



**HAL**  
open science

# Identification Algébrique et Déterministe de Signaux et Systèmes à Temps Continu : Application à des Problèmes de Communication Numérique

Aline Neves

► **To cite this version:**

Aline Neves. Identification Algébrique et Déterministe de Signaux et Systèmes à Temps Continu : Application à des Problèmes de Communication Numérique. domain\_stic.theo. Université René Descartes - Paris V, 2005. Français. NNT: . tel-00084799

**HAL Id: tel-00084799**

**<https://theses.hal.science/tel-00084799>**

Submitted on 10 Jul 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**UNIVERSITE RENE DESCARTES - PARIS 5**  
**Centre Universitaire des Saints-Pères**  
**U.F.R. DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE**

*Thèse présentée en vue de l'obtention du grade de Docteur de  
l'Université René Descartes-Paris5*

**Discipline : Sciences de la Vie et de la Matière**  
**Spécialité : Traitement du Signal**

par

**Aline DE OLIVEIRA NEVES**

**Identification Algébrique et Déterministe de Signaux et Systèmes  
à Temps Continu : Application à des Problèmes de  
Communication Numérique**

Soutenue le 20 Mai 2005 devant la Commission d'Examen:

M. Michel FLIESS	Président
M. François DESBOUVRIES	Rapporteur
M. Eric MOREAU	Rapporteur
M. Mamadou MBOUP	Directeur
M. João César MOTA	Examineur
M. João Marcos ROMANO	Examineur



*A ma famille*



# Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Mamadou Mboup pour m'avoir encadré si brillamment et avec tellement de motivation, me permettant d'apprendre beaucoup sur des sujets peu connus dans notre domaine. Pour son enthousiasme, ses compétences et sa patience, un grand, grand merci.

Je remercie également Madeleine Bonnet, qui m'a si bien accueilli au sein de l'équipe SPIR au laboratoire CRIP5 et qui a été mon ange gardien pendant ces 3 ans. Un grand merci!

Merci à João Marcos Romano, qui m'accompagne dès mes premiers pas dans la recherche, pour m'avoir, avant tout, mis en contact avec Paris 5. Je tiens à le remercier pour avoir été examinateur de ce travail et pour ces propositions, toujours très enrichissantes.

Je remercie M. Michel Fliess, pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury et pour le grand intérêt qu'il a apporté à ce travail.

Merci à M. François Desbouvries et M. Eric Moreau, pour avoir accepté d'être rapporteurs et pour les précieuses suggestions qui ont aidé à enrichir ce travail.

Merci à João César Mota, pour m'avoir permis de participer au projet CAPES-COFECUB, pour avoir été examinateur de ce travail et pour ses remarques très pertinentes.

Je tiens aussi à remercier Gaël Mahé, pour toutes nos discussions et sa grande motivation.

Je ne remercierais jamais assez Cristiano, qui, en plus des discussions techniques enrichissantes, était toujours là, à mes côtés, pendant toutes ces années. Merci pour son soutien, son attention, sa patience, qui m'ont été plus qu'indispensables pour mener à bien ce travail.

Mes sincères remerciements à tous mes amis de labo, qui m'ont accompagné et qui m'ont soutenu pendant toutes ces années. Merci à Issam, Valentina, Nicolas, Jacques, Rim, Djamel et, plus récemment, Hela. Merci aussi à Rodrigo, Danilo, Romis et Ricardo, pour leur aide et leur soutien.

Je remercie aussi, très fortement, mes parents, Aloisio et Lourdney et mes soeurs, Larissa et Leticia. Malgré la distance, je n'aurais pas pu réussir sans leur soutien constant.

Enfin je remercie Nellie, Christophe, Mme Voeuni Keng et M. Jacques Buttet, dont l'aide

m'a été indispensable et tous les membres de l'UFR de Mathématiques et Informatique qui ont contribué à rendre mon séjour ici très agréable.

# Résumé

Ce travail aborde le problème de l'identification de signaux et systèmes, appliqué à des problèmes de communications numériques. Contrairement aux méthodes classiques d'optimisation stochastiques, nous proposons une approche algébrique et déterministe. De plus, nous considérons les signaux et systèmes sous leur forme temps-continu, ce qui nous permet d'exploiter certaines propriétés qui peuvent être cachées ou oubliées après un processus d'échantillonnage. Enfin, avec les méthodes algébriques proposées, on aboutit à des techniques simples et rapides, qui permettent une implémentation en temps réel.

Dans un premier temps, nous abordons le problème de correction des distorsions dans un système de communication par courant porteur, en utilisant la platitude du système représenté par la ligne électrique. Le système inverse de la ligne obtenu est, par la suite, utilisé dans un autre contexte, notamment celui de la correction du timbre de la voix dans un réseau téléphonique.

Dans un deuxième temps, le problème de l'identification est abordé dans le cadre d'une nouvelle théorie déterministe de l'estimation reposant sur l'algèbre différentielle et le calcul opérationnel. Partant de cette théorie, nous avons développé un algorithme général d'identification entrée-sortie d'un système rationnel. De plus, la rapidité des estimations nous permettent d'introduire une notion de filtrage local. Ce filtrage rend possible la représentation d'un système de grande dimension par un modèle de dimension très réduite (ordre un ou deux), variable par morceaux dans le temps. Cette modélisation est très intéressante car elle permet une démodulation directe des symboles transmis, sans nécessiter d'identifier/égaliser explicitement le canal.

Finalement, le problème de démodulation des signaux modulés en fréquence à phase continue, reçus à travers un canal à bruit additif, a aussi été abordé à la lumière de ces techniques algébriques. Notre démarche consiste à décrire le signal reçu, dans chaque intervalle symbole, par une équation différentielle linéaire bruitée (en général à coefficients variables), dont les coefficients sont des fonctions du symbole courant. La démodulation symbole par symbole devient alors immédiate et particulièrement robuste aux perturbations.



# Abstract

This thesis is concerned with the problem of signals and systems identification applied to digital communication. While the majority of the existing methods are stochastic, we propose an algebraic and deterministic approach. Moreover, we will treat signals and systems directly in continuous time, which enables us to explore the knowledge of their shape, that may be hidden or forgotten by the sampling operation. Furthermore, the proposed techniques are simple and rapid, what allows their on-line implementation.

Firstly, we consider the problem of correcting distortions in a power-line communication system, exploring its flatness property. The inverse system obtained is then applied to another context, more specifically to the restoration of the voice timbre in telephone networks.

Afterwards, the system identification problem is considered in the context of a new deterministic theory, based on differential algebra and operational calculus. This theory gives rise to a new general algorithm for the input-output identification of a rational system. The rapidness of estimation also allows the presentation of the local filtering notion, which consists in representing a high dimension system by a time-varying low dimension model. This approach is interesting since it permits the direct demodulation of the received signal, without the need of explicitly identifying or equalizing the channel.

Finally, the demodulation of a continuous phase modulation signal is addressed in the light of the algebraic techniques proposed. The solution consists in describing the received signal, at each symbol period, as a linear differential equation (generally with time-varying coefficients), with coefficients that are functions of the current symbol. Therefore, the symbol by symbol demodulation becomes immediate and particularly robust to noise.



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>15</b>
<b>2</b>	<b>Précompensation des Distorsions dans un Système de Communication par Courant Porteur</b>	<b>19</b>
2.1	Introduction . . . . .	19
2.2	Précompensation d'une Ligne de Transmission . . . . .	21
2.2.1	Modèle du Système . . . . .	21
2.2.2	Obtention du Filtre de Précompensation . . . . .	22
2.2.3	Résultats des Simulations . . . . .	23
2.3	Précompensation de 2 Lignes en Parallèle . . . . .	26
2.3.1	Obtention du Filtre de Précompensation pour 2 Lignes . . . . .	27
2.3.2	Résultats des Simulations . . . . .	32
2.4	Analyse de la Robustesse du Système . . . . .	33
2.5	Application: Restauration du Timbre de la Voix dans un Réseau Téléphonique	35
2.5.1	Modèle du Système . . . . .	36
2.5.2	Égaliseur Spectrale Aveugle . . . . .	37
2.5.3	Nouvelle Méthode Proposée . . . . .	39
2.5.4	Comparaison des Deux Méthodes . . . . .	41
2.5.5	Analyse du Résultat . . . . .	44
2.6	Conclusion . . . . .	45
<b>3</b>	<b>Méthode Algébrique d'Identification de Système</b>	<b>47</b>
3.1	Introduction . . . . .	47
3.2	État-de-l'Art . . . . .	49
3.2.1	Méthodes Stochastiques . . . . .	50
3.2.2	Méthodes Déterministes . . . . .	51

3.3	Nouvelle Méthode: Un Exemple Simple d'Identification de Système . . . . .	52
3.4	Généralisation de la Méthode d'Identification de Système . . . . .	56
3.5	La Méthode dans le Domaine Temporel . . . . .	58
3.6	Base Algébrique pour l'Identification Linéaire . . . . .	60
3.6.1	Définitions de Base, Algèbre . . . . .	60
3.6.2	Définitions de Base, Algèbre Différentielle . . . . .	61
3.6.3	Opérateurs Différentiels Linéaires . . . . .	62
3.6.4	Corps Différentiel d'Opérateurs de Mikusiński . . . . .	63
3.6.5	Identifiabilité . . . . .	65
3.6.6	Perturbations Structurées et Estimateurs Linéaires . . . . .	67
3.6.7	Perturbations Non-Structurées . . . . .	69
3.7	Modèle Utilisé dans les Simulations . . . . .	72
3.8	Analyse de la Méthode . . . . .	74
3.8.1	Excitation Persistante . . . . .	74
3.8.2	Le Conditionnement de la Matrice $\mathcal{P}$ . . . . .	76
3.8.3	Modélisation Exacte et Sur-Modélisation . . . . .	79
3.8.4	Sous-Modélisation . . . . .	80
3.8.5	Addition de Bruit . . . . .	82
3.9	Modélisation Locale du Système . . . . .	84
3.10	Interprétation de la Méthode, Cas Sous-Modélisé . . . . .	89
3.11	Identification Autodidacte d'un Système SIMO . . . . .	91
3.12	Conclusion . . . . .	94
<b>4</b>	<b>Méthodes d'Égalisation</b>	<b>97</b>
4.1	Introduction . . . . .	97
4.2	Le Problème de l'Égalisation . . . . .	98
4.2.1	La Chaîne de Communication . . . . .	98
4.2.2	État-de-l'Art . . . . .	99
4.3	Validité du Modèle de Canal par Fonction de Transfert Rationnelle . . . . .	100
4.4	Démodulation en Utilisant l'Estimation de la Fonction de Transfert du Canal	104
4.4.1	Domaine Fréquentiel . . . . .	105
4.4.2	Domaine Temporel . . . . .	105
4.4.3	Résultats des Simulations et Discussion . . . . .	107
4.5	Démodulation avec Modélisation Locale du Canal . . . . .	114
4.5.1	Méthode Proposée . . . . .	115

---

4.5.2	Définition de $u(t)$ . . . . .	116
4.5.3	Modèle Simulé . . . . .	117
4.5.4	Résultats des Simulations . . . . .	119
4.6	Conclusion . . . . .	122
<b>5</b>	<b>Démodulation des Signaux CPM</b>	<b>123</b>
5.1	La Modulation en Fréquence à Phase Continue . . . . .	123
5.2	Le Spectre d'un Signal CPM . . . . .	126
5.3	Le Récepteur de Maximum Vraisemblance . . . . .	126
5.4	Performance du Récepteur de Maximum Vraisemblance . . . . .	130
5.5	État-de-l'Art . . . . .	131
5.6	Modulation CPFSK . . . . .	132
5.6.1	Démodulation Indirecte du Signal Reçu . . . . .	132
5.6.2	Démodulation Directe du Signal Reçu . . . . .	138
5.6.3	Résultats des Simulations . . . . .	140
5.7	Modulation LRC . . . . .	144
5.7.1	Méthode DDS . . . . .	144
5.7.2	Résultats des Simulations . . . . .	148
5.8	Conclusion . . . . .	150
<b>6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>153</b>
<b>A</b>	<b>Polynômes de Jacobi</b>	<b>155</b>



# Chapitre 1

## Introduction

Le problème de l'identification de systèmes est important dans plusieurs disciplines. Il intervient par exemple dans la modélisation des phénomènes naturels, dans les problèmes de contrôle d'un système ou, dans le cas des communications numériques, dans la récupération de l'information transmise. Pour cette raison, beaucoup a été déjà fait dans la littérature pour essayer de résoudre ce problème. Dans le contexte des communications numériques, dans lequel nous nous plaçons dans ce travail, les méthodes existantes sont développées dans le cadre théorique de l'optimisation stochastique et traitent les signaux et systèmes en temps discret. Or, avec la demande croissante pour les services de communication à des débits de transmission de plus en plus élevés, les retards de traitement inhérents aux méthodes d'optimisation stochastiques peuvent représenter un inconvénient important. Dans ce contexte, une approche algébrique et déterministe devient intéressante. Même si le cadre déterministe a toujours été déconsidéré essentiellement en raison de la sensibilité des méthodes aux bruits, une telle approche peut se révéler efficace lorsqu'elle est abordée dans un cadre théorique approprié. De plus, elle présente l'avantage de s'affranchir des hypothèses classiques de connaissance *a priori* d'informations statistiques du bruit ou des signaux traités.

Dans ce sens, notre démarche s'inspire de certains outils et développements courants en automatique mais très peu usuels en traitement du signal. L'objectif visé est la correction de distorsions introduites dans un canal de communication. Nous étudions deux problèmes distincts, mais liés par un objectif commun d'identifier un système et/ou d'estimer les paramètres d'un signal.

Nous commencerons, dans le chapitre 2, par aborder le problème de correction des distorsions dans un système par courant porteur. Ce système est intéressant, vu qu'il représente une des solutions possibles pour l'accès des derniers mètres au réseau internet et, pour cette raison, ils ont été beaucoup étudiés ces dernières années. Notre démarche s'inspire du système soliton en optique, dont le principe est de précompenser les distorsions introduites par le

canal. L'objectif est donc, le développement d'un filtre, devant être placé dans l'émetteur, pour pré-corriger les distorsions qui seront introduites par le système. Pour cela nous utilisons la platitude du système représenté par la ligne électrique. Le concept de platitude a été développé dans le domaine de l'automatique et il fait référence aux systèmes dont toutes les variables, le signal d'entrée inclus, peuvent être écrites uniquement en fonction de la sortie du système et de ses dérivées.

Ainsi, d'après ce qui a été fait en [FMPR98], le filtre, donné par la réponse en fréquence inverse de la ligne électrique, sera obtenu en appliquant le calcul opérationnel directement aux équations de modèle du système. Nous reprenons, donc, le développement réalisé dans [FMPR98], où le système est donné par une seule ligne, et nous l'étendrons pour le cas où il est donné par deux lignes en parallèle. De plus, la solution trouvée sera appliquée dans un autre contexte, notamment celui de la restauration du timbre de la voix dans un réseaux téléphonique, puisque ce dernier peut aussi être modélisé comme une ligne électrique [MG01].

Dans un deuxième temps, le problème de l'identification entrée-sortie d'un système rationnel sera abordé dans le cadre d'une nouvelle théorie déterministe de l'estimation, reposant sur l'algèbre différentielle et le calcul opérationnel. Proposée premièrement par [FMMSR03, FSR03], nous partons de l'étude de cette théorie pour présenter une nouvelle méthode algébrique et déterministe qui abouti aux faits suivants:

- Aucune information statistique du bruit n'est nécessaire
- Nous considérons les signaux sous leur forme temps continu, ce qui nous permet d'exploiter certaines propriétés
- Il n'y a aucune distinction de traitement entre les signaux stationnaires et non stationnaires
- Les calculs peuvent être faits en temps réel

Le fait de considérer les signaux directement en temps continu, ce qui est très peu usuel en traitement du signal, nous permet d'exploiter leur forme connue pour développer des méthodes très rapides.

Le chapitre 3 sera dédié à la présentation de cette théorie et au développement d'une nouvelle méthode d'estimation/identification de système, obtenue à partir de son application. Le système sera toujours modélisé par une fonction de transfert rationnelle. Nous montrerons qu'il existe deux façons d'approcher le problème. La première consiste à trouver une approximation du système complet, sous un angle global, basée sur ses signaux d'entrée et de sortie. Dans ce cas, la connaissance, au moins approximative, de son ordre est importante pour avoir une bonne performance. D'autre part, la rapidité des estimations nous permet de présenter

une deuxième méthode d'identification, où le système est modélisé localement. Dans ce cas, il est possible de représenter un système de grande dimension par un modèle de dimension très réduite (ordre un ou deux) variable par morceaux dans le temps. Ainsi, la connaissance de l'ordre du système n'est plus nécessaire. Cette modélisation est très intéressante pour le problème de l'égalisation. En effet, contrairement à la démarche classique, elle permet une démodulation directe des symboles transmis, sans nécessiter d'identifier/égaliser explicitement le canal. Enfin, les méthodes seront analysées en détail, ce qui inclut l'étude de l'effet du bruit.

Ensuite, ces méthodes seront appliquées à l'estimation des canaux de communication et, l'information ainsi obtenue, sera utilisée pour démoduler le signal reçu. Cela sera étudié dans le chapitre 4. Nous allons développer deux méthodes de démodulation différentes: une première où le récepteur a besoin d'une bonne estimation de la fonction de transfert du canal et, par conséquent, son ordre doit être connu, information qui n'est pas souvent disponible, et une deuxième où les symboles sont récupérés directement. Dans ce cas, la méthode est basée sur une modélisation locale du canal et, ainsi, la connaissance de son ordre n'est plus nécessaire.

Le chapitre 5 abordera le problème de démodulation de signaux modulés en fréquence à phase continue (CPM-*Continuous Phase Modulation*), transmis à travers un canal à bruit additif, à la lumière de ces techniques algébriques. Ces signaux sont particulièrement intéressants puisque leur modulation est non-linéaire et introduit de la mémoire, ce qui rend difficile un traitement par les méthodes classiques. Le récepteur optimal dans le sens des moindres carrés est le récepteur à maximum de vraisemblance, dont la grande complexité, qui peut même devenir prohibitive, est un inconvénient déjà bien connu [Pro95]. Jusqu'à aujourd'hui, l'utilisation des signaux CPM pour des alphabets  $\mathcal{A}$ -aire avec des valeurs de  $\mathcal{A}$  élevées, est restée restreint à cause de la complexité du récepteur. Notre démarche consiste à décrire le signal reçu, dans chaque intervalle symbole, par une équation différentielle linéaire bruitée (en général à coefficients variables), dont les coefficients sont des fonctions du symbole courant. La démodulation symbole par symbole devient alors immédiate et particulièrement robuste aux perturbations.

Enfin, le chapitre 6 présente la conclusion de ce mémoire.



# Chapitre 2

## Précompensation des Distorsions dans un Système de Communication par Courant Porteur

### 2.1 Introduction

Les systèmes plats sont des systèmes dont les variables, le signal d'entrée inclus, peuvent être écrites uniquement en fonction de la sortie du système et de ses dérivées. Dans ce cas, nous disons que le système a une sortie plate [RFLM93]. Ce concept est couramment utilisé dans le domaine d'automatique. Cette structure particulière facilite la description du système et son traitement, permettant ainsi le développement d'algorithmes et de solutions simples.

Supposons par exemple, un système linéaire d'équations avec  $n + m$  paramètres inconnus  $\xi = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}) = (\mathbf{x}, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}) = (\mathbf{x}, \mathbf{f})$  qui s'écrit comme:

$$A\mathbf{x} + B\mathbf{f} = 0, \quad B \neq 0, \text{rang}[A, B] = n$$

Si  $A$  est inversible et  $B$  est à rang plein  $m$ , toutes les solutions pour  $\mathbf{x}$  peuvent s'écrire comme fonction du vecteur inconnu  $\mathbf{f}$ :

$$\mathbf{x} = -A^{-1}B\mathbf{f}$$

c'est-à-dire, toutes les solutions sont paramétrées en termes de  $\mathbf{f}$ . Par ailleurs, comme la matrice  $B$  est à rang plein, la variable  $\mathbf{f}$  peut aussi s'exprimer en fonction des composantes de  $\mathbf{x}$ , comme:

$$\mathbf{f} = -(B^T B)^{-1} B^T A \mathbf{x}$$

Ainsi, ce système linéaire a un ensemble privilégié de variables  $f = (x_{n+1}, \dots, x_{n+m})$ . Cet ensemble de variables internes au système d'équations peut être choisi de sorte que  $\mathbf{x}$  prenne une valeur désirée quelconque, fixée à l'avance. Si on regarde le système d'un point de vue entrée-sortie, avec une entrée  $\mathbf{x}$  et une sortie  $\mathbf{f}$ , on dira que le système est *plat* et, ainsi,  $\mathbf{f}$  est une sortie plate. Par contre, si la matrice  $A$  n'est pas inversible,  $\mathbf{f}$  sera égal à zéro pour quelque soit  $\mathbf{x}$  appartenant au noyau de  $A$ . Comme conséquence, il n'est plus vrai que les composantes de  $\mathbf{x}$  peuvent être complètement paramétrées en termes de  $\mathbf{f}$ . Nous voyons, donc, comment la propriété de platitude, présente quand  $A$  est inversible, facilite l'obtention des solutions recherchées.

En ramenant ce concept au domaine du traitement du signal, les systèmes plats sont très intéressants vu qu'ils permettent l'égalisation autodidacte. Celle-ci consiste à récupérer les symboles transmis par un système de communication en n'observant que la sortie du système et en connaissant quelques caractéristiques statistiques du signal d'entrée. Si toutes les variables du système peuvent être écrites en fonction de sa sortie, il est clair que le système pourra être égalisé de façon aveugle. Il faut observer, cependant, que, en traitement du signal, en général le système est traité en temps discret et le concept de platitude est définie seulement pour les systèmes en temps continu. L'équivalent discret serait d'avoir un système où les variables (paramètres du canal et signal d'entrée) peuvent être écrites en fonction de la sortie du canal à l'instant actuel et de ses échantillons passés.

Dans ce chapitre nous allons étudier un exemple de système plat à paramètre distribués, donné par la transmission d'information sur une ligne électrique. Notre but sera de précompenser le signal à transmettre, en utilisant un filtre à l'émetteur, pour que la réception soit plus simple. L'idéal serait que, à la sortie de la ligne, nous ayons le signal originalement transmis.

Cet exemple est aussi intéressant dans la mesure où les systèmes de communication par courant porteur ont été l'objet de nombreuses études ces dernières années, en essayant de répondre à un nouveau défi : quelle serait la meilleure technique pour les derniers mètres du réseau internet (*last miles*), en incluant la facilité d'implémentation, prix, débit et mobilité, parmi d'autres. Plusieurs solutions ont été proposées comme les réseaux personnels sans fils du type Bluetooth et Wi-Fi. Dans ce contexte, le réseau électrique de basse tension représente aussi une solution intéressante, principalement dû à son faible coût d'implémentation, vu que les câbles sont déjà installés et disponibles. De plus, presque toutes les pièces d'une maison ou d'un bureau ont au moins une prise électrique, ce qui facilite l'accès.

Ainsi, il est intéressant d'étudier des méthodes pour permettre une communication fiable en utilisant ce réseau. Nous allons, donc, essayer de corriger les distorsions introduites par une ligne électrique, tels que l'atténuation et les réflexions dues à la non homogénéité des différentes portions de la ligne. Il faut observer qu'il existe aussi d'autres perturbations

comme le bruit de nature impulsionnelle [GD02] et l'effet de peau [WGS02] qui ne seront pas traitées ici. La modélisation du canal, donné par la ligne de transmission, prend en compte le phénomène physique de la propagation. Nous obtenons un système à paramètres répartis, régi par une équation aux dérivés partielles. Cette modélisation est intéressante en raison de sa parcimonie (un nombre très limité de paramètres) d'une part et en ce qu'elle est proche de la réalité physique du phénomène étudié. Le système sera toujours traité en temps continu.

La méthode a premièrement été proposée par [FMPR98] pour le cas de la transmission d'un signal télégraphique par une ligne de transmission. Nous avons étendu ses résultats pour la transmission d'autres types de signaux et aussi pour un cas simple de trajet multiple, où le signal est reçu par deux morceaux de ligne avec des paramètres différents. L'analyse de la méthode nous a montré qu'elle a aussi une bonne robustesse à des erreurs d'estimation des paramètres de la ligne, ce qui est important vu que le canal n'est normalement pas connu à l'émetteur.

De plus, la méthode de précompensation proposée peut aussi avoir d'autres applications. Un exemple donné ici est la restauration du timbre de la voix dans un réseau téléphonique, modélisé comme une ligne de transmission. La méthode a été utilisée avec l'égaliseur spectrale aveugle proposé par [MG01, Mah02]. Nous allons montrer comment la nouvelle technique [NMM04] apporte un gain de performance significatif par rapport à l'égaliseur de [MG01, Mah02].

## 2.2 Précompensation d'une Ligne de Transmission

### 2.2.1 Modèle du Système

Le système de précompensation étudié est montré dans la figure 2.1. où  $u(t)$  est le signal

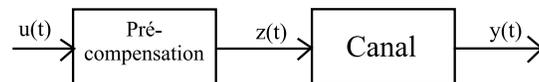


Figure 2.1: Système de précompensation

transmis,  $z(t)$  est le signal précompensé et  $y(t)$  est le signal reçu. Le but est d'avoir une sortie  $y(t)$  sans distorsion par rapport à  $u(t)$ , à l'aide du filtre de précompensation. Autrement dit, le filtre de précompensation idéal serait l'inverse exacte du canal. Il peut être vu comme un égaliseur placé à l'émetteur.

Le canal est modélisé comme une ligne de transmission, montré dans la figure 2.2.

Elle consiste en une cascade de cellules, chacune composée d'une inductance  $Ldx$ , une

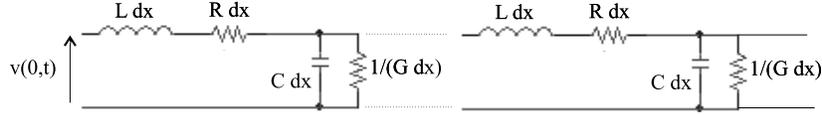


Figure 2.2: Modèle de ligne électrique

résistance  $Rdx$ , une capacité  $Cdx$  et une perdite  $Gdx$ . La valeur des paramètres  $R$ ,  $L$ ,  $C$  et  $G$  est donnée en unité S.I., par unité de longueur.

Ce modèle peut aussi être décrit selon le système d'équations aux dérivées partielles ci-dessous:

$$\begin{aligned} L \frac{\partial i}{\partial t} &= -Ri - \frac{\partial v}{\partial x} \\ C \frac{\partial v}{\partial t} &= -\frac{\partial i}{\partial x} - Gv \end{aligned} \quad (2.1)$$

où  $v(x, t)$  et  $i(x, t)$  sont respectivement la tension et le courant à une distance  $x$  de l'origine de la ligne et au temps  $t$ . Le signal d'entrée du canal,  $z(t)$ , est la tension en début de ligne, *i.e.*  $z(t) = v(0, t)$  et la sortie,  $y(t)$ , est la tension en bout de ligne, *i.e.*  $y(t) = v(\ell, t)$  où  $\ell$  désigne la longueur de la ligne.

### 2.2.2 Obtention du Filtre de Précompensation

Le filtre de précompensation pour une ligne de transmission a été proposé premièrement par [FMPR98]. Dans cette section, nous reprenons ce qui a été fait.

A partir du système d'équations (2.1), avec quelques manipulations, nous pouvons obtenir l'équation des télégraphistes :

$$\frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} = \left( R + L \frac{\partial}{\partial t} \right) \left( G + C \frac{\partial}{\partial t} \right) v(x, t) \quad (2.2)$$

avec, comme conditions au bords,

$$\begin{aligned} v(0, t) &= z(t) \\ v(\ell, t) &= Zi(\ell, t) \end{aligned}$$

où  $Z$  est l'impédance au bout de la ligne, et avec des conditions initiales nulles, c'est-à-dire,  $v(x, 0) = (\partial v / \partial t)(x, 0) = 0$

En utilisant le calcul opérationnel [Mik83] (transformée de Laplace) pour transformer (2.2) en une équation différentielle ordinaire, avec, comme variable indépendante, la longueur  $x$ , [FMPR98] trouve l'entrée  $\hat{z} = \hat{v}(0, s)$  en fonction de la sortie  $\hat{y} = \hat{v}(\ell, s)$ , où  $\hat{z}$ ,  $\hat{y}$  et  $\hat{v}$  sont les

transformées de Laplace de  $z(t)$ ,  $y(t)$  et  $v(x, t)$  respectivement:

$$\hat{z} = \left( ch\left(\ell\sqrt{\beta(s)}\right) + \frac{R + Ls}{Z} \frac{sh\left(\ell\sqrt{\beta(s)}\right)}{\sqrt{\beta(s)}} \right) \hat{y} \quad (2.3)$$

où  $\beta(s) = LCs^2 + (RC + LG)s + RG$ .

La solution dans le domaine temporel peut être trouvée grâce à l'application de la transformée inverse de Laplace à (2.3). En considérant  $G = 0$  pour simplifier les calculs, nous avons:

$$\begin{aligned} z(t) = & \frac{1}{2}e^{-\alpha\lambda} \left( 1 - \frac{1}{Z}\sqrt{\frac{L}{C}} \right) y(t - \lambda) + \frac{1}{2}e^{\alpha\lambda} \left( 1 + \frac{1}{Z}\sqrt{\frac{L}{C}} \right) y(t + \lambda) \\ & + \int_{-\lambda}^{+\lambda} \left[ \frac{R}{4Z\sqrt{LC}} e^{-\alpha\tau} J_0\left(i\alpha\sqrt{\tau^2 - \lambda^2}\right) \right. \\ & \left. + \frac{e^{-\alpha\tau}i\alpha}{2\sqrt{\tau^2 - \lambda^2}} \left( \lambda - \frac{1}{Z}\sqrt{\frac{L}{C}}\tau \right) J_1\left(i\alpha\sqrt{\tau^2 - \lambda^2}\right) \right] y(t - \tau) d\tau \end{aligned} \quad (2.4)$$

où  $\alpha = R/(2L)$ ,  $\lambda = \ell\sqrt{LC}$ ,  $J_0$  et  $J_1$  sont les fonctions de Bessel de premières espèces d'ordre 0 et 1 et  $\tau \in [t - \lambda, t + \lambda]$ .

Ainsi, comme nous voulons que la sortie  $y(t)$  soit la plus proche possible du signal originellement transmis,  $u(t)$ , il suffit de calculer le signal d'entrée précompensé,  $z(t)$ , par (2.4) en remplaçant  $y(t)$  par  $u(t)$  (voir figure 2.1). Autrement dit, (2.3) représente l'inverse de la fonction de transfert du canal, modélisé comme une ligne de transmission. Il faut observer que, comme nous sommes placés dans l'émetteur, le fait de connaître  $u(t)$  ne pose pas de problème.

### 2.2.3 Résultats des Simulations

Les simulations ci-dessous illustrent la performance du système et aident aussi à la compréhension de la méthode. La figure 2.3 montre comment la ligne de transmission déforme le signal d'entrée  $u(t)$  (sans précompensation). Les valeurs des paramètres de la ligne sont  $R = 2.16 \times 10^{-3}$ ,  $L = 18.42 \times 10^{-7}$ ,  $C = 1.8 \times 10^{-11}$ ,  $Z = 100$  et  $\ell = 10^6$ , en unités S.I [FMPR98]. Cette simulation a été réalisée avec le logiciel PSpice, en utilisant 4 cellules en cascade, chacune de longueur  $\ell = 2.5 \times 10^5$ .

Pour avoir, à la sortie, un signal sans distorsion et le plus proche possible du signal transmis  $u(t)$ , nous utilisons le filtre de précompensation. Le nouveau signal d'entrée du canal,  $z(t)$ , donné par (2.4) en remplaçant  $y(t)$  par  $u(t)$ , est montré à la figure 2.4 (a). Dans

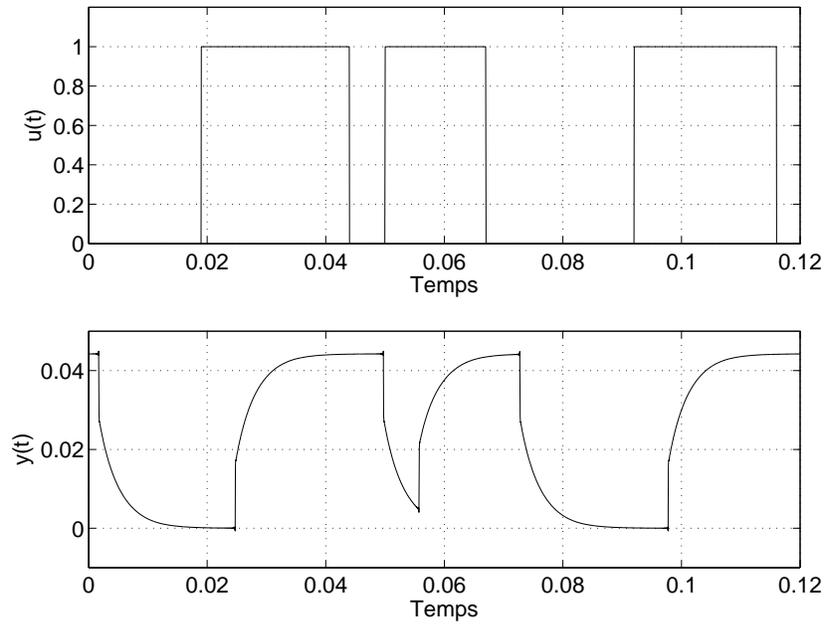


Figure 2.3: Transmission par une ligne électrique, sans précompensation

ce cas, la sortie de la ligne est montrée à la figure 2.4 (b). Nous pouvons observer que, à un facteur d'échelle près, le signal  $y(t)$  obtenu est très proche du signal initialement transmis,  $u(t)$  (montré à la figure 2.3).

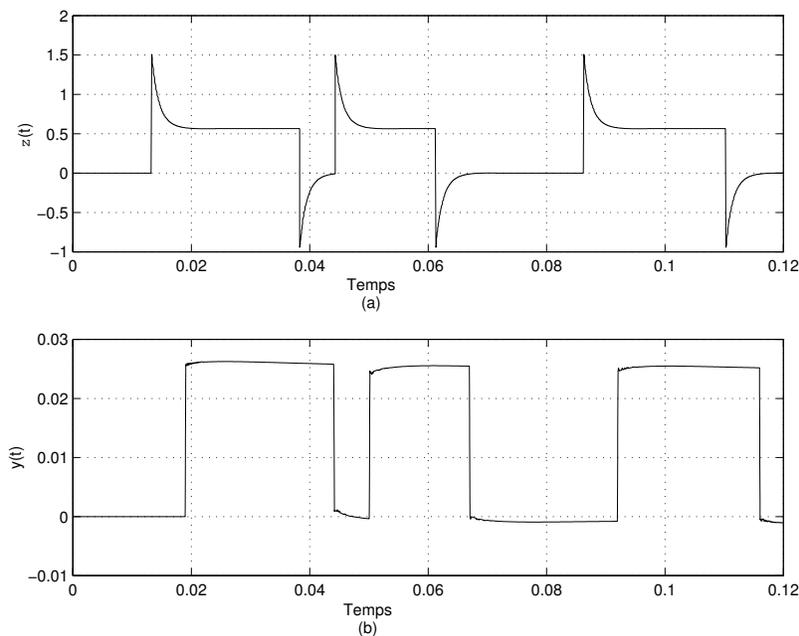


Figure 2.4: (a) Entrée avec précompensation  $z(t)$ ; (b) Sortie du système,  $y(t)$ , ayant  $z(t)$  comme entrée

La même simulation a été faite en utilisant un signal d'entrée  $u(t)$  plus couramment utilisé

dans les systèmes de communication. Ce signal est généré par le filtrage d'une séquence de symboles 2-PAM (*Pulse Amplitude Modulation*), où chaque symbole appartient à  $\{-1, +1\}$ , par un filtre en cosinus sur-élevé. Mathématiquement nous avons:

$$u(t) = \sum_{k=0}^n \nu_k g(t - kT) \quad (2.5)$$

où  $\nu_k$  sont les symboles transmis et  $g(t)$  est l'impulsion de mise-en-forme du signal donné par le cosinus sur-élevé:

$$g(t) = \text{sinc}(t) \frac{\cos(\pi\alpha t)}{1 - 4\alpha^2 t^2}$$

où  $\text{sinc}(t)$  est la fonction sinus cardinale et  $\alpha$  est le facteur de *roll-off*. Pour les simulations qui suivent,  $\alpha$  a été pris égal à 0.33.

La figure 2.5 montre le cas où  $u(t)$  n'a pas été précompensé. La déformation de  $y(t)$  causée par la ligne de transmission est clair. Les flèches indiquent un exemple d'instant où la différence entre le signal original,  $u(t)$ , et la sortie,  $y(t)$ , est importante.

Il faut aussi noter que, comme dans le cas précédent (figure 2.3), la ligne de transmission introduit un retard. Le signal  $y(t)$  dans la figure 2.5 a été décalé pour faciliter la comparaison avec  $u(t)$ .

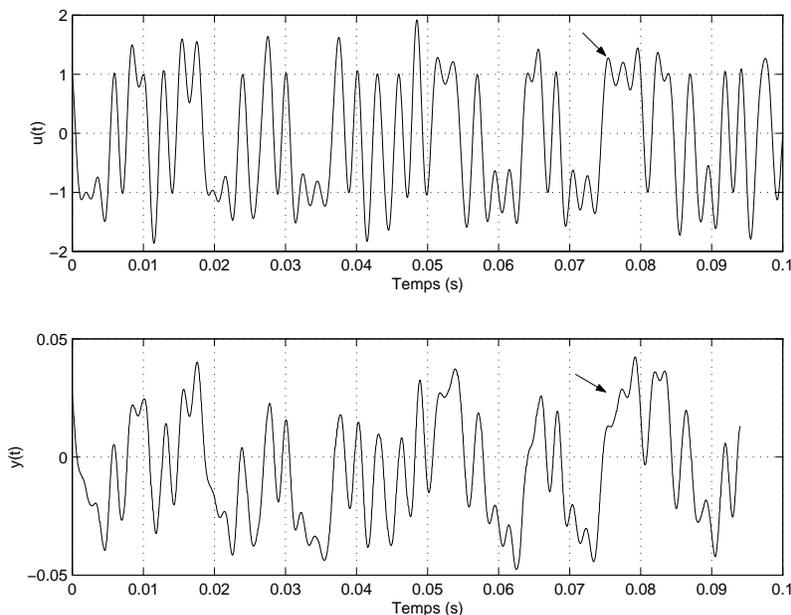


Figure 2.5: Transmission sans précompensation,  $u(t)$  2-PAM

Le signal d'entrée du canal précompensé,  $z(t)$ , obtenu par (2.4), est montré dans la figure 2.6. La figure 2.7, montre le signal de sortie de la ligne ayant comme signal d'entrée  $z(t)$ . Le signal d'entrée original,  $u(t)$ , est montré dans la même figure pour faciliter la comparai-

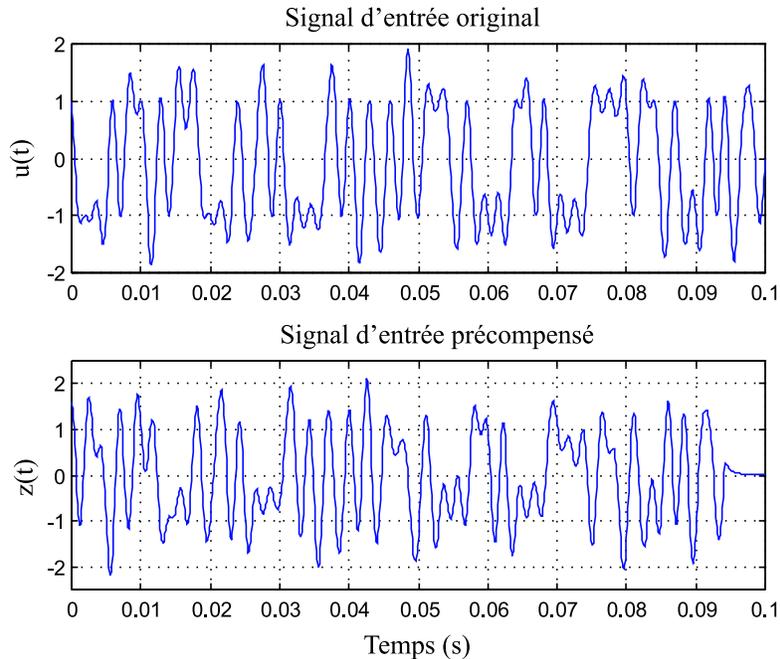


Figure 2.6: Le signal précompensé obtenu par (2.4)

son. Nous pouvons observer que, malgré la grande différence d'amplitude, les deux signaux sont presque pareils, au contraire de la situation montrée dans la figure 2.5. Quelques petites différences peuvent encore être trouvées, comme montré par les flèches, mais elles ne compromettent pas la bonne performance du système. Si on calcule l'erreur quadratique moyenne relative  $\|y(t) - u(t)\|_2 / \|u(t)\|_2$  pour le cas sans précompensation (figure 2.5) et avec précompensation (figure 2.7), nous obtenons 0.2685 dans le premier et  $1.2 \times 10^{-4}$  dans le deuxième. Le gain de performance est donc clair. Il faut observer aussi qu'au début du signal de sortie à la figure 2.7, jusqu'à à-peu-près  $0.007s$ , il y a une période de transition où le signal de sortie  $y(t)$  est constant. Cet intervalle peut paraître un peu long mais il est dû aussi au retard introduit par la ligne de transmission.

## 2.3 Précompensation de 2 Lignes en Parallèle

D'après la bonne performance de la méthode proposée par [FMPR98], montrée à la section 2.2, nous traiterons un cas simple de trajet multiple où le canal sera modélisé par deux lignes de transmission en parallèle. Ainsi, le même signal arrivera par deux chemins différents, parcourant deux lignes avec des paramètres et des longueurs différents. Le signal reçu sera donné par la somme de la sortie de ces deux lignes. Dans ce cas, la distorsion de  $y(t)$  sera plus importante que dans le cas d'une seule ligne, puisqu'il sera donné par la somme de deux

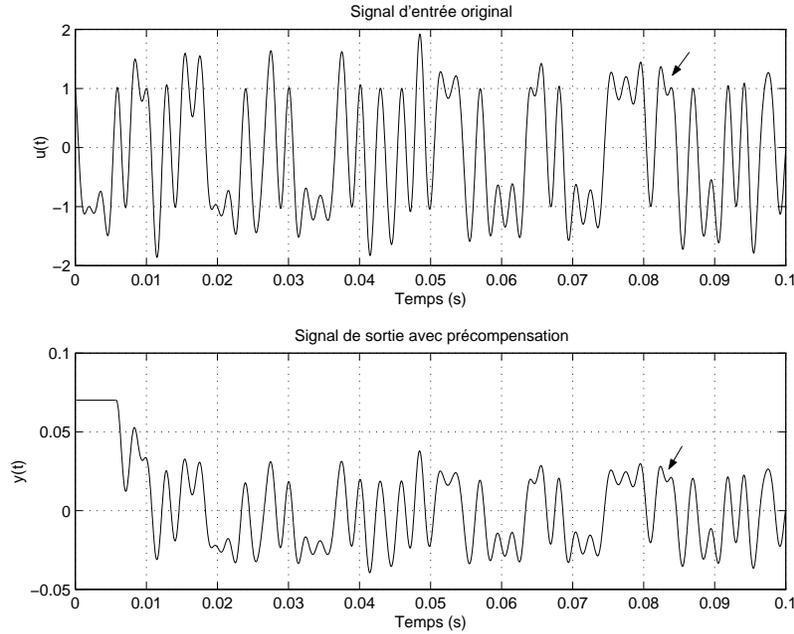


Figure 2.7: Sortie de la ligne ayant, comme entrée, le signal précompensé  $z(t)$

signaux qui ont souffert des distorsions (atténuation et l'effet des réflexions) différentes et qui ont des retards distincts.

### 2.3.1 Obtention du Filtre de Précompensation pour 2 Lignes

Le canal a été modélisé par deux lignes de transmission différentes en parallèle, comme montré à la figure 2.8. Les deux ont le même signal d'entrée précompensé,  $z(t)$ , et le signal de sortie  $y(t)$  est donné par la somme de la sortie de chaque ligne. Il est clair que chaque ligne satisfait le système d'équations (2.1).

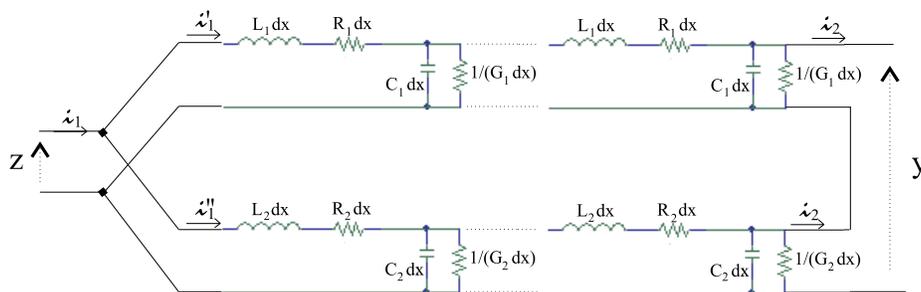


Figure 2.8: Le système en étude

Le filtre de précompensation sera, donc, donné par l'inverse du système équivalent composé par les deux lignes en parallèle. Ainsi, nous devons, premièrement, obtenir ce système

équivalent. Pour cela, nous pouvons voir chaque ligne comme étant un quadripole, c'est-à-dire, une boîte fermée avec deux entrées et deux sorties, comme montré dans la figure 2.9. La matrice de transfert <sup>1</sup> de ce quadripole, notée  $Q$ , est définie par

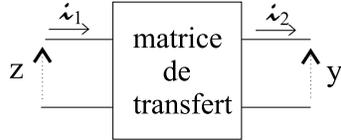


Figure 2.9: Quadripole

$$\begin{pmatrix} \hat{z} \\ \hat{i}_1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix}}_Q \begin{pmatrix} \hat{y} \\ \hat{i}_2 \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

où  $i_1$  est le courant à l'entrée du système et  $i_2$  est le courant à la sortie. Notez que l'équation est écrite dans le domaine fréquentiel.

Ainsi, en utilisant des quadripoles, le système montré dans la figure 2.8 peut être vu comme celui montré dans la figure 2.10.

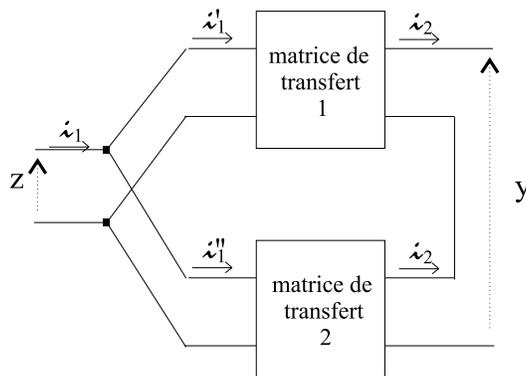


Figure 2.10: Deux quadripoles en parallèle

Nous voulons, alors, trouver le quadripole équivalent, dénoté  $Q_T$ , qui nous permettra d'obtenir directement  $z(t)$  en fonction de  $y(t)$  pour le système montré à la figure 2.10. Cependant, pour déterminer ses paramètres, il est plus commode d'utiliser une représentation mixte. La représentation mixte d'un quadripole, par exemple celui de la figure 2.9, est donnée à l'aide

<sup>1</sup>Notons que dans la terminologie du traitement du signal, cette matrice  $Q$  représente l'inverse de la matrice de transfert du système

d'une matrice  $M$ , définie par

$$\begin{pmatrix} \hat{z} \\ \hat{i}_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}}_M \begin{pmatrix} \hat{i}_1 \\ \hat{y} \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

Avec cette représentation, la matrice  $M_T$  du quadripole équivalent correspondant au système de la figure 2.10 peut être facilement obtenue en faisant

$$M_T^{-1} = M_1^{-1} + M_2^{-1} \quad (2.8)$$

où  $M_1$  est la matrice du premier quadripole et  $M_2$  celle du deuxième. Comme ce que nous voulons est le rapport entre  $z(t)$  et  $y(t)$ , après avoir trouvé  $M_T$ , nous utiliserons cette information pour revenir à la représentation par matrice de transfert et trouver  $Q_T$ . Cela peut être fait en utilisant la relation entre  $Q$  et  $M$  donnée par:

$$\begin{aligned} q_{11} &= m_{12} - \frac{m_{11}m_{22}}{m_{21}} & q_{12} &= \frac{m_{11}}{m_{21}} \\ q_{21} &= \frac{-m_{22}}{m_{21}} & q_{22} &= \frac{1}{m_{21}} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Pour faciliter les calculs, dans le développement qui suit,  $G$  a été prise égale à zéro.

### Représentation Mixte du Quadripole Équivalent

Pour déterminer  $M_T$ , premièrement nous avons besoin de trouver la matrice  $M$ , donnée par (2.7), pour chaque ligne de transmission du système. Cela signifie trouver la tension d'entrée en fonction du courant d'entrée et de la tension de sortie de chaque ligne à l'aide de (2.1). En utilisant le calcul opérationnel et en posant  $\hat{v}(\ell, s) = Z\hat{i}(\ell, s)$ ,  $x = 0$  et  $\hat{z} = \hat{v}(0, s)$ , (2.1) nous donne:

$$\hat{v}(0, s) = \hat{z} = \hat{v}(\ell, s)ch(\ell\sqrt{\beta(s)}) + \frac{(R + Ls)\hat{i}(\ell, s)}{\sqrt{\beta(s)}}sh(\ell\sqrt{\beta(s)}) \quad (2.10)$$

De la même façon, nous pouvons aussi trouver le courant au début de la ligne,  $\hat{i}(0, s)$  comme fonction du courant et de la tension à sa sortie. En faisant  $x = 0$ , nous trouvons:

$$\hat{i}(0, s) = \hat{i}(\ell, s)ch(\ell\sqrt{\beta(s)}) + \frac{\hat{v}(\ell, s)\sqrt{\beta(s)}}{(Ls + R)}sh(\ell\sqrt{\beta(s)}) \quad (2.11)$$

En utilisant (2.10) et (2.11), nous trouvons la relation recherchée. La matrice  $M$  sera

donc:

$$M = \frac{1}{ch(\ell\sqrt{\beta(s)})} \begin{bmatrix} \frac{Ls+R}{\sqrt{\beta(s)}} sh(\ell\sqrt{\beta(s)}) & 1 \\ 1 & \frac{-\sqrt{\beta(s)}}{Ls+R} sh(\ell\sqrt{\beta(s)}) \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Ainsi, avec (2.8), nous trouvons la représentation mixte du quadripole équivalent. L'inverse de la matrice  $M$  ci-dessus est :

$$M^{-1} = \frac{1}{ch(\ell\sqrt{\beta(s)})} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{\beta(s)}}{Ls+R} sh(\ell\sqrt{\beta(s)}) & 1 \\ 1 & \frac{-(Ls+R)}{\sqrt{\beta(s)}} sh(\ell\sqrt{\beta(s)}) \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

L'inverse de l'addition des deux matrices,  $M_1^{-1}$  et  $M_2^{-1}$ , où les sous-indices correspondent à la ligne en question, nous donne la matrice recherchée,  $M_T$  :

$$M_T = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} \frac{L_1s+R_1}{\sqrt{\beta_1(s)}} sh_1ch_2 + \frac{L_2s+R_2}{\sqrt{\beta_2(s)}} sh_2ch_1 & ch_1 + ch_2 \\ ch_1 + ch_2 & \frac{-\sqrt{\beta_1(s)}}{L_1s+R_1} sh_1ch_2 - \frac{\sqrt{\beta_2(s)}}{L_2s+R_2} sh_2ch_1 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

où

$$\begin{aligned} ch_1 &= \cosh(\ell_1\sqrt{\beta_1(s)}); & ch_2 &= \cosh(\ell_2\sqrt{\beta_2(s)}) \\ sh_1 &= \sinh(\ell_1\sqrt{\beta_1(s)}); & sh_2 &= \sinh(\ell_2\sqrt{\beta_2(s)}) \end{aligned} \quad (2.15)$$

et

$$D = 2 + 2ch_1ch_2 + sh_1sh_2 \left[ \frac{(L_2s + R_2)\sqrt{\beta_1(s)}}{(L_1s + R_1)\sqrt{\beta_2(s)}} + \frac{(L_1s + R_1)\sqrt{\beta_2(s)}}{(L_2s + R_2)\sqrt{\beta_1(s)}} \right]$$

## La Matrice de Transfert du Quadripole Équivalent

Une fois que nous avons  $M_T$ , la matrice de transfert du quadripole équivalent,  $Q_T$ , peut être trouvée facilement en utilisant (2.9) :

$$Q_T = \frac{1}{ch_1 + ch_2} \begin{bmatrix} ch_1ch_2 & \frac{L_1s+R_1}{\sqrt{\beta_1(s)}} sh_1ch_2 + \frac{L_2s+R_2}{\sqrt{\beta_2(s)}} sh_2ch_1 \\ \frac{-\sqrt{\beta_1(s)}}{L_1s+R_1} sh_1ch_2 - \frac{\sqrt{\beta_2(s)}}{L_2s+R_2} sh_2ch_1 & D \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Avec (2.16) et en considérant que  $\hat{y} = Z\hat{i}_2$ , où  $Z$  est l'impédance à la sortie du système équivalent, le rapport qui nous intéresse, entre  $\hat{z}$  et  $\hat{y}$  est donné par:

$$\hat{z} = \left[ ch_1ch_2 + \frac{(L_1s + R_1)}{Z\sqrt{\beta_1}} sh_1ch_2 + \frac{(L_2s + R_2)}{Z\sqrt{\beta_2}} sh_2ch_1 \right] \frac{\hat{y}}{ch_1 + ch_2} \quad (2.17)$$

Pour simplifier ce résultat, nous pouvons considérer deux cas différents:

- Les deux lignes de transmission ont les mêmes paramètres  $R$ ,  $L$  et  $C$  (en rappelant que  $G = 0$ ) mais ont des longueurs différentes, c'est-à-dire,  $\beta_1 = \beta_2 = \beta$  et  $\ell_1 \neq \ell_2$ . Dans ce cas, (2.17) peut être simplifié:

$$\hat{z} = \frac{\hat{y}}{ch(\ell_1\sqrt{\beta})+ch(\ell_2\sqrt{\beta})} \left[ ch(\sqrt{\beta}(\ell_1 + \ell_2)) + \frac{(R+Ls)}{Z\sqrt{\beta}} sh(\sqrt{\beta}(\ell_1 + \ell_2)) - sh(\ell_1\sqrt{\beta}) sh(\ell_2\sqrt{\beta}) \right] \quad (2.18)$$

- Les deux lignes ont la même longueur mais les paramètres sont différents, c'est-à-dire,  $\ell_1 = \ell_2 = \ell$  et  $\beta_1 \neq \beta_2$ . Le résultat sera alors:

$$\begin{aligned} \hat{z} = & \frac{\hat{y}}{ch(\ell\sqrt{\beta_1}) + ch(\ell\sqrt{\beta_2})} \\ & \left[ ch(\ell(\sqrt{\beta_1} + \sqrt{\beta_2})) + \left( \frac{(R_1+L_1s)}{Z\sqrt{\beta_1}} + \frac{(R_2+L_2s)}{Z\sqrt{\beta_2}} \right) sh(\ell(\sqrt{\beta_1} + \sqrt{\beta_2})) \right. \\ & \left. + \left( \frac{(R_1+L_1s)}{Z\sqrt{\beta_1}} - \frac{(R_2+L_2s)}{Z\sqrt{\beta_2}} \right) sh(\ell(\sqrt{\beta_1} - \sqrt{\beta_2})) - sh(\ell\sqrt{\beta_1}) sh(\ell\sqrt{\beta_2}) \right] \quad (2.19) \end{aligned}$$

Nous avons, ainsi, la réponse en fréquence du filtre de précompensation recherché. En utilisant le calcul opérationnel [Yos84, Mik83], il est possible de trouver la réponse de ce filtre dans le domaine temporel, au moins pour le cas le plus simple, où les deux lignes ont les mêmes paramètres et des longueurs différentes. La transformée inverse de Laplace de (2.18) est donc :

$$\begin{aligned} z(t) = & \frac{e^{-\alpha\lambda}}{2} \left( 0.5 - \frac{1}{Z} \sqrt{\frac{L}{C}} \right) y(t - \lambda) + \frac{e^{\alpha\lambda}}{2} \left( 0.5 + \frac{1}{Z} \sqrt{\frac{L}{C}} \right) y(t + \lambda) \\ & + \frac{e^{-\alpha\lambda'}}{4} y(t - \lambda') + \frac{e^{\alpha\lambda'}}{4} y(t + \lambda') \\ & + \int_{-\lambda}^{+\lambda} \left[ \frac{R}{4Z\sqrt{LC}} e^{-\alpha\tau} J_0(i\alpha\sqrt{\tau^2 - \lambda^2}) + \frac{e^{-\alpha\tau} i\alpha}{2\sqrt{\tau^2 - \lambda^2}} \left( \frac{\lambda}{2} - \frac{1}{Z} \sqrt{\frac{L}{C}} \tau \right) J_1(i\alpha\sqrt{\tau^2 - \lambda^2}) \right] y(t - \tau) \\ & + \frac{\lambda' \left( \frac{\lambda_0}{\lambda} - 1 \right)}{4\sqrt{\tau^2 \left( \frac{\lambda_0}{\lambda} - 1 \right)^2 - (\lambda')^2}} e^{-\alpha\tau \left( \frac{\lambda_0}{\lambda} - 1 \right)} i\alpha J_1 \left( i\alpha\sqrt{\tau^2 \left( \frac{\lambda_0}{\lambda} - 1 \right)^2 - (\lambda')^2} \right) y \left( t - \tau \left( \frac{\lambda_0}{\lambda} - 1 \right) \right) d\tau \quad (2.20) \end{aligned}$$

où  $\alpha = R/(2L)$ ,  $\lambda = (\ell_1 + \ell_2)\sqrt{LC}$ ,  $\lambda' = (\ell_1 - \ell_2)\sqrt{LC}$ ,  $\lambda_0 = 2\ell_1\sqrt{LC}$ ,  $J_0$  et  $J_1$  sont les fonctions de Bessel de premières espèces d'ordre 0 et 1 et, enfin,  $\tau \in [t - \lambda, t + \lambda]$ .

Nous avons, donc traité le cas où il y a deux lignes en parallèle. La généralisation pour un nombre quelconque de lignes est directe. La démarche à suivre est la même, même si la complexité de calcul pour l'obtention du quadripole équivalent augmentera.

### 2.3.2 Résultats des Simulations

Nous allons, maintenant, refaire les simulations montrées dans la section 2.2.3, pour le cas des deux lignes de transmission en parallèle. Dans ce cas, les simulations ont été faites avec Matlab au lieu de PSpice.

La figure 2.11 montre la déformation causée au signal transmis,  $u(t)$  par les deux lignes en parallèle, dans le cas où elles ont les mêmes paramètres et des longueurs différentes. Les valeurs des paramètres utilisées sont celles de la section 2.2.3. La longueur de la première ligne est  $\ell_1 = 2 \times 10^4$  et de la deuxième,  $\ell_2 = 10^4$ . Le signal  $u(t)$  a été obtenu par (2.5).

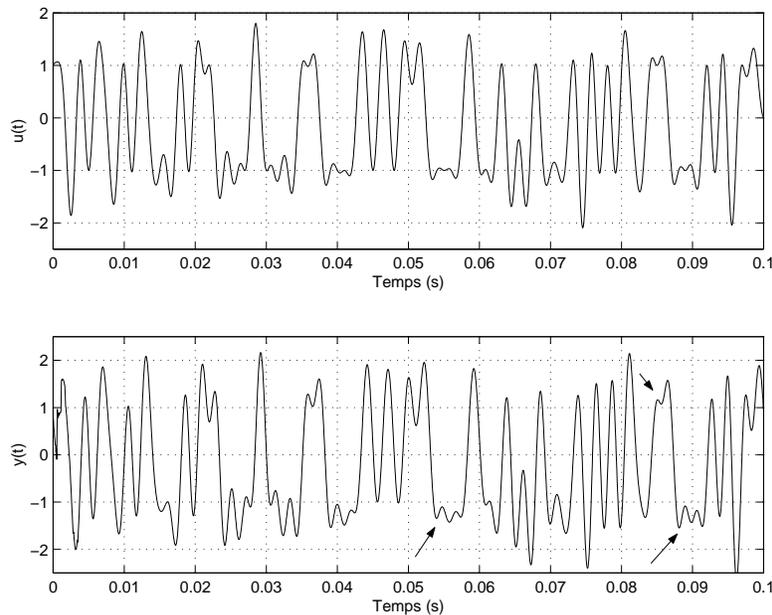


Figure 2.11: Transmission par deux lignes électriques en parallèle, sans précompensation

La déformation causée par le canal est claire. Les flèches indiquent des instants où la différence entre le signal original,  $u(t)$ , et la sortie,  $y(t)$ , est importante.

Nous voulons, alors, précompenser les distorsions introduites par le canal, en modifiant le signal d'entrée. Cela peut être fait en utilisant l'équation (2.20) avec la substitution de  $y(t)$  par  $u(t)$ , qui est la sortie désirée. La figure 2.12 montre la sortie du système,  $y(t)$ , ayant comme entrée le signal précompensé,  $z(t)$ . Le signal d'entrée original,  $u(t)$ , est montré dans la même figure afin de faciliter la comparaison. Nous pouvons voir que les deux signaux sont presque pareils, à un facteur d'échelle près.

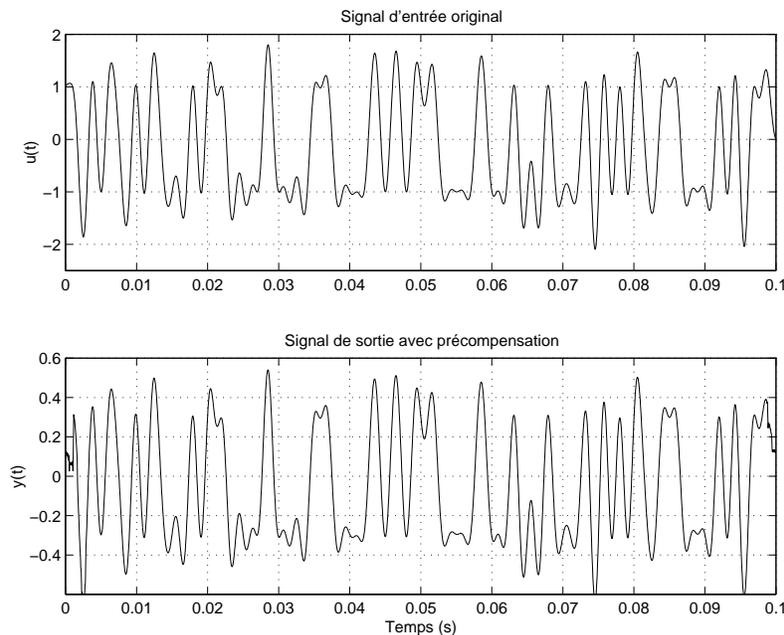


Figure 2.12: Sortie du canal ayant, comme entrée, le signal précompensé

## 2.4 Analyse de la Robustesse du Système

Dans toutes les simulations précédentes, les paramètres des lignes étaient considérés comme parfaitement connus. Cependant, normalement le canal n'est pas connu à l'émetteur. Même si les lignes de transmission satisfont certaines normes et ont des paramètres, en moyenne, connus, leurs valeurs exactes peuvent varier. Pour cette raison, il est intéressant d'analyser l'effet des erreurs dans l'estimation de ces paramètres dans la performance du système.

Ensuite nous avons utilisé deux méthodes différentes pour mesurer cet effet. La première consiste à calculer l'erreur quadratique (EQ) entre le signal d'entrée du système,  $u(t)$ , et le signal de sortie,  $y(t)$ , rapporté à la puissance de  $u(t)$ , ce qui nous permet de quantifier la différence entre les deux. En effet, cette erreur sera équivalent à l'erreur relative ( $\|y(t) - u(t)\|_2 / \|u(t)\|_2$ ) puisque  $\|u(t)\|_2$  est à peu près égale à 1 ( $u(t)$  a une modulation 2-PAM). Pour la simulation qui suit, les lignes de transmission ont les mêmes paramètres que celle de la section 2.2.3. Pour le cas où le canal est donné par une seule ligne, la longueur utilisée était de  $\ell = 10^6$  et, pour le cas des deux lignes en parallèle, nous avons, une fois de plus, considéré le cas où elles ont les mêmes paramètres mais des longueurs différentes, données par  $\ell_1 = 2 \times 10^4$  et  $\ell_2 = 10^4$ . Le signal  $u(t)$  a été obtenu par (2.5). La variation de la valeur des paramètres étaient de 10% et de 20% autour de la valeur correcte. La table 2.1 montre les résultats obtenus. Chacune des trois dernières lignes de la table représente l'EQ suite à

une erreur d'estimation sur le paramètre indiqué.

Nous pouvons observer que, tant pour le cas d'une seule ligne que pour le cas de deux lignes, l'EQ a la même ordre de grandeur pour tous les paramètres. L'EQ minimum a été obtenue avec des variations sur la valeur de la capacité, ce qui est aussi dû à sa faible valeur originale. Le plus important, toutefois, est que l'EQ était toujours suffisamment faible pour garantir la récupération du signal envoyé à la sortie du canal. À titre de comparaison, l'EQ entre le signal d'entrée  $u(t)$  et le signal de sortie  $y(t)$  sans aucune erreur d'estimation est de  $7.78 \times 10^{-4}$  pour le cas d'une seule ligne et de  $1.7 \times 10^{-3}$  pour les deux lignes en parallèle.

Paramètres	Canal: 1 ligne		Canal: 2 lignes	
	10 %	20 %	10 %	20 %
R	0.0070	0.0271	0.0033	0.0037
L	0.0042	0.0136	0.0055	0.0091
C	0.0043	0.0085	0.0027	0.0031

Table 2.1: EQ pour des erreurs dans l'estimation des paramètres

La deuxième méthode consiste à calculer l'interférence entre symboles (IES) à la sortie de la ligne. L'interférence entre symboles apparaît à cause de l'étalement de l'impulsion transmise dû à la nature dispersive du canal, ce qui résulte en une superposition des symboles adjacents. En dénotant  $\mathbf{c}$  le vecteur de la réponse impulsionnelle du système équivalent échantillonné à la cadence de symbole, l'IES peut être calculée de la façon suivante:

$$IES = \frac{\sum_i c_i^2 - (\max\{\mathbf{c}\})^2}{(\max\{\mathbf{c}\})^2} \quad (2.21)$$

La réponse impulsionnelle du système équivalent est donnée par la convolution de la réponse du filtre de précompensation avec celle du canal.

Les figures 2.13, 2.14 et 2.15 montrent l'IES résiduelle obtenue pour une certaine plage des valeurs possibles autour de la valeur exacte pour la résistance, l'inductance et la capacité respectivement. Les paramètres du canal étaient les mêmes utilisés dans la simulation précédente. Seulement le cas d'une seule ligne a été considéré. À titre de comparaison, l'IES résultante pour le cas de la précompensation avec des paramètres exacts est égale à  $5.7 \times 10^{-5}$ .

Nous pouvons, ainsi, confirmer les résultats obtenus dans les simulations précédentes. Pour des variations jusqu'à 30% autour de la valeur exacte des paramètres, l'IES reste suffisamment faible pour permettre une bonne récupération des symboles transmis.

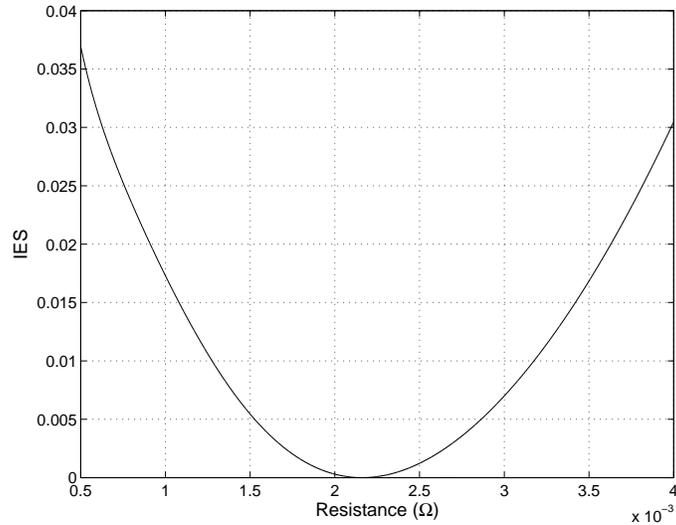


Figure 2.13: IES pour l'erreur dans l'estimation de la résistance

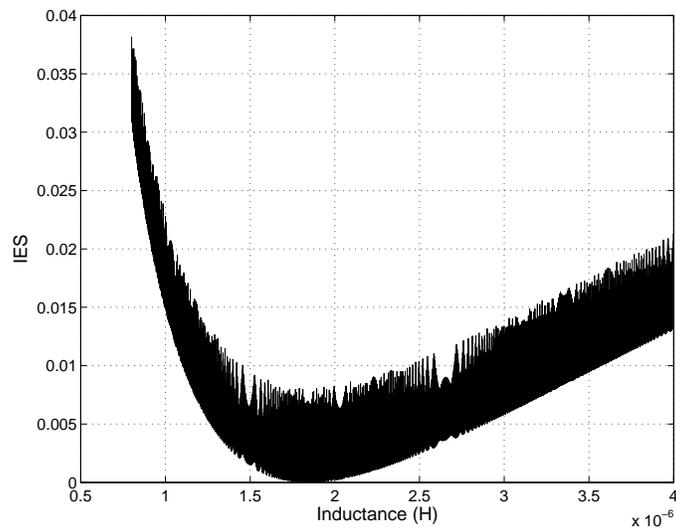


Figure 2.14: IES pour l'erreur dans l'estimation de l'inductance

## 2.5 Application: Restauration du Timbre de la Voix dans un Réseau Téléphonique

Nous allons, maintenant, appliquer la technique développée dans un problème de restauration du timbre de la voix dans un réseau téléphonique. Les lignes analogiques de ce réseau peuvent être modélisées comme des lignes de transmission qui satisfont (2.1). Dans ce contexte, nous avons utilisé la méthode de précompensation couplée avec l'égaliseur spectrale aveugle développé par Mahé en [MG01, Mah02] pour améliorer sa performance.

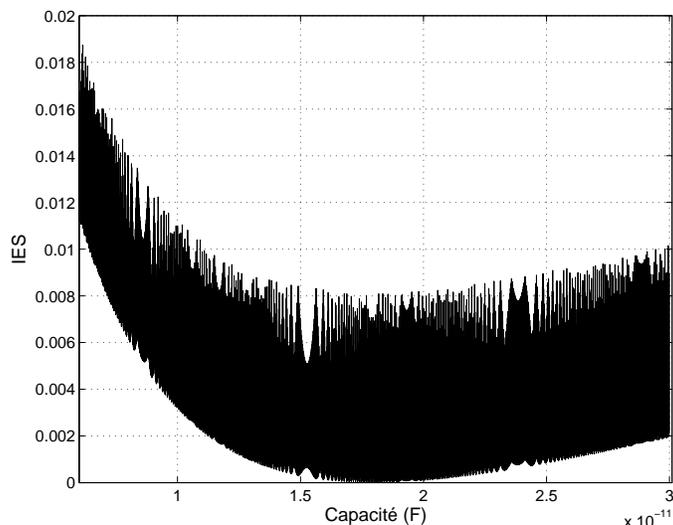


Figure 2.15: IES pour l'erreur dans l'estimation de la capacité

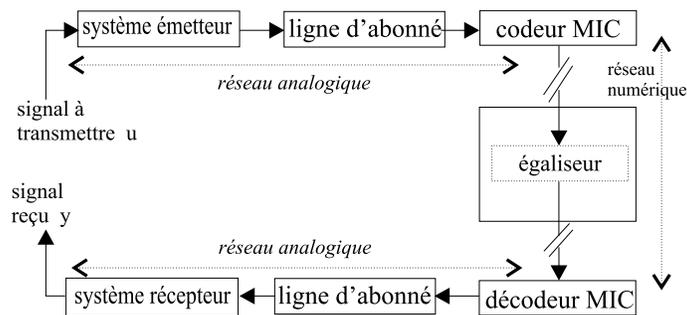


Figure 2.16: Liaison téléphonique avec l'égaliseur

### 2.5.1 Modèle du Système

La figure 2.16 présente une liaison Réseau Téléphonique Commuté (RTC): chaque utilisateur est relié par une ligne analogique au central téléphonique le plus proche, et la liaison entre les centraux emprunte un réseau entièrement numérique. Nous considérons que la transmission numérique est sans erreur et que les distorsions spectrales subies par le signal de parole proviennent uniquement des éléments de transmission analogiques. Dans ces conditions, le spectre de la voix est affecté par deux types de distorsions.

Le premier est le filtrage passe-bande des terminaux et des points d'accès à la partie numérique du réseau. Les caractéristiques typiques de ce filtrage sont décrites par l'UIT-T sous le nom de *système de référence intermédiaire modifié* (SRI). Les réponses en fréquence de ces filtres sont définies par [P.896].

Le deuxième est le résultat du filtrage par les lignes analogiques, qui sont équivalentes à de filtres passe-bas. L'atténuation introduite dépend de la longueur de la ligne et de la

fréquence du signal transmis.

Notre but est, alors, de restaurer le timbre de la voix à la réception. Ici, le terme “timbre” signifie les caractéristiques spectrales à long terme de la voix. Ainsi, il s’agira essentiellement de corriger les modifications de l’enveloppe spectrale du signal de manière à améliorer le naturel et la présence de la voix.

Premièrement, nous nous sommes basé sur l’égaliseur spectrale aveugle (ESA) développé par Mahé [MG01, Mah02]. Nous nous sommes aperçu qu’il serait possible d’avoir des gains de performance en utilisant cet égaliseur ensemble avec la méthode de précompensation.

En observant la figure 2.16, il faut noter que l’égaliseur est placé dans la partie numérique du réseau. Cela est intéressant au niveau de l’implémentation vu que, dans cette partie du réseau, il y a déjà d’autres dispositifs de rehaussement de la parole et les annuleurs d’écho, ce qui limite les besoins matériels de l’implémentation. De plus, cette position permet une allocation dynamique des ressources de calcul aux communications et facilite la maîtrise de la qualité du service fourni par un opérateur à un abonné.

Nous commencerons par la présentation de la méthode développée par Mahé [MG01, Mah02] et, juste après, nous proposerons un nouveau égaliseur spectrale aveugle qui utilisera les deux méthodes ensemble.

## 2.5.2 Égaliseur Spectrale Aveugle

L’égaliseur proposé par [MG01, Mah02] a pour objectif de rapprocher le spectre de la parole traitée d’un spectre de référence, dans la bande de fréquence  $[200Hz - 3150Hz]$ . Au dehors de cette bande l’atténuation des composantes du signal par le système d’émission et de réception est telle que le rapport signal à bruit de quantification est faible. Ainsi, le rehaussement par l’égaliseur conduirait à une amplification du bruit haute et basse fréquence.

L’égaliseur proposé utilise deux filtres en cascade. Le premier, appelé pré-égaliseur, est un filtre fixe dont la réponse en fréquence est l’inverse de la réponse globale de la partie analogique du canal moyen, c’est-à-dire, nous considérons les réponses en fréquences moyennes des systèmes d’émission, réception et des lignes analogiques, tous définis par le SRI modifié [P.896]. Dans le domaine temporel, ce filtre est implémenté comme un filtre RII (réponse impulsionnelle infinie) d’ordre 20 par la méthode de Yule-Walker.

Le deuxième est un filtre adapté qui corrige le désajustement entre le pré-égaliseur fixe et les conditions réelles de transmission. Pour obtenir sa réponse en fréquence, nous partons de la réponse fréquentielle globale du système,  $G(f)$  qui peut être estimée par:

$$|Y(f)|^2 = |G(f)|^2|U(f)|^2 \quad (2.22)$$

où  $|Y(f)|^2$  et  $|U(f)|^2$  sont les densités spectrales de puissance à court terme du signal de réception  $y(t)$  et du signal original envoyé  $u(t)$  respectivement.  $G(f)$  inclut les systèmes d'émission et réception et les deux lignes analogiques.

Comme le canal est invariant dans le temps, les moyennes temporelles de  $|Y(f)|^2$  et  $|U(f)|^2$  satisfont:

$$\overline{|Y(f)|^2} = |G(f)|^2 \overline{|U(f)|^2} \quad (2.23)$$

La réponse fréquentielle du filtre adapté sera donc donnée par:

$$|EQ(f)| = \frac{1}{|G(f)|} = \sqrt{\frac{\gamma_u(f)}{\gamma_y(f)}} \quad (2.24)$$

où  $\gamma$  est le spectre à long terme du signal, défini comme étant la moyenne temporelle du spectre à court terme.

Néanmoins, les spectres à long terme ne sont pas connus. Rappelons que l'égaliseur est placé dans la partie numérique du réseau, n'ayant pas accès au signal original transmis ni au signal à la réception. Pour le signal original transmis,  $\gamma_u$  a été remplacé par un spectre de référence,  $\gamma_{ref}$ , défini par l'UIT [P.593]. Ce spectre est un spectre moyen, calculé à partir de mesures sur un grand nombre d'échantillons de parole prononcée par différents locuteurs dans 20 langues.

Pour le signal à la réception, le spectre à long terme peut être estimé à partir du signal connu d'entrée de l'égaliseur, que nous allons appeler  $v(t)$ :

$$\gamma_y(f) = |L_{RX}(f)|^2 |S_{RX}(f)|^2 \gamma_v(f) \quad (2.25)$$

où  $L_{RX}(f)$  est la réponse en fréquence moyenne de la ligne analogique de réception et  $S_{RX}(f)$  est la réponse en fréquence moyenne du terminal de réception, les deux définis par l'UIT-T [P.896].

Enfin, la réponse en fréquence de l'égaliseur sera donnée par:

$$|EQ(f)| = \frac{1}{|L_{RX}(f)| |S_{RX}(f)|} \sqrt{\frac{\gamma_{ref}(f)}{\gamma_v(f)}} \quad (2.26)$$

Il est vrai que l'allure générale du spectre à long terme d'un signal de parole pour un locuteur quelconque est proche de celle du spectre de référence, mais elle est beaucoup moins lisse. A cause de l'approximation  $\gamma_u \approx \gamma_{ref}$ , seulement le format global de la réponse en fréquence est important. De plus, avec la présence du terme  $\gamma_v$ , la réponse  $EQ(f)$  oscille beaucoup et doit être lissée. Ce lissage a été fait en utilisant une fenêtre de Hamming. Ainsi,

dans le domaine temporel, le filtre adapté est obtenu par une transformée inverse de Fourier de  $|EQ|$  suivi d'une symétrisation (pour obtenir un filtre causal à phase linéaire) et de la multiplication par une fenêtre de Hamming de longueur 15 centrée sur le pic de la réponse impulsionnelle.

Cette méthode sera appelée égaliseur spectral aveugle lissé par une fenêtre de la réponse impulsionnelle (ESA-F).

### 2.5.3 Nouvelle Méthode Proposée

Pour continuer dans le même cadre de la technique proposée par [MG01, Mah02], l'ESA-F, nous considérerons aussi un égaliseur formé par deux filtres. Le premier, appelé pré-égaliseur, sera aussi un filtre fixe et aura, comme réponse en fréquence, l'inverse de la réponse moyenne du système d'émission et de réception et de la ligne analogique de réception. Notez que, dans l'ESA-F, ce filtre incluait aussi la ligne analogique de transmission, ce qui ne sera pas le cas ici. Ainsi, seul le filtre adapté ira compenser les distorsions introduites par la ligne analogique de transmission et la désadaptation entre le pré-égaliseur fixe et les conditions réelles de transmission.

De plus, nous allons modéliser les lignes analogiques comme des lignes de transmission qui satisfont (2.1). Nous savons, donc, de (2.3), que la réponse fréquentielle du filtre adapté sera donnée par:

$$H(f) = \cosh\left(\ell\sqrt{\beta}\right) + \frac{R + i\omega L \sinh\left(\ell\sqrt{\beta}\right)}{Z\sqrt{\beta}} \quad (2.27)$$

qui est l'inverse de la réponse du canal. Ici, la variable  $s$  a été remplacée par  $\omega$ , satisfaisant la relation  $s = j\omega$ , avec  $\omega = 2\pi f$ . Il est important d'observer qu'ici le filtre donné par  $H(f)$  sera utilisé comme égaliseur et non comme précompensateur, comme nous avons vu au début de ce chapitre. En effet, la position du filtre dans le système (à l'émetteur dans un cas et au milieu du réseau dans l'autre) ne change pas sa réponse en fréquence ni les calculs pour son obtention.

Pour calculer  $H(f)$ , donné par (2.27), nous avons besoin des paramètres de la ligne. Les paramètres  $R$ ,  $L$ ,  $C$  et  $G$  (ici,  $G$  ne sera pas nulle) peuvent être mesurés ou nous pouvons utiliser des valeurs moyennes définies par l'UIT [Q.501]. Nous avons déjà vu dans la section 2.4 que le système est robuste à des erreurs d'estimation des ces paramètres. L'impédance  $Z$ , dans un réseau téléphonique, sera donnée par l'impédance d'entrée du convertisseur 2 fils/4 fils, définie aussi par [Q.501]. Il manque, donc, juste la longueur  $\ell$ . En principe, sa valeur n'est pas connue et peut changer à chaque nouvelle liaison. Ainsi, nous avons besoin de l'estimer de façon aveugle.

La solution proposée est de comparer la réponse  $H(f)$  avec celle de l'égaliseur obtenu par

la méthode ESA-F, c'est-à-dire,  $EQ$ , donné par (2.26). Ainsi, la valeur correcte de  $\ell$  sera celle qui approchera le plus,  $H(f)$  de  $EQ$ , dans la plage de fréquence d'intérêt  $[200Hz - 3150Hz]$ . Toutefois, cette comparaison sera faite dans le domaine cepstral et non directement dans le domaine spectral. Le cepstre d'un filtre avec réponse fréquentielle  $H$  est donné par:

$$C^H = IDFT(\ln(|H|)) \quad (2.28)$$

La fonction coût devant être minimisée sera donc la distance entre  $H$  et  $EQ$  dans l'espace des dix premiers coefficients cepstraux :

$$J(\ell) = \sum_{k=1}^{10} \left( C_k^{EQ} - C_k^H \right)^2 \quad (2.29)$$

où  $C_k^{EQ}$  est le  $k$ -ième coefficient cepstral de  $EQ$  et  $C_k^H$  est le  $k$ -ième coefficient cepstral de  $H$ .

L'intérêt de faire cette comparaison dans ce domaine au lieu du domaine spectral est multiple:

- la comparaison peut être faite sans le besoin de faire attention au niveau des deux réponses fréquentielles, simplement en excluant le coefficient cepstral d'ordre zéro.
- nous pouvons contrôler la résolution spectrale de la comparaison, vu qu'elle dépend du nombre de coefficients cepstraux considérés. Dans (2.29) nous avons utilisé 10 coefficients, ce qui s'est montré suffisant.

Le minimum de  $J$  sera trouvé de façon itérative, en utilisant un algorithme du gradient descendant:

$$\ell_{n+1} = \ell_n - \mu \nabla_{\ell} J(n) \quad (2.30)$$

où  $\mu$  est le pas d'adaptation et

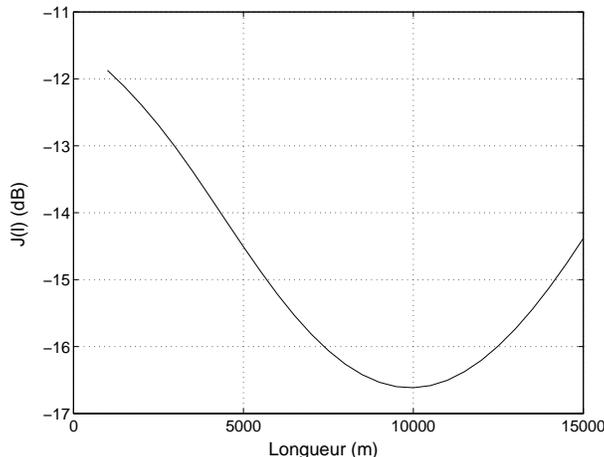
$$\nabla_{\ell} J(n) = - \sum_{k=1}^{10} \left( C_k^{EQ} - C_k^H(\ell_n) \right) \frac{\partial C_k^H}{\partial \ell}(\ell_n) \quad (2.31)$$

La dérivée de  $C^H$  par rapport à  $\ell$  nous donne:

$$\frac{\partial C^H}{\partial \ell} = IDFT \left( \frac{1}{\sqrt{|H|}} \left( H^* \frac{\partial H}{\partial \ell} + H \frac{\partial H^*}{\partial \ell} \right) \right) \quad (2.32)$$

où

$$\frac{\partial H}{\partial \ell} = \sqrt{\beta} sh \left( \ell \sqrt{\beta} \right) + \frac{R + i\omega L}{Z} ch \left( \ell \sqrt{\beta} \right) \quad (2.33)$$

Figure 2.17: Fonction coût  $J(\ell)$ 

La figure 2.17 présente un exemple de la fonction coût  $J$  par rapport à la longueur de la ligne,  $\ell$ . Dans cette simulation nous avons utilisé une ligne d'abonné de 10 km. Nous pouvons, donc, voir qu'il y a un seul minimum, à  $\ell = 10$  km. Par contre, nous ne pouvons pas garantir que  $J$  sera toujours unimodale, à cause de la nature aléatoire de  $EQ$ . De toute façon, pour toutes les simulations faites et qui seront présentées dans la prochaine section,  $J$  n'a jamais été multimodale.

Il est important de souligner que  $H$  est naturellement lisse. Ainsi, comme on cherche la longueur qui approche, le plus possible,  $H$  de  $EQ$ , cette nouvelle méthode peut être vue comme une façon différente de lissage, remplaçant l'utilisation de la fenêtre de Hamming. Comme nous allons le montrer dans la section suivante, cela apporte un gain de performance pour la plupart des locuteurs testés.

De plus, pour les simulations, nous n'allons pas utiliser la réponse dans le domaine temporel de  $H$ , donnée par (2.4) puisque  $G$  n'est plus nulle, ce qui complique beaucoup les calculs. D'autre part, ici nous sommes dans la partie numérique du réseau, ce qui exige un filtre discret. Ainsi, pour que la comparaison avec la performance d'ESA-F soit juste, le filtre dans le domaine temporel sera obtenu à partir de la transformée inverse de Fourier de  $H$  et aura 15 coefficients, comme celui obtenu à partir de  $EQ$  dans ESA-F.

Cette méthode sera appelée égaliseur spectral aveugle basée sur les paramètres physiques de la ligne (ESA-P).

## 2.5.4 Comparaison des Deux Méthodes

Pour comparer la nouvelle méthode proposée, l'ESA-P, avec la méthode ESA-F, nous avons utilisé une liaison comme celle montrée à la figure 2.16, composée d'une ligne analogique

de transmission longue, une ligne de réception moyenne et des systèmes d'émission et de réception avec des réponses fréquentielles définis par le SRI modifié. Une ligne téléphonique typique a, comme paramètres [Q.501]:  $R = 168 \text{ m}\Omega/\text{m}$ ,  $L = 0.7 \text{ }\mu\text{H}/\text{m}$ ,  $C = 50 \text{ pF}/\text{m}$  et  $G = 1 \text{ pS}/\text{m}$ . L'impédance  $Z$ , qui est l'impédance d'entrée des convertisseurs 2 fils/4 fils, peut être une résistance de  $600 \text{ }\Omega$  ou une résistance de  $270 \text{ }\Omega$  en parallèle avec une capacité de  $150 \text{ nF}$  (nouveaux appareils).

Les simulations ont été faites en utilisant le même corpus que [Mah02], c'est-à-dire, 34 locuteurs différents (hommes et femmes), prononçant le même texte, représentant une vingtaine de secondes d'activité vocale. Ce signal a été analysé par trames de 32 ms, avec un recouvrement inter-trames de 50%. Les valeurs des paramètres des lignes,  $R$ ,  $L$ ,  $C$  et  $G$  sont celles données par [Q.501], citées ci-dessus, et  $Z$  a été considérée complexe. La ligne de transmission avait une longueur de 10 km tandis que celle de réception avait 2 km.

De plus, le filtre adapté dans le domaine temporel, obtenu à partir de  $EQ$ , a 15 coefficients (section 2.5.2) tout comme celui obtenu à partir de  $H$  (méthode ESA-P), pour que la comparaison soit juste. L'algorithme donné par (2.30) a été initialisé avec  $\ell = 2 \text{ km}$ , qui est la longueur moyenne d'une ligne d'abonné. Le pas d'adaptation a été pris égal à  $5 \times 10^3$ .

La performance des méthodes a été mesurée par l'erreur cepstrale moyenne. Pour chaque trame du signal, l'erreur cepstrale (EC) est défini comme [Mah02]:

$$EC^m = \sqrt{\sum_{k=1}^{20} (C_k^i(m) - C_k^e(m))^2} \quad (2.34)$$

où  $C_k^i$  est le  $k$ -ième coefficient cepstral de l'égaliseur idéal et  $C_k^e$  est le  $k$ -ième coefficient cepstral de l'égaliseur testé, pour la  $m$ -ième trame du signal. L'égaliseur idéal est celui qui inverse parfaitement la réponse en fréquence du canal, en considérant les deux lignes analogiques et les systèmes d'émission et de réception. La figure 2.18 montre la comparaison de l'erreur cepstrale moyenne (ECM) des deux égaliseurs, calculée comme la moyenne temporelle des erreurs cepstrales (EC) après la convergence des égaliseurs, pour chaque locuteur. La convergence de l'algorithme est atteinte après environ 4 secondes d'activité vocale ce qui varie un peu selon le locuteur. Il est clair que, comme la comparaison est faite par rapport à l'égaliseur idéal, plus faible sera la valeur d'ECM, mieux sera la performance de l'égaliseur testé. Dans la figure, les résultats des deux méthodes, pour chaque locuteur, sont liés pour faciliter la visualisation de la différence de performance entre les deux.

La figure 2.18 nous montre, donc, que, pour la plupart des 34 locuteurs testés, la méthode ESA-P a une meilleure performance que la méthode ESA-F. Toutefois, pour certains locuteurs, comme le 4 et le 20, la performance de la nouvelle méthode est pire, tandis que pour

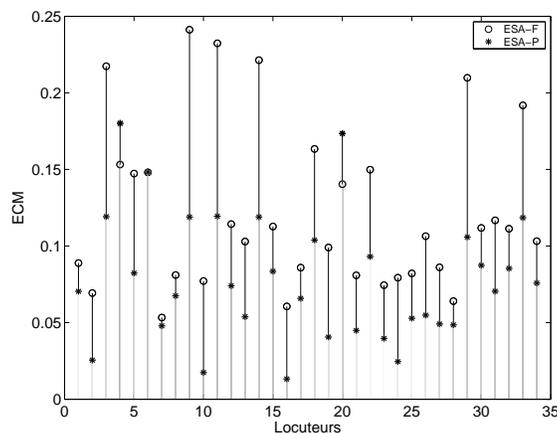


Figure 2.18: Comparaison de l'ECM des deux méthodes

le locuteur 6, les performances des deux méthodes sont équivalentes.

En effet, l'estimation de la longueur par la comparaison entre  $H$  et  $EQ$  dépend fortement de ce dernier. Ainsi, si  $EQ$  ne représente pas une bonne inversion du canal dès le début du processus, il peut être difficile de trouver une longueur qui rapprochera  $H$  de  $EQ$ . Dans ce cas, la nouvelle méthode n'a pas une bonne performance parce que la fonction coût  $J$  n'aura pas de minimum et, étrangement, sa valeur diminue lorsque la longueur augmente. Ainsi, la longueur finale estimée sera beaucoup plus élevée que la correcte. De toute façon, nous pouvons voir que cela n'arrive que pour 2 locuteurs.

Comme notre but est de restaurer le timbre de la voix, l'intérêt de cette réduction dans l'erreur cepstrale est, en effet, dans son impact subjectif. Les relations entre l'erreur cepstrale et la restauration du timbre ont été établies dans [Mah02], basées sur des tests subjectifs. Comme ces relations ont été établies dans le même contexte et pour des distorsions cepstrales et spectrales similaires aux simulations réalisées ici, nous pouvons les utiliser pour évaluer la signification des résultats obtenus. Ainsi, basé sur [Mah02], nous pouvons dire que la méthode ESA-P apporte une amélioration significative de la restauration du timbre de la voix, principalement pour les locuteurs 9, 11 et 29.

Nous pouvons aussi comparer la performance des deux méthodes par rapport à leur réponse en fréquence. La figure 2.19 montre la réponse en fréquence du système complet pour le locuteur 13. Nous pouvons observer que celle obtenue par la méthode ESA-P est beaucoup plus proche de la réponse de l'égaliseur idéal que celle obtenue par ESA-F.

De plus, la figure 2.20 montre les réponses en fréquence des égaliseurs obtenus à partir des différentes méthodes. Nous pouvons, donc, voir comme le résultat obtenu par la méthode ESA-F oscille beaucoup et que le lissage par la fenêtre de Hamming de sa réponse impulsionnelle ne donne pas un résultat si proche de l'idéal comme celui de  $H$  (méthode ESA-P).

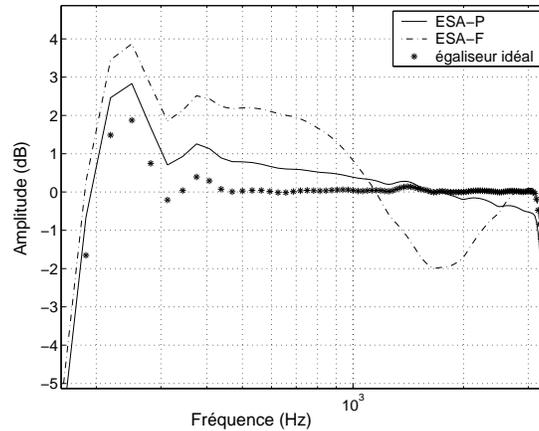


Figure 2.19: Réponse en fréquence du système équivalent

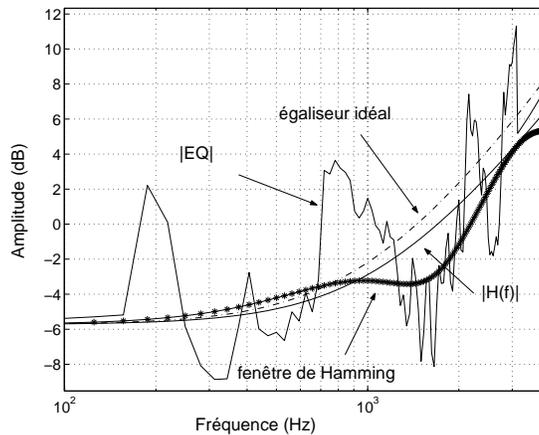


Figure 2.20: Comparaison de la réponse en fréquence des égaliseurs

Évidemment,  $H$ , avec la valeur correcte de  $\ell$ , est l'inverse exacte du canal. Nous pouvons voir que, avec la longueur estimée, sa réponse est très proche de la réponse de l'égaliseur idéal.

### 2.5.5 Analyse du Résultat

Il peut sembler que, pour l'implémentation de l'égaliseur proposé, un nombre important d'éléments du système doivent être connus: les systèmes d'émission et de réception et les paramètres de la ligne de réception. En fait, ces suppositions ont été faites pour être dans le même cadre que [Mah02], et pouvoir comparer les résultats. En pratique, très peu d'éléments doivent être connus pour caractériser une liaison entre deux abonnés. Les deux méthodes, ESA-F et ESA-P, utilisées alternativement, nous permettent de caractériser toute une liaison en ne connaissant que les systèmes d'émission et de réception de l'abonné en question.

La figure 2.21 nous montre une liaison entre deux abonnés, A et B. Supposons qu'il faut

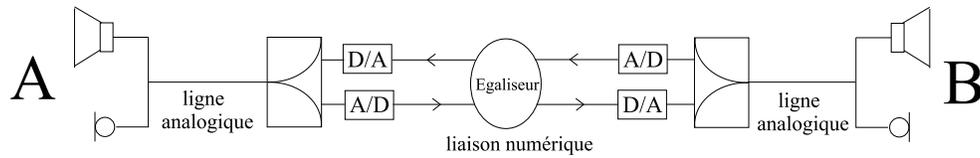


Figure 2.21: Liaison entre deux abonnés

restaurer le timbre du signal venu de B, pour l'abonné A. Avec la méthode ESA-F, nous pouvons égaliser la partie de transmission de B vers A. Après, en connaissant le système de transmission de A, avec la méthode ESA-P, nous pouvons trouver la longueur de la partie de réception de la liaison. Ensuite, en connaissant le système de réception de A, nous avons la réponse en fréquence de tout le canal analogique de la liaison.

Ainsi, si cela correspond à un service offert à A, il suffit de connaître les caractéristiques d'émission et de réception de son appareil pour restaurer le timbre du signal qu'il reçoit.

## 2.6 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons étudié la précompensation d'un système plat non linéaire, donné par la transmission des données par une ligne électrique. L'intérêt de ce système vient du fait qu'il représente une des solutions possibles pour résoudre le problème d'accessibilité du réseau internet dans ce qui est appelé les *last miles*, c'est-à-dire, l'accès chez les abonnés, ce qui représente les derniers mètres du réseau.

Nous avons commencé par l'étude de [FMPR98] et nous avons étendu ses résultats pour un cas simple de trajet multiple, où le signal arrive au récepteur par deux chemins différents. Les simulations, en utilisant comme entrée un signal usuel des systèmes de communication, nous a donné des très bons résultats.

Ensuite, comme normalement les paramètres des lignes ne sont pas exactement connus à l'émetteur, nous avons étudié la robustesse du système en considérant des erreurs d'estimation de ses paramètres. Nous avons vu, donc, que le système est très robuste, ayant des bonnes performances jusqu'à une variation de, à-peu-près, 30% des valeurs originales des paramètres.

Après cette étude, nous avons appliqué la technique développée à un problème plus direct: la restauration du timbre de la voix dans un réseau téléphonique. Ce réseau a été modélisé comme une ligne de transmission et le filtre de précompensation a été utilisé comme égaliseur, ce qui ne change rien dans les calculs de son obtention. Ce filtre a été utilisé couplé avec l'égaliseur spectral aveugle développé par [Mah02]. La nouvelle méthode a apporté un gain de performance très significatif. De plus, en utilisant les deux méthodes, ESA-F et ESA-P alternativement, il est possible de caractériser complètement une liaison téléphonique entre

deux abonnés en ne connaissant que les systèmes d'émission et de réception d'un d'entre eux.

# Chapitre 3

## Méthode Algébrique d'Identification de Système

La question de l'identification/estimation d'un système est un des problèmes les plus importants tant en traitement du signal qu'en automatique. Cependant, leur façon d'approcher ce problème est bien différente. Du côté du traitement du signal, quelques aspects des méthodes existantes peuvent être résumés comme l'utilisation extensive des outils probabilistes, qui est devenue presque universelle. De plus, l'analyse des signaux est faite exclusivement en temps discret.

Or, dans un contexte probabiliste, la connaissance *a priori* de la distribution statistique des signaux et du bruit est très importante. De plus, la performance de nature asymptotique avec les retards de traitement sont inhérents à une approche probabiliste.

Ici nous allons proposer une nouvelle méthode, algébrique et déterministe, d'estimation de canal. Cette méthode sera, ensuite, appliquée au problème d'égalisation. La méthode exploite les caractéristiques des signaux en continu. Comme nous verrons, la connaissance de la forme d'onde du signal transmis, traité en temps continu, permet la réalisation de la démodulation avec une séquence d'apprentissage très courte. De plus, la rapidité des estimations, due aux formules explicites fournies par les techniques algébriques, permettent l'utilisation d'une modélisation locale du système, ce qui simplifie le traitement.

### 3.1 Introduction

Dans ce chapitre nous allons proposer une méthode algébrique et déterministe d'estimation de canal qui utilise les caractéristiques et propriétés des signaux en temps continu. Ensuite, cette méthode sera appliquée à l'estimation d'un canal de communication et le modèle ainsi obtenu sera utilisé, dans une deuxième étape, pour démoduler le signal reçu et récupérer les

symboles transmis.

Les méthodes d'identification déterministes apportent quelques avantages par rapport aux méthodes stochastiques. Premièrement, elles ont la propriété de convergence avec un ensemble d'échantillons fini, ce qui permet d'avoir une bonne estimation dans une courte période de temps. Les méthodes stochastiques n'ont pas cette propriété. Cela est important principalement lorsque le canal varie rapidement et ne peut être supposé stationnaire que sur une courte période de temps ou quand il n'y a qu'une courte séquence d'échantillons disponible pour réaliser l'estimation. De plus, les approches algébriques aveugles n'ont pas le problème de convergence vers des minima locaux, vu qu'elles présentent une description exhaustive de l'espace des solutions [LC03]. Par ailleurs, la convergence des méthodes stochastiques dépend fortement de l'initialisation des algorithmes.

Par contre, non seulement les méthodes déterministes ont besoin de la connaissance de l'ordre du système, mais aussi elles s'y sont montrées très sensibles. Comme cet ordre n'est pas connu, il doit être estimé. Si juste une courte séquence d'échantillons est disponible, probablement cette estimation ne sera pas suffisamment fiable. Les méthodes stochastiques sont beaucoup plus robustes à ce type d'erreur. Il leur suffit d'avoir une valeur limite supérieure. Un autre désavantage des méthodes déterministes est qu'elles sont normalement développées pour des implémentations par blocs, ne permettant pas le calcul adaptatif et récursif comme les méthodes stochastiques. De plus, les méthodes algébriques existantes dans la littérature présentent diverses limitations au niveau du coût de calcul et de la gestion de paramètres non rationnels dans les équations [LC03].

Dans le domaine de l'automatique et du contrôle, le problème d'identification et d'estimation des systèmes est bien connu et a été beaucoup étudié. En traitement du signal, les méthodes déterministes et algébriques ont commencé à apparaître il y a quelques années, toujours traitant le système en discret. Les difficultés comme l'ordre inconnu du canal ou l'implémentation de façon récursive des méthodes ont été étudiées. Un résumé de ce qui a été fait sera présenté dans la section 3.2.

La méthode que nous allons développer ici diffère de toutes les méthodes classiques, en premier, parce que nous utilisons un modèle du système en temps continu et, en deuxième, parce que la méthode proposée n'est pas le résultat de l'optimisation d'un critère ou d'une fonction coût. Ainsi, nous pourrions profiter de certaines caractéristiques des signaux qui finissent par être oubliées ou cachées par l'opération d'échantillonnage. De plus, nous n'avons pas les problèmes de convergence de la plupart des méthodes stochastiques, comme le délais de traitement et l'existence des minima locaux. Avec un système linéaire pour l'estimation du canal et une formule explicite pour la démodulation des symboles, la méthode se montre très simple et efficace. Les résultats ont été très encourageants et des gains de performance

ont été obtenus spécialement pour certaines configuration de système, comme nous le verrons ensuite.

La méthode est fondée sur une nouvelle théorie d'identification/estimation, proposée premièrement par [FMMSR03, FSR03], qui sera présentée dans la section 3.6 et qui abouti aux faits suivants :

- Aucune information statistique du bruit n'est nécessaire
- Nous gardons les signaux sous leur forme temps-continu ce qui nous permet d'exploiter certaines propriétés
- Il n'y a aucune distinction entre les signaux stationnaires et non stationnaires
- Les calculs peuvent être faits en ligne

Ce chapitre sera, alors, dédié à la présentation de la méthode d'estimation du canal, tandis que sont application à la récupération des symboles et égalisation sera traitée dans le chapitre suivant. La technique consiste à estimer le canal modélisé comme une fonction de transfert rationnelle en utilisant une séquence d'apprentissage très courte (5 symboles). Même si la technique n'est pas aveugle, la courte séquence d'apprentissage nous permet de dire que la méthode est semi-aveugle.

En ce qui concerne l'ordre du canal, nous commençons en le considérant connu. Ensuite, nous proposerons une approche appelée *modélisation locale*, où son connaissance au récepteur n'est plus nécessaire.

## 3.2 État-de-l'Art

L'identification de systèmes est un problème de grande importance dans plusieurs domaines, parmi lesquels nous trouvons celui du contrôle et du traitement du signal. Pour cette raison, il a déjà été beaucoup étudié et il existe une vaste littérature sur le sujet. La problématique consiste à trouver un modèle mathématique pour un système inconnu. Dans le cas où seulement les valeurs de sa fonction sont données en certains points du plan complexe, le problème est posé en termes d'interpolation [AD86]. Dans la plupart des cas, par contre, le système est donné à travers sa réponse à une excitation. Ainsi, le modèle est obtenu à partir de ses signaux d'entrée et de sortie, ce qui sera le cas étudié ici. Le système peut être représenté par sa fonction de transfert ou par ses variables internes, comme dans la représentation par variables d'états.

De façon générale, dans le cas discret, les méthodes d'identification de système peuvent être divisées en deux cas: méthodes stochastiques et méthodes déterministes. Ensuite nous

allons discuter sur les travaux existants dans la littérature pour ces deux cas, donnant plus d'attention à ceux développés pour estimer des systèmes modélisés par des fonctions de transfert rationnelles, puisque celui-la sera le cas travaillé dans la suite de ce chapitre.

### 3.2.1 Méthodes Stochastiques

Ces méthodes reposent essentiellement sur l'optimisation d'un critère d'erreur et sont implémentées comme des filtres adaptatifs à réponse impulsionnelle finie (RIF) ou infinie (RII). Leur principe de base est la recherche d'un minimum d'une surface d'erreur. Ces méthodes ont déjà été très bien étudiées et caractérisées dans la littérature [Hay96]. En général, elles sont basées sur l'utilisation d'outils statistiques et, pour cette raison, ont des convergences asymptotiques.

Dans le cas des filtres RIF, les méthodes les plus connues sont les algorithmes de descente du gradient, comme le LMS (*Least Mean Square*) ou le CMA (*Constant Modulus Algorithme*), les moindres carrés et les méthodes des sous-espaces [Hay96].

Les méthodes de sous-espaces [VD91] normalement utilisent un modèle du système en variables d'états. Le problème d'identification est résolu en exploitant les caractéristiques des sous-espaces définis par les signaux d'entrée et sortie, comme la propriété d'invariance après un décalage. Cependant, si l'ordre du système à identifier n'est pas bien estimé, la structure spéciale des sous-espaces est perdue, ce qui conduit alors à une perte de performance. Comme cette méthode est basée sur le modèle par variables d'état, elle n'est pas très adaptée pour une implémentation comme un filtre adaptatif RII. Pour ce type d'application, les méthodes du gradient basées sur l'erreur d'équation ou l'erreur de sortie [SDW84, PGR<sup>+</sup>94] et la méthode Steiglitz-McBride [MRA97] sont plus intéressantes, vue qu'elles utilisent une représentation du modèle par fonction de transfert rationnelle.

Le critère connu comme erreur d'équations, nommé ainsi d'après Kalman [SDW84], consiste à minimiser la fonction d'erreur  $\|H(s)A(s) - B(s)\|_2^2$ , où  $H(s)$  est la fonction de transfert (rationnelle) du système à identifier par  $F(s) = B(s)/A(s)$ ,  $B(s)$  et  $A(s)$  étant des polynômes en  $s$  à être estimés. Par contre, l'erreur de sortie consiste à minimiser la fonction d'erreur  $\|H(s) - F(s)\|_2^2$ . Il faut observer que ce deuxième représente un problème d'optimisation non linéaire, tandis que le premier est linéaire. Ces problèmes peuvent être résolus par la méthode des moindres carrés. La méthode Steiglitz-McBride est différente parce qu'elle n'est pas du type du gradient descendant. Elle ne cherche pas le minimum d'une surface d'erreur quadratique et, ainsi, elle ne risque pas de tomber sur des minima locaux. Cette méthode peut être vue comme une séquence de problèmes d'erreur d'équation pondérés [SM65, Reg95, MRA97].

On peut aussi mentionner les méthodes issues de la géométrie algébrique, comme celle proposée par [LC03]. Cette dernière, développée dans le cadre de l'identification aveugle,

identifie la réponse impulsionnelle du système comme la solution d'un système d'équations polynomiales. Elle présente l'avantage d'une description exhaustive de l'espace de solutions et évite, ainsi, tout problème de convergence vers des minima locaux. En revanche, le système d'équations polynomiales en question est paramétré par les coefficients de corrélation de la sortie dont l'estimation nécessite une fenêtre temporelle assez longue.

### 3.2.2 Méthodes Déterministes

Dans ces dernières années, des méthodes déterministes ont aussi commencé à être développées. Leur avantage, en comparaison au méthodes stochastiques, est qu'elles ont la propriété de convergence avec un nombre fini d'échantillons. Même si ces méthodes ont été peu étudiées à cause de leur sensibilité aux bruits, elles peuvent être très efficaces si l'on se place dans un cadre théorique approprié.

C'est le cas, par exemple, de la technique proposée par [LXT93], où les auteurs considèrent l'identification aveugle d'un système avec une entrée et plusieurs sorties (SIMO- *Single Input Multiple Output*), chaque canal étant modélisé par une fonction de transfert polynomiale (RIF). La figure 3.1 illustre le système en question. Leur but était d'estimer tous les canaux du système.

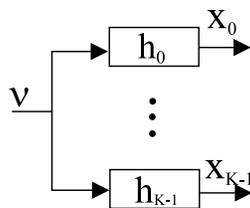


Figure 3.1: Système SIMO

Comme tous les canaux ont le même signal d'entrée, leur sorties sont corrélées comme montré ci-dessous:

$$h_j(n) \odot x_i(n) = h_j(n) \odot (h_i(n) \odot \nu(n)) = h_i(n) \odot (h_j(n) \odot \nu(n)) = h_i(n) \odot x_j(n) \quad (3.1)$$

où  $\odot$  désigne l'opération de convolution,  $h_i$  est la réponse impulsionnelle du  $i$ -ème canal,  $x_i$  est son signal de sortie et  $\nu$  est le signal d'entrée. L'équation (3.1) nous permet d'écrire un système d'équations linéaire ayant comme inconnus les coefficients des canaux. Premièrement, l'ordre des canaux a été supposé connu mais [LXT93, XLTK95] proposent une façon de l'estimer qui a une bonne performance. Quant aux conditions d'identifiabilité du système d'équations proposé, [LXT93, XLTK95] montrent que le problème a une solution unique si, et seulement si, les canaux  $h_i$  n'ont pas des racines en commun, ce qui revient à dire qu'ils

sont premiers entre eux, et le signal transmis a au moins  $2L + 1$  modes. Cette dernière condition signifie que le signal émis peut être écrit comme une combinaison linéaire de  $2L + 1$  exponentielles, où  $L$  est l'ordre maximale parmi tous les canaux.

Les méthodes de [LXT93, XLTK95] ont été généralisées au cas RII par plusieurs auteurs, notamment [VKTB98, VTK<sup>+</sup>99, BF99]. Comme pour le cas RIF, la connaissance de l'ordre du système, ou du moins une borne supérieure, est une condition nécessaire d'identifiabilité.

Dans le cas de l'identification des systèmes modélisés par des fonctions de transfert rationnelles, nous pouvons aussi citer l'approche d'identification *set-membership* [Del89] dans laquelle l'algorithme basé sur la borne ellipsoïdale optimale [GKNH98] est maintenant reconnu dans plusieurs applications. Cette approche consiste à utiliser des informations déterministes et instantanées du système pour calculer les estimations des paramètres. L'algorithme cité fournit des ellipsoïdes dans l'espace des paramètres et essaie, dans un certain sens, d'optimiser leur taille. Il faut aussi observer que cette méthode considère la perturbation (bruit) comme inconnue mais bornée par une valeur connue.

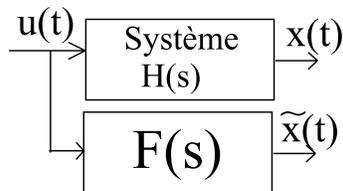
On peut aussi mentionner les méthodes de lissage par minimum carré, dont le principe est similaire à celui de l'approche par prédiction linéaire [TZ98].

C'est dans ce contexte des méthodes algébriques et déterministes pour les systèmes modélisés par des fonctions de transfert rationnelles que s'inscrit la nouvelle technique qui sera proposée dans ce chapitre. Une des principales différences de cette méthode par rapport aux autres citées ci-dessus est le fait de traiter le modèle du système en temps continu. Dans toutes les méthodes décrites, le modèle utilisé est discret. Comme nous le verrons ensuite, cette nouvelle approche nous permet de développer des techniques simples et robustes aux perturbations.

### 3.3 Nouvelle Méthode: Un Exemple Simple d'Identification de Système

Le système considéré est montré dans la figure 3.2. Notre but est d'identifier le système  $H(s)$ , modélisé comme une fonction de transfert rationnelle, en connaissant le signal de sortie,  $x(t)$  et le signal d'entrée,  $u(t)$ . On cherche donc à déterminer les paramètres du modèle  $F(s)$  de façon à identifier ou estimer  $H(s)$ . Cela signifie, d'un autre côté, avoir un signal  $\tilde{x}(t)$  proche de  $x(t)$  dans un sens qu'on précisera. Pour le moment nous n'allons pas considérer l'addition de bruit.

Le signal de sortie du système,  $x(t)$ , sans bruit, est donné par la convolution de  $u(t)$  avec

Figure 3.2: Modèle d'Identification d'un système  $H(s)$ 

la réponse impulsionnelle du système,  $h(t)$  :

$$x(t) = \int_0^t u(\tau)h(t - \tau)d\tau \quad (3.2)$$

Pour estimer le système, nous allons considérer une fonction de transfert rationnelle du type :

$$F(s) = \frac{b_0 + b_1s + \dots + b_Ms^M}{-a_0 - a_1s - \dots - a_{N-1}s^{N-1} + s^N} \quad (3.3)$$

où  $M$  est le degré du numérateur,  $N$  du dénominateur et  $a_N$  a été posée égale à un sans perte de généralité. En effet, cette restriction est nécessaire pour éviter la solution triviale.

Considérons donc un cas très simple, où  $M = N = 1$ , pour présenter les principes de base de la méthode proposée. Ainsi, le signal reçu satisfait l'équation différentielle :

$$\dot{x}(t) = a_0x(t) + b_0u(t) + b_1\dot{u}(t), \quad (3.4)$$

qui, dans le domaine opérationnel, donne :

$$s\hat{x} - x_0 = a_0\hat{x} + b_0\hat{u} + b_1(s\hat{u} - u_0) \quad (3.5)$$

où  $\hat{x}$  et  $\hat{u}$  sont les transformées de Laplace de  $x(t)$  et  $u(t)$  respectivement,  $a_0$ ,  $b_0$  et  $b_1$  sont les paramètres du système à identifier et où  $u_0$  et  $x_0$  sont les conditions initiales. Ces dernières étant inconnues, nous commençons par les éliminer. Pour cela, il suffit de dériver les deux membres de l'équation (3.5) par rapport à  $s$ , pour obtenir:

$$\hat{x} + s\hat{x}' = a_0\hat{x}' + b_0\hat{u}' + b_1(\hat{u} + s\hat{u}') \quad (3.6)$$

Pour déterminer les paramètres inconnus  $a_0$ ,  $b_0$  et  $b_1$ , dérivons (3.6) par rapport à la variable  $s$  successivement, de façon à générer un système d'équations avec un même nombre d'équations et d'inconnus [FMMSR03]. Le système d'équations résultant est :

$$(s\hat{x})^{(i)} = a_0\hat{x}^{(i)} + b_0\hat{u}^{(i)} + b_1(s\hat{u})^{(i)}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.7)$$

où l'exposant  $(i)$  indique la dérivation d'ordre  $i$  par rapport à  $s$ . Il faut noter que l'équation originale, correspondant à  $i = 0$ , ne fait pas partie du système dû à la présence des conditions initiales.

Comme il est déjà connu, à partir de la théorie de la transformée de Laplace, la multiplication par  $s$  signifie une dérivation par rapport à  $t$  dans le domaine temporel, ce qui n'est pas une opération numériquement robuste. C'est pourquoi nous allons diviser toutes les équations par un facteur  $s^\gamma$ , où  $\gamma$  est une constante supérieure à un pour avoir le système:

$$\frac{\hat{x}^{(i)}}{s^{\gamma-1}} + i \frac{\hat{x}^{(i-1)}}{s^\gamma} = a_0 \frac{\hat{x}^{(i)}}{s^\gamma} + b_0 \frac{\hat{u}^{(i)}}{s^\gamma} + b_1 \left( \frac{\hat{u}^{(i)}}{s^{\gamma-1}} + i \frac{\hat{u}^{(i-1)}}{s^\gamma} \right), \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.8)$$

Ainsi les dérivées sont éliminées et nous n'auront que des intégrales dans le domaine temporel, qui sont beaucoup plus robustes numériquement. Notre système sera donc composé des termes de la forme :

$$\widehat{U}_{ij} = \left( \frac{\hat{u}^{(i)}}{s^{\gamma-j}} \right) \quad \text{et} \quad \widehat{X}_{ij} = \left( \frac{\hat{x}^{(i)}}{s^{\gamma-j}} \right); \quad i = 0, 1, 2, 3; \quad j = 0, 1 \quad (3.9)$$

Les analogues temporels  $U_{ij}$  et  $X_{ij}$  de  $\widehat{U}_{ij}$  et  $\widehat{X}_{ij}$  peuvent être écrits comme (voir section 3.6.4) :

$$\begin{aligned} U_{ij}(t) &= \frac{(-1)^i}{(\gamma - j - 1)!} \int_0^t (t - \tau)^{\gamma-j-1} \tau^i u(\tau) d\tau \\ X_{ij}(t) &= \frac{(-1)^i}{(\gamma - j - 1)!} \int_0^t (t - \tau)^{\gamma-j-1} \tau^i x(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (3.10)$$

Enfin, en utilisant (3.9) et (3.10) dans (3.8), les estimations des coefficients de  $H(s)$  sont obtenues comme des fonctions du temps d'estimation  $t$ , en résolvant le système suivant :

$$\begin{aligned} X_{00} + X_{11} &= a_0 X_{10} + b_0 U_{10} + b_1 (U_{00} + U_{11}) \\ 2X_{10} + X_{21} &= a_0 X_{20} + b_0 U_{20} + b_1 (2U_{10} + U_{21}) \\ 3X_{20} + X_{31} &= a_0 X_{30} + b_0 U_{30} + b_1 (3U_{20} + U_{31}) \end{aligned} \quad (3.11)$$

où, pour simplifier la notation, nous avons omis la dépendance temporelle.

Prenons un exemple simple de simulation où le système est représenté par la fonction de transfert:

$$H(s) = \frac{s + 0.5}{s + 2}$$

Nous devons donc résoudre le système donné par (3.11), en calculant les intégrales définies en (3.10). Avec un signal d'entrée  $u(t)$  représenté sur la figure 3.3, la figure 3.4 montre

l'identification de chacun des 3 paramètres du système,  $a_0$ ,  $b_0$  et  $b_1$  en fonction du temps d'estimation.

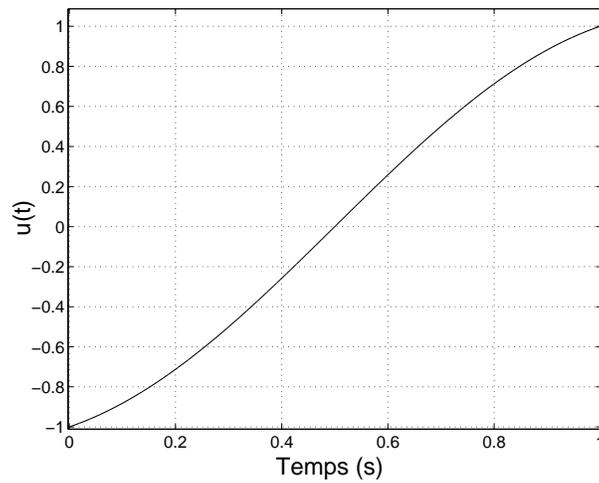


Figure 3.3: Signal d'entrée  $u(t)$

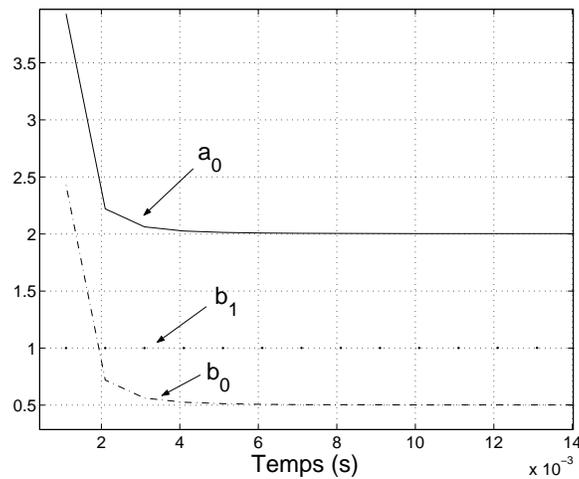


Figure 3.4: Évolution des paramètres par rapport au temps d'estimation  $t$

Nous avons considéré une période symbole égale à  $1s$ . La figure 3.4 montre que, pour  $t = 5 \times 10^{-3} s$ , les paramètres ont déjà atteint leurs valeurs correctes, c'est-à-dire, ils sont égaux à ceux de  $H(s)$ . Ainsi, un intervalle d'intégration très court pour le calcul de (3.10) suffit déjà pour avoir une très bonne estimation. Cela est très intéressant pour deux raisons. En premier, parce que le signal  $u(t)$  devra être connu pendant un intervalle de temps aussi très court. Ainsi, même si la méthode n'est pas aveugle, nous pouvons la classifier comme étant semi-aveugle. En deuxième, la méthode sera très rapide et pourra être implémentée en temps réel.

### 3.4 Généralisation de la Méthode d'Identification de Système

Maintenant nous allons étendre le développement commencé dans la section 3.3, pour un cas général, c'est-à-dire, avec  $M$  et  $N$  quelconques. L'estimation de la fonction de transfert de  $H(s)$  va continuer à être faite en utilisant  $F(s)$ , définie en (3.3) et  $u(t)$ , connu pendant un court intervalle de temps.

L'équation (3.5) peut être facilement généralisée donnant :

$$\begin{aligned} s^N \hat{x} - \left( s^{N-1} x_0 + s^{N-2} \dot{x}_0 + s^{N-3} \ddot{x}_0 + \dots + x_0^{(N-1)} \right) \\ = a_0 \hat{x} + \dots + a_{N-1} (s^{N-1} \hat{x} - s^{(N-2)} x_0 - \dots - x_0^{(N-2)}) \\ + b_0 \hat{u} + \dots + b_M (s^M \hat{u} - s^{(M-1)} u_0 - \dots - u_0^{(M-1)}) \end{aligned} \quad (3.12)$$

Dans ce cas, le nombre de dérivées nécessaires pour éliminer la dépendance des conditions initiales est égal au maximum entre  $M$  et  $N$ . Supposons que  $H(s)$  soit propre, c'est-à-dire,  $M \leq N$ . Dans ce cas,  $N$  dérivées sont suffisantes. Comme nous avons maintenant  $N + M + 1$  paramètres inconnus, il faut dériver (3.12)  $2N + M$  fois. Le système d'équations désiré est obtenu en prenant les dérivées d'ordre  $N$  jusqu'à  $(2N + M)$ . De façon générale, ces équations sont données par :

$$(s^N \hat{x})^{(i)} = a_0 \hat{x}^{(i)} + \dots + a_{N-1} (s^{N-1} \hat{x})^{(i)} + b_0 \hat{u}^{(i)} + \dots + b_M (s^M \hat{u})^{(i)} \quad (3.13)$$

où  $i = N, \dots, 2N + M$ .

Pour n'avoir que des intégrales dans le domaine temporel, il suffit de diviser toutes les équations par  $s^\gamma$ . Comme le système inconnu  $H(s)$  est propre, il suffit que  $\gamma > N$ . L'équation (3.13) dévient alors :

$$\frac{(s^N \hat{x})^{(i)}}{s^\gamma} = \frac{a_0 \hat{x}^{(i)}}{s^\gamma} + \dots + \frac{a_{N-1} (s^{N-1} \hat{x})^{(i)}}{s^\gamma} + \frac{b_0 \hat{u}^{(i)}}{s^\gamma} + \dots + \frac{b_M (s^M \hat{u})^{(i)}}{s^\gamma} \quad (3.14)$$

où  $i = N, \dots, 2N + M$ .

Il est plus simple de voir le système dont les équations sont données par (3.14), sous la forme matricielle. Dans ce sens, regardons premièrement les termes  $\frac{(s^j \hat{u})^{(i)}}{s^\gamma}$  et  $\frac{(s^j \hat{x})^{(i)}}{s^\gamma}$ . En

posant

$$\begin{aligned} C_n^k &= \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} \\ A_n^k &= \frac{n!}{(n-k)!} \end{aligned} \quad (3.15)$$

on obtient, en appliquant la formule de Leibniz :

$$\begin{aligned} (s^j \hat{u})^{(n)} &= \sum_{k=0}^{\min(n,j)} C_n^k A_j^k s^{j-k} \hat{u}^{(n-k)} \\ (s^j \hat{x})^{(n)} &= \sum_{k=0}^{\min(n,j)} C_n^k A_j^k s^{j-k} \hat{x}^{(n-k)} \end{aligned}$$

La division par  $s^\gamma$  nous donne :

$$\begin{aligned} \frac{(s^j \hat{u})^{(n)}}{s^\gamma} &= \sum_{k=0}^{\min(n,j)} C_n^k A_j^k \frac{\hat{u}^{(n-k)}}{s^{\gamma-j+k}} \\ \frac{(s^j \hat{x})^{(n)}}{s^\gamma} &= \sum_{k=0}^{\min(n,j)} C_n^k A_j^k \frac{\hat{x}^{(n-k)}}{s^{\gamma-j+k}} \end{aligned} \quad (3.16)$$

En utilisant la notation définie par (3.9), qui, dans le domaine temporel, correspond à (3.10), les termes en  $\hat{x}$  de (3.16) peuvent être écrits sous la forme vectorielle :

$$p_{ij} = \frac{(s^j \hat{x})^{(i)}}{s^\gamma} = [C_i^0 \ C_i^1 A_j^1 \ \dots \ C_i^k A_j^k] \begin{bmatrix} X_{ij} \\ X_{i-1,j-1} \\ \vdots \\ X_{i-k,j-k} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} i = 0, \dots, (N+M) \\ j = 0, \dots, N-1 \\ k = \min(i, j) \end{array} \quad (3.17)$$

Le même résultat sera obtenu pour les termes en  $\hat{u}$ . En regardant (3.14), nous observons que ceux-ci apparaîtront à partir de la N-ème colonne de la matrice des coefficients du système, ce qui nous permet d'écrire :

$$p_{i,j+N} = \frac{(s^j \hat{u})^{(i)}}{s^\gamma} = [C_i^0 \ C_i^1 A_j^1 \ \dots \ C_i^k A_j^k] \begin{bmatrix} U_{ij} \\ U_{i-1,j-1} \\ \vdots \\ U_{i-k,j-k} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} i = 0, \dots, (N+M) \\ j = 0, \dots, M \\ k = \min(i, j) \end{array} \quad (3.18)$$

Le membre gauche de (3.14) peut être écrit comme :

$$q_i = \frac{(s^N \hat{x})^{(i)}}{s^\gamma} = [C_i^0 \ C_i^1 A_N^1 \dots C_i^k A_N^k] \begin{bmatrix} X_{i,N} \\ X_{i-1,N-1} \\ \vdots \\ X_{i-k,N-k} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} i = 0, \dots, (N+M) \\ k = \min(i, N) \end{array} \quad (3.19)$$

Ainsi, (3.14) devient :

$$\mathcal{Q} = \mathcal{P} \begin{bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{N-1} \\ b_0 \\ \vdots \\ b_M \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

où  $\mathcal{Q}^T = [q_0 \ q_1 \ \dots \ q_{N+M}]$ , avec  $q_i$  donnés par (3.19) et

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} p_{0,0} & p_{0,1} & \dots & p_{0,N-1} & p_{0,N} & \dots & p_{0,N+M} \\ p_{1,0} & p_{1,1} & \dots & p_{1,N-1} & p_{1,N} & \dots & p_{1,N+M} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \underbrace{p_{N+M,0} \ p_{N+M,1} \ \dots \ p_{N+M,N-1}}_{\text{termes en } \hat{x}} & \underbrace{p_{M+N,N} \ \dots \ p_{N+M,N+M}}_{\text{termes en } \hat{u}} \end{bmatrix}$$

où  $p_{ij}$  est donné par (3.17) et (3.18).

Finalement, les coefficients de  $H(s)$  sont identifiés à partir de la solution de (3.20)

## 3.5 La Méthode dans le Domaine Temporel

La méthode développée jusqu'ici est basée sur l'application récursive de l'opérateur dérivation  $[\frac{d}{ds}]$  à l'équation du signal de sortie du canal en fonction du signal d'entrée. De cette façon, nous pouvons générer un système d'équations qui nous permet d'estimer les coefficients de la fonction de transfert du canal. L'application de cet opérateur équivaut, dans le domaine temporel, à la multiplication, aussi récursive, des signaux par  $-t$ . Nous pouvons donc voir le système ainsi généré comme étant le résultat de l'application des éléments de la base formée par des polynômes en  $t$ ,  $[1, -t, t^2, -t^3, \dots]$ , à l'équation (3.12).

En réalité, on peut reprendre tous les développements de la section 3.4, en restant dans

le domaine temporel. C'est ce que nous ferons ici pour bien introduire notre propos. Considérons donc le système (3.12) dans le domaine temporel :

$$x^{(N)}(t) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k x^{(k)}(t) + \sum_{j=0}^M b_j u^{(j)}(t), \quad N \geq M \quad (3.21)$$

La première étape, qui consistait à éliminer les conditions initiales de (3.12) revient ici à multiplier (3.21) par  $(-t)^N$ . Ensuite, dérivations successives par rapport à  $s$  ont permis de générer le système d'équations linéaires (3.13). Encore une fois, ceci se traduit ici par la multiplication successive par  $(-t)$ . Ainsi, le système (3.13) est équivalent à

$$(-t)^i x^{(N)}(t) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k (-t)^i x^{(k)}(t) + \sum_{j=0}^M b_j (-t)^i u^{(j)}(t) \quad i = N, \dots, 2N + M \quad (3.22)$$

Enfin, la division par  $s^\gamma$  revient à intégrer (3.22) itérativement jusqu'à l'ordre  $\gamma$ :

$$\begin{aligned} \frac{(-1)^i}{(\gamma-1)!} \int_0^t (t-\tau)^{\gamma-1} \tau^i x^{(N)}(\tau) d\tau &= \sum_{k=0}^{N-1} a_k \frac{(-1)^i}{(\gamma-1)!} \int_0^t (t-\tau)^{\gamma-1} \tau^i x^{(k)}(\tau) d\tau \\ &+ \sum_{j=0}^M b_j \frac{(-1)^i}{(\gamma-1)!} \int_0^t (t-\tau)^{\gamma-1} \tau^i u^{(j)}(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (3.23)$$

où  $i = N, \dots, 2N + M$ .

Les coefficients de ce système sont de la forme  $\int_0^t (t-\tau)^\alpha \tau^{i+N} y^{(n)}(\tau) d\tau$  où  $y$  est le signal  $x(t)$  ou  $u(t)$ ,  $i = 0, \dots, N + M$  et  $n \leq N$ . Notons qu'une simple intégration par parties permet d'exprimer tous ces termes sans faire intervenir les dérivées. En effet, en posant  $f_i(\tau; t) = (t-\tau)^\alpha \tau^{i+N}$ , on obtient

$$\int_0^t (t-\tau)^\alpha \tau^{i+N} y^{(n)}(\tau) d\tau = \int_0^t f_i(\tau; t) y^{(n)}(\tau) d\tau = (-1)^n \int_0^t \frac{d^n}{d\tau^n} f_i(\tau; t) y(\tau) d\tau \quad (3.24)$$

lorsque  $\alpha \geq n$ , car, dans ce cas,  $f_i^{(m)}(t; t) = f_i^{(m)}(0; t) = 0$  pour  $m = 0, \dots, N$ .

On voit donc qu'on peut généraliser la méthode en considérant, dans la phase de génération du système d'équations, une multiplication par des éléments d'une famille de fonctions  $\{\varphi_i(t)\}_{i \geq 0}$  à la place des monômes  $(-t)^i$ . Il faudrait pour cela que cette famille de fonctions soit telle que les fonctions

$$f_i(\tau; t) = (t-\tau)^\alpha \varphi_i(\tau) \quad (3.25)$$

satisfassent

$$\left. \frac{d^m}{d\tau^m} f_i(\tau; t) \right|_{\tau=t} = \left. \frac{d^m}{d\tau^m} f_i(\tau; t) \right|_{\tau=0} = 0, \quad m = 0, \dots, N \quad (3.26)$$

Nous verrons dans la section 3.8.2 que cette flexibilité peut être très utile, principalement pour améliorer le conditionnement du système.

## 3.6 Base Algébrique pour l'Identification Linéaire

La méthode présentée dans la section 3.4 est fondée sur une nouvelle théorie d'estimation qui repose sur les corps différentiels, la théorie des anneaux et le calcul opérationnel de Mikusiński, comme nous verrons ensuite. Ces définitions peuvent aussi être trouvées dans [FMMSR03, FSR03, FMNSR04].

Dans ce qui suit, nous allons utiliser les notations usuelles:  $\mathbb{N}$  pour l'ensemble des nombres naturelles,  $\mathbb{Z}$  pour les entiers,  $\mathbb{R}$  pour les réels et  $\mathbb{C}$  pour les complexes. Plus de détails peuvent être trouvés dans [AM69, Tau99].

### 3.6.1 Définitions de Base, Algèbre

Un anneau  $\mathcal{A}$  est un ensemble muni de deux opérations: l'addition et la multiplication, qui sont des lois de composition internes sur  $\mathcal{A}$ . Il satisfait les conditions suivantes:

1.  $\mathcal{A}$  a un élément neutre par rapport à l'addition, appelé élément nul et noté  $0$  ( $x + 0 = 0 + x = x$ ,  $\forall x \in \mathcal{A}$ ) et tout  $x \in \mathcal{A}$  admet une inverse, noté  $-x$ , appartenant à  $\mathcal{A}$  ( $x + (-x) = 0$ ).
2. La multiplication est associative ( $(xy)z = x(yz)$ ) et distributive par rapport à l'addition ( $x(y + z) = xy + xz$ ,  $(y + z)x = yx + zx$ ).

Par exemple,  $\mathbb{Z}$  est l'anneau des entiers.

Dans la suite, nous allons considérer des anneaux qui sont commutatifs:  $xy = yx$  pour tous  $x, y \in \mathcal{A}$  et qui ont l'élément identité, noté  $1_A$ :  $\exists 1_A \in \mathcal{A}$  de façon que  $x1_A = 1_Ax = x$  pour tout  $x \in \mathcal{A}$ . L'élément identité est, alors, unique. Quand il n'y a pas d'ambiguïté, nous laisserons tomber l'indice  $A$ .

Un *morphisme* d'anneau de  $\mathcal{A}$  dans  $\mathcal{B}$  est une application  $f$  de  $\mathcal{A}$  dans  $\mathcal{B}$  vérifiant, pour tous  $x, y \in \mathcal{A}$ , les propriétés suivantes:

1.  $f(x + y) = f(x) + f(y)$
2.  $f(xy) = f(x)f(y)$

$$3. f(1_A) = 1_B$$

Soit  $x \in \mathcal{A}$ . Si  $\exists y \in \mathcal{A}/xy = yx = 1_A$  alors on dit que  $x$  est inversible et  $y$  est l'inverse de  $x$ .

**Définition 3.6.1.** Deux éléments  $a$  et  $b$  d'un anneau commutatif  $\mathcal{A}$  sont dits diviseurs de zéro dans  $\mathcal{A}$  si  $a \neq 0$ ,  $b \neq 0$  et  $ab = 0$ . Un anneau intègre est un anneau commutatif non trivial sans diviseurs de zéro.

Un sous-ensemble  $V$  d'un anneau  $\mathcal{A}$  est appelée idéal à gauche (resp. à droite) de  $\mathcal{A}$  s'il satisfait:

- $V$  est un sous-groupe additif de  $\mathcal{A}$
- pour tout  $(a, v) \in \mathcal{A} \times V$ , on a  $av \in V$  (resp.  $va \in V$ )

Un idéal bilatère de  $\mathcal{A}$ , ou simplement un idéal de  $\mathcal{A}$ , est un sous-ensemble de  $\mathcal{A}$  qui est à la fois un idéal à gauche et un idéal à droite de  $\mathcal{A}$ . Par exemple, les idéaux de  $\mathbb{Z}$  sont les  $n\mathbb{Z}$ , avec  $n \in \mathbb{N}$ .

On appelle corps un anneau dans lequel tout élément non nul est inversible. Par exemple, l'ensemble des entiers  $\mathbb{Z}$  n'est pas un corps mais il est contenu dans le corps des nombres rationnels  $\mathbb{Q}$ . Les réels  $\mathbb{R}$  et les complexes  $\mathbb{C}$  forment aussi des corps.

**Définition 3.6.2.** On définit la caractéristique d'un corps  $\mathcal{C}$  comme l'ordre (additif) de son unité 1. Un corps  $\mathcal{C}$  a une caractéristique finie  $n$  si  $n$  est le plus petit entier positif tel que  $n.1 = 0$ . Si  $n.1 \neq 0$  pour tous  $n > 0$ , alors  $\mathcal{C}$  a une caractéristique 0.

### 3.6.2 Définitions de Base, Algèbre Différentielle

Un anneau différentiel (ordinaire)  $R$  est un anneau commutatif muni d'une dérivation  $d/ds$ , i.e., une application  $R \rightarrow R$  telle que,  $\forall x, y \in R$ ,

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}(x + y) &= \frac{dx}{ds} + \frac{dy}{ds} \\ \frac{d}{ds}(xy) &= \frac{dx}{ds}y + x\frac{dy}{ds} \end{aligned}$$

Un corps différentiel (ordinaire) est un anneau différentiel qui est aussi un corps. Tous les corps sont supposés de caractéristique 0, vu que, jusqu'à aujourd'hui, aucune équation différentielle avec caractéristique différente de zéro est apparue en physique.

Une constante  $c$  est un élément de  $R$  tel que  $\frac{dc}{ds} = 0$ . Un anneau (resp. corps) de constantes est un anneau (resp. corps) différentiel ne contenant que des constantes. Par exemple, soit  $k$

un corps différentiel de constantes. Le corps  $k(s)$  des fonctions rationnelles en la variable  $s$ , à coefficients dans  $k$ , possède bien une structure de corps différentiel par rapport à la dérivation  $\frac{d}{ds}$ .  $k$  est son sous corps des constantes.

Un *morphisme différentiel*  $\phi : R_1 \rightarrow R_2$  entre deux anneaux différentiels est un morphisme d'anneaux tel que,  $\forall x \in R_1$ ,  $\frac{d}{ds}(\phi(x)) = \phi\left(\frac{dx}{ds}\right)$ . Une *spécialisation différentielle*  $R \rightarrow K$  est un morphisme différentiel où  $R$  est un anneau différentiel et  $K$  un corps différentiel.

Une *extension de corps différentiel*  $L/K$  est la donnée de deux corps différentiels  $K, L$  tels que :

- $K \subseteq L$ ,
- la restriction à  $K$  de la dérivation de  $L$  est la dérivation de  $K$

Un élément  $x \in L$  est dit *différentiellement algébrique* sur  $K$  si, et seulement si,  $x$  satisfait une équation différentielle algébrique sur  $K$ , i.e.,  $P(x, \frac{dx}{ds}, \dots, \frac{d^n x}{ds^n}) = 0$ , où  $P$  est un polynôme à coefficients dans  $K$ . L'extension  $L/K$  est dite *différentiellement algébrique* si, et seulement si, chaque élément de  $L$  est différentiellement algébrique sur  $K$ .

Un élément de  $L$  qui n'est pas différentiellement algébrique sur  $K$  est dit *différentiellement transcendant*, c'est-à-dire, il ne satisfait aucune équation différentielle algébrique à coefficients dans  $K$ . Une extension différentiellement transcendante est une extension  $L/K$  qui n'est pas différentiellement algébrique.

Une famille  $\{\varpi_i; i \in I\}$  de  $L$ , où  $I$  est une famille d'indices, est dite *différentiellement  $K$ -algébriquement dépendante* si, et seulement si, la famille  $\{\varpi_i^{(j)}; i \in I, j \in \mathbb{N}\}$  est  $K$ -algébriquement dépendante. Dans le cas contraire, elle est *différentiellement  $K$ -algébriquement indépendante*, c'est-à-dire, les  $\varpi_i$  ne satisfont aucune équation différentielle algébrique à coefficients sur  $K$ .

Une telle famille, lorsqu'elle est maximale par rapport à l'inclusion, est appelée *base de transcendance différentielle* de  $L/K$ . Deux bases ont la même cardinalité, appelé le *degré de transcendance différentielle* de  $L/K$ . Ainsi, par exemple, l'extension  $L/K$  est différentiellement algébrique si, et seulement si, le degré de transcendance est égal à zéro.

**Notation 3.6.1.** Soit  $S$  un sous ensemble de  $L$ . Le sur-corps différentiel (resp. sur-anneau) de  $K$  généré par  $S$  est noté  $K \langle S \rangle$  (resp.  $K\{S\}$ ).

### 3.6.3 Opérateurs Différentiels Linéaires

Soit  $K$  un corps différentiel. L'anneau  $K\left[\frac{d}{ds}\right]$  des opérateurs différentiels linéaires de la forme  $\sum_{\text{finie}} a_\alpha \frac{d^\alpha}{ds^\alpha}$ ,  $a_\alpha \in K$ , est commutatif si, et seulement si,  $K$  est un corps de constantes. Par exemple, si  $a \in K$ , alors  $\frac{d}{ds}a = \frac{da}{ds} + a \frac{d}{ds}$ .

### 3.6.4 Corps Différentiel d'Opérateurs de Mikusiński

Munissons l'ensemble  $\mathcal{C}$  des fonctions continues  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$  d'une structure d'anneau commutatif par rapport à l'addition et au produit, qui sera donné par l'opération de convolution :

$$\begin{aligned}(f + g)(t) &= f(t) + g(t) \\ (f \star g)(t) &= (g \star f)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau = \int_0^t g(\tau)f(t - \tau)d\tau\end{aligned}$$

L'addition et la convolution sont les opérations fondamentales du calcul opérationnel, de la même façon que l'addition et la multiplication sont les opérations fondamentales en arithmétique. Au lieu de travailler avec des nombres, maintenant nous allons travailler avec des fonctions qui appartiennent à l'ensemble  $\mathcal{C}$ . Notez que, tout comme l'opération de multiplication, l'opération de convolution satisfait les propriétés commutative, associative et distributive [Mik83, MB83, Yos84]. Dans la suite, nous noterons la convolution entre deux éléments de  $\mathcal{C}$ ,  $f$  et  $g$ , par  $fg$  au lieu de  $f \star g$ .

Une autre propriété des convolutions est énoncée dans le théorème ci-dessous, formulé par E. Tichmarsh :

**Théorème 3.6.1.** *La convolution entre deux fonctions  $f, g \in \mathcal{C}$  sera nulle si, et seulement si,  $f = 0$  ou  $g = 0$ .*

Ce théorème nous garanti que  $\mathcal{C}$  est un domaine d'intégrité, c'est-à-dire, il n'a pas des diviseurs de zéro : si  $x \neq 0 \in \mathcal{C}$ , il n'existe pas  $y \neq 0 \in \mathcal{C}$  tel que  $xy = 0$ .

Nous pouvons aussi introduire des fractions dans le calcul opérationnel :  $f/g, f, g \in \mathcal{C}$ . Cependant, comme  $f$  et  $g$  sont des fonctions et  $fg$  est leur convolution,  $f/g$  ne sera pas regardée comme une division ordinaire mais comme l'opération inverse de la convolution. Ainsi,  $f/g$  sera la fonction  $h$  tel que  $f = gh$ . Notez que l'unicité de  $h$  est garantie par le théorème de Tichmarsh 3.6.1.

Toutefois, il se peut que, pour  $f$  et  $g \neq 0 \in \mathcal{C}$ , il n'existe pas une fonction  $h$  qui satisfait  $f = gh$ . Nous pouvons, alors, définir un nouveau concept : celui des *opérateurs*. Si il n'existe pas  $h$  tel que  $f = gh$ ,  $f/g$  sera un opérateur. Nous admettons aussi des opérateurs  $f/g$  pour lesquels  $h$  existe. Ainsi, les opérateurs peuvent être vus comme une généralisation du concept de fonction. Toute fonction  $h \in \mathcal{C}$  est un opérateur mais la réciproque n'est pas vraie.

Les quotients de  $\mathcal{C}$ , comme  $f/g$ , forment le *corps de Mikusiński*, appelé  $\mathcal{M}$ . Chaque élément de  $\mathcal{M}$  est, donc, un opérateur. Toute fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  peut aussi s'écrire comme  $\{f\}$ , en tant qu'élément de  $\mathcal{M}$ .

Donnons quelques exemples :

1. L'élément neutre  $1 \in \mathcal{M}$  pour le produit (de convolution) est la distribution de Dirac.
2. Toute fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  localement Lebesgue-intégrable, à support borné à gauche, appartient à  $\mathcal{M}$ .
3. L'opérateur retard  $e^{-Ls}$ ,  $L \in \mathbb{R}$ , est l'analogie de la distribution de Dirac à  $t = L$ .

La fonction échelon unité (Heaviside)

$$l(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases} \quad (3.27)$$

définit l'opérateur d'intégration  $l$ . Ainsi,  $l\{f\} = \int_0^t f(\tau) d\tau$ . Le calcul des puissances successives de  $l$  est directe :

$$l^2 = \left\{ \frac{t}{1} \right\}, \quad l^3 = \left\{ \frac{t^2}{1.2} \right\}, \quad l^n = \left\{ \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \right\} \quad (3.28)$$

Ainsi,  $l^n\{f\}$  peut être interprété de deux façons : comme la fonction obtenue par l'intégration de  $\{f\}$   $n$  fois ou par la convolution de  $\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$  et  $\{f\}$ , ce qui nous donne :

$$\int_0^t dt_{n-1} \int_0^{t_{n-1}} \dots \int_0^{t_1} f(\tau) d\tau = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} f(\tau) d\tau \quad (3.29)$$

L'inverse de  $l$  dans  $\mathcal{M}$  est l'opérateur de dérivation  $s$ , c'est-à-dire,  $s = \frac{1}{l}$ . Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction de  $\mathcal{C}$  à support borné à gauche. Alors,  $s\{f\} = \{f'\} + f(0)$ . La somme de la valeur initiale est nécessaire pour que l'opération soit vraiment l'inverse de l'intégration. Soit  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  localement Lebesgue-intégrable, à support borné à gauche. Alors la fonction  $\frac{\{g\}}{s} = \left\{ \int_{-\infty}^t g(\lambda) d\lambda \right\}$  est aussi à support borné à gauche et nous pouvons définir le sous-corps  $\mathbb{C}(s) \subset \mathcal{M}$  des fonctions rationnelles sur  $\mathbb{C}$  dans la variable  $s$  (généralisé par l'application de l'opérateur d'intégration).

## La Dérivée Algébrique

Nous pouvons aussi définir l'opérateur  $\frac{d}{ds}$  de façon que, pour toute fonction  $f \in \mathcal{C}$ ,  $f \mapsto \frac{d}{ds} = \{-tf\}$ , c'est-à-dire, l'opération consiste à multiplier les valeurs de  $\{f\}$  par  $-t$ . L'intérêt de ce nouveau opérateur vient du fait qu'il satisfait les propriétés de dérivation, *i.e.*,

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}(f + g) &= \frac{df}{ds} + \frac{dg}{ds} \\ \frac{d}{ds}(fg) &= \frac{df}{ds}g + f\frac{dg}{ds} \end{aligned}$$

Il peut donc être étendu de façon triviale à une dérivation, appelée *dérivation algébrique* de  $\mathcal{M}$ , en posant, pour  $g \neq 0$ ,

$$\frac{d}{ds}(\{f\}\{g\}^{-1}) = \frac{\frac{df}{ds}g - f\frac{dg}{ds}}{\{g\}^2}$$

L'application récursive de l'opérateur  $n$  fois correspond donc à multiplier les valeurs de  $f$  par  $(-t)^n$ . En l'utilisant avec l'opérateur d'intégration et (3.29), nous obtenons (3.10).

Muni de cette dérivation algébrique,  $\mathcal{M}$  dévient un corps différentiel dont le sous-corps des constantes est  $\mathbb{C}$ .

### 3.6.5 Identifiabilité

Soit  $k_0$  un corps de base, considéré comme un corps différentiel de constantes. Soit  $k$  une extension algébrique finie de  $k_0(\Theta)$ , où  $\Theta = (\theta_1, \dots, \theta_r)$  est un ensemble fini de paramètres inconnus. Le degré de transcendance de l'extension  $k/k_0$  est donc au plus égal à  $r$ . De plus, nous munissons  $k$  d'une structure canonique de corps différentiel de constantes. Soit  $K/k(s)$  une extension différentiellement algébrique finiment engendrée. Un *signal* est un élément de  $K$ . Considérons un ensemble fini  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k)$  de signaux. Les paramètres  $\Theta$  sont dits [DF91b, DF91a, FSR03]

- *algébriquement* (resp. *rationnellement*) *identifiables* par rapport à  $\mathbf{x}$  si, et seulement si,  $\theta_1, \dots, \theta_r$  sont algébriques sur (resp. appartiennent à)  $k_0 \langle s, \mathbf{x} \rangle$
- *linéairement identifiables* par rapport à  $\mathbf{x}$  si, et seulement si,

$$\mathcal{P} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_r \end{pmatrix} = \mathcal{Q} \tag{3.30}$$

où

- $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{Q}$  sont, respectivement, des matrices  $r \times r$  et  $r \times 1$ ,
- les coefficients de  $\mathcal{P}$  et de  $\mathcal{Q}$  appartiennent à  $\text{span}_{k_0(s)[\frac{d}{ds}]}(1, \mathbf{x})$ , c'est-à-dire, ils sont des combinaisons linéaires de 1 et  $\mathbf{x}$  dont les coefficients sont des opérateurs différentiels linéaires sur  $k_0$ . Chacun de ces éléments est ainsi de la forme:  $f(s) + \sum g_i(s) \frac{d^i}{ds^i} x$ , où  $f(s)$  et  $g_i(s)$  sont des fractions rationnelles en  $s$  à coefficients dans  $k_0$
- $\det(\mathcal{P}) \neq 0$

- *projectivement linéairement identifiables* par rapport à  $\mathbf{x}$  si, et seulement si, il existe  $\theta_\epsilon \neq 0$  tel que  $\frac{\theta_1}{\theta_\epsilon}, \dots, \frac{\theta_{\epsilon-1}}{\theta_\epsilon}, \frac{\theta_{\epsilon+1}}{\theta_\epsilon}, \dots, \frac{\theta_r}{\theta_\epsilon}$  soient linéairement identifiables.
- *faiblement linéairement identifiables* par rapport à  $\mathbf{x}$  si, et seulement si, il existe un ensemble fini  $\Theta' = (\theta'_1, \dots, \theta'_q)$  tel que
  - les composantes de  $\Theta'$  (resp.  $\Theta$ ) soient algébriques sur  $k_0(\Theta)$  (resp.  $k_0(\Theta')$ )
  - $\Theta'$  soit linéairement identifiable

Le résultat qui suit est clair :

**Proposition 3.6.1.** *L'identifiabilité linéaire (resp. rationnelle) implique l'identifiabilité rationnelle (resp. algébrique). L'identifiabilité linéaire (resp. linéaire faible) implique l'identifiabilité linéaire faible (resp. algébrique)*

### Signaux Rationnels

Un *signal rationnel* est un élément de  $k(s)$ . Avec  $k_0 = \mathbb{Q}$  et  $k = k_0(a_0, \dots, a_{n-1}, b_0, \dots, b_{n-1})$ , nous avons

**Proposition 3.6.2.** *Supposons que la fraction rationnelle*

$$x = \frac{b_0 + b_1s + \dots + b_{n-1}s^{n-1}}{a_0 + a_1s + \dots + a_{n-1}s^{n-1} + s^n} \quad (3.31)$$

*soit irréductible. Alors, les coefficients  $a_0, \dots, a_{n-1}, b_0, \dots, b_{n-1}$  sont linéairement identifiables par rapport à  $x$*

*Preuve :* Le système linéaire suivant découle immédiatement de (3.30) :

$$\frac{d^i}{ds^i} [b_0 + \dots + b_{n-1}s^{n-1} - (a_0 + \dots + a_{n-1}s^{n-1})x] = \frac{d^i(s^n x)}{ds^i} \quad i = 0, 1, \dots, 2n-1 \quad (3.32)$$

Notez que ce cas est équivalent au système obtenu en (3.20). Cependant, si la contrainte  $a_n = 1$  n'avait pas été posée, le système serait projectivement linéairement identifiable.

### Signaux Différentiels Rationnels

Un signal  $x$  est dit *différentiellement rationnel* si, et seulement si, il existe un opérateur différentiel linéaire  $L$  (i.e.  $L \in k(s) \left[ \frac{d}{ds} \right]$ ) et un signal rationnel  $p$  (i.e.  $p \in k(s)$ ), tels que  $L(x) = p$ . Posons

$$\left( \sum_{finie} a_{\alpha\beta} s^\alpha \frac{d^\beta}{ds^\beta} \right) x = \sum_{finie} b_\gamma s^\gamma$$

$k_0 = \mathbb{Q}$ ,  $k = k_0(a_{\alpha\beta}, b_\gamma)$ . Le résultat suivant est une généralisation directe de la proposition 3.6.2.

**Proposition 3.6.3.** *Supposons que les polynômes  $\sum_\alpha a_{\alpha\beta} s^\alpha$  et  $\sum_\gamma b_\gamma s^\gamma$  apparaissant dans l'équation (3.32) soient irréductibles. Alors, les coefficients  $a_{\alpha\beta}$  et  $b_\gamma$  sont projectivement linéairement identifiables par rapport à  $x$ .*

### 3.6.6 Perturbations Structurées et Estimateurs Linéaires

#### Perturbation

Soit  $k_1/k_0$  une extension différentielle telle que

- $k_1$  est un corps différentiel de constantes,
- $k$  et  $k_1$  sont linéairement disjoints sur  $k_0$

Une *perturbation*  $\eta$  est un élément d'un sous-corps différentiel  $N$  de  $k_1(s)$  tel que  $K$  et  $N$  (*i.e.* le corps des signaux et celui des perturbations respectivement) soient linéairement disjoints sur  $k_0(s)$ . Elle est dite structurée si, et seulement si, elle est annihilée par un élément  $\Pi \in k_0(s) \left[ \frac{d}{ds} \right]$ ,  $\Pi \neq 0$ .

Par exemple, considérons la perturbation  $\frac{\vartheta}{s^\gamma}$ ,  $\vartheta \in \mathbb{R}$ . Elle est structurée, vu que pour  $\Pi = \gamma s^{\gamma-1} + s^\gamma \frac{d}{ds} \in k_0(s) \left[ \frac{d}{ds} \right]$ , on a  $\Pi \frac{\vartheta}{s^\gamma} = 0$  pour tout  $\vartheta$  réel.

#### Signaux Bruités

Un signal avec du bruit additif est la somme  $x + \eta$ , où  $x \in K$  est un signal et  $\eta \in N$ , un bruit. Soit  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_\kappa)$ , où  $y_i = x_i + \eta_i$ , une collection finie de signaux bruités, dépendant des paramètres  $\Theta$ . Si les paramètres  $\Theta$  sont linéairement identifiables, alors le système d'équations (3.30) devient

$$(\mathcal{P} + \mathcal{P}') \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_r \end{pmatrix} = \mathcal{Q} + \mathcal{Q}' \quad (3.33)$$

où

- les matrices  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{Q}$  sont obtenues à partir de (3.30) en remplaçant  $x$  par  $y$
- les coefficients des matrices  $\mathcal{P}'$  et  $\mathcal{Q}'$  appartiennent à  $\text{span}_{k'(s) \left[ \frac{d}{ds} \right]}(\boldsymbol{\eta})$ , où  $k'$  est le corps quotient de  $k \otimes_{k_0} k_1$  et où  $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_\kappa)$ .

### Estimateurs Linéaires

Supposons que les composantes de  $\boldsymbol{\eta}$  soient structurées, *i.e.*, pouvant être annihilées par un opérateur différentiel linéaire. Le théorème fondamental suivant découle du fait que  $k_0(s) \left[ \frac{d}{ds} \right]$  est un idéal d'anneau principal à gauche (pour la définition d'idéal d'anneau, voir section 3.6.1).

**Théorème 3.6.2.** *Il existe  $\Delta \in k_0(s) \left[ \frac{d}{ds} \right]$ , tel que l'équation (3.33) devienne*

$$\Delta \mathcal{P} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_r \end{pmatrix} = \Delta \mathcal{Q} \quad (3.34)$$

L'équation (3.34), qui est indépendante des bruits, est appelée un *estimateur linéaire* des paramètres inconnus si, et seulement si,  $\det(\Delta \mathcal{P}) \neq 0$ .

Soit  $\ell$  un corps différentiel de constantes. Un opérateur différentiel dans  $\ell(s) \left[ \frac{d}{ds} \right]$  est dit *propre* (resp. *strictement propre*) si, et seulement si, les coefficients de  $\frac{d^\alpha}{ds^\alpha}$  sont des fonctions rationnelles propres (resp. strictement propres) dans  $\ell(s)$ . L'estimateur (3.34) est dit *propre* (resp. *strictement propre*) si, et seulement si, les coefficients de  $\Delta \mathcal{P}$  et  $\Delta \mathcal{Q}$  sont des opérateurs différentiels propres (resp. strictement propres). En multipliant les deux membres de l'équation (3.34) par un élément propre convenable de  $k_0(s)$ , on obtient

**Proposition 3.6.4.** *Tout estimateur linéaire peut être remplacé par un estimateur linéaire propre (resp. strictement propre)*

Cette proposition est très importante puisqu'elle nous permet d'obtenir des opérateurs intégraux (propres). Cela correspond à la division de tout le système d'équation (3.34) par  $s^\gamma$ , comme nous avons vu en (3.14), et qui nous permettra d'estimer les valeurs dans le domaine temporel en utilisant (3.10).

Supposons, maintenant, un signal rationnel bruité  $y = x + \frac{\vartheta}{s}$ , où  $x$  est donné par (3.31). L'analogue de l'équation (3.33) s'obtient en substituant  $y - \frac{\vartheta}{s}$  à  $x$  dans l'équation (3.32).

**Proposition 3.6.5.** *Le système d'équations linéaire*

$$\frac{d^{n+i}}{ds^{n+i}} \left[ s^{i+1} \left( \frac{d^i}{ds^i} (b_0 + \dots + b_{n-1}s^{n-1} - (a_0 + \dots + a_{n-1}s^{n-1})y) - \frac{d^i(s^n y)}{ds^i} \right) \right] = 0 \quad (3.35)$$

$i = 0, 1, \dots, 2n - 1$  est un estimateur linéaire si, et seulement si, le résidu de  $x$  à  $s = 0$  est 0.

*Preuve :* Si, dans le développement en série de Laurent  $x = \sum_{i \in \mathbb{Z}} c_i s^i$ ,  $c_{-1} \neq 0$  alors le terme  $\frac{c_{-1}}{s}$  est annihilé dans l'équation (3.35) avec  $\frac{\vartheta}{s}$ .

Autrement dit, le fait de multiplier par  $s$  réduit la perturbation à une constante, qui, après, peut facilement être éliminée par l'opération de dérivation par rapport à la variable  $s$ .

### 3.6.7 Perturbations Non-Structurées

Une perturbation qui n'est pas structurée est dite *non-structurée*. Spécialisé à  $\mathcal{M}$ , un tel bruit correspond à une fonction (du temps) "haute-fréquence", pouvant ainsi être atténuée par un filtrage passe-bas.

Par exemple, soit le bruit

$$\eta(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \sin(\Omega t + \varphi) & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

Alors

$$\frac{\eta}{s} = \int_0^t \eta(\tau) d\tau = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \frac{\cos(\Omega t + \varphi)}{\Omega} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

tend vers 0 lorsque  $\Omega \rightarrow \infty$ .

Reprenons l'exemple simple utilisé dans la section 3.3, où  $F(s)$  a le même ordre que  $H(s)$  avec  $M = N = 1$ . Supposons maintenant que le canal introduit aussi un bruit non-structuré additif,  $\eta(t)$ . Notez que nous n'avons besoin de faire aucune hypothèse sur celui-ci, comme celles de gaussianité ou de blancheur. Dans ce cas, le signal de sortie du canal, d'après (3.4), sera donné par

$$\dot{x}(t) = a_0 x(t) + b_0 u(t) + b_1 \dot{u}(t) + \eta(t) \quad (3.36)$$

Le bruit  $\eta(t)$  peut toujours être décomposé en une composante structurée et une non-structurée:

$$\eta(t) = \vartheta + \eta_0(t) \quad (3.37)$$

où la perturbation structurée  $\vartheta$  représente, par exemple, la moyenne du bruit et où  $\eta_0(t)$  est un bruit non-structuré mais de moyenne nulle.

Dans le domaine opérationnel, avec (3.37), l'équation (3.36) devient

$$s\hat{x} = a_0 \hat{x} + b_0 \hat{u} + b_1 s\hat{u} + x(0) - b_1 u(0) + \frac{\vartheta}{s} + \hat{\eta}_0 \quad (3.38)$$

Comme les conditions initiales ne sont pas connues, nous pouvons considérer le terme  $x(0) - b_1 u(0) + \frac{\vartheta}{s}$  comme étant une perturbation structurée. Pour annihiler cette perturbation, il suffit de multiplier (3.38) par  $s$  et de la dériver deux fois par rapport à  $s$ . Cela correspond à appliquer l'opérateur différentiel  $\Pi(s) = 2\frac{d}{ds} + s\frac{d^2}{ds^2}$  à l'équation en question. Le résultat

sera:

$$2\hat{x} + 4s\hat{x}' + s^2\hat{x}'' = a_0(2\hat{x}' + s\hat{x}'') + b_0(2\hat{u}' + s\hat{u}'') + b_1(2\hat{u} + 4s\hat{u}' + s^2\hat{u}'') + \Pi(s)\hat{\eta}_0 \quad (3.39)$$

L'équation (3.39) sera, alors, dérivée encore deux fois, pour générer un système de trois équations et permettre ainsi l'estimation des trois paramètres inconnus  $a_0$ ,  $b_0$  et  $b_1$ . Nous pouvons, donc, écrire (3.39) comme un système  $\mathcal{P}\boldsymbol{\theta} = \mathcal{Q} + \mathcal{Q}'$  avec:

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} 2\hat{x}' + s\hat{x}'' & 2\hat{u}' + s\hat{u}'' & 2\hat{u} + 4s\hat{u}' + s^2\hat{u}'' \\ 3\hat{x}'' + s\hat{x}^{(3)} & 3\hat{u}'' + s\hat{u}^{(3)} & 6\hat{u}' + 6s\hat{u}^{(2)} + s^2\hat{u}^{(3)} \\ 4\hat{x}^{(3)} + s\hat{x}^{(4)} & 4\hat{u}^{(3)} + s\hat{u}^{(4)} & 12\hat{u}'' + 8s\hat{u}^{(3)} + s^2\hat{u}^{(4)} \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ b_1 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{Q} = \begin{bmatrix} 2\hat{x} + 4s\hat{x}' + s^2\hat{x}'' \\ 6\hat{x}' + 6s\hat{x}^{(2)} + s^2\hat{x}^{(3)} \\ 12\hat{x}'' + 8s\hat{x}^{(3)} + s^2\hat{x}^{(4)} \end{bmatrix}; \quad \mathcal{Q}' = \begin{bmatrix} \Pi\hat{\eta}_0 \\ \frac{d}{ds}\Pi\hat{\eta}_0 \\ \frac{d^2}{ds^2}\Pi\hat{\eta}_0 \end{bmatrix}$$

Avant de résoudre ce système, nous avons encore besoin de diviser tout par  $s^\gamma$  avec  $\gamma > 2$ , pour avoir des opérateurs différentiels propres. Ainsi, les paramètres seront obtenus en résolvant le système  $\mathcal{P}\boldsymbol{\theta} = \mathcal{Q}$ . Il faut noter que, le bruit étant non observable, l'estimateur ne prend pas en compte la décomposition  $\mathcal{Q} + \mathcal{Q}'$ . Ainsi, il ne considère pas le bruit de façon explicite, celui-ci faisant partie du signal  $x(t)$ . Reprenons le terme  $\mathcal{Q}'$ , qui est donné par:

$$\mathcal{Q}' = \begin{bmatrix} 2\hat{\eta}_0^{(1)} + s\hat{\eta}_0^{(2)} \\ 3\hat{\eta}_0^{(3)} + s\hat{\eta}_0^{(3)} \\ 4\hat{\eta}_0^{(3)} + s\hat{\eta}_0^{(4)} \end{bmatrix}$$

Dans le domaine temporel, d'après (3.10), les termes dus au bruit interviendront sous la forme:

$$b_\gamma(i, j) = \frac{(-1)^i}{(\gamma - j - 1)!} \int_0^\lambda (\lambda - \tau)^{\gamma-j-1} \tau^i \eta_0(\tau) d\tau \quad (3.40)$$

avec  $1 \leq i \leq 4$ ,  $0 \leq j \leq 1$  et où  $\lambda$  est l'intervalle d'estimation.

Les itérations des intégrales produisent une moyennisation (un filtrage passe-bas) qui permettent d'atténuer l'effet du bruit non structuré. Reprenant l'exemple de simulation de la section 3.3, où  $H(s) = \frac{s+0.5}{s+2}$ , l'évolution des paramètres en présence de bruit est montrée dans la figure 3.6. Différemment de la simulation montrée dans la section 3.3, ici nous avons utilisé un signal d'entrée non-stationnaire montré à la figure 3.5. Ce signal nous permet d'avoir un meilleur résultat, ce qui sera discuté avec plus de détail dans la suite de ce chapitre. Il est obtenu comme une somme de transitoires, étant une modification de [Mal00, eq. 9.76, p.411]. La figure compare les résultats obtenus pour quelques valeurs de rapport signal à

bruit, données en décibels.

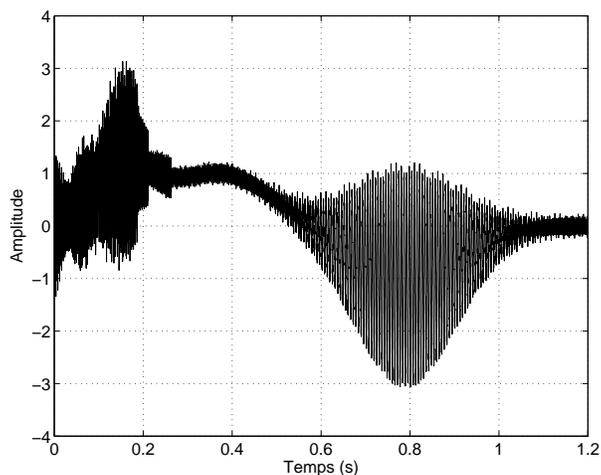


Figure 3.5: Signal d'entrée non-stationnaire

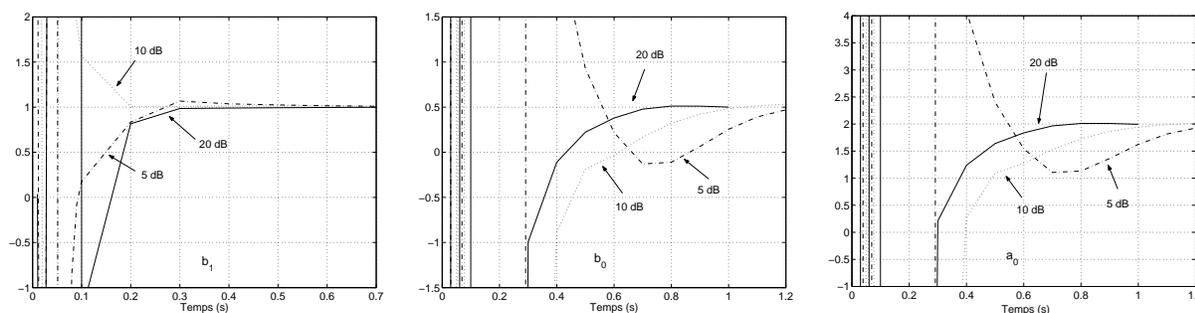


Figure 3.6: Évolution des coefficients par rapport au temps d'estimation

En comparant ces résultats avec ceux sans bruit, montrés à la figure 3.4, nous voyons que maintenant la convergence est plus lente. De toute façon, ces résultats illustrent d'une part la robustesse de l'estimateur même en présence de bruit fort ( $SNR = 5 \text{ dB}$ ) et d'autre part, la convergence quand même rapide pour un niveau de bruit moyen ( $SNR = 20 \text{ dB}$ ). Il est aussi intéressant de noter que, plus le rapport signal-à-bruit est faible, plus la convergence est lente. Ainsi, dans les situations de bruit fort, il sera plus intéressant d'utiliser un intervalle d'estimation plus important.

Comme l'estimation des paramètres peut être très rapide dans les cas sans bruit ou avec un bruit moyen, nous pouvons considérer la limite d'intégration,  $\lambda$ , comme étant inférieure ou égale à 1. Si  $\lambda$  est inférieure à 1 et d'après (3.40), dû au terme  $\tau^i$ , l'effet du bruit dans l'estimation sera plus fort pour des valeurs de  $i$  (ordre de la dérivation) plus faibles. En fixant

$j$ , l'inégalité suivante est vérifiée:

$$|b_\gamma(i_1, j)| \geq |b_\gamma(i_2, j)| \quad \text{pour } i_1 < i_2 \quad (3.41)$$

La figure 3.7 montre des résultats de simulation de (3.40) en variant la valeur de  $i$  (figure (a)) et aussi de  $\gamma$  (figure (b)). Nous pouvons donc confirmer l'inégalité (3.41) et aussi l'effet de la valeur de  $\gamma$ : plus elle est élevée, plus l'effet du bruit sera affaibli, dû à l'effet de moyennisation des intégrales. La simulation montrée à la figure (a) a utilisé  $\gamma = 3$  et  $j = 0$ , tandis que la figure (b) a utilisé  $i = j = 0$ .

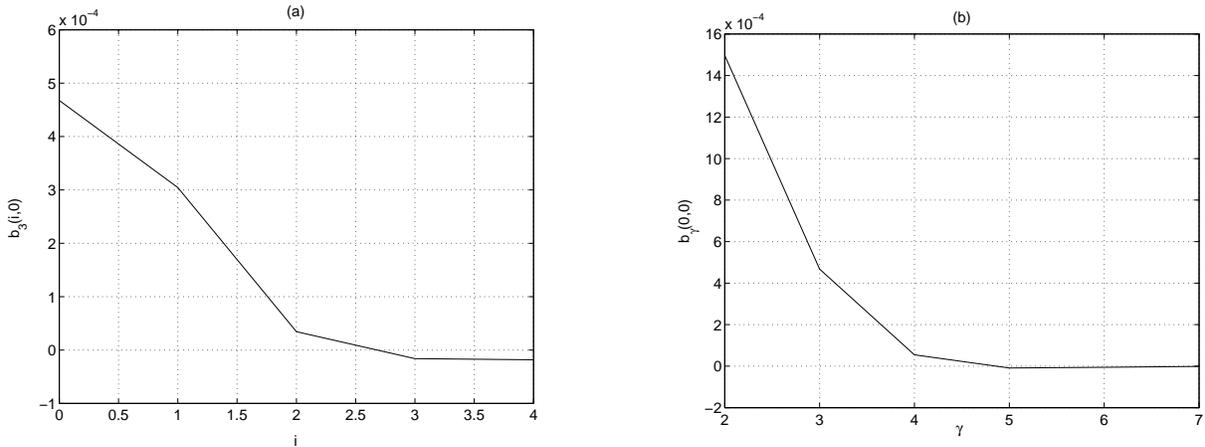


Figure 3.7: Évolution de l'effet du bruit en fonction de l'ordre de la dérivée (a) et de  $\gamma$  (b)

Par contre, la valeur de  $\gamma$  affecte aussi les intégrales de  $x(t)$  et  $u(t)$ , rendant ses résultats plus faibles. Cela signifie qu'il existe des restrictions pour sa valeur. Même en présence de bruit, son augmentation peut ne pas donner des meilleurs résultats.

L'analyse de l'effet du bruit principalement par rapport à l'ordre de la dérivée  $i$  est importante puisque l'estimateur des paramètres peut ne pas être unique. Dans ce cas, il faut pouvoir analyser quelle est la meilleure option et le rapport signal à bruit est un des facteurs le plus important. Dans la section 5.6.1, nous verrons, à partir d'un exemple concret, que le conditionnement de la matrice  $\mathcal{P}$  et l'identifiabilité des paramètres sont aussi des facteurs qui doivent être pris en compte dans ce choix.

### 3.7 Modèle Utilisé dans les Simulations

Nous allons appliquer la technique développée dans la section 3.4 pour l'estimation des canaux dans des systèmes de communication. Dans ce cas, le système traité est montré dans la figure 3.8.

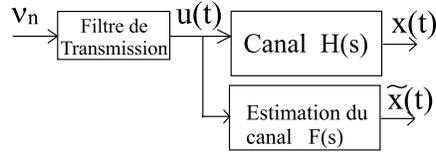


Figure 3.8: Estimation d'un canal de communication

Le canal,  $H(s)$ , est modélisé comme une fonction de transfert rationnelle. Le signal d'entrée,  $u(t)$ , en bande de base, est donné par :

$$u(t) = \sum_{k=0}^n \nu_k g(t - kT) \quad (3.42)$$

où  $\nu_k$  est le  $k$ -ième symbole transmis,  $g(t)$  est le filtre de transmission ou, autrement dit, l'impulsion de mise-en-forme du signal et  $nT \leq t < (n+1)T$  où  $T$  est la période symbole. Les symboles  $\nu_k$  peuvent être réels, comme dans le cas d'une modulation en amplitude (PAM-*Pulse Amplitude Modulation*) ou complexe, comme par exemple dans la modulation QPSK (*Quadrature Phase Shift Keying*). Dans les modulations  $\mathcal{A}$ -PAM, les symboles appartiennent à un alphabet fini  $\{\pm 1, \pm 3, \dots, \pm(\mathcal{A} - 1)\}$ .

En supposant que l'estimation du canal soit faite dans l'intervalle  $nT \leq t < (n+1)T$ , de durée d'une période symbole, les intégrales données par (3.10) peuvent être réécrites comme:

$$\begin{aligned} U_{ij} &= \frac{(-1)^i}{(\gamma - j - 1)!} \int_0^\lambda (\lambda - \tau)^{\gamma - j - 1} \tau^i \tilde{u}(\tau) d\tau \\ X_{ij} &= \frac{(-1)^i}{(\gamma - j - 1)!} \int_0^\lambda (\lambda - \tau)^{\gamma - j - 1} \tau^i \tilde{x}(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (3.43)$$

où nous avons fait le changement de variable :  $t = (n + \tau)T$ , avec  $0 \leq \tau < 1$ . Cela nous permet d'écrire  $\tilde{u}(\tau) = u((n + \tau)T)$  et  $\tilde{x}(\tau) = x((n + \tau)T)$ . Comme nous avons vu dans la section 3.3, la durée d'intégration  $\lambda$  ( $0 < \lambda < 1$ ) peut être choisie très faible. Il suffit juste qu'elle soit suffisamment grande pour que les intégrales convergent. Ainsi,  $u(t)$  devra être connu pendant un intervalle de temps très court et la méthode devient très rapide, ce qui donne la possibilité de l'implémenter en temps réel.

Il est important d'observer que, même si  $u(t)$  doit être connu pendant un intervalle de temps très court, en générale inférieur à la durée d'une période symbole, cela ne correspond pas à la connaissance d'un seul symbole. En effet, le nombre de symboles nécessaire correspond au nombre de périodes symboles du support de l'impulsion de mise-en-forme,  $g(t)$ . Pour les simulations qui suivent,  $g(t)$  sera considéré comme étant le cosinus sur-élevé, donné

par :

$$g(t) = \text{sinc}(t) \frac{\cos(\pi\alpha t)}{1 - 4\alpha^2 t^2} \quad (3.44)$$

où *sinc* est le sinus cardinale et  $\alpha$  est le facteur de *roll-off*. Nous avons considéré  $g(t)$  avec un support à peu près de  $5T$ . Ainsi une séquence d'apprentissage de 5 symboles est nécessaire pour bien représenter  $u(t)$ .

## 3.8 Analyse de la Méthode

### 3.8.1 Excitation Persistante

Le signal d'entrée du système,  $u(t)$ , joue un rôle très important dans l'identification de  $H(s)$ . Ce signal doit être suffisamment riche pour permettre une bonne identification, c'est-à-dire, pour que le système d'équations ne soit pas dégénéré. Un signal de ce type est dit à *excitation persistante*.

**Définition 3.8.1.** *Un signal quasi-stationnaire  $\{u(t)\}$ , avec un spectre  $\Phi_u(\omega)$ , est à excitation persistante d'ordre  $n$  si, pour tous les filtres à réponse impulsionnelle finie (Moving Average) de la forme :*

$$MA_n(s) = \rho_1 + \rho_2 s + \dots + \rho_n s^n$$

la relation  $|MA_n(e^{i\omega})|^2 \Phi_u(\omega) = 0$  implique que  $MA_n(e^{i\omega}) = 0$  [Lju87]

Autrement dit,  $u(t)$  sera à excitation persistante d'ordre  $n$  si son spectre  $\Phi_u(\omega)$  a au moins  $n$  points non nulles dans l'intervalle  $-\pi \leq \omega \leq \pi$ . De plus,  $\Phi_u(\omega) > 0, \forall \omega$ .

Il est montré par [Lju87] que l'identification correcte d'un système entrée-sortie (SISO-*Single Input Single Output*), modélisé par une fonction de transfert rationnelle, avec un numérateur d'ordre  $M$  et un dénominateur d'ordre  $N$ , nécessite d'un signal d'entrée  $u(t)$  qui soit à excitation persistante d'ordre au moins égal à  $M + N$ .

D'un point de vue plus pratique, une excitation persistante d'ordre  $n$  peut être construite, par exemple, comme la somme de  $n$  sinusoides de fréquences différentes.

En revenant à la discussion présentée à la section 3.2.2, il est intéressant de noter que la condition d'avoir un signal d'entrée avec  $2L + 1$  modes revient justement à ce que ce signal soit à excitation persistante pour le système en question.

Les résultats de simulation suivants illustrent l'effet du signal d'entrée dans la performance de la méthode. Supposons un système dont la fonction de transfert est donnée par:

$$H(s) = \frac{s^3 + 9.8s^2 + 20.75s + 8.05}{s^4 + 10.9s^3 + 43.34s^2 + 88.24s + 95.2} \quad (3.45)$$

Nous estimerons ce canal en utilisant une *modélisation exacte*, c'est-à-dire,  $F(s)$  a le même ordre de  $H(s)$ ,  $M = 3$  et  $N = 4$ . Cela représente 8 coefficients à estimer, ce qui sera fait en utilisant le système (3.14) avec  $i = 4, \dots, 11$  et  $\gamma = 6$ . Les intégrales (3.43) sont calculées numériquement par la méthode du trapèze, avec une grille très petite (50000 points).  $\lambda$  a été considérée égale à 1. Deux signaux d'entrée différents seront utilisés: le premier est un signal 2-PAM, obtenu en utilisant (3.42) et un cosinus sur-élevé avec facteur de *roll-off* égal à 0.33 et le deuxième est le signal non-stationnaire utilisé dans la section 3.6.7 et montré dans la figure 3.5.

La table 3.1 montre le résultat obtenu. Le gain de performance en utilisant un signal non-stationnaire est clair. Celui-ci permet l'estimation presque exacte du canal. Il faut observer que le signal  $u(t)$  2-PAM, n'est pas un signal riche. En effet, dans ce cas,  $u(t)$  est une combinaison linéaire d'un même signal,  $g(t)$ , décalé. Ainsi, la durée d'une période symbole peut ne pas être suffisante pour exciter tous les modes d'un canal de degré élevé. Notez que l'utilisation d'un alphabet  $\mathcal{A}$  plus grand, ce qui résulte dans les modulations  $\mathcal{A}$ -PAM, n'améliore pas ce scénario puisque le nombre de modes de  $u(t)$  ne changera pas.

	Zéros			Pôles		
H(s)	-0.5	-2.3	-7	$-1.2 \pm 2i$	-3.5	-5
signal 2-PAM	-0.704	$-2.566 \pm 6.57i$		$-2.011 \pm 1.88i$	-6.2168	-16.85
signal non-stationnaire	-0.4990	-2.3094	-6.9996	$-1.2 \pm 2.0006i$	-3.5056	-5.0044

Table 3.1: Effet du signal d'entrée

De plus, un signal non stationnaire permet l'utilisation d'un temps d'estimation,  $\lambda$ , vraiment très petit pour la convergence des intégrales. Les figures 3.9 et 3.10 montrent les résultats obtenus, en fonction de  $\lambda$ , en utilisant un signal d'entrée 2-PAM et un signal d'entrée non-stationnaire respectivement. Le canal utilisé est donné par:

$$H(s) = \frac{s^2 - 3.2s - 1.85}{s^3 + 7.4s^2 + 17.44s + 27.2} \quad (3.46)$$

et il sera estimé par un  $F(s)$  avec  $M = 2$ ,  $N = 3$ . La performance est mesurée par la norme  $L_2$  de l'erreur, c'est-à-dire,  $\|H(s) - F(s)\|_2$ , défini comme:

$$\|\hat{e}(s)\|_2 = \|H(s) - F(s)\|_2 = \left( \int_0^\infty |e(t)|^2 dt \right)^{1/2} \quad (3.47)$$

et  $e(t)$  est la réponse impulsionnelle du système obtenue en faisant  $H(s) - F(s)$ .

Nous voyons, ainsi que, pour un signal 2-PAM, il faut un  $\lambda$  égal à 0.5 pour avoir une bonne estimation, tandis que, avec un signal non-stationnaire,  $\lambda$  égal à 0.1 suffit. Une

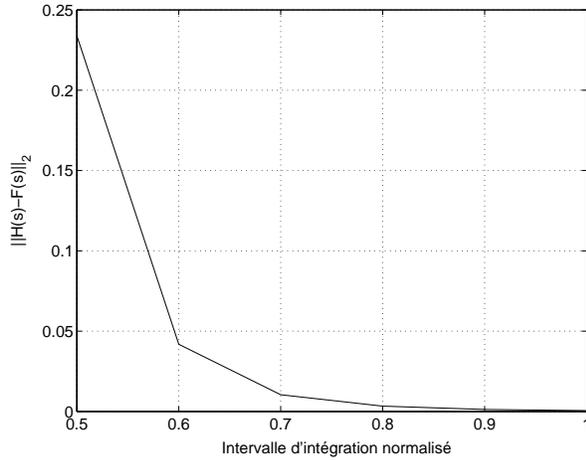


Figure 3.9:  $\|H(s) - F(s)\|_2$  en fonction de  $\lambda$ , signal d'entrée 2-PAM

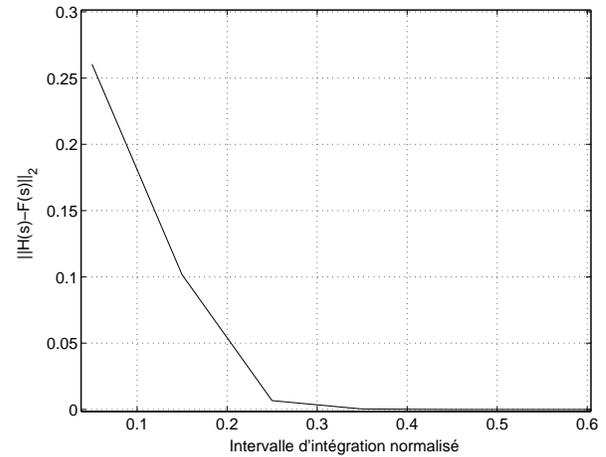


Figure 3.10:  $\|H(s) - F(s)\|_2$  en fonction de  $\lambda$ , signal d'entrée non-stationnaire

estimation plus rapide est toujours plus intéressante puisque cela signifie que le signal d'entrée va avoir besoin d'être connu pendant un intervalle de temps aussi très court. Cela nous permet de classer la méthode comme étant semi-aveugle. De plus, cette rapidité permet l'implémentation de la méthode en temps réel.

### 3.8.2 Le Conditionnement de la Matrice $\mathcal{P}$

D'après (3.14), nous voyons que, plus l'ordre du système  $H(s)$  est élevé, plus on a des coefficients à estimer et plus élevé sera le nombre de dérivations de l'équation du système à calculer. Pour cette raison, les valeurs des coefficients de la matrice  $\mathcal{P}$  tendent à devenir de plus en plus faibles avec l'augmentation de l'ordre du système. Ainsi, à partir d'un certain moment, les dernières lignes peuvent devenir insignifiantes par rapport aux premières, ce qui rend la matrice mal-conditionnée.

Quelques résultats de simulation illustrent le problème. En utilisant le signal d'entrée non-stationnaire montré à la figure 3.5, nous avons simulé l'estimation de deux canaux différents dont les fonctions de transfert sont données par:

$$\begin{aligned} H_1(s) &= \frac{s^3 + 20.5s^2 + 101s + 45.5}{s^5 + 15.9s^4 + 101.8s^3 + 328.5s^2 + 591.8s + 552.2} \\ H_2(s) &= \frac{s^3 + 20.5s^2 + 101s + 45.5}{s^6 + 25.9s^5 + 260.8s^4 + 1347s^3 + 3877s^2 + 6470s + 5522} \end{aligned} \quad (3.48)$$

Les paramètres utilisés,  $\lambda = 1$  et  $\gamma = 15$ , ont été les mêmes pour les deux cas. L'estimation a été faite en modélisation exacte, c'est-à-dire,  $H_1$  est estimé par  $F_1(s)$  avec  $M = 3$ ,  $N = 5$  et  $H_2$  par  $F_2(s)$  avec  $M = 3$ ,  $N = 6$ . Les résultats obtenus sont montrés dans les figures 3.11

et 3.12.

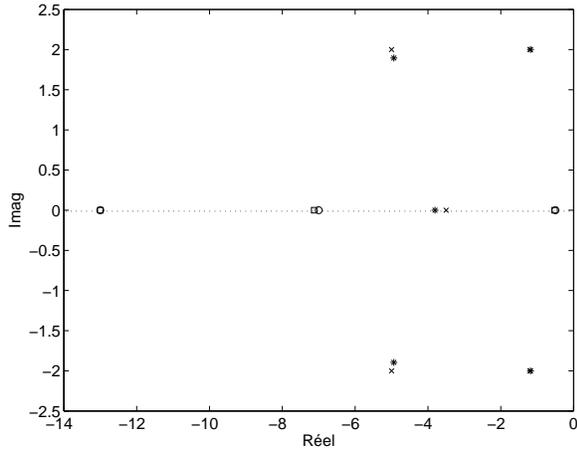


Figure 3.11: Diagramme des zéros et pôles; ○ et ×, zéros et pôles de  $H_1(s)$ ; □ et \*, zéros et pôles de  $F_1(s)$

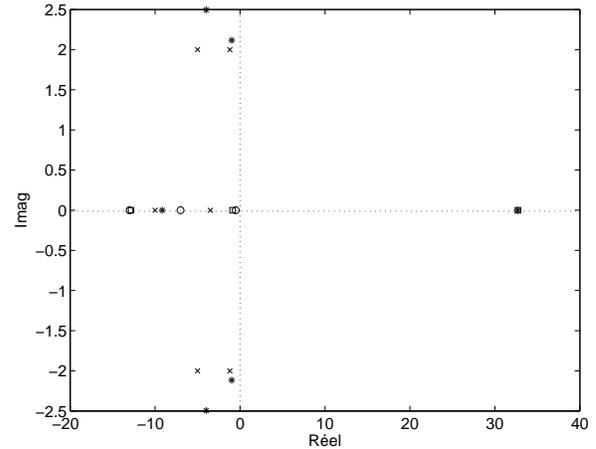


Figure 3.12: Diagramme des zéros et pôles; ○ et ×, zéros et pôles de  $H_2(s)$ ; □ et \*, zéros et pôles de  $F_2(s)$

La dégradation de la performance avec l'augmentation de l'ordre de  $H(s)$  est claire. Pour l'obtention de  $F_2(s)$  la matrice  $\mathcal{P}$  devient mal-conditionnée et il n'est plus possible de bien estimer les coefficients.

### Étude de la Matrice $\mathcal{P}$

Comme nous avons vu, par exemple dans la section 3.5, les coefficients de la matrice  $\mathcal{P}$  et du vecteur  $\mathcal{Q}$  sont obtenus par le calcul des intégrales itérées des signaux:

$$\frac{(-1)^i}{(\gamma - 1)!} \int_0^\lambda (\lambda - \tau)^{\gamma-1} \tau^i y^{(n)}(\tau) d\tau$$

où  $\lambda$  est l'intervalle d'estimation et  $y(t)$  est le signal  $x(t)$  ou  $u(t)$ .

Nous pouvons faire un changement de variable et substituer  $\tau$  par  $\lambda\tau$

$$\lambda^{\gamma+i-n} \frac{(-1)^i}{(\gamma - 1)!} \int_0^1 (1 - \tau)^{\gamma-1} \tau^i \frac{d^n}{d\tau^n} y(\lambda\tau) d\tau,$$

ce qui nous permet de mettre l'intervalle d'estimation comme un facteur. En faisant attention au fait que l'indice  $i$  correspond aux lignes de la matrice  $\mathcal{P}$  et  $n$  correspond aux colonnes, nous pouvons réécrire  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{Q}$ :

$$\mathcal{P}(\lambda) = \Lambda(\lambda) \tilde{\mathcal{P}}(\lambda) \tilde{\Lambda}(\lambda) \quad \mathcal{Q}(\lambda) = \Lambda(\lambda) \tilde{\mathcal{Q}}(\lambda) \quad (3.49)$$

où

$$\Lambda(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^\gamma & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda^{\gamma+1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda^{\gamma+M+N} \end{bmatrix}; \tilde{\Lambda}(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^N & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \lambda & & & \vdots \\ \vdots & & & \lambda^N & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \lambda^{N-M} \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

Lorsque  $\lambda$  est différent de 1, la matrice  $\Lambda$  sera mal-conditionnée. Ainsi, d'après (3.49), cette matrice sera une source de mauvais conditionnement pour la matrice  $\mathcal{P}$ . Une solution donc pour améliorer le conditionnement du système serait la normalisation par  $\Lambda$ .

### Utilisation des Polynômes de Jacobi

D'après l'analyse faite dans la section 3.5, où nous avons vu qu'il est possible d'utiliser d'autres bases de fonctions que les monômes  $(-t)^i$  (où  $i$  est l'ordre de la dérivée) pour générer le système d'équations, nous pouvons essayer d'encore améliorer le conditionnement de  $\tilde{\mathcal{P}}$ . En effet, cela peut être fait en choisissant une base de fonctions  $\varphi_i(t)$  orthogonale.

En observant que la fonction  $f_i(\tau; t)$ , définie dans (3.24), est la fonction de poids associée aux polynômes orthogonaux de Jacobi,  $P_i^{(\alpha+1, N+1)}(t)$  sur  $[0, 1]$  [Chi78] (voir annexe A), le choix le plus logique est d'utiliser la famille des fonctions

$$\varphi_i(t) = t^N P_i^{(\alpha+1, N+1)}(t)$$

correspondant à ces polynômes.

Notons que le facteur  $t^N$  est ici indispensable pour assurer la condition (3.26) qui, en réalité, correspond à l'élimination des conditions initiales. Notons aussi que, puisque ces fonctions  $\varphi_i$  sont polynomiales, elles correspondent, dans le domaine fréquentiel, à des opérateurs différentiels linéaires à coefficients constants (voir annexe A). Il suffit donc, si l'on veut opérer dans le domaine fréquentiel, de remplacer les dérivations par rapport à  $s$  par ces opérateurs différentiels.

L'estimation du système suivant, par exemple

$$H(s) = \frac{s^4 + 33.5s^3 + 368.5s^2 + 1366s + 595}{s^6 + 25.9s^5 + 265.8s^4 + 1426s^3 + 4241s^2 + 7257s + 6474}$$

en utilisant un signal d'entrée non-stationnaire et en situation de modélisation exacte, n'est

pas possible par l'ancienne méthode (dérivation récursive simple) puisque la matrice  $\mathcal{P}$  sera numériquement singulière. Cependant, avec les polynômes de Jacobi, nous obtenons le résultat montré dans la figure 3.13. Nous pouvons voir que les pôles ont été très bien estimés même si cela n'est pas le cas pour les zéros. Dans cette simulation nous avons utilisé  $\lambda = 1$  et  $\gamma = 9$ .

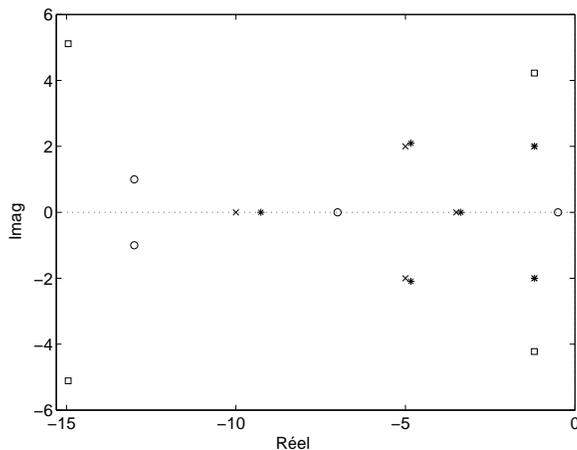


Figure 3.13: Diagramme des zéros et pôles, estimation avec les polynômes de Jacobi,  $M = 4$ ,  $N = 6$ ;  $\circ$  et  $\times$ , zéros et pôles de  $H(s)$ ;  $\square$  et  $*$ , zéros et pôles de  $F(s)$

Nous voyons, donc, que l'utilisation d'une base de fonctions orthogonales nous permet d'améliorer le conditionnement de la matrice et, en conséquence, la performance de la méthode principalement pour l'estimation des systèmes d'ordre plus élevé.

Il faut aussi noter que les fonction  $\varphi_i$  peuvent être choisis autrement. Ici nous avons donné un exemple avec les polynômes de Jacobi.

### 3.8.3 Modélisation Exacte et Sur-Modélisation

Les simulations des sections précédentes, toujours réalisées en condition de modélisation exacte, c'est-à-dire, avec un  $F(s)$  d'ordre équivalent à celui du canal, nous ont montré que, si le signal d'entrée du système est suffisamment riche et en faisant attention au conditionnement de la matrice  $\mathcal{P}$ , la méthode a une bonne performance.

Le même résultat peut être attendu dans le cas où  $F(s)$  est sur-modélisée, c'est-à-dire, quand son ordre est plus élevé que celui du système. Dans ce cas, l'équation différentielle correspondant au système (3.12), continue à être satisfaite en utilisant le modèle identifié  $F(s)$ . Quelques exemples de simulation confirment ce résultat.

Les tables 3.2 et 3.3 montrent les résultats obtenus pour deux exemples différents. En général, les valeurs absolues des parties réelles des zéros et des pôles en excès seront tellement

élevées que leur effets sur la réponse du système seront négligeables. Dans le même temps, les pôles et les zéros du canal sont identifiés presque exactement.

	Zéros		Pôles		
$H(s)$	-0.5	-3	$-1.2 \pm 2i$	-5	
$F(s)$	-0.4934	-2.9866	$-1.2 \pm 1.99i$	-5	-939.38

Table 3.2: Estimation du canal faite avec un pôle en excès

	Zéros		Pôles		
$H(s)$	-0.5		$-1.2 \pm 2i$	-5	
$F(s)$	-0.4991	-170.46	$-1.2 \pm 1.99i$	-5	-231.81

Table 3.3: Estimation du canal faite avec un zéro et un pôle en excès

Afin de quantifier l'erreur de l'approximation obtenue, nous pouvons calculer l'erreur relative donnée par  $\|H(s) - F(s)\|_2 / \|H(s)\|_2$  où la norme  $L_2$  de l'erreur est donnée par (3.47).

Ainsi, l'erreur relative est égale à 0.0626 pour le premier cas et 0.0066 pour le deuxième. Dans le chapitre 4, nous verrons que ces estimations nous permettent toujours de bien récupérer les symboles transmis.

Un autre problème rencontré est un modèle identifié  $F(s)$  avec des pôles avec parties réelles positives. Logiquement, cela rend le système instable. Une façon simple de résoudre le problème est de les projeter dans le demi-plan gauche, c'est-à-dire, en inversant leur signe. Comme l'ordre du système n'est pas très élevé, il est possible de les repérer facilement. De toute façon, dans les exemples montrés ici, cela n'a pas été nécessaire.

### 3.8.4 Sous-Modélisation

Dans une situation de sous-modélisation, où  $F(s)$  a un ordre plus faible que celui du canal, l'équation différentielle correspondant au système (3.12) ne sera plus satisfaite. Ainsi, il ne sera pas possible de bien estimer  $H(s)$  par la même procédure suivie jusqu'ici.

En effet, dans ce cas, nous aurons l'interférence d'autres paramètres dans la qualité de l'estimation: l'intervalle d'estimation et sa durée. Dans le cas à modélisation exacte ou sur-modélisé, nous avons vu, par les simulations montrés dans la figure 3.4, que les paramètres de  $F(s)$  deviennent constants et égaux à ceux de  $H(s)$  à partir d'un certain temps d'estimation. Comme nous verrons ensuite, cela ne sera pas le cas quand le modèle est sous-modélisé.

Prenons un système simple donné par:

$$H(s) = \frac{s + 0.5}{s^2 + 7s + 10}$$

Ce système sera estimé par un  $F(s)$  sous-modélisé d'ordre  $M = 1$ ,  $N = 1$ ,

$$F(s) = \frac{b_1 s + b_0}{s + a_0}$$

de deux façons différentes. En premier, nous fixerons l'origine de l'intervalle d'estimation à  $t_0 = 0$  et nous varierons sa durée. En deuxième, nous fixerons la durée de l'intervalle et nous varierons son origine.

La figure 3.14 montre l'évolution des paramètres de  $F(s)$  en fonction du temps d'estimation dont l'origine est fixée à zéro. Le signal d'entrée était 2-PAM et  $\gamma$  a été pris égal à 4. Nous voyons que, différemment du cas à modélisation exacte, maintenant les valeurs des paramètres continuent toujours à varier avec l'augmentation de la durée de l'intervalle d'estimation.

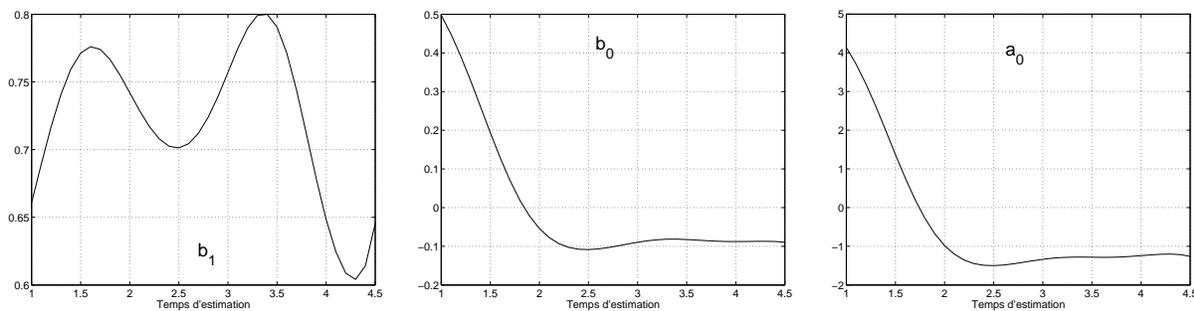


Figure 3.14: Évolution des coefficients du modèle réduit en fonction de la durée de l'intervalle d'estimation

La figure 3.15 montre l'évolution des paramètres de  $F(s)$  quand la durée de l'intervalle d'estimation est fixe et égale à 1, mais son origine varie. La première estimation a utilisé  $t_0 = 0$ , la deuxième  $t_0 = 1$  et ainsi de suite. Une fois de plus, le modèle obtenu à chaque intervalle est différent.

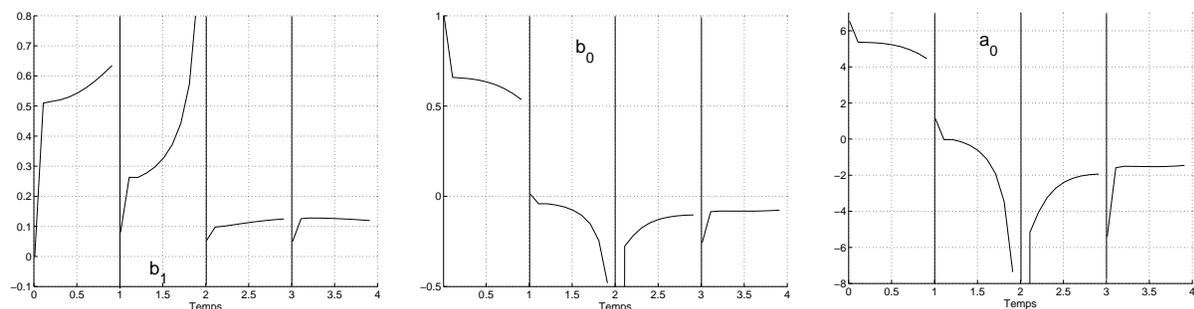


Figure 3.15: Évolution des coefficients du modèle réduit en fonction de l'intervalle d'estimation, durée constante

Ces deux résultats nous permettent d'affirmer que, avec la méthode proposée, il est facile

de repérer une situation de sous-modélisation. Il suffit d'observer si le modèle  $F(s)$  converge vers une solution ou si ses coefficients continuent toujours à varier avec l'intervalle d'estimation et sa durée.

Ce comportement nous inspire une autre façon de modéliser le système, ce qui nous appellerons "modélisation locale". Cette approche sera développée dans la section 3.9.

### 3.8.5 Addition de Bruit

Jusqu'à maintenant, nous avons fait toutes les simulations sans l'addition de bruit. Comme les perturbations structurées sont faciles à éliminer, ce qui a été vu dans la section 3.6.6, nous allons traiter ici le cas des perturbations non-structurées. Le bruit sera, donc, donné par un processus stochastique blanc et Gaussien. Comme nous avons déjà vu, la moyenne de ce processus peut être quelconque puisqu'elle représente une perturbation structurée et fini par être annihilée.

Ainsi, le signal de sortie du canal sera donné par :

$$x(t) = \int_0^t u(\tau)h(t - \tau)d\tau + \eta(t) \quad (3.51)$$

Avec un signal d'entrée  $u(t)$  modulé en 2-PAM, la variance de  $\eta$  peut être déterminée de la façon suivante :

$$\sigma_\eta = \sqrt{\frac{1}{10^{\frac{SNR}{10}}}} \quad (3.52)$$

où SNR (*Signal to Noise Ratio*) est le rapport signal à bruit en décibel (dB).

Considérons le canal ci-dessous :

$$H(s) = \frac{s + 0.5}{s + 4} \quad (3.53)$$

Pour analyser les estimations obtenues, nous allons calculer, par des simulations de Monte Carlo avec 300 réalisations, la probabilité que le zéro estimé,  $z$ , soit dans l'intervalle  $[-0.7, -0.3]$ , centré sur la valeur du zéro de  $H(s)$  ( $-0.5$ ) et que le pôle,  $p$ , soit dans l'intervalle  $[-4.2, -3.7]$ , centré sur la valeur du pôle de  $H(s)$  ( $-4$ ). Autrement dit, nous allons calculer:  $P(z \in [-0.7, -0.3], p \in [-4.2, -3.7])$ . Cette probabilité, en pourcentage, est montrée dans la figure 3.16.  $\gamma$  a été pris égal à 4. Cette valeur a été choisie par simulation, en cherchant le meilleur résultat. Comme les simulations de la section 3.6.7 avaient déjà suggéré, l'utilisation d'un intervalle d'estimation plus important améliore beaucoup le résultat. La simulation avec  $\lambda = 1.3$  nous montre que la méthode peut être très robuste au bruit, ayant un taux de réussite de plus de 90% même en situation de bruit fort (SNR=5dB).

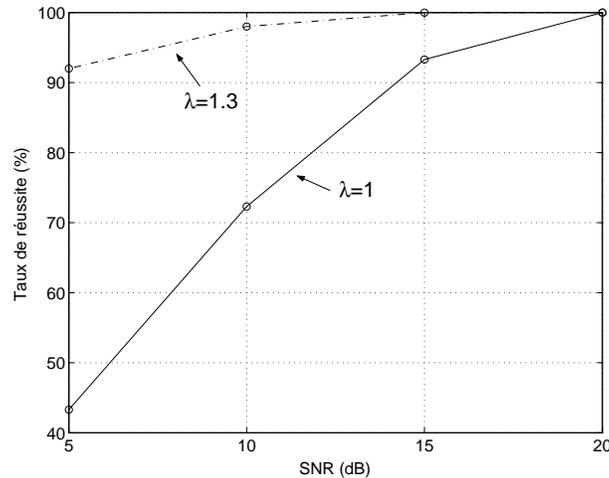


Figure 3.16: Taux de réussite pour l'estimation avec bruit, modulation 2-PAM

Cependant, avec l'augmentation de l'ordre du canal, la performance se dégrade rapidement. Cela est dû au fait que les problèmes de l'excitation persistante et du conditionnement de la matrice  $\mathcal{P}$  interviennent, dans un cas bruité, déjà dans l'estimation des systèmes d'ordre moins élevé. Par exemple, pour le canal donné par la table 3.2, un  $F(s)$  avec  $M = 2$  et  $N = 3$ ,  $u(t)$  étant un signal 2-PAM,  $\lambda = 1$  et un  $SNR = 60 \text{ dB}$ , c'est-à-dire, dans une situation de bruit très faible, une des meilleures estimations obtenues est montrée à la figure 3.17. Ainsi, même dans une situation très favorable, le résultat de l'estimation n'est pas très satisfaisant.

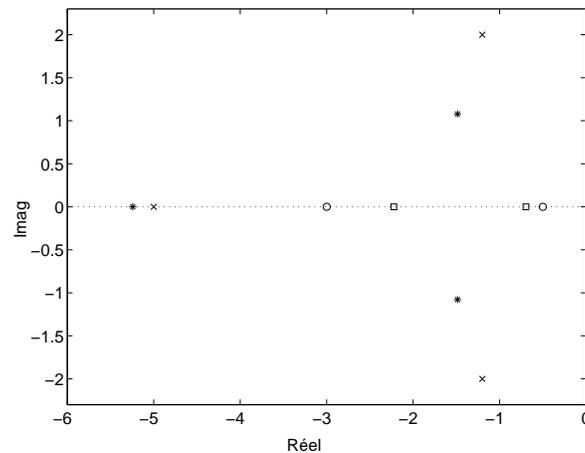


Figure 3.17: Diagramme des zéros et des pôles,  $M = 2$ ,  $N = 3$ ,  $SNR = 60 \text{ dB}$ ;  $\circ$  et  $\times$ , zéros et pôles de  $H(s)$ ;  $\square$  et  $*$ , zéros et pôles de  $F(s)$

Un gain de performance peut être obtenu avec un signal  $u(t)$  plus riche, non stationnaire. Prenons le système :

$$H(s) = \frac{s + 0.5}{s^2 + 7s + 10}$$

ayant un zéro  $z^* = -0.5$  et deux pôles,  $p_1^* = -2$  et  $p_2^* = -5$ . La probabilité  $P(z \in [z^* - 0.5, z^* + 0.49], p(1) \in [p_1^* - 1, p_1^* + 1], p(2) \in [p_2^* - 1, p_2^* + 1])$  où  $z$ ,  $p(1)$  et  $p(2)$  désignent respectivement le zéro et les pôles du modèle identifié  $F(s)$ , est montré sur la figure 3.18, pour deux cas distincts : le premier où  $u(t)$  est 16-PAM et le deuxième où  $u(t)$  est non-stationnaire. Les paramètres utilisés pour les deux cas sont les mêmes sauf pour le calcul des intégrales, où nous avons utilisé une grille de 50000 points pour le signal PAM et de 20000 points pour le signal non-stationnaire. De plus,  $\lambda$  a été pris égale à 1.

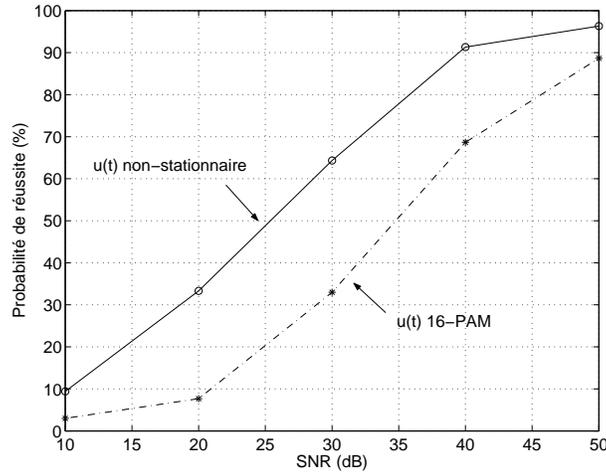


Figure 3.18: Taux de réussite pour l'estimation avec bruit,  $u(t)$  16-PAM et non-stationnaire

Nous voyons que, en générale, avec le signal d'entrée non-stationnaire l'estimation a 20% plus de réussite qu'avec le signal 16-PAM. Par rapport à la simulation précédente (figure 3.16), il est clair que, maintenant, nous avons besoin d'un SNR beaucoup plus élevé pour avoir une probabilité de réussite proche de 100%, même si les limites utilisées pour considérer l'estimation comme bonne sont moins contraignantes.

Cela nous montre que l'utilisation d'un signal plus riche améliore le résultat mais la méthode continue à être sensible à l'addition de bruit. Dans tous les cas, il faut utiliser des intervalles d'estimation plus larges pour avoir des bons résultats.

Il faut aussi noter que, comme nous considérons les signaux et les systèmes en temps continu, il serait plus représentatif d'utiliser un bruit à bande étroite.

### 3.9 Modélisation Locale du Système

L'identification d'un système peut avoir plusieurs utilités. Elle permet, par exemple, de reproduire le comportement entrée-sortie, de prédire ce comportement et de commander le système. Dans tous ces cas, le modèle obtenu à partir de l'identification doit être équivalent

au système original, du moins par rapport à certaines caractéristiques privilégiées. Ainsi, l'identification est considérée sous un angle global, puisque le modèle obtenu doit être toujours valable. Les estimations/identifications que nous avons faites jusqu'à maintenant s'incluent dans ce contexte.

Par contre, parfois il suffit de pouvoir reproduire le comportement entrée-sortie dans un court intervalle de temps spécifique. Considérons les signaux d'entrée et de sortie montrés à la figure 3.19. Supposons que ce qui nous intéresse soit la sortie du système dans un intervalle de temps donné  $[t_0, t_1]$  et que nous voulons être capables de reproduire le comportement entrée-sortie dans cet intervalle. Alors, localement, c'est-à-dire, dans  $[t_0, t_1]$ , cela peut être fait en utilisant un modèle simple d'ordre réduit. Par contre, il ne sera valable que pour cet intervalle de temps. Ainsi, nous pouvons dire que nous faisons une modélisation locale, contrairement à l'approche globale que nous avons précédemment.

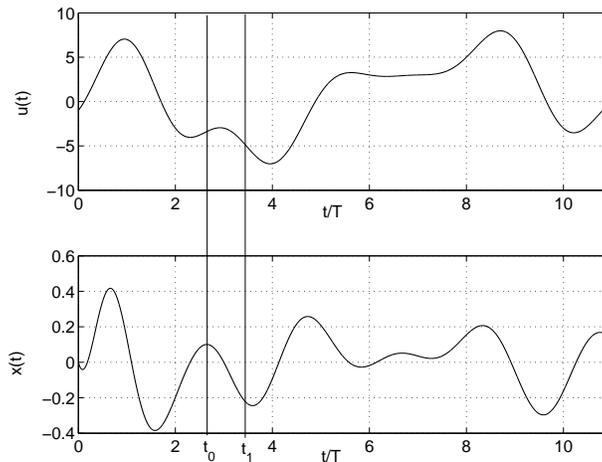


Figure 3.19: Signal d'entrée et de sortie d'un système d'ordre  $M = 3$  et  $N = 4$

La figure 3.20 illustre cette approche, en utilisant les mêmes signaux de la figure 3.19. Le comportement entrée-sortie du système est estimé par un modèle réduit à chaque intervalle d'une période symbole. Le système original a un ordre  $M = 3$  et  $N = 4$ , tandis que le modèle réduit a  $M = 1$  et  $N = 1$ . La figure compare les signaux de sorties des modèles identifiés, obtenus toujours à partir du même signal d'entrée  $u(t)$ , avec la sortie du système original,  $x(t)$ .

Nous voyons, donc, que les signaux de sortie des modèles réduits ne sont proches de  $x(t)$  que dans l'intervalle utilisé pour leur estimation. Dès que le temps passe et un nouveau symbole arrive, ces signaux commencent à s'éloigner de  $x(t)$  et une nouvelle estimation du système doit être calculée. C'est pour cette raison que nous appelons cette approche de modélisation locale du système.

Supposons que ce modèle réduit soit donné par  $G(s) = \frac{b_1 s + b_0}{s + a_0}$ . En analysant l'évolution

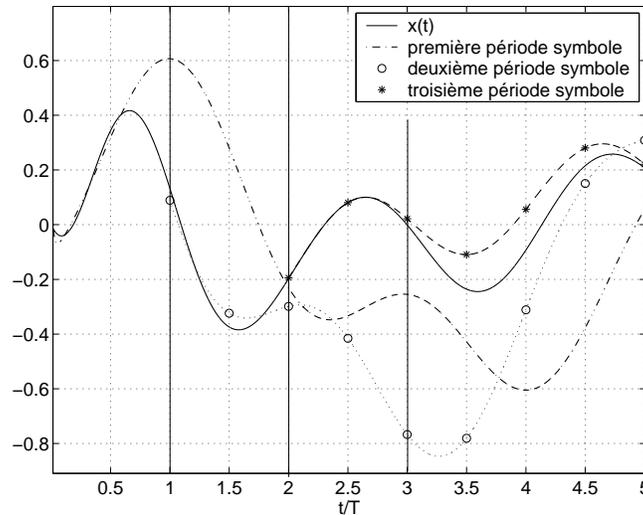


Figure 3.20: Signaux de sortie des estimations réalisées en utilisant les signaux de la première, deuxième et troisième périodes symbole

des paramètres de  $G(s)$  pendant l'estimation, montrée à la figure 3.21, nous voyons que l'intervalle d'une période symbole peut être trop longue pour avoir une bonne approximation avec un ordre si réduit. Par exemple, dans l'intervalle correspondant à la première période symbole, les coefficients  $b_0$  et  $a_0$  commencent déjà à diverger à la fin du processus. Il serait intéressant, donc, de faire l'estimation pendant un intervalle plus court, de durée maximale de  $0.5T$  au lieu de  $T$ . La figure 3.22 montre les signaux de sortie obtenus dans ces deux cas, comparés au signal de sortie du système original,  $x(t)$ . Nous pouvons, donc, observer que la sortie de  $G(s)$  obtenue dans  $[0, 0.5T]$  est plus proche de la sortie originale du système au début de l'intervalle, mais elle commence à s'éloigner plus rapidement que la sortie de l'estimation obtenue à partir de l'intervalle complet. Ainsi, dépendant de l'application désirée, une nouvelle estimation pourrait être faite entre  $[0.5T, T]$ .

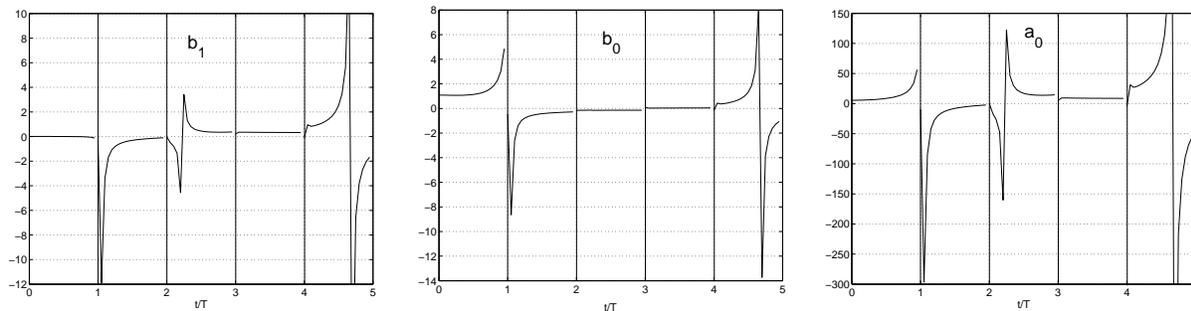


Figure 3.21: Évolution des coefficients du modèle réduit

Pour la deuxième période symbole, la figure 3.21 nous montre que la fonction de transfert

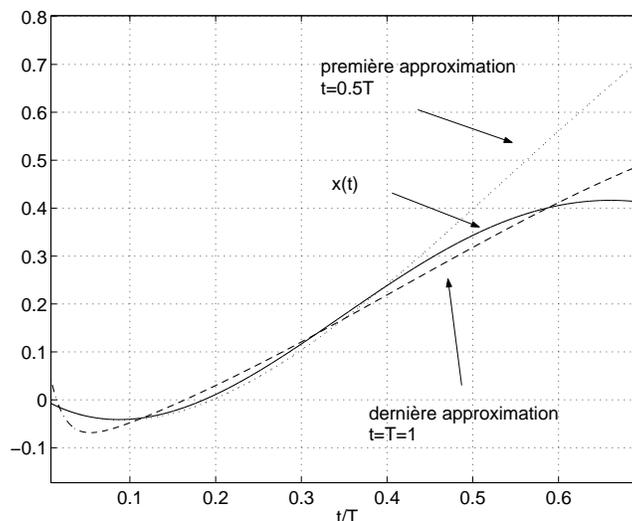


Figure 3.22: Signaux de sortie des estimations faites pendant la première itération en utilisant les intervalles  $[0, 0.5T]$  et  $[0, T]$

de l'estimation obtenue est toujours instable, ayant un pôle dans le demi-plan droite, c'est-à-dire,  $a_0$  est négatif. Ainsi, pour obtenir le résultat montré à la figure 3.19, nous avons réfléchi ce pôle dans le demi-plan gauche. Après cette opération, il faut faire attention parce que le signal de sortie du nouveau modèle peut être inversé par rapport au  $x(t)$  original, ce qui serait équivalent à avoir  $-x(t)$ , et il y a aussi la possibilité d'avoir des retards.

Pour le cinquième intervalle, où le coefficient  $a_0$ , à partir d'un certain moment, devient aussi négatif, il serait intéressant de procéder comme pour la première période symbole et faire l'estimation en utilisant un intervalle de temps plus court, de préférence plus faible que  $0.5T$ . Ainsi, le système sera encore stable et cela est déjà suffisant pour avoir un bon résultat, comme est montré dans la figure 3.23.

Pour résumer, la figure 3.24 montre l'évolution des paramètres estimés jusqu'à  $0.5T$  au lieu de  $T$ . Après l'estimation ils sont considérés constants jusqu'à la fin de l'intervalle. Nous voyons, donc, que cet intervalle est plus que suffisant pour avoir des bonnes estimations, parfois même meilleures que celles obtenues en considérant tout l'intervalle.

En somme, comme le modèle utilisé a un ordre beaucoup plus faible que le système original, plus l'intervalle de temps pour l'estimation est court, mieux sera le résultat de l'estimation.

Il est important d'observer aussi que la méthode marche parce qu'elle est algébrique et déterministe, convergeant très rapidement, c'est-à-dire, dans un intervalle de temps très court, ce qui permet l'obtention des modèles qui sont aussi valables pendant des intervalles de temps courts.

De plus, nous pouvons voir le modèle obtenu comme étant  $G_t(s)$ , puisqu'il est une fonction

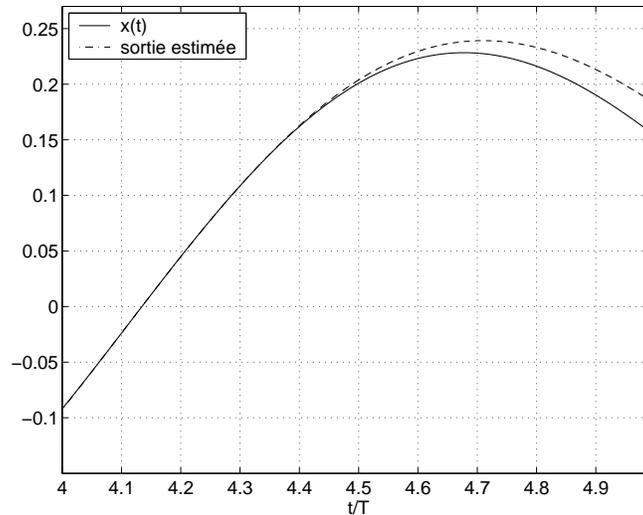


Figure 3.23: Signal de sortie de l'estimation obtenue pendant la cinquième itération, en utilisant l'intervalle  $[4T, 4.5T]$

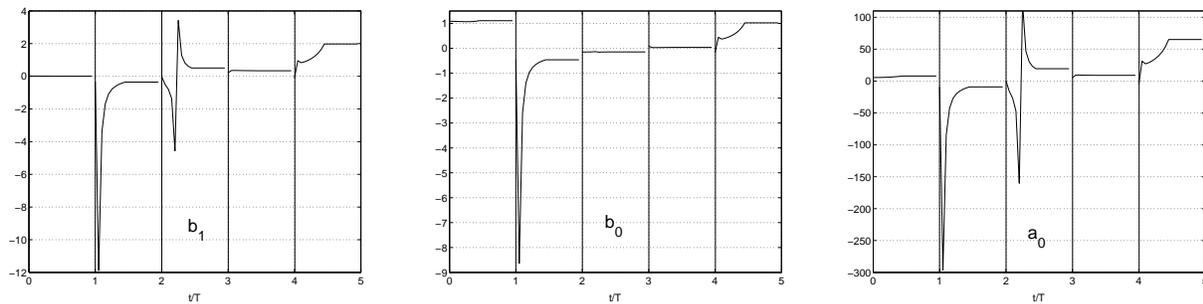


Figure 3.24: Évolution des coefficients du modèle réduit estimés dans l'intervalle  $[0, 0.5T]$

dont les coefficients ( $a_0$ ,  $b_0$  et  $b_1$ ) sont variables par morceaux dans le temps. C'est justement la possibilité d'adapter constamment ces coefficients qui nous permet d'utiliser un modèle d'ordre si réduit par rapport au système original et encore pouvoir bien modéliser la relation entrée-sortie du système.

Dans le cas d'un système de communication où la démodulation du signal reçu est faite symbole par symbole, cette approche peut être très intéressante puisqu'il suffit d'avoir, à chaque période symbole, un modèle du canal valable pour l'intervalle en question. Comme normalement la valeur d'une période symbole est faible, il est facile d'approcher le comportement entrée-sortie du canal par un modèle d'ordre réduit dans cet intervalle. De plus, la connaissance de l'ordre du système original n'est plus nécessaire. Cela représente un avantage important puisque l'ordre est une information difficile d'être disponible au récepteur. Dans le chapitre 4, nous développerons une méthode de démodulation basée sur cette approche.

### 3.10 Interprétation de la Méthode, Cas Sous-Modélisé

Comme nous avons vu, quand l'ordre de  $F(s)$  est inférieur à celui du système, situation dite *sous-modélisée*, une identification au sens littéral n'est plus possible. Dans ce cas, la solution obtenue à partir de la méthode proposée variera avec l'intervalle d'estimation utilisé et sa durée. Dans la suite, nous donnons une interprétation de la méthode d'identification proposée, qui permet d'exhiber le sens du problème d'approximation sous-jacent, dans un contexte sous-modélisé. Le début de l'intervalle d'estimation est fixé au temps  $t_0 = 0$ .

Nous partons du fait que les signaux d'entrée et sortie,  $u(t)$  et  $x(t)$ , satisfont une équation différentielle, comme montré par l'équation (3.4). Pour  $M$  et  $N$  donné,  $F(s)$ , donné par (3.3), peut être réécrite comme :

$$F(s) = \frac{B(s)}{s^N - A(s)}$$

où  $B(s) = b_0 + b_1s + \dots + b_Ms^M$  et  $A(s) = a_0 + a_1s + \dots + a_{N-1}s^{N-1}$ . Ainsi, nous pouvons définir la fonction d'erreur suivante (voir (3.12)) :

$$\hat{e}(s) = s^N \hat{x}(s) - \{A(s)\hat{x}(s) + B(s)\hat{u}(s)\} \quad (3.54)$$

En suivant l'algorithme décrit dans la section 3.4, les paramètres inconnus  $\theta = [a_0, \dots, a_{N-1}, b_0, \dots, b_M]^T$  sont estimés à partir de la solution du système linéaire d'équations

$$\frac{1}{s^\gamma} \frac{d^i}{ds^i} \hat{e}(s) = 0, \quad i = N, \dots, 2N + M \quad (3.55)$$

où  $\gamma > N$  pour avoir un estimateur strictement propre. Dans le domaine temporel, en utilisant (3.10), le système donné par (3.55) se traduit par :

$$\frac{(-1)^i}{(\gamma - 1)!} \int_0^\lambda (\lambda - z)^{\gamma-1} z^i e(z) dz = \frac{(-1)^i \lambda^{\gamma+i}}{(\gamma - 1)!} \int_0^1 w_{(\gamma, N+1)}(z) z^i e(\lambda z) dz = 0, \quad (3.56)$$

pour  $\kappa = 0, 1, \dots, N + M$ .  $\lambda$  désigne le temps d'estimation pendant lequel  $u(t)$  est connu au récepteur et  $w_{(p,q)}(t) = (1 - t)^{p-1} t^{q-1}$  est la fonction de poids associée aux polynômes orthogonaux de Jacobi,  $P_\kappa^{(p,q)}(t)$  sur  $[0, 1]$  [Chi78]. Pour plus de détail sur ces polynômes, voir annexe A.

Ainsi, en posant  $e(\lambda z) = e_\lambda(z)$ ,  $z \in [0, 1]$ , la restriction de la fonction d'erreur  $e(t)$  sur l'intervalle d'estimation  $[0, \lambda]$ , le système (3.56) se ramène à

$$\langle e_\lambda(z), P_\kappa^{(\gamma, N+1)}(z) \rangle_{w_{\gamma, N+1}} = 0, \quad \kappa = 0, 1, \dots, N + M \quad (3.57)$$

Il suffit, ainsi, d'annuler le produit interne entre  $e_\lambda(z)$  et  $P_\kappa^{(\gamma, N+1)}(t)$ . Considérons maintenant, en vertu du théorème d'approximation de Weierstrass [Riv74], le développement de  $e_\lambda(z)$  selon

$$e_\lambda(z) = \sum_{k=0}^L \varepsilon_k P_\kappa^{(\gamma, N+1)}(z) \quad (3.58)$$

où chaque coefficient  $\varepsilon_k$  est, d'après (3.54), de la forme

$$\varepsilon_k = Y_k^{(\lambda)} - \varrho_k(\boldsymbol{\theta}),$$

avec  $\varrho_k(\boldsymbol{\theta})$  étant une combinaison linéaire des paramètres  $\boldsymbol{\theta}$ , *i.e.*,  $\varrho_k(\boldsymbol{\theta}) = p_k^t \boldsymbol{\theta}$ . Avec le développement (3.58), le système (3.57) devient

$$Y_k^{(\lambda)} = p_k^t \boldsymbol{\theta}$$

Ainsi, on distingue plusieurs cas de figures:

1. Le temps d'estimation  $\lambda$  est tel que l'erreur  $e_\lambda(z)$  peut être approchée avec une erreur négligeable par un polynôme de degré  $L < N + M$ . Dans ce cas, l'ordre de  $F(s)$  est plus élevé que le nécessaire. Ainsi, nous sommes dans une situation de sur-modélisation par rapport au temps d'estimation (voir section 3.9). D'autre part, il est important de souligner que nous sommes en sous-modélisation par rapport à l'ordre du vrai système. Dans ce cas, le système (3.57) prend la forme

$$\begin{array}{c} L \\ \left\{ \begin{array}{c} \mathcal{P}_{11} \\ \vdots \\ \mathcal{P}_{1L} \end{array} \right. \left[ \begin{array}{c} * \\ \vdots \\ * \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_L \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} \mathcal{Q}_1 \\ \vdots \\ \mathcal{Q}_L \end{array} \right] \\ \text{---} \\ (n+m)-L \left\{ \begin{array}{c} 0 \cdots 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right. \left[ \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_L \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} \mathcal{Q}_1 \\ \vdots \\ \mathcal{Q}_L \end{array} \right] \end{array}$$

2. Le temps d'estimation  $\lambda$  est tel que  $e_\lambda(z)$  ne peut être approchée avec une erreur négligeable que par un polynôme de degré  $L > N + M$ . Dans ce cas, une bonne approximation ne serait atteinte qu'avec un  $F(s)$  d'ordre plus élevé. Ainsi, nous sommes dans une situation de sous-modélisation par rapport au temps d'estimation. Le développement (3.58) prend la forme:

$$e_\lambda(z) = \left[ P_0^{(\gamma, N+1)}(z) \cdots P_{N+M}^{(\gamma, N+1)}(z) \vdots P_{N+M+1}^{(\gamma, N+1)}(z) \cdots P_L^{(\gamma, N+1)}(z) \right] \left[ \begin{array}{c} \mathcal{Q} - \mathcal{P}\boldsymbol{\theta} \\ \dots\dots\dots \\ \mathcal{Q}_\infty - \mathcal{P}_\infty\boldsymbol{\theta} \end{array} \right]$$

et, en estimant  $\theta$  par  $Q - P\theta = 0$ , on obtient une erreur résiduelle donnée par

$$\|e_\lambda(z)\|_{w_{(\gamma, N+1)}} = \|Q_\infty - P_\infty P^{-1}Q\|$$

Dans ce cas l'estimation peut être améliorée en augmentant l'ordre de  $F(s)$  ce qui signifie l'augmentation du nombre d'équations.

3. Le temps d'estimation  $\lambda$  est tel que  $e_\lambda(z)$  peut être approchée avec une erreur négligeable par un polynôme de degré  $L = N + M$ . Dans ce cas, même si l'ordre choisi pour le modèle  $F(s)$  est insuffisant (en rappelant que nous sommes dans une situation de sous-modélisation), la sortie du système peut être parfaitement décrite par une équation différentielle dans l'intervalle de temps correspondant au temps d'estimation  $\lambda$ . Dans cet intervalle, la réponse impulsionnelle du modèle coïncide avec celle du système.

Cela justifie l'approche de la modélisation locale et les résultats obtenus dans la section 3.9.

### 3.11 Identification Autodidacte d'un Système SIMO

La méthode d'identification présentée ici peut être facilement étendue pour le cas d'estimation aveugle d'un système SIMO (modèle présenté à la figure 3.1) quand utilisée conjointement avec la technique développée par [LXT93, VKTB98, XLTK95]. Présentée à la section 3.2, cette technique est fondée sur le fait que, dans un système SIMO, les sorties sont corrélées vu qu'elles résultent d'un même signal d'entrée. Certes, la méthode proposée par [LXT93, VKTB98] travaille avec un modèle discret du système en question. La modification pour arriver à un modèle en temps continu est directe.

Le signal de sortie  $x_i(t)$  du  $i$ -ème canal sera donné par:

$$x_i(t) = \int_0^t u(\tau)h_i(t - \tau)d\tau$$

L'équation (3.1), dans le temps continu, est équivalente à la substitution de  $n$  par  $t$ . Elle peut aussi être réécrite de la façon suivante :

$$H_j(s)\hat{x}_i = H_j(s) (H_i(s)\hat{x}_i) = H_i(s) (H_j(s)\hat{x}_i) = H_i(s)\hat{x}_j \quad (3.59)$$

où  $H_j = B_j/A_j$ ,  $B_j$  et  $A_j$  étant des polynômes en  $s$ . De façon générale, nous pouvons écrire:

$$A_j\hat{x}_j = B_j\hat{u} \quad (3.60)$$

Les équations (3.59) et (3.60) nous permettent d'arriver à la relation suivante :

$$B_i(s)A_j(s)\hat{x}_j - B_j(s)A_i(s)\hat{x}_i = 0 \quad (3.61)$$

Faisons donc

$$C_{ij} = c_0^{ij} + c_1^{ij}s + \dots + c_{M_i+N_j}^{ij}s^{M_i+N_j} = B_i(s)A_j(s), \quad i, j = 0, \dots, K, \quad i \neq j \quad (3.62)$$

où  $K$  est le nombre de canaux du système et  $M_j$  et  $N_j$  sont les ordres du numérateur et du dénominateur du  $j$ -ième canal.

Les coefficients  $C_{ij}$  pourront être estimés en appliquant la méthode développée dans la section 3.4 à l'équation (3.61). La différence est qu'au lieu d'utiliser les signaux  $u$  et  $x$ , maintenant nous allons utiliser  $x_i$  et  $x_j$ . (3.61) sera donc dérivée récursivement par rapport à la variable  $s$  jusqu'à ce qu'on ait un système avec le même nombre d'équations et d'inconnus. Les équations du système seront divisées par  $s^\gamma$ , pour n'avoir que des opérateurs propres, où maintenant  $\gamma$  sera donné par le maximum parmi  $\{M_j + N_i, M_i + N_j\}$ . Il faut noter que, pour avoir un système linéairement identifiable, nous avons besoin d'une restriction sur les vecteurs  $C_{ij}$ . Nous pouvons donc faire  $c_{M_i+N_j}^{ij} = 1$ , ce qui signifie avoir  $b_M^i = 1$  et  $a_N^j = 1$  ou considérer  $b_M$  connu. Ainsi, avoir juste la restriction  $a_N = 1$  ne suffit plus.

Prenons un exemple simple avec  $K = 3$ . Les estimations des fonctions de transferts seront modélisées comme :

$$F_0 = \frac{1}{a_0^0 + s}, \quad F_1 = \frac{b_0^1 + s}{a_0^1 + a_1^1 s + a_2^1 s^2 + s^3}, \quad F_2 = \frac{b_0^2 + s}{a_0^2 + a_1^2 s + s^2} \quad (3.63)$$

En utilisant (3.61), nous aurons 3 équations à résoudre :

$$\begin{aligned} (c_0^{10} + c_1^{10}s + s^2)\hat{x}_0 - (c_0^{01} + c_1^{01}s + c_2^{01}s^2 + s^3)\hat{x}_1 &= 0 \\ (c_0^{20} + c_1^{20}s + s^2)\hat{x}_0 - (c_0^{02} + c_1^{02}s + s^2)\hat{x}_2 &= 0 \\ (c_0^{21} + c_1^{21}s + c_2^{21}s^2 + c_3^{21}s^3 + s^4)\hat{x}_1 - (c_0^{12} + c_1^{12}s + c_2^{12}s^2 + s^3)\hat{x}_2 &= 0 \end{aligned}$$

Ces équations peuvent être réécrites comme :

$$\begin{aligned} s^2\hat{x}_0 - s^3\hat{x}_1 &= -c_0^{10}\hat{x}_0 - c_1^{10}s\hat{x}_0 + c_0^{01}\hat{x}_1 + c_1^{01}s\hat{x}_1 + c_2^{01}s^2\hat{x}_1 \\ s^2\hat{x}_0 - s^2\hat{x}_2 &= -c_0^{20}\hat{x}_0 - c_1^{20}s\hat{x}_0 + c_0^{02}\hat{x}_2 + c_1^{02}s\hat{x}_2 \\ s^4\hat{x}_1 - s^3\hat{x}_2 &= -c_0^{21}\hat{x}_1 - c_1^{21}s\hat{x}_1 - c_2^{21}s^2\hat{x}_1 - c_3^{21}s^3\hat{x}_1 + c_0^{12}\hat{x}_2 + c_1^{12}s\hat{x}_2 + c_2^{12}s^2\hat{x}_2 \end{aligned}$$

Ainsi, chacune de ses équations sera traitée séparément, chacune menant à un système

d'équations différent obtenu à partir des dérivations par rapport à  $s$ .

Une fois qu'on ait identifié tous les vecteurs  $C_{ij}$ ,  $i, j = 0, 1, 2$ ,  $i \neq j$ , nous pouvons appliquer la technique développée par [VKTB98] pour récupérer les  $B_i$ s et  $A_i$ s. À partir de (3.62), nous pouvons voir le problème comme étant un cas spécial d'identification d'un système multi-canaux RIF, comme illustré à la figure 3.25. Par exemple, si on suit le modèle

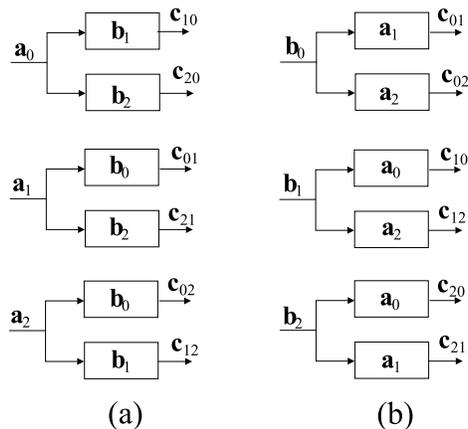


Figure 3.25: Système MIMO particulier

(a), le vecteur  $\mathbf{a}_i = [a_0^i \ a_1^i \ \dots \ a_{N-1}^i \ 1]$ , formé par les coefficients de  $A_i(s)$ , sera considéré comme la séquence d'entrée de deux "canaux" dont les fonctions de transfert seront données par  $\mathbf{b}_j$  et  $\mathbf{b}_k$ , formés par les coefficients de  $B_i(s)$  et  $B_j(s)$ , avec  $i \neq j, k$ . Nous pouvons donc écrire, de façon équivalente à (3.61),

$$\begin{aligned} B_2 C_{10} - B_1 C_{20} &= 0 \\ B_2 C_{01} - B_0 C_{21} &= 0 \\ B_1 C_{02} - B_0 C_{12} &= 0 \end{aligned} \tag{3.64}$$

Ici, chaque équation représente un système linéaire qui permet la détermination des  $B_i$ s, ce qui représente la solution traditionnelle d'un problème multi-canaux RIF [XLTK95]. Le modèle (b) de la figure 3.25 inverse les rôles de  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$ .

Toutefois, le choix entre les modèles (a) et (b) ne peut pas être fait sans attention, vu que seulement un des deux modèles aura une solution unique. Le fait que le système (3.64) est sous ou sur-déterminé ne dépend que des valeurs de  $M$ ,  $N$  et  $K$ . En effet, en choisissant le vecteur  $\mathbf{a}$  ou  $\mathbf{b}$  le plus petit pour être le "canal" est une condition suffisante (pas toujours nécessaire), pour avoir un système d'équations sur-déterminé [VKTB98]. Ainsi, si les canaux sont propres, nous devons utiliser le modèle (a). Une fois que les vecteurs  $B_i$  ont été déterminés à partir de (3.64), les  $A_i$  peuvent être identifiés en utilisant (3.62). Avec ce modèle, les  $B_i$  doivent être premiers entre eux pour garantir l'unicité de la solution obtenue.

Il faut aussi noter que les numérateurs et dénominateurs ne peuvent être récupérés à partir des  $C_{ij}$  que si  $K$  est supérieur à deux. En effet, si il n'y a que deux canaux, il n'est pas possible d'obtenir un système (3.64) sur-déterminé quelques soient les valeurs de  $M$  et  $N$ .

Pour illustrer, nous avons simulé un cas très simple d'un système avec 3 canaux, où ceux-ci sont donnés par :

$$H_1 = \frac{1}{s+2}, \quad H_2 = \frac{s+0.5}{s^3+9.4s^2+22.24s+38.08}, \quad H_3 = \frac{s+3}{s^2+14.7s+47} \quad (3.65)$$

La table 3.4 montre les valeurs correctes des vecteurs  $C_{ij}$ ,  $i, j = 0, 1, 2$ ,  $i \neq j$  et les valeurs estimées en considérant l'ordre des canaux connus, sans addition de bruit.  $\gamma$  a été pris égal à 6. Le signal d'entrée était non stationnaire et donné par la figure 3.5.

	Valeurs Exactes	Valeurs Estimées
$C_{12}$	[1.00 9.40 22.24 38.08]	[1.00 9.40 22.24 38.08]
$C_{21}$	[1.00 2.50 1.00]	[1.00 2.50 1.00]
$C_{13}$	[1.00 14.70 47.00]	[1.00 14.70 46.99]
$C_{31}$	[1.00 5.00 6.00]	[1.00 5.00 6.00]
$C_{23}$	[1.00 15.20 54.35 23.50]	[1.00 15.04 53.59 25.97]
$C_{32}$	[1.00 12.40 50.44 104.80 114.24]	[1.00 12.24 50.10 104.06 114.47]

Table 3.4: Estimation des vecteurs  $C_{ij}$

Comme nous pouvons voir, les valeurs ont été très bien estimées, ce qui permet de récupérer les  $B_i$ s et  $A_i$ s presque exactement.

## 3.12 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté une nouvelle technique d'identification de systèmes modélisés comme des fonctions de transfert rationnelles. La technique est fondée sur une nouvelle théorie basée sur l'algèbre différentielle et le calcul opérationnel. Une des caractéristiques principales de cette nouvelle méthode est le fait de considérer le modèle du système en temps continu, ce qui est très peu usuel dans la littérature. Avec un tel modèle, la méthode apporte des avantages :

- nous n'avons pas besoin de connaître les caractéristiques statistiques des signaux
- la méthode n'est pas une optimisation d'un critère. Alors, elle ne repose pas sur la recherche d'un extremum d'une surface d'erreur. Il n'y a donc pas de problèmes de

convergence et encore moins de convergence vers des extrema locaux

- la méthode peut être très rapide, ce qui permet une implémentation en ligne.

Nous avons montré que la méthode a une bonne performance aussi en condition de sur-modélisation. Par contre, deux problèmes peuvent dégrader sa performance: le mauvais conditionnement de la matrice  $\mathcal{P}$  et le signal d'entrée, qui doit être à excitation persistante. Principalement avec l'addition de bruit, si le signal d'entrée n'est pas suffisamment riche, la perte de performance devient importante.

L'analyse des méthodes pour essayer d'améliorer ce scénario nous a montré que, principalement avec un signal d'entrée non-stationnaire, il est possible d'avoir des gains de performance importants. De plus, l'utilisation des polynômes de Jacobi dans l'obtention du système d'équations, améliore considérablement le conditionnement de la matrice  $\mathcal{P}$ .

À part cela, nous avons montré que, dans une situation sous-modélisée, le modèle obtenu dépend aussi de l'intervalle d'estimation et de sa durée. Ainsi,  $F(s)$  aura des coefficients qui varient en fonction de  $\lambda$ , ce qui facilite la détection de la sous-modélisation. Ce comportement suggère la possibilité de réaliser une modélisation locale du système. Dans ce cas, il est possible d'utiliser des modèles d'ordre réduit pour modéliser le comportement entrée-sortie pendant un intervalle de temps court. Le grand avantage de cette méthode quand appliquée au problème de l'égalisation, en plus de sa simplicité, est que le récepteur n'a plus besoin de la connaissance de l'ordre du canal, information qui normalement n'est pas disponible.

Enfin, nous avons étendu la méthode pour l'estimation d'un système SIMO, en l'utilisant conjointement avec la technique développée par [VKTB98]. Dans ce cas, la méthode est aveugle mais il faut que le système ait au moins 3 canaux pour permettre la récupération correcte de tous les numérateurs et dénominateurs.

Dans le prochain chapitre, nous utiliserons les estimations des canaux obtenues ici pour démoduler le signal reçu, de façon à récupérer les symboles transmis. Cela sera fait de deux façons différentes: en utilisant les modèles qui dépendent d'une bonne estimation de l'ordre du canal et en utilisation l'approche de modélisation locale.



# Chapitre 4

## Méthodes d'Égalisation

En appliquant la méthode développée au problème de l'égalisation, une fois que le canal a été estimé, cette information peut être utilisée pour récupérer les symboles transmis. Dans ce chapitre, nous allons présenter deux techniques de démodulation. Dans la première, qui peut être implémentée dans le domaine fréquentiel ou temporel, les symboles sont récupérés par l'utilisation d'une formule explicite, ce qui rend la méthode très simple et rapide. Toutefois, pour une bonne performance, il faut avoir une bonne estimation de la fonction de transfert du canal. À partir de ce que nous avons vu dans le chapitre 3, cela n'est possible que quand le récepteur a une bonne approximation de l'ordre du canal, information qui n'est pas toujours disponible.

Pour cette raison, nous proposons aussi une deuxième méthode, où l'estimation *a priori* de la fonction de transfert du canal n'est pas nécessaire. Les symboles sont, alors, identifiés directement. Cette méthode est basée sur une modélisation locale du canal, faite pendant un court intervalle de temps et en utilisant un modèle simple d'ordre réduit.

### 4.1 Introduction

Dans l'égalisation comme dans l'identification des systèmes, les méthodes algébriques et déterministes peuvent apporter des avantages. Par exemple, dans le cas des égaliseurs autodidactes, les méthodes classiques basées sur les statistiques de second ordre ou d'ordre supérieur peuvent avoir des performances qui se dégradent à cause des courtes séquences d'échantillons disponibles, qui ne suffisent pas pour la convergence des algorithmes. En essayant de résoudre ce problème, plusieurs méthodes algébriques et déterministes ont été développées ces dernières années [LX95, GT99]. Comme toujours, le traitement est fait avec les modèles des systèmes en temps discret.

Dans ce chapitre nous allons proposer deux techniques d'égalisation du signal reçu. Le

système continuera à être traité en temps continu, ce qui nous permet d'exploiter directement de la forme d'onde connue des signaux.

La première méthode a besoin d'une estimation *a priori* de la fonction de transfert du canal, ce qui sera fait en utilisant la méthode développée dans le chapitre 3. Elle n'est pas une technique aveugle puisqu'une courte séquence d'apprentissage est nécessaire pour l'estimation du canal. Toutefois, la récupération des symboles est faite par une formule explicite, ce qui a l'avantage d'être une méthode simple et rapide. De plus, elle peut être implémentée dans le domaine fréquentiel ou temporel, ce qui mène à des performances différentes, comme nous verrons dans la section 4.4.

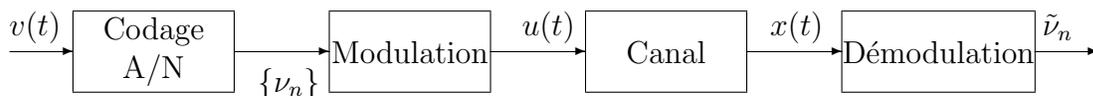
Afin d'éliminer le problème posé par l'ordre du canal qui est inconnu au récepteur, et qui est nécessaire pour l'estimation de sa fonction de transfert, nous proposons une deuxième méthode d'égalisation qui ne nécessite pas de cette information. La méthode développée ressemble beaucoup à la méthode d'estimation du canal, mais elle permet l'identification des symboles directement. Comme la démodulation est faite symbole par symbole, la méthode est basée sur une modélisation locale du canal. Cela nous permet d'utiliser un modèle simple d'ordre réduit. La méthode continue à être semi-aveugle puisqu'une courte séquence d'apprentissage, de l'ordre de 2 symboles, est nécessaire. Cependant, l'apprentissage n'est pas destiné à l'estimation du canal, mais à la démodulation des symboles directement, comme nous verrons dans la section 4.5.

Les méthodes seront testées par des simulations pour la démodulation des signaux 2-PAM (*Pulse Amplitude Modulation*) et QPSK (*Quadrature Phase Shift Keying*).

## 4.2 Le Problème de l'Égalisation

### 4.2.1 La Chaîne de Communication

Le schéma suivant représente une chaîne de communication numérique :



Le signal continu à transmettre,  $v(t)$ , est d'abord échantillonné à un rythme  $F_e = 1/T$ , ou, autrement dit, à la cadence des symboles, où  $T$  désigne la période symbole. Le train binaire résultant est découpé en paquets de  $D$  bits puis codé en une suite de symboles  $\{\nu_n\}$ , pris dans un alphabet composé de  $\mathcal{A} = 2^D$  entrées. Plus  $\mathcal{A}$  est grand, plus le débit binaire est élevé.

La modulation consiste à coder la suite de symboles en un signal continu pouvant transiter

à travers le canal. En bande de base, ce signal est donné par:

$$u(t) = \sum_{k=0}^n \nu_k g(t - kT) \quad (4.1)$$

où  $g(t)$  est l'impulsion de mise-en-forme du signal et  $nT \leq t < (n + 1)T$ .

Ce signal,  $u(t)$ , sera, donc, transmis à travers d'un canal modélisé par une fonction de transfert rationnelle  $H(s)$ . Ce canal distord le signal transmis, notamment, introduisant de l'interférence entre symboles (IES). Cette interférence est résultat de l'étalement temporel des impulsions  $g(t)$  transmises, dû à l'inévitable limitation en largeur de bande du canal. De plus, celui-ci peut aussi introduire du bruit. Ainsi, pour récupérer l'information originale, *i.e.*, les symboles, à partir du signal reçu à la sortie du canal,  $x(t)$ , il faut l'utilisation d'un récepteur, appelé égaliseur. Le but de ce dispositif est de traiter le signal reçu pour éliminer l'IES et récupérer les symboles émis correctement.

Dans les simulations qui suivent,  $g(t)$  continuera à être donné par un cosinus sur-élevé de support égal à  $5T$ . Ainsi, la correcte estimation du canal exige une séquence d'apprentissage de 5 symboles.

## 4.2.2 État-de-l'Art

La façon la plus traditionnelle d'égaliser un système est en utilisant ce qu'on appelle *égalisation supervisée*. Dans l'égalisation supervisée, le récepteur connaît une séquence des symboles émis et il l'utilise pour déterminer les coefficients du filtre de réception. Cela est fait en optimisant un critère d'erreur, le plus répandue étant celui de l'erreur quadratique moyenne. Ce critère est à l'origine du très connu filtrage de Wiener et des algorithmes du gradient descendant comme le LMS. Pondéré par un facteur, il est aussi à l'origine de l'algorithme des moindres carrés [Hay96].

Cependant, le fait d'avoir besoin d'une séquence d'apprentissage peut être un inconvénient. Dans un système du type *broadcast*, par exemple, où plusieurs récepteurs se connectent à un même émetteur, il est impossible à celui-ci d'arrêter la transmission à chaque fois qu'un nouveau utilisateur se connecte, pour transmettre la séquence d'apprentissage. Ainsi, des méthodes d'égalisation semi-aveugle et aveugle ont commencé à être développées. Les méthodes semi-aveugles utilisent des séquences d'apprentissage très courtes, tandis que les méthodes aveugles n'ont accès, en aucun moment, au signal émis. Dans ce dernier cas, les méthodes sont basées sur des critères plus complexes, incluant souvent des statistiques d'ordre supérieures (SOS) ou cyclostationnaires des signaux. Dans le premier cas, les critères les plus connus sont le critère de Godard, qui est à l'origine du algorithme CMA et celui

de Shalvi-Weinstein, qui est une simplification du critère de Benveniste et qui résulte dans l'algorithme super-exponentiel [Hay00]. En ce qui concerne l'exploitation des caractéristiques cyclostationnaires, l'étude a commencé avec Gardner [Gar94]. Ces méthodes ont un avantage important par rapport à celles basées sur des SOS, puisqu'elles convergent avec moins de données, c'est-à-dire, plus rapidement. Un des inconvénients bien connu de ces méthodes est la possibilité de convergence vers des minima locaux. De plus, même si elles sont considérées aveugles dans le sens où elles ne connaissent pas le canal ou le signal d'entrée, elles supposent toujours la connaissance de certaines caractéristiques statistiques de ce signal.

Ces dernières années, quelques méthodes déterministes ont aussi été proposées. Toutes ces méthodes considèrent des systèmes SIMO ou, de façon équivalente, le sur-échantillonnage du signal reçu. Par exemple, [LX95] développe une méthode aveugle d'estimation des symboles basée sur les propriétés du sous-espace de signal et du sous-espace nul d'un système SIMO. L'article n'analyse pas la question du bruit. En [GT99], la même technique de [LXT93], montrée dans la section 3.11, est utilisée pour identifier directement les égaliseurs au lieu des canaux. Cependant, dans le cas bruité, la méthode se complique revenant à minimiser un critère d'erreur. De plus, ce critère dépend du calcul des espérances des signaux, ce qui exige une fenêtre temporelle considérable pour une bonne estimation.

Toutes ces méthodes ont une caractéristique en commun: les signaux et les systèmes sont traités en temps discret. En travaillant dans le temps continu, nous allons être capables d'exploiter la connaissance de la forme de  $g(t)$  pour proposer une méthode algébrique et déterministe, très rapide et simple d'être calculée. La méthode peut être classifiée comme semi-aveugle, dû au besoin d'une courte séquence d'apprentissage. Dans ce qui suit, nous proposerons des méthodes de démodulation en utilisant l'information sur le canal obtenue de l'application de la technique du chapitre 3.

### 4.3 Validité du Modèle de Canal par Fonction de Transfert Rationnelle

Avant de présenter les méthodes de démodulation, il serait intéressant d'étudier la pertinence de l'utilisation d'un modèle de canal basé sur des fonctions de transfert rationnelles. Comme nous sommes habitués, en traitement du signal, à travailler avec la réponse impulsionnelle discrète des canaux, la question qui peut se poser est si le modèle par fonction rationnelle arrive à bien approcher les canaux réels ou ceux utilisés souvent dans la littérature. Notons que cette question de la pertinence du modèle RII a déjà été posée dans la littérature, à propos du problème de l'annulation d'échos acoustiques en téléconférence [Mbo92].

Si l'on s'en tient à l'interprétation physique (superposition de trajets multiples avec des atténuations et des retards différents) habituellement donnée au phénomène de propagation dans les canaux de communication mobiles, on peut difficilement justifier la présence de pôles dans la modélisation de tels canaux. Cependant, notre objectif est simplement d'avoir une description mathématique du comportement global entrée-sortie de ces canaux.

L'étude de quelques exemples nous donne raison, mais il faut tenir compte de certains détails. Il n'est pas possible d'approcher, par une fonction rationnelle, un canal discret RIF qui introduit un retard considérable, comme, par exemple, celui montré à la figure 4.1. Cela est dû au fait qu'un tel retard s'exprime, dans le domaine de la transformée de Laplace, par la multiplication de la fonction de transfert par  $e^{-t_r s}$ , où  $t_r$  est le retard. Comme cette fonction n'est pas rationnelle, l'approximation devient impossible.

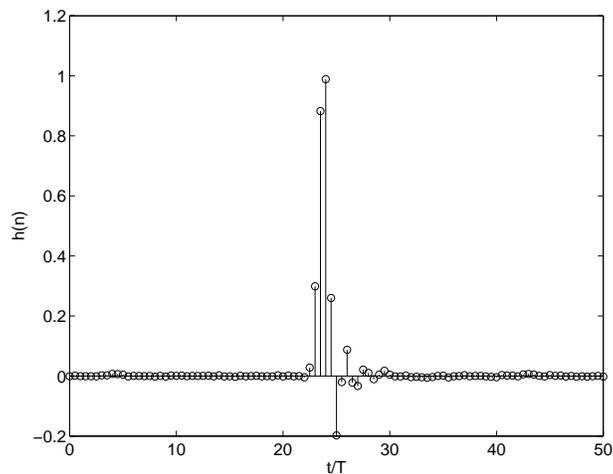


Figure 4.1: Réponse impulsionnelle d'un canal avec retard initial

Pour trouver une fonction de transfert rationnelle en temps continu qui soit une bonne approximation d'un canal en temps discret, avec une réponse impulsionnelle donnée par des coefficients réels, nous avons suivi la procédure ci-dessous:

- Calcul de la réponse en fréquence du canal discret.
- Recherche d'une fonction de transfert rationnelle en temps continu qui approche cette réponse, en minimisant  $\|\mathbf{b} - R_H \mathbf{a}\|^2$  où  $R_H$  est la réponse en fréquence souhaitée et  $\mathbf{b}$  et  $\mathbf{a}$  sont les vecteurs des coefficients du numérateur et du dénominateur du filtre recherché pour un ordre  $M$  et  $N$  donné. Il est clair qu'il faut tenir compte du fait que la réponse en fréquence du canal de départ sera donnée en fonction des radians par échantillon, tandis que la réponse en fréquence de la fonction de transfert recherchée sera donnée en fonction des radians par seconde.

- Nous retiendrons le filtre correspondant à un ordre  $M$  et  $N$  minimal qui donne des résultats satisfaisants, c'est-à-dire, avec une réponse en fréquence semblable à l'originale.

Partons donc d'un canal obtenu à partir de mesures réelles. Nous avons pris la partie réelle des coefficients du canal numéro 1 de la base de données de Cornell (disponible sur internet à l'adresse <http://bard.ece.cornell.edu/downloads>) et nous avons coupé sa réponse impulsionnelle pour que le coefficient le plus puissant soit le premier, c'est-à-dire, pour éliminer le retard initial. La réponse impulsionnelle du canal considéré est montrée dans la figure 4.2. Ce canal a été obtenu avec un taux d'échantillonnage de  $T/2$ , ce qui correspond à deux fois la cadence des symboles.

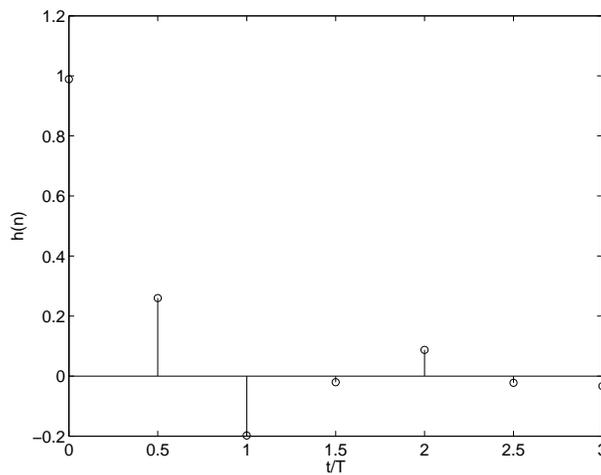


Figure 4.2: Réponse impulsionnelle du canal considéré

En suivant la procédure décrite ci-dessus, nous obtenons la fonction de transfert rationnelle suivante:

$$G(s) = \frac{1.075s^4 + 6.084s^3 + 50.84s^2 + 118.1s + 304.8}{s^4 + 7.614s^3 + 47.78s^2 + 113.3s + 279.2}$$

La figure 4.3 compare les réponses en fréquence du canal de départ et de  $G(s)$ , tandis que la figure 4.4 montre la sortie de ces canaux, pour un même signal d'entrée. Le signal d'entrée utilisé était un bruit blanc. Nous pouvons donc conclure que le canal RIF discret considéré peut être bien approché par une fonction de transfert en temps continu,  $G(s)$ , avec des valeurs d'ordre du numérateur et du dénominateur raisonnables.

Ensuite nous avons suivi la même procédure pour le canal suggéré par [Pro95] (item c, page 616), dont la réponse impulsionnelle, échantillonnée à la cadence des symboles, est donnée par  $h(n) = [0.227 \ 0.460 \ 0.688 \ 0.460 \ 0.227]$ . Notez que ce canal introduit un retard de deux périodes symbole, mais nous verrons que, comme ce retard n'est pas très important, nous arrivons à bien l'approcher par une fonction de transfert rationnelle.

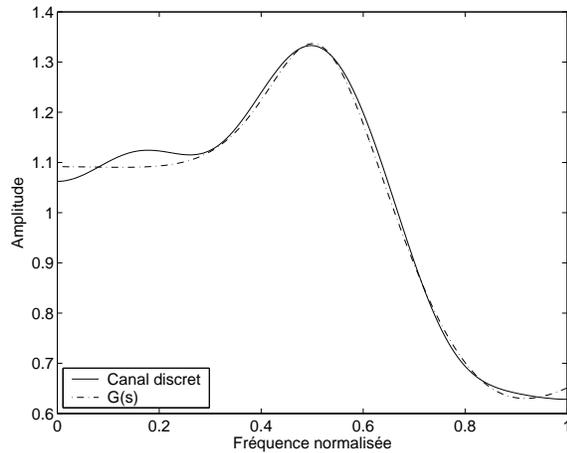


Figure 4.3: Réponses en fréquence de  $h$  et de  $G(s)$

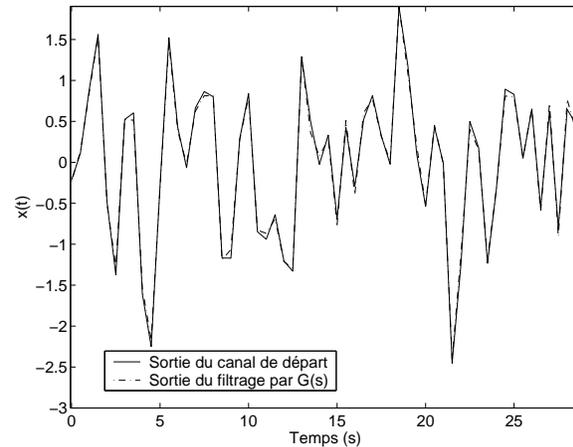


Figure 4.4: Signal de sortie des canaux

La fonction de transfert en temps continu, obtenue comme une approximation de la réponse en fréquence de  $h(n)$ , est:

$$G(s) = \frac{1.135s^4 + 0.03706s^3 + 10.61s^2 + 0.2848s + 24.64}{s^5 + 3.498s^4 + 12.75s^3 + 22.29s^2 + 25.05s + 12.07}$$

Les figures 4.5 et 4.6 montrent les réponses en fréquences des deux filtres et le signal de sortie obtenu à partir du filtrage par chacun des deux canaux. Encore une fois, nous pouvons voir que  $G(s)$  est une bonne approximation de  $h(n)$ .

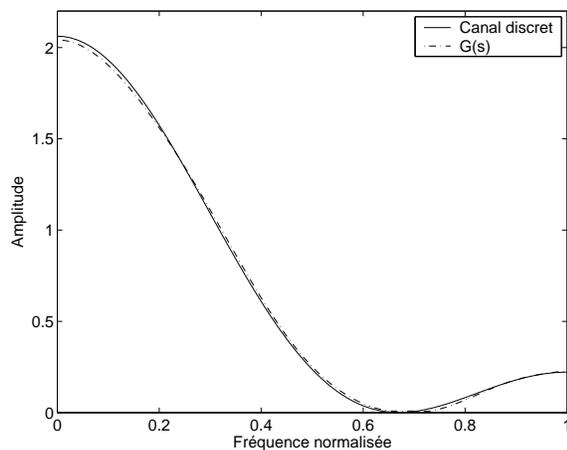


Figure 4.5: Réponses en fréquence de  $h(n)$  et de  $G(s)$

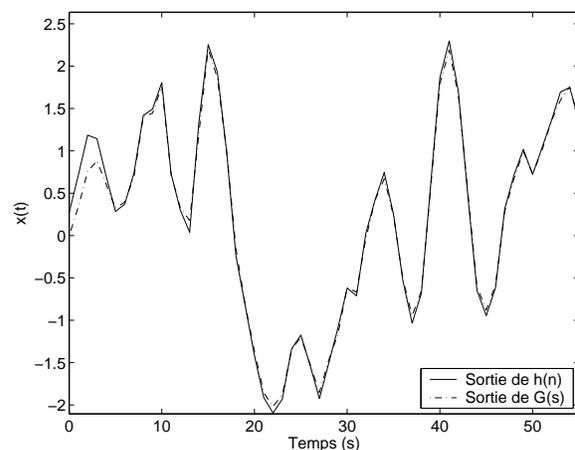


Figure 4.6: Signal de sortie des canaux

Ces exemples montrent que l'on peut modéliser correctement des canaux de communications mobiles à l'aide de fonctions de transfert rationnelles. Il est vrai que parfois cette

modélisation peut être difficile, comme dans les cas des canaux qui introduisent des retards, mais cela ne diminue pas l'intérêt d'utiliser un tel modèle, puisqu'il permet la représentation d'une grande quantité de filtres.

## 4.4 Démodulation en Utilisant l'Estimation de la Fonction de Transfert du Canal

Une fois que nous avons une bonne estimation du canal (chapitre 3), il faut encore démoduler le signal reçu pour récupérer les symboles transmis. La figure 4.7 montre le système complet en question. Pour le moment, nous considérons une communication sans bruit.

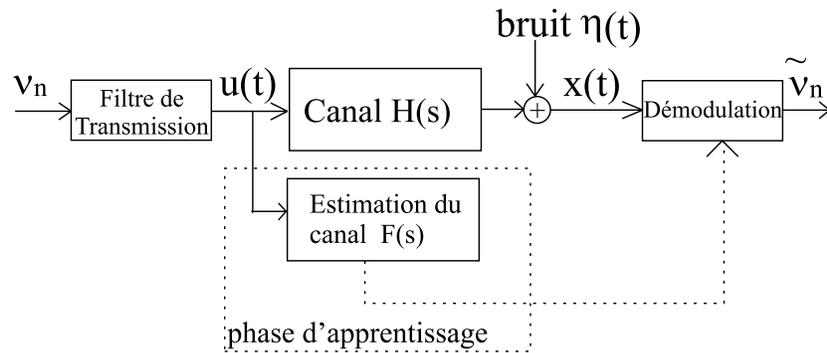


Figure 4.7: Modèle du système

Si le canal est de phase minimale, il suffit d'utiliser l'inverse de  $F(s)$  comme égaliseur. Si  $F(s)$  est une bonne approximation de  $H(s)$ , nous aurons, comme système équivalent:

$$G(s) = H(s) \frac{1}{F(s)} \approx H(s) \frac{1}{H(s)} = 1$$

Cette solution représente une égalisation "forçage à zéro". L'échantillonnage de la sortie au même débit que la transmission des données (en considérant une synchronisation émetteur-récepteur parfaite) permet de récupérer directement les symboles.

Cependant, si le canal est de phase non minimale le problème se complique, car l'inverse de  $F(s)$  ne sera pas causale. En effet, les zéros qui ont une partie réelle positive deviendront des pôles instables. Nous proposons, donc, d'exploiter, outre  $F(s)$ , la forme connue du signal en temps continu. Cela peut être fait de deux façons : dans le domaine fréquentiel, comme pour l'estimation du canal, ou directement dans le domaine temporel.

### 4.4.1 Domaine Fréquentiel

On s'intéresse au signal reçu dans l'intervalle de temps  $[nT, (n+1)T]$ . Si  $H(s)$  désigne la fonction de transfert du canal, alors l'analogue fréquentiel (opérationnel) de ce signal est  $\hat{x}(s) = H(s) \sum_{k=0}^n \nu_k \hat{g}_k(s)$  où  $\hat{g}_k(s)$  est la transformée de Laplace de  $g(t - kT)$ ,  $g(t)$  étant l'impulsion de mise-en-forme du signal. Dans la suite, on remplace  $H(s)$  par son estimation,  $F(s)$ , obtenue dans le chapitre 3. Le signal reçu  $\hat{\tilde{x}}(s)$ , exprimé dans le domaine fréquentiel, est alors modélisé par

$$\hat{\tilde{x}}(s) = F(s) \sum_{k=0}^n \nu_k \hat{g}_k(s) \quad (4.2)$$

Notre but maintenant est d'identifier les symboles transmis,  $\nu_k$ . Dans l'équation (4.2), le signal  $\tilde{x}(t)$  peut être substitué par le signal de sortie connu,  $x(t)$ .  $F(s)$  et  $g(t)$  sont aussi connus. Ainsi, les seuls paramètres inconnus sont les symboles  $\nu_k$ .

$F(s)$  peut être écrit comme  $F(s) = B(s)/A(s)$  où  $A(s)$  et  $B(s)$  sont deux polynômes connus, en  $s$ . L'équation (4.2) dévient alors (la dépendance de la variable  $s$  a été éliminée pour simplifier la notation) :

$$A\hat{x} = B \sum_{k=0}^n \nu_k \hat{g}_k \quad (4.3)$$

Ainsi, pour identifier le  $n$ -ième symbole, nous devons prendre en compte les symboles précédents déjà identifiés. Nous pouvons donc réécrire (4.3) comme :

$$A\hat{x} - B \sum_{k=0}^{n-1} \nu_k \hat{g}_k = B\nu_n \hat{g}_n \quad (4.4)$$

où les symboles  $\nu_k$  pour  $k = 0, \dots, n-1$  sont déjà connus.

Ainsi, il suffit d'utiliser la même technique développée dans la section 3.4 pour identifier les symboles. Comme nous n'avons qu'un paramètre inconnu à obtenir, il suffit de dériver le système pour éliminer les conditions initiales et nous aurons une équation simple à résoudre. De la même façon qu'en (3.14), (4.4) sera divisée par  $s^\gamma$  pour qu'il n'y ait que des termes propres. En somme, nous obtiendrons une équation comme celle du système (3.20), mais où les calculs des intégrales de  $u(t)$  seront remplacés par celles de  $g(t)$ .

### 4.4.2 Domaine Temporel

La méthode dans le domaine temporel est équivalente à celle du domaine fréquentiel. En considérant  $F(s)$  strictement propre, c'est-à-dire,  $M < N$ , elle peut être décomposée en

fractions partielles de la façon suivante :

$$F(s) = \sum_k \frac{\beta_k}{s - \omega_k} \quad (4.5)$$

où  $\omega_k$  est le  $k$ -ième pôle de  $F(s)$  et les coefficients  $\beta_k$  sont des constantes. L'équation (4.5) nous permet de trouver le canal dans le domaine temporel facilement. En faisant la transformée inverse de Laplace, nous avons [Mik83] :

$$f(t) = \sum_k \beta_k e^{-\omega_k t} \quad (4.6)$$

En utilisant (4.6), le signal de sortie  $x(t)$  dans l'intervalle  $nT \leq t < (n+1)T$  peut être écrit comme :

$$x(t) = \sum_{k=0}^n \nu_k f(t) * g(t - kT) = \sum_{k=0}^n \nu_k \int_0^t g(\tau - kT) f(t - \tau) d\tau \quad (4.7)$$

Pour faciliter la notation, nous pouvons définir  $v_{i,j} = \int_0^t g(\tau - iT) f(t - \tau) d\tau$ , dans l'intervalle  $jT \leq t < (j+1)T$  et  $x_j$  comme étant le signal de sortie  $x(t)$  dans l'intervalle  $jT \leq t < (j+1)T$ . Cela nous permet d'écrire le système suivant, pour  $0 \leq t < (n+1)T$ :

$$\begin{bmatrix} v_{0,0} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ v_{0,1} & v_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 \\ v_{0,n} & v_{1,n} & v_{2,n} & \dots & v_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_0 \\ \nu_1 \\ \vdots \\ \nu_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

L'équation (4.8) nous permet de voir facilement que, une fois de plus, pour l'identification du  $n$ -ième symbole, nous allons avoir besoin des symboles précédents déjà identifiés. En intégrant les deux membres de l'équation (4.7) entre  $nT$  et  $(n+1)T$ , on obtient:

$$\int_{nT}^{(n+1)T} \sum_{k=0}^{(n-1)} \nu_k v_{k,n}(t) dt + \nu_n \int_{nT}^{(n+1)T} v_{n,n}(t) dt = \int_{nT}^{(n+1)T} x(t) dt \quad (4.9)$$

ce qui nous donne :

$$\nu_n = \frac{\int_{nT}^{(n+1)T} x(t) dt - \int_{nT}^{(n+1)T} \sum_{k=0}^{(n-1)} \nu_k v_{k,n}(t) dt}{\int_{nT}^{(n+1)T} v_{n,n}(t) dt} \quad (4.10)$$

où les symboles précédents, c'est-à-dire,  $\nu_i$ , avec  $i = 0, \dots, (n-1)$ , sont considérés comme étant connus. Ainsi, nous avons obtenu une expression explicite pour la récupération des

symboles, qui ne dépend pas de l'optimisation d'un critère, comme dans la plupart des méthodes existantes dans la littérature. Une fois qu'on a  $F(s)$ , l'identification des symboles devient très rapide.

La méthode proposée donnée par (4.10), peut être vue comme un DFE (*Decision Feedback Equalizer*) en temps continu, comme montré dans la figure 4.8, vu qu'elle dépend des symboles estimés précédemment pour décider l'actuel [NMF04].

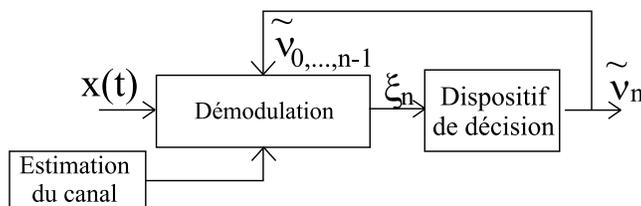


Figure 4.8: La méthode de Démodulation

Même si les filtres DFE ont le désavantage bien connu de la propagation d'erreurs [WWC94], ils ont des très bonnes performances principalement pour inverser des canaux difficiles, avec des zéros proches du cercle unité, limitant l'amplification du bruit [MCJ95].

### 4.4.3 Résultats des Simulations et Discussion

#### Modulation 2-PAM

Pour analyser juste la performance des méthodes de démodulation, nous avons commencé par considérer le canal comme étant connu au récepteur. Nous avons utilisé un canal simple à phase non-minimale :

$$H(s) = \frac{s - 2.3}{s^2 + 6.3s + 6.5}$$

Une fois encore,  $g(t)$  est le cosinus sur-élevé avec un facteur de *roll-off* de 0.33 et la modulation est 2-PAM. Pour le calcul des intégrales par (3.43), nous avons pris  $\gamma = 5$  et  $\lambda = 1$ . Pour le moment nous n'avons pas additionné de bruit. Les figures 4.9 et 4.10 montrent les résultats obtenus en utilisant la méthode de démodulation dans le domaine fréquentiel et dans le domaine temporel respectivement. Nous avons transmis 100 symboles et utilisé une grille de 15000 points pour le calcul des intégrales. Cela est équivalent à prendre 15000 échantillons de  $g(t)$  et  $x(t)$  par période symbole.

Nous pouvons donc observer que les deux méthodes ont des performances équivalentes. Les deux arrivent à bien démoduler le signal reçu, presque sans laisser d'interférence entre symboles (IES) résiduelle.

Il faut encore noter que, dans ces simulations, nous avons considéré  $g(t)$  avec un support de

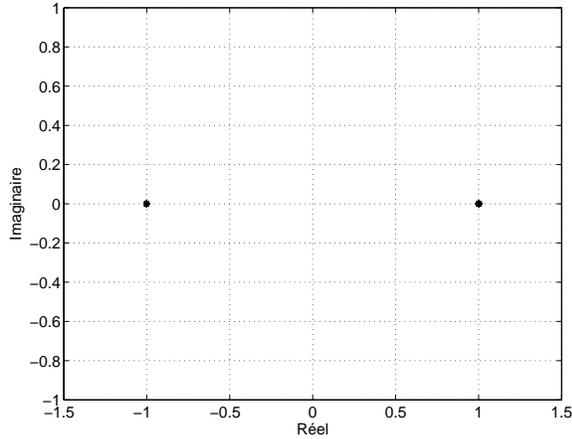


Figure 4.9: Symboles récupérés, domaine fréquentiel

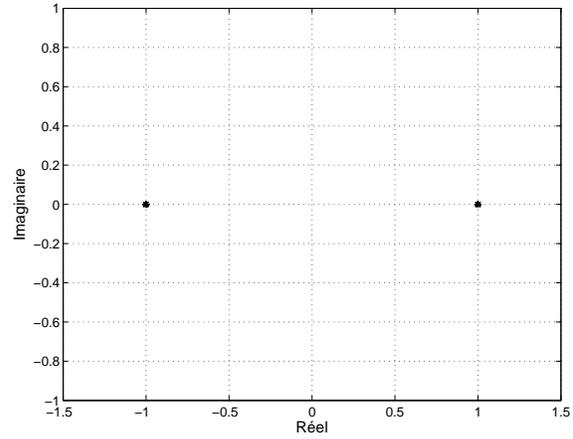


Figure 4.10: Symboles récupérés, domaine temporel

5T. Cela nous permet d'implémenter les deux méthodes par bloc. Ainsi, dans les simulations, nous avons substitué le terme  $\sum_{k=0}^{n-1} \nu_k \hat{g}_k$  de (4.4) par  $\sum_{k=n-4}^{n-1} \nu_k \hat{g}_k$  et le terme  $\sum_{k=0}^{n-1} \nu_k v_{k,n}(t)$  de (4.10) par  $\sum_{k=n-4}^{n-1} \nu_k v_{k,n}(t)$ .

Différemment de l'analyse du chapitre 3, maintenant nous pouvons évaluer l'estimation du canal,  $F(s)$ , par rapport à la démodulation des symboles transmis. De façon générale, il est clair que la récupération des symboles sera d'autant meilleure que l'approximation de  $H(s)$  donnée par  $F(s)$  sera bonne.

Considérons, donc, que le canal n'est pas connu et qu'il faut utiliser les estimations  $F(s)$  pour récupérer les symboles transmis. Commençons par la méthode de démodulation dans le domaine fréquentiel. La figure 4.11 montre les résultats pour la transmission de 100 symboles, en modulation 2-PAM, avec  $\gamma$  égal à 18 et  $\lambda = 1$ .

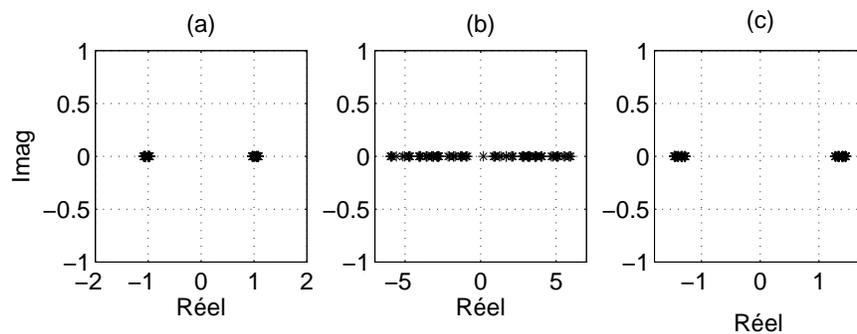


Figure 4.11: Résultats de la méthode de démodulation, domaine fréquentiel (2-PAM);  $F(s)$  avec : (a)  $M = 2, N = 3$ ; (b)  $M = 1, N = 3$ ; (c)  $M = 2, N = 4$

La figure (a) correspond à une modélisation exacte. Le canal a une fonction de transfert

rationnelle

$$H(s) = \frac{s^2 - 3.2s - 1.85}{s^3 + 7.4s^2 + 17.44s + 27.2}$$

et on choisit  $F(s)$  de même ordre ( $M = 2, N = 3$ ). Comme attendu, dû à la très bonne approximation donnée par  $F(s)$ , il n'y a presque pas d'IES résiduelle.

La figure (b) correspond à un canal toujours rationnel,

$$H(s) = \frac{s^2 + 4s + 1.75}{s^3 + 7.4s^2 + 17.44s + 27.2} \quad (4.11)$$

mais avec un modèle  $F(s)$  d'ordre réduit ( $M = 1, N = 3$ ). Comme nous avons vu dans le chapitre 3, il n'est pas possible d'obtenir une bonne approximation pour  $H(s)$  dans cette situation puisque, maintenant, l'équation (4.4) n'est plus satisfaite, une fois que  $B$  a un ordre incorrect.

La figure (c) montre les résultats pour le cas sur-modélisé ( $F(s)$  avec  $M = 2$  et  $N = 4$ ),  $H(s)$  et  $F(s)$  étant donnés par la table 3.3. Nous réécrivons  $H(s)$  ci-dessous :

$$H(s) = \frac{s + 0.5}{s^3 + 7.4s^2 + 17.44s + 27.2} \quad (4.12)$$

Une fois de plus, nous pouvons confirmer que le pôle et le zéro en excès, qui ont des parties réelles, en valeur absolue, très élevées, n'ont presque pas d'effet sur le système, l'IES résiduelle étant très faible.

La figure 4.12 montre les résultats obtenus en utilisant la méthode dans le domaine temporel, pour le cas à modélisation exacte (figure (a)), sous-modélisés (figures (b)) et aussi avec un  $F(s)$  d'ordre  $M = 1, N = 2$  (figure (c)) et pour le cas sur-modélisé (figure (d)), en utilisant les mêmes canaux et les mêmes modèles  $F(s)$  que pour la méthode dans le domaine fréquentiel. Les paramètres de simulations sont les mêmes sauf pour la valeur de  $\gamma$ , qui dans ce cas a été pris égal à 6.

Nous pouvons observer, en comparant ces résultats avec ceux obtenus par la méthode fréquentielle, que les performances sont équivalentes pour les cas à modélisation exacte et sur-modélisé. Dans ces cas, les deux méthodes ont des bonnes performances avec d'IES résiduelle très faible.

Par contre, les résultats obtenus pour les cas sous-modélisés sont bien différents. Avec la méthode dans le domaine temporel, la figure 4.12 (b) nous montre que, même si il y a une dégradation de la performance, la bonne récupération des symboles est encore possible, ce qui n'était pas le cas pour la méthode fréquentielle. En effet, en comparant ces deux méthodes, nous voyons que, dans le domaine fréquentiel, les conditions initiales ne sont pas directement prises en compte, tandis que la méthode temporelle n'a pas ce problème. Pour

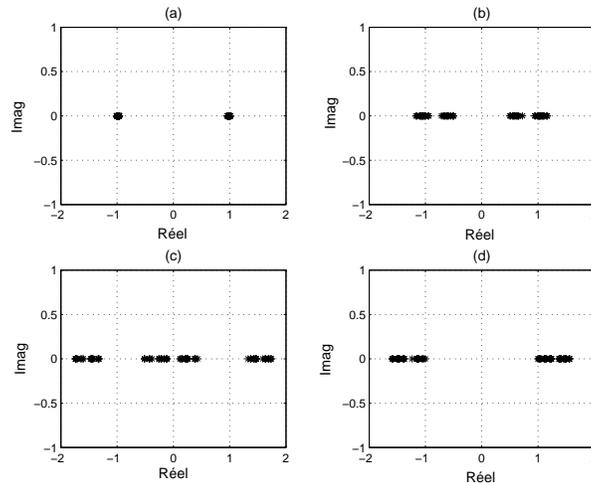


Figure 4.12: Résultats de la méthode de démodulation, domaine temporel (2-PAM);  $F(s)$  avec : (a)  $M = 2, N = 3$ ; (b)  $M = 1, N = 3$ ; (c)  $M = 1, N = 2$ ; (d)  $M = 2, N = 4$

les éliminer, dans la méthode fréquentielle, nous dérivons l'équation successivement avant d'estimer les symboles, ce qui peut aussi introduire plus d'erreurs d'imprécisions numériques de calcul. De plus, la méthode fréquentielle peut être vue comme une méthode basée sur l'erreur d'équation tandis que la méthode temporelle est basée sur l'erreur de sortie. Ainsi, l'effet d'avoir une sous-modélisation a moins d'effet dans la dernière.

La figure 4.12 (c) montre le cas où il y a un zéro et un pôle en moins. Même si il n'y a eu aucune erreur de décision, nous pouvons observer que l'IES résiduelle est encore plus élevée, ce qui rend le système plus susceptible à des erreurs principalement avec l'addition de bruit.

À partir de ces résultats, nous pouvons conclure qu'il est mieux de sur estimer l'ordre du canal. La démodulation est plus sûr en utilisant un pôle et un zéro de plus qu'avec un pôle et un zéro en moins. Par contre, en augmentant l'ordre du système, il faut faire attention aux problèmes de conditionnement de la matrice  $\mathcal{P}$  et du signal d'entrée, qui doit être à excitation persistante.

Dans la suite, nous mettrons l'accent sur la méthode dans le domaine temporel, vu qu'elle a eu une meilleure performance.

## Modulation QPSK

Ensuite nous avons simulé une modulation QPSK (*Quadrature Phase Shift Keying*), où les symboles appartiennent à l'alphabet  $\{\pm 1 \pm i\}$ . Les résultats peuvent aussi être trouvés en [NMF04]. Le système simulé est celui montré dans la figure 4.7, avec la méthode de démodulation temporelle. L'estimation du canal a été obtenue en utilisant une grille très petite (50000 points) tandis que la récupération des symboles a été faite en utilisant une

grille de 20000 points. Nous avons pris  $\gamma$  et  $\lambda$  toujours égaux à 6 et 1 respectivement et 100 symboles ont été transmis.

Comme maintenant nous avons une modulation différente, nous commencerons par l'analyse de l'estimation de  $H(s)$ . La figure 4.13 montre les placement des pôles et des zéros de  $H(s)$  et de  $F(s)$  pour 4 cas : (a) modélisation exacte, (b) et (c) sous-modélisation avec  $M = 1$ ,  $N = 3$  et  $M = 1$ ,  $N = 2$  respectivement et, enfin, (d) sur-modélisation avec  $M = 2$  et  $N = 4$ . Pour les trois premiers cas  $H(s)$  est donné par (4.11) et, pour (d),  $H(s)$  est donné par (4.12). Nous pouvons observer que les résultats obtenus sont presque les mêmes que pour un signal 2-PAM. Quand  $F(s)$  à le même ordre que  $H(s)$ , l'estimation est presque parfaite. Pour le cas (c), nous voyons encore une fois que le fait d'avoir un zéro et un pôle en moins ne permet pas une bonne estimation du canal, sous un point de vue global. Pour le cas sur-modélisé, la position du pôle et du zéro en plus n'a pas une valeur absolue aussi élevée que dans le cas d'un signal 2-PAM (table 3.3), mais, comme nous le verrons ensuite, elle est déjà suffisamment élevée pour ne pas influencer la récupération des symboles.

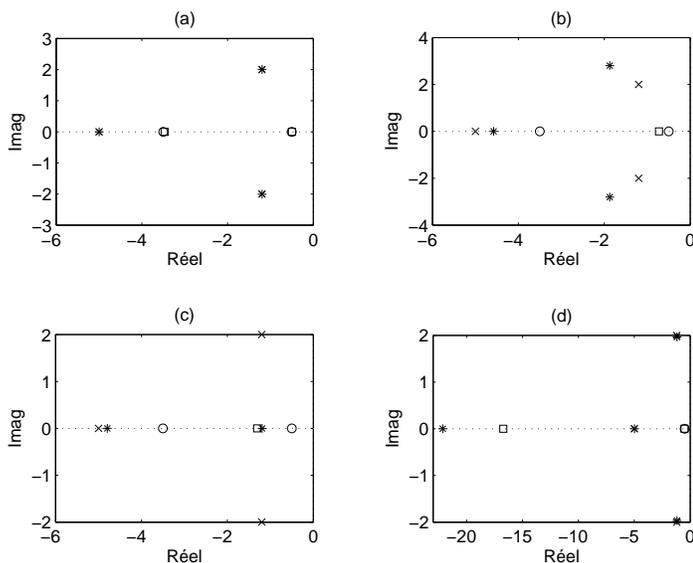


Figure 4.13: Estimation de  $H(s)$ , modulation QPSK;  $\circ$  et  $\times$ , zéros et pôles de  $H(s)$ ;  $\square$  et  $*$ , zéros et pôles de  $F(s)$ ;  $F(s)$  avec : (a)  $M = 2$ ,  $N = 3$ ; (b)  $M = 1$ ,  $N = 3$ ; (c)  $M = 1$ ,  $N = 2$ ; (d)  $M = 2$ ,  $N = 4$

Il faut aussi noter que, comme maintenant le signal d'entrée est complexe, dû à l'inexactitude des calculs, les coefficients estimés de  $F(s)$  peuvent aussi être complexes, avec des parties imaginaires relativement faibles. Par exemple, la valeur des coefficients obtenue,  $\mathbf{b} =$

$[b_0 \dots b_M]$  et  $\mathbf{a} = [a_0 \dots a_{N-1}]$ , pour le premier cas montré dans la figure 4.13(a) était :

$$\begin{aligned}\mathbf{b} &= [1.72 - 0.124i \quad 4.04 - 0.093i \quad 1.015 - 0.020i] \\ \mathbf{a} &= [26.99 + 0.064i \quad 17.44 - 0.128i \quad 7.422 - 0.034i]\end{aligned}$$

Comme nous pouvons observer, les parties réelles des coefficients sont très proches de celles de  $H(s)$ . Pour cette raison, nous avons ignoré les parties imaginaires, dans les résultats de la figure 4.13.

Nous voyons ainsi qu'il est aussi possible d'avoir des bonnes estimations avec une modulation complexe, étant suffisant de considérer seulement les parties réelles des coefficients. En effet, la méthode d'estimation ne dépend pas de la modulation utilisée, puisque nous supposons que le signal d'entrée du système est connu pendant l'intervalle de temps nécessaire pour l'estimation.

La figure 4.14 montre les symboles récupérés à la sortie du démodulateur, suivant les mêmes cas utilisés pour les simulations de la figure 4.12 et en utilisant la méthode de démodulation dans le domaine temporel. Les simulations confirment les bonnes performances de la méthode proposée. Comme nous avons déjà commenté,  $F(s)$  avec  $M = 1$  et  $N = 2$  n'est pas une bonne approximation pour  $H(s)$ , et la perte de performance résultante peut encore être observée à la figure (c). Par contre, même avec une IES résiduelle élevée, nous pouvons encore récupérer les symboles correctement. Autrement dit, tous les symboles présents dans un même quadrant, correspondent au symbole original de ce quadrant.

De plus, pour le cas sur-modélisé, montré en (d), nous pouvons confirmer, encore une fois, que les pôles et les zéros avec des valeurs absolues des parties réelles élevées n'ont presque pas d'effet sur le système, permettant la récupération des symboles avec une IES résiduelle très faible.

En comparant ces résultats avec ceux montrés à la figure 4.12, nous observons que les deux cas donnent à-peu-près les mêmes résultats, en tentant compte, bien sûr, des différences entre les modulations. Cela nous permet d'affirmer, encore une fois, que le fait d'avoir une modulation complexe n'apporte aucune différence de performance par rapport au processus d'égalisation.

### Addition de Bruit

La section 3.8.5 nous a montré la performance de la méthode d'estimation de la fonction de transfert du canal en présence de bruit. Nous avons vu que, comme le signal d'entrée  $\mathcal{A}$ -PAM n'est pas suffisamment riche et avec  $\lambda = 1$ , l'addition de bruit occasionne une perte de performance. Comme ici nous voulons analyser la méthode de démodulation, nous allons

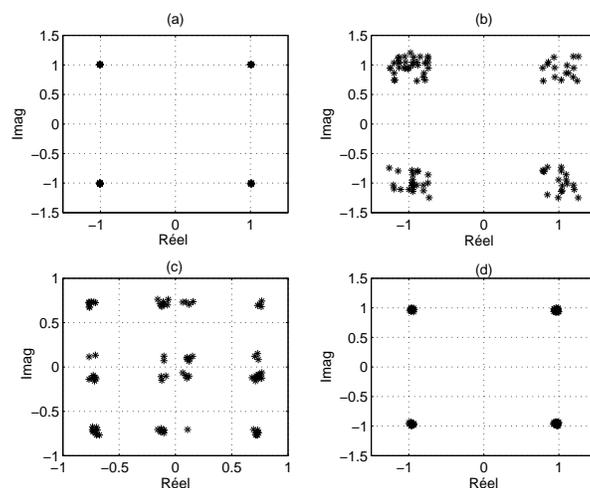


Figure 4.14: Résultats de la démodulation d'un signal QPSK;  $F(s)$  avec : (a)  $M = 2, N = 3$ ; (b)  $M = 1, N = 3$ ; (c)  $M = 1, N = 2$ ; (d)  $M = 2, N = 4$

considérer que le canal a déjà été estimé, sans bruit. Le bruit sera donc ajouté après cette première phase d'estimation de  $H(s)$ , à l'entrée du démodulateur.

La figure 4.15 montre les résultats obtenus. Nous avons transmis 100 symboles,  $\gamma = 6$ ,  $\lambda = 1$ . Les figures 4.15(a) et (b) ont été obtenues avec  $H(s)$  donné par (4.11) et  $F(s)$  montré dans les figures 4.13 (a) et (b), c'est-à-dire, avec  $M=2, N=3$  (modélisation exacte) et  $M=1, N=3$  (cas sous-modélisé). Le cas montré en (c) a été obtenu avec  $H(s)$  donné par (4.12) et  $F(s)$  montré dans la figure 4.13 (d) (cas sur-modélisé). Le résultat en (a) a été obtenu avec un  $SNR$  de 5 dB et nous n'avons presque pas d'IES résiduelle. Les cas (b) et (c) ont été obtenus pour un  $SNR = 10$  dB.

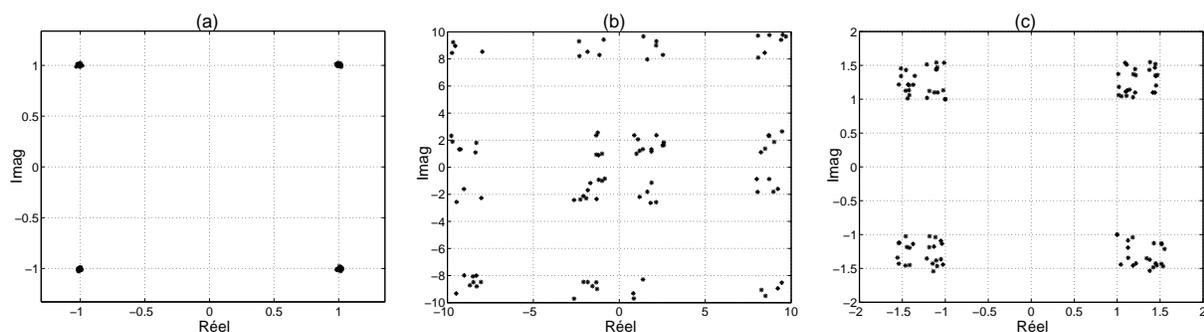


Figure 4.15: Constellation après démodulation (a)  $F(s)$  avec  $M = 2, N = 3, SNR = 5$  dB; (b)  $F(s)$  avec  $M = 1, N = 3, SNR = 10$  dB; (c)  $F(s)$  avec  $M = 2, N = 4, SNR = 10$  dB

Pour le cas sous-modélisé (figure (b)), le résultat n'a pas été très bon, principalement si on le compare avec le cas sans bruit (figure 4.14(b)). De toute façon, les 100 symboles transmis ont été récupérés correctement même avec l'IES résiduelle très élevée montrée dans

la figure.

Pour le cas sur-modélisé, nous voyons que le résultat obtenu est très bon. Il est clair que l'IES résiduelle est plus élevée que dans le cas de la figure 4.14 (d), mais la méthode arrive à bien démoduler le signal reçu.

Ainsi, nous pouvons conclure que la méthode a une bonne robustesse à l'addition de bruit.

## 4.5 Démodulation avec Modélisation Locale du Canal

La méthode proposée dans la section 4.4 est très simple et a une bonne performance même en présence de bruit. Cependant, elle a le désavantage d'avoir besoin d'une bonne estimation de l'ordre du canal, pour pouvoir bien estimer la fonction de transfert. Toutefois, normalement cette information n'est pas disponible au récepteur. Nous proposons donc une deuxième méthode, plus flexible dans ce sens là.

En reprenant ce qui a été vu dans la section 3.9, nous savons que le canal peut aussi être estimé, à chaque petit intervalle de temps, par un modèle simple d'ordre réduit. Dans ce cas, comme  $F(s)$  est très simple par rapport à la fonction de transfert originale du canal, l'estimation n'est valable que pour l'intervalle où elle a été calculée. La figure 3.20 nous a montré que, hors de cet intervalle, la sortie de  $F(s)$  s'éloigne de la sortie du système original. Cette approche a été appelée modélisation locale du canal.

L'intérêt, donc, de cette approche est justement dans le fait que l'ordre du canal ne doit pas être connu au récepteur. Quelque soit le canal, son comportement entrée-sortie, pendant un court intervalle de temps, peut être approché par un modèle d'ordre réduit.

Comme nous voulons faire une démodulation symbole par symbole, il nous suffit de pouvoir reproduire la relation entrée-sortie du canal pendant l'intervalle de temps d'une période symbole, qui normalement a une durée très courte. Ainsi, la modélisation locale du canal suffit pour résoudre le problème.

Il faut noter que, dû au fait que l'estimation n'est valable que pour l'intervalle de temps en question, elle doit être refaite à chaque nouveau symbole qui arrive. C'est justement cette adaptation qui nous permet d'estimer le comportement entrée-sortie du canal en utilisant un filtre d'ordre beaucoup plus faible que le système original.

Ensuite nous présenterons une nouvelle méthode de démodulation où la connaissance de l'ordre du canal n'est plus nécessaire. À chaque intervalle de durée d'une période symbole, la relation entre les signaux  $u(t)$  et  $x(t)$  sera approchée par une fonction de transfert d'ordre fixe et plus faible que celui du canal.

### 4.5.1 Méthode Proposée

Supposons que  $F(s)$  soit très simple, donnée par :

$$F(s) = \frac{b_0}{-a_0 - a_1s + s^2}$$

La sortie de l'estimateur du canal,  $\hat{x}$ , et  $u(t)$  satisfont :

$$s^2\hat{x} = a_0\hat{x} + a_1s\hat{x} + b_0\hat{u} \quad (4.13)$$

où nous n'avons pas mis les conditions initiales vu qu'elles seront éliminées après par les opérations de dérivations.

Le signal d'entrée est donné par (4.1), réécrit ci-dessous :

$$u(t) = \sum_{k=0}^n \nu_k g(t - kT)$$

En substituant  $u(t)$  dans (4.13) par l'expression ci-dessus, nous avons:

$$s^2\hat{x} = a_0\hat{x} + a_1s\hat{x} + b_0 \sum_{k=0}^n \nu_k \hat{g}_k \quad (4.14)$$

Comme  $b_0$  et les symboles  $\nu_k$  sont inconnus, nous pouvons définir une nouvelle variable,  $\xi_i = b_0\nu_i$  et réécrire (4.14) comme :

$$s^2\hat{x} = a_0\hat{x} + a_1s\hat{x} + \sum_{k=0}^n \xi_k \hat{g}_k \quad (4.15)$$

L'équation (4.15) nous permet de récupérer directement les  $\xi_i$ s à partir desquelles les symboles peuvent être récupérés. Comme  $b_0$  est une constante, nous récupérerons les symboles à un gain près. Notez, toutefois, qu'il faut avoir une petite séquence d'apprentissage d'un ou deux symboles, pour qu'on puisse définir le signe de  $b_0$ , ce qui est très important pour l'estimation correcte des symboles.

L'identification des  $\xi_i$  se fera en utilisant la technique développée dans la section 3.4. L'équation (4.15) sera, alors, dérivée par rapport à  $s$  de façon à générer un système avec le même nombre d'équations et des paramètres inconnus. Ensuite tous les termes seront divisés par  $s^\gamma$ , où  $\gamma > N$ , pour qu'ils soient propres. Le signal  $\hat{x}$  sera substitué par le signal de sortie du canal,  $x(t)$ , qui est connu. Les termes  $\frac{(s^j \hat{x})^{(i)}}{s^\gamma}$  et  $\frac{\hat{g}_k^{(i)}}{s^\gamma}$  seront calculés, dans le domaine temporel, par des intégrales comme en (3.43).

### 4.5.2 Définition de $u(t)$

Une question très importante dans la méthode proposée est la caractérisation de  $u(t)$ . Comme nous avons déjà commenté dans la section 4.2.1, le nombre de symboles qui interviennent dans l'obtention de  $u(t)$  dans l'intervalle d'une période symbole dépend du support de l'impulsion de mise-en-forme,  $g(t)$ . Et ce nombre de symboles définira le nombre de variables devant être identifiées dans le système (4.15). Pour illustrer, prenons un exemple simple où  $g(t)$  est donné par un cosinus sur-élevé, avec un facteur de *roll-off* égal à 0.33. Supposons que  $g(t)$  ait un support de 4 périodes symbole. La figure 4.16 montre la séquence d'impulsions décalées dont la somme résultera en  $u(t)$ , pour un intervalle de temps quelconque. Les symboles ont été considérés toujours égaux à +1 et la période symbole,  $T$ , a été prise aussi égale à 1, pour simplifier.

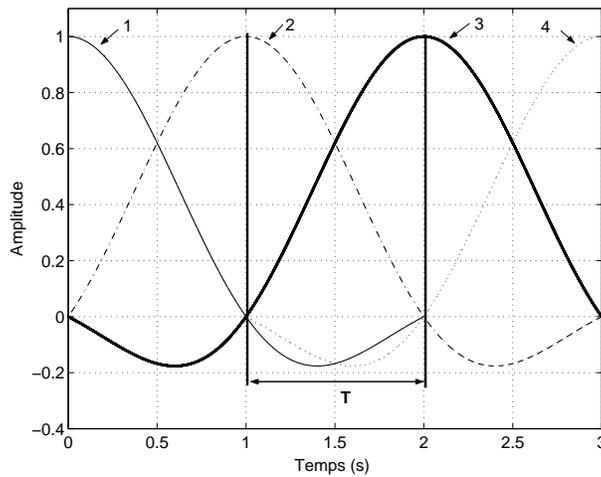


Figure 4.16: Signal  $u(t)$  comme une somme de cosinus sur-élevé

Nous pouvons voir que, dans un intervalle d'une période symbole, il y a 4 impulsions cosinus sur-élevé qui interviennent, c'est-à-dire,  $u(t)$ , dans cet intervalle, sera donné par la somme de 4 symboles, chacun multiplié par une impulsion décalée. Il faut noter que le symbole correspondant à l'intervalle de temps montré dans la figure 4.16 est le symbole numéro 2. Il subit l'interférence d'un symbole précédent et des deux symboles suivants.

Dans ce cas, (4.15) devient :

$$s^2 \hat{x} = a_0 \hat{x} + a_1 s \hat{x} + \xi_{n-1} \hat{g}_{n-1} + \xi_n \hat{g}_n + \xi_{n+1} \hat{g}_{n+1} + \xi_{n+2} \hat{g}_{n+2} \quad (4.16)$$

où nous avons supposé que l'intervalle en question est  $nT \leq t < (n+1)T$ , pendant lequel le symbole  $\nu_n$  est transmis.

Le système généré à partir de (4.16) nous permet d'identifier  $a_0$ ,  $a_1$  et les 4 variables,  $\xi_i$

avec  $i = n-1, n, n+1, n+2$ , à partir desquelles nous pouvons récupérer les symboles transmis. En suivant la même démarche récursivement à chaque intervalle de symbole, à la fin de la 4-ième itération nous aurons identifiés les variables comme montré à la table 4.1, où la deuxième ligne représente le symbole de l'instant actuel de l'itération en cours. Notez, toutefois, que

Itération :			
1	2	3	4
$\xi_{n-1}$	$\xi_n$	$\xi_{n+1}$	$\xi_{n+2}$
$\xi_n$	$\xi_{n+1}$	$\xi_{n+2}$	$\xi_{n+3}$
$\xi_{n+1}$	$\xi_{n+2}$	$\xi_{n+3}$	$\xi_{n+4}$
$\xi_{n+2}$	$\xi_{n+3}$	$\xi_{n+4}$	$\xi_{n+5}$

Table 4.1: 4 itérations successives d'identification des variables  $\xi$

la même variable sera identifiée 4 fois. À la table 4.1, cela est clair pour  $\xi_{n+2}$ . Nous pouvons profiter de ce fait pour décider les symboles avec plus de fiabilité, en espérant que la plupart des identifications seront correctes, même si il y a une erreur. Ainsi, en suivant l'exemple donné, au lieu d'identifier  $\xi_{n+2}$  directement à partir de la troisième itération (qui correspond à la transmission de  $\nu_{n+2}$ ), nous allons attendre jusqu'à la quatrième et utiliser les 4 valeurs obtenues pour faire la décision. Ainsi, celle-ci sera faite avec une période symbole de retard. La section suivante expliquera, avec plus de détail, comment la décision du symbole est faite à partir des valeurs de  $\xi$ .

### 4.5.3 Modèle Simulé

Dans les simulations de la section 4.5.4,  $u(t)$  sera obtenu à partir d'une somme de symboles 2-PAM multipliés par des cosinus sur-élevés avec support égal à 6 périodes symbole, c'est-à-dire, des cosinus sur-élevés allant de  $-3T$  à  $3T$ . Ainsi, à chaque période symbole, nous aurons l'intervention de 6 symboles, 2 précédents, celui de l'instant actuel et les 3 suivants. La table 4.2 montre les 6 premières itérations pour la démodulation des symboles. Afin de profiter des 6 estimations existantes de chaque variable, la décision du symbole est faite avec un retard de deux périodes symbole, comme nous verrons ensuite.

Comme la modulation est 2-PAM, il suffit d'estimer le signe de  $b_0$  pour pouvoir bien estimer les symboles à un gain près. Pour éviter des décisions erronées dans les premiers symboles décidés, nous avons utilisé une séquence d'apprentissage de 2 symboles. Pour cette raison, la méthode peut être considérée semi-aveugle.

Le début du processus de décision ce passe, donc, de la façon suivante (un schéma de l'algorithme est montré dans la figure 4.17) : comme  $\nu_0$  et  $\nu_1$  sont connus au récepteur, le

signe de  $b_0$  est identifié en faisant, dans la première itération ( $k = 0$ , voir table 4.2),

$$b_{0_0} = \nu_0 / \text{sign}(\xi_0) \quad (4.17)$$

où  $b_{0_k}$  représente le signe de  $b_0$  à la  $k$ -ième itération et la fonction  $\text{sign}$  est définie comme:

$$\text{sign}(z) = \begin{cases} -1; & z < 0 \\ +1; & z \geq 0 \end{cases} \quad (4.18)$$

Les symboles  $\nu_{-1}$  et  $\nu_{-2}$  n'existent pas, évidemment, et, pour cette raison, les valeurs de  $\xi_{-2}$  et  $\xi_{-1}$  (table 4.2) obtenues à partir du système (4.15) seront presque nulles. Dans cette itération, les symboles  $\nu_1$ ,  $\nu_2$  et  $\nu_3$  peuvent aussi être estimés, en faisant  $\tilde{\nu}_{j_0} = b_{0_0} \text{sign}(\xi_{j_0})$  avec  $j = 1, 2, 3$ , où nous avons noté  $\tilde{\nu}_{j_i}$  l'estimation du symbole  $j$  à l'itération  $i$ . Ces estimations seront utilisées plus tard, mais il faut faire attention parce que, principalement pour  $\tilde{\nu}_{3_0}$ , elle peut ne pas être très fiable puisque la contribution de ce symbole dans  $u(t)$  n'est pas aussi important que celle de  $\nu_0$ .

Notez que, du fait que nous faisons une modélisation locale du système,  $b_{0_k}$  doit être obtenu à chaque itération puisque le modèle aussi doit être recalculé à chaque nouveau symbole.

Ainsi, la deuxième itération sera comme la première. Le paramètre  $b_{0_1}$  sera identifié comme en (4.17), avec  $\nu_1$  et  $\xi_{1_1}$  et les symboles  $\tilde{\nu}_{j_1}$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$  seront estimés en faisant:

$$\tilde{\nu}_{j_1} = b_{0_1} \text{sign}(\xi_{j_1}) \quad (4.19)$$

Comme  $\nu_1$  est connu, on continue à l'utiliser en faisant, dans la troisième et quatrième itérations,  $b_{0_k} = \nu_1 / \text{sign}(\xi_{1_k})$  pour  $k = 2, 3$ , les autres symboles étant identifiés comme en (4.19). Dans la cinquième itération ( $k=4$ ), la table 4.2 nous montre que  $\xi_1$  ne fait plus partie des variables identifiées. A cette itération, nous allons donc estimer  $\nu_2$  à partir des  $\xi_2$ . Le signe de  $b_{0_4}$  sera estimé en utilisant les 4 décisions de  $\tilde{\nu}_2$  qui ont déjà été faites dans les itérations précédentes :  $b_{0_4} = \text{sign}(\sum_{k=0}^3 \tilde{\nu}_{2_k}) / \text{sign}(\xi_{2_4})$  et l'estimation des symboles sera donnée par  $\tilde{\nu}_{j_4} = b_{0_4} \text{sign}(\xi_{j_4})$ ,  $j = 2, \dots, 7$ . L'estimation de  $\tilde{\nu}_2$  sera définitive, tandis que celle des autres symboles seront utilisées dans les prochaines itérations et pourront changer jusqu'à la fin du processus. Si, par hasard,  $\sum_{k=0}^3 \tilde{\nu}_{2_k} = 0$ , nous allons éliminer  $\tilde{\nu}_{2_0}$  du processus de décision et calculer  $b_{0_4}$  à partir des 3 autres décisions. Nous avons choisi d'éliminer la première estimation parce qu'elle a été obtenue avec la plus faible contribution de  $g(t - 2T)$  à  $u(t)$ .

Nous arrivons, finalement, à la sixième itération ( $k = 5$ ). L'estimation sera calculée comme à la cinquième, mais cette fois-ci en utilisant les 5 estimations obtenues pour le calcul du signe de  $b_{0_5}$  :  $b_{0_5} = \text{sign}(\sum_{k=0}^4 \tilde{\nu}_{3_k}) / \text{sign}(\xi_{3_5})$ . Ici, le symbole  $\tilde{\nu}_3$  sera estimé définitivement,

ce qui nous donne un retard de 2 périodes symbole pour l'estimation, comme déjà commenté. À partir d'ici, les prochaines itérations suivront cette même procédure. La figure 4.17 illustre cet algorithme pour  $k \geq 5$ .

Itération :					
$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$
$\xi_{-20}$	$\xi_{-11}$	$\xi_{02}$	$\xi_{13}$	$\xi_{24}$	$\xi_{35}$
$\xi_{-10}$	$\xi_{01}$	$\xi_{12}$	$\xi_{23}$	$\xi_{34}$	$\xi_{45}$
$\xi_{00}$	$\xi_{11}$	$\xi_{22}$	$\xi_{33}$	$\xi_{44}$	$\xi_{55}$
$\xi_{10}$	$\xi_{21}$	$\xi_{32}$	$\xi_{43}$	$\xi_{54}$	$\xi_{65}$
$\xi_{20}$	$\xi_{31}$	$\xi_{42}$	$\xi_{53}$	$\xi_{64}$	$\xi_{75}$
$\xi_{30}$	$\xi_{41}$	$\xi_{52}$	$\xi_{63}$	$\xi_{74}$	$\xi_{85}$

Table 4.2: Les 6 premières itérations pour l'estimation des symboles

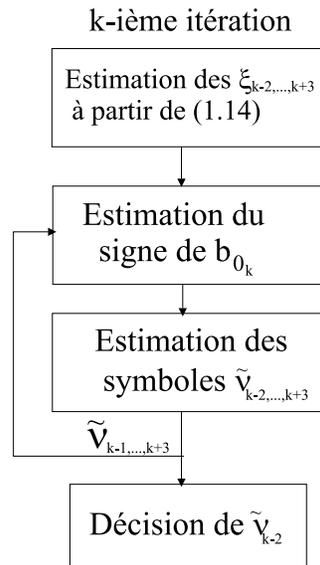


Figure 4.17: Algorithme de récupération des symboles sans estimation du canal

#### 4.5.4 Résultats des Simulations

La simulation du modèle montré dans la section 4.5.3 n'a pas donné des très bons résultats. L'estimation des 6 variables à chaque itération de durée d'une période symbole nous a donné, à la sortie, des symboles avec une grande variance même sans addition de bruit. Ainsi, même dans une situation de modélisation exacte, l'estimation des symboles n'a pas été suffisamment fiable. Une des raisons pour cette performance est le mauvais conditionnement de la matrice  $\mathcal{P}$ , puisque le système a un ordre relativement élevé.

Une solution proposée pour améliorer les résultats à été l'augmentation de l'intervalle d'estimation. Dans les sections 4.5.2 et 4.5.3, nous avons supposé que l'estimation était faite dans un intervalle d'une période symbole. Cela correspond à avoir, pour les calculs des intégrales en (3.43),  $\lambda = 1$ . Nous allons donc l'augmenter, en faisant  $\lambda = 2$ , c'est-à-dire, l'estimation sera faite en utilisant un intervalle de deux périodes symbole. Notez que le fait d'augmenter  $\lambda$  augmente aussi le nombre des symboles qui interviennent dans l'obtention de  $u(t)$  dans l'intervalle de temps considéré. En suivant la même procédure discutée dans la section 4.5.2, nous aurons l'intervention de 7 symboles, ce qui augmente aussi un peu la taille du système donné par (4.15).

La figure 4.18, montre la constellation à la sortie du démodulateur avant la décision des symboles, c'est-à-dire en faisant  $\tilde{v}_k = b_{0_{k+3}}\xi_k$  au lieu de  $\tilde{v}_k = \text{sign}(b_{0_{k+3}}\xi_k)$ . Ainsi nous pouvons voir la variance des estimations de  $\xi_k$  par la résolution du système donné par (4.15). Le canal utilisé est donné par

$$H(s) = \frac{1}{s^3 + 7.4s^2 + 17.44s + 27.2}$$

$F(s)$  a toujours un numérateur donné par une constante,  $b_0$ , et l'ordre de son dénominateur,  $N$ , à été pris égal à 3.  $\gamma$  était égale à 5,  $\lambda = 2$  et la période symbole,  $T = 1$ . Il n'y a pas d'addition de bruit. Nous pouvons voir que les symboles ont été très bien récupérés.

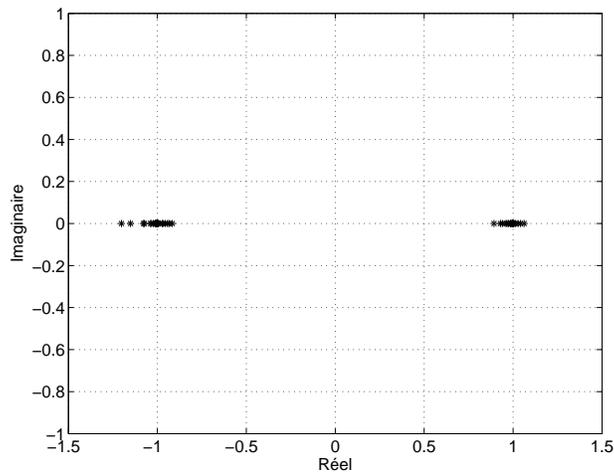


Figure 4.18: Constellation à la sortie du démodulateur,  $\lambda = 2$ ,  $T = 1$

Ensuite nous avons simulé le système pour le canal donné par (4.11), en utilisant  $F(s)$  avec  $N = 1$ . Dans ce cas, comme  $F(s)$  est beaucoup plus simple que le canal, on peut espérer des meilleurs résultats quand l'intervalle d'estimation diminue, comme a été vu dans l'analyse de la modélisation locale d'un système (section 3.9).

L'intervalle d'estimation peut être réduit de deux façons : en diminuant la valeur de  $\lambda$ , ce

qui n'est pas une bonne idée vu les résultats obtenus auparavant, ou en diminuant la valeur de la période symbole,  $T$ , ce qui correspond à une augmentation de la fréquence des symboles transmis.

La figure 4.19 nous montre les résultats obtenus en fonction de la valeur de  $T$ . Le taux d'erreur binaire (TEB) a été obtenu avec la transmission de 1000 symboles par blocs de 50, sans addition de bruit. Comme espéré, le résultat est mieux pour des valeurs de  $T$  plus faibles. Pour  $T \leq 0.6$ , aucune erreur de décision a été repérée.

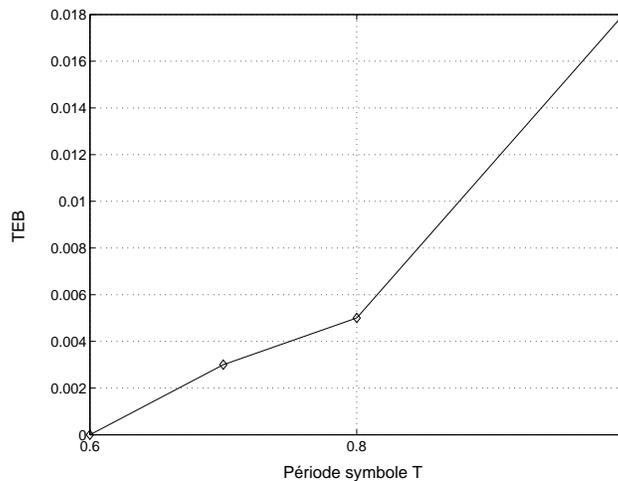


Figure 4.19: TEB en fonction de  $T$ ,  $\lambda = 2$

Par contre, la méthode ne s'est pas montrée robuste à l'addition de bruit. Le fait d'utiliser un modèle d'ordre très réduit apporte déjà une certaine perturbation au processus de démodulation. Si, en plus, il y a l'addition de bruit, même pour des SNRs élevés, la méthode perd de la performance.

En comparant ces résultats avec ceux obtenus par les méthodes dans les domaines fréquentiel et temporel, montrés dans la section 4.4.3, nous voyons que la nouvelle méthode proposée n'a pas une performance si bonne. Cela était déjà attendu principalement parce que, comme maintenant l'ordre du canal n'est pas connu, parfois nous pouvons avoir des mauvaises estimations locales du canal, ce qui résultera en erreurs de décision dans l'intervalle en question. De plus, la méthode est beaucoup plus complexe. Elle a besoin de résoudre un système d'équations plus large que celui de la méthode dans le domaine fréquentiel par exemple. Pendant que celle-ci avait une seule variable inconnue à déterminer par itération, la méthode proposée en a neuf. Comme toujours, le fait d'avoir besoin de calculer plus de dérivées augmente la chance d'avoir un système mal-conditionné et d'avoir des erreurs numériques de calcul.

## 4.6 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté trois méthodes de démodulation. Les deux premières ont besoin d'une estimation la plus exacte possible du canal, ce qui est fait en utilisant la méthode développée dans le chapitre 3. Pour cette raison, une bonne approximation de l'ordre du canal est aussi nécessaire et, pourtant, elle n'est pas toujours facile à obtenir. Quoi qu'il en soit, une fois qu'on ait une bonne approximation du canal, les méthodes donnent des bons résultats. Nous avons vu que celle développée dans le domaine temporel est plus robuste et a une meilleure performance que celle développée dans le domaine fréquentiel, principalement pour les cas sous-modélisés. Nous avons vu que ces deux méthodes, même étant équivalentes, sont bien différentes, la temporelle étant une méthode basée sur l'erreur de sortie tandis que la fréquentielle est basée sur l'erreur d'équation.

De plus, la méthode temporelle peut être vue comme un DFE en temps continu, ayant les avantages et les désavantages que cette structure apporte. Comme avantages, nous avons la bonne performance même pour des canaux difficiles, limitant l'amplification du bruit et, comme désavantage, la propagation d'erreurs, puisque chaque nouvelle décision dépend des symboles déjà identifiés. Comme nous avons vu, la méthode a une bonne performance même en condition de bruit fort.

Comme l'ordre du canal n'est pas connu au récepteur, la troisième méthode propose de récupérer les symboles directement. De toute manière, une estimation du canal est nécessaire, mais, cette fois-ci elle peut être locale. Cela nous permet d'utiliser un modèle simple d'ordre réduit pour estimer la relation entre les signaux d'entrée et de sortie du canal dans l'intervalle de temps court d'une période symbole. Par rapport à la première méthode, elle a l'avantage de ne pas avoir besoin d'une estimation de l'ordre du canal, mais, d'autre part, l'estimation locale du canal doit être recalculé à chaque nouveau symbole qui arrive.

Les simulations nous ont montré que cette méthode n'est pas aussi robuste que les premières. Même si elle arrive à bien récupérer les symboles transmis pour une modulation 2-PAM, ses performances se dégradent avec l'addition de bruit, même pour des valeurs de SNR élevées. Cela est dû au fait que, à chaque itération, la méthode doit résoudre un système plus complexe que celui des méthodes précédentes, avec beaucoup plus de variables à identifier. De plus, l'approximation locale peut, parfois, ne pas donner des bons résultats, ce qui introduit des erreurs dans le processus de démodulation.

# Chapitre 5

## Démodulation des Signaux CPM

Comme nous traitons le modèle du système en continu, la modulation en fréquence à phase continue (CPM-*Continuous Phase Modulation*) est naturellement intéressante. Cette modulation consiste à rajouter de la mémoire dans le processus de modulation, de façon à garantir la continuité de la phase du signal. C'est donc une modulation non linéaire. Elle est très intéressante aussi d'un point de vue pratique, grâce à deux propriétés: une efficacité spectrale et une enveloppe constante. La première est très importante pour les transmissions par des canaux limités en bande et la deuxième, permet qu'il n'y ait pas des pertes d'information en présence d'amplificateurs non-linéaires. Ainsi, cette modulation est très utile pour les systèmes de communication satellite et sans fils. Elle est déjà utilisée par exemple dans le GSM (*Global System Mobile Communication*) ou dans le système Bluetooth [FK02].

Dans ce chapitre, nous allons montrer comment la méthode algébrique permet de récupérer les symboles transmis dans une modulation CPM de façon simple et fiable, en exploitant directement la forme continue connue du signal transmis. Le fait que ce soit une modulation non-linéaire rend le problème encore plus intéressant, parce que les méthodes classiques de démodulation existantes dans la littérature ont une complexité qui peut être restrictive. Avec notre méthode, la démodulation est faite de façon très simple et directe, et aussi robuste à l'addition de bruit.

### 5.1 La Modulation en Fréquence à Phase Continue

En bande de base, le signal CPM est donné par:

$$u_b(t) = \mathcal{E}e^{j\phi(t,\nu)} \quad (5.1)$$

où  $\mathcal{E}$  détermine l'énergie du signal et l'information est portée par la phase,  $\phi(t, \nu)$ , qui dépend des symboles  $\nu$ . Le signal modulé est alors obtenu en faisant:

$$u(t) = \text{Re}\{u_b(t)e^{j\omega_c t}\} \quad (5.2)$$

où  $\omega_c = 2\pi f_c$ ,  $f_c$  étant la fréquence de la porteuse. La phase  $\phi(t, \nu)$  est donnée par:

$$\phi(t, \nu) = 2\pi \varrho \sum_{k=-\infty}^n \nu_k q(t - kT) \quad (5.3)$$

où  $\varrho$  est l'indice de la modulation,  $\{\nu_k\}$  sont les symboles transmis qui appartiennent à un alphabet fini  $\{\pm 1, \pm 3, \dots, \pm(\mathcal{A} - 1)\}$ ,  $q(t)$  est l'impulsion de mise-en-forme de la transition de phase du signal et  $T$  est la période symbole. L'impulsion  $q(t)$  intervient dans la phase pendant la durée de  $L$  symboles. Pour  $L = 1$ , la modulation est appelée à *réponse complète* et pour  $L > 1$ , à *réponse partielle*. La fonction  $q(t)$  est définie à partir de  $g(t)$ , l'impulsion de mise-en-forme fréquentielle:

$$q(t) = \int_{-\infty}^t g(\tau) d\tau \quad (5.4)$$

On applique alors la normalisation  $q(t) = \int_0^\infty g(\tau) d\tau = 1/2$  pour que la transition de phase pendant une période symbole  $T$  soit, au maximum, égale à  $\varrho(\mathcal{A} - 1)\pi$  radians.

Les familles CPM sont définies à partir de l'impulsion  $g(t)$ . La table 5.1 nous montre les cas les plus utilisés [Sun86]. Dans le cas de l'impulsion LREC, la modulation est plutôt connue comme CPFSK (*Continuous Phase Frequency Shift Keying*). La notation LRC réfère à l'impulsion cosinus sur-élevé avec une longueur de  $L$  symboles. Nous avons aussi le TFM (*Tamed Frequency Modulation*), le GMSK (*Gaussian Minimum Shift Keying*), utilisé par exemple dans le système GSM, et le LSRC (*Spectrally Raised Cosine*). Il faut observer que le CPM est une généralisation du *Minimum Shift Keying* (MSK), qui est obtenu comme un cas particulier des signaux donnés par (5.2), en choisissant l'impulsion 1REC ( $L = 1$ ) dans la table 5.1 avec  $\mathcal{A} = 2$  (symboles binaires) et  $\varrho = 0.5$ .

Il est important d'observer que la continuité de la phase implique une mémoire, c'est-à-dire, la phase actuelle dépend des symboles précédents. Cette mémoire augmente encore dans le cas d'une réponse partielle où  $L > 1$ .

Dans ce travail, nous allons traiter principalement les modulations LREC et le LRC. Les impulsions de mise-en-forme  $q(t)$  correspondantes, calculées en utilisant (5.4) avec  $g(t)$

LREC	$g(t) = \begin{cases} \frac{1}{2LT} & 0 \leq t < LT \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
LRC	$g(t) = \begin{cases} \frac{1}{2LT} [1 - \cos(\frac{2\pi t}{LT})] & 0 \leq t < LT \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
TFM	$g(t) = 1/8 [ag_0(t - T) + bg_0(t) + ag_0(t + T)]; a = 1; b = 2$ $g_0(t) \approx \sin\left(\frac{\pi t}{T}\right) \left[ \frac{1}{\pi t} - \frac{2 - \frac{2\pi t}{T} \cot\left(\frac{\pi t}{T}\right) - \frac{\pi^2 t^2}{T^2}}{\frac{24\pi t^3}{T^2}} \right]$
GMSK	$g(t) = \frac{1}{2T} \left[ Q\left(2\pi B_b \frac{t - \frac{T}{2}}{\sqrt{\ln 2}}\right) - Q\left(2\pi B_b \frac{t + \frac{T}{2}}{\sqrt{\ln 2}}\right) \right] \quad 0 \leq B_b T < \infty$ $Q(t) = \int_t^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\tau^2/2} d\tau$
LSRC	$g(t) = \frac{1}{LT} \frac{\sin\left(\frac{2\pi t}{LT}\right) \cos\left(\beta \frac{2\pi t}{LT}\right)}{\frac{2\pi t}{LT} 1 - \left(\frac{4\beta t}{LT}\right)^2} \quad 0 \leq \beta < 1$

 Table 5.1: Les impulsions  $g(t)$  les plus fréquents

donnés par la table 5.1, sont:

$$q_{LREC}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{t}{2LT} & 0 \leq t < LT \\ \frac{1}{2} & t \geq LT \end{cases}$$

$$q_{LRC}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1}{2} \left( \frac{t}{LT} - \frac{1}{2\pi} \sin \frac{2\pi t}{LT} \right) & 0 \leq t < LT \\ \frac{1}{2} & t \geq LT \end{cases}$$

En utilisant  $q(t)$  ci-dessus et (5.2), le signal  $u(t)$ , dans l'intervalle  $nT \leq t < (n+1)T$  peut être réécrit comme:

$$u(t) = \mathcal{E} \cos \left( \omega_c t + \pi \varrho \sum_{k=n-L+1}^n \nu_k \frac{t - kT}{LT} + \pi \varrho \sum_{k=0}^{n-L} \nu_k \right) \quad (5.5)$$

pour la modulation LREC et

$$u(t) = \mathcal{E} \cos \left( \omega_c t + \pi \varrho \sum_{k=n-L+1}^n \nu_k \frac{t - kT}{LT} - \frac{\varrho}{2} \sum_{k=n-L+1}^n \nu_k \sin \left( \frac{2\pi}{LT} (t - kT) \right) + \pi \varrho \sum_{k=0}^{n-L} \nu_k \right) \quad (5.6)$$

pour la modulation LRC. L'indice  $n$  dénote le symbole actuel transmis.

Nous pouvons aussi faire le changement de variable  $t = (n + \tau)T$ , où  $0 \leq \tau < 1$ . Dans ce cas, (5.5) et (5.6) deviennent, respectivement:

$$\tilde{u}_n(\tau) = \mathcal{E} \cos \left( \left( \omega_c T + \frac{\pi \varrho}{L} \sum_{k=n-L+1}^n \nu_k \right) \tau + \frac{\pi \varrho}{L} \sum_{k=n-L+1}^{n-1} (n - k) \nu_k + \omega_c n T + \pi \varrho \sum_{k=0}^{n-L} \nu_k \right) \quad (5.7)$$

$$\tilde{u}_n(\tau) = \mathcal{E} \cos \left( \left( \omega_c T + \frac{\pi \varrho}{L} \sum_{k=n-L+1}^n \nu_k \right) \tau - \frac{\varrho}{2} \sum_{k=n-L+1}^n \nu_k \sin \frac{2\pi}{L} (n - k + \tau) + \frac{\pi \varrho}{L} \sum_{k=n-L+1}^n (n - k) \nu_k + \omega_c n T + \pi \varrho \sum_{k=0}^{n-L} \nu_k \right) \quad (5.8)$$

## 5.2 Le Spectre d'un Signal CPM

Un des principaux intérêts des signaux CPM est leur efficacité spectrale. En générale, la bande de fréquence occupée par le signal dépend de l'indice de modulation  $\varrho$ , de la forme de l'impulsion  $g(t)$  et de la taille de l'alphabet  $\mathcal{A}$ . D'une part, la bande occupée augmente avec la valeur de  $\varrho$  et, d'autre part, elle diminue d'autant plus que  $g(t)$  est lisse. Ainsi, les impulsions LRC auront une efficacité spectrale plus importante que les LREC. Comme  $g(t)$  devient aussi plus lisse avec l'augmentation de la valeur de  $L$ , les modulations à réponse partielle ont un spectre plus étroit que celui des modulations à réponse complète. En ce qui concerne la taille de l'alphabet  $\mathcal{A}$ , le spectre sera plus large pour les valeurs plus faibles [AS81]. À titre d'illustration, la figure 5.1 montre le spectre pour quelques signaux CPM, en utilisant un alphabet binaire et avec  $\varrho$  égal à 0.5 [AS81].

## 5.3 Le Récepteur de Maximum Vraisemblance

Parmi les méthodes de démodulation classiques existantes dans la littérature, le récepteur optimal pour un signal CPM est donné par la maximisation de la vraisemblance (ML), implémentée par un banc de filtres adaptés suivi d'un algorithme de Viterbi [Pro95]. Les inconvénients d'un tel récepteur sont déjà bien connus, comme par exemple sa haute com-

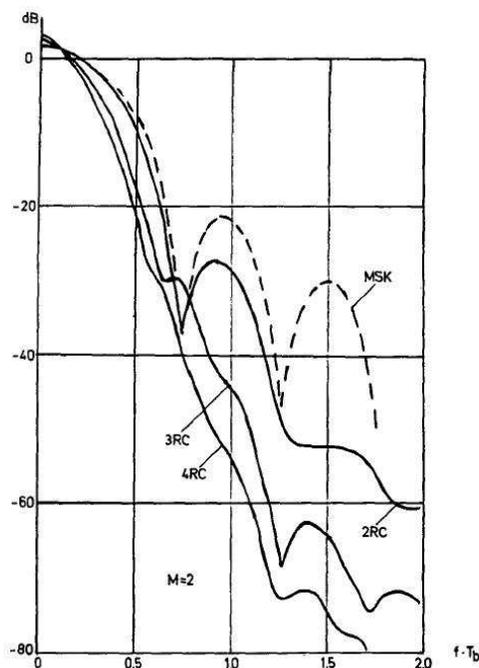


Figure 5.1: Spectre d'un signal CPM

plexité, qui augmente exponentiellement avec la mémoire de la modulation et l'alphabet des symboles utilisé. En effet, l'utilisation des signaux CPM est restée limitée à cause de la complexité de son processus de démodulation. Ensuite, nous allons montrer brièvement en quoi consiste ce récepteur.

Quand le signal transmis n'a pas de mémoire, à chaque période symbole il ne dépend que du symbole en question et sa démodulation peut être réalisée symbole par symbole. Par contre, quand le signal a une mémoire, comme c'est le cas du signal CPM, les symboles deviennent inter-dépendants et les estimations, plus compliquées. Le détecteur optimal a besoin d'observer le signal reçu pendant toute la transmission des données et, après, il choisit la séquence des symboles qui minimise la probabilité d'erreur. Il cherche à maximiser la densité de probabilité conditionnelle  $p(x|\nu)$  où  $x(t)$  est le signal reçu et  $\nu$  est la séquence des symboles transmis pendant l'intervalle d'observation. Ce récepteur est appelé récepteur de maximum vraisemblance. Dans la pratique, pourtant, il n'est pas possible d'observer le signal reçu pendant toute la transmission avant de faire une décision de la séquence des symboles transmise. Il faut que cette observation soit limitée dans le temps, ce qui résulte dans les récepteurs sous-optimaux.

Supposons que le signal reçu soit observé pendant  $R$  périodes symbole et que le canal additionne du bruit blanc et gaussien (canal AWGN-*Additive White Gaussian Noise*). Dans

ce cas, le signal reçu sera:

$$x(t) = u(t, \nu) + \eta(t) \quad (5.9)$$

où  $\eta(t)$  est le bruit, blanc, gaussien, de moyenne nulle et de variance  $\sigma_b^2$  et  $u(t, \nu)$  est le signal transmis qui dépend des symboles  $\nu$ .

Ainsi, la fonction de densité de probabilité conditionnelle  $p(x|\nu)$  est proportionnelle à [AS81, Pro95]:

$$p(x|\nu) \propto \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma^2} \int_0^{RT} (x(t, \nu) - u(t, \nu))^2 dt \right] \quad (5.10)$$

En calculant le logarithme de (5.10) et en éliminant les termes qui ne dépendent pas de  $x(t)$ , maximiser (5.10) équivaut à minimiser  $\int_0^{RT} (x(t) - u(t))^2 dt$ .

La recherche de la séquence  $\nu$  qui maximise (5.10) se fait en suivant un treillis, formé par des états qui caractérisent la mémoire du signal. Pour le cas d'un signal CPM, normalement on utilise une constante  $\varrho$  rationnelle, ce qui limite le nombre d'états nécessaires pour décrire le signal. En supposant  $\varrho = m/p$ , où  $m$  et  $p$  sont des entiers positifs sans facteurs en commun, il y aura  $p$  états de phase [Pro95]:

$$\theta = \left\{ 0, \frac{\pi m}{p}, \frac{2\pi m}{p}, \dots, \frac{(p-1)\pi m}{p} \right\} \quad (5.11)$$

si  $m$  est pair et  $2p$  états:

$$\theta = \left\{ 0, \frac{\pi m}{p}, \frac{2\pi m}{p}, \dots, \frac{(2p-1)\pi m}{p} \right\} \quad (5.12)$$

si  $m$  est impair. Si  $L = 1$ ,  $\phi(t, \nu)$  peut être écrit comme, pour  $nT \leq t < (n+1)T$ :

$$\phi(t, \nu) = 2\pi\varrho \sum_{k=-\infty}^{n-1} \nu_k + 2\pi\varrho\nu_n q(t - nT) = \theta_n + \theta(t, \nu)$$

Dans ce cas, les états montrés dans (5.11) et (5.12) seront les seuls états du treillis. Cependant, si  $L > 1$ , il y a des états additionnels dus à la forme étalée de  $g(t)$ . Dans ce cas,  $\theta(t, \nu)$  peut être réécrit comme:

$$\theta(t, \nu) = 2\pi\varrho \sum_{i=n-L+1}^{n-1} \nu_i q(t - iT) + 2\pi\varrho\nu_n q(t - nT) \quad (5.13)$$

Le premier terme dépend des symboles précédents et représente un terme de la phase dû aux impulsions qui n'ont pas encore atteint leurs valeurs finales. Le second terme est la contribution due au symbole le plus récent,  $\nu_n$ . Ainsi, pour le cas où  $L > 1$ , l'état du signal

CPM sera donné par la combinaison de ces deux termes [Sun86, Pro95]:

$$S_n = \{\theta_n, \nu_{n-1}, \nu_{n-2}, \dots, \nu_{n-L+1}\} \quad (5.14)$$

Ainsi, le nombre d'états existants sera égal à  $p\mathcal{A}^{L-1}$  pour  $m$  impair et  $2p\mathcal{A}^{L-1}$  pour  $m$  pair.

Supposons, maintenant, que nous sommes à un état  $S_n$  à  $t = nT$ . À l'arrivée d'un nouveau symbole, à  $nT \leq t < (n+1)T$ , nous passerons à l'état  $S_{n+1}$  donné par:

$$S_{n+1} = \{\theta_{n+1}, \nu_n, \nu_{n-1}, \dots, \nu_{n-L+2}\} \text{ où } \theta_{n+1} = \theta_n + \pi\varrho\nu_{n-L+1}$$

En partant de  $t = 0$ , à chaque nouveau symbole qui arrive, nous devons calculer une métrique correspondante par rapport aux états précédents. Cette métrique est accumulée de façon qu'à la fin nous pourrions voir quelle séquence donne la valeur la plus faible. Cette séquence sera choisie comme étant la séquence transmise. Cette métrique est donnée par  $\int_0^{nT} (x(t) - u(t))^2 dt$  qui est proportionnelle à la corrélation croisée entre le signal transmis et celui reçu. Dans l'intervalle  $nT \leq t < (n+1)T$ , et en utilisant (5.2), cela correspond à calculer:

$$\begin{aligned} Me_n(\boldsymbol{\nu}) &= \int_0^{(n+1)T} x(t) \cos[\omega_c t + \phi(t, \boldsymbol{\nu})] dt \\ &= Me_{n-1}(\boldsymbol{\nu}) + \int_{nT}^{(n+1)T} x(t) \cos[\omega_c t + \theta(t, \boldsymbol{\nu}) + \theta_n] dt \end{aligned} \quad (5.15)$$

où  $Me_{n-1}$  est la métrique accumulée par les  $n-1$  étapes précédentes du treillis et

$$v_n(\boldsymbol{\nu}, \theta_n) = \int_{nT}^{(n+1)T} x(t) \cos[\omega_c t + \theta(t, \boldsymbol{\nu}) + \theta_n] dt \quad (5.16)$$

est l'incrément de la valeur de la métrique dû au  $n$ -ième symbole. Ensuite, il suffit d'utiliser l'algorithme de Viterbi pour estimer la séquence transmise.

Nous pouvons, donc, apercevoir facilement la grande complexité de cette technique. De plus, le nombre d'états croît exponentiellement avec la mémoire du signal. À part cela, le système est plus efficace avec l'augmentation des valeurs de  $L$  et  $\mathcal{A}$ , mais la complexité du récepteur augmente aussi dans cette même direction. Cela ne sera pas le cas dans la nouvelle méthode qui sera proposée ensuite. Sa complexité ne dépend pas de  $\mathcal{A}$  et elle augmente linéairement avec la valeur de  $L$ . De plus, nous n'avons pas besoin que  $\varrho$  soit rationnelle puisque notre méthode ne dépend pas des états de la modulation.

La section suivante montre la performance du récepteur ML. Nous utiliserons ces résultats après, pour mesurer la performance de la nouvelle méthode qui sera proposée.

## 5.4 Performance du Récepteur de Maximum Vraisemblance

L'analyse de la performance du récepteur ML pour les signaux CPM, dépend de la distance euclidienne entre des chemins dans le treillis issus d'un même état et se rejoignant par la suite à un même état. Cette distance dépend du signal reçu. Supposons deux signaux,  $u_i$  et  $u_j$ , avec des trajectoires en phase différentes,  $\phi(t, \boldsymbol{\nu}_i)$  et  $\phi(t, \boldsymbol{\nu}_j)$ . Les séquences  $\boldsymbol{\nu}_i$  et  $\boldsymbol{\nu}_j$  doivent être différentes dans leur premier symbole. La distance euclidienne entre ces deux signaux dans un intervalle  $NT$  est définie comme [Pro95]:

$$\begin{aligned} d_{ij}^2 &= \int_0^{NT} (u_i(t) - u_j(t))^2 dt \\ &= NT\mathcal{E}^2 - 2\mathcal{E}^2 \int_0^{NT} \cos(\omega_c t + \phi(t, \boldsymbol{\nu}_i)) \cos(\omega_c t + \phi(t, \boldsymbol{\nu}_j)) dt \\ &= NT\mathcal{E}^2 - \mathcal{E}^2 \int_0^{NT} \cos(\phi(t, \boldsymbol{\nu}_i) - \phi(t, \boldsymbol{\nu}_j)) dt \\ &= \mathcal{E}^2 \int_0^{NT} \{1 - \cos(\phi(t, \boldsymbol{\nu}_i) - \phi(t, \boldsymbol{\nu}_j))\} dt \end{aligned}$$

Ainsi, la distance euclidienne dépend simplement de la différence de phase entre les chemins du treillis. Le taux d'erreur de réception est fonction de la distance minimale,  $d_{min}^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \min_{i,j} d_{ij}^2$ , et est donné par [Pro95]:

$$P_E = Q\left(\sqrt{d_{min}^2 \frac{E_b}{N_0}}\right) \quad (5.17)$$

où  $Q(x) = (\sqrt{2\pi})^{-1} \int_x^\infty e^{-z^2/2} dz$ . Ainsi, la probabilité d'erreur dépend, à travers  $d_{min}$ , de l'indice de la modulation,  $\rho$ , de la taille de l'alphabet utilisé,  $\mathcal{A}$  et du support de l'impulsion de mise-en-forme,  $L$ .

Pour les cas les plus simples, comme quand l'alphabet est binaire ( $\mathcal{A} = 2$ ) et  $L = 1$ , une limite supérieur de  $d_{min}^2$ , notée  $d_B^2$ , peut être trouvée directement [Pro95]:

$$d_B^2(\rho) = 2 \left(1 - \frac{\sin(2\pi\rho)}{2\pi\rho}\right) \quad (5.18)$$

Lorsque  $\mathcal{A} > 2$ , encore dans le cas d'une réponse complète, il est aussi facile de trouver

une limite supérieur pour  $d_{min}^2$  [Pro95]:

$$d_B^2(\varrho) = \min_{1 \leq k \leq A-1} \left\{ (2 \log_2 \mathcal{A}) \left( 1 - \frac{\sin 2k\pi\varrho}{2k\pi\varrho} \right) \right\} \quad (5.19)$$

L'équation (5.17) sera donc utilisé, avec une valeur limite supérieur  $d_B^2$  pour  $d_{min}^2$ , pour donner une limite théorique de la performance du récepteur.

## 5.5 État-de-l'Art

Due à la complexité du récepteur optimal, vue à la section 5.3, une grande partie de la recherche concernant la modulation CPM consiste à trouver des récepteurs sous-optimaux, en cherchant le meilleur compromis entre complexité et performance. L'idéal serait de trouver une technique simple, sans perte de performance par rapport au récepteur optimal.

Dans la plupart des travaux, le canal est simplement AWGN et le récepteur est cohérent [SW83, SSA84, Kal89, Sim91, TS95], l'objectif étant toujours de réduire la complexité de l'algorithme de Viterbi. En [Gas98], l'auteur développe une technique de détection non-cohérente. Pour le cas spécifique de la modulation MSK, des récepteurs linéaires peuvent être utilisés avec une perte de performance très limitée [TM87, LM91].

Dans ce contexte, le travail de Laurent [Lau86] a eu une grande importance. Il a montré que toutes les modulations de phase binaires, d'amplitude constante, peuvent être écrites comme une somme finie d'impulsions modulées en amplitude, de durée limitée. Cela est valable quelque soit les valeurs de  $\varrho$  et de  $L$ , ce qui réduit considérablement la complexité inhérente à l'interprétation des modulations en phase. Autrement dit, il a trouvé une façon linéaire d'approcher une modulation qui est non-linéaire. Basée sur cette représentation, plusieurs travaux ont été faits en calculant la distance euclidienne [DP01], les limites de capacité pour des canaux AWGN et avec du bruit coloré [YG02], et des récepteurs optimaux et sous-optimaux, cohérents et non-cohérents [FK02, eRR99].

Quelques travaux ont aussi été faits en cherchant un égaliseur autodidacte pour les signaux CPM. En [BLS03b], les auteurs montrent que le critère du module constant (CM) n'arrive pas à égaliser ce type de signal, parce que l'hypothèse d'avoir une entrée i.i.d. (indépendant et identiquement distribuée) n'est plus valable. Ainsi, le critère aura plusieurs mauvaises solutions. En [FN01], basé sur l'approche de Laurent, les auteurs développent une technique aveugle pour l'estimation de  $\varrho$ , basée sur des techniques de chaînes de Markov Monte-Carlo, et utilisent des statistiques de second ordre pour réussir l'égalisation, en considérant les échantillons du signal CPM comme étant une séquence de symboles colorés qui ont des propriétés d'autocorrélation connues. Finalement, en [BLS03a], les auteurs proposent une

méthodologie pour l'identification aveugle des paramètres de la modulation CPM comme l'indice de la modulation  $\varrho$ , la période symbole et l'*offset* de fréquence de la porteuse. Cependant, la méthode est complexe et a des inconvénients comme l'optimisation d'un critère donné par une fonction coût non convexe et le calcul d'une séquence où les éléments sont élevés à des puissances non-entières.

Toutes les techniques cités ci-dessus ont un point en commun: elles dépendent de la connaissance des caractéristiques statistiques des signaux et du bruit. La technique de démodulation qui nous allons présenter ici, est fondée sur une approche algébrique et déterministe. Ainsi, nous n'avons pas besoin de connaître ces caractéristiques, ni d'imposer des hypothèses sur elles.

À part cela, le principal avantage de notre méthode est sa simplicité, principalement en comparaison avec les méthodes cités ci-dessus. Elle ne dépend d'aucune procédure d'optimisation et ne cherche pas à trouver la séquence des symboles transmise à partir de toutes les possibilités existantes, comme dans le cas du récepteur de maximum vraisemblance. La méthode est très rapide, peut être implémentée en temps réel et ne repose que sur des intégrales, faciles à calculer. Elle peut être utilisée pour une démodulation cohérente ou non-cohérente et est aussi robuste à l'addition de bruit.

## 5.6 Modulation CPFSK

Nous commencerons par le cas le plus simple, avec la modulation CPFSK en réponse complète. Ensuite nous proposerons deux méthodes différentes qui permettent de démoduler un signal CPM facilement, sans le besoin d'un récepteur complexe comme celui montré dans la section 5.3.

La première méthode provient directement de l'application du calcul opérationnel au signal modulé,  $u(t)$ . Nous profiterons ici pour montrer les facteurs à être considérés dans le choix de l'estimateur des symboles, puisque celui-ci n'est pas unique. Nous verrons, pourtant, que, dans ce cas, les symboles seront seulement faiblement linéairement identifiables, ce qui peut affecter la robustesse de la démodulation en présence de bruit. La deuxième méthode, par contre, provient d'un rapport direct entre les parties en phase et en quadrature du signal reçu. Elle est encore plus simple et plus robuste que la précédente.

### 5.6.1 Démodulation Indirecte du Signal Reçu

#### Estimateur des Symboles

Reprenons, premièrement, l'équation du signal modulé donnée par (5.7). Avec  $L = 1$  (réponse complète) et dans l'intervalle  $nT \leq t < (n+1)T$ , nous avons, avec le changement de variable  $t = (n + \tau)T$ :

$$\tilde{u}_n(\tau) = \mathcal{E} \cos \left( (\omega_c T + \pi \rho \nu_n) \tau + \omega_c n T + \pi \rho \sum_{k=0}^{n-1} \nu_k \right) \quad (5.20)$$

Cette équation peut être réécrite comme:

$$\tilde{u}_n(\tau) = \mathcal{E} \cos(\omega_n \tau + \phi_n), \quad 0 \leq \tau < 1 \quad (5.21)$$

où  $\omega_n = \omega_c T + \pi \rho \nu_n$  et  $\phi_n = \omega_c n T + \pi \rho \sum_{k=0}^{n-1} \nu_k$ .

Supposons que le canal introduit un bruit additif non-structuré. Notez que, une fois de plus, nous n'avons pas besoin de faire les hypothèses de gaussianité ou de blancheur. Le signal reçu est alors de la forme, pour  $nT \leq t < (n+1)T$ :

$$x_n(\tau) = \mathcal{E} \cos(\omega_n \tau + \phi_n) + \eta_n \quad (5.22)$$

où  $\eta_n$  est la portion du bruit qui affecte la transmission du n-ième symbole.

Comme nous avons vu dans la section 3.6.7, nous pouvons toujours décomposer le bruit  $\eta_n$  en composantes structurées et non-structurées:

$$\eta_n(\tau) = \vartheta_n + \eta_n^0(\tau) \quad (5.23)$$

où la perturbation structurée  $\vartheta_n$  représente, par exemple, la moyenne du bruit et où  $\eta_n^0(\tau)$  est un bruit non-structuré mais de moyenne nulle.

Dans le domaine opérationnel, le signal (5.22) devient, en utilisant la décomposition (5.23):

$$\hat{x}_n = \frac{s \mathcal{E} \cos \phi_n - \omega_n \mathcal{E} \sin \phi_n}{s^2 + \omega_n^2} + \frac{\vartheta_n}{s} + \hat{\eta}_n^0 \quad (5.24)$$

En faisant  $\alpha_n = \mathcal{E} \cos \phi_n$  et  $\beta_n = -\omega_n \mathcal{E} \sin \phi_n$ , (5.24) peut être réécrite comme:

$$\hat{x}_n = \frac{s \alpha_n - \beta_n}{s^2 + \omega_n^2} + \frac{\vartheta_n}{s} + \hat{\eta}_n^0 \quad (5.25)$$

La perturbation structurée peut, par définition même, être annihilée par un opérateur différentiel  $\Pi$  approprié. Cependant, un tel opérateur n'est pas unique. En effet, pour éliminer  $\vartheta_n$ , nous pouvons:

- Multiplier les deux membres de l'équation (5.25) par  $s$  et, ensuite, dériver par rapport

à  $s$ , ce qui nous donne:

$$\hat{x}_n + s\hat{x}'_n = \frac{(2s\alpha_n - \beta_n)(s^2 + \omega_n^2) - 2s^2(s\alpha_n - \beta_n)}{(s^2 + \omega_n^2)^2} + \left(\hat{\eta}_n^0 + s\hat{\eta}_n^{0'}\right) \quad (5.26)$$

et l'opérateur différentiel correspondant est:

$$\Pi_1(s) = 1 + s\frac{d}{ds}. \quad (5.27)$$

- Multiplier les deux membres de l'équation (5.25) par  $s(s^2 + \omega_n^2)$  et, ensuite, dériver trois fois par rapport à  $s$ . Dans ce cas, nous obtenons:

$$(s^3\hat{x}_n)^{(3)} = -\omega_n^2\hat{x}^{(3)} + \Pi_2(s)\hat{\eta}_n^0 \quad (5.28)$$

et l'opérateur différentiel est alors

$$\Pi_2(s) = 6 + 18s\frac{d}{ds} + 3(3s^2 + \omega_n^2)\frac{d^2}{ds^2} + (s^3 + s\omega_n^2)\frac{d^3}{ds^3} \quad (5.29)$$

Nous voyons donc qu'à chaque opérateur différentiel  $\Pi$  correspond un estimateur de  $\omega_n$ . Le choix de l'estimateur sera guidé, entre autres, par l'influence du bruit non-structuré sur l'estimation des symboles.

### Choix de l'Estimateur - Influence de la Perturbation Non-Structurée

Nous étudions ici l'effet de la perturbation non-structurée sur les estimateurs de  $\omega_n$  obtenus à partir des équations (5.26) et (5.28). Commençons par l'équation (5.26), que l'on réécrit sous la forme:

$$\begin{aligned} 2s^2(\hat{x}_n + s\hat{x}'_n)\omega_n^2 + (\hat{x}_n + s\hat{x}'_n)\omega_n^4 - \beta_n s^2 - 2\alpha_n\omega_n^2 s + \beta_n\omega_n^2 = \\ = -s^4(\hat{x}_n + s\hat{x}'_n) + (s^2 + \omega_n^2)^2 \Pi_1(s)\hat{\eta}_n^0 \end{aligned} \quad (5.30)$$

ou encore:

$$p_1(s)\theta_1 + p_2(s)\theta_2 + \theta_3 s^2 + \theta_4 s + \theta_5 = q(s) + (s^2 + \omega_n^2)^2 \Pi_1(s)\hat{\eta}_n^0 \quad (5.31)$$

où  $\theta_1 = \omega_n^2$ ,  $\theta_2 = \omega_n^4$  et où une identification terme à terme avec l'équation (5.30) fournit immédiatement les définitions des termes restantes.

En toutes généralités, on peut estimer tous les coefficients  $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1, \dots, \theta_5]$  et en déduire

l'estimation du symbole  $\nu_n$  à partir de l'estimateur donné par le système linéaire d'équations:

$$\frac{d^i}{ds^i} (p_1(s)\theta_1 + p_2(s)\theta_2 + \theta_3 s^2 + \theta_4 s + \theta_5) = \frac{d^i}{ds^i} q(s) \quad (5.32)$$

pour  $i = 0, \dots, 4$ .

Notons que l'estimateur ignore tout simplement la présence de la perturbation non-structurée inconnue. Bien entendu, l'estimateur (5.32), qui n'est pas propre, doit être transformé en un estimateur propre. Cela est fait en divisant tout le système par  $s^\gamma$  où, dans ce cas,  $\gamma > 4$  (voir section 3.6.6, proposition 3.6.4).

Cependant, puisque le paramètre recherché, i.e. le  $n$ -ième symbole  $\nu_n$ , est entièrement déterminé par  $\omega_n$  par la formule  $\nu_n = \frac{\omega_n - \omega_c T}{\pi \varrho}$ , nous ne retiendrons que le sous système de (5.32)

$$\frac{d^i}{ds^i} (\theta_1 p_1(s) + \theta_2 p_2(s)) = \frac{d^i}{ds^i} q(s) \quad i = 3, 4 \quad (5.33)$$

ou, encore,  $\mathcal{P}\boldsymbol{\theta} = \mathcal{Q}$ .

Comme l'estimateur (5.33) ignore la perturbation  $\eta_n^0$ , les paramètres estimés sont entachés d'une erreur  $\Delta\boldsymbol{\theta}$ , dont une borne est donnée par la formule bien connue

$$\frac{\|\Delta\boldsymbol{\theta}\|}{\|\boldsymbol{\theta}\|} \leq \text{cond}(\mathcal{P}) \frac{\|\Delta\mathcal{Q}\|}{\|\mathcal{Q}\|} \quad (5.34)$$

où  $\Delta\mathcal{Q} = [\Delta q_1 \ \Delta q_2]^T$  représente le terme ignoré, dû au bruit et où  $\text{cond}(\mathcal{P})$  est le conditionnement de  $\mathcal{P}$ . Nous nous intéressons ici seulement au terme  $\Delta\mathcal{Q}$  donné par

$$\Delta\mathcal{Q} = \frac{d^i}{ds^i} (s^2 + \omega_n^2)^2 \Pi_1(s) \hat{\eta}_n^0, \quad i = 3, 4 \quad (5.35)$$

Plus précisément on a, pour la composante  $\Delta q_1$ ,

$$\begin{aligned} \Delta q_1(s) = & 24 (4s^2 + \omega_n^2) \hat{\eta}_n^{0(1)} + 24s (3s^2 + 2\omega_n^2) \hat{\eta}_n^{0(2)} \\ & + 4 (4s^4 + 5s^2\omega_n^2 + \omega_n^4) \hat{\eta}_n^{0(3)} + s (s^2 + \omega_n^2)^2 \hat{\eta}_n^{0(4)} \end{aligned}$$

Après division par  $s^\gamma$ , on obtient dans le domaine temporel, une expression composée de termes de la forme:

$$b_\gamma(i, j) = \frac{(-1)^i}{(\gamma - j - 1)!} \int_0^\lambda (\lambda - \tau)^{\gamma-j-1} \tau^i \eta_n^0(\tau) d\tau, \quad (5.36)$$

où  $1 \leq i \leq 4$ ,  $0 \leq j \leq 3$  et  $\gamma > 4$ .

On vérifie directement qu'il en sera le même pour  $\Delta q_2(s)$ .

Considérons maintenant l'équation (5.28). L'erreur  $\Delta Q$  correspondant est, après division par  $s^\gamma$ , et d'après (5.29), composée de termes de la même forme que (5.36), avec, cette fois-ci,  $0 \leq i \leq 3$ .

Puisque le temps d'intégration  $\lambda$  est inférieur ou égal à un, d'après (5.36) et ce qui a été vu dans la section 3.6.7, le terme dominant de l'erreur correspond à la valeur minimale de  $i$ , c'est-à-dire  $i = 1$  pour l'estimateur (5.33) et  $i = 0$  pour l'estimateur (5.28) (voir section 3.6.7). On peut alors en déduire que, vraisemblablement, le niveau du bruit sera plus important pour l'estimateur (5.28) que pour celui donné par (5.33).

Cependant, il est évident, comme le montre la borne (5.34), que ce qui importe le plus c'est d'une part le rapport signal à bruit de l'estimateur et d'autre part le conditionnement du système. Maintenant, si l'on regarde de plus près le système (5.33), il apparaît, en posant  $p(s) = s\hat{x}' + \hat{x}$ , comme

$$(2s^2p(s))^{(i)}\theta_1 + p(s)^{(i)}\theta_2 = - (s^4p(s))^{(i)} \quad i = 3, 4 \quad (5.37)$$

Dans la première colonne de la matrice du système, on retrouve des dérivés de  $p(s)$  à partir de l'ordre 1 alors que pour la deuxième colonne, l'ordre de dérivation est 3 et 4. Ceci signifie que dans le domaine temporel, cette matrice sera constituée d'intégrales itérées de  $\tau^i x_n(\tau)$ ,  $i = 1, \dots, 4$  pour la première colonne et  $i = 3, 4$  pour la deuxième. Celle-ci sera, donc, négligeable par rapport à la première, ce qui est une source de mauvais conditionnement. Pour cette raison, nous choisirons toujours l'estimateur où les colonnes de  $\mathcal{P}$  sont formées par des termes qui ont la même ordre de dérivation ou dont les ordres sont le plus proches possible. Ainsi, l'estimateur donné par (5.28) sera privilégié par rapport à celui donné par (5.33).

## Démodulation des Symboles

Une fois l'estimateur choisi, pour récupérer le symbole  $\nu_n$  transmis, il nous suffit d'identifier le terme  $\omega_n^2$  à partir de (5.28). Nous allons, donc, diviser l'équation par  $s^\gamma$  avec  $\gamma > 3$  et calculer les intégrales de  $x(\tau)$  avec (3.43). Avec  $\omega_n$ , les symboles transmis seront identifiés en faisant:

$$\nu_n = \frac{\omega_n - \omega_c T}{\pi \varrho} \quad (5.38)$$

où  $\omega_c$ ,  $T$  et  $\varrho$  sont considérés comme connus au récepteur.

Il faut noter que, à part le besoin de ces paramètres, la méthode a l'avantage d'être aveugle. De plus, nous voyons que même si la modulation CPM est une modulation non-linéaire, sa démodulation peut être obtenue très facilement, sans le besoin d'un récepteur ML.

Par contre, comme l'identification des symboles dépend de celle de  $\omega_n^2$ , ils seront seulement faiblement linéairement identifiables. Cela est très indésirable puisqu'il dégrade la performance de la méthode. Ainsi, l'identifiabilité est aussi une caractéristique très importante à être prise en compte dans le choix d'un estimateur. Ensuite nous proposerons un nouveau estimateur où les symboles seront linéairement identifiables.

À cause de la dépendance de  $\omega_n^2$ , dans ce qui suit, cette méthode sera appelée méthode de *Démodulation Indirecte des Symboles* (DIS). Les résultats de simulation seront montrés dans la section 5.6.3

L'extension de la méthode pour le cas d'une modulation CPFSK à réponse partielle, où  $L > 1$ , est directe. À partir de (5.7) nous pouvons redéfinir  $\omega_n$  et  $\phi_n$  comme:

$$\begin{aligned}\omega_{n_p} &= \omega_c T + \frac{\pi \varrho}{L} \sum_{k=n-L+1}^n \nu_k \\ \phi_{n_p} &= \frac{\pi \varrho}{L} \sum_{k=n-L+1}^{n-1} (n-k) \nu_k + \omega_c n T + \pi \varrho \sum_{k=0}^{n-L} \nu_k\end{aligned}\quad (5.39)$$

Ainsi,  $\tilde{u}_n$  sera encore donné par (5.21) mais en substituant  $\omega_n$  et  $\phi_n$  par  $\omega_{n_p}$  et  $\phi_{n_p}$  donnés ci-dessus. La procédure pour l'identification des paramètres reste exactement la même, mais, maintenant, à la fin du processus, nous aurons identifié  $\omega_{n_p}^2$ . Pour récupérer le symbole  $\nu_n$ , nous aurons:

$$\sum_{k=n-L+1}^n \nu_k = \frac{L (\omega_{n_p} - \omega_c T)}{\pi \varrho}$$

ce qui nous donne:

$$\nu_n = \frac{L (\omega_{n_p} - \omega_c T)}{\pi \varrho} - \sum_{k=n-L+1}^{n-1} \nu_k\quad (5.40)$$

et ainsi, la récupération de  $\nu_n$  dépendra des symboles déjà identifiés.

Contrairement au récepteur ML où le nombre d'états augmente exponentiellement avec  $L$ , ici nous avons simplement une opération de soustraction en plus. Cependant, comme dans toute structure avec rebouclage, il existe la possibilité de propagation d'erreurs.

L'extension de la méthode vers le cas d'un canal sélectif en fréquence n'est pas si simple. En effet, le signal reçu par le récepteur, dans ce cas, serait donné par:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{kT}^{(k+1)T} h(t-\zeta) u_k(\zeta) d\zeta + \int_{nT}^t h(t-\zeta) u_n(\zeta) d\zeta\quad (5.41)$$

où  $nT \leq t < (n+1)T$  et  $u_i(\tau)$  est le signal transmis dans l'intervalle  $iT \leq t < (i+1)T$ . Nous voyons, donc, que  $x(t)$  dépend du signal transmis dans l'intervalle d'intérêt et aussi de son

passé. Cela rend le traitement par l'application du calcul opérationnel à  $x(t)$  très difficile.

Comme nous avons déjà commenté, nous proposerons ensuite une deuxième méthode, encore plus simple et robuste que celle-ci, où les symboles peuvent être identifiés directement.

### 5.6.2 Démodulation Directe du Signal Reçu

La méthode qui sera présentée utilise le modèle de récepteur montré à la figure 5.2. Le signal reçu,  $x(t)$ , doit être premièrement ramené en bande de base pour qu'après on puisse le démoduler. Pour cette raison, il sera multiplié par un cosinus et un sinus et, après, filtré par un filtre passe-bas. Ainsi, nous aurons les composants en phase et en quadrature de  $x(t)$  en bande de base.

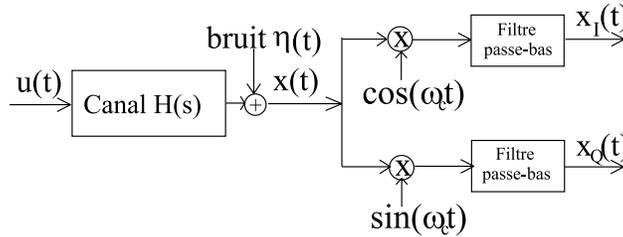


Figure 5.2: Modèle du récepteur utilisé

Pour le moment, notre but est simplement de démoduler  $u(t)$ , sans la présence de bruit, ce qui fait que  $x(t)$  soit égal à  $u(t)$ , avec  $u(t)$  donné par (5.5). De plus, considérons la modulation à réponse complète et plaçons-nous dans l'intervalle  $nT \leq t < (n+1)T$ .

La multiplication de  $x(t)$  par un cosinus et un sinus, comme dans la figure 5.2, nous donnera, après quelques manipulations:

$$x(t)\cos(\omega_c t) = \frac{\mathcal{E}}{2} \left[ \cos \left( 2\omega_c t + \pi \rho \nu_n \frac{(t-nT)}{T} + \pi \rho \sum_{k=0}^{n-1} \nu_k \right) + \cos \left( -\pi \rho \nu_n \frac{t-nT}{T} - \pi \rho \sum_{k=0}^{n-1} \nu_k \right) \right] \quad (5.42)$$

$$x(t)\sin(\omega_c t) = \frac{\mathcal{E}}{2} \left[ \sin \left( 2\omega_c t + \pi \rho \nu_n \frac{(t-nT)}{T} + \pi \rho \sum_{k=0}^{n-1} \nu_k \right) + \sin \left( -\pi \rho \nu_n \frac{t-nT}{T} - \pi \rho \sum_{k=0}^{n-1} \nu_k \right) \right] \quad (5.43)$$

Ensuite, le filtrage passe-bas élimine les éléments qui dépendent du double de la fréquence de la porteuse,  $2\omega_c$ . À la sortie de ce filtre, nous aurons donc :

$$\begin{aligned} x_I(t) &= \frac{\mathcal{E}}{2} \cos \left( -\pi \varrho \nu_n \frac{t - nT}{T} - \pi \varrho \sum_{k=0}^{n-1} \nu_k \right) \\ x_Q(t) &= \frac{\mathcal{E}}{2} \sin \left( -\pi \varrho \nu_n \frac{t - nT}{T} - \pi \varrho \sum_{k=0}^{n-1} \nu_k \right) \end{aligned} \quad (5.44)$$

où  $x_I(t)$  est la composante en phase et  $x_Q(t)$  celle en quadrature de  $x(t)$  en bande de base.

Ces deux composantes sont liées par :

$$\begin{aligned} \frac{dx_I(\tau)}{d\tau} &= \pi \varrho \nu_n \frac{\mathcal{E}}{2} \sin \left( -\pi \varrho \nu_n \tau - \pi \varrho \sum_{k=0}^{n-1} \nu_k \right) \\ &= \pi \varrho \nu_n x_Q(\tau) \end{aligned} \quad (5.45)$$

Dans le domaine fréquentiel, (5.45) dévient :

$$s \hat{x}_I(s) - x_I(0) = \pi \varrho \nu_n \hat{x}_Q(s) \quad (5.46)$$

Pour identifier le seul paramètre inconnu,  $\nu_n$ , on commencera par dériver (5.46) par rapport à  $s$ , pour éliminer la dépendance à la condition initiale  $x_I(0)$ . Ensuite, on divise le résultat par  $s^\gamma$  avec  $\gamma$  supérieur à 1, pour que les termes soient propres. Le symbole sera enfin identifié par :

$$\nu_n = \frac{(s \hat{x}_I(s))'}{\pi \varrho \hat{x}'_Q(s)} \quad (5.47)$$

avec  $\varrho$  connu au récepteur.

Dans ce cas, la méthode obtenue est aussi autodidacte, comme la méthode DIS. En analysant l'estimateur par rapport à ce que nous avons vu dans la section précédente, nous voyons que l'ordre des dérivés n'est pas élevé, ce qui signifie une influence plus forte du bruit. Pourtant, cet effet peut aussi être réduit en contrôlant la valeur de  $\gamma$  (voir section 3.6.7). Dans le cas d'une perturbation structurée, il suffit de multiplier (5.46) par  $s$  et la dériver une fois que la perturbation sera annihilée. De plus, ici nous n'avons pas le problème de mauvais conditionnement. La procédure proposée est plus simple que la précédente, avec une identifiabilité linéaire des symboles qui, comme nous le verrons, favorise une plus grande robustesse. Cette méthode sera appelée *Démodulation Directe des Symboles* (DDS).

En suivant la procédure décrite, il est clair que nous pouvons aussi intervertir  $x_Q(t)$  et

$x_I(t)$ , pour obtenir

$$(s\hat{x}_Q)' = -\pi\varrho\nu_n\hat{x}'_I \quad (5.48)$$

Nous pouvons, donc, profiter de cela pour rendre la méthode de récupération des symboles encore plus robuste. Nous appellerons  $\nu_{n_1}$  le symbole obtenu par (5.47),  $\nu_{n_2}$  le symbole obtenu à partir de (5.48) et  $\nu_{n_3}$  celui résultant d'une combinaison des deux précédents:

$$\nu_{n_3} = \frac{(s\hat{x}_I)' + (s\hat{x}_Q)'}{\pi\varrho(\hat{x}'_Q - \hat{x}'_I)} \quad (5.49)$$

La décision finale sur le n-ième symbole est déterminée par vote, par  $\nu_n = \nu_{n_i}$  où  $i$  est l'indice du minimum du vecteur

$$[|dec(\nu_{n_1}) - dec(\nu_{n_2})|, |dec(\nu_{n_2}) - dec(\nu_{n_3})|, |dec(\nu_{n_3}) - dec(\nu_{n_1})|],$$

où  $dec(\cdot)$  est le dispositif de décision à la sortie du démodulateur. Si l'un des  $\nu_{n_i}$  a un signe incorrect, par exemple, cette méthode permet d'éliminer la possibilité de le choisir. Ainsi, le fait de décider le symbole de cette façon apporte un gain de robustesse au système.

Comme dans la méthode DIS (section 5.6.1), l'extension pour le cas d'une modulation CPFSK à réponse partielle est directe. Dans ce cas, la dérivation de  $x_I(\tau)$  par rapport à  $\tau$  nous donnera:

$$\frac{dx_I(\tau)}{d\tau} = \frac{\pi\varrho \sum_{k=n-L+1}^n \nu_k}{L} x_Q(\tau) \quad (5.50)$$

et, une fois de plus, l'identification du symbole  $\nu_n$  dépendra des symboles précédents déjà identifiés. La méthode d'identification du symbole décrite ci-dessus, où le symbole est choisi parmi 3 possibilités, peut être appliquée ici de la même façon que dans le cas à réponse complète.

Enfin, il faut aussi noter que le cas d'un canal sélectif en fréquence pose le même problème que pour la méthode DIS. Dû à l'étalement temporel du signal transmis, causé par le canal, le traitement se complique.

### 5.6.3 Résultats des Simulations

Pour les simulations en bande passante, le bruit est modélisé comme un bruit de bande étroite filtré [Hay89, WFJ<sup>+</sup>02]:

$$\eta(t) = \eta_I(t)\cos(\omega_c t + \varphi_1) - \eta_Q(t)\sin(\omega_c t + \varphi_2) \quad (5.51)$$

où  $\eta_I(t)$  et  $\eta_Q(t)$  sont les composants en phase et en quadrature du bruit  $\eta(t)$ . Les deux composantes sont statistiquement indépendantes et décorrelées, chacune étant un processus gaussien, blanc, de variance  $\sigma^2$ . Les phases  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  sont choisies aléatoirement. Comme nous avons déjà vu, les moyennes des processus peuvent être quelconques puisqu'elles disparaîtront avec les dérivations par rapport à la variable  $s$ .

La variance du bruit  $\sigma^2$  est calculée comme [Hay89, WFJ<sup>+</sup>02]:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\mathcal{E}^2}{4 \cdot \log_2(\mathcal{A}) \cdot 10^{Eb/No/10}}}$$

où  $\mathcal{A}$  est la taille de l'alphabet des symboles et  $Eb/No$  est le rapport signal à bruit par bit, donné en décibels. Rappelons que l'énergie d'un symbole est  $E = E_b \cdot \log_2(\mathcal{A})$ .

La performance des méthodes proposées sera mesurée par le calcul des taux d'erreurs binaires (TEB). Ces taux sont obtenus à partir de symboles choisis aléatoirement. La taille de la séquence transmise doit toujours être, en bit, au moins 10 fois supérieure à l'inverse de la valeur du TEB trouvée. Ainsi, par exemple, si l'alphabet est binaire, pour qu'un TEB de  $10^{-5}$  soit valable, il faut la transmission d'au moins  $10^6$  symboles. Tous les résultats montrés ci-dessous ont été ainsi obtenus. La taille minimale utilisée pour la séquence transmise était de 50000 symboles.

## Méthode DIS

Pour la méthode DIS, les symboles seront obtenus à partir de l'équation (5.28). La figure 5.3 montre le résultat obtenu pour la modulation à réponse complète. Les paramètres de simulation sont:  $\mathcal{E} = 1.437$ ,  $\varrho = 0.725$ ,  $T = 6.25 \times 10^{-5}$ ,  $\omega_c = 60/T$ ,  $\gamma = 18$ ,  $\lambda = 1$ ,  $\mathcal{A}$  égal à 4 et 8, et nous avons utilisé, pour le calcul des intégrales, 10000 échantillons par période symbole.

Nous pouvons observer, en premier, que le résultat obtenu pour  $\mathcal{A} = 4$  est presque le même que celui obtenu pour  $\mathcal{A} = 8$  ce qui nous montre que la taille de l'alphabet n'influence pas beaucoup le résultat.

De plus, nous voyons que le résultat n'est pas très satisfaisant. Comme nous avons déjà commenté, cela est dû à la faible identifiabilité du système obtenu. En effet, les vrais paramètres sont des fonctions algébriques des paramètres estimés et, pour cette raison, nous ne maîtrisons pas l'influence d'erreurs potentielles. Dans le cas simulé, par exemple, la valeur de  $\omega_c T$  est beaucoup plus élevée que celle du terme  $\pi \varrho \nu$ . Ainsi, les résultats estimés de  $\omega_n^2$ , à partir du système donné par (5.28), varieront autour de la valeur de  $(\omega_c T)^2$ . Pour  $\mathcal{A} = 4$ , plus précisément, ils varieront entre [2826, 4467]. Il est clair, donc, que les erreurs d'estimations se

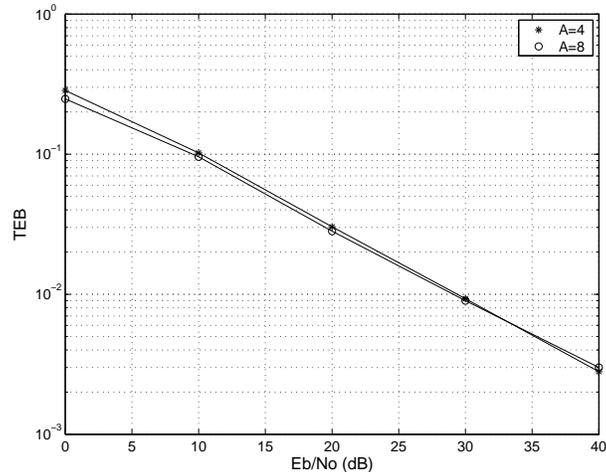


Figure 5.3: TEB pour la méthode DIS, canal AWGN

répercuterons différemment sur la récupération des symboles, ce qui dégrade la performance.

De plus, de façon plus générale, les systèmes faiblement linéairement identifiables ont une taille plus grande que le nécessaire. Cela implique la nécessité de calculer plus de dérivations, ce qui augmente les chances d'avoir un système mal-conditionné. Dans la méthode proposée, cela n'est pas le cas puisque nous avons un seul paramètre à identifier, même si nous avons eu besoin de dériver (5.25) pour éliminer les constantes.

La méthode DDS, dont les résultats de simulations seront montrés ensuite, ne présente pas ces problèmes. Nous verrons, donc, qu'elle est beaucoup plus performante.

## Méthode DDS

Pour la méthode DDS, la récupération des symboles est faite en utilisant la méthode décrite dans la section 5.6.2. De plus, pour simuler une démodulation non-cohérente,  $x(t)$  est multiplié par  $\cos(\omega_c t + \varphi_c)$  et  $\sin(\omega_c t + \varphi_s)$ , avec des phases  $\varphi_c$  et  $\varphi_s$  choisies aléatoirement.

En ce qui concerne le filtrage passe-bas, plusieurs solutions sont possibles. La première est d'utiliser un filtre, comme celui de Butterworth par exemple, avec une largeur de bande suffisante pour ne pas distordre le signal CPM. Comme a été vu dans la section 5.2, cela dépend de la famille de la modulation considérée, de la valeur  $L$ , de  $\rho$  et de  $\mathcal{A}$ . Cependant, l'opération d'intégration représente déjà un filtrage passe-bas. Ainsi, la deuxième solution est de considérer simplement les intégrales itérées du démodulateur. Il suffira, donc, d'utiliser une valeur de  $\gamma$  qui permet un bon filtrage du signal reçu.

La figure 5.4 montre le résultat obtenu pour la méthode DDS, modulation à réponse complète, comparé avec la limite théorique donnée par (5.17). Ici nous avons utilisé les mêmes paramètres de la simulation précédente, sauf pour  $\omega_c = 2\pi 10 \times 10^6$ ,  $\gamma = 8$  et, dans

ce cas, 1500 échantillons par période symbole suffisent pour avoir un bon résultat. De plus, nous avons utilisé  $\mathcal{A} = 8$ . Pour le calcul de la limite théorique, la distance  $d_B^2$  utilisée est de 5.23, calculée avec (5.19).

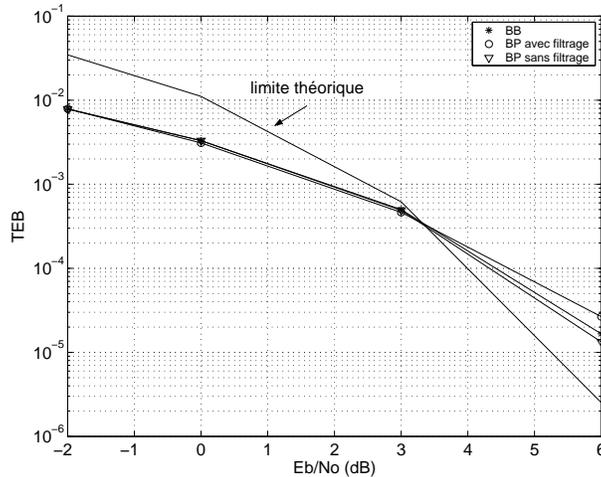


Figure 5.4: TEB pour la méthode DDS, canal AWGN, modulation CPFSK

Nous pouvons, donc, observer que le résultat est très bon, étant même au dessous de la limite théorique pour les valeurs de  $E_b/N_0$  plus faibles. Cela montre la puissance de la méthode proposée, qui, en plus, est très simple à implémenter.

De plus, la figure 5.4 compare les simulations en bande de base, en bande passante avec le filtrage passe-bas et en bande passante sans le filtrage. Nous pouvons voir que les 3 cas donnent presque le même résultat, avec une petite différence juste pour  $E_b/N_0$  égal à 6 dB. Cela confirme que les intégrales du processus de démodulation représentent un filtre passe-bas et suffisent pour permettre une bonne récupération des symboles, ce qui simplifie le démodulateur.

Les figures 5.5 et 5.6 montrent les résultats obtenus pour une modulation à réponse partielle avec  $L = 2$  et  $L = 3$  respectivement. Il était déjà attendu d'avoir une perte de performance par rapport au cas de la modulation à réponse complète, puisque maintenant la récupération des symboles dépend des symboles déjà identifiés dans les instants précédents. De toute façon, nous pouvons observer qu'il n'y a pas une grande différence de performance entre les deux cas testés ( $L = 2$  et  $L = 3$ ). Pour les paramètres de simulation, la seule différence est dans le nombre d'échantillons utilisé pour le calcul des intégrales: 3000 par période symbole pour  $L = 2$  et 5000 pour  $L = 3$ .

Les figures montrent aussi les simulations en bande de base, en bande passante avec un filtre passe bas et en bande passante sans le filtre. Nous pouvons voir que les trois résultats sont très proches, tant pour  $L = 2$  que pour  $L = 3$ , ce qui valide, une fois de plus, la solution

sans filtre.

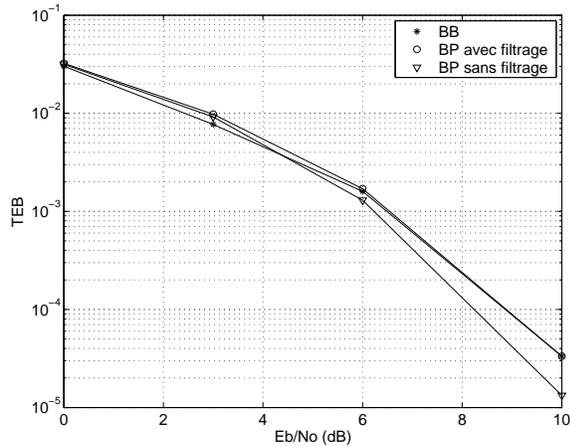


Figure 5.5: TEB pour la méthode DDS,  $L = 2$ ,  $\mathcal{A} = 8$ , canal AWGN, CPFSK

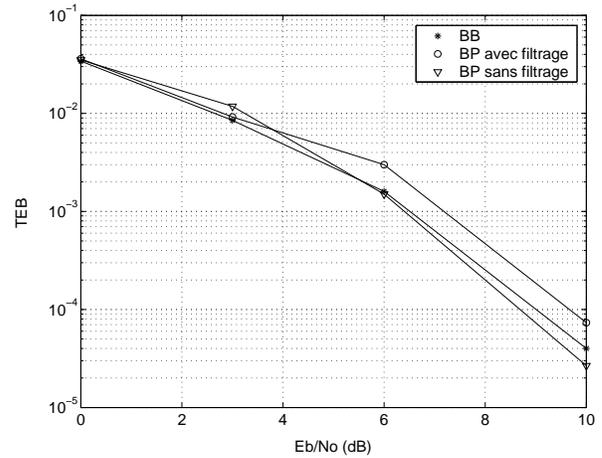


Figure 5.6: TEB pour la méthode DDS,  $L = 3$ ,  $\mathcal{A} = 8$ , canal AWGN, CPFSK

## 5.7 Modulation LRC

La modulation LRC est un peu plus difficile à traiter que la modulation CPFSK dû à la sinusoïde présente dans l'argument du cosinus, comme nous pouvons voir dans l'équation (5.6). Comme pour la modulation CPFSK, nous commencerons par le cas le plus simple où  $L = 1$ . Une fois de plus, il est possible de trouver une méthode de démodulation DIS ou DDS. Cependant, comme la deuxième est plus robuste et a une meilleure performance, ici nous n'allons traiter qu'elle.

### 5.7.1 Méthode DDS

Comme pour le cas de la modulation CPFSK, le démodulateur consiste, premièrement, à ramener le signal reçu en bande de base et, ensuite, trouver une équation différentielle entre les composantes en phase et en quadrature du signal telle que les paramètres à identifier apparaissent dans les coefficients. Pour ramener le signal en bande de base,  $x(t)$  est multiplié par un cosinus et un sinus et, après, filtré par un filtre passe-bas.

La multiplication de (5.6) dans l'intervalle  $nT \leq t < (n + 1)T$ , avec  $L = 1$ , par un sinus

et un cosinus, nous donne, après le filtrage passe-bas:

$$\begin{aligned} x_I(t) &= \frac{\mathcal{E}}{2} \cos \left( -\pi \varrho \nu_n \frac{t - nT}{T} + \varrho \frac{\nu_n}{2} \sin \frac{2\pi(t - nT)}{T} - \pi \varrho \sum_{k=0}^{n-1} \nu_k \right) \\ x_Q(t) &= \frac{\mathcal{E}}{2} \sin \left( -\pi \varrho \nu_n \frac{t - nT}{T} + \varrho \frac{\nu_n}{2} \sin \frac{2\pi(t - nT)}{T} - \pi \varrho \sum_{k=0}^{n-1} \nu_k \right) \end{aligned} \quad (5.52)$$

Une fois de plus, nous cherchons une relation entre ces deux signaux. Ainsi, la dérivation de  $x_I(t)$  par rapport à la variable  $t$ , avec le changement de variable  $t = (n + \tau)T$ , nous donne:

$$\begin{aligned} \dot{x}_I(\tau) &= (\pi \varrho \nu_n - \pi \varrho \nu_n \cos(2\pi\tau)) \frac{\mathcal{E}}{2} \sin \left( -\pi \varrho \nu_n \tau + \varrho \frac{\nu_n}{2} \sin(2\pi\tau) - \pi \varrho \sum_{k=0}^{n-1} \nu_k \right) \\ &= (\pi \varrho \nu_n - \pi \varrho \nu_n \cos(2\pi\tau)) x_Q(\tau) \end{aligned} \quad (5.53)$$

Alors que pour la modulation CPFSK l'estimation du symbole  $\nu_n$  reposait sur une équation différentielle linéaire à coefficients constants, l'équation différentielle correspondante ici est encore linéaire mais à coefficients variables. Ceci correspond aux signaux dits différentiellement rationnels. La démarche pour l'identification des paramètres reste cependant la même.

Nous avons, donc, à nouveau, une équation différentielle simple entre les composants en phase et en quadrature du signal reçu. La seule difficulté ici est de trouver la transformée de Laplace de (5.53) dû au coefficient variable présent dans l'équation. Cependant, nous pouvons calculer directement, dans le domaine temporel, les intégrales correspondantes aux opérations de dérivation par rapport à  $s$  et de la division par  $s^\gamma$  dans le domaine opérationnel. Comme nous avons vu dans le chapitre 3, la dérivation par rapport à la variable  $s$  correspond, dans le domaine temporel, à la multiplication du signal par  $-t$ . De plus, la division par  $s^\gamma$  correspond à une intégrale itérée.

Pour identifier les symboles en partant de (5.53), nous avons besoin de dériver l'équation par rapport à  $s$  seulement une fois, pour éliminer les conditions initiales, et la diviser par  $s^\gamma$  avec  $\gamma$  supérieur à 1. Cela sera équivalent, dans le domaine temporel, à:

$$\int_{\gamma} \tau \dot{x}_I(\tau) d\tau = \pi \varrho \nu_n \int_{\gamma} \tau (1 - \cos(2\pi\tau)) x_Q(\tau) d\tau \quad (5.54)$$

où

$$\int_{\gamma} f(\tau) d\tau = \int_0^t dt_{\gamma-1} \int_0^{t_{\gamma-1}} \dots \int_0^{t_1} f(\tau) d\tau = \int_0^t \frac{t^{\gamma-1}}{(\gamma-1)!} f(\tau) d\tau$$

Comme  $\dot{x}_I(\tau)$  n'est pas connu et l'opération de dérivation n'est pas numériquement ro-

buste, nous allons intégrer par partie le membre gauche de cette équation, ce qui nous donne:

$$\int_{\gamma-1}^{\lambda} \tau x_I(\tau) d\tau - \int_{\gamma}^{\lambda} x_I(\tau) d\tau = \pi \varrho \nu_n \int_{\gamma}^{\lambda} \tau (1 - \cos(2\pi\tau)) x_Q(\tau) d\tau \quad (5.55)$$

En utilisant (3.43), (5.55) peut être réécrite comme:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(\gamma-2)!} \int_0^{\lambda} (\lambda-\tau)^{\gamma-2} \tau x_I(\tau) d\tau + \frac{-1}{(\gamma-1)!} \int_0^{\lambda} (\lambda-\tau)^{\gamma-1} x_I(\tau) d\tau \\ & = \pi \varrho \nu_n \frac{1}{(\gamma-1)!} \int_0^{\lambda} (\lambda-\tau)^{\gamma-1} \tau (1 - \cos(2\pi\tau)) x_Q(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (5.56)$$

où  $0 < \lambda \leq 1$ .

Ainsi, les symboles peuvent être facilement récupérés avec la résolution de l'équation ci-dessus. De façon plus directe, les symboles seront donnés par:

$$\nu_n = \frac{\frac{1}{(\gamma-2)!} \int_0^{\lambda} (\lambda-\tau)^{\gamma-2} \tau x_I(\tau) d\tau + \frac{-1}{(\gamma-1)!} \int_0^{\lambda} (\lambda-\tau)^{\gamma-1} x_I(\tau) d\tau}{\pi \varrho \frac{1}{(\gamma-1)!} \int_0^{\lambda} (\lambda-\tau)^{\gamma-1} \tau (1 - \cos(2\pi\tau)) x_Q(\tau) d\tau} \quad (5.57)$$

Nous voyons donc que même si l'équation différentielle (5.53) est plus compliquée que celle correspondant pour la modulation CPFSK (5.45), le paramètre  $\nu_n$  est encore linéairement identifiable et son estimation est donnée par une formule explicite.

L'extension de la méthode pour le cas à réponse partielle n'est pas directe pour cette modulation. Pour un  $L$  quelconque, le signal d'entrée est toujours donné par (5.6). Ainsi, le signal reçu, en bande de base, d'après (5.52), sera:

$$\begin{aligned} x_I(t) &= \frac{\mathcal{E}}{2} \cos \left( \frac{-\pi \varrho}{L} \sum_{i=n-L+1}^n \nu_i \frac{t-iT}{T} + \frac{\varrho}{2} \sum_{i=n-L+1}^n \nu_i \sin \frac{2\pi(t-iT)}{LT} - \pi \varrho \sum_{k=0}^{n-L} \nu_k \right) \\ x_Q(t) &= \frac{\mathcal{E}}{2} \sin \left( \frac{-\pi \varrho}{L} \sum_{i=n-L+1}^n \nu_i \frac{t-iT}{T} + \frac{\varrho}{2} \sum_{i=n-L+1}^n \nu_i \sin \frac{2\pi(t-iT)}{LT} - \pi \varrho \sum_{k=0}^{n-L} \nu_k \right) \end{aligned} \quad (5.58)$$

La dérivée de  $x_I(t)$  par rapport à  $t$ , avec le changement de variable  $t = (n + \tau)T$ , donne:

$$\begin{aligned} \dot{x}_I(\tau) &= \left( \frac{\pi \varrho}{L} \sum_{i=n-L+1}^n \nu_i - \frac{\pi \varrho}{L} \sum_{i=n-L+1}^n \nu_i \cos \left( \frac{2\pi}{L}(n-i+\tau) \right) \right) \\ &\quad \frac{\mathcal{E}}{2} \sin \left( \frac{-\pi \varrho}{L} \sum_{i=n-L+1}^n \nu_i (n-i+\tau) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\varrho}{2} \sum_{i=n-L+1}^n \nu_i \sin \left( \frac{2\pi(n-i+\tau)}{L} \right) - \pi \varrho \sum_{k=0}^{n-L} \nu_k \right) \\ &= \left( \frac{\pi \varrho}{L} \sum_{i=n-L+1}^n \nu_i - \frac{\pi \varrho}{L} \sum_{i=n-L+1}^n \nu_i \cos \left( \frac{2\pi}{L}(n-i+\tau) \right) \right) x_Q(\tau) \end{aligned} \quad (5.59)$$

On peut réécrire cette équation différentielle sous une forme plus simple:

$$\dot{x}_I(\tau) = \left( \theta_1 - \theta_2 \cos \left( \frac{2\pi\tau}{L} \right) + \theta_3 \sin \left( \frac{2\pi\tau}{L} \right) \right) x_Q(\tau) \quad (5.60)$$

$$= \theta_1 x_Q(\tau) - \theta_2 x_Q^c(\tau) + \theta_3 x_Q^s(\tau) \quad (5.61)$$

où

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \frac{\pi \varrho}{L} \sum_{i=n-L+1}^n \nu_i, \\ \theta_2 &= \frac{\pi \varrho}{L} \sum_{i=n-L+1}^n \nu_i \cos \left( \frac{2\pi}{L}(n-i) \right), \\ \theta_3 &= \frac{\pi \varrho}{L} \sum_{i=n-L+1}^n \nu_i \sin \left( \frac{2\pi}{L}(n-i) \right). \end{aligned}$$

sont des constantes inconnues et

$$\begin{aligned} x_Q^c(\tau) &= \cos \left( \frac{2\pi\tau}{L} \right) x_Q(\tau), \\ x_Q^s(\tau) &= \sin \left( \frac{2\pi\tau}{L} \right) x_Q(\tau). \end{aligned}$$

De cette façon, il nous suffit d'identifier  $\theta_1$  pour pouvoir récupérer le symbole qui nous intéresse. Comme aucune des 3 variables n'est connue, nous allons appliquer la même procédure vue au chapitre 3 pour l'estimation des paramètres d'une fonction de transfert rationnelle. Nous allons utiliser (5.61) pour générer un système, dans le domaine opérationnel, avec 3 équations puisque nous avons 3 paramètres inconnus. Cela sera fait, en dérivant (5.61)

successivement par rapport à la variable  $s$ . Comme toujours, la première équation ne fera pas partie du système à cause de la présence des conditions initiales inconnues. On peut aussi, comme précédemment, traiter le problème directement dans le domaine temporel. On obtient alors:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{(\gamma-2)!} \int_0^\lambda (\lambda-\tau)^{\gamma-2} \tau^i x_I(\tau) d\tau + \frac{-1}{(\gamma-1)!} \int_0^\lambda (\lambda-\tau)^{\gamma-1} i \tau^{i-1} x_I(\tau) d\tau = \\
& = \theta_1 \frac{1}{(\gamma-1)!} \int_0^\lambda (\lambda-\tau)^{\gamma-1} \tau^i x_Q(\tau) d\tau \\
& \quad + \theta_2 \frac{1}{(\gamma-1)!} \int_0^\lambda (\lambda-\tau)^{\gamma-1} \tau^i \cos\left(\frac{2\pi}{L}\tau\right) x_Q(\tau) d\tau \\
& \quad + \theta_3 \frac{1}{(\gamma-1)!} \int_0^\lambda (\lambda-\tau)^{\gamma-1} \tau^i \sin\left(\frac{2\pi}{L}\tau\right) x_Q(\tau) d\tau \tag{5.62}
\end{aligned}$$

pour  $i = 1, 2, 3$ . L'exposant  $i$  est l'équivalent, dans le domaine temporel, de l'ordre de la dérivée par rapport à  $s$  dans le domaine opérationnel.

Ainsi, avec  $\theta_1$  et les symboles décidés précédemment, nous pouvons récupérer le symbole actuel,  $\nu_n$ . Nous revenons, donc, à un cas où l'identification est faite indirectement, puisqu'elle dépend de  $\theta_1$ .

## 5.7.2 Résultats des Simulations

La figure 5.7 montre le résultat obtenu pour le cas d'un canal AWGN, modulation à réponse complète, avec les mêmes paramètres de la simulation réalisée dans la section 5.6.3. Même le taux d'échantillonnage utilisé à été maintenu.

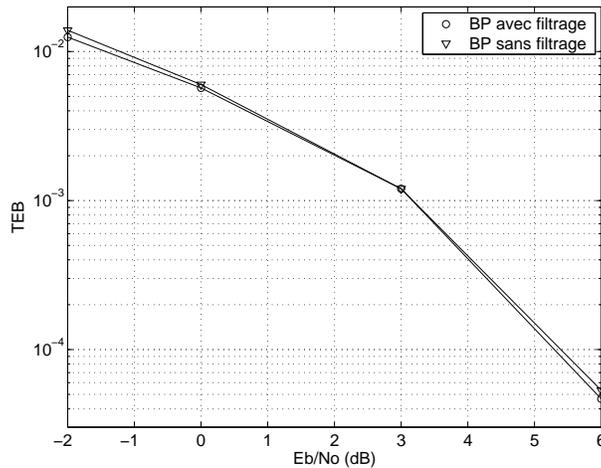


Figure 5.7: TEB pour la méthode DDS, canal AWGN, modulation RC

Une fois de plus, nous pouvons voir que le filtre passe-bas n'est pas nécessaire, vu que

les intégrales itérées de la méthode de démodulation remplissent aussi ce rôle sans perte de performance.

En comparaison avec la modulation CPFSK (figure 5.4), nous pouvons voir que les performances des méthodes pour les deux modulations sont presque pareilles. Cela était déjà attendu puisque nous pouvons aussi voir la méthode comme étant  $\dot{x}_I(\tau) = \pi \varrho \nu_n \tilde{x}_Q(\tau)$ , où  $\tilde{x}_Q(\tau) = (1 - \cos(2\pi\tau))x_Q(\tau)$  et nous retrouvons la même équation obtenue pour la modulation CPFSK. Par contre, la performance est un peu pire pour les valeurs de  $E_b/N_0$  les plus faibles. Cela est probablement dû au terme en cosinus qui intervient dans ce cas, et qui rend le calcul un peu plus coûteux et imprécis que dans le cas précédent.

Cependant, nous ne pouvons pas dire la même chose du cas à réponse partielle. Les résultats pour  $\mathcal{A} = 4$  et  $\mathcal{A} = 8$  sont montrés dans les figures 5.8 pour  $L = 2$  et 5.9 pour  $L = 3$ . Ces résultats ont été obtenus avec les mêmes paramètres de simulation que pour la modulation CPFSK sauf pour  $\gamma$  qui, ici, a été pris égal à 5 et pour le taux d'échantillonnage qui était égal à 5000 échantillons par période symbole.

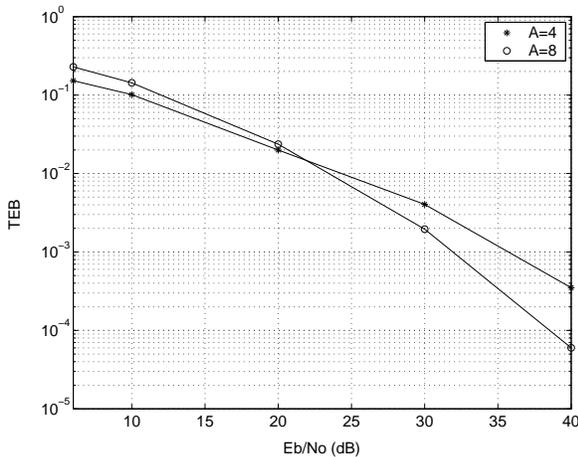


Figure 5.8: TEB pour la méthode DDS,  $L = 2$ ,  $\mathcal{A} = 4$  et  $\mathcal{A} = 8$ , canal AWGN, modulation RC

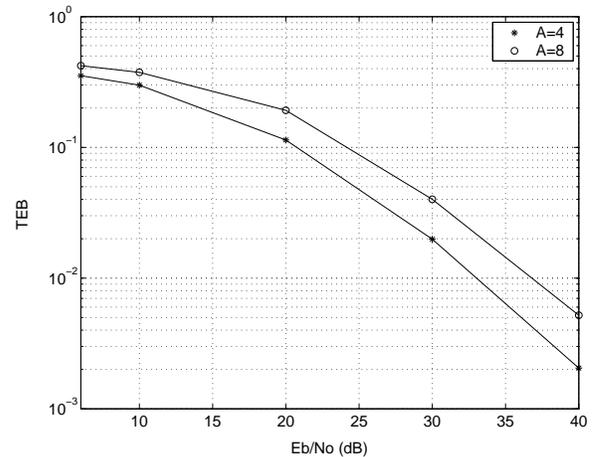


Figure 5.9: TEB pour la méthode DDS,  $L = 3$ ,  $\mathcal{A} = 4$  et  $\mathcal{A} = 8$ , canal AWGN, modulation RC

Il est clair que les TEBs résultants dans le deux cas ( $L = 2$  et  $L = 3$ ) sont beaucoup plus élevés que ceux obtenus pour la modulation CPFSK. La performance obtenue est aussi loin des performances obtenues par des récepteurs ML. Par exemple, pour un rapport signal à bruit par bit de 6 dB, ceux-ci présentent déjà un TEB inférieur à  $10^{-4}$ , avec les mêmes paramètres de simulation utilisés ci-dessus [LA03].

Ce résultat était déjà attendu puisque maintenant la relation entre  $\dot{x}_I(t)$  et  $x_Q(t)$  n'est pas directe. Dans le cas de la modulation CPFSK, on avait un système de dimension un à résoudre, ce qui nous permettait d'identifier directement les symboles. Maintenant, nous

avons un système de dimension trois. Cela implique en plus de dérivations et d'intégrales à calculer. De plus, maintenant nous avons l'intervention des termes en cosinus ( $x_Q^c(t)$ ) et en sinus ( $x_Q^s(t)$ ). Tous ces facteurs aident à augmenter la possibilité d'avoir des imprécisions numériques de calcul. Cela, sommé aux possibles propagations d'erreurs dues à la méthode en rebouclage, résulte dans la perte de performance observée.

## 5.8 Conclusion

La modulation CPM est une modulation non-linéaire, avec mémoire, et pour ces raisons elle est difficile à traiter par les méthodes existantes dans la littérature. Le récepteur optimal est un récepteur de maximum vraisemblance, qui a l'inconvénient déjà connu d'avoir une haute complexité.

Dans ce chapitre nous avons proposé deux nouvelles méthodes pour la démodulation d'un signal CPM, en appliquant la nouvelle technique développée dans le chapitre 3. Nous avons, donc, traité le signal directement en temps continu, et, de cette façon, nous avons trouvé des méthodes simples et robustes.

Pendant le développement de la première méthode, nous avons aussi discuté des facteurs qui sont importants dans le choix d'un estimateur pour les symboles. Nous avons donc vu qu'il faut trouver un compromis entre le rapport signal à bruit de l'estimateur, le conditionnement de la matrice  $\mathcal{P}$  et l'identifiabilité des symboles. Les résultats des simulations nous ont montré que la méthode DIS n'a pas eu une bonne performance, principalement dû à la faible identifiabilité des symboles. L'estimation correcte de ceux-ci dépend de l'estimation de  $\omega_n^2$ , ce qui augmente la probabilité des décisions erronées.

Cependant, la deuxième méthode proposée, la méthode DDS, n'a pas ces inconvénients. Elle repose sur une relation directe entre les composants en phase et en quadrature du signal reçu, ayant, ainsi, plusieurs avantages:

- La méthode est très simple et très facile à calculer, puisqu'elle dépend seulement des intégrales des signaux  $x_I(t)$  et  $x_Q(t)$ .
- La méthode est très robuste aussi dans les cas de bruit fort ( $E_b/N_0$  faible).
- La complexité de la méthode ne dépend pas de l'alphabet,  $\mathcal{A}$ , et augmente très peu avec la mémoire du signal (une opération de soustraction pour chaque symbole de plus en mémoire), contrairement au récepteur ML. Même si la structure en rebouclage permet la propagation d'erreurs, les résultats des simulations confirment la bonne performance de la méthode.

- La méthode est aveugle, même si l'indice de la modulation doit être connu au récepteur.
- L'indice de la modulation,  $\rho$ , peut être quelconque, tandis que, pour le récepteur ML, il doit être rationnel.
- La méthode peut être utilisée également pour une réception cohérente comme pour une non-cohérente, sans perte de performance.

Les bons résultats des simulations obtenus, principalement pour la modulation CPFSK, confirment la puissance de cette nouvelle méthode, principalement pour les cas de faible rapport signal à bruit.

Par ailleurs, il faut faire attention au fait que la méthode dépend de la famille de la modulation à être considérée. Nous avons vu que, pour le cas des modulations RC, la méthode n'est déjà pas tellement simple et, principalement pour le cas à réponse partielle, une importante perte de performance a été repérée. Ainsi, son application à d'autres familles, comme les modulations TFM, GMSK et LSRC, où la fonction  $g(t)$  devient plus complexe, n'est pas immédiate.

De plus, son extension pour le cas d'un canal sélectif en fréquence n'est pas facile, dû au passé de  $u(t)$  qui intervient dans l'obtention de  $x(t)$ .



# Chapitre 6

## Conclusion

Dans ce mémoire nous avons étudié le problème de l'identification de signaux et systèmes, appliqué à l'égalisation, dans un nouveau cadre algébrique et déterministe. De plus, nous avons utilisé un point de vue peu usuel dans la littérature, en gardant les signaux et les systèmes dans le temps continu. Notre objectif est de corriger les distorsions introduites par un canal de communication.

Le premier problème abordé est la correction des distorsions dans un système de communication par courant porteur, où le canal est modélisé par une ligne électrique. Nous nous sommes inspirés du système soliton en optique pour pré-compenser les distorsions, ce qui signifie l'utilisation d'un filtre à l'émetteur. Ce filtre a été obtenu en exploitant la propriété de platitude du système donné par la ligne électrique. Cette propriété, développée en automatique, caractérise des systèmes dont toutes les variables, le signal d'entrée inclus, peuvent être écrites uniquement en fonction de la sortie du système et de ses dérivées. Les résultats de simulation montrent que cette précompensation est robuste à des erreurs d'estimation dans les paramètres de la ligne. La solution obtenue a aussi donné des bons résultats quand appliquée à la restauration du timbre de la voix dans un réseau téléphonique, modélisé comme une ligne électrique.

Dans un deuxième temps, nous avons traité le problème de l'identification d'un système rationnel, dans le cadre d'une nouvelle théorie déterministe de l'estimation, reposant sur l'algèbre différentielle et le calcul opérationnel. Cette théorie est à la base d'une nouvelle méthode que nous avons proposée et qui consiste à estimer des paramètres par la simple résolution d'un système linéaire. Ce cadre nous permet d'éviter les problèmes de convergence trouvés dans les méthodes d'optimisation stochastiques classiques comme le retard de traitement, inhérent à de telles méthodes et la possibilité de convergence vers de minima locaux. De plus, la méthode proposée ne nécessite pas la connaissance des caractéristiques statistiques des signaux et peut être utilisée également avec des signaux stationnaires et non-

stationnaires. Même si la méthode n'est pas autodidacte, nous avons vu qu'il suffit d'avoir une séquence d'apprentissage très courte. En dernier, nous pouvons dire que la méthode est très rapide, pouvant ainsi être implémentée en temps réel.

Dans le cas où l'ordre du système à identifier est connu, la méthode montre une bonne robustesse au bruit. Par contre, quand l'ordre du modèle utilisé est inférieur à celui du système, une identification sous un angle global de la fonction de transfert n'est plus possible. Toutefois, cette situation est facilement repérable puisque, dans ce cas, les coefficients du modèle d'ordre réduit seront variables dans le temps. Ce comportement et le fait que la méthode soit très rapide, nous a inspiré une autre technique d'identification: la modélisation locale. Dans ce cas, il est possible d'estimer le comportement local entrée-sortie d'un système de grande dimension par un modèle de dimension très réduite. Le principal avantage est que la connaissance de l'ordre du système original n'est plus nécessaire.

Appliquées au problème d'égalisation, ces méthodes nous permettent de développer des techniques simples et rapides de démodulation des symboles. En effet, quand l'ordre est connu, nous arrivons à des formules explicites pour la récupération des symboles ce qui facilite le calcul. Lorsque l'ordre n'est pas connu, nous pouvons utiliser le principe de la modélisation locale. La méthode proposée dans ce cas permet la démodulation directe, sans la nécessité d'une identification/égalisation explicite du canal. Dû au problème de mauvais conditionnement du système linéaire qui estime les paramètres, cette méthode a une performance moins bonne que celle développée lorsque l'ordre est connu.

Finalement, la nouvelle technique a été appliquée à la démodulation des signaux modulés en fréquence à phase continue. La méthode proposée est basée sur une équation différentielle simple satisfaite par les composantes en phase et en quadrature du signal reçu. Ainsi, elle est très simple et très robuste à l'addition de bruit.

Il reste donc à faire une analyse rigoureuse de la méthode algébrique et déterministe d'identification de systèmes proposée, basée sur l'algèbre différentielle et le calcul opérationnel. Il serait intéressant d'inclure dans cette analyse une comparaison avec les critères classiques existants dans la littérature comme celui de l'erreur quadratique moyenne.

Nous envisageons aussi l'application de la méthode à d'autres problèmes en traitement du signal. Premièrement il serait intéressant d'étendre le résultat pour le cas des systèmes multi-utilisateurs par exemple et, ensuite, l'appliquer à des problèmes comme la séparation de sources.

# Annexe A

## Polynômes de Jacobi

Les polynômes de Jacobi  $P_{\kappa}^{(p,q)}(t)$  sont les solutions de l'équation différentielle de Jacobi, donnée par :

$$\frac{d}{dt} \left[ (1-t)^{p+1}(1+t)^{q+1}y' \right] + \kappa(\kappa+p+q+1)(1-t)^p(1+t)^q y = 0$$

Ces polynômes ont d'autres polynômes comme cas spéciaux. Par exemple, en faisant  $p = q = 0$  nous avons les polynômes de Legendre. Les polynômes de Gegenbauer et ceux de Chebyshev du premier type sont aussi des cas particuliers des polynômes de Jacobi.

Les polynômes sont donnés par [Chi78, Riv74]:

$$P_{\kappa}^{(p,q)}(t) = \frac{(-1)^{\kappa}}{2^{\kappa} \kappa!} (1-t)^{-p}(1+t)^{-q} \frac{d^{\kappa}}{dt^{\kappa}} \left[ (1-t)^{p+\kappa}(1+t)^{q+\kappa} \right]$$

pour  $p, q > -1$ . Il forment un système orthogonal dans l'intervalle  $[-1, 1]$ , avec, comme fonction de poids,

$$w_{\kappa}(t) = (1-t)^p(1+t)^q$$

Ces polynômes satisfont la relation de récurrence :

$$\begin{aligned} 2(\kappa+1)(\kappa+p+q+1)(2\kappa+p+q)P_{\kappa+1}^{(p,q)}(t) = \\ [(2\kappa+p+q+1)(p^2-q^2) + (2\kappa+p+q)_{(3)}t] P_{\kappa}^{(p,q)}(t) \\ - 2(\kappa+p)(\kappa+q)(2\kappa+p+q+2)P_{\kappa-1}^{(p,q)}(t) \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

où  $(x)_{(m)}$  est le symbole de Pochhammer:

$$(z)_{(m)} = z(z+1)\dots(z+m-1) = \frac{(z+m-1)!}{(z-1)!}$$

Toutefois, il faut noter que l'intervalle qui nous intéresse est  $[0, 1]$ , qui est l'intervalle dans lequel les intégrales des signaux (3.43) sont calculées. Or, pour décaler les polynômes de  $[-1, 1]$  à  $[0, 1]$ , il suffit de faire un changement de variable en substituant  $t$  par  $2t - 1$ . Il faut noter que, dans ce cas, les fonctions poids  $w_\kappa(t)$  changent aussi. Pour un intervalle quelconque  $[a, b]$ , ces fonctions sont données par  $w_\kappa(x) = (b - x)^p(x - a)^q$ .

Nous avons, ci-dessous, les premiers polynômes  $P_\kappa^{(p,q)}$  pour  $\kappa = 0, 1, 2$ , orthogonaux dans l'intervalle  $[-1, 1]$  et qui satisfont la relation de récursivité donnée par (A.1) :

$$\begin{aligned}\check{P}_0^{(p,q)} &= 1 \\ \check{P}_1^{(p,q)} &= \frac{1}{2} [2(p+1) + (p+q+2)(t-1)] \\ \check{P}_2^{(p,q)} &= \frac{1}{8} [4(p+1)_{(2)} + 4(p+q+3)(p+2)(t-1) + (p+q+3)_{(2)}(t-1)^2]\end{aligned}$$

Leur déplacement vers l'intervalle  $[0, 1]$  nous donne:

$$\begin{aligned}P_0^{(p,q)} &= 1 \\ P_1^{(p,q)} &= \frac{1}{2} [2(p+q+2)t - 2(q+1)] \\ P_2^{(p,q)} &= \frac{1}{2} [(p+q+3)_{(2)}t^2 - 2(p+q+3)(q+2)t + 4(q+1)_{(2)}]\end{aligned}$$

Finalement, les opérateurs dérivation correspondants, utilisés dans la génération du système d'équations pour l'estimation des coefficients du canal, seront:

$$\begin{aligned}\hat{P}_0^{(p,q)} &= 1 \\ \hat{P}_1^{(p,q)} &= \frac{-1}{2} [2(p+q+2)\frac{d}{ds} + 2(q+1)] \\ \hat{P}_2^{(p,q)} &= \frac{1}{2} \left[ (p+q+3)_{(2)}\frac{d^2}{ds^2} + 2(p+q+3)(q+2)\frac{d}{ds} + 4(q+1)_{(2)} \right]\end{aligned}\tag{A.2}$$

où il faut faire attention vu que  $d/ds$  correspond, dans le domaine temporel, à la multiplication par  $-t$ .

# Bibliographie

- [AD86] D. Alpay et H. Dym. On application of reproducing kernel spaces to the schur algorithm and rational J unitary factorization. *Operator Theory: Advances and Applications*, 18:89–159, 1986.
- [AM69] M. F. Atiyah et I.G. MacDonald. *Introduction to Commutative Algebra*. Perseus Books, Addison-Wesley Series in Mathematics, 1969.
- [AS81] T. Aulin et C. E. Sundberg. Continuous Phase Modulation Part I: Full response signaling and Part II: Partial response signaling. *IEEE Trans. on Communications*, COM-29(3):196–209, March 1981.
- [BF99] E. Bai et M. Fu. Blind system identification and channel equalization of IIR systems without statistical information. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 47(7):1910–1921, July 1999.
- [BLS03a] P. Bianchi, Ph. Loubaton, et F. Sirven. Blind joint estimation of the technical parameters of continuous phase modulated signals. In *Proc. Globecom*, Dec 2003.
- [BLS03b] P. Bianchi, Ph. Loubaton, et F. Sirven. On the blind equalization of continuous phase modulated signals using a constant modulus criterion. In *Proc. SPAWC - Rome*, Juin 2003.
- [Chi78] T.S. Chihara. *An Introduction to Orthogonal Polynomials*, volume 13. Mathematics and its applications, Gordon and Breach, Science Publishers, 1978.
- [Del89] J. Deller. Set-membership identification in digital signal processing. *IEEE ASSP Magazine*, 6:4–22, Oct. 1989.
- [DF91a] S. Diop et M. Fliess. Nonlinear observability, identifiability and persistent trajectories. In *Proc. 36<sup>th</sup> IEEE Conf. Decision Control, Brighton*, pages 714–719, 1991.

- [DF91b] S. Diop et M. Fliess. On nonlinear observability. In *Proc. 1<sup>st</sup> Europ. Control Conf., Paris*, pages 152–157, 1991.
- [DP01] O. Dural et J. Proakis. Signal space representation of binary continuous phase modulated signals. In *Proc. Vehicular Technology Conference Fall*, volume 3, pages 1663 – 1667, Oct 2001.
- [eRR99] G. Colavolpe et R. Raheli. Noncoherent sequence detection of continuous phase modulations. *IEEE Trans. on Communications*, 47(9):1303–1307, Sept 1999.
- [FK02] M. Figuera et J. Krogmeier. Optimum and suboptimum receivers for M-ary CPM signals based upon the Laurent representation. In *Proc. VTC-Fall*, volume 4, pages 2268–2272, Sept 2002.
- [FMMSR03] M. Fliess, M. Mboup, H. Mounier, et H. Sira-Ramírez. Questioning some paradigms of signal processing via concrete examples. In *Proc 1st Workshop Flatness, Signal Processing and State Estimate, CINVESTAV-IPN, Mexico, D.F.*, 2003.
- [FMNSR04] M. Fliess, M. Mboup, A. Neves, et H. Sira-Ramírez. Une autre vision de l'identification de signaux et systèmes. In *Conférence Internationale Francophone d'Automatique - CIFA04, Tunisie*, nov 2004.
- [FMPR98] M. Fliess, P. Martin, N. Petit, et P. Rouchon. Commande de l'équation des télégraphistes et restauration active d'un signal. *Traitement du Signal*, 15(6):619–625, 1998.
- [FN01] G. Ford et S. Neugbauer. Blind adaptive equalization in noncoherent receivers for continuous-phase modulated signals. *Project Report on MICRO Project 00-031*, 2000-2001.
- [FSR03] M. Fliess et H. Sira-Ramírez. An algebraic framework for linear identification. *ESAIM Control Optim. Calculus Variations*, (9):151–168, 2003.
- [Gar94] W. Gardner. *Cyclostationarity in Communications and Signal Processing*. IEEE Press, 1 edition, 1994.
- [Gas98] J. H. Gass. Performance of a suboptimal noncoherent receiver for continuous phase modulation. In *Proc. IEEE Military Communications Conference MIL-COM*, volume 2, pages 520 – 523, Oct 1998.

- [GD02] M. Götz et K. Dostert. A universal high speed powerline channel emulation system. In *Proc. International Zurich Seminar on Broadband Communications. Access, Transmission, Networking*, pages 24–1–24–6, 2002.
- [GKNH98] S. Gollamudi, S. Kapoor, S. Nagaraj, et Y. Huang. Set-membership adaptive equalization and an updatator-shared implementation for multiple channel communications systems. *IEEE Trans. Signal Processing*, 46(9):2372–2385, 1998.
- [GT99] G. Giannakis et C. Tepedelenlioglu. Direct blind equalizers of multiple FIR channels: A deterministic approach. *IEEE Trans. on signal Processing*, 47(1):62–74, Jan 1999.
- [Hay89] S. Haykin. *An Introduction to Analog and Digital Communications*. John Wiley and Sons, 1989.
- [Hay96] S. Haykin. *Adaptive Filter Theory*. Prentice Hall, 3 edition, 1996.
- [Hay00] S. Haykin. *Unsupervised Adaptive Filtering Volume 2 : Blind Deconvolution*. Wiley-Interscience, 2000.
- [Kal89] G.K. Kaleh. Simple coherent receivers for partial response continuous phase modulation. *IEEE Journal Sel. Areas in Communications*, 7(12):1427–1436, Dec. 1989.
- [LA03] Z. Lin et T. Aulin. New lower bounds on symbol error probability for MLSD of CPM signals on AWGN channels. *IEE Proc. Communications*, 150(5):312–316, Oct. 2003.
- [Lau86] P. Laurent. Exact and approximate construction of digital phase modulations by superposition of amplitude modulated pulses (AMP). *IEEE Trans. on Communications*, COM-34(2):150–160, Feb 1986.
- [LC03] J. Lebrun et P. Comon. Une approche algébrique de l’identification aveugle de canaux de communications. In *Proc. GRETSI*, 2003.
- [Lju87] L. Ljung. *System Identification*. Prentice Hall, 1987.
- [LM91] M. Luise et U. Mengali. A new interpretation of the average matched filter for MSK-type receivers. *IEEE Trans. on Communications*, 39(1):14–16, Jan 1991.
- [LX95] H. Liu et G. Xu. A deterministic approach to blind symbol estimation. In *Proc. 28th Asilomar Conf. Signals, Systems and Computers*, volume 2, pages 1164–1168, Oct 1995.

- [LXT93] H. Liu, G. Xu, et L. Tong. A deterministic approach to blind equalization. In *Proc. 27th Asilomar Conf. Signals, Systems and Computers*, volume 1, pages 751–755, Nov 1993.
- [Mah02] G. Mahé. *Correction Centralisée des Distorsions Spectrales de la Parole sur les Réseaux Téléphoniques*. Thèse de doctorat, Université de Rennes 1, Rennes, France, 2002.
- [Mal00] S. Mallat. *Une exploration des signaux en ondelettes*. Editions de l’Ecole Polytechnique, Palaiseau, 2000.
- [MB83] J. Mikusinski et T. K. Boehme. *Operational Calculus*, volume 2. PWN, Warsaw et Pergamon, Oxford, 2 edition, 1983.
- [Mbo92] M. Mboup. *Identification Adaptative par Structures Prédictive et Recursive: Application à l’Annulation d’Echo Acoustique*. Thèse de doctorat, Université Paris-Sud, Centre d’Orsay, 1992.
- [MCJ95] S. Marcos, S. Cherif, et M. Jaidane. Blind cancellation of intersymbol interference in decision feedback equalizers. In *Proc. ICASSP*, volume 2, pages 1073–1076, May 1995.
- [MG01] G. Mahé et A. Gilloire. Correction of the voice timbre distorsions on telephone network. In *Proc. Eurospeech*, pages 1867–1870, 2001.
- [Mik83] J. Mikusinski. *Operational Calculus*, volume 1. PWN, Warsaw et Pergamon, Oxford, 2 edition, 1983.
- [MRA97] M. Mboup, P. Regalia, et M. Ashari. A multivariable Steiglitz-McBride method: stationary points and *a priori* error bound. *Int. Journal of Control*, 68(1):125–153, 1997.
- [NMF04] A. Neves, M. Mboup, et M. Fliess. An algebraic identification method for the demodulation of QPSK signal through a convolutive channel. In *Proc. EUSIPCO - Viena, Austria*, pages 1919–1922, 2004.
- [NMM04] A. Neves, G. Mahé, et M. Mboup. Restoration of the voice timbre in telephone networks based on both voice and line properties. In *Proc. EUSICO - Viena, Austria*, pages 1943–1946, 2004.
- [P.593] ITU-T Recommendation P.50. *Artificial voices*. 1993.

- [P.896] ITU-T Recommendation P.830. *Subjective performance assessment of telephone-band and wideband digital codecs*. annex D, 1996.
- [PGR<sup>+</sup>94] R. Pintelon, P. Guillaume, Y. Rolain, J. Schoukens, et H. Van Hamme. Parametric identification of transfer functions in the frequency domain - A survey. *IEEE Trans. Automatic Control*, 39(11):2245–2260, 1994.
- [Pro95] J. Proakis. *Digital Communications*. Mc Graw-Hill, 3 edition, 1995.
- [Q.501] ITU-T Recommendation Q.552. *Commutation and Signaling*. 2001.
- [Reg95] P. Regalia. *Adaptive IIR Filtering in Signal Processing and Control*. Marcel Dekker, New York, 1995.
- [RFLM93] P. Rouchon, M. Fliess, J. Lévine, et P. Martin. Flatness, motion planning and trailer systems. In *IEEE Proc. 32nd Conf. on Decision and Control*, pages 2700–2705, Dec 1993.
- [Riv74] T. Rivlin. *The Chebyshev Polynomials*. Pure and Applied Mathematics, Wiley-Interscience [John Wiley and Sons], New York-London-Sydney, 1974.
- [SDW84] T. Sarkar, S. Dianat, et D. Weiner. A discussion of various approaches to the linear system identification problem. *IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing*, ASSP-32(3):654–656, June 1984.
- [Sim91] S. Simmons. Simplified coherent detection of bandwidth-efficient CPFSK/CPM modulations. In *Proc. IEEE Pacific Rim Conference on Communications, Computers and Signal Processing*, volume 1, pages 174 – 177, May 1991.
- [SM65] K. Steiglitz et L. McBride. A technique for the identification of linear systems. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 10:461–464, 1965.
- [SSA84] A. Svensson, C.E. Sundberg, et T. Aulin. A class of reduced complexity Viterbi decoders for partial response continuous phase modulation. *IEEE Trans. on Communications*, COM-32(10):1079–1087, Oct 1984.
- [Sun86] Carl-Erik Sundberg. Continuous phase modulation. *IEEE Communications Magazine*, 24(4):25–38, April 1986.
- [SW83] S. Simmons et P. Wittke. Low complexity decoders for constant envelope digital modulations. *IEEE Trans. on Communications*, COM-31(12):1273–1280, Dec 1983.

- [Tau99] P. Tauvel. *Cours d'Algèbre*. Agrégation de mathématiques, Dunod, 1999.
- [TM87] M. S. Tanany et S. A. Mahmoud. Mean-square error optimization of quadrature receivers for CPM with modulation index 1/2. *IEEE Journal Sel. Areas Communications*, SAC-5:896–905, June 1987.
- [TS95] W. Tang et Ed Shwedyk. A CPM receiver based on the Walsh signal space. In *Proc. IEEE Pacific Rim Conference on Communications, Computers and Signal Processing*, pages 203 – 206, May 1995.
- [TZ98] L. Tong et Q. Zhao. Blind channel estimation by least squares smoothing. In *Proc. ICASSP*, volume 4, pages 2121 – 2124, May 1998.
- [VD91] M. Verhaegen et E. Deprettere. *Subspace Model Identification*, volume II. Algorithms and Parallel VLSI Architectures, edited by E. Deprettere and A.V.D. Veen (Amsterdam), 1991.
- [VKT89] G. Venkatesan, M. Kaveh, A. Tewfik, et K. Buckley. Blind identification of single-input multiple-output pole-zero systems. In *Proc. ICASSP*, volume 4, pages 2117–2120, May 1989.
- [VTK<sup>+</sup>99] G. Venkatesan, L. Tong, M. Kaveh, A. Tewfik, et K. Buckley. A deterministic blind identification technique for SIMO systems of unknown model order. In *Proc. ICASSP*, volume 4, pages 1789–1792, March 1999.
- [WFJ<sup>+</sup>02] G. Wade, M. Fu, R. Jakobs, J. Ning, M. Tomlinson, et A. Ambroze. On CPM system design and simulation. In *Proc. IEEE Int. Conf. on Information Technology and Applications-Sydney*, Nov 2002.
- [WGS02] F. Wenger, T. Gustafsson, et L. Svensson. Perturbation theory for inhomogeneous transmission lines. *IEEE Trans. on Circuits and Systems I: fundamental Theory and Applications*, 49(3):289–297, mar. 2002.
- [WWC94] T. Willink, P. Wittke, et L. Campbell. Error probability calculations for decision feedback equalizers. In *Proc. IEEE Int. Symp. Information Theory*, July 1994.
- [XLTK95] G. Xu, H. Liu, L. Tong, et T. Kailath. A least-squares approach to blind channel identification. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 43(12):2982–2993, December 1995.
- [YG02] K. C. Yu et A. J. Goldsmith. Linear models and capacity bounds for continuous phase modulation. In *Proc. ICC*, volume 2, pages 722–726, May 2002.

[Yos84] K. Yosida. *Operational Calculus*. Springer, New York, 1984.