HAL
open science

Réseaux résonnants à Bande Interdite Photonique, nouveaux filtres pour le D.W.D.M.

Anne-Laure Fehrembach

To cite this version:

Anne-Laure Fehrembach. Réseaux résonnants à Bande Interdite Photonique, nouveaux filtres pour le D.W.D.M.. Physique [physics]. Université de droit, d'économie et des sciences - Aix-Marseille III, 2003. Français. NNT : . tel-00084348

HAL Id: tel-00084348

https://theses.hal.science/tel-00084348v1

Submitted on 6 Jul 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Année 2003 n° 03AIX30028

Université de droit, d'économie et des sciences d'Aix-Marseille
(Aix-Marseille III)

Réseaux résonnants à Bande Interdite Photonique, nouveaux filtres pour le D.W.D.M.

Thèse

présentée et soutenue publiquement le 29 septembre 2003, par

Anne-Laure Fehrembach

Pour obtenir le grade de docteur

de l'université de droit, d'économie et des sciences d'Aix-Marseille

Discipline Optique

Institut Fresnel, équipe C.L.A.R.T.E.

Ecole doctorale Physique et Sciences de la Matière

Membres du jury :

M.	Pierre CHAVEL	*rapporteur*
M.	Frédéric CHAZALLET	*examinateur*
M.	Michel DE LABACHELERIE	*examinateur*
M.	Daniel DOLFI	*examinateur*
M.	Jean-Jacques GREFFET	*rapporteur*
M.	Daniel MAYSTRE	*directeur de thèse*
Melle	Anne SENTENAC	*directrice de thèse*

Remerciements

Le travail présenté dans ce mémoire n'aurait pu se dérouler convenablement sans l'ensemble des ingrédients énoncés ci-dessous.

Un laboratoire d'accueil

La thèse s'est déroulée au sein de l'Institut Fresnel, équipe Contrôle de la Lumière et Analyse du Rayonnement: Traitement Electromagnétique. Je remercie Claude Amra, directeur de l'Institut Fresnel, ainsi que Daniel Maystre et Gérard Tayeb, responsables de l'équipe CLARTE, de m'avoir accueillie et permis de travailler dans d'excellentes conditions.

Un soutien financier

La thèse a été réalisée dans le cadre d'une convention C.I.F.R.E. conclue en septembre 2000 avec Shakti, une P.M.E. de la région P.A.C.A.. Courant 2001, l'explosion du marché des télécommunications a permis à Shakti de s'accroître en devenant une filiale de Highwave (P.M.E. du domaine des télécommunications optiques), appelée Highwave Marseille. Mais, lors de l'implosion du marché de la télécommunication, Highwave a entraîné Higwave Marseille dans sa chute. Par la suite, Highwave Marseille a intégré Cilas (P.M.E spécialisée dans les couches minces optiques), et se nomme désormais Cilas Marseille. Malgré ces péripéties, les personnes de l'entreprise participant à ce projet, Frédéric Chazallet et Catherine Grèzes-Besset, m'ont accompagnée jusqu'au bout. Je les remercie en particulier pour deux qualités qui ne sont pas nécessairement compatibles: leur exigence en matière de performance du filtre à concevoir, et leur confiance concernant le déroulement de notre travail. La première nous a poussé à exalter nos capacités, et grâce à la seconde, ils nous ont laissé beaucoup de liberté dans notre démarche. Le tout nous a permis de trouver une solution pour concevoir un filtre intégral.

Enfin, je n'oublie pas de remercier Stéphanie Robert pour sa collaboration lors de son passage à Highwave Marseille.

Un jury de thèse

Je suis très sensible à l'honneur que m'ont fait Pierre Chavel et Jean-Jacques Greffet en acceptant d'être rapporteurs pour la thèse. Je les remercie pour leur lecture attentive du manuscrit et leurs suggestions d'amélioration.

Je remercie également Michel De Labachelerie et Daniel Dolfi d'avoir accepté de faire partie du jury.

Un encadrement

Aujourd'hui, bien plus qu'au début de ma thèse, je me rends compte de l'importance de bénéficier d'un encadrement de qualité pour s'initier au métier de chercheur. Daniel Maystre et Anne Sente-

nac ont très bien remplis leur rôle et je leur fait part ici de toute ma reconnaissance. En particulier, j'ai beaucoup apprécié leur enthousiasme pour la recherche et la physique. Tous deux m'ont largement fait profité de leur expérience en électromagnétisme théorique. Les échanges que j'ai pu avoir avec ces deux personnalités opposées et complémentaires ont été très enrichissants. Anne a assuré l'encadrement au quotidien de la thèse et j'ai apprécié le fait que notre relation de doctorante à encadrante ai rapidement laissé la place à une relation entre chercheurs, très bénéfique pour notre travail. La qualité de mon travail de thèse doit aussi beaucoup à son exigence qui m'a amenée aux limites de ma volonté et encouragée à donner le meilleur de moi même pendant ces trois années.

Un complément à l'encadrement

Le sujet de thèse incluait à l'origine une partie expérimentale, et Hugues Giovannini s'était proposé pour m'encadrer sur cet aspect. Malheureusement, aucun composant optique n'a pu être réalisé, d'une part à cause des problèmes financiers qu'a connu Highwave Marseille et d'autre part à cause du manque de temps ayant suivi l'invention (septembre 2002) du filtre intégral. Néanmoins, je remercie Hugues Giovannini pour son implication, et toutes les précisions d'aspect technologique qu'il a apportées à ce mémoire.

D'autre part, j'ai eu la chance de pouvoir travailler avec un code numérique rigoureux performant qui existait déjà lors de mon arrivée au laboratoire. J'ai conscience que mon travail de thèse n'aurait pas été aussi consistant si j'avais dû passer du temps à développer un tel outil de modélisation. J'adresse toute ma gratitude à Stefan Enoch, l'auteur de ce code. Son implication dans mon travail ne s'est pas limitée à ce cadeau: il m'a également apporté son aide à plusieurs reprises. A ce titre, je considère qu'il fait partie intégrante de l'équipe ayant encadré la thèse.

Des aides techniques

Il est très important pour un laboratoire, surtout en modélisation, de disposer d'un ingénieur informaticien compétent. Je remercie Frédéric Forestier qui a résolu (et qui résout encore) efficacement tous les problèmes informatiques auxquels j'ai été confrontée.

Je remercie également Françoise Maillet et Joelle Forestier qui me sont venues en aide pour les démarches administratives.

Une ambiance agréable

Je remercie tous les collègues qui contribuent à créer une ambiance très agréable au sein des équipes que j'ai côtoyées au quotidien. Je mentionnerai en particulier ceux que j'ai connus lors de leur thèse: Anthony et Octavien, mes collègues de bureau lors de ma troisième année de thèse, Boris G., Boris K., Gab, Gilles M., Nicolas B., Nicolas G..

Un entourage familial favorable

Mes parents m'ont soutenu tout au long de mes études. Je suis heureuse de leur avoir fait plaisir le 29 septembre 2003.

Pour terminer, je n'oublierai pas le soutien de Philippe, qui m'a été essentiel, en particulier pendant la rédaction de ce mémoire. Je suis convaincue que sa présence à mes côtés est en partie responsable de l'enthousiasme et que j'ai pu injecter dans ce travail.

Table des matières

Introduction **5**

Notations **9**

I Réalisation d'un filtre au moyen d'un réseau à modes guidés **11**

Introduction de la première partie **13**

1 Le phénomène de résonance **15**

1.1 Des exemples de résonance en physique . . . 15

1.2 Le phénomène de résonance en optique, le guide d'onde plan . . . 16

1.2.1 Recherche des modes propres . . . 17

1.2.2 La relation de dispersion des modes propres . . . 19

1.2.3 Réponse à une onde plane . . . 20

1.3 Excitation des résonances, le guide d'onde perturbé . . . 22

1.3.1 Recherche des modes propres . . . 22

1.3.2 La relation de dispersion des modes propres . . . 26

1.3.3 Réponse à une onde plane . . . 28

1.4 Caractérisation phénoménologique des résonances . . . 30

1.5 Conclusion . . . 32

2 Etude des pôles et des zéros **35**

2.1 Etude perturbative des pôles et des zéros . . . 36

2.1.1 Résolution du problème homogène . . . 36

2.1.2 Résolution du problème de diffraction . . . 45

2.1.3 Vérifications numériques . . . 49

2.2 Etude rigoureuse des pôles et des zéros . . . 51

2.2.1 Propriétés fondamentales de la matrice de diffraction . . . 52

2.2.2 Propriétés liées aux symétries de la structure . . . 54

2.3 Conclusion . . . 57

Conclusion de la première partie **59**

II Optimisation du profil spectral et du profil angulaire du filtre 61

Introduction de la deuxième partie 63

3 Optimisation du profil angulaire 65
3.1 Etude de l'incidence normale . . . 65
3.1.1 Profils spectraux et angulaires en incidence normale . . . 65
3.1.2 La relation de dispersion au voisinage de l'incidence normale . . . 67
3.1.3 Caractérisation phénoménologique . . . 70
3.2 Création d'une bande interdite hors incidence normale . . . 72
3.3 Calcul perturbatif des pôles au voisinage de deux modes de référence dégénérés . . . 73
3.3.1 Perturbation induite sur la longueur d'onde, création du gap . . . 74
3.3.2 Perturbation induite sur la pulsation spatiale, partie imaginaire du pôle dans le gap 77
3.3.3 Conclusion: indépendance des largeurs spectrale et angulaire . . . 80
3.4 Optimisation du profil angulaire . . . 80
3.4.1 Motif optimisé . . . 81
3.4.2 Exemples de filtres à tolérance angulaire optimisée . . . 82
3.5 Conclusion . . . 84

4 Optimisation du profil spectral 85
4.1 Deux modes propres de même pulsation spatiale et de longueurs d'onde très proches . . . 86
4.1.1 Les guides d'ondes plans couplés . . . 86
4.1.2 Excitation des modes propres des guides d'ondes plans couplés . . . 87
4.2 Etude perturbative des pôles et des zéros . . . 91
4.2.1 Résolution du problème homogène . . . 93
4.2.2 Résolution du problème de diffraction . . . 97
4.2.3 Vérifications numériques . . . 104
4.3 Exemples de filtres à profil spectral optimisé . . . 106
4.3.1 Couche de couplage fine . . . 106
4.3.2 Couche de couplage épaisse . . . 108
4.4 Conclusion . . . 110

Conclusion de la deuxième partie 113

III Indépendance à la polarisation 115

Introduction de la troisième partie 117

5 Condition nécessaire d'indépendance à la polarisation 119
5.1 Introduction de la matrice de diffraction . . . 120
5.1.1 Champ incident . . . 120
5.1.2 Champ diffracté . . . 121
5.1.3 Matrice de diffraction . . . 123
5.2 Recherche des modes propres . . . 124
5.2.1 Pôle de la matrice de diffraction . . . 124
5.2.2 Etude phénoménologique des valeurs propres . . . 125

5.3 Propriétés des pôles et des zéros . . . 126
5.3.1 Propriétés fondamentales de la matrice de diffraction . . . 126
5.3.2 Propriétés liées aux symétries de la structure . . . 127
5.4 Réponse à une onde plane . . . 129
5.4.1 Expression des coefficients de réflexion et de transmission en énergie . . . 129
5.4.2 Cas particulier: polarisation incidente rectiligne . . . 130
5.4.3 Vérifications numériques . . . 132
5.5 Conclusion . . . 137

6 Excitation de deux modes propres dégénérés 139
6.1 Le mode de référence . . . 140
6.2 Résolution perturbative du problème homogène . . . 141
6.2.1 Solution exacte du problème . . . 141
6.2.2 Le tenseur de Green . . . 142
6.2.3 Calcul du développement perturbatif . . . 143
6.3 Résultats du développement perturbatif . . . 145
6.4 Illustrations numériques . . . 147
6.4.1 Validation de la méthode . . . 147
6.4.2 Filtre indépendant de la polarisation, maille carrée . . . 148
6.4.3 Filtre indépendant en polarisation, maille hexagonale . . . 148
6.5 Conclusion . . . 150

Conclusion de la troisième partie 153

7 Synthèse 155
7.1 Combinaison des propriétés de tolérance angulaire et d'indépendance à la polarisation . . . 155
7.1.1 Rappel des solutions retenues . . . 155
7.1.2 Combinaison des solutions . . . 157
7.1.3 Motif de réseau optimisé . . . 160
7.1.4 Exemple de filtre à tolérance spectrale optimisée indépendant de la polarisation . . . 160
7.1.5 Propriétés de symétrie du champ à la résonance . . . 162
7.2 Combinaison de toutes les propriétés: le filtre intégral . . . 164
7.2.1 Solution retenue pour optimiser le profil spectral . . . 164
7.2.2 Exemple de filtre intégral . . . 165
7.2.3 Conception d'un filtre intégral . . . 167
7.3 Conclusion . . . 172

Conclusion 175

A Application des réseaux à modes guidés au contrôle de l'émission spontanée d'atomes luminescents 177

B Récapitulation des structures 181

Bibliographie 188

Introduction

Les télécommunications sur fibres optiques exigent des débits toujours plus importants, en particulier à cause du déploiement de l'internet. Cette demande a d'abord trouvé une réponse dans l'accroissement du taux de multiplexage temporel (Time Division Multiplexing). Cependant, les limites des composants électroniques de transmission, et celles imposées par les problèmes inhérents aux fibres optiques comme la dispersion chromatique et la dispersion de polarisation ont rapidement été atteintes. Aujourd'hui, les cadences maximales sont comprises entre 2,5 et 10Gbit.s^{-1}.

Au début des années 90 est apparue l'idée de transmettre l'information sur plusieurs longueurs d'onde au lieu d'une seule à l'intérieur d'une même fibre optique. C'est le multiplexage en longueurs d'onde (Wavelength Division Multiplexing). Cette solution présente le double avantage d'augmenter de manière significative les débits de transmission, puisqu'ils sont multipliés par le nombre de canaux, et de pouvoir être mise en œuvre à moindre coût sur les fibres optiques déjà installées. A titre d'exemple, en 1999, les systèmes de transmission utilisés comportaient 40 canaux. Les longueurs d'onde, séparées de 0,8 nm, étaient situées dans une fenêtre spectrale de 1,53 μm à 1,56 μm, choisie pour deux raisons majeures liées à l'atténuation du signal sur les longues distances parcourues. D'une part, l'absorption de la silice est faible autour de 1,55 μm. D'autre part, dans cette fenêtre, il est possible d'utiliser des amplificateurs optiques à fibre dopée Erbium. Les amplificateurs, installés à intervalles réguliers sur le parcours, rendent possible la transmission sur de très longues distances. Aujourd'hui, 40 canaux sont largement insuffisants. Pour augmenter ce nombre, deux voies de recherche sont à explorer: élargir la fenêtre de transmission, et resserrer les canaux (Dense Wavelength Division Multiplexing).

La fenêtre de transmission la plus utilisée, et définie par l'Union Internationale des Télécommunications (I.T.U.), est comprise entre 1,520 μm et 1,565 μm. Elle est limitée essentiellement à causes des amplificateurs optiques, dont la bande d'amplification pourrait être élargie en utilisant d'autres dopants que l'Erbium. Resserrer les canaux est une opération délicate à cause de deux problèmes majeurs. D'une part les effets non linéaires qui apparaissent lors de la propagation (effet Kerr, diffusion Raman, diffusion Brillouin) ont tendance à mélanger les informations portées par deux canaux voisins. D'autre part, lorsque les canaux sont très resserrés, des filtres ultra-sélectifs en longueur d'onde sont nécessaires pour réaliser le démultiplexage à la réception du signal. C'est dans ce domaine d'applications que s'inscrit cette thèse.

Les filtres pour le D.W.D.M. doivent répondre à un ensemble de contraintes très strictes.

Les largeurs spectrales demandées aujourd'hui sont de l'ordre de 0,1 nm. De plus, on cherche à minimiser les pertes dues au filtrage. A l'absorption, s'ajoutent des pertes liées à la perturbation des caractéristiques du signal au cours de la propagation. En effet, la polarisation du signal, connue à l'émission, est transformée au cours de la propagation, et les contraintes (thermiques, mécaniques...) modifient la longueur d'onde d'un canal donné. Les filtres doivent donc être indépendants de la polarisation et tolérants vis à vis des fluctuations de la longueur d'onde à filtrer.

Parmi les filtres actuellement sur le marché, nous pouvons citer le phasar, les filtres de Bragg photo-inscrits dans les fibres optiques, et les filtres multicouches [Sauvé, 2001]. Les deux premiers sont des filtres optiques intégrés, et le dernier un filtre en espace libre.

Dans le phasar, un ensemble de fibres optiques de longueurs différentes est utilisé pour focaliser par interférences constructives les différentes longueurs d'onde du signal multiplexé en différents points [Tandon et al., 2001] [Munoz et al., 2002]. Malheureusement, l'efficacité du filtre diminue rapidement dès que la longueur d'onde s'éloigne de la longueur d'onde de centrage: le filtre est peu tolérant vis à vis des fluctuations de la longueur d'onde à filtrer [Amersfoort et al., 1996]. Le phasar présente des inconvénients supplémentaires tels que la sensibilité thermique, la nécessité d'un réglage fin des longueurs des fibres optiques après la fabrication, ainsi que des pertes importantes lors de l'injection du faisceau issu de la fibre optique dans le composant d'optique intégrée.

Un miroir de Bragg est une alternance périodique de milieux de haut et bas indice optique. La périodicité selon une direction crée une bande de fréquences interdites, c'est à dire un ensemble de longueurs d'onde pour lesquelles la structure agit comme un miroir. Cette propriété peut être utilisée pour réaliser du filtrage en réflexion [Hill and Meltz, 1997]. De plus, il est possible d'inscrire des filtres de Bragg dans des fibres optiques par insolation, et de filtrer ainsi le signal directement à l'intérieur de la fibre. Après réflexion sur le miroir, le signal réfléchi est extrait de la fibre grâce à un autre composant, circulateur optique ou interféromètre de Mach-Zehnder. Le filtre de Bragg est facile à réaliser, même quand il s'agit d'atteindre des largeurs spectrales très fines, de l'ordre de 0,1 nm. Mais les portions des fibres photo-inscrites sont longues (plusieurs centimètres) et très sensibles aux variations thermiques. De plus, l'utilisation des séparateurs de faisceaux entraîne des pertes inéluctables [Chen et al., 1999].

Les filtres multicouches sont pour la plupart basés sur le principe du Fabry-Pérot. Ils sont composés de deux miroirs déposés de part et d'autre d'une cavité centrale [He et al., 2001] [Pan et al., 2002] [DeMange, 2002]. L'excitation d'un mode propre de la cavité est à l'origine d'un pic dans la courbe de transmission en fonction de la longueur d'onde. Ce pic est d'autant plus fin que la réflectivité des miroirs est élevée [Yeh, 1988]. La configuration en espace libre ajoute une contrainte supplémentaire pour limiter les pertes. Le faisceau issu de la fibre optique possède une divergence non nulle. Par conséquent, le filtre doit posséder une bonne tolérance angulaire. De plus, le filtre doit fonctionner hors incidence normale afin d'éviter les pertes dues à un séparateur de faisceau. Enfin, comme pour le phasar et le filtre de Bragg, le filtre multicouche

doit être indépendant de la polarisation. Ces conditions ne s'avèrent pas contraignantes pour ce type de structure. Par contre, on ne peut espérer réduire la largeur spectrale à 0,1 nm sans empiler un très grand nombre de couches (plus de 120), ce qui est difficile en pratique à cause de problèmes d'absorption et de contraintes mécaniques sur les couches.

Parmi ces trois solutions aucune ne se détache vraiment des autres. Nous avons choisi une piste différente, parmi les filtres en espace libre: les réseaux résonnants.

Dès l'apparition du multiplexage en longueur d'onde, dans les années 90, les réseaux résonnants ont été proposés pour réaliser le filtrage ultra-sélectif. Un réseau, gravé sur un guide d'onde plan permet à une onde plane incidente d'exciter un mode propre de la structure et de générer un pic de résonance dans la courbe de réflexion en fonction de la longueur d'onde. Les premiers travaux, aussi bien théoriques [Wang and Magnusson, 1993] [Wang and Magnusson, 1995] qu'expérimentaux [Sharon et al., 1996] [Liu et al., 1998], se sont montrés prometteurs pour le filtrage en réflexion ou en transmission [Tibuleac and Magnusson, 1997]. La largeur spectrale peut facilement atteindre 0,1 nm, et un réseau bi-dimensionnel en incidence normale est indépendant de la polarisation [Peng and Morris, 1996b] [Peng and Morris, 1996a] et présente une bonne tolérance angulaire . Malheureusement, toutes ces qualités sont propres à l'incidence normale. Or, pour les applications D.W.D.M, il est préférable, afin d'éviter les pertes dues à un séparateur de faisceau, de travailler en incidence oblique. Dans cette configuration, les réseaux à modes guidés révèlent leurs défauts: le profil spectral et le profil angulaire sont peu tolérants, et ils dépendent de la polarisation. En conséquence, l'intérêt suscité par ces structures au cours des années 90 a rapidement décliné.

Cependant, toute la complexité du comportement radiatif des réseaux résonnants n'avaient pas été explorée. En effet, la plupart des études numériques, théoriques et expérimentales ont concerné des structures invariantes selon un axe (réseaux mono-dimensionnels) éclairés en incidence classique (plan d'incidence parallèle aux traits du réseau). Les propriétés des réseaux résonnants bi-dimensionnels ou mono-dimensionnels éclairés en incidence quelconque sont mal connues. De plus, les réseaux résonnants sont assimilables à des structures à bande interdite photonique pour les modes guidés. Tous les concepts développés dans le cadre des cristaux photoniques peuvent servir pour l'étude des réseaux résonnants.

Au cours de la thèse, nous avons développé une théorie phénoménologique ainsi qu'une méthode perturbative permettant de modéliser et de modifier le phénomène de résonance dans des configurations complexes (incidence quelconque, réseaux bi-dimensionnels). Ces deux théories enrichies par des concepts empruntés aux domaines des cristaux photoniques et complétées par des expériences numériques rigoureuses nous ont permis de trouver des solutions pour chaque problème posé.

Le manuscrit est composé de trois parties, chacune partagée en deux chapitres. Un septième chapitre est indépendant. Dans la première partie, nous expliquons pourquoi les réseaux à modes guidés peuvent être utilisés pour des applications de filtrage. Nous commençons par rappeler leur principe de fonctionnement (premier chapitre), puis nous introduisons la théorie rigoureuse et la

théorie perturbative pour démontrer les propriétés des réseaux mono-dimensionnel en incidence oblique (deuxième chapitre). A partir de la deuxième partie, la réflexion concernant les problèmes posés débute, d'abord la tolérance angulaire (troisième chapitre) puis le profil spectral (quatrième chapitre), toujours avec des réseaux mono-dimensionnels. Le problème de la polarisation et les réseaux bi-dimensionnels sont abordés dans la troisième partie. A nouveau, nous faisons appel à la théorie rigoureuse (cinquième chapitre) puis perturbative (sixième chapitre). Le septième chapitre constitue une synthèse des solutions proposées. Nous y présentons des exemples de filtre répondant à toutes les contraintes. Pour compléter le rapport, nous avons inclus deux annexes. Dans l'annexe A, nous montrons comment utiliser les réseaux à modes guidés pour une application autre que le filtrage: le contrôle de l'émission spontanée d'atomes luminescents. L'annexe B est un récapitulatif de toutes les structures mentionnées dans le manuscrit.

Le manuscrit a été organisé selon trois niveaux de lecture. En première approche, on pourra se contenter des introductions et conclusions des parties ainsi que du septième chapitre pour retirer les idées principales de la thèse. Les différents chapitres sont relativement indépendants. Ils pourront être lu afin d'approfondir un point particulier. Enfin, la théorie perturbative est un outil puissant qui nous a permis d'étudier de nombreuses configurations. Malheureusement, les calculs sont volumineux et perturbent la lecture du manuscrit. Les grandes étapes ont cependant été rédigées afin d'aider le lecteur désirant plus de détails. Ces passages sont écrits en petits caractères.

Notations

Caractérisation des structures:

ε^a, ε^s	Constante diélectrique du superstrat, du substrat (ou de la couche de couplage pour des guides couplés)
ε^{c_i}	Constante diélectrique de la couche i
e^{c_i}	Epaisseur de la couche i
$2e^s$	Epaisseur de la couche de couplage pour des guides couplés
$2e$	Epaisseur totale de la structure plane pour des guides couplés
$\varepsilon_{go}(x,z)$	Constante diélectrique de la structure plane
$\varepsilon(x,y,z)$	Constante diélectrique du réseau à modes guidés
$\varepsilon_{per}(x,y)$	Constante diélectrique de la perturbation, définie par $\varepsilon(x,y,z) - \varepsilon_{go}(x,z)$
$\tilde{\varepsilon}_n$, $\tilde{\varepsilon}_{m,n}$	Coefficients de Fourier d'ordre (n) pour un motif 1D et (m,n) pour un motif 2D
h	Hauteur du réseau
d	Période pour un motif 1D
d_x,d_y	Périodes selon (Ox) et selon (Oy) pour un motif 2D (si $d_x = d_y$, on note $d = d_x = d_y$)
a, b, c, d	Dimensions des trous des motifs
f	Facteur de remplissage du réseau
$\mathcal{S}$	Plan de symétrie de la structure

Caractérisation de l'onde incidente:

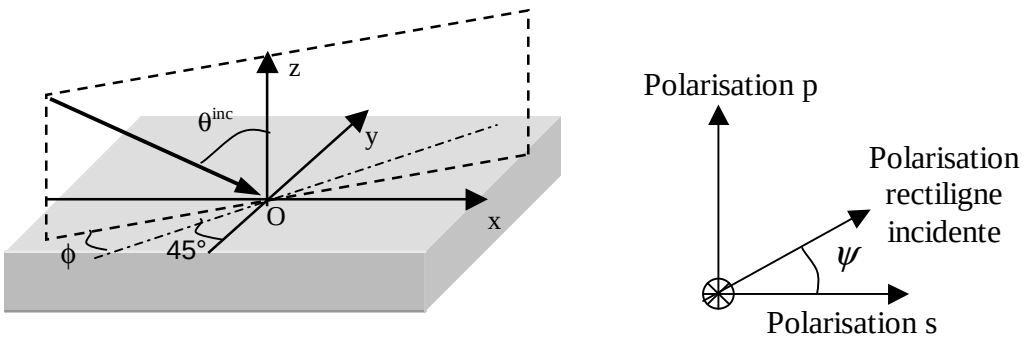


FIG. 1 – *Caractérisation de l'incidence.*

Coefficients de réflexion et de transmission:

r_{go}, t_{go}	Coefficients de réflexion et de transmission de la structure de référence (guide d'onde plan) en polarisation s
$r_{go,s}$, $r_{go,p}$	Coefficients de réflexion de la structure de référence (guide d'onde plan) en polarisation s et p
R, T, R', T'	Coefficients de réflexion et de transmission du réseau à mode guidé au voisinage de la résonance
r, t	Coefficients de réflexion et de transmission du réseau à mode guidé en dehors de la résonance
$\mathbf{S}$	Matrice de diffraction
$\mathbf{R}$, $\mathbf{T}$, $\mathbf{R}'$, $\mathbf{T}'$	Matrices de réflexion et de transmission
$L_{\mathbf{M}}$, $L'_{\mathbf{M}}$	Valeurs propres de la matrice 2x2 $\mathbf{M}$
$\mathbf{V}_{\mathbf{M}}$, $\mathbf{V}'_{\mathbf{M}}$	Vecteurs propres de la matrice 2x2 $\mathbf{M}$

Longueurs d'onde:

λ^{inc}	Longueur d'onde incidente
λ^{ref}, λ^{ref_1}, λ^{ref_2}	Longueur d'onde des modes guidés de la structure de référence (guide plan)
λ^{ref+}, λ^{ref-}	Longueur d'onde des modes symétrique et anti-symétrique de la structure de référence (guide plan) pour des guides couplés
λ^{p}, ω^{p}	Longueur d'onde et pulsation d'un mode propre
λ^{p+}, λ^{p-}	Longueur d'onde des modes symétrique et anti-symétrique de la structure perturbée
λ^{zr}, $\lambda^{zr'}$, λ^{zt}, $\lambda^{zt'}$	Longueurs d'onde des zéros de réflexion et de transmission
λ^{zr+}, λ^{zr-}, λ^{zt+}, λ^{zt-}	Longueurs d'onde des zéros de réflexion et de transmission associés aux modes symétrique et anti-symétrique

Pulsations spatiales et vecteurs d'onde:

α^{inc}, $\boldsymbol{\kappa}^{inc}$	Composante tangentielle du vecteur d'onde incident (1D) et (2D)
α^{ref}, α^{ref_1}, α^{ref_2}	Pulsation spatiale des modes guidés de la structure de référence (guide plan) (1D)
$\boldsymbol{\kappa}^{ref}$	Vecteur d'onde d'un mode guidé de la structure de référence (guide plan) (2D)
α^{ref+}, α^{ref-}	Pulsations spatiales des modes symétrique et anti-symétrique de la structure de référence (guide plan) pour des guides couplés
α^{p}, α^{p_1}, α^{p_2}	Pulsations spatiales d'un mode propre (1D)
$\boldsymbol{\kappa}^{p}$	Vecteur d'onde d'un mode propre (2D)
α^{zr}, $\alpha^{zr'}$, α^{zt}, $\alpha^{zt'}$	Pulsations spatiales des zéros de réflexion et de transmission
α^{zr_1}, α^{zr_2}, α^{zt_1}, α^{zt_2}	Pulsations spatiales des zéros de réflexion et de transmission

Notations mathématiques:

Re, Im	Partie Réelle, partie imaginaire
signe$(z - z')$	signe positif si $z \geq z'$ et négatif sinon

Première partie

Réalisation d'un filtre au moyen d'un réseau à modes guidés

Introduction de la première partie

Dans certaines configurations, l'énergie réfléchie par un réseau de diffraction peut présenter de brutales variations lors de faibles changements de la longueur d'onde ou de l'angle d'incidence. Ces anomalies ont pour la première fois été observées par R.W.Wood en 1902 [Wood, 1902] pour un réseau métallique éclairé en polarisation p (champ magnétique perpendiculaire au plan d'incidence). La première tentative d'explication a été fournie en 1907 par Rayleigh [Rayleigh, 1907], qui suggéra que ce phénomène correspondait à l'apparition d'un ordre radiatif. Malheureusement, sa théorie n'expliquait pas la forme particulière des anomalies. Une autre explication a été introduite dans les années quarante par U.Fano [Fano, 1941] qui distinguait deux types d'anomalies : une anomalie ponctuelle, correspondant effectivement à l'apparition d'un ordre radiatif (anomalies de Rayleigh) et une anomalie diffuse, variation rapide de l'énergie réfléchie d'un minimum à un maximum, liée à l'excitation d'un mode propre de la structure (anomalie de résonance). Sur cette idée, Hessel et Oliner [Hessel and Oliner, 1965] ont développé un modèle, basé sur le calcul d'impédances de surfaces équivalentes, confirmant l'importance des modes propres dans les anomalies de Wood, et prévoyant l'excitation de modes propres également en polarisation s. L'origine du phénomène de résonance en polarisation p était à juste titre attribuée aux plasmons de surface apparaissant aux interfaces métal-diélectrique [Ritchie et al., 1968]. Par contre, la notion de modes guidés pour expliquer les résonances en polarisation s dans le cas de diélectriques a été introduite bien plus tard [Loewen and Nevière, 1977] [Vincent and Nevière, 1979].

Par la suite, le développement de théories électromagnétiques rigoureuses et l'utilisation d'outils de calcul de plus en plus puissants ont permis une étude approfondie du phénomène de résonance (les principaux articles sur les théories développées sont regroupés dans [Maystre, 1993]). Cependant, les études numériques n'aidaient pas à la compréhension physique du phénomène, et n'apportaient pas de formule simple permettant une description quantitative du pic. C'est pourquoi une approche phénoménologique a été développée, donnant une expression de la réflectivité des réseaux au voisinage des résonances à l'aide de trois paramètres : un pôle, un zéro en réflexion et un zéro en transmission [Maystre and Petit, 1976] [Nevière, 1980] [Maystre, 1982]. L'étude des propriétés des zéros en fonction des symétries de la structure a conduit à l'observation d'une manifestation spectaculaire du phénomène de résonance : l'absorption totale de l'onde incidente sous certaines conditions par des réseaux métalliques [Hutley and Maystre, 1976], ainsi que par les réseaux métalliques recouverts de diélectrique [Nevière et al., 1977] [Loewen and Nevière, 1977]. L'excitation de plasmons de surface est également en partie responsable de la transmission extra-

ordinaire observée récemment à travers une couche métallique percée de trous de diamètre inférieur à la longueur d'onde [Ebbesen et al., 1998] [Porto et al., 1999] [Martin-Moreno et al., 2001] [Cao and Lalanne, 2002]. Ce phénomène peut être modélisé [Enoch et al., 2002] à l'aide de pôles et de zéros.

Dans les années 80, l'idée d'utiliser les résonances des réseaux diélectriques pour des applications de filtrage a été proposée, et validée expérimentalement [Mashev and Popov, 1985] [Golubenko et al., 1986] [Popov and Mashev, 1987]. Puis l'apparition du D.W.D.M. et de ses contraintes a orienté les recherches vers l'optimisation des profils spectral et angulaire, et le problème de la dépendance à la polarisation. Nous y reviendrons plus loin. Jusqu'à présent, à notre connaissance, aucune solution répondant à toutes les contraintes imposées par le D.W.D.M. n'a été proposée. Pour y parvenir, il semble important de bien comprendre et modéliser le phénomène de résonance. Dans la première partie, nous proposons d'abord un rappel sur le phénomène de résonance en physique. En particulier, nous reviendrons sur l'explication et la caractérisation phénoménologique du pic de résonance des réseaux à modes guidés. Ensuite, dans le deuxième chapitre, nous déduirons de l'étude des paramètres phénoménologiques, c'est à dire le pôle et le zéro, des propriétés intéressantes du pic de résonance.

Chapitre 1

Le phénomène de résonance

La notion de résonance intervient dans tous les domaines de la physique ondulatoire, comme l'optique, l'acoustique, la mécanique ou l'électronique [Feynman, 1984]. Elle correspond à une importante augmentation de l'amplitude des oscillations d'une grandeur physique caractéristique du système étudié, sous l'influence d'impulsions régulières dont la fréquence est appelée fréquence de résonance. A l'aide d'exemples simples, nous introduirons le vocabulaire et les notions liés au phénomène de résonance. Puis nous entrerons dans le vif du sujet en nous intéressant aux résonances en optique. Par une étude électromagnétique nous mettrons en évidence l'existence de résonances dans une structure aussi simple qu'une couche de diélectrique comprise entre un substrat et un superstrat: le guide d'onde plan. Nous verrons ensuite pourquoi il est nécessaire d'ajouter un réseau sur le guide d'onde plan pour réaliser des fonctions de filtrage en espace libre à partir des résonances, et nous examinerons en détail le réseau à modes guidés. Enfin, nous terminerons par un rappel de la théorie phénoménologique, puissant outil de caractérisation des pics de résonance des réseaux à modes guidés que nous utiliserons par la suite.

1.1 Des exemples de résonance en physique

Un résonateur mécanique simple peut être formé d'un ressort de raideur k dont une extrémité est fixe et l'autre accrochée à un objet de masse m reposant sur un plan horizontal (fig. 1.1a). L'étude des oscillations libres de la masse (sans force extérieure appliquée) montre l'existence d'une solution particulière, appelée mode propre d'oscillation du système, de pulsation propre $\omega^p = \sqrt{\frac{k}{m}}$, si l'on néglige les frottements de la masse sur le plan. Lorsque ce système est soumis à une excitation mécanique de pulsation proche de ω^p (oscillations forcées), l'amplitude du mouvement de la masse devient immense et tend vers l'infini en théorie. En pratique, la masse est soumise à une force de frottement, qui amortit l'amplitude des oscillations à la résonance.

En électronique, un circuit composé d'une bobine d'inductance L de résistance négligeable et d'un condensateur de capacité C en série constitue également un résonateur, de pulsation $\omega^p = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. Lorsqu'une tension alternative de pulsation ω^p est appliquée aux bornes du circuit, la tension du condensateur devient très grande. Cependant, l'existence dans le circuit d'une

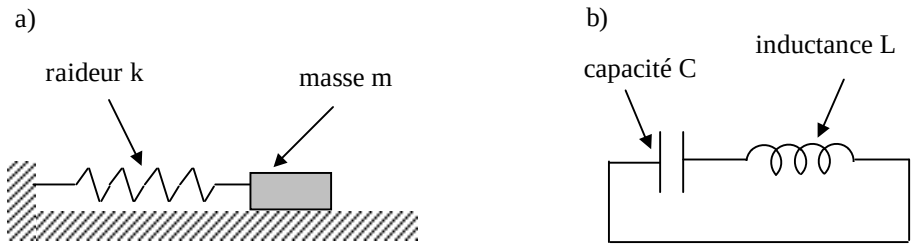


FIG. 1.1 – *Exemples de résonateurs en mécanique et en électronique.*

résistance non nulle limite en pratique l'amplitude des oscillations à la résonance. Notons que la plupart des filtres électroniques sont basés sur ce phénomène. Il paraît donc naturel d'utiliser les résonances en optique pour réaliser des filtres optiques.

Cependant, l'étude des modes propres d'une structure optique est plus compliquée que celle des résonateurs mécaniques et électriques. En effet, les équations de Maxwell font intervenir la dérivée temporelle du champ électromagnétique, mais également les dérivées spatiales. La dimension temporelle est traitée comme dans le cas des oscillations mécaniques et électriques en se plaçant en régime harmonique. Notons dès maintenant que pour toute la suite de l'étude la dépendance temporelle choisie est en $\exp(-i\omega t)$. Les modes propres en optique seront comme en mécanique et en électronique caractérisés par une pulsation temporelle ω^p. Rappelons que ω est reliée à la longueur d'onde dans le vide λ par $\omega = \frac{2\pi}{\lambda}c$ où c est la vitesse de la lumière dans le vide. Nous parlerons plutôt de longueur d'onde propre du mode λ^p. La dérivée spatiale présente dans les équations de Maxwell implique en plus l'existence d'une pulsation spatiale propre. En raison de cette difficulté, nous commencerons par étudier les modes propres de la structure optique la plus simple : le guide d'onde plan.

1.2 Le phénomène de résonance en optique, le guide d'onde plan

Considérons une couche mince, de constante diélectrique relative ε^c et d'épaisseur e^c, comprise entre un substrat de constante diélectrique ε^s et un superstrat de constante diélectrique ε^a, tels que $\varepsilon^a \leq \varepsilon^s < \varepsilon^c$ (le guide d'onde peut comporter plusieurs couches, de constante diélectrique ε^{c_i}, et d'épaisseur e^{c_i}, le numéro i de la couche étant donné à partir du substrat). Nous

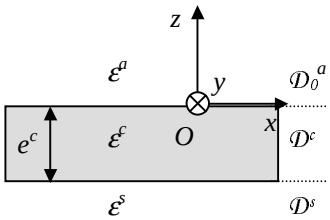


FIG. 1.2 – *Notations utilisées pour le guide d'onde plan.*

supposerons que les milieux sont homogènes, isotropes, non absorbants et non magnétiques. Soit (O,x,y,z) un repère orthonormé tel que (Oz) soit perpendiculaire aux interfaces de la couche (fig. 1.2). Dans la suite du manuscrit, nous noterons $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$ et $\hat{\mathbf{z}}$ les vecteurs unitaires portés par les axes (Ox), (Oy) et (Oz).

Le plan (Oxz) est composé de trois domaines $\mathcal{D}_0^a = \{z,\ 0 \leq z\}$, $\mathcal{D}^c = \{z,\ -e^c \leq z < 0\}$ et $\mathcal{D}^s = \{z,\ z < -e^c\}$. Nous introduisons la fonction $\varepsilon_{go}(z)$ caractérisant la structure et définie par :

$$\varepsilon_{go}(z) = \begin{cases} \varepsilon^a \text{ pour } z \in \mathcal{D}_0^a \\ \varepsilon^c \text{ pour } z \in \mathcal{D}^c \\ \varepsilon^s \text{ pour } z \in \mathcal{D}^s \end{cases} \tag{1.1}$$

Notre but est d'étudier les modes propres de cette structure. Plus exactement, nous nous intéressons aux modes propres se propageant selon la direction (Ox). Comme dans le cas des oscillateurs mécaniques et électriques, nous examinerons d'abord les oscillations libres du système (recherche des modes propres), puis les oscillations forcées (réponse à une onde plane incidente). Une étude plus complète des guides d'ondes plans est présentée dans [Petit, 1993].

1.2.1 Recherche des modes propres

Nous nous intéressons aux champs susceptibles de se propager dans la structure dans la direction (Ox) avec une constante de propagation α, en régime harmonique de pulsation ω et en l'absence de champ incident. Nous traiterons le cas des modes polarisés rectilignement, TE (champ électrique perpendiculaire à la direction de propagation) ou TM (champ magnétique perpendiculaire à la direction de propagation). Notons que les dénominations s et p sont utilisées pour indiquer l'état de polarisation rectiligne d'une onde plane (en général l'onde incidente), et TE et TM pour les ondes plus complexes (les modes propres).

Nous définissons la fonction $F(x,z)$, liée au champ électrique par $\mathbf{E}(x,z) = F(x,z)\hat{\mathbf{y}}$ dans le cas de polarisation TE, et au champ magnétique par $\mathbf{H}(x,z) = F(x,z)\hat{\mathbf{y}}$ dans le cas de polarisation TM. Il est important de noter que le champ F dépend de α et de λ. Pour simplifier les notations, nous avons choisi de ne pas faire figurer cette dépendance sur l'écriture de F. La propagation des modes propres selon la direction (Ox) se traduit alors par l'écriture :

$$F(x,z) = f(z)\exp(i\alpha x) \tag{1.2}$$

où $f(z)$ est une fonction complexe. La fonction F doit vérifier l'équation de Helmholtz (au sens des fonctions)

$$\Delta F(x,z) + \varepsilon_{go}(z)k_0^2 F(x,z) = 0 \tag{1.3}$$

où nous avons introduit le nombre d'onde $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda}$. Le champ électromagnétique vérifie de plus les conditions de passage aux interfaces: continuité des composantes tangentielles de $\mathbf{E}(x,z)$ et de $\mathbf{H}(x,z)$, continuité des composantes normales de $\mathbf{B}(x,z) = \mu_0\mathbf{H}(x,z)$ et de $\mathbf{D}(x,z) = \varepsilon_0\varepsilon_{go}(z)\mathbf{E}(x,z)$, où ε_0 et μ_0 désignent la permittivité et la perméabilité du vide.

En reportant (1.2) dans l'équation de Helmholtz (1.3), il apparaît que dans chaque domaine $\mathcal{D}_0^a$, $\mathcal{D}^c$ et $\mathcal{D}^s$, les solutions sont la somme de deux ondes planes, l'une se propageant selon le sens de l'axe (Oz), et l'autre dans le sens inverse

$$F(x,z) = d^m \exp i(\alpha x - \gamma^m z) + u^m \exp i(\alpha x + \gamma^m z) \tag{1.4}$$

$$\text{avec} \quad \gamma^m = \sqrt{\varepsilon^m k_0^2 - \alpha^2} \ \text{ et } \ \mathrm{Im}(\gamma^m) \geq 0, \tag{1.5}$$

où nous remplaçons m par a, c, ou s si $z \in \mathcal{D}_0^a$, $\mathcal{D}^c$ ou $\mathcal{D}^s$, respectivement. De plus, nous déduisons des conditions de passage aux interfaces que le champ et sa dérivée par rapport à la normale à la surface satisfont:

$$\begin{array}{llll} \text{en } z = 0 : & F^a(x,0) = F^c(x,0) & \text{et} & \tau^a \frac{dF^a}{dz}(x,0) = \tau^c \frac{dF^c}{dz}(x,0) \\ \text{en } z = -e^c : & F^c(x,-e^c) = F^s(x,-e^c) & \text{et} & \tau^c \frac{dF^c}{dz}(x,-e^c) = \tau^s \frac{dF^s}{dz}(x,-e^c) \end{array} \tag{1.6}$$

où $\tau^m = 1$ en polarisation TE et $\tau^m = 1/\varepsilon^m$ en polarisation TM.

Dans le cas des oscillateurs mécaniques et électriques, un mode est une solution non nulle existant sans excitation extérieure. En optique, un mode du guide plan est une solution de (1.3) vérifiant une condition d'onde sortante, c'est à dire lorsque le champ incident (d^a et u^s) est nul. Le système d'équations (1.4) s'écrit alors:

$$F(x,z) = \begin{cases} u^a \exp i(\alpha x + \gamma^a z) & \text{pour } \ z \in \mathcal{D}_0^a \\ d^c \exp i(\alpha x - \gamma^c z) + u^c \exp i(\alpha x + \gamma^c z) & \text{pour } \ z \in \mathcal{D}^c \\ d^s \exp i(\alpha x - \gamma^s z) & \text{pour } \ z \in \mathcal{D}^s \end{cases} \tag{1.7}$$

En appliquant les conditions de passage (1.6) nous obtenons un système homogène de quatre équations reliant u^a, d^c, u^c et d^s. Ce système possède des solutions non nulles si son déterminant est nul. Le calcul montre que la pulsation spatiale α et la longueur d'onde λ doivent alors vérifier :

$$\exp(2i\gamma^c e) = \frac{(\tau^c\gamma^c + \tau^s\gamma^s)(\tau^c\gamma^c + \tau^a\gamma^a)}{(\tau^c\gamma^c - \tau^s\gamma^s)(\tau^c\gamma^c - \tau^a\gamma^a)} \tag{1.8}$$

Cette équation s'appelle l'équation des modes. Elle est transcendante et nécessite une résolution numérique. Néanmoins, il est possible de montrer [Petit, 1993] que les solutions (α,λ) où α et λ sont réels, vérifient:

$$\max(\varepsilon^a, \varepsilon^s) k_0^2 < \alpha^2 < \varepsilon^c k_0^2 \tag{1.9}$$

Dans ce cas, γ^a et γ^s sont imaginaires purs, et γ^c est réel. Les champs de ces modes propres sont évanescents dans le substrat et le superstrat, et propagatifs dans la couche: ce sont des modes guidés. Pour caractériser les modes guidés, on parle souvent d'indice effectif n_f, défini par $\alpha = \frac{2\pi}{\lambda} n_f$.

Arrêtons nous un instant pour discuter des conséquences de l'existence des modes propres. Ce sont des solutions non nulles de l'équation de Helmholtz en l'absence de champ incident. Autrement dit, un champ diffracté existe, dans le substrat et le superstrat, alors que le champ incident est nul. Il est fréquent de relier le champ diffracté au champ incident par les coefficients

de réflexion et de transmission de la structure. Plus précisément, les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude du guide plan sont définis par $r_{go}(\alpha,\lambda) = u^a/d^a$ et $t_{go}(\alpha,\lambda) = d^s/d^a$ lorsque $u^s = 0$. Il apparaît qu'un champ diffracté existe sans champ incident seulement si α et λ sont des pôles des fonctions $r_{go}(\alpha,\lambda)$ et $t_{go}(\alpha,\lambda)$. En conséquence, les solutions de l'équation de modes (1.8) sont des pôles des coefficients de réflexion et de transmission du guide d'onde plan.

Dans la suite, nous noterons (α^p,λ^p) un couple de pulsation spatiale et longueur d'onde propres. L'équation des modes (1.8) impose une relation entre α^p et λ^p: la relation de dispersion.

1.2.2 La relation de dispersion des modes propres

Pour un guide d'onde plan particulier (structure 1.1), nous avons tracé sur la figure (fig. 1.3) les relations de dispersion des premiers modes TE et TM, ainsi que les droites Δ^m d'équation $\frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\alpha}{\sqrt{\varepsilon^m}}$ pour $m = a$, c ou s. Les couples (α^p,λ^p) des modes propres vérifiant l'inégalité (1.9),

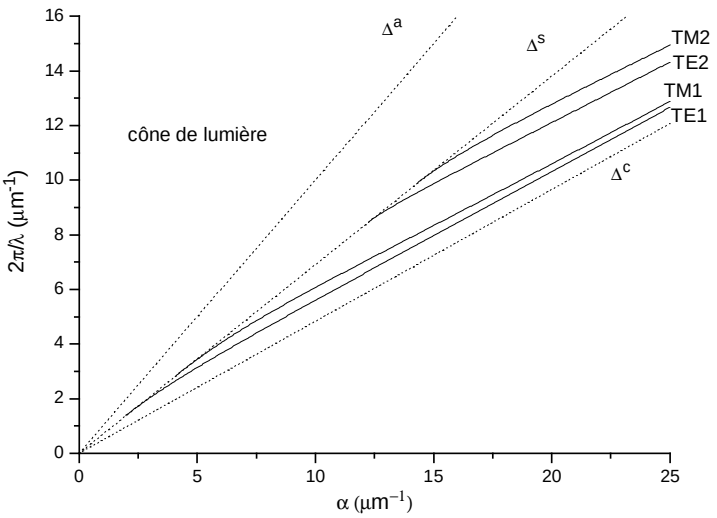


FIG. 1.3 – *Relation de dispersion $\lambda(\alpha)$ des modes propres du guide d'onde plan défini par $\varepsilon^a = 1{,}0$, $\varepsilon^c = 2{,}07^2$, $\varepsilon^s = 1{,}448^2$ et $e = 300$ nm (structure 1.1).*

les courbes représentant les relations de dispersion sont comprises entre Δ^c et Δ^s. Les droites Δ^a et Δ^s s'appellent les lignes de lumière du substrat et du superstrat et l'ensemble des points (α,λ) tels que $\frac{2\pi}{\lambda} > \frac{\alpha}{\sqrt{\varepsilon^s}}$ constitue le cône de lumière. Pour comprendre l'origine de ce terme, quittons un instant l'exemple du guide d'onde plan, et imaginons une structure optique possédant un mode propre (α^p,λ^p) situé dans le cône de lumière (ce qui n'est pas possible dans le cas du guide d'onde plan d'après l'équation des modes (1.8)). Le champ de ce mode serait propagatif dans le substrat et éventuellement dans l'air, et donc observable en champ lointain, d'où le nom de cône de lumière.

Depuis le début de l'étude du guide d'onde plan, nous n'avons considéré que la propagation selon l'axe (Ox) et tracé la relation de dispersion (fig. 1.3) pour cette direction particulière.

Dans le cas du guide d'onde plan, toute direction est équivalente aux autres par isotropie, et le graphe de $\frac{2\pi}{\lambda}$ en fonction de α est suffisant. Pour une structure non isotrope, il faudrait étudier les modes se propageant dans une direction quelconque du plan (Oxy) avec un vecteur d'onde $\boldsymbol{\kappa} = \alpha\hat{\mathbf{x}} + \beta\hat{\mathbf{y}}$. La relation de dispersion serait représentée par l'ensemble des triplets (α,β,λ) solutions de l'équation des modes. Ce type de graphe tridimensionnel est difficile à comprendre. C'est pourquoi nous préférons nous contenter d'une représentation partielle de la relation de dispersion en ajoutant au graphe $\frac{2\pi}{\lambda}$ en fonction de α une représentation, pour une longueur d'onde choisie, de l'ensemble des couples (α,β) vérifiant l'équation des modes (1.8). Dans le cas d'un guide d'onde plan, isotrope dans le plan (Oxy), cette relation correspond à un cercle. Le cône de lumière apparaît sous la forme d'un disque de rayon $\frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{\varepsilon^s}$, le disque d'espace libre (fig. 1.4).

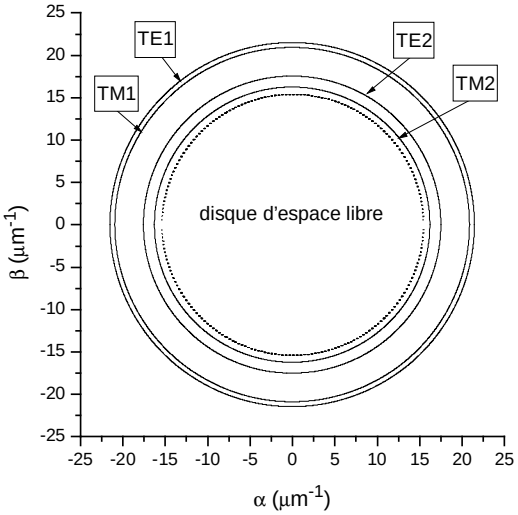


FIG. 1.4 – *Relation de dispersion $\beta(\alpha)$ à λ fixé des modes propres d'un guide d'onde plan (structure 1.1).*

En résumé, pour un exemple de guide d'onde plan, nous avons trouvé les modes (α^p,λ^p) se propageant dans une direction du plan (Oxy). Dans le cas des oscillateurs mécaniques et électriques, l'étape suivant la recherche des modes propres est l'étude des oscillations forcées du système sous l'application d'une force ou d'une tension périodique. Nous adoptons la même démarche, et nous considérons dans le paragraphe suivant le problème de la diffraction d'une onde plane incidente par la structure.

1.2.3 Réponse à une onde plane

Considérons une onde plane incidente, de longueur d'onde λ^{inc} fixée et d'angle d'incidence θ^{inc} variable (fig. 1.5). La pulsation spatiale α^{inc} est liée à l'angle d'incidence par $\alpha^{inc} = \frac{2\pi}{\lambda^{inc}}\sin(\theta^{inc})$. Nous supposons qu'il est possible de trouver un mode propre à la longueur d'onde λ^{inc}, et nous notons $\alpha^p(\lambda^{inc})$ sa pulsation spatiale propre. Dans le cas des oscillateurs mé-

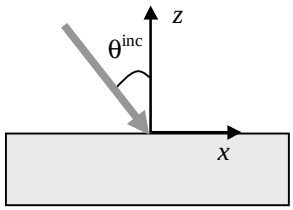


FIG. 1.5 – *Onde incidente sur un guide d'onde plan.*

caniques et électriques, la résonance a lieu lorsque la pulsation d'excitation est proche de la pulsation propre du système. Dans le cas du guide d'onde plan, nous pouvons également nous attendre à un comportement résonnant lorsque la pulsation spatiale α^{inc} du champ incident est proche de celle du mode propre, $\alpha^p(\lambda^{inc})$. Cependant, la relation de dispersion des modes guidés est toujours située à l'extérieur du cône de lumière ($\alpha^p(\lambda^{inc}) > \frac{2\pi}{\lambda^{inc}}\sqrt{\varepsilon^a}$), ce qui signifie que cette pulsation spatiale correspond à une onde incidente évanescente. Un mode guidé peut donc être excité par une onde évanescente, mais pas par une onde plane incidente propagative dans le superstrat.

Pour générer ces ondes évanescentes, il est possible d'utiliser un prisme d'indice optique élevé placé sur le guide d'onde plan. En effet, une onde plane propagative incidente sur une des faces du prisme est transformée en onde évanescente par réflexion totale interne sur sa base. Pour un angle d'incidence donné, l'onde évanescente peut prendre une pulsation spatiale proche de $\alpha^p(\lambda^{inc})$ et exciter le mode guidé. Cette technique est utilisée pour mesurer la constante de propagation des modes guidés dans la méthode des m-lines [Tien and Ulrich, 1970]. Une fois excité, le mode guidé se propage. Le champ qu'il crée est propagatif dans la couche guidante et évanescent dans le substrat et le superstrat. Inversement, le prisme permet également de découpler dans l'espace libre ces ondes évanescentes (fig. 1.6).

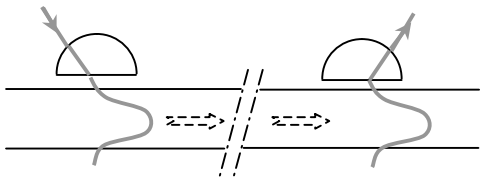


FIG. 1.6 – *Couplage et découplage d'un mode guidé à l'aide d'un prisme.*

Un réseau de diffraction permet également d'obtenir des ondes évanescentes à partir d'une onde plane propagative. Si la période du réseau est inférieure à la longueur d'onde (réseau sub-longueur d'onde) tous les ordres de diffraction sont évanescents sauf l'ordre 0. Pour un angle d'incidence donné, un ordre peut générer une onde évanescente de pulsation proche de $\alpha^p(\lambda^{inc})$ et exciter le mode guidé. Inversement, le réseau de diffraction peut également servir à découpler le mode guidé (fig. 1.7). Ce type d'utilisation est une application importante des réseaux de

diffraction alors appelés réseaux coupleurs ou découpleurs [Tamir and Peng, 1977]. Notons que

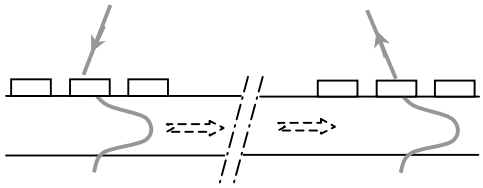


FIG. 1.7 – *Couplage et découplage d'un mode guidé à l'aide d'un réseau.*

l'ensemble du réseau coupleur et du réseau découpleur constitue un filtre élémentaire. En effet, supposons que le réseau coupleur soit choisi de telle sorte que l'amplitude de l'ordre zéro réfléchi soit faible et celle de l'ordre zéro transmis importante. Dans ce cas, lorsque la structure est éclairée par un faisceau comportant plusieurs longueurs d'onde, une seule excitera le mode guidé pour l'incidence donnée, et sera découplée par le réseau découpleur alors que les autres longueurs d'onde seront transmises. Ceci reste vrai si les deux réseaux sont rapprochés jusqu'à n'en former plus qu'un, à la fois coupleur et découpleur. Nous proposons d'utiliser cette structure, le guide d'onde plan modulé par un réseau afin de réaliser le filtre décrit dans l'introduction.

1.3 Excitation des résonances, le guide d'onde perturbé

Nous considérons maintenant un guide d'onde plan sur lequel a été gravé un réseau mono-dimensionnel périodique selon l'axe (Ox), de période d, de hauteur h. Nous définissons deux nouveaux domaines $\mathcal{D}^r = \{z,\ 0 \leq z < h\}$, et $\mathcal{D}^a = \{z,\ h \leq z\}$ (fig. 1.8). Nous introduisons la

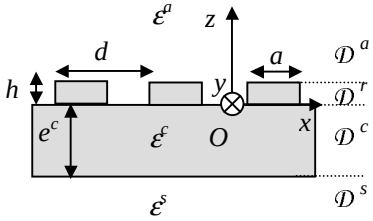


FIG. 1.8 – *Notations utilisées pour le réseau mono-dimensionnel.*

fonction $\varepsilon(x,z)$ décrivant la constante diélectrique de la structure. Notons que $\varepsilon(x,z) = \varepsilon_{go}(z)$ lorsque z n'appartient pas à $\mathcal{D}^r$ et $\varepsilon(x,z)$ est périodique de période d selon (Ox).

1.3.1 Recherche des modes propres

Comme dans le cas du guide d'onde plan, nous cherchons les modes propres de la structure susceptibles de se propager dans la direction (Ox), avec une constante de propagation α, en régime harmonique de pulsation ω et en l'absence de source. Nous traitons les deux cas de pola-

risation TE et TM en utilisant la fonction F, qui représente le champ électrique en polarisation TE et le champ magnétique en polarisation TM.

L'étude des structures périodiques en optique est analogue à l'étude des cristaux en physique du solide. En effet, dans un matériau cristallin les atomes sont répartis périodiquement et créent un potentiel périodique. Les fonctions d'onde des électrons sont les modes propres de la structure et sont solutions de l'équation de Schrödinger avec un potentiel périodique [Ashcroft and Mermin, 1976]. Cette analogie a permis aux physiciens du solide d'appliquer leurs outils et notions à l'étude des cristaux photoniques [Joannopoulos et al., 1995]. Notons que le guide plan perturbé par un réseau mono-dimensionnel n'est pas exactement un cristal photonique. En effet, par définition, un cristal photonique mono-dimensionnel possède une direction de périodicité et deux directions d'invariance (par exemple un empilement infini de couches de haut et bas indice). Un cristal photonique bi-dimensionnel possède deux directions de périodicité et une direction d'invariance (par exemple un réseau de tiges infinies). Enfin, un cristal photonique tri-dimensionnel est périodique selon les trois directions de l'espace. Le guide d'onde perturbé par un réseau mono-dimensionnel ne possède qu'une direction d'invariance (Oy) et une direction de périodicité (Ox). Cependant, restreinte au domaine $\mathcal{D}^r$, la structure présente une invariance également selon (Oz). C'est pourquoi le réseau est parfois appelé couche de cristal photonique 1D (ou 2D dans le cas de deux directions de périodicité).

Pseudo-périodicité du champ

Au delà de cette question de vocabulaire, la périodicité du réseau à mode guidé selon une direction du plan (Oxy) (ou même deux directions) justifie l'utilisation des outils et théorèmes de la physique du solide. Ainsi, la forme du champ est dictée par le théorème de Bloch : la périodicité de la structure impose une propriété de pseudo-périodicité du champ se propageant selon la direction (Ox), soit $F(x+d,z) = F(x,z)\exp(i\alpha d)$. Le champ des modes doit donc être recherché sous la forme

$$F(x,z) = f(x,z)\exp(i\alpha x) \tag{1.10}$$

où $f(x,z)$ est une fonction périodique selon (Ox) de période d. La décomposition de f en série de Fourier selon x conduit à un développement du champ des modes propres en série de Fourier généralisée :

$$F(x,z) = \sum_n f_n(z)\exp(i\alpha_n x) \tag{1.11}$$

où $\alpha_n = \alpha + nK$ avec $K = \frac{2\pi}{d}$. Enfin, le champ F est solution des équations suivantes (au sens des distributions):

$$\begin{aligned} &\Delta E(x,z) + \varepsilon(x,z)k_0^2 E(x,z) = 0 && \text{en polarisation TE} \\ &\operatorname{div}\left[\frac{1}{\varepsilon(x,z)k_0^2}\mathbf{grad}H(x,z)\right] + H(x,z) = 0 && \text{en polarisation TM} \end{aligned} \tag{1.12}$$

Développement de Rayleigh du champ dans le substrat et le superstrat

Dans les milieux $\mathcal{D}^a$, $\mathcal{D}^c$ et $\mathcal{D}^s$ la constante diélectrique ε de la structure est égale à la constante diélectrique ε_{go} du guide d'onde plan étudié précédemment. L'équation vérifiée par le champ dans ces domaines est une équation différentielle à coefficients constants. La recherche des solutions sous forme pseudo-périodique conduit à un développement de Rayleigh du champ. Pour $z \in \mathcal{D}^m$ avec $m = a$, c, ou s:

$$F(x,z) = \sum_n u_n^m \exp i(\alpha_n x + \gamma_n^m z) + d_n^m \exp i(\alpha_n x - \gamma_n^m z) \tag{1.13}$$

où

$$\gamma_n^m = \sqrt{\varepsilon^m k_0^2 - \alpha_n^2} \ \text{ et } \ \mathrm{Im}(\gamma_n^m) \geq 0. \tag{1.14}$$

Dans le domaine $\mathcal{D}^r$, la constante diélectrique de la structure dépend de x, l'équation à résoudre est donc une équation différentielle à coefficients variables. Plusieurs méthodes ont été développées pour résoudre ce problème. Nous n'avons pas l'intention de retracer un historique du développement des méthodes de résolutions, mais le lecteur intéressé pourra se reporter aux références indiquées dans [Maystre, 1993]. Aujourd'hui, les méthodes numériques sont en général basées sur des méthodes intégrales [Maystre, 1980], différentielles [Vincent, 1980], modales [Noponen and Turunen, 1994], ou encore des ondes couplées [Moharam and Gaylord, 1977] [Wang et al., 1990]. Le code numérique ayant servi pour tous les calculs présentés dans le manuscrit utilise la méthode modale de Fourier (Fourier Modal Method) [Bräuer and Bryngdahl, 1993] [Li, 1996], basée sur la méthode différentielle [1]. Les problèmes liés aux instabilités numériques sont contournés grâce aux précautions de calcul des séries de produits de fonctions décrites dans [Li, 1997]. Le code nous permet de calculer un opérateur, la matrice de diffraction, reliant le champ diffracté dans le substrat et le superstrat au champ incident, d'en déduire les modes propres (pulsation spatiale et longueur d'onde propre), et les coefficients de réflexion et de transmission de la structure.

Introduction de la matrice de diffraction

Tout au long de cette étude, nous ne considérerons que des structures telles que les seuls ordres propagatifs dans le substrat et le superstrat sont les ordres 0 du développement de Rayleigh. Parmi ces ondes, nous distinguons les ondes se propageant vers la structure, les ondes incidentes du superstrat d'amplitude [2] $d_0^a = I^a(\alpha,\lambda)/\sqrt{\gamma^a}$ et du substrat $u_0^s = I^s(\alpha,\lambda)/\sqrt{\gamma^s}$, et celles qui s'en éloignent, les ondes diffractées dans le superstrat $u_0^a = D^a(\alpha,\lambda)/\sqrt{\gamma^a}$ et dans le substrat $d_0^s = D^s(\alpha,\lambda)/\sqrt{\gamma^s}$ (fig. 1.9). Nous introduisons deux vecteurs colonnes incident et diffracté :

$$\mathbf{I}(\alpha,\lambda) = \begin{pmatrix} I^a(\alpha,\lambda) \\ I^s(\alpha,\lambda) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{D}(\alpha,\lambda) = \begin{pmatrix} D^a(\alpha,\lambda) \\ D^s(\alpha,\lambda) \end{pmatrix} \tag{1.15}$$

1. développé à l'Institut Fresnel par Stefan Enoch

2. Nous avons introduit les coefficients de normalisation $\sqrt{\gamma^a}$ et $\sqrt{\gamma^s}$ afin d'obtenir une expression simple de la conservation de l'énergie. Celle-ci sera établie dans la deuxième section du deuxième chapitre

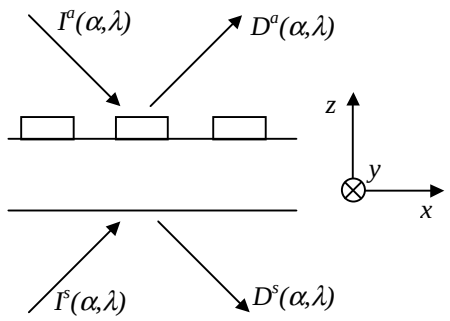


FIG. 1.9 – *Champs incidents et diffractés par la structure.*

La linéarité des équations de Maxwell permet de relier les ondes diffractées aux ondes incidentes à l'aide d'un opérateur $\mathbf{S}(\alpha,\lambda)$ appelé matrice de diffraction. Le problème de la diffraction par une structure peut alors être présenté sous la forme synthétique :

$$\mathbf{D}(\alpha,\lambda) = \mathbf{S}(\alpha,\lambda)\mathbf{I}(\alpha,\lambda) \tag{1.16}$$

L'équation (1.16) est l'équation de définition de la matrice de diffraction. Elle caractérise la structure, et en particulier son comportement résonnant. Remarquons que la matrice de diffraction peut s'exprimer simplement en fonction des coefficients de réflexion et de transmission de la structure, définis par les relations $D^a(\alpha,\lambda) = R(\alpha,\lambda)I^a(\alpha,\lambda) + T'(\alpha,\lambda)I^s(\alpha,\lambda)$ et $D^s(\alpha,\lambda) = T(\alpha,\lambda)I^a(\alpha,\lambda) + R'(\alpha,\lambda)I^s(\alpha,\lambda)$:

$$\mathbf{S}(\alpha,\lambda) = \begin{pmatrix} R(\alpha,\lambda) & T'(\alpha,\lambda) \\ T(\alpha,\lambda) & R'(\alpha,\lambda) \end{pmatrix} \tag{1.17}$$

Sa détermination est à la base de la recherche des modes propres. En effet, dans le cas des oscillateurs mécaniques et électriques, la recherche des modes propres du système consiste à résoudre l'équation décrivant les oscillations lorsque aucune force (cas mécanique) ou tension (cas électrique) n'est appliquée. De même la recherche des modes propres du guide d'onde plan consiste à résoudre l'équation (1.16) lorsque aucun champ incident n'est présent. Nous avons dans ce cas à résoudre l'équation $[\mathbf{S}(\alpha,\lambda)]^{-1}\,\mathbf{D}(\alpha,\lambda) = \mathbf{0}$. Ce système d'équations homogènes est la traduction mathématique d'un problème appelé problème homogène [Nevière, 1980]. Les solutions non nulles sont les modes propres du système. Ces solutions existent si le déterminant de $[\mathbf{S}(\alpha,\lambda)]^{-1}$ est nul. En généralisant le vocabulaire introduit dans le cas du guide d'onde plan, l'équation

$$\det\,[\mathbf{S}(\alpha,\lambda)]^{-1} = 0 \tag{1.18}$$

est appelée l'équation des modes. Ses solutions (α^p,λ^p) correspondent aux modes propres de la structure.

A nouveau, par analogie avec les résultats obtenus pour le guide d'onde plan, nous pouvons deviner que la pulsation spatiale et la longueur d'onde des modes propres sont des pôles des

coefficients de réflexion et de transmission de la structure. En effet, α^p et λ^p sont solutions de l'équation des modes $\det\left[\mathbf{S}(\alpha,\lambda)\right]^{-1} = 0$. Par conséquent, α^p et λ^p correspondent à des pôles de la fonction $\det \mathbf{S}(\alpha,\lambda)$. En général, α^p et λ^p sont des pôles de tous les coefficients de la matrice de diffraction, et en particulier des coefficients de réflexion et de transmission de la structure.

Enfin, la relation entre α^p et λ^p est évidemment appelée la relation de dispersion. Cependant, malgré les similitudes observées entre le guide d'onde plan et le guide perturbé, nous devons nous attendre à une relation de dispersion plus compliquée, avec éventuellement des valeurs de α^p et λ^p complexes.

1.3.2 La relation de dispersion des modes propres

Avant de nous intéresser à l'étude d'une structure particulière, quelque remarques s'imposent concernant des propriétés des relations de dispersion des réseaux à modes guidés.

D'abord, la propriété de pseudo-périodicité du champ (éq. 1.11) implique immédiatement que si (α^p,λ^p) correspond à un mode propre de la structure, alors $(\alpha^p + nK,\lambda^p)$ correspond également à un mode propre de la structure. La relation de dispersion est donc périodique de période K selon α. La courbe obtenue par une translation de nK à partir de celle comprise entre $[-K/2; K/2]$ est appelée bande (n) de la relation de dispersion. Cette propriété implique que le domaine d'étude des modes propres d'une structure perturbée périodiquement peut être réduit à l'ensemble des pulsations spatiales α appartenant à l'intervalle $\left[-\frac{K}{2},\frac{K}{2}\right]$. Cet intervalle est appelé première zone de Brillouin, terme également emprunté à la physique des solides. Lorsque la structure est symétrique par rapport à (Oz), le domaine d'étude peut encore être réduit. En effet, dans ce cas, si $F(x,z)$ est solution du problème homogène, $F(-x,z)$ l'est également. En conséquence, d'après l'équation (1.11), si (α^p,λ^p) correspond à un mode propre de la structure, alors $(-\alpha^p,\lambda^p)$ aussi. Nous en déduisons que le domaine d'étude peut être limité à l'intervalle $\left[0,\frac{K}{2}\right]$ appelé première zone de Brillouin réduite [Joannopoulos et al., 1995].

Ensuite, intéressons-nous au cas des réseaux de hauteur faible, et en particulier au cas du réseau de hauteur nulle. La structure est alors un guide d'onde plan à période fictive. Notons $(\alpha^{ref},\lambda^{ref})$ un mode du guide d'onde plan non périodisé. Rappelons que α^{ref} et λ^{ref} sont réels. D'après le théorème de Bloch, $(\alpha^{ref} + nK,\lambda^{ref})$, quel que soit l'entier relatif n, correspond également à un mode propre de la structure à période fictive. Comme le réseau à modes guidés tend vers le guide d'onde plan à période fictive lorsque h tend vers zéro, nous pressentons que $(\alpha^p + nK,\lambda^p)$ tendra vers $(\alpha^{ref} + nK,\lambda^{ref})$. Pour des hauteurs de réseau faibles, la relation de dispersion du réseau à mode guidé sera donc proche de celle du guide d'onde plan à période fictive.

Vérifions ces propriétés sur un exemple. Nous avons étudié rigoureusement la relation de dispersion pour une structure particulière. Comme pour le guide d'onde plan, une des deux pulsations doit être fixée pendant la recherche des modes propres. Dans un premier temps, nous avons fixé la longueur d'onde à une valeur réelle λ et nous avons cherché les pulsations spatiales $\alpha^p(\lambda)$ tels que les couples (α^p,λ) vérifient l'équation des modes (1.18). Contrairement au guide

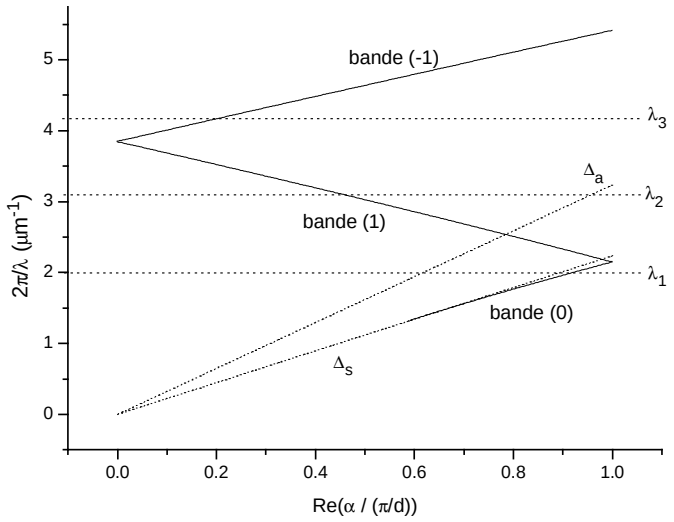


FIG. 1.10 – *Relation de dispersion $\lambda(\alpha)$ du réseau à modes guidés composé de l'empilement $\varepsilon^a = 1{,}0$, $\varepsilon^c = 2{,}07^2$ et $e^c = 300$ nm , $\varepsilon^s = 1{,}448^2$, et du réseau $d = 971$ nm, $h = 20$ nm, $a = 721$ nm gravé dans une couche de constante diélectrique ε^c (structure 1.2).*

d'onde plan, nous obtenons des solutions complexes. Ces solutions complexes correspondent à des points situés à l'intérieur du cône de lumière. Sur la figure (fig. 1.10) nous avons représenté $\frac{2\pi}{\lambda}$ en fonction de $Re(\alpha)$ sur la première zone de Brillouin réduite. L'ensemble de la courbe peut être obtenu par symétrie par rapport à la droite $\alpha = 0$ et translation de nK selon α. Nous remarquons qu'une partie de la relation de dispersion apparaît dans le cône de lumière, au dessus de la droite Δ^s. Les modes correspondants peuvent se propager dans le substrat, et éventuellement dans le superstrat. Ce sont des modes guidés à fuite. L'existence d'une partie imaginaire de α non nulle peut alors s'expliquer. Lors de sa propagation selon (Ox), le mode fuit, il est donc normal que l'amplitude de son champ diminue selon x.

Contrairement au guide d'onde plan, la structure n'est plus isotrope dans le plan (Oxy). Il est donc utile de compléter la représentation précédente par une ou plusieurs représentations de β en fonction de α à λ réel constant. Sur la figure (fig. 1.11) nous avons représenté la partie réelle de β en fonction de la partie réelle de α pour deux longueurs d'ondes λ_1 et λ_2. Pour λ_1, les différentes bandes de la relation de dispersion sont disjointes. La périodisation s'observe très bien en dehors de la première zone de Brillouin. Pour λ_2, les cercles correspondant aux différentes bandes de la relation de dispersion ont grandi et se sont croisés. Une partie apparaît dans le disque d'espace libre.

Dans un deuxième temps, nous avons fixé la pulsation spatiale à une valeur réelle α et cherché les longueurs d'onde $\lambda^p(\alpha)$ tels que les couples (α,λ^p) vérifient l'équation des modes (1.18). Le graphe de $\frac{2\pi}{Re(\lambda)}$ en fonction de α obtenu dans ce cas ressemble fortement à celui de la figure (fig. 1.10). Les longueurs d'onde propres λ^p obtenues sont complexes lorsqu'elles correspondent à des solutions situées dans le cône de lumière. L'existence d'une partie imaginaire non nulle pour

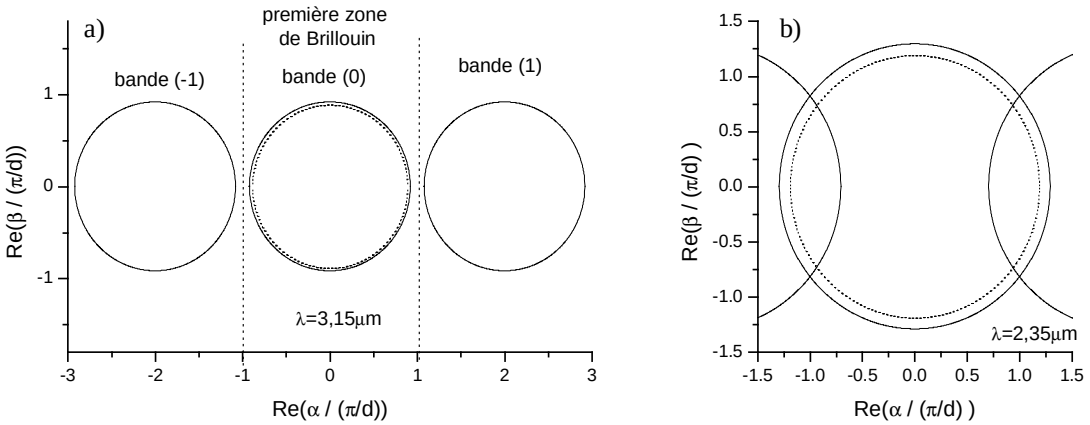


FIG. 1.11 – *Relation de dispersion $\beta(\alpha)$ (structure 1.2), a) pour $\lambda_1 = 3{,}15\ \mu m$, b) pour $\lambda_2 = 2{,}0\ \mu m$.*

la longueur d'onde est physiquement plus difficile à concevoir que pour une pulsation spatiale. Notons cependant que dans le cas d'un oscillateur mécanique, la prise en compte des frottements de la masse sur le plan horizontal conduit à une pulsation temporelle propre complexe. De même pour l'exemple de l'oscillateur électronique, la résistance interne de la bobine n'est pas nulle et la pulsation propre du circuit est complexe. La partie imaginaire traduit la diminution de l'amplitude du mode due aux frottements où à la dissipation par effet Joule. Notons cependant que pour le guide perturbé, la partie imaginaire de la pulsation temporelle n'est pas due à l'absorption, puisque les matériaux sont non absorbants par hypothèse, mais à la fuite de l'onde dans l'espace libre.

Nous aurions pu également fixer la pulsation spatiale à une valeur complexe, et chercher les pôles en longueur d'onde ou inversement [3]. En effet, il est important de noter que la relation de dispersion est l'ensemble des couples (α^p,λ^p) vérifiant l'équation $\det\left[\mathbf{S}(\alpha,\lambda)\right]^{-1} = 0$. La recherche des pôles en fixant la longueur d'onde ou la pulsation spatiale à une valeur réelle ne permet donc d'obtenir qu'une partie de la relation de dispersion. Cependant, notre but est d'exciter les modes propres de la structure à l'aide d'une onde plane incidente, dont la longueur d'onde et la pulsation spatiale selon (Ox) sont évidemment réelles. Les parties de la relation de dispersion obtenues en fixant α^p ou λ^p réelles sont donc en général suffisantes pour prévoir le comportement résonnant d'une structure. Pour le comprendre, intéressons nous maintenant au problème de la diffraction d'une onde plane incidente par cette structure au voisinage d'un mode propre.

1.3.3 Réponse à une onde plane

Considérons une onde plane incidente de longueur d'onde λ^{inc} fixée, et d'angle d'incidence θ^{inc} variable (fig. 1.12). La pulsation spatiale α^{inc} est définie par $\alpha^{inc} = \frac{2\pi}{\lambda^{inc}}\sin(\theta^{inc})$. Contrairement au cas du guide d'onde plan, il est maintenant possible de trouver $\alpha^p(\lambda^{inc})$ correspon-

3. Ce sont des solutions du problème homogène auxquelles il est très difficile, voir impossible, de donner une interprétation physique, contrairement aux cas où α ou λ est réel.

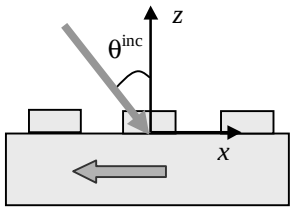


FIG. 1.12 – *Onde incidente sur un réseau mono-dimensionnel.*

dant à un mode propre et tel que le couple (α^p,λ^{inc}) soit situé dans le cône de lumière. Par exemple, d'après la relation de dispersion (fig. 1.10), pour $\lambda^{inc} = \lambda_3 = 1{,}55$ μm nous lisons $\mathrm{Re}(\alpha^p(\lambda^{inc})) = 0{,}13\pi/d$. Sur la figure (fig. 1.13a), nous avons tracé le coefficient de réflexion en énergie en fonction de α^{inc} pour $\lambda^{inc} = 1{,}55$ μm. Nous voyons apparaître un pic de résonance qui traduit l'excitation du mode par l'onde incidente puis son découplage dans l'espace libre.

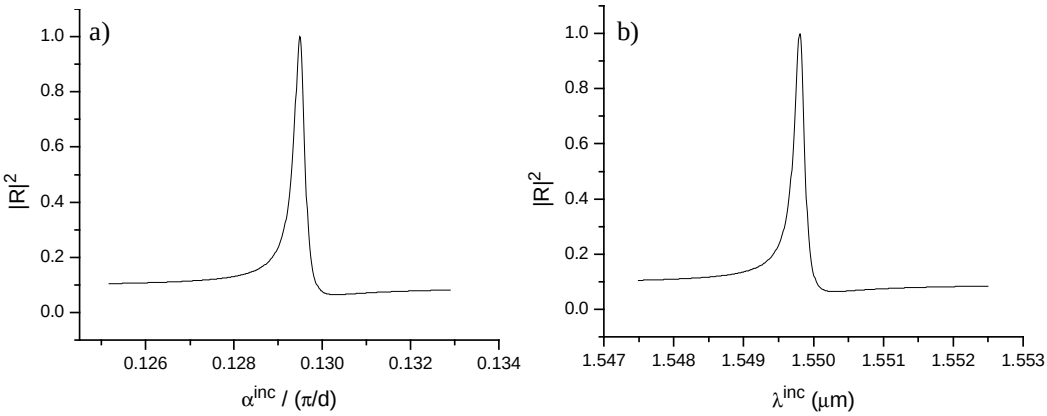


FIG. 1.13 – *Réflexion en énergie (structure 1.2), a) en fonction de la pulsation spatiale d'incidence, b) en fonction de la longueur d'onde incidente.*

Inversement, considérons une onde plane incidente de pulsation spatiale $\alpha^{inc} = 0{,}13\pi/d$ et de longueur d'onde λ^{inc} variable. Le coefficient de réflexion en fonction de la longueur d'onde est tracé sur la figure (fig. 1.13b). Nous voyons apparaître un pic de résonance pour λ^{inc} proche de 1,55 μm .

Nous proposons d'utiliser ce pic de résonance pour réaliser le filtre demandé. La fonction de filtrage à obtenir est compliquée. Pour le travail d'optimisation, nous avons besoin de caractériser précisément les paramètres du pic tels que la largeur spectrale et la longueur d'onde de centrage. D'après l'étude précédente, le couple (α^{inc},λ^{inc}) pour lequel le pic de résonance apparaît est proche du couple ($\mathrm{Re}(\alpha^p)$,$\mathrm{Re}(\lambda^p)$) correspondant à un mode propre de la structure. Cette information suggère l'importance de l'étude des modes propres pour caractériser le pic de résonance. Dans la section suivante, nous rappelons comment exprimer le coefficient de réflexion par une formule analytique simple en fonction de la pulsation spatiale ou de la longueur d'onde

du mode propre excité.

1.4 Caractérisation phénoménologique des résonances

Nous souhaitons rappeler une formule analytique simple permettant de rendre compte des variations des coefficients de réflexion et de transmission d'un réseau à mode guidé au voisinage d'un mode propre [Maystre, 1982] [Nevière, 1980]. Deux cas doivent être traité: les variations de $R(\alpha,\lambda)$ et $T(\alpha,\lambda)$ en fonction de la longueur d'onde, ou en fonction de la pulsation spatiale.

Dans un premier temps, nous considérons que la pulsation spatiale est fixée à une valeur α réelle, et nous étudions les coefficients de réflexion et de transmission en fonction de la longueur d'onde. Nous avons déjà montré que la longueur d'onde d'un mode propre était un pôle des coefficients de réflexion et de transmission. Nous supposons que ce pôle $\lambda^p(\alpha)$ est unique dans le domaine de longueurs d'onde considéré. Lorsque λ est au voisinage de λ^p, nous pouvons donc écrire

$$R(\alpha,\lambda) = \frac{A_R(\alpha,\lambda)}{\lambda - \lambda^p} \quad \text{et} \quad T(\alpha,\lambda) = \frac{A_T(\alpha,\lambda)}{\lambda - \lambda^p} \tag{1.19}$$

et des formes similaires pour $R'(\alpha,\lambda)$ et $T'(\alpha,\lambda)$. Admettons dans un premier temps que les fonctions $A_R(\alpha,\lambda)$ et $A_T(\alpha,\lambda)$ varient peu au voisinage de λ^p. Cette écriture rend compte du fait que la résonance a lieu pour une longueur d'onde λ proche de $\mathrm{Re}(\lambda^p)$. Pour cette valeur, le coefficient de réflexion en énergie est alors donné par $|R(\alpha,\lambda)|^2 = \frac{|A_R(\alpha,\lambda)|^2}{|\mathrm{Im}\lambda^p|^2}$. Un calcul simple permet de trouver que la largeur à mi-hauteur du pic est proche de $2\mathrm{Im}(\lambda^p)$.

Il est cependant aisé de montrer que les formules (1.19) sont insuffisantes, en considérant le cas des réseaux de hauteur faible. Rappelons que le pôle $\lambda^p(\alpha)$ tend vers un mode $\lambda^{ref}(\alpha)$ du guide d'onde plan et que λ^{ref} est réel. Il apparaît immédiatement que la réflexion en énergie de la structure à la résonance peut devenir très grande lorsque la hauteur du réseau devient faible, ce qui est physiquement impossible. Pour compenser le pôle, le numérateur des équations (1.19) doit nécessairement présenter un zéro complexe, λ^{zr} en réflexion et λ^{zt} en transmission tels que λ^{zr} et λ^{zt} tendent vers λ^{ref} lorsque h tend vers zéro. Nous proposons alors pour R et T les écritures suivantes au voisinage de λ^p:

$$R(\alpha,\lambda) = r(\alpha,\lambda)\frac{\lambda - \lambda^{zr}}{\lambda - \lambda^p} \quad \text{et} \quad T(\alpha,\lambda) = t(\alpha,\lambda)\frac{\lambda - \lambda^{zt}}{\lambda - \lambda^p} \tag{1.20}$$

Cette fois, les fonctions $r(\alpha,\lambda)$ et $t(\alpha,\lambda)$ sont effectivement lentement variables au voisinage de λ^p. Elles correspondent aux coefficients de réflexion et de transmission de la structure en dehors de la résonance.

En résumé, le pic de résonance apparaît pour une longueur d'onde proche de $\mathrm{Re}(\lambda^p)$, et sa largeur est de l'ordre de $2\mathrm{Im}(\lambda^p)$. Son maximum est atteint pour une longueur d'onde proche de $\mathrm{Re}(\lambda^{zt})$, et son minimum pour une longueur d'onde proche de $\mathrm{Re}(\lambda^{zr})$. Notons que si le zéro en transmission λ^{zt} est réel, alors $T(\alpha,\lambda)$ présentera un minimum nul et $R(\alpha,\lambda)$ un maximum égal à 100% pour $\lambda = \lambda^{zt}$. C'est le cas pour l'exemple que nous avons étudié (fig. 1.13b). Inversement, si

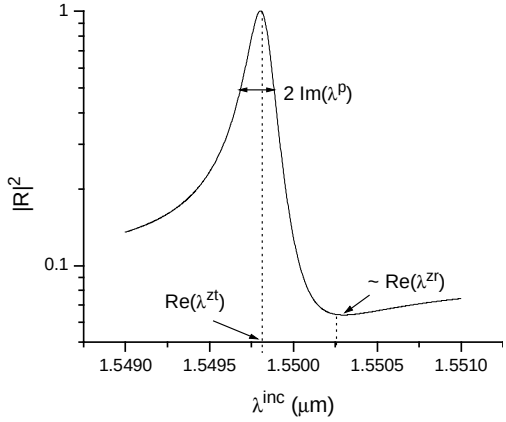


FIG. 1.14 – *Caractérisation phénoménologique de la réflexion en énergie d'un réseau à mode guidé en fonction de la longueur d'onde (structure 1.2).*

le zéro en réflexion λ^{zr} est réel alors $R(\alpha,\lambda)$ présentera un minimum nul et $T(\alpha,\lambda)$ un maximum égal à 100% pour $\lambda = \lambda^{zr}$. Tout ceci est résumé sur la figure (fig. 1.14).

Montrons que la courbe de réflexion en fonction de la longueur d'onde obtenue pour la structure 2 peut être représentée par une fonction de la forme (1.20). Sur la figure (fig. 1.15), nous avons représenté la fonction phénoménologique (trait continu) et le calcul rigoureux du coefficient de réflexion de la structure en fonction de la longueur d'onde (losanges). Il apparaît que l'équation (1.20) permet de décrire avec une remarquable précision le coefficient de réflexion de la structure. Un résultat semblable est obtenu pour le coefficient de transmission.

Dans un second temps, nous pouvons utiliser le même raisonnement lorsque la longueur

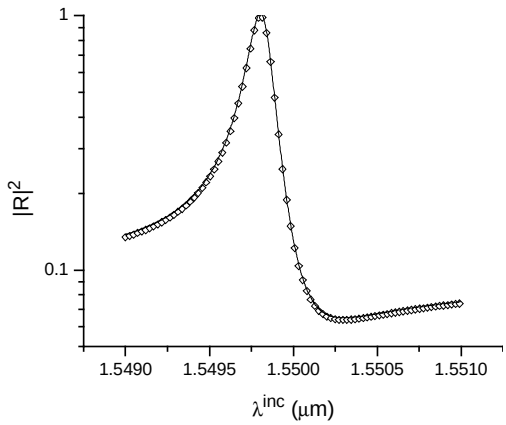


FIG. 1.15 – *Comparaison entre le calcul rigoureux (losanges) et la formule phénoménologique (trait continu) du coefficient de réflexion en énergie en fonction de la longueur d'onde (structure 1.2), avec* $\lambda^p = 1{,}54982 + i9.10^{-5}$ *μm, $\lambda^{zr} = 1{,}54997 + i2{,}3.10^{-4}$ μm, et $r(\alpha,\lambda) = 0{,}094$.*

d'onde est fixée à une valeur λ et que l'on étudie le comportement des coefficients de réflexion et de transmission en fonction de α. En supposant qu'un mode $\alpha^p(\lambda)$ existe, nous lui associons un zéro en réflexion α^{zr} et un zéro en transmission α^{zt}, à priori complexes, et nous écrivons:

$$R(\alpha,\lambda) = r(\alpha,\lambda)\frac{\alpha - \alpha^{zr}}{\alpha - \alpha^p} \quad \text{et} \quad T(\alpha,\lambda) = t(\alpha,\lambda)\frac{\alpha - \alpha^{zt}}{\alpha - \alpha^p}. \tag{1.21}$$

Les coefficients $R'(\alpha,\lambda)$ et $T'(\alpha,\lambda)$ peuvent évidemment aussi être écrits sous des formes similaires aux équations (1.20). Nous notons $\lambda^{zr'}$ et $\lambda^{zt'}$ les zéros en lambda et $\alpha^{zr'}$ et $\alpha^{zt'}$ les zéros en alpha.

Finalement, retenons que la donnée de cinq éléments, le pôle, le zéro en transmission, le zéro en réflexion, et les coefficients de réflexion et de transmission r et t de la structure en dehors de la résonance permet d'exprimer complètement les variations des coefficients de réflexion et de transmission de la structure au voisinage de la résonance.

1.5 Conclusion

En résumé, dans ce chapitre, nous avons montré l'intérêt des réseaux à modes guidés pour réaliser des fonctions de filtrage. Nous avons d'abord étudié les modes propres du guide d'onde plan. Malheureusement, ces modes propres ne peuvent pas être excités par une onde plane incidente propagative. Pour contourner la difficulté, nous avons proposé l'utilisation d'un réseau, gravé sur une interface de la structure plane. Les modes propres peuvent alors être excités par une onde plane incidente, ce qui se traduit par l'apparition d'un pic de résonance dans les courbes de réflectivité et de transmittivité en fonction de la longueur d'onde ou de la pulsation spatiale incidente. Nous avons caractérisé cette fonction à l'aide d'un pôle (la longueur d'onde ou la pulsation spatiale propre), d'un zéro en réflexion, d'un zéro en transmission, et des coefficients de réflexion et de transmission en dehors de la résonance. Les zéros et le pôle sont à priori complexes.

Notons que la résolution du problème homogène dans le cas des guides métalliques met en évidence l'existence de modes propres, des ondes de surface appelés plasmons de surface [Maystre, 1982]. Les théories développées pour les modes guidés sont applicables aux plasmons et inversement. Les plasmons de surface pourraient aussi être utilisés pour réaliser la fonction de filtrage demandée [Enoch et al., 2002]. Mais les pertes dues au métal sont trop importantes pour les applications D.W.D.M..

La caractérisation phénoménologique est une étape importante dans la conception du filtre. Elle permet d'exprimer les propriétés principales du filtre, telles que sa longueur d'onde, sa pulsation spatiale de fonctionnement et sa largeur à mi-hauteur, en fonction du pôle et des zéros. Ainsi, pour créer le filtre, nous serions tentés de prétendre qu'il suffit de trouver les valeurs du pôle et des zéros qui génèrent la fonction de filtrage souhaitée.

Cependant, il nous manque encore une connaissance essentielle: le lien entre les valeurs du pôle et des zéros et les paramètres physiques de la structure. Autrement dit, nous ne connaissons

pas quels paramètres du réseau influent sur la partie réelle ni sur la partie imaginaire du pôle et des zéros. L'objet du deuxième chapitre est d'établir ces relations.

Chapitre 2

Etude des pôles et des zéros

Nous avons caractérisé le pic de résonance d'un réseau à modes guidés à l'aide d'un pôle, d'un zéro en réflexion, et d'un zéro en transmission, complexes. Nous souhaitons maintenant connaître l'influence des paramètres et des propriétés de la structure sur la valeur du pôle et des zéros.

De nombreuses méthodes approchées ou rigoureuses ont été développées pour étudier les réseaux à mode guidés. Une méthode approchée est basée sur la "théorie du zigzag" utilisée habituellement pour les guides d'onde plan [Sharon et al., 1997a]. Cette théorie permet une explication élémentaire du phénomène de guidage: le mode est assimilé à un rayon lumineux se propageant dans la couche par réflexion totale interne aux interfaces couche-substrat et couche-superstrat. Lorsqu'un réseau est gravé sur l'une des interfaces, le rayon est diffracté dans les ordres du réseau. Les auteurs en ont déduit les expressions des coefficients de réflexion et de transmission de la structure. Leur résultats ont été validés expérimentalement [Sharon et al., 1997b] [Glasberg et al., 1998].

Dans d'autres méthodes approchées, le réseau est considéré comme une perturbation périodique du guide d'onde plan. Par exemple, dans la méthode des modes couplés, la grandeur perturbative est la modulation d'indice du réseau [Norton et al., 1997]. Les auteurs modélisent le couplage entre les modes guidés et les modes radiatifs à l'aide d'intégrales de recouvrement. Cela leur permet de calculer la partie imaginaire du vecteur d'onde du mode guidé. Les intégrales de recouvrement sont une bonne traduction mathématique du phénomène physique du couplage. Si deux modes sont indépendants, leur intégrale de recouvrement est nulle. Une autre méthode, basée sur une analogie électrique, permet d'exprimer la partie imaginaire du vecteur d'onde du mode en fonction de la perturbation induite par la modulation d'indice du réseau [Tamir and Peng, 1977].

Dans ce chapitre, nous présentons une méthode approchée dans laquelle la grandeur perturbative est la hauteur du réseau. Nous obtenons des expressions analytiques approchées du pôle et des zéros, en fonction des paramètres du réseau. Puis, nous reprenons la théorie phénoménologique rigoureuse présentée dans [Popov et al., 1986], permettant de démontrer des propriétés

des zéros liées aux propriétés de symétrie de la structure.

Les calculs développés dans ce chapitre sont parfois longs. Ils pourront être négligés dans une première lecture. Les résultats intéressants sont mis en évidence à la suite du calcul.

2.1 Etude perturbative des pôles et des zéros

Le réseau à modes guidés peut être considéré comme la somme d'une structure de référence, le guide d'onde plan, et d'une perturbation, le réseau (fig. 2.1). Les modes propres du guide modulé

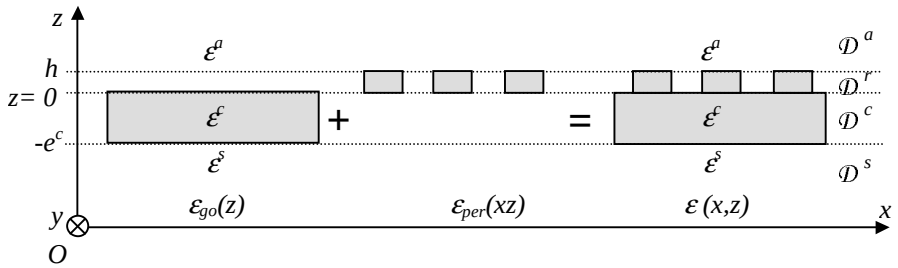


FIG. 2.1 – *La structure de référence (le guide d'onde plan) et la perturbation (le réseau).*

sont alors le résultat de la modification des modes propres de la structure de référence par la perturbation. Nous nous proposons d'exprimer analytiquement cette modification, en fonction de la hauteur du réseau [Lemarchand, 1999]. D'abord, nous trouverons l'expression du pôle du réseau à modes guidés en résolvant le problème homogène. Ensuite, nous trouverons les expressions du zéro en réflexion et du zéro en transmission en résolvant le problème de diffraction d'une onde incidente par la structure. Dans les deux cas la résolution se fera de manière perturbative, en fonction de la hauteur du réseau. L'approche qui consiste à considérer que le réseau est une perturbation créée sur la structure de référence constituée par le guide plan peut également conduire à une formulation rigoureuse de la diffraction par un réseau [Sentenac and Greffet, 1992].

Dans toute l'approche perturbative, nous supposons que le guide d'onde plan possède un mode guidé dont la relation de dispersion, l'ensemble des couples $(\alpha^{ref},\lambda^{ref})$ est connue. Nous ne nous intéresserons qu'aux modes polarisés TE (champ électrique perpendiculaire à la direction de propagation). La constante diélectrique $\varepsilon_{per}(x,z)$ de la perturbation est définie par la relation $\varepsilon_{per}(x,z) = \varepsilon(x,z) - \varepsilon_{go}(z)$. Notons que $\varepsilon_{per}(x,z) = 0$ si $z \notin \mathcal{D}^r$.

2.1.1 Résolution du problème homogène

La résolution du problème homogène de manière perturbative doit nous permettre d'exprimer la modification induite par la perturbation sur un mode propre du guide d'onde plan. Cette modification s'observe d'une part sur la relation de dispersion, lien entre la pulsation spatiale et la longueur d'onde, mais également sur le champ du mode propre. Or, lorsque la hauteur du réseau est nulle, les modes propres du guide perturbé sont ceux du guide plan. En conséquence,

avant de résoudre le problème homogène, nous devons d'abord nous interroger sur la relation de dispersion et le champ des modes propres de référence. Ensuite, nous donnerons les solutions du problème homogène sous forme de développements limités en fonction de la hauteur du réseau. Enfin, nous présenterons et commenterons les expressions obtenues pour la partie réelle et la partie imaginaire du pôle.

Le mode de référence

La structure de référence est le guide d'onde plan, supportant un mode guidé, dont la relation de dispersion, l'ensemble des couples $(\alpha^{ref},\lambda^{ref})$, est supposée connue. Le champ du mode de référence s'écrit sous la forme:

$$E^{ref}(x,z) = e^{ref}(z)\exp(i\alpha^{ref}x) \tag{2.1}$$

Comme nous cherchons les modes propres du guide d'onde perturbé sous une forme pseudo-périodique de période d, nous avons tout intérêt à écrire le champ du mode de référence également sous forme pseudo- périodique de même période. Or, l'écriture (2.1) peut être transformée en

$$E^{ref}(x,z) = f(x,z)\exp ix(\alpha^{ref} - qK) \tag{2.2}$$

où q est un entier relatif, et $f(x,z) = e^{ref}(z)\exp(iqKx)$ est périodique de période d. Le champ du mode de référence peut donc être écrit sous forme de développement de Fourier généralisé:

$$\begin{gathered} E^{ref}(x,z) = \sum_m e_m^{ref}(z)\exp(i\alpha_m^{ref}x) \\ \text{avec} \quad \alpha_m^{ref} = \alpha_0^{ref} + mK \quad \text{et} \quad \alpha_0^{ref} = \alpha^{ref} - qK. \end{gathered} \tag{2.3}$$

L'écriture (2.3) est compatible avec (2.1) si toutes les composantes du développement sont nulles, sauf celle correspondant à une constante de propagation égale à α^{ref}. Comme $\alpha_q^{ref} = \alpha^{ref}$, nous en déduisons que seul l'ordre q du développement de Fourier généralisé est non nul et $e_q^{ref}(z) = e^{ref}(z)$.

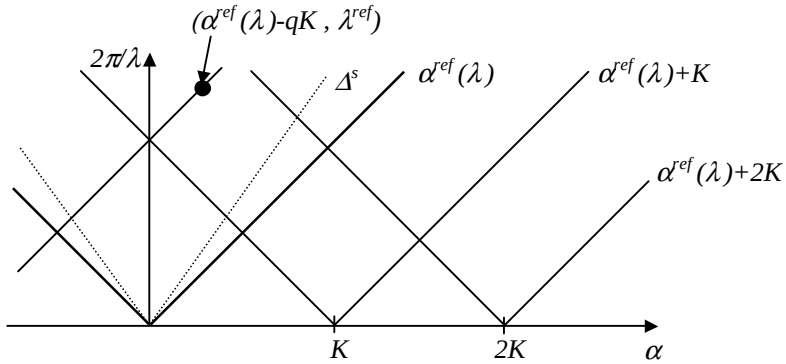


FIG. 2.2 – *La relation de dispersion de référence.*

Ecrire le mode guidé sous forme pseudo-périodique signifie que si $(\alpha^{ref},\lambda^{ref})$ est solution du problème homogène, alors $(\alpha^{ref} + nK,\lambda^{ref})$ l'est également. La relation de dispersion de référence est donc obtenue par périodisation de la relation de dispersion du guide d'onde plan (fig. 2.2).

Enfin, comme nous nous intéressons aux modes susceptibles d'être excités par une onde plane incidente propagative, nous choisissons en particulier un mode de référence $(\alpha^{ref} - qK,\lambda^{ref})$ situé dans le cône de lumière (fig. 2.2). Nous chercherons la pulsation spatiale et la longueur d'onde des modes propres du guide perturbé au voisinage de ce mode de référence.

Le mode de référence ayant été défini, nous nous attachons maintenant à résoudre le problème homogène de manière perturbative, sans oublier que le mode propre de la structure perturbée doit tendre vers le mode propre de référence lorsque la hauteur du réseau tend vers zéro.

Résolution perturbative du problème homogène

Résoudre de manière perturbative le problème homogène signifie que nous cherchons le champ, la pulsation spatiale ou la longueur d'onde d'un mode propre sous la forme de développement en h, la hauteur du réseau. Ces développements limités doivent bien sûr avoir pour limite le champ, la pulsation spatiale et la longueur d'onde du mode de référence. Comme lors des calculs rigoureux de relations de dispersion, nous distinguerons d'une part la recherche de la longueur d'onde propre à pulsation spatiale constante, et d'autre part de la pulsation spatiale propre à longueur d'onde constante.

Pour calculer la longueur d'onde du pôle λ^p, nous fixerons la pulsation spatiale $\alpha = \alpha_0^{ref}$. Nous chercherons alors le pôle λ^p dans le voisinage de λ^{ref}, sous la forme d'un développement en puissances entières de h :

$$\lambda^p(h) = \lambda^{ref} + h\dot{\lambda}^p(0) + h^2\ddot{\lambda}^p(0) + o(h^2) \tag{2.4}$$

où les notations $(\dot{})$ et $(\ddot{})$ désignent les coefficients d'ordre 1 et 2 du développement en h de la fonction entre parenthèses [1].

Pour calculer la pulsation spatiale du pôle α^p, nous fixerons la longueur d'onde $\lambda = \lambda^{ref}$. Nous cherchons alors α^p au voisinage de α_0^{ref}, sous la forme d'un développement en h :

$$\alpha^p(h) = \alpha_0^{ref} + h\dot{\alpha}^p(0) + h^2\ddot{\alpha}^p(0) + o(h^2). \tag{2.5}$$

Dans les deux cas, les coefficients $e_n(z)$ du champ du mode propre s'écrivent sous la forme:

$$e_n(z,h) = e_n^{ref}(z) + h\dot{e}_n(z,0) + h^2\ddot{e}_n(z,0) + o(h^2) \tag{2.6}$$

avec $e_n(z,0) = 0$ pour $n \neq q$ et $e_q(z,0) \neq 0$. Dans la suite, pour simplifier les écritures nous noterons $\dot{e}_n(z) = \dot{e}_n(z,0)$, $\dot{\alpha}^p = \dot{\alpha}^p(0)$, $\dot{\lambda}^p = \dot{\lambda}^p(0)$, et des expressions similaires pour les coefficients d'ordre 2.

1. Nous avons choisi, pour simplifier les calculs, un développement en puissances entières de h. Une étude plus complète pourrait être menée en envisageant des puissances non entières de h.

En fait, comme le suggère la ressemblance des relations de dispersion et des courbes de réflectivité à longueur d'onde ou pulsation spatiale constante, la résolution du problème homogène est similaire pour les deux cas et sera traitée simultanément. Nous donnerons d'abord une solution exacte du problème homogène sous la forme d'un système infini d'équations couplant les coefficients du champ. Puis nous réaliserons un développement en h de ce système pour obtenir les expressions perturbatives du champ du mode, de sa pulsation spatiale et de sa longueur d'onde.

Solution exacte du problème En polarisation TE, le champ et sa dérivée normale étant continus, le champ électrique $E(x,z)$ est solution de l'équation de Helmholtz (1.12) au sens des distributions et satisfait une condition d'onde sortante. En remplaçant $\varepsilon(x,z)$ par $\varepsilon_{per}(x,z) + \varepsilon_{go}(z)$ dans cette équation, nous obtenons:

$$\Delta E(x,z) + \varepsilon_{go}(z)k_0^2 E(x,z) = -\varepsilon_{per}(x,z)k_0^2 E(x,z). \tag{2.7}$$

La fonction $\varepsilon_{per}(x,z)$ étant périodique de période d selon (Ox), nous la décomposons en série de Fourier :

$$\varepsilon_{per}(x,z) = \sum_n \tilde{\varepsilon}_n(z) \exp(inKx). \tag{2.8}$$

Notons que $\tilde{\varepsilon}_n(z) = 0$ lorsque $z \notin \mathcal{D}_r$. D'après le théorème de Bloch, $E(x,z)$ est pseudo-périodique et peut être décomposé en série de Fourier généralisée:

$$E(x,z) = \sum_n e_n(z) \exp(i\alpha_n x) \tag{2.9}$$

avec $\alpha_n = \alpha_0 + nK$. En remplaçant $\varepsilon_{per}(x,z)$ et $E(x,z)$ par leurs expressions données par (2.8) et (2.9) dans (2.7), nous obtenons un système infini d'équations couplées:

$$\frac{d^2 e_n}{d^2 z}(z) + (\varepsilon_{go}(z)k_0^2 - \alpha_n^2)e_n(z) = -k_0^2 \sum_m \tilde{\varepsilon}_{n-m} e_n(z). \tag{2.10}$$

Pour résoudre ce système d'équations, nous introduisons la fonction de Green $G_n(z,z')$ [Sentenac, 1993], solution de

$$\frac{d^2 G_n}{d^2 z}(z,z') + (\varepsilon_{go}(z)k_0^2 - \alpha_n^2)G_n(z,z') = -k_0^2 \delta(z - z') \tag{2.11}$$

au sens des distributions et satisfaisant une condition d'onde sortante. Les solutions du système d'équations (2.10) s'écrivent alors sous la forme:

$$\boxed{e_n(z) = \int_0^h G_n(z,z') \sum_m \tilde{\varepsilon}_{n-m} e_m(z') dz'} \tag{2.12}$$

L'équation (2.12) donne l'expression de $e_n(z)$ en fonction de $\{e_m(z), m \in \mathbb{Z}\}$ quelle que soit la valeur de z. Jusqu'à présent, nous n'avons fait aucune approximation. A partir de l'équation intégrale (2.12), plusieurs approximations sont envisageables. Pour de faibles hauteurs de gravure, on peut supposer, comme dans [Cowan et al., 2001], que le champ ne dépend pas de z à

l'intérieur du réseau. On obtient alors un système d'équations couplées que l'on peut résoudre numériquement. Notre approche consiste plutôt à garder la dépendance du champ en z, et à réaliser un développement en h de (2.12).

Le calcul de la fonction de Green $G_n(z,z')$ lorsque $z' \in \mathcal{D}^r$, détaillé ci-dessous, ne présente ni difficulté, ni astuce, et pourra être omis en première lecture. Par contre, ses propriétés, énoncées ensuite, sont fondamentales pour la suite de l'étude.

Calcul de la fonction de Green Nous cherchons les solutions de l'équation (2.11) au sens des distributions et satisfaisant une condition d'onde sortante. Le calcul de la dérivée seconde de $G_n(z,z')$ par rapport à z au sens des distributions conduit à

$$\left\{\frac{d^2G_n}{d^2z}(z,z')\right\} + (\varepsilon_{go}(z)k_0^2 - \alpha_n^2)G_n(z,z') = 0 \tag{2.13}$$

$$\sigma_{G_n}(z') = 0 \quad \text{et} \quad \sigma_{\frac{dG_n}{dz}}(z') = -k_0^2 \tag{2.14}$$

où $\left\{\frac{d^2G_n}{dz^2}(z,z')\right\}$ désigne la dérivée seconde de $G_n(z,z')$ par rapport à z sans précaution, et $\sigma_{G_n}(z')$ et $\sigma_{\frac{dG_n}{dz}}(z')$ les sauts de $G_n(z,z')$ et de $\frac{dG_n}{dz}(z,z')$ en z'. Les solutions de l'équation (2.13) satisfaisant une condition d'onde sortante sont de la forme:

$$G_n(z,z') = \begin{cases} u_n^a \exp(i\gamma_n^a z) & \text{pour } z \in \mathcal{D}^a \\ u_n^r \exp(i\gamma_n^a z) + d_n^r \exp(-i\gamma_n^a z) & \text{pour } z \in \mathcal{D}^r \\ u_n^c \exp(i\gamma_n^c z) + d_n^c \exp(-i\gamma_n^c z) & \text{pour } z \in \mathcal{D}^c \\ d_n^s \exp(-i\gamma_n^s z) & \text{pour } z \in \mathcal{D}^s. \end{cases} \tag{2.15}$$

En appliquant les conditions de passage de $G_n(z,z')$ et de $\frac{dG_n}{dz}(z,z')$ (éq. 2.14) aux interfaces $z = -e^c$, $z = 0$ et $z = z'$, nous obtenons un système de six équations qui nous permet de déterminer complètement $G_n(z,z')$. Au cours de la résolution du système, nous reconnaissons les expressions des coefficients de réflexion et de transmission en amplitude de la structure de référence $r_{go}(\alpha_n)$ et $t_{go}(\alpha_n)$:

$$\begin{aligned} r_{go}(\alpha_n,\lambda) &= \frac{(\gamma_n^a - \gamma_n^c)(\gamma_n^c + \gamma_n^s) + (\gamma_n^a + \gamma_n^c)(\gamma_n^c - \gamma_n^s)\exp(2i\gamma_n^c e^c)}{(\gamma_n^a + \gamma_n^c)(\gamma_n^c + \gamma_n^s) + (\gamma_n^a - \gamma_n^c)(\gamma_n^c - \gamma_n^s)\exp(2i\gamma_n^c e^c)} \\ t_{go}(\alpha_n,\lambda) &= \frac{4\gamma_n^a\gamma_n^c \exp(2i\gamma_n^c e)}{(\gamma_n^a + \gamma_n^c)(\gamma_n^c + \gamma_n^s) + (\gamma_n^a - \gamma_n^c)(\gamma_n^c - \gamma_n^s)\exp(2i\gamma_n^c e)}. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Il est possible de vérifier qu'un couple $(\alpha^{ref},\lambda^{ref})$ vérifiant l'équation des modes (1.8) annule le dénominateur des coefficients de réflexion et de transmission du guide d'onde plan.

Nous nous intéressons en particulier à l'expression de la fonction de Green dans le substrat et le superstrat, que nous reportons ci-dessous:

$$G_n(z,z') = \begin{cases} \frac{ik_0^2}{2\gamma_n^a}\left[\exp(i\gamma_n^a|z-z'|) + r_{go}(\alpha_n)\exp(i\gamma_n^a(z+z'))\right] & \text{pour } z \in \mathcal{D}_0^a \\ \frac{ik_0^2}{2\gamma_n^a}\left[t_{go}(\alpha_n)\exp(i\gamma_n^a z' - i\gamma_n^s z)\right] & \text{pour } z \in \mathcal{D}^s. \end{cases} \tag{2.17}$$

Les propriétés de la fonction de Green, présentées ci-dessous, sont déduites des équations (2.17).

Propriétés de la fonction de Green Avant de poursuivre la résolution du problème homogène, quelques propriétés importantes de la fonction de Green doivent être citées. Ces propriétés dépendent des valeurs de α et λ et sont valables quels que soient z et z'. C'est pourquoi, pour

les énoncer, nous préciserons que G_n dépend de α et λ plutôt que de z et de z', et nous noterons $G_n(\alpha,\lambda)$.

D'abord $G_n(\alpha,\lambda)$ vérifie deux équations très simples:

$$G_n(\alpha_0,\lambda) = G_0(\alpha_n,\lambda) \quad \text{et} \quad G_n(\alpha,\lambda) = G_{-n}(-\alpha,\lambda). \tag{2.18}$$

Ensuite, $G_n(\alpha,\lambda)$ peut être réelle ou complexe selon la valeur du couple (α,λ):

- si $\alpha_n^2 < \max(\varepsilon^a, \varepsilon^s)k_0^2$ alors $G_n(\alpha,\lambda)$ est complexe.
- si $\max(\varepsilon^a, \varepsilon^s)k_0^2 < \alpha_n^2 < \varepsilon^c k_0^2$ alors $G_n(\alpha,\lambda)$ est réelle.
- si $\varepsilon^c k_0^2 < \alpha_n^2$ alors $G_n(\alpha,\lambda)$ est réelle.

En général, nous choisissons α_0 et K de telle sorte que $\alpha_0^2 < \max(\varepsilon^a, \varepsilon^s)k_0^2$ et que $\max(\varepsilon^a, \varepsilon^s)k_0^2 < \alpha_n^2$ pour $n \neq 0$. Dans ce cas, seul $G_0(\alpha,\lambda)$ est complexe.
Enfin, si le couple (α_n,λ) correspond à un mode propre du guide d'onde plan, alors (α_n,λ) est un pôle du coefficient de réflexion et de transmission du guide d'onde plan, donc un pôle de $G_0(\alpha,\lambda)$. Nous en déduisons que (α_0,λ) est un pôle de $G_n(\alpha,\lambda)$. Nous pouvons déduire les conséquences de cette propriété sur l'écriture de la fonction de Green dans notre problème. Comme $(\alpha_q^{ref},\lambda^{ref})$ est un mode guidé du guide d'onde plan, alors $(\alpha_0^{ref},\lambda^{ref})$ est un pôle de $G_q(\alpha,\lambda)$.

Lorsque nous recherchons la longueur d'onde du pôle, nous fixons la pulsation spatiale $\alpha = \alpha_0^{ref}$, et nous cherchons λ^p au voisinage de λ^{ref}. Comme $(\alpha_0^{ref},\lambda^{ref})$ correspond à un pôle de la fonction $G_q(\alpha,\lambda)$, nous pouvons écrire, lorsque la longueur d'onde est au voisinage de λ^{ref} :

$$G_q(\alpha,\lambda) = \frac{A_q(\alpha,\lambda)}{\lambda - \lambda^{ref}} \tag{2.19}$$

où $A_q(\alpha,\lambda)$ est une fonction réelle. Cette écriture est valable en particulier pour $\lambda = \lambda^p$. Les autres coefficients G_n de la fonction de Green sont des fonctions lentement variables au voisinage de λ^{ref}.

Lorsque nous recherchons la pulsation spatiale du pôle, nous fixons la longueur d'onde $\lambda = \lambda^{ref}$, et nous cherchons α^p au voisinage de α_0^{ref}. Comme $(\alpha_0^{ref},\lambda^{ref})$ est un pôle de la fonction $G_q(\alpha,\lambda)$, nous écrivons

$$G_q(\alpha,\lambda) = \frac{B_q(\alpha,\lambda)}{\alpha - \alpha_0^{ref}} \tag{2.20}$$

où $B_q(\alpha,\lambda)$ est une fonction réelle.

Cette dernière propriété est fondamentale pour comprendre la suite de la méthode perturbative. En effet, au voisinage d'un mode propre de la structure de référence, un coefficient de la fonction de Green (ici $G_q(\alpha,\lambda)$ sera prépondérant par rapport aux autres coefficients. Certains termes du système d'équations couplées (2.12) vont donc pouvoir être négligés lors du développement perturbatif.

Développement perturbatif Pour ce calcul, nous nous plaçons dans le cas *où nous fixons la pulsation spatiale afin de calculer la longueur d'onde du pôle*, mais bien sûr, tout le développement peut être réalisé dans le cas inverse.

Pour trouver l'expression des coefficients du développement de $e_n(z,h)$ et de λ^p, l'équation (2.12) doit être exprimée sous la forme d'un développement en h. Pour cela, il est nécessaire de connaître le développement d'une intégrale du type:

$$J(\Phi,\Psi,h) = \int_0^h \Phi(z,z')\Psi(z')dz' \tag{2.21}$$

Le calcul du développement de $J(\Phi,\Psi,h)$ à l'ordre 2 en h conduit à:

$$J(\Phi,\Psi,h) = h\Phi(z,0)\Psi(0)\left(1 + \frac{h}{2}\frac{d}{dz'}\left[\Phi(z,z')\Psi(z')\right]_{z'=0}\right) + o(h^2) \tag{2.22}$$

Pour développer l'équation (2.12), les cas $n \neq q$ et $n = q$ doivent être traités séparément.

premier cas, $n \neq q$: dans le second membre de l'équation (2.12), nous remplaçons directement $e_n(z,h)$ par son développement en h (éq. 2.6):

$$e_n(z,h) = \sum_{r=0}^{2} h^r \int_0^h G_n(z,z') \sum_m \tilde{\varepsilon}_{n-m} e_m^{(r)}(z')dz' \tag{2.23}$$

où $e_m^{(r)}(z')$ représente le terme d'ordre r du développement de $e_m(z,h)$. Nous utilisons ensuite le développement de $J(\Phi,\Psi,h)$ (éq. 2.22) avec

$$\Phi(z,z') = G_n(z,z') \quad \text{et} \quad \Psi(z') = \sum_m \tilde{\varepsilon}_{n-m} e_m^{(r)}(z'). \tag{2.24}$$

Par identification avec le premier membre de l'équation (2.23), nous obtenons alors à l'ordre 1 en h:

$$\dot{e}_n(z) = G_n(z,0)\tilde{\varepsilon}_{n-q} e_q(0). \tag{2.25}$$

Cette équation traduit le couplage entre le mode guidé très intense et les différents ordres du réseau.

deuxième cas, $n = q$: pour traiter la singularité de $G_q(z,z')$, nous multiplions les deux membres de l'équation (2.12) par $\lambda^p - \lambda^{ref}$. Nous remplaçons ensuite $e_q(z,h)$ par son développement en h dans le second membre:

$$(\lambda^p - \lambda^{ref})e_q(z,h) = \sum_{r=0}^{2} h^r \int_0^h A_q(z,z') \sum_m \tilde{\varepsilon}_{q-m} e_m^{(r)}(z')dz'. \tag{2.26}$$

Puis nous utilisons le développement de $J(\Phi,\Psi,h)$ (éq. 2.22) avec

$$\Phi(z,z') = A_q(z,z') \quad \text{et} \quad \Psi(z') = \sum_m \tilde{\varepsilon}_{n-m} e_m^{(r)}(z'). \tag{2.27}$$

Nous développons également le premier membre de (2.26):

$$(\lambda^p - \lambda^{ref})e_q(z,h) = h\dot{\lambda}^p e^{ref}(z) + h^2(\ddot{\lambda}^p e^{ref}(z) + \dot{\lambda}^p \dot{e}_q(z)) + o(h^2) \tag{2.28}$$

Enfin, l'identification terme à terme conduit successivement à:

$$\begin{aligned} &\text{à l'ordre 1 en h:} \quad \dot{\lambda}^p = \tilde{\varepsilon}_0 A_q(0,0) \quad \text{et} \quad e^{ref}(z,0) = \tfrac{A_q(z,0)}{A_q(0,0)} e^{ref}(0,0) \\ &\text{à l'ordre 2 en h:} \quad \ddot{\lambda}^p = A_q(0,0)\sum_m |\tilde{\varepsilon}_{q-m}|^2 G_m(0,0) + \tilde{\varepsilon}_0 \frac{d}{dz'}\left[A_q(0,z')\right]_{z'=0} \end{aligned} \tag{2.29}$$

L'expression de $\dot{e}_q(z)$, complexe et sans intérêt pour la suite, n'est pas reportée ici.

Comme précisé au début de ce paragraphe, un résultat similaire est obtenu pour l'expression de la pulsation spatiale du pôle α^p. Il suffit de remplacer λ^{ref} par α_0^{ref} et $A_q(z,z')$ par $B_q(z,z')$. Les résultats que nous exposons dans la suite sont déduits du système d'équations (2.29).

Résultats du développement perturbatif et discussions

Pour simplifier les notations, nous posons $G_0 = G_0(0,0)$, $A_q = A_q(0,0)$ et $B_q = B_q(0,0)$. Pour l'instant, intéressons nous au développement du pôle à l'ordre 1 en h. Comme A_q et B_q sont réels, nous avons:

$$\boxed{\mathrm{Re}(\lambda^p) = \lambda^{ref} + h\tilde{\varepsilon}_0 A_q + o(h)} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathrm{Re}(\alpha^p) = \alpha^{ref} - qK + h\tilde{\varepsilon}_0 B_q + o(h)} \tag{2.30}$$

Nous remarquons qu'au premier ordre en h, le seul coefficient de Fourier intervenant est $\tilde{\varepsilon}_0$. En fait, il aurait été plus judicieux, pour simplifier les calculs, de prendre comme structure de référence le guide d'onde plan surmonté d'une couche homogène de hauteur h et de constante diélectrique égale à $\tilde{\varepsilon}_0$ (fig. 2.3). Dans ce cas, la constante diélectrique ε'_{go} de la structure de

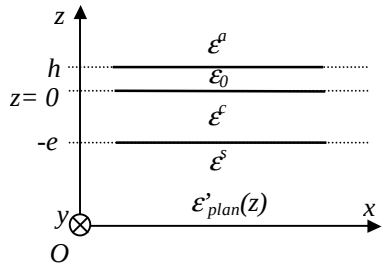


FIG. 2.3 – *Une autre structure de référence possible.*

référence est définie par

$$\varepsilon'_{go}(z) = \begin{cases} \varepsilon^a & \text{pour } z \in \mathcal{D}^a \\ \tilde{\varepsilon}_0 & \text{pour } z \in \mathcal{D}^r \\ \varepsilon^c & \text{pour } z \in \mathcal{D}^c \\ \varepsilon^s & \text{pour } z \in \mathcal{D}^s \end{cases} \tag{2.31}$$

et la constante diélectrique de la perturbation par $\varepsilon'_{per} = \varepsilon(x,z) - \varepsilon'_{go}$. Le calcul est alors simplifié puisque les coefficients de Fourier de ε'_{per} sont égaux à ceux de ε_{per}, sauf l'ordre 0 qui est nul. Nous remarquons alors que $\lambda^{ref} + h\tilde{\varepsilon}_0 A_q$ (ou $\alpha_0^{ref} + h\tilde{\varepsilon}_0 B_q$) est la longueur d'onde propre (ou pulsation propre), au premier ordre en h, d'un mode de la nouvelle structure de référence. Le décalage du pôle de la structure perturbée par rapport à celui de la structure de référence est en premier lieu dû au dépôt d'une couche de hauteur h et de constante diélectrique $\tilde{\varepsilon}_0$.

Pour obtenir la partie imaginaire du pôle, nous devons considérer son développement à l'ordre 2 en h. Comme le couple (α^p,λ^p) est tel que $(\alpha^p)^2 < \max(\varepsilon^a,\varepsilon^s)k_0^2$, parmi les coefficients G_m, seul G_0 a une partie imaginaire non nulle. Nous en déduisons que les parties imaginaires de λ^p et de α^p se réduisent au terme contenant G_0:

$$\boxed{\mathrm{Im}(\lambda^p) = h^2 \left|\tilde{\varepsilon}_q\right|^2 A_q \mathrm{Im}(G_0) + o(h^2)} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathrm{Im}(\alpha^p) = h^2 \left|\tilde{\varepsilon}_q\right|^2 B_q \mathrm{Im}(G_0) + o(h^2)} \tag{2.32}$$

La partie imaginaire des pôles est proportionnelle, au deuxième ordre en h, au coefficient de Fourier $\tilde{\varepsilon}_q$ du réseau. Ce coefficient joue donc un rôle prépondérant dans le couplage et le

découplage du mode. En particulier, la largeur spectrale du pic de résonance pourra être ajustée en jouant sur le motif du réseau. Cependant, la largeur du pic en fonction de la pulsation spatiale dépend également de $\tilde{\varepsilon}_q$. En conséquence, nous pressentons la difficulté que nous aurons à obtenir à la fois une largeur spectrale fine et une bonne tenue à l'incidence du filtre.

La partie imaginaire des pôles dépend d'autres paramètres, en particulier de A_q, qui correspond au numérateur du coefficient résonnant G_q de la fonction de Green écrit en fonction du pôle (éq. 2.19). La valeur de A_q détermine l'ordre de grandeur de la largeur spectrale. Or, selon les modes guidés, A_q peut varier considérablement. Par exemple, nous avons calculé A_q pour trois

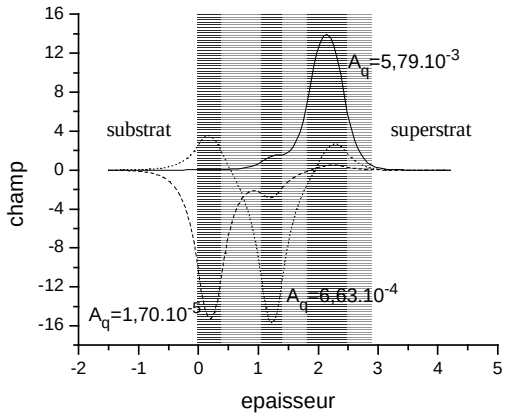


FIG. 2.4 – *Répartition du champ des trois premiers modes guidés TE de l'empilement défini par* $\varepsilon^s = 1{,}448^2$, $\varepsilon^{c_1} = 2{,}07^2$ *et* $e^{c_1} = 386{,}4$ *nm,* $\varepsilon^{c_2} = 1{,}47^2$ *et* $e^{c_2} = 681{,}1$ *nm,* $\varepsilon^{c_3} = 2{,}07^2$ *et* $e^{c_3} = 316{,}2$ *nm,* $\varepsilon^{c_4} = 1{,}47^2$ *et* $e^{c_4} = 463{,}8$ *nm,* $\varepsilon^{c_5} = 2{,}07^2$ *et* $e^{c_5} = 598{,}9$ *nm,* $\varepsilon^{c_6} = 1{,}47^2$ *et* $e^{c_6} = 265{,}3$ *nm,* $\varepsilon^a = 1{,}0$ *(structure* 2.0.

modes guidés TE d'un guide d'onde plan composés de cinq couches, de constante diélectrique élevée (en gris foncé), ou faible (en gris clair)(fig. 2.4). Les trois modes ont des répartitions de champ dans l'empilement distinctes [2]. Nous remarquons que l'ordre de grandeur de A_q est très différent pour chaque mode. De plus, il est d'autant plus grand que le maximum d'intensité du champ est localisé près du superstrat, où le réseau sera gravé. Le terme A_q permet donc de quantifier la capacité du mode à être excité par une onde incidente via le réseau. Plus A_q sera faible, plus il sera nécessaire de perturber la structure (augmenter $|\varepsilon_q|$ ou h) pour exciter la résonance. Les valeurs de A_q les plus importantes sont obtenues lorsque le mode guidé est localisé dans la couche supérieure de l'empilement [3].

2. Le calcul du champ des modes dans cet empilment a été réalisé par Emmanuel Drouard, doctorant à l'Institut Fresnel.

3. $\tilde{\varepsilon}_q A_q$ joue le rôle de l'intégrale de recouvrement entre le mode guidé et le champ d'ordre zéro calculé dans la méthode classique des modes couplés [Norton et al., 1997]

2.1.2 Résolution du problème de diffraction

De la même manière que pour le pôle, nous souhaitons obtenir une expression approchée des zéros en réflexion et en transmission. Le problème qui nous intéresse maintenant est donc un problème de diffraction par un réseau. Nous considérons une onde plane incidente de longueur d'onde λ et de pulsation spatiale α, polarisée s. Son champ électrique est noté $E^{inc}(x,z) = \exp(i\alpha x - i\gamma^a z)$. Nous choisissons α et λ de manière à ce qu'il existe un entier q tel que le couple $(\alpha + qK, \lambda)$ soit proche de celui d'un mode propre $(\alpha^{ref}, \lambda^{ref})$ de la structure de référence.

Contrairement au problème homogène, la résolution perturbative du problème de diffraction présente une difficulté théorique, qu'il est nécessaire de souligner. Nous avons étudié la courbe de réflectivité en fonction de la longueur d'onde au voisinage de la résonance pour des hauteurs de réseaux de plus en plus petites. Ces courbes sont schématisées sur la figure (fig. 2.5a). Nous

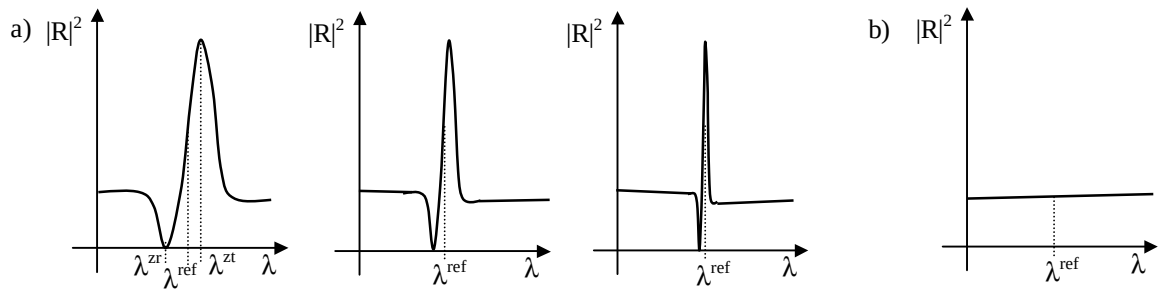


FIG. 2.5 – *a) Evolution de la réflexion en fonction de la longueur d'onde d'un réseau à modes guidés lorsque h tend vers zéro, b) Courbe de réflexion d'un guide d'onde plan.*

observons que les zéros en transmission et en réflexion tendent vers une valeur limite, égale à la longueur d'onde λ^{ref} du mode propre du guide d'onde plan. Cependant, lorsque la hauteur du réseau est strictement nulle, la courbe de réflexion en fonction de la longueur d'onde, pour la même pulsation spatiale, et sur le même intervalle de longueur d'onde ne présente ni pôle, ni zéro (fig. 2.5b). La réflectivité du guide d'onde plan perturbé à la limite quand h tend vers zéro est donc différente de la réflectivité du guide d'onde plan (la structure de référence) [4]. Autrement dit, en notant E^{lim} le champ à la limite quand h tend vers zéro, et E^{ref} le champ du mode du guide d'onde plan, nous avons:

$$\begin{aligned} E(x,z) &= E^{ref}(x,z) \quad \text{si} \quad h = 0 \\ E(x,z) &= E^{lim}(x,z) \quad \text{quand} \quad h \to 0. \end{aligned} \tag{2.33}$$

Cette difficulté n'apparaissait pas dans la résolution perturbative du problème homogène. Dans un premier temps, nous donnerons l'expression du champ de référence. L'expression du champ

4. La discontinuité de la réflectivité quand la hauteur du réseau tend vers zéro n'apparaît évidemment pas expérimentalement. En effet, elle provient de l'hypothèse d'un réseau de taille infinie éclairé par une onde plane. Lorsque le réseau est éclairé par un faisceau gaussien, sa réflectivité tend naturellement vers celle du guide plan car le pic de résonance est de plus en plus étroit angulairement et concerne une fraction de plus en plus petite de l'énergie incidente

limite, plus difficile à trouver, ne viendra qu'après avoir résolu en partie le problème de diffraction. Enfin, nous calculerons le développement perturbatif du champ diffracté ainsi que l'expression approchée du zéro en réflexion et du zéro en transmission.

Le champ de référence

Le champ de référence E^{ref} est solution du problème de la diffraction du champ incident par la structure de référence. Il vérifie l'équation de Helmholtz

$$\Delta E^{ref}(x,z) + k_0^2 \varepsilon_{go}(z) E^{ref}(x,z) = 0 \tag{2.34}$$

au sens des distributions. En particulier, dans le substrat et le superstrat, nous avons:

$$E^{ref}(x,z) = \begin{cases} \exp(i\alpha x - i\gamma^a z) + r_{go}(\alpha,\lambda)\exp(i\alpha x + i\gamma^a z) & \text{pour} \quad z \in \mathcal{D}^a \\ \\ t_{go}(\alpha,\lambda)\exp(i\alpha x + i\gamma^a z) & \text{pour} \quad z \in \mathcal{D}^s \end{cases} \tag{2.35}$$

Nous nous intéressons maintenant au champ diffracté par le guide d'onde perturbé.

Le champ diffracté par le guide d'onde perturbé

Le champ total E est solution de l'équation de Helmholtz (éq. 2.7) au sens des distributions. Il peut être vu comme la somme du champ de référence et d'un champ E^{per} engendré par la perturbation, soit $E(x,z) = E^{per}(x,z) + E^{ref}(x,z)$. Le champ de référence étant solution de l'équation (2.34), E^{per} est solution de

$$\Delta E^{per}(x,z) + k_0^2 \varepsilon_{go}(z) E^{per}(x,z) = -k_0^2 \varepsilon_{per}(x,z) E(x,z) \tag{2.36}$$

au sens des distributions et satisfait une condition d'onde sortante. La périodicité de la structure implique que le champ total E est pseudo-périodique de période d selon (Ox). Il peut être décomposé en série de Fourier généralisée:

$$E(x,z) = \sum_n e_n(z)\exp(i\alpha_n x) \quad \text{avec} \quad \alpha_n = \alpha + nK \tag{2.37}$$

Il est facile d'en déduire que E^{per} est également pseudo-périodique. Sa décomposition en série de Fourier généralisée est la suivante:

$$E^{per}(x,z) = \sum_n \left[e_n(z) - \delta_{n,0} e^{ref}(z) \right] \exp(i\alpha_n x) \tag{2.38}$$

où $\delta_{n,0}$ désigne le symbole de Kronecker, et e^{ref} est défini par

$$E^{ref}(x,z) = e^{ref}(z)\exp(i\alpha x). \tag{2.39}$$

Au final, en utilisant la fonction de Green définie par (2.11), nous montrons que:

$$\boxed{e_n(z) = \delta_{n,0} e^{ref}(z) + \int_0^h G_n(z,z') \sum_m \tilde{\varepsilon}_{n-m} e_m(z') dz'}. \tag{2.40}$$

Comme le champ $E(h)$ est discontinu en $h = 0$ au voisinage de la résonance, les coefficients e_n sont aussi discontinus. Dans le paragraphe suivant, nous nous attachons à déterminer la limite de ces coefficients quand h tend vers zéro.

La limite du champ diffracté au voisinage d'un mode propre

Rappelons que pour pouvoir exciter le mode propre, nous avons choisi α tel que $\alpha + qK$ soit au voisinage de α^{ref} et λ au voisinage de λ^{ref}. Pour tenir compte de cette hypothèse, nous exprimons la longueur d'onde incidente également sous la forme d'un développement en h:

$$\lambda = \lambda^{ref} + h\dot{\lambda}(0) + h^2\ddot{\lambda}(0) + o(h^2) \tag{2.41}$$

Dans ces conditions, le coefficient d'ordre q de la fonction de Green s'écrit sous la forme:

$$G_q(z,z') = \frac{A_q(z,z')}{\lambda - \lambda^{ref}} \tag{2.42}$$

D'après les considérations développées au début de la résolution du problème de diffraction, nous savons que $\lim_{h\to 0} E(x,z) \neq E^{ref}(x,z)$ au voisinage d'un mode propre de la structure. En conséquence, la limite de l'intégrale de l'équation (2.40) lorsque h tend vers zéro est non nulle. Nous en déduisons qu'un coefficient e_m au moins devient très important lorsque h tend vers zéro. Comme nous avons choisi α et λ de manière à ce qu'il existe un entier q tel que le couple $(\alpha + qK,\lambda)$ soit proche de celui d'un mode propre $(\alpha^{ref},\lambda^{ref})$ de la structure de référence, nous savons que le coefficient e_q est prépondérant par rapport aux autres coefficients. Pour tenir compte de ces deux remarques, nous supposerons que le premier terme du développement en h de e_q est en $O(1/h)$, et ceux de e_n pour $n \neq q$ en $O(1)$. Nous chercherons donc les coefficients de E sous la forme:

$$\begin{aligned} e_q(z,h) &= \frac{1}{h}\left[e_q^{lim}(z) + h\dot{e}_q(z,0) + h^2\ddot{e}_q(z,0) + o(h^2)\right] \\ e_n(z,h) &= e_n^{lim}(z) + h\dot{e}_n(z,0) + h^2\ddot{e}_n(z,0) + o(h^2). \end{aligned} \tag{2.43}$$

La première équation du système (2.43) traduit le fait que e_q, qui représente essentiellement le champ du mode propre, tend vers l'infini quand la hauteur du réseau tend vers zéro. Ceci est vérifiable numériquement et peut s'expliquer par le fait que plus le réseau est petit, moins le mode fuit vers l'extérieur. Dans la seconde équation de (2.43), les coefficients e_n pour n différent de q sont en $O(1)$ en h car ils sont couplés avec le champ intense e_q via les ordres du réseau, comme le traduit l'équation (2.40).

Recherche des zéros de réflexion et de transmission

Le zéro de réflexion λ^{zr} est la longueur d'onde pour laquelle le champ diffracté dans le superstrat est réduit au champ incident, et le zéro en transmission λ^{zt} la longueur d'onde pour laquelle le champ diffracté dans le substrat est nul. Soit:

$$\begin{aligned} \lambda = \lambda^{zr} \quad &\Rightarrow \quad e_0(z) = \exp(-i\gamma^a z) \quad \text{pour } z \in \mathcal{D}^a \\ \lambda = \lambda^{zt} \quad &\Rightarrow \quad e_0(z) = 0 \quad \text{pour } z \in \mathcal{D}^s \end{aligned} \tag{2.44}$$

Pour obtenir les expressions de λ^{zr} et λ^{zt}, nous devons d'abord exprimer les coefficients du champ diffracté pour une onde incidente de longueur d'onde λ. Pour obtenir les expressions des coefficients du champ nous développons le système d'équations (2.40). Le développement de ce calcul pourra être négligé en première lecture. Les résultats qui en découlent sont présentés et commentés dans la suite.

Développement perturbatif

Nous devons distinguer les deux cas $n \neq q$ et $n = q$. Lorsque $n \neq q$, nous remplaçons $e_m(z,h)$ par son développement en h (éq. 2.43) dans l'équation (2.40).

$$e_n(z) = \delta_{n,0} e^{ref}(z) + \frac{1}{h}\int_0^h G_n(z,z')\tilde{\varepsilon}_{n-q} e_q^{lim}(z')dz' + o(h) \tag{2.45}$$

Le coefficient d'ordre -1 en h du développement de $e_q(z,h)$ donne un terme d'ordre 0 en h lors du développement de l'intégrale. Pour l'obtenir, nous utilisons le développement de $J(\Phi,\Psi,h)$ donné par l'équations (2.22) avec $\Phi(z,z') = G_n(z,z')$ et $\Psi(z) = \tilde{\varepsilon}_{n-q} e_q^{lim}(z)$. L'identification des coefficients du développement fournit, à l'ordre 0 en h:

$$e_n^{lim}(z) = \delta_{n,0} e^{ref}(z) + G_n(z,0)\tilde{\varepsilon}_{n-q} e_q^{lim}(0). \tag{2.46}$$

Cette équation met en relation le champ du mode excité e_q^{lim}, et le champ incident, présent dans e^{ref}.

Lorsque $n = q$, pour traiter la singularité de G_q en $\lambda = \lambda^{ref}$, nous multiplions le premier membre de (2.40) par $\lambda - \lambda^{ref}$. En utilisant le développement de $e_q(z,h)$ (éq. 2.43), nous obtenons le développement à l'ordre 1 en h:

$$(\lambda - \lambda^{ref}) e_q(z,h) = \dot{\lambda} e_q^{lim}(z) + h\left(\dot{\lambda}\dot{e}_q(z) + \ddot{\lambda} e_q^{lim}(z)\right) + o(h^2). \tag{2.47}$$

Pour développer le second membre de l'équation (2.40), nous commençons par remplacer $e_m(z,h)$ par son développement en h (éq. 2.43):

$$(\lambda - \lambda^{ref}) e_q(z,h) = \int_0^h A_q(z,z')\left[\frac{1}{h}\tilde{\varepsilon}_0\left(e_q^{lim}(z') + h\dot{e}_q(z')\right) + \sum_{m\neq q}\tilde{\varepsilon}_{q-m} e_m^{lim}(z')\right]dz' + o(h^2) \tag{2.48}$$

Ensuite, nous utilisons le développement de $J(\Phi,\Psi,h)$ avec $\Phi(z,z') = A_q(z,z')$ et $\Psi(z) = \frac{1}{h}\tilde{\varepsilon}_0 e_q^{lim}(z)$, puis $\Psi(z) = \tilde{\varepsilon}_0 \dot{e}_q(z)$, et enfin $\Psi(z) = \sum_{m\neq q}\tilde{\varepsilon}_{q-m} e_m^{lim}(z)$. L'identification des termes fournit, à l'ordre 0 en h

$$\dot{\lambda} e_q^{lim}(z) = A_q(z,0)\tilde{\varepsilon}_0 e_q^{lim}(0), \tag{2.49}$$

et à l'ordre 1 en h:

$$\dot{\lambda}\dot{e}_q(z) + \ddot{\lambda} e_q^{lim}(z) = A_q(z,0)\sum_{m\neq q}\tilde{\varepsilon}_{m-q} e_m^{lim}(0) + A_q(z,0)\tilde{\varepsilon}_0\dot{e}_q(0) + \tilde{\varepsilon}_0\frac{d}{dz'}\left[A_q(z,z') e_q^{lim}(z')\right]_{z'=0}. \tag{2.50}$$

De l'équation (2.49) prise en $z = 0$, nous tirons, sans aucune condition sur les coefficients de E:

$$\dot{\lambda} = A_q(0,0)\tilde{\varepsilon}_0. \tag{2.51}$$

Cela signifie qu'au premier ordre en h, le zéro en réflexion et le zéro en réflexion sont tous deux égaux au pôle, $\dot{\lambda}^p = A_q(0,0)\tilde{\varepsilon}_0$. En utilisant les équations (2.46) et (2.49) dans (2.50), il est possible de montrer, pour $z = 0$ la relation suivante:

$$e_q^{lim}(0)\left(\ddot{\lambda} - \ddot{\lambda}^p\right) = \tilde{\varepsilon}_{-q} A_q(0,0) e^{ref}(0), \tag{2.52}$$

où nous avons utilisé l'expression de la longueur d'onde du pôle au second ordre en h (2.29). L'équation (2.52) met en relation le champ du mode excité e^{lim} et le champ incident, présent dans e^{ref}. Une deuxième relation est fournie par l'équation (2.46). Pour trouver le zéro en réflexion et le zéro en transmission, nous utilisons les conditions sur e_0 données par (2.44).

Pour le zéro en réflexion: d'après l'équation (2.46) pour $n = 0$, nous déduisons que, pour $z \in \mathcal{D}^a$

$$e_q^{lim}(0) = -\frac{r_{go}\exp(i\gamma^a z)}{G_0(z,0)\tilde{\varepsilon}_q} \tag{2.53}$$

Cette équation traduit le fait que le champ provenant du découplage dans l'espace libre du mode guidé via un des ordres du réseau interfère destructivement avec le champ réfléchi par la structure de référence pour donner un minimum en réflexion. Notons que le phénomène d'interférences destructives entre le champ réfléchi par la surface plane et le champ diffracté par la perturbation a déjà été évoqué pour expliquer le décalage de l'angle de Brewster dans le cas de surfaces rugueuses éclairés en polarisation TM [Saillard and Maystre, 1990] [Greffet, 1992]. En reportant l'expression (2.53) dans l'équation (2.52), et en utilisant la relation $G_0(0,0) = G_0(z,0)\exp(-i\gamma^a z)$ déduite de l'expression de la fonction de Green (2.17), nous obtenons finalement:

$$\ddot{\lambda} = \ddot{\lambda^p} - A_q(0,0)G_0(0,0)\left|\tilde{\varepsilon}_q\right|^2\left(\frac{1+r_{go}}{r_{go}}\right) \tag{2.54}$$

Pour le zéro en transmission: d'après l'équation (2.46) pour $n = 0$, nous déduisons que, pour $z \in \mathcal{D}^s$

$$e_q^{lim}(0) = -\frac{t_{go}\exp(-i\gamma^s z)}{G_0(z,0)\tilde{\varepsilon}_q} \tag{2.55}$$

En reportant cette expression dans l'équation (2.52), et en utilisant la relation $G_0(0,0) = \frac{1+r_{go}}{t_{go}}G_0(z,0)\exp(i\gamma^s z)$ déduite de l'expression de la fonction de Green (2.17), nous obtenons finalement:

$$\ddot{\lambda} = \ddot{\lambda^p} - A_q(0,0)G_0(0,0)\left|\tilde{\varepsilon}_q\right|^2 \tag{2.56}$$

Nous déduisons des équations (2.51), (2.55) et (2.56) les expressions du zéro de réflexion et de transmission à l'ordre 2 en h.

Résultats et commentaires

Nous donnons les expressions du zéro en réflexion et du zéro en transmission à l'ordre 2 en h sous la forme

$$\boxed{\lambda^{zr} - \lambda^p = -h^2 G_0\left|\tilde{\varepsilon}_q\right|^2 A_q\left(\frac{1+r_{go}}{r_{go}}\right) + o(h^2)} \tag{2.57}$$

et

$$\boxed{\lambda^{zt} - \lambda^p = -h^2 G_0\left|\tilde{\varepsilon}_q\right|^2 A_q + o(h^2)} \tag{2.58}$$

Nous constatons que λ^{zr} et λ^{zt} sont égaux à λ^p au premier ordre en h. De plus la différence entre le zéro en réflexion et le pôle est inversement proportionnelle au coefficient de réflexion de la structure plane. En conséquence, le zéro en réflexion sera d'autant plus éloigné du pôle que r_{go} sera faible, ce qui est le cas pour un anti-reflet. Au contraire, la différence entre le pôle et le zéro en transmission ne dépend pas du coefficient de transmission. Enfin, $\mathrm{Im}(\lambda^{zt}-\lambda^p) = -\mathrm{Im}(\lambda^p)+o(h^2)$, ce qui signifie que λ^{zt} est réel à l'ordre 2 en h, sans aucune condition de symétrie sur la structure.

2.1.3 Vérifications numériques

Pour vérifier la validité des expressions du pôle et des zéros en réflexion et en transmission, nous étudions une structure particulière (structure 2.1). La hauteur h du réseau est variable. Nous avons représenté l'évolution, en fonction de la hauteur du réseau, de la partie réelle (fig.

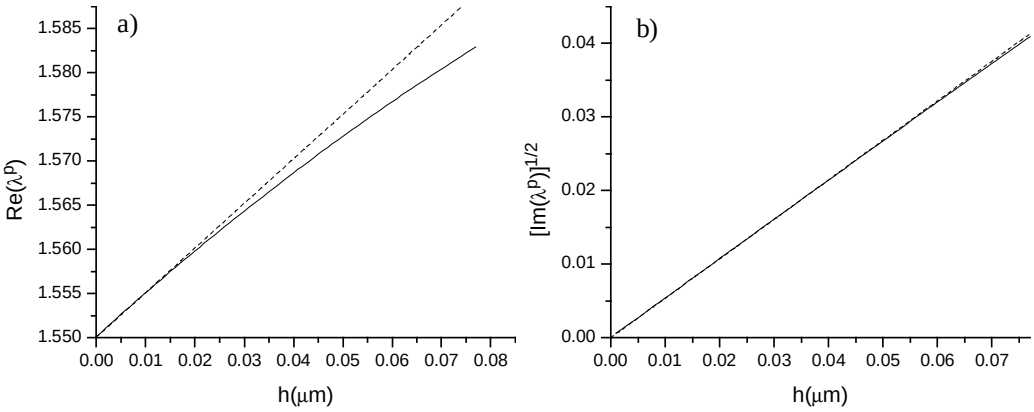


FIG. 2.6 – *Evolution de λ^p en fonction de la hauteur du réseau, calcul rigoureux (trait continu) et perturbatif (trait discontinu): a) Re(λ^p), b) $\sqrt{Im(\lambda^p)}$. La structure est définie par $\varepsilon^a = 1{,}0$, $\varepsilon^c = 2{,}0^2$, $\varepsilon^s = 1{,}5^2$, $e = 250$ nm, $d = 742{,}2$ nm, $a = 300$ nm (structure 2.1). Nous avons choisi $\alpha^{ref} = 2{,}0\ \mu m^{-1}$ et $\lambda^{ref} = 1{,}55\ \mu m$, et $\tilde{\varepsilon}_{-1} = -0{,}91$, $A_{-1} = 0{,}28$ V, $G_0 = 0{,}20 + i1{,}22$ V. μm^{-1} et $r_{go} = -0{,}47 - i0{,}09$.*

2.6a) ainsi que la racine carrée de la partie imaginaire du pôle (fig. 2.6b) calculées rigoureusement (trait continu) et leur développement au premier et au deuxième ordre en h(trait discontinu). Sur la figure (fig. 2.7), nous avons représenté les variations de la partie réelle de $(\lambda^{zr} - \lambda^p)$ (fig. 2.7a) et de la racine carrée de la partie imaginaire de $(\lambda^{zr} - \lambda^p)$ (fig. 2.7b) calculées rigoureusement (trait continu) et de manière perturbative (trait discontinu). Nous observons une bonne adéquation

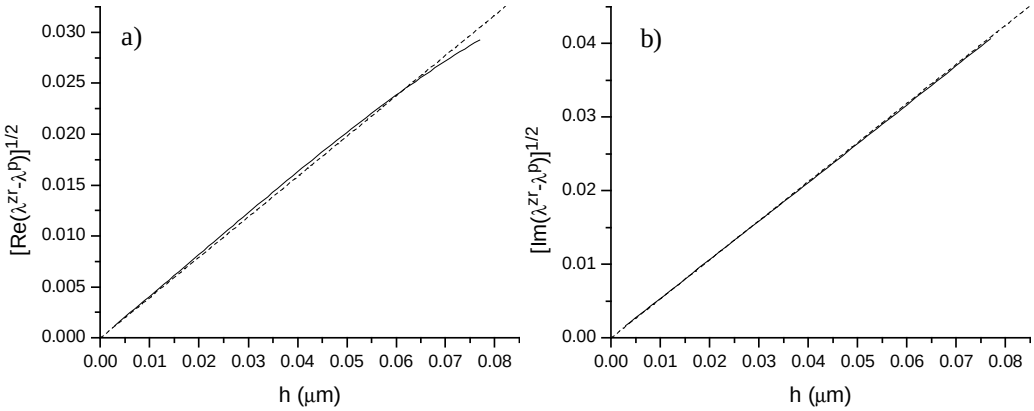


FIG. 2.7 – *Evolution de $(\lambda^{zr} - \lambda^p)$ en fonction de la hauteur du réseau, calcul rigoureux (trait continu) et perturbatif (trait discontinu): a) Re($\lambda^{zr} - \lambda^p$), b) $\sqrt{Im(\lambda^{zr} - \lambda^p)}$ (structure 2.1).*

entre les calculs perturbatifs et rigoureux pour les petites valeurs de h.

En conclusion, nous avons obtenu et validé les expressions approchées du pôle et des zéros en réflexion et en transmission. Ces expressions nous seront utiles pour optimiser les profils spectral et angulaire du filtre.

Les méthodes perturbatives apportent des résultats intéressants lorsqu'il s'agit de connaître l'influence des paramètres de la structure sur les caractéristiques du filtre. Au cours de cette étude, il est apparu que les zéros en transmission étaient réels, au moins à l'ordre 2 en h. En fait, il a été démontré rigoureusement que les zéros en transmission et en réflexion sont réels si certaines propriétés de symétrie de la structure sont vérifiées [Popov et al., 1986]. Dans la section suivante, nous proposons le détail de cette démonstration qui repose sur l'étude de la matrice de diffraction.

2.2 Etude rigoureuse des pôles et des zéros

Dans cette section, nous effectuons une étude approfondie des propriétés de la matrice de diffraction. Avant tout, il convient de rappeler les notations utilisées: $I^a(\alpha,\lambda)$ et $I^s(\alpha,\lambda)$ désignent les ondes incidentes sur le guide d'onde perturbé et $D^a(\alpha,\lambda)$ et $D^s(\alpha,\lambda)$ les ondes diffractées (fig. 2.8).

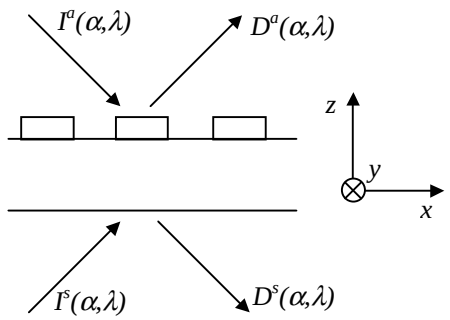


FIG. 2.8 – *Champs incidents et diffractés.*

La matrice de diffraction relie le champ diffracté au champ incident:

$$\mathbf{I}(\alpha,\lambda) = \begin{pmatrix} I^a(\alpha,\lambda) \\ I^s(\alpha,\lambda) \end{pmatrix} \qquad \mathbf{D}(\alpha,\lambda) = \begin{pmatrix} D^a(\alpha,\lambda) \\ D^s(\alpha,\lambda) \end{pmatrix} \qquad \mathbf{D}(\alpha,\lambda) = \mathbf{S}(\alpha,\lambda)\mathbf{I}(\alpha,\lambda) \tag{2.59}$$

Elle peut s'écrire en fonction des coefficients de réflexion et de transmission de la structure :

$$\mathbf{S}(\alpha,\lambda) = \begin{pmatrix} R(\alpha,\lambda) & T'(\alpha,\lambda) \\ T(\alpha,\lambda) & R'(\alpha,\lambda) \end{pmatrix} \tag{2.60}$$

La structure supporte un mode propre de pulsation spatiale α^p et de longueur d'onde λ^p si le couple (α^p,λ^p) correspond à un pôle du déterminant de $\mathbf{S}$. Les coefficients de réflexion et de transmission possèdent le même pôle, ainsi que des zéros au voisinage de la résonance: $(\alpha^{zr},\lambda^{zr})$ pour $R(\alpha,\lambda)$,$(\alpha^{zt},\lambda^{zt})$ pour $T(\alpha,\lambda)$,$(\alpha^{zr'},\lambda^{zr'})$ pour $R'(\alpha,\lambda)$,$(\alpha^{zt'},\lambda^{zt'})$ pour $T'(\alpha,\lambda)$.

Dans un premier temps, nous démontrons des propriétés fondamentales de la matrice de diffraction, puis nous prendrons en compte les éventuelles symétries de la structure. Pour chaque

propriété de la matrice, nous indiquons ses conséquences sur les zéros de réflexion et de transmission. Toutes nos démonstrations sont traitées dans le cas où la longueur d'onde est fixée et la pulsation spatiale variable. Néanmoins, tous les résultats sont valables pour les zéros et le pôle en α ou en λ.

2.2.1 Propriétés fondamentales de la matrice de diffraction

Les propriétés de la matrice de diffraction que nous allons démontrer ci-dessous découlent de la conservation de l'énergie et du théorème de réciprocité.

Conservation de l'énergie

Les matériaux étant supposés non absorbants, la conservation de l'énergie peut s'écrire sous la forme $\mathbf{D}^*(\alpha,\lambda)\mathbf{D}(\alpha,\lambda) = \mathbf{I}^*(\alpha,\lambda)\mathbf{I}(\alpha,\lambda)$, où $\mathbf{D}^*(\alpha,\lambda)$ et $\mathbf{I}^*(\alpha,\lambda)$ désignent les vecteurs transposés conjugués de $\mathbf{D}(\alpha,\lambda)$ et $\mathbf{I}(\alpha,\lambda)$. D'après la définition de la matrice de diffraction (2.59), ceci implique que

$$\mathbf{S}^*(\alpha,\lambda)\mathbf{S}(\alpha,\lambda) = \mathbf{1} \tag{2.61}$$

où $\mathbf{S}^*(\alpha,\lambda)$ est la matrice transposée conjuguée de $\mathbf{S}(\alpha,\lambda)$, et $\mathbf{1}$ la matrice unité.

L'exemple du guide d'onde perturbé nous a permis de mettre en évidence l'existence de zéros complexes des coefficients de l'opérateur $\mathbf{S}(\alpha,\lambda)$. Pour démontrer les propriétés de ces zéros dues à la conservation de l'énergie il est nécessaire d'introduire le prolongement analytique de $\mathbf{S}(\alpha,\lambda)$ dans le plan complexe des α ou des λ. Considérons par exemple le cas où α est complexe et λ réel. Soit un domaine Ω du plan complexe des α excluant les singularités de $\mathbf{S}(\alpha,\lambda)$, et symétrique par rapport à l'axe réel. D'après un théorème important de la théorie des fonctions de la variable complexe, l'analyticité de $\mathbf{S}(\alpha,\lambda)$ dans Ω implique l'analyticité de $\mathbf{S}^*(\overline{\alpha},\lambda)$ dans Ω [Petit, 1995]. L'opérateur $\mathbf{S}^*(\overline{\alpha},\lambda)\mathbf{S}(\alpha,\lambda)$ est donc analytique et égal à l'opérateur identité sur le segment de l'axe réel inclus dans Ω. D'après un autre théorème de la théorie des fonctions de la variable complexe, deux fonctions analytiques sur un domaine et identiques dans un sous domaine, sont égales sur tout le domaine. Nous en déduisons que

$$\mathbf{S}^*(\overline{\alpha},\lambda)\mathbf{S}(\alpha,\lambda) = \mathbf{1} \text{ pour tout } \alpha \in \Omega \tag{2.62}$$

En conclusion, la conservation de l'énergie se traduit par l'unitarité de la matrice de diffraction dans le plan complexe.

A présent, nous pouvons démontrer une propriété des zéros des coefficients de réflexion et de transmission résultant de la conservation de l'énergie. A partir de l'équation (2.62), nous obtenons le système d'équations:

$$\overline{R}(\overline{\alpha},\lambda)R(\alpha,\lambda) \ + \ \overline{T}(\overline{\alpha},\lambda)T(\alpha,\lambda) = 1 \tag{2.63}$$

$$\overline{R'}(\overline{\alpha},\lambda)R'(\alpha,\lambda) + \overline{T'}(\overline{\alpha},\lambda)T'(\alpha,\lambda) = 1 \tag{2.64}$$

$$\overline{R}(\overline{\alpha},\lambda)T'(\alpha,\lambda) \ + \ \overline{T}(\overline{\alpha},\lambda)R'(\alpha,\lambda) = 0 \tag{2.65}$$

$$\overline{T'}(\overline{\alpha},\lambda)R(\alpha,\lambda) + \overline{R'}(\overline{\alpha},\lambda)T(\alpha,\lambda) = 0 \tag{2.66}$$

En prenant $\alpha = \alpha^{zt'}$ dans les équations (2.65), et (2.64), il apparaît que $\overline{T}(\overline{\alpha^{zt'}},\lambda) = 0$, d'où $\overline{\alpha^{zt}} = \alpha^{zt'}$. De même en prenant $\alpha = \alpha^{zr'}$ dans les équations (2.65), et (2.64), il apparaît que $\overline{R}(\overline{\alpha^{zr'}},\lambda) = 0$, d'où $\overline{\alpha^{zr}} = \alpha^{zr'}$. En résumé :

la conservation de l'énergie implique que les zéros en α des coefficients de transmission sont complexes conjugués, ainsi que les zéros des coefficients de réflexion.

Théorème de réciprocité

Des démonstrations du théorème de réciprocité peuvent être trouvées dans les références suivantes [Petit, 1993] [Popov et al., 1986] [Carminati et al., 1998]. Ici, notre but est simplement d'appliquer ce théorème et d'en déduire des propriétés la matrice de diffraction. Considérons d'une part le problème décrit sur la figure (fig. 1.9) et d'autre part le problème réciproque décrit sur la figure (fig. 2.9) où $I'^a(-\alpha,\lambda)$ et $I'^s(-\alpha,\lambda)$ sont les champs incidents sur la structure et $D'^a(-\alpha,\lambda)$ et $D'^s(-\alpha,\lambda)$ les champs diffractés.

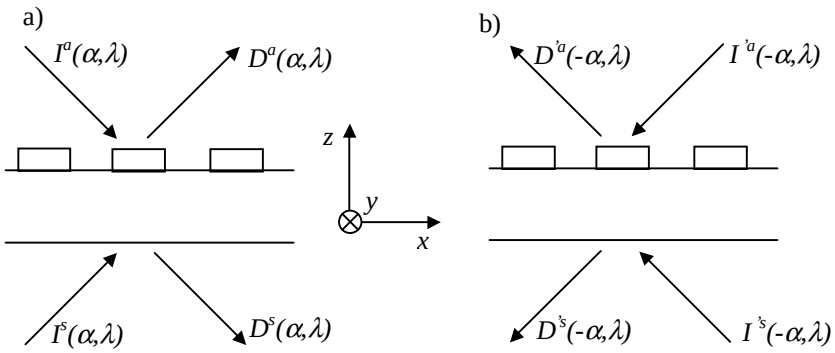


FIG. 2.9 – *Champs incidents et diffractés dans la direction $-\alpha$.*

Le théorème de réciprocité implique

en réflexion:

$$\begin{aligned} I^a(\alpha,\lambda)\ D'^a(-\alpha,\lambda) &= I'^a(-\alpha,\lambda)\ D^a(\alpha,\lambda) \quad \text{lorsque} \quad I^s(\alpha,\lambda) = I'^s(-\alpha,\lambda) = 0 \\ I^s(\alpha,\lambda)\ D'^s(-\alpha,\lambda) &= I'^s(-\alpha,\lambda)\ D^s(\alpha,\lambda) \quad \text{lorsque} \quad I^a(\alpha,\lambda) = I'^a(-\alpha,\lambda) = 0 \end{aligned} \tag{2.67}$$

en transmission:

$$\begin{aligned} I^a(\alpha,\lambda)\ D'^a(-\alpha,\lambda) &= I'^s(-\alpha,\lambda)\ D^s(\alpha,\lambda) \quad \text{lorsque} \quad I^s(\alpha,\lambda) = I'^a(-\alpha,\lambda) = 0 \\ I^s(\alpha,\lambda)\ D'^s(-\alpha,\lambda) &= I'^a(-\alpha,\lambda)\ D^a(\alpha,\lambda) \quad \text{lorsque} \quad I^a(\alpha,\lambda) = I'^s(-\alpha,\lambda) = 0 \end{aligned} \tag{2.68}$$

En utilisant la définition de la matrice de diffraction (éq. 2.59) ainsi que son expression en fonction des coefficients de réflexion et de transmission de la structure, nous en déduisons que: $R(-\alpha,\lambda) = R(\alpha,\lambda)$, $R'(-\alpha,\lambda) = R'(\alpha,\lambda)$, $T(-\alpha,\lambda) = T'(\alpha,\lambda)$, et $T'(-\alpha,\lambda) = T(\alpha,\lambda)$, soit

$$\mathbf{S}(-\alpha,\lambda) = {}^t\mathbf{S}(\alpha,\lambda) \tag{2.69}$$

où le symbole ${}^t(\ )$ désigne la transposée de l'élément (matrice ou vecteur) entre parenthèses. L'équation (2.69) est la conséquence du théorème de réciprocité sur la matrice de diffraction. Cette propriété est valable quelles que soient les symétries de la structure.

A présent, nous nous intéressons aux propriétés liées aux symétries éventuelles. Nous avons démontré lors de l'étude perturbative que les zéros de transmission sont réels au deuxième ordre en h. Dans la suite, nous démontrons entre autres que cette propriété reste vraie quelle que soit la hauteur du réseau, sous certaines conditions de symétrie du réseau.

2.2.2 Propriétés liées aux symétries de la structure

Nous utilisons les formes matricielles de la conservation de l'énergie et du théorème de réciprocité pour démontrer que les symétries éventuelles de la structure se traduisent par des propriétés de symétrie de la matrice de diffraction.

Symétrie par rapport à un axe vertical

Supposons que la structure soit symétrique par rapport à un axe parallèle à (Oz). Sur la figure (fig. 2.10), nous avons représenté deux configurations: le cas où la structure est éclairée par les ondes incidentes $I^a(\alpha,\lambda)$ et $I^s(\alpha,\lambda)$, puis le cas symétrique où elle est éclairée par les ondes incidentes $I'^a(-\alpha,\lambda) = I^a(\alpha,\lambda)$ et $I'^s(-\alpha,\lambda) = I^s(\alpha,\lambda)$, soit $\mathbf{I}'(-\alpha,\lambda) = \mathbf{I}(\alpha,\lambda)$. Les

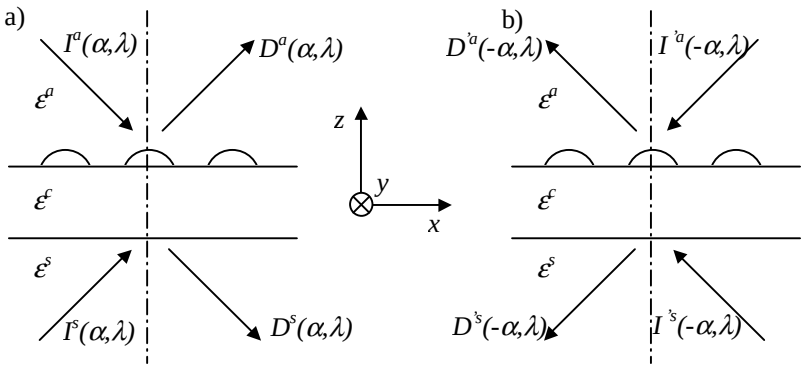


FIG. 2.10 – *Champs incidents et diffractés et symétrie par rapport à un axe vertical.*

ondes diffractées sont $\mathbf{D}(\alpha,\lambda) = \mathbf{S}(\alpha,\lambda)\mathbf{I}(\alpha,\lambda)$, et $\mathbf{D}'(-\alpha,\lambda) = \mathbf{S}(-\alpha,\lambda)\mathbf{I}'(-\alpha,\lambda)$. La propriété de symétrie par rapport à (Oz) implique que $\mathbf{D}'(-\alpha,\lambda) = \mathbf{D}(\alpha,\lambda)$, soit $\mathbf{S}(-\alpha,\lambda) = \mathbf{S}(\alpha,\lambda)$. En utilisant le théorème de réciprocité (2.69), nous obtenons alors ${}^t\mathbf{S}(\alpha,\lambda) = \mathbf{S}(\alpha,\lambda)$. La symétrie de la structure par rapport à un axe vertical parallèle à (Oz) implique donc la symétrie de la matrice de diffraction par rapport à sa première diagonale. Nous en déduisons que $T(\alpha,\lambda) = T'(\alpha,\lambda)$, et par conséquent $\alpha^{zt} = \alpha^{zt'}$. Comme d'après la conservation de l'énergie $\overline{\alpha^{zt}} = \alpha^{zt'}$, nous parvenons à la conclusion importante suivante :

la symétrie de la structure par rapport à un axe vertical implique que les zéros des deux coefficients de transmission sont égaux et réels.

Symétrie par rapport à un point

Supposons que la structure soit symétrique par rapport à un point C. Sur la figure (fig. 2.11), nous avons représenté d'abord le cas où la structure est éclairée par les ondes incidentes $I^a(\alpha,\lambda)$ et $I^s(\alpha,\lambda)$, puis le cas symétrique où elle est éclairée par les ondes incidentes $I'^a(-\alpha,\lambda) = I^s(\alpha,\lambda)$ et $I'^s(-\alpha,\lambda) = I^a(\alpha,\lambda)$. Nous avons alors $\mathbf{I}'(-\alpha,\lambda) = {}^t\left({}^{t'}\mathbf{I}(\alpha,\lambda)\right)$ où la notation ${}^{t'}(\ )$ représente

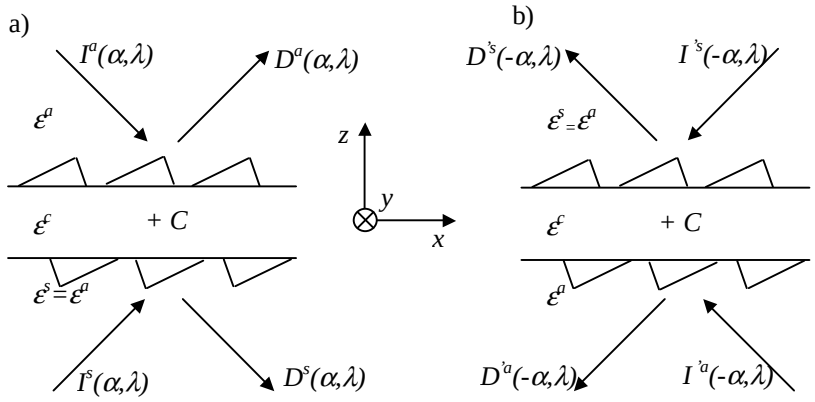


FIG. 2.11 – *Champs incidents et diffractés et symétrie par rapport à C.*

la transposée par rapport à la seconde diagonale de l'élément entre parenthèses. Dans le cas d'un vecteur colonne:

$$ {}^{t'}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (b,a) \tag{2.70}$$

Les ondes diffractées sont $\mathbf{D}(\alpha,\lambda) = \mathbf{S}(\alpha,\lambda)\mathbf{I}(\alpha,\lambda)$, et $\mathbf{D}'(-\alpha,\lambda) = \mathbf{S}(-\alpha,\lambda)\mathbf{I}'(-\alpha,\lambda)$. La propriété de symétrie de la structure par rapport à C implique que $\mathbf{D}'(-\alpha,\lambda) = {}^t\left({}^{t'}\mathbf{D}(\alpha,\lambda)\right)$, soit $\mathbf{S}(-\alpha,\lambda) = {}^t\left({}^{t'}\mathbf{S}(\alpha,\lambda)\right)$ En utilisant le théorème de réciprocité (2.69), nous obtenons alors ${}^{t'}\mathbf{S}(\alpha,\lambda) = \mathbf{S}(\alpha,\lambda)$. La symétrie de la structure par rapport à un point implique donc la symétrie de la matrice de diffraction par rapport à sa deuxième diagonale. Cette conclusion se traduit par l'égalité des coefficients de réflexion de la structure ainsi que celle de leur zéros en α. Comme les zéros sont complexes conjugués, nous en déduisons que:

la symétrie de la structure par rapport à un point implique que les zéros des deux coefficients de réflexion sont égaux entre eux et réels.

Symétrie par rapport à un axe horizontal

Supposons que la structure soit symétrique par rapport à un axe horizontal parallèle à l'axe (Ox). Sur la figure (fig. 2.12) sont représentés le cas où la structure est éclairée par les ondes incidentes $I^a(\alpha,\lambda)$ et $I^s(\alpha,\lambda)$, puis le cas symétrique où elle est éclairée par les ondes incidentes $I'^a(\alpha,\lambda) = I^s(\alpha,\lambda)$ et $I'^s(\alpha,\lambda) = I^a(\alpha,\lambda)$. Dans ce cas nous avons donc $\mathbf{I}'(\alpha,\lambda) = {}^t\left({}^{t'}\mathbf{I}(\alpha,\lambda)\right)$.

Les ondes diffractées sont $\mathbf{D}(\alpha,\lambda) = \mathbf{S}(\alpha,\lambda)\mathbf{I}(\alpha,\lambda)$, et $\mathbf{D}'(\alpha,\lambda) = \mathbf{S}(\alpha,\lambda)\mathbf{I}'(\alpha,\lambda)$. La propriété de symétrie de la structure par rapport à un axe parallèle à (Ox) implique que $\mathbf{D}'(\alpha,\lambda) =$

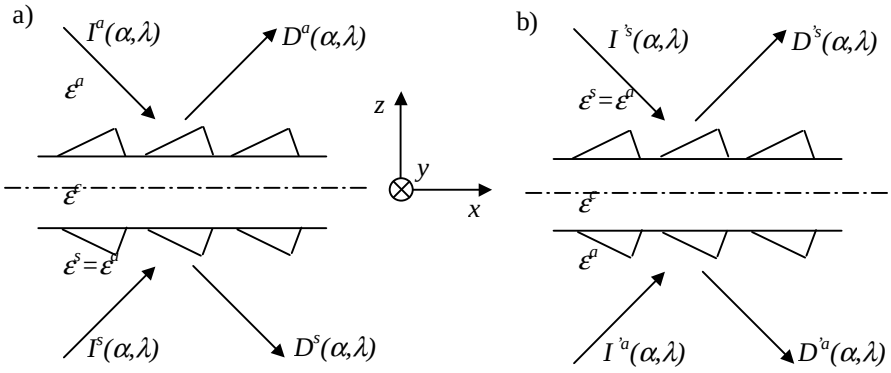


FIG. 2.12 – *Champs incidents et diffractés et symétrie par rapport à un axe horizontal.*

${}^t\left({}^{t'}\mathbf{D}(\alpha,\lambda)\right)$, soit $\mathbf{S}(\alpha,\lambda) = {}^t\left({}^{t'}\mathbf{S}(\alpha,\lambda)\right)$. La symétrie de la structure par rapport à un axe parallèle à (Ox) implique donc la symétrie de la matrice de diffraction par rapport à sa première et sa deuxième diagonale. Nous concluons donc que:

la symétrie de la structure par rapport à un axe horizontal implique que les deux zéros de réflexion sont égaux entre eux et réels, et que les zéros de transmission sont aussi égaux entre eux et réels.

Dans ce cas très particulier, il est possible de déduire de la conservation de l'énergie des conséquences sur les positions relatives des pôles et des zéros dans le plan complexe des α. En effet, en remplaçant dans l'équation (2.63) les coefficients de réflexion et de transmission par leur expression en fonction des zéros et du pôle $R = \frac{r(\alpha-\alpha^{zr})}{\alpha-\alpha^p}$ et $T = \frac{t(\alpha-\alpha^{zt})}{\alpha-\alpha^p}$, nous obtenons :

$$\frac{\overline{r}(\alpha-\overline{\alpha^{zr}})}{\alpha-\overline{\alpha}_p}\frac{r(\alpha-\alpha^{zr})}{\alpha-\alpha^p}+\frac{\overline{t}(\alpha-\overline{\alpha^{zt}})}{\alpha-\overline{\alpha^p}}\frac{t(\alpha-\alpha^{zt})}{\alpha-\alpha^p}=1 \tag{2.71}$$

En considérant (2.71) successivement pour $\alpha = \alpha^{zr}$ puis $\alpha = \alpha^{zt}$ il vient :

$$\begin{aligned}|\alpha^p-\alpha^{zr}|^2 &= |t|^2|\alpha^{zr}-\alpha^{zt}|^2\\ |\alpha^p-\alpha^{zt}|^2 &= |r|^2|\alpha^{zr}-\alpha^{zt}|^2\end{aligned} \tag{2.72}$$

Enfin, d'après la conservation de l'énergie pour le guide d'onde plan ,$|r|^2+|t|^2=1$, et nous en déduisons que dans le plan complexe des pulsations spatiales, les points représentant α^{zr}, α^{zt}

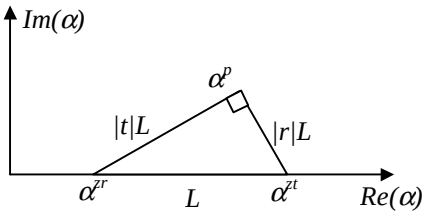


FIG. 2.13 – *Positions relatives du pôle et des zéros réels.*

et α^p forment un triangle rectangle de base (α^{zr},α^{zt}) de longueurs $L = |\alpha^{zr} - \alpha^{zt}|$. Les côtés ($\alpha^p$,$\alpha^{zr}$) et ($\alpha^p$,$\alpha^{zt}$) ont pour longueur $|t|L$ et $|r|L$ (fig 2.13).

2.3 Conclusion

Nous avons étudié les propriétés du pôle, du zéro en réflexion et du zéro en transmission en fonction des caractéristiques du réseau à mode guidé. Cette étude est valable au voisinage d'un seul mode propre. Dans cette configuration, les résultats concernant la longueur d'onde et la pulsation spatiale sont analogues.

Une étude perturbative nous a permis de donner des expressions analytiques simples du pôle et des zéros, en fonction des coefficients de Fourier du réseau, de sa hauteur, et de la fonction de Green du guide d'onde plan. Nous avons montré que les largeurs angulaire et spectrale du pic de résonance pouvaient être ajustées en jouant sur la hauteur du réseau, et le module du coefficient de Fourier de la constante diélectrique du réseau (en général $|\tilde{\varepsilon}_1|$) associé à l'ordre du réseau (en général l'ordre (-1)) via lequel se fait le couplage du mode par l'onde incidente, et le découplage dans l'espace libre. Nous avons aussi mis en évidence l'influence de la forme du champ du mode sur la largeur du pic de résonance. D'autre part, les expressions perturbatives des zéros indiquent que le zéro en transmission est proche du pôle. Par contre, la distance entre le pôle et le zéro de réflexion est inversement proportionnelle au coefficient de réflexion de la structure plane, ils sont donc éloignés dans le cas d'un anti-reflet. En fait, lorsque les zéros sont réels, ils forment, dans le plan complexe, un triangle rectangle dont le sommet est le pôle. La théorie perturbative permet de montrer que le zéro de transmission est réel au deuxième ordre en h, la hauteur du réseau.

Par une étude rigoureuse de la matrice de diffraction nous avons montré que les zéros de transmission sont effectivement réels si la structure est symétrique par rapport à un axe vertical (cas fréquent). La réflexion à la résonance est alors de 100%. De plus, si la structure est symétrique par rapport à un axe horizontal (moins fréquent), les zéros en réflexion et en transmission sont réels. A la résonance, la réflexion passera successivement d'un minimum nul à un maximum de 100%.

Conclusion de la première partie

Au cours de cette première partie, nous avons étudié le phénomène de résonance dans les réseaux à modes guidés mono-dimensionnels, en incidence oblique. En conclusion, nous pouvons résumer les arguments qui font du réseau à modes guidés un bon candidat pour le filtrage D.W.D.M..

Rappelons que nous voulons un filtre fonctionnant hors incidence normale, de largeur spectrale fine, avec un fort taux de réjection, possédant une bonne tolérance angulaire et spectrale et indépendant de la polarisation. Le fonctionnement du réseau à modes guidés repose sur l'existence de modes propres pouvant être excités par une onde plane incidente propagative. Le couplage et le découplage des modes génèrent un pic de résonance dans les courbes de réflexion et de transmission en fonction de la longueur d'onde ou de la pulsation spatiale incidente. Au voisinage de la résonance, les coefficients de réflexion et de transmission peuvent être exprimés en fonction du pôle du mode propre, du zéro de réflexion et du zéro de transmission. Pour étudier ces grandeurs phénoménologiques, nous avons utilisé deux outils complémentaires, l'un rigoureux (étude de la matrice de diffraction) et l'autre approché (méthode perturbative).

Grâce à la théorie rigoureuse, nous savons que la réflexion est de 100% à la résonance si la structure est symétrique par rapport à un axe vertical. Cette condition est facilement réalisée avec des réseaux classiques. En dehors de la résonance, la réflexion de la structure est en première approximation proche de celle du guide d'onde plan. Si nous choisissons comme guide d'onde plan une structure anti-reflet supportant des modes guidés, et un réseau symétrique par rapport à un axe vertical, nous sommes assurés d'obtenir un taux de réjection maximal [Hegedus and Netterfield, 2000]. En polarisation p, la réflexion faible en dehors de la résonance peut être obtenue sans anti-reflet à l'angle de Brewster [Magnusson et al., 1998]. Cependant, cette technique limite le choix de l'angle d'incidence et n'est pas valable en polarisation s.

L'étude perturbative des pôles et des zéros nous a permis de montrer que la largeur du pic de résonance pouvait être ajustée en jouant sur les paramètres de la structure, en particulier la hauteur du réseau et le coefficient de Fourier de la constante diélectrique du réseau responsable du couplage entre l'onde incidente et le mode propre (en général $\tilde{\varepsilon}_1$). La largeur spectrale du filtre peut donc en théorie être infiniment fine. Cependant, son ordre de grandeur peut varier d'un facteur 1000 suivant la répartition du champ du mode dans l'empilement. Pour concevoir un filtre, le mode guidé devra donc être choisi avec soin. En résumé, sur au moins deux points, taux de réjection et largeur spectrale fine, le réseau à modes guidés répond parfaitement aux

contraintes.

Nous avons aussi démontré que la largeur angulaire du pic dépendait essentiellement des mêmes paramètres que la largeur spectrale. Une largeur spectrale fine s'accompagne donc d'une tenue à l'incidence largement insuffisante (typiquement, $\Delta\theta = 0{,}01°$ pour $\Delta\lambda = 0{,}1$ nm). Pour résoudre ce problème, nous devons trouver une configuration pour laquelle la largeur spectrale et la largeur angulaire dépendent de paramètres distincts. Nous devons également modifier la forme des profils angulaires et spectraux. La théorie rigoureuse et la théorie perturbative adaptées à des configurations plus compliquées s'avéreront très efficaces dans la suite.

Deuxième partie

Optimisation du profil spectral et du profil angulaire du filtre

Introduction de la deuxième partie

Les conditions dans lesquelles le filtre sera utilisé imposent des contraintes sur son profil spectral et son profil angulaire.

D'abord, le faisceau incident possédera une divergence angulaire non négligeable, qui ne pourra être réduite à moins de 0,3°, malgré l'utilisation de collimateurs. Pour un traitement efficace du signal, il est nécessaire que le filtre réfléchisse la majorité des composantes angulaires du faisceau incident. En conséquence, le profil angulaire du filtre idéal est aplati au sommet, et sa largeur à mi-hauteur de l'ordre de 0,3°. Rappelons également que l'angle d'incidence doit être non nul pour éviter que le signal filtré ne soit perdu en revenant dans la direction de l'onde incidente (fig. 2.14a).

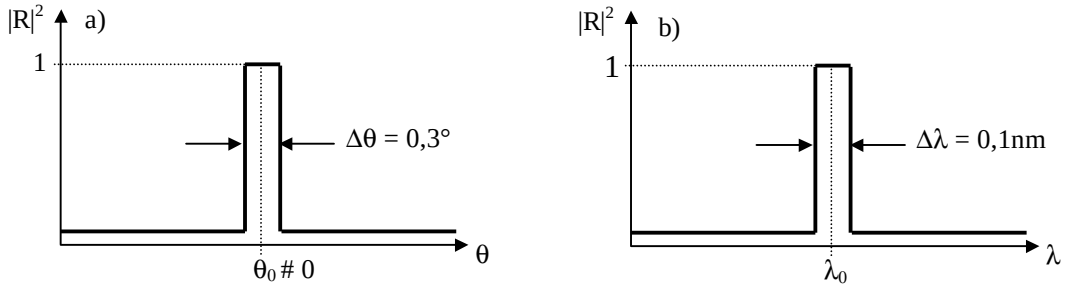


FIG. 2.14 – *a) Profil angulaire du filtre idéal, b) Profil spectral du filtre idéal.*

De plus, l'ensemble du dispositif de télécommunications optiques (sources, guides...) sera soumis à des contraintes (thermiques, mécaniques...). La longueur d'onde à filtrer ne sera pas stable dans le temps. Elle pourra fluctuer légèrement autour de la valeur annoncée. Pour être performant, le filtre doit réfléchir à 100% l'ensemble des longueurs d'onde que peut prendre la composante du signal à traiter. Le profil spectral du filtre est donc, comme le profil angulaire, aplati au sommet, et sa largeur à mi-hauteur est de 0,1 nm (fig.2.14b).

La deuxième partie a pour objectif de répondre aux contraintes imposées concernant la forme du profil spectral et du profil angulaire. Nous avons vu dans la première partie que l'excitation d'un mode propre d'un réseau résonnant produisait un pic dans la courbe de réflectivité. La forme de ce pic, parfaitement décrite par la connaissance d'un pôle et de deux zéros ne ressemble en rien aux gabarits voulus (fig.2.14). C'est une lorentzienne, dont la largeur et la position peuvent être ajustées en modifiant les paramètres du réseau, mais dont l'allure générale est directement liée à

l'excitation d'un mode. Il est donc impossible de répondre aux contraintes imposées sur la forme du profil en se contentant du couplage d'un seul mode guidé. En revanche, si plusieurs modes sont excités, la forme de la résonance n'est plus décrite par un pôle et deux zéros seulement, et la courbe de réflectivité n'est plus nécessairement lorentzienne.

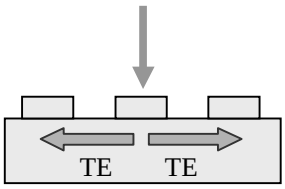


FIG. 2.15 – *Excitation de deux modes contra-propagatifs en incidence normale.*

L'excitation simultanée de deux modes guidés se fait naturellement en incidence normale (fig. 2.15). On constate alors que le profil angulaire est aplati au sommet, alors que le profil spectral reste lorentzien. Pour augmenter la largeur angulaire, des motifs de réseau évolués, dits motifs "double période" ont été proposés [Lemarchand, 1999] [Lemarchand et al., 1999]. L'élargissement obtenu est spectaculaire alors que la largeur spectrale reste inchangée. Une autre solution pour augmenter la tenue à l'incidence repose sur la présence d'un grand nombre de modes guidés dans la structure plane [Jacob et al., 2000] [Jacob et al., 2001a]. Dans [Jacob et al., 2002], les auteurs montrent qu'un profil spectral aplati au sommet peut être obtenu en cascadant plusieurs filtres identiques. Cependant, aucun de ces travaux ne concerne l'incidence oblique.

L'optimisation du profil angulaire et celle du profil spectral sont traitées successivement dans le troisième et le quatrième chapitre. Les réseaux étudiés dans la deuxième partie sont mono-dimensionnels.

Chapitre 3

Optimisation du profil angulaire

Nous souhaitons concevoir une structure dont le profil angulaire se rapproche le plus possible du gabarit présenté sur la figure (fig. 2.14). Pour cela, nous devons obtenir un profil angulaire aplati au sommet, et augmenter sa largeur à mi-hauteur. Nous savons qu'un tel profil est systématiquement obtenu en incidence normale où deux modes guidés sont excités simultanément. Par une étude des courbes de réflexion et des relations de dispersion, nous tâcherons de mettre en évidence les propriétés de la résonance au voisinage de l'incidence normale. Ensuite, nous proposerons une solution permettant de recréer ces propriétés en incidence oblique. Enfin, nous verrons comment augmenter la largeur angulaire dans cette configuration. Pour conclure nous présenterons deux exemples de filtres possédant une réponse angulaire se rapprochant du profil angulaire idéal.

3.1 Etude de l'incidence normale

Tout d'abord, nous analysons les propriétés de la résonance en incidence normale. Sur un exemple, nous allons observer les particularités du profil angulaire et du profil spectral au voisinage de l'incidence normale. Puis, pour les comprendre, nous tracerons la relation de dispersion des modes susceptibles d'être excités dans cette configuration. Nous en déduirons la condition qui permet d'obtenir un profil angulaire aplati au sommet en incidence normale. Notons qu'une analyse détaillée du phénomène de résonance au voisinage de l'incidence normale est proposée dans [Popov and Mashev, 1987].

3.1.1 Profils spectraux et angulaires en incidence normale

Nous étudions la réflexion au voisinage de l'incidence normale du réseau à mode guidé étudié dans le premier chapitre (structure 1.2). Sur la figure (fig. 3.1), nous avons représenté la réflexion en fonction de la pulsation spatiale incidente pour différentes valeurs de la longueur d'onde. Lorsque la longueur d'onde est de 1,6290 μm, nous observons deux pics de résonance identiques qui apparaissent pour des valeurs opposées de la pulsation spatiale. Pour $\lambda^{inc} = 1{,}6303$ μm les

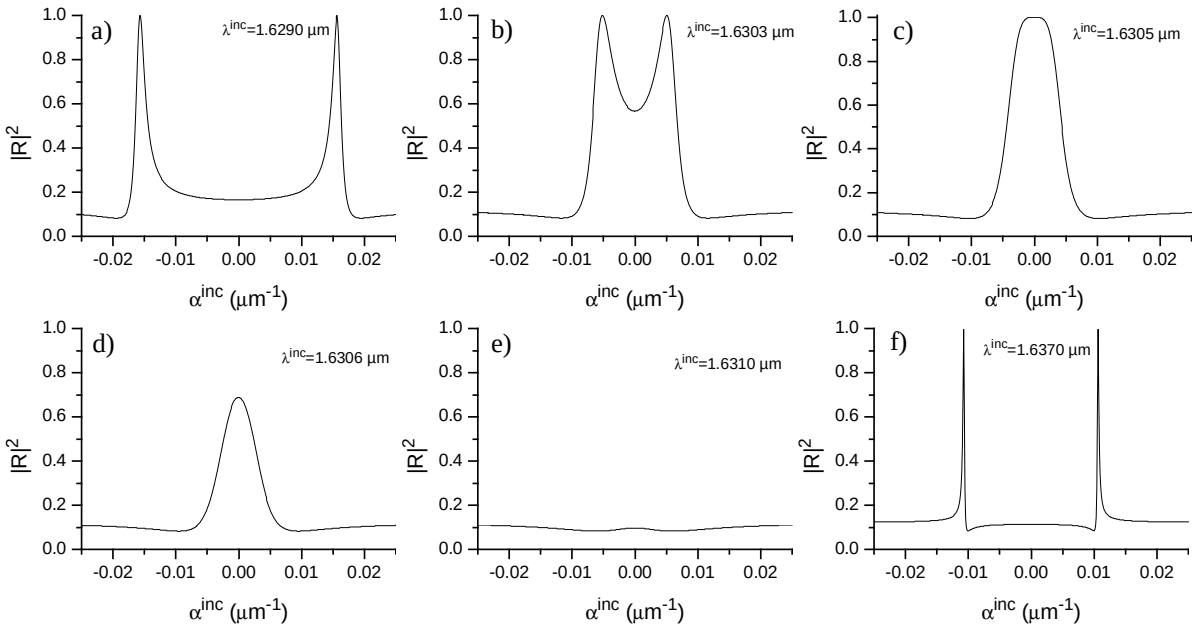


FIG. 3.1 – *Profil en α au voisinage de l'incidence normale, pour différentes longueurs d'onde, a)* 1,6290 *μm, b)* 1,6303 *μm, c)* 1,6305 *μm, d)* 1,6306 *μm, e)* 1,6310 *μm, f)* 1,6370 *μm (structure* 1.2*).*

deux pics se sont rapprochés et ont commencé à fusionner. La réflexion en incidence normale atteint alors une valeur supérieure à 50%. Pour $\lambda^{inc} = 1{,}6305$ μm, les deux pics ont complètement fusionné. Le profil résultant n'est plus lorentzien, et nous remarquons que la réflexion est égale à 100% sur un intervalle de pulsations spatiales relativement large, centré autour de $\alpha^{inc} = 0$ μm^{-1}. Lorsque la longueur d'onde est de 1,6306 μm, la réflexion au maximum de la résonance chute, et le pic disparaît quasiment pour $\lambda^{inc} = 1{,}6310$ μm. Pour une longueur d'onde bien plus grande, $\lambda^{inc} = 1{,}6370$ μm , les deux pics de résonance sont à nouveau dissociés. Nos observations sont en accord avec celle présentées dans [Popov and Mashev, 1987], où les auteurs s'intéressent à l'évolution des courbes de réflectivité en fonction de la pulsation spatiale pour différentes épaisseurs de la couche guidante, et une longueur d'onde fixe.

Sur la figure (fig. 3.2a), nous avons représenté le profil spectral pour $\alpha^{inc} = 0$ μm^{-1}, puis pour une pulsation voisine $\alpha^{inc} = 0{,}01$ μm^{-1} (fig. 3.2b). En incidence normale, nous observons un seul pic de résonance pour une longueur d'onde de 1,6305 μm. Dès que α^{inc} est différent de zéro, un second pic apparaît, pour une longueur d'onde proche de 1,637 μm, alors que le premier se décale vers une longueur d'onde inférieure à 1,6305 μm. Notons que le second pic est moins large que le premier. Tous les pics ont une valeur maximale égale à 100%, conséquence de la symétrie de la structure par rapport à (Oz).

Cette étude nous a permis d'observer le comportement des pics de résonance au voisinage de l'incidence normale. En particulier, nous avons mis en évidence l'existence d'une longueur d'onde pour laquelle le profil en fonction de la pulsation spatiale n'est plus lorentzien, mais aplati au

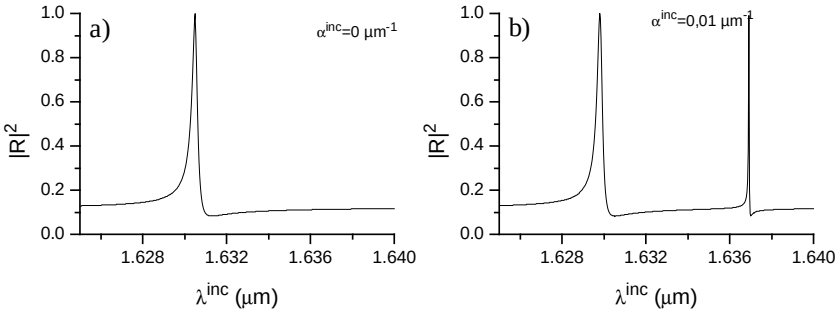


FIG. 3.2 – *Profil spectral au voisinage de l'incidence normale, a) pour* $\alpha^{inc} = 0\ \mu m^{-1}$*, b) pour* $\alpha^{inc} = 0{,}01\ \mu m^{-1}$ *(structure* 1.2*).*

sommet. C'est évidemment ce type de courbe que nous souhaitons obtenir hors incidence normale pour la réflexion en fonction de la pulsation spatiale. De plus, pour améliorer la tenue à l'incidence du filtre, nous espérons pouvoir augmenter la largeur à mi-hauteur, tout en conservant une bande passante en longueur d'onde étroite. Pour atteindre ce but, nous avons besoin de comprendre les différentes courbes des figures (fig. 3.1) et (fig. 3.2), et surtout de connaître la condition pour laquelle un profil non lorentzien apparaît. Nous savons que le pic de résonance est caractérisé en partie par la donnée des pôles en pulsation spatiale et en longueur d'onde (α^p,λ^p) du mode excité, et que λ^p et α^p sont reliés par la relation de dispersion. Nous allons donc chercher des réponses dans l'étude de la relation de dispersion au voisinage de l'incidence normale.

3.1.2 La relation de dispersion au voisinage de l'incidence normale

Dans un premier temps, nous nous sommes intéressés à la relation de dispersion obtenue en fixant la pulsation spatiale à une valeur réelle et en cherchant la longueur d'onde du pôle. La partie réelle du pôle en longueur d'onde en fonction de la pulsation spatiale est représentée sur la figure (fig. 3.3a) et la partie imaginaire sur la figure (fig. 3.3b). L'élément principal à observer sur la figure (fig. 3.3a) est l'apparition d'un intervalle de longueurs d'onde pour lesquelles aucune pulsation spatiale solution de l'équation des modes n'existe. Cet intervalle est appelé bande de fréquences interdites ou gap. Sa création peut être expliquée en revenant au cas du guide d'onde plan à période fictive. La périodisation du guide d'onde plan implique le croisement des bandes (-1) et $(+1)$ de la relation de dispersion pour $\alpha = 0$ (fig. 3.4a). Or, les modes guidés de la bande (-1) se propagent dans le sens de l'axe (Ox) alors que ceux de la bande $(+1)$ se propagent dans le sens opposé (fig. 3.4b). Pour $\alpha = 0$, les deux modes excités en même temps se couplent pour donner deux nouveaux modes, des ondes stationnaires. Lorsque la structure est symétrique par rapport à l'axe (Oz), le champ de l'un des modes est symétrique alors que l'autre est anti-symétrique par rapport à cet axe (fig. 3.4c) [Vincent and Nevière, 1979] [Sakoda, 1995]. Comme la répartition du champ de chaque mode est dissemblable, ils apparaissent à des longueurs d'ondes distinctes [Joannopoulos et al., 1995] [Barnes et al., 1996]. La dégénérescence est levée

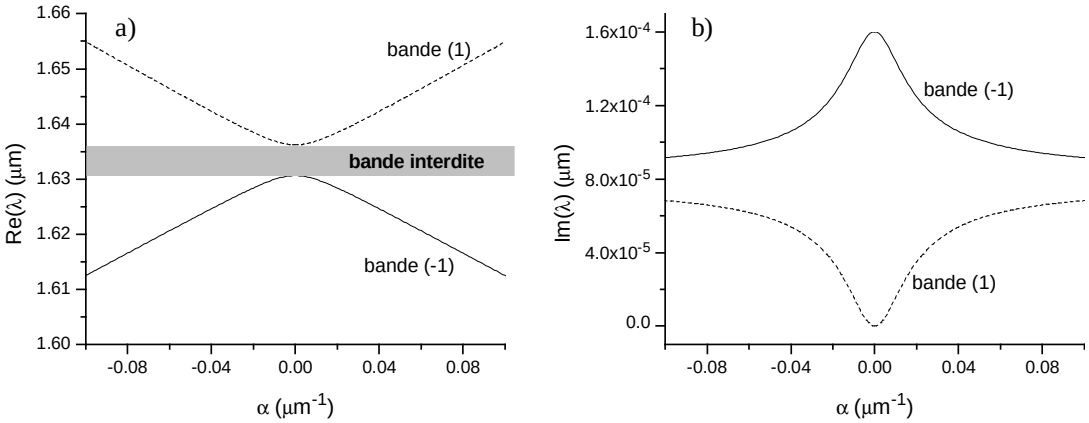


FIG. 3.3 – *Relation de dispersion obtenue lorsque la pulsation spatiale est fixée à une valeur réelle au voisinage de zéro, a) partie réelle du pôle en longueur d'onde, b) partie imaginaire (structure 1.2).*

(fig. 3.4d). Notons que ce phénomène intervient en chaque point d'intersection de la relation de dispersion du guide d'onde à période fictive.

Cette analyse nous permet de comprendre les courbes de réflexion (fig. 3.2). En incidence normale, une onde plane incidente est symétrique par rapport à l'axe (Oz) et ne peut par conséquent exciter un mode anti-symétrique. Seul le pic de résonance du mode symétrique apparaît, à une longueur d'onde proche du bord inférieur de la bande interdite. En dehors de l'incidence

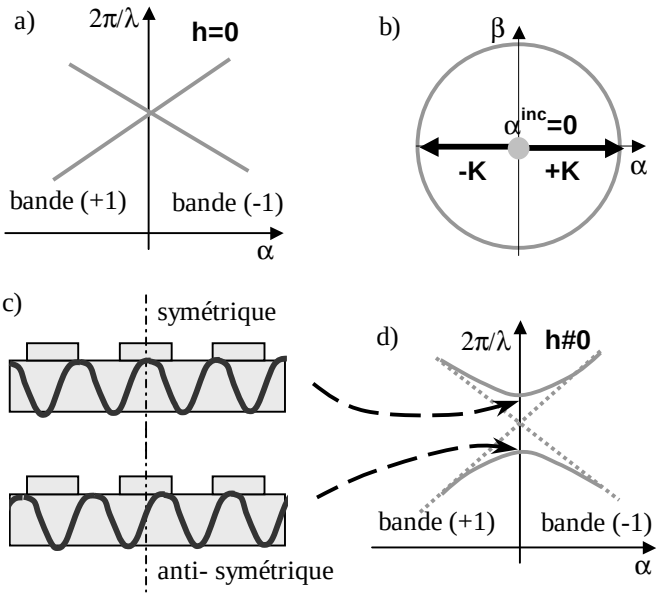


FIG. 3.4 – *Représentation de la relation de dispersion au voisinage de l'incidence normale. a) Point de dégénérescence lorsque la hauteur du réseau est nulle. b) Excitation de deux modes contra-propagatifs. c) Dés que la hauteur du réseau augmente, la dégénérescence est levée. d) Modes symétrique et anti-symétrique.*

normale, l'onde incidente n'est plus symétrique par rapport à (Oz), le mode anti-symétrique peut être excité et se manifeste par un pic de résonance à une longueur d'onde proche du bord supérieur du gap. Nous remarquons que le pic correspondant au mode anti-symétrique est beaucoup moins large que celui correspondant au mode symétrique. Si nous nous souvenons que la largeur de la résonance est liée à la partie imaginaire du pôle, alors il n'est pas étonnant d'observer sur la graphe (fig. 3.3b) que la partie imaginaire du mode correspondant à la valeur supérieure du gap (trait discontinu) tend vers zéro au voisinage de l'incidence normale. Il a été vérifié que ce n'est pas vrai pour une structure non symétrique par rapport à l'axe (Oz) [Vincent and Nevière, 1979].

Dans un second temps, nous avons tracé la relation de dispersion obtenue pour une longueur d'onde fixée à une valeur réelle. La partie réelle de la pulsation spatiale du pôle est représentée sur la figure (fig. 3.5a) et la partie imaginaire sur la figure (fig. 3.5b). Maintenant, contrairement à

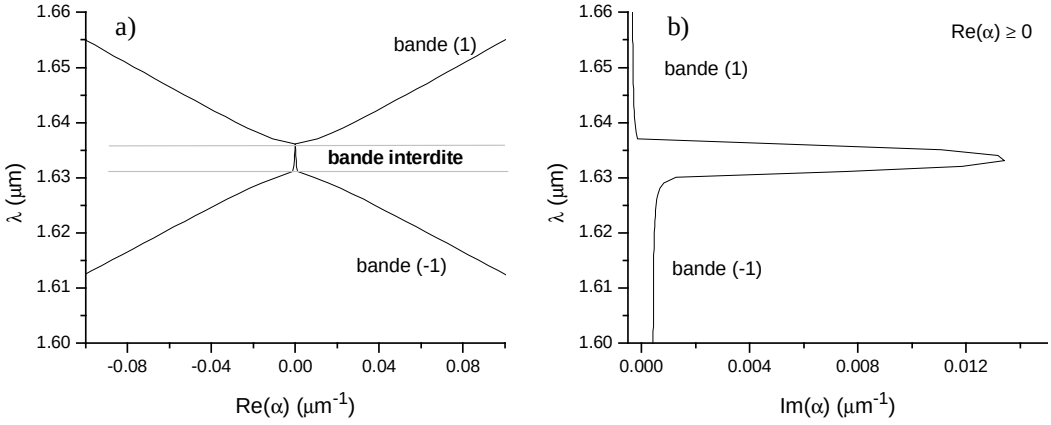


FIG. 3.5 – *Relation de dispersion obtenue lorsque la longueur d'onde est fixée à une valeur réelle, a) partie réelle du pôle en pulsation spatiale au voisinage de zéro, b) partie imaginaire (structure 1.2).*

la relation de dispersion obtenue pour α réel, il est possible de trouver, même pour les longueurs d'onde de la bande interdite, des pulsations spatiales complexes solutions de l'équation des modes. Les pulsations spatiales correspondant à des modes du gap ont une partie réelle proche de zéro, et une partie imaginaire pouvant être très grande. La relation de dispersion pour les pulsations spatiales négatives est obtenue par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.

Les courbes de réflexion en fonction de la pulsation spatiale (fig. 3.1) peuvent maintenant se comprendre, à l'aide de la figure (fig. 3.5). Pour une longueur d'onde incidente bien inférieure à 1,6305 μm (minimum de la bande interdite sur la figure (fig. 3.5a)), deux modes peuvent être excités, à des pulsations spatiales de valeurs opposées. Nous observons donc deux pics de résonance. Lorsque la longueur d'onde se rapproche du bord du gap, les pulsations spatiales se rapprochent de zéro. De plus, d'après la figure (fig. 3.5b), la partie imaginaire de la pulsation spatiale devient grande. Finalement, en bord de gap, nous sommes en présence de deux pôles en α de valeurs opposées, dont les parties réelles sont très petites et les parties imaginaires très

grandes. Le coefficient de réflexion $R(\alpha,\lambda)$ ne peut plus être représenté par une fonction possédant un seul zéro et un seul pôle: le profil n'est plus lorentzien [1]. Pour les longueurs d'onde du gap, nous trouvons deux modes propres dont la pulsation spatiale a une partie réelle quasiment nulle. Cela explique l'existence du pic observé sur la figure (fig. 3.1d) par exemple. Nous pouvons nous interroger sur le fait que la résonance n'atteigne pas 100% dans ce cas, malgré la symétrie de la structure par rapport à l'axe (Oz). Ce fait semble contredire les conclusions issues de l'étude des propriétés des zéros de la matrice de diffraction (deuxième chapitre): la symétrie de la structure par rapport à l'axe (Oz) implique que le zéro en transmission est réel. Cependant, cette conclusion a été obtenue en supposant qu'un seul mode propre de la structure peut être excité, ce qui n'est pas vrai au voisinage de l'incidence normale. Pour les longueurs d'onde proches du bord supérieur de la bande interdite, la partie imaginaire des pulsations spatiales diminue et la résonance disparaît progressivement ($\lambda = 1{,}6310$ μm). Enfin, au dessus du gap, nous retrouvons à nouveau deux pôles de pulsations spatiales opposées et donc deux pics de résonance ($\lambda = 1{,}6370$ μm).

En conclusion, l'étude de la relation de dispersion nous a permis de comprendre pourquoi la courbe de réflexion en fonction de la pulsation spatiale était aplatie au sommet au voisinage de l'incidence normale. Pour une longueur d'onde particulière correspondant au bord de la bande interdite, deux modes peuvent être excités. Leurs pulsations spatiales ont des parties réelles opposées, et très proches de zéro et des parties imaginaires très grandes. Pour prouver que c'est réellement la possibilité d'exciter deux modes qui génère un profil aplati au sommet, nous avons caractérisé les courbes de réflexion et de transmission à l'aide d'une formule phénoménologique faisant intervenir deux pôles.

3.1.3 Caractérisation phénoménologique

Lorsqu'un seul mode est excité, les coefficients de réflexion et de transmission du réseau à mode guidé s'expriment en fonction d'un pôle, d'un zéro en réflexion, et d'un zéro en transmission. Par contre, en bord de gap, deux modes peuvent être excités, pour des pulsations spatiales α^{p_1} et α^{p_2} différentes, et la même longueur d'onde λ. Les coefficients de réflexion et de transmission possèdent donc deux pôles en α, qui sont α^{p_1} et α^{p_2}.

De plus, comme dans le cas où un seul mode est excité, les pôles deviennent réels lorsque la hauteur du réseau devient nulle. Pour éviter que la réflexion et la transmission ne tendent vers l'infini pour les réseaux de hauteur faible, chaque pôle doit donc être compensé par un zéro en réflexion, α^{zr_1}, et α^{zr_2}, et en transmission α^{zt_1}, et α^{zt_2}.

En résumé, nous proposons pour les coefficients de réflexion et de transmission au voisinage

1. La figure (fig. 3.1c) a été tracée à la longueur d'onde du zéro de transmission du pic pour $\alpha^{inc} = 0°$ (fig. 3.2a). Cette longueur d'onde est en fait à l'intérieur de la bande interdite. La partie imaginaire de la pulsation spatiale du pôle est donc très grande, cela explique la largeur importante du pic de la figure (fig. 3.1c)

de l'incidence normale les expressions suivantes:

$$R(\alpha,\lambda) = r(\alpha,\lambda)\frac{(\alpha-\alpha^{zr_1})(\alpha-\alpha^{zr_2})}{(\alpha-\alpha^{p_1})(\alpha-\alpha^{p_2})} \tag{3.1}$$

$$T(\alpha,\lambda) = t(\alpha,\lambda)\frac{(\alpha-\alpha^{zt_1})(\alpha-\alpha^{zt_2})}{(\alpha-\alpha^{p_1})(\alpha-\alpha^{p_2})} \tag{3.2}$$

Pour valider les expressions (3.1) et (3.2), reprenons l'exemple des profils en α de la structure 1.2 pour deux longueurs d'onde différentes. Pour $\lambda = 1{,}6305$ μm et $\lambda = 1{,}6303$ μm, nous avons représenté sur les figures (fig. 3.6a) et (fig. 3.6b) la transmission en énergie obtenue à partir de la formule phénoménologique (trait continu) et la transmission calculée rigoureusement (losanges). Nous remarquons que la partie réelle et la partie imaginaire des pôles sont du même ordre

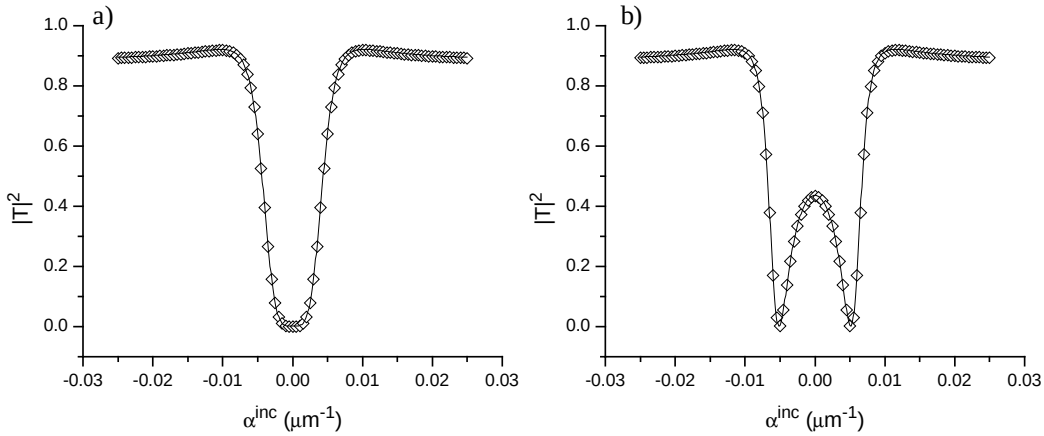


FIG. 3.6 – *Comparaison entre le calcul rigoureux (losanges) et la formule phénoménologique (trait continu) du coefficient de transmission en énergie en fonction de la pulsation spatiale (structure 1.2), a) pour* $\lambda = 1{,}6305$ μm *(*$\alpha^{p_1} = 3{,}57.10^{-3} + i2{,}91.10^{-3}$ μm^{-1}, $\alpha^{p_2} = -3{,}57.10^{-3} - i2{,}91.10^{-3}$ μm^{-1}*),* $\alpha^{zt_1} = 0$ μm^{-1}, $\alpha^{zt_2} = 0$ μm^{-1} *et* $t = 0{,}940$*), b) pour* $\lambda = 1{,}6303$ μm *(*$\alpha^{p_1} = -\alpha^{p_2} = 5{,}83.10^{-3} + i2{,}91.10^{-3}$ μm^{-1}, $\alpha^{zt_1} = -\alpha^{zt_2} = 5{,}12.10^{-3}$ μm^{-1} *et* $t = 0{,}940$*).*

de grandeur. La partie réelle est petite et la partie imaginaire grande par rapport aux valeurs obtenues loin de l'incidence normale. Dans cet exemple, les zéros en transmission sont réels.

En conclusion, au voisinage de l'incidence normale, le coefficient de transmission est très bien représenté par l'expression (éq. 3.2). Il en est de même pour le coefficient de réflexion. Par contre, lorsque la pulsation spatiale est fixée et la longueur d'onde variable, un seul mode est excité, le profil est lorentzien, et n'est caractérisé que par un pôle, un zéro en transmission et un zéro en réflexion (éq. 1.20). Il est important de comprendre que c'est la juxtaposition des deux modes imposée par le gap qui permet d'obtenir un profil en fonction de la pulsation spatiale aplati au sommet. En conséquence, pour générer le même type de profil hors incidence normale, il suffit de créer une bande interdite pour une pulsation spatiale non nulle. C'est l'objet du paragraphe suivant.

3.2 Création d'une bande interdite hors incidence normale

Nous savons qu'une bande interdite apparaît lorsque deux modes qui se propagent dans des sens opposés se couplent. Ce phénomène a lieu en chaque point de dégénérescence de la relation de dispersion du guide d'onde plan à période fictive, donc pour des pulsations spatiales multiples de π/d. Le cas $\alpha = 0$ correspond à l'incidence normale, le couplage a lieu entre les branches $(+1)$ et (-1) de la relation de dispersion. Nous pourrions envisager d'utiliser le cas où $\alpha = \pi/d$, correspondant au couplage entre les ordres $(+2)$ et (-1) (fig. 3.7). Ce montage

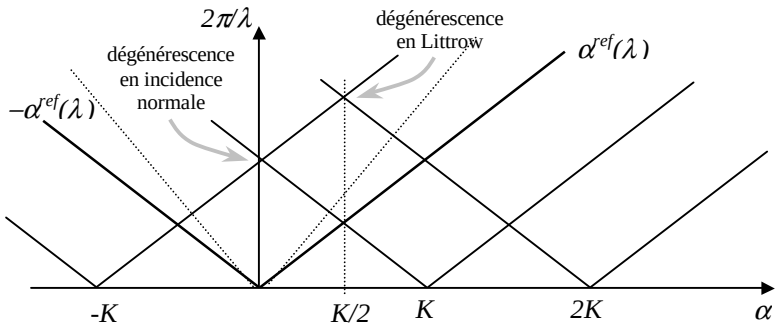


FIG. 3.7 – *Excitation de deux modes contra-propagatifs, a) en incidence normale, b) en Littrow.*

est connu sous le nom de montage en Littrow. Il permet de s'affranchir des problèmes liés à l'incidence normale, mais une partie de l'énergie diffractée est perdue dans l'ordre $(+1)$. Cet inconvénient est rédhibitoire pour les applications de filtrage D.W.D.M..

Une solution plus appropriée consiste à créer un couplage entre deux modes pour une pulsation spatiale différente d'un multiple de π/d. Pour y parvenir, il est nécessaire d'utiliser un second mode guidé (fig. 3.8a). Les deux modes sont excités dans des directions contra-propagatives grâce aux ordres $(+1)$ et (-1) du réseau (fig. 3.8b). Dans ce cas, la branche $(+1)$ du premier mode guidé et (-1) du deuxième mode guidé se couplent pour $\alpha \neq 0$ (fig. 3.8c). La pulsation spatiale du point d'intersection dépend des indices effectifs n_{f_1} et n_{f_2} des modes guidés et de la période choisie, selon les relations

$$\begin{cases} \frac{2\pi}{\lambda} n_{f_2} = \alpha + \frac{2\pi}{d} \\ -\frac{2\pi}{\lambda} n_{f_1} = \alpha - \frac{2\pi}{d} \end{cases} \tag{3.3}$$

où $n_{f_1} < n_{f_2}$. En introduisant l'angle d'incidence θ défini par $\alpha = \frac{2\pi}{\lambda}\sin(\theta)$, il est possible de montrer que

$$\begin{cases} \frac{\lambda}{d} = \frac{1}{2}\left(n_{f_2} + n_{f_1}\right) \\ sin(\theta) = \frac{1}{2}\left(n_{f_2} - n_{f_1}\right) \end{cases} \tag{3.4}$$

Ainsi, l'angle de fonctionnement du filtre sera d'autant plus grand que les indices effectifs seront différents, et le rapport λ/d est proportionnel à leur moyenne.

Il est important de noter qu'un gap ne se crée pas forcément dans cette configuration. En effet, dans le cas de l'incidence classique (plan d'incidence perpendiculaire aux traits du réseau), les deux modes guidés choisis doivent être de même nature, c'est à dire tous les deux

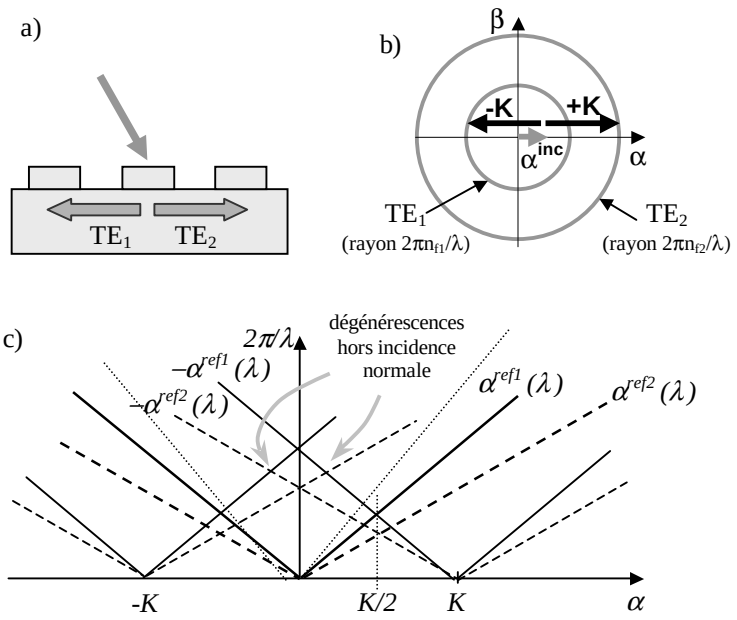


FIG. 3.8 – *a) Excitation de deux modes en incidence oblique. b) Couplage des deux modes grâce aux ordres (+1) et (-1) du réseau. c) Création d'un gap en incidence oblique en utilisant deux modes guidés TE.*

TE ou tous les deux TM. Si l'un est TE et l'autre TM, ils ne se coupleront pas. Notons qu'en dehors de l'incidence classique, le couplage peut avoir lieu entre un mode TE et un TM. Ces conclusions peuvent être démontrées en calculant les coefficients de couplage entre les modes [Popov and Mashev, 1985b].

Cependant, même lors du couplage de deux modes TE en incidence classique, la largeur angulaire obtenue est généralement insuffisante (typiquement 0,01° pour une largeur spectrale de 0,1nm). Pour atteindre l'objectif fixé (une largeur angulaire de 0,3° pour une largeur spectrale de 0,1nm), nous avons besoin de connaître les paramètres déterminant la largeur spectrale et la largeur angulaire. La méthode perturbative, développée cette fois lorsque deux modes peuvent être excités, va nous permettre d'apporter une réponse.

3.3 Calcul perturbatif des pôles au voisinage de deux modes de référence dégénérés

Nous souhaitons exprimer la modification induite par le réseau sur la relation de dispersion des modes guidés du guide d'onde plan au voisinage d'une dégénérescence. La méthode que nous utilisons est adaptée de celle détaillée dans le deuxième chapitre. Nous nous limiterons au cas des modes polarisés TE. Les calculs étant plus lourds au voisinage de deux modes dégénérés, nous prendrons cette fois la structure de référence décrite sur la figure (fig.2.3), pour laquelle le coefficient de Fourier d'ordre 0 de la constante diélectrique du réseau ($\tilde{\varepsilon}_0$), est nul. De plus, nous

supposons que la structure est symétrique par rapport à l'axe (Oz). Les coefficients de Fourier du réseau sont donc réels et vérifient $\tilde{\varepsilon}_n = \tilde{\varepsilon}_{-n}$.

Nous nous intéresserons d'abord à la perturbation induite sur la longueur d'onde du mode à pulsation spatiale fixée. Le cas inverse sera examiné ensuite.

3.3.1 Perturbation induite sur la longueur d'onde, création du gap

L'étude rigoureuse de la relation de dispersion à pulsation spatiale réelle fixée a révélé la création d'une bande de fréquences interdites lorsque le guide d'onde plan possède deux modes propres dégénérés. Par le calcul pertubatif, nous souhaitons mettre en évidence la création du gap, et exprimer la longueur d'onde du pôle (partie réelle et partie imaginaire) au bord inférieur et supérieur du gap.

Les modes de référence

La structure de référence est le guide d'onde plan à période fictive. Nous supposerons que le guide d'onde plan supporte deux modes guidés TE_1 et TE_2, dont les relations de dispersion sont les ensembles de couples $(\pm\alpha^{ref_1} + nK, \lambda^{ref})$ et $(\pm\alpha^{ref_2} + nK, \lambda^{ref})$ [2]. Nous considérons

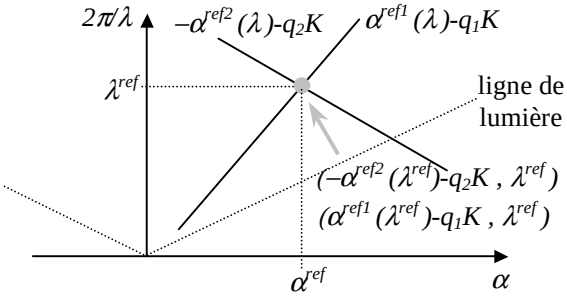


FIG. 3.9 – *Deux modes de référence au voisinage du point de dégénérescence.*

deux parties de la relation de dispersion, $\alpha^{ref_1}(\lambda) - q_1K$ et $-\alpha^{ref_2}(\lambda) - q_2K$, qui se croisent dans le cône de lumière (fig.3.9). Nous fixons α à la pulsation spatiale α^{ref} correspondant au point d'intersection, et nous cherchons la longueur d'onde des modes propres au voisinage de λ^{ref}. Nous avons $\alpha^{ref} = \alpha^{ref_1}(\lambda^{ref}) - q_1K = -\alpha^{ref_2}(\lambda^{ref}) - q_2K$. Le mode de référence est la somme des modes $(\alpha^{ref_1}(\lambda^{ref}) - q_1K, \lambda^{ref})$ et $(-\alpha^{ref_2}(\lambda^{ref}) - q_2K, \lambda^{ref})$.

Le champ du mode de référence peut être écrit sous forme pseudo-périodique

$$\begin{gathered} E^{ref}(x,z) = \sum_m e_m^{ref}(z)\exp(i\alpha_m^{ref}x) \\ \text{avec} \quad \alpha_m^{ref} = \alpha^{ref} + mK \quad \text{et} \quad \alpha^{ref} = \alpha^{ref_1}(\lambda^{ref}) - q_1K = -\alpha^{ref_2}(\lambda^{ref}) - q_2K \end{gathered} \tag{3.5}$$

dont les seuls ordres non nuls sont q_1 et q_2.

2. Pour traiter le cas où le guide d'onde ne supporte qu'un seul mode guidé TE, il suffit de remplacer α^{ref_1} et α^{ref_2} par α^{ref} où l'ensemble des couples $(\pm\alpha^{ref} + nK, \lambda^{ref})$ représente la relation de dispersion du mode guidé

Maintenant que nous avons précisé la pulsation spatiale et le champ du mode de référence choisi, nous pouvons commencer la résolution perturbative du problème homogène.

Résolution perturbative du problème homogène

Les solutions du problème homogène (champ et longueur d'onde du mode) sont cherchées de manière perturbative, c'est à dire sous la forme de développement en h:

$$\lambda^p(h) = \lambda^{ref} + h\dot{\lambda}^p + h^2\ddot{\lambda}^p + o(h^2) \tag{3.6}$$

$$e_n(z,h) = e_n^{ref}(z) + h\dot{e_n}(z) + h^2\ddot{e_n}(z) + o(h^2). \tag{3.7}$$

De la même manière que dans le deuxième chapitre, il est possible de mettre le problème homogène sous la forme d'un système d'équations intégrales couplées exactes (2.12), dont l'expression est rappelée ci-dessous:

$$e_n(z) = \int_0^h G_n(z,z') \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \tilde{\varepsilon}_{n-m} e_m(z')dz' \tag{3.8}$$

Les modes $(\alpha_{q_1}^{ref},\lambda^{ref})$ et $(\alpha_{q_2}^{ref},\lambda^{ref})$ sont deux modes dégénérés du guide d'onde plan. Nous en déduisons que $(\alpha^{ref},\lambda^{ref})$ est un pôle de $G_{q_1}(\alpha,\lambda)$ et de $G_{q_2}(\alpha,\lambda)$. Pour tenir compte du comportement résonnant de ces deux coefficients de la fonction de Green au voisinage de λ^{ref}, nous les écrivons sous la forme:

$$G_{q_1}(\alpha^{ref},\lambda) = \frac{A_{q_1}(\alpha^{ref},\lambda)}{\lambda - \lambda^{ref}} \quad \text{et} \quad G_{q_2}(\alpha^{ref},\lambda) = \frac{A_{q_2}(\alpha^{ref},\lambda)}{\lambda - \lambda^{ref}} \tag{3.9}$$

où $A_{q_1}(\alpha,\lambda)$ et $A_{q_2}(\alpha,\lambda)$ sont des fonctions réelles de même signe [3].

Comme deux coefficients de la fonction de Green sont résonnants, deux composantes du champ, e_{q_1} et e_{q_2} vont être prépondérantes dans le développement du système (3.8). Le développement perturbatif, présenté ci-dessous pourra être omis en première lecture. Les résultats importants auxquels il conduit sont présentés et commentés ensuite.

Développement perturbatif Nous reprenons les étapes de la résolution du système d'équations (3.8) décrites dans le deuxième chapitre. Dans le cas où $n \neq q_1$ ou q_2, le développement en h, puis l'identification des deux membres de l'équation (3.8) conduit à:

$$\begin{array}{ll} \text{à l'ordre 0:} & e_n(z) = 0 \\ \text{à l'ordre 1:} & e_n(z) = G_n(z,0)(\tilde{\varepsilon}_{n-q_1} e_{q_1}^{ref}(0) + \tilde{\varepsilon}_{n-q_2} e_{q_2}^{ref}(0) \end{array} \tag{3.10}$$

Lorsque $n = q_1$ ou q_2, nous multiplions les deux membres de (3.8) par $(\lambda - \lambda^{ref})$. A l'ordre 1 en h, le développement et l'identification conduit à un système de deux équations couplées, liant les termes d'ordre 0 en h du développement du champ, $e_{q_1}(z)$ et $e_{q_2}(z)$:

$$\begin{array}{l} \dot{\lambda}^p e_{q_1}^{ref}(z) = A_{q_1}(z,0)\tilde{\varepsilon}_{q_1-q_2} e_{q_2}^{ref}(0) \\ \dot{\lambda}^p e_{q_2}^{ref}(z) = A_{q_2}(z,0)\tilde{\varepsilon}_{q_2-q_1} e_{q_1}^{ref}(0) \end{array} \tag{3.11}$$

3. D'après l'expression de la fonction de Green (éq. 2.17), G_{q_1} et G_{q_2} sont de même signe

Par hypothèse , les termes $e_{q_1}^{ref}$ et $e_{q_2}^{ref}$ sont non nuls. Le déterminant du système (3.11) doit donc être nul. Cette condition conduit à l'expression de $\dot{\lambda^p}$:

$$\dot{\lambda^p} = \pm\sqrt{A_{q_1}(0,0)A_{q_2}(0,0)}\tilde{\varepsilon}_{q_1-q_2}. \tag{3.12}$$

Nous obtenons deux valeurs distinctes pour $\dot{\lambda^p}$, qui sont réelles puisque A_{q_1} et A_{q_2} sont réels et de même signe. Ces deux valeurs correspondent aux bords inférieur et supérieur du gap.

Nous pouvons calculer les expressions du champ de part et d'autre du gap en remplaçant $\dot{\lambda^p}$ par son expression dans le système d'équations (3.11), nous obtenons:

$$\sqrt{A_{q_2}}(0,0)e_{q_1}^{ref}(0) = \pm\sqrt{A_{q_1}}(0,0)e_{q_2}^{ref}(0). \tag{3.13}$$

Dans le cas particulier où un seul mode guidé est utilisé, $A_{q_1} = A_{q_2}$. Donc $e_{q_1}^{ref}$ et $e_{q_2}^{ref}$ sont égaux ou opposés. En d'autres termes, un mode en bord de bande interdite est symétrique et l'autre anti-symétrique par rapport à l'axe (Oz). Les longueurs d'onde des modes symétrique et anti-symétrique sont données par l'équation (3.12). Le signe positif correspond au mode symétrique et le signe négatif au mode anti-symétrique.

Pour obtenir la partie imaginaire de $\lambda^p(h)$, poursuivons le développement à l'ordre 2. Le calcul est long mais ne pose pas de difficulté particulière. Pour simplifier les expressions, nous introduisons la notation $M^{\pm}(z)$ définie par:

$$M^{\pm}(z) = \sqrt{A_{q_2}}e_{q_1}^{ref}(z) \pm \sqrt{A_{q_1}}e_{q_2}^{ref}(z). \tag{3.14}$$

De façon similaire, nous définissons $\dot{M}^{\pm}(z)$ à partir de $\dot{e_{q_1}}(z)$ et $\dot{e_{q_2}}(z)$. Il est alors possible de montrer que:

$$\begin{aligned}
&\ddot{\lambda^p}M^{\pm}(z) + \left(2\dot{\lambda^p} \mp \tilde{\varepsilon}_{q_1-q_2}\sqrt{A_{q_1}(z,0)A_{q_2}(z,0}\right)\dot{M}^{\pm}(z) \\
&= 2\sum_{m=-\infty}^{+\infty} G_m(z,0)\left(\sqrt{A_{q_1}(z,0)}\tilde{\varepsilon}_{m-q_1}\frac{M^+(z)+M^-(z)}{2} + \sqrt{A_{q_2}(z,0)}\tilde{\varepsilon}_{m-q_2}\frac{M^+(z)-M^-(z)}{2}\right) \\
&* \left(\sqrt{A_{q_1}(z,0)}\tilde{\varepsilon}_{m-q_1} \pm \sqrt{A_{q_2}(z,0)}\tilde{\varepsilon}_{m-q_2}\right) + \frac{d}{dz'}\left[\tilde{\varepsilon}_{q_1-q_2}\sqrt{A_{q_1}(z',0)A_{q_2}(z',0)}M^{\pm}(z')\right]_{z'=0}
\end{aligned} \tag{3.15}$$

En prenant $z = 0$, et en utilisant l'expression de $\dot{\lambda^p}$ (éq. 3.12), nous obtenons :

$$\ddot{\lambda^p} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} G_m(0,0)\left(\tilde{\varepsilon}_{m-q_1}\sqrt{A_{q_1}(0,0)} \pm \tilde{\varepsilon}_{m-q_2}\sqrt{A_{q_2}(0,0)}\right)^2 + \frac{d}{dz'}\left[\sqrt{A_{q_1}(z',0)A_{q_2}(z',0)}\tilde{\varepsilon}_{q_1-q_2}\right]_{z'=0} \tag{3.16}$$

Nous en déduisons que $\lambda^p(h)$ est complexe l'ordre 2 en h. Les expressions (3.16) et (3.12) fournissent la partie réelle et la partie imaginaire du pôle en longueur d'onde qui sont exprimées dans la suite.

Résultats du développement perturbatif et discussions Intéressons-nous d'abord à la partie réelle du pôle. Etant donné que A_{q_1} et A_{q_2} sont réels et de même signe, $\lambda^p(h)$ est réel à l'ordre 1 en h:

$$\boxed{\mathrm{Re}(\lambda^p) = \lambda^{ref} \pm h\sqrt{A_{q_1}A_{q_2}}\tilde{\varepsilon}_{q_1-q_2} + o(h)} \tag{3.17}$$

Nous remarquons que $\lambda^p(h)$ prend des valeurs symétriques de part et d'autre de λ^{ref}. Les longueurs d'onde comprises entre ces deux valeurs correspondent à la bande interdite [4]. D'après l'équation (3.17), la largeur de la bande interdite est proportionnelle au coefficient de Fourier du réseau $\tilde{\varepsilon}_{q_1-q_2}$. Ce coefficient est responsable du couplage entre les modes $(\alpha^{ref_1}(\lambda^{ref}) - q_1K, \lambda^{ref})$ et $(-\alpha^{ref_2}(\lambda^{ref}) - q_2yK, \lambda^{ref})$ du guide d'onde plan. Plus il sera grand, plus le couplage sera fort et le gap large.

4. Lorsque la structure n'est pas symétrique par rapport à (Oz), nous obtenons $\mathrm{Re}(\lambda^p(h)) = \lambda^{ref} \pm h\sqrt{A_{q_1}A_{q_2}}\,|\tilde{\varepsilon}_{q_1-q_2}| + o(h)$ où $|\ |$ désigne le module

La partie imaginaire des longueurs d'onde propres est donnée par le développement à l'ordre 2 en h. Si seul l'ordre 0 est diffracté:

$$\boxed{\mathrm{Im}(\lambda^p) = h^2 \mathrm{Im}(G_0) \left(\tilde{\varepsilon}_{q_1}\sqrt{A_{q_1}} + \tilde{\varepsilon}_{q_2}\sqrt{A_{q_2}}\right)^2 + o(h^2)} \tag{3.18}$$

La largeur spectrale en bord de gap est donc liée à $\tilde{\varepsilon}_{q_1}$ et $\tilde{\varepsilon}_{q_2}$. Les résultats cités ci-dessus sont valables lorsque deux modes sont excités, que la structure de référence supporte un ou deux modes guidés.

Dans le cas où la structure de référence ne supporte qu'un seul mode guidé ($A_{q_1} = A_{q_2}$), des conclusions supplémentaires peuvent être obtenues sur les parties réelle et imaginaire de λ^p. En effet, les longueurs d'onde obtenues pour le signe positif ou négatif dans l'équation (3.17) correspondent respectivement à un mode symétrique et anti-symétrique. Si $\tilde{\varepsilon}_{q_1-q_2}$ est positif, le mode symétrique apparaît au bord supérieur de la bande interdite, et le mode anti-symétrique au bord inférieur (inversement si $\tilde{\varepsilon}_{q_1-q_2}$ est négatif). De plus, nous devrions retrouver que la partie imaginaire du mode anti-symétrique est nulle. En incidence normale ($q_1 = -q_2$), les expressions de la partie imaginaire des pôles se simplifient:

$$\mathrm{Im}(\ddot{\lambda^p}) = h^2 \mathrm{Im}(G_0) \left[A_{q_1}\tilde{\varepsilon}_{q1}(1 \pm 1)\right]^2 + o(h^2) \tag{3.19}$$

Pour le mode anti-symétrique, nous obtenons comme prévu une largeur spectrale nulle, au moins à l'ordre 2 en h.

En résumé, nous avons mis en évidence la création de la bande de fréquences interdites observée sur la figure (fig. 3.5) , et nous avons obtenu les expressions de la longueur d'onde en bord de gap. Maintenant, nous nous intéressons à la situation inverse où la pulsation spatiale est fixée.

3.3.2 Perturbation induite sur la pulsation spatiale, partie imaginaire du pôle dans le gap

Lors de l'étude rigoureuse de la relation de dispersion à longueur d'onde fixée, nous avions trouvé des pulsations spatiales complexes solutions du problème homogène pour des longueurs d'onde du gap. Nous avions également observé que la partie imaginaire des pulsations spatiales devenait très grande à l'intérieur du gap. Nous souhaitons retrouver ces résultats à l'aide de la méthode perturbative.

Les modes de référence

A nouveau, nous considérons deux parties de la relation de dispersion, $\alpha^{ref_1}(\lambda) - q_1 K$ et $-\alpha^{ref_2}(\lambda) - q_2 K$, qui se croisent dans le cône de lumière (fig.3.10). Cette fois, nous fixons λ à une longueur d'onde λ^{ref}. Nous introduisons les notations $\alpha_0^{ref_1} = \alpha^{ref_1}(\lambda^{ref}) - q_1 K$ et $\alpha_0^{ref_2} = -\alpha^{ref_2}(\lambda^{ref}) - q_2 K$. Comme nous souhaitons montrer l'existence de pulsations spatiales propres pour des longueurs du gap et connaître l'évolution de leur partie imaginaire, la longueur

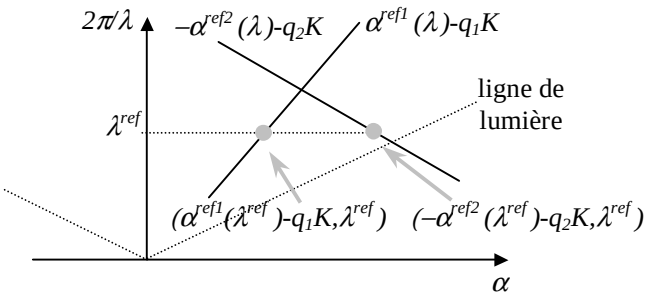


FIG. 3.10 – *Deux modes de référence au voisinage du point de dégénérescence.*

d'onde choisie n'est pas nécessairement la longueur d'onde du point d'intersection. Les modes de référence $(\alpha_0^{ref_1},\lambda^{ref})$ et $(\alpha_0^{ref_2},\lambda^{ref})$ ne sont donc pas nécessairement dégénérés. Cependant, nous devons nous assurer que les modes de référence sont suffisamment proches pour pouvoir coexister. En effet, nous nous intéressons au cas ou le champ de référence est la somme des champs des deux modes ($e_{q_1}^{ref}$ et $e_{q_2}^{ref}$ non nuls) [5]. Plus précisément, $\alpha_0^{ref_1}$ et $\alpha_0^{ref_2}$ doivent vérifier:

$$\alpha - \alpha_0^{ref_1} = O(h) \quad \text{et} \quad \alpha - \alpha_0^{ref_2} = O(h) \tag{3.20}$$

pour une pulsation spatiale α. Ces conditions impliquent que $\alpha = \frac{1}{2}(\alpha_0^{ref_1} + \alpha_0^{ref_2}) + O(h)$ et $\alpha_0^{ref_2} - \alpha_0^{ref_1} = O(h)$. En conséquence, nous introduisons la notation δ définie par:

$$\alpha_0^{ref_2} - \alpha_0^{ref_1} = 2h\delta + o(h^2), \tag{3.21}$$

et nous chercherons la pulsation spatiale des modes du guide d'onde perturbé au voisinage de $\frac{1}{2}(\alpha_0^{ref_1} + \alpha_0^{ref_2})$.

Résolution perturbative du problème homogène

Nous cherchons le champ des modes sous la forme d'un développement en h (3.7), et de même pour α^p:

$$\alpha^p(h) = \frac{1}{2}(\alpha_0^{ref_1} + \alpha_0^{ref_2}) + h\dot{\alpha}^p + h^2\ddot{\alpha}^p + o(h^2). \tag{3.22}$$

Le champ e_n est solution de l'équation (3.8). Les deux coefficients $G_{q_1}(\alpha,\lambda)$ et $G_{q_2}(\alpha,\lambda)$ ont un comportement résonnant au voisinage de $\alpha_0^{ref_1} = \alpha^{ref_1} - q_1K$ et $\alpha_0^{ref_2} = \alpha^{ref_2} - q_2K$, respectivement. Nous les écrivons sous la forme:

$$G_{q_1}(\alpha,\lambda) = \frac{B_{q_1}(\alpha,\lambda)}{\alpha - \alpha_0^{ref_1}} \quad \text{et} \quad G_{q_2}(\alpha,\lambda) = \frac{B_{q_2}(\alpha,\lambda)}{\alpha - \alpha_0^{ref_2}} \tag{3.23}$$

où $B_{q_1}(\alpha,\lambda)$ et $B_{q_2}(\alpha,\lambda)$ sont des fonctions réelles, et de signe opposé [6].

5. Si les modes de référence sont trop éloignés l'un de l'autre, alors les deux modes ne peuvent coexister pour une même pulsation spatiale, et le problème est équivalent à celui d'un seul mode de référence traité dans le deuxième chapitre

6. D'après (2.18), $G_{q_1}(\alpha,\lambda)$ et $G_{q_2}(\alpha,\lambda)$ sont de signe opposé. Comme $\alpha - \alpha_0^{ref_1}$ et $\alpha - \alpha_0^{ref_2}$ sont de même signe, nous en déduisons que $B_{q_1}(\alpha,\lambda)$ et $B_{q_2}(\alpha,\lambda)$ sont aussi de signe opposé

Comme d'habitude, le calcul du développement perturbatif peut être négligé en première lecture.

Développement perturbatif Lorsque $n \neq q_1$ ou q_2 la résolution de (3.8) permet d'obtenir les mêmes expressions de $e_n(z)$ que celles données par l'équation (3.10). Par contre, lorsque $n = q_1$ ou q_2, le calcul et les résultats sont différents. Pour traiter la singularité de la fonction de Green en $\alpha_0^{ref_1}$ et $\alpha_0^{ref_2}$, nous multiplions le deux membres de l'équation (3.8) par $(\alpha^p - \alpha_0^{ref_1})$ si $n = q_1$ et par $(\alpha^p - \alpha_0^{ref_2})$ si $n = q_2$. D'après les équations 3.22 et 3.21, nous avons:

$$\begin{aligned} \alpha^p - \alpha_0^{ref_1} &= h(\delta + \dot{\alpha^p}) + h^2\ddot{\alpha^p} + o(h^2) \\ \alpha^p - \alpha_0^{ref_2} &= h(-\delta + \dot{\alpha^p}) + h^2\ddot{\alpha^p} + o(h^2) \end{aligned} \tag{3.24}$$

Le développement et l'identification des deux membres de (3.8) conduit alors à un système de deux équations:

$$\begin{aligned} (\delta + \dot{\alpha^p})e_{q_1}^{ref}(0) &= B_{q_1}(0,0)\tilde{\varepsilon}_{q_1-q_2}e_{q_2}^{ref}(0) \\ (-\delta + \dot{\alpha^p})e_{q_2}^{ref}(0) &= B_{q_2}(0,0)\tilde{\varepsilon}_{q_2-q_1}e_{q_1}^{ref}(0) \end{aligned} \tag{3.25}$$

Comme $e_{q_1}^{ref}$ et $e_{q_2}^{ref}$ sont non nul, le déterminant du système d'équations (3.25) doit être nul. Nous en déduisons que:

$$\dot{\alpha^p} = \pm\sqrt{\delta^2 + B_{q_1}(0,0)B_{q_2}(0,0)\,|\tilde{\varepsilon}_{q_1-q_2}|^2}. \tag{3.26}$$

Puisque B_{q_1} et B_{q_2} sont de signes opposés, $\dot{\alpha^p}$ peut être réel ou imaginaire pur. L'équation (3.26) est suffisante pour comprendre le comportement de la partie imaginaire de α^p, elle est commentée dans la suite.

Résultats du développement perturbatif et discussions L'expression de α^p au premier ordre en h est donnée par:

$$\boxed{\alpha^p(h) = \frac{1}{2}(\alpha_0^{ref_1} + \alpha_0^{ref_2}) \pm h\sqrt{\delta^2 + B_{q_1}B_{q_2}\,|\tilde{\varepsilon}_{q_1-q_2}|^2} + o(h)}. \tag{3.27}$$

Comme $B_{q_1}B_{q_2}$ est négatif, $\alpha^p(h)$ peut être réel ou complexe à l'ordre 1 en h selon la valeur de δ. Rappelons que δ représente au facteur h près, l'écart entre les deux modes de référence. Plus les modes de référence sont proches du point de dégénérescence de la relation de dispersion, plus δ est petit. Nous distinguons deux cas selon la valeur de $(\alpha_0^{ref_2} - \alpha_0^{ref_1})$:

- Si $(\alpha_0^{ref_2} - \alpha_0^{ref_1})^2 \geq h^2 B_{q_1}B_{q_2}\,|\tilde{\varepsilon}_{q_1-q_2}|^2$, les modes de référence sont suffisamment éloignés du point de dégénérescence, la partie imaginaire de α^p est en h^2, et nous avons :

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}(\alpha^p) &= \tfrac{1}{2}(\alpha_0^{ref_1} + \alpha_0^{ref_2}) \pm h\sqrt{\delta^2 + B_{q_1}B_{q_2}\,|\tilde{\varepsilon}_{q_1-q_2}|^2} + o(h) \\ \mathrm{Im}(\alpha^p) &= o(h). \end{aligned} \tag{3.28}$$

- Si $(\alpha_0^{ref_2} - \alpha_0^{ref_1})^2 < h^2 B_{q_1}B_{q_2}\,|\tilde{\varepsilon}_{q_1-q_2}|^2$, les modes de référence sont proches du point de dégénérescence, α^p est imaginaire pur à l'ordre 1 en h:

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}(\alpha^p) &= \tfrac{1}{2}(\alpha_0^{ref_1} + \alpha_0^{ref_2}) + o(h) \\ \mathrm{Im}(\alpha^p) &= \pm ih\sqrt{-\left[\delta^2 + B_{q_1}B_{q_2}\,|\tilde{\varepsilon}_{q_1-q_2}|^2\right]} + o(h). \end{aligned} \tag{3.29}$$

Le moment de la transition entre les deux régimes n'est pas défini clairement. Cependant, remarquons qu'avant de devenir imaginaire pur, le terme en h du développement s'annule. A ce moment, la différence entre les pulsations spatiales des deux pôles du guide perturbé est à l'ordre 2 en h, c'est à dire qu'ils sont très proches, donc approximativement en bord de gap. Pour simplifier, nous dirons que la transition entre la dépendance en h^2 et en h de la partie imaginaire de la pulsation spatiale se situe au passage dans le gap.

En résumé, nous avons mis en évidence l'existence de pulsations spatiales propres pour des longueurs d'onde de la bande interdite, ainsi que l'augmentation brutale de la partie imaginaire de α^p au passage dans le gap. Ces résultats sont en accords avec les observations de la figure (fig. 3.5). De plus, nous avons obtenu une expression analytique approchée de la partie imaginaire de la pulsation spatiale, que nous pouvons comparer à l'expression obtenue pour la partie imaginaire de la longueur d'onde.

3.3.3 Conclusion: indépendance des largeurs spectrale et angulaire

Le calcul perturbatif de la pulsation spatiale et de la longueur d'onde du pôle a mis en évidence la différence de leur comportement au voisinage de deux modes de référence dégénérés. D'un point de vue qualitatif: lorsque la pulsation spatiale est fixée, aucune longueur d'onde solution du problème homogène n'existe dans un intervalle appelé bande de fréquences interdites. Par contre, lorsque la longueur d'onde est fixée à une valeur réelle, il est possible de trouver des pulsations spatiales complexes solutions du problème homogène, même pour des longueurs d'onde appartenant au gap. D'un point de vue quantitatif, la différence essentielle entre la pulsation spatiale et la longueur d'onde du pôle se situe au niveau de leur partie imaginaire. La partie imaginaire de la longueur d'onde est à l'ordre 2 en h, alors que celle de la pulsation spatiale passe de l'ordre 2 à l'ordre 1 à l'entrée dans le gap. De plus, souvenons nous que la partie imaginaire de la longueur d'onde du pôle dépend de $\tilde{\varepsilon}_{q_1}$ et $\tilde{\varepsilon}_{q_2}$, alors que la partie imaginaire de la pulsation spatiale dépend de $|\tilde{\varepsilon}_{q_1-q_2}|$. Cela signifie que la largeur angulaire est indépendante de la largeur spectrale. Notons aussi que la largeur de la bande interdite est liée, comme la partie imaginaire de la pulsation spatiale en bord de gap à $|\tilde{\varepsilon}_{q_1-q_2}|$. Nous en déduisons qu'augmenter la largeur angulaire ou la largeur du gap sont deux actions équivalentes.

Finalement, le gap permet non seulement d'avoir un profil angulaire aplati au sommet grâce à la juxtaposition de deux modes pour la même longueur d'onde, mais aussi de rendre indépendantes les largeurs spectrale et angulaire. Dans cette configuration, nous avons la possibilité d'obtenir une tenue à l'incidence satisfaisante.

3.4 Optimisation du profil angulaire

Pour optimiser le profil angulaire d'un filtre, nous utilisons les expressions de la largeur spectrale et de la largeur angulaire établies grâce à la méthode perturbative. Nous nous plaçons dans le cas qui nous intéresse en pratique, pour n'avoir qu'un seul ordre diffracté, nous considérons une

configuration où les deux modes sont excités à l'aide des ordres $(+1)$ et (-1) et où la structure est symétrique par rapport à l'axe (Oz) (pour obtenir une réflexion de 100% à la résonance). Les expressions (3.29) et (3.18) sont donc utilisées avec $q_1 = 1$ et $q_2 = -1$.

Pour optimiser la tenue à l'incidence du filtre, il s'agit de jouer sur le rapport $\Delta\theta/\Delta\lambda$, donc sur le rapport entre $\tilde{\varepsilon}_2$ et $\tilde{\varepsilon}_1$. Nous verrons que les motifs simples utilisés habituellement ne permettent pas d'augmenter ce rapport suffisamment, et nous proposerons un motif plus performant. Pour finir, nous présenterons deux exemples de filtres, l'un en incidence normale et l'autre en incidence oblique, possédant une bonne tolérance angulaire.

3.4.1 Motif optimisé

Considérons un motif de base simple, de dimension d (période) selon (Ox), composé d'une seule lame de diélectrique de largeur a (fig. 3.11). Nous définissons le facteur de remplissage f

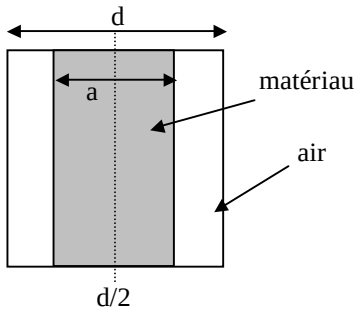


FIG. 3.11 – *Motif simple mono-dimensionnel.*

comme étant la surface occupée par le matériau, par rapport à la surface de la cellule. Ainsi, pour un motif simple, nous avons $f = a/d$. Sur la figure (fig. 3.12), nous avons représenté [7] les

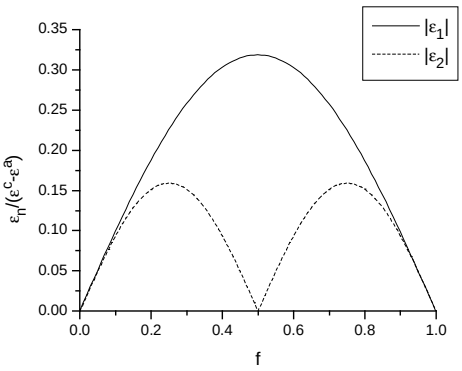


FIG. 3.12 – *Variation des modules de $\tilde{\varepsilon}_1/(\varepsilon^c - \varepsilon^a)$ (trait continu) et $\tilde{\varepsilon}_2/(\varepsilon^c - \varepsilon^a)$ (trait discontinu) en fonction du facteur de remplissage f.*

7. la définition des coefficients de Fourier utilisée dans le code numérique est $\tilde{\varepsilon}_n = \frac{\pi}{d}\int_{-d/2}^{d/2} \varepsilon(x)\exp(inKx)dx$

variations de $|\tilde{\varepsilon}_1|$ et de $|\tilde{\varepsilon}_2|$ en fonction de f. Il apparaît que $\tilde{\varepsilon}_2$ est toujours inférieur à $\tilde{\varepsilon}_1$. Par conséquent, une tenue à l'incidence satisfaisante ne peut pas être obtenue grâce à ce type de motif, même en bord de gap.

Considérons maintenant un motif de base plus complexe, composé de deux lames de diélectrique, de largeurs a et b, centrées en $d/4$ et $3d/4$ (fig. 3.13). Les coefficients de Fourier [8] de ce

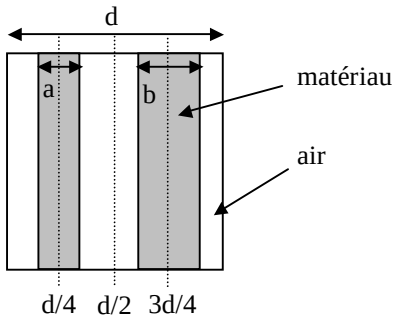


FIG. 3.13 – *Motif double période mono-dimensionnel.*

motif dépendent des deux paramètres a et b. Dans le cas particulier où les deux lames sont de même largeur, le motif est équivalent à deux motifs de base simple de période $d/2$ juxtaposés. Par conséquent, $\tilde{\varepsilon}_1$ est nul lorsque $a = b$. La différence entre a et b permet donc d'ajuster $\tilde{\varepsilon}_1$. De plus, $\tilde{\varepsilon}_2$ est maximum lorsque $a = b = d/4$. Le coefficient $\tilde{\varepsilon}_2$ sera donc d'autant plus petit que a et b seront différents de $d/4$. Ce type de motif est généralement appelé "motif double période" [Lemarchand et al., 1999]. Un motif similaire (une lame sur trois est plus petite, de manière à accroître le troisième coefficient de Fourier) est utilisable pour augmenter la tolérance angulaire de pics dus à l'excitation de plasmons de surface [Hibbins et al., 2002].

3.4.2 Exemples de filtres à tolérance angulaire optimisée

Le premier exemple de filtre à tolérance angulaire optimisée fonctionne en incidence normale (structure 3.1). Les réponses spectrales et angulaires sont représentées sur la figure (fig. 3.14). Pour cet exemple, le rapport $\tilde{\varepsilon}_2/\tilde{\varepsilon}_1$ est de l'ordre de 10, et $\Delta\theta/\Delta\lambda$ de l'ordre de 4°. nm^{-1}. La tolérance angulaire est largement améliorée. Le deuxième exemple de filtre à tolérance angulaire optimisée fonctionne hors incidence normale. Nous avons choisi une structure de référence supportant deux modes guidés TE. La difficulté consiste à trouver la longueur d'onde et l'angle d'incidence pour lesquels les modes du bord du gap sont excités. Pour cela, nous traçons le lieu du maximum de réflexion en fonction de θ^{inc} et λ^{inc} (fig. 3.15a). Nous observons que les deux modes guidés se sont couplés pour une incidence proche de 1,2° et ont créé une bande interdite. La réponse spectrale et la réponse angulaire, au voisinage de cet angle d'incidence et pour la longueur d'onde du bord inférieur du gap, sont représentées sur la figure (fig. 3.15). Cet exemple

8. Expression des coefficients de Fourier du "motif double période":$\tilde{\varepsilon}_0 = \pi\left[\varepsilon^c \frac{a+b}{d} + \varepsilon^a(1 - \frac{a+b}{d})\right]$ et $\tilde{\varepsilon}_n = \frac{\varepsilon^c - \varepsilon^a}{n}\left[i^n \sin(\pi n a/d) + (-i)^n \sin(\pi n b/d)\right]$

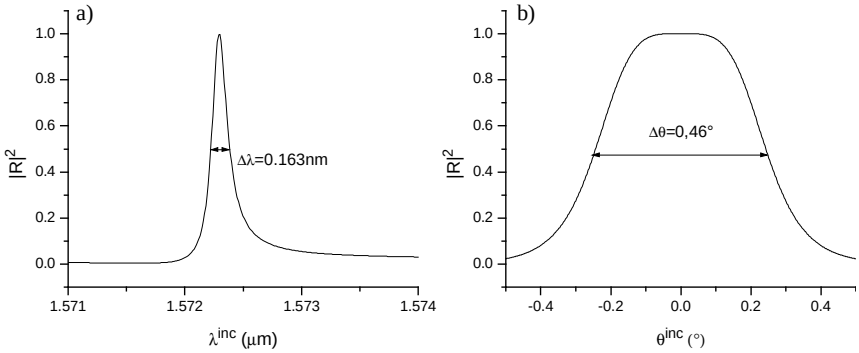


FIG. 3.14 – *Filtre à tolérance angulaire optimisée en incidence normale, a) réponse spectrale, b) réponse angulaire. Les coefficients de Fourier sont* $|\tilde{\varepsilon}_1| = 0{,}093$ *et* $|\tilde{\varepsilon}_2| = 1{,}037$. *La structure est composée de l'empilement* $\varepsilon^a = 1{,}0$, $\varepsilon^{c_1} = 2{,}07^2$, $e^{c_1} = 79{,}1$ *nm,* $\varepsilon^{c_2} = 1{,}47^2$, $e^{c_2} = 263{,}5$ *nm,* $\varepsilon^{c_3} = 2{,}07^2$, $e^{c_3} = 62{,}5$ *nm,* $\varepsilon^s = 1{,}448^2$, *et du réseau* $h = 382{,}6$ *nm,* $d = 1047{,}5$ *nm,* $a = 241{,}25$ *nm,* $b = 281{,}25$ *nm, où* a *et* b *sont les largeurs des trous* (ε^a) *centrés en* $d/4$ *et* $3d/4$ *(structure 3.1).*

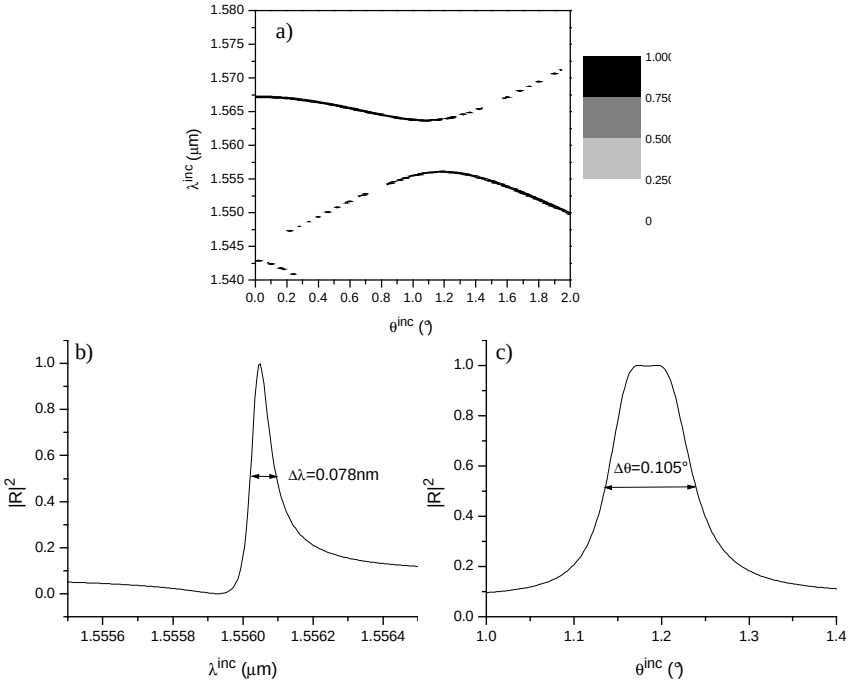


FIG. 3.15 – *Filtre à tolérance angulaire optimisée en incidence oblique, a)lieu du maximum de réflexion en fonction de l'angle d'incidence et de la longueur d'onde incidente, b) réponse spectrale, c) réponse angulaire . Les coefficients de Fourier sont* $|\tilde{\varepsilon}_1| = 0{,}116$ *et* $|\tilde{\varepsilon}_2| = 1{,}023$. *La structure est composée de l'empilement* $\varepsilon^s = 1{,}448^2$, $\varepsilon^{c_1} = 2{,}07^2$, $e^{c_1} = 315{,}4$ *nm,* $\varepsilon^{c_2} = 1{,}47^2$, $e^{c_2} = 716{,}8$ *nm,* $\varepsilon^{c_3} = 2{,}07^2$, $e^{c_3} = 368{,}5$ *nm,* $\varepsilon^a = 1{,}0$, *et du réseau* $h = 100{,}0$ *nm,* $d = 886{,}0$ *nm,* $a = 221{,}5$ *nm,* $b = 179{,}97$ *nm, où* a *et* b *sont les largeurs des trous* (ε^a) *centrés en* $d/4$ *et* $3d/4$ *(structure 3.2).*

montre une tolérance angulaire bien meilleure que celles obtenues en général hors incidence normale. Nous remarquons que l'angle de fonctionnement du filtre est faible. Ceci est dû au fait que les modes guidés utilisés ont des indices effectifs très proches l'un de l'autre.

3.5 Conclusion

Le but de ce chapitre était de trouver une solution pour que le filtre à réseau résonnant ait une bonne tolérance angulaire. Nous avons étudié les propriétés de l'incidence normale, et nous avons démontré que l'excitation de deux modes guidés se propageant dans des directions opposées créait une bande de fréquence interdite. Le bord inférieur et le bord supérieur du gap correspondent à deux modes de pulsation spatiale nulle, l'un symétrique, et l'autre anti-symétrique. A la longueur d'onde d'un bord de gap, deux modes propres, de même longueur d'onde et de pulsations spatiales légèrement différentes peuvent être excités et permettent de créer un profil angulaire aplati au sommet. Ceci est vrai en incidence normale, ou en incidence oblique à la condition d'utiliser deux modes guidés d'indices effectifs différents. Dans cette configuration, la largeur angulaire est proportionnelle au coefficient de Fourier du réseau permettant le couplage entre les deux modes propres (en général $\tilde{\varepsilon}_2$), alors que la largeur spectrale est proportionnelle au coefficient de Fourier permettant le couplage entre l'onde incidente et les modes propres (en général $\tilde{\varepsilon}_1$). Nous avons proposé un motif dit "double période" pour lequel $\tilde{\varepsilon}_2$ est grand et $\tilde{\varepsilon}_1$ petit. La configuration proposée est donc entièrement satisfaisante pour les applications de filtrage D.W.D.M., au moins en ce qui concerne le problème de la tenue à l'incidence. L'étape suivante consiste à améliorer la tolérance spectrale du filtre. Comme pour le profil angulaire, nous souhaitons obtenir un profil spectral aplati au sommet. Un tel profil est caractérisé phénoménologiquement par deux pôles et deux zéros. Nous pensons donc que pour obtenir un profil spectral aplati au sommet, il suffit de pouvoir juxtaposer deux modes propres, de même pulsation spatiale, et de longueurs d'onde légèrement différentes.

Chapitre 4

Optimisation du profil spectral

Nous souhaitons concevoir un filtre dont le profil spectral se rapproche du gabarit de la figure (fig. 2.14), c'est à dire aplati au sommet, et de largeur à mi-hauteur 0,1nm. Dans le troisième chapitre, nous avons créé un profil angulaire aplati au sommet, en juxtaposant deux modes propres, de même longueur d'onde et de pulsations spatiales proches. Pour générer un profil spectral aplati au sommet, nous allons reprendre la même idée: utiliser deux modes, mais cette fois de même pulsation spatiale et de longueurs d'onde proches. Les deux modes utilisés pour la tenue à l'incidence sont obtenus en bord de bande de fréquences interdites. Une bande de fréquences interdites est créée lors du couplage, grâce à un réseau, de deux modes contra-propagatifs. Malheureusement, il n'est pas possible de créer une bande de pulsations spatiales interdites. Pour juxtaposer deux modes propres de même pulsation spatiale et de longueurs d'onde différentes, mais très proches l'une de l'autre, nous avons eu recours à un autre type de structure: les guides d'ondes plans couplés [Popov and Mashev, 1985a] symétrique. Nous appelons guides d'onde plans couplés un empilement formé de deux, ou plusieurs guides d'onde plans, séparés les uns des autres par des couches de couplage d'épaisseur plus ou moins importante. Quand deux guides d'ondes plans identiques sont couplés, il peut exister deux modes dont les indices effectifs sont proches [Petit, 1993]. Nous étudierons les relations de dispersion des modes guidés de ces structures. Ensuite, nous verrons que plusieurs réseaux sont nécessaires pour exciter ces modes [Jacob et al., 2002] [Jacob et al., 2001b]. La présence de deux modes, donc de deux pôles, entraîne l'existence de deux zéros de réflexion et de deux zéros de transmissions. En conséquence, les courbes de réflexions de ces structures présentent des profils compliqués que nous analysons en calculant de manière perturbative les expressions du pôle et des zéros. En modifiant les paramètres de la structure, nous montrons qu'il est possible d'obtenir des courbes de réflectivité correspondant au gabarit souhaité. Pour finir, nous présenterons des exemples de filtres à profil spectral optimisé.

4.1 Deux modes propres de même pulsation spatiale et de longueurs d'onde très proches

Nous n'avons pas l'intention de présenter une étude détaillée de la résolution du problème homogène dans le cas de guides d'ondes plans couplés [Petit, 1993] [Yeh, 1988]. Nous rappellerons simplement les résultats intéressants dans le cadre de notre problème. Comme nous souhaitons que les longueurs d'onde soient très proches (distance inférieure à 0,05nm), nous utiliserons deux guides plans identiques, couplés par leur substrat.

4.1.1 Les guides d'ondes plans couplés

Considérons un empilement formé de deux guides d'ondes plans identiques couplés (fig. 4.1). Chaque guide d'onde plan est formé d'une couche, de constante diélectrique ε^c et d'épaisseur e^c,

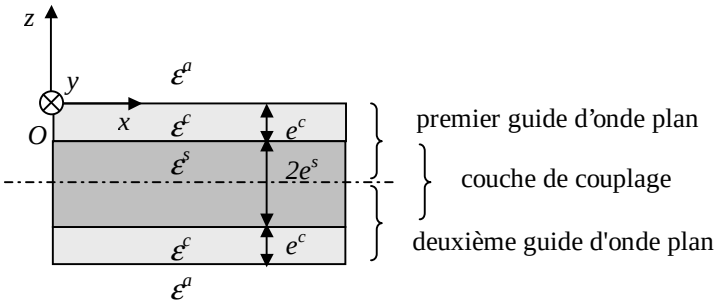


FIG. 4.1 – *Deux guides d'ondes plans identiques couplés.*

comprise entre un substrat et un superstrat, de constantes diélectriques respectives ε^s et ε^a (les guides d'onde peuvent comporter plusieurs couches, de constante diélectrique ε^{c_i}, et d'épaisseur e^{c_i}, le numéro i de la couche étant donné à partir du substrat). Les deux guides sont couplés par leurs substrats, réduit à une épaisseur e^s, l'épaisseur de couplage. Il est possible de montrer que les modes propres de chaque guide se couplent pour créer deux nouveaux modes propres, l'un dont le champ est symétrique par rapport au plan médian de la structure, l'autre anti-symétrique (fig. 4.2). Si les modes sont polarisés TE (ou TM), les deux modes résultants seront polarisés

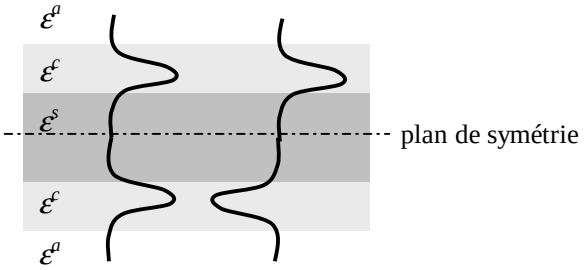


FIG. 4.2 – *Modes propres des guides d'ondes plans couplés.*

TE (ou TM). La force du couplage dépend de la constante diélectrique et de l'épaisseur de la couche de couplage. Pour le montrer, nous avons représenté sur la figure (fig. 4.3) la variation en fonction de l'épaisseur de couplage des longueurs d'onde des deux premiers modes propres d'une structure particulière pour une pulsation spatiale constante (structure 4.1). Pour une

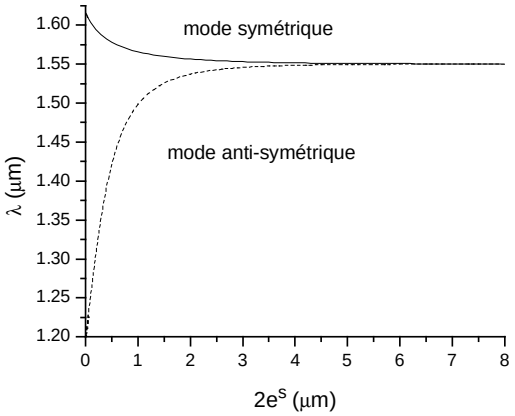


FIG. 4.3 – *Variation des longueurs d'ondes des modes propres symétrique et anti-symétrique de deux guides d'ondes plans couplés en fonction de l'épaisseur de couplage. La structure est définie par* $\varepsilon^a = 1{,}0$, $\varepsilon^{c_2} = 1{,}47^2$ *et* $e^{c_2} = 349{,}0$ *nm,* $\varepsilon^{c_1} = 2{,}07^2$ *et* $e^{c_1} = 70{,}1$ *nm,* $\varepsilon^s = 1{,}448^2$ *et* $2e^s$ *variable (structure 4.1). La pulsation spatiale est fixée à* $\alpha = 0{,}4935 - 2\pi/0{,}978\ \mu m^{-1}$.

épaisseur de couplage de l'ordre de 3 μm, nous observons la présence de deux modes propres, de longueurs d'onde distinctes. Lorsque la couche de couplage diminue, les longueurs d'onde des modes résultants s'éloignent. Notons que la symétrie de la structure assure l'existence d'un mode propre, le mode symétrique, quelle que soit l'épaisseur de couplage, alors que le mode anti-symétrique peut disparaître (ce n'est pas le cas ici), pour une épaisseur de couplage dépendant des paramètres du guide [Petit, 1993]. Au contraire, lorsque la couche de couplage augmente, les longueurs d'onde des modes anti-symétrique et symétrique se rapprochent, et tendent vers la même limite. Si les deux guides n'étaient pas identiques, les longueurs d'onde du mode symétrique et du mode anti-symétrique tendraient vers des valeurs différentes.

Ces conclusions peuvent être généralisées au cas où trois, quatre, ou plusieurs guides d'ondes identiques sont couplés. Cependant, pour créer un profil spectral aplati au sommet, deux modes propres suffisent.

4.1.2 Excitation des modes propres des guides d'ondes plans couplés

Naturellement, nous proposons d'exciter les deux modes guidés des guides d'onde couplés à l'aide d'un ou plusieurs réseaux coupleurs-découpleurs. Différentes configurations sont envisageables.

Dans un premier temps, nous avons perturbé périodiquement la couche située en haut de la structure (fig. 4.4). Nous avons constaté que les deux pics de résonance avaient des largeurs

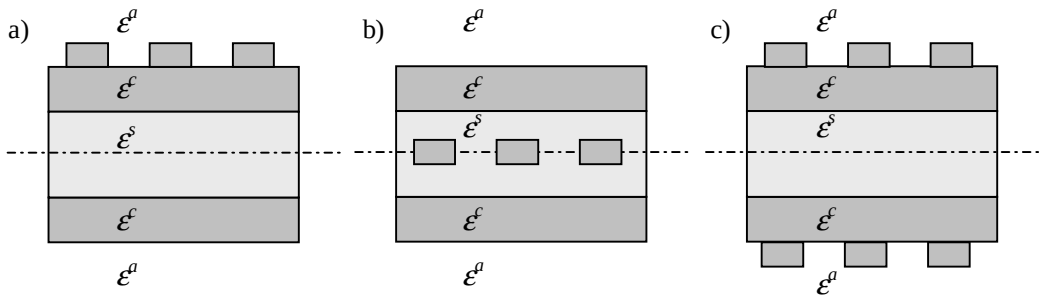


FIG. 4.4 – *Couplage des modes propres de deux guides d'ondes couplés à l'aide a) d'un réseau situé sur la couche supérieure de l'empilement, b) d'un réseau situé au milieu de la couche de couplage, c) de deux réseaux, situés sur les couches inférieure et supérieure de l'empilement.*

très différentes, et que la largeur du pic le plus fin diminuait lorsque l'épaisseur de la couche de couplage augmentait. Ce phénomène était prévisible. En effet, la méthode perturbative que nous avons développée dans le deuxième chapitre est valable (tant que les deux modes guidés ne sont pas dégénérés). Or, nous avions montré que la largeur du pic de résonance était proportionnelle à un coefficient A_q, lié à l'intensité du champ du mode à l'endroit où le réseau est gravé:

$$\mathrm{Im}(\lambda^p) = h^2 \left|\tilde{\varepsilon}_q\right|^2 A_q \mathrm{Im}(G_0) + o(h^2). \tag{4.1}$$

Dans le cas de deux guides d'ondes couplés, un mode est guidé dans la couche supérieure et l'autre dans la couche inférieure. Lorsque l'épaisseur de la couche de couplage augmente, le champ du mode guidé dans la couche inférieure devient de plus en plus faible à l'endroit du réseau, le pic de résonance devient donc de plus en plus fin.

Pour contourner cette difficulté, nous avons eu l'idée de placer le réseau à un endroit où les champs des deux modes guidés sont du même ordre: au milieu de la couche de couplage (fig. 4.4b). Dans ce cas, les pics de résonance ont effectivement des largeurs semblables. Cependant, lorsque l'épaisseur de la couche de couplage augmente, le champ des deux modes devient de plus en plus faible à l'endroit du réseau, les deux pics seront donc trop fins. Nous pourrions utiliser un réseau très épais afin d'augmenter la largeur des pics, mais nous nous heurtons à des difficultés de réalisation de la structure.

Une troisième solution consiste à utiliser deux réseaux identiques, l'un gravé sur la couche supérieure de l'empilement et l'autre sur la couche inférieure (fig. 4.4c). Dans ce cas, nous nous attendons à ce que les pics soient de la même largeur, quelle que soit l'épaisseur de la couche de couplage. Nous avons retenu et étudié cette configuration.

Réflectivité de deux guides d'ondes plan couplés perturbés

La structure étudiée est composée de deux guides d'ondes plan couplés sur lesquels ont été gravés deux réseaux identiques, non décalés l'un par rapport à l'autre, et symétriques par rapport au plan (Oyz) (structure 4.2). La structure possède donc un plan de symétrie vertical et un autre

horizontal. D'après le deuxième chapitre, les zéros de transmission et de réflexion sont réels, tant qu'un seul mode propre est excité par l'onde incidente. Pour vérifier la possibilité d'obtenir deux pics de même largeur, nous avons tracé les courbes de réflexion en fonction de la longueur d'onde pour plusieurs épaisseurs de couplage (fig. 4.5). Pour une épaisseur de couplage de 5,2 μm, nous

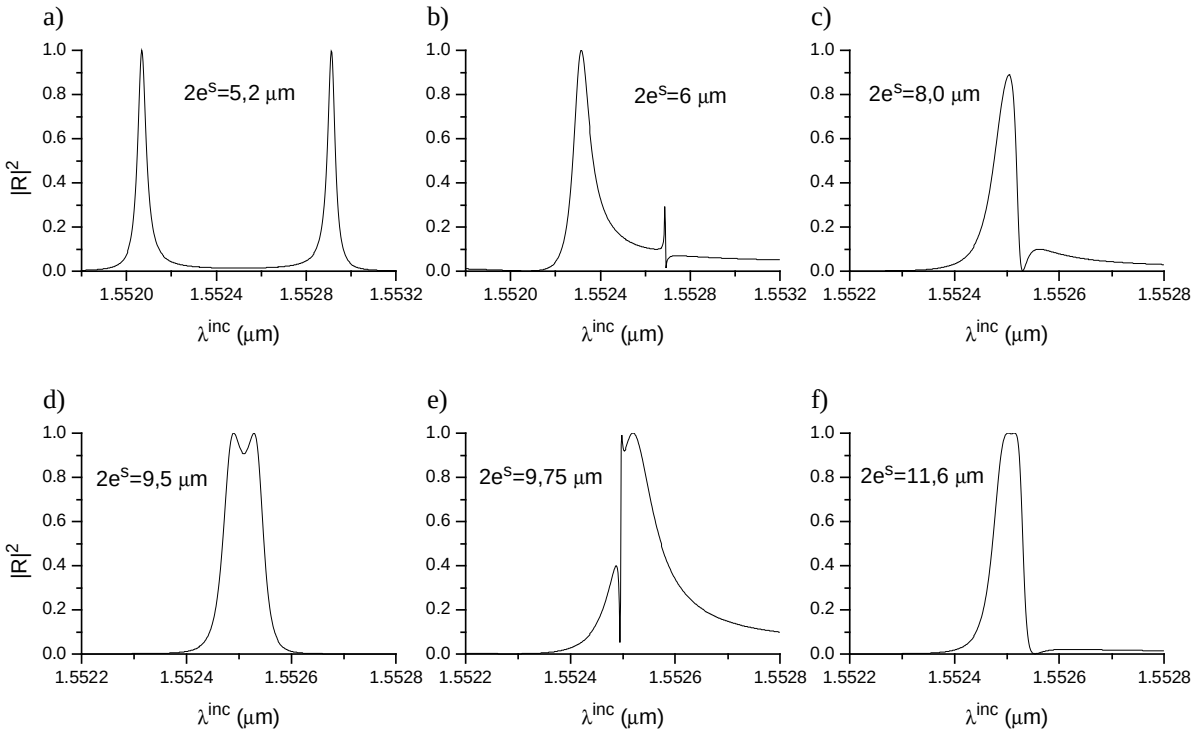


FIG. 4.5 – *Courbes de réflexion en fonction de la longueur d'onde pour différentes épaisseurs de couplage. La structure est définie par* $\varepsilon^a = 1{,}0$, $\varepsilon^{c_2} = 1{,}47^2$ *et* $e^{c_2} = 349{,}0$ *nm,* $\varepsilon^{c_1} = 2{,}07^2$ *et* $e^{c_1} = 70{,}1$ *nm,* $\varepsilon^s = 1{,}448^2$ *et* $2e^s$ *variable. Deux réseaux identiques, de hauteur* $h = 50nm$*, de période* $d = 978nm$*, et de largeur de plot* $a = 728nm$ *sont gravés sur les couches supérieures et inférieures de l'empilement (structure 4.2). La pulsation spatiale incidente est* $\alpha^{inc} = 0{,}4935\ \mu m^{-1}$.

observons effectivement deux pics de résonance de largeurs similaires. Ils sont distincts car les longueurs d'onde des deux modes sont trop éloignées (fig. 4.5a) . Puis nous essayons de rapprocher les pics de résonance en augmentant l'épaisseur de la couche de couplage. Pour $2e^s = 6$ μm, l'un des deux pics devient beaucoup plus fin que l'autre (fig. 4.5b). Lorsque l'épaisseur de couplage augmente encore, ($2e^s = 8$ μm), les zéros de transmission deviennent complexes, et la réflectivité n'atteint plus 100% à la résonance (fig. 4.5c). Ce résultat ne contredit pas les conclusions du deuxième chapitre, car ici, deux modes propres sont excités simultanément par l'onde incidente. Pour une épaisseur de couplage de 9,5 μm, nous retrouvons une forme plus régulière, et des zéros de transmission réels, mais les deux résonances ne sont pas encore suffisamment proches. Pour une épaisseur de 9,75 μm, nous observons cette fois un zéro de réflexion complexe. Enfin, pour $2e^s = 11{,}6$ μm, le profil obtenu est proche du type de profil que nous recherchons.

Caractérisation phénoménologique

A chaque pôle, λ^{p+} pour le mode symétrique et λ^{p-} pour le mode asymétrique sont associés deux zéros de réflexions, λ^{zr+} et λ^{zr-} et deux zéros de transmission λ^{zt+} et λ^{zt-}. Les coefficients de réflexion et de transmission peuvent être représentés par les formules phénoménologiques [1] :

$$\begin{aligned} R(\alpha,\lambda) &= r(\alpha,\lambda)\frac{(\lambda-\lambda^{zr+})(\lambda-\lambda^{zr-})}{(\lambda-\lambda^{p+})(\lambda-\lambda^{p+})} \\ T(\alpha,\lambda) &= t(\alpha,\lambda)\frac{(\lambda-\lambda^{zt+})(\lambda-\lambda^{zt-})}{(\lambda-\lambda^{p+})(\lambda-\lambda^{p+})}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Pour le prouver, nous avons calculé rigoureusement les pôles et les zéros de transmission pour une structure particulière (structure 4.2). Nous avons comparé (fig. 4.6), l'énergie transmise cal-

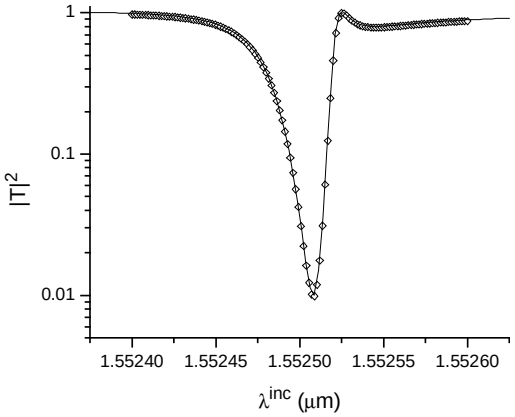


FIG. 4.6 – *Comparaison entre le calcul rigoureux (losanges) et la formule phénoménologique du coefficient de transmission en énergie en fonction de la longueur d'onde incidente:* $\lambda^{zt} = 1{,}552510 \pm i7.10^{-6}$ *µm,* $\lambda^{p-} = 1{,}552521 + i5.10^{-6}$ *µm,* $\lambda^{p+} = 1{,}552494 + i3{,}3.10^{-5}$ *µm, et* $t = 0{,}998$ *(structure 4.2 avec* $2e^s = 11{,}0$ *µm). La pulsation spatiale incidente est* $\alpha^{inc} = 0{,}4935$ *µm.*

culée rigoureusement, et celle obtenue grâce à la formule phénoménologique. La comparaison est excellente. Nous remarquons que les deux pôles sont complexes, de parties imaginaires similaires, et les zéros de transmission sont complexes conjugués.

Evolution des pôles et des zéros en fonction de l'épaisseur de couplage

Pour mieux visualiser l'évolution des pôles et des zéros en fonction de l'épaisseur de couplage, nous avons représenté, sur la figure (fig. 4.7), les parties réelles des longueurs d'onde des zéros de transmission et des pôles pour différentes épaisseurs de couplage, toujours pour la même structure (structure 4.2). Concernant les pôles, nous observons que leur longueur d'onde oscille

1. La réflectivité en fonction de la pulsation spatiale est également caractérisée par deux pôles, deux zéros de transmission et deux zéros de réflexion. Les profils angulaires des guides d'ondes couplés perturbés sont donc semblables aux profils spectraux. En particulier, il est possible d'obtenir un profil angulaire aplati au sommet par cette technique

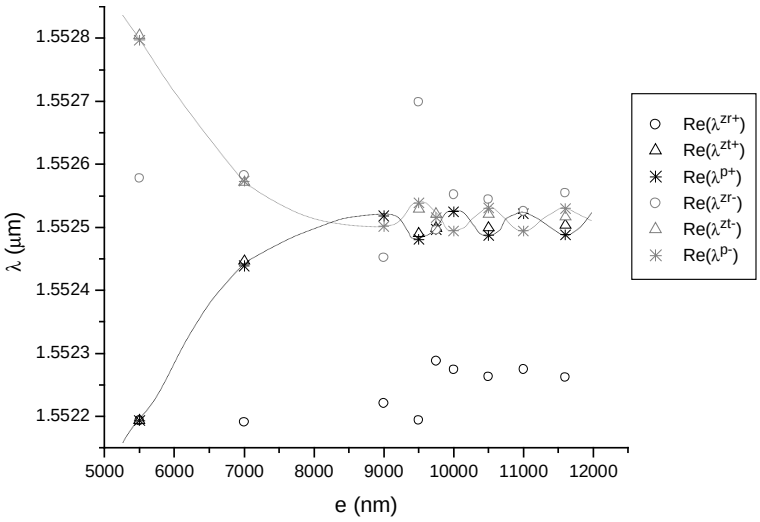


FIG. 4.7 – *Evolution de la partie réelle des longueurs d'onde des pôles et des zéros en fonction de l'épaisseur de la couche de couplage (structure 4.2). La pulsation spatiale incidente est* $\alpha^{inc} = 0{,}4935\ \mu m$.

autour d'une valeur moyenne, vers laquelle ils tendent lorsque l'épaisseur de la couche augmente. Les zéros de transmission restent très proches des pôles, et tendent vers une valeur voisine de celle autour de laquelle les pôles oscillent. Un des zéros de réflexion, reste éloigné des pôles. Il est important de noter que les zéros de réflexion réels ne sont pas dus seulement à l'excitation d'un mode propre. En effet, les deux guides d'ondes couplés constituent une cavité Fabry-Pérot, présentant elle aussi des zéros de réflexion réels. Sur la figure (fig. 4.7), certains zéros sont dus au réseau, et d'autres au Fabry-Pérot.

En conclusion, l'étude d'une structure composée de deux guides d'ondes plans couplés perturbés nous a permis de mettre en évidence la possibilité d'obtenir un profil spectral aplati au sommet. Nous avons également observé que les pôles et les zéros de cette structure avaient des propriétés particulières. Nous proposons maintenant d'utiliser la méthode perturbative afin de démontrer ces propriétés pour des réseaux de hauteur faible.

4.2 Etude perturbative des pôles et des zéros

Nous considérons les deux réseaux comme une perturbation des guides d'ondes plans couplés. La structure de référence est composée de deux couches de même constante diélectrique ε^c, d'épaisseur e^c, séparées par une couche de couplage de constante diélectrique ε^s, et d'épaisseur $2e^s$ (fig. 4.8a). Les milieux situés au dessus et au dessous de la structure sont de constante diélectrique ε^a. Nous notons $2e$ l'épaisseur totale: $e = e^c + e^s$. La structure divise l'espace en différents domaines:

- $\mathcal{D}_0^a = \{z, 0 \leq z\}$ et $\mathcal{D}_{0,s}^a = \{z, z < -2e\}$, symétriques par rapport au plan $z = -e$
- $\mathcal{D}^c = \{z, -e^c \leq z < 0\}$ et $\mathcal{D}_s^c = \{z, -2e \leq z < -2e + e^c\}$

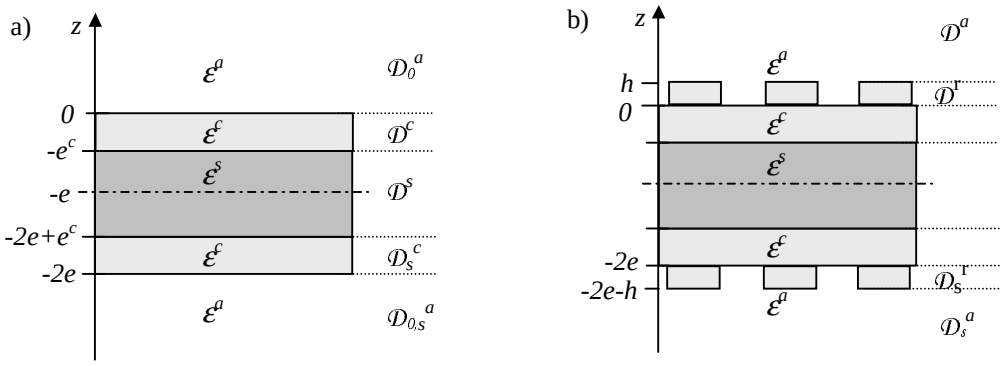


FIG. 4.8 – *a) Structure de référence. b) Structure perturbée.*

– $\mathcal{D}^{s'} = \{z,\ -2e + e^c \leq z < -e^c\}$.

La constante diélectrique des guides d'ondes plans couplés est décrite par la fonction $\varepsilon'_{go}(z)$, définie par:

$$\varepsilon'_{go} = \begin{cases} \varepsilon^a & \text{pour} \quad z \in \mathcal{D}_0^a \cup \mathcal{D}_{0,s}^a \\ \varepsilon^c & \text{pour} \quad z \in \mathcal{D}^c \cup \mathcal{D}_s^c \\ \varepsilon^s & \text{pour} \quad z \in \mathcal{D}^{s'} \end{cases} \tag{4.3}$$

Cette fonction est symétrique par rapport au plan $z = -e$, ce qui se traduit par la relation $\varepsilon'_{go}(z) = \varepsilon'_{go}(-z-2e)$. Le guide d'onde plan est perturbé par deux réseaux identiques de hauteur h, gravés sur la couche inférieure et la couche supérieure (fig. 4.8b). Nous introduisons quatre nouveaux domaines,

– $\mathcal{D}^r = \{z, 0 \leq z < h\}$ et $\mathcal{D}_s^r = \{z,\ -2e - h \leq z < -2e\}$.

– $\mathcal{D}^a = \{z, h \leq z\}$ et $\mathcal{D}_s^a = \{z, z < -2e - h\}$.

Nous notons $\varepsilon(x,z)$ la constante diélectrique de la structure totale, et $\varepsilon_{per}(x,z)$ celle de la perturbation, définie par $\varepsilon_{per}(x,z) = \varepsilon(x,z) - \varepsilon_{go}(z)$. La perturbation est symétrique par rapport au plan $z = -e$, et périodique de période d selon (Ox). Ses coefficients de Fourier, que nous notons $\tilde{\varepsilon}_m(z)$ vérifient $\tilde{\varepsilon}_n(z) = \tilde{\varepsilon}_n(-z-2e)$.

Dans toute l'approche perturbative, nous supposerons que la couche de couplage est suffisamment épaisse pour que le guide d'onde plan supporte deux modes guidés TE, l'un dont le champ est symétrique, l'autre anti-symétrique par rapport au plan $z = -e$. Les relations de dispersion de ces modes, les ensembles de couples $(\alpha^{ref+},\lambda^{ref+})$ et $(\alpha^{ref-},\lambda^{ref-})$ sont connues. Nous proposons de trouver les expressions approchées des longueurs d'onde des deux pôles, des deux zéros en réflexion et des deux zéros en transmission lorsque la structure est perturbée, pour une pulsation spatiale donnée. Nous résoudrons d'abord le problème homogène, puis le problème de diffraction d'une onde plane incidente.

4.2.1 Résolution du problème homogène

Comme la structure est symétrique par rapport au plan $z = -e$, le champ des modes propres est soit symétrique soit anti-symétrique par rapport à ce plan. Pour en tenir compte, nous introduisons les fonctions $\mathcal{E}^+(z)$ et $\mathcal{E}^-(z)$, respectivement symétrique et anti-symétrique par rapport au plan $z = -e$ [Petit, 1993]. Nous proposons de résoudre le problème homogène, c'est à dire de trouver le champ et la longueur d'onde des modes propres de manière perturbative en fonction de la hauteur du réseau. Commençons par préciser la longueur d'onde et le champ de référence.

Les modes de référence

La relation de dispersion de référence est l'ensemble des $(\alpha^{ref+} + nK, \lambda^{ref+})$ et $(\alpha^{ref-} + nK, \lambda^{ref-})$. Comme nous nous intéressons aux modes susceptibles d'être excités par une onde plane incidente propagative, nous choisissons en particulier deux modes appartenant au cône de lumière, de même pulsation spatiale $\alpha - qK$, et de longueurs d'onde $\lambda^{ref+}(\alpha - qK)$ et $\lambda^{ref-}(\alpha - qK)$. Nous supposons que seul le champ d'ordre zéro est propagatif dans le substrat et le superstrat, soit pour $n \neq 0$, $|\alpha - qK + nK| > \max(2\pi\varepsilon^s/\lambda^{ref+}, 2\pi\varepsilon^s/\lambda^{ref-})$. Lorsque λ^{ref+} et λ^{ref-} sont éloignés (couche de couplage fine), le champ du mode de référence correspond soit au champ du mode symétrique, soit au champ du mode anti-symétrique. Quand les longueurs d'onde λ^{ref+} et λ^{ref-} sont suffisamment proches (couche de couplage épaisse), les modes symétriques et anti-symétriques peuvent coexister à la même longueur d'onde. Le champ de référence est alors la superposition du champ du mode symétrique et anti-symétrique. Pour les deux cas, comme nous cherchons les modes du guide d'onde perturbé sous forme pseudo-périodique, nous écrivons le champ du mode de référence également sous forme pseudo-périodique:

$$\begin{gathered} \mathcal{E}^{ref\pm}(x,z) = \sum_n \mathcal{E}_n^{ref\pm}(z) \exp(i\alpha_n x) \\ \text{avec} \quad \alpha_n = \alpha_0 + nK \quad \text{et} \quad \alpha_0 = \alpha - qK. \end{gathered} \tag{4.4}$$

Dans ce développement, seul le coefficient d'ordre q, correspondant à la constante de propagation α, est non nul. Lorsque le mode de référence est le mode symétrique, le champ de référence est symétrique par rapport au plan $z = -e$ et donc $\mathcal{E}^{ref-}(x,z) = 0$, et $\mathcal{E}^{ref+}(x,z) \neq 0$. Pour le mode anti-symétrique, nous avons $\mathcal{E}^{ref+}(x,z) = 0$ et $\mathcal{E}^{ref-}(x,z) \neq 0$. Lorsque le mode de référence est une superposition du mode symétrique et du mode anti-symétrique, nous pouvons seulement dire que $\mathcal{E}^{ref\pm}(x,z) \neq 0$.

Les coefficients du champ et les longueurs d'onde des deux modes propres de la structure perturbée doivent tendre, quand la hauteur du réseau tend vers zéro, vers les coefficients $\mathcal{E}_n^{ref\pm}$ et les longueurs d'onde λ^{ref+} et λ^{ref-} des deux modes de référence.

Résolution perturbative du problème homogène

Nous cherchons le champ des modes propres de la structure perturbée sous la forme d'un développement en h:

$$\mathcal{E}_n^{\pm}(z) = \mathcal{E}_n^{ref\pm}(z) + h\dot{\mathcal{E}}_n^{\pm}(z) + h^2\ddot{\mathcal{E}}_n^{\pm}(z) + o(h^2). \tag{4.5}$$

Nous cherchons également les longueurs d'onde des modes propres du guide d'onde perturbé sous la forme de développements limités en h:

$$\lambda^{p\pm} = \lambda^{ref\pm} + h\dot{\lambda}^{p\pm} + h^2\ddot{\lambda}^{p\pm} + o(h^2) \tag{4.6}$$

Dans un premier temps, nous établirons un système d'équations intégrales couplées dont les coefficients $\mathcal{E}_n^{\pm}$ sont solutions. Nous seront amenés à introduire une nouvelle fonction de Green dont nous donnerons l'expression et les propriétés. Puis nous développerons le système d'équations intégrales de manière à obtenir les coefficients $\mathcal{E}_n^{\pm}$ en fonction de h, la hauteur des réseaux. Nous en déduirons les expressions des pôles λ^{p+} et λ^{p-}. Comme d'habitude, cette étape n'est pas nécessaire à la compréhension globale du manuscrit. Les résultats importants seront présentés et commentés en dernier lieu.

Solution exacte du problème Les différentes étapes de l'obtention de la solution exacte du problème homogène sous forme de système d'équations intégrales couplées sont quasiment identiques à celles du deuxième chapitre. La différence essentielle réside dans le fait que la structure plane est maintenant perturbée par deux réseaux. Il est facile de montrer que les coefficients du champ du mode, $\mathcal{E}_n^{\pm}(z)$, sont solutions d'un système d'équations couplées similaire à celui obtenu dans le cas d'un seul réseau:

$$\frac{d^2\mathcal{E}_n^{\pm}(z)}{dz^2} + \left(k_0^2\varepsilon'_{go}(z) - \alpha^2\right)\mathcal{E}_n^{\pm}(z) = -k_0^2\sum_m \tilde{\varepsilon}_{m-n}(z)\mathcal{E}_m^{\pm}(z) \tag{4.7}$$

Pour transformer le système d'équations différentielles (4.7) en système d'équations intégrales, nous utilisons la fonction de Green $G'_n(z,z')$, solution de:

$$\frac{d^2G'_n(z,z')}{dz^2} + \left(k_0^2\varepsilon'_{go}(z) - \alpha^2\right)G'_n(z,z') = -k_0^2\delta(z-z'). \tag{4.8}$$

Nous obtenons alors:

$$\mathcal{E}_n^{\pm}(z) = \int_{-2e-h}^{-2e} G'_n(z,z')\sum_m \tilde{\varepsilon}_{m-n}(z')\mathcal{E}_m^{\pm}(z')dz' + \int_0^h G'_n(z,z')\sum_m \tilde{\varepsilon}_{m-n}(z')\mathcal{E}_m^{\pm}(z')dz'. \tag{4.9}$$

Cette équation traduit le fait que le couplage entre les différents coefficients du champ se fait grâce aux deux réseaux situés entre les plans $z = 0$ et $z = h$ pour le premier et $z = -2e - h$ et $z = -2e$ pour le second.

Dans la première intégrale de l'équation (4.9), nous réalisons le changement de variable z' en $-z'-2e$, et nous utilisons les propriétés de symétrie des coefficients de Fourier du réseau, $\tilde{\varepsilon}_n(z)=\tilde{\varepsilon}_n(-z-2e)$, et du champ, $\mathcal{E}_n^{\pm}(z)=\pm\mathcal{E}_n^{\pm}(-z-2e)$, pour obtenir:

$$\mathcal{E}_n^{\pm}(z)=\pm\int_0^h G'_n(z,-z'-2e)\sum_m\tilde{\varepsilon}_{m-n}(z')\mathcal{E}_m^{\pm}(z')dz'+\int_0^h G'_n(z,z')\sum_m\tilde{\varepsilon}_{m-n}(z')\mathcal{E}_m^{\pm}(z')dz''. \tag{4.10}$$

En introduisant la notation $\mathcal{G}_n^{\pm}(z,z')=G'_n(z,z')\pm G'_n(z,-z'-2e)$, nous obtenons finalement:

$$\boxed{\mathcal{E}_n^{\pm}(z)=\int_0^h\sum_m\tilde{\varepsilon}_{m-n}\mathcal{G}_n^{\pm}(z,z')\mathcal{E}_m^{\pm}(z')dz'}. \tag{4.11}$$

L'équation (4.11) traduit le fait que les modes symétriques et anti-symétrique sont découplés, contrairement au cas du troisième chapitre où les modes de référence étaient couplés. La fonction de Green utilisée ici est différente de celle introduite dans le deuxième chapitre, puisque la structure de référence n'est plus formée d'un seul guide d'onde plan, mais de deux guides plans couplés. Dans le paragraphe suivant, nous donnons son expression, ainsi que celle de $\mathcal{G}_n^{\pm}$.

Fonction de Green La fonction de Green G'_n est différente de celle introduite dans le deuxième chapitre puisqu'elle caractérise la structure de référence composée de deux guides d'ondes couplés. Cependant, son expression dans les milieux situés au dessus et au dessous de la structure peut être déduite de (2.17) en remplaçant les coefficients de réflexion et de transmission de la structure simple (r_{go} et t_{go}), par ceux de l'ensemble composé des deux guides d'ondes couplés (r'_{go} et t'_{go}). Ainsi, nous obtenons, pour $z'\in\mathcal{D}^r$:

$$G'_n(z,z')=\begin{cases}\frac{ik_0^2}{2\gamma_n^a}\left[\exp\left(i\gamma_n^a|z-z'|\right)+r'_{go}(\alpha_n)\exp\left(i\gamma_n^a(z+z')\right)\right] & \text{pour } z\in\mathcal{D}_0^a\\ \\ \frac{ik_0^2}{2\gamma_n^a}\left[t'_{go}(\alpha_n)\exp\left(i\gamma_n^a z'-z\right)\right] & \text{pour } z\in\mathcal{D}_{0,s}^a.\end{cases} \tag{4.12}$$

Pour calculer $\mathcal{G}_n^{\pm}(z,z')=G'_n(z,z')\pm G'_n(z,-z'-2e)$ pour $z'\in\mathcal{D}^r$, nous avons besoin de connaître l'expression de $G'_n(z,-z'-2e)$ également pour $z'\in\mathcal{D}^r$. Mais comme la structure est symétrique par rapport au plan $z=-e$, la fonction de Green vérifie la relation $G'_n(z,-z'-2e)=G'_n(-z-2e,z')$. Nous en déduisons l'expression de $\mathcal{G}_n^{\pm}(z,z')$, pour $z\in\mathcal{D}^a$ et $z'\in\mathcal{D}^r$:

$$\mathcal{G}_n^{\pm}(z,z')=\frac{ik_0^2}{2\gamma_n^a}\left[\exp\left(i\gamma_n^a|z-z'|\right)+r'_{go}(\alpha_n)\exp\left(i\gamma_n^a(z+z')\right)\pm t'_{go}(\alpha_n)\exp\left(i\gamma_n^a(z+z')\right)\right] \tag{4.13}$$

Comme les couples $(\alpha_q,\lambda^{ref+})$ et $(\alpha_q,\lambda^{ref-})$ correspondent à des modes (respectivement symétrique et anti-symétrique) de la structure plane, λ^{ref+} et λ^{ref-} sont donc des pôles du coefficient de réflexion $r'_{go}(\alpha_q)$ et de transmission $t'_{go}(\alpha_q)$. En conséquence, le coefficient d'ordre q de la fonction de Green est résonnant au voisinage de λ^{ref+}, et au voisinage de λ^{ref-}. Cependant, les simulations numériques montrent que $\mathcal{G}_q^+$ subit la résonance seulement au voisinage de λ^{ref+}, alors que $\mathcal{G}_q^-$ est résonnant uniquement en λ^{ref-}. Ce fait peut s'expliquer de la manière suivante. Dans $\mathcal{G}_q^+(z,z')$, nous additionnons les valeurs de la fonction de Green en z et en $-z-2e$, alors que nous les soustrayons dans $\mathcal{G}_q^-(z,z')$. Si le champ du mode excité est symétrique par rapport au plan $z=-e$, $G'_q(z,z')$ et $G'_q(-z-2e,z')$ sont égaux et leur différence, $\mathcal{G}_q^-$, est nulle. Ils sont opposés lorsque le mode est anti-symétrique, et cette fois leur somme, $\mathcal{G}_q^+$, est nulle.

En conclusion, pour λ au voisinage de la longueur d'onde λ^{ref+} du mode de référence symétrique, nous écrirons:

$$\mathcal{G}_q^+(z,z')=\frac{\mathcal{A}_q^+(z,z')}{\lambda-\lambda^{ref+}} \tag{4.14}$$

Et lorsque λ est au voisinage de la longueur d'onde λ^{ref-} du mode anti-symétrique:

$$\mathcal{G}_q^-(z,z') = \frac{\mathcal{A}_q^-(z,z')}{\lambda - \lambda^{ref-}} \tag{4.15}$$

Les deux écritures sont à prendre en compte si λ^{ref+} et λ^{ref-} sont proches l'une de l'autre.

Développement perturbatif Nous développons le système d'équations (4.11) successivement pour $\mathcal{E}^+$, puis pour $\mathcal{E}^-$. Ce système est formellement équivalent au système (2.12) développé dans le deuxième chapitre. Les coefficients $\mathcal{G}_m^\pm$ jouent le rôle que jouaient les G_m, $\mathcal{A}_q^\pm$ celui de A_q et $\mathcal{E}_m^\pm$ celui de e_m. Par analogie, nous obtenons, pour les termes d'ordre 1:

$$\dot{\lambda^{p\pm}} = \tilde{\varepsilon}_0 \mathcal{A}_q^\pm(0,0) \tag{4.16}$$

et pour les termes d'ordre 2

$$\ddot{\lambda^{p\pm}} = \mathcal{A}_q^\pm \sum_{m\neq q} |\tilde{\varepsilon}_{q-m}|^2 \mathcal{G}_m^\pm + \tilde{\varepsilon}_0 \frac{d}{dz'} \left[\mathcal{A}_q^\pm(0,z')\right]_{z'=0} \tag{4.17}$$

Les résultats que nous commentons dans le paragraphe suivant sont issus des équations (4.16) et (4.17).

Résultats et commentaires

Les longueurs d'onde du mode symétrique et du mode anti-symétrique sont données par les expressions suivantes:

$$\lambda^{p\pm} = \lambda^{ref\pm} + h\tilde{\varepsilon}_0 \mathcal{A}_q^\pm + h^2 \left(\mathcal{X}^\pm + \mathcal{Z}^\pm(1 + r'_{go} \pm t'_{go})\right) + o(h^2) \tag{4.18}$$

où nous avons introduit les notations

$$\mathcal{X}^\pm = \mathcal{A}_q^\pm \sum_{m\neq(q,0)} |\tilde{\varepsilon}_{q-m}|^2 \mathcal{G}_m^\pm + \tilde{\varepsilon}_0 \frac{d}{dz'} \left[\mathcal{A}_q^\pm(0,z')\right]_{z'=0} \quad \text{et} \quad \mathcal{Z}^\pm = \tfrac{ik_0^2}{2\gamma_0^a} \mathcal{A}_q^\pm |\tilde{\varepsilon}_q|^2 \tag{4.19}$$

Notons que $\mathcal{X}^\pm$ est réel et $\mathcal{Z}^\pm$ imaginaire pur. A l'ordre 1 en h, les longueurs d'onde λ^{p+} et λ^{p-} sont réelles et proches des longueurs d'onde des modes de référence symétrique et anti-symétrique respectivement. Leur partie imaginaire à l'ordre 2 en h provient du produit $\mathcal{Z}^\pm(1 + r'_{go} \pm t'_{go})$. Comme $\mathcal{Z}^\pm$ est imaginaire pur, nous avons:

$$\mathrm{Im}(\lambda^{p\pm}) = -i\mathcal{Z}^\pm \mathrm{Re}(1 + r'_{go} \pm t'_{go})h^2 + o(h^2) \tag{4.20}$$

Les parties imaginaires des longueurs d'onde des modes ont des expressions dissemblables, et laissent prévoir des largeurs de pics différentes en général. C'est ce que nous avons observé sur les courbes (fig. 4.5).

Lorsque la couche de couplage devient très épaisse et joue le rôle de substrat, les expressions des pôles peuvent se simplifier et amènent d'autres conclusions. En effet, les longueurs d'onde de référence tendent vers une même valeur:

$$\lim_{e\to\infty} \lambda^{ref+} = \lim_{e\to\infty} \lambda^{ref-} = \lambda^{ref} \tag{4.21}$$

De plus, le coefficient de transmission $t'_{go}(\alpha_n)$ tend vers zéro lorsque $n \neq 0$, puisque tous les ordres non nuls sont évanescents dans la couche de couplage. Nous en déduisons que $\mathcal{G}_n^+$ et $\mathcal{G}_n^-$ deviennent égaux pour $n \neq 0$, ainsi que $\mathcal{A}_q^+$ et $\mathcal{A}_q^-$:

$$\lim_{e\to\infty} \mathcal{G}_n^+ = \lim_{e\to\infty} \mathcal{G}_n^- = \mathcal{G}_n \quad \text{et} \quad \lim_{e\to\infty} \mathcal{A}_q^+ = \lim_{e\to\infty} \mathcal{A}_q^- = \mathcal{A}_q \tag{4.22}$$

En conséquence, $\mathcal{X}^+$ et $\mathcal{X}^-$ deviennent égaux, ainsi que $\mathcal{Z}^+$ et $\mathcal{Z}^-$, et nous notons:

$$\lim_{e\to\infty} \mathcal{X}^+ = \lim_{e\to\infty} \mathcal{X}^+ = \mathcal{X} \quad \text{et} \quad \lim_{e\to\infty} \mathcal{Z}^+ = \lim_{e\to\infty} \mathcal{Z}^+ = \mathcal{Z}. \tag{4.23}$$

De l'équation (4.18), nous tirons finalement les expressions des longueurs d'ondes des modes symétriques et anti-symétriques lorsque la couche de couplage est très épaisse:

$$\lim_{e\to\infty} \lambda^{p\pm} = \lambda^{ref} + h\tilde{\varepsilon}_0 \mathcal{A}_q + h^2 \left(\mathcal{X} + \mathcal{Z}(1 + r'_{go} \pm t'_{go})\right) + o(h^2) \tag{4.24}$$

Nous constatons que les longueurs d'ondes des modes symétrique et anti-symétrique sont très proches l'une de l'autre. Leur différence apparaît au deuxième ordre en h: λ^{p+} et λ^{p-} prennent deux valeurs symétriques ($\pm h^2 \mathcal{Z} t'_{go}$), de part et d'autre d'une valeur moyenne. Cette remarque est en accord avec la figure (fig. 4.7).

4.2.2 Résolution du problème de diffraction

Nous souhaitons à présent connaître l'expression de la longueur d'onde du zéro en réflexion et celle du zéro en transmission. Pour cela, nous devons résoudre le problème de la diffraction d'une onde plane incidente par le réseau à modes guidés. Nous considérons une onde plane incidente polarisée s, de longueur d'onde λ, et de pulsation spatiale α. Nous notons $E^{inc}(x,z) = \exp(i\alpha x - i\gamma^a z)$ le champ électrique incident. Nous choisissons α et λ de manière à ce qu'il existe un entier q tel que le couple $(\alpha + qK, \lambda)$ soit proche de deux modes propres $(\alpha^{ref+}, \lambda^{ref+})$, et $(\alpha^{ref-}, \lambda^{ref-})$ de la structure de référence.

Pour résoudre le problème de diffraction, nous nous heurtons au même problème de discontinuité au voisinage de la résonance que celui exposé dans le deuxième chapitre: le champ diffracté par le guide d'onde plan perturbé ne tend pas vers le champ diffracté par le guide d'onde plan quand la hauteur de la perturbation tend vers zéro. Nous préciserons d'abord l'expression du champ de référence, puis nous calculerons le champ diffracté par le guide d'onde perturbé, et nous donnerons sa limite quand h tend vers zéro. Enfin, le développement perturbatif du champ diffracté nous fournira l'expression du zéro en réflexion et du zéro en transmission.

Le champ de référence

Le champ de référence E^{ref} est le champ diffracté par le guide d'onde plan. Il est solution de l'équation de Helmholtz

$$\Delta E^{ref}(x,z) + k_0^2 \varepsilon'_{go}(z) E^{ref}(x,z) = 0 \tag{4.25}$$

au sens des distributions. En particulier, au dessus et au dessous de la structure, nous avons:

$$E^{ref}(x,z) = \begin{cases} \exp(i\alpha x - i\gamma^a z) + r'_{go}(\alpha,\lambda)\exp(i\alpha x + i\gamma^a z) & \text{pour} \quad z \in \mathcal{D}^{a'} \\ \\ t'_{go}(\alpha,\lambda)\exp(i\alpha x + i\gamma^a z) & \text{pour} \quad z \in \mathcal{D}_s^{a'} \end{cases} \tag{4.26}$$

Pour décrire la dépendance en z de $E^{ref}(x,z)$, nous introduisons la notation $e^{ref}(z)$, définie par $E^{ref}(x,z) = e^{ref}(z)\exp(i\alpha x)$.

Le champ diffracté par le guide d'onde perturbé

Le champ diffracté par la structure, E, est solution de l'équation de Helmholtz (au sens des distributions)

$$\Delta E(x,z) + k_0^2\varepsilon'_{go}(z)E(x,z) = -k_0^2\varepsilon_{per}(x,z)E(x,z). \tag{4.27}$$

La périodicité de la structure implique la pseudo-périodicité du champ total, qui peut être décomposé en série de Fourier généralisée. Nous notons e_n ses coefficients. Par un raisonnement similaire à celui développé dans le deuxième chapitre, il est possible de montrer que e_n vérifie:

$$e_n(z) = \delta_{n,0}e^{ref}(z) + \int_{-2e-h}^{-2e} G'_n(z,z')\sum_m \tilde{\varepsilon}_{m-n}(z')e_m(z')dz' + \int_0^h G'_n(z,z')\sum_m \tilde{\varepsilon}_{m-n}(z')e_m(z')dz' \tag{4.28}$$

Pour simplifier cette équation, nous réalisons, dans la première intégrale, le changement de variable z' en $-z'-2e$. En utilisant la propriété de symétrie de la structure de référence par rapport au plan $z=-e$, $\tilde{\varepsilon}_m(z) = \tilde{\varepsilon}(-z-2e)$, et en remplaçant e^{ref} par son expression, nous obtenons:

$$e_n(z) = \delta_{n,0}e^{ref}(z) + \int_0^h \sum_m \tilde{\varepsilon}_{m-n}(z')\left[G'_n(z,z')e_m(z') + G'_n(z,-z'-2e)e_m(-z'-2e)\right]dz' \tag{4.29}$$

En considérant cette équation en z, puis en $-z-2e$, nous sommes finalement conduits à

$$\boxed{\mathcal{E}_n^{\pm}(z) = \delta_{n,0}\left[\left(1 \pm t'_{go}\right)\exp(-i\gamma^a z) + r'_{go}\exp(i\gamma^a z)\right] + \int_0^h \mathcal{G}_n^{\pm}(z,z')\sum_m \tilde{\varepsilon}_{n-m}(z')\mathcal{E}_m^{\pm}(z')dz'} \tag{4.30}$$

où $\mathcal{E}_n^{\pm}(z) = e_n(z) \pm e_n(-z-2e)$, et $\mathcal{G}_n^{\pm}(z,z') = G'_n(z,z') \pm G'_n(z,-z'-2e)$.

La limite du champ diffracté au voisinage d'un mode propre

Il est possible, selon le choix de la longueur d'onde incidente et l'ordre de grandeur de la différence entre λ^{ref+} et λ^{ref-}, d'exciter un seul mode (symétrique ou anti-symétrique), ou les deux en même temps[2]. Nous verrons par la suite qu'il est nécessaire de distinguer les deux cas.

2. A priori, seul le cas où les deux modes sont excités est intéressant pour notre application, puisque nous avons besoin de deux modes quasiment dégénérés pour créer le profil spectral aplati au sommet, mais il convient de traiter d'abord le premier cas, plus simple

Pour exciter le mode symétrique *ou* le mode anti-symétrique, λ doit être choisi au voisinage de λ^{ref+} ou de λ^{ref-}. Nous traduisons cette condition en exprimant λ sous la forme d'un développement en h:

$$\lambda(h) = \lambda^{ref} + h\dot{\lambda} + h^2\ddot{\lambda} + o(h^2). \tag{4.31}$$

où $\lambda^{ref} = \lambda^{ref+}$ pour exciter le mode symétrique et $\lambda^{ref} = \lambda^{ref-}$ pour exciter le mode anti-symétrique. Pour cette longueur d'onde, le second mode ne sera pas excité si la différence $\lambda^{ref-} - \lambda^{ref+}$ est suffisamment importante devant la hauteur du réseau. Plus précisément nous dirons que $\lambda^{ref-} - \lambda^{ref+} = O(1)$. Si le mode symétrique est excité, seul le coefficient $\mathcal{E}_q^+$ sera prépondérant devant les autres. Pour les raisons évoquées dans le deuxième chapitre, nous dirons que le premier terme de son développement en h est en $O(1/h)$, alors que les autres termes sont en $O(1)$. Autrement dit

$$\begin{aligned}
&\mathcal{E}_q^+(z,h) = \tfrac{1}{h}\left[\mathcal{E}_q^{lim+} + h\dot{\mathcal{E}}_q^+(z) + h^2\ddot{\mathcal{E}}_q^+(z) + o(h^2)\right] \\
&\mathcal{E}_n^+(z,h) = \mathcal{E}_n^{lim+} + h\dot{\mathcal{E}}_n^+(z) + h^2\ddot{\mathcal{E}}_n^+(z) + o(h^2) \quad \text{pour} \quad n \neq q \\
&\mathcal{E}_n^-(z,h) = \mathcal{E}_n^{lim-} + h\dot{\mathcal{E}}_n^-(z) + h^2\ddot{\mathcal{E}}_n^-(z) + o(h^2) \quad \forall n.
\end{aligned} \tag{4.32}$$

Si le mode anti-symétrique est excité, seul le coefficient $\mathcal{E}_q^-$ sera prépondérant, et nous chercherons les coefficients $\mathcal{E}_n^\pm$ sous la forme:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{E}_q^-(z,h) = \tfrac{1}{h}\left[\mathcal{E}_q^{lim-} + h\dot{\mathcal{E}}_q^-(z) + h^2\ddot{\mathcal{E}}_q^-(z) + o(h^2)\right] \\
&\mathcal{E}_n^-(z,h) = \mathcal{E}_n^{lim-} + h\dot{\mathcal{E}}_n^-(z) + h^2\ddot{\mathcal{E}}_n^-(z) + o(h^2) \quad \text{pour} \quad n \neq q \\
&\mathcal{E}_n^+(z,h) = \mathcal{E}_n^{lim+} + h\dot{\mathcal{E}}_n^+(z) + h^2\ddot{\mathcal{E}}_n^+(z) + o(h^2) \quad \forall n.
\end{aligned} \tag{4.33}$$

Pour pouvoir exciter le mode symétrique *et* le mode anti-symétrique, λ^{ref+} et λ^{ref-} doivent être suffisamment proches l'un de l'autre, soit $\lambda^{ref-} - \lambda^{ref+} = O(h)$. Nous choisirons alors la longueur d'onde incidente λ au voisinage de $(\lambda^{ref+} + \lambda^{ref-})/2$:

$$\lambda(h) = \frac{1}{2}\left(\lambda^{ref+} + \lambda^{ref-}\right) + h\dot{\lambda} + h^2\ddot{\lambda} + o(h^2). \tag{4.34}$$

Dans ce cas, les deux coefficients $\mathcal{E}_q^+$ et $\mathcal{E}_q^-$ sont prépondérants par rapport aux autres, et nous poserons:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{E}_q^\pm(z,h) = \tfrac{1}{h}\left[\mathcal{E}_q^{lim\pm} + h\dot{\mathcal{E}}_q^\pm(z) + h^2\ddot{\mathcal{E}}_q^\pm(z) + o(h^2)\right] \\
&\mathcal{E}_n^\pm(z,h) = \mathcal{E}_n^{lim\pm} + h\dot{\mathcal{E}}_n(z) + h^2\ddot{\mathcal{E}}_n^\pm(z) + o(h^2) \quad \text{pour} \quad n \neq q.
\end{aligned} \tag{4.35}$$

Recherche des zéros de réflexion et de transmission

Le zéro de réflexion est la longueur d'onde pour laquelle le champ dans l'ordre zéro au dessus de la structure est réduit au champ incident, c'est à dire $e_0(z) = \exp(-i\gamma^a z)$ pour $z \in \mathcal{D}^{a'}$. Le zéro en transmission est la longueur d'onde pour laquelle le champ dans l'ordre zéro au dessous de la structure est nul, c'est à dire $e_0(z) = \exp(-i\gamma^a z)$ pour $z \in \mathcal{D}_s^{a'}$. En utilisant la définition de $\mathcal{E}_n$, ces conditions deviennent:

$$\begin{aligned}
&\lambda = \lambda^{zr} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E}_0^+(z) + \mathcal{E}_0^-(z) = 2\exp(-i\gamma^a z) \quad \text{pour} \quad z \in \mathcal{D}^{a'} \\
&\lambda = \lambda^{zt} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E}_0^+(z) - \mathcal{E}_0^-(z) = 0 \quad \text{pour} \quad z \in \mathcal{D}^{a'}
\end{aligned} \tag{4.36}$$

Ces deux relations montrent le couplage entre les coefficients $\mathcal{E}_0^+$ et $\mathcal{E}_0^-$ [3]. Les pôles sont indépendants, mais les zéros sont couplés. Pour trouver l'expression de λ^{zr} et celle de λ^{zt}, nous devons calculer les coefficients $\mathcal{E}_n$, à partir de l'équation (4.30).

Développement perturbatif Nous traiterons d'abord le cas ou un seul mode (symétrique ou anti-symétrique) est excité, puis celui où les deux modes sont excités simultanément.

Excitation d'un seul mode propre

Nous considérons que le mode excité est le mode symétrique. Le calcul pour le mode anti-symétrique est analogue, et nous donnerons les expressions du zéro en réflexion et du zéro en transmission pour les deux cas à la fin du calcul. Lorsque le mode symétrique uniquement est excité, nous cherchons les coefficients du champ sous la forme donnée par le système (4.32). La longueur d'onde λ vérifie l'expression (4.31) pour $\lambda^{ref} = \lambda^{ref+}$.
Pour les termes non résonnants, le développement à l'ordre 0 en h de l'équation (4.30) conduit à:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_n^{lim+}(z) &= \left[\left(1+t'_{go}\right)\exp(-i\gamma^a z) + r'_{go}\exp(i\gamma^a z)\right]\delta_{n,0} + \tilde{\varepsilon}_{q-n}\mathcal{G}_n^+(z,0)\mathcal{E}_q^{lim+}(0) \quad \text{pour} \quad n \neq q \\ \mathcal{E}_n^{lim-}(z) &= \left[\left(1-t'_{go}\right)\exp(-i\gamma^a z) + r'_{go}\exp(i\gamma^a z)\right]\delta_{n,0} \qquad \forall n \end{aligned} \tag{4.37}$$

En particulier, le champ dans l'ordre 0 est donné par:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_0^{lim+}(z) &= \left[\left(1+t'_{go}\right)\exp(-i\gamma^a z) + r'_{go}\exp(i\gamma^a z)\right] + \tilde{\varepsilon}_q\mathcal{G}_0^+(z,0)\mathcal{E}_q^{lim+}(0) \\ \mathcal{E}_0^{lim-}(z) &= \left[\left(1-t'_{go}\right)\exp(-i\gamma^a z) + r'_{go}\exp(i\gamma^a z)\right]. \end{aligned} \tag{4.38}$$

Grâce à ces expressions, nous pouvons déduire de (4.36) l'expression du champ du mode correspondant à un zéro de réflexion ou de transmission:

$$\begin{aligned} \lambda = \lambda^{zr} \quad &\Rightarrow \quad \tilde{\varepsilon}_q\mathcal{G}_0^+(0,0)\mathcal{E}_q^{lim+}(0) = -2r'_{go} \\ \lambda = \lambda^{zt} \quad &\Rightarrow \quad \tilde{\varepsilon}_q\mathcal{G}_0^+(0,0)\mathcal{E}_q^{lim+}(0) = -2t'_{go}. \end{aligned} \tag{4.39}$$

Pour calculer le développement du terme résonnant, nous multiplions les deux membres de l'équation (4.30) par $\lambda - \lambda^{ref+}$. Le développement à l'ordre 0 en h mène à:

$$\dot{\lambda}\mathcal{E}_q^{lim+}(z) = \tilde{\varepsilon}_0\mathcal{A}_q^+(z,0)\mathcal{E}_q^{lim+}(0). \tag{4.40}$$

Lorsque le mode propre symétrique est effectivement excité pour la longueur d'onde λ, son champ, $\mathcal{E}_q^{lim+}$ est différent de zéro. Cette condition implique nécessairement que

$$\dot{\lambda} = \tilde{\varepsilon}_0\mathcal{A}_q^+(0,0). \tag{4.41}$$

C'est le terme d'ordre 1 en h de λ^{zr} et de λ^{zt}. Pour obtenir le terme d'ordre 2, nous devons poursuivre le développement de (4.30) à l'ordre 1 en h. Nous obtenons:

$$\dot{\lambda}\dot{\mathcal{E}}_q^+(z) + \ddot{\lambda}\mathcal{E}_q^+(z) = \sum_{m\neq}\tilde{\varepsilon}_{m-q}\mathcal{A}_q^+(z,0)\mathcal{E}_m^+(0) + \tilde{\varepsilon}_0\mathcal{A}_q^+(z,0)\dot{\mathcal{E}}_q^+(0) + \frac{d}{dz'}\left[\tilde{\varepsilon}_0\mathcal{A}_q^+(z,z')\mathcal{E}_q^{lim+}(z')\right]_{z'=0}. \tag{4.42}$$

Nous considérons cette équation en $z = 0$, et nous utilisons l'expression de $\mathcal{E}_m^+(0)$ donnée par l'équation (4.37) ainsi que celle de $\dot{\lambda^p}$ (4.41). En reconnaissant l'expression de la longueur d'onde à l'ordre 2 du pôle du mode symétrique $\ddot{\lambda^{p+}}$ donné par l'équation (4.17), il vient:

$$\mathcal{E}_q^{lim+}\left[\ddot{\lambda} - \ddot{\lambda^{p+}}\right] = \tilde{\varepsilon}_{-q}\mathcal{A}_q^+\left(1 + r'_{go} + t'_{go}\right). \tag{4.43}$$

3. Pour trouver λ^{zr} et λ^{zt}, nous devons calculer les deux coefficients ($\mathcal{E}_0^+$ et $\mathcal{E}_0^-$), que nous cherchions les zéros associés au pôle du mode symétrique ou du mode anti-symétrique. Or, le champ diffracté est différent si l'on excite un ou deux modes propres. En conclusion, nous pouvons prévoir que les expressions des zéros seront différentes selon que les modes symétriques et anti-symétriques sont excités simultanément ou non, ce que n'était pas le cas pour les expressions des pôles.

Enfin, nous déduisons des expressions de $\mathcal{E}_q^{lim+}$ lorsque $\lambda = \lambda^{zr}$ ou $\lambda = \lambda^{zt}$ (4.39) les expressions des termes de deuxième ordre des développements de λ^{zr} et de λ^{zt}:

$$\ddot{\lambda^{zr+}} = \ddot{\lambda^{p+}} - \mathcal{Z}^+ \frac{(1+r'_{go}+t'_{go})^2}{2r'_{go}} \quad \text{et} \quad \ddot{\lambda^{zt+}} = \ddot{\lambda^{p+}} - \mathcal{Z}^+ \frac{(1+r'_{go}-t'_{go})^2}{2r'_{go}} \tag{4.44}$$

Dans le cas où seul le mode anti-symétrique est excité, un calcul analogue conduit au résultat suivant:

$$\ddot{\lambda^{zr-}} = \ddot{\lambda^{p-}} - \mathcal{Z}^- \frac{(1+r'_{go}-t'_{go})^2}{2t'_{go}} \quad \text{et} \quad \ddot{\lambda^{zt-}} = \ddot{\lambda^{p-}} + \mathcal{Z}^+ \frac{(1+r'_{go}-t'_{go})^2}{2t'_{go}} \tag{4.45}$$

Les résultats commentés à la fin de cette section découlent des équations (4.41), (4.44) et (4.45).

Excitation de deux modes propres

Nous ne pouvons exciter simultanément les deux modes propres que si leurs longueurs d'onde sont assez proches. Nous supposons que cette condition est vérifiée si il excite un réel δ tel que

$$\lambda^{ref-} - \lambda^{ref+} = 2\delta h + o(h^2). \tag{4.46}$$

De plus, la longueur d'onde incidente doit vérifier (4.34). Nous cherchons alors les coefficients du champ sous la forme (4.35).

Pour les termes non résonnants, le développement à l'ordre zéro en h de l'équation (4.30) conduit à:

$$\mathcal{E}_n^{lim\pm}(z) = \left[\left(1 \pm t'_{go}\right) \exp(-i\gamma^a z) + r'_{go} \exp(i\gamma^a z)\right] \delta_{n,0} + \tilde{\varepsilon}_{q-n} \mathcal{G}_n^+(z,0) \mathcal{E}_q^{lim\pm}(0) \quad \text{pour} \quad n \neq q \tag{4.47}$$

En particulier, l'expression du champ dans l'ordre zéro est la suivante:

$$\mathcal{E}_0^{lim\pm}(z) = \left[\left(1 \pm t'_{go}\right) \exp(-i\gamma^a z) + r'_{go} \exp(i\gamma^a z)\right] + \tilde{\varepsilon}_q \mathcal{G}_0^+(z,0) \mathcal{E}_q^{lim\pm}(0) \tag{4.48}$$

Nous en déduisons, en utilisant (4.36), des conditions sur l'expression du champ du mode correspondant à un zéro de réflexion ou de transmission:

$$\begin{array}{lll} \lambda = \lambda^{zr} & \Rightarrow & \tilde{\varepsilon}_q \left(\mathcal{G}_0^+(0,0)\mathcal{E}_q^{lim+}(0) + \mathcal{G}_0^-(0,0)\mathcal{E}_q^{lim-}(0)\right) = -2r'_{go} \\ \lambda = \lambda^{zt} & \Rightarrow & \tilde{\varepsilon}_q \left(\mathcal{G}_0^+(0,0)\mathcal{E}_q^{lim+}(0) - \mathcal{G}_0^-(0,0)\mathcal{E}_q^{lim-}(0)\right) = -2t'_{go}. \end{array} \tag{4.49}$$

Pour les termes résonnants, nous multiplions les deux membres de (4.30) par $(\lambda - \lambda^{ref\pm})$. Nous calculons le développement du premier membre de l'équation obtenue:

$$(\lambda - \lambda^{ref\pm})\mathcal{E}_q^{\pm}(z,h) = \left(\pm\delta + \dot{\lambda}\right) \mathcal{E}_q^{lim\pm}(z) + h\left[\left(\delta + \dot{\lambda}\right) \dot{\mathcal{E}}_q^{\pm}(z) + \ddot{\lambda}\mathcal{E}_q^{lim\pm}(z)\right] + o(h). \tag{4.50}$$

Après le développement du second membre et identification terme à terme, nous obtenons, à l'ordre zéro en h:

$$\left(\pm\delta + \dot{\lambda}\right) \mathcal{E}_q^{lim\pm}(z) = \tilde{\varepsilon}_0 \mathcal{A}_q^{\pm}(z,0) \mathcal{E}_q^{lim\pm}(0) \tag{4.51}$$

Exciter le mode symétrique et le mode anti-symétrique simultanément pour une longueur d'onde incidente signifie que $\mathcal{E}_q^{lim+}(z)$ et $\mathcal{E}_q^{lim-}(z)$ sont tous les deux non nuls. En prenant $z = 0$ dans (4.51), cette condition se traduit par un système de deux équations

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\lambda} + \delta = \tilde{\varepsilon}_0 \mathcal{A}_q^+ \\ \dot{\lambda} - \delta = \tilde{\varepsilon}_0 \mathcal{A}_q^- \end{array} \right. \tag{4.52}$$

d'où nous tirons

$$\dot{\lambda} = \frac{\tilde{\varepsilon}_0}{2} \left(\mathcal{A}_q^+ + \mathcal{A}_q^-\right) \quad \text{et} \quad \delta = \frac{\tilde{\varepsilon}_0}{2} \left(\mathcal{A}_q^+ - \mathcal{A}_q^-\right) \tag{4.53}$$

Le mode symétrique et le mode anti-symétrique seront excités simultanément seulement si les équations (4.53) sont vérifiées. L'expression de $\dot{\lambda}$ obtenue ci-dessus correspond donc au terme d'ordre 1 du développement de λ^{zr} et de λ^{zt}. Pour obtenir les termes d'ordre 2 nous devons appliquer les conditions (4.49). Au préalable, nous calculons $\mathcal{E}_q^{lim\pm}(z)$ grâce au développement de (4.30) à l'ordre supérieur.

Nous obtenons, après développement et identification avec le premier membre (4.50), pour $z = 0$:

$$\begin{array}{l} \left(\ddot{\lambda} - \ddot{\lambda^{p+}}\right) \mathcal{E}_q^{lim+} = \tilde{\varepsilon}_{-q} \mathcal{A}_q^+ \left(1 + r'_{go} + t'_{go}\right) \\ \left(\ddot{\lambda} - \ddot{\lambda^{p-}}\right) \mathcal{E}_q^{lim-} = \tilde{\varepsilon}_{-q} \mathcal{A}_q^- \left(1 + r'_{go} - t'_{go}\right). \end{array} \tag{4.54}$$

Enfin, en utilisant les conditions (4.49), nous obtenons les équations vérifiées par le terme d'ordre 2 du développement du zéro en réflexion ou en transmission.

Pour le zéro en réflexion:

$$|\tilde{\varepsilon}_q|^2\,\mathcal{G}_0^+\mathcal{A}_q^+\left(\frac{1+r'_{go}+t'_{go}}{\ddot{\lambda}^{zr}-\ddot{\lambda}^{p+}}\right)+|\tilde{\varepsilon}_q|^2\,\mathcal{G}_0^-\mathcal{A}_q^-\left(\frac{1+r'_{go}-t'_{go}}{\ddot{\lambda}^{zr}-\ddot{\lambda}^{p-}}\right)=-2r'_{go}. \tag{4.55}$$

En utilisant $\mathcal{Z}^+$ et $\mathcal{Z}^-$, définis par (4.19), nous pouvons simplifier cette équation:

$$\mathcal{Z}^+\frac{(1+r'_{go}+t'_{go})^2}{-2r'_{go}}+\mathcal{Z}^-\frac{(1+r'_{go}-t'_{go})^2}{-2r'_{go}}=\left(\ddot{\lambda}^{zr}-\ddot{\lambda}^{p+}\right)\left(\ddot{\lambda}^{zr}-\ddot{\lambda}^{p-}\right). \tag{4.56}$$

Il est alors possible de montrer que $\ddot{\lambda}^{zr}$ est solution de l'équation du second degré

$$\ddot{\lambda}^{zr\,2}-\ddot{\lambda}^{zr}\left(\mathcal{Y}_r^++\mathcal{Y}_r^-\right)+\mathcal{Y}_r^+\mathcal{Y}_r^--\mathcal{Z}^+\mathcal{Z}^-\left(\frac{(1+r'_{go}+t'_{go})(1+r'_{go}-t'_{go})}{r'_{go}}\right)^2=0, \tag{4.57}$$

où $\mathcal{Y}_r^\pm=\ddot{\lambda}^{p\pm}-\mathcal{Z}^\pm\frac{(1+r'_{go}\pm t'_{go})^2}{2r'_{go}}$. La résolution de cette équation conduit finalement à l'expression du terme d'ordre 2 du développement de λ^{zr}:

$$\ddot{\lambda}^{zr}=\frac{1}{2}\left(\mathcal{Y}_r^++\mathcal{Y}_r^-\right)\pm\frac{1}{2}\sqrt{\left(\mathcal{Y}_r^+-\mathcal{Y}_r^-\right)^2+\mathcal{Z}^+\mathcal{Z}^-\left(\frac{(1+r'_{go}+t'_{go})(1+r'_{go}-t'_{go})}{r'_{go}}\right)^2} \tag{4.58}$$

Pour le zéro en transmission:

$$|\tilde{\varepsilon}_q|^2\,\mathcal{G}_0^+\mathcal{A}_q^+\left(\frac{1+r'_{go}+t'_{go}}{\ddot{\lambda}^{zt}-\ddot{\lambda}^{p+}}\right)-|\tilde{\varepsilon}_q|^2\,\mathcal{G}_0^-\mathcal{A}_q^-\left(\frac{1+r'_{go}-t'_{go}}{\ddot{\lambda}^{zt}-\ddot{\lambda}^{p-}}\right)=-2t'_{go} \tag{4.59}$$

Il est alors possible de montrer que $\ddot{\lambda}^{zt}$ est solution d'une équation du second degré analogue à (4.57) où $\mathcal{Y}_t^\pm=\ddot{\lambda}^{p\pm}\mp\mathcal{Z}^\pm\frac{(1+r'_{go}\pm t'_{go})^2}{2t'_{go}}$ joue le rôle de $\mathcal{Y}_t^\pm$. Nous en déduisons l'expression du terme d'ordre 2 du développement de λ^{zt}:

$$\ddot{\lambda}^{zt}=\frac{1}{2}\left(\mathcal{Y}_t^++\mathcal{Y}_t^-\right)\pm\frac{1}{2}\sqrt{\left(\mathcal{Y}_t^+-\mathcal{Y}_t^-\right)^2-\mathcal{Z}^+\mathcal{Z}^-\left(\frac{(1+r'_{go}+t'_{go})(1+r'_{go}-t'_{go})}{(t'_{go})}\right)^2}. \tag{4.60}$$

Les résultats commentés dans le paragraphe suivant découlent des équations (4.53), (4.58) et (4.60).

Résultats et commentaires

Dans le cas ou un seul mode propre est excité, les expressions du zéro de réflexion et du zéro de transmission sont, pour le mode symétrique

$$\begin{aligned}\lambda^{zr+}&=\lambda^{p+}-h^2\mathcal{Z}^+\tfrac{(1+r'_{go}+t'_{go})^2}{2r'_{go}}+o(h^2)\\ \lambda^{zt+}&=\lambda^{p+}-h^2\mathcal{Z}^+\tfrac{(1+r'_{go}+t'_{go})^2}{2t'_{go}}+o(h^2),\end{aligned} \tag{4.61}$$

et pour le mode anti-symétrique

$$\begin{aligned}\lambda^{zr-}&=\lambda^{p-}-h^2\mathcal{Z}^-\tfrac{(1+r'_{go}-t'_{go})^2}{2r'_{go}}+o(h^2)\\ \lambda^{zt-}&=\lambda^{p-}+h^2\mathcal{Z}^+\tfrac{(1+r'_{go}-t'_{go})^2}{2t'_{go}}+o(h^2),\end{aligned} \tag{4.62}$$

Nous constatons qu'au premier ordre en h, les zéros en réflexion et en transmission sont égaux au pôle, ils sont donc réels. La différence apparaît au deuxième ordre en h. Calculons la partie imaginaire des zéros:

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(\lambda^{zr\pm})&=\mathrm{Im}(\lambda^{p\pm}-h^2\mathcal{Z}^\pm\tfrac{(1+r'_{go}\pm t'_{go})^2}{2r'_{go}})+o(h^2)\\ \mathrm{Im}(\lambda^{zt\pm})&=\mathrm{Im}(\lambda^{p\pm}\mp h^2\mathcal{Z}^\pm\tfrac{(1+r'_{go}\pm t'_{go})^2}{2t'_{go}})+o(h^2).\end{aligned} \tag{4.63}$$

En utilisant l'expression de $\mathrm{Im}(\lambda^{p\pm})$ donnée par (4.20), et le fait que $\mathcal{Z}$ est imaginaire pur, il vient

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(\lambda^{zr\pm}) &= -h^2 i\mathcal{Z}^{\pm}\mathrm{Re}(\tfrac{(1+r'_{go}\pm t'_{go})(1-r'_{go}\pm t'_{go})}{2r'_{go}}) + o(h^2)\\ \mathrm{Im}(\lambda^{zt\pm}) &= \mp h^2 i\mathcal{Z}^{\pm}\mathrm{Re}(\tfrac{(1+r'_{go}\pm t'_{go})(1+r'_{go}\mp t'_{go})}{2t'_{go}}) + o(h^2).\end{aligned} \tag{4.64}$$

Or, il est possible de montrer, en utilisant la conservation de l'énergie et le théorème de réciprocité, que les produits $(1+r'_{go}\pm t'_{go})(1-r'_{go}\pm t'_{go})/2r'_{go}$, et $(1+r'_{go}\pm t'_{go})(1+r'_{go}\mp t'_{go})/2t'_{go}$ sont imaginaires purs. Nous en déduisons que les zéros en réflexion et transmission sont réels à l'ordre 2 en h. Cela confirme l'analyse faite dans le deuxième chapitre: si la structure est symétrique par rapport au plan (Oxy), les zéros de réflexion et de transmission sont réels. De plus, au deuxième ordre en h, la différence entre le pôle et le zéro en réflexion est inversement proportionnelle au coefficient de réflexion de la structure, alors que la différence entre le zéro en transmission et le pôle est inversement proportionnelle au coefficient de transmission. Lorsque la réflectivité du guide d'onde plan est faible (ce qui est notre cas, puisque nous utilisons un anti-reflet), le zéro en réflexion sera donc éloigné du pôle, et le zéro en transmission sera proche. Nous mettons ici en évidence l'impossibilité de juxtaposer un zéro de réflexion et un zéro de transmission, et donc d'obtenir un filtre avec un profil spectral dont les flancs sont très abrupts.
En utilisant l'expression de $\lambda^{p\pm}$, les zéros $\lambda^{zr\pm}$ et $\lambda^{zr\pm}$ peuvent s'écrire sous une autre forme:

$$\begin{aligned}\lambda^{zr\pm} &= \lambda^{ref\pm} + h\tilde{\varepsilon}_0\mathcal{A}_q^{\pm} + h^2\mathcal{Y}_r^{\pm} + o(h^2)\\ \lambda^{zt\pm} &= \lambda^{ref\pm} + h\tilde{\varepsilon}_0\mathcal{A}_q^{\pm} + h^2\mathcal{Y}_t^{\pm} + o(h^2)\end{aligned} \tag{4.65}$$

avec

$$\begin{aligned}\mathcal{Y}_r^{\pm} &= \mathcal{X}^{\pm} - \mathcal{Z}^{\pm}(1+r'_{go}\pm t'_{go})(1-r'_{go}\pm t'_{go})/2r'_{go}\\ \mathcal{Y}_t^{\pm} &= \mathcal{X}^{\pm} \mp \mathcal{Z}^{\pm}(1+r'_{go}\pm t'_{go})(1+r'_{go}\mp t'_{go})/2t'_{go}.\end{aligned} \tag{4.66}$$

Dans le cas où les deux modes sont excités simultanément, nous écrivons les expressions des zéros de réflexion et de transmission sous la forme

$$\boxed{\lambda^{zr} = \lambda^{zr}_{moy} \pm h^2\mathcal{C}^r + o(h^2) \quad \text{et} \quad \lambda^{zt} = \lambda^{zt}_{moy} \pm h^2\mathcal{C}^t + o(h^2)}. \tag{4.67}$$

Nous ne pouvons plus distinguer les zéros du mode symétrique et ceux du mode anti-symétrique, ils ne sont plus indépendants. Les termes λ^{zr}_{moy} et λ^{zt}_{moy} correspondent à la moyenne des zéros de réflexion et de transmission obtenus lorsque les modes symétrique et anti-symétrique ne sont pas excités simultanément

$$\begin{aligned}\lambda^{zr}_{moy} &= \tfrac{1}{2}\left(\lambda^{ref+} + \lambda^{ref-} + h\tilde{\varepsilon}_0(\mathcal{A}_q^{+} + \mathcal{A}_q^{-}) + h^2(\mathcal{Y}_r^{+} + \mathcal{Y}_r^{-})\right)\\ \lambda^{zt}_{moy} &= \tfrac{1}{2}\left(\lambda^{ref+} + \lambda^{ref-} + h\tilde{\varepsilon}_0(\mathcal{A}_q^{+} + \mathcal{A}_q^{-}) + h^2(\mathcal{Y}_t^{+} + \mathcal{Y}_t^{-})\right)\end{aligned} \tag{4.68}$$

Les termes $\mathcal{C}^r$ et $\mathcal{C}^t$ traduisent le couplage entre les zéros, et ont pour expression:

$$\begin{aligned}\mathcal{C}^r &= \tfrac{1}{2}\sqrt{\left(\mathcal{Y}_r^{+} - \mathcal{Y}_r^{-}\right)^2 + \mathcal{Z}^{+}\mathcal{Z}^{-}\left(\tfrac{(1+r'_{go}+t'_{go})(1+r'_{go}-t'_{go})}{r'_{go}}\right)^2}\\ \mathcal{C}^t &= \tfrac{1}{2}\sqrt{\left(\mathcal{Y}_t^{+} - \mathcal{Y}_t^{-}\right)^2 - \mathcal{Z}^{+}\mathcal{Z}^{-}\left(\tfrac{(1+r'_{go}+t'_{go})(1+r'_{go}-t'_{go})}{(t'_{go})}\right)^2}.\end{aligned} \tag{4.69}$$

Le terme de couplage peut être réel ou imaginaire pur, les zéros en réflexion et en transmission peuvent donc devenir complexes conjugués lorsque la couche de couplage est épaisse [4].

Lorsque la couche de couplage devient très épaisse, ($\lambda^{ref-} - \lambda^{ref+} = O(h^2)$), les simulations numériques ont montré que les zéros de transmission tendent vers une limite commune. Essayons de retrouver ce résultat. Nous savons déjà que $\lim_{e\to\infty} \mathcal{Z}^+ = \lim_{e\to\infty} \mathcal{Z}^- = \mathcal{Z}$ et que $\lim_{e\to\infty} \mathcal{X}^+ = \lim_{e\to\infty} \mathcal{X}^- = \mathcal{X}$. Nous en déduisons que

$$\lim_{e\to\infty} \mathcal{Y}_t^{\pm} = \mathcal{X} \mp \mathcal{Z} \frac{(1+r'_{go})^2 + t'^2_{go}}{2t'_{go}}. \tag{4.70}$$

Un calcul simple mène alors à

$$\begin{aligned} \lim_{e\to\infty} \frac{1}{2}(\mathcal{Y}_t^+ + \mathcal{Y}_t^-) &= \mathcal{X} \\ \lim_{e\to\infty} \frac{1}{2}(\mathcal{Y}_t^+ - \mathcal{Y}_t^-) &= -\mathcal{Z} \frac{(1+r'_{go})^2 + t'^2_{go}}{2t'_{go}} \end{aligned} \tag{4.71}$$

d'où nous tirons les limites de λ^{zt}_{moy} et de $\mathcal{C}^t$:

$$\lim_{e\to\infty} \lambda^{zt}_{moy} = \lambda^{ref} + h\tilde{\varepsilon}_0 \mathcal{A}_q + h^2 \mathcal{X} \quad \text{et} \quad \lim_{e\to\infty} \mathcal{C}^t = 0 \tag{4.72}$$

Le couplage entre les zéros en transmission s'annule lorsque la couche de couplage devient très épaisse. Les deux zéros tendent vers une valeur commune, qui ne dépend pas des coefficients de réflexion et de transmission de la structure plane. Cette conclusion est en accord avec les observations faites sur la figure (fig. 4.7).

4.2.3 Vérifications numériques

Nous avons vérifié les expressions approchées des pôles et des zéros en les comparant à un calcul rigoureux. Les résultats sont présentés ci-dessous.

Les pôles

Nous avons calculé rigoureusement puis de manière approchée, à l'aide des équations (4.18) et (4.20), la longueur d'onde du mode anti-symétrique d'une structure composée de deux guides d'ondes plans couplés perturbés (structure 4.3). Les courbes obtenues sont présentées sur les figures (fig. 4.9a), pour la partie réelle, et (fig. 4.9b), pour la partie imaginaire (calcul rigoureux en trait continu et approché en trait discontinu). Les figures (fig. 4.9a) et (fig. 4.9b) permettent de conclure que les expressions de la partie réelle à l'ordre 1 (éq. 4.18), et de la partie imaginaire à l'ordre 2 (éq. 4.20) de la longueur d'onde du mode anti-symétrique sont correctes. Elles sont également exactes pour le mode symétrique. L'influence des termes d'ordre supérieur est plus

4. Remarque: si les produits $\mathcal{Z}^+\mathcal{Z}^- \left(\frac{(1+r'_{go}+t'_{go})(1+r'_{go}-t'_{go})}{r'_{go}}\right)^2$ et $\mathcal{Z}^+\mathcal{Z}^- \left(\frac{(1+r'_{go}+t'_{go})(1+r'_{go}-t'_{go})}{(t'_{go})}\right)^2$ sont nuls, nous retrouvons les expressions des zéros obtenues lorsque l'épaisseur de couplage est faible

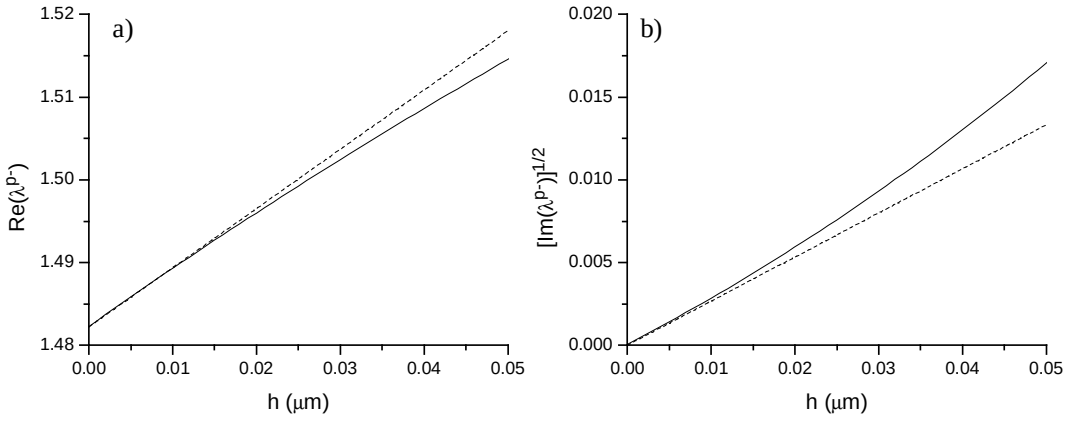


FIG. 4.9 – *Comparaison entre le calcul rigoureux (trait continu) et approché (trait discontinu) de la longueur d'onde du pôle du mode anti-symétrique, a) partie réelle, b) racine carrée de la partie imaginaire. La structure est du type double structure avec* $\varepsilon^a = 1{,}0$, $\varepsilon^c = 2{,}0^2$ *et* $e^c = 250$ *nm,* $\varepsilon^s = 1{,}5^2$ *et* $2e^s = 500$ *nm, et le réseau est de hauteur* h *variable, de période* $d = 742{,}2$ *nm, de plots de largeur* $a = 442{,}2nm$. *La pulsation spatiale incidente est* $\alpha^{inc} = 2{,}0\ \mu m^{-1}$ *(structure 4.3).*

importante que dans le cas d'une structure simple (deuxième chapitre (fig. 2.6)). Ceci traduit le fait que les modes du guide d'onde plan sont plus perturbés par la présence de deux réseaux, d'autant plus que h correspond à la hauteur d'un seul réseau, la hauteur de la perturbation totale est en fait $2h$.

Les zéros

Nous nous intéressons au cas où la différence entre les longueurs d'onde des modes de référence est grande devant la hauteur des réseaux. Nous avons validé les expressions des zéros de réflexion

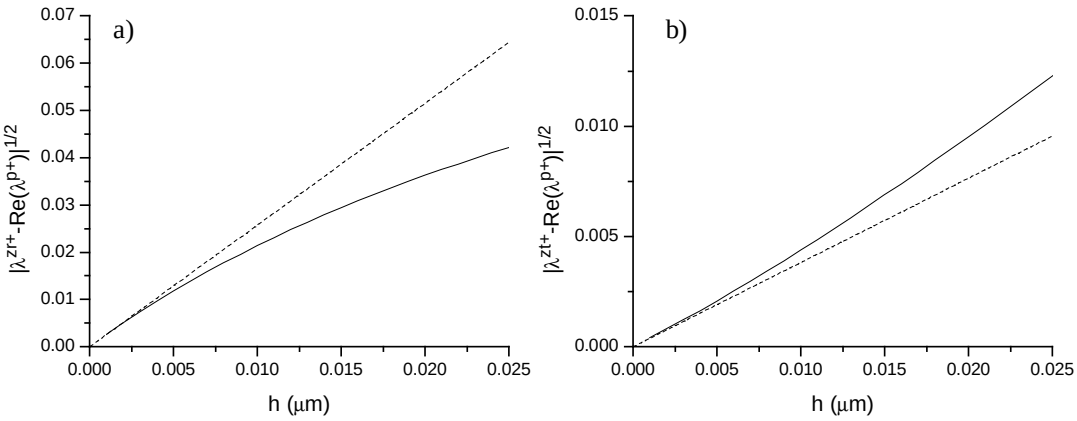


FIG. 4.10 – *Comparaison entre le calcul rigoureux (trait continu) et approché (trait discontinu), a) pour le zéro en réflexion* $|\lambda^{zr} - Re(\lambda^p)|^{1/2}$, *b) et le zéro en transmission* $|\lambda^{zt} - Re(\lambda^p)|^{1/2}$ *du mode symétrique (structure 4.3).*

et de transmission (éq. 4.61) et (éq. 4.62) en calculant la différence entre le zéro et la longueur d'onde du pôle. La comparaison entre le calcul rigoureux (trait continu) et approché (trait discontinu) est présentée sur les figures (fig. 4.10a), pour le zéro en transmission et (fig. 4.10b) pour le zéro en réflexion. Le mode étudié est le mode symétrique. La différence entre les longueurs d'onde des modes de référence est de l'ordre de 0,1 μm. Ainsi, pour des hauteurs inférieures à 0,01 μm nous pouvons considérer que seul le mode symétrique est excité, les expressions approchées sont donc vérifiées à l'ordre 1 en h. Pour des hauteurs supérieures à 0,01 μm, les deux modes sont excités, et les longueurs d'ondes des zéros sont données par les équations (4.67). Des résultats similaires sont obtenus pour le mode anti-symétrique.

Conclusion de l'étude perturbative

Nous avons obtenu les expressions approchées des pôles et des zéros de transmission en distinguant trois régimes, selon l'épaisseur de la couche de couplage:

- lorsque la couche de couplage est fine, les modes propres ne peuvent pas être excités simultanément, et les zéros sont réels.
- lorsque la couche de couplage est épaisse, les modes propres peuvent être excités simultanément, et les zéros sont quelquefois complexes.
- lorsque la couche de couplage est très épaisse, les modes propres peuvent être excités simultanément, et les zéros de transmission sont réels.

Les pôles sont toujours découplés alors que les zéros sont couplés, excepté lorsque la couche de couplage est fine.

Les calculs et les résultats sont similaires si nous fixons la longueur d'onde pour calculer la pulsation spatiale des pôles et des zéros de réflexion et de transmission. Nous en déduisons que le profil angulaire et le profil spectral d'une structure composée de deux guides d'ondes plans couplés perturbés sont semblables [5]. En particulier, si le profil spectral est aplati au sommet, le profil angulaire sera également aplati au sommet.

4.3 Exemples de filtres à profil spectral optimisé

En se servant des conclusions précédentes, nous avons conçu des filtres dont le profil spectral est aplati au sommet. Nous présentons ici deux exemples. Le premier filtre a une couche de couplage fine, l'autre épaisse.

4.3.1 Couche de couplage fine

La forme du profil spectral en réflexion, c'est à dire la position et la valeur des maxima de la résonance, est déterminée par les longueurs d'onde des zéros de transmission. Or, la méthode

5. sauf si la longueur d'onde choisie est en bord de bande interdite, auquel cas les résultats du troisième chapitre doivent aussi être pris en compte

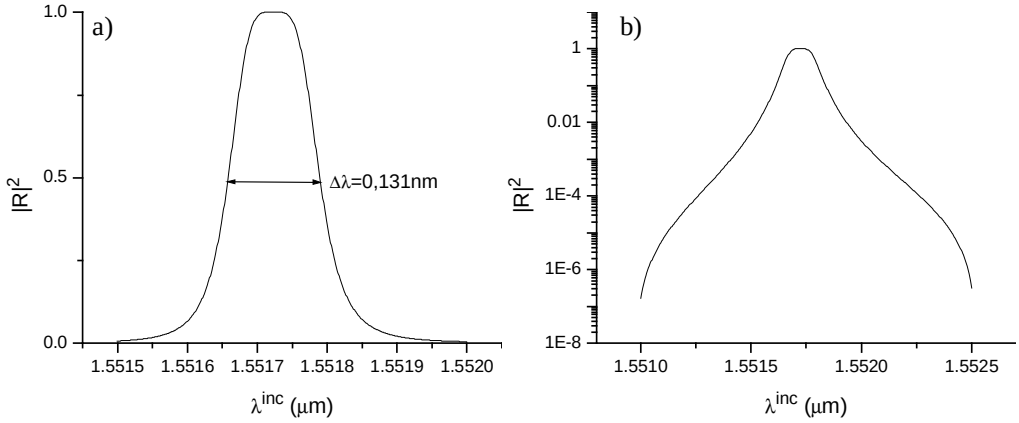


FIG. 4.11 – *Réflectivité en fonction de la longueur d'onde pour une structure du type doubles guides (fig. 4.8b), composée d'un empilement défini par* $\varepsilon^a = 1{,}0$, $\varepsilon^{c_2} = 1{,}47^2$ *et* $e^{c_2} = 180{,}7$ *nm,* $\varepsilon^{c_1} = 2{,}07^2$ *et* $e^{c_1} = 305{,}0$ *nm,* $\varepsilon^s = 1{,}448^2$ *et* $2e^s = 3{,}8$ μm*, et de deux réseaux identiques gravés sur les couches inférieures et supérieures, de période* $d = 838$ *nm, de hauteur* $h = 70nm$*, de plots de largeur* $a = 538$ *nm (structure 4.4). La pulsation spatiale incidente est* $\alpha^{inc} = 0{,}5$ μm^{-1} *. a) L'échelle linéaire en ordonnée permet d'observer l'aplatissement du profil spectral au sommet. b) L'échelle logarithmique montre que les zéros en réflexion sont situés symétriquement de part et d'autre du maximum de la résonance.*

perturbative nous a permis de montrer que les longueurs d'onde des zéros de transmission sont voisines des longueurs d'onde des modes propres de la structure perturbée, eux-mêmes proches des longueurs d'onde des modes de références. En conséquence, avec une épaisseur de couplage de l'ordre de 10 μm, trop fine pour jouer le rôle de substrat lors de la fabrication, mais qui permet de rapprocher suffisamment les longueurs d'onde des modes de référence ($|\lambda^{ref+} - \lambda^{ref-}| \simeq$ 0,05 nm), nous pouvons espérer obtenir un profil spectral aplati au sommet. Cependant, nous avons aussi démontré que les zéros en transmission pouvaient être complexes. De plus, les zéros en réflexion ont un comportement beaucoup moins prévisible que les zéros en transmission, et peuvent en particulier prendre des valeurs situées entre les longueurs d'onde des zéros de transmission. En conséquence, pour que le profil spectral soit d'aspect convenable, c'est à dire que les zéros de réflexion soient disposés symétriquement de part et d'autre du pic, et que la réflectivité soit égale à 100% au sommet, il est nécessaire de jouer sur les paramètres de la structure, et en particulier sur l'épaisseur de couplage. C'est ainsi que nous avons pu obtenir le filtre dont le profil spectral, aplati au sommet, est représenté sur la figure (fig. 4.11a). La même courbe tracée avec une échelle logarithmique en ordonnée (fig. 4.11b) permet de voir que les zéros de réflexion sont positionnés de part et d'autre de la résonance. Comme annoncé à la fin de la méthode perturbative, nous prévoyons que le profil angulaire du filtre sera également aplati au sommet. Nous avons vérifié cette hypothèse en représentant sur la figure (fig. 4.12) la réflectivité en fonction de l'angle d'incidence. En conclusion, nous pouvons générer un profil angulaire aplati au sommet grâce au couplage de deux guides d'onde perturbés. Cependant,

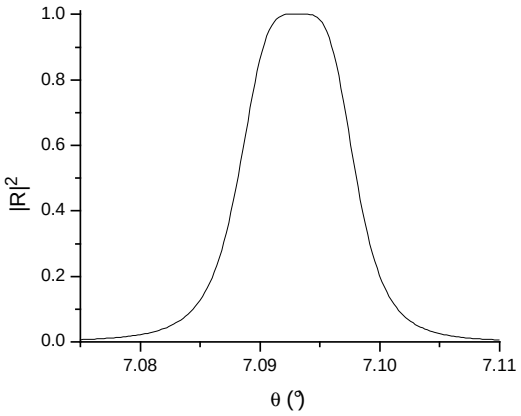


FIG. 4.12 – *Réflectivité en fonction de l'angle d'incidence pour une structure du type guides couplés (structure 4.4).*

contrairement à la solution, développée dans le troisième chapitre, utilisant le couplage de deux modes contra-propagatifs, les largeurs spectrale et angulaire ne sont pas découplées. La tenue à l'incidence ne pourra pas être optimisée en jouant sur le motif du réseau.

4.3.2 Couche de couplage épaisse

Il est intéressant, d'un point de vue pratique, que l'épaisseur de la couche de couplage soit grande, de l'ordre de 200 μm. En effet, elle pourra jouer le rôle de substrat lors de la fabrication de la structure. Cependant, plus la couche de couplage est épaisse, plus les longueurs d'onde des zéros de réflexion dus au Fabry-Pérot sont rapprochées. En effet, en première approximation, nous pouvons dire qu'un zéro de réflexion de Fabry-Pérot apparaît à chaque fois que le rapport $2e^s\sqrt{\varepsilon^s}/\lambda^{inc}$ est un entier [Yeh, 1988]. Nous en déduisons que la différence entre deux zéros est de l'ordre de $\left(\lambda^{inc}\right)^2/2e^s\sqrt{\varepsilon^s}$. Pour une longueur d'onde de 1,55 μm, une couche de couplage de constante diélectrique $\varepsilon^s = 1{,}5^2$, et d'épaisseur $e^s = 200$ μm, la différence entre deux zéros de réflexion dus au Fabry-Pérot sera de l'ordre de 4 nm. En conséquence, les paramètres de la structure devront être optimisés de manière à ce que les zéros dus au Fabry-Pérot n'apparaissent pas dans la bande passante du filtre. Une optimisation fine n'est pas nécessaire, et il est facile, en jouant simplement sur l'épaisseur de la couche de couplage, d'obtenir un profil spectral aplati au sommet d'aspect convenable. Ainsi, en utilisant comme structure de base un anti-reflet, et en faisant varier l'épaisseur de couplage autour de 200 μm, nous sommes parvenus à obtenir le profil spectral représenté sur la figure (fig. 4.13a). Les zéros de réflexion sont répartis de manière symétrique de part et d'autre du pic de résonance, comme le montre la figure (fig. 4.13b), ou nous avons tracé la réflectivité de la structure en échelle logarithmique sur un intervalle de longueur d'onde plus grand. Cela signifie que le taux de réjection du filtre est excellent au voisinage de la résonance. De plus, nous observons également que la réflectivité en dehors de la résonance reste inférieure à 0,01. Le taux de réjection du filtre est bon sur un large intervalle de longueurs

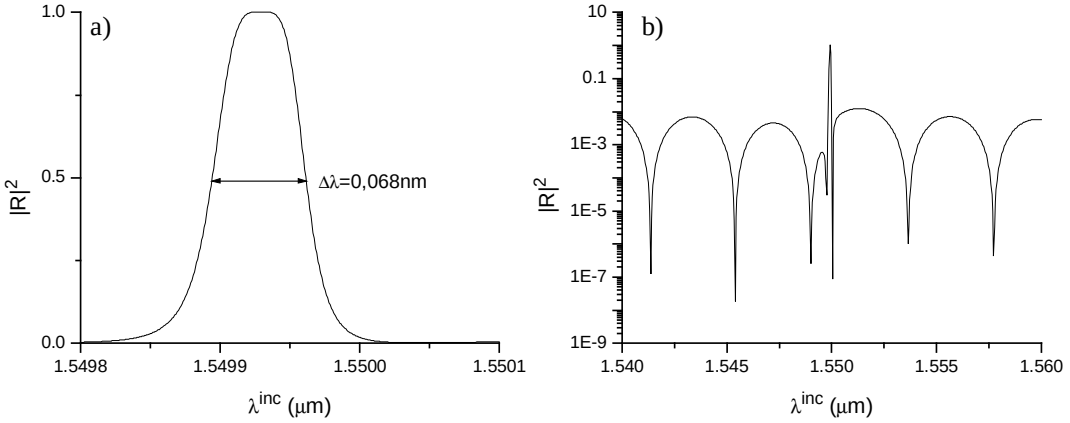


FIG. 4.13 – *Réflectivité en fonction de la longueur d'onde pour une structure du type double structure (fig. 4.8b), composée d'un empilement défini par* $\varepsilon^a = 1{,}0$, $\varepsilon^{c_3} = 2{,}07^2$ *et* $e^{c_3} = 30$ *nm,* $\varepsilon^{c_2} = 1{,}47^2$ *et* $e^{c_2} = 252{,}5$ *nm,* $\varepsilon^{c_1} = 2{,}07^2$ *et* $e^{c_1} = 84{,}0$ *nm,* $\varepsilon^s = 1{,}448^2$ *et* $2e^s = 199{,}9$ μm*, et de deux réseaux identiques gravés sur les couches inférieures et supérieures, de période* $d = 988$ *nm, de hauteur* $h = 12nm$*, de plots de largeur* $a = 688$ *nm (structure 4.5). L'angle d'incidence est* $\theta = 5{,}0°$*. a) Sur un intervalle de longueurs d'onde court, nous observons que le profil spectral est aplati au sommet. b) Un intervalle de longueurs d'onde plus large nous permet d'observer la position du pic de résonance par rapport aux zéros de réflexion du Fabry-Pérot.*

d'onde. Cette propriété est due au fait que la structure de base utilisée est un anti-reflet.

Il est important que les propriétés de la structure soient tolérantes vis à vis des erreurs de fabrication. Sur cette structure particulière, nous avons observé l'influence de la position relative des réseaux. Il apparaît qu'un décalage des réseaux l'un par rapport à l'autre d'une demi-période ne modifie pas le profil spectral. L'épaisseur importante de la couche de couplage permet de penser que l'effet du réseau supérieur sur l'onde incidente est entièrement découplé

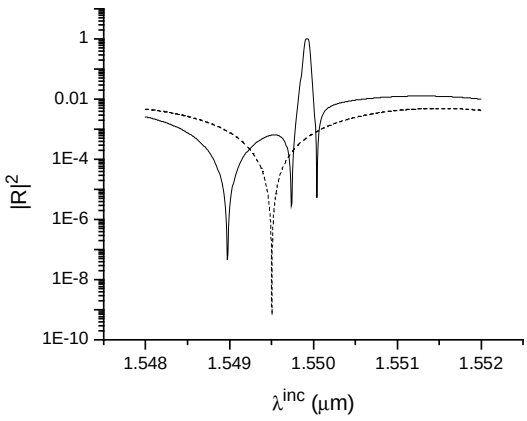


FIG. 4.14 – *Réflectivité en fonction de la longueur d'onde pour la structure (4.5) en polarisation s (trait continu) et en polarisation p (trait discontinu).*

de celui du réseau inférieur.

Enfin, sur la figure (fig. 4.13b), il est intéressant d'observer la position des zéros dus au Fabry-Pérot. Ils sont espacés régulièrement, mais cette régularité est rompue au voisinage de la résonance. Parmi les trois zéros situés autour de 1,55 μm, nous sommes incapables de distinguer ceux dus aux réseau et celui dû au Fabry-Pérot. En fait, le zéro du Fabry-Pérot a été déplacé par la résonance. Pour le prouver, nous avons tracé, sur la figure (fig. 4.14) la réflectivité de la structure en polarisation s (trait continu), permettant d'exciter les modes propres , et en polarisation p (trait discontinu), pour laquelle le zéro du Fabry-Pérot existe, mais pas la résonance. Le zéro du Fabry-Pérot a effectivement été repoussé lors de l'excitation des modes propres.

4.4 Conclusion

En conclusion, un profil spectral aplati au sommet peut être formé en excitant deux modes propres quasiment dégénérés. Pour créer ces deux modes propres, nous proposons d'utiliser deux guides d'ondes plans identiques couplés par leur substrat. Dans cette structure, deux modes guidés peuvent se propager. Pour une même pulsation spatiale, les longueurs d'onde propres sont d'autant plus proches que la couche de couplage est épaisse. Afin d'exciter les deux modes de manière identique, il est nécessaire d'utiliser deux réseaux, situés de part et d'autre de l'empilement. Soulignons que la position relative des réseaux n'est pas importante, ce qui permet d'envisager la fabrication de ces structures. Le profil spectral obtenu, caractérisé par deux zéros de réflexion et de transmission est en général compliqué. Les zéros peuvent être complexes. Néanmoins, il est possible de générer un profil spectral aplati au sommet, pour certaines épaisseurs de couplage.

La méthode perturbative, appliquée aux guides d'ondes couplés perturbés, nous a permis de mettre en évidence trois régimes distincts. Le premier régime correspond à une couche de couplage fine, la différence entre les longueurs d'ondes des modes guidés est grande devant la hauteur du réseau. Dans ce cas, les zéros de réflexion et de transmission sont réels. Cependant, les zéros de transmission sont trop éloignés pour former un profil spectral aplati au sommet. Le deuxième régime correspond à une couche de couplage épaisse, la différence entre les longueurs d'onde des modes guidés est de l'ordre de la hauteur du réseau. Les zéros en réflexion et en transmission sont parfois complexes conjugués. Les zéros en transmission peuvent être rapprochés suffisamment pour créer un profil spectral aplati au sommet. Cependant, l'épaisseur de couplage doit être optimisée de telle sorte que les zéros de transmission soient réels, et que les zéros de réflexion se répartissent de part et d'autre du pic de résonance. Enfin, le troisième régime apparaît lorsque l'épaisseur de couplage tend vers l'infini. Ce cas est intéressant en pratique car une couche de couplage d'épaisseur supérieure à 200 μm peut jouer le rôle de substrat lors de la fabrication de la structure. Les longueurs d'onde des modes guidés tendent vers la même valeur. Les zéros de transmission deviennent réels et égaux, créant un profil spectral aplati au sommet. Cependant, les guides d'ondes plans couplés par une couche de couplage épaisse constituent une cavité Fabry-Pérot présentant des zéros de réflexion réels très rapprochés. L'épaisseur de

couplage doit être optimisée de manière à placer les zéros, dus au Fabry-Pérot et aux réseaux, de part et d'autre du pic de résonance.

Enfin, les guides d'onde plans couplés perturbés présentent un avantage supplémentaire. En effet, le couplage des deux modes guidés permet de juxtaposer deux modes quasiment dégénérés. A pulsation spatiale constante, ces deux modes ont des longueurs d'onde très proches. C'est ce qui nous permet d'obtenir le profil spectral recherché. Mais lorsque la longueur d'onde est constante, les modes ont des pulsations spatiales très proches. Par conséquent, les guides d'ondes plans couplés présentent en plus un profil angulaire aplati au sommet.

Conclusion de la deuxième partie

Le but de la deuxième partie était de modifier la réponse angulaire et la réponse spectrale du filtre. Dans les deux cas, nous souhaitons un profil aplati au sommet, hors incidence normale. De plus, la largeur angulaire doit être grande (0,3°), et la largeur spectrale petite (0,1 nm).

Les deux solutions que nous proposons pour obtenir ces types de profils, bien éloignés des formes lorentziennes obtenues généralement, utilisent la même idée: exciter deux modes propres. Pour optimiser le profil angulaire, les modes doivent être de même longueur d'onde, et de pulsations spatiales différentes, alors que pour le profil spectral, ils ont la même pulsation spatiale, et des longueurs d'onde différentes. La similitude entre les deux cas justifie à posteriori le choix d'avoir regroupé dans une même partie le troisième chapitre, concernant le profil angulaire, et le quatrième, qui traite du profil spectral.

Les deux modes nécessaires pour optimiser le profil angulaire se trouvent en bord de bande de fréquences interdites. Ces dernières sont créées lors du couplage entre deux modes guidés contra-propagatifs. Le couplage a lieu hors incidence normale si les deux modes guidés sont distincts mais de même nature (deux TE ou deux TM). Contrairement au cas où un seul mode est excité (première partie), cette configuration permet non seulement de générer un profil angulaire aplati au sommet, mais aussi de dissocier la largeur angulaire et la largeur spectrale, il est possible d'augmenter la première, tout en diminuant la seconde. Plus précisément, la largeur angulaire est liée au coefficient de Fourier du réseau responsable du couplage entre les modes, en général $\tilde{\varepsilon}_2$, et la largeur spectrale au coefficient responsable du couplage entre l'onde incidente et les modes, en général $\tilde{\varepsilon}_1$. Pour atteindre les valeurs de largeur angulaire et spectrale désirées, $\tilde{\varepsilon}_2$ doit être grand, et $\tilde{\varepsilon}_1$ petit. Nous réalisons cette condition à l'aide d'un motif particulier, appelé "double période", composé de deux lames de matériau, centrées en $d/4$ et $3d/4$, et de largeurs légèrement différentes.

Les deux modes nécessaires pour optimiser le profil spectral sont obtenus grâce à deux guides d'ondes plans identiques séparés par une couche de couplage. Les deux modes ont des longueurs d'onde d'autant plus proches que la couche de couplage est épaisse. Une couche épaisse (200 μm) est souhaitable. Elle servira de substrat lors de la fabrication de la structure. Pour exciter les deux modes guidés, deux réseaux sont gravés de part et d'autre de la structure. Cependant, la forme de la réflectivité en fonction de la longueur d'onde n'est pas systématiquement aplatie au sommet, notamment car les zéros de transmission peuvent être complexes. D'autre part la structure ainsi constituée est un Fabry-Pérot présentant des zéros de réflexion réels fréquents.

Ces zéros, ainsi que ceux dus aux réseaux peuvent apparaître dans la bande passante du filtre. Ces problèmes sont évités lorsque l'épaisseur de la couche de couplage est soigneusement choisie.

Enfin, les deux solutions proposées pour que la réponse angulaire soit aplatie au sommet, ainsi que la réponse spectrale, sont compatibles et peuvent être réalisées simultanément. Il suffit de choisir un guide d'onde supportant deux modes guidés, par exemple TE, et de graver un réseau dont le motif a été optimisé pour avoir $\tilde{\varepsilon}_1$ petit et $\tilde{\varepsilon}_2$ grand. L'étape suivante consiste à dupliquer le guide perturbé obtenu, et à assembler les deux parties par leur substrat. Enfin, en dernier lieu, l'épaisseur de couplage est ajustée. Notons que la solution des guides d'ondes plans couplés présente un avantage supplémentaire. Elle permet de juxtaposer également deux modes de même longueur d'onde, et de pulsations spatiales différentes, ce qui permet d'élargir encore la tenue à l'incidence.

Pour répondre à toutes les contraintes imposées, il ne manque plus que l'indépendance à la polarisation. Nous y consacrons la troisième partie.

Troisième partie

Indépendance à la polarisation

Introduction de la troisième partie

Le signal que nous désirons filtrer est issu de la fibre optique qui permet de le guider entre l'émetteur et le récepteur de la transmission. Au niveau de l'émission, la polarisation du signal injecté dans la fibre est connue. Cependant, elle est modifiée au cours de la propagation. En sortie, le signal est toujours polarisé, mais sa polarisation, en général elliptique, est inconnue. Pour éviter les pertes dues à la polarisation, les profils angulaire et spectral idéaux doivent être obtenus quelle que soit la polarisation du signal incident. Il est important de souligner que le seul fait de connaître les profils de réflexion en énergie pour les polarisations s et p n'est pas suffisant pour prévoir le comportement du filtre quelle que soit la polarisation [6].

La question de la polarisation n'a été abordée dans aucune des deux premières parties. En fait, tous les profils présentés ont été obtenus en polarisation s. Pour la polarisation orthogonale, polarisation p, la résonance n'a pas lieu, et la réflectivité reste proche de celle du guide d'onde plan, c'est à dire très faible dans le cas d'un anti-reflet. Tous les modes guidés utilisés étaient TE, et le résultat contraire est obtenu pour des modes guidés TM. Les réseaux mono-dimensionnels en incidence classique dépendent fortement de la polarisation. De plus, dès que le plan d'incidence n'est plus perpendiculaire aux traits du réseau (incidence conique), des phénomènes nouveaux apparaissent: la réflectivité en polarisation s chute, alors que la polarisation p commence à subir la résonance [Popov and Mashev, 1986] [Li et al., 1992]. En incidence conique pure (plan d'incidence parallèle aux traits du réseau), une résonance en s et une résonance en p sont observables à des longueurs d'onde différentes, même dans le cas de l'excitation de plasmons de surface [Hibbins et al., 2000]. L'exemple le plus connu de filtres indépendants de la polarisation est un réseau à modes guidés périodique de périodes égales selon deux directions orthogonales, fonctionnant en incidence normale. L'indépendance à la polarisation a été obtenue théoriquement [Peng and Morris, 1996b] et expérimentalement [Peng and Morris, 1996a]. Hors incidence normale, les travaux concernant l'indépendance à la polarisation sont récents, et les solutions proposées utilisent soit un réseau périodique selon une direction, en incidence conique pure (plan d'incidence perpendiculaire aux traits du réseau) [Lacour, 2001] [Lacour et al., 2001], soit des réseaux périodiques selon deux directions, orthogonales ou non [Mizutani et al., 2001]. Notons que le réseau mono-dimensionnel en incidence conique pure peut être considéré comme

6. Certes, l'amplitude du champ incident peut s'exprimer dans la base des vecteurs s et p, mais le calcul des coefficients de réflexion et de transmission en énergie à partir des coefficients en amplitude n'est pas une opération linéaire. De plus, la structure peut être dépolarisante.

un réseau bi-dimensionnel dont les directions de périodisation sont confondues, et les vecteurs de base du réseau réciproque opposés. En conséquence, pour résoudre le problème de l'indépendance à la polarisation, nous étudierons dans la troisième partie des réseaux périodiques selon deux directions.

Cette partie est composée de deux chapitres. Dans le cinquième chapitre, nous déterminons, à l'aide d'une étude phénoménologique [Fehrembach et al., 2002b], une condition nécessaire d'indépendance à la polarisation. Nous verrons que cette condition, automatiquement remplie pour un motif bi-dimensionnel en incidence normale est plus difficile à réaliser en incidence oblique. Une optimisation des paramètres de la structure est nécessaire. Ce travail, accompli par les auteurs de [Lacour et al., 2001] et [Mizutani et al., 2001] est long et pénible si le rôle de chacun des paramètres de la structure n'est pas connu, au moins de manière approchée. Dans le sixième chapitre, la méthode pertubative adaptée aux réseaux bi-dimensionnels nous apporte cette connaissance.

Chapitre 5

Condition nécessaire d'indépendance à la polarisation

Un réseau bi-dimensionnel en incidence normale réfléchit de la même manière toutes les polarisations rectilignes [Peng and Morris, 1996b]. Cependant, dès que l'on s'écarte de l'incidence normale, les polarisations s et p ne sont plus réfléchies de la même manière (fig. 5.1a). De plus, lorsque la polarisation incidente est rectiligne, la réflectivité oscille sinusoïdalement en fonction de la direction du champ incident (fig. 5.1b). Dans le but d'expliquer ces comportements, nous étu-

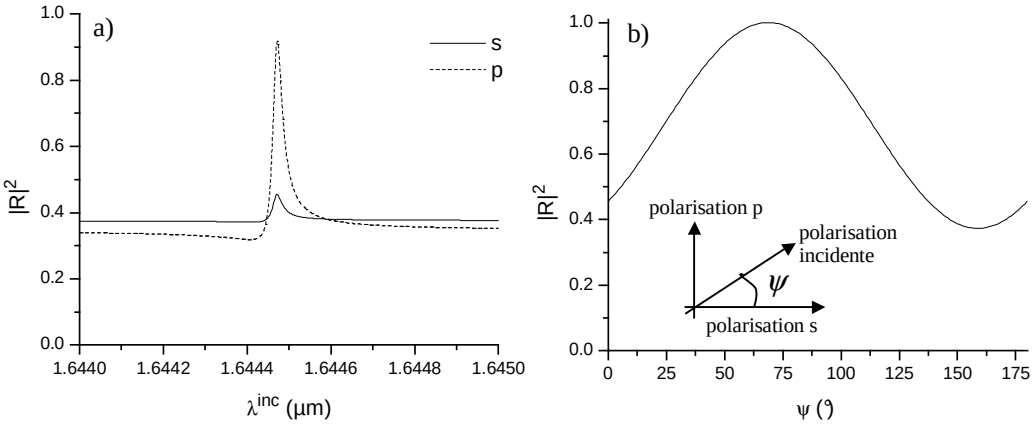


FIG. 5.1 – *Réseau bi-dimensionnel en incidence quelconque, a) variation de la réflectivité en fonction de la longueur d'onde, en polarisation s (trait continu), et p (trait discontinu) b) évolution de la réflectivité en fonction de l'angle ψ de polarisation pour une longueur d'onde incidente fixée. L'empilement est défini par $\varepsilon^s = 1{,}5^2$, $\varepsilon^c = 2{,}5^2$, $e^c = 133$ nm, $\varepsilon^a = 1{,}0$. La hauteur du réseau est de 7 nm, sa période de 930 nm selon deux directions orthogonales, le motif est un carré de matériau (ε^c) de côté 465 nm. L'angle d'incidence est de 15° par rapport à la normale au réseau, et le plan d'incidence fait un angle de 28° par rapport à une direction de périodicité (structure 5.1).*

dions les modes propres des réseaux 2D, et 1D en incidence conique [Fehrembach et al., 2002b].

Nous commencerons par définir la matrice de diffraction pour ce type de configuration. Nous montrerons qu'un mode propre correspond à un pôle d'une valeur propre de la matrice, et qu'il est associé à un zéro. Pour finir, nous étudierons les propriétés des zéros en fonction des symétries éventuelles de la structure, et nous en déduirons une condition nécessaire pour obtenir un filtre indépendant de la polarisation.

5.1 Introduction de la matrice de diffraction

Nous considérons un réseau périodique selon deux directions (Ox) et (Oy). Nous notons d_x la période selon (Ox) et d_y la période selon (Oy). Les directions de périodicité ne sont pas nécessairement orthogonales (fig. 5.2). Les vecteurs de base $\mathbf{K}_x$ et $\mathbf{K}_y$ du réseau réciproque sont

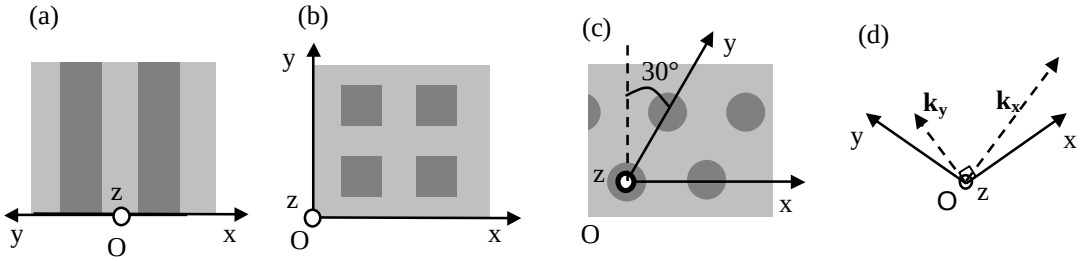


FIG. 5.2 – *Réseaux périodiques, a) selon deux directions colinéaires (réseau mono-dimensionnel), b) selon deux directions orthogonales (maille carrée), c) selon deux directions séparées de 60° (maille hexagonale), d) réseau réciproque.*

définis par les relations:

$$\begin{array}{lll} \mathbf{K}_x.\hat{\mathbf{x}} = \frac{2\pi}{d_x} & \text{et} & \mathbf{K}_x.\hat{\mathbf{y}} = 0 \\ \mathbf{K}_y.\hat{\mathbf{x}} = 0 & \text{et} & \mathbf{K}_y.\hat{\mathbf{y}} = \frac{2\pi}{d_y}. \end{array} \tag{5.1}$$

Un vecteur quelconque du réseau réciproque est noté $\mathbf{K}_{n,p} = n\mathbf{K}_x + p\mathbf{K}_y$.

5.1.1 Champ incident

La structure est éclairée par une onde incidente venant du superstrat, d'amplitude $\mathbf{d}^a$, de longueur d'onde λ, et de vecteur d'onde $\mathbf{k}_{I^a}$ (fig. 5.3). Les composantes du vecteur d'onde dans la base $(Oxyz)$ sont $(\alpha,\beta,-\gamma^a)$ avec $\gamma^a = \sqrt{\varepsilon^a k_0^2 - ||\boldsymbol{\kappa}||^2}$ où $||\boldsymbol{\kappa}||^2$ désigne la norme du vecteur $\boldsymbol{\kappa}$, représentant la projection du vecteur d'onde incident dans le plan (Oxy), et défini par $\boldsymbol{\kappa} = \alpha\hat{\mathbf{x}} + \beta\hat{\mathbf{y}}$. Nous supposons que $||\boldsymbol{\kappa}||^2 < \varepsilon^a k_0^2$.

Pour définir la matrice de diffraction, nous avons également besoin d'introduire une onde incidente par le substrat, d'amplitude $\mathbf{u}^s$, de même longueur d'onde λ, et de vecteur d'onde $\mathbf{k}_{I^s} = \boldsymbol{\kappa} - \gamma^s\hat{\mathbf{z}}$. Finalement, l'expression du champ incident $\mathbf{E}^{inc}(\mathbf{r})$ est la suivante:

$$\mathbf{E}^{inc}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \mathbf{d}^a \exp(i\boldsymbol{\kappa}.\boldsymbol{\rho} - i\gamma^a z) & \text{pour} \quad z \in \mathcal{D}^a \\ \mathbf{u}^s \exp(i\boldsymbol{\kappa}.\boldsymbol{\rho} + i\gamma^s z) & \text{pour} \quad z \in \mathcal{D}^s \end{cases} \tag{5.2}$$

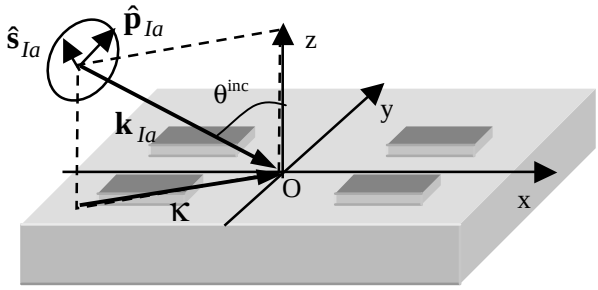


FIG. 5.3 – *Onde incidente sur le Réseau 2D, et représentation des vecteurs* $\hat{\mathbf{s}}_{I^a}$, $\mathbf{k}_{I^a}$ *et* $\hat{\mathbf{p}}_{I^a}$).

Pour caractériser la polarisation des ondes incidentes, nous introduisons les bases orthogonales directes ($\hat{\mathbf{s}}_{I^a}$,$\mathbf{k}_{I^a}$,$\hat{\mathbf{p}}_{I^a}$) et ($\hat{\mathbf{s}}_{I^s}$,$\mathbf{k}_{I^s}$,$\hat{\mathbf{p}}_{I^s}$) où

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{s}}_{I^a} &= \frac{\mathbf{k}_{I^a} \times \hat{\mathbf{z}}}{|\mathbf{k}_{I^a} \times \hat{\mathbf{z}}|} \quad \text{et} \quad \hat{\mathbf{p}}_{I^a} = \frac{\hat{\mathbf{s}}_{I^a} \times \mathbf{k}_{I^a}}{|\hat{\mathbf{s}}_{I^a} \times \mathbf{k}_{I^a}|} \\ \hat{\mathbf{s}}_{I^s} &= -\frac{\mathbf{k}_{I^s} \times \hat{\mathbf{z}}}{|\mathbf{k}_{I^s} \times \hat{\mathbf{z}}|} \quad \text{et} \quad \hat{\mathbf{p}}_{I^s} = -\frac{\hat{\mathbf{s}}_{I^s} \times \mathbf{k}_{I^s}}{|\hat{\mathbf{s}}_{I^s} \times \mathbf{k}_{I^s}|}. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Les amplitudes incidentes $\mathbf{d}^a$ et $\mathbf{u}^s$ peuvent alors être projetées dans les bases ($\hat{\mathbf{s}}_{I^a}$,$\mathbf{k}_{I^a}$,$\hat{\mathbf{p}}_{I^a}$) et ($\hat{\mathbf{s}}_{I^s}$,$\mathbf{k}_{I^s}$,$\hat{\mathbf{p}}_{I^s}$), respectivement:

$$\begin{aligned} \mathbf{d}^a &= d^{a,\mathbf{s}}\hat{\mathbf{s}}_{I^a} + d^{a,\mathbf{p}}\hat{\mathbf{p}}_{I^a} \\ \mathbf{u}^s &= u^{s,\mathbf{s}}\hat{\mathbf{s}}_{I^s} + u^{s,\mathbf{p}}\hat{\mathbf{p}}_{I^s} \end{aligned} \tag{5.4}$$

La matrice de diffraction relie le champ diffracté au champ incident, exprimons maintenant le champ diffracté par la structure.

5.1.2 Champ diffracté

Nous cherchons à déterminer le champ $\mathbf{E}^d(\mathbf{r})$ diffracté par la structure éclairée par l'onde incidente définie ci-dessus. Contrairement à la configuration du réseau mono-dimensionnel en incidence classique étudié dans les deux premières parties, les cas de polarisations TE et TM ne constituent plus des problèmes indépendants. Les champs électrique et magnétique du mode sont ici des vecteurs ayant des composantes sur les trois axes (Ox), (Oy) et (Oz). Nous parlerons de problème vectoriel, par opposition au problème scalaire dont il était question dans les deux premières parties.

Pseudo-périodicité du champ

D'après le théorème de Bloch, le champ électrique total $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ est pseudo périodique et s'écrit, en tout point $\mathbf{r} = (\boldsymbol{\rho},z)$, sous la forme:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{e}(\mathbf{r}) \exp\left(i\boldsymbol{\kappa}.\boldsymbol{\rho}\right) \tag{5.5}$$

où $\mathbf{e}(\mathbf{r})$ est une fonction périodique de période d_x selon (Ox) et d_y selon (Oy). La décomposition de $\mathbf{e}(\mathbf{r})$ en série de Fourier conduit au développement de $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ en série de Fourier généralisée:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_n \sum_p \mathbf{e}_{n,p}(z) \exp\left(i\boldsymbol{\kappa}_{n,p}.\boldsymbol{\rho}\right). \tag{5.6}$$

où $\boldsymbol{\kappa}_{n,p} = \boldsymbol{\kappa} + \mathbf{K}_{n,p}$. De plus, le champ électrique $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ vérifie l'équation de Helmholtz

$$\mathbf{rot\ rot}\ \mathbf{E}(\mathbf{r}) - \varepsilon(\mathbf{r})k_0^2\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0, \tag{5.7}$$

au sens des distributions. Nous mesurons ici toute la difficulté de l'étude des configurations bi-dimensionnelles par rapport au problème du réseau mono-dimensionnel en incidence classique.

Développement de Rayleigh du champ

Dans les milieux invariants selon (Ox) et (Oy), le champ $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ solution pseudo-périodique de l'équation de Helmholtz (5.7), s'écrit sous la forme d'un développement de Rayleigh. En particulier, dans le substrat et le superstrat, le champ diffracté s'écrit sous la forme:

$$\mathbf{E}^d(\boldsymbol{\rho},z) = \begin{cases} \sum_n \sum_p \mathbf{u}^a_{n,p} \exp i(\boldsymbol{\kappa}_{n,p}.\boldsymbol{\rho} + \gamma^a_{n,p} z) & \text{pour} \quad z \in \mathcal{D}^a \\ \sum_n \sum_p \mathbf{d}^s_{n,p} \exp i(\boldsymbol{\kappa}_{n,p}.\boldsymbol{\rho} - \gamma^s_{n,p} z) & \text{pour} \quad z \in \mathcal{D}^s \end{cases} \tag{5.8}$$

avec $\gamma^m_{n,p} = \sqrt{\varepsilon^m k_0^2 - |\boldsymbol{\kappa}_{n,p}|^2}$ et $\mathrm{Im}(\gamma^m_{n,p}) \geq 0$ pour $m = a$ ou s.

Champ diffracté dans l'ordre zéro

Dans toute la suite de l'étude, nous supposerons que le seul ordre diffracté propagatif est l'ordre (0,0) du développement de Rayleigh, d'amplitude $\mathbf{u}^a = \mathbf{u}^a_{0,0}$ dans le superstrat et $\mathbf{d}^s = \mathbf{d}^s_{0,0}$ dans le substrat. Les ondes diffractées dans le superstrat et le substrat se propagent dans les directions définies respectivement par $\mathbf{k}_{D^a} = \boldsymbol{\kappa} + \gamma^a\hat{\mathbf{z}}$ et $\mathbf{k}_{D^s} = \boldsymbol{\kappa} - \gamma^s\hat{\mathbf{z}}$. De la même manière que pour les ondes incidentes, pour caractériser la polarisation des ondes diffractées, nous introduisons les bases orthogonales directes $(\hat{\mathbf{s}}_{D^a},\mathbf{k}_{D^a},\hat{\mathbf{p}}_{D^a})$ et $(\hat{\mathbf{s}}_{D^s},\mathbf{k}_{D^s},\hat{\mathbf{p}}_{D^s})$ où

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{s}}_{D^a} &= -\frac{\mathbf{k}_{D^a} \times \hat{\mathbf{z}}}{|\mathbf{k}_{D^a} \times \hat{\mathbf{z}}|} \quad \text{et} \quad \hat{\mathbf{p}}_{D^a} = -\frac{\hat{\mathbf{s}}_{D^a} \times \mathbf{k}_{D^a}}{|\hat{\mathbf{s}}_{D^a} \times \mathbf{k}_{D^a}|} \\ \hat{\mathbf{s}}_{D^s} &= \frac{\mathbf{k}_{D^s} \times \hat{\mathbf{z}}}{|\mathbf{k}_{D^s} \times \hat{\mathbf{z}}|} \quad \text{et} \quad \hat{\mathbf{p}}_{D^s} = \frac{\hat{\mathbf{s}}_{D^s} \times \mathbf{k}_{D^s}}{|\hat{\mathbf{s}}_{D^s} \times \mathbf{k}_{D^s}|}. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Les amplitudes diffractées dans l'ordre (0,0) peuvent alors être projetées sur les bases $(\hat{\mathbf{s}}_{D^a},\mathbf{k}_{D^a},\hat{\mathbf{p}}_{D^a})$ et $(\hat{\mathbf{s}}_{D^s},\mathbf{k}_{D^s},\hat{\mathbf{p}}_{D^s})$, respectivement:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^a &= u^{a,\mathbf{s}}\hat{\mathbf{s}}_{D^a} + u^{a,\mathbf{p}}\hat{\mathbf{p}}_{D^a} \\ \mathbf{d}^s &= d^{s,\mathbf{s}}\hat{\mathbf{s}}_{D^s} + d^{s,\mathbf{p}}\hat{\mathbf{p}}_{D^s} \end{aligned} \tag{5.10}$$

Nous sommes maintenant en mesure de définir la matrice de diffraction.

5.1.3 Matrice de diffraction

Nous introduisons quatre vecteurs colonnes représentant les ondes incidentes $\mathbf{I}^a = \mathbf{d}^a\sqrt{\gamma^a}$ et $\mathbf{I}^s = \mathbf{u}^s\sqrt{\gamma^s}$, et les ondes diffractées $\mathbf{D}^a = \mathbf{u}^a\sqrt{\gamma^a}$ et $\mathbf{D}^s = \mathbf{d}^s\sqrt{\gamma^s}$.

La linéarité des équations de Maxwell permet de relier les ondes diffractées aux ondes incidentes à l'aide de deux matrices de réflexion $\mathbf{R}$ et $\mathbf{R}'$ et deux matrices de transmission $\mathbf{T}$ et $\mathbf{T}'$:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^a &= \mathbf{R}\mathbf{I}^a + \mathbf{T}'\mathbf{I}^s \\ \mathbf{D}^s &= \mathbf{T}\mathbf{I}^a + \mathbf{R}'\mathbf{I}^s. \end{aligned} \tag{5.11}$$

Notons que les matrices $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}'$, $\mathbf{T}$ et $\mathbf{T}'$ peuvent être exprimées en fonction des coefficients de réflexion et de transmission de la structure, en tenant compte de la polarisation de l'onde incidente et de l'onde diffractée. Pour les matrices $\mathbf{R}$ et $\mathbf{T}$, nous avons:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} R_{\mathbf{ss}} & R_{\mathbf{ps}} \\ R_{\mathbf{sp}} & R_{\mathbf{pp}} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} T_{\mathbf{ss}} & T_{\mathbf{ps}} \\ T_{\mathbf{sp}} & T_{\mathbf{pp}} \end{pmatrix} \tag{5.12}$$

où par exemple $R_{\mathbf{ps}}$ désigne l'amplitude réfléchie dans la polarisation s lorsque l'onde incidente est polarisée p. Des écritures similaires sont possibles pour $\mathbf{R}'$ et $\mathbf{T}'$.

Pour finir, nous définissons la matrice de diffraction $\mathbf{S}$ par:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{T}' \\ \mathbf{T} & \mathbf{R}' \end{pmatrix}. \tag{5.13}$$

Elle relie le champ incident, $\mathbf{I}$ au champ diffracté $\mathbf{D}$:

$$\mathbf{D} = \mathbf{S}\mathbf{I} \quad \text{où} \quad \mathbf{I} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}^{a,\mathbf{s}} \\ \mathbf{I}^{a,\mathbf{p}} \\ \mathbf{I}^{s,\mathbf{s}} \\ \mathbf{I}^{s,\mathbf{p}} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} \mathbf{D}^{a,\mathbf{s}} \\ \mathbf{D}^{a,\mathbf{p}} \\ \mathbf{D}^{s,\mathbf{s}} \\ \mathbf{D}^{s,\mathbf{p}} \end{pmatrix}. \tag{5.14}$$

Les matrices de réflexion et de transmission ainsi que la matrice de diffraction dépendent de la pulsation spatiale $\boldsymbol{\kappa}$ et de la longueur d'onde λ, même si nous n'avons pas précisé ces dépendances afin de ne pas alourdir les notations.

Pour assimiler les notations et notions introduites, nous proposons de déterminer la forme de la matrice de diffraction pour deux exemples simples: le guide d'onde plan, et le réseau mono-dimensionnel en incidence classique.

Le guide d'onde plan Comme un guide d'onde plan est une structure non dépolarisante, seuls les termes diagonaux des matrices de réflexion et de transmission sont non nuls. Ils correspondent aux coefficients de réflexion et de transmission en polarisation s et p.

Le réseau mono-dimensionnel en incidence classique Lorsque le plan d'incidence est perpendiculaire aux traits du réseau, l'onde incidente n'est pas dépolarisée par le réseau. Les matrices de réflexion et de transmission sont diagonales, et leurs éléments sont les coefficients de réflexion et de transmission de la structure en polarisation s et p .

5.2 Recherche des modes propres

Les modes propres sont des solutions non nulles du problème homogène, c'est à dire de l'équation (5.14) en l'absence de champ incident. De telles solutions existent si $\det \mathbf{S}^{-1}(\boldsymbol{\kappa},\lambda)$ est nul pour un couple $(\boldsymbol{\kappa}^p,\lambda^p)$. Nous dirons que le couple $(\boldsymbol{\kappa}^p,\lambda^p)$ est un pôle de $\det \mathbf{S}(\boldsymbol{\kappa},\lambda)$.

5.2.1 Pôle de la matrice de diffraction

En général, un pôle $(\boldsymbol{\kappa}^p,\lambda^p)$ de $\det \mathbf{S}(\boldsymbol{\kappa},\lambda)$ est un pôle de tous les coefficients de la matrice $\mathbf{S}(\boldsymbol{\kappa}^p,\lambda^p)$. En conséquence, une valeur propre $L_{\mathbf{S}}$ de $\mathbf{S}$ possède le même pôle. Nous notons $\mathbf{V_S} = \left(\mathbf{V}_{\mathbf{S}}^{a,\mathbf{s}},\mathbf{V}_{\mathbf{S}}^{a,\mathbf{p}},\mathbf{V}_{\mathbf{S}}^{s,\mathbf{s}},\mathbf{V}_{\mathbf{S}}^{s,\mathbf{p}}\right)$ le vecteur propre associé à cette valeur propre. L'existence d'un pôle de la valeur propre signifie que toute onde incidente de pulsation spatiale $\boldsymbol{\kappa}^{inc} = \boldsymbol{\kappa}^p$ et de longueur d'onde $\lambda^{inc} = \lambda^p$, dont le champ n'est pas orthogonal à $\mathbf{V_S}$, génère une onde diffractée d'amplitude infinie colinéaire à $\mathbf{V_S}$.

Ceci est valable en particulier si l'onde incidente provient uniquement du superstrat. Nous en déduisons que $(\boldsymbol{\kappa}^p,\lambda^p)$ est un pôle d'une valeur propre de la matrice $\mathbf{R}$, notée $L_{\mathbf{R}}$ et d'une valeur propre de la matrice $\mathbf{T}$, notée $L_{\mathbf{T}}$. Les vecteurs propres correspondants sont notés $\mathbf{V_R}$ et $\mathbf{V_T}$ et vérifient $\mathbf{V_R} = \mathbf{V_T} = \mathbf{V}_{\mathbf{S}}^{a} = \left(\mathbf{V}_{\mathbf{S}}^{a,\mathbf{s}},\mathbf{V}_{\mathbf{S}}^{a,\mathbf{p}}\right)$. De la même manière, si l'onde incidente provient uniquement du substrat, il apparaît que $(\boldsymbol{\kappa}^p,\lambda^p)$ est un pôle d'une valeur propre des matrices $\mathbf{R}'$ et $\mathbf{T}'$, notées respectivement $L_{\mathbf{R}'}$ et $L_{\mathbf{T}'}$. Les vecteurs propres correspondants sont notés $\mathbf{V_{R'}}$ et $\mathbf{V_{T'}}$ avec $\mathbf{V_{R'}} = \mathbf{V_{T'}} = \mathbf{V}_{\mathbf{S}}^{s} = \left(\mathbf{V}_{\mathbf{S}}^{s,\mathbf{s}},\mathbf{V}_{\mathbf{S}}^{s,\mathbf{p}}\right)$.

En résumé, en prenant en compte la polarisation des ondes incidentes et diffractées, nous avons démontré qu'un mode propre de longueur d'onde λ^p, et de pulsation spatiale $\boldsymbol{\kappa}^p$ correspond à un pôle d'une valeur propre des matrices de réflexion et de transmission. Vérifions que ce résultat est compatible avec celui que nous avions obtenu pour le réseau mono-dimensionnel en incidence classique (problème scalaire): un mode propre de longueur d'onde λ^p et de pulsation spatiale α^p correspond à un pôle des coefficients de réflexion et de transmission. Or, nous savons que les matrices de réflexion du réseau 1D en incidence classique sont des matrices diagonales dont les éléments sont les coefficients de réflexion et de transmission en polarisation s et p. Donc les valeurs propres de la matrice de réflexion du réseau 1D en incidence classique sont les coefficients de réflexion en polarisation s et p, et les vecteurs propres associés sont (1,0) pour la polarisation s et (0,1) pour la polarisation p. Nous en déduisons qu'un mode propre (α^p,λ^p) est bien un pôle d'une valeur propre des matrices de réflexion et de transmission du réseau 1D. La valeur propre résonnante sera celle associée au vecteur propre (1,0) si le mode est TE, et celle associée au vecteur propre (0,1) si le mode est TM. Dans le cas du réseau 1D en incidence classique, nous avions montré qu'un zéro en réflexion et un zéro en transmission étaient associés au pôle. Pour le problème vectoriel, nous allons montrer que les valeurs propres des matrices de réflexion et de transmission possèdent également des zéros.

5.2.2 Etude phénoménologique des valeurs propres

Dans ce paragraphe, nous considérons que la pulsation spatiale est fixée à une valeur $\boldsymbol{\kappa}$, telle que $|\boldsymbol{\kappa}|^2 < \varepsilon^s k_0^2$. La longueur d'onde λ est variable, mais des résultats similaires sont obtenus dans le cas inverse.

Nous supposons que pour la pulsation spatiale κ, il existe un seul mode propre, de longueur d'onde $\lambda^p(\boldsymbol{\kappa})$, dans l'intervalle de longueur d'onde étudié. Nous avons déjà montré qu'un mode propre $\lambda^p(\boldsymbol{\kappa})$ correspondait à un pôle d'une valeur propre des matrices de réflexion et de transmission. Cela signifie qu'au voisinage de λ^p, une valeur propre de $\mathbf{R}$ et une valeur propre de $\mathbf{T}$, par exemple $L_{\mathbf{R}}$ et $L_{\mathbf{T}}$ peuvent s'écrire sous la forme:

$$L_{\mathbf{R}}(\boldsymbol{\kappa},\lambda) = \frac{A_{\mathbf{R}}(\boldsymbol{\kappa},\lambda)}{\lambda - \lambda^p} \quad \text{et} \quad L_{\mathbf{T}}(\boldsymbol{\kappa},\lambda) = \frac{A_{\mathbf{T}}(\boldsymbol{\kappa},\lambda)}{\lambda - \lambda^p}, \tag{5.15}$$

où $A_{\mathbf{R}}$ et $A_{\mathbf{T}}$ sont des fonctions, non nulles en $\lambda = \lambda^p$. Demontrons maintenant que $L_{\mathbf{R}}(\boldsymbol{\kappa},\lambda)$ et $L_{\mathbf{T}}(\boldsymbol{\kappa},\lambda)$ possèdent aussi un zéro.

Lorsque la hauteur du réseau tend vers zéro, la structure tend vers le guide d'onde plan à période fictive. Or, la matrice de réflexion du guide d'onde plan est une matrice diagonale, dont les éléments sont les coefficients de réflexion en polarisation s et en polarisation p. Nous en déduisons que les valeurs propres de la matrice de réflexion du guide perturbé tendent vers les coefficients de réflexion du guide d'onde plan en polarisation s et p. Nous savons également que la longueur d'onde du mode propre du réseau à mode guidé $\lambda^p(\boldsymbol{\kappa})$ tend vers la longueur d'onde d'un mode propre du guide d'onde plan à période fictive $\lambda^{ref}(\boldsymbol{\kappa})$, réel. Comme le coefficient de réflexion du guide d'onde plan ne présente pas de comportement résonnant pour $\lambda^{ref}(\kappa)$ si $|\kappa|^2 < \varepsilon^s k_0^2$, nous en déduisons que $A_{\mathbf{R}}$ et $A_{\mathbf{T}}$ possèdent chacun un zéro, notés λ^{zr} et λ^{zt} respectivement, qui tendent vers λ^{ref} lorsque h tend vers 0. Le même raisonnement est possible concernant la matrice de transmission. Pour résumer, nous écrivons:

$$L_{\mathbf{R}}(\boldsymbol{\kappa},\lambda) = l_{\mathbf{R}}(\boldsymbol{\kappa},\lambda)\frac{\lambda - \lambda^{zr}}{\lambda - \lambda^p} \quad \text{et} \quad L_{\mathbf{T}}(\boldsymbol{\kappa},\lambda) = l_{\mathbf{T}}(\boldsymbol{\kappa},\lambda)\frac{\lambda - \lambda^{zt}}{\lambda - \lambda^p}. \tag{5.16}$$

où $l_{\mathbf{R}}$ et $l_{\mathbf{T}}$ représentent les coefficients de réflexion et de transmission du réseau à modes guidés en dehors de la résonance, pour une onde incidente dont le champ est colinéaire à $\mathbf{V_R} = \mathbf{V_T}$. Comme nous avons supposé que le pôle $\lambda^p(\boldsymbol{\kappa})$ était unique, le zéro de la valeur propre de la matrice de réflexion et de la matrice de transmission sont également uniques. Nous en déduisons également que les deuxièmes valeurs propres des matrices de réflexion et de transmission ne subissent pas la résonance. Les valeurs propres résonnantes des matrices $\mathbf{R}'$ et $\mathbf{T}'$ peuvent être écrites sous des formes similaires.

Dans le cas du réseau 1D en incidence classique, l'étude des propriétés de la matrice de diffraction nous avait permis de démontrer que les zéros en transmission et en réflexion pouvaient être réels selon les propriétés de symétrie de la structure. Démontrons que des propriétés similaires existent pour les réseaux 2D.

5.3 Propriétés des pôles et des zéros

A nouveau, nous considérons que la pulsation spatiale $\boldsymbol{\kappa}$ est fixée à une valeur réelle et que la longueur d'onde λ est variable, mais l'ensemble du raisonnement décrit par la suite peut être utilisé dans le cas inverse. Nous commençons par généraliser les propriétés de la matrice de diffraction obtenues pour le réseau 1D. Ensuite, nous supposons que la structure possède certaines propriétés de symétrie.

5.3.1 Propriétés fondamentales de la matrice de diffraction

Des propriétés importantes de la matrice de diffraction découlent de la conservation de l'énergie et du théorème de réciprocité. Les démonstrations sont très proches de celles développées pour le réseau 1D.

Conservation de l'énergie

Par un raisonnement similaire à celui décrit pour démontrer l'unitarité de la matrice de diffraction dans le cas scalaire (deuxième chapitre), il est possible de démontrer que la conservation de l'énergie dans le cas vectoriel se traduit également par l'unitarité de la matrice de diffraction:

$$\mathbf{S}^*(\boldsymbol{\kappa},\lambda)\mathbf{S}(\boldsymbol{\kappa},\lambda) = \mathbf{1}, \tag{5.17}$$

où $\boldsymbol{\kappa}$ et λ sont réelles et $\mathbf{1}$ est la matrice unité. Lorsque la longueur d'onde est complexe, il convient d'introduire le domaine Ω du plan complexe des λ excluant les singularités de $\mathbf{S}(\boldsymbol{\kappa},\lambda)$. En utilisant les théorèmes de la théorie des fonctions de la variable complexe cités dans le deuxième chapitre, on peut montrer que l'expression de l'unitarité de la matrice de diffraction pour des valeurs réelles de la longueur d'onde peut être étendue, lorsque $\lambda \in \Omega$ à:

$$\mathbf{S}^*(\boldsymbol{\kappa},\overline{\lambda})\mathbf{S}(\boldsymbol{\kappa},\lambda) = \mathbf{1}. \tag{5.18}$$

L'équation (5.18) est l'expression mathématique de la conservation de l'énergie dans le plan complexe des λ. Dans la suite, nous l'utiliserons pour démontrer des propriétés des zéros des valeurs propres des matrices de réflexion et de transmission et des vecteurs propres associés liées aux propriétés de symétrie de la structure.

Théorème de réciprocité

Nous considérons les deux configurations réciproques où la structure est éclairée par les vecteurs incidents $\mathbf{I}^a(\boldsymbol{\kappa},\lambda)$ et $\mathbf{I}^s(\boldsymbol{\kappa},\lambda)$, puis par les vecteurs $\mathbf{I}'^a(-\boldsymbol{\kappa},\lambda)$ et $\mathbf{I}'^s(-\boldsymbol{\kappa},\lambda)$. En appliquant le théorème de réciprocité, et en reprenant les étapes de la démonstration détaillée dans le deuxième chapitre, nous démontrons que $\mathbf{R}(-\boldsymbol{\kappa},\lambda) = {}^t\mathbf{R}(\boldsymbol{\kappa},\lambda)$, $\mathbf{R}'(-\boldsymbol{\kappa},\lambda) = {}^t\mathbf{R}'(\boldsymbol{\kappa},\lambda)$, $\mathbf{T}(-\boldsymbol{\kappa},\lambda) = {}^t\mathbf{T}'(\boldsymbol{\kappa},\lambda)$ et $\mathbf{T}'(-\boldsymbol{\kappa},\lambda) = {}^t\mathbf{T}(\boldsymbol{\kappa},\lambda)$, soit

$$\mathbf{S}(-\boldsymbol{\kappa},\lambda) = {}^t\mathbf{S}(\boldsymbol{\kappa},\lambda). \tag{5.19}$$

L'équation (5.19) est l'expression mathématique du théorème de réciprocité. Nous l'utiliserons par la suite afin de déduire des propriétés de symétrie de la matrice de diffraction à partir des propriétés de symétrie de la structure.

5.3.2 Propriétés liées aux symétries de la structure

Dans le cas scalaire, nous avions montré à partir de la conservation de l'énergie que les zéros des coefficients de transmission étaient complexes conjugués, ainsi que les zéros des coefficients de réflexion. Puis nous en avions déduit des propriétés supplémentaires lorsque la structure avait un axe de symétrie vertical, un centre de symétrie, ou un axe de symétrie horizontal. Dans le cas vectoriel, des propriétés similaires peuvent être démontrées sur les zéros des valeurs propres des matrices de transmission et de réflexion, en faisant intervenir les vecteurs propres associés. A partir de l'équation (5.18), nous obtenons le système d'équations:

$$\mathbf{R}^*(\boldsymbol{\kappa},\overline{\lambda})\mathbf{R}(\boldsymbol{\kappa},\lambda) \;+\; \mathbf{T}^*(\boldsymbol{\kappa},\overline{\lambda})\mathbf{T}(\boldsymbol{\kappa},\lambda) = \mathbf{1} \tag{5.20}$$

$$\mathbf{R}'^*(\boldsymbol{\kappa},\overline{\lambda})\mathbf{R}'(\boldsymbol{\kappa},\lambda) + \mathbf{T}'^*(\boldsymbol{\kappa},\overline{\lambda})\mathbf{T}'(\boldsymbol{\kappa},\lambda) = \mathbf{1} \tag{5.21}$$

$$\mathbf{R}^*(\boldsymbol{\kappa},\overline{\lambda})\mathbf{T}'(\boldsymbol{\kappa},\lambda) \;+\; \mathbf{T}^*(\boldsymbol{\kappa},\overline{\lambda})\mathbf{R}'(\boldsymbol{\kappa},\lambda) = \mathbf{0} \tag{5.22}$$

$$\mathbf{T}'^*(\boldsymbol{\kappa},\overline{\lambda})\mathbf{R}(\boldsymbol{\kappa},\lambda) \;+\; \mathbf{R}'^*(\boldsymbol{\kappa},\overline{\lambda})\mathbf{T}(\boldsymbol{\kappa},\lambda) = \mathbf{0} \tag{5.23}$$

où $\mathbf{1}$ désigne la matrice unité. Supposons maintenant que la structure possède certaines propriétés de symétrie.

Symétrie par rapport à un axe vertical

Supposons que $\lambda = \lambda^{zt}$, zéro de la valeur propre $L_{\mathbf{T}}$ associée au vecteur propre $\mathbf{V_T}$. Comme $\mathbf{T}(\boldsymbol{\kappa},\overline{\lambda^{zt}})\mathbf{V_T} = 0$ l'équation (5.23) appliquée au vecteur $\mathbf{V_T}$ conduit à

$$\mathbf{T}'^*(\boldsymbol{\kappa},\overline{\lambda^{zt}})\mathbf{R}(\boldsymbol{\kappa},\lambda^{zt})\mathbf{V_T} = 0. \tag{5.24}$$

De plus, d'après (5.20), nous savons que $\mathbf{R}(\boldsymbol{\kappa},\overline{\lambda^{zt}})\mathbf{V_T} \neq 0$. Nous en déduisons que $\overline{\lambda^{zt}}$ est un zéro d'une valeur propre de $\mathbf{T}'^*(\boldsymbol{\kappa},\lambda)$ associée au vecteur propre $\mathbf{R}(\boldsymbol{\kappa},\lambda^{zt})\mathbf{V_T}$. Cette propriété est indépendante de la symétrie de la structure.

Dans le cas où la structure est symétrique par rapport à un axe vertical, la matrice de diffraction est symétrique par rapport à sa première diagonale (la démonstration est similaire à celle décrite dans le deuxième chapitre, en utilisant le théorème de réciprocité). Nous en déduisons que $\mathbf{T}'(\boldsymbol{\kappa},\lambda) = {}^t\mathbf{T}(\boldsymbol{\kappa},\lambda)$. Donc $\overline{\lambda^{zt}}$ est un zéro d'une valeur propre de $\mathbf{T}(\boldsymbol{\kappa},\lambda)$ associée au vecteur propre $\overline{\mathbf{R}}(\boldsymbol{\kappa},\lambda^{zt})\overline{\mathbf{V}}_{\mathbf{T}}$. Comme nous avons supposé que le pôle $\lambda^p(\boldsymbol{\kappa})$ de $\det \mathbf{S}(\boldsymbol{\kappa},\lambda)$ était unique, une seule valeur propre de $\mathbf{T}(\boldsymbol{\kappa},\lambda)$ est résonnante et possède un seul pôle et un seul zéro au voisinage de ce pôle. Nous en déduisons que λ^{zt} est réel et

$$\mathbf{R}(\boldsymbol{\kappa},\lambda^{zt})\mathbf{V_T} = \overline{\mathbf{V}}_{\mathbf{T}}. \tag{5.25}$$

A partir de l'équation (5.25) et de son complexe conjugué, nous montrons enfin que:

$$\mathbf{R}^*(\boldsymbol{\kappa},\lambda^{zt})\mathbf{R}(\boldsymbol{\kappa},\lambda^{zt})\mathbf{V_T} = \mathbf{V_T}. \tag{5.26}$$

Autrement dit, pour une longueur d'onde réelle égale à λ^{zt}, zéro de la valeur propre résonnante de la matrice de transmission, une valeur propre de $\mathbf{R}^*\mathbf{R}$ est égale à l'unité. Le vecteur propre correspondant est $\mathbf{V_T}$, vecteur propre associé à la valeur propre résonnante de la matrice de transmission.

Symétrie par rapport à un point

Cette fois, en prenant $\lambda = \lambda^{zr}$ dans les équations (5.23) et (5.20), nous démontrons que:

$$\mathbf{R}'^*(\boldsymbol{\kappa},\overline{\lambda^{zr}})\mathbf{T}(\boldsymbol{\kappa},\lambda^{zr})\mathbf{V_R} = 0, \tag{5.27}$$

avec $\mathbf{T}(\boldsymbol{\kappa},\lambda^{zr})\mathbf{V_R} \neq 0$. Cela signifie que $\overline{\lambda^{zr}}$ est un zéro d'une valeur propre de $\mathbf{R}'^*(\boldsymbol{\kappa},\lambda)$ associée au vecteur propre $\mathbf{T}(\boldsymbol{\kappa},\lambda^{zt})\mathbf{V_R}$. Cette relation est indépendante des propriétés de symétrie de la structure.

Lorsque la structure est symétrique par rapport à un point, la matrice de diffraction est symétrique par rapport à sa deuxième diagonale (la démonstration est similaire à celle décrite dans le deuxième chapitre, en utilisant le théorème de réciprocité), donc $\mathbf{R}'(\boldsymbol{\kappa},\lambda) = {}^t\mathbf{R}(\boldsymbol{\kappa},\lambda)$. Nous en déduisons que $\overline{\lambda^{zr}}$ est un zéro d'une valeur propre de $\mathbf{R}(\boldsymbol{\kappa},\lambda)$ associée au vecteur propre $\overline{\mathbf{T}}(\boldsymbol{\kappa},\lambda^{zt})\overline{\mathbf{V}}_\mathbf{R}$. En conséquence, λ^{zr} est réel et

$$\mathbf{T}(\boldsymbol{\kappa},\lambda^{zt})\mathbf{V_R} = \overline{\mathbf{V}}_\mathbf{R}. \tag{5.28}$$

A partir de l'équation (5.25) et de son complexe conjugué, nous montrons enfin que:

$$\mathbf{T}^*(\boldsymbol{\kappa},\lambda^{zt})\mathbf{T}(\boldsymbol{\kappa},\lambda^{zt})\mathbf{V_R} = \mathbf{V_R}. \tag{5.29}$$

Ainsi, pour une longueur d'onde réelle égale à λ^{zt}, zéro de la valeur propre résonnante de la matrice de transmission, une valeur propre de $\mathbf{T}^*\mathbf{T}$ est égale à l'unité. Le vecteur propre correspondant est $\mathbf{V_R}$, vecteur propre associé à la valeur propre résonnante de la matrice de réflexion.

Symétrie par rapport à un axe horizontal

La symétrie de la structure par rapport à un axe horizontal implique la symétrie de la matrice $\mathbf{S}$ par rapport à sa première et à sa deuxième diagonale (démonstration similaire à celle décrite dans le deuxième chapitre, en utilisant le théorème de réciprocité).

Les conclusions obtenues pour une structure symétrique par rapport à un axe vertical et pour une structure symétrique par rapport à un point sont toutes deux valides. Les zéros λ^{zt} et λ^{zr} des valeurs propres résonnantes des matrices de transmission et de réflexion sont tous les deux réels. De plus, rappelons que $\mathbf{V_T} = \mathbf{V_R}$.

Nous en déduisons que pour une longueur d'onde réelle égale à λ^{zt}, une valeur propre de $\mathbf{T}^*\mathbf{T}$ est égale à l'unité. Pour une autre longueur d'onde réelle égale à λ^{zr}, une valeur propre de $\mathbf{R}^*\mathbf{R}$ est égale à l'unité. Les vecteurs propres associés à ces deux valeurs propres sont les mêmes.

5.4 Réponse à une onde plane

Nous considérons une onde plane incidente dans le superstrat $\mathbf{I}^a$, et d'énergie $\langle \mathbf{I}^a | \mathbf{I}^a \rangle$ unitaire. Ici, la notation $\langle \ | \ \rangle$ désigne le produit scalaire hermitien. Nous supposons qu'aucune onde incidente n'existe dans le substrat.

5.4.1 Expression des coefficients de réflexion et de transmission en énergie

Le coefficient de réflexion en énergie $|R|^2$ de la structure est donné par $|R|^2 = \langle \mathbf{D}^a | \mathbf{D}^a \rangle$, que nous pouvons exprimer en fonction de l'onde incidente en utilisant l'équation (5.11):

$$|R|^2 = \langle \mathbf{R}\mathbf{I}^a | \mathbf{R}\mathbf{I}^a \rangle = \langle \mathbf{R}^*\mathbf{R}\mathbf{I}^a | \mathbf{I}^a \rangle. \tag{5.30}$$

Nous sommes donc amenés à considérer la matrice $\mathbf{R}^*\mathbf{R}$. C'est une matrice hermitienne, dont les valeurs propres $L_{\mathbf{R}^*\mathbf{R}}$ et $L'_{\mathbf{R}^*\mathbf{R}}$ sont réelles et positives, et les vecteurs propres $\mathbf{V}_{\mathbf{R}^*\mathbf{R}}$ et $\mathbf{V}'_{\mathbf{R}^*\mathbf{R}}$ orthogonaux. Le coefficient de réflexion en énergie s'exprime alors simplement en fonction des valeurs propres et des vecteurs propres de $\mathbf{R}^*\mathbf{R}$:

$$\boxed{|R|^2 = L_{\mathbf{R}^*\mathbf{R}} \left|\langle \mathbf{I}^a | \mathbf{V}_{\mathbf{R}^*\mathbf{R}} \rangle\right|^2 + L'_{\mathbf{R}^*\mathbf{R}} \left|\langle \mathbf{I}^a | \mathbf{V}'_{\mathbf{R}^*\mathbf{R}} \rangle\right|^2}. \tag{5.31}$$

L'équation (5.31) est très importante. Elle signifie que si l'onde incidente a la même polarisation qu'un vecteur propre de la matrice $\mathbf{R}^*\mathbf{R}$, alors la réflectivité de la structure est égale à la valeur propre correspondante. Une réflectivité égale à la seconde valeur propre est obtenue pour la polarisation orthogonale. Une équation similaire est obtenue pour l'énergie réfléchie:

$$\boxed{|T|^2 = L_{\mathbf{T}^*\mathbf{T}} \left|\langle \mathbf{I}^a | \mathbf{V}_{\mathbf{T}^*\mathbf{T}} \rangle\right|^2 + L'_{\mathbf{T}^*\mathbf{T}} \left|\langle \mathbf{I}^a | \mathbf{V}'_{\mathbf{T}^*\mathbf{T}} \rangle\right|^2}. \tag{5.32}$$

Dans la section précédente, nous avons démontré les conséquences des propriétés de symétrie de la structure sur les valeurs propres de $\mathbf{R}^*\mathbf{R}$ et de $\mathbf{T}^*\mathbf{T}$. Reprenons ces conclusions.

Symétrie par rapport à un axe vertical

Lorsque la structure possède un axe de symétrie vertical, nous avons démontré (éq. 5.25) l'existence d'une longueur d'onde réelle λ^{zt} pour laquelle une valeur propre de $\mathbf{R}^*\mathbf{R}$, par exemple $L_{\mathbf{R}^*\mathbf{R}}$, était égale à l'unité. L'autre valeur propre, $L'_{\mathbf{R}^*\mathbf{R}}$, ne subit pas la résonance.

Lorsque la longueur d'onde incidente est égale à λ^{zt}, la structure réfléchit donc 100% de l'énergie pour une polarisation particulière, et ne présente pas de résonance pour la polarisation orthogonale.

Symétrie par rapport à un point

Lorsque la structure possède un centre de symétrie, cette fois c'est une valeur propre de $\mathbf{T}^*\mathbf{T}$, par exemple $L_{\mathbf{T}^*\mathbf{T}}$ qui est égale à l'unité pour une longueur d'onde λ^{zr} réelle (éq. 5.28), alors que la seconde valeur propre ne subit pas la résonance.

Lorsque la longueur d'onde incidente est égale à λ^{zr}, la structure réfléchit donc 100% *de l'énergie pour une polarisation particulière, et ne présente pas de résonance pour la polarisation orthogonale.*

Symétrie par rapport à un axe horizontal

Lorsque la structure possède un axe de symétrie horizontal, les deux conclusions précédentes sont valables, la première pour la longueur d'onde λ^{zt}, et la seconde pour la longueur d'onde λ^{zr}.

5.4.2 Cas particulier: polarisation incidente rectiligne

Dans les simulations numériques que nous avons montré au début de ce chapitre, et dans celles que nous montrerons par la suite, l'onde incidente est polarisée rectilignement. Intéressons nous à ce cas particulier. Nous introduisons l'angle ψ, désignant l'angle que fait la direction

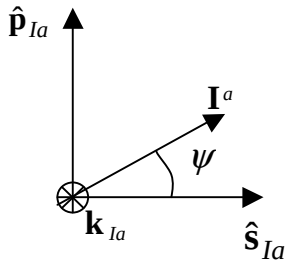


FIG. 5.4 – *Définition de l'angle de polarisation rectiligne ψ.*

du champ incident avec le vecteur $\hat{\mathbf{s}}_{I^a}$ (fig. 5.4). L'angle ψ permet de décrire la polarisation de l'onde incidente. Si $\psi = 0°$, l'onde incidente est polarisée s, et si $\psi = 90°$, l'onde incidente est polarisée p. Dans la base $(\hat{\mathbf{s}}_{I^a},\mathbf{k}_{I^a},\hat{\mathbf{p}}_{I^a})$, $\mathbf{I}^a$ a donc pour coordonnées $(\cos(\psi), \sin(\psi))$.

Pour caractériser la polarisation des vecteurs propres de $\mathbf{R}^*\mathbf{R}$ et de $\mathbf{T}^*\mathbf{T}$, qui ne correspondent pas nécessairement à des polarisations rectilignes, nous introduisons les angles $\psi_{\mathbf{R}^*\mathbf{R}}$ et $\psi_{\mathbf{T}^*\mathbf{T}}$, et les complexes de module unité $w_{\mathbf{R}^*\mathbf{R}}$ et $w_{\mathbf{T}^*\mathbf{T}}$. Les coordonnées des vecteurs $\mathbf{V}_{\mathbf{R}^*\mathbf{R}}$ et $\mathbf{V}_{\mathbf{T}^*\mathbf{T}}$ dans la base $(\hat{\mathbf{s}}_{I^a},\mathbf{k}_{I^a},\hat{\mathbf{p}}_{I^a})$ sont alors

$$(\cos(\psi_{\mathbf{R}^*\mathbf{R}}),w_{\mathbf{R}^*\mathbf{R}}\sin(\psi_{\mathbf{R}^*\mathbf{R}})) \quad \text{et} \quad (\cos(\psi_{\mathbf{T}^*\mathbf{T}}),w_{\mathbf{T}^*\mathbf{T}}\sin(\psi_{\mathbf{T}^*\mathbf{T}})). \tag{5.33}$$

Notons que si $\mathbf{V}_{\mathbf{R}^*\mathbf{R}}$ ou $\mathbf{V}_{\mathbf{T}^*\mathbf{T}}$ sont polarisés rectilignement, alors $w_{\mathbf{R}^*\mathbf{R}} = 1$ ou $w_{\mathbf{T}^*\mathbf{T}} = 1$.

A partir de (5.31), il est alors possible de montrer que:

$$|R|^2 = \tfrac{1}{2}\left(L_{\mathbf{R}^*\mathbf{R}} + L'_{\mathbf{R}^*\mathbf{R}}\right) + \tfrac{1}{2}\left(L_{\mathbf{R}^*\mathbf{R}} - L'_{\mathbf{R}^*\mathbf{R}}\right)\xi_{\mathbf{R}^*\mathbf{R}}\cos(2\psi - 2\psi^0_{\mathbf{R}^*\mathbf{R}})$$

$$\text{avec}\begin{cases} \xi_{\mathbf{R}^*\mathbf{R}} = \left[\cos^2(\psi_{\mathbf{R}^*\mathbf{R}}) + \sin^2(\psi_{\mathbf{R}^*\mathbf{R}})\mathrm{Re}(w_{\mathbf{R}^*\mathbf{R}})^2\right] \\ \tan(2\psi^0_{\mathbf{R}^*\mathbf{R}}) = \mathrm{Re}(w_{\mathbf{R}^*\mathbf{R}})\tan(2\psi_{\mathbf{R}^*\mathbf{R}}), \end{cases} \tag{5.34}$$

et

$$|T|^2 = \tfrac{1}{2}\left(L_{\mathbf{T}^*\mathbf{T}} + L'_{\mathbf{T}^*\mathbf{T}}\right) + \tfrac{1}{2}\left(L_{\mathbf{T}^*\mathbf{T}} - L'_{\mathbf{T}^*\mathbf{T}}\right)\xi_{\mathbf{T}^*\mathbf{T}}\cos(2\psi - 2\psi^0_{\mathbf{T}^*\mathbf{T}})$$

$$\text{avec}\begin{cases} \xi_{\mathbf{T}^*\mathbf{T}} = \left[\cos^2(\psi_{\mathbf{T}^*\mathbf{T}}) + \sin^2(\psi_{\mathbf{T}^*\mathbf{T}})\mathrm{Re}(w_{\mathbf{T}^*\mathbf{T}})^2\right] \\ \tan(2\psi^0_{\mathbf{T}^*\mathbf{T}}) = \mathrm{Re}(w_{\mathbf{T}^*\mathbf{T}})\tan(2\psi_{\mathbf{T}^*\mathbf{T}}). \end{cases} \tag{5.35}$$

Ces expressions, valables quelles que soient les symétries de la structure, et même pour des réseaux sans modes guidés montrent que la réflectivité et la transmittivité oscillent sinusoïdalement en fonction de la polarisation incidente. Nous retrouvons le fait que si les vecteurs propres de $\mathbf{R}^*\mathbf{R}$ sont polarisés rectilignement, $w_{\mathbf{R}^*\mathbf{R}} = 1$, alors $\xi_{\mathbf{R}^*\mathbf{R}} = 1$ et $\psi^0_{\mathbf{R}^*\mathbf{R}} = \psi_{\mathbf{R}^*\mathbf{R}}$. Dans ce cas, la réflectivité maximale, égale à $L_{\mathbf{R}^*\mathbf{R}}$, est obtenue pour $\psi = \psi_{\mathbf{R}^*\mathbf{R}}$, c'est à dire lorsque l'onde incidente a la même polarisation que $\mathbf{V}_{\mathbf{R}^*\mathbf{R}}$. La réflectivité minimale, égale à $L'_{\mathbf{R}^*\mathbf{R}}$, est obtenue pour $\psi = \psi_{\mathbf{R}^*\mathbf{R}} + \pi/2$, c'est à dire la polarisation orthogonale. Des conclusions similaires sont obtenues pour la transmittivité. Intéressons nous maintenant aux conséquences d'éventuelles symétries.

Symétrie par rapport à un axe vertical

Lorsque la longueur d'onde incidente est égale à λ^{zt}, et que la polarisation du champ incident varie, l'énergie réfléchie oscille sinusoïdalement entre

- un maximum égal à $1 - \frac{1}{2}\left(1 - L'_{\mathbf{R}^*\mathbf{R}}\right)\left(1 - \xi_{\mathbf{R}^*\mathbf{R}}\right)$, obtenu lorsque $\psi = \psi^0_{\mathbf{R}^*\mathbf{R}}/2$,
- et un minimum égal à $1 - \frac{1}{2}\left(1 - L'_{\mathbf{R}^*\mathbf{R}}\right)\left(1 + \xi_{\mathbf{R}^*\mathbf{R}}\right)$, obtenu lorsque $\psi = (\psi^0_{\mathbf{R}^*\mathbf{R}} + \pi)/2$.

Dans le cas où les vecteurs propres de $\mathbf{R}^*\mathbf{R}$ sont polarisés rectilignement, $\xi_{\mathbf{R}^*\mathbf{R}} = 1$. Nous en déduisons que le maximum de la réflectivité est égal 1 dans ce cas. De plus, si la structure est anti-reflet, l'autre valeur propre, $L'_{\mathbf{R}^*\mathbf{R}}$, sera très faible, et le minimum de la réflectivité proche de zéro. Nous en déduisons que la réflectivité de la structure ne pourra être égale à 1 à la résonance quelle que soit la polarisation incidente si une seule valeur propre est résonnante, donc si un seul mode est excité.

Symétrie par rapport à un point

Lorsque la longueur d'onde incidente est égale à λ^{zr}, le coefficient de transmission oscille sinusoïdalement entre

- un maximum égal à $1 - \frac{1}{2}\left(1 - L'_{\mathbf{T}^*\mathbf{T}}\right)\left(1 - \xi_{\mathbf{T}^*\mathbf{T}}\right)$, obtenu lorsque $\psi = \psi^0_{\mathbf{T}^*\mathbf{T}}/2$,
- et un minimum égal à $1 - \frac{1}{2}\left(1 - L'_{\mathbf{T}^*\mathbf{T}}\right)\left(1 + \xi_{\mathbf{T}^*\mathbf{T}}\right)$, obtenu lorsque $\psi = (\psi^0_{\mathbf{T}^*\mathbf{T}} + \pi)/2$.

Dans le cas où les vecteurs propres de $\mathbf{R}^*\mathbf{R}$ sont polarisés rectilignement le maximum de la transmittivité est égal 1, le minimum de la réflectivité est donc strictement nul.

Symétrie par rapport à un axe horizontal

Les deux conclusions précédentes sont valables.

5.4.3 Vérifications numériques

Afin de valider les conclusions obtenues, nous proposons d'observer le comportement des valeurs propres de la matrice $\mathbf{R}^*\mathbf{R}$ pour différentes configurations. Dans toutes les simulations numériques, l'onde incidente est polarisée rectilignement.

Réseau mono-dimensionnel en incidence conique

Sur la figure (fig. 5.5a), nous avons représenté les variations des valeurs propres de $\mathbf{R}^*\mathbf{R}$ en fonction de la longueur d'onde incidente pour la structure 5.1, présentée en introduction de ce chapitre. Le plan d'incidence n'est ni perpendiculaire, ni parallèle aux traits du réseau. Etant

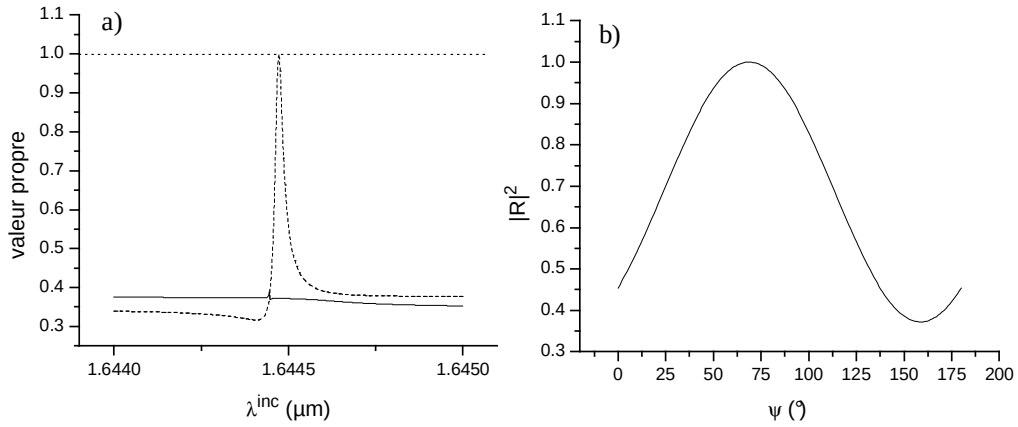


FIG. 5.5 – *Réseau mono-dimensionnel en incidence conique, a) variation des valeurs propres en fonction de la longueur d'onde, b) réflectivité en fonction de la polarisation incidente (structure 5.1).*

donné que la structure est symétrique par rapport à l'axe (Oz), une des valeurs propres est égale à 1 à la résonance, comme prévu. L'autre valeur propre est insensible à la présence du mode. Le vecteur propre associé à la valeur propre résonnante est polarisé rectilignement à 68° par rapport au vecteur de polarisation s. En conséquence, la courbe de réflectivité en fonction de l'angle ψ, décrivant la polarisation de l'onde incidente, oscille entre un maximum égal à 1, obtenu pour $\psi = 68°$, et un minimum obtenu pour $\psi = 68° + 90°$ (fig. 5.5b). A la résonance, notons que le vecteur propre associé à la valeur propre résonnante représente la polarisation du champ diffracté par le réseau. En première approximation, nous pouvons considérer que le champ présent dans la structure à la résonance est celui du mode propre. Dans le cas que nous

venons d'étudier, le mode propre est proche d'un mode guidé TE, le champ du mode est donc polarisé rectilignement, il en est de même des vecteurs propres. Dans d'autres configurations, le mode propre excité peut être le résultat de la combinaison de deux modes guidés. Le second exemple correspond à ce type de configuration.

Réseau mono-dimensionnel en incidence conique pure

Nous considérons un réseau 1D éclairé en incidence conique pure (plan d'incidence parallèle aux traits du réseau). Le champ incident a pour vecteur d'onde $(0,\beta,-\gamma^a)$. Nous avons choisi la période du réseau de manière à ce que deux modes propres soient excités, l'un via le vecteur $\frac{2\pi}{d}\hat{\mathbf{x}}+\beta\hat{\mathbf{y}}$ du réseau réciproque, et l'autre via $\frac{2\pi}{d}\hat{\mathbf{x}}-\beta\hat{\mathbf{y}}$ (fig. 5.6a). Il se produit alors le phénomène

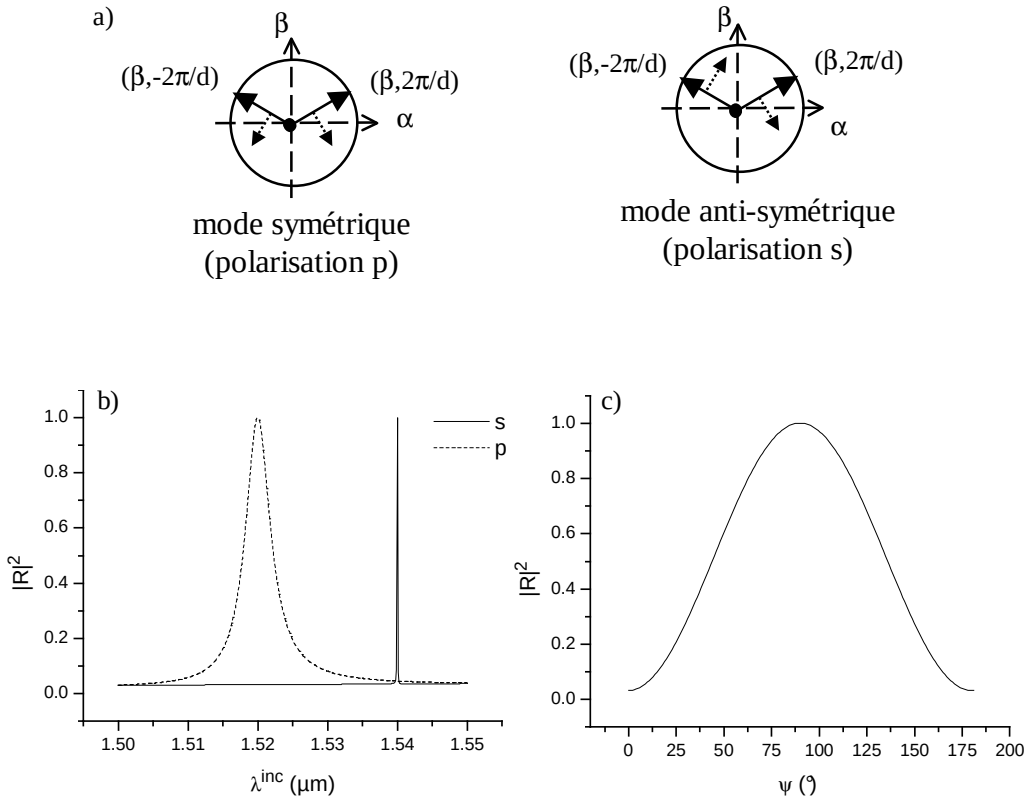


FIG. 5.6 – *Réseau mono-dimensionnel en incidence conique pure, a) excitation de deux modes, b) variation de la réflectivité en fonction de la longueur d'onde c) variation de la réflectivité en fonction de la polarisation incidente. L'empilement est défini par* $\varepsilon^s = 1{,}5^2$, $\varepsilon^c = 2{,}07^2$, $e^c = 300$ *nm,* $\varepsilon^a = 1{,}0$. *La hauteur du réseau est de* 87,5 *nm, sa période de* 904 *nm, les lames de matériau sont larges de* 74 *nm. L'angle d'incidence est de* 7,85° *par rapport à la normale au réseau (structure 5.2).*

que nous avons déjà observé dans le troisième chapitre pour un réseau 1D en incidence normale: les deux modes propres qui se propagent dans des directions différentes se couplent pour créer deux nouveaux modes propres dont les champs sont symétriques et anti-symétriques par rapport

au plan (Oyz), si ce plan est un plan de symétrie de la structure. En général, les deux modes résultants ont des longueurs d'onde propres différentes. De plus, lorsque le champ du mode résultant est symétrique par rapport au plan (Oyz), on constate que le champ diffracté est polarisé p. Dans le cas où le champ du mode est anti-symétrique, le champ diffracté est polarisé s. En conséquence, une valeur propre de la matrice $\mathbf{R}^*\mathbf{R}$, associée au vecteur propre (1,0) polarisé s, sera égale à 1 à la longueur d'onde du mode anti-symétrique, et l'autre valeur propre, associée à (0,1), sera égale à 1 à la longueur d'onde de résonance du mode symétrique. Il en est de même pour la réflectivité des ondes polarisées p ou s. La figure (fig. 5.6b) représentant la variation de la réflectivité en fonction de la longueur d'onde incidente pour les deux polarisations permet de valider ce résultat. Enfin, puisque les valeurs propres résonnent pour des longueurs d'onde différentes, la structure n'est pas indépendante de la polarisation, comme observé sur la figure (fig. 5.6c). Pour que le filtre soit indépendant de la polarisation, il est nécessaire d'exciter deux modes propres pour la même longueur d'onde. Le troisième exemple permet de réaliser cette condition.

Réseau bi-dimensionnel en incidence normale

Nous savons qu'un réseau 2D symétrique par rapport à l'axe (Oz) éclairé en incidence normale permet de réaliser un filtre indépendant de la polarisation. Nous pouvons comprendre pourquoi grâce à des considérations de symétrie. Le réseau 2D est invariant par rotation de $\pi/2$ autour de l'axe (Oz), donc sa réflectivité également. Ceci ne peut être compatible avec l'équation (5.34) que si la réflectivité est constante. Ce raisonnement est valable pour tout réseau 2D, invariant autour de l'axe (Oz) par rotation de π/n, en particulier pour un réseau hexagonal.

La théorie phénoménologique prévoit qu'un filtre indépendant en polarisation ne peut être obtenu que si deux modes propres sont excités. Vérifions que c'est le cas pour le réseau 2D en incidence normale. Pour commencer, nous supposons que la hauteur du réseau est nulle (guide d'onde plan à période fictive dans deux directions). En incidence normale, il est possible d'exciter quatre modes, via les vecteurs réciproques $\mathbf{K}_{0,1}$, $\mathbf{K}_{0,-1}$, $\mathbf{K}_{1,0}$ et $\mathbf{K}_{-1,0}$ (fig. 5.7a). Dès que la hauteur du réseau est non nulle, les deux modes excités grâce à $\mathbf{K}_{0,1}$ et $\mathbf{K}_{0,-1}$ se couplent pour générer un mode symétrique et un mode anti-symétrique par rapport au plan (Oyz). Les deux modes excités grâce à $\mathbf{K}_{1,0}$ et $\mathbf{K}_{-1,0}$ se couplent également et génèrent un mode symétrique et un mode anti-symétrique par rapport au plan (Oxz), cette fois. Comme la structure est invariante par rotation de $\pi/2$ autour de l'axe (Oz), les longueurs d'onde propres des deux modes symétriques sont identiques. La figure (fig. 5.7b) permet de vérifier que les deux valeurs propres, associées aux vecteurs propres (1,0) et (0,1) sont égales à 1 pour la même longueur d'onde. Le réseau 2D symétrique par rapport à (Oz) est indépendant de la polarisation en incidence normale. Malheureusement, cette propriété disparaît dès que l'angle d'incidence est non nul. Le quatrième exemple présente un filtre indépendant de la polarisation hors incidence normale.

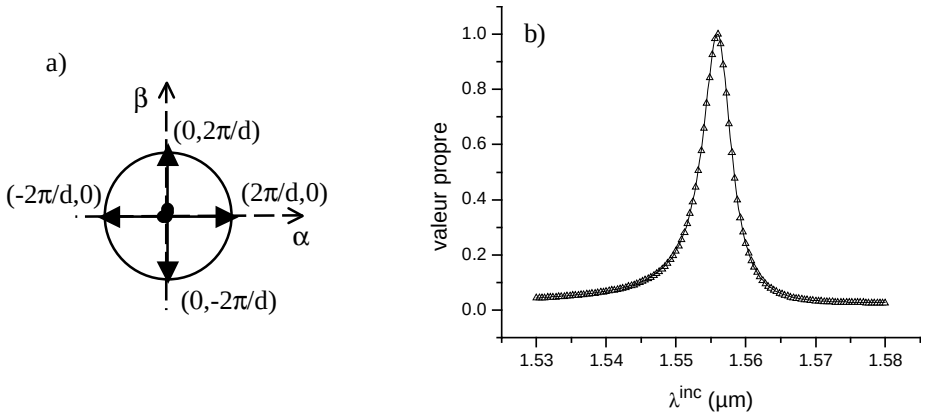


FIG. 5.7 – *Réseau bi-dimensionnel en incidence normale, a) excitation de quatre modes, b) variation des valeurs propres en fonction de la longueur d'onde. L'empilement est défini par* $\varepsilon^s = 1{,}448$, $\varepsilon^c = 2{,}07^2$, $e^c = 300$ *nm,* $\varepsilon^a = 1{,}0$. *La hauteur du réseau est de* 87,5 *nm, sa période de* 900 *nm, le motif est un carré de matériau de côté* 600 *nm. (structure 5.3).*

Réseau supportant un mode TE et un mode TM

Nous considérons un guide d'onde plan supportant deux modes guidés, un TE et un TM, et un réseau 1D en incidence classique. Il est possible de choisir la période du réseau de telle sorte qu'un mode propre polarisé TE et un mode propre polarisé TM puissent être excités avec la même pulsation spatiale et la même longueur d'onde grâce aux ordres $(+1)$ et (-1) (fig. 5.8a). Le mode TE sera excité par une onde polarisée s, et le mode TM par une onde polarisée p.

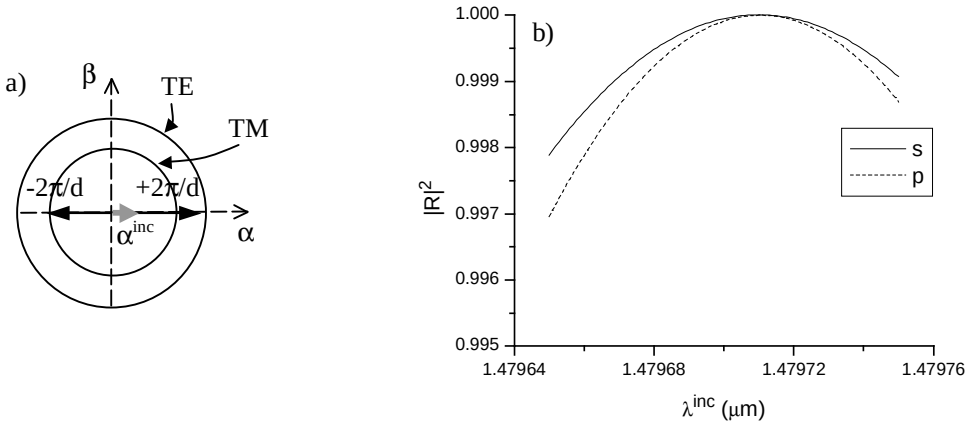


FIG. 5.8 – *Réseau mono-dimensionnel en incidence classique a) excitation d'un mode TE et d'un mode TM, b) variation de la réflectivité en fonction de la longueur d'onde. L'empilement est défini par* $\varepsilon^s = 1{,}5$, $\varepsilon^c = 2{,}0^2$, $e^c = 300$ *nm,* $\varepsilon^a = 1{,}0$. *La hauteur du réseau est de* 87,5 *nm, sa période de* 904 *nm, les lames de matériau ont pour largeur* 678 *nm. (structure 5.4). L'angle d'incidence est* $\theta = 4°$.

Cette structure est un filtre indépendant en polarisation, comme le montre la figure (fig. 5.8b). Cependant, le fait d'utiliser deux modes guidés différents réduit considérablement les tolérances de fabrication [Lacour, 2001].

Jusqu'à présent, nous n'avons présenté que des cas où les modes propres étaient polarisés rectilignement. Il existe des configurations où ce n'est pas le cas. La cinquième structure en est un exemple.

Réseau mono-dimensionnel non symétrique en incidence conique pure

Nous considérons un réseau mono-dimensionnel en incidence conique pure, et non symétrique par rapport au plan d'incidence. L'asymétrie perturbe la polarisation des modes propres, qui peut devenir circulaire pour des valeurs particulières des paramètres du réseau. Dans ce cas, le vecteur propre associé à la valeur propre résonnante est donné par $(\cos(\psi_{\mathbf{R}^*\mathbf{R}}), w_{\mathbf{R}^*\mathbf{R}} \sin(\psi_{\mathbf{R}^*\mathbf{R}}))$ avec $\psi_{\mathbf{R}^*\mathbf{R}} = \pi/4$ et $w_{\mathbf{R}^*\mathbf{R}} = i$. D'après l'équation (5.34), nous en déduisons que la réflectivité est constante. Sa valeur est égale à la moyenne des valeurs propres. Lorsque l'asymétrie est faible et que la structure est un anti-reflet, la valeur propre résonnante est proche de l'unité, et l'autre proche de zéro. La réflectivité est donc proche de 1/2 quelle que soit la polarisation rectiligne incidente, comme l'indique la figure (fig. 5.9). Par contre, il existe une polarisation incidente non rectiligne pour laquelle la réflectivité ne subit pas la résonance.

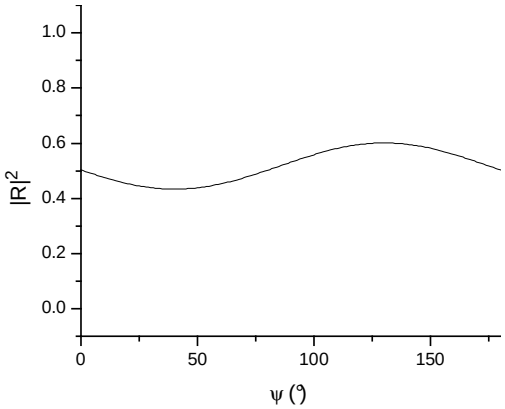


FIG. 5.9 – *Réseau mono-dimensionnel non symétrique en incidence conique pure, variation de la réflectivité en fonction de la polarisation. L'empilement est défini par* $\varepsilon^s = 1{,}5$, $\varepsilon^c = 2{,}0^2$, $e^c = 300$ *nm,* $\varepsilon^a = 1{,}0$. *La hauteur du réseau est de* 87,5 *nm, sa période de* 904 *nm, les lames de matériau ont pour largeur* 678 *nm. Un deuxième réseau est déposé sur le premier, décalé de* 282,5 *nm, de même période, de hauteur* 7 *nm, les lames de matériau ont pour largeur* 339 *nm (structure 5.5).*

5.5 Conclusion

Afin d'étudier la dépendance à la polarisation des réseaux à modes guidés, nous avons introduit la matrice de diffraction pour les réseaux bi-dimensionnels et mono-dimensionnels en incidence conique. Nous avons montré que la pulsation spatiale et la longueur d'onde d'un mode propre correspondait à un pôle d'une valeur propre des matrices de réflexion et de transmission. Comme pour le problème scalaire, le pôle est accompagné d'un zéro, présent au numérateur de la valeur propre résonnante. Nous avons généralisé l'étude exposée dans le deuxième chapitre concernant les propriétés des zéros en fonction des symétries de la structure. Maintenant, nous savons que la réflectivité d'une structure symétrique par rapport à un axe vertical est égale à l'unité à la résonance, pour une polarisation incidente particulière, correspondant à la polarisation du mode propre. Pour la polarisation orthogonale, l'onde incidente n'excite pas la résonance, et la réflectivité reste faible si la structure est un anti-reflet. Nous en avons déduit une condition nécessaire pour obtenir un filtre indépendant de la polarisation: deux modes propres doivent être excités, pour la même pulsation spatiale, et la même longueur d'onde. Nous avons présenté deux exemples simples remplissant cette condition, le réseau bi-dimensionnel en incidence normale, et le réseau mono-dimensionnel supportant un mode TE et un mode TM. Ce dernier fonctionne hors incidence normale, mais l'utilisation de deux modes guidés augmente les contraintes de fabrication. Pour échapper à cette difficulté, il faut trouver d'autres configurations dans lesquelles deux modes propres peuvent être excités hors incidence normale, pour la même pulsation spatiale, la même longueur d'onde, en n'utilisant qu'un seul mode guidé de la structure de référence. Dans le sixième chapitre, nous proposons une solution pour y parvenir.

Chapitre 6

Excitation de deux modes propres dégénérés

Pour concevoir un filtre efficace indépendant de la polarisation, il est nécessaire de pouvoir exciter deux modes propres pour une même pulsation spatiale et une même longueur d'onde incidente. Hors incidence normale, les structures satisfaisant cette contrainte sont très rares. Cependant, dans le cas limite où la hauteur du réseau est nulle, il existe de nombreuses configurations possédant deux modes dégénérés. Il suffit que le plan d'incidence soit un plan de symétrie du réseau virtuel. Par exemple, le réseau mono-dimensionnel en incidence conique pure permet le couplage de deux modes guidés grâce aux ordres $(+1)$ et (-1) du réseau réciproque. Les deux modes guidés excités se superposent pour générer deux modes propres résultants, l'un dont le champ est symétrique par rapport au plan d'incidence et l'autre anti-symétrique. Il en est de même pour un réseau bi-dimensionnel éclairé selon une bissectrice de ses axes, que les directions de périodisation soient orthogonales (maille carrée) ou non (maille hexagonale). Malheureusement, la répartition dans la structure du champ du mode symétrique est dissemblable de celle du mode anti-symétrique, et leurs longueurs d'onde sont en général différentes dès que la hauteur du réseau est non nulle. On parle de levée de dégénérescence ou encore de création de bande interdite. Ce phénomène est identique à celui observé pour un réseau mono-dimensionnel en incidence normale, dans les cristaux photoniques [Joannopoulos et al., 1995] et pour les plasmons de surface [Barnes et al., 1996]. Cependant, il est possible de rapprocher les deux longueurs d'onde en limitant le couplage entre les modes guidés. Ainsi, des exemples de filtres indépendants de la polarisation ont déjà été obtenus avec un réseau mono-dimensionnel en incidence conique pure [Lacour et al., 2001], et des réseaux bi-dimensionnels [Mizutani et al., 2001]. La difficulté consiste à trouver les valeurs particulières des paramètres qui permettent d'annuler le couplage entre les modes excités. Pour concevoir un filtre indépendant de la polarisation, la connaissance des expressions, au moins approchées, de la longueur d'onde propre du mode symétrique et du mode anti-symétrique en fonction des paramètres de la structure serait un outil précieux. Encore une fois, la méthode perturbative nous fournit ces expressions [Fehrembach et al., 2002a]

[Fehrembach and Sentenac, 2003].

Dans un premier temps, nous préciserons la longueur d'onde propre, la pulsation spatiale, et la forme du champ du mode de référence choisi. Ensuite, nous résoudrons le problème homogène de manière perturbative, et nous présenterons et commenterons les résultats. Nous terminerons ce chapitre par des exemples numériques de filtres indépendants de la polarisation.

6.1 Le mode de référence

Nous considérons un guide d'onde plan supportant un mode guidé TE, dont la relation de dispersion, l'ensemble des couples ($\boldsymbol{\kappa}^{ref}$,$\lambda^{ref}$), est connue. Les notations utilisées pour la structure de référence sont similaires à celles du deuxième chapitre, et sont rappelées sur la figure (fig. 6.1a). Nous choisissons deux axes de périodisation (Ox) (période d_x) et (Oy) (période d_y),

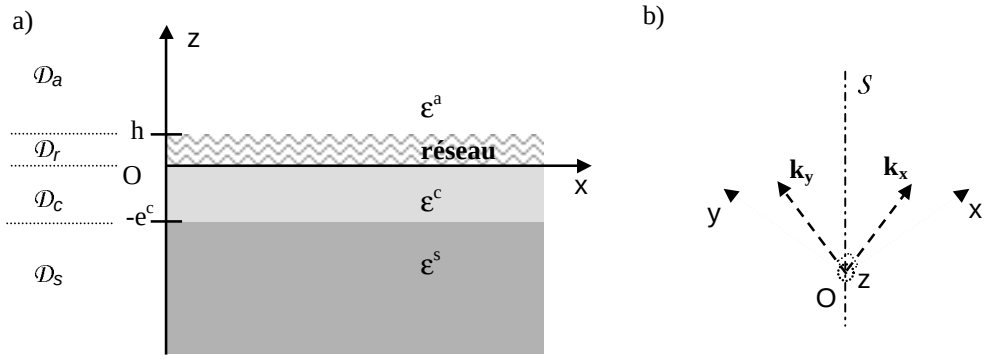


FIG. 6.1 – *Notations utilisées pour la méthode perturbative vectorielle.*

orthogonaux ou non, et un vecteur pulsation spatiale $\boldsymbol{\kappa}$ de telle sorte qu'il existe deux couples d'entiers relatifs (p_1,q_1) et (p_2,q_2) tels que

$$\lambda^{ref}(\boldsymbol{\kappa} + \mathbf{K}_{p_1,q_1}) = \lambda^{ref}(\boldsymbol{\kappa} + \mathbf{K}_{p_2,q_2}) = \lambda^{ref} \tag{6.1}$$

où $\mathbf{K}_{m,n} = m\mathbf{K}_x + n\mathbf{K}_y$. Les modes ($\boldsymbol{\kappa} + \mathbf{K}_{p_1,q_1}$, λ^{ref}) et ($\boldsymbol{\kappa} + \mathbf{K}_{p_2,q_2}$, λ^{ref}) sont des modes dégénérés du guide d'onde plan à période fictive. Nous nommons $\mathcal{S}$ le plan contenant l'axe (Oz) et la première bissectrice des axes (Ox) et (Oy) (fig. 6.1b), et nous supposons que la structure est symétrique par rapport à ce plan. Dans ce cas, les périodes d_x et d_y sont égales. Les vecteurs de base du réseau réciproque ont donc la même norme, et un vecteur quelconque du réseau réciproque vérifie $|\mathbf{K}_{m,n}| = |\mathbf{K}_{n,m}|$.

Comme nous nous intéressons aux modes pseudo-périodiques du guide d'onde perturbé (5.5), nous écrivons également le mode de référence sous la forme pseudo-périodique, ou encore en développement de Fourier généralisé:

$$\mathbf{E}^{ref}(\mathbf{r}) = \sum_m \sum_n \mathbf{e}^{ref}_{m,n}(z) \exp\left(i\boldsymbol{\kappa}_{m,n}.\boldsymbol{\rho}\right) \tag{6.2}$$

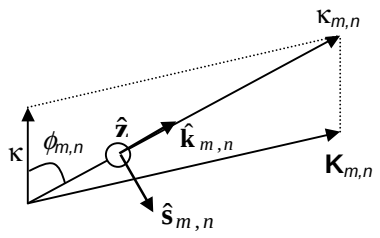


FIG. 6.2 – *Base $\Gamma_{m,n}$ associée à la direction $\boldsymbol{\kappa}_{m,n}$.*

où $\boldsymbol{\kappa}_{m,n} = \boldsymbol{\kappa} + \mathbf{K}_{m,n}$.

Nous introduisons l'ensemble de bases orthogonales directes $\Gamma_{m,n}$ associées à la direction $\boldsymbol{\kappa}_{m,n}$, et formées par les trois vecteurs ($\hat{\mathbf{s}}_{m,n}$, $\hat{\mathbf{k}}_{m,n}$, $\hat{\mathbf{z}}$) (fig. 6.2) où

$$\hat{\mathbf{k}}_{m,n} = \frac{\boldsymbol{\kappa}_{m,n}}{|\boldsymbol{\kappa}_{m,n}|} \quad \text{et} \quad \hat{\mathbf{s}}_{m,n} = \hat{\mathbf{k}}_{m,n} \times \hat{\mathbf{z}}. \tag{6.3}$$

Nous appelons ($e^{ref,s}_{m,n}$, $e^{ref,k}_{m,n}$, $e^{ref,z}_{m,n}$) les composantes de $\mathbf{e}^{ref}_{m,n}$ dans la base $\Gamma_{m,n}$. Le mode de référence étant la superposition des deux modes propres TE du guide d'onde plan à période fictive, définis par ($\boldsymbol{\kappa}_{p_1,q_1}$, λ^{ref}) et ($\boldsymbol{\kappa}_{p_2,q_2}$, λ^{ref}), nous en déduisons que tous les coefficients $\mathbf{e}^{ref}_{n,p}$ sont nuls sauf $e^{ref,s}_{p_1,q_1}$, et $e^{ref,p}_{p_2,q_2}$.

6.2 Résolution perturbative du problème homogène

Nous souhaitons résoudre le problème homogène de manière perturbative. Plus précisément, nous cherchons la longueur d'onde des modes propres du guide d'onde perturbé sous la forme de développements limités en fonction de la hauteur h du réseau, ayant pour limite la longueur d'onde λ^{ref} du mode de référence:

$$\lambda(h) = \lambda^{ref} + h\dot{\lambda}(0) + h^2\ddot{\lambda}(0) + o(h^2) \tag{6.4}$$

Nous cherchons aussi les coefficients du champ des modes propres du guide d'onde perturbé sous la forme de développements limités égal au champ $\mathbf{e}^{ref}_{m,n}$ du mode de référence à l'ordre zéro:

$$\mathbf{e}_{m,n}(z,h) = \mathbf{e}^{ref}_{m,n} + h\dot{\mathbf{e}}_{m,n}(z,0) + h^2\ddot{\mathbf{e}}_{m,n}(z,0) + o(h^2). \tag{6.5}$$

6.2.1 Solution exacte du problème

Le champ du mode propre est solution de l'équation de Helmholtz (5.7), que nous pouvons écrire, en faisant intervenir la constante diélectrique de la perturbation ε_{per}, sous la forme suivante:

$$\mathbf{rot\ rot}\ \mathbf{E}(\mathbf{r}) - \varepsilon_{go}(z)k_0^2\mathbf{E}(\mathbf{r}) = k_0^2\varepsilon_{per}(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r}). \tag{6.6}$$

Pour résoudre cette équation, nous introduisons le tenseur de Green, solution de:

$$\mathbf{rot\ rot}\ \mathbf{G}(\rho-\rho',z,z') - \varepsilon_{go}(z)k_0^2\mathbf{G}(\rho-\rho',z,z') = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\mathbf{1}, \tag{6.7}$$

où **1** désigne le tenseur unité. Le champ du mode est alors solution de l'équation intégrale

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = k_0^2 \int_0^h \iint \varepsilon_{per}(\mathbf{r}')\mathbf{G}(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}',z,z')\mathbf{E}(\mathbf{r}')d\boldsymbol{\rho}'dz' \tag{6.8}$$

De plus, **E** est pseudo-périodique et peut être décomposé en série de Fourier généralisée (éq. 5.6). La constante diélectrique de la perturbation est périodique et peut être décomposée en série de Fourier:

$$\varepsilon_{per}(\mathbf{r}) = \sum_m \sum_n \tilde{\varepsilon}_{m,n}(z) \exp(i\mathbf{K}_{m,n}.\boldsymbol{\rho}). \tag{6.9}$$

En remplaçant **E** et ε_{per} par leur développement (éq. 5.6 et 6.9) dans l'équation intégrale (6.8), nous obtenons finalement un système infini d'équations couplées:

$$\mathbf{e}_{m,n}(z) = k_0^2 \sum_j \sum_l \tilde{\varepsilon}_{m-j,n-l} \int_0^h \mathbf{g}_{m,n}(z,z')\mathbf{e}_{j,l}(z')dz' \tag{6.10}$$

où **g** désigne la transformée de Fourier de **G**, définie par

$$\mathbf{g}_{m,n}(z,z') = \iint \mathbf{G}(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}',z,z') \exp(-i(\mathbf{K}_{m,n} + \boldsymbol{\kappa}).(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'))d\boldsymbol{\rho}'. \tag{6.11}$$

Afin de résoudre le système d'équations (6.10), nous avons besoin de connaître l'expression du tenseur de Green, c'est l'objet du paragraphe suivant.

6.2.2 Le tenseur de Green

Nous ne détaillerons pas ici le calcul du tenseur de Green [Tsang et al., 1985] [Sentenac, 1993]. Nous nous contenterons de donner sa forme dans la base $\Gamma_{m,n}$, puis nous mettrons en évidence les propriétés de résonance de certains coefficients du tenseur de Green.

Forme du tenseur de Green dans la base $\Gamma_{m,n}$

Dans la base $\Gamma_{m,n}$, la transformée de Fourier du tenseur de Green $\mathbf{g}_{m,n}$ s'écrit sous une forme simple:

$$\mathbf{g}_{m,n}(z,z') = \begin{bmatrix} g^s_{m,n}(z,z') & 0 & 0 \\ 0 & g^k_{m,n}(z,z') & g^{kz}_{m,n}(z,z') \\ 0 & g^{zk}_{m,n}(z,z') & g^z_{m,n}(z,z') \end{bmatrix}. \tag{6.12}$$

Les coefficients de $\mathbf{g}_{m,n}$ ont pour expression, pour $z' \in \mathcal{D}^r$ et quel que soit z:

$$\begin{aligned}
g^z_{m,n}(z,z') &= \frac{i\pi\boldsymbol{\kappa}^2_{m,n}}{\varepsilon^a k_0^2 \gamma^a_{m,n}} \left[\exp(i\gamma^a_{m,n}|z-z'|) - r_{go,p}(\boldsymbol{\kappa}_{m,n})\exp(i\gamma^a_{m,n}(z+z'))\right] + \tfrac{2i}{\varepsilon^a k_0^2}\delta(z-z') \\
g^{zk}_{m,n}(z,z') &= \frac{i\pi\boldsymbol{\kappa}_{m,n}}{\varepsilon^a k_0^2} \left[\mathrm{signe}(z'-z)\exp(i\gamma^a_{m,n}|z-z'|) - r_{go,p}(\boldsymbol{\kappa}_{m,n})\exp(i\gamma^a_{m,n}(z+z'))\right] \\
g^{kz}_{m,n}(z,z') &= \frac{i\pi\boldsymbol{\kappa}_{m,n}}{\varepsilon^a k_0^2} \left[\mathrm{signe}(z'-z)\exp(i\gamma^a_{m,n}|z-z'|) + r_{go,p}(\boldsymbol{\kappa}_{m,n})\exp(i\gamma^a_{m,n}(z+z'))\right] \\
g^{k}_{m,n}(z,z') &= \frac{i\pi\gamma^a_{m,n}}{\varepsilon^a k_0^2} \left[\exp(i\gamma^a_{m,n}|z-z'|) + r_{go,p}(\boldsymbol{\kappa}_{m,n})\exp(i\gamma^a_{m,n}(z+z'))\right] \\
g^{s}_{m,n}(z,z') &= \frac{i\pi}{\gamma^a_{m,n}} \left[\exp(i\gamma^a_{m,n}|z-z'|) + r_{go,s}(\boldsymbol{\kappa}_{m,n})\exp(i\gamma^a_{m,n}(z+z'))\right].
\end{aligned} \tag{6.13}$$

où $\mathrm{signe}(z'-z) = +1$ si $z'-z \geq 0$ et -1 dans le cas contraire. Les termes de $\mathbf{g}_{m,n}$ dépendent des coefficients de réflexion de la structure plane $r_{go,s}$ et $r_{go,p}$ en polarisation s et p. Comme nous avons supposé que le guide d'onde plan supportait un mode guidé TE, le coefficient de réflexion en polarisation s possède un pôle. Certains termes du tenseur de Green ont donc un comportement résonnant au voisinage de ce mode.

Coefficients résonnants du tenseur de Green

Nous travaillons à une longueur d'onde λ proche de la longueur d'onde λ^{ref} d'un mode propre TE du guide d'onde plan. D'après l'équation (6.1), les coefficients de réflexion $r_{go,s}(\boldsymbol{\kappa}_{p_1,q_1})$ et $r_{go,s}(\boldsymbol{\kappa}_{p_2,q_2})$ sont résonnants au voisinage de λ^{ref}. Nous en déduisons que les coefficients $g^s_{p_1,q_1}$ et $g^s_{p_2,q_2}$ du tenseur de Green sont également résonnants, et s'écrivent, au voisinage de λ^{ref}, sous la forme:

$$g^s_{p_1,q_1}(\boldsymbol{\kappa},\lambda) = \frac{A_{p_1,q_1}(\boldsymbol{\kappa},\lambda)}{\lambda-\lambda^{ref}} \quad \text{et} \quad g^s_{p_2,q_2}(\boldsymbol{\kappa},\lambda) = \frac{A_{p_2,q_2}(\boldsymbol{\kappa},\lambda)}{\lambda-\lambda^{ref}} \tag{6.14}$$

Dans la résolution perturbative de l'équation (6.10), les coefficients du champ dépendant de $g^s_{p_1,q_1}$ et de $g^s_{p_2,q_2}$ seront donc prépondérants.

Le calcul du développement perturbatif pourra être omis en première lecture. Les résultats importants sont exposés et commentés par la suite.

6.2.3 Calcul du développement perturbatif

Avant de réaliser le développement perturbatif de l'équation intégrale (6.10), intéressons-nous au produit $\mathbf{g}_{m,n}\mathbf{e}_{j,l}$. Pour pouvoir utiliser l'expression simple de $\mathbf{g}_{m,n}$ dans la base $\Gamma_{m,n}$, nous devons exprimer $\mathbf{e}_{j,l}$ dans cette base. Nous introduisons donc la matrice de passage $\mathbf{P}_{mn,jl}$ de la base $\Gamma_{j,l}$ à la base $\Gamma_{m,n}$. En notant $\phi_{m,n}$ l'angle formé par les vecteurs $\boldsymbol{\kappa}$ et $\boldsymbol{\kappa}+\mathbf{K}_{m,n}$ (fig. 6.2), nous avons:

$$\mathbf{P}_{mn,jl} = \begin{pmatrix} \cos(\phi_{m,n}-\phi_{j,l}) & -\sin(\phi_{m,n}-\phi_{j,l}) & 0 \\ \sin(\phi_{m,n}-\phi_{j,l}) & \cos(\phi_{m,n}-\phi_{j,l}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{6.15}$$

En effectuant le produit $\mathbf{g}_{m,n}\mathbf{e}_{j,l}$, nous obtenons, dans la base $\Gamma_{m,n}$:

$$\mathbf{g}_{m,n}(z,z')\mathbf{e}_{j,l}(z') = \begin{pmatrix} e^s_{j,l}(z')g^s_{m,n}(z,z')\left(\cos(\phi_{m,n}-\phi_{j,l}) - e^k_{j,l}(z')\sin(\phi_{m,n}-\phi_{j,l})\right) \\ e^s_{j,l}(z')g^k_{m,n}(z,z')\left(\sin(\phi_{m,n}-\phi_{j,l}) + e^k_{j,l}(z')\cos(\phi_{m,n}-\phi_{j,l})\right) + e^z_{j,l}(z')g^{kz}_{m,n}(z,z') \\ e^s_{j,l}(z')g^{zk}_{m,n}(z,z')\left(\sin(\phi_{m,n}-\phi_{j,l}) + e^k_{j,l}(z')\cos(\phi_{m,n}-\phi_{j,l})\right) + e^z_{j,l}(z')g^z_{m,n}(z,z') \end{pmatrix} \tag{6.16}$$

D'après l'écriture (6.16), nous remarquons que les coefficients résonnants du tenseur de Green $g^s_{p_1,q_1}$ et $g^s_{p_2,q_2}$ interviennent uniquement dans les expressions de $e^s_{p_1,q_1}$ et $e^s_{p_2,q_2}$. Lors du développement de l'intégrale (6.10), ces coefficients seront traités de manière différente.

Nous sommes maintenant en mesure de calculer le développement perturbatif. Pour les composantes non résonnantes du champ, le développement de l'équation intégrale (6.10), et l'utilisation de la décomposition du produit $\mathbf{g}_{m,n}\mathbf{e}_{j,l}$ dans la base $\Gamma_{m,n}$ fournit directement, à l'ordre 1 en h:

$$\begin{array}{ll} \dot{e^s}_{m,n}(z,0) = k_0^2 g^s_{m,n}\sum_{i=1}^2\left[\varepsilon_{m-p_i,n-q_i}e^s_{p_i,q_i}\cos(\phi_{m,n}-\phi_{p_i,q_i})\right] & \text{pour } (m,n)\neq(p_i,q_i) \\ \dot{e^k}_{m,n}(z,0) = k_0^2 g^k_{m,n}\sum_{i=1}^2\left[\varepsilon_{m-p_i,n-q_i}e^s_{p_i,q_i}\sin(\phi_{m,n}-\phi_{p_i,q_i})\right] & \forall(m,n) \\ \dot{e^k}_{m,n}(z,0) = k_0^2 g^z_{m,n}\sum_{i=1}^2\left[\varepsilon_{m-p_i,n-q_i}e^s_{p_i,q_i}\sin(\phi_{m,n}-\phi_{p_i,q_i})\right] & \forall(m,n) \end{array} \tag{6.17}$$

Pour le calcul de $e^s_{p_1,q_1}$ et de $e^s_{p_2,q_2}$, nous multiplions les deux membres de l'équation (6.10) par $(\lambda-\lambda^{ref})$ avant de réaliser le développement en h. Après identification, nous obtenons à l'ordre 1 en h un système de deux équations couplées reliant $e^s_{p_1,q_1}$ et $e^s_{p_2,q_2}$:

$$\begin{array}{l} \dot{\lambda^p}e^s_{p_1,q_1}(z,0) = k_0^2 A_{p_1,q_1}\left[\tilde{\varepsilon}_{0,0}e^s_{p_1,q_1}(0,0) + \tilde{\varepsilon}_{p_1-p_2,q_1-q_2}e^s_{p_2,q_2}(0,0)\cos(\phi_{p_1,q_1}-\phi_{p_2,q_2})\right] \\ \dot{\lambda^p}e^s_{p_2,q_2}(z,0) = k_0^2 A_{p_2,q_2}\left[\tilde{\varepsilon}_{0,0}e^s_{p_2,q_2}(0,0) + \tilde{\varepsilon}_{p_2-p_1,q_2-q_1}e^s_{p_1,q_1}(0,0)\cos(\phi_{p_2,q_2}-\phi_{p_1,q_1})\right]. \end{array} \tag{6.18}$$

Les coefficients $e^s_{p_1,q_1}$ et $e^s_{p_2,q_2}$ sont non nuls si le déterminant du système d'équations (6.18) est nul, nous en déduisons l'expression de $\dot{\lambda^p}$:

$$\dot{\lambda^p} = \frac{k_0^2}{2}\left[\tilde{\varepsilon}_{0,0}(A_{p_1,q_1}+A_{p_2,q_2}) \pm \sqrt{\tilde{\varepsilon}^2_{0,0}(A_{p_1,q_1}-A_{p_2,q_2})^2 + 4\left|\tilde{\varepsilon}_{p_1-p_2,q_1-q_2}\right|^2 A_{p_1,q_1}A_{p_2,q_2}\cos^2(\phi_{p_1,q_1}-\phi_{p_2,q_2})}\right] \tag{6.19}$$

Pour simplifier cette expression nous choisissons $\boldsymbol{\kappa}$ dans le plan $\mathcal{S}$. Dans ce cas, les deux couples d'entier (p_1,q_1) et (p_2,q_2) vérifiant l'équation (6.1) sont tels que $p_1 = q_2 = p$ et $p_2 = q_1 = q$. Nous en déduisons également que $\phi_{p_1,q_1} = -\phi_{p_2,q_2}$, et que $A_{p_1,q_1} = A_{p_2,q_2}$. L'expression de $\dot{\lambda^p}$ se simplifie alors:

$$\dot{\lambda^p} = k_0^2 A_{p,q}\left[\tilde{\varepsilon}_{0,0} \pm \left|\tilde{\varepsilon}_{p-q,q-p}\right|\cos(2\phi_{p,q})\right] \tag{6.20}$$

En reportant cette expression dans le système d'équations (6.18), nous montrons que $e^s_{p,q}$ et $e^s_{q,p}$ sont opposés ou égaux, selon le signe de $\tilde{\varepsilon}_{p-q,q-p}\cos(2\phi_{p,q})$, c'est à dire symétriques ou anti-symétriques par rapport au plan $\mathcal{S}$. Le champ $e^s_{p,q} = -e^s_{q,p}$ correspond au mode symétrique et $e^s_{p,q} = e^s_{q,p}$ au mode anti-symétrique [1]. Les longueurs d'onde du mode symétrique et du mode anti-symétrique sont alors données par:

$$\dot{\lambda^p} = k_0^2 A_{p,q}\left[\tilde{\varepsilon}_{0,0} \mp \tilde{\varepsilon}_{p-q,q-p}\cos(2\phi_{p,q})\right]. \tag{6.21}$$

où le signe négatif correspond au mode symétrique et le signe positif au mode anti-symétrique. Notons le champ du mode $\mathbf{E}$ est rigoureusement symétrique ou anti-symétrique par rapport à $\mathcal{S}$, c'est à dire que $e^s_{m,n} = \mp e^s_{n,m}$, $e^k_{m,n} = \pm e^k_{n,m}$ et $e^z_{m,n} = \pm e^z_{n,m}$. Ceci peut être démontré en remarquant que si $\mathbf{e}_{m,n}$ est solution de (6.10) alors $\mathbf{M}_{m,n}$, défini par $M^s_{m,n} = e^s_{m,n} \pm e^s_{n,m}$, $M^k_{m,n} = e^k_{m,n} \mp e^k_{n,m}$ et $M^z_{m,n} = e^z_{m,n} \mp e^z_{n,m}$ est également solution de (6.10).

D'après l'équation (6.21), λ^p est réel à l'ordre 1 en h. Pour obtenir sa partie imaginaire, nous devons poursuivre le développement de (6.10) à l'ordre 2 en h. Le calcul est long mais ne pose pas de difficulté particulière. Nous

1. le signe négatif vient du choix des bases $\Gamma_{m,n}$

obtenons:

$$\begin{aligned}\ddot{\lambda}^p = \quad & k_0^4 A_{p,q} \sum_{j\notin\{p,q\}} \sum_{l\notin\{p,q\}} \tilde{\varepsilon}_{p-j,q-l}\tilde{\varepsilon}_{j-q,l-p} \left[g_{j,l}^k \sin(\phi_{p,q}-\phi_{j,l}) \left(\sin(\phi_{p,q}-\phi_{j,l}) \pm \sin(\phi_{p,q}+\phi_{j,l})\right)\right] \\ & +k_0^4 A_{p,q} \sum_{j\notin\{p,q\}} \sum_{l\notin\{p,q\}} \tilde{\varepsilon}_{p-j,q-l}\tilde{\varepsilon}_{j-q,l-p} \left[g_{j,l}^s \cos(\phi_{p,q}-\phi_{j,l}) \left(\cos(\phi_{p,q}-\phi_{j,l}) \mp \cos(\phi_{p,q}+\phi_{j,l})\right)\right] \\ & -k_0^4 A_{p,q} \left|\tilde{\varepsilon}_{p-q,q-p}\right|^2 \sin^2(2\phi_{p,q}) + \frac{\dot{\lambda}^p}{A_{p,q}^2(0,0)} \frac{d}{dz'} \left[A_{p,q}^2(0,z')\right]_{z'=0}\end{aligned} \tag{6.22}$$

Les résultats présentés et commentés dans le paragraphe suivant sont issus des équations (6.21) et (6.22).

6.3 Résultats du développement perturbatif

Les résultats que nous présentons et commentons dans ce paragraphe ont été obtenus en supposant que le réseau est symétriques par rapport à $\mathcal{S}$ et que $\boldsymbol{\kappa}$ appartient à $\mathcal{S}$. Dans ce cas, $d_x = d_y$, $\mathbf{K}_{m,n}$ et $\mathbf{K}_{n,m}$ sont symétriques par rapport à $\mathcal{S}$, ainsi que $\boldsymbol{\kappa} + \mathbf{K}_{m,n}$ et $\boldsymbol{\kappa} + \mathbf{K}_{n,m}$. En conséquence, les couples (p_1,q_1) et (p_2,q_2) vérifiant l'équation (6.1) sont tels que $p_1 = q_2 = p$ et $q_1 = p_2 = q$.

Les longueurs d'onde des modes propres symétrique et anti-symétrique du guide d'onde perturbé sont réelles à l'ordre 1 en h, et données respectivement par:

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(\lambda^{p+}) &= \lambda^{ref} + hk_0^2 A_{p,q} \left[\tilde{\varepsilon}_{0,0} - \tilde{\varepsilon}_{p-q,q-p}\cos(2\phi_{p,q})\right] + o(h) \\ \mathrm{Re}(\lambda^{p-}) &= \lambda^{ref} + hk_0^2 A_{p,q} \left[\tilde{\varepsilon}_{0,0} + \tilde{\varepsilon}_{p-q,q-p}\cos(2\phi_{p,q})\right] + o(h).\end{aligned} \tag{6.23}$$

La partie réelle de la différence $\lambda^{p-} - \lambda^{p+}$ prend alors la forme simple:

$$\boxed{\mathrm{Re}(\lambda^{p-} - \lambda^{p+}) = 2hk_0^2 A_{p,q}\tilde{\varepsilon}_{p-q,q-p}\cos(2\phi_{p,q}) + o(h)}. \tag{6.24}$$

Un résultat très important peut être démontré à partir de cette équation: lorsque $\cos(2\phi_{p,q})$ et $\tilde{\varepsilon}_{p-q,q-p}$ sont différents de zéro, et que h est petit, le signe de $\mathrm{Re}(\lambda^{p-} - \lambda^{p+})$ est donné par $A_{p,q}\tilde{\varepsilon}_{p-q,q-p}\cos(2\phi_{p,q})$. En conséquence, lorsque nous faisons varier $\cos(2\phi_{p,q})$ ou $\tilde{\varepsilon}_{p-q,q-p}$ d'une valeur négative à une valeur positive, $\mathrm{Re}(\lambda^{p-} - \lambda^{p+})$ change également de signe et s'annule nécessairement, pour une valeur particulière de $\cos(2\phi_{p,q})$ ou $\tilde{\varepsilon}_{p-q,q-p}$. Cette valeur est en général petite, mais non nulle de manière à compenser les termes d'ordre supérieur. Nous venons donc de démontrer l'existence de configurations pour lesquelles le mode symétrique et le mode anti-symétrique peuvent être excités à la même longueur d'onde, pour la même pulsation spatiale. Notons que $\tilde{\varepsilon}_{p-q,q-p}$ correspond au coefficient de Fourier permettant le couplage entre les modes excités, et $2\phi_{p,q}$ à l'angle entre les directions de propagations des ces deux modes. Nous pouvons maintenant comprendre les résultats obtenus dans les références [Lacour et al., 2001] et [Mizutani et al., 2001]. Dans le premier cas, la configuration étudiée est un réseau monodimensionnel en incidence conique pure. La superposition des pics de résonance s et p a été obtenue en ajustant le facteur de remplissage de la structure. Nous avons vérifié que pour la structure proposée, le coefficient de Fourier responsable du couplage entre les modes est proche de zéro. Dans le second cas, une des configurations étudiées est un réseau hexagonal régulier éclairé sur un axe de symétrie. Les auteurs ont agi sur l'angle d'incidence, donc sur l'angle

entre les directions de propagation des modes propres excités. Ils ont remarqué que les pics de résonance s et p se superposent lorsque cet angle est proche de 90°.

Les parties imaginaires des longueurs d'onde propres symétrique et anti-symétrique sont à l'ordre 2 en h:

$$\boxed{\mathrm{Im}(\lambda^{p+}) = 2h^2 k_0^4 A_{p,q} \left|\tilde{\varepsilon}_{p,q}\right|^2 g_{0,0}^k \sin^2(\phi_{p,q}) + o(h^2)}$$
$$\boxed{\mathrm{Im}(\lambda^{p-}) = 2h^2 k_0^4 A_{p,q} \left|\tilde{\varepsilon}_{p,q}\right|^2 g_{0,0}^s \cos^2(\phi_{p,q}) + o(h^2)}. \tag{6.25}$$

L'équation (6.25) montre que la partie imaginaire de la longueur d'onde du mode symétrique dépend de $\sin^2(\phi_{p,q})$, alors que celle du mode anti-symétrique dépend de $\cos^2(\phi_{p,q})$. En conséquence, les largeurs des pics de résonance du mode symétrique et du mode anti-symétriques seront égales lorsque $\phi_{p,q}$ sera proche de 45°. Dans la référence [Lacour et al., 2001], cette condition n'est pas satisfaite, c'est pourquoi les largeurs des pics de résonances sont très différentes. Par contre, dans l'exemple de la référence [Mizutani et al., 2001], les largeurs de résonance sont semblables, puisque $\phi_{p,q}$ est proche de 45°.

Interprétation du phénomène de dégénérescence du mode symétrique et du mode anti-symétrique Le mode symétrique et le mode anti-symétriques peuvent être vus comme la somme d'un mode incident et d'un mode réfléchi sur un plan de Bragg du réseau (fig. 6.3a). Une bande de fréquences interdites est crée par le couplage entre le mode incident et le mode

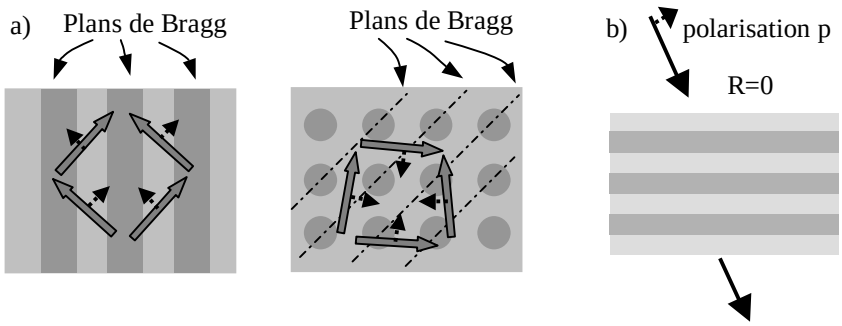


FIG. 6.3 – *a) Réflexion des modes sur les plans de Bragg de réseaux mono-dimensionnel et bi-dimensionnel. b) Configuration de Brewster pour un empilement multicouches.*

réfléchi. Or, il existe une configuration, dite de Brewster, pour laquelle le champ réfléchi par les plans de Bragg est nul. Le phénomène de Brewster (causé par l'anisotropie du rayonnement dipolaire) correspond à l'absence de réflectivité des miroirs de Bragg pour un certain angle d'incidence en polarisation p. Il apparaît quand l'angle formé par le champ réfléchi et le champ incident est proche de 90°. Il n'est donc pas étonnant de constater que la dégénérescence entre le mode symétrique et le mode anti-symétrique apparaît lorsque l'angle entre les directions de propagation des modes incident et réfléchi est proche de 90° [Ramos-Mendieta and Halevi, 1996]

[Winn et al., 1998] [2].

6.4 Illustrations numériques

Dans les trois exemples suivants, le plan d'incidence est un plan de symétrie de la structure. La période du réseau a été choisie de telle sorte que deux modes propres TE soient couplés grâce aux vecteurs $\mathbf{K}_{0,1}$ et $\mathbf{K}_{1,0}$ du réseau réciproque. Afin de valider les expressions théoriques approchées, nous présentons d'abord une comparaison entre le calcul rigoureux des pôles et le calcul pertubatif. Puis nous montrons deux structures possédant un pic de résonance pour la polarisation **s** et un autre pour la polarisation p, à la même longueur d'onde.

6.4.1 Validation de la méthode

La configuration étudiée est un réseau mono-dimensionnel en incidence conique pure (plan d'incidence parallèle aux traits du réseau). Les résultats de la méthode perturbative sont applicables à cette configuration en prenant les axes (Ox) et (Oy) perpendiculaires aux traits du réseau et dans des directions opposées. Dans ce cas, $\mathbf{K}_{m,n} = (m-n)2\pi/d\hat{\mathbf{x}}$. Nous avons calculé la partie réelle et la partie imaginaire de la longueur d'onde du mode symétrique et du mode anti-symétrique de manière rigoureuse, et de manière perturbative en fonction de la hauteur du réseau. Les résultats (calcul rigoureux en trait continu, et perturbatif en trait discontinu) sont présentés sur la figure (fig. 6.4). Nous remarquons une bonne cohérence entre le calcul rigoureux

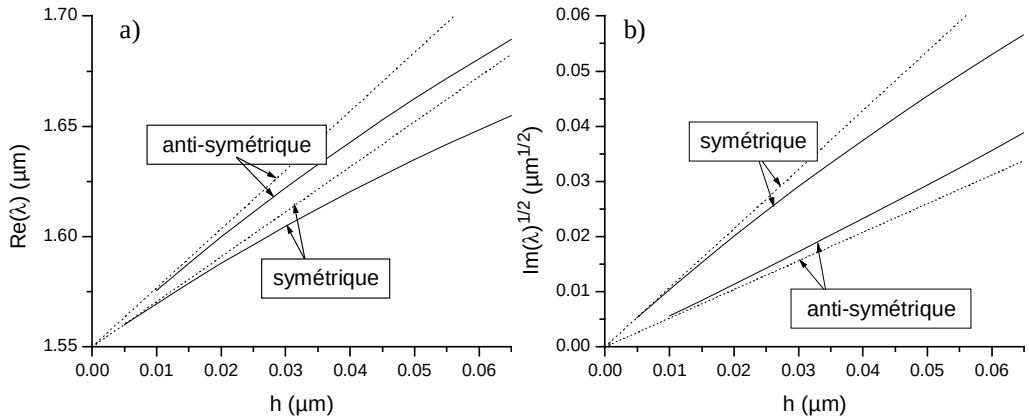


FIG. 6.4 – *Comparaison entre le calcul rigoureux (trait continu) et perturbatif (trait discontinu) de la longueur d'onde du mode symétrique et du mode anti-symétrique, a) partie réelle, b) partie imaginaire. L'empilement est défini par* $\varepsilon^s = 1{,}5^2$, $\varepsilon^c = 3{,}0^2$, $e = 130$ *nm,* $\varepsilon^a = 1{,}0$. *Le réseau est mono-dimensionnel de période* $d = 864$ *nm, et de facteur de remplissage* 0,75 *(structure* 6.1*), et* $\alpha = 2\pi/d$, $\beta = 3{,}5\ \mu m^{-1}$.

et le calcul perturbatif, essentiellement pour les hauteurs inférieures à 20 nm. Ces hauteurs sont

2. Le phénomène de Brewster étant propre à la polarisation p, il est probable que la dégénérescence ne se produise pas avec des modes guidés TM

suffisantes pour obtenir des bandes passantes de l'ordre de 0,1 nm. Les expressions de la partie réelle et de la partie imaginaire de la longueur d'onde du mode symétrique et du mode anti-symétrique validées par cet exemple seront très utiles pour concevoir des filtres indépendants en polarisation. En effet, rappelons que la partie réelle de la longueur d'onde est proche de la longueur d'onde de centrage du pic, et que la partie imaginaire est reliée à sa largeur. Or, un filtre indépendant en polarisation doit présenter un pic de résonance en polarisation s et en polarisation p centrés à la même longueur d'onde, et de largeurs de préférence proches. Donc des longueurs d'onde propres doivent avoir des parties réelles identiques, et des parties imaginaires de même ordre. Nous avons utilisé les expressions analytiques de la longueur d'onde du pôle afin de concevoir de tels filtres.

6.4.2 Filtre indépendant de la polarisation, maille carrée

Dans un premier temps, nous avons essayé de centrer les deux pics de résonance s et p à la même longueur d'onde. D'après l'expression (6.24), la différence entre la partie réelle de la longueur d'onde du mode symétrique et celle du mode anti-symétrique s'annule pour une valeur particulière du coefficient de Fourier responsable du couplage entre les deux modes excités ($\tilde{\varepsilon}_{-1,1}$ dans notre cas). Ce résultat avait déjà été obtenu à l'aide d'un réseau 1D en incidence conique pure [Lacour et al., 2001]. Nous proposons un exemple avec un réseau périodique selon deux directions orthogonales, de même période dans les deux directions. Le motif est du type double période, comme ceux utilisés pour améliorer la tenue à l'incidence. Il est composé de quatre plots centrés en $A(d/4,d/4)$, $B(3d/4,d/4)$, $C(d/4,3d/4)$ et $D(3d/4,3d/4)$. Il est possible de faire varier le coefficient de Fourier $\tilde{\varepsilon}_{-1,1}$ en modifiant un paramètre du motif (par exemple les rayons des plots B et C). Sur la figure (fig. 6.5a), nous avons représenté les variations de la différence entre la partie réelle de la longueur d'onde du mode symétrique et celle du mode anti-symétrique en fonction de $\tilde{\varepsilon}_{-1,1}$. Comme prévu, nous observons que pour une valeur de $\tilde{\varepsilon}_{-1,1}$ proche de 0,01, les parties réelles des longueur d'onde propres sont égales. Pour cette valeur particulière de $\tilde{\varepsilon}_{-1,1}$, nous avons représenté la réflectivité de la structure en fonction de la longueur d'onde sur la figure (fig. 6.5b). Nous obtenons un pic de résonance en polarisation s et un en polarisation p, centrés à la même longueur d'onde. Par contre, les largeurs de ces deux pics sont différentes. Nous pouvons comprendre pourquoi en nous rappelant que la partie imaginaire de la longueur d'onde du mode symétrique est liée au sinus de l'angle formé par les directions de propagation des deux modes excités, alors que celle du mode anti-symétrique est liée au cosinus 6.25. Dans notre cas, $\phi_{1,0} = 68{,}5°$.

Dans le troisième exemple, nous proposons un filtre indépendant en polarisation, dont le pic de résonance garde une largeur à peu près constante quelle que soit la polarisation.

6.4.3 Filtre indépendant en polarisation, maille hexagonale

Des pics de résonance s et p centrés à la même longueur d'onde peuvent être obtenus en agissant sur le coefficient de Fourier responsable du couplage entre les modes propres, comme

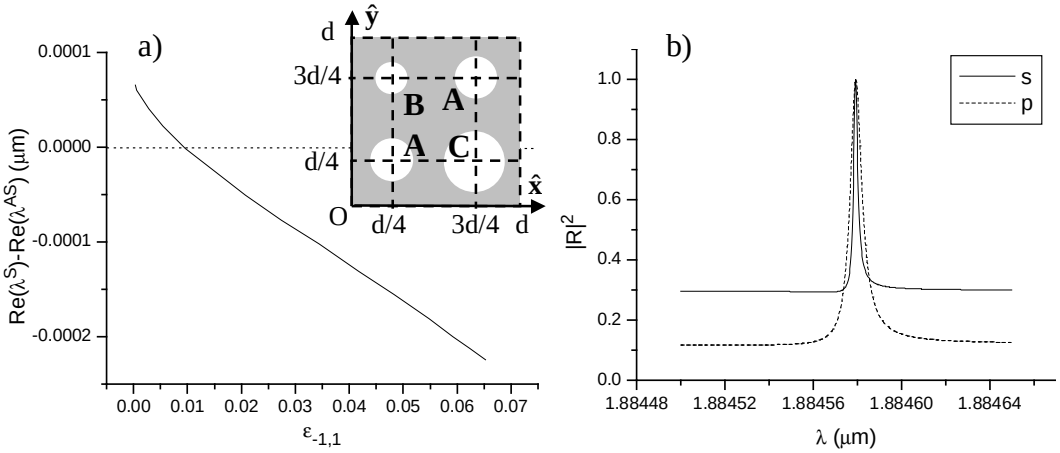


FIG. 6.5 – *a) Différence entre les parties réelles des longueurs d'onde des modes symétrique et anti-symétrique en fonction de $\tilde{\varepsilon}_{-1,1}$. L'empilement est défini par $\varepsilon^s = 1{,}5^2$, $\varepsilon^c = 2{,}0^2$, $e = 230$ nm, $\varepsilon^a = 1{,}0$. La hauteur du réseau est $h = 10$ nm et sa période $d = 984{,}3$ nm. Le motif est du type "double période", composé de quatre trous A, B, C et D. Le rayon des trous est modifié pour faire varier $\tilde{\varepsilon}_{-1,1}$, et $\boldsymbol{\kappa} = 3\sqrt{2}\ \mu m^{-1}$. b) Réflectivité en fonction de la longueur d'onde en polarisations s et p. La structure est celle pour laquelle la partie réelle de la longueur d'onde du mode symétrique est égale à celle du mode anti-symétrique: $\tilde{\varepsilon}_{-1,1} = 0{,}0096$, et les rayons des plots sont $r_A = 123$ nm, $r_B = 38{,}5$ nm et $r_C = 196$ nm. Le plan d'incidence est le plan bissecteur de (Oxz), et de (Oyz). L'angle d'incidence est $39{,}5°$ (structure 6.2).*

dans l'exemple précédent. D'après l'équation 6.24, une autre solution consiste à exciter des modes qui se propagent dans des directions séparés de 90° ($\phi_{1,0} = 45°$). Dans ce cas, non

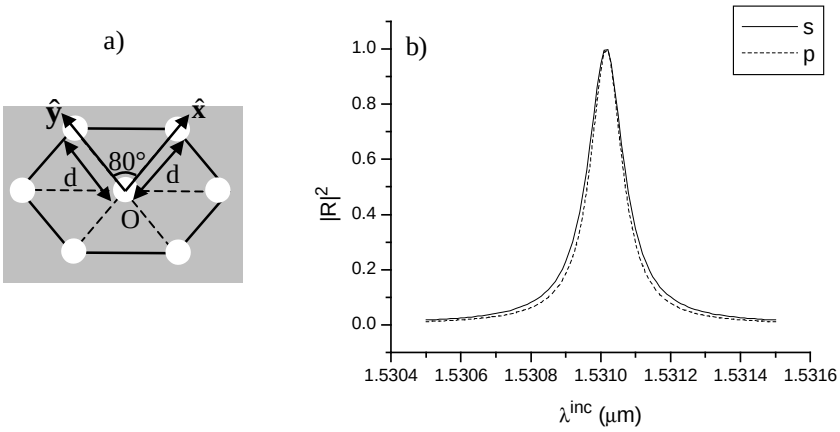


FIG. 6.6 – *a) Réseau périodique selon deux directions séparées par un angle de 80°, de période $d = 953{,}1$ nm, de hauteur $h = 30$ nm. L'empilement est caractérisé par $\varepsilon^s = 1{,}448^2$, $\varepsilon^{c_1} = 2{,}07^2$, $e^{c_1} = 79{,}1$, $\varepsilon^{c_2} = 1{,}47^2$, $e^{c_2} = 263{,}5$, $\varepsilon^{c_3} = 2{,}07^2$, $e^{c_3} = 404{,}3$, $\varepsilon^a = 1{,}0$. Le motif est composé de plots de rayon 200 nm. Le plan d'incidence est le plan bissecteur de (Oxz) et (Oyz), et l'angle d'incidence de $13{,}5°$ (structure 6.3).*

seulement les parties réelles des longueurs d'onde propres symétrique et anti-symétrique sont proches, mais également les parties imaginaires. En théorie, il est possible d'exciter des modes dont les directions de propagation font un angle droit, à l'aide d'un réseau 1D en incidence conique pure. Il suffit de choisir la période du réseau et le vecteur d'onde incident de telle sorte que $\boldsymbol{\kappa} + \mathbf{K}_{1,0}$ soit orthogonal à $\boldsymbol{\kappa} + \mathbf{K}_{0,1}$. Cela n'est possible que si $\boldsymbol{\kappa}$ et $\mathbf{K}_{0,1}$ ont même module, donc si $|\boldsymbol{\kappa} + \mathbf{K}_{0,1}|$ est proche de $\sqrt{2}\boldsymbol{\kappa}$. Nécessairement, l'indice effectif du mode doit alors être inférieur à $\sqrt{2}$, ce qui est irréalisable en pratique. La condition d'orthogonalité des directions de propagation des modes est plus facile à réaliser avec des réseaux 2D. Nous avons choisi un réseau dont les directions de périodicité forment un angle de 80°. Les vecteurs de base du réseau réciproque sont séparés de 100°. Nous avons fait varier le vecteur $\boldsymbol{\kappa}$ de telle sorte que l'angle entre les directions de propagation des modes excités varient autour de 90°, jusqu'à ce que la différence entre les parties réelles des longueurs d'onde symétrique et anti-symétrique s'annule. Pour cette valeur particulière de $\boldsymbol{\kappa}$, nous avons tracé la réflectivité de la structure en fonction de la longueur d'onde incidente sur la figure (fig. 6.6). Nous observons comme prévu un pic de résonance en polarisation s et un pic en polarisation p centrés à la même longueur d'onde et de même largeur. Le filtre est indépendant en polarisation. Un résultat similaire a été obtenu avec une maille hexagonale régulière (directions de périodicité séparées de 60° [Mizutani et al., 2001]).

6.5 Conclusion

Dans le cinquième chapitre, nous avons démontré une condition nécessaire pour obtenir un filtre efficace indépendant en polarisation: deux modes propres doivent être excités à la même longueur d'onde pour la même pulsation spatiale. Pour satisfaire cette condition, nous proposons d'utiliser un mode guidé et un réseau possédant un plan de symétrie. Lorsque le plan d'incidence est confondu avec le plan de symétrie, deux modes guidés peuvent être excités. Leur couplage génère deux nouveaux modes, l'un symétrique, l'autre anti-symétrique par rapport au plan d'incidence, mais en général, leurs longueurs d'onde propres sont différentes. En effet, lorsque la hauteur du réseau est nulle, les relations de dispersion du mode symétrique et du mode anti-symétrique sont dégénérées. Dès que la hauteur du réseau augmente, la dégénérescence se lève. La méthode perturbative nous a permis de trouver des expressions analytiques approchées des longueurs d'onde propres symétrique et anti-symétrique. Nous avons démontré que la différence entre les parties réelles s'annulait nécessairement pour une valeur particulière, proche de zéro, du coefficient de Fourier responsable du couplage entre les deux modes excités (en général $\tilde{\varepsilon}_{-1,1}$), ou pour une valeur particulière, proche de 90° de l'angle formé par les directions de propagation de ces deux modes. Nous avons aussi démontré que les largeurs des pics de résonance étaient proches, lorsque les modes excités se propageaient dans des directions orthogonales. Ces résultats nous ont permis de concevoir plusieurs structures indépendantes de la polarisation. Le réseau le mieux adapté est à maille hexagonale.

Le sixième chapitre a apporté une solution à la dernière condition à remplir par un filtre

pour le D.W.D.M., l'indépendance à la polarisation. Pour terminer, il ne nous reste plus qu'à faire la synthèse de toutes les solutions proposées.

Conclusion de la troisième partie

Le but de la troisième partie était de trouver des solutions pour créer un filtre indépendant de la polarisation. Nous avons d'abord démontré une condition nécessaire pour atteindre cet objectif: deux modes, de même longueur d'onde et de même pulsation spatiale, donc nécessairement de polarisations orthogonales, doivent être excités simultanément. Lorsqu'un seul mode est excité, la réflectivité atteint 100% si l'onde incidente a la même polarisation que le mode, et ne subit pas la résonance pour la polarisation orthogonale.

Ensuite, nous avons présenté deux types de configurations pour lesquelles la condition est remplie hors incidence normale. Dans la première, deux modes, un TE et un TM sont excités simultanément grâce à un réseau mono-dimensionnel en incidence classique. Le mode TE produit un pic en polarisation s et le mode TM en polarisation p. Les deux pics se superposent systématiquement pour une longueur d'onde et un angle d'incidence qui dépendent essentiellement de la période du réseau. Dans la seconde configuration, un réseau bi-dimensionnel éclairé dans un plan de symétrie permet d'exciter simultanément deux modes, un symétrique et un anti-symétrique. Les modes symétrique et anti-symétrique sont excitables par des ondes incidentes polarisées p et s respectivement. Les deux pics sont dans la plupart des cas centrés à des longueurs d'onde différentes, mais ils peuvent être superposés en ajustant les paramètres du réseau, en particulier le coefficient de Fourier responsable du couplage entre les modes, en général $\tilde{\varepsilon}_{-1,1}$. En fait, ces exemples se ressemblent beaucoup: à chaque fois, l'indépendance à la polarisation est obtenue au point d'intersection des relations de dispersion de deux modes indépendants, pour une longueur d'onde et un angle d'incidence donné. Or, pour pouvoir être utilisé dans les télécommunications D.W.D.M., le filtre doit en outre posséder deux qualités supplémentaires: la tolérance angulaire, et le profil spectral aplati au sommet. Les solutions proposées pour optimiser la tolérance angulaire et la forme du profil spectral sont compatibles, nous l'avons vu dans la deuxième partie. Il est également facile de concevoir un réseau à modes guidés possédant un profil spectral aplati au sommet indépendant de la polarisation: il suffit de coupler deux structures identiques indépendantes de la polarisation. En revanche, la tolérance angulaire et l'indépendance à la polarisation sont plus difficiles à produire simultanément. En effet, pour la première propriété, nous avons proposé de mettre à profit le gap crée par le couplage entre deux modes. Pour la seconde, il est au contraire nécessaire de superposer deux modes qui ne se couplent pas.

En fait, rassembler les trois propriétés n'est pas une étape évidente. Un dernier chapitre est nécessaire pour réaliser cette synthèse.

Chapitre 7

Synthèse

Dans chaque partie de ce manuscrit nous avons présenté une solution pour chaque problème posé par les contraintes du filtrage D.W.D.M.. Grâce à la première partie, nous savons comment réaliser un filtre ultra-sélectif en longueur d'onde, et à fort taux de réjection. La seconde partie nous a permis de montrer comment améliorer la tolérance angulaire, et la tolérance spectrale. Enfin dans la troisième partie, nous avons trouvé comment obtenir l'indépendance à la polarisation. Cependant, la comparaison des solutions proposées pour la tolérance angulaire et l'indépendance à la polarisation montre qu'elles sont incompatibles. En effet, la tolérance angulaire est obtenue en se plaçant au bord du gap créé par le couplage de deux modes, et elle est d'autant plus grande que le couplage entre les deux modes est fort. L'indépendance à la polarisation est obtenue en excitant deux modes guidés de manière symétrique de part et d'autre du plan d'incidence. Ces deux modes se couplent pour créer un mode symétrique (excitable en polarisation p) et un mode anti-symétrique (excitable en polarisation s) séparés par un gap. L'indépendance à la polarisation est obtenue en des points particulier en réduisant le gap ouvert. En résumé, d'une part il faudrait maximiser le couplage entre les deux modes pour améliorer la tolérance angulaire, et d'autre part l'annuler pour que le filtre soit indépendant de la polarisation. Ces deux conditions semblent irréalisables avec une seule structure. Nous verrons comment les satisfaire simultanément. Ensuite, nous étudierons une structure à la fois indépendante de la polarisation et à tolérance angulaire optimisée. Pour terminer ce chapitre, nous présenterons un filtre répondant à l'ensemble des contraintes imposées par le cahier des charges, ainsi qu'un organigramme aidant à la conception de telles structures.

7.1 Combinaison des propriétés de tolérance angulaire et d'indépendance à la polarisation

7.1.1 Rappel des solutions retenues

Pour améliorer la tolérance angulaire hors incidence normale, nous proposons d'utiliser un guide d'onde plan supportant deux modes guidés de même nature, par exemple deux TE, que

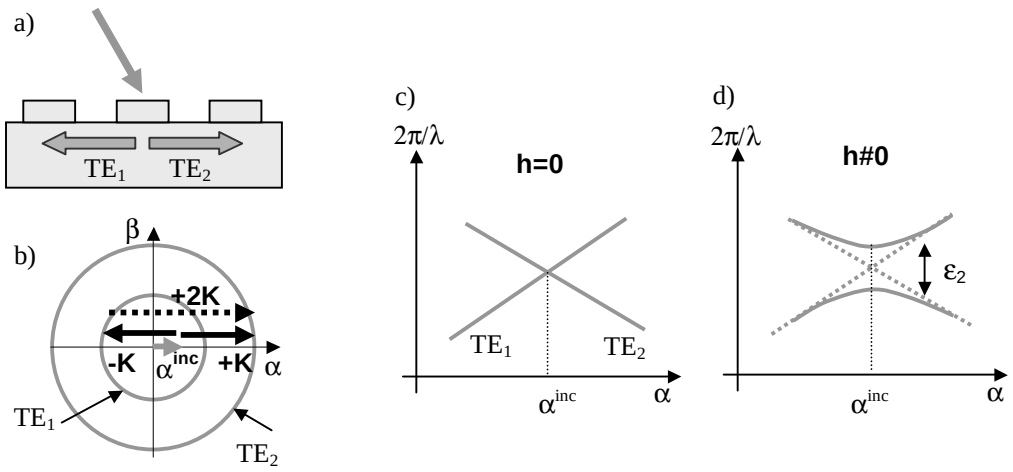


FIG. 7.1 – *Solution retenue pour optimiser le profil angulaire. a) Excitation de deux modes contra-propagatifs TE_1 et TE_2. b) Les deux modes sont excités grâce aux vecteurs $+K$ et $-K$ du réseau réciproque. Ils se couplent via le vecteur $+2K$. c) Lorsque la hauteur du réseau est nulle, les relations de dispersion des modes TE_1 et TE_2 se croisent hors incidence normale. d) Lorsque la hauteur du réseau augmente, le couplage crée une bande interdite dont la largeur est proportionnelle au coefficient de Fourier $\tilde{\varepsilon}_2$ du réseau.*

nous nommons TE_1 et TE_2 (fig. 7.1a). Un réseau gravé sur le guide permet d'exciter les deux modes hors incidence normale, l'un grâce à l'ordre $(+1)$ (TE_1), l'autre grâce à l'ordre (-1) (TE_2) (fig. 7.1b). Lorsque la hauteur du réseau est nulle, les relations de dispersion des deux modes se croisent pour une pulsation spatiale non nulle. Dès que la hauteur du réseau augmente, les deux modes se couplent et un gap apparaît à l'endroit du point d'intersection. La largeur est proportionnelle au coefficient de Fourier responsable du couplage entre les modes, c'est à dire $\tilde{\varepsilon}_2$ dans notre cas. En bord de gap, deux modes propres de même longueur d'onde et de pulsations spatiales légèrement différentes se juxtaposent. L'excitation de ces deux modes génère un profil angulaire aplati au sommet dont la largeur à mi-hauteur est d'autant plus grande que le gap est large. Autrement dit, la tolérance angulaire est proportionnelle à $\tilde{\varepsilon}_2$ dans cette configuration.

Pour obtenir un filtre indépendant de la polarisation, nous proposons d'utiliser un réseau à modes guidés possédant un plan de symétrie $\mathcal{S}$ (fig. 7.2a). En choisissant $\mathcal{S}$ comme plan d'incidence, il est possible, grâce aux ordres (0,1) et (1,0) du réseau, d'exciter deux modes provenant d'un même mode guidé (TE) et se propageant dans deux directions symétriques par rapport à $\mathcal{S}$. Les deux modes excités se couplent pour donner deux nouveaux modes propres (fig. 7.2b). Le premier, symétrique par rapport à $\mathcal{S}$, est excitable en polarisation p. Nous le nommerons TEp. Le deuxième, anti-symétrique par rapport à $\mathcal{S}$, est excitable en polarisation s et sera noté TEs. Lorsque la hauteur du réseau est nulle, les relations de dispersion de TE_s et TE_p sont dégénérées (fig. 7.2c). Dès que la hauteur du réseau augmente, la dégénérescence se lève (fig. 7.2d). La distance entre les relations de dispersion TE_s et TE_p est proportionnelle au coefficient de Fourier responsable du couplage entre les modes, c'est à dire $\tilde{\varepsilon}_{-1,1}$ dans notre cas,

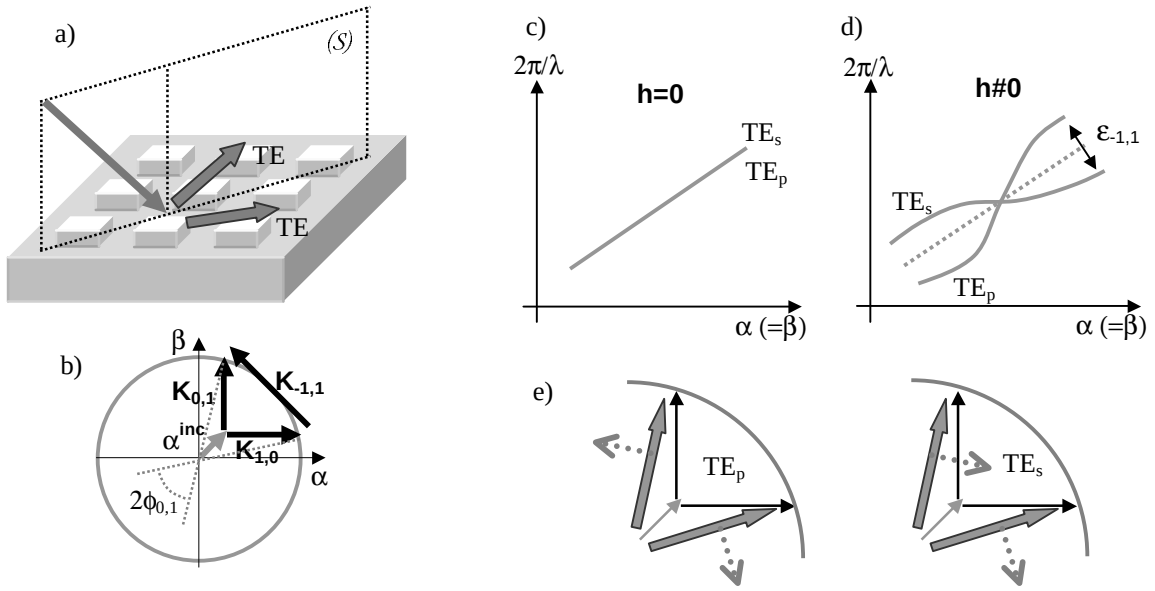


FIG. 7.2 – *Solution retenue pour l'indépendance à la polarisation. a) En choisissant comme plan d'incidence un plan de symétrie de la structure, deux modes TE sont excités. b) Les deux modes sont excités grâce aux vecteurs* $\mathbf{K}_{1,0}$ *et* $\mathbf{K}_{0,1}$ *du réseau réciproque. Ils se couplent via le vecteur* $\mathbf{K}_{-1,1}$*, pour donner un mode* TE_s *et un mode TEp. c) Lorsque la hauteur du réseau est nulle, les relations de dispersion des modes* TE_s *et* TE_p *sont dégénérées. d) Dès que la hauteur du réseau augmente, la dégénérescence se lève.*

et au cosinus de l'angle $2\phi_{0,1}$ formé par les directions de propagation des modes. En jouant sur ces paramètres, il est possible de recréer la dégénérescence en certains points, où l'indépendance à la polarisation est assurée. De plus, si les deux modes sont excités dans des directions quasi-orthogonales, les largeurs des pics de résonances s et p sont similaires.

7.1.2 Combinaison des solutions

Afin de combiner les solutions retenues pour améliorer la tolérance angulaire et assurer l'indépendance à la polarisation, nous proposons d'utiliser un réseau possédant un plan de symétrie ($\mathcal{S}$), gravé sur un guide d'onde plan supportant deux modes guidés, TE_1 et TE_2 (fig. 7.3a). Lorsque le plan d'incidence est le plan de symétrie, deux modes propres provenant du mode guidé TE_1 sont excités grâce aux ordres (0,1) et (1,0) du réseau, et deux modes propres provenant du mode guidé TE_2 sont excités grâce aux ordres $(0,-1)$ et $(-1,0)$ (fig. 7.3b). Les quatre modes excités se couplent deux à deux pour donner quatre nouveaux modes propres, deux symétriques par rapport à $\mathcal{S}$, TE_{1p} et TE_{2p}, et deux anti-symétriques, TE_{1s} et TE_{2s}. Lorsque la hauteur du réseau est nulle, les relations de dispersion des modes TE_{1s} et TE_{1p} sont dégénérées, et il en est de même de TE_{2s} et TE_{2p}. De plus, les deux couples de relations de dispersions (TE_{1s},TE_{1p}) et (TE_{2s},TE_{2p}) se croisent pour une pulsation spatiale non nulle (fig. 7.4a). Au point d'intersection, les quatre modes sont dégénérés. Dès que la hauteur du réseau augmente,

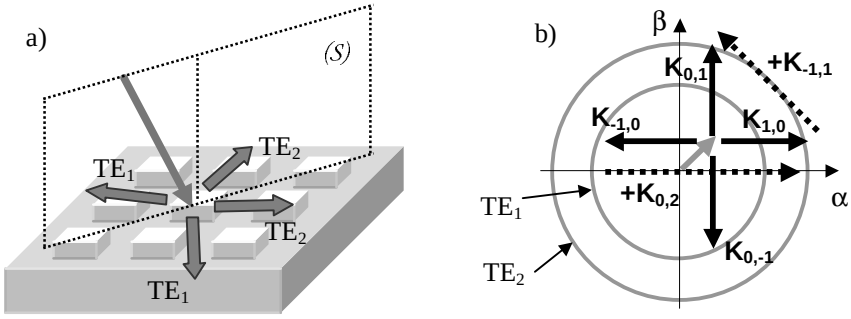


FIG. 7.3 – *Combinaison des solutions. a) Un réseau possédant un plan de symétrie gravé sur un guide d'onde plan supportant deux modes guidés TE_1 et TE_2. b) Deux modes TE_1 sont excités grâce à $\mathbf{K}_{0,1}$ et à $\mathbf{K}_{1,0}$, et deux modes TE_2 sont excités grâce à $\mathbf{K}_{0,-1}$ et à $\mathbf{K}_{-1,0}$. Les modes se couplent deux à deux pour donner TE_{1s}, TE_{1p}, TE_{2s} et TE_{2p}.*

certaines dégénérescences sont levées. Procédons par étapes pour comprendre la forme finale de la relation de dispersion. D'abord, les relations de dispersion TE_{1s} et TE_{1p} se séparent, ainsi que TE_{2s} et TE_{2p}. Quatre configurations sont possibles après la levée de dégénérescence:

- la relation de dispersion TE_{1p} se situe au-dessus de la relation de dispersion de TE_{1s} et TE_{2s} au-dessus de TE_{2p} (fig. 7.4b)
- la relation de dispersion TE_{1s} se situe au-dessus de la relation de dispersion de TE_{1p} et TE_{2p} au-dessus de TE_{2s} (analogue au cas précédent)
- la relation de dispersion TE_{1s} se situe au-dessus de la relation de dispersion de TE_{1p} et TE_{2s} au-dessus de TE_{2p} (fig. 7.4c)
- la relation de dispersion TE_{1p} se situe au-dessus de la relation de dispersion de TE_{1s} et TE_{2p} au-dessus de TE_{2s} (analogue au cas précédent)

Autrement dit, soit les deux séparations s'opèrent de manière identique, soit de manière opposée. Rappelons que la distance qui sépare TE_{1s} et TE_{1p} est liée au coefficient de Fourier $\tilde{\varepsilon}_{-1,1}$, et celle entre TE_{2s} et TE_{2p} également. Dans les deux cas, nous observons quatre points d'intersections, entre les relations de dispersion des modes (TE_1s et TE_{2s}), (TE_1s et TE_{2p}), (TE_1p et TE_{2s}), (TE_1p et TE_{2p}). Or, les modes TE_{1s} et TE_{2s} sont deux modes de même symétrie (anti-symétriques par rapport à $\mathcal{S}$) qui se propagent dans des directions opposées. Dès que la hauteur du réseau augmente, ils se couplent et un gap apparaît à l'endroit de l'intersection. Il en va de même pour les relations de dispersion des modes TE_{1p} et TE_{2p}, tous deux symétriques par rapport à $\mathcal{S}$. La largeur du gap est proportionnelle au coefficient de Fourier responsable du couplage entre les modes, c'est à dire $\tilde{\varepsilon}_{0,2}$ dans notre cas. Par contre, les modes TE_{1s} et TE_{2p}, de symétrie différente, ne se couplent pas, ni les modes TE_{1p} et TE_{2s}. En prenant en compte ces considérations, nous obtenons finalement deux relations de dispersions d'aspects dissemblables que nous avons schématisées sur les figures (fig. 7.4d) et (fig. 7.4e). En chacun des points M, N, P, et Q, nous avons deux modes, l'un excitable en polarisation p, l'autre en polarisation

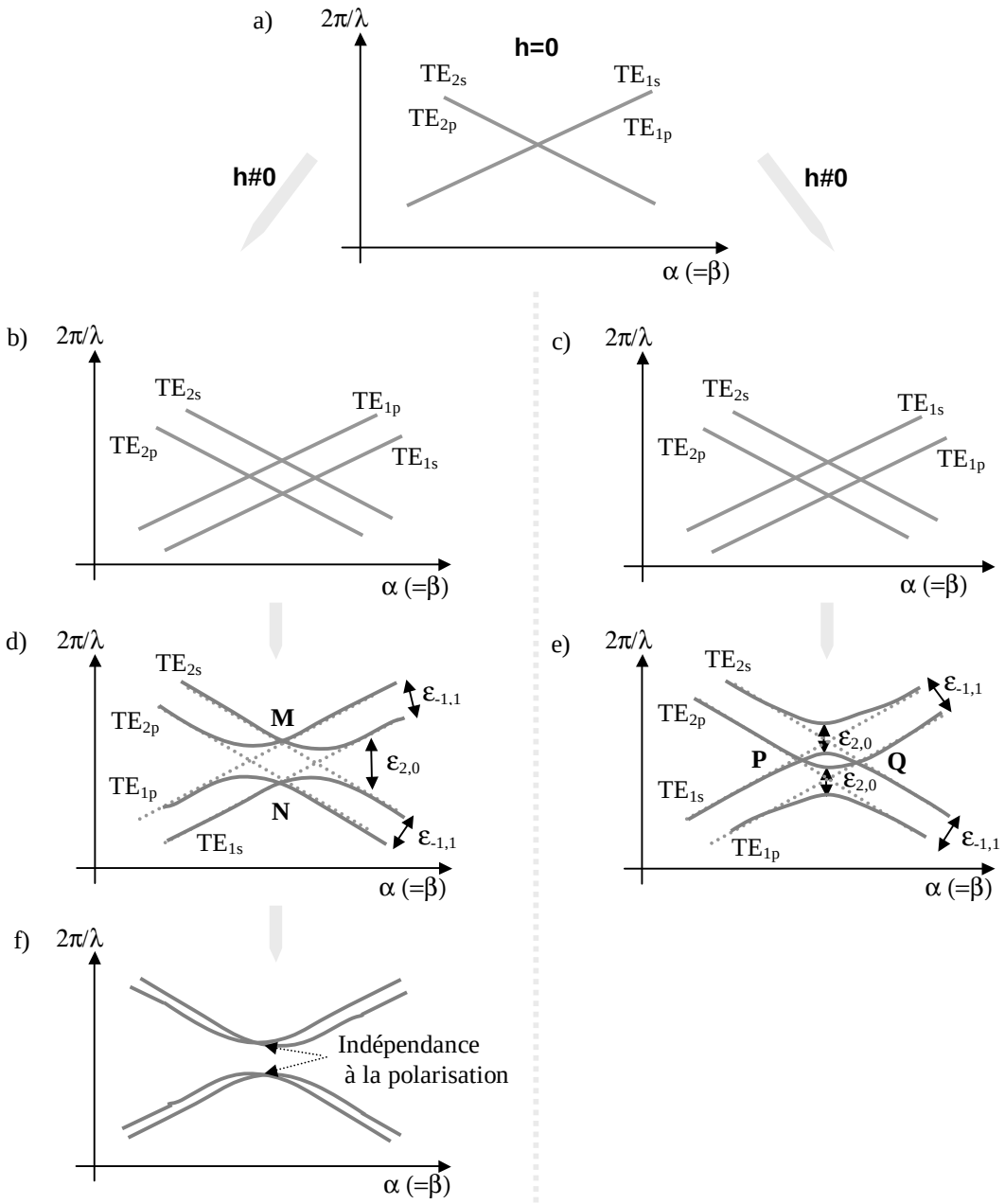


FIG. 7.4 – *Combinaison des solutions. a) Relations de dispersion quand la hauteur du réseau est nulle. b) et c) Lors de la séparation des relations de dispersion TE_{1s}, TE_{1p} et TE_{2s}, TE_{2p}, deux cas sont possibles. d) et e) Des gaps s'ouvrent aux points d'intersections (TE_{1s}, TE_{2s}) et (TE_{1p}, TE_{2p}), mais pas pour (TE_{1s}, TE_{2p}) et (TE_{1p}, TE_{2s}).*

s. L'indépendance à la polarisation est assurée. Dans la configuration de la figure (fig. 7.4d), il est possible de multiplier les points possédant cette propriété en diminuant le coefficient de Fourier $\tilde{\varepsilon}_{-1,1}$, (fig. 7.4f). De plus, le gap peut être élargit en augmentant $\tilde{\varepsilon}_{2,0}$. Nous ajoutons ainsi la propriété de tolérance angulaire à l'indépendance à la polarisation en ces points. Dans la configuration de la figure (fig. 7.4e), augmenter $\tilde{\varepsilon}_{2,0}$ permet d'accroître le gap, et d'améliorer la tolérance angulaire aux points P et Q. Par contre, il ne semble pas nécessaire de diminuer $\tilde{\varepsilon}_{-1,1}$.

Pour terminer, rappelons que la largeur spectrale est liée au coefficient de Fourier permettant l'excitation des modes propres par l'onde incidente, $\tilde{\varepsilon}_{0,1}$ dans notre cas. Cela signifie que nous pouvons ajuster séparément la tolérance angulaire et la largeur spectrale, tout en conservant l'indépendance à la polarisation.

7.1.3 Motif de réseau optimisé

Nous avons besoin d'un réseau dont le coefficient de Fourier $\tilde{\varepsilon}_{0,2}$ est grand, $\tilde{\varepsilon}_{-1,1}$ petit, et $\tilde{\varepsilon}_{1,0}$ moyen. Dans le sixième chapitre, un motif du type double période bi-dimensionnel (fig. 7.5) était proposé pour diminuer le coefficient de Fourier $\tilde{\varepsilon}_{-1,1}$. Ce motif est périodique de période d dans deux directions orthogonales, et composé de quatre plots (carrés, cercles, ...) A, B, C, D. Les coefficients $\tilde{\varepsilon}_{-1,1}$ et $\tilde{\varepsilon}_{0,1}$ sont nuls si les dimensions r_A, r_B, r_C, r_D des quatre plots (côtés

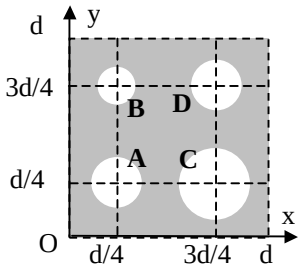


FIG. 7.5 – *Motif double période bi-dimensionnel.*

pour des carrés et diamètres pour des cercles) sont égales, et augmente lorsqu'on les différencie. Ce motif permet également d'accroître le coefficient de Fourier $\tilde{\varepsilon}_{0,2}$. Pour cela, il suffit que les dimensions des carrés soient voisines de $d/4$.

7.1.4 Exemple de filtre à tolérance spectrale optimisée indépendant de la polarisation

Nous avons choisi un guide d'onde plan supportant deux modes guidés TE, sur lequel est gravé un réseau de type double période bi-dimensionnel, périodique selon deux directions orthogonales. Le plan d'incidence est dirigé selon la bissectrice des directions de périodisation (Ox) et (Oy). Toutes les conditions sont réunies pour créer une relation de dispersion semblable soit au schéma de la figure (fig. 7.4d), soit à celui de la figure (fig. 7.4e). Pour savoir lequel, nous avons tracé,

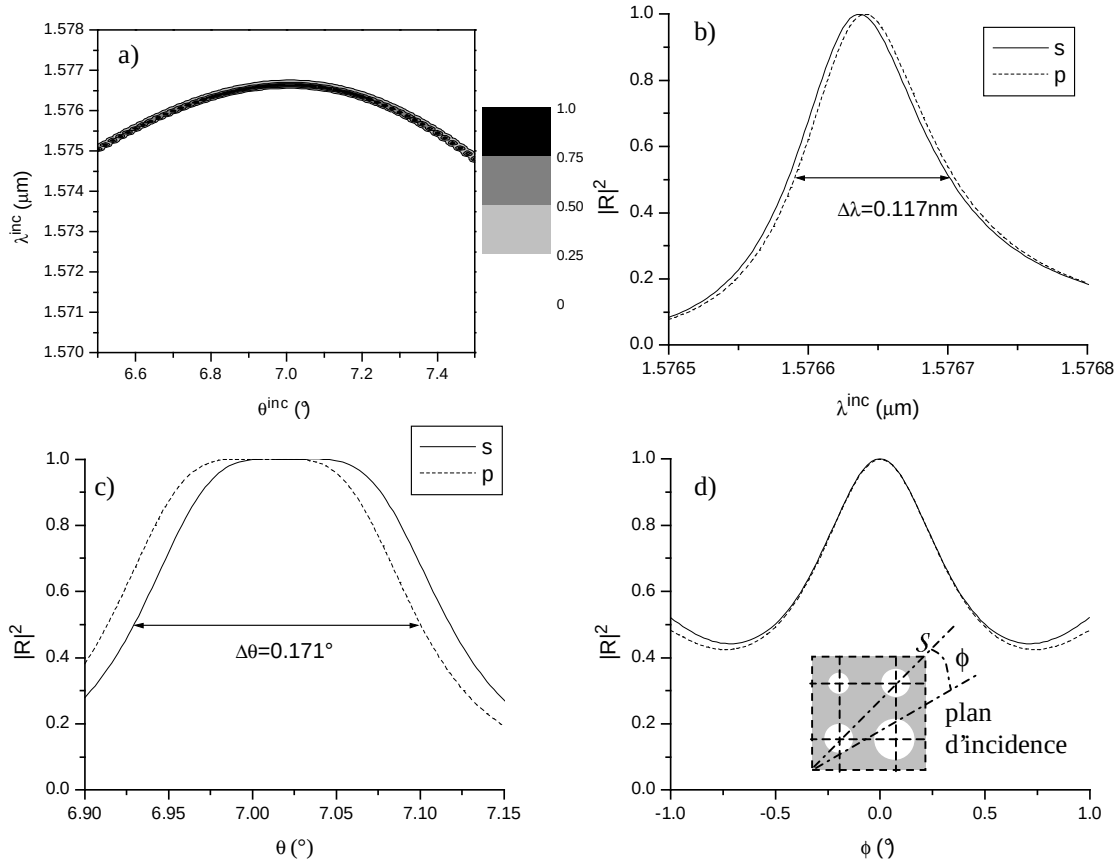


FIG. 7.6 – *Filtre indépendant de la polarisation et à tolérance angulaire optimisée. a) Lieu du maximum de résonance en fonction de l'angle et de la longueur d'onde incidente, en polarisation p. La figure obtenue en polarisation s est identique. b) Profil spectral en polarisation s (trait continu) et p (trait discontinu). c) Profil angulaire en polarisation s et p. d) Variation de la réflectivité lorsque le plan d'incidence s'écarte du plan de symétrie d'un angle ϕ. La structure est composée d'un empilement, défini par $\varepsilon^s = 1{,}0$, $\varepsilon^{c_1} = 2{,}0^2$, $e^{c_1} = 200$ nm, $\varepsilon^{c_2} = 1{,}47^2$, $e^{c_2} = 500$ nm, $\varepsilon^{c_3} = 2{,}0^2$, $e^{c_3} = 200$ nm, $\varepsilon^a = 1{,}0$. Le réseau est de période $d = 1{,}045$ µm et de hauteur $h = 70$ nm. Le motif est composé de quatre trous, de rayon $r_A = 110{,}625$ nm, $r_B = 60{,}625$ nm, $r_C = 130{,}625$, et $r_D = 110{,}625$ nm (structure 7.1). Les coefficients de Fourier sont $|\varepsilon_{2,0}| = 0{,}30$, $|\varepsilon_{1,0}| = 0{,}10$ et $|\varepsilon_{-1,1}| = 0{,}03$. Les indices effectifs des modes guidés avant la gravure sont 1,572 et 1,394.*

sur la figure (fig. 7.6a) le lieu du maximum de réflectivité en fonction de l'angle et de la longueur d'onde incidente, en polarisation p. La figure obtenue en polarisation s est identique. Nous en déduisons que la relation de dispersion correspond au premier cas évoqué. Seul le bord inférieur du gap est représenté. Pour un angle d'incidence $\theta = 7°$, nous avons représenté sur la figure (fig. 7.6b) les profils spectraux en polarisation s (trait continu) et p (trait discontinu). Comme prévu, nous observons un pic de résonance pour chaque polarisation, centrés à la même longueur d'onde. C'est la longueur d'onde du bord inférieur du gap de la figure (fig. 7.6a). De plus, comme le montre la figure (fig. 7.6c), les profils angulaires de chaque pic sont quasiment confondus, aplatis

au sommet, et leur largeur à mi-hauteur est bien supérieure à celle obtenue avec des structures ordinaires. Enfin, nous nous sommes intéressés aux variations de la réflectivité lorsque le plan d'incidence est décalé du plan de symétrie d'un angle ϕ. La courbe (fig. 7.6d) permet de voir que le profil obtenu est aussi indépendant de la polarisation. Par contre, même si la largeur à mi-hauteur du pic est de l'ordre de 1°, la réflectivité chute rapidement dès que ϕ est différent de zéro.

Par la suite, nous avons essayé d'obtenir les mêmes résultats avec les pics de résonance centrés à la longueur du bord supérieur du gap. Curieusement, ces pics sont beaucoup plus fins que les premiers. Nous avons essayé de comprendre pourquoi en étudiant les propriétés de symétrie du champ aux points M, et N.

7.1.5 Propriétés de symétrie du champ à la résonance

Pour commencer, notons que la structure qui nous intéresse est symétrique par rapport à $\mathcal{S}$, mais aussi par rapport au plan $\mathcal{S}'$, perpendiculaire au guide et porté par la seconde bissectrice des axes de périodisation (Ox) et (Oy). Par suite, l'axe (Oz) est un axe de symétrie. (fig. 7.7).

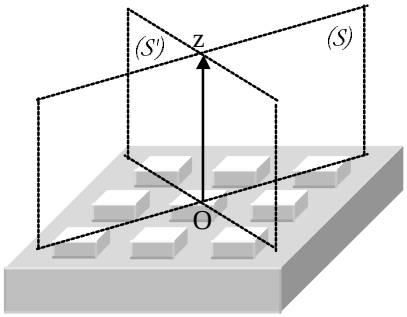


FIG. 7.7 – *Plans de symétrie du filtre.*

Pour déterminer les propriétés du champ des modes excités, nous allons procéder par étape, comme nous l'avons déjà fait pour expliquer la forme finale de la relation de dispersion. Nous

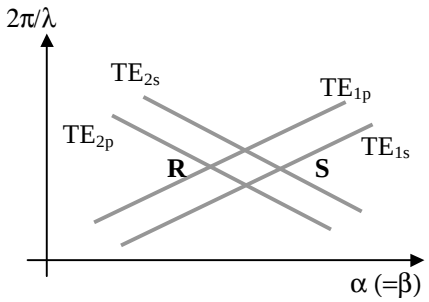


FIG. 7.8 – *Relations de dispersion avant l'ouverture des gaps.*

considérons la relation de dispersion obtenue lorsque les branches TE_{1s} et TE_{1p} se séparent, ainsi

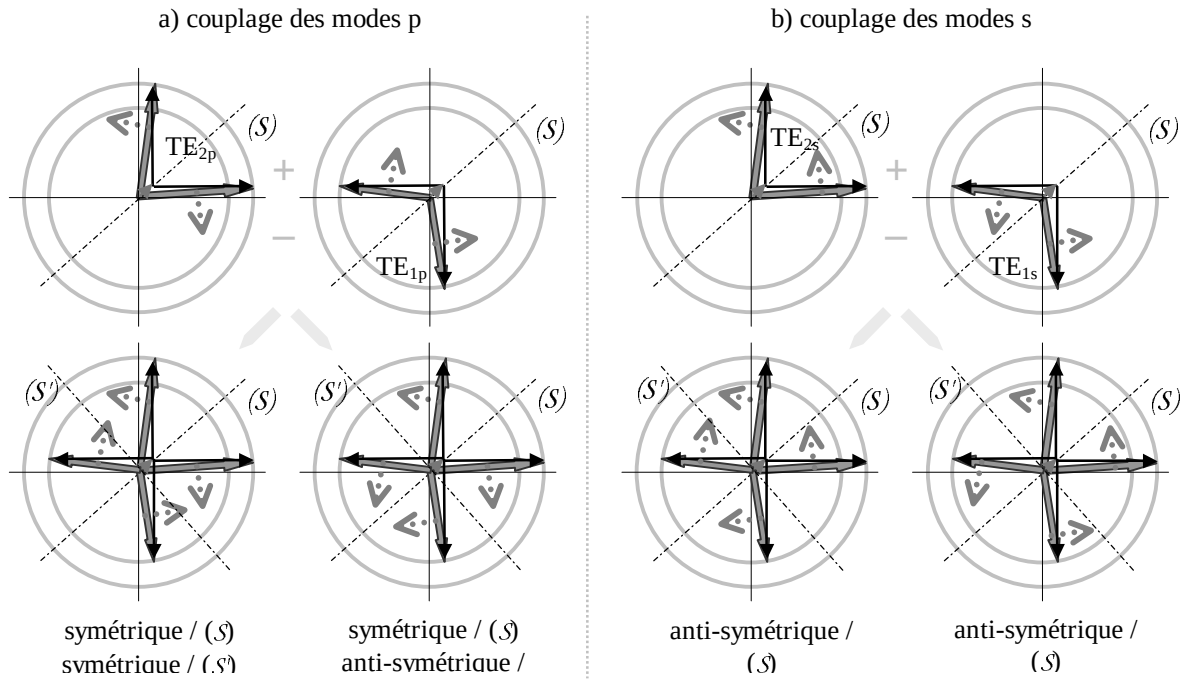


FIG. 7.9 – *a) Couplage des modes TE_{1p} et TE_{2p} au point R. b) Couplage des modes TE_{1s} et TE_{2s} au point S.*

que les branches TE_{2s} et TE_{2p}. (fig. 7.8). Au point d'intersection R, le mode TE_{1p}, symétrique par rapport au plan $\mathcal{S}$, se couple avec le mode TE_{2p}, également symétrique par rapport à $\mathcal{S}$ (fig. 7.9a). Le couplage génère deux nouveaux modes propres, l'un dont le champ est symétrique par rapport au plan $\mathcal{S}'$, l'autre anti-symétrique [1]. Au final, un mode est symétrique par rapport à $\mathcal{S}$ et symétrique par rapport à $\mathcal{S}'$, donc symétrique par rapport à l'axe (Oz), alors que l'autre est symétrique par rapport à $\mathcal{S}$ et anti-symétrique par rapport à $\mathcal{S}'$, donc anti-symétrique par rapport à l'axe (Oz). Au point d'intersection S, les modes TE_{1s} et TE_{2s}, anti-symétriques par rapport à $\mathcal{S}$ se couplent pour générer deux modes, l'un symétrique par rapport à $\mathcal{S}'$, donc anti-symétrique par rapport à (Oz), l'autre anti-symétrique par rapport à $\mathcal{S}'$, donc symétrique par rapport (Oz) (fig. 7.9b).

En résumé, le couplage des quatre relations de dispersion TE_{1s}, TE_{1p}, TE_2s et TE_{2p} génère quatre modes: deux sont symétriques par rapport à (Oz) et excitables en polarisation s pour le premier, p pour le second, les deux autres sont anti-symétriques par rapport à (Oz), et également excitables en polarisation s pour l'un et p pour l'autre. Nous comprenons maintenant pourquoi, dans l'exemple du paragraphe précédent, où l'incidence est proche de la normale, deux pics s et p larges sont obtenus au bord inférieur du gap, et deux pics fins au bord supérieur. Lorsque l'incidence est normale, deux pics larges p et s sont confondus, ce sont les modes symétriques,

1. En fait, les champs ne sont pas parfaitement symétriques ou anti-symétriques par rapport à $\mathcal{S}'$, puisque l'incidence non normale rompt la symétrie de la configuration. Mais comme l'incidence est faible, nous dirons pour simplifier que les champs sont symétriques ou anti-symétriques

alors que les pics du mode anti-symétrique n'apparaissent pas. En conclusion, nous avons réussi à recréer les propriétés de l'incidence normale en incidence oblique, grâce à l'utilisation de deux modes guidés TE_1 et TE_2.

Afin d'obtenir un filtre utilisable pour le D.W.D.M., il ne nous reste plus qu'à optimiser le profil spectral de cette structure.

7.2 Combinaison de toutes les propriétés: le filtre intégral

Pour la dernière étape de la synthèse, l'optimisation du profil spectral de la structure, nous allons d'abord rappeler et utiliser la solution retenue dans la quatrième chapitre. Nous présenterons ensuite deux exemples de filtres présentant toutes les qualités nécessaires au D.W.D.M.. Le premier, servant uniquement à la validation de nos idées n'est pas réalisable. Le deuxième peut servir de base à une étude expérimentale. Pour terminer, nous résumons sous forme d'organigramme les étapes permettant de concevoir un filtre possédant toutes les qualités requises pour le D.W.D.M..

7.2.1 Solution retenue pour optimiser le profil spectral

Le profil spectral peut être optimisé en utilisant deux guides d'ondes perturbés couplés via leur substrat, qui devient une couche de couplage (fig. 7.10). Il en résulte deux modes propres

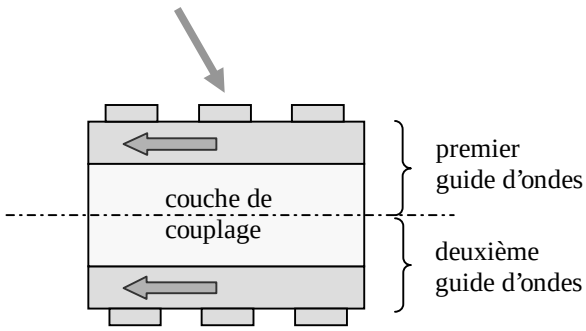


FIG. 7.10 – *Optimisation du profil spectral.*

juxtaposés, de même pulsation spatiale, et de longueurs d'ondes légèrement différentes, générant un profil spectral aplati au sommet. Les longueurs d'ondes sont d'autant plus proches que la couche de couplage est épaisse. Afin de faciliter la fabrication, la couche de couplage doit être suffisamment épaisse, de l'ordre de 200 μm, pour jouer le rôle de substrat. Dans ce cas, les pôles sont quasiment dégénérés, ainsi que les zéros de transmission, ce qui permet malgré tout d'obtenir un profil spectral aplati au sommet. Cependant, la structure réalisée est en fait une cavité Fabry-Pérot, présentant des zéros de réflexion réels, à intervalles rapprochés (environ 4 nm), en plus des zéros de réflexion dus à la résonance, dont la position évolue avec l'épaisseur

de couplage. Cette dernière doit être ajustée de manière à placer les zéros de réflexion de part et d'autre du pic de résonance, pour obtenir un profil d'aspect convenable.

7.2.2 Exemple de filtre intégral

Nous avons appliqué la technique décrite dans le paragraphe précédent à la structure de la figure (fig. 7.6). Après ajustement de l'épaisseur de couplage (dans cet exemple elle est fine

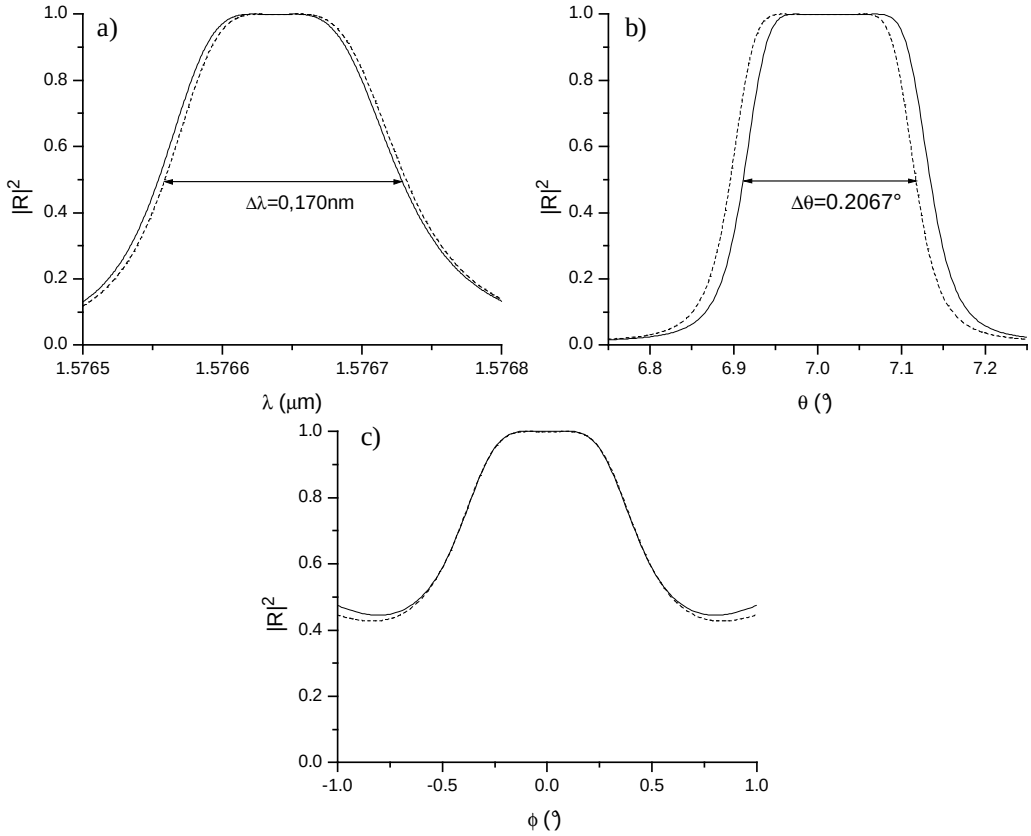


FIG. 7.11 – *Exemple de filtre intégral. a) Profil spectral b) Profil angulaire c) Variation de la réflectivité en fonction de l'angle ϕ formé par le plan d'incidence et le plan de symétrie $\mathcal{S}$. La structure est obtenue en couplant deux structures identiques (structure 7.1) par leur substrat. L'épaisseur de la couche de couplage est* 2,7 *μm (structure 7.2)*

et ne peut pas jouer le rôle de substrat), nous avons obtenu le profil spectral présenté sur la figure (fig. 7.11a). Il est aplati au sommet, et la largeur à mi-hauteur a été multipliée par 1,5. Comme annoncé dans le quatrième chapitre, le profil angulaire est également modifié par la juxtaposition des deux modes propres (fig. 7.11b): ses flancs sont plus abrupts et sa largeur a été multipliée par 1,2. Enfin, de la même manière, nous pouvons prévoir que la juxtaposition des deux modes quasiment dégénérés modifie également le profil en fonction de l'angle ϕ entre le plan d'incidence et le plan de symétrie $\mathcal{S}$. Pour le guide d'onde perturbé simple (fig. 7.6d), le

profil était lorentzien. Lorsque deux guides d'ondes perturbés sont couplés, le profil est aplati au sommet (fig. 7.11c). Nous avons donc non seulement amélioré la tolérance spectrale du filtre, mais également sa tolérance angulaire.

Un deuxième exemple, avec une couche de couplage plus épaisse, est présenté sur la figure (fig. 7.12). Les deux exemples précédents regroupent l'ensemble des idées qui permettent de

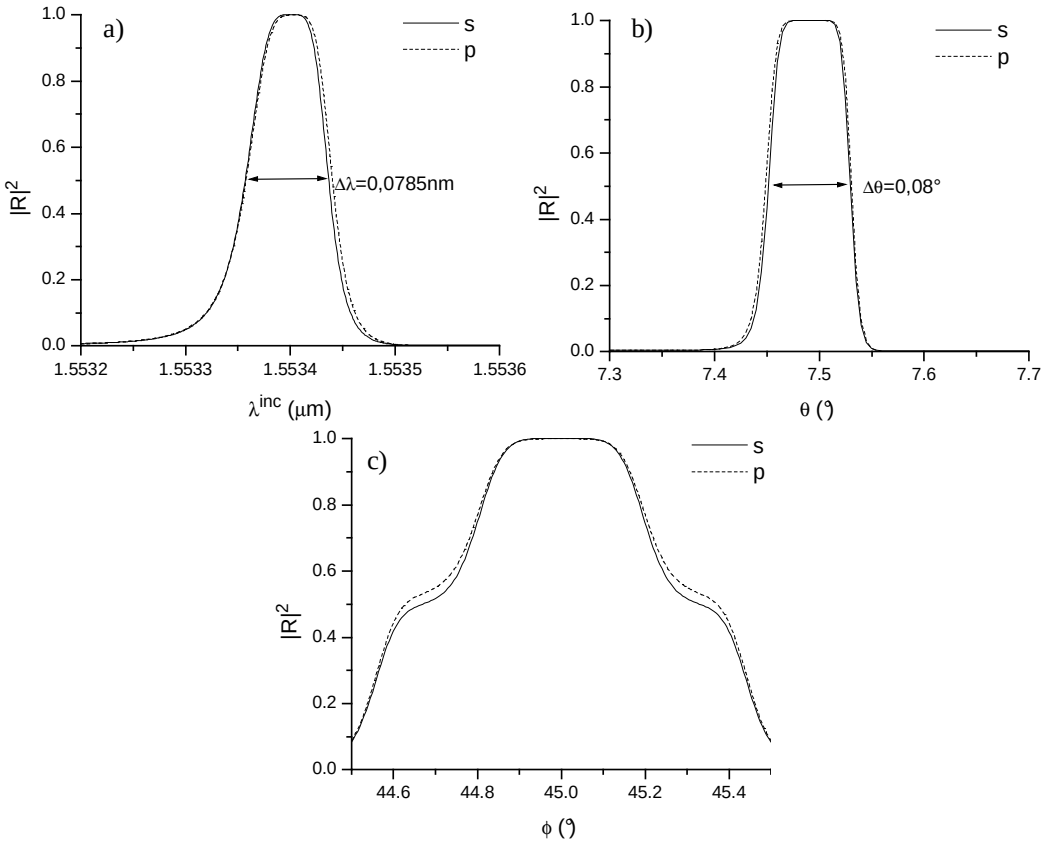


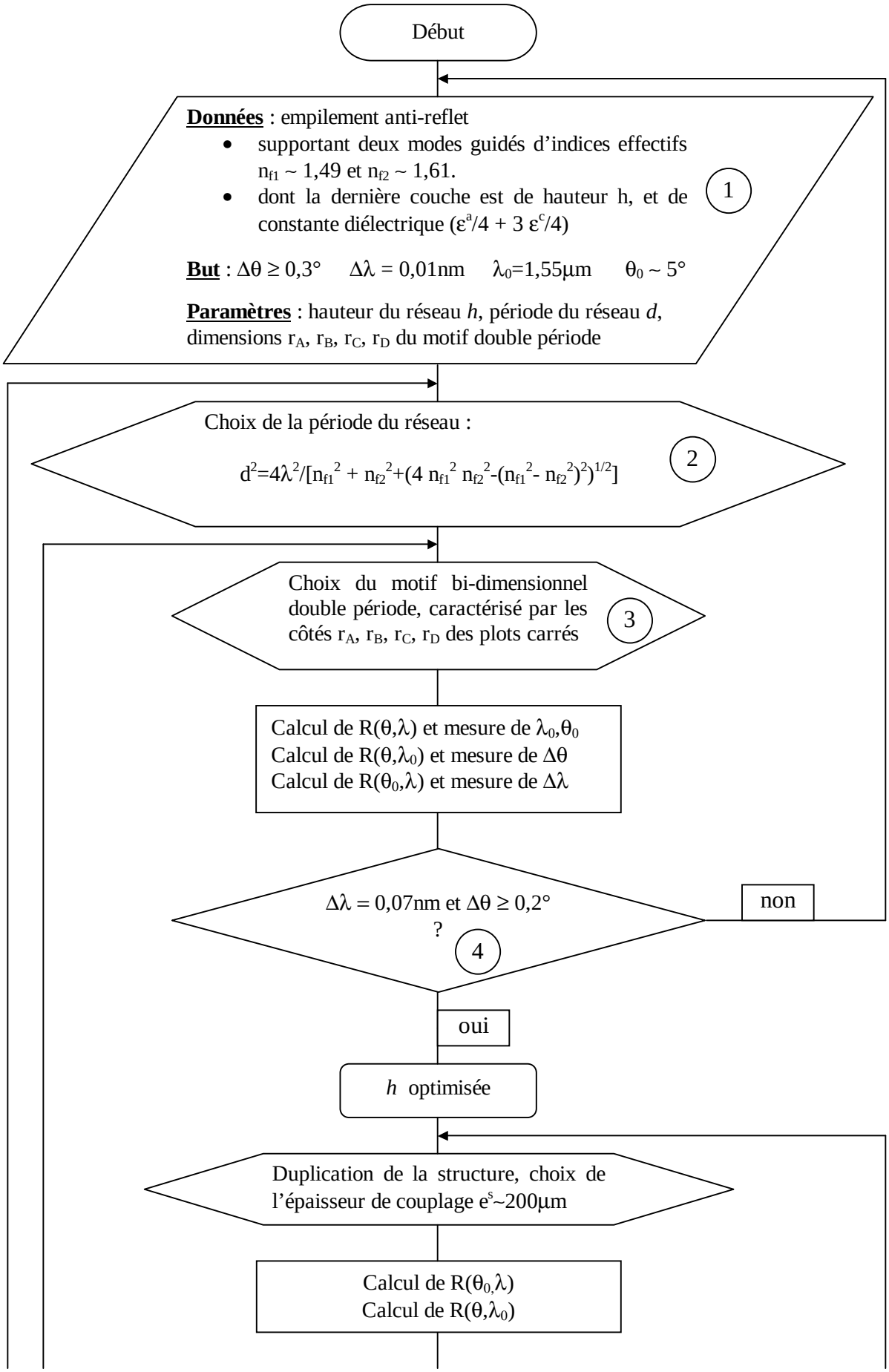
FIG. 7.12 – *Exemple de filtre intégral dont la couche de couplage joue le rôle de substrat. a) Profil spectral b) Profil angulaire c) Variation de la réflectivité en fonction de l'angle ϕ formé par le plan d'incidence et le plan de symétrie $\mathcal{S}$. La structure est composée d'un empilement, défini par $\varepsilon^s = 1{,}448^2$, $e^s = 199{,}8$ μm, $\varepsilon^{c_1} = 2{,}07^2$, $e^{c_1} = 309{,}8$ nm, $\varepsilon^{c_2} = 1{,}47^2$, $e^{c_2} = 217{,}9$ nm, $\varepsilon^{c_3} = 2{,}07^2$, $e^{c_3} = 346{,}3$ nm, $\varepsilon^a = 1{,}0$. Le réseau est de période $d = 903{,}68$ nm et de hauteur $h = 100$ nm. Le motif est composé de quatre trous, de rayon $r_A = 112{,}96$ nm, $r_B = 67{,}78$ nm, $r_C = 158{,}14$, et $r_D = 112{,}96$ nm (structure 7.3). Les coefficients de Fourier sont $|\varepsilon_{2,0}| = 0{,}17$, $|\varepsilon_{1,0}| = 0{,}09$ et $|\varepsilon_{-1,1}| = 0$. Les indices effectifs des modes guidés avant la gravure sont* 1,624 *et* 1,812.

répondre aux contraintes qualitatives imposées par le D.W.D.M.: fonctionnement hors incidence normale, profil spectral et angulaire aplatis au sommet, largeur spectral et angulaire décorrélées, indépendance à la polarisation. Pour respecter les contraintes quantitatives (largeur spectrale de $0{,}1nm$, angle de fonctionnement de 5°, tolérance angulaire de 0,3° taux de réjection de 10^{-3}), une optimisation fine des paramètres de la structure est nécessaire. Ce travail demande des calculs

numériques nombreux et longs. Une méthode est donc indispensable pour guider la conception d'un filtre intégral.

7.2.3 Conception d'un filtre intégral

Nous proposons ici une méthode d'optimisation des paramètres du filtre. Cette méthode n'est pas linéaire, et exige une réflexion permanente et une remise en cause fréquente des choix effectués. Nous avons préféré la présenter sous forme d'organigramme, (fig. 7.13). Pour ne pas surcharger le schéma, nous avons limité les commentaires à quelques phrases. Les étapes demandant plus de détails sont marquées d'un nombre encerclé. Nous les commentons à la suite de l'organigramme.


Début
Données : empilement anti-reflet
• supportant deux modes guidés d'indices effectifs $n_{f1} \sim 1{,}49$ et $n_{f2} \sim 1{,}61$.
• dont la dernière couche est de hauteur h, et de constante diélectrique ($\varepsilon^a/4 + 3\,\varepsilon^c/4$)
1
But : $\Delta\theta \geq 0{,}3°$ $\Delta\lambda = 0{,}01$nm $\lambda_0 = 1{,}55\mu$m $\theta_0 \sim 5°$
Paramètres : hauteur du réseau *h*, période du réseau *d*, dimensions r_A, r_B, r_C, r_D du motif double période
Choix de la période du réseau :
$d^2 = 4\lambda^2/[n_{f1}^2 + n_{f2}^2 + (4\,n_{f1}^2\,n_{f2}^2 - (n_{f1}^2 - n_{f2}^2)^2)^{1/2}]$
2
Choix du motif bi-dimensionnel double période, caractérisé par les côtés r_A, r_B, r_C, r_D des plots carrés
3
Calcul de $R(\theta,\lambda)$ et mesure de λ_0,θ_0
Calcul de $R(\theta,\lambda_0)$ et mesure de $\Delta\theta$
Calcul de $R(\theta_0,\lambda)$ et mesure de $\Delta\lambda$
$\Delta\lambda = 0{,}07$nm et $\Delta\theta \geq 0{,}2°$?
4
non
oui
h optimisée
Duplication de la structure, choix de l'épaisseur de couplage $e^s \sim 200\mu$m
Calcul de $R(\theta_0,\lambda)$
Calcul de $R(\theta,\lambda_0)$

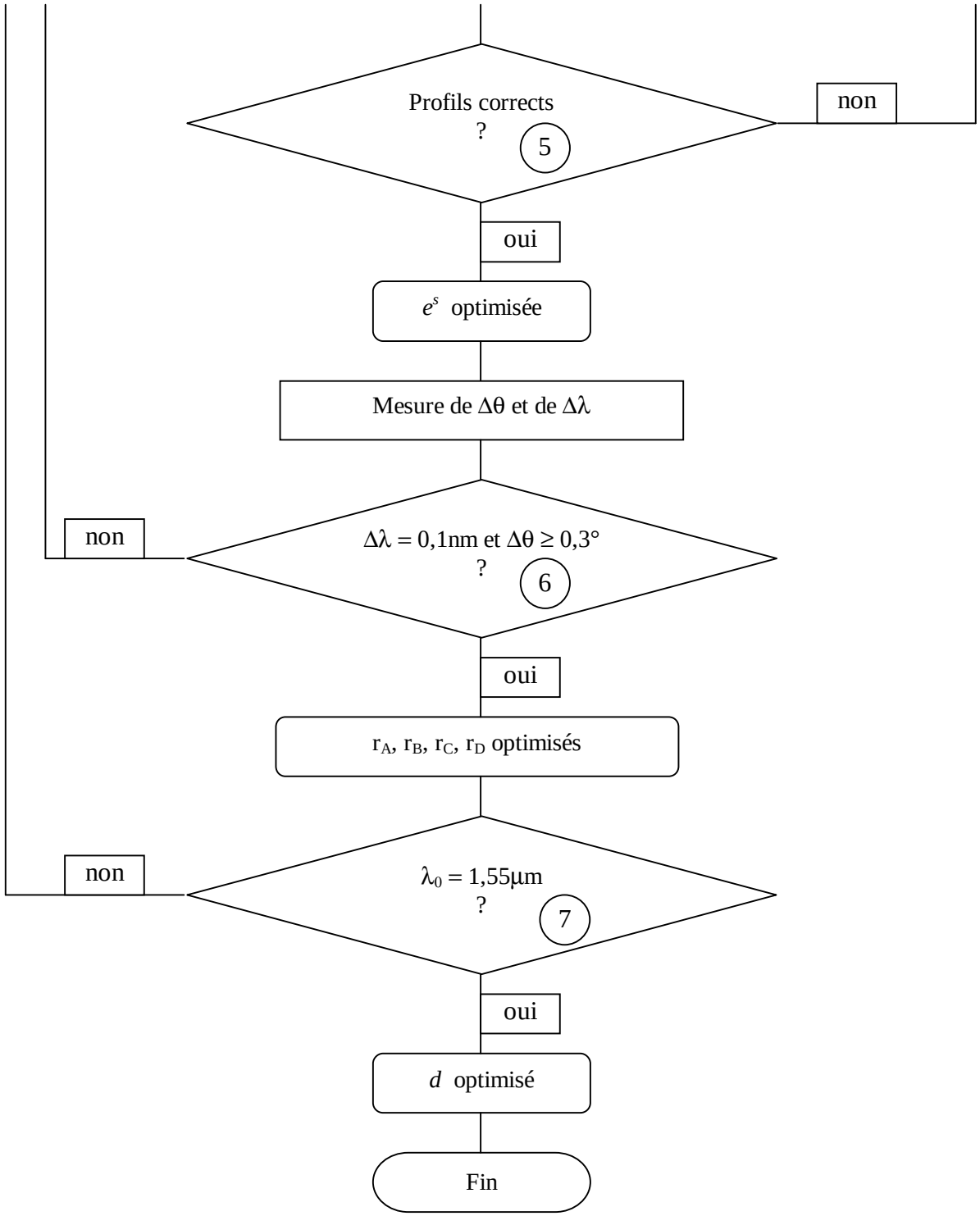


FIG. 7.13 – *Organigramme de conception.*

(1) Choix de l'empilement anti-reflet

Le choix du guide d'onde plan sur lequel va être gravé le réseau est déterminant pour l'angle de fonctionnement du filtre, et le taux de réjection.

L'angle de fonctionnement est lié aux indices effectifs des modes guidés. Le mode TE_2 est excité dans deux directions grâce aux ordres (0,1) et (1,0) et TE_1 par $(0,-1)$ et $(-1,0)$ (fig. 7.14). En première approximation, si nous considérons que les relations de dispersions ne sont

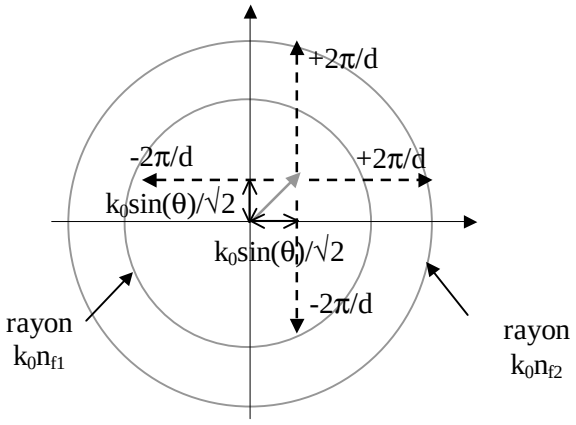


FIG. 7.14 – *Couplage des quatre modes*

pas perturbées, nous pouvons en déduire que les indices effectifs n_{f1} et n_{f2} des modes guidés, l'angle θ, la longueur d'onde λ de fonctionnement du filtre, et la période d du réseau sont liées par les équations suivantes:

$$\begin{cases} \left(\frac{k_0}{\sqrt{2}}\sin(\theta)+\frac{2\pi}{d}\right)^2+\left(\frac{k_0}{\sqrt{2}}\sin(\theta)\right)^2=\left(\frac{2\pi}{\lambda}n_{f2}\right)^2 \\ \left(\frac{k_0}{\sqrt{2}}\sin(\theta)-\frac{2\pi}{d}\right)^2+\left(\frac{k_0}{\sqrt{2}}\sin(\theta)\right)^2=\left(\frac{2\pi}{\lambda}n_{f1}\right)^2 \end{cases} \tag{7.1}$$

où $n_{f1} < n_{f2}$. Pour obtenir un angle de fonctionnement $\theta \simeq 5°$, une longueur d'onde de centrage $\lambda \simeq 1{,}55$ μm, avec un réseau de période $d \simeq 1$ μm, les indices effectifs des modes guidés doivent être tels que $n_1 \simeq 1{,}49$ et $n_2 \simeq 1{,}61$. N'oublions pas de plus qu'il est préférable que le champ des deux modes soient intenses dans la dernière couche de l'anti-reflet afin de faciliter l'excitation par l'onde incidente.

Le taux de réjection dépend de la qualité de l'anti-reflet de la structure en dehors de la résonance. Or, la réflectivité en dehors de la résonance est proche de celle obtenue si on remplace le réseau par une couche de constante diélectrique $\tilde{\varepsilon}_{0,0}$, le coefficient de Fourier d'ordre zéro du réseau, et d'épaisseur h, la hauteur du réseau. Le motif du réseau est formé de quatre trous, par exemple carrés (constante diélectrique ε^a) gravés dans une couche, de constante diélectrique ε^c. Le côté des trous étant proche de $d/4$, le facteur de remplissage sera de l'ordre de 0,25, d'où un coefficient de Fourier $\tilde{\varepsilon}_{0,0}$ proche de $\varepsilon^a/4+3\varepsilon^c/4$. La hauteur des réseaux est en général comprise entre 20 nm et 200 nm. En résumé, il est conseillé de choisir un anti-reflet dont la dernière couche,

destinée à être gravée sur une hauteur h, est de constante diélectrique $\varepsilon^a/4+3\varepsilon^c/4$, et d'épaisseur h, comprise entre 20 nm et 200 nm.

(2) Choix de la période du réseau

Une fois l'empilement choisi, les indices effectifs n_{f1} et n_{f2} sont fixés, et le système d'équations (7.2) nous permet d'exprimer l'angle de fonctionnement, ainsi que le rapport entre la période et la longueur d'onde en fonction de la moyenne et de la différence des indices effectifs au carré:

$$\begin{cases} \sin^2(\theta) + \left(\frac{\lambda}{d}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(n_{f2}^2 + n_{f1}^2\right) \\ \frac{\lambda}{d}\sin(\theta) = \frac{1}{2}\left(n_{f2}^2 - n_{f1}^2\right) \end{cases} \tag{7.2}$$

d'où nous tirons:

$$\begin{cases} \sin^2(\theta^{inc})^2 = \frac{1}{4}\left[n_{f1}^2 + n_{f2}^2 \pm \sqrt{4n_{f1}^2 n_{f2}^2 - \left(n_{f1}^2 - n_{f2}^2\right)^2}\right] \\ \left(\frac{\lambda}{d}\right)^2 = \frac{1}{4}\left[n_{f1}^2 + n_{f2}^2 \mp \sqrt{4n_{f1}^2 n_{f2}^2 - \left(n_{f1}^2 - n_{f2}^2\right)^2}\right] \end{cases} \tag{7.3}$$

Il est possible d'en déduire la valeur de la période qui nous permettra de filtrer un signal de longueur d'onde λ, par exemple 1,55 μm.

(3) Choix du motif

Pour des raisons de fabrication, il est préférable que le motif soit composé de plot carrés. Dans ce cas, les expressions des coefficients de Fourier $\tilde{\varepsilon}_{0,1}$, $\tilde{\varepsilon}_{0,2}$, et $\tilde{\varepsilon}_{-1,1}$ sont donnés par les formules:

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_{-1,1} &= \frac{\varepsilon^c - \varepsilon^a}{\pi}\left[\sin^2(\pi\frac{r_A}{d}) - \sin^2(\pi\frac{r_B}{d}) - \sin^2(\pi\frac{r_C}{d}) + \sin^2(\pi\frac{r_D}{d})\right] \\ \tilde{\varepsilon}_{0,2} &= -\frac{\varepsilon^c - \varepsilon^a}{2\pi}\left[\frac{r_A}{d}\sin(\pi\frac{r_A}{d}) + \frac{r_B}{d}\sin(\pi\frac{r_B}{d}) + \frac{r_C}{d}\sin(\pi\frac{r_C}{d}) + \frac{r_D}{d}\sin(\pi\frac{r_D}{d})\right] \\ \tilde{\varepsilon}_{0,1} &= -i\frac{\varepsilon^c - \varepsilon^a}{\pi}\left[\frac{r_A}{d}\sin(\frac{\pi r_A}{d}) + \frac{r_B}{d}\sin(\pi\frac{r_B}{d}) - \frac{r_C}{d}\sin(\pi\frac{r_C}{d}) - \frac{r_D}{d}\sin(\pi\frac{r_D}{d})\right]. \end{aligned} \tag{7.4}$$

Dans le cas particulier où $r_A + r_D = d/2$ et $r_B + r_C = d/2$, $\tilde{\varepsilon}_{-1,1}$ est nul.

(4) Première mesure des largeurs angulaire et spectrale, vérification du choix de l'empilement

Une première mesure des largeurs angulaire et spectrale est conseillée à ce niveau de la conception pour vérifier la faisabilité du filtre avec l'empilement choisi. Les expériences numériques montrent que la largeur spectrale et la largeur angulaire sont multipliées par un facteur de l'ordre de 1,4 lors de la création des guides d'ondes couplés. Si $\Delta\lambda$ et $\Delta\theta$ sont trop petits, il est nécessaire d'augmenter la hauteur de gravure, et donc de recommencer avec un autre empilement anti-reflet.

(5) **Optimisation de l'épaisseur de couplage**

Le profil spectral et angulaire sont d'aspect convenable lorsque les zéros de transmission sont réels, et les zéros de réflexion répartis de part et d'autre de l'empilement.

(6) **Optimisation du motif**

Si la largeur angulaire et la largeur spectrale n'ont pas les valeurs désirées, il est possible de faire une optimisation fine, en modifiant les dimensions des motifs du réseau. Pour cela, le concepteur peut s'aider des formules (7.4).

(7) **Optimisation de la période**

Toutes les étapes précédentes modifient la longueur d'onde de centrage du filtre. Il est possible de la ré-ajuster en jouant sur la période du réseau, d'après la seconde équation du système (7.3).

Remarque

L'automatisation de l'algorithme de conception pourrait être profitable, en particulier pour faciliter l'obtention d'une largeur spectrale de 0,1nm. On pourrait aussi définir et utiliser une fonction de mérite, quantifiant la différence entre le profil spectral désiré et celui calculé à chaque itération. L'efficacité de cette technique a déjà été prouvée [Tibuleac and Magnusson, 2001]. Cependant, l'algorithme de conception proposé est particulièrement efficace, et l'automatisation n'est pas indispensable. Par exemple, la structure de la figure (7.12) a été obtenue après deux itérations seulement sur la hauteur de gravure.

7.3 Conclusion

Au cours de ce chapitre, nous avons réalisé une synthèse des solutions proposées dans les trois parties de ce manuscrit. Au final, nous avons présenté une structure répondant à toutes les contraintes imposées par le D.W.D.M.:

- un profil spectral aplati au sommet, et de largeur à mi-hauteur de l'ordre de 0,1 nm,
- un profil angulaire aplati au sommet, et de largeur à mi-hauteur de l'ordre de 0,3°,
- l'indépendance à la polarisation,
- un taux de réjection de l'ordre de 10^3,
- un angle de fonctionnement de l'ordre de 5°.

Le filtre intégral est simplement composé de deux guides d'ondes plans identiques, couplés par leur substrat. C'est ainsi qu'est obtenu le profil spectral aplati au sommet. Chaque guide d'onde plan supporte deux modes guidés TE. Le couplage de ces deux modes permet d'obtenir le profil angulaire aplati au sommet hors incidence normale, et de décorréler les largeurs spectrale et angulaire. Les réseaux, gravés sur les couches externes de la structure totale sont aussi identiques,

et possèdent un plan de symétrie, qui sera le plan d'incidence. Cette condition est nécessaire pour réaliser l'indépendance à la polarisation. Leur motif, périodique dans deux directions orthogonales, est du type double période. Ce motif particulier possède les coefficients de Fourier adaptés au problème et à notre solution. En effet, $\tilde{\varepsilon}_{0,2}$ est grand, et permet d'atteindre une largeur angulaire de 0,3°. Le coefficient $\tilde{\varepsilon}_{0,1}$ est suffisamment petit pour que la largeur spectrale soit de 0,1 nm. Enfin, $\tilde{\varepsilon}_{-1,1}$ peut être nul, ce qui a pour effet d'étendre la propriété d'indépendance à la polarisation à quasiment toute la bande passante, en longueur d'onde, ou en angle d'incidence.

Même si la structure finale est relativement simple, les paramètres sont nombreux, et les calculs sur les réseaux bi-dimensionnels sont longs: la conception des structures sera laborieuse. Cependant, l'influence des paramètres sur les caractéristiques du filtre étant bien comprise, grâce à la méthode perturbative, nous avons pu proposer une méthode de conception. Au final, les valeurs de paramètres pour lesquels toutes les propriétés sont obtenues, constantes diélectriques et dimensions des motifs et des couches, sont accessibles avec les techniques actuelles.

Enfin, soulignons un avantage très important de la solution proposée: la tolérance aux erreurs de fabrication. Même si les paramètres de la structure fabriquée sont légèrement différents de ceux de la structure conçue, le filtre aura un profil spectral et un profil angulaire aplatis au sommet, quelle que soit la polarisation, pour un angle et une longueur d'onde différents de ceux initialement prévus.

Conclusion

Les réseaux à modes guidés avaient depuis longtemps été proposés pour filtrer les signaux D.W.D.M.. Malheureusement, de nombreux inconvénients empêchaient la concrétisation de cette idée. Pour y parvenir, nous avons été amenés à considérer le réseau résonnant sous deux aspects différents.

Le réseau résonnant est d'abord un réseau coupleur-découpleur, permettant l'excitation de modes propres de la structure. Il en résulte un pic de résonance dans la courbe de réflectivité en fonction de la longueur d'onde ou de l'angle d'incidence. La théorie phénoménologique, qui consiste à décrire ce pic à l'aide de pôles et de zéros, permet de déterminer la forme du profil spectral et angulaire. Dans les configurations étudiées en général, un seul mode propre est excité. La résonance est simple, de forme lorentzienne et dépend de la polarisation. Pour obtenir des profils plus complexes, il est nécessaire d'exciter au moins deux modes propres. Ainsi, deux modes propres dégénérés, de même pulsation spatiale et de même longueur d'onde, mais de polarisations orthogonales permettent d'obtenir l'indépendance à la polarisation. Deux modes de même pulsation spatiale, de longueurs d'onde légèrement différentes et de polarisations identiques forment un profil spectral aplati au sommet. Enfin, deux modes propres en bord de bande interdite, de même longueur d'onde, de pulsations spatiales légèrement différentes et de polarisations identiques améliorent la tolérance angulaire.

Le réseau résonnant est aussi un cristal photonique pour les modes guidés. Il présente des bandes interdites photoniques qui peuvent être modifiées en agissant sur la géométrie et les paramètres de la structure. Les moyens de façonner la relation de dispersion sont d'autant plus nombreux que l'on peut tirer profit de l'excitation de plusieurs modes guidés dans la structure de référence. Pour commencer, nous optimisons l'empilement multicouches afin de disposer d'un seul ou de plusieurs modes guidés, dont les relations de dispersion sont plus ou moins proches. Ensuite, nous utilisons les propriétés de symétrie du réseau pour créer des modes symétriques et anti-symétriques indépendants, potentiellement dégénérés. Enfin, en jouant sur le motif du réseau, nous contrôlons l'ouverture des bandes interdites photoniques afin d'obtenir des relations de dispersion très peu dispersives pour deux modes de polarisations orthogonales. C'est à ce niveau qu'intervient la théorie perturbative qui nous a permis d'exprimer la perturbation induite par le réseau sur la relation de dispersion des modes du guide d'onde plan.

Finalement, dans une étape de synthèse, nous avons combiné l'ensemble de ces idées pour

former un filtre répondant à toutes les contraintes imposées par le D.W.D.M. [2] . Si la structure finale est relativement simple à fabriquer, les concepts utilisés sont néanmoins complexes. En particulier, la géométrie et la configuration d'éclairement ont été choisies de telle sorte que *huit modes* guidés de la structure de référence soient mis en jeu. Ces modes se combinent astucieusement pour générer un pic de réflexion indépendant de la polarisation, tolérant spectralement et angulairement, hors incidence normale.

Les exemples de filtres proposés à la fin du manuscrit sont tout à fait réalisables avec les techniques actuelles. Evidemment, le passage de la théorie à l'expérience soulève des interrogations supplémentaires, à commencer par la tolérance aux erreurs de fabrications. Concernant ce point, la solution que nous avons proposée est particulièrement satisfaisante. En effet, malgré des erreurs de fabrication éventuelles, les propriétés de tolérance angulaire, tolérance spectrale et indépendance à la polarisation existeront toujours. L'angle et la longueur d'onde de fonctionnement du filtre seront seulement légèrement différents de ceux initialement prévus. Pour déterminer précisément la sensibilité des caractéristiques du filtre (longueur d'onde et angle de fonctionnement, largeur spectrale...) en fonction des erreurs de fabrication, des études numériques systématiques sont nécessaires. Un second point concerne la modélisation des structures. Dans nos expériences numériques, les réseaux étaient de taille infinie, l'onde incidente une onde plane, et les matériaux non absorbants. Les réalités expérimentales doivent être prises en compte pour évaluer les performances du filtre. A la longueur d'onde de 1,55 μm, un faisceau de divergence 0,3° a une largeur de l'ordre de 1 mm. Même si le réseau est suffisamment grand (environ 3 mm de côté) pour recueillir toute l'énergie incidente, la taille finie de la structure et du faisceau vont diminuer l'efficacité, et élargir la bande passante [Jacob et al., 2000] [Jacob et al., 2001a] [Bendickson et al., 2001]. Dans [Bendickson et al., 2001], les auteurs mettent en évidence l'existence, pour une taille de faisceau donnée, d'une dimension de structure optimale, telle que la chute d'efficacité soit minimum. L'étude réalisée dans [Jacob et al., 2001a] montre que les conséquences de la divergence du faisceau incident sont d'autant moins importantes que la tolérance angulaire est grande. Ils sont même négligeables si le rapport entre la divergence du faisceau incident et la largeur angulaire est au maximum égal à deux. Enfin, les pertes par absorption diminuent nécessairement l'efficacité du filtre [Popov and Bozhan, 2001].

Les outils développés au cours de cette thèse et les connaissances acquises sur le phénomène de résonance et les propriétés de contrôle de la lumière par les cristaux photoniques peuvent être adaptés à tous les domaines d'applications employant des structures périodiques supportant des modes propres. Parmi ces domaines, citons l'étude de la transmission exaltée à travers une couche métallique percée d'un réseau de trous sub-longueur d'onde [Ebbesen et al., 1998] et le contrôle de l'émission spontanée d'atomes luminescents placés sur des réseaux métalliques [Barnes, 1999] ou diélectriques [Fan et al., 1997] [Mekis et al., 2000]. Une partie du travail de thèse a porté sur ce dernier sujet et a donné lieu a une publication [Fehrembach et al., 2001] reproduite en annexe.

2. Dépôt de brevet demandé par Cilas Marseille le 26 juin 2003. Titre: "Filtres optiques à réseau résonnant". Inventeurs: "A.-L. Fehrembach, D. Maystre, H. Giovannini et A. Sentenac".

Annexe A

Application des réseaux à modes guidés au contrôle de l'émission spontanée d'atomes luminescents

Le contrôle de l'émission spontanée de sources luminescentes est nécessaire dans de nombreux domaines. Par exemple, en biologie, une molécule luminescente est plus facilement détectable si son émission est directive et exaltée. Dans les télécommunications optiques, la lumière issue d'une diode électro-luminescente directive peut être couplée dans une fibre optique avec un bon rendement. Pour les télécommunications entre satellites (micro-ondes) des antennes directives sont indispensables à cause des grandes distances parcourues. Enfin le contrôle de l'émission spontanée permet d'abaisser le seuil des micro-lasers.

Pour augmenter la directivité de l'émission, une solution consiste à placer la source dans une cavité Fabry-Pérot accordée à sa longueur d'onde d'émission. Malheureusement, la majeure partie de l'énergie émise est perdue dans les modes guidés. Pour résoudre ce problème, l'utilisation de plots multicouches de dimensions réduites (de l'ordre de la longueur d'onde) a été proposée. Cependant, la divergence de l'émission est amplifiée à cause de la diffraction par la structure. Une autre idée consiste à découpler les modes guidés, en utilisant par exemple une couche rugueuse, ou un réseau. Mais là encore, l'émission n'est pas directive. Le mode guidé est découplé dans toutes les directions de l'espace libre avec la couche rugueuse, et selon des arcs de cercle avec le réseau. Pour améliorer la directivité dans ce dernier cas, nous travaillons sur les directions de propagation du mode guidé dans le plan du guide d'onde, avant le découplage. Nous proposons un motif de réseau permettant d'interdire la propagation dans toutes les directions excepté une seule. Puis nous utilisons un second motif pour découpler ce mode guidé dans la direction normale au guide d'onde. La structure finalement obtenue est un guide d'onde périodiquement perturbé capable d'extraire 80% de la lumière émise par une molécule fluorescente dans un cône de 0,2° d'ouverture. Le taux d'émission de la molécule fluorescente est 3,5 fois plus important que son émission en présence du guide d'onde non perturbé.

APPLIED PHYSICS LETTERS VOLUME 79, NUMBER 26 24 DECEMBER 2001

Highly directive light sources using two-dimensional photonic crystal slabs

Anne-Laure Fehrembach, Stefan Enoch, and Anne Sentenac[a)]
Institut Fresnel, UMR 6133 du CNRS, Université de St Jérôme 13 397 Marseille cedex 20, France

(Received 15 June 2001; accepted for publication 11 October 2001)

We have designed a microcavity with periodic microstructure that extracts nearly all the power emitted by a luminescent source and confines 80% of the energy radiated in the superstrate in a cone of half width 0.2° about the normal of the device. © *2001 American Institute of Physics.*
[DOI: 10.1063/1.1427423]

Generating light sources is a subject of intense activity. Several ways for improving these devices are explored: increasing the spontaneous emission rate, improving the conversion of emitted power into useful radiation, and controlling the angular directivity of the light. The latter requirement also proves useful in ameliorating the performances of biosensors, in which detectors usually see luminescent molecules under a limited solid angle. Many microcavities from Fabry–Pérot stacks to three-dimensional (3D) geometries such as microspheres, micropillars, and air bridges, have been studied to modify the emission rate by confining the light to small volumes.[1,2] 3D photonic crystals, namely photonic band-gap (PBG) materials, have also been suggested[3] for this purpose. Easier to fabricate, two-dimensional (2D) periodically patterned dielectric planar waveguides, i.e., mode band-gap (MBG) materials, which allow control of guided waves in two space directions and partially confine the light in the third direction with the total internal reflection process, are also under study.[4] In most light-emitting diodes (LEDs) the emitting part is a thin-film material whose index of refraction is quite larger than its surrounding media. A large fraction (close to 90%) of the emitted power is trapped in the structure through the guided waves and by total internal reflection. This problem is often resolved by introducing surface roughness on the LED, which scatters back in free space the nonradiative waves, so that over 30% of the light can escape from the semiconductor surface.[5] A better extraction efficiency combined with an increase of the spontaneous emission rate can be obtained by enclosing the emissive layer in a microcavity that forces the source to emit preferentially into modes that can couple to useful radiation. In planar microcavities such as Bragg reflecting mirrors based on a multilayer stack, up to 32% of the power is extracted while the remainder is carried mostly by the guided waves of the stack.[6] Prohibiting the propagation of lateral modes can overcome this limitation.[1,7] Another solution, using MBG-type structures, consists of favoring the coupling of the source to surface waves or guided waves and then Bragg scattering them in free space.[4,8–10] Experimental and numerical studies of these microcavities show a strong enhancement in the useful emission intensity due to a much better extraction rate and a higher spontaneous emission rate.[4] The issue of the directivity of the light source has received less attention. Indeed, it seems difficult to improve it with microcavities allowing a high confinement of the field since the lateral dimension of the emitting surfaces is usually of the order of the wavelength. On the other hand, extended cavities such as Fabry–Pérot stacks, while able to confine the radiated power into a cone of small aperture, are plagued with a relatively small extraction efficiency.[6] Last, the promising MBG-type cavities present a complicated radiation pattern that is not satisfactory as it stands.[9,11] In this letter, we design a MBG microcavity from which all the power provided by the source can be theoretically extracted, and that concentrates most of the radiated energy in an arbitrarily small solid angle about its normal.

To study the radiation pattern of the device, we use a well-proven model based on an entirely classical formalism in which the emitter is considered to be a forced electric dipole oscillating at frequency ω located in a complex structure.[12] The calculation of the emission, in the superstrate or substrate, of the active microcavity is performed by invoking the reciprocity theorem.[13] The latter states that, in the far field of the active device, the electric field at $\mathbf{R}=R\hat{\mathbf{u}}=R(\mathbf{u}_{\parallel}+u_z\hat{\mathbf{z}})$, $\mathbf{E}_1(\mathbf{R})=\mathbf{E}(\hat{\mathbf{u}})\exp(i\omega R/c)/R$, radiated by a dipole located at origin $\mathbf{O}$ [see Fig. 1(a)], can be obtained from field $\mathbf{E}_2(\mathbf{O})$ that exists when the same structure, without source, is illuminated by a plane wave with the incident wave vector directed along $(\mathbf{u}_{\parallel}-u_z\hat{\mathbf{z}})$. The radiated power in the direction of observation $\hat{\mathbf{u}}$ per unit solid angle, is proportional to $|\mathbf{E}(\hat{\mathbf{u}})|^2$. The reciprocity theorem is a powerful tool that allows one to interpret the radiation pattern of an active device by referring to the properties of the passive structure which have usually been more studied. All the numerical results were obtained with a 2D grating code, based on the scattering matrix approach and a Fourier modal method, as described in Ref. 14. The scattering matrix relates any incident

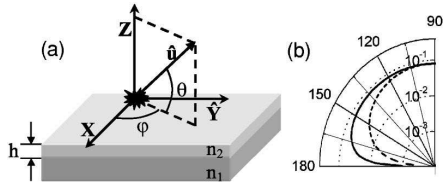


FIG. 1. (a) Geometry of the planar cavity. The thickness of the film is $h=0.06\,\lambda_0$, where λ_0 is the wavelength of radiation of the source in vacuum. Index of refraction of the film $n_2=3.5$, of the substrate $n_1=1.5$, and of the superstrate $n=1$. (b) Power radiated in the superstrate by a dipole directed along the $0X$ axis located on the film: in the plane $\varphi=0°$ (solid line), $\varphi=90°$ (dash line).

[a)]Electronic mail: anne.sentenac@fresnel.fr

 © 2001 American Institute of Physics

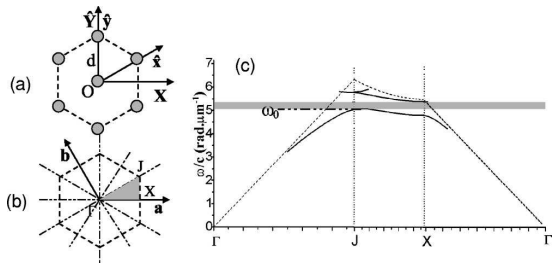


FIG. 2. (a) Hexagonal cell of air holes etched in the film of the planar microcavity of Fig. 1(a). The lattice constant is $d=0.35\lambda_0$. The holes are hexagonal and inscribed in a disk of diameter $d/\sqrt{3}$. (b) Reciprocal lattice of the periodically patterned thin film (i.e., mode band-gap material) and the reduced Brillouin zone. (c) Dispersion relation of the TE-like mode in the MBG. The cutoff frequency for the TM-like modes is well above the gap. The frequency ω_0, at the lower boundary of the gap, is the frequency of the source.

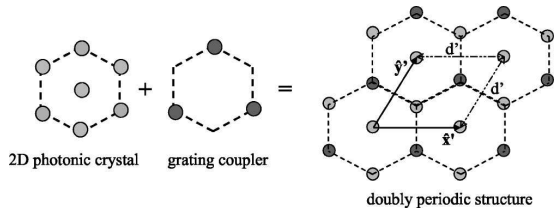


FIG. 3. Schematic top view in real space of the MBG of Fig. 2(a) and of the grating coupler that outcouples the guided waves in free space along the normal to the device. The microcavity is a combination of these two structures, it is periodic with period $d'=d\sqrt{3}$. The disks represent hexagonal holes that are drilled through the guiding layer. The black holes are 20% smaller than the gray ones.

plane wave impinging on the structure (from the substrate and the superstrate) to the outgoing diffracted plane waves. It permits the calculation of the field inside the structure, the dispersion relation of modes,[15] and the efficiencies of gratings.

We start from the simple multilayer system, depicted in Fig. 1(a), consisting of a semi-infinite substrate of refractive index $n_1=1.5$ covered by a layer of dielectric material with a high refractive index, $n_2=3.5$ (typically, a semiconductor such as GaAs). The superstrate is vacuum with index 1. We now place a luminescent source on the film. To model quantum-well sources, we consider solely dipole moments lying in the XY plane.[7] The emitted light is distributed among the radiative continuum that gets out of the structure (above and below) and the nonradiative part, including the guided modes, that remains trapped in the layer. The angular distribution of the intensity emitted in the superstrate is shown in Fig. 1(b). The lobe is strongly divergent for both planes of observation. The total radiated power in free space, obtained by integrating the emission over 4π strad is two times smaller than that obtained with a source located in free space. This is due to the loss of power carried by the guided modes and also by the inhibition of the spontaneous emission induced by the destructive interferences between the reflected fields that drive the emitter.[12]

The first issue is to control the guided modes that carry an important fraction of the emitted power,[6] and thus diminish the device efficiency. It is well known that a periodic perturbation of the planar waveguide, namely, a Bragg grating, may impede the propagation of guided waves in a given direction. Yet, blocking all the modes, whatever their direction, in the frequency domain W of the luminescent source, is more difficult. It is achieved in Ref. 7 with a triangular lattice of air holes in a symmetrical dielectric slab. Here, we consider an asymmetrical planar waveguide that supports only one TE mode in W described by its dispersion relation $k_g(\omega)$. We pattern the guiding layer with a triangular lattice of hexagonal dips. More precisely, the structure is periodic with period d along two vectors $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$ of the XY plane that verify $\hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{y}}=\cos(\pi/3)$, as depicted in Fig. 2(a). Then, the electric field of the TE-like mode can be cast in the form

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},z,t)=\exp(i\mathbf{r}\cdot\mathbf{K}_m-i\omega t)\sum_{\mathbf{K}\in\Sigma}\mathbf{E}_{\mathbf{K}}(z)\exp(\mathbf{r}\cdot\mathbf{K}), \quad (1)$$

where $\mathbf{K_m}$ is the mode wave vector that is limited to the Brillouin zone; $\mathbf{r}$ is the in-plane component of the observation point $\mathbf{r}=x\hat{\mathbf{x}}+y\hat{\mathbf{y}}$; and $\mathbf{K}=(2\pi/d)(n\mathbf{a}+m\mathbf{b})$, with (n,m) relative integers, is a vector of reciprocal space Σ whose basis $(\mathbf{a},\mathbf{b})$ satisfies $\mathbf{a}\cdot\hat{\mathbf{x}}=1$, $\mathbf{a}\cdot\hat{\mathbf{y}}=0$, $\mathbf{b}\cdot\hat{\mathbf{x}}=0$, $\mathbf{b}\cdot\hat{\mathbf{y}}=1$. For small corrugations, the dispersion relation $\mathbf{K_m}(\omega)$ follows that of the unperturbed waveguide except at the edge of the Brillouin zone, i.e., when one can find $\mathbf{K}$ so that $|\mathbf{K_m}+\mathbf{K}|$ is close to $|\mathbf{K_m}|$ [this occurs at frequencies ω when $k_g(\omega)$ reaches π/d]. Indeed, in this region, the grating triggers the excitation of several guided waves propagating along different directions. The coupling between these degenerate modes introduces a frequency band gap corresponding to a change in the energy associated to each mode. In Fig. 2 we plot the dispersion relation $\mathbf{K_m}(\omega)$ when the extremity of $\mathbf{K_m}$ follows the reduced Brillouin-zone boundary $\Gamma JX\Gamma$, described by $\Gamma X=\pi\mathbf{a}/d$, $\Gamma J=2\pi(\mathbf{b}/3+2\mathbf{a}/3)/d$, which accounts for the symmetry of the crystal. To obtain a total band gap for the TE-like mode, it has been necessary to etch hexagonal air holes, inscribed in a disk of diameter $\phi=d/\sqrt{3}$, throughout the film down to the substrate. If the frequency of the source lies in the gap, no emitted power can be lost in the guided modes and the extraction rate is strongly enhanced.[7] On the other hand, the angular distribution of emitted light is not controlled and the directivity of the source is not improved.

Rather than blocking the modes, it has been suggested in Refs. 8–10 to recover them. Studies have shown that the field associated to guided waves in a multilayer[6] or to guided Bloch waves in a MBG,[16] can be very important as compared to that of the continuum spectrum. Hence, the emitter may couple to them preferentially. To recover the power trapped in the guided waves, one can use a hemispherical dome with a higher permittivity than the film. A similar result can be obtained, with a more repeatable and cheaper technology, thanks to a cross-grating coupler that scatters back in free space the guided waves and the continuum of the nonradiative plane waves provided by the source. The period of the cross grating is chosen so that whatever wave vector k in the OXY plane, there exists at least one reciprocal lattice vector $\mathbf{K}$, which satisfies, $|\mathbf{k}+\mathbf{K}|\leqslant\omega/c$. The power carried by the now leaky, guided modes escapes the device in free space along the directions (θ,φ) given by[9]

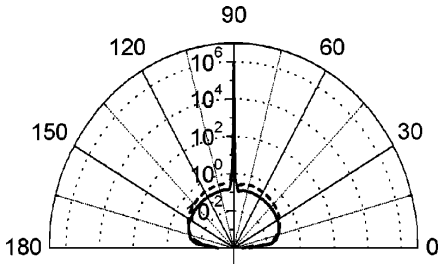


FIG. 4. Power radiated in the superstrate, in the plane $\varphi=0°$ by a source placed on the modified MBG presented in Fig. 3(b). The dipole moment is directed along the $0X$ axis (dash line) and $0Y$ axis (solid line). The radiated power is roughly isotropic.

$$\frac{\omega}{c}\sin\theta(\cos\varphi\hat{\mathbf{X}}+\sin\varphi\hat{\mathbf{Y}})=\mathbf{K_m}+\mathbf{K}. \tag{2}$$

The radiated pattern then presents peaks of emissivity along several arcs or portions of cones.[9,11] The height and filling factor of the grating influence the thickness (or angular divergence) of the arcs by increasing or diminishing the leakage of the modes.[9] These devices are interesting from an extraction point of view, but the angular distribution of the emitted light is still not satisfactory and it remains difficult to collect light from the arcs.

To concentrate the energy about the normal of the device while extracting 100% of the emitted power, we propose to improve this last technique by using the ability of 2D photonic crystal to modify the dispersion relation of the modes. Indeed, the presence of arcs in the spatial distribution of the emitted light is directly linked to the fact that the guided modes are excited by the source in any direction of the XY plane. If one is able to design a planar structure that supports guided modes in a small angular domain only, then, the grating coupler will be able to scatter back the light in a very directive manner. To impede the propagation of the guided waves in most directions, we can use a MBG that opens a total band gap for the modes. At frequencies close to the edge of the gap, the propagation of the modes is allowed only in certain directions of the reciprocal Brillouin zone. In the example presented in Fig. 2, when $\omega=\omega_0$, at the low edge of the gap, the periodic structure supports one mode in the reduced Brillouin zone, with wave vector $\mathbf{K_m}=\Gamma J$ (where ΓJ is a reciprocal space vector going from Γ to J), $|\mathbf{K_m}|=\pi/d$, and its five symmetrical partners in the complete representation shown in Fig. 3(a). Note that these guided modes are not leaky. To recover them in free space, we need to introduce a cross-grating coupler. We carefully chose its period and cell in such a way that the light trapped in the modes is scattered back in the normal direction to the device. Following Eq. (2), we see that the reciprocal lattice of the new periodic structure should include $\mathbf{K}'=\Gamma J$ and all its hexagonal symmetrical images. Hence, we alter the 2D hexagonal crystal with lattice constant d depicted in Fig. 2 so that it becomes periodic with period $d'=d\sqrt{3}$ and a $\pi/3$ rotated hexagonal cell. It amounts to changing slightly the shape of one hole over three, as shown in Fig. 3(b). The modification of this motif is responsible for the leakage of the modes, and thus for the spatial extent L of the electric field in the structure. It monitors the angular divergence $\delta\theta$ of the emitted light in free space with $\delta\theta\sim\lambda/L$, where λ is the wavelength of radiation. The typical length of the microcavity that is necessary to extract most of the power from the guided modes should be of the order of L. The bigger is the perturbation, the more divergent is the emitted beam and the lesser periods are needed to extract all the energy. The delicate interplay between light extraction and light absorption rates will limit, in practice, the angular resolution of the source (see Boroditsky *et al.* in Ref. 4).

In Fig. 4, we plot the angular distribution of the emitted light in the superstrate from a source placed in the altered MBG, depicted in Fig. 3(b), where one hexagonal hole over three is 20% smaller than the regular motif. The solid and dash lines correspond to dipole moments oriented along $\hat{\mathbf{X}}$ and $\hat{\mathbf{Y}}$, respectively. In both cases, we observe a very important peak of emissivity along the normal to the sample corresponding to the excitation of the mode. The average of the emitted intensity in the superstrate over all the orientations of the source shows that about 80% of the energy is now concentrated in a cone of half width 0.2°. The radiated power in the superstrate represents 25% of the total emitted intensity but it is nine times bigger than that obtained from the planar microcavity (while the total radiated power is 3.5 times that of the planar microcavity). Note that a larger emission enhancement could be expected with sources located in the middle of the film rather than at the upper boundary since the Bloch mode intensity is higher there.

By introducing periodical defects in a thin film of 2D photonic crystal, we have designed a very directive light source with high extraction rate that could be manufactured with the present nanotechnology.

[1] J. M. Gérard, D. Barrier, J. Y. Marzin, R. Kuszelewicz, L. Manin, E. Costard, V. Thierry-Mieg, and T. Rivera, Appl. Phys. Lett. **69**, 449 (1996).
[2] J. S. Foresi, P. R. Villeneuve, J. Ferrera, E. R. THoen, G. Steinmeyer, S. Fan, J. D. Joannopoulos, L. C. Kimerling, H. I. Smith, and E. P. Ipeen, Nature (London) **390**, 143 (1997).
[3] E. Yablonovitch, Phys. Rev. Lett. **58**, 2059 (1987).
[4] Special section on electromagnetic crystal structures, design synthesis, and applications, J. Lightwave Technol. **17**, 1928 (1999).
[5] I. Schnitzer, E. Yablonovitch, C. Caneau, T. J. Gmitter, and A. Scherer, Appl. Phys. Lett. **63**, 2174 (1993).
[6] H. Rigneault, S. Robert, C. Begon, B. Jacquier, and P. Moretti, Phys. Rev. A **55**, 1497 (1997).
[7] S. Fan, P. R. Villeneuve, J. D. Joannopoulos, and E. F. Schubert, Phys. Rev. Lett. **78**, 3294 (1997).
[8] W. L. Barnes, J. Lightwave Technol. **17**, 2170 (1999).
[9] H. Rigneault, F. Lemarchand, and A. Sentenac, J. Opt. Soc. Am. A **17**, 1048 (2000).
[10] J. M. Lupton, B. J. Matterson, I. D. W. Samuel, M. J. Jory, and W. L. Barnes, Appl. Phys. Lett. **77**, 3340 (2000).
[11] S. C. Kitson, W. L. Barnes, and J. R. Sambles, Opt. Commun. **122**, 147 (1995).
[12] W. L. Barnes, J. Mod. Opt. **45**, 661 (1998).
[13] L. Landau, E. Lifchitz, and L. Pitaevskii, *Electromagnetics of Continuous Media* (Pergamon, Oxford, 1984).
[14] L. Li, J. Opt. Soc. Am. A **14**, 2758 (1997).
[15] P. Vincent and M. Nevière, Appl. Phys. **20**, 345 (1979).
[16] J. M. Pottage, E. Silvestre, and P. Russel, J. Opt. Soc. Am. A **18**, 442 (2001).

Annexe B

Récapitulation des structures

Cette annexe offre un récapitulatif des structures mentionnées dans le rapport. Pour chaque structure, la légende rappelle le numéro, le type, et le but dans lequel la structure a été étudiée. Les schémas précisent les paramètres des structures.

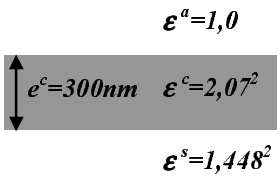


FIG. B.1 – *Structure 1.1 - Guide d'ondes plan - Exemple, calcul de la relation de dispersion*

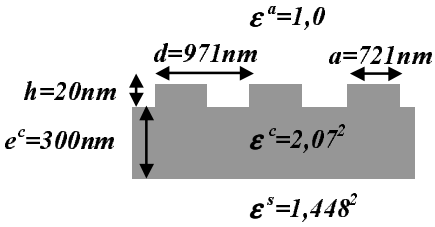


FIG. B.2 – *Structure 1.2 - Réseau résonnant 1D - Exemple, calcul de la relation de dispersion et des profils de réflexion*

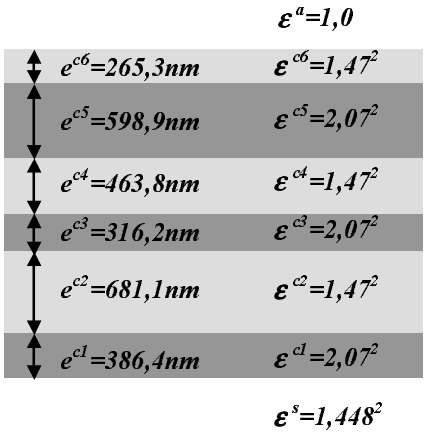


FIG. B.3 – *Structure 2.0 - Guide d'ondes plan comportant 3 modes guidés TE - Mise en évidence du lien entre l'efficacité de couplage et la répartition du champ du mode dans l'empilement*

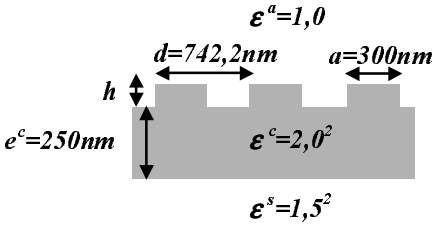


FIG. B.4 – *Structure 2.1 - Réseau résonnant 1D - Validation du calcul du pôle et des zéros par la méthode perturbative*

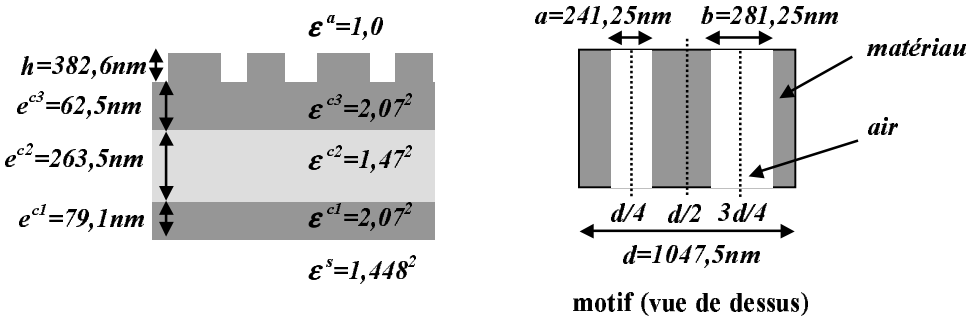


FIG. B.5 – *Structure 3.1 - Réseau résonnant 1D - Tolérance angulaire optimisée en incidence normale*

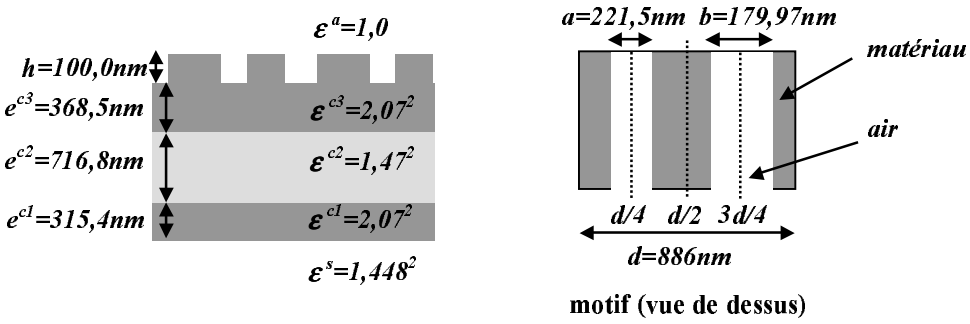


FIG. B.6 – *Structure 3.2 - Réseau résonnant 1D - Tolérance angulaire optimisée en incidence oblique*

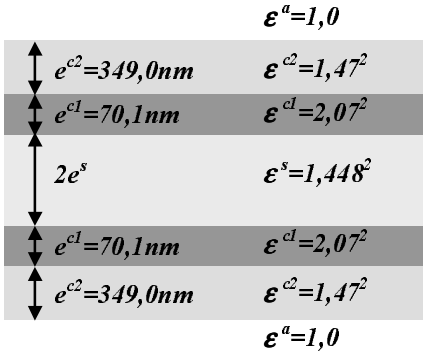


FIG. B.7 – *Structure 4.1 - Empilement composé de deux guides d'ondes plans identiques couplés - Evolution des longueurs d'onde de résonance des modes symétrique et anti-symétrique en fonction de l'épaisseur de couplage*

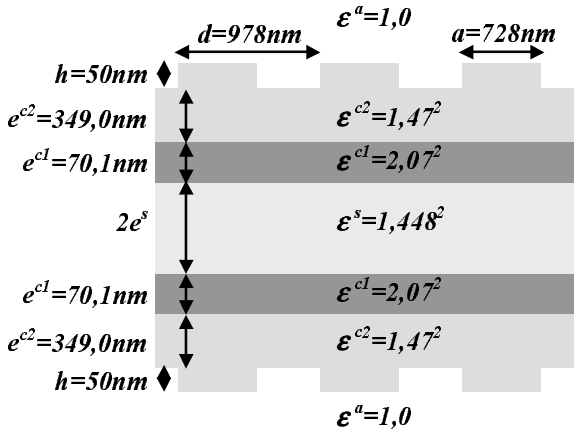


FIG. B.8 – *Structure 4.2 - Réseaux résonnants 1D basés sur un empilement composé de deux guides d'ondes plans identiques couplés - Evolution du profil spectral en fonction de l'épaisseur de couplage*

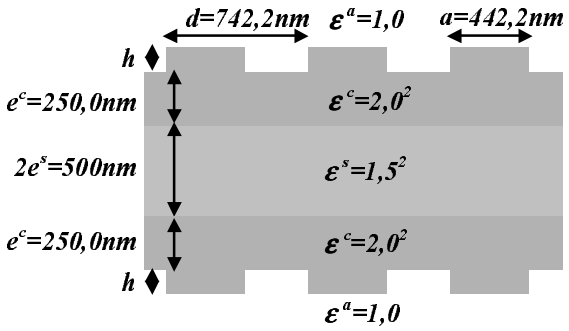


FIG. B.9 – *Structure 4.3 - Réseaux résonnants 1D basés sur un empilement composé de deux guides d'ondes plans identiques couplés - Validation du calcul du pôle et des zéros par la méthode perturbative*

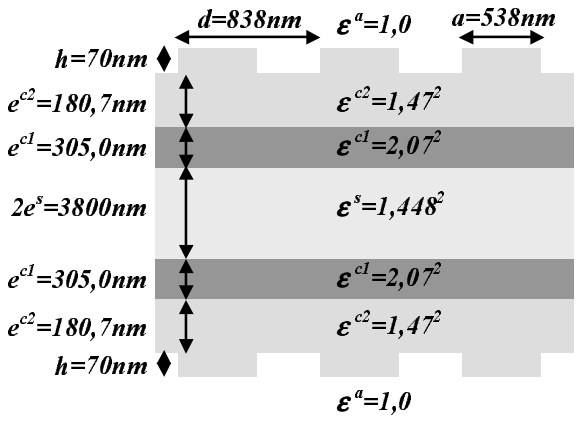


FIG. B.10 – *Structure 4.4 - Réseaux résonnants 1D basés sur un empilement composé de deux guides d'ondes plans identiques couplés - Profil spectral optimisé, couche de couplage fine*

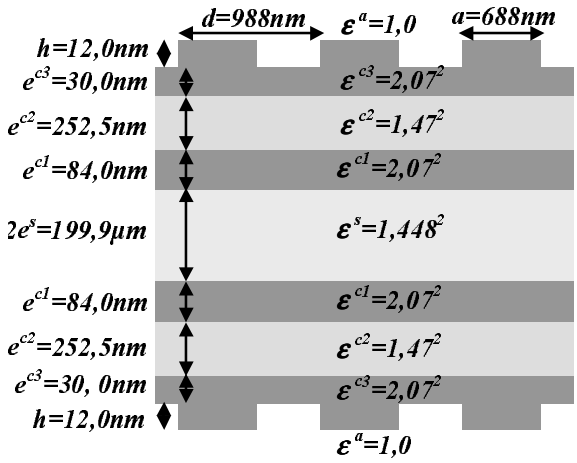


FIG. B.11 – *Structure 4.5 - Réseaux résonnants 1D basés sur un empilement composé de deux guides d'ondes plans identiques couplés - Profil spectral optimisé, couche de couplage épaisse*

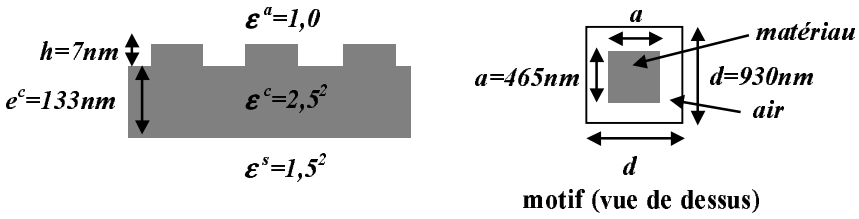


FIG. B.12 – *Structure 5.1 - Réseau résonnants 2D carré - Observation de la dépolarisation de l'onde incidente en incidence quelconque*

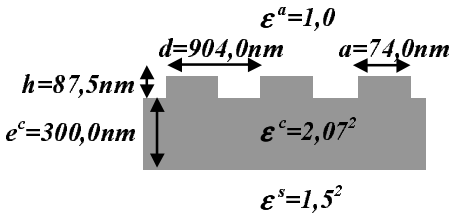


FIG. B.13 – *Structure 5.2 - Réseau résonnant 1D - Observation de deux pics en incidence conique pure, l'un en polarisation s, l'autre en polarisation p, à des longueurs d'onde différentes*

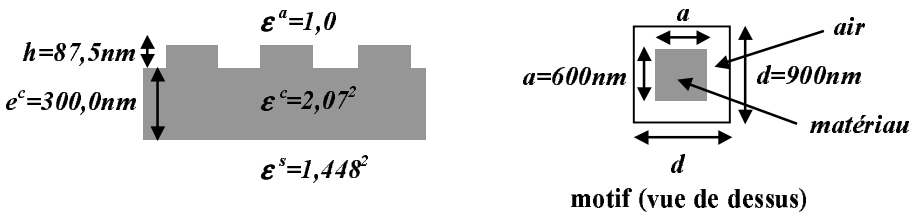


FIG. B.14 – *Structure 5.3 - Réseau résonnant 2D carré - Indépendance à la polarisation en incidence normale*

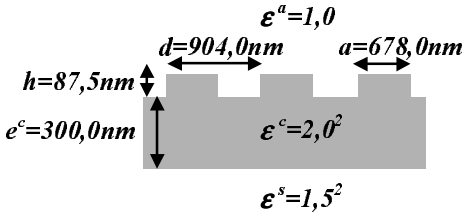


FIG. B.15 – *Structure 5.4 - Réseau résonnant 1D - Indépendance à la polarisation en incidence classique oblique, par excitation d'un mode TE et d'un mode TM*

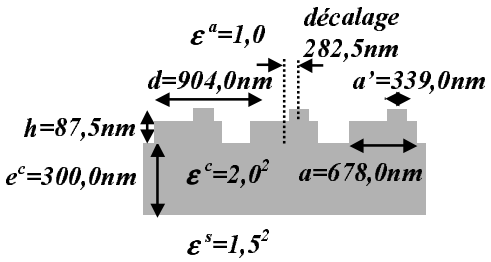


FIG. B.16 – *Structure 5.5 - Réseau résonnant 1D - Excitation, en incidence conique pure oblique, d'un mode propre polarisé circulairement*

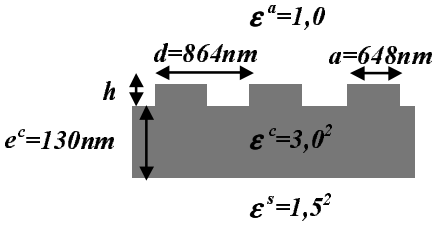


FIG. B.17 – *Structure 6.1 - Réseau résonnant 1D - Validation du calcul des pôles en incidence conique pure, et plus généralement, lorsque le réseau est éclairé selon un plan de symétrie*

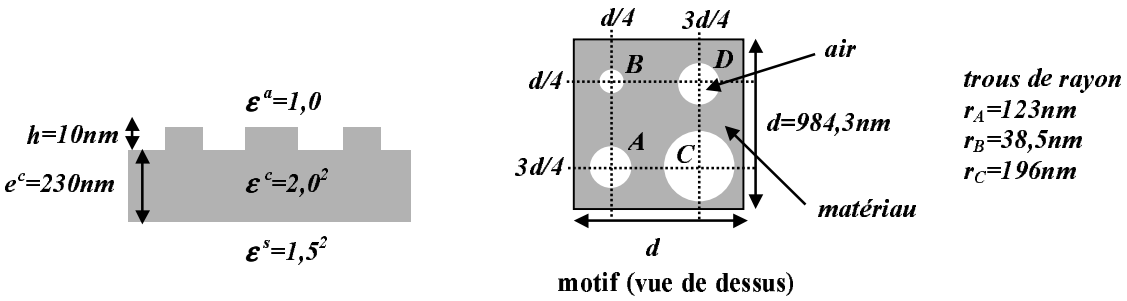


FIG. B.18 – *Structure 6.2 - Réseau résonnant 2D carré - Observation de deux pics, l'un en polarisation s, l'autre en polarisation p, centrés à la même longueur d'onde, mais de largeur différentes*

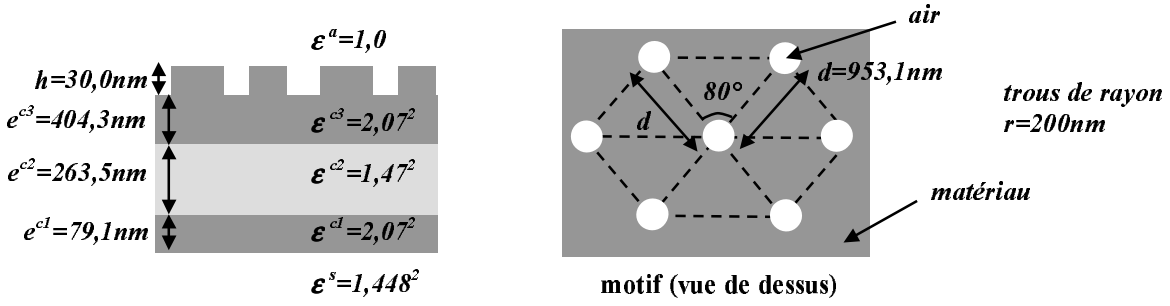


FIG. B.19 – *Structure 6.3 - Réseau résonnant 2D hexagonal - Indépendance à la polarisation: observation de deux pics, l'un en polarisation s, l'autre en polarisation p, centrés à la même longueur d'onde, et de même largeur*

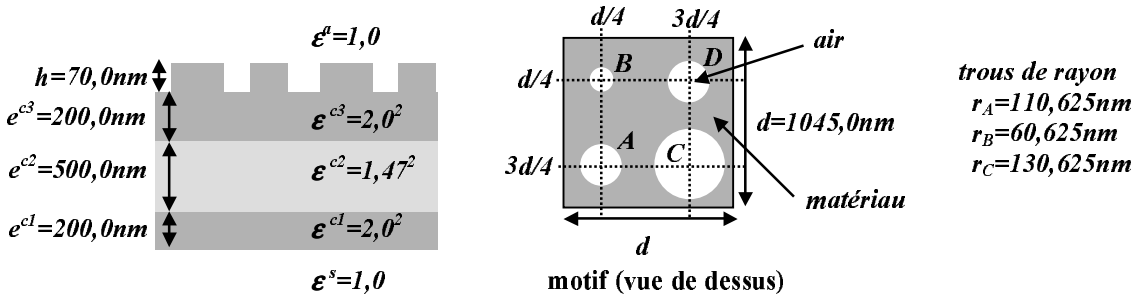


FIG. B.20 – *Structure 7.1 - Réseau résonnant 2D carré - Indépendance à la polarisation et profil angulaire optimisé*

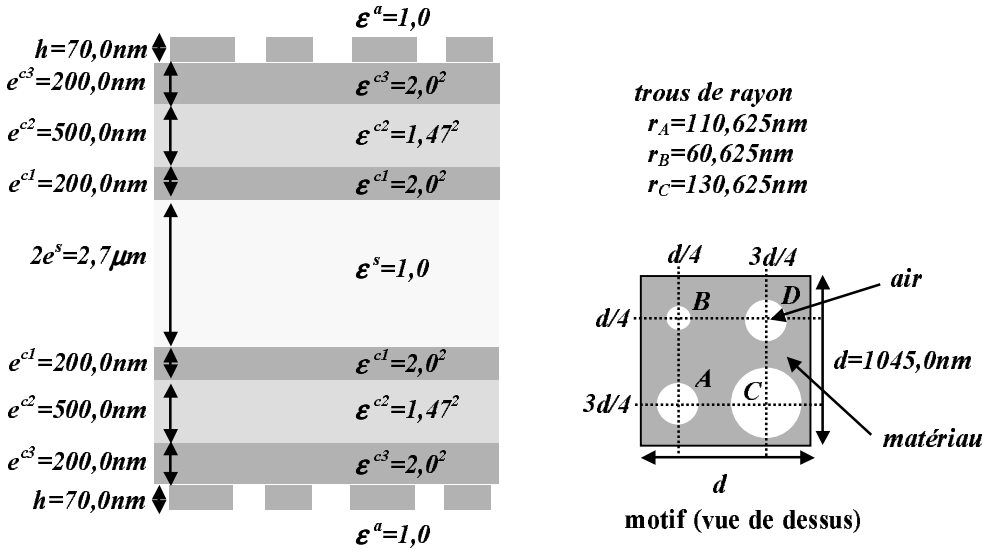


FIG. B.21 – *Structure 7.2 - Réseau résonnant 2D carré - Indépendance à la polarisation, profil angulaire et profil spectral optimisés, couche de couplage fine*

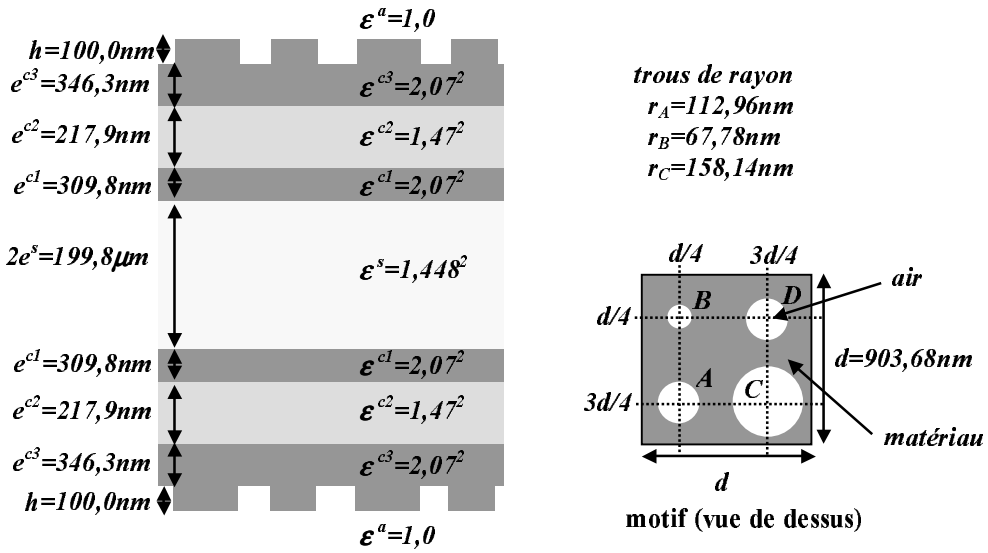


FIG. B.22 – *Structure 7.3 - Réseau résonnant 2D carré - Indépendance à la polarisation, profil angulaire et profil spectral optimisés, couche de couplage épaisse*

Bibliographie

[Amersfoort et al., 1996] Amersfoort, M., Soole, J., Leblanc, H., Andreadakis, N., Rajhel, A., and Caneau, C. (1996). Passband broadening of integrated arrayed waveguide filters using multimode interference couplers. *Electron. Lett.*, 32(5):449–451.

[Ashcroft and Mermin, 1976] Ashcroft, N. and Mermin, D. (1976). *Solid state physics*. Saunders College Publishing.

[Barnes, 1999] Barnes, W. (1999). Electromagnetic crystals for surface plasmon polaritons and the extraction of light from emissive devices. *IEEE J. Lightwave Technol.*, 17(11):2170–2181.

[Barnes et al., 1996] Barnes, W., Preist, T., Kitson, S., and J.R., S. (1996). Physical origin of photonic energy gaps in the propagation of surface plasmons on gratings. *Phys. Rev. B*, 54(9):6227–6243.

[Bendickson et al., 2001] Bendickson, J., Glytsis, E., Gaylord, T., and Brundrett, D. (2001). Guided-mode resonant subwavelength gratings: effects of finite beams and finite gratings. *J. Opt. Soc. Am. A*, 18(8):1912–1928.

[Bräuer and Bryngdahl, 1993] Bräuer, R. and Bryngdahl, O. (1993). Electromagnetic diffraction analysis of two-dimensional gratings. *Opt. Commun.*, 100:1–5.

[Cao and Lalanne, 2002] Cao, Q. and Lalanne, P. (2002). Negative role of surface plasmons in the transmission of metallic gratings with very narrow slits. *Phys. Rev. Lett.*, 88:5.

[Carminati et al., 1998] Carminati, R., Nieto-Vesperinas, M., and Greffet, J.-J. (1998). Reciprocity of evanescent electromagnetic waves. *J. Opt. Soc. Am. A*, 15(3):706–712.

[Chen et al., 1999] Chen, Y.-K., Chang, C.-H., Yang, Y.-L., Kuo, I.-Y., and T.-C., L. (1999). Mach-Zehnder fiber-grating-based fixed and reconfigurable multichannel optical add-drop multiplexers for DWDM networks. *Opt. Commun.*, 169:245–262.

[Cowan et al., 2001] Cowan, A., Paddon, P., Racradouni, V., and Young, J. (2001). Resonant scattering and mode coupling in two-dimensional textured planar waveguides. *J. Opt. Soc. Am. A*, 18(5):1160–1170.

[DeMange, 2002] DeMange, S. (2002). Thin-film filters give flexibility to OADMs. *Laser Focus World*, 38(6).

[Ebbesen et al., 1998] Ebbesen, T., Lezec, H., Ghaemi, H., Thio, T., and Wolff, P. (1998). Extraordinary optical transmission through sub-wavelength hole arrays. *Nature*, 391(6668):667–669.

[Enoch et al., 2002] Enoch, S., Popov, E., Nevière, M., and Reinisch, R. (2002). Enhanced light transmission by hole arrays. *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.*, (4):S83–S87.

[Fan et al., 1997] Fan, S., Villeneuve, P., Joannopoulos, J., and Schubert, E. (1997). High extraction efficiency of spontaneous emission from slabs of photonic crystals. *Phys. Rev. Lett.*, 78(17):3294–3297.

[Fano, 1941] Fano, U. (1941). The theory of anomalous diffraction gratings and quasi-stationary waves on metallic surfaces (Sommerfeld's waves). *J. Opt. Soc. Am. A*, 31:213–222.

[Fehrembach et al., 2001] Fehrembach, A.-L., Enoch, S., and Sentenac, A. (2001). Highly directive light sources using two-dimensional photonic crystal slabs. *Appl. Phys. Lett.*, 79(26):4280–4282.

[Fehrembach et al., 2002a] Fehrembach, A.-L., Maystre, D., and Sentenac, A. (2002a). Filtering of unpolarized light by gratings. *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.*, (4):S88–S94.

[Fehrembach et al., 2002b] Fehrembach, A.-L., Maystre, D., and Sentenac, A. (2002b). Phenomenological theory of filtering by resonant dielectric gratings. *J. Opt. Soc. Am. A*, 19(6):1136–1144.

[Fehrembach and Sentenac, 2003] Fehrembach, A.-L. and Sentenac, A. (2003). Study of waveguide grating eigenmodes for unpolarized filtering applications. *J. Opt. Soc. Am. A*, 20(3):481–488.

[Feynman, 1984] Feynman, R. (1984). *Le cours de physique de Feynman, mécanique 1.* InterEditions.

[Glasberg et al., 1998] Glasberg, S., Sharon, A., Rosenblatt, D., and Friesem, A. (1998). Spectral shifts and line-shapes asymmetries in the resonant response of grating waveguide structures. *Opt. Commun.*, 145:291–299.

[Golubenko et al., 1986] Golubenko, G., Svakhin, A., Sychugov, V., Tischenko, A., Popov, E., and Mashev, L. (1986). Diffraction characteristics of planar corrugated waveguides. *Opt. Quantum. Electron.*, 18:123–128.

[Greffet, 1992] Greffet, J.-J. (1992). Theoretical model of the shift of the Brewster angle on a rough surface. *Opt. Lett.*, 17:238–240.

[He et al., 2001] He, C., Ma, D., and Li, W.-Z. (2001). Thin-film filters are the building blocks of multiplexing devices. *Laser Focus World*, 37(5).

[Hegedus and Netterfield, 2000] Hegedus, Z. and Netterfield, R. (2000). Low sideband guided-mode resonant filter. *Appl. Opt.*, 39(10):1469–1473.

[Hessel and Oliner, 1965] Hessel, A. and Oliner, A. (1965). A new theory of Wood's anomalies on optical gratings. *Appl. Opt.*, 4:1275–1297.

[Hibbins et al., 2000] Hibbins, A., Sambles, J., and Lawrence, C. (2000). Coupling of near-grazing microwave photons to surface plasmon polaritons via dielectric grating. *Phys. Rev. E*, 61(5):5900–5906.

[Hibbins et al., 2002] Hibbins, A., Sambles, J., and Lawrence, C. (2002). Excitation of remarkably nondispersive surface plasmons on a nondiffracting, dual-pitch metal grating. *Appl. Phys. Lett.*, 80(13):2410–2412.

[Hill and Meltz, 1997] Hill, K. and Meltz, G. (1997). Fiber Bragg grating technology fundamentals and overview. *IEEE J. Lightwave Technol.*, 15:1263–1276.

[Hutley and Maystre, 1976] Hutley, M. and Maystre, D. (1976). The total absorption of light by a diffraction grating. *Opt. Commun.*, 19(3):431–436.

[Jacob et al., 2000] Jacob, D., Dunn, S., and Moharam, M. (2000). Design considerations for narrow-band dielectric resonant grating reflection filters of finite length. *J. Opt. Soc. Am. A*, 17(7):1241–1245.

[Jacob et al., 2001a] Jacob, D., Dunn, S., and Moharam, M. (2001a). Normally incident resonant grating reflection filters for efficient narrow-band spectral filtering of finite beams. *J. Opt. Soc. Am. A*, 18(9):2109–2120.

[Jacob et al., 2002] Jacob, D., Dunn, S., and Moharam, M. (2002). Flat-top narrow-band spectral response obtained from cascaded resonant grating reflection filters. *J. Opt. Soc. Am. A*, 17:1241–1249.

[Jacob et al., 2001b] Jacob, K., Dunn, C., and Moharam, M. (2001b). Interference approach applied to dual-grating dielectric resonant reflection filters. *Opt. Lett.*, 26(22):1749–1751.

[Joannopoulos et al., 1995] Joannopoulos, J., Meade, R., and Winn, J. (1995). *Photonic crystals.* Princeton University Press.

[Lacour, 2001] Lacour, D. (2001). *Diffraction d'une onde plane par un guide périodique: application à la conception d'un filtre en longueur d'onde indépendant de la polarisation.* PhD thesis, Université Blaise Pascal.

[Lacour et al., 2001] Lacour, D., Plumey, J.-P., Granet, G., and Mure-Ravaud, A. (2001). Resonant waveguide grating: Analysis of polarization independent filtering. *Opt. quantum electron.*, 33:451–470.

[Lemarchand, 1999] Lemarchand, F. (1999). *Etude et réalisation de réseaux de diffraction pour le filtrage optique bande étroite.* PhD thesis, Université d'Aix-Marseille 3.

[Lemarchand et al., 1999] Lemarchand, F., Sentenac, A., Cambril, E., and Giovannini, H. (1999). Study of the resonant behaviour of waveguide gratings: increasing the angular tolerance of guided-mode filters. *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.*, 1:545–551.

[Li, 1996] Li, L. (1996). Use of Fourier series in the analysis of discontinuous periodic structures. *J. Opt. Soc. Am. A*, 13(9):1870–1876.

[Li, 1997] Li, L. (1997). New formulation of the Fourier modal method for crossed surface-relief gratings. *J. Opt. Soc. Am. A*, 14:2758–2767.

[Li et al., 1992] Li, L., Gong, Q., Lawrence, G., and Burke, J. (1992). Polarization properties of planar dielectric waveguide gratings. *Appl. Opt.*, 31(21):4190–4197.

[Liu et al., 1998] Liu, Z., Tibuleac, S., Shin, D., Young, P., and Magnusson, R. (1998). High-efficiency guided-mode resonance filter. *Opt. Lett.*, 23(14):1556–1558.

[Loewen and Nevière, 1977] Loewen, E. and Nevière, M. (1977). Dielectric coated gratings: a curious property. *Appl. Opt.*, 16:3009–3011.

[Magnusson et al., 1998] Magnusson, R., Shin, D., and Liu, Z. (1998). Guided-mode resonance Brewster filter. *Opt. Lett.*, 28(8):612–614.

[Martin-Moreno et al., 2001] Martin-Moreno, L., Garcia-Vidal, F., Lezec, H., Pellerin, K., Thio, T., Pendry, J., and Ebbesen, T. (2001). Theory of extraodinary optical transmission through subwavelength hole arrays. *Phys. Rev. Lett.*, 86(6):1114–1117.

[Mashev and Popov, 1985] Mashev, L. and Popov, E. (1985). Zero order anomaly of dielectric coated gratings. *Opt. Commun.*, 55(6):377–380.

[Maystre, 1980] Maystre, D. (1980). *Electromagnetic theory of gratings*, chapter Integral methods. Springer Verlag, Berlin.

[Maystre, 1982] Maystre, D. (1982). *Electromagnetic surface modes*, chapter General study of gratings anomalies from electromagnetic surface modes. John Wiley and Son, Ltd.

[Maystre, 1993] Maystre, D., editor (1993). *Selected papers on diffraction gratings.* SPIE.

[Maystre and Petit, 1976] Maystre, D. and Petit, R. (1976). . *Opt. Commun.*, 17:196.

[Mekis et al., 2000] Mekis, A., Dodabalapur, A., Slusher, R., and Joannopoulos, J. (2000). Two-dimensional photonic crystal couplers for unidirectional light output. *Opt. Lett.*, 25(13):942–944.

[Mizutani et al., 2001] Mizutani, A., Kikuta, H., Nakajima, K., and Iwata, K. (2001). Nonpolarizing guided-mode resonant grating filter for oblique incidence. *J. Opt. Soc. Am. A.*, 18:1261–1266.

[Moharam and Gaylord, 1977] Moharam, M. and Gaylord, T. (1977). Rigorous coupled-wave analysis of planar-grating diffraction. *J. Opt. Soc. Am. A.*, 71(7):811–818.

[Munoz et al., 2002] Munoz, P., Pastor, D., and Capmany, J. (2002). Modeling and design of arrayed waveguide gratings. *IEEE J. Lightwave Technol.*, 20(4):661–674.

[Nevière, 1980] Nevière, M. (1980). *Electromagnetic theory of gratings*, chapter The homogeneous problem. Springer Verlag, Berlin.

[Nevière et al., 1977] Nevière, M., Maystre, D., and Vincent, P. (1977). Application du calcul des modes de propagation à l'étude théorique des anomalies des réseaux recouverts de diélectrique. *J. Opt.*, 8:231–242.

[Noponen and Turunen, 1994] Noponen, E. and Turunen, J. (1994). Eigenmode method for electromagnetic synthesis of diffractive elements with three-dimensional profiles. *J. Opt. Soc. Am. A*, 11(9):2494–2502.

[Norton et al., 1997] Norton, S., Erdogan, T., and Morris, G. (1997). Coupled-mode theory of resonant-grating filters. *J. Opt. Soc. Am. A*, 14(3):629–639.

[Pan et al., 2002] Pan, J., Zhou, F., and Zhou, M. (2002). Thin films improve 50-GHz DWDM devices. *Laser Focus World*, 38(5).

[Peng and Morris, 1996a] Peng, S. and Morris, G. (1996a). Experimental demonstration of resonant anomalies in diffraction from two-dimensional gratings. *Opt. Lett.*, 21:549–551.

[Peng and Morris, 1996b] Peng, S. and Morris, G. (1996b). Resonant scattering from two-dimensional gratings. *J. Opt. Soc. Am. A*, 13(5):993–1005.

[Petit, 1993] Petit, R. (1993). *Ondes électromagnétiques en radioélectricité et en optique*. Masson.

[Petit, 1995] Petit, R. (1995). *L'outil mathématique*. Masson.

[Popov and Bozhan, 2001] Popov, E. and Bozhan, B. (2001). Corrugated waveguides as resonance optical filters - advantages and limitations. *J. Opt. Soc. Am. A*, 18(7):1758–1764.

[Popov and Mashev, 1985a] Popov, E. and Mashev, L. (1985a). Dispersion characteristics of multilayer waveguides. *Opt. Commun.*, 52(6):393–396.

[Popov and Mashev, 1985b] Popov, E. and Mashev, L. (1985b). The determination of mode coupling coefficients. *Opt. Acta*, 32(6):635–637.

[Popov and Mashev, 1986] Popov, E. and Mashev, L. (1986). Diffraction anomalies of coated dielectric gratings in conical diffraction mounting. *Opt. Commun.*, 59(5-6):323–326.

[Popov and Mashev, 1987] Popov, E. and Mashev, L. (1987). Diffraction from planar corrugated waveguides at normal incidence. *Opt. Commun.*, 61(3):176–180.

[Popov et al., 1986] Popov, E., Mashev, L., and Maystre, D. (1986). Theoretical study of the anomalies of coated dielectric gratings. *Opt. Acta*, 33(5):607–619.

[Porto et al., 1999] Porto, J., Garcia-Vidal, F., and Pendry, J. (1999). Transmission resonances on metallic gratings with very narrow slits. *Phys. Rev. Lett.*, 83(14):2845–2848.

[Ramos-Mendieta and Halevi, 1996] Ramos-Mendieta, F. and Halevi, P. (1996). Propagation constant - limited surface modes in dielectric superlatices. *Opt. Commun.*, 129:1–5.

[Rayleigh, 1907] Rayleigh, J. (1907). Note on the remarkable case of diffraction spectra described by Prof. Wood. *Philos. Mag.*, 14:60–65.

[Ritchie et al., 1968] Ritchie, R., Arakawa, E., Cowan, J., and Hamm, R. (1968). Surface-Plasmon resonance effect in grating diffraction. *Phys. Rev. Lett.*, 21(22):1530–1533.

[Saillard and Maystre, 1990] Saillard, M. and Maystre, D. (1990). Scattering from metallic and dielectric rough surfaces. *J. Opt. Soc. Am. A*, 7(6):982–990.

[Sakoda, 1995] Sakoda, K. (1995). Symmetry, degeneracy and uncoupled modes in two-dimensional photonic lattices. *Phys. Rev. B*, 52(11):7982–7986.

[Sauvé, 2001] Sauvé, G. (2001). High-speed systems impact mux/demux choices. *Laser Focus World*, 37(9).

[Sentenac, 1993] Sentenac, A. (1993). *Etude de la diffusion des ondes électromagnétiques par des surfaces rugueuses. Application à la conception de surfaces sélectives.* PhD thesis, Ecole centrale Paris.

[Sentenac and Greffet, 1992] Sentenac, A. and Greffet, J.-J. (1992). Scattering by deep inhomogeneous gratings. *J. Opt. Soc. Am. A*, 9(6):996–1006.

[Sharon et al., 1997a] Sharon, A., Glasberg, S., Rosenblatt, D., and Friesem, A. A. (1997a). Metal-based resonant grating waveguide structures. *J. Opt. Soc. Am. A*, 14(3):588–595.

[Sharon et al., 1997b] Sharon, A., Rosenblatt, D., and Friesem, A. (1997b). Resonant grating-waveguide structures for visible and near-infrared radiation. *J. Opt. Soc. Am. A*, 14(11):2985–2993.

[Sharon et al., 1996] Sharon, A., Rosenblatt, D., and Friesem, A. A. (1996). Narrow spectral bandwidths with grating waveguide structures. *Appl. Phys. Lett.*, 69(27):4154–4156.

[Tamir and Peng, 1977] Tamir, T. and Peng, S. (1977). Analysis and design of grating couplers. *Appl. Phys.*, 14:235–254.

[Tandon et al., 2001] Tandon, V., Volanthen, M., Van Der Vliet, M., and Bonar, J. (2001). Standardized parameters fot AWGs would ease system design. *Laser Focus World*, 37(8).

[Tibuleac and Magnusson, 1997] Tibuleac, S. and Magnusson, R. (1997). Reflection and transmission guided-mode resonance filters. *J. Opt. Soc. Am. A*, 14(7):1617–1626.

[Tibuleac and Magnusson, 2001] Tibuleac, S. and Magnusson, R. (2001). Narrow-linewidth bandpass filters with diffractive thin-film layers. *Opt. Lett.*, 26(9):584–586.

[Tien and Ulrich, 1970] Tien, P. and Ulrich, R. (1970). Theory of prism-film coupler and thin film light guides. *J. Opt. Soc. Am.*, 60:1325–1337.

[Tsang et al., 1985] Tsang, L., Kong, J.-A., and Shin, R. (1985). *Theory of microwave remote sensing.* Wiley Interscience, New York.

[Vincent, 1980] Vincent, P. (1980). *Electromagnetic theory of gratings*, chapter The differential method. Springer Verlag, Berlin.

[Vincent and Nevière, 1979] Vincent, P. and Nevière, M. (1979). Corrugated dielectric waveguides: A numerical study of the second order stop bands. *Appl. Phys.*, 20:345–351.

[Wang and Magnusson, 1993] Wang, S. and Magnusson, R. (1993). Theory and applications of guided-mode resonance filters. *Appl. Opt.*, 32(14):2606–2613.

[Wang and Magnusson, 1995] Wang, S. and Magnusson, R. (1995). Multilayer waveguide-grating filters. *Appl. Opt.*, 34(14):2414–2420.

[Wang et al., 1990] Wang, S., Magnusson, R., Bagby, J., and Moharam, M. (1990). Guided-mode resonances in planar dielectric-layer diffraction gratings. *J. Opt. Soc. Am. A*, 7(8):1470–1474.

[Winn et al., 1998] Winn, J., Fink, Y., Fan, S., and Joannopoulos, J. (1998). Omnidirectional reflection from a one-dimensional photonic crystal. *Opt. Lett.*, 23(20).

[Wood, 1902] Wood, R. (1902). On a remarkable case of uneven distribution of light in a diffraction grating spectrum. *Philos. Mag.*, 4:396–402.

[Yeh, 1988] Yeh, P. (1988). *Optical waves in layered media.* Wiley Interscience, New York.

Nombre de références: 96

Réseaux résonnants à Bande Interdite Photonique, nouveaux filtres pour le D.W.D.M.

Les débits des télécommunications optiques sont considérablement accrus par le multiplexage dense en longueur d'onde (D.W.D.M.). Pour séparer les différents canaux, des filtres fréquentiels ultra-sélectifs sont nécessaires. Les réseaux résonnants, formés d'un réseau gravé sur un guide d'onde plan, sont une solution potentielle. Ces structures supportent des modes propres pouvant être excités par une onde issue d'une fibre optique. L'excitation produit un pic de résonance en réflexion à une longueur d'onde et un angle d'incidence donnés. Le pic ne présente en général pas les qualités requises pour le D.W.D.M. : en incidence oblique, les tolérances angulaire et spectrale sont faibles et les profils dépendent de la polarisation. En conjuguant les concepts des cristaux photoniques, une théorie phénoménologique rigoureuse et une théorie perturbative, nous concevons un filtre répondant à toutes les contraintes imposées par le D.W.D.M.. Nos résultats sont validés par des exemples numériques.

Mots clés: D.W.D.M., filtre, résonance, réseau, cristaux photoniques, mode guidé, guide d'onde plan, empilement multicouche, théorie perturbative, phénoménologie, polarisation, tolérance angulaire, tolérance spectrale

Photonic Band Gap resonant gratings, new D.W.D.M. filters

Dense wavelength division multiplexing (D.W.D.M.) significantly increases the optical telecommunication transmission rates. To separate the channels, narrow band spectral filters are necessary. Resonant gratings, composed with a grating engraved on a planar waveguide, are a potential solution. These structures support eigenmodes, which can be excited by a wave coming out of an optical fiber. The excitation creates a resonance peak in the reflected beam, for a given wavelength and incidence angle. In general, the peak does not exhibit the qualities required for the D.W.D.M.: at oblique incidence, the angular and spectral tolerances are weak, and the line shapes are polarization dependent. Combining photonic crystals concepts, a rigorous phenomenological theory, and a perturbative theory, we design a filter that meet all the conditions imposed by the D.W.D.M..

Key words: D.W.D.M., filters, resonance, grating, photonic crystals, guided mode, planar waveguide, multiplayer stack, perturbative theory, phenomenology, polarization, angular tolerance, spectral tolerance