

# Ensembles localement pics dans les bords faiblement pseudoconvexes de $^{n}$.

Borhen Halouani

▶ **To cite this version:**

Borhen Halouani. Ensembles localement pics dans les bords faiblement pseudoconvexes de $^{n}$.. Mathématiques [math]. Université du Littoral Côte d'Opale, 2006. Français. NNT : . tel-00084010

**HAL Id: tel-00084010**
**https://theses.hal.science/tel-00084010**

Submitted on 5 Jul 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Thèse

présentée en vue de l'obtention du
Doctorat de l'Université du Littoral Côte d'Opale
Spécialité : Mathématiques Pures
par

**Borhen HALOUANI**

# Ensembles localement pics dans les bords faiblement pseudoconvexes de $\mathbb{C}^n$

Soutenue le 30 juin 2006 devant le jury composé de :

| | | |
|---|---|---|
| **Y. Dupain** | Professeur, Université de Bordeaux I | Rapporteur |
| **B. Fischer** | Professeur, Universität Wuppertal | Rapporteur |
| **E. Mazzilli** | MCF, HDR, Université de Lille I | Examinateur |
| **J. Michel** | Professeur, Université du Littoral | Directeur |
| **J. von Below** | Professeur, Université du Littoral | Examinateur |

Le projet de soutenance a été approuvé par la commission des thèses de Mathématiques des universités D'Artois, de Lille I, du Littoral-Côte d'Opale et de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis.

Laboratoire de Mathématiques Pures et Appliquées Joseph Liouville, centre universitaire de la Mi-Voix
Bât H. Poincaré, 50 rue F. Buisson B.P. 699, 62228 Calais Cédex, France.

# Remerciements

*Je tiens à exprimer ma profonde gratitude au professeur Joachim MICHEL qui a dirigé ce travail avec grand soin, alternant une aide efficace à des précieux conseils. Il a su me prodiguer avec patience tous les encouragements dont j'avais besoin pour l'aboutissement de ce travail.*

*Je remercie les professeurs Yves DUPAIN et Bert FISCHER d'avoir accepté d'être rapporteurs de ma thèse.*

*J'adresse mes sincères remerciements au professeur Pascal HONVAULT pour l'intérêt porté à mon travail qu'il a lu avec grand soin.*

*Mes chaleureux remerciements vont aussi aux professeurs Emmanuel MAZZILLI et Joachim von BELOW qui m'ont fait l'honneur de participer au jury.*

# Introduction

Notre thèse consiste à donner des conditions suffisantes pour qu'une sous variété totalement réelle, complexe-tangentielle, de dimension $(n-1)$ dans un bord d'un domaine faiblement pseudoconvexe de $\mathbb{C}^n$, soit un ensemble localement pic. Rappelons d'abord quelques définitions et quelques résultats.

Soit $D$ un domaine de $\mathbb{C}^n$ à bord $bD$ de classe $C^\infty$. On note $A^\infty(D)$ l'ensemble des fonctions holomorphes dans $D$ qui admettent une extension de classe $C^\infty$ à $\overline{D}$.

Un sous ensemble fermé $\mathbf{K}$ de $bD$ est un ensemble pic pour la classe $A^\infty(D)$, s'il existe une fonction $f \in A^\infty(D)$ telle que $f = 1$ sur $\mathbf{K}$ et $|f| < 1$ sur $\overline{D} \backslash \mathbf{K}$. On dira que $\mathbf{K}$ est un ensemble localement pic pour la classe $A^\infty$, si pour tout point $p \in \mathbf{K}$, il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de $p$ tel que $\mathbf{K} \cap \mathcal{U}$ soit un ensemble pic pour la classe $A^\infty(D \cap \mathcal{U})$.

Dans le cas où le bord $bD$ est de classe $C^\omega$ (analytique réelle), on note $\mathcal{O}\left(\overline{D}\right)$ l'ensemble des fonctions holomorphes dans un voisinage de $\overline{D}$. On peut considérer les mêmes définitions ci-dessus pour la classe $\mathcal{O}$.

Soit $\mathbf{M}$ une sous variété de $bD$. On dira que $\mathbf{M}$ est complexe-tangentielle en un point $p \in \mathbf{M}$ si $T_p(\mathbf{M}) \subseteq T_p^{\mathbb{C}}(bD)$ où $T_p^{\mathbb{C}}(bD)$ est le sous espace tangent complexe maximal de $T_p(bD)$. Si $\mathbf{M}$ est complexe-tangentielle en tout point $p \in \mathbf{M}$, on dira que $\mathbf{M}$ est complexe-tangentielle.
Si pour tout $p \in \mathbf{M}$, l'espace tangent réel en $p$ à $\mathbf{M}$ ne contient aucune droite complexe, on dira que $\mathbf{M}$ est totalement réelle.

Le sujet des ensembles pics a été étudié par plusieurs auteurs, voir par exemple [T-W], [B-St],[C-C1, C-C2], [H-S2], [I2],[N1]. Si $D$ est le disque unité dans le plan complexe, B. A. Taylor et D. L. Williams [T-W] ont prouvé que les ensembles pics pour la classe $A^\infty(D)$ sont des sous ensembles finis du bord $bD$.

Dans $\mathbb{C}^n$, $n \geq 2$, la situation est différente. Dans le cas où le domaine $D$ est strictement pseudoconvexe, M. Hakim et N. Sibony [H-S1], J. Chaumat et

A. M. Chollet [C-C1, C-C2] et J. E. Fornæss et B. Henriksen [F-H] ont donné la caractérisation des ensembles localement pics pour la classe $A^\infty$ suivante :

**Théorème 1** *Soient $D$ un domaine borné strictement pseudoconvexe de $\mathbb{C}^n$ à bord $bD$ de classe $C^\infty$ et $\boldsymbol{K}$ un sous ensemble fermé de $bD$. Alors, on a les équivalences suivantes :*

1. *$\boldsymbol{K}$ est un ensemble localement pic pour la classe $A^\infty$.*
2. *$\boldsymbol{K}$ est localement contenu dans une sous variété $C^\infty$ de dimension $(n-1)$ de $bD$, totalement réelle, complexe-tangentielle en tout point $p \in \boldsymbol{K}$.*
3. *$\boldsymbol{K}$ est localement contenu dans une sous variété $\boldsymbol{M}$, $C^\infty$, de dimension $(n-1)$ de $bD$, totalement réelle et complexe-tangentielle en tout point $p \in \boldsymbol{M}$.*
4. *$\boldsymbol{K}$ est un ensemble pic pour la classe $A^\infty$.*

Pour les domaines faiblement pseudoconvexes de $\mathbb{C}^n$, cette caractérisation des ensembles pics ne reste pas valable. Si on veut généraliser ces résultats aux domaines faiblement pseudoconvexes dans $\mathbb{C}^2$ on rencontrera des difficultées, illustrées par les exemples suivants d'A. Noell [N1] :

**Exemple 1** *Soit $D$ le domaine défini dans un voisinage $\mathcal{U}$ de l'origine de $\mathbb{C}^2$ par $\rho(z,w) = \Re w + |z|^4 - t(\Im z)^4 + (\Im w)^2 < 0$ avec $0 < t << 1$ fixé. $D$ est un domaine convexe. La courbe $\boldsymbol{M} = \{(z,w) \in bD \cap \mathcal{U} \ / \ \Im z = \Im w = 0\}$ est complexe-tangentielle mais $\boldsymbol{M}$ n'est pas un ensemble localement pic à l'origine pour la classe $A^\infty$.*

**Exemple 2** *(voir aussi [F-S], page 231) Soit $D$ le domaine défini dans un voisinage $\mathcal{U}$ de l'origine de $\mathbb{C}^2$ par : $\rho(z,w) = |w + e^{i \ln z\overline{z}}|^2 - 1 + R(\ln z\overline{z})^4 < 0$, où $R$ est une constante positive assez grande. $D$ est un domaine pseudoconvexe. La courbe $\boldsymbol{M} = \{(z,w) \in bD \cap \mathcal{U} \ / \ |z| = 1, w = 0\}$ est un ensemble localement pic en tout point pour la classe $A^\infty$ mais $\boldsymbol{M}$ n'est pas globalement pic.*

Dans notre thèse, on se restreint aux ensembles pics locaux pour les classes $\mathcal{O}$ et $A^\infty$. Signalons qu'il existe des ensembles localement pics pour la classe $A^\infty$ qui ne sont pas pics pour la classe $\mathcal{O}$ comme le montre l'exemple ci-dessous donné par A. Iordan dans [I1] :

**Exemple 3** *Soit $D$ le domaine défini dans un voisinage $\mathcal{U}$ de l'origine de $\mathbb{C}^2$ par : $\rho(z,w) = |z|^4 + |w|^2 < 1$. L'ensemble $\boldsymbol{K} = \{(z,w) \in bD \cap \mathcal{U} \ / \ \Re z = \Im w = 0\} \cup \{(z,w) \in bD \cap \mathcal{U} \ / \ \Im z = \Im w = 0\}$ est un ensemble pic pour la classe $\mathcal{O}$ par contre $\boldsymbol{M} = \{(z,w) \in bD \cap \mathcal{U} \ / \ \Im z = \Im w = 0\}$ est un ensemble localement pic pour la classe $A^\infty$ mais n'est pas localement pic pour la classe $\mathcal{O}$.*

Les ensembles localement pics de $\mathbb{C}^n$ ne sont pas forcément contenus dans des sous variétés complexe-tangentielles de dimension $(n-1)$ du bord comme dans l'exemple ci-dessus : $\mathbf{K}$ est un ensemble pic (prendre $f(z,w) = z^4 + w^2 - 1$) pour la classe $\mathcal{O}$ mais $\mathbf{K}$ ne peut pas être contenu dans aucune courbe complexe-tangentielle.

Comme la caractérisation des ensembles localement pics semble être trop dure nous imposons la contrainte que $\mathbf{K}$ soit une sous variété, complexe-tangentielle, de dimension $(n-1)$. Quelles sont les conditions suffisantes pour que $\mathbf{K}$ soit localement pic en $p \in \mathbf{K}$ ?

Notre inspiration provient des travaux de L. Boutet de Monvel et A. Iordan [B-I1] où sont donnés des conditions nécessaires et suffisantes concernant l'existence des courbes localement pics passant par un point de type fini, dans le bord d'un domaine pseudoconvexe à bord de classe $C^\omega$ dans $\mathbb{C}^2$ pour la classe $\mathcal{O}$. Plus précisément, les auteurs considèrent un domaine "modèle" $D$ dont la fonction définissante locale $\rho$ à l'origine qui est point de type $2k$, s'écrit sous la forme :

$$\rho(z,w) = \Re w + \mathbf{P}_{2k}(z) + O\left(|z|^{2k+1}, |zw|, |w|^2\right),$$

avec $\mathbf{P}_{2k} = \sum_{i=1}^{2k-1} a_i z^i \overline{z}^{2k-i}$, $a_i = \overline{a}_{2k-i}$ un polynôme homogène de degré $2k$, à valeurs réelles et sans termes harmoniques. Puis, ils définissent un invariant $\nu^\alpha_{\mathbf{P}_{2k}}$ pour $\alpha \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ fixé où $\nu^\alpha_{\mathbf{P}_{2k}}(\zeta) = \Re\left[-\frac{\alpha}{k}\sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \mathbf{P}_{2k}(\alpha)}{\partial z_j}\zeta^{2k}\right] + \mathbf{P}_{2k}(\alpha\zeta)$ pour tout $\zeta \in \mathbb{C}$. En fait, $\alpha$ désigne un vecteur porté par l'unique direction complexe tangente de $T^{\mathbb{C}}_0(bD)$.

**Condition Nécessaire [B-I1].** On suppose qu'il existe une courbe $\gamma$, analytique réelle, complexe-tangentielle dans le bord du domaine $D$ passant par un point $p \in bD$ de type fini $2k$, qui est un ensemble localement pic en $p$ pour la classe $\mathcal{O}$. Alors il existe $\alpha$ tel que pour tout $\zeta \in \mathbb{C}$, $\nu^\alpha_{\mathbf{P}_{2k}}(\zeta) \geq 0$.

**Condition Suffisante [B-I1].** Soit $D$ un domaine pseudoconvexe à bord $bD$ de classe $C^\omega$ de $\mathbb{C}^2$, $p$ est un point de type fini $2k$ de $bD$ et $\gamma$ une courbe

analytique réelle, complexe-tangentielle de $bD$ passant par $p$. Soit $\Gamma$ la complexifiée de $\gamma$. On suppose que

• $\Gamma \cap \overline{D} = \gamma$.

• Il existe une constante $c > 0$, un entier $m \in \mathbb{N}^*$, tel qu' on ait, pour tout $\zeta \in \mathbb{C}$,

$$\rho_{2k}\left(\Gamma(\zeta)\right) \geq c\left(\Im\zeta\right)^{2m} |\zeta|^{2k-2m},$$

où $\rho_{2k}$ est le premier terme non identiquement nul dans le développement de Taylor de la fonction $\rho \circ \Gamma$ à l'origine. Alors d'après [B-I1], il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de $p$ tel que $\gamma \cap \mathcal{U}$ soit un ensemble localement pic pour la classe $\mathcal{O}$.

Nous généralisons l'invariant $\nu^{\alpha}_{\mathbf{P}_{2k}}$ pour un domaine $D$ pseudoconvexe borné de $\mathbb{C}^n$ avec $n \geq 3$ et remarquons que le comportement de l'invariant $\nu^{\alpha}_{\mathbf{P}_{2k}}$ varie selon la direction tangente complexe choisie. En effet, l'entier $k$ se comporte de manière discontinue en fonction de $\alpha$ car on a plusieurs directions complexes tangentes ($\dim_{\mathbb{C}} T^{\mathbb{C}}_0(bD) = n-1$). Ainsi, nous contrôlons la fonction $\nu^{\alpha}_{\mathbf{P}_{2k}}$ dans les différentes directions complexes tangentes en donnant une quantification du comportement : l'hypothèse $(\mathcal{H})$ (voir le chapitre 2, section 3). Nous donnons d'abord un changement de coordonnées holomorphe de façon que la sous variété $\mathbf{M}$ s'écrive sous la forme : $\mathbf{M} = \{(Z,w) \in bD \,/\, \Im Z = w = 0\}$, $p$ est ramené à l'origine et le bord $bD$ a pour fonction définissante locale $\rho = \Re w + A(Z) + \Im w B(Z) + (\Im w)^2 R(Z, \Im w)$. L'hypothèse $(\mathcal{H})$ est donnée dans ces nouvelles coordonnées. Elle entraîne des conséquences pour la fonction $A$. De plus, il s'avère qu'il faut distinguer deux comportements différents : un comportement à l'origine $p = 0 \in \mathbf{M}$ et un autre comportement en $p' \in \mathbf{M}$, où $p'$ est assez proche de $p$. Ceci nous amène à définir les pseudo-normes $||Z||_*$ et $||Y||_*$ puis d'introduire le $Z$-poids et le $Y$-poids pour une fonction. Grâce à l'hypothèse $(\mathcal{H})$, nous pouvons effectuer une "analyse à poids" de certaines fonctions sur $\mathbf{M}$ et en donner des conséquences pour le multitype qui fait l'objet du chapitre 4.

Puis, ayant les conséquences de l'hypothèse $(\mathcal{H})$ pour la fonction $A$, on pose la question suivante : Comment la pseudoconvexité du bord $bD$ force la sous variété $\mathbf{M}$ d'être un ensemble localement pic en $p \in \mathbf{M}$ ?

En choisissant la "bonne" direction complexe tangente $t = \sum_{\nu} \widetilde{m}_{\nu} y_{\nu} \chi_{\nu}$ de $T^{\mathbb{C}}(bD)$ liée à $(\mathcal{H})$, nous obtenons une expression de la forme de Lévi qui nous permet de connaître les restrictions imposées sur les fonctions $A$ et $B$ par la pseudoconvexié du bord. L'hypothèse $(\mathcal{H})$ et l'analyse à poids faite sur certaines fonctions entraînent alors que $\frac{B^2}{A}$ est uniformément borné

sur un voisinage suffisamment petit de l'origine de $\mathbb{C}^{n-1}$. Ceci nous donne immédiatement une fonction pic pour $\mathbf{M}$ (voir le chapitre 2, la proposition 2.3.1).

Dans les hypothèses $(\mathcal{H}_1)$ et $(\mathcal{H}_2)$ nous donnons une version invariante de l'hypothèse $(\mathcal{H})$ (voir le chapitre 2, section 1 : préliminaires).

Dans la première partie de notre travail nous donnons une condition suffisante pour que $\mathbf{M}$ soit un ensemble localement pic pour la classe $\mathcal{O}$.

**Théorème 2** *Soit $D$ un domaine pseudoconvexe de $\mathbb{C}^n$ à bord $bD$ de classe $C^\omega$. Soit $\boldsymbol{M}$ une sous variété $C^\omega$ de dimension $(n-1)$ de $bD$, totalement réelle, complexe-tangentielle dans un voisinage d'un point $p \in \boldsymbol{M}$. On suppose que $\boldsymbol{M}$ admet un champ de vecteurs $\boldsymbol{X}$, $C^\omega$, pic-admissible de pic-type $(K, M; \widetilde{m}_1, ..., \widetilde{m}_{n-1})$ au voisinage de $p$ pour $\mathcal{O}$. Alors la sous variété $\boldsymbol{M}$ est un ensemble localement pic en $p$ pour la classe $\mathcal{O}$.*

Les définitions de pic-admissible et de pic-type se trouvent dans le chapitre 2, section 1 : préliminaires.

Dans la deuxième partie, nous établissons une version de ce théorème dans le cas $C^\infty$. De plus, nous donnons la propriété d'interpolation comme suit :

**Théorème 3** *Soit $D$ un domaine pseudoconvexe de $\mathbb{C}^n$ à bord $bD$ de classe $C^\infty$. Soit $\boldsymbol{M}$ une sous variété $C^\infty$ de dimension $(n-1)$ du bord $bD$, totalement réelle, complexe-tangentielle dans un voisinage $\mathcal{U}$ d'un point $p \in \boldsymbol{M}$. On suppose que :*

- *il existe deux constantes $C$ et $L$ positives telles qu'on ait :*

$$\mathcal{L}\acute{e}v\ \rho\ (q)\,[t] \geq C|t|^2\ dist\,(q, \boldsymbol{M})^L,\ \forall q \in bD \cap \mathcal{U},\ \forall t \in T_q^{\mathbb{C}}\,(bD).$$

- *$\boldsymbol{M}$ admet un champ de vecteurs $\boldsymbol{X}$, $C^\infty$, pic-admissible de pic-type $(K, M; \widetilde{m}_1, ..., \widetilde{m}_{n-1})$ au voisinage de $p$ pour $A^\infty$.*

*Alors,*
*i) la sous variété $\boldsymbol{M}$ est un ensemble localement pic en $p$ pour la classe $A^\infty$.*
*ii) la sous variété $\boldsymbol{M}$ est un ensemble localement d'interpolation en $p$ pour la classe $A^\infty$.*

La thèse est organisée comme suit : dans le premier chapitre, nous rappelons des propriétés locales connues des ensembles pics pour la classe $\mathcal{O}$. Ensuite, nous développons les travaux de L. Boutet de Monvel et A. Iordan [B-I1]. Dans la première partie du deuxième chapitre, nous énonçons d'abord

les hypothèses $(\mathcal{H}_1)$, $(\mathcal{H}_2)$ et notre théorème principal. Puis, nous effectuons un changement de coordonnées holomorphes qui nous permet d'avoir notre condition suffisante : l'hypothèse $(\mathcal{H})$. Dans la deuxième partie, nous introduisons les $Z$-poids et $Y$-poids des fonctions analytiques réelles et nous démontrons le théorème principal. Dans le troisième chapitre, nous étendrons les résultats du chapitre 2 pour la classe $A^\infty$ en utilisant un changement de coordonnées presque-analytique. Puis, nous donnons la preuve de notre deuxième théorème et de la propriété d'interpolation. Dans le dernier chapitre, nous interprétons nos hypothèses avec le concept de multitype de D. Catlin, ce qui nous donne le multitype sur la sous variété $\mathbf{M}$ pour la classe $\mathcal{O}$ puis pour la classe $A^\infty$.

# Table des matières

**Introduction** **2**

**1 Notations et Rappels** **9**
1.1 Définitions et notations. . . . . 9
1.2 Propriétés connues des ensembles pics pour la classe $\mathcal{O}$. . . . . 11

**2 Ensembles localement pics pour la classe $\mathcal{O}$** **16**
2.1 Préliminaires. . . . . 16
2.2 Énoncé du théorème principal. . . . . 24
2.3 Changement de coordonnées holomorphe. . . . . 25
2.4 Décomposition d'une fonction $C^\omega$ suivant les poids. . . . . 32
2.5 Démonstration du théorème. . . . . 39

**3 Ensembles localement pics pour la classe $A^\infty$** **46**
3.1 Préliminaires. . . . . 46
3.2 Changement presque-analytique. . . . . 49
3.3 Théorème principal et propriété d'interpolation. . . . . 64

**4 Conséquences des hypothèses suffisantes pour le multitype** **68**
4.1 Définitions et remarques. . . . . 68
4.2 Le multitype sur $\mathbf{M}$ pour la classe $\mathcal{O}$. . . . . 70
4.3 Le multitype sur $\mathbf{M}$ pour la classe $A^\infty$. . . . . 74

**Bibliographie** **77**

# Chapitre 1

# Notations et Rappels

Ce chapitre est consacré à rappeler des propriétés locales connues des ensembles pics pour la classe $\mathcal{O}$ et de développer les travaux de L. Boutet de Monvel et A. Iordan [B-I1] pour un domaine $D$ pseudoconvexe borné de $\mathbb{C}^n$ avec $n \geq 3$.

## 1.1 Définitions et notations.

Soit $D \subset \mathbb{C}^n$ un domaine borné. On dit que le bord de $D$, noté $bD$, est de classe $C^\infty$ ($C^\omega$) au voisinage de $p \in bD$ s'il existe un voisinage ouvert $\mathcal{U}$ de $p$ dans $\mathbb{C}^n$ et une fonction $\rho \in C^\infty(\mathcal{U})$ ($\rho$ réel analytique) à valeurs réelles telle que

$$\begin{cases} D \cap \mathcal{U} = \{Z \in \mathcal{U} \ / \ \rho(Z) < 0\} \\ d\rho(Z) \neq 0, \forall Z \in bD \cap \mathcal{U} \end{cases} . \tag{1.1}$$

On dira que le bord $bD$ est de classe $C^k$ ($k = \infty, \omega$) s'il est de classe $C^k$ au voisinage de chacun de ses points. Une fonction $\rho \in C^k(\mathcal{U})$ qui satisfait à (1.1) est appelée fonction définissante pour $D$ en $p$.
Le lemme suivant est bien connu :

**Lemme 1.1.1** *Soient $\rho_1$ et $\rho_2$ deux fonctions définissantes pour $D$, de classe $C^k$ sur un voisinage $\mathcal{U}$ de $p \in bD$. Alors, il existe une fonction strictement positive $h \in C^k(\mathcal{U})$ telle que*

$$\begin{cases} \rho_1 = h\rho_2 \ sur \ \mathcal{U} \\ d\rho_1(Z) = h(Z)\, d\rho_2(Z), \ \forall Z \in bD \cap \mathcal{U} \end{cases}$$

Si $\rho$ est une fonction définissante pour $D$ en $p$, l'espace tangent au point $p \in bD$, noté $T_p(bD)$, est donné par

$$T_p(bD) = \{t \in \mathbb{C}^n \ / \ d\rho(p)[t] = 0\}.$$

Ainsi, on peut identifier $T_p(bD)$ avec les dérivées directionnelles annulant $\rho$ en $p$. De plus, on peut identifier $T_p(bD)$ à un sous-espace vectoriel réel de dimension réelle $2n-1$ de $T_p(\mathbb{C}^n) = \mathbb{C}^n$.
Si $J$ est la structure complexe sur $T_p(\mathbb{C}^n)$, alors $T_p^{\mathbb{C}}(bD) = T_p(bD) \cap JT_p(bD)$ est un sous-espace vectoriel de dimension complexe $(n-1)$. L'espace $T_p^{\mathbb{C}}(bD)$ est appelé espace tangent complexe en $p$ à $bD$. Il est donné par

$$T_p^{\mathbb{C}}(bD) = \{t \in \mathbb{C}^n \ / \ \partial\rho(p)[t] = 0\}.$$

On dit que $D$ est (Lévi) pseudoconvexe en $p$, si

$$\mathcal{L}\acute{e}v\ \rho(p)[t] = \sum_{1 \leq i,j \leq n} \frac{\partial^2 \rho}{\partial z_i \partial \overline{z}_j}(p)\, t_i \overline{t}_j \geq 0,$$

pour tout $t \in T_p^{\mathbb{C}}(bD)$. $\mathcal{L}\acute{e}v\ \rho(p)[t]$ s'appelle forme de Lévi ou hessienne complexe de $\rho$.
Soit $D$ un domaine pseudoconvexe en un point $p \in bD$. On dira que le point $p$ est strictement pseudoconvexe si la forme de Lévi est définie positive pour tout $t \neq 0$, $t \in T_p^{\mathbb{C}}(bD)$. Sinon, on dira que le point $p$ est faiblement pseudoconvexe.
Soit $D$ un domaine de $\mathbb{C}^n$ à bord $C^k$ $(k = \omega, \infty)$ et $\mathbf{M}$ une sous variété de classe $C^k$ dans $bD$. $\mathbf{M}$ est dite complexe-tangentielle si $T_p(\mathbf{M}) \subseteq T_p^{\mathbb{C}}(bD)$ pour tout point $p \in \mathbf{M}$.
Si pour tout $p \in \mathbf{M}$, l'espace tangent $T_p(\mathbf{M})$ ne contient aucune droite complexe, on dira que $\mathbf{M}$ est une sous variété totalement réelle.
Considérons le germe en 0 d'une courbe complexe $C^\infty$ non triviale :

$$z : (\mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}^n, p).$$

S'il existe un plus petit entier naturel $\nu = \nu(z)$ pour lequel une dérivation d'ordre $\nu$ de $z$ ne s'annule pas en zéro alors on appelle $\nu$ l'ordre de multiplicité de $z - z(0)$ en zéro. Sinon, on pose $\nu(z) = \infty$.
Soient $D \subset \mathbb{C}^n$ un domaine à bord $C^\infty$, $p$ un point de $bD$ et $\rho$ une fonction

définissante de $D$. Pour les germes $z$ holomorphes tels que $z(0) = p$, $\nu(z)$ divise $\nu(z^*\rho)$. Si

$$\Delta_1(D,p) = \sup_{\substack{z \text{ holomorphe} \\ z(0)=p}} \frac{\nu(z^*\rho)}{\nu(z)} < \infty,$$

on dit que le 1-type de $D$ est fini en $p$. On dira que $D$ est de type fini $\leq m$ si, pour tout point $p$ de $bD$, $\Delta_1(D,p) \leq m$.
On note $\mathrm{dist}(p, \mathbf{M})$ la distance euclidienne d'un point $p$ à une sous variété $\mathbf{M}$. Le symbôle $\| \ \|$ représente la norme euclidienne pour un vecteur de $\mathbb{R}^N$. On désigne $D^\alpha$ l'opérateur différentiel $\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}...\partial x_N^{\alpha_N}}$ dans $\mathbb{R}^N$ où $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_N)$ et $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_N$ et parfois $D^\alpha$ l'opérateur différentiel $\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}...\partial x_N^{\alpha_N}}$ dans $\mathbb{C}^N$ où $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_N)$ et $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_N$.
Pour allèger ou pour simplifier la rédaction, on écrira " pour tout $z$ dans $E$, $a(z) \approx b(z)$ " ou encore " pour tout $z$ dans $E$, $a(z)$ est équivalent à $b(z)$ " pour exprimer qu'il existe des constantes $c$ et $C$, strictement positives, telles que, pour tout $z \in E$, on ait $c\ a(z) \leq b(z) \leq C\ a(z)$. De même, la proposition " pour tout $z$ dans $E$, $a(z) \lesssim b(z)$ " signifiera qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $z$ dans $E$, on ait $a(z) \leq C\ b(z)$.

## 1.2 Propriétés connues des ensembles pics pour la classe $\mathcal{O}$.

**Définition 1.2.1** *Soit $D$ un domaine de $\mathbb{C}^n$ à bord $bD$ de classe $C^\omega$. On note $\mathcal{O}\left(\overline{D}\right)$ l'ensemble des fonctions holomorphes dans un voisinage de $\overline{D}$. Si $p \in bD$ et $\mathcal{U}$ est un voisinage de $p$ dans $\mathbb{C}^n$, on note $\mathcal{O}\left(\overline{D} \cap \mathcal{U}\right)$ l'ensemble des fonctions holomorphes dans un voisinage ouvert $\mathcal{V}$ de $p$ dans $\mathbb{C}^n$ contenant $\overline{D} \cap \mathcal{U}$.*
*Un sous ensemble $\boldsymbol{M}$ de $bD$ est dit pic pour la classe $\mathcal{O}\left(\overline{D}\right)$, s'il existe une fonction $f \in \mathcal{O}\left(\overline{D}\right)$ telle que $f = 1$ sur $\boldsymbol{M}$ et $|f| < 1$ dans $\overline{D} \backslash \boldsymbol{M}$.*
*On dira que $\boldsymbol{M}$ est un ensemble localement pic pour la classe $\mathcal{O}$ en un point $p \in \boldsymbol{M}$, s'il existe un voisinage ouvert $\mathcal{U}$ de $p$ dans $\mathbb{C}^n$ tel que $\boldsymbol{M} \cap \mathcal{U}$ soit un ensemble pic pour la classe $\mathcal{O}\left(\overline{D} \cap \mathcal{U}\right)$ ou, ce qui est équivalent, une fonction $g \in \mathcal{O}\left(\overline{D} \cap \mathcal{U}\right)$ telle que $g = 0$ sur $\boldsymbol{M} \cap \mathcal{U}$ et $\Re g < 0$ dans $\left(\overline{D} \cap \mathcal{U}\right) \backslash \boldsymbol{M}$.*

**Proposition 1.2.1** *Soit $D$ un domaine pseudoconvexe de $\mathbb{C}^n$ à bord $C^\omega$ et $\boldsymbol{M}$ une sous variété $C^\omega$, totalement réelle, de dimension $(n-1)$ de $bD$. On suppose que $\boldsymbol{M}$ est un ensemble localement pic en un point $p \in \boldsymbol{M}$ pour la classe $\mathcal{O}$. Alors, il existe un voisinage ouvert $\mathcal{U}$ de $p$ dans $\mathbb{C}^n$ tel que la complexifiée de $\boldsymbol{M}$ dans $\mathcal{U}$, notée $\widetilde{\boldsymbol{M}}$, vérifie $\widetilde{\boldsymbol{M}} \cap \overline{D} = \boldsymbol{M} \cap \mathcal{U}$.*

**Preuve.**
Soit $p \in \mathbf{M}$. Il existe un voisinage ouvert $\mathcal{U}$ de $p$ et une fonction $f$ holomorphe sur $\mathcal{U}$ tels que

$$\begin{cases} f = 0 & \text{sur } \mathbf{M} \cap \mathcal{U} \\ \Re f < 0 & \text{sur } \left(\overline{D} \cap \mathcal{U}\right) \setminus \mathbf{M} \end{cases}.$$

Soit $\gamma : B(0,r) \longrightarrow \mathcal{U}$ une paramétrisation de classe $C^\omega$ de $\mathbf{M}$ telle que $\gamma(0) = p$ où $B(0,r) \subset \mathbb{R}^{n-1}$ est la boule de rayon $r$ centrée en 0.
On a $d\gamma_0 : \mathbb{R}^{n-1} \longrightarrow T_p(\mathbf{M}) \subset \mathbb{C}^n$ est de rang $(n-1)$.
Notons $\widetilde{\gamma} : \widetilde{B}(0,r) \longrightarrow \mathbb{C}^{n-1}$ la complexifiée de $\gamma$ où $\widetilde{B}(0,r)$ est la boule ouverte de rayon $r$ centrée en 0 dans $\mathbb{C}^{n-1}$. Comme $\mathbf{M}$ est totalement réelle en $p$, $d\widetilde{\gamma}_0$ est de rang complexe $(n-1)$. Par conséquent, si $r$ est suffisamment petit, on a :

- $\widetilde{\gamma}\left(\widetilde{B}(0,r)\right) =: \widetilde{\mathbf{M}}$ est une sous variété complexe de $\mathcal{U}$.
- $\widetilde{\gamma} : \widetilde{B}(0,r) \longrightarrow \widetilde{\mathbf{M}}$ est un biholomorphisme.

Or, $f \circ \gamma \Big|_{B(0,r)} = 0$. D'où $f \circ \widetilde{\gamma} \Big|_{\widetilde{B}(0,r)} = 0$. Donc $\widetilde{\mathbf{M}} \subset \{z \in \mathcal{U} \ / \ f(z) = 0\}$.
En particulier, on a $\widetilde{\mathbf{M}} \cap \overline{D} \subset \{z \in \mathcal{U} \ / \ f(z) = 0\} \cap \overline{D} \subset \mathbf{M} \cap \mathcal{U}$.
Or, on a $\mathbf{M} \cap \mathcal{U} \subset \widetilde{\mathbf{M}} \cap \overline{D}$. Alors on obtient $\widetilde{\mathbf{M}} \cap \overline{D} = \mathbf{M} \cap \mathcal{U}$. □
Les résultats suivants généralisent le lemme 2 et le théorème 1 dans [B-I1].

**Lemme 1.2.1** *Soit $D$ un domaine pseudoconvexe de $\mathbb{C}^n$ à bord $C^\omega$. On suppose que $0 \in bD$, $0$ de type fini $\leq 2k$ et que $D$ s'écrit dans un voisinage $\mathcal{U}$ de l'origine : $D \cap \mathcal{U} = \{(Z,w) \in \mathcal{U} \ / \ \rho(Z,w) < 0\}$ avec $\rho(Z,w) = \Re w + \mathbf{P}(Z) + \ 0\left(|w|^2, |Z|^{2k+1}, |Zw|\right)$, $Z = (z_1, ..., z_{n-1})$, $\mathbf{P} = \sum_{i=2}^{2k} \mathbf{P}_i$ est un polynôme de degré $2k \geq 2$ en $Z$ et $\overline{Z}$ et $\{\mathbf{P}_i\}$ est une famille des polynômes homogènes de degré $i$ respectifs et sans termes pluriharmoniques. Soit $\boldsymbol{M}$ une sous variété $C^\omega$ de $bD$ de dimension $(n-1)$ contenant l'origine telle que l'espace tangent $T_0(\boldsymbol{M})$ soit $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$. On suppose que $\boldsymbol{M}$ est un ensemble localement pic à l'origine pour la classe $\mathcal{O}$.*

*Alors, pour tout* $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_{n-1}) \in (\mathbb{R}^{n-1})^*$, *il existe un* $1 \leq k_\alpha \leq k$ *tel que, pour tout* $1 \leq i < 2k_\alpha$ *et* $\zeta \in \mathbb{C}$, *on ait* $\mathbf{P}_i(\zeta.\alpha) = 0$ *et* $\mathbf{P}_{2k_\alpha}(\zeta.\alpha)$ *est non identiquement nul. De plus, si on pose*

$$\nu^{\alpha}_{\mathbf{P}_{2k_\alpha}}(\zeta) = -\frac{1}{k_\alpha}\Re\left(\sum_{j=1}^{n-1}\alpha_j\frac{\partial \mathbf{P}_{2k_\alpha}}{\partial z_j}(\alpha_1, ..., \alpha_{n-1})\zeta^{2k_\alpha}\right) + \mathbf{P}_{2k_\alpha}(\zeta\alpha_1, ..., \zeta\alpha_{n-1}),$$

*on a* $\nu^{\alpha}_{\mathbf{P}_{2k_\alpha}}(\zeta) \geq 0$.

**Preuve.**
Soit $T = (\alpha, 0) \in T_0(\mathbf{M})$. On note $\mathbb{C}^2_T =<< (T, \mathbf{n}_0) >>$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 2 où $\mathbf{n}_0$ désigne le vecteur normal extérieur unitaire à l'origine. Soit $\mathcal{U}$ un voisinage de l'origine. On pose $\gamma_T \cap \mathcal{U} = \mathbf{M} \cap \mathbb{C}^2_T \cap \mathcal{U}$ où $\gamma_T$ est paramétrée telle que $\left(\gamma'_{1,T}(0) = \alpha_1, ..., \gamma'_{n-1,T}(0) = \alpha_{n-1}\right)$.
Notons $\widetilde{\gamma}_T$ la complexifiée de $\gamma_T$. Alors $\widetilde{\gamma}_{n,T}$ s'annule à un ordre pair $2k_\alpha$ ($1 \leq k_\alpha \leq k$ varie selon la direction $T$ choisie) à l'origine.
En effet, $\gamma_T$ est de classe $C^\omega$, complexe-tangentielle dans $\mathbb{C}^2_T \cap bD$ et elle passe par l'origine. Or $\mathbf{M}$ est un ensemble localement pic. Alors, on a $\widetilde{\gamma}_T \cap \overline{D} \cap \mathcal{U} = \gamma_T \cap \mathcal{U}$. Ainsi, d'après le lemme 2 dans [B-I1], on obtient

$$\tfrac{1}{(2k_\alpha)!}\gamma^{(2k_\alpha)}_{n,T}(0) = -\tfrac{1}{k_\alpha}\sum_{j=1}^{n-1}\alpha_j\frac{\partial \mathbf{P}_{2k_\alpha}}{\partial z_j}(\alpha_1, ..., \alpha_{n-1}).$$

De plus, pour tout $\zeta \in V$, on a : $\rho \circ \widetilde{\gamma}_T(\zeta) \geq 0$ où $V$ est un voisinage de l'origine. Ceci entraîne

$$\mathbf{P}_{2k_\alpha}(\zeta\alpha_1, ..., \zeta\alpha_{n-1}) - \tfrac{1}{k_\alpha}\Re\left(\sum_{j=1}^{n-1}\alpha_j\frac{\partial \mathbf{P}_{2k_\alpha}}{\partial z_j}(\alpha_1, ..., \alpha_{n-1})\zeta^{2k_\alpha}\right) \geq 0. \qquad \square$$

**Remarques 1.2.1**
*1)* $\nu^{\alpha}_{\mathbf{P}_{2k_\alpha}}(\zeta)$ *est l'unique polynôme tel que* $\mathbf{P}_{2k_\alpha}(\zeta\alpha_1, ..., \zeta\alpha_{n-1}) - \nu^{\alpha}_{\mathbf{P}_{2k_\alpha}}(\zeta)$ *soit harmonique et qui s'annule au second d'ordre quand* $\Im\zeta = 0$.
*2) Pour* $\zeta = e^{i\theta}$, *on pose* $\mu^{\alpha}_{\mathbf{P}_{2k_\alpha}}(\theta) = \nu^{\alpha}_{\mathbf{P}_{2k_\alpha}}\left(e^{i\theta}\right)$. *On a*

$$\Delta\nu^{\alpha}_{\mathbf{P}_{2k_\alpha}}\left(e^{i\theta}\right) \;=\; \frac{1}{4}\left[(2k_\alpha)^2\mu(\theta) + \frac{d^2\mu}{d\theta^2}(\theta)\right].$$

*Quand* $\theta = 0$ *ou* $\pi$, *on obtient*

$$\frac{1}{4}\frac{d^2\mu}{d\theta^2}\Big|_{\theta=0,\pi} = \mathcal{L}\acute{e}v\ \mathbf{P}_{2k_\alpha}(\pm\alpha_1, ..., \pm\alpha_{n-1})\left[(\alpha_1, ..., \alpha_{n-1})\right].$$

*Ces résultats ci-dessus sont donnés par souci de complétude. Ils ne joueront pas de rôle important dans ce travail.*
*3) Dans [B-I1], on a* $\dim T_0^{\mathbb{C}}(bD) = 1$. *Donc, il existe seulement une direction complexe. Dans notre travail* $k_\alpha$ *se comporte discontinument en fonction de* $\alpha$. *Un objectif de la thèse était d'élucider le comportement de* $\nu^\alpha_{\mathbf{P}_{2k_\alpha}}$ *sur des ensembles pics sous certaines hypothèses.*

**Preuve.**
1) Comme $\mathbf{P}_{2k_\alpha}$ est homogène de degré $2k_\alpha$, alors

$$\sum_{j=1}^{n-1}\left(z_j\frac{\partial \mathbf{P}_{2k_\alpha}}{\partial z_j}+\overline{z}_j\frac{\partial \mathbf{P}_{2k_\alpha}}{\partial \overline{z}_j}\right) \;=\; 2k_\alpha \mathbf{P}_{2k_\alpha}.$$

Or, $\mathbf{P}_{2k_\alpha}$ est à valeurs réelles. On obtient $\frac{1}{k_\alpha}\Re\left(\sum_{j=1}^{n-1} z_j\frac{\partial \mathbf{P}_{2k_\alpha}}{\partial z_j}\right)=\mathbf{P}_{2k_\alpha}$.
Soit $Z=(\zeta\alpha_1,...,\zeta\alpha_{n-1})$ avec $\alpha=(\alpha_1,...,\alpha_{n-1})\in(\mathbb{R}^{n-1})^*$ et $\Im\zeta=0$. Alors,

$$\mathbf{P}_{2k_\alpha}(\zeta\alpha_1,...,\zeta\alpha_{n-1})-\tfrac{1}{k_\alpha}\Re\left(\sum_{j=1}^{n-1}\alpha_j\zeta\frac{\partial \mathbf{P}_{2k_\alpha}}{\partial z_j}(\zeta\alpha_1,...,\zeta\alpha_{n-1})\right)=0.$$

D'où $\nu^\alpha_{\mathbf{P}_{2k_\alpha}}(\zeta)=0$ quand $\Im\zeta=0$. De plus,

$$\frac{\partial \nu^\alpha_{\mathbf{P}_{2k_\alpha}}}{\partial\zeta}=\sum_{j=1}^{n-1}\alpha_j\frac{\partial \mathbf{P}_{2k_\alpha}}{\partial z_j}(\zeta\alpha_1,...,\zeta\alpha_{n-1})-\sum_{j=1}^{n-1}\alpha_j\frac{\partial \mathbf{P}_{2k_\alpha}}{\partial z_j}(\alpha_1,...,\alpha_{n-1})\zeta^{2k_\alpha-1}=0.$$

Car si $\Im\zeta=0$ on a, pour tout $1\le j\le n-1$,

$$\tfrac{\partial \mathbf{P}_{2k_\alpha}}{\partial z_j}(\zeta\alpha_1,...,\zeta\alpha_{n-1})=\zeta^{2k_\alpha-1}\tfrac{\partial \mathbf{P}_{2k_\alpha}}{\partial z_j}(\alpha_1,...,\alpha_{n-1}).$$

2) Soit $\zeta=re^{i\theta}\in\mathbb{C}^*$ avec $r=|\zeta|>0$. Or $\nu^\alpha_{\mathbf{P}_{2k_\alpha}}(\zeta)$ est homogène de degré $2k_\alpha$ par rapport à $r$. Alors, si on pose $\mu(\theta)=\nu^\alpha_{\mathbf{P}_{2k_\alpha}}\left(e^{i\theta}\right)$ on obtient

$$\Delta\nu^\alpha_{\mathbf{P}_{2k_\alpha}}\left(e^{i\theta}\right)=\frac{1}{4}\left[(2k_\alpha)^2\mu(\theta)+\frac{d^2\mu}{d\theta^2}(\theta)\right].$$

L'opérateur de Laplace $\Delta$ s'écrit en coordonnées polaires $(r,\theta)$ sous la forme suivante :

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}.$$

On obtient

$$\begin{aligned}
\Delta\nu^{\alpha}_{\mathbf{P}_{2k_\alpha}}\left(re^{i\theta}\right) &= 2(1-r^2)\Re\sum_{1\leq i,j\leq n-1}\frac{\partial^2\mathbf{P}_{2k_\alpha}}{\partial z_i\partial z_j}\left(re^{i\theta}\alpha_1,...,re^{i\theta}\alpha_{n-1}\right)\alpha_i\alpha_j e^{i2\theta}\\
&+ 2(1+r^2)\sum_{1\leq i,j\leq n-1}\frac{\partial^2\mathbf{P}_{2k_\alpha}}{\partial z_i\partial\overline{z}_j}\left(re^{i\theta}\alpha_1,...,re^{i\theta}\alpha_{n-1}\right)\alpha_i\alpha_j\\
&+ 2(\frac{1}{r}-r)\Re\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial\mathbf{P}_{2k_\alpha}}{\partial z_j}\left(re^{i\theta}\alpha_1,...,re^{i\theta}\alpha_{n-1}\right)\alpha_j e^{i\theta}\\
&+ 4k_\alpha r^{2k_\alpha-2}\left(r^2-1\right)\Re\sum_{j=1}^{n-1}\alpha_j\frac{\partial\mathbf{P}_{2k_\alpha}}{\partial z_j}\left(\alpha_1,...,\alpha_{n-1}\right)e^{2ik_\alpha\theta}.
\end{aligned}$$

Quand $\theta=0$ ou $\pi$, $\mu$ s'annule. Dans ce cas, on obtient pour $r=1$

$$\tfrac{1}{4}\tfrac{d^2\mu}{d\theta^2}\Big|_{\theta=0,\pi}=\mathcal{L}\acute{e}v\ \mathbf{P}_{2k_\alpha}\left(\pm\alpha_1,...\pm\alpha_{n-1}\right)[(\alpha_1,...,\alpha_{n-1})].\qquad\square$$

**Corollaire 1.2.1** *Soient $D$ un domaine de $\mathbb{C}^n$ à bord $C^\omega$ et $\boldsymbol{M}$ une sous variété $C^\omega$, totalement réelle, de dimension $(n-1)$ de $bD$. On suppose que la complexifiée $\widetilde{\boldsymbol{M}}$ de $\boldsymbol{M}$ vérifie $\widetilde{\boldsymbol{M}}\cap\overline{D}=\boldsymbol{M}$. Alors $\boldsymbol{M}$ est complexe-tangentielle.*

**Preuve.**
Soit $p\in\mathbf{M}$. Après un changement de variables holomorphe, on ramène $p$ à l'origine. Dans un voisinage $\mathcal{U}$ de l'origine $\mathbf{M}$ s'écrit dans les nouvelles coordonnées : $\mathbf{M}=\{(z_1,...,z_{n-1},w)\in\mathcal{U}\ /\ \Im z_1=...=\Im z_{n-1}=w=0\}$. Ainsi, la complexifiée $\widetilde{\mathbf{M}}$ de $\mathbf{M}$ est $\widetilde{\mathbf{M}}=\{(z_1,...,z_{n-1},w)\in\mathcal{U}\ /\ w=0\}$. La propriété $\widetilde{\mathbf{M}}\cap\overline{D}=\mathbf{M}$ entraîne $\rho\left(z_1,...,z_{n-1},0\right)\geq 0$ et $\rho\left(z_1,...,z_{n-1},0\right)=0$ si, et seulement si, $\Im z_1=...=\Im z_{n-1}=0$. Donc, pour tout $1\leq j\leq n-1$, on a $\frac{\partial\rho}{\partial z_j}\left(\Re z_1,...,\Re z_{n-1},0\right)=0$. D'où $\mathbf{M}$ est complexe-tangentielle. $\square$

# Chapitre 2

# Ensembles localement pics pour la classe $\mathcal{O}$

Dans ce chapitre, on donne une condition suffisante (voir le théorème 2.2.1) pour qu'une sous variété $\mathbf{M}$, $C^\omega$, totalement réelle, complexe-tangentielle dans un voisinage d'un point $p \in \mathbf{M}$, de dimension $(n-1)$ dans le bord $bD$ d'un domaine $D$ faiblement pseudoconvexe dans $\mathbb{C}^n$ à bord $C^\omega$, soit un ensemble localement pic en $p$ pour la classe $\mathcal{O}$.

## 2.1 Préliminaires.

Soit $D$ un domaine de $\mathbb{C}^n$ à bord $bD$ de classe $C^\omega$. Soit $\mathbf{M}$ une sous variété $C^\omega$, de dimension $(n-1)$ de $bD$, totalement réelle, complexe-tangentielle dans un voisinage d'un point $p \in \mathbf{M}$.
Soit $(U, \gamma)$ une paramétrisation de classe $C^\omega$ de $\mathbf{M}$ au voisinage de $p$ où $U$ est un voisinage ouvert de l'origine dans $\mathbb{R}^{n-1}$ et $\gamma(0) = p$.
Soit $\mathbf{X}$ un champ de vecteurs sur $\mathbf{M}$ de classe $C^\omega$ avec $\mathbf{X}(p) = 0$. Soit $X_1$ un champ de vecteurs sur $U$ tel que $d\gamma(X_1) = \mathbf{X}$.
Notons $\zeta = (\zeta_1, ..., \zeta_{n-1})$ les coordonnées d'un point de $U$. Le champ de vecteurs $X_1$ s'écrit dans ces coordonnées

$$X_1 = \sum_{i=1}^{n-1} d_i(\zeta) \ \frac{\partial}{\partial \zeta_i},$$

où les $d_i$ sont des fonctions $C^\omega$ dans $U$. On associe à $X_1$ la matrice jacobienne à l'origine :

$$D_1 = \{\frac{\partial d_i}{\partial \zeta_j}(0)\}_{1\leq i,j\leq n-1}.$$

Soit $\phi : V \longrightarrow \mathbf{M}$ une autre paramétrisation définie dans un voisinage ouvert $V$ de l'origine dans $\mathbb{R}^{n-1}$, de classe $C^\omega$ de $\mathbf{M}$ telle que $\phi(0) = p$.
Soit $X_2$ un champ de vecteurs sur $V$ tel que $d\phi(X_2) = \mathbf{X}$.
Notons $\eta = (\eta_1, ..., \eta_{n-1})$ les coordonnées d'un point de $V$. Le champ de vecteurs $X_2$ dans ces coordonnées soit

$$X_2 = \sum_{i=1}^{n-1} e_i(\eta)\ \frac{\partial}{\partial \eta_i},$$

où les $e_i$ sont des fonctions $C^\omega$ dans $V$.
Considérons $\psi : U \longrightarrow V$ le changement de paramètres tel qu'on ait $\gamma = \phi \circ \psi$.
Comme $X_2 = d\psi(X_1)$ alors $X_2$ s'écrit en un point $\eta = \psi(\zeta)$ sous la forme suivante :

$$X_2(\psi(\zeta)) = \sum_{j=1}^{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n-1} e_i(\psi(\zeta))\,\frac{\partial(\psi^{-1})_j}{\partial \eta_i}(\psi(\zeta))\right)\frac{\partial}{\partial \zeta_j}.$$

Pour tout $i = 1, ..., n-1$, on en déduit

$$d_i(\zeta) = \sum_{j=1}^{n-1} e_j(\psi(\zeta))\,\frac{\partial(\psi^{-1})_i}{\partial \eta_j}(\psi(\zeta)).$$

Comme $\psi(0) = 0$ et pour tout $j$, $e_j(0) = d_j(0) = 0$ alors, pour tout $i$ et $k$, on obtient

$$\frac{\partial d_i}{\partial \zeta_k}(0) = \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{n-1}\frac{\partial \psi_l}{\partial \zeta_k}(0)\,\frac{\partial e_j}{\partial \eta_l}(0)\,\frac{\partial(\psi^{-1})_i}{\partial \eta_j}(0). \tag{2.1}$$

On pose $D_2 := \{\frac{\partial e_i}{\partial \eta_j}(0)\}_{1\leq i,j\leq n-1}$ et $C := \{\frac{\partial \psi_i}{\partial \zeta_j}(0)\}_{1\leq i,j\leq n-1}$.
L'équation (2.1) nous permet d'avoir $D_1 = C^{-1}\ D_2\ C$. Maintenant, nous énonçons notre première hypothèse :

$(\mathcal{H}_1)$ *La matrice $D_1$ est diagonalisable et a pour valeurs propres $\widetilde{m}_1 \geq \widetilde{m}_2 \geq ... \geq \widetilde{m}_{n-1}$, où $\widetilde{m}_i \in \mathbb{N}^*$, pour tout $1 \leq i \leq n-1$.*

Si $(\mathcal{H}_1)$ est vérifiée, on dit que $\mathbf{M}$ admet un champ de vecteurs $\mathbf{X}$ de classe $C^\omega$, admissible à poids $(\widetilde{m}_1, ..., \widetilde{m}_{n-1})$ associé à la paramétrisation $(U, \gamma)$ au voisinage de $p \in \mathbf{M}$.

**Remarque 2.1.1**
*On remarque que l'hypothèse $(\mathcal{H}_1)$ ne dépend pas de la paramétrisation choisie et les $\widetilde{m}_i$, ainsi que leurs multiplicités, sont univoquement déterminés.*

**Lemme 2.1.1** *Sous l'hypothèse $(\mathcal{H}_1)$, il existe un changement de coordonnées sur $U$ de classe $C^\omega$ tel que $X_1 = \sum_{i=1}^{n-1} \widetilde{m}_i \zeta_i \frac{\partial}{\partial \zeta_i}$.*

**Preuve.**
Soit $X_1(\zeta) = \sum_{i=1}^{n-1} d_i(\zeta) \frac{\partial}{\partial \zeta_i}$. Comme la matrice $\{\frac{\partial d_i}{\partial \zeta_j}(0)\}_{1 \leq i,j \leq n-1}$ est diagonalisable, on a, quitte à effectuer un changement de coordonnées linéaire, pour $1 \leq i \leq n-1$,

$$d_i(\zeta) = \widetilde{m}_i \zeta_i + \sum_{1 \leq l,k \leq n-1} d^i_{lk}(\zeta) \zeta_l \zeta_k, \tag{2.2}$$

où les $d^i_{lk}$ sont des fonctions de classe $C^\omega$ dans $U$.
Dans un premier temps, on va résoudre l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$\frac{d\mu_i}{ds}(c, s) = \frac{1}{\widetilde{m}_i} \sum_{1 \leq l,k \leq n-1} d^i_{lk}(s.\mu(c,s)) \mu_l(c,s) \mu_k(c,s) \tag{2.3}$$

avec $\mu = (\mu_1, ..., \mu_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\mu_i(c, 0) = c_i$ où $c = (c_1, ..., c_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$, $s \in ]-\delta, \delta[$, $\delta > 0$.
D'après la théorie des équations différentielles ordinaires, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $F : \begin{cases} B(0,\varepsilon) & \longrightarrow & F(B(0,\varepsilon)) \\ c = (c_1, ..., c_{n-1}) & \longmapsto & \mu(c, 0) \end{cases}$ soit un $C^\omega$-difféomorphisme défini sur une boule ouverte $B(0, \varepsilon)$ de centre l'origine et de rayon $\varepsilon$ dans $\mathbb{R}^{n-1}$. De plus, l'application $(c, s) \longmapsto \mu(c, s)$ est de classe $C^\omega$ dans $B(0,\varepsilon) \times ]-\delta, \delta[$.
Pour $c \in \mathbb{R}^{n-1}$ et $t \in \mathbb{R}$ fixés, notons $\varphi(s) = t.\mu(c, ts)$. Alors, pour $1 \leq i \leq$

$n-1$, on a

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi_i}{ds}(s) &= \frac{t^2}{\widetilde{m}_i}\frac{d\mu_i}{ds}(c,ts)\\ &= \frac{t^2}{\widetilde{m}_i}\sum_{1\leq l,k\leq n-1} d^i_{lk}\left(ts.\mu(c,ts)\right)\mu_l(c,ts)\,\mu_k(c,ts)\\ &= \frac{1}{\widetilde{m}_i}\sum_{1\leq l,k\leq n-1} d^i_{lk}\left(s.\varphi(s)\right)\ \varphi_l(s)\,\varphi_j(s).\end{aligned}$$

Or, $\varphi(0) = t.\mu(c,0) = t.c$. L'unicité de la solution de l'équation différentielle (2.3) implique que $\varphi(s) = \mu(t.c,s)$.
En particulier, on a

$$\mu(t.c,1) = t.\mu(c,t). \tag{2.4}$$

On pose $\kappa(c,s) := s.\mu(c,s)$. L'équation différentielle (2.3) devient

$$\begin{aligned}s\frac{d\kappa_i}{ds}(c,s) &= s\mu_i(c,s) + s^2\frac{d\mu_i}{ds}(c,s)\\ &= s\mu_i(c,s) + \frac{s^2}{\widetilde{m}_i}\sum_{1\leq l,k\leq n-1} d^i_{lk}\left(s.\mu(c,s)\right)\ \mu_l(c,s)\,\mu_k(c,s)\\ &= \kappa_i(c,s) + \frac{1}{\widetilde{m}_i}\sum_{1\leq l,k\leq n-1} d^i_{lk}\left(\kappa(c,s)\right)\ \kappa_l(c,s)\,\kappa_k(c,s).\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $1\leq i\leq n-1$, on obtient

$$\widetilde{m}_i s\frac{d\kappa_i}{ds}(c,s) = \widetilde{m}_i\kappa_i(c,s) + \sum_{1\leq l,k\leq n-1} d^i_{lk}\left(\kappa(c,s)\right)\ \kappa_l(c,s)\,\kappa_k(c,s).$$

Donc, pour $\zeta = \kappa(c,s)$, si on identifie

$$X_1(s) := \sum_{i=1}^{n-1} d_i(\zeta)\frac{\partial}{\partial\zeta_i}$$

avec $(d_1(\zeta),...,d_{n-1}(\zeta))$ alors, pour tout $1\leq i\leq n-1$, on a d'après (2.2),

$$d_i(\zeta) = \widetilde{m}_i s\frac{d\kappa_i}{ds}(c,s).$$

Finalement, nous exprimons les courbes $s \longmapsto \kappa(\zeta', s)$ par rapport aux nouvelles coordonnées $\zeta'$ où $\zeta' = F(\zeta)$. L'équation (2.4) implique $F(t.\zeta') = \mu(t.\zeta', 1) = t.\mu(\zeta', t) = \kappa(\zeta', t)$. Donc, $F^{-1}(\kappa(\zeta', t)) = t.\zeta'$. On pose maintenant $\kappa'(\zeta', t) := F^{-1}(\kappa(\zeta', t))$. Alors, le champ de vecteurs $X_1$ s'exprime dans les nouvelles coordonnées $\zeta'$ par

$$\begin{aligned} X_1'(s.\zeta') &= \sum_{i=1}^{n-1} d_i'(s.\zeta') \frac{\partial}{\partial \zeta_i'} \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \widetilde{m}_i s \frac{d\kappa_i'(\zeta', .)}{ds}(s.\zeta') \frac{\partial}{\partial \zeta_i'} \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \widetilde{m}_i s \zeta_i' \frac{\partial}{\partial \zeta_i'}. \end{aligned}$$

Donc, pour $s = 1$ et pour tout $\zeta'$, on obtient que $X_1'(\zeta') = \sum_{i=1}^{n-1} \widetilde{m}_i \zeta_i' \frac{\partial}{\partial \zeta_i'}$. Ceci achève la preuve du lemme. □

**Exemple 2.1.1** *Au voisinage de l'origine de $\mathbb{R}^2$, on considère le champ de vecteurs $X_1 = (2\zeta_1 + \zeta_2^2)\frac{\partial}{\partial \zeta_1} + \zeta_2 \frac{\partial}{\partial \zeta_2}$ de classe $C^\omega$, admissible à poids $(\widetilde{m}_1 = 2, \widetilde{m}_2 = 1)$.*

*Avec les notations du lemme 2.1.1, on a* $\begin{cases} 2\frac{d\kappa_1}{ds} = \frac{1}{s}(2\kappa_1 + \kappa_2^2) \\ \frac{d\kappa_2}{ds} = \frac{1}{s}\kappa_2 \\ \kappa(0) = (\kappa_1(0), \kappa_2(0)) = (0,0) \end{cases}$.

*Ceci implique* $\begin{cases} \kappa_2 = c_2 s \\ \frac{d\kappa_1}{ds} = \frac{1}{s}\left(\kappa_1 + \frac{c_2^2 s^2}{2}\right) \\ c_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$ *. On pose $\kappa(c, s) = s\mu(c, s)$. On obtient* $\begin{cases} \mu_2 = c_2 \\ \mu_1 = c_1 + \frac{c_2^2}{2} s \\ c_1, c_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$ *. Alors, on a* $\begin{cases} \kappa_1 = c_1 s + \frac{c_2^2 s^2}{2} \\ \kappa_2 = c_2 s \end{cases}$ *. En effectuant maintenant le changement de coordonnées suivant :* $\begin{cases} \zeta_1' = \zeta_1 + \frac{{\zeta_2}^2}{2} \\ \zeta_2' = \zeta_2 \end{cases}$ *, on obtient* $X_1' = 2\zeta_1' \frac{\partial}{\partial \zeta_1'} + \zeta_2' \frac{\partial}{\partial \zeta_2'}$.

Soit maintenant $X_1$ comme dans le lemme 2.1.1.

**Lemme 2.1.2** *Soit $\Lambda = (\Lambda_1, ..., \Lambda_{n-1})$ un changement de coordonnées sur $U$ de classe $C^\omega$ tel que $\Lambda(0) = 0$ et $d\Lambda(X_1) = X_1$. Alors, $\Lambda$ est polynômial. Plus précisément, si pour $\zeta = (\zeta_1, ..., \zeta_{n-1}) \in U$, $I = (i_1, ..., i_{n-1}) \in \mathbb{N}^{n-1}$ on pose $|I|_* = \sum_{\nu=1}^{n-1} i_\nu \widetilde{m}_\nu$, alors, pour tout $1 \leq j \leq n-1$, on a*

$$\Lambda_j(\zeta) = \sum_{|I|_* = \widetilde{m}_j} a_I^j \ \zeta_1^{i_1} ... \zeta_{n-1}^{i_{n-1}} \ \text{avec } a_I^j \in \mathbb{R}.$$

*Réciproquement, tout $\Lambda$ de ce genre préserve $X_1$.*

**Preuve.**
Les courbes intégrales de $X_1$ sont $\kappa_\zeta(\lambda) = \left(\lambda^{\widetilde{m}_1}\zeta_1, ..., \lambda^{\widetilde{m}_{n-1}}\zeta_{n-1}\right)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$. Comme $d\Lambda(X_1) = X_1$, $\Lambda$ envoie la courbe intégrale passant par $\zeta$ ci-dessus sur la courbe intégrale passant par $\eta = \Lambda(\zeta)$. Donc, on obtient

$$\left(\lambda^{\widetilde{m}_1}\Lambda_1(\zeta), ..., \lambda^{\widetilde{m}_{n-1}}\Lambda_{n-1}(\zeta)\right) = \left(\Lambda_1(\kappa_\zeta(\lambda)), ..., \Lambda_{n-1}(\kappa_\zeta(\lambda))\right). \tag{2.5}$$

Soit $1 \leq j \leq n-1$ fixé. On décompose $\Lambda_j$ sous la forme suivante :

$$\Lambda_j(\zeta) = \Lambda^*(\zeta) \ + \ R(\zeta),$$

où $\Lambda^*(\zeta) := \sum_{|I|_* = \widetilde{m}} a^*_{i_1,...,i_{n-1}} \zeta_1^{i_1} ... \zeta_{n-1}^{i_{n-1}}$ est non identiquement nul et $\widetilde{m}$ est minimal tel qu' il existe une constante $C > 0$ vérifiant $|R(\kappa_\zeta(\lambda))| \leq C|\lambda|^{\widetilde{m}+1}$. L'équation (2.5) implique

$$\begin{aligned} \lambda^{\widetilde{m}_j}\Lambda_j(\zeta) &= \Lambda_j(\kappa_\zeta(\lambda)) \\ &= \lambda^{\widetilde{m}}\Lambda^*(\zeta) \ + \ R(\kappa_\zeta(\lambda)). \end{aligned} \tag{2.6}$$

On divise maintenant l'équation (2.6) par $\lambda^{\widetilde{m}}$. Puis, en faisant tendre $\lambda$ vers 0, on obtient $\widetilde{m} = \widetilde{m}_j$ et $\Lambda_j(\zeta) = \Lambda^*(\zeta)$ pour tout $\zeta \in \mathbb{R}^{n-1}$. □
Dans le corollaire suivant on considère un cas particulier.

**Corollaire 2.1.1** *Soit $\{\widetilde{m}_1, ..., \widetilde{m}_{n-1}\} = \{s_1, ..., s_k\}$ avec $s_1 > s_2 > ... > s_k$ $(1 \leq k \leq n-1)$. Si pour tout $1 \leq r < k$, on a $s_r \neq \sum_{\nu=r+1}^{k} i_\nu \ s_\nu$ quel que soit $i_\nu \in \mathbb{N}$, alors pour tout $1 \leq j \leq n-1$ et $\zeta \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\Lambda_j$ s'écrit sous la forme linéaire suivante :*

$$\Lambda_j(\zeta) = \sum_{\nu=1}^{n-1} a^j_{I_\nu}\ \zeta_\nu,\ \textit{avec}\ I_\nu = (0,...,\underbrace{1}_{\nu},0,...,0).$$

*Ici* $a^j_{I_\nu} = 0$ *si* $\widetilde{m}_\nu \neq \widetilde{m}_j$.

**Preuve.**

Soit $1 \leq j \leq n-1$ fixé. Soit $I = (i_1,...,i_{n-1}) \in \mathbb{N}^{n-1}$ tel que $\sum_{\nu=1}^{n-1} \widetilde{m}_\nu i_\nu = \widetilde{m}_j$. Donc $i_\nu = 0$ si $\widetilde{m}_\nu > \widetilde{m}_j$. On envisage 2 cas :

• Soit $i_{\nu_0} = 1$ pour $\widetilde{m}_{\nu_0} = \widetilde{m}_j$. Alors, $i_\nu = 0$ pour tout $\nu \neq \nu_0$. Dans ce cas, on obtient le résultat voulu.

• Soit $i_\nu = 0$ pour tout $\nu$ avec $\widetilde{m}_\nu = \widetilde{m}_j$. Alors, $\widetilde{m}_j = \sum_{\substack{\nu=1 \\ \widetilde{m}_\nu < \widetilde{m}_j}}^{n-1} \widetilde{m}_\nu i_\nu$. Or, il existe un $r$, $1 \leq r < k$, tel que $\widetilde{m}_j = s_r$. Ainsi, on obtient $s_r = \sum_{\substack{\nu=1 \\ \widetilde{m}_\nu < \widetilde{m}_j}}^{n-1} \widetilde{m}_\nu i_\nu = \sum_{\mu=r+1}^{n-1} s_\mu i_\mu$. D'où la contradiction et ce cas n'a pas lieu. □

**Remarques 2.1.2**

*1) Le lemme 2.1.2 signifie que la représentation paramètrique du lemme 2.1.1 est univoquement déterminée à une transformation polynômiale près* $\Lambda$ *qui est "homogène à poids "* $\sum_\nu i_\nu\ \widetilde{m}_\nu$. *On remarque que* $\Lambda$ *est un* $C^\omega$*-difféomorphisme et que sa fonction réciproque* $\Lambda^{-1}$ *est encore une transformation polynômiale. De plus,* $\Lambda$ *vérifie l'équation (2.5). C'est-à-dire, pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$ *et* $\zeta \in \mathbb{R}^{n-1}$, *on a* $\Lambda \circ \kappa_\zeta(\lambda) = \kappa_{\Lambda(\zeta)}(\lambda)$.

*2) Si* $\widetilde{m}_1 = ... = \widetilde{m}_{n-1}$, *alors pour tout* $1 \leq j \leq n-1$ *et* $\zeta \in \mathbb{R}^{n-1}$, *on a* $\Lambda_j(\zeta) = \sum_{l=1}^{n-1} a^j_l \zeta_l$, *où* $a^j_l \in \mathbb{R}$. *C'est-à-dire, la transformation des paramètres* $\Lambda$ *est* $\mathbb{R}$*-linéaire.*

**Hypothèse $(\mathcal{H}_2)$ :**

On va définir notre seconde hypothèse $(\mathcal{H}_2)$ : soit un champ de vecteurs $\mathbf{X}$ de classe $C^\omega$ admissible à poids $(\widetilde{m}_1,...,\widetilde{m}_{n-1})$ associé à la paramétrisation $(U,\gamma)$ du lemme 2.1.1 tel que le champ de vecteurs $\mathbf{X}$ s'écrive sous la

forme $\sum_{i=1}^{n-1}\widetilde{m}_i\zeta_i\frac{\partial}{\partial\zeta_i}$. On suppose qu'il existe un changement de variables polynômial comme dans le lemme 2.1.2 et on note, dans les nouvelles coordonnées $\zeta=(\zeta_1,...,\zeta_{n-1})$, $\widetilde{\gamma}:\widetilde{U}\longrightarrow\widetilde{\gamma}\left(\widetilde{U}\right)=:\widetilde{\mathbf{M}}$ le prolongement holomorphe de $\gamma$ sur la complexifiée de $\mathbf{M}$ (notée $\widetilde{\mathbf{M}}$) où $\widetilde{U}\supset U$ est un ouvert dans $\mathbb{C}^{n-1}$.
Pour $\zeta=(\zeta_1,...,\zeta_{n-1})\in\mathbb{R}^{n-1}$, $\eta=(\eta_1,...,\eta_{n-1})\in\mathbb{R}^{n-1}$, $\lambda\in\mathbb{R}$, $\mu\in\mathbb{R}$, on pose $\sigma=\zeta+i.\eta\in\mathbb{C}^{n-1}$, $\kappa_\zeta(\lambda):=\left(\lambda^{\widetilde{m}_1}\zeta_1,...,\lambda^{\widetilde{m}_{n-1}}\zeta_{n-1}\right)$ et $\kappa_\sigma(\mu,\lambda):=\kappa_\zeta(\mu)+i.\kappa_\eta(\lambda)$.
Notons $\rho$ la fonction définissante de $D$ au voisinage de $p\in bD$. Soit $M$, $K\in\mathbb{N}^*$ tels que $M\leq K$ et $m_j:=\frac{M}{\widetilde{m}_j}\in\mathbb{N}^*$, $\frac{K}{\widetilde{m}_j}\in\mathbb{N}^*$ pour tout $1\leq j\leq n-1$.
Soit $\mathbf{E}$ le pseudo-ellipsoïde réel $\left\{\zeta=(\zeta_1,...,\zeta_{n-1})\in\mathbb{R}^{n-1}\ /\ \sum_{i=1}^{n-1}\zeta_i^{2m_i}=1\right\}$.
Alors, notre deuxième hypothèse est :

$(\mathcal{H}_2)$ *Il existe des constantes $\varepsilon>0$, $0<c\leq C$ telles que, pour tout $\sigma=\zeta+i.\eta\in\boldsymbol{E}+i.\boldsymbol{E}$, $|\lambda|<\varepsilon$, $|\mu|<\varepsilon$, on ait*
$$c|\lambda|^{2M}(|\mu|+|\lambda|)^{2(K-M)}\leq\rho\left(\widetilde{\gamma}(\kappa_\sigma(\mu,\lambda))\right)\leq C|\lambda|^{2M}(|\mu|+|\lambda|)^{2(K-M)}.$$

**Définition 2.1.1** *Si un champ de vecteurs $\boldsymbol{X}$ de classe $C^\omega$ sur $\boldsymbol{M}$ vérifie les deux hypothèses $(\mathcal{H}_1)$ et $(\mathcal{H}_2)$, on dira que $\boldsymbol{X}$ est un champ de vecteurs pic-admissible de pic-type $(K,M;\widetilde{m}_1,...,\widetilde{m}_{n-1})$ au voisinage de $p$ pour la classe $\mathcal{O}$.*

**Remarques 2.1.3**
*1) Si $\rho_1$ est une autre fonction définissante de $D$ en $p$ alors il existe une fonction $h$ strictement positive telle que $\rho_1=h\rho$. Donc, l'hypothèse $(\mathcal{H}_2)$ ne dépend pas du choix de la fonction définissante.*
*2) Pour $\varepsilon>0$ suffisamment petit, l'application suivante*

$$\left\{\begin{array}{lll}\{(\mu,\lambda)\in\mathbb{R}^2\ /\ |\mu|<\varepsilon,|\lambda|<\varepsilon\}\times(\boldsymbol{E}+i.\boldsymbol{E}) & \to & \mathbb{C}^{n-1}\\ (\mu,\lambda,\sigma) & \longmapsto & \kappa_\sigma(\mu,\lambda)\end{array}\right.$$

*paramétrise un voisinage*
$$\mathcal{V}_\varepsilon=\left\{\sigma=\zeta+i.\eta\in\mathbb{C}^{n-1}\ /\ \sum_{i=1}^{n-1}\zeta_i^{2m_i}<\varepsilon^{2M},\sum_{i=1}^{n-1}\eta_i^{2m_i}<\varepsilon^{2M}\right\}$$ *de l'origine dans $\mathbb{C}^{n-1}$. Pour $\sigma\in\mathcal{V}_\varepsilon$, on pose*

$$A^*(\sigma):=\left(\sum_{i=1}^{n-1}\eta_i^{2m_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{n-1}\left(\zeta_i^{2m_i}+\eta_i^{2m_i}\right)\right)^{\frac{K-M}{M}}.$$

*Alors, on a*

$$\begin{aligned} A^*(\sigma) &\approx |\lambda|^{2M}\left(\mu^{2M}+\lambda^{2M}\right)^{\frac{K-M}{M}} \\ &\approx |\lambda|^{2M}\left(|\mu|+|\lambda|\right)^{2(K-M)} \\ &\approx \rho\left(\widetilde{\gamma}(\sigma)\right). \end{aligned}$$

*avec des constantes strictement positives indépendantes de $\sigma$, $\mu$, $\lambda$.*
*3) Si $\Lambda=(\Lambda_1,...,\Lambda_{n-1})$ est un changement de coordonnées linéaire tel que, pour tout $1\leq j\leq n-1$ et $\zeta\in\mathbb{R}^{n-1}$, on ait $\Lambda_j(\zeta)=\sum_{\nu=1}^{n-1} a^j_{I_\nu}\,\zeta_\nu$, où $I_\nu=(0,...,\underbrace{1}_{\nu},0,...,0)$ et $a^j_{I_\nu}=0$ pour $\widetilde{m}_\nu\neq\widetilde{m}_j$ , alors la complexifiée $\widetilde{\Lambda}$ de $\Lambda$ vérifie $\widetilde{\Lambda}\circ\kappa_\sigma=\kappa_{\widetilde{\Lambda}(\sigma)}$, pour tout $\sigma\in\mathcal{V}_\varepsilon$. Dans ce cas, si l'hypothèse $(\mathcal{H}_2)$ est valable alors elle reste invariante sous le changement polynômial $\Lambda$.*

## 2.2 Énoncé du théorème principal.

**Théorème 2.2.1** *Soit $D$ un domaine pseudoconvexe de $\mathbb{C}^n$ à bord $bD$ de classe $C^\omega$. Soit $\boldsymbol{M}$ une sous variété $C^\omega$ de dimension $(n-1)$ de $bD$, totalement réelle, complexe-tangentielle dans un voisinage d'un point $p\in\boldsymbol{M}$. On suppose que $\boldsymbol{M}$ admet un champ de vecteurs $\boldsymbol{X}$ de classe $C^\omega$ pic-admissible de pic-type $(K,M;\widetilde{m}_1,...,\widetilde{m}_{n-1})$ au voisinage de $p$ pour $\mathcal{O}$. Alors, la sous variété $\boldsymbol{M}$ est un ensemble localement pic en $p$ pour la classe $\mathcal{O}$.*

**Illustration :**
Considérons dans $\mathbb{C}^3$, le domaine $D$ défini par $\rho(z_1,z_2,w)<0$ où $\rho(z_1,z_2,w)=\Re w+y_1^4+y_2^6-1$, $z_1=x_1+iy_1\in\mathbb{C}$, $z_2=x_2+iy_2\in\mathbb{C}$. La sous variété $\mathbf{M}=\{(x_1,x_2,1)\ /\ x_1,x_2\in\mathbb{R}\}$ du bord $bD$ est de classe $C^\omega$, totalement réelle, de dimension 2 et complexe-tangentielle au voisinage de $(0,0,1)$. Soit le champ de vecteurs $\mathbf{X}=3x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+2x_2\frac{\partial}{\partial x_2}$ sur $\mathbf{M}$.

• Le domaine $D$ est convexe et à bord $bD$ de classe $C^\omega$.

• Le champ de vecteurs $\mathbf{X}$ est pic-admissible de pic-type $(6,6;3,2)$ au voisinage de $(0,0,1)$ pour la classe $\mathcal{O}$. En effet, notons $X=(x_1,x_2)$, $Y=(y_1,y_2)$, $\kappa_X(\mu)=(\mu^3x_1,\mu^2x_2)$ pour $\mu\in\mathbb{R}$. Soit le pseudo-ellipsoïde $\mathbf{E}=\{X=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2\ /\ x_1^4+x_2^6=1\}$. Pour $\mu$, $\lambda\in\mathbb{R}$, on pose $\sigma=X+i.Y\in\mathbf{E}+i.\mathbf{E}$, $\kappa_\sigma(\mu,\lambda)=\kappa_X(\mu)+i\kappa_Y(\lambda)=(\mu^3x_1,\mu^2x_2)+i\,(\lambda^3y_1,\lambda^2y_2)$.

$\mathbf{M}$ est paramétrée par $\gamma : (\mu, \lambda) \longmapsto (\mu.X + i\lambda.Y, 1)$ au voisinage de $(0, 0, 1)$. La complexifiée $\widetilde{\mathbf{M}} = \{(z_1, z_2, 1) \ / \ z_1, z_2 \in \mathbb{C}\}$ de $\mathbf{M}$ est paramétrée par $\widetilde{\gamma}$. Comme $\rho\left(\widetilde{\gamma}\left(\kappa_\sigma(\mu, \lambda)\right)\right) = \lambda^{12}$ alors le champ de vecteurs $\mathbf{X}$ vérifie bien l'hypothèse $(\mathcal{H}_2)$.

• $\mathbf{M}$ est donc un ensemble localement pic en $(0, 0, 1)$ pour la classe $\mathcal{O}$. On peut prendre $f(z_1, z_2, w) = w$ comme fonction pic.

## 2.3 Changement de coordonnées holomorphe.

On supposera désormais que la sous variété $\mathbf{M}$ admet un champ de vecteurs $\mathbf{X}$ de classe $C^\omega$, pic-admissible de pic-type $(K, M; \widetilde{m}_1, ..., \widetilde{m}_{n-1})$ au voisinage d'un point $p \in \mathbf{M}$. Dans cette section, on donne d'abord des résultats généraux qu'ils vont nous permettre d'énoncer la condition suffisante différemment puis de prouver notre théorème.
Le lemme suivant est donné dans le lemme 6 de [F-O] et aussi dans [N2, N4]. Ici, on donne les détails.

**Lemme 2.3.1** *Soit $D$ un domaine de $\mathbb{C}^n$ à bord $bD$ de classe $C^\omega$. Soit $\boldsymbol{M}$ une sous variété $C^\omega$ de dimension $(n-1)$ de $bD$, totalement réelle, complexe-tangentielle dans un voisinage d'un point $p \in \boldsymbol{M}$.*

*Alors, il existe un changement de variables holomorphe $(Z, w)$, avec $Z = X + i.Y \in \mathbb{C}^{n-1}$ et $w = u + iv \in \mathbb{C}$, qui ramène $p$ à l'origine tel q'on ait dans un voisinage $\mathcal{U}$ de l'origine :*
*(i) La sous variété $\boldsymbol{M}$ s'écrit sous la forme $\boldsymbol{M} = \{(Z, w) \in \mathcal{U} \ / \ Y = w = 0\}$. De plus, $\boldsymbol{M}$ est contenue dans la sous variété $\boldsymbol{N} = \{(Z, w) \in \mathcal{U} \ / \ Y = u = 0\}$ de $bD$ qui est totalement réelle, de dimension $n$.*
*(ii) Pour tout $c \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{M}_c = \{(Z, w) \in \mathcal{U} \ / \ Y = u = 0 \ \text{et} \ v = c\}$ est complexe-tangentielle ou vide.*
*(iii) $D \cap \mathcal{U} \ = \{(Z, w) \ / \rho(Z, w) < 0\}$ avec*

$$\rho(Z, w) = \ u + \ A(Z) + \ vB(Z) \ + \ v^2 R(Z, v).$$

*(iv) Les fonctions $A$ et $B$ s'annulent à un ordre $\geq 2$ si $Y = 0$.*

**Preuve.**
Pour simplifier les notations, on donne la preuve de ce lemme dans le cas $n = 3$. Elle reste vraie pour $n \geq 2$. Soit $\gamma$ la paramétrisation de $\mathbf{M}$ suivante $\gamma : \begin{cases} U' & \to & \mathbb{C}^3 \\ (t_1, t_2) & \longmapsto & \gamma(t_1, t_2) \end{cases}$, de classe $C^\omega$ dans $U'$ telle que $\gamma(0) = p$, où

$U'$ est un voisinage ouvert de $0_{\mathbb{R}^2}$. Or $rg\frac{\partial(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)}{\partial(t_1,t_2)} = 2$ en $0_{\mathbb{R}^2}$. Après une translation et une rotation unitaire des coordonnées dans $\mathbb{C}^3$, on ramène $p$ à l'origine et les espaces tangents réel et complexe à $bD$ en 0 sont

$$T_0(bD) = \mathbb{C}^2 \times i\mathbb{R} \quad \text{et} \quad T_0^{\mathbb{C}}(bD) = \mathbb{C}^2 \times \{0\} \text{ respectifs.}$$

La famille $\{v_1 = \frac{d\gamma}{dt_1}(0), v_2 = \frac{d\gamma}{dt_2}(0)\}$ constitue une base dans $T_0(\mathbf{M}) \subset \mathbb{C}^2 \times \{0\}$. Comme $\mathbf{M}$ est totalement réelle, l'espace engendré par $\{v_1, v_2\}$ sur $\mathbb{C}$ est $\mathbb{C}^2 \times \{0\}$. Soit l'application linéaire, bijective $\Phi : \mathbb{C}^2 \times \{0\} \to \mathbb{C}^2 \times \{0\}$ telle que $\Phi(v_1) = (1,0,0)$ et $\Phi(v_2) = (0,1,0)$. Si on pose $\widetilde{\Phi}(z_1,z_2,w) = (\Phi(z_1,z_2),w)$ alors $\widetilde{\Phi}$ transforme les espaces tangents réel et complexe de $bD$ à l'origine sur eux-mêmes. Considérons la nouvelle paramétrisation $\widetilde{\gamma} = \widetilde{\Phi} \circ \gamma$. Alors, on a

$$\frac{d\widetilde{\gamma}}{dt_1}(0) = (1,0,0) \quad \text{et} \quad \frac{d\widetilde{\gamma}}{dt_2}(0) = (0,1,0).$$

Dans ce qui suit, on note $\gamma$ à la place de $\widetilde{\gamma}$ et $\mathbf{n}(z_1,z_2,w)$ la normale extérieure à $bD$. On peut prendre $|\mathbf{n}| = 1$. On pose $L(z_1,z_2,w) = i\mathbf{n}(z_1,z_2,w)$ le champ de vecteurs tangents au bord qui est orthogonal à $T^{\mathbb{C}}_{(z_1,z_2,w)}(bD)$. Alors, pour tout $(z_1,z_2,w) \in bD$, il existe une courbe intégrale $l_{(z_1,z_2,w)}(\lambda)$ de $L$ vérifiant

$$l_{(z_1,z_2,w)}(0) = (z_1,z_2,w) \quad \text{et} \quad \frac{dl_{(z_1,z_2,w)}}{d\lambda}(\lambda) = L\left(l_{(z_1,z_2,w)}(\lambda)\right).$$

$l_{(z_1,z_2,w)}(\lambda)$ est $C^\omega$ par rapport à $\lambda$ et $(z_1,z_2,w)$. De plus, on a $l_{(z_1,z_2,w)}(\lambda) \in bD$.

Soit l'application $\theta : \begin{cases} U & \to & \mathbb{C}^3 \\ (t_1,t_2,\lambda) & \longmapsto & l_{\gamma(t_1,t_2)}(\lambda) \end{cases}$, où $U$ est un voisinage ouvert suffisamment petit de $0_{\mathbb{R}^3}$. Il est clair que $\theta$ est de classe $C^\omega$ dans $U$ et que $\frac{d\theta}{d\lambda}(t_1,t_2,\lambda) = L\left(l_{\gamma(t_1,t_2)}(\lambda)\right)$.

En particulier, on a : $\frac{d\theta}{d\lambda}(t_1,t_2,0) = L\left(l_{\gamma(t_1,t_2)}(0)\right) = L\gamma(t_1,t_2) = i\mathbf{n}(\gamma(t_1,t_2))$.

À l'origine de $\mathbb{R}^3$, on obtient :

$$\frac{d\theta}{d\lambda}(0) = (0,0,i), \frac{d\theta}{dt_1}(0) = \frac{d\gamma}{dt_1}(0) = (1,0,0) \text{ et } \frac{d\theta}{dt_2}(0) = \frac{d\gamma}{dt_2}(0) = (0,1,0).$$

Ainsi, $rg\frac{\partial(\theta_1,\theta_2,\theta_3)}{\partial(t_1,t_2,\lambda)} = 3$ en $0_{\mathbb{R}^3}$. Alors, il existe $\widetilde{U} \subset U$ un voisinage ouvert de $0_{\mathbb{R}^3}$ tel que $\theta : \widetilde{U} \to \theta(\widetilde{U}) =: \widetilde{\mathbf{N}}$, soit un $C^\omega$-difféomorphisme entre $\widetilde{U}$ et une sous variété $\widetilde{\mathbf{N}}$ de $bD$, $C^\omega$, totalement réelle, de dimension 3. Notons $\widetilde{\theta} : (z_1,z_2,w) \longmapsto (\widetilde{z_1},\widetilde{z_2},\widetilde{w})$ la complexifiée de $\theta$. Alors, $\widetilde{\theta}$ est un biholomorphisme d'un voisinage $V$ de $0_{\mathbb{C}^3}$ dans un voisinage $W$ de l'origine. Par rapport à ces nouvelles coordonnées $(\widetilde{z_1},\widetilde{z_2},\widetilde{w})$, on a :

$$\widetilde{\mathbf{N}} = \{(\widetilde{z}_1, \widetilde{z}_2, \widetilde{w}) \in W \ / \ \Im\widetilde{z}_1 = \Im\widetilde{z}_2 = \Im\widetilde{w} = 0\} \text{ et}$$
$$\mathbf{M} = \{(\widetilde{z}_1, \widetilde{z}_2, \widetilde{w}) \in W \ / \ \Im\widetilde{z}_1 = \Im\widetilde{z}_2 = \widetilde{w} = 0\}.$$

Soit $q \in W$. On considère $\Sigma_q = \ T_q\left(\widetilde{\mathbf{N}}\right) \cap T_q^{\mathbb{C}}(bD)$.
Comme $\widetilde{\mathbf{N}}$ est totalement réelle, on a

$$\dim_{\mathbb{R}} \Sigma_q = \dim_{\mathbb{R}} T_q\left(\widetilde{\mathbf{N}}\right) + \dim_{\mathbb{R}} T_q^{\mathbb{C}}(bD) - \dim_{\mathbb{R}}\left(T_q\left(\widetilde{\mathbf{N}}\right) + T_q^c(bD)\right) = 2.$$

Ainsi, on associe à chaque point $q \in W$ un $\mathbb{R}$-sous espace vectoriel $\Sigma_q$. On montre d'abord que le système $\{\Sigma_q, q \in W\}$ est un système analytique réel et involutif. En effet, soit $T_q = (T_1, T_2, T_3) \in \mathbb{R}^3$ un vecteur tangent à $\widetilde{\mathbf{N}}$ en $q = (\widetilde{z}_1, \widetilde{z}_2, \widetilde{w}) \in \widetilde{\mathbf{N}}$. Alors, on a $\Re(\mathbf{n}_1 T_1 + \mathbf{n}_2 T_2 + \mathbf{n}_3 T_3) = 0$ où $\mathbf{n} = (\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3)$ est le champ de vecteurs normal à $bD$ en $q$. D'où $\mathbf{n}(q) = i(a_1(q), a_2(q), a_3(q))$ avec $a_i(q) \in \mathbb{R}$ pour tout $i = 1, 2, 3$. Ainsi, $\Sigma_q$ est caractérisé par

$$\Sigma_q = \{(T_1, T_2, T_3) \in \mathbb{R}^3 \ / \ a_1(q)T_1 + a_2(q)T_2 + a_3(q)T_3 = 0\}.$$

Comme $\mathbf{n}(0,0,0) = (0,0,i)$, on a $\mathbf{n}_3(q) \neq 0$ dans un voisinage ouvert suffisamment petit $W$ de $0_{\mathbb{C}^3} \in bD$. Considérons $T = (T_1, T_2, T_3)$ un champ de vecteurs tel que $T_q \in \Sigma_q$ pour tout $q \in \widetilde{\mathbf{N}}$. Alors, on a $T_1(q)a_1(q) + T_2(q)a_2(q) + T_3(q)a_3(q) = 0$. On prolonge maintenant le champ de vecteurs $T$ en un champ de vecteurs $\widetilde{T}$ analytique réel sur $W$ de la façon suivante :
$\begin{cases} \widetilde{T}_1(q) = T_1(\Re(q)) \\ \widetilde{T}_2(q) = T_2(\Re(q)) \\ \widetilde{T}_3(q) = -\frac{1}{\mathbf{n}_3(q)}(T_1(q)\mathbf{n}_1(q) + T_2(q)\mathbf{n}_2(q)) \end{cases}$. Ainsi,
$\cdot$ $\widetilde{T}$ est un champ de vecteurs complexe-tangentiel à $bD$ en tout point $q \in W$.
$\cdot$ $\widetilde{T}\Big|_{\widetilde{\mathbf{N}}} = T$.
Soit $K = (K_1, K_2, K_3)$ un autre champ de vecteurs tel que $K_q \in \Sigma_q$ pour tout $q \in \widetilde{\mathbf{N}}$. De même, on construit un prolongement $\widetilde{K}$ du champ de vecteurs $K$ vérifiant les mêmes propriétés que celles de $\widetilde{T}$. Ainsi, le crochet de Lie $\left[\widetilde{T}, \widetilde{K}\right]$ est complexe-tangentiel à $bD$ en tout point de $W$. De plus, comme $\widetilde{T}$ et $\widetilde{K}$ sont tangentiels à $\widetilde{\mathbf{N}}$, on obtient $\left[\widetilde{T}, \widetilde{K}\right]$ est tangentiel à $\widetilde{\mathbf{N}}$. C'est-à-dire, on a

$$[T, K]_q = \left[\widetilde{T}, \widetilde{K}\right]_q \in \Sigma_q, \ \forall q \in \widetilde{\mathbf{N}}.$$

Donc, le système $\left\{\Sigma_q, q \in \widetilde{\mathbf{N}}\right\}$ est involutif. De plus, il est engendré par deux champs de vecteurs $\chi_1 = \left(1, 0, -\frac{a_1}{a_3}\right)$ et $\chi_2 = \left(0, 1, -\frac{a_1}{a_3}\right)$ qui sont analytiques réels. D'après le théorème de Frobenius [Bo] (version analytique réelle), il existe un changement de coordonnées $\psi : (\widetilde{z}_1, \widetilde{z}_2, \widetilde{w}) \longmapsto (z'_1, z'_2, w')$ de classe $C^\omega$ sur $W \cap N'$ vérifiant $\psi(0) = 0$ et $d\psi(\Sigma_q) = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$, pour tout $q \in W \cap N'$. Ainsi, pour tout $c \in \mathbb{R}$, les fibres $M'_c = \{(z'_1, z'_2, w') \in W \cap N' \ / \ u' = c\}$ sont complexe-tangentielles à $bD$. De plus, $M'_0 = \psi(\mathbf{M})$. En complexifiant $\chi_1$ et $\chi_2$ au voisinage de l'origine, on obtient un système holomorphe involutif. Donc, il existe un changement des coordonnées holomorphe sur $W$ tel que $T_q(M'_c) = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ soit un $\mathbb{R}$-sous espace vectoriel de $T_q^{\mathbb{C}}(bD)$ pour tout $q \in N'$ et le champ de vecteurs $(0, 0, 1)$ soit tangentiel à $bD$. Alors, pour tout $q \in N'$, on a $\mathbf{n}(q) = (0, 0, ia_3(q)) = (0, 0, i)$. Maintenant, on effectue le changement de variables biholomorphe suivant : $\begin{cases} z_1 = z'_1 \\ z_2 = z'_2 \\ w = iw' \end{cases}$. On prouve dans un voisinage $\mathcal{U}$ suffisamment petit de l'origine de $\mathbb{C}^3$ :
$\mathbf{M} = \{(z_1, z_2, w) \ / \ y_1 = y_2 = w = 0\}$ et $\mathbf{N} = \{(z_1, z_2, w) \ / \ y_1 = y_2 = u = 0\}$, où $\mathbf{N}$ est fibrée par les fibres $\mathbf{M}_c = \{(z_1, z_2, w) \in \mathbf{N} \ / \ v = c\}_{c \in \mathbb{R}}$. D'où i) et ii) du lemme.
En représentant le bord $bD$ comme graphe au-dessus de $\mathbb{C}^2 \times i\mathbb{R}$, on prouve iii) :

$$bD = \{(z_1, z_2, w)/\rho(z_1, z_2, w) = u + A(z_1, z_2) + vB(z_1, z_2) + v^2 R(z_1, z_2, v) = 0\}.$$

Comme $\mathbf{M} \subset bD$ alors $A(x_1, x_2) = 0$.
Or $\mathbf{M}$ est complexe-tangentielle. Alors, on a

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial z_1}(x_1, x_2, 0) = 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial z_2}(x_1, x_2, 0) = 0 \end{cases}. \text{ Ceci implique } \begin{cases} \frac{\partial A}{\partial y_1}(x_1, x_2) = 0 \\ \frac{\partial A}{\partial y_2}(x_1, x_2) = 0 \end{cases}.$$

Donc, $A$ s'annule à un ordre $\geq 2$ quand $y_1 = y_2 = 0$.
Comme $\mathbf{N} \subset bD$ alors on a

$$A(x_1, x_2) + v\ B(x_1, x_2) + v^2\ R(x_1, x_2, v) = 0.$$

Or, le vecteur $\frac{\partial}{\partial v}$ est tangent à $\mathbf{N}$ alors $B(x_1, x_2) = 0$.
Comme le gradient $\nabla \rho = (0, 0, -1)$ est constant le long de $\mathbf{N}$, alors

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial z_1}(x_1, x_2, v) = 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial z_2}(x_1, x_2, v) = 0 \end{cases}. \text{ Ceci implique } \begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial y_1}(x_1, x_2, v) = 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial y_2}(x_1, x_2, v) = 0 \end{cases}.$$

Ceci est équivalent à : $\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial A}{\partial y_1}(x_1,x_2) + v\frac{\partial B}{\partial y_1}(x_1,x_2) + v^2\frac{\partial R}{\partial y_1}(x_1,x_2,v) = 0 \\ \frac{\partial A}{\partial y_2}(x_1,x_2) + v\frac{\partial B}{\partial y_2}(x_1,x_2) + v^2\frac{\partial R}{\partial y_2}(x_1,x_2,v) = 0 \end{array} \right.$.

C'est-à-dire, on a $\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial B}{\partial y_1}(x_1,x_2) + v\frac{\partial R}{\partial y_1}(x_1,x_2,v) = 0 \\ \frac{\partial B}{\partial y_2}(x_1,x_2) + v\frac{\partial R}{\partial y_2}(x_1,x_2,v) = 0 \end{array} \right.$.

Maintenant, on prend $v = 0$. On obtient : $\frac{\partial B}{\partial y_1}(x_1,x_2) = \frac{\partial B}{\partial y_2}(x_1,x_2) = 0$. D'où $B$ s'annule à un ordre $\geq 2$ si $y_1 = y_2 = 0$. De plus, toutes les dérivées premières de $R$ sont nulles si $y_1 = y_2 = 0$ car le vecteur $\frac{\partial}{\partial v}$ est tangent le long de $\mathbf{N}$. Ceci achève la preuve de iv) et du lemme. □

La proposition suivante se trouve dans [B-I1] pour $n = 2$ .

**Proposition 2.3.1**

*1) Si l'hyperplan $H = \mathbb{C}^{n-1} \times i\mathbb{R} = \{(Z, iv) \ / \ Z \in \mathbb{C}^{n-1}, v \in \mathbb{R}\}$ se trouve à l'extérieur de $D$ dans un voisinage $\mathcal{U}$ de l'origine, alors il existe une constante $T > 0$ telle que $B^2 \leq TA$, pour tout $Z$ assez proche de $0_{\mathbb{C}^{n-1}}$.*

*2) S'il existe une constante $T > 0$ telle que, pour tout $Z$ assez proche de $0_{\mathbb{C}^{n-1}}$, on ait $B^2 \leq TA$, alors il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de l'origine dans $\mathbb{C}^n$ et une fonction $\psi$ holomorphe sur $\mathcal{U}$ tels que :* $\left\{ \begin{array}{ll} \Re\psi < 0 & \text{sur } \overline{D} \cap \mathcal{U} \text{ si } w \neq 0 \\ \psi = 0 & \text{si } w = 0 \end{array} \right.$.

**Preuve.**

1) Soient $(Z, w) \in H \cap \mathcal{U}$ et $\delta > 0$ tels que $|Z| \leq \delta$ et $|w| \leq \delta$. On a

$$A(Z) \ + \ v\ B(Z) \ + \ v^2\ R(Z,v) \geq 0.$$

Or $\varkappa = \min\left( \frac{1}{2}; \frac{\delta}{2\sup\limits_{|Z|\leq\delta} |B(Z)|}; \frac{1}{2\sup\limits_{|Z|\leq\delta,|w|\leq\delta} |R(Z,v)|} \right) > 0.$

On pose $v = -B\varkappa$. Alors, on a $A - B^2\varkappa + RB^2\varkappa^2 \geq 0$. Ceci implique $A \geq B^2\varkappa(1 - \varkappa R)$. Or $|\varkappa R| \leq \frac{1}{2}$. Alors, on obtient $1 - \varkappa R \geq 1 - |\varkappa R| \geq \frac{1}{2}$ et $A \geq B^2\frac{\varkappa}{2}$. Il suffit de prendre $T = \frac{2}{\varkappa} > 0$.

2) Soient $(Z, w) \in \overline{D} \cap \mathcal{U}$ et $\delta > 0$ tels que $|Z| \leq \delta$ et $|w| \leq \delta$. On a :

$$\begin{array}{rcl} 0 \geq \rho(Z,w) & = & u \ + \ A(Z) \ + \ v\ B(Z) \ + \ v^2\ R(Z,v) \\ & = & u \ + \left( A(Z) + \ vB(Z) + \frac{T}{4}\ v^2 \right) \ + \left[ R(Z,v) - \frac{T}{4} \right] \ v^2 \\ & \geq & u - K_1\ v^2, \end{array}$$

où $K_1 \ = \frac{T}{4} - \inf\limits_{|Z|\leq\delta,|w|\leq\delta} |R(Z,v)| > 0.$

Donc, $\overline{D} \cap \mathcal{U} \subset D_1 = \{(Z,w) \in \mathcal{U} \ / \ u \ - \ K_1\ v^2 \leq 0\}$.

Prenons maintenant l'application $\psi : w \longmapsto w' = \frac{w}{1 - 2K_1 w}$. $\psi$ est holomorphe dans un disque centré à l'origine et de rayon assez petit. De plus, on a

$$\psi\left(\{(u,v) \ / \ K_1\left(u^2 + v^2\right) - u \geq 0\}\right) = \{(u',v') \ / \ K_1\left(u'^2 + v'^2\right) + u' \leq 0\}.$$

En effet, $\psi(u,v) = \left(\frac{u - 2K_1\left(u^2+v^2\right)}{4K_1(K_1(u^2+v^2)-u)+1} \ ; \ \frac{v}{4K_1(K_1(u^2+v^2)-u)+1}\right)$. Alors, on a $\psi(\mathcal{C}_{(I,\frac{1}{2K_1})}) = \mathcal{C}_{(\Omega,\frac{1}{2K_1})}$, où $\mathcal{C}_{(I,\frac{1}{2K_1})}$ est le cercle de centre $I = (\frac{1}{2K_1}, 0)$ et de rayon $\frac{1}{2K_1}$ et $\mathcal{C}_{(\Omega,\frac{1}{2K_1})}$ est le cercle de centre $\Omega = (\frac{-1}{2K_1}, 0)$ et de rayon $\frac{1}{2K_1}$. Or $\psi(\frac{1}{4K_1}) = \frac{1}{8K_1} > 0$. Donc l'image de l'extérieur du disque $\{(u,v) \ / \ K_1(u^2 + v^2) - u \leq 0\}$ par $\psi$ est le disque $\{(u',v') \ / \ K_1(u'^2 + v'^2) + u' \leq 0\}$. On a ainsi : $\begin{cases} \Re\psi < 0 & \text{sur } \overline{D} \cap \mathcal{U} \text{ si } w \neq 0 \\ \psi = 0 & \text{si } w = 0 \end{cases}$. □

**Exemple 2.3.1** *([B-I1]) Considérons dans $\mathbb{C}^2$, le domaine $D$ défini dans un voisinage ouvert $\mathcal{U}$ de l'origine par : $\rho(z,w) = u + A(z) + v\ B(z) < 0$, avec $A(z) = y^4\left[(ax-y)^2 + |z|^{4m}\right]$, $B(z) = y^4|z|^{2s}$, $z = x + iy$, $w = u + iv$, $a > 0$ un réel assez grand, $m$ et $s$ sont deux entiers positifs qui vérifient la condition : $m > s + 1 > 4$.*

• *Le domaine $D$ est pseudoconvexe et à bord $C^\omega$. En effet, on a $\Delta[y^4(ax-y)^2] = 2y^2[(a^2+15)y^2 - 20axy + 6a^2x^2]$. Alors, il existe une constante $C > 0$ tel qu'on ait : $\Delta\left[y^4(ax-y)^2\right] \geq Cy^2|z|^2$. Comme $\partial_z\rho = O\left(y^3|z|^2\right)$, $\partial_w\rho = \frac{1}{2} + O\left(y^4|z|^{2s}\right)$, $\partial^2_{z\overline{w}} = O\left(y^3|z|^{2s}\right)$ et $\partial^2_{w\overline{w}}\rho = 0$, on obtient*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\acute{e}v\ \rho\ [(-\partial_w\rho, \partial_z\rho)] &= \partial^2_{z\overline{z}}\rho\ |\partial_w\rho|^2 - 2\Re\left(\partial^2_{z\overline{w}}\rho\ \partial_{\overline{z}}\rho\ \partial_w\rho\right) + \partial^2_{w\overline{w}}\rho\ |\partial_z\rho|^2 \\ &\geq \frac{C}{4}y^2|z|^2 + O\left(y^6|z|^{2s+2}\right). \end{aligned}$$

• *La sous variété $\boldsymbol{M} = \{(z,w) \in \mathcal{U} \ / \ y = w = 0\}$ est complexe-tangentielle au voisinage de l'origine. En effet, soit $p \in \boldsymbol{M} \cap \mathcal{U}$, on a : $T^{\mathbb{C}}_p(bD) = \{(t_1,t_2) \in \mathbb{C}^2 \ / \ t_2 = 0\} \supseteq T_p(\boldsymbol{M})$.*

• *La complexifiée $\widetilde{\boldsymbol{M}} = \{(z,w) \in \mathcal{U} \ / \ w = 0\}$ de $\boldsymbol{M}$ vérifie la condition nécessaire : $\widetilde{\boldsymbol{M}} \cap \overline{D} \cap \mathcal{U} = \boldsymbol{M} \cap \mathcal{U}$. En effet, on a $\rho(z,0) \geq 0$ et $\rho(z,0) = 0$ si et seulement si $y = 0$.*

• *$\frac{B^2}{A}$ n'est pas borné au voisinage de l'origine de $\mathbb{C}$. Donc, $\boldsymbol{M}$ n'est pas un ensemble localement pic à l'origine pour la classe $\mathcal{O}$.*

Dans ce qui suit, on va travailler avec les coordonnées holomorphes $(Z,w)$ où $Z = X + i.Y \in \mathbb{C}^{n-1}$ et $w = u + iv \in \mathbb{C}$ du lemme 2.3.1. Le champ

de vecteurs $\mathbf{X}$ qui est pic-admissible de pic-type $(K, M; \widetilde{m}_1, ..., \widetilde{m}_{n-1})$ donné dans ces coordonnées laisse invariant les propriétés sur les fonctions $A$ et $B$. En effet, le changement $\Lambda$ des lemmes 2.1.1 et 2.1.2 n'affectent que les variables $Z = (z_1, ..., z_{n-1})$. De plus, si on note $\widetilde{\Lambda}$ la complexifiée de $\Lambda$ on remarque que $A \circ \widetilde{\Lambda}(\zeta)$ s'annule à un ordre $\geq 2$ si $\Im\zeta = 0$ car $\Im\left(\widetilde{\Lambda}(\zeta)\right) = 0$ si $\Im\zeta = 0$. On peut donc supposer que l'hypothèse $(\mathcal{H}_2)$ est réalisée dans les coordonnées de $\mathbf{M}$.
Dans la suite, on pose $k_\nu =: \frac{K}{\widetilde{m}_\nu} \in \mathbb{N}^*$ et $\kappa = \frac{K}{M} = \frac{k_\nu}{m_\nu} \geq 1$ ($\kappa$ ne dépend pas de $\nu$).

**Remarques 2.3.1**
*1) Grâce à $\kappa = \frac{k_\nu}{m_\nu} \geq 1$ pour tout $1 \leq \nu \leq n-1$, on remarque que pour tout $Z = (z_1, ..., z_{n-1}) \in \mathcal{V}$ où $\mathcal{V}$ est un voisinage ouvert suffisamment petit de l'origine de $\mathbb{C}^{n-1}$, on a :*

$$\sum_{\nu=1}^{n-1} |z_\nu|^{2(k_\nu - m_\nu)} \approx \left(\sum_{\nu=1}^{n-1} |z_\nu|^{2m_\nu}\right)^{\kappa-1}.$$

*On définit les pseudo-normes suivantes par rapport aux nouvelles coordonnées $Z = (z_1, ..., z_{n-1})$ sur la complexifiée $\widetilde{\boldsymbol{M}} = \{(Z, w) \in \mathcal{U} \ / \ w = 0\}$ de $\boldsymbol{M}$ :*

$$||Y||_* = \left(\sum_{\nu=1}^{n-1} {y_\nu}^{2m_\nu}\right)^{1/2M} \quad et \quad ||Z||_* = \left(\sum_{\nu=1}^{n-1} |z_\nu|^{2k_\nu}\right)^{1/2K}.$$

*2) Comme*

$$\begin{aligned}\left(\sum_{\nu=1}^{n-1} |z_\nu|^{2k_\nu}\right)^{1/2K} &= \left(\sum_{\nu=1}^{n-1} |z_\nu|^{2\kappa m_\nu}\right)^{1/2K} \\ &\approx \left(\sum_{\nu=1}^{n-1} |z_\nu|^{2m_\nu}\right)^{\kappa/2K} = \left(\sum_{\nu=1}^{n-1} |z_\nu|^{2m_\nu}\right)^{1/2M},\end{aligned}$$

*on peut employer les nombres $m_\nu$ au lieu des $k_\nu$ et $M$ au lieu de $K$ dans la définition de la pseudo-norme $||Z||_*$.*
*3) Soient $\zeta_0 = (\zeta_{0,1}, ..., \zeta_{0,n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ et $\eta_0 = (\eta_{0,1}, ..., \eta_{0,n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ tels que $\sum_{\nu=1}^{n-1} \eta_{0,i}^{2m_\nu} = \sum_{\nu=1}^{n-1} \eta_{0,\nu}^{2m_\nu} = 1$. Pour $\varepsilon > 0$, $|\mu| \leq \varepsilon$, $|\lambda| \leq \varepsilon$, $Z = X + i.Y = \kappa_{\zeta_0}(\mu) + i.\kappa_{\eta_0}(\lambda)$ où $\kappa_{\eta_0}(\lambda) = \left(\lambda^{\widetilde{m}_1}\eta_{0,1}, ..., \lambda^{\widetilde{m}_{n-1}}\eta_{0,n-1}\right)$, on a :*

$$||Z||_* := \left(\sum_{\nu=1}^{n-1}(\zeta_\nu^{2m_\nu}+\eta_\nu^{2m_\nu})\right)^{\frac{1}{2M}} \quad et \quad ||Y||_* := \left(\sum_{\nu=1}^{n-1}\eta_\nu^{2m_\nu}\right)^{\frac{1}{2M}}$$

*et du coup*

$$||Z||_* = \left(\sum_{\nu=1}^{n-1}(\mu^{2M}\zeta_{0,\nu}^{2m_\nu}+\lambda^{2M}\eta_{0,\nu}^{2m_\nu})\right)^{\frac{1}{2M}} \approx |\mu|+|\lambda| \quad et \quad ||Y||_* \approx |\lambda|.$$

*Avec ces notations, l'hypothèse* $(\mathcal{H}_2)$ *est équivalente à :*

$$\rho\left(\widetilde{\gamma}(\sigma)\right) \approx A^*\left(\sigma\right) = A\left(Z\right) \approx ||Y||_*^{2M}||Z||_*^{2(K-M)}$$

*dans un voisinage de l'origine dans* $\mathbb{C}^{n-1}$ *avec des constantes strictement positives indépendantes de* $Z \in \mathcal{V}_\varepsilon$.
*4) Quand* $K = M = 1$, *les* $\widetilde{m}_i$ *sont tous égaux et valent* 1. *Dans ce cas, Pour* $Z = X + i.Y \in \mathbb{C}^{n-1}$ *assez proche de l'origine,* $A\left(Z\right) \approx ||Y||_*^2 = \|Y\|^2$. *On retrouve ainsi la propriété sur* $A$ *concernant les domaines strictement pseudoconvexes au voisinage d'un point* $p$ *du bord* $bD$.

Dans ce qui suit, on pourra donc supposer que $A$ vérifie la propriété suivante :

$(\mathcal{H})$ *Il existe deux constantes* $0 < c \leq C$ *telles que, pour tout* $Z = X + i.Y$ *assez proche de l'origine de* $\mathbb{C}^{n-1}$, *on ait :* $c||Y||_*^{2M}||Z||_*^{2K-2M} \leq A\left(Z\right) \leq C||Y||_*^{2M}||Z||_*^{2K-2M}$.

## 2.4 Décomposition d'une fonction $C^\omega$ suivant les poids.

Dans cette section, on s'intéresse à l'ordre d'annulation de certaines fonctions analytiques réelles sur $\mathbf{M}$ au voisinage de $p = 0 \in \mathbf{M}$.

**Définition 2.4.1** *Soit* $\chi \not\equiv 0$ *un monôme dans* $\mathbb{C}\left[z_1, \overline{z}_1, ..., z_{n-1}, \overline{z}_{n-1}\right]$. $\chi = a_{I,J}\ z_1^{i_1}\overline{z}_1^{j_1}...\ z_{n-1}^{i_{n-1}}\overline{z}_{n-1}^{j_{n-1}}$ *avec* $a_{I,J} \neq 0$, $I = (i_1, ..., i_{n-1}) \in \mathbb{N}^{n-1}$ *et* $J = (j_1, ..., j_{n-1}) \in \mathbb{N}^{n-1}$. *On définit le* $Z$*-poids de* $\chi$, *noté* $\mathcal{P}_Z\left(\chi\right)$, *par :*

$$\mathcal{P}_Z\left(\chi\right) = \sum_{\nu=1}^{n-1} \widetilde{m}_\nu\left(i_\nu + j_\nu\right).$$

*Si* $g \in \mathbb{C}\left[z_1, \overline{z}_1, ..., z_{n-1}, \overline{z}_{n-1}\right]$ *est une somme de monômes du même* $Z$*-poids* $L$, *on dit que* $g$ *est homogène en* $Z$*-poids* $L$.

*Soit $\Xi \not\equiv 0$ un monôme dans $\mathbb{R}[x_1, y_1, ..., x_{n-1}, y_{n-1}]$. $\Xi$ s'écrit sous la forme $\Xi = \alpha_{I,J}\ y_1^{i_1}...y_{n-1}^{i_{n-1}}\ x_1^{j_1}...x_{n-1}^{j_{n-1}}$ avec $\alpha_{I,J} \neq 0$, $I = (i_1, ..., i_{n-1}) \in \mathbb{N}^{n-1}$ et $J = (j_1, ..., j_{n-1}) \in \mathbb{N}^{n-1}$. On définit le $Y$-poids de $\Xi$, noté $\mathcal{P}_Y(\Xi)$, par :*

$$\mathcal{P}_Y(\Xi) = \sum_{\nu=1}^{n-1} \widetilde{m}_\nu\ i_\nu.$$

*Si $h \in \mathbb{R}[x_1, y_1, ..., x_{n-1}, y_{n-1}]$ est une somme de monômes du même $Y$-poids $L'$, on dit que $h$ est homogène en $Y$-poids $L'$.*

**Remarques 2.4.1**
*1) Un monôme $\Xi$ admet deux poids $\mathcal{P}_Y(\Xi)$ et $\mathcal{P}_Z(\Xi)$. On peut ainsi décomposer un tel polynôme à plusieurs variables $Z = (z_1, ..., z_{n-1})$ avec $n \geq 3$ suivant son poids en $Z$ ou son poids en $Y = (\Im z_1, ..., \Im z_{n-1})$.*
*2) Si $\Xi = a_I\ y_1^{i_1}...y_{n-1}^{i_{n-1}}$ est un monôme en $Y$ avec $I = (i_1, ..., i_{n-1}) \in \mathbb{N}^{n-1}$ alors $\mathcal{P}_Y(\Xi) = \mathcal{P}_Z(\Xi)$.*

**Définition 2.4.2** *Soit $f \not\equiv 0$ une fonction $C^\omega$ dans un voisinage ouvert $\mathcal{V}$ de l'origine de $\mathbb{C}^{n-1}$. $f$ admet une décomposition à l'origine de la forme*

$$f(z_1, ..., z_{n-1}) = \sum_{\substack{I=(i_1,...,i_{n-1})\in\mathbb{N}^{n-1} \\ J=(j_1,...,j_{n-1})\in\mathbb{N}^{n-1}}} a_{I,J}\ z_1^{i_1}...z_{n-1}^{i_{n-1}}\overline{z}_1^{j_1}...\overline{z}_{n-1}^{j_{n-1}},$$

*et une décomposition en $Y = (y_1, ..., y_{n-1})$ de la forme*

$$f(z_1, ..., z_{n-1}) = \sum_{I=(i_1,...,i_{n-1})\in\mathbb{N}^{n-1}} a_I(x_1, ..., x_{n-1})\ y_1^{i_1}...y_{n-1}^{i_{n-1}}.$$

*On définit le $Z$-poids de $f$ comme étant le plus petit $Z$-poids d'un sommant non identiquement nul de $f$ dans sa décomposition à l'origine. De même, on définit le $Y$-poids de $f$ le poids qui correspond au plus petit $Y$-poids dans sa décomposition en $Y$. On note $f = O_{Y,Z}(\mathcal{P}_Y(f), \mathcal{P}_Z(f))$.*

**Exemple 2.4.1** *Soit $A$ le polynôme : $A(z_1, z_2) = (y_1^4 + y_2^{12})(|z_1|^2 + |z_2|^6)$. Alors, on a : $m_1 = 2$, $m_2 = 6$, $k_1 = 3$, $k_2 = 9$, $\kappa = \frac{3}{2}$, $M = 6$, $K = 9$, $\widetilde{m}_1 = 3$ et $\widetilde{m}_2 = 1$. Donc, le $Z$-poids de $A$ est $\mathcal{P}_Z(A) = 18 = 2K$ et le $Y$-poids de $A$ est $\mathcal{P}_Y(A) = 12 = 2M$. Donc $A = O_{Y,Z}(2M, 2K)$.*

**Lemme 2.4.1** *Soit $S, R \in \mathbb{N}$, $R \geq S$ et $F(X,Y) = \sum_{I,J} F_{I,J}\ Y^I X^J$ une fonction de classe $C^\omega$ dans un voisinage ouvert de l'origine de $\mathbb{C}^{n-1}$ tels que, pour tout multi-indices $I = (i_1, ..., i_{n-1})$, $J = (j_1, ..., j_{n-1})$ dans $\mathbb{N}^{n-1}$, $F_{I,J} = 0$ ou*

$$\begin{cases} \mathcal{P}_Y\left(F_{I,J}\ Y^I X^J\right) \geq S \\ \mathcal{P}_Z\left(F_{I,J}\ Y^I X^J\right) \geq R \geq S \end{cases}.$$

*Alors, il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $Z = X + i.Y$ assez proche de l'origine de $\mathbb{C}^{n-1}$, on ait : $|F(Z)| \leq C||Y||_*^S.||Z||_*^{R-S}$.*

**Preuve.**
La série $\sum_{I,J} F_{I,J}\ Y^I X^J$ est une série absolument convergente dans un voisinage ouvert $\mathcal{V}$ suffisamment petit de l'origine. Alors, il existe $0 < \varepsilon < 1$ tel qu'on ait :

$$\sum_{\substack{I,J \\ |I|+|J|>R}} |F_{I,J}|\ \varepsilon^{|I|+|J|} < \infty.$$

On considère le monôme $Y^I X^J$ tel que : $\begin{cases} \widetilde{S} = \sum_{\nu=1}^{n-1} \widetilde{m}_\nu i_\nu \geq S \\ \widetilde{R} = \sum_{\nu=1}^{n-1} \widetilde{m}_\nu (i_\nu + j_\nu) \geq R \end{cases}$.
Pour tout $1 \leq \nu \leq n-1$, on pose $|y_\nu| = \eta_\nu^{\widetilde{m}_\nu}$, $|x_\nu| = \tau_\nu^{\widetilde{m}_\nu}$, $\eta = |(\eta_1, ..., \eta_{n-1})|$ et $\tau = |(\tau_1, ..., \tau_{n-1})|$. Alors, on a :

$$\left|Y^I X^J\right| \leq \eta^{\widetilde{S}}\ \tau^{\widetilde{R}-\widetilde{S}} \leq \eta^{\widetilde{S}}\ \|(\eta,\tau)\|^{\widetilde{R}-\widetilde{S}}, \qquad \text{où } \|(\eta,\tau)\| = (\eta^2\ +\ \tau^2)^{1/2}.$$

Ainsi, on obtient : $\left|Y^I X^J\right| \leq \eta^S\ \|(\eta,\tau)\|^{R-S}\ \|(\eta,\tau)\|^{\widetilde{R}-R}$. Ceci implique

$$\begin{aligned} |F(X,Y)| &\leq \sum_{I,J} |F_{I,J}|\ \left|Y^I X^J\right| \\ &\leq \eta^S\ \|(\eta,\tau)\|^{R-S} \left(\sum_{I,J} |F_{I,J}|\ \|(\eta,\tau)\|^{\widetilde{R}-R}\right). \end{aligned}$$

Maintenant, calculons le terme $\eta^S \ \|(\eta,\tau)\|^{R-S}$.
Or $\eta^2 = \sum_{\nu=1}^{n-1} \eta_\nu^2 = \sum_{\nu=1}^{n-1} |y_\nu|^{\frac{2}{\widetilde{m}_\nu}} = \sum_{\nu=1}^{n-1} |y_\nu|^{\frac{2m_\nu}{M}}$. D'après la remarque 2.3.1, il existe une constante uniforme $c_1 > 0$ telle qu'on ait :

$$\sum_{\nu=1}^{n-1} |y_\nu|^{\frac{2m_\nu}{M}} \leq c_1 \ \left( \sum_{\nu=1}^{n-1} |y_\nu|^{2m_\nu} \right)^{\frac{1}{M}}.$$

De même, on a

$$\begin{aligned} \|(\eta,\tau)\|^2 &= \sum_{\nu=1}^{n-1} \left( |x_\nu|^{\frac{2m_\nu}{M}} + |y_\nu|^{\frac{2m_\nu}{M}} \right) \\ &\leq 2\,(n-1) \sum_{\nu=1}^{n-1} |z_\nu|^{\frac{2m_\nu}{M}} \\ &\leq 2\,(n-1)\ c_2 \left( \sum_{\nu=1}^{n-1} |z_\nu|^{2m_\nu} \right)^{\frac{1}{M}}, \end{aligned}$$

où $c_2$ est une constante uniforme positive. Finalement, on obtient :

$$\eta^S \ \|(\eta,\tau)\|^{R-S} \leq C_1^S \left( \sum_{\nu=1}^{n-1} |y_\nu|^{2m_\nu} \right)^{\frac{S}{2M}} . \left( \sum_{\nu=1}^{n-1} |z_\nu|^{2m_\nu} \right)^{\frac{R-S}{2M}},$$

où $C_1^S = \ c_1^{S/2}.\left(c_2\sqrt{2\,(n-1)}\right)^{(R-S)/2} > 0.$
Avec un calcul analogue pour le terme $\|(\eta,\tau)\|^{\widetilde{R}-R}$, on prouve qu'il existe une constante uniforme $C_2 = \ c_1^{1/2}.\left(\sqrt{2\,(n-1)}\right)^{1/2} > 0$ telle que, pour tout $Z \in \mathcal{V}$, on ait :

$$\|(\eta,\tau)\|^{\widetilde{R}-R} \leq C_2^{\widetilde{R}-R} \left( \sum_{\nu=1}^{n-1} |z_\nu|^{2m_\nu} \right)^{\frac{\widetilde{R}-R}{2M}}.$$

Maintenant, il reste à prouver que : pour tout $Z \in \mathcal{V}$,

$$\sum_{\substack{I,J \\ |I|+|J|>2R}} |F_{I,J}| \left[ C_2 \left( \sum_{\nu=1}^{n-1} |z_\nu|^{2m_\nu} \right)^{\frac{1}{2M}} \right]^{\widetilde{R}-R} < \infty.$$

Donc, il suffit de montrer que : pour tout $|I|+|J|>2R$,

$$\chi_{\widetilde{R}} := C_2^{\widetilde{R}-R}\left(\sum_{\nu=1}^{n-1}|z_\nu|^{2m_\nu}\right)^{\frac{\widetilde{R}-R}{2M}} < \varepsilon^{|I|+|J|}, \qquad \forall Z\in\mathcal{V}.$$

Soit $Z_0=(z_{0,1},...,z_{0,n-1})\in\mathbb{C}^{n-1}$ tel que $\sum_{\nu=1}^{n-1}|z_{0,\nu}|^{2m_\nu}=1$.
Pour $1\leq\nu\leq n-1$, on pose $z_\nu=\lambda^{\widetilde{m}_\nu}z_{0,\nu}$ avec $0<\lambda<1$. On obtient :

$$\chi_{\widetilde{R}} \leq C_2^{\widetilde{R}-R}\left(\sum_{\nu=1}^{n-1}\lambda^{2m_\nu\widetilde{m}_\nu}\ |z_{0,\nu}|^{2m_\nu}\right)^{\frac{\widetilde{R}-R}{2M}} \leq C_2^{\widetilde{R}-R}\lambda^{\widetilde{R}-R}.$$

Soit $\varepsilon$ tel que $C_2\lambda<\varepsilon^2<1$. Alors, on a :

$$\begin{aligned}(C_2\lambda)^{\widetilde{R}-R} &= (C_2\lambda)^{\left(\sum_{\nu=1}^{n-1}\widetilde{m}_\nu(i_\nu+j_\nu)\ -R\right)}\\ &\leq (C_2\lambda)^{|I|+|J|-R}\\ &< \varepsilon^{2(|I|+|J|)-2R}<\varepsilon^{|I|+|J|}.\end{aligned}$$

On remarque que lorsque $\lambda<\frac{\varepsilon^2}{C_2}$ alors le point $Z$ varie dans un voisinage ouvert de l'origine et vice-versa. □

**Lemme 2.4.2** *Sous les hypothèses du lemme 2.4.1, on suppose que $S\geq M$ et $R\geq K=\kappa M$. Alors, $\frac{|F|^2}{A}$ est uniformément borné sur un voisinage suffisamment petit de l'origine de $\mathbb{C}^{n-1}$.*

**Preuve.**
Soit $Z=X+i.Y\in\mathcal{V}$. Comme $A$ vérifie l'inégalité $(\mathcal{H})$ alors il existe une constante $c>0$ telle qu'on ait :

$$A(Z)\geq c||Y||_*^{2M}\ ||Z||_*^{2K-2M}.$$

D'après la remarque 2.3.1 et le lemme 2.4.1, il existe une constante $C>0$ telle qu'on ait :

$$\begin{aligned}\frac{|F|^2}{A} &\leq \frac{C.||Y||_*^{2S}.||Z||_*^{2R-2S}}{c.||Y||_*^{2M}.||Z||_*^{2K-2M}}\\ &\leq \frac{C.||Y||_*^{2S-2M}.||Z||_*^{2R-2S}}{c.||Z||_*^{2K-2M}}\\ &\leq C_1.||Z||_*^{2R-2K},\end{aligned}$$

où $C_1$ une constante uniforme $> 0$. Or, par hypothèse $R \geq K$. Donc, $\frac{|F|^2}{A}$ est uniformément borné. □

**Lemme 2.4.3** *Soient $X = (x_1, ..., x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ fixé et $P_X \in \mathbb{R}[y_1, ..., y_{n-1}]$ un polynôme, homogène en Y-poids $L$. Alors, on a :*

*1)* $\sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{\partial P_X}{\partial y_\nu}(y_1, ..., y_{n-1})\, \widetilde{m}_\nu\ y_\nu = L\ P_X(y_1, ..., y_{n-1})$.

*2)* $\sum_{1 \leq \nu, \mu \leq n-1} \frac{\partial^2 P_X}{\partial y_\nu \partial y_\mu}(y_1, ..., y_{n-1})\, \widetilde{m}_\nu \widetilde{m}_\mu y_\nu y_\mu + \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{\partial P_X}{\partial y_\nu}(y_1, ..., y_{n-1})\ \widetilde{m}_\nu^2 y_\nu = L^2\ P_X(y_1, ..., y_{n-1})$.

**Preuve.**
Pour $1 \leq \nu \leq n-1$, on pose $y_\nu = \widetilde{y}_\nu^{\widetilde{m}_\nu}$. On considère maintenant le polynôme $Q_X$ défini par : $Q_X(\widetilde{y}_1, ..., \widetilde{y}_{n-1}) = P_X\left(\widetilde{y}_1^{\widetilde{m}_1}, ..., \widetilde{y}_{n-1}^{\widetilde{m}_{n-1}}\right)$. $Q_X$ est un polynôme homogène en $\widetilde{Y} = (\widetilde{y}_1, ..., \widetilde{y}_{n-1})$, au sens classique, de degré $L$.

1) En écrivant l'équation d'Euler pour $Q_X$, on obtient :

$$\sum_{\nu=1}^{n-1} \widetilde{y}_\nu\ \frac{\partial Q_X}{\partial \widetilde{y}_\nu} = LQ_X.$$

Ceci est équivalent à : $\sum_{\nu=1}^{n-1} \widetilde{y}_\nu\ \frac{\partial P_X}{\partial y_\nu}\ \frac{\partial y_\nu}{\partial \widetilde{y}_\nu} = \sum_{\nu=1}^{n-1} \widetilde{m}_\nu\ y_\nu\ \frac{\partial P_X}{\partial y_\nu} = LP_X$.

2) De même, on a :

$$\sum_{1 \leq \nu, \mu \leq n-1} \frac{\partial^2 Q_X}{\partial \widetilde{y}_\nu \partial \widetilde{y}_\mu} \widetilde{y}_\nu \widetilde{y}_\mu = L(L-1) Q_X.$$

Or,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 Q_X}{\partial \widetilde{y}_\nu \partial \widetilde{y}_\mu} &= \frac{\partial}{\partial \widetilde{y}_\nu}\left(\frac{\partial Q_X}{\partial y_\mu}\frac{\partial y_\mu}{\partial \widetilde{y}_\mu}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial \widetilde{y}_\nu}\left(\widetilde{m}_\mu \widetilde{y}_\mu^{\widetilde{m}_\mu - 1}\frac{\partial Q_X}{\partial y_\mu}\right) \\
&= \delta_{\nu,\mu}\widetilde{m}_\mu(\widetilde{m}_\mu - 1)\,\widetilde{y}_\mu^{\widetilde{m}_\mu - 2}\frac{\partial Q_X}{\partial y_\mu} + \frac{\partial^2 Q_X}{\partial y_\nu \partial y_\mu}\widetilde{m}_\nu \widetilde{y}_\nu^{\widetilde{m}_\nu - 1}\widetilde{m}_\mu \widetilde{y}_\mu^{\widetilde{m}_\mu - 1}
\end{aligned}$$

avec $\delta_{\nu,\mu} = \begin{cases} 1 \text{ si } \nu = \mu \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$. Donc, on obtient :

$$\sum_{1\leq\nu,\mu\leq n-1} \frac{\partial^2 Q_X}{\partial\widetilde{y}_\nu \partial\widetilde{y}_\mu}\widetilde{y}_\nu\widetilde{y}_\mu = \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{\partial P_X}{\partial y_\nu}\widetilde{m}_\nu(\widetilde{m}_\nu - 1)y_\nu + \sum_{1\leq\nu,\mu\leq n-1} \frac{\partial^2 P_X}{\partial y_\nu \partial y_\mu}\widetilde{m}_\nu\widetilde{m}_\mu y_\nu y_\mu.$$

En tenant compte de 1), on trouve l'expression voulue. □

**Lemme 2.4.4** *Si $P_X \not\equiv 0$ est un polynôme dans $\mathbb{R}[y_1, ..., y_{n-1}]$, homogène en Y-poids $\mathcal{P}_Y(P_X) = L$ dont tous les sommants de $P_X$ soient de degré $\geq 2$ alors,*

$$S_Y(P_X)(y_1, ..., y_{n-1}) := \sum_{1\leq\nu,\mu\leq n-1} \frac{\partial^2 P_X}{\partial y_\nu \partial y_\mu}(y_1, ..., y_{n-1})\,\widetilde{m}_\nu\widetilde{m}_\mu\ y_\nu y_\mu \text{ est non}$$

*identiquement nul.*

**Preuve.**
Soit $P_X$ un polynôme dépendant exactement de $(n-r-1)$ variables où $0 \leq r \leq n-2$. Moyennant une permutation de variables, on peut supposer que $P_X \in \mathbb{R}[y_{r+1}, ..., y_{n-1}]$.
Supposons que $S_Y(P_X)$ est identiquement nul. D'après le lemme 2.4.3, on a

$$\sum_{\nu=r+1}^{n-1} \frac{\partial P_X}{\partial y_\nu}\widetilde{m}_\nu^2\ y_\nu = L^2\ P_X.$$

Or, on a $\sum_{\nu=r+1}^{n-1} \frac{\partial P_X}{\partial y_\nu}\widetilde{m}_\nu\ y_\nu = LP_X$. Alors, on obtient, pour tout $(y_{r+1}, ..., y_{n-1})$,

$$\sum_{\nu=r+1}^{n-1} \widetilde{m}_\nu(L - \widetilde{m}_\nu)\frac{\partial P_X}{\partial y_\nu}(y_1, ..., y_{n-1})\ y_\nu = 0. \tag{2.7}$$

Pour $r+1 \leq \nu \leq n-1$, on pose $\tau_\nu = \widetilde{m}_\nu(L - \widetilde{m}_\nu)$. On a $\tau_\nu > 0$.
En effet, soit $\tau_\mu = 0$ pour un $\mu$ avec $r+1 \leq \mu \leq n-1$.
Notons $P_X(y_{r+1}, ..., y_{n-1}) = \sum_{I=(i_{r+1},...,i_{n-1})} a_I(X)\ y_{r+1}^{i_{r+1}} ... y_{n-1}^{i_{n-1}}$. Pour tout sommant de $P_X$, on a : $\widetilde{m}_\nu = L = \sum_{\nu=r+1}^{n-1} \widetilde{m}_\nu\ i_\nu$. Alors, deux cas sont possibles pour ce sommant :

- $i_\mu = 1$ et $i_\nu = 0$ pour tout $\nu \neq \mu$.
- $i_\mu = 0$.

Or, le premier cas est impossible d'après l'hypothèse faite sur le degré. Donc, $i_\mu = 0$ pour ce sommant. Mais, ce cas est aussi impossible d'après le choix des variables.
Considérons maintenant, le produit scalaire $< | >_\tau$ défini sur $\mathbb{R}^{n-r-1}$ par :

$$\forall a = (a_{r+1}, ..., a_{n-1}), \forall b = (b_{r+1}, ..., b_{n-1}), \quad < a|b >_\tau = \sum_{\nu=r+1}^{n-1} \tau_\nu \; a_\nu b_\nu.$$

L'équation (2.7) est équivalente à $< \nabla (P_X) | Y >_\tau = 0$, $\forall Y \in \mathbb{R}^{n-r-1}$ où $\nabla (P_X)$ désigne le gradient de $P_X$. Donc $P_X$ est identiquement nul.
En effet, soit $Y \in \mathbb{R}^{n-r-1} \neq 0$ fixé. On considère la fonction $f(\lambda) = P_X(\lambda^{\tau_{r+1}} \; y_{r+1}, ..., \lambda^{\tau_{n-1}} \; y_{n-1})$, $\lambda > 0$. $f$ est dérivable sur $]0, +\infty[$. On a, pour tout $\lambda > 0$,

$$f'(\lambda) = \sum_{j=r+1}^{n-1} \frac{\partial P_X}{\partial y_j} \; (\lambda^{\tau_{r+1}} \; y_{r+1}, ..., \lambda^{\tau_{n-1}} \; y_{n-1}) \; \tau_j \lambda^{\tau_j - 1} y_j.$$

Pour $1 + r \leq j \leq n - 1$, on pose $w_j = \lambda^{\tau_j} \; y_j$. On obtient

$$f'(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \sum_{j=r+1}^{n-1} \tau_j w_j \; \frac{\partial P_X}{\partial y_j} \; (w_{r+1}, ..., w_{n-1}) = \frac{1}{\lambda} < \nabla P_X | w >_\tau = 0,$$

où $w = (w_{r+1}, ..., w_{n-1})$. Donc, $f$ est constante.
Comme $f(1) = P_X(y_{r+1}, ..., y_{n-1}) = \lim_{\lambda \to 0} f(\lambda) = P_X(0) = 0$ alors $P_X$ est identiquement nul. D'où la contradiction. □

## 2.5 Démonstration du théorème.

La preuve du théorème 2.2.1 se fait en trois étapes. Elle est basée sur le lemme 2.3.1 et la proposition 2.3.1. La première étape consiste à calculer la forme de Lévi dans une direction complexe tangente particulière. Dans la deuxième étape, nous effectuons une "analyse à poids" de cette dernière en utilisant les résultats des lemmes 2.4.3 et 2.4.4. Dans la dernière étape, nous concluons que la sous variété $\mathbf{M}$ est un ensemble localement pic pour la classe $\mathcal{O}$.

*Étape 1 :*
Dans cette étape, on va étudier la forme de Lévi du domaine $D$ admettant une fonction définissante de la forme $\rho = u + A + vB + v^2R$ où $A$, $B$ et $R$ sont des fonctions $C^\omega$ dans un voisinage de l'origine. Avant de calculer la forme de Lévi, on donne quelques notations :
On note pour $1 \leq j \leq n-1$,

$$\partial_j = \frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i\frac{\partial}{\partial y_j}\right), \quad \partial_w = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial u} - i\frac{\partial}{\partial v}\right),$$
$$\partial_{\bar{j}} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i\frac{\partial}{\partial y_j}\right) \quad \text{et } \partial_{\overline{w}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial u} + i\frac{\partial}{\partial v}\right).$$

Le fibré tangent complexe $T^{\mathbb{C}}(bD)$ est donné par :

$$T^{\mathbb{C}}(bD) = \left\{ t = (t_1, ..., t_n) \in \mathbb{C}^n \ / \ \sum_{\nu=1}^{n-1} t_\nu \ \partial_\nu \rho \ + \ t_n \partial_w \rho \ = 0 \right\}.$$

Comme le domaine $D$ est pseudoconvexe, alors pour tout $t \in T^{\mathbb{C}}(bD)$, on a :

$$\mathcal{L}\acute{e}v \ \rho[t] = \sum_{1 \leq \nu, \mu \leq n-1} \partial^2_{\nu\overline{\mu}} \rho \ t_\nu \bar{t}_\mu + 2\Re\left(\sum_{\nu=1}^{n-1} \partial^2_{\nu\overline{w}} \rho \ t_\nu \bar{t}_n\right) + \partial^2_{w\overline{w}} \rho \ |t_n|^2 \geq 0. \quad (2.8)$$

Soit $\eta = \frac{1}{2}(i \ + \ B \ + \ 2v \ R \ + \ v^2 \partial_v R)$. On a $|\eta - \frac{i}{2}| < \frac{1}{2}$ dans un voisinage suffisamment petit de l'origine.
Pour $1 \leq \nu \leq n-1$, on pose $\chi_\nu = i\left[\frac{\partial}{\partial z_\nu} \ - \ i\frac{\partial_\nu \rho}{\eta}\frac{\partial}{\partial w}\right] = \left(0, ..., i, 0, ..., \frac{\partial_\nu \rho}{\eta}\right)$.
Les $\{\chi_\nu\}_{1 \leq \nu \leq n-1}$ engendrent donc le fibré tangent complexe $T^{\mathbb{C}}(bD)$ sur $\mathbb{C}$.
Le développement de Taylor limité de $R$ en 0 par rapport à la variable $v$ est :

$$R(z_1, ..., z_{n-1}, v) = R_0(z_1, ..., z_{n-1}) + v.\ R_1(z_1, ..., z_{n-1}) + v^2.\ R_2(z_1, ..., z_{n-1}, v),$$

où $R_0 = R(z_1, ..., z_{n-1}, 0)$, $R_1 = \frac{dR}{dv}(z_1, ..., z_{n-1}, v) \Big|_{v=0}$.
De même, le développement de Taylor limité de $1/\eta$ en 0 par rapport à $v$ est :

$$\frac{1}{\eta}(z_1, ..., z_{n-1}, v) = \eta_0(z_1, ..., z_{n-1}) + v.\ \eta_1(z_1, ..., z_{n-1}) + v^2.\ \eta_2(z_1, ..., z_{n-1}, v),$$

où $\eta_0(z_1, ..., z_{n-1}) = \frac{1}{\eta(z_1, ..., z_{n-1}, 0)}$, $\eta_1(z_1, ..., z_{n-1}) = \frac{d\left(\frac{1}{\eta(z_1, ..., z_{n-1}, v)}\right)}{dv} \Big|_{v=0}$.
On a $\eta_0(0, ..., 0) = \ -2i$.

On pose $t = \sum_{\nu=1}^{n-1} \widetilde{m}_\nu y_\nu \, \chi_\nu$. Donc, $t = \left( i\widetilde{m}_1 y_1, ..., i\widetilde{m}_{n-1} y_{n-1}, \frac{1}{\eta} \sum_{\nu=1}^{n-1} \widetilde{m}_\nu y_\nu \, \partial_\nu \rho \right) \in T^{\mathbb{C}}(bD)$. Calculons le développement limité de la forme de Lévi pour ce $t$.

$$\sum_{1 \leq \nu, \mu \leq n-1} \partial^2_{\nu\overline{\mu}} \rho \; t_\nu \bar{t}_\mu = \; (I_1) \; + \; v \; (I_2) \; + \; v^2 \; (I_3), \quad \text{avec}$$

$$(I_1) \; = \sum_{1 \leq \nu, \mu \leq n-1} \partial^2_{\nu\overline{\mu}} A \; \widetilde{m}_\nu \widetilde{m}_\mu y_\nu y_\mu \text{ et } (I_2) \; = \sum_{1 \leq \nu, \mu \leq n-1} \partial^2_{\nu\overline{\mu}} B \; \widetilde{m}_\nu \widetilde{m}_\mu y_\nu y_\mu.$$

$$2\Re \left( \sum_{\nu=1}^{n-1} \partial^2_{\nu\overline{w}} \rho \; t_\nu \bar{t}_n \right) = \; -\Re \left[ (L_1) \; + \; v \; (L_2) \; + \; v^2 \; (L_3) \right], \quad \text{avec}$$

$$(L_1) \; = \left( \sum_{\nu=1}^{n-1} \overline{\eta}_0 \partial_\nu B \; \widetilde{m}_\nu y_\nu \right) . \left( \sum_{\mu=1}^{n-1} \partial_{\overline{\mu}} A \; \widetilde{m}_\mu y_\mu \right) \text{ et}$$

$$(L_2) = \left( \sum_{\nu=1}^{n-1} \overline{\eta}_0 \partial_\nu B \; \widetilde{m}_\nu y_\nu \right) . \left( \sum_{\mu=1}^{n-1} \partial_{\overline{\mu}} B \; \widetilde{m}_\mu y_\mu \right) + \left( \sum_{\nu=1}^{n-1} \overline{\eta}_1 \; \partial_\nu B \; \widetilde{m}_\nu y_\nu \right) .$$
$$\left( \sum_{\mu=1}^{n-1} \partial_{\overline{\mu}} A \; \widetilde{m}_\mu y_\mu \right) + 2 \left( \sum_{\nu=1}^{n-1} \overline{\eta}_0 \; \partial_\nu R_0 \; \widetilde{m}_\nu y_\nu \right) . \left( \sum_{\mu=1}^{n-1} \partial_{\overline{\mu}} A \; \widetilde{m}_\mu y_\mu \right).$$

$$\partial^2_{w\overline{w}} \rho \; |t_n|^2 \; = \; \tfrac{1}{2} \left[ (K_1) \; + \; v \; (K_2) \; + \; v^2 \; (K_3) \right], \quad \text{avec}$$

$$(K_1) = R_0 \left| \eta_0 \sum_{\nu=1}^{n-1} \partial_\nu A \; \widetilde{m}_\nu y_\nu \right|^2 \text{ et } (K_2) = 3R_1 \left| \eta_0 \sum_{\nu=1}^{n-1} \partial_\nu A \; \widetilde{m}_\nu y_\nu \right|^2 +$$
$$2\Re \left\{ \left( \eta_1 \sum_{\mu=1}^{n-1} \partial_\mu A \; \widetilde{m}_\mu y_\mu \; + \; \eta_0 \sum_{\mu=1}^{n-1} \partial_\mu B \; \widetilde{m}_\mu y_\mu \right) . \left( \sum_{\nu=1}^{n-1} \overline{\eta}_0 \; \partial_{\overline{\nu}} A \; \widetilde{m}_\nu y_\nu \right) \right\}.$$

Ainsi, l'inégalité (2.8) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\mathcal{L}\acute{e}v \; \rho \, [t] = \mathcal{A}(Z) + \; v\mathcal{B}(Z) + \; v^2 \mathcal{R}(Z, v) \geq 0, \qquad \text{avec}$$

$\mathcal{A} = \; (I_1) \; - \; \Re(L_1) \; + \; \frac{1}{2}(K_1)$ et $\mathcal{B} = \; (I_2) \; - \; \Re(L_2) \; + \; \frac{1}{2}(K_2)$.

Ici $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ ne dépendent que de la variable $Z$ qui caractérise la complexifiée $\widetilde{\mathbf{M}}$ de la sous variété $\mathbf{M}$.

*Étape 2 :*

Dans cette étape, on cherche à connaître les restrictions imposées sur les fonctions $A$ et $B$ par la pseudoconvexité du bord $bD$. Grâce à la pseudoconvexité du bord $bD$, on a le fait suivant :

Dans un voisinage $\mathcal{V}$ ouvert suffisamment petit de l'origine dans $\mathbb{C}^{n-1}$, d'après la proposition 2.3.1, il existe une constante $T^* > 0$ telle que, pour tout $Z \in \mathcal{V}$, on ait :

$$\mathcal{B}^2 \leq T^* \mathcal{A}. \qquad (E)$$

Plus précisément, on n'a utilisé que $\mathcal{L}\acute{e}v\ \rho[t] \geq 0$ pour notre choix de $t$.
Le théorème est banal si $B$ est identiquement nul. Soit $B \not\equiv 0$. Donc, il existe $2 \leq S \leq R < \infty$ tels que pour tout sommant de $B$ a un $Y$-poids $S$ et un $Z$-poids $R$. D'après le lemme 2.3.1, tout sommant de la fonction $R$ a un $Y$-poids $\geq 2$ et grâce à la propriété $(\mathcal{H})$, $A$ admet un $Y$-poids égal à $2M \geq 2$ et un $Z$-poids égal à $2K$. C'est-à-dire, $A = O_{Y,Z}(2M, 2K)$. Avec ces notations, les expressions $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deviennent :

• En $Y = (y_1, ..., y_{n-1})$, on a :

$\mathcal{A} = \sum_{1 \leq \nu,\mu \leq n-1} \partial^2_{\nu\overline{\mu}} A\ \widetilde{m}_\nu \widetilde{m}_\mu\ y_\nu y_\mu + O_Y(2M+S) + O_Y(4M+2)$ et

$\mathcal{B} = \sum_{1 \leq \nu,\mu \leq n-1} \partial^2_{\nu\overline{\mu}} B\ \widetilde{m}_\nu \widetilde{m}_\mu\ y_\nu y_\mu + O_Y(2S) + O_Y(4M+2) + O_Y(2M+S+2) +$
$O_Y(2S+2)$.

• À l'origine, on a :

$\mathcal{A} = \sum_{1 \leq \nu,\mu \leq n-1} \partial^2_{\nu\overline{\mu}} A\ \widetilde{m}_\nu \widetilde{m}_\mu\ y_\nu y_\mu\ +\ O_Z(2K+R)\ +\ O_Z(4K+2)$ et

$\mathcal{B} = \sum_{1 \leq \nu,\mu \leq n-1} \partial^2_{\nu\overline{\mu}} B\ \widetilde{m}_\nu \widetilde{m}_\mu\ y_\nu y_\mu + O_Z(2R) + O_Z(2K+2) + O_Z(2K+2R) +$
$O_Z(4K+2)$.

Comme $A = A_{2M} + \widetilde{A}$ avec $\mathcal{P}_Y(A_{2M}) = 2M$ et que tout sommant de $\widetilde{A}$ a un $Y$-poids $> 2M$, alors on a :

$$\sum_{1 \leq \nu,\mu \leq n-1} \partial^2_{\nu\overline{\mu}} A\ \widetilde{m}_\nu \widetilde{m}_\mu\ y_\nu y_\mu\ = \sum_{1 \leq \nu,\mu \leq n-1} \partial^2_{\nu\overline{\mu}} \left(A_{2M} + \widetilde{A}\right)\ \widetilde{m}_\nu \widetilde{m}_\mu\ y_\nu y_\mu.$$

On pose $\mathcal{A}_{2M} := \sum_{1 \leq \nu,\mu \leq n-1} \partial^2_{\nu\overline{\mu}} A_{2M}\ \widetilde{m}_\nu \widetilde{m}_\mu\ y_\nu y_\mu$.

D'après le lemme 2.4.4, $\mathcal{A}_{2M} \not\equiv 0$ et que $\mathcal{P}_Y(\mathcal{A}_{2M}) = 2M$. De même, on a $B = B_S + \widetilde{B_S}$ où tout sommant de $\widetilde{B_S}$ a un $Y$-poids $> S$. On pose

$$\mathcal{B}_S := \sum_{1 \leq \nu,\mu \leq n-1} \partial^2_{\nu\overline{\mu}} B_S\ \widetilde{m}_\nu \widetilde{m}_\mu\ y_\nu y_\mu.$$

On a $\mathcal{B}_S \not\equiv 0$ et $\mathcal{P}_Y(\mathcal{B}_S) = S$.
D'après le lemme 2.4.3, l'inégalité $(E)$ devient :

$$(\mathcal{B}_S + O_Y(S+1))^2 \leq T^* (\mathcal{A}_{2M} + O_Y(2M+1)). \tag{2.9}$$

Supposons que $S < M$.
Comme $\mathcal{B}_S \not\equiv 0$ alors il existe $Z_0 = X_0 + i.Y_0$ où $Y_0 \neq 0$ tel qu'on ait $\mathcal{B}_S(Z_0) \neq 0$. Or, $\mathcal{B}_S$ est homogène à $Y$-poids $S$. On considère l'application

$$\phi_{Y_0} : \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n-1} \\ \lambda & \longmapsto & \phi_{Y_0}(\lambda) = \left(\lambda^{\widetilde{m}_1} y_{0,1}, ..., \lambda^{\widetilde{m}_{n-1}} y_{0,n-1}\right) \end{cases}$$

de sorte que $\mathcal{B}_S(X_0 + i.\phi_{Y_0}(\lambda))$ soit un polynôme homogène en $\lambda$ de degré $S$ (c'est-à-dire, $\mathcal{B}_S(X_0 + i.\phi_{Y_0}(\lambda)) = \lambda^S \mathcal{B}_S(X_0 + i.Y_0)$). Donc, on a $\lim_{\lambda \to 0^+} \frac{1}{\lambda^S} \mathcal{B}_S(X_0 + i.\phi_{Y_0}(\lambda)) \neq 0$. On pose maintenant $Z = X_0 + i.\phi_{Y_0}(\lambda)$ dans l'inégalité (2.9) et on divise par $\lambda^{2S}$. On obtient $\mathcal{B}_S^2(X_0 + i.Y_0) \leq 0$ quand $\lambda$ tend vers $0^+$. D'où la contradiction. Donc, on a : $S \geq M$.

Supposons que $R < K$.
Avec les notations précédentes, on a $A = O_Z(2K)$, $B = O_Z(R)$ et $R = O_Z(2)$. Si $B \not\equiv 0$ alors $B$ s'écrit $B = B_R + \widetilde{B}$ avec $B_R$ un polynôme à $Z$-poids $R$ et $\widetilde{B} = O_Z(R+1)$. De même, $A = A_{2K} + \widetilde{A}$ avec $A_{2K}$ un polynôme à $Z$-poids $2K$ et $\widetilde{A} = O_Z(2K+1)$.
L'inégalité $(E)$ devient :

$$\left( \sum_{1 \leq \nu, \mu \leq n-1} \partial^2_{\nu\overline{\mu}} B_R \widetilde{m}_\nu \widetilde{m}_\mu \; y_\nu y_\mu + O_Z(R+1) + O_Z(2R) + O_Z(2K+2) \right)^2$$
$$\leq T^* \left( \sum_{1 \leq \nu, \mu \leq n-1} \partial^2_{\nu\overline{\mu}} A_{2K} \widetilde{m}_\nu \widetilde{m}_\mu \; y_\nu y_\mu + O_Z(2K+1) + O_Z(4K+2) \right) \tag{2.10}$$

D'après le lemme 2.4.4, $S_{B_R}(X,Y) := \sum_{1 \leq \nu, \mu \leq n-1} \frac{\partial^2 B_R}{\partial y_\nu \partial y_\mu} \; \widetilde{m}_\nu \widetilde{m}_\mu \; y_\nu y_\nu$ est non identiquement nul. Dans ce cas, il existe $Z_0 = (z_{0,1}, ..., z_{0,n-1})$ tel qu'on ait $S_{B_R}(Z_0) \neq 0$. On applique l'inégalité (2.10) pour $Z = \phi_{Z_0}(\lambda)$ où $\phi_{Z_0}(\lambda) = (\lambda^{\widetilde{m}_1} z_{0,1}, ..., \lambda^{\widetilde{m}_{n-1}} z_{0,n-1})$. En tenant compte de l'homogeneïté de $S_{B_R}$(c'est-à-dire, $S_{B_R}(\phi_{Z_0}(\lambda)) = \lambda^R S_{B_R}(Z_0)$), on divise (2.10) par $\lambda^{2R}$. On obtient : $S_{B_R}(Z_0)^2 \leq 0$ quand $\lambda$ tend vers $0^+$. D'où la contradiction. Donc, on a : $R \geq K$.

*Étape 3 :*
L'étape 2 et le lemme 2.4.2 nous permettent de prouver que $\frac{B^2}{A}$ est uniformément borné dans un voisinage ouvert suffisamment petit de l'origine de $\mathbb{C}^{n-1}$. Maintenant, la proposition 2.3.1 achève la preuve du théorème. $\square$

**Exemple 2.5.1** *Considérons dans $\mathbb{C}^3$, le domaine $D$ défini dans un voisinage $\mathcal{U}$ de l'origine par : $\rho(z_1,z_2,w) = u+A(z_1,z_2)+vB(z_1,z_2)+v^2R(z_1) < 0$ avec*

$$\begin{aligned} A(z_1,z_2) &= y_1^4+y_2^4+\left(y_1^2+y_2^2\right)\left(x_1^2+x_2^2\right), \\ B(z_1,z_2) &= y_1^2|z_2|^2, \\ R(z_1) &= y_1^4, \end{aligned}$$

*$z_1 = x_1+iy_1$, $z_2 = x_2+iy_2$ et $w = u+iv$.*

• *$D$ est un domaine localement pseudoconvexe au voisinage de l'origine et à bord $bD$ de classe $C^\omega$ . En effet, soit $p \in bD$ et $t = (t_1,t_2,t_3) \in T_p^{\mathbb{C}}(bD)\setminus\{0\}$. On pose $t' = (t_1,t_2)$, $z' = (z_1,z_2)$, $z = (z_1,z_2,z_3) = (z_1,z_2,w)$. Comme*

$$4\frac{\partial^2 A}{\partial z_1\partial\overline{z}_1} = 2|z'|^2+12y_1^2 \quad et \quad 4\frac{\partial^2 A}{\partial z_1\partial\overline{z}_2} = 4i(x_1y_2-x_2y_1),$$

*alors*

$$\begin{aligned} 4\mathcal{L}\acute{e}v\ A(p)[t'] &= (2|z'|^2+12y_1^2)|t_1|^2+(2|z'|^2+12y_2^2)|t_2|^2 \\ &+ 4i(x_1y_2-x_2y_1)(t_1\bar{t}_2-t_2\bar{t}_1) \\ &\geq 12(y_1^2|t_1|^2+y_2^2|t_2|^2). \end{aligned}$$

*Donc, $\mathcal{L}\acute{e}v\ A(p)[t'] \geq 0$. Soit $\mathcal{L}\acute{e}vA(p)[t'] = 0$ et $|t'| = 1$. Si $t_1t_2 = 0$ alors $z' = 0$. Si $t_1t_2 \neq 0$ alors on a $y_1 = y_2 = 0$, et du coup, également $z' = 0$. Comme les coefficients de $\mathcal{L}\acute{e}v\ A(p)[t']$ sont homogènes, il existe une constante $c > 0$ telle qu'on ait*

$$\mathcal{L}\acute{e}v\ A(p)[t'] \geq c|z'|^2|t'|^2.$$

*Or, en général, pour $t \in T_p^{\mathbb{C}}(bD)$, on a $|t_3| \leq cte.\ (|t_1|+|t_2|)$. Comme $|\frac{\partial^2\left(vB+v^2R\right)}{\partial z_i\partial\overline{z}_j}| \leq cte.\ |z'|^2|z|$ pour tout $i$ et $j$, le terme de $\mathcal{L}\acute{e}v\ A(p)[t']$ absorbe tous les autres termes de la forme de Lévi totale $\mathcal{L}\acute{e}v\ \rho(p)[t]$ si $|z|$ est suffisamment petit. D'où $bD$ est pseudoconvexe au voisinage de l'origine.*

• *La sous variété* $\boldsymbol{M} = \{z = (z_1, z_2, w) \in \mathcal{U} \ / \ y_1 = y_2 = w = 0\}$ *est complexe-tangentielle. De plus, on remarque que le bord* $bD$ *est strictement pseudoconvexe sur* $\boldsymbol{M}\backslash\{0\}$.

• *Comme* $\mathcal{P}_Z(A) = 4$, $\mathcal{P}_Y(A) = 2$, $\mathcal{P}_Z(B) = 4$ *et* $\mathcal{P}_Y(B) = 2$ *alors* $\frac{B^2}{A}$ *est borné au voisinage de l'origine. Donc,* $\boldsymbol{M}$ *est un ensemble localement pic à l'origine pour la classe* $\mathcal{O}$.

# Chapitre 3

# Ensembles localement pics pour la classe $A^\infty$

Soit $\mathbf{M}$ une sous variété de classe $C^\infty$ de $bD$, totalement réelle, complexe-tangentielle au voisinage d'un point $p \in \mathbf{M}$, de dimension $(n-1)$, où $bD$ est le bord d'un domaine $D$ faiblement pseudoconvexe de $\mathbb{C}^n$ à bord de classe $C^\infty$. On donnera dans ce chapitre une condition suffisante (voir le théorème 3.3.1) pour que $\mathbf{M}$ soit un ensemble localement pic en $p \in \mathbf{M}$. De plus, on montrera que $\mathbf{M}$ est un ensemble localement d'interpolation en $p$ pour la classe $A^\infty$.

## 3.1 Préliminaires.

**Définition 3.1.1** *On note $A^\infty\left(\overline{D}\right)$ la classe des fonctions de classe $C^\infty$ sur $\overline{D}$ qui sont holomorphes dans $D$.*
*Un sous ensemble $\boldsymbol{M} \subset bD$ est dit pic pour $A^\infty\left(\overline{D}\right)$ s'il existe $f \in A^\infty\left(\overline{D}\right)$ telle que $f\Big|_{\boldsymbol{M}} = 1$ et $|f| < 1$ dans $\overline{D} \backslash \boldsymbol{M}$.*
*On dira qu'un sous ensemble $\boldsymbol{M} \subset bD$ est localement pic pour $A^\infty$ en $p \in \boldsymbol{M}$, s'il existe une boule ouverte $\mathcal{U} = B(p, \varepsilon)$ de $\mathbb{C}^n$ telle que $\boldsymbol{M} \cap \mathcal{U}$ soit pic dans $D \cap \mathcal{U}$. C'est équivalent à dire qu'il existe une fonction $f \in C^\infty\left(\mathcal{U} \cap \overline{D}\right)$ holomorphe dans $\mathcal{U} \cap D$ telle que $f = 0$ sur $\boldsymbol{M} \cap \mathcal{U}$ et $\Re f < 0$ sur $\left(\overline{D} \cap \mathcal{U}\right) \setminus \boldsymbol{M}$.*
*Un sous ensemble $\boldsymbol{M} \subset bD$ est dit d'interpolation pour $A^\infty\left(\overline{D}\right)$ si toute fonction $f \in C^\infty(\boldsymbol{M})$ est la restriction à $\boldsymbol{M}$ d'une fonction de $A^\infty\left(\overline{D}\right)$.*
*On dira qu'un sous ensemble $\boldsymbol{M} \subset bD$ est localement d'interpolation pour*

*la classe $A^\infty$ en un point $p \in \boldsymbol{M}$, s'il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de $p$ tel que toute fonction $f \in C^\infty(\boldsymbol{M} \cap \mathcal{U})$ soit la restriction à $\boldsymbol{M} \cap \mathcal{U}$ d'une fonction de $A^\infty(D \cap \mathcal{U})$.*
*Soit $D$ un domaine de $\mathbb{C}^n$ à bord $C^\infty$, $\boldsymbol{M}$ une sous variété de $bD$ et $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{C}^n$. Nous disons, suivant une terminologie due à L. Hörmander [Ho] qu'une fonction $\phi \in C^\infty(\mathcal{U})$ est presque-analytique par rapport à $\boldsymbol{M} \cap \mathcal{U}$ si, pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^{2n}$, on a*

$$D^\alpha \ \overline{\partial}\phi \Big|_{\boldsymbol{M} \cap \mathcal{U}} = 0.$$

*Soit $L$ un sous ensemble fermé d'un ouvert $\mathcal{U}$. On dit que $f \in C^k(\mathcal{U})$ est $m$-plate sur $L$, $m \leq k$, si $D^\alpha f(x) = 0$ pour tout $x \in L$ et pour tout $\alpha$ avec $|\alpha| \leq m$. Si $f \in C^\infty(\mathcal{U})$ et $D^\alpha f(x) = 0$ pour tout $x \in L$ et pour tout $\alpha$, on dit que $f$ est plate sur $L$.*

Soit $D$ un domaine à bord $bD$ de classe $C^\infty$. Soit $\mathbf{M}$ une sous variété $C^\infty$ de $bD$, totalement réelle, de dimension $(n-1)$, complexe-tangentielle au voisinage d'un point $p \in \mathbf{M}$.
Soit $(U, \gamma)$ une paramétrisation de classe $C^\infty$ de $\mathbf{M}$ au voisinage de $p$ où $U$ est un voisinage ouvert de l'origine dans $\mathbb{R}^{n-1}$ et $\gamma(0) = p$.
Soit $\mathbf{X}$ un champ de vecteurs sur $\mathbf{M}$ de classe $C^\infty$ avec $\mathbf{X}(p) = 0$. Soit $X_1$ un champ de vecteurs sur $U$ tel que $d\gamma(X_1) = \mathbf{X}$.
Notons $\zeta = (\zeta_1, ..., \zeta_{n-1})$ les coordonnées d'un point de $U$. Le champ de vecteurs $X_1$ s'écrit dans ces coordonnées

$$X_1 = \sum_{i=1}^{n-1} d_i(\zeta) \ \frac{\partial}{\partial \zeta_i},$$

où les $d_i$ sont des fonctions $C^\infty$ dans $U$.
On associe à $X_1$ la matrice jacobienne à l'origine :

$$D_1 = \{\tfrac{\partial d_i}{\partial \zeta_j}(0)\}_{1 \leq i,j \leq n-1}.$$

Comme pour le cas $C^\omega$ la matrice jacobienne correspondante pour une autre paramétrisation est semblable à $D_1$, nous énonçons notre première hypothèse :

$(\mathcal{H}_1)$ *La matrice $D_1$ est diagonalisable et a pour valeurs propres $\widetilde{m}_1 \geq \widetilde{m}_2 \geq ... \geq \widetilde{m}_{n-1}$, où $\widetilde{m}_i \in \mathbb{N}^*$, pour tout $1 \leq i \leq n-1$.*

Si $(\mathcal{H}_1)$ est vérifiée, on dit que $\mathbf{M}$ admet un champ de vecteurs $\mathbf{X}$, $C^\infty$, admissible à poids $(\widetilde{m}_1, ..., \widetilde{m}_{n-1})$ au voisinage de $p \in \mathbf{M}$.
Ainsi, on a des résultats analogues suivants à ceux du chapitre précédent :
- Sous l'hypothèse $(\mathcal{H}_1)$, il existe un changement de coordonnées sur $U$ de classe $C^\infty$ tel que

$$X_1 = \sum_{i=1}^{n-1} \widetilde{m}_i \zeta_i \frac{\partial}{\partial \zeta_i}.$$

Ce changement est déterminé à la transformation suivante près :
- Soit $\Lambda = (\Lambda_1, ..., \Lambda_{n-1})$ un changement de coordonnées sur $U$ de classe $C^\infty$ avec $\Lambda(0) = 0$ et $d\Lambda(X_1) = X_1$. Alors, $\Lambda$ est polynômial. Plus précisément, si pour $\zeta = (\zeta_1, ..., \zeta_{n-1}) \in U$, $I = (i_1, ..., i_{n-1}) \in \mathbb{N}^{n-1}$ on pose $|I|_* = \sum_{\nu=1}^{n-1} i_\nu \widetilde{m}_\nu$, alors pour tout $1 \leq j \leq n-1$, on a

$$\Lambda_j(\zeta) = \sum_{|I|_* = \widetilde{m}_j} a_I^j \, \zeta_1^{i_1} ... \zeta_{n-1}^{i_{n-1}}, \text{ avec } a_I^j \in \mathbb{R}.$$

Réciproquement, tout $\Lambda$ de ce genre préserve $X_1$.
- Soit $\{\widetilde{m}_1, ..., \widetilde{m}_{n-1}\} = \{s_1, ..., s_k\}$ avec $s_1 > s_2 > ... > s_k$. Si pour tout $1 \leq r < k$, on a $s_r \neq \sum_{\nu=r+1}^{k} i_\nu \, s_\nu$ quel que soit $i_\nu \in \mathbb{N}$, alors, pour tout $1 \leq j \leq n-1$, $\Lambda_j$ s'écrit sous la forme linéaire suivante :

$$\Lambda_j(\zeta) = \sum_{\nu=1}^{n-1} a_{I_\nu}^j \, \zeta_\nu, \text{ où } I_\nu = (0, ..., \underbrace{1}_{\nu}, 0, ..., 0) \text{ et } \zeta \in \mathbb{R}^{n-1}.$$

Ici $a_{I_\nu}^j = 0$ si $\widetilde{m}_\nu \neq \widetilde{m}_j$.
**Hypothèse $(\mathcal{H}_2)$ :**
Maintenant, nous définissons notre deuxième hypothèse $(\mathcal{H}_2)$ :
Soit $\widetilde{\gamma} : \widetilde{U} \longrightarrow \widetilde{\gamma}\left(\widetilde{U}\right)$ un prolongement presque-analytique (voir la section ci-dessous) de $\gamma$ par rapport à $\widetilde{U} \cap \mathbb{R}^{n-1}$ où $\widetilde{U} \supset U$ est un ouvert dans $\mathbb{C}^{n-1}$.
Pour $\zeta = (\zeta_1, ..., \zeta_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\eta = (\eta_1, ..., \eta_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$, on pose $\sigma = \zeta + i.\eta \in \mathbb{C}^{n-1}$, $\kappa_\zeta(\lambda) := \left(\lambda^{\widetilde{m}_1}\zeta_1, ..., \lambda^{\widetilde{m}_{n-1}}\zeta_{n-1}\right)$ et $\kappa_\sigma(\mu, \lambda) := \kappa_\zeta(\mu) + i.\kappa_\eta(\lambda)$.
Notons $\rho$ la fonction définissante de $D$ au voisinage de $p \in bD$. Soit $M$, $K \in \mathbb{N}^*$ tels que $M \leq K$ et pour tout $1 \leq \nu \leq n-1$, $m_\nu := \frac{M}{\widetilde{m}_\nu} \in \mathbb{N}^*$.

Posons $\mathbf{E} = \left\{ \zeta = (\zeta_1, ..., \zeta_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} \ / \ \sum_{i=1}^{n-1} \zeta_i^{2m_i} = 1 \right\}$. Notre deuxième hypothèse est la suivante :

$(\mathcal{H}_2)$ *il existe, après un éventuel changement de coordonnées comme ci-dessus des constantes $\varepsilon > 0$, $0 < c \leq C$ telles que, pour tout $\sigma = \zeta + i.\eta \in \boldsymbol{E} + i.\boldsymbol{E}$, $|\lambda| < \varepsilon$, $|\mu| < \varepsilon$, on ait* $c|\lambda|^{2M}(|\mu| + |\lambda|)^{2(K-M)} \leq \rho\left(\widetilde{\gamma}(\kappa_\sigma(\mu, \lambda))\right) \leq C|\lambda|^{2M}(|\mu| + |\lambda|)^{2(K-M)}$.

**Définition 3.1.2** *Si un champ de vecteurs $\boldsymbol{X}$ de classe $C^\infty$ sur $\boldsymbol{M}$ vérifie les deux hypothèses $(\mathcal{H}_1)$ et $(\mathcal{H}_2)$, on dira que $\boldsymbol{X}$ est un champ de vecteurs pic-admissible de pic-type $(K, M; \widetilde{m}_1, ..., \widetilde{m}_{n-1})$ au voisinage de $p \in \boldsymbol{M}$ pour la classe $A^\infty$.*

## 3.2 Changement presque-analytique.

**Lemme 3.2.1** *Soit $D$ un domaine de $\mathbb{C}^n$ à bord $bD$ de classe $C^\infty$. Soit $\boldsymbol{M}$ une sous variété $C^\infty$ de dimension $(n-1)$ de $bD$, totalement réelle, complexe-tangentielle dans un voisinage d'un point $p \in \boldsymbol{M}$. Alors, il existe une sous variété $\boldsymbol{N}$, $C^\infty$, totalement réelle de dimension $n$ de $bD$ contenant localement $\boldsymbol{M}$.*

**Preuve.**
Sauf le changement de classe $\mathcal{O}$ en $A^\infty$ la démonstration est entièrement analogue à celle pour $\mathcal{O}$. Soit $\gamma$ la paramétrisation de $\mathbf{M}$ suivante $\gamma$ :
$\begin{cases} U' \to \mathbb{C}^n \\ (t_1, ..., t_{n-1}) \mapsto \gamma(t_1, ..., t_{n-1}) \end{cases}$, de classe $C^\infty$ dans $U'$ telle que $\gamma(0) = p$, où $U'$ est un voisinage ouvert de $0_{\mathbb{R}^{n-1}}$. Or $rg \frac{\partial(\gamma_1, ..., \gamma_n)}{\partial(t_1, ..., t_{n-1})} = n-1$ en $0_{\mathbb{R}^{n-1}}$. Après une translation et une rotation unitaire dans $\mathbb{C}^n$, on ramène $p$ à l'origine et les espaces tangents réel et complexe à $bD$ en 0 sont :

$$T_0(bD) = \mathbb{C}^{n-1} \times i\mathbb{R} \quad \text{et} \quad T_0^{\mathbb{C}}(bD) = \mathbb{C}^{n-1} \times \{0\} \quad \text{respectifs.}$$

La famille $\{v_1 = \frac{d\gamma}{dt_1}(0), ..., v_{n-1} = \frac{d\gamma}{dt_{n-1}}(0)\}$ constitue une base dans $T_0(\mathbf{M}) \subset \mathbb{C}^{n-1} \times \{0\}$. Comme $\mathbf{M}$ est totalement réelle, l'espace engendré par $\{v_1, ..., v_{n-1}\}$ sur $\mathbb{C}$ est $\mathbb{C}^{n-1} \times \{0\}$. Soit l'application linéaire, bijective $\Phi : \mathbb{C}^{n-1} \times \{0\} \to \mathbb{C}^{n-1} \times \{0\}$ telle que pour tout $1 \leq j \leq n-1$, $\Phi(v_j) = e_j$ où $e_j$ est le $j$-ième vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Si on pose $\widetilde{\Phi}(Z, w) = (\Phi(Z), w)$ pour

$Z = (z_1, ..., z_{n-1}) \in \mathbb{C}^{n-1}$ et $w \in \mathbb{C}$ alors $\widetilde{\Phi}$ transforme les espaces tangents réel et complexe de $bD$ à l'origine sur eux-mêmes. Considérons maintenant, la nouvelle paramétrisation $\widetilde{\gamma} = \widetilde{\Phi} \circ \gamma$. On obtient

$$\frac{d\widetilde{\gamma}}{dt_j}(0) = \ e_j, \ \forall j = 1, ..., n-1.$$

Dans ce qui suit, on note $\gamma$ à la place de $\widetilde{\gamma}$ et $\mathbf{n}(Z, w)$ la normale extérieure à $bD$. On peut supposer $|\mathbf{n}| = 1$. On pose $L(Z, w) = \ i\mathbf{n}(Z, w)$ le champ de vecteurs tangentiel au bord qui est orthogonal à $T^{\mathbb{C}}_{(Z,w)}(bD)$. Alors, pour tout $(Z, w) \in bD$, il existe une courbe intégrale $l_{(Z,w)}(\lambda)$ de $L$ vérifiant

$$l_{(Z,w)}(0) = (Z, w) \quad \text{et} \quad \frac{dl_{(Z,w)}}{d\lambda}(\lambda) = L\left(l_{(Z,w)}(\lambda)\right).$$

$l_{(Z,w)}(\lambda)$ est $C^\infty$ par rapport à $\lambda$ et $(Z, w)$. De plus, on a $l_{(Z,w)}(\lambda) \in bD$.
Soit l'application $\theta : \begin{cases} U & \to & \mathbb{C}^n \\ (t_1, ..., t_{n-1}, \lambda) & \longmapsto & l_{\gamma(t_1,...,t_{n-1})}(\lambda) \end{cases}$, où $U$ est un voisinage ouvert de $0_{\mathbb{R}^n}$. Il est clair que $\theta$ est de classe $C^\infty$. De plus, $\theta$ vérifie $\frac{d\theta}{d\lambda}(t_1, ..., t_{n-1}, \lambda) = L\left(l_{\gamma(t_1,...,t_{n-1})}(\lambda)\right)$.
En particulier, on a

$$\frac{d\theta}{d\lambda}(t_1, ..., t_{n-1}, 0) = L\left(l_{\gamma(t_1,...,t_{n-1})}(0)\right) = L\gamma(t_1, ..., t_{n-1}) = i\mathbf{n}(\gamma(t_1, ..., t_{n-1})).$$

À l'origine, on obtient

$$\frac{d\theta}{d\lambda}(0_{\mathbb{R}^n}) = (0_{\mathbb{R}^{n-1}}, i) \ \text{ et } \frac{d\theta}{dt_j}(0_{\mathbb{R}^n}) = \frac{d\gamma}{dt_j}(0_{\mathbb{R}^{n-1}}) = e_j, \ \forall j = 1, 2, ..., n-1.$$

Ainsi, $rg\frac{\partial(\theta_1,...,\theta_n)}{\partial(t_1,...,t_{n-1},\lambda)} = n$ en $0_{\mathbb{R}^n}$. Alors, il existe $\widetilde{U} \subset U$ un voisinage ouvert de $0_{\mathbb{R}^n}$ tel que $\theta : \widetilde{U} \to \theta(\widetilde{U}) := \mathbf{N}$, soit un $C^\infty$-difféomorphisme entre $\widetilde{U}$ et une sous variété $\mathbf{N}$ de classe $C^\infty$ de $bD$, totalement réelle, de dimension $n$ contenant localement $\mathbf{M}$. □
Maintenant, on donne quelques techniques connues et des généralisations sur les applications $m$-plates. À ce sujet, on peut consulter par exemple le livre de R. Narasimhan [Na].

**Lemme 3.2.2** *Soient $\widetilde{U}_X$ un voisinage de $0_{\mathbb{R}^n}$ et $h : (X, Y) \longmapsto h(X, Y)$ une fonction de classe $C^\infty$ sur $\widetilde{U}_X \times \mathbb{R}^n$. On suppose que $h$ est $m$-plate par*

*rapport à $Y$ quand $Y = 0$. Alors, ils existent un voisinage $V_Y$ de $0_{\mathbb{R}^n}$, un voisinage $U_X \subset\subset \widetilde{U}_X$ de $0_{\mathbb{R}^n}$ et une fonction $g \in C^\infty(U_X \times \mathbb{R}^n)$ qui s'annule sur $U_X \times V_Y$ tels que, pour $\varepsilon > 0$, on ait*

$$\|g - h\|_m^{U_X \times \mathbb{R}^n} < \varepsilon.$$

**Preuve.**
Soit $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $\eta(Y) \geq 0$ pour tout $Y$ et $\eta(Y) = 0$ si $\|Y\| \leq \frac{1}{2}$, $\eta(Y) = 1$ si $\|Y\| \geq 1$.
Pour $\delta = (\delta_1, ..., \delta_n)$ avec $\delta_j > 0$ pour $1 \leq j \leq n$, on pose

$$g_\delta(X, Y) = \eta\left(\frac{Y}{\delta}\right).h(X, Y).$$

Ici $\frac{Y}{\delta}$ désigne $\left(\frac{y_1}{\delta_1}, ..., \frac{y_n}{\delta_n}\right)$. Alors, on a $g_\delta \in C^\infty\left(\widetilde{U}_X \times \mathbb{R}^n\right)$. De plus, $g_\delta$ s'annule sur $\widetilde{U}_X \times V_Y$ où $V_Y$ est un voisinage de $0_{\mathbb{R}^n}$. Il suffit de prouver que

$$\lim_{|\delta| \to 0} \sup_{\substack{Y \in \mathbb{R}^n \\ X \in U_X}} |D^\alpha g_\delta(X, Y) - D^\alpha h(X, Y)| = 0 \quad \text{quand } |\alpha| \leq m.$$

Comme $g_\delta(X, Y) = h(X, Y)$ quand $\|Y\| \geq |\delta|$, alors

$$\sup_{\substack{Y \in \mathbb{R}^n \\ X \in U_X}} |D^\alpha g_\delta(X, Y) - D^\alpha h(X, Y)| = \sup_{\substack{\|Y\| \leq |\delta| \\ X \in U_X}} |D^\alpha g_\delta(X, Y) - D^\alpha h(X, Y)|.$$

Or, $h$ est $m$-plate par rapport à $Y$ quand $Y = 0$. Donc

$$\lim_{|\delta| \to 0} \sup_{\substack{\|Y\| \leq |\delta| \\ X \in U_X}} |D^\alpha h(X, Y)| = 0 \quad \text{quand } |\alpha| \leq m.$$

D'après la formule de Leibniz, on a

$$D^\alpha g_\delta(X, Y) = \sum_{\mu + \nu = \alpha} \begin{pmatrix} \alpha \\ \nu \end{pmatrix} (D^\nu \eta)\left(\frac{Y}{\delta}\right)(D^\mu h)(X, Y).$$

Comme $\eta(Y) = 1$ si $\|Y\| \geq 1$, alors $\sup_{Y \in \mathbb{R}^n} |D^\nu \eta(Y)| = M_\nu < \infty$. D'où

$$|D^\alpha g_\delta(X, Y)| \leq M \sum_{\mu + \nu = \alpha} |\delta|^{-|\nu|} |D^\mu h(X, Y)|, \quad \text{avec}$$

$M = \max_\nu \begin{pmatrix} \alpha \\ \nu \end{pmatrix} M_\nu$. Comme $D^\mu h$ est $(m - |\mu|)$-plate par rapport à $Y$ quand $Y = 0$, alors

$$\sup_{\substack{\|Y\|\leq|\delta| \\ X\in U_X}} |D^\alpha g_\delta(X,Y)| = O\left(\sum_{\mu+\nu=\alpha} |\delta|^{m+1-|\mu|-|\nu|}\right) = O(\delta) \text{ quand } |\alpha|\leq m. \quad \square$$

**Lemme 3.2.3** *Soit $\theta : \widetilde{U} \to \mathbb{C}^n$ une représentation paramétrique de classe $C^\infty$ de la sous variété $\boldsymbol{N}$ au voisinage de l'origine de $\mathbb{R}^n$. Alors $\theta$ admet un prolongement presque-analytique $\widetilde{\theta}$ par rapport à $\boldsymbol{N}$ définie dans un voisinage $\widetilde{\mathcal{U}}$ de l'origine de $\mathbb{C}^n$.*

**Preuve.**
Soient $T_m(X,Y) = \sum_{|\alpha|\leq m} \frac{1}{\alpha!} D_X^\alpha \theta(X)(iY)^\alpha$ et $U_X \subset\subset \widetilde{U}$ un voisinage de $0_{\mathbb{R}^n}$.
Pour $k\in\mathbb{N}$, $T_{k+1}-T_k$ est $k$-plate par rapport à $Y$ quand $Y=0$. Maintenant, on applique le lemme 3.2.2 à $T_{k+1}-T_k$. Alors, il existe un voisinage $V_Y^k$ de $0_{\mathbb{R}^n}$ et une fonction $g_k(X,Y)$ qui s'annule sur $U_X\times V_Y^k$ telle que

$$\|T_{k+1}-T_k-g_k\|_k^{U_X\times\mathbb{R}^n} < 2^{-k}. \tag{3.1}$$

Pour $m\in\mathbb{N}^*$, on considère $\widetilde{T}_m := T_0 + \sum_{k=0}^{m} (T_{k+1}-T_k-g_k) \in C^\infty(U_X\times\mathbb{R}^n)$.
D'après (3.1), la série $\sum_k (T_{k+1}-T_k-g_k)$ est normalement convergente pour toutes les normes $C^l$ sur $U_X\times\mathbb{R}^n$, $l\in\mathbb{N}$. Alors, la suite $\left(\widetilde{T}_m\right)_m$ converge vers une fonction $\widetilde{\theta}\in C^\infty(U_X\times\mathbb{R}^n)$. Or, pour tout $m$ et $k$, $T_m(X,0)=\theta(X)$, $g_k(X,0)=0$. D'où $\widetilde{\theta}(X,0) = \lim_{m\to+\infty} \widetilde{T}_m(X,0) = \theta(X)$. Donc, $\widetilde{\theta}$ est un prolongement $C^\infty$ de $\theta$ sur $U_X\times\mathbb{R}^n$.

Il reste à prouver que $\widetilde{\theta}$ est presque-analytique sur $U_X\times\mathbb{R}^n$.
Soit $m\geq 1$ fixé. On a $\widetilde{T}_m = T_{m+1} - g_0 - ... - g_m$. Or, $g_0+...+g_m=0$ sur $U_X\cap\left(\bigcap_{k=0}^{m} V_Y^k\right)$. Donc, pour tout $1\leq j\leq n$, on a

$$\frac{\partial\widetilde{T}_m}{\partial\overline{z}_j} = \frac{\partial T_{m+1}}{\partial\overline{z}_j}, \text{ sur } U_X\cap\left(\bigcap_{k=0}^{m} V_Y^k\right).$$

Pour $j=1$, on a

$$T_{m+1}(X,Y) = \sum_{\substack{0\leq\alpha_1\leq m+1 \\ |\alpha'|\leq m+1-\alpha_1}} \frac{1}{\alpha_1!} D_{x_1}^{\alpha_1} \Gamma_{\alpha'}(X,Y') \ (iy_1)^{\alpha_1}, \text{ où}$$

$\alpha = (\alpha_1, \alpha')$, $Y = (y_1, Y')$, $X = (x_1, X')$ et $\Gamma_{\alpha'}(X, Y') = \frac{1}{\alpha'!}\, D^{\alpha'}_{X'}\, \theta(X)\, (iY')^{\alpha'}$.
Comme

$$\frac{\partial T_{m+1}}{\partial x_1}(X, Y) = \sum_{\substack{0 \le \alpha_1 \le m+1 \\ |\alpha'| \le m+1-\alpha_1}} \frac{1}{\alpha_1!} D^{\alpha_1+1}_{x_1}\, \Gamma_{\alpha'}(X, Y')\, (iy_1)^{\alpha_1}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{m+1}}{\partial y_1}(X, Y) &= i \sum_{\substack{1 \le \alpha_1 \le m+1 \\ |\alpha'| \le m+1-\alpha_1}} \frac{\alpha_1}{\alpha_1!}\, D^{\alpha_1}_{x_1}\, \Gamma_{\alpha'}(X, Y')\, (iy_1)^{\alpha_1-1} \\ &= i \sum_{\substack{0 \le \alpha_1 \le m \\ |\alpha'| \le m-\alpha_1}} \frac{1}{\alpha_1!}\, D^{\alpha_1+1}_{x_1}\, \Gamma_{\alpha'}(X, Y')\, (iy_1)^{\alpha_1}\,, \end{aligned}$$

alors on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{m+1}}{\partial \overline{z}_1} &= \frac{1}{(m+1)!} D^{m+1}_{x_1} \Gamma_0(X, Y')\, (iy_1)^{m+1} + \sum_{\substack{0 \le \alpha_1 \le m \\ |\alpha'| = m+1-\alpha_1}} \frac{1}{\alpha_1!} D^{\alpha_1+1}_{x_1} \Gamma_{\alpha'}(X, Y')\, (iy_1)^{\alpha_1} \\ &= \frac{1}{(m+1)!} D^{m+1}_{x_1} \Gamma_0(X, Y')\, (iy_1)^{m+1} + \sum_{\substack{0 \le \alpha_1 \le m \\ |\alpha'| = m+1-\alpha_1}} \frac{1}{\alpha!} D^{\alpha_1+1}_{x_1} D^{\alpha'}_{X'} \theta(X, Y')\, (iY)^{\alpha} \\ &= O\left(|Y|^{m+1}\right). \end{aligned}$$

Donc, pour tout $|K| \le m$, on a

$$D^K_{X,Y} \left( \frac{\partial \widetilde{T}_m}{\partial \overline{z}_1} \right) \Big|_{Y=0} = 0.$$

Avec un raisonnement analogue, on obtient le même résultat pour les autres cas de $j$, $(2 \le j \le n)$.
Comme la convergence de $\widetilde{T}_m$ vers $\widetilde{\theta}$ est uniforme par rapport à toutes les dérivées sur $U_X \times \mathbb{R}^n$, il vient que, pour tout $1 \le j \le n$,

$$D^K_{X,Y} \left( \frac{\partial \widetilde{\theta}}{\partial \overline{z}_j} \right) \Big|_{Y=0} = 0. \qquad \square$$

**Lemme 3.2.4** *Soit $D$ un domaine de $\mathbb{C}^n$ à bord $C^\infty$. Soit $\boldsymbol{M}$ une sous variété $C^\infty$ de dimension $(n-1)$ de $bD$, totalement réelle, complexe-tangentielle dans un voisinage d'un point $p \in \boldsymbol{M}$.*

*Alors, il existe un changement de coordonnées presque-analytique $(Z,w)$ par rapport à $\boldsymbol{N}$ ci-dessous, avec $Z = X + i.Y \in \mathbb{C}^{n-1}$ et $w = u + iv \in \mathbb{C}$, qui ramène $p$ à l'origine et dans un voisinage $\mathcal{U}$ de l'origine on a :*
*(i) $\boldsymbol{M}$ s'écrit sous la forme $\boldsymbol{M} = \{(Z,w) \in \mathcal{U} / \ Y = w = 0\}$. De plus, $\boldsymbol{M}$ est localement contenue dans la sous variété $\boldsymbol{N} = \{(Z,w) \in \mathcal{U} \ / \ Y = u = 0\}$ de $bD$ qui est totalement réelle et de dimension $n$.*
*(ii) Pour tout $c \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{M}_c = \{(Z,w) \in \mathcal{U} \ / \ Y = u = 0$ et $v = c\}$ est complexe-tangentielle ou vide.*
*(iii) $D \cap \mathcal{U} \ = \{(Z,w) \in \mathcal{U} \ / \rho(Z,w) < 0\}$ avec*

$$\rho(Z,w) = \ u + \ A(Z) + \ vB(Z) \ + \ v^2 R(Z,v).$$

*(iv) Les fonctions $A$ et $B$ s'annulent à un ordre $\geq 2$ si $Y = 0$.*

**Preuve.**
Soit $\theta : \widetilde{U} \to \mathbb{C}^n$ la représentation paramétrique de classe $C^\infty$ de la sous variété $\mathbf{N}$ donnée dans le lemme 3.2.1. À partir du lemme 3.2.3, on peut prolonger $\theta$ en $\widetilde{\theta} : \widetilde{\mathcal{U}} \to \mathbb{C}^n$ où $\widetilde{\mathcal{U}}$ est un ouvert de $\mathbb{C}^n$ et $\widetilde{\theta}$ est presque-analytique sur $\mathbb{R}^n \cap \widetilde{\mathcal{U}}$ par rapport à $\mathbf{N}$. On a d'abord que $\widetilde{\theta} : (Z,w) \longmapsto (Z',w')$ est un difféomorphisme presque-analytique d'un voisinage ouvert $\widetilde{\mathcal{U}}$ suffisamment petit de l'origine de $\mathbb{C}^n$ dans un voisinage $\mathcal{U}'$ de l'origine. Par rapport à ces nouvelles coordonnées $(Z',w')$, $Z' = X' + iY' \in \mathbb{C}^{n-1}$ et $w' = u' + iv' \in \mathbb{C}$, on obtient :

$$N' = \{(Z',w') \in \mathcal{U}' \ / \ Y' = v' = 0\} \text{ et } M' = \{(Z',w') \in \mathcal{U}' \ / \ Y' = w' = 0\}.$$

On suit la même preuve celle du lemme 2.3.1 pour avoir que $N'$ est fibrée par des fibres $M'_c = \{(Z,w) \in \mathcal{U}' \ / \ Y' = v' = 0$ et $u' = c\}$ complexe-tangentielles en utilisant le théorème de Frobenius [Bo] (version $C^\infty$). Le reste de la preuve est complètement analogue à celle du lemme 2.3.1. Pour avoir i) et ii), on effectue le changement des coordonnées presque-analytique suivant :
$\begin{cases} Z = X + i.Y = Z' \\ w = u + iv = iw' \end{cases}$. On prouve dans un voisinage $\mathcal{U}$ de l'origine dans $\mathbb{C}^n$, $\mathbf{M} = \{(Z,w) \in \mathcal{U} \ / \ Y = w = 0\}$ et $\mathbf{N} = \{(Z,w) \in \mathcal{U} \ / \ Y = u = 0\}$, où $\mathbf{N}$ est fibrée par $\mathbf{M}_c = \{(Z,w) \in \mathcal{U} \ / \ v = c\}_{c \in \mathbb{R}}$. En représentant le bord $bD$ comme graphe au-dessus $\mathbb{C}^{n-1} \times i\mathbb{R}$, on prouve iii)

$$bD = \{(Z,w) \in \mathcal{U} \ / \ \rho(Z,w) = \ u + A(Z) + vB(Z) + v^2 R(Z,v) = 0\}.$$

Comme $\mathbf{M} \subset bD$ alors on a $A(x_1, ..., x_{n-1}) = 0$.
Or $\mathbf{M}$ est complexe-tangentielle. Alors, on a

$$\frac{\partial \rho}{\partial z_j}(x_1, ..., x_{n-1}, 0) = 0, \forall j = 1, ..., n-1.$$

Ceci implique

$$\frac{\partial A}{\partial y_j}(x_1, ..., x_{n-1}) = 0, \forall j = 1, ..., n-1.$$

Donc, $A$ s'annule à un ordre $\geq 2$ si $y_1 = ... = y_{n-1} = 0$.
Comme $\mathbf{N} \subset bD$ alors on a

$$A(x_1, ..., x_{n-1}) + vB(x_1, ..., x_{n-1}) + v^2 R(x_1, ..., x_{n-1}, v) = 0.$$

Or, le vecteur $\frac{\partial}{\partial v}$ est tangent à $\mathbf{N}$. Ceci implique $B(x_1, ..., x_{n-1}) = 0$.
On peut montrer que le gradient $\nabla \rho = (0_{\mathbb{C}^{n-1}}, -1)$ le long de $\mathbf{N}$. Donc, pour tout $1 \leq j \leq n-1$, on a $\frac{\partial \rho}{\partial z_j}(x_1, .., x_{n-1}, v) = 0$. Ceci implique $\frac{\partial \rho}{\partial y_j}(x_1, ..., x_{n-1}, v) = 0$. C'est équivalent à

$$\frac{\partial A}{\partial y_j}(x_1, ..., x_{n-1}) + v\frac{\partial B}{\partial y_j}(x_1, ..., x_{n-1}) + v^2 \frac{\partial R}{\partial y_j}(x_1, ..., x_{n-1}, v) = 0, \forall j.$$

Ceci implique

$$\frac{\partial B}{\partial y_j}(x_1, ..., x_{n-1}) + v\frac{\partial R}{\partial y_j}(x_1, ..., x_{n-1}, v) = 0, \quad \forall j = 1, ..., n-1.$$

Maintenant, on prend $v = 0$. On obtient

$$\frac{\partial B}{\partial y_j}(x_1, ..., x_{n-1}) = 0, \forall j = 1, ..., n-1.$$

D'où $B$ s'annule à un ordre $\geq 2$ si $y_1 = ... = y_{n-1} = 0$. De plus, toutes les dérivées premières de $R$ sont nulles si $y_1 = ... = y_{n-1} = 0$ car le vecteur $\frac{\partial}{\partial v}$ est tangent le long $\mathbf{N}$. Ceci nous achève la preuve de iv) et du lemme. □
Le lemme suivant montre dans le cas des paramétrisations de classe $C^\infty$ que $(\mathcal{H}_2)$ ne dépend pas du choix du prolongement presque-analytique par rapport à $\mathbb{R}^{n-1} \cap \widetilde{U}$ où $\widetilde{U}$ est un voisinage ouvert de l'origine dans $\mathbb{C}^{n-1}$.

**Lemme 3.2.5** *On suppose que l'hypothèse $(\mathcal{H}_2)$ soit satisfaite pour le prolongement presque-analytique de la paramétrisation $\widetilde{\gamma} : \widetilde{U} \longrightarrow \mathbb{C}^{n-1}$. Soit $\widetilde{\phi} : \widetilde{V} \longrightarrow \mathbb{C}^{n-1}$ un autre prolongement presque-analytique de $\gamma$. Alors, l'hypothèse $(\mathcal{H}_2)$ est également satisfaite pour $\widetilde{\phi}$ quitte à réduire $\widetilde{U}$ et $\widetilde{V}$.*

**Preuve.**
Le passage de $\widetilde{\gamma}$ à $\widetilde{\phi}$ est donné par une transformation $\widetilde{\psi} : \widetilde{V} \longrightarrow \widetilde{U}$ vérifiant $\widetilde{\phi} = \widetilde{\gamma} \circ \widetilde{\psi}$. $\widetilde{\psi}$ est presque-analytique par rapport à $\widetilde{V} \cap \mathbb{R}^{n-1}$ avec $\widetilde{\psi}\Big|_{\widetilde{V}\cap\mathbb{R}^{n-1}} = Id$. On prouvera que pour tout $\sigma \in \widetilde{V}$ et tout $l \in \mathbb{N}$,

$$|\widetilde{\psi}(\sigma) - \sigma| \lesssim |\Im\sigma|^l.$$

Ceci implique que $(\mathcal{H}_2)$ est satisfaite pour $\widetilde{\gamma}$ équivaut à $(\mathcal{H}_2)$ est satisfaite pour $\widetilde{\phi}$.
Soient $\sigma = \zeta + i.\eta$ avec $\zeta \in \widetilde{V} \cap \mathbb{R}^{n-1}$ et $l \in \mathbb{N}$ fixés. Alors, on a

$$\widetilde{\psi}(\sigma) = \sum_{|I|\leq l} \frac{1}{I!} \frac{\partial^{|I|}\widetilde{\psi}}{\partial\eta^I}(\zeta)\,\eta^I \;+\; O\left(|\eta|^{l+1}\right).$$

Comme $\widetilde{\psi}(\zeta) = \zeta$, on a $\widetilde{\psi}(\sigma) = \zeta + \sum_{1\leq|I|\leq l} \frac{1}{I!} \frac{\partial^{|I|}\widetilde{\psi}}{\partial\eta^I}(\zeta)\,\eta^I \;+\; O\left(|\eta|^{l+1}\right)$. Donc, $\widetilde{\psi}$ peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\widetilde{\psi}(\sigma) = \zeta + \sum_{j=1}^{l} \widetilde{\psi}^{(j)}(\sigma) + \; O\left(|\eta|^{l+1}\right),$$

où $\widetilde{\psi}^{(j)}(\sigma) = \sum_{|I|=j} \frac{1}{I!} \frac{\partial^{|I|}\widetilde{\psi}}{\partial\eta^I}(\zeta)\,\eta^I$. En particulier, on a :

$$\begin{aligned}\widetilde{\psi}(\sigma) &= \zeta + \widetilde{\psi}^{(1)}(\sigma) + \; O\left(|\eta|^2\right)\\ &= \zeta + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial\widetilde{\psi}}{\partial\eta_i}(\zeta)\,\eta_i \;+\; O\left(|\eta|^2\right).\end{aligned}$$

Or, $\overline{\partial}\widetilde{\psi} = O(|\eta|)$. Alors, pour tout $1 \leq k, j \leq n-1$, on a

$$\delta_{kj} + \; i\frac{\partial\widetilde{\psi}_j}{\partial\eta_k}(\zeta) = O(|\eta|).$$

Ceci implique $\widetilde{\psi}^{(1)}(\sigma) = i\eta$. Par conséquent,

$$\widetilde{\psi}(\sigma) = \sigma + \sum_{j=2}^{l} \widetilde{\psi}^{(j)}(\sigma) + O\left(|\eta|^{l+1}\right).$$

Soit $2 \leq j_0 \leq l$ minimal tel que $\widetilde{\psi}^{(j_0)}$ soit non identiquement nul. Alors, on a $\widetilde{\psi}(\sigma) = \sigma + \widetilde{\psi}^{(j_0)}(\sigma) + O(|\eta|^{j_0+1})$. Or, $\overline{\partial}\widetilde{\psi} = \overline{\partial}\widetilde{\psi}^{(j_0)} + O(|\eta|^{j_0}) = O(|\eta|^{j_0})$. Donc, pour tout $1 \leq k \leq n-1$, on a

$$\frac{\partial \widetilde{\psi}^{(j_0)}}{\partial \overline{\sigma}_k} = -\frac{1}{2i}\left(\frac{\partial \widetilde{\psi}^{(j_0)}}{\partial \eta_k}\right) + O\left(|\eta|^{j_0}\right) = O\left(|\eta|^{j_0}\right).$$

Ceci implique, pour tout $1 \leq k \leq n-1$,

$$\frac{\partial \widetilde{\psi}^{(j_0)}}{\partial \eta_k} = O\left(|\eta|^{j_0}\right).$$

Comme $\frac{\partial \widetilde{\psi}^{(j_0)}}{\partial \eta_k}$ est une fonction polynômiale en $\eta$ de degré $(j_0 - 1)$, il vient que $\frac{\partial \widetilde{\psi}^{(j_0)}}{\partial \eta_k} \equiv 0$ pour tout $1 \leq k \leq n-1$. Donc $\widetilde{\psi}^{(j_0)}$ ne dépend pas de $\eta$.
D'où la contradiction. C'est-à-dire $j_0$ n'existe pas. On obtient finalement $\widetilde{\psi}(\sigma) = \sigma + O\left(|\eta|^{l+1}\right)$. En particulier, on a $\forall l \in \mathbb{N}$, $|\Im\widetilde{\psi}(\sigma) - \Im\sigma| \lesssim |\Im\sigma|^l$.□

**Lemme 3.2.6** *Soit $\widetilde{\psi} : \widetilde{V} \to \widetilde{U}$ un changement de coordonnées presque-analytique par rapport à $\widetilde{V} \cap \mathbb{R}^{n-1}$ avec $\widetilde{\psi}\left(\widetilde{V} \cap \mathbb{R}^{n-1}\right) \subset \widetilde{U} \cap \mathbb{R}^{n-1}$, $\widetilde{\psi}(0) = 0$, où $\widetilde{V}$, $\widetilde{U}$ désignent des voisinages de l'origine dans $\mathbb{C}^{n-1}$. Alors, pour tout $\sigma \in \widetilde{V}$, on a*

$$|\widetilde{\psi}(\sigma)| \approx |\sigma| \quad \textit{et} \quad |\Im\widetilde{\psi}(\sigma)| \approx |\Im\sigma|.$$

**Preuve.**
Comme $\widetilde{\psi}$ est un $C^\infty$-difféomorphisme, alors $|\widetilde{\psi}(\sigma)| \approx |\sigma|$.
Or, $|\Im\widetilde{\psi}(\sigma)| = |\Im\widetilde{\psi}(\sigma) - \Im\widetilde{\psi}(\Re\sigma)| \lesssim |\Im\sigma|$. Analoguement, pour $\tau = \widetilde{\psi}^{-1}(\sigma)$, on a $|\Im\tau| = |\Im\widetilde{\psi}^{-1}(\sigma)| = |\Im\widetilde{\psi}^{-1}(\sigma) - \Im\widetilde{\psi}^{-1}(\Re\sigma)| \lesssim |\Im\sigma| = |\Im\widetilde{\psi}(\tau)|$. Donc, on obtient que $|\Im\widetilde{\psi}(\sigma)| \approx |\Im\sigma|$. □

**Remarque 3.2.1**
*Soit $A$ une fonction de classe $C^\infty$ dans un voisinage ouvert $\mathcal{V}$ de l'origine de $\mathbb{C}^{n-1}$ telle que, pour tout $Z \in \mathcal{V}$, on ait $|A(Z)| \lesssim |\Im Z|^2$. Soit $\psi : V \longrightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ un $C^\infty$-difféomorphisme telle que $\psi(0) = 0$, où $V$ est un voisinage ouvert de l'origine. Si $\widetilde{\psi} : \widetilde{V} \longrightarrow \mathbb{C}^{n-1}$ est un prolongement presque-analytique de $\psi$ par rapport à $\widetilde{V} \cap \mathbb{R}^{n-1}$, où $\widetilde{V}$ est un voisinage ouvert de l'origine de $\mathbb{C}^{n-1}$, alors, pour tout $\sigma \in \widetilde{V}$, on a $|A \circ \widetilde{\psi}(\sigma)| \lesssim |\Im\widetilde{\psi}(\sigma)|^2 \lesssim |\Im\sigma|^2$.*

On rappelle que sur $\mathcal{U}\cap(\mathbb{R}^{n-1}\times\{0\})$, où $\mathcal{U}$ est un voisinage de l'origine de $\mathbb{C}^n$, on a le champ de vecteurs $\mathbf{X}=\sum_{i=1}^{n-1}\widetilde{m}_i\zeta_i\,\dfrac{\partial}{\partial\zeta_i}$ pic-admissible de pic-type $(K,M;\widetilde{m}_1,...,\widetilde{m}_{n-1})$.
Notons $\widetilde{\Lambda}:\mathcal{U}\cap(\mathbb{C}^{n-1}\times\{0\})\to\mathbb{C}^{n-1}\times\{0\}$ un prolongement presque-analytique de $\Lambda$ (le changement polynômial du lemme 2.1.2) par rapport à $\mathcal{U}\cap(\mathbb{R}^{n-1}\times\{0\})$. Comme $\widetilde{\Lambda}$ n'affecte pas la variable $w$ et d'après la remarque 3.2.1, on a $|A\circ\widetilde{\Lambda}(\sigma)|\lesssim|\Im\sigma|^2$ et $|B\circ\widetilde{\Lambda}(\sigma)|\lesssim|\Im\sigma|^2$ pour tout $\sigma\in\mathcal{U}\cap(\mathbb{C}^{n-1}\times\{0\})$. C'est-à-dire, les propriétés sur $A$ et $B$ du lemme 3.2.4 restent invariantes.

Dans la suite, on pose $k_\nu=:\frac{K}{\widetilde{m}_\nu}\in\mathbb{N}^*$, $\kappa:=\frac{K}{M}$ et on considère les pseudo-normes par rapport aux nouvelles coordonnées presque-analytiques $Z=(z_1,...,z_{n-1})$ du lemme 3.2.4 :

$$||Y||_*=\left(\sum_{\nu=1}^{n-1}{y_\nu}^{2m_\nu}\right)^{\frac{1}{2M}}\quad\text{et}\quad||Z||_*=\left(\sum_{\nu=1}^{n-1}|z_\nu|^{2k_\nu}\right)^{\frac{1}{2K}}.$$

On pourra désormais supposer que $A$ vérifie la propriété suivante :

$(\mathcal{H})$ *Il existe deux constantes $0<c\leq C$ telles que, pour tout $Z=X+i.Y$ assez proche de l'origine de $\mathbb{C}^{n-1}$, on ait :*
$c||Y||_*^{2M}||Z||_*^{2K-2M}\leq A(Z)\leq C||Y||_*^{2M}||Z||_*^{2K-2M}$.

Avant de déterminer l'ordre d'annulation de certaines fonctions de classe $C^\infty$ sur la sous variété $\mathbf{M}$ au voisinage de $p=0\in\mathbf{M}$, nous donnons dans le lemme suivant l'hypothèse $(\mathcal{H}_3)$ qui garantit la pseudoconvexité locale de $D$ sous des transformations presque-analytiques. Nous n'avons pas pu obtenir notre théorème principal sans cette hypothèse.

**Lemme 3.2.7** *Sous les hypothèses du lemme 3.2.4, on notera $\widetilde{\theta}:(Z,w)\longmapsto(Z',w')$ le passage aux nouvelles coordonnées presque-analytiques. On suppose qu'il existe deux constantes $C>0$ et $L\in\mathbb{N}$ telles que, dans un voisinage $\widetilde{\mathcal{U}}$ de $p\in\boldsymbol{M}$, on ait*

$$\mathcal{L}\acute{e}v\ \rho(q)[t]\geq C|t|^2\ dist(q,\boldsymbol{N})^L,\ pour\ tout\ q\in\widetilde{\mathcal{U}}\cap bD.\qquad(\mathcal{H}_3)$$

*Alors, le domaine $D'=\widetilde{\theta}(D)$ est pseudoconvexe au voisinage de l'origine.*

**Preuve.**
On pose d'abord $N'=\widetilde{\theta}(\mathbf{N})$ et $M'=\widetilde{\theta}(\mathbf{M})$. Comme $\widetilde{\theta}$ est un $C^\infty$-difféomorphisme

local sur un voisinage ouvert $\widetilde{\mathcal{U}}$ de $p$, alors $\widetilde{\theta}$ préserve les distances à des constantes multiplicatives près. En particulier, on a

$$\text{dist}(q', N') \approx \text{dist}(q, \mathbf{N}) \text{ où } q' = \widetilde{\theta}(q) \text{ et } q \in \widetilde{\mathcal{U}}.$$

Notons $\Psi = \widetilde{\theta}^{-1}$, $z_n$ à la place de $w$ et $z'_n$ à la place de $w'$. Comme $\widetilde{\theta}$ est un difféomorphisme presque-analytique, la matrice

$$\left\{ \frac{\partial \Psi_i}{\partial z'_j} \right\}_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \quad \text{est régulière} \tag{3.2}$$

dans un voisinage suffisamment petit de l'origine.
Pour $1 \leq i \leq n$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z'_i} &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \Psi_j}{\partial z'_i} \frac{\partial}{\partial z_j} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \overline{\Psi_j}}{\partial z'_i} \frac{\partial}{\partial \overline{z}_j} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \Psi_j}{\partial z'_i} \frac{\partial}{\partial z_j} + \sum_{j=1}^{n} O\left( dist(q, \mathbf{N})^{L+1} \right) \frac{\partial}{\partial \overline{z}_j}. \end{aligned}$$

Le domaine $D'$ est défini par $\rho' = \rho \circ \Psi$. Soit $t' = (t'_1, ..., t'_n) \in T^{\mathbb{C}}_{q'}(bD')$. Alors, on a $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \rho'(q')}{\partial z'_j} t'_j = 0$. C'est-à-dire,

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial \rho}{\partial z_i} \frac{\partial \Psi_i}{\partial z'_j} t'_j + O\left( |t'| dist(q, \mathbf{N})^{L+1} \right) = 0.$$

Pour $1 \leq i \leq n$, on pose $\displaystyle t_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \Psi_i}{\partial z'_j} t'_j$.

Grâce à (3.2), on a

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \rho}{\partial z_i} t_i &= O\left( |t'| dist(q, \mathbf{N})^{L+1} \right) \\ &= O\left( |t| dist(q, \mathbf{N})^{L+1} \right). \end{aligned}$$

On décompose maintenant $t$ suivant la direction tangentielle $t^{\mathcal{H}}$ et la direction normale $t^{\mathcal{N}}$. On a donc $t = t^{\mathcal{H}} + t^{\mathcal{N}}$ où $t^{\mathcal{H}} \in T^{\mathbb{C}}_q(bD)$ et $t^{\mathcal{N}} \perp T^{\mathbb{C}}_q(bD)$. On a

$|t^{\mathcal{H}}| + |t^{\mathcal{N}}| \leq 2|t|$. De plus, comme $t^{\mathcal{N}} = \kappa(q)\,\mathbf{n}(q)$ avec $\kappa(q) \in \mathbb{C}$ alors, pour tout $1 \leq i \leq n$, on a $t_i^{\mathcal{N}} = \kappa(q)\,\frac{\partial\rho(q)}{\partial\overline{z}_i}$. Ceci implique

$$\begin{aligned}
\kappa(q)\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial\rho(q)}{\partial z_i}\right|^2 &= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\rho(q)}{\partial z_i}\kappa(q)\frac{\partial\rho(q)}{\partial\overline{z}_i} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\rho(q)}{\partial z_i}t_i^{\mathcal{N}} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\rho}{\partial z_i}\,t_i \\
&= O\left(|t|dist\,(q,\mathbf{N})^{L+1}\right).
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$|t^{\mathcal{N}}| = |\kappa(q)| = O\left(|t|dist\,(q,\mathbf{N})^{L+1}\right). \tag{3.3}$$

On calcule maintenant la forme de Lévi de $\rho'$. On a

$$\frac{\partial\rho'(q')}{\partial z_i'} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\rho(q)}{\partial z_k}\frac{\partial\Psi_k(q')}{\partial z_i'} + O\left(dist\,(q,\mathbf{N})^{L+1}\right)$$

et en remplaçant $L$ par $L+1$,

$$\frac{\partial^2\rho'(q')}{\partial z_i'\partial\overline{z'}_j} = \sum_{k,l=1}^{n}\frac{\partial^2\rho(q)}{\partial z_k\partial\overline{z}_l}\,\frac{\partial\Psi_k(q')}{\partial z_i'}\overline{\frac{\partial\Psi_l(q')}{\partial z_j'}} + O\left(dist(q,\mathbf{N})^{L+1}\right).$$

En tenant compte de (3.3), on obtient

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2\rho'(q')}{\partial z_i'\partial\overline{z_j'}}t_i'\overline{t_j'} &= \sum_{k,l=1}^{n}\frac{\partial^2\rho(q)}{\partial z_k\partial\overline{z_l}}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\Psi_k(q')}{\partial z_i'}t_i'\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\overline{\frac{\partial\Psi_l(q')}{\partial z_j'}}t_j'\right) \\
&+ O\left(dist\,(q,\mathbf{N})^{L+1}\right) \\
&= \sum_{k,l=1}^{n}\frac{\partial^2\rho(q)}{\partial z_k\partial\overline{z}_l}t_k^{\mathcal{H}}\overline{t_l^{\mathcal{H}}} + O\left(|t|^2dist\,(q,\mathbf{N})^{L+1}\right).
\end{aligned}$$

Or, par l'hypothèse $(\mathcal{H}_3)$ du lemme et d'après (3.3), on a

$$\begin{aligned}
\sum_{k,l=1}^{n}\frac{\partial^2\rho(q)}{\partial z_k\partial\overline{z}_l}t_k^{\mathcal{H}}\overline{t_l^{\mathcal{H}}} &\geq C|t^{\mathcal{H}}|^2dist\,(q,\mathbf{N})^L \\
&\geq C|t|^2dist\,(q,\mathbf{N})^L + O\left(|t|^2dist\,(q,\mathbf{N})^{L+1}\right).
\end{aligned}$$

D'où, il existe une constante $C' > 0$ telle que l'on ait

$$\mathcal{L}\acute{e}v\ \rho'(q')[t'] \geq C'|t|^2 dist(q,\mathbf{N})^L.$$

C'est-à-dire, $D'$ est pseudoconvexe dans un voisinage de l'origine. □

**Remarques 3.2.2**
*1) Comme $\widetilde{\theta}$ est presque-analytique par rapport à $\boldsymbol{N}$ alors pour tout $c \in \mathbb{R}$, $\widetilde{\theta}^{-1}(M'_c)$ est complexe-tangentielle ou vide, où $M'_c = \{(Z', w')\ /\ Y' = u' = 0$ et $v' = c\}$.*
*2) S'il existe deux constantes $c$ et $L$ positives telles qu'on ait*

$$\mathcal{L}\acute{e}v\ \rho(q)[t] \geq c|t|^2\ dist(q,\boldsymbol{M})^L, \text{ pour tout } q \in \widetilde{\mathcal{U}} \cap bD,$$

*alors la propriété $(\mathcal{H}_3)$ est vérifiée.*

Maintenant, nous introduisons les $Z$-poids et $Y$-poids de certaines fonctions de classe $C^\infty$ dans un voisinage d'un point $p = 0$ de la sous variété $\mathbf{M}$.

**Définition 3.2.1** *Soit $F$ une fonction de classe $C^\infty$ dans un voisinage $\mathcal{V}$ de l'origine de $\mathbb{C}^{n-1}$. On dit que $F$ admet un $Y$-poids $\mathcal{P}_Y(F) \geq S \geq 0$ $(S \in \mathbb{N})$, s'il existe une constante $C > 0$ telle que $|F(X,Y)| \leq C||Y||_*^S$, pour tout $Z = X + i.Y \in \mathcal{V}$. De même, $F$ admet un $Z$-poids $\mathcal{P}_Z(F) \geq R \geq S$ $(R \in \mathbb{N})$, s'il existe une constante $c > 0$ telle que $|F(X,Y)| \leq c||Z||_*^R$, pour tout $Z = X + i.Y \in \mathcal{V}$.*

**Remarques 3.2.3**
*1) Si $F(X,Y) = \sum_{I=(i_1,\ldots,i_{n-1})} F_I(X)\ Y^I$ est une fonction polynômiale en $Y$, alors on a :*

$$\mathcal{P}_Y(F) \geq S \Leftrightarrow F(X,Y) = \sum_{I=(i_1,\ldots,i_{n-1})} F_I(X)\ Y^I \text{ avec } \sum_{\nu=1}^{n-1} \widetilde{m}_\nu\ i_\nu \geq S.$$

*2) Si $F$ est une fonction polynômiale en $X$ et $Y$, alors on a :*

$$\mathcal{P}_Z(F) \geq R \Leftrightarrow F(X,Y) = \sum_{\substack{I=(i_1,\ldots,i_{n-1}) \\ J=(j_1,\ldots,j_{n-1})}} F_{I,J}\ X^J Y^I \text{ avec } \sum_{\nu=1}^{n-1} \widetilde{m}_\nu (i_\nu + j_\nu) \geq R.$$

*3) Si $\|Y\| \leq 1$ alors il existe une constante $c > 0$ telle que $\|Y\| \leq c||Y||_*$.*

**Preuve.**
1) Si $F(X,Y) = \sum_{I=(i_1,\ldots,i_{n-1})} F_I(X)\ Y^I$ avec $\sum_{\nu=1}^{n-1} \widetilde{m}_\nu\ i_\nu \geq S$ pour tout $I$ avec

$F_I \not\equiv 0$, alors l'implication est évidente.
Soit $\mathcal{P}_Y(F) \geq S$. On raisonne par l'absurde. Soit $S' < S$ minimal tel qu'il existe $X_0$ dans un voisinage de $0_{\mathbb{R}^{n-1}}$ et $Y_0 = (y_{0,1}, ..., y_{0,n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ vérifiant

$$\mu_0 = \sum_{I=(i_1,...,i_{n-1})} F_I(X_0)\ Y_0^I \neq 0 \text{ avec } \sum_{\nu=1}^{n-1} \widetilde{m}_\nu\ i_\nu = S'.$$

Considérons la fonction $\lambda \mapsto F(X_0, \phi_{Y_0}(\lambda))$ définie sur $]0, +\infty[$ avec $\phi_{Y_0}(\lambda) = \left(\lambda^{\widetilde{m}_1} y_{0,1}, ..., \lambda^{\widetilde{m}_{n-1}} y_{0,n-1}\right)$. On a $F(X_0, \phi_{Y_0}(\lambda)) = \lambda^{S'}\ \mu_0\ +\ O\left(\lambda^{S'+1}\right)$. Or, il existe une constante $c > 0$ telle que

$$|F(X_0, \phi_{Y_0}(\lambda))| = \left|\lambda^{S'}\ \mu_0\ +\ O\left(\lambda^{S'+1}\right)\right| \leq c\lambda^S \|Y_0\|_*^S.$$

On divise ce dernier par $\lambda^{S'}$. On obtient $\mu_0 = 0$ quand $\lambda$ tend vers $0^+$. D'où la contradiction.
2) Un raisonnement analogue est possible pour la deuxième équivalence.
3) Soit $\|Y\| \leq 1$. Alors, il existe une constante $c_1 > 0$ telle qu'on ait

$$\|Y\|^{2M} \leq c_1 \sum_{i=1}^{n-1} y_i^{2M}.$$

Or, $\sum_{i=1}^{n-1} y_i^{2M} = \sum_{i=1}^{n-1} y_i^{2m_i\widetilde{m}_i} \leq \sum_{i=1}^{n-1} y_i^{2m_i}$. Ceci implique $\|Y\|^{2M} \leq c_1 ||Y||_*^{2M}$. C'est-à-dire, il existe $c > 0$ tel qu'on ait $\|Y\| \leq c||Y||_*$. De même, si $|Z| \leq 1$ alors il existe une constante $C > 0$ telle qu'on ait $|Z| \leq C||Z||_*$. □
Dans le lemme suivant, on donne une version du lemme 2.4.1 dans le cas $C^\infty$.

**Lemme 3.2.8** *Soit $S, R \in \mathbb{N}$, $R \geq S$ et $F$ une fonction de classe $C^\infty$ dans un voisinage ouvert $\mathcal{V}$ suffisamment petit de l'origine de $\mathbb{C}^{n-1}$. On suppose que $F$ admet un Y-poids $\mathcal{P}_Y(F) \geq S$ et un Z-poids $\mathcal{P}_Z(F) \geq R$. Alors, il existe une constante $C > 0$ telle qu'on ait :*

$$|F(Z)| \leq C||Y||_*^S.||Z||_*^{R-S}, \quad \forall Z = X + i.Y \in \mathcal{V}.$$

**Preuve.**
Soit $Z = X + i.Y \in \mathcal{V}$. Écrivons le développement de Taylor avec reste intégrale de $F$ au point $(X, 0)$. On a

$$F(X,Y) = \sum_{|\alpha|<S} \frac{1}{\alpha!} D_Y^\alpha\ F(X,0)\ Y^\alpha + S. \sum_{|\alpha|=S} \left( \int_0^1 \frac{(1-\lambda)^{S-1}}{\alpha!}\ D_Y^\alpha F(X, \lambda.Y)\ d\lambda \right) Y^\alpha. \quad (3.4)$$

Remarquons que le deuxième terme à droite de l'équation (3.4) a pour ordre d'annulation $\geq S$ quand $Y = 0$.
Écrivons le développement de Taylor avec reste intégrale de $D_Y^\alpha F(X, \lambda.Y)$ au point $(0, \lambda.Y)$. On a

$$D_Y^\alpha F(X,\lambda.Y) = \sum_{|\beta|<R-S} \frac{1}{\beta!}\ D_X^\beta\ D_Y^\alpha\ F(0,\lambda.Y)\ X^\beta + (R-S).\sum_{|\beta|=R-S}\left(\int_0^1 \frac{(1-\mu)^{R-S-1}}{\beta!} D_X^\beta D_Y^\alpha F(\mu.X,\lambda.Y)\,d\mu\right)X^\beta. \quad (3.5)$$

À partir de (3.5), l'équation (3.4) devient

$$\begin{aligned} F(X,Y) =& \sum_{|\alpha|<S} \frac{1}{\alpha!} D_Y^\alpha\ F(X,0)\ Y^\alpha \\ &+ S.\sum_{\substack{|\alpha|=S\\|\beta|<R-S}} \left(\int_0^1 \frac{(1-\lambda)^{S-1}}{\alpha!\beta!} D_Y^\alpha D_X^\beta F(0,\lambda.Y)d\lambda\right) X^\beta Y^\alpha \\ +S.(R-S).&\sum_{\substack{|\alpha|=S\\|\beta|=R-S}} \left(\int_0^1\int_0^1 \frac{(1-\lambda)^{S-1}(1-\mu)^{R-S-1}}{\alpha!\beta!} D_X^\beta D_Y^\alpha\ F(\mu.X,\lambda.Y)d\mu d\lambda\right) X^\beta Y^\alpha. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Remarquons que le terme qui comprend la double intégrale dans l'équation (3.6) est majoré par $c_1\ ||Y||_*^S.||Z||_*^{R-S}$ où $c_1$ est une constante positive.
Pour le premier terme de l'équation (3.6) où $|\alpha| < S$, on écrit le développement de Taylor avec reste intégrale pour la fonction $D_Y^\alpha F(X,0)$ à l'origine. On a

$$D_Y^\alpha F(X,0) = \sum_{|\beta|<R-|\alpha|} \frac{1}{\beta!} D_X^\beta D_Y^\alpha\ F(0,0)\ X^\beta + \sum_{|\beta|=R-|\alpha|}\left(\int_0^1 \frac{|\beta|(1-\lambda)^{|\beta|-1}}{\beta!}\ D_X^\beta D_Y^\alpha\ F(\lambda.X,0)\ d\lambda\right)\ X^\beta. \quad (3.7)$$

Donc, $F(X,Y)$ s'écrit sous la forme suivante :

$$F = \mathcal{F}_1\ + \mathcal{F}_2\ + \mathcal{F}_3\ + \mathcal{F}_4, \quad \text{où}$$

- $\mathcal{F}_1(X,Y) = \sum_{\substack{|\alpha|<S\\|\beta|<R-|\alpha|}} \frac{1}{\alpha!\beta!}\ D_X^\beta D_Y^\alpha\ F(0,0)\ X^\beta Y^\alpha.$
- $\mathcal{F}_2(X,Y) = \sum_{\substack{|\alpha|<S\\|\beta|=R-|\alpha|}} \left(\int_0^1 \frac{|\beta|(1-\lambda)^{|\beta|-1}}{\alpha!\beta!}\ D_X^\beta D_Y^\alpha\ F(\lambda.X,0)\ d\lambda\right) X^\beta Y^\alpha.$

- $\mathcal{F}_3(X,Y) = S.\sum_{\substack{|\alpha|=S\\|\beta|<R-S}} \left(\int_0^1 \frac{(1-\lambda)^{S-1}}{\alpha!\beta!}\ D_X^\beta D_Y^\alpha\ F(0,\lambda.Y)\ d\lambda\right) X^\beta Y^\alpha.$
- $\mathcal{F}_4(X,Y) =$

$S(R-S).\sum_{\substack{|\alpha|=S\\|\beta|=R-S}} \left(\int_0^1\int_0^1 \frac{|\beta|(1-\mu)^{|\beta|-1}(1-\lambda)^{S-1}}{\alpha!\beta!} D_X^\beta D_Y^\alpha\ F(\mu.X,\lambda.Y)\ d\mu d\lambda\right) X^\beta Y^\alpha.$

Or, $\mathcal{P}_Y(F) \geq S$. Alors, on a $\mathcal{P}_Y(\mathcal{F}_1+\mathcal{F}_2) \geq S$. Comme $\mathcal{F}_1(X,Y)+\mathcal{F}_2(X,Y)$ s'écrit sous la forme $\sum_{\substack{|\alpha|<S\\|\beta|\leq R-|\alpha|}} \Gamma_{\alpha,\beta}(X)\ Y^\alpha$ alors, d'après la remarque 3.2.3, $\mathcal{F}_1+\mathcal{F}_2$ est identiquement nul.

Maintenant, on écrit le développement de Taylor avec reste intégrale pour $\mathcal{F}_3$ à l'origine. On a

$$\mathcal{F}_3(X,Y) = \sum_{\substack{|\alpha|=S\\|\beta|<R-S\\|\gamma|<R-|\beta|}} \left(\int_0^1 \frac{S(1-\lambda)^{S-1}\lambda^{|\gamma|}}{\alpha!\beta!\gamma!} D_Y^{\gamma+\alpha} D_X^\beta F(0,0) d\lambda\right) X^\beta Y^{\gamma+\alpha}$$
$$+S.\sum_{\substack{|\alpha|=S\\|\beta|<R-S\\|\gamma|=R-|\beta|}} \left(\int_0^1\int_0^1 \frac{(|\gamma|-1)(1-t)^{|\gamma|-1}(1-\lambda)^{S-1}\lambda^{|\gamma|}}{\alpha!\beta!\gamma!} D_Y^{\gamma+\alpha} D_X^\beta F(0,t\lambda.Y) dt d\lambda\right) X^\beta Y^{\gamma+\alpha}. \tag{3.8}$$

Remarquons que le deuxième terme à droite de l'équation (3.8) est majoré par $c_2\ ||Y||_*^S.||Z||_*^{R-S}$ où $c_2$ est une constante positive.
Or, $\mathcal{P}_Z(\mathcal{F}_3) \geq R$. D'après la remarque 3.2.3, le premier terme à droite de l'équation (3.8) est identiquement nul. D'où, il existe une constante $C>0$ telle qu'on ait : $|F(X,Y)| \leq C||Y||_*^S.||Z||_*^{R-S}$. □

## 3.3 Théorème principal et propriété d'interpolation.

**Théorème 3.3.1** *Soit $D$ un domaine pseudoconvexe de $\mathbb{C}^n$ à bord $bD$ de classe $C^\infty$. Soit $\boldsymbol{M}$ une sous variété $C^\infty$, de dimension $(n-1)$ de $bD$, totalement réelle, complexe-tangentielle dans un voisinage $\mathcal{U}$ d'un point $p \in \boldsymbol{M}$. On suppose que*

- *il existe deux constantes $C$ et $L$ positives telles qu'on ait dans un voisinage $\mathcal{U}$ de $p \in \boldsymbol{M}$,*

$$\mathcal{L}\acute{e}v\ \rho(q)\,[t] \geq C|t|^2\ dist(q,\boldsymbol{M})^L,\ pour\ tout\ q \in \mathcal{U} \cap bD. \qquad (\mathcal{H}'_3)$$

• ***M*** *admet un champ de vecteurs* ***X*** *de classe $C^\infty$, pic-admissible de pic-type $(K, M; \widetilde{m}_1, ..., \widetilde{m}_{n-1})$ au voisinage de $p$ pour $A^\infty$.*
*Alors,*
*i) la sous variété* ***M*** *est un ensemble localement pic en $p$ pour la classe $A^\infty$.*
*ii) la sous variété* ***M*** *est un ensemble localement d'interpolation en $p$ pour la classe $A^\infty$.*

**Preuve.**
Nous allons suivre les idées de M. Hakim et N. Sibony dans [H-S1].

i) Les changements de variables presque-analytiques jusqu'à alors définis ont les propriétés suivantes : le point $p$ est ramené à l'origine et dans un voisinage suffisamment petit de l'origine de $\mathbb{C}^n$, $M' = \widetilde{\theta}(\mathbf{M})$ est donnée par $\{(Z', w')\ /\ Y' = w' = 0\}$ , $D' = \widetilde{\theta}(D)$ a pour fonction définissante $\rho'$ de la forme $u' + A(Z') + v'B(Z') + v'^2R(Z', v')$. De plus, $M'$ est contenue dans la sous variété $N' = \{(Z', w')\ /\ Y' = 0 \text{ et } u' = 0\}$ totalement réelle, de dimension $n$ de $bD'$.

D'après le lemme 3.2.7, la condition $(\mathcal{H}'_3)$ nous garantit que $D'$ est un domaine pseudoconvexe dans un voisinage de l'origine. L'hypothèse faite sur $\mathbf{M}$ d'avoir un champ de vecteurs $\mathbf{X}$, $C^\infty$, pic-admissible de pic type $(K, M; \widetilde{m}_1, ..., \widetilde{m}_{n-1})$ entraîne la propriété suivante :

$(\mathcal{H})$ *Il existe deux constantes $0 < c'_1 \leq c'_2$ telles que, pour tout $Z' = X' + i.Y'$ proche de l'origine de $\mathbb{C}^{n-1}$, on ait :*
$c'_1||Y'||_*^{2M}.||Z'||_*^{2K-2M} \leq A(Z') \leq c'_2||Y'||_*^{2M}.||Z'||_*^{2K-2M}$.

La propriété $(\mathcal{H})$ et le lemme 3.2.8 nous permettent de montrer que $\frac{B^2}{A}$ est uniformément borné dans un voisinage suffisamment petit de l'origine de $\mathbb{C}^{n-1}$. D'après la proposition 2.3.1, il existe une fonction $\widetilde{\psi}(w') = \frac{w'}{1-2K_1w'}$ presque-analytique définie sur un voisinage ouvert suffisamment petit $\mathcal{U}'$ de l'origine de $\mathbb{C}^n$ ($K_1$ étant une constante positive bien choisie) telle qu'on ait

$$\begin{cases} \Re\widetilde{\psi} < 0 \text{ sur } \overline{D'} \cap \mathcal{U}' \text{ si } w' \neq 0 \\ \widetilde{\psi} = 0 \text{ si } w' = 0 \end{cases}.$$

Comme $|\widetilde{\psi}(w')| \lesssim |w'|$ alors, pour tout $(Z', w') \in \overline{D'} \cap \mathcal{U}'$, on a

$$\begin{aligned} A(Z') &= \rho'(Z', w') - v'\ B(Z') - v'^2\ R(Z', v') - \ u' \\ &\leq -v'\ B(Z') - v'^2\ R(Z', v') - \ u' \\ &\lesssim |u'| + |v'| \\ &\lesssim |w'|. \end{aligned}$$

De plus, comme $\mathcal{U}'$ est suffisamment petit alors on a

$$dist((Z', w'), M') \lesssim ||Y'|| + |w'|. \tag{3.9}$$

Or, $||Y'||_*^{2M} ||Z'||_*^{2(K-M)} \lesssim A(Z') \lesssim |w'|$. Comme $||Y'||_* \leq ||Z'||_*$, on obtient $||Y'||_*^{2K} \lesssim |w'|$. D'après la remarque 3.2.3 3), si $||Y'|| < 1$ alors $||Y'||^{2K} \leq ||Y'||_*^{2K} \lesssim |w'|$. Donc, pour tout $(Z', w') \in \overline{D'} \cap \mathcal{U}'$, l'inégalité (3.9) implique

$$dist((Z', w'), M') \lesssim |w'|^{\frac{1}{2K}}.$$

Ceci entraîne deux conséquences :

a) $\overline{\partial}'\left(\frac{1}{\widetilde{\psi}}\right)$ se prolonge dans la classe $C^\infty$ de $\mathcal{U}' \cap D'$ à $\mathcal{U}' \cap \overline{D'}$.

b) Si $F \in C^\infty(\mathcal{U}' \cap D')$ est presque-analytique par rapport à $N'$ alors $\frac{1}{\widetilde{\psi}}\overline{\partial}' F$ se prolonge dans la classe $C^\infty\left(\mathcal{U}' \cap \overline{D'}\right)$.

(Ici $\overline{\partial}'$ désigne l'opérateur de $\overline{\partial}$ sur $D$ transporté vers $D'$. C'est-à-dire, notons $\widetilde{\Psi} := \widetilde{\theta}^{-1}$. Alors, si $f'$ est une fonction sur $\mathcal{U}' \cap D'$, on a $\overline{\partial}' f' = \widetilde{\Psi}^*\left(\overline{\partial}\left(f' \circ \widetilde{\theta}\right)\right)$ où $\widetilde{\Psi}^*$ désigne l'image-réciproque de $\widetilde{\Psi}$).

En effet, montrons d'abord a).

a) sur $\mathcal{U}' \cap D'$, on a : $\overline{\partial}'\left(\frac{1}{\widetilde{\psi}}\right) = -\left(\frac{1-2K_1 w'}{w'}\right)^2 \overline{\partial}'\widetilde{\psi}$. Or, $\widetilde{\psi}$ est presque-analytique par rapport à $N'$. Alors, pour tout $L \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $(Z', w') \in \mathcal{U}' \cap \overline{D'}$, on a

$$|\overline{\partial}'\widetilde{\psi}(w')| \lesssim\ dist((Z', w'), N')^L \lesssim\ dist((Z', w'), M')^L \lesssim |w'|^{\frac{L}{2K}}. \tag{3.10}$$

b) Avec un raisonnement analogue, pour tout $(Z', w') \in \mathcal{U}' \cap \overline{D'}$ et pour tout $L \in \mathbb{N}^*$, on a

$$|\overline{\partial}' F(Z', w')| \lesssim dist((Z', w'), M')^L \lesssim |w'|^{\frac{L}{2K}}.$$

On en déduit à partir de (3.10) que la $(0,1)$-forme $\overline{\partial}'\left(\frac{1}{\widetilde{\psi}}\right)$ est dans $C^\infty\left(\mathcal{U}'\cap\overline{D'}\right)$. De plus, elle est $\overline{\partial}'$-fermée. On pose $\psi=\widetilde{\psi}\circ\widetilde{\theta}$. D'où $\overline{\partial}\left(\frac{1}{\psi}\right)$ est une $(0,1)$-forme $\overline{\partial}$-fermée dans $C^\infty\left(\mathcal{U}\cap\overline{D}\right)$.
Soient $0<\varepsilon<<1$ telle que la boule $\overline{B\left(0,\varepsilon\right)}\subset\mathcal{U}$ et $bB\left(0,\varepsilon\right)\cap bD$ soit une intersection transversale. D'après le corollaire 2 de J. Michel [Mi], il existe une fonction $g\in C^\infty\left(\overline{B(0,\varepsilon)\cap D}\right)$ telle qu'on ait $\overline{\partial}g=\overline{\partial}\left(\frac{1}{\psi}\right)$ sur $\overline{B(0,\varepsilon)\cap D}$. En additionnant une constante, on peut supposer que $\Re g>0$. Pour $\varepsilon$ suffisamment petit, on a $|g\psi|\leq\frac{1}{2}$ sur $\overline{B(0,\varepsilon)\cap D}$. Considérons maintenant la fonction $h=\frac{\psi}{1-g\psi}$. Il est clair que $h\in C^\infty\left(\overline{B\left(0,\varepsilon\right)\cap D}\right)$.
Comme

$$\overline{\partial}h=-\frac{1}{\left(\frac{1}{\psi}-g\right)^2}\,\overline{\partial}\left(\frac{1}{\psi}-g\right)=0 \text{ sur } B\left(0,\varepsilon\right)\cap D,$$

on obtient que $h\in A^\infty\left(B\left(0,\varepsilon\right)\cap D\right)$. Comme $\psi\Big|_{\mathbf{M}}=0$ alors $h\Big|_{\mathbf{M}}=0$.
De plus, pour $(Z,w)\in\overline{B\left(0,\varepsilon\right)\cap D}\backslash\mathbf{M}$, on a

$$\Re h=\Re\left(\frac{1}{\frac{1}{\psi}-g}\right)=\frac{\frac{\Re\psi}{|\psi|^2}-\Re\overline{g}}{|\frac{1}{\psi}-g|^2}<0.$$

D'où, $\mathbf{M}$ est un ensemble localement pic en $p$ pour la classe $A^\infty$.

ii) Soit $F\in C^\infty\left(\overline{\mathbf{M}\cap B\left(0,\varepsilon_1\right)}\right)$ avec $0<\varepsilon_1\leq\varepsilon$. Notons $\widetilde{F}$ le prolongement presque-analytique de $F$ à $B\left(0,\varepsilon_2\right)$ par rapport à $\mathbf{N}$ avec $\varepsilon_2\leq\varepsilon_1$. D'après b), la $(0,1)$-forme $\frac{1}{\psi}\,\overline{\partial}\widetilde{F}$ se prolonge dans la classe $C^\infty$ sur $\overline{B\left(0,\varepsilon_2\right)\cap D}$. Comme $\frac{1}{h}=(1-g\psi)\,\frac{1}{\psi}$ alors $\frac{1}{h}\,\overline{\partial}\widetilde{F}$ est $\overline{\partial}$-fermée sur $B\left(0,\varepsilon_2\right)\cap D$. De plus, $\frac{1}{h}\,\overline{\partial}\widetilde{F}$ se prolonge dans la classe $C^\infty\left(\overline{B\left(0,\varepsilon_2\right)\cap D}\right)$.
Soit $0<\varepsilon_3\leq\varepsilon_2$ tel que $bB\left(0,\varepsilon_3\right)\cap bD$ soit une intersection transversale. D'après le corollaire 2 de J. Michel [Mi], il existe une fonction $G\in C^\infty\left(\overline{B\left(0,\varepsilon_3\right)\cap D}\right)$ telle que $\overline{\partial}G=\frac{1}{h}\,\overline{\partial}\,\widetilde{F}$ sur $\overline{B\left(0,\varepsilon_3\right)\cap D}$.
Considérons maintenant la fonction $f=\widetilde{F}-hG$ définie sur $\overline{B\left(0,\varepsilon_3\right)\cap D}$. Il est clair que $f\in C^\infty\left(\overline{B\left(0,\varepsilon_3\right)\cap D}\right)$. De plus, on a

$f\Big|_{\mathbf{M}\cap\overline{B(0,\varepsilon_3)}}=\widetilde{F}\Big|_{\mathbf{M}\cap\overline{B(0,\varepsilon_3)}}=F$ et $\overline{\partial}f=\overline{\partial}\widetilde{F}-h\,\overline{\partial}G=0$. Ceci achève la preuve du théorème. □

# Chapitre 4

# Conséquences des hypothèses suffisantes pour le multitype

Dans ce chapitre, nous étudions le multitype sur $\mathbf{M}$, où $\mathbf{M}$ est une sous variété totalement réelle, complexe-tangentielle, de dimension $(n-1)$ de $bD$ d'un domaine $D$ faiblement pseudoconvexe de $\mathbb{C}^n$ admettant un champ de vecteurs $\mathbf{X}$ pic-admissible de pic-type $(K, M; \widetilde{m}_1, ..., \widetilde{m}_{n-1})$ en un point $p \in \mathbf{M}$. D'abord, on commence à rappeler quelques définitions et des remarques concernant la notion de multitype. Puis, on donne les conséquences de nos hypothèses suffisantes pour le multitype en un point de $\mathbf{M}$.

## 4.1 Définitions et remarques.

Soit $D$ un domaine de $\mathbb{C}^n$ à bord $bD$ de classe $C^\infty$. Soit $\rho$ la fonction définissante de $D$ en un point $p \in bD$. Notons $\Gamma_n$ l'ensemble de $\Lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n)$ où $1 \leq \lambda_j \leq +\infty$ pour tout $j$ vérifiant les propriétés suivantes :

1) $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_n$.

2) Pour chaque $k$, on a si $\lambda_k \neq \infty$ qu'il existe un ensemble de nombres entiers positifs $\{a_1, ..., a_k\}$ où $a_k > 0$ tel que

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{\lambda_i} = 1.$$

Un élément de $\Gamma_n$ est appelé poids. Soit $\Gamma_n$ ordonné par un ordre lexicographique. C'est-à-dire, pour $\Lambda' = (\lambda'_1, ..., \lambda'_n) \in \Gamma_n$ et $\Lambda'' = (\lambda''_1, ..., \lambda''_n) \in \Gamma_n$,

on pose $\Lambda' < \Lambda''$ si pour un $k$, on a $\begin{cases} \lambda'_j = \lambda''_j, \forall j < k \\ \lambda'_k < \lambda''_k \end{cases}$. On pose $\Lambda' \leq \Lambda''$ si $\Lambda' < \Lambda''$ ou $\Lambda' = \Lambda''$. On dit qu'un poids $\Lambda$ est distingué, s'il existe un changement de coordonnées holomorphe $(z_1, ..., z_n)$ qui ramène $p$ à l'origine vérifiant la propriété suivante :

$$\text{Si} \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i + \beta_i}{\lambda_i} < 1 \quad \text{alors} \quad D^\alpha \overline{D}^\beta \rho\,(0) = 0, \tag{4.1}$$

où $D^\alpha$ et $\overline{D}^\beta$ désignent les opérateurs différentiels partiels suivants :

$$\frac{\partial^{\alpha_1+...+\alpha_n}}{\partial z_1^{\alpha_1}...\partial z_n^{\alpha_n}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^{\beta_1+...+\beta_n}}{\partial \overline{z}_1^{\beta_1}...\partial \overline{z}_n^{\beta_n}} \text{ respectifs.}$$

Le multitype $\mathcal{M}\,(bD, p)$ correspond au plus petit poids $\mathcal{M} = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ de $\Gamma_n$, au sens lexicographique, tel que $\Lambda \leq \mathcal{M}$ pour tout poids distingué $\Lambda \in \Gamma_n$. On remarque que $\lambda_1 = 1$ car $d\rho\,(0) \neq 0$ (on peut supposer que $\frac{\partial \rho}{\partial z_1}\,(0) \neq 0$).

De même, un poids $\Lambda$ est dit linéairement distingué, s'il existe un changement de coordonnées $\mathbb{C}$-affine qui ramène $p$ à l'origine vérifiant la propriété (4.1). Le multitype linéaire, noté $\mathcal{L}\,(bD, p)$, est le plus petit poids $\mathcal{L} = (l_1, ..., l_n)$ tel que $\Lambda \leq \mathcal{L}$ pour tout poids linéairement distingué $\Lambda \in \Gamma_n$. Il est clair que $\mathcal{L}\,(bD, p) \leq \mathcal{M}\,(bD, p)$.

Maintenant, le $q$-type ("$q$-variety type"), noté $\Delta_q\,(bD, p)$, au sens de D'Angelo [DA], est défini comme suit :
Pour $q = 1$,

$$\Delta_1\,(bD, p) = \sup_z \{\frac{\nu\,(z^*\rho)}{\nu\,(z)}\}.$$

Ici, la borne supérieure est donnée sur l'ensemble des germes d'une courbe holomorphe non trivial $z : (\mathbb{C}, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^n, p)$, $\nu\,(f)$ désigne l'ordre d'annulation de la fonction $f\,(z) - p$ et $z^*\rho = \rho \circ z$.
Le 1-type mesure l'ordre de contact maximal d'une courbe complexe de dimension 1 avec le bord $bD$ en $p$.
Pour $q \geq 2$, le $q$-type au sens de D'Angelo est en lien étroit avec le multitype au sens de D. Catlin (voir [Ca]). Il est donné par :

$$\Delta_q\,(bD, p) = \inf_S \Delta_1\,(bD \cap S, p),$$

où $S$ est un plan affine complexe de dimension $n-q+1$ passant par $p$.
Nous rappelons la propriété (4) du théorème principal de D. Catlin dans [Ca] : si $\mathcal{M}(bD,p)=(\mu_1,...,\mu_n)$ alors, pour chaque $q=1,...,n$, on a

$$\mu_{n+1-q}\leq\Delta_q(bD,p),$$

où $\Delta_q(bD,p)$ est le $q$-type, au sens de D'Angelo, en $p$.

## 4.2 Le multitype sur M pour la classe $\mathcal{O}$.

**Lemme 4.2.1** *Soit $D$ un domaine pseudoconvexe de $\mathbb{C}^n$ à bord $bD$ de classe $C^\omega$. Soit $\boldsymbol{M}$ une sous variété $C^\omega$, de dimension $(n-1)$ de $bD$, totalement réelle, complexe-tangentielle dans un voisinage $\mathcal{U}$ d'un point $p\in\boldsymbol{M}$. On suppose que $\boldsymbol{M}$ admet un champ de vecteurs $\mathbf{X}$, $C^\omega$, pic-admissible de pic-type $(K,M;\widetilde{m}_1,...,\widetilde{m}_{n-1})$ en $p$ pour la classe $\mathcal{O}$. Alors,*

*i) le multitype de $bD$ en $p\in\boldsymbol{M}$ est*

$$\mathcal{M}(bD,p)=(\Delta_n(bD,p),...,\Delta_1(bD,p))=(1,2k_1,...,2k_{n-1}).$$

*ii) le multitype de $bD$ en $p'\in\boldsymbol{M}\cap\mathcal{U}-\{p\}$ est*

$$\mathcal{M}(bD,p')=(\Delta_n(bD,p'),...,\Delta_1(bD,p'))=(1,2m_1,...,2m_{n-1}).$$

*Ici, pour tout $1\leq j\leq n-1$, $m_j=\frac{M}{\widetilde{m}_j}$, $k_j=\frac{K}{\widetilde{m}_j}$.*

**Preuve.**

i) D'abord, on sait que le multitype en un point $p$ du bord d'un domaine $D$ de $\mathbb{C}^n$ à bord $bD$ de classe $C^\infty$ est invariant si on effectue un changement de coordonnées biholomorphe au voisinage de $p$. Le lemme 2.3.1 montre qu'il existe un changement de coordonnées biholomorphe, noté $\theta$, tel que le point $p\in\mathbf{M}$ soit l'origine et dans un voisinage de l'origine de $\mathbb{C}^n$, la fonction définissante $\rho'$ du bord de $D'=\theta(D)$ soit $\rho'=u'+A+v'B+v'^2R$. Par hypothèse, la sous variété $\mathbf{M}$ admet un champ de vecteurs $\mathbf{X}$, $C^\omega$, pic-admissible de pic-type $(K,M;\widetilde{m}_1,...,\widetilde{m}_{n-1})$ pour la classe $\mathcal{O}$. Alors, on a la propriété $(\mathcal{H})$ sur $A$ par rapport aux nouvelles coordonnées. Ainsi, on peut identifier la complexifiée $\widetilde{\mathbf{M}}=\mathbf{M}+i.\mathbf{M}$ de $\mathbf{M}$ à $\mathbb{C}^{n-1}=T_0^{\mathbb{C}}(bD')$ et de supposer que $\rho'\Big|_{\widetilde{\mathbf{M}}}\equiv A$ dans un voisinage ouvert suffisamment petit de l'origine de $\mathbb{C}^{n-1}$.

Soit $Z'_0 = X'_0 + i.Y'_0 \neq 0$ assez proche de l'origine de $\mathbb{C}^{n-1}$ fixé. Considérons maintenant la fonction $f(\lambda) = A(\lambda Z'_0)$ pour $\lambda \in [0,1]$. Notons $m = \max\limits_{1\leq i\leq n-1} m_i$, $m' = \min\limits_{1\leq i\leq n-1} m_i$ et $\kappa = \frac{K}{M} \geq 1$. Comme

$$f(\lambda) \approx \left(\sum_{i=1}^{n-1} \lambda^{2m_i} y'^{2m_i}_{0,i}\right)\left(\sum_{i=1}^{n-1} \lambda^{2m_i}\left(x'^{2m_i}_{0,i} + y'^{2m_i}_{0,i}\right)\right)^{\kappa-1},$$

on a

$$\lambda^{2m\kappa} f(1) \lesssim f(\lambda) \lesssim \lambda^{2m'\kappa} f(1).$$

Donc, on obtient

$$\frac{f(1)}{2m\kappa+1} \lesssim \int_0^1 f(\lambda)\, d\lambda \lesssim \frac{f(1)}{2m'\kappa+1}.$$

D'après la remarque 4 de H. Boas et E. Straube dans [B-S], le 1-type de $bD'$ en 0 est égal au type linéaire dans ce système de coordonnées. C'est-à-dire

$$\Delta_1(bD', 0) = \Delta(bD', 0) := \sup_{\substack{v\in\mathbb{C}^n \\ |v|=1}} (\rho' \circ \ell_v),$$

où $\ell_v : \begin{cases} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^n \\ \zeta \longmapsto \zeta.v \end{cases}$ est une droite complexe passant par l'origine et de vecteur directeur $v$. La propriété $(\mathcal{H})$ implique $\Delta(bD', 0) = 2k_{n-1}$. En effet, soit $v = (v', v_n) \in \mathbb{C}^n$ où $v' = (v_1, ..., v_{n-1})$ tel que $|v| = 1$. Pour tout $\zeta \in \mathbb{C}$, on a

$$\rho \circ \ell_v(\zeta) = \Re(\zeta v_n) + A(\zeta.v') + \Im(\zeta v_n) B(\zeta.v') + (\Im(\zeta v_n))^2 R(\zeta.v', \Im(\zeta v_n)).$$

Si $v_n \neq 0$, l'ordre de contact de $v$ avec le bord $bD'$ à l'origine vaut 1.
Soit $v_n = 0$. Dans ce cas, on a $\rho \circ \ell_v(\zeta) = A(\zeta.v')$. Si on choisit $v_0 = (0, ...0, \underbrace{1}_{n-1}, 0)$ alors $\rho \circ \ell_{v_0}(\zeta) = A(0', \zeta)$. Or, il existe deux contantes $0 < c_1 \leq c_2$ telles que, pour tout $\zeta \in \mathbb{C}$, on ait

$$c_1 (\Im\zeta)^{2k_{n-1}} \leq \rho \circ \ell_{v_0}(\zeta) \leq c_2 |\zeta|^{2k_{n-1}}.$$

Donc, l'ordre de contact de la droite complexe $\ell_{v_0}$ avec le bord $bD'$ en 0 est $2k_{n-1}$.
Soit maintenant $v' \in \mathbb{C}^{n-1}$ avec $|v'| = 1$. On pose $j_0 = \max\limits_{1\leq j\leq n-1} \{j \ / \ v_j \neq 0\}$. Dans ce cas, il existe une constante $c > 0$ telle qu'on ait

$$A\left(\zeta.v'\right) \geq c||\Im(\zeta.v')||_*^{2K} \gtrsim \left(\Im\left(\zeta v_{j_0}\right)\right)^{2k_{n-1}}.$$

D'où, l'ordre de contact de la droite complexe $\ell_v$ avec le bord $bD'$ à l'origine est au plus $2k_{n-1}$. Donc, l'ordre maximal de contact de toute droite complexe avec $bD'$ en 0 est égal à $2k_{n-1}$.

Maintenant, nous montrons que le poids $\Lambda_0 = (1, 2k_1, ..., 2k_{n-1})$ est linéairement distingué en 0. Soit $F$ le changement de coordonnées $\mathbb{C}$-linéaire suivant :

$$Z = (z_1, ..., z_n) \longmapsto (z_n, z_1, z_2, ..., z_{n-1}).$$

Notons $\widetilde{Z} = (\widetilde{z}_1, \widetilde{Z}') = F\left(Z\right)$ avec $\widetilde{Z}' = (\widetilde{z}_2, ..., \widetilde{z}_n)$ et $\widetilde{\rho} = \rho' \circ F^{-1}$. Comme $\widetilde{\rho}(\widetilde{Z}) = \Re(\widetilde{z}_1) \ + A(\widetilde{Z}') \ + (\Im\widetilde{z}_1)B(\widetilde{Z}') \ + (\Im\widetilde{z}_1)^2 \, R(\widetilde{Z}', \Im\widetilde{z}_1)$ alors $\frac{\partial\widetilde{\rho}}{\partial\widetilde{z}_1}\left(0\right) \neq 0$ car $\frac{\partial\rho'}{\partial z_n}\left(0\right) \neq 0$. Ceci implique $\alpha_1 = \beta_1 = 0$ pour la propriété (4.1). Il suffit de montrer que :

$$\sum_{i=2}^{n} \frac{\alpha_i + \beta_i}{2k_{i-1}} < 1 \quad \text{implique} \quad D^{\alpha}\overline{D}^{\beta} A\left(0\right) = 0.$$

En effet, soit $\alpha = (\alpha_2, ..., \alpha_n)$, $\beta = (\beta_2, ..., \beta_n) \in \mathbb{N}^{n-1}$ tels que $\sum_{\nu=2}^{n} \frac{\alpha_\nu + \beta_\nu}{2k_{\nu-1}} < 1$. Alors, on a $\sum_{\nu=2}^{n} \widetilde{m}_{\nu-1}\left(\alpha_\nu + \beta_\nu\right) < 2K$. La fonction $A$ étant analytique réelle au voisinage de l'origine de $\mathbb{C}^{n-1}$ alors $A$ s'écrit $A\left(X, Y\right) = \sum_{\substack{I=(i_2,...,i_n) \\ J=(j_2,...,j_n)}} A_{I,J} X^J Y^I$ où $X = (x_2, ..., x_n)$ et $Y = (y_2, ..., y_n)$. On sait que le $Z$-poids de $A$ est $\mathcal{P}_Z\left(A\right) \geq 2K$. D'après la remarque 3.2.3, on a $\sum_{\nu=2}^{n} \widetilde{m}_\nu\left(i_\nu + j_\nu\right) \geq 2K$. Calculons le $Z$-poids de la fonction $D^{\alpha}\overline{D}^{\beta} \ A$. On trouve que

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_Z\left(D^{\alpha}\overline{D}^{\beta} A\right) &\geq \sum_{\nu=2}^{n} \widetilde{m}_{\nu-1} \ \left(i_\nu + j_\nu - \alpha_\nu - \beta_\nu\right) \\ &\geq \sum_{\nu=2}^{n} \widetilde{m}_{\nu-1} \ \left(i_\nu + j_\nu\right) - \sum_{\nu=2}^{n} \widetilde{m}_{\nu-1} \ \left(\alpha_\nu + \beta_\nu\right) > 0. \end{aligned}$$

On obtient $D^{\alpha}\overline{D}^{\beta} A\left(0\right) = 0$. D'où, $\Lambda_0$ est linéairement distingué. Alors, on a $\Lambda_0 \leq \mathcal{M}\left(bD', 0\right)$.

Il reste à prouver que $\mathcal{M}(bD',0) \leq \Lambda_0$. Notons $\mathcal{M}(bD',0) = (\mu_1,...,\mu_n)$. D'après la propriété (4) de théorème de D. Catlin dans [Ca], on a

$$\mu_{n+1-q} \leq \Delta_q(bD',0) \quad \text{pour tout } q = 1,...,n.$$

Il suffit de prouver que pour tout $1 \leq q \leq n-1$, $\Delta_q(bD',0) = 2k_{n-q}$.
• Pour $q = 1$, on sait déjà de ce qui précède que $\Delta_1(bD',0) = 2k_{n-1}$.
• Pour $2 \leq q \leq n-1$ fixé. Soit $\{e_1,...,e_n\}$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$ avec $T_0^{\mathbb{C}}(bD')$=Vect$\{e_1,...,e_{n-1}\}$. Considérons $V_q$=Vect$\{e_{n-q},...,e_{n-1}\}$ et $S$ un plan complexe de dimension $(n-q+1)$ de $\mathbb{C}^n$.
Comme

$$\begin{aligned} \dim(V_q \cap S) &= \dim V_q + \dim S - \dim(V_q + S) \\ &\geq q + n - q + 1 - n = 1, \end{aligned}$$

il existe une droite complexe $\ell$ dans $S \cap V_q$ avec un ordre de contact $\geq 2k_{n-q}$ avec le bord $bD'$ en 0. Donc, $\Delta_q(bD',0) = \inf_S \Delta_1(S \cap bD',0) \geq 2k_{n-q}$. Or, pour $\widetilde{S}$=Vect$\{e_1,...,e_{n-q},e_n\}$, on a $\widetilde{S} \cap V_q$=Vect$\{e_{n-q}\}$. Donc, $\Delta_1(\widetilde{S} \cap bD',0) = 2k_{n-q}$. Ainsi, on obtient

$$\mathcal{M}(bD',0) \leq (\Delta_n(bD',0),...,\Delta_1(bD',0)) = (1,2k_1,...,2k_{n-1}).$$

Avec $\Lambda_0 = (1,2k_1,...,2k_{n-1}) \leq \mathcal{M}(bD',0)$, on obtient finalement

$$\mathcal{M}(bD',0) = (\Delta_n(bD',0),...,\Delta_1(bD',0)) = (1,2k_1,...,2k_{n-1}).$$

ii) Soit $p' \in \mathbf{M} \cap \mathcal{U} - \{p\}$, on prend le même système des coordonnées comme précédemment. On pose $\theta(p') = \widetilde{p}' \neq 0$. $\widetilde{p}'$ est un point du bord $bD'$ assez proche de l'origine tel que $\Re(\widetilde{p}') \neq 0$. Soit $Z_0' = X_0' + i.Y_0' \in \mathbb{C}^{n-1}$, assez proche de l'origine, fixé tel que $Y_0' \neq 0$. On considère la même fonction $f(\lambda) = A(\lambda Z_0' + \widetilde{p}')$, $\lambda \in [0,1]$. Ainsi, il existe 2 constantes $0 < c_1 \leq c_2$ qui dépendent du point $\widetilde{p}'$ vérifiant l'inégalité suivante :

$$c_1 \sum_{i=1}^{n-1} \lambda^{2m_i}\ y_{0,i}'^{2m_i} \lesssim f(\lambda) \lesssim c_2 \sum_{i=1}^{n-1} \lambda^{2m_i}\ y_{0,i}'^{2m_i}.$$

Donc, on a : $\lambda^{2m}\ f(1) \lesssim f(\lambda) \lesssim f(1)\ \lambda^{2m'}$. Alors, on obtient

$$\frac{f(1)}{2m+1} \lesssim \int_0^1 f(\lambda)\ d\lambda \lesssim \frac{f(1)}{2m'+1},$$

avec des constantes qui dépendent du point $\widetilde{p}'$. Ainsi, d'après la remarque 4 de H. Boas et E. Straube dans [B-S], le 1-type de $\widetilde{p}'$ est égal au type linéaire. Donc, $\Delta_1(bD', \widetilde{p}') = 2m_{n-1}$. De même, on montre que le poids $\Lambda_{\widetilde{p}'} = (1, 2m_1, ..., 2m_{n-1})$ est linéairement distingué. Puis, on procède de la même façon à celle de i) pour avoir l'autre inégalité, on retrouve ii). □

**Exemple 4.2.1** *Dans l'exemple 2.5.1, on a* $\widetilde{m}_1 = \widetilde{m}_2 = \widetilde{k}_1 = \widetilde{k}_2 = 1$, $M = 1$, $K = 2$. *Donc* $\mathcal{M}(p = 0) = (1, 4, 4)$ *et* $\mathcal{M}(p' \in \boldsymbol{M} - \{p = 0\}) = (1, 2, 2)$.

## 4.3 Le multitype sur M pour la classe $A^\infty$.

Avant de donner un résultat analogue à celui du lemme 4.2.1 concernant le multitype d'un point $p \in \mathbf{M}$ pour la classe $A^\infty$, nous avons besoin du lemme suivant :

**Lemme 4.3.1** *Soit* $\widetilde{\theta} : Z \longmapsto Z'$ *le prolongement presque-analytique de* $\theta$ *par rapport à* $\boldsymbol{N} \cap \mathcal{U}$ *tel que* $\widetilde{\theta}(p) = p'$ *(donné dans le lemme 3.2.3), où* $\mathcal{U}$ *est un voisinage ouvert de* $p \in \boldsymbol{M}$ *dans* $\mathbb{C}^n$. *Alors, le multitype* $\mathcal{M}(bD, p)$ *de* $p \in \boldsymbol{M} \cap \mathcal{U}$ *pour le bord de* $D$ *est égal au multitype* $\mathcal{M}(bD', p')$ *de* $p'$ *pour le bord de* $D' = \widetilde{\theta}(D)$.

La preuve de ce lemme nécessite un résultat auxiliaire donné dans le lemme ci-dessous.

**Lemme 4.3.2** *Soit* $f$ *une fonction de classe* $C^\infty$ *définie dans un voisinage* $\widetilde{V}$ *de l'origine de* $\mathbb{C}^n$ *et presque-analytique par rapport à* $\mathbb{R}^n \cap \widetilde{V}$. *Soit* $R > 1$ *et* $p' \in \mathbb{R}^n \cap \widetilde{V}$. *Alors, on a*

$$f(Z') = \sum_{|I|<R} \frac{1}{I!} \frac{\partial^{|I|} f(p')}{\partial Z'^I} (Z' - p')^I + O_R(Z'),$$

*où* $O_R(Z')$ *s'annule à un ordre* $\geq R$ *en* $p'$.

**Preuve du lemme 4.3.2.**
Écrivons le développement de Taylor de $f$ en $p'$ à l'ordre $R$. Pour $Z' = (z'_1, ..., z'_n) \in \widetilde{V}$, on a

$$f(Z') = \sum_{|I|+|J|<R} \frac{1}{I!J!} \frac{\partial^{|I|+|J|} f(p')}{\partial Z'^I \partial \overline{Z}'^J} (Z' - p')^I \overline{(Z' - p')}^J + O_R(Z'),$$

où $O_R(Z')$ s'annule à un ordre $\geq R$ en $p'$.
Posons $l_0 = \min\{l \in \mathbb{N}^* \ / \ \sum_{\substack{|I|+|J|=l \\ |J|\geq 1}} \frac{1}{I!J!} \frac{\partial^{|I|+|J|} f(p')}{\partial Z'^I \partial \overline{Z'}^J} (Z'-p')^I \overline{(Z'-p')}^J \not\equiv 0\}$.
Si $l_0 < R$, $f$ s'écrit sous la forme suivante :

$$f(Z') = P_{l_0}(Z') + O_{l_0+1}(Z'),$$

où $P_{l_0}$ est un polynôme homogène en $Z'$ et $\overline{Z}'$ de degré $l_0 \geq 1$ et $O_{l_0+1}(Z')$ s'annule à un ordre $\geq l_0+1$ en $p'$. Or, $f$ est presque-analytique par rapport à $\mathbb{R}^n \cap \widetilde{V}$. Donc, pour chaque $1 \leq j \leq n$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}'_j}(Z') = \frac{\partial P_{l_0}}{\partial \overline{z}'_j}(Z') + O_{l_0}(Z') = O_{R-1}(Z').$$

Ceci implique, pour tout $1 \leq j \leq n$, $\frac{\partial P_{l_0}}{\partial \overline{z}'_j}(Z') = O_{l_0}(Z')$. Or, pour chaque $j$, le degré de $\frac{\partial P_{l_0}}{\partial \overline{z}'_j}$ est $< l_0$. Ceci entraîne pour chaque $j$, $\frac{\partial P_{l_0}}{\partial \overline{z}'_j} \equiv 0$. Donc, on obtient $P_{l_0} \equiv 0$. C'est-à-dire, $l_0 \geq R$. Ceci achève la preuve du lemme. □

**Preuve du lemme 4.3.1.**
On applique le lemme précédent aux composantes de l'application réciproque du prolongement presque-analytique $\widetilde{\theta} = (\widetilde{\theta}_1, ..., \widetilde{\theta}_n)$ de $\theta$ par rapport à $\mathbf{N} \cap \mathcal{U}$. Comme $\widetilde{\theta} : \mathcal{U} \longrightarrow \widetilde{V}$ est un $C^\infty$-difféomorphisme, on pose $\Psi = \widetilde{\theta}^{-1}$ et $Z = \Psi(Z')$. On obtient pour un $R > 1$ à déterminer ultérieurement

$$\Psi(Z') = \Psi_R(Z') + O_R(Z'),$$

où $\Psi_R$ est un polynôme holomorphe de degré $< R$ et $O_R(Z')$ s'annule à un ordre $\geq R > 1$ en $p'$. Donc, on a $Z = \Psi(Z') = \Psi_R(Z') + O_R(Z')$ avec $Z' = \widetilde{\theta}(Z)$. Ceci implique

$$Z = \Psi_R(\widetilde{\theta}(Z)) + O_R(Z), \tag{4.2}$$

où $O_R(Z)$ s'annule à un ordre $\geq R > 1$ en $p = \Psi(p') \in \mathbf{N} \cap \mathcal{U}$. Comme $R > 1$, $\Psi_R(p') = \Psi(p') = p$ et $d\Psi_R(p') = d\Psi(p')$ est régulière alors $\Psi_R$ est un biholomorphisme local dans un voisinage ouvert suffisamment petit de $p'$. D'après l'équation (4.2), on peut écrire

$$\Psi_R^{-1}(Z) = \Psi_R^{-1}\Big(\Psi_R(\widetilde{\theta}(Z)) + O_R(Z)\Big) = \widetilde{\theta}(Z) + O_R(Z).$$

Donc, $\widetilde{\theta}(Z) = \Psi_R^{-1}(Z) + O_R(Z)$. Or, $\Psi_R$ est un biholomorphisme local en $p'$. Donc, le multitype $\mathcal{M}(bD', p')$ de $p'$ pour le bord de $D' = \widetilde{\theta}(D)$ est égal au multitype $\mathcal{M}(b\Psi_R(D'), p)$ de $p = \Psi(p') = \Psi_R(p')$ pour le bord de $\Psi_R(D')$ (noté $b\Psi_R(D')$).
Soit $\rho$ la fonction définissante locale de $D$ en $p \in \mathbf{M}$. La fonction $\rho \circ \Psi$ est la fonction définissante locale de $D'$ en $p' = \widetilde{\theta}(p)$ et $\rho^* := \rho \circ \Psi \circ \Psi_R^{-1}$ est la fonction définissante locale de $\Psi_R(D')$ en $p$. Or, on a $\Psi \circ \Psi_R^{-1} = (\Psi_R + O_R) \circ \Psi_R^{-1} = Id_Z + O_R$, où $O_R$ s'annule à un ordre $\geq R$ en $p$. Ceci implique

$$\rho^*(Z) = \rho(Z) + O_R(Z). \tag{4.3}$$

Soit $\Lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n)$ un poids distingué de $p$ en $bD$ et $R > \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$. On a par définition de multitype que pour tout multi-indices $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, ..., \beta_n) \in \mathbb{N}^n$ avec $\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i + \beta_i}{\lambda_i} < 1 : D^\alpha \overline{D}^\beta \rho(p) = 0$. Comme $\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i) < \sum_{i=1}^{n} \lambda_i < R$ et d'après l'équation (4.3), il vient que $D^\alpha \overline{D}^\beta \rho^*(p) = 0$. Donc, $\Lambda$ est un poids distingué en $p$ pour le bord de $\Psi_R(D')$. Du coup, $\Lambda$ est un poids distingué de $p'$ en $bD'$.
Réciproquement, soit $\Lambda' = (\lambda'_1, ..., \lambda'_n)$ un poids distingué de $p'$ en $bD'$. Alors $\Lambda'$ est un poids distingué de $p$ en $b\Psi_R(D')$. Par un raisonnement analogue en utilisant (4.3), $\Lambda'$ est un poids distingué de $p$ en $bD$. Or, le multitype est la borne supérieure des poids distingués. On obtient finalement $\mathcal{M}(bD, p) = \mathcal{M}(bD', p')$. □

**Corollaire 4.3.1** *Soit $D$ un domaine pseudoconvexe de $\mathbb{C}^n$ à bord $bD$ de classe $C^\infty$. Soit $\boldsymbol{M}$ une sous variété $C^\infty$ de dimension $(n-1)$ de $bD$, totalement réelle, complexe-tangentielle dans un voisinage $\mathcal{U}$ d'un point $p \in \boldsymbol{M}$. On suppose que $\boldsymbol{M}$ admet un champ de vecteurs $\mathbf{X}$, $C^\infty$, pic-admissible de pic-type $(K, M; \widetilde{m}_1, ..., \widetilde{m}_{n-1})$ en $p$ pour la classe $A^\infty$. Alors,*

*i) le multitype de $bD$ en $p \in \boldsymbol{M}$ est*

$$\mathcal{M}(bD, p) = (\Delta_n(bD, p), ..., \Delta_1(bD, p)) = (1, 2k_1, ..., 2k_{n-1}).$$

*ii) le multitype de $bD$ en $p' \in \boldsymbol{M} \cap \mathcal{U} - \{p\}$ est*

$$\mathcal{M}(bD, p') = (\Delta_n(bD, p'), ..., \Delta_1(bD, p')) = (1, 2m_1, ..., 2m_{n-1}).$$

*Ici, pour tout* $1 \leq j \leq n-1$, $m_j = \frac{M}{\widetilde{m}_j}$, $k_j = \frac{K}{\widetilde{m}_j}$.

**Preuve.**
Remarquons que dans les nouvelles coordonnées $Z = \Psi_R(Z')$ du lemme précédent 4.3.1, le multitype $\mathcal{M}(b\Psi(D'), p) = (\mu_1, ..., \mu_n)$ coïncide avec le multitype linéaire. En particulier, pour $\alpha = (0, ..., 0, \mu_n)$ et $\beta = (0, ..., 0)$ on a $\mu_n = 2k_{n-1}$ si $p$ est l'origine 0 et $\mu_n = 2m_{n-1}$ si $p \in \mathbf{M} \cap \mathcal{U} - \{0\}$. La preuve de ce corollaire découle directement du lemme 4.2.1. □

# Bibliographie


[B-F] E. Bedford and J. E. Fornæss : *A construction of peak functions on weakly pseudoconvex domains. Ann. Math.* **107** *(1978), 555-568* [1]

[Bo] A. Boggess : *CR manifolds and the tangential Cauchy-Riemann complex. Studies in advanced mathematics (Texas A&M University) (1992)*

[B-I1] L. Boutet de Monvel and A. Iordan : *Peak curves in weakly Pseudo-convex Boundaries in* $\mathbb{C}^2$*. The Journal of geometric Analysis Volume* **7***, Number 1, (1997) 1-15*

[B-I2] ——————————— : *Sur les feuilletages* $\mathbb{C}$*-tangents des sous variétés du bord d'une variété complexe. Colloque d'Analyse Complexe et Géométrie Algébrique, Astérisque,* **217** *(1993) 39-52* [1]

[Bl] T. Bloom : $C^\infty$ *peak functions for pseudoconvex domains of strict type. Duke Math. J,* **45** *(1978) 133-147* [1]

[B-G] T. Bloom and I. Graham : *A geometric characterization of points of type m on real hypersurfaces. J. Diff. Geom.* **12** *(1977), 171-182* [1]

[B-St] D. Burns and E. L. Stout : *Extending functions from submanifolds of the boundary. Duke Math. J, (1976) 391-404* [1]

[B-S] H. P. Boas and E. J. Straube : *On equality of line type and variety type of real hypersurfaces in* $\mathbb{C}^n$*. J. Geom. Anal.* **2***, No.2, (1992) 95-98*

[Ca] D. Catlin : *Boundary invariants of pseudoconvex domains. Annals of Mathematics,* **120** *(1984) 529-586*

[C-C1] J. Chaumat, A. M. Chollet : *Ensembles pics pour* $A^\infty(D)$*. Ann. Inst. Fourier,* **29** *(1979), 171-200*

[C-C2] ——————————— : *Caractérisation et propriétés des ensembles localements pics de* $A^\infty(D)$*. Duke Math. J.* **47** *(1980), 763-787*


[1] Ces articles ne sont pas cités dans la thèse.

[DA] J. P. D'Angelo : *Real hypersurfaces, orders of contact, and applications. Annals of Mathematics,* **115** *(1982), 615-637*

[F-H] J. E. Fornæss and B. Henriksen : *Characterization of global peak sets for* $A^{\infty}(D)$*. Math. Ann.,* **259** *(1982), 125-130*

[F-O] J. E. Fornæss and N. Ovrelid : *Finitely generated ideals in* $A(\Omega)$*. Ann. Inst. Fourier.,* **33** *(2), (1983), 77-85*

[F-S] J. E. Fornæss and B. Stensønes : *Lectures on counterexamples in several complex variables. Math. Notes. 33, Princeton Univ. Press, N.J., (1987)*

[H-S1] M. Hakim, N. Sibony : *Ensembles pics dans les domaines strictement pseudoconvexes. Duke Math. J.* **45** *(1978), 601-617*

[H-S2] ———— : *Quelques conditions pour l'existence de fonctions pics dans des domaines pseudoconvexes. Duke Math. J.* **44***, No 2, (1977) 399-406*

[Ho] L. Hörmander : *An introduction to complex analysis in several variables. 2nd ed., North Holland Publishing co., Amsterdam, (1973)*

[I1] A. Iordan : *A peak sets in pseudoconvex domains with (NP) property. Math. Ann.* **272** *(1985), 231-235*

[I2] ———— : *Peak Sets in Pseudoconvex Domains with Isolated Degeneracies. Math. Z.,* **188** *(1985), 535-543*

[I3] ———— : *A characterization of totally real generic submanifolds of strictly pseudoconvex boundaries in* $\mathbb{C}^n$ *admitting a local foliation by interpolation submanifolds. Math. Ann.* **288** *(1990), 505-510* [1]

[Ko] J. J. Kohn : *Boundary behavior of* $\overline{\partial}$ *on weakly pseudoconvex manifolds of dimension two. J. Diff. Geom.* **6** *(1972), 523-542* [1]

[Mi] J. Michel : *Integral representations on weakly pseudoconvex domains. Math. Z.* **208***, No.3, (1991), 437-462*

[Na] R. Narasimhan : *Analysis on Real and Complex Manifolds. North-Holland Mathematical Library (1968)*

[N1] A. V. Noell : *Properties of Peak Sets in Weakly Pseudoconvex Boundaries in* $\mathbb{C}^2$*. Math. Z.,* **186** *(1984), 117-123*

[N2] ———— : *Interpolation from curves in Pseudoconvex Boundaries. Michigan Math. J,* **37** *(1990), 275-281*

[N3] ———— : *Interpolation in weakly pseudoconvex domains in* $\mathbb{C}^2$. *Math. Ann,* **270** *(1985), 339-348* [1]

[N4] ———— : *The Gleason problem for domains of finite type. Complex Variables Theory Appl.* **4**, *(1985) 233-241*

[T-W] B. A. Taylor and D. L. Williams : *The peak sets for* $A^m$. *Proc. Amer. Math. Soc.,* **24** *(1970), 604-606*

[Y1] J. Yu : *Multitypes of convex domains. Indiana Univ. Math. J, vol.* **41**, *No. 3 (1992), 837-849* [1]

[Y2] ——— : *Peak functions on weakly pseudoconvex domains. Indiana Univ. Math. J, Vol.* **43**, *No. 4 (1994), 1271-1295* [1]

**RESUMÉ :** On donnera des conditions suffisantes pour qu'une sous variété $C^\omega$ (resp. $C^\infty$), totalement réelle, complexe-tangentielle, de dimension $(n-1)$ dans le bord $bD$ d'un domaine $D$ faiblement pseudoconvexe dans $\mathbb{C}^n$ et à bord $C^\omega$ (resp. $C^\infty$), soit un ensemble localement pic pour la classe $\mathcal{O}$ (resp. $A^\infty$). Ensuite, on donnera des résultats sur les ensembles localement d'interpolations pour la classe $A^\infty$. Quant à la classe $\mathcal{O}$, nous avons généralisé les travaux de L. Boutet de Monvel et A. Iordan concernant la caractérisation des courbes pics dans les bords faiblement pseudoconvexes de $\mathbb{C}^2$. Quant à la classe $A^\infty$, nous étendrons les résultats obtenus pour la classe $\mathcal{O}$ en utilisant les méthodes de construction faite par M. Hakim et N. Sibony dans le cas des ensembles pics dans les domaines strictement pseudoconvexes. Finalement, on donnera des conséquences pour le multitype de D. Catlin de nos conditions suffisantes.
La difficulté principale de nos travaux est que dans les dimensions supérieures la géométrie complexe du bord d'un domaine a une structure non-isotrope. Les nombres caractéristiques de cette anisotropie se traduisent par un calcul délicat sur des polynômes à poids. Il s'avère aussi que ces nombres ont un lien direct avec le multitype des points du bord le long de la sous variété.

**ABSTRACT :** We give some sufficient conditions for a $C^\omega$ (resp. $C^\infty$)-totally real, complex-tangential, $(n-1)$-dimensional submanifold in a weakly pseudoconvex boundary of class $C^\omega$ (resp. $C^\infty$) to be a local peak set for the class $\mathcal{O}$ (resp. $A^\infty$). Next we give some results about interpolation submanifolds for the class $A^\infty$. In the case of the class $\mathcal{O}$ we have generalized the work of Boutet de Monvel and Iordan concerning the caracterization of peak curves in weakly pseudoconvex boundaries in $\mathbb{C}^2$. We have extended our results obtained for the class $\mathcal{O}$ to the class $A^\infty$ by using the methods of Hakim and Sibony which they have developed for strongly pseudoconvex boundaries. Finally we give consequences of our sufficient conditions on Catlin's multitype. The main difficulty of our work is that the complex geometry in heigher dimensions has a nonisotropic structure. The caracteristic numbers of this anisotropy result in a delicate computation on weighted polynomials. It also turns out that these numbers are linked to Catlin's multitype for the points on the submanifold.