaux électriques [62]. Cela correspond à une forme de bifurcation selle-nœud où l'état  $x$  est maintenant la variable, et est aussi connue sous le nom de *bifurcation induite par singularité* [130, 109]. A ces points singuliers, le modèle se casse, et la trajectoire ne peut plus aller au delà. Les modèles de réseaux électriques exhibent typiquement ce genre de comportement. Les systèmes réels n'atteignent pas bien sûr des points tels qu'il n'y ait pas de continuité. La cassure du modèle est due aux hypothèses de modélisation, principalement que l'état  $x$  et la variable algébrique  $y$  sont lentes par rapport à la fréquence fondamentale du réseau (50 ou 60 Hz) ce qui n'est plus le cas lorsque l'état s'approche de la singularité. En réalité, la trajectoire aurait continué sous l'action des dynamiques non modélisées (e.g., caractère distribué du système). Cependant, les hypothèses sont standards dans l'analyse et le contrôle des réseaux électriques et les outils qu'on se doit de développer doivent être capables d'éviter de telles cassures. En simulation, l'avènement de la cassure est interprétée comme l'occurrence d'un niveau inacceptable de la tension. La figure 5.8 représente une simulation du réseau lorsqu'il est sujet à un défaut introduit à l'instant  $t = 30 \text{ sec}$ . Le défaut est modélisé par un passage brusque de la réactance  $X$  de sa valeur nominale  $X_{nom} = 0.25 \text{ p.u.}$  à la valeur  $X_f = 0.5 \text{ p.u.}$ . La tension exhibe un comportement à temps fini et la trajectoire ne peut plus continuer au delà de l'instant  $t \approx 300 \text{ sec}$ . Une interprétation dans l'espace d'état est tracée sur la figure 5.9. Le système est supposé être décrit par les équations (5.9)-(5.12)<sup>5</sup>, une surface singulière au delà de

<sup>5</sup>Le choix des coordonnées initiales est motivé par l'effet visuel qu'a une surface

laquelle la trajectoire ne peut continuer est bien visible. Cette figure montre aussi clairement l'invariance de la droite décrite dans la propriété 1. La méthode proposée dans la section 5.4.1 est basée sur la synthèse d'une approche évitant la cassure du modèle en maintenant une distance de sécurité par rapport à la surface singulière.

## 5.4 Stabilisation des benchmarks

### 5.4.1 Approche basée sur une stratégie de commutation

Dans cette sous section quelques propriétés du système sont formalisées et l'approche de contrôle détaillée. Il s'agit principalement d'une méthode de contrôle basée sur l'utilisation d'une fonction de Lyapunov candidate. L'approche consiste à activer le niveau de commande permettant une décroissance maximale de la fonction de Lyapunov candidate tout en garantissant le respect d'une marge de sécurité par rapport à la singularité. L'algorithme de commande est formulé comme un problème d'optimisation statique qui est résolu en ligne.

L'entrée du système correspond au vecteur  $\bar{u} = (n \ b \ k)'$  dont chaque composante est soumise aux contraintes d'appartenances suivantes

- Le rapport de transformation  $n$  appartient à l'ensemble  $S_n = \{n_{min}, n_{min}+dn \dots n_{max}\}$ , (typiquement  $n_{min} = 0.8$ ,  $n_{max} = 1.2$  et  $dn = 0.02$ )
- Le banc de capacité  $b$  est limité à la plage de valeurs de 0 à 0.3  $p.u$  avec un pas de 0.1  $p.u$  soit  $b \in S_b = \{0.0, 0.1, 0.2, 0.3\}$
- Le position du relais d'élimination de charge  $k$ , prend ses valeurs dans l'ensemble  $S_k = \{0.00, 0.05, 0.1, 0.15\}$ .

Définissons aussi l'ensemble de toute les valeurs possibles du vecteur commande  $\bar{u} = (n \ b \ k)'$  comme

$$\mathcal{Z} = S_n \times S_b \times S_k \quad (5.40)$$

Le résultat suivant caractérise l'ensemble  $\mathcal{X}_{\bar{u}}$  fonction de la valeur du vecteur  $\bar{u}$  garantissant l'existence d'une solution réelle à l'équation algébrique (5.38). Pour cela la condition sur le terme sous la racine carrée en (5.29) s'écrit

$$a_2(\bar{u}, X)x^2 + a_1(\bar{u}, X)x + a_0(\bar{u}, X) \geq 0 \quad (5.41)$$

cette inégalité garantit l'existence de solutions réelles. La propriété suivante est vérifiée

**Propriété 2** *Pour  $X = X_{nom}$ , quel que soit  $\bar{u} \in \mathcal{Z}$ , il existe un ensemble  $\mathcal{X}_{\bar{u}} \subset \mathbb{R}$  tel que l'inégalité (5.41) est satisfaite.*

*Preuve.* En résolvant l'égalité induite de (5.41) pour  $x$

$$x_{s1,2}(\bar{u}, X) = \frac{-a_1(\bar{u}, X) \mp \sqrt{a_1^2(\bar{u}, X) - 4a_0(\bar{u}, X)a_2(\bar{u}, X)}}{2a_2(\bar{u}, X)} \quad (5.42)$$

Notons que pour tout  $\bar{u} \in \mathcal{Z}$ , les propriétés suivantes sont satisfaites (vérifiable numériquement)

$$\forall \bar{u} \in \mathcal{Z} : \begin{cases} a_2(\bar{u}, X) < 0 \\ a_1(\bar{u}, X) < 0 \\ a_0(\bar{u}, X) > 0 \end{cases}$$

Cela garantit l'existence de  $x_{s_1}$  et  $x_{s_2}$  de signe opposé. La dérivée seconde par rapport à  $x$  du polynôme associé à (5.41) est négative, le polynôme atteint ; de ce fait ; un maximum global en  $x_{max}$  ce qui garantit l'existence d'un ensemble non vide  $\mathcal{X}_{\bar{u}}$  où (5.41) est vérifiée.

◇◇◇

Notons que la condition (5.41) est nécessaire pour une écriture explicite des solutions du système. Les points  $x_{s_1}$  et  $x_{s_2}$  correspondent aux coordonnées au delà desquelles, l'existence de solutions n'est plus garantie. Ces points sont appelés points singuliers.

La propriété suivante caractérise l'existence de solutions positives à l'équation algébrique (5.38)

**Propriété 3** Pour  $X = X_{nom}$ , pour tout  $\bar{u} \in \mathcal{Z}$  et  $x \in \mathcal{X}_{\bar{u}}$  l'équation (5.38) a deux solutions réels positives.

*Preuve.* La structure particulière de  $\alpha_1(x, \bar{u}, X)$  fait que

$$\alpha_1(x, \bar{u}, X) < 0$$

est satisfaite  $\forall (x, \bar{u}) \in \mathcal{X}_{\bar{u}} \times \mathcal{Z}$  qui combiné au résultat précédent (propriété 2) donne le résultat recherché. Afin de vérifier que  $\alpha_1(x, \bar{u}, X) < 0$ , on a  $\alpha_1(x, \bar{u}, X) = \alpha_{11}(\bar{u}, X)x + \alpha_{12}(\bar{u}, X)$  de telle manière que toutes les valeurs appartenant à  $\mathcal{X}_{\bar{u}} \times \mathcal{Z}$  peuvent être testées.

◇◇◇

Le traitement du problème de commande par des outils classiques nécessitent en premier lieu que les dynamiques soient synchrones. L'automate modélisant le système de contrôle OLTC est lui un système asynchrone i.e., système à événement discret. L'objectif est alors de trouver une approximation à la dynamique de l'automate.

Rappelons que  $n \in S_n$  et qu'il est restreint à évoluer d'une manière monotone avec saturation. La raison d'une telle contrainte est due à la structure interne du OLTC représenté sur la figure 5.2. Les équations de mis à jour du rapport de transformation  $n$

$$n^+ = \begin{cases} n^- + dn & \text{si } v_r - v > \Delta \quad \text{et } n^- < n_{max} \\ n^- - dn & \text{si } v_r - v < -\Delta \quad \text{et } n^- > n_{min} \end{cases} \quad (5.43)$$

sont approchées par l'équation différentielle avec second membre discontinu suivante

$$\dot{n} = \Gamma \cdot \text{sgn}_{\Delta}(\nu, n) \quad (5.44)$$

où  $\Gamma = \frac{dn}{T_d}$  est le gain de l'automate,  $\nu = v_r - v$  et  $\text{sgn}_\Delta(\cdot, \cdot)$  est la fonction signe avec zone morte définie par

$$\text{sgn}_\Delta(\nu, n) = \begin{cases} 1 & \text{si } (\nu > \Delta) \wedge (n < n_{max}) \\ -1 & \text{si } (\nu < -\Delta) \wedge (n > n_{min}) \\ 0 & \text{si } (|\nu| \leq \Delta) \vee (n = n_{min}) \vee (n = n_{max}) \end{cases} \quad (5.45)$$

$\nu$  devient ainsi le nouveau signal de contrôle dont la synthèse est faite plus loin. Dans ce qui suit la variable  $n$  est vue comme un état supplémentaire et  $\nu$  comme la nouvelle composante du vecteur commande (la formulation initiale du benchmark considère  $v_r$  comme signal de commande). Notons que l'expression (5.44) contraint le rapport de transformation  $n$  à évoluer comme une fonction linéaire par morceaux par rapport au temps et atteindra une valeur permise (appartenant à l'ensemble  $S_n$ ) chaque  $T_d$  secondes (la valeur finale du compteur sur la figure 5.2).

Avec la nouvelle notation pour la commande  $u$

$$u = (\nu \ u'_d)' = (\nu \ b \ k)' \quad (5.46)$$

où  $\nu$  est l'entrée continue, et  $u_d = (b \ k)'$  décrit la partie discrète de la commande  $u_d \in S_b \times S_k$ . Le réseau électrique s'écrit sous la forme suivante

$$\dot{x} = -cx + d(1 - y) \quad (5.47)$$

$$\dot{n} = \Gamma \cdot \text{sgn}_\Delta(\nu, n) \quad (5.48)$$

$$g = y^2 + 2\alpha_1(x, u, X)y + \alpha_0(x, u, X) = 0 \quad (5.49)$$

où  $c = \frac{1}{T_p}$  et  $d = P_0$ . Toutes les valeurs possibles de l'ensemble  $S_b \times S_k = \{u_{d_1}, \dots, u_{d_j}, \dots, u_{d_{16}}\}$  sont ordonnées dans le tableau 5.1. Notons qu'à des valeurs importantes de l'indice  $j$  leurs correspondent des valeurs grandes de la variable  $k$ . Cet ordre reflète la priorité donnée à l'utilisation des valeurs de  $k$  les moins élevées possibles (éliminer le moins de charge possible).

<b>k/b</b>	0.0	0.1	0.2	0.3
0.00	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$
0.05	$j = 5$	$j = 6$	$j = 7$	$j = 8$
0.10	$j = 9$	$j = 10$	$j = 11$	$j = 12$
0.15	$j = 13$	$j = 14$	$j = 15$	$j = 16$

TAB. 5.1 – Les valeurs possibles des couples  $(b, k)$

**Remarque 12** *Pour des systèmes avec un nombre relativement élevé de composantes, l'ordre établi dans le tableau 5.1 n'est pas toujours possible. Dans ces cas, les bus peuvent être ordonnées par ordre de fragilité e.g., [99]. Lorsque le benchmark de moyenne dimension est*

traité, d'autres techniques d'ordre mieux adaptés aux systèmes de dimension relativement élevée sont introduites.

Pour les valeurs des réactances (avec défaut), il existe un point d'équilibre  $(x^* \ n^* \ u_d^*)$  qui par définition satisfait les équations algébriques suivantes<sup>6</sup>

$$0 = -cx^* + d[1 - y^*] \quad (5.50)$$

$$0 = \Gamma \cdot \text{sgn}_\Delta(\nu^*, n^*) \quad (5.51)$$

$$0 = y^{*2} + 2\alpha_1^* y^* + \alpha_0^* \quad (5.52)$$

Si l'ensemble des points  $(x^* \ n^* \ u_d^*)$  n'est pas un singleton. Le concepteur peut choisir un point d'équilibre optimale dans le sens où les contraintes suivantes sont satisfaites

- La tension est entre certaines limites de bon fonctionnement, en d'autres termes  $y^*$  est proche de sa valeur en régime nominal (sans défaut)
- Les valeurs minimales pour  $b$  et  $k$  sont utilisées afin d'atteindre un niveau acceptable de tension ce qui revient à appliquer une commande  $u_d = u_j$  d'indice  $j$  minimal, voir tableau 5.1.

En introduisant les coordonnées d'erreur

$$\tilde{x} = x - x^*, \quad \tilde{n} = n - n^*$$

avec une interprétation similaire, les équations d'erreurs s'écrivent

$$\dot{\tilde{x}} = -c\tilde{x} - d\tilde{y} \quad (5.53)$$

$$\dot{\tilde{n}} = \Gamma \text{sgn}_\Delta(\tilde{\nu} + \nu^*, \tilde{n} + n^*) \quad (5.54)$$

où  $\tilde{y} = y^+ - y^*$ , et  $y^+$  est la solution maximale de l'équation algébrique (5.29), ce choix délibéré est motivé par le fait de focaliser l'analyse sur une des solutions

$$y^+ = y^+(x, \bar{u}) = \max y_{1,2}(x, \bar{u}) = \max(-\alpha_1(x, \bar{u}) \pm \sqrt{\alpha_1^2(x, \bar{u}) - \alpha_0(x, \bar{u})}) \quad (5.55)$$

La stratégie de commande proprement dite consiste à choisir une fonction candidate pour fonction de Lyapunov et à appliquer à tout instant le niveau de commande  $u_j$  qui lui garantit une certaine décroissance.

Considérons la fonction de Lyapunov candidate

$$V(z) = \frac{z'z}{2} \quad (5.56)$$

où le vecteur  $z' = (\dot{\tilde{x}} \ \tilde{x} \ \tilde{n})$ . La dérivée de (5.56) le long des équations d'erreurs s'écrit

<sup>6</sup>On peut montrer que les mêmes propriétés qu'en 1-3 tiennent dans le cas où  $X = X_f$  (le paramètre d'après défaut). Dans ce cas, seulement un sous ensemble de  $\mathcal{Z}$  permet d'aboutir aux conclusions des propriétés.



$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial z} \dot{z} = \ddot{x}\dot{x} + \tilde{x}\dot{\tilde{x}} + \tilde{n}\dot{\tilde{n}} \quad (5.57)$$

en utilisant l'équation (5.53) et sa dérivée dans (5.57) on obtient l'équation suivante

$$\dot{V} = -(c\dot{\tilde{x}} + d\dot{\tilde{y}})\dot{\tilde{x}} + \tilde{x}\dot{\tilde{x}} + \tilde{n}\dot{\tilde{n}} \quad (5.58)$$

ce qui donne en remplaçant  $\dot{\tilde{y}}$  par son expression

$$\dot{V} = - \left( c + d \frac{\partial \tilde{y}}{\partial x} \right) \dot{\tilde{x}}^2 - \left( d \frac{\partial \tilde{y}}{\partial n} \dot{\tilde{x}} - \tilde{n} \right) \Gamma \operatorname{sgn}_{\Delta}(\tilde{\nu} + \nu^*, \tilde{n} + n^*) + \tilde{x}\dot{\tilde{x}} - d\dot{\tilde{x}} - \gamma(\dot{\tilde{x}})\delta_{u_d}(t - t_m) \quad (5.59)$$

où  $\delta_{u_d}(\cdot)$  est un terme impulsif introduisant un saut dans  $\dot{V}$  aux instants de commutation  $t_m$  entre les différentes composantes de  $u_d$  (voir tableau 5.1),  $\gamma(\cdot)$  est une fonction de  $\dot{\tilde{x}}$ . En introduisant la loi d'évolution suivante pour  $\tilde{\nu}$

$$\tilde{\nu} = \left( d \frac{\partial \tilde{y}}{\partial n} \dot{\tilde{x}} - \tilde{n} \right) - \nu^* \quad (5.60)$$

$\dot{V}$  s'écrit

$$\dot{V} = -W(\dot{\tilde{x}}, \tilde{n}, u_d) - \gamma(\dot{\tilde{x}})\delta_{u_d}(t - t_m) \quad (5.61)$$

où

$$W(\dot{\tilde{x}}, \tilde{n}, u_d) = \left( c + d \frac{\partial \tilde{y}}{\partial x} \right) \dot{\tilde{x}}^2 + \Gamma \left| d \frac{\partial \tilde{y}}{\partial n} \dot{\tilde{x}} + \tilde{n} \right|_{\Delta} - \tilde{x}\dot{\tilde{x}} \quad (5.62)$$

$|\cdot|_{\Delta}$  dénote la valeur absolue avec zone morte  $\Delta$ .

Dans la suite, l'algorithme de commutation est formulé. L'algorithme peut être vu comme une commande supervisée, où au niveau le plus élevé, la fonction de Lyapunov candidate est utilisée comme signal de supervision et au niveau le plus bas un problème d'optimisation sous contraintes est résolu. Les contraintes sont de type inégalité sur le niveau de la dérivée de la fonction de Lyapunov candidate et sur l'état actuel par rapport à la position des points singuliers. Une fonction d'hystérésis est aussi introduite afin de limiter une activation excessive de l'algorithme.

L'algorithme est basé sur les idées suivantes

- L'algorithme est principalement basé sur l'équation (5.61). Cette équation nous renseigne qu'entre deux commutations successives, la fonction de Lyapunov candidate décroît si et seulement si le terme  $W(\dot{\tilde{x}}, \tilde{n}, u_d)$  est strictement positif. Chaque fois que  $W(\cdot, \cdot, \cdot)$  s'approche de 0, une commutation doit être initiée sur  $u_d$  de telle manière à garantir l'inégalité suivante

$$W \geq \epsilon_3 \quad (5.63)$$

pour un certain  $\epsilon_3$  positif.

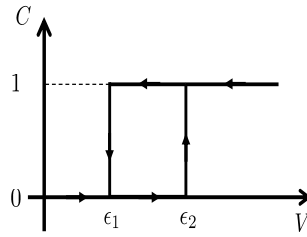


FIG. 5.10 – La fonction hysteresis telle qu’appliquée à la fonction candidate  $V$

- La nouvelle valeur de  $u_d$ , satisfaisant la contrainte précédente doit aussi maintenir l’état actuel le plus éloigné possible de la coordonnée du point singulier (voir équation (5.42) en propriété 2). De telle manière que l’inégalité suivante doit être satisfaite

$$|x_{s_2} - x| \geq d_0 \quad (5.64)$$

pour une certaine marge de sécurité  $d_0 > 0$ .

- Si c’est le cas pratiquement ; plusieurs niveaux de  $u_d$  satisfont aux objectifs cités plus haut. Le niveau avec un indice  $j$  minimal, dans le sens explicité au tableau 5.1 et dans le sens où il limite les oscillations de la commande, est activé. Cela permet non seulement de minimiser l’utilisation des ressources (surtout l’élimination de la charge) mais aussi permet de ne pas réduire la durée de vie du matériel (évite une commutation excessive des capacités).
- Cependant, la fonction candidate ne peut en aucun cas décroître indéfiniment avec un taux de  $\epsilon_3$ . Pour éviter que l’inégalité (5.63) n’ait pas de solution, une seconde stratégie doit être appliquée à l’approche de  $V = 0$ . Concrètement, quand  $V \leq \epsilon_1$  où  $\epsilon_1$  est un positif relativement petit, l’algorithme arrête de faire décroître  $V$  avec le taux en (5.63) et utilise la stabilité asymptotique locale du point d’équilibre  $x^*$  (obtenu avec la commande la plus récente). La commande est ainsi figée tout au long de l’intervalle de temps où  $V \leq \epsilon_1$  avec  $\epsilon_1 < \epsilon_2$ .
- Cela amène à utiliser sur la fonction candidate une hysteresis défini justement par les constantes  $(\epsilon_1 \ \epsilon_2)$  afin d’éviter des oscillations du type pathologiques entre les deux stratégies définies plus haut. L’hysteresis est notée par  $\sigma(V, \epsilon_1, \epsilon_2)$ , voir figure 5.10. Tant que  $V \geq \epsilon_2$ , la stratégie permettant de faire décroître  $V$  est appliquée, une fois que le niveau  $\epsilon_1$  est atteint, la seconde stratégie entre en action (utilisation de la stabilité asymptotique au sens local du point d’équilibre). La première stratégie est reconduite si et seulement si  $V$  redevient supérieur à  $\epsilon_2$ , voir l’exemple sur la figure 5.11 et la figure 5.12.

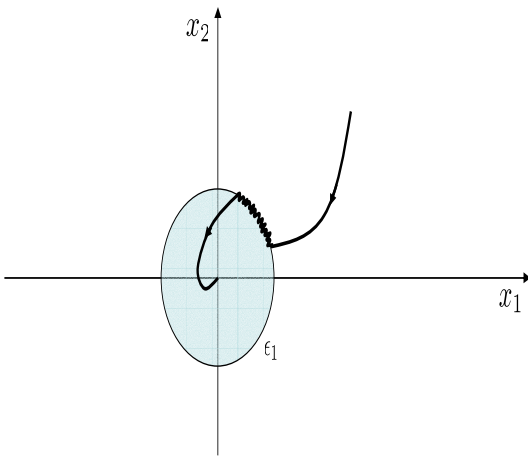


FIG. 5.11 – Exemple illustratif de l'évolution de la fonction de Lyapunov candidate en l'absence d'hystérésis.

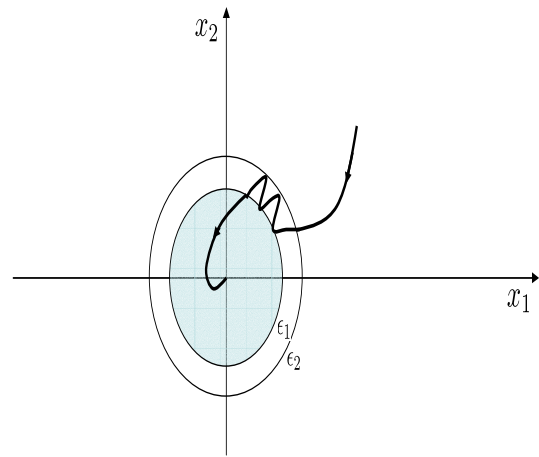


FIG. 5.12 – Exemple illustratif de l'évolution de la fonction de Lyapunov candidate en présence d'hystérésis. Remarquons la réduction des oscillations due à l'introduction de la dynamique d'hystérésis.

En notant  $t_m$  le  $m$ -ième instant de commutation. L'algorithme est formulé comme suit

**Algorithme 3** *Logique de commutation basée sur une fonction de Lyapunov candidate*

**Étape 0** Soit  $m := 1$ ;  $\mathcal{J} = \{1, 2, \dots, 16\}$ ;  $r \in \mathbb{R}_{>0}$ ;  $(\epsilon_1 \ \epsilon_2 \ \epsilon_3)' \in \mathbb{R}_{>0}^3$ ;  $\epsilon_2 > \epsilon_1$ ,  $d_0 \in \mathbb{R}_{>0}$ ,  
 $j_0^* = 1$

**Étape 1**  $C_m = \sigma(V, \epsilon_1, \epsilon_2)$ ;

**Étape 2** **Si**  $C_m = 1$  **Alors**

1. Parmi toutes les valeurs possibles pour  $j$  choisir  $j_m^*$  telle que

$$j_m^* = \arg \min_{j \in \mathcal{J}} \{j^2 + r(j - j_{m-1}^*)^2\},$$

sous les contraintes

$$W_{j_m^*} = W(\dot{x}, \tilde{n}, u_{d_{j_m^*}}) \geq \epsilon_3 \quad \text{et} \quad d \triangleq |x_{s_2}(u_{d_{j_m^*}}) - x(t_m)| \geq d_0$$

**Si** une solution existe **Alors**  $j_m = j_m^*$  **Sinon**  $j_m = j_{m-1}^*$  **Fin Si**

**Sinon**

1. Parmi toutes les valeurs possibles pour  $j_m$  choisir  $j_m^*$  telle que

$$j_m^* = \min\{j : j \in \mathcal{J}\},$$

et les équations d'équilibre (5.50)-(5.52) sont satisfaites avec la commande  $u_d = u_{d_{j_m^*}}$

**Fin Si**

**Étape 3** Appliquer  $u_{j_m^*}$  en sélectionnant la paire de commande du tableau 5.1 associée à l'indice  $j_m^*$ ,

**Étape 4**  $m := m + 1$ ;

**Étape 5** **Aller à 2**;

**Remarque 13** L'**Étape 1** permet de calculer la valeur  $C_m$  que prend la fonction d'hysteresis  $\sigma(V, \epsilon_1, \epsilon_2)$  à l'instant  $t_m$ , voir figure 5.10.

**Remarque 14** L'**Étape 2-1** a pour rôle de rechercher sur l'ensemble des valeurs admissibles celles qui satisfont aux contraintes avec un indice minimal tout en pénalisant les brusques variations d'indice (terme  $r(j - j_{m-1}^*)^2$ ).

**Remarque 15** Une fois que le système est ramené par la stratégie de décroissance de la fonction candidate près de l'origine, la commande est bloquée à la valeur  $u_{j_m^*}$ , l'attractivité de l'état vers le point d'équilibre est ainsi assurée par la stabilité asymptotique locale du point d'équilibre visé  $x^*$ .

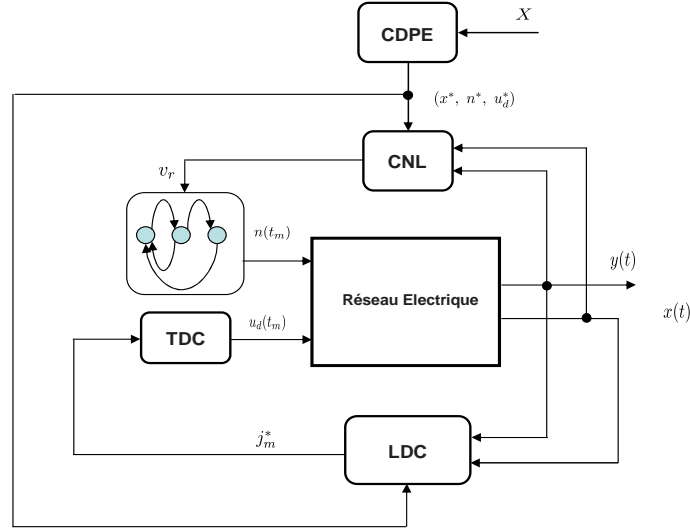


FIG. 5.13 – Réseau électrique en boucle fermée. **CDPE** : Calcul Des Points Équilibre. **CNL** : Commande Non Linéaire. **TDC** : Table De Correspondance. **LDC** : Logique De Commutation.

L'algorithme est fondamentalement basé sur une méthode d'optimisation sous contraintes. La solution à ce problème est effectuée par une recherche exhaustive vue le nombre limité des niveaux de contrôles (16 valeurs possibles, voir tableau 5.1). Pour des systèmes de grande dimension, cette approche peut être utilisée soit localement ; dans ce cas là une fonction candidate de Lyapunov est associée à chaque région et une décroissance coopérative des différentes fonctions est menée par le même type d'algorithme ; soit à l'aide de techniques d'ordonnancement moins gourmande en temps de calcul qu'une recherche exhaustive e.g., ordonner les différentes région par ordre de sensibilité croissante. Une de ces techniques est exposée dans la partie qui traite du benchmark de taille moyenne.

Sur la figure 5.13 est tracé le diagramme bloc du système en boucle fermée. Les différents blocs fonctionnels sont

- *CDPE Calcul des points d'équilibre* Ce bloc permet de calculer les différents points d'équilibre. Il utilise en entrée la valeur de la réactance de la ligne  $X$ , cela suppose que cette dernière est soit estimée soit mesurée ;
- *LDC Logique de commutation* Dans ce bloc est implanté la partie discrète de la commande décrite par l'algorithme 3 plus haut ;
- *CNL Commande non linéaire* Ce bloc permet de calculer par le biais de l'équation (5.60), la variable de commande réelle  $v_r$  (entrée de l'OLTC voir figure 5.2 et l'équation (5.44)) ;
- *TDC Table de correspondance* Ce bloc implante la table de contrôle 5.1, qui donne les correspondances  $j_m^* \mapsto u_{j_m^*}$ .

### 5.4.1.1 Résultats de simulation

Les simulations ont été conduites sous Simulink et Matlab. L'algorithme 3 et le réseau électrique sont codés comme des S-function. Dans tous les résultats de simulation, le défaut est introduit à  $t = 30$  s (variation brusque de la réactance qui passe de 0.25 à 0.5). Avant l'apparition de ce défaut le système est supposé être en régime permanent.

**Cas nominal** Le cas nominal correspond à un régime où à l'avant défaut, la valeur de la capacité et le relais d'élimination de charge sont à zéro. La commande  $(n \ b \ k)'$  est à  $(1 \ 0 \ 0)$  et la tension côté charge est à 1 p.u. Le point d'équilibre le plus proche (en terme de niveau de tension de 1 p.u) est  $(x^* \ n^* \ j^*)' = (2.83 \ 1.1 \ 3)'$ .<sup>7</sup> ce qui correspond à une tension  $v^* = 0.976$  p.u  $\approx 1$  p.u.

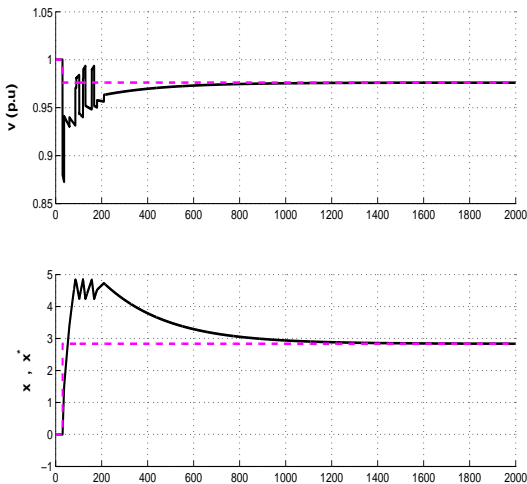


FIG. 5.14 – Cas nominal, tension côté charge et l'état interne.

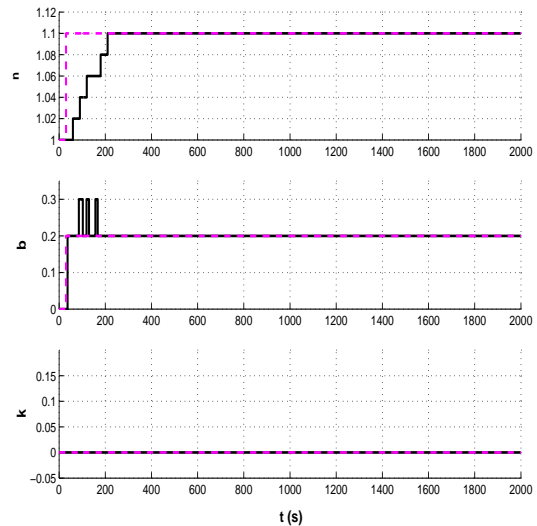


FIG. 5.15 – Cas nominal, l'entrée du réseau électrique

De la figure 5.14 il vient que, la tension comme l'état interne se stabilise aux valeurs désirées. Aucune partie de la charge n'est éliminée i.e., la variable  $k$  reste à zéro. La stabilisation de tension est réalisée en utilisant seulement le rapport de transformation et le banc de capacité, cela reflète l'efficacité de l'ordonnancement de la commande voir figure 5.15. Remarquons aussi, que le banc de capacité dépasse sa valeur finale pendant le transitoire, ceci afin de permettre une montée du rapport de transformation  $n$ .

**Un cas défavorable** Un des régimes de fonctionnement les plus défavorables est celui correspondant au cas où le point d'équilibre d'avant défaut est le plus proche du point

<sup>7</sup>Les valeurs de la commande associées à cet indice sont  $(b \ k)=(0 \ 0.2)$ , voir tableau (5.1)

singulier  $x_{s2}$ . Cela correspond au vecteur de commande  $(n \ b \ k) = (0.8 \ 0 \ 0)$  et au point d'équilibre d'avant défaut de  $x^* \approx 21.56$  soit une tension  $v^*$  de  $0.8 \ p.u.$

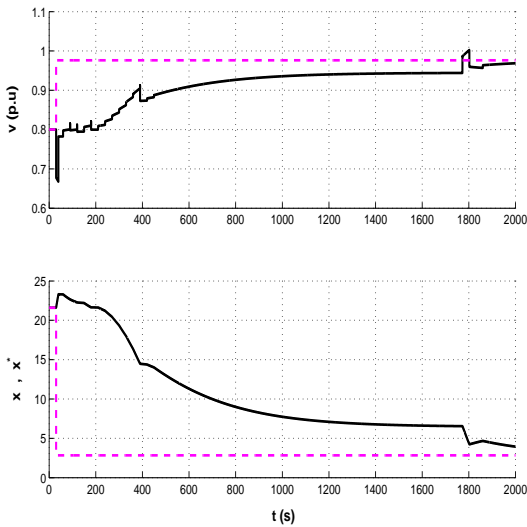


FIG. 5.16 – Réponse de la tension et de l'état pour un cas défavorable. Remarquons que l'établissement de la tension se fait vers  $1900 \text{ sec.}$  Ce cas correspond à un scénario nettement plus difficile que le cas nominal, comparer avec la figure 5.14.

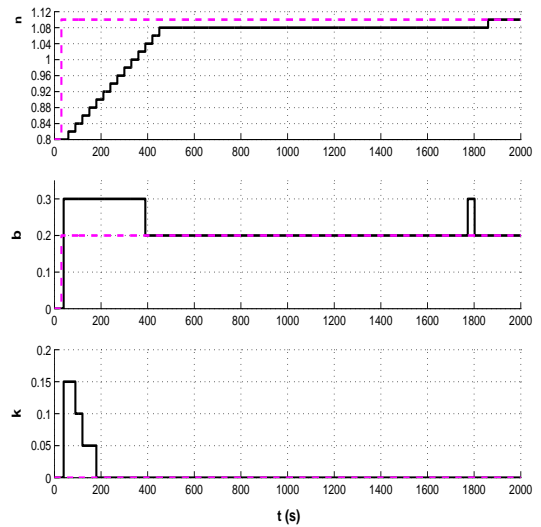


FIG. 5.17 – L'entrée du réseau dans un des cas les plus défavorables. Remarquons le délestage de charges effectué en régime transitoire.

De la figure 5.16 la stabilisation reste possible mais avec un temps d'établissement nettement plus grand que dans le cas nominal, cela est due au fait que ce test est nettement plus dur que celui du cas nominal. La distance réduite du point d'équilibre d'avant défaut par rapport au point singulier fait que l'algorithme de commutation utilise la commande  $k$  et déconnecte ainsi une partie de la charge en régime transitoire, voir figure 5.17.

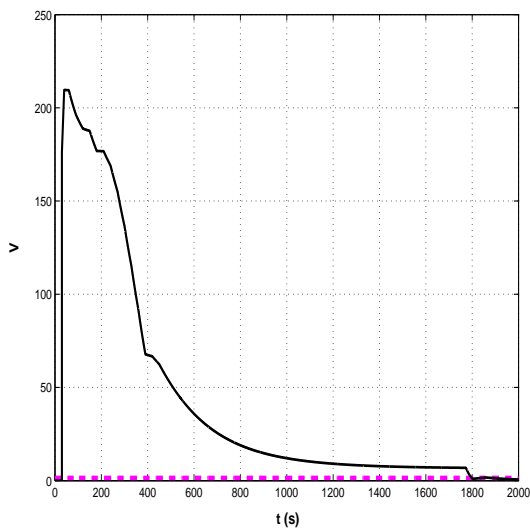


FIG. 5.18 – Évolution de la fonction de Lyapunov candidate pour le scénario dont la tension et l'état sont tracés sur la figure 5.16. Remarquons la décroissance par palier correspondante à l'élimination de la charge qui est faite aux premiers instants voir figure 5.17.

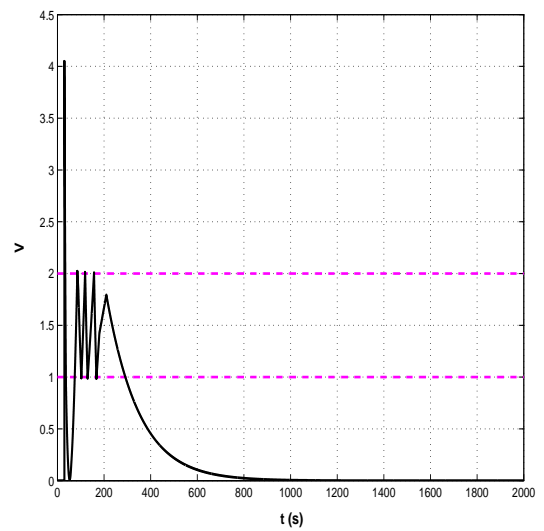


FIG. 5.19 – Evolution de la fonction de Lyapunov candidate pour le cas nominal de la figure 5.14. Remarquons l'efficacité de la stratégie à faire décroître cette fonction, ceci est réalisé en activant une valeur de la capacité supérieure à la valeur nominale (d'après défaut) aux instants où cette fonction est supérieure à  $\epsilon_2 = 2$  et l'activation de la valeur nominale lorsqu'elle est inférieure à  $\epsilon_1 = 1$  voir figure 5.10 et figure 5.15.



## 5.4.2 Approche prédictive

### 5.4.2.1 Benchmark de petite taille

Dans cette partie du manuscrit, la stabilisation du benchmark de petite taille présenté dans la sous section 5.2.2 est considérée. Comme l'écriture du système d'équations décrivant le réseau et la charge peuvent être complexe, on considère que le système représenté sur la figure 5.3 est décrit par le système algèbro différentiel suivant

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, Y, p) \\ 0 &= g(x, Y, u, p) \end{aligned} \quad (5.65)$$

où le système d'équations différentielles représente la dynamique de la charge voir (5.9)-(5.10),  $x$  représente les états internes,  $Y$  le vecteur des variables algébriques (tensions de bus), et  $p$  les paramètres du réseau contenant entre autres les réactances des lignes  $X_{ij}$  ( $i$  et  $j$  représentent respectivement les bus de départ et d'arrivée). Quant à  $u$ , il représente le vecteur de commande regroupant le banc de capacité  $b$ , le rapport de transformation  $n$  et le relais de délestage de la charge  $k$ . En utilisant une coordination entre les différentes actions, le contrôleur doit permettre de stabiliser les tensions à un niveau acceptable. Sur la figure 5.20

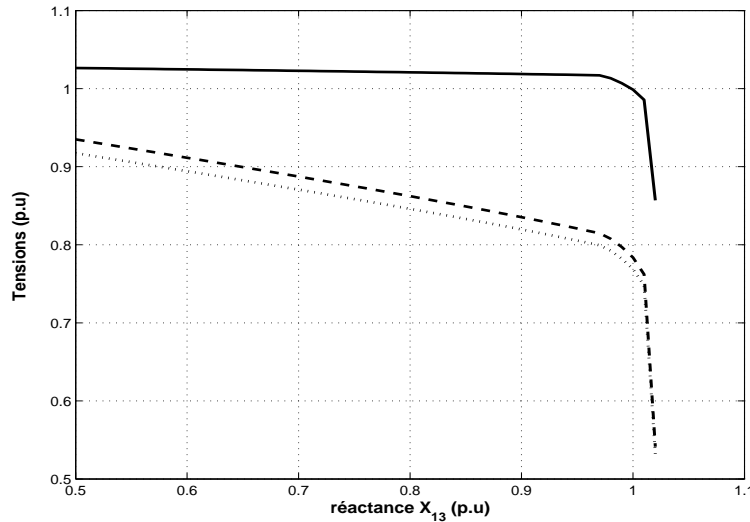


FIG. 5.20 – Tensions en régime permanent aux bus en fonction de la réactance.  $v_2$  : plein,  $v_3$  : trait discontinu et  $v_4$  : pointillé

sont tracées les tensions en régime permanent des bus (le système est illustré sur la figure 5.3) en fonction de la réactance  $X = X_{13}$  de la ligne défailante. Le régime  $X_{13} = X_{13}^n = 0.5 p.u$  correspond à la valeur nominale sans défaut. D'après la figure 5.20, les solutions s'effondrent pour un  $X_{13}$  qui dépasse  $1.0 p.u$  et pour des valeurs supérieures à  $X_{13}^b = 1.02 p.u$ , aucune

solution en régime permanent n'est possible. Le réseau défaillant correspond à un passage brusque de la réactance  $X_{13}$  de  $X_{13}^n$  sa valeur nominale à  $X_{13}^f = 1.5 p.u$  (plus importante que la valeur fatidique de  $1.02 p.u$ ).

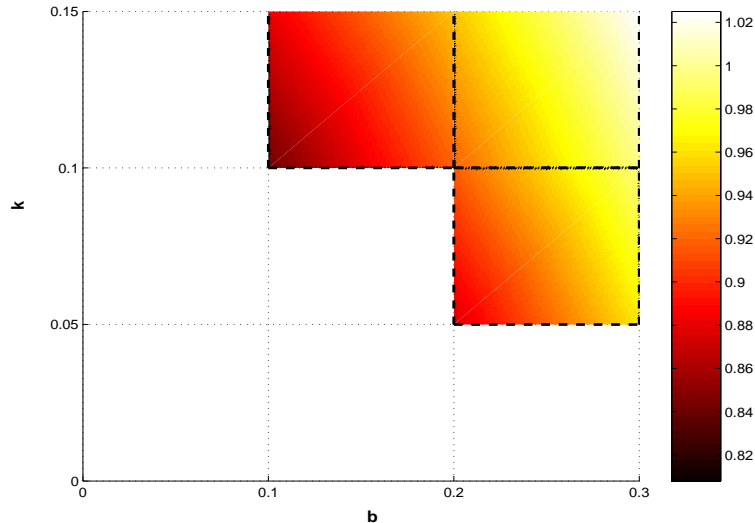


FIG. 5.21 – Tension côté charge en fonction de la capacité et le relais de délestage de charge (en défaut)

Sur la figure 5.21 est tracée la tension en régime permanent côté charge en fonction de la valeur de capacité  $b$  et le facteur de délestage de charge  $k$ . Ce tracé montre clairement que pour restaurer un point d'équilibre environ  $0.3 p.u$  de la capacité doit être activée. Cette analyse purement statique est connue dans la littérature sous le nom de *l'écoulement de puissance optimal*, voir e.g., [95]. Cette approche n'est satisfaisante que lorsque les valeurs de commandes tirées de cette analyse sont appliquées dès l'apparition du défaut ou le cas où des heuristiques avancées sont disponibles pour temporiser les différentes actions i.e., dans ce genre de méthodes statiques aucune information n'est disponible sur la coordination des contrôles. L'effondrement de la tension comme vue dans ce manuscrit est un processus dynamique (bifurcation induite par singularité, voir la section 5.3) requérant une temporisation efficace des commandes et de ce fait une stratégie en boucle fermée.

L'objectif est le même que pour le benchmark précédent et est rappelé succinctement dans ce qui suit

- Stabiliser les tensions à des valeurs supérieures à  $0.9 p.u$  après l'apparition d'un défaut
- Minimiser le pourcentage de charge éliminée
- Maintenir la tension au bus 4 proche de  $1 p.u$  tout en minimisant la valeur de la capacité requise (voir figure 5.3)

Le vecteur des tensions de bus  $(v_2 v_3 v_4)'$  est dénoté par  $Y = (y_1 y_2 y_3)'$ . Les contraintes suivantes sur la commande doivent être respectées à tout moment. Le relais de délestage  $k$

appartient à l'ensemble suivant avec  $k_{max} = 0.15$

$$k \in \mathcal{K} := \{0.00, 0.05, \dots, k_{max}\} \quad (5.66)$$

Le banc de capacité  $b$  appartient quant à lui à l'ensemble  $\mathcal{B}$  où  $b_{max} = 0.3$

$$b \in \mathcal{B} = \{0.0, 0.1, \dots, b_{max}\} \quad (5.67)$$

Il est à noter qu'à cause de la dynamique discrète de l' OLTC (voir figure 5.2), le rapport de transformation  $n$  ne peut être considéré rigoureusement comme une variable de contrôle. La véritable variable de contrôle est la tension de référence  $v_r$ . Néanmoins, si les trois conditions suivantes sont satisfaites

- La variable  $n(\cdot)$  est constante par morceaux avec une période d'échantillonnage  $T_d$  (où  $T_d$  est le retard dans l'automate sur la figure 5.2)
- L'entrée  $n(\cdot)$  satisfait pour tout  $m \in \mathbb{N}$ ,

$$|n(m+1) - n(m)| = d_n \quad (= 0.02)$$

où  $d_n$  est le pas (voir les équations de mise à jour (5.43)) appliqué lorsque l'automate est dans l'état "action"

- L'entrée  $n(\cdot)$  satisfait pour tout  $m \in \mathbb{N}$

$$(0.8 =) \quad n_{min} \leq n(m) \leq n_{max} \quad (= 1.2)$$

alors il est possible d'utiliser directement  $n$  comme une variable de commande contrainte en dynamique et en amplitude. D'après quoi la variable  $v_r$  est obtenu en inversant la dynamique de  $n$ .

**Remarque 16** *Le subterfuge consistant à remplacer la variable de contrôle  $v_r$  par le rapport de transformation  $n$  permet de traiter le problème de commande directement avec des variables discrètes. Ce type de dé-hybridation est aussi utilisé dans les solutions proposées par les différents partenaires [52, 122].*

**Définition 9** *Une séquence  $\{n(m)\}_{m \in \mathbb{N}}$  qui satisfait aux trois conditions précédentes est dite OLTC compatible.*

**La stratégie de commande proposée** La commande prédictive [91] est maintenant reconnue par la communauté scientifique comme une stratégie de commande en boucle fermée à la fois très générale et puissante. En effet, cette dernière permet de tenir compte non seulement des non linéarités mais aussi des contraintes et des problèmes d'optimalité. Rappelons qu'un schéma de commande prédictive consiste à calculer à chaque période d'échantillonnage

une séquence optimale de commandes (dans le sens où une certaine fonctionnelle est minimisée), d'appliquer la première partie de la commande résultante de ce processus jusqu'à la période d'échantillonnage suivante. Le problème est reconsidéré à l'instant suivant sur un horizon glissant d'une période et la procédure est répétée à l'infini aboutissant à un retour d'état implicite (voir l'introduction du chapitre 4).

Pour des systèmes non linéaires et des horizons de prédiction élevés, cela amène à considérer un problème d'optimisation avec une dimension importante pour la variable de décision. Ajouté à cela, la non convexité du problème peut rendre les calculs nécessaires pour implanter la stratégie non faisables durant le temps imparti (une fraction de la période d'échantillonnage).

Une des caractéristiques de la commande prédictive réside dans le choix d'une paramétrisation de la commande induisant une réduction de la complexité (voir aussi l'introduction du chapitre 4 pour une discussion plus générale). Dans ce qui suit est définie une paramétrisations de dimension réduite de la commande qui est utilisée dans un schéma permettant la stabilisation du benchmark de petite taille [10].

**Paramétrisations de la boucle ouverte** Rappelons que le schéma est implanté en échantillonné avec comme période  $\tau = T_d$ , l'entrée à tout instant  $m\tau$  est donnée par

$$u(m) := (n(m) \ b(m) \ k(m))' \in \left\{ n(m-1) - d_n, n(m-1), n(m-1) + d_n \right\} \times \mathcal{B} \times \mathcal{K} \quad (5.68)$$

avec la contrainte  $n_{min} \leq n(m) \leq n_{max}$ . Les ensembles  $\mathcal{K}$  et  $\mathcal{B}$  sont définis dans respectivement (5.66) et (5.67).

**Remarque 17** *La période d'échantillonnage  $\tau$  peut être différente pour les trois composantes du vecteur de commande. Cela permet à  $k$  et  $b$  d'être plus réactives que le rapport de transformation  $n$  contraint à évoluer suivant la dynamique sur la figure 5.2.*

Comme tout schéma utilisant un modèle de prédiction, un horizon de prédiction lui est associé i.e., l'intervalle de temps durant lequel est minimisé une certaine fonctionnelle. Soit donné une période  $\tau$ , l'horizon de prédiction est défini par un nombre entier  $N_p$  de périodes d'échantillonnage. Afin de définir la paramétrisation, la structure de la commande  $u(\cdot)$  doit être définie sur l'horizon de prédiction  $[m\tau, (m + N_p)\tau]$ . Les définitions suivantes sont tout d'abord introduites afin de caractériser le profil en boucle ouverte à l'instant  $m\tau$  sur l'horizon

$[m\tau, (m + N_p)\tau]$

$$\begin{aligned}\tilde{u}(m) &:= \left( u(m\tau), \dots, u((m + N_p - 1)\tau) \right) \\ \tilde{n}(m) &:= \left( n(m\tau), \dots, n((m + N_p - 1)\tau) \right) \\ \tilde{b}(m) &:= \left( b(m\tau), \dots, b((m + N_p - 1)\tau) \right) \\ \tilde{k}(m) &:= \left( k(m\tau), \dots, k((m + N_p - 1)\tau) \right)\end{aligned}$$

Ensuite, la paramétrisation en boucle ouverte est définie en adoptant les choix suivants tout au long de l'horizon de prédiction

- ✓ Les profils  $\tilde{k}(m)$  et  $\tilde{b}(m)$  sont constants.
- ✓ Les profils  $\tilde{n}(m)$  sont monotones avec saturation démarrnant de  $n(m - 1)$
- ✓ Les profils  $\tilde{n}(m)$  est constant tout au long de l'intervalle  $[(m + N_c)\tau, (m + N_p)\tau]$  où  $N_c$  est l'horizon de contrôle.

Les deux derniers points définissent  $2N_c + 1$  choix possibles pour  $\tilde{n}(m)$  i.e.,  $N_c$  profils croissant,  $N_c$  profils décroissant et 1 profil constant. La paramétrisation qui en résulte conduit à une variable de décision de dimension suivante

$$(2N_c + 1) \cdot \text{card}(\mathcal{B}) \cdot \text{card}(\mathcal{K})$$

Notons que les séquences candidates  $\tilde{n}(m)$  définies par les règles précédentes sont OLTC compatibles dans le sens de la définition 9. Afin de simplifier l'étude, l'horizon de contrôle  $N_c$  est pris égal à l'horizon de prédiction  $N_c = N_p$ . L'impact est sans conséquence pratique puisque les profils des deux premières composantes du vecteur de commande sont constants durant tout l'intervalle de prédiction.

**Définitions et notations** Afin de présenter la procédure de calcul de la commande optimale, quelques définitions et notations sont nécessaires. Notons par  $\tilde{\mathcal{U}}(n(m - 1))$  l'ensemble des profils admissibles à l'instant  $m\tau$ . La dépendance de cet ensemble par rapport à la valeur de  $n$  à l'instant  $m - 1$  est due à la contrainte (5.68). Cela est noté brièvement comme  $\tilde{\mathcal{U}}_m$  (l'indice  $m$  est parfois omis). Une relation d'équivalence est ensuite définie sur  $\tilde{\mathcal{U}}_m$  par

$$\left\{ \tilde{u}^{(1)} \sim \tilde{u}^{(2)} \right\} \Leftrightarrow \left\{ (\tilde{b}^{(1)}, \tilde{k}^{(1)}) = (\tilde{b}^{(2)}, \tilde{k}^{(2)}) \right\} \quad (5.69)$$

Le besoin d'introduire une telle relation d'équivalence vient du fait qu'une préférence est donnée à l'utilisation de  $b$  plutôt qu'à  $k$ . Par contre, aucune contrainte explicite n'est imposée sur le rapport de transformation permettant de statuer qu'une séquence  $\tilde{n}^{(1)}$  est meilleure qu'une autre séquence  $\tilde{n}^{(2)}$  OLTC compatible.

Notons par

$$\mathcal{U}_m^{eq} := \left\{ \tilde{\mathcal{U}}_m^{(b^*, k^*)} \right\}_{(b^*, k^*) \in \mathcal{B} \times \mathcal{K}}$$

l'ensemble des classes d'équivalence partitionnant  $\tilde{\mathcal{U}}_m$  suivant la relation (5.69), un élément de  $\mathcal{U}_m^{eq}$  est défini par la paire correspondante  $(b^*, k^*)$ , avec  $ones(r, s)$  pour dénoter une matrice de dimensions  $r \times s$  avec tous ces éléments à 1, comme suit

$$\tilde{\mathcal{U}}_m^{(b^*, k^*)} := \left\{ \tilde{u} = (\tilde{n}, \tilde{b}, \tilde{k}) \in \tilde{\mathcal{U}}_m \mid \tilde{b} = b^* \times ones(1, N_p) \quad \text{et} \quad \tilde{k} = k^* \times ones(1, N_p) \right\} \quad (5.70)$$

Définissons aussi l'ordre

$$\mathcal{O} : \mathcal{B} \times \mathcal{K} \rightarrow \left\{ 1, \dots, card(\mathcal{B}) \cdot card(\mathcal{K}) \right\} \quad (5.71)$$

sur  $\mathcal{U}_m^{eq}$  qui reflète la priorité dans le choix des commandes, à savoir

$$\{k^{(1)} > k^{(2)}\} \Rightarrow \{\mathcal{O}(b^{(1)}, k^{(1)}) > \mathcal{O}(b^{(2)}, k^{(2)})\} \quad (5.72)$$

$$\{k^{(1)} = k^{(2)} \wedge b^{(1)} > b^{(2)}\} \Rightarrow \{\mathcal{O}(b^{(1)}, k^{(1)}) > \mathcal{O}(b^{(2)}, k^{(2)})\} \quad (5.73)$$

La relation d'ordre  $\mathcal{O}$  reflète la priorité et la préférence données à l'utilisation du banc de capacité au lieu du relais de délestage de la charge. Rappelons que l'ordre  $\mathcal{O}$  ne reflète ni plus ni moins que les relations de classification établies dans la partie qui traite du benchmark de petite taille, voir tableau 5.1.

Notons par  $X(t; x_0, \tilde{u})$  la solution  $x(\cdot)$  du système d'équations décrivant les états internes de la charge à l'instant  $t$ , sous la condition initiale  $x_0$  et la séquence de commande  $\tilde{u}$ . En utilisant cette notation, les deux ensembles de profils admissibles sont définis par (l'indice "nc" se réfère à *no collapse*)

$$\mathcal{U}_{nc}(x_0) := \left\{ \tilde{u} \in \tilde{\mathcal{U}}_m^{(b^{nc}, k^{nc})} \mid (b^{nc}, k^{nc}) = \arg \min_{(b^*, k^*) \in \mathcal{B} \times \mathcal{K}} \mathcal{O}(b^*, k^*) : \right. \\ \left. X(\cdot, x_0, \tilde{u}) \text{ est définie sur l'intervalle } [0, N_p \tau] \right\} \quad (5.74)$$

en d'autres termes,  $\mathcal{U}_{nc}(x_0)$  est l'ensemble des profils en boucle ouverte qui, pour la condition initiale  $x_0$  n'entraîne pas un effondrement de tension sur l'intervalle de prédiction  $[0, N_p \tau]$ . L'ensemble suivant

$$\mathcal{U}_f(x_0) := \left\{ \tilde{u} \in \tilde{\mathcal{U}}_m^{(b^f, k^f)} \mid (b^f, k^f) = \arg \min_{(b^*, k^*) \in \mathcal{B} \times \mathcal{K}} \mathcal{O}(b^*, k^*) : \right. \\ \left. y_i(N_p \tau, x(N_p \tau), \tilde{u}) \geq \underline{y}_i, \quad i \in \{1, 2, 3\} \right\} \quad (5.75)$$

correspond à l'ensemble des commandes pour qui les tensions à l'instant final de prédiction satisfont à une contrainte terminale. Cet ensemble correspond aux profils induisant un niveau de tension acceptable.

**Remarque 18** Le vecteur  $\underline{y}_i$  représentent les valeurs de tensions au delà duquel la qualité de tension est jugée satisfaisante aux contraintes de fonctionnement standard, pour le benchmark  $\underline{y}_i = 0.85$  p.u pour tout  $i \in \{1, 2, 3\}$ .

**Le retour d'état implicite** La commande prédictive non linéaire peut être maintenant définie, le profil optimal en "boucle ouverte" à l'instant  $m\tau$  est obtenu en résolvant le problème d'optimisation suivant

$$\hat{u}(x(m), n(m-1)) = \begin{cases} \arg \min_{\tilde{u} \in \mathcal{U}_f} J(\tilde{u}, x(m), n(m-1)) & \text{si } \mathcal{U}_f \neq \emptyset \\ \arg \min_{\tilde{u} \in \mathcal{U}_{mc}} J(\tilde{u}, x(m), n(m-1)) & \text{si } \mathcal{U}_f = \emptyset \end{cases} \quad (5.76)$$

où  $J$  est l'indice de performance défini par la fonctionnelle suivante

$$J(\tilde{u}) := \int_0^{N_p \tau} \left( Y(t, x(m), \tilde{u}) - y_{ref} \right)' Q \left( Y(t, x(m), \tilde{u}) - y_{ref} \right) dt \quad (5.77)$$

$y_{ref}$  est un signal de référence (tensions de référence),  $Q$  est une matrice de pondération de dimension  $3 \times 3$  et  $x(m) = x(m\tau)$ . La solution au problème (5.76) donne la séquence de commande suivante

$$\hat{u}(x(m), m) = (\hat{u}_0(x(m), n(m-1)) \dots \hat{u}_{N_p-1}(x(m), n(m-1)))$$

où seulement la première composante est appliquée au système, donnant lieu au retour d'état implicite défini par

$$u(t) = \hat{u}_0(x(m), n(m-1)) \quad ; \quad \forall t \in [m\tau, (m+1)\tau) \quad (5.78)$$

en accord avec le principe de la commande prédictive.

**Résultats de simulation** Sur les figures 5.22-5.23 sont tracés les résultats de simulation pour un horizon de prédiction  $N_p$  égal à une période d'échantillonnage ( $\tau = T_d = 30$  s). De fortes oscillations sont présentes sur les commandes, plus précisément sur  $k$ . D'un point de vue pratique, ces oscillations ne sont pas acceptables puisqu'elles induisent un vieillissement prématuré des différents actionneurs. Celles ci peuvent être atténuées en utilisant un horizon de prédiction plus élevé. En effet, un horizon de prédiction de  $N_p = 1$  (30 sec) ne permet pas de saisir les dynamiques dominantes du système puisque les constantes de temps de la charge sont à 1 min ( $T_p = T_q = 60$  sec). Pour un horizon de prédiction de  $N_p = 5$  (150 sec) les oscillations sont supprimées. Les tensions ainsi que les commandes sont tracées dans respectivement la figure 5.24 et 5.25. Les résultats obtenus pour ce cas sont exactement ceux obtenus par nos partenaires de Zurich dans [52]. Dans l'approche proposée dans [52] la dynamique du système est approchée par une dynamique linéaire par morceaux et convertie

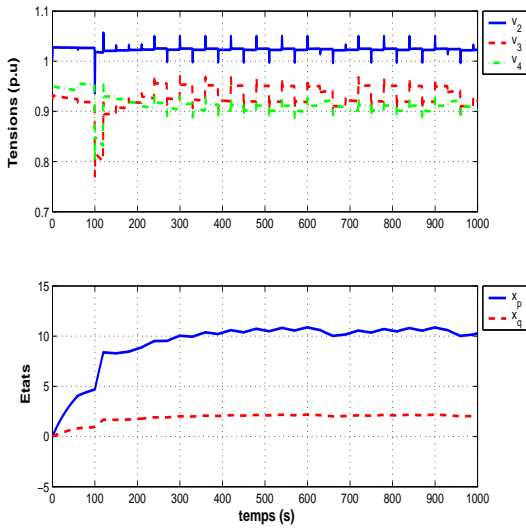


FIG. 5.22 – Tensions aux bus et les états internes pour un horizon de prédiction  $N_p = 1$ . Cette valeur de l’horizon est visiblement trop faible pour capturer la dynamique du système.

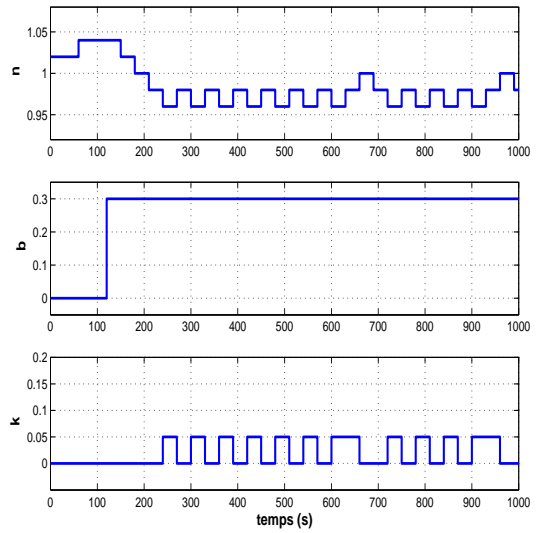


FIG. 5.23 – L’allure des commandes pour un horizon de prédiction  $N_p = 1$

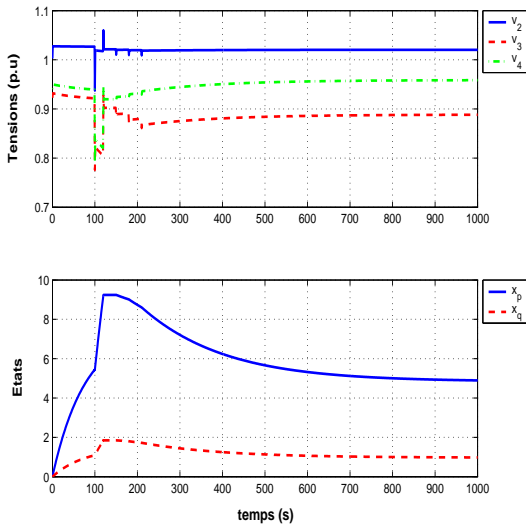


FIG. 5.24 – Tensions aux bus et les états internes pour un horizon de prédiction  $N_p = 5$

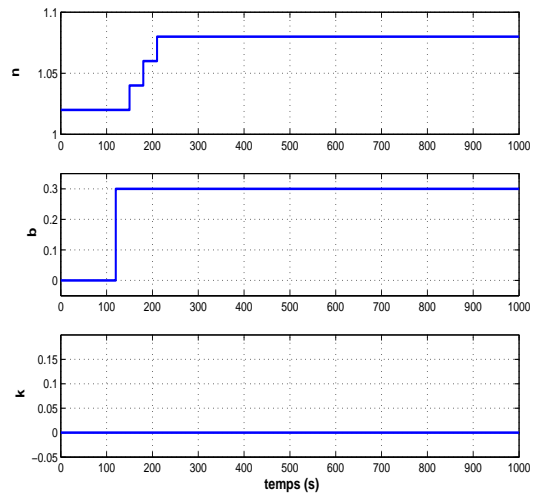


FIG. 5.25 – L’allure des commandes pour un horizon de prédiction  $N_p = 5$

au formalisme MLD. Ceci a eu pour effet d’introduire des sensibilités dans la phase de modélisation (conversion) comme dans la phase de synthèse de la commande. De plus, l’approche n’est pas totalement systématique dans le sens où seulement le rapport de transformation



est pris comme variable d'entrée (la capacité est maintenue constante et égale à  $0.3 p.u$ ).

Sur les figures 5.26-5.27 sont tracées les tensions, états et les commandes correspondant à un des scénarii les plus difficiles à stabiliser. En effet, ce scénario correspond au cas où  $n(0) = n_{min}$ . Pour un horizon de prédiction de  $N_p = 10$ , les tensions sont stabilisées à des niveaux acceptables. Le banc de capacité est activé après détection du défaut, et 5% de la charge est déconnectée pendant environ  $2 min$ .

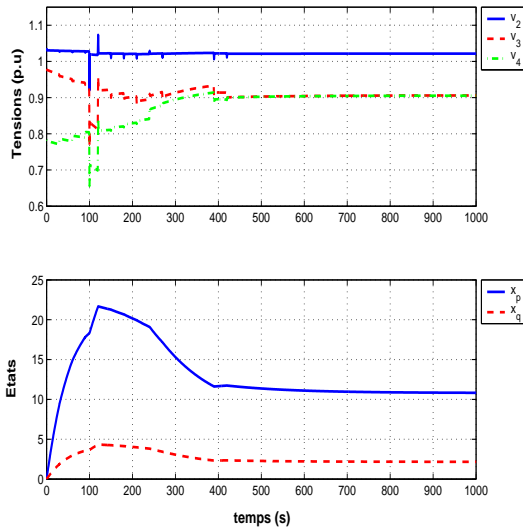


FIG. 5.26 – Tensions aux bus et les états internes pour un horizon de prédiction  $N_p = 10$ ,  $n(0) = 0.8$

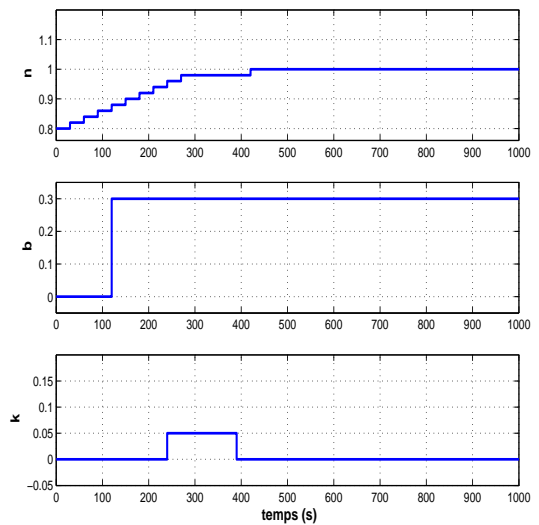
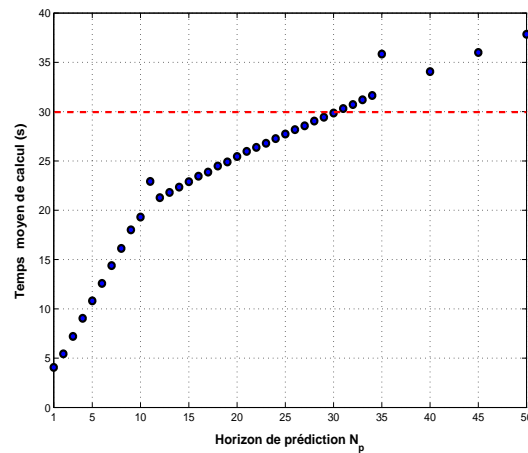
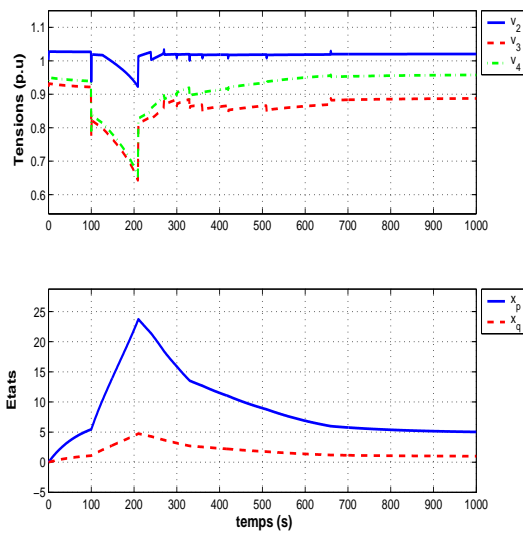
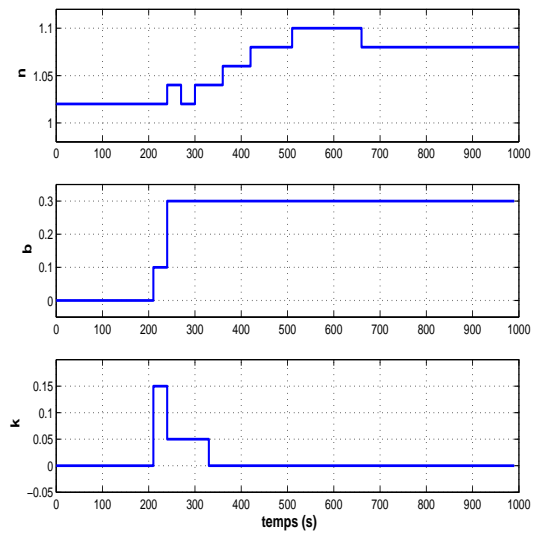


FIG. 5.27 – L'allure des commandes pour un horizon de prédiction  $N_p = 10$ ,  $n(0) = 0.8$

Sur la figure 5.28 est tracé le temps d'exécution maximal en fonction de l'horizon de prédiction. Malgré le fait que la loi de commande soit implémentée dans un langage de programmation de haut niveau (Matlab) et le fait que l'algorithme passe la majorité de son temps à récolter les données de simulation provenant du modèle fourni (modèle converti de Dymola à Simulink), des horizons de prédiction supérieur à 30 ont pu être implémentés tout en respectant les contraintes d'exécution. Pour des applications en temps réel et en utilisant des techniques de simulations plus avancées e.g., [114], des horizons de prédiction similaire peuvent être réalisés pour des systèmes de plus grande dimension. Afin de montrer l'intérêt et l'importance d'une analyse dynamique. Le retard  $\tau_d$  entre l'apparition du défaut et sa détection est pris comme variable. Pour un retard supérieur à  $140 sec$  un niveau de tension acceptable ne peut pas être restauré et l'effondrement de tension est inévitable sous les contraintes actuelles (quelque soit la loi de commande utilisé?). Cela est mis en étroite liaison avec les approches dites temps critique e.g., [129]. Par exemple, dans les figures 5.29-5.30 sont tracées les variables usuelles pour un retard de  $110 sec$ . Quoique, que les entrées en régime permanent sont égales aux valeurs tirées de l'analyse statique voir figure 5.21, une partie de la charge a été éliminée en régime transitoire, ceci est en accord avec le fait que ;

FIG. 5.28 – Le temps maximal de calcul en fonction de l’horizon de prédiction  $N_p$ 

pour pouvoir restaurer un point d’équilibre; plus l’action est retardée plus de charge est déconnectée (si la réaction est instantanée la commande en régime permanent aurait peut être suffi), voir e.g., [39] où des conclusions similaires sont faites. Rappelons que ce type de comportement ne peut être déduit d’une analyse purement statique.

FIG. 5.29 – Tensions aux bus et les états internes pour un horizon de prédiction  $N_p = 5$  et un retard de 110 secFIG. 5.30 – L’allure de la commande pour  $N_p = 5$  et un retard de 110 sec

### 5.4.2.2 Benchmark de taille moyenne

**Complexité d'une approche prédictive aveugle** Considérons le cas plus général où  $l$  régions similaires sont inter connectées. Supposons que toutes les régions soient équipées avec le même type d'éléments  $b_i$  et  $k_i$  sous les contraintes d'appartenance suivantes

$$k_i \in \mathcal{K} = \{0, 1, \dots, k_{max}\}, \quad i \in \mathcal{I} = \{1, \dots, l\} \quad (5.79)$$

$$b_i \in \mathcal{B} = \{0, 1, \dots, b_{max}\} \quad (5.80)$$

on considère que l'entrée de commande au réseau électrique est le rapport de transformation  $n_i$  et puisque seulement trois mouvements sont possibles (voir équation (5.1)). La complexité de l'approche à horizon glissant pour un horizon fixe  $N_p$  est bornée par

$$\mathcal{C}_{full} = (3 \times (k_{max} + 1) \times (b_{max} + 1))^{l \times N_p} \quad (5.81)$$

Pour le benchmark en question les valeurs numériques suivantes  $k_{max} = 2$ ,  $b_{max} = 1$  et  $l = 3$ , donnent la borne supérieure  $(18)^{3 \times N_p} = 5832^{N_p}$ .<sup>8</sup> La complexité peut être réduite en introduisant des retours explicites mettant à jour certaines variables internes. Dans cette partie du manuscrit, un simple retour est mis en œuvre pour la mise à jour de la référence de l'OLTC. Ce retour est basé sur une inversion directe de la dynamique discrète et sur la supposition que le rapport de transformation est seulement utilisé pour améliorer le niveau de tension tandis que les éléments sources d'énergie réactive et l'élimination de la charge sont là pour restaurer un point d'équilibre. Des heuristiques ou des synthèses analytiques plus avancées peuvent être aussi utilisées pour la mise à jour de cette variable pour des buts autres que l'amélioration du niveau de tension, e.g., des fonctions de Lyapunov locales. Ceci à pour effet de réduire la complexité par un facteur de  $3^{l \times N_p}$ , donnant la complexité suivante soit

$$\mathcal{C}_1 = ((k_{max} + 1) \times (b_{max} + 1))^{l \times N_p} \quad (5.82)$$

Plus loin, une parametrization en boucle ouverte et une technique de classement sont introduites afin de réduire cette combinatoire. La commande est détaillée dans la prochaine section.

### 5.4.2.3 L'approche proposée

**La stratégie de retour local** La stratégie de retour local développé dans cette partie du travail est utilisée comme une action visant améliorer le niveau de tension. Cela veut dire qu'elle est introduite afin d'améliorer le niveau de stabilité du réseau (réalisé un niveau de tension plus élevé) et non pour le restaurer. Conjointement à ces boucles locales, une approche prédictive plus globale (c'est en fait une action corrective qui vise à restaurer un

---

<sup>8</sup>Ce qui reste infaisable même pour des horizons peu élevés

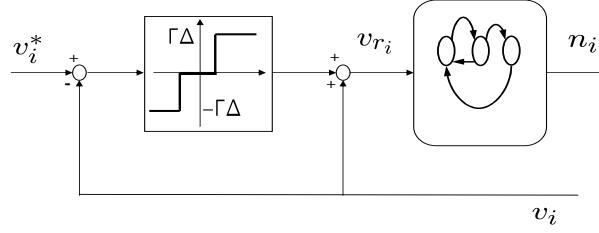


FIG. 5.31 – La boucle de contrôle local pour la mise à jour de la tension de référence

point d'équilibre) est utilisée pour la mise à jour des valeurs de capacités et des relais de délestage. L'hypothèse que la matrice de sensibilité ; des tensions par rapport aux rapports de transformations ; est définie positive [131] suit naturellement et est utilisée pour synthétiser la retour local.

De l'équation de mise à jour de l'OLTC

$$n_i^+ = \begin{cases} n_i^- + dn & \text{si } v_{r_i} - v_i > \Delta \quad \text{et } n_i^- < n_{max} \\ n_i^- - dn & \text{si } v_{r_i} - v_i < -\Delta \quad \text{et } n_i^- > n_{min} \end{cases} \quad (5.83)$$

et afin d'augmenter le niveau de tension  $v_i$ , on se doit d'augmenter la valeur du rapport  $n_i$ . Dans ce cas, il suffit de prendre pour la référence de tension  $v_{r_i}$

$$v_{r_i} = (v_i + \Gamma\Delta), \quad \Gamma > 1 \quad (5.84)$$

pour rendre active la première partie de l'équation (5.83). Le même raisonnement conduit ; au cas où une diminution de la tension  $v_i$  est requise ; à l'équation suivante

$$v_{r_i} = (v_i - \Gamma\Delta) \quad (5.85)$$

en combinant les équations (5.84)-(5.85) et en introduisant un niveau de tension désiré  $v_i^*$  associé à la  $i$ ème région, l'équation de mise à jour suivante est obtenue

$$v_{r_i} = (v_i + \Gamma\Delta \text{sgn}(v_i^* - v_i)) \quad (5.86)$$

où  $\text{sgn}(\cdot)$  est la fonction signe usuelle. Le niveau de tension  $v_i^*$  n'est pas nécessairement un point d'équilibre du système. En effet, un point d'équilibre requiert une analyse statique (power flow analysis) qui n'est pas nécessaire ici. De ce fait et dans la plupart des cas une poursuite exacte de  $v_i^*$  n'est pas possible. Une zone morte est ainsi introduite dans la fonction signe, voir équation (5.86). La valeur du rapport  $n_i$  est ainsi bloquée dès que la différence de tension (erreur de régulation) entre dans cette zone. Le schéma bloc est celui de la figure 5.31. Rappelons qu'un schéma plus sophistiqué serait d'utiliser une rétroaction de signaux exogènes e.g., matrice de sensibilité, afin d'élargir la zone morte ou bien l'inverser si respectivement un blocage ou une inversion de la dynamique de comportement de  $n$  est nécessaire. Ce schéma est général et peut être utilisé si le contrôle local est intégré comme une action corrective voir e.g., [133] et [122].

#### 5.4.2.4 La commande prédictive

Dans cette section, la stratégie globale pour mettre à jour les valeurs de capacités et les relais d'élimination de charge, est présentée. Le cas général d'un réseau composé de  $l$  régions est traité. Chaque région est indexée de 1 à  $l$  et équipée équitablement d'un nombre de commande représenté par le banc de capacité  $b_i$  et le relais d'élimination de charge  $k_i$  avec pour valeurs

$$k_i \in \mathcal{K} = \{0, 1, \dots, k_{max}\}, \quad i \in \mathcal{I} = \{1, \dots, l\} \quad (5.87)$$

$$b_i \in \mathcal{B} = \{0, 1, \dots, b_{max}\} \quad (5.88)$$

brèvement les vecteurs  $b, k$  et  $Y$  dénotent respectivement les vecteurs de capacités  $(b_1 \dots b_l)'$ , de relais de délestage  $(k_1 \dots k_l)'$  et les tensions aux niveaux des charges  $(v_1 \dots v_l)'$ . Le vecteur de commande discrète est  $u_d = (b' \ k)'$ . La commande est implémentée numériquement avec une période d'échantillonnage  $\tau = T_d$  (le seuil du compteur dans l'OLTC), la commande est donnée à chaque instant  $mT_d$  ( $m$  est un entier non négative) par

$$u_d(m) = \begin{pmatrix} b(m) \\ k(m) \end{pmatrix} \in \mathcal{B}^l \times \mathcal{K}^l \quad (5.89)$$

où les ensembles  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{K}$  ont été définis précédemment. Soit  $\tilde{u}_d(m)$  le profil de commande en boucle ouverte à l'instant  $mT_d$  s'étalant sur l'horizon de prédiction  $N_p$

$$\tilde{u}_d(m) = (u_d(mT_d) \dots u_d((m + N_p - 1)T_d)) \quad (5.90)$$

Notons par  $\mathcal{U}_d$  l'ensemble des profils admissibles en boucle ouverte, l'ensemble des fonctions constantes sont introduites comme

$$\mathcal{U}_d^{(\bar{b}, \bar{k})} = \{\tilde{u}_d \in \mathcal{U}_d \mid \tilde{u}_d \equiv (\bar{b}, \bar{k})\} \quad (5.91)$$

où  $(\bar{b}, \bar{k}) \in \mathcal{B}^l \times \mathcal{K}^l$ . Définissons aussi l'ensemble des relais de délestage avec des composantes égales comme suit

$$\mathcal{K}_o = \{\bar{k} \in \mathcal{K}^l \mid \bar{k}_1 = \bar{k}_2 = \dots = \bar{k}_l\} \quad (5.92)$$

faisant sous entendre que l'élimination de la charge est appliquée d'une manière uniforme et que les régions sont équitablement traitées.

**Remarque 19** *En considérant que l'ensemble des relais de délestage présentent des composantes égales, sous entend qu'aucune région n'est plus vulnérable qu'une autre. Ceci reste faux dans la majorité des cas. Aussi une méthode de classification est adjointe à la commande prédictive pour palier à cette carence. Celle ci a pour rôle d'exhiber et de différencier les niveaux de vulnérabilité des différentes régions inter connectées.*

La même relation d'ordre que celle définie en (5.71)-(5.73) est introduite sur l'ensemble  $\mathcal{K}_o$  comme

$$\mathcal{O} : \mathcal{K}_o \longrightarrow \{1, 2, \dots, \text{card}(\mathcal{K})\} \quad (5.93)$$

de telle manière que

$$\{\bar{k}^{(1)} \geq \bar{k}^{(2)}\} \iff \{\mathcal{O}(\bar{k}^{(1)}) \geq \mathcal{O}(\bar{k}^{(2)})\} \quad (5.94)$$

Soit  $\mathcal{S}_{nc}$  l'ensemble

$$\mathcal{S}_{nc} = \left\{ (\bar{b}, \bar{k}) \in \mathcal{B}^l \times \mathcal{K}_o \mid \forall \tilde{u}_d \in \mathcal{U}_d^{(\bar{b}, \bar{k})} : Y(\cdot; x_0, \tilde{u}_d) \text{ est défini sur } [0, N_p \tau] \right\} \quad (5.95)$$

des capacités et relais de délestage tel qu'il n'y ait pas d'effondrement de tension,  $Y(\cdot; x_0, \tilde{u})$  est le vecteur de tensions sous le profil constant  $\tilde{u}_d$  et la condition initiale  $x_0 = x(0)$ . Le sous ensemble  $\mathcal{S}_f$  des capacités avec un minimum de charge délestée et telle qu'une contrainte finale sur la tension soit satisfaite, est lui défini comme suit

$$\mathcal{S}_f = \left\{ (\bar{b}, \bar{k}^*) \in \mathcal{S}_{nc} \mid \bar{k}^* = \arg \min_{\substack{\bar{k} \in \mathcal{K}_o, \exists \tilde{u}_d \in \mathcal{U}_d^{(\bar{b}, \bar{k}^*)} \\ Y(N_p, x_0, \tilde{u}_d) > \underline{Y}}} \mathcal{O}(\bar{k}) \right\} \quad (5.96)$$

$Y(N_p, x_0, \tilde{u}_d)$  représente le vecteur tension à l'instant final  $N_p T_d$ . Notons que la valeur minimale de charge à éliminer est différente dans les deux ensembles  $\mathcal{S}_{nc}$  et  $\mathcal{S}_f$  comme définis en (5.95)-(5.96) et qu'à tout moment  $\mathcal{S}_f \subseteq \mathcal{S}_{nc}$  puisque la paire satisfaisant l'inégalité terminale n'induit pas un effondrement de tension. Le critère de performance suivant est introduit pour mesurer la déviation de la tension par rapport à un vecteur de référence  $y_{ref}$

$$J = \int_0^{N_p \tau} (Y(t) - y_{ref})' Q (Y(t) - y_{ref}) dt \quad (5.97)$$

où  $Q$  est une matrice définie positive de dimensions  $l \times l$ . Notons que ni la commande ni la valeur finale de la tension ne sont pénalisés dans l'indice de performance (5.97) puisque respectivement une technique de classement (5.93) est déjà mise en place et une inégalité terminale est incluse dans l'équation (5.96).

En prenant des profils constants en boucle ouverte, la complexité de l'approche est indépendante de l'horizon de prédiction. La complexité globale  $\mathcal{C}_{full}$  est ainsi réduite d'un facteur  $((k_{max} + 1) \times (b_{max} + 1))^{N_p}$  donnant la borne suivante

$$\mathcal{C}_2 = ((k_{max} + 1) \times (b_{max} + 1))^l \quad (5.98)$$

**Remarque 20** *Rappelons qu'une des caractéristiques de la commande à horizon glissant est que la dynamique de la boucle fermée est beaucoup plus riche que la paramétrisation de la boucle ouverte. La conséquence est que dans plusieurs situations des paramétrisations en boucle ouverte en apparence très simple donnent des comportements en boucle fermée suffisamment riches.*

La stratégie de contrôle complète est regroupée dans l'algorithme conceptuel suivant

- Calculer les paires de commandes qui garantissent que les tensions soient supérieures à un certain niveau à l'instant terminal de prédiction.
- Les composantes du vecteur de délestage de charge qui ne sont pas présents dans  $\mathcal{K}_o$  sont générés comme suit
  - En démarrant de la valeur de délestage de charge obtenue dans l'étape précédente (rappelons que ce vecteur a toutes ces  $l$  composantes égales). Générer les vecteurs différents du vecteur actuel en  $l - 1$  composantes.
  - Tester la satisfaction des contraintes sur les tensions pour les paires ainsi générées. Mettre à jour le vecteur de délestage de charges avec l'argument minimisant l'indice de performance
- Appliquer la paire de commande la plus récente et re-considérer tout le processus modulo certaines modifications.

ce qui peut être formellement écrit comme suit [9]

ALGORITHME PSEUDO CODE

**Étape 1** Calculer l'ensemble  $\mathcal{S}_{nc}$  de capacités  $\bar{b} \in \mathcal{B}^l$  et les charges à éliminer  $\bar{k} \in \mathcal{K}_o$  tel qu'aucun effondrement de tension n'est induit tout au long de l'horizon de prédiction  $N_p$ .

**Étape 2** Calculer l'ensemble  $\mathcal{S}_f \subseteq \mathcal{S}_{nc}$  telle que les tensions à l'instant final de prédiction satisfont à la contrainte  $Y_{N_p} \geq \underline{Y}$

**Étape 3** Parmi toutes les possibilités calculer le minimum de l'indice de performance  $J$  dans  $\mathcal{S}_{nc}$  **Si**  $\mathcal{S}_f = \emptyset$  **Sinon** dans  $\mathcal{S}_f$ . Noter la paire minimisant l'indice  $J$  par  $(\bar{b}^*, \bar{k}^*)$

**Étape 4**  $s := l - 1$ ,  $D := \{1, \dots, l\}$

**Étape 5** **Si**  $(\min_{i \in D}(\bar{k}_i^*) \neq 0)$

**Alors**

- Générer tous les vecteurs  $\bar{k}$  tel qu'au plus  $s$  composantes  $\bar{k}_i$  ( $i \in D$ ) sont décrémentées de 1 par rapport à la composante  $\bar{k}_i^*$
- Calculer si il existe l'argument minimisant l'indice de performance  $J$  par rapport à l'ensemble des vecteurs  $\bar{k}$  générés à ce stade et garantissant le respect de la contrainte sur les tensions  $Y_{N_p}$ .

**Si** un tel vecteur n'existe pas **Alors** Aller à **Étape 6** **Sinon** Noter ce vecteur par  $\bar{k}^{**}$  **Fin Si**

- Calculer l'ensemble  $D$  des indices de composantes  $\bar{k}^{**}$  et  $\bar{k}^*$  non égales,  $D := \{i \in \{1, \dots, l\} : \bar{k}_i^{**} \neq \bar{k}_i^*\}$  (cet ensemble contient les indices des composantes qui peuvent être décrémentées à l'itération suivante de **Étape 5**)

- $\bar{k}^* := \bar{k}^{**}$ ,  $s := \text{card}(D)$  Aller à

**Étape 5**

**Fin Si**

**Étape 6** Appliquer  $(\bar{b}^*, \bar{k}^*)$  et Aller à **Étape 1**.

■

- ✓ Le bloc  $Si$  dans **Étape 5** de l'algorithme teste si les composantes du vecteur  $\bar{k}^*$  sont à zéro (la valeur minimale du relais de délestage), si tel est le cas, les calculs correspondant à cette étape sont tout simplement omis. En effet, si les calculs correspondant à l'étape 5 n'ont jamais été conduits, au minimum une composante  $\bar{k}_i^*$  était à zéro et puisque l'étape précédente (**Étape 3**) est entreprise pour  $\bar{k} \in \mathcal{K}_o$ , cela voudra dire qu'aucune élimination de charge n'a été activée jusqu'ici. Au contraire, si les calculs correspondant à l'étape 5 ont été entrepris au moins une fois et s'il existe une composante  $\bar{k}_i^* = 0$  à l'itération suivante, aucune diminution n'est alors possible et la valeur  $\bar{k}^*$  obtenue est la valeur l'optimale de la stratégie proposée.

**Remarque 21** L'étape **Étape 5** est principalement consacrée à la génération de vecteurs qui ne sont pas présents dans l'ensemble  $\mathcal{K}_o$ , quoique avec une complexité globale inférieure à celle d'une recherche exhaustive.

**Complexité de l'algorithme** A l'étape 1, l'ensemble  $\mathcal{S}_{nc}$  est calculé en utilisant une simple énumération. Cette dernière nécessite

$$\mathcal{C}_{step1} = \text{card}(\mathcal{B})^l \times \text{card}(\mathcal{K}_o) \quad (5.99)$$

évaluations du modèle au plus et ceci durant tout l'intervalle de prédiction (puisque les profils en boucle ouverte sont pris constants). L'étape 2 quant à elle ne nécessite pas de calculs particuliers puisque la relation d'inclusion  $\mathcal{S}_f \subseteq \mathcal{S}_{nc}$  est satisfaite à tout moment, ainsi le calcul de  $\mathcal{S}_f$  consiste à vérifier les valeurs induisant le respect de la contrainte d'inégalité. L'étape 3 nécessite une comparaison d'au plus  $\mathcal{C}_{step1}$  valeurs de l'indice de performance  $J$ . L'étape 5 gène tous les vecteurs telles que  $s$  composantes  $\bar{k}_i$  ( $i \in D$ ) sont diminués de 1 par rapport à la composante  $\bar{k}_i^*$ .

L'algorithme peut être clarifié à l'aide du simple exemple illustré sur la figure 5.32. Supposons qu'à l'étape initiale,  $\bar{k}^* = (333)$  (vecteur issu de l'étape 3) soit la valeur minimale (représenté par le nœud blanc sur la figure) du relais de délestage telle que les contraintes définies dans l'ensemble  $\mathcal{S}_f$  soient satisfaites. A l'itération suivante, tous les vecteurs telle que 1 et 2 composantes sont décrémentées de 1, soit

$$\binom{3}{2} + \binom{3}{1} = 6 \quad (5.100)$$

nœuds sont générées, ceux là sont tracés en gris sur la figure 5.32. Supposons, maintenant



que le vecteur minimisant l'indice  $J$  et satisfaisant la contrainte soit  $k^* = (322)$ , cela donne

$$\binom{2}{2} + \binom{2}{1} = 3 \quad (5.101)$$

nœuds supplémentaires à visiter, et le processus est réitéré (Étape 5) jusqu'à ce qu'aucune diminution ne soit possible. La partie du bloc  $Si$  de l'Étape 5 est dédiée à détecter ce type de situation.

La complexité en terme de nœuds visités est dans le cas général au plus égale

$$\mathcal{C}_3 = \sum_{p=1}^{l-1} \binom{l}{p} + (\bar{k}_i^* - 1) \sum_{p=1}^{l-1} \binom{l-1}{p} \quad (5.102)$$

soit encore

$$\mathcal{C}_3 = (\bar{k}_i^* + 1)(2^{l-1} - 1) \quad (5.103)$$

au lieu de

$$\mathcal{C} = (\bar{k}_i^* + 1)^l \quad (5.104)$$

pour une recherche exhaustive, où  $\bar{k}_i^*$  est n'importe quelle composante du vecteur  $\bar{k}^*$  à l'entrée de l'étape 5, e.g.,  $\bar{k}_i^* = 3$  pour l'exemple sur la figure 5.32. Dans le tableau 5.2 sont comparés en terme de nœuds visités l'approche proposée et l'approche exhaustive pour l'exemple de la figure 5.32 et pour un nombre variable de régions.

**Remarque 22** *Le premier terme l'équation (5.102) représente le nombre de vecteurs avec  $l - 1$  composantes différentes du vecteur à l'entrée de l'Étape 5. Le second terme quant à lui correspond au cas le plus défavorable où à chaque itération interne  $l - 1$  composantes doivent être décrémentées jusqu'à épuisement des alternatives (c'est le cas de la figure 5.32), cela veut dire que cette mécanique est répétée  $k_i^* - 1$  fois d'où l'apparition de ce terme multiplicateur.*

nombre de régions	exhaustive (5.104)	proposée (5.103)
2	16	4
3	64	12
4	256	28
5	1024	60

TAB. 5.2 – Comparison entre une recherche exhaustive et l'approche proposée

**Remarque 23** *Dans l'étape 5 de l'algorithme seulement les vecteurs avec au plus  $l - 1$  différentes composantes sont générés (à la première itération de l'étape 5). En effet, la génération de vecteurs avec une distance  $l$  n'est pas requise puisque tous les vecteurs dans  $\mathcal{K}_o$  sont testés avant d'entrer l'étape 5. Dans l'exemple traité, voir figure 5.32, le vecteur (222) n'est pas généré puisqu'il ne satisfait pas aux exigences imposées par l'ensemble  $\mathcal{S}_f$  voir équation (5.96) sinon, il aurait été trouvé à la place de (333).*

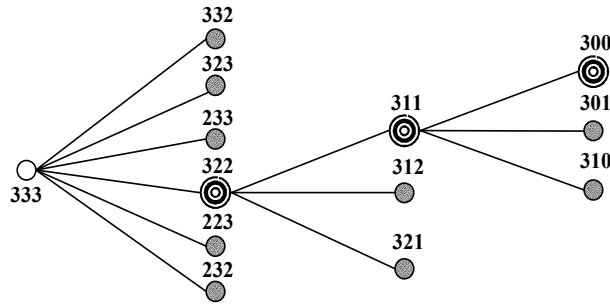


FIG. 5.32 – L’algorithme de recherche, en gris : nœuds générés. En noir : nœuds gagnants

#### 5.4.2.5 Résultats de simulation

Dans ce qui suit, plusieurs scénarii de défauts sont simulés. Les défauts sont discernés en utilisant le vecteur  $F = (f_1 \ f_2 \ f_3)$  de composantes entières qui prend ses valeurs dans l’ensemble  $f_i \in \{0, 1, 2\}$ , correspondant respectivement à aucun défaut, défaut d’une ou deux lignes de transmission. La première composante du vecteur est pour les lignes entre les régions 1 et 2, la seconde pour les régions entre 2 et 3 et la troisième pour les régions entre 1 et 3, voir figure 5.4. Sur la figure 5.33 sont tracées l’allure des tensions en boucle ouverte lorsque le système est soumis au défaut  $F = (0 \ 1 \ 2)$  introduit à l’instant  $t = 100 \text{ s}$ . La trajectoire ne peut continuer au delà de l’instant  $t \approx 300 \text{ s}$  (voir la section 5.3). De la dynamique de cet effondrement, la valeur de l’horizon de prédiction est inférée telle que la dynamique du système est recouverte. Dans tous les scénarii qui suivent, cette valeur est prise égale à  $N_p = 10$  (300 s). Tous les scénarii de défaut catalogués par la suite induisent une cassure de modèle (telle que sur la figure 5.33 voir aussi la discussion dans la sous section 5.3.2 du présent chapitre) en l’absence de contrôleur adéquat et correspondent donc à des conditions de fonctionnement extrême. Bien que non répertoriés les temps de calcul sont inférieurs à la période d’échantillonnage de 30 sec. Pourvu que l’intégration des équations décrivant le modèle du réseau le long de l’horizon de prédiction s’effectue d’une manière relativement rapide (en utilisant par exemple des techniques de simulation similaire à ceux en [114]), l’approche peut être implémentée en temps réel. Avant de commenter plus en détail les résultats de simulation. Il est utile de mentionner que les différentes régions (voir figure 5.4) ne peuvent être opérées séparément. Cela veut dire que pour le défaut (2 2 2) (le réseau fragmenté), l’effondrement des tensions est inévitable. Dans tous les scénarii, les défauts sont introduits à l’instant  $t = 100 \text{ sec}$  et la commande prédictive seulement 20 sec après (la période d’échantillonnage est prise égale à 30 sec).

La première simulation concerne le cas du défaut triple (0 1 2) indiquant que la troisième région est déconnectée de la première. L’hypothèse que la matrice de sensibilité soit définie positive peut être vérifiée graphiquement. En effet, un accroissement (décroissance) dans le rapport de transformation induit une augmentation (diminution) des tensions, voir figures

5.33 et 5.34. Remarquons aussi, que sous la commande prédictive les tensions dans les régions 2 et 3 sont au dessus des tensions de référence de 1 *p.u.* pour 100 *sec* (de 500 à 600 *sec*). A l'instant  $t = 600$  *sec* les OLTC sont réactivés (les excursions de tensions sont en dehors de la zone morte) et les tensions s'établissent près de 1 *p.u.*. De cette manière, une action coordonnée des boucles locales et globale est accomplie d'une manière implicite. En ce qui concerne, les entrées de commande, un incrément (10%) de la charge est délestée dans les régions 2 et 3, le banc de capacité (0.2 *p.u.*) est aussi activé dans la région 3.

Sous le défaut (1 2 1) voir figure 5.36 et figure 5.37, le transformateur sature à son niveau maximal ( $n_{max} = 1.2$ ) dans la région 3. Les autres rapports de transformations restent bloqués à leurs valeurs d'avant défaut, puisque les tensions ne sont pas affectées par le défaut i.e., les excursions de tensions n'excèdent pas les zones mortes voir le schéma sur la figure 5.31. Dans ces simulations, 20% de la charge est délestée en plus de l'activation de la capacité dans la région 3.

Sur les figures 5.38 et 5.39 sont tracées respectivement les tensions et les entrées de commande quand le réseau est assujetti au défaut (2 1 0) i.e., la région 1 est déconnectée de la région 2. Quoique la région 3 n'est pas sévèrement affectée par ce défaut, 20% de la charge y est délestée. Cela montre clairement qu'un délestage optimal ne concerne pas seulement les régions affectées mais les régions chargées ou fortement dépendante dans leur consommation de puissance des autres régions.

Sous le défaut (1 1 1), voir les figures 5.40 et 5.41, toutes les capacités sont utilisées et seulement 10% de la charge est déconnectée dans les régions 2 et 3.

Sur les figures 5.42 et 5.43 sont représentées les tensions et les entrées sous le défaut (0 2 1) i.e., les régions 2 et 3 sont déconnectées l'une de l'autre. Ici 20% de la charge est délestée dans la région 3 montrant la dépendance de cette région par rapport aux autres régions. Aucune action n'est prise dans les autres régions. Ce scénario est lié au cas du défaut (1 2 1) et correspond à un problème dur de stabilisation. Cela est dû principalement au fait que bien que l'hypothèse de positivité de la matrice de sensibilité soit vérifiée, un accroissement dans le rapport de transformation induit un comportement moins croissant que dans le cas du défaut (0 1 2) en figure 5.33. Comme conclusion, la région 3 est la plus sensible aux défauts puisque ces ressources sont toujours activées.

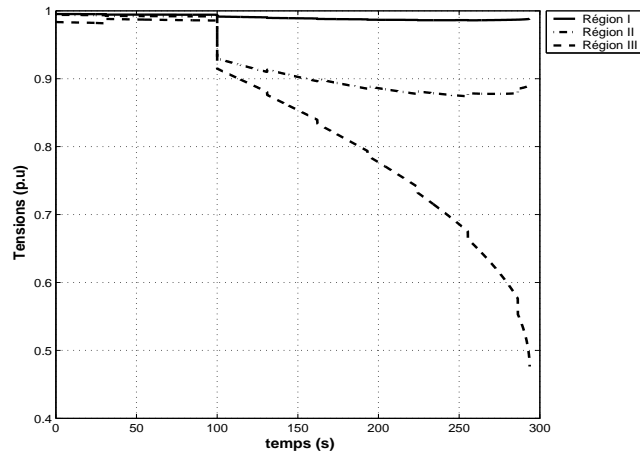


FIG. 5.33 – L’effondrement de tension en boucle ouverte sous le défaut (0 1 2)

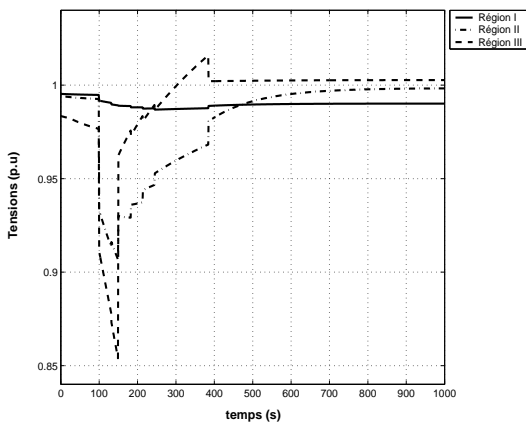


FIG. 5.34 – Tensions dans le réseau avec la commande prédictive sous le défaut (0 1 2)

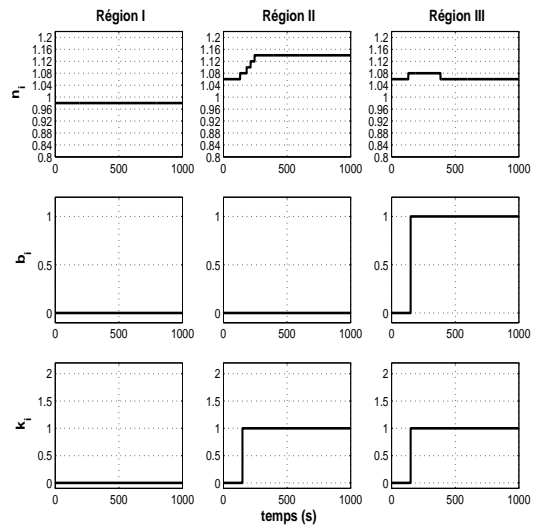


FIG. 5.35 – Allure de la commande sous l’approche prédictive et pour le défaut (0 1 2)

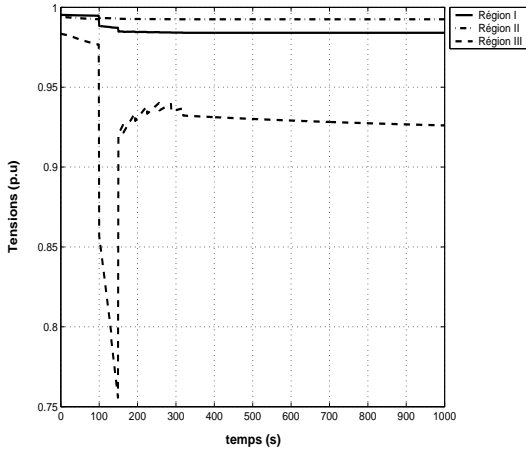


FIG. 5.36 – Tensions dans le réseau avec la commande prédictive sous le défaut (1 2 1)

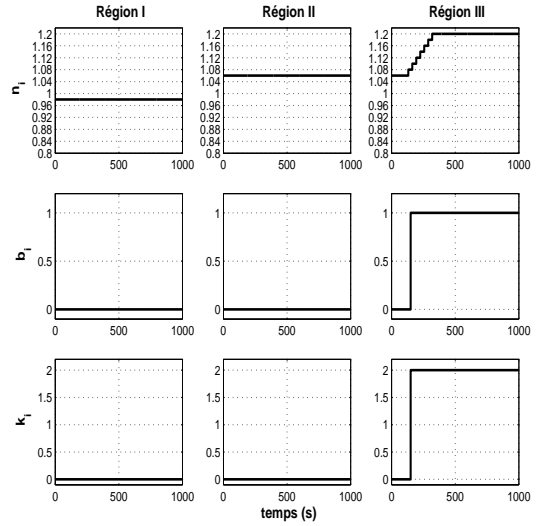


FIG. 5.37 – Allure de la commande sous l'approche prédictive et pour le défaut (1 2 1)

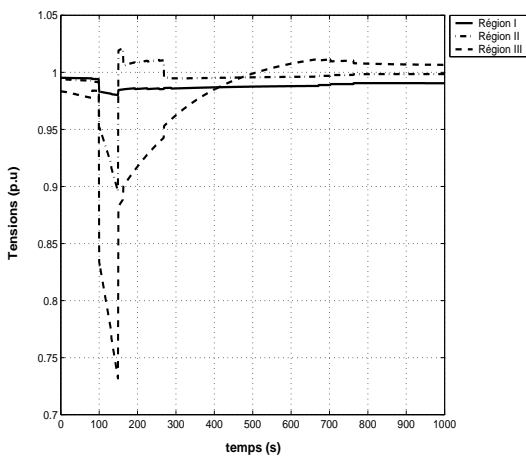


FIG. 5.38 – Tensions dans le réseau avec la commande prédictive sous le défaut (2 1 0)

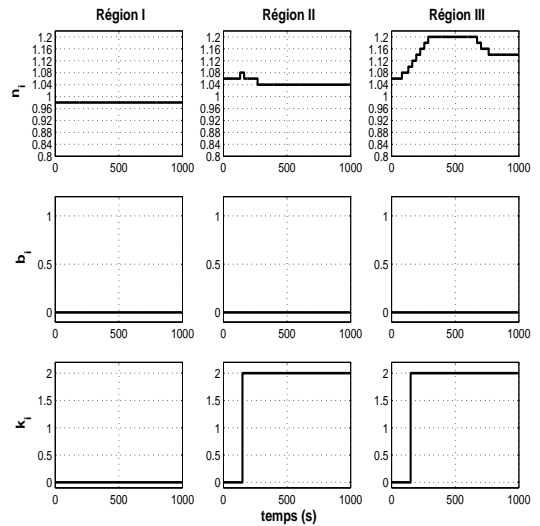


FIG. 5.39 – Allure de la commande sous l'approche prédictive et pour le défaut (2 1 0)

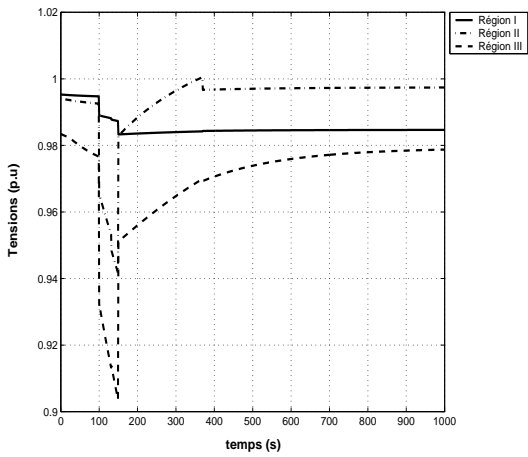


FIG. 5.40 – Tensions dans le réseau avec la commande prédictive sous le défaut (1 1 1)

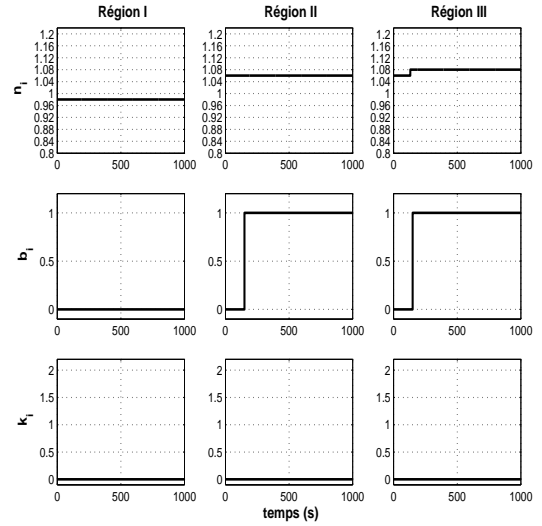


FIG. 5.41 – Allure de la commande sous l'approche prédictive et pour le défaut (1 1 1)

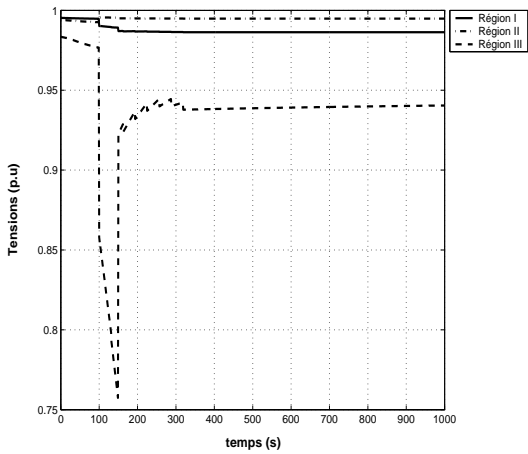


FIG. 5.42 – Tensions dans le réseau avec la commande prédictive sous le défaut (0 2 1)

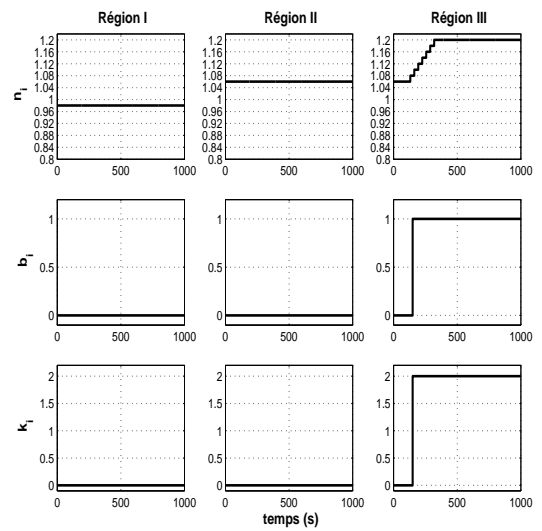


FIG. 5.43 – Allure de la commande sous l'approche prédictive et pour le défaut (0 2 1)

## 5.5 Conclusions et perspectives

Dans ce chapitre, deux méthodologies de stabilisation des tensions dans les réseaux électriques sont proposées. La première consiste en une stratégie de commutation où l'objectif est de faire décroître une fonction candidate de Lyapunov tout en respectant les contraintes sur la commande et en pénalisant les commutations. La seconde approche est basée sur une commande prédictive où une simple paramétrisation est proposée afin de réduire la combinatoire associée au problème. Cette approche est étendue aux systèmes de plus grande dimension en introduisant des boucles internes permettant la mise à jour des rapports de transformation. Plusieurs expérimentations numériques sont entreprises montrant la faisabilité et l'amélioration du niveau de stabilité dans les réseaux tests et ceci pour des conditions de fonctionnement extrêmes.

Les approches proposées sont par construction locales et ont besoin de coordination à un niveau plus haut lorsque des problèmes de dimension plus élevée sont traités. Idéalement, une stratégie décentralisée avec coordination est à envisager pour des systèmes à grande dimension. Cette stratégie peut être structurée en trois étapes principales

- Identification des régions vulnérables : des raisons économiques peuvent amener à considérer seulement le contrôle de certaines régions. La méthodologie doit être capable d'identifier les régions qui auront le plus besoin de ressources e.g., puissance réactive, et d'implanter des contrôleurs locaux utilisant des informations en provenance des régions en question.
- Coordination des contrôleurs régionaux : une unité de calcul plus puissante et plus intelligente doit centraliser les informations concernant le réseau dans toute sa globalité. A partir de ces informations, l'état global du réseau est évalué et les actions des contrôleurs locaux coordonnées.
- Apprentissage de comportements globaux : l'unité centralisée doit être capable d'intégrer de nouvelles données e.g., prise en compte de l'évolution de la topologie du réseau, et à réagir aux avaries en tenant compte de ces changements. Idéalement l'unité doit comprendre des algorithmes d'apprentissage.

# Chapitre 6

## Conclusion Générale

*What is the difference between a Ph.D. in systems engineering and a Ph.D. in one of the more traditional disciplines like electrical or mechanical engineering? A traditional Ph.D. requires a student to become an expert on a single topic. This means that, as one delves deeper into a particular topic, some breadth must be sacrificed. So traditional Ph.D. students end up learning more and more about less and less, until they finally know absolutely everything about nothing. Systems engineering students, on the other hand, must study a variety of engineering disciplines. But to obtain such breadth, some depth is inevitably sacrificed. So systems engineering students end up learning less and less about more and more until they finally know absolutely nothing about everything. The truth, as in all things, lies somewhere between the two extremes.*

-Mark W. Spong, IEEE control systems Magazine

Dans ce travail, le problème de commande des systèmes hybrides à commutations est envisagé. Il est montré que les problèmes d'explosion combinatoire peuvent être contournés en utilisant la structure et les propriétés du problème à résoudre. Cette méthodologie est explicitée dans trois schémas différents. Le premier concerne la commande optimale des systèmes à commutations, la solution consiste à augmenter le système à commutations en introduisant des entrées fictives. Le problème est ainsi ré-écrit sous forme standard convenable à l'utilisation des conditions nécessaires d'optimalité. C'est sur cette base qu'un algorithme convergent est développé afin d'extraire une stratégie de commutation et un profil de commande continue dans un schéma à itération unifiée. Le cas où des contraintes temporelles ou structurelles sont présentes est discuté. Les hypothèses du Principe du Minimum sont violées, l'algorithme développé peut néanmoins être utilisé comme un moyen de synthèse de lois de commande. Ce schéma peut être aussi utilisé avec bénéfice dans une commande prédictive et est approprié pour des applications en temps réel. En effet, les expérimentations numériques montrent la faisabilité d'un tel schéma. Les temps d'exécutions, relativement



faibles, sont compatibles avec les fenêtres de temps disponibles en temps réel. Cela est possible grâce aux techniques de réduction développées dans cette thèse. Ceci est à comparer avec les algorithmes à complexité combinatoire de l'actuel état de l'art.

Le second schéma concerne la commande hiérarchique des systèmes à commutations. L'objectif est d'extraire une stratégie de commutation des systèmes à commutations intégrant localement une boucle de contrôle. La combinatoire associée au problème est éliminée en développant une commande prédictive dans laquelle une paramétrisation simple des stratégies de commutation en boucle ouverte est utilisée, rendant la complexité du schéma linéaire dans le nombre de configurations. Ce schéma est ensuite appliqué au développement d'une stratégie de commutation entre actionneurs permettant de supprimer les oscillations de l'écoulement d'un fluide décrit par l'équation de Kuramoto-Sivashinsky. Les résultats de simulation montrent l'avantage d'une telle architecture par rapport aux architectures conventionnelles mono-actionneur. En effet, un regain de stabilité est reporté dans le cas du contrôle de l'équation de Kuramoto-Sivashinsky. Les temps d'exécutions rendent attractive cette approche pour des application en temps réel.

La troisième approche est spécifique aux réseaux électrique ou plus précisément aux systèmes avec des commandes mixtes i.e., discrètes et continues. La stratégie consiste à synthétiser des commandes locales continues les plus simples possible puis d'intégrer le tout dans une commande prédictive où une paramétrisation est utilisée pour mettre à jour avec un nombre de possibilités peu élevée les variables discrètes. Cette approche est adaptée au benchmark, le plus difficile, proposé dans le contexte du projet Européen C&C. Une boucle de commande simple est proposée pour mettre à jour les variables continues, dans ce cas les tensions de référence de l'OLTC. Le problème de mise à jour des variable discrètes est résolu à l'aide d'une commande prédictive et une technique de recherche combinatoire qui s'est avérée très efficace sur les scénarii testées. L'architecture proposée peut être utilisée dans des schémas avec plus d'une dizaine de bus. Au delà, l'utilisation d'approche hiérarchisée ou multi-agents est préconisée.

La réduction de la complexité dans les schémas de commande des systèmes hybrides ne peut être réalisée qu'en exploitant la structure interne du problème. Cette réduction doit nécessairement passer par une compréhension de la physique du système afin d'éliminer toute solution incompatible avec les lois fondamentales, la recherche est ensuite concentrée sur des solutions compatibles avec la dynamique du système et théoriquement caractérisable. Les méthodes génériques de synthèse sont difficiles à obtenir et l'état de l'art actuel s'oriente de plus en plus vers des stratégies basées sur l'utilisation d'heuristiques.

# Annexe A

## Preuve de la proposition 3 du chapitre 3

*Preuve.* Tout au long de la preuve, la notation  $F^k(X_1, X_2, \dots)$  est utilisée pour  $F(X_1(k), X_2(k), \dots)$ .

Par définition, on a  $\bar{J}(\bar{u}^j) - \bar{J}(\bar{u}^{j-1}) = h \sum_{k=1}^{K-1} \left[ L^k(\bar{x}^j, \bar{u}^j) - L^k(\bar{x}^{j-1}, \bar{u}^{j-1}) \right]$ . En utilisant la définition de l'Hamiltonian (remarquer que  $\lambda^j$  n'est pas disponible à l'itération  $j$  d'où l'utilisation de  $\lambda^{j-1}$ ) et en ajoutant et en retranchant le terme  $H^k(\bar{x}^j, \bar{u}^{j-1}, \bar{\lambda}^{j-1})$  on peut écrire la variation du coût entre deux itérations successives comme

$$\begin{aligned} \bar{J}(\bar{u}^j) - \bar{J}(\bar{u}^{j-1}) &= h \sum_{k=1}^{K-1} \left[ H^k(\bar{x}^j, \bar{u}^j, \bar{\lambda}^{j-1}) - H^k(\bar{x}^j, \bar{u}^{j-1}, \bar{\lambda}^{j-1}) + H^k(\bar{x}^j, \bar{u}^{j-1}, \bar{\lambda}^{j-1}) \right. \\ &\quad \left. - H^k(\bar{x}^{j-1}, \bar{u}^{j-1}, \bar{\lambda}^{j-1}) - \left( f^k(\bar{x}^j, \bar{u}^j) - f^k(\bar{x}^{j-1}, \bar{u}^{j-1}) \right) \bar{\lambda}^{j-1}(k) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

chaque groupe de termes en (A.1) vont être examinés séparément par la suite. **Pour le premier** par définition de  $\bar{u}^j$  (voir Étape 3 de l'algorithme) on a

$$H^k(\bar{x}^j, \bar{u}^j, \bar{\lambda}^{j-1}) - H^k(\bar{x}^j, \bar{u}^{j-1}, \bar{\lambda}^{j-1}, t) \leq -\mu^{j-1} \|\bar{u}^j(k) - \bar{u}^{j-1}(k)\|^2 \quad (\text{A.2})$$

les hypothèses de régularité de  $f$  et  $L$  ( $C^2$ ) font que  $H_{xx}$  est continu (le Hessian est continu), en prenant  $z = (x \ \lambda \ u) \in \mathcal{S}$ , il est clair que cet ensemble est compact. En utilisant le théorème de Weirstrass  $H_{xx}$  atteint son suprémum sur  $\mathcal{S}$ , en notant par  $r_1$  ce dernier  $r_1 = \sup_{z \in \mathcal{S}} \|H_{xx}(z)\|$  et en utilisant  $\delta\bar{x}^j$  pour noter la différence entre deux trajectoires successives  $\bar{x}^j - \bar{x}^{j-1}$  le **second groupe** s'écrit

$$\begin{aligned} H^k(\bar{x}^j, \bar{u}^{j-1}, \bar{\lambda}^{j-1}) - H^k(\bar{x}^{j-1}, \bar{u}^{j-1}, \bar{\lambda}^{j-1}) &\leq \\ H_x^k(\bar{x}^{j-1}, \bar{u}^{j-1}, \bar{\lambda}^{j-1}) \delta\bar{x}^j(k) + r_1 \|\delta\bar{x}^j(k)\|^2 &\end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

en utilisant (A.2) et (A.3) dans (A.1), on obtient

$$\bar{J}(\bar{u}^j) - \bar{J}(\bar{u}^{j-1}) \leq h \left[ -\mu^{j-1} \sum_{k=1}^{K-1} \|\bar{u}^j(k) - \bar{u}^{j-1}(k)\|^2 + r_1 \sum_{k=1}^{K-1} \|\delta\bar{x}^j(k)\|^2 \right] + I^j(h) \quad (\text{A.4})$$

$$I^j(h) = h \sum_{k=1}^{K-1} \left[ H_x^k(\bar{x}^{j-1}, \bar{u}^{j-1}, \bar{\lambda}^{j-1}) - \left( f^k(\bar{x}^j, \bar{u}^j) - f^k(\bar{x}^{j-1}, \bar{u}^{j-1}) \right) \bar{\lambda}^{j-1}(k) \right] \quad (\text{A.5})$$

la convergence du schéma de discrétisation implique que

$$H_x^k(\bar{x}^{j-1}, \bar{u}^{j-1}, \bar{\lambda}^{j-1}) = -\frac{\bar{\lambda}^{j-1}(k+1) - \bar{\lambda}^{j-1}(k)}{h} + O(h) \quad (\text{A.6})$$

$$f^k(\bar{x}^j, \bar{u}^j) - f^k(\bar{x}^{j-1}, \bar{u}^{j-1}) = \frac{\delta\bar{x}^j(k+1) - \delta\bar{x}^j(k)}{h} + O(h) \quad (\text{A.7})$$

en introduisant la notation suivante

$$\Delta(\delta\bar{x}^j(k)) = \delta\bar{x}^j(k+1) - \delta\bar{x}^j(k), \quad k = 1, \dots, K-1 \quad (\text{A.8})$$

$$\Delta(\bar{\lambda}^j(k)) = \bar{\lambda}^j(k+1) - \bar{\lambda}^j(k), \quad k = 1, \dots, K-1 \quad (\text{A.9})$$

en re-écrivaint (A.5) en utilisant les équations (A.6)-(A.9)

$$I^j(h) = -h \sum_{k=1}^{K-1} \left[ \Delta(\bar{\lambda}^{j-1}(k))' \delta\bar{x}^j(k) + \Delta(\delta\bar{x}^j(k))' \bar{\lambda}^{j-1}(k) + o(h) \right] \quad (\text{A.10})$$

$$= -\sum_{k=1}^{K-1} \left[ \Delta(\delta^T \bar{x}^j(k) \bar{\lambda}^{j-1}(k)) + o(h) \right] \quad (\text{A.11})$$

puisque  $h = (t_f - t_0)/(K-1)$  et  $\sum_{k=1}^{K-1} o(h) = O(h)$  alors (A.11) devient

$$I^j(h) = \delta^T \bar{x}^j(1) \bar{\lambda}^{j-1}(1) - \delta^T \bar{x}^j(K) \bar{\lambda}^{j-1}(K) + O(h) \quad (\text{A.12})$$

en accord avec les conditions aux frontières sur l'état  $x$  et l'état adjoint  $\lambda$  (conditions respectées par l'algorithme),  $\bar{\lambda}^{j-1}(K) = 0$  et  $\delta\bar{x}^j(1) = 0$  pour tout  $j$ , alors  $I^j(h) = O(h)$ . Ce qui donne avec (A.4)

$$\bar{J}(\bar{u}^j) - \bar{J}(\bar{u}^{j-1}) \leq h \left[ -\mu^{j-1} \sum_{k=1}^{K-1} \|\bar{u}^j(k) - \bar{u}^{j-1}(k)\|^2 + r_1 \sum_{k=1}^{K-1} \|\delta\bar{x}^j(k)\|^2 \right] + O(h) \quad (\text{A.13})$$

Dans ce qui suit est montré qu'il existe une constante positif  $r_2 > 0$  telle que

$$\sum_{k=1}^{K-1} \|\delta\bar{x}^j(k)\|^2 \leq r_2 \cdot \sum_{k=1}^{K-1} \|\bar{u}^j(k) - \bar{u}^{j-1}(k)\|^2 \quad (\text{A.14})$$

pour cela, ré-écrivons le schéma d'intégration numérique sous la forme compacte suivante

$$\bar{x}(k+1) := \bar{x}(k) + hF^{(k)}(\bar{x}(k), \bar{u}(k)) \quad (\text{A.15})$$

des hypothèses de régularité,  $F^{(k)}$  est  $C^2$  dans ces arguments. De (A.15) on peut écrire

$$\begin{aligned} \delta\bar{x}^j(k+1) &= h \left[ F_x^{(k)}(\theta^j(k), w^j(k)) \delta\bar{x}^j(k) + \right. \\ &\quad \left. + F_u^{(k)}(\theta^j(k), w^j(k)) [\bar{u}^j(k) - \bar{u}^{j-1}(k)] \right] \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

où  $\theta^j(k) \in \bar{X}$  et  $w^j(k)$  appartient à la coque convexe  $[\bar{U}]$  de  $\bar{U}$ . Alors, en utilisant  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  définis par

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \sup_{(\theta, w) \in \bar{X} \times [\bar{U}]} \max_{k=1 \dots K-1} \| F_x^{(k)}(\theta, w) \| \\ \gamma_2 &= \sup_{(\theta, w) \in \bar{X} \times [\bar{U}]} \max_{k=1 \dots K-1} \| F_u^{(k)}(\theta, w) \| \end{aligned}$$

l'équation (A.16) peut être ré-écrite comme

$$\| \delta\bar{x}^j(k+1) \| \leq h \left[ \gamma_1 \| \delta\bar{x}^j(k) \| + \gamma_2 \| \bar{u}^j(k) - \bar{u}^{j-1}(k) \| \right] \quad (\text{A.17})$$

ce qui donne pour  $k \geq 2$  et après quelques manipulations

$$\begin{aligned} \| \delta\bar{x}^j(k) \| &\leq h\gamma_2 \sum_{i=2}^k \gamma_1^{i-2} \| \bar{u}^j(i-1) - \bar{u}^{j-1}(i-1) \| \\ &\leq h\gamma_2 \sum_{i=1}^{k-1} \gamma_1^{i-1} \| \bar{u}^j(i) - \bar{u}^{j-1}(i) \| \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

en utilisant  $\bar{\gamma}_1 := \max_{j=1 \dots N-1} \{ \gamma_1^j \}$ , on obtient

$$\| \delta\bar{x}^j(k) \| \leq h\gamma_2 \bar{\gamma}_1 \sum_{i=1}^{K-1} \| \bar{u}^j(i) - \bar{u}^{j-1}(i) \| \quad ; \quad k \geq 2 \quad (\text{A.19})$$

en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz et en sommant (A.19) de  $k=1$  à  $k=K-1$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{K-1} \| \delta\bar{x}^j(k) \|^2 &\leq h^2 (\gamma_2 \bar{\gamma}_1)^2 (K-1) \sum_{i=1}^{K-1} \| \bar{u}^j(i) - \bar{u}^{j-1}(i) \|^2 = \\ &\quad \frac{(T-t_0)^2}{K-1} (\gamma_2 \bar{\gamma}_1)^2 \sum_{i=1}^{K-1} \| \bar{u}^j(i) - \bar{u}^{j-1}(i) \|^2 \end{aligned}$$

qui n'est rien d'autre que (A.14) avec  $r_2 = \frac{(T - t_0)^2}{K - 1} (\gamma_2 \bar{\gamma}_1)^2$ . L'équation (A.13) peut alors s'écrire sous la forme suivante (en notant  $r := r_1 r_2$ )

$$\bar{J}(\bar{u}^j) - \bar{J}(\bar{u}^{j-1}) \leq h(r - \mu^{j-1}) \sum_{k=1}^{K-1} \|\bar{u}^j(k) - \bar{u}^{j-1}(k)\|^2 + O(h)$$

ce qui donne (3.36) pour  $h$  suffisamment petit. Ceci conclut la démonstration de la proposition 3 ◇◇◇

# Annexe B

## Anatomie d'un Blackout

Le réseau nord Américain est le système le plus complexe jamais conçu. Cette infrastructure électrique représente plus 1000 milliards de dollars (valeur de l'actif), plus de 320000 km de lignes de transmission opérant à 230 kV et plus, 950000 MW de puissance installée (plus de 15000 générateurs) desservant plus de 283 millions de personnes. Assurer la fiabilité de et la sûreté de fonctionnement d'un tel colosse nécessite du personnel hautement qualifié, des ordinateurs et systèmes de communication performants. L'organisme chargé d'établir les standards de fonctionnement et de planification garantissant la fiabilité du réseau électrique nord Américain est le *NERC*<sup>1</sup>. Le NERC assure la sûreté de fonctionnement du réseau électrique en se basant sur les sept concepts fondamentaux suivants

1. **Équilibrer continuellement les puissances générées et absorbées** : afin de permettre aux consommateurs d'utiliser l'énergie électrique à leur guise, la production doit être distribuée de telle manière à satisfaire les fluctuations de la demande et doit de ce fait s'accommoder aux saisons, aux mois et même aux fluctuations journalières. Un manquement à l'équilibre de cette balance entraîne une augmentation de la fréquence de fonctionnement du réseau dans le cas où l'offre dépasse la demande, et une diminution de cette grandeur dans le cas contraire. Des variations aléatoires de la fréquence sont tout à fait normales et tolérables si elles ne dépassent pas 0.5 % de la fréquence nominale. Au delà, des fluctuations de la vitesse des générateurs apparaissent et peuvent entraîner des dommages sur les turbines et autres équipements sensibles. Des fréquences très faibles (< 3 %) peuvent déclencher les relais éliminateurs de charge et isoler une partie des utilisateurs.
2. **Équilibrer l'énergie réactive<sup>2</sup> générées et absorbées afin de maintenir un niveau de tension acceptable** : Les sources de puissances réactives doivent être

---

<sup>1</sup>Acronyme de North american Electric Reliability Council

<sup>2</sup>La puissance réactive par opposition à la puissance active est une puissance échangée entre une source et sa charge. Avec Cette forme de puissance, on ne peut en aucun générer par exemple de la puissance

ajustées durant la journée afin de maintenir la tension dans une gamme sécurisante pour les appareils connectés au réseau. La plupart des générateurs sont équipés de systèmes de régulation de la puissance réactive permettant d'ajuster les tensions. Des tensions faibles peuvent endommager les moteurs électriques et les équipement électroniques, une tension élevée peut induire une rupture de l'isolation.

3. **Surveiller l'écoulement de puissance afin de respecter les limites thermiques :** l'électricité en s'écoulant entraîne une surchauffe des lignes de transmission, des transformateurs et autres appareillages. Afin d'éviter une surchauffe excessive et destructrice, l'écoulement de puissance doit être limité en ajustant sélectivement la sortie des générateurs. La plupart des équipements sont donc continuellement surveillés et tout dépassement signalé.
4. **Maintenir le système dans un état stable :** La préoccupation principale est de garantir un écoulement de puissance et des tensions de telle manière que le système est stable à tout instant. Deux types de stabilité peuvent être distingués

**Stabilité de tension** Les limites de stabilité de tension sont définies telle que la perte non planifiée d'une ligne ou d'un générateur n'entraînent pas une chute importante du niveau de la tension. Si la chute de tension est importante, l'effondrement peut s'auto-enclencher, à ce stade les relais d'élimination de charge et la déconnection des générateurs interviennent automatiquement et isolent le système afin d'éviter l'endommagement de l'appareillage.

**Stabilité de puissance (angulaire)** Les limites de stabilité angulaire sont définies telles qu'une avarie (court-circuit, perte d'une ligne et/ou d'un générateur) n'induit pas une perte de synchronisme<sup>3</sup> entre les générateurs. Cette perte peut causer des dommages aux unités de production et peut même dans des cas extrêmes causer la dislocation du système en îlots.

5. **Manceuvrer le système de telle manière qu'il reste dans état fiable (le critère  $N - 1$ ) :** Ce principe requiert de manœuvrer le système de façon qu'il s'y maintient dans un état invulnérable même s'il y aurait perte du générateur ou l'élément de transmission le plus important. Cela est nommé le critère  $N - 1$ . En d'autres termes, le système doit être opéré dans un mode préventive i.e., la perte d'une composante ne met pas en danger le système. Les opérateurs doivent identifier cette contingence et évaluer la nouvelle avarie la plus défavorable et s'y accommoder. Certaines régions sensibles

---

mécanique. Les éléments produisant cette puissance sont les capacités, les générateurs surexcités, les éléments consommant la puissance réactive sont les inductances, les générateurs sous excités.

<sup>3</sup>Le synchronisme est dit maintenu si la déviation de fréquence entre les différents générateurs est négligeable devant la fréquence elle-même.

(concentration en population importante) doivent être capable de survivre à plusieurs avaries importantes (par exemple  $N - 3$ ).

6. **Planifier, concevoir et maintenir un fonctionnement fiable du système** : Un fonctionnement fiable du réseau électrique requiert plus qu'un système de surveillance et de contrôle en temps réel, mais une planification, conception et maintenance approfondies qui garantissent un fonctionnement dans les limites fixées. Une planification à court terme concerne la planification du fonctionnement sur une journée voire une semaine. La planification à long terme assure un fonctionnement fiable du système à long terme (futur proche).
7. **Se préparer pour les états d'urgences** : Les opérateurs doivent suivre les étapes précédentes pour planifier et manœuvrer le système en état normal. Pour les états d'urgence comme des conditions climatiques rudes, des erreurs humaines ou bien des défaillances, qui dépassent le strict cadre de la planification, l'entité planificatrice doit avoir des procédures couvrant des scénarios d'urgence crédibles et les opérateurs doivent être capables de reconnaître et à prendre des actions en réponse à de telles situations.

Le NERC est composé de dix conseils régionaux. Sur la figure B.1 sont tracés les étendus géographiques des différents conseils. Le blackout du 14 Août a touché trois régions, i.e., ECAR, MAAC et NPCC<sup>4</sup>. Chaque région NERC est composée de plusieurs entités appelés ISO ou RTO<sup>5</sup> qui peuvent être constituer à leurs tours de plusieurs périmètres de contrôle (le nord d'Amérique contient plus de 140 périmètre de contrôle voir figure B.1). Les entités ISO/RTO ont pour mission de coordonner la fiabilité du réseau en desservant les informations sur son état aux centres de distribution (ou un périmètre de contrôle qui a pour rôle d'équilibrer l'offre et la demande de puissance en temps réel). Les acteurs principaux du blackout sont les deux périmètres de contrôle FE et AEP<sup>6</sup> et leurs coordinateurs de fiabilité respectivement MISO et PJM<sup>7</sup>.

L'effondrement de tension du 14 Août, selon le rapport d'experts [47], s'est produit aux environs de 16 : 10 : 46 EDT<sup>8</sup> et s'est développé en cinq phases résumées comme suit

---

<sup>4</sup>ECAR : East Central Area Reliability Coordination Agreement, MAAC : Mid Atlantic Area Council, NPCC : Northeast Power Coordinating Council

<sup>5</sup>ISO : Independent System Operator, RTO : Regional Transmission Organization

<sup>6</sup>FE : First Energy, AEP : American Electric Power

<sup>7</sup>MISO : Midwest Independent System Operator , PJM : PJM interconnection. A titre d'exemple le coordinateur MISO couvre à lui seul 37 périmètres de contrôle sur une région s'étendant sur plus de 2.6 millions de kilomètres carrés soit 4 fois la surface de la France

<sup>8</sup>EDT : Eastern Daylight Time (Heure Avancée de l'Est) est utilisé à l'est des États Unis dans la période d'été et correspond à GMT-4



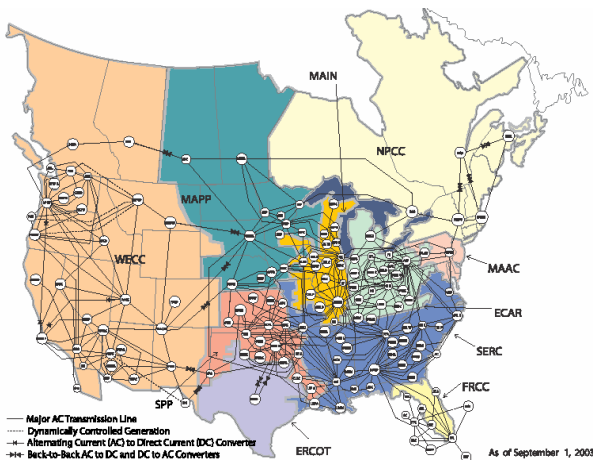


FIG. B.1 – Les périmètres de contrôle et les conseils constituant la NERC

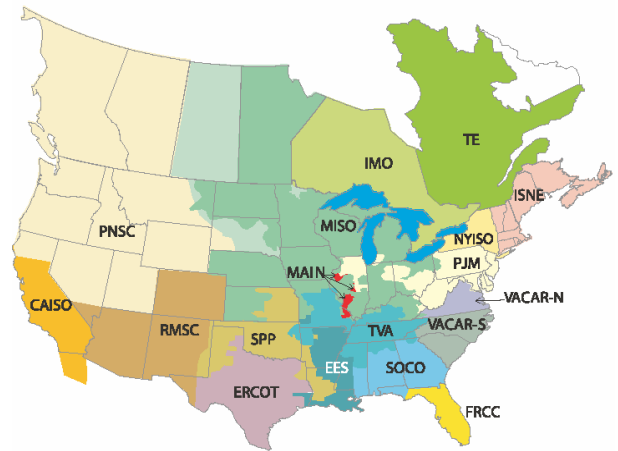


FIG. B.2 – Coordinateurs de sûreté de fonctionnement

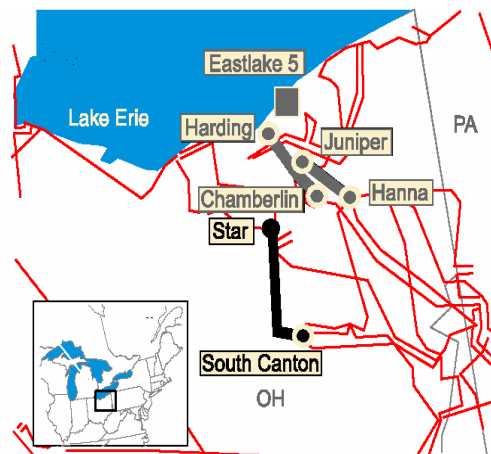


FIG. B.3 – La ligne Star-South Canton

1. **Phase 1** : les événements clés qui se sont déroulés lors de cette phase sont

- (a) de 12 :15 à 16 :04 (soit 6 minutes avant l'effondrement total) l'estimateur d'état de MISO est hors service : il est commun que les coordinateurs de sûreté de fonctionnement utilisent des estimateurs afin de confronter les estimations issues du modèle du réseau et les mesures effectuées sur site. L'information qui en résulte est ensuite utilisée pour évaluer l'état du réseau et le préparer à d'éventuelles avaries (analyse en temps réel des contingences). MISO déclenche l'estimateur d'état chaque 5 minutes. Si le modèle n'a pas une information fidèle et à temps des différentes composantes du réseau, l'estimateur d'état peut devenir incapable de donner une solution ou atteint une solution avec un degré élevé d'erreur.

A 12 :15, l'estimateur de MISO a produit une solution erronée (en dehors des marges d'erreur toléré) qui était dû à un défaut qui s'est produit sur une ligne de 230 kV (la ligne Bloomington-Denois Creek était déconnectée) et dont l'état était maintenu comme opérationnel dans l'estimateur. L'opérateur a dû effectuer plusieurs essais et vers 13 :00, il a réussi à obtenir une solution fidèle à l'état actuel du réseau, sauf qu'en faisant ces essais il a omis de remettre l'estimateur en mode automatique (enclenchement chaque 5 minutes). Cette erreur humaine n'a été découverte que vers 14 :40. L'enclenchement automatique a été initié, et une fois de plus l'estimateur a donné une solution erronée. Cette fois ci l'erreur était due au statut d'une ligne 345 kV (Stuart Atlanta) qui était déconnectée du réseau depuis 14 :02. Après plusieurs essais, l'estimation a été corrigée vers 15 :41 et le système mis en état de fonctionnement vers 16 :04. En résumé, l'estimateur et l'analyse en temps réel des contingences sont restés hors service de 12 :15 à 16 :04.

- (b) à 13 :31 l'unité de génération Eastlake Unit 5 s'est déconnectée : Eastlake 5 est une unité de génération d'une puissance d'environ 597 MW<sup>9</sup> située dans le nord d'Ohio. La perte de cet élément plus les conditions climatiques ont entraînées l'importation de 2 575 MW des régions mitoyennes, à 15 :05 la demande en puissance était de 12 080 MW<sup>10</sup>.
- (c) à 14 :02 la ligne Stuart-Atlanta de 345 kV s'est déconnectée : cette ligne s'est déconnectée à cause d'un défaut avec la terre (les conducteurs en s'affaissant ont touché un arbre causant un court-circuit). La déconnection de cette ligne n'a pas eu d'effet néfaste ni sur l'écoulement de puissance ni sur les tensions du périmètre FE. La seule raison pour laquelle cette avarie est considérée comme importante est qu'elle a contribué à mettre en échec l'estimateur d'état de MISO jusqu'à 16 :04.

2. **Phase 2** : vers 14 :14 les opérateurs du périmètre de contrôle FE ont perdu les fonctionnalités d'alarme qui permettaient d'avoir des indications audibles et visuelles lorsque l'état d'un équipement basculait. Pendant plus d'une heure, les opérateurs ne se sont pas aperçus que leur système était défaillant et que la situation globale commençait à se détériorer.
3. **Phase 3** : cette phase correspond aux étapes qui ont contribué le plus à la deterioration de l'état du système

---

<sup>9</sup>Près de la moitié de l'échange France-Espagne qui est d'environ 1 400 MW

<sup>10</sup>Chiffre correspondant par exemple à la puissance générée par les 5000 éoliennes du parc Allemand

- (a) à 15 :05 Déconnection de la ligne Harding-Chamberlin 345 kV : la ligne s'est déconnecté du réseau alors qu'elle était chargée à seulement 44 % de sa charge nominal. Les investigateurs se sont penchés sur les raisons d'une telle avarie, et en exploitant les données provenant du relais, ils ont pu détecté l'emplacement et la cause du défaut. L'avarie s'est déclenchée lorsque la ligne en s'affaissant à son régime nominal a malencontreusement touchée un arbre (les lignes prennent de la croissance lors des saisons de printemps et d'été). Ce défaut a entraîné une nette augmentation de l'écoulement dans les zones avoisinantes, la ligne Hanna-Juniper était la plus touchée par cette augmentation.
- (b) à 15 :32 Déconnection de la Ligne Hanna-Juniper 345 kV : Hanna-Juniper était chargée à 88 % de sa charge nominale quand elle s'est déconnectée, une fois de plus un arbre est mis en cause. Plus de 1200 MVA d'écoulement de puissance doivent maintenant trouver un chemin différent, causant ainsi une augmentation au delà de la charge nominal (inférieur à la valeur critique) sur la ligne Star-South Canton 345 kV. La tension a chuté un peu plus dans la région de Cleveland.
- (c) à 15 :35 AEP et PJM commencent à négocier une action pour la ligne Star-South Canton 345 kV : vue que son système d'alarme était inopérant, le coordinateur FE n'était pas au courant de la perte des deux lignes (Harding-Chamberlin et Hanna-Juniper). Après la mise à jour manuelle de l'estimateur de MISO vers 15 :41, les conséquences d'une éventuelle perte de la ligne Hanna-Juniper ont été ignorées 36 minutes après la perte de la ligne Harding-Chamberlin. Le coordinateur AEP (information transmise de PJM) a reconnu que la ligne Star-South Canton était chargée au delà de sa valeur nominale, et dépasserait même la valeur critique si la ligne Sammis-Star aurait été en difficulté, et a de suite recommandé à ses opérateurs de la décharger de 350 MW (en redistribuant la génération, re-configurant le système)<sup>11</sup>. En étudiant une stratégie afin d'acheminer autrement ces 350 MW, ni AEP ni JPM n'avaient réalisé que la ligne Hanna-Juniper 345 kV n'était plus opérationnel depuis 15 :32, les opérateurs ont passé plus de dix minutes à se demander pourquoi une telle puissance devait être déviée, la minute de trop durant laquelle la ligne Star-South Canton s'est déconnectée automatiquement du réseau.
- (d) à 15 :41 Perte de la ligne Star-South Canton 345 kV : cette ligne traverse la frontière entre FE et AEP. Chaque opérateur est responsable d'une partie de la

---

<sup>11</sup>Une analyse plus poussée a montrée que même le déchargement de 350 MW sur la ligne Star-South Canton n'aurait eu qu'un impact mineur sur le niveau de surcharge. En effet, le seul moyen d'alléger la surcharge aurait été d'éliminer une partie de la charge dans la région de Cleveland

ligne voir figure B.3. La perte de cette ligne (là aussi un contact avec un arbre en est la cause) a entraînée une augmentation de l'écoulement dans les lignes 138 kV vers Cleveland et une dégradation des niveaux de tension sur les lignes 138 kV et 69 kV.

4. **Phase 4** L'effondrement de tension dans le nord d'Ohio : dans cette étape plusieurs événements se sont succédés. Entre 15 :39 et 15 :58 :47 douze lignes de transmission 138 kV se sont déconnectées. La cause de cette suite d'événements sont pour la plupart dus à des avaries survenues au niveau des transformateurs et des disjoncteurs. L'élimination de toutes ces branches a fait augmenter encore plus l'écoulement de puissance vers les autres régions et entre 16 :00 et 16 :08 :59 quatre autres lignes 138 kV et la ligne Sammis-Star 345 kV se sont déconnectés. La ligne Sammis-Star a vu sa charge augmenter à environ 120% de la charge nominale, deux secondes plus tard exactement à 16 :05 :57, elle s'est détachée du réseau.

Contrairement aux précédentes lignes 345 kV qui se sont déconnectées du réseau à cause d'un court circuit terre, la ligne Sammis-Star s'est déconnectée à cause d'un réglage déficient d'un de ses relais<sup>12</sup> de protection qui a vu une impédance apparente faible (due à une dépression de tension et une augmentation de courant) i.e., interprété comme un court circuit. La déconnection de Sammis-Star a fait l'effet d'étincelle, entraînant le système dans un état incontrôlable (à ce stade aucune action n'aurait pu éviter l'effondrement) où une succession d'événements a produit l'effondrement de tension ayant touché les régions centre ouest, nord est des États Unis et la région d'Ontario au Canada. Le blackout a mis hors service 531 générateurs qui délivraient une puissance de plus de 62 000 MW<sup>13</sup>.

---

<sup>12</sup>Un relais sert à détecter une anomalie dans le réseau et à le signaler à un disjoncteur afin de déconnecter automatiquement la ligne, une fois le danger ou l'impression de danger passée la ligne est re-connectée. Si le problème persiste la ligne est déconnectée définitivement du réseau et une intervention humaine est dans la plupart des cas nécessaire. Le type de relais le plus utilisé pour les lignes de transmission est le relais d'impédance, qui détecte tout changement de courant ou de tension et calcule l'impédance apparente de la ligne, si cette dernière est inférieure à une certaine limite pendant une certaine durée, la ligne sous contrôle est déconnectée

<sup>13</sup>Ce qui représente près de 60% de l'ensemble d'électricité produite au Canada (le parc hydroélectrique Canadien) et équivaut aussi à la puissance installée du parc nucléaire Français



# Bibliographie

- [1] *IST Research Project No. IST-2001-33520*. <http://www.dii.unisi.it/hybrid/cc/>.
- [2] A. A. Agrachev and D. Liberzon. Lie-algebraic stability criteria for switched systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 40(1), 2001.
- [3] M. Alamir. Solutions of nonlinear optimal and robust control problems via a mixed collocation/dae's based algorithm. *Automatica*, 37 :1109–1115, 2001.
- [4] M. Alamir and S. A. Attia. Discussion on an optimal control approach for hybrid systems. *European Journal of Control*, 9(5), 2003.
- [5] M. Alamir and S. A. Attia. An efficient algorithm to solve optimal control problems for nonlinear switched hybrid systems. In *The 6th IFAC symposium, NOLCOS*, Stuttgart, Germany, 2004.
- [6] C. M. Alfaro, R. D. Benguria, and M. C. Depassier. Finite mode analysis of the generalized kuramoto-sivashinsky equation. *Physica D*, 61 :1–5, 1992.
- [7] A. Armaou and P. D. Christofides. Feedback control of the kuramoto-sivashinsky equation. *Physica D*, 137 :49–61, 2000.
- [8] Z. Artstein. Examples of stabilization with hybrid feedback. In R. Alur, T. A. Henzinger, and E. D. Sontag, editors, *Hybrid Systems III*, number 1066 in Lecture Notes in Computer Science, pages 173–185. Springer Verlag, 1993.
- [9] S. A. Attia and M. Alamir. On complexity reduction of voltage stabilization mpc schemes by partial local feedbacks. In *Joint IEEE Conf. on Decision and Control and the European Control Conference*, Seville, Spain, December 2005.
- [10] S. A. Attia, M. Alamir, and C. Canudas de Wit. Voltage collapse avoidance in power systems : A receding horizon approach. *Journal of Intelligent Automation and soft computing, special issue*, 2006.
- [11] S. A. Attia, M. Alamir, and C. Canudas de Wit. Sub optimal control of switched nonlinear systems under location and switching constraints. In *16th IFAC World Congress*, Prague, Czech Republic, July 4-8, 2005.
- [12] L. Bao, X. Duan, Z. Song, and Y. He. Dynamical analysis of voltage stability for a simple power system. *Electrical Power and Energy Systems*, 23 :557–564, 2001.

- [13] R. W. Beard, G. N. Saridis, and J. T. Wen. Approximate solutions to the time-invariant hamilton-jacobi-bellman equation. *Jouranl of Optimization Theory and Applications*, 96(3) :589–626, Mar 1998.
- [14] A. Bemporad, F. Borrelli, and M. Morari. Model predictive control based on linear programming—the explicit solution. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(12) :1974–1984, Dec 2002.
- [15] A. Bemporad, W. P. Maurice H. Heemels, and B. De Schutter. On hybrid systems and closed-loop mpc systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(5) :863–869, May 2002.
- [16] A. Bemporad and M. Morari. Control of systems integrating logic, dynamics, and constraints. *Automatica*, 35 :407–427, 1999.
- [17] S. C. Bengea and R. A. DeCarlo. Optimal and suboptimal control of switching systems. In *42nd IEEE Conf. on Decision and Control*, pages 5295–5300, Hawaii, USA, December 2003.
- [18] L. D. Berkovitz. *Optimal Control Theory*. Springer-Verlag, New York, NY, 1974.
- [19] A. Beydoun, L. Y. Wang, J. Sung, and S. Sivashankar. Hybrid control of automotive powertrain systems : A case study. HSCC. Springer Verlag, 2000.
- [20] J. F. Bonnans. On an algorithm for optimal control using pontryagin’s maximum principle. *SIAM J. Control and Optimization*, 24(3) :579–588, 1986.
- [21] M. S. Branicky. *Studies in hybrid systems : modeling, analysis, and control*. PhD thesis, Department of Electrical Engineering and Computer Science, MIT, 1995.
- [22] M. S. Branicky. Multiple lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43(4) :475–482, Apr 1998.
- [23] M. S. Branicky, V. S. Borkar, and S. M. Mitter. A unified framework for hybrid control : Model and optimal theory. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43(1) :31–45, Jan 1998.
- [24] M. S. Branicky and S. K. Mitter. Algorithms for optimal hybrid control. In *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, pages 2661–2666, New Orleans, USA, 1995.
- [25] R. W. Brockett. Hybrid models for motion control. In H. L. Trentelman and J. C. Willems, editors, *Essays in Control : Perspectives in the Theory and its Applications*, pages 29–53. Birhäuser, 1993.
- [26] P. E. Caines and M. Shahid Shaikh. Optimality zone algorithms for hybrid systems computation and control : From exponential to linear complexity. In *Proceedings of the 13th Mediterranean Conference on Control and Automation*, pages 1292–1297, 2005.

- [27] C.A. Canizares, A.C.Z. De Souza, and V.H. Quintana. Comparison of performance indices for detection of proximity to voltage collapse. *IEEE Transactions on Power Systems*, 11(3) :1441–1450, Aug 1996.
- [28] M. Cannon. Efficient nonlinear model predictive control algorithms. *Annual Reviews in Control*, 28 :229–237, 2004.
- [29] B. A. Carreras, D. E. Newman, and I. Dobson. Evidence for self-organized criticality in a time series of electric power system blackouts. *IEEE Trans. On circuits and systems*, 51(9) :1733–1740, Nov 2004.
- [30] C. G. Cassandras, D. L. Pepyne, and Y. Wardi. Optimal control of a class hybrid systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46(3) :398–415, Mar 2001.
- [31] H. C. Chang. Wave evolution on a falling film. *Annu. Rev. Fluid Mech*, 26 :103–136, 1994.
- [32] H. C. Chang, E. A. Demekhin, and E. Kalaidin. Generation and suppression of radiation by solitary pulses. *SIAM J. Appl. Math.*, 58(4) :1246–1277, Aug 1998.
- [33] L. H. Chen and H. C. Chang. Nonlinear waves on liquid film surfaces : Bifurcation analyses of the long wave equation. *Chem. Eng. Sci.*, 41 :2477–2486, 1986.
- [34] P. D. Christofides and P. Daoutidis. Finite dimensional control of parabolic pde systems using approximate inertial manifolds. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 216 :398–420, 1997.
- [35] Y. M. Chung and H. J. Sung. Sensitivity study of turbulence control with wall blowing and suction. In *Third International Symposium on Turbulence and Shear Flow Phenomena*, pages 167–172, Sendai, Japan, 25-27 June 2003.
- [36] Y. M. Chung, H. J. Sung, and A. V. Boiko. Spatial simulation of the instability of channel flow with local suction/blowing. *Phys. of Fluids*, 11 :3258–3266, Sep 1997.
- [37] R. F. Curtain and H. J. Zwart. *An Introduction to Infinite-Dimensional Linear Systems Theory*. Texts in Applied Mathematics. Springer-Verlag, 1995.
- [38] T. Van Cutsem, Y. Jacquemart, J. N. Marquet, and P. Pruvot. A comprehensive analysis of mid-term voltage stability. *IEEE Transactions on Power Systems*, 10(3) :1173–1182, Aug 1995.
- [39] T. Van Cutsem, C. Moors, and D. Lefebvre. Design of load shedding schemes against voltage instability using combinatorial optimization. In *Power Engineering Society Winter Meeting, 2002. IEEE*, pages 848–853, 27-31 Jan 2002.
- [40] R. A. Decarlo, M. S. Branicky, S. Pettersson, and B. Lennartson. Perspectives and results on the stability and stabilizability of hybrid systems. *Proceedings of the IEEE*, 88(7) :1069–1082, July 2000.



- [41] M. A. Demetriou. Activation policy of smart controllers for flexible structures with multiple actuator/sensor pairs. In *Fourteenth International Symposium on MTNS, MTNS2000*, Perpignan, France, 2000.
- [42] M. A. Demetriou. Temporal allocation of actuator groups for the control of flexible cables with multiple switching actuators. In *IEEE Conf. on Control Applications, CCA*, Mexico City, Mexico, 2001.
- [43] G. G. Doronin and N. A. Larkin. Kuramoto sivashinsky model for a dusty medium. *Math. Meth. Appl. Sci*, 26 :179–192, 2003.
- [44] M. Egerstedt, Y. Wardi, and F. Delmotte. Optimal control of switching times in switched dynamical systems. In *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, Hawaii, USA, 2003.
- [45] N. H. El-Farra, Y. Lou, and P. D. Christofides. Fault-tolerant control of fluid dynamic systems via coordinated feedback and switching. *Computers and Chemical Engineering*, 27 :1913–1924, 2003.
- [46] Z. Feng, V. Ajjarapu, and D. J. Maratukulam. A comprehensive approach for preventive and corrective control to mitigate voltage collapse. *IEEE Transactions on Power Systems*, 15(2) :791–797, May 2000.
- [47] U.S.-Canada Power System Outage Task Force. Final report on the august 14, 2003 blackout in the united states and canada : Causes and recommendations. Technical report, NERC, Canada, Available for download at <http://www.nerc.com/~filez/blackout.html>, Apr 2004.
- [48] L. B. Freidovich and H. K. Khalil. Logic-based switching for the control of a class of nonlinear systems. In *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, pages 1059–1064, Hawaii , USA, 2003.
- [49] S. Galan and P. I. Barton. Dynamic optimization of hybrid systems. *Computers Chem. Engng*, 22 suppl. 1 :183–190, Mar 1998.
- [50] R. V. Gamkrelidze. On some extremal problems in the theory of differential equations with applications to the theory of optimal control. *Journal SIAM Control Ser. A*, 3(1) :106–128, 1965.
- [51] X. Ge, W. Kohn, A. Nerode, and J. B. Remmel. Hybrid systems : chattering approximation to relaxed control. volume 1066 of *Lecture Notes in Computer Sciences*, pages 76–101. Springer Verlag, 1996.
- [52] T. Geyer, M. Larsson, and M. Morari. Hybrid emergency voltage control in power systems. In *Proceedings of the European Control Conference*, UK, 2003.
- [53] K. Gokbayrak and C. G. Cassandras. Hybrid controllers for hierarchically decomposed systems. volume 1790 of *LNCS*, pages 117–129. Springer Verlag, 2000.

- [54] A. Gollu and P. Varaiya. Hybrid dynamical systems. In *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, pages 2708–2712, Florida, 1989.
- [55] J. Guckenheimer and P. Holmes. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcation of Vector Fields*. Springer Verlag, 1983.
- [56] R. M. Havira and J. B. Lewis. Computation of quantized controls using differential dynamic programming. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 17(2) :191–196, 1972.
- [57] S. Hedlund and A. Rantzer. Convex dynamic programming for hybrid systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(9) :1536–1540, Sep 2002.
- [58] T. A. Henzinger, P.H. Ho, and H. Wong-Toi. Algorithmic analysis of nonlinear hybrid systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43(4) :540–554, Apr 1998.
- [59] J. Hespanha and S. Morse. Stability of switched systems with average dwell time. In *38th IEEE Conf. on Decision and Control*, pages 2655–2660, December 1999.
- [60] J. P. Hespanha. Uniform stability of switched linear systems : Extension of lasalle’s invariance principle. *IEEE Trans. On Automatic Control*, 49(4) :470–482, 2004.
- [61] I. Hiskens and M. A. Pai. Trajectory sensitivity analysis of hybrid systems. *IEEE Trans. on Cir. and Sys.*, 47(2) :204–220, Feb 2000.
- [62] I. A. Hiskens. Analysis tools for power systems- contending with nonlinearities. *Proc. of the IEEE*, 83(11) :1573–1587, Nov 1995.
- [63] I. A. Hiskens. Non-uniqueness in reverse time of hybrid system trajectories. In M. Morari, L. Thiele, and R. Francesca, editors, *Hybrid Systems Control and Computation*, number 3414 in Lecture Notes in Computer Science, pages 339–353. Springer Verlag, 2005.
- [64] C. B. Hu and R. Temam. Robust control of the kuramoto-sivashinsky equation. *Dynamics of Continuous Discrete and Impulsive Systems*, 8 :315–338, 2001.
- [65] J. Imae. A chattering control based algorithm for nonlinear optimal control problems with bounded controls restricted to non-convex sets. *Int. J. Control*, 68(1) :155–170, 1997.
- [66] D. H. Jacobson. Differential dynamic programming methods for solving bang-bang control problems. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 13(6) :661–675, 1968.
- [67] D. H. Jacobson, S. B. Gershwin, and M. M. Lele. Computation of optimal singular controls. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 15(1) :67–73, 1970.
- [68] B. Jarmark. On convergence control in differential dynamic programming applied to realistic aircraft and differential game problems. In *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, pages 471–479, 1977.
- [69] W. Ji and V. Venkatasubramanian. Dynamics of a minimal power system : Invariant tori and quasi-periodic motions. *IEEE Trans. Circuits and Systems*, 42(12) :981–1000, Dec 1995.

- [70] M. S. Jolly, I. G. Kevrekidis, and E.S. Titi. Approximate inertial manifolds for the kuramoto sivashinsky equation : Analysis and computations. *Physica D*, 44 :38–60, 1990.
- [71] D. Karlsson and D.J. Hill. Modelling and identification of nonlinear dynamic loads in power systems. *IEEE Transactions on Power Systems*, 9(1) :157–163, Feb 1994.
- [72] Y. Kuramoto and T. Tsuzuki. On the formation of dissipative structures in reaction-diffusion systems. *Prog. Theo. Phys.*, 54 :687–699, 1975.
- [73] M. Larsson. The abb power transmission test case. Technical report, ABB, <http://www.dii.unisi.it/hybrid/cc/>, Oct 2002.
- [74] M. Larsson. A model-predictive approach to emergency voltage control in electrical power systems. In *43rd IEEE Conf. on Decision and Control*, pages 2016–2022, Paradise Island, BAHAMAS, December 2004.
- [75] M. Larsson and D. Karlsson. Coordinated system protection scheme against voltage collapse using heuristic search and predictive control. *IEEE Transactions on Power Systems*, 18(3) :1001–1006, Aug 2003.
- [76] C. H. Lee and H. T. Tran. Reduced order based feedback control of the kuramoto sivashinsky equation. *J. Comp. and Appl. Math.*, 173 :1–19, 2005.
- [77] E. B. Lee and L. Markus. *Foundations of Optimal Control Theory*. Series in Applied Mathematics. SIAM, 1967.
- [78] D. Liberzon and A. S. Morse. Basic problems in stability and design of switched systems. *IEEE Control Systems Magazine*, 19(5) :59–70, 1999.
- [79] D. Liberzon and R. Tempo. Common lyapunov functions and gradient algorithms. *IEEE Trans. On Aut. Contr.*, 49(6) :990–994, Jun 2004.
- [80] S. P. Lin and J. N. Chen. The mechanism of surface wave suppression in film flow down a vertical plane. *Phys. of Fluids*, 10 :1787–1792, Aug 1998.
- [81] S. P. Lin and W. Y. Jiang. The mechanism of suppression or enhancement of three-dimensional surface waves in film flow down a vertical plane. *Phys. of Fluids*, 14 :4088–4091, Nov 2002.
- [82] Y. Lin and E. D. Sontag. Universal formula for stabilization with bounded controls. *Systems and Control Letters*, 16 :393–397, 1991.
- [83] W. J. Liu and M. Krstic. Stability enhancement by boundary control in the kuramoto-sivashinsky equation. *Nonlinear Analysis*, 43 :485–507, 2001.
- [84] Y. Lou and P. D. Christofides. Feedback control of surface roughness in sputtering processes using the stochastic kuramoto-sivashinsky equation. *Computers and Chemical Engineering*, 29 :741–759, 2005.

- [85] J. Lu, L. Z. Liao, A. Nerode, and J. H. Taylor. Optimal control of systems with continuous and discrete states. In *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, pages 2292–2297, Texas, USA, 1993.
- [86] J. Lumley and P. Blossey. Control of turbulence. *Annu. Rev. Fluid Mech*, 30 :311–327, 1998.
- [87] J. Lygeros, G. Pappas, and S. Sastry. An introduction to hybrid system modeling, analysis, and control. In *14th IEEE Int. Symp. on Intell. Contr/Intell. Syst. and Semiotics*, Massachusetts, USA, 1999. Tutorial Session.
- [88] M. Margaliot and D. Liberzon. A lie-algebraic condition for stability of switched nonlinear systems. In *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, pages 4619–4624, Bahamas, 2004.
- [89] Mathworks. *Using Simulink and Stateflow in Automotive Applications*. 1998.
- [90] D. Q. Mayne and E. Polak. First-order strong variation algorithms for optimal control. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 16(3/4) :277–301, 1975.
- [91] D. Q. Mayne, J. B. Rawlings, C. V. Rao, and P. O. Scokaert. Constrained model predictive control : Stability and optimality. *Automatica*, 36 :789–814, 2000.
- [92] F. Mazenc, S. Mondié, and S. I. Niculescu. Global stabilization of oscillators with bounded delayed input. *Systems and Control Letters*, 53(5) :415–422, Dec 2004.
- [93] N. H. McClamroch and I. Kolmanovsky. Performance benefits of hybrid control design for linear and nonlinear systems. *Proc. of IEEE*, 88(7) :1083–1096, Jul 2000.
- [94] A. N. Michel. Recent trends in the stability analysis of hybrid dynamical systems. *IEEE Trans. On Cir. and Syst.*, 45(1) :120–134, Jan 1999.
- [95] J. A. Momoh, R.J. Koessler, M. S. Bond, B. Stott, D. Sun, A. Papalexopoulos, and P. Ristanovic. Challenges to optimal power flow. *IEEE Transactions on Power Systems*, 12(1) :444–455, Feb 1997.
- [96] K. S. Narendra and J. Balakrishnan. A common lyapunov function for stable lti systems with commuting a-matrices. *IEEE Trans. On Aut. Contr.*, 39(12), 1994.
- [97] A. Nerode and W. Kohn. Models for hybrid systems : Automata, topologies, controllability, observability. In R. L. Grossman, A. Nerode, A.P. Ravn, and H. Rischel, editors, *Lecture Notes in Computer Sciences*, volume 736, pages 317–356. Springer-Verlag, 1993.
- [98] D. L. Pepyne and C. G. Cassandras. Modeling, analysis and optimal control of a class of hybrid systems. *Discrete Event Dynamic Systems*, 8 :175–201, 1998.
- [99] D. L. Pepyne, C. G. Panayiotou, C. G. Cassandras, and Y. C. Ho. Vulnerability assessment and allocation of protection resources in power systems. In *American Control Conference, Arlington, Virginia*, pages 4705–4710, June 2001.

- [100] S. Pettersson and B. Lennartson. Stabilization of hybrid systems using a min-projection strategy. In *American Control Conference, Arlington, Virginia*, pages 223–228, December 2001.
- [101] B. Piccoli. Hybrid systems and optimal control. In *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, pages 13–18, Florida, USA, 1998.
- [102] B. Piccoli. Necessary conditions for hybrid optimization. In *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, pages 410–415, Arizona, USA, 1999.
- [103] D. A. Pierre. *Optimization Theory with Applications*. Dover Publications, 1986.
- [104] L. S. Pontryagin, V. G. Boltyanskii, R. V. Gamkrelidze, and E. F. Mishchenko. *The Mathematical Theory of Optimal Processes*. Interscience Publishers, 1962.
- [105] S. Prajna and A. Papachristodoulou. Analysis of switched systems- beyond piecewise quadratic methods. In *Proceedings of the American Control Conference*, pages 2779–2784, Colorado, 2003.
- [106] P. F. Puleston, S. Spurgeon, and X. Y. Lu. A nonlinear sliding mode control framework for engine speed control. In *4th Inter. symposium on MTNS*, Perpignan, France, 2000.
- [107] S. J. Qin and T. A. Bagdwell. A survey of industrial model predictive control technology. *Control Engineering Practice*, 11 :733–764, 2003.
- [108] J. B. Rawlings. Tutorial overview of model predictive control. *IEEE Cont. Sys. Magazine*, 20(3) :38–52, Jun 2000.
- [109] R. Riaza. On the singularity-induced bifurcation theorem. *IEEE Trans. On Automatic Control*, 47(9) :1520–1523, Sep 2002.
- [110] P. Riedinger. *Contribution à la commande optimale des systèmes dynamiques hybrides*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Lorraine, Nancy, France, 2000.
- [111] P. Riedinger, J. Daafouz, and C. Iung. Suboptimal switched controls in context of singular arcs. In *42nd IEEE Conf. on Decision and Control*, pages 6254–6259, Hawaii, USA, December 2003.
- [112] P. Riedinger, C. Iung, and F. Kratz. An optimal control approach for hybrid systems. *European Journal of Control*, 9(5) :449–458, 2003.
- [113] P. Riedinger, F. Kratz, and C. Iung. Linear quadratic optimization for hybrid systems. In *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, pages 3059–3066, Arizona , USA, 1999.
- [114] S. Rovnyak, C. W. Liu, J. Lu, W. Ma, and J. Thorp. Predicting future behavior of transient events rapidly enough to evaluate remedial control options in real-time. *IEEE Transactions on Power Systems*, 10(3) :1195–1203, Aug 1995.
- [115] Y. Sakawa and Y. Shindo. On global convergence of an algorithm for optimal control. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 25(6) :1149–1153, 1980.

- [116] K. Sakurama and T. Sugie. Basic analysis of hybrid systems with autonomous jumps of state trajectories. In *American Control Conference, Denver, USA*, pages 5215–5220, June 2003.
- [117] M. La Scala, M. Trovato, and C. Antonelli. On line dynamic preventive control : an algorithm for transient security dispatch. *IEEE Transactions on Power Systems*, 13(2) :601–610, May 1998.
- [118] M. S. Shaikh and P. E. Caines. On the optimal control of hybrid systems : Analysis and zonal algorithms for trajectory and schedule optimization. In *42nd IEEE Conf. on Decision and Control*, pages 2144–2149, Hawaii, USA, December 2003.
- [119] M. Shahid Shaikh and P. E. Caines. On the optimal control of hybrid systems : Optimization of trajectories, switching times, and location schedules. In O. Maler and A. Pnueli, editors, *HSCC 2003*, number 2623 in Lecture Notes in Computer Science, pages 466–481. Springer Verlag, 2003.
- [120] S. N. Simic, K. H. Johansson, S. Sastry, and J. Lygeros. Towards a geometric theory of hybrid systems. In N. Lynch and B. Krogh, editors, *HSCC*, Lecture Notes in Computer Science, pages 421–436. Springer Verlag, 2000.
- [121] G. I. Sivashinsky. On flame propagation under conditions of stoichiometry. *SIAM J. Applied Mathematics*, 39 :67–82, 1980.
- [122] S. Solyom, B. Lincoln, and A. Rantzer. A novel method for voltage stability control in power systems. In *6th World Automation Congress*, Sevilla, SPAIN, July 2004.
- [123] E. D. Sontag. *Mathematical Control Theory : Deterministic Finite Dimensional Systems*. Texts in Applied Mathematics. Springer-Verlag, 1998.
- [124] H. J. Sussmann. A nonsmooth hybrid maximum principle. In D. Aeyels, F. Lamnabhi-Lagarrigue, and A. J. van der Schaft, editors, *Stability and Stabilization of Nonlinear Systems*, number 246 in Lecture Notes in Control and Information Sciences, pages 325–354. Springer Verlag, 1999.
- [125] A. Takehara, Y. Tanaka, and S. Iwamoto. Voltage stability preventive and emergency-preventive control using vipi sensitivity. *Electrical Engineering in Japan*, 143(4) :22–30, May 2003.
- [126] L. Tavernini. Differential automata models of hysteresis. In A. Visintin, editor, *Models of Hysteresis*, pages 163–174. Longman, Harlow, 1993.
- [127] J. Till, S. Engell, S. Panek, and O. Stursberg. Applied hybrid system optimization : an empirical investigation of complexity. *Control Eng. Practice*, (12) :1291–1303, 2004.
- [128] P. Varaiya. Smart cars on smart roads : Problems of control. *IEEE Trans. On Aut. Contr.*, 38(2) :195–207, Feb 1993.
- [129] L. Varga and C. Cañizares. Time dependence of controls to avoid voltage collapse. *IEEE Transactions on Power Systems*, 15(4) :791–797, Nov 2000.

- [130] V. Venkatasubramanian, H. Scattler, and J. Zaborsky. A taxonomy of the dynamics of large constrained nonlinear systems. *Proc. of the IEEE*, 83(11) :1530–1561, Nov 1995.
- [131] V. Venkatasubramanian, H. Schättler, and J. Zaborsky. Analysis of the tap changer related voltage collapse phenomena for the large electric power system. In *31st IEEE Conf. on Decision and Control*, pages 2920–2927, December 1992.
- [132] V. Venkatasubramanian, H. Schattler, and J. Zaborsky. Voltage dynamics : Study of a generator with voltage control, transmission, and matched MW load. *IEEE Trans. Automatic Control*, 37(11) :1717–1733, Nov 1992.
- [133] C. Vournas and M. Karystianos. Load tap changers in emergency and preventive voltage stability control. *IEEE Transactions on Power Systems*, 19(1) :492–498, Feb 2004.
- [134] L.Y. Wang, A. Beydoun, J. Cook, J. Sun, and I. Kolmanovsky. *Control using logic based switching*, chapter Optimal hybrid control with applications to automotive powertrain systems. Springer verlag, 1996.
- [135] J. Y. Wen, Q. H. Wu, D. R. Turner, S. J. Cheng, and J. Fitch. Optimal coordinated voltage control for power system voltage stability. *IEEE Transactions on Power Systems*, 19(2) :1115–1122, May 2004.
- [136] H. S. Witsenhausen. A class of hybrid-state continuous-time dynamic systems. *IEEE Trans. on Automatic Control*, AC-11(2) :161–167, 1966.
- [137] Q. Wu, D. H. Popovic, D. J. Hill, and C. J. Parker. Voltage security enhancement via coordinated control. *IEEE Trans. On Power systems*, 16(NO. 1) :127–135, Feb. 2001.
- [138] X. Xu and P. J. Antsaklis. A dynamic programming approach for optimal control of switched systems. In *Proceedings of the IEEE Conference on Systems, Man, and Cybernetics*, pages 1822–1827, Sydney, Australia, 2000.
- [139] X. Xu and P. J. Antsaklis. An approach to optimal control of switched systems with internally forced switchings. In *Proceedings of the American Control Conference*, pages 148–153, Anchorage , USA, 2002.
- [140] X. Xu and P. J. Antsaklis. Optimal control of switched systems via nonlinear optimization based on direct differentiation of value functions. *International Journal of Control*, 75(16) :1406–1426, 2002.
- [141] X. Xu and P. J. Antsaklis. Results and perspectives on computational methods for optimal control of switched systems. In O. Maler and A. Pnueli, editors, *HSCC 2003*, number 2623 in Lecture Notes in Computer Science, pages 540–555. Springer Verlag, 2003.
- [142] X. Xu and P. J. Antsaklis. Optimal control of switched systems based on parametrization of the switching instants. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 49(1) :2–16, Jan 2004.

- [143] G. Zhai, H. Lin, X. Xu, and A. N. Michel. Stability analysis and design of switched normal systems. In *43 rd IEEE Conferenec on Control and Decision*, pages 3253–3258, Dec 2004.
- [144] G. Zhait, B. Hu, and K. Yasudat A. N. Michel. Stability analysis of switched systems with stable and unstable subsystems : An average dwell time approach. In *Proceedings of the American Control Conference*, pages 200–204, Illinois, 2000.
- [145] W. Zhang, M. S. Branicky, and S. M. Phillips. Stability of networked control systems. *IEEE Contr. Syst. Magazine*, (2) :84–99, Feb 2001.



---

**Résumé :** Cette thèse est consacrée au développement d'algorithmes de complexité réduite pour la commande des systèmes hybrides à commutations. Des applications aussi diverses que l'automobile, la mécanique des fluides et les réseaux électriques sont traitées. Des schémas généraux de résolution de problèmes de commande optimale et prédictive sont proposés. Le souci permanent et la principale motivation est dans chaque méthode la réduction de la complexité et la combinatoire souvent associées à ces systèmes. La thèse est structurée en deux parties. La première partie est consacrée à la commande optimale des systèmes à commutations. Un algorithme basé sur le concept des variations fortes est développé et des résultats de convergence démontrés. La complexité du schéma proposé est linéaire dans le nombre de configurations, ce qui le rend attractif pour des applications de grande dimension. Un modèle d'un véhicule automobile est utilisé pour illustrer cette approche. La seconde partie est consacrée au développement d'une approche hiérarchique pour la commande des systèmes à commutations. Au niveau bas, une boucle de commande est associée à chaque configuration et une commande prédictive avec une paramétrisation réduite est utilisée au niveau haut. Sur la base de cette approche, deux principaux schémas de commandes sont proposés et appliqués respectivement à la stabilisation d'un fluide par commutation entre actionneurs et aux problèmes de stabilisation des tensions dans les réseaux électriques.

---

ON THE CONTROL OF HYBRID NONLINEAR SYSTEMS

---

**Abstract :** This dissertation concerns the development of reduced complexity controllers for hybrid switched systems. A diverse number of applications from automotive industry, fluid dynamics and power systems are treated. Some general open loop optimal and predictive control schemes are proposed. The main motivation behind each method is the reduction of the combinatorics. In this thesis, two main contributions can be distinguished. The first one concerns the optimal control of switched nonlinear systems where an algorithm based on strong variations is proposed and some convergence results proven. The complexity of the scheme is linear in the number of locations, this in conjunction with its simplicity makes it attractive for large scale systems. An example from the automotive industry is treated to further illustrate the tractability of the scheme. The second contribution concerns the development of a hierarchical approach for switched nonlinear systems. At the lower level, feedback controllers are associated to each location and at the higher level a predictive approach with a reduced order parametrization is in force. Based on this methodology, two schemes are developed and successfully tested in respectively fluid stabilisation by actuator switching and voltage stabilization in power systems.

---

**Discipline :** Automatique Productique

---

**Mots clés :** Systèmes hybrides, systèmes à commutations, commande optimale, principe du Maximum, algorithme de commande, commande prédictive, commande hiérarchisée, système fluide, l'équation de Kuramoto-Sivashinsky, effondrement de tension, bifurcation, optimisation combinatoire, paramétrisation de la commande.

**Keywords :** hybrid systems, switched systems, optimal control, the Maximum principle, control algorithm, predictive control, hierarchical control, fluid systems, the Kuramoto-Sivashinsky equation, voltage collapse, bifurcation, combinatorial optimisation, control parametrization.

---

Laboratoire d'Automatique de Grenoble-ENSIEG-BP46, 38402 Saint-Martin d'Hères, FRANCE.