



**HAL**  
open science

# Lumière diffuse et microsphères multicouches : calculs et réalisations

Philippe Voarino

► **To cite this version:**

Philippe Voarino. Lumière diffuse et microsphères multicouches : calculs et réalisations. Matière Condensée [cond-mat]. Université de droit, d'économie et des sciences - Aix-Marseille III, 2004. Français. NNT : . tel-00083581

**HAL Id: tel-00083581**

**<https://theses.hal.science/tel-00083581>**

Submitted on 3 Jul 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITE DE DROIT, D'ECONOMIE ET DES SCIENCES  
D'AIX-MARSEILLE (AIX-MARSEILLE III)

**THESE**

présentée et soutenue publiquement  
par **Philippe VOARINO** le **9 juillet 2004**

pour obtenir le grade de

DOCTEUR EN SCIENCES DE L'UNIVERSITE DE DROIT, D'ECONOMIE ET  
DES SCIENCES D'AIX-MARSEILLE

**LUMIERE DIFFUSE ET MICROSPHERES  
MULTICOUCHES :  
CALCULS ET REALISATIONS**

Spécialité : Electronique, Optronique et Systèmes  
Ecole Doctorale : Physique, Sciences de la Matière

**Rapporteurs :**

M. Jacques LAFAIT  
M. Jean-Louis MEYZONNETTE

**Jury :**

M. Claude AMRA (Directeur de thèse)  
M. Bernard CRETIN  
Mme. Carole DEUMIE (Co-directrice de thèse)  
M. Jacques LAFAIT  
M. Jean-Louis MEYZONNETTE  
M. Jean-Paul POCHOLLE



# Table des matières

REMERCIEMENTS	ix
INTRODUCTION	xi
<b>I Diffusion de la lumière par une sphère homogène</b>	<b>1</b>
<b>1 Modèle théorique</b>	<b>5</b>
1.1 Etude scalaire de l'équation de Helmholtz . . . . .	5
1.1.1 Equations différentielles à variable unique . . . . .	7
1.1.2 Solutions des équations différentielles scalaires . . . . .	7
1.2 Etude vectorielle de l'équation de Helmholtz . . . . .	9
1.2.1 Construction d'une famille de solutions . . . . .	9
1.2.2 Cas d'une sphère centrée . . . . .	10
1.3 Solutions électromagnétiques . . . . .	11
1.4 Détermination des constantes . . . . .	13
1.4.1 Onde incidente . . . . .	14
1.4.2 Onde diffractée à l'extérieur de la sphère . . . . .	14
1.4.3 Onde diffractée dans la sphère . . . . .	15
1.5 Continuité des composantes sur la surface de la sphère . . . . .	15
1.6 Expression des coefficients . . . . .	15
<b>2 Expressions asymptotiques et polarisation</b>	<b>17</b>
2.1 Champ diffracté à l'infini par une sphère de rayon arbitraire . . . . .	17
2.2 Sphère de rayon petit devant la longueur d'onde . . . . .	19
2.3 Sphère de rayon grand face à la longueur d'onde . . . . .	21
<b>3 Calculs de flux</b>	<b>23</b>
3.1 Bilan d'énergie . . . . .	23
3.2 Flux diffracté . . . . .	24
3.3 Extinction . . . . .	25
3.4 Flux absorbé . . . . .	25
3.5 Normalisation effective . . . . .	26

<b>4 Premiers résultats numériques</b>	<b>27</b>
4.1 Influence des fonctions de Bessel . . . . .	27
4.2 Influence des fonctions harmoniques . . . . .	28
4.3 Influence des fonctions de Legendre . . . . .	28
4.4 Convergence de la série . . . . .	29
4.5 Analyse des composantes . . . . .	30
4.6 Section efficace de diffusion . . . . .	32
4.7 Réponses angulaire et spectrale . . . . .	33
4.8 Cas d'une sphère absorbante ou métallique . . . . .	35
4.9 Analyse des résonances étroites . . . . .	36
<b>5 Conclusion</b>	<b>39</b>
<b>II Extension de la théorie et des codes de calculs au cas de sphères multicouches concentriques</b>	<b>41</b>
<b>6 Extension du modèle</b>	<b>45</b>
6.1 Expression du champ incident . . . . .	46
6.2 Expression du champ à l'extérieur de la sphère multicouche . . . . .	46
6.3 Expression du champ dans la sphère substrat . . . . .	47
6.4 Expression du champ à l'intérieur d'une couche concentrique . . . . .	47
6.5 Continuité des composantes à chaque interface des couches concentriques . . . . .	48
6.6 Relations de récurrence . . . . .	48
6.7 Conditions aux limites . . . . .	50
<b>7 Résultats numériques</b>	<b>51</b>
7.1 Structures classiques : empilements multicouches plans . . . . .	51
7.2 Sphères de type substrat : étude de tolérance . . . . .	53
7.3 Influence du revêtement de surface : cas de faibles épaisseurs . . . . .	59
7.4 Influence du revêtement de surface : couche quart d'onde . . . . .	61
7.4.1 Cas d'une petite sphère substrat . . . . .	61
7.4.2 Cas d'une sphère substrat de rayon 10 nm . . . . .	63
7.4.3 Cas d'une sphère substrat de rayon 100 nm . . . . .	65
7.4.4 Cas d'une sphère substrat de rayon 1 $\mu\text{m}$ . . . . .	67
7.4.5 Cas d'une sphère substrat de rayon 15 $\mu\text{m}$ . . . . .	69
7.4.6 Cas d'une sphère substrat de rayon 65 $\mu\text{m}$ . . . . .	72
7.5 Étude d'une couche métallique : l'aluminium . . . . .	73
<b>8 Conclusion</b>	<b>75</b>

<b>III Filtrage et colorimétrie</b>	<b>77</b>
<b>9 Définition de la couleur</b>	<b>81</b>
9.1 Synthèse par couleur additive : coefficients colorimétriques . . . . .	82
9.2 Fonctions colorimétriques . . . . .	83
9.3 Le système CIE RGB 1931 . . . . .	84
9.4 Le système CIEXYZ 1931 . . . . .	86
9.5 Etalons de couleur . . . . .	87
<b>10 Sphères de silice de type substrat</b>	<b>89</b>
10.1 Étude colorimétrique du flux total diffusé . . . . .	89
10.2 Etude colorimétrique en fonction de $\theta$ . . . . .	90
10.2.1 Sphère de rayon $a = 1$ nm . . . . .	90
10.2.2 Sphère de rayon $a = 10$ nm . . . . .	91
10.2.3 Sphère de rayon $a = 100$ nm . . . . .	92
10.2.4 Sphère de rayon $a = 500$ nm . . . . .	94
10.2.5 Sphère de rayon $a = 1$ $\mu\text{m}$ . . . . .	96
10.2.6 Sphère de rayon $a = 15$ $\mu\text{m}$ . . . . .	97
10.2.7 Sphère de rayon $a = 65$ $\mu\text{m}$ . . . . .	98
10.2.8 Conclusion . . . . .	100
<b>11 Sphères de silice recouvertes</b>	<b>101</b>
11.1 Sphères de silice de rayon 100 nm . . . . .	102
11.2 Sphères de silice de rayon 500 nm . . . . .	108
<b>12 Le cas des sphères métalliques</b>	<b>115</b>
12.1 Sphère de type substrat (aluminium) . . . . .	115
12.1.1 Sphère d'aluminium de rayon $a = 1$ nm . . . . .	115
12.1.2 Sphère d'aluminium de rayon $a = 10$ nm . . . . .	116
12.1.3 Sphère d'aluminium de rayon $a = 100$ nm . . . . .	118
12.1.4 Sphère d'aluminium de rayon $a = 500$ nm . . . . .	119
12.1.5 Sphère d'aluminium de rayon $a = 1$ $\mu\text{m}$ . . . . .	120
12.2 Sphères métalliques recouvertes de diélectriques . . . . .	122
12.2.1 Sphères d'aluminium de rayon 100 nm . . . . .	122
12.2.2 Sphères de rayon $a = 500$ nm . . . . .	125
<b>13 Analogie avec les composants planaires</b>	<b>129</b>
13.1 Recherche d'une période avec l'épaisseur déposée . . . . .	129
13.2 Cas d'une sphère réfléchissante de rayon important . . . . .	132
13.3 Autres empilements sur une sphère de grand rayon . . . . .	135
13.3.1 Sphère recouverte d'un anti-reflet . . . . .	135
13.3.2 Sphère recouverte d'un filtre Perot-Fabry . . . . .	136
13.3.3 Sphère de type « spacer » pour un Perot-Fabry . . . . .	138
13.3.4 Sphère recouverte d'un dichroïque . . . . .	139

13.3.5	Sphère recouverte d'un empilement séparateur . . . . .	140
13.3.6	Conclusion . . . . .	142
<b>IV</b>	<b>Expériences et appareillages</b>	<b>143</b>
<b>14</b>	<b>Mise au point du bâti de pulvérisation</b>	<b>147</b>
14.1	Essais préliminaires . . . . .	147
14.1.1	Principe de l'E.B.D. . . . .	148
14.1.2	Configuration sphérique . . . . .	148
14.2	L'Ion Beam Sputtering : principes de base . . . . .	150
14.2.1	Procédé . . . . .	150
14.2.2	L'angle d'émission des atomes . . . . .	152
14.2.3	Le pompage . . . . .	154
14.2.4	Les panneaux d'affichage . . . . .	155
14.2.5	Le canon à ions . . . . .	155
14.2.6	Le porte cible . . . . .	159
14.2.7	La microbalance à quartz . . . . .	160
14.3	Essais par Sputtering sur substrats plans . . . . .	160
14.3.1	Uniformité de l'indiatrice de matière . . . . .	162
14.3.2	Indice et absorption des couches minces . . . . .	162
14.4	Dépôts sur microsphères . . . . .	165
14.4.1	Configuration spécifique . . . . .	165
14.4.2	Détermination du temps de dépôt sur substrat sphérique . . . . .	166
14.5	Conclusion . . . . .	168
<b>15</b>	<b>caractérisation de dépôts sur sphères</b>	<b>169</b>
15.1	Uniformité du revêtement sur microsphères . . . . .	169
15.2	Outils de caractérisation . . . . .	170
15.2.1	Diffusomètre à source laser . . . . .	170
15.2.2	Diffusomètre à source blanche . . . . .	173
15.3	Applications sur sphères calibrées . . . . .	179
15.3.1	Sphères nues de 30 et 130 microns . . . . .	180
15.3.2	Sphère nue isolée de 20 $\mu\text{m}$ de diamètre . . . . .	182
15.3.3	Sphère nue isolée de 162 $\mu\text{m}$ de diamètre . . . . .	183
15.3.4	Sphères aluminées . . . . .	183
15.3.5	Sphères recouvertes de $Ta_2O_5$ . . . . .	184
15.3.6	Cas des sphères de 20 $\mu\text{m}$ de diamètre . . . . .	185
<b>16</b>	<b>Conclusion</b>	<b>189</b>
	<b>CONCLUSION ET PERSPECTIVES</b>	<b>191</b>
	<b>ANNEXES</b>	<b>192</b>

<b>A</b>	<b>Théorie de Mie</b>	<b>193</b>
A.1	Construction de la base ( $L_{e/omn}^{\vec{}}$ , $M_{e/omn}^{\vec{}}$ , $N_{e/omn}^{\vec{}}$ ) . . . . .	193
A.2	Expressions asymptotiques des fonctions radiales . . . . .	195
A.2.1	sphère de petit rayon face à la longueur d'onde . . . . .	195
A.2.2	sphère de grand rayon face à la longueur d'onde . . . . .	195
A.3	Calcul du flux diffracté . . . . .	197
<b>B</b>	<b>Description du code de calcul</b>	<b>201</b>
B.1	Le code Couches Minces Sphériques (C.M.S.) . . . . .	201
B.1.1	Le fichier de données . . . . .	201
B.1.2	Classe cmsLIREDONNEES . . . . .	201
B.1.3	Classe cmsBESSEL . . . . .	201
B.1.4	Classe cmsLEGENDRE . . . . .	202
B.1.5	Classe cmsVECTEURSMLN . . . . .	202
B.1.6	Classe cmsCHAMPS . . . . .	203
B.1.7	Classe cmsSOMMES . . . . .	203
B.1.8	Classe cmsFONCTIONS . . . . .	203
B.1.9	Classe cmsFLUX . . . . .	203
B.2	Les fonctions du C.M.S. . . . .	203
<b>C</b>	<b>Documents pour l'I.B.S.</b>	<b>207</b>
C.1	Documentation du canon à ions . . . . .	207
C.2	Procédures de dépôt . . . . .	209
	<b>Bibliographie</b>	<b>211</b>

*TABLE DES MATIÈRES*

---

# REMERCIEMENTS

Cette thèse a été effectuée à l'Institut Fresnel de septembre 2000 à décembre 2003, à l'interface des équipes « Milieux Aléatoires et Photonique de Puissance » et « Recherche en Matériaux, Technologie et Composants de Couches Minces Optiques ». Que les professeurs M. Commandré et M. Lequime, responsables de ces équipes, trouvent tout d'abord ici l'expression de mes remerciements.

La réalisation de ce travail a bénéficié de soutiens financiers par le CNRS et la Région PACA (bourse de thèse), ainsi que du Conseil Général et du Conseil Régional (équipements de pulvérisation sous vide). En outre, nos premiers résultats ont permis de recueillir le soutien d'une Action Coordonnée Optique à l'échelon national. Je voudrais ici exprimer ma reconnaissance à l'ensemble de ces institutionnels qui continuent de jouer un rôle clé au sein du laboratoire, en particulier en région PACA.

Avec intensité je veux maintenant exprimer mes remerciements à mes deux directeurs de thèse, Claude Amra, directeur de l'Institut Fresnel, et Carole Deumié, maître de conférence. Je tiens à remercier Claude Amra pour sa disponibilité et ses remarques éclairantes pour mener à bien ce projet. Je remercie tout particulièrement Carole Deumié pour son exigence et son sens critique qui ont permis d'étoffer ce travail de thèse.

J'exprime également toute ma reconnaissance à l'ensemble des permanents de l'institut Fresnel, administratifs, enseignants-chercheurs et chercheurs, techniciens...

Je remercie pour leur disponibilité et pour leur bonne humeur toute l'équipe technologique, à savoir G. Marchand, G. Albrand, M. Cathelinaud, L. Roussel, J.P. Spinelli, et tout particulièrement Cihan Koc pour avoir aidé à la réalisation du bâti VEECO et participé aux expériences.

H. Tortel et B. Stout des équipes TEM et CLARTE m'ont permis de valider mes premières expériences numériques, et je leur en suis vivement reconnaissant. M. Saillard, responsable de l'équipe CLARTE, nous a fait part de remarques pertinentes quant à la partie théorique ; je l'en remercie avec sincérité.

Je ne pourrais pas oublier Myriam Zerrad avec qui j'ai fait équipe ces derniers

## REMERCIEMENTS

---

mois, pour faire face à ma condition d'ATER à Montpellier. M. Zerrad poursuit aujourd'hui ces travaux sur les poudres interférentielles. Je la remercie pour son enthousiasme et sa grande disponibilité.

Je tiens aussi à remercier les doctorants passés et présents (Laeticia Abel, Nathalie Destouches, Annelise During, Anne-Laure Ferembach, Bertrand Bertussi, Franck Billard, Emilien Etienne, Johan Floriot, Frédéric Galland, Olivier Gilbert, Julien Lumeau, Thomas Olivier, Thomas Mazingues...) et mes collègues de bureau qui ont dû supporter toutes mes facéties : Sofienne Guissi, Rémy Parmentier, Laurent Galais, et tout récemment Hélène Krol.

Enfin, je remercie Céline, ma famille et mes amis pour m'avoir soutenu tout au long ce parcours semé d'embûches, mais aussi de joie intense. MERCI.

# INTRODUCTION

J'ai effectué mes activités de recherche dans le cadre d'une thèse de doctorat cofinancée par le CNRS et la Région, à l'Institut Fresnel (UMRSTIC 6133 comprenant 120 personnes au quotidien) sous la responsabilité de C. AMRA, directeur du laboratoire et directeur de thèse, et de C. DEUMIE, maître de conférences. Cette activité est située à l'interface entre deux équipes : l'équipe Milieux Aléatoires et Photonique de Puissance (*MAP*<sup>2</sup>) dirigée par M. Commandré, et l'équipe Recherche en Matériaux, Technologie et Composants de Couches Minces Optiques (RCMO) dirigée par M. Lequime. L'Institut Fresnel regroupe des thématiques de traitement du Signal et de l'Image, de l'Electromagnétisme théorique et de l'Optique Expérimentale. L'équipe RCMO a pour but de concevoir, réaliser et caractériser les systèmes interférentiels multicouches destinés au filtrage spectral de la lumière. L'équipe *MAP*<sup>2</sup> possède une large expérience des phénomènes de diffusion lumineuse et d'endommagement laser dans les filtres optiques interférentiels.

D'une façon plus générale, le cœur technologique du laboratoire est au centre des activités de l'équipe RCMO, qui dispose d'un centre de ressources quasi-unique en France pour fabriquer des filtres interférentiels multicouches : antireflets, miroirs, Fabry-Pérot, dichroïques, polariseurs et séparateurs..., autant de composants stratégiques pour l'optique de précision, avec des domaines d'application allant du spatial aux lasers de puissance, la nano-photonique et la bio-photonique, la visualisation, la microélectronique... Toutefois la majorité de ces composants est destinée au contrôle de la lumière spéculaire décrite par les lois de Snell/Descartes, parce que les substrats utilisés sont en général plans ou à grands rayons de courbure. Il se trouve que pour un nombre d'applications en forte croissance (couleur, cosmétique, microcavités, télécommunications, furtivité, capteurs...), une demande existe quant à la réalisation de fonctions optiques similaires mais fonctionnant en lumière diffuse. En d'autres termes, la fabrication de poudres optiques artificielles (interférentielles) non absorbantes et sans pigments, correspond aujourd'hui à une véritable demande pour les applications sus-citées, et cet objectif a été le moteur de ma thèse.

Précisons d'emblée que ce sujet était nouveau pour le laboratoire. Du point de vue de la fabrication, seuls des substrats plans standards étaient jusqu'ici revêtus de multicouches, et nous verrons par ailleurs qu'il nous a fallu introduire une technologie nouvelle (D.I.B.S.) pour cette fabrication. Du point de vue de la théorie et en ce

qui concerne le modèle de Mie, des codes (que nous avons utilisés pour les premiers tests) avaient été développés par H. Tortel de l'équipe TEM de l'UMR Fresnel dirigée par M. Saillard, mais ils ne concernaient pas les sphères multicouches. Quant à l'équipe MAP2, elle s'était jusqu'ici consacrée aux rugosités d'interface et hétérogénéités de volume dans les multicouches, avec des modèles adaptés aux composants à faibles pertes. Enfin, l'activité couleur n'avait pas encore sensibilisé l'UMR de façon spécifique, alors qu'un GDR a été créé sur ce sujet (J. Lafait, laboratoire LOS) au cours de ma troisième année de thèse.

La problématique de ma thèse a donc été de réaliser des poudres optiques artificielles dans le but de filtrer la lumière diffuse, pour des applications couleur (cosmétique) en particulier. De nombreuses autres applications tournent autour des composants nanométriques et micrométriques sphériques. La plupart du temps il faut appliquer la théorie dite de Mie-Lorentz [1] [2]. Les études sont de plus en plus pointues, grâce à l'essor des calculateurs. Des algorithmes de plus en plus complexes ont été élaborés [3] [4], avec des critères pour diminuer le temps de calculs. Citons par exemple le critère de Wiscombe [5]. Ces codes numériques sont capables de simuler l'interaction entre une sphère et une onde plane mais aussi avec un faisceau arbitraire [6] [7] [8] [9]. Il existe aussi des codes récents validés pour des sphères de grands rayons utilisant la théorie de Mie [10] [11]. Cette théorie a été étendue à des couches sphériques pour étudier les fluctuations des champs électromagnétiques à l'intérieur de la sphère [12] [13] [14]. L'étude numérique renseigne aussi sur les phénomènes de résonances [15] [16] [17], et, sur la structure fine du champ diffusé de nos sphères diélectriques ou métalliques [18]. Grâce à cette étude très précise, nous arrivons à faire coïncider chaque maximum à la valeur d'un coefficient de diffusion [19] [20]. Les modes de galerie sont aussi très étudiés [21]. La couche où l'onde est ainsi piégée joue le rôle d'un guide de lumière. L'étude est aussi faite pour le cas de plusieurs sphères [22]. L'analyse de la diffusion de Mie d'une sphère recouverte de multicouche permet de différencier des modes extérieurs, par diffusion (structure fine) mais aussi à l'intérieur de la sphère (mode de galerie) [23]. D'autre part, la simulation ne suffit pas à tout expliquer. Il nous faut aussi caractériser expérimentalement les sphères. Différentes techniques existent, notamment des mesures en solution aqueuse de nanosphères de Latex ou de polystyrène [24], mais aussi des techniques sèches en positionnant les sphères en surface d'un échantillon plan [25] ou en utilisant un banc de montage holographique [26]. Lorsqu'elles sont organisées, les sphères peuvent donner lieu à des structures orientées appelées clusters de sphères [27] ou cristaux photoniques, comme le développe aujourd'hui B. Stout de l'équipe CLARTE dirigée par Maystre/Tayeb à l'UMR Fresnel. En outre, il existe des applications beaucoup plus proches de notre sujet. Par exemple, l'étude de la réponse optique de sphères nanométriques de ZnS, possédant une très faible distribution radiale, permet de remonter au diamètre des sphères calibrées [28]. Ainsi, la littérature est complexe et très variée du fait que la théorie de Mie soit pluridisciplinaire. Elle

a de nombreuses applications qui sont en perpétuelle évolution.

Pour réaliser des poudres optiques interférentielles à l'aide de multicouches, une première idée a consisté à déposer des couches minces planaires sur un substrat, puis à décoller ces couches et à les briser. Les bâtonnets ainsi créés ont une mémoire du multicouche, donc du filtre réalisé. Cependant ce procédé est difficile à mettre en oeuvre car au delà des problèmes de coûts et de quantité, il est difficile d'orienter les bâtonnets. L'Institut Fresnel s'est donc tourné vers une solution de multicouches concentriques sur des microsphères. Précisons malgré tout que cette première technique a été utilisée par la société OCLI (San Diego) il y a plusieurs années, et par le National Research Council du Canada pour des billets de banque non falsifiables...

Dans ce contexte, mes travaux de recherche ont été de nature théorique, expérimentale et technologique.

La première partie décrit la diffusion de la lumière par une sphère homogène, à l'aide de la théorie dite de Mie. Nous détaillons les expressions asymptotiques et nous donnons les validations du code de calcul avec les premiers résultats numériques.

La deuxième partie est consacrée au cas des sphères multicouches. J'ai étendu la théorie électromagnétique dite de Mie à des structures concentriques multicouches pour prédire la réponse spectrale et angulaire de micro-sphères recouvertes de matériaux diélectriques ou métalliques.

La troisième partie est axée sur l'aspect colorimétrique des composants micrométriques sphériques. Nous étudions la réponse angulaire et spectrale à l'aide de cartographies en trois dimensions. Nous comparons aussi la réponse optique de sphères concentriques et celle des composants planaires.

La quatrième partie détaille la partie expérimentale. Avec l'aide de deux personnels ITA du laboratoire, j'ai entièrement re-configuré une enceinte à vide pour y introduire un procédé de pulvérisation par faisceau d'ions (Ion Beam Sputtering). Dans une première étape, il a fallu valider cette technologie nouvelle au laboratoire en minimisant les pertes dans les matériaux en couches minces ( $Ta_2O_5/SiO_2$ ). Nous avons ensuite mis en place une configuration originale qui permet d'effectuer les dépôts de façon concentrique sur des microsphères, grâce à un mouvement aléatoire des sphères *in situ*. En outre, nous présentons les premières caractéristiques spectrales et angulaires de sphères non traitées et traitées.

Enfin, nous avons cherché à extraire les principales conclusions de ces travaux et à proposer des perspectives novatrices mais réalistes.

## INTRODUCTION

---

## Première partie

# Diffusion de la lumière par une sphère homogène



---

Cette première partie est consacrée à la description de la diffusion de la lumière par une sphère homogène, par la théorie dite de Mie :

- Dans le chapitre 1 nous décrivons de façon complète les éléments de cette théorie, pour aboutir à des expressions analytiques du champ diffusé en champ proche.
- Des développements asymptotiques sont utilisés au chapitre 2 et permettent d'accéder aux expressions simplifiées du champ lointain, qui seront utilisées en comparaison de l'expérience.
- Le chapitre 3 est consacré aux expressions intégrales analytiques exprimant les quantités totales de flux absorbé ou diffusé.
- Enfin, les codes de calcul sont validés au chapitre 4, où nous donnons les premiers résultats numériques illustrant les réponses angulaire et spectrale de sphères de différents diamètres.
- La conclusion est donnée en chapitre 5.

---

# Chapitre 1

## Modèle théorique

Pour étudier les champs électromagnétiques liés à la diffusion ou à la diffraction par une sphère, nous disposons de trois approches.

La première, dite théorie de Fraunhofer (1787-1826), est valable pour des sphères dont le diamètre est grand par rapport à la longueur d'onde. Par exemple, dans le cas de la granulométrie laser, les particules ont des tailles inférieures en général à 500  $\mu\text{m}$ . Pour l'application de cette théorie, les hypothèses suivantes sont nécessaires : particules sphériques non poreuses et opaques, diamètre des particules largement supérieur à la longueur d'onde, particules suffisamment éloignées les unes des autres, mouvement aléatoire, et toutes les particules sont supposées diffracter la lumière quelle que soit leur taille.

La deuxième approche est la théorie de Mie (1868-1957). De nombreux scientifiques de la fin du  $XIX^e$  siècle et début du  $XX^e$  comme Lorenz (1853-1928) ou Debye (1884-1966) se sont penchés sur ce problème et ont construit de nombreux outils mathématiques tels que les fonctions de Bessel [29] [2]. Cependant la paternité de la diffusion d'une onde par une particule sphérique est attribuée à Mie, dont nous allons rappeler la théorie [1] [18][30].

La troisième approche est abordée par Rayleigh (1842-1919), qui dès 1871, explique la couleur du ciel grâce à la diffusion par des particules sphériques dont le diamètre est très inférieur devant la longueur d'onde incidente [31].

### 1.1 Etude scalaire de l'équation de Helmholtz

On considère des milieux linéaires, homogènes et isotropes, non magnétiques et non chargés. En régime harmonique avec une dépendance temporelle en  $e^{-j\omega t}$ , le champ électromagnétique vérifie l'équation de Helmholtz homogène en l'absence de source

$$\Delta \vec{C} + k^2 \vec{C} = \vec{0}, \quad (1.1)$$

où  $\vec{C} = \vec{E}$  ou  $\vec{H}$  et  $k^2 = \omega^2 \varepsilon \mu$ , avec  $\omega$  pulsation temporelle,  $\varepsilon$  permittivité et  $\mu$  perméabilité.

Chaque composante du champ vérifie ainsi l'équation scalaire sans second membre,

$$\Delta \psi + k^2 \psi = 0, \quad (1.2)$$

avec  $\psi = \psi(x, y, z)$ , où  $(x, y, z)$  sont les coordonnées cartésiennes d'espace.

On considère maintenant une particule sphérique isolée, éclairée par des sources à l'infini. Compte tenu de la géométrie du problème ainsi définie, on effectue un passage en coordonnées sphériques

$$\psi(x, y, z) = f(R, \theta, \varphi), \quad (1.3)$$

avec  $x = R \sin \theta \cos \varphi$ ,  $y = R \sin \theta \sin \varphi$  et  $z = R \cos \theta$  où les variables sont définis dans les domaines suivants  $0 \leq \varphi < 2\pi$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$  et  $0 < R < \infty$ .

On définit également la base sphérique  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$  comme sur la figure 1.1 :

$$\begin{aligned} \vec{u}_r &= \frac{O\vec{M}}{\|O\vec{M}\|} = \sin \theta \cos \varphi \cdot \vec{o}_x + \sin \theta \sin \varphi \cdot \vec{o}_y + \cos \theta \cdot \vec{o}_z, \\ \vec{u}_\theta &= \frac{d\vec{u}_r}{d\theta} = \cos \theta \cos \varphi \cdot \vec{o}_x + \cos \theta \sin \varphi \cdot \vec{o}_y - \sin \theta \cdot \vec{o}_z, \\ \vec{u}_\varphi &= -\sin \varphi \cdot \vec{o}_x + \cos \varphi \cdot \vec{o}_y. \end{aligned}$$

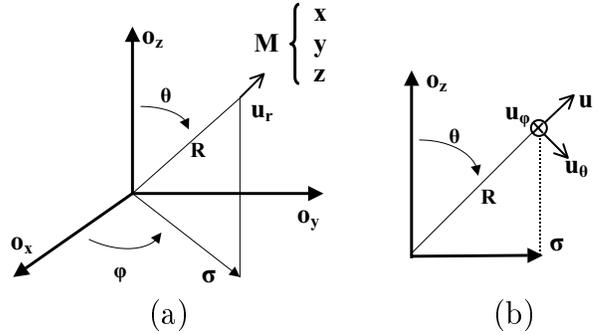


FIG. 1.1 – Coordonnées (a) et base (b) sphériques.

Dans ces conditions, le développement du laplacien en coordonnées sphériques conduit à l'équation aux dérivées partielles scalaires :

$$\frac{1}{R^2} \frac{\delta}{\delta R} (R^2 \frac{\partial f}{\partial R}) + \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta}) + \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + k^2 f = 0. \quad (1.4)$$

### 1.1.1 Equations différentielles à variable unique

En recherchant une solution, qui se justifie par développement de Fourier, à variables séparables du type

$$f(R, \theta, \varphi) = f_1(R) \cdot f_2(\theta) \cdot f_3(\varphi), \quad (1.5)$$

on obtient trois équations différentielles :

- une équation de Bessel modifiée dont la dépendance est radiale ( $R$ ),
- une équation de Legendre dont la dépendance est normale ( $\theta$ ),
- une équation harmonique de second ordre dont la dépendance est polaire ( $\varphi$ ).

Ces équations sont données ci-dessous :

$$R^2 \frac{d^2 f_1}{dR^2} + 2R \frac{df_1}{dR} + (k^2 R^2 - p^2) f_1 = 0 \quad (1.6)$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{df_2}{d\theta} \right) + \left( p^2 - \frac{q^2}{\sin^2 \theta} \right) f_2 = 0 \quad (1.7)$$

$$\frac{d^2 f_3}{d\varphi^2} + q^2 f_3 = 0 \quad (1.8)$$

Dans ces trois équations, les réels  $p$  et  $q$  sont des constantes de séparation. On les choisit à l'aide des conditions physiques qui permettent de se limiter à des fonctions convergentes.

### 1.1.2 Solutions des équations différentielles scalaires

#### Solution de l'équation du second ordre : équation polaire

La solution est de forme classique. Si les propriétés du milieu sont indépendantes de l'angle polaire  $\varphi$ ,  $f_3(\varphi)$  est une fonction périodique de période  $2\pi$ . Ainsi  $q$  doit être limité aux valeurs entières :  $q = m$  avec  $m \in \mathbb{Z}$ . La dépendance polaire s'exprime donc sous la forme

$$f_{3m}(\varphi) = A_m \cos(m\varphi) + B_m \sin(m\varphi). \quad (1.9)$$

#### Solution de l'équation de Legendre : équation normale

La solution est une fonction de Legendre associée. En posant  $\eta = \cos \theta$  et  $p^2 = n(n+1)$  et pour  $m \leq n$ , l'équation différentielle admet pour solution (1.10) où  $m$  et  $n$  sont des entiers positifs pour des problèmes de convergence. La dépendance

normale est donc donnée par

$$f_{2mn}(\eta) = P_n^m(\eta) = (1 - \eta^2)^{m/2} \frac{d^m P_n(\eta)}{d\eta^m}, \quad (1.10)$$

où  $P_n$  désigne le polynôme de Legendre d'ordre  $n$ .

Les fonctions  $\cos(m\varphi) \cdot P_n^m(\cos \theta)$  et  $\sin(m\varphi) \cdot P_n^m(\cos \theta)$  sont périodiques sur la surface d'une sphère unité et les indices  $m$  et  $n$  déterminent le nombre de lignes nodales. Si  $m = 0$  alors le champ est indépendant de  $\varphi$ . Si  $m = 0$  et  $n = 0$  alors le champ est constant sur la surface de la sphère. Quand les indices sont entiers et différents de zéro, le champ est positif et négatif. La surface de la sphère est alors découpée en zone *tesserae* [31].

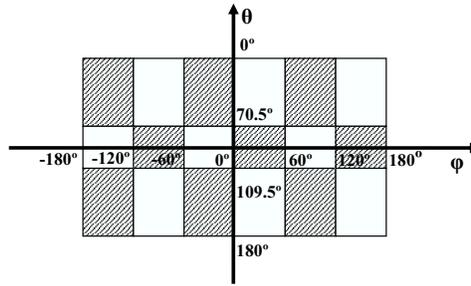


FIG. 1.2 – Points nodaux de la fonction :  $\sin(3\varphi) \cdot P_5^3(\cos \theta)$  sur la surface développée d'une sphère. La fonction est négative dans les aires hachurées.

Si les harmoniques tessérales sont multipliées par un groupe de constantes et sommées, on obtient les harmoniques de surface sphérique de degré  $n$

$$Y_n(\theta, \varphi) = \sum_{m=1}^n (a_{mn} \cos m\varphi + b_{mn} \sin m\varphi) P_n^m(\cos \theta).$$

Cette dernière expression décrit la dépendance polaire et normale du champ diffracté sous la forme d'une série de fonctions.

### Solution de l'équation de Bessel : équation radiale

La solution donne une fonction radiale. Suivant les conditions aux limites, différentes fonctions de Bessel peuvent être choisies

$$f_{1n}(R) = \frac{1}{\sqrt{kR}} z_{n+\frac{1}{2}}(kR). \quad (1.11)$$

A l'intérieur de la sphère incluant l'origine, la solution radiale s'exprime avec une fonction de Bessel de première espèce  $j_{n+\frac{1}{2}}(kR)$ , bornée à l'origine. La dépendance

radiale s'exprime alors par

$$f_{1n}(R) = \frac{1}{\sqrt{kR}} j_{n+\frac{1}{2}}(kR). \quad (1.12)$$

A l'infini, la solution radiale s'exprime avec une fonction de Hankel de première espèce  $h_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(kR)$ , en vertu de la condition d'onde sortante sur le champ diffracté à l'infini. La dépendance radiale s'exprime alors par

$$f_{1n}(R) = \frac{1}{\sqrt{kR}} h_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(kR). \quad (1.13)$$

En définitive toute fonction de la forme

$$\psi_n(R, \theta, \varphi) = f_{1n}(R) Y_n(\theta, \varphi) \quad (1.14)$$

sera solution de l'équation d'Helmholtz scalaire.

On peut également remarquer que chaque fonction élémentaire de l'harmonique sphérique de type

$$\begin{aligned} \psi_{emn} &= P_n^m(\cos \theta) f_{1n}(R) \cos(m\varphi) \quad \text{avec } m \leq n, \\ \psi_{omn} &= P_n^m(\cos \theta) f_{1n}(R) \sin(m\varphi) \quad \text{avec } m \leq n \end{aligned} \quad (1.15)$$

est solution.

Remarquons ici que les inconnues sont les constantes  $a_{mn}$  et  $b_{mn}$ . Il nous faut maintenant retrouver l'expression vectorielle du champ, ce que l'on pourrait faire en considérant que chaque projection du champ vectoriel sur  $x$ ,  $y$  et  $z$  s'écrit comme une combinaison linéaire de  $\psi_{emn}$  ou de  $\psi_{omn}$ , c'est-à-dire comme une fonction  $\psi$  de degré  $n$  et d'ordre  $m$ . Cependant, nous préférons développer la méthode suivante, plus directe et qui donne accès aux composantes du champ dans une base sphérique adaptée à la géométrie du problème.

## 1.2 Etude vectorielle de l'équation de Helmholtz

### 1.2.1 Construction d'une famille de solutions

On cherche à construire dans une base sphérique (voir figure 1.1) trois vecteurs solutions de l'équation de Helmholtz. On montre pour cela (cf. Annexe A) que, si  $\psi_{e/omn}$  est solution de l'équation scalaire (voir équation 1.2), alors les vecteurs suivants sont solutions vectorielles :

$$L_{e/omn} \vec{r} = \vec{grad}(\psi_{e/omn}), \quad M_{e/omn} \vec{r} = r \vec{ot}(\vec{R} \psi_{e/omn}), \quad N_{e/omn} \vec{r} = \frac{1}{k} r \vec{ot} M_{e/omn} \vec{r},$$

avec  $\vec{R} = R \vec{u}_r$  et  $k = \frac{2\pi n}{\lambda}$  où  $n$  est l'indice de réfraction et  $\lambda$  la longueur d'onde.

Après développement, ces vecteurs s'écrivent directement dans la base sphérique comme :

$$\begin{aligned}\vec{L}_{emn} = & P_n^m(\cos \theta) \frac{\partial}{\partial R} [z_n(kR)] \cos m\varphi \cdot \vec{u}_R \\ & + \frac{1}{R} z_n(kR) \frac{\partial}{\partial \theta} [P_n^m(\cos \theta)] \cos m\varphi \cdot \vec{u}_\theta \\ & - \frac{m}{R \sin \theta} z_n(kR) P_n^m(\cos \theta) \sin m\varphi \cdot \vec{u}_\varphi,\end{aligned}\quad (1.16)$$

$$\begin{aligned}\vec{L}_{omn} = & P_n^m(\cos \theta) \frac{\partial}{\partial R} [z_n(kR)] \sin m\varphi \cdot \vec{u}_R \\ & + \frac{1}{R} z_n(kR) \frac{\partial}{\partial \theta} [P_n^m(\cos \theta)] \sin m\varphi \cdot \vec{u}_\theta \\ & + \frac{m}{R \sin \theta} z_n(kR) P_n^m(\cos \theta) \cos m\varphi \cdot \vec{u}_\varphi,\end{aligned}\quad (1.17)$$

$$\begin{aligned}\vec{M}_{emn} = & 0 \cdot \vec{u}_R \\ & - \frac{m}{\sin \theta} z_n(kR) P_n^m(\cos \theta) \sin m\varphi \cdot \vec{u}_\theta \\ & - z_n(kR) \frac{\partial}{\partial \theta} [P_n^m(\cos \theta)] \cos m\varphi \cdot \vec{u}_\varphi,\end{aligned}\quad (1.18)$$

$$\begin{aligned}\vec{M}_{omn} = & 0 \cdot \vec{u}_R \\ & + \frac{m}{\sin \theta} z_n(kR) P_n^m(\cos \theta) \cos m\varphi \cdot \vec{u}_\theta \\ & - z_n(kR) \frac{\partial}{\partial \theta} [P_n^m(\cos \theta)] \sin m\varphi \cdot \vec{u}_\varphi,\end{aligned}\quad (1.19)$$

$$\begin{aligned}\vec{N}_{emn} = & \frac{n(n+1)}{kR} z_n(kR) P_n^m(\cos \theta) \cos m\varphi \cdot \vec{u}_R \\ & + \frac{1}{kR} \frac{\partial}{\partial R} [Rz_n(kR)] \frac{\partial}{\partial \theta} [P_n^m(\cos \theta)] \cos m\varphi \cdot \vec{u}_\theta \\ & - \frac{m}{kR \sin \theta} \frac{\partial}{\partial R} [Rz_n(kR)] P_n^m(\cos \theta) \sin m\varphi \cdot \vec{u}_\varphi,\end{aligned}\quad (1.20)$$

$$\begin{aligned}\vec{N}_{omn} = & \frac{n(n+1)}{kR} z_n(kR) P_n^m(\cos \theta) \sin m\varphi \cdot \vec{u}_R \\ & + \frac{1}{kR} \frac{\partial}{\partial R} [Rz_n(kR)] \frac{\partial}{\partial \theta} [P_n^m(\cos \theta)] \cos m\varphi \cdot \vec{u}_\theta \\ & + \frac{m}{kR \sin \theta} \frac{\partial}{\partial R} [Rz_n(kR)] P_n^m(\cos \theta) \cos m\varphi \cdot \vec{u}_\varphi.\end{aligned}\quad (1.21)$$

### 1.2.2 Cas d'une sphère centrée

Considérons une sphère d'indice  $n_1$  et de rayon  $a$  dans un milieu environnant d'indice  $n_2$ . Plaçons la sphère au centre du repère cartésien et éclairons-la par une onde plane ; dans ces conditions, l'unicité de la période polaire impose que seul le terme  $m = 1$  soit considéré dans la solution (1.8) :

$$f_{31}(\varphi) = A_1 \cos(\varphi) + B_1 \sin(\varphi) \quad (1.22)$$

Les vecteurs solutions se réduisent en conséquence dans la base sphérique à

$$\begin{aligned}\vec{L}_{e1n} = & P_n^1(\cos\theta) \frac{\partial}{\partial R}[z_n(kR)] \cos\varphi \cdot \vec{u}_R \\ & + \frac{1}{R} z_n(kR) \frac{\partial}{\partial\theta}[P_n^1(\cos\theta)] \cos\varphi \cdot \vec{u}_\theta \\ & - \frac{1}{R \sin\theta} z_n(kR) P_n^1(\cos\theta) \sin\varphi \cdot \vec{u}_\varphi,\end{aligned}\quad (1.23)$$

$$\begin{aligned}\vec{L}_{o1n} = & P_n^1(\cos\theta) \frac{\partial}{\partial R}[z_n(kR)] \sin\varphi \cdot \vec{u}_R \\ & + \frac{1}{R} z_n(kR) \frac{\partial}{\partial\theta}[P_n^1(\cos\theta)] \sin\varphi \cdot \vec{u}_\theta \\ & + \frac{1}{R \sin\theta} z_n(kR) P_n^1(\cos\theta) \cos\varphi \cdot \vec{u}_\varphi,\end{aligned}\quad (1.24)$$

$$\begin{aligned}\vec{M}_{e1n} = & 0 \cdot \vec{u}_R \\ & - \frac{1}{\sin\theta} z_n(kR) P_n^1(\cos\theta) \sin\varphi \cdot \vec{u}_\theta \\ & - z_n(kR) \frac{\partial}{\partial\theta}[P_n^1(\cos\theta)] \cos\varphi \cdot \vec{u}_\varphi,\end{aligned}\quad (1.25)$$

$$\begin{aligned}\vec{M}_{o1n} = & 0 \cdot \vec{u}_R \\ & + \frac{1}{\sin\theta} z_n(kR) P_n^1(\cos\theta) \cos\varphi \cdot \vec{u}_\theta \\ & - z_n(kR) \frac{\partial}{\partial\theta}[P_n^1(\cos\theta)] \sin\varphi \cdot \vec{u}_\varphi,\end{aligned}\quad (1.26)$$

$$\begin{aligned}\vec{N}_{e1n} = & \frac{n(n+1)}{kR} z_n(kR) P_n^1(\cos\theta) \cos\varphi \cdot \vec{u}_R \\ & + \frac{1}{kR} \frac{\partial}{\partial R}[Rz_n(kR)] \frac{\partial}{\partial\theta}[P_n^1(\cos\theta)] \cos\varphi \cdot \vec{u}_\theta \\ & - \frac{1}{kR \sin\theta} \frac{\partial}{\partial R}[Rz_n(kR)] P_n^1(\cos\theta) \sin\varphi \cdot \vec{u}_\varphi,\end{aligned}\quad (1.27)$$

$$\begin{aligned}\vec{N}_{o1n} = & \frac{n(n+1)}{kR} z_n(kR) P_n^1(\cos\theta) \sin\varphi \cdot \vec{u}_R \\ & + \frac{1}{kR} \frac{\partial}{\partial R}[Rz_n(kR)] \frac{\partial}{\partial\theta}[P_n^1(\cos\theta)] \cos\varphi \cdot \vec{u}_\theta \\ & + \frac{1}{kR \sin\theta} \frac{\partial}{\partial R}[Rz_n(kR)] P_n^1(\cos\theta) \cos\varphi \cdot \vec{u}_\varphi.\end{aligned}\quad (1.28)$$

### 1.3 Solutions électromagnétiques

A ce stade, le champ peut être considéré comme une combinaison linéaire des solutions vectorielles élémentaires  $\vec{L}_{1n}$ ,  $\vec{M}_{1n}$  et  $\vec{N}_{1n}$ , et le problème consistera à déterminer les coefficients respectifs. Toutefois il est astucieux de développer une méthode faisant appel au potentiel vecteur  $\vec{A}$  défini par  $\vec{B} = \text{rot}\vec{A}$ , où  $\vec{B}$  est le champ magnétique.

En effet, en exprimant de façon générale le potentiel vecteur avec  $\vec{L}_{1n}$ ,  $\vec{M}_{1n}$  et  $\vec{N}_{1n}$ , les expressions du champ électrique  $\vec{E}$  et du champ magnétique  $\vec{H}$  deviennent

plus simples, leurs développements ne comportant que des termes en  $\vec{M}_{1n}$  et  $\vec{N}_{1n}$ , de type solénoïdal. Le potentiel vecteur s'écrit donc

$$\vec{A} = \frac{i}{\omega} \sum_{n=1}^{\infty} (a_{1n} \vec{M}_{1n} + b_{1n} \vec{N}_{1n} + c_{1n} \vec{L}_{1n}). \quad (1.29)$$

Il faut utiliser la relation des potentiels pour déterminer l'expression du champ électrique. On détermine le champ magnétique à l'aide de la relation de Maxwell

$$\vec{E} = -\vec{grad}(\psi) + j\omega \vec{A}, \quad (1.30)$$

où  $\psi$  est un potentiel scalaire solution de l'équation de Helmholtz (1.2) scalaire. On obtient après développement

$$\vec{H} = -\frac{k}{i\mu\omega} \sum_{n=1}^{\infty} (a_{1n} \vec{N}_{1n} + b_{1n} \vec{M}_{1n}) \quad (1.31)$$

et

$$\vec{E} = -\sum_{n=1}^{\infty} (a_{1n} \vec{M}_{1n} + b_{1n} \vec{N}_{1n}). \quad (1.32)$$

Pour les champs électrique et magnétique, il ne reste donc plus que les vecteurs  $\vec{M}$  et  $\vec{N}$ . Sachant que  $m = 1$  pour une sphère centrée, les expressions qui nous seront utiles se réduisent à

$$\begin{aligned} \vec{M}_{e1n} = & \quad 0 \cdot \vec{u}_R \\ & -\frac{1}{\sin\theta} z_n(kR) P_n^1(\cos\theta) \sin\varphi \cdot \vec{u}_\theta \\ & -z_n(kR) \frac{\partial}{\partial\theta} [P_n^1(\cos\theta)] \cos\varphi \cdot \vec{u}_\varphi, \end{aligned} \quad (1.33)$$

$$\begin{aligned} \vec{M}_{o1n} = & \quad 0 \cdot \vec{u}_R \\ & +\frac{1}{\sin\theta} z_n(kR) P_n^1(\cos\theta) \cos\varphi \cdot \vec{u}_\theta \\ & -z_n(kR) \frac{\partial}{\partial\theta} [P_n^1(\cos\theta)] \sin\varphi \cdot \vec{u}_\varphi, \end{aligned} \quad (1.34)$$

$$\begin{aligned} \vec{N}_{e1n} = & \quad \frac{n(n+1)}{kR} z_n(kR) P_n^1(\cos\theta) \cos\varphi \cdot \vec{u}_R \\ & +\frac{1}{kR} \frac{\partial}{\partial R} [Rz_n(kR)] \frac{\partial}{\partial\theta} [P_n^1(\cos\theta)] \cos\varphi \cdot \vec{u}_\theta \\ & -\frac{1}{kR \sin\theta} \frac{\partial}{\partial R} [Rz_n(kR)] P_n^1(\cos\theta) \sin\varphi \cdot \vec{u}_\varphi, \end{aligned} \quad (1.35)$$

$$\begin{aligned}
 \vec{N}_{o_{1n}} = & \frac{n(n+1)}{kR} z_n(kR) P_n^1(\cos \theta) \sin \varphi \cdot \vec{u}_R \\
 & + \frac{1}{kR} \frac{\partial}{\partial R} [R z_n(kR)] \frac{\partial}{\partial \theta} [P_n^1(\cos \theta)] \cos \varphi \cdot \vec{u}_\theta \\
 & + \frac{1}{kR \sin \theta} \frac{\partial}{\partial R} [R z_n(kR)] P_n^1(\cos \theta) \cos \varphi \cdot \vec{u}_\varphi.
 \end{aligned} \tag{1.36}$$

On peut remarquer à ce stade que, la composante sur  $\vec{u}_r$  n'étant pas nulle, il n'y a pas d'analogie en champ proche avec l'onde plane.

## 1.4 Détermination des constantes

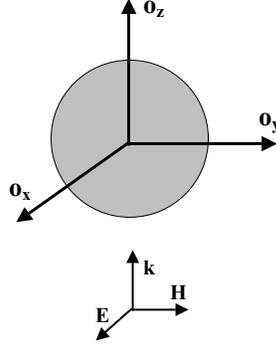


FIG. 1.3 – Diffraction d'une onde plane par une sphère

On a vu que le champ diffracté par la sphère s'écrivait comme une combinaison linéaire

$$\vec{H} = -\frac{k}{i\mu\omega} \sum_{n=1}^{\infty} (a_{1n} \vec{N}_{1n} + b_{1n} \vec{M}_{1n}) \tag{1.37}$$

et

$$\vec{E} = -\sum_{n=1}^{\infty} (a_{1n} \vec{M}_{1n} + b_{1n} \vec{N}_{1n}). \tag{1.38}$$

Il nous faut maintenant déterminer les constantes grâce aux relations de passage pour une sphère de rayon  $a$  d'indice  $n_1$  dans un milieu environnant d'indice  $n_2$  éclairé à la longueur d'onde  $\lambda$ . On considère que le champ incident est polarisé selon  $\vec{o}_x$ , pour un vecteur d'onde dans la direction  $\vec{o}_z$  (voir figure 6.1). Le cas d'autres polarisations pourra se déduire grâce à une rotation sur l'angle polaire, compte tenu de la symétrie. Le champ diffracté se calcule à  $\theta$ ,  $\varphi$  et  $R$  donnés.

Les relations de passage s'écrivant à la surface de la sphère ( $R = a$ ), il est nécessaire de développer le champ incident en coordonnées sphériques et sur la base sphérique. Pour cela on exprime tout d'abord la base cartésienne ( $\vec{o}_x$ ,  $\vec{o}_y$ ,  $\vec{o}_z$ ) en

fonction des vecteurs  $\vec{M}_{1n}$ ,  $\vec{N}_{1n}$  et  $\vec{L}_{1n}$ . En outre, nous représentons la dépendance radiale portée par la fonction de Bessel de première espèce par l'exposant (+) et celle portée par la fonction de Hankel de première espèce par (-) [31] [30]. Après développement, nous obtenons les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}\vec{o}_x \cdot e^{ikz} &= \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} (\vec{M}_{o1n}^{(+)} - i\vec{N}_{e1n}^{(+)}) \\ \vec{o}_y \cdot e^{ikz} &= -\sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} (\vec{M}_{e1n}^{(+)} + i\vec{N}_{o1n}^{(+)}) \\ \vec{o}_z \cdot e^{ikz} &= \frac{1}{k} \sum_{n=1}^{\infty} i^{n-1} (2n+1) \vec{L}_{eon}^{(+)}. \end{aligned} \quad (1.39)$$

### 1.4.1 Onde incidente

L'onde incidente est une onde plane dont le champ électrique est porté par  $\vec{o}_x$  de vecteur d'onde  $k \cdot \vec{o}_z$  et dont le champ magnétique est portée par  $\vec{o}_y$ . En utilisant la relation 1.39, nous déterminons les champs électromagnétiques de la manière suivante (voir équations 1.40 et 1.41).

$$\begin{aligned}\vec{E}_i &= E_0 e^{ik_2 R \cos \theta} \vec{o}_x \\ &= E_0 \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} [\vec{M}_{o1n}^{(+)} - i\vec{N}_{e1n}^{(+)}] \end{aligned} \quad (1.40)$$

$$\begin{aligned}\vec{H}_i &= H_0 e^{ik_2 R \cos \theta} \vec{o}_y \\ &= -E_0 \frac{k}{i\omega_2 \mu_2} \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} [\vec{M}_{e1n}^{(+)} + i\vec{N}_{o1n}^{(+)}] \end{aligned} \quad (1.41)$$

### 1.4.2 Onde diffractée à l'extérieur de la sphère

A l'extérieur de la sphère, la dépendance radiale du champ diffracté s'exprime avec la fonction de Hankel de première espèce. Les vecteurs  $\vec{M}$  et  $\vec{N}$  ont donc en exposant le signe (-). Elle est déduite de l'expression générale du champ électrique (1.38) et du terme de normalisation calculé pour le champ incident (1.40). En adoptant une écriture analogue au champ incident, on obtient

$$\vec{E}_d = E_0 \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} [a_n^d \vec{M}_{o1n}^{(-)} - i b_n^d \vec{N}_{e1n}^{(-)}] \quad (1.42)$$

et

$$\vec{H}_d = -E_0 \frac{k_2}{\omega_2 \mu_2} \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} [b_n^d \vec{M}_{e1n}^{(-)} + i a_n^d \vec{N}_{o1n}^{(-)}]. \quad (1.43)$$

### 1.4.3 Onde diffractée dans la sphère

Nous considérons ici les champs à l'intérieur de la sphère. Par analogie on a

$$\vec{E}_t = E_0 \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} [a_n^t \vec{M}_{o1n}^{(+)} - i b_n^t \vec{N}_{e1n}^{(+)}] \quad (1.44)$$

et

$$\vec{H}_t = -E_0 \frac{k}{\omega_1 \mu_1} \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} [b_n^t \vec{M}_{e1n}^{(+)} + i a_n^t \vec{N}_{o1n}^{(+)}]. \quad (1.45)$$

A ce stade les inconnues sont donc les constantes intérieures  $(a_n^t, b_n^t)$  et extérieures  $(a_n^d, b_n^d)$ .

## 1.5 Continuité des composantes sur la surface de la sphère

En utilisant la continuité des composantes tangentielles à la surface de la sphère, nous pouvons déterminer les coefficients  $a_n^d, b_n^d, a_n^t$  et  $b_n^t$ . Comme  $\vec{u}_\theta$  et  $\vec{u}_\varphi$  sont les deux vecteurs de la base sphérique tangents à la sphère, les relations de passage s'expriment à rayon constant, de sorte que seuls  $\theta$  et  $\varphi$  varient.

– Continuité des composantes sur  $\vec{u}_\theta$

$$E_{i\theta} + E_{d\theta} = E_{t\theta} \quad \text{et} \quad H_{i\theta} + H_{d\theta} = H_{t\theta} \quad (1.46)$$

– Continuité des composantes sur  $\vec{u}_\varphi$

$$E_{i\varphi} + E_{d\varphi} = E_{t\varphi} \quad \text{et} \quad H_{i\varphi} + H_{d\varphi} = H_{t\varphi} \quad (1.47)$$

## 1.6 Expression des coefficients

Pour simplifier les expressions, il est commode de noter  $N = k_1/k_2$ . Une fois réalisées les expressions de continuité à l'interface de la sphère, nous n'avons plus qu'une relation en fonction de  $\theta, \varphi$  et  $R$  avec comme seules inconnues les coefficients  $a_n^d, b_n^d, a_n^t$  ou  $b_n^t$  à déterminer. Comme les relations de passage sont valables quelles que soient les dépendances normales et polaires, nous pouvons simplifier les équations et il ne nous reste plus que la dépendance radiale exprimée. En isolant le coefficient à déterminer, nous obtenons les expressions suivantes :

$$a_n^d = \frac{\mu_2 j_n(k_2 a) \frac{\partial}{\partial k_1 R} [k_1 R j_n(k_1 R)]_a - \mu_1 j_n(k_1 a) \frac{\partial}{\partial k_2 R} [k_2 R j_n(k_2 R)]_a}{\mu_1 j_n(k_1 a) \frac{\partial}{\partial k_2 R} [k_2 R h_n^{(1)}(k_2 R)]_a - \mu_2 h_n^{(1)}(k_2 a) \frac{\partial}{\partial k_1 R} [k_1 R j_n(k_1 R)]_a}, \quad (1.48)$$

$$b_n^d = \frac{\mu_1 j_n(k_2 a) \frac{\partial}{\partial k_1 R} [k_1 R j_n(k_1 R)]_a - \mu_2 N^2 j_n(k_1 a) \frac{\partial}{\partial k_2 R} [k_2 R j_n(k_2 R)]_a}{\mu_2 N^2 j_n(k_1 a) \frac{\partial}{\partial k_2 R} [k_2 R h_n^{(1)}(k_2 R)]_a - \mu_1 h_n^{(1)}(k_2 a) \frac{\partial}{\partial k_1 R} [k_1 R j_n(k_1 R)]_a}, \quad (1.49)$$

$$\begin{aligned} a_n^t &= \frac{\mu_1 j_n(k_1 a) j_n(k_2 a) \frac{\partial}{\partial k_2 R} [k_2 R h_n^{(1)}(k_2 R)]_a - \mu_2 j_n(k_2 a) h_n^{(1)}(k_2 a) \frac{\partial}{\partial k_1 R} [k_1 R j_n(k_1 R)]_a}{\mu_1 j_n(k_1 a) j_n(k_1 a) \frac{\partial}{\partial k_2 R} [k_2 R h_n^{(1)}(k_2 R)]_a - \mu_2 h_n^{(1)}(k_2 a) j_n(k_1 a) \frac{\partial}{\partial k_1 R} [k_1 R j_n(k_1 R)]_a} \\ &+ \frac{\mu_2 j_n(k_2 a) h_n^{(1)}(k_2 a) \frac{\partial}{\partial k_1 R} [k_1 R j_n(k_1 R)]_a - \mu_1 j_n(k_1 a) h_n^{(1)}(k_2 a) \frac{\partial}{\partial k_2 R} [k_2 R j_n(k_2 R)]_a}{\mu_1 j_n(k_1 a) j_n(k_1 a) \frac{\partial}{\partial k_2 R} [k_2 R h_n^{(1)}(k_2 R)]_a - \mu_2 h_n^{(1)}(k_2 a) j_n(k_1 a) \frac{\partial}{\partial k_1 R} [k_1 R j_n(k_1 R)]_a}, \end{aligned} \quad (1.50)$$

$$\begin{aligned} b_n^t &= \frac{\mu_1 \mu_2 N^2 j_n(k_1 a) j_n(k_2 a) \frac{\partial}{\partial k_2 R} [k_2 R h_n^{(1)}(k_2 R)]_a - \mu_1^2 j_n(k_2 a) h_n^{(1)}(k_2 a) \frac{\partial}{\partial k_1 R} [k_1 R j_n(k_1 R)]_a}{\mu_2^2 N^3 j_n(k_1 a) j_n(k_1 a) \frac{\partial}{\partial k_2 R} [k_2 R h_n^{(1)}(k_2 R)]_a - \mu_2 \mu_1 N h_n^{(1)}(k_2 a) j_n(k_1 a) \frac{\partial}{\partial k_1 R} [k_1 R j_n(k_1 R)]_a} \\ &+ \frac{\mu_1^2 j_n(k_2 a) h_n^{(1)}(k_2 a) \frac{\partial}{\partial k_1 R} [k_1 R j_n(k_1 R)]_a - \mu_1 \mu_2 N^2 j_n(k_1 a) h_n^{(1)}(k_2 a) \frac{\partial}{\partial k_2 R} [k_2 R j_n(k_2 R)]_a}{\mu_2^2 N^3 j_n(k_1 a) j_n(k_1 a) \frac{\partial}{\partial k_2 R} [k_2 R h_n^{(1)}(k_2 R)]_a - \mu_2 \mu_1 N h_n^{(1)}(k_2 a) j_n(k_1 a) \frac{\partial}{\partial k_1 R} [k_1 R j_n(k_1 R)]_a}, \end{aligned} \quad (1.51)$$

avec  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$  pour nos applications.

Connaissant les expressions des vecteurs  $M_{o1n}^{(-)}$  et  $N_{e1n}^{(-)}$  de la base et les coefficients  $a_n^d$ ,  $b_n^d$ ,  $a_n^t$  et  $b_n^t$ , nous avons donc l'expression exacte des composantes électromagnétiques suivant toutes les directions.

On remarque que les constantes s'expriment à l'aide de fonctions connues ayant pour argument les paramètres clés

$$q_1 = k_1 a = \frac{2\pi}{\lambda} n_1 a = n_1 q \quad \text{et} \quad q_2 = k_2 a = \frac{2\pi}{\lambda} n_2 a = n_2 q,$$

où  $q$  sera désigné comme le paramètre de taille.

# Chapitre 2

## Expressions asymptotiques et polarisation

Jusqu'ici nous avons traité de façon rigoureuse et en champ proche le cas d'une sphère de rayon arbitraire, et nous avons pu voir que le paramètre  $q = \frac{2\pi a}{\lambda}$  jouait un rôle majeur pour le calcul des constantes. Toutefois le calcul numérique n'est pas forcément nécessaire pour traiter le cas des faibles rayons, et n'aboutira pas forcément dans le cas des grands rayons. Ainsi, il est intéressant de façon générale de disposer d'expressions simplifiées dites "asymptotiques" pour traiter les cas extrêmes suivants :

- $q \ll 1$  rayon  $a$  très petit devant la longueur d'onde  $\lambda$ .
- $q \gg 1$  rayon  $a$  très grand devant la longueur d'onde  $\lambda$ .

Ces développements asymptotiques font l'objet de ce chapitre. Nous en profitons également pour simplifier nos expressions en les limitant au champ lointain, et en introduisant la polarisation.

### 2.1 Champ diffracté à l'infini par une sphère de rayon arbitraire

Rappelons l'expression du champ électrique que nous avons obtenue :

$$\vec{E}_d = E_0 \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} [a_n^d \vec{M}_{o1n}^{(-)} - i b_n^d \vec{N}_{e1n}^{(-)}] \quad (2.1)$$

$$\vec{E}_t = E_0 \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} [a_n^t \vec{M}_{o1n}^{(+)} - i b_n^t \vec{N}_{e1n}^{(+)}]. \quad (2.2)$$

Dans ces relations, les coefficients ( $a_n$  et  $b_n$ ) sont donnés dans la sphère ( $a_n^t$  et

$b_n^t$ ) et en dehors ( $a_n^d$  et  $b_n^d$ ). Ils sont exprimés par les relations (1.48, 1.49, 1.50, 1.51) et sont calculés à la surface de la sphère, en fonction du paramètre  $q$ .

Par contre, le champ  $\vec{E}$  est ici donné en champ proche, alors que nous pouvons nous limiter en champ lointain, sans modifier les bilans d'énergie. Pour cela il suffit d'effectuer un développement asymptotique à l'infini ( $R \rightarrow \infty$ ) des vecteurs  $\vec{M}_{o/e1n}$  et  $\vec{N}_{o/e1n}$ . Ceux-ci sont donnés par

$$\begin{aligned} \vec{M}_{e1n}^{(-)}(\infty) = & 0 \cdot \vec{u}_R \\ & -(-i)^{n+1} \frac{e^{ikR}}{kR} \frac{P_n^1(\cos\theta)}{\sin\theta} \sin\varphi \cdot \vec{u}_\theta \\ & -(-i)^{n+1} \frac{e^{ikR}}{kR} \frac{\partial}{\partial\theta} [P_n^1(\cos\theta)] \cos\varphi \cdot \vec{u}_\varphi, \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \vec{M}_{o1n}^{(-)}(\infty) = & 0 \cdot \vec{u}_R \\ & +(-i)^{n+1} \frac{e^{ikR}}{kR} \frac{P_n^m(\cos\theta)}{\sin\theta} \cos\varphi \cdot \vec{u}_\theta \\ & -(-i)^{n+1} \frac{e^{ikR}}{kR} \frac{\partial}{\partial\theta} [P_n^1(\cos\theta)] \sin\varphi \cdot \vec{u}_\varphi \end{aligned} \quad (2.4)$$

et

$$\begin{aligned} \vec{N}_{e1n}^{(-)}(\infty) = & 0 \cdot \vec{u}_R \\ & +(-i)^n \frac{e^{ikR}}{kR} \frac{\partial}{\partial\theta} [P_n^1(\cos\theta)] \cos\varphi \cdot \vec{u}_\theta \\ & -(-i)^n \frac{e^{ikR}}{kR} \frac{P_n^1(\cos\theta)}{\sin\theta} \sin\varphi \cdot \vec{u}_\varphi, \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \vec{N}_{o1n}^{(-)}(\infty) = & 0 \cdot \vec{u}_R \\ & +(-i)^n \frac{e^{ikR}}{kR} \frac{\partial}{\partial\theta} [P_n^1(\cos\theta)] \sin\varphi \cdot \vec{u}_\theta \\ & +(-i)^n \frac{e^{ikR}}{kR} \frac{P_n^1(\cos\theta)}{\sin\theta} \cos\varphi \cdot \vec{u}_\varphi, \end{aligned} \quad (2.6)$$

d'où la formule générale du champ lointain

$$\vec{E}_d(\infty) = E_0 \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} [a_n^d \vec{M}_{o1n}^{(-)}(\infty) - i b_n^d \vec{N}_{e1n}^{(-)}(\infty)] \quad (2.7)$$

$$\vec{H}_d(\infty) = -E_0 \frac{k_2}{\omega_2 \mu_2} \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} [b_n^d \vec{M}_{e1n}^{(-)}(\infty) + i a_n^d \vec{N}_{o1n}^{(-)}(\infty)]. \quad (2.8)$$

On remarquera donc que le champ à l'infini possède localement une structure d'onde plane, puisque  $\vec{E}$  et  $\vec{H}$  sont dans un plan perpendiculaire au vecteur d'onde et orthogonaux entre eux.

### Polarisation

D'après (2.7) et (2.8), le champ lointain diffracté s'écrit en fonction de  $M_{o/e1n}^{(-)}$  et  $N_{o/e1n}^{(-)}$  qui sont portés par  $\vec{u}_\theta$  et  $\vec{u}_\varphi$ . Ainsi on peut définir, dans chaque plan polaire,

la composante TE ou S comme étant la projection  $E_\theta$  sur  $\vec{u}_\theta$ , et la composante TM ou P comme étant la projection  $E_\varphi$  sur  $\vec{u}_\varphi$  :

$$\begin{aligned}\vec{E}_S &= \vec{E}_\theta = E_{TE} \\ \vec{E}_P &= \vec{E}_\varphi = E_{TM}\end{aligned}\tag{2.9}$$

## 2.2 Sphère de rayon petit devant la longueur d'onde

On considère le cas  $q \ll 1$ . Il nous faudra ici développer les expressions asymptotiques des fonctions de Bessel au voisinage de l'origine (voir annexe A) pour obtenir une expression asymptotique des constantes  $(a_n^d, b_n^d, a_n^t, b_n^t)$ . Nous allons exprimer ces coefficients en fonction de tous les paramètres puis nous simplifierons pour retrouver les résultats que Rayleigh a établis à propos du bleu du ciel et du rouge du coucher du soleil. La perméabilité  $\mu_1$  et le vecteur d'onde  $k_1$  sont des grandeurs associées à la sphère avec  $q_1 = k_1 a$ . La perméabilité  $\mu_2$  et le vecteur d'onde  $k_2$  sont des grandeurs associées au milieu environnant avec  $q_2 = k_2 a$ . Posons  $N = k_1/k_2$ . On obtient

$$\lim_{q \rightarrow 0} a_n^d = i \frac{n+1}{2n+1} q_2^{(2n+1)} \frac{\mu_1 - \mu_2}{n\mu_1 - (n+1)\mu_2}\tag{2.10}$$

$$\lim_{q \rightarrow 0} b_n^d = i \frac{n+1}{2n+1} q_2^{(2n+1)} \frac{\mu_1 - \mu_2 N^2}{(n+1)\mu_1 + n\mu_2 N^2}\tag{2.11}$$

$$\lim_{q \rightarrow 0} a_n^t = \frac{1}{N^n} \left[ \frac{-\mu_1}{n\mu_1 + (n+1)\mu_2} \right]\tag{2.12}$$

$$\lim_{q \rightarrow 0} b_n^t = \frac{\mu_1}{N^{n-1}} \frac{2n+1}{N^2 n \mu_2 + (n+1)\mu_1}\tag{2.13}$$

Ainsi, nous avons exprimé les coefficients  $a_n^d, b_n^d, a_n^t$  et  $b_n^t$  du champ électromagnétique pour des rayons petits devant la longueur d'onde.

### Comparaison avec un dipôle électrique

Il est intéressant de noter que nos expressions asymptotiques sont identiques à celles du champs rayonné par un dipôle orienté selon  $\vec{o}_x$ . Dans le cas d'un dipôle et pour un observateur à l'infini, nous pouvons exprimer le champ électromagnétique comme [31] :

$$\vec{E} \simeq -\frac{k^2}{4\pi\epsilon} \vec{R} \wedge (\vec{R} \wedge \vec{p}_1) \frac{e^{ikR}}{kR},\tag{2.14}$$

$$\vec{H} \simeq \frac{\omega k}{4\pi} \vec{R} \wedge \vec{p}_1 \frac{e^{ikR}}{kR}, \quad (2.15)$$

avec  $k$  vecteur d'onde du dipôle,  $\varepsilon$  permittivité,  $\vec{R}$  vecteur radial égal à  $R \cdot \vec{u}_r$ ,  $\vec{p}_1$  moment dipolaire et  $R$  distance dipôle - point d'observation.

Le moment dipolaire est orienté suivant  $\vec{o}_x$ . En projetant suivant les vecteurs  $\vec{u}_r$ ,  $\vec{u}_\theta$  et  $\vec{u}_\varphi$  nous obtenons les champs électriques et magnétiques sous la forme :

$$\begin{aligned} E_r &= -\frac{k^2}{4\pi\varepsilon}(1-p_1) \cos \varphi \sin \theta \frac{e^{ikR}}{kR} \\ E_\theta &= \frac{k^2}{4\pi\varepsilon} p_1 \cos \varphi \cos \theta \frac{e^{ikR}}{kR} \\ E_\varphi &= -\frac{k^2}{4\pi\varepsilon} p_1 \sin \varphi \frac{e^{ikR}}{kR}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Par ailleurs, le champ électrique et le champ magnétique donnés par la théorie de Mie sont

$$\vec{E}_d = E_0 \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} [a_n^d \vec{M}_{o1n}^{(-)} - i b_n^d \vec{N}_{e1n}^{(-)}] \quad (2.17)$$

$$\vec{H}_d = -\frac{k_2}{\omega\mu_2} E_0 \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} [b_n^d \vec{M}_{e1n}^{(-)} + i a_n^d \vec{N}_{o1n}^{(-)}]. \quad (2.18)$$

Prenons comme hypothèse que les perméabilités sont toutes égales,  $\mu_2 = \mu_1 = \mu_0$ . Comme  $a_n^d$  est proportionnel à  $(\mu_1 - \mu_2)$  alors ce coefficient est nul (voir équation 2.10). Nous n'avons plus que  $b_n^d$  à déterminer. Dans le but de simplifier les expressions, comme le rayon de la sphère est très petit devant  $\lambda$ , et que la dépendance de la série exprimant le champ électromagnétique en  $q$  est polynomiale, alors le premier terme de la série domine. Nous avons donc seul le terme  $n = 1$  qui compte. Avec  $N = \frac{k_1}{k_2}$  on obtient

$$a_n^d = 0 \quad \text{et} \quad b_n^d = -i \frac{2}{3} q_2^3 \frac{1 - N^2}{N^2 + 2}. \quad (2.19)$$

Ensuite, il nous faut exprimer les vecteurs  $\vec{M}_{o11}^{(-)}$ ,  $\vec{M}_{e11}^{(-)}$ ,  $\vec{N}_{e11}^{(-)}$  et  $\vec{N}_{o11}^{(-)}$  dans le cas où  $n = 1$ . On a

$$\begin{aligned} \vec{M}_{e11}^{(-)} &= \frac{e^{ikR}}{kR} \sin \varphi \cdot \vec{u}_\theta - \frac{e^{ikR}}{kR} \cos \theta \cos \varphi \cdot \vec{u}_\varphi, \\ \vec{M}_{o11}^{(-)} &= -\frac{e^{ikR}}{kR} \cos \varphi \cdot \vec{u}_\theta - \frac{e^{ikR}}{kR} \cos \theta \sin \varphi \cdot \vec{u}_\varphi, \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned}\vec{N}_{e11}^{(-)} &= i \frac{e^{ikR}}{kR} \cos \theta \cos \varphi \cdot \vec{u}_\theta + i \frac{e^{ikR}}{kR} \sin \varphi \cdot \vec{u}_\varphi, \\ \vec{N}_{o11}^{(-)} &= i \frac{e^{ikR}}{kR} \cos \theta \sin \varphi \cdot \vec{u}_\theta - i \frac{e^{ikR}}{kR} \cos \varphi \cdot \vec{u}_\varphi.\end{aligned}\quad (2.21)$$

Nous pouvons alors déterminer les projections du champ électrique et du champ magnétique

$$\begin{aligned}E_r &= 0 \\ E_\theta &= k_2^2 E_0 a^3 \frac{1-N^2}{N^2+2} \cos \theta \cos \varphi \frac{e^{ik_2 R}}{R} \\ E_\varphi &= k_2^2 E_0 a^3 \frac{1-N^2}{N^2+2} \sin \varphi \frac{e^{ik_2 R}}{R}\end{aligned}\quad (2.22)$$

$$\begin{aligned}H_r &= 0 \\ H_\theta &= i \frac{k_2^2}{\omega \mu_0} E_0 a^3 \frac{1-N^2}{N^2+2} \sin \varphi \frac{e^{ik_2 R}}{R} \\ H_\varphi &= -i \frac{k_2^2}{\omega \mu_0} E_0 a^3 \frac{1-N^2}{N^2+2} \cos \theta \cos \varphi \frac{e^{ik_2 R}}{R}\end{aligned}\quad (2.23)$$

Par analogie nous pouvons déterminer un moment dipolaire  $p_1$  égal à :

$$p_1 = 4\pi\epsilon_2 \frac{1-N^2}{N^2+2} a^3 E_0 \quad (2.24)$$

On retrouve ainsi les résultats classiques du dipôle. Pour une petite sphère, quand l'observateur se situe à une très grande distance de cet objet, alors les champs électrique et magnétique varient en fonction du carré inverse de la longueur d'onde. Le champ diffracté par un tel système est plus important quand la longueur d'onde est petite. C'est la loi de Rayleigh pour expliquer que le ciel est bleu, compte tenu de la dépendance en  $\lambda^4$  du flux  $W_{diff}$  diffusé par la sphère

$$W_{diff} = \frac{k_2}{2\omega\mu_0} \left| \frac{k_2^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot p_1 \right|^2. \quad (2.25)$$

## 2.3 Sphère de rayon grand face à la longueur d'onde

Le cas des sphères avec un grand paramètre de taille est plus délicat à traiter, même s'il suffit a priori de développer les relations de continuité en faisant tendre le paramètre de taille  $q$  vers l'infini. Le lecteur pourra se reporter aux références [30] [10] [11].



# Chapitre 3

## Calculs de flux

Le calcul du flux permet de normer les expressions du champ diffracté et de vérifier que le bilan d'énergie est assuré dans tout l'espace. Nous nous intéressons ici au flux diffusé par une sphère en champ lointain.

### 3.1 Bilan d'énergie

Le champ  $\vec{E}$  à l'extérieur de la sphère est la somme du champ incident  $\vec{E}_i$  et du champ diffusé  $\vec{E}_d$  par la sphère. Nous avons  $\vec{E} = \vec{E}_i + \vec{E}_d$  et  $\vec{H} = \vec{H}_i + \vec{H}_d$ . Pour avoir le flux nous calculons le vecteur de Poynting défini par  $\vec{P} = \frac{1}{2}\vec{E} \times \vec{H}$ , où  $\vec{H}$  est le conjugué du vecteur  $\vec{H}$ . On obtient sur la base sphérique :

$$\begin{aligned} \vec{P} = & \frac{1}{2}(\vec{E}_{i\theta}\vec{H}_{i\varphi} - \vec{E}_{i\varphi}\vec{H}_{i\theta}) + \frac{1}{2}(\vec{E}_{d\theta}\vec{H}_{d\varphi} - \vec{E}_{d\varphi}\vec{H}_{d\theta}) \\ & + \frac{1}{2}(\vec{E}_{i\theta}\vec{H}_{d\varphi} + \vec{E}_{d\theta}\vec{H}_{i\varphi} - \vec{E}_{i\varphi}\vec{H}_{d\theta} - \vec{E}_{d\varphi}\vec{H}_{i\theta}) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Ainsi l'on obtient trois types de contributions pour le vecteur de Poynting :

$$\vec{P} = \vec{P}_i + \vec{P}_d + \vec{P}_{id}. \quad (3.2)$$

Pour calculer le flux d'énergie diffusée par la sphère nous utilisons le théorème de Poynting, à savoir que le débit moyen d'énergie à travers une surface fermée orientée  $\Sigma$  est égal au flux de la partie réelle du vecteur de Poynting complexe à travers  $\Sigma$ . Prenons comme surface fermée une sphère de rayon A (voir figure 3.1). Intégrons la partie réelle du vecteur de Poynting à travers la sphère de rayon A. Nous obtenons trois termes. Le premier  $W_i$  résulte de l'intégration de  $\vec{P}_i$  : c'est le flux d'énergie de l'onde incidente à travers la surface fermée, qui est donc nul. Le second terme  $W_d$  est le flux d'énergie de l'onde diffusée. Le troisième terme  $W_e$  représente la somme au signe près des flux absorbé et diffusé, et s'identifie donc au second terme pour une sphère transparente.

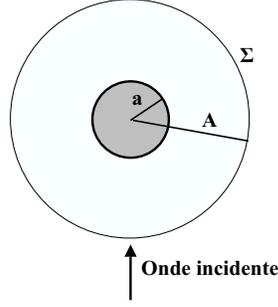


FIG. 3.1 – Surface sphérique  $\Sigma$  d'intégration de rayon  $A$  autour de la sphère de rayon  $a$ .

En effet le bilan de puissance relativement à la surface  $\Sigma$  s'écrit :

$$F = W + W_a \quad (3.3)$$

où  $F$  est la puissance fournie,  $W_a$  la puissance dissipée et  $W$  le flux de Poynting. Comme il n'y a pas de source dans le domaine limitée par  $\Sigma$ , la puissance fournie est nulle :  $F = 0$ . Nous obtenons alors  $W_a = -W = -(W_i + W_d + W_e)$ . En outre, le flux  $W_i$  du champ incident à travers  $\Sigma$  étant nul, nous avons bien

$$W_e = -(W_a + W_d). \quad (3.4)$$

## 3.2 Flux diffracté

Le flux diffracté dans tout l'espace se calcule en intégrant le vecteur de Poynting en  $\theta$  et  $\varphi$ . Nous avons :

$$W_d(A) = \frac{1}{2} Re \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta [E_\theta \overline{H_\varphi} - E_\varphi \overline{H_\theta}] A^2 \sin \theta. \quad (3.5)$$

Ce flux en champ lointain est indépendant de la distance  $R$  ou du rayon  $A$  de la surface d'intégration  $\Sigma$ . Nous avons donc

$$W_d = \lim_{A \rightarrow \infty} W_d(A) \quad (3.6)$$

$$W_d = \frac{1}{2} Re \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \lim_{A \rightarrow \infty} A^2 [E_\theta \overline{H_\varphi} - E_\varphi \overline{H_\theta}] \sin \theta. \quad (3.7)$$

En annexe A, nous donnons les calculs intermédiaires. Ainsi après simplification

nous obtenons

$$W_d = E_0^2 \frac{2\pi}{\mu_2 \omega_2 k_2} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) [|a_n^d|^2 + |b_n^d|^2]. \quad (3.8)$$

$W_d$  représente le flux moyen d'énergie diffusé par la sphère. Il est utile maintenant de donner l'expression du flux incident  $W_{inc}$ . Celui-ci s'écrit pour une onde plane et par unité de surface comme :

$$W_{inc} = E_0^2 \frac{k_2}{2\omega_2 \mu_2}. \quad (3.9)$$

Nous pouvons définir la Section Efficace de Diffusion (S.E.D.) comme étant le rapport du flux moyen d'énergie diffracté  $W_d$  par le flux moyen d'énergie incident  $W_{inc}$  par unité de surface. Ainsi la S.E.D. d'une particule sphérique est

$$Q'_d = \frac{W_d}{W_{inc}} = \frac{2\pi}{k^2} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) [|a_n^d|^2 + |b_n^d|^2]. \quad (3.10)$$

### 3.3 Extinction

Pour déterminer le flux lié au troisième terme  $W_e$  à travers la surface  $\Sigma$ , nous procédons de manière similaire au calcul du flux diffusé. Après intégration nous avons l'expression de  $W_e$

$$W_e = E_0^2 \frac{2\pi}{\mu\omega k} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) Re[a_n^d + b_n^d]. \quad (3.11)$$

Ce terme  $W_e$  est l'opposé de la somme du flux absorbé et du flux diffusé :  $W_e = -(W_a + W_d)$ .

Nous définissons de la même manière la Section Efficace d'Extinction (S.E.E.) comme étant le rapport du flux moyen d'énergie  $W_e(\infty)$  par le flux moyen d'énergie incident  $W_{inc}$ . Ainsi la S.E.E. d'une particule sphérique est

$$Q'_e = \frac{W_e}{W_{inc}} = \frac{2\pi}{k^2} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) Re[a_n^d + b_n^d]. \quad (3.12)$$

### 3.4 Flux absorbé

Nous déterminons le flux absorbé grâce au bilan énergétique  $W_a = -(W_e + W_d)$ . Comme l'extinction est l'opposée de la somme du flux absorbé et du flux diffusé, la

Section Efficace d'Absorption (S.E.A.) est donc définie par

$$Q'_a = -(Q'_e + Q'_d) \quad (3.13)$$

$$Q'_a = \frac{-2\pi}{k^2} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \left( \text{Re}[a_n^d + b_n^d] + [|a_n^d|^2 + |b_n^d|^2] \right).$$

### 3.5 Normalisation effective

Toutes ces expressions sont normalisées par le flux incident par unité de surface  $W_{inc}$ . Pour nos applications, il sera nécessaire de normaliser par le flux délivré par une source à section finie, de sorte que  $W_{inc}$  sera remplacé par  $W_{inc} \cdot \Delta S$ , où  $\Delta S$  est la surface du faisceau incident. On obtient donc

$$Q_d = \frac{W_d}{W_{inc} \cdot \Delta S} = \frac{2\pi}{k^2 \Delta S} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) [|a_n^d|^2 + |b_n^d|^2], \quad (3.14)$$

$$Q_e = \frac{W_d}{W_{inc} \Delta S} = \frac{2\pi}{k^2 \Delta S} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \text{Re}[a_n^d + b_n^d], \quad (3.15)$$

$$Q_a = \frac{-2\pi}{k^2 \Delta S} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \left( \text{Re}[a_n^d + b_n^d] + [|a_n^d|^2 + |b_n^d|^2] \right). \quad (3.16)$$

Ce sont ces dernières expressions qui seront confrontées aux mesures.

# Chapitre 4

## Premiers résultats numériques

A ce stade il est intéressant de tester nos expressions analytiques et les codes de calcul pour une première investigation. En effet, le nombre de paramètres est grand et il est nécessaire, pour une utilisation optimale de ce travail, d'accéder à une certaine lisibilité quant au rôle respectif des différentes grandeurs.

Notre code fonctionne avec des bibliothèques FORTRAN et des routines en C/C++. Nous donnons en Annexe B, toutes les caractéristiques du programme.

Rappelons également ici l'expression du champ lointain :

$$\vec{E}_d = E_0 \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} [a_n^d \vec{M}_{o1n}^{(-)}(\infty) - i b_n^d \vec{N}_{e1n}^{(-)}(\infty)], \quad (4.1)$$

avec les vecteurs  $\vec{M}_{o1n}^{(-)}(\infty)$  et  $\vec{N}_{e1n}^{(-)}(\infty)$  donnés en (2.3) et en (2.5) et les coefficients  $a_n^d$  et  $b_n^d$  donnés par les formules 1.48 et 1.49.

### 4.1 Influence des fonctions de Bessel

Les fonctions de Bessel et de Hankel interviennent dans toutes les expressions analytiques, sous la forme  $j_n(q)$  et  $h_n^{(1)}(q)$ , selon les conditions d'ondes entrantes et sortantes.

La fonction  $j_n(q)$  est appelée fonction de Bessel de première espèce, et tend vers zéro quand son argument tend vers zéro (voir figure 4.1) quel que soit l'ordre  $n$ . Elle permet donc d'exprimer le champ électromagnétique à l'intérieur de la sphère. On constate que les maxima de  $j_n(q)$  se décalent avec l'ordre  $n$ , dont dépend aussi la largeur de  $j_n(q)$ . On remarque aussi que selon la valeur du paramètre de taille  $q$ , on ne peut pas négliger  $j_n$  devant  $j_m$  avec  $m < n$ , de sorte qu'aucune simplification n'est évidente.

La fonction  $h_n^{(1)}(q)$  est appelée fonction de Hankel de première espèce. C'est une combinaison linéaire dans  $\mathbb{C}$  de la fonction de Bessel de première espèce et de la fonction de Neumann  $y_n(q)$ . On obtient alors  $h_n^{(1)}(q) = j_n(q) + i \cdot y_n(q)$ . On remarque que les fonctions  $h_n^{(1)}$  ne convergent pas quand  $q$  tend vers zéro. En revanche, elles

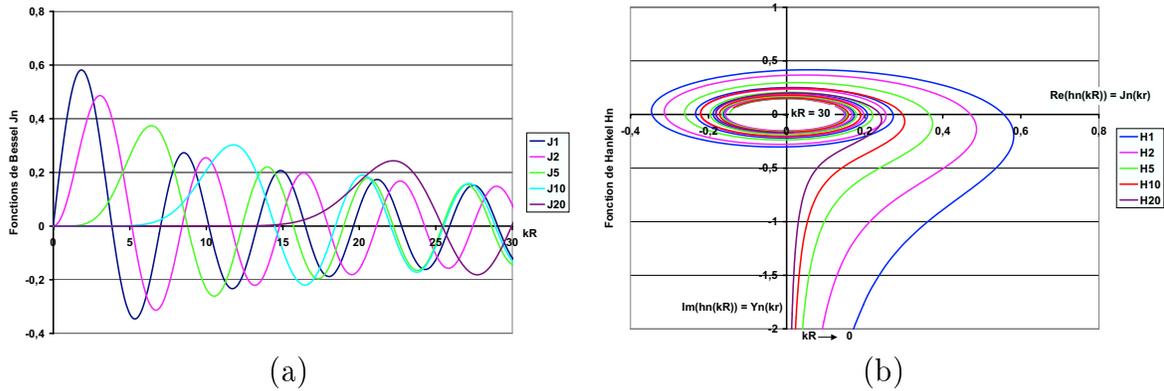


FIG. 4.1 – (a) Fonction de Bessel de première espèce pour des arguments de 0 à 30 et pour les ordres  $n \in \{1, 2, 5, 10, 20\}$ . (b) Fonction de Hankel de première espèce pour des argument de 0 à 30 pour les ordres  $n \in \{1; 2; 5; 10; 20\}$ .

convergent quand  $q$  tend vers l'infini, et c'est pourquoi elles permettent de décrire le champ lointain.

## 4.2 Influence des fonctions harmoniques

La dépendance polaire ( $\varphi$ ) est fonction de cosinus et de sinus. Ces fonctions sont  $2\pi$ -périodiques et n'appellent pas plus de commentaires.

## 4.3 Influence des fonctions de Legendre

La dépendance normale ( $\theta$ ) est fonction des polynômes de Legendre et de leur dérivée première.

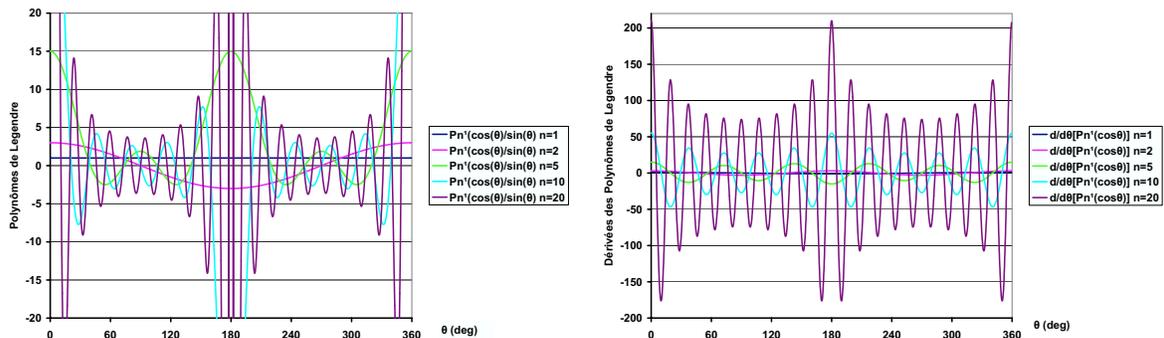


FIG. 4.2 – Polynômes de Legendre  $\frac{P_n^1(\cos \theta)}{\sin \theta}$  et  $\frac{d}{d\theta}(P_n^1(\cos \theta))$ .

Pour  $n = 1$ ,  $\frac{P_n^1(\cos \theta)}{\sin \theta}$  et  $\frac{d}{d\theta}(P_n^1(\cos \theta))$  sont constants et égaux à 1 (voir figure 4.2). En outre, quand l'ordre  $n$  est pair, alors  $\frac{P_n^1(\cos \theta)}{\sin \theta}$  est anti-symétrique en  $\pi/2$ . Inversement, quand l'ordre  $n$  est impair  $\frac{P_n^1(\cos \theta)}{\sin \theta}$  est symétrique en  $\pi/2$ .

Pour  $\frac{d}{d\theta}(P_n^1(\cos \theta))$  la parité de  $n$  est conservée. En effet, pour  $n$  pair  $\frac{d}{d\theta}(P_n^1(\cos \theta))$  est symétrique en  $\pi/2$  et pour  $n$  impair  $\frac{d}{d\theta}(P_n^1(\cos \theta))$  est anti-symétrique en  $\pi/2$ .

On remarquera que plus on augmente l'ordre, et plus les oscillations sont nombreuses.

Pour  $\frac{P_n^1(\cos \theta)}{\sin \theta}$  et quand le degré du polynôme est élevé, les parties situées à  $\theta = 0^\circ$  et à  $180^\circ$  ont des valeurs plus de 50 fois supérieures aux parties situées à  $90^\circ$  et à  $270^\circ$ . Les parties situées dans le flux réfléchi et dans le flux transmis deviennent donc plus grandes quand le degré du polynôme augmente.

Pour  $\frac{d}{d\theta}(P_n^1(\cos \theta))$  et quand le degré du polynôme est élevé, les niveaux augmentent mais restent approximativement du même ordre de grandeur quel que soit l'angle normal  $\theta$ .

## 4.4 Convergence de la série

On a pu voir que le champ est obtenu sous forme d'une série (voir équations 2.1 et 1.43) dont on voudrait bien réduire l'indice de sommation quand cela est possible, selon la valeur du paramètre de taille  $q$ . Pour cela nous traçons sur la figure 4.3, les différents termes de la série pour en étudier le poids sur le résultat final.

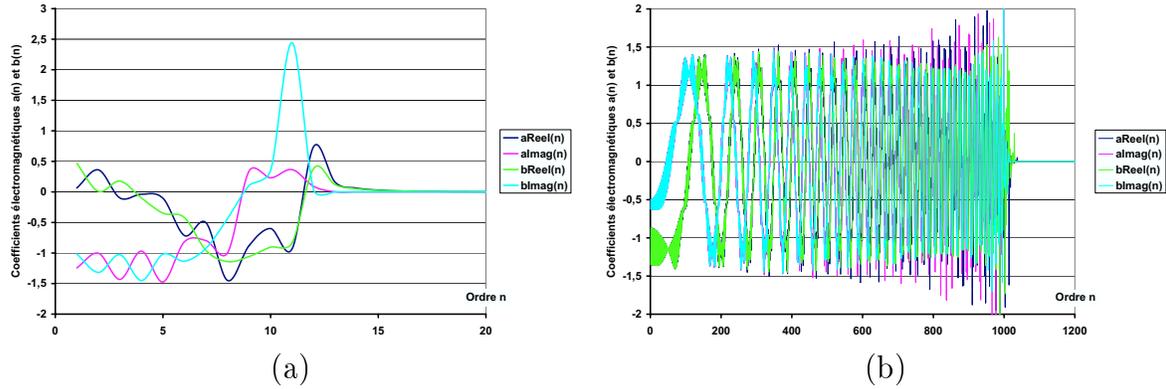


FIG. 4.3 – Coefficients  $a_n^d$  et  $b_n^d$  en fonction de l'ordre  $n$ , pour  $q = 10$  (a) et pour  $q = 1000$  (b).

La figure 4.3 montre les oscillations des coefficients électromagnétiques en fonction du paramètre de taille. On constate que les coefficients ont à peu près le même poids. Seuls les coefficients dont la valeur  $n$  est proche de  $q$  sont plus importants que les autres. Ensuite, quand l'ordre  $n$  dépasse la valeur  $q$ , les coefficients tendent rapidement vers zéro. Nous pouvons donc nous limiter à un ordre maximum de  $n$  légèrement supérieur à  $q$ . Ces simulations permettent ainsi de prendre en compte les

termes utiles dans la série du champ électromagnétique. Il est possible de définir un critère empirique, dit critère de Wiscombe [5]. Toutefois, le simple fait de prendre un ordre maximum équivalent au paramètre de taille est un critère suffisant pour nos applications.

Dans ce paragraphe nous avons évalué de façon succincte l'amplitude des différents coefficients de la série. Dans la section suivante nous étudions leur poids dans la série résultante.

## 4.5 Analyse des composantes

Nous soulignons ici la dépendance de chaque terme de la série du champ électrique  $E_d$ . Nous représentons donc la composante  $C^d(n)$  en fonction de l'ordre de la série pour une position à l'infini donnée.

$$\vec{E}_d = E_0 \sum_{n=1}^{\infty} C^d(n), \quad (4.2)$$

avec  $C^d(n) = i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} [a_n^d \vec{M}_{o1n}^{(-)}(\infty) - ib_n^d \vec{N}_{e1n}^{(-)}(\infty)].$

L'étude porte sur différents diamètres de sphère à  $\lambda = 633$  nm à position donnée. Le champ électrique est pris à l'infini (à un mètre de l'objet) pour un angle polaire  $\varphi$  nulle et pour deux angles normaux  $\theta = 0^\circ$  et  $60^\circ$ . La sphère est éclairée par une onde plane.

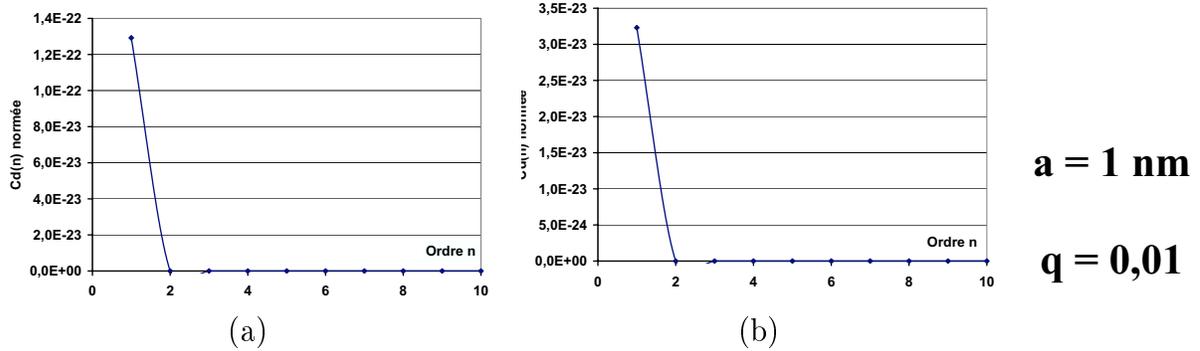


FIG. 4.4 – Étude des composantes  $C^d(n)$  d'une sphère de rayon 1 nm ( $q = 0,01$ ), à  $\theta = 0^\circ$  (a) et  $60^\circ$  (b).

4.5. ANALYSE DES COMPOSANTES

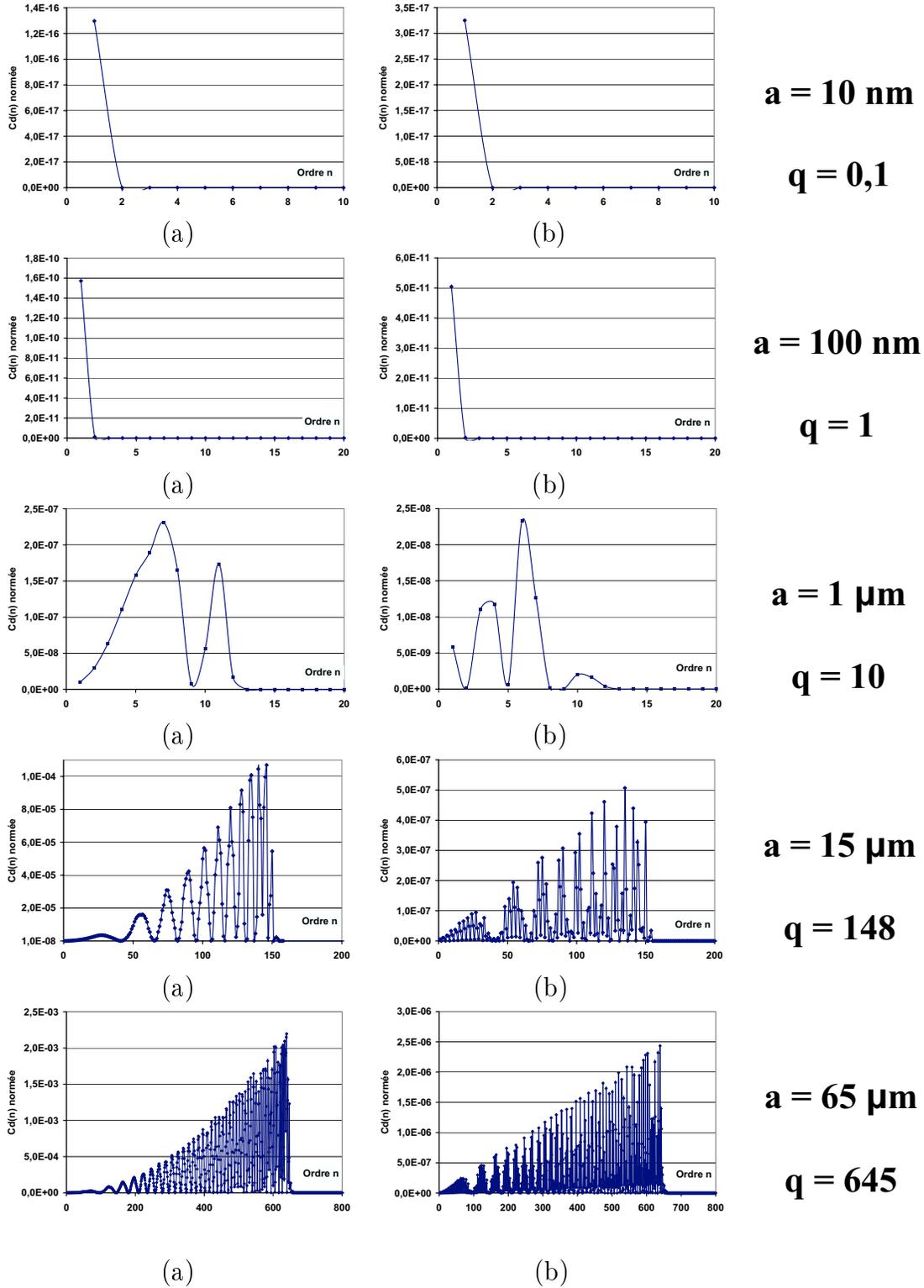


FIG. 4.5 – Étude des composantes  $C^d(n)$  à  $\theta = 0^\circ$  (a) et  $60^\circ$  (b), pour une sphère de rayon  $a = 10 \text{ nm}$  ( $q = 0,1$ ),  $a = 100 \text{ nm}$  ( $q = 1$ ),  $a = 1 \mu\text{m}$  ( $q = 10$ ),  $a = 15 \mu\text{m}$  ( $q = 148$ ) et  $a = 65 \mu\text{m}$  ( $q = 645$ ).

Sur toutes ces figures 4.4 et 4.5 nous remarquons que les termes majoritaires sont les coefficients  $a_n^d$  et  $b_n^d$  par rapport aux vecteurs  $\vec{M}$  et  $\vec{N}$ , quel que soit le diamètre des sphères. Cela montre que nos conclusions du paragraphe précédent ne sont pas modifiées.

## 4.6 Section efficace de diffusion

La section efficace de diffusion peut s'écrire comme la limite de la série tronquée

$$Q_d(N) = \frac{2\pi}{k^2} \sum_{n=0}^N (2n+1) [(a_n^d)^2 + (b_n^d)^2]. \quad (4.3)$$

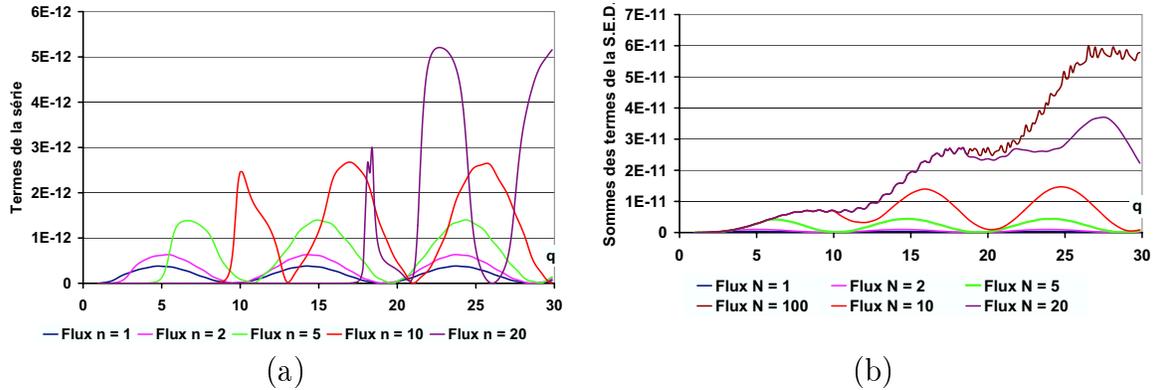


FIG. 4.6 – (a) Termes de la série de la section efficace de diffusion en fonction du paramètre de taille  $q$ . (b) Série tronquée de la section efficace de diffusion à différents ordres  $N$ , en fonction de  $q$ .

En figure 4.6 (a) nous donnons l'amplitude de chaque terme de la série en fonction du paramètre de taille. En figure 4.6 (b), nous donnons la série tronquée en fonction du paramètre  $q$ .

De façon générale, on constate en figure 4.6 (b) qu'il est indispensable de sommer jusqu'à l'ordre  $n \geq E(q)$ , où  $E$  désigne la partie entière du paramètre de taille. Les oscillations observées sur les courbes sont caractéristiques des différents termes constituant la série.

Chaque terme de la série oscille avec un premier pic plus important que les pics secondaires. La somme de tous ces termes, pour chaque ordre  $n$ , donne la section efficace de diffusion. Les courbes de la figure 4.6 illustrent la construction de la section efficace de diffusion. Ainsi, chaque pic secondaire correspond à un maximum d'un terme  $n$  de la série.

## 4.7 Réponses angulaire et spectrale

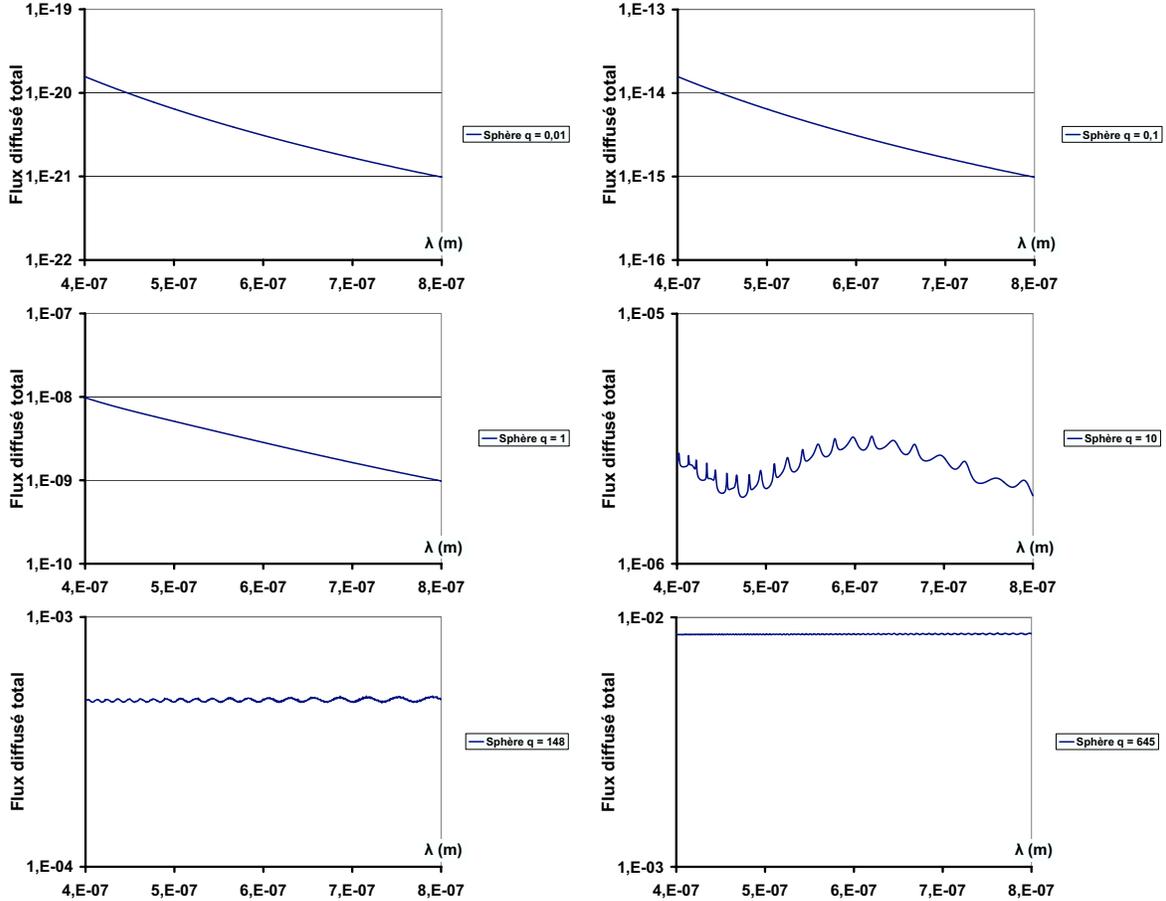


FIG. 4.7 – Flux diffusé d’une sphère en fonction de la longueur d’onde pour différents rayons de sphères  $q = 0,01$  avec  $a = 1,00745$  nm ;  $q = 0,1$  avec  $a = 10,0745$  nm ;  $q = 1$  avec  $a = 100,745$  nm ;  $q = 10$  avec  $a = 1007,45$  nm ;  $q = 148$  avec  $a = 15$   $\mu\text{m}$  ;  $q = 645$  avec  $a = 65$   $\mu\text{m}$ .

Nous pouvons maintenant commenter les premiers résultats numériques, en nous limitant aux variations spectrales de la diffusion totale par une sphère.

En figure 4.7 les calculs sont effectués de 400 nm à 800 nm, pour des paramètres de taille variant de  $q = 0,01$  à  $q = 648$ . La sphère est unique et éclairée par un faisceau de rayon 1 mm. On observe tout d’abord que pour les petites valeurs de  $q$ , la courbe est quasi-linéaire et décroissante aux grandes longueurs d’onde, privilégiant ainsi la couleur bleue. Ces résultats sont identiques à ceux obtenus avec le code asymptotique. Puis, à mesure que la taille augmente, la diffusion devient rapidement achromatique dès que la taille de la sphère dépasse la longueur d’onde. Dans tous les cas les oscillations observées sont caractéristiques des différents termes de la série, comme on l’a vu précédemment.

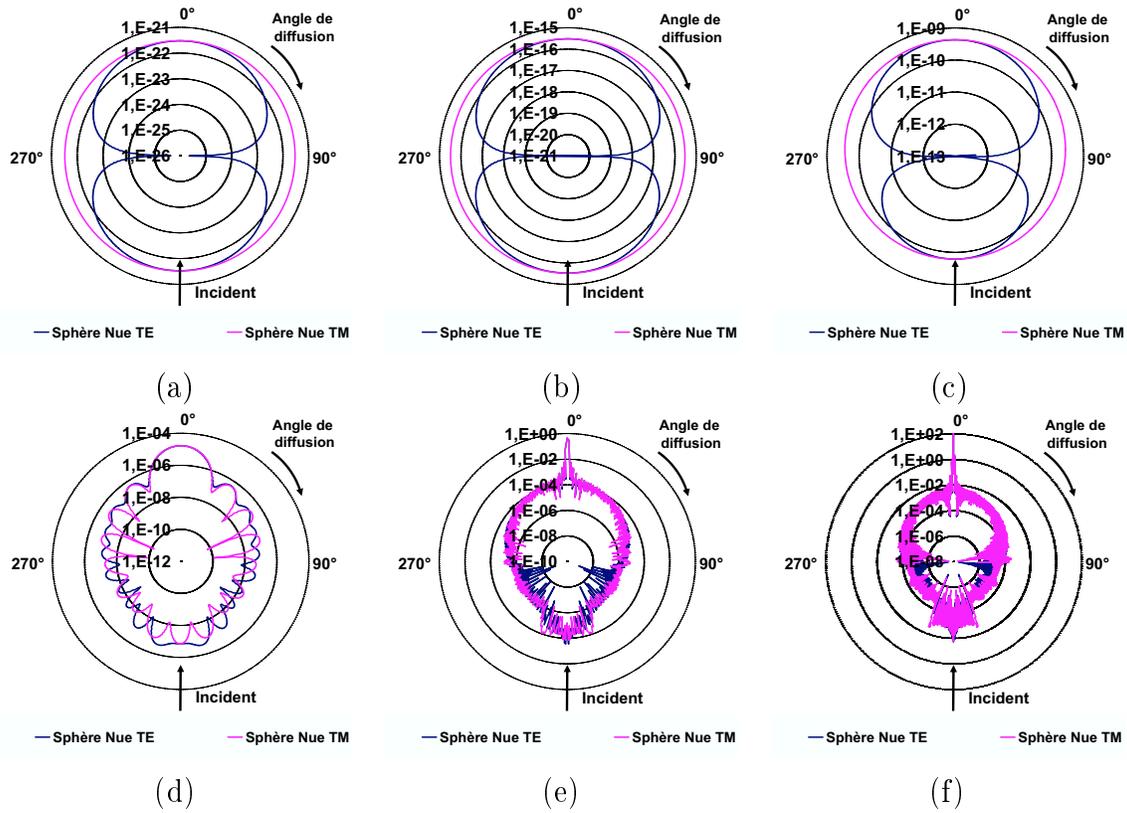


FIG. 4.8 – Flux diffusé par une sphère à  $\lambda = 633 \text{ nm}$  en fonction de l'angle normal  $\theta$  pour différents rayons de sphères  $a$  : (a)  $a = 1 \text{ nm}$  où  $q = 0,01$  ; (b)  $a = 10 \text{ nm}$  où  $q = 0,1$  ; (c)  $a = 100 \text{ nm}$  où  $q = 1$  ; (d)  $a = 1 \mu\text{m}$  où  $q = 10$  ; (e)  $a = 15 \mu\text{m}$  où  $q = 148$  ; (f)  $a = 65 \mu\text{m}$  où  $q = 645$ . Les différentes polarisations sont données.

En figure 4.8, les variations polaires sont tracées pour différents paramètres de taille ou diamètres de sphère. On constate, conformément aux formules du dipôle, que la courbe est symétrique en réflexion et transmission pour les petits diamètres. Par contre, un faisceau transmis apparaît pour les grands diamètres. De façon plus générale, des oscillations apparaissent dès que le paramètre de taille est proche de l'unité, soit pour des diamètres de l'ordre de la longueur d'onde. Ces oscillations deviennent très nombreuses pour les grandes valeurs de  $q$ , et ne seront donc pas toujours détectables expérimentalement. Pour chacune de ces courbes, nous avons tracé les deux cas de polarisation, et l'on constate pour les faibles diamètres que la polarisation TM est isotrope. nous avons vérifié que ces résultats étaient conformes à ceux trouvés dans la littérature [31].

## 4.8 Cas d'une sphère absorbante ou métallique

Nous pouvons maintenant comparer le cas d'une sphère diélectrique avec celui d'une sphère métallique. Pour cela, nos codes de calcul ont été étendus au cas complexe, ce qui a nécessité un travail important mais nécessaire sur les fonctions de Bessel à argument complexe. En figure 4.9 nous présentons la section efficace de diffusion en fonction du paramètre de taille  $q = \frac{2\pi a}{\lambda}$ . Nous remarquons que le coefficient d'extinction modifie peu le profil de diffusion et donc l'absorption de la sphère. Les variations sont moindres et le niveau de diffusion baisse. Les oscillations disparaissent dès que  $\kappa > 10^{-2}$ .

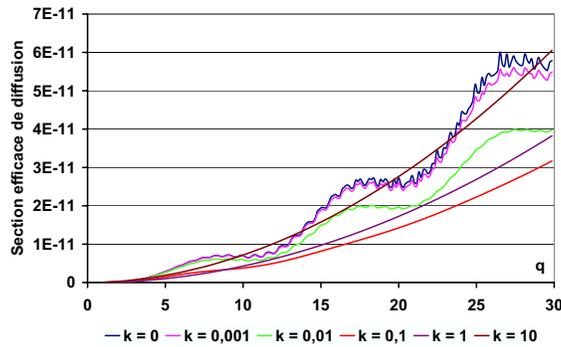


FIG. 4.9 – Section efficace de diffusion d'une sphère d'indice réel  $n = 1,33$  en fonction du paramètre de taille  $q = \frac{2\pi a}{\lambda} \in [1; 30]$  pour différents cas de l'indice d'extinction  $\kappa$  :  $\kappa = 0$ ,  $\kappa = 0,001$ ,  $\kappa = 0,01$ ,  $\kappa = 0,1$ ,  $\kappa = 1$ ,  $\kappa = 10$ .

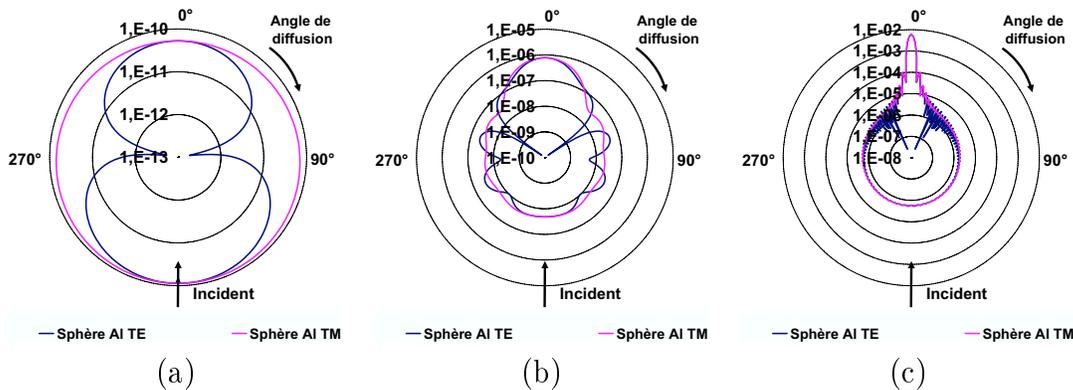


FIG. 4.10 – Réponse angulaire d'une sphère d'aluminium d'indice  $n = 1,4 + 7i$  à 633 nm (a) de diamètre 100 nm, (b) de diamètre 1 µm et (c) de diamètre 10 µm.

En figures 4.10 et 4.11 nous donnons pour illustration les répartitions angulaires et spectrales dans le cas d'une sphère métallique (Aluminium avec  $n = 1,4 + 7i$ ) de différents diamètres. Quand le diamètre augmente et que l'indice d'extinction

est trop important la simulation numérique ne fonctionne plus, elle donne la valeur nulle. Ainsi les diamètres simulés n'excèdent pas  $10 \mu m$ .

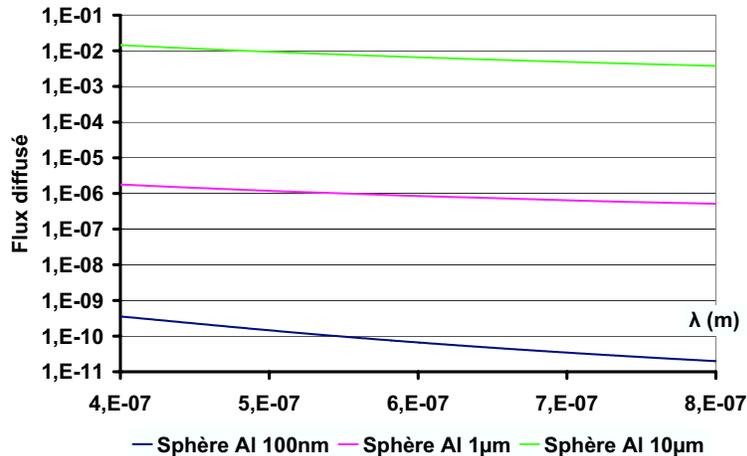


FIG. 4.11 – Réponse spectrale d'une sphère d'aluminium d'indice  $n = 1,4 + 7i$  à  $633 \text{ nm}$  pour différents diamètres ( $0,1 \mu m$ ,  $1 \mu m$  et  $10 \mu m$ ).

## 4.9 Analyse des résonances étroites

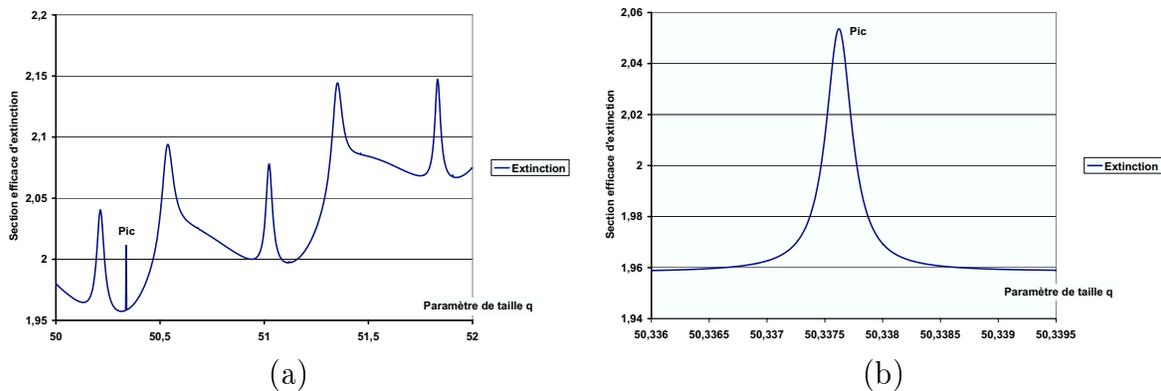


FIG. 4.12 – (a) Analyse de la structure fine de la section efficace divisée par  $\pi a^2$  d'une goutte d'eau d'indice  $n = 1,33$  avec une résolution ( $\Delta q = 10^{-4}$ ). (b) Analyse du pic autour de  $q = 50,33755$  à plus haute résolution ( $\Delta q = 10^{-6}$ ).

En simulant avec un incrément numérique plus faible, nous pouvons étudier les résonances de la section efficace d'extinction. Chaque pic est identifié comme étant la contribution résonnante d'un terme de la série [20][19]. Sur les simulations de la figure 4.12 nous pouvons voir ce qu'a montré Chylev dans le milieu des années

soixante-dix, c'est-à-dire la structure fine de la section efficace d'extinction. Chaque pic correspond à un coefficient de la somme sur l'indice  $n$ . Certains pics concernent les coefficients  $a_n$ , d'autres les coefficients  $b_n$ . En augmentant le pas de résolution nous arrivons à résoudre la structure de la section d'extinction.



# Chapitre 5

## Conclusion

Nous avons ainsi, dans cette première partie, entièrement développé la théorie de Mie et mis en oeuvre des codes de calcul pour des sphères homogènes diélectriques ou métalliques. Plusieurs programmes en langage C permettent d'accéder aux champs proche et lointain, pour différents types de polarisation de l'onde diffusée dans chaque direction de l'espace et pour chaque longueur d'onde. Les critères de convergence ont été soigneusement étudiés ; les codes de calcul ont été validés étape par étape, par comparaison aux résultats donnés dans la littérature, complétés par de nombreuses données qui nous ont été aimablement transmises par Hervé Tortel de l'équipe TEM de l'institut Fresnel. Parallèlement, nous avons procédé à de nombreuses vérifications analytiques basées sur la comparaison entre champ proche et champ lointain, expressions intégrales et angulaires intégrées, etc. qui n'ont pas été présentées ici.

L'ensemble de ce travail nous a permis d'acquérir une base solide, analytique et numérique, pour poursuivre maintenant l'investigation de sphères multicouches en partie B. Rappelons également que de nombreux profils angulaires et spectraux ont été donnés pour des sphères métalliques et diélectriques de différents diamètres, ce qui nous a permis de nous familiariser avec la réponse optique d'un composant de type sphère homogène. On retiendra, quant à la réponse spectrale de la diffusion globale intégrée dans tout l'espace, que les faibles et grands diamètres donnent lieu respectivement à une couleur bleue et à une réponse achromatique, alors que les valeurs intermédiaires mettent en évidence de nombreuses oscillations basses fréquences de faible amplitude, auxquelles se superpose une structure fine dite de résonance, également de faible amplitude. Dans tous les cas le paramètre clé est le facteur  $q = 2\pi a/\lambda$ , constituant l'argument de tous les termes de la série décrivant le champ diffusé à l'aide de fonctions de Hankel et de Bessel pondérées par des polynômes de Legendre.



## Deuxième partie

Extension de la théorie et des codes  
de calculs au cas de sphères  
multicouches concentriques



---

Cette partie II est consacrée au cas des sphères multicouches :

- Dans le chapitre 6 nous montrons comment la théorie de Mie est étendue aux structures concentriques, grâce aux relations de récurrence dans l'empilement multicouches
- Le chapitre 7 utilise les codes de calcul pour illustrer la réponse angulaire et spectrale de sphères de différents diamètres, recouvertes de plusieurs systèmes multicouches. On y étudie la tolérance de la réponse optique au rayon de la sphère, et une étude cas par cas est présentée pour chaque type d'empilement.
- Le chapitre 8 permet de conclure cette partie.

---

# Chapitre 6

## Extension du modèle

La sphère est maintenant recouverte d'un multicouche concentrique constitué de couches minces de matériaux linéaires, isotropes, homogènes, non magnétiques et non chargés (figure 6.1). Nous étudions l'interaction d'une onde plane sur cette structure.

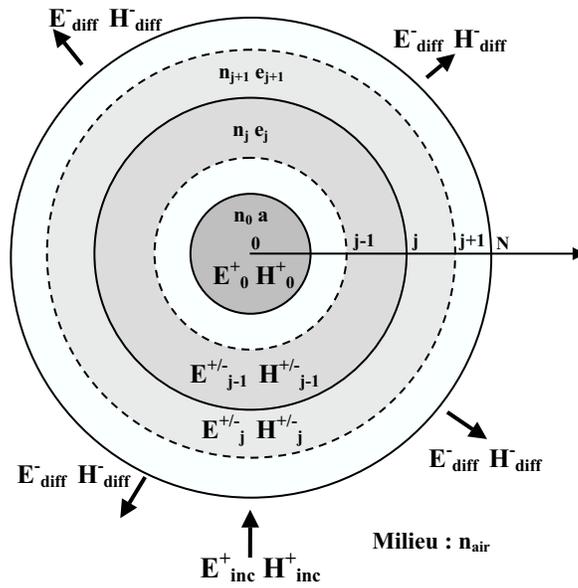


FIG. 6.1 – Diffraction d'une onde plane par une sphère

## 6.1 Expression du champ incident

La décomposition du champ incident est identique à celle donnée dans la partie précédente. On a donc

$$\begin{aligned}\vec{E}_i &= E_0 e^{ik_2 R \cos \theta} \vec{O}_x \\ &= E_0 \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} [\vec{M}_{o1n}^{(+)} - i \vec{N}_{e1n}^{(+)}]\end{aligned}\quad (6.1)$$

et

$$\begin{aligned}\vec{H}_i &= H_0 e^{ik_2 R \cos \theta} \vec{O}_y \\ &= -E_0 \frac{k}{i\omega_2 \mu_2} \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} [\vec{M}_{e1n}^{(+)} + i \vec{N}_{o1n}^{(+)}].\end{aligned}\quad (6.2)$$

Par analogie avec les formules du champ diffracté, on peut donc considérer que les coefficients du champ incident s'écrivent comme

$$a_n^{N(+)} = 1 \quad \text{et} \quad b_n^{N(+)} = 1 \quad (6.3)$$

où  $p$  est le nombre de couches de l'empilement.

## 6.2 Expression du champ à l'extérieur de la sphère multicouche

Dans le milieu ( $N$ ) de type superstrat à l'extérieur du multicouche, le champ doit avoir une valeur finie quand le rayon  $a$  tend vers l'infini, de sorte que son expression est analogue à celle du chapitre précédent. Il s'exprime ainsi comme une combinaison linéaire des vecteurs  $\vec{M}_{o/e1n}^{(-)}$  et  $\vec{N}_{o/e1n}^{(-)}$ , l'exposant  $(-)$  rappelant la présence des fonctions de Hankel de première espèce. On a donc

$$E_d^N = E_0 \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} [a_n^d \vec{M}_{o1n}^{(-)} - i b_n^d \vec{N}_{e1n}^{(-)}], \quad (6.4)$$

$$H_d^N = -E_0 \frac{k_2}{\omega_2 \mu_2} \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} [b_n^d \vec{M}_{e1n}^{(-)} + i a_n^d \vec{N}_{o1n}^{(-)}]. \quad (6.5)$$

Les coefficients de ces champs seront notés avec l'exposant ( $N$ ) pour rappeler que l'on est dans le superstrat :

$$a_n^d = a_n^{N(-)} \quad \text{et} \quad b_n^d = b_n^{N(-)} \quad (6.6)$$

### 6.3 Expression du champ dans la sphère substrat

La sphère initiale, destinée à être recouverte, est désignée ici comme “sphère substrat”. Dans ce milieu indicé (0), le champ doit être fini à l’origine, de sorte que les vecteurs générateurs  $\vec{M}_{o/e1n}^{(+)}$  et  $\vec{N}_{o/e1n}^{(+)}$  sont calculés avec les fonctions de Bessel de première espèce. On a donc

$$\vec{E}_t^0 = E_0 \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} [a_n^t \vec{M}_{o1n}^{(+)} - i b_n^t \vec{N}_{e1n}^{(+)}], \quad (6.7)$$

$$\vec{H}_t^0 = -E_0 \frac{k}{\omega_1 \mu_1} \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} [b_n^t \vec{M}_{e1n}^{(+)} + i a_n^t \vec{N}_{o1n}^{(+)}]. \quad (6.8)$$

Comme précédemment, pour rappeler qu’on est dans la sphère substrat, les coefficients seront notés avec un exposant (0) :

$$a_n^t = a_n^{0(+)} \quad \text{et} \quad b_n^t = b_n^{0(+)}. \quad (6.9)$$

### 6.4 Expression du champ à l’intérieur d’une couche concentrique

Dans une couche mince revêtant la sphère, le champ peut prendre différentes formes analytiques, car les problèmes de convergence ne se posent pas. En conséquence, le champ s’exprime comme une combinaison linéaire des vecteurs générateurs  $\vec{M}_{o/e1n}^{(-)}$  et  $\vec{N}_{o/e1n}^{(-)}$ , et  $\vec{M}_{o/e1n}^{(+)}$  et  $\vec{N}_{o/e1n}^{(+)}$ . On peut ici faire l’analogie avec des ondes entrantes (+) et sortantes (-). On obtient ainsi pour le champ électromagnétique d’une couche  $j$  :

$$\begin{aligned} \vec{E}^j &= E_0 e^{-i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} (a_n^{j(+)} \vec{M}_{o1n}^{(+)} + a_n^{j(-)} \vec{M}_{o1n}^{(-)} + b_n^{j(+)} \vec{N}_{e1n}^{(+)} + b_n^{j(-)} \vec{N}_{e1n}^{(-)}) \\ \vec{H}^j &= -E_0 \frac{k}{i\omega\mu} e^{-i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} (b_n^{j(+)} \vec{M}_{e1n}^{(+)} + b_n^{j(-)} \vec{M}_{e1n}^{(-)} + a_n^{j(+)} \vec{N}_{o1n}^{(+)} + a_n^{j(-)} \vec{N}_{o1n}^{(-)}) \end{aligned} \quad (6.10)$$

A ce stade on constate donc qu’il y a, pour chaque ordre  $n$ , quatre inconnues dans chaque milieu concentrique, et deux inconnues dans chaque milieu extrême (substrat et superstrat). La détermination devra donc se faire à l’aide d’une récurrence basée sur les relations de continuité à chaque interface de la sphère multicouche.

## 6.5 Continuité des composantes à chaque interface des couches concentriques

En utilisant la continuité des composantes tangentielles à la surface de la sphère, nous pouvons déterminer les relations de récurrence liant les coefficients  $a_n^{j(+)}$ ,  $b_n^{j(+)}$ ,  $a_n^{j(-)}$ ,  $b_n^{j(-)}$  à  $a_n^{j+1(+)}$ ,  $b_n^{j+1(+)}$ ,  $a_n^{j+1(-)}$ ,  $b_n^{j+1(-)}$ .

Comme  $\vec{u}_\theta$  et  $\vec{u}_\varphi$  sont les deux vecteurs de la base sphérique tangents à la sphère, alors les relations de passage s'expriment sur les rayons  $a_j = a + \sum_{m=1}^j e_j$  (voir figure 6.1), de sorte que seuls  $\theta$  et  $\varphi$  varient. Ces relations s'écrivent :

– Continuité des composantes sur  $\vec{u}_\theta$

$$E_\theta^j(a_j) = E_\theta^{j+1}(a_j) \quad \text{et} \quad H_\theta^j(a_j) = H_\theta^{j+1}(a_j) \quad (6.11)$$

– Continuité des composantes sur  $\vec{u}_\varphi$

$$E_\varphi^j(a_j) = E_\varphi^{j+1}(a_j) \quad \text{et} \quad H_\varphi^j(a_j) = H_\varphi^{j+1}(a_j) \quad (6.12)$$

## 6.6 Relations de récurrence

Après développement des relations de continuité aux interfaces de chaque couche déposée sur la sphère substrat, nous obtenons les relations de récurrence suivantes :

**Relation de récurrence pour déterminer  $a_n^{j(+)}$**

$$\begin{aligned} a_n^{j(+)} = & a_n^{j+1(+)} \frac{\frac{\partial}{\partial k_j R} [k_j R h_n^{(1)}(k_j R)]_{a_j} j_n(k_{j+1} a_j) - \frac{\partial}{\partial k_{j+1} R} [k_{j+1} R j_n(k_{j+1} R)]_{a_j} h_n^{(1)}(k_j a_j)}{\frac{\partial}{\partial k_j R} [k_j R h_n^{(1)}(k_j R)]_{a_j} j_n(k_j a_j) - \frac{\partial}{\partial k_j R} [k_j R j_n(k_j R)]_{a_j} h_n^{(1)}(k_j a_j)} \\ & + a_n^{j+1(-)} \frac{\frac{\partial}{\partial k_j R} [k_j R h_n^{(1)}(k_j R)]_{a_j} h_n^{(1)}(k_{j+1} a_j) - \frac{\partial}{\partial k_{j+1} R} [k_{j+1} R h_n^{(1)}(k_{j+1} R)]_{a_j} h_n^{(1)}(k_j a_j)}{\frac{\partial}{\partial k_j R} [k_j R h_n^{(1)}(k_j R)]_{a_j} j_n(k_j a_j) - \frac{\partial}{\partial k_j R} [k_j R j_n(k_j R)]_{a_j} h_n^{(1)}(k_j a_j)} \end{aligned} \quad (6.13)$$

**Relation de récurrence pour déterminer  $a_n^{j(-)}$**

$$\begin{aligned} a_n^{j(-)} = & a_n^{j+1(+)} \frac{\frac{\partial}{\partial k_j R} [k_j R j_n(k_j R)]_{a_j} j_n(k_{j+1} a_j) - \frac{\partial}{\partial k_{j+1} R} [k_{j+1} R j_n(k_{j+1} R)]_{a_j} j_n(k_j a_j)}{\frac{\partial}{\partial k_j R} [k_j R j_n(k_j R)]_{a_j} h_n^{(1)}(k_j a_j) - \frac{\partial}{\partial k_j R} [k_j R h_n^{(1)}(k_j R)]_{a_j} j_n(k_j a_j)} \\ & + a_n^{j+1(-)} \frac{\frac{\partial}{\partial k_j R} [k_j R j_n(k_j R)]_{a_j} h_n^{(1)}(k_{j+1} a_j) - \frac{\partial}{\partial k_{j+1} R} [k_{j+1} R h_n^{(1)}(k_{j+1} R)]_{a_j} j_n(k_j a_j)}{\frac{\partial}{\partial k_j R} [k_j R j_n(k_j R)]_{a_j} h_n^{(1)}(k_j a_j) - \frac{\partial}{\partial k_j R} [k_j R h_n^{(1)}(k_j R)]_{a_j} j_n(k_j a_j)} \end{aligned} \quad (6.14)$$

Relation de récurrence pour déterminer  $b_n^{j(+)}$

$$\begin{aligned}
 b_n^{j(+)} = & b_n^{j+1(+)} \frac{\frac{k_j}{k_{j+1}} h_n^{(1)}(k_j a_j) \frac{\partial}{\partial(kR)} [k_{j+1} R j_n(k_{j+1} R)]_{a_j} - \frac{k_{j+1}}{k_j} \frac{\partial}{\partial(kR)} [k_j R h_n^{(1)}(k_j R)]_{a_j} j_n(k_{j+1} a_j)}{(h_n^{(1)}(k_j a_j) \frac{\partial}{\partial(kR)} [k_j R j_n(k_j R)]_{a_j}) - (\frac{\partial}{\partial(kR)} [k_j R h_n^{(1)}(k_j R)]_{a_j} j_n(k_j a_j))} \\
 + & b_n^{j+1(-)} \frac{\frac{k_j}{k_{j+1}} h_n^{(1)}(k_j a_j) \frac{\partial}{\partial(kR)} [k_{j+1} R h_n^{(1)}(k_{j+1} R)]_{a_j} - \frac{k_{j+1}}{k_j} \frac{\partial}{\partial(kR)} [k_j R h_n^{(1)}(k_j R)]_{a_j} h_n^{(1)}(k_{j+1} a_j)}{(h_n^{(1)}(k_j a_j) \frac{\partial}{\partial(kR)} [k_j R j_n(k_j R)]_{a_j}) - (\frac{\partial}{\partial(kR)} [k_j R h_n^{(1)}(k_j R)]_{a_j} j_n(k_j a_j))}
 \end{aligned} \tag{6.15}$$

Relation de récurrence pour déterminer  $b_n^{j(-)}$

$$\begin{aligned}
 b_n^{j(-)} = & b_n^{j+1(+)} \frac{\frac{k_j}{k_{j+1}} j_n(k_j a_j) \frac{\partial}{\partial(kR)} [k_{j+1} R j_n(k_{j+1} R)]_{a_j} - \frac{k_{j+1}}{k_j} \frac{\partial}{\partial(kR)} [k_j R h_n^{(1)}(k_j R)]_{a_j} j_n(k_{j+1} a_j)}{(j_n(k_j a_j) \frac{\partial}{\partial(kR)} [k_j R h_n^{(1)}(k_j R)]_{a_j}) - (\frac{\partial}{\partial(kR)} [k_j R j_n(k_j R)]_{a_j} h_n^{(1)}(k_j a_j))} \\
 + & b_n^{j+1(-)} \frac{\frac{k_j}{k_{j+1}} j_n(k_j a_j) \frac{\partial}{\partial(kR)} [k_{j+1} R h_n^{(1)}(k_{j+1} R)]_{a_j} - \frac{k_{j+1}}{k_j} \frac{\partial}{\partial(kR)} [k_j R j_n(k_j R)]_{a_j} h_n^{(1)}(k_{j+1} a_j)}{(j_n(k_j a_j) \frac{\partial}{\partial(kR)} [k_j R h_n^{(1)}(k_j R)]_{a_j}) - (\frac{\partial}{\partial(kR)} [k_j R j_n(k_j R)]_{a_j} h_n^{(j)}(k_j a_j))}
 \end{aligned} \tag{6.16}$$

Nous avons donc quatre relations de récurrence. Elles peuvent s'exprimer sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} a_n^{j(+)} \\ a_n^{j(-)} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \alpha_{a_n}(k_j, k_{j+1}, a_j) & \beta_{a_n}(k_j, k_{j+1}, a_j) \\ \gamma_{a_n}(k_j, k_{j+1}, a_j) & \delta_{a_n}(k_j, k_{j+1}, a_j) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n^{j+1(+)} \\ a_n^{j+1(-)} \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} b_n^{j(+)} \\ b_n^{j(-)} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \alpha_{b_n}(k_j, k_{j+1}, a_j) & \beta_{b_n}(k_j, k_{j+1}, a_j) \\ \gamma_{b_n}(k_j, k_{j+1}, a_j) & \delta_{b_n}(k_j, k_{j+1}, a_j) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_n^{j+1(+)} \\ b_n^{j+1(-)} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

avec les fonctions  $\alpha_{a_n}$ ,  $\beta_{a_n}$ ,  $\gamma_{a_n}$  et  $\delta_{a_n}$  déduites des relations de récurrence 6.13 et 6.14, et les fonctions  $\alpha_{b_n}$ ,  $\beta_{b_n}$ ,  $\gamma_{b_n}$  et  $\delta_{b_n}$  déduites des relations de récurrence 6.15 et 6.16.

Ces expressions sont valables pour passer d'une interface à une autre. Pour passer de la sphère substrat au milieu ambiant superstrat, nous effectuons les produits de matrice suivants :

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} a_n^{0(+)} \\ a_n^{0(-)} \end{bmatrix} &= \left( \prod_{j=1}^p \begin{bmatrix} \alpha_{a_n}(k_j, k_{j+1}, a_j) & \beta_{a_n}(k_j, k_{j+1}, a_j) \\ \gamma_{a_n}(k_j, k_{j+1}, a_j) & \delta_{a_n}(k_j, k_{j+1}, a_j) \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} a_n^{N(+)} \\ a_n^{N(-)} \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} b_n^{0(+)} \\ b_n^{0(-)} \end{bmatrix} &= \left( \prod_{j=1}^p \begin{bmatrix} \alpha_{b_n}(k_j, k_{j+1}, a_j) & \beta_{b_n}(k_j, k_{j+1}, a_j) \\ \gamma_{b_n}(k_j, k_{j+1}, a_j) & \delta_{b_n}(k_j, k_{j+1}, a_j) \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} b_n^{N(+)} \\ b_n^{N(-)} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Pour déterminer les constantes dans chaque milieu, il est nécessaire de connaître les conditions initiales. Elles sont obtenues grâce aux conditions aux limites du système multicouche, que nous précisons maintenant.

## 6.7 Conditions aux limites

Dans le superstrat, pour un système à  $N - 1$  couches, nous avons les quatre constantes suivantes :  $a_n^{N(+)}$ ,  $a_n^{N(-)}$ ,  $b_n^{N(+)}$  et  $b_n^{N(-)}$ . Deux d'entre elles, avec l'exposant (+) sont connues grâce à l'expression du champ incident. Comme nous avons une onde plane, d'après l'équation 6.1, nous obtenons

$$a_n^{N(+)} = 1 \quad \text{et} \quad b_n^{N(+)} = 1. \quad (6.17)$$

Dans la sphère substrat, les constantes sont :  $a_n^{0(+)}$ ,  $a_n^{0(-)}$ ,  $b_n^{0(+)}$  et  $b_n^{0(-)}$ . Pour des raisons de convergence nous n'avons que l'onde portée par la fonction de Bessel de première espèce, avec les constantes d'exposants (+), les autres étant nulles. Nous obtenons donc

$$a_n^{0(-)} = 0 \quad \text{et} \quad b_n^{0(-)} = 0. \quad (6.18)$$

Ainsi, à l'aide de ces deux conditions nous pouvons déterminer par récurrence toutes les constantes caractéristiques du système multicouche. Les relations matricielles se réduisent donc à

$$\begin{bmatrix} a_n^{0(+)} \\ 0 \end{bmatrix} = \left( \prod_{j=1}^{j=p} \begin{bmatrix} \alpha_{a_n}(k_j, k_{j+1}, a_j) & \beta_{a_n}(k_j, k_{j+1}, a_j) \\ \gamma_{a_n}(k_j, k_{j+1}, a_j) & \delta_{a_n}(k_j, k_{j+1}, a_j) \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ a_n^{N(-)} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} b_n^{0(+)} \\ 0 \end{bmatrix} = \left( \prod_{j=1}^{j=p} \begin{bmatrix} \alpha_{b_n}(k_j, k_{j+1}, a_j) & \beta_{b_n}(k_j, k_{j+1}, a_j) \\ \gamma_{b_n}(k_j, k_{j+1}, a_j) & \delta_{b_n}(k_j, k_{j+1}, a_j) \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ b_n^{N(-)} \end{bmatrix}.$$

Les dernières constantes disparaissent après normalisation par le flux incident.

# Chapitre 7

## Résultats numériques

Nous utilisons maintenant les codes de calculs pour étudier les propriétés optiques des sphères multicouches, en regard de ce qu'on peut attendre des structures planaires multicouches classiques. Ainsi les différents paramètres (indice, rayon, empilement concentrique...) sont explorés, et nous étudions leur influence sur les propriétés de diffusion angulaire et spectrale, et d'absorption.

### 7.1 Structures classiques : empilements multicouches plans

La détermination des propriétés optiques d'un empilement planaire consiste à résoudre les équations de Maxwell afin d'étudier l'interaction d'une onde plane avec un milieu stratifié sur substrat plan. De nombreuses études et différentes méthodes de calcul ont été développées pour ce cas classique [32][33]. Nous nous contenterons de rappeler les expressions fondamentales des propriétés optiques d'un empilement de couches minces éclairé par une onde plane monochromatique.

Considérons un empilement de  $p$  couches déposées sur un substrat semi-infini d'indice  $n_s$ . Chaque couche est caractérisée par son indice de réfraction  $n_i$  et son épaisseur mécanique  $e_i$ . La dépendance temporelle est en  $e^{-j\omega t}$ . L'onde incidente est orientée suivant l'axe ( $\vec{o}_z$ ) perpendiculairement à l'empilement. La résolution des équations de Maxwell donne pour chaque couche mince une solution progressive notée (+) orientée suivant ( $\vec{o}_z$ ) et une solution rétrograde notée (-) orientée suivant ( $-\vec{o}_z$ ) (voir figure 7.1). Pour simuler un empilement homogène de  $p$  couches, le produit de matrices caractéristiques d'une couche mince donne toutes les informations sur les propriétés optiques du système :

$$\begin{bmatrix} B \\ C \end{bmatrix} = \left( \prod_{m=1}^p \begin{bmatrix} \cos(\delta_m) & \frac{j \sin(\delta_m)}{\tilde{n}_m} \\ j \tilde{n}_m \sin(\delta_m) & \cos(\delta_m) \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ \tilde{n}_s \end{bmatrix}$$

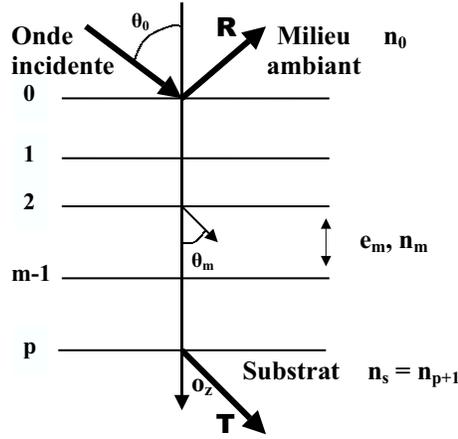


FIG. 7.1 – Cas d'un empilement plan classique.

$$\text{avec } \begin{cases} \delta_m = \frac{2\pi n_m e_m \cos(\theta_m)}{\lambda}, \text{ terme de phase} \\ n_m \text{ indice de réfraction de la couche } m \\ e_m \text{ épaisseur mécanique de la couche } m \\ \lambda \text{ longueur d'onde dans le vide} \\ \theta_m \text{ angle de propagation dans le milieu } m \\ \tilde{n}_m \text{ indice effectif de la couche } m \\ \tilde{n}_s \text{ indice effectif du substrat} \end{cases}$$

et  $Y = \frac{C}{B}$ , admittance complexe de l'empilement.

Les indices effectifs sont définis suivant la polarisation de l'onde plane incidente. Quand le champ électrique est transverse au plan d'incidence, alors la polarisation est appelée TE et  $\tilde{n}_m = n_m \cos(\theta_m)$ . Quand le champ magnétique est transverse au plan d'incidence, alors la polarisation est appelée TM et  $\tilde{n}_m = n_m / \cos(\theta_m)$ . Grâce à cette notation matricielle, les propriétés optiques, à savoir les coefficients de réflexion, transmission et d'absorption en intensité peuvent être exprimés comme :

$$R = \left[ \frac{\tilde{n}_0 B - C}{\tilde{n}_0 B + C} \right] \left[ \frac{\tilde{n}_0 B - C}{\tilde{n}_0 B + C} \right] \quad T = \frac{4\tilde{n}_0 \text{Re}(\tilde{n}_s)}{(\tilde{n}_0 B + C)(\tilde{n}_0 B + C)} \quad (7.1)$$

$$A = \frac{4\tilde{n}_0 \text{Re}(B\bar{C} - \tilde{n}_s)}{(\tilde{n}_0 B + C)(\tilde{n}_0 B + C)} \quad (7.2)$$

avec le bilan d'énergie :  $1 = R + T + A$ .

La plupart des fonctions optiques réalisées avec ces composants planaires sont obtenues à l'aide de revêtements multicouches faisant appel à deux matériaux, dits

de haut et de bas indice par rapport à l'indice du substrat. Les épaisseurs optiques ( $n_m e_m$ ) des couches minces sont fréquemment égales à un multiple du quart d'une même longueur d'onde  $\lambda_c$  dite de contrôle ou de centrage :  $n_m e_m = (2k + 1) \frac{\lambda_c}{4}$ .

Ainsi on désignera par :

- B une couche quart d'onde bas indice,
- H une couche quart d'onde haut indice.

En figure 7.2 nous donnons quelques réponses élémentaires de filtre de type monocouche (H ou B), miroir et filtre Fabry-Perot. Les matériaux sont la cryolithe ( $n = 1,33$ ) et le pentoxyde de tantale ( $Ta_2O_5$ ) ( $n = 2,25$ ) pour les couches B et H respectivement, et le substrat est de la silice ( $n_s = 1,52$ ). La longueur d'onde de centrage est  $\lambda_c = 633$  nm, et l'incidence d'éclairement est normale.

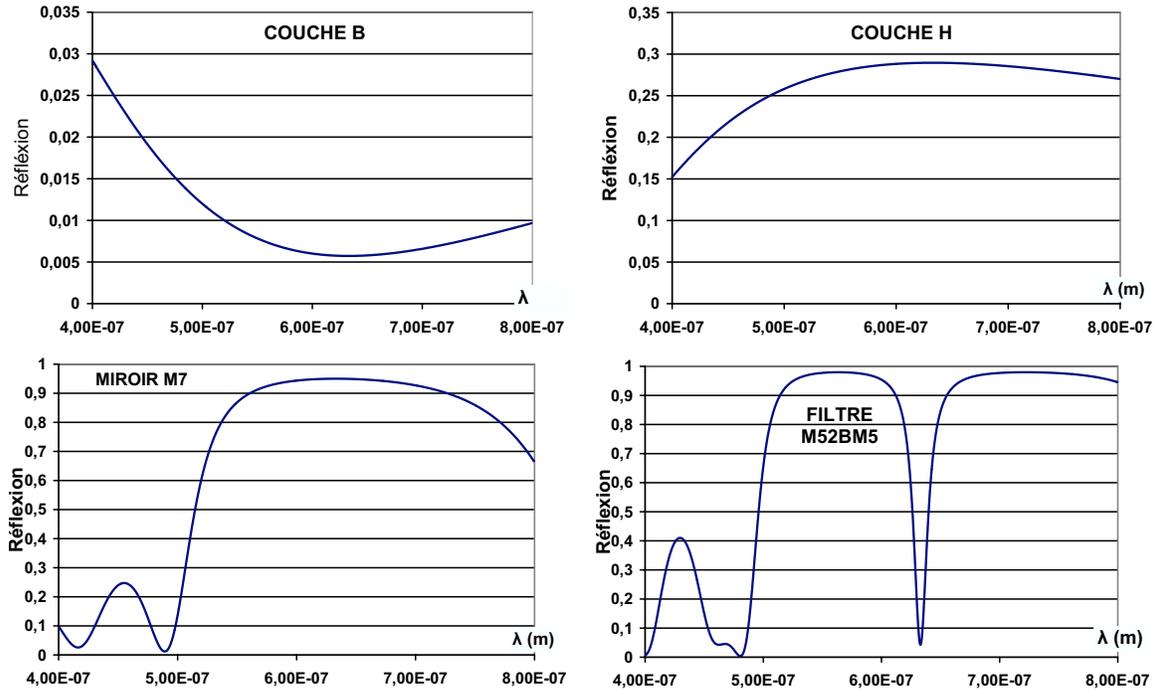


FIG. 7.2 – Réponse optique d'empilements classiques : monocouches H et B, miroir M7=HBHBHBH et filtre bande étroite M52BM5.

Ces résultats planaires permettent d'appréhender les différents empilements concentriques, et aussi, de vérifier ou non la validation de couches quart d'onde sur substrat sphérique.

## 7.2 Sphères de type substrat : étude de tolérance

Avant d'étudier l'influence des revêtements de surface et de juger de l'opportunité de leur dépôt sur des sphères, il nous faut bien maîtriser au préalable le cas des

sphères nues ou de type substrat. Remarquons tout d'abord que les coefficients  $a_n^d$  et  $b_n^d$  ne supportent aucune périodicité, compte tenu des fonctions de Bessel ou de Hankel mises en jeu (voir les équations de la première partie : 1.49, 1.50, 1.51, 1.52). Ceci constitue une différence majeure par comparaison aux empilements planaires. La première investigation requiert de connaître la sensibilité de la réponse optique spectrale au paramètre de taille, ce qui est illustré en figure 7.3. La longueur d'onde d'étude se situe dans le rouge et vaut 633 nm. L'indice de la sphère est celui de la silice, soit  $n_s = 1,52$ .

Pour cela nous traçons autour d'un rayon donné  $a_0$  la réponse spectrale d'une sphère, en faisant varier le rayon d'une grandeur  $\Delta a$ . On chiffre la sensibilité  $\Delta a$  au rayon de la sphère comme la variation de rayon conduisant à une variation relative de 10 % :

$$\left| \frac{D(a_0 + \Delta a) - D(a_0 - \Delta a)}{D(a_0)} \right| = 5 \% \quad (7.3)$$

avec  $\Delta a =$  sensibilité au rayon et  $D$  flux diffusé total.

Ceci revient donc au calcul de la dérivée en différentes valeurs de rayons, dont les résultats sont présentés dans le tableau 7.1.

Rayon de la sphère $a$	1 nm	10 nm	100 nm	1 $\mu\text{m}$	15 $\mu\text{m}$	65 $\mu\text{m}$
$\Delta a$	0,006 nm	0,07 nm	0,85 nm	25 nm	522 nm	1717 nm
$\frac{\Delta a}{a}$	< 1%	< 1%	0.85%	2.5%	3.48%	2.64%

TAB. 7.1 – Sensibilité absolue et relative de la diffusion en fonction du rayon de la sphère.

Ces résultats montrent que la sensibilité à l'effet de taille est approximativement de l'ordre de quelques pourcent, ce qui donne une idée de la tolérance sur le rayon, à propriétés optiques données. Nous remarquons également que jusqu'à  $a = 100$  nm la diffusion croît avec le diamètre, mais oscille pour des valeurs supérieures (voir figure 7.3).

## 7.2. SPHÈRES DE TYPE SUBSTRAT : ÉTUDE DE TOLÉRANCE

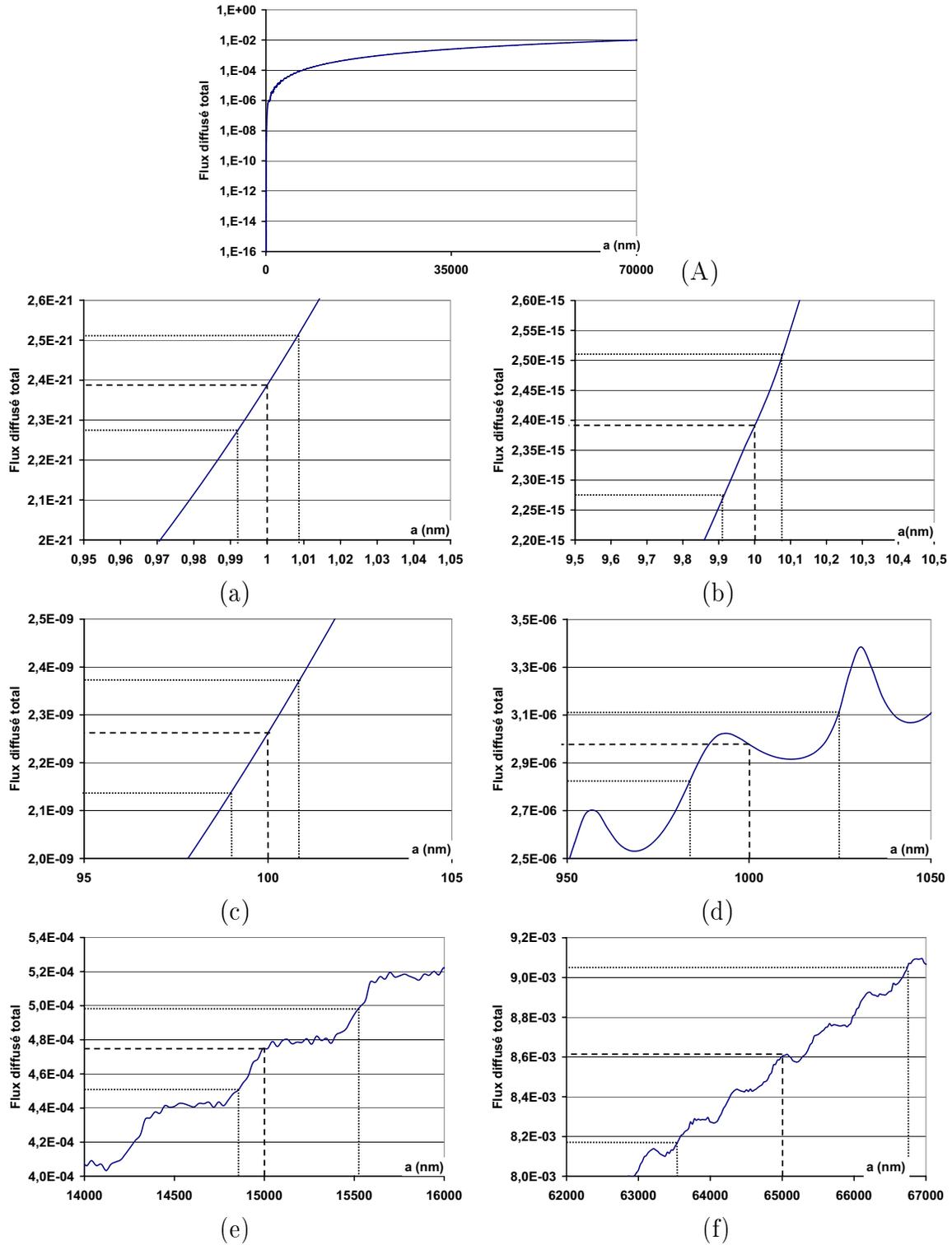


FIG. 7.3 – (A) Étude de la sensibilité de la diffusion à  $\lambda = 633$  nm, en fonction du rayon de la sphère  $a$ , dans différentes gammes de rayons :  $0,95 < a < 1,05$  (a),  $9,5 < a < 10,5$  (b),  $95 < a < 105$  (c),  $950 < a < 1050$  (d),  $14000 < a < 16000$  (e),  $62000 < a < 67000$  (f).

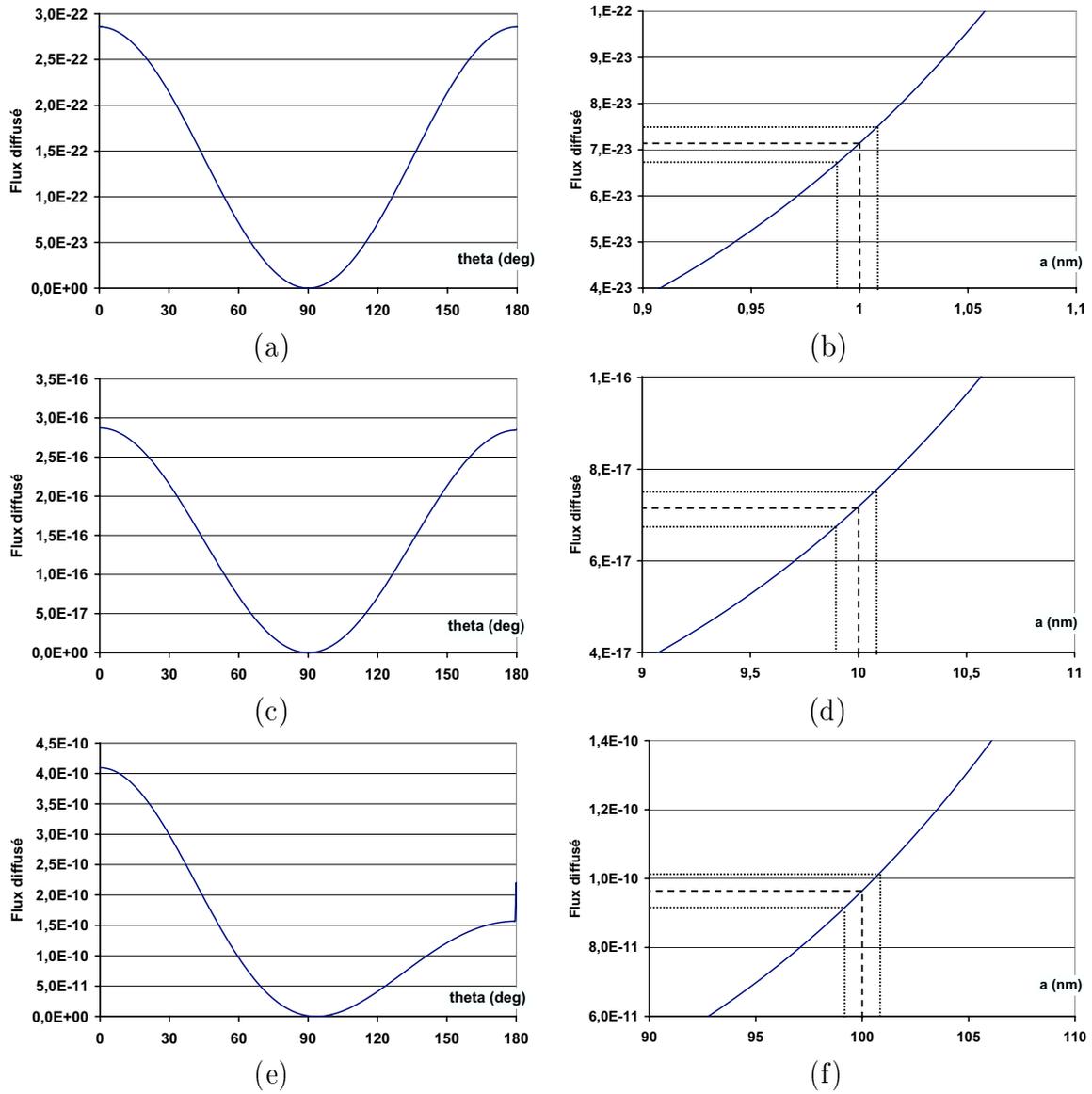


FIG. 7.4 – Étude angulaire de la sensibilité de la diffusion à  $\lambda = 633$  nm, en fonction du rayon de la sphère. (a) flux diffusé angulaire pour  $a = 1$  nm et (b) étude en fonction du rayon à  $\theta = 60^\circ$ ; (c) flux diffusé angulaire pour  $a = 10$  nm et (d) étude en fonction du rayon à  $\theta = 60^\circ$ ; (e) flux diffusé angulaire pour  $a = 100$  nm et (f) étude en fonction du rayon à  $\theta = 60^\circ$ .

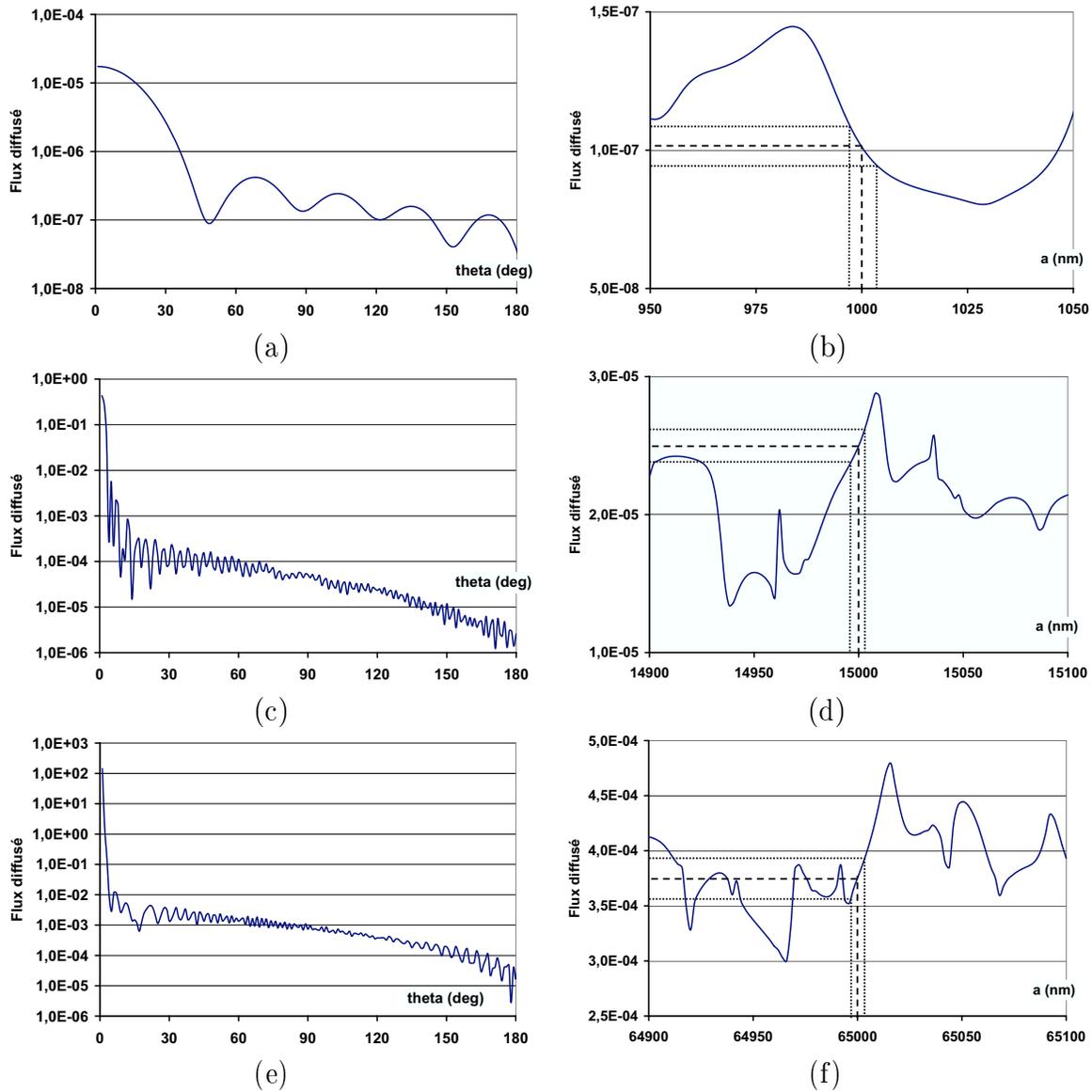


FIG. 7.5 – Étude angulaire de la sensibilité de la diffusion à  $\lambda = 633 \text{ nm}$ , en fonction du rayon de la sphère. (a) flux diffusé angulaire pour  $a = 1 \mu\text{m}$  et (b) étude en fonction du rayon à  $\theta = 60^\circ$ ; (c) flux diffusé angulaire pour  $a = 15 \mu\text{m}$  et (d) étude en fonction du rayon à  $\theta = 60^\circ$ ; (e) flux diffusé angulaire pour  $a = 65 \mu\text{m}$  et (f) étude en fonction du rayon à  $\theta = 60^\circ$ .

Nous étudions aussi la sensibilité à  $\theta$  et à  $\varphi$  donnés. Nous présentons en figure 7.4 et 7.5 notre étude à  $\theta = 60^\circ$  et à  $\varphi = 0^\circ$ . La longueur d'onde d'étude est de  $633 \text{ nm}$ . La sensibilité au rayon est donnée quand la diffusion est modifiée d'une valeur relative de 10 %, de la même manière que précédemment.

Les résultats sont présentés dans le tableau 7.2.

Rayon de la sphère $a$	1 nm	10 nm	100 nm	1 $\mu\text{m}$	15 $\mu\text{m}$	65 $\mu\text{m}$
$\Delta a$	0,008 nm	0,08 nm	0,83 nm	3 nm	4 nm	4 nm
$\frac{\Delta a}{a}$	< 1 %	< 1 %	< 1 %	< 1 %	< 1 %	< 1 %

TAB. 7.2 – Sensibilité absolue et relative de la diffusion angulaire en fonction du rayon de la sphère à  $\theta = 60^\circ$ .

Nous retiendrons ainsi que la tolérance de la réponse optique de la sphère en fonction du rayon est de l'ordre de un pour cent.

Toutefois, ces calculs ont été effectués en dehors des pics de résonance, où la sensibilité peut être accrue de plusieurs décades, comme nous pouvons le voir en figure 7.6. En effet, le décalage spectral à mi-hauteur de la bande passante est obtenu pour une variation  $\Delta q = 1,36 \cdot 10^{-4}$ , autour de la valeur centrale  $a = 632,8$  nm. Nous obtenons alors  $\frac{\Delta q}{q} = \frac{\Delta a}{a} = 2,7 \cdot 10^{-6}$ , ce qui montre l'extrême sensibilité sur les pics de résonance. Cette sensibilité pourrait être utilisée pour de nombreuses applications, à ceci près que la dynamique sur la résonance est faible (4 %).

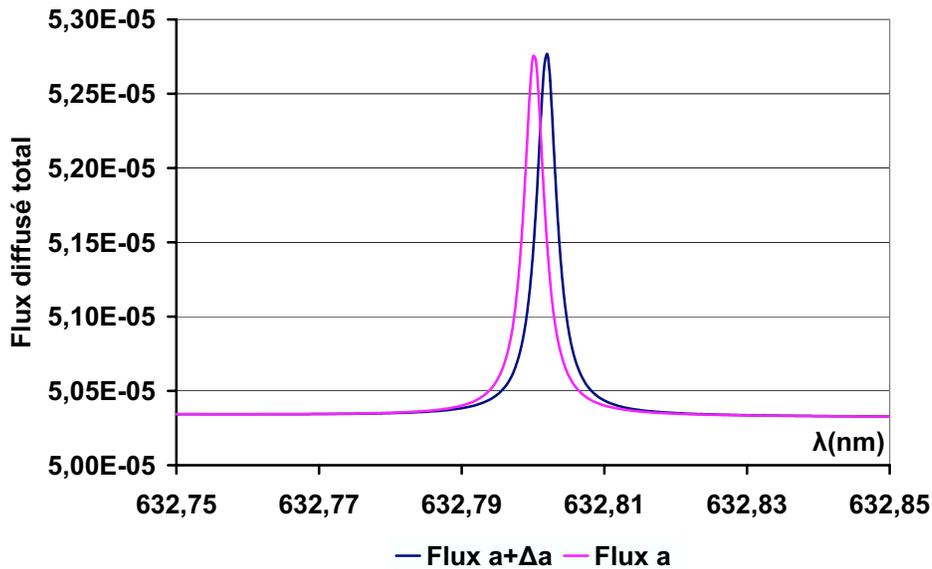


FIG. 7.6 – Flux total spectral diffusé pour une goutte d'eau, pour deux valeurs du paramètre de taille :  $q_0 = 50,33762$  et  $q_1 = q_0 + \Delta q = 50,33775$ , respectivement à  $\lambda = 632,8$  nm,  $a_0 = 5069,665$  nm et  $a_1 = a_0 + \Delta a = 5069,579$  nm.

Nous avons également tracé en figure 7.7 la réponse angulaire de la sphère lorsqu'elle est éclairée sur le pic de résonance et en dehors de ce pic.

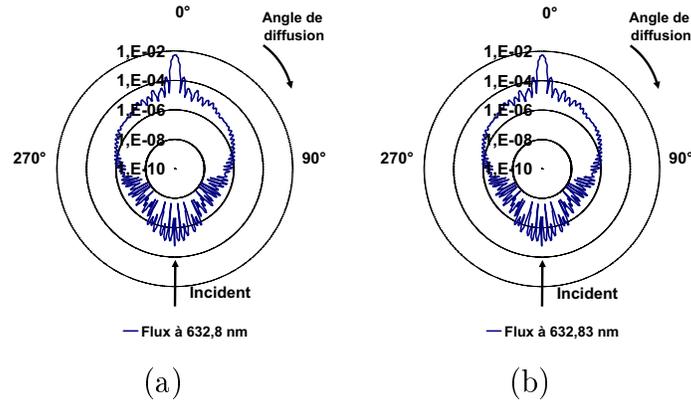


FIG. 7.7 – Réponse angulaire de la sphère sur le pic de résonance (632,8 nm) (a) et en dehors de ce pic (632,83 nm) (b).

### 7.3 Influence du revêtement de surface : cas de faibles épaisseurs

Compte tenu de la sensibilité que nous venons d'évaluer quant à l'influence du diamètre de la sphère substrat sur la réponse spectrale, nous allons maintenant comparer la réponse de la sphère de silice à celle d'une sphère recouverte. Cependant, pour ne pas fausser la comparaison et compte tenu du rôle joué par le paramètre de taille, les couches minces sont tout d'abord choisies très fines, comprises dans la sensibilité de la sphère substrat. Ceci nous permet de travailler globalement à diamètre équivalent constant.

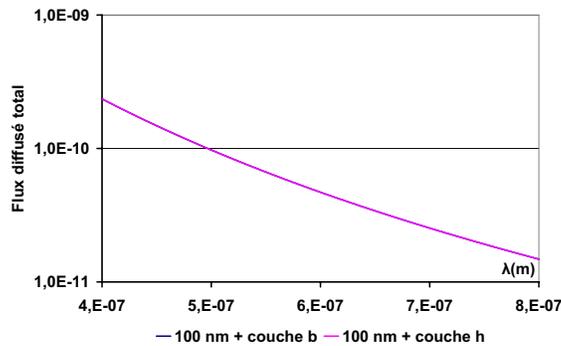


FIG. 7.8 – Flux diffusé d'une sphère recouverte d'une couche bas (respectivement haut) indice de rayon 100 nm, d'épaisseur optique égale à la tolérance  $\Delta a$  sur le rayon de la sphère substrat. Les deux courbes se superposent.

Le plus faible rayon est de 100 nm, afin de ne pas considérer de couches minces d'épaisseur atomique. Dans tous les cas l'épaisseur totale du multicouche est égale à la tolérance  $\Delta a$  sur le rayon de la sphère substrat :  $e_{total} = \sum e_i = \Delta a$ . Les matériaux

choisis sont la cryolithe ( $n_B = 1,33$ ) et le  $\text{Ta}_2\text{O}_5$  ( $n_H = 2,25$ ). Nous représentons sur les figures 7.8 et 7.9 une couche bas indice par *couche b*, une couche haut indice par *couche h*, une alternance bas et haut indice de 5 couches (hbhbh) ou 11 couches (hbhbhbhbhbh), respectivement par *m5* et *m11*.

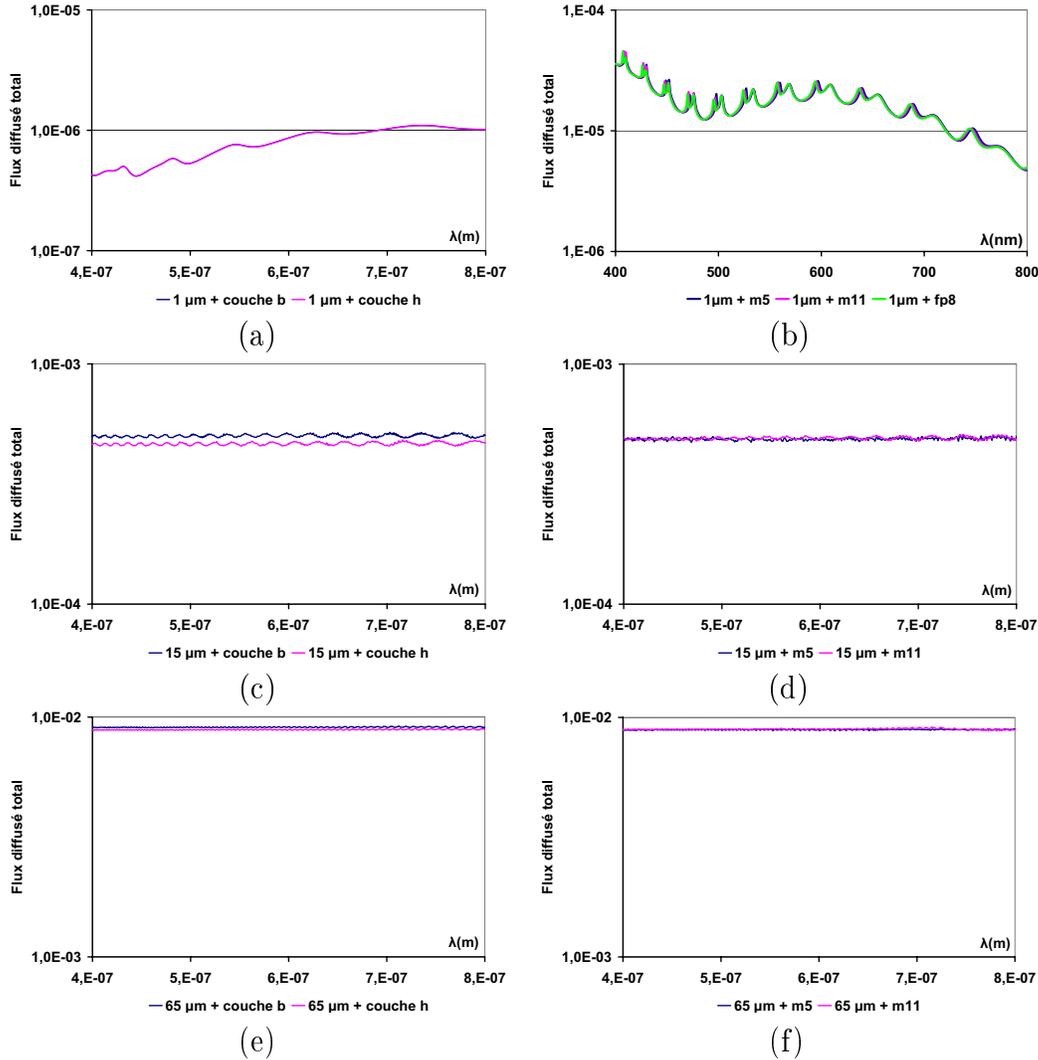


FIG. 7.9 – Flux diffusé d’une sphère recouverte d’une couche bas (respectivement haut) indice de rayon  $1 \mu\text{m}$  (a),  $15 \mu\text{m}$  (c) et  $65 \mu\text{m}$  (e). Pour chaque rayon de sphère, les courbes se superposent pour le bas et le haut indice. Flux diffusé d’une sphère recouverte d’un *m5* et d’un *m11* de rayon  $1 \mu\text{m}$  (b),  $15 \mu\text{m}$  (d) et  $65 \mu\text{m}$  (f). Les courbes se superposent encore pour le *m5* et le *m11*, pour chaque rayon de sphère. Tous les empilements ont une épaisseur optique égale à la tolérance  $\Delta a$  sur le rayon de la sphère substrat.

Nous constatons globalement, à la vue des figures 7.8 et 7.9, que le fait de travailler à diamètre équivalent constant ne modifie pratiquement pas la réponse spec-

trale du composant. En effet, ce résultat est lié au fait que l'épaisseur totale du multicouche n'excède pas quelques pourcent du rayon de la sphère. En d'autres termes, l'effet de taille est prédominant.

## 7.4 Influence du revêtement de surface : cas d'épaisseurs quart d'onde

Par analogie avec les empilements plans dits classiques, et parce que le dépôt de couches quart d'onde est parfaitement maîtrisé expérimentalement en configuration planaire, on veut ici étudier la réponse spectrale de la sphère lorsqu'elle est recouverte par un empilement multidiélectrique et constitué de couches quart d'onde. Il est clair dans ces conditions que, la longueur d'onde de centrage étant de l'ordre du micron, le dépôt fait croître considérablement le rayon de la sphère. C'est pourquoi la réponse de la sphère traitée sera aussi comparée à une sphère substrat homogène équivalente, c'est-à-dire dont le diamètre est équivalent au diamètre total de la sphère recouverte. Ceci nous permettra de discriminer les effets liés à l'effet de taille, des effets liés à la structure multicouche.

Notons que, comme cela a été remarqué au paragraphe précédent, les fonctions mises en jeu, de type Bessel et Hankel, ne possèdent pas de propriétés de périodicité, de sorte que la notion de couche quart d'onde perd ici son sens (sauf pour des rayons très supérieurs à la longueur d'onde), par comparaison avec le cas de l'empilement plan. Il en est de même pour la notion de couche absente, de miroir ou de filtre en général, bien que nous continuerons à utiliser ce vocabulaire.

### 7.4.1 Cas d'une petite sphère substrat

Imaginons tout d'abord, bien que cela soit irréaliste, que l'on puisse recouvrir une sphère de rayon initial 1 nm. Il est évident, compte tenu de l'épaisseur des couches déposées, que l'effet de taille apporté par l'empilement sera prédominant, et donc que la réponse optique sera très éloignée de la réponse sphère substrat.

En figure 7.10 on montre la contribution d'une couche B sur la sphère substrat, qui se traduit par une augmentation liée à l'effet de taille qui prédomine sur l'effet antireflet. Par contre, si l'on compare la réponse de la sphère traitée à celle de la sphère équivalente, on constate une diminution de la diffusion, liée à un effet d'indice. Les mêmes considérations s'appliquent pour la couche H qui augmente la diffusion grâce à un effet d'indice. Le dépôt d'une couche 2H ou 2B met en évidence des oscillations, et accroît ou diminue la diffusion par rapport à la sphère équivalente. Enfin, le cas des multicouches conduit à de nombreuses oscillations ou pics de résonance liés à la structure de l'empilement concentrique.

En figure 7.11 on peut constater que les résultats sont analogues pour les courbes polaires.

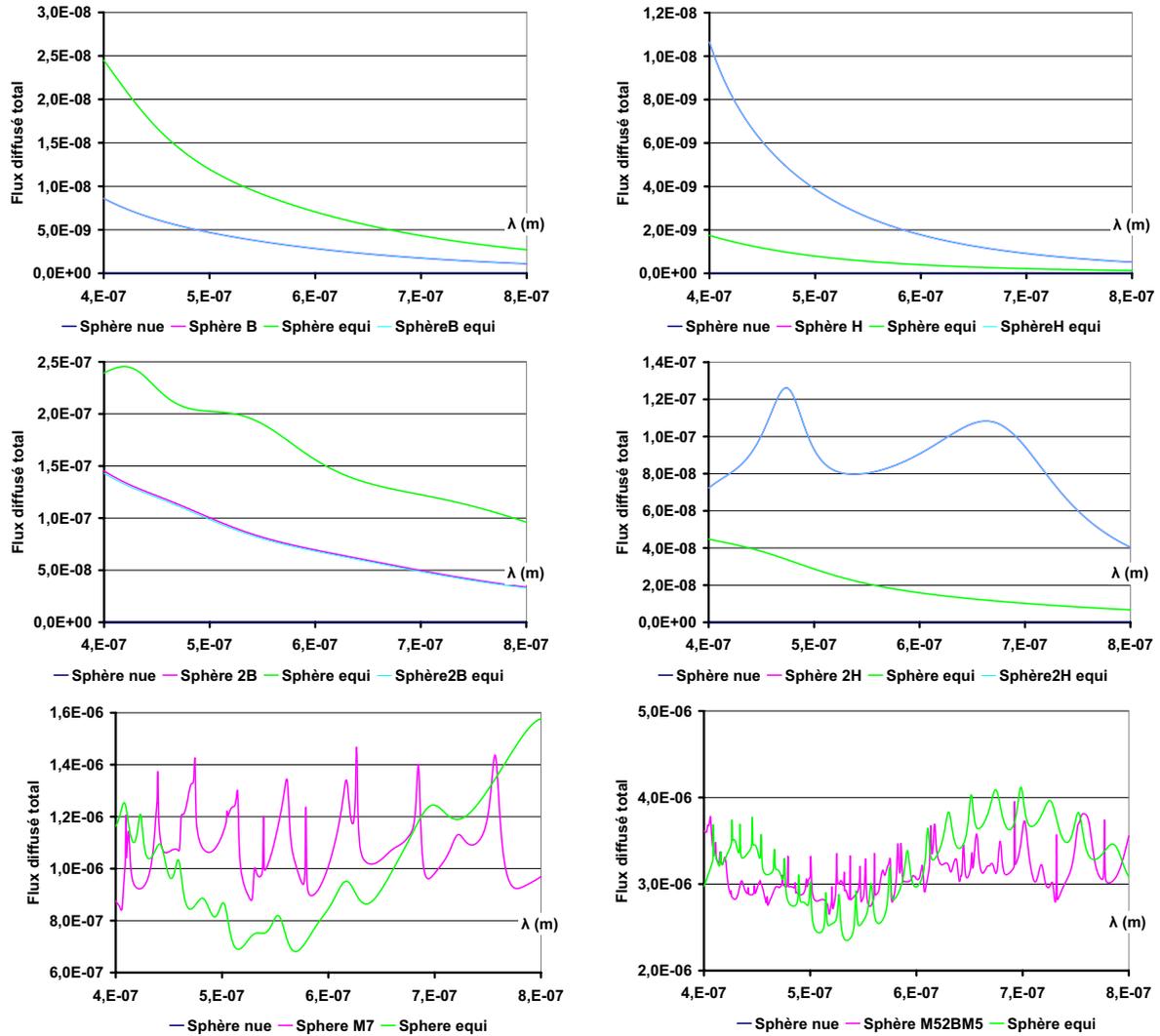


FIG. 7.10 – Flux diffusé total intégré dans tout l’espace d’une sphère de silice ( $n = 1,52$ ) recouverte, de rayon initial  $a = 1$  nm. La sphère équivalente est la sphère d’indice 1,52 de rayon identique à la sphère composée de l’empilement et du substrat. La sphèreB équivalente (respectivement sphèreH équivalente) est la sphère d’indice 1,33 (respectivement 2,25) de rayon identique à la sphère composée de l’empilement et du substrat. Compte tenu du faible rayon initial de la sphère substrat (1 nm), il est clair que la sphère B équivalente (respectivement H équivalente) se superpose à la sphère substrat recouverte d’une couche B (respectivement H). Il en est de même pour les structures multicouches.

## 7.4. INFLUENCE DU REVÊTEMENT DE SURFACE : COUCHE QUART D'ONDE

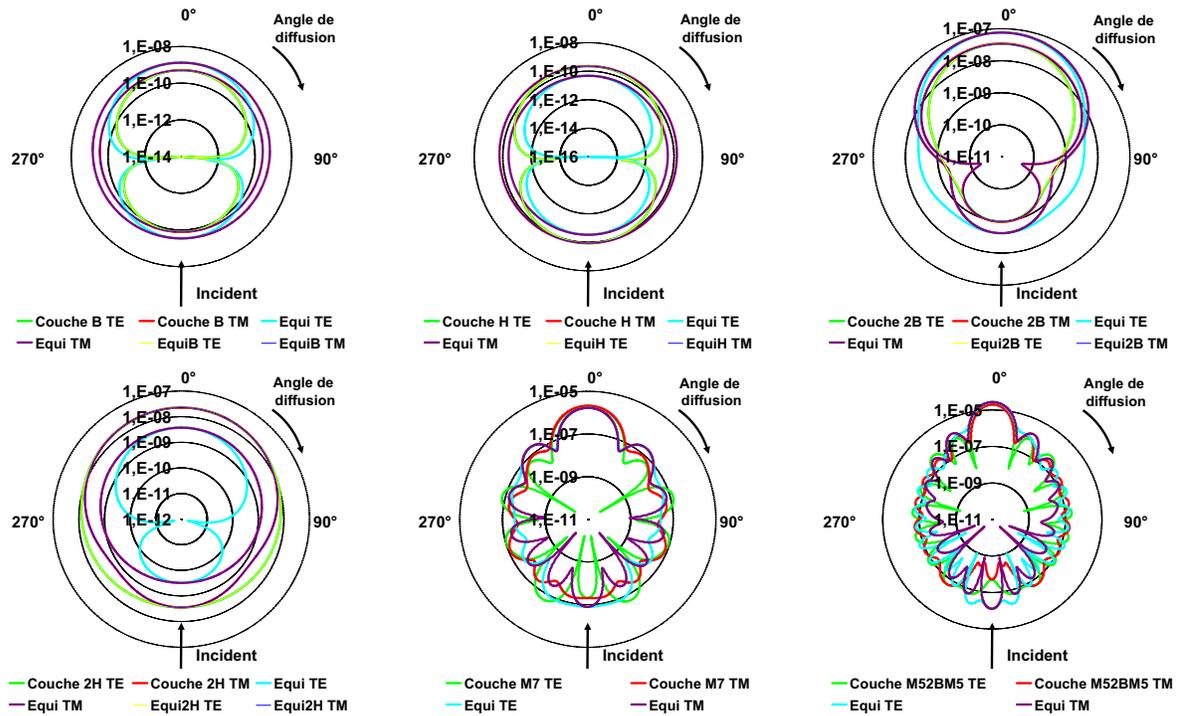


FIG. 7.11 – Flux diffusé angulaire pour les deux polarisations TE et TM d’une sphère de silice ( $n = 1,52$ ) recouverte, de rayon initial  $a = 1$  nm à  $\lambda = 633$  nm. La sphère équivalente est la sphère d’indice 1,52 de rayon identique à la sphère composée de l’empilement et du substrat. La sphèreB équivalente (respectivement sphèreH équivalente) est la sphère d’indice 1,33 (respectivement 2,25) de rayon identique à la sphère composée de l’empilement et du substrat.

### 7.4.2 Cas d’une sphère substrat de rayon 10 nm

Compte tenu du faible rayon de la sphère substrat par rapport à l’épaisseur de l’empilement, les conclusions sont ici quasiment inchangées (voir figures 7.12 et 7.13).

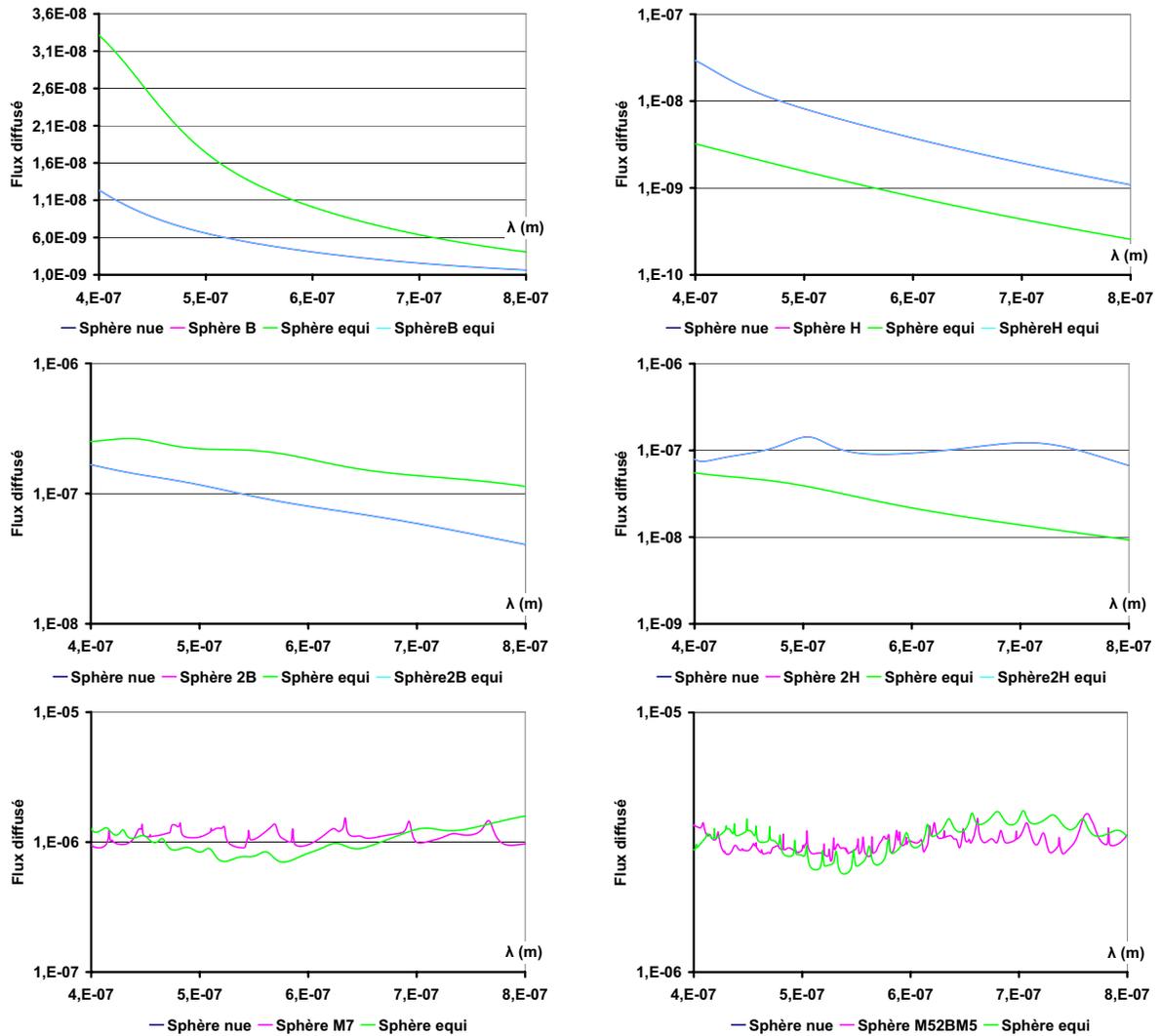


FIG. 7.12 – Flux diffusé total intégré dans tout l’espace d’une sphère de silice ( $n = 1,52$ ) recouverte, de rayon initial  $a = 10$  nm. La sphère équivalente est la sphère d’indice 1,52 de rayon identique à la sphère composée de l’empilement et du substrat. La sphèreB équivalente (respectivement sphèreH équivalente) est la sphère d’indice 1,33 (respectivement 2,25) de rayon identique à la sphère composée de l’empilement et du substrat.

## 7.4. INFLUENCE DU REVÊTEMENT DE SURFACE : COUCHE QUART D'ONDE

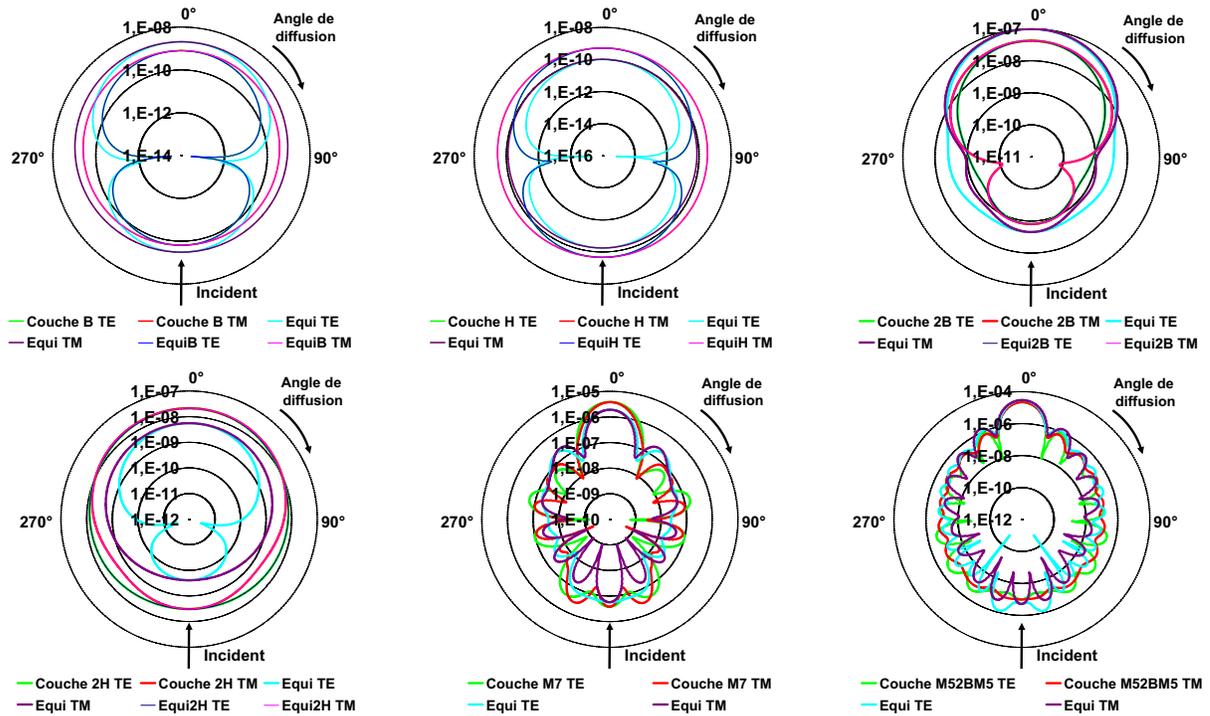


FIG. 7.13 – Flux diffusé angulaire pour les deux polarisations TE et TM d’une sphère de silice ( $n = 1,52$ ) recouverte, de rayon initial  $a = 10$  nm à  $\lambda = 633$  nm. La sphère équivalente est la sphère d’indice 1,52 de rayon identique à la sphère composée de l’empilement et du substrat. La sphèreB équivalente (respectivement sphèreH équivalente) est la sphère d’indice 1,33 (respectivement 2,25) de rayon identique à la sphère composée de l’empilement et du substrat.

### 7.4.3 Cas d’une sphère substrat de rayon 100 nm

Pour une sphère de rayon plus important et de même ordre de grandeur que la longueur d’onde, nous observons les mêmes effets d’indices que pour les deux cas précédents mais avec quelques changements. Pour une sphère nue, le flux dans le demi-espace transmis est plus important que le flux dans le demi-espace réfléchi (voir figure 7.15). Les sphères recouvertes d’une couche B ou 2B jouent toujours le rôle d’un antireflet, et celles recouvertes d’une couche H jouent le rôle d’un miroir (figure 7.14). Le flux diffusé par la sphère H est dix fois supérieur à la sphère équivalente aux grands angles. En doublant l’épaisseur haut indice sur la sphère, des oscillations apparaissent et le profil spectral est légèrement modifié : le flux diffusé dans le rouge est supérieur au flux diffusé dans le bleu. Le cas des multicouches conduit toujours à la même conclusion : oscillations angulaires, profil spectral quasi constant entre 400 nm et 800 nm, mais avec de nombreuses oscillations et pics de résonance, liés à la structure de l’empilement.

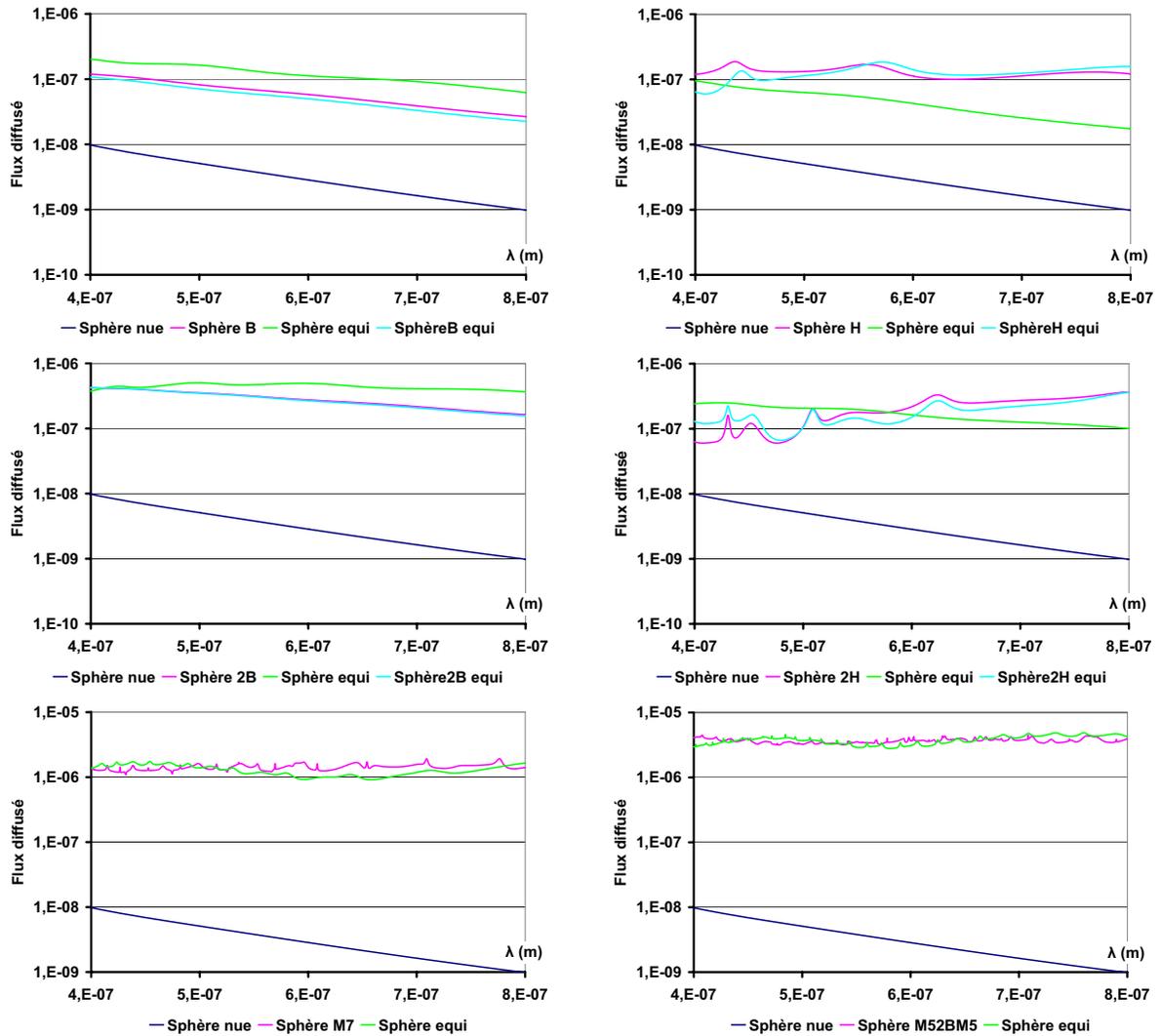


FIG. 7.14 – Flux diffusé total intégré dans tout l’espace d’une sphère de silice ( $n = 1,52$ ) recouverte de rayon initial  $a = 100$  nm. La sphère équivalente est la sphère d’indice 1,52 de rayon identique à la sphère composée de l’empilement et du substrat. La sphèreB équivalente (respectivement sphèreH équivalente) est la sphère d’indice 1,33 (respectivement 2,25) de rayon identique à la sphère composée de l’empilement et du substrat.

## 7.4. INFLUENCE DU REVÊTEMENT DE SURFACE : COUCHE QUART D'ONDE

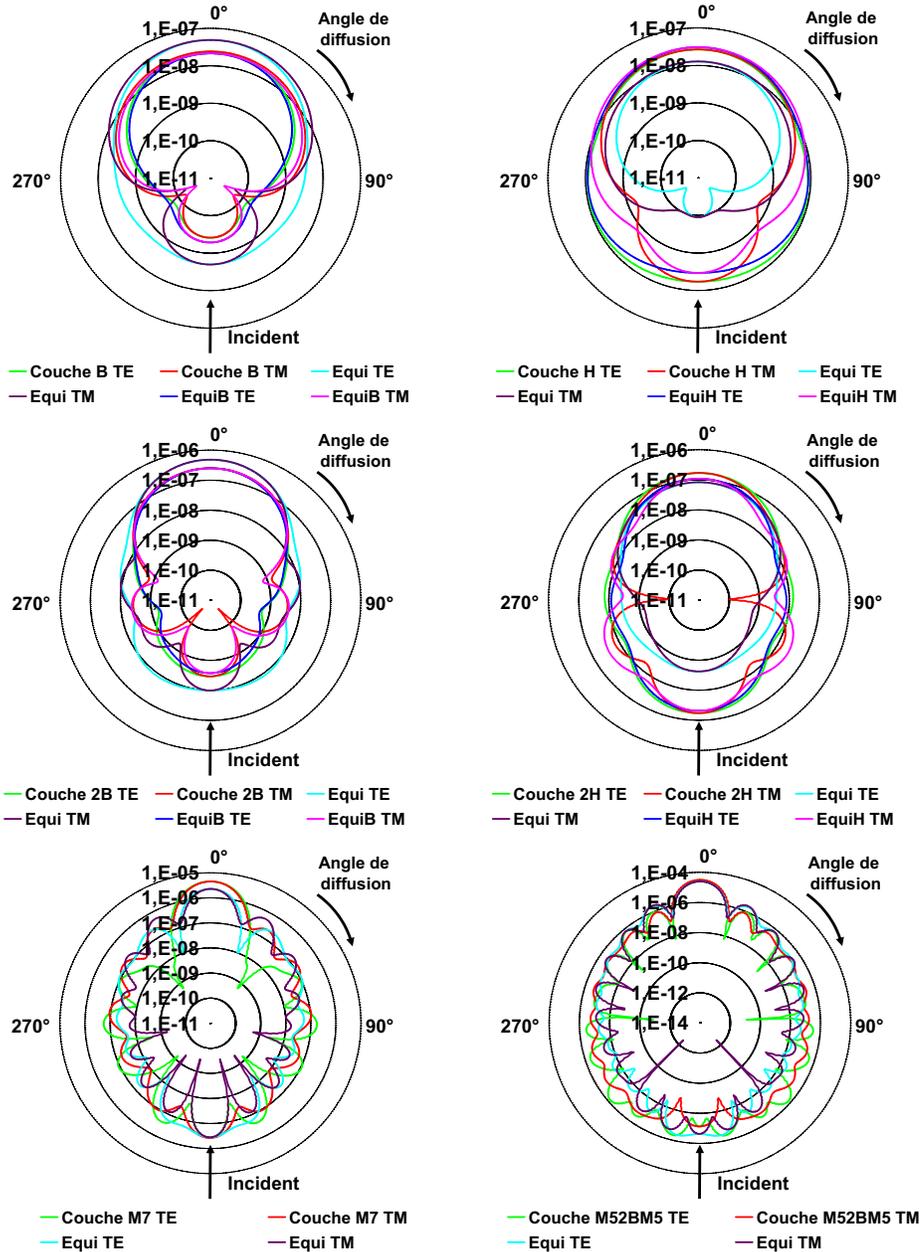


FIG. 7.15 – Flux diffusé angulaire pour les deux polarisations TE et TM d’une sphère de silice ( $n = 1,52$ ) recouverte, de rayon initial  $a = 100$  nm à  $\lambda = 633$  nm. La sphère équivalente est la sphère d’indice 1,52 de rayon identique à la sphère composée de l’empilement et du substrat. La sphèreB équivalente (respectivement sphèreH équivalente) est la sphère d’indice 1,33 (respectivement 2,25) de rayon identique à la sphère composée de l’empilement et du substrat.

### 7.4.4 Cas d’une sphère substrat de rayon $1 \mu\text{m}$

La sphère de rayon  $1 \mu\text{m}$  est un cas essentiel. Sur les figures 7.16 et 7.17, quel que soit l’empilement, les oscillations sont nombreuses et de différentes catégories.

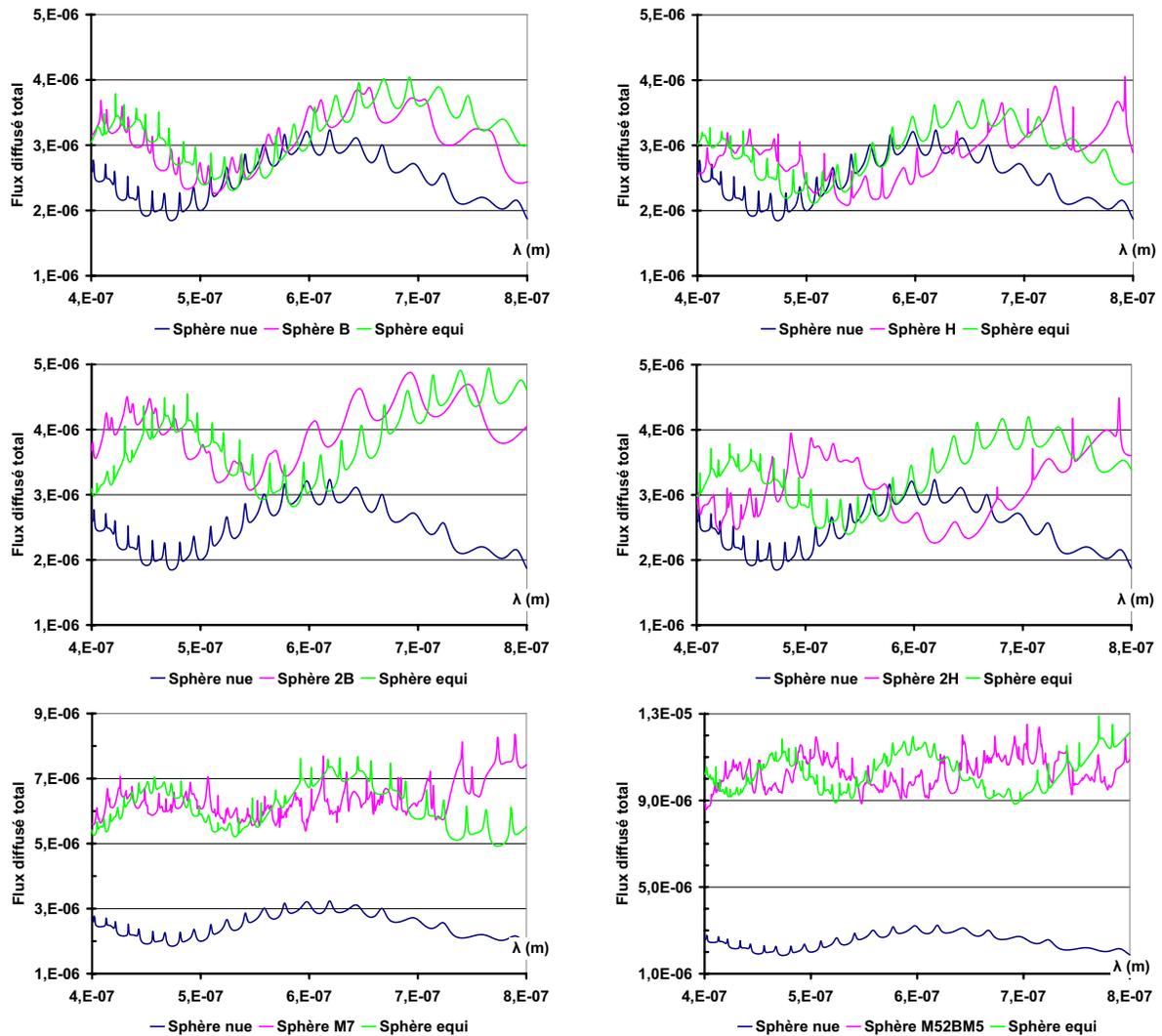


FIG. 7.16 – Flux diffusé total intégré dans tout l’espace d’une sphère de silice ( $n = 1,52$ ) recouverte de rayon initial  $a = 1 \mu\text{m}$ . La sphère équivalente est la sphère d’indice 1,52 de rayon identique à la sphère composée de l’empilement et du substrat. La sphèreB équivalente (respectivement sphèreH équivalente) est la sphère d’indice 1,33 (respectivement 2,25) de rayon identique à la sphère composée de l’empilement et du substrat.

Les plus larges sont dues à la taille de la sphère qui se rapproche de la longueur d’onde, et les plus fines caractérisent les extremums de chaque terme de la série. Il est intéressant de souligner le rôle que peuvent avoir les plus larges oscillations pour modifier spectralement la lumière diffuse. De plus, l’effet d’une couche B ou d’une couche H, à la vue des profils spectraux, n’est plus lié à un effet d’antireflet ou de miroir. Cependant, grâce à la dépendance angulaire, nous retrouvons ces résultats dans le demi-espace réfléchi, et encore de manière plus nette pour les multicouches

## 7.4. INFLUENCE DU REVÊTEMENT DE SURFACE : COUCHE QUART D'ONDE

M7 et M52BM5.

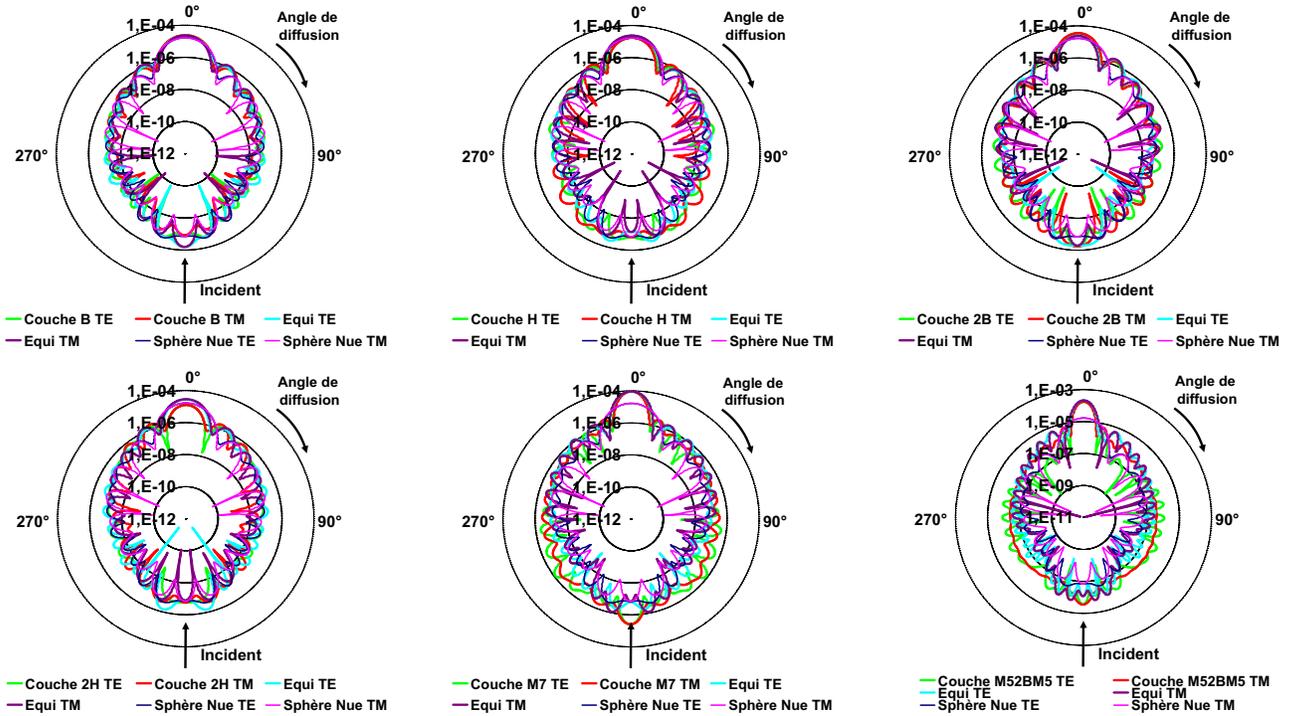


FIG. 7.17 – Flux diffusé angulaire pour les deux polarisations TE et TM d’une sphère de silice ( $n = 1,52$ ) recouverte, de rayon initial  $a = 1\mu m$  à  $\lambda = 633\text{ nm}$ . La sphère équivalente est la sphère d’indice 1,52 de rayon identique à la sphère composée de l’empilement et du substrat. La sphère B équivalente (respectivement sphère H équivalente) est la sphère d’indice 1,33 (respectivement 2,25) de rayon identique à la sphère composée de l’empilement et du substrat.

### 7.4.5 Cas d’une sphère substrat de rayon $15\mu m$

Comme nous possédons des sphères calibrées de  $30\mu m$  de diamètre, ces simulations, pour une première approche, sont nécessaires pour appréhender les futurs résultats. Au vu de la figure 7.18 les réponses spectrales ont beaucoup moins d’amplitude que dans les autres simulations. Malgré les oscillations la réponse spectrale est quasi plane. Les simulations du flux angulaire soulignent l’existence d’un pic dans le demi-espace transmis et une répartition spatiale dans le demi-espace réfléchi (figure 7.19). Nous retrouvons toutefois, dans le demi-espace réfléchi, l’antireflet pour la couche B et l’effet miroir pour la couche H. Pour les deux bi-couches, seul un léger décalage de la réponse spectrale peut être noté. Enfin, les multicouches, grâce à leur miroir M7 et M5 du filtre ont un flux diffusé dans le demi-espace réfléchi dix fois supérieur à la sphère équivalente.

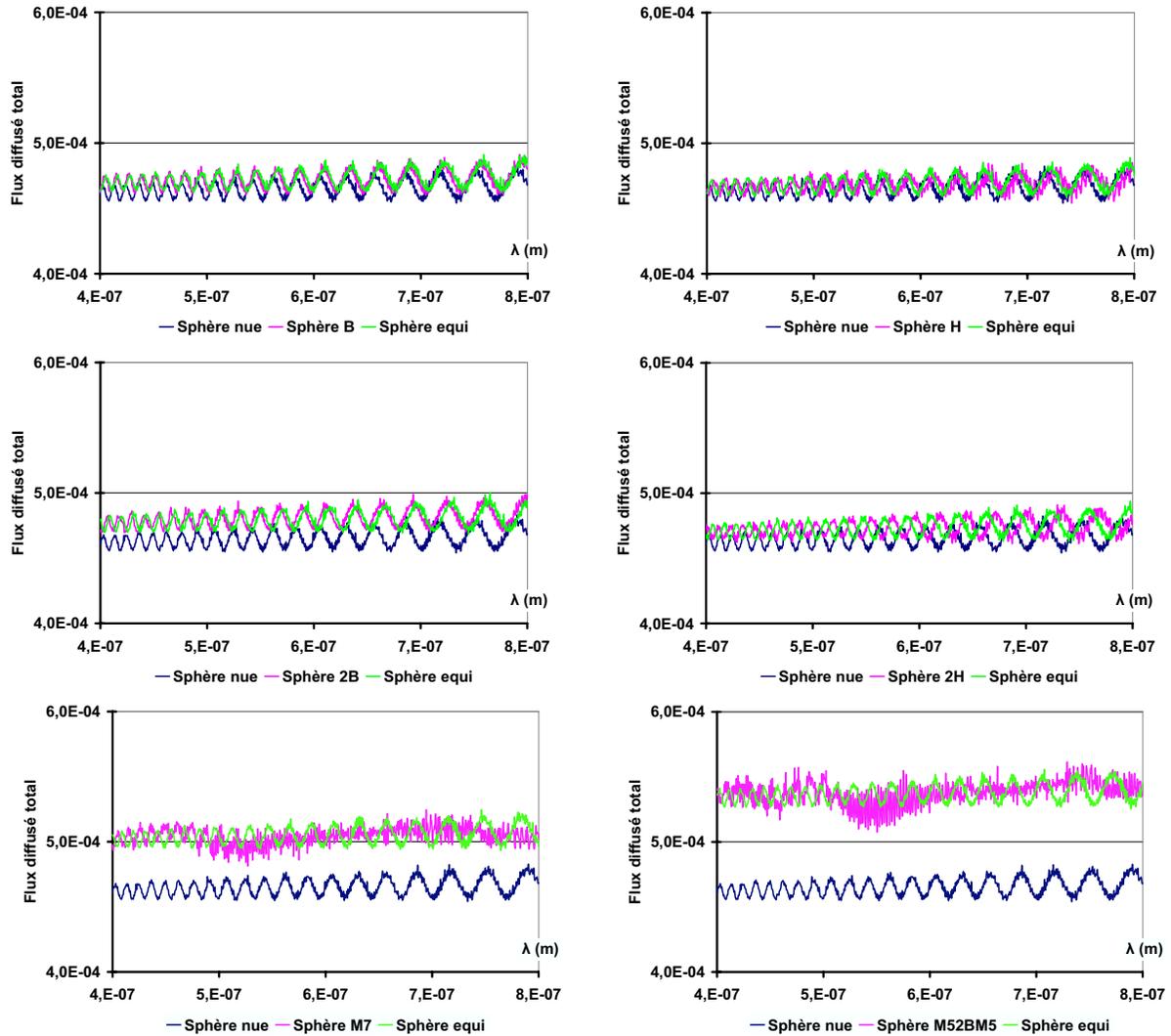


FIG. 7.18 – Flux diffusé total intégré dans tout l’espace d’une sphère de silice ( $n = 1,52$ ) recouverte de rayon initial  $a = 15 \mu\text{m}$ . La sphère équivalente est la sphère d’indice 1,52 de rayon identique à la sphère composée de l’empilement et du substrat. La sphèreB équivalente (respectivement sphèreH équivalente) est la sphère d’indice 1,33 (respectivement 2,25) de rayon identique à la sphère composée de l’empilement et du substrat.

#### 7.4. INFLUENCE DU REVÊTEMENT DE SURFACE : COUCHE QUART D'ONDE

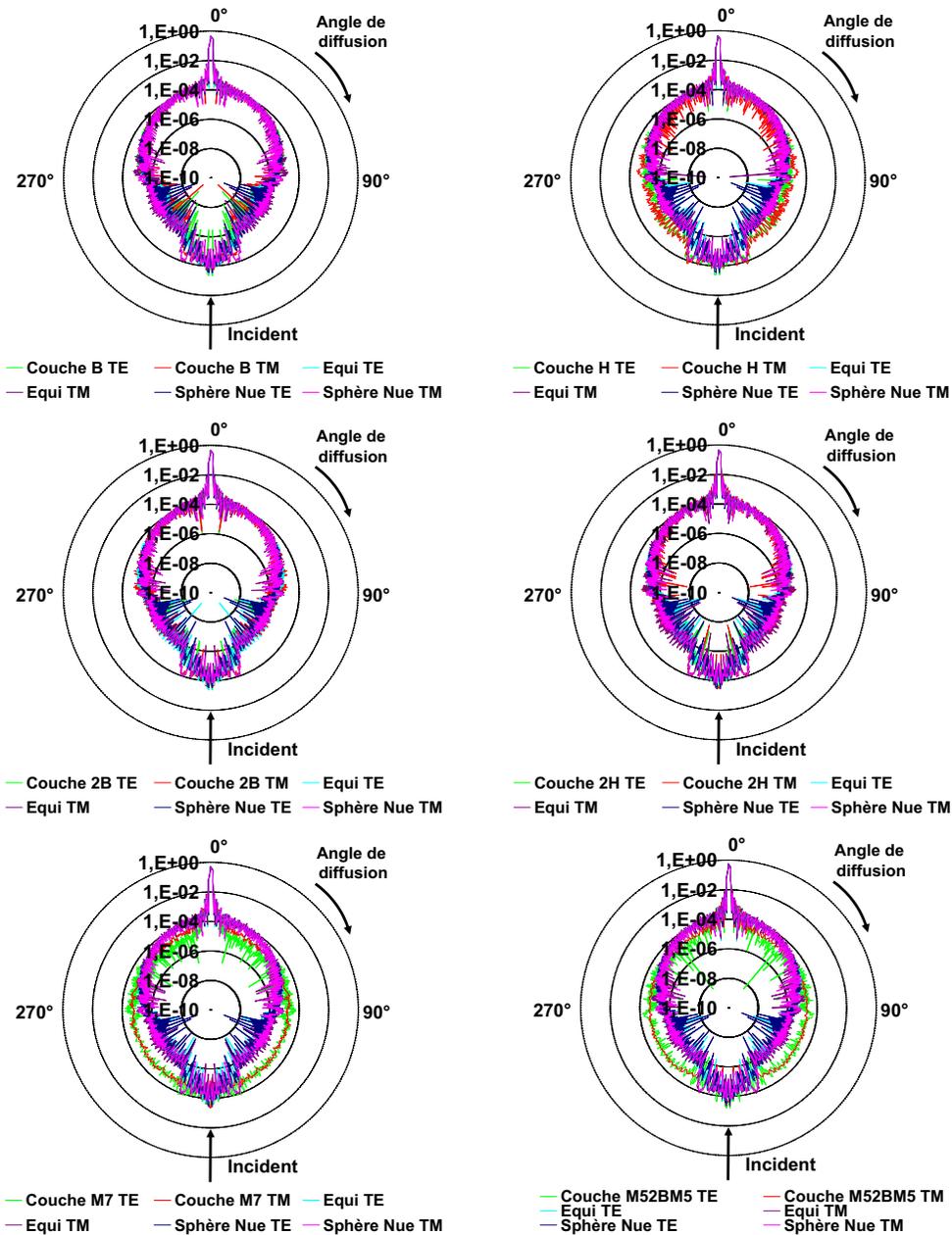


FIG. 7.19 – Flux diffusé angulaire pour les deux polarisations TE et TM d'une sphère de silice ( $n = 1,52$ ) recouverte, de rayon initial  $a = 15 \mu\text{m}$  à  $\lambda = 633 \text{ nm}$ . La sphère équivalente est la sphère d'indice 1,52 de rayon identique à la sphère composée de l'empilement et du substrat. La sphère B équivalente (respectivement sphère H équivalente) est la sphère d'indice 1,33 (respectivement 2,25) de rayon identique à la sphère composée de l'empilement et du substrat.

### 7.4.6 Cas d'une sphère substrat de rayon $65 \mu\text{m}$

Compte tenu du grand rayon de la sphère substrat par rapport à la longueur d'onde, les conclusions sont identiques au cas précédent à ceci près que les oscillations sont encore plus nombreuses (voir figures 7.20 et 7.21). En effet, le paramètre de taille est encore plus grand, de l'ordre de  $q = 645$ , et le nombre de termes de la série est par conséquent plus important. Ainsi, pour pouvoir effectuer normalement

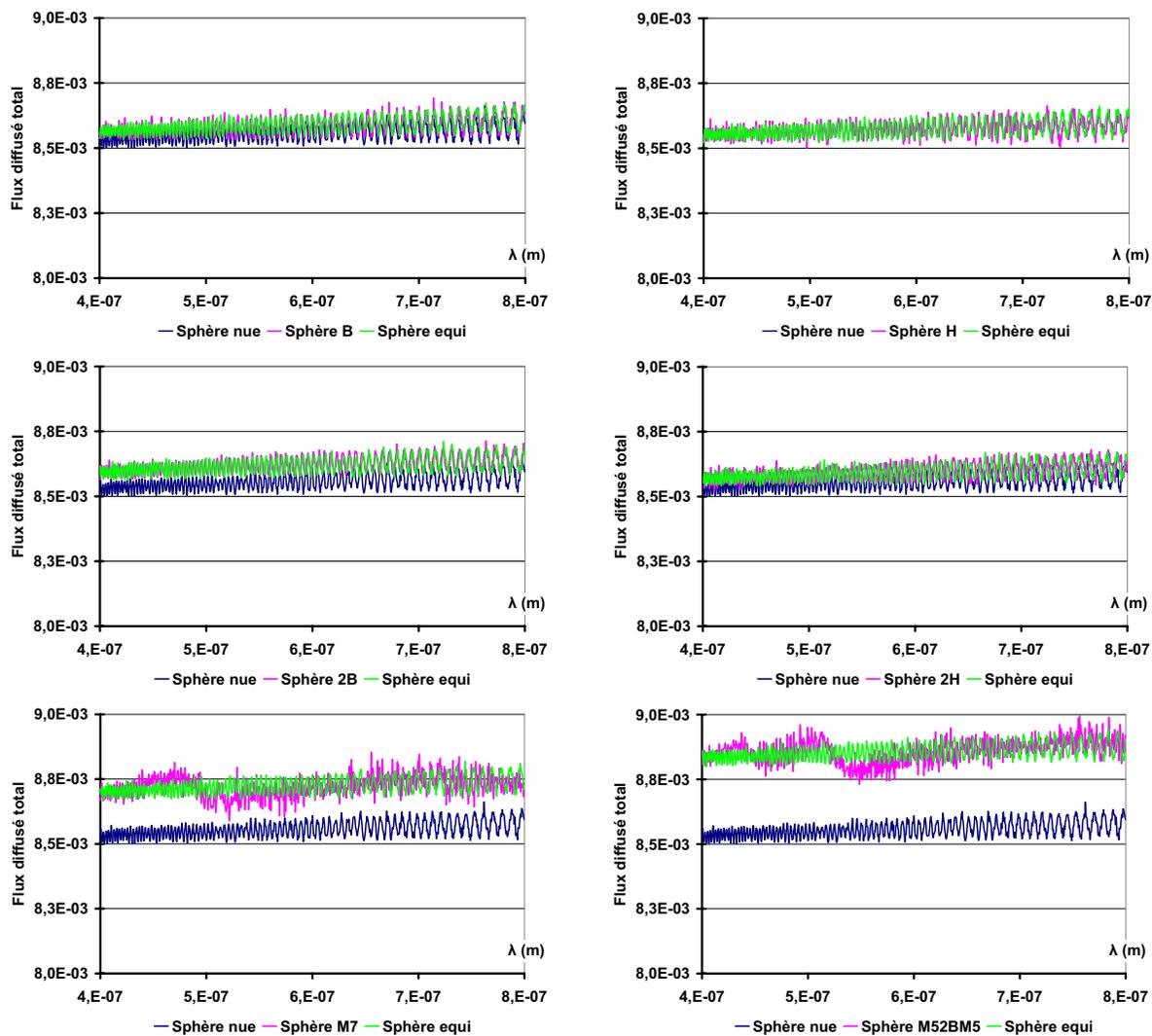


FIG. 7.20 – Flux diffusé total intégré dans tout l'espace d'une sphère de silice ( $n = 1,52$ ) recouverte de rayon initial  $a = 65 \mu\text{m}$ . La sphère équivalente est la sphère d'indice 1,52 de rayon identique à la sphère composée de l'empilement et du substrat. La sphèreB équivalente (respectivement sphèreH équivalente) est la sphère d'indice 1,33 (respectivement 2,25) de rayon identique à la sphère composée de l'empilement et du substrat.

nos simulations dans un temps raisonnable, il est important de bien définir nos paramètres.

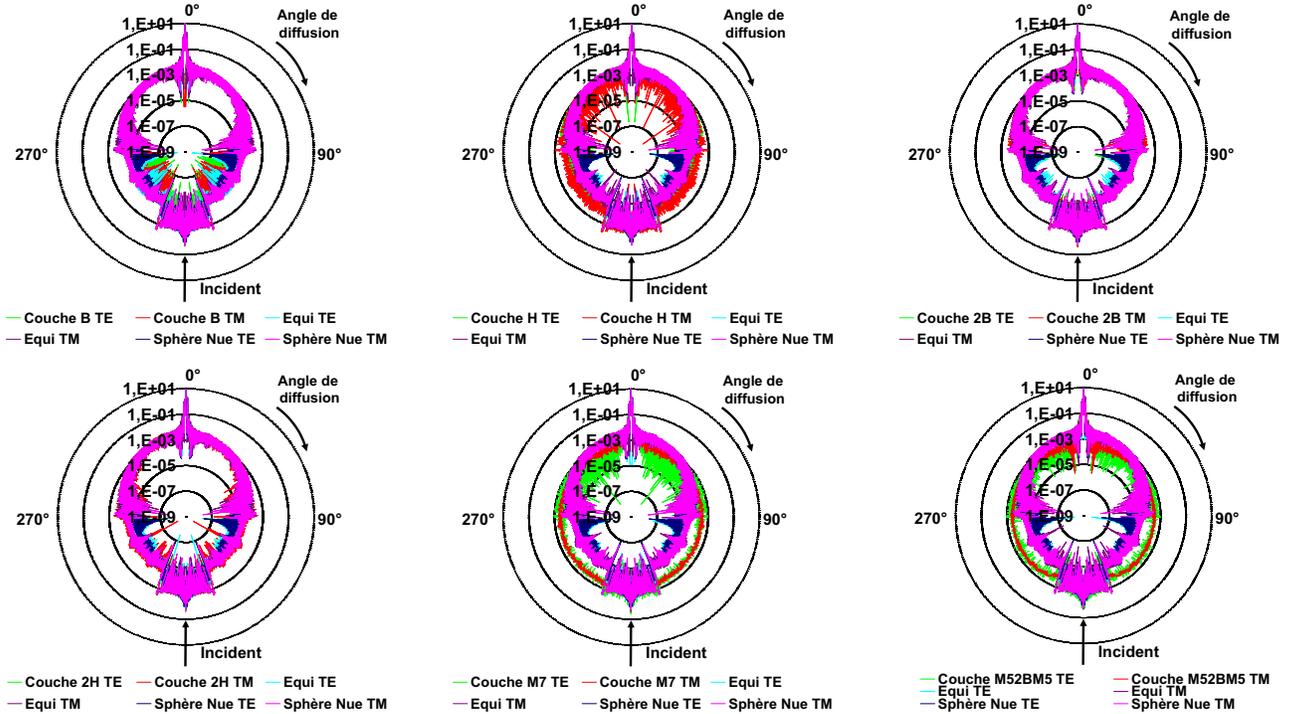


FIG. 7.21 – Flux diffusé angulaire pour les deux polarisations TE et TM d'une sphère de silice ( $n = 1,52$ ) recouverte, de rayon initial  $a = 65 \mu\text{m}$  à  $\lambda = 633 \text{ nm}$ . La sphère équivalente est la sphère d'indice 1,52 de rayon identique à la sphère composée de l'empilement et du substrat. La sphèreB équivalente (respectivement sphèreH équivalente) est la sphère d'indice 1,33 (respectivement 2,25) de rayon identique à la sphère composée de l'empilement et du substrat.

## 7.5 Étude d'une couche métallique : l'aluminium

Sur la figure 7.22, quand nous déposons une couche d'aluminium de 10 nm sur une sphère de diamètre  $10 \mu\text{m}$ , le flux diffusé par la sphère diminue et les oscillations se tassent : le contraste spectral devient quasi nul. Ensuite, quand l'épaisseur de la couche d'aluminium augmente, le flux augmente.

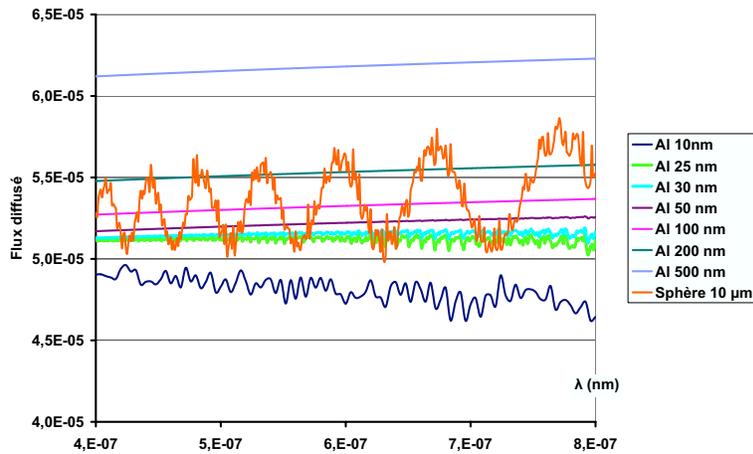


FIG. 7.22 – Réponse spectrale d’une sphère de silice d’indice 1,52 de diamètre 10 μm avec des couches d’aluminium d’épaisseurs différentes d’indice  $n = 1,4 + 7,65i$  à 633 nm.

Ainsi, déposer une couche intermédiaire d’aluminium permet d’éliminer les pics de résonance dus au caractère transparent de la sphère. Toutefois, bien que le profil spectral d’une sphère de silice aluminée ne possède pas de franches variations, il diffuse légèrement plus de lumière dans le rouge que dans le bleu.

# Chapitre 8

## Conclusion

Nos codes de calcul ont été étendus au cas de structures multicouches concentriques, diélectriques ou métalliques. La généralisation de la théorie de Mie à ces structures a été préalablement précisée dans le détail. Dans une première étape, nous avons fait une étude de tolérance qui permet une discrimination entre les effets de taille et ceux liés à la structure interférentielle des multicouches. Par la suite, de nombreux résultats numériques ont permis d'illustrer la réponse angulaire et spectrale de sphères de différents diamètres, recouvertes de structures classiques de formules diverses, diélectriques ou métalliques. A ce stade, nous avons pu remarquer l'absence d'analogie forte entre les spectres calculés et les réponses optiques classiques (antireflet, miroir, filtre...) des structures planaires, compte tenu des faibles dynamiques observées quand la longueur d'onde varie.

Ceci s'explique par le fait que :

- L'effet de taille de la sphère substrat est incontournable, par opposition au cas planaire où le substrat (semi-infini) n'intervient pas dans l'équilibre interférentiel ;
- Les fonctions mises en jeu dans la théorie de Mie ne supportent aucune périodicité, par opposition au cas planaire décrit à l'aide de fractions rationnelles de fonctions trigonométriques conduisant à la notion de couches multi-onde, quart-d'onde ou demi-onde (absente) ;
- Le champ diffusé par une sphère s'écrit comme une série de termes dont la complexité de calcul, pour un seul élément de la série, dépasse largement le cas du champ réfléchi ou transmis par une structure planaire ;
- Enfin, il est important ici de préciser que nous nous sommes limités aux variations spectrales de la diffusion totale intégrée dans tout l'espace, que l'on peut mesurer à l'aide d'une sphère intégrante. Cette grandeur intégrée atténuée considérablement le contraste calculé, ce qui explique en partie les faibles variations spectrales. Ce même contraste doit maintenant être étudié en ré-

flexion, en transmission uniquement, ou dans une direction angulaire donnée, ce que l'on pourra trouver dans le prochain chapitre consacré à la couleur.

Nous aurons également pu remarquer tout au long de ce chapitre qu'une sphère recouverte d'un matériau  $M$  a des propriétés optiques similaires à celles d'une sphère équivalente unique constituée de ce même matériau. Ceci permet donc, partant de sphères substrats données, et si la technologie permet de recouvrir ces sphères substrats, d'obtenir des sphères de différents matériaux aux propriétés optiques équivalentes.

Troisième partie  
Filtrage et colorimétrie



---

Cette partie est essentiellement consacrée aux effets colorimétriques angulaires associés à la réponse spectrale des composants. Pour cela, et contrairement aux parties précédentes, nous calculons conjointement la réponse angulaire et spectrale (cartographies 3D) des composants, ce qui permet de retrouver des contrastes spectraux et couleurs comparables à ceux des systèmes multicouches planaires.

- Le chapitre 9 permet d'introduire les définitions liées à la notion de couleur ;
- Dans le chapitre 10 nous étudions les variations de couleur angulaire en fonction du paramètre de taille, pour différentes sphères de type substrat ;
- Le chapitre 11 étend ces études au cas de sphères multicouches ;
- Le cas des sphères métalliques est traité au chapitre 12 ;
- Enfin au chapitre 13 nous revenons sur la comparaison entre la réponse optique des sphères concentriques et celle des composants planaires.

---

# Chapitre 9

## Définition de la couleur

La réponse spectrale d'un corps coloré nous donne des informations sur l'échantillon. Cependant, nous n'avons aucune information a priori sur la couleur. Celle-ci se définit dans le dictionnaire Larousse comme étant l'impression que fait sur l'œil la lumière émise par les sources lumineuses ou diffusée par les corps. La couleur est l'interprétation par l'œil et le cerveau d'un stimulus visuel. L'étude de la couleur ou la colorimétrie se propose de quantifier les couleurs, c'est-à-dire de définir des grandeurs caractérisant de façon unique la couleur. Il est important de savoir que l'œil est sensible aux radiations lumineuses dont la longueur d'onde est comprise entre 380 nm et 780 nm. En outre, l'œil possède quatre types de détecteurs : les bâtonnets sensibles aux très faibles flux, et trois types de cônes sensibles principalement au vert, rouge et bleu si la quantité de lumière est suffisante [34]. L'œil a donc deux régimes différents selon la luminosité.

Le premier régime est la vision scotopique, nocturne, sans impressions colorées puisque seuls les bâtonnets réagissent au stimulus. Le second est la vision photopique, diurne, où les trois types de cônes réagissent au stimulus et sont à l'origine de la sensation colorée. Aussi, la vision colorée est par nature trichromatique. Il existe deux modes d'observations : le mode objet où l'échantillon est éclairé par une source secondaire, et le mode source où l'échantillon est la source. Plusieurs facteurs peuvent influencer sur la perception de la couleur : des facteurs spatiaux tels que la dimension de la zone éclairée, la juxtaposition des couleurs et la texture, et des facteurs temporels tels que la durée et la répétabilité [35].

La colorimétrie a intéressé de nombreux scientifiques. Isaac Newton (1642-1727) proposait avec son cercle des couleurs, sept couleurs primaires. Thomas Young (1773-1829) réduisit les primaires à trois couleurs : c'est l'hypothèse trivalente de la couleur, mais la colorimétrie remonte à James Clerk Maxwell (1831-1879) [36]. Il proposa un diagramme triangulaire à base de trois couleurs primaires : rouge, vert et bleu. Ce système est à mettre en relation directe avec les récepteurs de l'œil humain. Chaque couleur peut s'exprimer en une combinaison linéaire de ces trois couleurs primaires. La Commission Internationale de l'Eclairage, CIE [37], s'est chargée de normaliser un système colorimétrique pour que chaque personne puisse communiquer avec les mêmes références. Pour cela, elle a défini un observateur de référence, valable pour

des conditions d'angle visuel d'observation et d'adaptation bien précises. Dans le but de comparer les couleurs, différents systèmes ont été définis par la CIE : l'espace CIE RGB, l'espace CIE XYZ et les espaces uniformes CIE  $L^*a^*b^*$  et CIE  $L^*u^*v^*$  [37]. D'autres modèles existent pour répondre à des cahiers des charges bien précis. Par exemple, le National Television Standards Committee a établi un modèle nommé YIQ, variante de l'espace CIE RGB pour rendre plus efficace la transmission des signaux de télévision et la compatibilité avec les écrans noirs [38] [39]. Ici nous limiterons l'étude aux espaces CIE RGB, et CIE XYZ.

## 9.1 Synthèse par couleur additive : coefficients colorimétriques

Considérons une lampe  $L_C$  créant, par l'intermédiaire d'un écran diffusant ou spéculaire, une sensation visuelle ou couleur  $C$  sur l'œil d'un observateur. La synthèse additive consiste à reconstruire cette sensation visuelle à l'aide de lampes primaires  $L_i$  de type étalon, grâce à un ajustement des paramètres de ces lampes (voir figure 9.1 (a)). L'égalisation visuelle est décrite par la relation

$$C = \sum_i \mu_i C_i, \quad (9.1)$$

où les couleurs  $C_i$  décrivent les sensations visuelles créées par les lampes étalons en l'absence des autres. La relation 9.1 permet ainsi d'attribuer les paramètres ( $\mu_i$ ) à chaque couleur  $C$ , et sont appelés coefficients colorimétriques.

Ce type de définition soulève naturellement des questions immédiates :

- Tout d'abord la synthèse colorimétrique est supposée additive, ce que confirme de façon générale l'expérience (interaction physiologique/cognitif). En particulier on sait que l'œil fait appel à trois types de photorécepteurs
- Il se pose évidemment un problème d'existence quant à la solution ( $\mu_i$ ) pour reconstruire la couleur  $C$ . En d'autres termes, toute couleur visible peut-elle être synthétisée à partir des lampes primaires. Cette existence dépend en premier lieu du choix des lampes étalons, que l'on cherchera à rendre indépendantes et non redondantes (base dans l'espace vectoriel des sensations visuelles).
- L'unicité de la solution ( $\mu_i$ ) n'est pas non plus garantie, et l'on parlera de métamères à l'intérieur d'une classe d'équivalence des couleurs.
- Enfin, cette définition de la couleur ne peut se passer d'une normalisation des lampes étalons.

On peut également chercher à caractériser la couleur  $C$  en juxtaposant à la lampe  $L_C$  quelques primaires (voir figure 9.1 (b)), pour créer la sensation  $C'$ . Cette sensation  $C'$  est alors égalisée à l'aide des primaires restantes :

$$C' = C + \sum_j \mu_j L_j = \sum_i \mu_i L_i \quad (9.2)$$

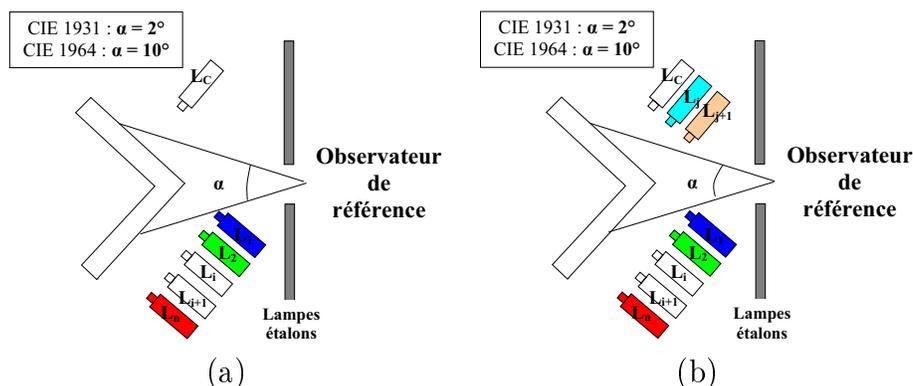


FIG. 9.1 – Expériences d'égalisation d'impression colorée par synthèse additive avec un angle d'observation  $\alpha$  pour  $n$  lampes étalons.

Cette relation 9.2 rappelle que les coefficients colorimétriques peuvent prendre des valeurs négatives.

## 9.2 Fonctions colorimétriques

Cherchons à l'aide de la relation 9.1 à reconstruire, sous réserve d'existence, l'ensemble des sensations visuelles  $c(\lambda)$  créées par des composantes purement monochromatiques, à l'aide de lampes primaires normalisées. On a donc

$$c(\lambda) = \sum_i \mu_i(\lambda) C_i. \quad (9.3)$$

Les coefficients  $\mu_i$  sont alors qualifiés de fonctions colorimétriques (voir figure 9.3) associées aux lampes primaires et à l'observateur (et aux conditions d'expérience). Si maintenant on veut reconstruire la sensation visuelle polychromatique  $C$  d'une lampe arbitraire de spectre d'émission  $\epsilon(\lambda)$ , celle-ci s'obtient par une combinaison linéaire

$$C = \sum_i \epsilon(\lambda) \mu_i(\lambda) C_i. \quad (9.4)$$

Cette relation 9.4 montre que les fonctions colorimétriques des lampes primaires permettent de synthétiser celles d'une lampe arbitraire, données par  $\mu'_i(\lambda) = \epsilon(\lambda) \mu_i(\lambda)$ .

On conclura ce paragraphe en soulignant l'intérêt d'une représentation graphique de ces fonctions colorimétriques dans l'espace des couleurs. Pour tenir compte des pondérations, on cherchera spontanément à introduire les coefficients donnés par

$$\nu_i(\lambda) = \mu_i(\lambda) / \sum_{i \neq j} \mu_j(\lambda) C_j. \quad (9.5)$$

Différentes représentations sont alors possibles pour ces coordonnées colorimétriques réduites.

### 9.3 Le système CIE RGB 1931

Le système trichromatique CIE RGB, proposé en 1931, normalise un jeu de trois couleurs primaires monochromatiques dont les longueurs d'onde sont

- 700 nm pour le stimulus rouge appelé R (Red),
- 546,1 nm pour le stimulus vert appelé G (Green),
- 435,8 nm pour le stimulus bleu appelé B (Blue).

A partir de ces trois sources, par synthèse additive, il nous faut reconstruire tout le domaine spectral du visible. Cependant, les longueurs d'onde situées dans le bleu-vert (450 – 500nm) ne peuvent être reproduites par synthèse additive, car il faut d'une part ajouter du bleu et du vert mais aussi retrancher du rouge. Les expériences, présentées sur la figure 9.2 ont permis d'obtenir les fonctions d'appariement  $r(\lambda)$ ,  $g(\lambda)$  et  $b(\lambda)$  (voir figure 9.3) par égalisation d'impression colorée d'un observateur de référence, avec un angle de  $2^\circ$ . La CIE a défini en 1964 un autre espace RGB avec un angle de  $10^\circ$ , donnant donc d'autres fonctions d'appariement.

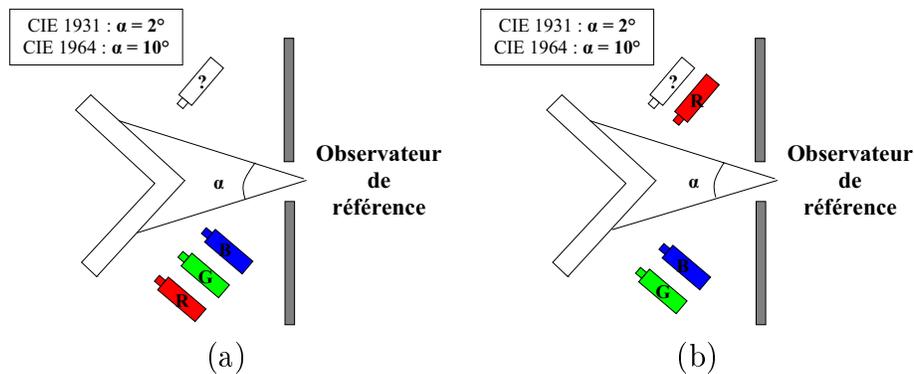


FIG. 9.2 – Expériences d'égalisation d'impression colorée par synthèse additive avec un angle  $\alpha$  pour les trois couleurs primaires.

Une fois les quantités  $r(\lambda)$ ,  $g(\lambda)$  et  $b(\lambda)$  déterminées, le but est de comparer des couleurs de lampes inconnues avec des combinaisons des trois lampes primaires. Les trois stimuli R, G et B représentent ici la quantité de lumière de ces trois lampes étalons, et jouent donc le rôle de scalaires ou pondérateurs dans la combinaison linéaire. Lorsque les sensations oculaires sont équilibrées, les flux lumineux provenant des lampes vérifient

$$L = r^* \cdot R + g^* \cdot G + b^* \cdot B,$$

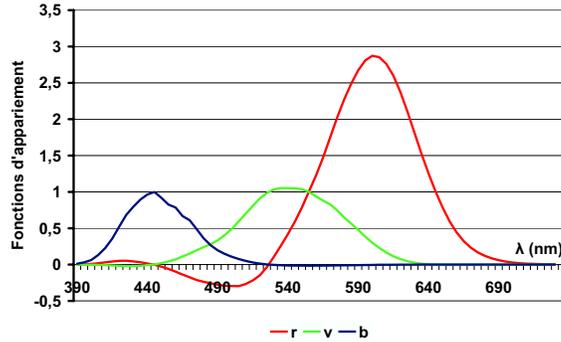


FIG. 9.3 – Sensibilité des fonctions RGB à la longueur d’onde. Pour chaque  $\lambda$ , ces fonctions donnent la quantité de chaque primaire nécessaire à l’égalisation. Les valeurs négatives du rouge représentent l’expérience de la figure 9.2(b).

avec  $r^* = \int_{\lambda} \epsilon(\lambda)r(\lambda)d\lambda$ ,  $g^* = \int_{\lambda} \epsilon(\lambda)g(\lambda)d\lambda$  et  $b^* = \int_{\lambda} \epsilon(\lambda)b(\lambda)d\lambda$  où  $\epsilon(\lambda)$  est l’émission spectrale de la lampe  $L$ . Quant aux coefficients colorimétriques, on les définit par

$$r = \frac{r^*}{r^* + g^* + b^*}, \quad g = \frac{g^*}{r^* + g^* + b^*}, \quad b = \frac{b^*}{r^* + g^* + b^*}, \quad (9.6)$$

avec  $r + g + b = 1$ .

Il est clair que ces coefficients suffisent à repérer une couleur, à la luminance visuelle près. La représentation graphique de la figure 9.4 fait appel à un triangle dont les sommets correspondent au rouge, vert et bleu, avec un blanc équi-énergie au point  $(1/3, 1/3)$ . Le lieu des couleurs monochromatiques est également donné en figure 9.4 (contours).

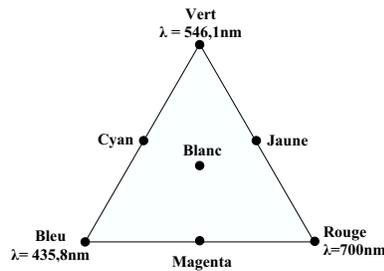


FIG. 9.4 – Triangle de Maxwell exprimé dans le système CIE 1931.

Toutefois, cette représentation ne permet pas d’inscrire les coordonnées à l’intérieur du triangle initial, et ces coordonnées peuvent de plus avoir des valeurs négatives. Enfin, l’information sur la luminance n’est pas immédiate ni accessible.

Un blanc équi-énergie est obtenu en combinant le même pondérateur pour chacune des lampes :  $R = G = B$ . Cette normalisation permet de représenter deux

échantillons avec le même point mais avec des réponses spectrales différentes : ce sont alors des métamères. La cohérence des résultats obtenus parallèlement par Wright [40] et Guild [41] a encouragé la normalisation par la CIE en 1931, de ce système de colorimétrie appelé CIERGB.

## 9.4 Le système CIEXYZ 1931

Au même moment la CIE a normalisé l'espace CIEXYZ, lié à l'espace CIERGB par une combinaison linéaire. En 1931, Franck Judd a proposé ce système car il possède des propriétés intéressantes :

- les triplets décrivant chaque couleur en fonction de ses primaires ont tous des valeurs positives pour les longueurs d'onde du visible ;
- la composante Y du triplet (X, Y, Z) est usuellement assimilée à la luminance du spectre incident ;
- tout spectre d'égle énergie est associé à un triplet dont toutes les composantes sont égales.

Ceci s'obtient en définissant un ensemble de trois primaires imaginaires qui conduisent à un changement de base. Les nouvelles coordonnées (X, Y, Z) s'expriment en fonction des anciennes (R, G, B) par la relation matricielle

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,49 & 0,31 & 0,20 \\ 0,1770 & 0,8124 & 0,0106 \\ 0 & 0,01 & 0,99 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r^* \\ g^* \\ b^* \end{bmatrix}$$

Nous pouvons aussi normaliser les coordonnées X, Y et Z pour définir un diagramme chromatique plan à deux coordonnées  $x$  et  $y$ , et utiliser ces relations pour déterminer les coefficients de distribution (voir figure 9.5). Nous définissons les coordonnées  $x$  et  $y$  de la manière suivante :

$$x = \frac{X}{X + Y + Z} \quad y = \frac{Y}{X + Y + Z}$$

Le diagramme ainsi obtenu sur la figure 9.6 en forme de fer à cheval donne des informations sur la couleur perçue par l'œil. La courbe de 420 à 780 nm, limitant l'espace des couleurs représente le lieu des longueurs d'onde pures monochromatiques. La ligne droite est appelée droite des pourpre, issue du mélange du bleu et du rouge. Ce diagramme indique seulement les impressions colorées. Ainsi, une couleur sombre ou claire ayant les mêmes coordonnées ne pourra pas être différenciée. Le blanc ou les différents niveaux de gris sont représentés dans la zone centrale. La figure (9.6) souligne la répartition des couleurs dans le diagramme colorimétrique  $xy$ .

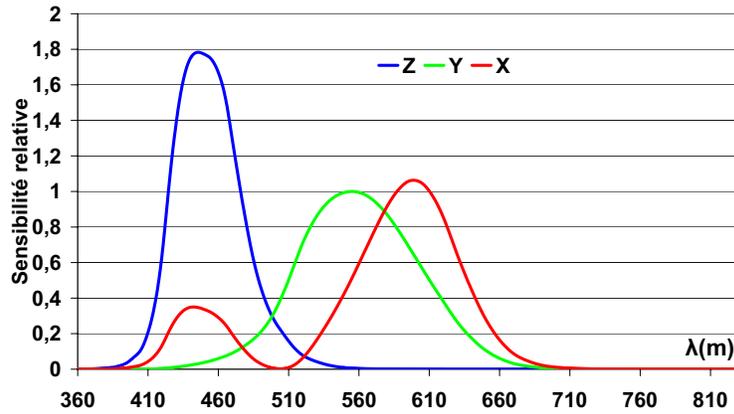


FIG. 9.5 – Sensibilité des fonctions XYZ.

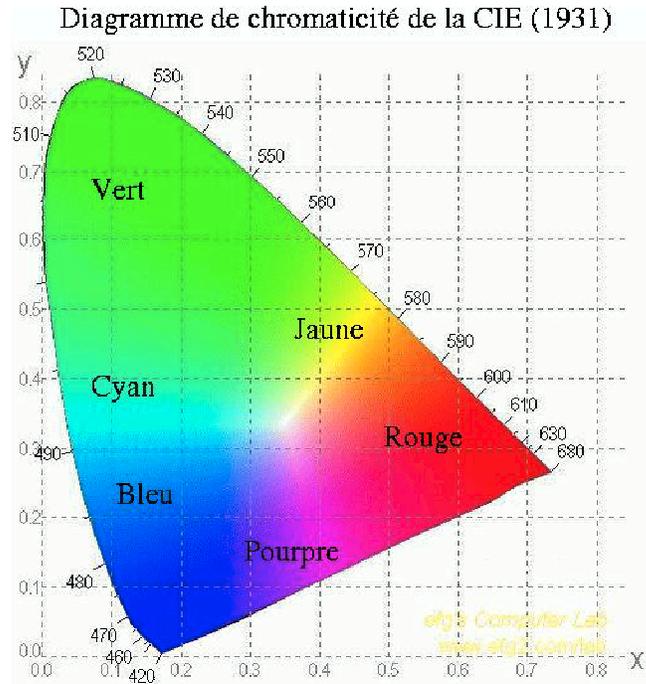


FIG. 9.6 – Diagramme chromatique  $xy$  en couleur.

## 9.5 Etalons de couleur

Nous pouvons aussi positionner les illuminants (soleil, lampe à tungstène) dans le diagramme colorimétrique, pour permettre de mieux différencier les couleurs. La CIE a défini plusieurs illuminants dans le tableau 9.1. Par exemple, l'illuminant

CIE ILL  $D_{65}$  est utilisé en vidéo pour représenter la lumière directe du soleil à une température de couleur de 6504 K.

Illuminants	$x_0$	$y_0$	Temp. de couleur [K]
CIE ILL A (lampe à incandescence)	0,4476	0,4075	2850
CIE ILL B (rayon de soleil direct)	0,3484	0,3516	4874 <sup>1</sup>
CIE ILL C (éclairage ambiant)	0,3101	0,3162	6774 <sup>a</sup>
CIE ILL $D_{65}$ (rayon de soleil direct)	0,3127	0,3290	6504 <sup>a</sup>
Source d'égale énergie	0,3333	0,3333	5400 <sup>a</sup>

TAB. 9.1 – Illuminants de la CIE et températures de couleur.

Chaque illuminant est décrit à l'aide de la température de couleur, ou grâce à la loi d'émission du corps noir. Le physicien allemand Max Planck a démontré que le spectre lumineux émis par un corps noir parfait, totalement absorbant, dépend uniquement de sa température. Aussi, la couleur de l'objet source change avec sa température propre. Il nous est alors possible de représenter le lieu des corps noirs sur le diagramme chromatique CIEXYZ (voir figure 9.7).

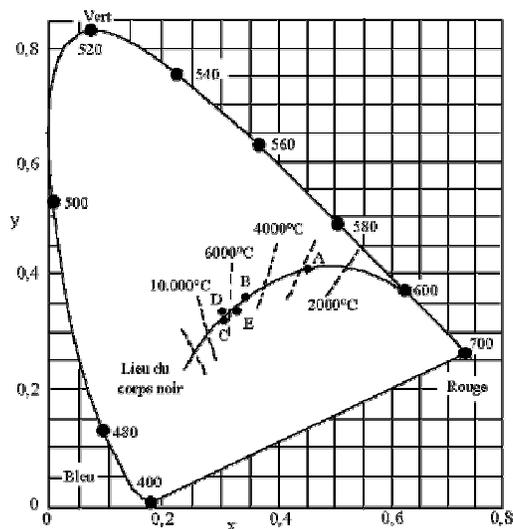


FIG. 9.7 – Lieu des corps noirs dans le diagramme chromatique CIEXYZ.

Ainsi, à une température du corps noir  $T_0$  donnée correspond une abscisse  $x_0$  et une ordonnée  $y_0$ . Nous sommes donc capable, pour une source lumineuse donnée, et connaissant sa température de couleur, de définir des coordonnées chromatiques uniques.

# Chapitre 10

## Sphères de silice de type substrat

Les sphères considérées ici sont de type substrat et ne supportent donc aucun revêtement de surface. Le flux qu'elles diffusent est considéré comme une source d'émission dont on caractérise la couleur dans le diagramme colorimétrique CIE XYZ. Par ailleurs, la luminance visuelle est donnée par la composante Y du triplet  $(X, Y, Z)$ .

### 10.1 Étude colorimétrique du flux total diffusé

La figure (10.1) montre l'influence de la taille de la particule sur la couleur perçue par l'œil. La détermination des constantes colorimétriques  $(x, y)$  est réalisée avec le flux total intégré dans tout l'espace. Nous retrouvons le fait que plus la particule est petite, et plus la couleur tend vers le bleu. Cela est conforme avec la théorie de Mie pour de très petites sphères. Par contre, quand le rayon de la sphère croît, la couleur perçue par l'œil tend vers le blanc.

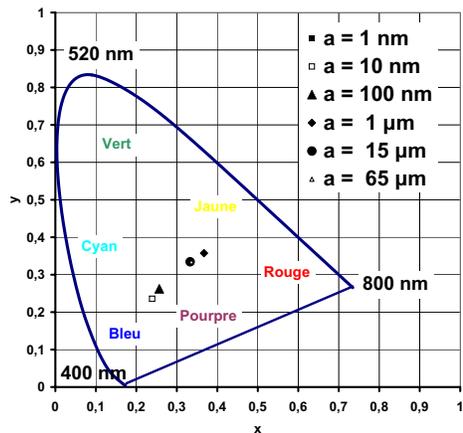


FIG. 10.1 – Diagramme chromatique CIE XYZ du flux total diffusé en polarisation TE pour des rayons de sphère de 1 nm, 10 nm, 100 nm, 1 µm, 15 µm et 65 µm.

## 10.2 Étude colorimétrique en fonction de l'angle normal $\theta$

Nous nous proposons d'étudier la réponse spectrale d'une sphère de rayon donné, en fonction de l'angle normal de diffusion  $\theta$ . Cette étude est primordiale pour appréhender les effets colorés et les résonances. Au delà des réponses en fonction de l'angle normal  $\theta$  et de la longueur d'onde  $\lambda$ , nous mettons également en valeur les réponses spectrales et colorimétriques dans les deux demi-espaces réfléchis et transmis (R et T). Nous étudions en outre la réponse colorimétrique (CIEXYZ) et la luminance visuelle (Y) en fonction de  $\theta$ .

### 10.2.1 Sphère de rayon $a = 1$ nm

Sur la figure 10.2, le flux diffusé d'une petite sphère en polarisation TE est plus important pour les petites longueurs d'onde que pour les grandes longueurs d'onde, et cela quel que soit l'angle de diffusion. Nous remarquons aussi qu'en  $\theta = 90^\circ$ , le flux décroît fortement et tend vers zéro. Ces deux phénomènes sont caractéristiques d'un dipôle. Le diagramme colorimétrique montre que le flux diffusé donne du bleu. Pour une petite sphère, ce résultat est valable aussi bien dans le demi-espace réfléchi (R), que dans le demi-espace transmis (T). En effet, les réponses spectrales, les réponses colorimétriques et les luminances visuelles sont identiques pour R et T (figure 10.3 (a) et (b)). Ce rôle symétrique de R et T est vérifié quand nous traitons nos données angulairement (figure 10.3 (c) et (d)).

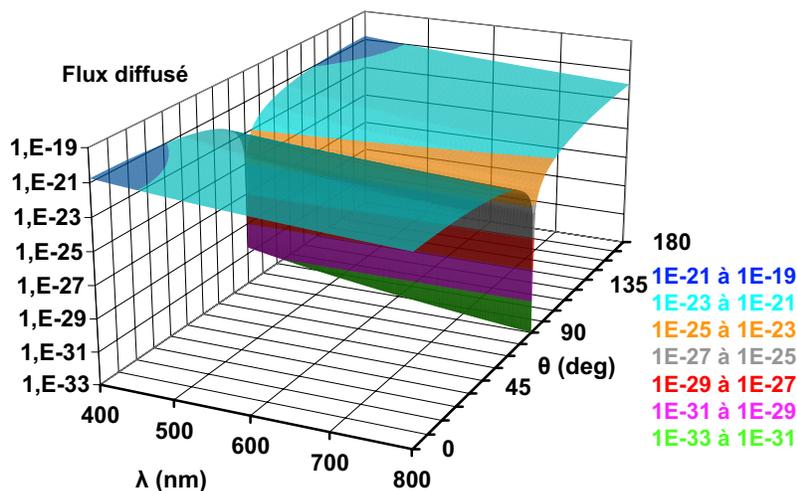


FIG. 10.2 – Flux diffusé d'une sphère de silice de rayon  $a = 1$  nm en fonction de  $\lambda$  et de  $\theta$ .

## 10.2. ETUDE COLORIMÉTRIQUE EN FONCTION DE $\theta$

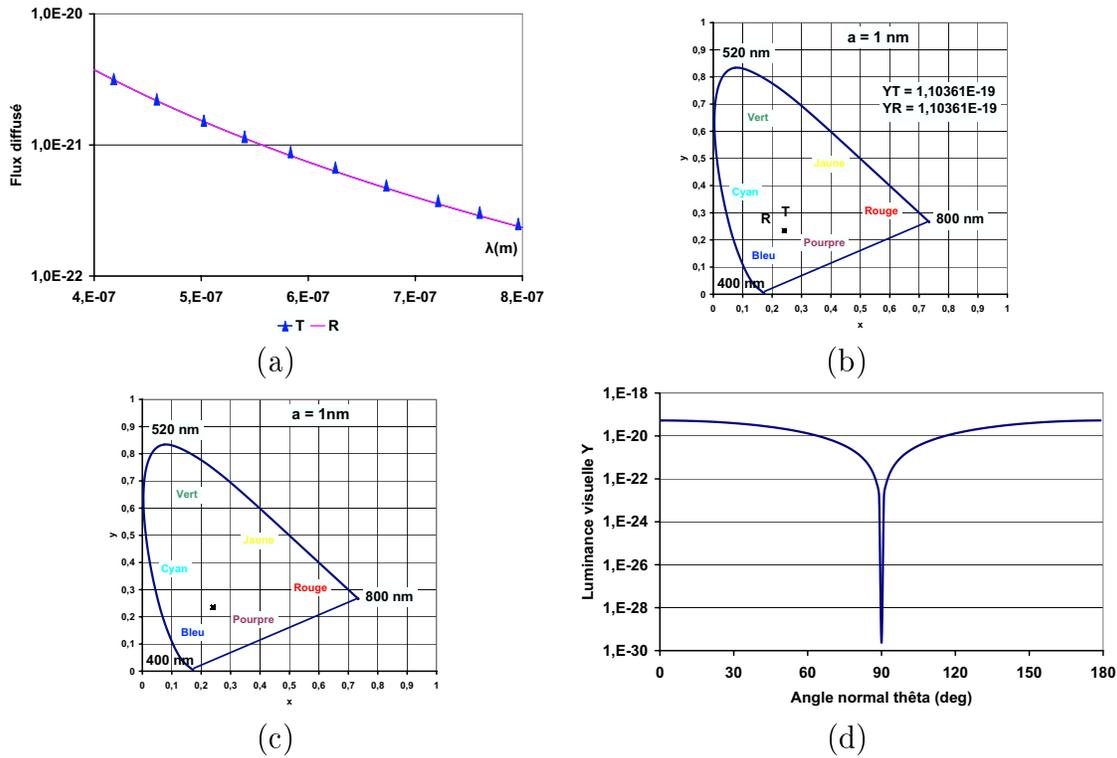


FIG. 10.3 – Sphère de silice de rayon  $a = 1$  nm. (a) Réponse spectrale du flux diffusé dans le demi-espace réfléchi R, et dans le demi-espace transmis T. R et T sont identiques. (b) Diagramme colorimétrique CIEXYZ. (c) Diagramme colorimétrique CIEXYZ en fonction du paramètre  $\theta$ . Tous les points sont superposés. (d) Réponse angulaire de la luminance visuelle Y.

### 10.2.2 Sphère de rayon $a = 10$ nm

Pour une sphère dix fois plus grosse (voir figures 10.4 et 10.5), les résultats sont quasi-identiques et la couleur est la même en réflexion et transmission.

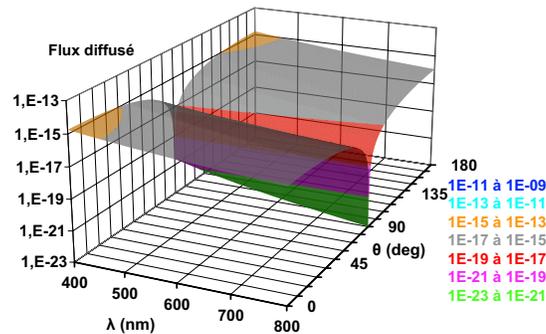


FIG. 10.4 – Flux diffusé d'une sphère de silice de rayon  $a = 10$  nm en fonction de  $\lambda$  et de  $\theta$ .

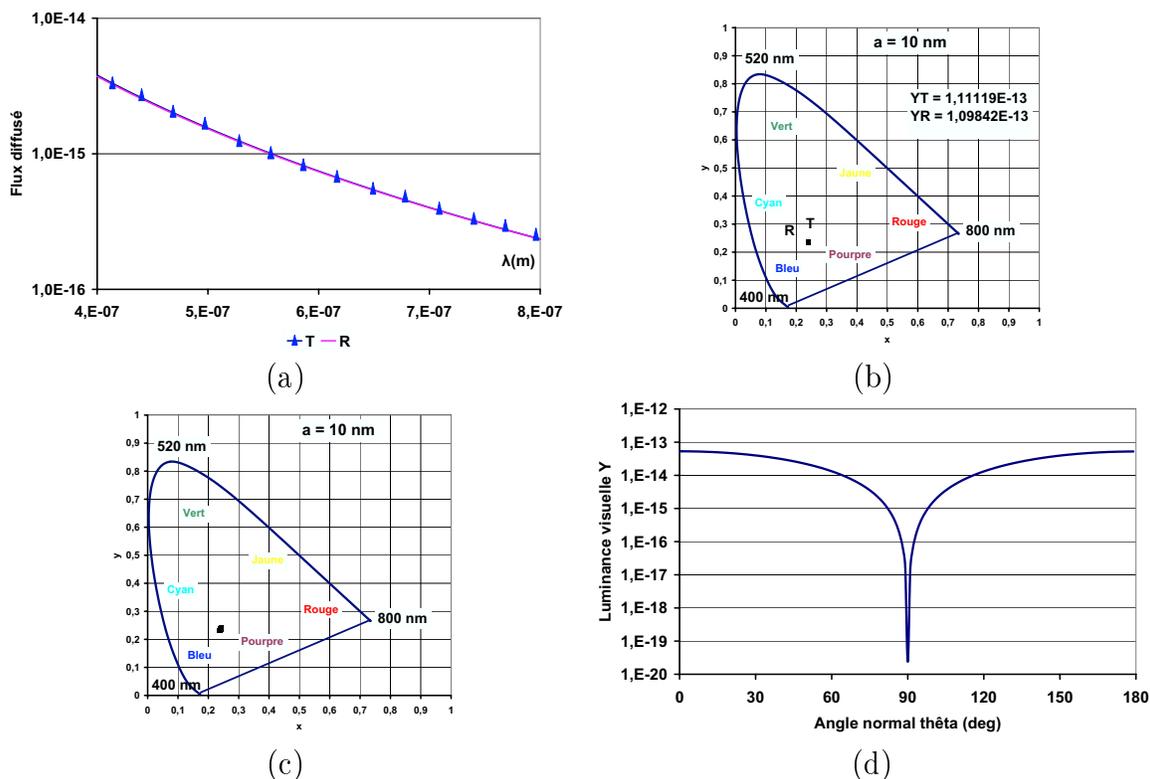


FIG. 10.5 – Sphère de silice de rayon  $a = 10 \text{ nm}$ . (a) Réponse spectrale du flux diffusé dans le demi-espace réfléchi R, et dans le demi-espace transmis T. R et T sont identiques. (b) Diagramme colorimétrique CIEXYZ. (c) Diagramme colorimétrique CIEXYZ en fonction du paramètre  $\theta$ . Tous les points sont superposés. (d) Réponse angulaire de la luminance visuelle Y.

### 10.2.3 Sphère de rayon $a = 100 \text{ nm}$

Comme on l'a déjà vu, les premières oscillations sont observables à partir d'un rayon proche de  $100 \text{ nm}$  (figure 10.6). On constate tout d'abord que les diffusions globales en réflexion (R) et transmission (T) sont très différentes, à la fois en forme et en intensité (figure 10.7). En conséquence, les couleurs sont différentes en réflexion et transmission. Le flux diffusé dans une direction particulière, en fonction de la longueur d'onde et de l'angle de diffusion révèle toujours une forte décroissance au voisinage de  $\theta = 90^\circ$ . Le diagramme colorimétrique montre que la couleur varie en fonction de l'angle de diffusion. Nous balayons le blanc, pour aller vers le bleu et ensuite rejoindre le jaune et atteindre une teinte blanche. Il est important de noter que les distances sur ce diagramme ne sont pas caractéristiques des différences de couleur entre deux points (figure 10.7 (c)). L'étude de la luminance visuelle montre que le flux dans le demi-espace transmis est supérieur à celui du demi-espace réfléchi (figure 10.7 (d)). Cela pondère notre diagramme colorimétrique, la partie dans le bleu est donc plus intense à l'œil que la partie dans le jaune.

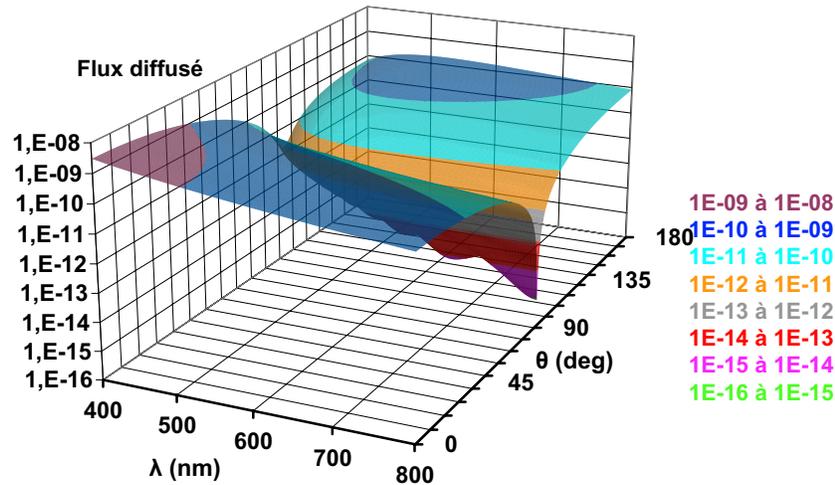


FIG. 10.6 – Flux diffusé d’une sphère de silice de rayon  $a = 100$  nm en fonction de  $\lambda$  et de  $\theta$ .

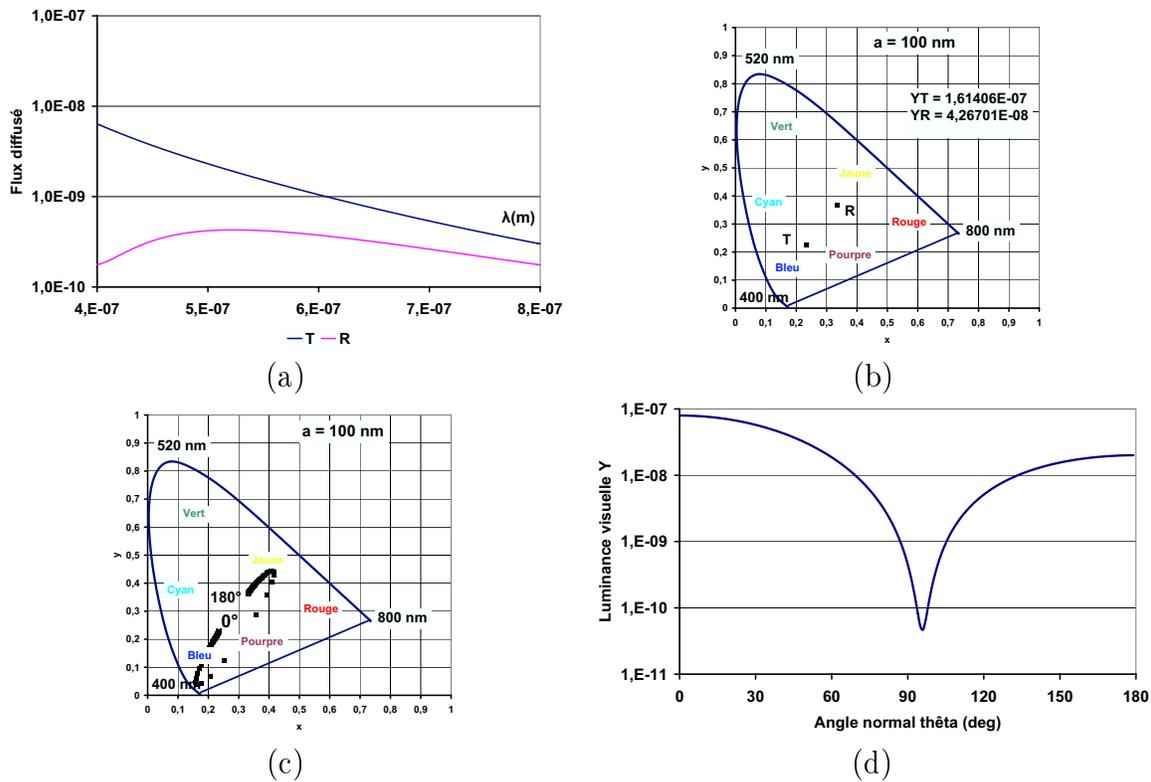


FIG. 10.7 – Sphère de silice de rayon  $a = 100$  nm. (a) Réponse spectrale du flux diffusé dans le demi-espace réfléchi R, et dans le demi-espace transmis T. (b) Diagramme colorimétrique CIEXYZ. (c) Diagramme colorimétrique CIEXYZ en fonction du paramètre  $\theta$ . (d) Réponse angulaire de la luminance visuelle Y.

### 10.2.4 Sphère de rayon $a = 500$ nm

Pour une sphère de rayon  $a = 500$  nm, soit cinq fois plus grande que la sphère précédente, et du même ordre de grandeur que la longueur d'onde du visible [400-800 nm], nous observons de franches oscillations angulaires et spectrales.

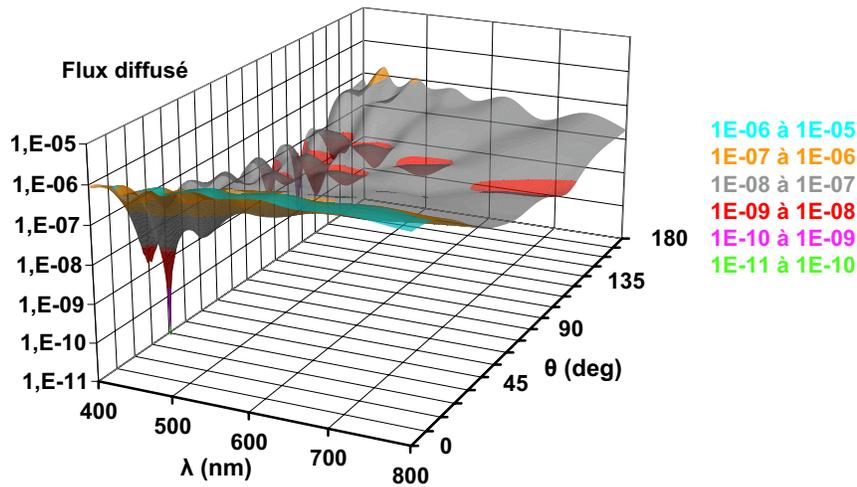


FIG. 10.8 – Flux diffusé d’une sphère de silice de rayon  $a = 500$  nm en fonction de  $\lambda$  et de  $\theta$ .

Sur la figure 10.8, les variations spectrales sont de deux sortes : de faible pente et de forte pente. Nous ne pouvons plus déduire aisément la couleur du diagramme de diffusion. En effet, le rayon augmentant, beaucoup de termes entrent en jeu dans le calcul du flux diffusé.

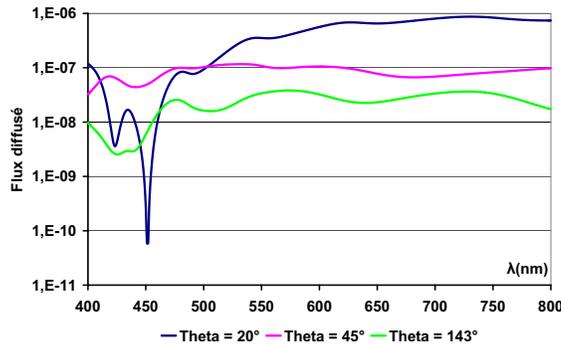


FIG. 10.9 – Flux diffusé spectral à différents angles donnés :  $\theta = 20^\circ$ ,  $45^\circ$  et  $143^\circ$ .

## 10.2. ETUDE COLORIMÉTRIQUE EN FONCTION DE $\theta$

Cependant, pour ce rayon donné, il apparaît deux résultats intéressants. Le premier concerne des pics de résonance de plusieurs décades de différence par rapport au flux moyen. Sur la figure 10.9, nous isolons trois angles différents :  $\theta = 20^\circ$ ,  $45^\circ$  et  $143^\circ$ . A  $20^\circ$ , nous avons une réponse étroite pour la longueur d'onde 451 nm, avec une dynamique de quatre décades pour ce profil spectral. Pour  $\theta = 143^\circ$  la dynamique est seulement d'une décade et le plus souvent elle est inférieure à une décade, comme c'est le cas pour  $\theta = 45^\circ$ .

Le deuxième résultat concerne la variation colorimétrique en fonction de  $\theta$  d'une sphère d'un tel diamètre. En fonction de l'angle (voir figure 10.10 (c)), la réponse colorimétrique devient de plus en plus complexe. Elle se centre sur la teinte blanche, tout en ayant, pour plusieurs angles des réponses colorées. Cependant, la luminance visuelle dans la partie transmise est toujours supérieure à la luminance dans la partie réfléchie (figure 10.10 (d)). T tend vers le rouge, et R tend vers le blanc (figure 10.10 (b)), résultat pressenti au regard de la réponse spectrale (figure 10.10 (a)).

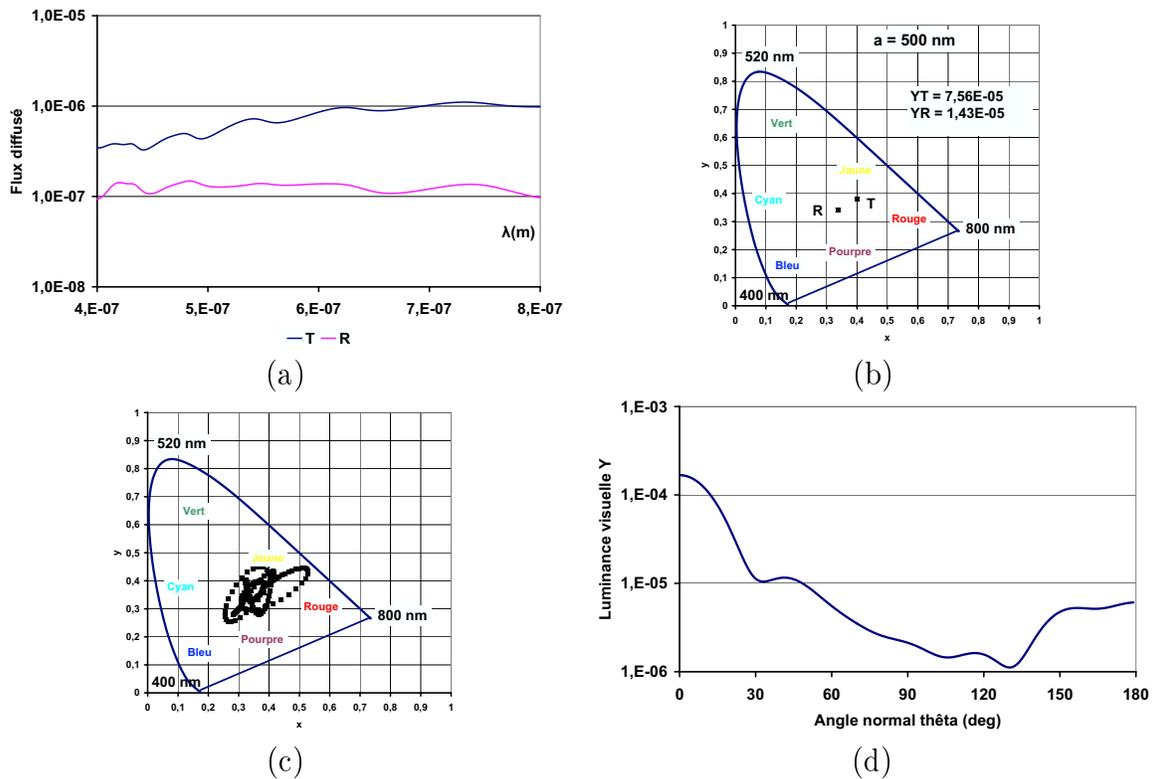


FIG. 10.10 – Sphère de silice de rayon  $a = 500$  nm. (a) Réponse spectrale du flux diffusé dans le demi-espace réfléchi R, et dans le demi-espace transmis T. (b) Diagramme colorimétrique CIEXYZ. (c) Diagramme colorimétrique CIEXYZ en fonction du paramètre  $\theta$ . (d) Réponse angulaire de la luminance visuelle Y.

### 10.2.5 Sphère de rayon $a = 1 \mu\text{m}$

Pour une sphère de rayon  $a = 1 \mu\text{m}$  (figure 10.11), les résultats sont du même type que les précédents. Il existe des angles où la réponse spectrale varie de plusieurs décades (figure 10.12). La réponse colorimétrique prend plus d'espace dans le diagramme CIEXYZ : entre  $\theta = 154^\circ$  et  $160^\circ$  la couleur passe du bleu au rouge en quelques degrés. Cependant, beaucoup plus d'angles donnent une couleur blanche (figure 10.13 (c)). Ceci explique la teinte blanche dans le demi-espace transmis et dans le demi-espace réfléchi, sur le diagramme colorimétrique CIEXYZ (figure 10.13 (b)). La partie transmise possède, quant à elle, une dynamique de luminance visuelle supérieure à une décade.

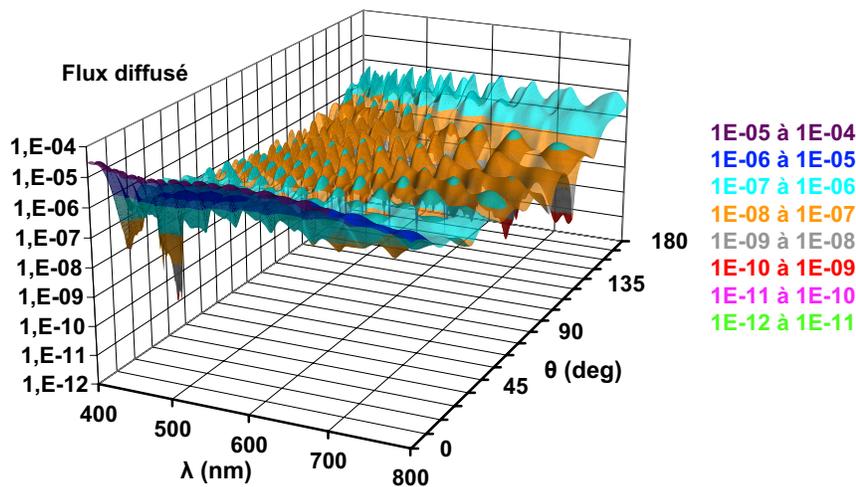


FIG. 10.11 – Flux diffusé d’une sphère de silice de rayon  $a = 1 \mu\text{m}$  en fonction de  $\lambda$  et de  $\theta$ .

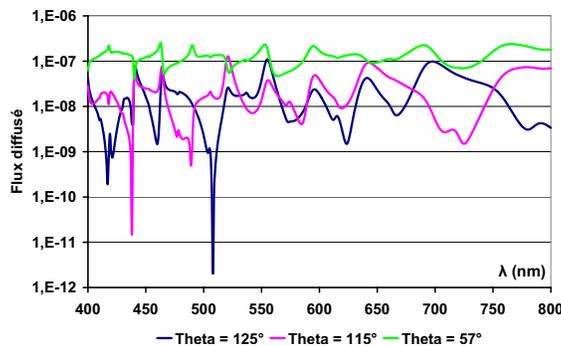


FIG. 10.12 – Flux diffusé spectral à différents angles donnés :  $\theta = 57^\circ$ ,  $115^\circ$  et  $125^\circ$ .

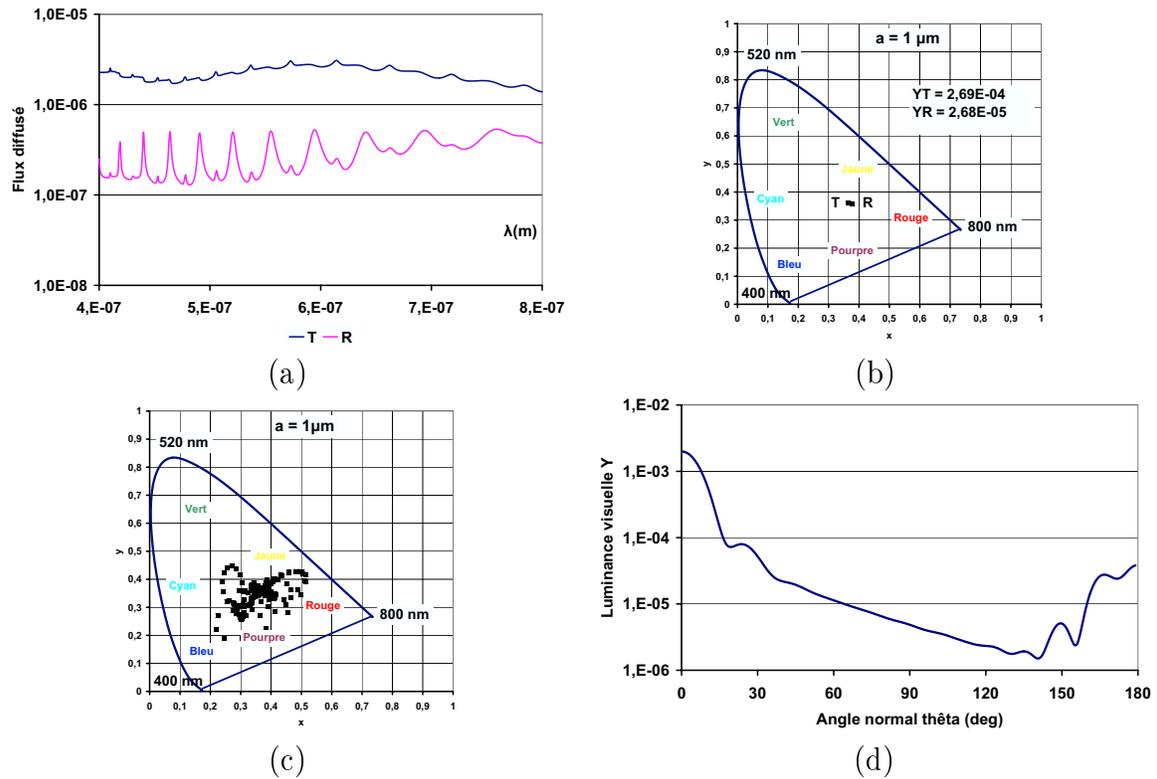


FIG. 10.13 – Sphère de silice de rayon  $a = 1 \mu\text{m}$ . (a) Réponse spectrale du flux diffusé dans le demi-espace réfléchi R, et dans le demi-espace transmis T. (b) Diagramme colorimétrique CIEXYZ. (c) Diagramme colorimétrique CIEXYZ en fonction du paramètre  $\theta$ . (d) Réponse angulaire de la luminance visuelle Y.

### 10.2.6 Sphère de rayon $a = 15 \mu\text{m}$

Sur les résultats de la figure 10.14, nous avons les niveaux de flux diffusé par une sphère de rayon  $15 \mu\text{m}$ . Le niveau de flux transmis est élevé, et nous avons de nombreux pics de résonance. Le diagramme colorimétrique est toujours centré sur le blanc (figure 10.15 (c)), et seuls quelques angles ont une réponse colorée : par exemple  $\theta = 1^\circ$  et  $\theta = 178^\circ$ . Le flux diffusé T est toujours supérieur à R, quelle que soit la longueur d'onde (figure 10.15 (a)). La réponse de l'œil suit la même loi :  $Y_T > Y_R$  (figure 10.15 (b) et (d)).

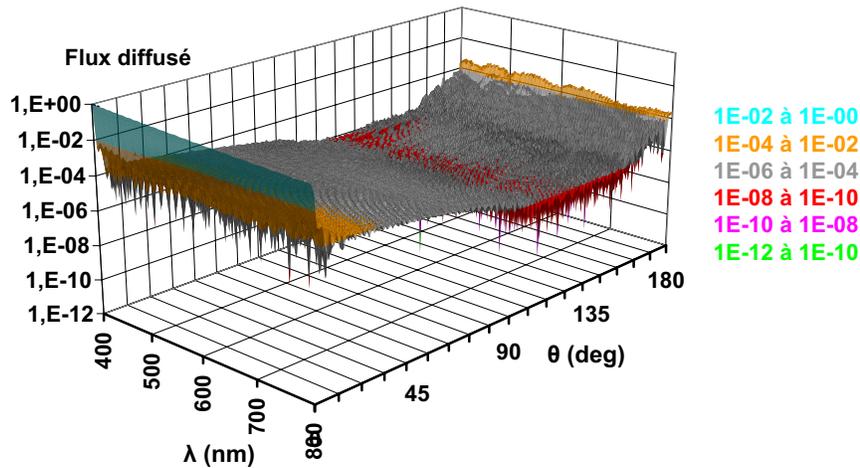


FIG. 10.14 – Flux diffusé d’une sphère de silice de rayon  $a = 15 \mu\text{m}$  en fonction de  $\lambda$  et de  $\theta$ .

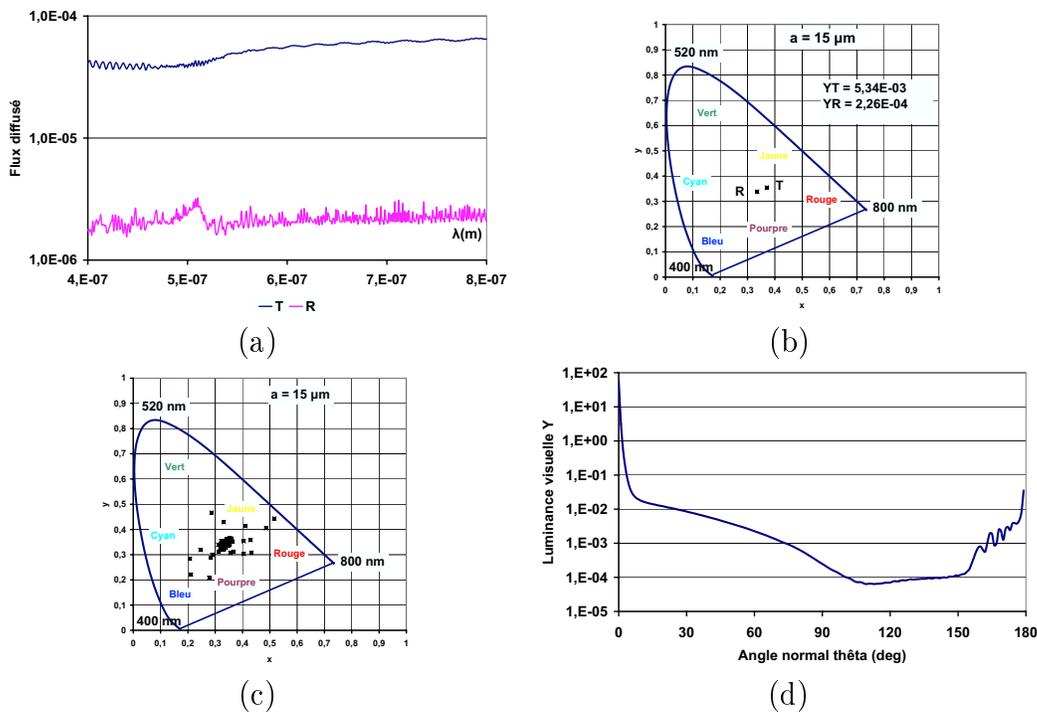


FIG. 10.15 – Sphère de silice de rayon  $a = 15 \mu\text{m}$ . (a) Réponse spectrale du flux diffusé dans le demi-espace réfléchi R, et dans le demi-espace transmis T. (b) Diagramme colorimétrique CIEXYZ. (c) Diagramme colorimétrique CIEXYZ en fonction du paramètre  $\theta$ . (d) Réponse angulaire de la luminance visuelle Y.

### 10.2.7 Sphère de rayon $a = 65 \mu\text{m}$

Pour une sphère de diamètre important ( $a = 65 \mu\text{m}$ ), les réponses angulaires et spectrales sont très “chahutées” car la structure est très fine (voir les figures 10.16 et

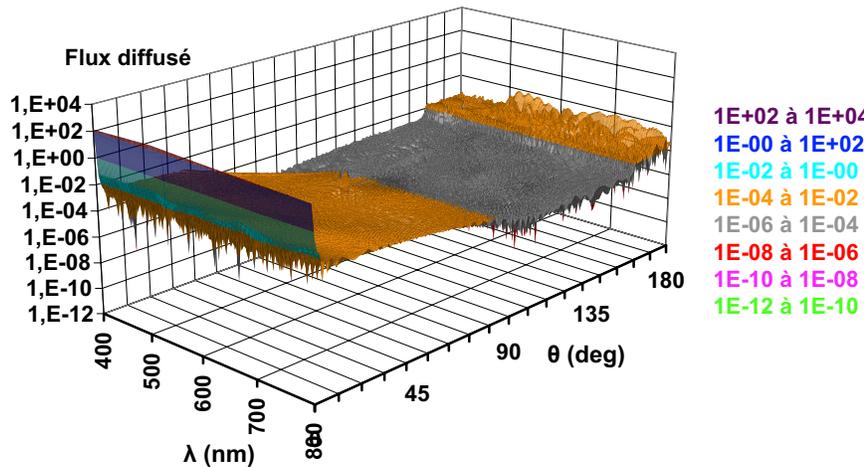


FIG. 10.16 – Flux diffusé d’une sphère de silice de rayon  $a = 65 \mu\text{m}$  en fonction de  $\lambda$  et de  $\theta$ .

10.17 (a)). Pour la plupart des angles la teinte est blanche. Toutefois, certains angles donnent une teinte jaune (figure 10.18 (a)). Cependant, ces valeurs se trouvent dans le demi-espace réfléchi dont le niveau de luminance visuelle est plus faible que dans le demi-espace transmis (figure 10.18 (b)) : la teinte globale est donc blanche (figure 10.17 (b)).

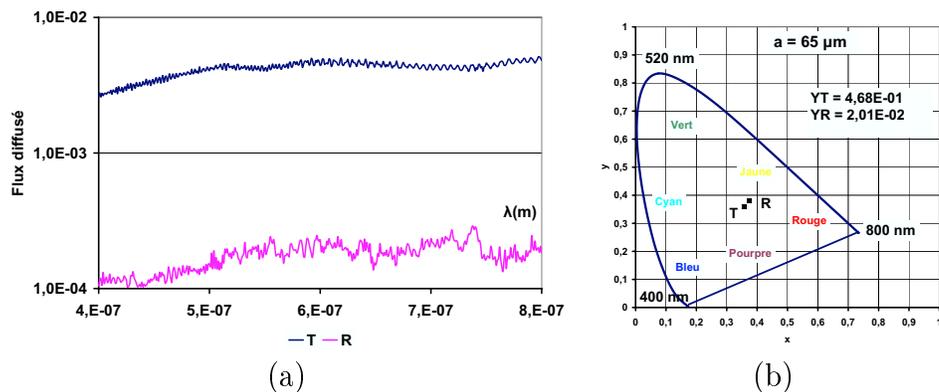


FIG. 10.17 – Sphère de silice de rayon  $a = 65 \mu\text{m}$ . (a) Réponse spectrale du flux diffusé dans le demi-espace réfléchi R, et dans le demi-espace transmis T. (b) Diagramme colorimétrique CIEXYZ.

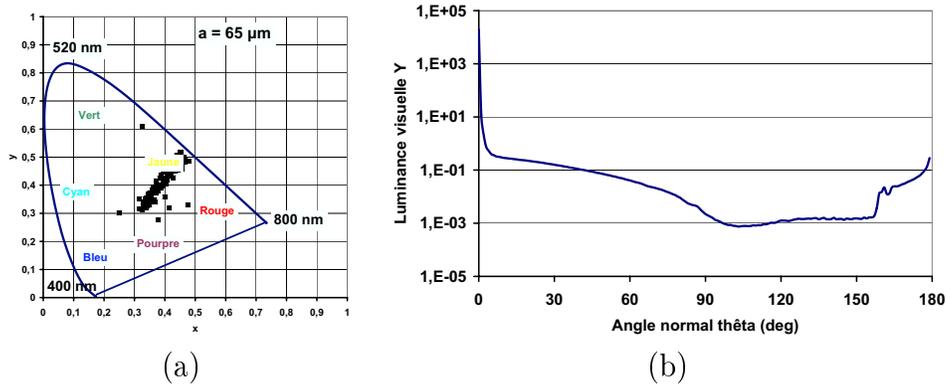


FIG. 10.18 – Sphère de silice de rayon  $a = 65 \mu\text{m}$ . (a) Diagramme colorimétrique CIEXYZ en fonction du paramètre  $\theta$ . (b) Réponse angulaire de la luminance visuelle  $Y$ .

### 10.2.8 Conclusion

Il est important de noter tout d'abord, que la luminance visuelle dans le demi-espace transmis est en général supérieure à la luminance dans le demi-espace réfléchi.

Par ailleurs, et contrairement à la diffusion totale, les diffusions par réflexion et transmission révèlent des couleurs différentes. Si maintenant on se limite à une seule direction angulaire, de nombreuses couleurs sont obtenues pour des rayons de sphère se situant dans la plage  $[100\text{nm} - 2\mu\text{m}]$ .

On remarquera aussi qu'il est possible d'avoir une dynamique de plusieurs décades du flux diffusé à un angle normal  $\theta$  donné. Ceci peut permettre le cas échéant d'isoler ou de supprimer une raie spectrale.

# Chapitre 11

## Sphères de silice recouvertes

Dans ce chapitre l'épaisseur totale du multicouche déposé sera prise égale au rayon de la sphère,  $\sum e_i = a$ . Nous étudions alors les effets colorés provoqués par le revêtement de surface. Comme précédemment, pour permettre une discrimination entre l'effet de taille (ou d'indice) et l'effet du multicouche, nous devons comparer systématiquement (figure 11.1) :

- la sphère initiale de type substrat de rayon initial  $a$ ,
- la sphère recouverte de rayon  $2a$ ,
- la sphère substrat équivalente de rayon  $2a$ ,
- la sphère bas indice équivalente de rayon  $2a$ ,
- la sphère haut indice équivalente de rayon  $2a$ .

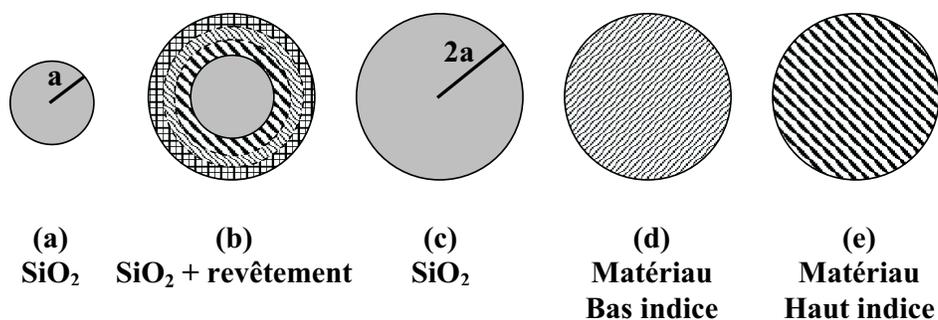


FIG. 11.1 – Représentation des sphères à comparer : (a) la sphère initiale de type substrat de rayon  $a$ , (b) la sphère recouverte de rayon  $2a$ , (c) la sphère substrat équivalente de rayon  $2a$ , (d) la sphère bas indice équivalente de rayon  $2a$  et (e) la sphère haut indice équivalente de rayon  $2a$ .

Toutes ces courbes vont relativement alourdir notre présentation et en compliquer l'analyse, mais cette démarche nous est apparue nécessaire pour analyser avec rigueur la plus-value apportée par les multicouches.

## 11.1 Sphères de silice de rayon 100 nm

Nous étudions dans cette partie l'effet de couches minces déposées sur une sphère de rayon  $a = 100$  nm.

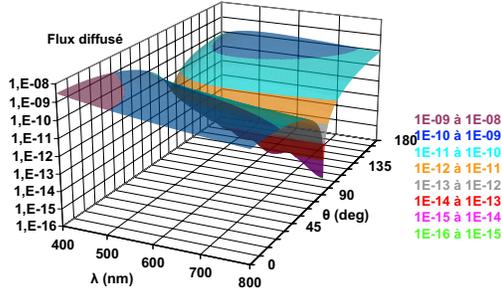
Nous comparons ici (figure 11.2) les résultats d'une sphère substrat de silice non traitée de rayon 100 nm **(a)**, d'une sphère de silice non traitée de rayon équivalent 200 nm **(b)**, de la sphère substrat recouverte d'une couche bas indice ( $n_b = 1,33$ ) **(c)**, de la sphère substrat recouverte d'une couche haut indice ( $n_h = 2,25$ ) **(d)**, d'une sphère bas indice de rayon équivalent 200 nm **(e)**, d'une sphère haut indice de rayon équivalent 200 nm **(f)**, de la sphère substrat recouverte d'une alternance bas et haut indice à sept couches **(g)**, et de la sphère substrat recouverte d'un empilement constitué de deux couches bas indice entourées d'une alternance bas et haut indice à cinq couches **(h)**. L'étude pour chacun de ces cas est présentée dans les cinq pages suivantes.

Sur la figure 11.2, nous comparons les flux diffusés en fonction de l'angle normal  $\theta$ , et de la longueur d'onde  $\lambda$ . La sphère de silice recouverte de la couche bas indice (respectivement haut indice) possède un profil semblable à la sphère bas indice de rayon équivalent (respectivement haut indice). Le profil de la sphère de silice de 200 nm tend à se rapprocher des résultats bas indice.

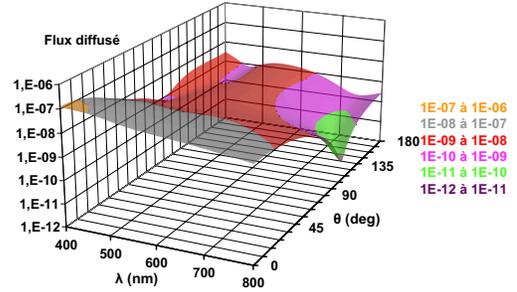
Ensuite, pour ces mêmes échantillons, nous associons le digramme CIEXYZ (figure 11.3) et la luminance visuelle  $Y$  (figure 11.4) pour comparer les effets colorés obtenus. Nous notons tout d'abord que la luminance visuelle dans le demi-espace transmis est toujours supérieure à celle du demi-espace réfléchi. Ainsi, les couleurs près de  $0^\circ$  seront plus perceptibles à l'œil. Les diagrammes colorimétriques montrent une nette répartition colorée angulaire. Pour une sphère de silice de 200 nm **(b)** nous partons d'un bleu léger pour arriver dans le blanc : les variations sont peu importantes. En revanche, pour une sphère recouverte d'une couche bas indice et pour la sphère bas indice de rayon équivalent, les réponses colorimétriques varient plus : du bleu au cyan en passant par la teinte blanche. Les variations colorées les plus spectaculaires ont lieu pour une sphère recouverte d'une couche haut indice, et pour la sphère haut indice de rayon équivalent. Nous avons du bleu, du pourpre, du jaune et même du vert. Pour les multicouches, la réponse colorée angulaire se situe plutôt dans le rouge, et autour de la teinte blanche.

Les profils spectraux intégrés en  $\theta$  en réflexion et en transmission sont également donnés en figure 11.5, pour l'ensemble des composants, et les couleurs associées sont données en figure 11.6.

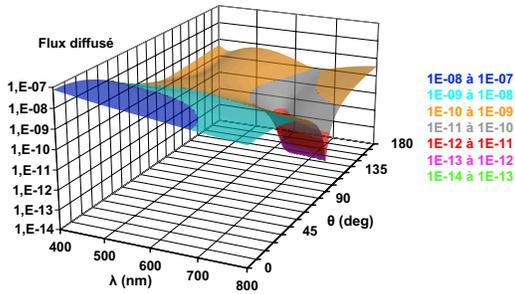
Nous notons que la luminance  $Y_T$  est toujours supérieure à  $Y_R$ . Cela est conforme avec les courbes de la figure 11.4 vues précédemment. Nous remarquons aussi que pour une sphère de silice ou de bas indice, le flux diffusé dans l'espace transmis est bleu tandis qu'il est rouge pour les sphères haut indice. Enfin, une sphère équivalente de matériau haut indice a un effet coloré plus important qu'une sphère de silice recouverte de ce matériau.



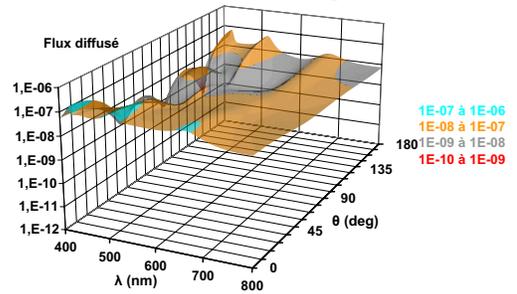
(a) Sphère substrat de silice  $a = 100$  nm



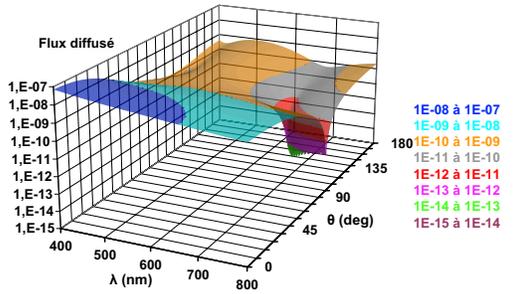
(b) Sphère de silice  $a_{equi} = 200$  nm



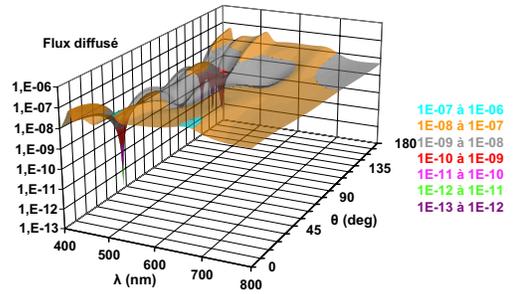
(c) Sphère substrat + b avec  $e_b = a$



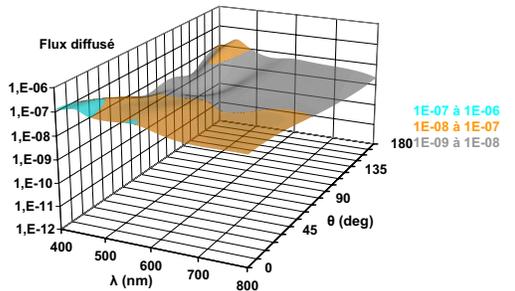
(d) Sphère substrat + h avec  $e_h = a$



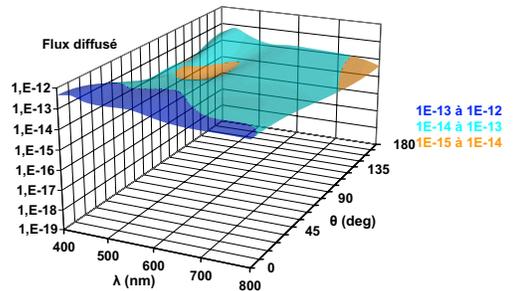
(e) Sphère avec  $n_b = 1,33$  et  $a_{equi}$



(f) Sphère avec  $n_h = 2,25$  et  $a_{equi}$

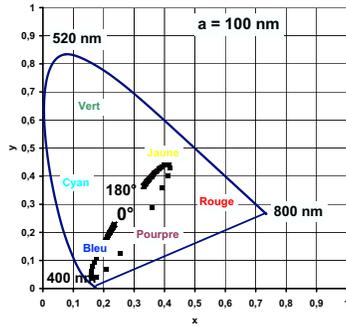


(g) Sphère substrat + m7 avec  $\sum_i e_i = a$

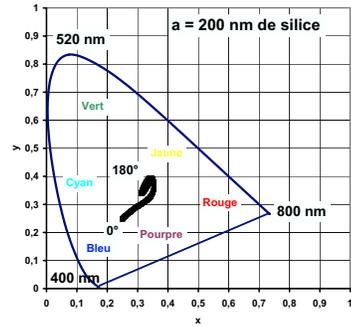


(h) Sphère substrat + m52bm5 avec  $\sum_i e_i = a$

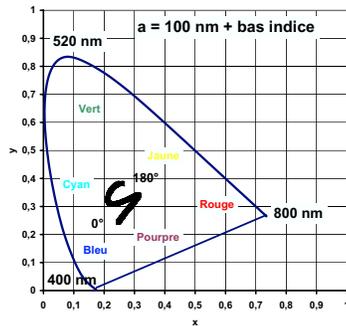
FIG. 11.2 – Étude angulaire et spectrale du flux diffusé par des sphères multicouches.



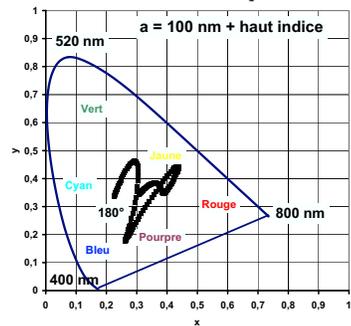
(a) Sphère substrat de silice  $a = 100$  nm



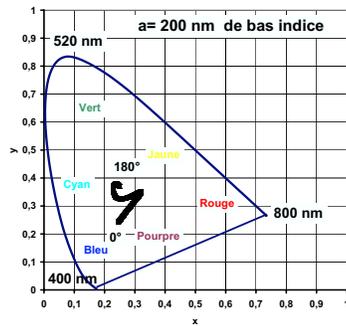
(b) Sphère de silice  $a_{equi} = 200$  nm



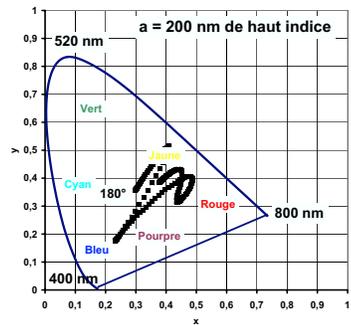
(c) Sphère substrat + b avec  $e_b = a$



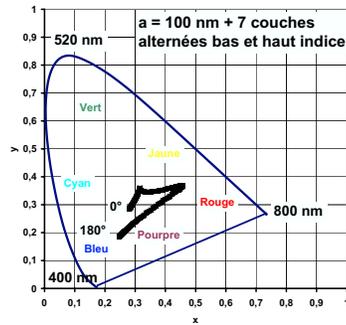
(d) Sphère substrat + h avec  $e_h = a$



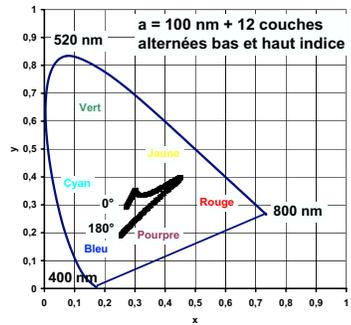
(e) Sphère avec  $n_b = 1,33$  et  $a_{equi}$



(f) Sphère avec  $n_h = 2,25$  et  $a_{equi}$



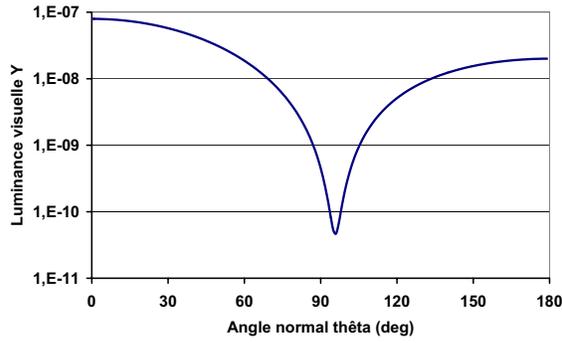
(g) Sphère substrat + m7 avec  $\sum_i e_i = a$



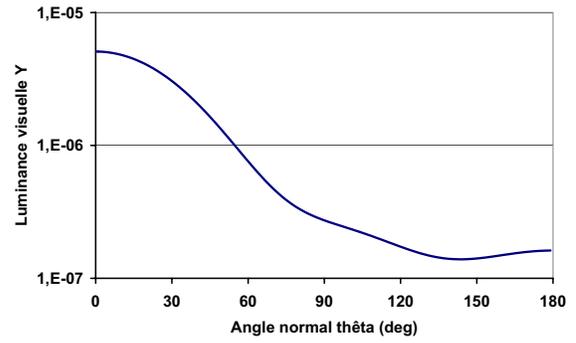
(h) Sphère substrat + m52bm5 avec  $\sum_i e_i = a$

FIG. 11.3 – Étude colorimétrique en fonction de l'angle de diffusion  $\theta$ , pour des sphères multicouches.

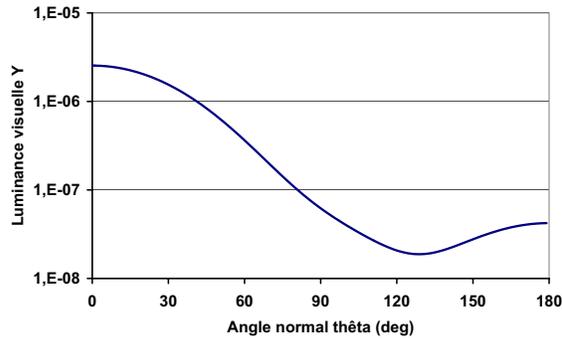
11.1. SPHÈRES DE SILICE DE RAYON 100 NM



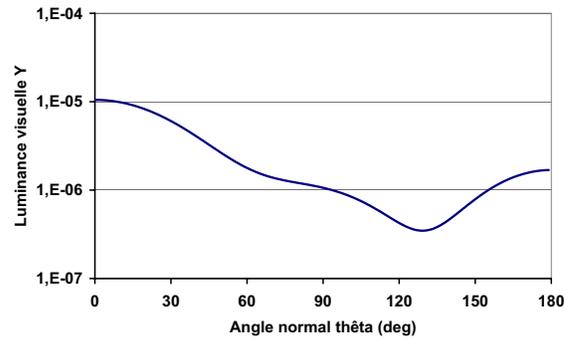
(a) Sphère substrat de silice  $a = 100$  nm



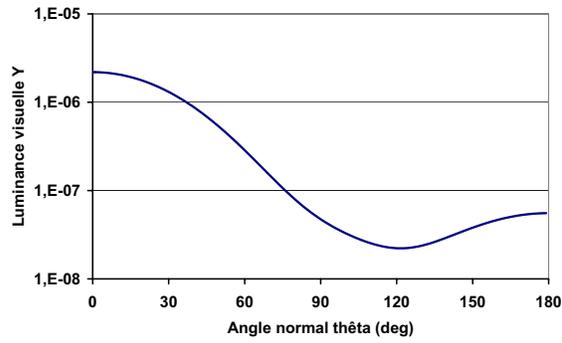
(b) Sphère de silice  $a_{equi} = 200$  nm



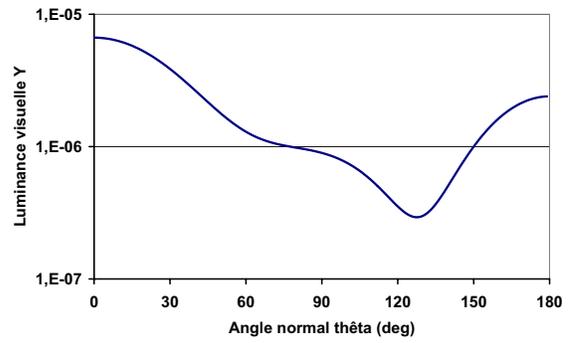
(c) Sphère substrat + b avec  $e_b = a$



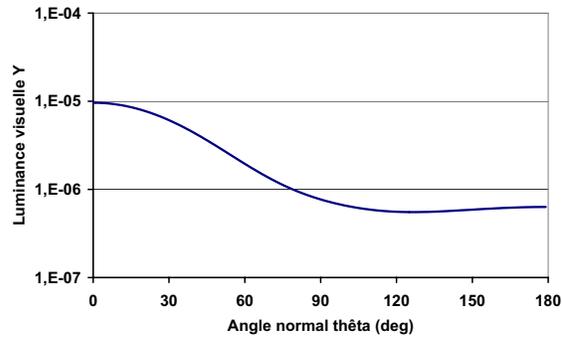
(d) Sphère substrat + h avec  $e_h = a$



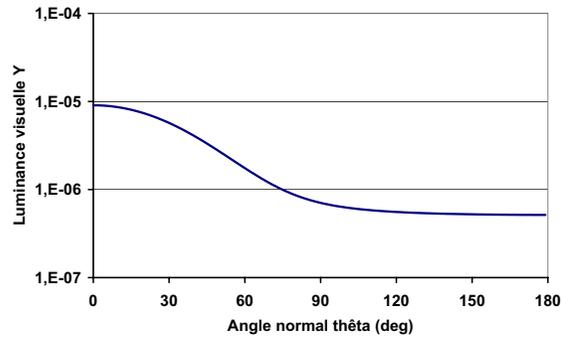
(e) Sphère avec  $n_b = 1,33$  et  $a_{equi}$



(f) Sphère avec  $n_h = 2,25$  et  $a_{equi}$

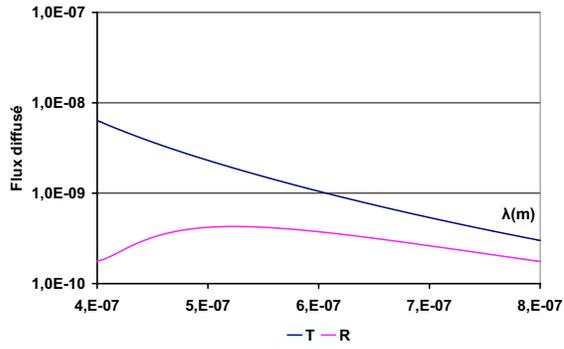


(g) Sphère substrat + m7 avec  $\sum_i e_i = a$

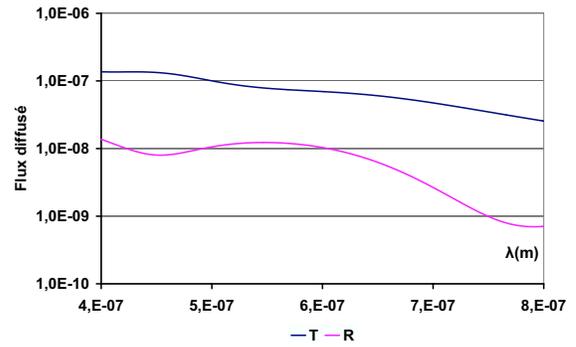


(h) Sphère substrat + m52bm5 avec  $\sum_i e_i = a$

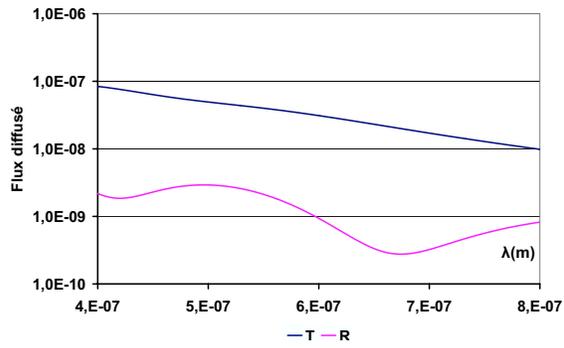
FIG. 11.4 – Étude de la luminance visuelle en fonction de  $\theta$ , pour des sphères multicouches.



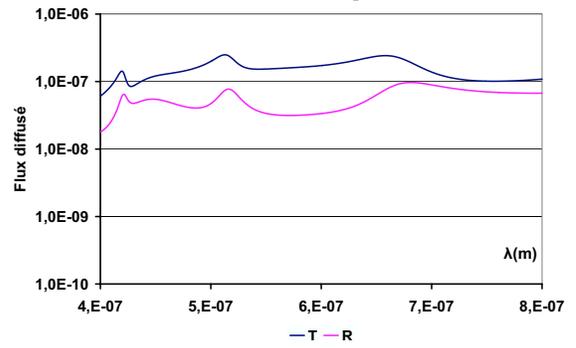
(a) Sphère substrat de silice  $a = 100$  nm



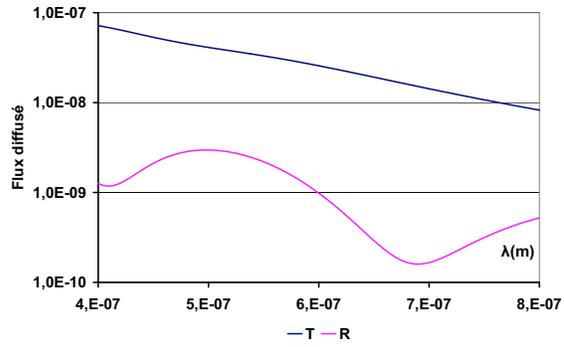
(b) Sphère de silice  $a_{equi} = 200$  nm



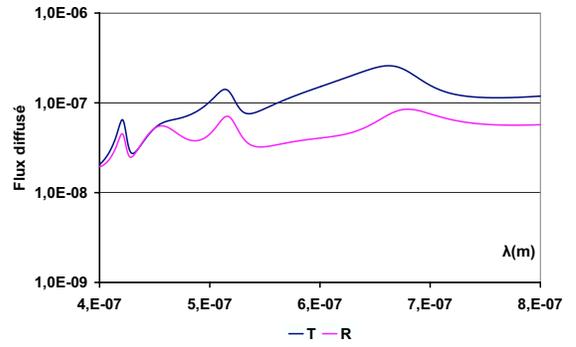
(c) Sphère substrat + b avec  $e_b = a$



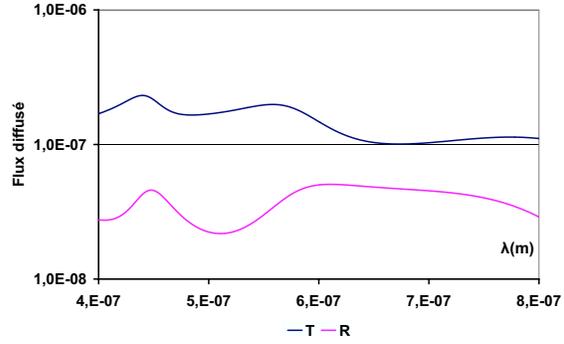
(d) Sphère substrat + h avec  $e_h = a$



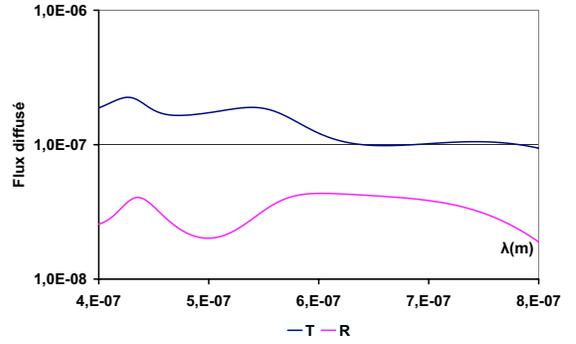
(e) Sphère avec  $n_b = 1,33$  et  $a_{equi}$



(f) Sphère avec  $n_h = 2,25$  et  $a_{equi}$



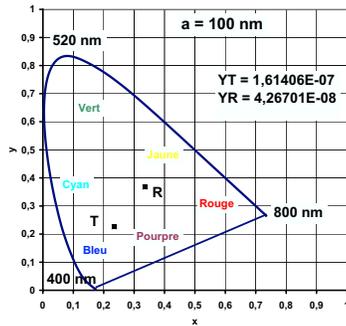
(g) Sphère substrat + m7 avec  $\sum_i e_i = a$



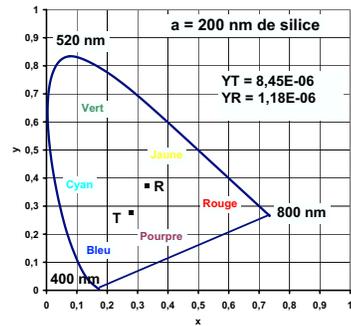
(h) Sphère substrat + m52bm5 avec  $\sum_i e_i = a$

FIG. 11.5 – Étude spectrale du flux intégré dans le demi-espace réfléchi (R) et dans le demi-espace transmis (T), pour des sphères multicouches.

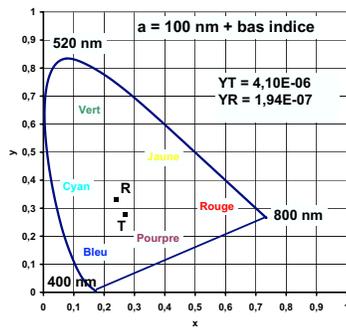
11.1. SPHÈRES DE SILICE DE RAYON 100 NM



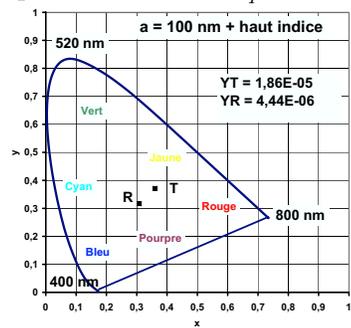
(a) Sphère substrat de silice  $a = 100$  nm



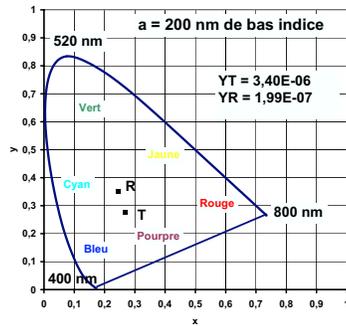
(b) Sphère de silice  $a_{equi} = 200$  nm



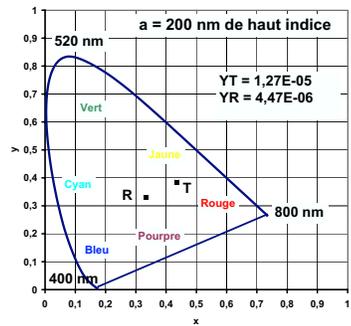
(c) Sphère substrat + b avec  $e_b = a$



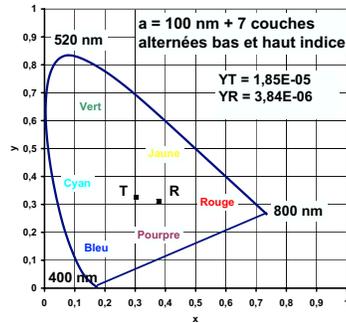
(d) Sphère substrat + h avec  $e_h = a$



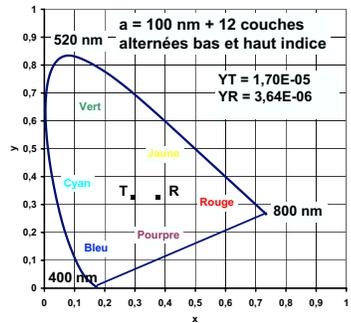
(e) Sphère avec  $n_b = 1,33$  et  $a_{equi}$



(f) Sphère avec  $n_h = 2,25$  et  $a_{equi}$



(g) Sphère substrat + m7 avec  $\sum_i e_i = a$



(h) Sphère substrat + m52bm5 avec  $\sum_i e_i = a$

FIG. 11.6 – Diagramme chromatique *CIEXYZ* du flux intégré dans le demi-espace réfléchi (R) et dans le demi-espace transmis (T), pour des sphères multicouches.

## 11.2 Sphères de silice de rayon 500 nm

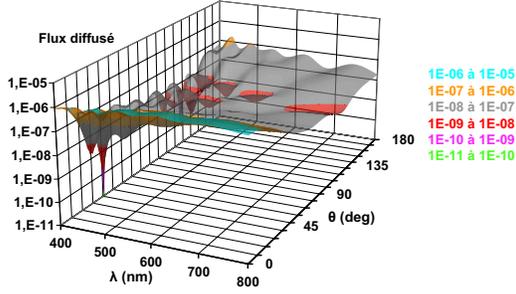
Pour compléter notre étude, nous étudions maintenant l'effet de couches minces déposées sur une sphère cinq fois plus grosse, dont le rayon est  $a = 500$  nm.

Nous comparons en figure 11.7 les résultats d'une sphère substrat de silice non traitée de rayon 500 nm **(a)**, d'une sphère de silice non traitée de rayon équivalent  $1 \mu\text{m}$  **(b)**, de la sphère substrat recouverte d'une couche bas indice ( $n_b = 1,33$ ) **(c)**, de la sphère substrat recouverte d'une couche haut indice ( $n_h = 2,25$ ) **(d)**, d'une sphère bas indice de rayon équivalent  $1 \mu\text{m}$  **(e)**, d'une sphère haut indice de rayon équivalent  $1 \mu\text{m}$  **(f)**, de la sphère substrat recouverte d'une alternance bas et haut indice à sept couches **(g)**, et de la sphère substrat recouverte d'un empilement constitué de deux couches bas indice entourées d'une alternance bas et haut indice à cinq couches **(h)**. L'étude pour chacun de ces cas est présentée dans les cinq pages suivantes.

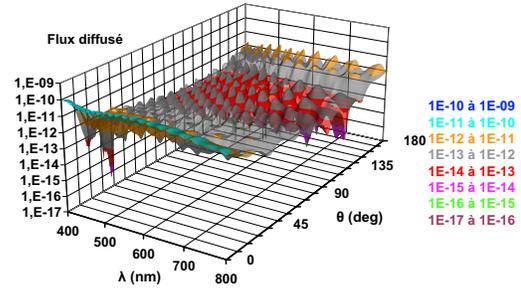
Sur la figure 11.7, les flux diffusés spectralement et angulairement ont une réponse plus "chahuté" que précédemment. Cependant, les profils des matériaux bas indice ont des oscillations moins marquées. Nous observons en outre des pics de résonance pour les matériaux haut indice et pour les multicouches. Ces derniers ont une variation spectrale et angulaire très rapide qui moyenne le résultat et laisse percevoir seulement des pics de résonances.

Ensuite, quand nous étudions la réponse colorimétrique sur la figure 11.8, et la luminance visuelle sur la figure 11.9, nous constatons que la trajectoire est colorée, mais toujours située autour de la teinte blanche, et que la luminosité est plus importante dans l'espace transmis que dans l'espace réfléchi. Nous avons cependant un maximum proche de  $180^\circ$ .

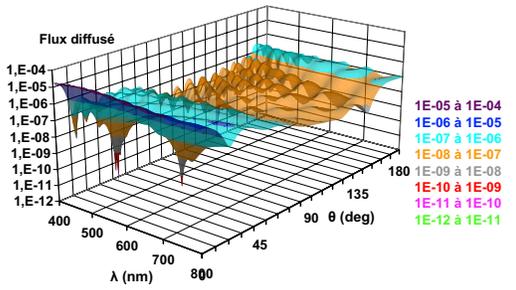
Nous retrouvons ces résultats quand nous étudions les réponses spectrales et colorimétriques du flux diffusé dans le demi-espace réfléchi R, et, dans le demi-espace transmis T (voir figure 11.10 et 11.11). Les résultats spectraux sont moins structurés mais quasi constants. Les réponses colorimétriques sont dans la teinte blanche, proche des valeurs  $x = 1/3$  et  $y = 1/3$ .



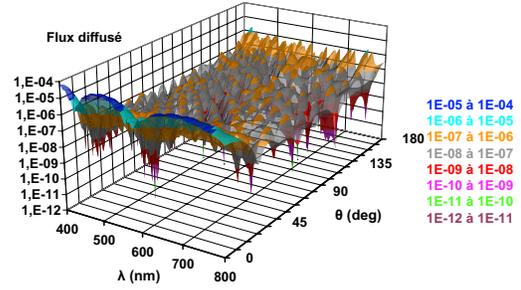
(a) Sphère substrat de silice  $a = 500$  nm



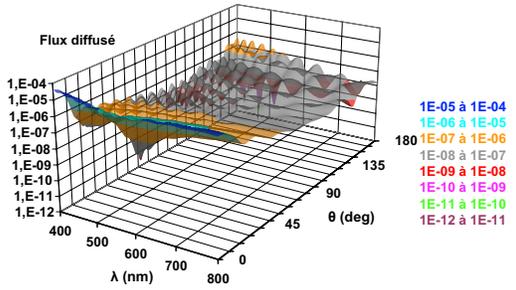
(b) Sphère de silice  $a_{equi} = 1$  μm



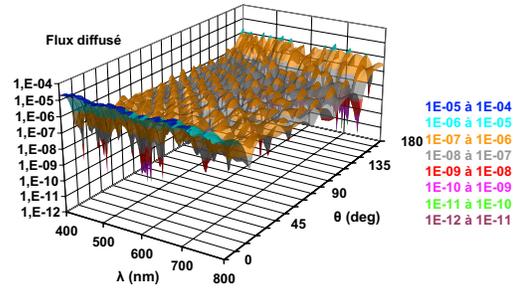
(c) Sphère substrat + b avec  $e_b = a$



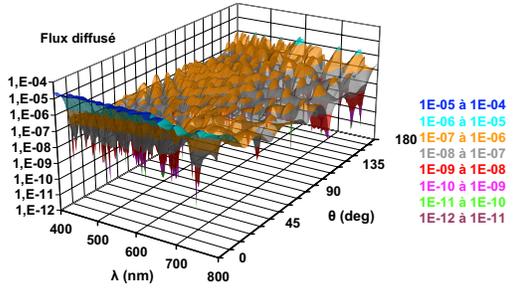
(d) Sphère substrat + h avec  $e_h = a$



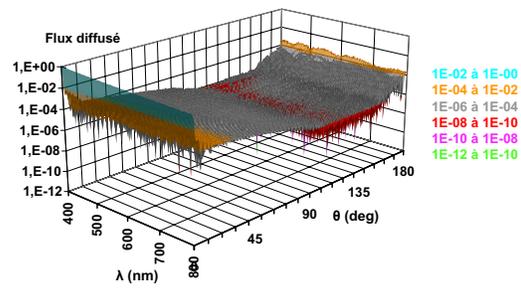
(e) Sphère avec  $n_b = 1,33$  et  $a_{equi}$



(f) Sphère avec  $n_h = 2,25$  et  $a_{equi}$

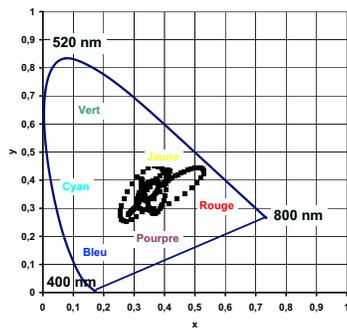


(g) Sphère substrat + m7 avec  $\sum_i e_i = a$

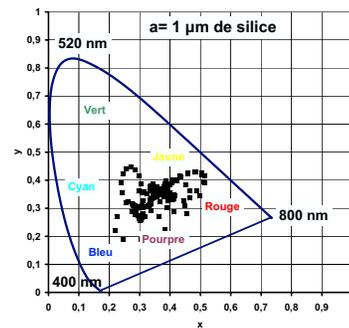


(h) Sphère substrat + m52bm5 avec  $\sum_i e_i = a$

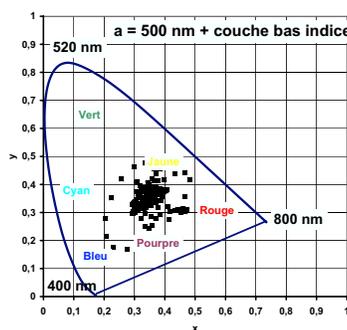
FIG. 11.7 – Étude angulaire et spectrale du flux diffusé pour des sphères multicouches.



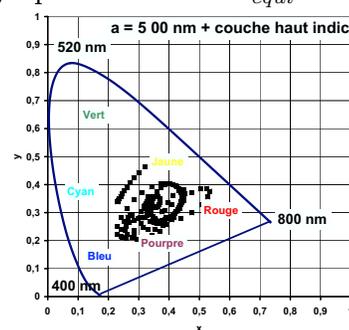
(a) Sphère substrat de silice  $a = 500 \text{ nm}$



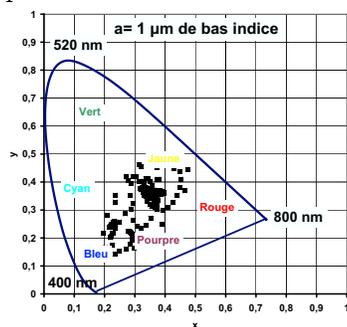
(b) Sphère de silice  $a_{\text{equi}} = 1 \mu\text{m}$



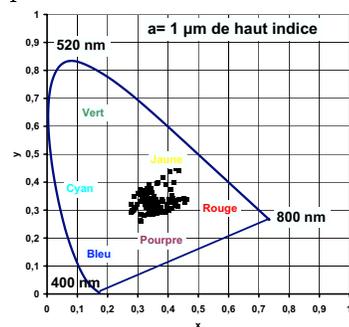
(c) Sphère substrat + b avec  $e_b = a$



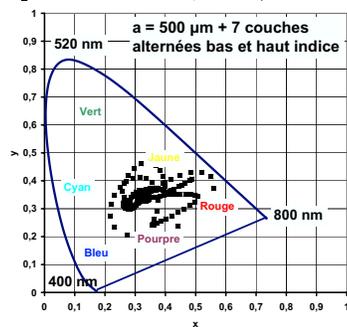
(d) Sphère substrat + h avec  $e_h = a$



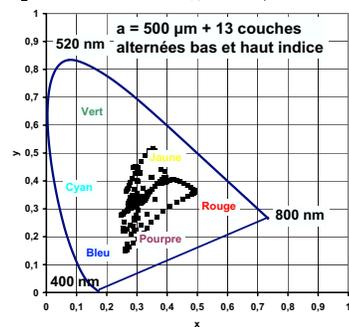
(e) Sphère avec  $n_b = 1,33$  et  $a_{\text{equi}}$



(f) Sphère avec  $n_h = 2,25$  et  $a_{\text{equi}}$



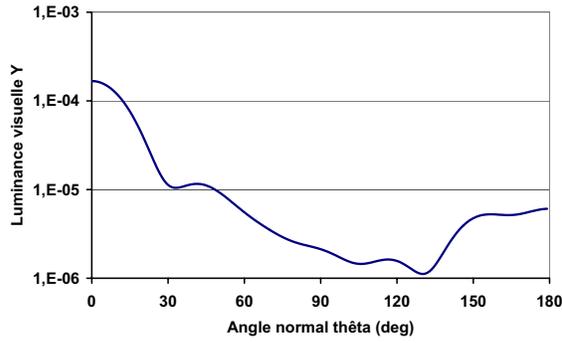
(g) Sphère substrat + m7 avec  $\sum_i e_i = a$



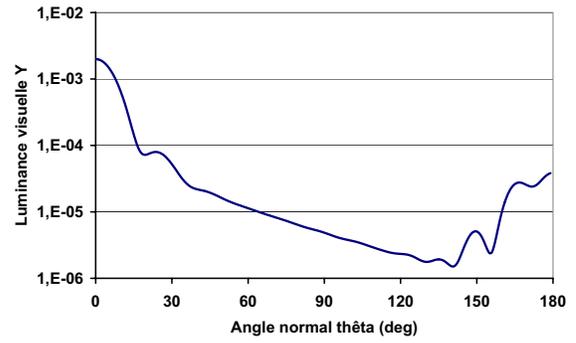
(h) Sphère substrat + m52bm5 avec  $\sum_i e_i = a$

FIG. 11.8 – Étude colorimétrique en fonction de l'angle de diffusion  $\theta$ , pour des sphères multicouches.

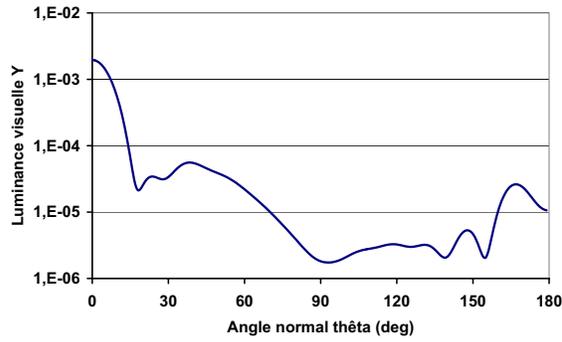
11.2. SPHÈRES DE SILICE DE RAYON 500 NM



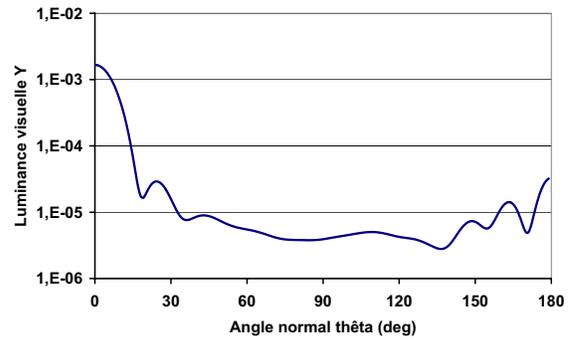
(a) Sphère substrat de silice  $a = 500$  nm



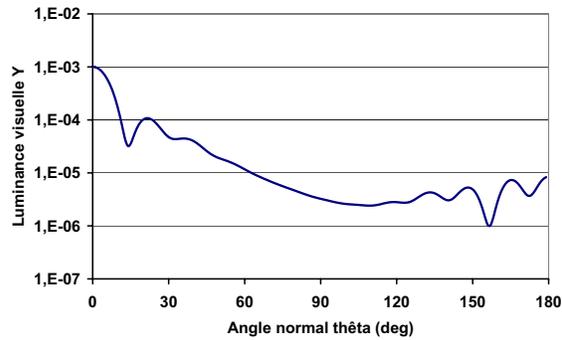
(b) Sphère de silice  $a_{equi} = 1$   $\mu$ m



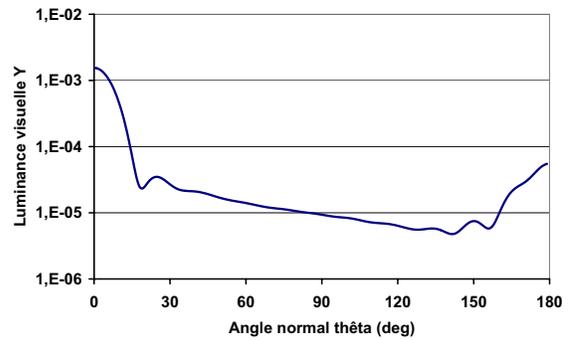
(c) Sphère substrat + b avec  $e_b = a$



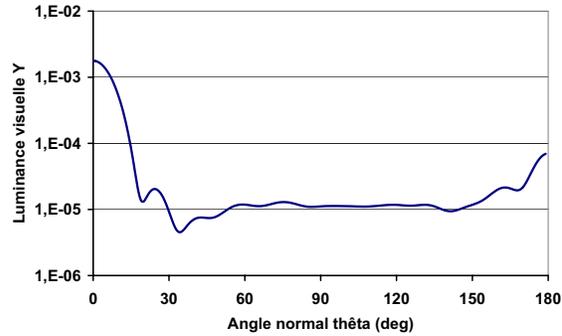
(d) Sphère substrat + h avec  $e_h = a$



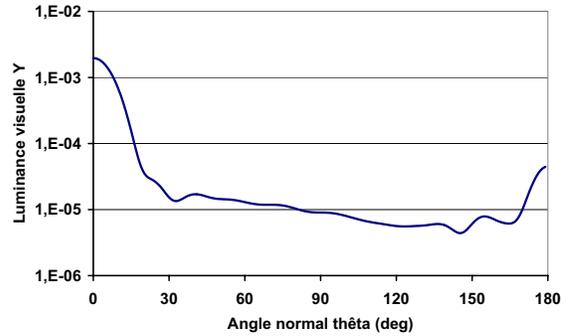
(e) Sphère avec  $n_b = 1,33$  et  $a_{equi}$



(f) Sphère avec  $n_h = 2,25$  et  $a_{equi}$

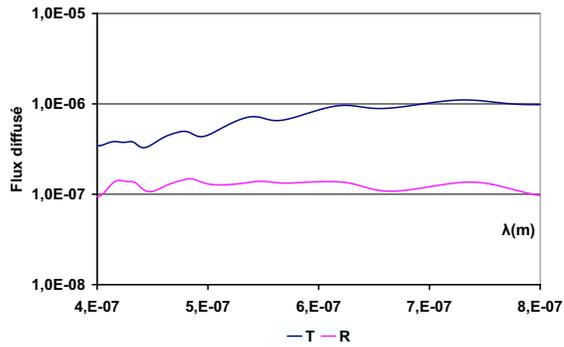


(g) Sphère substrat + m7 avec  $\sum_i e_i = a$

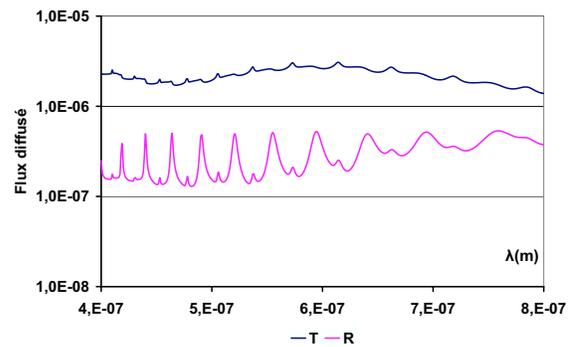


(h) Sphère substrat + m52bm5 avec  $\sum_i e_i = a$

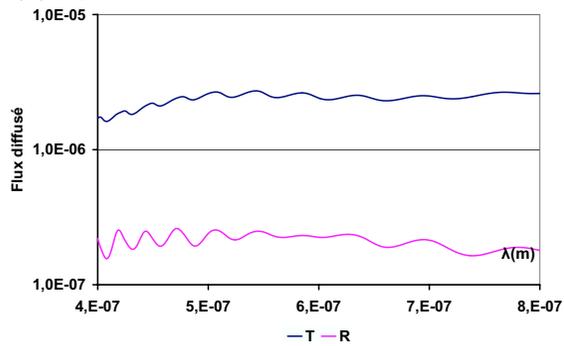
FIG. 11.9 – Étude de la luminance visuelle en fonction de  $\theta$ , pour des sphères multicouches.



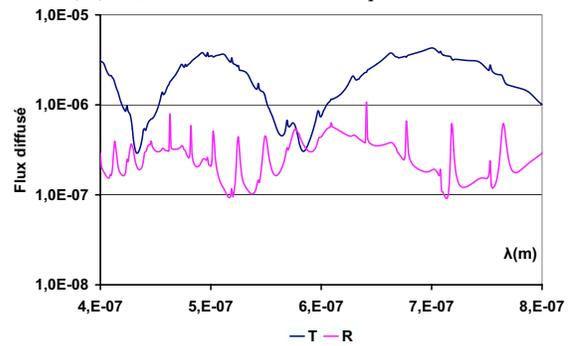
(a) Sphère substrat de silice  $a = 500$  nm



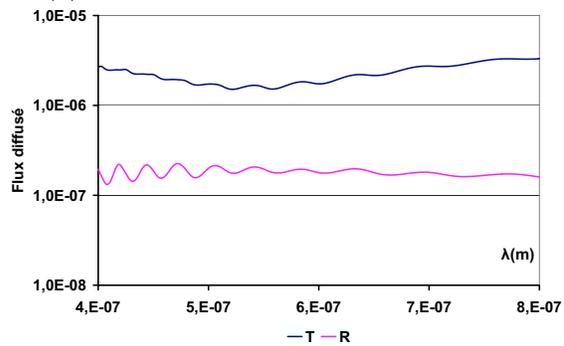
(b) Sphère de silice  $a_{equi} = 1 \mu m$



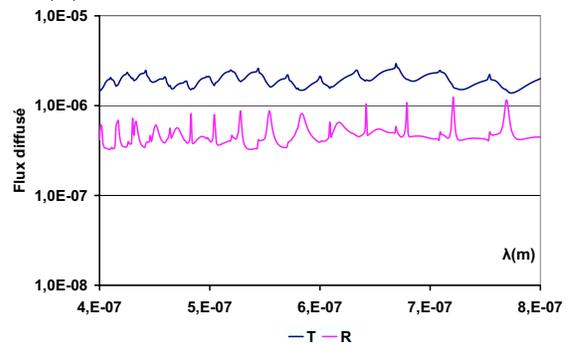
(c) Sphère substrat + b avec  $e_b = a$



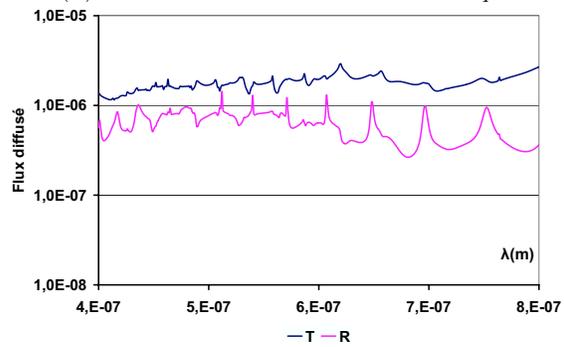
(d) Sphère substrat + h avec  $e_h = a$



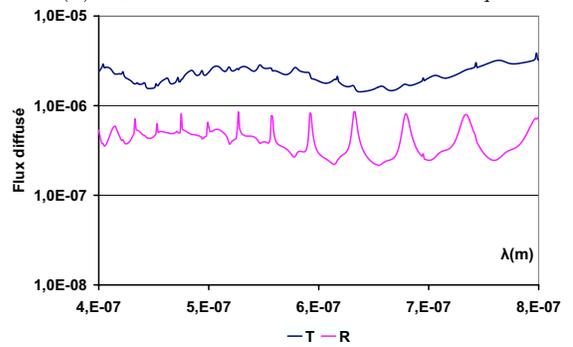
(e) Sphère avec  $n_b = 1,33$  et  $a_{equi}$



(f) Sphère avec  $n_h = 2,25$  et  $a_{equi}$



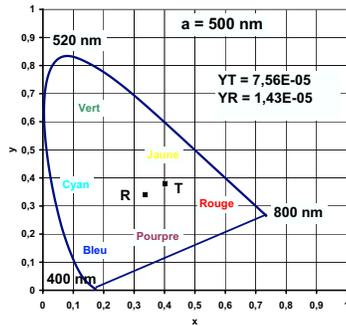
(g) Sphère substrat + m7 avec  $\sum_i e_i = a$



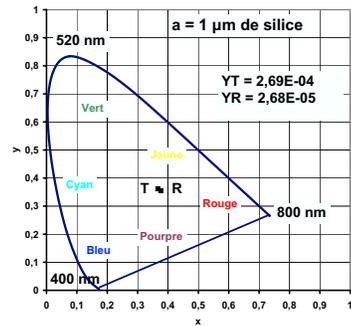
(h) Sphère substrat + m52bm5 avec  $\sum_i e_i = a$

FIG. 11.10 – Étude spectrale dans le demi-espace réfléchi (R) et dans le demi-espace transmis (T), pour des sphères multicouches.

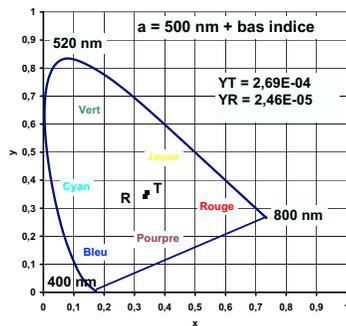
11.2. SPHÈRES DE SILICE DE RAYON 500 NM



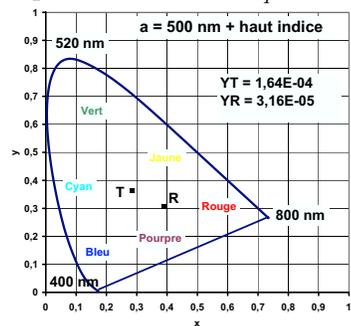
(a) Sphère substrat de silice  $a = 500 \text{ nm}$



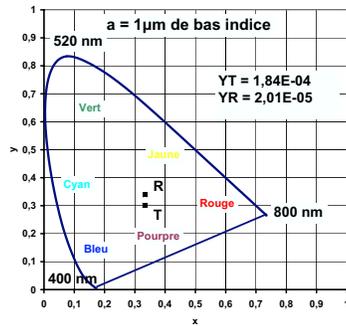
(b) Sphère de silice  $a_{\text{equi}} = 1 \mu\text{m}$



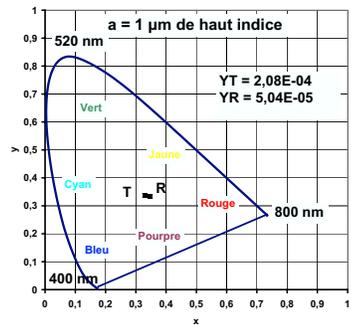
(c) Sphère substrat + b avec  $e_b = a$



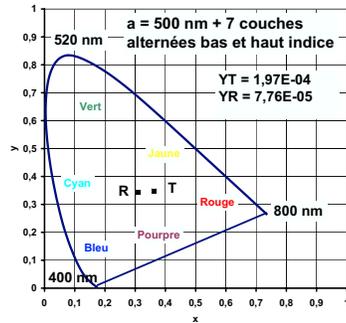
(d) Sphère substrat + h avec  $e_h = a$



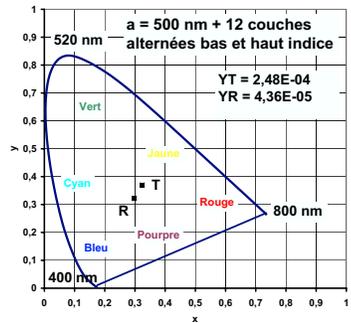
(e) Sphère avec  $n_b = 1,33$  et  $a_{\text{equi}}$



(f) Sphère avec  $n_h = 2,25$  et  $a_{\text{equi}}$



(g) Sphère substrat + m7 avec  $\sum_i e_i = a$



(h) Sphère substrat + m52bm5 avec  $\sum_i e_i = a$

FIG. 11.11 – Diagramme chromatique  $CIEXYZ$  du flux intégré dans le demi-espace réfléchi (R) et dans le demi-espace transmis (T), pour des sphères multicouches.



# Chapitre 12

## Le cas des sphères métalliques

Nous avons voulu également traiter le cas des sphères métalliques, afin que les futurs doctorants et chercheurs puissent trouver dans ce manuscrit une étude numérique complète. Toutefois, en raison des performances du code de calcul, nous devons ici nous limiter à des rayons de sphère métallique n'excédant pas le micromètre. Au delà de cette valeur, des problèmes de convergence se posent quant aux fonctions de Bessel avec argument complexe élevé. Nous étudions donc ici la réponse colorimétrique de sphère d'aluminium de rayons 1 nm, 10 nm, 100 nm, 500 nm et 1  $\mu\text{m}$ . L'indice de l'aluminium vaut  $n_{Al} = 1,4 + 7i$  à  $\lambda = 633$  nm.

### 12.1 Sphère de type substrat (aluminium)

#### 12.1.1 Sphère d'aluminium de rayon $a = 1$ nm

Quand nous étudions le flux diffusé d'une petite sphère d'aluminium, nous constatons que nous avons les mêmes propriétés que pour le flux diffusé d'une sphère diélectrique (figure 12.1).

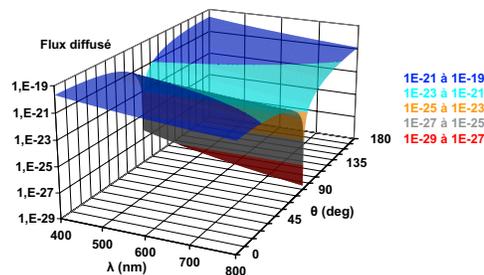


FIG. 12.1 – Flux diffusé d'une sphère d'aluminium de rayon  $a = 1$  nm en fonction de  $\lambda$  et de  $\theta$ .

Nous avons les mêmes niveaux de flux dans le demi-espace réfléchi et dans le demi-espace transmis (voir figure 12.2). En outre, la teinte en réflexion (R) ou en

transmission (T) est bleue. Le flux diffusé total est donc aussi bleu, comme dans le cas d'un dipôle. Il en est de même pour chaque angle de diffusion. Cependant le niveau est supérieur à une sphère de silice de rayon équivalent (voir figure 10.3). Nous avons donc bien un effet "miroir" caractéristique de l'aluminium.

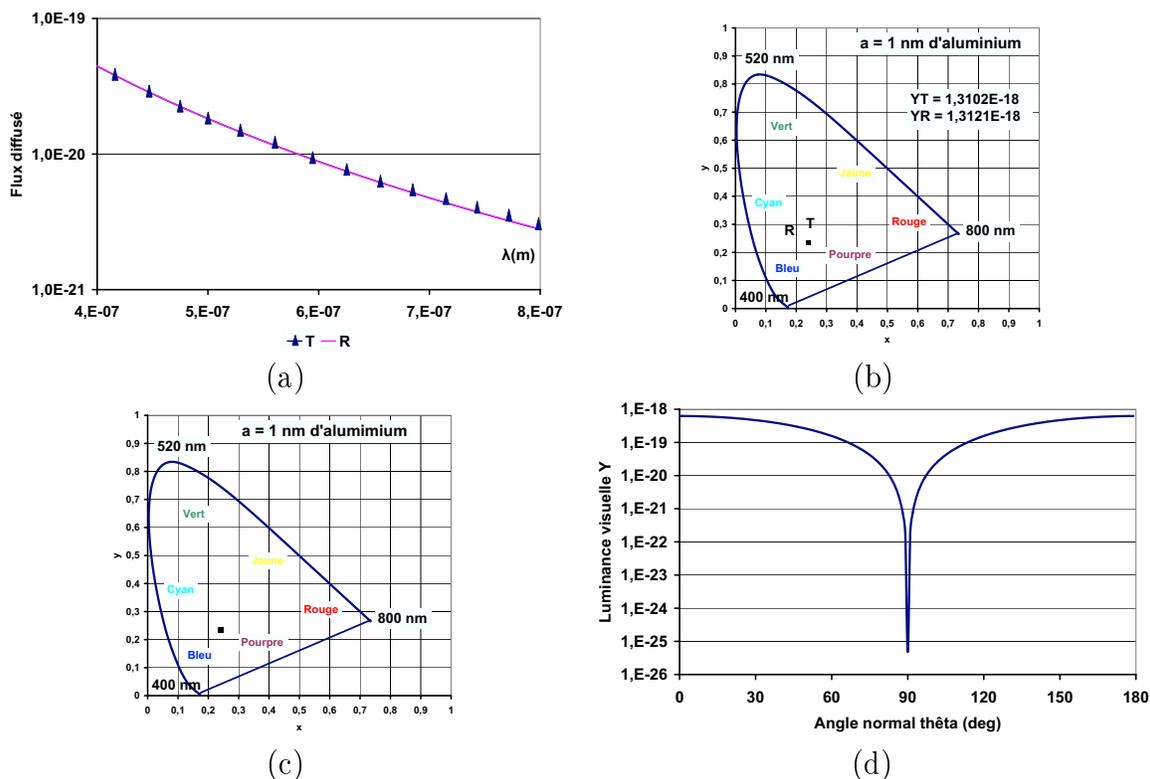


FIG. 12.2 – Sphère d'aluminium de rayon  $a = 1$  nm. (a) Réponse spectrale du flux diffusé dans le demi-espace réfléchi R, et dans le demi-espace transmis T. (b) Diagramme colorimétrique CIEXYZ. R et T sont superposés. (c) Diagramme colorimétrique CIEXYZ en fonction du paramètre  $\theta$ . La couleur ne dépend pas de l'angle d'observation. (d) Réponse angulaire de la luminance visuelle Y.

### 12.1.2 Sphère d'aluminium de rayon $a = 10$ nm

Pour une sphère de rayon 10 nm les résultats diffèrent quelque peu. La réponse angulaire et spectrale a quasiment le même profil (figure 12.3). Cependant le flux diffusé dans le demi-espace réfléchi devient légèrement supérieur à celui dans le demi-espace transmis (figure 12.4 (a)). Cela a peu d'incidence sur la couleur qui reste bleue en R et T (figure 12.4 (b)). La réponse colorimétrique angulaire, détaillée sur la figure 12.4 (c), montre qu'en fonction de l'angle nous avons soit une teinte bleutée soit une teinte blanche. L'étude de la luminance visuelle de la figure 12.4 (d) signale que l'œil perçoit le flux diffusé réfléchi de la même manière que le flux diffusé transmis. Les effets du matériau métallique sont ici manifestes car, rappelons-le, pour la sphère de silice de rayon équivalent, la couleur est essentiellement bleue (figure 10.5).

12.1. SPHÈRE DE TYPE SUBSTRAT (ALUMINIUM)

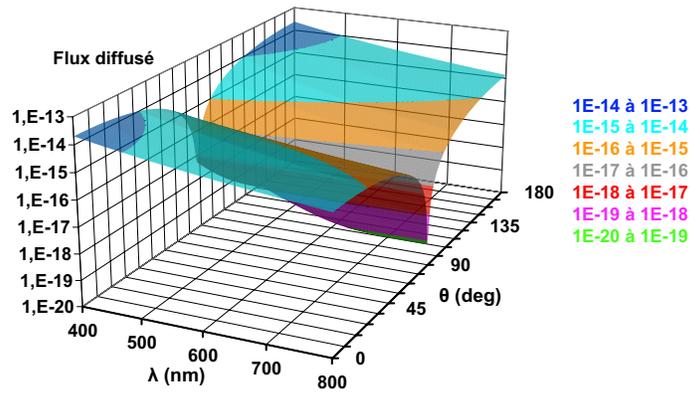


FIG. 12.3 – Flux diffusé d’une sphère d’aluminium de rayon  $a = 10$  nm en fonction de  $\lambda$  et de  $\theta$ .

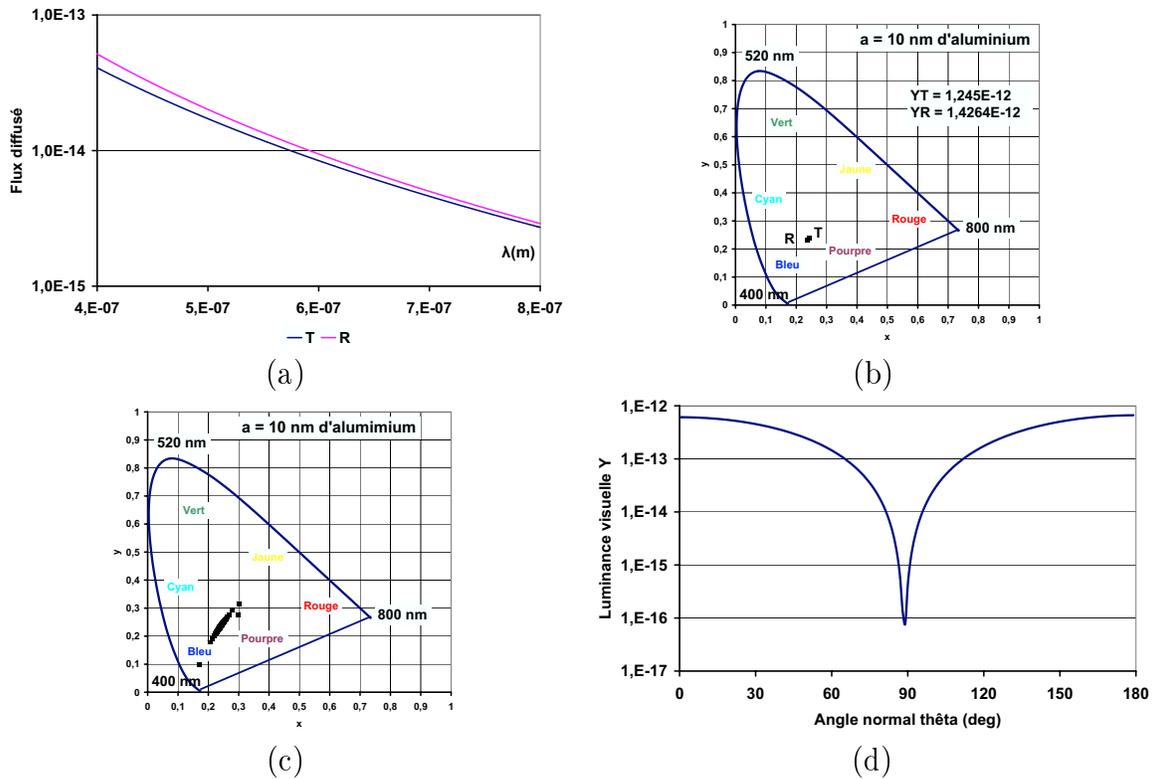


FIG. 12.4 – Sphère d’aluminium de rayon  $a = 10$  nm. (a) Réponse spectrale du flux diffusé dans le demi-espace réfléchi R, et dans le demi-espace transmis T. (b) Diagramme colorimétrique CIEXYZ. (c) Diagramme colorimétrique CIEXYZ en fonction du paramètre  $\theta$ . (d) Réponse angulaire de la luminance visuelle Y.

### 12.1.3 Sphère d'aluminium de rayon $a = 100$ nm

Pour une sphère de rayon 100 nm (figure 12.5), la réponse angulaire et spectrale présente une dynamique plus faible. Le flux diffusé autour de  $90^\circ$  est inférieur de trois décades au flux maximum. La réponse spectrale dans le demi-espace réfléchi ou transmis (figure 12.6 (a)) montre que nous commençons à obtenir des profils différents en R et T. La couleur de R et de T est cependant centrée au voisinage de la teinte blanche (figure 12.6 (b)). En fonction de l'angle, en revanche, nous allons du bleu au jaune (figure 12.7 (a) et (b)) et nous avons donc un véritable effet coloré.

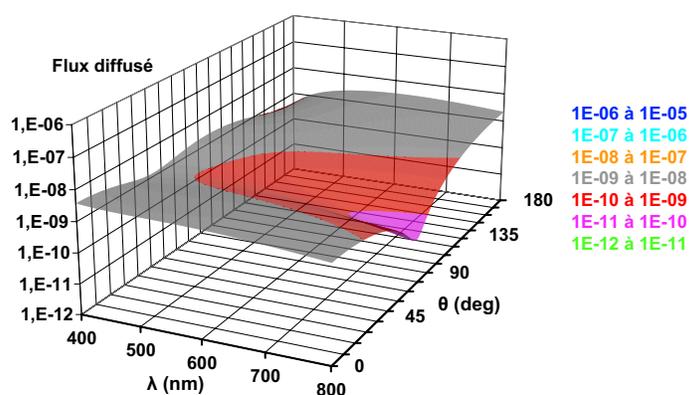


FIG. 12.5 – Flux diffusé d'une sphère d'aluminium de rayon  $a = 100$  nm en fonction de  $\lambda$  et de  $\theta$ .

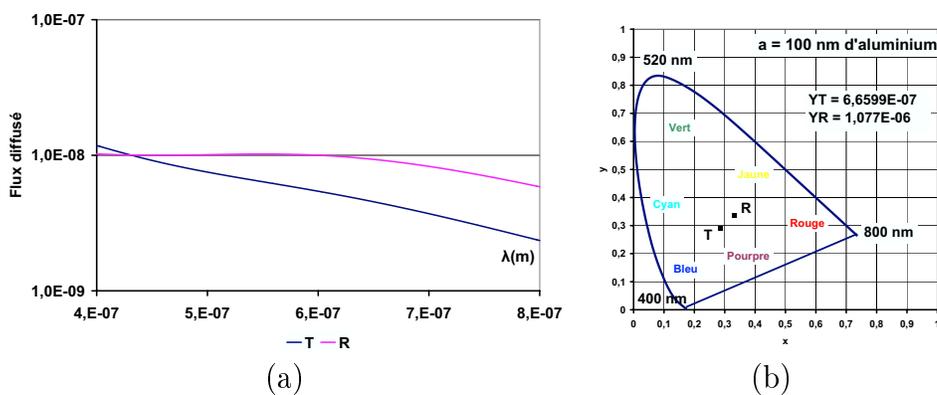


FIG. 12.6 – Sphère d'aluminium de rayon  $a = 100$  nm. (a) Réponse spectrale du flux diffusé dans le demi-espace réfléchi R, et dans le demi-espace transmis T. (b) Diagramme colorimétrique CIEXYZ.

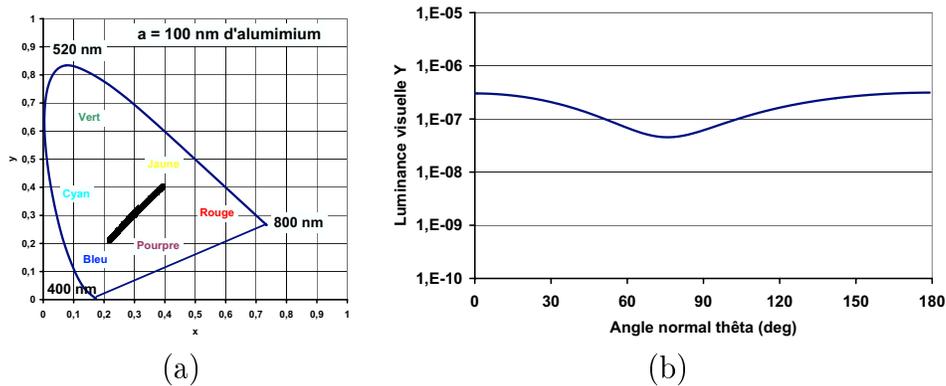


FIG. 12.7 – Sphère d’aluminium de rayon  $a = 100$  nm. (a) Diagramme colorimétrique CIEXYZ en fonction du paramètre  $\theta$ . (b) Réponse angulaire de la luminance visuelle  $Y$ .

### 12.1.4 Sphère d’aluminium de rayon $a = 500$ nm

Pour une sphère cinq fois plus grosse, le flux diffusé devient plus “chaotique” (figure 12.8). Nous avons quelques oscillations à faible dynamique avec un niveau plus important pour le flux dans le demi-espace transmis. Les couleurs sont identiques pour la diffusion en réflexion ou transmission. Elles sont caractéristiques une teinte blanche (figures 12.10 (a) et (b)). Par contre en fonction de l’angle  $\theta$ , les effets colorés sont évidents (figures 12.10 (c) et (d)).

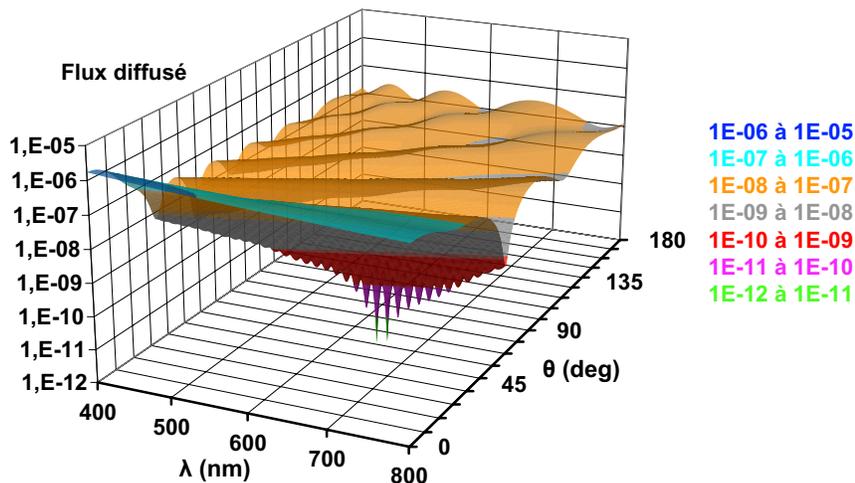


FIG. 12.8 – Flux diffusé d’une sphère d’aluminium de rayon  $a = 500$  nm en fonction de  $\lambda$  et de  $\theta$ .

On peut remarquer en figure 12.8, la présence de nombreuses oscillations angulaires avec une forte dynamique, dont nous avons extrait une section en figure 12.9 pour plus de lisibilité.

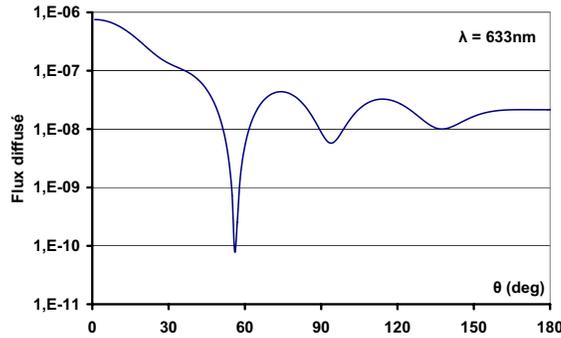


FIG. 12.9 – Flux diffusé d’une sphère d’aluminium de rayon  $a = 500 \text{ nm}$  à  $\lambda = 633 \text{ nm}$  en fonction  $\theta$ .

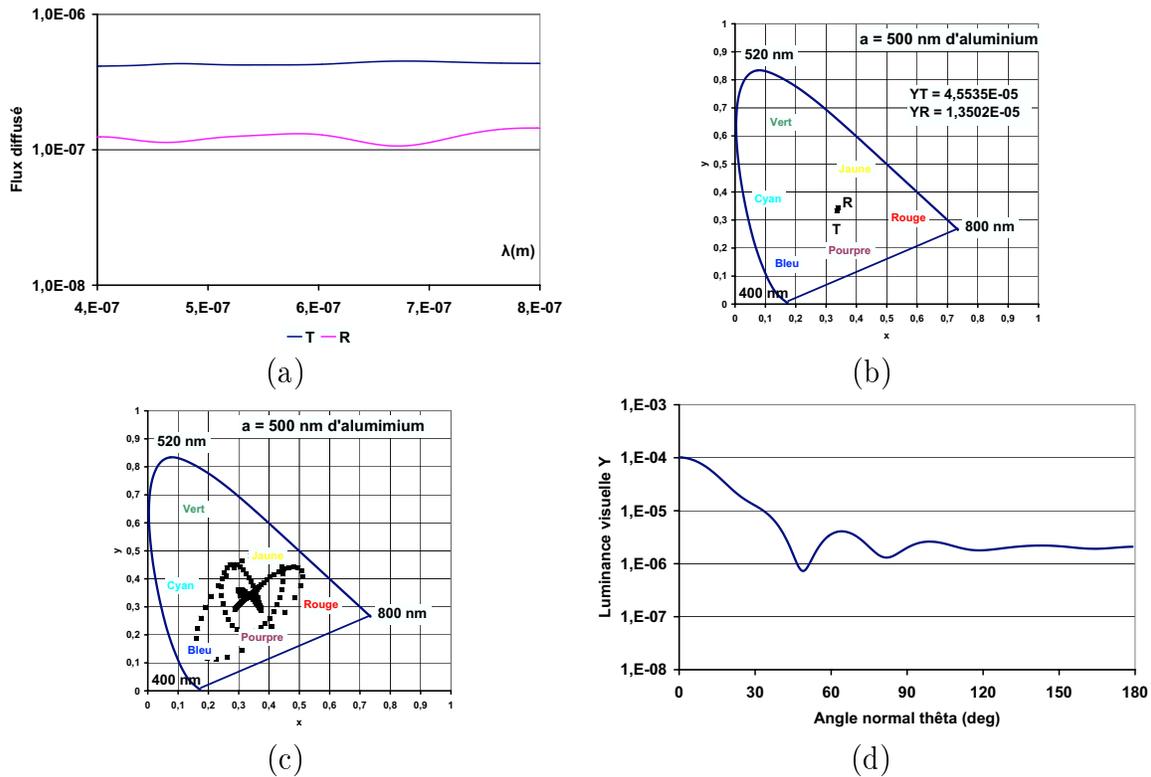


FIG. 12.10 – Sphère d’aluminium de rayon  $a = 500 \text{ nm}$ . (a) Réponse spectrale du flux diffusé dans le demi-espace réfléchi R, et dans le demi-espace transmis T. (b) Diagramme colorimétrique CIEXYZ. (c) Diagramme colorimétrique CIEXYZ en fonction du paramètre  $\theta$ . (d) Réponse angulaire de la luminance visuelle Y.

### 12.1.5 Sphère d’aluminium de rayon $a = 1 \mu\text{m}$

Nous observons pour une sphère de rayon  $1 \mu\text{m}$ , au vu des figures 12.11 et 12.12 que nous avons sensiblement les mêmes résultats que pour la sphère de rayon  $500 \text{ nm}$ . La teinte de R et T est blanche, le flux diffusé T est supérieur au flux diffusé R.

## 12.1. SPHÈRE DE TYPE SUBSTRAT (ALUMINIUM)

Les effets angulaires sont moins marqués.

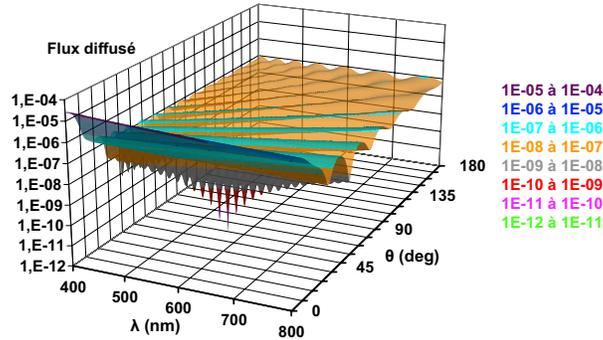


FIG. 12.11 – Flux diffusé d’une sphère d’aluminium de rayon  $a = 1 \mu\text{m}$  en fonction de  $\lambda$  et de  $\theta$ .

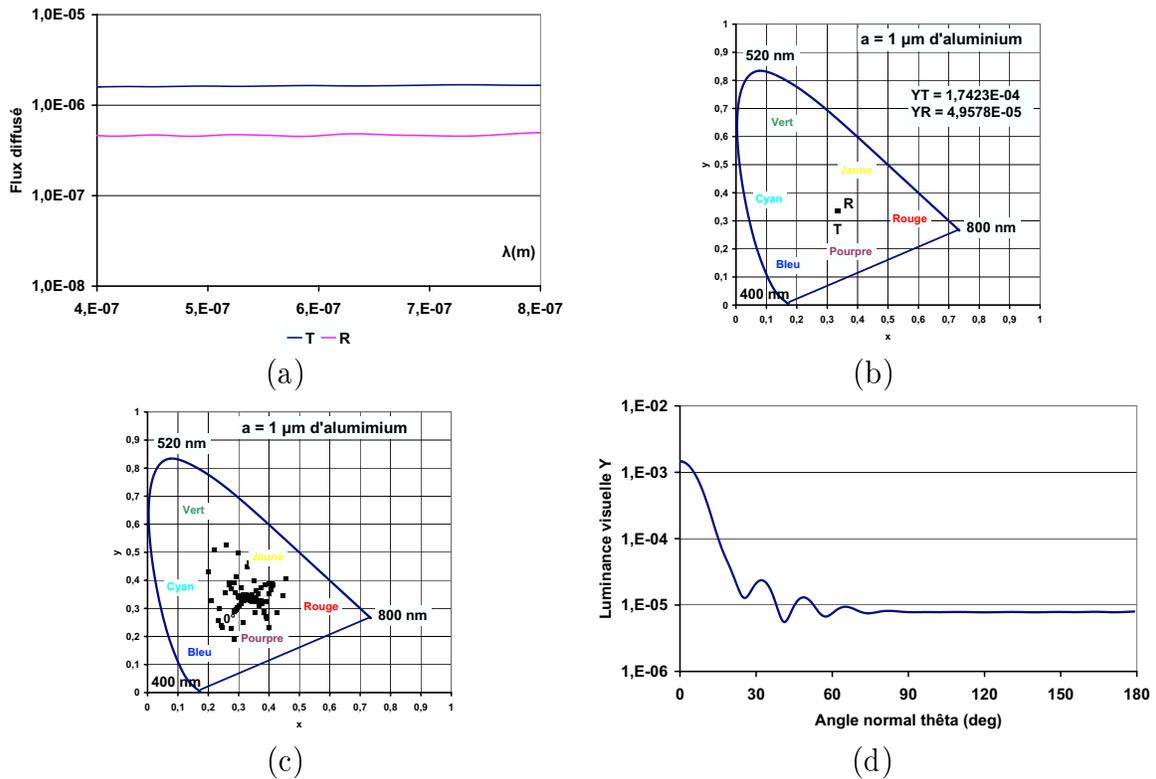


FIG. 12.12 – Sphère d’aluminium de rayon  $a = 1 \mu\text{m}$ . (a) Réponse spectrale du flux diffusé dans le demi-espace réfléchi R, et dans le demi-espace transmis T. (b) Diagramme colorimétrique CIEXYZ. (c) Diagramme colorimétrique CIEXYZ en fonction du paramètre  $\theta$ . (d) Réponse angulaire de la luminance visuelle Y.

## 12.2 Sphères métalliques recouvertes de structures diélectriques

Nous considérons ici des empilements dont l'épaisseur totale est égale au rayon de la sphère, soit  $\sum e_i = a$ . Différents empilements sont considérés et comparés à la sphère équivalente de rayon  $2a$ .

### 12.2.1 Sphères d'aluminium de rayon 100 nm

Nous étudions dans cette section l'effet de couches minces déposées sur une sphère métallique de rayon  $a = 100$  nm.

Nous comparons les résultats d'une sphère substrat d'aluminium recouverte d'une couche bas indice ( $n_b = 1,33$ ) **(a)**, de la sphère substrat recouverte d'une couche haut indice ( $n_h = 2,25$ ) **(b)**, de la sphère substrat recouverte d'une alternance bas et haut indice à sept couches **(c)**, et de la sphère équivalente de rayon  $a = 200$  nm d'aluminium **(d)**. L'étude pour chacun de ces cas est présentée dans les trois pages suivantes.

Sur la figure 12.13, nous constatons que le profil général de la sphère recouverte d'une couche bas indice, et celui de la sphère d'aluminium de rayon équivalent sont peu semblables, bien que de niveau équivalent. Pour la sphère recouverte de la couche h et du m7, nous avons à  $\theta$  donné de grandes dynamiques.

Ensuite, au vu de la figure 12.14, les réponses colorimétriques dépendent fortement de l'empilement. Pour une couche b, nous nous situons sur une droite du bleu au jaune, et pour une couche h nous sommes dans le blanc à  $0^\circ$  et dans le vert à  $180^\circ$ . Le miroir passe du blanc au rouge en passant par le bleu. Quant à la sphère équivalente, nous sommes à  $0^\circ$  pour revenir dans le blanc à  $180^\circ$  en passant par le bleu, le pourpre, le rouge et jaune. Les réponses colorimétriques sont donc très marquées. La luminance visuelle associée à chaque angle normal  $\theta$  (figure 12.15) montre que le flux diffusé dans le demi-espace transmis est supérieur au flux dans le demi-espace réfléchi, avec de larges oscillations d'au maximum deux décades de dynamique.

Enfin, la comparaison du flux intégré dans le demi-espace transmis et dans le demi-espace réfléchi nous donne une indication sur la couleur globale. Les réponses spectrales de la figure 12.16 montre que la réponse avec des couches haut indice est plus bruitée que la sphère équivalente et la sphère recouverte de la couche b. Les diagrammes colorimétriques de la figure 12.17 mettent en valeur l'importance des couches haut indice pour obtenir un effet de couleur différent pour R et pour T.

## 12.2. SPHÈRES MÉTALLIQUES RECOUVERTES DE DIÉLECTRIQUES

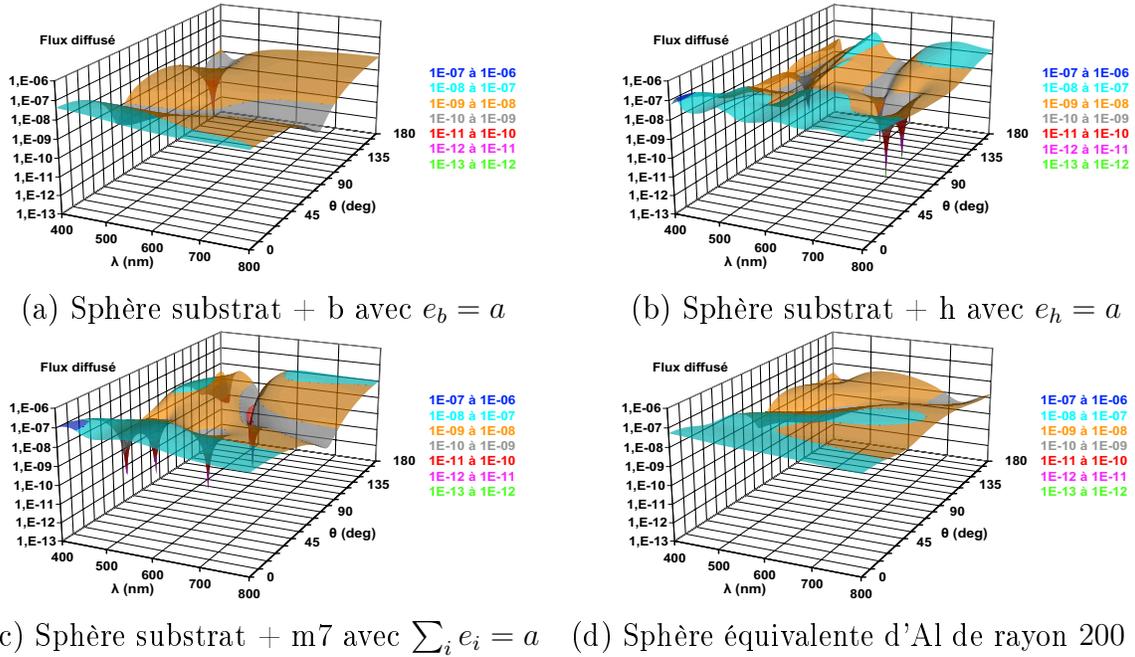


FIG. 12.13 – Étude angulaire et spectrale du flux diffusé par une sphère d'aluminium d'indice  $n_{Al} = 1,4 + 7i$  et de rayon  $a = 100$  nm, recouverte de structures diélectriques.

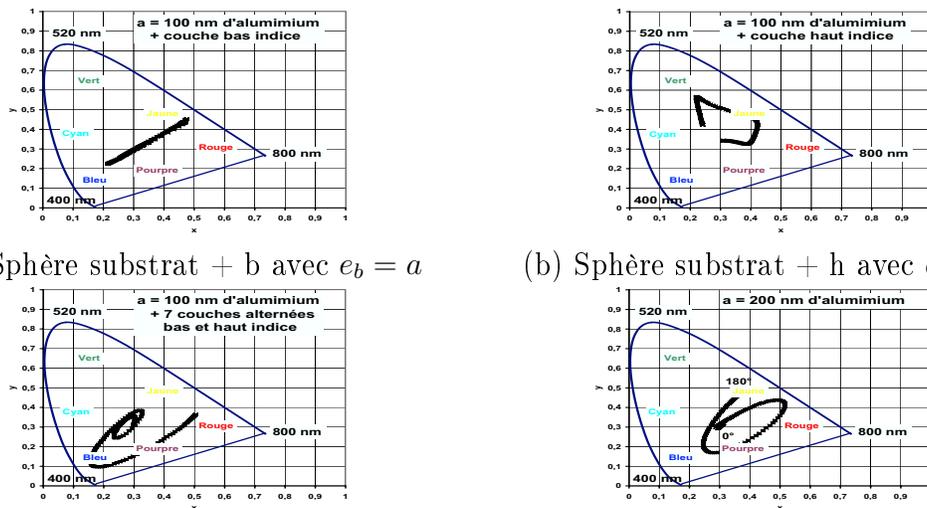


FIG. 12.14 – Étude colorimétrique en fonction de l'angle de diffusion  $\theta$  par une sphère d'aluminium d'indice  $n_{Al} = 1,4 + 7i$  et de rayon  $a = 100$  nm, recouverte de structures diélectriques.

CHAPITRE 12. LE CAS DES SPHÈRES MÉTALLIQUES

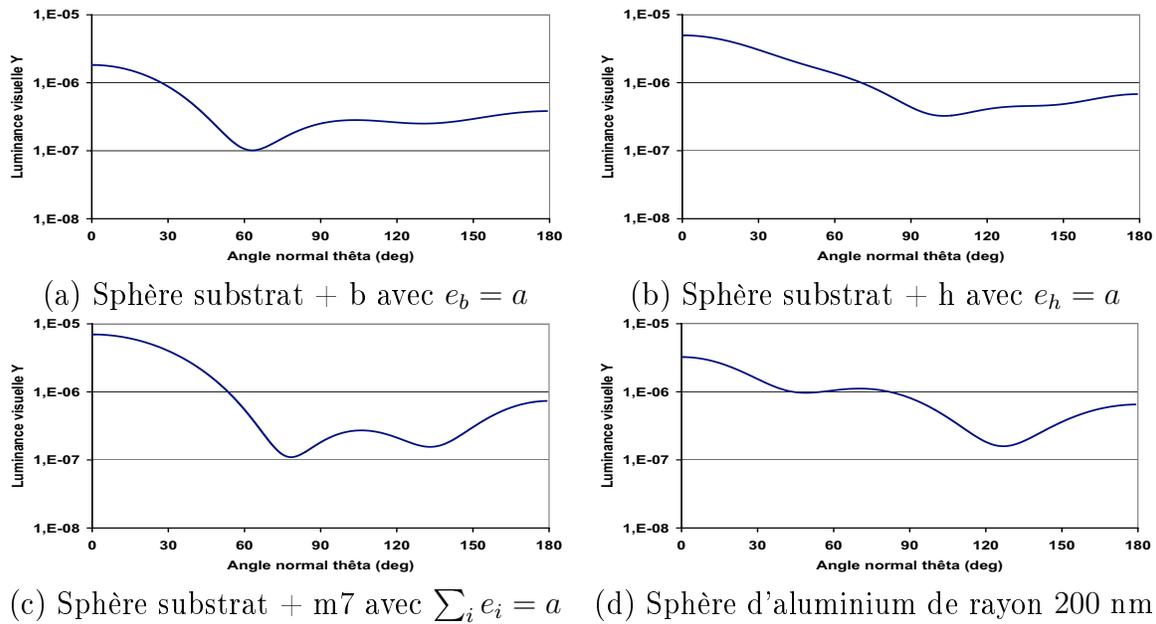


FIG. 12.15 – Étude de la luminance visuelle en fonction de  $\theta$ , par une sphère d'aluminium d'indice  $n_{Al} = 1,4 + 7i$  et de rayon  $a = 100$  nm, recouverte de structures diélectriques.

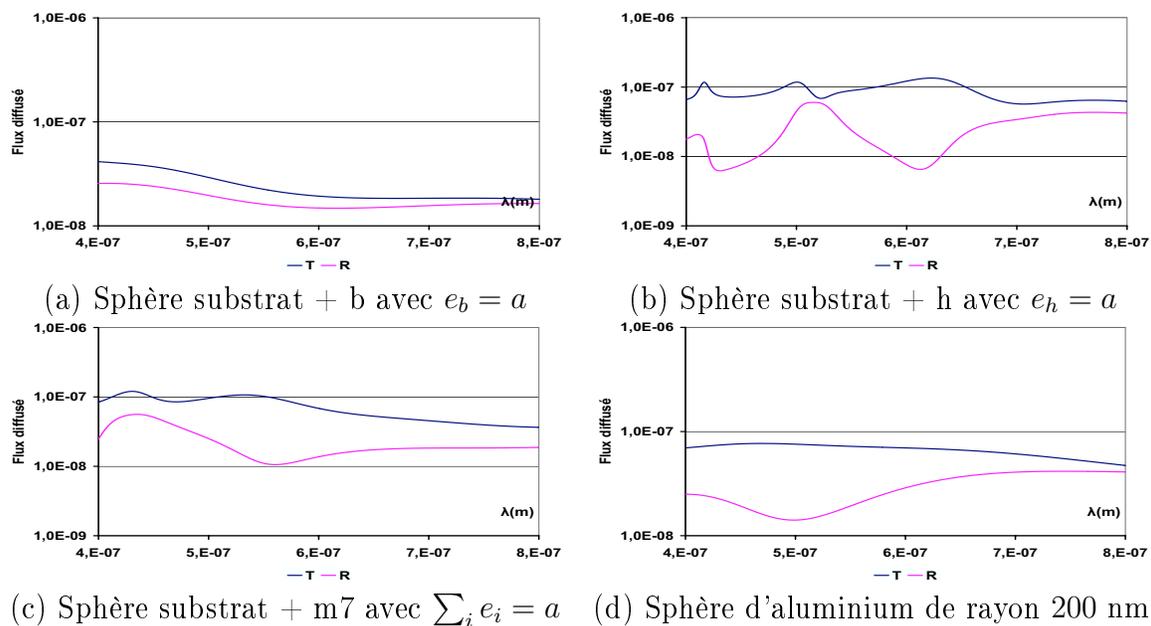
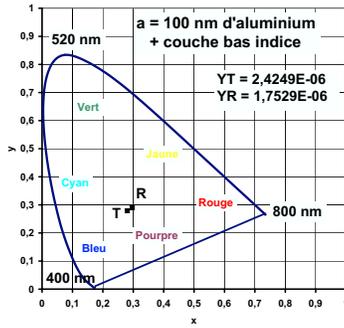
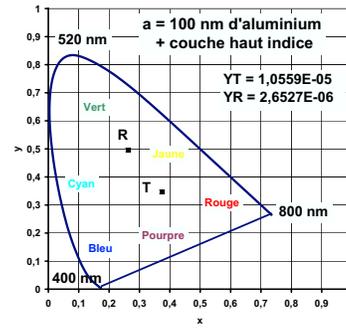


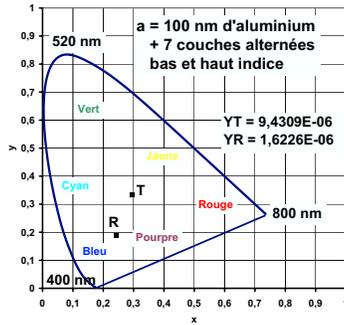
FIG. 12.16 – Étude spectrale dans le demi-espace réfléchi (R) et dans le demi-espace transmis (T), par une sphère d'aluminium d'indice  $n_{Al} = 1,4 + 7i$  et de rayon  $a = 100$  nm, recouverte de structures diélectriques.



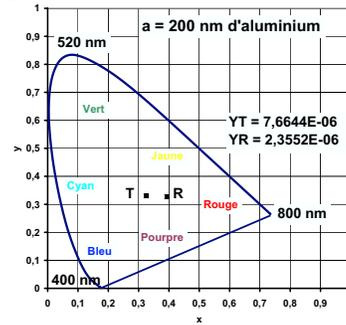
(a) Sphère substrat + b avec  $e_b = a$



(b) Sphère substrat + h avec  $e_h = a$



(c) Sphère substrat + m7 avec  $\sum_i e_i = a$



(d) Sphère d'aluminium de rayon 200 nm

FIG. 12.17 – Diagramme chromatique *CIEXYZ* du flux intégré dans le demi-espace réfléchi (R) et dans le demi-espace transmis (T), par une sphère d'aluminium d'indice  $n_{Al} = 1,4 + 7i$  et de rayon  $a = 100$  nm, recouverte de structures diélectriques.

### 12.2.2 Sphères de rayon $a = 500$ nm

Nous étudions dans cette section l'effet de couches minces déposées sur une sphère métallique de rayon  $a = 500$  nm.

Nous comparons les résultats d'une sphère substrat d'aluminium recouverte d'une couche bas indice ( $n_b = 1,33$ ) **(a)**, de la sphère substrat recouverte d'une couche haut indice ( $n_h = 2,25$ ) **(b)**, de la sphère substrat recouverte d'une alternance bas et haut indice à sept couches **(c)**, et de la sphère équivalente de rayon  $a = 1 \mu\text{m}$  d'aluminium **(d)**. L'étude pour chacun de ces cas est présentée dans les trois pages suivantes.

Tout d'abord, au vu de la réponse angulaire et spectrale de la figure 12.18, nous constatons que le niveau du flux dans la partie du transmis est supérieur aux autres domaines angulaires. Nous avons toujours les réponses les plus accidentées pour des revêtements possédant au minimum une couche haut indice.

Ensuite, l'étude colorimétrique montre une répartition en couleur assez complexe selon les angles de diffusion (figure 12.18). Associé à la luminance visuelle correspondante, seul le flux diffusé proche de  $0^\circ$  est maximum (figure 12.19).

Enfin, quand nous étudions le flux diffusé intégré dans les demi-espaces transmis et réfléchi, la réponse spectrale de T est toujours supérieure à celle de R (voir figure 12.21). Ce résultat était pressenti car la réponse angulaire et spectrale soulignait que le niveau du transmis était supérieur au réfléchi. Sur la figure 12.22 les teintes de R et T sont voisines et se situent dans le lieu des teintes blanches.

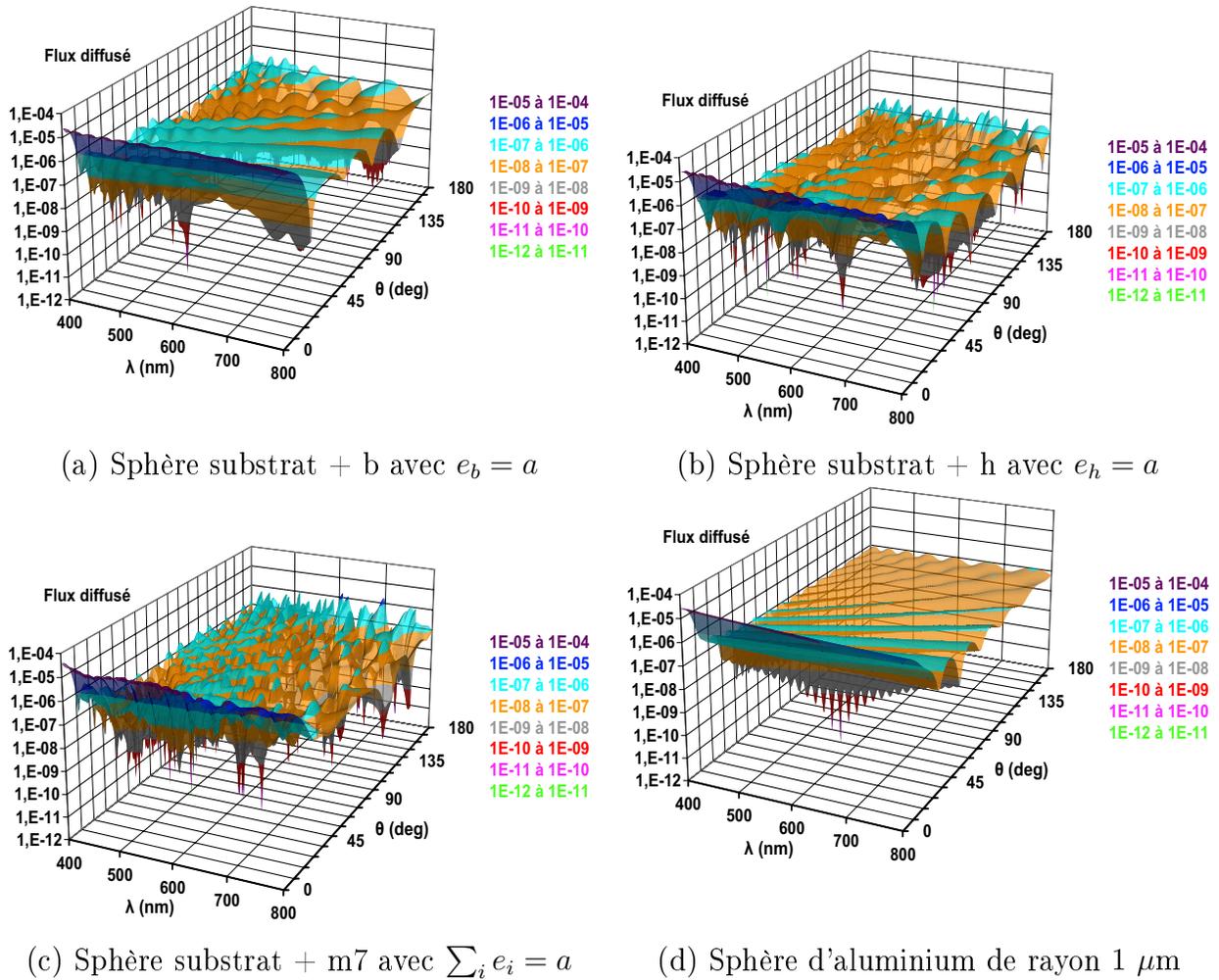
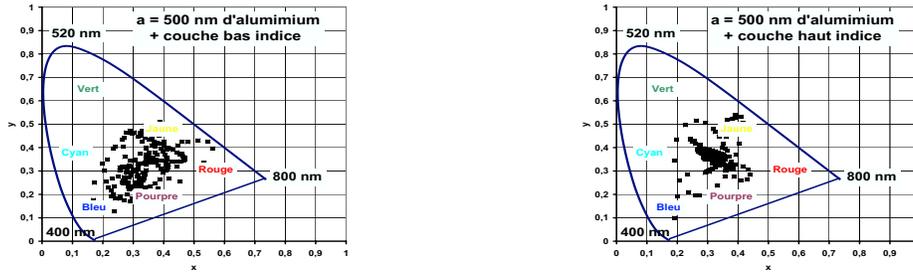


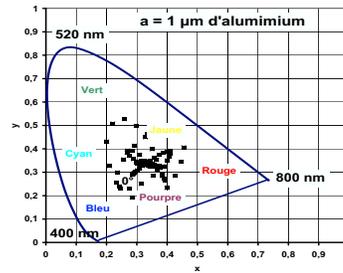
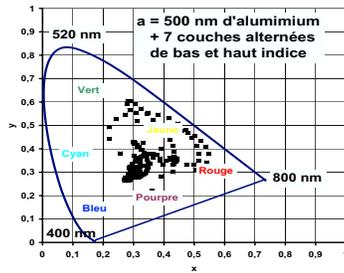
FIG. 12.18 – Étude angulaire et spectrale du flux diffusé, par une sphère d'aluminium d'indice  $n_{Al} = 1,4 + 7i$  et de rayon  $a = 500 \text{ nm}$ , recouverte de structures diélectriques.

12.2. SPHÈRES MÉTALLIQUES RECOUVERTES DE DIÉLECTRIQUES



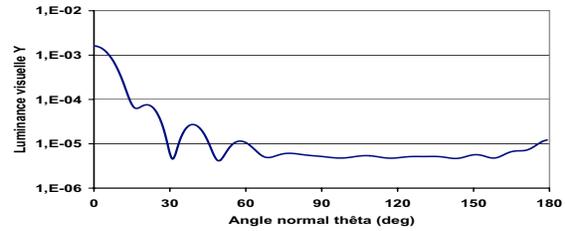
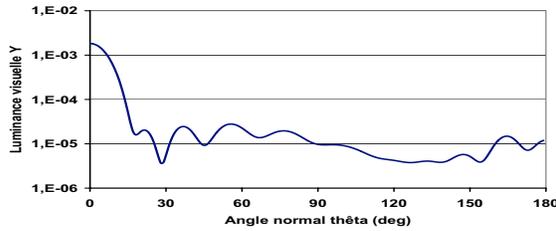
(a) Sphère substrat + b avec  $e_b = a$

(b) Sphère substrat + h avec  $e_h = a$



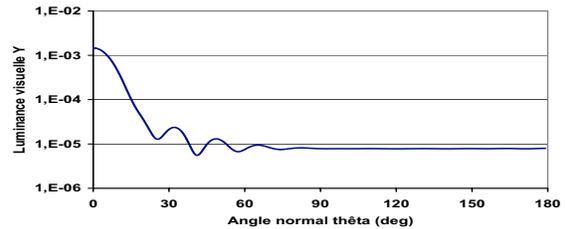
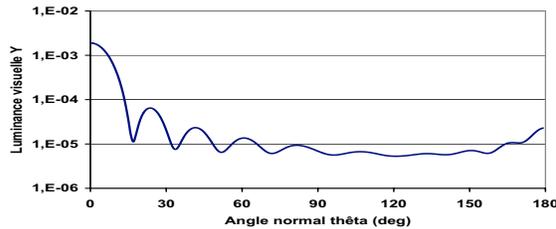
(c) Sphère substrat + m7 avec  $\sum_i e_i = a$  (d) Sphère d'aluminium de rayon  $1 \mu\text{m}$

FIG. 12.19 – Étude colorimétrique en fonction de l'angle de diffusion  $\theta$ , par une sphère d'aluminium d'indice  $n_{Al} = 1,4 + 7i$  et de rayon  $a = 500 \text{ nm}$ , recouverte de structures diélectriques.



(a) Sphère substrat + b avec  $e_b = a$

(b) Sphère substrat + h avec  $e_h = a$



(c) Sphère substrat + m7 avec  $\sum_i e_i = a$

(d) Sphère d'aluminium de rayon  $1 \mu\text{m}$

FIG. 12.20 – Étude de la luminance visuelle en fonction de  $\theta$ , par une sphère d'aluminium d'indice  $n_{Al} = 1,4 + 7i$  et de rayon  $a = 500 \text{ nm}$ , recouverte de structures diélectriques.

## CHAPITRE 12. LE CAS DES SPHÈRES MÉTALLIQUES

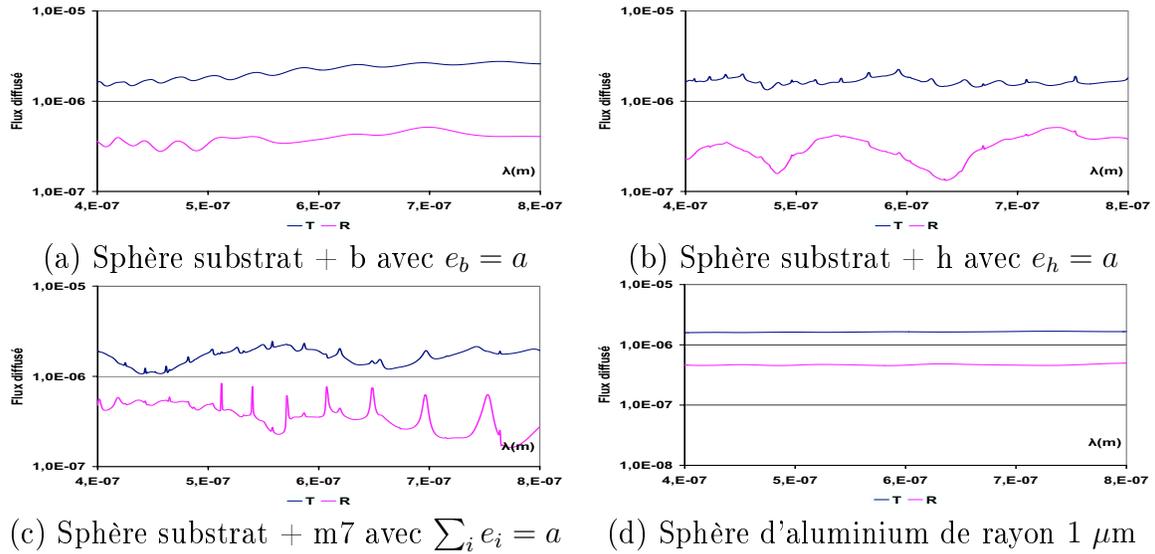


FIG. 12.21 – Étude spectrale dans le demi-espace réfléchi (R) et dans le demi-espace transmis (T), par une sphère d'aluminium d'indice  $n_{Al} = 1,4 + 7i$  et de rayon  $a = 500 \text{ nm}$ , recouverte de structures diélectriques.

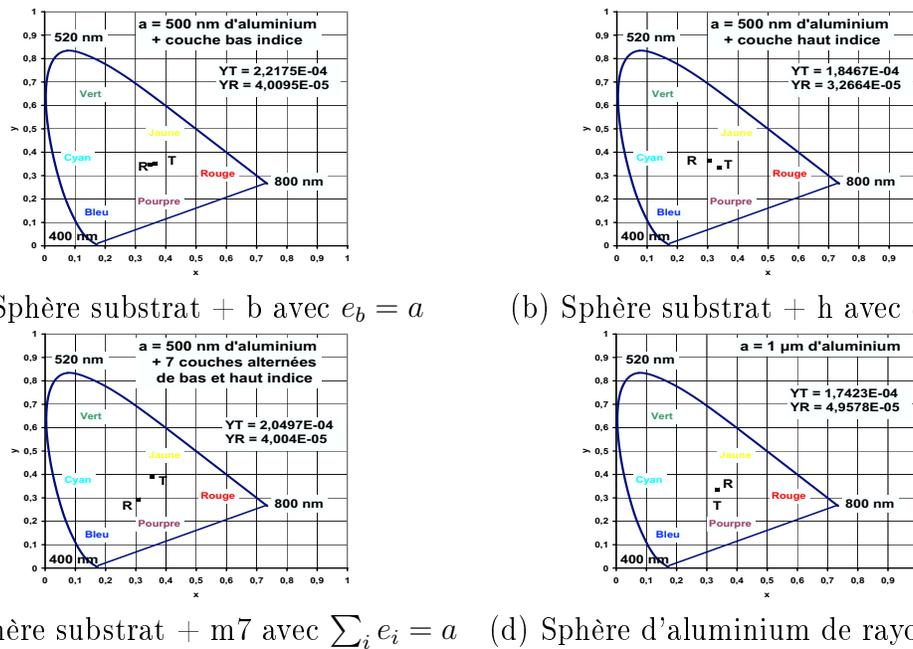


FIG. 12.22 – Diagramme chromatique  $CIEXYZ$  du flux intégré dans le demi-espace réfléchi (R) et dans le demi-espace transmis (T), par une sphère d'aluminium d'indice  $n_{Al} = 1,4 + 7i$  et de rayon  $a = 500 \text{ nm}$ , recouverte de structures diélectriques.

# Chapitre 13

## Analogie avec les composants planaires

L'ensemble des résultats précédents a montré que de fortes dynamiques spectrales et effets colorés pouvaient être obtenus à l'aide de composants concentriques, nus ou recouverts de systèmes multicouches. Il s'agit là d'une différence majeure par rapport aux résultats de la partie II, qui est liée au fait que nous nous sommes intéressés ici à la réponse spectrale dans des domaines angulaires particuliers (réflexion ou transmission), ou dans des directions particulières. C'est donc pour nous l'occasion, à ce stade de l'investigation, de ré-analyser plus finement les dynamiques obtenues avec nos composants concentriques, en regard des performances colorées obtenues avec un composant planaire.

En partie II, nous n'avons pas développé d'expression asymptotique lorsque le diamètre de la sphère devient important. Cependant, on doit pouvoir retrouver numériquement des résultats analogues à ceux des composants planaires, à mesure que ce diamètre tend vers l'infini.

### 13.1 Recherche d'une période avec l'épaisseur déposée

Le principe de base de la synthèse des filtres interférentiels sur substrat plan est utilisé couramment pour contrôler *in situ* la fabrication de filtres multicouches, et s'énonce de la manière suivante : « Lorsque l'on dépose un matériau transparent d'épaisseur  $e$  et d'indice  $n$  sur un substrat plan, l'évolution du facteur de transmission ou réflexion monochromatique ( $\lambda_0$ ) évolue de façon périodique, et passe par un extremum chaque fois que l'épaisseur optique déposée  $e_k$  vaut le quart de la longueur d'onde dans le vide  $\lambda_0$  :  $e_k = k\lambda_0/4n$  » (voir figure 13.1). Ceci explique pourquoi la majorité des composants réalisés sont en général multidiélectriques quart d'onde. Dans le cas d'un multicouche fabriqué à l'aide de matériaux haut (H) et bas (B) indice, on a alors :  $n_H e_H = n_B e_B = k\lambda_0/4$ .

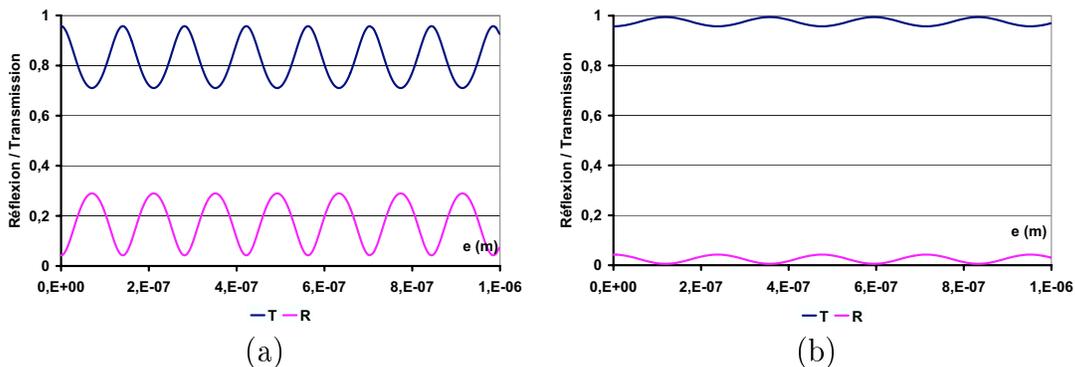


FIG. 13.1 – Réflexion et transmission d’un substrat plan de silice recouvert d’une couche haut indice ( $n_H = 2,25$ ) (a), et d’une couche bas indice ( $n_B = 1,33$ ) (b), en fonction de l’épaisseur de la couche mince.

On va donc ici considérer, pour tester l’analogie planaire-concentrique, le cas d’une sphère de diamètre  $30 \mu\text{m}$ , sur laquelle on dépose un matériau haut indice ( $n_H = 2,25$ ). Le flux diffracté en réflexion et transmission est étudié à  $\lambda_0 = 633 \text{ nm}$ , et tracé en fonction de l’épaisseur déposée (figure 13.2 (a)). On constate alors l’existence d’une demi période approximative donnée par  $T_H/2 = 71 \text{ nm}$ , qui n’est pas très différente de la période classique (cas planaire) donnée par  $\lambda_0/2n_H = 70,3 \text{ nm}$ . Ce résultat confirme donc, pour les couches haut indice, l’analogie planaire  $\Leftrightarrow$  concentrique pour des sphères de diamètre important. Par contre, lorsque le rayon décroît, la pseudo-périodicité disparaît progressivement, comme illustré sur les figures 13.2 (b) et 13.3.

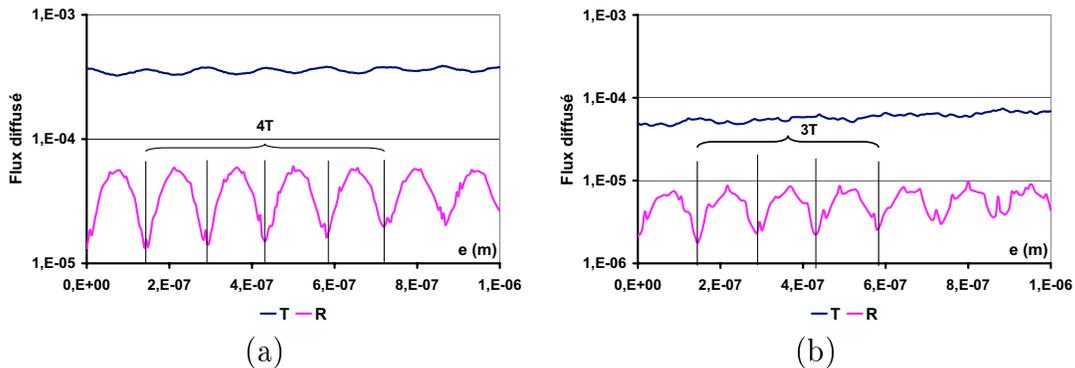


FIG. 13.2 – Flux diffusé intégré dans le demi-espace réfléchi (R) et dans le demi-espace transmis (T), d’une sphère de silice de rayon  $a = 15 \mu\text{m}$  (a),  $a = 5 \mu\text{m}$  (b), recouverte d’une couche haut indice ( $n_H = 2,25$ ). Ce flux est tracé en fonction de l’épaisseur de la couche.

### 13.1. RECHERCHE D'UNE PÉRIODE AVEC L'ÉPAISSEUR DÉPOSÉE

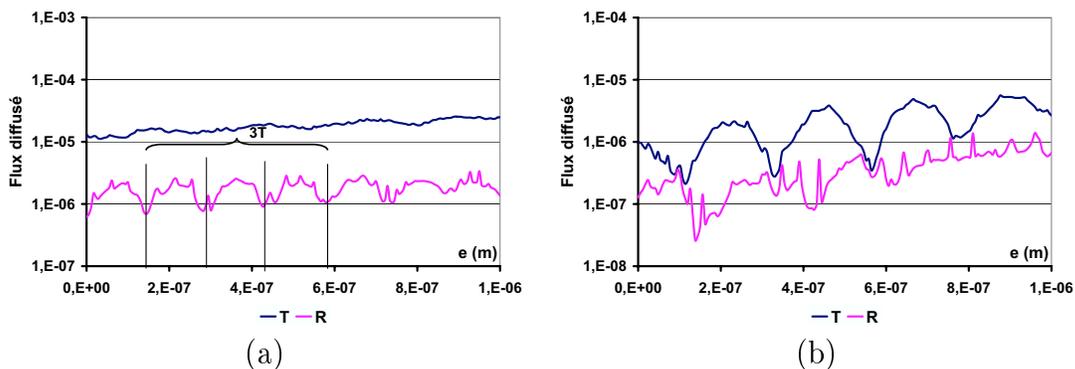


FIG. 13.3 – Flux diffusé intégré dans le demi-espace réfléchi (R) et dans le demi-espace transmis (T), d'une sphère de silice de rayon  $a = 2,5 \mu\text{m}$  (a) et de rayon  $a = 500 \text{ nm}$  (b), recouverte d'une couche haut indice ( $n_H = 2,25$ ). Ce flux est tracé en fonction de l'épaisseur de la couche.

Dans le cas d'un matériau bas indice (figures 13.4 et 13.5), on peut mettre en évidence une demi période, malgré la présence de nombreuses résonances. On trouve  $T_B/2 = 119 \text{ nm}$ , valeur à comparer à  $\lambda_0/2n_H = 118,9 \text{ nm}$ . Ce résultat montre à nouveau que l'analogie planaire-concentrique a du sens, même dans le cas des bas indices. Toutefois, le rayon critique est plus élevé.

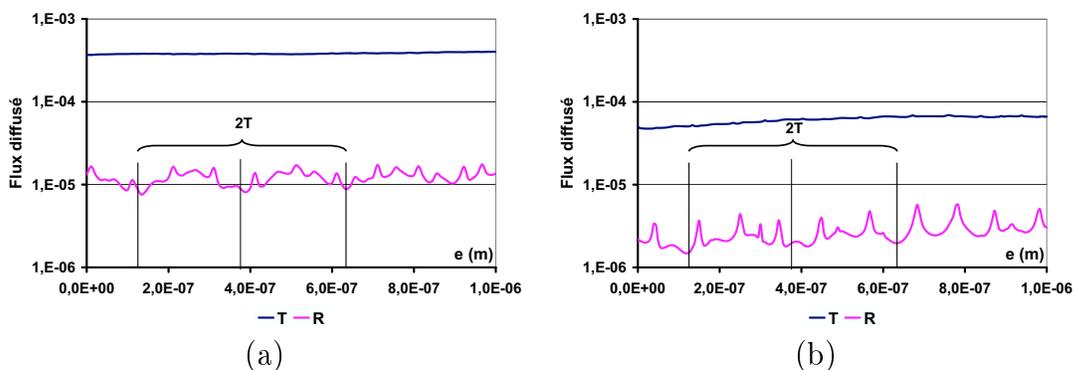


FIG. 13.4 – Flux diffusé intégré dans le demi-espace réfléchi (R) et dans le demi-espace transmis (T), d'une sphère de silice de rayon  $a = 15 \mu\text{m}$  (a),  $a = 5 \mu\text{m}$  (b), recouverte d'une couche bas indice ( $n_B = 1,33$ ). Ce flux est tracé en fonction de l'épaisseur de la couche.

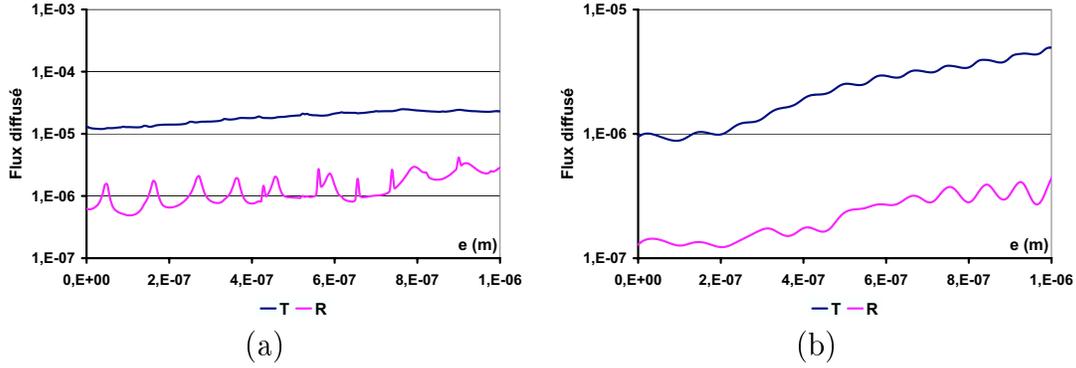


FIG. 13.5 – Flux diffusé intégré dans le demi-espace réfléchi (R) et dans le demi-espace transmis (T), d’une sphère de silice de rayon  $a = 2,5 \mu\text{m}$  (a) et de rayon  $a = 500 \text{ nm}$  (b), recouverte d’une couche bas indice ( $n_B = 1,33$ ). Ce flux est tracé en fonction de l’épaisseur de la couche.

## 13.2 Cas d’une sphère réfléchrice de rayon important

Nous commencerons donc par nous intéresser au cas des grands diamètres, pour mieux cerner l’analogie. Nos codes de calcul fonctionnant jusqu’à des diamètres de  $130 \mu\text{m}$ , c’est cette valeur que nous retiendrons ici. On s’intéresse à un empilement de type miroir, que l’on désignera par M7 ou HBHBHBH. La réponse spectrale de ce filtre centré à la longueur d’onde  $\lambda_0 = 633 \text{ nm}$  est donnée en figure 13.6.

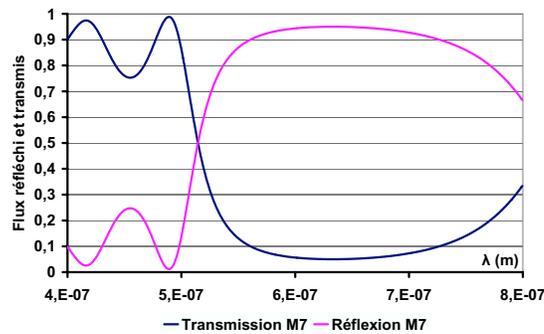


FIG. 13.6 – Flux spectral réfléchi et transmis pour un substrat plan de silice ( $n_s = 1,52$ ) recouvert d’un miroir M7 centré à  $\lambda_0 = 633 \text{ nm}$  en incidence normale.

Du point de vue de la diffusion globale  $D$ , c’est-à-dire intégrée en réflexion et transmission, aucune analogie n’apparaît (figure 13.7 (a)) avec la réponse du miroir plan. Par contre, si l’on s’intéresse à la diffusion  $D_R$  par réflexion, on retrouve une courbe caractéristique d’un composant réflecteur, comme illustré en figure 13.7 (b).

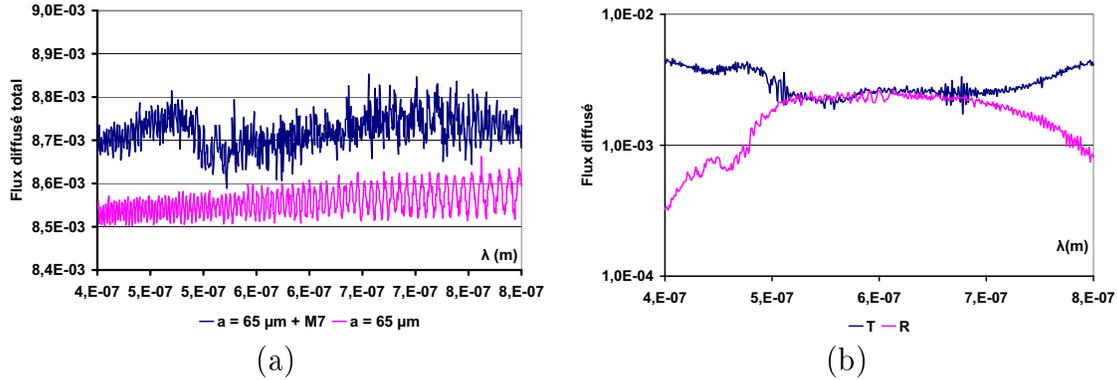


FIG. 13.7 – Etude spectrale d’une sphère de silice ( $n_S = 1,52$ ) de rayon  $a = 65 \mu\text{m}$ , recouverte d’un miroir M7 centré à  $\lambda_0 = 633 \text{ nm}$ . (a) Flux diffusé total intégré dans tout l’espace. (b) Flux diffusé intégré dans le demi-espace réfléchi (R), et dans le demi-espace transmis (T).

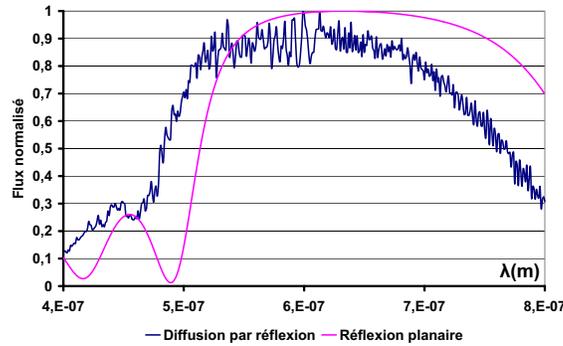


FIG. 13.8 – Comparaison du flux spectral diffusé dans le demi-espace réfléchi (R) par une sphère de silice ( $n = 1,52$ ) de rayon  $a = 65 \mu\text{m}$ , et du flux réfléchi par un substrat plan de silice, recouverts tous deux d’un miroir M7 centré à  $\lambda_0 = 633 \text{ nm}$ .

Pour permettre une comparaison plus fine avec le miroir plan, nous avons normalisé et superposé en figure 13.8 les réponses de la sphère traitée et du composant planaire. Bien que la réponse du flux diffusé soit plus complexe, on constate que le profil entre les deux courbes est semblable. La largeur spectrale et la dynamique sont approximativement identiques. Cependant, le flux diffusé  $D_R$  est décalé vers les courtes longueurs d’onde d’environ une quarantaine de nanomètres.

Ainsi, le flux diffusé dans le demi-espace réfléchi, par une sphère de rayon  $65 \mu\text{m}$  recouverte d’un miroir, est similaire au flux réfléchi par une surface plane recouverte du même miroir.

La même analyse a été effectuée à plusieurs angles caractéristiques,  $\theta = 180^\circ$ ,  $150^\circ$ ,  $110^\circ$  et  $90^\circ$  (figure 13.9). Nous retrouvons le profil spectral des flux transmis

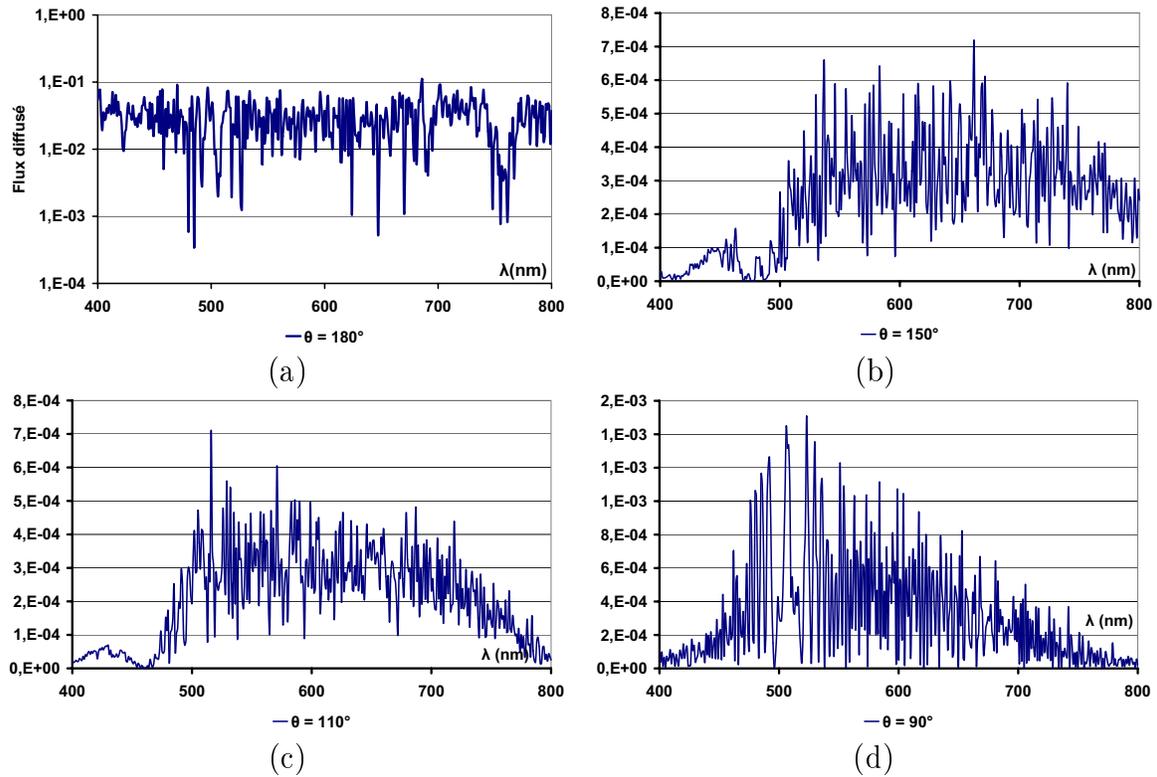


FIG. 13.9 – Flux angulaire diffusé d’une sphère de silice ( $n = 1,52$ ) de rayon  $a = 65 \mu\text{m}$ , recouverte d’un miroir M7 centré à  $\lambda_0 = 633 \text{ nm}$  aux angles  $\theta$  suivants : (a) à  $\theta = 180^\circ$ , (b) à  $\theta = 150^\circ$ , (c) à  $\theta = 110^\circ$  et (d) à  $\theta = 90^\circ$ .

et réfléchi pour un angle normal  $\theta$  compris entre  $150^\circ$  et  $100^\circ$ . Proche du flux spéculaire réfléchi ( $\theta = 180^\circ$ ), le flux diffusé est différent. Ceci n’est pas choquant car nous déterminons le flux intégré dans le demi-espace réfléchi en pondérant le flux diffusé par  $\sin \theta$ .

Au vu de ces résultats, on peut rechercher un rayon de coupure à partir duquel l’analogie avec les composants planaires disparaît, et c’est pourquoi nous avons itéré les calculs précédents pour différents rayons de sphère :  $a = 15 \mu\text{m}$ ,  $5 \mu\text{m}$ ,  $2,5 \mu\text{m}$  et  $500 \text{ nm}$ . On constate que l’effet miroir est approximativement conservé jusqu’à des rayons approchant le micromètre, valeur de coupure en dessous de laquelle l’effet de diffraction devient dominant (figure 13.10).

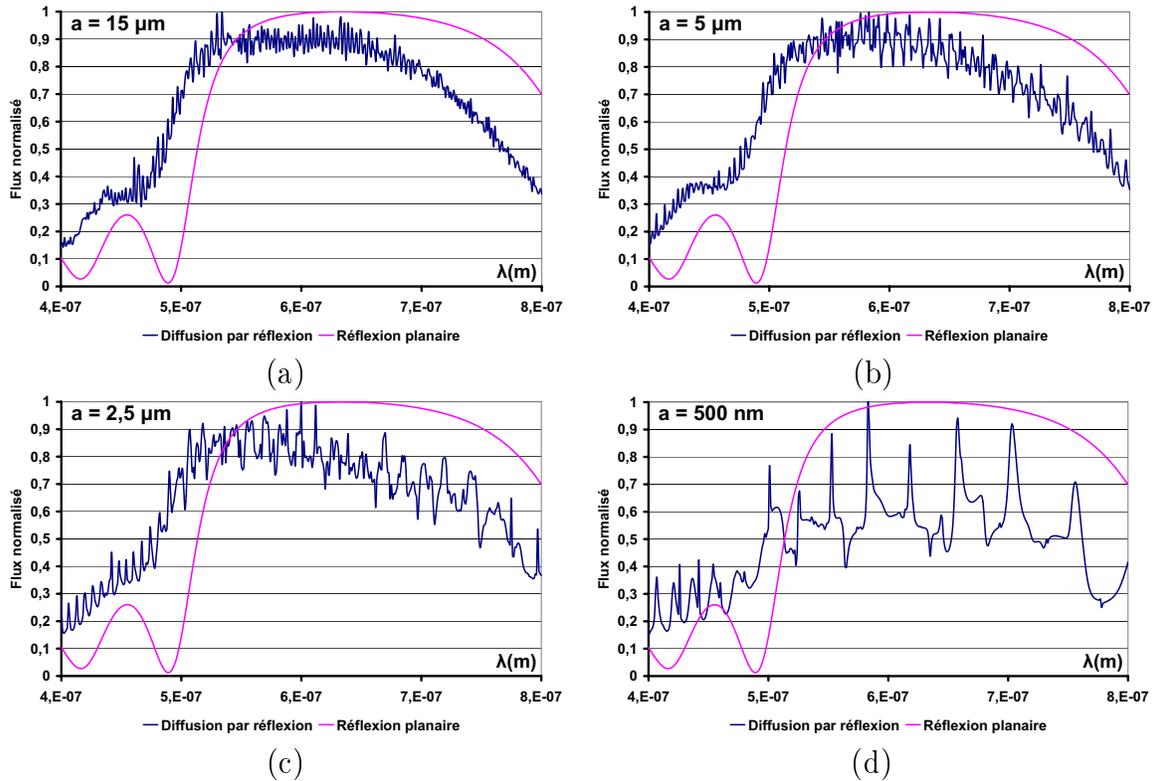


FIG. 13.10 – Flux spectral diffusé intégré dans le demi-espace réfléchi (R), et dans le demi-espace transmis (T), d’une sphère de silice ( $n = 1,52$ ) recouverte d’un miroir M7 centré à  $\lambda_0 = 633 \text{ nm}$ , de rayon  $15 \mu\text{m}$  (a),  $5 \mu\text{m}$  (b),  $2,5 \mu\text{m}$  (c) et de  $500 \text{ nm}$  (d). Comparaison avec le même miroir sur un substrat planaire de silice.

## 13.3 Autres formules d’empilement sur une sphère de rayon important

Le résultat précédent est susceptible de se généraliser à d’autres formules d’empilement, ce que nous étudions ici pour un anti-reflet, un filtre à bande étroite, un miroir dichroïque et une séparatrice.

### 13.3.1 Sphère recouverte d’un anti-reflet

Lors d’un dépôt d’une couche anti-reflet, forcément une couche bas indice, il est difficile de comparer les flux réfléchi et transmis spéculaires, aux flux diffusés intégrés dans les deux demi-espaces réfléchi et transmis. Au vu des figures 13.11 et 13.12, l’analogie est moins évidente que dans le cas d’un miroir. On peut supposer que ceci est dû au fait qu’avec un antireflet, la lumière voit la sphère et rend l’effet de diffraction dominant.

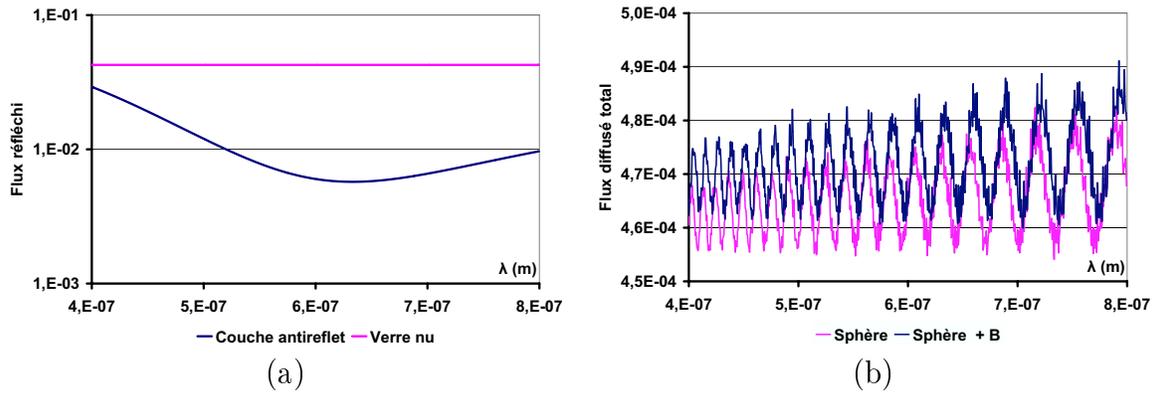


FIG. 13.11 – (a) Flux réfléchi et transmis pour un substrat plan de silice ( $n_s = 1,52$ ) recouvert d'une couche quart d'onde bas indice avec  $n_B = 1,33$ . (b) Flux diffusé total intégré dans tout l'espace, d'une sphère de silice ( $n_S = 1,52$ ) de rayon  $a = 15 \mu\text{m}$ , recouverte d'une couche bas indice centré à  $\lambda_0 = 633 \text{ nm}$ .

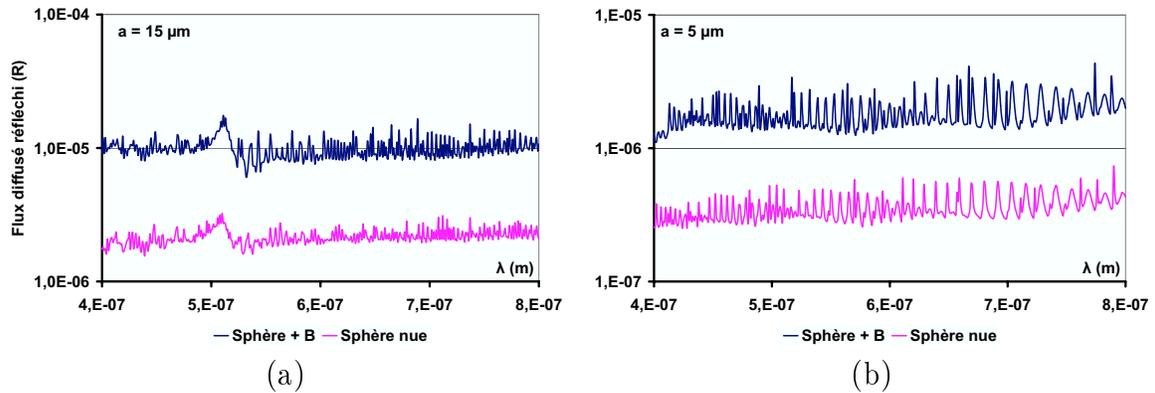


FIG. 13.12 – Flux diffusé intégré dans le demi-espace réfléchi (R) d'une sphère de silice ( $n_S = 1,52$ ) de rayon  $a = 15 \mu\text{m}$  (a) et de rayon  $a = 5 \mu\text{m}$  (b), recouverte d'une couche bas indice centrée à  $\lambda_0 = 633 \text{ nm}$ . Il n'y a pas d'effet anti-reflet.

### 13.3.2 Sphère recouverte d'un filtre Perot-Fabry

Nous déposons maintenant sur la sphère un filtre Perot-Fabry composé d'un miroir (M5), d'une cavité demi-onde bas indice (2B), et du même miroir en regard (M5) centré à  $\lambda_0 = 633 \text{ nm}$ .

En figure 13.13 (a) nous observons le filtre déposé sur un substrat plan de silice. En réflexion, il rejette la longueur d'onde  $\lambda_0$  de centrage. Quand nous comparons ces résultats à la figure 13.13 (b), représentant les flux diffusés dans les demi-espaces réfléchi et transmis d'une sphère de rayon  $a = 15 \mu\text{m}$ , nous observons une tendance analogue mais avec de profondes atténuations. En fait, en dehors de la bande pas-

### 13.3. AUTRES EMPILEMENTS SUR UNE SPHÈRE DE GRAND RAYON

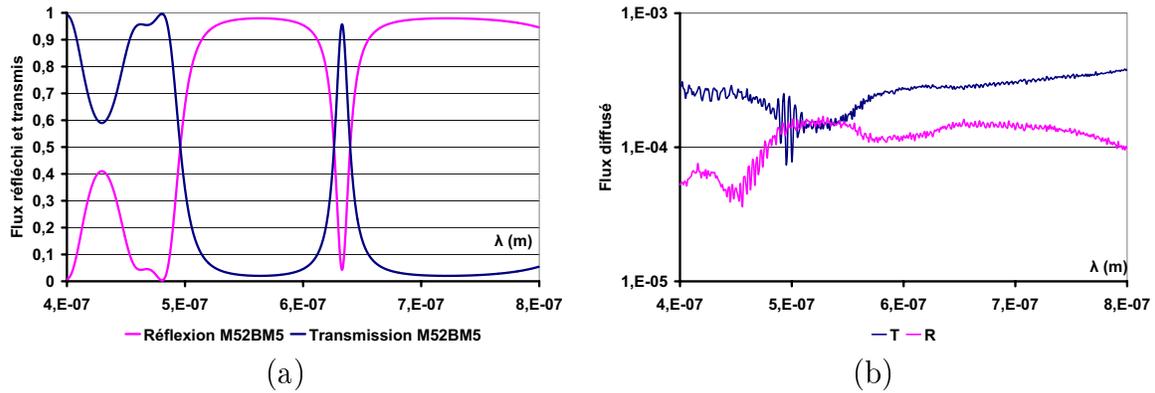


FIG. 13.13 – (a) Flux spectral réfléchi et transmis pour un substrat plan de silice ( $n_s = 1,52$ ) recouvert d'un filtre Perot-Fabry M52BM5 centré à  $\lambda_0 = 633$  nm (b) Flux diffusé dans le demi-espace réfléchi (R) et dans le demi-espace transmis (T), d'une sphère de rayon  $15 \mu\text{m}$  recouverte de ce même filtre M52BM5.

sante du filtre plan, on retrouve bien l'effet miroir décalé caractérisant les miroirs M7 en regard dans la cavité. Par contre, la bande passante est nettement élargie avec un contraste réduit, et montre un décalage en longueur d'onde.

Comme précédemment, cet effet disparaît à mesure que le rayon de la sphère diminue (figures 13.14 et 13.15).

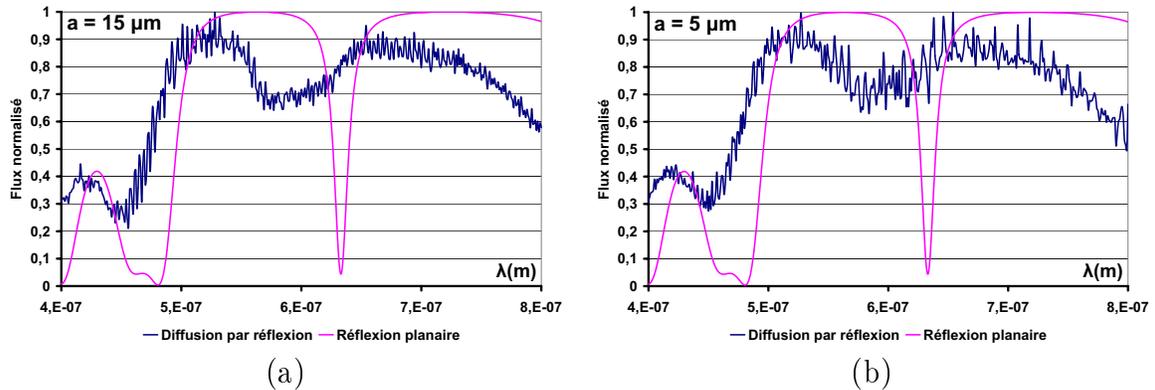


FIG. 13.14 – Flux diffusé intégré dans le demi-espace réfléchi (R), d'une sphère de silice ( $n = 1,52$ ) recouverte d'un filtre Perot-Fabry M52BM5 centré à  $\lambda_0 = 633$  nm, de rayon  $15 \mu\text{m}$  (a),  $5 \mu\text{m}$  (b). Comparaison avec le même revêtement sur un substrat plan.

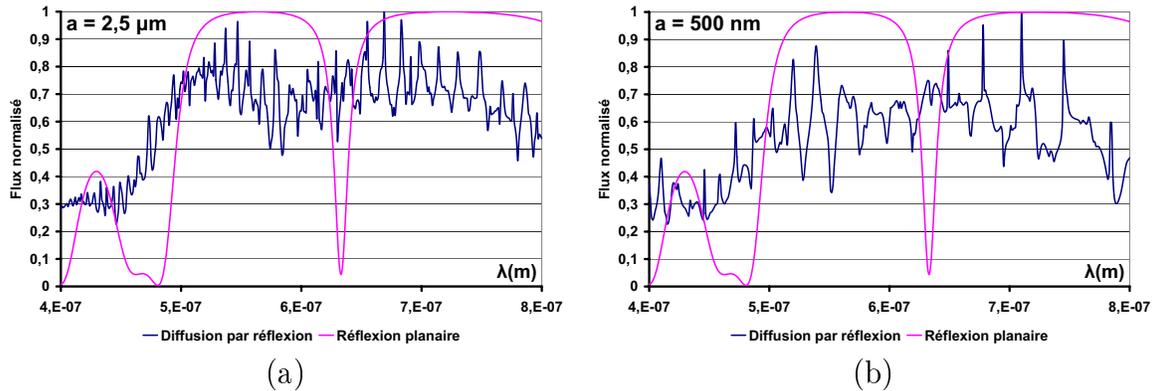


FIG. 13.15 – Flux diffusé intégré dans le demi-espace réfléchi (R), d’une sphère de silice ( $n = 1,52$ ) recouverte d’un filtre Perot-Fabry M52BM5 centré à  $\lambda_0 = 633$  nm, de rayon  $2,5 \mu\text{m}$  (a) et de  $500$  nm (b). Comparaison avec le même revêtement sur un substrat plan.

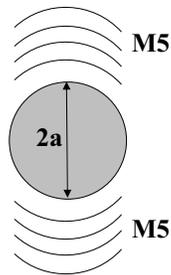


FIG. 13.16 – Sphère jouant le rôle de la cavité d’un Perot-Fabry.

### 13.3.3 Sphère de type « spacer » pour un Perot-Fabry

Jusqu’à présent notre filtre Perot-Fabry était centré à  $\lambda_0 = 633$  nm, longueur d’onde imposée par la cavité du filtre. Cependant, on peut aussi tenter d’utiliser la sphère elle-même comme cavité. Dans ce cas le centrage est donné par  $n_s(2a) = \lambda_0/2 \iff n_s a = \lambda_0/4$ . Lorsque cette sphère est alors recouverte d’un miroir M5, elle est susceptible de donner lieu à un effet Fabry Perot (figure 13.16).

On considère donc ici le cas d’une sphère de rayon  $a = 104$  nm jouant le rôle d’une cavité centrée à  $\lambda_0 = 633$  nm. Les résultats sont donnés en figure 13.17 et ne montrent pas d’effet Pérot-Fabry.

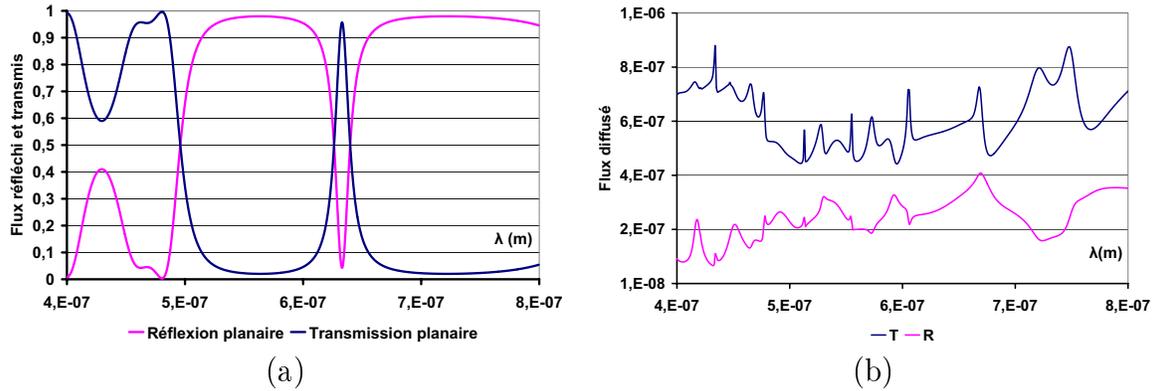


FIG. 13.17 – (a) Flux réfléchi et transmis pour un empilement planaire Air/M5/Silice/M5/Air où la silice joue le rôle de la cavité centrée à  $\lambda_0 = 633 \text{ nm}$ . (b) Réponse spectrale du flux diffusé dans le demi-espace réfléchi (R) et dans le demi-espace transmis (T), d’une sphère de rayon  $a = 104 \text{ nm}$  de silice recouverte du miroir M5.

### 13.3.4 Sphère recouverte d’un dichroïque

Le miroir dichroïque est un empilement de type H/2BHBHBH/2 permettant de séparer deux domaines spectraux. Pour améliorer cette séparation, il est possible d’ajouter des couches intermédiaires. Sur la figure 13.18 nous remarquons tout de suite que les réponses spéculaires et diffusées sont semblables. Le miroir dichroïque joue le rôle d’un passe bas pour le flux réfléchi, que ce soit pour un substrat planaire ou sphérique de rayon  $a = 15 \mu\text{m}$ .

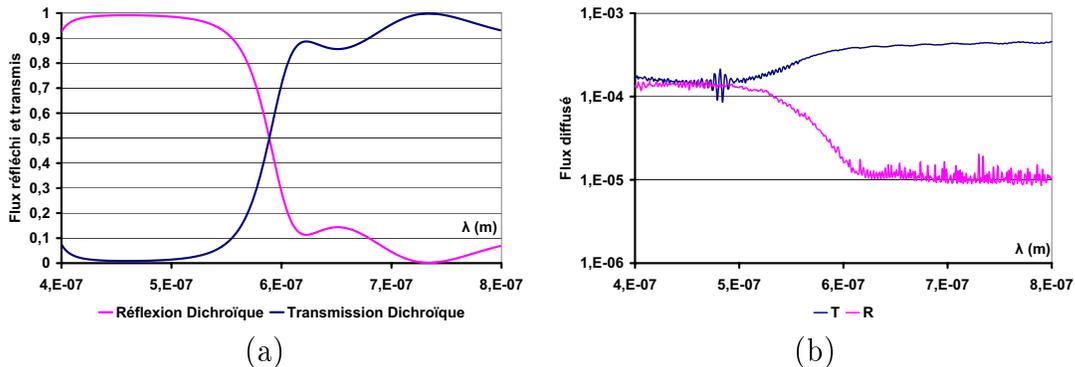


FIG. 13.18 – (a) Réflexion et transmission pour un substrat plan de silice ( $n_s = 1,52$ ) recouvert d’un empilement dichroïque. (b) Flux diffusé dans le demi-espace réfléchi (R) et dans le demi-espace transmis (T), d’une sphère de rayon  $15 \mu\text{m}$  recouverte de ce même empilement dichroïque.

Comme précédemment, l'effet dichroïque s'atténue quand le diamètre de la sphère décroît (figure 13.19).

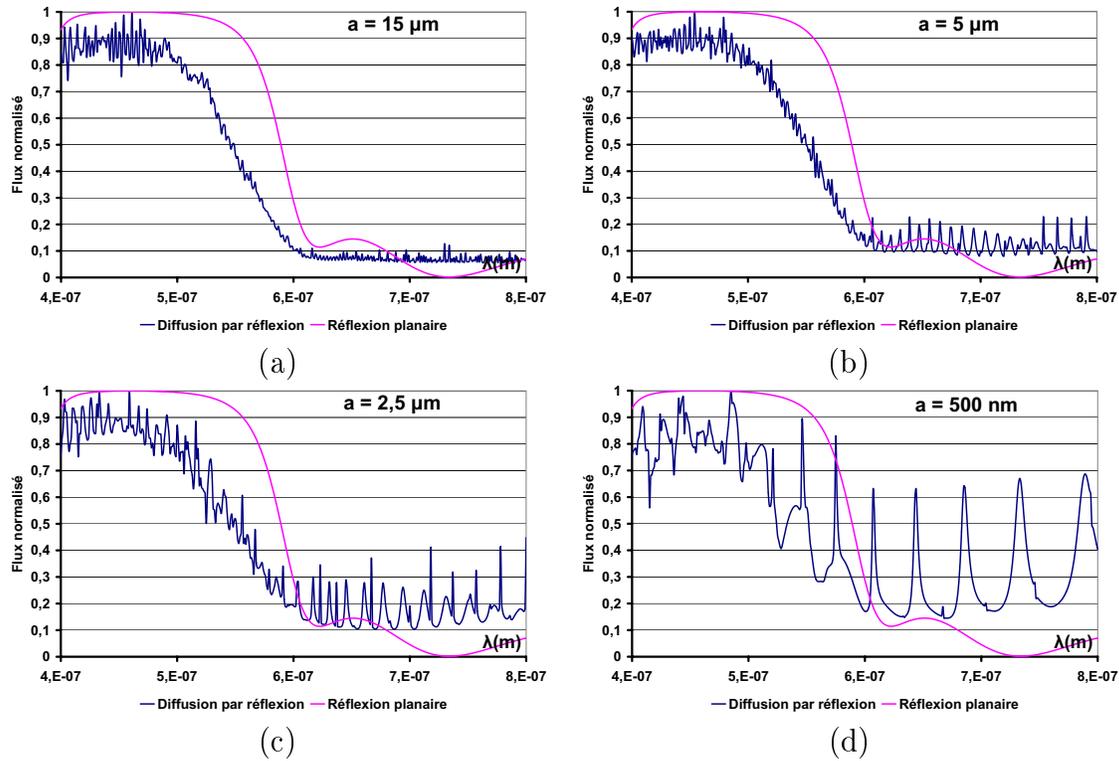


FIG. 13.19 – Flux diffusé intégré dans le demi-espace réfléchi (R), d'une sphère de silice ( $n = 1,52$ ) recouverte d'un dichroïque, de rayon  $15 \mu\text{m}$  (a),  $5 \mu\text{m}$  (b),  $2,5 \mu\text{m}$  (c) et de  $500 \text{ nm}$  (d). Comparaison avec le même revêtement sur un substrat planaire de silice.

### 13.3.5 Sphère recouverte d'un empilement séparateur

Une séparatrice en flux spéculaire permet d'avoir environ 50% du flux incident transmis et 50% réfléchi (voir figure 13.20 (a)). En figure 13.20 (b) on observe une similitude entre les réponses des composants planaires et sphériques. Le rayon de coupure est donné en figures 13.20 (c), (d), (e) et (f).

13.3. AUTRES EMPILEMENTS SUR UNE SPHÈRE DE GRAND RAYON

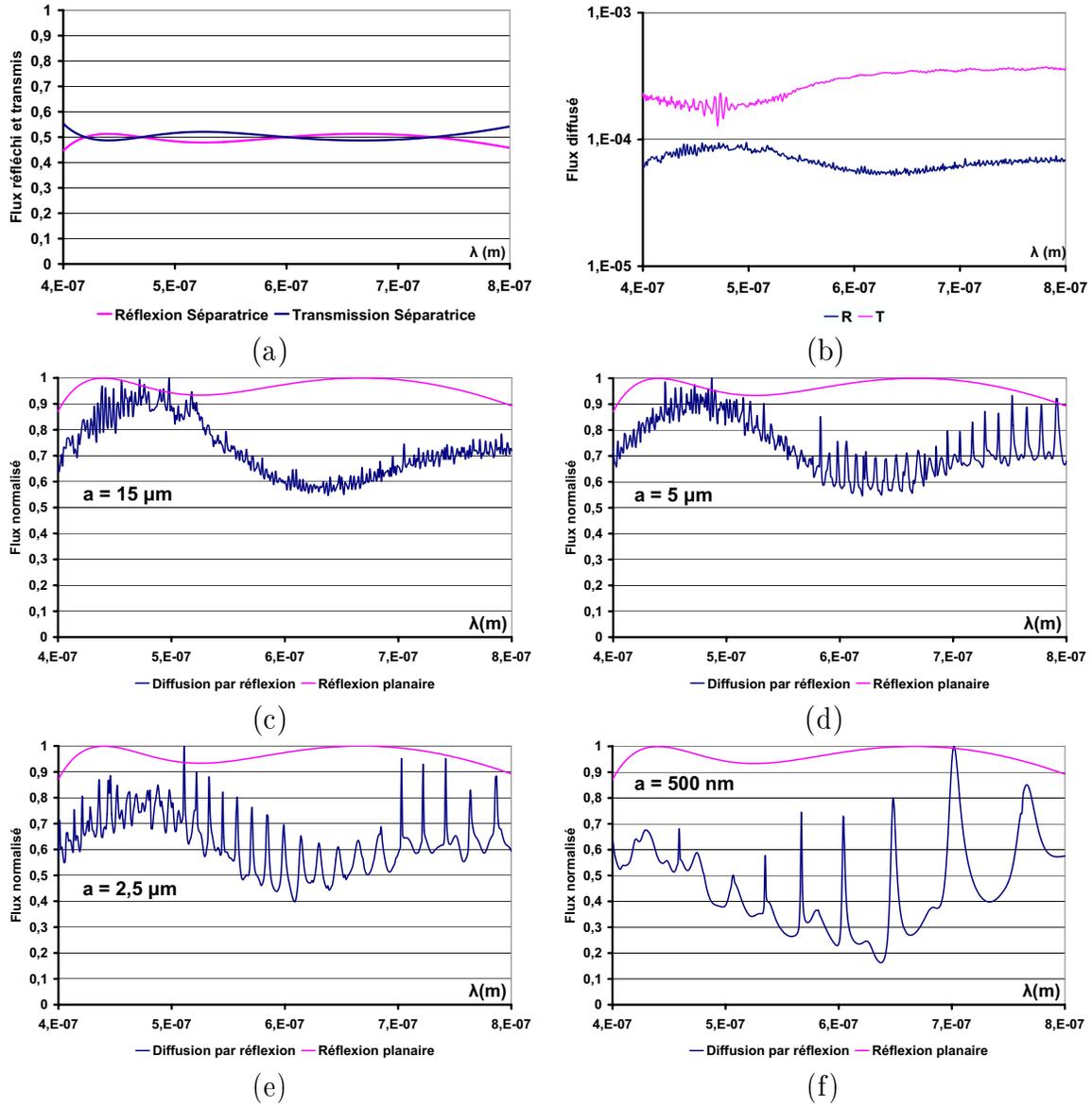


FIG. 13.20 – (a) Flux réfléchi et transmis d’une séparatrice déposée sur un substrat plan de silice. (b) Flux diffusé dans le demi-espace réfléchi (R) et dans le demi-espace transmis (T), d’une sphère de rayon  $15 \mu\text{m}$  recouverte d’une séparatrice. Flux diffusé intégré dans le demi-espace réfléchi (R), d’une sphère de silice ( $n = 1,52$ ) recouverte d’un empilement séparateur, de rayon  $15 \mu\text{m}$  (c),  $5 \mu\text{m}$  (d),  $2,5 \mu\text{m}$  (e) et de  $500 \text{ nm}$  (f). Comparaison avec le même revêtement sur un substrat planeaire de silice.

### 13.3.6 Conclusion

Globalement on constate pour de grands diamètres ( $a = 15 \mu\text{m}$ ) que les fonctions optiques sont approximativement conservées, à condition qu'elles soient régies par des effets de forte réflexion, ce qui est le cas des miroirs, dichroïques et Fabry Perot. De façon générale, cet effet disparaît quand le rayon de la sphère décroît ( $a = 2\mu\text{m}$ ).

Quatrième partie

Expériences et appareillages



---

Les chapitres précédents ont porté sur l'analyse et les prédictions théoriques. Dans cette partie IV, nous nous intéressons aux procédés de fabrication et de caractérisation des microsphères recouvertes :

- Dans le chapitre 14 nous nous intéressons aux techniques de dépôts sous vide et nous présentons quelques essais réalisés sur microsphères à partir d'une configuration simplifiée, faisant appel à l'évaporation sous vide.
- Nous exposons ensuite la technologie de pulvérisation par faisceau d'ions, qu'il nous a fallu entièrement mettre en œuvre à l'aide de premiers essais sur substrats plans. Cette technologie représente une partie majeure de notre travail expérimental.
- Puis dans le chapitre 15, nous présentons les réalisations obtenues, en configuration plane puis sphérique. Nous traitons du problème de la caractérisation à l'aide des différents outils au laboratoire : diffusomètre, spectrophotomètre, spectrodiffusomètre...
- Enfin dans le chapitre 16, nous concluons sur les résultats obtenus.

---

# Chapitre 14

## Mise au point du bâti d'évaporation pour le traitement de microsphères

### 14.1 Essais préliminaires

L'Institut Fresnel dispose de plusieurs enceintes de fabrication sous vide pour la réalisation de filtres interférentiels, avec les procédés suivants :

- L'évaporation par canon à électrons (Electron Beam Deposition) est la technique la plus classique, et conduit souvent à des composants fragiles. Elle est utilisée traditionnellement au laboratoire,
- L'évaporation assistée par faisceau d'ions (Ion Assisted Deposition) permet en particulier de résoudre les problèmes de dureté mécanique, grâce à l'obtention de couches minces très denses. Cette technologie a été introduite au laboratoire dans les années 80,
- Il en est de même pour l'évaporation assistée par plasma (Ion Plating), perfectionnée au laboratoire dans les années 90,
- La pulvérisation par faisceau d'ions (Sputtering) est intéressante chaque fois que l'on veut s'affranchir du processus d'évaporation, et conduit aussi à des couches optiques très denses et dures. Le laboratoire a fait l'acquisition de cette technologie plus récente il y a moins de 3 ans, lors de l'essor de la *bulle télécom*. Selon la géométrie du bâti, cette pulvérisation peut être assistée par un faisceau d'ions supplémentaire (Dual Ion Beam Sputtering).

Au début de notre thèse, la technologie D.I.B.S. n'était pas disponible car le laboratoire venait d'en faire l'acquisition et les premiers essais étaient en cours sur une enceinte de volume  $1,2 m^3$  dévolue aux applications télécom. C'est pourquoi nous avons dans une première étape, modifié une enceinte de type E.B.D. (BAK600) pour y réaliser les premiers dépôts sur substrats concentriques.

### 14.1.1 Principe de l'E.B.D.

Dans le cas de l'E.B.D., l'évaporation de matière est réalisée en chauffant la cible disposée dans un creuset grâce à un canon à électron [33] [32] ou à un filament parcouru par un fort courant. Les électrons sont déviés par un champ magnétique pour venir sublimer la matière de la cible. Celle-ci se vaporise ensuite sur les substrats. L'évaporation peut être réactive ou non, ce qui signifie qu'on peut introduire une pression partielle de gaz destinée à compléter la stœchiométrie si nécessaire. La cible peut donc être un oxyde ou un métal.

Plus le vide est poussé ( $10^{-7}$  Torr) et plus la contamination de la couche mince est faible, minimisant ainsi les pertes par absorption (hors stœchiométrie). Grâce à un tel système de dépôt, des couches minces d'une grande pureté peuvent être déposées à partir d'une cible non polluée. Cette dernière peut être sous forme de granules, ou en un seul bloc. L'émission de matière est évidemment directive, ce qui nécessite l'utilisation de masques pour améliorer l'uniformité en cours de dépôt.

Ce procédé classique est souvent utilisé pour réaliser des couches minces interférentielles à partir de matériaux diélectriques. L'enceinte utilisée au laboratoire est un Balzers 600 avec deux ou trois cibles diélectriques de haut ou bas indice ( $ZnS$ ,  $YF_3$  ou  $Na_3AlF_6$ ...). Des cibles métalliques (Nickel, Aluminium) sont également utilisées couramment. Le pompage est assuré par une pompe à palette et une pompe à diffusion d'huile. Dans le cas de dépôts planaires classiques, nous disposons d'une microbalance à quartz pour le contrôle *in situ* mais indirect des épaisseurs déposées. Dans le cas de composants interférentiels sensibles, le contrôle *in situ* de la fabrication fait appel à un système optique temps réel. Cela signifie que l'on enregistre la transmission d'un faisceau de lumière blanche ou monochromatique après traversée par le substrat sur lequel la matière se dépose ; les extremums du signal monochromatique sont alors caractéristiques d'épaisseurs quart d'onde déposées. Toutefois ce contrôle sera déficient dans le cas de substrats concentriques.

### 14.1.2 Configuration sphérique

Nous avons donc modifié l'intérieur de l'enceinte à vide, notamment la partie du porte substrat qui n'est plus constituée d'un plateau tournant, mais d'un *panier vibrant* contenant les sphères. Le panier, où sont situées les sphères, est suspendu au dessus de la plume de matière. Sa partie inférieure est une grille semi-rigide dont le pas est assez fin pour contenir des sphères de diamètre de  $150 \mu m$ . La grille a un pas de  $100 \mu m$  et une épaisseur de  $30 \mu m$ . Sur la figure 14.1, nous voyons la disposition des différents éléments en configuration sphérique. Le canon à électrons condense le matériau de la cible au voisinage du panier. La plume de matière ainsi évaporée vient se déposer, à travers la grille, sur les microsphères. Le dépôt est concentrique à condition que la vibration induite confère aux sphères un mouvement aléatoire.

Une première étape est de vérifier que la matière évaporée pénètre bien la grille jusqu'à des profondeurs acceptables. Pour cela, nous plaçons tout d'abord un substrat plan au fond du panier (figure 14.2) ; dans ce cas, la grille se comporte comme un

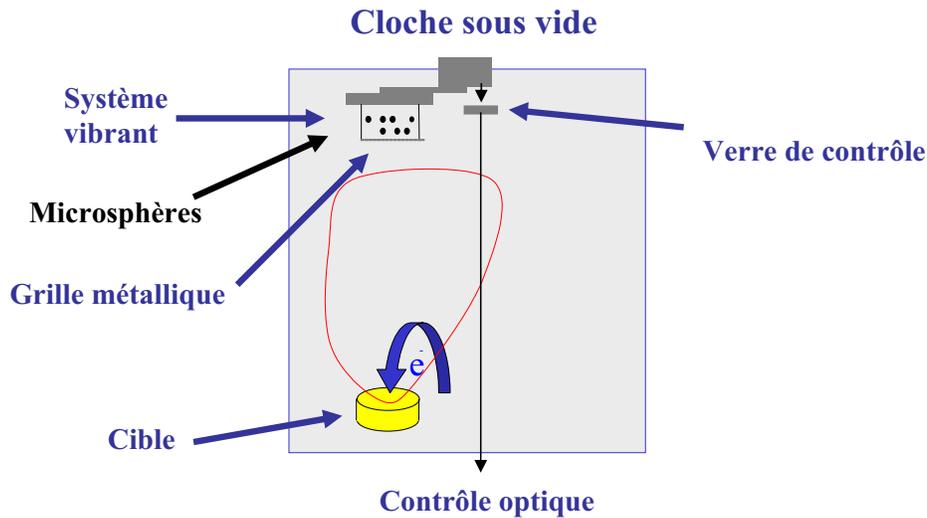


FIG. 14.1 – Configuration d’une enceinte à vide de type Balzers 600 pour l’application : dépôts de couches concentriques sur microsphères.

masque dont on retrouve approximativement le pas après dépôt. Par contre, lorsque le substrat est éloigné du fond du panier (1 cm), nous n’observons plus aucun effet de masquage (voir figure 14.2).

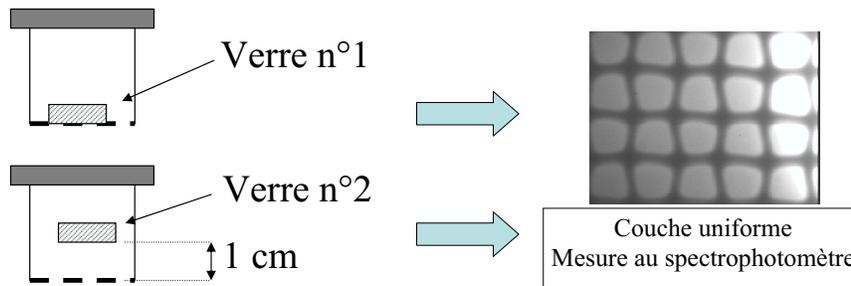


FIG. 14.2 – Dépôts sur un substrat plan déposé au fond du panier (verre  $n^{\circ}1$ ), et à une hauteur de 1 cm (verre  $n^{\circ}2$ ).

Nous avons utilisé ce système pour réaliser des dépôts métalliques sur des sphères de silice de diamètre 130  $\mu\text{m}$ . Les résultats sont donnés en figure 14.3 grâce à des images de microscopie au Normaski. On constate que de nombreuses sphères ne sont que partiellement recouvertes, ce qui souligne la difficulté d’établir une fréquence de vibration garantissant un mouvement aléatoire des sphères. Cette fréquence doit être minutieusement contrôlée.

Nous en avons conclu, malgré cette première validation de dépôt sur sphères en mouvement, qu’il était préférable de disposer d’un système de vibration sans panier ou masque, en particulier parce que le panier interdit toute mesure optique temps

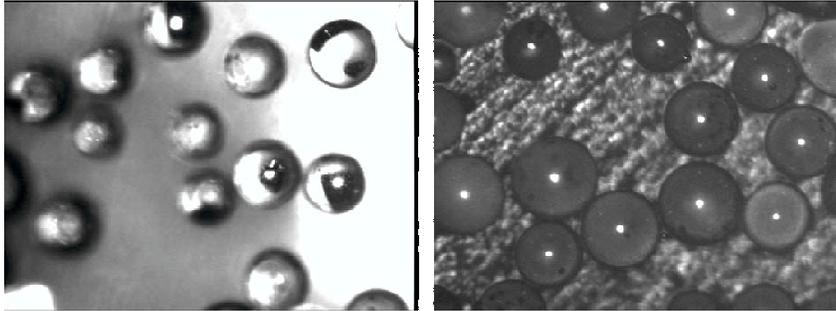


FIG. 14.3 – Sphères de  $130 \mu\text{m}$  partiellement (a) et totalement (b) recouvertes de Nickel.

réel pour contrôler les épaisseurs déposées. Ceci nous a conduit à disposer les sphères au fond de l'enceinte. Celles-ci seraient alors placées sur un système vibrant plan, mais il faut alors que le mouvement de ces sphères intercepte un flux de matière dirigé vers le bas. Ainsi nous avons utilisé la technique de pulvérisation. Le choix de l'I.B.S. nous a en effet semblé adapté, puisqu'il nous a permis d'orienter la plume de matière vers le bas.

## 14.2 L'Ion Beam Sputtering : principes de base

Le bâti D.I.B.S. de  $1,2 \text{ m}^3$  étant réservé à des applications télécoms, il nous a fallu de toutes pièces reconfigurer un ancien bâti de qualité modeste (VEECO) en y introduisant la technologie I.B.S. . Les acquisitions de matériel (pompe cryogénique, canon à ions) ont été coûteuses en finances et en temps (18 mois d'attente). Les travaux mécaniques ont été également drastiques, mais nous ne les détaillerons pas ici. Par ailleurs, nous avons acquis ce système alors que la technologie D.I.B.S. n'était pas encore au point au laboratoire. Cela signifie qu'il nous a fallu entièrement découvrir et mettre au point ces procédés nouveaux, indépendamment du fait que les substrats soient planaires ou sphériques. C'est pourquoi nous allons tout d'abord nous attacher à mettre au point l'élaboration des matériaux en couches minces sur substrat plan, en nous concentrant sur les aspects indice, absorption et diffusion, adhérence et uniformité...

### 14.2.1 Procédé

Le principe de l'I.B.S. est d'arracher des atomes de surface à partir d'interactions avec des particules incidentes [42].

Différents facteurs font varier de manière conséquente la quantité de matière arrachée : l'énergie des particules incidentes, le matériau de la cible et sa structure cristalline ou amorphe, l'angle d'incidence sur la cible, la pression partielle

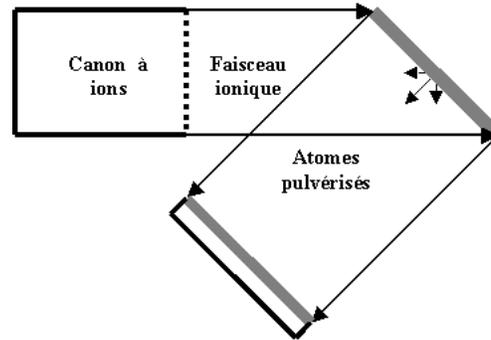


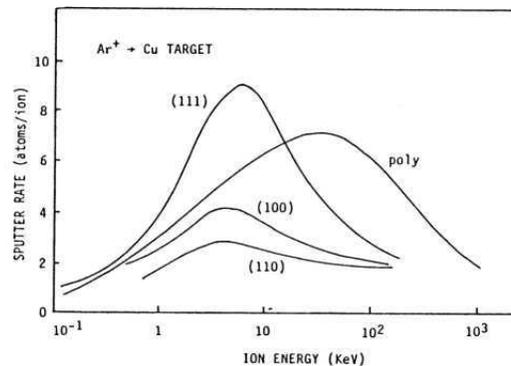
FIG. 14.4 – Principe de pulvérisation par canon à ions.

résiduelle... La grandeur caractéristique pour quantifier ce phénomène est le champ d'arrachement  $S$  qui représente le nombre d'atomes enlevés par rapport au nombre d'ions incidents. Pour mesurer cette valeur, il existe différentes techniques. On peut soit mesurer la perte de poids de la cible, soit mesurer la décroissance de l'épaisseur de la cible, soit collecter le matériau arraché, soit en utilisant des rayons X détecter des particules arrachées en vol.

Pour anticiper sur les réglages du nouveau bâti de pulvérisation, nous décrivons ci-dessous les différents facteurs modifiant les propriétés du champ d'arrachement  $S$ .

### La cible

La nature de la cible joue un rôle important dans la quantité de matière qui lui est arrachée par le faisceau d'ions. En effet, le champ d'arrachement et la distribution angulaire des particules arrachées sont affectés par la structure cristalline de la surface de la cible. Sur la figure 14.5 suivant l'orientation (110) ou (111) du matériau, la réponse énergétique d'atomes pulvérisés par des ions  $Ar^+$  varie.

FIG. 14.5 – Dépendance énergétique du champ d'arrachement de l' $Ar^+$  sur Cu [32].

Pour limiter les effets de l'orientation du cristal nous utilisons des cibles poly-

crystallines. En outre, le type de matériau est un paramètre non négligeable car le champ d'arrachement varie périodiquement avec le nombre atomique de l'élément.

### L'angle d'incidence des ions

L'angle d'incidence des ions venant arracher la matière de la cible est un facteur déterminant. Il dépend lui aussi de la nature des ions et des atomes arrachés mais aussi de l'énergie incidente [43]. Le champ augmente avec l'angle d'incidence et en général, montre un maximum aux alentours de  $70^\circ$  (voir figure 14.6) par rapport à la normale de la cible, avant de diminuer rapidement pour des angles plus importants [43].

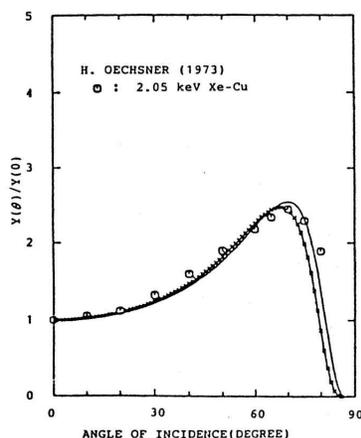


FIG. 14.6 – Champ d'arrachement normalisé pour des ions  $Xe^+$  d'énergie 2,5 KeV sur une cible de Cu en fonction de l'angle d'incidence.

### 14.2.2 L'angle d'émission des atomes

Les métaux comme Au, Ag, Cu et Pt possèdent un fort champ d'arrachement et montrent un très léger effet d'angle. A l'inverse, les matériaux Fe, Ta et Mo ont un faible champ d'arrachement et un fort effet d'angle. Sur la figure 14.7, pour une incidence donnée de  $60^\circ$  d'ions d' $Ar^+$ , nous remarquons que l'indicatrice de matière n'est pas dans la direction spéculaire d'un flux réfléchi, mais se rapproche plus de la normale de l'échantillon.

### L'énergie des particules incidentes

L'énergie des particules incidentes détermine la nature d'interaction entre les ions et la cible. Si l'énergie incidente est faible, alors la pulvérisation de la cible n'est pas accessible. Cependant, l'énergie est suffisante pour détecter des défauts d'irradiation.

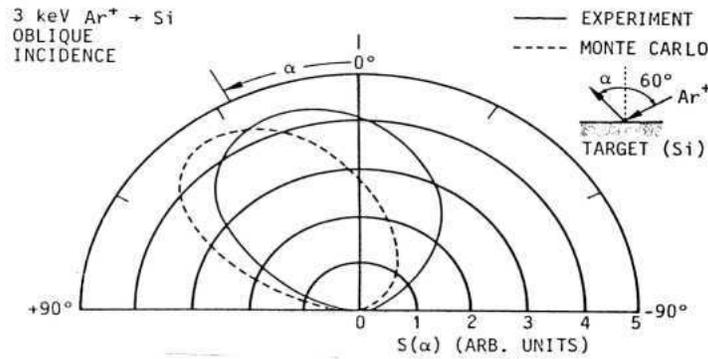


FIG. 14.7 – Distribution angulaire d’atomes de Si arrachés par un bombardement ionique d’ $Ar^+$  à 3 KeV sous l’incidence de  $60^\circ$ .

Si l’énergie est trop importante, alors des ions incidents vont être implantés dans la cible. Il existe donc des énergies seuils selon que l’on veut réaliser des déplacements atomiques, de la pulvérisation ou de l’implantation ionique (voir figure 14.8 (a)).

Une fois déterminée la plage d’énergie des particules incidentes nécessaire à la pulvérisation, nous pouvons modifier cette énergie pour faire varier la vitesse du dépôt dans la plage autorisée. Nous modifions alors l’énergie des atomes arrachés à la cible (figure 14.8 (b)). Cela a aussi, pour conséquence, d’arracher des clusters de matériaux plus ou moins gros. En outre, si la nature de l’ion qui bombarde la cible change, la taille des particules arrachées varie aussi. L’énergie des atomes arrachés est plus grande pour la pulvérisation que pour une évaporation classique par canon à électrons. Les couches minces sont par conséquent plus compactes.

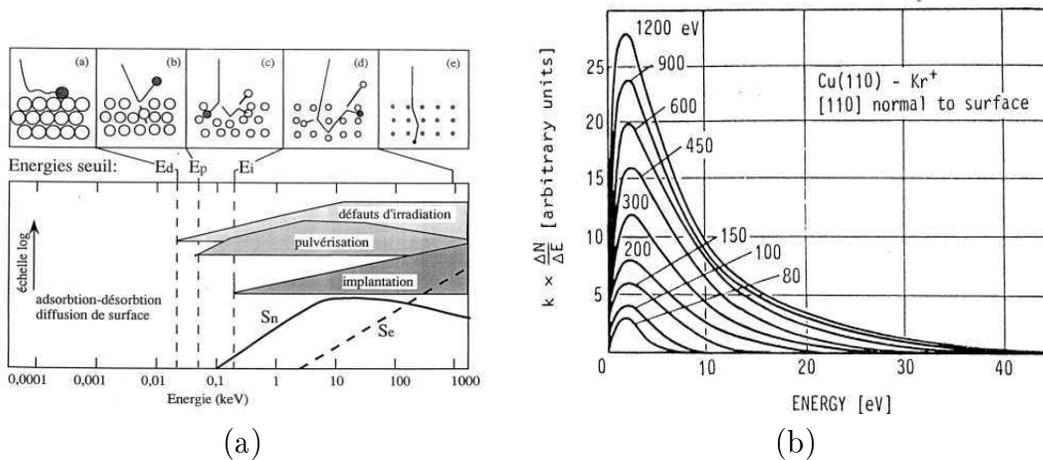


FIG. 14.8 – (a) Interactions Ions - Matière. (b) Distribution énergétique des atomes arrachés pour plusieurs valeurs de l’énergie incidente.

En conclusion, utiliser un dépôt de pulvérisation ionique présente de multiples avantages. Des matériaux de différentes natures sont déposés : éléments purs, molécules ou agrégats... La vitesse de pulvérisation est faible et l'ajout de gaz réactif doit être contrôlé très précisément pour ne pas avoir des couches absorbantes et pour avoir un plasma correct.

Nous présentons, dans les paragraphes suivants, les différentes sous parties du système de pulvérisation permettant de réaliser les dépôts.

### 14.2.3 Le pompage

L'enceinte de pompage est une cloche VEECO réhabilitée, de 100 litres pour un diamètre de 40 cm et une hauteur de 80 cm représentée ci-dessous sur la figure 14.9. Il s'agit donc d'un système ancien que nous avons reconfiguré.

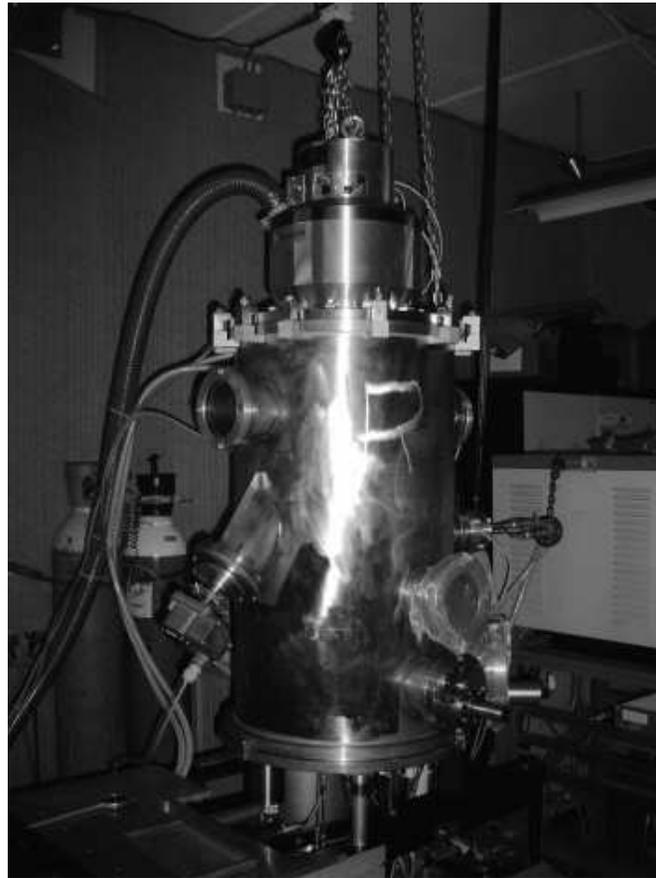


FIG. 14.9 – Enceinte à vide.

L'enceinte est préalablement portée à basse pression et cette pression est conservée dans la mesure du possible au cours du dépôt. Pour contrôler la pression, deux jauges sont disponibles : une jauge pour mesurer une pression moyenne ( $1$  à  $10^{-3}$  Torr), et une jauge ionique pour mesurer des pressions plus poussées de l'ordre de  $10^{-6}$  Torr.

La première jauge est un manomètre à thermocouple. Ce dernier est soudé au milieu d'un filament spiralé chauffé à puissance constante. Si la pression baisse, les échanges thermiques refroidissant le thermocouple décroissent, la température s'élève et la tension recueillie croît. Cette tension mesurée est donc représentative de la pression. Les deux principaux avantages de cette jauge sont un comportement idéal pour les variations lentes de pression et une bonne tenue à la pression atmosphérique.

La seconde jauge est un manomètre de Bayard-Alpert, ou manomètre à cathode chaude, dont le fonctionnement est basé sur le principe de l'ionisation des molécules de gaz, qui résultent de l'impact émis par un filament chauffé. Le dépôt des ions sur le collecteur donne un courant positif qui est proportionnel à la pression pour une température constante. Il présente l'avantage d'avoir une très grande précision, un très simple emploi et une facilité d'adaptation. Cette jauge mesure le vide de  $10^{-3}$  à  $10^{-10}$  Torr.

Le pompage s'effectue à l'aide de deux pompes : une pompe primaire et une pompe secondaire. La pompe primaire est une pompe à palette [44]. Le pompage s'effectue à l'aide d'un cylindre désaxé qui tourne dans un autre cylindre avec des palettes montées sur des ressorts. La pompe primaire permet dans un premier temps d'atteindre un vide de  $10^{-3}$  Torr dans l'enceinte du bâti.

La pompe secondaire est une pompe turbo moléculaire de Pfeiffer Vacuum de type TPH 2101 UP. Cette pompe possède une grande vitesse de pompage [45] [46]. Elle fonctionne comme un réacteur. Des hélices tournent à très grande vitesse (525 Hz) pour assurer le pompage. Celui-ci est propre et possède une grande répétabilité. Il est compatible avec des réactions chimiques et des gaz corrosifs. En outre, du fait du faible encombrement de la pompe, cette dernière peut être montée dans quasiment toutes les positions. Dans notre cas, la pompe est située au dessus de l'enceinte avec une bride de diamètre de 250 mm.

#### 14.2.4 Les panneaux d'affichage

Le contrôle de la majorité des paramètres s'effectue à l'aide des instruments de contrôle situés sur un rack (figure 14.10 (b)). Les deux unités supérieures affichent les grandeurs caractéristiques de l'alimentation du canon à ions. Nous avons ensuite en dessous à gauche le contrôleur de la pompe turbo moléculaire et à côté le contrôle de l'épaisseur. En dessous, c'est la commande principale du canon à ion. Enfin, dans la partie inférieure nous avons la commande des débitmètres.

#### 14.2.5 Le canon à ions

Nous présentons ci-dessous la photographie du canon à ions en situation de pulvérisation dans l'enceinte à vide (figure 14.10 (a)). Le canon à ions est composé d'une source ionique positive qui génère un plasma, composé d'électrons, d'ions positifs, d'ions négatifs, d'atomes et de molécules. Ce plasma est électriquement neutre, car l'apparition de champs électriques attirerait les particules chargées opposées, et le déséquilibre disparaîtrait. Ensuite, les ions positifs sont accélérés à travers une

optique d'extraction. Le faisceau est alors neutralisé par une autre source plasma négative. En sortie, nous avons donc un faisceau ionique neutre [47].

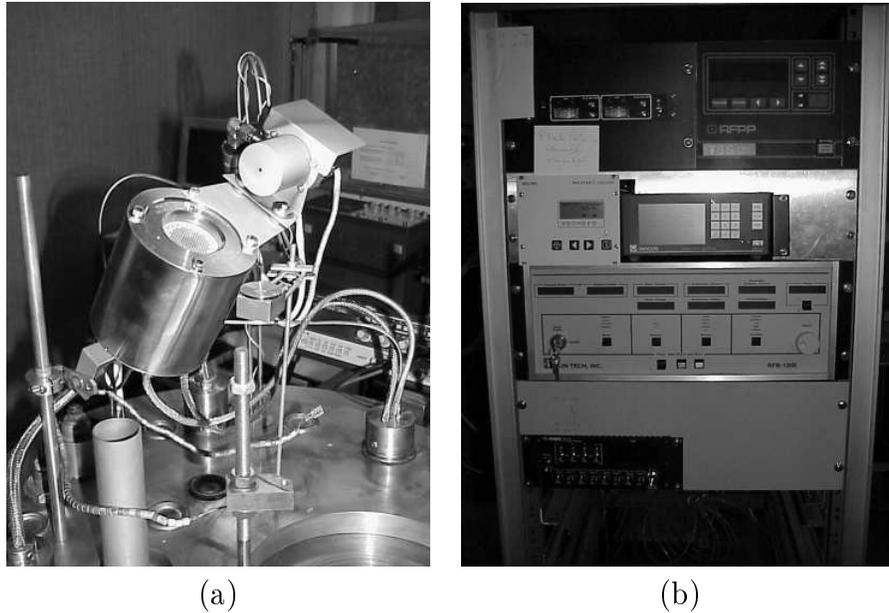


FIG. 14.10 – (a) Configuration du canon à ions. (b) Panneaux d'affichage et de contrôle de l'enceinte à vide.

### La source ionique

La source ionique est générée à partir d'un plasma de molécules d'argon. Une bobine est alimentée à une fréquence de 13,56 MHz pour générer des ondes radiofréquences, fréquence industrielle pour ne pas interférer avec les autres ondes radiofréquences. Concentriques au faisceau, ces ondes créent un champ électrique pour générer des électrons. Quand les électrons entrent en collision avec des molécules de gaz, ces dernières sont ionisées et des ions positifs apparaissent. L'énergie des électrons doit être plus grande que l'énergie ionique des molécules de gaz. Au début de la décharge, les ions primaires issus de la cathode sont accélérés par le champ électrique proche de la cathode et par l'énergie de ionisation des molécules de gaz. Ces électrons énergétiques entrent en collision avec les molécules de gaz, et génèrent des ions positifs avant qu'ils atteignent l'anode. Les ions positifs bombardent la surface de la cathode avec pour effet de générer des électrons secondaires de la surface de la cathode. Ces électrons secondaires augmentent l'ionisation des molécules de gaz et génèrent une autodécharge. En annexe C nous donnons une coupe détaillée de la source ionique, du diagramme électrique des tensions appliquées et de l'implantation générale du canon dans l'enceinte à vide. Ces schémas sont donnés par le constructeur.

Utiliser un canon à ions radiofréquence présente de multiples intérêts. L'absence de filament permet une durée de vie illimitée et une pollution réduite. En outre, le confinement des électrons et des ions dans des champs magnétiques élevés augmente la densité électronique. Le rendement de production d'ions est meilleur comparé à celui d'une source à courant continu.

### L'optique d'extraction

L'optique d'extraction est constituée de deux grilles percées qui sont polarisées pour attirer les ions positifs hors de l'enceinte où le plasma est généré. Ces grilles accroissent l'énergie ionique de sortie pour une même densité de courant d'ions neutres. La transparence d'une grille est de 40 – 50%, cela crée donc des zones de charge d'espace. Il faut s'assurer que le point de convergence du faisceau d'ions se situe après la cible. Les grilles focalisent le faisceau par des orifices décentrés. Les grilles peuvent être planes ou convexes. Dans notre cas, nous utilisons deux grilles en molybdène convergentes de focale 9,8 cm, et de diamètre 3 cm avec un demi-angle de divergence de 10 degrés. Sur la figure 14.11 nous présentons un schéma géométrique de l'optique d'extraction. Celle-ci est contaminée par le faisceau d'ions, par le gaz réactif et les atomes arrachés de la cible. Nous la nettoyons toutes les 1000 heures.

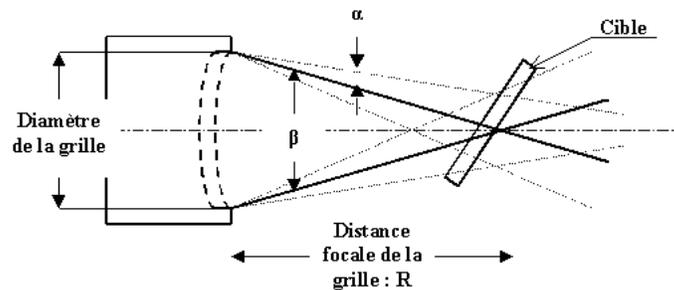


FIG. 14.11 – Optique d'extraction du faisceau d'ions du canon à ions.

### Le neutraliseur

Le neutraliseur permet de heurter la surface avec un faisceau neutre, dans le but d'éviter des problèmes de charges lors de l'impact du faisceau sur la cible, notamment avec une cible métallique. Il peut exister plusieurs types de compensateur : immergé, externe, pont à plasma et cathode creuse (voir figure 14.12). Les neutraliseurs à filaments sont à éviter. En effet dans ce cas, le filament est situé sur le parcours des ions, lesquels arrachent de la matière au filament polluant ainsi la cible, puis les couches déposées. Nous avons choisi un pont à plasma alimenté par de l'argon [48]. Le neutraliseur, excentré, envoie des électrons sur le trajet des ions. Les électrons, de plus faibles énergies, sont entraînés par les ions plus lourds et de plus fortes énergies.

Cela nous permet d'avoir une technologie simple pour le neutraliseur et nous permet d'utiliser la même bouteille d'argon.

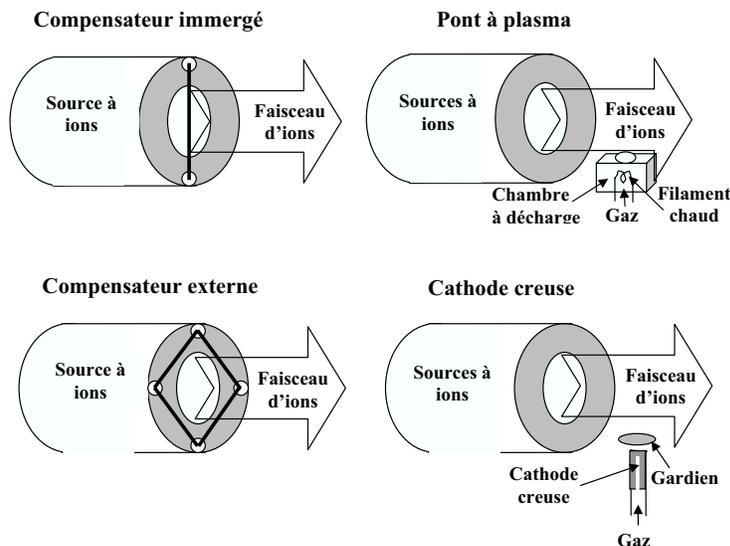


FIG. 14.12 – Les quatre principaux types de neutraliseurs : le compensateur immergé, le pont à plasma, le compensateur externe et la cathode creuse.

### Le contrôle du canon à ions

Le contrôle du canon à ions s'effectue au moyen de quatre modules d'affichage : un module d'affichage pour la source radiofréquence, les paramètres électriques du canon, de l'optique d'extraction et du neutraliseur (voir figure 14.10 (b)). Nous pouvons fonctionner avec différents modes pour limiter les paramètres d'accès à l'utilisateur [49]. Sur la figure 14.13, nous avons trois débitmètres pour le contrôle des gaz. Le premier permet de réguler le flux d'argon dans le canon à ions. Le second régule le flux d'argon pour le neutraliseur. Enfin, le troisième régule l'arrivée d'un gaz réactif, le dioxygène. Ce dernier est mis en action uniquement pour réaliser des dépôts de  $Ta_2O_5$ .

Ces contrôleurs se règlent en connaissant la nature du gaz et le débit maximum autorisé par le débitmètre. Pour cela, nous disposons de potentiomètre en face arrière. Après réglage de l'afficheur digital, nous visualisons directement le débit en sccm du gaz passant par le débitmètre. Nous définissons donc un facteur du contrôle d'échelle qui est égal au produit du facteur de mesure par le facteur correctif du gaz. Le facteur de mesure est donné par le constructeur, en fonction de la capacité maximale du contrôleur de débit. Pour un débitmètre de débit maximum de 20 sccm il est de 200, pour un débit de 50 sccm il est de 50. Le facteur correctif de gaz indique le rapport, pour différents gaz, qui produira la même tension de sortie du contrôleur.

Pour l'argon il est de 1,39 et pour l'oxygène de 0,993. Ainsi les facteurs du contrôle d'échelle sont :

- 278 pour l'argon du neutraliseur, débitmètre 20 sccm,
- 49,65 pour l'oxygène du canon, débitmètre 50 sccm,
- 70 pour l'argon du canon, débitmètre 50 sccm.

Enfin, contrôler le débit des différents gaz est primordial. Dans un premier temps, cela permet tout simplement de pouvoir démarrer le canon à ions. Ensuite, cela influe directement sur la vitesse de dépôt et sur la nature de la couche mince optique.

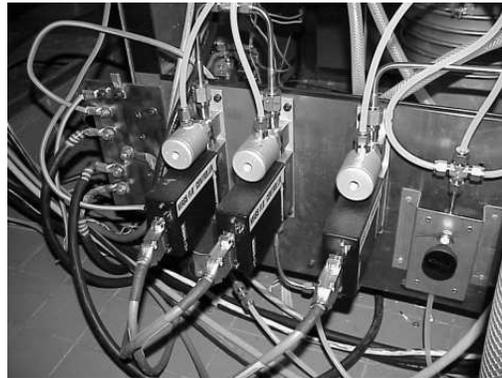


FIG. 14.13 – Photographie des trois débitmètres (Mass Flow Controller).

Le réglage des pressions partielles de gaz est nécessaire. Par exemple, une pression trop élevée de dioxygène va augmenter l'indice du matériau déposé mais va aussi augmenter l'absorption de la couche mince. Il nous faut donc réaliser un étalonnage préalable grâce aux mesures de réflexion et de transmission de la couche. Après validation planaire de l'expérience les débits de gaz retenus sont :

- **pour l'aluminium :**
  - 4 sccm pour l'arrivée d'Argon dans le canon,
  - 5 sccm pour l'arrivée d'Argon dans le neutraliseur,
- **pour la silice :**
  - 4 sccm pour l'arrivée d'Argon dans le canon,
  - 5 sccm pour l'arrivée d'Argon dans le neutraliseur,
- **pour le pentoxide de tantale :**
  - 4 sccm pour l'arrivée d'Argon dans le canon,
  - 5 sccm pour l'arrivée d'Argon dans le neutraliseur,
  - 7 sccm pour l'arrivée de dioxygène dans le canon.

### 14.2.6 Le porte cible

Le porte cible est un cube refroidi à l'eau de 10 cm de côté, qui est positionné latéralement par rapport au bâti. Sur ces quatre faces nous pouvons accrocher quatre cibles différentes à pulvériser. Actuellement, une cible métallique d'aluminium (Al)

et deux cibles diélectriques de pentoxyde de tantale ( $Ta_2O_5$ ) et de silice ( $SiO_2$ ) y sont accrochées. Ce cube tourne autour d'un axe à partir de l'extérieur, photographié sur la figure 14.14. Nous pouvons choisir différents matériaux au cours de la pulvérisation.

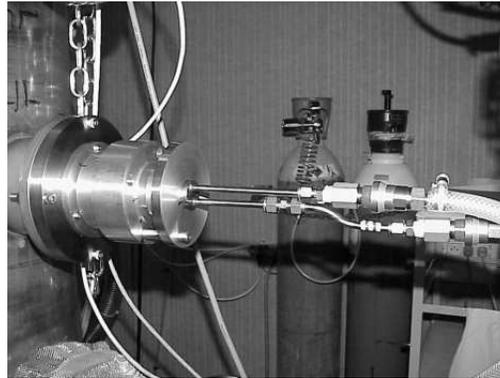


FIG. 14.14 – axe de rotation du porte cible refroidi à l'eau et réglable tous les  $90^\circ$  pour changer la nature de la cible.

### 14.2.7 La microbalance à quartz

La microbalance à quartz contrôle la quantité et la vitesse de dépôt de la matière pulvérisée [50]. Elle est placée au voisinage du substrat pour que l'épaisseur déposée soit identique. Le quartz se calibre en fonction de différents matériaux mais aussi en fonction des distances entre le quartz et la cible, et, la cible et le substrat. C'est un système oscillant basé sur le changement de fréquence de résonance d'un quartz refroidi lors d'une surcharge en poids. La variation de fréquence de résonance du quartz est proportionnelle à la masse déposée sur sa face. Nous pouvons ainsi déterminer l'épaisseur effectivement déposée sur le substrat.

## 14.3 Essais par Sputtering sur substrats plans : mise au point du procédé

Nous mettons, ici, au point le procédé d'élaboration des matériaux sur substrats plans. Les premières validations ont consisté à vérifier que le vide limite et la vitesse de pompage étaient suffisants. Nous sommes arrivés à un vide de  $5 \cdot 10^{-7}$  Torr. Ensuite, après avoir équipé l'enceinte du canon à ion et des contrôleurs de gaz, nous avons testé tous les cas de la Data Sheet fournie par Pfeiffer Vacuum (voir figure 14.15). Cela nous a permis de vérifier que le canon était en état de fonctionner correctement avec les données du constructeur.

14.3. ESSAIS PAR SPUTTERING SUR SUBSTRATS PLANS

Source Run Data Sheet

Customer: Vesco SAC Source Size: 3 cm RF Grid Type: M0 Conv  
 Order #: 2001-0320 Source S/N: 2639 Grid S/N: 4446  
 Test Date: 7-19-01 Vac. Sys. for test: 10" cryo Power Supply: 12-00  
 Technician: RR

Memory #	Beam		Accelerator		Source RF Power		P <sub>SN</sub> RF Neutralizer		Source Position		Gas Flow		Chamber		
	Current mA	Voltage V	Current mA	Voltage V	Forward w.	Reflected w.	Emission mA	Forward w.	Reflected w.	Capacitor Load mV	Tune mV	Source sccm	Neutralizer sccm	Target sccm	Pressure Torr
	10	100	1	400	38	0	13	10	4.66	2270	2096	4.0	5.0		11-4
	20	150	2	500	58	0	25	10	4.66	2200	2240				
	30	150	3	700	81	2	37	10	4.66	2200	2350				
	20	250	1	450	60	3	25	10	4.76	2200	2200				
	30	250	2	600	82	3	38	13	4.68	2220	2340				
	20	500	1	200	56	0	26	10	4.72	2410	2210				
	40	500	3	500	99	2	50	10	4.72	2420	2440				
	60	500	5	800	147	3	76	10	4.74	2530	2610				
	50	750	3	450	123	5	63	10	4.72	2350	2510				
	75	750	5	750	187	5	95	10	4.76	2490	2710				
	20	1000	1	200	49	0	25	10	4.72	2420	2140				
	40	1000	2	100	95	4	51	10	4.72	2280	2410				
	60	1000	4	300	147	3	76	10	4.76	2370	2600				
	80	1000	6	500	204	6	100	10	4.76	2500	2760				
	20	1200	1	200	49	0	26	10	4.72	2420	2140				
	40	1200	2	100	87	2	51	16	4.72	2360	2386				
	60	1200	3	200	181	7	76	10	4.76	2100	2680				
	80	1200	5	350	209	6	101	11	4.76	2480	2780				

RF Source RF Neutralizer Data Sheet Revision A 6-30-99

FIG. 14.15 – Data sheet Constructeur : Pfeiffer Vacuum.

Ensuite, nous avons paramétré le canon à ions avec les valeurs suivantes. La puissance envoyée par la source Radiofréquence est de l'ordre de 100 W et celle reçu par la source de l'ordre de 5 W. La tension du faisceau d'ions émis est 1100 V pour un courant de 5mA. La tension accélératrice est de 100 V entre les deux grilles. Le neutraliseur quant à lui émet des électrons grâce à une tension de 10 V et un courant maximum de filament de 6,5 A. Toutes ces valeurs sont des grandeurs caractéristiques du canon à ions et nous permettent de réduire ou d'accélérer le processus de dépôt pour essayer de faire des couches minces avec une bonne stœchiométrie.

### 14.3.1 Uniformité de l'indicateur de matière

Pour analyser l'uniformité de l'indicateur de matière issue de la cible, nous réalisons plusieurs expériences en changeant l'inclinaison de la cible par rapport au faisceau d'ions incident. Nous positionnons en conséquence des plaques de silice au niveau du plan substrat et nous inclinons la cible. Les plaques sont positionnées de deux manières différentes : soit directement sur le plan substrat, soit au dessus de celui-ci (voir figure 14.16). Après dépôt, l'aspect coloré non uniforme de la lame est un indicateur de la non uniformité qu'on peut caractériser plus avant à l'aide de mesures spectrophotométriques. En mesurant la transmission en plusieurs points longitudinaux et transversaux de la lame, nous remarquons une variation d'épaisseur de la couche diélectrique déposée. Nous pouvons situer sur la lame le lieu où nous avons le maximum d'épaisseur. C'est ce point qui nous permettra d'optimiser notre dépôt et d'accroître notre vitesse de pulvérisation. Par conséquent, nous centrons notre système vibrant sur ce maximum.

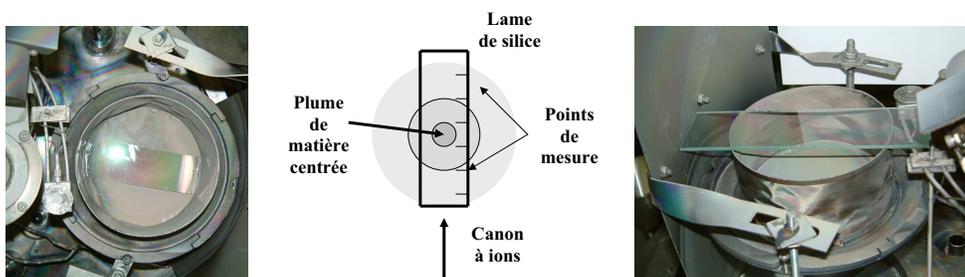


FIG. 14.16 – Mise en place d'une lame de silice au voisinage du " plan substrat " pour l'étude de l'uniformité : (a) lame de verre sur le plan substrat, (b) positionnement schématique de la lame, (c) lame de verre surélevée au niveau de la microbalance au quartz.

### 14.3.2 Indice et absorption des couches minces

Pour déterminer les paramètres de gaz et surtout la pression partielle en dioxygène utile pour le dépôt de  $Ta_2O_5$ , il nous faut réaliser une étude sur des couches

Beam Current (mA)	60	Source RF Power Forward (W)	116
Beam Voltage (V)	1200	Source RF Power Reflected (W)	4
Accelerator Current (mA)	3	Neutralizer (mA)	76
Accelerator Voltage (V)	200	Neutralizer (V)	11

TAB. 14.1 – Paramètres du canon à ions utilisés pour déposer une couche de  $SiO_2$  sur substrat Hoya.

planaires. Cela est aussi nécessaire pour déterminer l'épaisseur réellement déposée au niveau de notre substrat. Nous réalisons donc des dépôts avec nos matériaux : Al,  $SiO_2$  et  $Ta_2O_5$ . Ensuite, pour les diélectriques nous mesurons a posteriori les coefficients de réflexion et de transmission dans le but de déterminer l'épaisseur et l'indice du matériau déposé, tout en cherchant à minimiser l'absorption.

### Dépôt de $SiO_2$ sur substrat Hoya

Après de nombreux réglages, nous avons déposé une couche de  $SiO_2$  à une vitesse de  $1,74 \text{ \AA/s}$  sur un substrat de type Hoya d'indice 1,7. Les débits d'argon étaient égaux à 4 sccm dans le canon et à 5 sccm dans le neutraliseur. Les paramètres du canon sont représentés dans le tableau ci-dessous (14.1). Nous avons augmenté les paramètres annoncés pour gagner en vitesse de pulvérisation sur ce résultat.

La pression de l'enceinte était de  $2.10^{-4}$  Torr et l'expérience a duré deux heures. A partir des mesures de réflexion et de transmission *ex situ* (voir figure 14.17 (a)), nous avons déterminé grâce au logiciel développé au laboratoire, l'épaisseur de la couche diélectrique et l'indice réel (voir figure 14.17 (b)) avec sa dispersion. L'épaisseur trouvée est de 1252,4 nm. Notons que le substrat de haut indice (Hoya) est nécessaire pour la mesure de bas indice, compte tenu du faible contraste attendu sur substrat de silice. Nous avons donc une vitesse acceptable de  $1,74 \text{ \AA/s}$ . Cette vitesse est plus lente que pour une évaporation classique par E.B.D., de l'ordre de 3 à  $4 \text{ \AA/s}$  pour les couches déposées à l'Institut Fresnel et du même ordre de grandeur dans la littérature [?].

La couche déposée possède un indice correct, variant de 1,51 à 1,497 entre 400 et 800 nm, ceci est également en accord avec la littérature [51]. Quant à l'absorption, elle est inférieure à 1% et ceci nous convient pour cette première application.

### $Ta_2O_5$ sur substrat K5

Le dépôt de  $Ta_2O_5$  est plus complexe du fait d'un paramètre supplémentaire : la pression partielle de dioxygène. Grâce à une cible de Tantale, et avec ajout de dioxygène, il est possible de réaliser des couches minces de  $Ta_2O_5$  avec une bonne stoechiométrie. Le débit d'oxygène doit être réglé minutieusement pour avoir d'une part une couche non absorbante, et d'autre part une couche avec un indice suffisamment élevé. Avec un débit de dioxygène de 6 sccm dans le canon, de 4 sccm d'argon

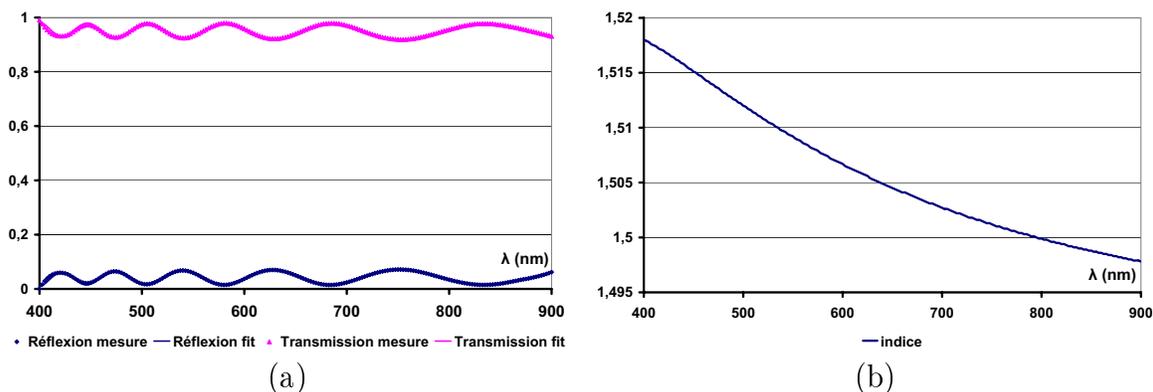


FIG. 14.17 – (a) Transmission et réflexion spectrales d’une couche de  $SiO_2$  sur substrat de Hoya d’épaisseur 1252,4 nm. (b) Indice de la couche de  $SiO_2$  en fonction de la longueur d’onde.

dans le canon et de 5 sccm dans le neutraliseur, nous avons réalisé une couche de pentoxyde de tantale tout à fait satisfaisante, avec une vitesse de pulvérisation de 2,31 Å/s. Les paramètres du canon sont reportés dans le tableau 14.2.

Beam Current (mA)	59	Source RF Power Forward (W)	109
Beam Voltage (V)	1200	Source RF Power Reflected (W)	3
Accelerator Current (mA)	4	Neutralizer (mA)	76
Accelerator Voltage (V)	200	Neutralizer (V)	15

TAB. 14.2 – Paramètres du canon à ions utilisés pour déposer une couche de  $Ta_2O_5$  sur substrat K5.

La pression de l’enceinte est de  $2 \cdot 10^{-4}$  Torr et l’expérience a duré une heure. L’épaisseur déposée, déterminée a posteriori par spectrophotométrie, est de 832,1 nm. Comme précédemment, à partir des mesures de réflexion et de transmission (voir figure 14.18 (a)) nous déterminons l’épaisseur de la couche diélectrique et l’indice réel avec dispersion (voir figure 14.18 (b)). L’absorption est toujours inférieure à 1%.

## Aluminium

Nous avons également réalisé des dépôts métalliques d’aluminium, mais la détermination des indices complexes est alors plus délicate. Nous déterminons ces indices à l’aide de la méthode R R’ [52] consistant à mesurer le coefficient de réflexion des deux cotés de l’échantillon. Cette méthode nous donne des indices reproductibles de l’aluminium avec leur dispersion.

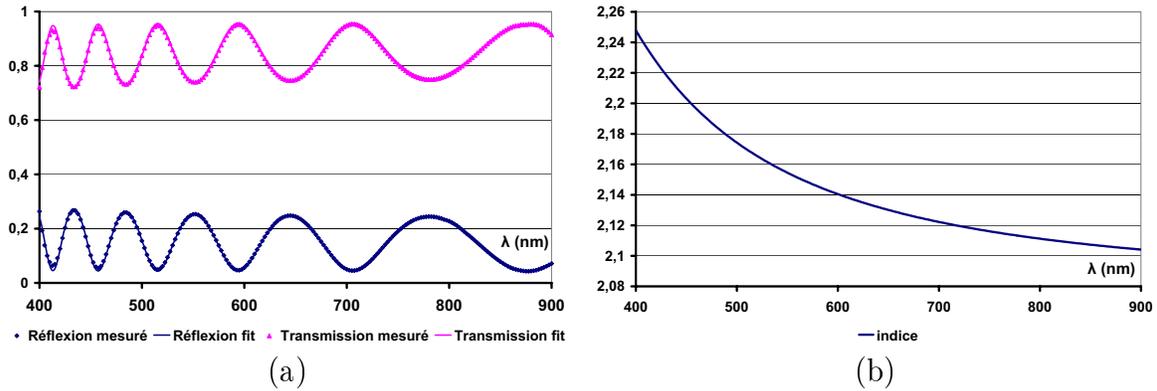


FIG. 14.18 – (a) Transmission et réflexion spectrales d'une couche de  $Ta_2O_5$  d'épaisseur 832,1 nm sur substrat de verre K5. (b) Indice de la couche de  $SiO_2$  en fonction de la longueur d'onde.

## 14.4 Dépôts sur microsphères

### 14.4.1 Configuration spécifique

Pour la configuration avec les microsphères, l'enceinte à vide se présente comme sur la figure 14.19. Le canon à ions arrache de la matière à la cible. La matière est ensuite pulvérisée sur les microsphères mises en mouvement grâce au système vibrant.

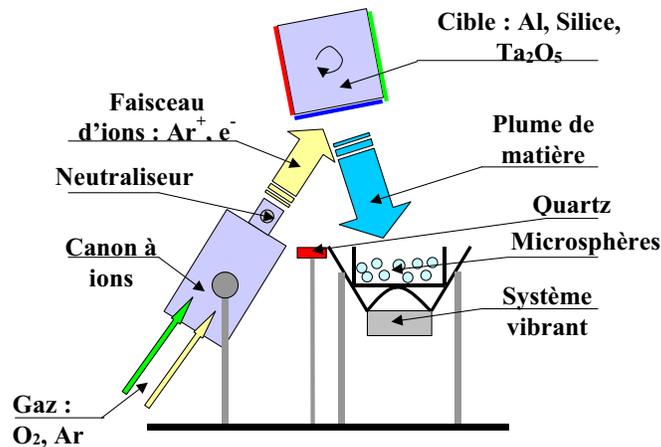


FIG. 14.19 – Configuration de l'enceinte à vide avec les microsphères.

Nous utilisons un haut parleur avec un générateur de basse fréquence comme système vibrant. L'amplitude est réglée au maximum et la fréquence est ajustée en fonction de la taille des sphères. En effet, le poids est différent et le mouvement des

billes à l'intérieur du haut parleur est lié à la fréquence. Nous supposons dans une première étape que les sphères sont traitées uniformément vu le mouvement aléatoire des sphères dans le panier solidaire de la membrane du haut parleur. Nous pouvons contrôler ceci de différentes manières, la plus simple étant une observation visuelle en première approche. Ensuite, nous observons nos échantillons au microscope et nous réalisons différentes mesures (tirages aléatoires de sphères traitées).

### 14.4.2 Détermination du temps de dépôt sur substrat sphérique

Le problème majeur se situe au niveau de l'étalonnage du contrôle des épaisseurs déposées sur les sphères. Pour un substrat plan, on fait appel classiquement à une microbalance à quartz ou pour plus de précision à un contrôle optique. Ces contrôles classiques nous permettent, en disposant lors d'une expérience préalable un substrat plan à l'endroit du haut parleur, de connaître l'épaisseur  $e$  déposée sur substrat plan au cours d'un temps  $T$ . Pour apprécier l'épaisseur  $e$  déposée dans les mêmes conditions sur les microsphères, nous ferons l'hypothèse grossière que la même quantité de matière se retrouve sur la surface *équivalente* des sphères, c'est-à-dire la surface d'une sphère multipliée par le nombre  $N$  de sphères. Le rapport des épaisseurs s'écrit alors comme

$$\frac{e_1}{e_2} = \frac{N_2}{N_1} \left( \frac{r_2}{r_1} \right)^2. \quad (14.1)$$

Par ailleurs, nous utilisons la même fiole pour fixer la quantité de sphères indépendamment de leur diamètre, ce qui impose, en négligeant les interstices (volume constant)

$$\frac{N_1}{N_2} = \left( \frac{r_2}{r_1} \right)^3, \quad (14.2)$$

et donc

$$\frac{e_1}{e_2} = \frac{r_1}{r_2}. \quad (14.3)$$

Le rapport des épaisseurs déposées est ainsi donné par le rapport des rayons. Toutefois ce calcul est approximatif et a simplement ici pour but de nous sensibiliser à ce problème. Il est aussi majeur de comparer ces épaisseurs  $e_i$  à celle  $e_p$  déposée pendant la même durée sur un substrat plan, mais il faut alors tenir compte de la surface  $S$  d'interaction sphères/matière pulvérisée. Plus celle-ci est grande, plus l'épaisseur déposée sur les sphères est grande :

$$\frac{e_i}{e_p} = \frac{1}{3} \frac{S}{v} r_i. \quad (14.4)$$

où  $v$  désigne le volume de la fiole. On a donc intérêt à avoir une très bonne uniformité du flux de matière.

Les photographies suivantes (figure 14.20) concernent tout d'abord des collections de sphères avant dépôt, de diamètre  $130\ \mu\text{m}$  et  $30\ \mu\text{m}$ . On reconnaît l'aspect blanchâtre ou laiteux des particules à petits diamètres, celles à grands diamètres étant essentiellement transmissives (voir parties théoriques).

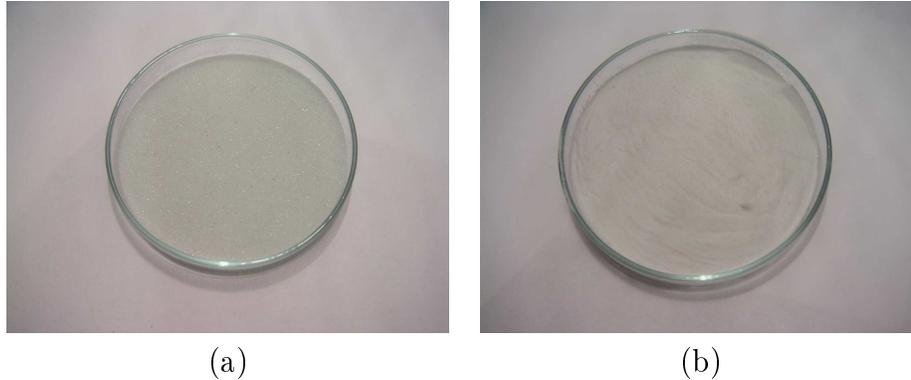


FIG. 14.20 – Sphères de  $130\ \mu\text{m}$  (a) et de  $30\ \mu\text{m}$  (b) non traitées.

Sur ces deux types de sphères nous avons déposé de l'aluminium avec notre technique, pendant la même durée  $T$  sur les sphères de  $130\ \mu\text{m}$  (figure 14.21 (a)) et de  $30\ \mu\text{m}$  (figure 14.21 (b)). Les résultats montrent bien que la quantité de matière déposée sur les petites sphères ( $30\ \mu\text{m}$ ) est inférieure à celle déposée sur les grandes sphères ( $130\ \mu\text{m}$ ). D'après les calculs précédents, le rapport théorique des épaisseurs devrait être proche de quatre, ce qui correspond au bon ordre de grandeur vu que la couche métallique est opaque à partir de  $80\ \text{nm}$ . Toutefois nous n'avons pas pu quantifier les épaisseurs déposées.

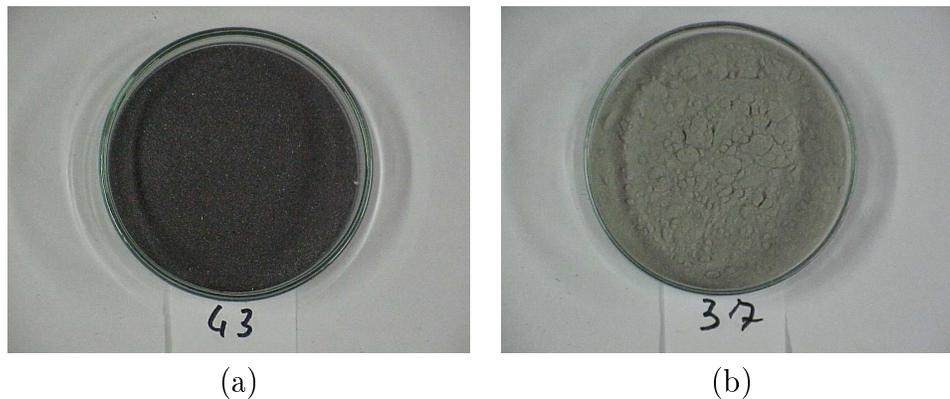


FIG. 14.21 – Sphères de  $130\ \mu\text{m}$  (a) et  $30\ \mu\text{m}$  (b) recouvertes d'une couche d'aluminium pendant la même durée  $T$  ( $45\ \text{min}$ ).

## 14.5 Conclusion

Grâce à ce dispositif, nous sommes désormais en mesure de réaliser des dépôts sur microsphères. Le contrôle *in situ* des épaisseurs déposées n'est pas encore élaboré (bien que nous ayons envisagé un contrôle par diffusion), mais cela devrait suffire pour notre étude de faisabilité. Dans le chapitre suivant nous présentons nos premiers résultats et caractérisations associées.

# Chapitre 15

## caractérisation de dépôts sur sphères

### 15.1 Uniformité du revêtement sur microsphères

Dans le chapitre précédent, nous avons montré que nous savions réaliser des dépôts diélectriques ou métalliques avec les performances optiques attendues, et une configuration spécifique a été mise en place pour revêtir des microsphères. La première question concerne l'uniformité des dépôts sur sphères, laquelle dépend du caractère aléatoire du mouvement des particules, et donc de la fréquence de vibration de la membrane. Pour donner une première réponse à cette question, nous avons réalisé le dépôt de couches opaques d'aluminium sur une quantité importante (4 millions) de microsphères de diamètre 130 microns. Le résultat visuel (figure 15.1) montre clairement que toutes les sphères ont été recouvertes, ce qui indique en premier lieu une bonne uniformité et donc un caractère suffisamment aléatoire des particules pour la fréquence de vibration choisie.

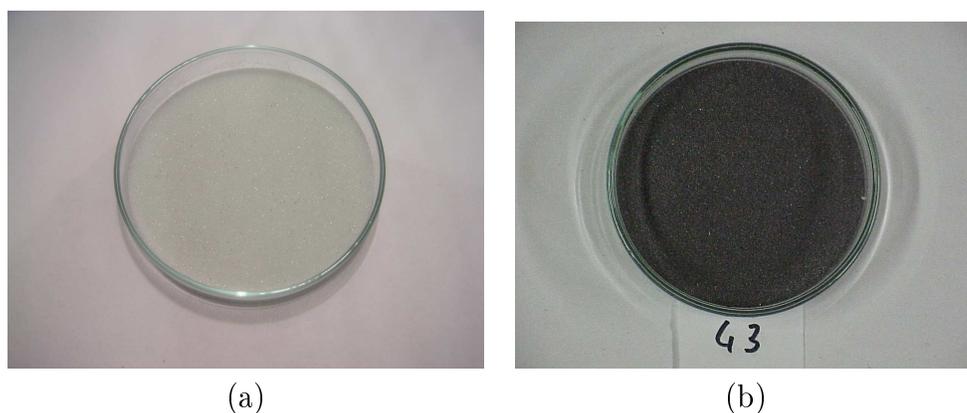


FIG. 15.1 – Sphères de 130  $\mu\text{m}$  de diamètre non traitées (a) et recouvertes d'une couche d'aluminium (b).

De la même façon, des dépôts diélectriques ont été réalisés sur le même type de sphères. Le cas de  $Ta_2O_5$  est illustré en figure 15.2. Dans tous les cas nous

pouvons donc conclure que notre procédé est adapté au traitement de microsphères en quantité, et il nous faut maintenant nous intéresser à une caractérisation fine (profils spectraux, diffusion...). Dans ce but nous commencerons par présenter les différents outils disponibles au laboratoire.



FIG. 15.2 – Sphères de  $130\ \mu\text{m}$  de diamètre recouverte d'une couche de  $Ta_2O_5$ .

## 15.2 Outils de caractérisation

### 15.2.1 Diffusomètre à source laser

Le diffusomètre est un appareil de mesure majeur au sein de l'équipe *MAP*<sup>2</sup>. Il permet d'enregistrer dans chaque direction de l'espace, l'intensité de la lumière diffusée par un échantillon. La diffusion de la lumière par un composant optique est due à la présence d'irrégularités de structure à la surface des dioptres qui le délimitent, ou dans le volume qui le constitue. De ce fait, le flux lumineux diffusé par une surface optique transporte des informations relatives à la microstructure du composant et peut donc constituer un outil puissant de caractérisation [53] [54] [55] [56] [57] [58] [59] [60].

Nous détaillons dans un premier temps le fonctionnement et les principales limites du système. Ensuite, nous exploitons les caractéristiques de cet appareil pour mesurer le flux diffusé par les microsphères, soit de manière isolée ou soit groupée dans une fiole.

L'enregistrement et le déplacement du bras de mesure sont automatisés. La principale difficulté est de diminuer la lumière parasite pour avoir la plus grande dynamique possible. Nous utilisons pour ce faire des puits à lumière pour éliminer les flux réfléchis et transmis de l'échantillon. La figure 15.3 montre le banc de diffusion angulaire. Les sources lumineuses sont des lasers dont la plage spectrale s'étend de l'Ultra Violet ( $325\ \text{nm}$ ) jusqu'au moyen Infra Rouge ( $10,6\ \mu\text{m}$ ). Pour étudier les microsphères nous utilisons un laser Hélium Néon émettant à  $632,8\ \text{nm}$ . Le diamètre du faisceau laser est proche de  $3\ \text{mm}$ . Ensuite, une partie du faisceau incident est

prélevée par une lame séparatrice prismatique vers un détecteur de référence. Ce signal de référence permet de s'affranchir d'éventuelles fluctuations de la source.

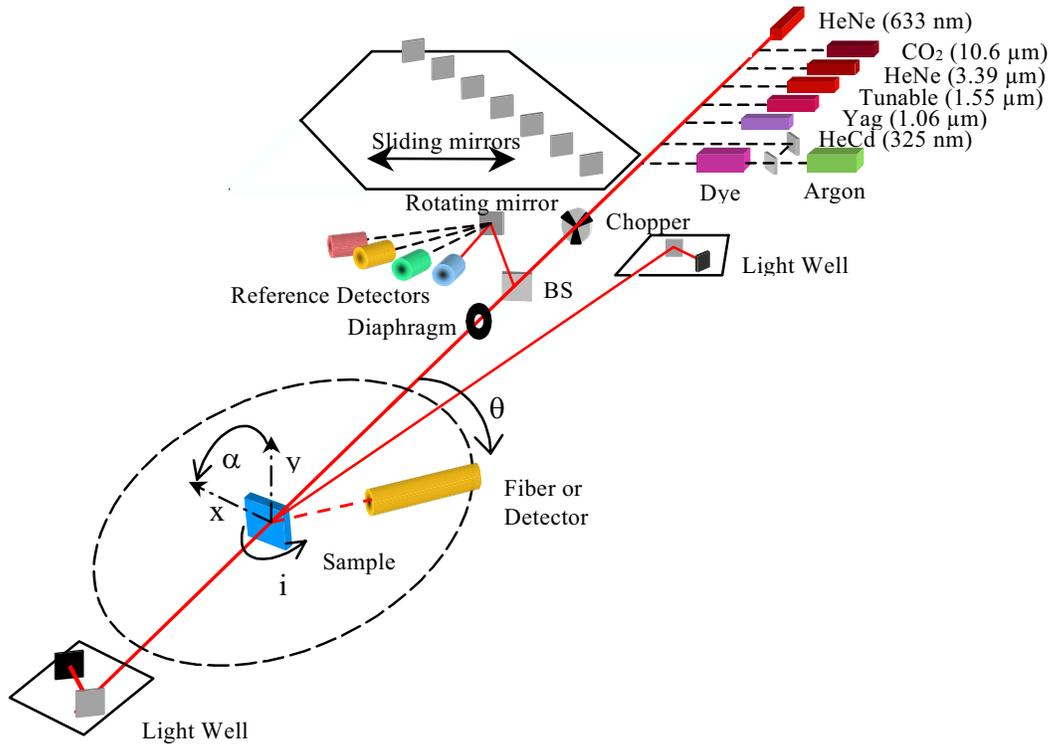


FIG. 15.3 – Schéma de principe du Diffusomètre à Grande Dynamique.

L'échantillon est placé dans un porte échantillon entièrement automatisé. Le porte échantillon peut s'orienter suivant les angles  $\alpha$  et  $i$  et se traduire suivant les axes  $\vec{Ox}$  et  $\vec{Oy}$  (voir figure 15.4). Pour mesurer les signaux de référence et de diffusion nous disposons d'un double jeu de détecteurs appropriés à la longueur d'onde de mesure mais aussi au flux. Nous utilisons, suivant nos échantillons, un photomultiplicateur et une photodiode pour le domaine du visible. Le bras de mesure tourne dans le plan d'incidence du système  $\theta$ . Sur celui-ci est fixée une fibre optique directement reliée au détecteur.

Suivant que la fibre est placée près de l'échantillon ou à l'extrémité du bras, nous n'avons pas le même angle solide de détection. Cela permet de réaliser des mesures précises angulairement car le bras à une longueur maximale de 80 cm. Le positionnement de la fibre optique sur le bras de mesure se fait en fonction des niveaux de diffusion, des performances des détecteurs et de la résolution angulaire requise.

L'étalonnage du diffusomètre s'effectue à l'aide d'un diffuseur étalon lambertien, qui redistribue de manière isotrope dans le demi-espace situé au-dessus de cette

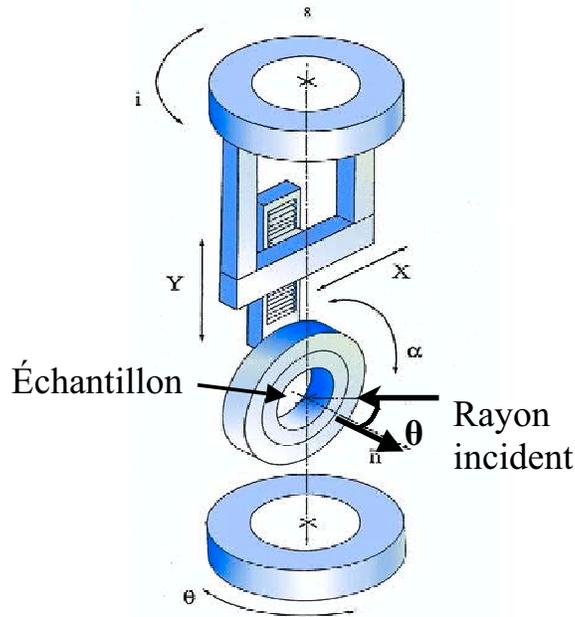


FIG. 15.4 – Porte échantillon du diffusomètre.

surface la totalité du flux lumineux incident. En conséquence, la luminance ou BRDF (Bidirectional Reflectance Distribution Function) d'un diffuseur lambertien parfait a pour expression :

$$BRDF(\theta, \varphi) = \frac{1}{\pi} \quad (15.1)$$

Notons que cette grandeur est ici reliée à l'intensité diffusée par unité d'angle solide, normée au flux incident, par la relation

$$I = BRDF(\cos \theta). \quad (15.2)$$

Pour que l'appareil délivre une valeur absolue de l'intensité diffusée par un échantillon, il faut l'étalonner, c'est-à-dire déterminer la constante  $C$  qui permet de relier le signal mesuré  $V(\theta, \alpha)$  à la caractéristique choisie pour quantifier la diffusion, à savoir l'intensité  $I(\theta, \alpha)$ .

Lors d'une opération de caractérisation d'un échantillon, nous enregistrons à tout instant le rapport des tensions délivrées dans chaque direction  $(\theta, \alpha)$  par les détecteurs de mesure et de référence, c'est-à-dire le rapport  $\eta$  défini par l'expression

$$\eta(\theta, \alpha) = V(\theta, \alpha)/V_{ref}(\theta, \alpha) \quad (15.3)$$

L'intensité diffusée est alors donnée par  $I(\theta, \alpha) = C \cdot \eta(\theta, \alpha)$ .

La constante d'étalonnage  $C$  est déterminée à l'aide d'un échantillon étalon de

type lambertien dont la diffusion totale  $D_e$  est connue, par mesure de l'intensité diffusée dans un plan et application de la relation

$$C = \frac{D_e}{\int_{\theta} \int_{\varphi} \eta_e(\theta, \alpha) \sin(\theta) d\theta d\varphi} \quad (15.4)$$

où  $\eta_e$  désigne les valeurs prises par le rapport mesure/référence dans le cas de cet étalon. La valeur de la diffusion totale de cet échantillon a été déterminée par le *U.S National Institute of Standards and Technology*. Elle est supérieure à 95% dans un domaine de longueurs d'onde allant de 0,4 à 2,5  $\mu m$ . Elle vaut très précisément 0,998 à 0,633  $\mu m$ . Notons enfin que la valeur de la diffusion de cet échantillon étalon n'est pas garantie dans l'infrarouge moyen (10,6  $\mu m$ ), ce qui peut être une source de difficultés dans le cas où l'on souhaite réaliser des mesures précises à ces longueurs d'onde.

Une autre configuration particulièrement utile pour caractériser un diffusomètre est la valeur du signal enregistré en l'absence de tout objet diffusant : on appelle la BRDF correspondante réponse à vide du diffusomètre, ou niveau de bruit, et parfois seuil de détectivité. La dynamique de mesure d'un diffusomètre est en toute rigueur le rapport entre la réponse enregistrée à l'aide d'un diffuseur lambertien parfait et la réponse à vide. Par abus de langage, on confond souvent cette notion avec l'inverse de la réponse à vide. La dynamique de détection de ce même diffusomètre est quant à elle définie comme le rapport entre le plus grand signal optique mesurable (par exemple la réflexion spéculaire sur un miroir Rmax) et la réponse à vide.

Nous disposons d'un échantillon non absorbant (un lambertien) dont la réponse angulaire est connue et suit une loi en  $\cos(\theta)$ . En effectuant une interpolation par la méthode des moindres carrées, nous arrivons à déterminer la constante d'étalonnage qui nous permet alors d'accéder à l'intensité diffusée et non plus à une valeur mesurée en tension.

Enfin, comme les flux mesurés en diffusion sont extrêmement faibles la minimisation de la lumière parasite est obligatoire. Une première étape consiste à piéger la lumière réfléchie et transmise par l'échantillon dans des puits à lumière. La dynamique de l'appareillage dépend aussi de la longueur d'onde, de la puissance incidente et du seuil de détectivité ainsi que tous les bruits électroniques des appareils. Pour limiter l'effet de la lumière parasite un système de détection synchrone augmente le rapport signal sur bruit et élimine la lumière ambiante. En figure 15.5 ci-dessous on donne la réponse du lambertien étalon et la mesure à vide du système, pour illustrer la dynamique du système.

### 15.2.2 Diffusomètre à source blanche

Nous avons vu que le diffusomètre à grande dynamique décrit au paragraphe précédent permettait d'enregistrer l'indicatrice de diffusion d'un échantillon pour un

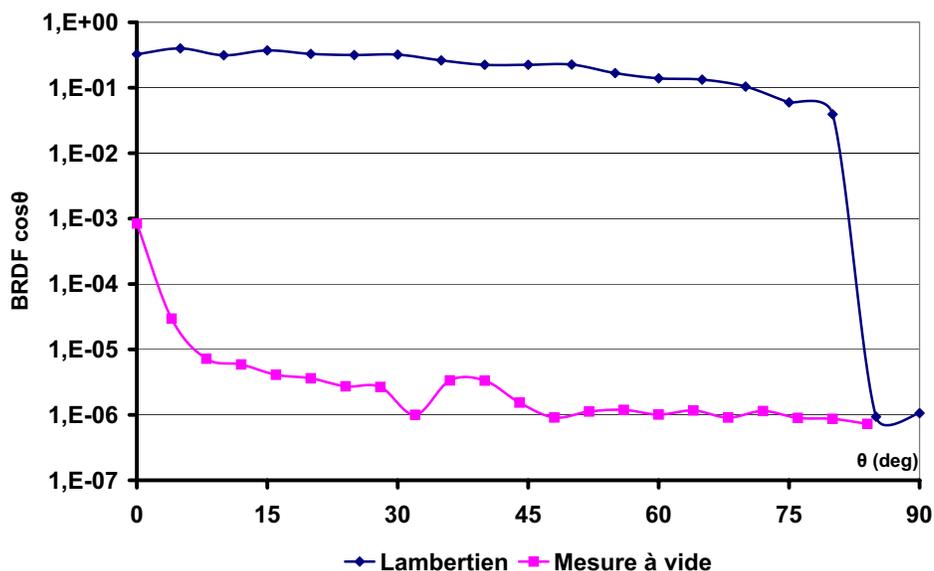


FIG. 15.5 – Dynamique du système : en rouge nous avons la mesure à vide et en bleu la mesure d'un échantillon lambertien.

ensemble de longueurs d'onde discrètes comprises entre la partie bleue du spectre visible et l'infra rouge moyen. Il ne permet toutefois pas d'analyser, par exemple dans le visible ou le proche infra rouge, la fonction de répartition spectrale de cette lumière diffusée.

Pour y parvenir, une solution possible consiste à remplacer le ou les lasers par une source à spectre large et le photodétecteur unique par une barrette linéaire de photodiodes placée dans le plan focal d'un spectromètre.

Cette source à spectre large est en outre de grande étendue, ce qui impose d'employer un système optique spécifique pour faire en sorte que les caractéristiques géométriques du faisceau d'éclairage soient en accord avec les objectifs recherchés (dimensions transverses de la zone éclairée, divergence intrinsèque du faisceau d'éclairage). Tout ceci explique la structure du spectrodiffusomètre que nous allons maintenant détailler.

### Principe du montage

Le schéma de principe du spectrodiffusomètre est présenté à la figure 15.6.

Le Sous-Système d'Emission-Réception (SSER) est constitué d'un Système Optique d'Eclairage (SOE) ainsi que d'un Système Optique de Reprise (SOR). Ces deux systèmes sont symétriques par rapport à la face de l'échantillon dont on veut mesurer l'indicatrice de diffusion. Ce Sous-Système dont le schéma détaillé est donné figure 15.7 est relié à la source de lumière par une fibre optique dite d'éclairage et à un détecteur de type spectromètre par une fibre optique dite de reprise.

Le montage est parfaitement symétrique par rapport à l'échantillon.

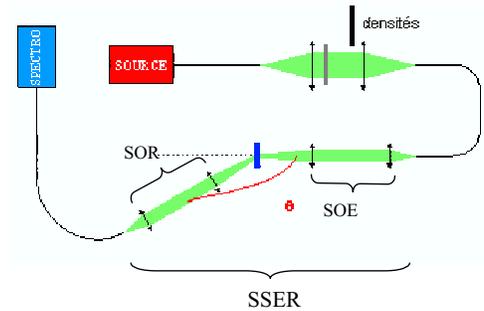


FIG. 15.6 – Schéma de principe du spectrodiffusomètre.

La fibre d'éclairage est placée au foyer objet de la lentille L2 du SOE, de diamètre 6 mm et de focale  $f_2 = 10$  mm et la fibre de reprise au foyer image de la lentille L2 du SOR. L'échantillon est placé au foyer image de la lentille L1 du SOE, de diamètre 19 mm et de focale  $f_1 = 190$  mm et au foyer objet de la lentille L1 du SOR. Il reçoit donc l'ensemble des rayons émis par la fibre d'éclairage.

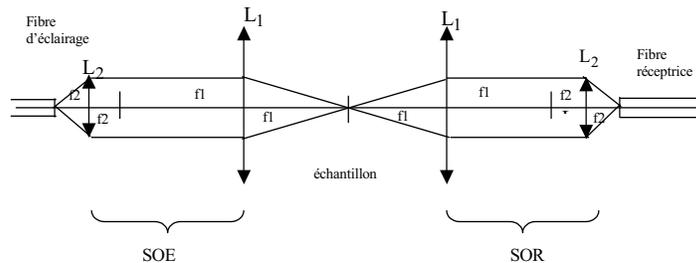


FIG. 15.7 – Sous-Système d'Emission-Réception.

Ceci nous permet de faire en sorte qu'en l'absence d'échantillon, tout le flux lumineux émis par la fibre d'éclairage en entrée du système soit récupéré par la fibre de reprise en sortie de ce même système.

De plus, pour chacun des deux systèmes optiques, la distance entre les deux lentilles est égale à la somme de leurs focales. Ceci nous permet d'être dans une configuration télécentrique. La pupille de sortie du SOE est alors rejetée à l'infini et les caractéristiques angulaires du faisceau d'éclairage sont parfaitement homogènes à l'intérieur de la surface éclairée.

La mesure de l'indicatrice de diffusion dans le plan d'incidence s'effectue grâce à la mise en rotation du SOR. Dans ce but, celui-ci est fixé sur un bras rigide solidaire d'une platine motorisée de rotation : la mesure des intensités diffusées par un échantillon peut être réalisée dans un domaine angulaire allant de 25 à 250 degrés.

Notons dès à présent qu'il reste toutefois à déterminer la position du centre de rotation du bras, c'est-à-dire du SOR, afin que le point de contact du faisceau source

avec la face avant de l'échantillon coïncide avec le centre de rotation du système de reprise.

### Le système de mesure

La lumière émise par l'échantillon est récoltée par le système de reprise et focalisée sur la face d'entrée d'une fibre optique de même diamètre que celle utilisée en entrée du SSER.

Cette fibre est reliée à un spectrophotomètre Ocean Optics Référence USB2000 présentant les caractéristiques suivantes :

- Entrée par connecteur à fibre optique de type SMA 905
- Fente d'entrée 100  $\mu\text{m}$
- Réseau de diffraction 600 traits/mm, blazé à 500 nm
- Résolution théorique : 5 nm
- Lentille cylindrique de collection du flux
- Réseau de photodiodes linéaire SONY ILX511 à 2048 pixels, avec revêtement trieur d'ordre déposé directement sur la fenêtre
- Temps d'intégration ajustable entre 3 ms et 3 s
- Convertisseur A/D 12 bits intégré
- Connexion par port USB

Les données délivrées par ce système de mesure sont stockées sur un PC et pourront être ensuite traitées de manière informatique.

### Le porte-échantillon

Le porte-échantillon est schématisé figure 15.8. C'est un support qui permet d'effectuer des basculements de l'échantillon dans deux directions angulaires croisées. Il est monté sur deux platines de translation, afin d'avoir une certaine mobilité dans le plan horizontal. Tout ceci est disposé sur une potence afin de pouvoir être indépendant du bras motorisé et le gêner le moins possible dans son mouvement de rotation.

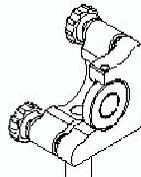


FIG. 15.8 – Porte-échantillon du Spectrodifusomètre.

### Étalonnage du spectrodifusomètre

Après avoir aligner les différents systèmes et positionner l'échantillon il nous faut étalonner l'instrument. Comme dans le cas du diffusomètre à grande dynamique, pour pouvoir déduire des mesures effectuées une valeur absolue de l'intensité diffusée par les échantillons, il faut étalonner notre appareil, c'est à dire déterminer le facteur de conversion qui permet de passer du signal mesuré à l'intensité diffusée. Comme précédemment, ce facteur est appelé constante d'étalonnage et noté  $C$ .

Pour calculer cette constante, on mesure un échantillon dont on sait modéliser l'indicatrice de diffusion et on la retrouve en faisant le lien entre la mesure et le modèle théorique. On utilise pour cela un échantillon lambertien.

Considérons, d'un point de vue théorique, un échantillon lambertien éclairé par un faisceau lumineux issu du SOE, avec une puissance  $P$  répartie sur une surface  $S$ , comme indiqué figure 15.9.

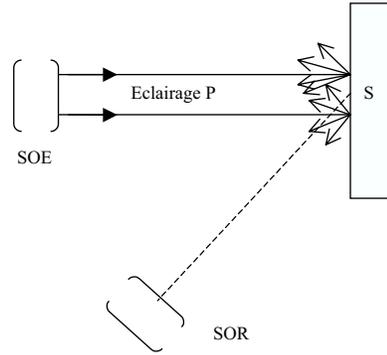


FIG. 15.9 – Diffusion de la lumière par un échantillon lambertien.

L'éclairement de l'échantillon est dans ce cas  $E = \frac{P}{S}$  et sa luminance est  $L = \rho \frac{E}{\pi} = \rho \frac{P}{\pi S}$  où  $\rho$  désigne l'albédo du lambertien ( $\rho$  est fonction de la longueur d'onde). L'étendue géométrique du SOE ou du SOR est, en l'absence de diaphragmation, égale à celle des fibres d'émission et de réception, soit  $G_r = G_e = \pi a^2 \sin^2(u)$  où  $\sin(u)$  désigne l'ouverture numérique de la fibre et  $a$  son rayon de coeur (nous supposons que la fibre en question est à saut d'indice).

La puissance  $P_d$  détectée par la fibre de reprise est alors donnée par :

$$P_d = \rho \cdot \frac{P}{\pi S} \cdot G_r \cos(\theta) = \rho \cdot \frac{P}{S} \cdot \pi a^2 \sin^2(u) \cos(\theta) \quad (15.5)$$

Mais la surface  $S$  de la zone éclairée est elle aussi liée au rayon de coeur de la fibre optique par la relation  $S = \pi \gamma^2 a^2$  où  $\gamma$  désigne le grandissement transverse du SOE. En conséquence

$$P_d(\theta) = \rho \left( \frac{\sin^2(u)}{\gamma^2} \right) P \cos(\theta). \quad (15.6)$$

Enfin, la tension  $V$  délivrée par chaque pixel du réseau de photodiodes est proportionnelle à la puissance détectée à cette longueur d'onde de sorte que, pour un échantillon lambertien et à une longueur d'onde donnée, le signal mesuré est de la forme  $K \cdot \cos(\theta)$ , où  $K$  désigne une constante fonction des caractéristiques optiques du montage.

Sachant cela, on mesure la lumière diffusée par un lambertien lorsqu'on l'éclaire en incidence normale. La première étape consiste à rechercher la valeur numérique de la constante  $K$  qui fasse que le modèle mathématique et le signal réel soient les plus proches possibles. On utilise pour cela une procédure d'ajustement par la méthode des moindres carrés (minimisation de l'écart quadratique moyen entre le signal mesuré en unités arbitraires et un signal théorique de la forme  $K \cdot \cos(\theta)$ ).

On sait de plus que le signal obtenu avec un lambertien est de la forme

$$\frac{1-A}{\pi} C \cdot \cos(\theta) = \frac{\rho}{\pi} \cdot C \cdot \cos(\theta), \quad (15.7)$$

où  $A$  désigne l'absorption du lambertien et dépend de la longueur d'onde. On peut donc écrire :  $K(\lambda) = \frac{1}{\pi} C(\lambda) \rho(\lambda)$  où  $C$  est la constante d'étalonnage de l'appareil. L'albédo  $\rho$  du diffuseur lambertien est connu, et  $K$  a été déterminée par la méthode des moindres carrés définie plus haut. Par conséquent, on peut en déduire  $C$  pour chaque longueur d'onde, à l'aide de la relation

$$C(\lambda) = K(\lambda) \cdot \frac{\pi}{\rho(\lambda)}. \quad (15.8)$$

On peut alors calculer l'intensité  $I$  diffusée par le lambertien  $I_{amb}(\lambda, \theta) = \frac{V_{mesure}(\lambda, \theta)}{C(\lambda)}$ . La constante d'étalonnage  $C$  ainsi utilisée pour le lambertien à la longueur d'onde est alors valable pour tous les échantillons à cette même longueur d'onde.

Donc, une fois la constante d'étalonnage calculée, on détermine, pour chaque échantillon, l'indicatrice de diffusion en appliquant la relation générale

$$I(\lambda, \theta) = \frac{V_{mesure}(\lambda, \theta)}{C(\lambda)}. \quad (15.9)$$

Par la suite, toutes les mesures effectuées sur l'un ou l'autre des diffusomètres tiendront compte de la constante d'étalonnage correspondante et on pourra ainsi comparer les intensités diffusées en valeurs absolues, même si elles ont été déterminées dans des conditions de mesure différentes.

Nous présentons ci-dessous la mesure du lambertien, flux maximum de notre système, et la mesure à vide, flux minimum, angulairement et spectralement intégré dans le demi espace réfléchi  $R$  et dans le demi espace transmis  $T$  (figure 15.10).

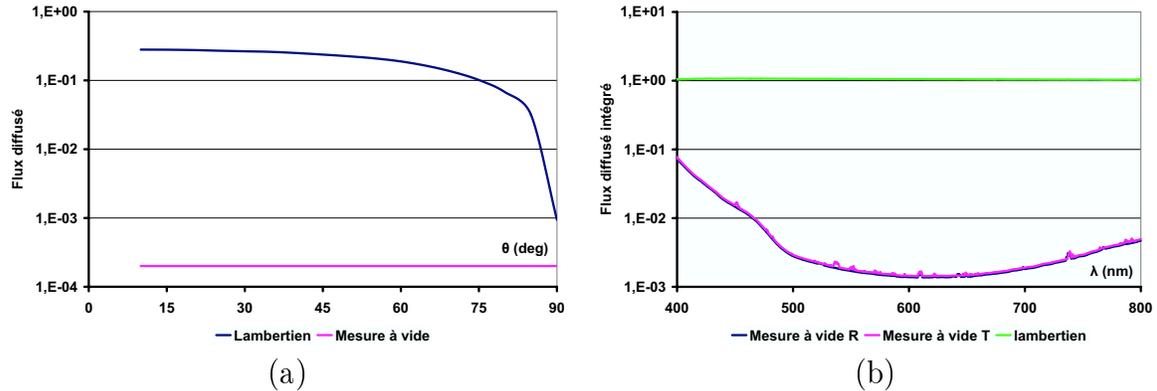


FIG. 15.10 – (a) Flux diffusé du lambertien et de la mesure à vide en fonction de l'angle de diffusion  $\theta$ . (b) Flux diffusé intégré dans le demi-espace transmis T et réfléchi R du lambertien et de la mesure à vide en fonction de la longueur d'onde.

## 15.3 Applications sur sphères calibrées

Compte tenu du coût prohibitif de sphères micrométriques calibrées, nous nous sommes intéressés tout d'abord à des poudres non calibrées, constituées de sphères de diamètre approximatif  $30 \mu\text{m}$  (*poudre 1*) ou  $130 \mu\text{m}$  (*poudre 2*), avec des écarts-type normalisés respectifs sur le diamètre de 30% et 40%. Ces échantillons sont disposés soit dans une fiole à section rectangulaire (*fiole 1*) (figure 15.11 (a)), ou soit dans une fiole à section circulaire (*fiole 2*) (figure 15.11 (b)), toutes deux à faces superpolies.

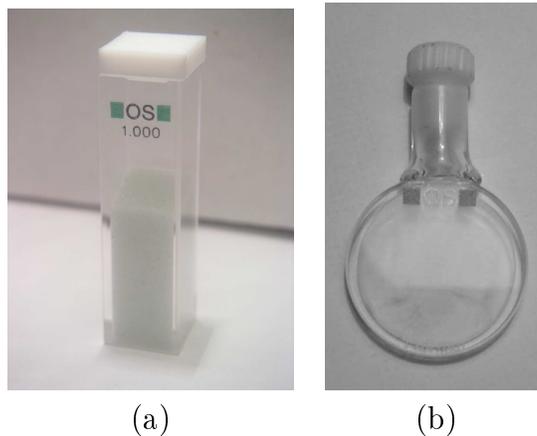


FIG. 15.11 – (a) Fiole 1 à section rectangulaire à faces superpolies remplie de sphères de  $130 \mu\text{m}$ , poudre 2. (b) Fiole 2 à section circulaire à faces superpolies vide.

### 15.3.1 Sphères nues de 30 et 130 microns

En figures 15.13 et 15.12, on donne l'indicatrice de diffusion mesurée avec le diffusomètre laser à la longueur d'onde de 633 nm. Sur chacune des figures, on a tracé :

- la réponse du lambertien étalon qui majore la mesure,
- la mesure à vide qui minore la mesure,
- la réponse de la fiole 1 en l'absence d'échantillon,
- la réponse de la fiole 1 en présence d'échantillon (poudre 1 ou 2).

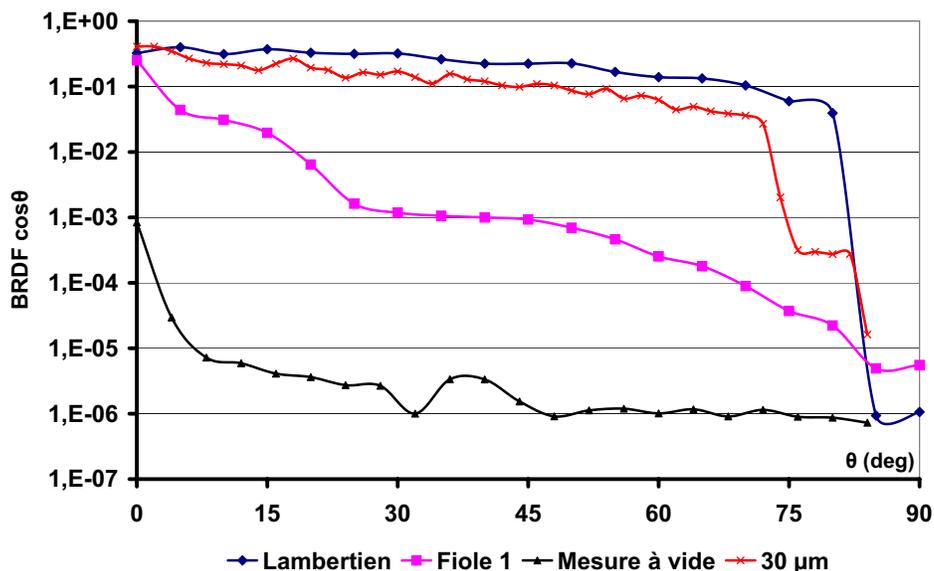


FIG. 15.12 – Réponse angulaire de la diffusion lumineuse de la poudre 1 (sphères de silice de diamètre 30 μm) positionnée dans la fiole 1.

On constate tout d'abord que la réponse de la fiole vide ne perturbe pas la mesure, car elle est bien inférieure à la réponse de la fiole avec échantillon. Toutefois ceci n'est plus vrai aux faibles angles de réflexion. Par ailleurs, que ce soit pour la *poudre 1* ou *2*, les pertes par diffusion sont légèrement inférieures à l'échantillon lambertien étalon, tout en exhibant une forme quasi-lambertienne. Ce niveau intense de diffusion est caractéristique d'une diffusion de volume ; en effet, une diffusion de surface donnerait un niveau de pertes comparable à celui de la réflexion par un substrat plan de silice. L'écart de pertes par rapport au lambertien est dû à la diffusion par transmission et aux réflexions multiples dans la fiole.

On remarquera qu'aucune oscillation n'est détectée sur le flux angulaire. Ceci s'explique par le diamètre important des sphères (cf partie théorique) et par l'importante dispersion sur la valeur des diamètres, en plus de la densité de la poudre. Cela est conforme à l'étude de la tolérance radiale sur sphère que nous avons effectuée dans la partie II, chapitre 7 où nous déterminons une tolérance radiale faible, de l'ordre de 1%.

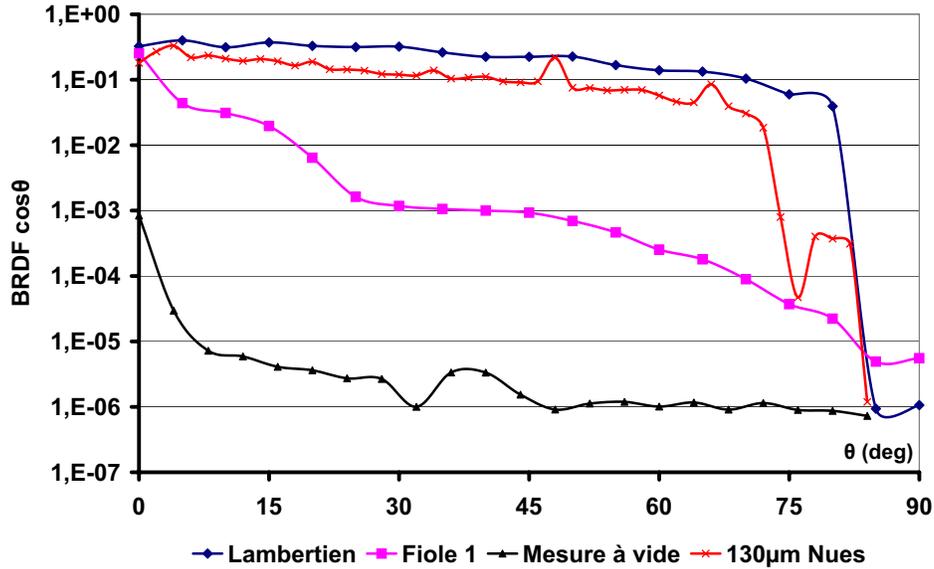


FIG. 15.13 – Réponse angulaire de la diffusion lumineuse de la poudre 2 (sphères de silice de diamètre 130  $\mu\text{m}$ ) positionnée dans la fiole 1.

Ces échantillons ont également été mesurés au diffusomètre en lumière blanche, avec des résultats présentés en figure 15.14. Comme attendu, le niveau moyen intégré dans le demi-espace réfléchi entre 90° et 170° est voisin de 100%, et la dispersion spectrale est quasi-négligeable en raison de la taille des sphères, de la densité et de l'écart type sur le diamètre.

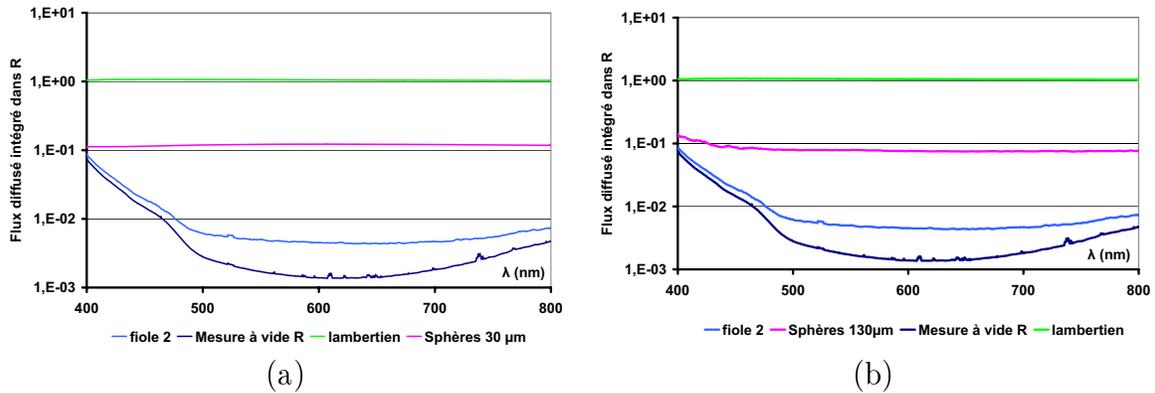


FIG. 15.14 – flux diffusé intégré dans le demi espace réfléchi entre 90° et 170° pour les sphères de 30  $\mu\text{m}$  (a) et 130  $\mu\text{m}$  (b) de diamètre mises dans la fiole 2. Le flux de la poudre 1 est inférieur au flux de la poudre 2. Notons ici que le domaine angulaire de réflexion est noté (90°-180°) pour le spectro-diffusomètre, contrairement au diffusomètre laser (0°-90°).

### 15.3.2 Sphère nue isolée de 20 $\mu\text{m}$ de diamètre

Mesurer la diffusion angulaire par une sphère isolée n'est pas simple, car il faut que la diffusion par cette sphère soit bien supérieure à celle du support utilisé. Pour tenter de voir les oscillations caractéristiques de la théorie (fonctions de Bessel sphériques), nous avons tout d'abord isolé une sphère unique. Pour ce faire nous utilisons un microscope où patiemment avec une pointe fine, et grâce à l'électricité statique nous prélevons une sphère pour l'isoler sur un substrat plan. Une fois ceci réalisé nous la prenons en sandwich avec une autre plaque. Pour faire tenir le tout nous utilisons un support de diapositive. Nous plaçons ensuite la diapositive au centre de notre porte échantillon.

Les mesures sont représentées sur la figure 15.15. Toutes ces mesures ont été effectuées en polarisation ss. Nous remarquons en dehors du faisceau transmis que le flux diffusé par la sphère et la diapositive est supérieur au flux diffusé seulement par la diapositive. Cela nous permet de retrouver grossièrement les oscillations caractéristiques d'un rayon de sphère. Nous pouvons faire correspondre angulairement un flux diffusé calculé pour un diamètre de sphère de 20  $\mu\text{m}$  (voir figure 15.15). Les niveaux d'énergie coïncident bien, et les premiers extremums sont grossièrement en accord avec l'expérience. Cependant les surfaces de nos plaques sont très diffusantes, et nous sommes alors limités pour mesurer des faibles flux. Par ailleurs, les réflexions sur la diapositive ne sont pas considérées...

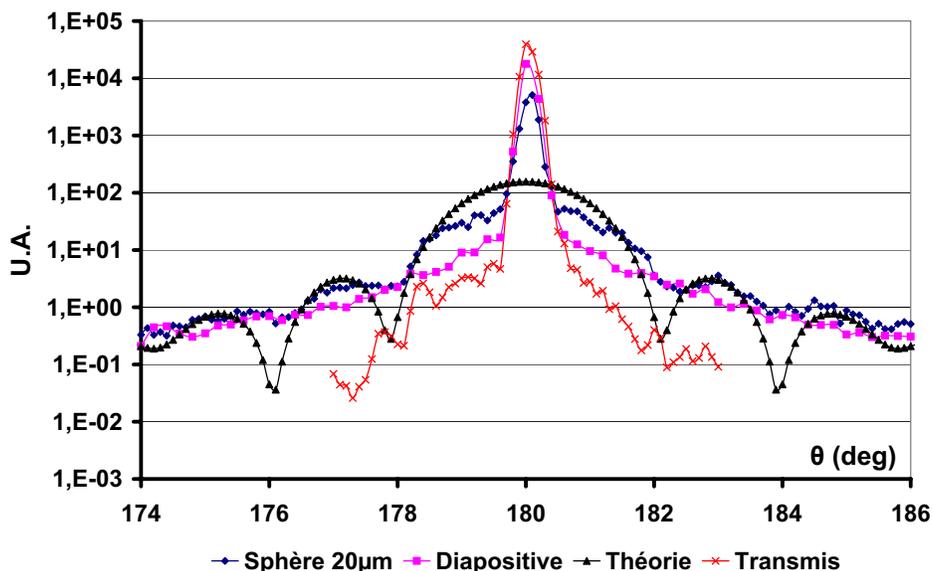


FIG. 15.15 – Comparaison expérience/théorie pour le flux diffusé en polarisation ss d'une sphère de 20  $\mu\text{m}$  de silice mesurée entre les deux faces d'une diapositive.

### 15.3.3 Sphère nue isolée de 162 $\mu\text{m}$ de diamètre

Augmenter le diamètre de la sphère fait croître le niveau de diffusion et devrait faciliter la mesure. Toutefois, les oscillations se rapprochent et il faut alors plus de résolution angulaire pour les voir. Nous pouvons aussi utiliser un substrat réfléchissant pour augmenter le niveau. Ainsi nous avons disposé une sphère de 162  $\mu\text{m}$  de diamètre sur un substrat plan de Si pour la mesurer en réflexion. Nous avons effectué trois mesures pour étudier la répétabilité du signal. Les résultats sont donnés en figure 15.16 et révèlent de nettes oscillations avec un contraste prononcé. Toutefois celles-ci ne sont pas régulières, ce que nous attribuons à la non sphéricité du micro-composant, et aux réflexions multiples sur le wafer de Si dont la valeur n'est plus négligeable (30%), contrairement au cas du substrat de silice (4%). Par ailleurs, la réponse du wafer nu est inhomogène spatialement et perturbe la mesure angulaire. A l'aide du calcul, nous recherchons le diamètre de la sphère, que l'on trouve de l'ordre de 160  $\mu\text{m}$ .

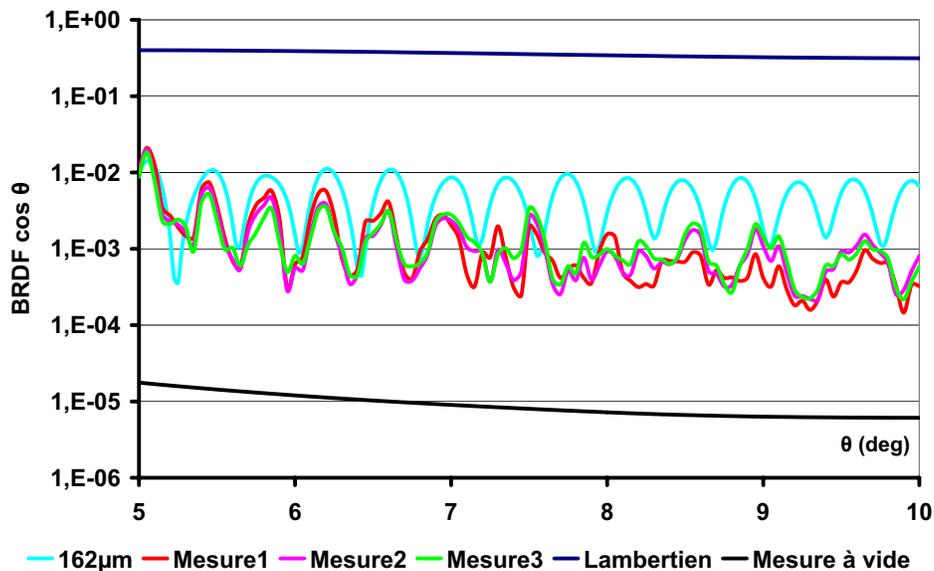


FIG. 15.16 – Comparaison expérience/théorie du flux diffusé par une sphère de 162  $\mu\text{m}$  mise sur un wafer de Si.

### 15.3.4 Sphères aluminées

Nous avons également mesuré la diffusion par une collection de particules aluminées. Le contenant est la fiole 1. On constate en figure 15.17, angulairement et spectralement, que le niveau de diffusion est fortement réduit, en raison de l'absorption du métal. Les oscillations ne sont évidemment plus présentes.

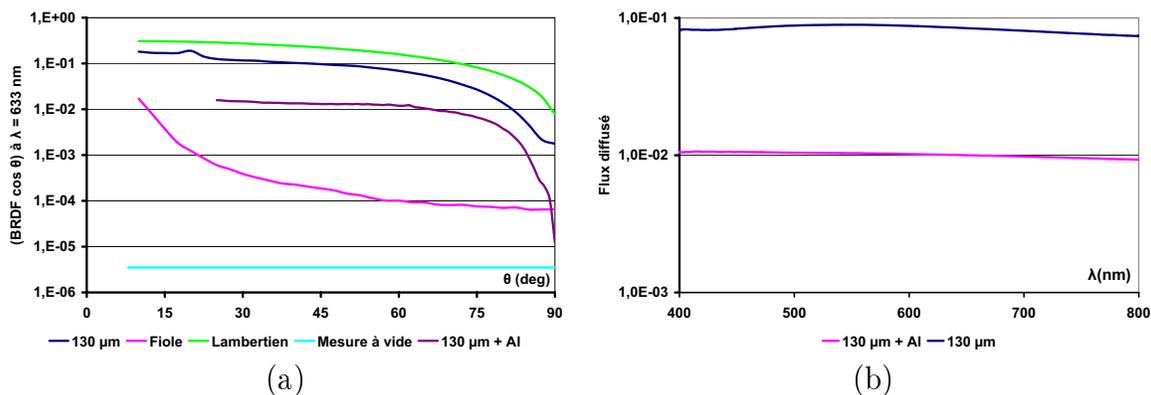


FIG. 15.17 – (a) Comparaison du flux diffusé angulairement à  $\lambda = 633$  nm entre des sphères de diamètre  $130 \mu\text{m}$  de silice non traitées et de ces mêmes sphères avec une couche d'aluminium. (b) Comparaison du flux spectral intégré sur l'angle de diffusion entre  $0^\circ$  et  $156^\circ$  pour ces mêmes sphères.

### 15.3.5 Sphères recouvertes de $Ta_2O_5$

Nous avons aussi essayé de quantifier l'effet d'une couche de  $Ta_2O_5$  sur des substrats concentriques. Les résultats numériques nous ont montré qu'à partir de quelques microns, pour une sphère unique, nous pouvons réaliser les fonctions optiques classiques tels que des miroirs. Dans ce cas présent, déposer une couche de  $Ta_2O_5$  revient à déposer une couche haut indice donc à augmenter, si on raisonne pour un substrat plan, le flux spéculaire réfléchi. Sur les réponses spectrales des flux intégrés dans les demi espaces réfléchis (figure 15.18 (a)) et transmis (figure 15.18 (b)) nous observons ce phénomène.

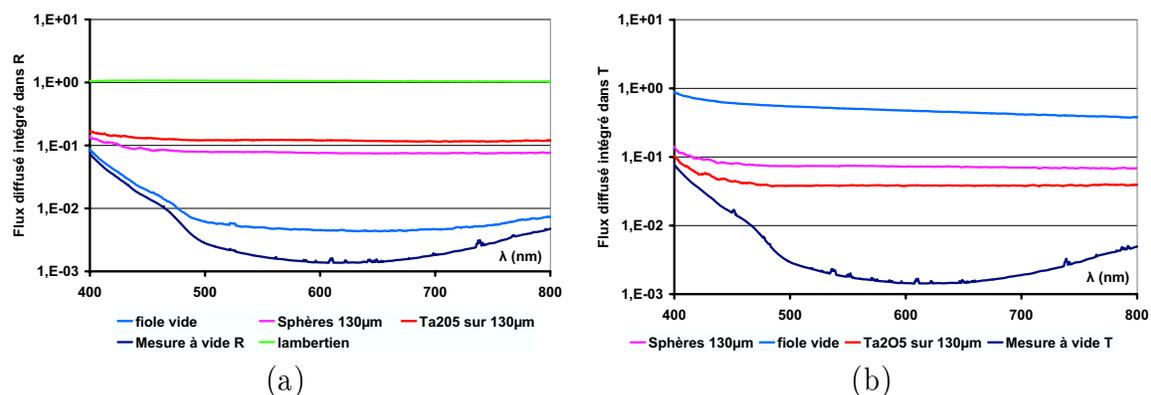


FIG. 15.18 – Comparaison entre le flux diffusé de sphères non traitées de diamètre  $130 \mu\text{m}$  et de ces mêmes sphères recouvertes de  $Ta_2O_5$ . Le contenant est la fiole 2. (a) Flux diffusé dans le demi-espace réfléchi R. (b) Flux diffusé dans le demi-espace transmis T.

Les sphères traitées avec du  $Ta_2O_5$  ont un flux diffusé supérieur à celui des sphères non traitées dans le demi espace-réfléchi, et inférieur dans le demi-espace transmis. Le résultat attendu est donc confirmé : une couche concentrique de  $Ta_2O_5$  joue bien le rôle d'un léger miroir.

### 15.3.6 Cas des sphères de 20 $\mu\text{m}$ de diamètre

#### Sphères nues

La mesure d'une sphère nue de 20  $\mu\text{m}$  de diamètre a déjà été réalisée avec le diffusomètre angulaire. Nous proposons ici de réaliser la mesure avec une trentaine de sphères calibrées de 20  $\mu\text{m}$ , possédant une dispersion radiale de 0,7  $\mu\text{m}$ .

Compte tenu du fait que la particule n'est pas isolée, nous avons voulu chiffrer l'effet de la dispersion radiale sur les oscillations angulaires. Ainsi nous avons effectué une étude angulaire pour trois rayons de sphère différents : 9, 10 et 11 micromètres. Les résultats sont présentés sur la figure 15.19 ci-dessous. Les signaux se superposent correctement (pas d'effet de moyenne locale) dans la partie transmise entre  $0^\circ$  et  $15^\circ$ , bien que le contraste soit réduit. On se limitera en conséquence à ce domaine angulaire. cette étude, nous ne disposons plus du diffusomètre laser à grande dynamique,

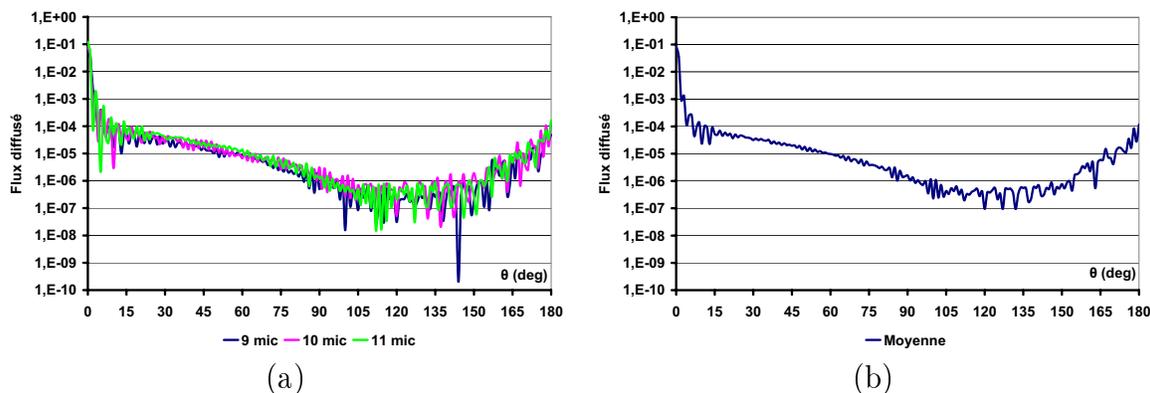


FIG. 15.19 – (a) Flux diffusé à  $\lambda = 633$  nm d'une sphère de rayon 9, 10 et 11  $\mu\text{m}$ . (b) Flux diffusé moyenné de ces trois types de sphères.

en cours d'installation dans une salle blanche. Nous utilisons donc le spectrodiffusomètre à source blanche pour réaliser nos expériences. Celui-ci ayant une résolution proche du degré, il faut en outre tenir compte de l'intégration spatiale du détecteur. Ce calcul est réalisé en figure 15.20 pour une moyenne angulaire de  $1^\circ$  et  $2^\circ$ . On constate que cet effet est loin d'être négligeable, et réduit sensiblement le contraste.

La mesure, quant à elle, est présentée en figure 15.21 et donne un accord satisfaisant. Les oscillations angulaires coïncident bien avec la théorie. Le niveau s'accorde également, pour un calcul en présence de 30 sphères (dénombrement au microscope).

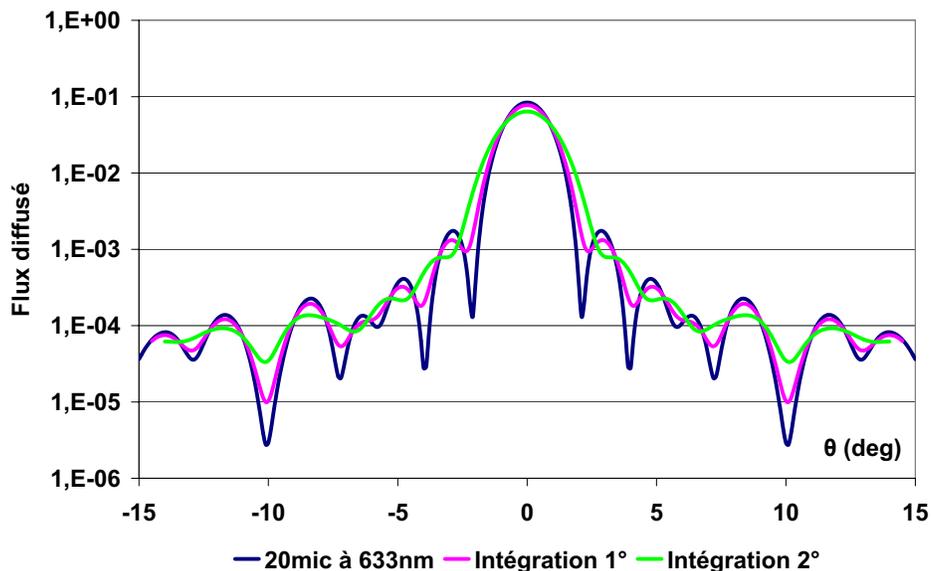


FIG. 15.20 – Etude de l’effet d’intégration angulaire  $\Delta\theta$  du flux diffusé à  $\lambda = 633$  nm d’une sphère de rayon 10  $\mu\text{m}$ , intégrations réalisées pour un  $\Delta\theta$  de 1° et de 2°.

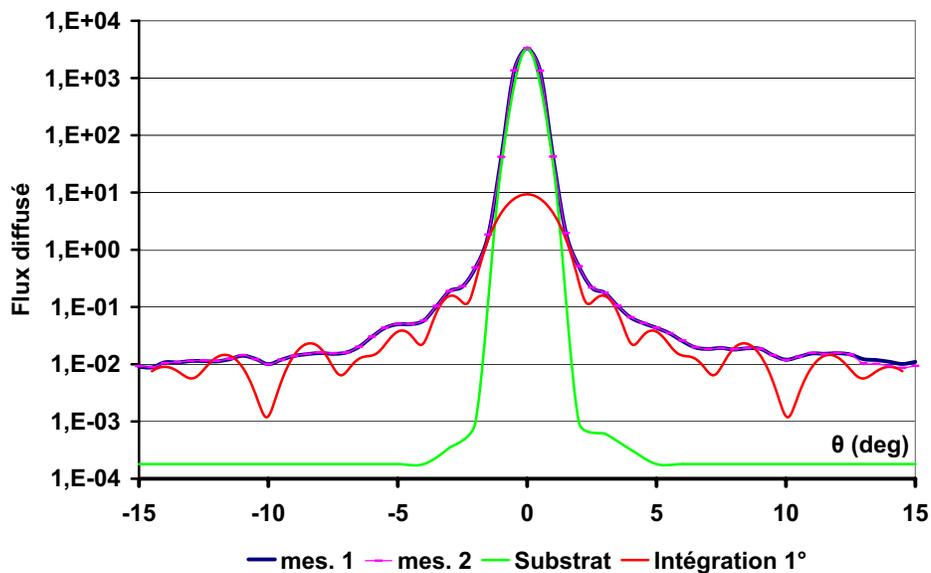


FIG. 15.21 – Concordance théorie-expérience du flux diffusé pour une collection d’une trentaine de sphères de silice de 20  $\mu\text{m}$  posées sur substrat de verre plan. Mes.1 et mes. 2 sont les mesures expérimentales, Substrat est la mesure du substrat de verre sans les sphères, et Intégration 1° est le résultat théorique d’une sphère multiplié par 30 avec mise à l’échelle du spot incident, et intégration radiale d’un degré.

### Sphères recouvertes

Nous proposons ici de déposer une couche épaisse de pentoxyde de tantale sur 0,2 grammes des sphères calibrées de 20 microns pendant une durée de cinq heures. Les paramètres du canon pour cette mesure sont les suivants (voir table 15.3.6).

Beam Current (mA)	81	Source RF Power Forward (W)	160
Beam Voltage (V)	1200	Source RF Power Reflected (W)	5
Accelerator Current (mA)	6	Neutralizer (mA)	102
Accelerator Voltage (V)	354	Neutralizer (V)	17

TAB. 15.1 – Paramètres du canon à ions utilisés pour déposer une couche de  $Ta_2O_5$  sur les sphères calibrées de 20  $\mu\text{m}$ .

La figure 15.22 présente la mesure au spectrodifusomètre de ces sphères calibrées recouvertes de  $Ta_2O_5$ . A l'heure actuelle, il est difficile de faire coïncider de manière parfaite la théorie avec l'expérience. Pour notre cas, la couche de haut indice dont le niveau se rapproche le plus possède une épaisseur de 5  $\mu\text{m}$ . Pendant cinq heures, cela correspond à une vitesse de pulvérisation de 3  $\text{\AA}/\text{s}$  sur substrat plan. Nous avons déterminé lors de notre étalonnage une vitesse de 2,31  $\text{\AA}/\text{s}$ . Ainsi, la courbe théorique semblant le mieux coïncider donne un résultat inattendu. Des mesures ultérieures de ces sphères doivent prochainement être effectuées pour nous permettre de quantifier l'épaisseur réelle du dépôt.

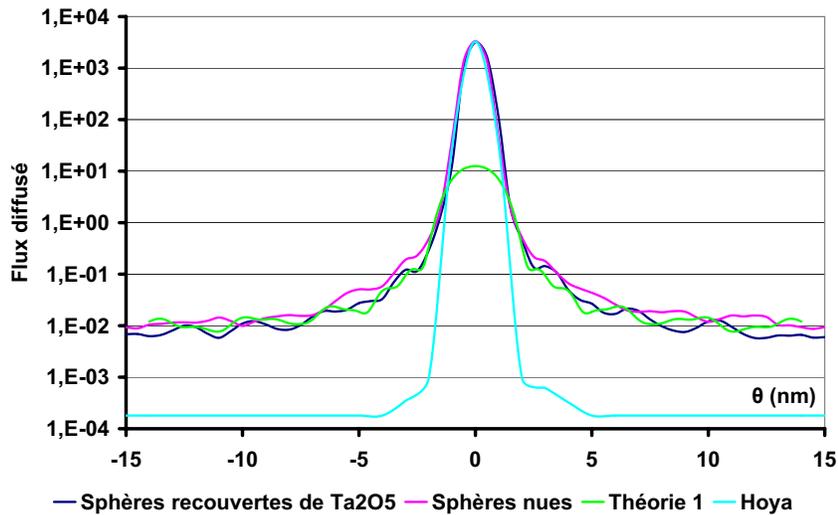


FIG. 15.22 – Concordance théorie-expérience du flux diffusé pour une collection d'une trentaine de sphères de silice de 20  $\mu\text{m}$  posées sur substrat de verre plan recouverte d'une couche de  $Ta_2O_5$ . Théorie 1 est le flux théorique d'une sphère de 20  $\mu\text{m}$  recouverte d'une couche de  $Ta_2O_5$  de 5  $\mu\text{m}$  intégré avec un  $\Delta\theta$  de 1°.



# Chapitre 16

## Conclusion

Pour la caractérisation des microsphères, on peut considérer une sphère unique ou une collection de sphères. Dans le premier cas, la mesure est délicate compte tenu du faible niveau à mesurer, et il faut donc utiliser le diffusomètre laser en tentant de s'affranchir de la diffusion ou réflexion par le substrat. Dans le deuxième cas, les niveaux sont plus élevés mais un écart calcul/mesure est créé du fait de la dispersion en diamètre des sphères, de la densité de la poudre et de l'angle solide de mesure du spectro-diffusomètre. Malgré ces difficultés, nous avons pu retrouver la taille des particules. Précisons ici que cette caractérisation peut nettement s'améliorer, mais le diffusomètre laser n'était plus disponible pour finaliser ces études (construction d'une salle blanche). En ce qui concerne les dépôts sur sphères, nous avons pu montrer, conformément à la prédiction, qu'une couche haut indice ( $Ta_2O_5$ ) permettait d'accroître la réflexion.



# CONCLUSION ET PERSPECTIVES

L'objectif de ce travail était d'étudier l'intérêt de revêtements multicouches sur substrats concentriques de faible diamètre, pour des applications liées au filtrage en lumière diffuse. Cette thématique nouvelle au laboratoire a permis de développer de nouveaux codes de calcul et une nouvelle technologie.

Tout d'abord, nous avons mis au point des codes de calculs basés sur la théorie électromagnétique dite de Mie, pour des sphères recouvertes de multicouches diélectriques et métalliques. Ces programmes permettent d'accéder aux champs proche et lointain, pour différents types de polarisation de l'onde diffusée dans chaque direction de l'espace, et pour chaque longueur d'onde. Cela a permis d'établir une base de données conséquente pour différents diamètres de sphères compris entre 1 nm et 130  $\mu\text{m}$ , recouvertes de multicouches métalliques ou diélectrique. D'une façon générale, nous avons voulu savoir quels types de fonctions optiques pouvaient être synthétisées avec ces composants concentriques multicouches, par analogie avec les composants classiques planaires. Dans le cas de faibles diamètres, la réponse optique intégrée dans tout l'espace est quasi plate avec une légère prédominance dans le bleu, comme prévu par la théorie de Rayleigh. Dans le cas de grands diamètres cette réponse est quasi-achromatique ou blanche, en raison de nombreuses oscillations qui conduisent à un lissage spectral. Pour les diamètres intermédiaires, de l'ordre de la longueur d'onde, les phénomènes sont plus complexes et conduisent à des résonances et effets colorés spécifiques que nous avons quantifié avec précision. En ce qui concerne l'analogie avec les revêtements planaires, celle-ci n'existe pas dans le cas général car les fonctions mises en jeu pour le calcul de Mie ne sont pas périodiques, et l'effet de taille substrat est souvent prédominant. De surcroît, le champ s'exprime comme une série dont il est difficile de prévoir intuitivement le résultat. C'est pourquoi nous sommes partis de sphères multicouches à grands diamètres présentant des propriétés similaires à celles des substrats plans, pour ensuite observer la stationnarité des propriétés lorsque le diamètre est réduit. On a pu constater que la plupart des fonctions classiques (miroir, dichroïques, antireflet...) étaient conservées pour des diamètres supérieurs à 3  $\mu\text{m}$ , dans un domaine spectral visible.

D'un point de vue expérimental, nous avons mis au point une technologie spé-

cifique basée sur la pulvérisation par faisceau d'ions. La première étape a consisté à mettre au point le procédé, jusqu'à obtenir des couches minces denses à faible absorption, de haut et bas indice. Le procédé a ensuite été configuré pour revêtir les microsphères, via un mouvement aléatoire conféré à celles-ci par une membrane vibrante. Malgré les hésitations que nous aurions pu avoir quant à la viabilité du procédé, force est de constater qu'il fonctionne très correctement, puisque nous avons pu fabriquer ainsi des poudres métalliques et diélectriques sur des sphères de 20  $\mu\text{m}$  et 130  $\mu\text{m}$ , sans surprise particulière. Une difficulté majeure réside malgré tout dans le contrôle *in situ* des épaisseurs, qui nécessitera un procédé optique temps réel par lumière diffusée. Cette tâche n'apparaît pas aujourd'hui comme un verrou. Parallèlement, il faudra certainement augmenter la vitesse de dépôt pour réduire les coûts, car le temps d'expérience est plus grand pour les poudres que pour les substrats plans.

Nous avons ensuite abordé le problème de la caractérisation angulaire et spectrale, soit en essayant de mesurer la diffraction par une sphère unique, soit en s'intéressant à une collection de particules. On a pu constater que ce problème n'est pas simple, en raison de nombreux paramètres : défaut de sphéricité, écart-type sur les rayons, diffusion par le support, densité de la poudre, réflexion sur le support et intégration par le détecteur... Malgré tout, les résultats de mesure montrent un accord satisfaisant avec l'expérience. Cet accord aurait pu être amélioré, mais le diffusomètre laser a été immobilisé pour la construction d'une salle blanche.

Pour conclure, il ne faut aucun doute que cette technologie est viable pour fabriquer des poudres multicouches interférentielles, et qu'il faudra y intégrer un contrôle optique temps réel. Côté modélisation, les effets colorés sont multiples et trouveront des applications en cosmétique. Parallèlement, la furtivité et les télécom trouveront dans ces développements un certain nombre de solutions à des problèmes en cours... Sur trois domaines d'application cités, nous avons en effet été sollicités pour des études spécifiques, ce qui laisse présager d'une pérennisation de l'activité.

# Annexe A

## Théorie de Mie

Cette annexe A détaille quelques calculs qui ont été menés pour exprimer les champs électromagnétiques à l'aide de la théorie de Mie. Tout d'abord, nous prouvons que la famille  $(L_{e/omn}, M_{e/omn}, N_{e/omn})$  est solution de l'équation de Helmholtz. Ensuite, nous exprimons les expressions asymptotiques des fonctions radiales, utiles pour déterminer le champ électromagnétique dans des conditions extrêmes. Enfin, nous expliquons le calcul du flux diffracté.

### A.1 Construction de la base $(L_{e/omn}, M_{e/omn}, N_{e/omn})$

Nous nous proposons de prouver que les vecteurs  $L_{e/omn}, M_{e/omn}, N_{e/omn}$  sont solutions de l'équation vectorielle

$$\vec{grad}(\text{div}\vec{C}) - r\vec{ot}(r\vec{ot}\vec{C}) + k^2\vec{C} = \vec{0}. \quad (\text{A.1})$$

Vérifions que les vecteurs suivants décrivent cette base tout en sachant que  $\psi_{e/omn}$  est solution de l'équation d'Helmholtz et que nous pouvons calculer son expression.

$$L_{e/omn} = \vec{grad}(\psi_{e/omn}) \quad M_{e/omn} = r\vec{ot}(\vec{R}\psi_{e/omn}) \quad N_{e/omn} = \frac{1}{k}r\vec{ot}M_{e/omn} \quad (\text{A.2})$$

où  $\psi_{e/omn}$  est solution de l'équation d'Helmholtz,  $k$  vecteur d'onde et  $\vec{R}$  composante radiale de la base sphérique.

Pour simplifier les expressions nous conviendrons que  $(L_{e/omn}, M_{e/omn}, N_{e/omn})$  est équivalent à  $(\vec{L}, \vec{M}, \vec{N})$  et  $\psi = \psi_{e/omn}$ .

#### Preuve que $\vec{L}$ est solution

Il faut savoir que le rotationnel d'un gradient est égal au vecteur nul à savoir  $r\vec{ot}(\vec{grad}) = \vec{0}$ .

$$\begin{aligned}
 \vec{\text{grad}}(\text{div}\vec{L}) - \vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}\vec{L}) + k^2\vec{L} &= \vec{\text{grad}}.\text{div}.\vec{\text{grad}}\psi - \vec{\text{rot}}.\vec{\text{rot}}.\vec{\text{grad}}\psi + k^2\vec{\text{grad}}\psi \\
 &= \vec{\text{grad}}[\text{div}.\vec{\text{grad}}\psi + k^2\psi] \\
 &= \vec{\text{grad}}[\Delta\psi + k^2\psi] \\
 &= \vec{\text{grad}}[0] = \vec{0}
 \end{aligned}$$

### Preuve que $\vec{M}$ est solution

Il est intéressant de noter que la divergence d'un rotationnel est nulle  $\text{div}(\vec{\text{rot}}) = \vec{0}$ . En outre, comme  $\vec{R}$  est un vecteur constant de longueur unité,  $\vec{\text{rot}}(\vec{R}) = \vec{0}$ . Nous pouvons donc simplifier les deux expressions suivantes :

$$\begin{aligned}
 \vec{\text{rot}}(\vec{R}\psi) &= \vec{\text{grad}}(\psi) \wedge \vec{R} + \psi.\vec{\text{rot}}(\vec{R}) \\
 &= \vec{\text{grad}}(\psi) \wedge \vec{R}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}(\vec{R}\psi)) &= \vec{\text{rot}}(\vec{\text{grad}}(\psi) \wedge \vec{R}) \\
 &= \vec{\text{grad}}(\psi).\vec{\text{rot}}(\vec{R}) - \vec{R}.\text{div}(\vec{\text{grad}}(\psi)) \\
 &= -\vec{R}.\text{div}(\vec{\text{grad}}(\psi))
 \end{aligned}$$

Connaisant ces expressions, il nous est alors plus facile de calculer l'expression  $\vec{\text{grad}}(\text{div}\vec{M}) - \vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}\vec{M}) + k^2\vec{M}$  pour savoir si celle-ci est égale au vecteur nul.

$$\begin{aligned}
 \vec{\text{grad}}(\text{div}\vec{M}) - \vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}\vec{M}) + k^2\vec{M} &= \vec{\text{grad}}.\text{div}.\vec{\text{rot}}\vec{R}\psi - \vec{\text{rot}}.\vec{\text{rot}}.\vec{\text{rot}}\vec{R}\psi + k^2\vec{\text{rot}}\vec{R}\psi \\
 &= -\vec{\text{rot}}(-\vec{R}.\text{div}(\vec{\text{grad}}(\psi)) + k^2\vec{\text{grad}}(\psi) \wedge \vec{R}) \\
 &= \vec{\text{rot}}(\vec{R})\Delta\psi + k^2\vec{\text{grad}}(\psi) \wedge \vec{R} \\
 &= \vec{\text{grad}}(\delta\psi \wedge \vec{R}) + k^2\vec{\text{grad}}(\psi) \wedge \vec{R} \\
 &= \vec{\text{grad}}(\delta\psi + k^2\psi) \\
 &= \vec{\text{grad}}(0) = \vec{0}
 \end{aligned}$$

### Preuve que $\vec{N}$ est solution

L'expression suivante  $\text{div}(\vec{\text{rot}}) = \vec{0}$  nous est utile pour simplifier l'expression de  $\vec{\text{grad}}(\text{div}\vec{N}) - \vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}\vec{N}) + k^2\vec{N}$ .

$$\begin{aligned}
 \vec{\text{grad}}(\text{div}\vec{N}) - \vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}\vec{N}) + k^2\vec{N} &= \vec{\text{grad}}(\text{div}(\frac{1}{k}\vec{\text{rot}}\vec{M})) - \frac{1}{k}\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}(\vec{M}))) \\
 &\quad + \frac{k^2}{k}.\vec{\text{rot}}(\vec{M}) \\
 &= \vec{\text{rot}}(-\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}(\vec{M})) + k^2\vec{M}) \\
 &= \vec{\text{rot}}(\vec{0}) = \vec{0}
 \end{aligned}$$

## A.2 Expressions asymptotiques des fonctions radiales

Pour déterminer les expressions asymptotiques des fonctions radiales, c'est à dire des fonctions de Bessel et de Hankel, nous différencions deux cas :

- le premier cas où  $q = \frac{2\pi a}{\lambda} \ll 1$  dit sphère de petit rayon face à la longueur d'onde,
- le second cas où  $q = \frac{2\pi a}{\lambda} \gg 1$  dit sphère de grand rayon face à la longueur d'onde.

### A.2.1 sphère de petit rayon face à la longueur d'onde

Ces termes s'expriment à l'aide de produits. Pour simplifier les expressions, il est pratique de définir les produits  $P_1$  et  $P_2$ .

$$P_1 = \prod_{i=0}^{i=n} (2i + 1) \quad P_2 = \prod_{i=1}^{i=n} (2i - 1) \quad (\text{A.3})$$

Nous pouvons alors définir les limites quand l'argument tend vers zéro des fonctions de Bessel  $j_n(q)$  et de Hankel  $h_n^{(1)}(q)$ .

$$\begin{aligned} \lim_{q \rightarrow 0} j_n(q) &= \frac{(q)^n}{P_1} & (\text{A.4}) \\ \lim_{q \rightarrow 0} [q j_n(q)]' &= \frac{n+1}{P_1} (q)^n \\ \lim_{q \rightarrow 0} h_n^{(1)}(q) &= \frac{(q)^n}{P_1} - i(q)^{-n-1} P_2 \\ \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\delta}{\delta R} (h_n^{(1)}(q)) &= \frac{n+1}{P_1} (q)^n + in P_2 (q)^{-n-1} \end{aligned}$$

où  $q$  est le paramètre de taille égal à  $q = \frac{2\pi a}{\lambda}$  avec  $a$  le rayon de la sphère et  $\lambda$  la longueur d'onde,  $P_1$  et  $P_2$  les produits définis dans les équations (A.3), et  $R$  la composante radiale.

Ces résultats permettent d'exprimer les coefficients  $a_n^d$ ,  $b_n^d$ ,  $a_n^t$  et  $b_n^t$  qui dépendent seulement des fonctions de Bessel et de Hankel, et de pouvoir aussi déterminer les expressions asymptotiques des vecteurs  $L_{e/omn}$ ,  $M_{e/omn}$ ,  $N_{e/omn}$  décrivant la base sphérique.

### A.2.2 sphère de grand rayon face à la longueur d'onde

Nous procédons de la même manière pour déterminer les expressions des fonctions de Bessel  $j_n(q)$  et de Hankel  $h_n^{(1)}(q)$  quand le paramètre de taille tend vers l'infini.

$$\begin{aligned}
 \lim_{q \rightarrow \infty} j_n(q) &= \frac{1}{q} \cos\left(q - \frac{n+1}{2}\pi\right) & (A.5) \\
 \lim_{q \rightarrow \infty} [qj_n(q)]' &= -\sin\left(q - \frac{n+1}{2}\pi\right) \\
 \lim_{q \rightarrow \infty} h_n^{(1)}(q) &= (-i)^{n+1} \frac{e^{iq}}{q} \\
 \lim_{q \rightarrow \infty} \frac{\delta}{\delta R} (h_n^{(1)}(q)) &= (-i)^n \frac{e^{iq}}{R}
 \end{aligned}$$

### Expressions asymptotiques des vecteurs de la base sphérique

Grâce aux expressions précédentes, nous sommes capables de déterminer le champ électromagnétique à l'infini, ce qui est très pratique pour réaliser des bilans de flux diffusé à l'infini. Nous proposons donc les expressions des vecteurs  $\vec{M}_{e/o}^{(-)}$  et  $\vec{N}_{e/o}^{(-)}$  quand le rayon  $R$  est très grand devant la longueur d'onde  $\lambda$ .

$$\begin{aligned}
 \vec{M}_{e1n}^{(-)}(\infty) &= & 0 \cdot \vec{u}_R \\
 & - (-i)^{n+1} \frac{e^{ikR}}{kR} \frac{P_n^1(\cos\theta)}{\sin\theta} \sin\varphi \cdot \vec{u}_\theta \\
 & - (-i)^{n+1} \frac{e^{ikR}}{kR} \frac{\delta}{\delta\theta} [P_n^1(\cos\theta)] \cos\varphi \cdot \vec{u}_\varphi & (A.6)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \vec{M}_{o1n}^{(-)}(\infty) &= & 0 \cdot \vec{u}_R \\
 & + (-i)^{n+1} \frac{e^{ikR}}{kR} \frac{P_n^1(\cos\theta)}{\sin\theta} \cos\varphi \cdot \vec{u}_\theta \\
 & - (-i)^{n+1} \frac{e^{ikR}}{kR} \frac{\delta}{\delta\theta} [P_n^1(\cos\theta)] \sin\varphi \cdot \vec{u}_\varphi & (A.7)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \vec{N}_{e1n}^{(-)}(\infty) &= & 0 \cdot \vec{u}_R \\
 & + (-i)^n \frac{e^{ikR}}{kR} \frac{\delta}{\delta\theta} [P_n^1(\cos\theta)] \cos\varphi \cdot \vec{u}_\theta \\
 & - (-i)^n \frac{e^{ikR}}{kR} \frac{P_n^1(\cos\theta)}{\sin\theta} \sin\varphi \cdot \vec{u}_\varphi & (A.8)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \vec{N}_{o1n}^{(-)}(\infty) &= & 0 \cdot \vec{u}_R \\
 & + (-i)^n \frac{e^{ikR}}{kR} \frac{\delta}{\delta\theta} [P_n^1(\cos\theta)] \sin\varphi \cdot \vec{u}_\theta \\
 & + (-i)^n \frac{e^{ikR}}{kR} \frac{P_n^1(\cos\theta)}{\sin\theta} \cos\varphi \cdot \vec{u}_\varphi & (A.9)
 \end{aligned}$$

Ces vecteurs sont orthogonaux et nous permettent de vérifier qu'à l'infini l'onde sphérique se comporte comme une onde plane.

### A.3 Calcul du flux diffracté

Le flux diffracté dans tout l'espace se calcule en intégrant le vecteur de Poynting en  $\theta$  et  $\varphi$  comme indiqué sur la figure A.1 et l'équation ci-dessous

$$W_d(A) = \frac{1}{2} \text{Re} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \lim_{R \rightarrow \infty} [A^2 E_{\theta} \overline{H_{\varphi}} - E_{\varphi} \overline{H_{\theta}}] \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (\text{A.10})$$

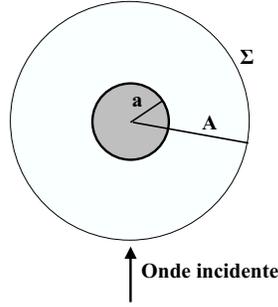


FIG. A.1 – Surface sphérique  $\Sigma$  d'intégration de rayon  $A$  autour de la sphère de rayon  $a$ .

Ce flux en champ lointain est indépendant de la distance  $R$  ou du rayon  $A$  de la surface d'intégration  $\Sigma$ . Grâce aux expressions des vecteurs  $M_{e/omn}$  et  $N_{e/omn}$  en champ lointain calculées précédemment, nous pouvons expliciter le champ électromagnétique diffusé à l'infini.

Les coefficients sont ceux calculés sur la surface de la sphère. Les vecteurs  $M_{e/omn}$  et  $N_{e/omn}$  ont été calculés au paragraphe précédent. Nous exprimons donc les champs électromagnétiques en champ lointain

$$\vec{E}_d(\infty) = E_0 \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} [a_n^d \vec{M}_{o1n}^{(-)}(\infty) - i b_n^d \vec{N}_{e1n}^{(-)}(\infty)] \quad (\text{A.11})$$

$$\vec{H}_d(\infty) = -E_0 \frac{k}{i\omega\mu_2} \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} [b_n^d \vec{M}_{e1n}^{(-)}(\infty) + i a_n^d \vec{N}_{o1n}^{(-)}(\infty)] \quad (\text{A.12})$$

Pour calculer le vecteur de Poynting, il nous faut déterminer les champs tangents à la sphère. Ce sont les projections du champ électromagnétique sur  $\vec{u}_{\theta}$  et sur  $\vec{u}_{\varphi}$ . Nous obtenons ces expressions en remplaçant les vecteurs par leur expression des équations A.6, A.7, A.8 et A.9 dans A.11 et A.12.

Les expressions de  $E_\theta$  et de  $E_\varphi$  sont alors données par

$$E_\theta = E_0 \frac{e^{ik_2R}}{k_2R} \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} [a_n^d(-i)^{n+1} \frac{P_n^1(\cos \theta)}{\sin \theta} + b_n^d(-i)^n \frac{\delta}{\delta\theta} [P_n^1(\cos \theta)]] \cos \varphi,$$

$$E_\varphi = E_0 \frac{e^{ik_2R}}{k_2R} \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} [-a_n^d(-i)^{n+1} \frac{\delta}{\delta\theta} [P_n^1(\cos \theta)] - b_n^d(-i)^n \frac{P_n^1(\cos \theta)}{\sin \theta}] \sin \varphi,$$

et les expressions de  $H_\theta$  et de  $H_\varphi$  par

$$H_\theta = -E_0 \frac{k_2}{i\mu\omega} \frac{e^{ik_2R}}{k_2R} \sum_{v=1}^{\infty} i^v \frac{2v+1}{v(v+1)} [ia_v^d(-i)^v \frac{\delta}{\delta\theta} [P_v^1(\cos \theta)] - b_v^d(-i)^{v+1} \frac{P_v^1(\cos \theta)}{\sin \theta}] \sin \varphi,$$

et

$$H_\varphi = -E_0 \frac{k_2}{i\mu\omega} \frac{e^{ik_2R}}{k_2R} \sum_{v=1}^{\infty} i^v \frac{2v+1}{v(v+1)} [ia_v^d(-i)^v \frac{P_v^1(\cos \theta)}{\sin \theta} - b_v^d(-i)^{v+1} \frac{\delta}{\delta\theta} [P_v^1(\cos \theta)]] \cos \varphi.$$

Nous réalisons ensuite les deux produits nous permettant d'exprimer le flux du vecteur de Poynting à savoir  $\frac{E_\theta \overline{H_\varphi}}{E_0^2}$  et  $\frac{E_\varphi \overline{H_\theta}}{E_0^2}$ . Nous présentons ici seulement les résultats finaux de ces expressions.

$$\begin{aligned} \frac{E_\theta \overline{H_\varphi}}{E_0^2} = & \frac{-1}{i\mu\omega k_2 R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{v=1}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} (-i)^v \frac{2v+1}{v(v+1)} [ \\ & -ia_n^d \overline{a_v^d} (-i)^{n+1} (i)^v \left( \frac{P_n^1(\cos \theta)}{\sin \theta} \frac{P_v^1(\cos \theta)}{\sin \theta} \right) \\ & + ib_n^d \overline{b_v^d} (-i)^n (i)^{v+1} \left( \frac{\delta}{\delta\theta} [P_n^1(\cos \theta)] \frac{\delta}{\delta\theta} [P_v^1(\cos \theta)] \right) \\ & - a_n^d \overline{b_v^d} (-i)^{n+1} (i)^{v+1} \left( \frac{P_n^1(\cos \theta)}{\sin \theta} \frac{\delta}{\delta\theta} [P_v^1(\cos \theta)] \right) \\ & + b_n^d \overline{a_v^d} (-i)^n (i)^v \left( \frac{\delta}{\delta\theta} [P_n^1(\cos \theta)] \frac{P_v^1(\cos \theta)}{\sin \theta} \right) ] \cos^2 \varphi \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

$$\begin{aligned} \frac{E_\varphi \overline{H_\theta}}{E_0^2} = & \frac{-1}{i\mu\omega k_2 R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{v=1}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} (-i)^v \frac{2v+1}{v(v+1)} [ \\ & ia_n^d \overline{a_v^d} (-i)^{n+1} (i)^v \left( \frac{\delta}{\delta\theta} [P_n^1(\cos \theta)] \frac{\delta}{\delta\theta} [P_v^1(\cos \theta)] \right) \\ & - ib_n^d \overline{b_v^d} (-i)^n (i)^{v+1} \left( \frac{P_n^1(\cos \theta)}{\sin \theta} \frac{P_v^1(\cos \theta)}{\sin \theta} \right) \\ & + a_n^d \overline{b_v^d} (-i)^{n+1} (i)^{v+1} \left( \frac{\delta}{\delta\theta} [P_n^1(\cos \theta)] \frac{P_v^1(\cos \theta)}{\sin \theta} \right) \\ & - b_n^d \overline{a_v^d} (-i)^n (i)^v \left( \frac{P_n^1(\cos \theta)}{\sin \theta} \frac{\delta}{\delta\theta} [P_v^1(\cos \theta)] \right) ] \sin^2 \varphi \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Ensuite, l'intégration pour la variable  $\varphi$  se fait entre 0 et  $2\pi$ . Pour toutes nos expressions nous avons

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi = \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi = \pi. \quad (\text{A.15})$$

La dépendance en  $\varphi$  disparaît.

L'intégration sur  $\theta$  est plus délicate. Nous utilisons les deux relations intégrales suivantes sur les polynômes de Legendre associés.

$$\int_0^\pi \left[ \frac{P_n^1(\cos \theta)}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} P_v^1(\cos \theta) + \frac{P_v^1(\cos \theta)}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} P_n^1(\cos \theta) \right] \sin \theta d\theta = 0 \quad (\text{A.16})$$

$$\begin{aligned} \int_{\theta=0}^\pi \left( \frac{d}{d\theta} P_n^1(\cos \theta) \frac{d}{d\theta} P_v^1(\cos \theta) + \frac{P_n^1(\cos \theta)}{\sin \theta} \frac{P_v^1(\cos \theta)}{\sin \theta} \right) \sin \theta d\theta \\ = \frac{2n(n+1)(n+1)!}{(2n+1)(n-1)!} \delta_{nv} \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Pour  $n = v$  l'intégration entre 0 et  $\pi$  vaut

$$\frac{2n^2(n+1)^2}{2n+1}. \quad (\text{A.18})$$

Ainsi après simplification, en faisant tendre  $R$  vers le rayon  $A$  nous obtenons

$$W_d = E_0^2 \frac{\pi}{\mu\omega k} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) [(a_{o_n}^d)^2 + (b_{o_n}^d)^2]. \quad (\text{A.19})$$

Ce calcul est long mais aide à la validation et à la compréhension de la théorie de Mie.



# Annexe B

## Description du code de calcul

### B.1 Le code Couches Minces Sphériques (C.M.S.)

Le logiciel est un logiciel en C/C++ avec des appels à des bibliothèques FORTRAN. Il calcule le champ électromagnétique dans quasiment toutes les configurations possibles d'une simple sphère ou d'une sphère multicouche.

#### B.1.1 Le fichier de données

Le fichier de données est représenté sur la figure B.1 ; nous avons de multiples paramètres : des paramètres propres à la sphère tels que son indice ou son diamètre par exemple, mais aussi des paramètres utiles à l'exploitation des résultats tels que le pas angulaire ou la polarisation choisie. Pour utiliser tous les paramètres nous avons plusieurs classes qui permettent de récupérer les données, de les traiter, de les transformer et de les conserver en les écrivant dans un tableur.

#### B.1.2 Classe `cmsLIREDONNEES`

Cette classe s'articule autour d'une méthode `void cmsLIREDONNEES : :LireFichier` qui lit les données du fichier d'entrée. Ensuite, nous avons des fonctions qui donnent accès à nos variables.

#### B.1.3 Classe `cmsBESSEL`

Cette classe fait appel à une bibliothèque FORTRAN pour calculer les fonctions de Bessel de première et de deuxième espèce ainsi que les fonctions de Hankel de première espèce. La bibliothèque FORTRAN calculant les fonctions de Bessel est l'algorithme 644 de D.E. AMOS. La fonction principale est `void cmsBESSEL : :sphbes(int n, double dxReel, double dxImag)`. En fonction de l'argument qui peut être complexe et de l'indice  $n$  elle calcule les fonctions de Bessel sphériques et leur dérivés. Ensuite, nous obtenons les valeurs calculés grâce à des méthodes publiques.

Data pour un multicouche sphérique	
Nom de fichier de sortie: Lambda_Nu_Infy_	<b>Préfixe du fichier de sortie</b>
Electrique (1) Magnétique (2) les deux (3): 1	<b>Champ incident Electrique ou magnétique</b>
Incident (1) Diffracte (2) Transmis (3) les trois(4): 2	<b>Calculer incident, diffracté, transmis</b>
Polarisation TE (1) ou TM (2) les deux (3): 1	<b>Champ suivant Ox ou Oy (TE ou TM)</b>
En fonction de Thêta (1) Phi (2) Lambda (3) des deux (4): 1	<b>Paramètre theta, phi, lambda</b>
Intensité (1) Projet (2) ProjUt (3) ProjUp (4) les 4 (5): 1	<b>Projection ou flux</b>
Convergence: 100	<b>Nb maximum de la somme sur n</b>
Indice du milieu: (1, 0)	<b>Milieu ambiant</b>
Perméabilité du milieu: 1	
Conductivité du milieu: 0	
Indice du substrat: (1.52, 0)	<b>Sphère substrat</b>
Rayon de la sphère substrat (nm): 10	
Perméabilité du substrat: 1	
Conductivité du substrat: 0	
Rayon de l'onde plane incidente (nm): 100	<b>Rayon géométrique du faisceau incident</b>
Thêta par défaut (deg):0	<b>thêta par défaut</b>
Thêta initial (deg): 0	<b>En fonction de thêta</b>
Thêta final (deg): 180	
Phi par défaut (deg):0	<b>phi par défaut</b>
Phi initial (deg): 0	<b>En fonction de phi</b>
Phi final (deg): 180	
Longueur d'onde par défaut (nm): 633	<b>lambda par défaut</b>
Longueur d'onde initiale (nm): 400	<b>En fonction de lambda</b>
Longueur d'onde finale (nm): 800	
Nb de pts: 500	<b>Nb de points pour la courbe (précision)</b>
Epaisseur de la couche (nm)	<b>Données sur les couches éventuelles</b>
Indice de la couche	
perméabilité (mu)	
conductivité (sigma):	
50 (2.25, 0) 1 0:	

FIG. B.1 – Fichier DataIn.dat.

### B.1.4 Classe cmsLEGENDRE

Cette classe utilise l'algorithme du Numerical Recipes en C pour calculer les polynômes de Legendre. Nous avons accès aux polynômes mais aussi à la dérivée du polynôme grâce aux fonctions *double cmsLEGENDRE : :plgndr(int n, int m, double x)* et *double cmsLEGENDRE : :plgndrD(int n, int m, double dTheta)*. En argument soit nous avons  $\theta$  ou soit  $x = \cos(\theta)$ . Cela nous permet de traiter les cas de division par 0.

### B.1.5 Classe cmsVECTEURSMLN

Nous avons deux types de classes cmsVECTEURSMLN. Celle valable pour un champ électromagnétique proche de la sphère : elle fait appel aux classes **cmsLEGENDRE** et **cmsBESSEL**. Celle valable pour un champ asymptotique loin de la

sphère faisant appel seulement à **cmsLEGENDRE**. **cmsVECTEURSMLN** nous donne accès aux composantes vectorielles de la base  $(M, N, L)$  exprimés à l'aide des projections sur  $u_r$ ,  $u_\theta$  et  $u_\varphi$ . Nous pouvons aussi choisir la parité en fonction du champ incident.

### B.1.6 Classe **cmsCHAMPS**

Cette classe calcule les coefficients  $A_n$  et  $B_n$ . Ces coefficients dépendent seulement du caractère radial de la configuration. Elle comprend des méthodes pour avoir accès aux fonctions de Bessel et aux données puis des fonctions qui calculent à l'aide de récurrence les coefficients  $A_n$  et  $B_n$ . En outre, si le rayon est petit devant la longueur d'onde, nous avons des relations asymptotiques.

### B.1.7 Classe **cmsSOMMES**

Cette classe calcule les fonctions harmoniques grâce aux vecteurs et aux coefficients  $A_n$  et  $B_n$ . Comme on connaît la variable de convergence alors on peut déterminer la somme. Dans cette classe nous choisissons ce que l'on calcule : par exemple le champ électrique diffracté pour la polarisation TE incidente à  $\varphi = 0$  et  $\theta = 0$  en fonction de  $\lambda$ .

### B.1.8 Classe **cmsFONCTIONS**

Cette classe permet de faire encore un choix plus haut dans les fonctions. Nous calculons les champs électromagnétiques.

### B.1.9 Classe **cmsFLUX**

Cette classe donne accès aux méthodes de calculs de flux en fonction de tous les paramètres.

## B.2 Les fonctions du C.M.S.

Nous pouvons avoir accès à différents calculs suivant ce que l'on veut simuler. Les différentes routines offrent de calculer un vaste panel de champ et de flux.

**void cmsFLUX : :CalculerFluxTotal(cmsLIREDONNEES lire)**

Cette fonction calcule le flux diffracté total en intégrant le flux de Poynting. L'intégration se fait sur  $u_\theta$  et sur  $u_\varphi$  à longueur d'onde constante. Le champ est considéré à l'infini quand nous plaçons la mesure à 1 mètre de la sphère. L'intégration de  $\theta$  se fait entre 0 et  $\pi$ . L'intégration de  $\varphi$  se fait entre 0 et  $\pi$ . Pour obtenir une solution normée, le résultat est divisé par le flux incident d'une onde plane. On obtient alors une surface que l'on divise par  $\pi r^2$ , où  $r$  est le rayon du spot incident.

**void cmsFLUX : :CalculerFluxTotal1(cmsLIREDONNEES lire)**

Cette fonction calcule le flux diffracté total en intégrant le flux de Poynting seulement sur  $\vec{u}_\theta$  à  $\lambda$  constant. Le champ est considéré à l'infini quand nous plaçons la mesure à 1 mètre de la sphère. L'intégrale sur  $\varphi$  se déduit de la parité, car nous avons une dépendance en  $\cos(\varphi)$  et en  $\sin(\varphi)$ . Il faut séparer les deux polarisations (voir tableau B.1).

Champs	Champ diffracté suivant $\vec{u}_\theta$	Champ diffracté suivant $\vec{u}_\varphi$
E suivant $\vec{o}_x$	$\varphi = 0$	$\varphi = \frac{\pi}{2}$
E suivant $\vec{o}_y$	$\varphi = \frac{\pi}{2}$	$\varphi = 0$
H suivant $\vec{o}_x$	$\varphi = 0$	$\varphi = \frac{\pi}{2}$
H suivant $\vec{o}_y$	$\varphi = \frac{\pi}{2}$	$\varphi = 0$

TAB. B.1 – dépendance angulaire des champs électromagnétiques.

**void cmsFLUX : :CalculerFluxTotal2(cmsLIREDONNEES lire)**

Cette fonction calcule le flux diffracté en fonction de  $\lambda$  à  $\theta$  constant.

**void cmsFLUX : :CalculerFluxTotal3(cmsLIREDONNEES lire)**

Cette fonction calcule le flux pour chaque longueur d'onde à partir de la formule analytique de la section efficace de diffusion.

**void cmsFLUX : :CalculerFluxIsp(cmsLIREDONNEES lire)**

Cette fonction calcule le flux projeté sur  $\vec{u}_\theta$  en fonction de la longueur d'onde pour tous les  $\theta$  pour un champ électrique incident porté par  $\vec{o}_x$ . Nous avons donc une boucle sur  $\theta$  et une boucle sur  $\lambda$ .

**void cmsFLUX : :CalculerFluxIss(cmsLIREDONNEES lire)**

Cette fonction calcule le flux projeté sur  $\vec{u}_\varphi$  en fonction de la longueur d'onde pour tous les  $\theta$  pour un champ électrique incident porté par  $\vec{o}_x$ . Nous avons donc une boucle sur  $\theta$  et une boucle sur  $\lambda$ .

**void cmsFLUX : :CalculerFluxIps(cmsLIREDONNEES lire)**

Cette fonction calcule le flux projeté sur  $\vec{u}_\varphi$  en fonction de la longueur d'onde pour tous les  $\theta$  pour un champ électrique incident porté par  $\vec{o}_y$ . Nous avons donc une boucle sur  $\theta$  et une boucle sur  $\lambda$ .

**void cmsFLUX : :CalculerFluxIpp(cmsLIREDONNEES lire)**

Cette fonction calcule le flux projeté sur  $\vec{u}_\theta$  en fonction de la longueur d'onde pour tous les  $\theta$  pour un champ électrique incident porté par  $\vec{o}_y$ . Nous avons donc une boucle sur  $\theta$  et une boucle sur  $\lambda$ .

**CalculerIncident**

Les fonctions suivantes permettent de calculer le champ incident en fonction des paramètres  $\theta$ ,  $\varphi$  et  $\lambda$ . En sortie nous avons un fichier *.xls* avec les valeurs de toutes les projections, leur module au carré et la somme de ces projections.

- void cmsFONCTIONS : :CalculerIncidentTheta
- void cmsFONCTIONS : :CalculerIncidentPhi
- void cmsFONCTIONS : :CalculerIncidentLambda

**CalculerDiffracté**

Les fonctions suivantes permettent de calculer le champ diffracté en fonction des paramètres  $\theta$ ,  $\varphi$  et  $\lambda$ . En sortie nous avons un fichier *.xls* avec les valeurs de toutes les projections, leur module au carré et la somme de ces projections.

- void cmsFONCTIONS : :CalculerDiffracteTheta
- void cmsFONCTIONS : :CalculerDiffractePhi
- void cmsFONCTIONS : :CalculerDiffracteLambda

**CalculerTransmis**

Les fonctions suivantes permettent de calculer le champ à l'intérieur de la sphère en fonction des paramètres  $\theta$ ,  $\varphi$  et  $\lambda$ . En sortie nous avons un fichier *.xls* avec les valeurs de toutes les projections, leur module au carré et la somme de ces projections.

- void cmsFONCTIONS : :CalculerTransmisTheta
- void cmsFONCTIONS : :CalculerTransmisPhi
- void cmsFONCTIONS : :CalculerTransmisLambda



# Annexe C

## Documents pour l'I.B.S.

Nous présentons ici quelques documents qu'il est nécessaire de connaître pour le bon fonctionnement de notre bâti de pulvérisation.

### C.1 Documentation du canon à ions

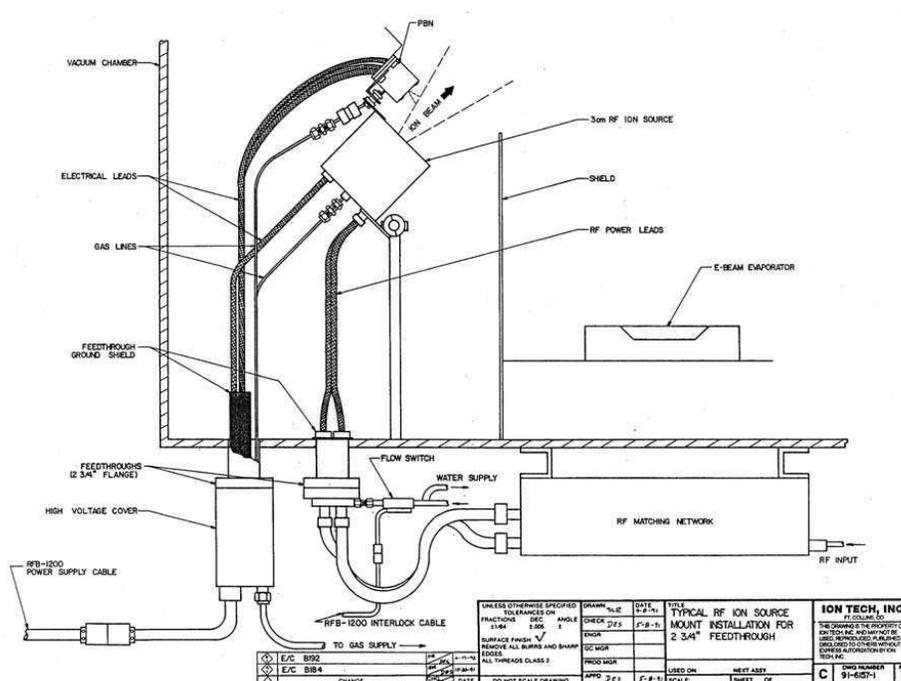
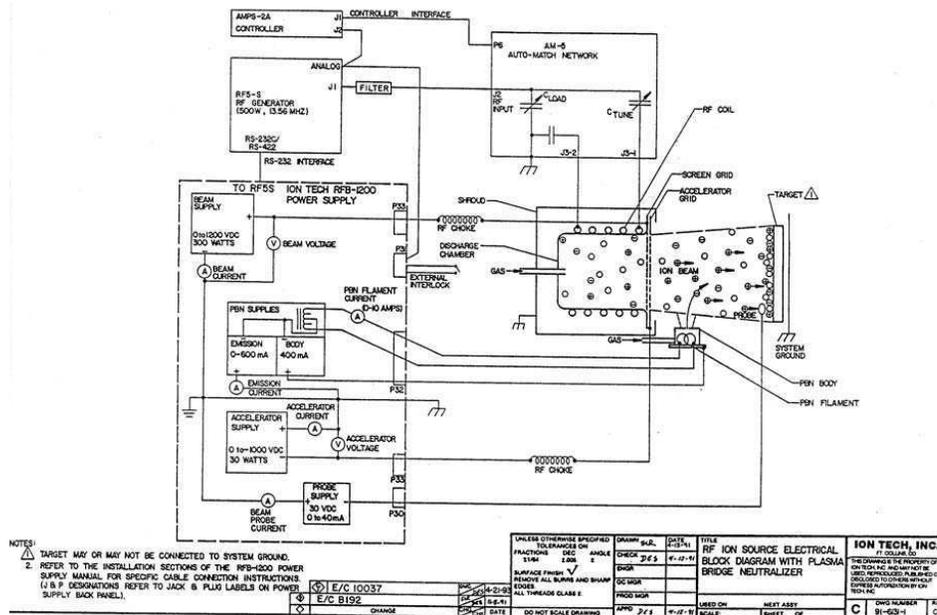


FIG. C.1 – Vue global du canon à ions, avec le neutraliseur tel qu'il doit être positionné dans l'enceinte à vide avec les différents passages entre l'enceinte à vide et la salle.

ANNEXE C. DOCUMENTS POUR L'I.B.S.



## C.2 Procédures de dépôt

Le dépôt de couches minces optiques se décomposent en deux étapes essentielles. La première consiste à démarrer l'enceinte de pulvérisation et à préparer les bons échantillons. La deuxième étape est de relever tous les paramètres clés au cours d'un dépôt.

### Procédure de démarrage

- **Fermeture de l'enceinte**
  - *Vérifier* le substrat et la cible.
  - *Fermer* la cloche, faire attention au joint.
  - *Mettre* la clavette en butée.
  - *Positionner* la pompe, faire attention aux cables, serrer en croix les boulons.
  - *Vérifier* la clavette en butée.
  - *Resserrer* le tombac (raccord pneurop à soufflet inox).
  - *Ouvrir* l'eau.
- **Pompage**
  - *Allumer* l'interrupteur en façade arrière.
  - *Appuyer* sur ON/OFF.
  - *Attendre* que la vitesse soit stabilisée (525 Hz, code 309 : Actual Root Speed), premier et troisième voyant.
  - *Allumer* la jauge pour quantifier le vide.
  - Vide suffisant atteint  $5.10^{-6}$  Torrs.
- **Tir au canon à ions**
  - *Ouvrir* les bouteilles de gaz (Argon, Oxygène si dépôt de  $Ta_2O_5$ ).
  - *Allumer* le contrôleur de gaz, OUvrir les vannes d'argon et/ou d'oxygène.
  - *Laisser* purger pendant 20 minutes.
  - *Allumer* les trois interrupteurs de chaque module du canon à ions.
  - *Allumer* le quartz, le réinitialiser.
  - *Lancer* le plasma, appuyer sur Source.
  - *Commencer* le tir au canon, appuyer sur Beam.

Nous mettons ensuite sur la figure C.4 la fiche des paramètres à remplir en cours d'une pulvérisation.

ANNEXE C. DOCUMENTS POUR L'I.B.S.

---

Canon ion VEECO

Numéro exp:

Date

**Canon à ions**

Beam Current (mA)		Source RF Power Forward W.	
Beam Voltage (V)		Source RF Power Reflected W.	
Accelerator Current (mA)		Neutraliseur (mA)	
Accelerator Voltage (V)		Neutraliseur (V)	

**Débits de Gaz**

Gaz	Débit max (sccm) 1000 coups	Potentio. Arrière Par rapport à N	Valeur débit pour canon (sccm)	Valeur affichée
Oxygène (O)	50 (canon)	50		
Argon (Ar)	50 (canon)	70		
Argon (Ar)	20 (neut.)	280		

**Pression**

Pression enceinte Jauge située partie inférieure de la cloche	Avant dépôt (Torr)	Pendant dépôt (Torr)	Après dépôt (Torr)

**Substrat (nature, taille):**

**Empilement souhaité :**

Heure début du dépôt :

Heure fin du dépôt :

Couches	
Matériaux	
Vitesse dépôt (Å/s)	
Epaisseur (Å)	
Temps du dépôt (s)	

**Vibrations**

Fréquence :

Amplitude :

**Commentaires :**

FIG. C.4 – Fiche récapitulative des paramètres à relever et à régler.

# Bibliographie

- [1] G. Mie. Beiträge zur optik trüber medien, speziell kolloidaler metallösungen. *Annalen der Physik*, 25 :377–452, 1908.
- [2] L. Lorentz. Lysbevaegelsen og unden for en hal. *Der kongelige danske videnskabernes selskabs skrifter*, 6 :1–62, 1898.
- [3] William J. Lentz. Generating bessel functions in mie scattering calculations using continued fractions. *Applied Optics*, 15(3) :668–671, 1976.
- [4] Petr Chylev Dat Ngo, Gordon Videen. A fortran code for the scattering of em waves by a sphere with a nonconcentric spherical inclusion. *Computer Physics Communications 1077*, pages 94–112, 1996.
- [5] W.J. Wiscombe. Improved mie scattering algorithms. *Applied Optics*, 19 :1505–1509, 1980.
- [6] Steven C. Hill Elsayed E. M. Khaled and Peter W. Barber. Light scattering by a coated sphere illuminated with a gaussian beam. *Applied Optics*, 33(15) :3308–3314, May 1994.
- [7] G. Gréhan F. Onofri and G. Gouesbet. Electromagnetic scattering from a multilayered sphere located in an arbitrary beam. *Applied Optics*, 34(30) :7113–7126, 1995.
- [8] Gérard Gouesbet Hubert Polaert and Gérard Gréhan. Laboratory determination of beam-shape coefficients for use generalized lorenz-mie theory. *Applied Optics*, 40(10) :1699–1705, 2001.
- [9] Gérard Gréhan Gérard Gouesbet, Loic Mees and Kuan-Fang Ren. Localized approximation for gaussian beams in elliptical cylinder coordinates. *Applied Optics*, 39(6) :1008–1025, 2000.
- [10] E.B. Shybanov and V.I. Haltrin. Mie scattering by very large spherical particles. *submitted to Applied Optics in May 2001*, manuscript No. LP17771.
- [11] Eugeny B. Shybanov. The improved computational method of scattering calculations on spherical particles. *Marine Hydrophysical Institute, Ukrainian Academy of Sciences, 2 Kapitanskaya St., Sevastopol, 99000, Ukraine*, pages 383–389.
- [12] J. Sanchez-Mondragon V. Grimalsky G. Burlak, S. Koshevaya. Electromagnetic eigenoscillations and fields in a dielectric microsphere with multilayer spherical stack. *Optics Communications*, 187 :91–105, 2001.

- [13] J. Sanchez-Mondragon V. Grimalsky G. Burlak, S. Koshevaya. Electromagnetic oscillations in a multilayer spherical stack. *Optics Communications*, 180 :49–58, 2000.
- [14] K.A. Fuller. Scattering of light by coated spheres. *Optics Letters*, 18(4) :257–259, February 1993.
- [15] L.G. Guimaraes T.M. Bambino. Resonances of a coated sphere. *Physical Review E*, 53(3) :2859–2863, March 1996.
- [16] Valmar C. Barbosa Tulio M. Bambino, Ana Maria S. Breitschaft and Luiz G. Guimaraes. Application of semiclassical and geometrical optics theories to resonant modes of a coated sphere. *JOSA A*, 20(3) :489–498, March 2003.
- [17] S. Lange T. Kaiser and G. Schweiger. Structural resonances in a coated sphere : investigation of the volume-averaged source function and resonance positions. *Applied Optics*, 33(33) :7789–7797, November 1994.
- [18] Born and Wolf. *Principles of Optics*. Pergamon, Oxford, 1980.
- [19] J.T. Kiehl Petr Chylev and M.K.W. Ko. Narrow resonance structure in the mie scattering characteristics. *Applied Optics*, 17(19) :3019–3021, 1978.
- [20] Petr Chylev. Partial-wave resonances and the ripple structure in the mie normalized extinction cross section. *J. Opt. Soc. Am.*, 66(3) :285–287, 1976.
- [21] D. Juarez G. Burlak, A.Zamudio-Lara. Confinement of electromagnetic oscillations in a dielectric microsphere coated by the frequency dispersive multilayers. *Physics Letters A*, 289 :89–105, 2001.
- [22] Kirk A. Fuller David D. Smith. Photonic bandgaps in mie scattering by concentrically stratified spheres. *JOSA B*, 19(10) :2449–2455, October 2002.
- [23] Yanyi Huang Wei Liang, Yong Xu, J.G. Fleming Amnon Yariv, and Shawm-Yu Lin. Mie scattering analysis of spherical bragg "onion" resonators. *Optics Express*, 12(4) :657 – –669, February 2004.
- [24] Kaplan. *Applications métrologiques de l'ellipsométrie de Müller*. PhD thesis, Laboratoire de Physique des Interfaces et des Couches Minces, Ecole Polytechnique, 2002.
- [25] J.L. de la Pena, F. Gonzalez P.J. Valle J.M. Saiz, Gorden Videen, and F. Moreno. Scattering from particles on surfaces : visibility factor and polydispersity. *Optics Letters*, 24(21) :1451–1453, November 1999.
- [26] I.A. Meinertzhagen W. Xu, M.H. Jericho and H.J. Kreuzer. Digital in-line holography of microspheres. *Applied Optics*, 41(25) :5367 – –5375, 2002.
- [27] Brian Stout Yongle Pan Jerold R. Bottiger Richard K. Chang Stephen Holler, Jean-Claude Auger and Gorden Videen. Observations and calculations of light scattering from clusters of spheres. *Applied Optics*, 39(36) :6873–6887, 2000.
- [28] J. Dutta S.M. Scholz, R. Vacassy and H. Hofmann. Mie scattering effects from monodispersed zns nanospheres. *Journal of Applied Physics*, 83(12) :7860–7866, June 1998.

- 
- [29] P. Debye. Der lichtdruck auf kugeln von beliebigem material. *Annalen der Physik*, 30 :57–136, 1909.
- [30] H.C. van de Hulst. *Light Scattering by Small Particles*. Dover Publications, Inc. New York, 1981.
- [31] J.A. Stratton. *Electromagnetic theory*. Mc Graw-Hill Book Company, New York, 1941.
- [32] H.K. Pulker. *Coatings on Glass*, volume 6 of *Thin Films Science And Technology*. Elsevier, 1984.
- [33] H.A. Macleod. *Thin optical filters*. London Adam Hilger, 1986.
- [34] M.Imbert. *La vision des couleurs*. Ecole Thématique interdisciplinaire sur la couleur des matériaux : le métal, Rousillon, du 17 Mars au 21 Mars 2003.
- [35] M. Commandré. Cours de visualisation 3<sup>ime</sup> année. Ecole Nationale Supérieure de Physique de Marseille.
- [36] M.N. Bussac L.Zuppiroli. *Traité des couleurs*. Presse polytechniques et universitaires romandes, Lausanne, 2001.
- [37] CIE. Adresse internet sur la cie. <http://www.cie.com>.
- [38] Luc Brun. *Cours : Traitement d'images Couleur*. 2003.
- [39] Luc Brun. *Segmentation d'images à base Topologique*. PhD thesis, Université de Bordeaux, 1996.
- [40] W.D. Wright. A re-determination of the trichromatic coefficients of the spectral colours. *Trans. Opt. Soc.*, 31 :201–218, 1928.
- [41] J. Guild. A critical survey of modern developments in the theory and technique of colorimetry and allied sciences. *Proc. Opt. Convention*, (61-146), 1926.
- [42] Aimé Richardt et Anne-Marie Durand. *Les interactions ions énergétiques-solides*. Edition IN FINE, 1997.
- [43] Tadatsugu Itoh. *Ion Beam Asisted Film Growth*. Elsevier.
- [44] Edwards. *Pompes à vide rotatives E1M40-E2M40/E1M80-E2M80*. 1985.
- [45] Pfeiffer Vacuum. *Pumping Operations With DCU*. Pfeiffer Vacuum GmbH.
- [46] Pfeiffer Vacuum. *Turbomolecular Pumps For Up-side Down Installation*. Pfeiffer Vacuum GmbH.
- [47] Inc. Ion Tech. *Instruction Manual 3 cm RF IOn Source with PBN*. Ion Tech, Inc., 1997.
- [48] Inc. Ion Tech. *Instruction Manual Plasma Bridge Neutralizer Model PBN-300*. Ion Tech, Inc., 1999.
- [49] Inc. Ion Tech. *Instruction Manual RFB-1200 Power Supply*. Ion Tech, Inc., 1997.
- [50] Leybold Inficon Inc. *XTM/2 Deposition Monitor Manual*. Two Technology Place, East Syracuse.

- [51] Edward D. Palik. *Handbook optical constants solids*. Ardcover Academic Press, 1997.
- [52] M. Cathelinaud. *Séquence métal-diélectrique pour le filtrage spectral large bande et les absorbeurs de lumière. Détermination d'indice des couches minces métalliques*. PhD thesis, Ecole Nationale Supérieure de Physique de Marseille, 2000.
- [53] C. Amra. From light scattering to the microstructure of thin film multilayer. *Applied Optics*, 32 :5481–5491, 1993.
- [54] C. Amra. Light scattering from multilayer optics. part a : investigation tools. *J. Opt. Soc. Am.*, 11 :197–210, 1994.
- [55] C. Amra. Light scattering from multilayer optics. part b : application to experiment. *J. Opt. Soc. Am.*, 11 :211–226, 1994.
- [56] C. Amra. First order vector theory of bulk scattering in optical multilayers. *J. Opt. Soc. Am.*, 10 :365–374, 1993.
- [57] J.P. Rhan J.M. Elson and J.M. Bennet. Relationship of the total integrated scattering from multilayer-coated optics to angle of incidence, polarization, correlation-length, and roughness cross-correlation properties. *Applied Optics*, 22 :3207–3219, 1983.
- [58] J.P. Rhan J.M. Elson and J.M. Bennet. Light scattering from multilayers optics : comparison of theory and experiment. *Applied Optics*, 19 :669–679, 1980.
- [59] K.Hehl-P.Bussemer S. Kassam, A.Duparré and J. Neubert. Light scattering from the volume of optical thin films : theory and experiment. *Applied Optics*, 31 :1304–1313, 1992.
- [60] C. Amra. Multiwavelength (0.45-10.6  $\mu\text{m}$ ) angle resolved scatterometer or how to extend the optical window". *Appl. Opt.*, 32 :5462–5474, 1993.